

「哲学者のための数学」練習問題の解答

ver. 2025 年 10 月 17 日

1 集合

3.1 1 真. 2 偽. 3 真.

4.1 1 偽. 2 真. 3 真. 4 真.

4.2 $\Omega := \{x|x = x\}, \emptyset := \{x|x \neq x\}$. 他にも色々ありうる. Ω は条件が恒真式 (トートロジー), \emptyset は矛盾式になればよい.

4.3 $[a] := \{x|x = a\}$.

5.1 2 は本文同様なので省略する. 3 については以下の通り (4 は 3 と同様なので略).

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B)^c &\iff \neg(x \in (A \cup B)) && \because \text{補集合の定義より} \\&\iff \neg(x \in A \vee x \in B) && \because \cup \text{の定義より} \\&\iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) && \because \text{ド・モルガン則より} \\&\iff (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) && \because \text{補集合の定義より} \\&\iff x \in (A^c \cap B^c) && \because \cap \text{の定義より}\end{aligned}$$

5.2 結合律については本文通り. 可換律については, 本文同様 $A = \{1, 2\}, B = \{1\}$ とすれば, $A \setminus B = \{2\}$ であるのに対し $B \setminus A = \emptyset$ となり等しくならないことがわかる.

8.1 等しくない. 例えば本文同様 $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2\}$ とすると, $A \times B$ の元はすべて (a_i, b_j) となるが, $B \times A$ の元は (b_i, a_j) となり順序が異なる.

2 関係と関数

1.1

1. $\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N}(n = a \cdot m)\}$
2. $\{(x, y, z) \in X \times X \times X \mid y \text{ and } z \text{ are biological parents of } x\}$

2.1 「=」は反射的，対称的かつ推移的。「<」は推移的。「 \leq 」は反射的かつ推移的。

2.2 (1) 名前を知っている (2) 親類である (3) 母である (4) 子孫である。

3.2 5つ (北海道，本州，四国，九州，沖縄)。

3.3 推移的でないため不可能。例：山口／岡山／福岡

事例 3.1 同値類は一つひとつの可能世界である。

事例 3.2 推移性を満たさない。

4.1

1. $I_{N_p}(t) = \emptyset$ for $t < t_0, t_1 < t$.
2. 時空的連続性の問題。空間的に離れた部分集合，時間的に連続していない集合が「個物」として認められてしまう。

$$5.1 \quad f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x^3 - 2x) = (x^3 - 2x)^3 - 2(x^3 - 2x) = x^9 - 6x^7 + 12x^5 - 8x^3$$

6.1 日本：Bob / アメリカ：Alice, Dave / フランス：Chris

6.2 $[a] = f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = f(a)\}$. 反射性・対称性・推移性は「=」より従う (練習問題 2.1). つまり [反射性]: 明らかに $f(a) = f(a)$. [対称性]: $f(a) = f(b)$ ならば $f(b) = f(a)$. [推移性]: $f(a) = f(b), f(b) = f(c)$ ならば $f(a) = f(c)$.

6.3 この関数に入力する部分集合 A として単元集合 $\{x'\}$ をとると, $f(\{x'\}) = \{f(x) \mid x \in \{x'\}\}$ となるが, $\{x'\}$ に含まれる要素は x' だけなので, これは結局 $f(x')$ だけからなる単元集合 $\{f(x')\}$ になる. よって単元集合の像は単元集合となり, これは元の関数 $f: x' \mapsto f(x')$ と同一視できる.

6.4 $x' \in \{x'\}$ であり, それ以外に $\{x'\}$ の要素はないので, $x' \in f^{-1}(f(\{x'\})) = \{x \mid f(x) \in f(\{x'\})\}$ を示せばよい. 上の問題より $f(\{x'\}) = \{f(x')\}$ なので, $f(x') \in f(\{x'\})$. よって上の条件が満たされ $x' \in f^{-1}(f(\{x'\}))$ となる.

7.1 全射でない, つまりある $y \in Y$ に対し $f(x) = y$ となる x が存在しないとする. すると $f^{-1}(y) = \emptyset$ となり, f^{-1} が Y から X への関数にならない (関数は X の要素をあてがわねばならない).

7.2 全射である. 任意の $[x] \in X/R$ は, そこに含まれる元 $x \in [x]$ に対して $f(x) = [x]$. しかし単射ではない. 例えば異なる $x \neq y$ に対し xRy であれば, $x, y \in [x]$ となり, よって $f(x) = f(y)$. 単射であるためには, R が自分自身のみと成立するとき, つまり $\forall x, y (x \neq y \Rightarrow \neg xRy)$ でなければならない.