

1. 集合

2022 秋期「哲学者のための数学」授業資料（大塚淳）

ver. 2022 年 8 月 31 日

集合 (set) とは、その名の通りモノの集まりである。集合の中に入っているモノをその元ないし要素 (element) と呼ぶ。つまり集合は元の集まりである。

1 集合の定義

集合を定義するには二つのやり方がある。外延的 (extensive) な定義では、集合に含まれる元を明示的に並べることで定義する：

$$B := \{\text{John, Paul, George, Ringo}\}.$$

ちなみに「:=」は左辺を右辺で定義する、という意味で使われる。ここで B は 4 つの元を持つ集合として定義されている。集合の中身をその外延 (extension) ということもある。

一方、なにか特定の共通性質を満たすものの集合の場合は、その性質によって集合を内包的 (intensive) に表すこともできる

$$B := \{x \mid x \text{ is a member of the Beatles}\}.$$

「a member of the Beatles」であるような x をすべて集めてきた集合、というように理解すると良い。内包的定義はいちいち元を明示しなくて良いので便利である。例えば

$$\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ is a natural number}\}$$

は無限個の元を持つ集合だが、これを外延的に記述するのは不可能だろう。ただし、内包的定義に用いる述語は曖昧でなく、それが成り立つかどうか明確に決まるものでなければならない。例えば、

$$T := \{x \mid x \text{ は背が高い}\}$$

は、何センチ以上なら「背が高い」とされるかが明示的に決められていない限り、集合の定義として機能しない。逆に言うと、適用基準が明確な述語であれば対応する集合を考えることができる（ただ後で見るように、内包的定義を無制約に用いると重大なパラドクスを生んでしまうこともある）。また以下のように方程式の解を集合で表すこともある：

$$\{x \mid x^2 = 4\} = \{-2, 2\}.$$

集合は元として集合をとることもできる。なので以下も集合である

$$\{\{\text{John, Paul, George, Ringo}\}, \{\text{Jackie, Tito, Jermaine, Marlon, Michael}\}, \text{James}\}.$$

これは二つのグループ（人の集合）と一人の人からなる集合である．元と集合をしっかりと区別すること．例えば

$$\{\text{John, Paul, George, Ringo}\} \text{ と } \{\{\text{John, Paul, George, Ringo}\}\},$$

また

$$\{\text{James}\} \text{ と } \{\{\text{James}\}\}$$

は集合としてはそれぞれ別物であることに注意（なぜそうなのか，説明してみよう）．

2 要素関係と部分関係

集合において我々が問うべきことは唯一つ，それがしかじかのものを元として含むか否か，ということだけである．実際，集合論におけるすべての問題は，最終的には，その集合に何が入っているかという話に行き着く．ある対象 a が集合 A の要素であることを以下のように書く：

$$a \in A.$$

なので例えば

$$\begin{aligned} \text{Michael} &\in \{\text{Jackie, Tito, Jermaine, Marlon, Michael}\} \\ 3 &\in \mathbb{N} \\ \{\text{Michael}\} &\notin \{\text{Jackie, Tito, Jermaine, Marlon, Michael}\} \end{aligned}$$

である．特に最初と最後の違いに気をつけよう．マイケル・ジャクソンは Jackson 5 のメンバーであるが，マイケル個人からなる集合はそうではない（集合は歌って踊らない）．

要素関係 \in は要素と集合の間に成り立つ関係だった．一方，集合と集合の間の関係を考えることができる．2つの集合 A, B があったとき， A が B の**部分集合** (subset) であるとは， A の元がすべて B に含まれるとき，すなわち

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

が成立するときである．これを $A \subset B$ と書く．図的には，これは A の集合の範囲がすっぽり B の範囲に含まれている事態に相当する．

2つの集合 A, B が**等しい**とは，両者が互いの部分集合であるとき，つまり

$$\begin{aligned} A = B &\iff A \subset B \wedge B \subset A \\ &\iff \forall x(x \in A \iff x \in B) \end{aligned}$$

が成立することである．このとき， A の範囲はぴったり B と一致する．上の同一性の定義から，元の個数や並び方は集合の同一性に影響しないということが帰結する．なので例えば

$$\begin{aligned} \{\text{John, Paul, George, Ringo}\} &= \{\text{Ringo, Paul, John, George}\} \\ &= \{\text{Ringo, Ringo, Paul, John, George, John}\} \end{aligned}$$

である（上の同一性の定義から確認せよ）．つまり，集合の「本質」を決めるのはそこに何が入っているかであって，何個／どの順で入っているか，ということは全く考慮されない．

$A \subset B$ であるが $A \neq B$ であるとき、 A は B の**真部分集合** (proper/strict subset) であるといい、これを $A \subsetneq B$ と書くこともある (が本講義ではあまり使わない)。きちんと書き下せばこれはつまり

$$A \subsetneq B \iff \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \notin A \wedge x \in B)$$

ということ、つまり A の元はすべて B に含まれるが、 A になくて B にはある元が少なくとも 1 つはある、ということである。

注意 要素関係 \in と部分集合関係 \subset を混同しないように！前者は要素と集合の間の関係、後者は集合と集合の間の関係である。だから例えば

$$\text{Michael} \subset \{\text{Jackie}, \text{Tito}, \text{Jermaine}, \text{Marlon}, \text{Michael}\}$$

という式は文法的に正しい形ではない (左辺が集合ではないから)。では次の式はどうだろうか、

$$\begin{aligned} \{\text{Michael}\} &\subset \{\text{Jackie}, \text{Tito}, \text{Jermaine}, \text{Marlon}, \text{Michael}\} \\ \{\text{Michael}\} &\in \{\text{Jackie}, \text{Tito}, \text{Jermaine}, \text{Marlon}, \text{Michael}\} \\ \{\} &\in \{\text{Jackie}, \text{Tito}, \text{Jermaine}, \text{Marlon}, \text{Michael}\} \end{aligned}$$

それぞれ真／偽／文法的に不正かどうか考えてみよう。

3 全体集合，空集合，冪集合

考えている対象すべてを含む集合を**全体集合** (total set) といい、 Ω で表す。つまり

$$\forall x(x \in \Omega)$$

であり、どんな集合 A を持ってきても $A \subset \Omega$ である。

逆にいかる元も持たない集合を**空集合** (empty set) といい、これを $\{\}$ または \emptyset で表す。いかなるものも空集合の元ではないので、

$$\forall x(x \notin \emptyset)$$

が成り立つ。また空集合はあらゆる集合の部分集合、つまり任意の集合 A について $\emptyset \subset A$ である。なぜなら、

$$\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

は、どんな x に対してもカッコ内の前件が偽 ($x \notin \emptyset$) であるがゆえに常に成立するからだ。

ある集合 A があったとき、その部分集合の全体のなす集合を A の**冪集合** (power set) といい、 $\mathcal{P}(A)$ と書く。つまり

$$\mathcal{P}(A) = \{X | X \subset A\}.$$

(ここで X は集合であることに注意)。例えば $A = \{1, 2, 3\}$ とすると、その冪集合 $\mathcal{P}(A)$ は

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

の計 8 つの集合からなる集合である。一般に、 n 個の要素を持つ有限集合の冪集合は、 2^n 個の集合を要素として持つ。 $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ であることを忘れないように。また $A \in \mathcal{P}(A)$ だが $A \subset \mathcal{P}(A)$ ではないことに注意。

練習問題 3.1 全体集合と空集合を内包的に定義してみよ。つまり

$$\Omega := \{x | \dots\} \quad \emptyset := \{x | \dots\}$$

の「 \dots 」のところにそれぞれどんな条件を入れたら良いだろうか。

4 集合の演算

我々は小学校の算数で、数と数を足し合わせる（あるいは引く／掛ける）ことで別の数になるということを習った。例えば自然数 2 と 3 を足すと別の自然数 5 になる。同じように集合にも演算があって、これら演算は 2 つの集合から別の集合を作り出す。

合併ないし**和** (union) はその名の通り、2 つの集合の要素をあわせた集合を作る。

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

3 個以上の複数の集合の合併をとるときは以下のように書くこともある

$$\bigcup_i A_i = \{x | x \in A_1 \vee x \in A_2 \dots\}$$

つまりたくさんある A_i のうち、どれか一つにでも入っていればその元は $\bigcup_i A_i$ にも入っている。

共通部分ないし**交わり** (intersection) は、2 つの集合に共通する要素だけを持つ集合を作る。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

同様にたくさんの集合の共通部分は以下のように書ける

$$\bigcap_i A_i = \{x | x \in A_1 \wedge x \in A_2 \dots\}$$

このとき、 $\bigcap_i A_i$ の元はすべての A_i に含まれていなければならない。 $A \cap B = \emptyset$ 、つまり交わりがない場合、 A と B は互いに**素** (disjoint) であるという。

A の元であるが B の元ではないものの全体の集合を A と B の**差** (difference) といい、次のように表す

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

特に全体集合からの差を $\Omega \setminus B$ を**補集合** (complement) といい、 B^c と書く。

なお和と交わりは、足し算や掛け算同様、順序に依存しないし、また前後を入れ替えてもよい。和で示すと、

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ A \cup B = B \cup A$$

同様のことが \cap にも成り立つ。前者を結合性 (associativity)、後者を可換性 (commutativity) という。または和と交わりは結合律とか可換律を満たす、などといったりもする。

また集合の演算について、以下が成り立つ。これらはすべて上の定義から証明できる。

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (2)$$

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) \quad (3)$$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \quad (4)$$

練習問題 4.1 差は結合律と可換律を満たさないことを確認せよ。

練習問題 4.2 等式 (1)-(4) をヴェン図で表してみよう。

5 順序対*

我々は上で、集合には順序が関係ないということを述べた。なので $\{\text{Alice}, \text{Bob}\}$ も $\{\text{Bob}, \text{Alice}\}$ も集合としては区別がつかない。よってあえて順序を区別したいときは、少し工夫をしなければならない。そこで $a, b \in A$ に対し、**順序対** (ordered pair) を次のように作る

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$(b, a) := \{\{b\}, \{a, b\}\}$$

すると $(a, b) \neq (b, a)$ となり、 a と b の並びを区別することができる。どちらの順序対も冪集合 $\mathcal{P}(A)$ の部分集合であるが、どの元を含むかに違いがあり、それによって順序が区別されている。ちなみに

$$(a, a) := \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\} \neq a$$

であることにも注意。

同じようにして、3つ以上の要素からなる順序対も作ることができる

$$(a, b, c) := ((a, b), c)$$

$$(a, b, c, d) := (((a, b), c), d)$$

...

なお $(a, b, c) = \{\{\{\{a\}, \{a, b\}\}\}, \{\{\{a\}, \{a, b\}\}, c\}\}$ であり、実際に書き下すのは結構しんどい。

練習問題 5.1 (a, b, c, d) および (d, c, b, a) を書き下せ。

6 デカルト積

4節では、和や交わりなどの集合演算を見た。そこでは扱わなかった、もう1つの集合演算が、集合の**デカルト積** (Cartesian product) ないし**積**である。集合 A, B のデカルト積 $A \times B$

は、 A の要素と B の要素の順序対をすべて含んだもの、つまり

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

である。例えば $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2\}$ の場合、

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$$

である。一般に、 m 個の要素と n 個の要素を持つ集合のデカルト積は、 mn 個の順序対を要素として持つ。

自分自身とのデカルト積を考えてもよい。例えば

$$B \times B = \{(b_1, b_1), (b_1, b_2), (b_2, b_1), (b_2, b_2)\}$$

である。

3 つの集合 A, B, C の積も

$$A \times B \times C := \{(a, b, c) | a \in A, b \in B, c \in C\}$$

のように定義される。4 つ以上も同様。

練習問題 6.1 $A \times B$ は $B \times A$ と等しいだろうか。