3. 代数

2022 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2022 年 9 月 7 日

1　構造

前章までで，集合論の（ほんの）基礎的なところを見た．現代数学において，集合はあらゆる理論的構造の「素材」としての役割を担っている．例えば線形代数や解析学やリー代数や確率論や・・・あらゆる数学理論は，「かくかくしかじかの性質を持った集合」と定義できるのである[*1]．つまり語弊を恐れずにいえば，数学の理論とは，何らかの構造を持った集合である．実際，この章以下で我々は，ブール代数や群，位相などを，特定の構造を持つ集合として導入する．集合が持つそうした構造は，一般に**公理** (axioms) の形で表される．まず手始めに，一番簡単な，順序構造を集合に入れるところから考えてみよう．

2　順序

同値類とは反射的，対称的かつ推移的な関係なのだった（2 章 3 節）．ここで対称性を反対称性に替えた関係を，**半順序** (partial order) という．きちんと書き下せば，集合 X 上の 2 項関係 $\preceq$ が半順序であるとは，

- 反射性：$x \preceq x$
- 推移性：$x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば $x \preceq z$
- 反対称性：$x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ ならば $x = y$

がすべての $x, y, z \in X$ について満たされることをいう．身近なところでは，$\geq, \leq$ などがこの条件を満たすことを確認しよう．

練習問題 2.1　身近な半順序の例を挙げよ．

半順序関係を持つ集合を，**半順序集合** (partially ordered set または縮めて poset) という．せっかくなので，ちゃんと定義すると以下のようになる：

*1 こうした集合論に根ざした数学の統一的理解は，20 世紀のニコラ・ブルバキ (Nicolas Bourbaki) の仕事に多くを負っている．ブルバキは集合論をいわば数学の共通言語に見立て，各数学理論を集合論の枠内で再構築した．ちなみにブルバキはペンネームで，実際は複数の数学者の集まり（集合！）である．

定義 2.1（**半順序集合**）　集合 X とその上に定義された半順序関係 $\preceq$ の組 $\langle X, \preceq \rangle$ を，半順序集合という．

この定義は，半順序集合を，集合 X とその上に定義された関係の組として定めている．この組を半順序集合たらしめているのは，この関係 $\preceq$ が半順序であるということ，つまり上に挙げた反射性・推移性・反対称性を満たすということであり，これがいわばこの関係を特徴づける公理となっている．一般に「構造を持つ集合」ということで意味されているのは，このような「集合 & 一定の条件（公理）を満たす関係や関数や元など」の組のことである．

半順序集合の例はいくらでもある．$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ はその最も身近な一例だろう．また集合の包含関係 $\subset$ は半順序関係なので，冪集合と包含関係の組 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ も半順序集合になる．

ところでなぜ「半」順序なのか？それは，一般に考える順序には少し及ばないからだ．一般的に順序というと，すべてが一列に並んでいるイメージがある．一列に並んでいるとは，任意の $x, y \in X$ について，$x \preceq y$ か $y \preceq x$ の少なくとも一方が成り立つということだ（両方成立してても良い．その場合は反対称性より $x = y$ となる）．これを**完備性** (completeness) という．半順序は完備性を要求しないので，「枝分かれした」順序を許す．完備性を満たす半順序は**全順序** (total order) という[*2]．上の例では，$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ は全順序だが，X が 2 つ以上の元を持つときの $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ はそうではない．

練習問題 2.2　全順序集合と，全順序でない半順序集合の例を挙げよ．

ここでいくつかの定義を確認しておこう．$\langle X, \preceq \rangle$ を半順序集合，$A \subset X$ としたとき：．

- $a \in A$ が A の**最大元**であるとは，$\forall x \in A(x \preceq a)$ が成り立つこと．逆に**最小元**であるとは，$\forall x \in A(a \preceq x)$ が成り立つこと．最大／最小元は存在するとは限らないが，あれば一つしかない．
- $b \in X$ が A の**上界**であるとは，$\forall x \in A(x \preceq b)$ が成り立つこと．A に上界が存在するとき，A は**上に有界**であるという．最大元との違い，A の上界は A に含まれている必要がないことに注意．同様の仕方で，A の下界が定義される．A が上に有界かつ下に有界のとき，A は有界であるという．
- A の上界は複数ありえる．例えばもし b が上界で $b \preceq c$ なら c も上界である．でもその中で一番小さい，いわば「スレスレの上界」があれば，これを**上限**ないし最小上界という．つまり A の上限とは，A の上界の集合 B の最小元（あれば）である．上界が存在しても（つまり $B \neq \emptyset$ でも）上限は存在しないこともある．同様に，A の最大下界を**下限**という．

事例 2.1　順序集合の有界性についての問題は，哲学で非常によく出くわす．例えば「不動の第一動者」（アリストテレス）や「神の存在論的証明」（デカルト）の議論を順序の概念を用いてモデル化するとどうなるだろうか．

[*2] ちなみに完全性は反射性を含意する（「任意の $x, y \in X$」の両方が x の場合）ので，全順序の定義は推移性，反対称性と完備性で事足りる．

3　束

次に紹介するのは，**束** (lattice) である．

定義 3.1（束）　束とは半順序集合 $\langle X, \preceq \rangle$ であり，どの 2 元 $x, y \in X$ に対しても，上限および下限が存在するものである．x, y の上限を**結び** (join) といい，$x \vee y$ で表す．またその下限を**交わり** (meet) といい，$x \wedge y$ で表す．

つまり束は特殊な半順序集合と定義される．束を特徴づける性質は，すべてのペアが結びと交わりを持っている，ということである．x, y の結び $x \vee y$ は x や y よりも「大き」く，なおかつそうしたものの中で最小のものとして定義される（交わりはその逆）．視覚的には，束の任意の要素のペアは結びと交わりによって上下で束ねられている，とイメージできる．

練習問題 3.1　$\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ は束である．X の 2 つの部分集合 $A, B \in \mathcal{P}(X)$ の結びと交わりはなんだろうか．

結びと交わりは，X の 2 つの元 x, y を別の元 $x \vee y, x \wedge y$ に対応させる「演算」だとみなすこともできる（ちょうど足し算が 2 つの数に別の数を対応させるように）．この演算は足し算や掛け算のように結合的かつ可換である．つまり交わりについてだけ見れば，$x, y, z \in X$ に対し

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \tag{1}$$
$$x \wedge y = y \wedge x \tag{2}$$

が成立する（気になる人は確認してみてほしい）．

束では任意の 2 点の結び・交わりがあるので，$x \vee y \vee z \vee \ldots$ というように結び（あるいは交わり）を連結していけば，任意の有限集合 $A \subset X$ が上限と下限を持つことがわかる．とくに X 自体が有限の場合，X 全体の上限と下限，つまり最大元と最小元が存在する．束の最小限を 0，最大限を 1 と書く．つまりすべての $x \in X$ について，$0 \preceq x \preceq 1$ が成り立つ．こうして，有限束は，上と下がきゅっと縛られたダイアモンド型 ($\Diamond$) をしている．

注意　ここで「有限」と釘を差していることには理由がある．というのも想像しにくいかもしれないが，無限集合の場合，その中の任意のペアが上限・下限を持ったとしても，集合全体の上限や下限は存在しないことがありうるのだ．よって無限束は必ずしも最小元と最大元を持つとは限らない．有限無限に関わらず，任意の部分集合が上限・下限を持つような束を，**完備束** (complete lattice) という（前節で見た順序の完備性とは意味が異なるので注意）．有限束は必然的に完備だが，無限だとそうでない場合がある．このように，無限は思いもよらないややこしい事態をもたらす．数学的にはそこが面白いところでもあるのだが，とりあえず本授業ではそうしたややこしさを避けるため，以下では主に有限束に話を限って進めることにする．

以上で，束を特徴付ける公理と，そのもとで定まる演算 $\vee, \wedge$ の大枠を見た．こうした公理から，演算についての様々な事実，すなわち定理が帰結する．実際そうした定理は沢山あり，す

べて公理から示すことができる（上の (1)-(2) も定理である）．ここでは更に，以下の 3 つを挙げておこう：すべての $x,y \in X$ に対し，

$$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x \tag{3}$$
$$1 \wedge x = x, \quad 0 \vee x = x \tag{4}$$
$$x \wedge (y \vee x) = x = (x \wedge y) \vee x. \tag{5}$$

練習問題 3.2　$\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ で 0,1 に対応するのはなにか．またそこで上の (3)-(5) が成立することを確かめよ．

練習問題 3.3　$\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ で 0,1 に対応するのはなにか．またそこで上の (3)-(5) が成立することを確かめよ．

事例 3.1　束は，抽象的概念の間の階層構造を表すためにしばしば用いられてきた．C を概念の集合，$a \preceq b$ を「a は b の事例（インスタンス）である」という関係だとしよう．すると例えば human $\preceq$ animal であり，human $\vee$ dog $=$ mammal だといえる．また rational $\wedge$ animal $=$ human かもしれない．つまり結びは複数の事例を抽象して共通概念を得る操作，交わりは複数の概念を兼ね備える具体例を作り出す操作だと考えることができる．このように，概念間の抽象構造（しばしば「アリストテレス的抽象主義」）は束によってモデル化できる．

練習問題 3.4　概念の束 $\langle C, \preceq \rangle$ において，0,1 に対応する概念はあるだろうか．

4　ハイティング代数

有限束にさらに公理を加えて，パワーアップさせてみよう．

定義 4.1（**ハイティング代数**）　（有限）**ハイティング代数**とは，0 と 1 を持つ束 $\langle X, \preceq \rangle$ であり，かつ結びと交わりが以下の**分配則** (distributive law) を満たすものである：すべての $x,y,z \in X$ に対し，

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{6}$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{7}$$

結びと交わりを $+$ と $\times$ に置き換えれば，これは小学校で習った分配則と全く同じ形をしている[*3]．ハイティング代数とは，この分配則が成り立つ完備束である．

ハイティングは直観論理 (intuitionistic logic) で知られるオランダの数学者．実際，ハイティング代数は直観論理（排中律が成り立たない）のモデルとして提唱された．また後の章で見るように，位相空間とも密接に対応している．

上で，束には 2 つの演算 $\vee, \wedge$ が備わっていることを見た．ハイティング代数では更に，**含**

[*3] 実際，圏論的な観点からいえば，結びと足し算は余積 (co-product)，交わりと掛け算は積 (product) という一般的な構造の例である．

意 (implication) と呼ばれる次の演算 $\Rightarrow$ が定義できる．

$$z \preceq (x \Rightarrow y) \iff z \wedge x \preceq y$$

これはどう読めばよいのだろう．まず左辺は，x, y という 2 つの元に「含意」演算を施して得られる元 $x \Rightarrow y$ が他のある元 z よりも上にある，という事態を表している．そして右辺と合わせた条件式全体は，こうした事態が成立するのは，$z \wedge x$ が y より下にあるとき，そのときのみであるということをいっている．このようにしてこの式は，「含意」演算を施して得られた元 $x \Rightarrow y$ が束上で占める位置を右辺によって定めることにより，演算を定義している．

具体的には，$x \Rightarrow y$ は $z \wedge x \preceq y$ を満たすような z たちの上限になっている．y 自身は $y \wedge x \preceq y$ を満たすので，$y \preceq (x \Rightarrow y)$，つまり $x \Rightarrow y$ は y の上にある．しかし同時に，$x \Rightarrow y$ と x の交わりは y より下，つまり $(x \Rightarrow y) \wedge x = y \wedge x$ でなければならない．$x \Rightarrow y$ はそのような条件を満たす元の中で一番上にある元である．

さて，ハイティング代数には 0 があるので，任意の $x \in X$ について $x \Rightarrow 0$ が存在する．これを**擬補元** (pseudo-complement) と呼び，$\neg x$ で表す．これは x をとって $x \Rightarrow 0$ を返す演算

$$\neg :: x \mapsto \neg x = x \Rightarrow 0$$

と考えることもできる．

ハイティング代数で新たに加わった演算についても，様々な定理が成立する．例えば $\Rightarrow$ については

$$x \Rightarrow x = 1 \tag{8}$$
$$((x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y) = 1 \tag{9}$$
$$(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z) \tag{10}$$
$$x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z) \tag{11}$$

などが任意の $x, y, z \in X$ について成立する．また $\neg$ に関しては

$$x \preceq \neg\neg x \tag{12}$$
$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \tag{13}$$

などが成立する．

事例 4.1　上述したように，ハイティング代数は直観主義論理のモデルを与える．それを見るには，$\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$ をそれぞれ論理和（または），論理積（かつ），実質含意（ならば），否定（〜でない）に読み替え，各元を命題記号と考えれば良い．この観点からは，例えば (8) と (9) はそれぞれ同一律および modus ponens が常にトートロジーであること，(10) と (11) は「ならば」の分配則に対応していることがわかる．一方 (13) はド・モルガン法則の一方を示す（もう片方はすぐ後で見るブール代数のみで成り立つ)．また (12) において，x の二重否定が x と一致しないのにも注意せよ．これは直観主義論理において二重否定が除去できないことに対応する．

事例 4.2　概念の束 $\langle C, \preceq \rangle$ はハイティング代数だろうか．そうだとしたらその含意と擬補元はどう解釈できるだろうか．

発展 4.1　ここでの取り扱いはすべて有限束を前提としている．無限束の場合は，ハイティング代数であるためには完備性と**無限分配束**を満たさなければならない．前節で触れたように，

完備性とは任意の（無限でも良い）部分集合に上限と下限が存在すること．そして無限分配束とは，任意の（無限でも良い）部分集合 $Y \subset X$ について，$x \wedge (\bigvee_{y \in Y} y) = \bigvee_{y \in Y}(x \wedge y)$ が成立する（交わりも同様）ことである．完備性のときと同様，無限束においては，分配則が満たされていても無限分配則は満たされないことがありうる．

こうした無限・有限の区別を避けるために，教科書によっては，ハイティング代数を「任意の 2 元が含意を持つ完備束」と定義することもある．その場合，（無限）分配則はそこからの定理として導かれる．いずれにせよ，両流儀の定義は一致する．

5　ブール代数