3. 順序

2023 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2023 年 10 月 2 日

1　構造

前章までで，集合論の（ほんの）基礎的なところを見た．現代数学において，集合はあらゆる理論的構造の「素材」としての役割を担っている．例えば線形代数や解析学やリー代数や確率論や・・・あらゆる数学理論は，「かくかくしかじかの性質を持った集合」と定義できるのである[*1]．つまり語弊を恐れずにいえば，数学の理論とは，何らかの構造を持った集合である．実際，この章以下で我々は，ブール代数や群，位相などを，特定の構造を持つ集合として導入する．集合が持つそうした構造は，一般に**公理** (axioms) の形で表される．まず手始めに，一番簡単な，順序構造を集合に入れるところから考えてみよう．

2　順序

同値類とは反射的，対称的かつ推移的な関係なのだった（2 章 3 節）．ここで対称性を反対称性に替えた関係を，**半順序** (partial order) という．きちんと書き下せば，集合 X 上の 2 項関係 $\preceq$ が半順序であるとは，

- 反射性：$x \preceq x$
- 推移性：$x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば $x \preceq z$
- 反対称性：$x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ ならば $x = y$

がすべての $x, y, z \in X$ について満たされることをいう．身近なところでは，$\geq, \leq$ などがこの条件を満たすことを確認しよう．

練習問題 2.1. 身近な半順序の例を挙げよ．

半順序関係を持つ集合を，**半順序集合** (partially ordered set または縮めて poset) という．せっかくなので，ちゃんと定義すると以下のようになる：

[*1] こうした集合論に根ざした数学の統一的理解は，20 世紀のニコラ・ブルバキ (Nicolas Bourbaki) の仕事に多くを負っている．ブルバキは集合論をいわば数学の共通言語に見立て，各数学理論を集合論の枠内で再構築した．ちなみにブルバキはペンネームで，実際は複数の数学者の集まり（集合！）である．

定義 2.1 (半順序集合)**.** 集合 X とその上に定義された半順序関係 $\preceq$ の組 $\langle X, \preceq \rangle$ を，半順序集合という．

この定義は，半順序集合を，集合 X とその上に定義された関係の組として定めている．この組を半順序集合たらしめているのは，この関係 $\preceq$ が半順序であるということ，つまり上に挙げた反射性・推移性・反対称性を満たすということであり，これがいわばこの関係を特徴づける公理となっている．一般に「構造を持つ集合」ということで意味されているのは，このような「集合 & 一定の条件（公理）を満たす関係や関数や元など」の組のことである．

半順序集合の例はいくらでもある．$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ はその最も身近な一例だろう．また集合の包含関係 $\subset$ は半順序関係なので，冪集合と包含関係の組 $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ も半順序集合になる．

ところでなぜ「半」順序なのか？それは，一般に考える順序には少し及ばないからだ．一般的に順序というと，すべてが一列に並んでいるイメージがある．一列に並んでいるとは，任意の $x, y \in X$ について，$x \preceq y$ か $y \preceq x$ の少なくとも一方が成り立つということだ（両方成立してても良い．その場合は反対称性より $x = y$ となる）．これを**完備性** (completeness) という．半順序は完備性を要求しないので，「枝分かれした」順序を許す．完備性を満たす半順序は**全順序** (total order) という[*2]．上の例では，$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ は全順序だが，X が 2 つ以上の元を持つときの $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$ はそうではない．

練習問題 2.2. 全順序集合と，全順序でない半順序集合の例を挙げよ．

ここでいくつかの定義を確認しておこう．$\langle X, \preceq \rangle$ を半順序集合，$A \subset X$ としたとき：．

- $a \in A$ が A の**最大元**であるとは，$\forall x \in A(x \preceq a)$ が成り立つこと．逆に**最小元**であるとは，$\forall x \in A(a \preceq x)$ が成り立つこと．最大／最小元は存在するとは限らないが，あれば一つしかない．
- $b \in X$ が A の**上界** (upper bound) であるとは，$\forall x \in A(x \preceq b)$ が成り立つこと．A に上界が存在するとき，A は**上に有界**であるという．最大元との違い，A の上界は A に含まれている必要がないことに注意．同様の仕方で，A の下界 (lower bound) が定義される．A が上に有界かつ下に有界のとき，A は有界であるという．
- A の上界は複数ありえる．例えばもし b が上界で $b \preceq c$ なら c も上界である．でもその中で一番小さい，いわば「スレスレの上界」があれば，これを**上限**ないし最小上界 (least upper bound) という．つまり A の上限とは，A の上界の集合 B の最小元（あれば）である．上界が存在しても（つまり $B \neq \emptyset$ でも）上限は存在しないこともある．同様に，A の最大下界を**下限** (greatest lower bound) という．

事例 2.1. 順序集合の有界性についての問題は，哲学で非常によく出くわす．例えば「不動の第一動者」（アリストテレス）や「神の存在論的証明」（デカルト）の議論を順序の概念を用いてモデル化するとどうなるだろうか．

[*2] ちなみに完全性は反射性を含意する（「任意の $x, y \in X$」の両方が x の場合）ので，全順序の定義は推移性，反対称性と完備性で事足りる．