

4. 位相

2022 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2022 年 10 月 17 日

1 位相とは何か・なぜそれを学ぶのか

本章の主題は位相 (topology) である。大雑把にいうと、位相とは空間についての学問であり、近さや距離といったものを扱うための道具立てを与える。我々が見てきた集合は、いわばそれぞれが独立した、つぶつぶの要素の集まりであって、その間の近さや距離みたいなものは考えられていなかった。確かに現代数学においても、空間は点の集まり、つまり集合として扱われるのだが、しかし単なる集合には我々が「空間」に期待する様々な性質、例えば点と点の間の距離や近さといったものが備わっていない。位相は、こうした幾何学的な性質を集合に与える。その意味で、位相空間（位相が備わった集合）は、最もプリミティブで抽象的な意味での「空間」の概念だということができる^{*1}。

このような次第で、位相は物理学等において非常に重要な役割を持っている一方、哲学においては、それほど重視されてこなかった。しかしながら、空間や近さという概念は、哲学においても頻出の重要概念である。多くの場合、そうした議論では暗にユークリッド空間がイメージされることが多いが、ユークリッド空間というのは実は非常に特殊で「リッチ」な空間概念なので、そのイメージに引きづられると物事の理解を歪めてしまうかもしれない。それを防ぐためにも、位相一般についての知識を持っていることは望ましい。

位相を考えるには、二つのアプローチがある。一つは、集合上に距離を導入して、距離空間（距離が定められた集合）の上で位相的性質を定めていく方法。もう一つは、集合上のそれぞれの点の間の類似性を示すグルーピング（これを「開集合」と呼ぶ）を与えて、そこから距離を導く方法。これらはトンネルを右から掘るか左から掘るかの違いのようなもので、最終的には同じことである。前者は直感的でイメージしやすいため、数学の教科書でも前者から入るものが多い。しかし本講では、抽象的ではあるがより哲学的な含意が見えやすい後者のアプローチをとり、位相構造を開集合の族として与えることにする。

^{*1} プリミティブ、というのは、例えば物理学などでおなじみの空間概念は、位相以外の条件をさらに必要とするからだ。具体的には、それらは多様体 (manifold) といわれる、のであるが、本講では扱わない。

2 位相空間

前述の通り、位相空間のアプローチでは、集合上に「似た者同士」を示すグルーピングを与えることから始まる。これは、集合 T の部分集合を「似た者グループ」として指定していくことにほかならない。このような「似た者グループ」としての部分集合を、**開集合** (open set) という。位相空間とは、こうした開集合の族 \mathcal{O} が定義された集合である。しかし開集合の族は、一定のルールに従って構成されなければならない。このルールが位相空間を定める公理となる。さっそく定義を見てみよう。

定義 2.1 (位相空間) 集合 T の部分集合の族 \mathcal{O} が以下の条件を満たすとき、 \mathcal{O} は T の**位相**であるといい、 T を (位相 \mathcal{O} を持つ) **位相空間**という。

1. $\emptyset, T \in \mathcal{O}$
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
3. 任意の数 (無限であっても良い) の $O_i \in \mathcal{O}$ に対し、 $\bigcup O_i \in \mathcal{O}$

それぞれ説明していこう。まず条件 1 によれば、空集合 \emptyset と集合全体 T はそれぞれ開集合である。条件 2 により、二つの開集合があったとき、その共通部分も開集合になっている。これを繰り返すと、有限個の開集合の共通部分は開集合である、ということも帰結する。条件 3 は、複数の開集合があったとき、その合併も開集合になる。条件 2 の共通部分との違いは、合併される開集合は無限個であっても構わない。条件 2,3 を言い換えると、位相は有限個の交わりと無限個の和に対して閉じている、ということになる。

事例 2.1 $T := \{a, b, c\}$ とし、開集合として $\mathcal{O} := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ とすると、これは T の位相を定める。同様に、

1. $\mathcal{O}' := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
2. $\mathcal{O}'' := \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

がそれぞれ T の位相となっているかどうか、考えてみよう。

事例 2.2 位相空間の定義はいささか抽象的すぎるので、例で考えてみる。ここで T を地球上に存在する個物の集合とすると、それらに共通する**性質** (property) を抜き出すことで個物を「似た者グループ」に分類することができるだろう。例えば「赤い」という性質グループには、あなたの近所のポストや昨日食べたトマトが属する。一方、「鉄製」というグループには、ポストは含まれるがトマトは入っていない。このように様々な性質は異なった仕方で個物をグルーピングする。こうして種々の性質 (厳密にいうとその外延 extension) は、個物の集合 T の部分集合である。この部分集合としての性質は、 T に位相を定める。

1. まず「無」と「存在」という性質は、それぞれ \emptyset と T 自体に対応する。
2. 二つの性質があれば、両者に共通する性質も存在する。

3. 複数の性質があれば、「そのうちどれか一つを性質をもつ」という性質が存在する.

これらの公理が、我々の持っている性質観と一致するか、考えてみよう.

事例 2.3 いま W を可能世界の集合とし、 A を命題の集合としよう. それぞれの命題 $a \in A$ について、その命題が成り立っている可能世界を集めたものを $W_a \subset W$ と表し、「 a 世界 (a -worlds)」と呼ぶ. つまり $W_a := \{w \in W | a \text{ is true in } w\}$ である. これが W に位相を導入する (つまり位相空間の公理 1-3 をみたとす) ことを確認せよ. この位相における開集合は各 a 世界であって、それは「命題 a が成立している」という限りで「似ている」可能世界のグループを形成している.

3 閉集合

O が T の開集合のとき、その補集合 (つまり T から O を除いた部分) を **閉集合** (closed set) という. 閉集合を F , それを集めた閉集合族を \mathcal{F} と書くと,

$$F \in \mathcal{F} \iff F^c \in \mathcal{O}$$

(ただし $F^c := T \setminus F$ と定めたことを思い出そう). つまりある部分集合 F が閉集合であるのはその補集合 F^c が開集合であるとき、そのときのみである.

\mathcal{O} が T の位相となっているとき、閉集合族 \mathcal{F} に対して以下がなりたつ.

1. $\emptyset, T \in \mathcal{F}$
2. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$
3. 任意の数 (無限であっても良い) の $F_i \in \mathcal{F}$ に対し、 $\bigcap F_i \in \mathcal{F}$

2 と 3 はちょうど位相空間の定義における開集合族の規定 2,3 の共通部分と合併をそれぞれ入れ替えたものであることに注意. つまり閉集合族は開集合族とは逆に、有限個の和と無限個の交わりに対して閉じている. 逆に、閉集合族がこの 3 つの条件を満たす時、対応する開集合族は定義 2.1 の位相の定義を満たす. なので開集合ではなく、こちらを位相空間の定義として使っても良い.

閉集合は開集合とならぶ重要な概念であり、両者の区別にこそ位相の面白みがあると言えろのだが、本講義ではあまり用いない. 一つだけ心に留めておいてほしいのは、ある部分集合 $B \subset T$ が閉集合であることは、必ずしもそれが開集合であることを妨げない、ということだ. 実際、 \emptyset, T は定義より開集合でありまた閉集合でもある. これ以外にも同時に開かつ閉であるような部分集合がありえるし、また逆に、開でも閉でもない集合というものもありえる. ちなみに英語では、開でありかつ閉であるような集合を *clopen* と呼ぶ.

事例 3.1 集合 T に対して、その位相を冪集合 $\mathcal{P}(T)$ で定める、つまり $\mathcal{O} = \mathcal{P}(T)$ と定めることができる. このとき、任意の部分集合 $X \subset T$ について、 $X \in \mathcal{P}(T)$ かつ $X^c \in \mathcal{P}(T)$ であるので、 X は開かつ閉 (clopen) である.

事例 3.2 事例 2.3 で見た可能世界の位相において、任意の命題 $a \in A$ について $W_a \in \mathcal{O}$ としたとき、それぞれの a 世界 W_a は clopen だろうか。

4 さまざまな位相

上で見てきたように、同じ集合 T に対して、異なる位相を入れることができる。これは上のイメージでは、「何を似たものとするか」というグルーピングの仕方は一通りではなく、様々な仕方が考えられるということだ。

まず極端なケースとして、空集合と全体集合のみを開集合とする位相空間 $\mathcal{O} = \{\emptyset, T\}$ が考えられる。これを**密着位相** (coarsest topology) という。密着位相は何も含まれないグループか、すべてを含むグループしか持たない。だからここではすべての要素 $x \in T$ が一蓮托生に「密着」してしまっている。

逆の極端ケースは、すべての部分集合を開集合とする位相空間 $\mathcal{O} = \mathcal{P}(T)$ である。これを**離散位相** (discrete topology) という。ここでは、任意の部分集合が「似た者」グループを作る。とりわけ、すべての要素 $x \in T$ は、それ自身が開集合 $\{x\}$ になっている。なのですべての要素がより分けられてしまっていて、バラバラ (離散) になっている。

これを両端として、他にも様々な位相が考えられる。ある位相 \mathcal{O}_1 の開集合がすべて、別の位相 \mathcal{O}_2 に含まれるとき、つまり $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ のとき、 \mathcal{O}_2 は \mathcal{O}_1 より**細かい** (finer)、 \mathcal{O}_1 は \mathcal{O}_2 より**粗い** (coarser) という。 \mathcal{O}_2 のほうが要素をより細かくグルーピングしている、というイメージだ。この意味でいうと、密着位相は最も粗く、離散位相は最も細かい位相空間ということになる。位相空間のモデリングでは、密着位相や離散位相はあまりおもしろくなく、対象に合わせた「ちょうどいい」細かさの位相を入れることがキモとなってくる。

練習問題 4.1 事例 2.1 でとりあげた集合 $T := \{a, b, c\}$ 上の位相 $\mathcal{O} := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ について、(1) \mathcal{O} より粗い位相、および (2) より細かい位相、をすべてあげよ。

発展 4.1 事例 2.3 で見たように、命題の集合 A は可能世界に位相を定める。いま、 $A \subset A'$ としたとき、それぞれの命題集合によって定められる可能世界の位相 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ はどんな関係にあるだろうか。特に、 \mathcal{O}' は \mathcal{O} より細かいだろうか。

5 連続写像

6 分離性