3. 順序

2023 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2023 年 10 月 3 日

1　構造

前章までで，集合論の（ほんの）基礎的なところを見た．現代数学において，集合はあらゆる理論的構造の「素材」としての役割を担っている．例えば線形代数や解析学やリー代数や確率論や・・・あらゆる数学理論は，「かくかくしかじかの性質を持った集合」と定義できるのである[*1]．つまり語弊を恐れずにいえば，数学の理論とは，何らかの構造を持った集合である．実際，この章以下で我々は，ブール代数や群，位相などを，特定の構造を持つ集合として導入する．集合が持つそうした構造は，一般に**公理** (axioms) の形で表される．まず手始めに，一番簡単な，順序構造を集合に入れるところから考えてみよう．

2　さまざまな順序

順序とは，特殊な条件（公理）を満たす 2 項関係である．その条件の付け加え方によって，前順序／半順序／全順序という三つの順序が得られる．以下見るように，後の方ほどより要件が多く，より「厳しい」順序になってくる．

2.1　前順序

同値類とは反射的，対称的かつ推移的な関係だったことを思い出そう（2 章 3 節）．この条件から対称性を落とすと，0 章でも見た**前順序**ないし**擬順序** (preorder) が得られる．きちんと定義すると以下のようになる．

[*1] こうした集合論に根ざした数学の統一的理解は，20 世紀のニコラ・ブルバキ (Nicolas Bourbaki) の仕事に多くを負っている．ブルバキは集合論をいわば数学の共通言語に見立て，各数学理論を集合論の枠内で再構築した．ちなみにブルバキはペンネームで，実際は複数の数学者の集まり（集合！）である．

前順序

集合 X 上の 2 項関係 $\preceq$ が，すべての $x, y, z \in X$ について以下を満たすとき，**前順序**ないし**擬順序**といわれる．

O1 反射性：$x \preceq x$
O2 推移性：$x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば $x \preceq z$

また組 $\langle X, \preceq \rangle$ を，**前順序集合**という．

これは我々が今後多数見ていくことになる数学的構造の最初の例である．一般に数学的構造は，元となる集合（この場合 X）と，その上に定義された関係や演算からなる．そして公理は，それがどのような関係・演算かを定めることによって，数学的構造を特徴づける．ここでは反射性（O1）と推移性（O2）という 2 つの公理が，関係 $\preceq$ および前順序集合を特徴づけている．

序章でも述べたように，数学的構造が与えられたら，その例を探そう．前順序の例とはつまり，公理 O1 と O2 を満たすもののことだ．例えば $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ は前順序である．というのも，

1. すべての整数 $x \in \mathbb{N}$ について，$x \leq x$ が当然なりたつ．
2. すべての整数 $x, y, z \in \mathbb{N}$ について，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ なので，公理 O2 も成立する．

以上から，$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ が前順序であることが示された．この例はあまりにも自明だが，実際にある対象を数学的構造でモデリングするためには，その公理が成立することを確認するのが第一のステップである．

練習問題 2.1

1. 冪集合と包含関係の組 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ が前順序集合であることを示せ．
2.「$=$」を等号とする．$\langle \mathbb{N}, = \rangle$ は前順序だろうか．
3. *0* 章で触れた関係「y は x と同等かそれ以上に完全である」は，前順序だろうか．
4. 関係「y は x の子孫である」は前順序だろうか．
5. 前順序であるような関係を数学以外から探し，それが前順序であることを示せ．

ちなみに問題 2 の答えは Yes である．というのも，「$=$」は同値類であり，反射性・対称性・推移性を満たすので，当然 O1 と O2 を満たす．このように，一般的な順序の直感にはそぐわなくても，順序の公理を満たすようなものは多数ありえる．

事例 2.1 (*Supervenience*)

X を個物の集合，Y を性質の集合とし，$f_1, f_2 : X \to Y$ を個物に性質を割り当てる *2* つの関数とする（これを「性質関数」と呼ぼう）．例えば X を（ある時点の）人の集合としたら，f_1 はその人に心的状態を割り当て，f_2 は身体状態を割り当てる，と考えても良いかもしれない．f_1 が f_2 に付随 (*supervene*) するとは，f_1 における差異が必ず f_2 における差異を含意すること，つまり任意の $x, x' \in X$ について $f_1(x) \neq f_1(x')$ なら $f_2(x) \neq f_2(x')$ が成立することである．

すべての性質関数の集合を Y^X とすると，付随は Y^X 上の前順序を定める．これを示そう．$f, g, h \in Y^X$ を任意の性質関数とすると

1. すべての $x \in X$ につき，$f(x) \neq f(x)$ なら当然 $f(x) \neq f(x)$．よって任意の性質関数 f はそれ自身に付随する．
2. f は g に付随し，g は h に付随するとする．するとすべての $x \in X$ につき，$f(x) \neq f(x)$ なら $g(x) \neq g(x)$，そしてさらに $h(x) \neq h(x)$．よって f は h に付随する．

以上より *O1* と *O2* が示されたので，付随性は前順序である．

2.2 半順序

前順序はサイクルを含みうる．つまり異なる $x \neq y$ に対し，$x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ の双方が成り立つ，ということが可能である．しかし次で定義する半順序では，こうしたサイクルは除外される．

半順序

前順序 $\preceq$ がさらに以下を満たす時，**半順序** (partial order) といわれる．

O3 反対称性：$\forall x, y \in X,\ x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ ならば $x = y$

また $\preceq$ が X 上の半順序であるとき，組 $\langle X, \preceq \rangle$ を**半順序集合** (partially ordered set または縮めて poset) という．

実は上で前順序の例として見た $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ や $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ などは，半順序でもある．実際，自然数 $x, y \in \mathbb{N}$ に対し $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$ であるし，集合 X の部分集合 A, B に対し $A \subset B$ かつ $B \subset A$ なら $A = B$ である．

練習問題 2.2

1. 関係「y は x と同等かそれ以上に完全である」は半順序だろうか．
2. 事例 *2.1* で見た付随性は半順序だろうか．
3. 数学以外の半順序の例をあげよ．

事例 2.2

形式存在論で重要な関係に「〜は... である」という *is-a relationship* がある．たとえば「人間は哺乳類である」「哺乳類は動物である」を *2* 項述語「$-$」を用い，人間 $-$ 哺乳類，哺乳類 $-$ 動物，などと書くことができる．この「である関係」は半順序である（確認せよ）．こうした階層的な存在構造は，古くからポルピュリオスの樹 *(Porphyrian tree)* として示されてきた（図 *1*）．

2.3 全順序

ポルピュリオスの樹に見られるように，一般に半順序はすべてが一列に並んでいるとは限らない．よって任意のペア x, y について，$x \preceq y$ でも $y \preceq x$ ない，つまり両者は比較不可能，ということがありえる．これに対し，すべてが一列に並んでいて互いに比較可能なものを，**全順序** (total order) という．

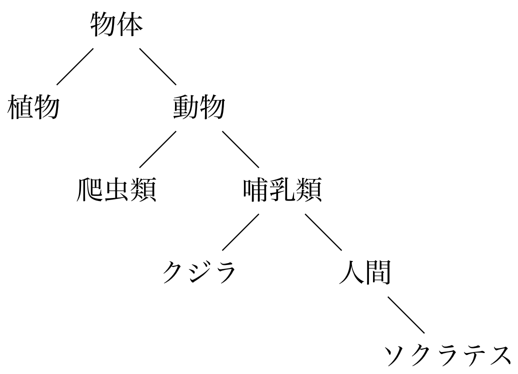

図 1　ポルピュリオスの樹

> 全順序
>
> 半順序 $\preceq$ がさらに以下を満たす時，**全順序** (total order) といわれる．
>
> O4 完備性：$\forall x, y \in X,\ x \preceq y$ または $y \preceq x$.

簡単な例としては，$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ は全順序である．一方，X が 2 つ以上の元を持つときの $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ はそうではない．

練習問題 2.3

1. 数学以外の全順序集合の例をあげよ．
2. 事例 *2.1* の付随性は全順序だろうか．

事例 2.3 (測定理論)

我々は日々，色々なものを数字で図る（身長，値段，*IQ*，幸福度・・・）．しかしなぜそれが可能なのだろうか？測定理論 *(Theory of measurement)* は，事物の集合が数字で図られるために，その集合が満たしていなければならない条件を探る学問分野である．[*2] その中で最も基本的な性質が，全順序性である．しかし，図りたい事物や出来事が全順序性を満たしていないことはしばしばある．そのような事例を考えてみよう．

3　順序の中の元

集合においては，すべての元は単なる元であり，いわば「皆平等」であった．しかし順序においては，ある元は他の元より小さかったり大きかったり，いわば文字通り，元の間に序列が存在する．そのうち特別な地位（！）にあるものは，名前がついている．ここでは半順序に注目し，それらの定義を少し見てみよう（ちなみに全順序も半順序なので，これらは全順序にも妥当することに注意）．

$\langle X, \preceq \rangle$ を半順序集合，$A \subset X$ としたとき：．

- $a \in A$ が A の**最大元**であるとは，$\forall x \in A(x \preceq a)$ が成り立つこと．逆に**最小元**であるとは，$\forall x \in A(a \preceq x)$ が成り立つこと．最大／最小元は存在するとは限らないが，あれば一つしかない．
- $b \in X$ が A の**上界** (upper bound) であるとは，$\forall x \in A(x \preceq b)$ が成り立つこと．A に

上界が存在するとき，A は**上に有界**であるという．最大元と違い，A の上界は A に含まれている必要がないことに注意．同様の仕方で，A の下界 (lower bound) が定義される．A が上に有界かつ下に有界のとき，A は有界であるという．

- A の上界は複数ありえる．例えばもし b が上界で $b \preceq c$ なら c も上界である．でもその中で一番小さい，いわば「スレスレの上界」があれば，これを**上限**ないし最小上界 (least upper bound) という．つまり A の上限とは，A の上界の集合 B の最小元（あれば）である．上界が存在しても（つまり $B \neq \emptyset$ でも）上限は存在しないこともある．同様に，A の最大下界を**下限** (greatest lower bound) という．

練習問題 3.1

3 つの元からなる集合 $X = \{x, y, z\}$ として，集合包含関係の半順序 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ を考える．$A = \{\{x\}, \{y\}\}, B = \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}, C = \{\{x, y\}, \{z\}\}$ とする．

1. A, B, C はそれぞれ最大限を持つか．持つ場合それを答えよ．
2. A, B, C はそれぞれ上界を持つか．持つ場合それを答えよ．

事例 3.1

順序集合の有界性についての問題は，哲学で非常によく出くわす．例えば「不動の第一動者」（アリストテレス）や「神の存在論的証明」（デカルト）の議論を順序の概念を用いてモデル化するとどうなるだろうか．