4. 束とブール代数

2023 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2023 年 10 月 5 日

1　関係から代数へ

我々は前章で，一定の公理を満たす二項関係を備えた集合として，順序構造を定義した．順序は整数 $\mathbb{N}$ や実数 $\mathbb{R}$ など，様々な数学的集合が持つ基本的な構造でもある．しかし順序だけでは，数の構造は組み尽くせていない．なんとなれば，数は単に順序付けられているだけでなく，その中で足し算や掛け算などの演算が定義されているからだ．そうした演算が定義された数学的構造を，一般に**代数** (algebra) という．この章では，そうした代数のプリミティブな形として，**束** (lattice)，およびその延長線上に定義される**ブール代数** (boolean algebra) を紹介する．実は束自体，順序構造の延長線上にあるもので，この意味で本章で扱う対象はすべて半順序でもある．

ブール代数は，とりわけ論理学との関係において非常に重要である．後述するブール代数の演算子である「交わり」$\wedge$ と「結び」$\vee$ は，その見た目通り論理学における「かつ」と「または」に対応し，全体として論理計算の代数的構造を示している．またそれ以外にも，本章で見るように，束は我々の「概念」が持つ階層的構造をモデル化するのにも用いることができる．このように，束は，言ってみれば「順序に毛が生えたもの」に過ぎないにもかかわらず，様々な可能性を持ち，なおかつ突き詰めると奥が深い．その本章では，その一部を概観してみよう．

2　束

次に紹介するのは，**束** (lattice) である．

定義 2.1 (束)

> 束とは半順序集合 $\langle X, \preceq \rangle$ であり，どの *2* 元 $x, y \in X$ に対しても，上限および下限が存在するものである．x, y の上限を結び *(join)* といい，$x \vee y$ で表す．またその下限を交わり *(meet)* といい，$x \wedge y$ で表す．

つまり束は特殊な半順序集合と定義される．束を特徴づける性質は，すべてのペアが結びと交わりを持っている，ということである．x, y の結び $x \vee y$ は x や y よりも「大き」く，なおかつそうしたものの中で最小のものとして定義される（交わりはその逆）．視覚的には，束の任意の要素のペアは結びと交わりによって上下で束ねられている，とイメージできる．

練習問題 2.1

$\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ は束である．X の 2 つの部分集合 $A, B \in \mathcal{P}(X)$ の結びと交わりはなんだろうか．

結びと交わりは，X の 2 つの元 x, y を別の元 $x \vee y, x \wedge y$ に対応させる「演算」だとみなすこともできる（ちょうど足し算が 2 つの数に別の数を対応させるように）．この演算は足し算や掛け算のように結合的かつ可換である．つまり交わりについてだけ見れば，$x, y, z \in X$ に対し

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \tag{1}$$
$$x \wedge y = y \wedge x \tag{2}$$

が成立する（気になる人は確認してみてほしい）．

束では任意の 2 点の結び・交わりがあるので，$x \vee y \vee z \vee \ldots$ というように結び（あるいは交わり）を連結していけば，任意の有限集合 $A \subset X$ が上限と下限を持つことがわかる．とくに X 自体が有限の場合，X 全体の上限と下限，つまり最大元と最小元が存在する．束の最小限を 0，最大限を 1 と書く．つまりすべての $x \in X$ について，$0 \preceq x \preceq 1$ が成り立つ．こうして，有限束は，上と下がきゅっと縛られたダイアモンド型 ($\Diamond$) をしている．

注意

ここで「有限」と釘を差していることには理由がある．というのも無限集合の場合，その中の任意のペアが上限・下限を持ったとしても，集合全体の上限や下限は存在しないことがあるからだ．簡単な例として，自然数全体の全順序集合 $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ を考えてみよ．いかなる 2 整数 $n, m \in \mathbb{N}$ について，その上限・下限は m, n のどちらか（$m = n$ の場合は両方）なので，これは束である（全順序なので「束」っぽさはあまりないが）．しかし明らかに $\mathbb{N}$ 全体ないしその無限部分集合（例えば「423 以上の数」）には上限が存在しない．このように，無限束は必ずしも最小元や最大元を持つとは限らない．有限無限に関わらず，任意の部分集合が上限・下限を持つような束を，完備束 *(complete lattice)* という[*1]．有限束は必然的に完備だが，無限だとそうでない場合がある．このように，無限はときにややこしい事態をもたらす．数学的にはそこが面白いところでもあるのだが，とりあえず本授業ではそうしたややこしさを避けるため，以下では主に有限束に話を限って進めることにする．

以上で，束を特徴付ける公理と，そのもとで定まる演算 $\vee, \wedge$ の大枠を見た．こうした公理から，演算についての様々な事実，すなわち定理が帰結する．実際そうした定理は沢山あり，すべて公理から示すことができる（上の (1)-(2) も定理である）．ここでは更に，以下の 3 つを挙げておこう：すべての $x, y \in X$ に対し，

$$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x \tag{3}$$
$$1 \wedge x = x, \quad 0 \vee x = x \tag{4}$$
$$x \wedge (y \vee x) = x = (x \wedge y) \vee x. \tag{5}$$

練習問題 2.2

$\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ で *0,1* に対応するのはなにか．またそこで上の *(3)-(5)* が成立することを確かめよ．

事例 2.1

束は，抽象的概念の間の階層構造を表すためにしばしば用いられてきた．C を概念の集合，

$a \preceq b$ を「a は b の事例（インスタンス）である」という関係だとしよう．すると例えば *human* $\preceq$ *animal* であり，*human* $\vee$ *dog* $=$ *mammal* だといえる．また *rational* $\wedge$ *animal* $=$ *human* かもしれない．つまり結びは複数の事例を抽象して共通概念を得る操作，交わりは複数の概念を兼ね備える具体例を作り出す操作だと考えることができる．このように，概念間の抽象構造（しばしば「アリストテレス的抽象主義」）は束によってモデル化できる．

練習問題 2.3

概念の束 $\langle C, \preceq \rangle$ において，*0,1* に対応する概念はあるだろうか．

3 ハイティング代数

有限束にさらに公理を加えて，パワーアップさせてみよう．

定義 3.1 (ハイティング代数)

（有限）ハイティング代数 *(Heyting algebra)* とは，*0* と *1* を持つ束 $\langle X, \preceq \rangle$ であり，かつ結びと交わりが以下の分配則 *(distributive law)* を満たすものである：すべての $x, y, z \in X$ に対し，

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{6}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{7}$$

結びと交わりを $+$ と $\times$ に置き換えれば，これは小学校で習った分配則と全く同じ形をしている[*2]．ハイティング代数とは，この分配則が成り立つ完備束である．

ハイティングは直観論理 (intuitionistic logic) で知られるオランダの数学者．実際，ハイティング代数は直観論理（排中律が成り立たない）のモデルとして提唱された．また後の章で見るように，位相空間とも密接に対応している．

上で，束には 2 つの演算 $\vee, \wedge$ が備わっていることを見た．ハイティング代数では更に，**含意** (implication) と呼ばれる次の演算 $\Rightarrow$ が定義できる．

$$z \preceq (x \Rightarrow y) \iff z \wedge x \preceq y$$

これはどう読めばよいのだろう．まず左辺は，x, y という 2 つの元に「含意」演算を施して得られる元 $x \Rightarrow y$ が他のある元 z よりも上にある，という事態を表している．そして右辺と合わせた条件式全体は，こうした事態が成立するのは，$z \wedge x$ が y より下にあるとき，そのときのみであるということをいっている．このようにしてこの式は，「含意」演算を施して得られた元 $x \Rightarrow y$ が束上で占める位置を右辺によって定めることにより，演算を定義している．

具体的には，$x \Rightarrow y$ は $z \wedge x \preceq y$ を満たすような z たちの上限になっている．y 自身は $y \wedge x \preceq y$ を満たすので，$y \preceq (x \Rightarrow y)$，つまり $x \Rightarrow y$ は y の上にある．しかし同時に，$x \Rightarrow y$ と x の交わりは y より下，つまり $(x \Rightarrow y) \wedge x = y \wedge x$ でなければならない．$x \Rightarrow y$ はそのような条件を満たす元の中で一番上にある元である．

[*2] 実際，圏論的な観点からいえば，結びと足し算は余積 (co-product)，交わりと掛け算は積 (product) という一般的な構造の例である．

事例 3.1

含意の定義はややこしい．しかし論理学を知っていると少しそのややこしさは和らぐかもし

れない．その名前から推察されるように，含意 $x \Rightarrow y$ は命題論理における実質含意を念頭においている．そしてその記号から推察されるように，結び $\vee$ と交わり $\wedge$ はそれぞれ「または」と「かつ」に対応している．では順序 $\preceq$ は何に対応しているかというと，帰結関係 $\vdash$ である．例えば $x \wedge y \preceq z$ は，$x \wedge y \vdash z$，つまり x かつ y なら x が成り立つ，という論理的真理を表している（同様のことを $\vee$ でも確かめよ）．これを念頭に上で定義した含意を論理式に翻訳すると，

$$z \vdash (x \Rightarrow y) \iff z \wedge x \vdash y$$

となる．これは，z から「x ならば y」が帰結するならば，「z かつ x」から y が帰結するし，また逆もしかり，という演繹定理 *(deduction theorem)* を表している．こう考えると，上で述べたように $x \Rightarrow y$ が y の上にあるのも納得できるし（y が成り立っていれば $x \Rightarrow y$ は必ず成り立つ），$(x \Rightarrow y) \wedge x = y \wedge x$ も真理表から確認できる．

さて，ハイティング代数には 0 があるので，任意の $x \in X$ について $x \Rightarrow 0$ が存在する．これを**擬補元** (pseudo-complement) と呼び，$\neg x$ で表す．これは x をとって $x \Rightarrow 0$ を返す演算

$$\neg :: x \mapsto \neg x = x \Rightarrow 0$$

と考えることもできる．

ハイティング代数で新たに加わった演算についても，様々な定理が成立する．例えば $\Rightarrow$ については

$$x \Rightarrow x = 1 \tag{8}$$
$$((x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y) = 1 \tag{9}$$
$$(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z) \tag{10}$$
$$x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z) \tag{11}$$

などが任意の $x, y, z \in X$ について成立する．また $\neg$ に関しては

$$x \preceq \neg\neg x \tag{12}$$
$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \tag{13}$$

などが成立する．

事例 3.2

上述したように，ハイティング代数は直観主義論理のモデルを与える．それを見るには，$\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$ をそれぞれ論理和（または），論理積（かつ），実質含意（ならば），否定（〜でない）に読み替え，各元を命題記号と考えれば良い．この観点からは，例えば *(8)* と *(9)* はそれぞれ同一律および *modus ponens* が常にトートロジーであること，*(10)* と *(11)* は「ならば」の分配則に対応していることがわかる．一方 *(13)* はド・モルガン法の一方を示す（もう片方はすぐ後で見るブール代数のみで成り立つ）．また *(12)* において，x の二重否定が x と一致しないのにも注意せよ．これは直観主義論理において二重否定が除去できないことに対応する．

練習問題 3.1

ハイティング代数を（直観主義）論理として解釈した際，0 と 1 はそれぞれ何を表すだろうか．

事例 3.3

概念の束 $\langle C, \preceq \rangle$ はハイティング代数だろうか．そうだとしたらその含意と擬補元はどう解釈できるだろうか．

発展 3.1

ここでの取り扱いはすべて有限束を前提としている．無限束の場合は，ハイティング代数であるためには完備性と無限分配束を満たさなければならない．前節で触れたように，完備性とは任意の（無限でも良い）部分集合に上限と下限が存在すること．そして無限分配則とは，任意の（無限でも良い）部分集合 $Y \subset X$ について，$x \wedge (\bigvee_{y \in Y} y) = \bigvee_{y \in Y} (x \wedge y)$ が成立する（交わりも同様）ことである．完備性のときと同様，無限束においては，分配則が満たされていても無限分配則は満たされないことがありうる．

こうした無限・有限の区別を避けるために，教科書によっては，ハイティング代数を「任意の 2 元が含意を持つ完備束」と定義することもある．その場合，（無限）分配則はそこからの定理として導かれる．いずれにせよ，両流儀の定義は一致する．

4 ブール代数

最後に，ハイティング代数に更に公理をもう一つ付け加えて，**ブール代数** (Boolean algebra) を作ろう．

定義 4.1 (ブール代数)

ブール代数とは，ハイティング代数 $\langle X, \preceq \rangle$ であって，各元 $x \in X$ の擬補元 $\neg x$ が次を満たすものである：

$$x \vee \neg x = 1, \quad x \wedge \neg x = 0 \tag{14}$$

ブール代数の擬補元 $\neg x$ は補元 *(complement)* と呼ばれる．

ブール代数を特徴付けるこの公理 (14) は，**排中律** (law of excluded middle) とよばれる．つまりブール代数とは排中律が成り立つハイティング代数である．このおかげで，ブール代数ではド・モルガン則のもう一方が成立する

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y. \tag{15}$$

ブール代数は，命題論理の構造を表すものとしてよく知られている．ハイティングのときと同様，演算子は論理演算子として解釈できる．上の (14) は，まさに命題論理における排中律と矛盾律そのものだ．

練習問題 4.1

$\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ もまた，ブール代数としての構造を持つ．$X = \{a, b, c\}$ として，その束構造を図示してみよ．

練習問題 4.2

2 つの命題変項 P, Q のみを持つ命題論理の体系に対応するブール代数を図示せよ（ヒント：ブール代数の一番真ん中の層の要素は $P, Q, \neg P, \neg Q$ の 4 つであり，それらのペアの $\vee, \wedge$ を上下に書き込んでいけば良い）．

練習問題 4.3

$A, B \subset X$ としたとき，$\langle \{A, B, A^c, B^c\}, \subset \rangle$ はブール代数となる（これはブール代数 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ の部分代数になっている）．このブール代数を図示せよ．

発展 4.1

問題 *4.2* と *4.3* は，命題論理の理論と部分集合の体系が，ブール代数として見ると同じ構造を持っている，ということを（非常にシンプルなケースで）示している．しばしばいわれるように，命題論理というのは記号の間に成り立つ統語論的な関係であり，集合はその意味論を与える（例えば命題 P に対して P が成り立つ可能世界の集合が対応する）．するとこの対応は，統語論（論理）と意味論（集合）との対応だといえる．では，こうした関係は一般に成り立つのだろうか．答えは *Yes* であって，任意の命題論理の体系は，何らかの集合の体系と一対一に対応する，ということが証明できる．しかしそのためには，どのような集合の体系であれば命題論理との体系と対応するのか，ということを定める必要がある（というのも，明らかに任意の集合を命題論理の意味論を与えるものとして解釈することはできないからだ）．具体的には，そのためには位相構造（次章参照）を集合に入れてやる必要がある．その上で，命題論理の体系は，そうした特定の位相構造を持つ集合の系，具体的にはストーン空間 *(stone space)* と呼ばれる位相空間と同型であることが示せる．この命題論理の統語論と意味論を結びつける結果は，ストーンの表現定理 *(Stone's representation theorem)* と呼ばれている．これは非常に重要な定理であり，あとで扱う位相や圏論とも関連が深いのだが，この授業内では扱うことができない．関心がある向きは，*Hans Halvorson, The Logic in Philosophy of Science* などを参照されたい（ただし結構むずかしい）．