3. 順序

2025 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2025 年 10 月 31 日

1　構造

前章までで，集合論の（ほんの）基礎的なところを見た．現代数学において，集合はあらゆる理論的構造の「素材」としての役割を担っている．例えば線形代数や解析学やリー代数や確率論や・・・あらゆる数学理論は，「かくかくしかじかの性質を持った集合」と定義できるのである[*1]．つまり語弊を恐れずにいえば，数学の理論とは，何らかの構造を持った集合である．実際，この章以下で我々は，ブール代数や群，位相などを，特定の構造を持つ集合として導入する．集合が持つそうした構造は，一般に**公理** (axioms) の形で表される．まず手始めに，一番簡単な，順序構造を集合に入れるところから考えてみよう．

2　さまざまな順序

順序とは，特殊な条件（公理）を満たす 2 項関係である．その条件の付け加え方によって，前順序／半順序／全順序という三つの順序が得られる．以下見るように，後の方ほどより要件が多く，より「厳しい」順序になってくる．

2.1　前順序

同値類とは反射的，対称的かつ推移的な関係だったことを思い出そう（2 章 3 節）．この条件から対称性を落とすと，0 章でも見た**前順序**ないし**擬順序** (preorder) が得られる．きちんと定義すると以下のようになる．

[*1] こうした集合論に根ざした数学の統一的理解は，20 世紀のニコラ・ブルバキ (Nicolas Bourbaki) の仕事に多くを負っている．ブルバキは集合論をいわば数学の共通言語に見立て，各数学理論を集合論の枠内で再構築した．ちなみにブルバキはペンネームで，実際は複数の数学者の集まり（集合！）である．

定義 2.1: 前順序

集合 X 上の 2 項関係 $\preceq$ が，すべての $x, y, z \in X$ について以下を満たすとき，**前順序**ないし**擬順序**といわれる．

O1 反射性：$x \preceq x$
O2 推移性：$x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば $x \preceq z$

また組 $\langle X, \preceq \rangle$ を，**前順序集合**という．

これは我々が今後多数見ていくことになる数学的構造の最初の例である．一般に数学的構造は，元となる集合（この場合 X）と，その上に定義された関係や演算からなる．そして公理は，それがどのような関係・演算かを定めることによって，数学的構造を特徴づける．ここでは反射性（O1）と推移性（O2）という 2 つの公理が，関係 $\preceq$ および前順序集合を特徴づけている．

序章でも述べたように，数学的構造が与えられたら，その例を探そう．前順序の例とはつまり，公理 O1 と O2 を満たすもののことだ．例えば $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ は前順序である．というのも，

1. すべての整数 $x \in \mathbb{N}$ について，$x \leq x$ が当然なりたつ．
2. すべての整数 $x, y, z \in \mathbb{N}$ について，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ なので，公理 O2 も成立する．

以上から，$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ が前順序であることが示された．この例はあまりにも自明だが，実際にある対象を数学的構造でモデリングするためには，その公理が成立することを確認するのが第一のステップである．

練習問題 2.1

1. 冪集合と包含関係の組 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ が前順序集合であることを示せ．
2. 「$=$」を等号とする．$\langle \mathbb{N}, = \rangle$ は前順序だろうか．
3. 0 章で触れた関係「y は x と同等かそれ以上に完全である」は，前順序だろうか．
4. 関係「y は x の子孫である」は前順序だろうか．
5. 前順序であるような関係を数学以外から探し，それが前順序であることを示せ．

ちなみに問題 2 の答えは Yes である．というのも，「$=$」は同値類であり，反射性・対称性・推移性を満たすので，当然 O1 と O2 を満たす．このように，一般的な順序の直感にはそぐわなくても，順序の公理を満たすようなものは多数ありえる．他方，問題 5 のようにある関係が前順序であることを示すためには，まずどんな集合をベースにしているか，その要素はなにかを明らかにするところから始める．その上で，二項関係を定義し（つまり「$x \preceq y$ iff ...」の...の部分を明示的に示す），その関係が反射性と推移性を満たすことを確認すれば良い．

事例 2.1: 証明関係

L を命題論理の論理式の集合とし，$p, q \in L$ について「p から q が証明される」を $p \vdash q$ と表す．するとトリビアルに $p \vdash p$ であり，また p から q が証明され，q から s が証明されるなら p から s が証明できる，つまり O2 も成り立つ．よって $\langle L, \vdash \rangle$ は前順序を

なす．

事例 2.2: Supervenience

X を個物の集合，Y を性質の集合とし，$f, g : X \to Y$ を個物に性質を割り当てる 2 つの関数とする（これを「性質関数」と呼ぼう）．例えば X を（ある時点の）人の集合としたら，f はその人に心的状態を割り当て，g は身体状態を割り当てる，と考えても良いかもしれない．f が g に**付随** (supervene) するとは，f における差異が必ず g における差異を含意すること，つまり任意の $x, x' \in X$ について $f(x) \neq f(x')$ なら $g(x) \neq g(x')$ が成立することである．
すべての性質関数の集合を Y^X とすると，付随は Y^X 上の前順序を定める．これを示そう．$f, g, h \in Y^X$ を任意の性質関数とすると

1. すべての $x, x' \in X$ につき，$f(x) \neq f(x')$ なら当然 $f(x) \neq f(x')$．よって任意の性質関数 f はそれ自身に付随する．
2. f は g に付随し，g は h に付随するとする．任意の $x, x' \in X$ につき，$f(x) \neq f(x')$ とすると，f は g に付随するので $g(x) \neq g(x')$．さらに g は h に付随するのでこのとき $h(x) \neq h(x')$ が成り立つ．よって f は h に付随する．

以上より O1 と O2 が示されたので，付随性は前順序である．

事例 2.3: 倫理学

倫理学者は，ある状況・世界が他の状況・世界よりも「善い」とされるのはどのようなときか，という基準を考えてきた．二つの可能世界 $w, w' \in W$ に対して，$w \preceq w'$ で「世界 w' は世界 w と少なくとも同じくらい善い」を表すとしよう．するとトリビアルに $w \preceq w'$ であり，また多くの倫理学者はこれが推移性も満たすと考える．よって一つの倫理体系は可能世界上の前順序 $(W, \preceq)$ を定める．異なる倫理的立場（例えば功利主義，義務論，徳倫理など）は，この前順序の入れ方の違いであると解釈することができるだろう．（それぞれの立場における「$\preceq$」の意味を考えてみよ．）

2.2 半順序

前順序はサイクルを含みうる．つまり異なる $x \neq y$ に対し，$x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ の双方が成り立つ，ということが可能である．しかし次で定義する半順序では，こうしたサイクルは除外される．

定義 2.2: 半順序

前順序 $\preceq$ がさらに以下を満たす時，**半順序** (partial order) といわれる．

O3 反対称性：$\forall x, y \in X,\ x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ ならば $x = y$

また $\preceq$ が X 上の半順序であるとき，組 $\langle X, \preceq \rangle$ を**半順序集合** (partially ordered set または縮めて poset) という．

実は上で前順序の例として見た $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ や $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ などは，半順序でもある．実際，自然数 $x, y \in \mathbb{N}$ に対し $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$ であるし，集合 X の部分集合 A, B に対し $A \subset B$ かつ $B \subset A$ なら $A = B$ である．

> **練習問題 2.2**
>
> 1. 関係「y は x と同等かそれ以上に完全である」は半順序だろうか．
> 2. 正の整数 $x, y \in \mathbb{N}^+$ において，「x は y を割り切る」という関係を $x \preceq y$ と表すとすると，$x \preceq y$ は半順序となることを示せ．
> 3. 数学以外の半順序の例をあげよ．
> 4. 事例 2.2 で見た付随性は半順序ではない．これを示すには，$f(x) \neq f(x') \iff g(x) \neq g(x')$ であるにも関わらず，f と g が関数として同じではない，つまり $f(x) \neq g(x)$ となるような事例を探せば良い．そのような反例を構成せよ．

事例 2.1 で見た $\langle L, \vdash \rangle$ は半順序ではない．というのも例えば $p \vee q$ と $q \vee p$ は互いに異なる論理式だが，相互に証明可能であり，よってサイクルが生じるからだ．これを半順序にするためには，「互いに証明可能」という関係 R を，$\forall p, q(pRq \iff p \vdash q \wedge q \vdash p)$ というように定義し，L を R で割る，つまり互いに証明可能な論理式は同じ同値類として同一視してしまえばよい．この商集合を $L' = L/R$ とすると，$\langle L', \vdash \rangle$ は半順序となる．
（細かいことを言うと，証明可能である $\vdash$ という関係も同値類上に定義しなおさなければならない．つまり $[p] \vdash [q], [p], [q] \in L'$ を，ある $p \in [p]$ かつある $q \in [q]$ があって $p \vdash q$ が成り立つことという具合に定義し，かつこれは well-defined である，つまりどんな p, q を代表として選んでも帰結関係は成立する，ということを示さねばならないが，ここでは割愛する．）

> **事例 2.4: 存在の階層**
>
> 形式存在論で重要な関係に「〜は... である」という is-a relationship がある．たとえば「人間は哺乳類である」「哺乳類は動物である」を 2 項述語「–」を用い，人間 – 哺乳類，哺乳類 – 動物，などと書くことができる．この「である関係」は半順序である（確認せよ）．こうした階層的な存在構造は，古くから**ポルピュリオスの樹** (Porphyrian tree) として示されてきた（図 1）．

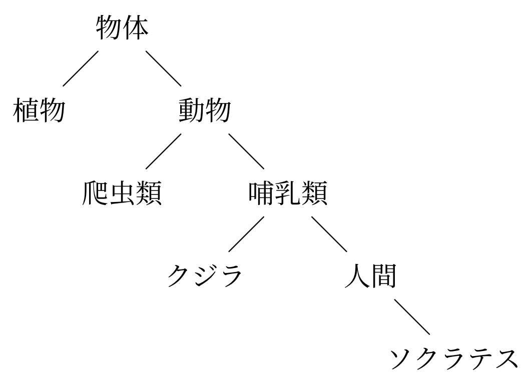

図 1　ポルピュリオスの樹

事例 2.5: 数学の階層

この章の冒頭で以下のように述べた：「語弊を恐れずにいえば，数学の理論とは，何らかの構造を持った集合**である**」．だとすれば，様々な数学的存在物は，上述の is-a relationship によって半順序を構成するはずだ．実際，本授業で扱う内容を並べると，図 2 のようになる．ここから例えば，束は順序であり，よって集合であること，また群はモノイドであり，そしてまた集合であること・・・などがわかる．もちろんこれで終わりではなく，この下（および横）には他の様々な数学的構造が控えている．例えば実数体 $\mathbb{R}$ は，束であり，群であり，また位相空間でもあるので，これらすべての下にくる，実はかなりリッチな構造なのだ．

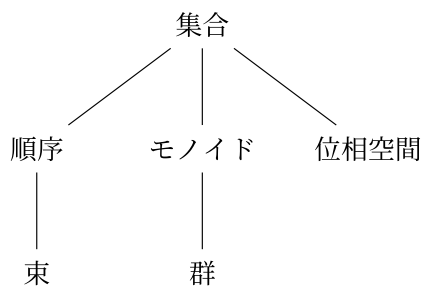

図 2　本授業であつかう数学理論たち

事例 2.6: 人格的同一性

私たちは，昨日の自分と今の自分が同一の人間であると信じている．しかしそれらを同じ「人格」とする基準は一体なんだろうか．ジョン・ロックによれば，それは意識の同一性である．つまり「A と B が同一人格なのは，A が B の行為と経験を意識しているとき，そのときに限る」と主張する．ここでは「意識する」ということを，簡単に「記憶している」ということだと解釈しよう．例えば，私は昨日の私の行為と経験を憶えている，それゆえ昨日の私と今日の私は同一である．

いま，任意の時間断片の人の意識の集合を X で表そう．$x, y \in X$ について，「x は y によって記憶されている」という関係を $x \leftarrow y$ で表すとすると，これは X 上の半順序だろうか．任意の状況で，人は自分自身を記憶しているといえそうなので，$x \leftarrow x$ は満たされそうである．またもし x が y を記憶し，また逆もそうならば，確かに x と y は同じ時間の同じ人格の意識であろうから，反対称性も成立していそうだ．問題は推移性である．x を 5 歳児のときの私，y を 10 歳児のときの私，z を現在の私としよう．このとき $x \leftarrow y$ かつ $y \leftarrow z$，つまり 10 歳時点で 5 歳児のときの記憶があり，現時点で 10 歳児のときの記憶があったとしても，$x \not\leftarrow z$, つまり現時点では 5 歳児の記憶はない，ということは十分ありそうである．したがって，「記憶されている」という関係は推移的とはいえそうにない．

しかしそうであっても，こうは言えるかもしれない．つまり，今の時点で過去をすべて覚えているわけではないにしても，十分近い間隔では「記憶されている」という関係が成立しており，こうした一つ一つの関係性が鎖のように連結されることによって人格の同一性が形成される，と．Derek Parfit (1984) は，こうした「心理的連続性 psychological continuity」を人格の同一性の重要な基準とみなした．このアイデアは，

以下のように新しい関係 $\leftarrow^+$ を定義することで実現できる．

$$\begin{aligned} x \leftarrow^+ y \iff & X\text{ の要素からなる有限列 }(x_0, \ldots, x_n)\text{ が存在し，}\\ & (1) x = x_0 \text{ かつ } y = x_n,\\ & (2) x_0 \leftarrow x_1, x_1 \leftarrow x_2, \ldots, x_{n-1} \leftarrow x_n \end{aligned}$$

つまり，$x \leftarrow^+ y$ となるのは両者の間に，(1) 両端が x, y であって，(2) その間の項が「$\leftarrow$」関係で結ばれている連鎖 $x = x_0 \leftarrow x_1 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n = y$ が存在するときである．このように定義された新しい関係 $\leftarrow^+$ を，関係 $\leftarrow$ の**推移閉包** (transitive closure) という．推移閉包を取った $\leftarrow^+$ は推移的なので，これは半順序となる．

練習問題 2.3

1. $\leftarrow^+$ は人格の同一性（の候補）にはまだ一歩たりない．というのも，同一性関係というからにはそれは同値関係（2 章 3 節）であってほしいが，半順序は対称性を満たさないからだ．しかし，推移閉包を作ったのと同様，$\leftarrow^+$ から対称閉包をとることによって，対称性を満たすような新たな関係（これを $\leftrightarrow^+$ としよう）を作ることができる．それは以下のように定義できるだろう：

   $$x \leftrightarrow^+ y \iff x, y\text{ と }\leftarrow^+\text{ を用いた条件}$$

   どのような条件を設定すればよいだろうか，考えてみよう．
2. このように作られた関係は，人格の同一性の良いモデルになっているだろうか．その問題点があれば考えてみよう．

2.3 全順序

ポルピュリオスの樹に見られるように，一般に半順序はすべてが一列に並んでいるとは限らない．よって任意のペア x, y について，$x \preceq y$ でも $y \preceq x$ ない，つまり両者は比較不可能，ということがありえる．これに対し，すべてが一列に並んでいて互いに比較可能なものを，**全順序** (total order) という．

定義 2.3: 全順序

半順序 $\preceq$ がさらに以下を満たす時，**全順序** (total order) といわれる．

O4 完備性：$\forall x, y \in X,\ x \preceq y$ または $y \preceq x$.

簡単な例としては, $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ は全順序である．一方, X が 2 つ以上の元を持つときの $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ はそうではない.

練習問題 2.4

1. 数学以外の全順序集合の例をあげよ．

事例 2.7: 測定理論

我々は日々，色々なものを数字で図る（身長，値段，IQ，幸福度・・・）．しかしなぜそれが可能なのだろうか？測定理論 (Theory of measurement) は，事物の集合が数字で図られるために，その集合が満たしていなければならない条件を探る学問分野である．[a] その中で最も基本的な性質が，全順序性である．しかし，測りたい事物や出来事が全順序性を満たしていないことはしばしばある．そのような事例を考えてみよう．

[a] e.g. Krantz, D. H., Suppes, P., Luce, R. D. & Tversky, A. (1971) *Foundations of Measurement (Additive and Polynomial Representations).* vol. 1, Academic Press, Inc.

事例 2.8: 時間の B 系列

2 章では，McTaggart による時間の A 系列をモデル化した．彼がもう一つの時間の考え方として提示する B 系列は，出来事の前後関係を重視する．全ての出来事は，どちらが先でどちらが後か，という順序によって比較できる．例えば「鎌倉幕府の成立」は「関ヶ原の戦い」よりも前である，というように．再び出来事の集合を X とすると，これは任意のペア $x, x' \in X$ の間に，「〜より後ではない」という関係 $x \preceq x'$ ないし $x' \preceq x$ がなりたつ，ということにほかならない．
となると B 系列は全順序か，と考えたくなるが，一つ注意する必要がある．二つの異なる出来事 x, x' が同時に生じる，あるいは二つとも決して起こらない場合，どちらも他方の「より後ではない」ので，$x \preceq x'$ かつ $x' \preceq x$ がなりたつ，しかしだからといって $x = x'$ とは限らない．つまり半順序（定義 2.2）を特徴づける反対称性（O3）は成り立たないと考えるほうが理にかなっている．一方，全順序は半順序であり，よって O3 を前提するので，これは少しまずい．なので B 系列は，反射性 (O1)，推移性 (O2)，そして完備性 (O4) は満たすが，反対称性を満たさない順序（全前順序; total preorder），と考えるのが良いだろう．

3 順序の中の元

集合においては，すべての元は単なる元であり，いわば「皆平等」であった．しかし順序においては，ある元は他の元より小さかったり大きかったり，いわば文字通り，元の間に序列が存在する．そのうち特別な地位（！）にあるものは，名前がついている．ここでは半順序に注目し，それらの定義を少し見てみよう（ちなみに全順序も半順序なので，これらは全順序にも妥当することに注意）．

$\langle X, \preceq \rangle$ を半順序集合，$A \subset X$ としたとき：.

- $a \in A$ が A の中で一番大きい，つまり $\forall x \in A(x \preceq a)$ が成りたつとき，**最大元**であるという．逆に**最小元**であるとは，$\forall x \in A(a \preceq x)$ が成り立つこと．最大／最小元は存在するとは限らないが，あれば一つしかない．
- A に属する全ての元より大きい元の集合，つまり $\{b \in X | \forall x \in A(x \preceq b)\}$ を A の**上界** (upper bound) という．A に上界が存在するとき，A は**上に有界**であるという．同様に，A の全元より「下に」ある元の集合を下界 (lower bound) という．A が上に有界か

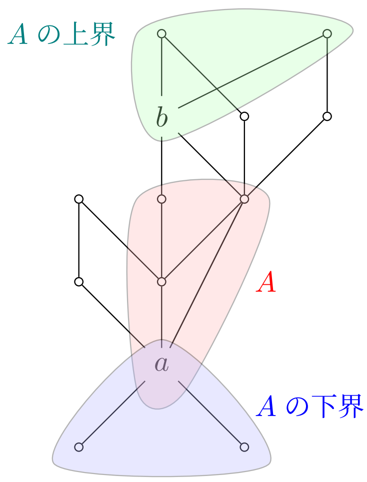

図 3　半順序上の最小限，上界，下界，上限，下限．

つ下に有界のとき，A は有界であるという．

- A の上界のうちで一番小さい，いわば「スレスレの上界」があるとき，これを**上限**ないし最小上界 (least upper bound) という．つまり A の上限とは，A の上界集合 B の最小元（あれば）である．上界が存在しても（つまり $B \neq \emptyset$ でも）上限は存在しないこともある．同様に，A の最大下界を**下限** (greatest lower bound) という．

このようにまくし立てられても全く頭に入ってこない，という人は図 3 を見ると若干イメージがつくかもしれない．ここでは順序は上に行くほうが「大きい」としよう．部分集合 A は赤く囲った部分である．この A の中には「一番大きい」といえるものはないので，最大元は存在しない．しかし最小元は存在し，それは a である．どの A の要素より大きい要素の集合，つまり A の上界は，緑で囲った部分になる．この中で一番小さいのは b であり，これが A の上限である．一方 A の下界は青い部分であり，そのうち最大のもの，つまり下限は a である．

一番ややこしいのは，最大元（最小元）と上限（下限）の区別かもしれない．一般に，部分集合 A の最大元（最小元）があればそれは上限（下限）となるが，逆は必ずしもそうではない．というのは，後者は A の中に含まれる必要がないからだ．図 3 では，A に複数の「最大」があるために最大元はないが上限は存在する．一方，このような分岐がなくても最大／最小元がないケースがある．例えば実数直線上の区間 $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1\}$ とすると，この区間の最大／最小元は存在しない．というのもいかなる数 $y < 1$ を取ったとしても，それよりも少しだけ 1 に近い数が考えられるからだ（最小元も同様）．しかし上限と下限は明らかに存在し，それは 1 と -1 である．

> **練習問題 3.1**
>
> 3 つの元からなる集合 $X = \{x, y, z\}$ として，集合包含関係の半順序 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ を考える．$A = \{\{x\}, \{y\}\}, B = \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}, C = \{\{x, y\}, \{z\}\}$ とする．
>
> 1. A, B, C の最大元をそれぞれ答えよ．
> 2. A, B, C の上界をそれぞれ答えよ．
> 3. A, B, C の上限をそれぞれ答えよ．

この問題に限らず，順序は図で示したほうがわかりやすいことが多い．$x \preceq y$ であるときに

$x \to y$ と矢印を引いた図を，**ハッセ図** (Hasse diagram) という．通常ハッセ図では，見やすさのため推移的な矢印は省略する (例えば $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ では，単に $x \to y \to z$ と書き，$x \to z$ は省略する)．上の 3 元集合のハッセ図は次のようになる．

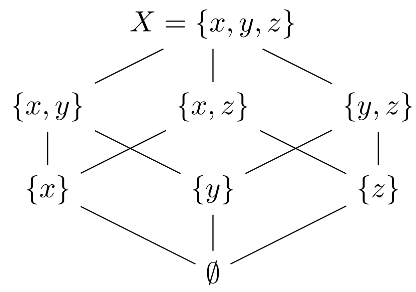

図 4　問 3.1 のハッセ図

練習問題 3.2

1. 正の整数 $x, y \in \mathbb{N}^+$ において，「x は y を割り切る」という関係を $x \preceq y$ と表す．任意の正整数 a, b をとってきたとき，その最大元／最小限，上界／下界，上限／下限はそれぞれなんだろうか．
2. $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ において，$A, B \subset X$ の上界／下界，上限／下限はそれぞれなんだろうか．
3. X を地球上に存在した／しているあらゆる生物の集合とし，$x, y \in X$ に対して $x \preceq y$ で「x は y の祖先か同一個体である」という関係を表す．ここから形成される半順序は生物系統樹と呼ばれる．この系統樹内のある部分集合 $A \subset X$ をとってきたとき，この生物集合は有界か，また上限・下限を持つか．

事例 3.1

順序集合の有界性についての問題は，哲学で非常によく出くわす．例えば神の宇宙論的証明や存在論的証明の議論を順序の概念を用いてモデル化するとどうなるだろうか．
参考（神の宇宙論的証明）: 存在するあらゆるものは，原因を持つ．しかし時空間は有限であるので，因果の系列は無限に遡ることはできない．よって「原因をもたない原因」ないし「不動の第一動者（アリストテレス)」としての神が存在する．これは因果順序における最小元の存在の主張だ．ではそれはどのような証明だろうか．

4　単調写像

我々は集合のところで，異なる集合 X, Y 間を「橋渡し」するものとしての関数 $f : X \to Y$ を見た．同様に，二つの順序 $\langle X, \preceq_X \rangle$, $\langle Y, \preceq_Y \rangle$ が与えられたとき，前者を後者にマップさせることを考えたい．ただしここで，$\preceq_X, \preceq_Y$ はそれぞれ集合 X, Y 上に定義された前／半／全順序関係である．

二つの順序の対応として，もととなっている集合 X, Y の間の関数 $f : X \to Y$ を考える．しかしこの関数が X の順序をめちゃくちゃにしてしまったら，「順序の対応」とはいえない．むしろ X の大小関係が，Y においてもしっかりと保たれていてほしい．これを数学的には，順

序の**構造を保つ写像** (structure-preserving map) という．それは具体的には次で与えられる：

定義 4.1: 単調写像

関数 $f : X \to Y$ が次の条件を満たすとき，順序 $\langle X, \preceq_X \rangle$, $\langle Y, \preceq_Y \rangle$ の間の**単調写像** (monotone map) といわれる

$$\text{すべての } x, x' \in X \text{ に対して}, \ x \preceq_X x' \text{ ならば } f(x) \preceq_Y f(x').$$

つまり x より x' のほうが大きいなら，それぞれを Y に飛ばした $f(x)$ より $f(x')$ のほうが大きくなっている，ということだ．ここで，左辺は X 上の順序 $\preceq_X$ であるのに対し，右辺は Y 上の順序 $\preceq_Y$ で比較されていることに注意．よって上の条件は，$\preceq_X$ で定めれられる X の順序構造が，Y において $\preceq_Y$ として保たれている，ということを定めている．

事例 4.1

1. 整数 $\mathbb{N}$ を実数 $\mathbb{R}$ に埋め込む関数 $f : x \mapsto x$ を考えると，これは当然 $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ の間の単調写像になっている．
2. 整数を 2 倍する関数 $f : x \mapsto 2x$ は，$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ とそれ自身の間の単調写像である．
3. 素点 (0〜100 点) を評語（F, D, C, B, A, A+）に換算する成績評価関数は，単調写像である（でないと困る）．

以上はいずれも全順序間の写像であったが，半順序から全順序，のような単調写像も考えることができる．例えば生命の分類体系 (taxonomy) は，図 5 のような半順序をなす．これをそれぞれの分類階級（種，属，科・・・）に対応させる関数を考えると，これは半順序から全順序への単調写像になっている．単調写像とは，このように二つの順序を横に並べて描いたとき，

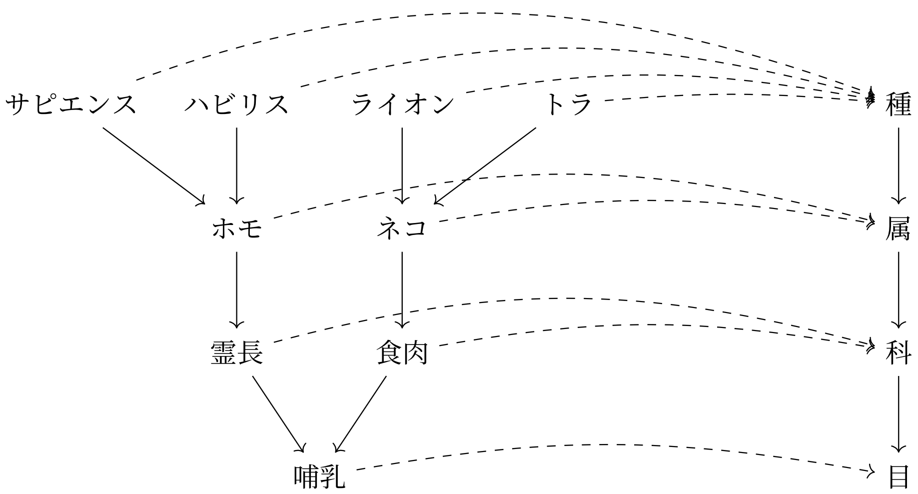

図 5　分類体系の単調写像（この例は Fong & Spivak,『活躍する圏論』, p. 18 より拝借した）

写像の対応を示す線（図 5 の点線矢印）が互いにクロスしない，という条件だと理解できる．

練習問題 4.1

下図のような二つの順序集合 $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2\}$ を考える．

このとき以下の関数 $f : X \to Y$ が単調写像であるか否かを答えよ．

1. $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_2$
2. $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_1, f(x_3) = y_2$
3. $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_1, f(x_3) = y_1$
4. $f(x_1) = y_2, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_1$
5. $f(x_1) = y_2, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_2$

単調写像でないのは 4 番だけである．というのもこのとき，$x_1 \preceq_X x_3$ であるのに $f(x_1) = y_2 \not\preceq_Y y_1 = f(x_3)$ だからだ．一方その他はみな単調写像である．特に 3 番や 5 番はすべての点を 1 点（3 は y_1，5 は y_2）につぶしてしまうが，順序は反射性 $y_i \preceq y_i$ を満たすので問題ない．また 2 番では，X においては $x_2 \preceq_X x_3$ ではないが，Y に飛ばした先では $f(x_2) = y_1 \preceq_Y f_2 = f(x_3)$ と順序がついている．しかしこれも問題ない．単調写像の要件は，もし定義域 X で二つが順序関係にあるならば，飛ばした先でそれらの間に順序関係がなければならない，ということだけである．定義域でもともと順序関係にないものが，値域で新しい順序関係を得てもその要件には反さないことに注意しよう．

事例 4.2: 功利主義

事例 2.3 において，倫理基準は可能世界上に前順序を入れることを見た．今，その基準として功利主義を考えよう．功利主義は世界・状況の善さを人々の幸福によって計る．つまり $w \preceq w'$ であるのは，世界 w' の人々は少なくとも w の人々と同じくらい幸福であるとき，そのときに限る．これは功利主義的前順序 $\langle W, \preceq_{util} \rangle$ を定める．
ベンサムに代表される量的快楽説はさらに，世界の幸福の総量は，個人個人の効用から計算可能であると主張する．つまり任意の世界 $w \in W$ について，その世界の全体の幸福度 $f(w)$ を計算する関数 $f : W \to \mathbb{R}^+$ が存在する．この関数には複数の候補が考えられる．単純加算主義によれば，$f(w)$ は，w に暮らす個々人の幸福の総量を単純に足したものである．一方，単純和ではなく平均を返すような関数も考えることもできる．いずれにせよこれらの関数は前順序 $\langle W, \preceq_{util} \rangle$ から全順序 $\langle \mathbb{R}^+, \leq \rangle$ への単調写像である必要があるだろう．すなわち，功利主義的に $w \preceq w'$ であるのであれ，前者の幸福量の総和ないし平均は後者のそれよりも低くなるべきではない．

事例 4.3: 真理値関数

事例 2.1 の論理式間の証明関係の前順序 $\langle L, \vdash \rangle$ を思い出そう．それとは別に $\mathbb{B} = \{\texttt{false}, \texttt{true}\}$ からなる二元集合上に全順序 $\texttt{false} \leq \texttt{true}$ を導入する．論理式への真理値割当を関数 $f : L \to \mathbb{B}$ によって表すとすると，この関数はどのようなものでな

ければならないか．

事例 4.4: 概念の外延

事例 2.4 では，概念間の半順序構造を見た．この半順序を $\langle C, \preceq \rangle$ で表そう．ここで $c \preceq d$ は「c は d である（c is a d)」という意味である．今，それぞれの概念にその外延（メンバー）を割り当てる関数 f を考えよう．f は，例えば C の要素である「人間」を全人類からなる集合，「サボテン」を全サボテンからなる集合に対応させる．すべての事物を X で表すと，f は C の各要素を X の部分集合（つまり冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の要素）に飛ばすので，これは関数 $f : C \to \mathcal{P}(X)$ である．
2.2 節で見たように，冪集合には包含関係によって半順序 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ が入っている．f はこうした順序をつなぐ単調写像だろうか？もし $c \preceq d$，つまり c is a d なのであれば，c であるようなモノはすべて d，つまり $f(c) \subset f(d)$ でなければならない．よって，概念の外延を与える関数 f は，$\langle C, \preceq \rangle$ から $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ への単調写像になっている．

事例 4.5: 測定理論

$\langle X, \preceq \rangle$ をなんらかの物の集合 X の間の何らかの全順序であるとする．実数値関数 $\phi : X \to \mathbb{R}$ が $\langle X, \preceq \rangle$ と $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ の間の単調写像であるとき，ϕ を**順序尺度** (ordinal scale) という．
順序尺度は，物事の数値測定のうち最も単純なもので，$x_1, x_2, \ldots$ の順番を数値 $\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots$ で表す．このとき，数値間の大小は X の間の順序を反映しているが，その間隔や比率などには意味がない．なので数値を足したりかけたりすることはできない．これは，ここで使われている道具立てが単に順序集合に過ぎず，足し算や掛け算などの演算を備えていない，という事実を反映している．

練習問題 4.2

順序尺度の例をあげ，それが単調性を満たしていることを確認せよ．

事例 4.6: 外延と内包の双対性

2 章事例 4.1 では，モノに対してそれが持つ性質のリストを割り当てる記述が，モノの集合 X から性質の集合 Y の部分集合への関数 $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ として与えられることを見た．この関数の定義域を拡張して，任意のモノの集合 $A \subset X$ に対して，それらが共通して持つ性質を返すようにすよう．つまり

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{P}(X) &\to \mathcal{P}(Y) \\ A &\mapsto \bigcap_{x \in A} f(x) \end{aligned}$$

と新たな関数 f^* 定義する．例えば $A := \{$ サザエ, カツオ $\}$ であれば $f^*(A) = \{$ 人間, 磯野家在住, $\ldots\}$，$B := \{$ サザエ, タマ $\}$ であれば $f^*(B) = \{$ 磯野家在住, $\ldots\}$ である．
さて，本章 2.2 節で見たように，べき集合 $\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)$ は包含関係 $\subset$ によってそれぞれ半順序となっている．f^* はこの二つの半順序の構造を保つ写像になっているだろう

か？実は，以下のような「逆向き」の関係がなりたつことが示せる：

$$A \subset B \Longrightarrow f^*(B) \subset f^*(A) \tag{*}$$

これを示すため，$y \in f^*(B)$ だとしよう．これは f^* の定義より，すべての $b \in B$ がその性質 y を持っているということ（つまり $y \in f(b)$）を意味する．しかるに $A \subset B$ である，つまりすべての $a \in A$ は同時に B にも入っているので，やはりその性質 y を持っているということ（つまり $y \in f(a)$）が帰結する．したがって $y \in f^*(A)$ となり，これが任意の $y \in f^*(B)$ について成立するので，$f^*(B) \subset f^*(A)$ である．
上の式 (*) は，写像 $f^* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ が，順序を反転させる，つまり $\mathcal{P}(X)$ においてより大きな集合は $\mathcal{P}(X)$ におけるより小さな集合への飛ばされることを示している．こうした写像を，特に順序反転 (order-reversing) 写像といったり，単調減少 (monotonically decreasing) 写像といったりする．これらは，「A は B に含まれる」ではなく「A は B を含む」という逆向きの順序 $\supset$ を使って $\mathcal{P}(Y)$ を順序付ければ，普通の単調写像

$$A \subset B \Longrightarrow f^*(A) \supset f^*(B)$$

に一致する．
ここで構成した関数 f^* は，外延（ある性質が当てはまるモノの集合）と内包（モノが持つ性質の集合）の間の関係性を示している．そしてその単調減少性は，「外延が増えるほど，内包は小さくなる」という外延と内包の間のよく知られた事実，すなわちその**双対性** (duality) を示している．

単調写像は極めて単純な道具立てに思える（単に順序を別の順序にうつしているだけじゃないか！）．しかしここにはすでに，複数の重要な哲学的含意がある．

まず事例 4.3 は，意味論的な含意を示す．意味論とは，統語的表現とその意味，あるいはその真偽値の間の関係である．我々はその間に，なんらかの法則的関係が成り立っていることを期待する．この事例では，命題論理の証明関係と，その真偽値の間の関係性が，単調写像によって捉えられていることに注意しよう．

次に事例 4.5 は，認識論的な含意を示す．というのも測定理論とは，形式化された認識論だからである．それは，ある事物の体系（世界）を，数的表現の体系（記述）へと写し取ることを目指している．その際，我々の記述は世界の構造を写し取ったものであってほしい．順序というのはそうした構造のうちの，単純ではあるが重要なものの一つであり，単調性はその構造が数の構造へとしっかりと写し取られている，ということを保証するものである．つまり大げさにいえば，構造を保つ写像は認識の正しさを保証しているのである（こうした見方は，例えばウィトゲンシュタインの**言語の写像理論** (Picture theory of language) に強く現れている）．

我々は今後，様々な数学的構造を見ていくが，その都度，その構造を保存する写像が何かを考えていく（数学的にはこれは**準同型写像** (homomorphism) ともいわれる）．ある構造から別の構造への準同型写像を，数学では**表現** (representation)，またそうした表現が存在することを証明する定理を**表現定理**という．表現は非常に重要な概念であり，数学の至る所に出てくるし，また「表現論」という分野の名前にもなっている[*2]．上の事例は，それぞれ証明帰結関係

[*2] 表現論は，群のところで触れるが，群から線形写像（行列）への群準同型写像を考える．

の真理値による表現，事物の大小関係の数値による表現，ということができる．

練習問題 4.3: 単調写像の合成

$\langle X, \preceq_X \rangle, \langle Y, \preceq_Y \rangle, \langle Z, \preceq_Z \rangle$ を前順序とする．$f : X \to Y, g : Y \to Z$ が単調写像ならば，その合成 $g \circ f : X \to Z$ も単調写像になることを示せ．

5 同型写像

前節では，異なる順序の間を構造を保ったまま橋渡しする方法として，単調写像を見た．では，二つの順序が同じである，ということはどう表せばよいのだろうか．もちろん，全く同じ集合上に同じ順序を定義すれば，両者はトリビアルに同一になる．しかしそうでない場合，例えば構成する集合が違ったとしても，順序としては同じ，と言いたいことがある．そのような「集合としての内容は違うかもしれないけど順序構造は同一」という事態を表すのが，次の同型写像である．

定義 5.1: 同型写像

$\langle X, \preceq_X \rangle, \langle Y, \preceq_Y \rangle$ を順序とする．単調写像 $f : X \to Y$ に対し，任意の $x \in X, y \in Y$ に対し，

$$x = g(f(x)) \qquad y = f(g(y))$$

を満たすような「帰りの」写像 $g : Y \to X$ があり，なおかつこれも Y から X の単調写像になっているとき，つまり

$$\text{すべての } y, y' \in Y \text{ に対して，} y \preceq_Y y' \text{ ならば } g(y) \preceq_X g(y').$$

となっているとき，f, g を**同型写像** (isomorphism) と呼ぶ．また同型写像 $X \to Y$ が存在するとき，順序 X と Y は**同型** (isomorphic) であるという．

言い換えれば，単調写像 f が同型写像であるための条件は二つある．一つは，それが全単射（前章 7 節）であり，よって逆写像 g を持つということ．そして二つ目は，その逆写像 g も単調写像になっているということである．特にこの二つ目の条件は忘れがちなので注意しよう．全単射の逆写像 g は全単射なので，このとき g も同型写像になる．

同型であるような順序集合は，基本的には集合の中身が違うだけで，順序としては全く同一である．つまり図 4 のようなハッセ図で表すと，ノードのラベルが違うだけで，図の形としては全く同じになる．

事例 5.1: 存在の秩序と善の秩序

中世においては，事例はそれぞれ「完全性」を有しており，それに従って序列化されていると考えされた（「存在の大いなる連鎖」）．例えば，人間は狼よりも完全で，天使よりも完全ではない，というように．これは，すべての事物の集合を X で表したとき，「x' は少なくとも x と同じくらい完全である」という順序 $x \preceq_E x'$ の構造が入っている，という主張である．

トマス・アクィナスは，そうした事物の存在の秩序は，善の秩序と一致すると主張した（ens et bonum convertuntur）．つまり，X 上には別の「x' は少なくとも x と同じくらい善い」という順序 $x \preceq_B x'$ が存在し，この順序は $\preceq_E$ と一致する．これは，同一集合上に定義された二つの順序構造 $\langle X, \preceq_E \rangle$ と $\langle X, \preceq_B \rangle$ の間に同型写像がある，という主張だと解釈できる．

事例 5.2: 心身並行論

因果関係「x は y の原因である」が前順序を構成するとしよう（便宜的に，すべてのものはそれ自身の原因でもあると考える）．$\langle P, \to_P \rangle, \langle M, \to_M \rangle$ をそれぞれ，物的対象 P および心的対象 M の間の因果的順序であるとする．**心身並行論**（cf. スピノザ）とは，二つの前順序 P, M が同型であるという主張だと解釈できる．
より具体的に見ていこう．$p_1, p_2 \in P$ をある二つの脳状態とし，前者が後者を引き起こす $p_1 \to_P p_2$ とする．$f : P \to M$ を，脳状態に心的状態を対応させる関数だとする．このとき，心身並行論はまず，$f(p_1) \to_M f(p_2)$，つまり脳状態 p_1 が脳状態 p_2 の物理的原因なのであれば，それに対応する心的状態 $f(p_1)$ は心的状態 $f(p_2)$ を心理的に引き起こすと主張する．
さらに逆に，心的状態に対応する物理的状態を割り当てる関数 $g : M \to P$ を考える．ある二つの心的状態 $m_1, m_2 \in M$ があったとき，前者が後者を引き起こす $m_1 \to_M m_2$ なら，対応する物理状態のほうでも因果的関係 $g(m_1) \to_P g(m_2)$ があるはずだと主張される．

発展 5.1

心身並行論からは，すべての物的事象は固有の心的対応物を持つこと，すなわち汎心論が帰結する．汎心論を避ける形で，しかし心的事象の間の因果関係を物的事象の間の因果関係に基づけるためには，どうすればよいだろうか．

6 ガロア接続*

最後に少し進んだ話題を一つ．本章ではこれまで，二つの順序間の対応として単調写像と同型写像を見てきた．単調写像 $f : X \to Y$ は，一方の順序 X を他の順序 Y へと対応づけるが，逆向きの対応（つまり Y が X にどう対応するか）については何も言わない．これが同型写像になるとき，逆向きの対応 $g : Y \to X$ が存在するが，このとき X と Y は同型，つまり順序としては全く同じになってしまう．同型よりもうちょっと緩い双方向の対応関係，つまり X, Y は順序として同一ではないものの，単調写像によってお互いに対応付けられている，というような状況はないのだろうか．以下に紹介するガロア接続は，そのような状況を捉えるものである．

定義 6.1: ガロア接続

$\langle X, \preceq_X \rangle, \langle Y, \preceq_Y \rangle$ を順序とする．単調写像（減少であってもよい）の組 $f : X \to Y, g : Y \to X$ が存在し，任意の $x \in X, y \in Y$ に対し，

$$x \preceq_X g(y) \iff f(x) \preceq_Y y \tag{G1}$$

が満たされているとき，f と g を X と Y の間の**ガロア接続** (Galois connection) と呼ぶ．

つまり任意の x について，それが g で飛ばされてきた $g(y)$ よりも小さいのは，x を f で Y に飛ばした $f(x)$ が，y より小さくなるとき，その時に限る．これは言葉で考えるより，図 6（左）で見たほうが理解しやすいかもしれない．

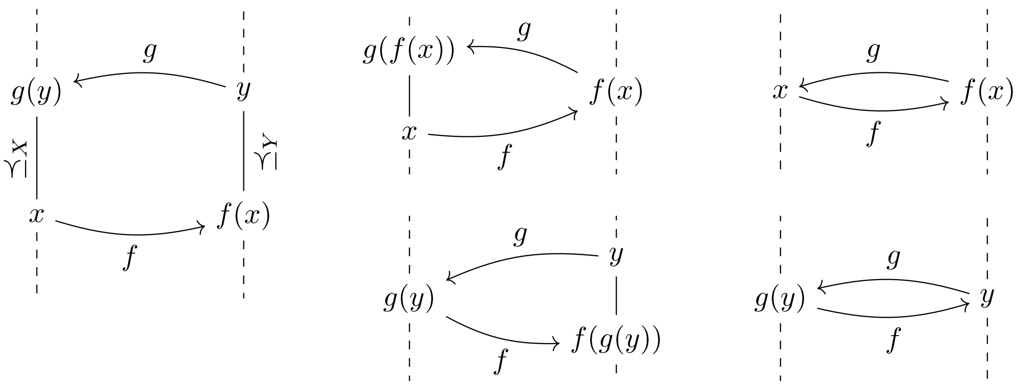

図 6　左と中央：ガロア接続の二つの等価な定義．右：順序同型．各コラムとも，左側が順序 X，右側が順序 Y を示す．

ところでガロア接続は，次のように定義することもできる：

定義 6.2: ガロア接続のもう一つの定義

単調写像の組 $f : X \to Y, g : Y \to X$ が，任意の $x \in X, y \in Y$ に対し，

$$x \preceq_X g(f(x)), \qquad f(g(y)) \preceq_Y y \tag{G2}$$

を満たす．

$f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ を合成した $g \circ f$ は，X から Y を経由して X に戻ってくる写像である．上の定義 G2 は，任意の x は，このように $g \circ f$ で行って戻ってくると出発点以上になっている（同じでも良い），ということを言っている．また逆に，任意の y は，$f \circ g$ で行って戻すと出発点以下になる（同じく，同じでも良い）．これはちょうど，図 6（中央）のような状況である．一方，図 6（右）は，順序同型を表している．順序同型では，行って戻ったら出発点にぴったり一致しなければならないが，ガロア接続は X 側ではそれが「上ブレ」することを許し，Y 側では「下ブレ」することを許す，という意味でより緩い対応関係になっている．

式 (G1) と (G2) は同値であるので，これらの定義は実質的に同じである．まず (G1)⇒(G2) を示そう．任意の $x \in X$ について，$y := f(x)$ と置いてみる．すると $\preceq_Y$ の反射性より，$f(x) \preceq_Y y$ である．(G1) の条件より，これは $x \preceq g(y)$ と同値，すなわち $x \preceq g(f(x))$ である．$f(g(y)) \preceq_Y y$ についても同様に示せる．

次に (G2)⇒(G1) を示す．そのために (G2) を仮定して，まず $x \preceq_X g(y) \Rightarrow f(x) \preceq_Y y$ を示す．そのため $x \preceq_X g(y)$ と仮定すると，f は単調写像なので $f(x) \preceq_Y f(g(y))$．(G2) より $f(g(y)) \preceq_Y y$ なので，$f(x) \preceq_Y y$ が従う．逆向き $f(x) \preceq_Y y \Rightarrow x \preceq_X g(y)$ も全く同様である．

ガロア接続のような構造は，数学では非常に多く出てくる（実際これは，圏論でいう「随伴」の顕著な一事例となっている）．しかしそれだけでなく，ガロア接続は哲学的にも非常に大きな含意と，広い応用の可能性を持っている．というのはそれは，ある一つの体系と，他の体系を，自然な仕方で接合してくれるからである．

事例 6.1: 外延と内包の双対性再訪

事例 4.6 では，モノの集合 $A \subset X$ から，それらのモノが共有する性質の集合への写像

$$f^* : A \mapsto \bigcap_{x \in A} f(x)$$

が単調減少となることを確認した．ここでは逆に，性質の集合 $P \in Y$ が与えられたとき，それらの性質すべてを持つモノの集合を返すような逆向きの写像 $g^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を構成しよう．これは次のように定義できるだろう

$$g^* : P \mapsto \{x \in X | P \subset f(x)\}$$

これは何をやっているかというと，任意のモノ x について，その性質のリスト $f(x)$ に P が含まれているか，つまり x が性質 P をすべて持っているかをチェックして，それを満たすような x のみを集めた集合を作れ，ということだ．なので例えば $P := \{$ 磯野家在住 $\}$ であれば，$g^*(P) = \{$ タマ, サザエ, カツオ, 波平, $\ldots\}$, $Q := \{$ 人間, 磯野家在住 $\}$ であれば，$g^*(Q) = \{$ サザエ, カツオ, 波平, $\ldots\}$ などとなるだろう．

f^* が $\mathcal{P}(X)$ から $\mathcal{P}(Y)$ への単調減少写像となったのと全く同様に，g^* は $\mathcal{P}(Y)$ から $\mathcal{P}(X)$ への単調減少写像となっている．これは，P に含まれる性質が増えれば増えるほど，それをすべて満たすモノは少なくはずだ，という直観からも明らかだろう（しかし本当にそうなっているか，定義から確認せよ）．

更に興味深いのは，単調減少写像の対 f^*, g^* がガロア接続となっている，ということだ．つまり任意のモノ集合 $A \subset X$ および性質集合 $P \subset Y$ に対し，

$$A \subset g^*(f^*(A)) \qquad f^*(g^*(P)) \quad \subset P$$

がなりたつ．ここでは右側の $A \subset g^*(f^*(A))$ だけ証明しよう．$a \in A$ とする．$f^*(A)$ は A に含まれるモノすべてが共有する性質であった．これは a 目線で見れば，a が持つ性質 $f(a)$ から，A に属する他のモノが持たない性質を削ることで作られる．よって $f^*(A) \subset f(a)$．ところが上の条件の P のところを $f^*(A)$ に置き換えれば，これはまさに a が $g^*(f^*(A))$ に含まれる条件である．そしてこれが任意の $a \in A$ でなりたつので，$A \subset g^*(f^*(A))$ が証明された．

さてガロア接続が示せたとして，気になるのはこの合成関数 $g^* \circ f^*$ が何を意味するのか，ということである．f^* は，与えられたモノの集合 $A \subset X$ に対して，それらがすべて持つ性質，すなわち A の**必要条件**を与える．そして g^* は，与えられた性質の集合 $P \subset Y$ に対して，それらをすべて持つモノだけからなる集合，つまり

P を**必要十分条件**とするようなモノの集合を与える．これを合わせて適用するとどうなるか．例えば $A :=$ { ソクラテス, クレオパトラ, 私 } だとしよう．これら 3 人に共通する性質はあるだろうか．私には「人間」であることくらいしか思いつかない．なので $f^*(A) =$ { 人間 } である．ではそれに g^* を適用するとどうだろうか．$g^*(f^*(A)) = g^*($ { 人間 } $)$ は「人間」であることを必要十分とするモノ全部，つまり全人類である．これは明らかに A よりも大きい．そしてこの例が示すのは，$g^* \circ f^*$ はある任意のモノの寄せ集めから出発して，それらが共通して持つエッセンスを抜き出し，今度はそのエッセンスを共有するものをすべて持ってくる，ということだ．このようにして形成されたモノの集まりは，対応する必要十分条件によって過不足なく定義されている．一方，最初に入力した集合 A はそうなってない．ソクラテス・クレオパトラ・大塚のトリオの必要条件はあっても（例えば「人間」),「これが満たされれば自動的にそのトリオに入る」というような十分条件はなさそうだ．よってそれを過不足なく定義するような必要十分条件は存在せず，その意味でこれは単なる寄せ集めである．つまり $g^* \circ f^*$ は，そうした寄せ集めを，必要十分条件を備えた正真正銘の「概念」（の外延）へと格上げするオペレーターなのである．

練習問題 6.1

上で定義された f^*, g^* について：

1. g^* が $\mathcal{P}(Y)$ から $\mathcal{P}(X)$ への単調減少写像となることを証明せよ．
2. $P \subset f^*(g * (P))$ を示せ．
3. $g^* \circ f^*($ { ナポレオン, ハチ公 } $)$ はどんな集合だろうか．
4. $f^* \circ g^*$ が何を意味するか考えてみよ．

事例 6.2: 行為と規範

ガロア接続は倫理的な状況のモデリングにも応用できる．X を行為の集合，Y を規範の集合と定める．事例 4.6, 6.1 と同様，任意の行為 $a \in X$ に対して $f(a) \subset Y$ をその行為を正当化する規範の集合，そして $f^*(A)$ を行為集合 $A \subset X$ に含まれる行為のすべてを正当化する規範の集合，つまり $\bigcap_{x \in A} f(x)$ を与える写像として定める．
例えば $A =$ { ヘイトスピーチを規制する } だとしよう．今，Y の元として

n_1:「言論の自由はあらゆる思想に保証されるべき」
n_2:「公共の安全を第一に優先すべき」
n_3:「憎悪を煽る表現は制限されるべき」

という規範を考えるとすると，$f^*(A) = \{n_2, n_3\}$ となるだろう．
また逆に g^* を，規範集合 $N \subset Y$ に対し，その規範によって正当化される行為の集合を与える写像，つまり $g^*(N) = \{x \in X | N \subset f(x)\}$ と定義する．これは上例と全く同じ構成なので，f^*, g^* は単調減少写像であり，$\mathcal{P}(X)$ と $\mathcal{P}(Y)$ の間のガロア接続を構成する．
合成関数 $g^* \circ f^*$ は，任意の行為を入力したとき，その行為を正当化する規範が正当化する行為のすべてを返す．なのでもしある人が行為集合 A が正当化されると考えて

いるのであれば，その人は同時に $g^* \circ f^*(A)$ も正当化されると考えるべきであろう．つまりそれは，人が暗黙裡に正当化されるとみなしている行為をあぶり出す役目を果たす．