0. 準備

2022 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2022 年 10 月 11 日

1　定義と具体例

我々は本授業で，哲学に対する形式的なアプローチを学ぶ．しかし形式的とはどういうことだろうか．ここで念頭にあるのは，定義や公理から出発する，数学的な方法である[*1]．一般的な数学の教科書を開いてみると，そこではまずある数学的対象が定義され，そこからその対象が満たす様々な性質が命題ないし定理として演繹的に示されていく．いきなりだが，一つ例を見てみよう．

定義 1.1 **（前順序）**　集合 X とその上に定義された二項関係 $\preceq$ が以下の性質を満たす時，組 $\langle X, \preceq \rangle$ を，前順序 (preorder) という．

1. X のすべての要素 x について，$x \preceq x$ が成り立つ（反射性）．
2. X のすべての要素 x, y, z について，$x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ が成り立つなら，$x \preceq z$ も成り立つ（推移性）．

「集合」「二項関係」などの言葉が出てきたが，とりあえず気にしないでおこう．とにかくここでは「前順序」なる数学的対象が，性質 (1, 2) を満たすような関係 $\preceq$ を持った集合（ものの集まり）として定義されている．性質 (1, 2) は前順序を構成する関係 $\preceq$ が満たすべきルールを定めており，「公理」とも呼ばれる．

定義が与えられたら，まずやるべきことはその定義が当てはまる具体例を探すことだ[*2]．例えば，上で抽象的に定義された「前順序」の具体例としては，どのようなものがあるだろうか？一つの例としては，自然数上の関係 $\leq$ が考えられるだろう．実際，すべての自然数 x について $x \leq x$ だし，任意の 3 つの自然数 x, y, z について $x \leq y, y \leq z$ なら当然 $x \leq z$ だ．よって自然数の集合 $\mathbb{N}$ とその上の関係 $\leq$ は前順序である．また同様に，$\mathbb{N}$ と関係 $\geq$ も（別の）前順序関係をなす．

しかしこの一つの例だけで前順序をわかった気になるのは危険である．というのも，例えば自然数では任意の x, y について，$x \leq y$ あるいは $y \leq z$ が成り立つ（これを完備性という，詳

[*1] 数学とは何か，その固有な方法論はどうあるべきか，という大きな問題はここでは全く触れない．

[*2] 本当はその前に，定義が整合的で矛盾がないかどうか，つまり well-defined であるかどうかをチェックしなければならないが，本講義ではその点は問題にしない．

しくは 3 章で扱う）が，こうした規定は前順序には含まれていない．つまり自然数は一直線に並んでどのペアも大小が比較できるが，前順序は必ずしもそうでなく，「枝分かれ」を許す．なので，自然数の大小関係という特定の具体例だけで前順序を捉えるべきではない．

また，非常に極端な例もある．一つの要素「0」のみからなる集合 $\{0\}$ と，イコール関係 $0 = 0$ を考えてみると，これは上の公理 1, 2 を満たす．よってこれは前順序であるが，我々がイメージする「順序」とは似ても似つかない！なので定義が与えられたら，一つの具体例で満足するのではなく，様々な例を考えてみること，そしてそれらの例に引きずられないことが重要である．

2　哲学的問題の形式的モデリング

哲学的問題を形式的に扱うとは，上でやったような数学的定義を，哲学的問題に当てはめてみる，ということである．つまり形式的定義の具体例を，哲学の問題から探すということだ．例えば，中世から近世西洋哲学では，事物の間には「完全性」における優劣関係があると考えられていた．そこで X を事物の集まり，$x \preceq y$ を「y は x と同等かそれ以上完全である」という関係によって解釈してみると，「完全性という形而上学的関係は，前順序をなす」という一つの仮説ができる．この仮説がもっともらしいかどうかは，「より完全である」という関係が前順序の公理 1, 2 を満たすかどうかを考えればよい．つまり

1. すべての事物は，それ自身と同等あるいはそれ以上に完全だろうか？
2. 完全性関係は推移的だろうか？（つまり x が y 以上に完全で，y が z 以上に完全なとき，x は z 以上に完全だろうか？）

これらが肯定的に答えられるのであれば，前順序によって完全性関係をモデル化するのは理に適っている，ということになる．

その場合，我々はさらに歩みをすすめて，完全性という関係は前順序によって十分にモデル化されているのか，ということを問う必要がある．自然数の大小関係が「単なる」前順序ではなかったように，完全性をモデリングするためにはさらなる公理が必要なのかもしれない．例えば，それは完備なのだろうか？あるいはさらに別の公理が必要なのだろうか？アンセルムスやデカルトにおいて，完全性は神の存在論的論証で用いられた．その論証を成立させるためには，どのような仮定が必要なのだろうか．また，そうした仮定をおいた場合，完全性にはどのような制約が課されるか．哲学的問題の形式的モデリングでは，こうしたことについて考える必要がある．

3　論理記号

本授業では，数学的記号に加え，必要最小限の論理記号を用いる．これらはどれも論理学を少しかじった人にはおなじみだと思うが，ここで確認しておこう．

- $\neg P$ 「P でない」

- $P \vee Q$ 「P もしくは Q」
- $P \wedge Q$ 「P かつ Q」
- $P \Rightarrow Q$ 「P ならば Q」
- $P \iff Q$ 「P のとき，その時に限り Q」

それぞれの真理値は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

注意　「ならば」は，前件が偽になるとき常に真になることに気をつけよう．

4　述語記号と量化子

- $a, b, \ldots$：個体定項
- $x, y, \ldots$：個体変項
- $P, R \ldots$：述語
- $\forall x(Rx)$ 「すべての x について述語 R が成り立つ」
- $\exists x(Rx)$ 「ある x について述語 R が成り立つ」

また $\forall x \in \mathbb{N}$ のように，x が属するドメインを明示して制約することもある（ここでの $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を表す）．例えば $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}(x \leq y)$ は，「すべての自然数についてそれより大きい自然数がある」ということを述べている．

練習問題 4.1　次の命題の意味を明らかにし，その真偽を確定せよ．

1. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}(y = 0 - x)$
2. $\exists e \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}(x \cdot e = x)$
3. $\forall x > 10(\sqrt{x} > 3)$

練習問題 4.2　定義 1.1 にあげた前順序の 2 つの公理を量化子を使って書き下せ．

練習問題 4.3　xLy を，「x は y を愛する」という意味の 2 項述語としたとき，次を論理式によって書き下せ．

1. 誰にも愛する人がいる．
2. すべての人から愛される人がいる．
3. すべての人を愛する人なんて存在しない．
4. 相思相愛のカップルなんて存在しないんですよ．

5. 好きになった人はことごとく他の人のことが好き，という人がいる．