「哲学者のための数学」練習問題の解答

ver. 2025 年 11 月 28 日

1　集合

3.1　1 真. 2 偽. 3 真.

4.1　1 偽. 2 真. 3 真. 4 真.

4.2　$\Omega := \{x|x = x\}, \emptyset := \{x|x \neq x\}$. 他にも色々ありうる．$\Omega$ は条件が恒真式（トートロジー），$\emptyset$ は矛盾式になればよい．

4.3　$[a] := \{x|x = a\}$.

5.1　2 は本文同様なので省略する．3 については以下の通り（4 は 3 と同様なので略）.

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\iff \neg(x \in (A \cup B)) && \because \text{補集合の定義より} \\
&\iff \neg(x \in A \vee x \in B) && \because \cup\text{の定義より} \\
&\iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) && \because \text{ド・モルガン則より} \\
&\iff (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) && \because \text{補集合の定義より} \\
&\iff x \in (A^c \cap B^c) && \because \cap\text{の定義より}
\end{aligned}$$

5.2　結合律については本文通り．可換律については，本文同様 $A = \{1, 2\}, B = \{1\}$ とすれば，$A \setminus B = \{2\}$ であるのに対し $B \setminus A = \emptyset$ となり等しくならないことがわかる．

8.1　等しくない．例えば本文同様 $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2\}$ とすると，$A \times B$ の元はすべて (a_i, b_j) となるが，$B \times A$ の元は (b_i, a_j) となり順序が異なる．

2　関係と関数

1.1

1. $\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\exists a\in\mathbb{N}(n=a\cdot m)\}$
2. $\{(x,y,z)\in X\times X\times X|y$ and z are biological parents of $x\}$

2.1　「$=$」は反射的，対称的かつ推移的．「$<$」は推移的．「$\leq$」は反射的かつ推移的．

2.2　(1) 名前を知っている (2) 親類である (3) 母である (4) 子孫である．

3.2　5 つ（北海道，本州，四国，九州，沖縄）．

3.3　推移的でないため不可能．例：山口／岡山／福岡

事例 3.1　同値類は一つひとつの可能世界である．

事例 3.2　推移性を満たさない．

4.1

1. $I_{Np}(t)=\emptyset$ for $t<t_0, t_1<t$.
2. 時空的連続性の問題．空間的に離れた部分集合，時間的に連続していない集合が「個物」として認められてしまう．

5.1　$f\circ f(x)=f(f(x))=f(x^3-2x)=(x^3-2x)^3-2(x^3-2x)=x^9-6x^7+12x^5-8x^3$

6.1　日本：Bob ／ アメリカ：Alice, Dave ／ フランス：Chris

6.2　$[a]=f^{-1}(y)=\{x\in X|f(x)=\quad f(a)\}$．反射性・対称性・推移性は「$=$」より従う（練習問題 2.1）．つまり [反射性]：明らかに $f(a)=f(a)$．[対称性]：$f(a)=f(b)$ ならば $f(b)=f(a)$．[推移性]：$f(a)=f(b), f(b)=f(c)$ ならば $f(a)=f(c)$.

6.3　この関数に入力する部分集合 A として単元集合 $\{x'\}$ をとると，$f(\{x'\})=\{f(x)|x\in\{x'\}\}$ となるが，$\{x'\}$ に含まれる要素は x' だけなので，これは結局 $f(x')$ だけからなる単元集合 $\{f(x')\}$ になる．よって単元集合の像は単元集合となり，これは元の関数 $f:x'\mapsto f(x')$ と同一視できる．

6.4　$x'\in\{x'\}$ であり，それ以外に $\{x'\}$ の要素はないので，$x'\in f^{-1}(f(\{x'\}))=\{x|f(x)\in f(\{x'\})\}$ を示せばよい．上の問題より $f(\{x'\})=\{f(x')\}$ なので，$f(x')\in f(\{x'\})$．よって上の条件が満たされ $x'\in f^{-1}(f(\{x'\}))$ となる．

7.1　全射でない，つまりある $y\in Y$ に対し $f(x)=y$ となる x が存在しないとする．すると $f^{-1}(y)=\emptyset$ となり，f^{-1} が Y から X への関数にならない（関数は X の要素をあてがわねばならない）．

7.2　全射である．任意の $[x] \in X/R$ は，そこに含まれる元 $x \in [x]$ に対して $f(x) = [x]$．しかし単射ではない．例えば異なる $x \neq y$ に対し xRy であれば，$x, y \in [x]$ となり，よって $f(x) = f(y)$．単射であるためには，R が自分自身のみと成立するとき，つまり $\forall x, y(x \neq y \Rightarrow \neg xRy)$ でなければならない．

3　順序

2.1

1. 任意の部分集合 $A \subset X$ に対し，$A \subset A$．また A, B, C をそれぞれ X の部分集合とし，$A \subset B, B \subset C$ を仮定すると，部分集合の定義上，$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in C)$ がなりたつ．よって $A \subset C$.
2. 任意の $n \in \mathbb{B}$ について $n = n$ であり，また $m, l \in \mathbb{B}$ について $n = m$, $m = l$ ならば $n = l$ なので，前順序である．
3. 略
4. どのような人も，「自分自身の祖先である」とは言われないので，反射性が満たされず，前順序ではない．
5. 「x は y の部分である（ないし y に含まれる)」という関係は前順序である．どのようなもの x も，自分自身の部分であるといえる．また x が y の部分であり，y が z の部分であれば，x は z の部分である．

2.2

1. もし，全く同じ完全性を有する二つの異なる個体が存在するのであれば，それは半順序ではない．
2. 半順序ではない．たとえば $X = \{x_1, x_2\}, Y = \{y_1, y_2\}$ とし，二つの性質関数 $f, g : X \to Y$ を $f(x_1) = g(x_2) = y_1$ かつ $f(x_2) = g(x_1) = y_2$ となるように定める．f は単射なので，任意の $x, x' \in X$ について $f(x) = f(x')$ であれば $x = x'$ であり，よって $g(x) = g(x')$．この対偶より g は f に付随する．g も同じく単射なので，同様にして f は g に付随する．しかし f, g は X の各要素に違う Y を割り当てるので $f \neq g$ である．よって反対称性を満たさない．
3. 「x が y を割り切る」を $x|y$ と書くことにする．これは「ある自然数 a があって $y = ax$」を意味する．$a = 1$ とすれば，明らかに $x|x$ であり反射的．また $x|y$ かつ $y|z$ ならば，ある自然数 a, b があって $y = ax$ かつ $z = by$ であるから，$z = abx$ となり $x|z$ である，つまり推移的．最後に $y = ax$ かつ $x = by$ と仮定すると，$y = aby$ となり，よって $a = b = 1$．したがって $x = y$ となり反対称性も満たされる．したがってこの関係は半順序である．
4. 2.1 に前順序としてあげた「x は y の部分である（ないし y に含まれる)」という関係は半順序でもある．というのも，もし x が y の部分であり，また逆もそうならば，x と y は同じものだろうからだ．

3.1

1. A: 存在しない．$B:\{x,y\}$．C: 存在しない．
2. $A:\{x,y\},\{x,y,z\}$．$B:\{x,y\},\{x,y,z\}$．$C:\{x,y,z\}$．
3. $A:\{x,y\}$．$B:\{x,y\}$．$C:\{x,y,z\}$．

3.2

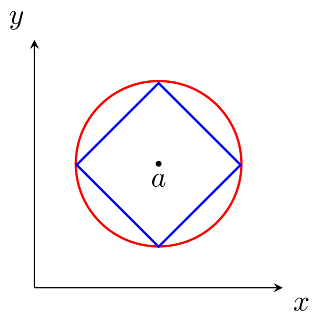
1. 最大元：存在しない．上界：a と b の公倍数．上限：a と b の最小公倍数．
2. 生命の始まりがあるなら，下に有界．いかなる生物もいずれ絶滅すると考えれば，上にも有界．上限は存在しない．下限は A の共通祖先．

4.2　$x \preceq_X x'$ とする．f 単調より，$f(x) \preceq_Y f(x')$．一方 g 単調より，任意の y, y' について $y \preceq_Y y'$ ならば $g(y) \preceq_Z g(y')$，よって特に $g \circ f(x) = g(f(x)) \preceq_Z g(f(x')) = g \circ f(x')$．以上より $g \circ f$ は単調写像．

4　束

5　位相

2.1　下図のように，一点 a から等しいユークリッド距離を持つ点は円（赤）に，等しいマンハッタン距離を持つ点は正方形（青）になる．



2.2　各世界間の距離は以下の通り．正定値性は対角がゼロであること，対称性は行列が対角を軸に対称な対称行列であることから明らか．三角不等式も，それぞれ計算すると成り立っている．

	w_1	w_2	w_3	w_4
w_1	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1
w_2	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
w_3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
w_4	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	0

2.3　解答なし．

4.1　(1) 位相になっている．(2) 位相になっている．(3) $\{a, c\}$ が必要．(4) $\{a\}$ が必要．(5) $\{a, c\}$ が必要．

4.2　$\{\emptyset, \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_4\}, \{w_1, w_2, w_3\}, \{w_1, w_2, w_4\}, \{w_1, w_2, w_3\}, \{w_1, w_3, w_4\}, \{w_1, w_2, w_3, w_4\}\}$

6　モノイド

2.1　モノイドにならない．例えば y, b, r をそれぞれ黄，青，赤をそれぞれ 5ml 取って混ぜるという作業だとしよう．すると $y \circ (b \circ r)$ は 5ml の黄を，5ml の紫（青と赤を混ぜたもの）に混ぜることになるので，出来上がりの黄：青：赤の比は 5:2.5:2.5 になる．一方 $(y \circ b) \circ r$ は，5ml の緑（黄と青を混ぜたもの）を，5ml の赤に混ぜることになるので，比は 2.5:2.5:5 になる．よって両者は同じ色にならず，結合律が満たされない．

3.1　行動の選択肢が自由モノイドであるとは，一度でも選択が違えば，人生は異なるということだ．逆にもし自由モノイドではない場合，ある選択を他の選択で代替したり，帳消しにしたりすることができる．例えば音楽をやる人の間ではしばしば「楽器練習は一日サボったら一日分下手になる」などといわれるが，これは「サボり・練習・練習」が「練習」に等しい，ということを主張している（事例 3.3 に当てはめれば，$rss = s$ に相当する）．

この場合，生成可能性は半順序にはならない．というのも，$s \preceq ss$ かつ $ss \preceq rss$ だが，$s = rss$ と仮定したので，$ss \preceq s$．しかし $s \neq ss$ なので，反対称性が満たされない．

4.1　可換ではないだろう．例えば週前半を遊び倒してから後半バイト漬けになるのと，前半でバイトして後半を遊びに充てるのでは，違う一週間の過ごし方としてカウントされそうである（もちろん，そうではない，やることやっているのだから同じだ，という議論も可能ではあろうが）．

4.2　例えば $r \circ l$（左を向いてから右を向く）と $l \circ r$（右を向いてから左を向く）は可換である．一方 $f \circ l$（左を向いてから一歩前進）と $l \circ f$（一歩前進してから左を向く）は可換ではない．

5.1　例えば任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ による a 倍 : $n \mapsto an$ は, $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $a(n+m) = an+am$ なので準同型になる．

5.2　ロボットプログラムの生成元は単位元含めて 4 つ，人生モノイドは 5 つある．同型を作るためには生成元の数が等しくなければならないので，両者は同型ではない．

一方準同型はある．いま，M, N を自由モノイド，A_M を M の生成元の集合としよう．関数 $f : A_M \to N$ を定めると，これは準同型 $f^* : M \to N$ へと拡張できる（ただし f は単位元は単位元に送る $f(i_M) = i_n$ と仮定する）．実際，任意の M の元はその生成元 A_M の列

$a_1a_2\ldots a_m$ として書けるので，$f^*(a_1a_2\ldots a_m) := f(a_1)\circ f(a_2)\circ\cdots\circ f(a_m)$ と定義してやれば，f^* は準同型になる．（まあ，すべてを単位元に送ってしまえばトリビアルに準同型になるのだが・・・）

5.3　ちょっと問題が悪かったので考え直します．

6.1　$f(d) = d, r(a) = a, r(b) = b, l(a) = a, l(b) = b,$

$$f(b) = \begin{cases} b+1 & \text{if } d = n, \\ b-1 & \text{if } d = s, \\ b & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad r(d) = \begin{cases} n & \text{if } d = w, \\ e & \text{if } d = n, \\ s & \text{if } d = e, \\ w & \text{if } d = s, \end{cases} \qquad l(d) = \begin{cases} n & \text{if } d = e, \\ e & \text{if } d = s, \\ s & \text{if } d = w, \\ w & \text{if } d = n. \end{cases}$$

6.2

1. $[f] = [frl] = [frrfrrf] = ...$
2. $[r] = [rrrrr] = [rrl] = ...$
3. $[fifrfl] = [rflffll] = ...$