0. 準備

2022 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2023 年 9 月 29 日

1　定義と具体例

我々は本授業で，哲学に対する形式的なアプローチを学ぶ．しかし形式的とはどういうことだろうか．ここで念頭にあるのは，定義や公理から出発する，数学的な方法である[*1]．一般的な数学の教科書を開いてみると，そこではまずある数学的対象が定義され，そこからその対象が満たす様々な性質が命題ないし定理として演繹的に示されていく．いきなりだが，一つ例を見てみよう．

定義 1.1 (前順序)**.** 集合 X とその上に定義された二項関係 $\preceq$ が以下の性質を満たす時，組 $\langle X, \preceq \rangle$ を，前順序 *(preorder)* という．

1. X のすべての要素 x について，$x \preceq x$ が成り立つ（反射性）．
2. X のすべての要素 x, y, z について，$x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ が成り立つなら，$x \preceq z$ も成り立つ（推移性）．

「集合」「二項関係」などの言葉が出てきたが，とりあえず気にしないでおこう．とにかくここでは「前順序」なる数学的対象が，性質 (1, 2) を満たすような関係 $\preceq$ を持った集合（ものの集まり）として定義されている．性質 (1, 2) は前順序を構成する関係 $\preceq$ が満たすべきルールを定めており，「公理」とも呼ばれる．

定義が与えられたら，まずやるべきことはその定義が当てはまる具体例を探すことだ[*2]．例えば，上で抽象的に定義された「前順序」の具体例としては，どのようなものがあるだろうか？一つの例としては，自然数上の関係 $\leq$ が考えられるだろう．実際，すべての自然数 x について $x \leq x$ だし，任意の 3 つの自然数 x, y, z について $x \leq y, y \leq z$ なら当然 $x \leq z$ だ．よって自然数の集合 $\mathbb{N}$ とその上の関係 $\leq$ は前順序である．また同様に，$\mathbb{N}$ と関係 $\geq$ も（別の）前順序関係をなす．

しかしこの一つの例だけで前順序をわかった気になるのは危険である．というのも，例えば自然数では任意の x, y について，$x \leq y$ あるいは $y \leq z$ が成り立つ（これを完備性という，詳

[*1] 数学とは何か，その固有な方法論はどうあるべきか，という大きな問題はここでは全く触れない．

[*2] 本当はその前に，定義が整合的で矛盾がないかどうか，つまり well-defined であるかどうかをチェックしなければならないが，本講義ではその点は問題にしない．

しくは 3 章で扱う）が，こうした規定は前順序には含まれていない．つまり自然数は一直線に並んでどのペアも大小が比較できるが，前順序は必ずしもそうでなく，「枝分かれ」を許す．なので，自然数の大小関係という特定の具体例だけで前順序を捉えるべきではない．

また，非常に極端な例もある．一つの要素「0」のみからなる集合 $\{0\}$ と，イコール関係 $0 = 0$ を考えてみると，これは上の公理 1, 2 を満たす．よってこれは前順序であるが，我々がイメージする「順序」とは似ても似つかない！なので定義が与えられたら，一つの具体例で満足するのではなく，様々な例を考えてみること，そしてそれらの例に引きずられないことが重要である．

2　哲学的問題の形式的モデリング

哲学的問題を形式的に扱うとは，上でやったような数学的定義を，哲学的問題に当てはめてみる，ということである．つまり形式的定義の具体例を，哲学の問題から探すということだ．例えば，中世から近世西洋哲学では，事物の間には「完全性」における優劣関係があると考えられていた．そこで X を事物の集まり，$x \preceq y$ を「y は x と同等かそれ以上完全である」という関係によって解釈してみると，「完全性という形而上学的関係は，前順序をなす」という一つの仮説ができる．この仮説がもっともらしいかどうかは，「より完全である」という関係が前順序の公理 1, 2 を満たすかどうかを考えればよい．つまり

1. すべての事物は，それ自身と同等あるいはそれ以上に完全だろうか？
2. 完全性関係は推移的だろうか？（つまり x が y 以上に完全で，y が z 以上に完全なとき，x は z 以上に完全だろうか？）

これらが肯定的に答えられるのであれば，前順序によって完全性関係をモデル化するのは理に適っている，ということになる．

その場合，我々はさらに歩みをすすめて，完全性という関係は前順序によって十分にモデル化されているのか，ということを問う必要がある．自然数の大小関係が「単なる」前順序ではなかったように，完全性をモデリングするためにはさらなる公理が必要なのかもしれない．例えば，それは完備なのだろうか？あるいはさらに別の公理が必要なのだろうか？アンセルムスやデカルトにおいて，完全性は神の存在論的論証で用いられた．その論証を成立させるためには，どのような仮定が必要なのだろうか．また，そうした仮定をおいた場合，完全性にはどのような制約が課されるか．哲学的問題の形式的モデリングでは，こうしたことについて考える必要がある．

3　命題論理

本授業では，数学的記号に加え，必要最小限の論理記号を用いる．[*3]これらはどれも論理学を少しかじった人にはおなじみだと思うが，ここで確認しておこう．

[*3] ちなみに本授業では一貫して古典論理を前提とする．

- $\neg P$ 「P でない」
- $P \vee Q$ 「P もしくは Q」
- $P \wedge Q$ 「P かつ Q」
- $P \Rightarrow Q$ 「P ならば Q」
- $P \iff Q$ 「P のとき，その時に限り Q」

それぞれの真理値は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

注意．「ならば」は，前件が偽になるとき常に真になることに気をつけよう．

また以下のような基本的ルールは本書に限らずよく使われるので，これを機に確認しておこう．

- 分配則
$$P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
- ド・モルガン則
$$\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$$
- 対偶
$$P \Rightarrow Q \iff \neg Q \Rightarrow \neg P$$

これらの論理式は，構成する命題（P, Q, R）がなんであっても常に成り立つ**トートロジー**である．実際，上のような真理値表を作れば，左辺の真理値と右辺の真理値の並びが全く等しくなることが確認できる．両者の真理値が等しいので，「 $\iff$ 」の左辺と右辺はいつでも交換できる．これを用いて，式変形をしていくというのが常套手段である（例えば「P ならば Q」を示したいときに，その対偶の「$\neg Q$ ならば $\neg P$」を示す，など）．

練習問題 3.1.

1.「対偶」の左辺と右辺の真理値を調べ（上の真理値表を横に拡張して，「$\neg Q \Rightarrow \neg P$」という列を作り，それぞれの行での真理値を計算する），両者が一致することを確認せよ．
2.「分配則」の一つ目の左辺と右辺の真理値を調べ，両者が一致することを確認せよ．この場合，P, Q, R の三つの要素命題があるので，$2^3 = 8$ 行の真理値表が必要になる．

4　述語記号と量化子

数学においても哲学においても，基本的な命題は，陰に陽に，何らかのモノについて，それが一定の性質を持つかどうか，という形で述べられる，あるいは一見そうは見えなくとも，そうした命題へと還元できる，ということがしばしばである．述語論理は，こうした命題を表すための基本的な枠組みを与える．2

述語論理は，命題を項と述語に分解する．例えば「ソクラテスは人間である」という命題は，ソクラテスという個体を表す**定項** a と「人間である」という**述語** H を用いて Ha と表される．一般的に，個体定項は小文字アルファベット $a, b, \cdots$，述語は大文字 $P, Q, \cdots$ などで表す．またさらに，誰それと決め打ちせず，何らかの個体を表す**変項**を小文字の x, y などで表すことにする．

述語論理で「述語」とされるものは非常に広い．例えば次のようなものは述語である．

1.「〜は赤い」などの形容詞．e.g. Ra.
2.「自動車」などの一般名詞．この場合，Ca で「a は自動車である」などと表す．
3.「〜は... を愛する」などの関係一般．e.g. $L(a, b)$ ないし aLb.
4. さらに「x と y は z の両親である」など，3 項以上の項をとる述語もある．
5. 数学的関係は基本的に述語である．例えば「$x \leq y$」という関係は 2 項述語である．

述語論理を特徴づけるのは，**量化子**の存在である．これには全称量化と存在量化の二つがある．

- 全称量化：$\forall x(Rx)$ 「すべての x について述語 R が成り立つ」
- 存在量化：$\exists x(Rx)$ 「ある x について述語 R が成り立つ」

たとえば，「すべての人間は死ぬ」という命題は，「人間である」を H，「死ぬ」を D という述語で表すと，$\forall x(Hx \Rightarrow Dx)$，すなわち「すべての x について，それが人間ならば，それは死ぬ」という形で表現できる．

練習問題 4.1. 「すべての哺乳類 *(M)* が猫 *(C)* であるわけではない」という文を，全称記号 $\forall$ を使った述語論理の式として書き下せ．また同様の文を，存在記号 $\exists$ を使った式で書き下せ．

この練習問題から示唆されるように，全称量化と存在量化の間には次のような関係がある

$$\neg\forall x Rx \iff \exists x \neg Rx$$

$$\neg\exists x Rx \iff \forall x \neg Rx$$

実際，「すべての x が R なのではない」というのは「R でない x がある」ということと同じ，また「R な x はない」というのは「すべての x は R でない」ということと同じである．

ちなみに量化子については，$\forall x \in \mathbb{N}$ のように，x が属するスコープを明示して制約することもある（ここでの $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を表す）．例えば $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}(x \leq y)$ は，「す

べての自然数についてそれより大きい自然数がある」ということを述べている.

練習問題 4.2. 次の命題の意味を明らかにし，その真偽を確定せよ.

1. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}(y = 0 - x)$
2. $\exists e \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}(x \cdot e = x)$
3. $\forall x \in \mathbb{N}(\sqrt{x} > 3 \Rightarrow x \geq 10)$

練習問題 4.3. 定義 *1.1* にあげた前順序の *2* つの公理を量化子を使って書き下せ.

練習問題 4.4. xLy を，「x は y を愛する」という意味の *2* 項述語としたとき，次を論理式によって書き下せ.

1. 誰にも愛する人がいる.
2. すべての人から愛される人がいる.
3. すべての人を愛する人なんて存在しない.
4. 相思相愛のカップルなんて存在しないんですよ.
5. 好きになった人はことごとく他の人のことが好き，という人がいる.