7. 群

2023 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2023 年 12 月 6 日

1　群とは何か，なぜそれを学ぶのか

群とは，一言で言えば，モノイドの特殊例であり，それぞれの元に対し，その働きを「キャンセル」するような逆元とよばれる元が備わったものである．その意味で，本章の内容は基本的に前章の続きである．しかしながら，この「逆元を含む」という一見些細な違いが，群を非常に幅広い現象に適用可能な，普遍的な代数体系にするのである．例えば，対称性（シンメトリー）は自然やアートなど至るところで見られる，誰にとっても馴染み深い構造であるが，こうした対称性の数理的な記述は群によって与えられる．そしてこの対称性の概念は，現代物理学においても非常に重要な役割を果たしており，そこでは群によって表される種々の対称性が，物理の法則性，保存則，および物理的対象の同一性と深く結びついている．また化学においても，多種多様な分子の構造を特徴づけるために群が用いられている．

こうした群の応用に通底しているのは，変換（transformation）という考え方である．我々は対象に対して，様々な変換を考えることができる．例えば図形を縦や横にずらしたり，回転させたり折り返したりといった作業は図形に対する変換である．こうした変換のうちにはその図形の見てくれを変えるものもあれば，変えないものもある．例えば正三角形を 120 度回転させても，見かけ上の違いは全く生じないだろう．図形の対称性とは，こうした，何らかの変換に対する不変性（invariance）として定義される．そしてこの「変換に対する不変性」という概念は，単に図形の対称性だけでなく，法則の普遍性やモノの同一性，さらには客観性や有意味性など，様々な哲学的概念と密接に関わる．というのもこうした概念は，状況や視点，測定方法の違いに対して不変的に留まるもの，つまりそれらの「変換」に対する不変性として定式化することができるからだ．

すぐに見るように，群はこうした変換の数学的定式化であり，それゆえに幅広い含意を持つ．もちろん，群にはそれ以外にも様々な側面があるのだが，本章では主に群と対称性・不変性の関係に的を絞り，例を交えつつその基本的なところだけを見ていこう．

2　群

上で述べたように，群 (group) は，以下のようにモノイドの特殊ケースとして定義される．

定義 2.1: 群

次の条件を満たすモノイド $(G, \circ, i)$ を，**群** (group) という：すべての元 $g \in G$ に対し，元 $g' \in G$ が存在し，

$$g \circ g' = g' \circ g = i.$$

ここで g と掛け合わせると単位元になる $g' \in G$ を g の**逆元** (inverse element) といい，しばしば g^{-1} と表す（場合によっては $-g$ などとも書かれる）．つまり群とは各元が逆元を持つモノイドである．

単位元 i は「何もしない」ことなので，$g \circ g^{-1} = i$ は元と逆元を合成すると結局「何もしない」ことと同じだといっている．このように，群のすべての元には，それをキャンセルする逆元が備わっている．

逆元については，次の性質が成り立つ．

命題 2.1: 逆元の性質

1. 任意の元 $g \in G$ に対し，その逆元は一意的に定まる．
2. 逆元の逆元はもとに戻る：$(g^{-1})^{-1} = g$.
3. 任意の $g, h \in G$ に対し，$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

証明は次の通り：

1. 仮に g の逆元として h, h' があるとしてみよう．すると $(h'g) = (gh) = i$ より，$h = ih = (h'g)h = h'(gh) = h'i = h'$ となり，h と h' が等しいことが示される．
2. $g^{-1}g = i$ であるが，これは g^{-1} の逆元（すなわち $(g^{-1})^{-1}$）が g であると述べていることに等しい．
3. $h^{-1}g^{-1}$ を gh の左ないし右からかけると i になることで確かめられる．例として左からかけると $h^{-1}g^{-1}gh = h^{-1}ih = h^{-1}h = i$.

群の性質を一通り見たので，その事例を見ていこう．

事例 2.1

モノイドの事例として足し算の体系を見たが，足し算の「逆」は引き算であり，引き算とは負の数を足すことにほかならない．よって自然数に変えて（負の数を含む）整数 $\mathbb{Z}$ を考えると，$(\mathbb{Z}, +, 0)$ は二項演算 $+$ について群となる．ここで $m \in \mathbb{Z}$ の逆元は $-m$ であり，実際 $m + (-m) = 0$ がなりたつ．

練習問題 2.1

掛け算の場合の逆元はなんだろうか．$(\mathbb{Z}, \times, 1)$ は二項演算 $\times$ について群となるだろうか．有理数 $\mathbb{Q}$ や実数 $\mathbb{R}$ だったらどうだろうか．

事例 2.2: 対称群

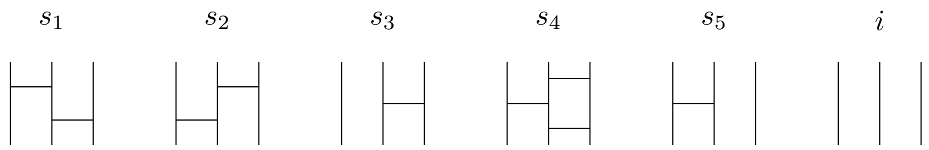
3 枚のカード $X = \{1, 2, 3\}$ を並べ替える方法を考える．$(1, 2, 3)$ と並んだカードを $(3, 1, 2)$ という順に並べ替える仕方を，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

と表し，これを s_1 と呼ぼう．これは $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2$ と割り当てる X からそれ自身への全単射 $s_1 : X \to X$ だと考えられる．こうした並べかえ関数を**置換** (permutation) という．X の置換には上記以外にも，

$$\overset{s_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \overset{s_3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}, \quad \overset{s_4}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \overset{s_5}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}, \quad \overset{i}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

の計 6 通りある（便宜上，それぞれの上にラベルをつけた）．ちなみに最後の i は結局順序が変わらない恒等写像であるが，これも「並べ替え」の一つの方法として含める．なお，置換は以下のような「あみだくじ」で表すこともできる．



これらの置換が群を成すことを示そう．まず任意の 2 つの置換を続けて適用したもの，例えば $s_3 \circ s_2$ は，$1 \mapsto 2 \mapsto 3$, $2 \mapsto 3 \mapsto 2$, $3 \mapsto 1 \mapsto 1$ というように写すので，$s_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ と一致する．実際，上のあみだくじで s_2 の下に s_3 を繋げた配線は，s_4 と等しくなることがわかる．これらの演算を積表の形で表すと以下のようになる（空白部分は自分で埋めてみよう）．

	i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
i	i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	s_1	s_2	i	s_4	s_5	s_3
s_2	s_2	i	s_1	s_5	s_3	s_4
s_3	s_3	s_4	s_5			
s_4	s_4	s_5	s_3			
s_5	s_5	s_3	s_4			

一行目の恒等写像 i は「何もしない」単位元となっている．それ以外の各行には，必ず一つこの単位元が現れる．例えば二行目は $s_2 \circ s_1 = i$ であるが，これは s_2, s_1 が互いの逆元であることを示している．以上の積が結合律を満たすことは，写像の合成が結合的である（2 章）ことから明らか．ちなみに積表を注意してみれば，単位元に限らず，積表の各行・列はすべての元を，それぞれ一つだけ含んでいる，ということに気がつく．これはこの群でたまたまそうなっているのではなく，すべての群に共通する性質である．

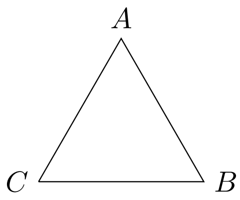
一般に，n 個の要素を持つ集合に対する置換全体が作る群を n 次**対称群** (symmetric group) と呼び，S_n と表す．この例は 3 点集合 $\{1, 2, 3\}$ の置換からなる群なので S_3 である．また以上から，任意の集合 X に対して，それ自身への全単射の集合 $\{f | f : X \to X \text{ は全単射 }\}$ は，$|X|$ 次の対称群を構成することがわかる．

練習問題 2.2

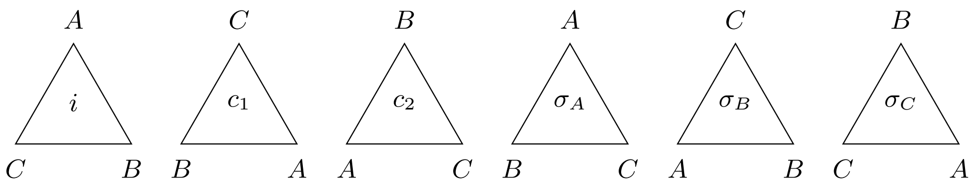
上の S_3 の積表を完成させよ．

事例 2.3: 図形の対称性

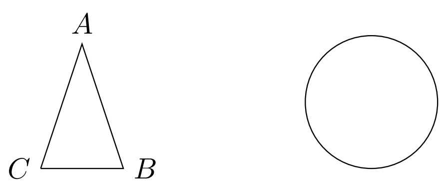
数学において，**対称性** (symmetry) ないし**対称変換**とは，対象をそのままに保つような変換群である．下のような正三角形を例に取り考えてみよう．



この三角形の持つ対称性，つまりこの幾何学的対象を「そのままに保つ」ような変換とはなんだろうか．もちろん，「何もしない」恒等変換は図形をそのままに保つ．他にも，いまあなたが目を閉じている間に，私が三角形を $120 \times n$ 度（ただし n は整数）時計回りに回転させても，目を開けたあなたは以前との違いに何も気が付かないだろう．その意味で，$120 \times n$ 度回転は正三角形をそのままに保つ変換＝対称性である．また，それぞれの頂点から対辺の中間地点へとおろした軸に沿って線対称をとっても，図形は変わらない．これらの変換，つまり恒等変換 i，120 度，240 度の時計回り回転 c_1, c_2，および点 A, B, C を通る軸に沿った鏡映反転 $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ は，以下のように頂点を移すが形はそのままに保つ，この正三角形の対称性である．



これらの対称性を $D_3 = \{i, c_1, c_2, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$ とまとめると，D_3 は i を単位元とした群をなす．まず対称変換を続けて行っても，当然それは対称変換になる，つまりそれは積で閉じており，また積は結合的である．c_1, c_2 が互いを「キャンセル」する逆元であり，また $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ のそれぞれがそれ自身の逆元になっていることも容易に分かる．
一般に，与えられた図形に対し，その図形をそのままに保つ対称変換の全体は，群を成す．そしてこの群は，図形によって変わってくる．例えば以下左のような二等辺三角形が持つ対称変換は $\{i, \sigma_A\}$ の 2 つである．



一方，右のような円の場合はあらゆる角度の回転，および中心点を通るあらゆる軸での鏡映が対称変換になる．これは，二等辺三角形よりも三角形が，そして三角形より円のほうがより対称的である，という我々の直観とも合致している．

練習問題 2.3

正三角形の対称性 $D_3 = \{i, c_1, c_2, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$ の積表を作れ．（ヒント：もちろん三角形にこれらを適用して結果を逐一確認してもよい．しかしより楽なやり方もある．三角形の変換の一つ一つは，その頂点 $\{A, B, C\}$ を並び替える置換になっていることに注意せよ．よってその全体は上で見た S_3 に等しい．）

練習問題 2.4

正方形の対称変換をすべて求め，各変換の逆元を確定せよ．

事例 2.4: カリエラ型婚姻規則

レヴィ・ストロースは『親族の基本構造』の中で，オーストラリア原住民であるカリエラ族の婚姻規則を紹介している．カリエラ族は $A1, A2, B1, B2$ で表される 4 つの氏族からなる．子供は母からアルファベットを，父から数字を引き継ぐので，例えば $B2$ の母と $A1$ の父から生まれる子供は $B1$ となる．そして結婚は，数字もアルファベットも異なる相手としかできない．なので婚姻は $A1$ と $B2$，$A2$ と $B1$ の間でのみ可能である．以下の図はこれをまとめたものである．

$$\begin{tikzcd}
A1 \arrow[r, equal, "\gamma"] \arrow[d, leftrightarrow, "\beta"'] \arrow[dr, squiggly, dash, "\alpha"] & B2 \arrow[d, leftrightarrow, "\beta"] \arrow[dl, squiggly, dash] \\
A2 \arrow[r, equal, "\gamma"'] & B1
\end{tikzcd}$$

この図において，α は父子関係，β は母子関係，γ は婚姻関係を表している．例えばあなたが $A1$ なら，あなたの父や息子は $\alpha(A1) = B1$ であり，またその結婚相手は $\gamma(\alpha(A1)) = A2$ である．実はこのややこしい婚姻規則は，**クラインの四元群**という群構造を持っている：

	i	α	β	γ
i	i	α	β	γ
α	α	i	γ	β
β	β	γ	i	α
γ	γ	β	α	i

『親族の基本構造』の補遺には，数学者アンドレ・ヴェイユ（ブルバキの中心メンバー，シモーヌ・ヴェイユの兄）によるより複雑なムルンギン族の婚姻制度に対する群論的分析が収められている (cf. 橋爪, 1988).

事例 2.5: ロボットの操作群

前章発展 5.1 では，ロボットの状態に対するプログラム作用を，その結果の同一性でまとめた同値類 $M/\sim$ を考えた．この同値類は群をなす．というのも，以下のような仕方ですべての生成元に対して逆元を考えることができるからだ

- $[f]^{-1} = [rrfrr]$（一歩進む，の逆は右に 180 度回転・一歩前進・右 180 度回転），
- $[r]^{-1} = [l]$ （右向の逆は左向），

- $[l]^{-1} = [r]$ （左向の逆は右向），
- $[i]^{-1} = [i]$.

よって生成元から形成される任意の元，例えば $[rffl]$ などに対しても，$[rffl]^{-1} = [l]^{-1}[f]^{-1}[f]^{-1}[r]^{-1}$ といった仕方で逆元が存在する．一方で，同値類で割る前の M は群ではない．その理由を考えてみよ．

3　可換性

前章では，モノイドにおける重要な区別として可換性を見た．同様の区分は群においてもそのままで成り立つ．つまり群 G が可換であるとは，任意の 2 つの元 $g, h \in G$ について $h \circ g = h \circ g$ がなりたつことをいう．これは積表で見ると，表が対角線を中心に対称になっているということだ．これまでの例で見ると，クラインの四元群は可換だが，3 次対称群 S_3 および正三角形の対称性 D_3 は可換ではない．

4　群準同型写像

次に，群の間の同一性の基準として，準同型写像を定めよう．こちらも基本的には，モノイド準同型の定義に従う．

定義 4.1: 群準同型

2 つの群 $(G, \circ, i), (G', \circ', i')$ が与えられているとき，写像 $f : G \to G'$ が**群準同型写像** (group homomorphism) であるとは，任意の $g, h \in G$ について群演算を保存する，つまり $f(g \circ h) = f(g) \circ' f(h)$ が成立することをいう．

モノイド群準同型のときは，これに加えて一方の単位元が他方の単位元に移される $f(i) = i'$ という条件があったが，群の場合はそれは必要ない．というのも以下のように，その性質は上の定義から導くことができるからだ．

命題 4.1: 群準同型の性質

群準同型 $f : G \to G'$ について，以下が成り立つ．

1. 単位元は単位元に移される．つまり $f(i) = i'$.
2. 逆元は逆元に移される．つまり任意の $g \in G$ について $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

証明は以下の通り：

1. $i = i \circ i$ であることに注意すると，f は準同型なので $f(i) = f(i \circ i) = f(i) \circ' f(i)$．こ

の両辺に $f(i)^{-1}$ をかけると

$$
\begin{aligned}
f(i) \circ' f(i)^{-1} &= f(i) \circ' f(i) \circ f(i)^{-1} \\
i' = f(i) \circ' i' &= f(i).
\end{aligned}
$$

2. $g \circ g^{-1} = i$ より，

$$f(i) = f(g \circ g^{-1}) = f(g) \circ' f(g^{-1}) \qquad \because f \text{ は準同型}$$

一方上より $f(i) = i'$ なので，これと組み合わせて $f(g) \circ' f(g^{-1}) = i'$，つまり $f(g^{-1})$ は $f(g)$ の逆元 $f(g)^{-1}$ である．

事例 4.1

例えば上の正三角形と二等辺三角形の対象変換の間に，以下のような写像を構築すると，これは両群の間の準同型写像になっている：

$$f(i) = f(c_1) = f(c_2) = i, \quad f(\sigma_1) = f(\sigma_2) = f(\sigma_3) = \sigma_A.$$

この様子は，2 つの群の積表を比べて見るとわかりやすい．下の表において，f は左側の緑／青のブロックに入っている元を，それぞれ右側の緑／青のブロックの元へと移す．f が準同型であるとは，左の積表で計算してから（例えば $c_1 \circ \sigma_A = \sigma_B$）それを右に飛ばしても（$f(\sigma_B) = \sigma_A$），右に飛ばしてから（$f(\sigma_B) = \sigma_A, f(c_1) = i$）それを計算しても（$i \circ \sigma_A = \sigma_A$），結果が変わらないということだ．このように元を適切に並べてやれば，準同型で送られた先の群の積表は，送る先の積表がギュッと縮んだような形になる（柄物のシャツが洗濯で縮んでしまったイメージ）．

	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C
i	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C
c_1	c_1	c_2	i	σ_B	σ_C	σ_A
c_2	c_2	i	c_1	σ_C	σ_A	σ_B
σ_A	σ_A	σ_B	σ_C	i	c_1	c_2
σ_B	σ_B	σ_C	σ_A	c_2	i	c_1
σ_C	σ_C	σ_A	σ_B	c_1	c_2	i

	i	σ_A
i	i	σ_A
σ_A	σ_A	i

そして通例通り，群 G, G' の間の準同型写像 $f : G \to G'$ が全単射であるとき，f は**同型写像** (isomorphism) といわれ，G と G' は群として**同型** (isomorphic) になる．練習問題 2.3 で示唆したように，正三角形の対称変換群 D_3 と，事例 2.2 で見た 3 次対称群 S_3 は同型である．

練習問題 4.1

1. $D_3 = \{i, c_1, c_2, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$ と $S_3 = \{i, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ の間の同型写像を構成せよ．

5　群の作用

我々は前章 5 節で，モノイドの集合への作用を見た．群はモノイドの一種に過ぎないので，当然同じように集合に作用させることができる．一応，定義をあげておこう：

定義 5.1: 群作用

群 $(G, \circ, i)$ の集合 S への（左）G-**作用** *(G-act)* とは，写像

$$G \times S \to S, \quad (g, s) \mapsto gs$$

であり，以下を満たす：

1. 任意の $s \in S$ について，$is = s$.
2. 任意の $g, h \in G$ と任意の $s \in S$ に対して，$h(gs) = (hg)s$.

モノイドが群に代わっただけで，それ以外は全く同じである．

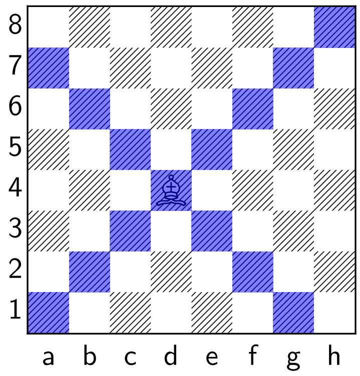
我々はすでに，群作用の例を見てきている．例えば練習問題 2.3 で示唆したように，正三角形の対称性（事例 2.3）は，3 次対称群 S_3 が三角形の頂点の集合 $S = \{A, B, C\}$ に作用したものだと考えることができる．作用する S_3 の元として s_1, s_5 をとると，$s_1(A) = C$ であり，$s_5(C) = C$ なので $s_5(s_1(A)) = C$．一方，例 2.2 の積表より $s_5 \circ s_1 = s_4$ であり，$s_4(A) = C$．以上より，集合 S の一つの要素 A に対して $s_5(s_1A) = (s_5s_1)A = C$ が示された．同様にして，S_3 のすべての元について，S のすべての要素について，この条件が満たされていることを確認できる．

練習問題 5.1: クライン四元群の氏族への作用

事例 2.4 では，カリエラ型婚姻規則がクラインの四元群で表されることを見た．これを四元群の氏族集合 $S = \{A1, A2, B1, B2\}$ への作用として表わせ．つまり四元群のすべての元 i, α, β, γ を $S \to S$ の関数と見なし，それぞれが S の各要素を何に飛ばすか（つまり氏族をどのように変化させるか）を記述せよ．

事例 5.1: チェス盤上の動き

チェスの駒であるビショップは，下図のように斜めにだけ動かすことができる．右上・右下に一桝進む動きをそれぞれ g, h で表すと，可能な動きは $\{g, h, g^{-1}, h^{-1}\}$ を組み合わせたものになる．これに「動かない」という選択肢 i を加えると，ビショップの動き全体は群になる．



この群（B と呼ぼう）は，8×8 マスのチェス盤への作用だと考えることができる．ビショップの盤上の位置を (i,j) で表すと，B の各元の作用は

$$\begin{aligned}
g(i,j) &= (\min(i+1,8), \min(j+1,8)) \\
g^{-1}(i,j) &= (\max(i-1,1), \max(j-1,1)) \\
h(i,j) &= (\min(i+1,8), \max(j-1,1)) \\
h^{-1}(i,j) &= (\max(i-1,1), \min(j+1,8))
\end{aligned}$$

となる．ここで $\min, \max$ は駒の座標が 1 から 8 の範囲にとどまらなければならない，という制約を表している．

練習問題 5.2

上図のように盤上 $d4$ にいるビショップを $h4$ に移すような群作用を一つ挙げよ．

チェスのゲームでは，上で見た群 B を適用することにより，ビショップを動かしていく．それによってビショップは盤上を縦横無尽に動くが，しかしどこにでも行ける訳ではない．初期位置が黒色のマスだった場合は，何回動いても白色のマスには行けず，また逆もしかりである．このように，群の作用によってある状態から移動可能なすべての状態の集合を，その群の**軌道** (orbit) と呼ぶ．ちゃんと定義しておこう．

定義 5.2: 軌道

群 G が集合 S に作用しているとき，G の各元を S の点 s に作用させた要素の集合を s の軌道といい，Gs と表す．つまり

$$Gs = \{gs | g \in G\}$$

である．

例えば上の例では，s を任意の黒マスとすると軌道 Bs は黒マス全体，s' を任意の白マスとすると Bs' は白マス全体である．ここでは，Bs と Bs' は互いに交わらず，また合わせると盤上全てを覆っている．すなわち，Bs と Bs' は，盤 $S = 8\times 8$ を分割する**同値類**となっている (cf. 2 章)．これはたまたまでなく，どのような群の軌道についても常に成立する．これを見るため，$s \sim s'$ という関係を，「$s' = gs$ となる元 $g \in G$ が存在する」こととして定めよう．すると

1. G には単位元があるため $s = is$ であり，よって $s \sim s$.
2. $s \sim s'$，つまり $s' = gs$ となる $g \in G$ があるとする．群は逆元 $g^{-1} \in G$ を持つので $s = g^{-1}s'$，よって $s' \sim s$.
3. $s \sim s', s' \sim s''$ とする．つまりある $g, h \in G$ があって，$s' = gs, s'' = hs'$. 群は積で閉じているため $hg \in G$ があり，群作用の条件より $s'' = h(gs) = hg(s)$，よって $s \sim s''$.

以上から，関係 $\sim$ は反射性・対称性・推移性を満たすので同値関係である．そして s の軌道 Gs とは，s から G 作用によって得られる要素の集合，つまり s と $\sim$ 関係になる要素の集合にほかならないので，同値類となる．よって群が集合に作用するとき，かならずそこには群軌道としての同値類が定義される．

逆に，同値類が与えられたら，常にそれを軌道とするような群を考えることができる．このためには，$s \sim s'$ という同値関係があるときそしてその時のみ，$s' = g(s)$ となるような関数 $g : S \to S$ があると定めればよい．するとこの関数全体が S への群になることは，ちょうど上の証明を逆さにすることでわかる（$\sim$ が反射的なので恒等射・単位元が存在し，反射的なので逆射・逆元が存在し，推移的なので関数の積が作用条件を満たす）．この群による作用は，集合の要素 s を他の要素 s' へと飛ばすが，しかしその同値類 $[s]$ の外には飛ばさない．その意味で，同値類を不変に保つ対象変換（事例 2.3）になっている．群のあるところ同値類あり，同値類あるところ群あり．このように，群と事物の同一性の間には，本質的な関係がある．

練習問題 5.3

群と異なり，モノイド作用（前章 5 節）は同値類を定義しない．その理由を考えてみよ．

事例 5.2: タイプとトークン

ワープロソフトに付いているフォントの変更機能は，画面上に表示された文字列の集合に対する群作用 F を定義する．同じ文字列，例えば「philosophy」を，*philosophy*, `philosophy`, philosophy などと変更することができ，またそれをもとに戻す逆変換も当然用意されている．このように，群 F は語トークン（ここでは「philosophy」）に作用することで，それを別の語トークンへと変更する．しかしそれによって，philosophy という語タイプが変わることはない．つまりそれぞれの語タイプ，例えば [philosophy] は，F を語トークン「philosophy」に作用させたときの軌道であり，それらは F 作用によって不変に留まる同値類を形成している．同様のことが，任意のタイプ／トークン関係に妥当する．つまり一般にタイプとは，一定のトークン集合に対する群作用から生じる群軌道として考えることができる．

事例 5.3: 群作用に対する不変性

一般に，語の意味はタイプによって定まるのであって，トークンには依存しない．*philosophy* と書こうが `philosophy` と書こうが，その意味は同じ，「哲学」である．この直観をもう少しちゃんと表してみよう．今，任意の語トークン $x \in X$ について，その意味を関数 $\phi(x)$ で表す．フォント変換群 F は X に作用するが，$\phi(x)$ を変化させない，つまり任意の $f \in F$ に対して，$\phi(x) = \phi(f(x))$ である．このようなとき，関数 ϕ は群作用 F に対して不変 (invariant) であるという．この例では，語の意味は（当然で

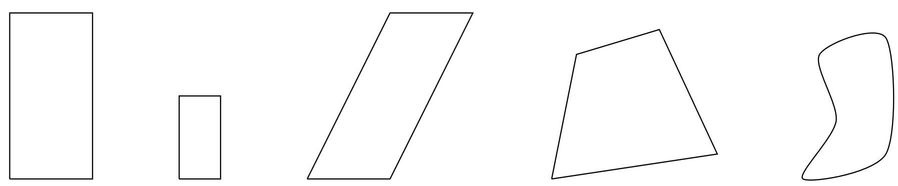
はあるが）フォント変換群に対して不変に留まる．上の例から明らかなように，群作用 F の軌道に対して定義された関数は，F に対して不変になる．

練習問題 5.4

何らかの集合 X に作用する変換群と，そのもとで不変となるような X 上の関数によってモデル化できそうな事例を考えよ．

6　対称性の哲学的含意

対称性の問題は，陰に陽に，多くの哲学的議論で現れてくる．またそれだけでなく，対称性は現代の数学・物理学においても非常に重要な概念である．対称性の重要性が最初に明確に意識されたのは，19 世紀後半に数学者のフェリックス・クラインが，弱冠 23 歳（！）でエルランゲン大学の教授に就任した際に提唱した，エルランゲン・プログラムである．当時は，19 世紀初頭の非ユークリッド幾何学の発見に導かれ，射影幾何学など様々な幾何学が林立していた．クラインのプログラムは，こうした様々な幾何学を，対称性の観点から分類・統合する，というものである．そのアイデアをざっくり説明すると，次のようなものである．



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

図 1　幾何学図形（長方形）に対する様々な変換．

図 1 の左 (a) に書かれた長方形は，様々な幾何学的性質を持っている．まずそれは線で囲まれており，その線は 4 本の直線であり，対辺の長さは等しく，隣接した辺同士は直角で交わり，さらには各辺は具体的な長さ（印刷された用紙によって異なるだろうが，例えば長辺 3cm）を持っている．しかしこれらの性質全てが同じステータスを持っているわけではなく，いくつかはより「根源的」であるように思える．この性質間の質的違いは，対称性の観点から理解できる．例えば辺の長さは，相似変換によって変わってしまうが，それ以外の性質は不変に保たれる (b)．角度はアフィン変換 (affine transformation) と呼ばれる変換により変わるが，対辺の長さが等しいという特徴は保たれる (c)．しかしその特徴も，ある光源から出た光でこの図形を他の面に射影する射影変換 (projection transformation) では変わってしまう (d)（プロジェクタから斜めに投影するとスライドの画像がずれてしまうことを思い起こすとわかりやすい）．また最後に，位相のところで見た連続変換を施せば，不変にとどまる性質は「線で囲まれている」ということだけである (e)．これらの変換はそれぞれ，別個の（しかし互いにネストした）群を形成する．そして上で述べた各性質は，異なる変換群に対する対称性を例示していると考えて良い．クラインはこうした洞察から，幾何学とは，何らかの変換群に対して不変 (invariant) にとどまる性質，すなわち対称性を探求する学問である，と特徴づけた（例えば射

影幾何学は，射影変換に対して不変な性質を探求する）．

逆に見れば，「幾何学的性質」というものは，変換群に対する対称性として定義することができる．そして何が正真正銘の幾何学的性質とみなされるかは，扱う幾何学／変換群によって変わってくる．例えば「角度」という概念は，ユークリッド幾何学では意味があるがアフィン幾何学では意味がない．したがって，「正三角形」はユークリッド世界では客観的に存在するが，アフィン世界ではそうではない．このように，性質やモノの実在性を対称性として特徴づけるアプローチは，数学に限らず，物理学でも重要な役割を担ってきた．例えば古典物理学における物体（古典力学において「存在」するもの）は，ガリレオ変換とよばれる変換群に対して不変性を保つ．一方，相対論において正真正銘のモノないし性質と認められるものは，それとは別の，ローレンツ変換に対して不変でなければならない．ローレンツ変換は時間軸と空間軸を「混ぜる」変換なので，例えばものの「長さ」は相対論においては客観的な性質ではない（光速に近い速度で移動すると，同じものが違った長さに見える）．

事例 6.1: 有意味性と対称性

京都の平均気温は 4 月は摂氏 14 度，8 月は 28 度である．しかしこれをこれをもって，「京都の 8 月は 4 月の 2 倍暑い」ということは意味をなさない．というのも気温を華氏で表現すれば，それぞれ 57 度と 82 度になり，「2 倍」という関係は成立しないからだ．一般に，温度はアフィン変換 $y = \alpha x + \beta$ 可能[a]なので，こうした変換において不変に保たれる性質のみが温度についての客観的性質として認められる．アフィン変換は群をなすので[b]，これは対称性である．ここから，ある対象（温度）についてどんな言明が有意味であるかは，その対象の対称性，すなわちそれが許容する変換群を定めればよい，という方針が従う．これは測定理論（theory of measurement）の中心的な考え方である (e.g, Narens, 2007).

[a] 例えば y を華氏，x を摂氏とすると，$y = 1.8x + 32$.

[b] アフィン変換 $y = \alpha x + \beta$ を (α, β) で表すと，単位元は $(1, 0)$．$(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ という 2 つの変換に対し，合成は $(\alpha'\alpha, \alpha'\beta + \beta')$．変換 (α, β) の逆元は $(1/\alpha, -\beta)$．結合律については明らか．

事例 6.2: 対称性議論：逆転クオリア

逆に，対称変換は対象の本質を変えないのであるから，そうした変換によって変わるような性質は，実在的ないしは客観的な性質ではない，という議論戦略も存在する．そうした議論は一般に**対称性議論** (symmetry argument) と総称される．有名な対称性議論として**逆転クオリア** (inverted qualia) がある．通常の人間が「赤」と感じる波長の光を見ると，「緑」に見えるような人を考えよう．そうした人は，我々が木の葉を見るときに感じる質感を熟れたリンゴを見るときに感じており，また逆もしかりであるが，しかし行動においては全く差異を見いだせないだろう（むしろクオリアが逆転しているのは**あなた**かもしれない）．これは，「今，赤（緑）の質を感じている」という性質を互いに入れ替えるような変換（これは群である）は，人間の状態一般を不変に保つ対称性変換であるということである．よってそうした変換において変化する性質は，実在的な性質ではない，したがってクオリアについての事実は存在しない．これはクオリアについての対称性議論である．

事例 6.3: 対称性議論：グルーパラドクス

今まで観測されたエメラルドはすべて緑 green であったとしよう．ここから，「全てのエメラルドは緑である」と考えるのは妥当な帰納推論であるように思える．しかしいま，「2025 年以前に観測され緑であるものと，2025 年以降に観測され青であるもの」を指すグルー grue という述語を導入する．すると今までに観測されたエメラルドはすべてグルーなので，「全てのエメラルドはグルーである」という仮説も同様に支持されそうに思えるが，これは明らかにおかしい．一つの解決策は，「2025 年」という特定の時間を含む述語はおかしい，と考えることかもしれない．しかしいま，「2025 年以前に観測され青であるものと，2025 年以降に観測され緑であるもの」を指すブリーン bleen という述語を導入しよう．すると述語「緑」は，「2025 年以前に観測されグルーであるものと，2025 年以降に観測されブリーンであるもの」というように定義し返される．つまりグルー／ブリーンを使う人からすれば，「緑」のほうこそ特定の時間を含んでしまっている！これは Goodman (1955) によって提唱された，**グルーパラドクス**と呼ばれる帰納推論の未解決問題である．これは緑／青という述語と，グルー／ブリーンという述語は互いに変換可能であり，よって緑仮説とグリーン仮説では優劣をつけることができないはずだという，対称性議論として理解できる．

事例 6.4: 還元主義

我々は上で，考える対称性の違いにより幾何学的性質の「根源性」の度合いのようなものが考えられることを見た．そして現代物理学において，実在的性質は対称性，つまり変換群に対する不変性として定義されることを見た．同じようなことは，他の科学にもいえるだろうか．例えば，何らかの変換群に対する不変性として化学的性質，生物学的性質，などを定義していくことは可能だろうか．

またさらに，そのように定義されたとき，それぞれの変換群は幾何学のときのような階層構造を持っているだろうか．例えば，化学的・生物学的性質はローレンツ変換に対しては不変だと期待できるかもしれない（なぜならそれは物理的性質を不変に保つのだから）．同じように，生物学的性質は化学的変換に対して不変だろうか．存在論的還元主義は，この問いに肯定的に答える：すなわちそれによれば，各科学分野における客観的性質は，その分野を特徴付ける変換群によって定義され，なおかつその変換群は階層的な構造を持っている．

参考文献

Goodman, N. (1955). *Fact, Finction, and Forecast.* Harvard University Press.

Narens, L. (2007). *Introduction to the Theories of Measurement and Meaningfulness and the Use of Symmetry in Science.* Psychology Press.

橋爪, 大. (1988). **はじめての構造主義**. 講談社現代新書.