4. 束とブール代数

2023 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2023 年 10 月 7 日

1　関係から代数へ

我々は前章で，一定の公理を満たす二項関係を備えた集合として，順序構造を定義した．順序は整数 $\mathbb{N}$ や実数 $\mathbb{R}$ など，様々な数学的集合が持つ基本的な構造でもある．しかし順序だけでは，数の構造は組み尽くせていない．なんとなれば，数は単に順序付けられているだけでなく，その中で足し算や掛け算などの演算が定義されているからだ．そうした演算が定義された数学的構造を，一般に**代数** (algebra) という．この章では，そうした代数のプリミティブな形として，**束** (lattice)，およびその延長線上に定義される**ブール代数** (boolean algebra) を紹介する．実は束自体，順序構造の延長線上にあるもので，この意味で本章で扱う対象はすべて半順序でもある．

ブール代数は，とりわけ論理学との関係において非常に重要である．後述するブール代数の演算子である「交わり」$\wedge$ と「結び」$\vee$ は，その見た目通り論理学における「かつ」と「または」に対応し，全体として論理計算の代数的構造を示している．またそれ以外にも，本章で見るように，束は我々の「概念」が持つ階層的構造をモデル化するのにも用いることができる．このように束は，言ってみれば「順序に毛が生えたもの」に過ぎないにもかかわらず，様々な可能性を持ち，突き詰めると奥が深い．その本章では，その一部を概観してみよう．

2　束

まず，半順序とは反射的（$x \preceq x$），反対称的（$x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ なら $x = y$），推移的（$x \preceq y, y \preceq z$ なら $x \preceq z$）な関係であったことを思い起こそう．さらに前章で，順序の部分集合 A のどれよりも大きい元たちのなかで一番小さい「スレスレの上界」として上限（およびその逆の「スレスレの下界」として下限）を定めた．**束** (lattice) とは，そうした上限・下限がどのペア A にも存在するような半順序のことである．

束

束とは半順序集合 $\langle X, \preceq \rangle$ であり，どの 2 元 $x, y \in X$ に対しても，上限および下限が存在するものである．x, y の上限を**結び** (join) といい，$x \vee y$ で表す．またその下限を**交わり** (meet) といい，$x \wedge y$ で表す．
一般に束は三つ組 $\langle X, \vee, \wedge \rangle$ で表されるが，誤解のないときは単に束 X と表す．

なんてことはない，これだけである．束の定義は，単にどの元 x, y に対してもその上限 $x \vee x$ および下限 $x \wedge y$ がある，と言っているに過ぎない．しかし見方を変えると，この条件を束上の演算の定義として捉えることができる．つまり $\vee$ を「2 つの元の束を結びをとる演算」，$x \vee y$ を，「x と y に演算 $\vee$ を施した結果」として見るのである．言い換えれば，$\vee, \wedge$ を次のような 2 項関数として見るということである．

$$\vee : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x \vee y$$
$$\wedge : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x \wedge y$$

これは，例えば足し算「$+$」が二つの数 (n, m) から別の数 $n + m$ への 2 項関数であるのと同様である．そして上の束の定義は，こうした演算が**閉じている** (closed)，つまりどのような二元に適用しても，これらの演算を行った結果がちゃんと同じ束の中に含まれている，ということを保証している．かくして我々は，最初の代数的演算を手に入れた．

練習問題 2.1

1. 数の順序集合，例えば $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ は束である．任意の $x, y \in \mathbb{R}$ の結び $x \vee y$ と交わり $x \wedge y$ は何だろうか．
2. 2 値順序 $\mathbb{B} = \{\texttt{false, true}\}$ は束である．その結びおよび交わりを $(f, f), (f, t), (t, f), (t, t)$ のそれぞれについて計算せよ．
3. べき集合の半順序 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ は束であるか．（ヒント：束であることを示すには，X の任意の 2 つの部分集合 $A, B \in \mathcal{P}(X)$ が結びと交わりを持つか，それが何であるかを示せばよい．）
4. $x, y \in \mathbb{N}^+$, $x \preceq y$ を「x は y を割り切る」という関係だとしたとき，$\langle \mathbb{N}^+, \preceq \rangle$ は束であるか．
5. 因果関係を半順序だとすると，それは束となるだろうか．

我々は上で，結びと交わりを演算として捉え直した．こうした演算子は，足し算や掛け算同様，一定のルールに従う．例えばそれは，足し算や掛け算，あるいは 1 章でみた集合演算のように，結合的かつ可換である．結びについてだけ示すと，$x, y, z \in X$ に対し

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \tag{1}$$
$$x \vee y = y \vee x \tag{2}$$

が成立するし，また上式の $\vee$ を $\wedge$ に置き換えたものも成立する．これらはともに上限 $\vee$ の性質から簡単に証明できる，すなわち大げさに言えば「定理」である．ちなみに束においては，ある式が定理として成立する場合，その中に出てくる結び・交わりをすべて入れ替えたものも同様に成立する．

(1) の結合性より，同一の束演算であれば適用順に関わらず同じ結果になるため，カッコを省いて $x \vee y \vee z \vee \ldots$ と書くことができる．さらに束では任意の 2 点が結び・交わりを持つの

で，そのように連結していけば，任意の有限集合 $A \subset X$ が上限と下限を持つことがわかる．これをそれぞれ $\bigvee A, \bigwedge A$ と書く．とくに X 自体が有限の場合，X 全体の上限と下限，つまり最大元と最小元が存在する．束の最大元を 1，最小元を 0 と書く（それぞれ $\top, \bot$ と書く流儀も存在する）．こうして有限束では，すべての $x \in X$ について，$0 \preceq x \preceq 1$ が成り立ち，図で書くと昔の納豆の藁づつみみたいに上と下がきゅっと縛られた形をしている（これだと少し「束」のイメージがわくだろうか）．

注意

ここで「有限」と釘を差していることには理由がある．というのも無限集合の場合，その中の任意のペアが上限・下限を持ったとしても，集合全体の上限や下限は存在しないことがあるからだ．簡単な例として，自然数全体の全順序集合 $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ を考えてみよ．いかなる 2 整数 $n, m \in \mathbb{N}$ について，その上限・下限は m, n のどちらか（$m = n$ の場合は両方）なので，これは束である（全順序なので「束」っぽさはあまりないが）．しかし明らかに $\mathbb{N}$ 全体ないしその無限部分集合（例えば「423 以上の数」）には上限が存在しない．このように，無限束は必ずしも最小元や最大元を持つとは限らない．有限無限に関わらず，任意の部分集合が上限・下限を持つような束を，完備束 *(complete lattice)* という[*1]．有限束は必然的に完備だが，無限だとそうでない場合がある．このように，無限はときにややこしい事態をもたらす．数学的にはそこが面白いところでもあるのだが，とりあえず本授業ではそうしたややこしさを避けるため，以下では主に有限束に話を限って進めることにする．

以上で，束を特徴付ける公理と，そのもとで定まる演算 $\vee, \wedge$ を見た．こうした公理から，束についての様々な事実が，定理として引き出される．その例として上で (1), (2) を見たが，最後に更に，以下の 3 つをあげておこう：すべての $x, y \in X$ に対し，

$$X \wedge x = x, \quad x \vee x = x \tag{3}$$

$$1 \wedge x = x, \quad 0 \vee x = x \tag{4}$$

$$x \wedge (y \vee x) = x = (x \wedge y) \vee x. \tag{5}$$

練習問題 2.2

1. 束 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ で *0,1* に対応するのはなにか．またそこで上の *(3)-(5)* が成立することを確かめよ．
2. L を命題論理の論理式の集合，$\vee, \wedge$ をそれぞれ命題論理の「または」「かつ」演算子とする．さらに同値の論理式 $p \Leftrightarrow q$ は同等であるとみなす（つまり L を同値 $\Leftrightarrow$ で割った商集合 $L' = L/\Leftrightarrow$ を考える）．すると $\langle L', \vee, \wedge \rangle$ は束となる．この束における順序は何を意味するだろうか．

ちなみに *(2)* で L でなく商集合 L' を考えるのは，例えば $p, q \in L$ の論理和としては $p \vee q, q \vee p$ という *2* つの式が考えられる（よって L 上では上限が一つに定まらない）が，それらを同一視すれば上限がとれるからである．

事例 2.1 (メレオロジー)

メレオロジー *(mereology)* とは，部分と全体の間の関係を扱う理論である．「x は y の部分である」という関係を $x \preceq y$ で表すことすると，これは半順序をなす（確認せよ）．メレオロジー的普遍主義 *(universalism)* という立場では，どのようなものでもその和をとって全体を作ることができる（例えば「忠犬ハチ公」と「エッフェル塔」を部分として持つ「ハチ公-

エッフェル塔」が存在する）．これはつまり結びが存在するということであり，よって束を構成する．

事例 2.2 (概念の束)

束は，抽象的概念の間の階層構造を表すためにしばしば用いられてきた．前章事例 *2.3* でも見たように，概念の集合を C とすると，「である関係 *(is-a relationship)*」は C 上の半順序を成す．この半順序上で，$x, y \in C$ の結び $x \vee y$ は二つの概念を抽象して両者に共通する概念を得る操作だと考えることができる．例えば，*human* $\vee$ *dog* $=$ *mammal* というように．また *rational* $\wedge$ *animal* $=$ *human* かもしれない．このように，概念間の抽象構造（しばしば「アリストテレス的抽象主義」と呼ばれる）は束によってモデル化できる（*cf.* 五十嵐涼介 *(2023)*「情報の哲学史試論—『ポール・ロワイヤル論理学』・ライプニッツ・カント—，『哲學研究』*906*）．

練習問題 2.3

上で示唆したメレオロジー的普遍主義の束，概念の束それぞれにおいて，*(1)* 交わりはどのような操作だと考えられるだろうか，また *(2)* 最大元 *1*, 最小元 *0* は存在するだろうか，するとしたらそれはなんだろうか．

3 準同型写像

我々は前章 4 節で，二つの順序の間の「構造を保つ写像」としての単調写像を見た．同じようにここでは，二つの束 X, Y の間の準同型写像を考えたい．束は特殊な半順序なので，当然それは X から Y への単調写像である必要があるが，それに加え束の特徴である結びと交わりを保存する必要がある．具体的には次である

束準同型写像

関数 $f : X \to Y$ が次の条件を満たすとき，束 X, Y の間の**準同型写像** (homomorphism) といわれる．すべての $x, x' \in X$ に対して，

$$f(x \vee x') = f(x) \vee f(x') \quad \text{かつ} \quad f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x')$$

つまり束の構造を保存するとは，x, x' の結び（交わり）を飛ばしたものが，それぞれを別々に Y に飛ばした $f(x), f(x')$ の結び（交わり）になっている，ということである．この形はあらゆる数学的構造の準同型写像に共通する，超重要な考え方なので，しっかり頭に叩き込んでおいてほしい．

また単調写像のときと同様, 準同型写像 $f : X \to Y$ が全単射である, つまり $\forall x(g(f(x)) = x)$ となる g が存在するとき，**同型写像** (isomorphism) といい，X と Y は（束として）同型であるという．このとき両者は構造的に同じ束として同一視できる．

注意

上の定義を見て，あれ，単調写像という条件はどこに行った？と思った人は鋭い．実は，結びと交わりを保つ写像は，順序も保存することが示せる．よってわざわざ条件に入れ込む必要がないのである．ちなみに正確には，f が単調写像であることと，$f(x) \vee f(x') \preceq (x \vee x')$ あるいは $f(x \wedge x') \preceq f(x) \wedge f(x')$ が同値．準同型写像であれば後者が満たされるので，f

は単調となる．

事例 3.1 (真理値関数としての束準同型)

問題 *2.2* で，同値式を同一視した論理式の集合 L' が束を構成することを確認した．L' への真理値割当とは，L' から *2* 値順序 $\mathbb{B} = \{\texttt{false, true}\}$ への準同型写像である．この準同型写像が，結び $\vee$ および交わり $\wedge$ を保存するとはどういうことか，上の束準同型写像の条件をもとに考えよ．

事例 3.2 (命題と可能世界)

論理演算で閉じた命題の集合 P を考えよう．つまり P には $p =$ ワシントンはアメリカの初代大統領である，$q =$ 日本の首都は京都である，などの原子命題のみならず，それを「かつ」「または」で繋いだ任意の命題が入っている．つまり $\langle P, \vee, \wedge \rangle$ は束である．いま命題 $p \in P$ に対し，$f(p)$ を命題 p が成立している世界（一般に p-世界 *p-worlds* と呼ばれる）の集合とする．これら p-世界は様々な可能世界を表しており，例えば現実世界は $f(p)$ には入っているが $f(q)$ には入っていない．また例えば $f(p \wedge q)$ とは p と q が両方成立している世界であり，これは p-世界と q-世界の共通部分，つまり $f(p) \cap f(q)$ となるはずである．よって任意の $p, q \in P$ に対し

$$f(p \vee q) = f(p) \cup f(q), \quad f(p \wedge q) = f(p) \cap f(q)$$

が成り立つ．練習問題 *2.1-2* より全世界 W の部分集合系は束 $\langle \mathcal{P}(W), \cup, \cap \rangle$ であるので，命題に対応する可能世界を割り当てる写像 f は P から $\mathcal{P}(W)$ への準同型写像となる．

事例 3.3 (概念の外延)

例 *2.2* で，概念が束 $\langle C, \vee, \wedge \rangle$ を構成することを見た．いまそれぞれの概念 $c \in C$ に対し，その外延 *(extension)*，すなわちその概念を例化する事物の集合を $f(c)$ と書こう．例えば c が「人間」であれば $f(c) = \{$ ナポレオン, ワシントン, 西郷隆盛, $\ldots \}$ 等々である．事物の集合を Y としたとき，外延を与える写像 f は $\langle C, \vee, \wedge \rangle$ から $\langle \mathcal{P}(Y), \cup, \cap \rangle$ への準同型写像となることを確認せよ．

上の三つの事例は準同型写像の重要な考え方を示唆している．それはつまり，準同型は代数的体系への意味論を与える，というアイデアである．それぞれの準同型のドメインとなる束は，ある概念（論理式，命題，概念）の間の形式的関係性を示している（例えば論理式間の導出関係）．準同型写像は，それらを何か他のものにマッピングすることで，形式的概念の意味を具体的な形で与えるものだと考えられる．上の事例では，論理式にその真理値，命題に可能世界，概念に外延を与えることで，それぞれの「意味」を確定している．そして写像の準同型性は，ドメイン側の形式的操作が，コドメインの具体的対象の間の操作としてちゃんと整合的な意味を持っている，ということを保証している．もちろんこれらはすべて，前章で触れた「表現」を，哲学的な観点から言い直したものに過ぎない．一般的に表現の利点は，抽象的な代数的構造をより具体的な物（行列や集合）で表す，ということにある．このスピリットは，数学だけでなく，抽象的な構造を扱う哲学においても重要である．つまりある抽象的問題を代数的にモデリングするときは，その意味論，つまり集合系への準同型写像を同時に考えることが重要なのである．

4 ブール代数

最後に，ハイティング代数に更に公理をもう一つ付け加えて，**ブール代数** (Boolean algebra) を作ろう．

定義 4.1 (ブール代数)

ブール代数とは，ハイティング代数 $\langle X, \preceq \rangle$ であって，各元 $x \in X$ の擬補元 $\neg x$ が次を満たすものである：

$$x \vee \neg x = 1, \quad x \wedge \neg x = 0 \tag{6}$$

ブール代数の擬補元 $\neg x$ は補元 *(complement)* と呼ばれる．

ブール代数を特徴付けるこの公理 (6) は，**排中律** (law of excluded middle) とよばれる．つまりブール代数とは排中律が成り立つハイティング代数である．このおかげで，ブール代数ではド・モルガン則のもう一方が成立する

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y. \tag{7}$$

ブール代数は，命題論理の構造を表すものとしてよく知られている．ハイティングのときと同様，演算子は論理演算子として解釈できる．上の (6) は，まさに命題論理における排中律と矛盾律そのものだ．

練習問題 4.1

$\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ もまた，ブール代数としての構造を持つ．$X = \{a, b, c\}$ として，その束構造を図示してみよ．

練習問題 4.2

2 つの命題変項 P, Q のみを持つ命題論理の体系に対応するブール代数を図示せよ（ヒント：ブール代数の一番真ん中の層の要素は $P, Q, \neg P, \neg Q$ の *4* つであり，それらのペアの $\vee, \wedge$ を上下に書き込んでいけば良い）．

練習問題 4.3

$A, B \subset X$ としたとき，$\langle \{A, B, A^c, B^c\}, \subset \rangle$ はブール代数となる（これはブール代数 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ の部分代数になっている）．このブール代数を図示せよ．

発展 4.1

問題 *4.2* と *4.3* は，命題論理の理論と部分集合の体系が，ブール代数として見ると同じ構造を持っている，ということを（非常にシンプルなケースで）示している．しばしばいわれるように，命題論理というのは記号の間に成り立つ統語論的な関係であり，集合はその意味論を与える（例えば命題 P に対して P が成り立つ可能世界の集合が対応する）．するとこの対応は，統語論（論理）と意味論（集合）との対応だといえる．では，こうした関係は一般に成り立つのだろうか．答えは *Yes* であって，任意の命題論理の体系は，何らかの集合の体系と一対一に対応する，ということが証明できる．しかしそのためには，どのような集合の体系であれば命題論理との体系と対応するのか，ということを定める必要がある（というのも，明らかに任意の集合を命題論理の意味論を与えるものとして解釈することはできない

からだ）．具体的には，そのためには位相構造（次章参照）を集合に入れてやる必要がある．その上で，命題論理の体系は，そうした特定の位相構造を持つ集合の系，具体的にはストーン空間 *(stone space)* と呼ばれる位相空間と同型であることが示せる．この命題論理の統語論と意味論を結びつける結果は，ストーンの表現定理 *(Stone's representation theorem)* と呼ばれている．これは非常に重要な定理であり，あとで扱う位相や圏論とも関連が深いのだが，この授業内では扱うことができない．関心がある向きは，*Hans Halvorson, The Logic in Philosophy of Science* などを参照されたい（ただし結構むずかしい）．

5　ハイティング代数

有限束にさらに公理を加えて，パワーアップさせてみよう．

定義 5.1 (ハイティング代数)

（有限）ハイティング代数 *(Heyting algebra)* とは，*0* と *1* を持つ束 $\langle X, \preceq \rangle$ であり，かつ結びと交わりが以下の分配則 *(distributive law)* を満たすものである：すべての $x, y, z \in X$ に対し，

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{8}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{9}$$

結びと交わりを $+$ と $\times$ に置き換えれば，これは小学校で習った分配則と全く同じ形をしている[*2]．ハイティング代数とは，この分配則が成り立つ完備束である．

ハイティングは直観論理 (intuitionistic logic) で知られるオランダの数学者．実際，ハイティング代数は直観論理（排中律が成り立たない）のモデルとして提唱された．また後の章で見るように，位相空間とも密接に対応している．

上で，束には 2 つの演算 $\vee, \wedge$ が備わっていることを見た．ハイティング代数では更に，**含意** (implication) と呼ばれる次の演算 $\Rightarrow$ が定義できる．

$$z \preceq (x \Rightarrow y) \iff z \wedge x \preceq y$$

これはどう読めばよいのだろう．まず左辺は，x, y という 2 つの元に「含意」演算を施して得られる元 $x \Rightarrow y$ が他のある元 z よりも上にある，という事態を表している．そして右辺と合わせた条件式全体は，こうした事態が成立するのは，$z \wedge x$ が y より下にあるとき，そのときのみであるということをいっている．このようにしてこの式は，「含意」演算を施して得られた元 $x \Rightarrow y$ が束上で占める位置を右辺によって定めることにより，演算を定義している．

具体的には，$x \Rightarrow y$ は $z \wedge x \preceq y$ を満たすような z たちの上限になっている．y 自身は $y \wedge x \preceq y$ を満たすので，$y \preceq (x \Rightarrow y)$，つまり $x \Rightarrow y$ は y の上にある．しかし同時に，$x \Rightarrow y$ と x の交わりは y より下，つまり $(x \Rightarrow y) \wedge x = y \wedge x$ でなければならない．$x \Rightarrow y$ はそのような条件を満たす元の中で一番上にある元である．

[*2] 実際，圏論的な観点からいえば，結びと足し算は余積 (co-product)，交わりと掛け算は積 (product) という一般的な構造の例である．

事例 5.1

含意の定義はややこしい．しかし論理学を知っていると少しそのややこしさは和らぐかもしれない．その名前から推察されるように，含意 $x \Rightarrow y$ は命題論理における実質含意を念頭

においている．そしてその記号から推察されるように，結び $\vee$ と交わり $\wedge$ はそれぞれ「または」と「かつ」に対応している．では順序 $\preceq$ は何に対応しているかというと，帰結関係 $\vdash$ である．例えば $x \wedge y \preceq z$ は，$x \wedge y \vdash z$，つまり x かつ y なら x が成り立つ，という論理的真理を表している（同様のことを $\vee$ でも確かめよ）．これを念頭に上で定義した含意を論理式に翻訳すると，

$$z \vdash (x \Rightarrow y) \iff z \wedge x \vdash y$$

となる．これは，z から「x ならば y」が帰結するならば，「z かつ x」から y が帰結するし，また逆もしかり，という演繹定理 *(deduction theorem)* を表している．こう考えると，上で述べたように $x \Rightarrow y$ が y の上にあるのも納得できるし（y が成り立っていれば $x \Rightarrow y$ は必ず成り立つ），$(x \Rightarrow y) \wedge x = y \wedge x$ も真理表から確認できる．

さて，ハイティング代数には 0 があるので，任意の $x \in X$ について $x \Rightarrow 0$ が存在する．これを**擬補元** (pseudo-complement) と呼び，$\neg x$ で表す．これは x をとって $x \Rightarrow 0$ を返す演算

$$\neg :: x \mapsto \neg x = x \Rightarrow 0$$

と考えることもできる．

ハイティング代数で新たに加わった演算についても，様々な定理が成立する．例えば $\Rightarrow$ については

$$x \Rightarrow x = 1 \tag{10}$$
$$((x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y) = 1 \tag{11}$$
$$(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z) \tag{12}$$
$$x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z) \tag{13}$$

などが任意の $x, y, z \in X$ について成立する．また $\neg$ に関しては

$$x \preceq \neg\neg x \tag{14}$$
$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \tag{15}$$

などが成立する．

事例 5.2

上述したように，ハイティング代数は直観主義論理のモデルを与える．それを見るには，$\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$ をそれぞれ論理和（または），論理積（かつ），実質含意（ならば），否定（〜でない）に読み替え，各元を命題記号と考えれば良い．この観点からは，例えば *(8)* と *(9)* はそれぞれ同一律および *modus ponens* が常にトートロジーであること，*(10)* と *(11)* は「ならば」の分配則に対応していることがわかる．一方 *(13)* はド・モルガン法の一方を示す（もう片方はすぐ後で見るブール代数のみで成り立つ）．また *(12)* において，x の二重否定が x と一致しないのにも注意せよ．これは直観主義論理において二重否定が除去できないことに対応する．

練習問題 5.1

ハイティング代数を（直観主義）論理として解釈した際，0 と 1 はそれぞれ何を表すだろうか．

事例 5.3

概念の束 $\langle C, \preceq \rangle$ はハイティング代数だろうか．そうだとしたらその含意と擬補元はどう解釈できるだろうか．

発展 5.1

ここでの取り扱いはすべて有限束を前提としている．無限束の場合は，ハイティング代数であるためには完備性と無限分配束を満たさなければならない．前節で触れたように，完備性とは任意の（無限でも良い）部分集合に上限と下限が存在すること．そして無限分配則とは，任意の（無限でも良い）部分集合 $Y \subset X$ について，$x \wedge (\bigvee_{y \in Y} y) = \bigvee_{y \in Y} (x \wedge y)$ が成立する（交わりも同様）ことである．完備性のときと同様，無限束においては，分配則が満たされていても無限分配則は満たされないことがありうる．

こうした無限・有限の区別を避けるために，教科書によっては，ハイティング代数を「任意の 2 元が含意を持つ完備束」と定義することもある．その場合，（無限）分配則はそこからの定理として導かれる．いずれにせよ，両流儀の定義は一致する．