[9주차-1차시]

검정(1)

한 모집단에서 모 평균에 대한 검정

중앙대학교 기계공학부 김석민 교수
smkim@cau.ac.kr

가설검정(testing of statistical hypothesis)

- **통계적 추론**
  추정 & 검정

- **과학적 문제해결**
  - **가설 -> 실험 -> 가설검정**

- **모수에 대한 추론 (가설)**
  - **가설검정 :**
    추출한 표본으로부터 모수에 대한 가설이 적합한지를 판단

한 모집단에서 모평균에 대한 검정

Q: 도시 보건당국의 캠페인이 성인의 콜레스테롤 수치 를 줄이는 데 효과적인가?

캠페인 시작 전의 성인의 콜레스테롤 수치의 분포 $N(200, 24^2)$

캠페인 이후의 성인의 평균 콜레스테롤 수치 : μ

캠페인이 효과적이었다면 $\mu < 200$

캠페인 후 -> 40명의 콜레스테롤 수치 조사

→ 40명의 콜레스테롤 수치 표본으로 부터 추정한 신뢰도 (1-α)100% 의 모평균 구간추정값이 200 보다 작다면 캠페인이 효과가 있다고 판단함. (추정을 이용한 검정)

➔ 40명 콜레스테롤 수치가 모평균이 200이라는 가정하에서는 나오기 힘들 정도로 작은 수치를 얻었다면 캠페인에 효과가 있다고 판단한다. (실제검정에서 사용하는 방법)

Q: 도시 보건당국의 캠페인이 성인의 콜레스테롤 수치 를 줄이는 데 효과적인가?

캠페인 시작 전의 성인의 콜레스테롤 수치의 분포 $N(200, 24^2)$

캠페인 이후의 성인의 평균 콜레스테롤 수치 :

캠페인이 효과적이었다면

캠페인 후 -> 40명의 콜레스테롤 수치 조사

→40명의 콜레스테롤 수치 표본으로 부터 추정한 신뢰도 (1-α)100% 의 모평균 구간추정값이 200 보다 작다면 캠페인이 효과가 있다고 판단함. (추정을 이용한 검정)

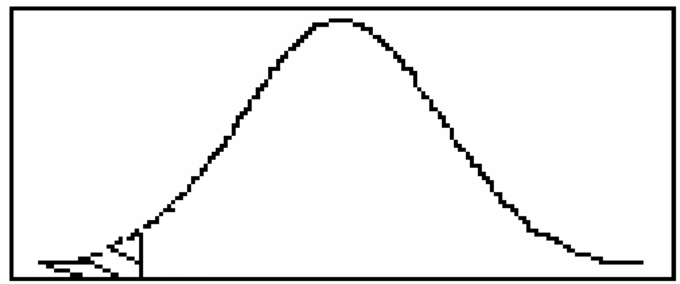
Ex) 40명 표본 평균 193, 표본 표준편차 24, 90% 신뢰수준

-> norminv (0.05, 193, 24/sqrt(40)) [186.7582]

~ norminv (0.95, 193, 24/sqrt(40)) [199.2418]

만약 캠페인 이후 성인의 평균 콜레스테롤이 캠페인 전과 큰 차이가 없다면

$$\overline{X} \sim N(200, \frac{24^2}{40})$$



$$P(\frac{\overline{X}-200}{24/\sqrt{40}} \le 1.645) = 0.05$$

$$\overline{X} \le 200 - 1.645 \cdot \frac{24}{\sqrt{40}} = 193.76$$: 나오기 힘든 수치

$\overline{X} \le 193.76$ ➔ 콜레스테롤 양을 줄이는 데 효과가 있다.

$\overline{X} > 193.76$ ➔ 효과가 있다고 할 충분한 증거가 없다.

norminv (0.95, 193.76, 24/sqrt(40)) = 200.0018

가설

- 두 개의 가설 :
  - 주장하고자 하는 가설
    - 대립가설 (Alternative hypothesis; H_1)

      eg. $\mu < 200$

  - 주장할 수 없을 때 받아들이는 가설
    - 귀무가설 (Null hypothesis; H_0)

      eg. $\mu = 200$, $\mu \geq 200$

- 표현

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

(eg) $H_0 : \mu = 200 \quad vs \quad H_1 : \mu < 200$

오류의 종류

H_0 정부 캠페인은 콜레스테롤을 감소시키는데 효과가 없다.

H_1 정부 캠페인은 콜레스테롤을 감소시키는데 효과가 있다.

결론 / 실제상황	H_0 를 기각	H_0 를 기각하지 않음
H_0 가 맞다	오류(제1종 오류)	옳은 결론
H_0 가 틀리다	옳은 결론	오류(제2종 오류)

1종오류 : 캠페인은 효과가 없는데 효과가 있다고 판단하여 캠페인을 지속함. (캠페인을 지속하는 비용 소요)

2종오류 : 캠페인은 효과가 있는데 효과가 없다고 판단하여 캠페인을 중지함. (이전 상태와 동일)

*주장하기에 앞서 신중할 필요 ➔ **제 1종 오류에 주의!!**

검정 통계량 (test statistic)

- **표본으로부터 검정의 결론을 유도**

  → 이때 이용되는 통계량 : 검정통계량

  μ **에 대한 검정을 위해** $\overline{X}$ **를 이용**

  검정통계량 : $\overline{X}$

- **표준화된 형태를 사용하는 것이 바람직함 :**

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \approx N(0,1) \qquad\qquad if \quad \mu=\mu_0$$

기각역 (Rejection region)

- H_0를 기각하게 하는 검정통계량이 취하는 구간.

  - **<u>기각역의 결정 :</u>** $\mu < \mu_0$ 를 주장하고자 할 때

    $(R : \overline{X} \le C)$ $R : \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \le c$

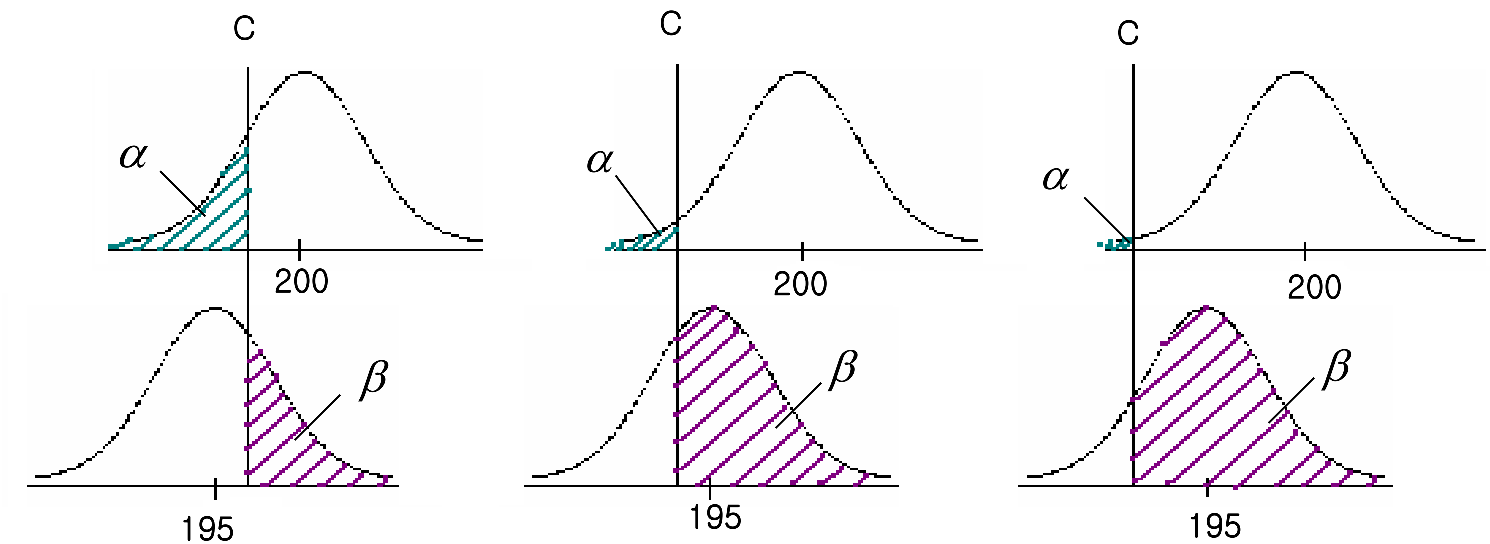
    ➔ **<u>오류를 적게 하도록</u>** :
    제 1종 오류의 확률(α)
    제 2종 오류의 확률(β)

제 1 종 오류와 제 2 종 오류의 확률

$\overline{X} \le C$ 를 기준으로 H_0 를 기각하는 경우 (캠페인 효과가 있다)

Case 1 $\overline{X} \approx N(200, \frac{24^2}{40})$: 캠페인은 효과가 없음.

Case 2 $\overline{X} \approx N(195, \frac{24^2}{40})$: 캠페인은 효과가 있음.



<제 1종, 제 2종 오류의 확률>

- α 와 β 를 동시에 줄일 수 없다.

  $\alpha\uparrow\beta\downarrow$, $\alpha\downarrow\beta\uparrow$

- 제 1종 오류에 더 주의 :

  $\alpha = 0.05$ or 0.01 상한

  🡐 유의수준 (Significance level)

기각역 (rejection region)

❖**유의수준** (α) = $P(H_0$가 맞는데 기각역에 포함) 의 최대값

$$= P\left(\frac{\overline{X}-200}{s/\sqrt{n}} \le -z_\alpha, \quad \mu = 200\right) = \alpha$$

= 만약 $\alpha = 0.05$ 이 되려면

$$0.05 = P\left(\frac{\overline{X}-200}{s/\sqrt{n}} \le -1.645\right) \qquad \mu = 200$$

$$c = 200 - 1.645 \times \frac{24}{\sqrt{40}} = 193.76 \qquad R: \frac{\overline{X}-200}{s/\sqrt{n}} \le -1.645 \quad or \quad \overline{X} \le 193.76$$

일반적인 α 에 대하여

$$R: \frac{\overline{X}-200}{s/\sqrt{n}} \le -z_\alpha$$

$H_0 : \mu = \mu_0$ 에 대한 검정(Z-검정)

- μ 에 대한 가설 $H_0 : \mu = \mu_0$
- $\overline{X}$ 이용. n 이 큰 경우 중심극한정리.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \text{under } H_0$$

$$\left.\begin{array}{l} H_1 : \mu < \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}\right) \text{단측가설} \qquad \left.\begin{array}{r} R : Z \le -z_\alpha \\ R : Z \ge z_\alpha \end{array}\right) \text{단측검정}$$

$H_1 : \mu \ne \mu_0$ – 양측가설 $\qquad R : |Z| \ge z_{\alpha/2}$ – 양측검정

- Z- 검정 : 정규분포를 이용한 검정

유의확률 (significance probability, p-value)

$\bar{x}=189.4\ \ (z=-2.79)$ => 강력히 H_1 을 뒷받침 ➔ H_0 기각

$\bar{x}=192.3\ \ (z=-2.03)$ => 어느 정도 H_1 을 뒷받침 ➔ H_0 기각

$\bar{x}=196.5\ \ (z=-0.92)$ => 충분치는 않다. ➔ H_0 기각하지 않음

$\bar{x}=200.4\ \ (z=0.11)$ => H_1 이 전혀 설득력이 없다.

➔ H_0 기각하지 않음

- 유의확률 (P 값, P-value)
  - 관측된 검정통계량의 값으로부터 H_0 를 기각하게 하는 최소의 유의수준

eg)

$$\bar{x}=189.4\ \ (z=-2.79) \qquad P\text{값}=P(Z\le -2.79)=0.0026$$

$$\bar{x}=192.3\ \ (z=-2.03) \qquad P\text{값}=P(Z\le -2.03)=0.0212$$

$$\bar{x}=196.5\ \ (z=-0.92) \qquad P\text{값}=P(Z\le -0.92)=0.1788$$

$$\bar{x}=200.4\ \ (z=0.11) \qquad P\text{값}=P(Z\le 0.11)=0.5438$$

유의확률이 작을수록 H_1 을 채택할 근거가 충분하다고 판단하고 유의수준보다 큰 경우, 그 값이 클수록 H_0 를 기각할 근거가 희박하다고 판단한다.

$Z = z$ 로 관측되었을 때

$R: Z \geq d$ 이면 P값 = $P(Z \geq z)$

$R: Z \leq d$ 이면 P값 = $P(Z \leq z)$

$R: |Z| \geq d$ 이면 P값 = $P(|Z| \geq |z|)$

예제 6.1

자동차를 회사에서 신규 개발 엔진을 장착할 경우 연비가 기존 엔진을 장착했을때의 연비인11.50 km/L 보다 높은지 검정한다. 신규 엔진이 장착된 차량 56대로부터 연비를 조사하였더니 평균은 11.59 km/L, 표준편차는 0.28 km/L 이다. 새로운 엔진이 평균연비를 높인다고 할수 있는지 유의수준 1% 에서 검증하여라.

새로운 엔진의 연비: μ

가설: $H_0 : \mu = 11.5$ 대 $H_1 : \mu > 11.5$

자료: 56대를 조사, 평균: 11.59km/L, 표준편차: 0.28km/L

검정통계량

$$Z = \frac{\bar{X} - 11.5}{S / \sqrt{56}} = \frac{11.59 - 11.5}{0.28 / \sqrt{56}} = 2.405 > 2.33 = Z_{0.01}$$

이므로 유의수준 1%에서 귀무가설 기각, 즉 새로운 엔진이 평균 연비를 높인다.

P(Z<2.405)= 0.9929, P(Z>2.405)=P값 = 0.0071 < 0.01 (α)

모평균에 대한 검정

표본의 크기 n > 30 이상일때 표본평균은 정규분포를 따름.

$100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 : $(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}})\quad or\quad \overline{X} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

모집단이 정규분포를 따르고 표본의 크기가 작을때 (n<30)

$100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 : $\overline{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

(S 가 작을수록
n 이 클수록.
신뢰수준이 낮을수록: (1-α)가 작을수록

➔ 신뢰구간이 짧다

σ 가 알려져 있을 때

➔ S 대신 σ 를 이용한다.

(표준정규분포 적용)

$H_0 : \mu = \mu_0$ 에 대한 검정 (t-검정, t-test)

- μ 에 대한 가설 $H_0 : \mu = \mu_0$
- 가설을 검정하기 위한 표본의 크기 n≤30
- 모집단이 정규분포를 따를 때

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim t(n-1) \qquad \text{under } H_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \qquad R : t \geq t_\alpha (n-1)$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \qquad R : t \leq -t_\alpha (n-1)$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad R : \left| t \right| \geq t_{\alpha/2} (n-1)$$

예제 6.2

수질을 나타내는 하나의 수치로 단위부피당 세균수가 있는데 그수가 200 이상이면 상수원으로 적합하지 않다. 호수의 10군데에서 물을떠서 조사한 결과 단위부피당 세균수는 다음과 같았다. 자료로부터 호수의 단위부피당 평균 세균수가 200 미만이라고 주장할 수 있는지 유의수준 5% 에서 검정하라. 단위부피당 세균수는 정규분포를 따른다고 가정한다.

측정된 단위부피당 세균수 : 175 190 215 198 184 207 210 193 196 180

단위부피당 평균 세균수 : μ $\quad\quad$ $\mu \geq 200$이면 부적합

$H_0 : \mu = 200 \quad vs \quad H_1 : \mu < 200$

10군데 조사 : $\bar{x} = 194.8 \quad s = 13.14 \quad t_{0.95}(9) = -t_{0.05}(9) = -1.833$

$t_0 = \dfrac{194.8 - 200}{13.14 / \sqrt{10}} = -1.2514 \ > \ -1.833$ $\quad \therefore$ 안심할 수 없다

P값$=P(t < -1.25) = ?$

$$P(t < -0.703) = 0.25$$

$$P(t < -1.383) = 0.1$$

$\therefore$ P값은 10%와 25% 사이의 값

```
>> tcdf(-1.25, 9)
ans =  0.121412137272170
```

구간 추정과 검정의 관계 - 1

- 정규 모집단에서 표본의 크기가 작을 때,

μ 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$$\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \qquad \text{under} \quad H_0$$

- 기각역: $R : |\, t\, | \ \geq\ t_{\alpha/2}(n-1)$
- 채택영역: $|\, t\, | < t_{\alpha/2}(n-1)$

$$\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

- μ_0 가 신뢰구간에 포함되면 기각하지 않고,

포함되지 않으면 기각.

한 모집단에서 모평균에 대한 검정

Q: 도시 보건당국의 캠페인이 성인의 콜레스테롤 수치 를 줄이는 데 효과적인가?

캠페인 시작 전의 성인의 콜레스테롤 수치의 분포

캠페인 이후의 성인의 평균 콜레스테롤 수치 :

캠페인이 효과적이었다면

캠페인 후 -> 40명의 콜레스테롤 수치 조사

→ 40명의 콜레스테롤 수치 표본으로 부터 추정한 신뢰도 (1-α)100% 의 모평균 구간추정값이 200 보다 작다면 캠페인이 효과가 있다고 판단함. (추정을 이용한 검정) → 양측검증이라면 이표현이 맞고 단측검증이라면 신뢰도 (1-2α)100% 추정구간에 대해 검증해야 함.

➔ 40명 콜레스테롤 수치가 모평균이 200이라는 가정하에서는 나오기 힘들 정도로 작은 수치를 얻었다면 캠페인에 효과가 있다고 판단한다. (실제검정에서 사용하는 방법)

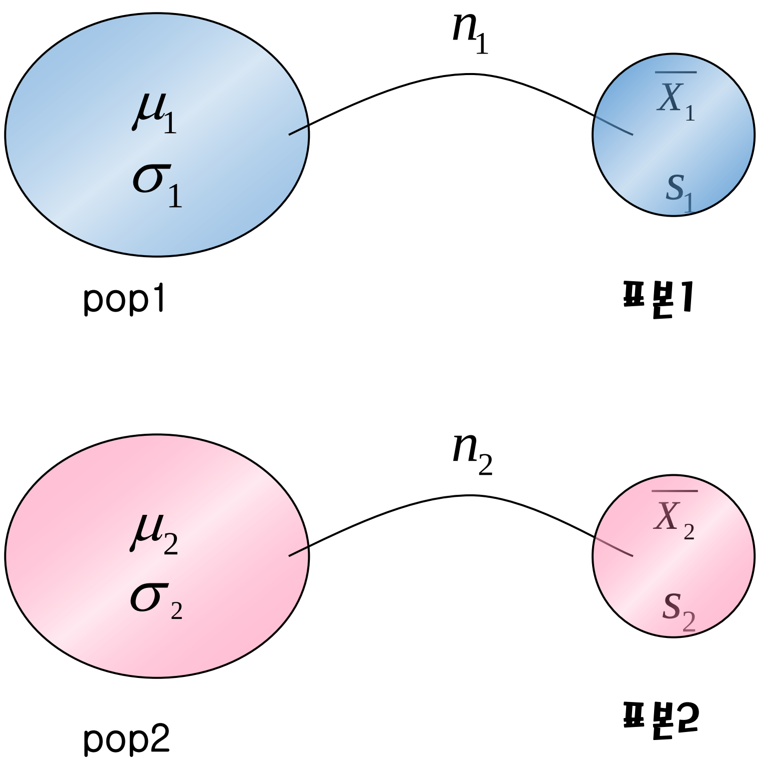
[9주차-2차시]

검정(2)

모 평균의 차에 대한 검정

중앙대학교 기계공학부 김석민 교수
smkim@cau.ac.kr

두 모집단의 모평균의 차에 대한 검정



➔ μ_1 과 μ_2 의 비교

➔ $\mu_1 - \mu_2$ 에 대한 추론

캠페인을 진행하기 전 성인남성의 콜레스테롤 수치?
(모집단의 값을 아는것 자체가 불가능)
표본을 통해 모집단값을 예측함

캠페인 이후 성인남성의 콜레스테롤 수치?
표본을 통해 예측

➔ 대부분의 검정은 두 모집단의 모평균 차에 대한 검정

두모집단의 모평균 차의 확률 분포

두 표본의 크기가 모두 클 때

$$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$$

독립

$$\bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}} \sim \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^{\,2}}{n_1} + \frac{s_2^{\,2}}{n_2}}} \approx N(0,1)$$

$H_0 = \mu_1 - \mu_2 = \delta$ 에 대한 검정(두 표본 Z-검정)

- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$

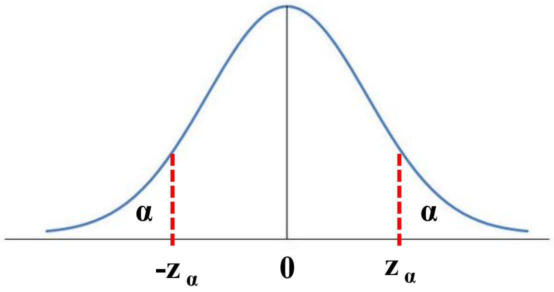
- 두 표본의 크기가 모두 클 때

- 검정통계량:

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \approx N(0,1) \qquad \text{under } \mathrm{H}_0$$

- 기각역:

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta \qquad R : Z \geq z_\alpha$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta \qquad R : Z \leq -z_\alpha$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta \qquad R : |Z| \geq z_{\alpha/2}$$



$H_0 = \mu_1 - \mu_2 = \delta$ 에 대한 검정(두 표본 t-검정, $\sigma_1 = \sigma_2$)

두 모집단이 모두 정규분포를 따르고 $\sigma_1 = \sigma_2$ 일 때

검정통계량

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \delta}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$$

[두 모집단의 모평균 차에 대한 추정]

* 등분산성 가정

$$1/2 \le S_1 / S_2 \le 2 \text{ 이면}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

기각역

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

$$\rightarrow R : t \le -t_\alpha (n_1 + n_2 - 2)$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta$$

$$\rightarrow R : t \ge t_\alpha (n_1 + n_2 - 2)$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \ne \delta$$

$$\rightarrow R : |t| \le t_{\alpha/2} (n_1 + n_2 - 2)$$

* 분산합동추정량 (pooled estimator)

$$S_p^{\ 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{(n_1 - 1) S_1^{\ 2} + (n_2 - 1) S_2^{\ 2}}{n_1 + n_2 - 2}$$

예제 6.5

- 학과 A의 평균 토익성적: μ_1
  학과 B의 평균 토익성적: μ_2
- 가설: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ 대 $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
- 자료: 학과 A의 7명의 토익성적
  - 평균: 743.86, 표준편차: 105.77
  학과 B의 7명의 토익성적
  - 평균: 677.57, 표준편차: 91.45
- 검정통계량

$$S_p^2 = \frac{(7-1)105.77^2 + (7-1)91.45^2}{7+7-2} = 9775.20$$

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = \frac{743.86 - 677.57}{\sqrt{9775.20(1/7 + 1/7)}} = 1.254 < 2.179 = t_{0.025}(12)$$

이므로 유의수준 5%에서 귀무가설 기각할 수 없다.
즉 두 학과의 평균 토익점수가 다르다고 할 수 없다.

$H_0 = \mu_1 - \mu_2 = \delta$ 에 대한 검정(두 표본 t-검정, $\sigma_1 \neq \sigma_2$)

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$$

두 모집단이 모두 정규분포를 따르고 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 일 때

검정통계량

$$t^* = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(\min\{n_1 - 1, n_2 - 1\})$$

기각역

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta \qquad R : t \leq -t_\alpha(\min\{n_1 - 1, n_2 - 1\})$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta \qquad R : t \geq t_\alpha(\min\{n_1 - 1, n_2 - 1\})$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta \qquad R : |t| \leq t_{\alpha/2}(\min\{n_1 - 1, n_2 - 1\})$$

짝 비교에서의 분포

- 두 모집단의 모평균 차이의 검정 : 두 모집단이 독립인 경우
- 짝비교 : 비슷한 특성을 갖는 것끼리 짝을 지은후 각 짝별로 차이를 비교하는 방법

Ex. A약과 B약의 효과(차이)를 비교하는 실험에서 효과는 나이, 성별, 건강상태등에 따라 달라질 수 있으므로

A약을 처방한 표본 1의 전체 평균과
B약을 처방한 표본 2의 전체 평균을 비교하기 보다는
표본 1과 표본2의 표본중 비슷한 특성을 갖는 것끼리
짝지어 차이를 비교하는 방법
표본1의 남자와 표본 2의 남자간의 차이
각 표본의 여자간의 차이를 따로 분석하는 방법

짝	처리1	처리2	차이
1	X_1	Y_1	$D_1 = X_1 - Y_1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	X_n	Y_n	$D_n = X_n - Y_n$

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \qquad\qquad s_D{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2$$

짝 비교에서의 검정

- 짝비교의 검정은 한모집단에서의 모평균에 대한 검정 방법을 활용

- **검정** $H_0 : \delta = \delta_0$

  - n 이 클 때 검정통계량 $$Z = \frac{\overline{D} - \delta_0}{s_D / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

  - n 이 작을 때 검정통계량 $$t = \frac{\overline{D} - \delta_0}{s_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

예제 6.7

전국에서 임의로 추출한 농장 8곳에서 A와 B 종류의 밀을 생산한다. 각농장에서는 농장을 절반으로 나눠 A 와 B 를 같은면적에서 재배하였고 단위면적당 수확량의 결과는 다음과 같다. 밀 A의 생산성이 더 높은지 유의수준 5%에서 검정해라

밀종류	농장							
	1	2	3	4	5	6	7	8
A	23	39	19	43	33	29	28	42
B	18	33	21	34	33	20	21	40

두 처리효과(밀 A와 밀 B)의 차이: δ

가설: $H_0 : \delta = 0$ 대 $H_1 : \delta > 0$

자료: 8곳의 농장에서 조사,

평균 차이 (A−B) : 4.50, 차이의 표준편차: 4.11

검정통계량

$$Z = \frac{\overline{D}}{S_D / \sqrt{8}} = \frac{4.50}{4.11 / \sqrt{8}} = 3.10 > 1.895 = t_{0.05}(7)$$

이므로 유의수준 5%에서 귀무가설 기각, 즉 밀 A의 생산량이 밀 B의 생산량보다 높다.

예제 6.8

전국에서 임의로 추출한 농장 16곳중 8개는 밀A, 8개는 밀B 를 생산한다. 단위면적당 수확량의 결과는 다음과 같다.

밀 A의 생산성이 더 높은지 유의수준 5%에서 검정해라

밀A	**23**	**39**	**19**	**43**	**33**	**29**	**28**	**42**
밀B	**18**	**33**	**21**	**34**	**33**	**20**	**21**	**40**

밀 A 평균 생산량 μ_1밀 B 평균생산량 μ_2

가설 : $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ 대 $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

자료: A밀 평균 $\bar{X}$=32 표준편차 S_1= 8.83

B밀 평균 $\bar{Y}$=27.5 표준편차 S_2 = 8.37

등분산성검토: S_1 / S_2 = 1.05 → 등분산 가정

$$S_p^2 = \frac{(8-1)8.83^2 + (8-1)8.37^2}{8+8-2} = 74.01$$

검정통계량

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = \frac{32 - 27.5}{\sqrt{74.01(1/8 + 1/8)}} = 1.05 < 1.761 = t_{0.05}(14)$$

이므로 유의수준 5%에서 귀무가설 채택
밀 A 의 평균 생산량이 밀 B 보다 높다고 주장할 수 없다.

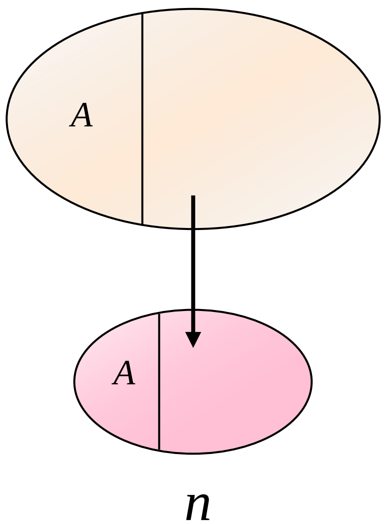
[10주차-1차시]

검정(3)

모비율, 모비율의차, 모표준편차, 모표준편차의 비 검정

중앙대학교 기계공학부 김석민 교수
smkim@cau.ac.kr

한 모집단에서의 모비율에 대한 검정



$P(A) = p$

$\hat{p} = ?$

X : n 개 중의 A 의 수 $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$: 추정량

$X \sim Bin(n, p)$ $\boxed{\approx N(np, np(1-p))}$

$E(X) = np \quad Var(X) = np(1-p) \quad s.d(X) = \sqrt{np(1-p)}$

$E(\hat{p}) = p \quad Var(\hat{p}) = \dfrac{p(1-p)}{n} \quad S.E(\hat{p}) = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

각 대립 가설에 따른 기각역

$$H_0 : p = p_0 \qquad \text{대} \qquad H_1 : p > p_0$$

- 검정통계량

H_0 하에서 $\dfrac{X}{n} = \hat{p} \sim N\left(p_0, \dfrac{p_0(1-p_0)}{n} \right)$ 이므로

표준화 된 검정통계량

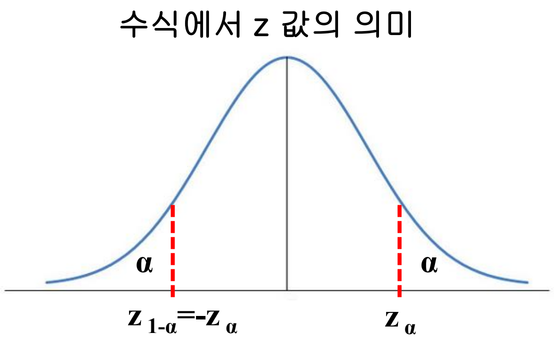
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

각 대립 가설에 따른 기각역

$$H_1 : p > p_0 \qquad R : Z \geq z_\alpha$$

$$H_1 : p < p_0 \qquad R : Z \leq -z_\alpha$$

$$H_1 : p \neq p_0 \qquad R : |Z| \geq z_{\alpha/2}$$



- 모평균의 경우와 마찬 가지로 검정통계량의 관측값이 Z 일 때, P값은 다음과 같이 구한다.

$$R : Z \geq d \quad \text{이면 P값} = P(Z \geq z)$$

$$R : Z \leq d \quad \text{이면 P값} = P(Z \leq z)$$

$$R : |Z| \geq d \quad \text{이면 P값} = P(|Z| \geq |z|)$$

예제 6.9

- 어느 회사의 이직률: p

- 가설: $H_0 : p = 0.2$ 대 $H_1 : p < 0.2$

- 자료: 80명중 14명이 이직 - $\hat{p} = \frac{14}{80} = 0.175$

- 검정통계량

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{n}}} = \frac{0.175 - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{80}}} = -0.56$$

이므로 유의수준 5% ($Z_{0.05}$=-1.645)에서
귀무가설을 기각할 수 없다.

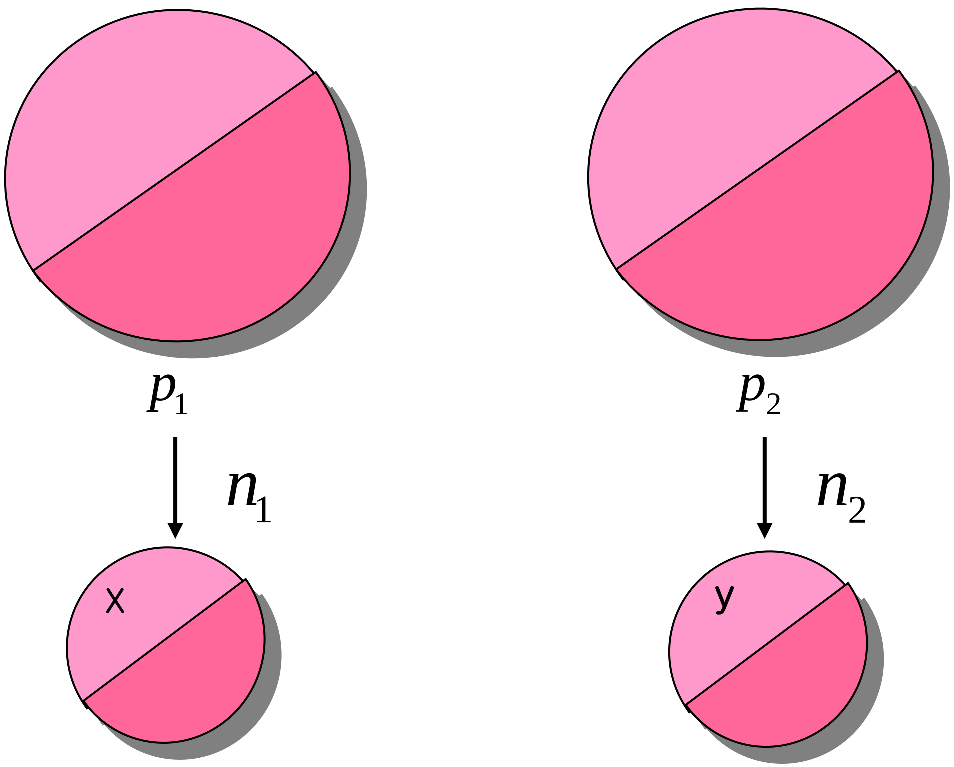
즉 새로운 복지제도가 이직률을 낮춘다고 할 수 없다.

예제 6.

```
>> n =80;
>> x = 14;
>> phat = x/n
phat =
    0.1750
>> z = (phat-0.2)/sqrt(0.2*0.8/n)
z =
   -0.5590
>> p = normcdf(z)
p =
    0.2881
```

P 값이 0.05 보다 크므로 귀무가설 채택

두 모집단에서 모비율의 차에 대한 검정



$$p_1 - p_2 = ?$$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ 을 이용

$$\hat{p}_1 = \frac{X}{n_1} \qquad \hat{p}_2 = \frac{Y}{n_2}$$

n 이 클 때 두 모비율의 비교에 대한 분포

$$\hat{p}_1 \approx N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right)$$

$$\hat{p}_2 \approx N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

독립

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \approx N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$H_0 : p_1 - p_2 = 0$ 에 대한 검정

$p_1 = p_2 = p$ 라 하자.

- 검정통계량

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \approx N(0,1)$$

$\hat{p} = \frac{X+Y}{n_1+n_2}$ 로 p 를 추정

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \approx N(0,1)$$

$H_0 : p_1 - p_2 = 0$ 에 대한 검정

- 기각역

$$H_1 : p_1 < p_2 \qquad R : Z \leq -z_\alpha$$

$$H_1 : p_1 > p_2 \qquad R : Z \geq z_\alpha$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2 \qquad R : |Z| \geq z_{\alpha/2}$$

예제 6.10 (예제 5.11)

- 기존 공법의 불량률: p_1
  새로운 공법의 불량률: p_2
- 가설: $H_0 : p_1 = p_2$ 대 $H_1 : p_1 \neq p_2$
- 자료: 기존 공법에 의한 불량률- $\hat{p}_1 = \dfrac{48}{1000} = 0.048$

  신규 공법에 의한 불량률- $\hat{p}_2 = \dfrac{54}{1500} = 0.036$
- 검정통계량 $\hat{p} = \dfrac{48+54}{1000+1500} = 0.0408$

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = \frac{0.048 - 0.036}{\sqrt{0.0408 \times 0.9592}\sqrt{1/1000 + 1/1500}} = 1.49$$

이므로 유의수준 5% ($Z_{0.025}$=1.96)에서 귀무가설 기각할 수 없다. 불량률에 차이가 있다고 할 수 없다.

한 모집단에서의 표준편차에 대한 검정

- 모집단 $\sim N(\mu, \sigma^2)$
- 표본 : $X_1, \cdots, X_n$

  σ 에 대한 추론에 S 를 이용

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \overline{X})^2 \sim ?$$

- χ^2분포
  - 모집단 $\sim N(\mu, \sigma^2)$
  - 표본 : $X_1, \cdots, X_n$

$$\chi^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

자유도

σ 에 대한 검정

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \qquad (\sigma^2 = {\sigma_0}^2)$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \text{under } H_0$$

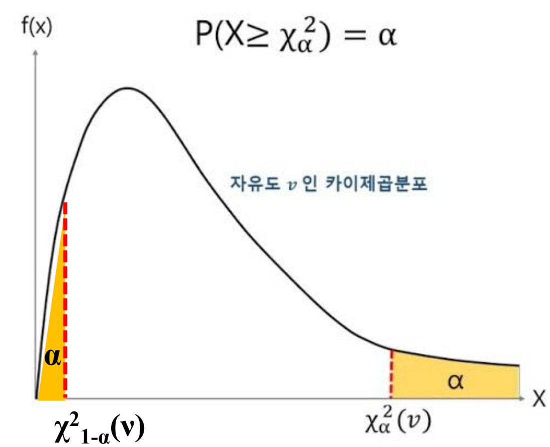
- 각 대립가설에 의하여 기각역은 다음과 같이 구한다.

$H_1 : \sigma > \sigma_0$ $\qquad R : \chi^2 \geq {\chi^2}_{\alpha}(n-1)$

$H_1 : \sigma < \sigma_0$ $\qquad R : \chi^2 \leq {\chi^2}_{1-\alpha}(n-1)$

$H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ $\qquad R : \chi^2 \geq {\chi^2}_{\alpha/2}(n-1)$ or $\chi^2 \leq {\chi^2}_{1-\alpha/2}(n-1)$

수식의 표기 (table 표기법)



예제 6.11(예제 5.12)

- 볼트 지름의 표준편차: σ

- 가설: $H_0 : \sigma = 0.2$ 대 $H_1 : \sigma > 0.2$

- 자료: 10개의 표준편차 : 0.4

- 검정통계량

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)\times 0.4^2}{0.2^2} = 36 > 16.92 = \chi^2_{0.05}(9)$$

이므로 유의수준 5%에서 귀무가설을 기각한다.
즉 표준편차가 0,2보다 크다고 할 수 있다.

두 모집단에서의 모표준편차의 비에 대한 검정

- 표본 : $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

  $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

- 분포 $\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$

  $\dfrac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$

  $\Rightarrow \dfrac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

$\sigma_1 = \sigma_2$ 에 대한 검정

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$$

- 검정통계량 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ Under H_0

각 대립가설에 의하여 기각역은 다음과 같이 구한다

$H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$ $\quad R : F \ge F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

$H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$ $\quad R : F \le F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

$H_1 : \sigma_1 \ne \sigma_2$ $\quad R : F \ge F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

or $F \le F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

예제 6.12 (예제 6.8)

- 밀 A와 밀 B의 모표준편차가 다른가? (유의수준 0.1))
- 가설: $H_0 : \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$ 대 $H_1 : \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} \neq 1$
- 검정통계량

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{8.83^2}{8.37^2} = 1.113$$

- $F_{0.05}(7,7) = 3.79$,
- $F_{0.95}(7,7)$
  $=1/F_{0.05}(7,7)$
  $=1/3.79 = 0.624$