

3. 順序

2023 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2023 年 10 月 3 日

1 構造

前章までで、集合論の（ほんの）基礎的なところを見た。現代数学において、集合はあらゆる理論的構造の「素材」としての役割を担っている。例えば線形代数や解析学やリー代数や確率論や・・・あらゆる数学理論は、「かくかくしかじかの性質を持った集合」と定義できるのである^{*1}。つまり語弊を恐れずにいえば、数学の理論とは、何らかの構造を持った集合である。実際、この章以下で我々は、ブール代数や群、位相などを、特定の構造を持つ集合として導入する。集合が持つそうした構造は、一般に**公理** (axioms) の形で表される。まず手始めに、一番簡単な、順序構造を集合に入れるところから考えてみよう。

2 さまざまな順序

順序とは、特殊な条件（公理）を満たす 2 項関係である。その条件の付け加え方によって、前順序／半順序／全順序という三つの順序が得られる。以下見るように、後の方ほどより要件が多く、より「厳しい」順序になってくる。

2.1 前順序

同値類とは反射的、対称的かつ推移的な関係だったことを思い出そう（2 章 3 節）。この条件から対称性を落とすと、0 章でも見た**前順序**ないし**擬順序** (preorder) が得られる。きちんと書き下せば、集合 X 上の 2 項関係 \preceq が半順序であるとは、

O1 反射性： $x \preceq x$

O2 推移性： $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば $x \preceq z$

がすべての $x, y, z \in X$ について満たされることをいう。また集合 X とその上に定義された前

^{*1} こうした集合論に根ざした数学の統一的理解は、20 世紀のニコラ・ブルバキ (Nicolas Bourbaki) の仕事に多くを負っている。ブルバキは集合論をいわば数学の共通言語に見立て、各数学理論を集合論の枠内で再構築した。ちなみにブルバキはペンネームで、実際は複数の数学者の集まり（集合！）である。

順序関係 \preceq の組 $\langle X, \preceq \rangle$ を、**前順序集合**という。

前順序集合は数学的構造の一例である。一般的に数学的構造は、元となる集合（この場合 X ）と、その上に定義された関係や演算からなる。そして公理は、それがどのような関係・演算かを定めることによって、数学的構造を特徴づける。我々は今後、こうした数学的構造の様々な事例を見ることになる。とりあえずここでは、反射性（O1）と推移性（O2）という関係 \preceq が満たす2つの公理によって、前順序集合が特徴づけられていることを確認しよう。

序章でも述べたように、数学的構造が与えられたら、その例を探そう。前順序の例とはつまり、公理 O1 と O2 を満たすもののことだ。例えば $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ は前順序である。というのも、

1. すべての整数 $x \in \mathbb{N}$ について、 $x \leq x$ が当然なりたつ。
2. すべての整数 $x, y, z \in \mathbb{N}$ について、 $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ なので、公理 O2 も成立する。

以上から、 $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ が前順序であることが示された。この例はあまりにも自明だが、実際にある対象を数学的構造でモデリングするためには、その公理が成立することを確認するのが第一のステップである。

練習問題 2.1

1. 冪集合と包含関係の組 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ が前順序集合であることを示せ。
2. 「 $=$ 」を等号とする。 $\langle \mathbb{N}, = \rangle$ は前順序だろうか。
3. 0章で触れた関係「 y は x と同等かそれ以上に完全である」は、前順序だろうか。
4. 前順序であるような関係を数学以外から探し、それが前順序であることを示せ。

ちなみに問題2の答えは Yes である。というのも、「 $=$ 」は同値類であり、反射性・対称性・推移性を満たすので、当然 O1 と O2 を満たす。このように、一般的な順序の直感にはそぐわなくても、順序の公理を満たすようなものは多数ありえる。

事例 2.1 (Supervenience)

X を個物の集合、 Y を性質の集合とし、 $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ を個物に性質を割り当てる2つの関数とする（これを「性質関数」と呼ぼう）。例えば X を（ある時点の）人の集合としたら、 f_1 はその人に心的状態を割り当て、 f_2 は身体状態を割り当てる、と考えても良いかもしれない。 f_1 が f_2 に付随 (supervene) するとは、 f_1 における差異が必ず f_2 における差異を含意すること、つまり任意の $x, x' \in X$ について $f_1(x) \neq f_1(x')$ なら $f_2(x) \neq f_2(x')$ が成立することである。

すべての性質関数の集合を Y^X とすると、付随は Y^X 上の前順序を定める。これを示そう。 $f, g, h \in Y^X$ を任意の性質関数とすると

1. すべての $x \in X$ につき、 $f(x) \neq f(x)$ なら当然 $f(x) \neq f(x)$ 。よって任意の性質関数 f はそれ自身に付随する。
2. f は g に付随し、 g は h に付随するとする。するとすべての $x \in X$ につき、 $f(x) \neq f(x)$ なら $g(x) \neq g(x)$ 、そしてさらに $h(x) \neq h(x)$ 。よって f は h に付随する。

以上より O1 と O2 が示されたので、付随性は前順序である。

2.2 半順序

上で定義した前順序に、もう一つ次の公理を導入してみよう：

O3 反対称性： $\forall x, y, z \in X, x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ ならば $x = y$

つまり「タイ」であるようなものは全部同一である、という取り決めである。O1~O3 を満たす関係は、**半順序** (partial order) といわれる。また \preceq が X 上の半順序であるとき、組 $\langle X, \preceq \rangle$ を**半順序集合** (partially ordered set または縮めて poset) という。

練習問題 2.2

身近な半順序の例を挙げよ。

ところでなぜ「半」順序なのか？それは、一般に考える順序には少し及ばないからだ。一般的に順序というと、すべてが一行に並んでいるイメージがある。一行に並んでいるとは、任意の $x, y \in X$ について、 $x \preceq y$ か $y \preceq x$ の少なくとも一方が成り立つということだ（両方成立してても良い。その場合は反対称性より $x = y$ となる）。これを**完備性** (completeness) という。半順序は完備性を要求しないので、「枝分かれした」順序を許す。完備性を満たす半順序は**全順序** (total order) という*2。上の例では、 $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ は全順序だが、 X が2つ以上の元を持つときの $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ はそうではない。

練習問題 2.3

全順序集合と、全順序でない半順序集合の例を挙げよ。

ここでいくつかの定義を確認しておこう。 $\langle X, \preceq \rangle$ を半順序集合、 $A \subset X$ としたとき：

- $a \in A$ が A の**最大元**であるとは、 $\forall x \in A (x \preceq a)$ が成り立つこと。逆に**最小元**であるとは、 $\forall x \in A (a \preceq x)$ が成り立つこと。最大／最小元は存在するとは限らないが、あれば一つしかない。
- $b \in X$ が A の**上界** (upper bound) であるとは、 $\forall x \in A (x \preceq b)$ が成り立つこと。 A に上界が存在するとき、 A は**上に有界**であるという。最大元との違い、 A の上界は A に含まれている必要がないことに注意。同様の仕方、 A の下界 (lower bound) が定義される。 A が上に有界かつ下に有界のとき、 A は有界であるという。
- A の上界は複数ありえる。例えばもし b が上界で $b \preceq c$ なら c も上界である。でもその中で一番小さい、いわば「スレスレの上界」があれば、これを**上限**ないし**最小上界** (least upper bound) という。つまり A の上限とは、 A の上界の集合 B の最小元（あれば）である。上界が存在しても（つまり $B \neq \emptyset$ でも）上限は存在しないこともある。同様に、 A の最大下界を**下限** (greatest lower bound) という。

*2 ちなみに完全性は反射性を含意する（「任意の $x, y \in X$ 」の両方が x の場合）ので、全順序の定義は推移性、反対称性と完備性で事足りる。

事例 2.2

順序集合の有界性についての問題は、哲学で非常によく出くわす。例えば「不動の第一動者」(アリストテレス)や「神の存在論的証明」(デカルト)の議論を順序の概念を用いてモデル化するとどうなるだろうか。