7. 群

2025 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2025 年 11 月 5 日

1　群とは何か，なぜそれを学ぶのか

群とは，一言で言えば，モノイドの特殊例であり，それぞれの元に対し，その働きを「キャンセル」するような逆元とよばれる元が備わったものである．その意味で，本章の内容は基本的に前章の続きである．しかしながら，この「逆元を含む」という一見些細な違いが，群を非常に幅広い現象に適用可能な，普遍的な代数体系にするのである．例えば，対称性（シンメトリー）は自然やアートなど至るところで見られる，誰にとっても馴染み深い構造であるが，こうした対称性の数理的な記述は群によって与えられる．そしてこの対称性の概念は，現代物理学においても非常に重要な役割を果たしており，そこでは群によって表される種々の対称性が，物理の法則性，保存則，および物理的対象の同一性と深く結びついている．また化学においても，多種多様な分子の構造を特徴づけるために群が用いられている．

こうした群の応用に通底しているのは，変換（transformation）という考え方である．我々は対象に対して，様々な変換を考えることができる．例えば図形を縦や横にずらしたり，回転させたり折り返したりといった作業は図形に対する変換である．こうした変換のうちにはその図形の見てくれを変えるものもあれば，変えないものもある．例えば正三角形を 120 度回転させても，見かけ上の違いは全く生じないだろう．図形の対称性とは，こうした，何らかの変換に対する不変性（invariance）として定義される．そしてこの「変換に対する不変性」という概念は，単に図形の対称性だけでなく，法則の普遍性やモノの同一性，さらには客観性や有意味性など，様々な哲学的概念と密接に関わる．というのもこうした概念は，状況や視点，測定方法の違いに対して不変的に留まるもの，つまりそれらの「変換」に対する不変性として定式化することができるからだ．

すぐに見るように，群はこうした変換の数学的定式化であり，それゆえに幅広い含意を持つ．もちろん，群にはそれ以外にも様々な側面があるのだが，本章では主に群と対称性・不変性の関係に的を絞り，例を交えつつその基本的なところだけを見ていこう．

2　群

上で述べたように，群 (group) は，以下のようにモノイドの特殊ケースとして定義される．

定義 2.1: 群

次の条件を満たすモノイド $(G, \circ, i)$ を，**群** (group) という：すべての元 $g \in G$ に対し，元 $g' \in G$ が存在し，

$$g \circ g' = g' \circ g = i.$$

ここで g と掛け合わせると単位元になる $g' \in G$ を g の**逆元** (inverse element) といい，しばしば g^{-1} と表す（場合によっては $-g$ などとも書かれる）．つまり群とは各元が逆元を持つモノイドである．

単位元 i は「何もしない」ことなので，$g \circ g^{-1} = i$ は元と逆元を合成すると結局「何もしない」ことと同じだといっている．このように，群のすべての元には，それをキャンセルする逆元が備わっている．

逆元については，次の性質が成り立つ．

命題 2.1: 逆元の性質

1. 任意の元 $g \in G$ に対し，その逆元は一意的に定まる．
2. 逆元の逆元はもとに戻る：$(g^{-1})^{-1} = g$.
3. 任意の $g, h \in G$ に対し，$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

証明は次の通り：

1. 仮に g の逆元として h, h' があるとしてみよう．すると $(h'g) = (gh) = i$ より，$h = ih = (h'g)h = h'(gh) = h'i = h'$ となり，h と h' が等しいことが示される．
2. $g^{-1}g = i$ であるが，これは g^{-1} の逆元（すなわち $(g^{-1})^{-1}$）が g であると述べていることに等しい．
3. $h^{-1}g^{-1}$ を gh の左ないし右からかけると i になることで確かめられる．例として左からかけると $h^{-1}g^{-1}gh = h^{-1}ih = h^{-1}h = i$.

群の性質を一通り見たので，その事例を見ていこう．

事例 2.1

モノイドの事例として足し算の体系を見たが，足し算の「逆」は引き算であり，引き算とは負の数を足すことにほかならない．よって自然数に変えて（負の数を含む）整数 $\mathbb{Z}$ を考えると，$(\mathbb{Z}, +, 0)$ は二項演算 $+$ について群となる．ここで $m \in \mathbb{Z}$ の逆元は $-m$ であり，実際 $m + (-m) = 0$ がなりたつ．

練習問題 2.1

掛け算の場合の逆元はなんだろうか．$(\mathbb{Z}, \times, 1)$ は二項演算 $\times$ について群となるだろうか．有理数 $\mathbb{Q}$ や実数 $\mathbb{R}$ だったらどうだろうか．

事例 2.2: 対称群

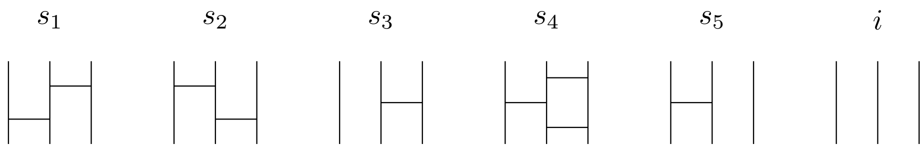
3 枚のカード $X = \{1,2,3\}$ を並べ替える方法を考える．$(1,2,3)$ と並んだカードを $(2,3,1)$ という順に並べ替える仕方を，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

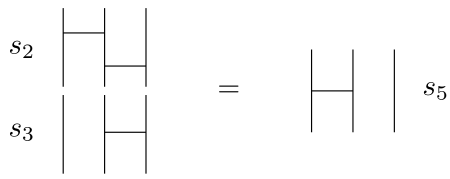
と表し，これを s_1 と呼ぼう．これは $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$ と割り当てる X からそれ自身への全単射 $s_1 : X \to X$ だと考えられる．こうした並べかえ関数を**置換** (permutation) という．X の置換には上記以外にも，

$$\begin{array}{c} s_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} s_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} s_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} s_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

の計 6 通りある（便宜上，それぞれの上にラベルをつけた）．ちなみに最後の i は結局順序が変わらない恒等写像であるが，これも「並べ替え」の一つの方法として含める．なお，置換は以下のような「あみだくじ」で表すこともできる．



これらの置換が群を成すことを示そう．まず任意の 2 つの置換を続けて適用したもの，例えば $s_3 \circ s_2$ は，$1 \mapsto 3 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1 \mapsto 1$, $3 \mapsto 2 \mapsto 3$ というように写すので，$s_5 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ と一致する．実際，上のあみだくじで s_2 の下に s_3 を繋げると下左のようになるが，二回連続交差する箇所は互いにキャンセルされて直線と変わらないので，結局右の s_5 と同様の形になることがわかる：



これらの演算を積表の形で表すと以下のようになる（リマインド：積表の各セルではその上の要素にその左の要素をかける，なので a 列 b 行にある要素は ba である）．空白部分は自分で埋めてみよう．

	i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
i	i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	s_1	s_2	i	s_5	s_3	s_4
s_2	s_2	i	s_1	s_4	s_5	s_3
s_3	s_3	s_4	s_5			
s_4	s_4	s_5	s_3			
s_5	s_5	s_3	s_4			

一行目の恒等写像 i は「何もしない」単位元となっている．それ以外の各行には，必ず一つ単位元が現れる．例えば二行三列目は $s_1 \circ s_2 = i$ であるが，これは s_1, s_2 が互いの逆元であることを示している．以上の積が結合律を満たすことは，写像の合成が結合的である（2 章）ことから明らか．ちなみに積表を注意してみれば，単位元に限ら

ず，積表の各行・列はすべての元を，それぞれ一つだけ含んでいる，ということに気がつく．これはこの群でたまたまそうなっているのではなく，すべての群に共通する性質である．
一般に，n 個の要素を持つ集合に対する置換全体が作る群を n 次**対称群** (symmetric group) と呼び，S_n と表す．この例は 3 点集合 $\{1, 2, 3\}$ の置換からなる群なので S_3 である．また以上から，任意の集合 X に対して，それ自身への全単射の集合 $\{f | f : X \to X$ は全単射 $\}$ は，$|X|$ 次の対称群を構成することがわかる．

練習問題 2.2

上の S_3 の積表を完成させよ．

事例 2.3: 幾何学的変換

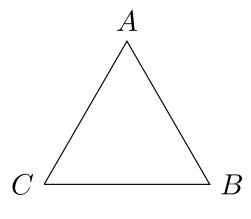
図形を動かしたり，回転させたり，拡大縮小したりといった幾何学的な変換は，みな群を構成する．

1. **並進群** T：実数の組 $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ によって，任意の図形を右に x センチ，上に y センチ動かすような変換（これを並進と呼ぶ）が与えられる．二つの並進 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ の合成は $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ となる．これは和の性質より結合律を満たし，単位元は $(0, 0)$ である．並進 (x, y) の逆元は $(-x, -y)$ である．
2. **回転群** R： 実数 $r \in \mathbb{R}$ によって，原点に対する時計回り r 度回転を表す．二つの回転 r_1, r_2 の合成は $r_1 + r_2$ 度回転で，これは結合律を満たす．単位元は 0 度回転，r の逆元は $-r$ 度回転である．
3. **スケーリング群** S： 正の実数 $s \in \mathbb{R}^+$ によって，図形の s 倍拡大を表す．二つの拡大 s_1, s_2 の合成は積 $s_1 \cdot s_2$ で，これは掛け算の性質より結合律を満たす．単位元は 1 倍拡大，s の逆元は $1/s$ 倍拡大である．

さらに，これらを全部合わせた群 $T \cup R \cup S$ も群をなし，それは相似変換群 (similarity group) と呼ばれる．つまり，図形を自由に動かし，回転させ，拡大縮小させるような変換すべてからなる変換群である．

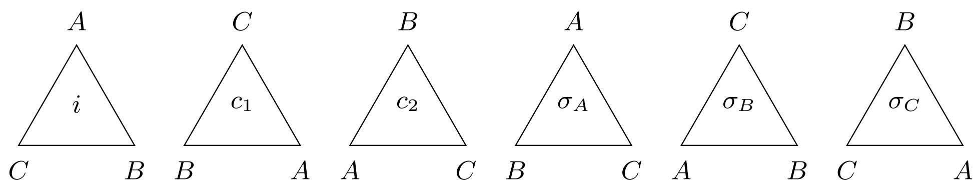
事例 2.4: 図形の対称性

数学において，**対称性** (symmetry) ないし**対称変換**とは，対象をそのままに保つような変換群である．下のような正三角形を例に取り考えてみよう．



この三角形の持つ対称性，つまりこの幾何学的対象を「そのままに保つ」ような変換とはなんだろうか．もちろん，「何もしない」恒等変換は図形をそのままに保つ．他にも，いまあなたが目を閉じている間に，私が三角形を $120 \times n$ 度（ただし n は整数）時計回

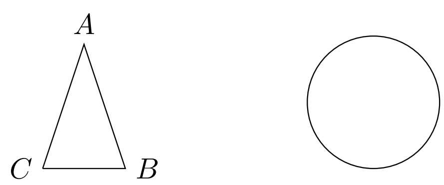
りに回転させても，目を開けたあなたは以前との違いに何も気が付かないだろう．その意味で，$120 \times n$ 度回転は正三角形をそのままに保つ変換＝対称性である．また，それぞれの頂点から対辺の中間地点へとおろした軸に沿って線対称をとっても，図形は変わらない．これらの変換，つまり恒等変換 i，120 度，240 度の時計回り回転 c_1, c_2，および点 A, B, C を通る軸に沿った鏡映反転 $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ は，以下のように頂点を移すが形はそのままに保つ，この正三角形の対称性である．



これらの対称性を $D_3 = \{i, c_1, c_2, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$ とまとめると，D_3 は i を単位元とした群をなす．まず対称変換を続けて行っても，当然それは対称変換になる，つまりそれは積で閉じており，また積は結合的である．c_1, c_2 が互いを「キャンセル」する逆元であり，また $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ のそれぞれがそれ自身の逆元になっていることも容易に分かる．他の演算の結果については，以下の積表の通りになる．実際に正三角形を回したりひっくり返したりして確認してみよう：

	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C
i	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C
c_1	c_1	c_2	i	σ_C	σ_A	σ_B
c_2	c_2	i	c_1	σ_B	σ_C	σ_A
σ_A	σ_A	σ_C	σ_B	i	c_1	c_2
σ_B	σ_B	σ_A	σ_C	c_2	i	c_1
σ_C	σ_C	σ_B	σ_A	c_1	c_2	i

一般に，与えられた図形に対し，その図形をそのままに保つ対称変換の全体は，群を成す．そしてこの群は，図形によって変わってくる．例えば以下左のような二等辺三角形が持つ対称変換は $\{i, \sigma_A\}$ の 2 つである．



一方，右のような円の場合はあらゆる角度の回転，および中心点を通るあらゆる軸での鏡映が対称変換になる．これは，二等辺三角形よりも三角形が，そして三角形より円のほうがより対称的である，という我々の直観とも合致している．

練習問題 2.3

正方形の対称変換をすべて求め，各変換の逆元を確定せよ．

事例 2.5: カリエラ型婚姻規則

レヴィ・ストロースは『親族の基本構造』の中で，オーストラリア原住民であるカリエラ族の婚姻規則を紹介している．カリエラ族は $A1, A2, B1, B2$ で表される 4 つの氏族からなる．子供は母からアルファベットを，父から数字を引き継ぐので，例えば $B2$ の母と $A1$ の父から生まれる子供は $B1$ となる．そして結婚は，数字もアルファベットも異なる相手としかできない．なので婚姻は $A1$ と $B2$，$A2$ と $B1$ の間でのみ可能である．以下の図はこれをまとめたものである．

$$
\begin{tikzcd}
A1 \arrow[r, equal, "\gamma"] \arrow[d, leftrightarrow, "\beta"'] \arrow[dr, leftrightsquigarrow] & B2 \arrow[d, leftrightarrow, "\beta"] \arrow[dl, leftrightsquigarrow, "\alpha"'] \\
A2 \arrow[r, equal, "\gamma"'] & B1
\end{tikzcd}
$$

この図において，α は父子関係，β は母子関係，γ は婚姻関係を表している．例えばあなたが $A1$ なら，あなたの父や息子は $\alpha(A1) = B1$ であり，またその結婚相手は $\gamma(\alpha(A1)) = A2$ である．実はこのややこしい婚姻規則は，**クラインの四元群**という群構造を持っている：

	i	α	β	γ
i	i	α	β	γ
α	α	i	γ	β
β	β	γ	i	α
γ	γ	β	α	i

例えば $\alpha \circ \gamma = \beta$ という等式は，ある人の婚姻パートナーの父ないし息子の氏族は，その人の母ないし娘の氏族と同じである，ということを示している．『親族の基本構造』の補遺には，数学者アンドレ・ヴェイユ（ブルバキの中心メンバー，シモーヌ・ヴェイユの兄）によるより複雑なムルンギン族の婚姻制度に対する群論的分析が収められている (cf. 橋爪, 1988).

事例 2.6: ロボットの操作群

前章発展 5.1 では，ロボットの状態に対するプログラム作用を，その結果の同一性でまとめた同値類 $M/\sim$ を考えた．この同値類は群をなす．というのも，以下のような仕方ですべての生成元に対して逆元を考えることができるからだ

- $[f]^{-1} = [rrfrr]$（一歩進む，の逆は右に 180 度回転・一歩前進・右 180 度回転），
- $[r]^{-1} = [l]$ （右向の逆は左向），
- $[l]^{-1} = [r]$ （左向の逆は右向），
- $[i]^{-1} = [i]$.

よって生成元から形成される任意の元，例えば $[rffl]$ などに対しても，$[rffl]^{-1} = [l]^{-1}[f]^{-1}[f]^{-1}[r]^{-1}$ といった仕方で逆元が存在する．一方で，同値類で割る前の M は群ではない．その理由を考えてみよ．

3　可換性

前章では，モノイドにおける重要な区別として可換性を見た．同様の区分は群においてもそのままで成り立つ．つまり群 G が可換であるとは，任意の 2 つの元 $g, h \in G$ について $h \circ g = h \circ g$ がなりたつことをいう．これは積表で見ると，表が対角線を中心に対称になっているということだ．これまでの例で見ると，クラインの四元群は可換だが，3 次対称群 S_3 および正三角形の対称性 D_3 は可換ではない．

4　群の作用

以上で見てきたように群は，カードの並べ替えや三角形の回転・反転などのように，「変換」という操作が形作る代数的な構造を表すためによく用いられる．ところで，変換あるところ，変換を被る対象が存在しなければばならない．たとえば並び替えだったら $(1, 2, 3)$ といったような「カードの並び」の集合，回転・反転であれば三角形などの図形の集合があり，上で見た S_3 や D_3 などの変換群は，こうした対象たちを変換しているのである．このような，群の「対象への働きかけ」としての側面を，**群作用** (group action) という．

我々はすでに前章 5 節で，モノイドの集合への作用を見た．群はモノイドの一種に過ぎないので，群作用の定義はモノイド作用のそれと全く同様である．一応，定義を確認しておこう：

定義 4.1: 群作用

群 $(G, \circ, i)$ の集合 X への（左）G-**作用** *(G-action)* とは，写像

$$G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto gx$$

であり，以下を満たす：

1. 任意の $x \in X$ について，$ix = x$.
2. 任意の $g, h \in G$ と任意の $x \in X$ に対して，$h(gx) = (hg)x$.

モノイドが群に代わっただけで，それ以外は全く同じである．

我々はすでに，群作用の例を見てきている．例えば正三角形の対称性（事例 2.4）は，3 次対称群 S_3 が三角形の頂点の集合 $X = \{A, B, C\}$ に作用したものだと考えることができる．作用する S_3 の元として s_1, s_5 をとると，$s_1(A) = C$ であり，$s_5(C) = C$ なので $s_5(s_1(A)) = C$. 一方，例 2.2 の積表より $s_5 \circ s_1 = s_4$ であり，$s_4(A) = C$. 以上より，集合 X の一つの要素 A に対して $s_5(s_1 A) = (s_5 s_1)A = C$ が示された．同様にして，S_3 のすべての元について，X のすべての要素について，この条件が満たされていることを確認できる．

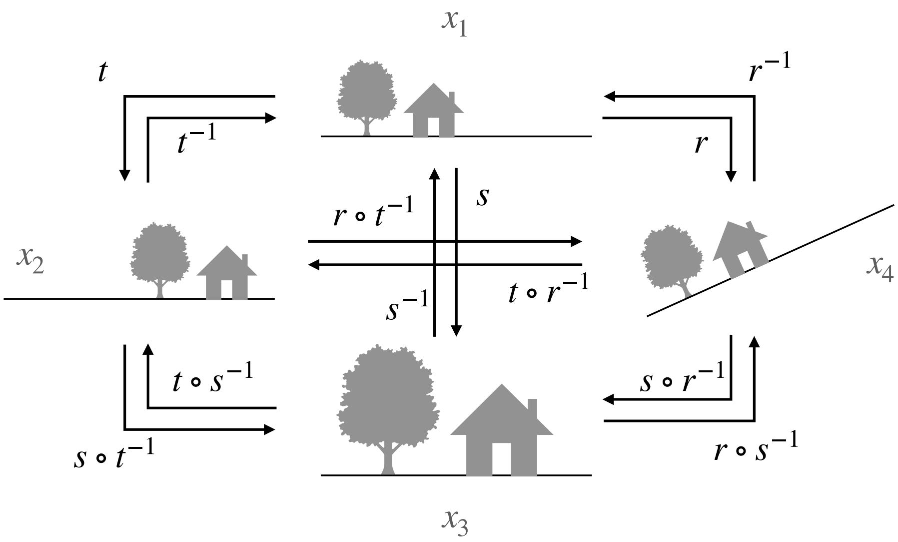


図 1　木と家の図形に対する相似変換の作用例．t は右への並進，r は反時計回りの回転，s は拡大を表している．一つの図から別の図への変換の経路は複数あるが，どれを通っても同一の群作用に帰着する．

> **練習問題 4.1: クライン四元群の氏族への作用**
>
> 事例 2.5 では，カリエラ型婚姻規則がクラインの四元群で表されることを見た．この各群は，氏族集合 $X = \{A1, A2, B1, B2\}$ への作用として考えることができる．例えば父子関係 α は，$\alpha(A1) = B1, \alpha(A2) = B2, \alpha(B1) = A1, \alpha(B2) = A2$ というように，氏族を変化させる．同様に β, γ, i を $X \to X$ の関数と見なし，それぞれが X の各要素を何に飛ばすか（つまり氏族をどのように変化させるか）を記述せよ．

事例 2.3 では，並進・回転・拡大縮小などの様々な幾何学的変換が群を構成することを見た．こうした群は，それぞれの具体的な図形に作用して，その図形を変化させる．図 1 は，相似変換群の要素を図形に作用した結果を例示したものである．ここでは，それぞれの図形が集合 X の元であり，それらに対して並進 $t \in T$，回転 $r \in T$，拡大 $s \in S$ とそれぞれの逆元が作用している．一つの図形から他の図形の間までの経路は複数ありうる．例えば上の $x_1 \in X$ から下の $x_3 \in X$ まで行く道筋は，左回り $(s \circ t^{-1}) \circ t$，真ん中 s，右回り $(s \circ r^{-1}) \circ r$ などがあるが（これ以外にも x_2, x_4 間を経由したり，同じところをぐるぐる回ったりする経路を含めれば無数にある），これらは群演算によってすべて同一の変換 $(s \circ t^{-1}) \circ t = (s \circ r^{-1}) \circ r = s$ になることを確認しよう．

> **事例 4.1: 信念の改定**
>
> B を信念の集合としよう（ある個人の信念を考えてもよいし，一定の共同体で受け入れられている信念集合でもよい）．信念は経験を経ることによって改定される．例えば萩の月[a]を食べることにより，$b_1 :=$「名物に美味いものなし」という信念は修正を余儀なくされる．一方，$b_2 :=$「光速より早く動く物体は存在しない」という信念は影響を受けない．
>
> このような経験による信念の改定を，群作用と考えよう．群の要素 g は一つの経験を表し，その作用はこの経験を得ることによってそれぞれの信念 $b \in B$ がどう変わるか

を示す．例えば萩の月を食べる経験を g で表すと，$g(b_1) \neq b_1$ だが $g(b_2) = b_2$ であろう．また逆元 g^{-1} は，g という経験を忘れること，あるいはそれを「なかったことにする」操作だと考える（もちろん，これを逆元と認めるかどうかは議論の余地がある．ならないと考える場合，モノイド作用となる）．
アプリオリな信念とは，いかなる経験 $g \in G$ を経ても変わらない信念 $P := \{b \in B : \forall g \in G(g(b) = b)$ だと考えることができる．そのような信念はあるだろうか．例えば数学的真理「2+2=4」とか,「すべての未婚者は独身である」など，いわゆる「定義によって真」とされる命題内容を持つ信念が，そうした候補としてあげられるかもしれない．
一方クワインは，有名な論文「経験主義の二つのドグマ」の中で，あらゆる信念は改定可能だと主張した．これは，どんな信念 $b \in B$ に対しても，$g(b) \neq b$ とするような経験 g が存在する（それゆえ P は空集合である）という主張だと解釈できる．

[a] 仙台銘菓.

練習問題 4.2

上の事例 4.1 において

1. 逆元 g^{-1} を，経験 g を「忘れること」によって定義することの問題点として何が考えられるか.
2. クワインは同論文のなかで,「それぞれの信念の真偽は，対応する経験によって個別的にテストできる」という還元主義を否定し,「信念は全体として経験の裁きを受ける」という全体論を主張した．この違いは，群作用の観点からどのように表すことができるだろう.

事例 4.2: 客観性

図 1 では，図形が相似変換によって移りあっていく過程を見た．もちろんこれはほんの一例であり，変換によって図形は無数の形をとりうる．しかしどんな形にもなれるわけではない．家をいくら並進・回転・拡大縮小させても，もとの家の形のまま留まるし，他の図形についても同様である．このように，群の作用によってある状態から移動可能なすべての状態の集合を，その群の**軌道** (orbit) と呼ぶ．ちゃんと定義しておこう．

定義 4.2: 軌道

群 G が集合 X に作用しているとき，G の各元を X の点 x に作用させた要素の集合を x の軌道といい，Gx と表す．つまり

$$Gx := \{gx | g \in G\}$$

である．

図 2 は，家と木の絵に対して，相似変換群を作用させて生み出される軌道（のごく一部）を示している．どのように相似変換を作用させても，家は家，木は木の形を保つっている．また

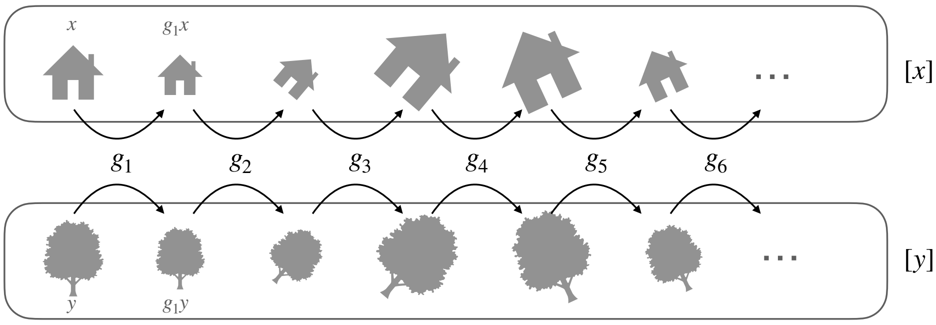


図 2　木と家の図形の相似変換による軌道.

各作用は，それぞれの図形を同様の仕方（同じ拡大率や回転度合いなど）で変化させていることもわかるだろう.

これを見ると，各軌道はそれぞれ，大きさや角度こそ異なれ同一の「家の絵」,「木の絵」からできている，といいたくなる．それはつまり，**軌道は同値類を構成する**，ということに他ならない（同値類については 2 章を参照)．これはたまたまでなく，どのような群の軌道についても常に成立する．これを見るため,「x が x' と同じ軌道にいる」ことを $x \sim x'$ という関係で表そう．これはつまり「$x' = gx$ となる元 $g \in G$ が存在する」ということだ．すると

反射性： G には単位元があるため，任意の x について $x = ix$ であり，よって $x \sim x$.

対称性： $x \sim x'$，つまり $x' = gx$ となる $g \in G$ があるとする．群は逆元 $g^{-1} \in G$ を持つので $x = g^{-1}x'$，よって $x' \sim x$.

推移性： $x \sim x', x' \sim x''$ とする．つまりある $g, h \in G$ があって，$x' = gx, x'' = hx'$．群は積で閉じているため $hg \in G$ があり，群作用の条件より $x'' = h(gx) = hg(x)$，よって $x \sim x''$.

以上から「同じ軌道にいる」という関係 $\sim$ は，反射性・対称性・推移性を満たすので同値関係である．そして x の軌道 Gx とは，x と $\sim$ 関係になる要素の集合にほかならないので，同値類となる．よって群が集合に作用するとき，かならずそこには群軌道としての同値類が定義されることがわかった.

逆に，同値類が与えられたら，常にそれを軌道とするような群を考えることができる．このためには，$x \sim x'$ という同値関係があるときそしてその時のみ，$x' = g(x)$ となるような関数 $g : X \to X$ があると定めればよい．するとこの関数全体が X への群になることは，ちょうど上の証明を逆さにすることでわかる（$\sim$ が反射的なので恒等射・単位元が存在し，反射的なので逆射・逆元が存在し，推移的なので関数の積が作用条件を満たす)．この群による作用は，集合の要素 x を他の要素 x' へと飛ばすが，しかしその同値類 $[x]_\sim$ の外には飛ばさない．その意味で，同値類を不変に保つ対称変換（事例 2.4）になっている．群のあるところ同値類あり，同値類あるところ群あり．このように，群と事物の同一性の間には，本質的な関係がある.

練習問題 4.3

群と異なり，モノイド作用（前章 5 節）は同値類を定義しない．その理由を考えてみよ.

事例 4.3: アフォーダンス

我々を含む動物は，周囲の物体を網膜上に投影された 2 次元の視覚刺激として知覚する．伝統的な経験論的見方では，知覚とはそのように得られる「いま・ここ」の断片の寄せ集めであり，それ以外の情報，例えば物体の裏側や，近づいたら何が見えるかといった情報は，得られた断片から推論されるほかないとされる．

しかし本当にそうなのだろうか．知覚には単に「いま・ここ」の視点から見たイメージだけでなく，例えば知覚者や対象が動くにつれそれがどう変わるか，といった情報も含まれているのではないだろうか．ギブソン (Gibson, 1979) は，こうした考え方をアフォーダンス (affordance) と呼んだ．それによれば，環境中の対象は，単に「いま・ここ」の刺激を送るだけでなく，「こうしたらどうなるか」という動的な探索や介入の可能性についての状況も提供 (afford) している．例えば我々が「家」を知覚するとき，それは単に今見えている形だけでなく，それに近づいたら，遠ざかったら，自分が斜めに傾いたら，といった様々な可能的な状況に対して，その知覚がどう変化するか，という情報も合わせてそこから読み取っている．

これは以下のように解釈できる．我々の視覚は，一定の変換群 G を備えている．これは我々や対象の移動や光源の変化などによって引き起こされる網膜像への幾何学的変換である．そして対象の知覚において，我々は特定の形 x を認めるとき，それが G のもとでどう変化するか，すなわちその軌道 Gx を丸ごと捉えている．例えば図 4.2 の中の特定の像 x を「家」と認識するとき，その軌道 Gx に含まれる様々な位置・大きさ・角度を持つ像へと変わりうるものとして，その像を認識しているのである．

こうした考え方はすでにカッシーラー (Cassirer, 1944) においても示されており，彼はそれを明示的に群作用の観点から論じている．

事例 4.4: 物体認識と不変性

機械学習における認識の対称性

練習問題 4.4

何らかの集合 X に作用する変換群と，そのもとで不変となるような X 上の関数によってモデル化できそうな事例を考えよ．

5　群と不変性

以上見たように，群論的構造は様々なところに顔を出す．その普遍性ゆえ，群は現代の数学・物理学においても多くの役割を担ってきた．とりわけ重要なのは，群が対象の同一性や不変性を考えるための重要な道具立てを提供する，ということである．あるものが別のものと「同じ」である，というのはどういうことだろうか．答えは「どのような点で」ということに依存してくるように思える．例えば私とあなたは別人だが，人として同じである．猫のタマは別種だが，哺乳類として同じである，等々，「同じ」ということにも様々な度合いがありそうだ．この「同じさ」の度合いは，**変換に対する不変性**という考え方で表すことができる．

事例 5.1: 幾何学的不変性とエアランゲン・プログラム

図 XXX を見てほしい．これらの図形のうち，どれとどれが「同じ」だろうか．ある見方では，(a) と (b) だけが全く同じ形・大きさなので，これだけが同じとされるかもしれない．しかしこれらも，別の場所に描かれているという点では同一ではない．次に (c) は，サイズこそが違うが，(a),(b) と同じ形をしているので，これも同じとみなす見方もあってもよいだろう．一方 (d) は形も違うが，平行四辺形という点ではこれまでの図形と同じである．そして (e) は平行四辺形でもないものの，四角形という点では同じ．最後に (f) はもはや四角形ですらないが，「線で囲まれた図形」という意味では他と共通する．

このように判断するとき，我々は「どの程度の変換の範囲内であれば，同じ範疇にとどまるとみなしてよいか」ということを考えている．図形 (b) は，(a) を横に動かすことによって得られたものだ．こうした変換を並進とよぶ．並進とはユークリッド座標上を上下作用に動かしたり回転させたりする操作である．図形 (c) は，横移動（並進）に加えて更に各辺の長さを等倍している．こうした拡大・縮小の操作を，相似変換と呼ぶ．図形 (d) は，さらにアフィン変換という作用を加えたものだ．アフィン変換は対象を歪ませるが，しかし互いに並行な辺は平行なまま保たれる．図形 (e) を生む変換は射影変換という．なぜかというと，もとの図形に光を当てたときに生じる影となるような図形だからである．プロジェクタから斜めに投影するとスライドの画像がずれてしまうように，影は並行性を保存しないが，それでも四角形という特徴はそのままである．最後に，図形 (f) は位相のところで見た連続変換を施したものである．そこでも見たように，連続変換は穴を開けたりしない限り自由に図形を変換できる．

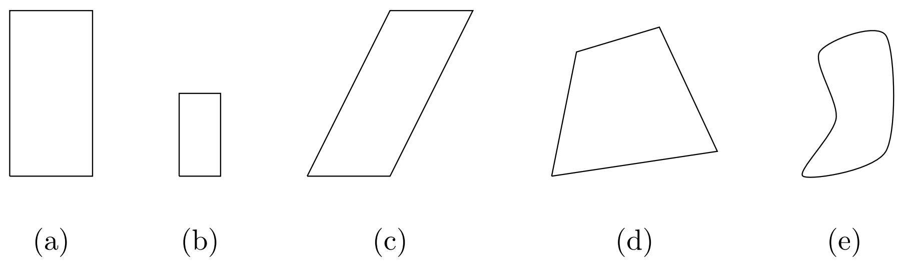


図 3　幾何学図形（長方形）に対する様々な変換.

図 3 の左 (a) に書かれた長方形は，様々な幾何学的性質を持っている．まずそれは線で囲まれており，その線は 4 本の直線であり，対辺の長さは等しく，隣接した辺同士は直角で交わり，さらには各辺は具体的な長さ（印刷された用紙によって異なるだろうが，例えば長辺 3cm）を持っている．しかしこれらの性質全てが同じステータスを持っているわけではなく，いくつかはより「根源的」であるように思える．この性質間の質的違いは，対称性の観点から理解できる．例えば辺の長さは，相似変換によって変わってしまうが，それ以外の性質は不変に保たれる (b)．角度はアフィン変換 (affine transformation) と呼ばれる変換により変わるが，対辺の長さが等しいという特徴は保たれる (c)．しかしその特徴も，ある光源から出た光でこの図形を他の面に射影する射影変換 (projection transformation) では変わってしまう (d)（プロジェクタから斜めに投影するとスライドの画像がずれてしまうことを思い起こすとわかりやすい）．また最後に，位相のところで見た連続変換を施せば，不変にとどまる性質は「線で囲まれている」ということだけである (e)．これらの変換はそれぞれ，別個の（しかし互いにネストした）群を形成する．そして上で述べた各性質は，異なる変換群に対する対称性を例示して

いると考えて良い．クラインはこうした洞察から，幾何学とは，何らかの変換群に対して不変 (invariant) にとどまる性質，すなわち対称性を探求する学問である，と特徴づけた（例えば射影幾何学は，射影変換に対して不変な性質を探求する）．

逆に見れば，「幾何学的性質」というものは，変換群に対する対称性として定義することができる．そして何が正真正銘の幾何学的性質とみなされるかは，扱う幾何学／変換群によって変わってくる．例えば「角度」という概念は，ユークリッド幾何学では意味があるがアフィン幾何学では意味がない．したがって，「正三角形」はユークリッド世界では客観的に存在するが，アフィン世界ではそうではない．このように，性質やモノの実在性を対称性として特徴づけるアプローチは，数学に限らず，物理学でも重要な役割を担ってきた．例えば古典物理学における物体（古典力学において「存在」するもの）は，ガリレオ変換とよばれる変換群に対して不変性を保つ．一方，相対論において正真正銘のモノないし性質と認められるものは，それとは別の，ローレンツ変換に対して不変でなければならない．ローレンツ変換は時間軸と空間軸を「混ぜる」変換なので，例えばものの「長さ」は相対論においては客観的な性質ではない（光速に近い速度で移動すると，同じものが違った長さに見える）．

事例 5.2: 一般観念

バークリーは『視覚新論』の中で（125 節），ロックによる「三角形の一般観念」なるものに批判を加えている．いわく，三角形の一般観念は一定の長さの辺と角度を持つどの具体的な三角形とも区別されながら，同時にそれら全てに適用されるものだとされる．しかし「どの具体的な三角形とも異なる三角形」を心の中に描くことは不可能であり，よって一般観念という考え方全体は矛盾している．この批判に対して，一般観念を擁護することは可能だろうか．一つのアイデアは，変換群を用いることである．二次元平面に描かれたある図形 x に射影変換 g を施して x' が得られるという関係（つまり $x' = gx$ となるような射影変換群 G の元 g がある，という関係）を，$x \sim x'$ と表そう．すると $\sim$ は 5 節で述べたことより同値類になる．今，x を具体的な三角形，例えば事例 2.4 で取りあげたような正三角形とする．するとすべての具体的な三角形は，x と $\sim$ 関係にあり，またその関係にあるものはすべて三角形である．つまりその同値類 $[x]_\sim$ を，三角形の一般観念と考えることができる．
同様に，今度は G' を相似変換全体がなす群であるとしよう．すると作用 G' の作用は x の「正三角形性」を保存する．よってそこから得られる軌道 $[x]'_\sim$ を，正三角形の一般観念と考えることができる．

事例 5.3: 物理学的不変性と時空間

ニュートン物理学における「モノ」と時空間．相対性理論における時空間．invariant under Lorentz 変換．

事例 5.4: 有意味性と不変性

京都の平均気温は 4 月は摂氏 14 度，8 月は 28 度である．しかしこれをこれをもって，「京都の 8 月は 4 月の 2 倍暑い」ということは意味をなさない．というのも気温を華氏で表現すれば，それぞれ 57 度と 82 度になり，「2 倍」という関係は成立しないからだ．一般に，温度はアフィン変換 $y = \alpha x + \beta$ 可能[a]なので，こうした変換において不変に

保たれる性質のみが温度についての客観的性質として認められる．アフィン変換は群をなすので[b]，これは対称性である．ここから，ある対象（温度）についてどんな言明が有意味であるかは，その対象の対称性，すなわちそれが許容する変換群を定めればよい，という方針が従う．これは測定理論（theory of measurement）の中心的な考え方である (e.g, Narens, 2007).

[a] 例えば y を華氏，x を摂氏とすると，$y = 1.8x + 32$.
[b] アフィン変換 $y = \alpha x + \beta$ を (α, β) で表すと，単位元は $(1, 0)$．$(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ という 2 つの変換に対し，合成は $(\alpha'\alpha, \alpha'\beta + \beta')$．変換 (α, β) の逆元は $(1/\alpha, -\beta)$．結合律については明らか．

事例 5.5: 客観性と不変性

性質や事実の中には，客観的なものと主観的なものがある．例えば「左京区」という名称はその場所を客観的に示してはいない．これは京の左にある区ということだろうが，まず「京の何に対して左なのか」という問題がある．基準点を京都御所に定めても，次は「御所からどの方角を見た際の左なのか」ということが問題になる．もちろん正解は「御所の主の座す方向から見て左」ということだが，これは天皇にという主観に準拠した決め方であって，客観的な決め方ではない．これは「左にある」という性質は，並進や回転に対して不変的でない，という当たり前の事実を述べたに過ぎないが，この背後にあるのは，客観的な性質はそうした変換に対して不変的でなければならない，という要請である．

Nozick (2001) は，**客観的な性質とは一定の変換に対して不変的な性質である**と主張する．「左にある」という性質の問題は，それが「誰から見るか」という変換に対して不変でない，ということであった．同様に，「背が高い」「ピアノが上手い」「赤い」という性質も，視点を変えることで変わってしまうという意味で，いくぶん主観的だと言える（例えば高速で移動する人の視点では，光のドップラー効果で違ったように見えるだろう）．またここから，客観性は度合いの問題であり，常に一定の変換群に相対的に定まるということも帰結する．この基準を上の幾何学の例に当てはめれば，並行性は長さより，辺の数は並行性より，穴の数は辺の数よりもより「客観的」で根源的な性質ということなるだろう．

6 群準同型写像

次に，群の間の同一性の基準として，準同型写像を定めよう．こちらも基本的には，モノイド準同型の定義に従う．

定義 6.1: 群準同型

2 つの群 $(G, \circ, i), (G', \circ', i')$ が与えられているとき，写像 $f : G \to G'$ が**群準同型写像** (group homomorphism) であるとは，任意の $g, h \in G$ について群演算を保存する，つまり $f(g \circ h) = f(g) \circ' f(h)$ が成立することをいう．

モノイド群準同型のときは，これに加えて一方の単位元が他方の単位元に移される $f(i) = i'$ という条件があったが，群の場合はそれは必要ない．というのも以下のように，その性質は上

の定義から導くことができるからだ.

命題 6.1: 群準同型の性質

群準同型 $f: G \to G'$ について，以下が成り立つ.

1. 単位元は単位元に移される．つまり $f(i) = i'$.
2. 逆元は逆元に移される．つまり任意の $g \in G$ について $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

証明は以下の通り：

1. $i = i \circ i$ であることに注意すると，f は準同型なので $f(i) = f(i \circ i) = f(i) \circ' f(i)$．この両辺に $f(i)^{-1}$ をかけると
$$\begin{aligned} f(i) \circ' f(i)^{-1} &= f(i) \circ' f(i) \circ f(i)^{-1} \\ i' &= f(i) \circ' i' = f(i). \end{aligned}$$
2. $g \circ g^{-1} = i$ より，
$$f(i) = f(g \circ g^{-1}) = f(g) \circ' f(g^{-1}) \qquad \because f \text{ は準同型}$$
一方上より $f(i) = i'$ なので，これと組み合わせて $f(g) \circ' f(g^{-1}) = i'$，つまり $f(g^{-1})$ は $f(g)$ の逆元 $f(g)^{-1}$ である.

事例 6.1: 自明な準同型

群 G, G' に対し，G のすべての元を G' の単位元 i' に送る $f(g) = i', \forall g \in G$ はトリビアルに準同型写像となる．これを自明な準同型という.

事例 6.2: D_3 と二等辺三角形対称変換の準同型性

例えば上の正三角形と二等辺三角形の対象変換の間に，以下のような写像を構築すると，これは両群の間の準同型写像になっている：

$$f(i) = f(c_1) = f(c_2) = i, \quad f(\sigma_1) = f(\sigma_2) = f(\sigma_3) = \sigma_A.$$

この様子は，2 つの群の積表を比べて見るとわかりやすい．下の表において，f は左側の緑／青のブロックに入っている元を，それぞれ右側の緑／青のブロックの元へと移す．f が準同型であるとは，左の積表で計算してから（例えば $c_1 \circ \sigma_A = \sigma_C$）それを右に飛ばしても（$f(\sigma_C) = \sigma_A$），右に飛ばしてから（$f(\sigma_B) = \sigma_A, f(c_1) = i$）それを計算しても（$i \circ \sigma_A = \sigma_A$），結果が変わらないということだ．このように元を適切に並べてやれば，準同型で送られた先の群の積表は，送る先の積表がギュッと縮んだような形になる（柄物のシャツが洗濯で縮んでしまったイメージ）.

	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C
i	i	c_1	c_2	σ_A	σ_B	σ_C
c_1	c_1	c_2	i	σ_C	σ_A	σ_B
c_2	c_2	i	c_1	σ_B	σ_C	σ_A
σ_A	σ_A	σ_C	σ_B	i	c_1	c_2
σ_B	σ_B	σ_A	σ_C	c_2	i	c_1
σ_C	σ_C	σ_B	σ_A	c_1	c_2	i

	i	σ_A
i	i	σ_A
σ_A	σ_A	i

そして通例通り，群 G, G' の間の準同型写像 $f : G \to G'$ が全単射であるとき，f は**同型写像** (isomorphism) といわれ，G と G' は群として**同型** (isomorphic) になる．

事例 6.3: S_3 と D_3 の同型性

我々は上で，三枚のカードをシャッフルする群としての 3 次元対称群 S_3 と，正三角形の対称変換群 D_3 を確認した．実はこれらの群は，互いに同型である．というのも，D_3 のそれぞれの元は，三角形の頂点を $\{A, B, C\}$ 並び替える変換と見ることもできるからだ．例えば右 120 度回転 c_1 は，頂点を $A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto A$ へと移す写像だと見れば，これは s_1 と全く同じことをやっている．ここから，$f(c_1) = s_1$ という対応が考えられる．同様にして，$f(c_2) = s_2, f(\sigma_A) = s_3, f(\sigma_B) = s_4, f(\sigma_C) = s_5, f(i) = i$ のように移してやると，f は S_3 と D_3 の間の準同型写像になっている（元のペアを複数とって実際に確認してみよう）．そしてこれは全単射なので，同型写像であり，S_3 と D_3 は（一方はカードのシャッフル，他方は図形の回転・鏡映という全く違う作業であるのにも関わらず）群としては同型である．

練習問題 6.1

群 G と G' が同型であるとき，その間の同型写像は必ずしも一つとは限らない．S_3 と D_3 の間の同型写像として，上の f とは異なるものを一つあげよ．

7 対称性の哲学的含意

事例 7.1: 対称性議論：逆転クオリア

逆に，対称変換は対象の本質を変えないのであるから，そうした変換によって変わるような性質は，実在的ないしは客観的な性質ではない，という議論戦略も存在する．そうした議論は一般に**対称性議論** (symmetry argument) と総称される．有名な対称性議論として**逆転クオリア** (inverted qualia) がある．通常の人間が「赤」と感じる波長の光を見ると，「緑」に見えるような人を考えよう．そうした人は，我々が木の葉を見るときに感じる質感を熟れたリンゴを見るときに感じており，また逆もしかりであるが，しかし行動においては全く差異を見いだせないだろう（むしろクオリアが逆転しているのは**あなた**かもしれない）．これは，「今，赤（緑）の質を感じている」という性質を互いに入れ替えるような変換（これは群である）は，人間の状態一般を不変に保つ対称

性変換であるということである．よってそうした変換において変化する性質は，実在的な性質ではない，したがってクオリアについての事実は存在しない．これはクオリアについての対称性議論である．

事例 7.2: 対称性議論：グルーパラドクス

今まで観測されたエメラルドはすべて緑 green であったとしよう．ここから，「全てのエメラルドは緑である」と考えるのは妥当な帰納推論であるように思える．しかしいま，「2025 年以前に観測され緑であるものと，2025 年以降に観測され青であるもの」を指すグルー grue という述語を導入する．すると今までに観測されたエメラルドはすべてグルーなので，「全てのエメラルドはグルーである」という仮説も同様に支持されそうに思えるが，これは明らかにおかしい．一つの解決策は，「2025 年」という特定の時間を含む述語はおかしい，と考えることかもしれない．しかしいま，「2025 年以前に観測され青であるものと，2025 年以降に観測され緑であるもの」を指すブリーン bleen という述語を導入しよう．すると述語「緑」は，「2025 年以前に観測されグルーであるものと，2025 年以降に観測されブリーンであるもの」というように定義し返される．つまりグルー／ブリーンを使う人からすれば，「緑」のほうこそ特定の時間を含んでしまっている！これは Goodman (1955) によって提唱された，**グルーパラドクス**と呼ばれる帰納推論の未解決問題である．これは緑／青という述語と，グルー／ブリーンという述語は互いに変換可能であり，よって緑仮説とグリーン仮説では優劣をつけることができないはずだという，対称性議論として理解できる．

事例 7.3: 還元主義

我々は上で，考える対称性の違いにより幾何学的性質の「根源性」の度合いのようなものが考えられることを見た．そして現代物理学において，実在的性質は対称性，つまり変換群に対する不変性として定義されることを見た．同じようなことは，他の科学にもいえるだろうか．例えば，何らかの変換群に対する不変性として化学的性質，生物学的性質，などを定義していくことは可能だろうか．

またさらに，そのように定義されたとき，それぞれの変換群は幾何学のときのような階層構造を持っているだろうか．例えば，化学的・生物学的性質はローレンツ変換に対しては不変だと期待できるかもしれない（なぜならそれは物理的性質を不変に保つのだから）．同じように，生物学的性質は化学的変換に対して不変だろうか．存在論的還元主義は，この問いに肯定的に答える：すなわちそれによれば，各科学分野における客観的性質は，その分野を特徴付ける変換群によって定義され，なおかつその変換群は階層的な構造を持っている．

参考文献

Cassirer, E. (1944). The concept of group and the theory of perception. *Philosophy and Phenomenological Research*, 5(1):1–36.

Gibson, J. J. (1979). *The Ecological Approach to Visual Perception*. Houghton Mifflin Company, Boston, MA.

Goodman, N. (1955). *Fact, Finction, and Forecast*. Harvard University Press.

Narens, L. (2007). *Introduction to the Theories of Measurement and Meaningfulness and the Use of Symmetry in Science*. Psychology Press.

Nozick, R. (2001). Invariances: The Structure of the Objective World. *Harvard University Press*, page 1 423.

橋爪, 大. (1988). **はじめての構造主義**. 講談社現代新書.