「哲学者のための数学」練習問題の解答

ver. 2025 年 10 月 22 日

1　集合

3.1　1 真. 2 偽. 3 真.

4.1　1 偽. 2 真. 3 真. 4 真.

4.2　$\Omega := \{x|x = x\}, \emptyset := \{x|x \neq x\}$. 他にも色々ありうる．$\Omega$ は条件が恒真式（トートロジー），$\emptyset$ は矛盾式になればよい.

4.3　$[a] := \{x|x = a\}$.

5.1　2 は本文同様なので省略する．3 については以下の通り（4 は 3 と同様なので略).

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\iff \neg(x \in (A \cup B)) && \because \text{補集合の定義より} \\
&\iff \neg(x \in A \vee x \in B) && \because \cup\text{の定義より} \\
&\iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) && \because \text{ド・モルガン則より} \\
&\iff (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) && \because \text{補集合の定義より} \\
&\iff x \in (A^c \cap B^c) && \because \cap\text{の定義より}
\end{aligned}
$$

5.2　結合律については本文通り．可換律については，本文同様 $A = \{1, 2\}, B = \{1\}$ とすれば，$A \setminus B = \{2\}$ であるのに対し $B \setminus A = \emptyset$ となり等しくならないことがわかる.

8.1　等しくない．例えば本文同様 $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2\}$ とすると，$A \times B$ の元はすべて (a_i, b_j) となるが，$B \times A$ の元は (b_i, a_j) となり順序が異なる.

2　関係と関数

1.1

1. $\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists a \in \mathbb{N}(n = a \cdot m)\}$
2. $\{(x, y, z) \in X \times X \times X | y$ and z are biological parents of $x\}$

2.1　「$=$」は反射的，対称的かつ推移的．「$<$」は推移的．「$\leq$」は反射的かつ推移的．

2.2　(1) 名前を知っている (2) 親類である (3) 母である (4) 子孫である．

3.2　5 つ（北海道，本州，四国，九州，沖縄）．

3.3　推移的でないため不可能．例：山口／岡山／福岡

事例 3.1　同値類は一つひとつの可能世界である．

事例 3.2　推移性を満たさない．

4.1

1. $I_{Np}(t) = \emptyset$ for $t < t_0, t_1 < t$.
2. 時空的連続性の問題．空間的に離れた部分集合，時間的に連続していない集合が「個物」として認められてしまう．

5.1　$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x^3 - 2x) = (x^3 - 2x)^3 - 2(x^3 - 2x) = x^9 - 6x^7 + 12x^5 - 8x^3$

6.1　日本：Bob ／ アメリカ：Alice, Dave ／ フランス：Chris

6.2　$[a] = f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = \quad f(a)\}$．反射性・対称性・推移性は「$=$」より従う（練習問題 2.1）．つまり [反射性]：明らかに $f(a) = f(a)$．[対称性]：$f(a) = f(b)$ ならば $f(b) = f(a)$．[推移性]：$f(a) = f(b), f(b) = f(c)$ ならば $f(a) = f(c)$．

6.3　この関数に入力する部分集合 A として単元集合 $\{x'\}$ をとると，$f(\{x'\}) = \{f(x) | x \in \{x'\}\}$ となるが，$\{x'\}$ に含まれる要素は x' だけなので，これは結局 $f(x')$ だけからなる単元集合 $\{f(x')\}$ になる．よって単元集合の像は単元集合となり，これは元の関数 $f : x' \mapsto f(x')$ と同一視できる．

6.4　$x' \in \{x'\}$ であり，それ以外に $\{x'\}$ の要素はないので，$x' \in f^{-1}(f(\{x'\})) = \{x | f(x) \in f(\{x'\})\}$ を示せばよい．上の問題より $f(\{x'\}) = \{f(x')\}$ なので，$f(x') \in f(\{x'\})$．よって上の条件が満たされ $x' \in f^{-1}(f(\{x'\}))$ となる．

7.1　全射でない，つまりある $y \in Y$ に対し $f(x) = y$ となる x が存在しないとする．すると $f^{-1}(y) = \emptyset$ となり，f^{-1} が Y から X への関数にならない（関数は X の要素をあてがわねばならない）．

7.2　全射である．任意の $[x] \in X/R$ は，そこに含まれる元 $x \in [x]$ に対して $f(x) = [x]$．しかし単射ではない．例えば異なる $x \neq y$ に対し xRy であれば，$x, y \in [x]$ となり，よって $f(x) = f(y)$．単射であるためには，R が自分自身のみと成立するとき，つまり $\forall x, y(x \neq y \Rightarrow \neg xRy)$ でなければならない．

3　順序

2.1

1. 任意の部分集合 $A \subset X$ に対し，$A \subset A$．また A, B, C をそれぞれ X の部分集合とし，$A \subset B, B \subset C$ を仮定すると，部分集合の定義上，$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in C)$ がなりたつ．よって $A \subset C$．
2. 任意の $n \in \mathbb{B}$ について $n = n$ であり，また $m, l \in \mathbb{B}$ について $n = m$, $m = l$ ならば $n = l$ なので，前順序である．
3. 略
4. どのような人も，「自分自身の祖先である」とは言われないので，反射性が満たされず，前順序ではない．
5. 「x は y の部分である（ないし y に含まれる）」という関係は前順序である．どのようなもの x も，自分自身の部分であるといえる．また x が y の部分であり，y が z の部分であれば，x は z の部分である．

2.2

1. もし，全く同じ完全性を有する二つの異なる個体が存在するのであれば，それは半順序ではない．
2. 半順序ではない．たとえば $X = \{x_1, x_2\}, Y = \{y_1, y_2\}$ とし，二つの性質関数 $f, g : X \to Y$ を $f(x_1) = g(x_2) = y_1$ かつ $f(x_2) = g(x_1) = y_2$ となるように定める．f は単射なので，任意の $x, x' \in X$ について $f(x) = f(x')$ であれば $x = x'$ であり，よって $g(x) = g(x')$．この対偶より g は f に付随する．g も同じく単射なので，同様にして f は g に付随する．しかし f, g は X の各要素に違う Y を割り当てるので $f \neq g$ である．よって反対称性を満たさない．
3. 「x が y を割り切る」を $x|y$ と書くことにする．これは「ある自然数 a があって $y = ax$」を意味する．$a = 1$ とすれば，明らかに $x|x$ であり反射的．また $x|y$ かつ $y|z$ ならば，ある自然数 a, b があって $y = ax$ かつ $z = by$ であるから，$z = abx$ となり $x|z$ である，つまり推移的．最後に $y = ax$ かつ $x = by$ と仮定すると，$y = aby$ となり，よって $a = b = 1$．したがって $x = y$ となり反対称性も満たされる．したがってこの関係は半順序である．
4. 2.1 に前順序としてあげた「x は y の部分である（ないし y に含まれる）」という関係は半順序でもある．というのも，もし x が y の部分であり，また逆もそうならば，x と y は同じものだろうからだ．

3.1

1. A: 存在しない．$B:\{x,y\}$．C: 存在しない．
2. $A:\{x,y\},\{x,y,z\}$. $B:\{x,y\},\{x,y,z\}$．$C:\{x,y,z\}$.
3. $A:\{x,y\}$. $B:\{x,y\}$. $C:\{x,y,z\}$.

3.2

1. 最大元：存在しない．上界：a と b の公倍数．上限：a と b の最小公倍数.
2. 生命の始まりがあるなら，下に有界．いかなる生物もいずれ絶滅すると考えれば，上にも有界．上限は存在しない．下限は A の共通祖先.

4.2　$x \preceq_X x'$ とする．f 単調より，$f(x) \preceq_Y f(x')$．一方 g 単調より，任意の y, y' について $y \preceq_Y y'$ ならば $g(y) \preceq_Z g(y')$，よって特に $g \circ f(x) = g(f(x)) \preceq_Z g(f(x')) = g \circ f(x')$．以上より $g \circ f$ は単調写像.