3. 順序

2023 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2023 年 10 月 3 日

1　構造

前章までで，集合論の（ほんの）基礎的なところを見た．現代数学において，集合はあらゆる理論的構造の「素材」としての役割を担っている．例えば線形代数や解析学やリー代数や確率論や・・・あらゆる数学理論は，「かくかくしかじかの性質を持った集合」と定義できるのである[*1]．つまり語弊を恐れずにいえば，数学の理論とは，何らかの構造を持った集合である．実際，この章以下で我々は，ブール代数や群，位相などを，特定の構造を持つ集合として導入する．集合が持つそうした構造は，一般に**公理** (axioms) の形で表される．まず手始めに，一番簡単な，順序構造を集合に入れるところから考えてみよう．

2　さまざまな順序

順序とは，特殊な条件（公理）を満たす 2 項関係である．その条件の付け加え方によって，前順序／半順序／全順序という三つの順序が得られる．以下見るように，後の方ほどより要件が多く，より「厳しい」順序になってくる．

2.1　前順序

同値類とは反射的，対称的かつ推移的な関係だったことを思い出そう（2 章 3 節）．この条件から対称性を落とすと，0 章でも見た**前順序**ないし**擬順序** (preorder) が得られる．きちんと定義すると以下のようになる．

[*1] こうした集合論に根ざした数学の統一的理解は，20 世紀のニコラ・ブルバキ (Nicolas Bourbaki) の仕事に多くを負っている．ブルバキは集合論をいわば数学の共通言語に見立て，各数学理論を集合論の枠内で再構築した．ちなみにブルバキはペンネームで，実際は複数の数学者の集まり（集合！）である．

前順序

集合 X 上の 2 項関係 $\preceq$ が，すべての $x, y, z \in X$ について以下を満たすとき，**前順序**ないし**擬順序**といわれる．

O1 反射性：$x \preceq x$

O2 推移性：$x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば $x \preceq z$

また組 $\langle X, \preceq \rangle$ を，**前順序集合**という．

これは我々が今後多数見ていくことになる数学的構造の最初の例である．一般に数学的構造は，元となる集合（この場合 X）と，その上に定義された関係や演算からなる．そして公理は，それがどのような関係・演算かを定めることによって，数学的構造を特徴づける．ここでは反射性（O1）と推移性（O2）という 2 つの公理が，関係 $\preceq$ および前順序集合を特徴づけている．

序章でも述べたように，数学的構造が与えられたら，その例を探そう．前順序の例とはつまり，公理 O1 と O2 を満たすもののことだ．例えば $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ は前順序である．というのも，

1. すべての整数 $x \in \mathbb{N}$ について，$x \leq x$ が当然なりたつ．
2. すべての整数 $x, y, z \in \mathbb{N}$ について，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ なので，公理 O2 も成立する．

以上から，$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ が前順序であることが示された．この例はあまりにも自明だが，実際にある対象を数学的構造でモデリングするためには，その公理が成立することを確認するのが第一のステップである．

練習問題 2.1

1. 冪集合と包含関係の組 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ が前順序集合であることを示せ．

2.「$=$」を等号とする．$\langle \mathbb{N}, = \rangle$ は前順序だろうか．

3. *0* 章で触れた関係「y は x と同等かそれ以上に完全である」は，前順序だろうか．

4. 前順序であるような関係を数学以外から探し，それが前順序であることを示せ．

ちなみに問題 2 の答えは Yes である．というのも，「$=$」は同値類であり，反射性・対称性・推移性を満たすので，当然 O1 と O2 を満たす．このように，一般的な順序の直感にはそぐわなくても，順序の公理を満たすようなものは多数ありえる．

事例 2.1 (*Supervenience*)

X を個物の集合，Y を性質の集合とし，$f_1, f_2 : X \to Y$ を個物に性質を割り当てる *2* つの関数とする（これを「性質関数」と呼ぼう）．例えば X を（ある時点の）人の集合としたら，f_1 はその人に心的状態を割り当て，f_2 は身体状態を割り当てる，と考えても良いかもしれない．f_1 が f_2 に付随 *(supervene)* するとは，f_1 における差異が必ず f_2 における差異を含意すること，つまり任意の $x, x' \in X$ について $f_1(x) \neq f_1(x')$ なら $f_2(x) \neq f_2(x')$ が成立することである．

すべての性質関数の集合を Y^X とすると，付随は Y^X 上の前順序を定める．これを示そう．$f, g, h \in Y^X$ を任意の性質関数とすると

1. すべての $x \in X$ につき，$f(x) \neq f(x)$ なら当然 $f(x) \neq f(x)$．よって任意の性質関数 f はそれ自身に付随する．
2. f は g に付随し，g は h に付随するとする．するとすべての $x \in X$ につき，$f(x) \neq f(x)$ なら $g(x) \neq g(x)$，そしてさらに $h(x) \neq h(x)$．よって f は h に付随する．

以上より *O1* と *O2* が示されたので，付随性は前順序である．

2.2　半順序

上で定義した前順序に，もう一つ次の公理を導入してみよう：

O3 反対称性：$\forall x, y, z \in X,\ x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ ならば $x = y$

つまり「タイ」であるようなものは全部同一である，という取り決めである．O1〜O3 を満たす関係は，**半順序** (partial order) といわれる．また $\preceq$ が X 上の半順序であるとき，組 $\langle X, \preceq \rangle$ を**半順序集合** (partially ordered set または縮めて poset) という．

練習問題 2.2

身近な半順序の例を挙げよ．

ところでなぜ「半」順序なのか？それは，一般に考える順序には少し及ばないからだ．一般的に順序というと，すべてが一列に並んでいるイメージがある．一列に並んでいるとは，任意の $x, y \in X$ について，$x \preceq y$ か $y \preceq x$ の少なくとも一方が成り立つということだ（両方成立してても良い．その場合は反対称性より $x = y$ となる）．これを**完備性** (completeness) という．半順序は完備性を要求しないので，「枝分かれした」順序を許す．完備性を満たす半順序は**全順序** (total order) という[*2]．上の例では，$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ は全順序だが，X が 2 つ以上の元を持つときの $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ はそうではない．

練習問題 2.3

全順序集合と，全順序でない半順序集合の例を挙げよ．

ここでいくつかの定義を確認しておこう．$\langle X, \preceq \rangle$ を半順序集合，$A \subset X$ としたとき：．

- $a \in A$ が A の**最大元**であるとは，$\forall x \in A (x \preceq a)$ が成り立つこと．逆に**最小元**であるとは，$\forall x \in A (a \preceq x)$ が成り立つこと．最大／最小元は存在するとは限らないが，あれば一つしかない．
- $b \in X$ が A の**上界** (upper bound) であるとは，$\forall x \in A (x \preceq b)$ が成り立つこと．A に上界が存在するとき，A は**上に有界**であるという．最大元との違い，A の上界は A に含まれている必要がないことに注意．同様の仕方で，A の下界 (lower bound) が定義される．A が上に有界かつ下に有界のとき，A は有界であるという．
- A の上界は複数ありえる．例えばもし b が上界で $b \preceq c$ なら c も上界である．でもその中で一番小さい，いわば「スレスレの上界」があれば，これを**上限**ないし最小上界 (least

[*2] ちなみに完全性は反射性を含意する（「任意の $x, y \in X$」の両方が x の場合）ので，全順序の定義は推移性，反対称性と完備性で事足りる．

upper bound) という．つまり A の上限とは，A の上界の集合 B の最小元（あれば）である．上界が存在しても（つまり $B \neq \emptyset$ でも）上限は存在しないこともある．同様に，A の最大下界を**下限** (greatest lower bound) という．

事例 2.2

順序集合の有界性についての問題は，哲学で非常によく出くわす．例えば「不動の第一動者」（アリストテレス）や「神の存在論的証明」（デカルト）の議論を順序の概念を用いてモデル化するとどうなるだろうか．