4. 束とブール代数

2023 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2023 年 10 月 9 日

1　関係から代数へ

我々は前章で，一定の公理を満たす二項関係を備えた集合として，順序構造を定義した．順序は整数 $\mathbb{N}$ や実数 $\mathbb{R}$ など，様々な数学的集合が持つ基本的な構造でもある．しかし順序だけでは，数の構造は組み尽くせていない．なんとなれば，数は単に順序付けられているだけでなく，その中で足し算や掛け算などの演算が定義されているからだ．そうした演算が定義された数学的構造を，一般に**代数** (algebra) という．この章では，そうした代数のプリミティブな形として，**束** (lattice)，およびその延長線上に定義される**ブール代数** (boolean algebra) を紹介する．実は束自体，順序構造の延長線上にあるもので，この意味で本章で扱う対象はすべて半順序でもある．

ブール代数は，とりわけ論理学との関係において非常に重要である．後述するブール代数の演算子である「交わり」$\wedge$ と「結び」$\vee$ は，その見た目通り論理学における「かつ」と「または」に対応し，全体として論理計算の代数的構造を示している．またそれ以外にも，本章で見るように，束は我々の「概念」が持つ階層的構造をモデル化するのにも用いることができる．このように束は，言ってみれば「順序に毛が生えたもの」に過ぎないにもかかわらず，様々な可能性を持ち，突き詰めると奥が深い．その本章では，その一部を概観してみよう．

2　束

まず，半順序とは反射的（$x \preceq x$），反対称的（$x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ なら $x = y$），推移的（$x \preceq y, y \preceq z$ なら $x \preceq z$）な関係であったことを思い起こそう．さらに前章で，順序の部分集合 A のどれよりも大きい元たちのなかで一番小さい「スレスレの上界」として上限（およびその逆の「スレスレの下界」として下限）を定めた．**束** (lattice) とは，そうした上限・下限がどのペア A にも存在するような半順序のことである．

束

束とは半順序集合 $\langle X, \preceq \rangle$ であり，どの 2 元 $x, y \in X$ に対しても，上限および下限が存在するものである．x, y の上限を**結び** (join) といい，$x \vee y$ で表す．またその下限を**交わり** (meet) といい，$x \wedge y$ で表す．
一般に束は三つ組 $\langle X, \vee, \wedge \rangle$ で表されるが，誤解のないときは単に束 X と表す．

なんてことはない，これだけである．束の定義は，単にどの元 x, y に対してもその上限 $x \vee x$ および下限 $x \wedge y$ がある，と言っているに過ぎない．しかし見方を変えると，この条件を束上の演算の定義として捉えることができる．つまり $\vee$ を「2 つの元の束を結びをとる演算」，$x \vee y$ を，「x と y に演算 $\vee$ を施した結果」として見るのである．言い換えれば，$\vee, \wedge$ を次のような 2 項関数として見るということである．

$$\vee : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x \vee y$$
$$\wedge : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x \wedge y$$

これは，例えば足し算「+」が二つの数 (n, m) から別の数 $n + m$ への 2 項関数であるのと同様である．そして上の束の定義は，こうした演算が**閉じている** (closed)，つまりどのような二元に適用しても，これらの演算を行った結果がちゃんと同じ束の中に含まれている，ということを保証している．かくして我々は，最初の代数的演算を手に入れた．

練習問題 2.1

1. 数の順序集合，例えば $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ は束である．任意の $x, y \in \mathbb{R}$ の結び $x \vee y$ と交わり $x \wedge y$ は何だろうか．
2. 2 値順序 $\mathbb{B} = \{$`false, true`$\}$ は束である．その結びおよび交わりを $(f, f), (f, t), (t, f), (t, t)$ のそれぞれについて計算せよ．
3. べき集合の半順序 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ は束であるか．（ヒント：束であることを示すには，X の任意の 2 つの部分集合 $A, B \in \mathcal{P}(X)$ が結びと交わりを持つか，それが何であるかを示せばよい．）
4. $x, y \in \mathbb{N}^+$, $x \preceq y$ を「x は y を割り切る」という関係だとしたとき，$\langle \mathbb{N}^+, \preceq \rangle$ は束であるか．
5. 因果関係を半順序だとすると，それは束となるだろうか．

我々は上で，結びと交わりを演算として捉え直した．こうした演算子は，足し算や掛け算同様，一定のルールに従う．例えばそれは，足し算や掛け算，あるいは 1 章でみた集合演算のように，結合的かつ可換である．結びについてだけ示すと，$x, y, z \in X$ に対し

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \tag{1}$$
$$x \vee y = y \vee x \tag{2}$$

が成立するし，また上式の $\vee$ を $\wedge$ に置き換えたものも成立する．これらはともに上限 $\vee$ の性質から簡単に証明できる，すなわち大げさに言えば「定理」である．ちなみに束においては，ある式が定理として成立する場合，その中に出てくる結び・交わりをすべて入れ替えたものも同様に成立する．

(1) の結合性より，同一の束演算であれば適用順に関わらず同じ結果になるため，カッコを省いて $x \vee y \vee z \vee \ldots$ と書くことができる．さらに束では任意の 2 点が結び・交わりを持つの

で，そのように連結していけば，任意の有限集合 $A \subset X$ が上限と下限を持つことがわかる．これをそれぞれ $\bigvee A, \bigwedge A$ と書く．とくに X 自体が有限の場合，X 全体の上限と下限，つまり最大元と最小元が存在する．束の最大元を 1，最小元を 0 と書く（それぞれ $\top, \bot$ と書く流儀も存在する）．こうして有限束では，すべての $x \in X$ について，$0 \preceq x \preceq 1$ が成り立ち，図で書くと昔の納豆の藁づつみみたいに上と下がきゅっと縛られた形をしている（これだと少し「束」のイメージがわくだろうか）．

注意

ここで「有限」と釘を差していることには理由がある．というのも無限集合の場合，その中の任意のペアが上限・下限を持ったとしても，集合全体の上限や下限は存在しないことがあるからだ．簡単な例として，自然数全体の全順序集合 $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ を考えてみよ．いかなる 2 整数 $n, m \in \mathbb{N}$ について，その上限・下限は m, n のどちらか（$m = n$ の場合は両方）なので，これは束である（全順序なので「束」っぽさはあまりないが）．しかし明らかに $\mathbb{N}$ 全体ないしその無限部分集合（例えば「423 以上の数」）には上限が存在しない．このように，無限束は必ずしも最小元や最大元を持つとは限らない．有限無限に関わらず，任意の部分集合が上限・下限を持つような束を，完備束 *(complete lattice)* という*1．有限束は必然的に完備だが，無限だとそうでない場合がある．このように，無限はときにややこしい事態をもたらす．数学的にはそこが面白いところでもあるのだが，とりあえず本授業ではそうしたややこしさを避けるため，以下では主に有限束に話を限って進めることにする．

以上で，束を特徴付ける公理と，そのもとで定まる演算 $\vee, \wedge$ を見た．こうした公理から，束についての様々な事実が，定理として引き出される．その例として上で (1), (2) を見たが，最後に更に，以下の 3 つをあげておこう：すべての $x, y \in X$ に対し，

$$X \wedge x = x, \quad x \vee x = x \tag{3}$$

$$1 \wedge x = x, \quad 0 \vee x = x \tag{4}$$

$$x \wedge (y \vee x) = x = (x \wedge y) \vee x. \tag{5}$$

練習問題 2.2

1. 束 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ で *0,1* に対応するのはなにか．またそこで上の *(3)-(5)* が成立することを確かめよ．
2. 前章で見た，命題論理の論理式を同値になるもので割った $L' = L/R$ を考え，また $\vee, \wedge$ をそれぞれ命題論理の「または」「かつ」演算子とする（ただし否定は考えない）．すると $\langle L', \vee, \wedge \rangle$ は束となる．この束で *0,1* に対応するものは何か，またそこで *(3)-(5)* が成立することを確かめよ．

事例 2.1 (メレオロジー)

メレオロジー *(mereology)* とは，部分と全体の間の関係を扱う理論である．「x は y の部分である」という関係を $x \preceq y$ で表すことすると，これは半順序をなす（確認せよ）．メレオロジー的普遍主義 *(universalism)* という立場では，どのようなものでもその和をとって全体を作ることができる（例えば「忠犬ハチ公」と「エッフェル塔」を部分として持つ「ハチ公-エッフェル塔」が存在する）．これはつまり結びが存在するということであり，よって束を構成する．

事例 2.2 (概念の束)

束は，抽象的概念の間の階層構造を表すためにしばしば用いられてきた．前章事例 *2.3* でも見たように，概念の集合を C とすると，「である関係 *(is-a relationship)*」は C 上の半順序を成す．この半順序上で，$x, y \in C$ の結び $x \vee y$ は二つの概念を抽象して両者に共通する概念を得る操作だと考えることができる．例えば，$\mathit{human} \vee \mathit{dog} = \mathit{mammal}$ というように．また $\mathit{rational} \wedge \mathit{animal} = \mathit{human}$ かもしれない．このように，概念間の抽象構造（しばしば「アリストテレス的抽象主義」と呼ばれる）は束によってモデル化できる（*cf.* 五十嵐涼介 *(2023)*「情報の哲学史試論—『ポール・ロワイヤル論理学』・ライプニッツ・カント—,『哲學研究』*906*)．

練習問題 2.3

上で示唆したメレオロジー的普遍主義の束，概念の束それぞれにおいて，*(1)* 交わりはどのような操作だと考えられるだろうか，また *(2)* 最大元 *1*, 最小元 *0* は存在するだろうか，するとしたらそれはなんだろうか.

3 準同型写像

我々は前章 4 節で，二つの順序の間の「構造を保つ写像」としての単調写像を見た．同じようにここでは，二つの束 X, Y の間の準同型写像を考えたい．束は特殊な半順序なので，当然それは X から Y への単調写像である必要があるが，それに加え束の特徴である結びと交わりを保存する必要がある．具体的には次である

束準同型写像

関数 $f : X \to Y$ が次の条件を満たすとき，束 X, Y の間の**準同型写像** (homomorphism) といわれる．すべての $x, x' \in X$ に対して,

$$f(x \vee x') = f(x) \vee f(x') \quad \text{かつ} \quad f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x')$$

つまり束の構造を保存するとは，x, x' の結び（交わり）を飛ばしたものが，それぞれを別々に Y に飛ばした $f(x), f(x')$ の結び（交わり）になっている，ということである．この形はあらゆる数学的構造の準同型写像に共通する，超重要な考え方なので，しっかり頭に叩き込んでおいてほしい.

また単調写像のときと同様, 準同型写像 $f : X \to Y$ が全単射である, つまり $\forall x(g(f(x)) = x)$ となる g が存在するとき，**同型写像** (isomorphism) といい，X と Y は（束として）同型であるという．このとき両者は構造的に同じ束として同一視できる.

注意

上の定義を見て，あれ，単調写像という条件はどこに行った？と思った人は鋭い．実は，結びと交わりを保つ写像は，順序も保存することが示せる．よってわざわざ条件に入れ込む必要がないのである．ちなみに正確には，f が単調写像であることと，$f(x) \vee f(x') \preceq (x \vee x')$ あるいは $f(x \wedge x') \preceq f(x) \wedge f(x')$ が同値．準同型写像であれば後者が満たされるので，f は単調となる.

事例 3.1 (真理値関数としての束準同型)

問題 *2.2* で，同値式を同一視した論理式の集合 L' が束を構成することを確認した．L' への

真理値割当とは，L' から 2 値順序 $\mathbb{B} = \{\texttt{false, true}\}$ への準同型写像である．この準同型写像が，結び $\vee$ および交わり $\wedge$ を保存するとはどういうことか，上の束準同型写像の条件をもとに考えよ．

事例 3.2 (命題と可能世界)

否定を除く論理演算で閉じた命題の集合 P を考えよう．つまり P には $p =$ ワシントンはアメリカの初代大統領である，$q =$ 日本の首都は京都である，などの原子命題のみならず，それを「かつ」「または」で繋いだ任意の命題が入っている．つまり $\langle P, \vee, \wedge \rangle$ は束である．いま命題 $p \in P$ に対し，$f(p)$ を命題 p が成立している世界（一般に p-世界 p-*worlds* と呼ばれる）の集合とする．これら p-世界は様々な可能世界を表しており，例えば現実世界は $f(p)$ には入っているが $f(q)$ には入っていない．また例えば $f(p \wedge q)$ とは p と q が両方成立している世界であり，これは p-世界と q-世界の共通部分，つまり $f(p) \cap f(q)$ となるはずである．よって任意の $p, q \in P$ に対し

$$f(p \vee q) = f(p) \cup f(q), \quad f(p \wedge q) = f(p) \cap f(q)$$

が成り立つ．練習問題 *2.1-2* より全世界 W の部分集合系は束 $\langle \mathcal{P}(W), \cup, \cap \rangle$ であるので，命題に対応する可能世界を割り当てる写像 f は P から $\mathcal{P}(W)$ への準同型写像となる．

事例 3.3 (概念の外延)

例 *2.2* で，概念が束 $\langle C, \vee, \wedge \rangle$ を構成することを見た．いまそれぞれの概念 $c \in C$ に対し，その外延 *(extension)*，すなわちその概念を例化する事物の集合を $f(c)$ と書こう．例えば c が「人間」であれば $f(c) = \{$ ナポレオン, ワシントン, 西郷隆盛, $\ldots\}$ 等々である．事物の集合を Y としたとき，外延を与える写像 f は $\langle C, \vee, \wedge \rangle$ から $\langle \mathcal{P}(Y), \cup, \cap \rangle$ への準同型写像となることを確認せよ．

上の三つの事例は準同型写像の重要な考え方を示唆している．それはつまり，準同型は代数的体系への意味論を与える，というアイデアである．それぞれの準同型のドメインとなる束は，ある概念（論理式，命題，概念）の間の形式的関係性を示している（例えば論理式間の導出関係）．準同型写像は，それらを何か他のものにマッピングすることで，形式的概念の意味を具体的な形で与えるものだと考えられる．上の事例では，論理式にその真理値，命題に可能世界，概念に外延を与えることで，それぞれの「意味」を確定している．そして写像の準同型性は，ドメイン側の形式的操作が，コドメインの具体的対象の間の操作としてちゃんと整合的な意味を持っている，ということを保証している．もちろんこれらはすべて，前章で触れた「表現」を，哲学的な観点から言い直したものに過ぎない．一般的に表現の利点は，抽象的な代数的構造をより具体的な物（行列や集合）で表す，ということにある．このスピリットは，数学だけでなく，抽象的な構造を扱う哲学においても重要である．つまりある抽象的問題を代数的にモデリングするときは，その意味論，つまり集合系への準同型写像を同時に考えることが重要なのである．

4　フィルターとイデアル

準同型写像は複数の束の間の関係であった．今度は一つの束の中の構造に少し目を向けてみたい．特に重要となるのが，次のフィルターとイデアルという 2 つの概念である．これらはそ

れぞれ，束の中のある特殊な部分として定義される．

フィルターとイデアル

F が束 X の空でない部分集合 $F \subset X$ で，以下の条件を満たすとき，**フィルター** (filter) と呼ばれる．

F1 交わりで閉じている，つまり $a, b \in F$ ならば $a \wedge b \in F$.
F2 上側をすべて含む，つまり $a \in F, b \in X$ であり $a \preceq b$ ならば $b \in F$.

一方，以下の条件を満たす空でない $I \subset X$ を**イデアル** (ideal) と呼ぶ．

I1 結びで閉じている，つまり $a, b \in I$ ならば $a \vee b \in I$.
I2 下側をすべて含む，つまり $a \in I, b \in X$ であり $a \preceq b$ ならば $a \in I$.

定義から明らかなように，束全体 X はフィルターかつイデアルになる．X の真部分集合であるようなフィルター／イデアルは，固有ないし真 (proper) であるといわれる．

どんなものがフィルター／イデアルであるかは，実際に簡単な束で視覚的に確認したほうがわかりやすいかもしれない．例えば下図 1 の束 $X = \{a, b, c\}$ において，上線で示した $F = \{1, a \vee c, a \vee c, b \vee c, a, c, a \wedge c\}$ はフィルターである．また煩雑になるため図示してはいないが，例えば $I = \{a \vee b, a, b, a \wedge b, b \wedge c, 0\}$ はイデアルである．

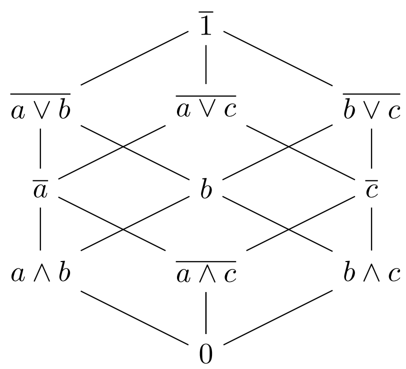

図 1　$X = \{a, b, c\}$ からなる束におけるフィルターの一例．

練習問題 4.1

上の図 *1* を参考に，上のもの以外の固有フィルターと固有イデアルをあげよ．

フィルターとイデアルの「ご利益」は一見してあまり明らかではないかもしれないが，様々なところに出てくる概念である．例えば我々は事例 3.1 で，準同型写像 $f : L' \to \mathbb{B}$ が論理式集合 L' 上の真理値関数となることを見た．この逆像 $f^{-1}(\mathtt{true})$ はフィルターであり，$f^{-1}(\mathtt{false})$ はイデアルとなる．しかも両者には明確な意味がある：前者は関数 f のもとで真となる論理式全体であり，後者は偽となる論理式全体である．

事例 4.1 (概念の内包)

再び概念の束を考えよう．個々の概念 $c \in C$ は，「人間である」「哺乳類である」といった属性であるともいえる．この見方のもとで，ある概念は，それより上位のすべての概念およびその連言概念を属性としてすべて含む，といえる．例えば人間であれば，二足歩行であり，

哺乳類であり，動物であり，かつ「哺乳類かつ二足歩行」でもあり，云々．このように，ある概念が持つ全属性を，その概念の内包 *(intent)* と呼ぶ．内包はフィルターである．

ここではフィルターに注目してみよう．図 1 でも明らかなように，同じ束の中に様々なフィルターが存在する．さらにこれらの間には大小がある．例えば $F' = \{a, a \vee b, a \vee c, 1\}$ はフィルターであるが，図中のフィルター F の中にすっぽり収まるので，$F' \subset F$ となっている．このとき，F と F' は比較可能であり，前者は後者より荒い，また後者は前者より細かいという[*2]．もちろん束全体 X はすべてのフィルターよりも細かいが，それを除外して，比較可能なすべての固有フィルターよりも細かいような固有フィルターを，**超フィルター** (ultra filter) と呼ぶ．

事例 4.2 (科学理論と予測の詳細さ)

科学理論 T は現実世界について何らかの予測を立てる．ここから理論 T を T によって予測されるすべての命題の集合と同一視しよう．この集合は当然，帰結関係と連言に関して閉じているだろう，つまりある理論 T が「来週いっぱい晴れである」と予測するなら，そこから帰結する「来週月曜は晴れである」とも予測するだろうし，またさらに「来週の最高気温は *30* 度である」と予測するなら，「来週いっぱいは晴れで最高気温は *30* 度である」も予測するはずだ．よって理論は，命題束上の固有フィルターとして考えることができる．より詳細な予測をする理論ほど，良い理論といえる．「来週月曜は晴れである」と予測する理論より，「来週いっぱい晴れである」と予測する理論のほうがより「細かく」世界のあり方を規定している．この解釈では，フィルターの細かさは，対応する科学理論の予測の詳細さに対応している．（ではこの解釈において，超フィルターは何を表すだろうか．）

5　ブール代数

束は 2 つの二項演算 $\vee$ と $\wedge$ を持ち，これは当然論理演算の「または」と「かつ」に対応していることを上の事例を通して確認してきた．しかし気がついたと思うが，そこでは周到に「否定を除く」という但し書きをつけてきた．というのも否定というのは 2 項ではなく 1 項演算 $\neg : p \mapsto \neg p$ であり，単なる束の中には対応物が無いからである．この否定演算を加え，さらに $\vee$ と $\wedge$ についての分配則を付け加えたものを，**ブール代数** (Boolean algebra) と呼ぶ．

[*2] これは束上のフィルターの集合が半順序になっていることを示唆する．それは束だろうか？どんな束だろうか？

ブール代数

最大元 1 と最小元 0 を持つ束 $\langle X, \preceq \rangle$ が以下を満たすとき，ブール代数と呼ばれる

1. **分配則** (distributive law) を満たす，つまりすべての $x, y, z \in X$ に対し，

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{6}$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{7}$$

2. 否定演算 $\neg : X \to X, x \mapsto \neg x$ があり，次の**排中律** (law of excluded middle) を満たす

$$x \vee \neg x = 1, \quad x \wedge \neg x = 0 \tag{8}$$

なお $\neg x$ を x の補元 (complement) と呼ぶ.

分配則 (6), (7) については 1 章の集合演算のところで見覚えがあるだろう．また結びと交わりを $+$ と $\times$ に置き換えれば，これは小学校で習った分配則と全く同じ形をしている[*3]．分配束とは，これら 2 つの演算がどうやって組み合わさるのか，ということを表す法則である.

一方，否定 $\neg$ はここで登場した新しい演算子である．これは束の中の一つの元 $x \in L$ をとって，これを元 $\neg x \in L$ に対応させる 1 項関数である．排中律は，このようにしてできる $x, \neg x$ の関係性を規定している．外見から明らかなように，これは明らかに論理学の否定に対応している．実際 (8) は，「p または $\neg p$」は常に真 $\top$，「p かつ $\neg p$」は常に偽 $\bot$ という論理学の排中律・矛盾律そのままである.

練習問題 5.1

1. 2 値順序 $\mathbb{B} = \{\texttt{false}, \texttt{true}\}$ は，ブール代数である．それぞれの補元は何か.
2. $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ は，ブール代数である．任意の元 $A \in \mathcal{P}(X)$ の補元は何か．また分配束・排中律が満たされることを確認せよ.
3. 命題論理の束 $\langle L', \vdash \rangle$ は，ブール代数である．図 1 のように，2 つの単純命題 p, q のみからなるブール代数 L' を図示せよ．（ヒント：実は結構難しい．まず図 1 はブール代数ではないのでこの図のままではダメ．特に $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ を入れるのを忘れないように．最終的に 16 元になるはず)

束を用いたモデリングにおいて，否定は必ずとも存在するとは限らない．例えば事例 2.1 で見たメレオロジーにおいて，一般にその束の要素は「個物」であると解釈されている（つまりメレオロジーとは個物の間の部分全体関係を扱うものである)．そう考えたとき，ある個物の「否定」が何であるかは必ずしも明らかではない．例えば「エッフェル塔の否定」とはなんだろうか．それはエッフェル塔以外のすべての「部分」と言って良いのか．そうだとして，それは「個物」なのだろうか．もしこれが否であるなら，メレオロジー束をブール代数として扱うことは適当ではない.

[*3] 実際この類似性は偶然ではなく，圏論的な観点からいえば，これらはみな余積 (co-product) および積 (product) という一般的な構造の例である.

練習問題 5.2

1. 概念の束（事例 *2.2*）はブール代数だろうか．
2. 可能世界の束（事例 *3.2*）はブール代数だろうか．

5.1 ブール代数上のフィルター

我々は前節でフィルターとイデアルの概念を見た．さらに超フィルターを，最も細かい（つまり比較可能な固有フィルターをすべて含む）フィルターとして定義した．ブール代数は束なので，当然そこにもこれらはそのままの定義で妥当する．さらにブール代数では，超フィルターは「すべての元につき，それかその否定のどちらかが含まれている」フィルターとしても定義できる．つまり次が成り立つ．

事実 5.1

F がブール代数 B 上の超フィルターである
$\Longleftrightarrow$ すべての $x \in B$ について，$x \in F$ あるいは $\neg x \in F$.

これは命題論理のブール代数 $\langle L', \vdash \rangle$ を例に取れば，超フィルターとはすべての式についてその式かその否定のどちらかが含まれている論理式の集合だといえる．我々は後に，これが命題論理の真理値割当に一致することを確認する．

事例 5.1 (完全な理論)

事例 *4.2* で，科学理論を命題論理の束上のフィルターと同一視した．この解釈では，超フィルターとは，すべての事態 p について，その肯定か否定が理論によって予測されるような，完全な理論であるといえる．

事例 5.2 (汎通的規定)

概念の束（事例 *2.2*）がブール代数をなすと仮定しよう．これはつまり，あらゆる概念につきその否定概念，例えば「赤い」という概念に対し「赤くない」も概念だと認めるということだ．この概念の束における超フィルターとは，すべての概念につき，その肯定か否定かどちらかが必ず含まれるようなものである．カントはこれを汎通的規定と呼んだ．そしてカントによれば，個体とは全ての概念について汎通的に規定されているものである：つまり我々は，すべての概念について，それが属するか属さないかを完全に（汎通的に）定めることで，個体概念にたどり着くのである．よって概念束 C がすべての概念を含むという仮定のもとで，個体とは C 上の超フィルターである．

事例 5.3 (反証可能性)

再び事例 *4.2* の科学理論フィルターを考える．このフィルターを部分として含む全命題はブール代数 X を構成するとする．ポパーによれば，理論 T はその予測に反する観測が得られたとき，反証される．T を反証する観測の集合を反証集合 $I(T)$ とすると，$I(T) = \{x \in X | \exists t \in T(x = \neg t)\}$ である．これは X 上のイデアルとなる（確認せよ）．また，$T \subset T'$ であれば，$I(T) \subset I(T')$ である（確認せよ）．よって理論が細かくより詳細な予測を行うほど，より反証集合が大きく，反証されるリスクが高いといえる．一方ポパーによ

れば，疑似科学とは決して反証できない理論，すなわち $I(T_0) = \{\emptyset\}$ であるような理論 T_0 である．この予測集合は $T_0 = \{1\}$ となる，つまり疑似科学は何の具体的予測も行わない．

5.2 ブール準同型

最後にブール代数間の準同型写像を，以下のように定義される

ブール準同型

ブール代数 X, Y 間の束準同型 $f : X \to Y$ が，さらに以下の条件を満たすとき，**ブール準同型** (Boolean homomorphism) と呼ぶ．

1. $f(0) = 0$ かつ $f(1) = 1$.
2. $\forall x \in X, f(\neg x) = \neg f(x)$.

つまりブール準同型は，束準同型として順序，結び，交わりを保存するだけでなく，さらに最大／最小元および否定を保存するような写像である．実際，これらがブール代数を構成するすべてのアイテムなので，これらを保存する写像は，確かにブール代数の構造をしっかりと写し取っているといえる．また以前と同様，f が全単射であるとき，ブール同型写像であるといわれる．

事例 5.4

命題論理ブール代数 $\langle L', \vdash \rangle$ から *2* 値順序 $\mathbb{B} = \{\texttt{true}, \texttt{false}\}$ への準同型写像は，真理値関数にほかならない．条件 $f(\neg p) = \neg f(p)$ は否定演算子の真理値表に対応していることを確認せよ．また任意の真理値関数 f について，$F = f^{-1}(\texttt{true})$ はそのもとで真になる論理式全体である．このとき，任意の $p \in L$ について，$f(p) = \texttt{true}$ ならば逆像の定義より $p \in F$ であり，$f(p) = \texttt{false}$ であれば否定の保存条件より $f(\neg p) = \neg f(p) = \neg\texttt{false} = \texttt{true}$ となるため，$\neg p \in F$ である．つまり $F = f^{-1}(\texttt{true})$ は超フィルターである．

事例 5.5

事例 *3.2* で見た命題から可能世界の集合への写像は，ブール準同型になる．また *3.3* で見た概念からその外延への写像も，概念束がブール代数になるという仮定のもとでブール準同型となる．

5.3 ブール代数の表現*

最後に発展的な話題を少し．我々はこれまで，任意のブール代数（命題，概念，等々）はべき集合のブール代数（可能世界の集合，外延の集合，等々）と密接に関連していることを見てきた．これは偶然ではない．実際のところ，あらゆるブール代数はなんらかのべき集合と同一視できる—つまり任意のブール代数について，それと同型のべき集合代数があり，またべき集合代数があれば，それとブール同型なブール代数を作ることができる．**ストーンの表現定理** (Stone's representation theorem) として知られるこの結果は，統語論的構造（ブール代数）と意味論的構造（集合族）の結びつきを示すものとして非常に重要である．任意のブール代数についてこれを示すのは大変だが，有限の場合であれば比較的簡単なので，以下に素描しよう．

まず B を有限ブール代数とする．B 元 a で, 最小元 0 スレスレのもの, すなわち $0 \preceq a, a \neq 0$ だが a 未満のものは 0 しかない，そんな元を B の**原子** (atom) と呼ぶ（視覚的には原子は最小元の「直上の層」にくる：図 2 参照）．B のすべての原子の集合を $\mathcal{A}(B)$ で表そう．すると B の任意の元 $b \in B$ は，その下にある原子の和になることが示せる，つまり

$$b = \bigvee \{x \in \mathcal{A}(B) | x \preceq b\}$$

ここまで来たら，あとは任意の $b \in B$ をその「素材」となる原子の集合に飛ばす写像 η を考えればよい

$$\eta : b \mapsto \{x \in \mathcal{A}(B) | x \preceq b\}$$

この写像は B からアトム集合のべき集合 $\mathcal{P}(\mathcal{B}(A))$ へのブール同型になっている．逆写像は，任意のアトム集合 $S \subset \mathcal{B}(A)$ に対しその和としてのブール元を返す $\eta^{-1} : S \mapsto \bigvee S$ である．このようにして，任意の有限ブール代数はべき集合として表現できることがわかった．

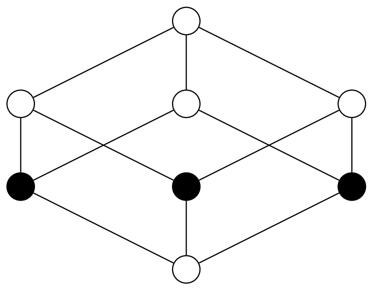

図 2　ブール代数の原子（黒丸）．すべての元が原子集合 $\mathcal{A}(B)$ の部分集合として表せることを確認しよう．

6　ハイティング代数

有限束にさらに公理を加えて，パワーアップさせてみよう．

定義 6.1 (ハイティング代数)

（有限）ハイティング代数 *(Heyting algebra)* とは，*0* と *1* を持つ束 $\langle X, \preceq \rangle$ であり，かつ結びと交わりが以下の分配則 *(distributive law)* を満たすものである：すべての $x, y, z \in X$ に対し，

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{9}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{10}$$

結びと交わりを $+$ と $\times$ に置き換えれば，これは小学校で習った分配則と全く同じ形をしている[*4]．ハイティング代数とは，この分配則が成り立つ完備束である．

ハイティングは直観論理 (intuitionistic logic) で知られるオランダの数学者．実際，ハイティング代数は直観論理（排中律が成り立たない）のモデルとして提唱された．また後の章で見るように，位相空間とも密接に対応している．

[*4] 実際，圏論的な観点からいえば，結びと足し算は余積 (co-product)，交わりと掛け算は積 (product) という一般的な構造の例である．

上で，束には 2 つの演算 $\vee, \wedge$ が備わっていることを見た．ハイティング代数では更に，**含意** (implication) と呼ばれる次の演算 $\Rightarrow$ が定義できる．

$$z \preceq (x \Rightarrow y) \iff z \wedge x \preceq y$$

これはどう読めばよいのだろう．まず左辺は，x, y という 2 つの元に「含意」演算を施して得られる元 $x \Rightarrow y$ が他のある元 z よりも上にある，という事態を表している．そして右辺と合わせた条件式全体は，こうした事態が成立するのは，$z \wedge x$ が y より下にあるとき，そのときのみであるということをいっている．このようにしてこの式は，「含意」演算を施して得られた元 $x \Rightarrow y$ が束上で占める位置を右辺によって定めることにより，演算を定義している．

具体的には，$x \Rightarrow y$ は $z \wedge x \preceq y$ を満たすような z たちの上限になっている．y 自身は $y \wedge x \preceq y$ を満たすので，$y \preceq (x \Rightarrow y)$，つまり $x \Rightarrow y$ は y の上にある．しかし同時に，$x \Rightarrow y$ と x の交わりは y より下，つまり $(x \Rightarrow y) \wedge x = y \wedge x$ でなければならない．$x \Rightarrow y$ はそのような条件を満たす元の中で一番上にある元である．

事例 6.1

含意の定義はややこしい．しかし論理学を知っていると少しそのややこしさは和らぐかもしれない．その名前から推察されるように，含意 $x \Rightarrow y$ は命題論理における実質含意を念頭においている．そしてその記号から推察されるように，結び $\vee$ と交わり $\wedge$ はそれぞれ「または」と「かつ」に対応している．では順序 $\preceq$ は何に対応しているかというと，帰結関係 $\vdash$ である．例えば $x \wedge y \preceq z$ は，$x \wedge y \vdash z$，つまり x かつ y なら x が成り立つ，という論理的真理を表している（同様のことを $\vee$ でも確かめよ）．これを念頭に上で定義した含意を論理式に翻訳すると，

$$z \vdash (x \Rightarrow y) \iff z \wedge x \vdash y$$

となる．これは，z から「x ならば y」が帰結するならば，「z かつ x」から y が帰結するし，また逆もしかり，という演繹定理 *(deduction theorem)* を表している．こう考えると，上で述べたように $x \Rightarrow y$ が y の上にあるのも納得できるし（y が成り立っていれば $x \Rightarrow y$ は必ず成り立つ），$(x \Rightarrow y) \wedge x = y \wedge x$ も真理表から確認できる．

さて，ハイティング代数には 0 があるので，任意の $x \in X$ について $x \Rightarrow 0$ が存在する．これを**擬補元** (pseudo-complement) と呼び，$\neg x$ で表す．これは x をとって $x \Rightarrow 0$ を返す演算

$$\neg :: x \mapsto \neg x = x \Rightarrow 0$$

と考えることもできる．

ハイティング代数で新たに加わった演算についても，様々な定理が成立する．例えば $\Rightarrow$ については

$$x \Rightarrow x = 1 \tag{11}$$
$$((x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y) = 1 \tag{12}$$
$$(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z) \tag{13}$$
$$x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z) \tag{14}$$

などが任意の $x, y, z \in X$ について成立する．また $\neg$ に関しては

$$x \preceq \neg\neg x \tag{15}$$
$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \tag{16}$$

などが成立する．

事例 6.2

上述したように，ハイティング代数は直観主義論理のモデルを与える．それを見るには，$\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$ をそれぞれ論理和（または），論理積（かつ），実質含意（ならば），否定（〜でない）に読み替え，各元を命題記号と考えれば良い．この観点からは，例えば *(8)* と *(9)* はそれぞれ同一律および *modus ponens* が常にトートロジーであること，*(10)* と *(11)* は「ならば」の分配則に対応していることがわかる．一方 *(13)* はド・モルガン法の一方を示す（もう片方はすぐ後で見るブール代数のみで成り立つ）．また *(12)* において，x の二重否定が x と一致しないのにも注意せよ．これは直観主義論理において二重否定が除去できないことに対応する．

練習問題 6.1

ハイティング代数を（直観主義）論理として解釈した際，0 と 1 はそれぞれ何を表すだろうか．

事例 6.3

概念の束 $\langle C, \preceq \rangle$ はハイティング代数だろうか．そうだとしたらその含意と擬補元はどう解釈できるだろうか．

発展 6.1

ここでの取り扱いはすべて有限束を前提としている．無限束の場合は，ハイティング代数であるためには完備性と無限分配束を満たさなければならない．前節で触れたように，完備性とは任意の（無限でも良い）部分集合に上限と下限が存在すること．そして無限分配則とは，任意の（無限でも良い）部分集合 $Y \subset X$ について，$x \wedge (\bigvee_{y \in Y} y) = \bigvee_{y \in Y}(x \wedge y)$ が成立する（交わりも同様）ことである．完備性のときと同様，無限束においては，分配則が満たされていても無限分配則は満たされないことがありうる．

こうした無限・有限の区別を避けるために，教科書によっては，ハイティング代数を「任意の 2 元が含意を持つ完備束」と定義することもある．その場合，（無限）分配則はそこからの定理として導かれる．いずれにせよ，両流儀の定義は一致する．