

7. 群

2025 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2025 年 11 月 1 日

1 群とは何か、なぜそれを学ぶのか

群とは、一言で言えば、モノイドの特殊例であり、それぞれの元に対し、その働きを「キャンセル」するような逆元とよばれる元が備わったものである。その意味で、本章の内容は基本的に前章の続きである。しかしながら、この「逆元を含む」という一見些細な違いが、群を非常に幅広い現象に適用可能な、普遍的な代数体系にするのである。例えば、対称性（シンメトリー）は自然やアートなど至るところで見られる、誰にとっても馴染み深い構造であるが、こうした対称性の数理的な記述は群によって与えられる。そしてこの対称性の概念は、現代物理学においても非常に重要な役割を果たしており、そこでは群によって表される種々の対称性が、物理の法則性、保存則、および物理的対象の同一性と深く結びついている。また化学においても、多種多様な分子の構造を特徴づけるために群が用いられている。

こうした群の応用に通底しているのは、変換（transformation）という考え方である。我々は対象に対して、様々な変換を考えることができる。例えば図形を縦や横にずらしたり、回転させたり折り返したりといった作業は図形に対する変換である。こうした変換のうちにはその図形の見え方を変えるものもあれば、変えないものもある。例えば正三角形を 120 度回転させても、見かけ上の違いは全く生じないだろう。図形の対称性とは、こうした、何らかの変換に対する不変性（invariance）として定義される。そしてこの「変換に対する不変性」という概念は、単に図形の対称性だけでなく、法則の普遍性やモノの同一性、さらには客観性や有意義性など、様々な哲学的概念と密接に関わる。というのもこうした概念は、状況や視点、測定方法の違いに対して不変的に留まるもの、つまりそれらの「変換」に対する不変性として定式化することができるからだ。

すぐに見るように、群はこうした変換の数学的定式化であり、それゆえに幅広い含意を持つ。もちろん、群にはそれ以外にも様々な側面があるのだが、本章では主に群と対称性・不変性の関係に的を絞る、例を交えつつその基本的なところだけを見ていこう。

2 群

上で述べたように、群 (group) は、以下のようにモノイドの特殊ケースとして定義される。

定義 2.1: 群

次の条件を満たすモノイド (G, \circ, i) を、**群** (group) という：すべての元 $g \in G$ に対し、元 $g' \in G$ が存在し、

$$g \circ g' = g' \circ g = i.$$

ここで g と掛け合わせると単位元になる $g' \in G$ を g の**逆元** (inverse element) といい、しばしば g^{-1} と表す (場合によっては $-g$ などとも書かれる)。つまり群とは各元が逆元を持つモノイドである。

単位元 i は「何もしない」ことなので、 $g \circ g^{-1} = i$ は元と逆元を合成すると結局「何もしない」ことと同じだといっている。このように、群のすべての元には、それをキャンセルする逆元が備わっている。

逆元については、次の性質が成り立つ。

命題 2.1: 逆元の性質

1. 任意の元 $g \in G$ に対し、その逆元は一意的に定まる。
2. 逆元の逆元はもとに戻る： $(g^{-1})^{-1} = g$ 。
3. 任意の $g, h \in G$ に対し、 $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ 。

証明は次の通り：

1. 仮に g の逆元として h, h' があるとしてみよう。すると $(h'g) = (gh) = i$ より、 $h = ih = (h'g)h = h'(gh) = h'i = h'$ となり、 h と h' が等しいことが示される。
2. $g^{-1}g = i$ であるが、これは g^{-1} の逆元 (すなわち $(g^{-1})^{-1}$) が g であると述べていることに等しい。
3. $h^{-1}g^{-1}$ を gh の左ないし右からかけると i になることで確かめられる。例として左からかけると $h^{-1}g^{-1}gh = h^{-1}ih = h^{-1}h = i$ 。

群の性質を一通り見たので、その事例を見ていこう。

事例 2.1

モノイドの事例として足し算の体系を見たが、足し算の「逆」は引き算であり、引き算とは負の数を足すことにほかならない。よって自然数に変えて (負の数を含む) 整数 \mathbb{Z} を考えると、 $(\mathbb{Z}, +, 0)$ は二項演算 $+$ について群となる。ここで $m \in \mathbb{Z}$ の逆元は $-m$ であり、実際 $m + (-m) = 0$ がなりたつ。

練習問題 2.1

掛け算の場合の逆元はなんだろうか。 $(\mathbb{Z}, \times, 1)$ は二項演算 \times について群となるだろうか。有理数 \mathbb{Q} や実数 \mathbb{R} だったらどうだろうか。

事例 2.2: 対称群

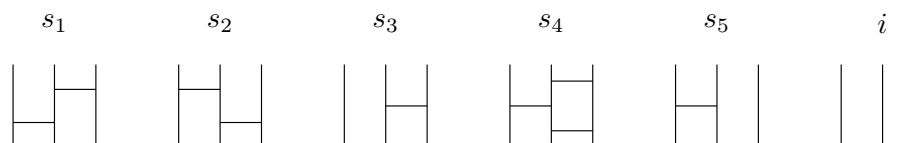
3 枚のカード $X = \{1, 2, 3\}$ を並べ替える方法を考える. $(1, 2, 3)$ と並んだカードを $(2, 3, 1)$ という順に並べ替える仕方を,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

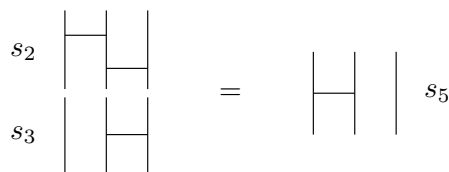
と表し, これを s_1 と呼ぼう. これは $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$ と割り当てる X からそれ自身への全単射 $s_1 : X \rightarrow X$ だと考えられる. こうした並べかえ関数を置換 (permutation) という. X の置換には上記以外にも,

$$\begin{matrix} s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & i \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

の計 6 通りある (便宜上, それぞれの上にラベルをつけた). ちなみに最後の i は結局順序が変わらない恒等写像であるが, これも「並べ替え」の一つの方法として含める. なお, 置換は以下のような「あみだくじ」で表すこともできる.



これらの置換が群を成すことを示そう. まず任意の 2 つの置換を続けて適用したものの, 例えば $s_3 \circ s_2$ は, $1 \mapsto 3 \mapsto 2, 2 \mapsto 1 \mapsto 1, 3 \mapsto 2 \mapsto 3$ というように写すので, $s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ と一致する. 実際, 上のあみだくじで s_2 の下に s_3 を繋げると下左のようになるが, 二回連続交差する箇所は互いにキャンセルされて直線と変わらないので, 結局右の s_5 と同様の形になることがわかる:



これらの演算を積表の形で表すと以下のようになる (リマインド: 積表の各セルではその上の要素にその左の要素をかける, なので a 列 b 行にある要素は ba である). 空白部分は自分で埋めてみよう.

	i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
i	i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	s_1	s_2	i	s_5	s_3	s_4
s_2	s_2	i	s_1	s_4	s_5	s_3
s_3	s_3	s_4	s_5			
s_4	s_4	s_5	s_3			
s_5	s_5	s_3	s_4			

一行目の恒等写像 i は「何もしない」単位元となっている. それ以外の各行には, 必ず一つ単位元が現れる. 例えば二行三列目は $s_1 \circ s_2 = i$ であるが, これは s_1, s_2 が互いの逆元であることを示している. 以上の積が結合律を満たすことは, 写像の合成が結合的である (2 章) ことから明らか. ちなみに積表を注意してみれば, 単位元に限ら

ず、積表の各行・列はすべての元を、それぞれ一つだけ含んでいる、ということに気がつく。これはこの群でたまたまそうなっているのではなく、すべての群に共通する性質である。

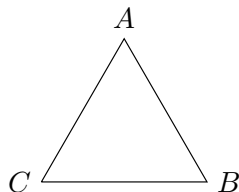
一般に、 n 個の要素を持つ集合に対する置換全体が作る群を n 次**対称群** (symmetric group) と呼び、 S_n と表す。この例は 3 点集合 $\{1, 2, 3\}$ の置換からなる群なので S_3 である。また以上から、任意の集合 X に対して、それ自身への全単射の集合 $\{f|f: X \rightarrow X \text{ は全単射}\}$ は、 $|X|$ 次の対称群を構成することがわかる。

練習問題 2.2

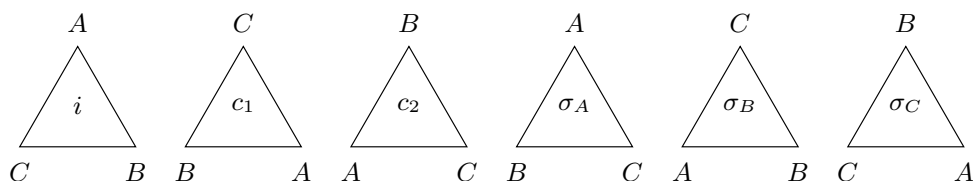
上の S_3 の積表を完成させよ。

事例 2.3: 図形の対称性

数学において、**対称性** (symmetry) ないし**対称変換**とは、対象をそのままに保つような変換群である。下のような正三角形を例に取り考えてみよう。



この三角形の持つ対称性、つまりこの幾何学的対象を「そのままに保つ」ような変換とはなんだろうか。もちろん、「何もしない」恒等変換は図形をそのままに保つ。他にも、いまあなたが目を閉じている間に、私が三角形を $120 \times n$ 度 (ただし n は整数) 時計回りに回転させても、目を開けたあなたは以前との違いに何も気が付かないだろう。その意味で、 $120 \times n$ 度回転は正三角形をそのままに保つ変換＝対称性である。また、それぞれの頂点から対辺の中間地点へとおろした軸に沿って線対称をとっても、図形は変わらない。これらの変換、つまり恒等変換 i , 120 度, 240 度の時計回り回転 c_1, c_2 , および点 A, B, C を通る軸に沿った鏡映反転 $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ は、以下のように頂点を移すが形はそのままに保つ、この正三角形の対称性である。

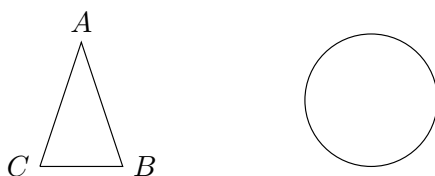


これらの対称性を $D_3 = \{i, c_1, c_2, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$ とまとめると、 D_3 は i を単位元とした群をなす。まず対称変換を続けて行っても、当然それは対称変換になる、つまりそれは積で閉じており、また積は結合的である。 c_1, c_2 が互いを「キャンセル」する逆元であり、また $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ のそれぞれがそれ自身の逆元になっていることも容易に分かる。他の演算の結果については、以下の積表の通りになる。実際に正三角形を回したりひつ

くり返したりして確認してみよう：

	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C
i	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C
c_1	c_1	c_2	i	σ_C	σ_A	σ_B
c_2	c_2	i	c_1	σ_B	σ_C	σ_A
σ_A	σ_A	σ_C	σ_B	i	c_1	c_2
σ_B	σ_B	σ_A	σ_C	c_2	i	c_1
σ_C	σ_C	σ_B	σ_A	c_1	c_2	i

一般に、与えられた図形に対し、その図形をそのままに保つ対称変換の全体は、群を成す。そしてこの群は、図形によって変わってくる。例えば以下左のような二等辺三角形が持つ対称変換は $\{i, \sigma_A\}$ の 2 つである。



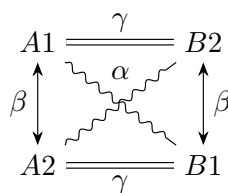
一方、右のような円の場合はあらゆる角度の回転、および中心点を通るあらゆる軸での鏡映が対称変換になる。これは、二等辺三角形よりも三角形が、そして三角形より円のほうがより対称的である、という我々の直観とも合致している。

練習問題 2.3

正方形の対称変換をすべて求め、各変換の逆元を確定せよ。

事例 2.4: カリエラ型婚姻規則

レヴィ・ストロースは『親族の基本構造』の中で、オーストラリア原住民であるカリエラ族の婚姻規則を紹介している。カリエラ族は $A1, A2, B1, B2$ で表される 4 つの氏族からなる。子供は母からアルファベットを、父から数字を引き継ぐので、例えば $B2$ の母と $A1$ の父から生まれる子供は $B1$ となる。そして結婚は、数字もアルファベットも異なる相手としかできない。なので婚姻は $A1$ と $B2$ 、 $A2$ と $B1$ の間でのみ可能である。以下の図はこれをまとめたものである。



この図において、 α は父子関係、 β は母子関係、 γ は婚姻関係を表している。例えばあなたが $A1$ なら、あなたの父や息子は $\alpha(A1) = B1$ であり、またその結婚相手は $\gamma(\alpha(A1)) = A2$ である。実はこのややこしい婚姻規則は、**クラインの四元群**という群

構造を持っている：

	i	α	β	γ
i	i	α	β	γ
α	α	i	γ	β
β	β	γ	i	α
γ	γ	β	α	i

例えば $\alpha \circ \gamma = \beta$ という等式は、ある人の婚姻パートナーの父ないし息子の氏族は、その人の母ないし娘の氏族と同じである、ということを示している。『親族の基本構造』の補遺には、数学者アンドレ・ヴェイユ（ブルバキの中心メンバー、シモーヌ・ヴェイユの兄）によるより複雑なムルンギン族の婚姻制度に対する群論的分析が収められている (cf. 橋爪, 1988)。

事例 2.5: ロボットの操作群

前章発展 5.1 では、ロボットの状態に対するプログラム作用を、その結果の同一性でまとめた同値類 M/\sim を考えた。この同値類は群をなす。というのも、以下のような仕方ですべての生成元に対して逆元を考えることができるからだ

- $[f]^{-1} = [rrfrr]$ (一歩進む, の逆は右に 180 度回転・一歩前進・右 180 度回転),
- $[r]^{-1} = [l]$ (右向の逆は左向),
- $[l]^{-1} = [r]$ (左向の逆は右向),
- $[i]^{-1} = [i]$.

よって生成元から形成される任意の元, 例えば $[rffl]$ などに対しても, $[rffl]^{-1} = [l]^{-1}[f]^{-1}[f]^{-1}[r]^{-1}$ といった仕方で逆元が存在する。一方で, 同値類で割る前の M は群ではない。その理由を考えてみよ。

3 群の作用

以上で見てきたように群は、カードの並び替えや三角形の回転・反転などのように、「変換」という操作が形作る代数的な構造を表すためによく用いられる。ところで、変換あるところ、変換を被る対象が存在しなければならない。たとえば並び替えだったら $(1, 2, 3)$ といったような「カードの並び」の集合、回転・反転であれば三角形などの図形の集合があり、上で見た S_3 や D_3 などの変換群は、こうした対象たちを変換しているのである。このような、群の「対象への働きかけ」としての側面を、**群作用** (group action) という。

我々はすでに前章 5 節で、モノイドの集合への作用を見た。群はモノイドの一種に過ぎないので、群作用の定義はモノイド作用のそれと全く同様である。一応、定義を確認しておこう：

定義 3.1: 群作用

群 (G, \circ, i) の集合 S への (左) G -作用 (G -action) とは, 写像

$$G \times S \rightarrow S, \quad (g, s) \mapsto gs$$

であり, 以下を満たす:

1. 任意の $s \in S$ について, $is = s$.
2. 任意の $g, h \in G$ と任意の $s \in S$ に対して, $h(gs) = (hg)s$.

モノイドが群に代わっただけで, それ以外は全く同じである.

我々はすでに, 群作用の例を見てきている. 例えば正三角形の対称性 (事例 2.3) は, 3 次対称群 S_3 が三角形の頂点の集合 $S = \{A, B, C\}$ に作用したものだと思えることができる. 作用する S_3 の元として s_1, s_5 をとると, $s_1(A) = C$ であり, $s_5(C) = C$ なので $s_5(s_1(A)) = C$. 一方, 例 2.2 の積表より $s_5 \circ s_1 = s_4$ であり, $s_4(A) = C$. 以上より, 集合 S の一つの要素 A に対して $s_5(s_1A) = (s_5s_1)A = C$ が示された. 同様にして, S_3 のすべての元について, S のすべての要素について, この条件が満たされていることを確認できる.

練習問題 3.1: クライン四元群の氏族への作用

事例 2.4 では, カリエラ型婚姻規則がクラインの四元群で表されることを見た. この各群は, 氏族集合 $S = \{A1, A2, B1, B2\}$ への作用として考えることができる. 例えば父子関係 α は, $\alpha(A1) = B1, \alpha(A2) = B2, \alpha(B1) = A1, \alpha(B2) = A2$ というように, 氏族を変化させる. 同様に β, γ, i を $S \rightarrow S$ の関数と見なし, それぞれが S の各要素を何に飛ばすか (つまり氏族をどのように変化させるか) を記述せよ.

事例 3.1: チェス盤上の動き

チェスの駒であるビショップは, 下図のように斜めにだけ動かすことができる. 右上・右下に一桧進む動きをそれぞれ g, h で表すと, 可能な動きは $\{g, h, g^{-1}, h^{-1}\}$ を組み合わせたものになる. これに「動かない」という選択肢 i を加えると, ビショップの動き全体は群になる.

この群 (B と呼ぼう) は, 8×8 マスのチェス盤への作用だと思えることができる. ビショップの盤上の位置を (i, j) で表すと, B の各元の作用は

$$\begin{aligned} g(i, j) &= (\min(i+1, 8), \min(j+1, 8)) \\ g^{-1}(i, j) &= (\max(i-1, 1), \max(j-1, 1)) \\ h(i, j) &= (\min(i+1, 8), \max(j-1, 1)) \\ h^{-1}(i, j) &= (\max(i-1, 1), \min(j+1, 8)) \end{aligned}$$

となる. ここで \min, \max は駒の座標が 1 から 8 の範囲にとどまらなければならない, という制約を表している.

練習問題 3.2

1. 上図のように盤上 $d4$ にいるビショップを $h4$ に移すような群作用を一つ挙げよ.
2. B は可換だろうか.

チェスのゲームでは、上で見た群 B を適用することにより、ビショップを動かしていく。それによってビショップは盤上を縦横無尽に動くが、しかしどこにでも行ける訳ではない。初期位置が黒色のマスだった場合は、何回動いても白色のマスには行けず、また逆もしかりである。このように、群の作用によってある状態から移動可能なすべての状態の集合を、その群の**軌道** (orbit) と呼ぶ。ちゃんと定義しておこう。

定義 3.2: 軌道

群 G が集合 S に作用しているとき、 G の各元を S の点 s に作用させた要素の集合を s の軌道といい、 Gs と表す。つまり

$$Gs = \{gs | g \in G\}$$

である。

例えば上の例では、 s を任意の黒マスとすると軌道 Bs は黒マス全体、 s' を任意の白マスとすると Bs' は白マス全体である。ここでは、 Bs と Bs' は互いに交わらず、また合わせると盤上全てを覆っている。すなわち、 Bs と Bs' は、盤 $S = 8 \times 8$ を分割する**同値類**となっている (cf. 2 章)。これはたまたまでなく、どのような群の軌道についても常に成立する。これを見るため、 $s \sim s'$ という関係を、「 $s' = gs$ となる元 $g \in G$ が存在する」こととして定めよう。すると

1. G には単位元があるため $s = is$ であり、よって $s \sim s$.
2. $s \sim s'$ 、つまり $s' = gs$ となる $g \in G$ があるとする。群は逆元 $g^{-1} \in G$ を持つので $s = g^{-1}s'$ 、よって $s' \sim s$.
3. $s \sim s', s' \sim s''$ とする。つまりある $g, h \in G$ があって、 $s' = gs, s'' = hs'$ 。群は積で閉じているため $hg \in G$ があり、群作用の条件より $s'' = h(gs) = hg(s)$ 、よって $s \sim s''$ 。

以上から、関係 \sim は反射性・対称性・推移性を満たすので同値関係である。そして s の軌道 Gs とは、 s から G 作用によって得られる要素の集合、つまり s と \sim 関係になる要素の集合にほかならないので、同値類となる。よって群が集合に作用するとき、かならずそこには群軌道としての同値類が定義される。

逆に、同値類が与えられたら、常にそれを軌道とするような群を考えることができる。このためには、 $s \sim s'$ という同値関係があるときそしてその時のみ、 $s' = g(s)$ となるような関数 $g: S \rightarrow S$ があると定めればよい。するとこの関数全体が S への群になることは、ちょうど上の証明を逆さにすることでわかる (\sim が反射的なので恒等射・単位元が存在し、反射的なので逆射・逆元が存在し、推移的なので関数の積が作用条件を満たす)。この群による作用は、集合の要素 s を他の要素 s' へと飛ばすが、しかしその同値類 $[s]$ の外には飛ばさない。その意味で、同値類を不変に保つ対称変換 (事例 2.3) になっている。群のあるところ同値類あり、同値類あるところ群あり。このように、群と事物の同一性の間には、本質的な関係がある。

練習問題 3.3

群と異なり、モノイド作用（前章 5 節）は同値類を定義しない。その理由を考えてみよ。

事例 3.2: タイプとトークン

ワープロソフトに付いているフォントの変更機能は、画面上に表示された文字列の集合に対する群作用 F を定義する。同じ文字列、例えば「philosophy」を、*philosophy*, philosophy, philosophy などと変更することができ、またそれをもとに戻す逆変換も当然用意されている。このように、群 F は語トークン（ここでは「philosophy」）に作用することで、それを別の語トークンへと変更する。しかしそれによって、philosophy という語タイプが変わることはない。つまりそれぞれの語タイプ、例えば [philosophy] は、 F を語トークン「philosophy」に作用させたときの軌道であり、それらは F 作用によって不変に留まる同値類を形成している。同様のことが、任意のタイプ／トークン関係に妥当する。つまり一般にタイプとは、一定のトークン集合に対する群作用から生じる群軌道として考えることができる。

事例 3.3: 群作用に対する不変性

一般に、語の意味はタイプによって定まるのであって、トークンには依存しない。*philosophy* と書こうが philosophy と書こうが、その意味は同じ、「哲学」である。この直観をもう少しちゃんと表してみよう。今、任意の語トークン $x \in X$ について、その意味を関数 $\phi(x)$ で表す。フォント変換群 F は X に作用するが、 $\phi(x)$ を変化させない、つまり任意の $f \in F$ に対して、 $\phi(x) = \phi(f(x))$ である。このようなとき、関数 ϕ は群作用 F に対して不変 (invariant) であるという。この例では、語の意味は（当然ではあるが）フォント変換群に対して不変に留まる。上の例から明らかなように、群作用 F の軌道に対して定義された関数は、 F に対して不変になる。

練習問題 3.4

何らかの集合 X に作用する変換群と、そのもとで不変となるような X 上の関数によってモデル化できそうな事例を考えよ。

4 群と不変性

以上見たように、群論的構造は様々なところに顔を出す。その普遍性ゆえ、群は現代の数学・物理学においても多くの役割を担ってきた。とりわけ重要なのは、群が対象の同一性や不変性を考えるための重要な道具立てを提供する、ということである。あるものが別のものと「同じ」である、というのはどういうことだろうか。答えは「どのような点で」ということに依存してくるように思える。例えば私とあなたは別人だが、人として同じである。猫のタマは別種だが、哺乳類として同じである、等々、「同じ」ということにも様々な度合いがありそうだ。この「同じさ」の度合いは、**変換に対する不変性**という考え方で表すことができる。

図 XXX を見てほしい。これらの図形のうち、どれとどれが「同じ」だろうか。ある見方で

は、(a) と (b) だけが全く同じ形・大きさなので、これだけが同じとされるかもしれない。しかしこれらも、別の場所に描かれているという点では同一ではない。次に (c) は、サイズこそ違うが、(a),(b) と同じ形をしているので、これも同じとみなす見方もあってもよいだろう。一方 (d) は形も違うが、平行四辺形という点ではこれまでの図形と同じである。そして (e) は平行四辺形でもないものの、四角形という点では同じ。最後に (f) はもはや四角形ですらないが、「線で囲まれた図形」という意味では他と共通する。

このように判断するとき、我々は「どの程度の変換の範囲内であれば、同じ範疇にとどまるとみなしてよいか」ということを考えている。図形 (b) は、(a) を横に動かすことによって得られたものだ。こうした変換を並進とよぶ。並進とはユークリッド座標上を上下作用に動かしたり回転させたりする操作である。図形 (c) は、横移動（並進）に加えて更に各辺の長さを等倍している。こうした拡大・縮小の操作を、相似変換と呼ぶ。図形 (d) は、さらにアフィン変換という作用を加えたものだ。アフィン変換は対象を歪ませるが、しかし互いに並行な辺は平行なまま保たれる。図形 (e) を生む変換は射影変換という。なぜかという、もとの図形に光を当てたときに生じる影となるような図形だからである。プロジェクタから斜めに投影するとスライドの画像がずれてしまうように、影は並行性を保存しないが、それでも四角形という特徴はそのままである。最後に、図形 (f) は位相のところで見た連続変換を施したものである。そこでも見たように、連続変換は穴を開けたりしない限り自由に図形を変換できる。

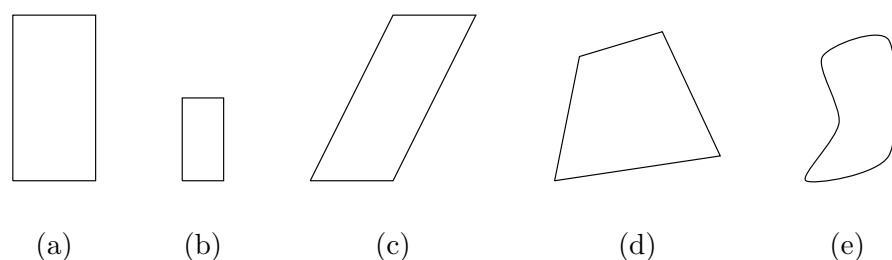


図1 幾何学図形（長方形）に対する様々な変換。

図1の左(a)に書かれた長方形は、様々な幾何学的性質を持っている。まずそれは線で囲まれており、その線は4本の直線であり、対辺の長さは等しく、隣接した辺同士は直角で交わり、さらには各辺は具体的な長さ（印刷された用紙によって異なるだろうが、例えば長辺3cm）を持っている。しかしこれらの性質全てが同じステータスを持っているわけではなく、いくつかはより「根源的」であるように思える。この性質間の質的違いは、対称性の観点から理解できる。例えば辺の長さは、相似変換によって変わってしまうが、それ以外の性質は不変に保たれる(b)。角度はアフィン変換(affine transformation)と呼ばれる変換により変わるが、対辺の長さが等しいという特徴は保たれる(c)。しかしその特徴も、ある光源から出た光でこの図形を他の面に射影する射影変換(projection transformation)では変わってしまう(d)（プロジェクタから斜めに投影するとスライドの画像がずれてしまうことを思い起こすとわかりやすい）。また最後に、位相のところで見た連続変換を施せば、不変にとどまる性質は「線で囲まれている」ということだけである(e)。これらの変換はそれぞれ、別個の（しかし互いにネストした）群を形成する。そして上で述べた各性質は、異なる変換群に対する対称性を例示していると考えて良い。クラインはこうした洞察から、幾何学とは、何らかの変換群に対して不変(invariant)にとどまる性質、すなわち対称性を探求する学問である、と特徴づけた（例えば射影幾何学は、射影変換に対して不変な性質を探求する）。

逆に見れば、「幾何学的性質」というものは、変換群に対する対称性として定義することができる。そして何が正真正銘の幾何学的性質とみなされるかは、扱う幾何学／変換群によって変わってくる。例えば「角度」という概念は、ユークリッド幾何学では意味があるがアフィン幾何学では意味がない。したがって、「正三角形」はユークリッド世界では客観的に存在するが、アフィン世界ではそうではない。このように、性質やモノの実在性を対称性として特徴づけるアプローチは、数学に限らず、物理学でも重要な役割を担ってきた。例えば古典物理学における物体（古典力学において「存在」するもの）は、ガリレオ変換とよばれる変換群に対して不変性を保つ。一方、相対論において正真正銘のモノないし性質と認められるものは、それとは別の、ローレンツ変換に対して不変でなければならない。ローレンツ変換は時間軸と空間軸を「混ぜる」変換なので、例えばものの「長さ」は相対論においては客観的な性質ではない（光速に近い速度で移動すると、同じものが違った長さに見える）。

事例 4.1: 一般観念

バークリーは『視覚新論』の中で (125 節)、ロックによる「三角形の一般観念」なるものに批判を加えている。いわく、三角形の一般観念は一定の長さの辺と角度を持つどの具体的な三角形とも区別されながら、同時にそれら全てに適用されるものだとされる。しかし「どの具体的な三角形とも異なる三角形」を心の中に描くことは不可能であり、よって一般観念という考え方全体は矛盾している。この批判に対して、一般観念を擁護することは可能だろうか。一つのアイデアは、変換群を用いることである。二次元平面に描かれたある図形 x に射影変換 g を施して x' が得られるという関係（つまり $x' = gx$ となるような射影変換群 G の元 g がある、という関係）を、 $x \sim x'$ と表そう。すると \sim は 5 節で述べたことより同値類になる。今、 x を具体的な三角形、例えば事例 2.3 で取りあげたような正三角形とする。するとすべての具体的な三角形は、 x と \sim 関係にあり、またその関係にあるものはすべて三角形である。つまりその同値類 $[x]_{\sim}$ を、三角形の一般観念と考えることができる。

同様に、今度は G' を相似変換全体がなす群であるとしよう。すると作用 G' の作用は x の「正三角形性」を保存する。よってそこから得られる軌道 $[x]_{\sim'}$ を、正三角形の一般観念と考えることができる。

5 可換性

前章では、モノイドにおける重要な区別として可換性を見た。同様の区分は群においてもそのまま成り立つ。つまり群 G が可換であるとは、任意の 2 つの元 $g, h \in G$ について $h \circ g = g \circ h$ がなりたつことをいう。これは積表で見ると、表が対角線を中心に対称になっているということだ。これまでの例で見ると、クラインの四元群は可換だが、3 次対称群 S_3 および正三角形の対称性 D_3 は可換ではない。

6 群準同型写像

次に、群の間の同一性の基準として、準同型写像を定めよう。こちらも基本的には、モノイド準同型の定義に従う。

定義 6.1: 群準同型

2つの群 $(G, \circ, i), (G', \circ', i')$ が与えられているとき、写像 $f: G \rightarrow G'$ が**群準同型写像** (group homomorphism) であるとは、任意の $g, h \in G$ について群演算を保存する、つまり $f(g \circ h) = f(g) \circ' f(h)$ が成立することをいう。

モノイド群準同型のときは、これに加えて一方の単位元が他方の単位元に移される $f(i) = i'$ という条件があったが、群の場合はそれは必要ない、というのも以下のように、その性質は上の定義から導くことができるからだ。

命題 6.1: 群準同型の性質

群準同型 $f: G \rightarrow G'$ について、以下が成り立つ。

1. 単位元は単位元に移される。つまり $f(i) = i'$ 。
2. 逆元は逆元に移される。つまり任意の $g \in G$ について $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ 。

証明は以下の通り：

1. $i = i \circ i$ であることに注意すると、 f は準同型なので $f(i) = f(i \circ i) = f(i) \circ' f(i)$ 。この両辺に $f(i)^{-1}$ をかけると

$$\begin{aligned} f(i) \circ' f(i)^{-1} &= f(i) \circ' f(i) \circ f(i)^{-1} \\ i' &= f(i) \circ' i' = f(i). \end{aligned}$$

2. $g \circ g^{-1} = i$ より、

$$f(i) = f(g \circ g^{-1}) = f(g) \circ' f(g^{-1}) \quad \because f \text{ は準同型}$$

一方上より $f(i) = i'$ なので、これと組み合わせて $f(g) \circ' f(g^{-1}) = i'$ 、つまり $f(g^{-1})$ は $f(g)$ の逆元 $f(g)^{-1}$ である。

事例 6.1: 自明な準同型

群 G, G' に対し、 G のすべての元を G' の単位元 i' に送る $f(g) = i', \forall g \in G$ はトリビアルに準同型写像となる。これを自明な準同型という。

事例 6.2: D_3 と二等辺三角形対称変換の準同型性

例えば上の正三角形と二等辺三角形の対象変換の間に、以下のような写像を構築すると、これは両群の間の準同型写像になっている：

$$f(i) = f(c_1) = f(c_2) = i, \quad f(\sigma_1) = f(\sigma_2) = f(\sigma_3) = \sigma_A.$$

この様子は、2つの群の積表を比べて見るとわかりやすい。下の表において、 f は左側の緑／青のブロックに入っている元を、それぞれ右側の緑／青のブロックの元へと移す。 f が準同型であるとは、左の積表で計算してから（例えば $c_1 \circ \sigma_A = \sigma_C$ ）それを右に飛ばしても（ $f(\sigma_C) = \sigma_A$ ）、右に飛ばしてから（ $f(\sigma_B) = \sigma_A, f(c_1) = i$ ）それを計算しても（ $i \circ \sigma_A = \sigma_A$ ）、結果が変わらないということだ。このように元を適切に並べてやれば、準同型で送られた先の群の積表は、送る先の積表がギュッと縮んだような

形になる（柄物のシャツが洗濯で縮んでしまったイメージ）.

	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C		i	σ_A
i	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C	i	i	σ_A
c_1	c_1	c_2	i	σ_C	σ_A	σ_B	σ_A	σ_A	i
c_2	c_2	i	c_1	σ_B	σ_C	σ_A			
σ_A	σ_A	σ_C	σ_B	i	c_1	c_2			
σ_B	σ_B	σ_A	σ_C	c_2	i	c_1			
σ_C	σ_C	σ_B	σ_A	c_1	c_2	i			

そして通例通り，群 G, G' の間の準同型写像 $f : G \rightarrow G'$ が全単射であるとき， f は**同型写像** (isomorphism) といわれ， G と G' は群として**同型** (isomorphic) になる.

事例 6.3: S_3 と D_3 の同型性

我々は上で，三枚のカードをシャッフルする群としての 3 次元対称群 S_3 と，正三角形の対称変換群 D_3 を確認した．実はこれらの群は，互いに同型である．というのも， D_3 のそれぞれの元は，三角形の頂点を $\{A, B, C\}$ 並び替える変換と見ることもできるからだ．例えば右 120 度回転 c_1 は，頂点を $A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto A$ へと移す写像だと見れば，これは s_1 と全く同じことをやっている．ここから， $f(c_1) = s_1$ という対応が考えられる．同様にして， $f(c_2) = s_2, f(\sigma_A) = s_3, f(\sigma_B) = s_4, f(\sigma_C) = s_5, f(i) = i$ のように移してやると， f は S_3 と D_3 の間の準同型写像になっている（元のペアを複数とって実際に確認してみよう）．そしてこれは全単射なので，同型写像であり， S_3 と D_3 は（一方はカードのシャッフル，他方は図形の回転・鏡映という全く違う作業であるのにも関わらず）群としては同型である．

練習問題 6.1

群 G と G' が同型であるとき，その間の同型写像は必ずしも一つとは限らない． S_3 と D_3 の間の同型写像として，上の f とは異なるものを一つあげよ．

7 対称性の哲学的含意

事例 7.1: 有意味性と対称性

京都の平均気温は 4 月は摂氏 14 度，8 月は 28 度である．しかしこれをこれをもって，「京都の 8 月は 4 月の 2 倍暑い」ということは意味をなさない．というのも気温を華氏で表現すれば，それぞれ 57 度と 82 度になり，「2 倍」という関係は成立しないからだ．一般に，温度はアフィン変換 $y = \alpha x + \beta$ 可能^aなので，こうした変換において不変に保たれる性質のみが温度についての客観的性質として認められる．アフィン変換は群をなすので^b，これは対称性である．ここから，ある対象（温度）についてどんな言明が有意味であるかは，その対象の対称性，すなわちそれが許容する変換群を定めればよ

い、という方針が従う。これは測定理論 (theory of measurement) の中心的な考え方である (e.g, Narens, 2007).

^a 例えば y を華氏, x を摂氏とすると, $y = 1.8x + 32$.

^b アフィン変換 $y = \alpha x + \beta$ を (α, β) で表すと, 単位元は $(1, 0)$. $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ という 2 つの変換に対し, 合成は $(\alpha'\alpha, \alpha'\beta + \beta')$. 変換 (α, β) の逆元は $(1/\alpha, -\beta)$. 結合律については明らか.

事例 7.2: 対称性議論：逆転クオリア

逆に, 対称変換は対象の本質を変えないのであるから, そうした変換によって変わるような性質は, 実在的ないしは客観的な性質ではない, という議論戦略も存在する. そうした議論は一般に**対称性議論** (symmetry argument) と総称される. 有名な対称性議論として**逆転クオリア** (inverted qualia) がある. 通常の間人が「赤」と感じる波長の光を見ると, 「緑」に見えるような人を考えよう. そうした人は, 我々が木の葉を見るときに感じる質感を熟れたリンゴを見るときに感じており, また逆もしかりであるが, しかし行動においては全く差異を見いだせないだろう (むしろクオリアが逆転しているのは**あなた**かもしれない). これは, 「今, 赤 (緑) の質を感じている」という性質を互いに入れ替えるような変換 (これは群である) は, 人間の状態一般を不変に保つ対称性変換であるということである. よってそうした変換において変化する性質は, 実在的な性質ではない, したがってクオリアについての事実が存在しない. これはクオリアについての対称性議論である.

事例 7.3: 対称性議論：グルーパラドクス

今まで観測されたエメラルドはすべて緑 green であったとしよう. ここから, 「全てのエメラルドは緑である」と考えるのは妥当な帰納推論であるように思える. しかしいま, 「2025 年以前に観測され緑であるものと, 2025 年以降に観測され青であるもの」を指すグルー grue という述語を導入する. すると今までに観測されたエメラルドはすべてグルーなので, 「全てのエメラルドはグルーである」という仮説も同様に支持されそうに思えるが, これは明らかにおかしい. 一つの解決策は, 「2025 年」という特定の時間を含む述語はおかしい, と考えることかもしれない. しかしいま, 「2025 年以前に観測され青であるものと, 2025 年以降に観測され緑であるもの」を指すブリーン bleen という述語を導入しよう. すると述語「緑」は, 「2025 年以前に観測されグルーであるものと, 2025 年以降に観測されブリーンであるもの」というように定義し返される. つまりグルー／ブリーンを使う人からすれば, 「緑」のほうこそ特定の時間を含んでしまっている! これは Goodman (1955) によって提唱された, **グルーパラドクス**と呼ばれる帰納推論の未解決問題である. これは緑／青という述語と, グルー／ブリーンという述語は互いに変換可能であり, よって緑仮説とブリーン仮説では優劣をつけることができないはずだという, 対称性議論として理解できる.

事例 7.4: 還元主義

我々は上で, 考える対称性の違いにより幾何学的性質の「根源性」の度合いのようなものが考えられることを見た. そして現代物理学において, 実在的な性質は対称性, つまり

変換群に対する不変性として定義されることを見た。同じようなことは、他の科学にもいえるだろうか。例えば、何らかの変換群に対する不変性として化学的性質、生物学的性質、などを定義していくことは可能だろうか。

またさらに、そのように定義されたとき、それぞれの変換群は幾何学のときのような階層構造を持っているだろうか。例えば、化学的・生物学的性質はローレンツ変換に対しては不変だと期待できるかもしれない（なぜならそれは物理的性質を不変に保つのである）。同じように、生物学的性質は化学的変換に対して不変だろうか。存在論的還元主義は、この問いに肯定的に答える：すなわちそれによれば、各科学分野における客観的性質は、その分野を特徴付ける変換群によって定義され、なおかつその変換群は階層的な構造を持っている。

参考文献

Goodman, N. (1955). *Fact, Fiction, and Forecast*. Harvard University Press.

Narens, L. (2007). *Introduction to the Theories of Measurement and Meaningfulness and the Use of Symmetry in Science*. Psychology Press.

橋爪, 大. (1988). **はじめての構造主義**. 講談社現代新書.