7. 群

2023 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2023 年 10 月 2 日

1 群

群 (group) は，以下のようにモノイドの特殊ケースとして定義される．

定義 1.1 (群)**.** モノイド $(M, \circ, i)$ が，モノイドの *2* 要件に加え次を満たすとき，群 *(group)* であるといわれる：

$$\forall m \in M, \exists m' \in M (m \circ m' = m' \circ m = i).$$

つまりすべての元 $m \in M$ に対して，それと掛け合わせると単位元になるような $m' \in M$ が存在する．このような m' を m の逆元 *(inverse element)* といい，しばしば m^{-1} と表す（場合によっては $-m$ などとも書かれる）．つまり群とは各元が逆元を持つモノイドである．

単位元 i は「何もしない」ことなので，$m \circ m^{-1} = i$ は元と逆元を合成すると結局「何もしない」ことと同じだといっている．このように，群のすべての元には，それをキャンセルする逆元が備わっている．

逆元については，次の性質が成り立つ．

1. 任意の元 $m \in M$ に対し，その逆元は一意的に定まる．
2. 逆元の逆元はもとに戻る：$(m^{-1})^{-1} = m$.
3. 任意の $m, n \in M$ に対し，$(mn)^{-1} = n^{-1}m^{-1}$.

証明は次の通り：

1. 仮に m の逆元として n, n' があるとしてみよう．すると $(n'm) = (mn) = i$ より，$n = in = (n'm)n = n'(mn) = n'i = n'$ となり，n と n' が等しいことが示される．
2. $m^{-1}m = i$ であるが，これは m^{-1} の逆元（すなわち $(m^{-1})^{-1}$）が m であると述べていることに等しい．
3. $n^{-1}m^{-1}$ を mn の左ないし右からかけると i になることで確かめられる．例として左からかけると $n^{-1}m^{-1}mn = n^{-1}in = n^{-1}n = i$.

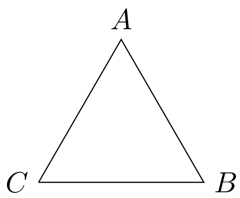
事例 1.1. モノイドの事例として足し算の体系を見たが，足し算の「逆」は引き算であり，引き算とは負の数を足すことにほかならない．よって自然数に変えて（負の数を含む）整数 $\mathbb{Z}$ を

考えると，$(\mathbb{Z}, +, 0)$ は二項演算 $+$ について群となる．ここで $m \in \mathbb{Z}$ の逆元は $-m$ であり，実際 $m + (-m) = 0$ がなりたつ．

練習問題 1.1. 掛け算の場合の逆元はなんだろうか．$(\mathbb{Z}, \times, 1)$ は二項演算 $\times$ について群となるだろうか．有理数 $\mathbb{Q}$ や実数 $\mathbb{R}$ だったらどうだろうか．

2 群と対称性

数学において，**対称性** (symmetry) とは，対象をそのままに保つような変換群である．これはどのようなことか，下のような正三角形で考えてみよう．



この三角形の持つ対称性，つまりこの幾何学的対象を「そのままに保つ」ような変換とはなんだろうか．例えばいまあなたが目を閉じている間に，私が三角形を $120 \times n$ 度（ただし n は整数）右に回転させても，目を開けたあなたは以前との違いに何も気が付かないだろう．その意味で，$120 \times n$ 度回転は正三角形をそのままに保つ変換＝対称性である．それ以外にも，それぞれの頂点から対辺の中間地点へとおろした軸に沿って線対称をとっても，図形は変わらない．よってこうした鏡映反転も対称性である．今，120 度，240 度の時計回り回転をそれぞれ c_1, c_2 と表し，点 A, B, C を通る軸に沿った鏡映反転をそれぞれ $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ と表す．これに「何もしない」変換（これはもちろん三角形をそのままに保つ）i を加えると，$\{i, c_1, c_2, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$ は群をなす．この群の演算は下の積表によって表すことができる．

	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C
i	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C
c_1	c_1	c_2	i	σ_C	σ_A	σ_B
c_2	c_2	i	c_1	σ_B	σ_C	σ_A
σ_A	σ_A	σ_B	σ_C			
σ_B	σ_B	σ_C	σ_A			
σ_C	σ_C	σ_A	σ_B			

例えば 3 列目（c_1 の列）は，120 度右回転させた後で各行の変換を行うとどうなるか，ということを示している．「何もしない」i の場合は当然 c_1 のままである．c_1 を再び適用すれば，240 度右回転 c_2 になる．一方 240 度右回転は 120 度左回転と同じなので，$c_2 \circ c_1 = i$，つまり c_2 は c_1 の逆元である．また 120 度右回転の後に A 軸で鏡映反転 σ_A させることは，C 軸での鏡映反転 σ_C と同じことになる（実際に図などを用いて確認してみよう）．このようにして，他の組み合わせについても変換を合成した結果を調べることができる．（練習問題：右下の 9 つの空欄を埋めてみよう．）

さて，我々はモノイドのところでも積表を見た．モノイドと群の積表の一番顕著な違いは，群の積表の各行・列には，必ず一回だけ単位元 i が現れる，ということである．単位元が現れるということは，そのペアが互いに逆元になっているということである．よってこのことは，

群の各元は必ず一つの逆元を持つ，という事実に対応している．さらに注意してみれば，単位元に限らず，積表の各行・列はすべての元を，それぞれ一つだけ含んでいる，ということに気がつく．これはこの群でたまたまそうなっているのではなく，すべての群に共通する性質である．

以上で我々が確認したのは次のことである．(1) 対象に施してもその対象を変えないような変換を対称性ないし対称変換という．(2) 対称変換を重ねて施したものも対称変換になる．(3)「何もしない」という変換も当然対称変換である．(4) ある対称変換に対して，それを「キャンセル」するような逆変換が存在する．これが,「対称変換は群の構造を持つ」ということの意味である．

さて，上の例は正三角形を保つような対称変換群であった．図形が変われば，その対称性も当然異なる．例えば A を頂点とする二等辺三角形では，$\{\sigma_A, i\}$ のみが対称変換である．一方，円の場合はあらゆる角度の回転，および中心点を通るあらゆる軸での鏡映が対称変換になる．この意味において，二等辺三角形よりも三角形が，そして三角形より円のほうがより対称的であると言える．つまり対象の対称性は，その変換群によって定められている．

練習問題 2.1. 正方形および長方形の対称変換をそれぞれ確定せよ．

練習問題 2.2. *5* 章で見た準同型は，群についても同様にいえる．群 $(G, \circ, i)$ から群 $(G', \circ', i')$ への準同型写像とは，写像 $f : G \to G'$ であって，すべての $x, y \in G$ について $f(x \circ y) = f(x) \circ' f(y)$ が成立するものである．例えば上の正三角形と二等辺三角形の対象変換の間に，以下のような写像を構築すると，これは両群の間の準同型写像になっている：

$$f(c_1) = f(c_2) = i, \quad f(\sigma_1) = f(\sigma_2) = f(\sigma_3) = \sigma_A.$$

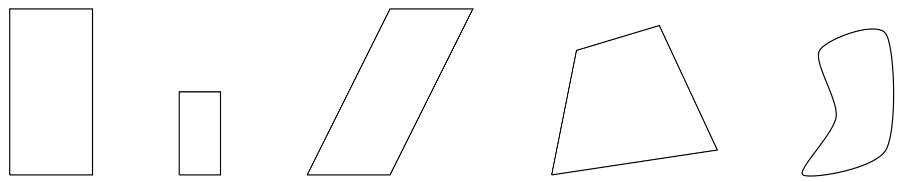
1. これが準同型写像の定義を満たすことを確認せよ．p

2. 上の練習問題で求めた正方形から長方形の対象変換群への準同型写像を構築せよ．

3　対称性の哲学的含意

対称性の問題は，陰に陽に，多くの哲学的議論で現れてくる．またそれだけでなく，対称性は現代の数学・物理学においても非常に重要な概念である．対称性の重要性が最初に明確に意識されたのは，19 世紀後半に数学者のフェリックス・クラインが，弱冠 23 歳（！）でエルランゲン大学の教授に就任した際に提唱した，エルランゲン・プログラムである．当時は，19 世紀初頭の非ユークリッド幾何学の発見に導かれ，射影幾何学など様々な幾何学が林立していた．クラインのプログラムは，こうした様々な幾何学を，対称性の観点から分類・統合する，というものである．そのアイデアをざっくり説明すると，次のようなものである．

図 1 の左 (a) に書かれた長方形は，様々な幾何学的性質を持っている．まずそれは線で囲まれており，その線は 4 本の直線であり，対辺の長さは等しく，隣接した辺同士は直角で交わり，さらには各辺は具体的な長さ（印刷された用紙によって異なるだろうが，例えば長辺 3cm）を持っている．しかしこれらの性質全てが同じステータスを持っているわけではなく，いくつかはより「根源的」であるように思える．この性質間の質的違いは，対称性の観点から理解できる．例えば辺の長さは，相似変換によって変わってしまうが，それ以外の性質は不変に保た



(a) (b) (c) (d) (e)

図 1　幾何学図形（長方形）に対する様々な変換.

れる (b)．角度はアフィン変換 (affine transformation) と呼ばれる変換により変わるが，対辺の長さが等しいという特徴は保たれる (c)．しかしその特徴も，ある光源から出た光でこの図形を他の面に射影する射影変換 (projection transformation) では変わってしまう (d)（プロジェクタから斜めに投影するとスライドの画像がずれてしまうことを思い起こすとわかりやすい）．また最後に，位相のところで見た連続変換を施せば，不変にとどまる性質は「線で囲まれている」ということだけである (e)．これらの変換はそれぞれ，別個の（しかし互いにネストした）群を形成する．そして上で述べた各性質は，異なる変換群に対する対称性を例示していると考えて良い．クラインはこうした洞察から，幾何学とは，何らかの変換群に対して不変 (invariant) にとどまる性質，すなわち対称性を探求する学問である，と特徴づけた（例えば射影幾何学は，射影変換に対して不変な性質を探求する）．

逆に見れば，「幾何学的性質」というものは，変換群に対する対称性として定義することができる．そして何が正真正銘の幾何学的性質とみなされるかは，扱う幾何学／変換群によって変わってくる．例えば「角度」という概念は，ユークリッド幾何学では意味があるがアフィン幾何学では意味がない．したがって，「正三角形」はユークリッド世界では客観的に存在するが，アフィン世界ではそうではない．このように，性質やモノの実在性を対称性として特徴づけるアプローチは，数学に限らず，物理学でも重要な役割を担ってきた．例えば古典物理学における物体（古典力学において「存在」するもの）は，ガリレオ変換とよばれる変換群に対して不変性を保つ．一方，相対論において正真正銘のモノないし性質と認められるものは，それとは別の，ローレンツ変換に対して不変でなければならない．ローレンツ変換は時間軸と空間軸を「混ぜる」変換なので，例えばものの「長さ」は相対論においては客観的な性質ではない（光速に近い速度で移動すると，同じものが違った長さに見える）．

事例 3.1 (有意味性と対称性)．京都の平均気温は 4 月は摂氏 14 度，8 月は 28 度である．しかしこれをこれをもって，「京都の 8 月は 4 月の 2 倍暑い」ということは意味をなさない．というのも気温を華氏で表現すれば，それぞれ 57 度と 82 度になり，「2 倍」という関係は成立しないからだ．一般に，温度はアフィン変換 $y = \alpha x + \beta$ 可能[*1]なので，こうした変換において不変に保たれる性質のみが温度についての客観的性質として認められる．アフィン変換は群をなすので[*2]，これは対称性である．ここから，ある対象（温度）についてどんな言明が有意味であるかは，その対象の対称性，すなわちそれが許容する変換群を定めればよい，という方針が従う．これは測定理論（*theory of measurement*）の中心的な考え方である *(e.g, Narens, 2007)*.

[*1] 例えば y を華氏，x を摂氏とすると，$y = 1.8x + 32$.

[*2] アフィン変換 $y = \alpha x + \beta$ を (α, β) で表すと，単位元は $(1, 0)$．$(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ という 2 つの変換に対し，合成は $(\alpha'\alpha, \alpha'\beta + \beta')$．変換 (α, β) の逆元は $(1/\alpha, -\beta)$．結合律については明らか.

事例 3.2 (対称性議論：逆転クオリア)**.** 逆に，対称変換は対象の本質を変えないのであるから，そうした変換によって変わるような性質は，実在的ないしは客観的な性質ではない，という議論戦略も存在する．そうした議論は一般に対称性議論 *(symmetry argument)* と総称される．有名な対称性議論として逆転クオリア *(inverted qualia)* がある．通常の人間が「赤」と感じる波長の光を見ると，「緑」に見えるような人を考えよう．そうした人は，我々が木の葉を見るときに感じる質感を熟れたリンゴを見るときに感じており，また逆もしかりであるが，しかし行動においては全く差異を見いだせないだろう（むしろクオリアが逆転しているのはあなたかもしれない）．これは，「今，赤（緑）の質を感じている」という性質を互いに入れ替えるような変換（これは群である）は，人間の状態一般を不変に保つ対称性変換であるということである．よってそうした変換において変化する性質は，実在的な性質ではない，したがってクオリアについての事実は存在しない．これはクオリアについての対称性議論である．

事例 3.3 (対称性議論：グルーパラドクス)**.** 今まで観測されたエメラルドはすべて緑 *green* であったとしよう．ここから，「全てのエメラルドは緑である」と考えるのは妥当な帰納推論であるように思える．しかしいま，「*2025* 年以前に観測され緑であるものと，*2025* 年以降に観測され青であるもの」を指すグルー *grue* という述語を導入する．すると今までに観測されたエメラルドはすべてグルーなので，「全てのエメラルドはグルーである」という仮説も同様に支持されそうに思えるが，これは明らかにおかしい．一つの解決策は，「*2025* 年」という特定の時間を含む述語はおかしい，と考えることかもしれない．しかしいま，「*2025* 年以前に観測され青であるものと，*2025* 年以降に観測され緑であるもの」を指すブリーン *bleen* という述語を導入しよう．すると述語「緑」は，「*2025* 年以前に観測されグルーであるものと，*2025* 年以降に観測されブリーンであるもの」というように定義し返される．つまりグルー／ブリーンを使う人からすれば，「緑」のほうこそ特定の時間を含んでしまっている！これは *Goodman (1955)* によって提唱された，グルーパラドクスと呼ばれる帰納推論の未解決問題である．これは緑／青という述語と，グルー／ブリーンという述語は互いに変換可能であり，よって緑仮説とグリーン仮説では優劣をつけることができないはずだという，対称性議論として理解できる．

事例 3.4 (還元主義)**.** 我々は上で，考える対称性の違いにより幾何学的性質の「根源性」の度合いのようなものが考えられることを見た．そして現代物理学において，実在的性質は対称性，つまり変換群に対する不変性として定義されることを見た．同じようなことは，他の科学にもいえるだろうか．例えば，何らかの変換群に対する不変性として化学的性質，生物学的性質，などを定義していくことは可能だろうか．

またさらに，そのように定義されたとき，それぞれの変換群は幾何学のときのような階層構造を持っているだろうか．例えば，化学的・生物学的性質はローレンツ変換に対しては不変だと期待できるかもしれない（なぜならそれは物理的性質を不変に保つのだから）．同じように，生物学的性質は化学的変換に対して不変だろうか．存在論的還元主義は，この問いに肯定的に答える：すなわちそれによれば，各科学分野における客観的性質は，その分野を特徴付ける変換群によって定義され，なおかつその変換群は階層的な構造を持っている．

練習問題 3.1. 上で述べた変換群の階層構造を，群準同型の言葉で表わせ．また群準同型が半順序を成すという練習問題 *5.3* の結論は，還元主義的科学観に対しどのような含意を持つだろうか．

練習問題 3.2. 還元主義に従い，ミクロ理論 T の性質を特徴づける変換群 f からマクロ理論

T' の変換群 g への準同型写像があると仮定しよう．このとき，T と T' の性質の間にはどのような関係が成り立っているだろうか．具体的には，準同型写像の存在は T' の性質が T の性質に付随 *(supervene)* することを含意するだろうか．また逆に，付随性が満たされるとき，f から g への準同型写像が存在するだろうか．

参考文献

Goodman, N. (1955). *Fact, Finction, and Forecast.* Harvard University Press.

Narens, L. (2007). *Introduction to the Theories of Measurement and Meaningfulness and the Use of Symmetry in Science.* Psychology Press.