Bewijzen en redeneren

Hoorcolleges

Junot Van Dijck

26 januari 2025

Inhoudsopgave

1 Relaties

Definitie 1.1 (Relatie).

Een **relatie** is een drietal
$$(R, X, Y),$$
waarin X en Y verzamelingen zijn en R een deelverzameling is van het Cartesisch product $X \times Y$. Dus
$$R \subset X \times Y.$$
Meestal zijn de verzamelingen X en Y duidelijk uit de context en dan spreken we van een relatie R van de verzameling X naar Y i.p.v. (R, X, Y).

Een relatie is een eigenschap die kan gelden tussen de elementen van X en de elementen van Y. De eigenschap geldt tussen $x \in X$ en $y \in Y$ als en slechts als $(x, y) \in R$ (andere notatie is xRy).

Opmerking. Een relatie R van X naar X noemen we de relatie R op X.

Definitie 1.2 (Domein en beeld).

Zij R een relatie van X naar Y. Het **domein** van R is
$$\operatorname{dom} R = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R\}$$
en het **beeld** van R is
$$\operatorname{bld} R = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in R\}.$$

Definitie 1.3 (Eenheidsrelatie).

De **eenheidsrelatie** op X is
$$I_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}.$$

Eigenschap 1.4. Twee relaties R_1, van X_1 naar Y_1, en R_2, van X_2 naar Y_2, zijn gelijk als en slechts als

- $X_1 = X_2$ en $Y_1 = Y_2$ en
- $(x, y) \in R_1$ als en slechts als $(x, y) \in R_2$ voor alle $x \in X_1 = X_2$ en voor alle $y \in Y_1 = Y_2$.

Definitie 1.5 (Inverse relatie).

Zij R een relatie van X naar Y, dan is de **inverse relatie** van R de relatie R^{-1} van Y naar X gedefinieerd door
$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}.$$

Definitie 1.6 (Samengestelde relaties).

Zij R een relatie van X naar Y en S een relatie van Y naar Z. Dan is de **samenstelling** $S \circ R$ de relatie van X naar Z gedefinieerd door

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R \text{ en } (y, z) \in S\}.$$

1.1 Equivalentierelaties

Definitie 1.7.

Zij R een relatie op X.

(a) We noemen R **reflexief** als

$$\forall x \in X : (x, x) \in R.$$

(b) We noemen R **symmetrisch** als

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in R \implies (y, x) \in R.$$

(c) We noemen R **transitief** als

$$\forall x, y, z \in X : ((x, y) \in R \text{ en } (y, z) \in R) \implies (x, z) \in R.$$

Definitie 1.8.

Als een relatie R op X reflexief, symmetrisch en transitief is, dan noemen we R een **equivalentierelatie** op X.

Als R een equivalentierelatie is en $(x, y) \in R$, dan zeggen we dat x en y **equivalent** zijn (t.o.v. R) en we noteren $x \sim_R y$ of kortweg $x \sim y$.

1.1.1 Partities en equivalentieklassen

Definitie 1.9 (Partitie).

Een **partitie** $\mathcal{P}$ van een verzameling X is een deelverzameling van de machtsverzameling $P(X)$ met de eigenschappen

(a) De verzamelingen in $\mathcal{P}$ zijn niet leeg, dus

$$\forall A \in \mathcal{P} : A \neq 0.$$

(b) De verzamelingen in $\mathcal{P}$ zijn onderling disjunct, dus

$$\forall A, B \in \mathcal{P} : A \neq B \implies A \cap B \neq \emptyset.$$

(c) De verzamelingen in $\mathcal{P}$ overdekken X, dus

$$\forall x \in X : \exists A \in \mathcal{P} : x \in A.$$

Dit is equivalent met

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A.$$

Definitie 1.10 (Equivalentieklasse).

Zij $\sim$ een equivalentierelatie op X en zij $x \in X$. Dan is $\{y \in X \mid x \sim y\}$ de **equivalentieklasse** van x m.b.t. $\sim$. Dit wordt genoteerd met $[x]_\sim$ of kortweg $[x]$ als het duidelijk is welke equivalentierelatie bedoeld wordt. Dus

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

De verzameling van alle equivalentieklassen van $\sim$ wordt genoteerd met $X/\sim$. Dus

$$\begin{aligned} X/\sim &= \{[x] \mid x \in X\} \\ &= \{A \subset X \mid \exists x \in X : A = [x]\}. \end{aligned}$$

De verzameling $X/\sim$ wordt de **quotiëntverzameling** van X t.o.v. de equivalentierelatie $\sim$ genoemd.

Dit leidt tot de belangrijkste stelling over equivalentierelaties.

Stelling 1.11.

Zij $\sim$ een equivalentierelatie op X. Dan is $X/\sim$ een partitie van X.

Om dit te bewijzen hebben we eenvoudigere hulpresultaten nodig. Zulke hulpresultaten worden vaak **lemma's** genoemd.

Lemma 1.12.

Zij $\sim$ een equivalentierelatie op X. Dan geldt voor alle $x, y \in X$:

(a) $x \in [x]$ en $[x] = \emptyset$,

(b) als $x \sim y$, dan $[x] = [y]$,

(c) als $\neg(x \sim y)$, dan $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Bewijs.

(a) Omdat $\sim$ reflexief is, geldt $x \in [x]$ en dus is $[x]$ niet leeg.

(b) Neem aan dat $x \sim y$. We willen bewijzen dat $[x] = [y]$ en hiertoe bewijzen we twee inclusies.

- Bewijs dat $[x] \subset [y]$: Kies $z \in [x]$ willekeurig. Dit betekent dat $x \sim z$. We weten ook dat $x \sim y$ en vanwege symmetrie is dan ook $y \sim x$. Uit $y \sim x$ en $x \sim z$ volgt, vanwege transitiviteit, dat $y \sim z$ en dit betekent dat $z \in [y]$. We hebben $z \in [x]$ willekeurig gekozen en dus volgt er dat $[x] \subset [y]$.
- Bewijs dat $[y] \subset [x]$: Kies $z \in [y]$ willekeurig. Dan geldt $y \sim z$. Er geldt ook $x \sim y$ en vanwege transitiviteit is dan ook $x \sim z$. Dit betekent $z \in [x]$. Omdat $z \in [y]$ willekeurig gekozen is volgt er dat $[y] \subset [x]$.

Beide inclusies zijn bewezen dus er geldt inderdaad $[x] = [y]$.

(c) We moeten bewijzen dat $\neg(x \sim y) \implies [x] \cap [y] = \emptyset$. We doen dit m.b.v. contrapositie. We bewijzen dus

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \implies x \sim y.$$

Neem aan dat $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Dan is er een $z \in [x] \cap [y]$. Omdat $z \in [x]$ geldt $x \sim z$ en omdat $z \in [y]$ geldt $y \sim z$. Vanwege de symmetrie is dan ook $z \sim y$. Uit $x \sim z$ en $z \sim y$ volgt dat $x \sim y$ vanwege de transitiviteit van de equivalentierelatie.

Dit is wat we moesten bewijzen. □

Nu kunnen we Stelling 1.11 bewijzen.

Bewijs (Stelling 1.11). We moeten bewijzen dat $X/\sim$ voldoet aan de drie voorwaarden van Definitie 1.9.

(a) Als $A \in X/\sim$, dan is er een $x \in X$ met $A = [x]$. Op grond van onderdeel (a) van het lemma is $A \neq \emptyset$.

(b) Neem aan dat $A, B \in X/\sim$ twee elementen van $X/\sim$ zijn. Er zijn x en y in X met $A = [x]$ en $B = [y]$. Er zijn twee mogelijkheden, nl. $x \sim y$ en $\neg(x \sim y)$. Als $x \sim y$ dan volgt uit onderdeel (b) van Lemma 1.12 dat $A = B$ en als $\neg(A \sim B)$, dan volgt uit onderdeel (c) van het lemma dat $A \cap B = \emptyset$.

Als $A \neq B$ volgt dus dat $A \cap B = \emptyset$, hetgeen betekent dat de elementen van $X/\sim$ onderling disjunct zijn.

(c) Kies $x \in X$. Dan is $x \in [x]$ vanwege onderdeel (a) van Lemma 1.12. Er is dus een $A \in X/\sim$ met $x \in A$ (nl. $A = [x]$).

□

Stelling 1.13.

Zij $\mathcal{P}$ een partitie van X. Dan definieert

$$x \sim y \iff (\exists A \in \mathcal{P} : x \in A \wedge y \in A)$$

een equivalentierelatie op X. De equivalentieklassen van $\sim$ zijn precies de elementen van $\mathcal{P}$. Dus

$$X/\sim = \mathcal{P}.$$

Bewijs. Dit is een oefening. □

2 Functies

We zien een functie hier als een relatie met een speciale eigenschap.

Definitie 2.1.

Zij f een relatie van een verzameling X naar een verzameling Y. We noemen f een **functie** van X naar Y als voor elke $x \in X$ er precies één $y \in Y$ bestaat met $(x, y) \in f$.

Opmerking. Je kan een functie dus ook definiëren als (f, X, Y) om nadruk te leggen op de verzameling, $X \times Y$, waarvan f een deelverzameling is met de eigenschap dat er voor elke $x \in X$ precies één $y \in Y$ is met $(x, y) \in f$.

Voorbeeld 2.2. De eenheidsrelatie op een verzameling X is gegeven door

$$I_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}.$$

Dit is een functie van X naar X die ook de **eenheidsfunctie** wordt genoemd. Voor deze functie geldt $I_X(x) = x$ voor elke $x \in X$. $\diamond$

Uit Definitie 2.1 volgt dat y uniek bepaald wordt door x. We zeggen dat y het **beeld** is van x onder f. Een uitgebreide notatie voor f is

$$f : X \to Y : x \mapsto f(x).$$

Vaak specificeren we een functie $f : X \to Y$ door het beeld $f(x)$ te definiëren. Dan is $f(x)$ het **functievoorschrift** voor de functie. Dit moet gedefinieerd zijn voor elke $x \in X$.

Het is belangrijk om een verschil te maken tussen de functie f en het functievoorschrift $f(x)$.

Voorbeeld 2.3. We spreken over de sinus-functie sin met als functievoorschrift $\sin x$. Het is niet de functie $\sin x$. In plaats daarvan kunnen we zeggen dat we een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschouwen met $f(x) = \sin x$ voor elke $x \in \mathbb{R}$. Hiermee bedoelen we dan dat

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sin x\}.$$

$\diamond$

Definitie 2.4 (Domein).

Zij f een functie van X naar Y. Dan is X het **domein** van f en Y het **codomein** van f.

Stelling 2.5.

Zij $f : X_1 \to Y_1$ en $g : X_2 \to Y_2$ twee functies. Dan is $f = g$ als en slechts als $X_1 = X_2$ en $Y_1 = Y_2$ en

$$\forall x \in X_1 : f(x) = g(x).$$

Het is ook mogelijk om functies samen te stellen, dit is gekend vanuit het middelbaar.

Definitie 2.6.

Neem aan dat f een functie is van X naar Y en dat $A \subset X$. Dan kunnen we een functie $g : A \to Y$ definiëren door

$$g(x) = f(x) \quad \text{voor elke } x \in A.$$

Deze functie is de **beperking** van f tot A en wordt genoteerd door $f|_A$.

Stelling 2.7.

Neem aan dat $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$. Dan is $g \circ f$ een functie van X naar Z en er geldt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{voor elke } x \in X. \tag{2.1}$$

Bewijs. In dit bewijs gebruiken we de notatie m.b.v. verzamelingen om functies en relaties weer te geven. Volgens Definitie 1.6 is

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in f \text{ en } (y, z) \in g\}. \tag{2.2}$$

Neem $x \in X$ willekeurig. We moeten laten zien dat er precies één $z \in Z$ is met $(x, z) \in g \circ f$.

Eerst bewijzen we de *existentie* van z. Neem $y = f(x)$ en $z = g(y)$. Dan is $(x, y) \in f$ en $(y, z) \in g$, zodat uit (2.2) volgt dat $(x, z) \in g \circ f$. Er is dus zeker een $z \in Z$ met $(x, z) \in g \circ f$.

Vervolgens bewijzen we de *uniciteit* van z. Dit doen we door aan te nemen dat $z_1, z_2 \in Z$ voldoen aan $(x, z_1) \in g \circ f$ en $(x, z_2) \in g \circ f$ en daaruit te bewijzen dat $z_1 = z_2$. Neem dus aan dat $z_1, z_2 \in Z$ met $(x, z_1) \in g \circ f$ en $(x, z_2) \in g \circ f$. Dan volgt uit (2.2) dat er een $y_1 \in Y$ bestaat met $(x, y_1) \in f$ en $(y_1, z_1) \in g$. Net zo is er een $y_2 \in Y$ met $(x, y_2) \in f$ en $(y_2, z_2) \in g$. Omdat f een functie is en $(x, y_1) \in f$ en $(x, y_2) \in f$, volgt $y_1 = y_2$. Dan geldt $(y_1, z_2) = (y_2, z_2) \in g$. Omdat ook $(y_1, z_1) \in g$ en g een functie is, volgt hieruit dat $z_1 = z_2$. Dit bewijst de uniciteit.

We hebben nu bewezen dat $f \circ g$ een functie is van X naar Z. In het bovenstaande existentie-bewijs is al laten zien dat als $y = f(x)$ en $z = g(x)$ dat dan $(x, z) \in (g \circ f)$. Omdat $g \circ f$ een functie is, kunnen we schrijven $z = (g \circ f)(x)$. Ook geldt $z = g(y) = g(f(x))$. Dit bewijst (2.1). □

Eigenschap 2.8. Het samenstellen van functies is **associatief**.

2.0.1 Beeld en invers beeld

Definitie 2.9.

Zij $f : X \to Y$ een functie. Zij A een deelverzameling van X. Dan is $f(a)$ de deelverzameling van Y gegeven door

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}.$$

We noemen $f(A)$ het **beeld** van A.

Zij B een deelverzameling van Y. Dan is $f^{-1}(B)$ de deelverzameling van X gegeven door

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

We noemen $f^{-1}(B)$ het **invers beeld** van B.

2.1 Injecties, surjecties en bijecties

Definitie 2.10.

Een functie $f : X \to Y$ is **injectief** (of één op één) als ze verschillende waarden aanneemt in verschillende elementen van het domein, dus

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

In dat geval noemen we f een injectieve functie of een **injectie**.

Met behulp van contrapositie kunnen we de injectiviteit ook uitdrukken als

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Een functie f is injectief als en slechts als voor elke $y \in Y$ het inverse beeld $f^{-1}(y)$ uit hoogstens één element bestaat.

Definitie 2.11.

Een functie $f : X \to Y$ is **surjectief** as elk element van het codomein als beeld optreedt; dus als

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y.$$

In dat geval noemen we f een surjectieve functie of een **surjectie**.

Een functie f is surjectief als en slechts als voor elke $y \in Y$ het inverse beeld $f^{-1}(y)$ uit minstens één element bestaat (dus niet-leeg is).

Definitie 2.12.

Een functie is **bijectief** als ze zowel injectief als surjectief is. We noemen zo een functie een **bijectie**.

Een functie f is bijectief als en slechts als voor elke $y \in Y$ het inverse beeld $f^{-1}(y)$ uit precies één element bestaat.

2.1.1 Inverse functies

Definitie 2.13.

Een functie $f : X \to Y$ is **inverteerbaar** als er een functie $g : Y \to X$ bestaat met de eigenschappen dat

$$g \circ f = I_X \quad \text{en} \quad f \circ g = I_Y.$$

In dat geval noemen we g een **inverse functie** van f.

Stelling 2.14.

Zij $f : X \to Y$ een functie. Dan is f inverteerbaar als en slechts als f bijectief is. Bovendien is voor een inverteerbare functie de inverse functie uniek bepaald.

Bewijs. Zie [Kui25, p. 61]. □

Een injectieve functie die niet bijectief is kan bijectief gemaakt worden door het codomein te beperken. Zij namelijk $f : X \to Y$ injectief. Dan is de functie

$$\hat{f} : X \to f(X) : x \mapsto \hat{f}(x) = f(x)$$

die we uit f verkrijgen door het codomein van Y te beperken tot $f(X)$, zowel injectief als surjectief. Dus is $\hat{f}$ bijectief en bijgevolg inverteerbaar vanwege Stelling 2.14. De inverse functie $(\hat{f})^{-1}$ bestaat dus.

3 Kardinaliteit

[Kui25, p.68]

We kunnen de elementen van een verzameling tellen met 'één', 'twee', 'drie'... Als we alle elementen zo gehad hebben, is het laatste getal gelijk aan het aantal elementen van die verzameling, dit noemen we de **kardinaliteit**. Het telproces levert een bijectie tussen de gegeven verzameling en de verzameling

$$\mathbb{E}_n = \{j \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

We schrijven ook

$$\mathbb{E}_0 = \emptyset.$$

Definitie 3.1.

Zij X een verzameling en $n \in \mathbb{N}$. Als er een bijectie $f : X \to \mathbb{E}_n$ bestaat, dan zeggen we dat de **kardinaliteit** van X gelijk is aan

$$|X| = \#X = n.$$

De kardinaliteit van de lege verzameling is per definitie gelijk aan nul.

Als $f : X \to \mathbb{E}_n$ een bijectie is, dan bestaat de inverse functie $f^{-1} : \mathbb{E}_n \to X$ en f^{-1} is n als en slechts als er een bijectie is van $\mathbb{E}_n$ naar X.

Definitie 3.2.

Zij X een verzameling. Als X leeg is, of als er een bijectie is van X naar $\mathbb{E}_n$ voor een zekere $n \in \mathbb{N}_0$, dan noemen we X een **eindige verzameling**. Anders noemen we X een **oneindige verzameling** en heeft het een oneindige kardinaliteit die we noteren met $|X| = \infty$.

Definitie 3.3.

Twee verzamelingen X en Y zijn **equipotent** als er een bijectie $f : X \to Y$ bestaat.

Bij twee verzamelingen, X en Y, die equipotent zijn, kunnen we d.m.v. een bijectie $f : X \to Y$ elke $x \in X$ koppelen aan precies één element $y = f(x)$ in Y. In deze zin zijn twee equipotente verzamelingen even groot.

Een verzameling is **eindig** als en slechts als ze leeg is of als ze equipotent is met $\mathbb{E}_n$ voor een $n \in \mathbb{N}_0$, dan is $|X| = n$.

Aangezien een equipotentie reflexief, symmetrisch en transitief is, kunnen we het ook zien als een *equivalentierelatie* tussen de verzamelingen.

Deze bijectie is niet uniek, tenzij $n = 0$ of $n = 1$.

Er zijn ook oneindige verzamelingen, een belangrijke is de verzameling van de strikt positieve natuurlijke getallen:

$$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Definitie 3.4.

Een verzameling X is **oneindig aftelbaar** als X equipotent is met $\mathbb{N}_0$. Dan zeggen we dat de kardinaliteit van X gelijk is aan $\aleph_0$, we noteren $|X| = \aleph_0$.

Een verzameling X is **aftelbaar** als X eindig is of aftelbaar oneindig. Als X niet aftelbaar is, noemen we haar **overaftelbaar**.

Als X aftelbaar oneindig is en $f : \mathbb{N}_0 \to X$ is een bijectie, dan kunnen we de elementen van X één voor één opsommen (aftellen) met $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \ldots$ Dan is

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\},$$

waarin $x_n f(n)$.

3.1 Overaftelbare verzamelingen

Definitie 3.5.

Zij X en Y verzamelingen. We zeggen dat de kardinaliteit van X *kleiner dan of gelijk* is aan die van Y en we noteren $|X| \leqslant |Y|$ als er een injectieve functie $f : X \to Y$ bestaat.

We zeggen dat de kardinaliteit van X *strikt kleiner* is dan die van Y, en we noteren $|X| < |Y|$ als er een injectieve functie van X naar Y bestaat, maar geen injectieve functie van Y naar X.

We kunnen $|X| \leqslant |Y|$ ook uitdrukken m.b.v. surjectieve functies.

Lemma 3.6.

Voor niet-lege verzamelingen X en Y geldt dat $|X| \leqslant |Y|$ als en slechts als er een surjectieve functie $g : Y \to X$ bestaat.

Bewijs. Neem aan dat $|X| \leqslant |Y|$ zodat er een injectieve functie $f : X \to Y$ bestaat. Neem $x_0 \in X$ willekeurig ($X \neq \emptyset$) en definieer $g : Y \to X$ door

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{als } f^{-1}(y) = \{x\}, \\ x_0 & \text{als } f^{-y}(t) = \emptyset. \end{cases}.$$

Dan is g goed gedefinieerd en het is eenvoudig te controleren dat g inderdaad surjectief is.

Voor het bewijs van de andere implicatie nemen we aan dat er een surjectieve $g : Y \to X$ bestaat. Voor elke $x \in X$ is $g^{-1}(x)$ dan een niet-lege deelverzameling van Y. We kiezen willekeurig element uit $g^{-1}(x)$ en noemen dit element $f(x)$. Op deze manier krijgen we een functie $f : X \to Y$ en het is eenvoudig te zien dat f injectief is. Dus $|X| \leqslant |Y|$. □

Stelling 3.7.

Voor elke verzameling X geldt dat $|X| < |P(X)|$.

Bewijs. De functie $f : X \to P(X) : x \mapsto \{x\}$ is injectief en daarom is $|X| \leqslant |P(X)|$. We moeten laten zien dat er geen surjectieve functie van $P(X)$ naar X bestaat. Vanwege Lemma 3.6 is het voldoende om te laten zien dat er geen surjectieve functie van X naar $P(X)$ bestaat. Neem een willekeurige functie $f : X \to P(X)$. We bewijzen dat $f : X \to P(X)$ niet surjectief kan zijn door te laten zien dat de verzameling

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in P(X)$$

niet tot het beeld van f behoort. Stel dat $f(a) = A$ voor een zekere $a \in X$. Dan zijn er twee mogelijkheden, namelijk $a \in A$ of $a \notin A$. Als $a \in A$, dan volgt uit de definitie van A dat $a \notin f(a)$ maar dan is $a \notin A$ omdat $A = f(a)$. Dit is een tegenspraak. Als $a \notin A$, dan volgt uit de definitie van A dat $a \in f(a)$, we krijgen weer een tegenspraak.

In beide gevallen vinden we een tegenspraak en de conclusie is dat A niet tot het beeld,$f(X)$, van f behoort. Dit bewijst dat f niet surjectief is. $\square$

3.2 Natuurlijke getallen en de axioma's van Peano

De natuurlijke getallen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

vormen het standaard voorbeeld van een aftelbaar oneindige verzameling. Een belangrijk aspect van $\mathbb{N}$ is dat er bij elk getal $n \in \mathbb{N}$ een volgend getal $n+1$ hoort. Dit is de *opvolger* van n in de natuurlijke getallen. De opvolger van 0 is 1, de opvolger van 1 is 2, enzovoort. Zo kunnen we elk natuurlijk getal vinden. Hiervan wordt gebruikt gemaakt in de axioma's van Guiseppe Peano.

Definitie 1.8

Axioma 3.8 (Peano).

De natuurlijke getallen bestaan uit een een verzameling $\mathbb{N}$ met een functie $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en een element $0 \in \mathbb{N}$ zodanig dat

(a) S is een injectie,

(b) 0 behoort niet tot het beeld van S,

(c) als A een deelverzameling is van $\mathbb{N}$ met $0 \in A$ en

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \in A \implies S(n) \in A,$$

dan $A = \mathbb{N}$.

Het principe van **volledige inductie** is gebaseerd op onderdeel (c) van Axioma 3.8.

$\aleph$ is het Hebreeuwse letter 'alef' en vertegenwoordigt een groot getal, zoals ε dat doet voor een klein getal.

Stelling 3.9.

Elke niet-lege deelverzameling $B \subset \mathbb{N}$ heeft een kleinste element.

Bewijs. Zij B een deelverzameling van $\mathbb{N}$ die geen kleinste element heeft. Voer in

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in B : m > n\}.$$

Omdat B geen kleinste element heeft, geldt $0 \notin B$. Dan is het eenvoudig om in te zien dat $0 \in A$.

Neem aan dat $n \in A$. Voor elke $m \in B$ geldt dan dat $m > n$ en dus $m \geqslant n+1$ voor elke $\in B$. Als $n+1 \in B$, dan zou $n+1$ het kleinste element van B zijn. We hebben verondersteld dat B geen kleinste element heeft. Dus $n+1 \notin B$. Voor elke $m \in B$ is dan $m > n+1$ en bijgevolg is $n+1 \in A$. Dan voldoet A aan de voorwaarden in onderdeel (c) van Axioma 3.8. Er volgt dat $A = \mathbb{N}$. Dan is het eenvoudig in te zien dat $B = \emptyset$.

De lege verzameling is dus de enige deelverzameling van $\mathbb{N}$ die geen kleinste element heeft. Hiermee is de welordening van $\mathbb{N}$ bewezen. $\square$

3.3 De stelling van Cantor-Bernstein-Schröder

Stelling 3.10 (Cantor-Bernstein-Schröder).

Zij X en Y verzamelingen. Als er injectieve functies $f : X \to Y$ en $g : Y \to X$ tussen de verzamelingen X en Y bestaan, dan bestaat er een bijectieve functie $h : X \to Y$.

Bewijs. We geven het bewijs voor het speciale geval dat $Y \subset X$ en $g : Y \to X : y \in Y \mapsto y$ de inclusie-afbeelding is. Het algemene geval kan uit dit speciale geval worden afgeleid. We hebben dus dat $f : X \to Y$ injectief is met $Y \subset X$. We definiëren $X_0 = X, Y_0 = Y$ en inductief

$$X_{n+1} = f(X_n), \quad Y_{n+1} = f(Y_n), \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Dan is $X_1 = f(X) \subset Y$ en dus $X_1 \subset Y_0 \subset X_0$. Door steeds f toe te passen vinden we eenvoudig m.b.v. volledige inductie dat $X_{n+1} \subset Y_n \subset X_n$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$. We hebben m.a.w. een opeenvolging van steeds kleiner wordende deelverzamelingen van X:

$$X = X_0 \supset Y = Y_0 \supset X_1 \supset Y_1 \supset X_2 \supset \cdots \tag{3.2}$$

We definiëren

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n \setminus Y_n). \tag{3.3}$$

en de functie $h : X \to Y$ door

$$h : X \to Y : x \mapsto h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in A, \\ x & \text{als } x \in X \setminus A. \end{cases} \tag{3.4}$$

We moeten eerst laten zien dat h goed gedefinieerd is als functie van X naar Y. Om het bewijs van de stelling af te maken gaan we vervolgens bewijzen dat h zowel injectief als surjectief is.

Bewijs dat h goed gedefinieerd is. We moeten eerst laten zien dat $h(x) \in Y$ voor elke $x \in X$, zodat h goed gedefinieerd is als functie van X naar Y. Vanwege (3.3) geldt

$$X \setminus A = X_0 \setminus Y_0 \subset A.$$

Hieruit volgt $X \setminus A \subset Y$. Dus, als $x \in X \setminus A$, dan is $h(x) = x \in Y$. Als, anderzijds, $x \in A$, dan is $h(x) = f(x) \in Y$ want f is een functie van X naar Y. In beide gevallen is dus $h(x) \in Y$ en $h : X \to Y$ is goed gedefinieerd.

Bewijs dat h injectief is. Het is eenvoudig om in te zien dat h injectief is op A en op $X \setminus A$. Voor injectiviteit van h op X volstaat het dus om te bewijzen dat $h(x_1) \neq h(x_2)$ als $x_1 \in A$ en $x_2 \in X \setminus A$. Stel dat $x_1 \in A$ en $x_2 \in X \setminus A$ met $h(x_1) \neq h(x_2)$. Uit de definitie van h in (3.4) volgt dan dat $f(x_1) = x_2$. Omdat $x_1 \in A$ is er vanwege (3.3) een $n \in \mathbb{N}$ met $x_1 \in X_n \setminus Y_n$. Dus $x_1 \in X_n$ en $x_1 \notin Y_n$. Dan volgt uit de definitie in (3.1) dat $x_2 = f(x_1) \in f(X_n) = X_{n+1}$. Omdat f injectief is en $x_1 \in Y_n$, volgt ook dat $x_2 = f(x_1) \notin f(Y_n) = Y_{n+1}$. Bijgevolg is

$$x_2 \in X_{n+1} \setminus Y_{n+1}$$

maar dan is $x_2 \in A$ (zie (3.3)), terwijl we hadden aangenomen dat $x_2 \in X \setminus A$. Deze tegenspraak bewijst dat h injectief is.

Bewijs dat h surjectief is. Om de surjectiviteit te bewijzen nemen we $y \in Y$ willekeurig. Als $y \in f(A)$, dan is er een $x \in A$ met $f(x) = y$. Vanwege de definitie van h is dan ook $h(x) = y$.

We nemen vervolgens aan dat $y \in Y \setminus f(A)$. Stel dat $y \in A$. Dan is $y \in X_n \setminus Y_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$, vanwege (3.3). Omdat $y \in Y = Y_0$ is $n \geqslant 1$. Dus $y \in X_n = f(X_{n-1})$ en $y \notin Y_n = f(Y_{n-1})$. Er is dus een $x \in X_{n-1} \setminus Y_{n-1}$ met $y = f(x)$. Dan $x \in A$ en dus $y \in f(A)$. Dit is in tegenspraak met $y \in Y \setminus f(A)$. Bijgevolg is $y \in Y \setminus A$ en dan volgt uit de definitie, (3.4), van h dat $h(y) = y$.

In beide gevallen vinden we een $x \in X$ met $h(x) = y$. Hiermee is de surjectiviteit van h bewezen. $\square$

3.4 Kardinaliteit van de rationale- en reële getallen

De getallenverzamelingen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ zijn bekend vanuit het middelbaar. De verzamelingen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ zijn aftelbaar oneindig.

- $\mathbb{Q}$ is aftelbaar oneindig.
- $\mathbb{R}$ is overaftelbaar.

Zie dit als een ongelijkheid tussen getallen, hiervoor is Stelling 3.10.

Dit bewijzen we uit het ongerijmde.

7 Orderelaties

Hoorcollege 7

wo 6 nov 2024 14:00

Wekelijkse taken vanaf week 8 per twee, in LaTeX.

Definitie 7.1.

Een relatie R op een verzameling X is **anti-symmetrisch** als

$$\forall x, y \in X : [(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R] \implies x = y.$$

Equivalent hiermee is

$$\forall x, y \in X[(x, y) \in R \wedge x \neq y] \implies (y, x) \notin R.$$

Definitie 7.2.

Een relatie X is een **orderelatie** op X als ze reflexief, anti-symmetrisch en transitief is. Een orderelatie op X wordt ook wel een **partiële ordening** op X genoemd.

Voorbeeld 7.3.

(a) De relatie, K, op $\mathbb{R}$ ('kleiner dan of gelijk aan')

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y\}$$

is een orderelatie op $\mathbb{R}$.

(b) Zij X een verzameling, dan is

$$\{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \subset B\}$$

een orderelatie op de machtsverzameling van X.

(c) De relatie

$$D = \{(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid n \text{ is een deler van } m\}$$

is een orderelatie op de strikt positieve gehele getallen.

$\diamond$

Je ziet dat bij een orderelatie R dat $(x, y) \in R$ betekent dat x in een of andere zin kleiner dan of gelijk is aan y. Concreet geven we dit weer met $\leqslant$ of $\subset$ maar in een algemene context zullen we $\preccurlyeq$ gebruiken om een orderelatie aan te duiden.

Definitie 7.4.

Een **partieel geordende verzameling** is een koppel $(X, \preccurlyeq)$ bestaande uit een verzameling X en een orderelatie $\preccurlyeq$ op X.

Als $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling is, dan schrijven we meestal $x \preccurlyeq y$ als het koppel (x, y) tot de relatie $\preccurlyeq$ behoort. We gebruiken ook de volgende voor de hand liggende varianten op deze notatie:

- $x \succcurlyeq y$ betekent $y \preccurlyeq x$,

- $x \prec y$ betekent $x \preccurlyeq$ en $x \neq y$,
- $x \succ y$ betekent $x \succcurlyeq$ en $x \neq y$.

Definitie 7.5.
Een orderelatie $\preccurlyeq$ op X is een **totale ordening** als

$$\forall x, y \in X : x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x.$$

In een totaal geordende verzameling $(X, \preccurlyeq)$ kunnen we elk tweetal elementen x en y met elkaar vergelijken. Er geldt telkens precies één van de drie mogelijkheden:

$$x \prec y, \quad x = y, \quad x \succ y.$$

We bekijken de orderelaties uit Voorbeeld 7.3. K uit punt (a) is totaal. De orderelatie D uit punt (c) is niet totaal. Tenslotte is de orderelatie uit punt (b) niet totaal als X uit meer dan één element bestaat.

Voorbeeld 7.6. $(P(X), \subset)$ is niet totaal geordend als $|X| \leqslant z$. ◇

Definitie 7.7.
Zij $A \subset X$. We noemen a een **grootste element** van A als $a \in A$ en

$$\forall x \in A : x \preccurlyeq a.$$

Analoog kennen we het **kleinste element** van A.

Definitie 7.8.
Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling en $A \subset X$.

(a) Dan is $b \in X$ een **bovengrens** van A als

$$\forall x \in A : x \preccurlyeq b.$$

Als A een bovengrens heeft, dan noemen we A **naar boven begrensd**.

(b) Verder is $s \in X$ een **supremum** of **kleinste bovengrens** van A als s een bovengrens is van A die kleiner is dan elke andere bovengrens van A.

Analoog kennen we **ondergrens** en **infimum**.

Eigenschap 7.9.

1. Als $\sup(A)$ bestaat en $\sup(X) \in A$, dan $\sup(A) = \max(A)$.
2. Als $\max(A)$ bestaat, dan $\max(A) = \sup(A)$.

Voorbeeld 7.10. $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ en $(\mathbb{R}, \geqslant)$ zijn totaal geordende verzamelingen. ◇

Definitie 7.11.
Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling. De ordening $\preccurlyeq$ noemen we **volledig** als

- elke niet lege deelverzameling van X die een bovengrens heeft, ook een kleinste bovengrens heeft in X.
- elke niet lege deelverzameling van X die een ondergrens heeft, ook een grootste ondergrens heeft in X.

Opmerking. $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ is <u>niet</u> volledig. *(Volgende week:* $(\mathbb{R}, \leqslant)$ *is <u>wel</u> volledig.)*

Stelling 7.12.

Als A een bovengrens heeft, dan is het supremum de kleinste bovengrens, en bestaat er geen kleinere bovengrens.

We proberen te bewijzen dat er bij elke bovengrens van A een strikt kleinere bovengrens te vinden valt.

Bewijs. Beschouw $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 1 \wedge x^2 < 2\}$.

- $I \in A$, dus $A \neq \emptyset$ ✓
- z is een bovengrens ✓

Zij s een bovengrens van A, $s \in \mathbb{R}$. Dan $s \geqslant 1$ en $s^2 \neq 2$. Dan zijn er nog twee mogelijkheden: (*Er is geen rationaal getal r met $r^2 = 2$.*)

- $s^2 < 2$:

  We laten zien dat er een $n \in \mathbb{N}_0$ met $(s + \frac{1}{n})^2 < 2$ Dan is $x = s + \frac{1}{n}$ rationaal met $x^2 < 2$. Dus $x \in A$ en $x > s$. Dit is een tegenspraak.

  Neem n zo groot dat $n \in \mathbb{N}_0 > \frac{2s+1}{2-s^2}$. Dan is

  $$\frac{1}{n} < \frac{2-s^2}{2s+1}$$

  waardoor

  $$s + \frac{1}{n} < \frac{s(2s+1)}{2s+1} + \frac{2-s^2}{2s+1} = \frac{s^2+s+2}{2s+1}$$

  De vraag is nu of $\left(\frac{s^2+s+2}{2s+1}\right)^2 < 2$. We weten $s^2 < 2$.

- $s^2 > 2$:

  Zoek n groot genoeg met

  $$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 > 2 \iff \underbrace{\ldots}_{klad} \iff \frac{2s}{s^2-2} < 2$$

□

Informatie over de LaTeX opdracht

Er worden punten afgetrokken voor spelling, zinsbouw, grammatica. . . Let op wetenschappelijke schrijfstijl. Het moet een 'verhaal' zijn. Vermijd pijlen.