



第6版

# 期权、期货及 其他衍生产品

约翰·赫尔 著 张陶伟 译

OPTIONS, FUTURES,  
AND  
OTHER DERIVATIVES

SIXTH EDITION

John C. Hull

 人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

第6版

# 期权、期货 及其他衍生产品

约翰·赫尔 著

张陶伟 译



人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

期权、期货及其他衍生产品(第6版)/(加)赫尔(HULL,J. C.)著. 张陶伟译.

-北京:人民邮电出版社, 2009.7

ISBN 978 - 7 - 115 - 19347 - 6

I. 期… II. ①赫… ②张… III. 金融体系—高等学校—教材 IV. F830.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 067694 号

**Options, Futures, and Other Derivatives**, Sixth Edition, by Pearson Education, Inc.

Authorized translation from the English language edition, entitled Options, Futures, and Other Derivatives, 6<sup>th</sup> Edition, 0131499084 by Pearson Education, Inc., published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall, Copyright © 2006 by Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

本书中文简体字版由人民邮电出版社和 Pearson Education, Inc. 合作出版。

未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或发行本书的任何部分。

本书封底贴有人民邮电出版社和 Pearson Education 公司防伪标签,无标签者不得销售。

北京市版权局著作权合同登记号: 01 - 2007 - 5085

版权所有,侵权必究。

## 期权、期货及其他衍生产品(第6版)

◆ 著 [加] 约翰·赫尔

译 张陶伟

策 划 刘 力 陆 瑜

责任编辑 陆 瑜 徐向娟

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号 A 座

邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn

网址 <http://www.ptpress.com.cn>

电话 (编辑部)010 - 84937150 (市场部)010 - 84937152

(教师服务中心)010 - 84931276

北京中科印刷有限公司印刷

新华书店经销

◆ 开本: 850×1092 1/16 精装

印张: 49.5

字数: 1290 千字 2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月第 1 次印刷

著作权合同登记号 图字: 01 - 2007 - 5085

ISBN 978 - 7 - 115 - 19347 - 6/F

定价: 128.00 元

本书如有印装质量问题,请与本社联系 电话:(010)84937153

## 内 容 提 要

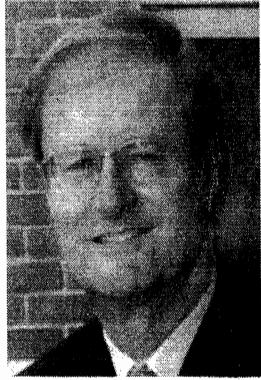
本书曾被誉为人手一册的华尔街“圣经”，是全球高校学习衍生产品的畅销书。它是约翰·赫尔著的 *Options, Futures, And Other Derivatives* 第 6 版的中译本。

本书内容全面，几乎囊括了金融衍生产品的所有理论知识。全书由浅入深，作者充分考虑了读者的数学背景，方便在校学生在课堂上使用。书中各章自成体系，使具有不同需求的读者可有选择地阅读本书。

全书共 32 章，内容包括：期货市场的机制、期货套期保值策略、利率、利率期货、远期和期货价格的决定、互换、期权市场的机制、期权的交易策略、Black–Scholes–Merton 模型、波动率微笑、数值方法、在险值、信用风险、信用衍生产品、奇异期权、凸性调整和实物期权等。

本书同先前的版本一样适于不同的用途，既适用于商学、经济学、投资学、金融工程专业的研究生，也适用于数学功底较好的本科高年级学生，对衍生品市场的金融从业人员、分析师、交易员或者其他市场从业人员来说，本书也具有不可替代的参考价值。

# 作者简介



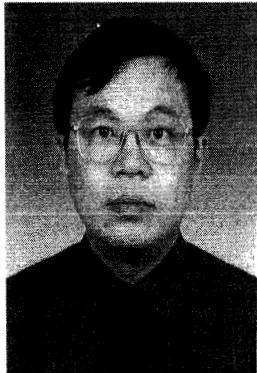
John C. Hull

**约翰·赫尔**，衍生产品和风险管理教授，在衍生产品和风险管理领域享有盛名。研究领域包括信用风险、经理人股票期权、波动率曲面、市场风险以及利率衍生产品。他和 Alan White 教授研发出的 Hull–White 利率模型荣获 Nikko–LOR 大奖。他曾为北美、日本和欧洲多家金融机构提供金融咨询。

约翰·赫尔教授著有《风险管理与金融机构》、《期权、期货及其他衍生产品》和《期权与期货市场基本原理》等金融专著。这些著作被翻译成多种语言，并在世界不同地区的交易大厅中广泛采用。赫尔曾荣获多项大奖，其中包括多伦多大学著名的 Northrop Frye 教师大奖，在 1999 年他被国际金融工程协会 (International Association of Financial EnSineers) 评为年度金融工程大师 (Financial Engineer of the Year)。

约翰·赫尔教授现任职于多伦多大学罗特曼管理学院，曾任教于加拿大约克大学、美国纽约大学、英国克兰菲尔德大学、英国伦敦商学院等。他现为 8 个学术杂志的编委。

## 译者简介



张陶伟，清华大学经济管理学院副教授，兼任中国国际金融学会理事及副秘书长。1999~2000年，任国家外汇管理局外汇政策顾问。国家自然科学基金委2005年度应急课题《人民币压力指数测算》负责人。

1979~1984年先后获得清华大学学士学位和硕士学位；2000年获清华大学博士学位。1987年8月至今在清华大学经济管理学院任教。1996年入选北京市跨世纪“百人工程”计划。1998年1月~6月，美国麻省理工学院斯隆管理学院高级访问学者。

主要讲授课程有：《国际金融》、《投资银行（私募股权投资、并购）》、《投资学》、《金融工程》、《公司治理》等课程。并多次获得清华大学“清华之友——优秀教师”一等奖、二等奖和三等奖，及“清华之友经济管理学院——优秀教学奖”一等奖。

主要研究领域：金融工程（金融衍生产品设计开发、金融风险管理）；投资银行（私募股权投资、并购）；国际金融、人民币汇率研究；公司治理、激励与约束机制设计。

主要著作：专著《国际金融原理》；译著包括：《期权、期货及其他衍生产品》、《兼并与收购实务》、《金融工程—衍生品与风险管理》、《金融风险管理师手册》、《期货期权入门》、《期权、期货和衍生证券》、《财务管理》、《金融工程》；并在多家核心刊物上发表论文数篇。

E-mail: zhangtw@sem.tsinghua.edu.cn

*To Michelle*

# 简要目录

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 技术说明 .....                           | xix |
| 前 言 .....                            | xxi |
| 第 1 章 绪 论 .....                      | 1   |
| 第 2 章 期货市场的机制 .....                  | 19  |
| 第 3 章 利用期货套期保值策略 .....               | 43  |
| 第 4 章 各种利率 .....                     | 69  |
| 第 5 章 远期和期货价格的决定 .....               | 93  |
| 第 6 章 利率期货 .....                     | 121 |
| 第 7 章 互 换 .....                      | 139 |
| 第 8 章 期权市场的机制 .....                  | 169 |
| 第 9 章 股票期权价格的性质 .....                | 191 |
| 第 10 章 期权的交易策略 .....                 | 209 |
| 第 11 章 二叉树模型介绍 .....                 | 227 |
| 第 12 章 维纳过程和伊藤定理 .....               | 251 |
| 第 13 章 Black-Scholes-Merton 模型 ..... | 269 |
| 第 14 章 股票指数期权、货币期权和期货期权 .....        | 301 |
| 第 15 章 套期保值参数 .....                  | 329 |
| 第 16 章 波动率微笑 .....                   | 361 |
| 第 17 章 数值方法 .....                    | 377 |
| 第 18 章 在险值 .....                     | 421 |
| 第 19 章 估计波动率和相关系数 .....              | 445 |
| 第 20 章 信用风险 .....                    | 465 |
| 第 21 章 信用衍生品 .....                   | 489 |
| 第 22 章 奇异期权 .....                    | 509 |
| 第 23 章 气象、能源和保险衍生品 .....             | 531 |
| 第 24 章 关于模型和数值过程的进一步讨论 .....         | 539 |
| 第 25 章 鞍和测度 .....                    | 565 |
| 第 26 章 利率衍生证券：标准市场模型 .....           | 587 |
| 第 27 章 凸性调整、时刻调整及跨币衍生证券调整 .....      | 609 |
| 第 28 章 利率衍生证券：短期利率模型 .....           | 623 |
| 第 29 章 利率衍生品：HJM 和 LMM .....         | 653 |
| 第 30 章 互换的再次探讨 .....                 | 671 |
| 第 31 章 实物期权 .....                    | 687 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 第 32 章 衍生品灾难及教训 .....          | 703 |
| 词汇表 .....                      | 713 |
| DerivaGem 软件 .....             | 733 |
| 主要期权、期货交易所表 .....              | 739 |
| 当 $x \leq 0$ 时, $N(x)$ 表 ..... | 740 |
| 当 $x \geq 0$ 时, $N(x)$ 表 ..... | 741 |
| 作者索引 .....                     | 743 |
| 主题索引 .....                     | 747 |

# 详细目录

|                            |           |
|----------------------------|-----------|
| 技术说明 .....                 | xix       |
| 前 言 .....                  | xxi       |
| <br>                       |           |
| <b>第 1 章 绪 论 .....</b>     | <b>1</b>  |
| 1.1 场内交易市场 .....           | 1         |
| 1.2 场外交易市场 .....           | 2         |
| 1.3 远期合约 .....             | 3         |
| 1.4 期货合约 .....             | 6         |
| 1.5 期 权 .....              | 6         |
| 1.6 交易者的类型 .....           | 8         |
| 1.7 套期保值者 .....            | 9         |
| 1.8 投机者 .....              | 11        |
| 1.9 套利者 .....              | 14        |
| 1.10 危险人物 .....            | 14        |
| 小 结 .....                  | 15        |
| 参考读物 .....                 | 16        |
| 问题和习题 .....                | 16        |
| 课后练习 .....                 | 18        |
| <br>                       |           |
| <b>第 2 章 期货市场的机制 .....</b> | <b>19</b> |
| 2.1 背 景 .....              | 19        |
| 2.2 期货合约的细则 .....          | 20        |
| 2.3 期货价格收敛于现货价格 .....      | 23        |
| 2.4 每日结算与保证金的操作 .....      | 24        |
| 2.5 报纸行情 .....             | 28        |
| 2.6 交 割 .....              | 32        |
| 2.7 交易者类型和指令类型 .....       | 34        |
| 2.8 监 管 .....              | 35        |
| 2.9 会计及税收 .....            | 36        |
| 2.10 远期合约与期货合约 .....       | 38        |
| 小 结 .....                  | 39        |
| 参考读物 .....                 | 40        |
| 问题和习题 .....                | 40        |
| 课后练习 .....                 | 41        |

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| <b>第3章 利用期货套期保值策略 .....</b> | <b>43</b> |
| 3.1 基本原理 .....              | 43        |
| 3.2 有关对冲的各种争论 .....         | 46        |
| 3.3 基差风险 .....              | 48        |
| 3.4 交叉对冲 .....              | 52        |
| 3.5 股票指数期货 .....            | 56        |
| 3.6 向前延展的套期保值 .....         | 62        |
| 小 结 .....                   | 64        |
| 参考读物 .....                  | 64        |
| 问题和习题 .....                 | 65        |
| 课后练习 .....                  | 66        |
| 附录：最小方差套期保值率公式的证明 .....     | 68        |
| <br>                        |           |
| <b>第4章 各种利率 .....</b>       | <b>69</b> |
| 4.1 利率的种类 .....             | 69        |
| 4.2 利率的度量 .....             | 71        |
| 4.3 零息率 .....               | 74        |
| 4.4 债券的定价 .....             | 74        |
| 4.5 零息票收益率曲线的确定 .....       | 76        |
| 4.6 远期利率 .....              | 78        |
| 4.7 远期利率协议 .....            | 80        |
| 4.8 久期 .....                | 83        |
| 4.9 凸性 .....                | 86        |
| 4.10 期限结构理论 .....           | 87        |
| 小 结 .....                   | 87        |
| 参考读物 .....                  | 88        |
| 问题和习题 .....                 | 88        |
| 课后练习 .....                  | 90        |
| <br>                        |           |
| <b>第5章 远期和期货价格的决定 .....</b> | <b>93</b> |
| 5.1 投资资产与消费资产 .....         | 93        |
| 5.2 卖空 .....                | 93        |
| 5.3 假设和符号 .....             | 95        |
| 5.4 投资资产的远期价格 .....         | 95        |
| 5.5 已知证券的现金收益 .....         | 98        |
| 5.6 已知收益率的证券 .....          | 100       |
| 5.7 远期合约的定价 .....           | 101       |
| 5.8 远期价格和期货价格是相等的吗 .....    | 103       |
| 5.9 股票指数的期货价格 .....         | 103       |
| 5.10 货币的远期合约和期货合约 .....     | 105       |
| 5.11 商品期货 .....             | 108       |
| 5.12 持有成本 .....             | 111       |

|                                |            |
|--------------------------------|------------|
| 5.13 交割选择权 .....               | 112        |
| 5.14 期货价格和预期将来的即期价格 .....      | 112        |
| 小 结 .....                      | 114        |
| 参考读物 .....                     | 115        |
| 问题和习题 .....                    | 115        |
| 课后练习 .....                     | 117        |
| 附录：当利率为常数时，证明远期价格与期货价格相等 ..... | 119        |
| <br>                           |            |
| <b>第 6 章 利率期货 .....</b>        | <b>121</b> |
| 6.1 日算惯例 .....                 | 121        |
| 6.2 长期国债的报价 .....              | 123        |
| 6.3 长期国债期货 .....               | 123        |
| 6.4 欧洲美元期货 .....               | 129        |
| 6.5 基于久期的套期保值策略 .....          | 133        |
| 6.6 资产负债组合的套期保值 .....          | 134        |
| 小 结 .....                      | 135        |
| 参考读物 .....                     | 136        |
| 问题和习题 .....                    | 136        |
| 课后练习 .....                     | 137        |
| <br>                           |            |
| <b>第 7 章 互 换 .....</b>         | <b>139</b> |
| 7.1 利率互换的机制 .....              | 139        |
| 7.2 日算惯例 .....                 | 145        |
| 7.3 确认书 .....                  | 145        |
| 7.4 比较优势的观点 .....              | 146        |
| 7.5 互换率的性质 .....               | 149        |
| 7.6 LIBOR/互换零息率的确定 .....       | 150        |
| 7.7 利率互换的估值 .....              | 151        |
| 7.8 货币互换 .....                 | 154        |
| 7.9 货币互换的估值 .....              | 158        |
| 7.10 信用风险 .....                | 160        |
| 7.11 其他互换 .....                | 161        |
| 小 结 .....                      | 164        |
| 参考读物 .....                     | 164        |
| 问题和习题 .....                    | 165        |
| 课后练习 .....                     | 166        |
| <br>                           |            |
| <b>第 8 章 期权市场的机制 .....</b>     | <b>169</b> |
| 8.1 期权类型 .....                 | 169        |
| 8.2 期权的头寸 .....                | 171        |
| 8.3 标的资产 .....                 | 173        |
| 8.4 股票期权合约的性质 .....            | 174        |

|  |            |
|--|------------|
| 8.5 报纸上的期权行情报价 .....                       | 178        |
| 8.6 交 易 .....                              | 180        |
| 8.7 佣 金 .....                              | 181        |
| 8.8 保 证 金 .....                            | 182        |
| 8.9 期 权 清 算 公 司 .....                      | 183        |
| 8.10 法 规 .....                             | 184        |
| 8.11 税 收 .....                             | 184        |
| 8.12 权 证、管 理 层 股 票 期 权 和 可 转 换 债 券 .....   | 186        |
| 8.13 场 外 交 易 的 期 权 .....                   | 186        |
| 小 结 .....                                  | 188        |
| 参 考 读 物 .....                              | 188        |
| 问 题 和 习 题 .....                            | 188        |
| 课 后 练 习 .....                              | 190        |
| <br>                                       |            |
| <b>第 9 章 股 票 期 权 价 格 的 性 质 .....</b>       | <b>191</b> |
| 9.1 影 响 期 权 价 格 的 因 素 .....                | 191        |
| 9.2 假 设 和 符 号 .....                        | 195        |
| 9.3 期 权 价 格 的 上 下 限 .....                  | 195        |
| 9.4 看 跌 期 权 与 看 涨 期 权 的 平 价 关 系 .....      | 198        |
| 9.5 提 前 执 行：不 付 红 利 股 票 的 看 涨 期 权 .....    | 201        |
| 9.6 提 前 执 行：不 付 红 利 的 看 跌 期 权 .....        | 203        |
| 9.7 红 利 的 影 响 .....                        | 204        |
| 小 结 .....                                  | 205        |
| 参 考 读 物 .....                              | 206        |
| 问 题 和 习 题 .....                            | 206        |
| 课 后 练 习 .....                              | 208        |
| <br>                                       |            |
| <b>第 10 章 期 权 的 交 易 策 略 .....</b>          | <b>209</b> |
| 10.1 包 括 一 个 简 单 期 权 和 一 个 股 票 的 策 略 ..... | 209        |
| 10.2 价 差 期 权 .....                         | 211        |
| 10.3 组 合 期 权 .....                         | 220        |
| 10.4 其 他 复 合 期 权 的 损 益 状 态 .....           | 223        |
| 小 结 .....                                  | 223        |
| 参 考 读 物 .....                              | 224        |
| 问 题 和 习 题 .....                            | 224        |
| 课 后 练 习 .....                              | 225        |
| <br>                                       |            |
| <b>第 11 章 二 叉 树 模 型 介 绍 .....</b>          | <b>227</b> |
| 11.1 单 步 二 叉 树 模 型 .....                   | 227        |
| 11.2 风 险 中 性 估 值 .....                     | 231        |
| 11.3 两 步 二 叉 树 图 .....                     | 233        |
| 11.4 看 跌 期 权 的 例 子 .....                   | 236        |

|   |     |
|---|-----|
| 11.5 美式期权 .....                             | 237 |
| 11.6 Delta 值 .....                          | 238 |
| 11.7 用 $u$ 和 $d$ 计算波动率 .....                | 239 |
| 11.8 增加树图中的步数 .....                         | 241 |
| 11.9 其他一些资产的期权 .....                        | 242 |
| 小 结 .....                                   | 246 |
| 参考读物 .....                                  | 247 |
| 问题和习题 .....                                 | 247 |
| 课后练习 .....                                  | 248 |
| <br>第 12 章 维纳过程和伊藤定理 .....                  | 251 |
| 12.1 马尔科夫性质 .....                           | 251 |
| 12.2 连续时间随机过程 .....                         | 252 |
| 12.3 股票价格的随机过程 .....                        | 257 |
| 12.4 各种参数 .....                             | 259 |
| 12.5 伊藤定理 .....                             | 260 |
| 12.6 对数正态特性 .....                           | 262 |
| 小 结 .....                                   | 263 |
| 参考读物 .....                                  | 263 |
| 问题和习题 .....                                 | 264 |
| 课后练习 .....                                  | 265 |
| 附录：伊藤定理的推导 .....                            | 266 |
| <br>第 13 章 Black–Scholes–Merton 模型 .....    | 269 |
| 13.1 股票价格的对数正态分布特性 .....                    | 269 |
| 13.2 收益率的分布 .....                           | 271 |
| 13.3 预期收益率 .....                            | 272 |
| 13.4 波动率 .....                              | 273 |
| 13.5 Black–Scholes–Merton 微分方程隐含的基本概念 ..... | 276 |
| 13.6 Black–Scholes–Merton 微分方程的推导 .....     | 279 |
| 13.7 风险中性定价 .....                           | 281 |
| 13.8 Black–Scholes 定价公式 .....               | 282 |
| 13.9 累积正态分布函数 .....                         | 285 |
| 13.10 权证和管理层股票期权 .....                      | 286 |
| 13.11 隐含波动率 .....                           | 288 |
| 13.12 红 利 .....                             | 289 |
| 小 结 .....                                   | 292 |
| 参考读物 .....                                  | 293 |
| 问题和习题 .....                                 | 294 |
| 课后练习 .....                                  | 296 |
| 附录：Black–Scholes–Merton 公式的证明 .....         | 298 |

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| <b>第 14 章 股票指数期权、货币期权和期货期权 .....</b> | <b>301</b> |
| 14.1 支付已知红利收益率股票的计算结果 .....          | 301        |
| 14.2 期权定价公式 .....                    | 302        |
| 14.3 股票指数期权 .....                    | 304        |
| 14.4 货币期权 .....                      | 309        |
| 14.5 期货期权 .....                      | 311        |
| 14.6 运用二叉树为期货期权估值 .....              | 317        |
| 14.7 风险中性世界中期货价格的增长率 .....           | 319        |
| 14.8 期货期权估值的 Black 模型 .....          | 320        |
| 14.9 期货期权与现货期权 .....                 | 321        |
| 小 结 .....                            | 322        |
| 参考读物 .....                           | 323        |
| 问题和习题 .....                          | 323        |
| 课后练习 .....                           | 326        |
| <br>                                 |            |
| <b>第 15 章 套期保值参数 .....</b>           | <b>329</b> |
| 15.1 实 例 .....                       | 329        |
| 15.2 裸期权头寸与有保护期权头寸 .....             | 330        |
| 15.3 止损策略 .....                      | 330        |
| 15.4 Delta 套期保值 .....                | 332        |
| 15.5 Theta .....                     | 340        |
| 15.6 Gamma .....                     | 342        |
| 15.7 Delta、Theta 和 Gamma 之间的关系 ..... | 347        |
| 15.8 Vega .....                      | 347        |
| 15.9 Rho .....                       | 349        |
| 15.10 对冲的实现 .....                    | 350        |
| 15.11 情景分析 .....                     | 351        |
| 15.12 有价证券组合的保险 .....                | 352        |
| 15.13 股票市场波动率 .....                  | 354        |
| 小 结 .....                            | 355        |
| 参考读物 .....                           | 356        |
| 问题和习题 .....                          | 356        |
| 课后练习 .....                           | 358        |
| 附录：泰勒展开和对冲参数 .....                   | 360        |
| <br>                                 |            |
| <b>第 16 章 波动率微笑 .....</b>            | <b>361</b> |
| 16.1 回顾看跌期权与看涨期权的平价关系 .....          | 361        |
| 16.2 外汇期权 .....                      | 362        |
| 16.3 权益性期权 .....                     | 365        |
| 16.4 波动率期限结构和波动率集合 .....             | 367        |
| 16.5 套期保值参数 .....                    | 368        |
| 16.6 预期价格有一次大幅波动 .....               | 369        |

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| 小 结 .....                        | 371        |
| 参考读物 .....                       | 371        |
| 问题和习题 .....                      | 372        |
| 课后练习 .....                       | 373        |
| 附录：从波动率微笑曲线确定隐含的风险中性分析 .....     | 375        |
| <b>第 17 章 数值方法 .....</b>         | <b>377</b> |
| 17.1 二叉树图 .....                  | 377        |
| 17.2 指数期权、货币期权和期货期权的二叉树法估值 ..... | 384        |
| 17.3 支付已知红利的股票期权的二叉树模型 .....     | 387        |
| 17.4 构造树图的几种方法 .....             | 391        |
| 17.5 依赖时间变量的参数 .....             | 395        |
| 17.6 蒙特卡罗模拟 .....                | 395        |
| 17.7 方差减少方法 .....                | 402        |
| 17.8 有限差分方法 .....                | 406        |
| 小 结 .....                        | 415        |
| 参考读物 .....                       | 416        |
| 问题和习题 .....                      | 416        |
| 课后练习 .....                       | 418        |
| <b>第 18 章 在险值 .....</b>          | <b>421</b> |
| 18.1 VaR 参数 .....                | 421        |
| 18.2 历史模拟方法 .....                | 422        |
| 18.3 建模计算方法 .....                | 425        |
| 18.4 线性模型 .....                  | 428        |
| 18.5 二次模型 .....                  | 431        |
| 18.6 蒙特卡罗模拟 .....                | 434        |
| 18.7 不同方法之间的比较 .....             | 435        |
| 18.8 压力测试与回溯检验 .....             | 435        |
| 18.9 主成分分析法 .....                | 436        |
| 小 结 .....                        | 439        |
| 参考读物 .....                       | 439        |
| 问题和习题 .....                      | 440        |
| 课后练习 .....                       | 441        |
| 附录 现金流映射分解 .....                 | 443        |
| <b>第 19 章 估计波动率和相关系数 .....</b>   | <b>445</b> |
| 19.1 估计波动率 .....                 | 445        |
| 19.2 指数加权移动平均模型 .....            | 447        |
| 19.3 GARCH (1,1) 模型 .....        | 449        |
| 19.4 模型的选择 .....                 | 451        |
| 19.5 极大似然估计法 .....               | 451        |

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| 19.6 利用 GARCH (1,1) 模型预测未来的波动率 ..... | 456        |
| 19.7 相关系数 .....                      | 459        |
| 小 结 .....                            | 462        |
| 参考读物 .....                           | 462        |
| 问题和习题 .....                          | 462        |
| 课后练习 .....                           | 464        |
| <br>                                 |            |
| <b>第 20 章 信用风险 .....</b>             | <b>465</b> |
| 20.1 信用评级 .....                      | 465        |
| 20.2 历史违约概率 .....                    | 465        |
| 20.3 回收率 .....                       | 467        |
| 20.4 根据债券价格估计违约概率 .....              | 468        |
| 20.5 不同违约概率估计方法的比较 .....             | 470        |
| 20.6 利用股本价格估计违约概率 .....              | 473        |
| 20.7 衍生品交易中的信用风险 .....               | 475        |
| 20.8 信用风险缓释方法 .....                  | 476        |
| 20.9 违约的相关性 .....                    | 478        |
| 20.10 信用 VaR .....                   | 483        |
| 小 结 .....                            | 485        |
| 参考读物 .....                           | 486        |
| 问题和习题 .....                          | 486        |
| 课后练习 .....                           | 488        |
| <br>                                 |            |
| <b>第 21 章 信用衍生品 .....</b>            | <b>489</b> |
| 21.1 信用违约互换 .....                    | 489        |
| 21.2 信用指数 .....                      | 491        |
| 21.3 信用违约互换的估值 .....                 | 492        |
| 21.4 CDS 远期和期权 .....                 | 496        |
| 21.5 总收益互换 .....                     | 497        |
| 21.6 篮子信用违约互换 .....                  | 498        |
| 21.7 债务抵押债券 .....                    | 498        |
| 21.8 一篮子 CDS 和 CDO 的估值 .....         | 500        |
| 21.9 可转换债券 .....                     | 502        |
| 小 结 .....                            | 505        |
| 参考读物 .....                           | 506        |
| 问题与习题 .....                          | 506        |
| 课后练习 .....                           | 507        |
| <br>                                 |            |
| <b>第 22 章 奇异期权 .....</b>             | <b>509</b> |
| 22.1 一揽子组合期权 .....                   | 509        |
| 22.2 非标准美式期权 .....                   | 510        |
| 22.3 远期生效期权 .....                    | 511        |

|                                     |                              |            |
|-------------------------------------|------------------------------|------------|
| 22.4                                | 复合期权 .....                   | 511        |
| 22.5                                | 后定选择权 .....                  | 512        |
| 22.6                                | 障碍期权 .....                   | 513        |
| 22.7                                | 两值期权 .....                   | 516        |
| 22.8                                | 回望期权 .....                   | 516        |
| 22.9                                | 叫停期权 .....                   | 518        |
| 22.10                               | 亚式期权 .....                   | 518        |
| 22.11                               | 一项资产换取另一项资产的期权 .....         | 520        |
| 22.12                               | 包含几种资产的期权 .....              | 521        |
| 22.13                               | 静态期权复制 .....                 | 522        |
|                                     | 小 结 .....                    | 524        |
|                                     | 参考读物 .....                   | 525        |
|                                     | 问题和习题 .....                  | 525        |
|                                     | 课后练习 .....                   | 527        |
|                                     | 附录：亚式期权和篮子期权价格的前二阶矩的计算 ..... | 529        |
| <b>第 23 章 气象、能源和保险衍生品 .....</b>     |                              | <b>531</b> |
| 23.1                                | 定价问题的再次探讨 .....              | 531        |
| 23.2                                | 气象衍生品 .....                  | 532        |
| 23.3                                | 能源衍生品 .....                  | 533        |
| 23.4                                | 保险衍生品 .....                  | 535        |
|                                     | 小 结 .....                    | 537        |
|                                     | 参考读物 .....                   | 537        |
|                                     | 问题和习题 .....                  | 538        |
|                                     | 课后练习 .....                   | 538        |
| <b>第 24 章 关于模型和数值过程的进一步讨论 .....</b> |                              | <b>539</b> |
| 24.1                                | Black-Scholes 的几种替代模型 .....  | 539        |
| 24.2                                | 随机波动率模型 .....                | 544        |
| 24.3                                | IVF 模型 .....                 | 546        |
| 24.4                                | 路径依赖型衍生证券 .....              | 547        |
| 24.5                                | 障碍期权 .....                   | 551        |
| 24.6                                | 基于两个相关资产的期权 .....            | 554        |
| 24.7                                | 蒙特卡罗模拟与美式期权 .....            | 557        |
|                                     | 小 结 .....                    | 561        |
|                                     | 参考读物 .....                   | 561        |
|                                     | 问题和习题 .....                  | 562        |
|                                     | 课后练习 .....                   | 564        |
| <b>第 25 章 鞍和测度 .....</b>            |                              | <b>565</b> |
| 25.1                                | 风险的市场价格 .....                | 565        |
| 25.2                                | 多个状态变量 .....                 | 569        |

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| 25.3 鞍                           | 570        |
| 25.4 计价标准的其他选择                   | 571        |
| 25.5 扩展到多因子模型                    | 575        |
| 25.6 应用                          | 576        |
| 25.7 计价标准的改变                     | 578        |
| 小结                               | 580        |
| 参考读物                             | 580        |
| 问题和习题                            | 581        |
| 课后练习                             | 582        |
| 附录：处理多个不确定性来源                    | 583        |
| <b>第 26 章 利率衍生证券：标准市场模型</b>      | <b>587</b> |
| 26.1 Black 模型                    | 587        |
| 26.2 债券期权                        | 589        |
| 26.3 利率上限和下限                     | 594        |
| 26.4 欧式互换期权                      | 601        |
| 26.5 一般结论                        | 605        |
| 26.6 利率衍生品的套期保值                  | 605        |
| 小结                               | 606        |
| 参考读物                             | 606        |
| 问题和习题                            | 607        |
| 课后练习                             | 608        |
| <b>第 27 章 凸性调整、时刻调整及跨币衍生证券调整</b> | <b>609</b> |
| 27.1 凸性调整                        | 609        |
| 27.2 时刻调整                        | 613        |
| 27.3 跨币衍生证券                      | 615        |
| 小结                               | 618        |
| 参考读物                             | 618        |
| 问题和习题                            | 618        |
| 课后练习                             | 619        |
| 附录：凸性调整公式的证明                     | 621        |
| <b>第 28 章 利率衍生证券：短期利率模型</b>      | <b>623</b> |
| 28.1 背景                          | 623        |
| 28.2 均衡模型                        | 624        |
| 28.3 无套利模型                       | 628        |
| 28.4 债券期权                        | 632        |
| 28.5 波动率结构                       | 633        |
| 28.6 利率树图                        | 634        |
| 28.7 构造树图的一般方法                   | 636        |
| 28.8 校准                          | 645        |

|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| 28.9 运用单因子模型进行套期保值 .....              | 647        |
| 小 结 .....                             | 648        |
| 参考读物 .....                            | 648        |
| 问题和习题 .....                           | 649        |
| 课后练习 .....                            | 650        |
| <b>第 29 章 利率衍生品：HJM 和 LMM .....</b>   | <b>653</b> |
| 29.1 Health, Jarrow 和 Morton 模型 ..... | 653        |
| 29.2 LIBOR 市场模型 .....                 | 656        |
| 29.3 住房抵押贷款证券 .....                   | 666        |
| 小 结 .....                             | 668        |
| 参考读物 .....                            | 669        |
| 问题和习题 .....                           | 670        |
| 课后练习 .....                            | 670        |
| <b>第 30 章 互换的再次探讨 .....</b>           | <b>671</b> |
| 30.1 利率互换交易中的变化 .....                 | 671        |
| 30.2 复利互换 .....                       | 672        |
| 30.3 货币互换 .....                       | 674        |
| 30.4 更为复杂的互换 .....                    | 675        |
| 30.5 权益性互换 .....                      | 678        |
| 30.6 包含嵌入期权的互换 .....                  | 679        |
| 30.7 其他互换 .....                       | 682        |
| 小 结 .....                             | 683        |
| 参考读物 .....                            | 683        |
| 问题和习题 .....                           | 684        |
| 课后练习 .....                            | 684        |
| <b>第 31 章 实物期权 .....</b>              | <b>687</b> |
| 31.1 资本投资评估 .....                     | 687        |
| 31.2 风险中性估值框架的扩展 .....                | 688        |
| 31.3 风险的市场价格估计 .....                  | 689        |
| 31.4 企业估值的应用 .....                    | 691        |
| 31.5 商品价格 .....                       | 691        |
| 31.6 评估投资机会中的选择价值 .....               | 694        |
| 小 结 .....                             | 700        |
| 参考读物 .....                            | 700        |
| 问题和习题 .....                           | 700        |
| 课后练习 .....                            | 701        |
| <b>第 32 章 衍生品灾难及教训 .....</b>          | <b>703</b> |
| 32.1 对所有衍生品使用者的教训 .....               | 703        |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 32.2 对金融机构的教训 .....            | 707 |
| 32.3 对非金融公司的教训 .....           | 710 |
| 小 结 .....                      | 712 |
| 参考读物 .....                     | 712 |
| 词汇表 .....                      | 713 |
| DerivaGem 软件 .....             | 733 |
| 主要期权、期货交易所 .....               | 739 |
| 当 $x \leq 0$ 时, $N(x)$ 表 ..... | 740 |
| 当 $x \geq 0$ 时, $N(x)$ 表 ..... | 741 |
| 作者索引 .....                     | 743 |
| 主题索引 .....                     | 747 |

# 技术说明

---

---

可从作者的网站下载：[www.rotman.utoronto.ca/~hull](http://www.rotman.utoronto.ca/~hull)

1. 欧洲美元期货的凸性调整
2. 对数正态分布的性质
3. 股票和权证价值之和服从对数正态分布时的权证估值
4. 以支付单一红利股票为标的的美式看涨期权的精确估值过程
5. 二维正态分布的累计概率分布计算
6. 以支付已知红利收益率的股票为标的的衍生证券价格的微分方程
7. 以期货价格为标的的衍生证券价格的微分方程
8. 美式期权的近似解析估值
9. 一般化的建立树图过程
10. VaR 估值中的 Cornish–Fisher 展开式
11. 信用评级转移矩阵的处理
12. 非中心卡方分布的累计概率分布的计算
13. 估值美式回望期权的有效方法
14. Hull–White 双因子模型
15. 使用单因子利率模型估值基于附息债券的期权
16. 构建具有非常数时间步和非常数参数的利率树图
17. HJM 期限结构模型中短期利率的过程
18. 复合互换的估值
19. 权益性互换的估值
20. 风险中性估值结论的一般化



# 前 言

很难相信本书的第 1 版只有 330 页，篇幅只有 13 章！在过去的 15 年，衍生品市场快速发展，本书也不断修订以适应这些新进展。

同早先的版本一样，本书适于不同的用途，既适用于商学、经济学、金融工程专业的研究生课程；也适用于数学功底较好的高年级本科生课程；对衍生品市场的金融从业人员来说，本书也会非常有用。让我十分欣慰的是，半数的本书购买者曾经是分析师、交易员，或者是其他的市场从业人员。

撰写衍生证券类著作的作者必须做出的一个关键性决定是关于数学的运用。如果数学表达过于艰深，对许多学生和金融从业人员而言，内容有可能不合适。如果数学表达过于简单，某些重要的专题不可避免地只能以相当简略的方式处理。本书中，我在运用数学和符号方面非常谨慎。非关键性的数学内容或者被删掉了，或者放在每章结尾的附录中和个人网站上的技术说明中。对许多读者而言可能较为陌生的一些概念，我对它们进行了详细的解释，并加入了很多数值的例子来说明。

本书对衍生产品和风险管理作了全面的论述。本书假设读者已经学过金融、概率和统计方面的基础课程，但不了解期权、期货、互换或其他一些衍生工具。因此，在学习基于本书的课程<sup>1</sup>之前，学生不一定需要选修投资学的课程。

在课堂上，本书可以不同方式使用。讲授金融衍生产品初级课程的教师可能会集中大部分时间讲本书的前半部分；而讲授金融衍生产品高级课程的教师使用本书时，可以将后半部分各章节进行不同的组合。不管是初级课程还是高级课程，课程结束之时讲授第 32 章的内容是一个非常不错的选择。

## 本版的新内容

全书的内容均得以更新和改进。本版的变化包括：

1. 全部重新编写了有关信用风险和信用衍生品的章节（第 20 章与第 21 章），目的是为了体现这些重要领域中市场发展的成果。重新编写之后的内容更与时俱进，而且比起第 5 版，更易于教学。
2. 为了更适合学生阅读，包含远期、期货和互换等合约的 7 个章节替换上一版本中的前 6 章。有关套期保值方面的内容被移到了第 3 章，而第 4 章则讲述了利率的计算与应用。第 5 章讲述了远期和期货定价问题。第 6 章讨论了利率期货。第 7 章讲述了互换。

---

<sup>1</sup> 在北美，许多大学金融方面课程的名称可能并不一定与本书书名相同，但通常使用本书作为指定的主要的教科书——译者注

3. 为了说明正文中的观点，增加了 50 多个现实情景和一些有意义的特别专题，请看商业剪影 (Business Snapshot)。
4. 增加了更多有关运用 Excel 实现模型的内容（如第 17 章的蒙特卡罗模拟、第 19 章的 GARCH 模型和第 24 章的 variance-gamma 模型等）。在我的网站上可以找到更多的实现模型的 Excel 电子数据表。
5. 一系列的技术说明都可以在我的网站上找到。因而本教材中纯技术相关资料减少了，这样叙述更为流畅，更适合学生阅读。
6. 包含 DerivaGem1.51 版本软件。与之前 DerivaGem 版本的区别是新版本中计算器可以使用电子数据表功能。
7. 扩充了二叉树章节（第 11 章）和互换章节（第 7 章），所以更加全面地覆盖了这些方面的内容。
8. 增加了“凸性调整、时间调整及交叉货币衍生工具调整”新章节。里面的内容以前是分散在“鞅和测度”、“利率衍生品：标准的市场模型”等章节中的。
9. 本书后半部分内容的顺序经过了重新调整，使其更好地满足教师与学生们的要求。
10. 增加了很多新的专题内容。例如，第 1 章中讨论了衍生品市场规模、第 20 章中讨论了巴塞尔新资本协议和第 24 章中的 variance-gamma 模型等。另外，一些其他专题内容也比第 5 版更具深度。例如，第 5 章中对于欧洲美元期货的凸性调整、第 20 章和第 21 章中的 copula 模型以及第 8 章和第 13 章中的管理层股票期权等。
11. 数学符号有一两处变化。比如  $\delta t$ 、 $\delta x$  等被替换成  $\Delta t$ 、 $\Delta x$  等（这就重新回到了以前版本的表示方法。前一版中，作者尽量避免过多地使用  $\Delta$ ，但发现这一改变并不受欢迎）。
12. 章后加入了很多新练习题。

整本书（包括每章节后的参考文献）完全进行了更新，很多变化是为了更好的表述。

## 软 件

DerivaGem 的新版本（Version 1.51）随本书一同发布<sup>2</sup>。它由两个 Excel 应用软件组成：*Options Calculator* 和 *Applications Builder*。*Options Calculator* 包括简便计算各种期权的软件，现在电子表格也可以使用。*Applications Builder* 包括很多 Excel 函数，使用者可以从中建立自己的应用软件。它还有一些应用软件样本，可以让学生探讨期权的特性，更容易地进行数值运算。该软件还可以设计更有趣的课外作业。

---

<sup>2</sup> 指英文原版——译者注

在本书最后，对该软件有更为详细的阐述。软件的更新版可以从我的网站下载：

[www.rotman.utoronto.ca/~hull](http://www.rotman.utoronto.ca/~hull)

## 幻灯片

几百张PowerPoint 幻灯片可以从我的网站下载。采用本书的教师可对幻灯片进行修改以满足需要。

## 习题答案

如同第 5 版，章后习题分成两部分：练习题（Questions and Problems）和课后练习（Assignment Questions）。练习题的答案参见《期权、期货和其他衍生产品：答案手册》（Options, Futures, and Other Derivatives: Solutions Manual）（ISBN:0-13-149906-8），这本手册由 Prentice Hall 出版，学生可以购买。

## 技术说明

本版的一个新的特点是技术说明的使用。技术说明详细阐述了课文中的一些要点。可以从我的网站下载：

[www.rotman.utoronto.ca/~hull](http://www.rotman.utoronto.ca/~hull)。

在书中不加入技术说明部分，使得我能够流畅地讲述理论，并更适合学生们阅读。

## 在线练习

我和 Learning Dividends 公司一起开发了名称为“Hull on Derivatives”的在线学习资料，可以和本书的前半部分结合使用。其中包含 14 个动画模块，以叙述故事的方式说明了原理。想获得更多信息，请访问：

[www.hullonderivatives.com](http://www.hullonderivatives.com)

## 致 谢

在本书写作过程中，许多人提供了帮助。学术界同事、学生及金融从业人员提供了很好的有价值的建议，他们是：Farhang Aslani, Jas Badyal, Emilio Barone, Giovanni Barone-Adesi, Alex Bergier, George Blazenko, Laurence Booth, Phelim Boyle, Peter Carr, Don Chance, J.-p. Chateau, Ren-Raw Chen, Dan Cline,

George Constantinides, Michel Crouhy, Emanuel Derman, Brian Donaldson, Dieter Dorp, Scott Drabin, Jerome Duncan, Steinar Ekern, David Forfar, David Fowler, Louis Gagnon, Richard Goldfarb, Daqiang Guo, Jörgen Hallbeck, Ian Hawkins, Michael Hemler, Steve Heston, Bernie Hildebrandt, Michelle Hull, Andrew Karolyi, Kiyoshi Kato, Kevin Kneafsy, Iain MacDonald, Bill Margrabe, Eddie Mizzi, Izzy Nelkin, Neil Pearson, Paul Potvin, Shailendra Pandit, Eric Reiner, Richard Rendleman, Gordon Roberts, Chiris Robinson, Cheryl Rosen, John Rumsey, Ani Sanyal, Klaus Schurger, Eduardo Schwartz, Michael Selby, Piet Sercu, Duane Stock, Edward Thorpe, Yisong Tian, Alan Tucker, P.V. Viswanath, George Wang, Jason Wei, Bob Whaley, Alan White, Hailiang Yang, Victor Zak, 以及 Jozef Zemek。

我特别感谢 Eduardo Schwartz，他阅读了第 1 版的原稿，提出许多重要的改进意见。还要特别感谢 Richard Rendleman 和 George Constantinides，他们也提供了许多特别的建议，使近几个版本得以改进。

本书的前 5 版在金融从业人员中很受欢迎，他们的评论与建议很大程度上改进了本书的内容。我想特别感谢 Dan Cline 和 David Forfar。在多伦多大学选修我所讲授的衍生证券课程的学生也对本书的改进起了很大作用。St.Gallen 大学的 Yves Noth 是这一版本的优秀研究助理。

我要特别感谢多伦多大学的同事 Alan White。在过去的 22 年当中，Alan 和我一直在衍生证券领域进行合作研究。在这期间，我们用许多时间讨论衍生证券的各方面问题，本书中的许多新观点和解释旧观点的许多新方法是我们共同提出的。Alan 很仔细地阅读了本书的原稿，并提出许多很好的改进建议。DerivaGem 软件的开发工作大部分也由 Alan 承担。

特别感谢热情的 Prentice Hall 的工作人员以及他们对我的建议和鼓励。我要特别感谢 David Alexander (我的编辑) 和 Francesca Calogero (金融助理编辑)。还要感谢 Scott Barr, Leah Jewell, Paul Donnelly 和 Maureen Riopelle，他们在不同阶段对本书的改进起到了关键性作用。

欢迎读者提出宝贵建议。我的电子邮箱地址是：[hull@rotman.utoronto.ca](mailto:hull@rotman.utoronto.ca)

约翰·赫尔  
多伦多大学罗特曼管理学院  
(Joseph L. Rotman School of Management)

## 绪 论

过去的 25 年当中，在金融领域衍生产品变得越来越重要。世界上许多交易所正在活跃地进行期货和期权交易。金融机构、基金经理和公司财务主管在交易所之外的场外市场，频繁地进行许多不同类型的远期合约、互换、期权及其他衍生产品的交易。衍生产品可用作债券发行的一个组成部分、公司高管激励计划，也可包含在资产投资机会中，如此等等。当今，任何一个金融领域的从业人员必须了解衍生产品是怎样起作用的，在实际中是如何运用以及如何定价的。

衍生产品 (derivative)<sup>1</sup> 是一种金融工具，其价值依赖于其他的更基本的标的变量。衍生产品所依附的最常见的标的变量是可交易资产的价格。例如，股票期权是一种衍生证券，其价值依赖于股票的价格。然而，正如我们将看到的，衍生证券几乎可以依赖于任何变量——从生猪价格到某个滑雪胜地的降雪量。

自从 1988 年本书第 1 版发行以来，衍生产品市场经历了很多的发展。现在，信用衍生品、电子衍生品、气象衍生品以及保险衍生品的交易也正在活跃进行着。许多新的不同类型的利率、汇率以及权益衍生产品也相继面世。出现了更多新的风险管理方法和风险衡量方法。分析员们意识到他们迫切需要实物期权（这是公司在投资房地产、厂房、设备等实物资产过程中所获得的选择权）的分析理论。本书该版本当中将全面反映这些市场发展成果。

在第 1 章中，我们先简要了解远期市场、期货市场以及期权市场概况，并概述套期保值者、投机者以及套利者是如何利用这些市场进行交易的。在以后章节里将给出更多的细节，更详细讨论这里提到的许多概念。

### 1.1 场内交易市场

衍生品交易所是交易者们进行标准化合约交易的市场，标准化合约的标准条款由交易所规定。衍生品交易所的历史颇长。早在 1848 年，为了满足农民和商人互相之间的需求，芝加哥期货交易所 (CBOT, [www.cbot.com](http://www.cbot.com)) 诞生了。起初，该交易所主要的任务是对所交易的谷物进行数量标准化和质量标准化。几年之后，第一宗期货类型的合约诞生了，取名为 *to-arrive contract*。很快，此类合约引起了

<sup>1</sup> 也称衍生品、衍生证券、衍生金融工具——译者注

投机者们的兴趣，他们发现交易这些合约比交易谷物本身更有吸引力。1919年，作为芝加哥期货交易所的竞争者，芝加哥商品交易所（CME，[www.cme.com](http://www.cme.com)）建立了。当今，期货交易所已经遍布世界各地。

1973年，芝加哥期权交易所（CBOE，[www.cboe.com](http://www.cboe.com)）推出了16支股票的看涨期权交易。虽然1973年之前也有期权交易，但相比而言，CBOE通过明确规定合约，创造了有秩序的市场。1977年交易所开始交易看跌期权。到现在，CBOE里进行着1000多支股票的期权以及很多不同的股票指数期权的交易。和期货一样，期权也是非常活跃的合约交易。现在，世界各地的很多交易所里都有期权交易。其标的资产包括各种外币、期货合约以及股票和股票指数等。

## 电子市场

以前，衍生品交易商通常使用公开喊价方式交易。交易商聚集在交易所大厅里，用喊价和复杂的手势信号来表明他们将要执行的交易内容。现在越来越多的交易所在用电子交易方式替代公开喊价方式。由此，交易商只需用键盘输入交易内容，计算机将自动把买者和卖者匹配到一起。虽然还有交易商支持公开喊价方式，但随着时间的流逝，电子交易方式渐渐在交易所内占据主导。

## 1.2 场外交易市场

并不是所有交易都在交易所场内市场（exchange）进行，场外交易市场（over-the-counter market，OTC）是另一种重要的交易场所。根据交易量来衡量，场外交易市场的规模远远大于交易所场内市场。交易各方不需直接碰面，只需通过电话或者联网计算机和对方联系。交易通常在两个金融机构之间或者一个金融机构和其客户（主要是公司财务主管或基金经理）之间通过电话完成。对于更加广泛交易的金融工具，金融机构也常常充当做市商的角色。这意味着金融机构通常同时挂出竞买价（该金融机构准备买人的价格）和竞卖价（该金融机构准备卖出的价格）。

场外交易市场上的电话谈话通常都被录音。如果对达成的交易产生了一些分歧，重放这些录音会帮助他们解决分歧。场外交易市场上的交易规模一般远大于交易所场内市场交易规模。场外交易市场突出的优点是，合约中的各种条款不会像在交易所场内市场一样受到交易所规定的限制。市场参与者可以自由地协商并达成互相满意的交易。场外交易市场的一个不利之处是通常具有一些信用风险（即存在少量的合约不被履行的风险）。在下一章中，我们会看到交易所通过一定的机制几乎消灭了所有的信用风险。

## 市场规模

场外交易市场和交易所场内市场都是规模巨大的衍生品交易市场。虽然搜集

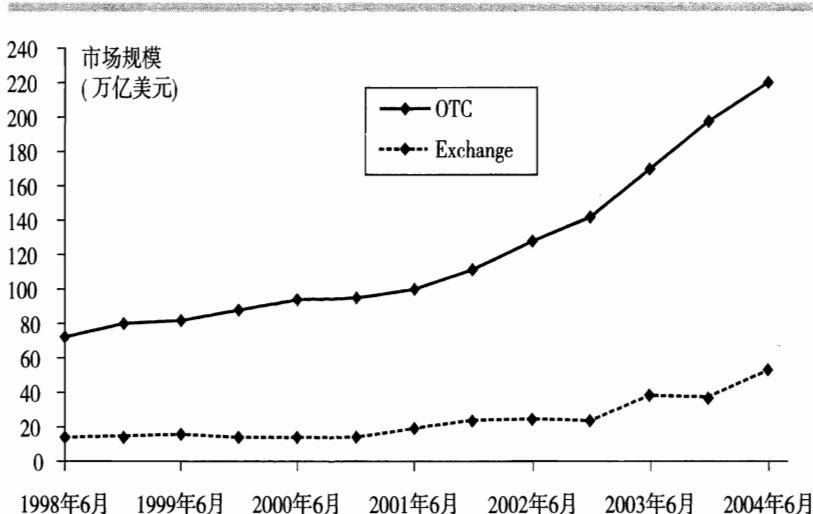


图 1.1 场外交易市场与场内市场的规模

的两个市场的统计数据并不是精确可比的，但很明显，场外交易市场的规模远大于交易所场内市场。国际清算银行 ([www.bis.org](http://www.bis.org)) 自 1998 年开始收集衍生品市场的统计数据。图 1.1 中对比了 (a) 1998 年 6 月至 2004 年 6 月之间，场外交易市场中估计的未平仓的名义标的资产总量；(b) 同时期内，交易所场内市场中估计的标的资产总价值。通过这个统计值可以看出，截至到 2004 年 6 月，场外交易市场的规模达到了 220.1 万亿美元（约为世界 GDP 的 5 倍），而交易所场内市场规模则达到了 49.0 万亿美元。

在解释这些数据的时候，我们应该记住的一点是，场外交易市场中一个合约的名义标的金额并不与该合约本身的价值相同。举一个例子，场外交易市场中有一个合约约定，1 年之后按一个事先确定的汇率，用英镑购买 1 亿美元。这样，该合约的名义标的资产金额是 1 亿美元，然而，该合约的价值也许只有 100 万美元。国际清算银行估计 2004 年 6 月所有场外交易市场中的未平仓的合约总市值大约为 6.4 万亿美元。<sup>2</sup>

### 1.3 远期合约

远期合约 (forward contract) 是一个特别简单的衍生证券。它是一个在确定的将来时刻，按确定的价格购买或出售某项资产的协议。与其相对应的是即期合约 (spot contract)，即期合约是今天购买或出售某项资产的协议。远期合约在场外交易市场中交易，通常是在两个金融机构之间或金融机构与其某个客户之间签署该合约。

当远期合约的一方同意在将来某个确定的指定日期以某个确定的指定价格购

<sup>2</sup> 一个合约对一方而言值 100 万美元，对另一方而言是 -100 万美元，我们说该合约总市值为 100 万美元。

表 1.1 2003年6月3日USD/GBP即期和远期汇率报价  
(GBP=英镑；USD=美元；报价是每英镑对应的美元数量)

|          | 竞买价    | 竞卖价    |
|----------|--------|--------|
| 即期汇率     | 1.6281 | 1.6285 |
| 1个月期远期汇率 | 1.6248 | 1.6253 |
| 3个月期远期汇率 | 1.6187 | 1.6192 |
| 6个月期远期汇率 | 1.6094 | 1.6100 |

买标的资产时，我们称这一方为多头（long position）。另一方同意在同样的日期以同样的价格出售该标的资产，这一方就称为空头（short position）。

外币远期合约在市场非常流行。多数的大银行都同时雇佣即期交易员和远期交易员。即期交易员一般交易立即交割的外币，远期交易员交易未来交割的外币。表 1.1 显示的是 2003 年 6 月 3 日某个国际大银行挂出的英镑兑美元汇率报价。其中标价方法用每英镑所折合的美元数量来表示。表中第 1 行报价表示该银行在即期市场（合约会即时交割）上愿意按每英镑 1.6281 美元的汇率买入英镑，并愿意按每英镑 1.6285 美元的汇率卖出英镑。第 2、3、4 行分别表示该银行愿意按每英镑 1.6248、1.6187、1.6094 美元的汇率买入 1、3、6 个月期的英镑，并愿意分别按每英镑 1.6253、1.6192、1.6100 美元的汇率卖出 1、3、6 个月期的英镑。

远期合约可以用来对冲汇率风险。假定 2003 年 6 月 3 日，一家美国公司的财务主管得知公司将在 6 个月后（即 2003 年 12 月 3 日）支付 100 万英镑，他想规避英镑汇率变动带来的风险。利用表 1.1 中的报价，该财务主管可以按 1.6100 的汇率买入 6 个月期 100 万远期英镑，这样该公司就持有英镑远期合约的多头。公司同意在 2003 年 12 月 3 日，将以 161 万美元从银行买入 100 万英镑。这样，该银行就持有英镑远期合约的空头。银行同意在 2003 年 12 月 3 日，将以 161 万美元的价格卖出 100 万英镑。买方和卖方都许下了具有法律约束力的承诺。

## 远期合约的损益

现在，我们考虑以上描述的交易中公司的头寸状态。交易结果将会怎样呢？这个远期合约使得该公司有义务用 161 万美元购买 100 万英镑。如果在 6 月末市场即期汇率上升到每英镑 \$1.7000，该公司的这份远期合约将获利 9 万美元 ( $=\$1\ 700\ 000 - \$1\ 610\ 000$ )，因为公司这时可以用 1.6100 的汇率而不是 1.7000 的汇率购买 100 万英镑。类似地，如果在 6 月末市场即期汇率下降到每英镑 1.5000 美元，该公司的这份远期合约将损失 11 万美元，因为该公司履行远期合约购买这些英镑需要比市场价格多支付 11 万美元。

通常，一单位资产远期合约多头的损益（也称收益、回报等）是：

$$S_T - K$$

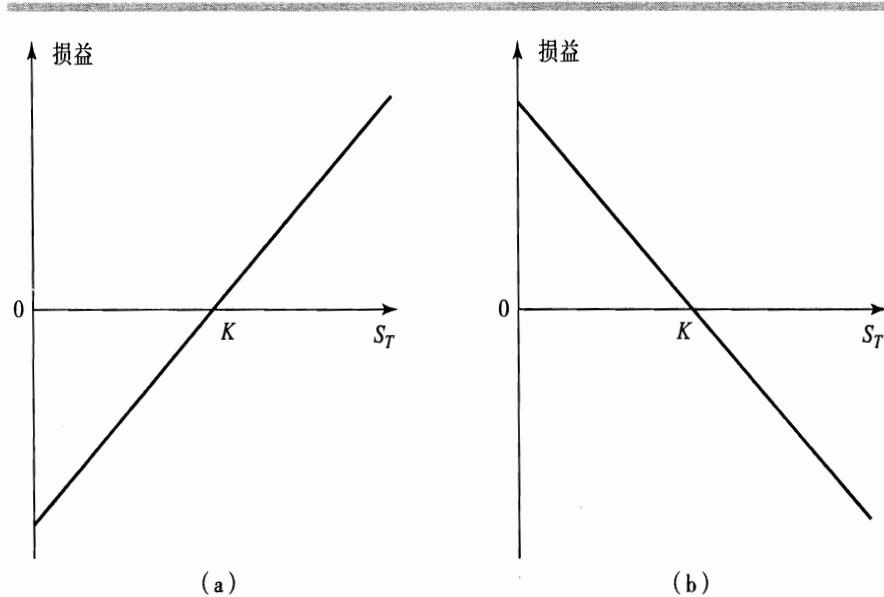


图 1.2 远期合约的损益：(a) 多头；(b) 空头

这里  $K$  是交割价格，而  $S_T$  是合约到期时资产的即期价格。这是因为合约的持有者有义务用价格  $K$  购买价值为  $S_T$  的资产。类似地，一单位资产远期合约空头的损益是：

$$K - S_T$$

因此这些损益可能是正的，也可能是负的。它们表示在图 1.2 中。由于签署远期合约时并没有成本，合约的损益也就是交易者从该合约中所得总盈利或总亏损。

## 远期价格和即期价格

在第5章我们将更详细讨论即期价格和远期价格之间的关系。这里我们先简要看看为什么两者是相联系的。考虑一个不付红利的价值为\$60的一支股票。假定我们可以按1年5%的利息借入或贷出资金。那么，该股票的一年期远期价格应为多少呢？

答案是\$60 加上 1 年 5% 利息的总和，即为\$63。如果远期价格为\$67，大于 \$63，则我们可以借\$60 并买入一股该种股票，然后再卖出价格\$67 的一年远期股票。1 年后，付清借款本息之后，我们的净收入为\$4。若远期价格为\$58，小于 \$63，投资组合中拥有该股票的投资者现在会以\$60 卖出该股票，并签订远期合约，1 年之后以\$58 重新买入该股票。现在卖出股票之后得到的本金可以以 5% 利息贷出投资，1 年后利息收入为\$3。相比把该股票整年保留在投资组合中，该投资者多赚了\$5。

## 1.4 期货合约

像远期合约一样，期货合约（futures contract）是双方之间签定的一个在确定的将来时间按确定的价格购买或出售某项资产的协议。与远期合约不同，期货合约通常在交易所内交易。为了使交易能够进行，交易所详细规定了期货合约的标准化条款。由于签署期货合约的双方不一定相识，交易所提供某种机制保证该期货合约的双方都不会违约。

最大的期货交易所是芝加哥商品交易所和芝加哥商业交易所。在这些交易所和其他交易所中，期货合约的标的资产的范围非常广泛，包括许多商品和金融资产。其中商品包括猪排、活牛、糖、羊毛、木材、铜、铝、黄金和锡等。金融资产包括股票指数、外汇、长期国债。一般来说，在金融类报纸上，都有期货的价格行情。假定在9月1日，12月份的黄金期货的报价为\$300。这一价格不包括佣金，在该价格上交易者可以购买或出售12月份交割的黄金。该价格是由场内交易决定的，其决定方式与其他价格决定方式一样（即由供求关系决定的）。如果愿意持有期货合约多头的投资者多于愿意持有期货合约空头的投资者，价格就会上升。如果情况相反，价格就会下降。

在第2章中，我们将更详细介绍一些细节，如保证金要求、每日结算程序、交割程序、买卖价差和交易清算所的作用。

## 1.5 期权

在交易所场内和交易所场外都可以进行期权合约的交易。期权有两种基本类型。看涨期权（call option）的持有者具有在某一确定时间以某一确定价格购买标的资产的权利。看跌期权（put option）的持有者具有在某一确定时间以某一确定价格出售标的资产的权利。期权合约中的这个价格被称为执行价格（exercise price）或行权价格（strike price）。期权合约中的日期为到期日、执行日或期满日（expiration date, maturity）。美式期权（American option）可在期权有效期内任何时间行使权利。欧式期权（European option）只能在到期日执行。<sup>3</sup> 在交易所中交易的大多数期权为美式期权。在交易所内股票期权市场中，一般来说，一个合约的规模为买卖100股。欧式期权通常比美式期权更容易分析，并且美式期权的一些性质总是可由欧式期权的性质推导出来。

需要强调的是，期权赋予其持有者做某件事情的权利。持有者不一定必须行使该权利。这一特点使期权不同于远期和期货，在远期和期货合约中持有者有义务购买或出售该标的资产。请注意，投资者签署远期或期货合约时的成本为零，但投资者购买一张期权合约必须支付期权费。

---

<sup>3</sup> 注意，美式和欧式这两个词并不表示期权或交易所的地理位置。在北美的交易所有些交易的期权是欧式的。

表 1.2 2003 年 5 月 29 日, Intel 公司股票的几个期权价格。股价为 \$20.83

| 执行价格(美元) | 看涨期权 |      |      | 看跌期权 |      |      |
|----------|------|------|------|------|------|------|
|          | 6月   | 7月   | 10月  | 6月   | 7月   | 10月  |
| 20.00    | 1.25 | 1.60 | 2.40 | 0.45 | 0.85 | 1.50 |
| 22.50    | 0.20 | 0.45 | 1.15 | 1.85 | 2.20 | 2.85 |

全世界最大的股票期权交易所是芝加哥期权交易所。表 1.2 中给出了 2003 年 5 月 29 日, Intel 公司股票的几个美式期权的收盘价。期权执行价格分别为 \$20 和 \$22.50, 到期时间分别在 2003 年 6 月、2003 年 7 月和 2003 年 10 月。6 月期权的到期日为 2003 年 6 月 21 日, 7 月期权的到期日为 2003 年 7 月 19 日, 10 月期权的到期日为 2003 年 10 月 18 日。2003 年 5 月 29 日交易收盘时, Intel 公司股票价格为 \$20.83。

假定一个投资者指示经纪人购买一个执行价格为 \$22.50 的 Intel 公司股票的 10 月看涨期权。接着, 经纪人会把投资者的要求转达给芝加哥期权交易所中的某个交易员。之后, 该交易员会找另外一个想卖出一个执行价格为 \$22.50 的 Intel 公司股票 10 月看涨期权的交易员, 然后双方就价格达成协议。假设达成这个价格为 \$1.15 (跟表 1.2 中的数据一样), 这就是买入一份股票期权的价格。在美国, 一个股票期权的合约规模为买或卖 100 份。因此, 投资者必须通过经纪人给交易所支付 \$115 来进行交易, 交易所会把这笔付款转达给交易的另一方。

在上述例子中, 投资者支付了 \$115, 得到了能按每股 \$22.50 的价格买入 100 股 Intel 公司股票的权利。交易的另一方收到 \$115, 承诺当投资者决定执行该期权合约之时, 按每股 \$22.50 的价格出售 100 股 Intel 公司股票给投资者。如果直到 2003 年 10 月 18 日, Intel 股票价格一直没有超过 \$22.50, 该投资者将选择不执行期权合约, 他将白白损失 \$115。若 Intel 股票表现很好, 股票价格上涨到 \$30 时, 期权合约得到执行, 那么投资者就能以每股 \$22.50 的价格买入市价为每股 \$30 的 100 股 Intel 股票。此时, 该投资者会获利 \$750, 扣除最初的购买期权的成本, 投资者的净收益为 \$635。

投资者也可以选择购买一个 7 月到期执行价格为 \$20 的看跌期权。从表 1.2 中的数据我们知道投资者需要投入  $100 \times \$0.85$ , 也就是 \$85。投资者投入了 \$85, 得到 2003 年 7 月 19 日之前能以每股 \$20 卖出 100 股 Intel 股票的权利。如果 Intel 股票价格一直在 \$20 以上, 该投资者将选择不执行期权合约, 他将白白损失 \$85。但是, 如果股票价格为 \$15 时, 投资者将执行期权合约, 那么他就能以每股 \$15 从股票市场买入 100 股股票并行使期权以每股 \$20 全部卖出, 获利 \$500。扣除最初的购买期权的成本, 投资者的净收益为 \$415。

芝加哥期权交易所中交易的是美式期权。为了把问题简化, 在这里假定这些期权是欧式期权, 即只能在到期日那天执行期权合约。那么, 投资者的收益与最终股价之间的关系如图 1.3 中所示。

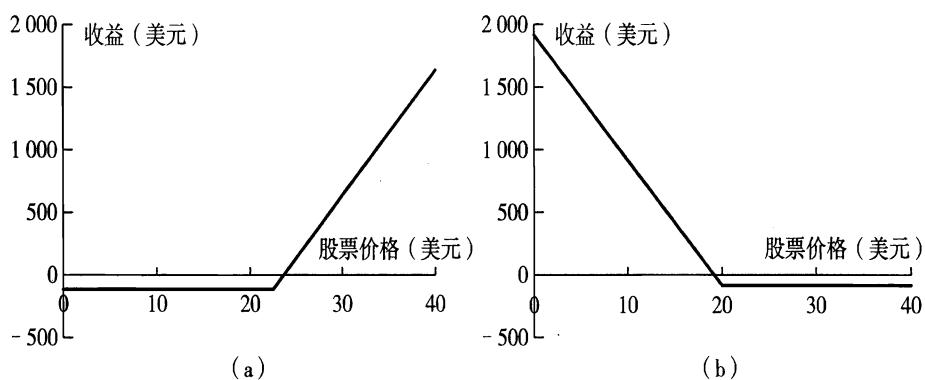


图 1.3 (a) 购买执行价格为每股\$22.50，包含 100 股 Intel 公司股票的一份 10 月看涨期权合约的净收益；(b) 购买执行价格为每股\$20.00，包含 100 股 Intel 公司股票的一份 7 月看跌期权合约时候的净收益

后几章中将描述有关期权市场运作的更多细节，以及交易员如何确定期权价格（如表 1.2 中的价格）。现在，我们知道期权市场有四类市场参与者。

1. 看涨期权买者
2. 看涨期权卖者
3. 看跌期权买者
4. 看跌期权卖者

这里，买者是持有期权多头的交易者，卖者是持有期权空头的投资者。出售期权的一方又称为期权承约方（writing the option）。

## 1.6 交易者的类型

衍生证券市场运行非常成功的主要原因是：市场流动性高，而且能吸引许多不同类型的交易者。当一个投资者想充当合约的一方时，通常很容易就能找到合约的另一方。

衍生证券的交易者可以划分为三大类：套期保值者、投机者和套利者。套期保值者的目的在于降低未来市场价格变动所带来的风险。投机者的目的是赌某个市场变量的变动方向。套利者持有两个或者几个金融工具互相抵消的头寸，以锁定一个收益。从商业剪影 1.1 的描述中可以知道，对冲基金（hedge fund）已经成为衍生证券的重要使用者。对冲基金在市场的角色，上述三种都有可能。

下面几个小节中，我们将更详细地讲述这三类交易者在市场中的行为。

### 商业剪影 1.1 对冲基金

对冲基金逐渐成为衍生证券的主要使用者，它们利用衍生证券进行套期保值、投机以及套利。和共同基金一样，对冲基金为它的客户们进行投资。但是与共同基金不同的一点是，美国联邦证券法规定对冲基金不需注册。这是因为对冲基金的主要客户是对财务精通的个人，对冲基金不公开发行他们的证券。共同基金受到法规的严格监管，需要对基金中的股份进行公平定价，这些股份随时可赎回，需要披露基金的投资策略，限制使用杠杆，不能持有空头等。相对而言，对冲基金不受此类的监管，因此有很大的自由度去开发复杂的、创新的以及特有专属的投资策略。对冲基金经理收取的费用取决于基金的业绩表现，费用通常相当高，一般是投资额的 1%-2% 再加上利润的 20%。2004 年，世界范围内的对冲基金的总资产增长到 1 万亿美元，客户遍及整个世界。“基金的基金”通过投资建立其他对冲基金的证券组合。

对冲基金经理经常以衍生证券来建立投机或套利头寸作为其投资策略。一旦确定了投资策略，对冲基金经理接下来应该：

1. 评估基金的风险暴露。
2. 决定哪些风险是可以接受的，哪些风险是需要对冲的。
3. 对于不可接受的风险，设计套期保值策略（通常利用衍生证券）。

这里给出对冲基金使用的一些术语以及相关的交易策略：

**可转换套利 (convertible arbitrage)**: 持有一个可转换债券的多头以及一个需要积极管理的标的股票的空头。

**不幸证券 (distressed security)**: 买入一个破产中的或临近破产的公司发行的证券。

**新兴市场 (emerging market)**: 投资于发展中国家或新兴市场国家的公司的债券和股票，也投资于这些国家的政府债券。

**增长型基金 (growth fund)**: 投资于增长型股票，通过卖出期权进行套期保值。

**宏观或全球基金 (macro or global)**: 利用衍生证券，针对利率或汇率的变化进行投机。

**市场中性 (market neutral)**: 购买被低估的证券，同时，出售被高估的证券，市场无论向哪个方向波动，保证总的风险暴露为零。

## 1.7 套期保值者

在这一小节，我们要讲述套期保值者 (hedger) 是如何通过远期合约和期权来减少他们所面临的风险。

### 利用远期合约进行套期保值的例子

假定 2003 年 6 月 3 日，美国的 ImportCo 公司从英国的供应商处购买了商品，

将在 2003 年 9 月 3 日支付给英国的供应商 1 000 万英镑。一家金融机构报出的英镑兑美元汇率如表 1.1 所示。为了规避外汇汇率变动风险，该公司可以从这家金融机构购买 3 个月期的价格为 1.6192 的英镑远期合约进行套期保值。最后结果是锁定了公司支付给英国出口商的成本为 \$16 192 000。

考虑另外一家向英国出口商品的美国 ExportCo 公司，2003 年 6 月 3 日，公司得知在 3 个月后将收到 3 000 万英镑。为了规避外汇汇率变动风险，该公司可以出售 3 个月期的价格为 1.6187 的英镑远期合约进行套期保值。最后结果是锁定了公司收到英镑的美元总收入为 \$48 561 000。

需要注意的是，在某些情况下，公司选择不对冲策略的效果可能比选择对冲策略的效果更好。当然，在另一些情况下，公司选择不对冲策略的效果可能比选择对冲策略的效果更糟。例如，在 ImportCo 公司的例子中，如果在 9 月 3 日英镑汇率跌到 \$1.5000，而公司没有进行对冲操作，公司支付 1 000 万英镑的美元成本为 1 500 万美元，这就少于公司进行套期保值之后需要支付的 \$16 192 000。另外一种情况是，如果在 9 月 3 日英镑汇率升到 \$1.7000，公司支付 1 000 万英镑的美元成本相当于 1 700 万美元，那么该公司进行套期保值就是值得的。对于 ExportCo 公司，如果没有对冲操作，则情况是相反的。如果到了 9 月，英镑汇率小于 \$1.6187，公司会期望当初要是套期保值就好了；而如果到了 9 月，英镑汇率大于 \$1.6187，公司会庆幸当初没有做套期保值。

这些例子说明了套期保值的一个重要性质。套期保值的目的是使支付的成本或收取的收入最终结果更加确定。然而，无法保证实施套期保值的结果就一定比没有实施套期保值的结果更好。

### 利用期权合约进行套期保值的例子

期权也可以被用于套期保值。在 2003 年 5 月，一个投资者手中持有 1 000 股微软股票。当时股票市价为每股 \$28。投资者预期未来 2 个月内股票价格将下降，他想避免可能产生的损失。那么，该投资者可以在芝加哥期权交易所购买 10 份 7 月份到期的微软股票看跌期权合约，期权执行价格为 \$27.50。这将给投资者按照每股 \$27.50 的价格出售 1 000 股微软股票的权利。若期权价格为每股 \$1，那么每个期权合约的成本为  $100 \times \$1 = \$100$ ，为了执行这个套期保值策略，投资者需要花费  $10 \times \$100 = \$1 000$ 。

在这个策略里，初始成本是 \$1 000，得到的保障是期权到期之前能以每股 \$27.50 的价格卖出股票。若微软股票市价降到 \$27.50 以下，投资者将执行看跌期权合约，总共获得 \$27 500。减去期初购买期权的成本，那么投资者能得到 \$26 500。如果微软股票市价总是在 \$27.50 以上，投资者将不执行看跌期权合约，到期日过后看跌期权合约失效。而在这种情况下，投资者持有的总价值总是超过 \$27 500（如果减去期初购买期权的成本，则是超过 \$26 500）。未来 2 个月中，投资组合价值（减去期初购买期权成本之后）与微软股价之间的关系如图 1.4 所示。虚线表示未实行套期保值策略时候的投资组合价值。

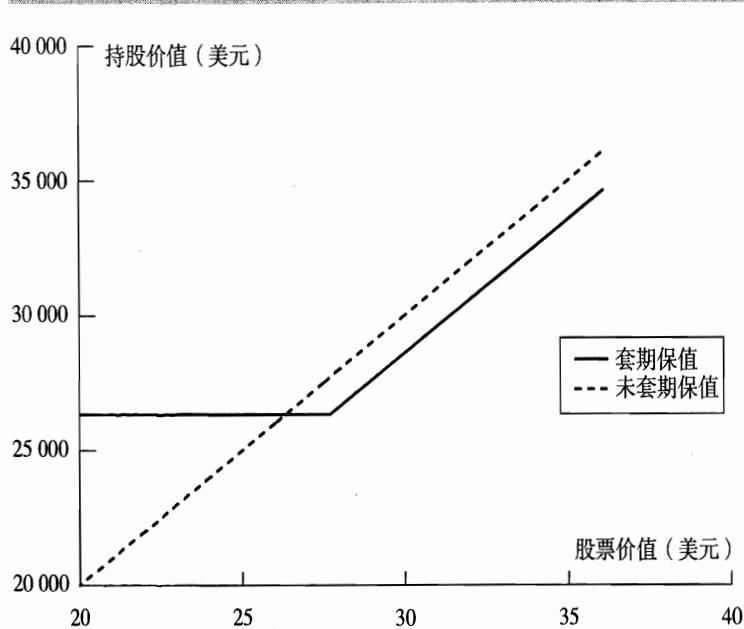


图 1.4 2 个月后，实施和不实施套期保值策略时，持有的微软公司股票的价值

## 比 较

利用远期合约或者期权合约进行套期保值策略，两者之间有一个很基本的区别。远期合约被设计为通过锁定套期保值者将支付或接受的标的资产的价格，从而达到规避风险的目的。而期权合约更像是一个保险，当未来的价格向不利的方向变动时，投资者可以保护自己；而当未来的价格向有利的方向变动时，投资者也可以从中得到收益。但是和远期合约相比，期权合约有一个初始费用。

## 1.8 投机者

现在我们考虑投机者 (speculator) 是如何利用远期市场和期权市场的。套期保值者是希望减少某项资产价格不利变动的风险，而投机者则希望在市场中持有某个头寸。他们或者打赌资产价格会上升，或者打赌资产价格会下降。

### 利用期货合约进行投机的例子

2 月份，一个美国投机者认为在未来 2 个月内英镑兑美元会上涨，他决定的投机规模为 25 万英镑。那么，一种做法是，该投资者可以在即期市场购买 25 万英镑，并期待过了一段时间后英镑可以以更高的价格卖出（购买后的英镑将存于支付利息的账户）。另一种办法是，通过芝加哥商品交易所持有 4 份 4 月份到期的英镑期货合约的多头来进行投机（每份期货合约的规模为 £62 500）。假定当前英镑

兑美元即期汇率为\$1.6470，4月份到期的英镑期货的汇率为\$1.6410，表1.3总结了以上这两种情况下，两种投机方法的结果。若到了4月份，英镑汇率上升到\$1.7000，那么利用期货市场的投机方法，投机者可以实现利润 $(1.7000-1.6410) \times 250\,000 = \$14\,750$ 。而利用即期市场的投机方法，投资者以\$1.6470的汇率购买了25万英镑，到4月份可以以\$1.7000的汇率卖出，这样实现利润 $(1.7000-1.6470) \times 250\,000 = \$13\,250$ 。若到了4月份英镑汇率降到\$1.6000，那么利用期货合约的投机方法，会给投资者带来 $(1.6410-1.6000) \times 250\,000 = \$10\,250$ 的损失。而利用即期市场的投机方法会给投机者带来 $(1.6470-1.6000) \times 250\,000 = \$11\,750$ 的损失。两种方法能带来的收益和损失略微不同。但在里，计算中没有考虑到支付或者收到的利息。第5章中将会看到，当储存英镑所产生的利息和初始投资美元所支付的利息被算进来之后，两种方法所带来的收益和损失将是一样的。

那么这两种方法有什么区别呢？第一种利用即期市场的方法需要初始投资\$411 750，而第二种利用期货合约的方法只需要较少的资金，可能是2万美元，也就是投机者需要在保证金账户上存入的金额（第2章中将讨论保证金账户）。利用期货市场，投机者获得杠杆效果。投资者只需较少的初始投入，就能持有较大的投机头寸。

### 利用期权进行投机的例子

也可以利用期权进行投机。假定10月份有一投机者认为亚马逊股票价格将在未来2个月内上升。假定当前股价为\$20，2个月期、执行价格为\$22.50的看涨期权价格为\$1。表1.4说明了投机者打算投入\$2 000时的两种可行方法。

表1.3 利用即期和期货合约进行投机。一份期货合约的规模为£62 500

|                      | 2月份交易       |             |
|----------------------|-------------|-------------|
|                      | 买入250 000   | 买入4月份期货合约   |
|                      | 即期价格为1.6470 | 期货价格为1.6410 |
| 投资                   | \$411 750   | \$20 000    |
| 如果4月份即期价格为1.7000，则收益 | \$13 250    | \$14 750    |
| 如果4月份即期价格为1.6000，则收益 | -\$11 750   | -\$10 250   |

表1.4 10月份投入\$2 000，对亚马逊股票进行投机的两种策略之间收益（损失）比较

| 投资者的策略       | 12月份的股价   |         |
|--------------|-----------|---------|
|              | \$15      | \$27    |
| 买入100股       | (\$500)   | \$700   |
| 买入2 000份看涨期权 | (\$2 000) | \$7 000 |

第一种方法是购买 100 股该种股票；第二种方法是购买 2 000 份看涨期权（也就是 20 个看涨期权合约）。若投资者的预期正确，到了 12 月份亚马逊股价涨到每股 \$27，那么购买股票的第一种方法将带来的收益为：

$$100 \times (\$27 - \$20) = \$700$$

然而，第二种方法则能带来更多的收益。一份亚马逊股票的看涨期权，执行价格为 \$22.50，能带来 \$4.50 (\$27 - \$22.50) 的收益，因为可以按 \$22.50 价格购买价值 \$27 的股票。第二种方法中，2 000 份期权的总收益为：

$$2000 \times \$4.50 = \$9000$$

减去购买期权的初始成本，净收益为：

$$\$9000 - \$2000 = \$7000$$

可见，购买期权策略得到的收益是购买股票策略得到的收益的 10 倍。

但期权策略的潜在损失也是巨大的。设想到了 12 月份股价跌到 \$15，那么第一种购买股票的方法带来的损失是：

$$100 \times (\$20 - \$15) = \$500$$

因为期权方法中此时看涨期权合约不会被执行，投资者将损失 \$2 000，也就是购买期权的初始成本。图 1.5 说明了 2 个月后，上述两种方法的收益或者损失与亚马逊股价之间的关系。

和远期合约一样，当运用期权投机时，它也能提供额外的杠杆。在一个投资策略中，运用期权可以使结果扩大。好的情况下，收益非常高；而在坏的情况下，损失也非常大！

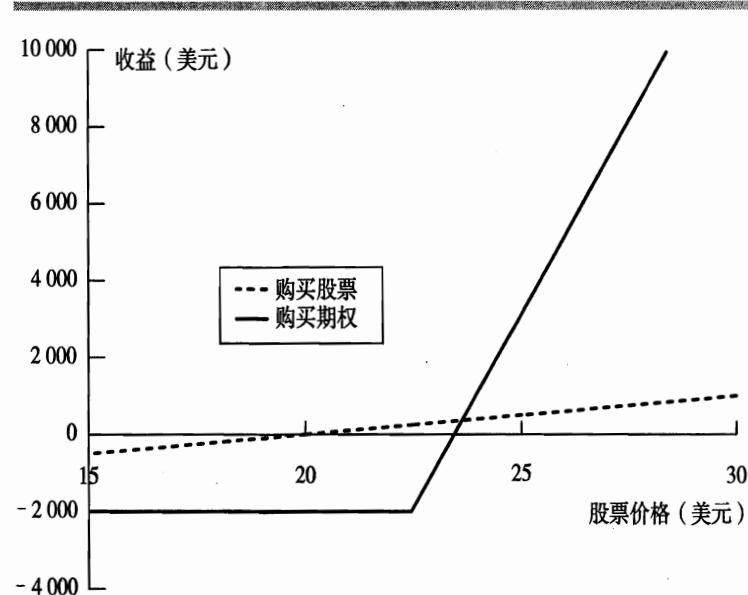


图 1.5 两种投机策略的收益或损失与亚马逊股价之间的关系

## 比 较

远期合约和期权合约都可以给投机者提供一种杠杆。但是两者之间有重大区别。当投机者使用远期合约的时候，潜在的收益和损失都是巨大的。而当投机者使用期权合约的时候，潜在损失只局限于购买期权的初始成本。

### 1.9 套利者

套利者 (arbitrageur) 是期货、远期和期权市场中第三类重要的参与者。套利包括瞬态进入两个或多个市场的交易，以锁定一个无风险的收益。在后面的章节中，我们会论述当某一资产的期货价格偏离了现货价格隐含的某个值时，<sup>4</sup>就可能会存在套利机会。我们也将讨论如何将套利理论运用于期权的定价中。在这一部分中，我们用一个非常简单的例子来说明套利的概念。

考虑在纽约股票交易所和伦敦股票交易所上同时交易的某种股票。假定在纽约市场上股票的价格为\$172，而此时在伦敦市场上该股票的价格为£100，当时的汇率为 1 英镑\$1.7500。套利者可在纽约市场上购买 100 股该种股票的同时在伦敦市场上将它们卖出，在不考虑交易成本时，就可获得无风险收益，收益额为：

$$100 \times (\$1.75 \times 100 - \$172)$$

即\$300。交易成本可能会减少小投资者的收益。但是，大的投资公司在股票市场和外汇市场上的交易成本都很低。它们会发现以上套利机会极具吸引力，并会尽可能地利用这种机会。

以上描述的套利机会不可能长期存在。随着套利者在纽约市场买入股票，供求关系将会使股票的美元价格上升。与此类似，随着他们在伦敦市场上出售股票，股票的英镑价格就会下降。很快就会使这两个价格在当前的汇率情况下达到均衡。事实上，急于获利的套利者的存在使得股票的英镑价格和美元价格初始就不可能存在如此严重的不平衡。将这一例子推广，我们可以说，正是由于许多套利者的存在，使得实际上大多数金融市场的报价中仅存在极少的套利机会。在本书中，我们关于期货价格、远期价格和期权合约价值的大多数结论将建立在假设不存在套利机会的基础上。

### 1.10 危险人物

衍生产品是一个多功能的金融工具。我们已经看到它可以被用来套期保值、

---

<sup>4</sup> 英文原文是 arbitrage is possible when the futures price of an asset gets out of line with its spot price，并不是期货价格偏离了现货价格就可以套利，line with its spot price 表示现货价格隐含的某个值，其实应该是现货价格表示的理论期货价格。后面章节还有类似表达——译者注

### 商业剪影 1.2 巴林银行的灾难

衍生证券是十分多功能的金融工具。它们可以被用来套期保值、投机或者套利。一家交易衍生证券的公司所面临的一种风险是，被委任套期保值或套利任务的雇员可能会成为一个投机者。

1995 年，巴林银行新加坡办事处的交易员尼克·里森被委任观察新加坡交易所和大阪交易所的日经 225 期货价格之间的套利机会。过了一段时间，里森从套利者变成了投机者，而巴林伦敦总行的所有人都不知道里森已经改变了他使用衍生证券的方式。随后，他给公司开始带来损失，但他可以隐瞒这些损失。接着他抛出赌注，持有更大的投机头寸，目的是想补偿他之前带来的损失。结果是发生了更大的损失。

等大家发现他的危险举动之后，里森带来的总损失大约为 10 亿美元。因此，有 200 多年历史的巴林银行就此破产了。巴林银行带给我们的一个教训是，我们需要对交易员们指定明确的风险限额，并且仔细监控交易员的行为，确保这些风险限额得到遵守。

投机或者套利。但衍生产品的功能非常强大反而引发了一些问题。有时，被委任套期保值任务或者套利任务的交易员故意或者不知不觉中成为了投机者，很可能发生惨重的结果。巴林银行交易员尼克·里森的例子很著名（参见商业剪影 1.2）。<sup>5</sup>

为了避免诸如巴林银行所遭遇的问题，金融机构和非金融机构都必须建立内控机制，使得衍生工具按照其原先的目的进行使用。必须提出风险限额，每天必须通过对交易员的监管，确保这些风险限额得到遵守。

## 小 结

近 25 年中，金融市场的一个引人注目的发展就是衍生品市场的快速发展。在许多情况下，套期保值者和投机者都发现交易某项资产的衍生证券比交易资产本身更具吸引力。某些衍生证券在交易所中交易，其他的衍生证券在场外市场中由金融机构、基金经理和公司之间相互交易，或由承销方将它们附加到新发行的证券中。本书的大部分内容是关于衍生证券的定价问题，目的是为所有的衍生证券（不仅仅是期权或期货）的定价提供一个统一的框架。

在本章中，我们初步了解了远期、期货和期权合约。远期或期货合约包括在将来某一特定的时间以某一特定的价格买入或卖出一项资产的义务。有两种类型的期权：看涨期权和看跌期权。看涨期权的持有者有权在某一特定的日期以某一特定的价格购买一项资产。看跌期权的持有者有权在某一特定的日期以某一特定的价格出售一项资产。现在，在许多不同标的资产上都有远期、期货和期权的交易。

衍生证券在资本市场一直有很成功的创新。交易者的主要类型有：套期保值者、投机者和套利者。套期保值者面临着与某项资产价格相关的风险，他们运用衍生证券来减少或消除

<sup>5</sup> 电影《魔鬼营业员》是根据巴林银行的倒闭改编的。

这种风险。投机者则对资产价格的未来变动下了赌注，他们运用衍生证券获得额外的杠杆效应。套利者利用两个不同市场价格的差异，例如，如果他们发现某项资产的期货价格偏离了现货价格隐含的某个值，他们就可通过在这两个市场上持有相反的头寸来锁定盈利。

## 参考读物

- Chancellor, E. *Devil Take the Hindmost—A History of Financial Speculation*. New York: Farra Straus Giroux, 1999.
- Merton, R. C. "Finance Theory and Future Trends: The Shift to Integration," *Risk*, 12, 7 (July 1999): 48–51.
- Miller, M. H. "Financial Innovation: Achievements and Prospects," *Journal of Applied Corporate Finance*, 4 (Winter 1992): 4–11.
- Rawnsley, J. H. *Total Risk: Nick Leeson and the Fall of Barings Bank*. New York: Harper Collins, 1995.
- Zhang, P. G. *Barings Bankruptcy and Financial Derivatives*. Singapore: World Scientific, 1995.

## 问题和习题

- 1.1 请解释远期多头与远期空头的区别。
- 1.2 请详细解释套期保值、投机与套利的区别。
- 1.3 请解释签订购买远期价格为\$50 的远期合同与持有执行价格为\$50 的看涨期权的区别。
- 1.4 请详细解释出售一个看涨期权和购买一个看跌期权的区别。
- 1.5 一位投资者持有远期英镑空头合约，未来以每英镑兑\$1.5000 的价格出售 10 万英镑，得到美元。当合约到期时英镑兑美元汇率为 (a) 1.4900 和 (b) 1.5200 时，这位投资者的收益或者损失为多少？
- 1.6 一位投资者出售了一个棉花期货合约，期货价格为每磅 50 美分，每个合约交割数量为 5 万磅。请问期货合约结束时，当合约到期时棉花价格分别为 (a) 每磅 48.20 美分和 (b) 每磅 51.30 美分时，这位投资者的收益或损失为多少？
- 1.7 假设你出售了一个看跌期权，看跌期权的执行价格为\$40，有效期为 3 个月。股票的当前价格为\$41，一张期权合约包含 100 股股票。你将作何处理？你的收益或损失如何？
- 1.8 场外交易市场和交易所场内市场的区别是什么？场外交易市场中做市商的竞买价和竞卖价分别指什么？
- 1.9 你认为某种股票的价格将要上升。现在该股票价格为\$29，3 个月期的执行价格为\$30 的看涨期权的价格为\$2.90。你有\$5 800 资金可投资。现有两种投资策略：直接购买股票或投资于该股票的期权。请问各自潜在的收益或损失为多少？
- 1.10 假设你拥有 5 000 股每股价值\$25 的股票。如何运用看跌期权来确保你的股票的价值在未来的 4 个月中不会受到股价下跌的影响。
- 1.11 一种股票在首次发行时会为公司提供资金。股票期权是否有同样的作用？请说明。
- 1.12 请解释为什么远期合约既可用来投机又可用来套期保值？
- 1.13 假设一个执行价格为\$50 的 3 月份看涨期权价值为\$2.50，并持有到期。在何种情况下

期权的持有者会有盈利？在何种情况下，期权会被执行？请画图说明该期权的多头方的收益是如何随期权到期日的股价的变化而变化的。

- 1.14 假设一个执行价格为\$60 的 6 月份看跌期权价值为\$4.00，并持有到期。在何种情况下，出售该期权的投资者（即看跌期权的空头方）会有盈利？在何种情况下，该期权会被执行？请画图说明该期权的空头方的收益是如何随期权到期日的股价的变化而变化的。
- 1.15 现在是 5 月，一位投资者出售了一个 9 月份到期的看涨期权，执行价格为\$20。股票价格为\$18，期权价格为\$2。如果期权持有到期，并且到期时的股票价格为\$25，请描述该投资者的现金流状况。
- 1.16 一位投资者出售了一个 12 月份到期的看跌期权，执行价格为\$30，期权价值为\$4。在什么情况下，该投资者会有盈利？
- 1.17 一家公司将在 4 个月后收到一笔外币。选用哪种期权合约，可以进行套期保值？
- 1.18 一家美国公司将在 6 个月后支付 100 万加元。请说明这家公司该怎么用 (a) 远期合约和 (b) 期权合约来进行套期保值。
- 1.19 一位交易员出售了 1 亿日元的远期合约。日元兑美元远期汇率为\$0.0080（即\$0.0080/日元）。当合约到期时日元兑美元汇率为 (a) 0.0074 和 (b) 0.0091 时，该交易员的收益或者损失为多少？
- 1.20 芝加哥交易所提供标的物为长期国债的期货合约。请描述什么样的投资者会使用这种合约。
- 1.21 “期权和期货是零和游戏”。你是怎样理解这句话的？
- 1.22 请描述下述组合的损益：同时签订一项资产的远期多头合约和有同样到期日的基于该项资产的欧式看跌期权的多头，并且在构造该组合时看跌期权的执行价格等于远期价格。
- 1.23 20 世纪 80 年代，银行家信托公司开发了指数化外汇期权票据 (ICONs)。这是一些债券，在到期日该债券持有者收到的金额随某一外汇汇率的变化而变化。银行家信托公司首次为日本长期信用银行发行了 ICONs。该 ICON 指定如果美元兑日元的汇率  $S_T$  在到期日（1995 年）高于 1 美元兑 169 日元，债券的持有者就收到 \$1 000。如果汇率低于 1 美元兑 169 日元，则债券持有者收到的金额将有所减少，减少的金额为：

$$1\,000 - \max[0, 1\,000(169/S_T - 1)]$$

在到期日当汇率低于 1 美元兑 84.5 日元时，债券持有者收入为零。说明 ICON 是可由一种普通股票和两种期权组合而成。

- 1.24 某公司在 2005 年 7 月 1 日签订了一份远期合约，约定在 2006 年 1 月 1 日，购买 1 000 万日元。2005 年 9 月 1 日，又签订了在 2006 年 1 月 1 日出售 1 000 万日元的远期合约。请描述这项策略的损益。
- 1.25 假设英镑兑美元的即期和远期汇率如下：

|         |        |
|---------|--------|
| 即 期     | 1.6080 |
| 90 天远期  | 1.6056 |
| 180 天远期 | 1.6018 |

在下列情况中，投资者会有何获利机会？

- (a) 一个 180 天的欧式看涨期权执行价格为 1 英镑兑 1.5700 美元，期权费 2 美分。
- (b) 一个 90 天的欧式看跌期权执行价格为 1 英镑兑 1.6400 美元，期权费 2 美分。

### 课后练习

- 1.26 黄金的现价为每盎司 \$500。一年后交割的黄金远期价格为每盎司 \$700。一位套利者可以 10% 的年利率借到钱。套利者应当如何操作才能获利？假设储存黄金费用不计，黄金本身也不产生收入。
- 1.27 一只股票的现价为 \$94，执行价格为 \$95 的 3 个月期的欧式看涨期权价格为 \$4.70。一位投资者预计股票价格将要上升，正在犹豫是购买 100 股股票，还是购买 2 000 股的看涨期权（=20 份合约，每份合约为 100 股）。两种策略都需投资 \$9 400。你会给他什么建议？股票价格上升到多少时，购买期权会盈利更大？
- 1.28 2003 年 5 月 29 日，一位投资者持有 100 股 Intel 股票。根据表 1.2，股价为每股 \$20.83，执行价格为 \$20 的 10 月份看跌期权价格为 \$1.50。为了减少股价下跌所带来的风险，该投资者比较两种方案：第一种方案是买入一个执行价格为 \$20 的 10 月份看跌期权合约。第二种方案是通过经纪人，当 Intel 股价下降到 \$20 的时候立即出售 100 股。讨论两种方案的优点和缺点。
- 1.29 标准石油公司发行过这样的债券。债券不支付利息。在债券的到期日，公司承诺除支付面值 \$1 000 之外，另外，以债券到期日的石油价格为基础，再支付投资者一定的金额。这一额外金额等于 170 乘以到期日每桶石油价格超过 \$25（如果超过的话）的差额。但是，所支付的额外金额的上限为 \$2 550（对应每桶 \$40 的油价）。请说明该债券是由一个普通债券、一个执行价格为 \$25 的石油看涨期权多头和一个执行价格为 \$40 的石油看涨期权空头组成的。
- 1.30 假定当前情况如表 1.1 中数据。一位公司财务主管说：“我想在 6 个月后出售 100 万英镑。若汇率小于 1.59，我想按 1.59 的汇率得到美元。若汇率大于 1.63，就按 1.63 的汇率得到美元。若汇率是介于 1.59~1.63 之间，就按这个汇率得到美元。”请问应该利用期权来满足该财务主管的要求？
- 1.31 在正文 1.7 节的例子中，应该怎么利用外汇期权来进行套期保值，使得 (a) ImportCo 确保其支付的汇率水平保持在 1.4600 以下。 (b) ExportCo 确保其收取的汇率水平保持在 1.4200 以上。请使用 DerivaGem 来计算这两种情况下的套期保值成本。假定汇率波动幅度为 12%，美国的利率为 3%，英国的利率为 4.4%。并假设当前的汇率为表 1.1 的报价中竞买价和竞卖价的平均值。
- 1.32 一位交易员买入了一份欧式看涨期权并出售了一份欧式看跌期权。两个期权的标的资产、执行价格和到期日都是完全一样的。请描述该交易员的头寸情况。在什么情况下看涨期权价格等于看跌期权价格？

## 期货市场的机制

在第 1 章中我们介绍了期货合约和远期合约，它们是承诺将来以某个确定价格购买或出售某项资产的协议。期货合约通常在交易所中交易，交易所提供标准化的合约条款。而远期合约条款则是两家金融机构或者金融机构与其客户之间的私人约定。

在本章中，我们将解释期货市场运行细节。我们讨论的内容包括合约的细则、保证金帐户的操作、交易所的组织架构、市场监管、报价方式和期货交易的会计处理方法和税制方案等。我们将对比期货合约和远期合约，并解释两者损益之间的区别。

### 2.1 背 景

第 1 章中我们已经看到期货合约交易在世界各地都非常活跃。在美国，两个最大的期货交易所是芝加哥期货交易所（CBOT，[www.cbot.com](http://www.cbot.com)）和芝加哥商品交易所（CME，[www.cme.com](http://www.cme.com)）。在欧洲，最大的期货交易所是伦敦金融期货期权交易所（[www.liffe.com](http://www.liffe.com)）、欧洲期货交易所（[www.eurexchange.com](http://www.eurexchange.com)）和泛欧交易所（[www.euronext.com](http://www.euronext.com)）。其他几个大型交易所还包括圣保罗的巴西商品期货交易所（[www.bmf.com.br](http://www.bmf.com.br)）、日本东京国际金融期货交易所（[www.tiffe.or.jp](http://www.tiffe.or.jp)）、新加坡国际金融交易所（[www.simex.com.sg](http://www.simex.com.sg)）和澳大利亚悉尼期货交易所（[www.sfe.com.au](http://www.sfe.com.au)）。本书的最后部分收录了更多的交易所信息。

现在，通过在 CBOT 交易玉米期货合约的例子，我们将看到期货合约交易是怎样运行的。3 月 5 日，一位纽约的投资者告诉经纪人，指示他在 CBOT 买入一份同年 7 月份交割的玉米期货合约（5 000 蒲式耳）。经纪人立即将纽约投资者的指令传递给在 CBOT 场内大厅的某个交易员。经纪人要求持有一份玉米合约的多头，因为每个玉米期货合约要求交割 5 000 蒲式耳。在同一时间，另一位在堪萨斯州的投资者指示其经纪人卖出一份同年 7 月份交割的玉米期货合约（5 000 蒲式耳）。经纪人将这个空头指令传达给在 CBOT 场内大厅的某个交易员。这样，两个交易员将会聚到一起，并就 7 月份交割的玉米期货价格达成协议，这样，交易就完成了。

在纽约的投资者要求买入一份玉米期货，他持有一个期货合约多头。而在堪萨斯州的投资者要求卖出一份玉米期货，他持有一个期货合约空头。两个交易员

在场内谈成的价格即为 7 月份玉米期货的当前期货价格。假定当前 7 月份的玉米期货价格为每蒲式耳 170 美分。该价格的决定方式与其他商品的价格决定方式一样，即由供求关系决定。在一个特定的时点上，如果愿意持有 7 月份玉米期货合约空头的投资者多于愿意持有 7 月份玉米期货合约多头的投资者，价格就会下降。接着，新的买者将进入市场，买者数量和卖者数量达到平衡。如果愿意持有 7 月份玉米期货合约多头的投资者多于愿意持有 7 月份玉米期货合约空头的投资者，价格就会上升。接着，新的卖者将进入市场，买者数量和卖者数量达到平衡。

## 平 仓

绝大部分期货合约并不实际交割标的资产。这是因为大部分交易者在合约指定的到期日之前通常都会进行平仓操作。平仓（closing out a position）就是获取一个与初始交易头寸相反的头寸。例如，纽约投资者在 3 月 5 日买入一个 7 月份玉米期货合约，他可在 4 月 20 日通过卖出一个 7 月份玉米期货合约来平仓。而堪萨斯州的投资者在 3 月 5 日卖出一个 7 月份的玉米期货合约，他可在 4 月 20 日通过买入一个 7 月份玉米期货合约来平仓。在每种情况下，投资者的总损益反映了 3 月 5 日和 4 月 20 日之间期货价格的变化。

因为很少实际交割标的资产，有时交易者们都会忘记交割手续是怎么进行的（参见商业剪影 2.1）。尽管如此，在本章节中我们还是会介绍期货合约中的交割手续。正是因为具有最后交割的可能性，才使得期货价格与现货价格联系起来。<sup>1</sup>

## 2.2 期货合约的细则

在本书最后部分当中，列出了大部分主要的期货交易所。当开发一项新的合约时，交易所必须明确指定交易双方之间协议的一些细则。尤其是，交易所必须指定资产类别、合约的规模大小（每一合约将交割的资产的确切数额）、交割的地点以及交割的时间。

有时，也指定多个交割资产的等级和交割地点。一般来说，空头方（同意出售资产的一方）可在交易所指定的几种备选方案中进行选择交割。当空头方准备交割之时，要给交易所提交交割意向通知书。该通知书里写着空头方选择的交割资产等级以及交割地点。

## 资 产

当标的资产是商品时，市场中该商品的质量可能有很大的差别。当指定标的资产时，交易所对允许交割的资产的等级做出规定是非常重要的。纽约棉花交易

---

<sup>1</sup> 如第 1 章所述，现货价格指立即交割价格。

### 商业剪影 2.1 一个期货合约中不曾预料到的交割

这个故事（也许是不真实的）是一家金融机构的高级主管告诉本书作者的。金融机构招进了一个新雇员，他以前没有在金融部门工作的经历。金融机构的一位客户为了套期保值，以通常的方式买入了活牛期货。客户指示最后交易日进行平仓。（芝加哥商品交易所中交易的每份活牛期货合约的规模为 40 000 磅活牛。）金融机构指定这位新雇员管理该客户的帐户。

平仓时刻到来之时，雇员确认该客户持有的是一份合约的多头，所以他指示了交易所的交易员买入（而不是卖出）一份合约。这一错误的指示造成金融机构最后持有了一份活牛合约多头。发现这一错误的时候，该合约的交易已经终止了。金融机构（不是客户）需要对错误负责任。因此，金融机构开始查看活牛期货合约的交割安排细节，这是该机构之前从来没做过的事情。合约条款表明，空头方可以在交割月中将活牛交割到美国的几个不同地区。因为金融机构持有多头，它只能等待空头方向交易所提交交割意向通知书，而交易所再将通知书传达给金融机构。

金融机构最终接受到交易所的通知，在下个星期二，活牛将被送到 2 000 英里之外的一个地点。新雇员被派遣到该地点处理相关事务。结果他发现那一地点每个星期二都有活牛拍卖会。空头方在拍卖会买了活牛并直接把活牛交割给该雇员。不幸的是，直到下一次拍卖会，这些活牛不能重新卖出。雇员面临的问题是在这一周内，如何放置以及喂养活牛。这是该雇员首次在金融部门工作的艰难启程！

所对其橙汁期货合约的商品等级做出了如下规定：

美国 A 级，白利糖度至少 57 度；白利糖度与酸性的比率不得低于 13:1，不得高于 19:1；颜色和气味的得分为 37 分或高于 37 分，19 分则是有缺陷的，最低得分为 94 分。

芝加哥商品交易所在其任意长度木材期货合约中规定：

每一交割单位应包括通常的 2x4s 的木材，其长度在 8~20 英尺之间，等级标志是建筑用材和标准用材等级或更优等级，或 #1 和 #2；但是标准等级或 #2 的数量在任何情况下不得超过 50%。每一交割单位的加工制造地应为加州、爱达荷州、蒙大拿州、内华达州、俄勒冈州、华盛顿州、怀俄明州，或加拿大的阿尔贝塔、英属哥伦比亚，包括产自于和等级标志为阿尔卑斯山冷杉、Englemann pruce、铁杉、黑松和/or spruce pine fir 的木材。

对于某些商品来说，一定等级范围内的商品均可以用来交割，但要根据所选用的等级来调整收取的价款。例如，在 CBOT 的玉米期货合约中，标准等级是“#2 黄”，但根据交易所建立的差别条款，可以选用其他替代物。

期货合约中的金融资产通常定义完善并明确。例如不必指定日元的等级。然而，在 CBOT 交易的中、长期国债期货合约具有一些有意思的特性。在长期国债期货合约中，标的资产是任何到期期限超过 15 年并且在 15 年内不可赎回的美国

长期国债。在中期国债期货合约中，标的资产是在交割日任何到期期限不低于 6.5 年且不超过 10 年的国债。在这两种情况下，交易所根据所交割的国债的期限和利息运用某个公式来调整收取的价款。我们将在第 6 章中讨论这个问题。

## 合约的规模

合约的规模规定了每一合约中交割的资产的数量。对交易所来说，这是一项重要的决策。如果合约的规模过大，许多希望对冲较小风险头寸的投资者或希望持有较小头寸的投机者就不可能利用该交易所进行交易。而另一方面，由于成本与每一个交易的合约密切相关，如果合约规模过小，则交易成本会较高。

显然某一合约的适当规模取决于可能存在的客户。某个农产品期货合约中交割资产的价值可能从 1 万~2 万美元，而一些金融期货的合约规模会高得多。例如，在 CBOT 中交易的长期国债期货，其交割标的资产的面值为 10 万美元。

一些交易所引入了“微型”合约来吸引那些小资本投资者。微型合约的一个例子是 CME 的微型纳斯达克 100 合约。普通 Nasdaq100 指数期货合约的规模是 Nasdaq100 指数的 100 倍，而该微型合约规模只有指数的 20 倍。

## 交割安排

交易所必须指定商品交割的地点。这对商品期货尤为重要，因为商品期货可能存在较大的运输费用。在芝加哥商品交易所的任意长度木材合约中，交割地点的规定如下：

每一单位应分别进行纸包装并装载在平板货车上，轨道运输或以双门货车进行运输，买方不需支付额外的费用。冷杉的标准交割地是加州、爱达荷州、蒙大拿州、内华达州、俄勒冈州、华盛顿州、怀俄明州及英属哥伦比亚。

当指定几个交割地点时，空头方收取的价款有时会根据他选择的交割地点进行调整。例如，在 CBOT 交易的玉米期货合约中，交割的地点可以是芝加哥、伯恩斯港、托莱多或圣路易斯。在托莱多和圣路易斯交割的价款要按在芝加哥期货合约的价格进行调整，每蒲式耳折扣 4 美分。

## 交割月份

期货合约按交割月份来划分。交易所必须指定在交割月份中可以进行交割的确切时期。对于许多期货合约来说，交割时期是整个交割月。

交割月份随期货合约的不同而不同，由交易所根据客户的需要进行选择。例如，CBOT 交易的玉米期货合约的交割月份为 3 月份、5 月份、7 月份、9 月份和 12 月份。在任何给定的时间，交易的合约包括有最近交割月的合约和一系列随后交割月的合约。由交易所指定特定月份合约开始交易的时刻，交易所同时也对给定合约的最后交易日做了规定。最后交易日通常是最晚交割日的前几天。

## 期货报价

期货的报价方式非常方便且容易理解。例如，纽约商品交易所的原油期货价格是以每桶原油的美元数来进行报价的，取两位小数（近似到美分）。CBOT 的长期国债期货和中期国债期货价格是以美元和  $1/32$  美元的倍数来进行报价的。在交易中可以允许的最小价格变动与标价方式保持一致。即原油期货的最小价格变动为 \$0.01（或每桶 1 美分），长期和中期国债期货的最小价格变动为  $1/32$  美元。

## 每日价格变动的限制和头寸限额

对大多数合约来说，交易所规定其每日价格变动的上下限。如果价格下降的金额等于每日价格下限，则称该合约达到跌停板（limit down）。如果上升的金额等于每日价格上限，则称该合约达到涨停板（limit up）。涨跌停板变动（a limit move）是指在任何方向上的价格波动等于每日价格变动上下限的变动。通常，价格一旦达到当天的涨停板或跌停板，该合约当天就停止交易，但是在某些情况下，交易所有权进行干涉并改变每日价格变动的上下限额。

制定每日价格变动限额的目的是阻止由于过度的投机而造成价格的巨幅变化。然而，当标的商品的价格迅速上升或迅速下降时，这些限制将成为交易的人为阻碍。在总体上，价格上下限是否对期货市场有利，仍然是一个有争议的问题。

头寸限额（position limit）是指一个投机者最多可以持有的合约数量。头寸限额的目的是防止投机者对市场波动施加不正当的影响。

## 2.3 期货价格收敛于现货价格

随着期货合约的交割日期的临近，期货的价格收敛于标的资产的现货价格。当到达交割日时，期货的价格等于或非常接近于现货的价格。

为了说明原因，首先假定在交割日，期货的价格高于现货的价格。这就存在一个明显的套利机会：

1. 卖空期货合约
2. 买入资产
3. 进行交割

这必定会盈利，该盈利额等于期货价格高于现货价格的那部分。一旦交易者发现这一套利机会，期货的价格就会下降。其次，假定在交割期间，期货的价格低于现货的价格。打算获得该标的资产的公司将会发现，购买期货合约然后等待空头方交割资产对公司更为有利。一旦公司进行如此操作，期货的价格就会上升。

结果是，在交割日，期货的价格非常接近于现货的价格。图 2.1 说明了期货的价格收敛于现货的价格。图 2.1 (a) 中，在交割日之前，期货价格高于现货价格。图 2.1 (b) 中，在交割日之前，期货价格低于现货价格。在第 5 章，我们将讨论

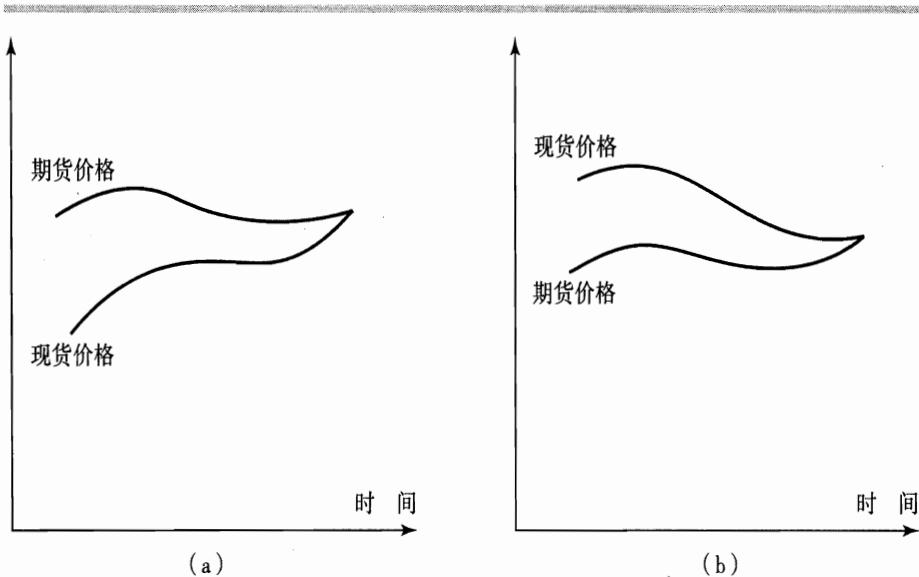


图 2.1 随交割日期临近，期货价格与现货价格之间的关系：(a) 期货价格高于现货价格；  
(b) 期货价格低于现货价格

在什么情况下能分别观察到这两种期货价格收敛于现货价格的方式。

## 2.4 每日结算与保证金的操作

如果两个投资者相互间直接接触并同意在将来某时刻按某一特定的价格交易一项资产，这就明显地存在着风险。一方投资者可能会后悔该项交易，极力想毁约。另一方面，该投资者可能没有财力来保证该项协议的实施。交易所的一个核心作用就是组织交易以便最大程度上减少合约违约的情况。这就是保证金的由来。

### 保证金运作

为了说明保证金是如何运作的，我们来考虑一个投资者，他或她于 6 月 5 日星期四与其经纪人联系，打算购买两张纽约商品交易所 12 月份的黄金期货合约。我们假定当前的期货价格为每盎司黄金 \$400。由于合约的规模为 100 盎司，所以投资者约定以这一价格购买总额为 200 盎司的黄金。经纪人要求投资者将部分款项存在保证金账户中。投资者在最初开仓交易时必须存入的资金数量被称为初始保证金 (initial margin)。我们假定每一合约的初始保证金为 \$2 000，即该投资者初始保证金总额为 \$4 000。在每天交易结束时，保证金账户要进行调整，以反映该投资者的盈利或损失。这就是所谓的账户的盯市 (marking to market) 操作。

例如，假定在 6 月 5 日交易结束时，黄金期货价格从 \$400 跌到 \$397。投资者损失了 \$600 ( $200 \times \$3$ )。这是由于该投资者约定要以 \$400 的价格购买 200 盎司的 12 月份黄金，现在仅按 \$397 的价格出售。因此保证金账户的余额要减少 \$600，即

减少到\$3 400。与此类似，如果12月份黄金期货的价格在第一个交易日结束时升到\$403，保证金账户的余额也增加\$600，即增加到\$4 600。一笔交易是在该交易发生日结束时首次进行盯市结算的。随后，在每个交易日结束时，都要进行盯市结算。

注意，盯市制不仅仅是经纪人和其客户之间的协议。当期货价格下降后损失\$600时，期货多头投资者的保证金账户减少了\$600，该投资者的经纪人必须向交易所支付\$600，交易所将这笔资金转交给期货空头投资者的经纪人。与此类似，当期货价格上升时，空头方的经纪人将资金支付给交易所，交易所再将它转交给多头方的经纪人。在后面，我们将详细论述保证金账户的操作机制。

投资者有权提走保证金账户中超过初始保证金的那部分资金。为了确保保证金账户的资金余额在任何情况下都不会为负值，设置了维持保证金，维持保证金数额通常低于初始保证金数额。如果保证金账户的余额低于维持保证金，投资者就会收到追加保证金通知，要求在下一个交易日将保证金账户内资金补足到初始保证金的水平。我们将这一追加的资金称作变动保证金。如果投资者不能提供变动保证金，经纪人将出售该合约来平仓。在前例中，经纪人将出售投资者持有的交割月份为12月份的200盎司黄金期货来结清现有的合约。

表2.1说明了如果随后期货价格为表中序列所示时，上例中的投资者的保证金账户的操作。为了便于说明，我们假定每张合约的维持保证金为\$1 500，即总额

表2.1 2张黄金期货合约多头的保证金的操作。初始保证金为每张合约\$2 000，即总额为\$4 000；维持保证金为每张合约\$1 500，即总额为\$3 000。合约于6月5日星期一以\$400的价格开仓，并于6月26日按\$392.30的价格平仓。第2列的数字除了第一个和最后一个外，为交易当天期货的收盘价

| 日期    | 期货价格<br>(\$) | 每日盈利(亏损)<br>(\$) | 累计盈利(亏损)<br>(\$) | 保证金帐户余额<br>(\$) | 追加保证金通知<br>(\$) |
|-------|--------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
|       | 400.00       |                  |                  | 4 000           |                 |
| 6月5日  | 397.00       | (600)            | (600)            | 3 400           |                 |
| 6月6日  | 396.10       | (180)            | (780)            | 3 220           |                 |
| 6月9日  | 398.20       | 420              | (360)            | 3 640           |                 |
| 6月10日 | 397.10       | (220)            | (580)            | 3 420           |                 |
| 6月11日 | 396.70       | (80)             | (660)            | 3 340           |                 |
| 6月12日 | 395.40       | (260)            | (920)            | 3 080           |                 |
| 6月13日 | 393.30       | (420)            | (1 340)          | 2 660           | 1 340           |
| 6月16日 | 393.60       | 60               | (1 280)          | 4 060           |                 |
| 6月17日 | 391.80       | (360)            | (1 640)          | 3 700           |                 |
| 6月18日 | 392.70       | 180              | (1 460)          | 3 880           |                 |
| 6月19日 | 387.00       | (1 140)          | (2 600)          | 2 740           | 1 260           |
| 6月20日 | 387.00       | 0                | (2 600)          | 4 000           |                 |
| 6月23日 | 388.10       | 220              | (2 380)          | 4 220           |                 |
| 6月24日 | 388.70       | 120              | (2 260)          | 4 340           |                 |
| 6月25日 | 391.00       | 460              | (1 800)          | 4 800           |                 |
| 6月26日 | 392.30       | 260              | (1 540)          | 5 060           |                 |

为\$3 000。在 6 月 13 日，保证金账户的余额比维持保证金还低了\$340。于是经纪人就发出要求追加保证金\$1 340 的追加保证金通知。该表假定投资者在 6 月 16 日收盘时补足了这个追加保证金。在 6 月 19 日，保证金账户的余额再度低于维持保证金，经纪人又发出要求追加\$1 260 的追加保证金通知。投资者在次日即 6 月 20 日收盘时补足了这个追加保证金。在 6 月 26 日，投资者决定卖出 2 张合约来平仓。在那天期货的价格为\$392.30，投资者的累计损失为\$1 540。注意在 6 月 16 日、23 日、24 日和 25 日，投资者的保证金账户上有超过初始保证金的超额资金。表 2.1 假定投资者没有收回这笔超额资金。

## 更多细节

许多经纪人允许对投资者保证金账户的余额支付利息。如果利率是公道的，即在任何其他的地方也能获得该项利率，则保证金账户的余额就不一定代表真实的成本。为了满足初始保证金的要求（不是后来的“追加保证金通知”），投资者有时可以将有价证券存放在他的经纪人那里。通常短期国库券可以按其面值的 90% 来代替现金。股票有时也可以代替现金，但通常大约为其市值的 50%。

盯市的结果是期货合约每日进行结算而不是在其最后到期日才进行结算。在每个交易日结束时，将投资者的盈利（亏损）加入其保证金账户（或从保证金账户中扣除）。这再次将期货合约的价值变为零。一个期货合约实际上等价于每天平仓并以新的价格重新开仓。

交易所设置初始保证金和维持保证金的最低水平。个别经纪人要求客户存放的保证金可能比交易所规定的要高。然而，经纪人要求客户交付的保证金不得低于交易所规定的保证金水平。保证金数额大小是由标的资产价格的变化程度来决定的。波动率越高，要求的保证金水平就越高。维持保证金通常为初始保证金的 75%。

要求的保证金数额大小可能取决于客户的目的。对于一个真正的套期保值者来说，例如某个公司生产某产品并卖出该产品的期货，对它的保证金要求通常低于对投机者的保证金要求。这是由于套期保值者的违约风险小。通常当日交易和价差交易要求的保证金低于套期保值交易的保证金。所谓当日交易（day trade），是指交易者向其经纪人宣布他或她计划在同一天中平仓的交易。所谓价差交易（spread transaction）是指交易者在持有某一交割月份合约的多头的同时还持有同一标的资产的另一交割月份合约的空头的交易。

注意，对空头方的要求的保证金数额大小与对多头方的要求的保证金数额大小一致。做期货的空头与做期货的多头一样容易。而现货市场则不具有这种对称性。持有现货市场的多头就是购买资产立即交割，这不存在问题。持有现货市场的空头则是卖出一项不属于你的资产。这是一个比较复杂的交易，不同的市场有不同的规定。第 5 章再详细讨论这个问题。

## 清算所和清算保证金

交易清算所 (exchange clearinghouse) 是交易所的附属机构，它是期货交易的媒介或中间人。它保证每笔交易的双方履行合约。清算所拥有许多会员，会员公司一定与交易所有资金往来。那些不是清算所会员的经纪人，必须通过清算所的会员来从事业务。清算所的主要任务是对每日发生的所有交易进行跟踪记录，以便计算每一会员的净头寸。

与经纪人要求投资者开设保证金账户一样，清算所也要求其会员在清算所开设保证金账户。我们称它为清算保证金 (clearing margin)。与投资者保证金账户的操作方式类似，清算所会员的保证金账户余额在每一交易日结束时也按照其会员的盈利和亏损进行调整。但是，对清算所会员来说，只有初始保证金，没有维持保证金。每一天每一种合约的保证金账户的余额必须保持一定的金额，即必须等于初始保证金乘以流通在外的合约数。因此，清算所会员在每个交易日结束时，根据该天发生的交易和价格变动，可能必须在其清算保证金账户中追加资金。另一方面，他也可能发现他此时可从结算保证金账户中抽出资金。经纪人如果本身不是清算所的会员，则他必须在清算所会员那里开设保证金账户。

在计算清算保证金时，交易清算所或是基于总头寸额或是基于净头寸额来计算流通在外的合约数。基于总头寸额 (gross basis) 方式是将客户开的多头总数与客户开的空头总数相加。基于净头寸额 (net basis) 方式是允许多头和空头相互抵消。假定某清算所会员有两个客户，一方持有 20 张合约的多头，另一方持有 15 张合约的空头。基于总头寸额的方式将以 35 张合约为基础来计算清算保证金；基于净头寸额的方式将以 5 张合约为基础来计算清算保证金。现在大多数的交易所运用基于净头寸额的方式计算清算保证金。

## 信用风险

保证金制度的最终目的是减少市场参与者由于对方违约而蒙受损失的可能性。整体来说，该制度是非常成功的，在主要的交易所由于违约而产生的损失几乎是不存在的。1987 年 10 月 19 日，标准普尔 500 指数下降幅度达 20% 之多，期货交易所遭遇了严峻的考验。持有标准普尔指数期货合约多头的投资者们发现他们保证金账户余额变成了负值，不少投资者就退出了市场（虽然他们有义务履行合约）。结果，导致一些经纪人破产，因为客户没有支付，经纪人没法满足他们代表客户进行交易的追加保证金要求。但是，每个持有标准普尔 500 指数期货合约空头的投资者都拿到了他们应该拿到的。

## 场外交易市场中的担保程序

一直以来，信用风险是场外交易 (OTC) 市场的一个重要特征。通常，OTC 市场中交易的一方总是有机会违约。一个有趣的现象是，OTC 市场模仿了交易所的保证金体系，推出了抵押程序。

### 商业剪影 2.2 长期资本管理的巨大损失

长期资本管理 (LTCM) 是 20 世纪 90 年代中期成立的一个对冲基金，它经常对其交易进行担保。该对冲基金的投资策略被称为收敛套利。下面用一个简单例子描述这种策略。比如，同一家公司发行的两种债券 X 和 Y，两者的损益相同，只是 X 的流动性比 Y 差一些（即 X 的交易相对不活跃）。市场中的价格会反映这样的流动性差别。因此，X 的价格比 Y 的价格要低。LTCM 会买入 X 卖出 Y 并等待，它预计两个债券的价格在未来某个时刻收敛到一起。

当利率上升的时候，公司预期两种债券价格下降的幅度相同，因此它对债券 X 支付的担保金等于它对债券 Y 收到的担保金。类似地，当利率下降的时候，LTCM 预期两个债券价格上升的幅度相同，因此它对债券 X 收到的担保金等于它对债券 Y 支付的担保金。因此公司预期，它的担保协议中不发生大幅现金流出。

1998 年 8 月，俄罗斯国债违约，因此资本市场中发生了“流向高质量债券”现象。结果，投资者们对流动性强的金融工具的定价比平常要高，LTCM 的证券组合中流动性强和弱的金融工具之间的价差显著地提高了。LTCM 买入的债券 X 的价格下降，而它卖出的债券 Y 的价格上升了。公司需要对两个债券都追加支付相应的担保金。公司的杠杆率大幅度提高，公司没能支付担保协议要求的支付额。结果，它只能平仓这些头寸，遭受的总损失为 40 亿美元。如果这些公司的杠杆率没这么高，它们还能幸免于“流向高质量债券”现象，并且能等待流动性强和弱的债券之间的价格相互接近。

我们来考虑公司 A 和公司 B，它们是 OTC 市场的两个参与者。它们可以共同签订一个抵押协议，通过预先选定的估价方法，对合约每天进行估价。如果一些天后，对于公司 A 来说，合约价值上升了，那么公司 B 必须支付公司 A 相应的与合约价值变化量等价的担保物。反之，如果对于公司 A 来说，合约价值下降了，那么公司 A 必须支付公司 B 相应的与合约价值变化量等价的担保物。

担保程序大大降低了 OTC 市场的信用风险问题，我们将在第 20 章做进一步的讨论。20 世纪 90 年代，抵押协议被广泛用于对冲基金和 LTCM。这样，LTCM 能够拥有很高的杠杆率。这些协议确实阻止了信用风险的发生，但是，如商业剪影 2.2 中所描述的一样，高杠杆率下的对冲基金在其他风险面前表现地相对脆弱。

## 2.5 报纸行情

许多报纸都刊载有期货的行情报价。表 2.2 为 2004 年 2 月 5 日星期四的《华尔街日报》中的商品期货的报价。这些报价是前一个交易日（2004 年 2 月 4 日，星期三）进行交易的价格。在第 3、5、6 章中，我们将分别给出指数期货、外汇期货以及利率期货的报价。

表 2.2 2004 年 2 月 5 日星期四的《华尔街日报》中的商品期货的报价（每列分别为交割月份、开盘价、开盘价、当日最高价、当日最低价、结算价格、变化值、有效期内的最高价、有效期内的最低价和未平仓量）

### Exchange Abbreviations

For commodity futures and futures options

CBT-Chicago Board of Trade;  
CME-Chicago Mercantile Exchange;  
CSCE-Coffee, Sugar & Cocoa Exchange, New York;  
CMX-COMEX (Div. of New York Mercantile Exchange);  
EUREX-European Exchange;  
FINEX-Financial Exchange (Div. of New York Cotton Exchange);  
IPE-International Petroleum Exchange;  
KC-Kansas City Board of Trade;  
LIFFE-London International Financial Futures Exchange;  
MATIC-Marche a Temps Internationale de France;  
ME-Montreal Exchange;  
MPLS-Minneapolis Grain Exchange;  
NQLX-NQLX (unit of Euronext.Liffe);  
NYCE-New York Cotton Exchange;  
NYFE-New York Futures Exchange (Sub. of New York Cotton Exchange);  
NYM-New York Mercantile Exchange;  
ONE-OneChicago  
SFE-Sydney Futures Exchange;  
SGX-Singapore Exchange Ltd.;

Futures prices reflect day and overnight trading  
Open interest reflects previous day's trading

Wednesday, February 4, 2004

### Grain and Oilseed Futures

| OPEN | HIGH | LOW | SETTLE | LIFETIME CHG | HIGH | LOW | OPEN INT |
|------|------|-----|--------|--------------|------|-----|----------|
|------|------|-----|--------|--------------|------|-----|----------|

**Corn (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.**  
 Mar 273.25 274.75 269.25 270.25 -2.75 281.50 219.00 292,145  
 May 278.00 279.75 274.00 275.25 -2.75 285.75 224.50 130,369  
 July 280.50 282.50 277.00 278.25 -2.25 288.50 227.75 79,647  
 Sept 274.50 276.00 272.50 272.50 -2.75 283.00 229.75 14,330  
 Dec 270.75 273.00 268.50 270.00 -7.75 278.75 232.50 105,132  
 Ja05 274.25 276.00 272.25 273.50 -1.00 281.50 239.00 7,662  
 Dec 252.50 252.75 252.50 252.75 -.25 258.00 235.00 1,364  
 Est vol 54,315; vol Tue 81,306; open int 632,256, +1,555.

**Oats (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.**  
 Mar 156.25 156.25 153.00 153.00 -3.00 164.75 131.00 4,361  
 May 158.50 158.50 155.75 155.75 -3.25 163.75 135.00 1,403  
 Est vol 543; vol Tue 1,134; open int 6,487, +277.

**Soybeans (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.**  
 Mar 803.00 813.00 802.00 805.75 3.25 855.00 508.00 110,983  
 May 805.00 811.50 804.00 805.75 1.25 853.50 515.50 83,539  
 July 795.50 799.50 791.50 792.00 -3.00 842.00 520.00 37,181  
 Aug 765.50 770.00 760.00 760.50 -5.25 804.00 521.00 8,682  
 Sept 714.00 714.00 705.00 706.50 -5.50 748.00 528.00 4,033  
 Nov 643.50 646.50 635.00 636.50 -8.25 678.00 483.00 22,489  
 Ja05 643.00 643.00 638.00 638.00 -7.00 678.00 573.00 440  
 Est vol 51,149; vol Tue 69,055; open int 267,713, -1,819.

**Soybean Meal (CBT)-100 tons; \$ per ton.**  
 Mar 246.80 249.80 246.50 247.00 .20 268.80 152.50 46,742  
 May 247.00 249.80 246.40 246.50 -.40 268.20 153.00 59,488  
 July 243.40 245.50 242.30 242.40 -1.00 263.20 152.50 32,077  
 Aug 234.80 235.50 232.80 233.00 -1.10 251.20 154.00 11,892  
 Sept 221.00 222.00 218.80 219.30 -.90 234.50 154.00 9,574  
 Oct 192.50 192.50 189.00 -1.40 206.00 150.00 7,015  
 Dec 189.00 189.00 185.50 185.60 -2.60 202.50 150.00 15,868  
 Ja05 188.00 188.00 185.50 185.80 -2.40 203.00 161.50 882  
 Est vol 20,000; vol Tue 33,272; open int 184,147, -2,396.

**Soybean Oil (CBT)-60,000 lbs.; cents per lb.**  
 Mar 29.86 30.13 29.75 29.86 .. 30.37 19.00 70,068  
 May 29.75 30.02 29.66 29.76 .04 30.19 19.01 64,391  
 July 29.80 29.80 29.40 29.45 -.02 29.87 19.01 41,093  
 Aug 29.08 29.15 28.85 28.90 -.05 29.20 19.05 5,103  
 Sept 28.25 28.25 27.95 28.00 -.02 28.35 19.01 6,754  
 Oct 26.90 27.00 26.80 26.90 -.15 27.10 19.00 5,429  
 Dec 25.90 25.90 25.75 25.78 -.19 26.30 18.98 10,994  
 Est vol 17,571; vol Tue 33,871; open int 204,766, +2,177.

**Rough Rice (CBT)-2,000 cwt.; cents per cwt.**  
 Mar 776.00 784.50 770.00 773.00 -1.00 925.00 680.00 5,418  
 July 816.00 816.00 809.00 809.00 -1.00 939.00 761.00 541  
 Est vol 409; vol Tue 973; open int 7,275, -63.

### Wheat (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.

|      |        |        |        |        |       |        |        |        |
|------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| Mar  | 380.50 | 382.00 | 375.25 | 376.00 | -4.50 | 421.50 | 301.50 | 75,392 |
| May  | 386.75 | 387.00 | 381.00 | 382.50 | -4.25 | 413.00 | 290.00 | 28,178 |
| July | 381.00 | 381.50 | 377.00 | 377.25 | -4.25 | 404.00 | 298.00 | 25,753 |
| Sept | 382.00 | 383.50 | 381.00 | 381.50 | -3.50 | 402.00 | 326.00 | 1,803  |
| Dec  | 391.50 | 392.00 | 388.50 | 390.50 | -3.50 | 410.00 | 330.00 | 3,219  |

Est vol 18,516; vol Tue 24,710; open int 134,517, +36.

### Wheat (KCI)-5,000 bu.; cents per bu.

|      |        |        |        |        |       |        |        |        |
|------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| Mar  | 386.00 | 387.50 | 380.00 | 380.50 | -7.00 | 416.00 | 314.00 | 35,068 |
| May  | 385.75 | 387.00 | 379.00 | 380.50 | -6.75 | 412.00 | 315.00 | 14,006 |
| July | 383.50 | 384.00 | 380.00 | 380.50 | -6.75 | 408.00 | 313.00 | 11,690 |
| Sept | 384.50 | 386.00 | 383.50 | 386.00 | -2.00 | 405.00 | 330.50 | 1,938  |
| Dec  | 392.50 | 393.50 | 390.00 | 390.00 | -5.50 | 408.50 | 341.00 | 1,273  |

Est vol 19,427; vol Tue 10,017; open int 63,983, -463.

### Wheat (MPLS)-5,000 bu.; cents per bu.

|      |        |        |        |        |       |        |        |        |
|------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| Mar  | 412.00 | 413.25 | 409.00 | 411.00 | -2.50 | 423.75 | 343.75 | 13,938 |
| May  | 407.00 | 407.25 | 401.50 | 402.25 | -4.75 | 420.00 | 349.50 | 7,993  |
| July | 400.00 | 400.00 | 395.00 | 395.00 | -5.50 | 411.00 | 352.00 | 4,185  |
| Sept | 396.50 | 396.50 | 391.50 | 391.50 | -5.50 | 403.00 | 346.00 | 4,898  |
| Dec  | 400.00 | 401.00 | 395.75 | 396.00 | -5.00 | 408.00 | 355.00 | 1,037  |

Est vol 7,695; vol Tue 6,203; open int 32,066, -868.

### Livestock Futures

#### Cattle-Feeder (CME)-50,000 lbs.; cents per lb.

|      |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Mar  | 83.70 | 83.80 | 82.22 | 82.22 | -1.50 | 97.45 | 77.50 | 5,192 |
| Apr  | 85.30 | 85.40 | 83.92 | 83.92 | -1.50 | 94.90 | 78.30 | 2,260 |
| May  | 85.85 | 85.85 | 84.35 | 84.35 | -1.50 | 93.90 | 79.10 | 3,739 |
| Aug  | 88.10 | 88.20 | 86.77 | 86.77 | -1.50 | 93.25 | 81.60 | 2,316 |
| Sept | 87.75 | 87.75 | 87.00 | 87.00 | -1.50 | 92.00 | 81.70 | 297   |
| Oct  | 88.25 | 88.25 | 87.00 | 87.00 | -1.50 | 92.00 | 81.95 | 317   |

Est vol 1,472; vol Tue 1,739; open int 14,199, +22.

#### Cattle-Live (CME)-40,000 lbs.; cents per lb.

|      |       |       |       |       |       |       |       |        |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Feb  | 76.30 | 76.45 | 74.82 | 74.82 | -1.50 | 94.95 | 71.00 | 18,526 |
| Apr  | 72.87 | 73.05 | 71.37 | 71.37 | -1.50 | 85.55 | 68.60 | 42,771 |
| June | 69.95 | 70.15 | 68.42 | 68.42 | -1.50 | 78.75 | 66.50 | 15,578 |
| Aug  | 72.45 | 72.55 | 70.95 | 70.95 | -1.50 | 77.20 | 68.00 | 8,444  |
| Oct  | 75.50 | 75.55 | 74.02 | 74.20 | -1.32 | 78.80 | 69.50 | 10,518 |
| Dec  | 77.07 | 77.15 | 75.65 | 76.12 | -1.02 | 78.90 | 72.00 | 3,520  |

Est vol 16,156; vol Tue 10,727; open int 100,345, +316.

#### Hogs-Lean (CME)-40,000 lbs.; cents per lb.

|      |       |       |       |       |      |       |       |        |
|------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|--------|
| Feb  | 59.80 | 59.97 | 58.97 | 59.42 | .50  | 63.00 | 50.75 | 5,560  |
| Apr  | 59.67 | 60.00 | 58.70 | 58.87 | -.47 | 62.40 | 53.55 | 28,654 |
| May  | 60.55 | 60.85 | 60.30 | 60.65 | -.05 | 63.90 | 55.90 | 1,621  |
| June | 65.00 | 65.10 | 64.05 | 64.60 | -.15 | 67.10 | 58.40 | 8,907  |
| July | 61.70 | 61.80 | 61.25 | 61.47 | -.02 | 63.85 | 56.90 | 2,289  |
| Aug  | 59.70 | 59.80 | 59.25 | 59.65 | .10  | 61.37 | 55.00 | 1,521  |
| Oct  | 52.50 | 52.85 | 52.25 | 52.25 | -.35 | 54.65 | 49.00 | 919    |
| Dec  | 52.40 | 53.15 | 52.25 | 52.37 | -.12 | 53.97 | 49.00 | 522    |

Est vol 10,289; vol Tue 8,924; open int 50,055, -1,609.

#### Pork Bellies (CME)-40,000 lbs.; cents per lb.

|     |       |       |       |       |      |       |       |     |
|-----|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-----|
| Feb | 86.30 | 87.67 | 86.30 | 87.30 | 1.17 | 93.40 | 76.40 | 831 |
| Mar | 87.30 | 88.25 | 87.30 | 88.02 | 1.30 | 93.15 | 76.90 | 879 |
| May | 89.05 | 89.50 | 88.75 | 89.50 | 1.67 | 94.15 | 79.40 | 385 |

Est vol 669; vol Tue 883; open int 2,270, -26.

### Food and Fiber Futures

#### Lumber (CME)-110,000 bd. ft., \$ per 1,000 bd. ft.

|      |        |        |        |        |       |        |        |       |
|------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|
| Mar  | 334.20 | 344.50 | 334.00 | 344.50 | 10.00 | 365.00 | 256.20 | 2,408 |
| May  | 336.60 | 346.60 | 336.60 | 346.60 | 10.00 | 357.50 | 263.10 | 686   |
| July | 337.90 | 344.00 | 335.10 | 343.20 | 6.80  | 354.90 | 282.00 | 233   |

Est vol 889; vol Tue 286; open int 3,368, -22.

#### Milk (CME)-200,000 lbs., cents per lb.

|      |       |       |       |       |     |       |       |       |
|------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|
| Feb  | 11.74 | 11.75 | 11.72 | 11.75 | .05 | 11.90 | 10.95 | 2,554 |
| Mar  | 12.20 | 12.26 | 12.20 | 12.20 | .05 | 12.35 | 11.05 | 2,525 |
| Apr  | 12.65 | 12.75 | 12.60 | 12.73 | .13 | 12.75 | 11.00 | 1,988 |
| May  | 12.88 | 13.00 | 12.87 | 12.95 | .13 | 13.00 | 11.00 | 1,948 |
| June | 13.13 | 13.26 | 13.12 | 13.26 | .16 | 13.32 | 11.41 | 1,761 |
| July | 13.74 | 13.95 | 13.72 | 13.86 | .12 | 13.95 | 11.60 | 1,676 |
| Aug  | 14.18 | 14.25 | 14.13 | 14.20 | .02 | 14.28 | 11.65 | 1,723 |
| Sept | 14.55 | 14.75 | 14.55 | 14.65 | .05 | 14.75 | 12.10 | 1,900 |
| Oct  | 13.94 | 14.15 | 13.89 | 14.05 | .11 | 14.15 | 11.89 | 1,513 |
| Nov  | 12.95 | 13.20 | 12.95 | 13.20 | .25 | 13.30 | 11.39 | 1,169 |
| Dec  | 12.40 | 12.45 | 12.40 | 12.45 | .05 | 12.50 | 11.30 | 809   |

Est vol 1,437; vol Tue 842; open int 19,736, +289.

|   | OPEN    | HIGH   | LOW    | SETTLE  | CHG      | LIFETIME<br>HIGH | LIFETIME<br>LOW | OPEN<br>INT |  |
|---|---------|--------|--------|---------|----------|------------------|-----------------|-------------|--|
| <b>Cocoa (CSCE)-10 metric tons; \$ per ton.</b>         |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| Mar   | 1,606   | 1,615  | 1,578  | 1,581   | -19      | 2,358            | 1,250           | 22,360      |  |
| May   | 1,596   | 1,599  | 1,565  | 1,569   | -21      | 2,265            | 1,345           | 13,766      |  |
| July  | 1,595   | 1,596  | 1,572  | 1,564   | -23      | 2,307            | 1,350           | 12,922      |  |
| Sept  | 1,590   | 1,590  | 1,562  | 1,563   | -24      | 2,402            | 1,370           | 8,710       |  |
| Est vol   | 9,057;  | vol    | Tue    | 9,675;  | open int | 87,295,          | -1,218.         |             |  |
| <b>Coffee (CSCE)-37,500 lbs; cents per lb.</b>          |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| Mar   | 73.75   | 74.00  | 71.60  | 72.60   | -2.05    | 83.00            | 59.65           | 59,048      |  |
| May   | 75.60   | 75.80  | 73.70  | 74.65   | -1.95    | 82.00            | 61.75           | 26,054      |  |
| July  | 77.00   | 77.70  | 75.70  | 76.45   | -1.95    | 82.50            | 63.90           | 8,737       |  |
| Sept  | 78.40   | 79.20  | 77.40  | 78.15   | -1.90    | 83.45            | 65.75           | 7,837       |  |
| Dec   | 80.15   | 81.25  | 80.15  | 80.75   | -1.90    | 85.95            | 68.50           | 4,577       |  |
| Mr05  | 83.40   | 83.70  | 83.40  | 83.30   | -1.85    | 87.90            | 71.00           | 2,948       |  |
| Est vol   | 32,220; | vol    | Tue    | 15,761; | open int | 109,783,         | +1,170.         |             |  |
| <b>Sugar-World (CSCE)-112,000 lbs; cents per lb.</b>    |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| Mar   | 5.74    | 5.77   | 5.66   | 5.68    | -0.07    | 7.65             | 5.50            | 131,494     |  |
| May   | 5.94    | 5.97   | 5.87   | 5.88    | -0.07    | 7.32             | 5.54            | 50,135      |  |
| July  | 5.97    | 6.00   | 5.92   | 5.93    | -0.06    | 6.95             | 5.50            | 37,213      |  |
| Oct   | 6.09    | 6.10   | 6.02   | 6.03    | -0.06    | 6.88             | 5.55            | 25,822      |  |
| Mr05  | 6.33    | 6.33   | 6.27   | 6.28    | -0.04    | 6.82             | 6.24            | 11,411      |  |
| May   | 6.32    | 6.33   | 6.30   | 6.30    | -0.03    | 6.57             | 6.20            | 4,813       |  |
| July  | 6.28    | 6.29   | 6.28   | 6.25    | -0.03    | 6.42             | 6.15            | 2,901       |  |
| Est vol   | 23,839; | vol    | Tue    | 32,525; | open int | 265,575,         | -1,048.         |             |  |
| <b>Sugar-Domestic (CSCE)-112,000 lbs; cents per lb.</b> |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| Mar   | 20.35   | 20.40  | 20.35  | 20.40   | .04      | 22.02            | 20.20           | 884         |  |
| May   | 20.35   | 20.35  | 20.35  | 20.35   | ...      | 22.07            | 20.15           | 3,835       |  |
| July  | 20.50   | 20.50  | 20.50  | 20.50   | ...      | 22.10            | 20.25           | 3,280       |  |
| Sept  | 20.74   | 20.74  | 20.74  | 20.74   | -.01     | 22.07            | 20.63           | 3,087       |  |
| Nov   | 21.05   | 21.05  | 21.05  | 21.05   | ...      | 21.70            | 20.94           | 855         |  |
| Ja05  | 20.80   | 20.80  | 20.80  | 20.80   | ...      | 21.40            | 20.80           | 285         |  |
| Est vol   | 43;     | vol    | Tue    | 203;    | open int | 12,510,          | -12.            |             |  |
| <b>Cotton (NYCE)-50,000 lbs; cents per lb.</b>          |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| Mar   | 69.10   | 69.90  | 68.70  | 69.25   | .35      | 86.00            | 45.60           | 43,633      |  |
| May   | 71.20   | 71.95  | 70.75  | 71.27   | .44      | 86.00            | 51.50           | 27,184      |  |
| July  | 72.35   | 73.00  | 71.80  | 72.30   | .35      | 85.50            | 56.75           | 8,924       |  |
| Dec   | 68.00   | 68.25  | 67.50  | 67.75   | .05      | 71.00            | 59.00           | 6,330       |  |
| Est vol   | 12,611; | vol    | Tue    | 21,022; | open int | 88,074,          | +239.           |             |  |
| <b>Orange Juice (NYCE)-15,000 lbs; cents per lb.</b>    |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| Mar   | 61.20   | 62.00  | 60.80  | 61.65   | .25      | 103.50           | 60.60           | 25,803      |  |
| May   | 64.50   | 64.70  | 64.00  | 64.45   | .25      | 105.00           | 63.50           | 7,488       |  |
| July  | 67.20   | 67.30  | 66.50  | 67.05   | .35      | 106.00           | 66.40           | 1,518       |  |
| Sept  | 69.40   | 70.00  | 69.40  | 69.40   | .20      | 86.80            | 69.25           | 774         |  |
| Nov   | 71.30   | 71.30  | 71.30  | 71.90   | -.10     | 91.50            | 71.30           | 491         |  |
| Est vol   | 1,846;  | vol    | Tue    | 1,259;  | open int | 36,251,          | -123.           |             |  |
| <b>Metal Futures</b>                                    |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| <b>Copper-High (COMX)-25,000 lbs; cents per lb.</b>     |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| Feb   | 116.90  | 117.30 | 116.90 | 117.35  | .60      | 117.30           | 67.20           | 1,033       |  |
| Mar   | 116.85  | 117.55 | 116.50 | 117.45  | .60      | 117.55           | 69.75           | 65,863      |  |
| Apr   | 116.55  | 116.90 | 116.55 | 117.10  | .60      | 116.90           | 71.95           | 941         |  |
| May   | 116.05  | 116.70 | 115.95 | 116.55  | .45      | 116.70           | 70.90           | 8,263       |  |
| June  | 116.00  | 116.15 | 115.75 | 115.95  | .40      | 116.15           | 73.50           | 724         |  |
| July  | 115.00  | 115.45 | 115.00 | 115.30  | .35      | 115.45           | 70.90           | 6,549       |  |
| Aug   | 114.30  | 114.70 | 114.30 | 114.70  | .40      | 114.70           | 73.65           | 486         |  |
| Sept  | 113.90  | 114.00 | 113.90 | 114.05  | .40      | 114.00           | 70.95           | 2,211       |  |
| Oct   | 113.25  | 113.25 | 113.25 | 113.45  | .40      | 113.25           | 74.00           | 388         |  |
| Nov   | 112.55  | 112.70 | 112.45 | 112.85  | .40      | 112.70           | 79.00           | 287         |  |
| Dec   | 111.85  | 112.35 | 111.60 | 112.20  | .35      | 112.35           | 74.20           | 4,135       |  |
| Mr05  | 110.55  | 110.55 | 110.50 | 110.40  | .25      | 110.55           | 74.40           | 322         |  |
| Est vol   | 11,000; | vol    | Tue    | 8,170;  | open int | 91,868,          | -170.           |             |  |
| <b>Gold (CMX)-100 troy oz.; \$ per troy oz.</b>         |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| Feb   | 399.80  | 401.30 | 398.50 | 401.00  | 1.80     | 431.50           | 322.00          | 5,090       |  |
| Apr   | 400.70  | 401.80 | 399.40 | 401.70  | 1.80     | 432.30           | 320.00          | 143,464     |  |
| June  | 401.40  | 403.00 | 400.50 | 402.70  | 1.80     | 432.00           | 287.00          | 29,868      |  |
| Aug   | 403.10  | 403.10 | 402.00 | 403.70  | 1.80     | 431.30           | 324.70          | 8,621       |  |
| Dec   | 404.10  | 405.50 | 403.00 | 405.50  | 1.70     | 434.50           | 290.00          | 22,312      |  |
| Est vol   | 40,000; | vol    | Tue    | 40,608; | open int | 236,512,         | -4,897.         |             |  |
| <b>Platinum (NYM)-50 troy oz.; \$ per troy oz.</b>      |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| Apr   | 824.00  | 824.00 | 812.00 | 820.60  | -.50     | 868.00           | 677.00          | 6,816       |  |
| July  | ...     | ...    | ...    | 810.60  | -.50     | 852.00           | 801.00          | 292         |  |
| Est vol   | 602;    | vol    | Tue    | 808;    | open int | 7,126,           | -95.            |             |  |
| <b>Silver (COMX)-5,000 troy oz.; cents per troy oz.</b> |         |        |        |         |          |                  |                 |             |  |
| Feb   | 611.5   | 611.5  | 611.5  | 614.5   | 2.4      | 611.5            | 611.5           | 240         |  |
| Mar   | 613.0   | 618.5  | 607.0  | 614.8   | 2.5      | 679.5            | 437.0           | 78,208      |  |
| May   | 614.5   | 620.0  | 608.5  | 616.2   | 2.6      | 681.0            | 445.0           | 7,153       |  |

资料来源：Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc., © 2004 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

表 2.2 中在每种商品期货行情报价的顶部，可以看到期货合约的标的资产、交易该期货合约的交易所、合约规模和报价方式。第一项资产是在 CBOT 中交易的玉米期货，合约规模为 5 000 蒲式耳，以每蒲式耳美分来进行报价。第一列中显示了相应期货合约的交割月份。2004 年 2 月 4 日交易的玉米期货合约的交割月份分别为 2004 年 3 月份、2004 年 5 月份、2004 年 7 月份、2004 年 9 月份、2004 年 12 月份、2005 年 3 月份和 2005 年 12 月份。

## 价 格

每行中前 3 个数字分别为开盘价、交易当天达到的最高价和交易当天达到的最低价。开盘价 (opening price) 是在每天交易铃声响起后，立即成交的期货合约的价格。2004 年 2 月 4 日交易的 2004 年 3 月份玉米期货，开盘价是每蒲式耳 273.25 美分。当天交易的价格在 269.25 美分和 274.75 美分之间。

## 结算价格

每行中的第 4 个数字是结算价格，这个结算价格用于计算每日盈亏和保证金要求额。这是在交易日结束交易铃声响起之前即刻成交的期货合约的平均价格。第 5 个数字是当天结算价与上一个交易日结算价相比的变化值。对于 2004 年 3 月份的玉米期货合约来说，在 2004 年 2 月 4 日的结算价格是 270.25 美分，比 2004 年 2 月 3 日结算价格下跌了 2.75 美分。

对于 2004 年 3 月份的玉米期货合约来说，持有一个期货合约多头的投资者会发现，2004 年 2 月 4 日保证金账户的余额比 2004 年 2 月 3 日减少了 \$137.50 ( $5\ 000 \times 2.75$  美分)。与此类似，期货合约空头的投资者会发现 2004 年 2 月 4 日其保证金账户的余额比 2 月 3 日增加了 \$137.50。

## 期货合约有效期内的最高价和最低价

每行中的第 6 个和第 7 个数字是在期货合约有效期内，交易某一特定合约所达到的历史最高价和最低价。截止到 2004 年 2 月 4 日，2004 年 3 月份玉米期货合约已经交易了 1 年多，该合约在这个有效期间内的最高价和最低价分别为 281.50 美分和 219.00 美分。

## 未平仓量和交易量

表 2.2 中的最后一列为每一合约的未平仓量。这是流通在外的合约的总数。未平仓量是所有多头数之和，相应地也是所有空头数之和。由于数据处理中的困难，所以未平仓量的信息比价格信息要迟一个交易日。因此，在 2004 年 2 月 5 日的《华尔街日报》中，未平仓量是 2004 年 2 月 3 日交易结束时的数据。对于 2004 年

3月份的玉米期货合约来说，未平仓量为292 145。

在每种商品期货行情报价的结尾一行，表2.2刊载有2004年2月4日该商品合约所有期限的估计总交易量，以及2004年2月3日这天这些商品合约的实际交易量。它也载有2004年2月3日所有该商品合约的未平仓合约总数以及这些未平仓合约总数相对于前一天未平仓合约总数的变化量。对于所有玉米期货合约来说，2004年2月4日估计的交易量为54 315，2004年2月3日实际交易量为81 306。2004年2月3日该种商品所有期货合约的未平仓合约总数为632 256，比前一天增加1 555。

有时会发生一天中的交易量超过交易结束时的这天未平仓量。这就表明当天存在大量的当日交易。

### 期货的价格模式

从表2.2中我们可以找出期货价格的不同模式。图2.2中给出了纽约商品交易所中黄金期货价格（为结算价格）的模式，以及伦敦国际石油交易所中的布伦特原油期货价格（为结算价格）的模式。黄金期货的价格随着到期期限的增加而增加。我们称之为正常市场（normal market）。与此相反，布伦特原油期货的价格随着到期期限的增加而减少。我们称之为逆向市场（inverted market）。一些其他商品期货还有属于混合型的。比如，民用燃料油期货的价格随着到期期限的增加呈先增加后减少的趋势。

## 2.6 交 割

本章前面部分中，我们已经看到绝大部分期货合约并不实际交割标的资产，在合约到期前通常都平仓了。但正因为存在最终交割的可能性，才使得期货价格

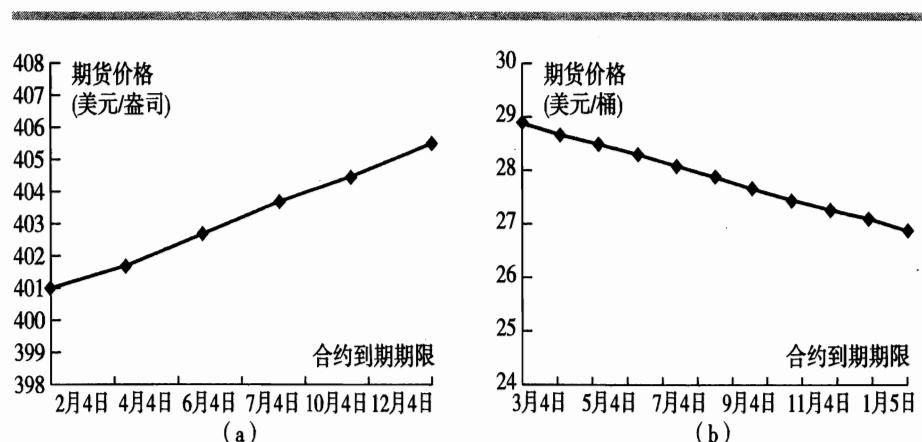


图2.2 2004年2月4日的(a)黄金以及(b)布伦特原油的期货结算价格和到期期限之间的关系

与现货价格联系起来。因此，了解交割程序很重要。

具体的交割期限是由交易所制定的，不同的合约有不同的交割期限。当交易所给出交割时刻、交割地点以及交割内容的几种可能选择时，只能是由空头方做出这种选择，我们假定这个空头方为投资者 A。如果投资者 A 打算交割了，他的经纪人向交易所提交交割意向通知书。该通知书里写着交割的规模，而且在商品期货的情况下，也表明交割的地点以及交割资产的等级。然后交易所选择一个多方去接受交割。

假定投资者 A 持有的期货合约，刚开始是和投资者 B 签订的。一个很重要的事实是，这种情况下，没有理由认为应由投资者 B 进行交割。投资者 B 可能已经向投资者 C 卖出该合约来平仓了，而投资者 C 可能再向投资者 D 卖出该合约来平仓了。如此等等。交易所通常规定把交割意向通知书传递给流通在外的持有期货时间最长的多方持有者。这个期货多方持有者必须接受交割通知书。但如果通知书是可转移的，那么该曾经的多方持有者可以在很短的时间内（通常为半个小时），把通知书传达给另一个愿意接受交割的多方持有者。

在标的资产为商品的情况下，接受交割通常意味着及时支付一定费用并拿到一个仓单。之后，接受交割的一方应负责所有的仓储相关费用。在标的资产为活牲畜的情况下，接受交割的一方需要负责喂养、照顾牲畜的费用。在标的资产为金融工具的情况下，交割通常以电汇来实行。在各种类型合约的交割中，价格通常以交割意向通知书发出前一天的结算价格为基准。在交易所的指定下，可以根据交割的资产等级、交割地点等内容来调整价格。从交割意向通知书发出到交割完毕，整个程序通常持续 2~3 天。

对于一个期货合约，有 3 个重要的日子，分别为起始通知日、最后通知日和最后交易日。起始通知日 (first notice day) 是指能把交割意向通知书递交给交易所的第一天。最后通知日 (last notice day) 是指把交割意向通知书递交给交易所的最后一天。最后交易日 (last trading day) 通常在最后通知日的前几天。想避免接受交割的话，持有多头的投资者应该在起始通知日之前平仓。

## 现金结算

一些金融期货（如标的资产为股票指数的期货）是以现金结算的。这是由于直接交割标的资产非常不方便或者是不可能。例如，标的资产为标准普尔 500 指数期货合约，交割标的资产将包括交割一个 500 种股票的组合。当合约以现金结算时，在一个特定日期，所有未平仓的交易将宣布终止。该特定日期的标的资产现价（开盘价或者收盘价），被设定为最终结算价格。例如，芝加哥商品交易所标准普尔 500 指数期货交易中，交割月份的第 3 个星期五那天会宣布终止交易，最终结算价格就是当天该指数的开盘价。

## 2.7 交易者类型和指令类型

执行交易的交易员有两类：佣金经纪人和自营商。佣金经纪人（commission broker）执行其他人的交易指令并获得佣金；自营商（local）用自己账户里的资金进行交易。

不管是自营商还是佣金经纪人的客户，持有头寸的投资者可以分为套期保值者、投机者和套利者（我们在第1章中已经阐述过）。投机者又可以分为抢帽子者（scalper）、短线交易者（day trader，也称为当日交易者）和长线交易者（position trader）。抢帽子者的交易风格是盯住非常短期价格变动趋势，在小幅价格波动当中牟取小额利润。抢帽子者持有头寸的时间一般只持续几分钟。短线交易者持有头寸的时间一般不超过一个交易日，他们不愿因隔夜发生什么不利的消息而遭受风险。长线交易者持有头寸的时间一般比较长，他们想在市场大幅变动当中牟取较大利润。

### 指令

传递到佣金经纪人的指令当中最为简单的是市价指令（market order）。它指定立即以最佳可行的价格执行交易指令。除了市价指令，还有很多其他类型的指令，我们将阐述一些常用的指令类型。

限价指令（limit order）中指定某一特定的价格，并要求只有达到该价位或更为优惠的价位时，才执行指令。所以，如果一个投资者提出限价为\$30时，愿意持有多头，那么，只有价格是\$30或\$30以下的情况下，该指令才会被执行。当然，没有保证说限价指令一定会执行，因为限定的价格可能从来达不到。

限损指令（stop order，也称 stop-loss order）也指定某一特定的价格，并要求一旦竞买价或竞卖价达到该价位或者次佳的价位时，以最有利可行价格执行指令。假设当市价为\$35时，有一限损指令指定以\$30卖出。也就是说，当市价降到\$30之时，执行卖出指令。实际上，当市价达到指定价格之时，限损指令立即等同于市价指令了。当市价走向不利于投资者的情况下，限损指令通常用来平仓，限定了所产生的损失大小。

停损限价指令（stop-limit order）是限损指令和限价指令的组合。当竞买价或竞卖价达到限损价格（stop price）或者比限损价格次佳的价位时，这个指令立即等同于限价指令。停损限价指令中必须指定两个价格：限损价格和限价。假定当市价为\$35时，有一个停损限价指令，指定限损价格为\$40、限价为\$41，指令是买入。那么一旦竞买价或竞卖价达到\$40，该停损限价指令就转化为限价为\$41的限价指令。如果限损价格和限价相等，这种停损限价指令也被称为停损及限价指令（stop-and-limit order）。

触及市价指令（market-if-touched order，MIT order）指定市场价格达到特定价位（或更有利的价位）时，以最佳可行的价格执行指令。其实一旦市场价格达到特定价位，触及市价指令自动转成市价指令。MIT指令也称为看板指令（board or-

der)。考虑一个持有期货合约多头的投资者，他为了平仓，发出了指令。限损指令被设计为：当市价走向不利的时候，以设定的损失额进行平仓。相比之下，MIT指令被设计为：当市价走向有利的时候，保证获取可能的利润。

授权指令 (discretionary order, 也称 market-not-held order) 跟市价指令类似，但是在经纪人授权下，为了获得更有利的价位，交易可能延迟执行。

还有一些指令则附有时间规定。除非特别说明，没有时间规定的普通指令是一个交易日的指令，该交易日结束之时指令也将失去效力。当天特定时段指令 (time-of-day order) 指定在一天中某个特定时间段内可以执行交易指令。取消前有效指令 (open order, 也称 good-till-canceled order) 指在证券交易成交或取消之前仍有效力的交易指令。成交或取消指令 (fill-or-kill order)，正如它的名称所示，指定所下指令必须立刻全部成交，否则立即全部取消指令。

## 2.8 监 管

当前美国的期货市场在联邦政府一级是由商品期货交易委员会 (CFTC, [www.cftc.gov](http://www.cftc.gov)) 来监管，该委员会成立于 1974 年，负责为期货交易所发放执照并核准期货合约。所有新合约以及现存合约的改变必须得到 CFTC 的批准。为得到批准，期货合约必须具有某些经济目的。通常这意味着它必须满足套期保值者和投机者的需要。

CFTC 关心大众的利益。CFTC 负责确保价格传递给了公众。如果期货交易者的头寸超过某一确定数额，CFTC 要求他们必须报告所持有的流通在外的期货头寸。CFTC 也向所有的为大众提供期货领域服务的个人颁发执照。要调查这些人的背景材料并有最低的资本要求。CFTC 处理公众的投诉，如果投诉是正当的话，将采取某些惩罚措施。它有权强迫交易所对违反交易规则的会员采取惩罚措施。

1982 年，国家期货协会 (NFA, [www.nfa.futures.org](http://www.nfa.futures.org)) 成立。这使得 CFTC 的部分职能转移到期货自身行业中去了。NFA 是参与期货行业人士的组织。它的目的是防止欺诈并确保市场运作最有利于普通大众的利益。NFA 要求其会员通过某种考试。NFA 得到授权以监测期货交易，并在投诉正当的时候采取惩罚措施。它建立一个高效的制度以对个人与会员之间的纠纷做出公正裁决。

有时，诸如证券交易委员会 (SEC, [www.sec.gov](http://www.sec.gov))、美国联邦储备委员会 (FRB, [www.federalreserve.gov](http://www.federalreserve.gov)) 以及美国财政部 ([www.treas.gov](http://www.treas.gov)) 等其他机构对期货交易的某些方面也有管辖权。这些机构关注期货交易对诸如股票、短期国库券、长期国库券这些即期市场的影响。证券交易委员会具有投票权以决定是否批准新的股票或债券指数期货合约。但是，所有期货以及期货期权的基本管辖权还是属于 CFTC。

## 违规交易

大多数情况下，期货市场能够有效运行并符合公众利益。然而，有时的确发

生了违规交易的情况。例如，当某个投资者集团企图去“操纵市场”（也称囤积合约）时，就发生了违规现象。<sup>2</sup>该投资者集团持有巨额的多头期货合约并企图对标的商品（此时是白银）的供应进行某种控制。随着期货合约到期日的接近，该投资者集团并没有冲抵他们的头寸（即不平仓），流通在外的期货合约数量超过了可用于交割的标的商品的数量。空头头寸的持有者意识到他们将难以交割，只能绝望地在高价位平仓。结果是期货价格和现货价格急剧上升。监管当局处理市场中这类弊端的方法通常是增加保证金要求，强加更严格的头寸限额，禁止可增加投机者未平仓头寸的交易，以及强迫市场参与者平仓。

另一类交易违规涉及到交易所大厅内的交易员。联邦调查局利用秘密线人，在芝加哥期货交易所和芝加哥商品交易所进行了两年的调查，在1989年初披露了这些交易员的情况。调查起因于某个大型农产品公司的投诉。内容包括收取客户过高的费用，没有完全支付客户的收益，以及交易员利用他们对客户交易指令的了解首先为自己交易（这种违规行为被称为提前交易）。

## 2.9 会计及税收

讨论期货合约会计及税收处理的整个细节超出了本书的范围，需要这方面详细信息的投资者可向专家咨询。在这一部分我们提供某些基本的背景资料。

### 会 计

美国会计准则要求，除非证明是对冲合约，当期货合约发生市价变化时，这个变化应予确认。如果确实证明是对冲合约，为会计目的，该合约的损益应予以确认。但在同时，被对冲的资产项的损益也应予以确认，<sup>3</sup>这被称为对冲会计法(hedge accounting)。

考虑一家会计年度在12月底结束的公司。它在2004年9月份购买了一个2005年3月份到期的玉米期货合约，并在2005年2月底平仓。假设在购买期货合约时的期货价格是每蒲式耳250美分，在2004年底是每蒲式耳270美分，在平仓时该期货的价格是每蒲式耳280美分。一份合约交割5 000蒲式耳。如果该合约确认不是对冲合约，2004年会计目的的收入为：

$$5\,000 \times \$ (2.70 - 2.50) = \$1\,000$$

2005年会计目的的收入为：

$$5\,000 \times \$ (2.80 - 2.70) = \$500$$

---

<sup>2</sup>这种违规最著名的例子是1979~1980年亨特兄弟公司操纵白银市场的行为。在1979年年中至1980年初，他们的活动使得白银价格从每盎司\$9上升到了每盎司\$50。

<sup>3</sup>即同时考虑进行对冲的期货合约损益和被对冲资产的损益——译者注。

如果公司正在对冲 2005 年 2 月份购买的 5 000 蒲式耳玉米，那么该期货合约符合对冲会计法，会计目的的整个 \$1 500 收入将在 2005 年确认。

这种处理对冲损益的方法是明智的。如果上述例子中的公司正在对冲 2005 年 2 月底购买的 5 000 蒲式耳玉米，期货合约的效果就是确保所支付的价格接近于每蒲式耳 250 美分。这种会计处理方式说明这就是 2005 年所支付的价格。2004 年会计计算不受期货交易的影响。

1998 年 6 月，美国财务会计准则委员会（FASB）发布的 FASB 报表 133 号（FAS 133），即《美国处理衍生证券和对冲行为的会计准则》。FASB 报表 133 号适用于所有类型的衍生证券（包括期货合约、远期合约、互换合约和期权合约）。该标准要求所有衍生证券必须按照公允市价计入资产负债表。<sup>4</sup> 对于披露的要求比以前提高了。而且在该标准下使用对冲会计法时，公司的自由度减少了许多。该标准下使用对冲会计法的前提是，该金融工具必须能非常有效地冲抵风险暴露，并需要每 3 个月对这一有效性进行评估。国际会计准则委员会也已经发布了类似的会计准则 IAS 39 号。

## 税 收

按照美国税法，两个关键的因素是应税损益以及该损益确认的时刻。损益或者是归于资本损益，或者是作为普通收入的一部分。

对于公司纳税人，资本收益的税率与普通收入的税率一样，然而扣减资本损失则受到限制。对公司纳税人而言，资本损失只有在资本获益时才可扣减。公司可以弥补过去 3 年的资本损失，同时可以向将来展期 5 年。对非公司纳税人而言，短期资本收益的税率与普通收入的税率一样，而对于长期资本收益的税率为 15%，这是资本收益税率中的最大值（长期资本收益指卖出持有 1 年以上的资本资产所得到的收益，短期资本收益指卖出持有 1 年或 1 年以下的资本资产所得到的收益）。对于非公司纳税人，只有当资本收益加上普通收入超过 \$3 000 的那部分，才可以用于扣减资本损失。非公司纳税人可将资本损失向将来无限长时间地展期。

通常，处理期货合约的头寸时，可将它们看作是在税收年度最后一天平仓的。对于非公司纳税人，不管其持有时间如何，资本收益与资本损失被当作是 60% 的长期资本收益和 40% 的短期资本收益。这被称为“60/40”规则。一个非公司纳税人可以拿回过去 3 年的按“60/40”规则计算的任意净损失来抵扣过去 3 年按同样规则计算的任意资本收益。

对冲交易则与前面所述的规则有所不同。税法中的对冲交易定义和会计目的中的交易定义不一样。在税法中，对冲交易定义为在正常商业运作过程中由于以下两个理由而从事的交易：

1. 为了减少资产价格变动或货币波动的风险，纳税人为了获得正常收入正在持

---

<sup>4</sup> 在此之前，衍生证券在一些情况下很有吸引力的原因就是因为它们是资产负债表外项目。

有或将要持有这些资产。

## 2. 为了减少纳税人负债的价格变动、利率变动或货币波动的风险。

在纳税人进行交易的当天结束之前，对冲交易必须要得到确认。被对冲的资产必须在 35 天之内得到确认。处理对冲交易的损益与普通收入一样。对冲交易的损益确认的时刻一般与被对冲项目产生的收入或扣减的确认时刻一致。

## 2.10 远期合约与期货合约

表 2.3 中总结了期货合约与远期合约之间的主要区别。两个合约都是交易双方在未来某个时间按一定价格购买或出售资产的协议。远期合约是在 OTC 市场进行交易的，因此，远期合约没有标准化的合约规模或标准化的交割安排。远期合约一般指定一个特定的交割日期，合约一直被持有到期，合约到期时进行结算。与之相比，期货合约在交易所内进行标准化的交易。期货合约的交割期限通常有个范围。期货合约进行每日结算，而且一般到期之前都进行了平仓。

### 远期合约和期货合约的损益

假定 90 天期英镑的远期汇率为 1.6000，并假定 90 天后交割的期货合约中的英镑期货价格也是 1.6000。那么两种合约的损益会有什么区别呢？

远期合约中，总收益或者总损失在合约到期时才能实现。期货合约中，按照每日结算程序，收益或者损失每天要予以确认。考虑一位持有 100 万 90 天期英镑远期合约多头的投资者 A 和一位持有 90 天期英镑期货合约多头的投资者 B（因为每张期货合约规模为买卖 £62 500，投资者 B 应买入 16 张合约）。假定 90 天后英镑兑美元即期利率变成 1.8000。那么投资者 A 将在第 90 天得到 20 万美元的收益。投资者 B 也得到同样的收益，但这个收益在整个 90 天期间是变动的。在期间的某些天，投资者 B 遭受了损失，而在期间的另外一些天他可能得到了收益。而加总之后，收益减去损失，投资者 B 在 90 天期间内的净收益为 20 万美元。

表 2.3 远期合约与期货合约之间的比较

| 远期合约          | 期货合约         |
|---------------|--------------|
| 两个交易方之间私下签约   | 在交易所内交易      |
| 非标准化          | 标准化合约        |
| 通常有一个指定的交割日   | 交割期限有个范围     |
| 在合约到期时结算      | 每日结算         |
| 通常进行交割或最后现金结算 | 合约通常在到期日之前平仓 |
| 存在信用风险        | 实际上无信用风险     |

## 外汇报价

外汇的远期合约和期货合约的交易都非常广泛。但是，在两个市场中汇率的报价方式有些不同。期货价格通常按照每单位外币对应的美元数或美分数来进行报价。外汇远期价格的报价方式通常和外汇即期价格的报价方式一样。也就是说，对于英镑、欧元、澳元和新西兰元，远期价格是按每单位外币对应的美元数进行报价，这就和相同期货价格的报价一样。而对于其他主要的外汇，远期价格是按1美元对应的外币数进行报价。例如加拿大元，加元期货价格报价是0.7050美元/加元，相应的远期价格报价是1.4184加元/美元 ( $1.4184 = 1/0.7050$ )。

## 小 结

绝大部分最初订立的期货合约最终并不进行标的资产的交割，而是在交割月份的交割日之前就进行了平仓。但是，正是存在最后交割的可能性，决定着期货的价格。对于每个期货合约来说，在一定的时间范围内都可以进行交割，且存在着一整套完整的交割程序。有些合约，如标的资产为股票指数的期货合约，它们是以现金结算而不是交割标的资产。

订立期货合约的细则是交易所的一项重要的活动。任何合约的买卖双方必须知道什么产品可以交割、在什么地方交割以及在什么时候交割。他们也必须知道如下细节：如交易时间、价格的报价方式、最大价格变动幅度等。所有新合约必须得到CFTC的批准后才能进行交易。

保证金是期货市场的一个重要组成部分。投资者在其经纪人处开设一定的保证金账户。保证金账户每日进行调整，以反映投资者的盈利或亏损。如果价格发生了对投资者不利的变动，经纪人可能不时地要求投资者追加保证金。经纪人或者是交易清算所会员，或者在清算所会员处开设一定的保证金账户。每个清算所会员要在清算所开设一定的保证金账户。清算所每日对保证金账户余额进行调整，以便反映会员所从事业务的盈利或亏损。

交易所保证完整地、系统地收集有关的期货价格信息，并且可在几秒钟内将信息传递给全世界的投资者。许多报纸（如《华尔街日报》）每日都载有前一交易日的各种交易信息。

远期合约和期货合约有一些不同之处。远期合约由两个交易对方之间私下签约，而期货合约则在交易所进行标准化的交易。远期合约一般指定一个特定的交割日期，而期货合约交割期限通常有个范围。因为远期合约的交易不是在交易所中进行，所以远期合约没有标准化的合约条款。远期合约通常在到期之前不进行结算，绝大多数都是到期时进行标的资产的交割或者以现金结算。

在后面几个章节中，我们将更详细地考察远期合约和期货合约是怎样用于套期保值的。我们也将看到远期价格和期货价格是如何决定的。

## 参考读物

- Duffie, D. *Futures Markets*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1989.
- Gastineau, G.L., D.J. Smith, and R. Todd. *Risk Management, Derivatives, and Financial Analysis under SFAS No. 133*. The Research Foundation of AIMR and Blackwell Series in Finance, 2001.
- Jorion, P. "Risk Management Lessons from Long-Term Capital Management," *European Financial Management*, 6, 3 (September 2000): 277-300.
- Kawaller, I.G. and P.D. Koch. "Meeting the Highly Effective Expectation Criterion for Hedge Accounting," *Journal of Derivatives*, 7, 4 (Summer 2000): 79-87.
- Lowenstein, R. *When Genius Failed: The Rise and Fall of Long-Term Capital Management*. New York: Random House, 2000.
- Warwick, B., F.J. Jones, and R.J. Teweles. *The Futures Game*. 3rd edn. New York: McGraw-Hill, 1998.

## 问题和习题

- 2.1 请说明未平仓量与交易量的区别。
- 2.2 请说明自营商与佣金经纪人的区别。
- 2.3 假设你卖空了一份期货合约，在纽约商业交易所以每盎司\$5.20 的价格卖出 7 月份到期的白银期货。合约规模为 5 000 盎司。初始保证金为 \$4 000，维持保证金为 \$3 000。将来价格发生什么样的变化会导致追加保证金通知？如果你不补足保证金会怎样？
- 2.4 假定 2006 年 9 月，你买入了一张 2007 年 5 月到期的原油期货合约。你在 2007 年 3 月进行了平仓。你买入的时候，期货价格（每桶的价格）为 \$18.30；你平仓的时候，期货价格为 \$20.50；在 2006 年 12 月末期货价格为 \$19.10。一张合约的规模是 1 000 桶。那么，你的总收益是多少？这个收益是什么时候实现的？若你是（a）套期保值者和（b）投机者，你要付多少税？假定你的会计年末为 12 月 31 日。
- 2.5 以 \$2 价格卖出的限损指令意味着什么？在什么情况下，你会使用该指令？以 \$2 价格卖出的限价指令意味着什么？在什么情况下，你会使用该指令？
- 2.6 请说明清算所管理保证金账户与经纪人管理保证金账户有何异同。
- 2.7 外汇期货市场、外汇即期市场、外汇远期市场中的报价方式都有哪些区别？
- 2.8 期货合约的空头方有时会有权选择交割的资产，在哪儿交割，何时交割等。这些权力会使期货交割上升还是下降？请解释原因。
- 2.9 请说明设计一个新的期货合约最重要的是哪几方面。
- 2.10 请说明保证金是如何使投资者免于违约的。
- 2.11 一位投资者签订了两份冷冻橙汁的多头期货合约。每份合约的交割数量都为 15 000 磅。当前期货价格为每磅 160 美分；每份合约的初始保证金都为 \$6 000；维持保证金都为 \$4 500。价格如何变化会导致追加保证金通知？在什么情况下，可以从保证金账户中提出来 \$2 000？
- 2.12 请解释在交割期限内，一个商品的期货价格若高于现货价格时，就存在套利机会。如果期货价格低于现货价格，套利机会还存在吗？请给出你的答案。
- 2.13 请说明触及市场指令与限损指令之间的区别。

- 2.14 限损价格为 20.30，限价为 20.10，指令是卖出，这个指令意味着什么？
- 2.15 在某天结束时，一位清算所成员有 100 份多头合约，结算价格每份合约为 \$50 000。每份合约的初始保证金为 \$2 000。第二天，这位成员又以每份合约 \$51 000，签订了 20 份多头合约。这天的结算价为 \$50 200。这位成员必须向交易清算所补交多少保证金？
- 2.16 2006 年 7 月 1 日，一家美国公司买入了 1 000 万远期英镑，合约到期日为 2007 年 1 月 1 日。2006 年 9 月 1 日，该公司卖出了 1 000 万远期英镑，合约到期日为 2007 年 1 月 1 日。以 2006 年 7 月 1 日的汇率和 2006 年 9 月 1 日的汇率为自变量，用函数形式表示这家公司的损益。
- 2.17 45 天后交割的瑞士法郎的远期价格的报价为 1.8204。45 天后交割的瑞士法郎的期货价格的报价为 0.5479。请解释这两个报价方式。一位想卖掉瑞士法郎的投资者会偏爱远期还是期货？
- 2.18 假定你指示你的经纪人卖出一张 7 月份到期的活猪期货合约，请说明会发生什么情况。
- 2.19 “在期货市场的投机行为是纯粹的赌博。允许投机者在期货市场中拥有一席之位，是违背公众利益的”。请对此观点进行分析。
- 2.20 请指出表 2.2 中未平仓量最大的交易合约。分别考虑以下几部分：谷物和油籽，牲畜，食品和纤维制品，金属和汽油。
- 2.21 如果交易所交易的期货合约中没有明确指明标的资产的质量，请说明会发生什么情况？
- 2.22 请解释下面这句话：“在交易所大厅内交易一个期货合约时，未平仓合约可能增加 1 个，或保持不变，或减少 1 个”。
- 2.23 假定 2006 年 10 月 24 日，你卖出了一张 2007 年 4 月份的活牛期货合约。2007 年 1 月 21 日，你进行了平仓。你卖出期货合约时，期货价格（每磅）为 61.20 美分；你平仓时，期货价格为 58.30 美分；2006 年 12 月末，期货价格为 58.80 美分。一张合约的规模是 4 万磅活牛。那么，你的总收益是多少？若你是（a）套期保值者和（b）投机者，你要付多少税？
- 2.24 一位养牛农场主预计 3 个月后出售 12 万磅活牛。芝加哥商品交易所每份活牛期货合约的交易数量为 4 万磅。农场主如何用期货进行套期保值？以农场主的观点，套期保值的优点和缺点是什么？
- 2.25 现在为 2005 年 7 月。一采矿公司新近发现一小存储量的金矿。开发矿井需要 6 个月。然后黄金提炼可以持续 1 年左右。纽约商品交易所有黄金的期货合约交易。从 2005 年 8 月到 2006 年 12 月，隔两个月就有一个交割月份。每份期货合约的交易数额为 100 盎司。采矿公司应如何运用期货市场进行套期保值？

## 课后练习

- 2.26 一家公司签订一份空头期货合约，以每蒲式耳 250 美分卖出 5 000 蒲式耳小麦。初始保证金为 \$3 000，维持保证金为 \$2 000。价格如何变化会导致追加保证金通知？在什么情况下，可以从保证金账户中提出 \$1 500？

- 2.27 不考虑玉米的储藏成本，并假定借入或贷出资金的年利率都为 5%。现在是 2004 年 2 月 4 日，请问你应该如何利用 2004 年 3 月份到期和 2004 年 5 月份到期的期货合约获取收益？请使用表 2.2 中的数据。
- 2.28 你持有一个远期合约多头，要在未来某一天以价格  $K$  买入一个资产。同时，你持有一个看跌期权，执行价格为  $K$ ，到期日和远期合约到期日一致。那么，此时你的头寸情况相当于持有哪种证券时的头寸情况？
- 2.29 在作者的网页中 ([www.rotman.utoronto.ca/~hull/data](http://www.rotman.utoronto.ca/~hull/data)) 有 2001 年 12 月原油期货和黄金期货的每日收盘价（两种期货合约都是在 NYMEX 进行交易的）。请你下载这些数据并回答下列问题：
- (a) 一个投资者刚好具有维持保证金，假设他在第一次被要求补足追加保证金之后，连续第二次被要求补足追加保证金的可能性是 1%，那么，原油期货和黄金期货的维持保证金水平应该定为多少？如果以上的可能性是 0.1%，那么上述的维持保证金水平应该定为多少？这里假定，以上期货的每日价格变化服从均值为 0 的正态分布。
  - (b) 只考虑网站中的数据所覆盖的时间段。一个投资者在这个时间段开始时，买入了一张原油期货合约，并在整个时间段内都持有了该合约多头。保证金余额超过初始保证金的那一部分已被投资者取走。请使用你在上述 (a) 问中 1% 风险水平时的维持保证金计算结果，并假定维持保证金为初始保证金的 75%。请计算投资者在这一时间段内一共受到几次追加保证金通知要求，每次要求补足的金额为多少？这里假定投资者满足了每次追加保证金通知要求。再对于一个持有黄金期货合约空头的投资者，重新计算上述问题。

## 利用期货套期保值策略

很多期货市场参与者是套期保值者。他们的目的是利用期货市场减少他们所面临的特定风险。这种风险可能和油价、汇率、股市状况以及其他一些变量有关。完全对冲 (perfect hedge) 是指可以完全消除风险的策略。完全对冲在现实中很少能实现。所以大部分情况下，研究利用期货的套期保值策略就是研究如何设计套期保值架构，使得对冲效果最大限度地接近完全对冲策略。

本章我们将考虑设计套期保值策略所涉及的一些一般性问题。比如，在什么情况下应该持有期货空头？在什么情况下应该持有期货多头？应该利用哪种期货合约？期货头寸的规模为多少时可以最大限度地对冲风险？目前，我们将只考虑保完即忘策略 (hedge-and-forget strategy)。也就是我们假定套期保值策略开始执行之后，不再去调整该策略。在套期保值策略期初，套期保值者只是简单地持有期货头寸，套期保值期末，套期保值者就进行平仓。在第 15 章，我们将阐述动态套期保值策略，该策略当中投资者会密切监控套期保值情况，并对策略进行频繁调整。

本章我们将忽略期货合约的每日结算。也就是说，大多数情况下，我们可以忽略资金的时间成本，因为所有现金流是在套期保值头寸平仓之时发生的。

### 3.1 基本原理

个人投资者或者公司选择利用期货市场进行套期保值时，其目的往往是通过持有一定期货头寸来最大限度地使得风险中性化。考虑一家公司，它知道在未来 3 个月之内，每当某特定商品的价格上涨 1 美分时，公司能盈利 1 万美元，而每当该商品价格下跌 1 美分时，公司会损失 1 万美元。为了对冲风险，公司的财务主管应该卖出期货合约抵消这个风险。这时候，期货空头头寸的作用是，在未来 3 个月之内，每当商品价格上涨 1 美分时，期货空头头寸带来 1 万美元的损失；而每当商品价格下跌 1 美分时，期货空头头寸带来 1 万美元的收益。在这种情况下，当商品价格下跌时，持有期货空头头寸所带来的收益可以抵消公司业务中的损失。而当商品价格上涨时，公司业务中的收益可以抵消持有期货空头头寸所带来的损失。

## 空头对冲

如前面所述，空头对冲（short hedge）是通过持有期货空头进行套期保值的方法。当套期保值者当前持有某种资产，打算在将来卖出该资产，而现在想锁定其出售价格的时候，可以使用空头对冲策略。例如，一位养猪农场主预计 2 个月后可在当地市场卖出活猪，他就可以进行期货空头对冲。当套期保值者当前不持有某种资产，但在未来的某个时候将持有该资产的时候，也同样可以适用空头对冲策略。例如，一位美国出口商知道他将在 3 个月后收到欧元。若欧元兑美元汇率升高，那么出口商将获得收益，而若汇率下跌，那么出口商将遭受损失。期货空头可以在欧元兑美元汇率升高时遭受损失，而欧元兑美元汇率下跌时获得收益。这正好可以抵消该出口商所面临的汇率变动风险。

下面我们将更详细地解释在特定情形下，如何运用空头对冲策略。假定现在是 5 月 15 日，一家原油生产商刚刚签订了卖出 100 万桶原油的协议。协议中规定卖出价格为 8 月 15 日的市价。所以对于该原油生产商来说，未来 3 个月内，原油价格每上涨 1 美分，能带来 1 万美元的收益；而原油价格每下跌 1 美分，会带来 1 万美元的损失。假定 5 月 15 日原油现货价格为 \$19/桶，而纽约商品交易所的 8 月份原油期货价格为 \$18.75/桶。因为 NYMEX 的每张原油期货合约规模为 1 000 桶，该原油生产商可以通过卖空 1 000 张期货合约来对冲风险。如果该原油生产商在 8 月 15 日进行平仓，这个策略的效果是将价格锁定在 \$18.75/桶。

为了解释这一结果，假定 8 月 15 日原油现货价格变成 \$17.50/桶。那么卖出原油协议使生产商得到 1 750 万美元。因为期货合约的交割月份是 8 月份，所以 8 月 15 日的期货价格应该非常接近于当天现货价格（\$17.50/桶）。所以期货合约给生产商带来的收益大约为：

$$\$18.75 - \$17.50 = \$1.25/\text{桶}$$

整个 1 000 份期货空头头寸给生产商带来 125 万美元的收益。所以生产商在卖出协议和期货头寸中能得到 \$18.75/桶，即总共能得到 1 875 万美元。

另外一种可能的情况是，8 月 15 日原油现货价格成为 \$19.50/桶。卖出协议使得生产商得到 \$19.50/桶，期货空头使得生产商遭受损失：

$$\$19.50 - \$18.75 = \$0.75/\text{桶}$$

所以在该情况下，生产商总共也能得到大约 1 875 万美元。很容易看到，在任何情形下，生产商最后得到的收入都接近 1 875 万美元。

## 多头对冲

多头对冲（long hedge）是通过持有期货多头进行套期保值的方法。当套期保值者打算在将来购买某种资产而现在想锁定其购买价格的时候，可以使用多头对冲策略。

假定现在是 1 月 15 日，一家铜器制造商知道它将在 5 月 15 日购买 10 万磅

铜。铜的现货价格为 140 美分/磅，5 月份铜期货价格为 120 美分/磅。该制造商可以通过持有纽约商品交易所分部的 4 张 5 月份铜期货合约来对冲风险，并在 5 月 15 日平仓。每张铜期货合约规模为 25 000 磅铜。那么该策略的效果是将铜的购买价格锁定在 120 美分/磅。

假定 5 月 15 日铜现货价格为 125 美分/磅。因为期货合约的交割月份是 5 月份，所以 5 月 15 日的期货价格应该非常接近于当天现货价格（\$125/磅）。所以期货合约给制造商带来的收益大约为：

$$100\,000 \times (\$1.25 - \$1.20) = \$5\,000$$

另一方面，制造商购买铜要支付  $100\,000 \times \$1.25 = \$125\,000$ ，那么制造商的总共成本是  $\$125\,000 - \$5\,000 = \$120\,000$ 。

另外一种可能的情况是，假设 5 月 15 日铜期货价格为 105 美分/磅。期货合约给制造商带来的损失大约为：

$$100\,000 \times (\$1.20 - \$1.05) = \$15\,000$$

另一方面，制造商购买铜只需要支付  $100\,000 \times \$1.05 = \$105\,000$ ，那么制造商的总共成本还是 \$120\,000，即 120 美分/磅。

请注意，对于制造商来说，利用期货合约的效果比 1 月 15 日在现货市场直接购买铜的效果要好。如果现在直接购买铜，制造商需要支付 140 美分/磅（利用期货时，成本是 120 美分/磅），还需要支付利息成本和贮存成本。当然，对于一家经常使用铜的制造商来说，立即买入现货，可以使公司更快更方便地拥有铜，这一正面影响可能超过立即买入现货的负面影响。<sup>1</sup>但是，如果该公司在 5 月 15 日之前并不需要铜的话，利用期货套期保值对于公司更有利。

现在持有空头的情况下也可以进行多头对冲。考虑一位持有股票空头的投资者（参照 5.2 节中关于卖空的讨论）。投资者面临的风险中有一部分是和整个股市表现相关的。投资者可以通过持有股票指数期货多头对冲这一部分风险。在本章后面，将进一步讨论这种类型的套期保值策略。

上述的所有例子中，我们假设了投资者在交割月份对期货头寸进行了平仓。如果交割发生，这些套期保值策略的效果也不会有什么不同。但是，因为存在交割成本和交割的不方便因素，套期保值者虽然一直持有期货头寸到交割月份，却不会让交割发生。我们在后面将会讨论，持有期货多头的套期保值者通常在交割期限来临之前进行平仓以避免发生交割。

上面的例子中，我们都还没有考虑每日结算。现实情况中，每日结算的确对套期保值策略的表现有微小的影响。如第 2 章所述，每日结算意味着，期货合约损益是在合约有效期间内的每一天实现的，而不是合约到期之时一次实现的。

---

<sup>1</sup> 参见第 5 章中关于便利收益的讨论。

### 3.2 有关对冲的各种争论

赞成套期保值的理由是很显然的，这里不再进行阐述。市场中，大部分公司是生产商、零售商（或批发商）或者是服务商。公司内一般没有能分析和预测经济变量（如利率、汇率以及商品价格等等）变动的特殊技能或专家。所以对公司经营所涉及的变量的相关风险进行对冲是非常有必要的。这样，公司可以专注于它的主营业务，对于这部分业务公司确实具有特殊技能或专长。进行套期保值之后，公司就不会为某种商品价格大幅上涨而感到恐慌了。

现实情况中，也有许多风险保留下来不进行对冲。在本节中我们将解释几种理由。

#### 对冲与股东

反对套期保值的一种观点是，股东自己可以进行套期保值，不用公司来为他们进行套期保值。但这一观点存在一些问题。它假定股东对公司所面临的风险与公司经营管理层一样具有足够信息。但在大部分情况下，这是不太可能的。同时，这一观点中没有考虑代理成本和交易成本。大规模对冲交易中的平均套期保值成本总是会比小规模对冲交易中的平均成本要低。所以，由公司来执行套期保值的成本，总是会比股东分散地进行套期保值的成本要低。另外，期货合约交易规模有标准化规定，很多情况下，小股东是无法独自进行套期保值。

值得注意的一点是，股东往往比公司能更容易地分散风险。股东通过高度分散化投资组合可以规避一家公司所面临的很多风险。例如，当股东持有以铜为原材料的公司的股份时，高度分散化投资的股东可以再购入某一铜生产商的股份来分散风险。这样，他对于铜价变动风险的暴露非常小。如果公司在为一些高度分散化投资股东的利益而运营时，可以说，在很多情况下，公司进行套期保值是多余的。而现实中，很少有管理者赞同这一观点。

#### 对冲与竞争对手

如果一个行业中很少有套期保值行为，那么一家公司采取与其他所有公司不同的策略是无意义的。行业中的竞争压力可能是这样传递的，该行业所提供的商品或服务的价格是随着原材料成本、利率以及汇率等变动而变动的。这种情况下，不进行套期保值的公司的利润率大概维持在一定水平，而进行套期保值的公司的利润率是上下波动的！

为了解释这一观点，以两个金饰品制造商，SafeandSure 公司和 TakeaChance 公司为例。我们假定该行业中的绝大部分企业对黄金价格变动风险不进行套期保值，TakeaChance 公司也是这样。而 SafeandSure 公司决定采用与其他竞争者不同的策略，它决定利用期货对冲 18 个月后将要购买的黄金的价格风险。如果黄金价格上涨，经济环境的压力下黄金饰品价格也会上升，TakeaChance 公司的利润率不

表 3.1 其他竞争者不进行套期保值的时候，进行套期保值潜在的危险

| 黄金价格变动情况 | 对于黄金饰品 | 对于 TakeaChance 公司 | 对于 SafeandSure 公司 |
|----------|--------|-------------------|-------------------|
|          | 价格的影响  | 利润率的影响            | 利润率的影响            |
| 上 涨      | 增 加    | 无                 | 增 加               |
| 下 跌      | 降 低    | 无                 | 降 低               |

会有太大的变动。而套期保值之后的 SafeandSure 公司的利润率会有提升。如果黄金价格下跌，经济环境的压力下黄金饰品价格也会下降，TakeaChance 公司的利润率不会有太大的变动。而套期保值之后，SafeandSure 公司的利润率会下降。更糟糕的情况下，SafeandSure 公司的利润率可能就因为套期保值的行为而变成负值！表 3.1 总结了这些情况。

这一例子说明，进行套期保值决策的时候，应该注意观察大局。在对某个价格变动风险设计一个套期保值策略的时候，应该把所有影响公司利润率的其他价格变动风险因素也要考虑进来。

## 其他考虑

应该注意的一点是，与不进行套期保值相比，公司进行期货合约套期保值后给公司利润带来的影响亦正亦负。前面的原油生产商例子中，如果油价下跌，公司在售卖 100 万桶原油的交易中遭受损失，而期货头寸给它带来收益，公司财务主管会庆幸有远见地进行了套期保值。很明显，进行套期保值比不进行套期保值对公司更有利。公司其他组织机构主管人员会赞赏财务主管的功劳。如果油价上涨，公司在售卖 100 万桶原油的交易中获益，而期货头寸给它带来损失，进行套期保值反而给公司带来了负面影响。虽然决定套期保值是合乎逻辑的，但公司财务主管在一段时间内很难让旁人相信套期保值的正当性。假定套期保值期间结束之时，油价为 \$21.75/桶，公司在期货合约中损失 \$3/桶。我们可以想像财务主管和总裁之间会发生如下的对话：

总裁：这个后果太严重了。过去 3 个月，我们在期货市场中损失了 300 万美元。这是怎么回事？我要你对此进行充分解释。

财务主管：持有期货头寸是为了对冲油价变动风险，而不是为了获利。不要忘了油价上涨使得我们在卖出原油的时候赚了 300 万美元。

总裁：这么说有什么用？这就像是说我们在加州销售额下降的时候用不着担心，因为纽约销售额在上升。

财务主管：如果油价下跌了，那么……

总裁：我不在乎油价下跌会发生什么事情，事实是油价已经上涨了。我不知道你为什么这样涉足于期货市场。公司股东一直在期待我们在这个季度能给出一个好的业绩。我只好跟他们解释你的这一行为使得公司利

### 商业剪影 3.1 采金公司的套期保值

很自然地，采金公司考虑如何对冲黄金价格变化风险。公司需要很多年才能采完一个金矿。一旦采金公司决定开采某个金矿，它们对黄金价格变化风险的暴露就非常大。即使金矿在开始阶段看起来有利可图，但如果黄金价格大幅下降，公司可能无法盈利了。

许多采金公司把它们的套期保值策略解释给潜在股东的时候非常谨慎。有一些采金公司不进行套期保值。这些公司对买入黄金股票的股东非常有吸引力，因为这些股东在黄金价格上升的时候盈利，而且他们已经准备好黄金价格下降的时候承担相应的风险。其他一些采金公司选取对冲策略，它们估计在未来几年中每个月的黄金产量，随后持有期货或远期合约空头，就能锁定公司将收到的黄金价格。

假设高盛刚和一家采金公司签订了一个远期合约，其中规定高盛将以指定价格买入大量黄金。那高盛应该如何对冲它的风险呢？答案是高盛可从中央银行借入黄金并以当前市价卖出（很多国家的中央银行都持有大量黄金）。远期合约到期之时，高盛从采金公司以合约条款说明的方式买入黄金，并将这些黄金归还给中央银行。中央银行收取一定费用（一般是年利率 1.5%），就是所谓的黄金租借率。

润白白减少了 300 万美元。恐怕你今年不能得到年终奖金了。

财务主管：这不公平。我只是……

总裁：不公平？你应该庆幸你没有被炒掉，公司损失了 300 万美元啊！

财务主管：这取决于你如何看待这个问题。

这就是很多财务主管不愿意进行套期保值的原因。进行套期保值可以对冲公司面临的风险，但如果其他人不完全知道套期保值的意义，则可能会提高财务主管所面临的风险。解决方法只有一个，在执行套期保值方案之前，必须确保公司机构内的所有高级主管人员完全理解套期保值的意义。理想的情况是，公司董事会制定套期保值策略，同时公司管理层要和股东进行充分的交流（参照商业剪影 3.1 中关于采金公司的套期保值的讨论）。

### 3.3 基差风险

以上我们考虑的套期保值的例子都很完美，实际并不如此。套期保值者准确地知道将来他买入或卖出资产的时间，这样，套期保值者可以利用期货对冲那个时刻资产价格变动引起的几乎所有风险。现实中，套期保值所面临的情况通常不是这么简单明确的。请看以下几个理由：

1. 将要对冲价格变动风险的资产和期货合约的标的资产可能不是完全一样的
2. 套期保值者可能不知道买入或卖出资产的准确时间
3. 套期保值过程中可能会要求在期货交割月份之前进行平仓

因为这些问题的存在，我们提出基差风险这一概念。下面，我们将对基差风险进行解释。

## 基 差

在套期保值的情况下，基差 (basis) 的定义为：<sup>2</sup>

$$\text{基差} = \text{计划进行套期保值资产的现货价格} - \text{所使用合约的期货价格}$$

如果要进行套期保值的资产与期货合约的标的资产一致，在期货合约到期日基差应为零。在到期日之前，基差可能为正值或为负值。对于有效期非常短的期货合约，期货价格应该和现货价格相同。从表 2.2 和图 2.2 中可以看到，某些资产的基差是负值（如黄金），而某些资产的基差是正值（如布伦特原油）。

当现货价格的增长大于期货价格的增长时，基差也随之增加，称为基差扩大 (strengthening of the basis)。当期货价格的增长大于现货的价格增长时，基差减少，称为基差减少 (weakening of the basis)。图 3.1 说明了基差随着时间变动的一种情况（该例子中，期货合约到期之前，基差一直是正值）。

为了检验基差风险的性质，我们使用如下的符号：

$S_1$ : 在  $t_1$  时刻现货的价格

$S_2$ : 在  $t_2$  时刻现货的价格

$F_1$ : 在  $t_1$  时刻期货的价格

$F_2$ : 在  $t_2$  时刻期货的价格

$b_1$ : 在  $t_1$  时刻的基差

$b_2$ : 在  $t_2$  时刻的基差

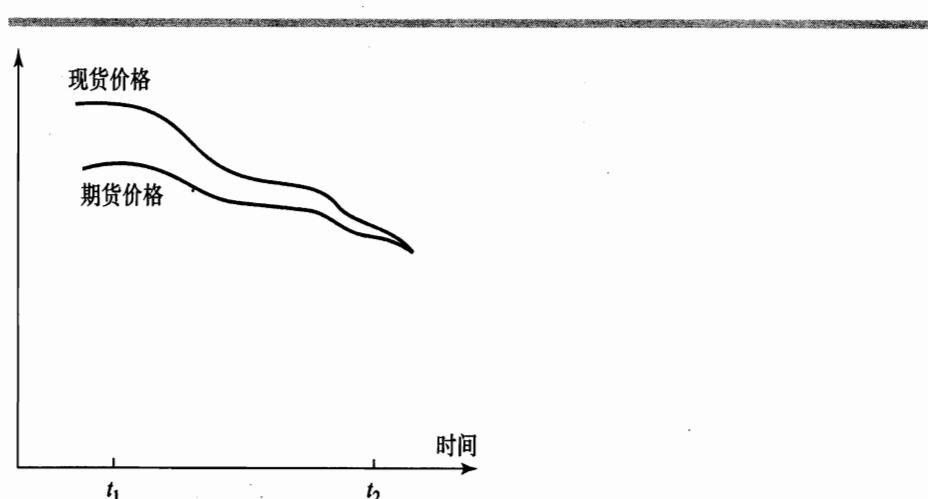


图 3.1 基差随着时间的变化

<sup>2</sup> 这是通常的定义。然而有时也使用如下的定义：基差 = 期货价格 - 现货价格，特别是当期货合约以金融资产为标的资产时。

我们假定在  $t_1$  时刻进行对冲操作，并在  $t_2$  时刻平仓。我们考虑这样一个例子，在建立套期保值初始时刻，现货和期货的价格分别为 \$2.50 和 \$2.20；在平仓时，现货和期货的价格分别为 \$2.00 和 \$1.90。即  $S_1=2.50$ ,  $F_1=2.20$ ,  $S_2=2.00$ ,  $F_2=1.90$ 。

根据基差的定义：

$$b_1 = S_1 - F_1$$

$$b_2 = S_2 - F_2$$

在本例中， $b_1 = 0.30$ ,  $b_2 = 0.10$ 。

考虑第一种情况，套期保值者知道将于  $t_2$  时刻出售资产，并在  $t_1$  时刻持有期货的空头。该资产实现的价格为  $S_2$ ，期货头寸的盈利为  $F_1 - F_2$ 。则套期保值资产获得的有效价格为：

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

在本例中，上式的值为 \$2.30。在  $t_1$  时刻  $F_1$  的价值是已知的。如果此时  $b_2$  也是已知的，那就可以进行完全的套期保值。套期保值风险是与  $b_2$  有紧密相关的不确定性。我们称之为基差风险 (basis risk)。考虑另一种情况，公司知道它将于  $t_2$  时刻购买资产，并在  $t_1$  时刻进行多头套期保值。为该资产支付的价格为  $S_2$ ，在对冲的期货头寸上的损失为  $F_1 - F_2$ 。则套期保值资产所支付的有效价格为：

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

与前面的表述方式一致，在本例中上式的值为 \$2.30。在  $t_1$  时刻  $F_1$  的价值是已知的， $b_2$  这一项代表了基差风险。

注意，基差风险可以使得套期保值者的头寸状况得以改善或更加恶化。考虑一个空头套期保值。如果基差意想不到地扩大，则套期保值者的头寸状况就会得到改善；相反，如果基差意想不到地缩小，则套期保值者的头寸状况就会恶化。对于多头套期保值来说，情况则相反。如果基差想不到地扩大，则保值者的头寸状况会恶化；而当基差想不到地缩小时，保值者的头寸状况就会改善。

有时，投资者面临风险的资产不同于进行套期保值的期货合约的标的资产。在这种情况下，基差风险就会更大。定义  $S_2^*$  为  $t_2$  时刻期货合约的标的资产的价格。和以前一样， $S_2$  是已经进行保值的资产在  $t_2$  时刻的价格。通过对冲，公司确定了购买（或收取）资产的价格为：

$$S_2 + F_1 - F_2$$

也可以变形为：

$$F_1 + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*)$$

$S_2^* - F_2$  和  $S_2 - S_2^*$  这两项代表了基差的两个组成部分。当打算进行套期保值的资产与期货合约中的标的资产一致时，存在的基差为  $S_2^* - F_2$ 。当这两个资产不同时，上式中的  $S_2 - S_2^*$  项就是两个资产不一致时产生的基差。

## 合约的选择

影响基差风险的一个关键因素是套期保值所选用的期货合约。选择包括两个方面：

1. 选择期货合约的标的资产
2. 选择交割月份

如果打算保值的资产正好是期货合约的标的资产，通常以上第一项选择是非常容易的。在其他的情况下，必须仔细分析才能确定一个合适的期货合约，该期货合约的期货价格与打算保值的资产价格的相关性最大。

交割月份的选择可能受几个因素的影响。在本章前面给出的例子中，我们假定，当套期保值的到期日与某一交割月份一致时，应选择该交割月份的期货合约。事实上，在这种情况下，通常选择随后交割月份的期货合约。这是由于在某些情况下，交割月份中的期货价格非常不稳定。同时，如果多头的保值者在交割月份中持有合约，则他将面临着不得不接收实物资产交割的风险。这会使成本很高并且极不方便。

整体上看，当套期保值的到期日与交割月份之间的差距增加时，基差风险增加。因此，最好的方法是尽量选择最接近套期保值到期的那个交割月份，当然交割月份要在套期保值到期之后。假定某个特定合约的交割月份是3月份、6月份、9月份和12月份。如果套期保值的到期日是12月份、1月份和2月份时，则应选择3月份的期货合约；如果套期保值的到期日为3月份、4月份和5月份，则应选择6月份的期货合约；依此类推。这一方法假定所有合约都有很强的流动性，能满足套期保值者的要求。实际上，到期期限短的期货合约的流动性最强。因此，在有些情况下，保值者可能倾向于使用到期期限短的合约，并不断将合约向前进行展期。在本章的后面部分中将解释这一策略。

**[例3.1]** 在3月1日，某个美国公司预期在7月底收到5 000万日元。芝加哥商品交易所的日元期货的交割月份为3月份、6月份、9月份和12月份。每一合约交割的金额为1 250万日元。因此，公司在3月1日卖出4个9月份日元期货。当7月底收到日元时，公司平仓其期货合约。我们假定3月1日的期货价格为每日元0.7800美分，当期货合约平仓时现货和期货的价格分别为每日元0.7200和0.7250美分。

那么，公司在期货中盈利  $0.7800 - 0.7250 = 0.0550$ （每日元美分数）。即当合约平仓时基差为  $0.7200 - 0.7250 = -0.0050$ （每日元美分数）。则收到的有效价格为最后的现货价格加上在期货中的盈利：

$$0.7200 + 0.0550 = 0.7750 \text{ (每日元美分数)}$$

也等于初始的期货价格加上最后的基差：

$$0.7800 + (-0.0050) = 0.7750 \text{ (每日元美分数)}$$

公司收到 5 000 万日元的美元总额为  $50\,000\,000 \times \$0.00775$ , 即 \$387\,500。

**[例 3.2]** 在 6 月 8 日, 某公司得知在 10 月份或 11 月份的某时刻它将购买 2 万桶原油。在 NYMEX 交易的原油期货合约每一个月份都有交割, 每张合约的规模为 1 000 桶。公司决定使用 12 月份期货合约来进行套期保值, 并买入了 20 张 12 月份的期货合约。6 月 8 日该期货的价格为每桶 \$18.00。公司准备在 11 月 10 日购买原油。因此在那天期货合约要进行平仓。在 11 月 10 日现货和期货的价格分别为每桶 \$20.00 和 \$19.10。

那么, 公司在期货中盈利  $19.10 - 18.00 = \$1.10/\text{桶}$ 。当合约平仓时基差为  $20.00 - 19.10 = \$0.90/\text{桶}$ 。支付的有效价格 (每桶美元数) 为最后的现货价格减去期货的盈利:

$$20.00 - 1.10 = 18.90$$

也等于初始的期货价格加上最后的基差:

$$18.00 + 0.90 = 18.90$$

公司支付的总额为  $18.90 \times 20\,000 = \$378\,000$ 。

### 3.4 交叉对冲

到现在为止我们所举的例子中, 期货合约的标的资产和投资者要对冲风险的资产是相同的。当这两种资产不相同的时候, 我们可以使用交叉对冲策略。例如, 考虑一家航空公司, 它面临航空燃油的价格变动风险。因为没有航空燃油期货, 航空公司可能利用原油期货对冲风险。

套期保值率 (hedge ratio) 是持有期货合约的头寸大小与风险暴露资产大小之间的比率。当打算保值的资产正好是期货合约的标的资产时, 套期保值率通常选取 1.0。在此之前的例子中, 我们一直都使用这个套期保值率。例如, 在例子 3.2 中, 套期保值者的风险暴露为 2 万桶原油, 而他所利用的期货合约交割规模也为同样数量的原油。

交叉对冲策略中, 套期保值率为 1.0 不一定是最佳的。套期保值者选取的套期保值率应使保值资产价值的方差最小化。下面我们考虑套期保值者是如何做到这一点的。

#### 计算最小方差的套期保值率

我们使用如下的符号:

$\Delta S$ : 在套期保值期限内, 现货价格  $S$  的变化

$\Delta F$ : 在套期保值期限内, 期货价格  $F$  的变化

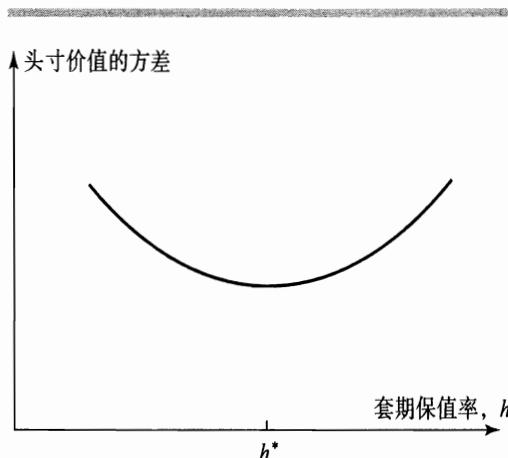


图 3.2 套期保值者头寸价值的方差与套期保值率的关系

 $\sigma_s$ :  $\Delta S$  的标准差 $\sigma_F$ :  $\Delta F$  的标准差 $\rho$ :  $\Delta S$  和  $\Delta F$  之间的相关系数 $h^*$ : 使得套期保值者头寸方差最小的套期保值率

本章最后的附录中，我们将给出这样的结论：

$$h^* = \rho \frac{\sigma_s}{\sigma_F} \quad (3.1)$$

最佳的套期保值率等于  $\Delta S$  和  $\Delta F$  之间的相关系数乘以  $\Delta S$  的标准差与  $\Delta F$  的标准差之间的比率。图 3.2 说明套期保值者头寸价值的方差与套期保值率之间的关系。

如果  $\rho = 1$  且  $\sigma_F = \sigma_s$ ，最佳的套期保值率  $h^*$  为 1.0。由于在这种情况下，期货价格完全反映了现货价格，以上的值正好是我们所预期的值。如果  $\rho = 1$  且  $\sigma_F = 2\sigma_s$ ，最佳套期保值率  $h^*$  为 0.5。这一结果也正如我们所预期的，这是由于在这种情况下，期货价格变化总是等于现货价格变化的两倍。

最佳的套期保值率  $h^*$  等于  $\Delta S$  关于  $\Delta F$  进行线性回归得出的最优拟合直线的斜率，如图 3.3 所示。这个结论比较直观，因为我们选取的  $h^*$  对应于  $\Delta S$  的变化与  $\Delta F$  的变化之比。套期保值效益 (hedge effectiveness) 可以定义为价值变动的方差中被套期保值所消除的比例。也就是  $\Delta S$  关于  $\Delta F$  的线性回归得出的  $R^2$ ，等于  $\rho^2$ ，即：

$$h^2 \frac{\sigma_F^2}{\sigma_s^2}$$

公式 3.1 中，参数  $\rho$ 、 $\sigma_F$  和  $\sigma_s$  一般从  $\Delta S$  和  $\Delta F$  的历史数据估计（这里隐含的假设是，在某种意义上，过去可以说明未来）。我们选取等长度而互不重叠的一系列时段，并观察这些时段内的  $\Delta S$  值和  $\Delta F$  值。最为理想的情况是，选取的时段长

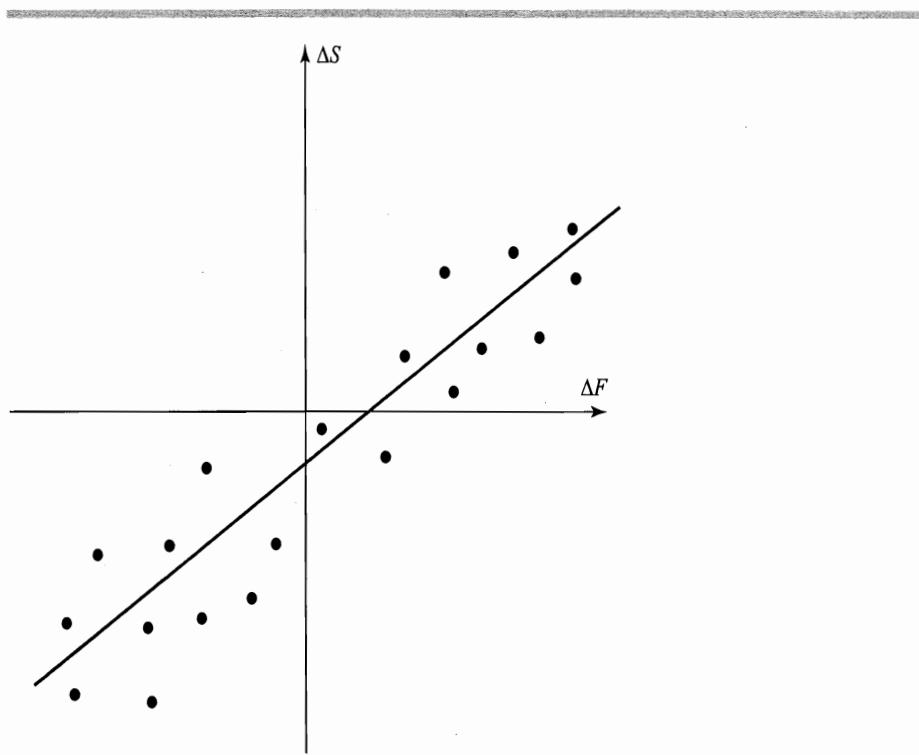


图 3.3 现货价格变化关于期货价格变化的线性回归

度和套期保值有效期间的长度正好相等。而现实中，有时可用的观测值数量非常有限，这时通常选取较短的时段长度。

## 最佳合约数量

定义如下的变量：

$N_A$ : 打算保值的资产规模 (即打算保值的资产一共多少单位)

$Q_F$ : 一张期货合约的规模 (以标的资产的单位衡量)

$N^*$ : 套期保值需要的最佳期货合约数量

那么，期货合约账面价值为  $h^*N_A$ ，需要的期货合约数量为：

$$N^* = \frac{h^*N_A}{Q_F} \quad (3.2)$$

[例 3.3] 某航空公司知道它将在 1 个月后购买 200 万加仑的航空燃油，公司选择购买民用燃料油期货合约来进行套期保值。<sup>3</sup> 我们假定表 3.2 中已经给出了连续 15 个月内数据的变化： $\Delta S$  为每月航空燃油价格（每加仑）的变化， $\Delta F$  为每月民

<sup>3</sup> 关于美国德尔塔航空公司利用民用燃料油期货对冲未来购买航空燃油的风险的例子，参见 A. Ness, “Delta Wins on Fuel” Risk, June 2001, p.8.

表 3.2 利用民用燃料油期货对航空燃油的购买进行套期保值的时候，最小方差套期保值率的计算数据

| 月<br><i>i</i> | 每加仑期货价格<br>变化 ( $x_i$ ) | 每加仑航空燃油价格<br>变化 ( $y_i$ ) |
|---------------|-------------------------|---------------------------|
| 1             | 0.021                   | 0.029                     |
| 2             | 0.035                   | 0.020                     |
| 3             | -0.046                  | -0.044                    |
| 4             | 0.001                   | 0.008                     |
| 5             | 0.044                   | 0.026                     |
| 6             | -0.029                  | -0.019                    |
| 7             | -0.026                  | -0.010                    |
| 8             | -0.029                  | -0.007                    |
| 9             | 0.048                   | 0.043                     |
| 10            | -0.006                  | 0.011                     |
| 11            | -0.036                  | -0.036                    |
| 12            | -0.011                  | -0.018                    |
| 13            | 0.019                   | 0.009                     |
| 14            | -0.027                  | -0.032                    |
| 15            | 0.029                   | 0.023                     |

用燃料油期货合约价格变化，民用燃料油期货将用于对冲未来 1 个月内航空燃油价格变动风险。我们记观测值数量为  $n$ ，这里是 15。 $\Delta S$  和  $\Delta F$  的第  $i$  个观测值，我们分别记为  $x_i$  和  $y_i$ 。从表 3.2 我们可以计算出：

$$\begin{aligned}\sum x_i &= -0.013 & \sum x_i^2 &= 0.0138 \\ \sum y_i &= 0.003 & \sum y_i^2 &= 0.0097 \\ \sum x_i y_i &= 0.0107\end{aligned}$$

根据统计学标准公式，我们可以估计  $\sigma_F$  如下：

$$\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n-1} - \frac{(\sum x_i)^2}{n(n-1)}} = 0.0313$$

$\sigma_S$  的估计如下：

$$\sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n-1} - \frac{(\sum y_i)^2}{n(n-1)}} = 0.0263$$

$\rho$  的估计如下：

$$\frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}} = 0.928$$

那么根据公式 3.1，最小方差套期保值率（即最佳的套期保值率） $h^*$  为：

$$0.928 \times \frac{0.0263}{0.0313} = 0.78$$

NYMEX中交易的一张民用燃料油期货合约是 42 000 加仑。根据公式 (3.2)，最佳合约数量为：

$$\frac{0.78 \times 2\,000\,000}{42\,000} = 37.14$$

四舍五入取整数，需要 37 张合约。

### 3.5 股票指数期货

接下来，我们将考虑股票指数期货，并说明它在对冲或控制股票价格风险中的应用。

股票指数反映了一个假想的股票组合的价值变化。每种股票在组合中的权重等于组合中投资于该股票的比例。定义一个很小的时间段内股票指数上升百分比等于同一时间段内该假想组合价值的上升百分比。计算中通常不考虑红利，换句话说，股票指数只追踪投资组合的资本损益。<sup>4</sup>

值得注意的是，如果假想组合中的股票保持不变，则组合中个股的权重就不会保持不变。如果组合中某一股票的价格比其他股票上涨快得多，该股票的权重就会自动地增大。某些股票指数是从包含一系列股票、每种股票只有一股的假想组合中得出的。那么每种股票的权重与组合中该股票市价成正比（股票分割发生时，对权重进行相应的调整）。还有一些股票指数在构造假想组合时设定股票权重与该股票总市值（股价×流通的股票数）成正比。那么，假想组合可以自动反映股票分割、股票股利或新股发行的影响。

#### 股票指数

表 3.3 为 2004 年 2 月 5 日在《华尔街日报》上刊登的一系列不同股票指数的期货合约的价格。这些价格是 2004 年 2 月 4 日的交易收盘价。

道琼斯工业平均指数是从包含美国 30 种蓝筹股的组合中得出的。股票权重与股票市价成正比。芝加哥期货交易所交易两种该指数期货合约。第一种期货合约规模为指数乘以 \$10，另外一种微型道琼斯工业平均指数合约规模为指数乘以 \$5。

标准普尔 500 指数是一个包括 500 种不同股票的组合：400 种工业股、40 种公用事业股、20 种交通事业股和 40 种金融机构股。在任一时间股票的权重与该股票总市值成正比。该指数占纽约股票交易所全部上市公司股票总市值的 80%。芝加哥商品交易所交易两种该指数期货合约。第一种合约规模为指数乘以 \$250，另外一种期货合约（称为微型 S&P 500 合约）规模为指数乘以 \$50。S&P MidCap 400 指数类似于 S&P 500 指数，但它是基于 400 种股票的组合，所占的总市值要低一些。

纳斯达克 100 指数是一个包含使用美国全国证券交易商协会自动报价服务的

---

<sup>4</sup> 一个例外是总收益指数。该指数计算中假定，假想组合的红利再投资于该组合。

表 3.3 2004 年 2 月 5 日《华尔街日报》股票指数期货行情：（每列分别为交割月份、开盘价、当日最高价、当日最低价、结算价格、变化值、有效期内的最高价、有效期内的最低价和未平仓量）

| <b>Index Futures</b>                                |              |              |                 |          |          |          |        |           |
|---|--------------|--------------|-----------------|----------|----------|----------|--------|-----------|
| <b>DJ Industrial Average (CBT)-\$10 x index</b>     |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 10446        | 10507        | 10418           | 10440    | -38      | 10687    | 8580   | 36,831    |
| June  | ...          | ...          | 10419           | 10475    | -9000    | 581      |        |           |
| Est vol   | 11,816;      | vol          | Tue 182;        | open int | 37,455,  | -65.     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 10524.22; | Lo 10447.18; | Close 10470.74, | -34.44.  |          |          |        |           |
| <b>Mini DJ Industrial Average (CBT)-\$5 x index</b> |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 10446        | 10506        | 10417           | 10440    | -38      | 10687    | 9069   | 46,175    |
| Vol Wed   | 70,499;      | open int     | 48,145,         | -1,739.  |          |          |        |           |
| <b>DJ-AIG Commodity Index (CBT)-\$100 x index</b>   |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Feb   | ...          | 439.3        | -3.5            | 456.2    | 452.1    | 2,351    |        |           |
| Est vol   | 1,150;       | vol          | Tue 220;        | open int | 2,571,   | unch.    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 139.159;  | Lo 137.163;  | Close 137.350,  | -1.171.  |          |          |        |           |
| <b>S&amp;P 500 Index (CME)-\$250 x index</b>        |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 11292        | 113360       | 112300          | 112390   | -910     | 123950   | 77700  | 585,763   |
| June  | 112620       | 113100       | 112250          | 112290   | -910     | 115350   | 78000  | 21,212    |
| Est vol   | 46,110;      | vol          | Tue 45,600;     | open int | 610,710, | +107.    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 1136.03;  | Lo 1126.52;  | Close 1126.52,  | -9.51.   |          |          |        |           |
| <b>Mini S&amp;P 500 (CME)-\$50 x index</b>          |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 113304       | 113350       | 112200          | 112400   | -900     | 115500   | 98650  | 539,366   |
| Vol Wed   | 595,531;     | open int     | 550,820,        | -18,936. |          |          |        |           |
| <b>S&amp;P Midcap 400 (CME)-\$500 x index</b>       |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 584.50       | 586.00       | 580.30          | 580.80   | -6.00    | 603.25   | 559.75 | 15,879    |
| Est vol   | 582;         | vol          | Tue 672;        | open int | 15,880,  | -98.     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 587.39;   | Lo 580.91;   | Close 581.63,   | -5.76.   |          |          |        |           |
| <b>Nasdaq 100 (CME)-\$100 x index</b>               |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 148850       | 148850       | 146200          | 146300   | -2400    | 150900   | 146200 | 72,861    |
| Est vol   | 14,295;      | vol          | Tue 9,985;      | open int | 72,918,  | -246.    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 1482.35;  | Lo 1461.01;  | Close 1462.61,  | -29.24.  |          |          |        |           |
| <b>Mini Nasdaq 100 (CME)-\$20 x index</b>           |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 1488.0       | 1489.0       | 1461.5          | 1463.0   | -24.0    | 1563.0   | 1307.0 | 249,320   |
| Vol Wed   | 257,039;     | open int     | 250,794,        | +4,618.  |          |          |        |           |
| <b>GSCI (CME)-\$250 x nearby index</b>              |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Feb   | 264.50       | 266.10       | 258.50          | 258.50   | -5.50    | 274.50   | 251.50 | 14,534    |
| Est vol   | 243;         | vol          | Tue 104;        | open int | 14,901,  | +31.     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 265.61;   | Lo 258.87;   | Close 259.53,   | -4.02.   |          |          |        |           |
| <b>TRAKRS Long-Short Tech (CME)-\$1 x index</b>     |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| July  | 40.30        | 40.30        | 39.82           | 39.82    | -1.40    | 45.25    | 19.76  | 410,834   |
| Est vol   | 87;          | vol          | Tue 150;        | open int | 410,834, | +150.    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 40.03;    | Lo 38.16;    | Close 38.56,    | -1.47.   |          |          |        |           |
| <b>Russell 2000 (CME)-\$500 x index</b>             |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 576.50       | 576.50       | 563.50          | 563.75   | -14.40   | 585.75   | 557.50 | 22,953    |
| Est vol   | 3,572;       | vol          | Tue 969;        | open int | 22,953,  | -42.     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 579.15;   | Lo 564.03;   | Close 564.03,   | -15.12.  |          |          |        |           |
| <b>Russell 1000 (NYFE)-\$500 x index</b>            |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | ...          | 601.00       | -5.05           | 618.00   | 603.00   | 77,631   |        |           |
| Est vol   | 79;          | vol          | Tue 66;         | open int | 77,631,  | -72.     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 607.34;   | Lo 601.23;   | Close 602.10,   | -5.24.   |          |          |        |           |
| <b>NYSE Composite Index (NYFE)-\$50 x index</b>     |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | ...          | 6509.50      | -57.00          | 6556.00  | 6115.00  | 1,260    |        |           |
| Est vol   | 0;           | vol          | Tue 0;          | open int | 1,260,   | unch.    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 6574.76;  | Lo 6520.91;  | Close 6526.10,  | -48.72.  |          |          |        |           |
| <b>U.S. Dollar Index (FINEX)-\$1,000 x index</b>    |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 87.04        | 87.30        | 86.92           | 87.02    | .04      | 103.18   | 85.10  | 16,414    |
| June  | ...          | ...          | 87.43           | .04      | 88.37    | 85.71    | 2,116  |           |
| Est vol   | 2,500;       | vol          | Tue 2,272;      | open int | 18,543,  | +610.    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 87.10;    | Lo 86.70;    | Close 86.84,    | +.05.    |          |          |        |           |
| <b>Nikkei 225 Stock Average (CME)-\$5 x index</b>   |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 10400.       | 10510.       | 10360.          | 10380.   | -265     | 11155.   | 7670.  | 30,555    |
| Est vol   | 3,558;       | vol          | Tue 2,468;      | open int | 30,730,  | +33.     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 10627.26; | Lo 10418.77; | Close 10447.25, | -194.67. |          |          |        |           |
| <b>Share Price Index (SFE)-AUD 25 x index</b>       |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 3257.0       | 3267.0       | 3250.0          | 3254.0   | -2.0     | 3346.0   | 2700.0 | 160,822   |
| June  | 3264.0       | 3278.0       | 3264.0          | 3266.0   | -2.0     | 3350.0   | 2700.0 | 3,931     |
| Est vol   | 10,928;      | vol          | Tue 10,169;     | open int | 167,890, | +2,133.  |        |           |
| Idx prf:  | Hi 3273.5;   | Lo 3263.6;   | Close 3265.6,   | +1.3.    |          |          |        |           |
| <b>CAC-40 Stock Index (MATIF)-€10 x index</b>       |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Feb   | 3426.0       | 3432.5       | 3403.0          | 3414.0   | -29.5    | 3729.5   | 3531.5 | 346,178   |
| Mar   | 3630.0       | 3634.5       | 3610.5          | 3620.0   | -29.5    | 3734.5   | 3885.0 | 130,956   |
| June  | 3563.5       | 3563.5       | 3562.5          | 3560.5   | -29.0    | 3651.5   | 3282.0 | 8,810     |
| Est vol   | 77,201;      | vol          | Tue 76,586;     | open int | 489,860, | +19,063. |        |           |
| Idx prf:  | Hi 3625.38;  | Lo 3602.94;  | Close 3607.57,  | -30.64.  |          |          |        |           |
| <b>Xetra DAX (EUREX)-€25 x index</b>                |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 4050.0       | 4056.0       | 4018.0          | 4029.5   | -31.0    | 4190.0   | 3237.5 | 286,286   |
| June  | 4065.0       | 4074.5       | 4042.5          | 4050.5   | -31.0    | 4210.0   | 3251.0 | 10,167    |
| Sept  | 4086.5       | 4096.0       | 4064.0          | 4072.0   | -31.5    | 4231.0   | 3961.0 | 2,874     |
| Vol Wed   | 113,473;     | open int     | 299,327,        | -1,522.  |          |          |        |           |
| Idx prf:  | Hi 4050.08;  | Lo 4008.80;  | Close 4028.37,  | -29.14.  |          |          |        |           |
| <b>FTSE 100 Index (LIFFE)-£10 x index</b>           |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 4340.0       | 4386.5       | 4339.5          | 4376.0   | 10.0     | 4509.5   | 3895.5 | 426,561   |
| June  | 4352.0       | 4385.5       | 4352.0          | 4384.5   | 9.5      | 4514.0   | 4019.5 | 17,929    |
| Sept  | 4372.5       | 4374.5       | 4372.5          | 4394.5   | 10.0     | 4526.5   | 4288.5 | 10,192    |
| Vol Wed   | 59,473;      | open int     | 462,529,        | +1,934.  |          |          |        |           |
| Idx prf:  | Hi 4409.30;  | Lo 4369.10;  | Close 4398.50,  | +7.90.   |          |          |        |           |
| <b>DI Euro STOXX 50 Index (EUREX)-€10 x index</b>   |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 2834.0       | 2841.0       | 2820.0          | 2821.0   | -27.0    | 2921.0   | 2376.0 | 1,226,828 |
| June  | 2797.0       | 2800.0       | 2785.0          | 2783.0   | -27.0    | 2883.0   | 2364.0 | 88,041    |
| Sept  | 2796.0       | 2796.0       | 2787.0          | 2782.0   | -27.0    | 2881.0   | 2709.0 | 14,454    |
| Vol Wed   | 384,795;     | open int     | 1,329,323,      | -2,788.  |          |          |        |           |
| Idx prf:  | Hi 2839.55;  | Lo 2816.18;  | Close 2819.92,  | -21.34.  |          |          |        |           |
| <b>DJ STOXX 50 Index (EUREX)-€10 x index</b>        |              |              |                 |          |          |          |        |           |
| Mar   | 2675.0       | 2689.0       | 2671.0          | 2674.0   | -14.0    | 2757.0   | 2393.0 | 39,662    |
| June  | ...          | ...          | 2653.0          | -14.0    | ...      | ...      | ...    | 640       |
| Est vol   | 1,895;       | open int     | 40,302,         | +513.    |          |          |        |           |
| Idx prf:  | Hi 2698.24;  | Lo 2681.59;  | Close 2689.82,  | -5.23.   |          |          |        |           |

资料来源：Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc., © 2004 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

100 种股票的组合。CME 交易两种该指数期货合约。第一种期货合约规模为指数乘以 \$100，另外一种期货合约（微型纳斯达克 100 合约）规模为指数乘以 \$20。

罗素 2000 指数是一个包含 2 000 种总市值比较小的美国股票的价格指数。罗素 1000 指数是一个包含总市值最大的 1 000 种美国股票的价格指数。纽约股票交易所综合指数是一个在纽约股票交易所上市的所有股票组成的组合。美元指数是一个由 6 种外币（欧元、日元、英镑、加元、瑞典克朗和瑞士法郎）按货币交易额的比例加权的指数。日经 225 股票平均指数是一个在东京股票交易所交易的 225

家最大股票的组合。按股票的价格加权。在芝加哥商品交易所交易的该指数期货合约规模为指数乘以\$5。

股票行市指数也就是普通股股价指数，是一个反映澳大利亚股票市场的指数。CAC-40 指数是基于法国股票市值最大 40 家公司的组合。Xetra DAX 指数是基于在德国交易的 30 种股票的组合。FTSE 100 指数是基于在伦敦股票交易所上市的 100 家主要的英国股票的组合。DJ Euro Stoxx 50 指数和 DJ stoxx 50 指数是道琼斯和其欧洲合作者编制的两种不同的欧元区蓝筹股的指数。这些指数的期货合约在欧洲期货交易所进行交易，合约规模为指数乘以 10 欧元。

表 3.3 中还有一些指数并不是股票指数。道琼 AIG 商品指数和高盛商品指数是反映商品价格的指数。TRAKS 多空技术指数与其他普通的指数不一样，其组合包括单个科技股的多头和代表科技行业的金融工具的空头，该指数反映上述组合的表现。

第 2 章中已经提过，股票指数期货合约进行现金交割，而不实际交割标的资产。在最后一个交易日，所有合约是盯市的，结算价格或为开盘价或为收盘价，并且所有头寸必须平仓。例如，S&P 500 期货的结算价是交割月份的第 3 个星期五的开盘价格所计算的指数价值。

## 股票组合的套期保值

股票指数期货能用来对冲一个高度分散化股票组合的风险。定义：

$P$ ：该证券组合的现价

$A$ ：一张期货合约的标的股票的现价

如果该证券组合和指数的组合完全一致，那么最佳套期保值率  $h^*$  为 1.0。根据公式 (3.2)，对冲时应卖空的最佳合约数目是：

$$N^* = \frac{P}{A} \quad (3.3)$$

例如，考虑一个与 S&P 500 指数的组合完全一致的证券组合，该证券组合价值为 100 万美元。当前的 S&P 指数为 1 000，每张期货合约价值为该指数乘以 \$250。在这个例子中  $P = 1\,000\,000$ ,  $A = 250\,000$ ，由此可见应卖空 4 张合约来对冲证券组合的风险。

当证券组合和指数的组合不完全一致时，我们可以使用资本资产定价模型 (CAPM) 中的参数  $\beta$  来确定合适的套期保值率。 $\beta$  是该证券组合超出无风险利率的超额收益对股票市场超出无风险利率的超额收益进行回归得到的最优拟合直线的斜率。当  $\beta = 1.0$  时，该证券组合的收益就反映了市场的收益；当  $\beta = 2.0$  时，该证券组合的超额收益为市场超额收益的两倍；当  $\beta = 0.5$  时，该证券组合的超额收益为市场超额收益的一半；依此类推。

对于市场变动， $\beta = 2.0$  的证券组合的敏感度是  $\beta = 1.0$  的证券组合的敏感度的两倍。所以，我们必须使用两倍的期货合约来对冲  $\beta = 2.0$  的证券组合。类似地，

表 3.3 2004 年 2 月 5 日《华尔街日报》股票指数期货行情：（每列分别为交割月份、开盘价、当日最高价、当日最低价、结算价格、变化值、有效期内的最高价、有效期内的最低价和未平仓量）

| <b>Index Futures</b>                                |             |             |                |          |         |         |        |           |
|---|-------------|-------------|----------------|----------|---------|---------|--------|-----------|
| <b>DJ Industrial Average (CBT)-\$10 x index</b>     |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 10446       | 10507       | 10418          | 10440    | -38     | 10687   | 8580   | 36,831    |
| June  | ...         | ...         | 10419          | ...      | -38     | 10475   | 9000   | 581       |
| Est vol   | 11,816      | vol         | Tue 182        | open int | 37,455  | -65     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 10524.22 | Lo 10447.18 | Close 10470.74 | -34.44   |         |         |        |           |
| <b>Mini DJ Industrial Average (CBT)-\$5 x index</b> |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 10446       | 10506       | 10417          | 10440    | -38     | 10687   | 9069   | 46,175    |
| Vol Wed   | 70,499      | open int    | 48,145         | -1,739   |         |         |        |           |
| <b>DJ-AIG Commodity Index (CBT)-\$100 x index</b>   |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Feb   | ...         | ...         | 439.3          | -3.5     | 456.2   | 452.1   | 2,351  |           |
| Est vol   | 1,150       | vol         | Tue 220        | open int | 2,571   | unch.   |        |           |
| Idx prf:  | Hi 139.159  | Lo 137.163  | Close 137.350  | -1.171   |         |         |        |           |
| <b>S&amp;P 500 Index (CME)-\$250 x index</b>        |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 113290      | 113360      | 112300         | 112390   | -910    | 123950  | 77700  | 585,763   |
| June  | 112620      | 113100      | 112250         | 112290   | -910    | 115350  | 78000  | 21,212    |
| Est vol   | 46,110      | vol         | Tue 45,600     | open int | 610,710 | +107    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 1136.03  | Lo 1124.74  | Close 1126.52  | -9.51    |         |         |        |           |
| <b>Mini S&amp;P 500 (CME)-\$50 x index</b>          |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 113300      | 113350      | 112200         | 112400   | -900    | 115500  | 98650  | 539,366   |
| Vol Wed   | 595,531     | open int    | 550,820        | -18,936  |         |         |        |           |
| <b>S&amp;P Midcap 400 (CME)-\$500 x index</b>       |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 584.50      | 586.00      | 580.80         | 580.80   | -6.00   | 603.25  | 559.75 | 15,879    |
| Est vol   | 582         | vol         | Tue 672        | open int | 15,880  | -98     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 587.39   | Lo 580.91   | Close 581.63   | -5.76    |         |         |        |           |
| <b>Nasdaq 100 (CME)-\$100 x index</b>               |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 148850      | 148850      | 146200         | 146300   | -2400   | 150900  | 146200 | 72,861    |
| Est vol   | 14,295      | vol         | Tue 9,985      | open int | 72,918  | -246    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 1482.35  | Lo 1461.01  | Close 1462.61  | -29.24   |         |         |        |           |
| <b>Mini Nasdaq 100 (CME)-\$20 x index</b>           |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 1488.0      | 1489.0      | 1461.5         | 1463.0   | -24.0   | 1563.0  | 1307.0 | 249,320   |
| Vol Wed   | 257,039     | open int    | 250,794        | +4,618   |         |         |        |           |
| <b>GSCI (CME)-\$250 x nearby index</b>              |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Feb   | 264.50      | 266.10      | 258.50         | 258.50   | -5.50   | 274.50  | 251.50 | 14,534    |
| Est vol   | 243         | vol         | Tue 104        | open int | 14,901  | +31     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 265.61   | Lo 258.87   | Close 259.53   | -4.02    |         |         |        |           |
| <b>TRAKRS Long-Short Tech (CME)-\$1 x index</b>     |             |             |                |          |         |         |        |           |
| July  | 40.38       | 40.30       | 39.82          | 39.82    | -1.40   | 45.25   | 19.76  | 410,834   |
| Est vol   | 87          | vol         | Tue 150        | open int | 410,834 | +150    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 40.03    | Lo 38.16    | Close 38.56    | -1.47    |         |         |        |           |
| <b>Russell 2000 (CME)-\$500 x index</b>             |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 576.50      | 576.50      | 563.50         | 563.75   | -14.40  | 585.75  | 557.50 | 22,953    |
| Est vol   | 3,572       | vol         | Tue 969        | open int | 22,953  | -42     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 579.15   | Lo 564.03   | Close 564.03   | -15.12   |         |         |        |           |
| <b>Russell 1000 (NYSE)-\$500 x index</b>            |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | ...         | ...         | 601.00         | -5.05    | 618.00  | 603.00  | 77,631 |           |
| Est vol   | 79          | vol         | Tue 66         | open int | 77,631  | -72     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 607.34   | Lo 601.23   | close 602.10   | -5.24    |         |         |        |           |
| <b>NYSE Composite Index (NYSE)-\$50 x index</b>     |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | ...         | ...         | 6509.50        | -57.00   | 6556.00 | 6115.00 | 1,260  |           |
| Est vol   | 0           | vol         | Tue 0          | open int | 1,260   | unch    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 6574.76  | Lo 6520.91  | Close 6526.10  | -48.72   |         |         |        |           |
| <b>U.S. Dollar Index (FINEX)-\$1,000 x index</b>    |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 87.04       | 87.30       | 86.92          | 87.02    | .04     | 103.18  | 85.10  | 16,414    |
| June  | ...         | ...         | 87.43          | .04      | 88.37   | 85.71   | 2,116  |           |
| Est vol   | 2,500       | vol         | Tue 2,272      | open int | 18,543  | +610    |        |           |
| Idx prf:  | Hi 87.10    | Lo 86.87    | Close 86.84    | +.05     |         |         |        |           |
| <b>Nikkei 225 Stock Average (CME)-\$5 x index</b>   |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 10400.      | 10510.      | 10360.         | 10380.   | -265    | 11155.  | 7670.  | 30,555    |
| Est vol   | 3,558       | vol         | Tue 2,468      | open int | 30,730  | +33     |        |           |
| Idx prf:  | Hi 10627.26 | Lo 10418.77 | Close 10447.25 | -194.67  |         |         |        |           |
| <b>Share Price Index (SFE)-AUD 25 x index</b>       |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 3257.0      | 3267.0      | 3250.0         | 3254.0   | -2.0    | 3346.0  | 2700.0 | 160,822   |
| June  | 3264.0      | 3278.0      | 3264.0         | 3266.0   | -2.0    | 3350.0  | 2700.0 | 3,931     |
| Est vol   | 10,928      | vol         | Tue 10,169     | open int | 167,890 | +2,133  |        |           |
| Idx prf:  | Hi 3273.5   | Lo 3263.6   | Close 3265.6   | +1.3     |         |         |        |           |
| <b>CAC-40 Stock Index (MATIF)-€10 x index</b>       |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Feb   | 326.0       | 3263.5      | 3260.0         | 3264.0   | -29.5   | 3279.5  | 3531.5 | 346,178   |
| Mar   | 3630.0      | 3634.5      | 3610.5         | 3620.0   | -29.5   | 3734.5  | 3885.0 | 130,956   |
| June  | 3563.5      | 3563.5      | 3562.5         | 3560.5   | -29.0   | 3651.5  | 3282.0 | 8,810     |
| Est vol   | 77,301      | vol         | Tue 76,586     | open int | 489,860 | +19,063 |        |           |
| Idx prf:  | Hi 3625.38  | Lo 3602.94  | Close 3607.57  | -30.64   |         |         |        |           |
| <b>Xetra DAX (EUREX)-€25 x index</b>                |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 4050.0      | 4056.0      | 4018.0         | 4029.5   | -31.0   | 4190.0  | 3237.5 | 286,286   |
| June  | 4065.0      | 4074.5      | 4042.5         | 4050.5   | -31.0   | 4210.0  | 3251.0 | 10,167    |
| Sept  | 4086.5      | 4096.0      | 4064.0         | 4072.0   | -31.5   | 4231.0  | 3961.0 | 2,874     |
| Vol Wed   | 113,473     | open int    | 299,327        | -1,522   |         |         |        |           |
| Idx prf:  | Hi 4050.08  | Lo 4008.80  | Close 4028.37  | -29.14   |         |         |        |           |
| <b>FTSE 100 Index (LIFFE)-£10 x index</b>           |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 4340.0      | 4386.5      | 4339.5         | 4376.0   | 10.0    | 4509.5  | 3895.5 | 426,561   |
| June  | 4352.0      | 4385.5      | 4352.0         | 4384.5   | 9.5     | 4514.0  | 4019.5 | 17,929    |
| Sept  | 4372.5      | 4374.5      | 4372.5         | 4394.5   | 10.0    | 4526.5  | 4288.5 | 10,192    |
| Vol Wed   | 59,473      | open int    | 462,529        | +1,934   |         |         |        |           |
| Idx prf:  | Hi 4409.30  | Lo 4369.10  | Close 4398.50  | +7.90    |         |         |        |           |
| <b>DJ Euro STOXX 50 Index (EUREX)-€10 x index</b>   |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 2834.0      | 2841.0      | 2820.0         | 2821.0   | -27.0   | 2921.0  | 2376.0 | 1,226,828 |
| June  | 2797.0      | 2800.0      | 2785.0         | 2783.0   | -27.0   | 2883.0  | 2364.0 | 88,041    |
| Sept  | 2796.0      | 2796.0      | 2787.0         | 2782.0   | -27.0   | 2881.0  | 2709.0 | 14,454    |
| Vol Wed   | 384,795     | open int    | 1,239,323      | -2,788   |         |         |        |           |
| Idx prf:  | Hi 2839.55  | Lo 2816.18  | Close 2819.92  | -21.34   |         |         |        |           |
| <b>DJ STOXX 50 Index (EUREX)-€10 x index</b>        |             |             |                |          |         |         |        |           |
| Mar   | 2675.0      | 2689.0      | 2671.0         | 2674.0   | -14.0   | 2757.0  | 2393.0 | 39,662    |
| June  | ...         | ...         | 2653.0         | -14.0    | ...     | ...     | ...    | 640       |
| Vol Wed   | 1,895       | open int    | 40,302         | +513     |         |         |        |           |
| Idx prf:  | Hi 2698.24  | Lo 2681.59  | Close 2689.82  | -5.23    |         |         |        |           |

资料来源：Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc., © 2004 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

100 种股票的组合。CME 交易两种该指数期货合约。第一种期货合约规模为指数乘以 \$100，另外一种期货合约（微型纳斯达克 100 合约）规模为指数乘以 \$20。

罗素 2000 指数是一个包含 2 000 种总市值比较小的美国股票的价格指数。罗素 1000 指数是一个包含总市值最大的 1 000 种美国股票的价格指数。纽约股票交易所综合指数是一个在纽约股票交易所上市的所有股票组成的组合。美元指数是一个由 6 种外币（欧元、日元、英镑、加元、瑞典克朗和瑞士法郎）按货币交易额的比例加权的指数。日经 225 股票平均指数是一个在东京股票交易所交易的 225

家最大股票的组合。按股票的价格加权。在芝加哥商品交易所交易的该指数期货合约规模为指数乘以\$5。

股票行市指数也就是普通股股价指数，是一个反映澳大利亚股票市场的指数。CAC-40 指数是基于法国股票市值最大 40 家公司的组合。Xetra DAX 指数是基于在德国交易的 30 种股票的组合。FTSE 100 指数是基于在伦敦股票交易所上市的 100 家主要的英国股票的组合。DJ Euro Stoxx 50 指数和 DJ stoxx 50 指数是道琼斯和其欧洲合作者编制的两种不同的欧元区蓝筹股的指数。这些指数的期货合约在欧洲期货交易所进行交易，合约规模为指数乘以 10 欧元。

表 3.3 中还有一些指数并不是股票指数。道琼 AIG 商品指数和高盛商品指数是反映商品价格的指数。TRAKS 多空技术指数与其他普通的指数不一样，其组合包括单个科技股的多头和代表科技行业的金融工具的空头，该指数反映上述组合的表现。

第 2 章中已经提过，股票指数期货合约进行现金交割，而不实际交割标的资产。在最后一个交易日，所有合约是盯市的，结算价格或为开盘价或为收盘价，并且所有头寸必须平仓。例如，S&P 500 期货的结算价是交割月份的第 3 个星期五的开盘价格所计算的指数价值。

## 股票组合的套期保值

股票指数期货能用来对冲一个高度分散化股票组合的风险。定义：

$P$ ：该证券组合的现价

$A$ ：一张期货合约的标的股票的现价

如果该证券组合和指数的组合完全一致，那么最佳套期保值率  $h^*$  为 1.0。根据公式 (3.2)，对冲时应卖空的最佳合约数目是：

$$N^* = \frac{P}{A} \quad (3.3)$$

例如，考虑一个与 S&P 500 指数的组合完全一致的证券组合，该证券组合价值为 100 万美元。当前的 S&P 指数为 1 000，每张期货合约价值为该指数乘以 \$250。在这个例子中  $P = 1\,000\,000$ ,  $A = 250\,000$ ，由此可见应卖空 4 张合约来对冲证券组合的风险。

当证券组合和指数的组合不完全一致时，我们可以使用资本资产定价模型 (CAPM) 中的参数  $\beta$  来确定合适的套期保值率。 $\beta$  是该证券组合超出无风险利率的超额收益对股票市场超出无风险利率的超额收益进行回归得到的最优拟合直线的斜率。当  $\beta = 1.0$  时，该证券组合的收益就反映了市场的收益；当  $\beta = 2.0$  时，该证券组合的超额收益为市场超额收益的两倍；当  $\beta = 0.5$  时，该证券组合的超额收益为市场超额收益的一半；依此类推。

对于市场变动， $\beta = 2.0$  的证券组合的敏感度是  $\beta = 1.0$  的证券组合的敏感度的两倍。所以，我们必须使用两倍的期货合约来对冲  $\beta = 2.0$  的证券组合。类似地，

$\beta = 0.5$  的证券组合对市场变动的敏感度是  $\beta = 1.0$  的证券组合敏感度的一半。所以，我们只需使用一半的期货合约来对冲  $\beta = 0.5$  的证券组合。一般地，有  $h^* = \beta$ ，由公式 (3.2)，得出：

$$N^* = \beta \frac{P}{A} \quad (3.4)$$

该公式假定期货合约到期日与套期保值到期日相同，并忽略期货合约的每日结算。<sup>5</sup>

为了表明这个公式的作用，这里举一个例子。假定：

S&P500 指数水平 = 1 000

证券组合价值 = \$5 000 000

无风险利率 = 4%/年

指数的股息率 = 1%/年

证券组合的  $\beta = 1.5$

我们假定利用一个4个月后到期的 S&P 500 指数期货合约来对冲未来3个月的证券组合风险，当前的这个指数期货合约价格为 1 010。一张合约的交割规模是 S&P 500 指数乘以\$250，那么， $A = 250 \times 1 000 = 250 000$ 。根据公式 (3.4)，对冲时应卖空的最佳合约数目是：

$$1.5 \times \frac{5 000 000}{250 000} = 30$$

假定3个月过后，S&P 500 指数变为 900，期货合约价格为 902。那么持有期货空头所获得的收益为：

$$30 \times (1 010 - 902) \times 250 = \$810 000$$

指数降幅为 10%，而该指数每年股息率为 1%，也就是说 3 个月的股息率为 0.25%。把红利收益计算进来之后，这 3 个月内，指数的投资者的收益率为 -9.75%。这 3 个月内的无风险利率大约为 1%。因为该证券组合的  $\beta = 1.5$ ，根据资本资产定价模型，得出：

$$\text{证券组合预期回报率} - \text{无风险利率} = 1.5 \times (\text{指数的回报率} - \text{无风险利率})$$

因此，这 3 个月内的证券组合预期回报率为：

$$1.0 + [1.5 \times (-9.75 - 1.0)] = -15.125$$

3 个月后证券组合的期望值（包括收到的红利）为：

---

<sup>5</sup> 可以证明，考虑每日结算影响的一种方法是将公式 (3.4) 中的  $A$  替换成期货合约的价值（参照习题 5.23）。对相关的研究，参照 R. J. Rendleman，“A Reconciliation of Potentially Conflicting Approaches to Hedging with Futures,” *Advances in Futures and Options Research*, 6 (1993): 81–92。那么，理论上需要执行被称为调整对冲头寸的策略，其中，每天对套期保值头寸进行调整。

$$\$5\,000\,000 \times (1 - 0.15125) = \$4\,243\,750$$

加上期货头寸的收益，套期保值者资产头寸的期望值为：

$$\$4\,243\,750 + \$810\,000 = \$5\,053\,750$$

表 3.4 汇总了在到期日不同指数水平情况下的上述计算过程。我们可以看到 3 个月后套期保值者资产头寸的期望价值基本上不随最后的指数水平不同而改变。

在这个例子中，我们唯一没考虑的一点是期货价格和现货价格之间的联系。在第 5 章中，我们将看到上述例子中在已设定的利率和股息率下，假定当前期货合约价格为 1 010 大致与我们的预期一致。表 3.4 中的 3 个月后期货价格也是按同样的道理给出的。<sup>6</sup>

### 对股票组合进行套期保值的理由

表 3.4 中我们可以看到，套期保值的安排可以使得套期保值者的资产头寸价值在 3 个月内比开始时增加 1% 左右。这并不奇怪。无风险利率为每年 4%，所以 3 个月的无风险利率为 1%。套期保值的结果是使得投资者的头寸近似以无风险利率增长。

很自然地要问：为什么对冲者要不辞劳苦地用期货合约呢？如果对冲者的目的只是为了获得无风险利率，他可以将组合卖掉，然后将所得收入投资短期国债即可。

一个可能的原因是：对冲者认为股票组合中的股票选择得很好。在此时对冲者可能对整个市场的表现很没有把握，但坚信股票组合中的股票会比市场表现出色（在适当调整组合的  $\beta$  值之后）。利用指数期货进行套期保值，转移了市场变动风险，套期保值者仅暴露于股票组合相对于市场的表现情况。另一种进行对冲的

表 3.4 利用股票指数套期保值策略的表现

|                      |           |           |           |           |           |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 3 个月后的指数值            | 900       | 950       | 1 000     | 1 050     | 1 100     |
| 当前的指数的期货价格           | 1 010     | 1 010     | 1 010     | 1 010     | 1 010     |
| 3 个月后的指数的期货价格        | 902       | 952       | 1 003     | 1 053     | 1 103     |
| 期货头寸的收益              | 810 000   | 435 000   | 52 500    | -322 500  | -697 500  |
| 市场收益                 | -9.750%   | -4.750%   | 0.250%    | 5.250%    | 10.250%   |
| 证券组合的预期收益            | -15.125%  | -7.625%   | -0.125%   | 7.375%    | 14.875%   |
| 3 个月后的预期证券组合价值（包括红利） | 4 243 750 | 4 618 750 | 4 993 750 | 5 368 750 | 5 743 750 |
| 3 个月后头寸的总预期价值        | 5 053 750 | 5 053 750 | 5 046 250 | 5 046 250 | 5 046 250 |

<sup>6</sup> 表 3.4 的计算中假定指数的红利收益率是可预测的，无风险利率是保持不变的，3 月期间内的指数收益与组合收益完全相关。实际上，这些假设并不完全成立，套期保值的绩效也比表 3.4 中的情况差很多。

可能原因是：对冲者计划长期持有该组合，但在不确定的市场状况下短期内需要保护该头寸。若采用先卖掉组合，以后再买回的策略，可能会导致过高的交易费用。

### 改变证券组合的 $\beta$ 值

表3.4的例子中，套期保值者的组合 $\beta$ 值减少到0。有时，也用期货合约改变股票组合的 $\beta$ 值，使其等于不同于0的其他数值。再次考虑前面的例子：

$$\begin{aligned} \text{S\&P 500 指数水平} &= 1\,000 \\ \text{证券组合价值} &= \$5\,000\,000 \\ \text{证券组合的}\beta &= 1.5 \end{aligned}$$

因为一张合约的交割规模是S&P 500指数乘以\$250， $A = 250\,000$ 。想要对组合进行完全的套期保值，根据公式(3.4)，应卖空的最佳合约数目是：

$$1.5 \times \frac{5\,000\,000}{250\,000} = 30$$

如果想把组合的 $\beta$ 值从1.5减少到0.75，那么应卖空的最佳合约数目是15张，而不是30张；如果想把组合的 $\beta$ 值增加到2.0，应买入10张期货合约；依此类推。一般来说，要将组合的 $\beta$ 值从 $\beta$ 变到 $\beta^*$ ，当 $\beta > \beta^*$ 时，应卖出的合约数为：

$$(\beta - \beta^*) \frac{P}{A}$$

当 $\beta < \beta^*$ 时，应买入的合约数为：

$$(\beta^* - \beta) \frac{P}{A}$$

### 暴露于单个股票价格的风险

有些交易所进行一些单个股票的期货合约交易，但大部分情况下，单个股票的头寸只能用股票指数期货合约来套期保值。

利用股票指数期货合约对冲单个股票价格风险类似于对冲一个高度分散化股票组合的风险。套期保值者应卖空的指数期货合约数目为 $\beta P/A$ 。这里， $\beta$ 为该股票的 $\beta$ 值， $P$ 为持有股份的总价值， $A$ 是期货合约标的股票的现价。虽然最佳合约数目的计算方法和对冲股票组合风险时完全一样，但单个股票情况中套期保值的效果非常差。这里的套期保值操作只能对冲整个市场变动的风险，而这个风险是单个股票价格变动总风险中的一小部分而已。当投资者坚信单个股票表现会优于市场表现，但不确定市场变动方向时，进行这种套期保值是比较有用的。如果投资银行承销一个股票的发行，想要对冲市场变动风险时，也可以进行上述的套期保值。

考虑一个投资者，他在 6 月份持有 2 万股 IBM 股票，每股价为 \$100。投资者预期下个月股票市场会较为不稳定，而 IBM 股票表现会优于市场表现。投资者决定利用 8 月份 S&P 500 指数期货合约进行未来一个月的套期保值。IBM 股票的  $\beta$  值估计为 1.1。当前指数水平为 900，而当前 8 月份 S&P 500 指数期货价格为 908。每张合约的交割规模为指数乘以 \$250。那么，这个例子中， $P = 20\,000 \times 100 = 2\,000\,000$ ,  $A = 900 \times 250 = 225\,000$ 。应卖空的合约数目为：

$$1.1 \times \frac{2\,000\,000}{225\,000} = 9.78$$

四舍五入取整数，套期保值者需要卖空 10 张合约，1 个月后进行平仓。假定 IBM 股价 1 个月后上涨为 \$125, S&P 500 期货价格上涨到 1 080。那么，投资者在 IBM 股票头寸中盈利  $20\,000 \times (\$125 - \$100) = \$500\,000$ ，在期货头寸中损失  $10 \times 250 \times (1\,080 - 908) = \$430\,000$ 。

在这个例子中，套期保值者期货头寸的损失抵消了标的资产的收益。看起来套期保值好像起了负面作用一样。但是，我们之前强调过，套期保值者的目的是对冲风险。套期保值可以使原本糟糕的结果变得好一些，但也可以使原本好的结果变得差一些。

### 3.6 向前延展的套期保值

有时套期保值的到期日比所有可供使用的期货合约的交割日期都要晚。保值者必须将该套期保值组合向前进行延展。这包括将一个期货合约平仓，同时持有另一个具有更晚交割日的期货合约头寸。套期保值可向前延展许多次。考虑某个公司，它希望运用空头套期来降低  $T$  时刻收到资产的价格变动的风险。如果存在期货合约  $1, 2, 3, \dots, n$  (并不一定所有合约现在都有交易)，它们的到期日逐个后延，公司可以运用下列策略：

$t_1$  时刻：卖空期货合约 1

$t_2$  时刻：将期货合约 1 平仓

卖空期货合约 2

$t_3$  时刻：将期货合约 2 平仓

卖空期货合约 3

⋮

$t_n$  时刻：将期货合约  $n-1$  平仓

卖空期货合约  $n$

$T$  时刻：将期货合约  $n$  平仓

假定 2004 年 4 月，某公司计划在 2005 年 6 月出售 10 万桶石油，并决定以 1.0 的套期保值率对冲风险。当前的现货价格为 \$19。尽管不少期货合约的交割有

表 3.5 与石油向前延展的套期保值例子相应的数据

| 日期           | 2004年4月 | 2004年9月 | 2005年2月 | 2005年6月 |
|--------------|---------|---------|---------|---------|
| 2004年10月期货价格 | 18.20   | 17.40   |         |         |
| 2005年3月期货价格  |         | 17.00   | 16.50   |         |
| 2005年7月期货价格  |         |         | 16.30   | 15.90   |
| 即期价格         | 19.00   |         |         | 16.00   |

效期限长达几年，我们仍然假定，只有最近 6 个月的合约流动性强，能满足公司的需要。因此，公司出售 100 张 2004 年 10 月的期货。在 2004 年 9 月，它将套期保值向前展期到 2005 年 3 月的合约。在 2005 年 2 月，它将套期保值向前展期到 2005 年 7 月份的合约。

表 3.5 给出了一个可能的套期保值结果。假定 2004 年 10 月份的期货合约以每桶 \$18.20 的价格卖空，以每桶 \$17.40 的价格平仓，每桶获利 \$0.80；2005 年 3 月份的期货合约以每桶 \$17.00 的价格卖空，以每桶 \$16.50 的价格平仓，每桶获利 \$0.50；2005 年 7 月份的期货合约以每桶 \$16.30 的价格卖空，以每桶 \$15.90 的价格平仓，每桶获利 \$0.40。最终的现货价格为 \$16。

不考虑现金的时间成本，卖空期货合约当中，我们可以获得每桶盈利为：

$$(18.20 - 17.40) + (17.00 - 16.50) + (16.30 - 15.90) = 1.70 \text{ 美元}$$

石油的价格由每桶 \$19 下降到每桶 \$16。每桶 \$1.70 的盈利作为对石油价格下降 \$3 的补偿，这个结果看起来不太令人满意。但是，当期货价格低于现货价格时，我们不能指望补偿所有价格下跌的损失。我们最多只能指望锁定应用于 2005 年 6 月份合约的那个期货价格（如果该期货正在活跃交易）。

期货合约的每日结算会引起期货头寸的现金流产生时间和被保值资产头寸的

### 商业剪影 3.2 德国金属股份公司：套期保值出现错误

有时向前延展的套期保值可能产生现金流方面的问题。德国金属股份公司（Metallgesellschaft，简称 MG 公司）在 20 世纪 90 年代早期的活动戏剧性地说明了这个情况。

MG 公司以高于市场价格 6~8 分的固定价格向其客户出售了巨额的 5~10 年民用燃料油及汽油供应合约。它用期限较短的期货合约多头对冲其价格风险，这些短期期货合约以后需要展期。随后，原油价格下跌，期货合约头寸需要补充保证金。这使得 MG 公司面临巨额短期现金流的压力。积极主张这些对冲策略的 MG 成员认为这些短期现金流可以由长期固定价格合约最终实现的正值现金流所抵消。然而，公司的高层管理人员和银行家们担心这笔巨额的现金流出。最后公司平仓了所有的对冲的合约，并与其客户协商放弃固定价格供油合约。结果是 MG 公司损失 13.3 亿美元。

现金流产生时间不一致的问题。在向前延展的长期套期保值中，这个问题的影响可能是非常严重的（参见商业剪影 3.2）。

## 小 结

本章讨论了一个公司通过持有期货合约头寸来对冲资产价格风险的几种方式。如果当资产价格上涨时，公司获得盈利，当资产价格下跌时，公司遭受损失，那么在面临这种风险时应选择空头对冲。而如果当资产价格下跌时，公司获得盈利，资产价格上涨时，公司遭受损失，那么在面临这种风险时应选择多头对冲。

套期保值是一种降低风险的措施。这么说来，经理或主管人员应该很赞成套期保值策略。但是在现实中，由于一些理论原因和现实原因，公司可能不进行套期保值。理论层面，我们可以说股东通过持有高度分散化投资组合，能够避免一个公司面临的诸多风险因素，他们并不需要公司来对冲这些风险。实际层面，一个公司会发现，如果整个行业中其他竞争者不进行套期保值，那么它独自进行套期保值不会减少风险，而是会增加风险。另外，公司财务主管会担心，如果标的资产价格变动使得公司获得盈利，而对冲的期货头寸使公司遭受损失的话，他会被其他主管人员批评。

期货套期保值中的一个重要的概念是基差风险。基差是资产的现货价格和期货价格之差。基差风险是指套期保值有效期内基差值的不确定性。

套期保值率是持有期货合约的头寸与风险暴露头寸的比率。1.0 的套期保值率并不一定总是最佳的。如果保值者希望使其总头寸的变化方差最小，最佳的套期保值率可能不等于 1.0。最佳的套期保值率等于现货价格变化对期货价格变化进行线性回归得出的最优拟合直线的斜率。

股票指数期货可以用来对冲一个股票组合的系统风险。最佳合约数目等于组合的  $\beta$  值乘以组合价值除以一张期货合约标的资产价值的比率。股票指数期货也可以用来改变组合的  $\beta$  值而不改变组合中的股票种类。

如果流动性较强的期货合约到期日较短，而对冲的到期日更长时，有时可以运用向前展期套期保值的策略。它包括持有一系列的期货合约头寸。当第一个期货合约快要到期时，将它平仓，然后再持有另一个到期日稍晚的期货合约。当第二个期货合约快要到期时，将它平仓，然后再持有第三个期货合约……依此类推。结果是利用一系列短期的期货合约来实现了长期的期货合约。

## 参考读物

Allayannis, G. and J. Weston. "The Use of Foreign Currency Derivatives and Firm Market Value," *Review of Financial Studies*, 14, 1 (Spring 2001): 243–76.

Bodnar, G. M., G. S. Hayt, and R. C. Marston. "1998 Wharton Survey of Financial Risk Management by U.S. Non-Financial Firms" *Financial Management*, 2, 4 (1998): 70–91.

- Brown, G. W. "Managing Foreign Exchange Risk with Derivatives." *Journal of Financial Economics*, 60 (2001): 401–48.
- Culp, C. and M. H. Miller. "Metallgesellschaft and the Economics of Synthetic Storage," *Journal of Applied Corporate Finance*, 7, 4 (Winter 1995): 62–76.
- Ederington, L. H. "The Hedging Performance of the New Futures Market," *Journal of Finance*, 34 (March 1979): 157–70.
- Edwards, F. R. and M. S. Canter. "The Collapse of Metallgesellschaft: Unhedgeable Risks, Poor Hedging Strategy, or Just Bad Luck?" *Journal of Applied Corporate Finance*, 8, 1 (Spring 1995): 86–105.
- Geczy, C., B. A. Minton, and C. Schrand. "Why Firms Use Currency Derivatives," *Journal of Finance*, 52, 4 (1997): 1323–54.
- Graham, J. R. and C. W. Smith, Jr. "Tax Incentives to Hedge," *Journal of Finance*, 54, 6 (1999): 2241–62.
- Haushalter, G. D. "Financing Policy, Basis Risk, and Corporate Hedging: Evidence from Oil and Gas Producers," *Journal of Finance*, 55, 1 (2000): 107–52.
- Mello, A. S. and J. E. Parsons. "Hedging and Liquidity," *Review of Financial Studies*, 13 (Spring 2000): 127–53.
- Neuberger, A. J. "Hedging Long-Term Exposures with Multiple Short-Term Futures Contracts," *Review of Financial Studies*, 12 (1999): 429–59.
- Petersen, M. A. and S. R. Thiagarajan, "Risk Management and Hedging: With and Without Derivatives," *Financial Management*, 29, 4 (Winter 2000): 5–30.
- Stulz, R. M. "Optimal Hedging Policies," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19 (June 1984): 127–40.
- Tufano, P. "Who Manages Risk? An Empirical Examination of Risk Management Practices in the Gold Mining Industry," *Journal of Finance*, 51, 4 (1996): 1097–1138.
- Tufano, P. "The Determinants of Stock Price Exposure: Financial Engineering and the Gold Mining Industry," *Journal of Finance*, 53, 3 (1998): 1015–52.

## 问题和习题

- 3.1 请分别说明在什么情况下应该使用 (a) 空头套期保值和 (b) 多头套期保值。
- 3.2 请说明在使用期货合约进行套期保值时, 基差风险意味着什么。
- 3.3 请说明什么是完全的套期保值。完全的套期保值总比不完全的套期保值有更好的结果吗? 请解释你的回答。
- 3.4 在什么情况下最小方差套期保值组合根本就没有套期保值效果?
- 3.5 请给出公司财务主管不愿对冲公司面临的某个风险的三种原因。
- 3.6 假设一种商品的价格每季度的标准差为\$0.65, 该种商品的期货价格的每季度的标准差为\$0.81, 两种变化的相关系数为 0.8。那么一份 3 个月期合约的最佳套期保值比率为多少? 这意味着什么?
- 3.7 一家公司持有价值为 2 000 万美元、 $\beta$  值为 1.2 的股票组合。该公司打算利用 S&P 500 指数期货对冲组合的风险。当前 S&P 500 指数水平为 1 080, 每张期货合约交割规模为指数乘以\$250。为了风险最小化, 应该怎么套期保值? 为了把股票组合的  $\beta$  值减少到 0.6, 公司应该怎么做?
- 3.8 芝加哥期货交易所的玉米期货合约, 有如下交割月可供选择: 3 月, 5 月, 7 月, 9 月, 12 月。当套期保值的到期日分别为 6 月, 7 月, 1 月时, 应选用哪种合约进行套期保值?

- 3.9 对于期货交易来说，一个完全的套期保值是否总能成功地将未来交易的价格锁定在现在的即期价格上，请解释。

3.10 当基差意想不地扩大时，为什么空头套期保值者的头寸会有所改善？而当基差意想不到地缩小时，为什么会恶化？请解释。

3.11 假设你是一家向美国出口电子设备的日本公司的财务主管。请说明你将采用什么样的策略来进行外汇交易的套期保值，如何将此策略推荐给你的同事。

3.12 考虑本章 3.3 小节中的例子 3.2。公司如果选择 0.8 的套期保值率，那么会对套期保值执行过程和结果产生什么影响？

3.13 “如果最小方差的套期保值率为 1.0，那么这个套期保值一定是完全的”。这句话是否正确？为什么？

3.14 “如果没有基差风险，最小方差套期保值率总为 1.0”。这句话是否正确？为什么？

3.15 “对于一项资产，期货价格通常小于现货价格，多头对冲是非常有吸引力的”。这句话是否正确？为什么？

3.16 活牛的每月即期价格变化的标准差为 1.2 (美分/磅)。每月期货价格变化的标准差为 1.4。期货价格变化和即期价格变化的相关性为 0.7。现在是 10 月 15 日。一个牛肉生产商准备在 11 月 15 日购买 20 万磅的活牛。生产商打算用 12 月的活牛期货合约来对冲风险。每份合约的交易数量为 4 万磅。牛肉生产商应该采用什么样的策略？

3.17 一位玉米农场主认为：“我不需要使用期货合约套期保值。我面临的真正的风险并不是玉米价格，而是坏天气可以夺取我所有的农作物。”讨论该农场主的观点是否正确。农场主需要估计他或她的期望玉米产量，并通过套期保值，把产出的玉米价格锁定在某一数值吗？

3.18 7 月 1 日，一位投资者持有 5 万股某种股票。股票市价为每股 \$30。投资者打算利用 9 月微型 S&P 500 指数期货，对冲下个月的市场变动风险。当前指数水平为 1 500，一张合约交割规模为指数乘以 \$50。该股票的  $\beta$  值为 1.3。投资者应该采取什么策略？

3.19 在表 3.5 中，公司决定套期保值率用 1.5，其值会对套期保值执行过程和结果产生什么影响？

3.20 套期保值过程中要利用期货合约。请问盯市操作为什么会带来现金流问题？

3.21 一位航空公司经理认为：“我们不需要使用石油期货。将来石油价格相对期货价格上升和下降的机会是均等的”。你如何看待此观点？

3.22 假定黄金的 1 年租借率为 1.5%，一年无风险利率为 5%。两个利率都是按年进行复利计算。请参照商业剪影 3.1 并计算，当现货价格为 \$400 时，高盛公司报出的 1 年期远期价格最大值为多少？

## 课后练习

- 3.23 下表给出了某种商品每月的现货价格与期货价格的变动情况。根据这些数据，计算出最小方差套期保值率。

|        |       |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 现货价格变动 | +0.50 | +0.61 | -0.22 | -0.35 | +0.79 |
| 期货价格变动 | +0.56 | +0.63 | -0.12 | -0.44 | +0.60 |
| 现货价格变动 | +0.04 | +0.15 | +0.70 | -0.51 | -0.41 |
| 期货价格变动 | -0.06 | +0.01 | +0.80 | -0.56 | -0.46 |

3.24 现在是7月16日，一家公司持有价值为1亿美元的股票组合，组合的 $\beta$ 值为1.2。该公司打算利用芝加哥商品交易所的12月S&P 500指数期货合约，把组合 $\beta$ 值减少到0.5（期间为7月16日到11月16日之间）。当前指数水平为1 000，每张合约的交割规模为指数乘以\$250。请问：

- (a) 公司应该持有哪种期货头寸？
- (b) 假定公司改变了决策，它打算把组合的 $\beta$ 值从1.2增加到1.5，那么公司应该持有哪种期货头寸？

3.25 现在是2004年10月。一家公司预计它将在2005年2月、2005年8月、2006年2月和2006年8月分别买入100万磅黄铜。该公司决定利用纽约商品交易所的期货合约来对冲它所面临的风险。一张合约的交割规模为25 000磅黄铜。每张合约的初始保证金为\$2 000，维持保证金为\$1 500。该公司的决策是对冲80%的风险暴露。有效期间在13个月内的期货合约流动性强，能满足公司的需要。请给这家公司制定套期保值策略。

今天和未来的市场价格请参照下表。（单位：美分/磅）

| 日期      | 2004年10月 | 2005年2月 | 2005年8月 | 2006年2月 | 2006年8月 |
|---------|----------|---------|---------|---------|---------|
| 现货价格    | 72.00    | 69.00   | 65.00   | 77.00   | 88.00   |
| 2005年3月 |          |         |         |         |         |
| 期货价格    | 72.30    | 69.10   |         |         |         |
| 2005年9月 |          |         |         |         |         |
| 期货价格    | 72.80    | 70.20   | 64.80   |         |         |
| 2006年3月 |          |         |         |         |         |
| 期货价格    |          | 70.70   | 64.30   | 76.70   |         |
| 2006年9月 |          |         |         |         |         |
| 期货价格    |          |         | 64.20   | 76.50   | 88.20   |

你制定的计划对于公司支付的黄铜价格有什么影响？2004年10月的初始保证金要求为多少？公司会收到追加保证金通知吗？

3.26 一位基金经理持有价值为5 000万美元、 $\beta$ 值为0.87的股票组合。考虑到未来2个月的市场变动，该经理打算利用3个月期S&P 500指数期货来对冲风险。当前指数水平为1 250，每张合约的交割规模为指数乘以\$250。无风险利率为每年6%，股息率为每年3%。当前，3个月期期货价格为1 259。

- (a) 为了完全对冲未来2个月内所有市场变动风险，基金经理应该持有哪种期货头寸？
- (b) 当未来2个月的市场指数水平分别为1 000、1 100、1 200、1 300以及1 400时，请计算以上基金经理的套期保值策略对该基金经理的投资回报率产生的影响。假定当前的1个月期期货的价格比指数水平高0.25%。

## 附 录

### 最小方差套期保值率公式的证明

假设我们将在  $t_2$  时刻卖出  $N_A$  单位资产，在  $t_1$  时刻考虑相应的套期保值策略。我们的策略是卖出基于  $N_F$  单位类似资产的期货合约。以  $h$  表示的套期保值率为：

$$h = \frac{N_F}{N_A} \quad (3A.1)$$

我们以  $Y$  表示该资产的总损益，其中包括了套期保值的损益，则

$$Y = S_2 N_A - (F_2 - F_1) N_F$$

即：

$$Y = S_1 N_A + (S_2 - S_1) N_A - (F_2 - F_1) N_F \quad (3A.2)$$

其中， $S_1$  和  $S_2$  分别为  $t_1$  和  $t_2$  时刻的资产价格， $F_1$  和  $F_2$  分别为  $t_1$  和  $t_2$  时刻的期货价格。根据方程 (3A.1)，方程 (3A.2) 中的  $Y$  的表达式可以重新写成

$$Y = S_1 N_A + N_A (S - h\Delta F) \quad (3A.3)$$

其中：

$$\Delta S = S_2 - S_1 \quad \text{且} \quad \Delta F = F_2 - F_1$$

因为  $S_1$  和  $N_A$  在  $t_1$  时刻是已知的，所以当  $\Delta S - h\Delta F$  的方差最小时，方程 (3A.3) 中的  $Y$  的方差也被最小化。 $\Delta S - h\Delta F$  的方差是：

$$v = \sigma_S^2 + h^2 \sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F$$

其中  $\sigma_S$ 、 $\sigma_F$  和  $\rho$  的定义和 3.4 节中相同，那么

$$\frac{dv}{dh} = 2h\sigma_F^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_F$$

令上式等于 0。注意到  $d^2v/dh^2$  是正值，我们可以知道使方差最小的  $h$  值为  $h = \rho\sigma_S/\sigma_F$ 。

## 各种利率

利率是所有的衍生品估值中必不可缺的一个因子。在本书剩下的内容中也将侧重描述利率。本章，我们将阐述利率相关的一些基本问题，如怎样度量和分析利率；我们将解释利率定义中复利频率的作用，并解释连续复利的含义，这些在衍生品分析中都有广泛使用；我们将阐述零息率、票面收益率和收益率曲线，也将讨论债券定价问题，并给出衍生品交易员通常用来决定零息票国债利率的计算过程；我们将讲述远期利率以及远期利率协议，并回顾几种利率期限结构理论。最后，我们将解释如何用久期和凸性估计债券价格对于利率变化的敏感度。

第6章中，我们将讨论利率期货，并解释久期在对冲利率风险暴露中的应用。为了简化说明，在本章中我们不考虑日算惯例。我们将在第6章和第7章中讨论这些惯例的性质以及惯例对计算产生的影响。

## 4.1 利率的种类

在某些特定情况中，利率定义为资金借入方承诺支付给资金贷出方的金额。对于任一给定的货币，都有许多不同种类利率。其中包括抵押率、存款率、优惠借款利率等。什么情况下应该使用何种利率水平取决于信用风险。资金的借入方可能会违约，使得资金贷出方没能按事先的协议收到本金和利息，由此产生信用风险问题。信用风险越高，借方承诺支付贷方的利率也越高。

### 国债利率

国债利率（treasury rates）指投资者在短期和长期国债中获得的利率。政府利用国债这个金融工具来借入本国货币资金。日本国债利率是日本政府借入日元的利率，美国国债利率是美国政府借入美元的利率，依此类推。一般来说，假定一个政府对本国货币债务不会出现违约现象，<sup>1</sup>因此国债利率被认为是无风险利率，短期或长期国债的投资者确信能收到协议规定的利息和本金。

国债利率是非常重要的利率，因为它被用于国债定价，有时也用于确认衍生

<sup>1</sup>这是因为政府可以通过加印货币来兑现它的债务。

品的损益。但是，衍生品交易员们（特别是活跃在 OTC 市场的交易员们）通常不把国债利率当作无风险利率使用，他们一般使用 LIBOR。

## 伦敦同业拆放利率

LIBOR 是伦敦同业拆放利率 (London Interbank Offer Rate) 的简称。一家特定银行报出的 LIBOR 指该银行向同业银行贷出（拆放）大额资金时所收取的利率。大银行和其他一些金融机构报出所有主要货币的 1 个月期、3 个月期、6 个月期和 12 个月期的 LIBOR。这里，1 个月的 LIBOR 指拆放资金 1 个月时收取的利率；3 个月的 LIBOR 指拆放资金 3 个月时收取的利率。依此类推。

在另外一家银行存款其实等价于向该家银行发放贷款。因此一家银行满足一定的信誉等级标准才能接受另外一家银行的 LIBOR 报价，并且以 LIBOR 收到那家银行的存款。一般来说接受存款的银行应该满足 AA 信用评级。<sup>2</sup>

AA 级金融机构把 LIBOR 视为资金的短期机会成本。它们可以以其他金融机构报出的 LIBOR 借入短期资金，而它们自己报出的 LIBOR 决定了向其他金融机构拆放剩余资金的利率。LIBOR 并不总是能避免信用风险问题。AA 级金融机构也有可能不偿还 LIBOR 贷款，这种情况发生概率较小。总之，这种拆放过程几乎没有风险的。衍生证券交易员们把 LIBOR 视为是比国债利率更好的无风险利率替代品，因为税收和监管方面的一些措施，人为地降低了国债利率水平（参见商业剪影 4.1）。按照衍生品市场中的实践惯例，本书中的“无风险利率”术语应被解释为是 LIBOR。<sup>3</sup>

除了 LIBOR，大银行还会报出 LIBID。LIBID 是伦敦银行同业拆借利率 (London Interbank Bid Rate) 的简称，指该家银行愿意接受银行同业存款资金时所愿支付的利率。每个时点上，LIBID 和 LIBOR 的报价之间会存在小的价差（同时，LIBOR 高于 LIBID）。这两个利率水平取决于银行之间的交易，利率不断地变化，使银行间市场的资金供给与银行间市场的资金需求接近平衡。例如，如果愿意借入 3 个月期美元的银行多于愿意贷出 3 个月期美元的银行，那么 3 个月的美元 LIBID 和美元 LIBOR 的报价都会上升。类似地，如果愿意贷出 3 个月期美元的银行多于愿意借入 3 个月期美元的银行，那么 3 个月的美元 LIBID 和美元 LIBOR 的报价都会下降。LIBOR 和 LIBID 相关交易是在欧洲货币市场进行的，该市场不受任何单个政府的控制。

---

<sup>2</sup> 信用评级机构标准普尔 (S&P) 对一家公司给出的最佳评级为 AAA，其次为 AA。它的竞争者穆迪 (Moody) 给出的信用评级最高为 Aaa，其次为 Aa。

<sup>3</sup> 第 7 章中我们将看到，更精确的说法是，“无风险利率”是从 LIBOR、互换以及欧洲美元期货报价中推导的利率。

### 商业剪影 4.1 什么是无风险利率

我们会很自然地认为，金融机构的衍生证券交易员们会把短期国债和长期国债的收益率视为基准无风险利率。但实际上，这些衍生证券交易员们通常把 LIBOR 视为短期无风险利率。这是因为他们把 LIBOR 当成他们资本的机会成本（参见 4.1 节）。交易员们认为，国债利率太低了，不能成为无风险利率基准。因为：

1. 金融机构为了满足一系列监管要求，必须购买短期国债和长期国债。因此，增加了这些国债工具的需求，于是这些国债工具的价格上升，而收益率则下降了。
2. 投资于短期和长期国债时银行被要求持有的资本额小，而类似地投资于其他低风险金融工具时银行被要求持有的资本额较大。
3. 在美国，相比绝大多数固定收益金融工具，国债工具有税收优势，因为国债工具不用支付联邦税。

LIBOR 近似地等于 AA 级公司的短期借款利率。因此，它也并不是完美的基准无风险利率。LIBOR 贷款有效期内，AA 级借方也有可能违约，虽然这个可能性非常小。但是，交易员们认为这是他们能利用的最好的基准无风险利率。报出的 LIBOR 的期限最高达到 12 个月。我们将在第 7 章中看到，可以利用欧洲美元期货市场和互换市场来得到 12 个月以上的基准无风险利率。

## 回购利率

有时交易活动的资金来源于回购协议 (repo or repurchase agreement)。回购协议是指持有证券的投资者同意将其证券出售给另一方，之后再以稍高一些的价格将这些证券买回的协议。这里，对方公司给投资者提供了贷款。证券出售和购回的价差就是对方的利息收益，该利率被称为回购利率 (repo rate)。如果谨慎构建协议框架，这种贷款几乎没有信用风险。因为如果资金借入方不遵守协议的话，资金债权人只需保留证券即可。反之，如果贷方不遵守协议的话，原持有证券的投资者则保留他收到的现金。

最普通的回购类型是隔夜回购 (overnight repo)，该回购协议每天都重新商定。但是，长期协议，即所谓的期限回购 (term repo)，有时也会用到。

## 4.2 利率的度量

一个银行报出一年定期存款利率为每年 10%。虽然这个数据看起来直截了当、简单明确，但事实上，它的精确含义取决于选择什么样的利率度量方式。

如果利率按每一年计一次复利计算，银行报出的每年 10% 的利率意味着 \$100 在 1 年末增长到

表 4.1 不同的复利频率对 \$100 在一年末的价值的影响，利率为每年 10%

| 复利频率            | \$100 在 1 年末的价值 (美元) |
|-----------------|----------------------|
| 每一年 ( $m=1$ )   | 110.00               |
| 每半年 ( $m=2$ )   | 110.25               |
| 每季度 ( $m=4$ )   | 110.38               |
| 每 月 ( $m=12$ )  | 110.47               |
| 每 周 ( $m=52$ )  | 110.51               |
| 每 天 ( $m=365$ ) | 110.52               |

$$\$100 \times 1.1 = \$110$$

如果利率按每半年计一次复利计算，这说明我们在每半年获得本金 5% 的利息，并再投资获得的利息。这样的情况下，\$100 在 1 年末增长到：

$$\$100 \times 1.05 \times 1.05 = \$110.25$$

如果利率按每季度计一次复利计算，这说明我们在每 3 个月获得本金 2.5% 的利息，并再投资获得的利息。这样的情况下，\$100 在一年末增长到：

$$\$100 \times 1.025^4 = \$110.38$$

表 4.1 表示了进一步提高复利频率所带来的效果。

复利频率决定度量利率的单位。一个复利频率表示的一个利率可以转换成另一个不同复利频率表示的等价利率。例如，从表 4.1 我们可以看出，一年计一次复利的 10.25% 的年利率等价于半年计一次复利的 10% 的年利率。两个不同的复利频率之间的区别可以类比为公里和英里的区别，也就是两个不同的度量单位。

为了推导一般结论，假设数额  $A$  以年利率  $R$  投资了  $n$  年。如果利率按每一年计一次复利计算，则以上投资的终值为：

$$A(1+R)^n$$

如果每年计  $m$  次复利，则该投资的终值为：

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn} \quad (4.1)$$

当  $m = 1$  时，该利率有时被称为等价年利率。

## 连续复利

当复利频率  $m$  趋于无穷大时，就称为连续复利 (continuous compounding)。<sup>4</sup>

<sup>4</sup> 保险精算师们有时称连续复利利率为息力 (force of interest)。

在连续复利情况下，数额  $A$  以利率  $R$  投资  $n$  年后，将达到：

$$A e^{Rn} \quad (4.2)$$

这里  $e$  是一个数学常数， $e = 2.71828$ 。大多数计算器都可以计算出指数函数  $e^x$  的值，那么计算公式 (4.2) 的表达式没有任何问题。在表 4.1 的例子中， $A = 100$ ， $n = 1$ ， $R = 0.10$ ，因此， $A$  以连续复利计息将增长到：

$$100e^{0.1} = \$110.52$$

这个数值（精确到小数点后两位）与用每天计复利得到的结果一样。从大部分实用目的来看，通常认为连续复利与每天计复利等价。对一笔以利率  $R$  连续复利  $n$  年的资金，其结果是乘上  $e^{Rn}$ 。对一笔以利率  $R$  连续复利贴现  $n$  年的资金，则应乘上  $e^{-Rn}$ 。

在本书中，除非特别说明，所使用的利率均以连续复利来计算。习惯于以一年、半年或其他方式来计算复利的读者开始接触时可能会有些陌生。但是，在期权以及其他复杂衍生证券定价时，连续复利得到广泛的应用，因而从现在开始就熟悉连续复利是很有必要的。

假设  $R_c$  是连续复利的利率， $R_m$  是与之等价的每年计  $m$  次复利的利率，从式 (4.1) 和式 (4.2)，我们有：

$$A e^{R_c n} = A \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{mn}$$

即

$$e^{R_c} = \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^m$$

这意味着：

$$R_c = m \ln \left(1 + \frac{R_m}{m}\right) \quad (4.3)$$

和

$$R_m = m(e^{R_c/m} - 1) \quad (4.4)$$

这些公式可将复利频率为每年计  $m$  次的利率转换为连续复利的利率，反之亦然。 $\ln x$  为自然对数函数，它是指数函数的反函数。所以：如果  $y=\ln x$ ，则  $x=e^y$ 。

**[例 4.1]** 考虑一个年息为 10% 的利率，半年计一次息。利用式 (4.3)，则  $m=2$ ， $R_m = 0.10$ ，可得到一个等价的连续复利的利率为：

$$2 \ln \left(1 + \frac{0.1}{2}\right) = 0.09758$$

即 9.758%/年。

**[例 4.2]** 假设债权人给出贷款利息为年息 8%，连续复利计息。而实际上利息是一季度支付一次。利用公式 (4.4)， $m = 4$ ， $R_c = 0.08$ ，每季度计一次息的等价年利率为：

$$4(e^{0.08/4}-1) = 0.0808$$

即年利率为 8.08%。这意味着，对于 \$1 000 的贷款，则要求借款人每季度必须支付 \$20.2 的利息。

### 4.3 零息率

$n$  年期零息票利率 (zero-coupon interest rate) 指从现在开始持续  $n$  年的一笔投资中获得的利息率。所有利息和本金是  $n$  年期限结束之时收到，中间不发生任何支付。 $n$  年期零息票利率有时也被称为  $n$  年期即期利率或  $n$  年期零息率 (zero rate or zero)。假设一个报价中连续复利的 5 年期零息率为每年 5%。这说明 \$100 投资 5 年之后，增长到：

$$100 \times e^{0.05 \times 5} = 128.40$$

我们在市场能直接观察到的很多利率并不是纯粹的零息率。考虑一个 5 年期息票率为 6% 的政府债券。我们不能从这一个债券自身的价格直接推导 5 年期国债零息率，因为国债的一些息票支付是发生在 5 年这一期间的。在本章后面部分，我们将讨论怎么从附息国债中推出国债零息率。

### 4.4 债券的定价

大部分债券定期支付息票。债券的本金（也称为账面价值或面值）支付则在债券到期之时实现。将债券持有者将来收到的所有现金流贴现的现值求和，可计算出债券的理论价格。有时债券交易员使用相同的贴现率来贴现所有未来现金流，更为精确的方法是对于不同时间的现金流使用不同的零息率。

为了解释该方法，考虑以下情形，连续复利的国债零息率如表 4.2（以后我们

表 4.2 国债零息率

| 期限 (年) | 零息率 (%) (连续复利) |
|--------|----------------|
| 0.5    | 5.0            |
| 1.0    | 5.8            |
| 1.5    | 6.4            |
| 2.0    | 6.8            |

将解释这些数据是如何计算出来的)。假设一个2年期国债的本金为\$100，息票率为每年6%，每半年支付一次息票。那么，为计算第一次\$3息票的现值，我们使用对应6个月期限的5.0%的贴现率；为计算第二次\$3息票的现值，我们使用对应1年期限的5.8%的贴现率。依此类推。

这样，债券的理论价格为：

$$3e^{-0.05 \times 0.5} + 3e^{-0.058 \times 1.0} + 3e^{-0.064 \times 1.5} + 103e^{-0.068 \times 2.0} = \$98.39$$

即为\$98.39。

## 债券收益率

债券收益率(bond yield)是这样一种贴现率，对所有未来现金流以该贴现率进行贴现，使计算出来的债券价格等于市场价格。假设我们在上一例子考虑的债券的理论价格\$98.39，等于它的市场价格(也就是说，债券市场价格和表4.2中的贴现率数据完全匹配)。如果用y来表示债券收益率，那么连续复利下，有：

$$3e^{-yx0.5} + 3e^{-yx1.0} + 3e^{-yx1.5} + 103e^{-yx2.0} = \$98.39$$

可以通过试错法(反复试验使得误差最小化)解该方程，得出 $y=6.76\%^5$

## 票面收益率

某个债券期限的票面收益率(par yield)指的是能使债券价格相等于其账面价值的息票率(账面价值等于本金价值)。通常，假定债券是每半年支付一次息票。假设我们的例子中的2年期债券的息票率为每年c(或者说是每半年 $1/2c$ )。使用表4.2中的零息率，债券的价格等于其账面价值(为100)时，有如下方程：

$$\frac{c}{2}e^{-0.05 \times 0.5} + \frac{c}{2}e^{-0.058 \times 1.0} + \frac{c}{2}e^{-0.064 \times 1.5} + \left(100 + \frac{c}{2}\right)e^{-0.068 \times 2.0} = 100$$

解方程很简单，得出 $c=6.87$ 。因此，2年期每半年计一次复利的票面收益率为每年6.87%(若转换为连续复利情况，等价于每年6.75%)。

考虑更为一般的情况，假设债券到期时收到的\$1的现值为d，每次息票支付日支付\$1的年金的价值为A，m为每年的利息支付次数，那么票面收益率c应该满足如下等式：

$$100 = A \frac{c}{m} + 100d$$

---

<sup>5</sup>一种求解 $f(y)=0$ 形式的非线性方程的方法是牛顿迭代法。先从解的一个估计值 $y_0$ 开始，利用公式 $y_{n+1} = y_n - f(y_n)/f'(y_n)$ ，可以得到一系列的更好的解的估计值 $y_1, y_2, y_3, \dots$ ，其中的 $f'(y)$ 表示 $f$ 关于 $y$ 的偏导数。

因此

$$c = \frac{(100 - 100d)m}{A}$$

在我们的例子中， $m = 2$ ,  $d = e^{-0.068 \times 2} = 0.87284$ ,

$$A = e^{-0.05 \times 0.5} + e^{-0.058 \times 1.0} + e^{-0.064 \times 1.5} + e^{-0.068 \times 2.0} = 3.70027$$

将  $m$ 、 $d$  和  $A$  值代入以上公式，得到票面收益率为每年 6.87%。注意，这里是每半年计一次复利的利率。若转换为连续复利，票面收益率为每年 6.75%。

## 4.5 零息票收益率曲线的确定

现在我们考虑如何从长期国债的价格得出零息票收益率。一个通常的方法是息票剥离方法 (bootstrap method)。为说明这个方法，考虑表 4.3 中 5 个债券价格的数据。由于前 3 个债券不付息票，对应这些债券期限的零息率可以容易地计算出来。3 个月期短期债券市场价格为 97.5, 3 个月期的收益为 2.5。按每季度计一次复利的 3 个月期零息率是每年  $(4 \times 2.5)/97.5 = 10.256\%$ 。利用方程 (4.3)，得到连续复利的 3 个月期零息率是：

$$4 \ln \left( 1 + \frac{0.10256}{4} \right) = 0.10127$$

即每年 10.127%。第二个债券 6 个月期限，价格为 94.9, 6 个月期收益为 5.1。每半年计一次复利的 6 个月期零息率是每年  $(2 \times 5.1)/94.9 = 10.748\%$ 。利用方程 (4.3)，连续复利的 6 个月期零息率是：

$$2 \ln \left( 1 + \frac{0.10748}{2} \right) = 0.10469$$

即每年 10.469%。类似地，连续复利的 1 年期利率是：

$$\ln \left( 1 + \frac{10}{90} \right) = 0.10536$$

表 4.3 息票剥离方法的数据

| 债券本金 (\$) | 到期期限 (年) | 年息票 * (\$) | 债券价格 (\$) |
|-----------|----------|------------|-----------|
| 100       | 0.25     | 0          | 97.5      |
| 100       | 0.50     | 0          | 94.9      |
| 100       | 1.00     | 0          | 90.0      |
| 100       | 1.50     | 8          | 96.0      |
| 100       | 2.00     | 12         | 101.6     |

\*注：假设每 6 个月支付所列息票数额的一半。

即每年 10.536%。

第 4 个债券期限 1.5 年。按如下方式支付：

|         |       |
|---------|-------|
| 6 个月期后  | \$4   |
| 1 年期后   | \$4   |
| 1.5 年期后 | \$104 |

从前面的计算中，我们知道在 6 月末支付所使用的连续复利的贴现率是 10.469%，在 1 年末支付所使用的连续复利的贴现率是 10.536%。我们也知道债券的价格 \$96 必须等于债券持有人收到的所有收入的现值。设  $R$  表示 1.5 年期的零息率，那么

$$4e^{-0.10469 \times 0.5} + 4e^{-0.10536 \times 1.0} + 104e^{-R \times 1.5} = 96$$

简化为：

$$e^{-1.5R} = 0.85196$$

即

$$R = -\frac{\ln(0.85196)}{1.5} = 0.10681$$

因此，1.5 年期的连续复利的零息率是 10.681%。这是唯一的与 6 个月期、1 年期零息率及表 4.3 中数据一致的零息率。

运用 6 个月期、1 年期、1.5 年期零息率和表 4.3 中第 5 个债券的信息，可以计算出 2 年期的零息率。如果  $R$  表示 2 年期的零息率，

$$6e^{-0.10469 \times 0.5} + 6e^{-0.10536 \times 1.0} + 6e^{-0.10681 \times 1.5} + 106e^{-R \times 2.0} = 101.6$$

从以上可得出  $R = 0.10808$ ，即 10.808%。

表 4.4 中总结了我们求出的这些利率。零息率曲线（zero curve）是表示零息票收益率与期限之间关系的曲线。通常的假设是利用息票剥离方法得出的零息率曲线数据点是线性的（这意味着，在我们的例子中， $1.25$  年期零息率为  $0.5 \times 10.536 + 0.5 \times 10.681 = 10.6085\%$ ）。通常也假设零息率曲线中第一个点之前和最后一点之后曲线都是水平的。图 4.1 表示了基于上述假设，由上面的数据所得到的零息率曲线。我们的例子中，利用更长期限的债券，可以更准确地画出到期期限

表 4.4 从表 4.3 中的数据计算的连续复利的零息率

| 期限 (年) | 零息率 (%) (连续复利) |
|--------|----------------|
| 0.25   | 10.127         |
| 0.50   | 10.469         |
| 1.00   | 10.536         |
| 1.50   | 10.681         |
| 2.00   | 10.808         |

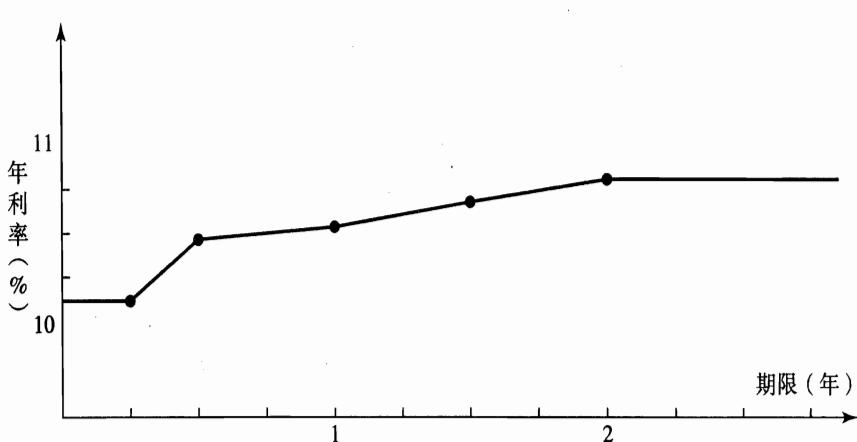


图 4.1 息票剥离方法给出的零息率曲线

超过 2 年的零息率曲线。

实际上，通常找不到正好 1.5 年期限、2 年期限、2.5 年期限等的债券。分析们通常利用线性插值得到对应其他中间期限的债券价格，之后再得出零息率曲线。例如，如果已经知道 2.3 年期限、息票率为 6% 的债券价格为 98，2.7 年期限、息票率为 6.5% 的债券价格为 99，那么，可以假设 2.5 年期限、息票率为 6.25% 的债券价格为 98.5。

## 4.6 远期利率

远期利率 (forward interest rate) 是由当前零息率隐含的在将来开始的一定期限的利率。为说明它是如何计算的，我们假设零息率如表 4.5 的第 2 列所示。假设这些零息率以连续复利计息。因此，1 年期 3% 年利率意味着今天投资 \$100，1 年后投资者收到  $100e^{0.03 \times 1} = \$103.05$ ；2 年期 4% 年利率意味着今天投资 \$100，2 年后投资者收到  $100e^{0.04 \times 2} = \$108.33$ 。依此类推。

表 4.5 中第 2 年的远期利率是年利率 5%。这个远期利率可由第 1 年末和第 2

表 4.5 远期利率的计算

| 年 ( $n$ ) | $n$ 年期投资的零息率 (%p.a.) | 第 $n$ 年的远期利率 (%p.a.) |
|-----------|----------------------|----------------------|
| 1         | 3.0                  |                      |
| 2         | 4.0                  | 5.0                  |
| 3         | 4.6                  | 5.8                  |
| 4         | 5.0                  | 6.2                  |
| 5         | 5.3                  | 6.5                  |

年末的两个零息率求得。它可以通过1年期每年3%的零息率和2年期每年4%的零息率计算出来。正是这个第2年的利率,<sup>6</sup>与第1年3%零息率组合在一起，得到整个2年期间年利率为4%的零息率。为证明正确答案是5%，假设投资\$100，则第1年3%年零息率和第2年5%年远期利率在第2年末总收益为：

$$100e^{0.03 \times 1} e^{0.05 \times 1} = \$108.33$$

2年期年利率为4%投资的总收益为：

$$100e^{0.04 \times 2}$$

这个结果也是\$108.33。这个例子说明了一个一般的结论：当这些利率是连续复利，并且将相互衔接时期的利率组合在一起时，整个期间的等价利率是这些利率的简单算术平均值。在我们的例子中，第1年的3%利率和第2年的5%利率的平均值为2年期4%利率。当这些利率不是连续复利时，这个结果近似成立。

第3年的远期利率是2年期4%年零息率和3年期4.6%年零息率隐含的利率，计算的结果是年利率5.8%。这是因为以4%年利率投资2年之后再以5.8%年利率投资1年可获得3年期年利率为4.6%的收益。其他的远期利率可用类似的方法计算，列在表4.5中的第3列。一般来说，如果 $R_1$ 是 $T_1$ 年期的零息率， $R_2$ 是 $T_2$ 年期的零息率，那么， $T_1$ 至 $T_2$ 期间的远期利率 $R_F$ 为：

$$R_F = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.5)$$

为说明这个公式，我们从表4.5中数据计算第4年远期利率。 $T_1 = 3$ ,  $T_2 = 4$ ,  $R_1 = 0.046$ , 且  $R_2 = 0.05$ , 公式给出  $R_F = 0.062$ 。

式(4.5)可重写为：

$$R_F = R_2 + (R_2 - R_1) \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.6)$$

这表明，如果收益率曲线在 $T_1 - T_2$ 区间是向上倾斜，则 $R_2 > R_1$ ，于是 $R_F > R_2$ （即远期利率高于那两个零息票收益率）。类似地，如果收益率曲线在 $T_1 - T_2$ 区间向下倾斜， $R_2 < R_1$ ，那么 $R_F < R_2$ （即远期利率低于那两个零息率）。式(4.6)中取 $T_2$ 趋近于 $T_1$ 的极限，把它们的公值（the common value of the two）记为 $T$ ，我们得到：

$$R_F = R + T \frac{\partial R}{\partial T}$$

其中， $R$ 为 $T$ 年期零息率。这样得到的 $R_F$ 值就是所谓的时刻 $T$ 的瞬态远期利率。这是 $T$ 时刻开始的一个相当短期间的远期利率。

假定借入和投资资金时的零息率完全相同（对于大金融机构，这一假定接近现实情况），一位投资者可以锁定未来某一时间段内的远期利率。例如，假设零息率如表4.5中的数据。如果一位投资者以3%借入\$100，借期1年，再将资金以

<sup>6</sup> 即一年后开始的一年期的利率，也称为第一年末开始的一年期的远期利率——译者注

4%投资 2 年。结果是，第 1 年末的现金流出为  $100e^{0.03 \times 1} = \$103.05$ ，第 2 年年末的现金流流入为  $100e^{0.04 \times 2} = \$108.33$ 。因为  $108.33 = 103.05e^{0.05}$ ，第 2 年内 \$103.05 的投资回报率相当于对应的远期利率 (5%)。假设投资者以 5% 借入 \$100，借期 4 年，再将资金以 4.6% 投资 3 年。结果是，第 3 年年末的现金流流入为  $100e^{0.046 \times 3} = \$114.80$ ，第 4 年年末的现金流出为  $100e^{0.05 \times 4} = \$122.14$ 。因为  $122.14 = 114.80e^{0.062}$ ，第 4 年内投资者借入资金的利率相当于对应的远期利率 6.2%。

如果投资者认为未来的利率将不同于现在的远期利率，他可以采取很多不同的有吸引力的交易策略 (参见商业剪影 4.2)。其中一个策略是利用远期利率协议，我们将讨论如何使用这种协议并对其进行估值。

## 4.7 远期利率协议

远期利率协议 (forward rate agreement, FRA) 是一个场外交易合约，参与者同意在指定的未来某个时期按照某个确定的利率借入或贷出某个确定本金。通常假设借入或贷出的基础合约的利率为 LIBOR。

考虑某个远期利率协议，公司 X 同意在  $T_1$  和  $T_2$  期限之间把资金借给公司 Y。定义如下的变量：

### 商业剪影 4.2 加州橘郡的收益率曲线赌博

假设投资者可以按表 4.5 中的利率借款或贷款，他认为 1 年期利率在未来 5 年内不会有太多变化。投资者可以借入 1 年期资金并把它投资 5 年。在第 1 年末、第 2 年末、第 3 年末、第 4 年末依次为 1 年到期的资金进行滚动融资。如果利率真的保持不变，该策略的收益率将为大约每年 2.3%，因为投资者收益 5.3% 而支付 3%。这种交易策略被称为收益率曲线赌博 (yield curve play)。该策略中，投资者认为未来的利率和当前在市场观察到的远期利率会非常不一样，投资者对此进行投机。(我们的例子中，当前在市场观察到的未来几年的 1 年期远期利率分别为 5%、5.8%、6.2% 以及 6.5%。)

罗伯特·西罗恩是加州橘郡的财务主管，他在 1992 年和 1993 年利用与上述收益率曲线赌博类似的策略取得了很大的成功。西罗恩先生的交易带来的利润成了加州橘郡预算的重要来源，而且他被重新选为财务主管。(选举的时候，他的竞争者提过他的策略过于危险，但没人注意到。)

1994 年，西罗恩先生以更大规模进行了收益率曲线赌博。他在反向浮动证券投资了非常多的金额。该证券支付的收益率等于一个固定利率减去一个浮动利率。他也在回购市场借款，提高了头寸的杠杆率。如果短期利率保持不变或下降，他的业绩会一如既往。现实是，在 1994 年，利率有大幅度上升。在 1994 年 12 月 1 日，加州橘郡宣布它的投资证券组合损失 15 亿美元，数天后它申请了破产保护。

$R_K$ : 远期利率协议的利率

$R_F$ : 现在计算的  $T_1 \sim T_2$  期间的远期 LIBOR<sup>7</sup>

$R_M$ : 在  $T_1$  时刻观察到的  $T_1 \sim T_2$  期间的市场的实际 LIBOR 值

$L$ : 协议的本金

这里我们将偏离连续复利假设，假设对于  $R_K$ 、 $R_F$  和  $R_M$ ，用相当于它们对应期限的复利频率进行度量。也就是说，如果  $T_2 - T_1 = 0.5$ ，则每半年计一次复利计算；而如果  $T_2 - T_1 = 0.25$ ，则每季度计一次复利计算。依此类推。

一般的情况下，公司 X 提供 LIBOR 贷款得到的利率为  $R_M$ 。而 FRA 可以使公司得到利率  $R_K$ 。公司通过签订 FRA 得到的额外利率（也可以为负值）为  $R_K - R_M$ 。所有利率水平在时刻  $T_1$  确定，时刻  $T_2$  进行支付。所以，在时刻  $T_2$ ，额外利率带给公司 X 的现金流为：

$$L(R_K - R_M)(T_2 - T_1) \quad (4.7)$$

与此对应的  $T_2$  时刻公司 Y 的现金流为：

$$L(R_M - R_K)(T_2 - T_1) \quad (4.8)$$

根据式(4.7)和式(4.8)，我们可以从另外一种角度描述 FRA。FRA 是这样的一个协议：公司 X 在  $T_1 \sim T_2$  期间以固定的利率  $R_K$  获得本金的利息，并以  $T_1$  时刻的实际市场利率  $R_M$  支付本金的利息。公司 Y 在  $T_1 \sim T_2$  期间以固定的利率  $R_K$  支付本金的利息，并以  $T_1$  时刻的实际市场利率  $R_M$  获得本金的利息。

通常，FRA 在  $T_1$  时刻进行结算，而不是  $T_2$  时刻。那么  $T_2$  时刻的损益应该贴现到  $T_1$  时刻。对于公司 X， $T_1$  时刻的损益为：

$$\frac{L(R_K - R_M)(T_2 - T_1)}{1 + R_M(T_2 - T_1)}$$

对于公司 Y， $T_1$  时刻的损益为：

$$\frac{L(R_M - R_K)(T_2 - T_1)}{1 + R_M(T_2 - T_1)}$$

**[例 4.3]** 假设一家公司签订一个 FRA，3 年后开始的 3 月期间内，公司将以 4% 固定利率获得 100 万美元本金的利息。后来，对应于该 3 月期限的 3 月期 LIBOR 为 4.5%。那么，在 3.25 年末发生的贷方的现金流将为：

$$1\,000\,000 \times (0.04 - 0.045) \times 0.25 = -\$1\,250$$

这等价于 3 年末的现金流

$$-\frac{1\,250}{1 + 0.045 \times 0.25} = -\$1\,236.09$$

---

<sup>7</sup> 远期 LIBOR 用 4.6 节中讲述的方法从 LIBOR/互换零息率曲线推导出来，7.6 节中将对此进行描述。

FRA 交易的另一方在 3.25 年末时刻的现金流为+\$1 250，或在 3 年末时刻的现金流为+\$1 236.09（例子中的所有利率是按每季度计一次复利计算的）。

## 估 值

为了对一个 FRA 进行估值，我们首先应该注意到，当  $R_k=R_F$  时，协议价值总是等于零。<sup>8</sup>这是因为，如 4.6 小节中所述，大金融机构可以近似无成本地锁定未来某一时间段内的远期利率。例如，金融机构可以借入 2 年期限的一定资金并把资金投资 3 年，就可以保证它获得的利率相当于第 2 年末至第 3 年末之间期限的远期利率。类似地，金融机构可以借入 3 年期限的一定资金并把资金投资 2 年，就可以保证它支付的利率相当于第 2 年末至第 3 年末之间期限的远期利率。

比较两个 FRA。第一个承诺在  $T_1 \sim T_2$  期限内可获得的远期利率  $R_F$  为 LIBOR，本金为  $L$ ；第二个承诺在相同期限内可获得的利率为  $R_K$ ，本金为  $L$ ；除了  $T_2$  时刻获得的利息支付不同之外，两个 FRA 完全一样。所以，第二个协议与第一个协议的价值差额为两个协议利息支付差额的现值，即为：

$$L(R_K - R_F)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2}$$

其中， $R_2$  是期限  $T_2$  的连续复利的无风险零息率。<sup>9</sup>因为收取  $R_F$  的 FRA 协议的价值为零，所以收取  $R_K$  的 FRA 协议的价值为：

$$V_{\text{FRA}} = L(R_K - R_F)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2} \quad (4.9)$$

类似地，支付  $R_K$  的 FRA 的价值为：

$$V_{\text{FRA}} = L(R_F - R_K)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2} \quad (4.10)$$

**[例 4.4]** 假设即期和远期 LIBOR 数据如表 4.5。考虑一个 FRA，协议期间从第 1 年末到第 2 年末，我们将收取 6% 利率，每年计一次复利，本金为 100 万美元。在表 4.5 情况下，1 年末的 1 年期远期利率为按连续复利计算的 5%（或按每年计一次复利计算的 5.127%）。根据式 (4.9)，该 FRA 的价值为：

$$1\,000\,000(0.06 - 0.05127)e^{-0.04 \times 2} = \$8\,058$$

比较式 (4.7) 和式 (4.9)，我们可以这样对 FRA 进行估值：

1. 假设未来的远期利率会实行，即  $R_M = R_F$ ，在这个假设下计算损益
2. 以无风险利率，对损益进行贴现

<sup>8</sup> 初始签订 FRA 时通常设定  $R_K$  等于  $R_F$ 。

<sup>9</sup> 注意  $R_K$ 、 $R_M$  和  $R_F$  都是以  $T_2-T_1$  期间来记复利频率，而  $R_2$  是用连续复利来表示的。

## 4.8 久期

债券的久期 (duration)，如它名称所示，是用来衡量债券的持有者在收到现金付款之前，平均需要等待多长时间。 $n$  年期限的零息票债券的久期为  $n$  年。然而， $n$  年期限的附息票债券的久期小于  $n$  年。这是由于持有者在第  $n$  年之前就收到一些利息了。

假定债券持有者在  $t_i$  时刻收到的现金为  $c_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )。债券的价格  $B$  和连续复利收益率  $y$  之间的关系为：

$$B = \sum_{i=1}^n c_i e^{-y t_i} \quad (4.11)$$

债券久期  $D$  的定义为：

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n t_i c_i e^{-y t_i}}{B} \quad (4.12)$$

也可以写为：

$$D = \sum_{i=1}^n t_i \left[ \frac{c_i e^{-y t_i}}{B} \right]$$

方括号中的那项为  $t_i$  时刻所有现金流的现值与债券价格的比率。债券的价格是将来所有本息的现值。因此久期是付款时间的加权平均值，对应  $t_i$  时刻的权重等于  $t_i$  时刻所有现金流的现值占债券总现值之比率。权重之和为 1.0。

当收益率有一微小的变动  $\Delta y$  时，如下等式近似成立：

$$\Delta B = \frac{dB}{dy} \Delta y \quad (4.13)$$

结合公式 (4.11)，上式变成

$$\Delta B = -\Delta y \sum_{i=1}^n c_i t_i e^{-y t_i} \quad (4.14)$$

(注意， $B$  和  $y$  是反方向变化的。当债券收益率提高，债券价格降低。当债券收益率下降，债券价格上升)。

根据公式 (4.12) 和公式(4.14)，我们可以推导关键的久期关系式：

$$\Delta B = -BD\Delta y \quad (4.15)$$

上式又可以改写为：

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y \quad (4.16)$$

公式 (4.16) 近似给出了债券价格变化百分数和收益率变化之间的关系。可见这种方法非常简单明了，这也是久期 (麦考利在 1938 年提出了久期概念) 成为广

泛应用的度量方式的原因。

考虑一个3年期债券，息票率为10%，面值为\$100。假定连续复利的债券收益率为12%，即 $y=0.12$ 。每6个月支付一次息票\$5。表4.6给出了计算该债券久期的过程。贴现率用收益率代替，将计算出的债券现金流的现值列在表中第3列中（例如，第一个现金流的现值为 $5e^{-0.12 \times 0.5} = 4.709$ ）。第3列中的数字之和等于债券价格94.213。第3列中的各个数字除以94.213就可得到各自权重。第5列中的数字之和即为久期2.653年。

利率的微小变动一般用基点来度量。在前面部分已经提过，一个基点为每年0.01%。下面的例子将研究公式（4.15）中久期关系的准确度。

**[例4.5]** 考虑表4.6中的债券，债券价格 $B$ 为94.213，久期 $D$ 为2.653。根据公式（4.15）：

$$\Delta B = -94.213 \times 2.653 \Delta y$$

即

$$\Delta B = -249.95 \Delta y$$

如果债券收益率上升10个基点（0.1%），即 $\Delta y = +0.001$ ，久期公式表明我们预计 $\Delta B = -249.95 \times 0.001 = -0.250$ 。换句话说，我们预计债券的价格将下降到 $94.213 - 0.250 = 93.963$ 。这样预计的价格有多么准确呢？如果债券收益率上升10个基点到12.1%，债券价格为：

$$5e^{-0.121 \times 0.5} + 5e^{-0.121 \times 1.0} + 5e^{-0.121 \times 1.5} + 5e^{-0.121 \times 2.0} + 5e^{-0.121 \times 2.5} + 105e^{-0.121 \times 3.0} = 93.963$$

可见和利用久期预计的结果一样（准确到小数点后三位）。

## 修正久期

前面的分析是在假定 $y$ 为连续复利的基础上得出的。如果 $y$ 为一年计一次复利的利率，则公式（4.15）近似关系变为：

表4.6 久期的计算

| 时间  | 付款金额 | 现 值    | 权 重   | 时间×权重 |
|-----|------|--------|-------|-------|
| 0.5 | 5    | 4.709  | 0.050 | 0.025 |
| 1.0 | 5    | 4.435  | 0.047 | 0.047 |
| 1.5 | 5    | 4.176  | 0.044 | 0.066 |
| 2.0 | 5    | 3.933  | 0.042 | 0.083 |
| 2.5 | 5    | 3.704  | 0.039 | 0.098 |
| 3.0 | 105  | 73.256 | 0.778 | 2.333 |
| 合计  | 130  | 94.213 | 1.000 | 2.653 |

$$\Delta B = \frac{-BD\Delta y}{1 + y}$$

更一般地，如果  $y$  表示为每年计  $m$  次复利频率，则

$$\Delta B = \frac{-BD\Delta y}{1 + y/m}$$

这样定义变量  $D^*$ ：

$$D^* = \frac{D}{1 + y/m}$$

$D^*$  有时称之为债券修正久期。那么久期关系可以相应的简化为：

$$\Delta B = -BD^*\Delta y \quad (4.17)$$

其中  $y$  是每年计  $m$  次复利的利率。通过以下例子，我们将研究修正久期关系的准确度。

[例 4.6] 考虑表 4.6 中的债券价格为 94.213，久期为 2.653。每半年计一次复利计算的收益率为 12.3673%。修正久期  $D^*$  为：

$$D^* = \frac{2.653}{1 + 0.123673/2} = 2.499$$

根据公式 (4.17)：

$$\Delta B = -94.213 \times 2.4985\Delta y$$

即

$$\Delta B = -235.39\Delta y$$

当债券收益率（每半年计一次复利）上升 10 个基点 ( $=0.1\%$ )， $\Delta y = +0.001$ 。久期关系公式表明我们预计  $\Delta B = -235.39 \times 0.001 = -0.235$ ，所以债券的价格将下降到  $94.213 - 0.235 = 93.978$ 。这样预计的价格有多准确呢？如果债券收益率（每半年计一次复利）上升 10 个基点到 12.4673%（等价于连续复利的 12.0941%），类似前面的例子 4.5，可以精确计算债券价格为 93.978。这表明修正久期公式的准确度较高。

## 债券组合的久期

我们可以将债券组合的久期  $D$  定义为组合中单个债券久期的加权平均，权重为单个债券的价格占组合价格的百分比。那么可以使用公式 (4.15) 至公式 (4.17)， $B$  定义为债券组合的价值。这样可以估计当所有债券的收益率有微小的变化  $\Delta y$  时债券组合的价值变化。

值得注意的一点是，当久期应用于债券组合的时候，一个隐含的假设是所有债券的收益率的变化程度是一样的。如果债券期限的覆盖范围比较宽，上述的情

况只会发生在零息票收益率曲线平移的时候。因此，我们应该说，公式 (4.15) 至公式 (4.17) 估计的是零息率曲线平移一个小小的  $\Delta y$  对于债券组合价值的影响。

## 4.9 凸 性

久期关系式只适用于收益率发生较小变化的情况。图 4.2 表明了具有相同久期的两个证券组合的价值变化百分数和收益率变化之间的关系。该图说明，在原点时两个曲线的斜率相等，而且当收益率变化很小时，两个组合价值变化的百分数相同，这就与公式 (4.16) 保持一致。当收益率发生较大的变化时，两个组合的价值变化的百分数就不同了。组合 X 的曲率比组合 Y 的曲率大。测量曲率的因素——凸性 (convexity)，它可以用来改进公式 (4.16)。

衡量凸性的一个方法是：

$$C = \frac{1}{B} \frac{d^2B}{dy^2} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 c_i e^{-r_i}}{B}$$

根据泰勒展开式，我们可以得到公式 (4.13) 更为准确的一个表达式：

$$\Delta B = \frac{dB}{dy} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{d^2B}{dy^2} \Delta y^2$$

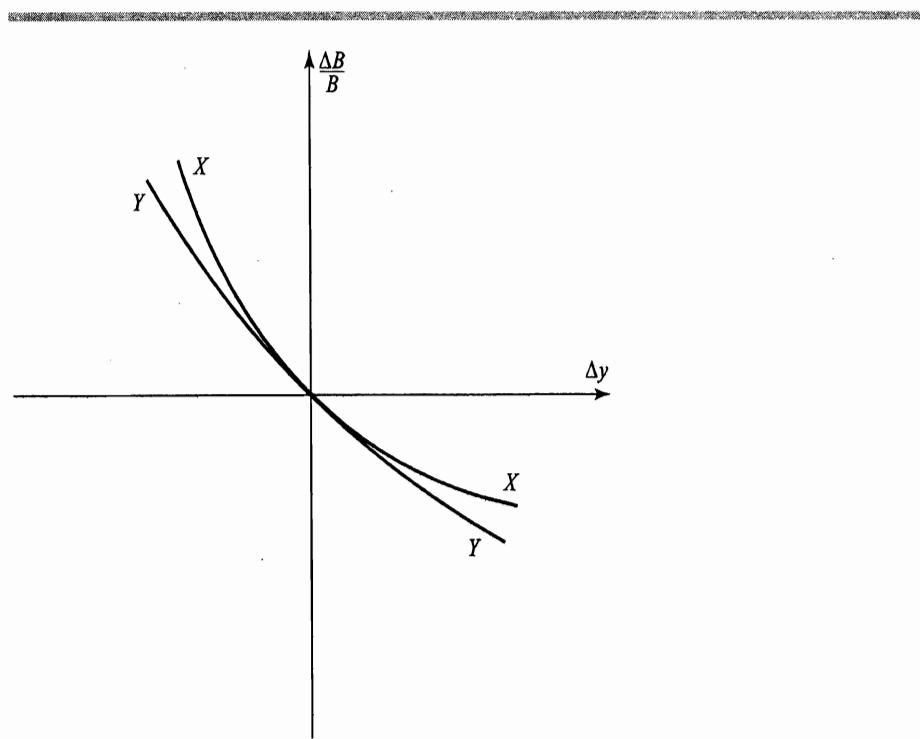


图 4.2 相同久期的两个证券组合

那么

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2$$

如果债券组合将来提供的现金流在长时期内均匀分布，则该组合的凸性是最大的。如果组合支付的现金流集中在某一特定的时间点上，凸性最小。通过使资产的久期和凸性与负债的久期和凸性相互匹配，一家公司可以避免零息率曲线较大幅度平移所带来的利率风险。但是，公司还是暴露于曲线非平行移动所带来的风险中。

## 4.10 期限结构理论

读者们自然会有疑问，是什么决定零息率曲线的形状，为什么曲线有时是向下倾斜、有时是向上倾斜或者有时是部分向上倾斜。部分向下倾斜的已经提出了许多种不同的期限结构理论。最简单的是预期理论 (expectations theory)。该理论认为长期利率应该反映预期的未来的短期利率。更精确地说，它认为对应某一确定时期的远期利率应该等于预期的未来的那个期限的零息率。另一个理论是所谓的市场分割理论 (market segmentation theory)。该理论认为短期、中期和长期利率之间没有什么关系。不同的机构投资于不同期限的债券，并不转换期限。短期利率由短期债券市场的供求关系来决定，中期利率由中期债券市场的供求关系来决定，等等。

比较令人感兴趣的另一个理论是所谓的流动性偏好理论 (liquidity preference theory)。该理论认为远期利率应该总是高于预期的未来的零息率。这个理论的基本假设是投资者愿意保持流动性并选择较短期限的投资方式。而另一方面，长期借款的借款人通常愿意用固定利率。如果银行和其他金融中介提供的利率符合预期理论，长期利率应该等于预期未来短期利率的平均值。在没有其他选择的情况下，投资者将倾向于存短期资金，借款人将倾向于借长期资金。于是金融中介发现他们需用短期存款来为长期固定利率贷款融资。这将包含额外的利率风险。实际上，为了使存款者和借款人匹配，避免利率风险，金融中介将提高长期利率，使其与预期未来的短期利率相当。这个策略将减少长期固定利率借款的需求，鼓励投资者存更长期限的资金。

流动性偏好理论说明远期利率大于预期的未来的零息率。实证结果说明收益率曲线向上倾斜的状况比向下倾斜的状况要多，流动性偏好理论与以上结果相一致。

## 小 结

对于衍生证券交易员们来说非常重要的两个利率是国债利率和 LIBOR。国债利率是政府借入本国货币资金时支付的利率。LIBOR 是一家银行向同业银行贷出短期资金时收取的

利率。

某个利率的复利频率决定该利率被度量的单位。每年计一次复利和每季度计一次复利之间的区别类似于距离度量中的英里和公里之间的区别。交易员们在估值衍生证券的时候通常使用连续复利。

金融市场中报出的以及分析师们计算的利率有很多种类。 $n$  年期零息率或  $n$  年期即期利率是指从现在持续  $n$  年的一笔投资中所获得的利息率，所有收益在  $n$  年期限结束之时收到。具有确定期限的债券票面收益率指的是能使债券价格相当于其账面价值的息票率。远期利率是由当前零息率隐含的将来一定期限的利率。

最经常使用的计算零息率的方法是息票剥离方法。这一方法中从短期限金融工具逐步移到长期限金融工具，在每个阶段，保证计算的零息率和相应金融工具的价格相互一致。交易员以这种方法每天计算国债零息率曲线。

远期利率协议 FRA 是一种场外交易合约，参与者同意在指定的未来某个时期将某个确定的利率应用于某个确定的以 LIBOR 借入或贷出的本金。根据远期利率将实现的假设，对损益进行贴现，就能得到 FRA 的价值。

利率市场中的一个重要概念是久期。久期度量一个债券组合的价值对于零息率曲线的小幅度平移的敏感度。存在以下关系式：

$$\Delta B = -BD\Delta y$$

其中， $B$  是债券组合的价值， $D$  是组合的久期， $\Delta y$  是零息率曲线小幅平移幅度， $\Delta B$  是债券组合价值受到的影响。

## 参考读物

- Allen, S. L., and A. D. Kleinstein. *Valuing Fixed-Income Investments and Derivative Securities*. New York: New York Institute of Finance, 1991.
- Fabozzi, F. J. *Fixed-Income Mathematics: Analytical and Statistical Techniques*, New York: McGraw-Hill, 1996.
- Fabozzi, F. J. *Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures*, Frank J. Fabozzi Assoc., 1999.
- Grinblatt, M., and F. A. Longstaff. "Financial Innovation and the Role of Derivatives Securities: An Empirical Analysis of the Treasury Strips Program," *Journal of Finance*, 55, 3 (2000): 1415–36.
- Jorion, P. *Big Bets Gone Bad: Derivatives and Bankruptcy in Orange County*. New York: Academic Press, 1995.
- Stigum, M., and F. L. Robinson. *Money Markets and Bond Calculations*. Chicago: Irwin, 1996.

## 问题和习题

- 4.1 一家银行报出的每季度计一次复利的利率为 14%p.a.。请问 (a) 连续复利计算的，以及 (b) 每年计一次复利计算的等价利率为多少？
- 4.2 请解释 LIBOR 和 LIBID 的含义。那个利率更高？
- 4.3 6 个月期和 1 年期零息率都是 10%p.a.。一个债券的有效期为 18 个月，息票率为 8%p.  
a. (每半年支付一次，已经支付过一次)，收益率为 10.4%p.a.。请问债券价格为多少？  
18 个月期零息率为多少？所有利率每半年计一次复利。

4.4 某投资者现在投资\$1 000, 一年后可收回\$1 100。当按以下方式计息时, 年收益率为多少?

- (a) 按年计复利
- (b) 以半年计复利
- (c) 以月计复利
- (d) 连续复利

4.5 假设连续复利零息率如下:

| 期限(月) | 利率(%p.a.) |
|-------|-----------|
| 3     | 8.0       |
| 6     | 8.2       |
| 9     | 8.4       |
| 12    | 8.5       |
| 15    | 8.6       |
| 18    | 8.7       |

请计算第2、3、4、5和6个季度对应的远期利率。

4.6 假设零息率如习题4.5。一个FRA中, 1年后开始的3个月内持有者可以从本金100万美元获得9.5% (每季度计算一次复利的)。请问该FRA的价值为多少?

4.7 利率期限结构的形状是向上倾斜的。请把如下的几项以大小重新排列:

- (a) 5年期零息率
- (b) 5年期附息债券的收益率
- (c) 未来的第5年至第5.25年期限之间对应的远期利率

如果利率期限结构的形状是向下倾斜的, 你的答案是什么?

4.8 关于一个债券组合对于利率的敏感性, 久期告诉我们什么? 久期度量有哪些局限?

4.9 按月计复利的15%的年利率等价于多少连续复利的年利率?

4.10 一存款账户按12%的年利率(连续复利)计息, 但实际上每季度支付一次利息。\$10 000的存款, 每季度支付多少利息?

4.11 假设6个月期、12个月期、18个月期、24个月期以及30个月期的零息率分别为4%、4.2%、4.4%、4.6%、4.8%, 以连续复利计算。一个债券的账面价值为100, 有效期为30个月, 息票率为4%p.a., 每半年支付一次息票。请计算该债券的现金价值。

4.12 一个3年期债券的息票率为8%, 每半年支付一次息票, 债券的现金价格为104。请问该债券的收益率为多少?

4.13 假设6个月期、12个月期、18个月期和24个月期的零息率分别为5%、6%、6.5%和7%。请问2年期票面收益率为多少?

4.14 假设连续复利零息率如下:

| 期限(月) | 利率(%p.a.) |
|-------|-----------|
| 1     | 2.0       |
| 2     | 3.0       |
| 3     | 3.7       |
| 4     | 4.2       |
| 5     | 4.5       |

请计算第2、3、4、5年对应的远期利率。

- 4.15 根据习题 4.14 中利率，计算第 3 年关于本金 100 万美元支付 5% 的 FRA 的价值。
- 4.16 息票率为 8% 的 10 年期债券的现价为 \$90。息票率为 4% 的 10 年期债券的现价为 \$80。  
10 年期零息率为多少？（提示：考虑持有两个息票率为 4% 的债券的多头，并持有一个息票率为 8% 的债券的空头的情况。）
- 4.17 请仔细解释流动性偏好理论与实证结果（利率期限结构的收益率曲线向上倾斜的状况比向下倾斜的状况要多）一致的原因。
- 4.18 请解释这句话：“当零息率曲线是向上倾斜的时候，某一期限的零息率比相同期限的票面收益率要高。当零息率曲线是向下倾斜的时候，结果正好相反。”
- 4.19 为什么美国国债利率比其他接近无风险的利率相对更低？
- 4.20 为什么回购市场中的贷款的信用风险非常小？
- 4.21 请解释为什么 FRA 等价于，以某一浮动利率交换某一固定利率。
- 4.22 收益率为 11%（连续复利）的 5 年期债券的息票率为 8%，每年年末支付息票。  
 (a) 债券的价格为多少？  
 (b) 债券的久期为多少？  
 (c) 利用久期计算收益率下降 0.2% 时债券价格发生的变化。  
 (d) 重新计算收益率为 10.8%p.a. 时的债券价格，并验证该结果和你关于 (c) 给出的答案是一致的。
- 4.23 6 个月期和 1 年期短期国债的现金价格分别为 94.0 和 89.0。一个 1.5 年期债券，6 个月支付 \$4 息票，该债券的现价为 \$94.84。一个 2 年期债券，6 个月支付 \$5 息票，该债券的现价为 \$97.12。请计算 6 个月期、1 年期、1.5 年期和 2 年期零息率。

### 课后练习

- 4.24 一个报出的利率为 5%p.a.，每半年计算一次复利。（a）每年计一次复利（b）每月计一次复利（c）连续复利的等价利率为多少？
- 4.25 6 个月期、12 个月期、18 个月期和 24 个月期的零息率分别为 4%、4.5%、4.75% 和 5%，每半年计算一次复利。  
 (a) 连续复利的利率为多少？  
 (b) 18 个月后的 6 个月期对应的远期利率为多少？  
 (c) 一个 FRA 在 18 个月后的 6 个月内关于本金 100 万美元支付 6%（每半年计一次复利）。该 FRA 的价值为多少？
- 4.26 零息率如习题 4.25 时，请计算 2 年期票面收益率。一个 2 年期债券支付的息票率和上述票面收益率相同，请计算该债券的收益率。
- 4.27 债券价格如下表：

| 债券本金 (\$) | 到期期限 (年) | 年息票 * (\$) | 债券价格 (\$) |
|-----------|----------|------------|-----------|
| 100       | 0.50     | 0.0        | 98        |
| 100       | 1.00     | 0.0        | 95        |
| 100       | 1.50     | 6.2        | 101       |
| 100       | 2.00     | 8.0        | 104       |

\* 注：假设每 6 个月支付所列息票数额的一半。

- (a) 计算 6 个月期、12 个月期、18 个月期和 24 个月期的零息率。
  - (b) 计算以下期间对应的远期利率：6~12 个月、12~18 个月和 18~24 个月。
  - (c) 每半年支付息票的 6 个月期、12 个月期、18 个月期和 24 个月期债券的票面收益率分别为多少？
- 4.28 证券组合 A 由一个账面价值为 \$2 000 的 1 年期零息票债券和一个账面价值为 \$6 000 的 10 年期零息票债券组成。证券组合 B 由一个账面价值为 \$5 000 的 5.95 年期零息票债券组成。当前所有债券的收益率为 10%p.a.。
- (a) 请证明两个证券组合的久期相同。
  - (b) 请说明收益率上升 0.1%p.a. 的时候，两个证券组合价值的变化百分数相同。
  - (c) 收益率上升 5% 的时候，两个证券组合价值的变化百分数为多少？



# 远期和期货价格的决定

在本章中，我们将讨论远期价格和期货价格与其标的资产的即期价格之间的相互关系。因为没有每日结算，而是到期之时一次性支付，分析远期合约比分析期货合约容易些。幸运的是，我们可以看到，当同一资产的远期和期货两种合约的到期日相同时，该资产的远期价格和期货价格是非常接近的。

本章第一部分将推导远期价格与即期价格之间重要的一般性的结论。随后，将利用以上分析的结果来计算股票指数、外汇、商品的现货价格与期货价格的关系。在下一章中将对利率期货合约进行讨论。

## 5.1 投资资产与消费资产

考虑远期合约和期货合约的时候，明确区分投资资产和消费资产是很重要的。投资资产（investment asset）是众多投资者仅为了进行投资而持有的资产。股票和债券很明显是投资资产，黄金和白银也属于投资资产。应该注意，并不是说，投资资产只能为了进行投资而持有（例如，很多工业使用白银）。但是，投资资产应该满足的条件是，有众多投资者仅为了进行投资而持有该类资产。而消费资产（consumption asset）则主要是为了进行消费而持有的资产。消费资产通常不是为了投资而持有。消费资产的例子有黄铜、石油和脯肉等商品。

在本章后面，我们将利用投资资产的即期价格和其他一些可观察到的市场变量，根据套利关系，对投资资产的远期和期货价格进行定价。那些基于消费资产的合约我们不能这样定价。

## 5.2 卖 空

本章中的一些套利策略涉及了卖空操作（short selling，简称 shorting）。这是一项交易策略，它是指卖出并不拥有的证券。对某些（并不是全部）投资资产可以适用这种交易策略。我们将通过考虑卖空股票的例子来解释卖空的机理。

假设一个投资者指示经纪人卖空 500 股 IBM 股票。经纪人立即执行指示，从另一位客户处借来 500 股 IBM 股票，然后像通常一样在公开市场上将其卖掉。只

要能借到股票，这位投资者就能够按自己的意愿不断维持该空头头寸。然而到某个阶段，投资者会购买 500 股 IBM 股票将该头寸平仓，然后将之归还原主。如果股票价格下降了，则投资者会盈利；若股票价格上升了，则投资者会有损失。若在合约未平仓期间，经纪人借不到股票了，投资者就被挤空 (short-squeezed)，尽管他可能并不想轧平头寸，也必须立即平仓。

空头投资者必须将该证券的任何收入，如红利或利息付给经纪人，这些收入都是通过被卖空的证券应该正常得到的。经纪人然后将它转到被借证券的客户的账户上。假设一位投资者于 4 月份卖空了 500 股 IBM 股票，每股价格是 \$120。7 月份，当股票价格为 \$100 时，该投资者买回了这些股票，结清了头寸。假设 5 月份每股股票支付了 \$1 的红利，投资者在 4 月份建立空头头寸时，共收到： $500 \times \$120 = \$60\,000$ 。5 月份的红利使投资者需付出： $500 \times \$1 = \$500$ 。7 月份投资者轧平头寸时，需付出： $500 \times \$100 = \$50\,000$ 。因此，净收益为：

$$\$60\,000 - \$500 - \$50\,000 = \$9\,500$$

表 5.1 中说明了这一例子，卖空操作的现金流等价于在 4 月份购买这些股份 7 月份重新卖出获得的现金流的镜像。

经纪人要求做卖空的客户建立一个保证金账户。经纪人要求投资者应在保证金账户里存入现金或可销售证券，由此保证证券价格上升时，投资者不会抛弃空头头寸。这和第 2 章中阐述的期货合约的保证金账户类似。客户需要支付一定数额的初始保证金，如果卖空的资产价格出现了不利的变动（这里指价格上升），则要增加追加保证金。建立保证金账户并不意味着投资者需要付出成本，因为对保证金账户内的资金通常会支付利息，并且如果该利率支付水平不令人满意，诸如短期国债这样的可在市场流通的证券可以作为保证金。最初卖出证券的所得一般成为初始保证金的一部分。

目前，美国监管部门只允许在股票价格报升时才能卖空，即该股票的价格在最近一段时间呈上升态势时可以卖空。但是，当交易者卖空的是与股票指数组合一样的一个篮子股票时，则是一个例外。

表 5.1 卖空操作和购买股份的现金流

| 购买股份                           |           |
|--------------------------------|-----------|
| 4 月份：购买 500 股，每股价格为 \$120      | -\$60 000 |
| 5 月份：接收红利                      | +\$500    |
| 7 月份：卖出 500 股，每股价格为 \$100      | +\$50 000 |
| <hr/>                          |           |
| 净利润 = -\$9 500                 |           |
| 卖空操作                           |           |
| 4 月份：借入 500 股，并每股 \$120 卖出     | +\$60 000 |
| 5 月份：支付红利                      | -\$500    |
| 7 月份：买入 500 股，每股价格为 \$100，轧平头寸 | -\$50 000 |
| <hr/>                          |           |
| 净利润 = +\$9 500                 |           |

### 5.3 假设和符号

在本章中，我们假定对部分市场参与者而言，以下全部是正确的：

1. 市场参与者交易时无交易费用
2. 市场参与者的所有的净交易利润（减去交易损失后的净额）使用同一税率
3. 市场参与者能够以相同的无风险利率借入和贷出资金
4. 当套利机会出现时，市场参与者将参与套利活动

注意，我们并不要求这几条假设对所有的市场参与者来说都是正确的。我们只要求这些假设对大的投资银行等几个关键的市场参与者是正确的，至少是近似正确的。正是这些关键的市场参与者的积极交易，积极利用他们发现的套利机会，才决定了远期和即期价格之间的关系。

本章中将要用到的符号如下：

$T$ : 远期或期货合约到期的时刻（年）

$S_0$ : 远期或期货合约标的资产当前的价格

$F_0$ : 当前的远期或期货价格

$r$ : 对交割日（即  $T$  年后）到期的一项投资而言，以连续复利计算的零息票无风险利率

无风险利率  $r$  理论上来说是：没有信用风险时借入和贷出资金的利率，即此时贷出的资金肯定能再收回。如第 4 章中所述，金融机构和其他衍生品市场的参与者一般用 LIBOR 来替代无风险利率，而不是用国债利率。

### 5.4 投资资产的远期价格

最容易定价的远期合约是基于不支付收益证券的远期合约。不付红利的股票和零息票债券就是此类的证券。

#### 实 例

考虑一个基于不支付红利的股票的远期合约，3 个月后到期。<sup>1</sup> 假设当前股价为 \$40，3 个月期无风险利率为每年 5%。

先假设远期价格相对较高，为 \$43。一个套利策略是以每年 5% 的无风险利率借入 \$40，购买一股股票，然后卖出将在 3 个月后交割一股的远期合约。3 个月后，套利者交割一股股票并收到 \$43。同时需要支付的贷款总额为：

$$40e^{0.05 \times 3/12} = \$40.50$$

---

<sup>1</sup> 基于个股的远期合约相对很少，但这些例子对启发我们的思路很有用。2002 年 11 月开始，美国开始了基于个股的期货交易。

根据这样的策略，套利者在3个月期限结束之时可以锁定 $\$43.00 - \$40.50 = \$2.50$ 的利润。

再假设远期价格相对较低，为 $\$39$ 。套利者可以卖出一股股票，并把得到的资金以每年5%的利率投资3个月，然后买入3个月期远期合约。3个月后，卖空股票中得到的资金增加到 $40e^{0.05 \times 3/12}$ ，即 $\$40.50$ 。同时，套利者要支付 $\$39$ ，得到交割的股票并进行平仓。因此，3个月后的净收益为：

$$\$40.50 - \$39.00 = \$1.50$$

表5.2总结了以上两种套利策略。

那么什么情况下表5.2中所述的套利机会不会存在呢？第一种套利策略在远期价格大于 $\$40.50$ 时可以执行，而第二种套利策略在远期价格小于 $\$40.50$ 时可以执行。我们可以推出当远期价格正好等于 $\$40.50$ 时，不存在套利机会。

## 一般结论

为了推出一般性结果，我们考虑一个基于不支付收益、价格为 $S_0$ 的投资资产的远期合约。使用我们在上面定义的符号， $T$ 为合约到期期限， $r$ 为无风险利率， $F_0$ 为远期价格。那么 $F_0$ 和 $S_0$ 之间关系应该是：

$$F_0 = S_0 e^{rT} \quad (5.1)$$

如果 $F_0 > S_0 e^{rT}$ ，套利者可以购买该资产并卖出该资产远期合约；如果 $F_0 < S_0 e^{rT}$ ，套利者可以卖出该资产并买入该资产远期合约。<sup>2</sup>在我们上面的例子中， $S_0 =$

表5.2 不支付收益资产的远期价格和即期价格隐含的某个值不一致时，存在套利机会  
(资产价格= $\$40$ ；利率=5%；远期合约的期限=3个月)

| 远期价格 = \$43          | 远期价格 = \$39          |
|----------------------|----------------------|
| 当前的操作：               | 当前的操作：               |
| 以5%借入\$40，3个月期       | 卖空1单位资产，得到\$40       |
| 购买1单位资产              | 以5%将\$40投资3个月        |
| 卖出远期合约，3个月后以\$43卖出资产 | 买入远期合约，3个月后以\$39买入资产 |
| 3个月后的操作：             | 3个月后的操作：             |
| 以\$43卖出资产            | \$39买入资产             |
| 用\$40.50支付贷款和利息      | 平仓                   |
|                      | 从投资收取\$40.50         |
| 实现的利润 = \$2.50       | 实现的利润 = \$1.50       |

<sup>2</sup> 另外一种方法可证明公式(5.1)是正确的。考虑如下策略：买入1单位资产，签订远期合约，在 $T$ 时刻以 $F_0$ 卖出该资产。该策略的成本是 $S_0$ ， $T$ 时刻将带来现金流 $F_0$ 。因此， $S_0$ 必须等于 $F_0$ 的现值。即 $S_0 = F_0 e^{-rT}$ ，或可以表示为 $F_0 = S_0 e^{rT}$ 。

### 商业剪影 5.1 凯德公司的令人尴尬的失误

投资银行开发了一种创造零息票债券的方式，被称为“Strip”。把附息债券产生的每个现金流作为一个独立的证券出售。凯德公司的交易员约瑟夫·杰特的交易策略相对简单。他买入 Strip，并在远期市场卖出。方程 (5.1) 说明不支付收益证券的远期价格总是比即期价格要高。例如，假设 3 个月期利率为 4%p.a.，一个 Strip 的即期价格为 \$70。该 Strip 的 3 个月远期价格为  $\$70e^{0.04 \times 3/12} = \$70.70$ 。

凯德公司的计算机系统报出，杰特的每个交易的利润等于远期价格超过即期价格的数额（我们的例子中是 \$0.70）。而事实上，计算出的这个所谓利润仅仅等于购买 Strip 的融资成本。杰特通过向前延展他的合约，防止了这种成本的累积。

最终结果是，计算机系统报出的杰特的交易利润为 1 亿美元（杰特为此得到了很多奖金）。而事实上，交易的损失接近 3.5 亿美元。这说明了，大的金融机构有时也会在非常简单的问题上失误。

$40, r = 0.05, T = 0.25$ ，所以根据公式 (5.1) 得出：

$$F_0 = 40e^{0.05 \times 0.25} = \$40.50$$

这和我们之前的计算结果完全一致。

买入远期合约或即期购买都可以使交易者在  $T$  时刻拥有资产。由于在远期合约有效期间内，即期购买资产时存在融资的时间成本，因此，远期价格高于即期价格。但是，凯德公司没有注意到这个事实（参见商业剪影 5.1）。

**[例 5.1]** 考虑一个 4 个月期远期合约，规定购买一个从今天算起期限为 1 年的零息票债券（也就是说远期合约到期之后债券有效期还剩 8 个月）。该债券的现价为 \$930。我们假定连续复利计算的 4 个月期无风险利率为每年 6%。因为零息票债券不支付收益，我们可以使用公式 (5.1)。那么， $T = 4/12, r = 0.06, S_0 = 930$ 。则远期价格  $F_0$  为：

$$F_0 = 930e^{0.06 \times 4/12} = \$948.79$$

这就是当前能商定的交易的远期合约价格。

### 如果不允许卖空怎么办

不是所有投资资产都能进行卖空交易，但问题不大。推导公式 (5.1)，并不需要有一定能卖空资产的前提。我们所需要的假设是有众多投资者仅为了进行投资而持有该类资产（根据投资资产的假设，这总是成立的）。如果远期价格较低，投资者会发现卖出资产并持有远期多头是对他们有利的。

假设标的资产是黄金，不支付收益，不考虑贮存成本。如果  $F_0 > S_0 e^r$ ，一位投资者可以采取如下策略：

1. 以利率  $r$  借  $S_0$  美元  $T$  年
2. 购买一盎司黄金
3. 持有一盎司黄金的远期空头

$T$  时刻，1 盎司黄金的卖价为  $F_0$ 。同时，投资者需要偿还的金额为  $S_0 e^{rT}$ ，投资者可以获得收益为  $F_0 - S_0 e^{rT}$ 。

当  $F_0 < S_0 e^{rT}$  的时候，一位持有 1 盎司黄金的投资者可以采取如下策略：

1. 以价格  $S_0$  卖出黄金
2. 把得到的资金以利率  $r$  投资  $T$  年
3. 持有一盎司黄金的远期多头

$T$  时刻，投资的资金增长到  $S_0 e^{rT}$ 。这时，以价格  $F_0$  重新购买黄金。那么相比一直持有黄金，投资者可以获得收益  $S_0 e^{rT} - F_0$ 。

如前面考虑过的不支付红利的股票的例子一样，我们可以知道远期价格会自动调整，使得前两种套利机会都不会存在。也就是说，公式 (5.1) 还是成立。

## 5.5 已知证券的现金收益

在本节中我们考虑另一种基于投资资产的远期合约，该远期合约的标的资产将为持有者提供可完全预测的现金收益。如支付已知红利的股票和附息债券。在本节中继续按照前一节中的思路进行分析。首先，我们将考虑一个具体数字例子，然后再进入正题。

### 实 例

考虑一个附息债券的远期合约的多头状况，该债券现价为 \$900。我们假设远期合约在 9 个月后到期，我们还假设 4 个月后会收到 \$40 息票。4 个月期和 9 个月期无风险利率分别为（连续复利计算的）每年 3% 和每年 4%。

先假设远期价格相对较高，为 \$910。一位套利者可以借入 \$900 购买债券，然后卖出远期合约。将收到的息票的现值为  $40e^{-0.03 \times 4/12} = \$39.60$ 。那么，购买所支付的 \$900 中，\$39.60 可以以每年 3% 的利率借入，期限为 4 个月，4 个月后收到的 \$40 息票可以支付这笔借款本息。其余的 \$860.40 是以每年 4% 的利率借入的，期限为 9 个月。9 个月期限结束之时，投资者需要偿还的总额为  $860.40e^{0.04 \times 0.75} = \$886.60$ 。而远期合约到期时，投资者交割完债券可以收到 \$910。套利者的净收益为：

$$910.00 - 886.60 = \$23.40$$

再假设远期价格相对较低，为 \$870。一位投资者可以卖空现货债券，然后买入远期合约。卖空债券后得到的 \$900，将其中的 \$39.60 以每年 3% 的利率进行投资，期限为 4 个月，4 个月后收回投资以支付息票。其余的 \$860.40 以每年 4% 的利率进行投资，期限为 9 个月。9 个月后，该资金增长到 \$886.60。远期合约到期之

时，投资者需要支付\$870，交割得到债券之后进行平仓。投资者的净收益为：

$$\$886.60 - \$870 = \$16.60$$

表5.3总结了以上两种套利策略。<sup>3</sup>表5.3中，第一种策略在远期价格大于\$886.60时带来收益，第二种策略在远期价格小于\$886.60时带来收益。因此，不存在套利机会的假设下，远期价格应该是\$886.60。

## 一般结论

我们可以将上述例子推广到一般情况，若投资资产在远期合约有效期间内提供的收益的现值为 $I$ ，那么

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT} \quad (5.2)$$

在上面的例子中， $S_0 = 900.00$ ， $I = 40e^{-0.03 \times 4/12} = 39.60$ ， $r = 0.04$ ，且 $T = 0.75$ 。因此

$$F_0 = (900.00 - 39.60)e^{0.04 \times 0.75} = \$886.60$$

这和我们之前的计算结果完全一致。公式(5.2)适用于所有支付已知现金收

**表5.3 支付已知现金收益资产的9个月远期价格和即期价格隐含的某个值不一致时，存在套利机会（资产价格 = \$900；每4个月支付收益\$40；4个月期和9个月期利率分别为3%p.a和4%p.a）**

| 远期价格 = \$910                     | 远期价格 = \$870                 |
|----------------------------------|------------------------------|
| 当前的操作：                           | 当前的操作：                       |
| 借入\$900：\$39.60借4个月，\$860.40借9个月 | 卖空1单位资产，得到\$900              |
| 买1单位资产                           | 其中\$39.60投资4个月，\$860.40投资9个月 |
| 卖出远期合约，9个月后以\$910卖出资产            | 买入远期合约，9个月后以\$870买入资产        |
| 4个月后的操作：                         | 4个月后的操作：                     |
| 接收资产支付的收益\$40                    | 从4个月期投资收回\$40                |
| 用\$40偿还第一个贷款及其利息                 | 支付资产的收益\$40                  |
| 9个月后的操作：                         | 9个月后的操作：                     |
| 以\$910卖出资产                       | 从9个月期投资收回\$886.60            |
| 用\$886.60偿还第二个贷款及其利息             | 以\$870买入资产                   |
|                                  | 轧平空头头寸                       |
| 实现的利润 = \$23.40                  | 实现的利润 = \$16.60              |

<sup>3</sup>如果无法卖空债券，已经持有债券的投资者会卖出债券并买入债券的远期合约。这样，投资者的头寸价值可增加\$16.60。这与我们在5.4节中讨论过的黄金交易策略类似。

益的投资资产。

如果  $F_0 > (S_0 - I)e^r$ , 某套利者可以购买标的资产、卖出远期合约来锁定收益。如果  $F_0 < (S_0 - I)e^r$ , 某套利者可以卖空标的资产、购买远期合约来锁定收益。如果不允许卖空, 持有对应资产的投资者可以卖出资产、购买远期合约来获得收益。<sup>4</sup>

**[例 5.2]** 考虑一个股票的远期合约, 合约有效期限为 10 个月, 股票的现价为 \$50。我们假设任何期限的无风险利率(连续复利的)为每年 8%。我们知道将在 3 个月后、6 个月后、9 个月后分别将收到 \$0.75 红利。这些红利的现值  $I$  为:

$$I = 0.75e^{-0.08 \times 3/12} + 0.75e^{-0.08 \times 6/12} + 0.75e^{-0.08 \times 9/12} = 2.162$$

变量  $T = 10$ , 根据公式 (5.2), 远期价格  $F_0$  为:

$$F_0 = (50 - 2.162)e^{0.08 \times 10/12} = \$51.14$$

如果远期价格小于这个数值, 套利者可以现在卖空股票, 并购买远期合约。如果远期价格大于这个数值, 套利者可以现在卖出远期合约, 并购买股票。

## 5.6 已知收益率的证券

在本节中我们考虑另一种情况, 该远期合约的标的资产将为持有者提供已知收益率的收益, 而不是现金收入。也就是说, 收益表达为收益支付时刻的资产价格的比率, 而且我们已经知道了这个比率数值。假设一个资产提供每年 5% 的收益率。这意味着, 每年支付一次收益, 相当于支付时刻资产价格 5% 的收益, 在这种情况下, 收益率 5% 是每年计一次复利计算的。另外一种可能的情况是, 每年支付二次收益, 每半年支付相当于支付时刻资产价格 2.5% 的收益, 在这种情况下, 收益率 5% 是每半年计一次复利计算的。4.2 节中, 我们已经说明通常会用连续复利来计利率。同样地, 我们一般会用连续复利来度量收益率。把一个复利频率计算下的收益率转换成等价的另外一个复利频率的收益率的方法和 4.2 节中关于利率给出的方法完全一样。

定义  $q$  为连续复利计算的远期合约有效期内的年平均收益率。我们可以得出(参见习题 5.15)

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} \quad (5.3)$$

**[例 5.3]** 考虑一个 6 个月期的远期合约, 标的资产将在 6 个月期限内提供相当于资产价格 2% 的收益。无风险利率(连续复利)为每年 10%, 资产价格为 \$25。

---

<sup>4</sup> 有另外一种方法证明公式 (5.2)。考虑如下策略: 买入 1 单位资产, 签订卖出标的资产的远期合约, 在  $T$  时刻以  $F_0$  卖出资产。该策略的成本是  $S_0$ ,  $T$  时刻将带来现金流入  $F_0$ , 并带来现值为  $I$  的收益。初始现金流出为  $S_0$ , 现金流入的现值为  $I + F_0 e^{-rT}$ 。因此,  $S_0 = I + F_0 e^{-rT}$  或可以表示为  $F_0 = (S_0 - I)e^r$ 。

此时， $S_0 = 25$ ,  $r = 0.10$ ,  $T = 0.5$ 。收益率为4%（每半年计一次复利）。根据公式(4.3)可以知道，这等价于连续复利计算的年利率3.96%。由此， $q = 0.0396$ ，根据公式(5.3)远期合约价格 $F_0$ 为：

$$F_0 = 25e^{(0.10-0.0396)\times 0.5} = \$25.77$$

## 5.7 远期合约的定价

在签署远期合约时远期合约的价值为零。之后合约价值可能为正也可能为负。每天评估远期合约的价值对于银行和其他金融机构非常重要（这称为合约的盯市操作）。使用前面定义的符号，并假设合约签署初始的交割价格为 $K$ ，交割日为从今天开始的 $T$ 年以后， $r$ 为 $T$ 年期无风险利率， $F_0$ 是今天签定远期合约时的远期价格。再定义

$f$ : 当前远期合约的价值

这里，必须注意变量 $F_0$ 、 $K$ 与 $f$ 所表达的意义。如果今天碰巧是签订合约的第一天，那么交割价格( $K$ )被设定为和远期价格( $F_0$ )相同，合约价值( $f$ )为0。随着时间流逝， $K$ 保持不变（因为这是远期合约规定内容的一部分），但 $F_0$ 变动，从而 $f$ 亦正亦负。

对所有远期合约，远期合约（标的资产既可以是投资资产也可以是消费资产）多头的价值 $f$ 有个一般结论：

$$f = (F_0 - K)e^{-rT} \quad (5.4)$$

我们使用类似于4.7节中FRA的讨论，来看看为什么公式(5.4)是正确的。将交割价格为 $F_0$ 的远期合约多头与其他条件相同但交割价格为 $K$ 的远期合约多头进行比较，这两者之间的差值只是在时刻 $T$ 标的资产所付金额的差值。前一个合约所付金额是 $F_0$ ，后一个合约所付金额是 $K$ 。在 $T$ 时刻现金流出的差值 $F_0 - K$ 可转换为在今天时刻的差值 $(F_0 - K)e^{-rT}$ 。因此交割价格为 $F_0$ 的远期合约多头的价值低于其他条件相同但交割价格为 $K$ 的远期合约多头的价值，差值为 $(F_0 - K)e^{-rT}$ 。交割价格为 $F_0$ 的合约价值定义为零。于是交割价格为 $K$ 的合约价值就为 $(F_0 - K)e^{-rT}$ 。这就证明了公式(5.4)。类似地，交割价格为 $K$ 的远期合约空头的价值为：

$$(K - F_0)e^{-rT}$$

**[例 5.4]** 考虑一个不支付红利的股票的远期合约多头，有效期限为6个月。连续复利计算的无风险利率为每年10%，股票价格为\$25，交割价格为\$24。这种情形下， $S_0 = 25$ ,  $r = 0.10$ ,  $T = 0.5$ ,  $K = 24$ 。根据公式(5.1)，6个月期远期价格 $F_0$ 为：

$$F_0 = 25e^{0.1\times 0.5} = \$26.28$$

根据公式(5.4)，该远期合约的价值为：

$$f = (26.28 - 24)e^{-0.1 \times 0.5} = \$2.17$$

公式 (5.4) 说明, 可以假设远期合约到期时的标的资产价格相等于远期价格  $F_0$ , 然后再估计当前远期合约多头的价值。请注意我们做出假设的时刻点, 在  $T$  时刻的远期合约多头的损益为  $F_0 - K$ 。该损益的现值为  $(F_0 - K)e^{-rT}$ , 也就是公式 (5.4) 中  $f$  的价值。类似地, 假设未来标的资产的价格等于当前远期价格, 我们可以估计远期合约空头的价值。我们在 4.7 节中估计 FRA 时, 假设远期利率会履行并推导了结论。以上两种估值过程与此类似。

结合公式 (5.4) 和 (5.1), 我们可以得到不支付收益的投资资产的远期合约的价值表达式:

$$f = S_0 - Ke^{-rT} \quad (5.5)$$

结合公式 (5.4) 和 (5.2), 我们可以得到支付已知现金收益, 现值为  $I$  的投资资产的远期合约多头的价值表达式:

$$f = S_0 - I - Ke^{-rT} \quad (5.6)$$

结合公式 (5.4) 和 (5.3), 我们可以得到已知收益率的投资资产的远期合约多头的价值表达式:

$$f = S_0 e^{-qT} - Ke^{-rT} \quad (5.7)$$

当期货价格变化时, 期货合约上的损益等于期货价格变化量乘以期货合约头寸的规模。因为期货合约是每日结算的, 所以这些损益是立即实现的。公式 (5.4) 说明, 当远期价格变化时, 损益等于将远期价格变化量乘以远期头寸规模的现值。

### 商业剪影 5.2 系统错误?

一家银行的外汇交易员买入了远期合约, 3 个月后以汇率 1.6000 买入 100 万英镑。同一时刻, 另一个交易员买入 16 份 3 个月期英镑期货。期货价格为 1.6000, 每份合约的规模为 62 500 英镑。因此, 远期合约交易员和期货合约交易员持有的头寸相同。两个交易员持有头寸之后过了几分钟, 远期和期货价格共同上升到 1.6040。银行系统显示期货交易员创造的利润为 \$4 000, 而远期交易员的利润只有 \$3 900。远期交易员立即向银行系统管理部投诉, 他的投诉是合理的吗?

答案是否定的! 期货合约的每日结算保证当期货价格上升的时候, 期货交易员差不多可以立即实现利润。如果现在远期交易员签订一个 3 个月后以 1.6040 价格卖出 100 万英镑的合约来平仓, 那么该交易员 3 个月后以汇率 1.6000 买入 100 万英镑, 并且 3 个月后以汇率 1.6040 卖出 100 万英镑。这会带来 \$4 000 的利润, 但不是今天实现, 而是 3 个月后。远期交易员的利润应该是 \$4 000 的现值。这与方程 (5.4) 是一致的。

远期交易员可以感到安慰的一点是, 在这种情况下, 利润和损失是对称的。如果远期/期货价格下降到 1.5960, 而不是上升到 1.6040, 则期货交易员会损失 \$4 000, 而远期交易员会损失 \$3 900。

外汇柜台交易员可能会混淆这种远期和期货合约损益之间的区别（参见商业剪影 5.2）。

## 5.8 远期价格和期货价格是相等的吗

本章后面的附录给出了一个套利的推论：当无风险利率恒定，且对所有到期日都不变时，两个交割日相同的远期合约和期货合约有相同的价格。附录的推论还可以扩展到利率为一个已知的时间函数的情形。

当利率变化无法预测时（正如现实世界中的一样），远期价格和期货价格从理论上来讲就不一样了。两者之间关系的严格证明超出了本书的范围。但是，我们对两者之间的关系能有一个感性认识。考虑如下情形：标的资产价格  $S$  与利率高度正相关，当  $S$  上升时，一个持有期货多头头寸的投资者会因每日结算而立即获利。由于  $S$  的上涨几乎与利率的上涨同时出现，获得的利润将会以高于平均利率的利率进行投资。同样，当  $S$  下跌时，投资者立即亏损。亏损将以低于平均利率水平的利率融资。持有远期多头头寸的投资者将不会因利率的这种变动方式而受到与上面期货合约同样的影响。因此，在其他条件相同时，期货多头比类似的远期多头更具有吸引力。当  $S$  与利率正相关性很强时，期货价格要比远期价格高。当  $S$  与利率的负相关性很强时，类似上面的讨论可知远期价格比期货价格要高。

有效期仅为几个月的远期合约价格与期货合约价格之间的理论差异在大多数情况下小得可以忽略不计。现实中，使远期价格和期货价格不同的许多因素并没有反映在很多理论模型中。这些因素包括赋税、交易成本和保证金处理问题等。期货合约中，交易清算所的作用使得交易方不履行合约的可能性变得非常小。在一些情况下，期货合约流动性更强，而且比远期合约更易于交易。虽然有这些区别，但在大多数情况下，假定远期和期货价格相等是比较合理的。本书中的大部分情况下也会沿用这个假设。我们将使用符号  $F_0$  代表当前的期货价格或者远期价格。

随着期货合约期限的增加，远期合约与期货合约价格之间的差别有可能变得较大，因此，假设远期合约价格与期货合约价格可以完全相互替代可能是危险的。欧洲美元期货具有长达 10 年的有效期限，所以这种问题尤为严重，我们将在第 6 章中讨论欧洲美元期货。

## 5.9 股票指数的期货价格

我们在 3.5 节中介绍过股票指数期货，并说明股票指数期货在股票组合管理中的应用。表 3.3 给出了一些不同指数的期货价格。现在我们要考虑怎么决定股票指数的期货价格。

一个股票指数通常可以看成支付红利的投资资产。<sup>5</sup>这里的投资资产就是计算指数的股票组合，投资资产所支付的红利就是该组合的持有人收到的红利。通常假设红利是按照已知的收益率支付，而不是按照已知的现金支付。设  $q$  为红利收益率，由公式 (5.3) 可得期货价格  $F_0$  为：

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} \quad (5.8)$$

注意，表 3.3 中道琼斯工业平均指数的 6 月份期货的价格小于 3 月份期货的价格。这表明，2004 年 2 月 4 日，收益率  $q$  大于无风险利率  $r$ 。

**[例 5.5]** 考虑一个 S&P 500 指数的 3 个月期期货合约。假设用来计算指数的股票的红利收益率为每年 1%，指数现值为 800，连续复利的无风险利率为每年 6%。此时， $r = 0.06$ ， $S_0 = 800$ ， $T = 0.25$ ， $q = 0.01$ ，则期货价格  $F_0$  为：

$$F_0 = 800 e^{(0.06-0.01)\times 0.25} = \$810.06$$

实际上，指数的股票组合的红利收益率一年里每周都在变化。例如，纽约股票交易所的大部分股票是在每年 2 月份、5 月份、8 月份和 11 月份的第一周支付红利的。 $q$  值应该代表合约有效期间的平均红利收益率。用来估计  $q$  的红利应是那些除息日在期货合约有效期之内的股票的红利。从第 3 章的表 3.3 可以看出，S&P 500 指数期货的结算价格随到期日的变化而以每年 0.4% 的速度减小，这与红利收益率超过无风险利率大约 0.4% 的情形相对应。

### 商业剪影 5.3 芝加哥商品交易所的日经 225 期货合约

本章中关于决定指数期货价格的讨论说明，其指数值应该是某个投资资产的价值。这说明，指数值应该是一个可交易资产的证券组合的价值。芝加哥商品交易所的日经 225 期货合约的标的资产并不满足上述条件，原因比较微妙。假设  $S$  是日经 225 指数值，这是一个包含 225 个日本股票的证券组合的日元价值。芝加哥商品交易所的日经 225 期货合约的标的变量的美元价值为  $5S$ 。换句话说，该期货合约的标的变量是以日元衡量的，但被视为是美元的。

我们不能投资在一个价值总为  $5S$  美元的证券组合。我们可以做出的最好的决策是，投资于一个价值总为  $5S$  日元的组合，或者投资于一个价值总为  $5QS$  美元的组合，其中， $Q$  是 1 日元的美元价值。因此，变量  $5S$  美元并不是一种投资资产的价格，方程 (5.8) 并不适用于这种情况。

芝加哥商品交易所的日经 225 期货合约是一种跨币衍生证券 (quanto)。跨币衍生证券是这样一种衍生证券：标的资产以一种货币度量，而获得的损益则以另两种货币表示。第 27 章中将进一步讨论跨币衍生证券。

<sup>5</sup> 也有例外，参见商业剪影 5.3。

## 指数套利

如果  $F_0 > S_0 e^{(r-q)T}$ , 可以通过以即期价格（即为即时交割价格）购买指数中的成分股票，同时卖出指数期货合约而获利。如果  $F_0 < S_0 e^{(r-q)T}$ , 则可通过相反操作，即卖出指数中的成分股票，买进指数期货合约而获利。这些策略就是所谓的指数套利 (index arbitrage)。当  $F_0 < S_0 e^{(r-q)T}$  时，指数套利操作通常由拥有指数成分股票组合的养老基金来进行；而当  $F_0 > S_0 e^{(r-q)T}$  时，指数套利操作则通常由拥有短期资金市场投资的公司来进行。对于一些包含较多股票的指数，指数套利有时是通过交易数量相对较少的有代表性的股票来进行，这些代表性的股票的变动能较准确地反映股票指数的变动。指数套利经常采用程序交易方法来进行，即通过一个计算机系统来进行交易。

大部分时间内，套利者的行为使得公式 (5.8) 一直成立，但是偶尔会出现不能进行套利的情况，而且期货价格确实偏离了即期价格隐含的理论期货价格（参见商业剪影 5.4）。

## 5.10 货币的远期合约和期货合约

现在我们站在一个美国投资者的立场上，考虑外汇的远期和期货合约。外汇期货合约的标的资产是一定数量的外币。变量  $S_0$  代表以美元表示的一单位外汇的即期价格， $F_0$  代表以美元表示的一单位外汇的远期或期货价格。这和我们对其他

### 商业剪影 5.4 1987 年 10 月发生的指数套利

为了进行指数套利，交易员必须能很快以市场报价同时进行指数期货以及指数的成分股票组合的交易。在正常市场条件下，利用程序交易可以进行上述操作，可以使得方程 (5.8) 的左边和右边非常接近。但是，1987 年 10 月 19 日和 20 日发生的事件却很不正常。在 1987 年 10 月 19 日“黑色星期一”这一天，股市价格下跌幅度超过 20%，纽约股票交易所的成交量为 6.04 亿股，创下了历史最高纪录。交易所的系统负荷过重，当日，处理买卖股票的订单最多可能要延迟 2 个小时才被执行。

1987 年 10 月 19 日的大部分时间里，期货价格都明显低于指数。例如，在收盘时，S&P 500 指数为 225.06 点（一天下跌了 57.88 点），而 12 月份交割的 S&P 500 指数期货的价格是 201.50 点（一天下跌了 80.75 点）。这主要是因为处理卖出股票的订单有较长的延迟，使得指数套利变得不可操作。第二天，即 1987 年 10 月 20 日星期二，纽约股票交易所对程序交易运作的方式采取了临时性的限制措施，结果使得指数套利非常困难，打断了股票指数与股票指数期货之间的传统联系。在某一时点，12 月份的指数期货合约价格比 S&P 500 指数低了 18%。但是，几天后市场重新恢复正常，套利者的行为保证了公式 (5.8) 中的指数的期货价格与即期价格的关系式成立。

标的资产的远期或期货合约定义  $S_0$  和  $F_0$  的方式相一致。但根据 2.10 节中的阐述，即期和远期价格的标价方式并不一定总是一致的。除了英镑、欧元、澳元和新西兰元，其他主要的外币的即期和远期汇率通常表示为 1 美元对应的外币数量。

外汇的一个性质是外汇的持有人能获得货币发行国的无风险利率的收益。例如持有人能将外汇投资于外汇标价的债券。我们设  $r_f$  代表  $T$  时期外汇投资的无风险利率； $r$  代表美元进行相同期限投资的无风险利率。

$F_0$  和  $S_0$  之间的关系如下：

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T} \quad (5.9)$$

这是国际金融中著名的利率平价关系式。图 5.1 给出了这种关系成立的理由。假设一位投资者手中有 1 000 单位外币，为了把这些外币转换为  $T$  时刻的美元收入，投资者可以选择如下两个方案。第一种是把外币以利率  $r_f$  进行投资，期限为  $T$  年，然后签订远期合约，在  $T$  时刻卖出外币得到美元。那么，投资者可获得  $1000e^{r_f T} F_0$  美元。第二种是当前在即期市场直接把外币转换成美元，然后把这些美元以利率  $r$  进行投资，期限为  $T$  年。那么，投资者可获得  $1000S_0 e^{r T}$  美元。套利机会不存在的假设下，两种方案的收益应该相同。因此，有

$$1000e^{r_f T} F_0 = 1000S_0 e^{r T}$$

即

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T}$$

**[例 5.6]** 假设澳大利亚和美国的 2 年期利率分别为每年 5% 与 7%。同时澳元 (AUD) 兑美元 (USD) 的即期汇率为 0.6200USD/AUD。根据公式 (5.9)，2 年期远

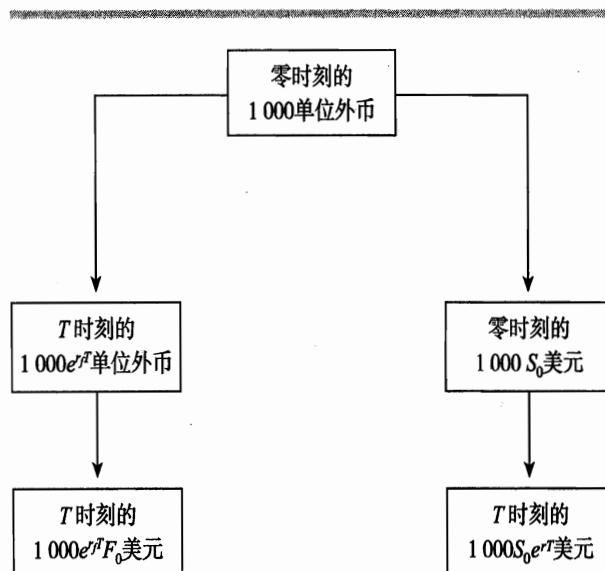


图 5.1 把 1 000 单位外币转换成  $T$  时刻的美元的两种方法。这里， $S_0$  是即期汇率， $F_0$  是远期汇率， $r$  和  $r_f$  分别为美元无风险利率和外币无风险利率

期汇率应该是

$$0.62e^{(0.07-0.05)\times 2} = 0.6453$$

首先，假设2年期远期汇率为0.6300，低于0.6453这个值。那么套利者可以：

1. 以年利率5%借入1000澳元，期限为2年，再把这些澳元兑换成620美元，然后把这些美元以年利率7%进行投资（利率都是以连续复利计的）。
2. 签订远期合约，2年后用 $1105.17 \times 0.63 = 696.26$ 美元买入1105.17澳元。

以年利率7%投资的620美元2年后增长到 $620e^{0.07\times 2} = 713.17$ 美元。而2年期的远期合约规定到期时以696.26美元买入1105.17澳元，这些澳元刚好能偿还借入的1000澳元和利息（ $1000e^{0.05\times 2} = 1105.17$ 澳元）。所以，这个策略给套利者带来的无风险收益为 $713.17 - 696.26 = 16.91$ 美元（如果借入的资金是1亿澳元，那么套利收益是非常巨大的）。

接着，假设2年期远期汇率为0.6600，大于根据公式（5.9）计算的0.6453这个值。那么套利者可以：

1. 以年利率7%借入1000美元，期限为2年，再把这些美元兑换成 $1000/0.6200 = 1612.90$ 澳元，然后把这些澳元以年利率5%进行投资。
2. 签订远期合约，2年后卖出1782.53澳元，得到 $1782.53 \times 0.66 = 1176.47$ 美元。

以年利率5%投资的1612.90澳元2年后增长到 $1612.90e^{0.05\times 2} = 1782.53$ 澳元。远期合约使得投资者在合约到期时能把这些澳元兑换成1176.47美元。借入的美元需要偿还的本金和利息之和为 $1000e^{0.07\times 2} = 1150.27$ 美元。所以，这个策略给套利者带来的无风险收益为 $1176.47 - 1150.27 = 26.20$ 美元。

表5.4给出了2004年2月4日外汇期货的报价。前8种合约以每一单位外币对应的美元数（或美分数）进行报价，也就是通常的期货报价惯例。以美元无风险利率代替 $r$ ，以外汇无风险利率代替 $r_f$ ，就可以使用公式（5.9）。

2004年2月4日，日元和瑞士法郎的利率比美元的利率要低。在 $r > r_f$ 的情况下，表5.4中可以知道这时随着期货合约到期日的增加，这些外币的期货价格也增加。<sup>6</sup>而加元、英镑、澳元、墨西哥比索和欧元的利率高于美元的利率。在 $r < r_f$ 的情况下，这时随着期货合约到期日的增加，这些外币的期货价格减少。<sup>7</sup>

表5.4中的最后两种合约是以欧元兑外币（即一欧元对应的外币单位数量）的方式报价的，分别为每一单位欧元兑日元数和每一单位欧元兑英镑数。为了对欧元/日元合约使用公式（5.9），我们可以用每一单位欧元兑日元数的汇率表示 $S_0$ 和 $F_0$ ，再定义 $r$ 为日元利率， $r_f$ 为欧元利率。类似地，为了对欧元/英镑合约使用公式（5.9），我们可以用每一单位欧元兑英镑数的汇率表示 $S_0$ 和 $F_0$ ，再定义 $r$ 为英镑利率， $r_f$ 为欧元利率。

<sup>6</sup> 依据利率平价关系式，低利率的外汇是升水——译者注

<sup>7</sup> 依据利率平价关系式，高利率的外汇是贴水——译者注

表 5.4 2004 年 2 月 5 日《华尔街日报》外汇期货行情（每列分别为月份、开盘价、当日最高价、当日最低价、结算价格、变化值、有效期内的最高价、有效期内的最低价和未平仓量）

| <b>Currency Futures</b>                                |         |        |        |         |         |        |          |         |
|--|---------|--------|--------|---------|---------|--------|----------|---------|
| <b>Japanese Yen (CME)-¥12,500,000; \$ per ¥</b>        |         |        |        |         |         |        |          |         |
| Mar  | .9490   | .9507  | .9476  | .9497   | .0011   | .9515  | .8240    | 161,371 |
| June   | .9524   | .9529  | .9510  | .9526   | .0011   | .9532  | .8496    | 8,070   |
| Est vol  | 6,229;  | vol    | Tue    | 14,298; | open    | int    | 169,516, | +4,280. |
| <b>Canadian Dollar (CME)-CAD 100,000; \$ per CAD</b>   |         |        |        |         |         |        |          |         |
| Mar  | .7466   | .7500  | .7431  | .7485   | .0015   | .7863  | .6150    | 57,248  |
| June   | .7450   | .7480  | .7421  | .7465   | .0015   | .7850  | .6201    | 3,453   |
| Sept   | .7448   | .7460  | .7414  | .7449   | .0015   | .7815  | .6505    | 1,635   |
| Dec  | .7440   | .7445  | .7405  | .7433   | .0015   | .7800  | .6940    | 787     |
| Est vol  | 6,009;  | vol    | Tue    | 12,621; | open    | int    | 63,329,  | -2,093. |
| <b>British Pound (CME)-£62,500; \$ per £</b>           |         |        |        |         |         |        |          |         |
| Mar  | 1.8335  | 1.8338 | 1.8225 | 1.8277  | -.0049  | 1.8488 | 1.5654   | 66,330  |
| June   | 1.8200  | 1.8200 | 1.8060 | 1.8135  | -.0051  | 1.8373 | 1.6080   | 127     |
| Est vol  | 6,429;  | vol    | Tue    | 14,952; | open    | int    | 66,822,  | +2,521. |
| <b>Swiss Franc (CME)-CHF 125,000; \$ per CHF</b>       |         |        |        |         |         |        |          |         |
| Mar  | .8018   | .8020  | .7970  | .8002   | -.0008  | .8249  | .7060    | 40,580  |
| June   | ..      | ..     | ..     | .8019   | -.0008  | .8248  | .7117    | 216     |
| Est vol  | 4,223;  | vol    | Tue    | 9,933;  | open    | int    | 40,899,  | +458.   |
| <b>Australian Dollar (CME)-AUD 100,000; \$ per AUD</b> |         |        |        |         |         |        |          |         |
| Mar  | .7605   | .7614  | .7545  | .7578   | -.0034  | .7769  | .5193    | 50,309  |
| June   | .7490   | .7500  | .7490  | .7494   | -.0034  | .7686  | .5645    | 843     |
| Est vol  | 3,108;  | vol    | Tue    | 10,590; | open    | int    | 51,677,  | -1,877. |
| <b>Mexican Peso (CME)-MXN 500,000; \$ per MXN</b>      |         |        |        |         |         |        |          |         |
| Mar  | .08990  | .09050 | .08857 | .08920  | -.00057 | .09330 | .08600   | 36,882  |
| June   | .08900  | .08915 | .08780 | .08812  | -.00060 | .09125 | .08495   | 594     |
| Est vol  | 12,680; | vol    | Tue    | 6,785;  | open    | int    | 38,120,  | -303.   |
| <b>Euro/US Dollar (CME)-€125,000; \$ per €</b>         |         |        |        |         |         |        |          |         |
| Mar  | 1.2532  | 1.2565 | 1.2478 | 1.2520  | -.0013  | 1.2875 | 1.0425   | 122,318 |
| June   | 1.2492  | 1.2520 | 1.2460 | 1.2491  | -.0013  | 1.2837 | 1.0570   | 1,293   |
| Est vol  | 20,357; | vol    | Tue    | 69,168; | open    | int    | 124,312, | +3,721. |
| <b>Euro/US Dollar (FINEX)-€200,000; \$ per €</b>       |         |        |        |         |         |        |          |         |
| Mar  | ..      | ..     | ..     | 1.2520  | -.0012  | 1.2841 | 1.4720   | 510     |
| Est vol  | 191;    | vol    | Tue    | 93;     | open    | int    | 512,     | -12.    |
| <b>Euro/Japanese Yen (FINEX)-€100,000; ¥ per €</b>     |         |        |        |         |         |        |          |         |
| Mar  | 131.85  | 131.85 | 131.61 | 131.85  | -.28    | 136.44 | 130.45   | 7,752   |
| Est vol  | 67;     | vol    | Tue    | 287;    | open    | int    | 7,752,   | +76.    |
| <b>Euro/British Pound (FINEX)-€100,000; £ per €</b>    |         |        |        |         |         |        |          |         |
| Mar  | .6840   | .6843  | .6832  | .6852   | .0013   | .7094  | .6832    | 9,964   |
| Est vol  | 198;    | vol    | Tue    | 454;    | open    | int    | 9,964,   | +360.   |

资料来源：Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc. © 2004 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

[例 5.7] 表 5.4 中，加元的期货价格随着到期日的增长以大约每年 1.0% 的速度减小（如 2004 年 9 月的结算价 0.7449 大约比 2004 年 3 月的结算价 0.7485 低 0.5%）。这说明 2004 年 2 月 4 日，加拿大的短期无风险利率比美国的每年要高出 1%。

## 外汇可作为支付已知收益率的资产

如果将  $q$  用  $r_f$  代替，则公式 (5.3) 与公式 (5.9) 等价。这并不是一个巧合。外汇可以看作是支付已知收益率的投资资产。这里的“收益率”就是外汇的无风险利率。

为了理解外汇是支付已知收益率的资产，应注意到外汇持有者所得的利息价值取决于所持有外汇的价值。假设英镑的利率为每年 5%。对于一个美国投资者来说，持有的英镑每年提供相当于英镑价值 5% 的收益。换句话说，就是每年得到 5% 收益的资产。

## 5.11 商品期货

下面我们考虑商品期货合约。我们首先考虑作为投资资产（如黄金和白银）

的商品的期货价格。<sup>8</sup>之后，我们将考虑消费资产的期货价格。

## 收益与贮存成本

商业剪影 3.1 中提到，套期保值的情况下，黄金生产商会通过投资银行借入黄金。黄金持有者（如中央银行）贷出黄金时会以规定的黄金租借率收取租金。白银的情况也是类似的，因此，黄金和白银可以对其持有者提供收益。和其他商品一样，它们有贮存成本。

由公式 (5.1) 可知，不考虑贮存成本与收益的情况下，一个投资资产的商品的远期价格为：

$$F_0 = S_0 e^{rT} \quad (5.10)$$

贮存成本可看作是负收益。设  $U$  为期货合约有效期间所有贮存成本减去收益的现值，由公式 (5.2) 可知：

$$F_0 = (S_0 + U)e^{rT} \quad (5.11)$$

**[例 5.8]** 考虑一个不支付收益的投资资产的一年期期货合约。假设该资产的贮存成本是每年每单位资产 \$2，在年底支付。假设每单位资产的现价为 \$450，无风险利率始终为每年 7%。从而有： $r = 0.07$ ,  $S_0 = 450$ ,  $T = 1$ ，且：

$$U = 2e^{-0.07 \times 1} = 1.865$$

根据公式 (5.11)，理论上期货价格  $F_0$  为：

$$F_0 = (450 + 1.865)e^{0.07 \times 1} = \$484.63$$

如果实际中的期货价格大于 484.63，套利者可以买入资产再卖出一年期期货合约，从而锁定一定利润。如果实际中的期货价格小于 484.63，一个持有该资产的套利者可以卖出资产再买入一年期期货合约，从而获利。

若任何时刻的贮存成本与商品价格成一定的比例，贮存成本可看作是负的收益率。在这种情况下，由式 (5.3) 可知：

$$F_0 = S_0 e^{(r+u)T} \quad (5.12)$$

这里， $u$  是每年的贮存成本与现货价格的比减去资产的收益率得到的。

## 消费商品

对那些被持有且主要目的不是为了投资而是消费的商品来说，它们一般不支

---

<sup>8</sup> 请回想一下，并不是说，投资资产只能为了进行投资而持有。投资资产应该满足的条件是，有一些投资者仅为了进行投资而持有该类资产，如果这样有利可图的话，这些投资者会卖出他们的持有物并买入远期合约。这就说明了，虽然很多工业都使用白银，但白银还是一种投资资产。

付收益，但是会有较大的贮存成本。这种情况下，我们迄今为止使用的从现货价格推导期货价格的套利讨论需要仔细重新考虑。<sup>9</sup>假设用下面的不等式来代替式(5.11)，有：

$$F_0 > (S_0 + U)e^{rT} \quad (5.13)$$

为了利用这个机会，某套利者应采用如下策略：

1. 以无风险利率借金额为  $S_0 + U$  的资金，用来购买一单位的商品和支付贮存成本；
2. 卖出一单位商品的远期合约。

若我们认为期货合约与远期合约相同，这必将在时刻  $T$  获利  $F_0 - (S_0 + U)e^{rT}$ 。对任何商品采用这套策略都没有问题。但是，当许多套利者都这样操作时， $S_0$  将上涨，而  $F_0$  将会下跌，直到式 (5.13) 不再成立。因此，我们的结论是式 (5.13) 不能维持很长时间。

下面再假设：

$$F_0 < (S_0 + U)e^{rT} \quad (5.14)$$

如果该商品是投资资产，我们知道许多投资者持有的目的仅仅是为了投资。当他们知道了式 (5.14) 中的不等式关系时，他们将从如下的策略中盈利：

1. 卖出商品，节约贮存成本，以无风险利率将所得收入进行投资；
2. 购买远期合约。

相对于一直持有商品，投资者采用上述策略之后，可以在到期日获得无风险收益  $(S_0 + U)e^{rT} - F_0$ 。因此，式 (5.14) 也不能长期成立。既然式 (5.13) 和 (5.14) 都不能长期成立，我们一定有： $F_0 = (S_0 + U)e^{rT}$ 。

对于持有目的主要不是为了投资的商品来说，以上讨论不再适用。个人或公司保留商品的库存是因为其有消费价值，而非投资价值。因此他们不会积极主动地出售商品购买期货合约，因为远期合约不能消费。因此式 (5.14) 得以存在下去。对消费类商品我们有：

$$F_0 \leq (S_0 + U)e^{rT} \quad (5.15)$$

若贮存成本用现货价格的比例  $u$  来表示，则有：

$$F_0 \leq S_0 e^{(r+u)T} \quad (5.16)$$

## 便利收益

式 (5.15) 或式 (5.16) 中的等式关系不一定成立，原因是，消费类商品的使用者一定会感到持有实实在在的商品比持有期货合约是有好处的。如，原油精炼

---

<sup>9</sup>一些商品的现货价格取决于交割地点。我们假设现货和期货的交割地点是相同的。

商对待原油期货和库存中的原油存货的态度是会不一样的。库存中的原油存货可以投入到精炼生产过程中去，而原油期货不具有这种功能。通常，持有现货实际商品可以使生产商从暂时的当地商品短缺中获利，或者具有维持生产线运行的能力。但是期货合约不具有同样的能力。这种持有现货实际商品带来的好处有时称为商品的便利收益 (convenience yield)。如果贮存成本可知，且现值为  $U$ ，便利收益  $\gamma$  可定义为：

$$F_0 e^{\gamma T} = (S_0 + U) e^{rT}$$

若每单位的贮存成本为现货价格的固定比例  $u$ ，则  $\gamma$  定义为：

$$F_0 e^{\gamma T} = S_0 e^{(r+u)T}$$

即

$$F_0 = S_0 e^{(r+u-\gamma)T} \quad (5.17)$$

便利收益简单地衡量了式 (5.15) 或式 (5.16) 中不等式左边小于右边的程度。对于投资资产，便利收益一定为零，否则会存在套利机会。第 2 章中图 2.2 显示，在 2004 年 2 月 4 日，随着合约到期日的临近，原油的期货价格倾向于减小。这种状况说明当天原油的便利收益  $\gamma$  大于  $r+u$ 。

便利收益反映了市场对未来商品可获得性的期望。在期货合约有效期间，商品短缺的可能性越大，则便利收益就越高。若商品使用者拥有大量的库存，则在不久将来出现商品短缺的可能性就很小，从而便利收益会比较低。另一方面，较低的库存会导致较高的便利收益。

## 5.12 持有成本

期货价格与现货价格之间的关系可用所谓的持有成本 (cost of carry) 来描述。它包括贮存成本加上融资购买资产所支付的利息，再减去资产的收益。对不支付红利的股票，持有成本就是  $r$ ，因为既无贮存成本，又无收益；对一个股票指数，持有成本为  $r-q$ ，因为资产的收益率为  $q$ ；对货币而言，持有成本为  $r-r_f$ ；对商品而言，若其贮存成本占价格的比例为  $u$ ，支付收益率为  $q$ ，则持有成本为  $r-q+u$ ；依此类推。

设持有成本为  $c$ 。对投资性资产，期货价格为：

$$F_0 = S_0 e^{cT} \quad (5.18)$$

对消费性资产，期货价格为：

$$F_0 = S_0 e^{(c-\gamma)T} \quad (5.19)$$

这里， $\gamma$  为便利收益。

### 5.13 交割选择权

尽管远期合约一般正式规定了交割的具体的特定日期，但期货合约却允许空头方选择在一个特定时间段里的任一天进行交割（一般空头方应提前几天给出其打算交割的通知）。这种交割选择使得期货定价更加复杂。期货合约的到期日应是交割期的开始、中间还是末尾呢？尽管绝大部分期货合约在到期前就平仓了，但了解交割何时发生对计算理论期货价格仍然十分重要。

如果期货价格为到期时间的增函数，则由式（5.19）可知  $c > \gamma$ ，即由持有资产所获得的好处（包括便利收益和净贮存成本）小于无风险利率。因此空头方越早交割越有利，因为收到的现金所获得的利息超过了持有资产的好处。作为一般规则，这种情况下的期货价格的计算应以交割发生在交割期开始时刻为基准。若期货价格随到期时间的临近而降低 ( $c < \gamma$ )，情况则应相反：空头方越晚交割越有利，作为一般规则，期货价格的计算应建立在交割发生在交割期的末尾时刻的基础上。

### 5.14 期货价格和预期将来的即期价格

我们把市场上某个资产在未来某一时刻即期价格的市场平均值看作为该资产在那一时刻的预期现货价格（expected spot price，或预期即期价格）。假定现在是6月份，此时9月份玉米期货价格为200美分。那么预期的9月份的现货价格应该小于还是大于200美分，抑或是恰好等于200美分？图2.1表示了接近到期日的时候，期货价格收敛于现货价格。如果预期现货价格小于200美分，市场预期应该是9月份期货价格会降低，空头持有者获利，多头持有者遭受损失。如果预期的现货价格大于200美分，情况则相反，市场预期应该是9月份期货价格会上升，多头持有者获利，空头持有者遭受损失。

#### 凯恩斯与希克斯

经济学家凯恩斯和希克斯对此进行了讨论，认为如果对冲者倾向于持有空头而投机者倾向于持有多头，则期货价格将低于预期现货价格。<sup>10</sup>这是因为投机者承担的风险需要补偿。他们只在预期有利可图的情况下才会进行交易。对冲者平均起来会遭受损失，而对冲者很可能对此已有准备，因为期货合约对冲了他们的风险。若对冲者倾向于持有多头而投机者倾向于持有空头，凯恩斯和希克斯认为，期货价格一定高于预期现货价格，原因是类似的。

---

<sup>10</sup> 参见：J. M. Keynes, *A Treatise on Money*. London: Macmillan, 1930; J. R. Hicks, *Value and Capital*. Oxford: Clarendon Press, 1939.

## 风险和收益

解释期货价格与预期现货价格的关系时，现代方法一般基于经济中风险与期望收益之间的关系。一般来说，一项投资的风险越高，投资者要求的期望收益将越高。大家熟悉的资本资产定价模型结论认为，经济生活中存在系统风险和非系统风险。对投资者而言，非系统风险并不重要，因为可以通过持有高度分散化的组合来消除它。投资者承担非系统风险不应要求更高的期望收益。但是，系统风险不能通过分散化消除。它由投资收益与股票市场整体收益的相关性决定。因此，若承担的系统风险为正值，投资者通常要求高于无风险利率的收益。同样，若承担的系统风险为负值，投资者也会接受低于无风险利率的收益。

## 期货头寸的风险

考虑一个做  $T$  年期限的期货多头的投机者，他希望资产的现货价格在期货到期日能高于期货价格。不考虑每日结算，假设期货合约与远期合约运作方式相同。我们假设投机者将期货价格的现值以无风险利率投资，同时买入期货合约。无风险投资的所得将在交割日用来购买资产，然后立即以市场价格将该资产卖掉。对投机者而言，其现金流为：

现在： $-F_0 e^{-rT}$

期货合约到期日： $+S_T$

其中， $F_0$  为现在的期货价格， $S_T$  为期货合约到期 ( $T$  时刻) 时资产的价格， $r$  为资金投资  $T$  期限的无风险利率。

我们应该怎样估计该投资的价值？对于  $T$  时刻现金流使用的贴现率应该等于投资者对该投资的期望收益率。假定  $k$  为投资者对该投资的期望收益率，则此次投资的现值为：

$$-F_0 e^{-rT} + E(S_T) e^{-kT}$$

其中， $E$  代表期望值。假设证券市场上所有的投资机会的净现值均为 0，则有

$$-F_0 e^{-rT} + E(S_T) e^{-kT} = 0$$

由此给出衍生证券的定价：

$$F_0 = E(S_T) e^{(r-k)T} \quad (5.20)$$

我们刚刚讨论过，投资者对一项投资的期望收益率取决于这一投资的系统风险。我们考虑的上述投资实际上是对于期货合约标的资产的投资。如果该资产的回报与股票市场整体水平不相关，则正确使用的贴现率应为无风险利率  $r$ ，即  $k = r$ ，公式 (5.20) 变成

$$F_0 = E(S_T)$$

这说明当标的资产的回报与股票市场整体水平不相关时，资产的期货价格是

预期将来现货价格的无偏估计。

若资产的回报与股票市场整体水平正相关，这时， $k > r$ ，由式 (5.20) 可知  $F_0 < E(S_T)$ 。这说明，当期货合约标的资产的系统风险为正的情况下，资产的期货价格低于其预期现货价格。例如股票指数就是系统风险为正的一种资产。指数成分股票的期望回报率通常高于无风险利率  $r$ 。红利收益率为  $q$ ，因此指数的期望涨幅应该大于  $r-q$ 。因此公式 (5.8) 与我们的预测（期货价格会低于预期现货价格）是相一致的。

若资产的回报与股票市场整体水平负相关，这时， $k < r$ ，由式 (5.20) 可知  $F_0 > E(S_T)$ 。这说明，当期货合约标的资产的系统风险为负的情况下，资产的期货价格高于其预期现货价格。

## 现货溢价与期货溢价

期货价格低于预期未来现货价格的情形被称为现货溢价 (normal backwardation)，而期货价格高于预期未来现货价格的情形被称为期货溢价 (contango)。

## 小 结

在大多数情况下，具有某个确定交割日期的期货合约的价格与具有同样到期日的远期合约的价格可视为一致。理论上可以证明，当利率完全可预测时，两者应精确相等。

为了理解期货（或远期）价格，先将期货合约的标的资产分为两类是很有帮助的：一类是众多投资者拥有，其目的仅是为投资的标的资产；另一类是拥有的目的主要是为了消费的标的资产。

在投资性资产的情况下，我们考虑了三种不同的情形：

1. 资产没有提供收益
2. 资产具有已知的现金收益
3. 资产具有已知的收益率

结果总结于表 5.5 中。由此可以得出股票指数、货币、黄金和白银合约的期货价格。贮存成本可以被看作是负的收益。

表 5.5 投资资产的远期/期货价格：标的资产现价为  $S_0$ ，到期日为  $T$ ， $T$  年期间的无风险利率为  $r$

| 资产            | 远期/期货价格           | 交割价格为 $K$ 的              |
|---------------|-------------------|--------------------------|
|               |                   | 远期合约多头的价值                |
| 无收益           | $S_0 e^{rT}$      | $S_0 - Ke^{-rT}$         |
| 有已知收益，现值为 $I$ | $(S_0 - I)e^{rT}$ | $S_0 - I - Ke^{-rT}$     |
| 有已知红利收益率 $q$  | $S_0 e^{(r-q)T}$  | $S_0 e^{-qT} - Ke^{-rT}$ |

对于消费性资产，不可能得出期货价格关于现货价格和其他可观察变量的函数关系。此时所谓的资产便利收益这个参数就变得很重要了。该变量衡量的是商品使用者感到拥有现货实际资产比仅持有期货合约更有好处的程度。这些好处包括从本地暂时性商品短缺中获利，以及具有保持生产线得以运行的能力。使用套利讨论仅可以得到消费性资产的期货价格的上限，而不能确定期货与现货价格之间的等价关系式。

持有成本的概念有时很有用。持有成本是标的资产的贮存成本加上融资成本，再减去该资产收到的收益。对投资性资产，期货价格高于现货价格，其差额反映了持有成本。对消费性资产，期货价格高于现货价格，其差额等于持有成本减去便利收益。

如果资本资产定价模型正确，期货价格和预期未来现货价格之间的关系将取决于现货价格与股票市场总体水平是正相关还是负相关。正相关的关系将使得期货价格低于预期未来现货价格；负相关将使得期货价格高于预期未来现货价格。只有当相关性为0时，理论上的期货价格才等于预期的未来现货价格。

## 参考读物

- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross. "The Relation between Forward Prices and Futures Prices," *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981): 321-46.
- Ghon, R. S. and R. P. Chang. "Intra-day Arbitrage in Foreign Exchange and Eurocurrency Markets," *Journal of Finance*, 47, 1 (1992): 363-380.
- Jarrow, R. A., and G. S. Oldfield. "Forward Contracts and Futures Contracts," *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981): 373-82.
- Kane, E. J. "Market Incompleteness and Divergences between Forward and Futures Interest Rates," *Journal of Finance*, 35 (May 1980): 221-34.
- Pindyck, R. S. "Inventories and the Short-Run Dynamics of Commodity Prices," *Rand Journal of Economics*, 25, 1 (1994): 141-159.
- Richard, S., and M. Sundaresan. "A Continuous-Time Model of Forward and Futures Prices in a Multigood Economy," *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981): 347-72.
- Routledge, B. R., D. J. Seppi, and C. S. Spatt. "Equilibrium Forward Curves for Commodities," *Journal of Finance*, 55, 3 (2000) 1297-1338.

## 问题和习题

- 5.1 请说明一位投资者卖空某种股票时，会发生什么情况？
- 5.2 请解释远期价格与远期合约价值之间的区别。
- 5.3 假设你签订了一份不支付红利股票的6个月期的远期合约。现在股票价格为\$30，无风险利率为每年12%（连续复利计息）。远期价格为多少？
- 5.4 一种股票指数现为350。无风险利率为每年8%（连续复利计息）。指数的红利收益率为每年4%。一份4个月期限的期货合约价格为多少？
- 5.5 请仔细解释为什么黄金的期货价格可以从它的现价和其他的可观测的变量计算得来，但铜的期货价格就不能？
- 5.6 请认真解释便利收益与持有成本这两个术语的含义。期货价格、现货价格，便利收益和持有成本之间有何联系？

- 5.7 请解释为什么外汇可以被视为是一种支付已知收益率的资产。
- 5.8 一种股票指数的期货价格是高于还是低于预期的未来的指数价格呢？为什么？
- 5.9 当一种不支付红利股票价格为\$40 时，签订一份 1 年期的基于该股票的远期合约，无风险利率为每年 10% (连续复利计息)。  
 (a) 远期价格为多少？远期合约的初始价值为多少？  
 (b) 6 个月后，股票价格为\$45，无风险利率仍为 10%。远期价格为多少？远期合约价值为多少？
- 5.10 无风险利率为每年 7% (连续复利计息)，某股票指数的红利年支付率为 3.2%。指数现值为 150。6 个月期限期货合约的期货价格为多少？
- 5.11 假设无风险利率为每年 9% (连续复利计息)，某股票指数的红利支付率在年内经常发生变化。在 2 月份、5 月份、8 月份及 11 月份红利年支付率为 5%。其他月份红利年支付率为 2%。假设 2006 年 7 月 31 日的指数价值为 300。那么 2006 年 12 月 31 日交割的期货合约的期货价格为多少？
- 5.12 假设无风险利率为每年 10% (连续复利计息)，某股票指数的红利收益率为每年 4%。现在指数为 400，4 个月后交割的期货合约的期货价格为 405。请问存在什么样的套利机会？
- 5.13 用表 5.4 中所给数据，计算 2004 年 2 月 4 日的墨西哥和美国的短期无风险利率的差别。
- 5.14 瑞士和美国按连续复利计息的 2 个月期的利率分别为每年 3% 和每年 8%。瑞士法郎的即期价格为 \$0.6500。2 个月后交割的合约的期货价格为 \$0.6600。问存在什么样的套利机会？
- 5.15 银的现货价格为每盎司 \$9。储存费用为每盎司每年 \$0.24，每季度支付一次而且还要预先支付。假设所有期限的利率均为每年 10% (连续复利计息)，计算 9 个月后到期的银的期货价格？
- 5.16 假设  $F_1$  和  $F_2$  是基于同一种商品的两份期货合约，到期日分别为  $t_1$  和  $t_2$ ，且  $t_2 > t_1$ 。请证明：

$$F_2 \leq F_1 e^{r(t_2-t_1)}$$

其中， $r$  为无风险利率（假设不变），无贮存成本。为了解这道题，假设远期合约与期货合约的价格相等。

- 5.17 当一家公司用远期合约为一已知的外币现金流出进行套期保值，就不存在外币兑换风险。而当用期货合约对该外币现金流出进行套期保值，盯市的方式的确会使公司暴露于一些风险。请解释这种风险的性质。尤其考虑当出现如下四种情况时，公司使用期货合约和远期合约两种方式中的哪一种更好。  
 (a) 在合约期内，外币迅速贬值。  
 (b) 在合约期内，外币迅速升值。  
 (c) 外币先升值然后贬值至它的初始水平。  
 (d) 外币先贬值然后升值至它的初始水平。  
 假设远期价格等于期货价格。

- 5.18 有些人认为远期汇率是未来即期汇率的无偏估计。在什么情况下这种说法是成立的？
- 5.19 请证明一种指数期货价格的增长率等于该指数的超过无风险利率的超额收益。这里假设无风险利率和红利收益率是常数。
- 5.20 请证明当我们考虑投资于一项资产并持有基于该资产期货的空头时，式（5.3）还是成立的。假设资产支付的所有收益都重新投资在该资产。使用类似于本章注释2和4的分析，详细解释当式（5.3）的关系式不成立时，套利者们会有什么行动。
- 5.21 请解释一个商品在某一未来日期的预期价格的含义。假设在2004年2月4日，投机者们倾向于持有原油期货空头，而套期保值者们倾向于持有原油期货多头。根据凯恩斯与希克斯的理论，原油的将来预期价格会如何？使用表2.2。
- 5.22 价值线指数的设计是为了反映具有相等权重的1600种股票组合的价值变化。在1988年3月9日以前，每日指数变化是按照指数所包括股票的价格变化的几何平均来计算的。在这些情况下，等式（5.8）是否正确地反映了指数的期货价格和现货价格的关系？如果没有，等式是高估了还是低估了期货价格？
- 5.23 一家美国公司打算使用在芝加哥商品交易所交易的期货合约对它的澳元头寸进行套期保值。定义 $r$ 为所有到期日的美元的利率， $r_f$ 为所有到期日的澳元利率。假设 $r$ 和 $r_f$ 是常数，公司运用在 $T$ 时刻到期的期货合约对冲在 $t$ 时刻( $T > t$ )的某个风险暴露。
- (a) 证明最佳套期保值比率为： $e^{(r_f-r)(T-t)}$ 。
  - (b) 证明当 $t=1$ 天的时候，最佳套期保值比率近似为 $S_0/F_0$ 。其中， $S_0$ 是当前货币的即期价格， $F_0$ 是当前货币的期货价格（期货在 $T$ 时刻到期）。
  - (c) 证明，当考虑期货合约的每日结算的时候，公司可以这样进行长于1天的套期保值操作：公司每天需要调整套期保值比率，使它总是等于货币的即期价格除以货币的期货价格。

### 课后练习

- 5.24 一种股票预计在2个月后每股支付\$1红利，5个月后再支付\$1。股票价格为\$50，无风险利率为每年8%（对任何到期日连续复利计息）。一位投资者刚刚持有这种股票的6个月远期合约的空头头寸。
- (a) 远期价格为多少？远期合约的初始价值为多少？
  - (b) 3个月后，股票价格为\$48，无风险利率不变。远期价格和远期合约空头头寸的价值为多少？
- 5.25 一家银行让一家公司客户从以下两种方案中选择：按11%的利率借现金或按2%的利率借黄金（如果借黄金，利息及本金要用黄金支付。因此今天借100盎司黄金一年后要支付102盎司的黄金）。无风险利率为每年9.25%，储存费用为每年0.5%。请分析黄金贷款的年利率与现金贷款的年利率相比是太高了还是太低了？其中两个贷款的利率都用年复利表示。无风险利率和储存成本用连续复利表示。
- 5.26 某家公司不确定知道支付或收取外币的确定日期，有时愿意与银行签订一种在一段时间内都可交割的远期合约。公司希望有权力选择交割的确切日期，以匹配它的现金流。把你自己的位子上，你如何为客户想要的这项产品定价？

- 5.27 一位交易员的长期投资证券组合中包括黄金。交易员可以以每盎司\$450 买入黄金，并以每盎司\$449 卖出黄金。该交易员可以以 6%p.a. 借款，并可以以 5.5%p.a. 投资（两个利率都是每年计一次复利）。黄金的 1 年期远期价格在什么范围内时，该交易员没有套利机会？不考虑远期价格的买卖差价。
- 5.28 一家公司和一家银行签订了远期合约，规定公司将在  $T_1$  时刻以  $K_1$  卖出外汇。后来， $T_1$  时刻的汇率为  $S_1 (>K_1)$ 。公司询问银行是否可以将合约向前延展到  $T_2 (>T_1)$  时刻，而不是在  $T_1$  时刻结算。银行同意了，并给出了新的交割价格  $K_2$ 。请解释  $K_2$  应该如何计算。

## 附录

### 当利率为常数时，证明远期价格与期货价格相等

在本附录中，我们将证明当利率为常数时，远期价格和期货价格相等。假设一个持续  $n$  天的期货合约， $F_i$  为第  $i$  天末 ( $0 < i < n$ ) 的期货价格。定义  $\delta$  为每天的无风险利率（设为常数）。考虑如下策略：<sup>11</sup>

1. 在第 0 天末，买入期货合约，数量为  $e^\delta$ （即在期货合约开始生效时买入）
2. 在第 1 天末，增加期货合约多头头寸至  $e^{2\delta}$
3. 在第 2 天末，增加期货合约多头头寸至  $e^{3\delta}$

依此类推。

表 5.6 即为上述策略的总结。在第  $i$  天的开始，投资者拥有多头头寸数量为  $e^{\delta i}$ 。第  $i$  天的利润（可能为负）为：

$$(F_i - F_{i-1})e^{\delta i}$$

假设这个盈利以无风险利率计复利直至第  $n$  天末。它在第  $n$  天末的价值为：

$$(F_n - F_{n-1})e^{\delta n}e^{(n-i)\delta} = (F_n - F_{n-1})e^{n\delta}$$

整个投资策略的第  $n$  天末的价值为：

$$\sum_{i=1}^n (F_i - F_{i-1})e^{n\delta}$$

即有：

$$[(F_n - F_{n-1}) + (F_{n-1} - F_{n-2}) + \cdots + (F_1 - F_0)]e^{n\delta} = (F_n - F_0)e^{n\delta}$$

由于  $F_n$  与最终的资产即期价格  $S_T$  相等，由此整个投资策略的最终价值可写为：

表 5.6 用以说明期货价格与远期价格相等的投资策略

| 日期           | 0          | 1                        | 2                        | ... | $n-1$         | $n$                          |
|--------------|------------|--------------------------|--------------------------|-----|---------------|------------------------------|
| 期货价格         | $F_0$      | $F_1$                    | $F_2$                    | ... | $F_{n-1}$     | $F_n$                        |
| 期货头寸         | $e^\delta$ | $e^{2\delta}$            | $e^{3\delta}$            | ... | $e^{n\delta}$ | 0                            |
| 利润/损失        | 0          | $(F_1 - F_0)e^\delta$    | $(F_2 - F_1)e^{2\delta}$ | ... | ...           | $(F_n - F_{n-1})e^{n\delta}$ |
| 计复利至第 $n$ 天的 |            |                          |                          |     |               |                              |
| 利润/损失        | 0          | $(F_1 - F_0)e^{n\delta}$ | $(F_2 - F_1)e^{n\delta}$ | ... | ...           | $(F_n - F_{n-1})e^{n\delta}$ |

<sup>11</sup> 这个策略由以下论文提供：J. C. Cox, J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, “The Relationship between Forward Prices and Futures Prices,” *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981), 321–46.

$$(S_T - F_0)e^{r\delta}$$

将  $F_0$  投资于无风险债券中，并将这项投资与上述策略混合，可得到其在时刻  $T$  的收益为：

$$F_0 e^{r\delta} + (S_T - F_0) e^{r\delta} = S_T e^{r\delta}$$

由于上述所有的多头期货头寸并不需要任何资金，由此可见，投资  $F_0$  能够在  $T$  时刻得到  $S_T e^{r\delta}$ 。

下面假设第 0 天末的远期价格为  $G_0$ 。通过将  $G_0$  投资于无风险债券并购买  $e^{r\delta}$  个远期合约，在时刻  $T$  仍然保证具有  $S_T e^{r\delta}$  的资产。因此就有两种投资策略：一个要求初始投资  $F_0$ ；另一个要求初始投资  $G_0$ ，两个投资在  $T$  时刻都得到  $S_T e^{r\delta}$ 。从而在无套利机会的情况下有：

$$F_0 = G_0$$

换句话说，期货价格与远期价格是等价的。注意，在本证明中对一天的时间周期并没有特殊限制。因此当相关假设做出后，每周结算的期货合约的价格也与远期价格相等。

## 利 率 期 货

以上章节中，我们已经讲述过商品、股票指数和外汇的期货合约。我们看到了这些期货合约是怎样运作的，期货合约是怎样用来套期保值以及是怎样定价的。我们现在考虑利率期货。

本章中我们介绍在美国广泛交易的长期国债与欧洲美元的期货合约。世界范围内的其他利率期货都以上述期货合约为模型。我们也将解释公司如何利用利率期货和久期（第4章中介绍过）来对冲利率风险暴露。

### 6.1 日算惯例

作为本章预备知识，我们先讨论日算惯例。日算定义为利息随时间累计的方式。通常，我们知道在某个参考期限内（即不同付息日之间的期限）所获得的利息，我们还对计算其他期限内的利息感兴趣。

日算惯例常常表示为 X/Y。当我们计算两个日期之间所获利息时，X 定义为两个日期之间计算天数的方式，Y 定义为参考期限总天数的度量方式。在两个日期之间所得利息是：

$$\frac{\text{两个日期之间的天数}}{\text{参考期限总天数}} \times \text{在参考期限内所得利息}$$

在美国，通常使用以下三种日算惯例：

1. 实际天数/实际天数（期限内）
2. 30/360
3. 实际天数/360

#### 美国长期国债

在美国，长期国债是用实际天数/实际天数（期限内）的方式计息的。这个方式说明，应计利息的计算是以实际过去的天数与两次息票支付期间实际天数的比率为基础的。假设债券本金为\$100，息票支付日期是3月1日和9月1日，息票率是8%，我们希望计算3月1日和7月3日之间的利息。参考期是3月1日至9月1

### 商业剪影 6.1 日算惯例产生的差异

2005 年 2 月 28 日至 2005 年 3 月 1 日之间，你可以选择持有美国政府债券还是持有美国公司债券。假设两个债券支付相同数额的息票，债券的报价也相同。你应该怎么选择呢？

两个债券听起来没什么区别，但事实上，持有公司债券应该更有利。公司债券使用 30/360 方式，2005 年 2 月 28 日至 2005 年 3 月 1 日之间被认为有 3 天。而政府债券使用实际天数/实际天数（期限内）方式，上述两个日期之间被认为有 1 天。因此，通过持有公司债券，你可以获得大约 3 倍的利息！

日。在这个期间有 184 天（实际天数），在这个期间内所得利息为 \$4。在 3 月 1 日与 7 月 3 日之间有 124 天（实际天数），在 3 月 1 日与 7 月 3 日之间所得利息为：

$$\frac{124}{184} \times 4 = \$2.6957$$

### 美国公司债券和市政债券

在美国，公司债券和市政债券用 30/360 的日算方式计息。这说明，在计算利息时我们假设每月有 30 天和每年有 360 天。我们运用 30/360 的日算方式，在 3 月 1 日与 9 月 1 日之间的总天数为 180 天。在 3 月 1 日与 7 月 3 日之间的天数是  $4 \times 30 + 2 = 122$  天。某个与我们刚才考虑的国债具有同样期限的公司债券，在 3 月 1 日与 7 月 3 日之间所得利息将是：

$$\frac{122}{180} \times 4 = \$2.7111$$

商业剪影 6.1 中说明了用 30/360 日算方式，有时会出现意想不到的后果。

### 美国货币市场工具

短期国债和其他货币市场工具用实际天数/360 的日算方式计息，参考期限是 360 天。在一年中所得利息应该等于实际过去的天数除以 360，然后再乘以所报利率。90 天所得利息因此精确等于所报利率的四分之一。注意，在 365 天的一整年里所得利息等于  $365/360$  乘以所报的利率。

货币市场工具价格有时以贴现率（discount rate）报价。这个贴现率等于所得利息占最终账面价值的百分比例，而不是占支付最初工具价格的百分比。一个例子就是美国短期国债。如果一个 91 天期短期国债的报价是 8，这说明按年计算的所得利息为账面价值的 8%。假设账面价值为 \$100，那么 91 天之间会得到 \$2.0222 ( $= \$100 \times 0.08 \times 91/360$ ) 利息。而 91 天期实际利率为  $2.0222/(100 - 2.0222) =$

2.064%。通常，美国短期国债的现金价格与报价价格之间的关系是：

$$P = \frac{360}{n}(100 - Y)$$

其中， $P$  为短期国债的报价， $Y$  为短期国债的现金价格， $n$  为以日历度量的美国短期国债剩余有效期限。

## 6.2 长期国债的报价

美国长期国债价格以美元和三十二分之一美元的单位报出。所报的价格是面值为\$100 债券的价格。因此，90-05 表示面值\$100 000 债券的报价是\$90 156.25。

报价与购买者所支付的现金价格并不相同。报价有时称为净价（clean price），而现金价格称为全价（dirty price）。现金价格与报价之间的关系为：

$$\text{现金价格} = \text{报价} + \text{自上一个付息日以来的应计利息}$$

为说明这个公式，设现在是 2007 年 3 月 5 日，所考虑的债券息票率为 11%，在 2012 年 7 月 10 日到期，报价为 95-16（或\$95.50）。因为，政府债券半年付一次利息（最后一次付息日是到期日）。最近的一次付息日是 2007 年 1 月 10 日，下一次付息日将是 2007 年 7 月 10 日。在 2007 年 1 月 10 日与 2007 年 3 月 5 日之间的天数是 54 天，而 2007 年 1 月 10 日与 2007 年 7 月 10 日之间的天数是 181 天。一个面值\$100 的债券，在 1 月 10 日和 7 月 10 日支付的利息都是\$5.50。2007 年 3 月 5 日的累计利息应该均摊到 7 月 10 日支付给 2007 年 3 月 5 日的债券持有者的息票中，因为美国长期国债计息是基于实际天数/实际天数（参见 6.1 节），累计利息计算如下：

$$\frac{54}{181} \times \$5.50 = \$1.64$$

因此，2012 年 7 月 10 日到期的面值为每\$100 债券的现金价格是：

$$\$95.5 + \$1.64 = \$97.14$$

面值\$10 000 债券的现金价格为\$97 140。

## 6.3 长期国债期货

表 6.1 是 2004 年 2 月 5 日《华尔街日报》报出的利率期货行情。最普遍的长期利率期货合约是在 CBOT 交易的长期国债期货。在这个合约中，期限超过合约交割月份第一天 15 年以上的，并从那天起 15 年内不能赎回的任何政府债券都可以进行交割。下面还要解释，CBOT 制定了一种方法来调整空头方交割特定长期国债时可接受的价格。

中期国债和 5 年期国债期货在美国也非常受欢迎。中期国债期货中，到期期

表 6.1 2004 年 2 月 5 日《华尔街日报》利率期货行情（每列分别为交割月份、开盘价、当日最高价、当日最低价、结算价格、变化值、有效期内的最高价、有效期内的最低价和未平仓量）

| <b>Interest Rate Futures</b>   |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
|--|------------------|---------------------|----------|------|-----------------|-------------|------------|---------------|------------|
| <b>Treasury Bonds (CBT)-\$100,000; pts 32nds of 100%</b>             |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Mar 111-25   | 111-31           | 109-18              | 111-17   | -3   | 116-23          | 101-00      | 467,134    |               |            |
| June 110-09  | 110-12           | 109-16              | 110-03   | -3   | 116-15          | 104-00      | 31,215     |               |            |
| Est vol 183,502;   | vol Tue 208,442; | open int 499,090,   | +8,789.  |      |                 |             |            |               |            |
| <b>Treasury Notes (CBT)-\$100,000; pts 32nds of 100%</b>             |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Mar 113-29   | 14-005           | 113-15              | 113-22   | -45  | 116-10          | 106-29      | 1,130,409  |               |            |
| June 112-17  | 112-17           | 111-29              | 112-03   | -45  | 113-18          | 107-13      | 147,892    |               |            |
| Est vol 489,439;   | vol Tue 623,701; | open int 1,278,301, | -9,178.  |      |                 |             |            |               |            |
| <b>5 Yr. Treasury Notes (CBT)-\$100,000; pts 32nds of 100%</b>       |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Mar 12-215   | 112-24           | 12-125              | 112-17   | -35  | 19-215          | 09-145      | 882,174    |               |            |
| Est vol 219,841;   | vol Tue 268,683; | open int 948,759,   | +6,645.  |      |                 |             |            |               |            |
| <b>2 Yr. Treasury Notes (CBT)-\$200,000; pts 32nds of 100%</b>       |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Mar 07-132   | 07-142           | 07-102              | 07-127   | -2   | 07-205          | 106-02      | 164,711    |               |            |
| Est vol 15,846;  | vol Tue 11,507;  | open int 166,044,   | +168.    |      |                 |             |            |               |            |
| <b>30 Day Federal Funds (CBT)-\$5,000,000; 100 - daily avg.</b>      |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Feb 99.00  | 99.00            | 98.995              | 99.00    | ...  | 99.890          | 98.700      | 64,359     |               |            |
| Mar 99.00  | 99.00            | 98.99               | 98.99    | ...  | 99.16           | 98.74       | 48,219     |               |            |
| Apr 99.00  | 99.00            | 98.99               | 98.99    | ...  | 99.17           | 89.96       | 71,817     |               |            |
| May 98.96  | 98.96            | 98.95               | 98.96    | ...  | 99.79           | 98.40       | 37,989     |               |            |
| June 98.94   | 98.95            | 98.94               | 98.95    | ...  | 98.97           | 98.38       | 27,460     |               |            |
| July 98.87   | 98.87            | 98.86               | 98.87    | ...  | 98.93           | 98.20       | 26,248     |               |            |
| Aug 98.77  | 98.78            | 98.77               | 98.78    | .01  | 98.85           | 98.24       | 4,137      |               |            |
| Sept 98.70   | 98.71            | 98.68               | 98.71    | -.01 | 98.79           | 98.22       | 5,260      |               |            |
| Est vol 15,789;  | vol Tue 16,390;  | open int 286,642,   | -49,041. |      |                 |             |            |               |            |
| <b>10 Yr. Interest Rate Swaps (CBT)-\$100,000; pts 32nds of 100%</b> |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Mar 111-15   | 111-19           | 111-03              | 111-10   | -6   | 113-05          | 107-20      | 39,568     |               |            |
| Est vol 1,060;   | vol Tue 968;     | open int 39,569,    | +269.    |      |                 |             |            |               |            |
| <b>10 Yr. Muni Note Index (CBT)-\$1,000 x index</b>                  |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Mar 103-13   | 103-21           | 103-08              | 103-15   | 1    | 105-04          | 99-21       | 2,249      |               |            |
| Est vol 269;   | vol Tue 194;     | open int 2,249,     | +6.      |      |                 |             |            |               |            |
| Index: Close 104-15; Yield 4.44.                                     |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
|  |                  |                     |          |      | <b>OPEN</b>     |             |            |               |            |
|  |                  |                     |          |      | <b>OPEN</b>     | <b>HIGH</b> | <b>LOW</b> | <b>SETTLE</b> | <b>CHG</b> |
|  |                  |                     |          |      | <b>YIELD</b>    | <b>CHG</b>  | <b>CHG</b> | <b>INT</b>    |            |
| <b>1 Month Libor (CME)-\$3,000,000; pts of 100%</b>                  |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Feb 98.90  | 98.90            | 98.89               | 98.89    | ...  | 1.11            | ...         | 29,195     |               |            |
| Mar 98.89  | 98.89            | 98.89               | 98.89    | ...  | 1.11            | ...         | 11,060     |               |            |
| Apr 98.86  | 98.86            | 98.86               | 98.86    | ...  | 1.14            | ...         | 8,279      |               |            |
| May 98.83  | 98.83            | 98.82               | 98.82    | ...  | 1.18            | ...         | 2,550      |               |            |
| Oct 98.44  | 98.44            | 98.43               | 98.44    | ...  | 1.56            | ...         | 51,960     |               |            |
| Est vol 1,215;   | vol Tue 2,781;   | open int 171,119,   | +1,172.  |      |                 |             |            |               |            |
| <b>Eurodollar (CME)-\$1,000,000; pts of 100%</b>                     |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Feb 98.86  | 98.86            | 98.86               | 98.86    | ...  | 1.14            | ...         | 32,246     |               |            |
| Mar 98.84  | 98.84            | 98.83               | 98.84    | ...  | 1.16            | ...         | 827,925    |               |            |
| Apr 98.80  | 98.80            | 98.79               | 98.80    | ...  | 1.20            | ...         | 35,531     |               |            |
| May 98.75  | 98.75            | 98.74               | 98.74    | ...  | 1.26            | ...         | 14,543     |               |            |
| June 98.69   | 98.69            | 98.66               | 98.68    | ...  | 1.32            | ...         | 838,794    |               |            |
| July 98.58   | 98.58            | 98.57               | 98.58    | ...  | 1.42            | ...         | 2,150      |               |            |
| Sept 98.41   | 98.43            | 98.38               | 98.41    | ...  | 1.59            | ...         | 794,586    |               |            |
| Dec 98.04  | 98.06            | 98.00               | 98.03    | ...  | 1.97            | ...         | 600,750    |               |            |
| Mr05 97.65   | 97.67            | 97.58               | 97.63    | ...  | 2.37            | ...         | 419,479    |               |            |
| June 97.24   | 97.26            | 97.19               | 97.23    | ...  | 2.77            | ...         | 330,839    |               |            |
| Sept 96.88   | 96.90            | 96.82               | 96.86    | ...  | 3.14            | ...         | 260,971    |               |            |
| Dec 96.56  | 96.59            | 96.51               | 96.55    | ...  | 3.45            | ...         | 191,396    |               |            |
| Mr06 96.32   | 96.33            | 96.25               | 96.30    | -.01 | 3.70            | .01         | 172,526    |               |            |
| June 96.10   | 96.11            | 96.04               | 96.07    | -.01 | 3.93            | .01         | 128,625    |               |            |
| Sept 95.91   | 95.91            | 95.83               | 95.86    | -.01 | 4.14            | .01         | 119,346    |               |            |
| Dec 95.69  | 95.71            | 95.63               | 95.66    | -.02 | 4.34            | .02         | 105,045    |               |            |
| Mr07 95.47   | 95.53            | 95.46               | 95.49    | -.02 | 4.51            | .02         | 75,659     |               |            |
| June 95.34   | 95.38            | 95.30               | 95.33    | -.03 | 4.67            | .03         | 66,675     |               |            |
| Sept 95.19   | 95.23            | 95.16               | 95.18    | -.03 | 4.82            | .03         | 73,288     |               |            |
| Dec 95.05  | 95.09            | 95.02               | 95.04    | -.03 | 4.96            | .03         | 59,439     |               |            |
| Mr08 94.92   | 94.97            | 94.90               | 94.92    | -.03 | 5.08            | .03         | 46,996     |               |            |
| June 94.80   | 94.86            | 94.79               | 94.81    | -.03 | 5.19            | .03         | 50,074     |               |            |
| Sept 94.71   | 94.75            | 94.68               | 94.71    | -.03 | 5.29            | .03         | 34,029     |               |            |
| Dec 94.65  | 94.65            | 94.57               | 94.60    | -.03 | 5.40            | .03         | 26,470     |               |            |
| Ju09 94.42   | 94.47            | 94.41               | 94.43    | -.03 | 5.57            | .03         | 9,247      |               |            |
| Sept 94.34   | 94.40            | 94.34               | 94.35    | -.03 | 5.65            | .03         | 8,400      |               |            |
| Dec 94.26  | 94.31            | 94.25               | 94.27    | -.03 | 5.73            | .03         | 4,633      |               |            |
| Mar 94.19  | 94.19            | 94.18               | 94.19    | -.04 | 5.81            | .04         | 8,192      |               |            |
| June 94.12   | 94.12            | 94.11               | 94.12    | -.04 | 5.88            | .04         | 6,761      |               |            |
| Sept 94.05   | 94.05            | 94.04               | 94.05    | -.04 | 5.95            | .04         | 4,683      |               |            |
| Est vol 780,408;   | vol Tue 779,833; | open int 5,375,781, | +11,885. |      |                 |             |            |               |            |
|  |                  |                     |          |      | <b>LIFETIME</b> | <b>OPEN</b> |            |               |            |
|  |                  |                     |          |      | <b>OPEN</b>     | <b>HIGH</b> | <b>LOW</b> | <b>SETTLE</b> | <b>CHG</b> |
|  |                  |                     |          |      | <b>CHG</b>      | <b>HIGH</b> | <b>LOW</b> | <b>INT</b>    |            |
| <b>Euroyen (CME)-¥100,000; pts of 100%</b>                           |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Mar 99.91  | 99.91            | 99.91               | 99.91    | ...  | ...             | 99.92       | 99.14      | 11,530        |            |
| June 99.91   | 99.91            | 99.91               | 99.91    | ...  | ...             | 99.92       | 99.41      | 9,096         |            |
| Sept 98.89   | 99.89            | 99.89               | 99.89    | ...  | ...             | 99.90       | 99.35      | 12,320        |            |
| Mr05 99.82   | 99.82            | 99.82               | 99.82    | ...  | ...             | 99.84       | 99.27      | 4,726         |            |
| Est vol 431;   | vol Tue 25;      | open int 49,808,    | +775.    |      |                 |             |            |               |            |
| <b>Short Sterling (LIFFE)-£500,000; pts of 100%</b>                  |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Feb 95.82  | 95.82            | 95.82               | 95.82    | ...  | 95.89           | 95.80       | 1,913      |               |            |
| Mar 95.76  | 95.77            | 95.75               | 95.76    | ...  | 96.80           | 93.01       | 188,159    |               |            |
| June 95.57   | 95.58            | 95.54               | 95.56    | ...  | 96.71           | 93.04       | 201,882    |               |            |
| Sept 95.37   | 95.40            | 95.34               | 95.36    | ...  | 96.59           | 93.35       | 153,843    |               |            |
| Dec 95.21  | 95.24            | 95.19               | 95.20    | ...  | 96.48           | 93.25       | 139,045    |               |            |
| Mr05 95.10   | 95.13            | 95.06               | 95.08    | ...  | 96.38           | 93.29       | 83,684     |               |            |
| June 95.01   | 95.04            | 94.98               | 94.99    | ...  | 96.30           | 93.29       | 72,583     |               |            |
| Sept 94.95   | 94.97            | 94.91               | 94.92    | ...  | 96.23           | 94.06       | 70,992     |               |            |
| Dec 94.88  | 94.91            | 94.85               | 94.86    | ...  | 96.15           | 94.06       | 35,228     |               |            |
| Mr06 94.82   | 94.84            | 94.80               | 94.82    | .02  | 96.10           | 94.05       | 27,988     |               |            |
| June 94.77   | 94.81            | 94.75               | 94.77    | .02  | 95.97           | 94.04       | 28,423     |               |            |
| Sept 94.74   | 94.78            | 94.72               | 94.74    | .02  | 95.75           | 94.32       | 15,264     |               |            |
| Dec 94.74  | 94.75            | 94.71               | 94.72    | .02  | 95.83           | 94.25       | 6,356      |               |            |
| Mr07 94.69   | 94.69            | 94.69               | 94.71    | .02  | 95.82           | 94.33       | 527        |               |            |
| June 94.71   | 94.71            | 94.71               | 94.70    | .02  | 95.73           | 94.66       | 639        |               |            |
| Est vol 142,996;   | vol Tue 184,402; | open int 1,028,552, | -284.    |      |                 |             |            |               |            |
| <b>Long Gilt (LIFFE)-£100,000; pts of 100%</b>                       |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Mar 107.95   | 108.41           | 107.95              | 108.12   | .26  | 109.73          | 105.39      | 159,338    |               |            |
| Est vol 50,453;  | vol Tue 36,817;  | open int 159,339,   | -153.    |      |                 |             |            |               |            |
| <b>3 Month Euribor (LIFFE)-€1,000,000; pts of 100%</b>               |                  |                     |          |      |                 |             |            |               |            |
| Feb 97.92  | 97.93            | 97.92               | 97.93    | .01  | 97.96           | 97.77       | 13,595     |               |            |
| Mar 97.94  | 97.95            | 97.93               | 97.94    | .01  | 98.29           | 93.83       | 562,698    |               |            |
| June 97.91   | 97.92            | 97.89               | 97.90    | .02  | 98.21           | 93.79       | 511,614    |               |            |
| Sept 97.77   | 97.78            | 97.75               | 97.76    | .03  | 98.08           | 93.73       | 428,741    |               |            |
| Dec 97.55  | 97.57            | 97.53               | 97.55    | .04  | 97.91           | 93.64       | 436,055    |               |            |
| Mr05 97.32   | 97.34            | 97.30               | 97.31    | .05  | 97.77           | 94.07       | 301,516    |               |            |
| June 97.09   | 97.10            | 97.06               | 97.07    | .03  | 97.60           | 94.29       | 197,768    |               |            |
| Sept 96.88   | 96.89            | 96.84               | 96.86    | .02  | 97.44           | 94.29       | 119,907    |               |            |
| Dec 96.68  | 96.69            | 96.65               | 96.66    | .02  | 97.28           | 94.41       | 95,512     |               |            |
| Mr06 96.51   | 96.53            | 96.48               | 96.50    | .02  | 97.14           | 94.40       | 41,992     |               |            |
| June 96.35   | 96.36            | 96.32               | 96.33    | .02  | 96.96           | 94.66       | 37,197     |               |            |
| Sept 96.20   | 96.21            | 96.17               | 96.18    | .02  | 96.81           | 94.58       | 22,947     |               |            |
| Dec 96.03  | 96.04            | 96.01               | 96.02    | .02  | 96.60           | 94.62       | 11,645     |               |            |
| Mr07 95.93   | 95.93            | 95.93               | 95.90    | .02  | 96.48           | 94.57       | 4,473      |               |            |
| June 95.79   | 95               |                     |          |      |                 |             |            |               |            |

| <b>3 Yr. Commonwealth T-Bonds (SFE)-AUD 100,000</b>         |  |  |  |  |  |  |  |  |  | <b>5 Yr. Euro-BOBL (EUREX)-€100,000; pts of 100%</b>        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Mar 94.38 94.48 94.37 94.47 0.09 94.56 93.96 609,295        |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Mar 111.59 111.66 111.47 111.56 ... 112.06 108.71 743,330   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Est vol 130,882; vol Tue 72,788; open int 609,295, +83,322. |  |  |  |  |  |  |  |  |  | June 110.79 110.80 110.71 110.75 ... 111.16 109.50 7,545    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| <b>Euroyen (SGX)-¥100,000,000; pts of 100%</b>              |  |  |  |  |  |  |  |  |  | vol Wed 582,579; open int 750,875, +21,654.                 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Mar 99.91 99.91 99.91 99.91 ... 99.92 98.19 60,509          |  |  |  |  |  |  |  |  |  | <b>10 Yr. Euro-BUND (EUREX)-€100,000; pts of 100%</b>       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| June 99.91 99.91 99.91 99.92 0.01 99.92 99.45 71,194        |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Mar 114.38 114.45 114.15 114.26 -0.02 117.76 110.73 945,187 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Sept 99.89 99.90 99.89 99.90 0.01 99.90 99.34 43,155        |  |  |  |  |  |  |  |  |  | June 113.31 113.43 113.26 113.28 -0.01 114.11 110.62 27,345 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Dec 99.87 99.87 99.87 99.87 ... 99.87 99.22 45,234          |  |  |  |  |  |  |  |  |  | vol Wed 841,211; open int 972,534, -23,916.                 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Mr05 99.81 99.82 99.81 99.82 0.01 99.85 99.18 23,103        |  |  |  |  |  |  |  |  |  | <b>2 Yr. Euro-SCHATZ (EUREX)-€100,000; pts of 100%</b>      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| June 99.78 99.78 99.78 99.78 0.01 99.85 99.10 20,948        |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Mar 106.18 106.20 106.13 106.17 ... 106.35 104.95 683,537   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Sept 99.70 99.71 99.70 99.71 0.02 99.74 98.95 14,023        |  |  |  |  |  |  |  |  |  | June 105.84 105.84 105.79 105.80 ... 105.88 105.21 28,066   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Dec 99.61 99.62 99.61 99.61 0.01 99.77 98.80 3,635          |  |  |  |  |  |  |  |  |  | vol Wed 437,442; open int 711,603, +22,620.                 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Mr06 99.50 99.50 99.50 99.50 0.01 99.76 98.84 3,405         |  |  |  |  |  |  |  |  |  | June 99.42 99.42 99.42 99.43 0.02 99.75 98.55 1,380         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| June 99.42 99.42 99.42 99.43 0.02 99.75 98.55 1,380         |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Dec 99.23 99.23 99.23 99.23 0.02 99.71 98.35 1,851          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Est vol 3,160; vol Tue 5,292; open int 295,306, -1,880.     |  |  |  |  |  |  |  |  |  | vol Wed 841,211; open int 972,534, -23,916.                 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

资料来源：Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc. © 2004 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

限在 6.5~10 年的任何政府债券（或票据）都可以进行交割。在 5 年期中期国债期货合约中，交割的债券的有效期通常为 4 年或 5 年。

本节剩下的部分重点讨论 CBOT 长期国债期货。美国的中期国债期货和其他国家的很多期货合约的设计都与 CBOT 长期国债期货类似。因此，我们在这里提出的大部分观点对其他类似合约也是成立的。

## 报价方式

长期国债期货合约的报价与长期国债本身报价的方式相同（参照 6.2 节）。表 6.1 表明 2004 年 2 月 4 日，2004 年 6 月份长期国债期货合约的结算价格为 110-03 或为  $110\frac{3}{32}$ 。每一期货合约的大小为交割面值为 10 万美元的债券。因此，在期货价格的报价中，期货价格 \$1 的变化将引起期货合约的总价值变化 \$1 000。合约可在交割月份中的任何时间进行交割。

## 转换因子

我们在前面提到，长期国债期货合约中，空头方可以选择交割任何期限长于 15 年且在 15 年内不可赎回的债券。当交割某一特定的债券时，转换因子这一参数详细说明了空头方收到的价格。可用于交割的报价等于转换因子乘以最新的结算价格。考虑应计利息（6.2 节中描述过），对交割每一个面值为 \$100 的债券，空头方收到的现金为：

$$(\text{结算价格} \times \text{转换因子}) + \text{应计利息}$$

每一合约必须交割面值为 10 万美元的债券。假定结算价格为 90-00，所交割的债券的转换因子为 1.3800，在交割时每一个面值 \$100 的债券的应计利息为 \$3.00。当空头方交割债券时，交割每一个面值 \$100 的债券，他收到的现金为（交割时由多头方支付）：

$$(1.3800 \times 90.00) + 3.00 = \$127.20 \text{ (每\$100 面值)}$$

因此一份期货合约空头方将交割面值为 10 万美元的债券，收到 \$127 200 的现金。

假定所有期限的年利率均为 6% (每半年计一次复利)，则某债券的转换因子就定义为交割月份第一天该债券的报价除以面值的比率。为了便于计算，债券的有效期限和距付息日的时间取整数到最近的 3 个月。在此基础上，CBOT 给出了对应的换算表。如果取整数后，债券的有效期为半年的倍数，我们假定第一次付息是在 6 个月后。如果取整数后，债券的有效期不是 6 个月的整数倍 (例如：额外有 3 个月)，我们假定在 3 个月后付息，并减去相应的应计利息。

为了解释这些规则，下面考虑两个例子。第一个例子我们考虑某一债券，其息票率为每年 10%，距到期日还有 20 年零 2 个月。为了计算转换因子，假定债券距到期日整整 20 年。假定在 6 个月后，第一次付息。即假定每 6 个月支付一次利息，一直到 20 年后支付本金时为止。我们以下按债券面值为 \$100 来计算。假定年贴现率为 6%，每半年计一次复利 (每 6 个月 3%)，则债券的价值为：

$$\sum_{i=1}^{40} \frac{5}{1.03^i} + \frac{100}{1.03^{40}} = \$146.23$$

除以债券的面值，转换因子为 1.4623。

第二个例子，某债券利息率为 8%，距到期日还有 18 年零 4 个月。为了计算转换因子，假定债券距到期日还有 18 年零 3 个月。将所有将来息票支付的现金流以每年 6% (每半年计复利一次) 贴现到距今 3 个月后的时点上，此时债券的价值为：

$$4 + \sum_{i=1}^{36} \frac{4}{1.03^i} + \frac{100}{1.03^{36}} = \$125.83$$

由于 3 个月期的利率为  $\sqrt{1.03} - 1$  即 1.4889%。因此从距今天 3 个月后的时点贴现到现在，债券的价值为  $125.83 / 1.014889 = \$123.99$ 。减去应计利息 2.0，债券价值变为 \$121.99。因此转换因子为 1.2199。

## 最便宜交割债券

在交割月份任意时刻，有许多种债券可以用来交割 CBOT 的长期国债期货合约。考虑息票和到期日，它们之间的区别是很大的。空头方可以选择最便宜交割债券进行交割。由于空头方收到的价款为：

$$(\text{期货结算价格} \times \text{转换因子}) + \text{应计利息}$$

并且购买债券的成本为：

$$\text{债券报价} + \text{应计利息}$$

最便宜交割债券是如下值：

$$\text{债券报价} - (\text{结算价格} \times \text{转换因子})$$

所得结果最小的债券。一旦空头方决定交割，他可以逐个计算每个可用来交割的债券，来找出最便宜交割债券。

**[例 6.1]** 空头方决定交割，打算在表 6.2 的三个债券中进行选择。假定最新的期货结算价格为 93-08，即 93.25。

交割每种债券的成本如下：

$$\text{债券 1: } 99.50 - (93.25 \times 1.0382) = \$2.69$$

$$\text{债券 2: } 143.50 - (93.25 \times 1.5188) = \$1.87$$

$$\text{债券 3: } 119.75 - (93.25 \times 1.2615) = \$2.12$$

因此最便宜交割债券是债券 2。

有一系列因素决定最便宜交割债券。当债券收益率高于 6% 时，就转换因子而言，则倾向于交割息票率较低、期限较长的债券。当债券收益率低于 6% 时，则倾向于交割息票率较高、期限较短的债券。其次，当收益率曲线向上倾斜时，倾向于交割有效期长的债券；而当收益率曲线向下倾斜时，倾向于交割有效期较短的债券。

除了最便宜交割债券，空头方还有被称为百搭牌游戏的选择权。商业剪影 6.2 中对此进行了阐述。

表 6.2 例 6.1 中可供交割的债券

| 债券 | 报价 (美元) | 转换因子   |
|----|---------|--------|
| 1  | 99.50   | 1.0382 |
| 2  | 143.50  | 1.5188 |
| 3  | 119.75  | 1.2615 |

### 商业剪影 6.2 百搭牌游戏

在 CBOT 交易的长期国债期货合约于芝加哥时间下午 2 点停止交易。但是，长期国债现货一直要交易到下午 4 点。另外，空头方在下午 8 点以前都可以向结算所下达交割通知。如果下达了交割通知，交割应付价格是以当天的期货结算为基础计算的。即在下午 2 点响铃以前，刚刚进行交易的期货价格。

这样就给了空头方一个选择权，我们称它为百搭牌游戏 (wild card play)。如果在交割月的第一天下午 2 点以后，现货债券的价格下降，空头方就可以发出交割通知（比如说在下午 3:45 分发出），以下午 2 点的期货价格，开始购买最便宜交割债券并为交割做准备。如果债券的价格并没有下降，空头方继续保持头寸，等到第二天运用相同的策略。

就像空头方拥有的其他选择权一样，百搭牌选择权也不是免费的。它的价值反映在期货的价格中，有这种选择权的期货价格比没有这种选择权的期货价格要低一些。

## 期货价格的决定

由于空头方所涉及的交割时间选择权和交割债券的选择权不容易进行估价，因此精确地确定长期国债期货的理论价格也是很难的。但是，如果我们假定最便宜交割债券和交割日期是已知的，长期国债期货合约则是这样一种期货合约，即该合约的标的资产可向其持有者提供已知的收益。<sup>1</sup>第5章中的公式(5.2)表明期货的价格 $F_0$ 与现货的价格 $S_0$ 的关系是：

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT} \quad (6.1)$$

其中 $I$ 是期货合约有效期内息票利息的现值， $T$ 是期货合约的到期时刻， $r$ 是 $T$ 期限的无风险利率。

**[例 6.2]** 假定某一长期国债期货合约，已知最便宜交割债券的息票率为12%，转换因子为1.4000。假定270天后进行交割。债券息票每半年付息一次。如图6.1所示，上一次付息是在60天前，下一次付息在122天后，再下一次付息是在305天后。利率期限结构是平坦的，年利率为10%（连续复利）。我们假定当时债券的报价为\$120。债券的现金价格为报价加上从上一次付息至今的应计利息。因此债券现金价格为：

$$120 + \frac{60}{60+122} \times 6 = 121.978$$

在122天（0.3342年）后将会收到\$6的利息。则利息的现值为：

$$6e^{-0.3342 \times 0.1} = 5.803$$

期货合约还要持续270天（=0.7397年）。如果期货合约标的资产为12%的债券，则其期货现金价格为：

$$(121.978 - 5.803)e^{0.7397 \times 0.1} = 125.094$$

在交割时，有148天的应计利息。如果期货合约标的资产为12%的债券，扣除应计利息，则其期货的报价为：

$$125.094 - 6 \times \frac{148}{148 + 35} = 120.242$$

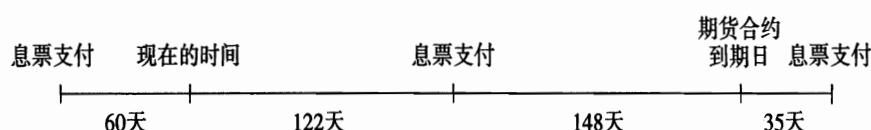


图 6.1 例 6.2 的时间图

<sup>1</sup>实际上，为了计算最便宜交割债券，分析师们通常假设期货合约到期之时的零息率等于当前的远期利率。

事实上，长期国债期货合约是基于8%的标准债券的，根据转换因子的定义，每一个12%的债券等同于1.4000个8%的标准债券。因此标准期货合约的报价应为：

$$\frac{120.242}{1.4000} = 85.887$$

## 6.4 欧洲美元期货

在美国，在CME交易的3个月期欧洲美元期货合约是一种最为普遍的利率期货合约。欧洲美元（Eurodollar）是存放在美国银行的海外分行或存放在美国以外银行的美元。欧洲美元利率是银行之间存放欧洲美元的利息率，本质上，和第4章介绍过的LIBOR相似。

3个月期欧洲美元期货合约的标的利率是3个月（90天）的欧洲美元利率。投资者通过该合约可以锁定面值为100万美元，未来3个月期间的利率水平。这一利率水平适用的3个月期限从交割月的第3个星期三开始。该合约的交割月是3月份、6月份、9月份和12月份，有效期最长为10年。这说明一位投资者在2004年利用欧洲美元期货合约最远可以锁定2014年之后的3个月期欧洲美元利率（表6.1给出了直到2010年的报价）。短期合约的交易月不仅仅包括3月份、6月份、9月份和12月份。例如，表6.1中我们可以看到2004年2月4日交易的，还有交割月为2004年2月份、4月份、5月份或7月份的欧洲美元期货。但是，这些合约的未平仓量相对较少。

为了说明欧洲美元期货的作用，我们考虑表6.1中的2005年3月份欧洲美元期货。期货合约的报价为97.63。期货合约在交割月的第3个星期三到期，在我们考虑的例子中到期日是2005年3月16日。到期日之前，以通常方式进行盯市。但在2005年3月16日，结算价格被设置为100-R，其中的R是当天实际的3个月欧洲美元利率，是以每季度计一次复利、实际天数/360的日算惯例表示的（也就是说，如果2005年3月16日的3个月欧洲美元利率为2%，最终结算价格会被设置为98）。最后的盯市反映该结算价格，之后所有合约宣布到期平仓。

欧洲美元期货被设计成，期货报价的1个基点（0.01）变化对应于每张合约的\$25收益或损失。当欧洲美元期货报价上涨1个基点，一张合约多头持有者会获利\$25，空头方将损失\$25。类似地，当欧洲美元期货报价下跌1个基点，一张合约多头持有者会损失\$25，空头方将获利\$25。这与前面讲述过的，欧洲美元期货可以锁定100万美元的未来3个月期间的利率水平是相一致的。当年利率变化一个基点，100万美元的3个月所得利率的变化为：

$$1\,000\,000 \times 0.0001 \times 0.25 = 25$$

即\$25。因为期货报价等于100减去期货利率的数值，多头方在利率下跌时获利，空头方在利率上涨时获利。

**[例 6.3]** 在 2004 年 2 月 4 日，一位投资者想锁定 500 万美元的 2005 年 3 月 16 日开始的 3 个月利率水平。这位投资者以 97.63 买入 5 张 2005 年 3 月欧洲美元期货。在 2005 年 3 月 16 日，3 个月的 LIBOR 为 2%，那么最终结算价格为 98.00。期货多头带来的收益为  $5 \times 25 \times (9800 - 9763) = \$4625$ 。3 个月期间，利率为 2%，500 万美元的所得利息为：

$$5000000 \times 0.25 \times 0.02 = 25000$$

即 \$25000。投资者的总收益为 \$29625。这是相当于利率为 2.37% 时的所得利率 ( $5000000 \times 0.25 \times 0.0237 = 29625$ )。这说明该期货交易的作用是锁定利率水平在 2.37%，即 (100-97.63)%。

交易所定义合约价格如下：

$$10000[100 - 0.25(100 - Q)] \quad (6.2)$$

其中， $Q$  为期货报价。因此表 6.1 中的 2005 年 3 月份期货的结算价格为 97.63 对应的合约价格是

$$10000[100 - 0.25(100 - 97.63)] = \$994075$$

在例 6.3，最终合约价格为：

$$10000[100 - 0.25(100 - 98)] = \$995000$$

初始和最终合约价格相差 \$925，所以持有 5 张期货多头的投资者获利  $5 \times 925$  美元，即 \$4625，如例 6.3 中的结果。这也和“1 个基点的变化对应 \$25”规则相一致。

我们可以看到 2004 年 2 月 4 日，美国利率期限结构是向上倾斜的。2004 年 3 月 17 日开始的 3 个月期期货利率为 1.16%；2005 年 3 月 16 日开始的 3 个月期期货利率为 2.37%；2007 年 3 月 21 日开始的 3 个月期期货利率为 4.51%；2010 年 3 月 17 日开始的 3 个月期期货利率为 5.81%。

其他国家也交易类似于 CME 欧洲美元期货的期货合约。表 6.1 中可以看到 CME 也交易欧洲日元期货合约。伦敦金融期货期权交易所交易 3 个月期欧洲同业拆借利率期货合约（即基于欧元 3 个月 LIBOR 的合约）和 3 个月的欧洲瑞士法郎存款期货合约。

## 远期和期货利率

欧洲美元期货类似于远期利率协议 (FRA，参照 4.7 节)，可以锁定一个未来期限的利率。如果合约到期日较短 ( $\leq 1$  年)，可以假定两种合约是相同的，同时欧洲美元期货利率等于对应的远期利率。如果合约到期日较长，两个合约之间的区别开始显著。比较一个基于  $T_1-T_2$  期间利率的欧洲美元期货与同样期间的 FRA。欧洲美元期货是每日结算的。在  $T_1$  时刻进行最终结算，最终结算价格表明  $T_1-T_2$  期间的实际利率。相反地，FRA 并不是每日结算， $T_2$  时刻的最终结算价格表明  $T_1-T_2$

$T_2$ 期间的实际利率。<sup>2</sup>

因此，欧洲美元期货与 FRA 之间的差异可以被分解为以下两个部分：

1. 一个欧洲美元期货和与其类似但不进行每日结算的合约之间的差异。后者是一个远期合约，其损益等于远期利率与实际未来利率的差额，在  $T_1$  时刻支付该损益
2. 一个  $T_1$  时刻结算的远期合约和一个  $T_1$  时刻结算的远期合约之间的差异

这样分解的两个部分，在实际应用中可能会产生混乱。两个部分都使远期利率相对小于期货利率，但对于一个长期限的合约，第二种差异减少远期利率的幅度远小于第一种差异减少远期利率的幅度。对于第一种差异（关于每日结算）减少远期利率的原因，可以参照 5.8 节。假设我们持有一种合约， $T_1$  时刻的损益为  $R_M - R_F$ ， $R_F$  是预先决定的  $T_1 \sim T_2$  期间的利率， $R_M$  是后来观察到的该期限的实际利率。同时假定我们有选择权，可以自由决定是否每日结算。在这种情形下，每日结算使得利率高的时候有现金流流入，利率低的时候有现金流出。选择每日结算对于我们是更有利的，因为利率高的时候，我们保证金账户中的资金会变多。结果是，对于每日结算的合约，市场会把  $R_F$  定在更高的水平（减少我们的累计期望损益）。相反地，对于  $T_1$  时刻一次性结算的合约， $R_F$  相对较低。

为了解释第二种差异减少远期利率的原因，假设损益  $R_M - R_F$  发生在  $T_2$  时刻，而非  $T_1$  时刻（普通的 FRA 就是这样的）。如果  $R_M$  较高，损益是正值。因为利率高的时候，相对于  $T_1$  时刻，在  $T_2$  时刻获取损益的成本比较高。如果  $R_M$  较低，损益是负值。因为利率低的时候，相对于  $T_1$  时刻，在  $T_2$  时刻获取损益的收益比较低。总体上来说，我们还是愿意  $T_1$  时刻实现损益。如果只能  $T_2$  时刻实现损益，而非  $T_1$  时刻， $R_F$  应该减少使得我们得到相应的补偿。<sup>3</sup>

分析师用所谓的凸性调整（convexity adjustment）度量远期和期货利率之间的整个差异。一种广泛使用的调整方法是：<sup>4</sup>

$$\text{远期利率} = \text{期货利率} - \frac{1}{2}\sigma^2 T_1 T_2 \quad (6.3)$$

与以前一样， $T_1$  是期货合约的到期时间， $T_2$  是期货合约标的利率的到期时间。 $\sigma$  是 1 年之间短期利率变化的标准方差。两种利率都以连续复利计算。<sup>5</sup> 通常使用的  $\sigma$  值是 1.2%，即 0.012。

**[例 6.4]** 考虑  $\sigma = 0.012$  的情况，我们计算 8 年期欧洲美元期货报价为 94 时的远期利率。此时， $T_1 = 8$ ， $T_2 = 8.25$ ，凸性调整为：

<sup>2</sup> 4.7 节中提过，结算可以在  $T_1$  时刻发生，但随后，它等价于普通远期合约  $T_2$  时刻损益的现值。

<sup>3</sup> 第 27 章中将进一步讨论如何量化此类时间差异对衍生证券价值的影响。

<sup>4</sup> 参见作者网页上的技术说明 1，其中有相关证明。

<sup>5</sup> 这一公式的推导基于 Ho-Lee 利率模型，第 28 章中将对其进行讨论。参见 T. S. Y. Ho and S.-B. Lee, "Term Structure movements and pricing interest rate contingent claims," *Journal of Finance*, 41 (December 1986), 1011-29.

表 6.3 例 6.4 中对于期货利率的凸性调整

| 期货的到期期限(年) | 凸性调整(基点) |
|------------|----------|
| 2          | 3.2      |
| 4          | 12.2     |
| 6          | 27.0     |
| 8          | 47.5     |
| 10         | 73.8     |

$$\frac{1}{2} \times 0.012^2 \times 8 \times 8.25 = 0.00475$$

即 0.475% (47.5 个基点)。期货利率为每年 6%，使用实际天数/360 日算方式，按每季度计一次复利计算。这对应于 90 天利率 1.5% 或连续复利的年利率  $(365/90)\ln 1.015 = 6.038\%$  (实际天数/365 日算方式)。根据公式 (6.3)，我们可以估计远期利率为每年  $6.038\% - 0.475\% = 5.563\%$ ，计连续复利。表 6.3 说明到期期限增大时调整规模是如何变大的。

从表 6.3 中我们可以看到调整规模和期货合约到期期限的平方粗略成比例关系。因此，8 年期合约的凸性调整规模大约等于 2 年期合约调整规模的 16 倍。

### 利用欧洲美元期货扩展 LIBOR 零息率曲线

根据 1 个月、3 个月、6 个月和 12 个月的 LIBOR，可以得到 1 年内的 LIBOR 零息率曲线。利用欧洲美元期货和以上的凸性调整方法，可以扩展这个零息率曲线。假设第  $i$  个欧洲美元期货在  $T_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) 时刻到期。通常假定从第  $i$  个期货合约计算得到的远期利率可以应用于  $T_i \sim T_{i+1}$  期间 (接近现实情况)。这样，我们可以利用息票剥离法计算零息率。假设  $F_i$  是从第  $i$  个欧洲美元期货计算的远期利率， $R_i$  为  $T_i$  期限的零息率。根据公式 (4.5)，有：

$$F_i = \frac{R_{i+1}T_{i+1} - R_iT_i}{T_{i+1} - T_i}$$

所以

$$R_{i+1} = \frac{F_i(T_{i+1} - T_i) + R_iT_i}{T_{i+1}} \quad (6.4)$$

也可以利用其他欧洲利率如欧洲瑞士法郎、欧洲日元、欧洲同业拆借利率等做出类似的计算。

**[例 6.5]** 连续复利计算的 400 天的 LIBOR 零息率为 4.80%，而且已从欧洲期货报价计算出 (a) 400 天后开始的 90 天期远期利率为 5.30%，计连续复利，(b) 491 天后开始的 90 天期远期利率为 5.50%，计连续复利，(c) 589 天后开始的 90

天期远期利率为 5.60%，计连续复利。根据公式 (6.4)，我们可以得到 491 天期利率：

$$\frac{0.053 \times 91 + 0.048 \times 400}{491} = 0.04893$$

即 4.893%。类似地，我们可以利用第二个远期利率计算 589 天期利率：

$$\frac{0.055 \times 98 + 0.04893 \times 491}{589} = 0.04994$$

即 4.994%。利用下一个远期利率 5.60% 可以决定下一个欧洲美元期货到期日所对应期限的零息率曲线（注意，虽然欧洲美元期货的标的利率是 90 天期利率，但通常假设两个欧洲美元期货合约到期日之间的天数为 91 天或 98 天）。

## 6.5 基于久期的套期保值策略

我们在 4.8 节讨论过久期。设有某个利率依赖型资产的头寸，这些资产可以是债券组合或货币市场证券，我们这里考虑运用利率期货合约对该利率头寸进行套期保值。定义：

$F_c$ : 利率期货合约的合约价格

$D_F$ : 期货合约的标的资产在期货合约到期时的久期

$P$ : 需进行套期保值的资产在套期保值到期时的远期价值（实际上，通常假设与今天的债券组合价值相等）

$D_P$ : 需进行套期保值的资产在套期保值到期时的久期

我们假定收益率的变化为  $\Delta y$ ，对所有期限来说都是一样的，即我们假定收益曲线只能发生平行移动。可以得到一个近似公式：

$$\Delta P = -PD_P\Delta y$$

通过合理的近似，下式也同样成立：

$$\Delta F_c = -F_c D_F \Delta y$$

因此，为了对冲  $\Delta y$  的不确定性，对冲所需要的合约数为：

$$N^* = \frac{PD_P}{F_c D_F} \quad (6.5)$$

这就是基于久期的套期比率 (duration-based hedge ratio)。有时我们也将它称为价格敏感的套期比率 (price sensitivity hedge ratio)。<sup>6</sup> 运用它可使整个头寸的久期为零。

---

<sup>6</sup> 对公式 (6.5) 更加详细的讨论，参见 R. J. Rendleman, “Duration-Based Hedging with Treasury Bond Futures,” *Journal of Fixed Income* 9, 1 (June 1999): 84–91。

当用于对冲的工具是长期国债期货合约时，对冲者必须以  $D_F$  为基础假设交割某个特殊的债券。这意味着在实施对冲的时刻，对冲者必须估计哪一种合适的债券可能是最便宜交割的债券。以后，如果利率环境发生变化以致于另外一个不同的债券看起来是最便宜交割债券的话，对冲需要调整，对冲的效果也许比预期的要差。

当利用利率期货套期保值时，需要铭记利率和期货价格是相反方向移动的。当利率上升时，利率期货价格下跌。当利率下降时，利率期货价格上涨。所以，若利率下降对于公司不利时，应该买入利率期货进行套期保值。若利率上升对于公司不利时，应该卖出利率期货进行套期保值。

套期保值者在选择期货合约时会使标的资产的久期尽可能接近进行套期保值的资产的久期。一般利用欧洲美元期货来对冲短期利率风险暴露，利用长期和中期国债期货来对冲中长期利率风险暴露。

**[例 6.6]** 8月2日，基金经理已将1000万美元投资到政府债券中，他预计在下3个月内利率的变动将十分剧烈。他决定运用12月份的长期国债期货合约对投资组合进行套期保值。现在期货的价格为93-02即为93.0625。由于每一合约要交割面值为10万美元的债券，因此期货合约的价格为\$93 062.50。

我们假设在下3个月内，债券组合的平均久期为6.80年。在长期国债期货合约中最便宜交割债券是20年期年息票率为12%的债券。现在该种债券的年收益率为8.80%，在期货合约到期时，该债券久期为9.20年。

为了对债券组合进行套期保值，基金经理需要在长期国债期货上持有空头。如果利率上升，期货空头将会盈利，而债券组合将会发生损失。如果利率下降，期货空头将发生损失，而债券组合会有盈利。根据公式(6.5)，我们可以计算出应卖空的期货合约数：

$$\frac{10\,000\,000}{93\,062.50} \times \frac{6.80}{9.20} = 79.42$$

四舍五入近似到整数位，基金经理应卖空79张合约。

## 6.6 资产负债组合的套期保值

金融机构通常使资产的平均久期和负债的平均久期相等，以此达到对冲利率风险的目的（负债可以被认为是债券空头头寸）。这种策略被称为久期匹配 (duration matching) 或免疫资产组合 (portfolio immunization)。执行该策略可以使零息利率曲线的轻微平行移动对资产负债组合价值影响微小。资产的收益（损失）可以相抵负债的损失（收益）。

久期匹配策略并不能使资产负债组合免疫于零息利率曲线的非平行移动。这是该策略的一个弱点。实际上，短期利率通常比长期利率变动剧烈，而且也不完全和长期利率相关联。有时短期和长期利率甚至往相反的方向分别移动。因此久

### 商业剪影 6.3 银行的资产-负债管理

20世纪60年代，利率水平比较低，利率的波动也很小。很多银行习惯接收短期存款并贷出长期贷款。20世纪70年代，利率上升。一些银行发现他们在60年代可用低利率为长期贷款融资，现在则需要支付相当昂贵的短期存款利率，结果是很多银行遭受损失。

当今，银行的资产-负债管理（ALM）委员会非常仔细地监测他们对利率风险的暴露。作为第一步，银行把资产和负债的久期相互匹配，但这并不能对利率期限结构的非平行移动提供保护。一种广为流行的方法是GAP管理。其中将零息票收益率曲线分成几个部分，即所谓的“桶”。第一个“桶”可能是0~1个月，第二个可能是1~3个月，如此等等。随后，ALM委员会研究，当零息率曲线中一个“桶”发生变化，但其他“桶”保持不变的时候，资产和负债价值产生什么变化。

对于资产和负债有不匹配的地方，银行会进行修正。幸运的是，相比20世纪60年代，当今的银行可以选择很多金融工具来管理他们对于利率风险的暴露。这些金融工具包括互换、FRA、债券期货、欧洲美元期货以及其他利率衍生证券。

期匹配策略只是第一步，金融机构研究出其他一些工具来处理利率风险暴露。请参见商业剪影 6.3。

## 小 结

在美国，两种最普遍的利率期货合约是长期国债期货合约和欧洲美元期货合约。在长期国债期货合约中，空头方拥有一些有利的交割选择权：

1. 可以在交割月份中的任意一天进行交割
2. 交割时存在一系列可供选择的债券
3. 在交割月份中的任意一天，在下午2点到8点之间任何时刻都可以下达按下午2点时的期货结算价格进行交割的意向通知书

这些选择权将减少期货的价格。

欧洲美元期货合约的标的利率是交割月的第3个星期三时的3个月期利率。欧洲美元期货经常被用来估计LIBOR远期利率，并推出LIBOR零息率曲线。当长期限合约用于上述目的的时候，应该注意凸性调整的概念，它可以反映期货市场盯市操作的影响。

在对冲利率风险的套期保值中，久期是一个重要的概念。套期保值者能够以久期评价某种债券对收益率曲线微小平行变动的敏感性。它也可以帮助套期保值者评价利率期货价格对标的债券收益率微小变化的敏感性。套期保值者就可以由此计算出对冲所需期货合约的数量，以便确保债券组合不受收益率曲线微小平行变动的影响。

基于久期的保值策略的一个关键假设是所有的利率变化幅度相同。这意味着，在利率期

限结构图中，只允许有平行移动。实际上，一般短期利率比长期利率变动剧烈，并且如果期货合约的标的债券的久期与要进行保值的资产的久期之间存在显著的不同时，保值的效果可能会很糟。

## 参考读物

- Burghardt, G., and W. Hoskins. "The Convexity Bias in Eurodollar Futures," *Risk*, 8, 3 (1995): 63–70.
- Duffie, D. "Debt Management and Interest Rate Risk," in W. Beaver and G. Parker (eds.), *Risk Management: Challenges and Solutions*. New York: McGraw-Hill, 1994.
- Grinblatt, M., and N. Jegadeesh. "The Relative Price of Eurodollar Futures and Forward Contracts," *Journal of Finance*, 51, 4 (September 1996): 1499–1522.

## 问题和习题

- 6.1 一个美国长期债券在每年 1 月 7 日和 7 月 7 日支付息票，息票率为 7%。2004 年 7 月 7 日到 2004 年 8 月 9 日之间，债券持有者的每 \$100 本金的应计利息为多少？如果是公司债券，你的答案会有什么变化？
- 6.2 现在为 2005 年 1 月 9 日。息票率 12%、在 2009 年 10 月 12 日到期的长期国债报价为 102–07。现金价格为多少？
- 6.3 芝加哥交易所如何计算转换因子？如何使用转换因子？
- 6.4 一个欧洲美元期货价格从 96.76 变化到 96.82。一位持有 2 份该合约多头的投资者的损益为多少？
- 6.5 对欧洲美元期货利率进行凸性调整的目的是什么？为什么需要进行凸性调整？
- 6.6 350 天期 LIBOR 为 3%，按连续复利计算。350 天后到期的欧洲美元期货中计算的远期利率为连续复利计算的 3.2%。请估计 440 天期零息率。
- 6.7 现在是 1 月 30 日。你管理一个价值 600 万美元的债券组合。6 个月内该债券组合的久期为 8.2 年。9 月份长期国债期货价格现在为 108–15，在 9 月份的最便宜交割债券的久期为 7.6 年。对接下来的 6 个月的利率变化，你应如何进行套期保值？
- 6.8 一种 90 天期的短期国债报价为 10.00。按连续复利计算，投资于该短期国债的投资者 90 天的收益率（基于实际天数/365 方式）为多少？
- 6.9 现在为 2005 年 5 月 5 日。一种息票率为 12%、在 2011 年 7 月 27 日到期的政府债券报价为 110–17。现金价格为多少？
- 6.10 假设长期债券期货价格为 101–12。下面 4 种债券哪一种为最便宜交割债券：

| 债券 | 价格     | 转换因子   |
|----|--------|--------|
| 1  | 125–05 | 1.2131 |
| 2  | 142–15 | 1.3792 |
| 3  | 115–31 | 1.1149 |
| 4  | 144–02 | 1.4026 |

- 6.11 现在为 2005 年 7 月 30 日。2005 年 9 月份的长期国债期货合约的最便宜交割债券为息

票率为 13% 的债券，预期在 2005 年 9 月 30 日进行交割。该债券的息票利息在每年的 2 月 4 日和 8 月 4 日支付。期限结构是平坦的，以半年计复利的年利率为 12%。债券的转换因子为 1.5。债券的当前报价为 \$110。计算该合约的期货报价。

- 6.12 一位投资者在长期国债期货市场寻找套利机会。如果空头方可以选择交割任何有效期长于 15 年的债券，会出现什么状况？
- 6.13 假设 9 个月期的 LIBOR 利率为每年 8%，6 个月期的 LIBOR 利率为每年 7.5%（都为连续复利，并基于实际天数/365 日算方式）。请计算 6 个月后到期的 3 个月期欧洲美元期货合约的报价。
- 6.14 假设 300 天期 LIBOR 零息率为 4%，300 天、398 天和 489 天到期的欧洲美元期货报价分别为 95.83、95.62 和 95.48。请计算 398 天期和 489 天期 LIBOR 零息率。假设远期和期货利率相同。
- 6.15 假设一个久期为 12 年的债券组合用一个标的资产久期为 4 年的期货合约进行套期保值。若 4 年期的利率比 12 年期的利率更易变动，会对套期保值产生什么影响？
- 6.16 假设现在为 2 月 20 日，某财务主管意识到公司将不得不在 7 月 17 日发行 500 万美元期限 180 天的商业票据。如果今天发行，公司可得 482 万美元（也就是说，公司可以收到 482 万美元，180 天后用 500 万美元赎回）。9 月份欧洲美元期货报价为 92.00。财务主管如何对公司的风险暴露进行套期保值？
- 6.17 8 月 1 日，某证券组合部经理有价值 1 000 万美元的债券组合。在 10 月份债券组合的久期将为 7.1 年。12 月份长期国债期货价格为 91-12，最便宜交割债券的久期为 8.8 年。这位经理应如何使其债券组合免受接下来 2 个月的利率变化的影响？
- 6.18 6.17 题中的经理如何将债券组合的久期变为 3.0？
- 6.19 在 2006 年 10 月 30 日和 11 月 1 日之间，你可以选择或者拥有息票率为 12% 的政府债券或者持有息票率为 12% 的公司债券。认真考虑本章所讲的日算惯例，说明你愿意持有哪种债券？不考虑违约风险。
- 6.20 假设 60 天后到期的欧洲美元期货报价为 88。60~150 天期的 LIBOR 远期利率为多少？忽略远期和期货之间的区别。
- 6.21 6 年后到期的 3 个月欧洲美元期货报价为 95.20。1 年内短期利率变化的标准差为 1.1%。计算第 6.00~6.25 年之间的远期 LIBOR 利率。
- 6.22 请解释为什么远期利率小于从欧洲美元期货合约计算的对应的期货利率。

### 课后练习

- 6.23 假设一家银行可以在 LIBOR 市场上以相同的利率借入或借出美元。90 天利率为每年 10%，180 天利率为每年 10.2%，都为连续复利和实际日期/实际日期的日算方式。91 天后到期的欧洲美元期货合约的期货报价为 89.5。对银行而言，存在什么样的套利机会？
- 6.24 一家加拿大公司想用美国欧洲美元期货合约和外汇远期合约来创造出加拿大 LIBOR 期货合约。试用例子说明，它是如何实现的。为求解本题，假设远期合约与期货合约等价。

- 6.25 2005 年 6 月份 CBOT 债券期货的报价为 118-23。
- (a) 请计算 2021 年 1 月 1 日到期、息票率为 10% 的债券的转换因子。
  - (b) 请计算 2026 年 10 月 1 日到期、息票率为 7% 的债券的转换因子。
  - (c) 假设 (a) 和 (b) 中债券的报价分别为 169.00 和 136.00。哪一种为最便宜交割债券？
  - (d) 假设上述的最便宜交割债券进行了实际交割，从该债券收到的现金价格为多少？
- 6.26 一位证券组合经理打算利用长期国债期货，在未来 3 个月内对证券组合进行套期保值。该证券组合的价值为 1 亿美元，未来 3 个月内的久期为 4.0 年。期货报价为 122，每份期货合约的规模为 10 万美元债券。期货合约到期之时，最便宜交割债券的久期预计为 9.0 年。应该持有怎么样的期货合约头寸？
- (a) 过了 1 个月后，如果最便宜交割债券变成为另一个久期 7.0 年的债券，则应该对套期保值策略进行如何调整？
  - (b) 假设未来 3 个月中，所有利率都在上涨，但是长期利率上升的幅度比短期和中期利率上升的幅度要小，这对套期保值表现会产生什么影响？

## 互换

第一份互换合约签订于 20 世纪 80 年代早期。从那以后，这个市场迅速增长。现在互换合约在 OTC 衍生品市场处于重要的地位。

互换 (swap) 是两个公司之间在将来彼此交换现金流的协议。该协议确定现金流支付的日期、现金流计算的方式。通常现金流的计算涉及利率的未来值、汇率以及其他市场变量。

远期合约可以看作是互换合约的最简单的情形。假设 2006 年 3 月 1 日，一个公司签订了远期合约，规定 1 年之后以每盎司 \$400 买入 100 盎司黄金。1 年后，公司可以把收到的黄金立即卖出。因此，远期合约等价于这样的一个互换合约：公司同意将在 2007 年 3 月 1 日支付 \$40 000，并收取  $100S$ ，其中  $S$  是这一天每盎司黄金的市场价格。

远期合约相当于在未来某一天交换现金流，而典型的互换合约在未来一系列时刻交换现金流。在本章，我们讨论如何使用互换以及如何确定互换的价值。我们的讨论集中在最普遍的两种互换：标准型利率互换和固定对固定货币互换。在第 30 章讨论其他一些互换。

## 7.1 利率互换的机制

最普通的互换类型是标准型 (plain vanilla) 利率互换。在这种互换里，一方同意向另一方支付若干年的现金流，这个现金流是名义本金以事先约定的固定利率产生的利息。同时，另一方同意在同样期限内向这一方支付相当于同一名义本金按浮动利率产生利息的现金流。

### LIBOR

在大多数利率互换协议中的浮动利率为伦敦银行间同业拆放利率 (LIBOR)。我们在第 4 章中已经介绍过。LIBOR 是欧洲货币市场上银行把资金提供给其他银行收取的利率。通常市场上各种主要货币都有 1 个月期、3 个月期、6 个月期和 12 个月期的 LIBOR 报价。

如同优惠利率通常为国内金融市场浮动利率贷款的参考利率一样，LIBOR 也

经常作为国际金融市场贷款的参考利率。为了理解它是如何使用的，考虑这样一个 5 年期的债券，利率被定为 6 个月期 LIBOR+0.5%p.a.，贷款期限被分成 10 个期间，每个期间长度为 6 个月。对每一个期间，期间开始时利率设定为那一时刻 6 个月期 LIBOR 加上 0.5%p.a.。在每个期间结束时支付利息。

### 利率互换举例

考虑一个假想的、始于 2004 年 3 月 5 日的、微软公司和英特尔公司之间的一个 3 年期利率互换，微软同意向英特尔支付由年利率 5% 和名义本金 1 亿美元所计算的利息；反过来，英特尔同意向微软支付由 6 个月期 LIBOR 和同样含义本金所计算的浮动利息。那么，微软是固定利率支付者，英特尔是浮动利率支付者。我们假设协议指定每 6 个月交换一次利息，5% 的利率是按照半年复利计息的。这个互换可用图 7.1 的框图表示。

第一次相互支付利息是在协议达成 6 个月后的 2004 年 9 月 5 日。微软将支付英特尔固定利息 250 万美元，这个利息是由年利率 5% 的一半和本金 1 亿美元计算的。英特尔将支付微软浮动利息，为本金 1 亿美元乘以 2004 年 9 月 5 日之前 6 个月，即 2004 年 3 月 5 日就已确定的 6 个月期 LIBOR。假设在 2004 年 3 月 5 日的 6 个月期 LIBOR 为 4.2%。英特尔支付给微软的利息为  $0.5 \times 0.042 \times \$100\,000\,000$  即 210 万美元。<sup>1</sup> 注意，这笔首期支付没有什么不确定性，因为它是由合约签定时刻的 LIBOR 决定的。

第二次相互支付将在协议签定一年后的 2005 年 3 月 5 日。微软将支付 250 万美元给英特尔。英特尔将支付微软浮动利息，为本金 1 亿美元乘以 2005 年 3 月 5 日之前 6 个月，即 2004 年 9 月 5 日就已确定的 6 个月期 LIBOR。假设 2004 年 9 月 5 日的 6 个月期 LIBOR 为 4.8%。英特尔支付给微软的利息为  $0.5 \times 0.048 \times \$100\,000\,000$  即 240 万美元。

总体来说，该互换有 6 笔相互支付。固定支付的利息总是 250 万美元。在支付日所支付的浮动利息是利用支付日之前 6 个月就已确定的 6 个月期 LIBOR 来计算的。因为利率互换是结构化的，所以，利率互换通常只需一方汇给对方这两笔支付之间的差额。在我们给定的例子中，在 2004 年 9 月 5 日微软将支付英特尔 40 万美元 ( $=\$2\,500\,000 - \$2\,100\,000$ )，在 2005 年 3 月 5 日微软将支付英特尔

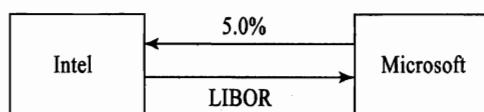


图 7.1 英特尔和微软之间的利率互换

<sup>1</sup> 这里，为了简化计算，忽略了日算惯例。本章后面将更详细地讨论相关问题。

表 7.1 当微软支付本金为 1 亿美元的 5% 固定利率时，接受 LIBOR 浮动利率的 3 年期利率互换的现金流状况（单位：百万美元）

| 日期             | 6 个月期 LIBOR 利率 (%) | 收到浮动利率<br>现金流 | 支付固定利率<br>现金流 | 净现金流  |
|----------------|--------------------|---------------|---------------|-------|
| 2004 年 3 月 5 日 | 4.20               |               |               |       |
| 2004 年 9 月 5 日 | 4.80               | +2.10         | -2.50         | -0.40 |
| 2005 年 3 月 5 日 | 5.30               | +2.40         | -2.50         | -0.10 |
| 2005 年 9 月 5 日 | 5.50               | +2.65         | -2.50         | +0.15 |
| 2006 年 3 月 5 日 | 5.60               | +2.75         | -2.50         | +0.25 |
| 2006 年 9 月 5 日 | 5.90               | +2.80         | -2.50         | +0.30 |
| 2007 年 3 月 5 日 |                    | +2.95         | -2.50         | +0.45 |

\$100 000 (= \$2 500 000-\$2 400 000)。

表 7.1 表示了该例子中当给出一组特定 6 个月期 LIBOR 时所有的利息支付情况。该表也说明了从微软角度看的互换现金流状况。注意，1 亿美元的本金只是在计算利息时用到了，本金本身并不交换。这也就是为什么将它称为名义本金。

如果在互换结束时交换了本金，本交易的性质仍不会改变。这是因为对固定利息支付和浮动利息支付来说本金是相同的。在互换结束时用 1 亿美元交换 1 亿美元是一笔对双方都不产生金融价值的行为。表 7.2 说明在表 7.1 互换结束时加入本金交换的现金流状况，这给我们了解互换提供了一种有意义的方式。该表的第 3 列现金流是一个浮动利率债券多头的现金流状况。该表的第 4 列现金流是一个固定利率债券空头的现金流状况。该表说明利率互换可看作是固定利率债券和浮动利率债券的交换。表 7.2 描述了微软的头寸，微软是处于浮动利率债券多头和固定利率债券空头。英特尔是处于浮动利率债券空头和固定利率债券多头。

这个互换中现金流的特性有助于解释为什么互换中的浮动利率在它支付前 6 个月就已经确定了。在浮动利率债券中，利率通常在适用期限的开始确定，并在

表 7.2 当有最后本金交换时，表 7.1 中的现金流状况（单位：百万美元）

| 日期             | 6 个月期 LIBOR 利率 (%) | 收到浮动利率<br>现金流 | 支付固定利率<br>现金流 | 净现金流  |
|----------------|--------------------|---------------|---------------|-------|
| 2004 年 3 月 5 日 | 4.20               |               |               |       |
| 2004 年 9 月 5 日 | 4.80               | +2.10         | -2.50         | -0.40 |
| 2005 年 3 月 5 日 | 5.30               | +2.40         | -2.50         | -0.10 |
| 2005 年 9 月 5 日 | 5.50               | +2.65         | -2.50         | +0.15 |
| 2006 年 3 月 5 日 | 5.60               | +2.75         | -2.50         | +0.25 |
| 2006 年 9 月 5 日 | 5.90               | +2.80         | -2.50         | +0.30 |
| 2007 年 3 月 5 日 |                    | +102.95       | -102.50       | +0.45 |

期限的末尾才支付。标准型利率互换中浮动利率支付的计算（如表 7.2）反映这一点。

### 利用互换转换某项负债

对微软来说，它可利用该互换将浮动利率贷款转换为固定利率贷款。假设微软已经安排了以 LIBOR+10 个基点的利率借 1 亿美元（一个基点是 1% 的百分之一，所以利率实际上是 LIBOR+0.1%）。当微软签署互换协议后，它具有如下三种现金流：

1. 支付给外部贷款人的利率为 LIBOR+0.1%
2. 按互换的条款得到 LIBOR
3. 按互换的条款支付 5%

这三项现金流的净效果是支付了 5.1%。因此对微软来说，该互换可用于将 LIBOR+10 个基点的浮动利率贷款转换为 5.1% 的固定利率贷款。

对英特尔来说，它可利用该互换将固定利率贷款转换为浮动利率贷款。假设英特尔已经安排了 3 年期 1 亿美元贷款，利率 5.2%。当英特尔签署该互换协议后，它具有如下三种现金流：

1. 支付给外部贷款人的利率 5.2%
2. 按互换的条款支付 LIBOR
3. 按互换的条款接受 5%

这三项现金流的净效果是支付了 LIBOR+0.2%（即 LIBOR+20 个基点）。因此对英特尔来说，该互换可用于将 5.2% 的固定利率贷款转换为 LIBOR+20 个基点的浮动利率贷款。英特尔和微软利率互换协议的这些运用如图 7.2 所示。

### 利用互换转换某项资产

互换也可以转换资产的性质。考虑我们例子中的微软。它可利用互换将按固定利率收益的资产转换为按浮动利率收益的资产。假设微软已经持有 1 亿美元债券，在以后 3 年中年收益率为 4.7%。当微软签署互换协议后，它具有如下三种现金流：

1. 得到债券年收益率为 4.7%

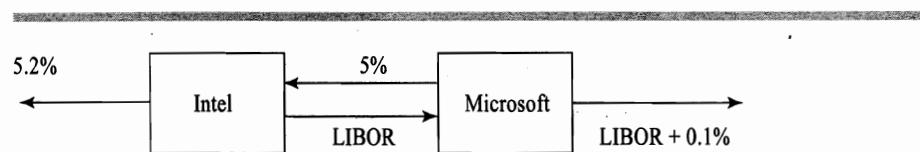


图 7.2 英特尔和微软利用利率互换协议转换负债

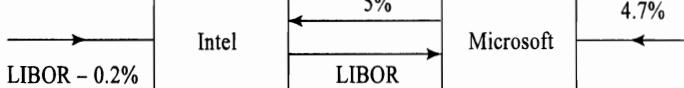


图 7.3 英特尔和微软利用利率互换协议转换资产

2. 按互换的条款得到 LIBOR
3. 按互换的条款支付 5%

这三项现金流的净效果是微软的利率流入为 LIBOR-30 个基点。因此对微软来说，该互换可将 4.7% 固定利率收益的资产转换为按 LIBOR-30 个基点的浮动利率收益的资产。

对英特尔来说，它可利用互换将浮动利率收益的资产转换为按固定利率收益的资产。假设英特尔投资了 1 亿美元，收益为 LIBOR-20 个基点。当英特尔签署互换协议后，它具有如下三种现金流：

1. 得到该投资的收益 LIBOR-20 个基点
2. 按互换的条款支付 LIBOR
3. 按互换的条款接受 5%

这三项现金流的净效果是英特尔的利率流入为 4.8%。因此对英特尔来说，该互换可将按 LIBOR-25 个基点的浮动利率收益的资产转换为按 4.8% 固定利率收益的资产。英特尔和微软利率互换协议的这些运用如图 7.3 所示。

## 金融中介的作用

通常，两个非金融机构的公司，例如 Intel 和 Microsoft 并不是以图 7.2 和图 7.3 所表示的方式直接接触来安排互换。它们每家与诸如银行或其他金融机构这样的金融中介联系。金融机构安排标准型固定对浮动美元利率互换时，对每一对相对抵消的交易收取大约 3 个或 4 个基点（0.03% 或 0.04%）的收益。

图 7.4 说明了在图 7.2 情况下金融机构可能起的作用。该金融机构与英特尔和微软签署了两个相互抵消的互换协议。假设英特尔和微软都不违约，金融机构肯定可以获得本金为 1 亿美元的每年 0.03%（3 个基点）的利润。这个量大约是 3 年期每年 3 万美元。微软最终是以 5.115% 借款（而不是图 7.2 中的 5.1%）。英特尔

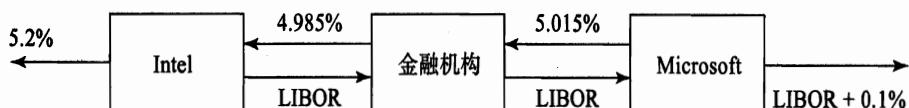


图 7.4 当金融中介参与时，图 7.2 的利率互换

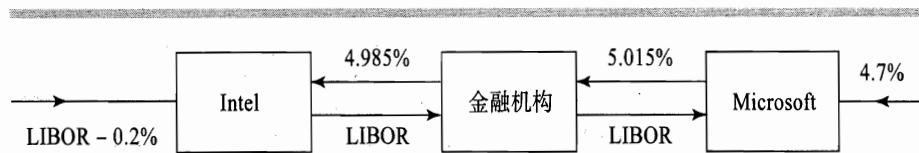


图 7.5 当金融中介参与时，图 7.3 的利率互换

最终是以 LIBOR+21.5 个基点借款（而不是图 7.2 中的 LIBOR+20 个基点）。

图 7.5 说明了在图 7.3 情况下金融机构可能起的作用。我们再次看到，如果英特尔和微软都不违约，金融机构肯定可以获得每年 3 个基点的利润。微软最终收益为 LIBOR-31.5 个基点（而不是图 7.3 中的 LIBOR-30 个基点）。英特尔最终收益为 4.785%（而不是图 7.3 中的 4.8%）。

注意在每一种情况下，金融机构有两个分开的合约，一个是与英特尔，另一个是与微软的。在大多数情况下，英特尔甚至不知道金融机构与微软签署了一个抵消性的互换合约，反之亦然。如果一个公司违约，金融机构仍然必须履行与另一方的协议。金融机构所赚的这 3 个基点的价差部分是补偿它在互换交易中，所承受的两个公司中的一个公司违约的风险。

## 做市商

在实际中，两个公司不可能同时与一家金融机构接触，也不可能在同一互换中头寸状态正好相反。由于这一原因，许多大的金融机构扮演互换做市商的角色。这说明它们随时准备进行互换，即使找不到处于互换中相反头寸的另一方。<sup>2</sup> 做市商必须仔细量化和对冲相应的风险。互换做市商可以利用债券、FRA 与利率期货等工具进行套期保值。表 7.3 是一个做市商的标准型美元利率互换的报价。<sup>3</sup> 前面已经讲述过，买卖差价通常为 3 个或 4 个基点。固定利率的竞买价和竞卖价的均值就是互换率（swap rate）。在表 7.3 中最后一列就是互换率。

考虑一种新的互换，固定利率等于当前的互换率。我们有理由假定这种互换的价值为零（否则为什么做市商会选择以互换为中心的竞买—竞卖报价？）表 7.2 中我们看到一个互换可以视为一个固定利率债券与一个浮动利率债券的差值。定义以下变量：

$B_{fix}$ : 我们所考虑的互换的固定利率债券的价值

$B_{fl}$ : 我们所考虑的互换的浮动利率债券的价值

由于互换的价值为零，那么

<sup>2</sup> 有时这被称为 *warehouse* 互换。

<sup>3</sup> 美国的标准互换合约中每 6 个月进行固定利率支付，每 3 个月进行浮动利率支付。在表 7.1 中，我们假定每 6 个月进行固定利率与浮动利率的支付。我们后面将看到，不管每 3 个月还是每 6 个月进行浮动利率支付，理论上，固定利率应该是相同的。

表 7.3 互换市场中的固定利率竞价和竞卖价以及互换率 (%p.a.)

| 期限(年) | 竞价   | 竞卖价  | 互换率   |
|-------|------|------|-------|
| 2     | 6.03 | 6.06 | 6.045 |
| 3     | 6.21 | 6.24 | 6.225 |
| 4     | 6.35 | 6.39 | 6.370 |
| 5     | 6.47 | 6.51 | 6.490 |
| 7     | 6.65 | 6.68 | 6.665 |
| 10    | 6.83 | 6.87 | 6.850 |

$$B_{\text{fix}} = B_{\text{fl}}$$
 (7.1)

在本章后面部分讨论怎么确定 LIBOR/互换零息率曲线的时候，我们将用到这个结果。

## 7.2 日算惯例

在第 6.1 节我们讨论了日算惯例。日算惯例影响了互换的支付。我们讨论过的几个例子中计算的数值都没有准确反映日算惯例。考虑表 7.1 中 6 个月期的 LIBOR 支付的例子。6 个月期的 LIBOR 是货币市场利率，它是在实际天数/360 的基础上报出的。表 7.1 中第一次浮动利率支付是基于 4.2% 的 LIBOR，为 210 万美元。因为 2004 年 3 月 5 日和 2004 年 9 月 5 日之间相距 184 天，浮动利率支付应该是

$$100\,000\,000 \times 0.042 \times \frac{184}{360} = \$2\,146\,700$$

通常，在互换支付日基于 LIBOR 的浮动利率现金流可按  $LRn/360$  来计算，其中  $L$  是本金， $R$  是相应的 LIBOR 利率， $n$  是从上一个支付日以来的天数。

互换交易中支付的固定利率以规定好的日算惯例给出。因此，固定利率支付并不一定和每个支付日相匹配。固定利率通常在实际天数/365 或 30/360 的基础上报出的。所以它和 LIBOR 通常没有直接的可比性，因为固定利率适用于整年。为了使这两个利率有可比性，或者将 6 个月期 LIBOR 乘以 365/360，或者将固定利率乘以 360/365。

为了简化说明，本章剩下的内容将忽略日算惯例。

## 7.3 确认书

确认书 (confirmation) 指互换相关的法律协议书，由两位交易方代表来签署。纽约的国际互换与金融衍生品协会 (ISDA) 推动了确认书的起草工作。该协会制

### 商业剪影 7.1 假定的互换交易确认书摘录

|               |   |
|---------------|---|
| 交易日期:         | 2004 年 2 月 27 日   |
| 生效日期:         | 2004 年 3 月 5 日  |
| 工作日约定 (所有日期): | 下一工作日   |
| 节假日日历:        | 美国  |
| 中止日期:         | 2007 年 3 月 5 日  |
| <b>固定额</b>    |   |
| 固定利率付款方:      | 微软公司  |
| 固定利率名义本金:     | 1 亿美元   |
| 固定利率:         | 年率 5.015%   |
| 固定利率日算惯例:     | 实际天数/365  |
| 固定利率付款日:      | 每个 3 月 5 日和 9 月 5 日, 从 2004 年 9 月 5 日起计至、并包含 2007 年 3 月 5 日 |
| <b>浮动额</b>    |   |
| 浮动利率付款方:      | 高盛公司  |
| 浮动利率名义本金:     | 1 亿美元   |
| 浮动利率:         | 美元 6 个月期 LIBOR  |
| 浮动利率日算惯例:     | 实际天数/360  |
| 浮动利率付款日:      | 每个 3 月 5 日和 9 月 5 日, 从 2004 年 9 月 5 日起计至、并包含 2007 年 3 月 5 日 |

定了一系列总协议来规范互换协议中的术语和细节条款等（两交易方默认的情况下，总协议生效）。商业剪影 7.1 中，我们给出了图 7.4 中微软与一家金融机构（这里假定是高盛）的互换交易相关确认书的可能的摘录。几乎所有的确认书都会声明 ISDA 总协议适用于对应的合约。

确认书里指定使用下一交易日惯例，并指定根据美国日历决定哪一天是营业日与哪一天是节假日。也就是说，如果一个支付日正好是周末或者美国节假日，将在下一个营业日执行支付。<sup>4</sup> 2004 年 9 月 5 日是星期日，所以，微软和高盛互换合约中的第一次交换支付在 2004 年 9 月 6 日星期一执行。

## 7.4 比较优势的观点

互换如此受欢迎的一种解释是比较优势。考虑利用利率互换去转换一个负债。

---

<sup>4</sup> 有时也指定另一种营业日惯例，即修正的下一营业日惯例。这个惯例和下一营业日惯例唯一不同的是，如果下一营业日和指定支付日属于不同的月份，那么支付就在紧接的前一营业日进行。类似地可以定义前一营业日惯例和修正的前一营业日惯例。

某些公司在固定利率市场借款时具有比较优势，而其他公司在浮动利率市场借款时具有比较优势。当一个公司想获得一个新的贷款时，它进入具有比较优势的市场是有意义的。一家公司也许按固定利率借款而实际上想用浮动利率贷款，或者它按浮动利率贷款而实际上想用固定利率贷款。互换就可用于将固定利率贷款转换为浮动利率贷款，反之亦然。

## 实 例

我们设想 AAA 和 BBB 两家公司都希望借入期限为 5 年的 1 亿美元，并提供了如表 7.4 所示的利率。AAA 公司的信用评级是 AAA；BBB 公司的信用评级是 BBB。<sup>5</sup> 我们设想 BBB 公司想按固定利率借款，而 AAA 公司想借入与 6 个月期 LIBOR 相关的浮动利率资金。BBB 公司在固定利率和浮动利率市场支付的利率都比 AAA 公司高，因为 BBB 公司信用评级低于 AAA 公司。

提供给 AAA 公司和 BBB 公司利率报价的关键点是：两个固定利率的差值大于浮动利率的差值。在固定利率市场 BBB 公司比 AAA 公司多付 1.2%，但在浮动利率市场只比 AAA 公司多付 0.7%。BBB 公司看起来在浮动利率市场有比较优势，而 AAA 公司在固定利率市场有比较优势。<sup>6</sup> 这种明显的差异将产生有利可图的互换。AAA 公司以 4%p.a. 借入固定利率资金，BBB 公司以 LIBOR+1%p.a. 借入浮动利率资金，他们然后签订一项互换协议，以保证最终 AAA 公司得到浮动利率资金而 BBB 公司得到固定利率资金。

为了理解互换是如何进行的，我们假想 AAA 公司与 BBB 公司直接接触，他们可能商定的互换类型如图 7.6 所示。类似我们在图 7.2 中的例子所述，AAA 公司同意向 BBB 公司支付本金为 1 000 万美元的以 6 个月期 LIBOR 计算的利息，作为回报，BBB 公司同意向 AAA 公司支付本金为 1 000 万美元的以 3.95%p.a. 固定利率计算的利息。

表 7.4 为比较优势的观点提供支持的借款利率

|        | 固定利率 | 浮动利率             |
|--------|------|------------------|
| AAA 公司 | 4.0% | 6 个月期 LIBOR+0.3% |
| BBB 公司 | 5.2% | 6 个月期 LIBOR+1.0% |

<sup>5</sup> 标准普尔给出的信用评级依次为（以信用状况变差的顺序）AAA、AA、A、BBB、BB、B 和 CCC。穆迪给出的相应信用评级分别为 Aaa、Aa、A、Baa、Ba、B 和 Caa。

<sup>6</sup> 注意 BBB 公司在浮动利率市场的比较优势并不意味着 BBB 公司在这个市场上比 A 公司付得少。它意味着在这个市场 BBB 公司所付的利率超过 AAA 公司所付利率的额外部分较少。正如一位学生所说：“AAA 公司在固定利率市场付得更少；BBB 公司在浮动利率市场付得少得多”（AAA Corp pays more less in fixed-rate markets；BBB Corp pays less more in floating-rate markets）。

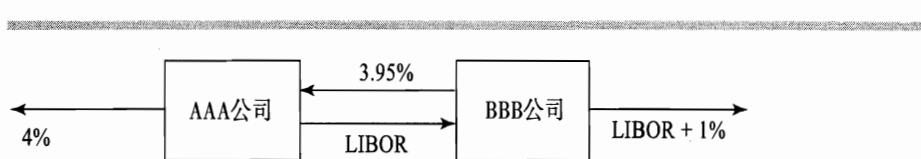


图 7.6 当利率如表 7.4 所示时 AAA 公司与 BBB 公司之间的利率互换

AAA 公司有三项利率现金流：

1. 支付给外部贷款人 4%p.a.
2. 从 BBB 公司得到 3.95%p.a.
3. 向 BBB 公司支付 LIBOR

这三项现金流的净效果为 AAA 公司支付  $LIBOR + 0.05\%$ p.a.，它比直接在浮动利率市场借款减少了  $0.25\%$ p.a. 的利率支出。BBB 公司也有三项利率现金流：

1. 支付给外部贷款人  $LIBOR + 1\%$ p.a.
2. 从 AAA 公司得到  $LIBOR$
3. 向 AAA 公司支付  $3.95\%$ p.a.

这三项现金流的净效果为 BBB 公司支付年利率为  $4.95\%$  的利息，比它直接在固定利率市场借款减少了  $0.25\%$ p.a. 的利率支出。

在这个例子中，这项互换协议改善了两家公司的状况，双方每年都少支付  $0.25\%$ 。也可以不必如此设计。从这类利率互换协议得到的总潜在收益总是  $a-b$ ，其中  $a$  为两个公司在固定利率市场的利率差， $b$  为两个公司在浮动利率市场的利率差。在本例中， $a = 1.2\%$ ， $b = 0.7\%$ ，所以总收益是  $0.5\%$ 。

如果 A 和 B 相互之间并不是直接交易，而是利用了一家金融机构，图 7.7 给出了一个可能的交易情况（这与图 7.4 中的例子类似）。这种情况下，AAA 公司最终以  $LIBOR + 0.07\%$ p.a. 的利率借款，BBB 公司最终以  $4.97\%$ p.a. 的利率借款，金融机构每年赚取 4 个基点的价差。AAA 公司的总收益是  $0.23\%$ ；BBB 公司的总收益也是  $0.23\%$ ；金融机构的收益为  $0.04\%$ 。三方的总收益与之前的例子相同，仍为  $0.50\%$ 。

## 对比较优势观点的批判

我们刚才概述的解释利率互换吸引力的比较优势观点仍然有些问题。为什么

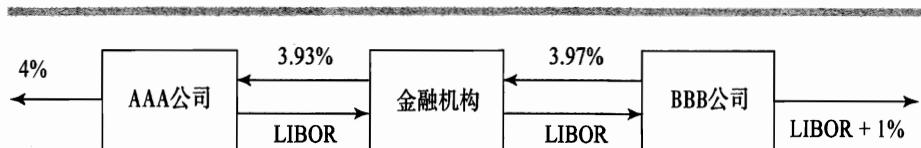


图 7.7 利率如表 7.4 所示，当有金融中介参与时，AAA 公司与 BBB 公司之间的利率互换

在表 7.4 中固定利率市场与浮动利率市场提供给 AAA 公司和 BBB 公司的价差不同？既然互换市场已经存在了一段时间，我们可以很合理地预期这些差别已经被套利消除了。

价差的差别持续存在的原因，部分可能是由于这些公司在固定利率市场和浮动利率市场可得合约的性质不同。AAA 公司和 BBB 公司在固定利率市场可得到的 5 年期利率分别为 4.0% 和 5.2%（例如这些利率可以看作是公司发行的 5 年期固定利率债券的可能利率）。AAA 公司和 BBB 公司在浮动利率市场分别可得到的 LIBOR+0.3% 和 LIBOR+1.0% 为 6 个月期利率。在浮动利率市场上，贷款人通常有机会每 6 个月再考虑这些浮动利率。如果 AAA 公司或 BBB 公司的信用等级下降，贷款人可选择在 LIBOR 上提高价差。在极端情况下，贷款人可能拒绝继续展期贷款。固定利率贷款的提供者无权用这种方法改变贷款条款。<sup>7</sup>

提供给 AAA 的利率和提供给 BBB 的利率之间的利率价差反映了 BBB 比 AAA 更可能违约的程度。在下一个 6 个月期，AAA 和 BBB 违约的可能性较小。当我们考虑更长的时间时，违约统计表明，平均来说具有较低信用等级的公司（如 BBB 公司）违约的可能性比具有较高信用等级的公司（如 AAA 公司）违约的可能性增长得更快。这就是 5 年期的价差比 6 个月期价差大的原因。

商定以 LIBOR+1.0% 的浮动利率贷款并进行如图 7.7 的互换后，我们认为 BBB 以 4.97% 取得了固定利率的贷款。我们下面提出的观点表明，实际情况并非如此。实际上，只有 BBB 能够连续以 LIBOR+1.0% 借入浮动利率资金时，付出利率才为 4.97%。例如，如果 BBB 的信用等级下降，以至浮动利率展期贷款的利率上升为 LIBOR+2.0%，BBB 付出的利率上升为 5.97%。市场预期 BBB 借入资金超过 6 个月期 LIBOR 之上的价差平均来说将上升。假如真是这样，如果 BBB 进行互换，它预期的平均借款利率将大于 4.97%。

图 7.7 中的互换为 AAA 公司在接下来的整 5 年时间里锁定了 LIBOR+0.07% 的利率，而不仅仅是接下来的 6 个月。看起来这项互换对 AAA 是一笔好交易。但这反而会使金融机构产生违约动机。如果 AAA 公司以常规方式借入浮动利率贷款，这种风险不会产生。

## 7.5 互换率的性质

接下来，我们可以研究互换率的性质以及互换市场与 LIBOR 市场之间的关系。我们在 4.1 节解释过 LIBOR 是 AA 级银行从其他银行借入 1~12 月期限资金所支付的利率。从表 7.3 可以知道，互换率是以下竞买价和竞卖价的平均值：(a) 一位互换做市商在交换中为它收取的 LIBOR 所支付的固定利率（这个固定利率是互换做市商的竞买价）和 (b) 在交换中为它支付的 LIBOR 所收取的固定利率（这个固定利率是互换做市商的竞卖价）。

---

<sup>7</sup> 如果浮动利率贷款协议中，LIBOR 附加的价差是事先保证的，不随着信用评级的变化而变化。这种情况下，现实中比较优势很小或没有。

和 LIBOR 一样，互换率并不是无风险贷款利率。但是，接近于无风险利率。一家金融机构可以按以下步骤从一定本金当中获得 5 年期互换率。

1. 在前 6 个月，把本金贷出给一位 AA 级借款者。接下来的每个 6 个月期间反复上述程序
2. 同时，签订一项互换，以 5 年期互换率交换 LIBOR

这说明 5 年期互换率是这样的一个利率：其信用风险是 10 个连续的 6 个月期给 AA 级公司提供 LIBOR 贷款而引起风险的利率。类似地，7 年期互换率是信用风险为 14 个连续的 6 个月期给 AA 级公司提供 LIBOR 贷款而引起风险的利率。其他期限的互换率也可以类似地进行描述。

注意，互换率小于 AA 级借款利率。因为，连续的 6 个月期相继多次给 AA 级（每个 6 个月期开始之时都是 AA 级）借款者贷款比一次给 AA 级（5 年期开始之时是 AA 级）借款者贷款整个 5 年期更有吸引力。

## 7.6 LIBOR/互换零息率的确定

4.1 节中我们讲述过衍生品交易员们通常以 LIBOR 代替无风险利率来估值衍生品。使用 LIBOR 的一个问题是，只能观察小于 12 个月期限的 LIBOR。6.4 节中讲述过，可以利用欧洲美元期货将 LIBOR 零息率曲线扩展到 12 个月期限以上。典型地，欧洲美元期货用来确定 2 年以内的 LIBOR 零息率曲线，有时最多扩展到 5 年。接下来，交易员们利用互换率扩展更长期限的 LIBOR 零息率曲线。最终的零息率曲线有时被称为 LIBOR 零息率曲线，有时被称为互换零息率曲线。为了避免混淆，我们采用 LIBOR/互换零息率曲线这个名称。现在，我们讲述怎么使用互换率决定 LIBOR/互换零息率曲线。

需要注意的第一点是，如果我们贴现的时候使用 LIBOR/互换零息率曲线，则新发行的息票率为 6 个月期 LIBOR 的浮动利率债券的价值总是等于其本金值（即账面价值）。<sup>8</sup>这是因为该债券支付的息票率为 LIBOR，而 LIBOR 又是被使用的贴现率。债券的息票率正好和贴现率相等，债券的价值相当于其账面价值。

在式 (7.1)，我们考虑了固定利率与互换率相同的新签订的互换合约，则  $B_{\text{fix}} = B_{\text{fl}}$ 。我们刚刚说明过  $B_{\text{fl}}$  等于名义本金，那么  $B_{\text{fix}}$  也应该等于互换的名义本金。因此，互换率可以定义一系列平价收益债券。例如，根据表 7.3 中的互换率，我们可以推出 2 年期 LIBOR/互换票面收益率为 6.045%，3 年期 LIBOR/互换票面收益率为 6.225%，依此类推。<sup>9</sup>

---

<sup>8</sup> 对息票率为 1 个月、3 个月或 12 个月期 LIBOR 的新发行债券，也有同样的结论。

<sup>9</sup> 计算零息率曲线之前，分析师们经常以线性插值法处理互换率，以此得到间隔为 6 个月的各个期限的互换率。例如，从表 7.3 中的数据，可以假定 2.5 年期互换率为 6.135%；7.5 年期互换率为 6.696%；依次类推。

和4.5节中确定国债零息率曲线一样，通常以息票剥离方法确定LIBOR/互换零息率曲线。利用LIBOR确定小于1年期限的零息率曲线，由互换率定义的平价收益债券可以用来确定更长期限的零息率曲线。

**[例7.1]** 假设计算出6个月期、12个月期和18个月期的LIBOR/互换零息率分别为连续复利计算的4%、4.5%和4.8%，并且2年期互换率（互换中每半年进行支付）为5%。5%的互换率说明本金为\$100、每半年支付一次息票，息票率为5%p.a.的债券以平价出售。那么，以 $R$ 表示2年期零息率，则

$$2.5e^{-0.04 \times 0.5} + 2.5e^{-0.045 \times 1.0} + 2.5e^{-0.048 \times 1.5} + 102.5e^{-2R} = 100$$

解方程，可得出 $R = 4.953\%$ （注意，这是一个简化的结果，没有考虑互换的日算惯例以及假日因素，参见本章7.2节）。

## 7.7 利率互换的估值

我们接下来讨论利率互换的估值问题。刚刚签订的时刻，一项利率互换的价值等于零或者接近于零。过了一段时间，该价值可能变成正的或负的。如果我们假设不存在违约可能性，利率互换的估值有两种办法：利率互换可视为一种债券多头与另一种债券空头的组合，或可视为一系列远期利率协议的组合。

### 基于不同债券价格的互换估值

利率互换中不发生本金交换，但是正如表7.2所述，我们可以假定互换到期时支付和收取本金，这并不影响互换的价值。那么，从浮动利率支付者的立场上来看，互换相当于一个固定利率债券多头和一个浮动利率债券空头的组合，所以互换的价值为：

$$V_{\text{swap}} = B_{\text{fix}} - B_{\text{fl}}$$

其中， $V_{\text{swap}}$ 为互换的价值， $B_{\text{fl}}$ 为互换中的浮动利率债券的价值（根据所支付的款额计算的）， $B_{\text{fix}}$ 为互换中的固定利率债券的价值（根据所收取的款额计算的）。类似地，从固定利率支付者的立场上来看，互换相当于一个浮动利率债券多头和一个固定利率债券空头的组合，所以互换的价值为：

$$V_{\text{swap}} = B_{\text{fl}} - B_{\text{fix}}$$

4.4节中已经给出了固定利率债券的价格 $B_{\text{fix}}$ 的计算方法。为了估值浮动利率债券，我们注意到一次息票支付发生之后的暂短时间内，债券的价值等于名义本金。原因是在这个时刻，债券是“平价交易”的，而在随后的累息期间，借款者总是以相应的LIBOR支付息票。

假定名义本金为 $L$ ，下一个支付交换日在 $t^*$ 时刻，并且 $t^*$ 时刻（在上一次支付日确定）发生的浮动支付为 $k^*$ 。刚刚讲过，支付发生之后暂短时间内， $B_{\text{fl}} = L$ 。

所以支付刚要发生之前,  $B_{\text{fl}} = L + k^*$ 。因此, 浮动利率债券相当于在  $t^*$  时刻提供单次现金流  $L+k^*$  的金融工具。贴现之后, 浮动利率债券当前的价值为:

$$(L + k^*)e^{-r^*t}$$

其中  $r^*$  是  $t^*$  期限的 LIBOR/互换零息率。

**[例 7.2]** 假设按某个互换条款, 一家金融机构同意支付 6 个月期 LIBOR, 收取每年 8% (半年复利) 的利息, 名义本金为 1 亿美元。该互换还有 1.25 年时间到期。按连续复利计算的 3 个月期、9 个月期及 15 个月期的 LIBOR 分别为 10.0%、10.5% 和 11.0%。上一支付日的 6 个月期 LIBOR 为 10.2% (半年复利)。

表 7.5 中给出了基于债券价格的互换估值计算过程。3 个支付日中, 固定利率债券的现金流分别为 4、4 以及 104。这些现金流的贴现因子分别为:

$$e^{-0.1 \times 0.25}, e^{-0.105 \times 0.75}, e^{-0.11 \times 1.25}$$

表 7.5 的第 4 列中列出了这些贴现因子。从表中可以知道固定利率债券的价值为 98.238 (单位为百万美元)。

这一例子中,  $k^* = 0.5 \times 0.102 \times 100 = 5.1$  (百万美元),  $t^* = 0.25$ , 因此估值浮动利率债券的时候, 可以认为它在 3 个月后发生现金流 105.100 万美元。表中给出了浮动利率债券的价值为 102.505 (单位为百万美元)。

互换价值等于两种债券价格之差:

$$V_{\text{swap}} = 98.238 - 102.505 = -4.267 \text{ (百万美元)}$$

如果金融机构处于相对的另一方, 即支付固定利率利息, 收取浮动利率利息, 互换价值则为+426.7 万美元。注意, 我们的计算中没有考虑互换的日算惯例以及假日因素。

### 基于远期利率协议的互换估值

利率互换可以被分解成一系列远期利率协议。考虑图 7.1 中微软与英特尔之间的互换协议。互换合约是 2004 年 3 月 5 日签订的 3 年期交易, 每半年支付一次。第一次支付交换在协议签订的时候已经可以确定。而随后的 5 次支付交换可以视

表 7.5 基于不同债券价格的互换估值 (百万美元)。这里,  $B_{\text{fix}}$  是互换中的固定利率债券,  $B_{\text{fl}}$  是互换中的浮动利率债券

| 时 刻  | $B_{\text{fix}}$ 的现金流 | $B_{\text{fl}}$ 的现金流 | 贴现因子   | $B_{\text{fix}}$ 现金流的现值 | $B_{\text{fl}}$ 现金流的现值 |
|------|-----------------------|----------------------|--------|-------------------------|------------------------|
| 0.25 | 4.0                   | 105.100              | 0.9753 | 3.901                   | 102.505                |
| 0.75 | 4.0                   |                      | 0.9243 | 3.697                   |                        |
| 1.25 | 104.0                 |                      | 0.8715 | 90.640                  |                        |
| 合 计: |                       |                      |        | 98.238                  | 102.505                |

为一系列的远期利率协议。预定在 2005 年 3 月 5 日的交换等价于以 5% 的利率交换 2004 年 9 月 5 日的市场上观察到的 6 个月期利率的一个 FRA；预定在 2005 年 9 月 5 日的交换等价于以 5% 的利率交换 2005 年 3 月 5 日的市场上观察到的 6 个月期利率的一个 FRA。依此类推。

正如第 4.7 节所示，基于可实现的远期利率的假设，可以估计 FRA 的价值。由于互换是一系列远期利率协议的组合，通过假设远期利率是可实现的，也可以估算标准型利率互换的价值。计算过程如下：

1. 利用 LIBOR/互换零息率曲线，对决定互换现金流的每一个 LIBOR 利率，计算远期利率
2. 假设 LIBOR 利率将等于远期利率，计算互换现金流
3. 将这些互换现金流贴现（贴现时利用 LIBOR/互换零息率曲线），得到互换价值

**[例 7.3]** 再次考虑前面例 7.2 的情形。互换条款规定，一家金融机构同意支付 6 个月期 LIBOR，收取每年 8%（半年复利）的利息，名义本金为 1 亿美元。该互换还有 1.25 年时间到期。按连续复利计算的 3 个月期、6 个月期及 15 个月期的 LIBOR 分别为 10.0%、10.5% 和 11.0%。上一支付日的 6 个月期 LIBOR 为 10.2%（每半年计一次复利）。

表 7.6 给出了计算过程。表中第 1 行给出了 3 个月后将交换的现金流，这是已经确定的。8% 的固定利率相应的现金流流入为  $100 \times 0.08 \times 0.5 = 4$ （百万美元）。10.2%（3 个月前设定好的）的浮动利率相应的现金流出为  $100 \times 0.102 \times 0.5 = 5.1$ （百万美元）。表中第 2 行给出了 9 个月后将交换的现金流，假设远期利率是可以实现的。现金流流入还是 400 万美元。为了计算现金流出，我们首先必须计算对应于 3 个月至 9 个月期间的远期利率。利用方程（4.5）得：

$$\frac{0.105 \times 0.75 - 0.10 \times 0.25}{0.5} = 0.1075$$

即 10.75%，为连续复利。利用方程（4.4），可得到半年复利的远期利率为 11.044%。因此，现金流出为  $100 \times 0.11044 \times 0.5 = 5.522$ （百万美元）。类似地，第 3 行给出了 15 个月后将交换的现金流，假设远期利率是可以实现的。对应于 3 个支付日的贴现因子分别为：

$$e^{-0.1 \times 0.25}, e^{-0.1075 \times 0.75}, e^{-0.11 \times 1.25}$$

在 3 个月后的交换的现值为 -107.3 万美元。对应于在 9 个月和 15 个月的交换，FRA 的价值分别为 -140.7 万美元与 -178.7 万美元。互换的总价值为 -426.7 万美元，这和例 7.2 中以债券价格为基础计算的值是一致的。

利率互换中，选择的固定利率应使互换的初始价值为零。这意味着初始时互换中的一系列 FRA 的价值总和为零。然而，这并不意味着每一份单个 FRA 的价值为零。通常，有些 FRA 的价值为正，而有些 FRA 的价值为负。

再考虑一下图 7.1 中以微软和英特尔间互换为基础的 FRA：

表 7.6 基于远期利率协议的互换估值 (百万美元)。浮动现金流的计算假设远期利率可以实现。

| 时 刻  | 固定现金流 | 浮动现金流  | 净现金流   | 贴现因子   | 净现金流的现值 |
|------|-------|--------|--------|--------|---------|
| 0.25 | 4.0   | -5.100 | -1.100 | 0.9753 | -1.073  |
| 0.75 | 4.0   | -5.522 | -1.522 | 0.9243 | -1.407  |
| 1.25 | 4.0   | -6.051 | -2.051 | 0.8715 | -1.787  |
| 合 计: |       |        |        |        | -4.267  |

当远期利率  $> 5.0\%$  时，对于微软，FRA 的价值  $> 0$

当远期利率  $= 5.0\%$  时，对于微软，FRA 的价值  $= 0$

当远期利率  $< 5.0\%$  时，对于微软，FRA 的价值  $< 0$

假设互换协议签署时利率期限结构是向上倾斜的。这意味着远期利率随 FRA 到期日的增加而上升。既然这些 FRA 的价值总和为 0，这一定意味着在较早的支付日远期利率小于 5.0%，而在后面的支付日远期利率大于 5.0%。因此对微软而言，与较早支付日对应的 FRA 的价值为负，而那些与较后支付日对应的 FRA 的价值为正。如果互换协议签署时利率期限结构是向下倾斜的，情况则相反。在图 7.8 中说明了利率期限结构形状对组成互换的 FRA 价值的影响。

## 7.8 货币互换

另一种普遍的互换类型是货币互换 (currency swap)。其最简单的形式是以一种货币的本金和利息交换另一种货币的本金和利息。

货币互换协议中需要指定用两种货币形式表示每种货币的本金。每种货币的本金额通常在货币互换有效期的开始时和结束时交换。通常，互换协议签署时，以互换初始时刻的汇率换算的两种货币的本金近似相等。而互换到期之时交换的本金，它们的价值可能很不一样。

### 实 例

假设在 2004 年 2 月 1 日，IBM 和 BP 签订了一项 5 年期货币互换协议。我们假设 IBM 以固定的 7% 英镑利率支付利息，以固定的 4% 美元利率从 BP 收取利息。每年支付一次利息，本金分别为 1 500 万美元和 1 000 万英镑。这种互换被称为固定对固定货币互换 (fixed-for-fixed currency swaps)，因为两种货币的利息是固定的。图 7.9 描述了这种互换。签署时刻，本金流动方向和图 7.9 中的箭头方向刚好相反。互换合约有效期内的利息支付与最终本金支付的流动方向和图中的箭头方向一致。因此，开始的时候，IBM 支付 1 500 万美元并收取 1 000 万英镑。合约为有效期内的每年，IBM 收取 60 万美元（等于 1 500 万美元的 4%）并支付 70 万英

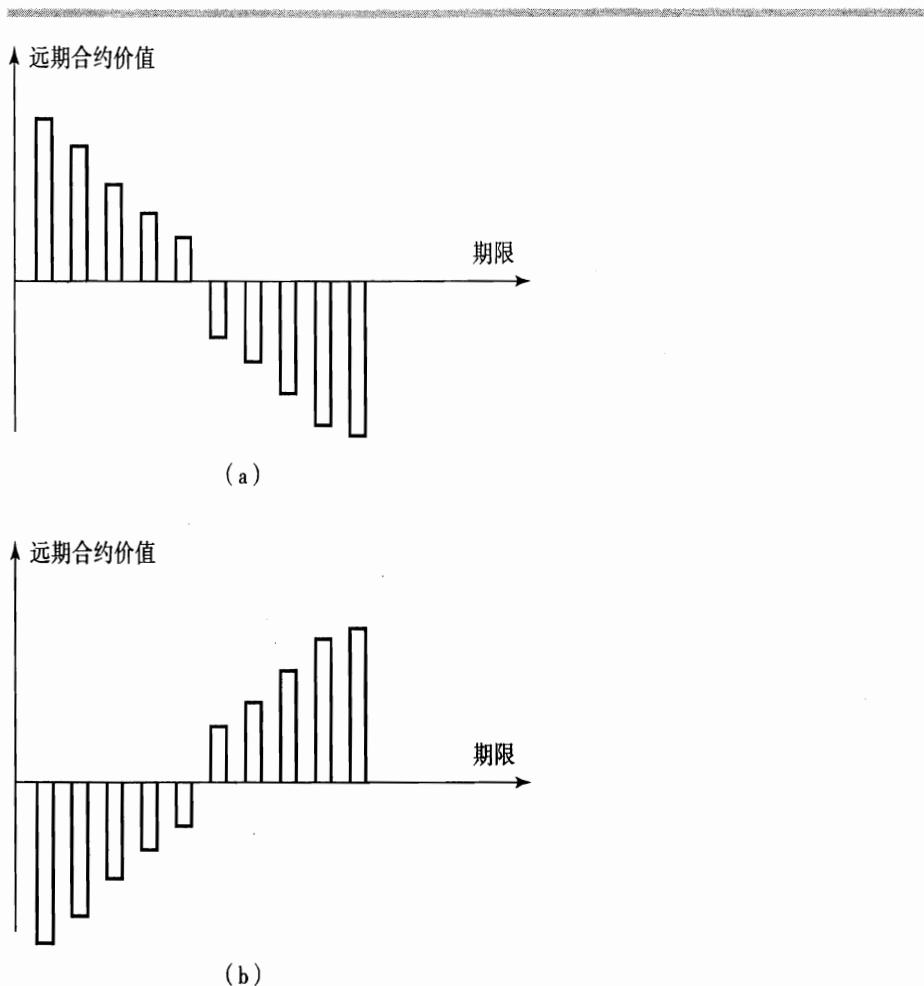


图 7.8 组成互换的一系列远期利率协议价值与期限之间的关系。(a) 中，利率期限结构向上倾斜，我们接收固定利率，或利率期限结构向下倾斜，我们接收浮动利率；(b) 中，利率期限结构向上倾斜，我们接收浮动利率，或利率期限结构向下倾斜，我们接收固定利率

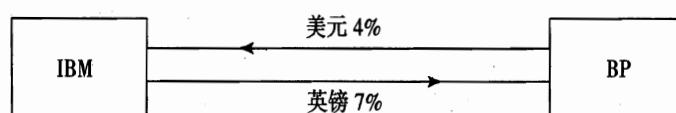


图 7.9 一项货币互换

镑（等于 1 000 万英镑的 7%）。互换到期之时，IBM 将支付 1 000 万英镑本金并收取 1 500 万美元本金。表 7.7 中给出了相应的现金流。

### 利用货币互换转换贷款和资产

上述例子中我们已经看到，货币互换可用于将一种货币的借款转换成为另一

表 7.7 货币互换中 IBM 公司的现金流

| 日期             | 美元现金流 (百万) | 英镑现金流 (百万) |
|----------------|------------|------------|
| 2004 年 2 月 1 日 | -15.00     | +10.00     |
| 2005 年 2 月 1 日 | +0.60      | -0.70      |
| 2006 年 2 月 1 日 | +0.60      | -0.70      |
| 2007 年 2 月 1 日 | +0.60      | -0.70      |
| 2008 年 2 月 1 日 | +0.60      | -0.70      |
| 2009 年 2 月 1 日 | +15.60     | -10.70     |

种货币的借款。假设 IBM 可以发行本金为 1 500 万美元，息票率为 4% 的美元债券。互换可以将 IBM 借款转换为以 7% 利率借入 1 000 万英镑的情况。期初的本金交换把发行债券所得的美元转换成英镑。接下来的交换可以使本金和利息由美元转变为英镑。

互换也可以用来转换资产的性质。假定 IBM 可以在英国投资 1 000 万英镑，并得到未来 5 年的 7%p.a. 的收益率，但它觉得美元会坚挺，所以更愿意得到美元回报。那么，互换可以将其在英国的投资转换为以 1 500 万美元的投入得到 4% 美元收益率的投资。

## 比较优势

比较优势可能是促成货币互换的一种因素。为了说明这一点，我们假设通用汽车和澳洲航空的 5 年期美元和澳元借款利率如表 7.8 中的数据。这个表说明澳元利率高于美元利率，通用汽车的信用评级好于澳洲航空，因为通用汽车在两种货币上都具有较低的利率水平。从互换交易员的角度看，表 7.8 令人感兴趣的地方是，在两个市场上通用汽车与澳洲航空得到的贷款利率之间的价差并不相同。澳洲航空在美元市场比通用汽车多付出 2%，而在澳元市场只比通用汽车多付 0.4%。

这与表 7.4 的情况有些类似。通用汽车在美元市场有比较优势，而澳洲航空在澳元市场有比较优势。表 7.4 中讨论标准型利率互换时，我们阐述过，比较优势很不可靠。这里我们比较两个不同货币所提供的利率，比较优势很有可能是真实存在的。比较优势之一可能就是付税。在表 7.8 中所表示的比较优势也许是因为通用

表 7.8 促成货币互换的借款利率

|      | USD* | AUD*  |
|------|------|-------|
| 通用汽车 | 5.0% | 12.6% |
| 澳洲航空 | 7.0% | 13.0% |

\* 这里报出的利率已经针对不同税制的影响进行过调整。

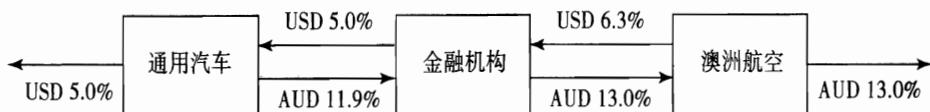


图 7.10 比较优势促成的货币互换

汽车是一家美国公司，相比澳元借款，美元借款可能使其世界范围收益所需支付的税额更少。而澳洲航空的情况正好相反（我们假设在表 7.8 中的利率已经经过调整以反映税制的不同影响）。

我们假设通用汽车想借 2 000 万澳元而澳洲航空想借 1 200 万美元，当前的汇率（1 澳元对应的美元金额）为 0.6000。这就为货币互换创造了很好的条件。通用汽车和澳洲航空都在它们有比较优势的市场上借款，即通用汽车借入美元而澳洲航空借入澳元，然后它们用货币互换方式将通用汽车的美元贷款转换成澳元贷款，同时澳洲航空的澳元贷款也就转换成美元贷款。

已经提到过，通用汽车和澳洲航空的美元利率之差为 2%，而澳元利率之差为 0.4%。根据利率互换的例子类推，我们预期各方的总收益为每年  $2.0\% - 0.4\% = 1.6\%$ 。

互换有很多种组成的方式。图 7.10 表示了与金融机构交易的一种可能的安排。通用汽车借入美元而澳洲航空借入澳元，互换的效果是将通用汽车每年 5% 的美元利率转换为每年 11.9% 的澳元利率。这比通用汽车直接在澳元市场上借款少了 0.7%。类似地，澳洲航空每年 13% 的澳元贷款转换为每年 6.3% 的美元贷款，并且最终比澳洲航空直接在美元市场上借款少了 0.7%。金融中介获得每年 1.3% 美元现金流，而支出每年 1.1% 澳元现金流。忽略两种货币的差异，金融机构每年净获利 0.2%。正如预计的一样，各方的总收益为每年 1.6%。

互换期间每一年，金融机构收取 15.6 万美元（等于 1 200 万美元的 1.3%），支付 22 万澳元（等于 2 000 万澳元的 1.1%）。在互换期间的每年里，该金融机构可以通过在远期市场购买 22 万澳元远期来避免外汇汇率风险，这将锁定美元的净收益。

如果我们想再次设计互换以使金融机构在美元上有 0.2% 的价差，我们可做出图 7.11 和图 7.12 的安排。而这些安排在现实中不太可行，因为在这两种情况下，

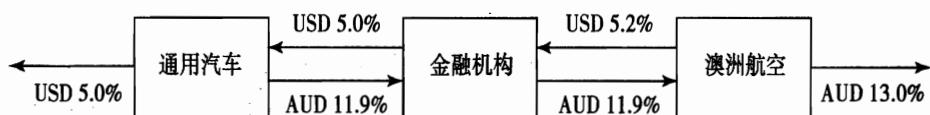


图 7.11 货币互换安排之一：澳洲航空公司承担一些外汇风险

<sup>10</sup> 一般来说，让金融机构承担外汇风险是比较合理的，因为交易参与者中，金融机构最容易对冲此类风险。

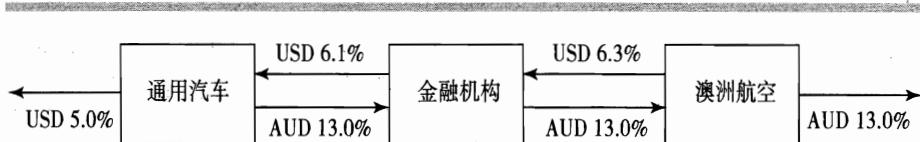


图 7.12 比货币互换安排之二：通用汽车公司承担一些外汇风险

通用汽车和澳洲航空需要承担外汇风险。<sup>10</sup> 在图 7.11 中，澳洲航空承担了一些外汇风险，因为它每年支付 1.1% 的澳元和支付 5.2% 美元。在图 7.12 中，通用汽车承担了一些外汇风险，它每年收取 1.1% 的美元而支付 13% 的澳元。

## 7.9 货币互换的估值

与利率互换的方式类似，固定对固定货币互换可以分解成两种债券的相反头寸或一系列远期汇率合约。

### 基于不同货币债券价格的互换估值

如果以  $V_{\text{swap}}$  表示一项收取美元支付外币的互换的价值，那么

$$V_{\text{swap}} = B_D - S_0 B_F$$

其中， $B_F$  表示在互换中以外币形式衡量的由外币现金流定义的债券的价值， $B_D$  表示互换中由美元现金流定义的债券的价值， $S_0$  表示即期汇率（以每单位外币用美元数量来表示）。因此，互换的价值可以从两种货币的 LIBOR、国内货币的利率期限结构以及即期汇率来确定。

类似地，一项支付外币收取美元的互换的价值为：

$$V_{\text{swap}} = S_0 B_F - B_D$$

**[例 7.4]** 假设日元和美元的 LIBOR/swap 利率期限结构都是平坦的，日元年利率为 4%，美元年利率为 9%（都用连续复利表示）。一家金融机构进行货币互换，它每年以日元收取年利率为 5% 的利息，以美元支付年利率为 8% 的利息，以两种货币表示的本金分别为 1 000 万美元和 12 亿日元，互换将持续 3 年，现在的汇率为 \$1=110yen。

表 7.9 中总结了相应的计算过程，第 2 列给出了互换中美元债券相关现金流。第 3 列给出了以 9% 美元贴现率计算的美元现金流的现值。第 4 列给出了日元债券相关现金流。第 5 列给出了以 4% 日元贴现率计算的日元现金流的现值。

美元债券的价值  $B_D$  为 964.39 万美元，日元债券的价值为 123 055 万日元。互换的价值为：

$$\frac{1230.55}{110} - 9.6439 = 1.5430 \text{ (百万美元)}$$

表 7.9 基于不同债券价格的互换估值（所有数额的单位是百万）

| 时 刻  | 美元债券的现金流 (\$) | 现值 (\$) | 日元债券的远期现金流 (日元) | 现值 (日元)  |
|------|---------------|---------|-----------------|----------|
| 1    | 0.8           | 0.7311  | 60              | 57.65    |
| 2    | 0.8           | 0.6682  | 60              | 55.39    |
| 3    | 0.8           | 0.6107  | 60              | 53.22    |
| 3    | 10.0          | 7.6338  | 1 200           | 1 064.30 |
| 合 计: |               | 9.6439  |                 | 1 230.55 |

### 基于远期合约组合的货币互换估值

固定对固定货币互换中的每次支付交换都可以看作是远期合约。如 5.7 节中说明过，假设远期汇率可实现，可以估计远期汇率合约的价值。远期汇率可由公式 (5.9) 计算。

**[例 7.5]** 再次考虑前面例 7.4 的情形。假设日元和美元的 LIBOR/swap 利率期限结构都是平坦的，日元年利率为 4%，美元年利率为 9%（都用连续复利表示）。一家金融机构进行货币互换，它每年以日元收取年利率为 5% 的利息，以美元支付年利率为 8% 的利息，以两种货币表示的本金分别为 1 000 万美元和 12 亿元，互换将持续 3 年，现在的汇率为 \$1=110 日元。

表 7.10 中总结了相应的计算过程。每年，金融机构支付  $0.08 \times 10 = 0.8$ （百万美元）并收取  $1 200 \times 0.05 = 60$ （百万日元）。第 3 年末，支付 1 000 万美元本金并收取 12 亿日元本金。当前的即期汇率为 1 日元兑 0.009091 美元。这个例子中  $r = 9\%$ ,  $r_f = 4\%$ 。因此，根据公式 (5.9)，1 年期的远期汇率为：

$$0.009091 e^{(0.09-0.04) \times 1} = 0.009557$$

类似地计算出表 7.10 的 2 年期、3 年期的远期汇率。假设远期汇率可实现，可以估计互换相应的远期合约的价值。如果 1 年期远期利率可实现，那么第 1 年的日元流入等价于  $60 \times 0.009557 = 0.5734$ （百万美元），第 1 年末的净现金流为  $0.8 - 0.5734 = -0.2266$ （百万美元）。它的现值为：

$$-0.2266 e^{-0.09 \times 1} = -0.2071 \text{ (百万美元)}$$

这就是第 1 年末现金流交换对应的远期合约的价值。类似地，计算出其他相应远期合约的价值。表 7.10 中可见互换的总价值为 1 543 000 美元，符合前面例子 7.4 中将互换分解为一系列债券的计算结果。

货币互换协议初始签署时，互换的价值通常为零。假设用两种货币表示的本金数量在货币互换开始的汇率下完全相等，那么首次交换本金，互换的总价值为 0。然而，正如利率互换例子一样，这并不意味着互换下的每一远期合约价值为 0。它表明，当两种货币利率有明显不同时，高利率货币的支付者处于这样的情形：

表 7.10 基于远期合约组合的货币互换估值（所有数额的单位都是百万）

| 时 刻 | 美元现金流 | 日元现金流 | 远期利率     | 日元现金流   | 净现金流    | 现 值     |
|-----|-------|-------|----------|---------|---------|---------|
|     |       |       |          | 的美元价值   | ( \$ )  |         |
| 1   | -0.8  | 60    | 0.009557 | 0.5734  | -0.2266 | -0.2071 |
| 2   | -0.8  | 60    | 0.010047 | 0.6028  | -0.1972 | -0.1647 |
| 3   | -0.8  | 60    | 0.010562 | 0.6337  | -0.1663 | -0.1269 |
| 3   | -10.0 | 1200  | 0.010562 | 12.6746 | +2.6746 | 2.0417  |
| 合计： |       |       |          |         | 1.5430  |         |

对应于早期现金流交换的远期合约价值为负，而对应于最后本金交换的远期合约价值为正（表 7.10 中的例子就是这种情形）。低利率货币的支付者所处的情形很可能相反，即对应于早期现金流交换的远期合约价值为正，而最后交换的远期合约价值为负。

对应低利率货币的支付者，有这样的倾向，即互换期内大部分时间互换价值为负。这是因为对应于早期支付交换的远期合约价值为正，一旦这些价值为正的交换发生，总体上，其余剩下的远期合约价值则倾向于为负值。对于高利率货币支付者，情况正好相反，有这样的倾向，即互换期内部分时间互换价值为正。当评估互换中的信用风险时，这些结论很重要。

## 7.10 信用风险

诸如互换这样的合约是两个公司私下协商的合约，所以两家公司都要承担信用风险。考虑一家金融机构进入互换市场，与两家公司签定相互抵消的交易（参照图 7.4、7.5 或图 7.7）。如果任一方都不违约，金融机构完全保持对冲状态：一份合约价值的下降总是为另一合约价值的上升所抵偿。然而，一方有可能陷入财务困境并违约，而金融机构仍必须兑现与另一方的合约。

假设图 7.4 中合约生效后的一段时间，金融机构与微软的合约有正的价值，而与英特尔的合约价值为负。如果微软违约，金融机构将可能失去这份合约所具有的全部正向价值。为了保持对冲状态，它不得不寻找愿意接替微软位置的第三方。为了吸引第三方接替该位置，它支付第三方的数量几乎等于在微软违约前，金融机构与微软的合约的价值。

当金融机构互换价值为正时，金融机构具有来自于互换的信用风险暴露。当金融机构互换价值为负且对方陷入财务困境时，会发生什么呢？理论上，金融机构能实现一项意外收益，因为对方违约有可能使它免除这项债务。但在实际中，对方很可能选择将合约卖给第三方，或以某种方式重新安排其业务，这样合约中的正向价值就不会丢失。因此，金融机构最现实的假设如下：如果对方破产，当金融机构的互换价值为正时，会有一笔损失；当金融机构互换价值为负时，金融

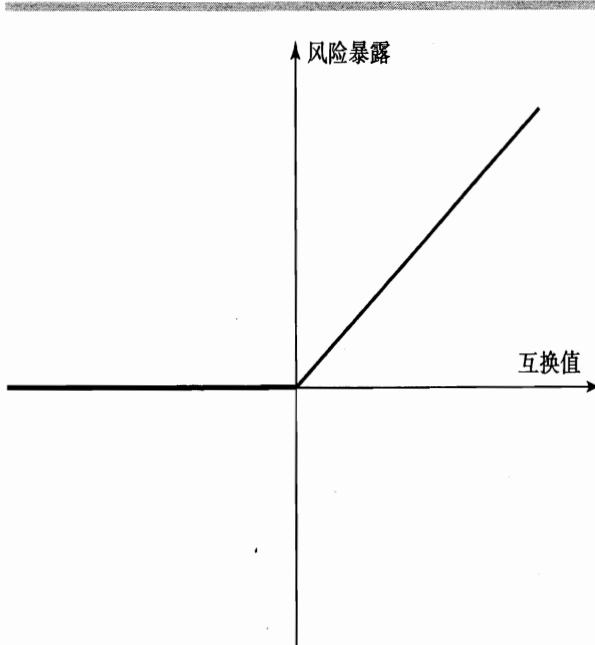


图 7.13 互换中的信用风险暴露

机构的状态不受影响。图 7.13 描述了这一情况。

互换中违约的预期损失大大小于相同本金的贷款中违约的预期损失。这是因为互换的价值通常远远小于贷款的价值。通常，货币互换中违约的预期损失大于利率互换中违约的预期损失。这是因为在货币互换的情况下，交换了以不同货币表示的本金。如果有违约，货币互换的价值可能比利率互换的价值更大。

在任一项合约中，金融机构区分信用风险和市场风险是非常重要的。正如前面讨论过的，当金融机构的互换合约价值为正时，信用风险产生于对方违约的可能性。市场风险来自利率、汇率这样的市场变量变化，这使得金融机构的互换合约价值转为负。市场风险可通过签订抵消合约来对冲，信用风险却不容易被对冲。

商业剪影 7.2 中给出了一个更为奇特的互换市场上发生的案例。它涉及到英国地方政府——哈默史密斯 (Hammersmith) 以及富勒姆 (Fulham)。这个故事说明，通过银行交易的互换除了需要承担市场风险和信用风险之外，有时也要承担法律风险。

## 7.11 其他互换

本章中我们已经介绍过以 LIBOR 交换固定利率的利率互换，和以一种货币固定利率交换另一种货币固定利率的货币互换。除此之外，交易的互换种类还有很多，我们将在以后的章节中讨论它们，如在第 21、26 和第 30 章。现在，我们只进行概述。

### 商业剪影 7.2 哈默史密斯和富勒姆的故事

1987 年至 1989 年，英国的哈默史密斯和富勒姆伦敦自治市镇区与银行签订了 600 个利率互换协议以及相关的衍生证券合约，总名义本金大约为 60 亿英镑。这些交易看起来更像投机行为，而不是套期保值行为。哈默史密斯和富勒姆的两个雇员负责这些交易，他们对自己承担的风险以及对交易产品如何运行没有足够的认识。

到了 1989 年，因为英镑利率变化，哈默史密斯和富勒姆在互换中损失了好几亿英镑。这些互换交易的另一方是银行，银行持有的互换的价值为好几亿英镑。这些银行开始担心信用风险问题。他们过去已经签订了抵消互换合约，以便对冲利率风险。如果哈默史密斯和富勒姆违约，这些银行还是要履行它们在这些抵消互换中的义务，由此会遭受巨大损失。

最后的结果和违约情况差不多。哈默史密斯和富勒姆的审计师提出这些交易是无效的，因为哈默史密斯和富勒姆没有权利签订这些合约，英国法院对此表示同意。该案件被上诉，一直到了英国最高法院上议院。最终判决是，哈默史密斯和富勒姆的确没有权利签订这些互换合约，但是为了风险管理目的，它们在未来应该赋予签订这种合约的权利。不用多说，法庭以这种方式否决这些合约的判决引起了这些银行的一片愤怒。

## 标准利率互换的变化形式

固定对浮动利率互换中，LIBOR 是最为广泛使用的浮动参考利率。在本章的例子中，使用了 6 个月期 LIBOR。但是基于 1 个月期、3 个月期以及 12 个月期 LIBOR 的互换也在广泛交易。浮动利率的支付频率不一定要和固定利率的支付频率完全匹配（的确，在脚注 3 中提过，美国的标准利率互换中，每季度支付一次 LIBOR，每半年支付一次固定利率）。LIBOR 是最普遍的浮动参考利率，但是偶尔也使用诸如商业票据利率的其他参考利率。有时，交易员们也会签订浮动对浮动利率互换。例如，可能发生的情况是，基于相同本金的 3 个月期商业票据利率加上 10 个基点的利率与 3 个月期 LIBOR 进行交换（这允许公司对冲具有不同浮动利率的资产与负债所产生的风险）。

互换协议中的本金在互换期间里可以变化，以满足对方的要求。在一项本金递减互换中，本金以事先确定的方式减少（可以与本金分期支付进度表相对应）；在一项本金逐步增加的互换中，本金以事先确定的方式增加（可以与贷款加码）相对应；延期互换（deferred swaps）或远期互换（forward swaps）中，双方开始并不交换利息支付，而是安排未来某个日期开始进行交换。有些互换合约中也可能出现支付固定利率的本金额和支付浮动利率的本金额不相同的情况。

固定期限利率互换（constant maturity swap, CMS）是将 LIBOR 与某个互换率进行交换的一种协议。例如，在以后 5 年内每 6 个月将 6 个月期 LIBOR 转换为 10 年互换利率，本金额相同。固定期限国债利率互换（constant maturity treasury swap, CMT）是一个类似的将 LIBOR 与某个特定国债利率（例如 10 年期国债利率）进行交换的协议。

复利互换 (compounding swap) 中一方或两方以事先确定的方式把利息累计计算到互换到期时刻，互换到期之时进行一次性支付。在后定 LIBOR 利率的互换 (LIBOR-in arrears swap) 中，某一个支付日的支付金额以当日观察到的 LIBOR 来计算（在 7.1 节解释过，在标准的互换交易中某个支付日观察到的 LIBOR 用来计算下一个支付日所需支付的金额）。在条件累计互换中，只有当浮动参考利率在某一特定范围之内时，交易中某一方的利息才会计息。

## 其他货币互换

本章中我们考虑的是固定对固定货币互换。还有固定对浮动货币互换 (fixed-for-floating currency swap)，它是将一种货币的浮动利率（通常为 LIBOR）转换为另一种货币的固定利率的一种协议。交叉货币利率互换 (cross-currency interest rate swap) 是一个固定对浮动利率互换与一个固定对固定货币互换的组合。还有浮动对浮动货币互换 (floating-for-floating currency swap)，它是将一种货币的浮动利率转换为另一种货币的浮动利率的一种协议。

有时，一种货币观察到的利率被应用到另一种货币的本金额上。例如，美国的 3 个月期 LIBOR 与英国的 3 个月期 LIBOR 交换，两个利率都对应 1 000 万英镑本金。这种互换称为差异互换或跨币衍生证券 (diff swap or a quanto)。

## 权益性互换

权益性互换 (equity swap) 是将某个权益性指数所实现的总收益（红利及资本利得）交换为固定利率或浮动利率的协议。例如，基于相同的本金，每 6 个月将 S&P 500 指数的总收益交换为 LIBOR。投资组合经理可用权益性互换将一种固定或浮动的投资收益转换为一种权益性指数的投资收益，反之亦然。

## 选择权

有时互换协议会被附上一些选择权。例如，在可延长互换中，一方有权延长某个互换的期限超过指定时期。在可赎回互换中，一方有权提早中止互换。互换选择权即互换期权 (option on swap or swaption) 也是可行的，这些互换权可以使一方有权利在未来的某个时期签订一项以事先确定的固定利率交换浮动利率的互换。

## 基于商品的互换、波动率互换以及其他奇异工具

基于商品的互换 (commodity swap) 实际上是一系列基于商品的、具有不同到期日和相同交割价格的远期合约的组合。波动率互换 (volatility swap) 中规定一系列时间段，在每个时间段末，一方支付事先确定的波动率，另一方则支付在这个时间段内实现的历史波动率。计算支付额的时候，将这些波动率乘以相同的名义本金。

金融工程师可以发挥想像力创造出具有奇异结构的互换合约，以此满足公司财务主管与基金经理的要求。第30章中，我们将描述宝洁公司与信孚银行签订的著名的5/30互换合约。该互换的支付，使用30天期商业票据利率、30年期长期国债价格和5年期国债收益率，按一个复杂的公式计算出支付额数。

## 小 结

两种最常见的互换是利率互换和货币互换。在利率互换中，一方同意在几年内按名义本金的固定利率向另一方支付利息，作为回报，在同一时间内，它从另一方收取按同一本金以浮动利率计算的利息。在货币互换中，一方同意以一种货币按一定本金数量支付给对方利息，作为回报，它从另一方收取以另一种货币按一定本金计算的利息。

利率互换中，本金并不交换。货币互换中，在互换开始时，外币本金和本国货币本金要进行交换，互换结束时，外币本金和本币本金再交换回来。对支付外币利息的一方而言，在互换开始时，收取外币本金并支付本国货币本金，在互换结束时，支付外币本金，收回本币本金。

利率互换可用来将浮动利率贷款转化为固定利率贷款，或者正好相反。利率互换也可用来将浮动利率投资转化为固定利率投资，或者正好相反。货币互换可用来将一种货币的贷款转换为另一种货币的贷款。货币互换也可用来将一种货币的投资转换为另一种货币的投资。

利率互换或货币互换有两种估值的方法。第一种方法中，将互换分解为一种债券多头与另一种债券空头。第二种方法中，互换被认为是一系列远期合约的组合。

金融机构在与不同各方签订一对相互抵销的互换时，它面临着信用风险。当金融机构与其中一方互换的互换价值为正时，如果这一方违约，金融机构会遭受损失，因为它不得不兑现同另一方的互换协议。

## 参考读物

- Baz, J., and M. Pascutti. "Alternative Swap Contracts Analysis and Pricing," *Journal of Derivatives*, (Winter 1996): 7-21.
- Brown, K. C., and D. J. Smith. *Interest Rate and Currency Swaps: A Tutorial*. Association for Investment Management and Research, 1996.
- Cooper, I., and A. Mello. "The Default Risk in Interest Rate Swaps," *Journal of Finance*, 46, 2 (1991): 597-620.
- Dattatreya, R. E., and K. Hotta. *Advanced Interest Rate and Currency Swaps: State-of-the-Art Products, Strategies, and Risk Management Applications*. Irwin, 1993.
- Flavell, R. *Swaps and Other Instruments*. Chichester: Wiley, 2002.
- Gupta, A., and M. G. Subrahmanyam. "An Empirical Examination of the Convexity Bias in the Pricing of Interest Rate Swaps," *Journal of Financial Economics*, 55, 2 (2000): 239-79.
- Litzenberger, R. H. "Swaps: Plain and Fanciful," *Journal of Finance*, 47, 3 (1992): 831-50.
- Minton, B. A. "An Empirical Examination of the Basic Valuation Models for Interest Rate Swaps," *Journal of Financial Economics*, 44, 2 (1997): 251-77.
- Sun, T., S. Sundaresan, and C. Wang. "Interest Rate Swaps: An Empirical Investigation," *Journal of Financial Economics*, 34, 1 (1993): 77-99.
- Titman, S. "Interest Rate Swaps and Corporate Financing Choices," *Journal of Finance*, 47, 4 (1992): 1503-16.

## 问题和习题

7.1 公司 A 和 B 可按以下的利率借到 5 年期 2 000 万美元的贷款：

|      | 固定利率  | 浮动利率         |
|------|-------|--------------|
| 公司 A | 12.0% | LIBOR + 0.1% |
| 公司 B | 13.4% | LIBOR + 0.6% |

公司 A 想获得浮动利率贷款；公司 B 想获得固定利率贷款。请设计一个互换，一家银行作为中介，净收益为每年 0.1%，并且使得该互换对 A 和 B 双方都有同样吸引力。

7.2 公司 X 希望以固定利率借美元。公司 Y 希望以固定利率借日元。双方公司所需金额，在即期汇率下基本相等。在对两个公司的税务状况做了调整之后，它们可得到如下利率报价：

|      | 日元   | 美元    |
|------|------|-------|
| 公司 X | 5.0% | 9.6%  |
| 公司 Y | 6.5% | 10.0% |

设计一个互换：银行为中介，净利润为每年 50 个基本点；使该互换对双方有同等程度的吸引力；确保由银行承担所有外汇风险。

7.3 一个 1 亿美元的利率互换还剩 10 个月到期。根据互换条款，将 6 个月期 LIBOR 转换为 12% 的年利率（按半年计复利）。在所有期限中，与 6 个月期 LIBOR 交换的竞买价和竞卖价的平均值当前为每年 10%（连续复利）。两个月前的 LIBOR 为每年 9.6%。支付浮动利率一方当前的互换价值为多少？支付固定利率一方当前的互换价值为多少？

7.4 什么是互换率？互换率和票面收益率之间的关系如何？

7.5 一个货币互换还剩 15 个月到期。它将年利率为 14% 名义本金为 2 000 万英镑的利息转换成年利率为 10% 名义本金为 3 000 万美元的利息。英国和美国的利率期限结构现在都是平坦的，如果互换合约今天成交，互换的美元利率为 8%，英镑利率为 11%。所有的利率都按一年计一次复利报价。即期汇率为每英镑 1.6500 美元。对支付英镑的一方而言，互换的现值为多少？对支付美元的一方而言，互换的现值为多少？

7.6 请解释一份金融合约中信用风险与市场风险的区别。

7.7 一位公司财务主管告诉你他刚以固定利率 5.2% 谈成了一笔 5 年期贷款。财务主管解释说他以 LIBOR+150 基点借款，并通过互换把 LIBOR 交换为 3.7%，这样借款利率就是 5.2% 了。他接着说，这是可行的，因为公司在浮动利率市场有比较优势。请问这位财务主管忽略了什么因素？

7.8 请解释为什么一家银行签订了两个相互抵消的互换合约，仍面临信用风险？

7.9 公司 X 和公司 Y 对 500 万美元 10 年期的投资有下述收益率：

|      | 固定利率 | 浮动利率  |
|------|------|-------|
| 公司 X | 8.0% | LIBOR |
| 公司 Y | 8.8% | LIBOR |

公司 X 想进行固定利率投资，公司 Y 想进行浮动利率投资。设计一个互换，银行为

中介，年收益 0.2%，并且该互换对 X 和 Y 有同样的吸引力。

- 7.10 一家金融机构与公司 X 签订了一份利率互换协议。根据协议，该金融机构收取 10% 的年利率，支付 6 个月期的 LIBOR，本金为 1 000 万美元，为期 5 年。每 6 个月支付一次。假设公司 X 在第 6 个支付日（即第 3 年末）违约了，当时所有期限的利率都为 8%（按半年计复利）。金融机构的损失为多少？假设 3 年中 6 个月期的 LIBOR 为每年 9%。
- 7.11 一个金融机构与公司 Y 签订一份 10 年期的货币互换。根据协议条款，他收取每年 3% 的瑞士法郎，支付每年 8% 的美元。每年进行一次利息交换。本金为 700 万美元和 1 000 万瑞士法郎。假设公司 Y 在第 6 年末宣布破产，当时汇率为 1 瑞士法郎=0.8 美元。金融机构的损失为多少？假设第 6 年末对所有期限的瑞士法郎的利率为每年 3%，美元利率为每年 8%。所有利率按一年计一次复利报价。
- 7.12 公司 A 与公司 B 调整付税影响后，可获得如下利率：

|          | 公司 A       | 公司 B       |
|----------|------------|------------|
| 美元（浮动利率） | LIBOR+0.5% | LIBOR+1.0% |
| 加元（固定利率） | 5.0%       | 6.5%       |

假设 A 希望以浮动利率借美元，B 希望以固定利率借加元。一家金融机构计划安排一互换，要求 50 个基点的收益。如果互换对 A 和 B 有同样的吸引力，A 和 B 最终将支付什么样的利率？

- 7.13 在使用远期合约对外汇头寸进行了套期保值后，在图 7.10 中金融机构的平均价差会大于或小于 20 个基点吗？请解释原因。
- 7.14 “信用风险很高的公司不可以直接进入固定利率市场。他们最可能在利率互换市场上支付固定利率收取浮动利率”。假设这句话是正确的，你认为这是提高了还是降低了金融机构的互换组合的风险？假设公司在利率很高时很可能违约。
- 7.15 说明为什么一个互换的预期违约损失小于同等本金贷款的预期违约损失。
- 7.16 一家银行发现它的资产与负债不相匹配。它吸收浮动利率存款，做了固定利率贷款。如何运用互换来抵消此风险？
- 7.17 一个互换中以一种货币的浮动利率交换另一种货币的固定利率。请问应该如何估值该互换？
- 7.18 1.5 年的期限内，LIBOR 零息率曲线是平坦的，为 5%（连续复利）。2 年期和 3 年期的每半年支付的互换的互换率分别为 5.4% 和 5.6%。请估计期限为 2.0、2.5 和 3.0 年的 LIBOR 零息率（假设 2.5 年期互换率为 2 年期和 3 年期互换率的平均值）。

## 课后练习

- 7.19 1 年期 LIBOR 为 10%。一家银行签订了互换合约，其中以固定利率交换 12 个月期 LIBOR，一年交换支付一次。2 年期和 3 年期互换率（每年计一次复利）分别为 11%p.a. 和 12%p.a.。请估计 2 年期和 3 年期 LIBOR 零息率。
- 7.20 公司 A 是一家英国制造商，想要以固定利率借美元。公司 B 是一家美国跨国公司，想

要以固定利率借英镑。做了必要的税务调整后，他们可获得如下年利率报价：

|      | 英 镑   | 美 元  |
|------|-------|------|
| 公司 A | 11.0% | 7.0% |
| 公司 B | 10.6% | 6.2% |

设计一个互换，银行为中介，每年盈利 10 个基点。对两家公司每年都有 15 个基点的收益。

- 7.21 根据某个利率互换条款，一家金融机构同意支付年利率 10%，收取 3 个月期的 LIBOR，名义本金为 1 亿美元，每 3 个月支付一次。互换还剩 14 个月到期。与 3 个月期的 LIBOR 进行互换的固定利率的竞买价和竞卖价的平均值为每年 12%（对所有的期限都是如此）。一个月前，3 个月期的 LIBOR 为每年 11.8%。所有利率按季度计复利。互换的价值为多少？
- 7.22 假设美国和澳大利亚的利率期限结构都是平坦的。美元的利率为每年 7% 而澳元的利率为每年 9%。当前一澳元等价于 0.62 美元。根据某互换协议条款，一家金融机构用澳元支付 8% 的年利率，收取年利率 4% 的美元。两种货币的本金分别为 1 200 万美元和 2 亿澳元。每年进行一次支付交换，刚刚结束一次支付交换。互换还有两年多。对金融机构而言，互换的价值为多少？假设所有的利率都为连续复利。
- 7.23 公司 X 在英国，想在美国资金市场上以固定利率借 5 亿美元，借期 5 年。由于该公司在美国并不出名，这几乎不可能。但此公司可以以 12% 的固定利率借到 5 年期的英镑。公司 Y 在美国，想以固定利率借相当于 5 亿美元的英镑 5 年。但是他也无法获得，只能得到年利率 10.5% 的美元资金。美国 5 年期的政府债券的年收益率为 9.5%，在英国为 10.5%。构造一个适当的货币互换，使得金融中介的净收益为每年 0.5%。



# 期权市场的机制

在第 1 章中已经介绍了期权，本章将阐述期权市场的组织方式，所使用的相关术语，期权合约如何交易，以及保证金设置制度，等等。随后的章节中，我们将讨论利用期权的交易策略、期权定价以及期权组合的套期保值方法等。本章主要讨论股票期权，也将简要介绍货币期权、指数期权和期货期权。第 14 章中将更深入地讲述这些期权。

期权在本质上不同于远期和期货合约。期权赋予期权持有者具有选择做某件事情的权利，但期权持有者并不负有必须履行的义务。与之相反，远期或期货合约中，双方的权利与义务是对等的，即双方相互承担责任，各自具有要求对方履约的权利。远期或期货合约中交易员们不需要任何成本（除了保证金要求）即可签订合约，而购买期权则需要初始成本。

## 8.1 期权类型

在第 1 章中已经提到，期权有两种基本的类型。看涨期权（call option）是指该期权持有人具有在某个确定时间按某一确定价格购买一项资产的权利；看跌期权（put option）是指该期权持有人具有在某个确定时间按某一确定的价格出售一项资产的权利。合约中的指定的日期被称为失效日、到期日或期满日（expiration date，或称 maturity date）。期权合约中指定的价格被称为执行价格或行权价格（exercise price 或称 strike price）。

期权分为美式期权和欧式期权，这个区分和地理位置完全没有关系。美式期权可在期权有效期内任何一天执行；欧式期权只能在期权到期日执行。交易所中交易的大部分期权是美式期权。但是，欧式期权通常比美式期权更易于分析，美式期权的性质经常可以从与它对应的欧式期权推导出来。

### 看涨期权

考虑如下情形：某投资者购买了一份基于 100 股 eBay 股票的欧式看涨期权，执行价格为 \$100。假定股票现价为 \$98，到期期限为 4 个月，购买 1 股的期权价格为 \$5，初始投资为 \$500。由于期权是欧式期权，投资者仅能在到期日执行它。如

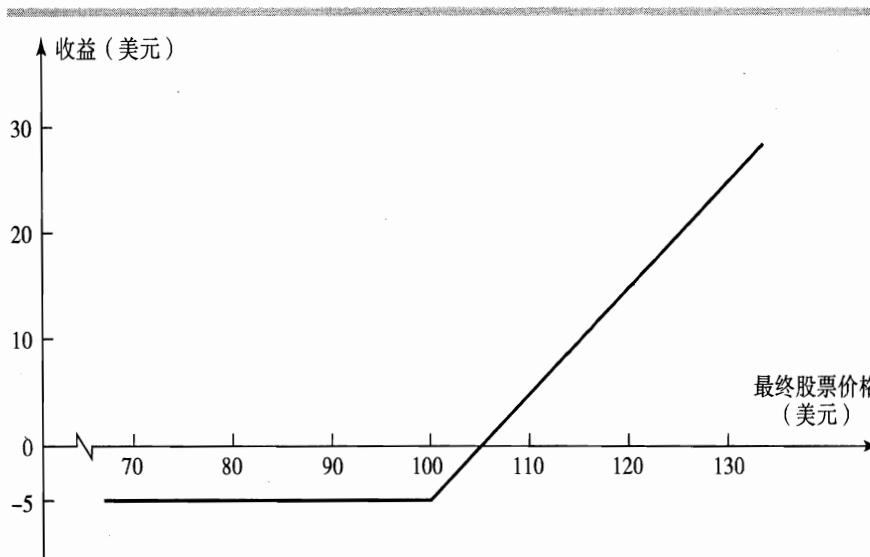


图 8.1 购买基于 1 股 eBay 股票的欧式看涨期权的损益状态。期权价格 = \$5；执行价格 = \$100

果股票价格在到期日低于\$100，他或她必定选择不执行期权（即投资者不会以\$100 的价格购买市场价值低于\$100 的股票）。在这种情况下，投资者损失了其全部的初始投资\$500。如果股票的价格在到期日高于\$100，投资者将执行这些期权。假定股票价格为\$115，通过执行该期权，投资者可以以每股\$100 的价格购买 100 股股票。如果他立即将这些股票卖出，且不考虑交易费用，则每股盈利为\$15 或总盈利为\$1 500。当考虑初始投资时，投资者每一股的期权合约的净盈利为\$10，或总盈利为\$1 000（计算时忽略货币的时间价值）。

图 8.1 显示了投资者每个期权的净损益随到期日股票价格变化的情况。请注意在有些情况下，投资者执行期权，但总体上也会出现损失。考虑 eBay 股票价格在到期日为\$102 的情况。投资者执行期权，得到收益  $100 \times (102 - 100) = \$200$ ，考虑初始投资时，总共损失\$300。那么，可能有些人认为这样的情况下不应该执行期权。但是，不执行期权将会发生\$500 的损失，不如执行期权时损失\$300 的情况。一般地，如果到期日的股票价格高于执行价格，投资者总是应该执行看涨期权。

## 看跌期权

看涨期权的购买者是希望股票价格上升，而看跌期权的购买者是希望股票价格下降。例如，某投资者购买了一份基于 100 股 IBM 股票的欧式看跌期权，执行价格为\$70。假定股票的现价为\$65，距到期日有 3 个月，期权的价格为\$7，初始投资为\$700。由于期权是欧式期权，投资者仅能于到期日，在股票价格低于\$70 时执行该期权。假定在到期日股票价格为\$55。投资者可以以每股\$55 的价格购买 100 股股票，并按看跌期权合约的规定，以每股\$70 的价格卖出相同的股票，实现每股\$15 的盈利，即实现\$1 500 的总盈利（再次忽略交易成本）。当考虑期权的初

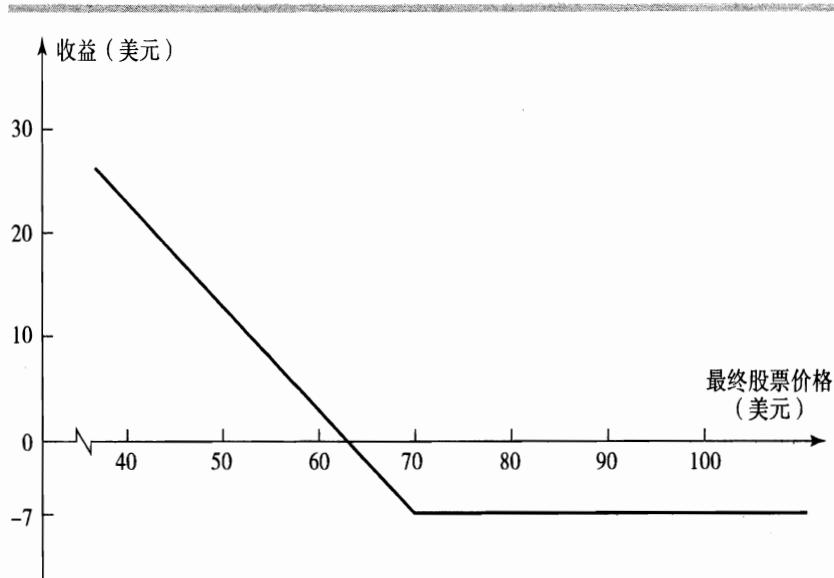


图 8.2 购买基于 1 股 IBM 股票的欧式看跌期权的损益状态。期权价格 = \$5；执行价格 = \$70

始支出成本\$700 时，投资者总的净利为\$800。不能保证投资者一定盈利，如果最后到期日股票的价格高于\$70，看跌期权在到期日时价值为零，投资者的总损失为\$700。图 8.2 显示了投资者每个期权的净损益随到期日股票价格变化的情况。

### 提前执行

正如前面所说，股票期权通常为美式期权而非欧式期权。这表明，上例中的美式期权的投资者在到期日前就可以执行期权。后面我们将证明，在某些情况下，提前执行美式期权是明智的。

## 8.2 期权的头寸

每一期权合约都有交易两方。一方是持有期权多头头寸的投资者（即购买期权合约的一方）。另一方是持有期权空头头寸的投资者（即出售或承兑期权合约的一方）。期权的出售方事先收取现金，但之后具有潜在的负债。期权出售方或承兑方的损益状态与期权购买方的损益状态正好相反。图 8.3 和图 8.4 表明在图 8.1 和图 8.2 中所考虑期权的出售方的损益状态随着到期日股价的变化而变化。

有四种基本的期权头寸：

1. 看涨期权的多头
2. 看跌期权的多头
3. 看涨期权的空头
4. 看跌期权的空头

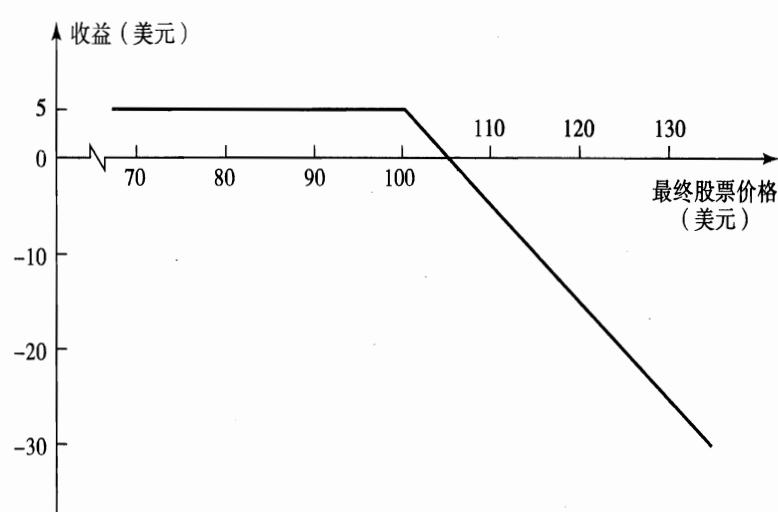


图 8.3 出售基于 1 股 eBay 股票的欧式看涨期权的损益状态。期权价格 = \$7；执行价格 = \$100

到期日期权损益状态经常被使用来描绘欧式期权投资者的头寸状况。在计算时，不包括初始期权成本。如果以  $K$  代表执行价格， $S_T$  代表标的资产的到期日价格，则欧式看涨期权多头的损益为：

$$\max(S_T - K, 0)$$

这就表明，如果  $S_T > K$ ，就会执行期权；如果  $S_T \leq K$ ，就不会执行期权。欧式看涨期权空头的损益为：

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$$

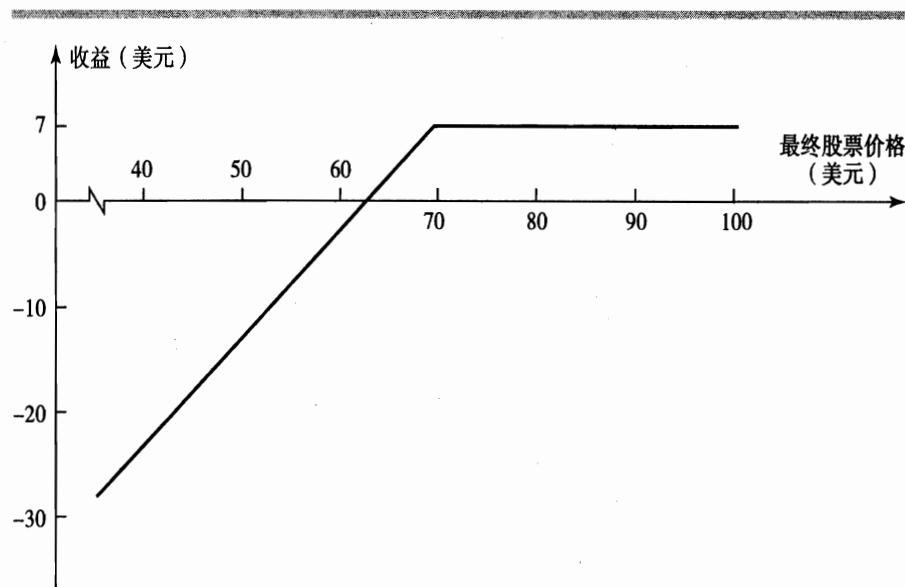


图 8.4 出售基于 1 股 IBM 股票的欧式看跌期权的损益状态。期权价格 = \$7，执行价格 = \$70

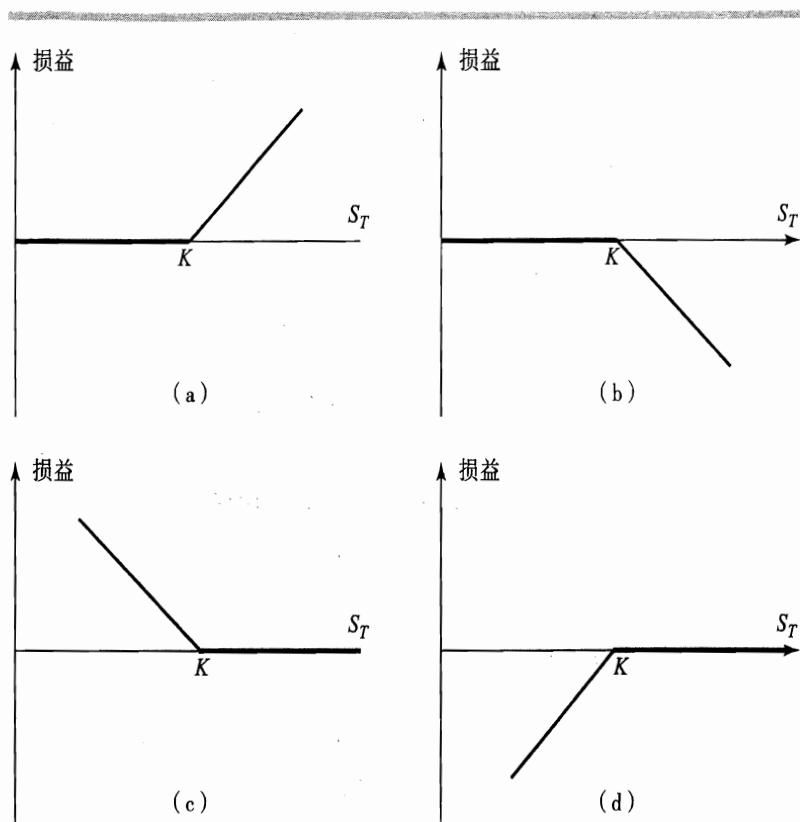


图 8.5 欧式期权各种头寸的损益状态图：(a) 看涨期权的多头；(b) 看涨期权的空头；(c) 看跌期权的多头；(d) 看跌期权的空头。执行价格 =  $K$ ；到期时资产价格 =  $S_T$

欧式看跌期权多头的损益为：

$$\max(K-S_T, 0)$$

欧式看跌期权空头的损益为：

$$-\max(K-S_T, 0) = \min(S_T-K, 0)$$

图 8.5 为这些期权头寸的损益状态图。

### 8.3 标的资产

这一节中简要介绍标的资产为股票、外汇、股票指数或期货合约的期权。

#### 股票期权

大多数股票期权的交易在交易所内进行。在美国交易股票期权的交易所是芝加哥期权交易所 (CBOE, [www.cboe.com](http://www.cboe.com))、费城股票交易所 (PHLX, [www.phlx.com](http://www.phlx.com))、美国股票交易所 ([www.amex.com](http://www.amex.com))、太平洋股票交易所 ([www.pacifex.com](http://www.pacifex.com))

和国际证券交易所 ([www.iseoptions.com](http://www.iseoptions.com))。在 1 000 多种不同的股票上都可以进行期权交易。在每一合约中，期权持有者有权按特定的执行价格购买或出售 100 股股票。由于股票本身通常是以 100 股为单位进行交易的，所以这一规定是非常方便的。

## 外汇期权

绝大多数货币期权交易在 OTC 市场进行，但也有一些在交易所内进行。最主要的外汇期权交易所是费城交易所。它提供很多种不同货币的美式和欧式期权合约。期权合约的大小取决于货币的种类。例如，一项英镑期权合约，持有者有权购买或出售 £31 250；而一项目元期权合约，持有者有权购买或出售 6 250 000 日元。在第 14 章中将更深入地讨论货币期权合约。

## 指数期权

在世界范围内，在场外和场内市场广泛进行许多不同种类的指数期权的交易。在美国，最著名的一些场内交易的指数期权有 S&P 500 指数期权 (SPX)、S&P 100 指数期权 (OEX)、纳斯达克 100 指数期权 (NDX) 和道琼斯工业平均指数期权 (DJX)。所有上述的指数期权均在芝加哥期权交易所进行交易。这些期权的绝大多数是欧式期权，但 S&P 100 指数期权是美式期权。每一合约购买或出售的金额为特定执行价格指数的 100 倍。以现金结算而不是交割指数的证券组合。例如，S&P 100 看涨期权的执行价格为 980，如果在指数为 992 时履行期权合约，则看涨期权的出售方将支付期权持有方  $(992-980) \times 100 = \$1 200$ 。这一现金支付数量取决于履行期权合约的指令发布当日收盘时的股指价值。毫无疑问，投资者通常要等到这一天的最后时刻才发出这些指令。在第 14 章中将更深入地讨论指数期权合约。

## 期货期权

当一个交易所中可以进行某种期货合约的交易时，也通常可以交易基于该期货的期权合约。期货合约的到期日通常紧随该期货期权（或称基于期货的期权）的到期日之后。当看涨期权的买方行使权利时，他或她就会从期权出售方获得标的期货合约的多头，再加上期货价格超过执行价格的超额现金。当看跌期权的买方行使权利时，他或她就会从期权出售方获得标的期货合约的空头，再加上执行价格超过期货价格的超额现金。在第 14 章将更深入地讨论期货期权合约。

## 8.4 股票期权合约的性质

在本章的以下部分，我们将着重论述股票期权。在前面我们已经提到，在美

国场内交易的股票期权合约是美式期权合约，每一合约可以购买或出售 100 股股票。交易所规定了合约的细节，如失效日、执行价格、支付红利时如何处理，以及每一投资者可持有的最大头寸等。

## 失效日

用于描述股票期权的一个术语是到期月，即期权失效的那个月份。因此 1 月份 IBM 看涨期权是失效日（或到期日）在 1 月份的某一天的基于 IBM 股票的购买选择权。精确的到期时间是到期月第 3 个星期五之后紧随的那个星期六。期权的最后交易日是到期月的第 3 个星期五。持有期权多头的投资者通常在这个星期五中部时间下午 4:30 之前给其经纪人发出执行期权的指示。经纪人在第二天中部时间下午 10:59 之前完成书面报告并通知交易所打算执行期权。

股票期权是在 1 月份、2 月份或 3 月份的基础上的循环。1 月份的循环包括 1 月份、4 月份、7 月份和 10 月份这几个月份。2 月份的循环包括 2 月份、5 月份、8 月份和 11 月份这几个月份。3 月份循环包括 3 月份、6 月份、9 月份和 12 月份这几个月份。如果当前月份的到期日还未到达，则交易的期权合约包括当前月到期期权、下个月到期期权和当前月循环中的下两个到期月的期权。如果当前月份的到期日已过，则交易的期权包括下个月份到期、再下一个月份到期期权和该循环中的下两个到期月的期权。例如，设 IBM 股票期权是处于 1 月份循环中。1 月初，交易的期权的到期月份为 1 月份、2 月份、4 月份和 7 月份。在 1 月末，交易的期权的到期月份为 2 月份、3 月份、4 月份和 7 月份。在 5 月初，交易的期权的到期月份为 5 月份、6 月份、7 月份和 10 月份等。当某一期权到期时，则开始交易另一期权。在美国也交易诸如长期股权预期证券（LEAPS）这样的期限较长的股票期权，其标的股票有 500 多种。它们的到期月最长可以是未来 3 年之后。LEAPS 的到期日总是在 1 月份。

## 执行价格

交易所选定期权的执行价格，只有具有这样执行价格的期权才可以在交易所交易。通常执行价格的变动间隔分别为 \$2.5、\$5 或 \$10。对于股票期权来说，交易所通常规定如下：当股票价格在 \$5~\$25 之间时，执行价格的变动间隔为 \$2.5；当股票价格在 \$25~\$200 之间时，执行价格的变动间隔为 \$5；当股票价格高于 \$200 时，执行价格的变动间隔为 \$10。当发生股票分割或股票派发红利时，可能出现非标准化的执行价格。

当引入新的到期日时，交易所通常选择最接近股票现价的那 2 个或 3 个执行价格。如果股票价格的波动超过了原来定义的最高执行价格和最低执行价格的范围，交易中通常引入新执行价格的期权。为了说明这些规则，假定 10 月份期权刚开始交易时，股票价格为 \$84。交易所最初提供的看涨期权和看跌期权的执行价格分别为 \$80、\$85 和 \$90。如果股票价格上升到 \$90 以上时，交易所将提供执行价格

为\$95 的期权；如果股票价格跌到\$80 以下时，交易所将提供执行价格为\$75 的期权。依此类推。

## 术 语

在任何给定的时间，对于任何给定资产，可能有许多不同的期权合约在交易。如对某一股票，该股票具有 4 种到期日和 5 种执行价格的期权。如果每一个到期日和每一个执行价格都有看涨期权和看跌期权在进行交易，则共有 40 种不同的期权合约。所有类型相同的期权（如看涨期权或看跌期权）都可划分为某个期权类（option class）。例如，IBM 的看涨期权为一类，而它的看跌期权则为另一类。而某个期权序列（option series）则是由某个给定期权类中具有相同到期日和执行价格的所有期权组成。换句话说，某个期权序列是指交易中的某个特定合约。10 月份 IBM 50 看涨期权就是一个期权序列。

期权分为实值期权、平价期权和虚值期权。如果用  $S$  代表股票价格， $K$  代表执行价格，则当  $S > K$  时，看涨期权是实值期权；当  $S = K$  时，看涨期权是平价期权；当  $S < K$  时，看涨期权是虚值期权。当  $S < K$  时，看跌期权是实值期权；当  $S = K$  时，看跌期权是平价期权；当  $S > K$  时，看跌期权是虚值期权。显然，只有当期权是实值期权时，它才会被执行。不考虑交易费用时，如果一直没有提前履约的话，实值期权通常是在到期日才执行的。

期权的内在价值（intrinsic value）定义为零和期权立即执行时所具有的价值这两者之中的最大值。因此，看涨期权的内在价值为  $\max(S-K, 0)$ 。看跌期权的内在价值为  $\max(K-S, 0)$ 。一个处于实值状态的美式期权的价值一定是大于或等于其内在价值，因为该期权的持有者可通过立即执行期权实现其内在价值。通常处于实值状态的美式期权的持有者最理想的做法是继续等待更好的机会，而并不是立即执行它。于是就说期权具有时间价值。期权的全部价值为其内在价值与时间价值之和。

## 变通期权

芝加哥期权交易所还提供基于股票和股票指数的变通期权（短期，灵活期权）。这是一种在交易所场内由交易员提供的非标准化条款的期权。这些非标准化条款可能是执行价格或到期日不同于交易所通常提供的那些期权。同时，变通期权一般为欧式期权而非美式期权。变通期权可看作是交易所企图从场外市场争夺客户的一种尝试。交易所规定变通期权交易中的最低规模（如，100 张合约）。

## 红利和股票分割

早期的场外交易的期权是受红利保护的。如果公司派发一项现金红利，则在除权日，公司股票期权的执行价格应减去红利金额。无论是否派发现金红利，场

### 商业剪影 8.1 古琦集团的大额红利

当发生大额现金红利（一般指大于股价 10%）的时候，芝加哥期权交易所的期权清算公司（OCC）的委员会可以对交易所内的相应期权条款进行调整。

2003 年 5 月 28 日，古琦集团（the Gucci Group）宣告了每普通股 13.50 欧元（约为 \$15.88）的现金红利，并在 2003 年 7 月 16 日的 GUC 年股东大会中被批准。宣布的时候，这些红利大约等于股份价格的 16%。这种情况下，OCC 委员会决定调整期权条款。结果，一份期权合约被执行时，要求交割 100 股股份加上现金  $100 \times \$15.88 = \$1,588$ 。看涨期权的持有者执行的时候，需要支付 100 乘以执行价格，并收到 100 股股份加上现金 \$1,588。看跌期权的持有者执行的时候，收取 100 乘以执行价格，并交割 100 股股份加上现金 \$1,588 支出。这样的调整的效果等于把执行价格减小 \$15.88。

对于大额红利的调整并不经常发生。例如，1998 年 3 月 10 日，戴姆勒-奔驰公司宣告的红利等于股价的 12%。但是，德国期货交易所并没有对交易所内的期权条款进行调整。

内交易的期权通常并不进行调整。也就是说，当现金红利发生的时候，期权合约的条款并不进行调整。但对于大额现金红利，有时会存在例外 [参见商业剪影 8.1 古琦集团的例子]。

当股票分割时，场内交易的期权要进行调整。股票分割时，现有的股票被分割成更多的股票。例如，在某个股票的 3 对 1 分割方式中，3 股新发行股票将代替原来的 1 股股票。由于股票分割并不改变公司的资产和盈利能力，它对公司的股东权益并不产生影响。其他条件相同时，3 对 1 股票分割方式将会使该公司股票价格降为分割前股价的三分之一。一般来说， $n$  对  $m$  的股票分割方式将会使股票价格降为分割前股价的  $m/n$ 。期权合约中的相应条款将有所调整，以反映股票分割所引起的股票价格的预期变化。在  $n$  对  $m$  股票分割后，执行价格降为原执行价格的  $m/n$ ，每一期权合约所包含的股票数额将增为原来的  $n/m$ 。如果股票价格按预期的那样降低，则期权合约买卖双方的头寸将保持不变。

**[例 8.1]** 某个看涨期权可以按每股 \$30 的价格购买某公司 100 股股票。假定公司进行 2 对 1 的股票分割。则期权合约的条款将变为持有者有权以 \$15 的价格购买 200 股股票。

股票期权根据股票红利进行调整。股票红利是公司向其现有股东送股。例如，20% 的股票红利是指每拥有 5 股该公司股票的股东将收到 1 股新股。股票红利类似于股票分割，对公司的资产和盈利能力均无影响。在公司送股后，可以预计公司的股票价格将会下降。20% 的股票红利基本上等同于 6 对 5 的股票分割。其他条件相同时，这种送股将导致股票价格下降到原价格的  $5/6$ 。与股票分割的方式类似，期权合约中的相应条款将有所调整，以反映送股所带来的股票价格的预期下降。

**[例 8.2]** 某个看跌期权可以按每股\$15 的价格出售某公司 100 股股票。假定公司派发 25%的股票红利。这相当于 5 对 4 股票分割。期权合约的条款将变为持有者有权利以\$12 的价格出售 125 股股票。

配股情况下，期权条款也要进行调整。配股条款给现存股东以特定价格购买更多股份的权利。基本的调整方法是先计算配股权的理论价格，然后从执行价格中减去这个量。

### 头寸限额和执行限额

芝加哥期权交易所为每一只股票规定了期权交易的头寸限额。它规定了每一投资者在单边市场中可持有的期权合约的最大数量。为此目的，可以认为看涨期权的多头和看跌期权的空头是处于市场的同一方。同样，看涨期权的空头和看跌期权的多头也是处于市场的同一方。执行限额通常等于头寸限额。它规定了任一投资者（或一起活动的投资集团）在任 5 个连续的交易日中可以执行期权合约的最大数量。最大规模和最频繁交易的股票期权的头寸限额通常为 75 000 个合约。总市值较少的股票的头寸限额为 60 000、31 500、22 500 或 13 500 个合约。

头寸限额和执行限额是为防止个人投资者或机构投资者的活动对市场产生不适当的影响。但是，这样的限制是否确实有必要，仍然是一个有争议的问题。

### 8.5 报纸上的期权行情报价

许多报纸都刊载有期权的行情。表 8.1 是 2004 年 2 月 5 日星期四《华尔街日报》中的期权行情。它是前一个交易日（即 2004 年 2 月 4 日，星期三）的期权价格。

表中第一部分给出了根据成交量大小排列出了 40 个交易最活跃的期权合约。这里，交易最活跃的合约是 2004 年 2 月纳斯达克 100 指数期权。从表中，我们可以看到一个执行价格为\$25、2004 年 2 月到期的 Cisco 看涨期权合约的最后成交价格为\$0.40，比前一天降低了\$1.60。Cisco 股票的收盘价为\$24.08。类似地，一个执行价格为\$20 的 2004 年 4 月到期的 Peoplesoft 看跌期权合约的最后成交价格为\$0.50，比前一天降低了\$0.35。Peoplesoft 股票的收盘价为\$22.70。表中第二部分给出了长期限期权（LEAP）的报价。例如，一个执行价格为\$30、2006 年 1 月到期的 Cisco 看涨期权合约的最后成交价格为\$2.75，与此对应的看跌期权的最后成交价格为\$7.20。

我们在前面提过，一个期权合约可购买或出售 100 股股票。因此，每一个期权合约的成本为所列出价格的 100 倍。由于大多数期权的价格低于\$10，并且一些期权的价格低于\$1，投资者不需很多资金就可进行期权交易。

《华尔街日报》在第一部分表的下面也列出了各个交易所的总看涨期权成交量、看跌期权成交量、看涨期权未平仓量和看跌期权未平仓量。和期货合约中一

表 8.1 2004 年 2 月 5 日《华尔街日报》股票期权行情

| MOST ACTIVE LISTED OPTIONS  |           |           |            |                 |           |           |            |               |            |           |             |      |       |       |        |        |
|---|-----------|-----------|------------|-----------------|-----------|-----------|------------|---------------|------------|-----------|-------------|------|-------|-------|--------|--------|
| Wednesday, February 4, 2004   |           |           |            |                 |           |           |            |               |            |           |             |      |       |       |        |        |
| Composite volume and close for actively traded equity and LEAPS, or long-term options, with results for the corresponding put or call contract. Volume figures are unofficial. Open interest is total outstanding for all exchanges and reflects previous trading day. Close when possible is shown for the underlying stock or primary market. XC-Composite. p-Put. o-Strike price adjusted for split. |           |           |            |                 |           |           |            |               |            |           |             |      |       |       |        |        |
| OPTION/STRIKE   |           | VOL       | EXCH       | LAST            | NET CHG   | CLOSE     | OPEN INT   | OPTION/STRIKE |            | VOL       | EXCH        | LAST |       |       |        |        |
| Nasd100Tr   | Feb 37    | 79,072    | XC         | 0.45            | -0.30     | 36.33     | 179,411    | Cisco         | Apr 25     | 16,786    | XC          | 1.15 | -1.40 | 24.08 | 35,860 |        |
| Nasd100Tr   | Feb 37    | p 77,716  | XC         | 1.10            | 0.30      | 36.33     | 366,260    | ATT Wrls      | Feb 11     | 16,696    | XC          | 0.35 | ...   | 11.13 | 19,457 |        |
| Cisco   | Feb 25    | p 65,470  | XC         | 1.30            | 0.85      | 24.08     | 125,149    | FordM         | Jan 05     | 20        | 16,006      | XC   | 0.35  | 0.05  | 13.89  | 17,243 |
| Nasd100Tr   | Mar 37    | p 50,099  | XC         | 1.60            | 0.30      | 36.33     | 136,136    | Nasd100Tr     | Feb 35     | p 15,424  | XC          | 0.25 | ...   | 36.33 | 80,784 |        |
| Cisco   | Feb 25    | p 45,922  | XC         | 0.40            | -1.60     | 24.08     | 53,363     | ATT Wrls      | Apr 11     | 14,865    | XC          | 0.70 | ...   | 11.13 | 4,849  |        |
| Nasd100Tr   | Feb 38    | p 45,379  | XC         | 1.80            | 0.40      | 36.33     | 256,982    | Pfizer        | Feb 70     | 14,847    | XC          | 1    | 0.35  | 38.27 | 19,623 |        |
| Nasd100Tr   | Mar 37    | p 40,652  | XC         | 1               | -0.30     | 36.33     | 85,536     | Nasd100Tr     | Feb 36     | 14,301    | XC          | 0.95 | -0.50 | 36.33 | 46,174 |        |
| Cisco   | Apr 27.50 | p 37,154  | XC         | 0.50            | -0.70     | 24.08     | 50,310     | Nasd100Tr     | Jun 35     | p 13,821  | XC          | 1.70 | 0.25  | 36.33 | 70,112 |        |
| Nasd100Tr   | Feb 36    | p 32,848  | XC         | 0.60            | 0.20      | 36.33     | 272,591    | Peoplesoft    | Apr 20     | p 12,605  | XC          | 0.50 | -0.35 | 22.70 | 7,767  |        |
| Nasd100Tr   | Feb 38    | p 32,650  | XC         | 0.20            | -0.20     | 36.33     | 210,587    | Peoplesoft    | Mar 22.50  | p 12,542  | XC          | 1.05 | -0.50 | 22.70 | 289    |        |
| Cisco   | Feb 27.50 | p 28,459  | XC         | 0.10            | -0.55     | 24.08     | 159,880    | SemiHTr       | Feb 40     | p 12,235  | XC          | 0.95 | 0.45  | 40.58 | 34,513 |        |
| Nasd100Tr   | Mar 36    | p 23,642  | XC         | 1.15            | 0.25      | 36.33     | 132,833    | Pfizer        | Mar 40     | 12,164    | XC          | 0.40 | 0.15  | 38.27 | 9,707  |        |
| SemiHTr   | Feb 42.50 | p 22,758  | XC         | 2.30            | 0.70      | 40.58     | 55,469     | Cisco         | Mar 25     | 11,453    | XC          | 0.85 | -1.45 | 24.08 | 2,877  |        |
| JDS Uni   | Mar 5     | p 21,315  | XC         | 0.30            | -0.15     | 4.75      | 47,388     | ATT Wrls      | Jul 10     | 11,056    | XC          | 0.30 | -0.05 | 11.13 | 65,795 |        |
| ATT Wrls  | Jan 05    | 10        | p 20,942   | XC              | 0.50      | -0.05     | 11.13      | 9,652         | Conseco    | Jun 15    | p 11,006    | XC   | 0.45  | 0.30  | 21.86  | 547    |
| Cisco   | Mar 27.50 | p 20,475  | XC         | 0.30            | -0.70     | 24.08     | 26,565     | Nasd100Tr     | Feb 39     | p 10,906  | XC          | 2.70 | 0.55  | 36.33 | 52,208 |        |
| Nasd100Tr   | Jan 06    | 35        | p 20,087   | XC              | 6.40      | -0.30     | 36.33      | 105,059       | Pfizer     | Mar 70    | 10,676      | XC   | 1.45  | 0.40  | 38.27  | 42,155 |
| Nasd100Tr   | Mar 38    | p 18,915  | XC         | 0.60            | -0.25     | 36.33     | 65,878     | WallMart      | Feb 55     | 10,613    | XC          | 1.10 | 0.15  | 55.39 | 47,678 |        |
| Intel   | Feb 30    | p 18,538  | XC         | 0.95            | -0.80     | 30.02     | 28,975     | DellInc       | Feb 32.50  | p 10,542  | XC          | 0.95 | 0.50  | 32.39 | 27,928 |        |
| JohnJn  | Feb 55    | p 17,424  | XC         | 0.55            | 0.25      | 54.48     | 18,120     | Cisco         | Feb 27.50  | p 10,526  | XC          | 3.40 | 1.75  | 24.08 | 40,102 |        |
| Volume & Open Interest Summaries  |           |           |            |                 |           |           |            |               |            |           |             |      |       |       |        |        |
| AMERICAN  |           |           |            | INTL SECURITIES |           |           |            | PACIFIC       |            |           |             |      |       |       |        |        |
| Call Vol:   | 507,923   | Open Int: | 45,122,029 | Call Vol:       | 1,006,254 | Open Int: | 51,961,968 | Call Vol:     | 234,706    | Open Int: | 54,541,910  |      |       |       |        |        |
| Put Vol:  | 435,069   | Open Int: | 34,155,216 | Put Vol:        | 704,231   | Open Int: | 41,896,347 | Put Vol:      | 159,733    | Open Int: | 43,234,469  |      |       |       |        |        |
| CHICAGO BOARD   |           |           |            | PHILADELPHIA    |           |           |            | TOTAL         |            |           |             |      |       |       |        |        |
| Call Vol:   | 803,225   | Open Int: | 59,856,094 | Call Vol:       | 424,568   | Open Int: | 43,397,779 | Call Vol:     | 2,976,676  |           |             |      |       |       |        |        |
| Put Vol:  | 647,213   | Open Int: | 49,257,435 | Put Vol:        | 263,640   | Open Int: | 33,690,351 | Put Vol:      | 2,209,886  |           |             |      |       |       |        |        |
| LEAPS-LONG TERM OPTIONS   |           |           |            |                 |           |           |            |               |            |           |             |      |       |       |        |        |
| OPTION/STRIKE   | EXP       | -CALL-    | -PUT-      | OPTION/STRIKE   | EXP       | -CALL-    | -PUT-      | OPTION/STRIKE | EXP        | -CALL-    | -PUT-       |      |       |       |        |        |
|   |           | VOL       | LAST       | VOL             | LAST      | VOL       | LAST       |               |            | VOL       | LAST        | VOL  |       |       |        |        |
| AT&T  | 15 Jan 05 | ...       | 4450       | 0.80            | 47.97     | 15 Jan 06 | ...        | 3500          | 0.45       | 5wstlrl   | 15 Jan 06   | 5561 |       |       |        |        |
|   | 19.14     | 17.50     | 315        | 2.80            | 3615      | 1.70      | 47.97      | 20 Jan 06     | ...        | 3690      | 0.75        | 2.90 |       |       |        |        |
|   | 19.14     | 20        | Jan 05     | 898             | 1.65      | 1414      | 3.20       | 47.97         | 40 Jan 06  | 2040      | 9.70        | 105  | 4.40  |       |        |        |
| ATT Wrls  | 10 Jan 05 | 430       | 1.70       | 20942           | 0.50      | 47.97     | 55 Jan 06  | 2245          | 3.40       | SunMicro  | 5 Jan 06    | 1784 |       |       |        |        |
| AMD   | 7.50      | Jan 06    | ...        | 7520            | 0.95      | 47.97     | 65 Jan 05  | 1450          | 0.40       | TenetHlt  | 7.50 Jan 06 | ...  |       |       |        |        |
|   | 14.13     | 17.50     | Jan 05     | 3109            | 2.05      | 47.97     | 70 Jan 05  | 107           | 3.60       | TimeWarr  | 15 Jan 05   | 185  |       |       |        |        |
| Amgen   | 70        | Jan 05    | 1431       | 4.90            | 47.97     | 70 Jan 05 | 1862       | 8             | 1515       | 17.19     | 15 Jan 06   | 24   |       |       |        |        |
| AaplMat   | 15 Jan 05 | 35        | 7.40       | 3040            | 0.85      | 47.97     | 75 Jan 05  | 2445          | 5.80       | 17.50     | 15 Jan 06   | 2389 |       |       |        |        |
|   | 21.38     | 17.50     | Jan 05     | 10              | 5.40      | 6290      | 1.45       | 47.97         | 80 Jan 05  | 1885      | 1.90        | 20   |       |       |        |        |
| Broadcom  | 40        | Jan 05    | 2255       | 6.30            | 120       | 7.30      | 47.97      | 85 Jan 05     | 3845       | 0.70      | 703         | 1.45 |       |       |        |        |
| Cisco   | 22.50     | Jan 05    | 804        | 4.30            | 2899      | 2.40      | 47.97      | 90 Jan 05     | 2023       | 1.10      | 260         | 1.75 |       |       |        |        |
|   | 24.08     | 25        | Jan 05     | 4397            | 3.10      | 633       | 3.60       | 47.97         | 95 Jan 05  | 1731      | 4.70        | 1956 | 5.30  |       |        |        |
|   | 24.08     | 25        | Jan 06     | 3272            | 4.60      | 228       | 4.60       | 47.97         | 100 Jan 05 | 1995      | 1.70        | 504  | 1.55  |       |        |        |
|   | 24.08     | 30        | Jan 05     | 5208            | 1.45      | 214       | 2.40       | 47.97         | 105 Jan 05 | 1766      | 2.15        | 24   | 4.10  |       |        |        |
|   | 24.08     | 30        | Jan 06     | 3147            | 2.75      | 40        | 7.20       | 47.97         | 110 Jan 05 | 1822      | 0.95        | 66   | 3.40  |       |        |        |
|   | 24.08     | 40        | Jan 06     | 1988            | 0.95      | ...       | ...        | 47.97         | 115 Jan 05 | 1766      | 2.15        | 24   | 4.10  |       |        |        |
| CompaQsc  | 25 Jan 05 | 1800      | 4.70       | 300             | 3.10      | 47.97     | 120 Jan 05 | 1731          | 4.70       | 1956      | 5.30        | ...  |       |       |        |        |
|   | 24.08     | 25        | Jan 06     | 3500            | 0.50      | 47.97     | 125 Jan 05 | 1731          | 4.70       | 1956      | 5.30        | ...  |       |       |        |        |
| ConfAfr   | 10        | Jan 06    | ...        | 1500            | 2.20      | 47.97     | 130 Jan 05 | 1731          | 4.70       | 1956      | 5.30        | ...  |       |       |        |        |
| Corning   | 12.50     | Jan 05    | 2622       | 1.90            | 160       | 2.20      | 47.97      | 135 Jan 05    | 1731       | 4.70      | 1956        | 5.30 | ...   |       |        |        |
|   | 11.99     | 12.50     | Jan 06     | 3942            | 3.30      | 34        | 3.10       | 47.97         | 140 Jan 05 | 1731      | 4.70        | 1956 | 5.30  | ...   |        |        |
| DJA Diam  | 116       | Jan 05    | 1500       | 1.85            | ...       | 47.97     | 145 Jan 05 | 1731          | 4.70       | 1956      | 5.30        | ...  |       |       |        |        |
| Dell Inc  | 35        | Jan 06    | 87         | 4.50            | 1623      | 5.90      | 47.97      | 150 Jan 05    | 1731       | 4.70      | 1956        | 5.30 | ...   |       |        |        |
| DukeEgy   | 22.50     | Jan 06    | 3457       | 2.05            | ...       | 47.97     | 155 Jan 05 | 1731          | 4.70       | 1956      | 5.30        | ...  |       |       |        |        |
| EIpsosCp  | 5         | Jan 05    | ...        | 3500            | 0.50      | 47.97     | 160 Jan 05 | 1731          | 4.70       | 1956      | 5.30        | ...  |       |       |        |        |
|   | 8.16      | 7.50      | Jan 05     | 5302            | 1.85      | 1207      | 1.25       | 47.97         | 165 Jan 05 | 1731      | 4.70        | 1956 | 5.30  | ...   |        |        |
| FordM   | 12.50     | Jan 05    | 2079       | 2.60            | 2         | 1.30      | 47.97      | 170 Jan 05    | 1731       | 4.70      | 1956        | 5.30 | ...   |       |        |        |
|   | 13.89     | 12.50     | Jan 06     | 2009            | 3.10      | 4011      | 1.90       | 47.97         | 175 Jan 05 | 1731      | 4.70        | 1956 | 5.30  | ...   |        |        |
|   | 13.89     | 15        | Jan 06     | 3527            | 2.10      | 20        | 3.20       | 47.97         | 180 Jan 05 | 1731      | 4.70        | 1956 | 5.30  | ...   |        |        |
|   | 13.89     | 20        | Jan 05     | 16006           | 0.35      | ...       | ...        | 47.97         | 185 Jan 05 | 1731      | 4.70        | 1956 | 5.30  | ...   |        |        |
| FredMac   | 60        | Jan 05    | 192        | 7.50            | 2550      | 5.30      | 47.97      | 190 Jan 05    | 1731       | 4.70      | 1956        | 5.30 | ...   |       |        |        |
| GenMotrs  | 10        | Jan 06    | ...        | 9100            | 0.20      | 47.97     | 195 Jan 05 | 1731          | 4.70       | 1956      | 5.30        | ...  |       |       |        |        |
|   |           |           |            |                 |           |           |            |               |            |           |             |      |       |       |        |        |
| Volume & Open Interest Summaries  |           |           |            |                 |           |           |            |               |            |           |             |      |       |       |        |        |
| CHICAGO BOARD   |           |           |            | INTL SECURITIES |           |           |            | PACIFIC       |            |           |             |      |       |       |        |        |
| Call Vol:   | 31,142    | Open Int: | 5,520,851  | Call Vol:       | 108,287   | Open Int: | 21,850,815 | Call Vol:     | 41,886     | Open Int: | 21,859,348  |      |       |       |        |        |
| Put Vol:  | 27,750    | Open Int: | 6,222,730  | Put Vol:        | 75,548    | Open Int: | 20,174,219 | Put Vol:      | 43,151     | Open Int: | 20,109,861  |      |       |       |        |        |
| TOTAL   |           |           |            | TOTAL           |           |           |            | TOTAL         |            |           |             |      |       |       |        |        |
| Call Vol:   | 181,315   |           |            | Call Vol:       | 181,315   |           |            | Call Vol:     | 146,449    |           |             |      |       |       |        |        |
| Put Vol:  | 146,449   |           |            | Put Vol:        | 146,449   |           |            | Put Vol:      | 146,449    |           |             |      |       |       |        |        |

资料来源：Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc. © 2004 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

样，成交量 (volume) 是指在这一天交易的合约总数。未平仓量 (open interest) 是指流通在外没有平仓的合约数。

## 8.6 交 易

以前，交易所需要提供一块大的开放场地，以便交易者见面并交易期权。现在，这种模式在发生变化。作为欧洲最大的衍生品交易所，欧洲期货交易所 (Eurex) 是全电子的，交易员们不用在现实中见面。<sup>1</sup> 国际证券交易所在 2000 年 5 月针对美国股权开设了全电子期权市场。芝加哥期权交易所有 CBOEdirect，芝加哥商品交易所有 GLOBEX。两个都是电子系统，和交易所场内的公开喊价市场同时运行着。

### 做市商

大多数期权交易所都采用做市商制度来进行交易。某一确定期权的做市商 (market maker) 实际上是指某个人，只要询价方向该人询价时，他或她都应报出该期权的买入价和卖出价这两个价格。买入价 (bid price) 是做市商准备买入期权的价格，卖出价 (offer price) 是做市商准备出售期权的价格。当做市商报出期权的买入价和卖出价时，他并不知道询价的人是要买入 (buy) 还是要卖出 (sell) 该期权。<sup>2</sup> 卖出价肯定会大于买入价，卖出价与买入价的差额就是买卖价差 (bid-offer spread)。交易所设定了买卖价差的上限。若期权的价格低于\$0.50，期权买卖价差不得超过\$0.25；期权的价格在\$0.50~\$10 之间，买卖价差不得超过\$0.50；期权的价格在\$10~\$20 之间，买卖价差不得超过\$0.75；期权的价格超过\$20，买卖价差不得超过\$1。

做市商的存在能够确保买卖指令可在某一价格立即执行而没有任何拖延。因此做市商增加了期权市场的流动性。做市商本身可以从买卖价差中获利。他们可以运用本书后面章节中将讨论的一些方法来对冲风险。

### 冲销指令

原来购买期权的投资者可以通过发出一个出售相同期权的冲销指令来结清他或她的原期权头寸。同样地，原来出售期权的投资者可以通过发出一个购买相同期权的冲销指令来结清他或她的原期权头寸。（在这一方面，期权市场与期货市场相似）。当某一项期权合约正在交易时，如果交易双方的投资者都没有冲销现有的期权头寸，则未平仓量增加 1 个；如果一个投资者正在冲销某个原有的头寸而

---

<sup>1</sup> Eurex 在芝加哥也建立了全电子交易所。

<sup>2</sup> 请注意本节中英文 bid 与 offer 的含义与 buy 和 sell 是有区别的——译者注

另一个投资者并不冲销原有头寸，则未平仓量保持不变；如果双方都在冲销现有的头寸，则未平仓量减少1个。

## 8.7 佣金

期权交易中传递到经纪人的指令类型和期货交易中的情况类似（参见第2.7节）。市价指令会立即执行；限价指令中指定某一特定的价格，并要求只有达到该价位或更为优惠的价位时才执行指令；等等。

对小额投资者来说，不同经纪人所收取的佣金很不一样。贴现经纪人收取的佣金通常要低于全面服务经纪人收取的佣金。收取的实际量通常包括固定成本加上交易金额的某个百分比。表8.2是某个贴现经纪人给出的佣金收取办法。按此办法，当期权价格为\$3时，购买8份期权合约的佣金成本是 $\$20 + (0.02 \times 2400) = \$68$ 。

如果需要交易一个新头寸来冲销原期权头寸的话，必须再支付一次佣金。如果执行期权，则该投资者支付的佣金数额就好像他或她发出买卖标的股票时所支付的佣金数额。这个值通常为股票价值的1%~2%。

考虑一个投资者，购买了一个执行价格为\$50、股票价格为\$49的看涨期权。我们假设期权价格是\$4.50，所以一个合约的成本是\$450。用表8.2给出的佣金支付办法，买卖一个合约总是收取\$30（因为对第一个合约，最大和最小的佣金数都是\$30）。假设股票价格上升了，当它达到\$60时执行了该期权。假设投资者为股票交易支付了1.5%的佣金，则当执行期权时的应付佣金为：

$$0.015 \times \$60 \times 100 = \$90$$

因此，支付的总佣金为\$120，该投资者的净利润为：

$$\$1\,000 - \$450 - \$120 = \$430$$

注意，如果该投资者可以按\$10价格出售期权而不是执行它的话，他或她将节省\$60的佣金（这是由于在我们的例子中，出售一个期权的应付佣金只有\$30）。通常，佣金制度倾向于让小额投资者出售期权而不是执行期权。

表8.2 某贴现经纪人的佣金收取办法

| 交易的美元量              | 佣金额*               |
|---------------------|--------------------|
| < \$2 500           | \$20 + 交易金额的2%     |
| 在\$2 500和\$10 000之间 | \$45 + 交易金额的1%     |
| > \$10 000          | \$120 + 交易金额的0.25% |

\* 最大佣金等于前5个合约每个合约\$30加上之后每个合约\$20。

最小佣金等于第一个合约\$30加上之后每个合约\$2。

在期权交易中（以及在股票交易中）的一个隐含成本是做市商的买卖价差。假设在我们刚考虑的例子中，在购买期权时刻，期权的买价是\$4.00 而卖价是\$4.50。我们可以合理地假设该期权的“公平”价格为买价和卖价的平均值，即\$4.25。在做市商体系下，买方的成本和卖方的成本就是这个公平价格与所支付价格之间的差值。本例中是每个期权\$0.25，即每个期权合约\$25。

## 8.8 保证金

在美国，购买股票时，投资者可以支付现金或使用保证金账户方式借款（后者被称为押金购买）。初始保证金通常为股票价值的 50%，维持保证金通常为股票价值的 25%。期权保证金账户的操作方式与投资者从事期货合约交易时保证金账户的操作方式一致（参见第 2 章）。

在购买有效期限小于 9 个月的看涨期权和看跌期权时，投资者必须支付全额期权费用。不允许投资者用保证金方式购买期权。这是由于期权实际上已经包含了一定的杠杆率。按保证金方式购买期权将使这一杠杆比率上升到难以接受的水平。对于有效期限大于 9 个月的期权，投资者可以用保证金方式购买期权，此时借款额最多可达到期权价格的 25%。

当投资者出售期权时，他或她必须在保证金账户中保持一定数额的资金。这是由于经纪人和交易所需要确保当期权行使时，该出售期权的投资者不会违约。保证金的大小取决于当时的环境。

### 出售无保护期权

首先考虑无保护期权的情况。无保护期权（naked option，也称裸期权）是指期权头寸中没有包含冲销该期权头寸的标的股票头寸。CBOE 对于出售（承约）无保护看涨期权要求的初始保证金是以下述两个计算结果中较大一个为准：

1. 出售期权的所有 100% 收入加上期权的标的股票价值的 20% 减去期权处于虚值状态的数额（如果有这一项的话）
2. 出售期权的所有 100% 收入加上期权的标的股票价值的 10%

出售（承约）无保护看跌期权要求的初始保证金是以下两个计算结果中较大的一个：

1. 出售期权的所有 100% 收入加上期权的标的股票价值的 20% 减去期权处于虚值状态的数额（如果有这一项的话）
2. 出售期权的所有 100% 收入加上期权的执行价格的 10%

对于覆盖面广的股票指数的期权，初始保证金计算中以 15% 替代 20%。这是因为股票指数比单个股票价格波动性要低。

**[例 8.3]** 某一投资者出售了 4 个无保护股票看涨期权。期权费为\$5，执行价格

为\$40，股票价格为\$38。由于期权处于虚值状态，期权的虚值为\$2。按以上第一种计算方法得出：

$$400 \times (5 + 0.2 \times 38 - 2) = \$4\,240$$

按以上第二种计算方法得出：

$$400 \times (5 + 0.1 \times 38) = \$3\,520$$

因此，初始保证金为\$4 240。注意，如果本例中是一个看跌期权的话，它处于实值状态，实值为\$2，要求的保证金将是：

$$400 \times (5 + 0.2 \times 38) = \$5\,040$$

在以上两种情况下，出售期权的收入都是\$2 000，可作为保证金账户中的一部分。

每天都重复进行与初始保证金类似的计算（但是用当前的市场价格取代销售所得）。当计算结果表明要求的保证金金额小于保证金账户的现有金额时，可以随时从保证金账户中提取资金。当计算结果表明客户明显需要追加保证金时，交易所将发出追加保证金通知。

## 其他规则

在第10章，我们将讲述诸如有保护看涨期权、保护性看跌期权、差价期权、组合期权、跨式期权和宽跨式期权等期权交易策略。CBOE对于这些期权交易策略有特殊的保证金要求规则。CBOE保证金指南中描述了这些规则，可在CBOE网站([www.cboe.com](http://www.cboe.com))找到该指南。

举特殊规则的一个例子，考虑投资者出售有保护看涨期权的情况。出售有保护看涨期权是指出售股票看涨期权时已持有该股票，以备将来交割。有保护看涨期权的风险远远低于无保护看涨期权，这是由于前者的最坏情况是投资者以低于市场的价格出售他已拥有的股票，出售有保护期权不需要保证金。投资者能够借入的量为 $0.5\min(S, K)$ ，不是通常的 $0.5S$ 。

## 8.9 期权清算公司

期权市场中期权清算公司(OCC)的功能与期货市场中期货清算所的功能很相似(参见第2章)。它确保期权的出售方按照合约的规定条款履行他或她的义务，同时它记录所有的多头和空头头寸状况。期权清算公司拥有一定数量的会员，并且所有的期权交易必须通过其会员来结清。如果经纪公司本身不是交易所期权清算公司的会员，它必须通过期权清算公司的会员结清其交易。会员必须满足资本的最低限额要求，并且必须提供特种基金，若有任一会员无法履行期权中的义务，则可使用该基金。

如前所述，期权的出售方在其经纪人那里开设一个保证金账户。<sup>3</sup>而经纪人在负责结清其交易的期权清算公司会员那里开设一个保证金账户，随之，期权清算公司会员必须在期权清算公司开设一个保证金账户。

### 期权的执行

当投资者想要执行某个期权时，投资者需要通知他或她的经纪人。经纪人接着通知负责结清其交易的期权清算公司会员。该会员于是向期权清算公司发出执行指令。期权清算公司随机地选择某个持有相同期权空头的会员。这个会员按事先订立的程序，选择某个特定的出售该期权的投资者。如果期权是看涨期权，则出售该期权的投资者须按执行价格出售股票。如果期权是看跌期权，则出售该期权的投资者须按执行价格购买股票。该投资者称为被指定者（assigned）。当某一期权履行合约时，则期权的未平仓量将减少 1。

在期权的到期日，所有实值期权均应执行，除非交易成本很高，抵消了期权的收益。如果到期日执行期权对其客户有利，一些经纪公司在到期日将自动为其客户执行期权。许多交易所也制定了一些规则，在到期时执行那些处于实值状态的期权。

### 8.10 法 规

期权市场有一系列规定。交易所和期权清算公司都有一些管理交易者行为的规则。另外，联邦和各州的监管当局也提出一些规则。通常，期权市场表现出某种自律，期权清算公司会员没有大的丑闻和违约行为，那么投资者对该市场运行的方式具有很强的信心。

证券交易委员会在联邦政府的层次上负责监管股票、股票指数、外汇和债券的期权市场。商品期货交易委员会负责监管期货期权的市场。主要的期权市场在伊利诺斯州和纽约州，它们对不可接受的交易行为也制定了自己的法规。

### 8.11 税 收

确定期权策略的税收含义比较复杂，对此不清楚的投资者应该咨询税务专家。对所有投资者（纳税人是职业交易员则例外）的一般规则是：对股票期权交易的损益与资本损益一样征税。在第 2.9 节我们讨论了美国资本损益的征税方式。当（a）期权到期了而没有执行或（b）期权头寸已经进行了平仓，则认为期权的双方

---

<sup>3</sup> 前一节中描述的保证金要求是 OCC 规定的最低保证金要求，经纪公司可能对其客户要求更高的保证金。但是，它不能要求更低的保证金。一些经纪公司根本不允许他们的小额客户承兑无保护期权。

实现了损益。如果期权执行了，那么期权的损益进入股票头寸，股票头寸平仓之时认为损益实现了。例如，若执行了看涨期权，那么我们认为多头方以执行价格加上原来看涨期权的价格购买了股票。于是这就作为计算这一方最终出售股票时盈亏的基础。类似地，空头方被认为以执行价格加上原来看涨期权的价格出售股票。如果执行了看跌期权，出售该期权的一方被认为以执行价格减去原来看跌期权的价格购买股票，购买该看跌期权的一方被认为以执行价格减去原来看跌期权的价格出售股票。

## 虚售规则

在美国期权交易的一个税务考虑是虚售规则 (wash sale rule)。为理解这条规则，想像一个在价格为\$60 时购买了某个股票并打算长期持有的某个投资者。如果股票价格下跌到\$40，该投资者也许临时出售了该股票然后立即重新购回该股票，从税务上说实现了\$20 的损失。为防止出现这类情况发生，税务当局规定当在出售股票 30 天期间内（即在销售前 30 天和销售后 30 天之间）购回时，出售股票的任何损失不能在税前扣减。同样地，在 61 天期间内，纳税人通过期权或类似合约获取股票时，任何损失也不能在税前扣减。因此，亏本出售一个股票并在 30 天内购买一个看涨期权引起的损失将不能在税前扣减。当纳税人是股票或证券交易员，损失保留在日常商业过程中时，不适用虚售规则。

## 推定出售

1997 年之前，在美国，如果纳税人持有一个证券多头的同时卖出充分相似的一个证券，则直到该空头进行平仓之后才认为实现了损益。这说明可以利用空头延迟确认需要付税的收益。1997 年的饶让抵免法案 (Tax Relief Act) 改变了这一情况。如果一位增值资产持有者执行下述的任何一个行动的时候，认为资产被“推定出售 (constructively sold)”：

1. 卖空相同的或充分相似的资产
2. 签订一个涉及交割相同的或充分相似的资产的期货或远期合约
3. 持有一个或多个头寸，充分抵消原资产的损失和收益的机会

必须注意到，只抵消损失的风险或者抵消收益的机会的交易不能被认为是推定出售。所以，持有股票多头的投资者可以买入该股票的实值看跌期权，这样就不会引起“推定出售”。

税务筹划人员有时使用期权来使得税务成本最小化和税务收益最大化（参见商业剪影 8.2）。在许多方面，税务当局已经建议立法以打击使用衍生证券避税的行为。在签署一个以税务为目的而进行的交易之前，财务主管或个人应详细考察如何使得其交易不要陷入立法变化的事务中，以及这种方法的成本有多大。

### 商业剪影 8.2 利用期权的税务计划

为了解释利用期权的税务计划策略，举一个简单的例子。假设国家 A 的税制中利率和红利的税率较低，资本收益的税率较高。而国家 B 的税制中，利率和红利的税率较高，资本收益的税率较低。因此，一家公司在国家 A 接收证券的收益，而在国家 B 接收资本收益是比较有利的。该公司也会希望在国家 A 确认资本损失，它可以用来冲抵其他项目的资本收益。可以如下的方式实现上述计划：在国家 A 安排一个子公司，它具有证券的法定所有权。在国家 B 安排一个子公司，它从国家 A 的子公司买入证券的看涨期权，其中期权执行价格等于证券的现价。在期权有效期内，证券的收益在国家 A 确认。如果证券价格急剧上升，期权会被执行，资本收益将在国家 B 实现。如果证券价格急剧下降，期权不会被执行，资本损失将在国家 A 实现。

## 8.12 权证、管理层股票期权和可转换债券

当一个股票的看涨期权被执行的时候，通常持有已经发行股票的看涨期权空头方将以执行价格把股票卖给多头方。期权中的标的股票的公司跟这些交易不发生关联。权证和管理层股票期权都是看涨期权，但两者有一些不同之处。它们都是由公司发行的，标的股票就是该公司股票。两种期权被执行的时候，公司发行更多股票并以执行价格把股票出售给期权的持有者。所以权证或管理层股票期权被执行的时候，会增加流通在外的公司股份。

认购权证 (warrant) 是看涨期权，当公司发行债券的时候，经常一起发行权证，以便吸引投资者。一般来说，权证的期限可以持续几年。权证被发行之后，其交易有时会独立于相应债券（初始附加该权证的债券）的交易。

管理层股票期权 (executive stock option) 是公司给其高管人员发行的看涨期权，以便激励公司高管人员们为公司股东权益最大化而努力工作（参见商业剪影 8.3）。对于管理层股票期权应不应该在公司损益表中被记为一项支出，近期存在很多争论。一些公司及其会计师们认为没有非常可靠的理由一定要把它记入支出。期权专家们认为相比财务报表中的其他项目，股票期权还是可以被精确估值的。权证和管理层股票期权的定价问题将在第 13 章讨论。

可转换债券 (convertible bond) 是公司发行的、在一般债券上附加期权的一种债务工具。持有者有权在将来的特定时期内根据某个事先确定的转换比例将可转换债券转换成该发行公司的股票。和权证、管理层股票期权一样，可转换债券的执行会增加公司发行的股份。第 21 章中将更详细讨论可转换债券。

## 8.13 场外交易的期权

本章着重讲述了场内交易期权。从 20 世纪 80 年代初开始，期权的场外交易

### 商业剪影 8.3 管理层股票期权

20世纪90年代到21世纪初，股票期权逐渐成为广泛流行的管理层及其他雇员的补偿手段。通常给高管人员授予特定数量的基于他们公司股票的看涨期权。在授予日该期权一般在两平状态。期权的有效期一般长达10年或更长，锁定期限一般最高长达5年。锁定期限内不能执行期权，但是锁定期限结束后可以在任一时刻执行期权。如果锁定期限内主管人员离开他的公司，这些期权就失去效力。如果主管人员在锁定期限结束后离开公司，实值状态的期权会被立即执行，而虚值期权会失去效力。高管人员不能把这些期权出售给其他人。

管理层股票期权具有吸引力的一个原因是会计处理的优惠。在美国和其他国家，损益表中补偿成本一般以内在价值记入。因为绝大多数管理层股票期权在发行的时候处于两平状态，补偿成本一般为零。1995年会计准则FAS123颁布。它鼓励（但没有要求）公司把期权的“公平价格”作为支出记入损益表中（如果公平价格没有作为支出记入损益表中，公司会计报表的附注中应该宣布期权的公平价格）。起初，很少公司自愿把股票期权记入支出，但是21世纪初，随着发行管理层股票的这些公司的透明度提高，很多公司开始把股票期权记入支出。

现在，新的会计准则要求把股票期权以其公平价格记入损益表中的支出项目。2004年2月国际会计准则委员会发布了IAS2，其中要求公司从2005年开始把股票期权记为支出项目。2004年12月，FAS123被修订，要求从2005年开始美国公司应该把管理层股票期权记为支出项目。

相比类似的场内或场外交易的期权，管理层股票期权一般执行得更早，因为高管人员不能卖出这些期权。如果一位主管人员想从这些期权中得到现金收益，他应该执行期权并卖出股票。因此，管理层股票期权的估值并不像普通期权估值那么简单。它的估值过程需要知道高管人员的提前执行行为模式。

越来越重要，现在，场外市场规模大于场内市场。第1章中提过，在场外市场，金融机构，公司财务主管和基金经理通过电话进行交易。期权的标的资产种类非常多，外汇期权和利率期权的场外交易尤为活跃。场外市场的一个主要缺点是出售期权的一方可能会违约，也就是说购买期权一方暴露于一些信用风险中。市场参与者们正在采取一系列克服信用风险的方法，比如要求对方提供担保品等。第2.4节中对此已有过讨论。

场外市场中，金融机构经常根据客户的需要订立期权合约。这通常涉及选择和场内交易的期权不一样的到期日、执行价格以及合约规模。而且，期权的设计本身也和标准化的看涨期权和看跌期权不一样。这样的期权被称为奇异期权（exotic option）。第22章中将讲述一些不同类型的奇异期权。

## 小 结

有两种基本的期权类型：看涨期权和看跌期权。看涨期权赋予持有者在某一时间以某一确定价格购买一项资产的权利。看跌期权赋予持有者在某一时间以某一确定的价格出售一项资产的权利。期权市场中的头寸有以下四种：看涨期权多头、看涨期权空头、看跌期权多头以及看跌期权空头。持有期权空头头寸也被称为出售或承约期权合约。现在，期权的标的资产有股票、股票指数、外汇、期货合约和一些其他资产。

交易所必须详细制定所交易的期权合约的条款。尤其是必须详细规定期权合约的大小、确切的到期时间和执行价格。在美国，一份股票期权合约赋予期权持有者买卖 100 股股票的权利。一个股票期权合约在到期月第 3 个星期五之后紧随的星期六中部时间下午 10:59 到期。在任一时间有多种不同到期月的期权交易。执行价格的变动间隔可以是 \$2.5、\$5 或 \$10，取决于股票价格。新的期权交易之时，执行价格通常接近于股票价格。

股票期权合约的条款不随现金红利而调整，但要随股票红利、股票分割和配股而调整。调整的目的是使合约买卖双方的头寸保持不变。

大多数期权交易所都使用做市商制度。做市商同时报出买入价（他或她准备买人的价格）和卖出价（他或她准备出售的价格）。做市商提高了市场的流动性，并能确保在执行市价订单时没有任何延迟。做市商自身也从买卖价差（即买价和卖价之差）中获利。交易所制定了买卖价差的上限。

期权的出售方具有潜在的负债，因此要求他们在经纪人那里保持一定的保证金。如果经纪人不是期权清算公司会员，则须在期权清算公司会员公司那里开设一个保证金账户。该会员公司在期权清算公司那里开设一个保证金账户。期权清算公司负责记录所有的流通的期权合约、处理执行指令等。

不是所有的期权交易都是在场内进行的。很多期权在场外市场通过电话进行交易。场外市场的一个优点是金融机构可以根据公司财务主管或基金经理的特殊需要订立期权合约。

## 参考读物

- Arzac, E. R. "PERCs, DECs, and Other Mandatory Convertibles," *Journal of Applied Corporate Finance*, 10, 1 (1997): 54–63.
- Core, J. E., and W. R. Guay. "Stock Option Plans for Non-executive Employees," *Journal of Financial Economics*, 61, 2 (2001): 253–87.
- Cox, J. C., and M. Rubinstein. *Options Markets*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1985.
- Hull, J. C., and A. White, "How to Value Employee Stock Options," *Financial Analysts Journal*, 60, 1 (January/February 2004): 114–19.
- Rubinstein, M. "On the Accounting Valuation of Employee Stock Options," *Journal of Derivatives*, 3, 1 (Fall 1995): 8–24.

## 问题和习题

- 8.1 投资者购买了一张执行价格为 \$40，期权费为 \$3 的欧式看跌期权，现在股价为 \$42。问该投资者什么情况下盈利？什么情况下会执行期权？画图描述期权到期时其收益和

到期之时股价之间的关系。

- 8.2 投资者出售了一张执行价格为 \$50，期权费为\$4 的欧式看涨期权，现在股价为\$47。问该投资者什么情况下盈利？什么情况下会执行期权？画图描述期权到期时其收益和到期之时股价之间的关系。
- 8.3 投资者出售了有效期为  $T$ 、执行价格为  $K$  的欧式看涨期权，并买入了相同有效期和执行价格的看跌期权，问其头寸如何？
- 8.4 请说明为什么经纪人向期权卖方而不是期权买方收取保证金？
- 8.5 某个股票期权的循环周期为 2 月份、5 月份、8 月份、11 月份。在 (a) 4 月 1 日和 (b) 5 月 30 日，哪几个月份的期权可以交易？
- 8.6 一家公司宣布 2 对 1 的股票分割。请解释执行价格为\$60 的看涨期权的条款如何变化？
- 8.7 请解释管理层股票期权与普通的场内或场外交易美式股票期权的不同之处。
- 8.8 一家公司的财务主管需要利用外汇期权进行套期保值。请给出在 (a) 费城证券交易所以及 (b) OTC 市场交易的正反意见。
- 8.9 假设一个欧式看涨期权合约的价格为\$5.00，该合约赋予按\$100.00 买入一股的权利，持有者在到期之前不能执行。什么情况下，该期权的持有者会获得收益？什么情况下，期权会被执行？画图描述期权多头头寸的收益与到期之时股票价格之间的关系。
- 8.10 假设一个欧式看跌期权合约的价格为\$8，该合约赋予按\$60 出售一股的权利，持有者在到期之前不能执行。什么情况下，该期权的卖方（即空头方）会获得收益？什么情况下，期权会被执行？画图描述期权空头头寸的收益与到期之时股票价格之间的关系。
- 8.11 描述如下的证券组合的最终价值：某个资产的远期合约多头和基于该资产的欧式看跌期权多头，远期和期权的到期日相同，期权的执行价格和证券组合建立之时的资产的远期价格相同。请证明执行价格和有效期相同的欧式看跌期权和欧式看涨期权的价值相同。
- 8.12 一位交易员买入一个执行价格为\$45 的看涨期权和一个执行价格为\$40 的看跌期权。两个期权的有效期间相同。看涨期权的价格为\$3，看跌期权的价格为\$4。画图描述该交易员的收益与资产价格之间的关系。
- 8.13 请解释为什么两个相同资产、相同执行价格和相同执行日的美式期权和欧式期权中，美式期权更贵一些。
- 8.14 请解释为什么一个美式期权的价值大于等于它的内在价值。
- 8.15 请解释出售一个看跌期权与购买一个看涨期权的区别。
- 8.16 一家公司的财务主管尝试选择期权或远期合约对公司外汇汇率风险进行套期保值。请说明两种方法各自的优缺点。
- 8.17 考虑交易所内交易的一个看涨期权合约，4 个月后到期，可以执行价格\$40，购买 500 股。请说明当如下情况出现时：
  - (a) 10% 的股票红利。
  - (b) 10% 的现金红利。
  - (c) 4 对 1 的股票分割。
 期权合约条款应如何变化？

- 8.18 “如果一种股票的期权大都为实值期权，那么说明股票的价格在最近几个月中上升得很快”。请评价这句话。
- 8.19 一笔未预期的现金红利对 (a) 看涨期权的价格 (b) 看跌期权的价格分别有何影响？
- 8.20 通用汽车公司的股票期权的周期为 3 月份、6 月份、9 月份、12 月份。在 (a) 3 月 1 日；(b) 6 月 30 日；(c) 8 月 5 日分别有哪几种期权在进行交易？
- 8.21 请解释为什么做市商的买入卖出价差代表了期权投资者的实际费用？
- 8.22 一位美国投资者出售了 5 份无保护看涨期权。期权价格为 \$3.50，执行价格为 \$60.00，股票价格为 \$57.00。要交多少初始保证金？

### 课后练习

- 8.23 某个股票的价格为 \$40。执行价格为 \$30 的该股票的 1 年期欧式看跌期权的报价为 \$7，执行价格为 \$50 的该股票的 1 年期欧式看涨期权的报价为 \$5。假设一位投资者购买 100 股，出售 100 份看涨期权，购买 100 份看跌期权。画图描述该投资者的损益与明年股票价格之间的关系。当投资者买入 100 股，出售 200 份看涨期权，买入 200 份看跌期权的时候，再给出你的答案。
- 8.24 “一家公司的表现比其他竞争者差，但是股票市场上涨，则主管人员还是可以从他们持有的管理层股票期权中获得利润。这是非常没有道理的。”请讨论这个观点。把这一观点考虑进来，你如何对传统管理层股票期权计划进行改进？
- 8.25 使用 DerivaGem 软件估值一个不支付红利股票的美式看跌期权。其中，股价为 \$30，执行价格为 \$32，无风险利率为 5%，波动率为 30%，到期期限为 1.5 年。（选择“双值美式”作为“期权种类”，使用 50 个时间步。）
- (a) 该期权的内在价值为多少？  
 (b) 该期权的时间价值为多少？  
 (c) 零时间价值表示什么？一个零时间价值的期权的价值为多少？  
 (d) 利用试错法，计算为了使该期权的时间价值等于零，股票价格应该低到多少？
- 8.26 2004 年 7 月 20 日，令大家惊讶的是，微软宣告了 \$3 红利。除权日为 2004 年 11 月 17 日，支付日为 2004 年 12 月 2 日。7 月 20 日的微软股价为 \$28。雇员股票期权的条款被调整，执行价格下降到：

$$\text{原执行价格} \times \frac{\text{收盘价} - \$3.00}{\text{收盘价}}$$

经过调整，流通在外的每份股票期权的标的股份数额上升到：

$$\text{分红前原股份数额} \times \frac{\text{收盘价}}{\text{收盘价} - \$3.00}$$

“收盘价”指除权日之前的最后一个交易日，一股微软普通股的官方 NASDAQ 收盘价。请评估这一调整。将上述调整方法和交易所对大额红利进行的调整方法（参见商业剪影 8.1）进行比较。

# 股票期权价格的性质

在本章里我们讨论影响股票期权价格的一些因素。我们利用一些不同的套利理论探讨欧式期权价格、美式期权价格和标的资产价格之间的关系。其中，最为重要的一个关系是欧式看涨期权价格和欧式看跌期权价格之间的平价关系。

本章中也讨论美式期权是否应该提前执行。我们可证明，到期日之前提前执行不付红利股票美式看涨期权决不是最佳选择，但是在某些条件下，提前执行基于这样一个股票的美式看跌期权则是最佳的。

## 9.1 影响期权价格的因素

有 6 种因素影响股票期权的价格：

1. 股票的现价,  $S_0$
2. 执行价格,  $K$
3. 到期期限,  $T$
4. 股票价格的波动率,  $\sigma$
5. 无风险利率,  $r$
6. 期权有效期内预计发放的红利

在本节中，我们考虑当这些因素之一发生变化而其他因素保持不变时，期权价格的变化。表 9.1 对此做了总结。

图 9.1 与图 9.2 描述了当  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 5\%$ p.a.,  $\sigma = 30\%$ p.a.,  $T = 1$  年, 不支付红利的情况下, 欧式看涨期权价格和看跌期权价格与前 5 种因素之间的关系。在这种情况下, 看涨期权的价格为 7.116, 看跌期权的价格为 4.677。

### 股票价格和执行价格

如果看涨期权在将来某一时间执行，则其损益为股票价格与执行价格的差额。随着股票价格的上升，看涨期权的价值也就越大；随着执行价格的上升，看涨期权的价值就越小。对于看跌期权来说，其收益为执行价格与股票价格的差额。因此，看跌期权的价值变化刚好与看涨期权相反。当股票价格上升时，看跌期权的

表 9.1 一个变量增加而其他变量保持不变时对股票期权价格的影响\*

| 变 量   | 欧式看涨期权 | 欧式看跌期权 | 美式看涨期权 | 美式看跌期权 |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| 股票价格  | +      | -      | +      | -      |
| 执行价格  | -      | +      | -      | +      |
| 到期期限  | ?      | ?      | +      | +      |
| 波动率   | +      | +      | +      | +      |
| 无风险利率 | +      | -      | +      | -      |
| 红 利   | -      | +      | -      | +      |

\* + 表示变量的增加会引起期权价格上升

- 表示变量的增加会引起期权价格下降

? 表示两者之间的关系是不确定的

价值下降；当执行价格上升时，看跌期权的价值上升。图 9.1 中 (a) ~ (d) 解释了看跌期权价格与看涨期权价格如何随着股票价格与执行价格的变动而变化。

## 到期期限

以下考虑到期期限的影响。当期权的到期期限增加时，美式看跌期权和看涨期权的价值都会增加。为了说明这一点，考虑其他条件相同但只有到期日不同的两个期权，则有效期长的期权其执行的机会不仅包含了有效期短的那个期权的所有执行机会，而且它的获利机会会更多。因此，有效期长的期权的价值总是大于或等于有效期短的期权价值。

随着有效期的增加，欧式看跌期权和欧式看涨期权的价值通常增加 [参见图 9.1 中 (e)、(f)]，但并不总是这样。有效期长的期权只能在其到期日执行。考虑基于同一股票的两个欧式看涨期权，一个到期期限为 1 个月，另一个到期期限为 2 个月。假定预计在 6 周后将支付大量的红利，红利会使股票价格下降。这就有可能使有效期短的期权的价值超过有效期长的期权的价值。

## 波动率

在第 13 章中将对波动率做精确的定义。简单地说，股票价格的波动率是用来衡量未来股票价格变动的不确定性。随着波动率的增加，股票价格上升很高或下降很低的机会也随着增加。对于股票的持有者来说，这两种变动趋势将互相抵消。但对于看涨期权或看跌期权的持有者来说，则不是这样。看涨期权的持有者从股价上升中获利，但当股价下跌时，由于他或她的最大损失就是期权费，所以他或她仅有有限的损失。与此类似，看跌期权的持有者从股价下跌中获利，但当股价上升时，仅有有限的损失。因此，随着波动率的增加，看涨期权和看跌期权的价值都会增加 [参见图 9.2 中 (a)、(b)]。

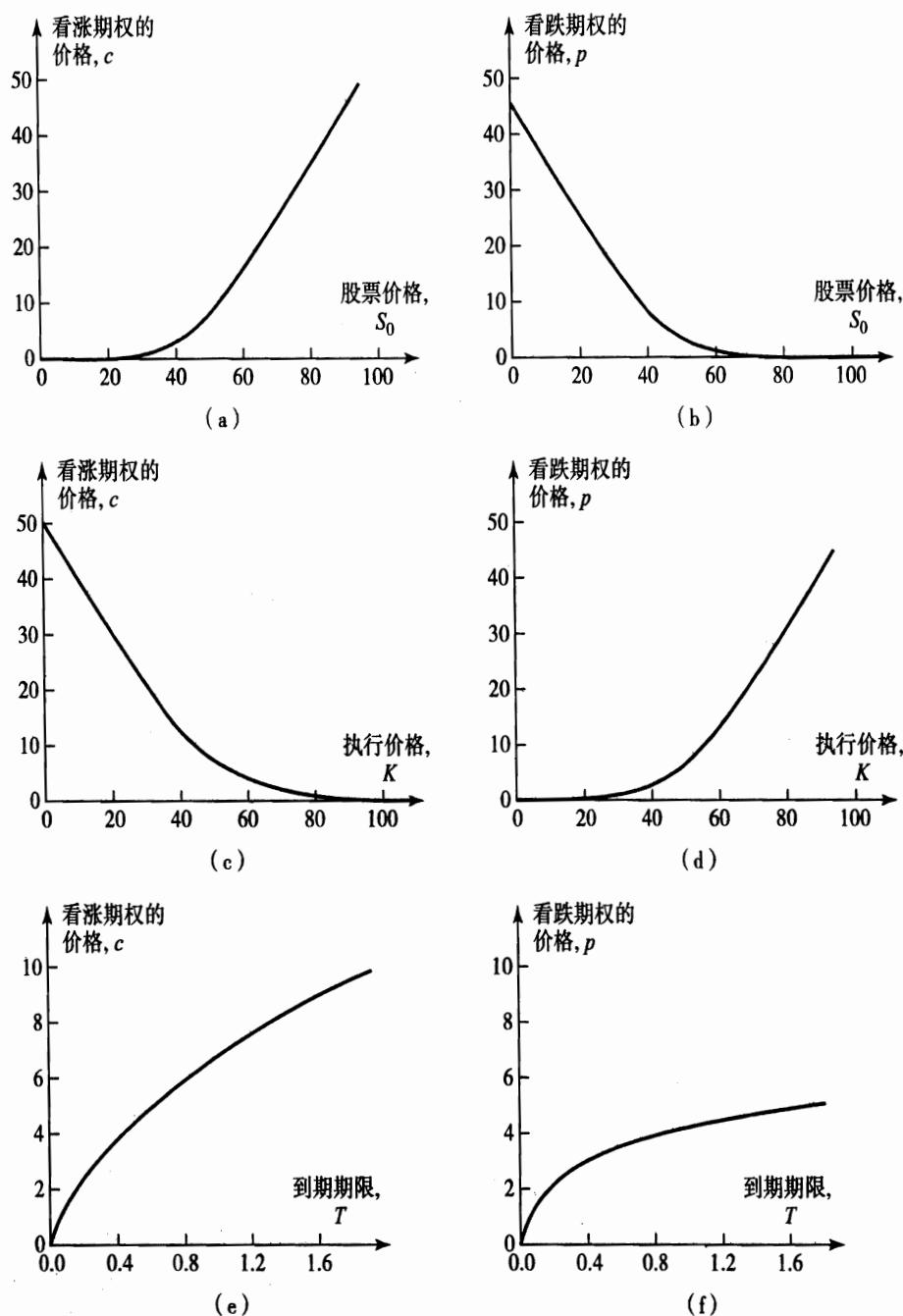


图 9.1 股票价格、执行价格和到期期限的变化对期权价格产生的影响。其中,  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 5\%$ ,  $\sigma = 30\%$  以及  $T = 1$

### 无风险利率

无风险利率对期权价格的影响则不是那么直接。当整个经济中的利率增加时,股票价格的预期增长率也倾向于增加。然而,期权持有者收到的未来现金流的现值将减少。这两种影响都将增加看涨期权的价值,而将减少看跌期权的价值 [参见图 9.2 中 (c)、(d)]。

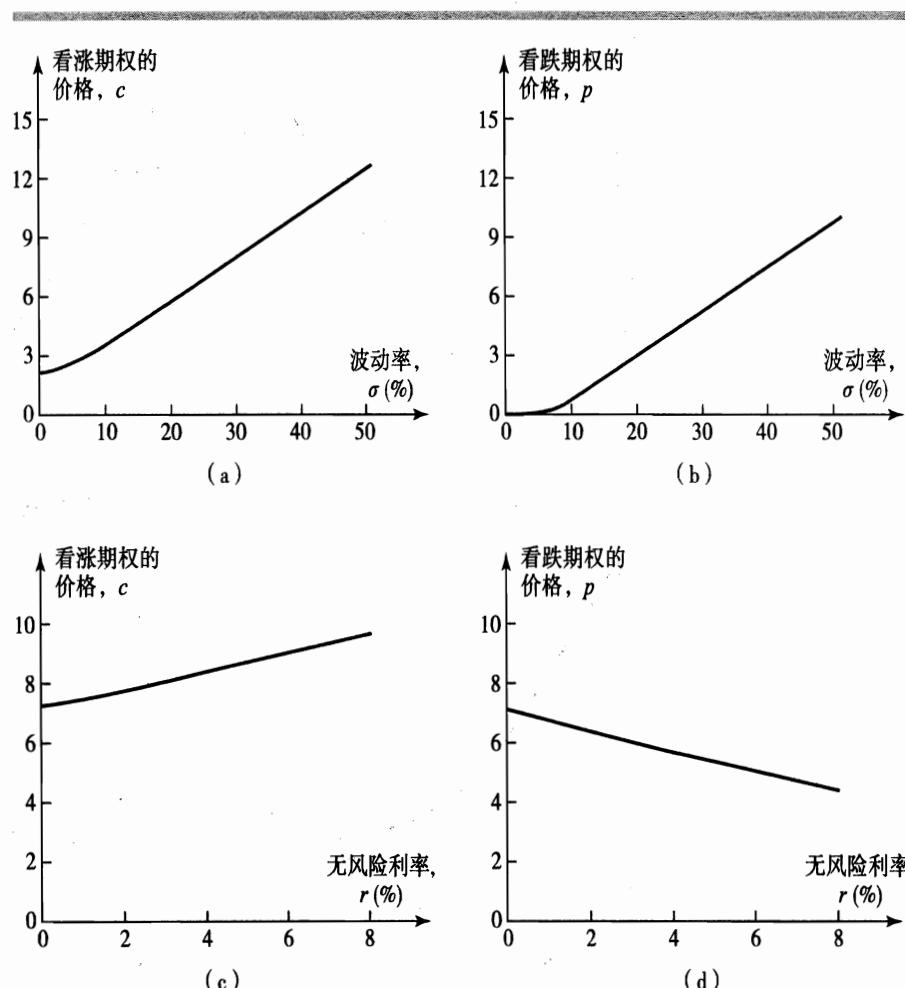


图 9.2 波动率和无风险利率的变化对期权价格产生的影响。其中,  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 5\%$ ,  $\sigma = 30\%$ ,  $T = 1$

一个值得强调的重要假设是, 只有利率可变而其他变量保持不变。特别要指出来的是, 我们假定了利率变化时, 股票价格不变。但现实中, 当利率上升(或下降)时, 股票价格也将下降(或上升)。考虑利率增加和随之而来的股价降低的净效应, 看涨期权的价值可能减少而看跌期权的价值可能增加。类似地, 利率降低和随之而来的股价增加的净效应, 也可能出现看涨期权的价值增加而看跌期权的价值减少。

### 未来的红利

在除息日后, 红利将减少股票的价格。对于看涨期权的价值来说这是一个坏消息, 而对于看跌期权的价值来说则是一个好消息。因此看涨期权的价值与预期未来红利的大小成反向变动, 而看跌期权的价值与预期未来红利的大小成正向变动。

## 9.2 假设和符号

本章中我们将做出的假定与第5章我们推导远期价格和期货价格做出的假定类似。即假定存在一些市场参与者，如大型投资银行，满足下列条件：

1. 没有交易费用
2. 所有交易利润（减去交易损失后）具有相同的税率
3. 可以按无风险利率借入和贷出资金

一旦套利机会出现，我们假定这些市场参与者随时准备利用这些套利机会。正如我们在第1章和第5章中讨论的那样，这意味着任何可利用的套利机会将很快消失。为了分析问题，我们可以合理地假定不存在套利机会。

我们将使用如下的符号定义：

- $S_0$ : 股票现价  
 $K$ : 期权的执行价格  
 $T$ : 期权的到期期限  
 $S_T$ : 到期时刻股票的价格  
 $r$ : 在  $T$  时刻到期的投资的连续复利的无风险利率  
 $C$ : 购买一股股票的美式看涨期权的价值  
 $P$ : 出售一股股票的美式看跌期权的价值  
 $c$ : 购买一股股票的欧式看涨期权的价值  
 $p$ : 出售一股股票的欧式看跌期权的价值

注意： $r$  是名义利率，不是实际利率。我们可以假设  $r > 0$ 。否则，无风险投资与持有现金相比，将不具有任何优势（事实上，如果  $r < 0$ ，持有现金比无风险投资更好）。

## 9.3 期权价格的上下限

在这一部分中，我们推导出期权价格的上下限。这些上下限约束条件并不需要对前面第9.1节中提到的一些因素做任何特别的假定（除  $r > 0$  外）。如果期权的价格超过其上限或低于其下限，则套利就有利可图。

### 期权价格的上限

美式看涨期权或欧式看涨期权的持有者有权以某一确定的价格购买一股股票。在任何情况下，期权的价值都不会超过股票的价值。因此，股票价格是期权价格的上限：

$$c \leq S_0 \text{ 和 } C \leq S_0$$

如果这些关系不成立，则套利者购买股票并卖出看涨期权，可轻易地获得无风险利润。

美式看跌期权或欧式看跌期权的持有者有权以  $K$  的价格出售一股股票。无论股票价格变得多么低，期权的价值都不会超过  $K$ 。因此：

$$p \leq K \text{ 和 } P \leq K$$

对于欧式期权来说，我们知道在  $T$  时刻，期权的价值都不会超过  $K$ 。因此现在期权的价值不会超过  $K$  的现值：

$$p \leq Ke^{-rT}$$

如果这一关系不成立，则套利者可出售看跌期权，并将所得收入以无风险利率进行投资，获得无风险收益。

### 不付红利的看涨期权的下限

基于不付红利股票的欧式看涨期权的下限是：

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

我们首先用数字例子来说明这点，然后给出比较正式的证明。

假定  $S_0 = \$20$ ,  $K = \$18$ ,  $r = 10\%/\text{年}$ ,  $T = 1$  年。在本例中：

$$S_0 - Ke^{-rT} = 20 - 18e^{-0.1} = \$3.71$$

即 \$3.71。考虑欧式看涨期权的价格等于 \$3.00 的情况，即小于理论上的最小值 \$3.71。套利者可以购买看涨期权并卖空股票。则现金流为 \$20.00 - \$3.00 = \$17.00。如果 \$17.00 以年利率 10% 投资 1 年，则 \$17.00 1 年后将变为  $17e^{0.1} = \$18.79$ 。在这一年的年末，期权到期。如果股票价格高于 \$18，套利者以 \$18 的价格执行期权，并将股票的空头平仓，则可获利：

$$\$18.79 - \$18.00 = \$0.79$$

如果股票价格低于 \$18，则套利者从市场上购买股票并将股票空头平仓。套利者甚至可获得更高的利润。例如，如果股票价格为 \$17，则套利者的盈利为：

$$\$18.79 - \$17.00 = \$1.79$$

为了给出正式的证明，我们考虑下面两个组合。

组合 A：一个欧式看涨期权加上金额为  $Ke^{-rT}$  的现金。

组合 B：一股股票。

在组合 A 中，现金如果按无风险利率来投资，则在  $T$  时刻将变为  $K$ 。如果  $S_T > K$ ，在  $T$  时刻应使用现金执行看涨期权，购买一股股票，则组合 A 的价值为到期时一股股票的价值  $S_T$ 。如果  $S_T < K$ ，期权到期价值为零，则组合 A 的价值就是持有现金的价值  $K$ 。因此在  $T$  时刻，组合 A 的价值为：

$$\max(S_T, K)$$

在  $T$  时刻组合 B 的价值为  $S_T$ 。因此，在  $T$  时刻期权到期时组合 A 的价值总是不低于  $T$  时刻组合 B 的价值。因此，在不存在套利机会的情况下，下列等式是成立的：

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0$$

即

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

由于对于一个看涨期权来说，可能发生的最坏情况是期权到期时价值为零，这意味着期权的价值必须为正值，即  $c \geq 0$ 。因此

$$c \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \quad (9.1)$$

**[例 9.1]** 考虑一个不付红利的股票的欧式看涨期权，此时股票价格为 \$51 时，执行价格为 \$50，距到期日有 6 个月，无风险年利率为 12%。即在本例中， $S_0 = \$51$ ， $K = \$50$ ， $T = 0.5$ ， $r = 0.12$ 。根据等式 (9.1)，该期权价格的下限为  $S_0 - Ke^{-rT}$ ，即

$$51 - 50e^{-0.12 \times 0.5} = \$3.91$$

### 不付红利的欧式看跌期权的下限

对于一个不付红利股票的欧式看跌期权来说，其价格的下限为：

$$Ke^{-rT} - S_0$$

我们仍先用一个数字例子来说明，接着给出较正式的证明。

假定  $S_0 = \$37$ ， $K = \$40$ ， $r = 5\%$ /年， $T = 0.5$  年。在这种情况下：

$$Ke^{-rT} - S_0 = 40e^{-0.05 \times 0.5} - 37 = \$2.01$$

即 \$2.01。假设欧式看跌期权价格为 \$1.00 时，即小于理论上的最小值 \$2.01。套利者可借入 \$38.00，期限 6 个月，同时用所借资金购买看跌期权和股票。在 6 个月末，套利者将支付  $38e^{0.05 \times 0.5} = \$38.96$ 。如果股票价格低于 \$40.00，套利者执行期权以 \$40.00 卖出股票，归还所借款项本金和利息，其获利为：

$$\$40.00 - \$38.96 = \$1.04$$

如果股票价格高于 \$40，套利者放弃期权，卖出股票并偿付所借款项本金和利息，甚至可获得更高的利润。例如，如果股票价格为 \$42.00，则套利者的利润为：

$$\$42.00 - \$38.96 = \$3.04$$

为了给出正式的证明，我们考虑下面两个组合。

组合 C：一个欧式看跌期权加上一股股票

组合 D：金额为  $Ke^{-rT}$  的现金

在组合 C 中，如果  $S_T < K$ ，在  $T$  时刻的期权将被执行，该组合的价值为出售股票得到的现金  $K$ 。如果  $S_T > K$ ，在  $T$  时刻看跌期权到期价值为零，该组合的价值为持有股票的价值  $S_T$ 。因此，组合 C 在  $T$  时刻的价值为：

$$\max(S_T, K)$$

在组合 D 中，假定现金按无风险利率进行投资，则在  $T$  时刻的价值为现金  $K$ 。因此，在  $T$  时刻组合 C 的价值通常不低于组合 D 的价值，并且有时组合 C 的价值会高于组合 D 的价值。在不存在套利机会时，组合 C 的现在价值一定高于组合 D 的现在价值。因此：

$$p + S_0 \geq K e^{-rT}$$

即

$$p \geq K e^{-rT} - S_0$$

由于对于一个看跌期权来说，可能发生的最坏情况是期权到期价值为零，所以期权的价值必须为正值。这意味着：

$$p \geq \max(K e^{-rT} - S_0, 0) \quad (9.2)$$

**[例 9.2]** 考虑一个不付红利股票的欧式看跌期权，股票价格为 \$38，执行价格为 \$40，距到期日还有 3 个月，无风险年利率为 10%。即在本例中， $S_0 = \$38$ ， $K = \$40$ ， $T = 0.25$ ， $r = 0.10$ 。根据等式 (9.2)，期权价格的下限为  $K e^{-rT} - S_0$ ，即：

$$40e^{-0.1 \times 0.25} - 38 = \$1.01$$

## 9.4 看跌期权与看涨期权的平价关系

现在我们要推导出  $p$  和  $c$  之间的重要关系式。考虑上一个章节所述的两个组合：

组合 A：一个欧式看涨期权加上金额为  $K e^{-rT}$  的现金

组合 C：一个欧式看跌期权加上一股股票

在期权到期时，两个组合的价值均为：

$$\max(S_T, K)$$

由于是欧式期权，所以在到期日前不能提前执行。因此该组合今天也必须具有相等的价值。这就是说：

$$c + K e^{-rT} = p + S_0 \quad (9.3)$$

这就是所谓的欧式看涨期权价格和看跌期权价格之间的平价关系 (put-call parity)。它表明具有某一确定执行价格和到期日的欧式看涨期权的价值，可根据相同执行价格和到期日的欧式看跌期权的价值推导出来，反之亦然。

如果等式(9.3)不成立,则存在套利机会。假定股票价格为\$31,执行价格为\$30,无风险年利率为10%,3个月期的欧式看涨期权的价格为\$3,3个月期的欧式看跌期权的价格为\$2.25。在这种情况下,

$$c + Ke^{-rT} = 3 + 30e^{-0.1 \times 3/12} = \$32.26$$

并且

$$p + S_0 = 2.25 + 31 = \$33.25$$

相对于组合A来说,组合C被高估了。正确的套利策略是买入组合A中的证券并卖空组合C中的证券。这包括买入看涨期权、卖空看跌期权和股票。当前这一策略产生如下正的现金流:

$$-3 + 2.25 + 31 = \$30.25$$

将这笔现金流按无风险利率进行投资时,在3个月后,这个现金流增加为:

$$30.25e^{0.1 \times 0.25} = \$31.02$$

如果在期权到期日股票的价格高于\$30,将执行看涨期权。如果股价低于\$30,看跌期权的空头将被执行。在任何一种情况下,投资者均按\$30购买一股股票。该股票可用来平仓原空头股票。因此净利为:

$$\$31.02 - \$30.00 = \$1.02$$

对另一种情况,如果假定看涨期权的价格为\$3而看跌期权的价格为\$1。因此:

$$c + Ke^{-rT} = 3 + 30e^{-0.1 \times 3/12} = \$32.26$$

并且

$$p + S_0 = 1 + 31 = \$32.00$$

相对于组合C来说,组合A被高估了。套利者可以卖空组合A中的证券并买入组合C中的证券来锁定利润。这个策略包括卖出看涨期权、买入看跌期权和股票。这一策略的初始投资为:

$$\$31 + \$1 - \$3 = \$29$$

当以无风险利率借入资金时,3个月后须偿付的金额为 $\$29e^{0.1 \times 0.25} = \$29.73$ 。与前例类似,或者看涨期权空头被执行,或者是执行看跌期权。因此,卖出看涨期权或者买入看跌期权,都将会使股票以\$30.00的价格售出。因此净利为:

$$\$30.00 - \$29.73 = \$0.27。$$

在表9.2中总结了这些例子。商业剪影9.1说明了公司的债权人和股东可以利用期权和上述的平价关系分析他们的头寸情况。

表 9.2 看跌期权与看涨期权之间平价关系不成立时，存在套利机会。股价 = \$31；无风险年利率 = 10%；看涨期权价格 = \$3。看涨期权和看跌期权的执行价格都是\$30，到期期限都是 3 个月

| 3个月期看跌期权价格 = \$2.25      | 3个月期看涨期权价格 = \$1         |
|--------------------------|--------------------------|
| 当前操作：                    | 当前操作：                    |
| 以\$3 购买看涨期权              | 借入\$29, 3 个月             |
| 卖空看跌期权，获得\$2.25          | 卖空看涨期权，获得\$3             |
| 卖空股票，获得\$31              | 以\$1 购买看跌期权              |
| 投资\$30.25, 3 个月期         | 以\$31 购买股票               |
| 当 $S_T > 30$ 时，3 个月后的操作： | 当 $S_T > 30$ 时，3 个月后的操作： |
| 从投资收回\$31.02             | 看涨期权空头被执行：以\$30 出售股票     |
| 执行看涨期权，以\$30 买入股票        | 用\$29.73 偿还贷款            |
| 净收益 = \$1.02             | 净收益 = \$0.27             |
| 当 $S_T < 30$ 时，3 个月后的操作： | 当 $S_T < 30$ 时，3 个月后的操作： |
| 从投资收回\$31.02             | 执行看跌期权：以\$30 出售股票        |
| 看跌期权空头被执行，以\$30 买入股票     | 用\$29.73 偿还贷款            |
| 净收益 = \$1.02             | 净收益 = \$0.27             |

## 美式期权

看涨与看跌期权之间平价关系仅适用于欧式期权。但也可推导出不付红利股票的美式期权价格之间的某种关系。我们可以证明（参照习题 9.18），股票不支付红利时，有：

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rt} \quad (9.4)$$

[例 9.3] 考虑不付红利股票的美式看涨期权，执行价格为\$20.00，到期期限为 5 个月，期权价格为\$1.50。假定股票的现价为\$19.00，无风险年利率为 10%。根据公式 (9.4)，则：

$$19 - 20 \leq C - P \leq 19 - 20e^{-0.1 \times 5/12}$$

即

$$1 \geq P - C \geq 0.18$$

这表明  $P - C$  在 \$1.00 和 \$0.18 之间。由于  $C$  为 \$1.50， $P$  必须在 \$1.68 和 \$2.50 之间。换句话说，与美式看涨期权执行价格和到期期限相同的美式看跌期权价格的上限和下限分别为 \$2.50 和 \$1.68。

### 商业剪影 9.1 看跌期权与看涨期权之间平价关系以及资本结构

期权定价的开创者是 Fischer Black、Myron Scholes 和 Robert Merton。20世纪70年代初，他们证明了期权可以用来描述一家公司的资本结构特性。当今，金融机构广泛利用这一模型，评估一家公司的信用风险。

为了解释这一模型，考虑一家公司，公司的资产有零息票债券和股票融资。假设债券在5年后到期，到期之时需要支付本金 $K$ 。该公司不支付红利，如果5年后公司的资产价值大于 $K$ ，股东会选择偿还给债券持有者。如果资产价值小于 $K$ ，股东会选择宣告破产，债券持有者最终会获得整个公司资产。

因此，5年后的股本价值为  $\max(A_T - K, 0)$ 。其中， $A_T$  是5年后的公司资产价值。这说明股东持有一个执行价格为 $K$ 的、基于公司资产的5年期欧式看涨期权。那么债券持有者的情况如何呢？他们5年后会得到  $\min(A_T, K)$ 。这等价于  $K - \max(K - A_T, 0)$ 。债券持有者赋予股东5年后以 $K$ 卖出公司资产给债权人的权利。因此，债券的价值等于 $K$ 的现值减去执行价格为 $K$ 的、基于公司资产的5年期欧式看跌期权的价值。

总结上述分析，若 $c$  和 $p$  分别为看涨期权和看跌期权的价值。那么

$$\text{股本价值} = c$$

$$\text{债券价值} = PV(K) - p$$

以 $A_0$  表示今天公司资产的价值。资产的价值必须等于融资资产的所有金融工具的总价值。这说明资产的价值应该等于债券和股本的价值之和。那么

$$A_0 = c + [PV(K) - p]$$

整理方程，得到

$$c + PV(K) = p + A_0$$

这就是方程(9.3)中看涨和看跌期权之间的平价关系，它适用于公司资产的情况。

## 9.5 提前执行：不付红利股票的看涨期权

在这一部分中，我们将说明提前执行不付红利的美式看涨期权是不明智的。

为了说明问题的本质，考虑一个不付红利股票的美式看涨期权，距到期日还有1个月，股票价格为\$50，执行价格为\$40。期权的实值额很大，期权的持有者可能很想立即执行它。然而，如果投资者执行期权后计划持有所得股票超过一个月，那么提前执行就不是最佳的策略。更好的方案是持有期权，并在期权的到期日执行它。此时，支付\$40的执行价格的时间要比立即执行晚一个月。这就是说，可获得本金为\$40、期限为1个月的利息。由于股票不支付红利，则投资者不会牺牲任何来自股票的收益。持有而非立即执行的好处还在于，股票价格在一个月内还有可能（无论可能性多小）会低于\$40。在这种情况下，投资者将不会执行期

权并庆幸没有提前执行期权。

这个讨论表明：如果投资者计划在期权的有效期内持有股票（在本例中为1个月），则提前执行期权没有好处；如果投资者认为股票现在被高估，是否应该执行期权并卖出股票呢？在这种情况下，投资者最好是出售该期权而不是执行它。<sup>1</sup>那些确实想持有股票的投资者将会购买该期权。这类投资者是一定存在的。否则股票的现价就不会是\$50。由于上述提到的原因，收取的期权费将大于期权的\$10的内在价值。

为了给出一个较为正式的解释，我们运用公式(9.1)：

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

由于美式看涨期权的持有者包含有相应的欧式看涨期权的所有执行机会，因此：

$$C \geq c$$

因此：

$$C \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

由于  $r > 0$ ，所以  $C > S_0 - K$ 。如果提前执行是明智的，那么  $C$  应该等于  $S_0 - K$ 。我们的结论是：提前执行是不明智的。

图9.3表示看涨期权的价格随股价  $S_0$  变化的一般情形。该图表明看涨期权的价格总是高于其内在价值，即高于  $\max(S_0 - K, 0)$ 。随着  $r$ 、 $T$  或波动率的增加，看涨期权的价格按箭头所示方向变动（即更加远离内在价值）。

归纳说来，我们认为不付红利股票的美式看涨期权不应提前执行有两个原因。

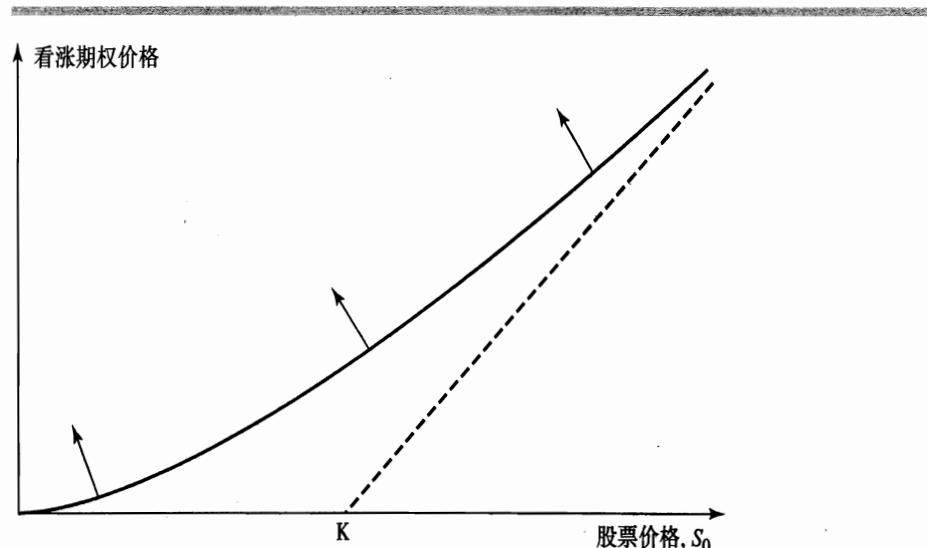


图9.3 股价为  $S_0$  的不付红利股票的美式看涨期权或欧式看涨期权的价格变化图

<sup>1</sup> 作为一个替代策略，投资者可以持有期权并卖空股票，这将锁定超过\$10的利润。

一个原因是期权提供了保险。当持有看涨期权而不是持有股票本身时，看涨期权保证持有者在股票价格下降到执行价格以下时不受损失。一旦该期权被执行，股票价格取代了执行价格，这种保险就消失了。另一个原因与货币的时间价值有关。从期权持有者的角度看，支付执行价格越晚越好。

## 9.6 提前执行：不付红利的看跌期权

提前执行不付红利的美式看跌期权可能是明智的。事实上，在期权有效期内的任一给定时刻，如果看跌期权的实值额足够大，则应提前执行它。

为了说明这一点，考虑一个极端的例子。假定执行价格为\$10，股票价格接近为0。通过立即执行期权，投资者可立即获利\$10。如果投资者等待，则执行期权的盈利可能低于\$10，但是由于股票价格不可能为负值，所以盈利不会超过\$10。另外，现在收到\$10比将来收到\$10要好。这说明该期权应立即执行。

与看涨期权类似，可认为看跌期权也能提供保险。当同时持有股票和看跌期权时，看跌期权保证股票持有者在股票价格跌破某一特定水平时不受损失。但是，看跌期权与看涨期权不同，投资者可以放弃这一保险，并提前执行看跌期权来立即实现执行价格，这样做可能是明智的。一般来说，随着 $S_0$ 的减少、 $r$ 的增加和波动率的减少，提前执行看跌期权是很有利的。

回忆一下公式(9.2)：

$$p \geq K e^{-rt} - S_0$$

对价格为 $P$ 的美式看跌期权来说，由于有可能提前执行，更严格的条件是：

$$P \geq K - S_0$$

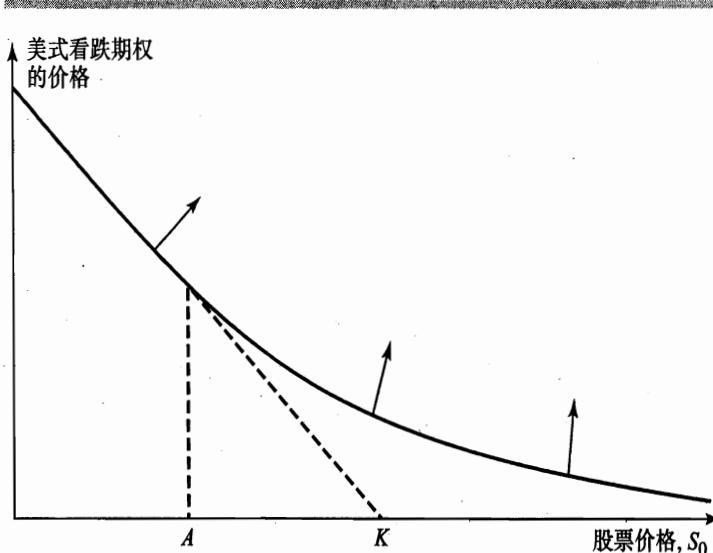


图 9.4 股价为 $S_0$ 的美式看跌期权的价格变化图

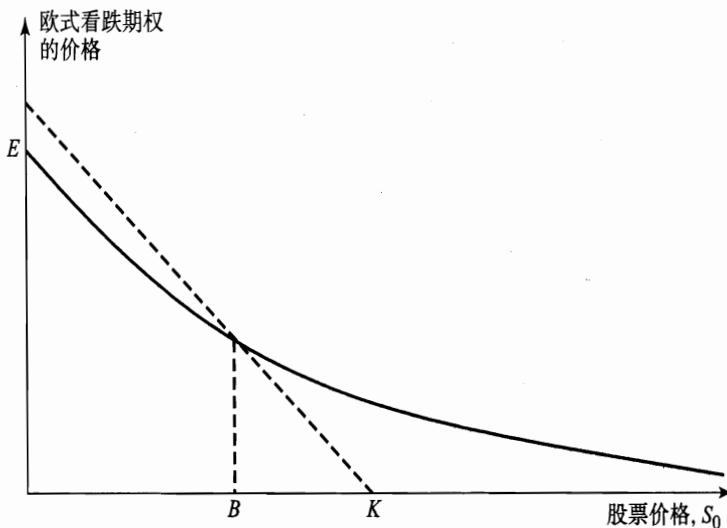
图 9.5 股价为  $S_0$  的欧式看跌期权的价格变化图

图 9.4 表明，一般情况下美式看跌期权的价格是怎样随  $S_0$  的变化而变化的。在  $r > 0$  的条件下，当股票价格足够低时，立即执行美式看跌期权是非常明智的。如果提前执行是明智的话，该期权的价值为  $K - S_0$ 。因此当  $S_0$  很小时，代表看跌期权价值的曲线与看跌期权的内在价值  $K - S_0$  重合在一起。在图 9.4 中，这个很小的股票价值  $S_0$  如 A 点所示。当  $r$  减少、波动率增加、 $T$  增加时，看跌期权的价值按箭头所示的方向变化。

由于在一些情况下，投资者迫切地希望提前执行美式看跌期权，因此，美式看跌期权的价值通常高于相应的欧式看跌期权的价值。由于美式期权的价值有时等于其内在价值（参见图 9.4），因此欧式看跌期权的价值有时低于其内在价值。图 9.5 显示了欧式看跌期权的价格随股票价格的变化。注意图 9.5 中的 B 点，在 B 点上期权的价格等于其内在价值，B 点所代表的股票价格必定大于图 9.4 中的 A 点所代表的股票价格。图 9.5 中的 E 点上  $S_0 = 0$ ，欧式看跌期权的价格为  $Ke^{-rT}$ 。

## 9.7 红利的影响

到现在为止，我们考虑的是不付红利的股票期权。本节我们讨论红利的影响。在美国，大多数场内交易的股票期权的到期期限小于一年。在期权有效期内，通常可以合理正确地预计应付红利。我们用字母  $D$  表示在期权有效期内红利的现值。为此，我们假定在除息日发放红利。

### 看涨期权和看跌期权的下限

我们将组合 A 和组合 B 重新定义为：

组合 A：一个欧式看涨期权加上金额为  $D + Ke^{-rT}$  的现金

组合 B：一股股票

经过与式 (9.1) 类似的推导，得出：

$$c \geq S_0 - D - Ke^{-rT} \quad (9.5)$$

我们将组合 C 和组合 D 重新定义为：

组合 C：一个欧式看跌期权加上一股股票

组合 D：金额为  $D + Ke^{-rT}$  的现金

经过与式 (9.2) 类似的推导，得出：

$$p \geq D + Ke^{-rT} - S_0 \quad (9.6)$$

## 提前执行

当预期有红利发放时，我们不能肯定美式看涨期权不应提前执行。有时在除息日前，立即执行美式看涨期权是明智的。而在其他任何时刻，提前执行美式看涨期权都是不明智的。在 13.12 节中将详细讨论这一观点。

## 看涨期权与看跌期权之间的平价关系

比较重新定义的组合 A 和组合 C 在  $T$  时刻的期权价值，表明：当存在红利时，公式 (9.3) 中的看跌期权与看涨期权之间的平价关系变为：

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0 \quad (9.7)$$

红利将使公式 (9.4) 修正为（参照习题 9.19）：

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT} \quad (9.8)$$

## 小结

影响股票期权价值的因素有如下 6 种：股票的现价、执行价格、到期期限、股票价格波动率、无风险利率和期权有效期内预期红利。当股票现价、到期期限、波动率和无风险利率增加时，看涨期权的价值通常也随之增加。当执行价格和预期红利增加时，看涨期权的价值就会减少。当执行价格、到期期限、波动率和预期红利增加时，看跌期权的价值通常也随之增加。当股票现价和无风险利率增加时，看跌期权的价值就会减少。

无须任何关于股票价格波动率的假定，我们就可以得出有关股票期权价值的一些结论。例如，股票的看涨期权的价格一定总是低于股票本身的价格。与此类似，股票看跌期权的价格一定总是低于股票期权的执行价格。

不付红利股票的欧式看涨期权的价格必须高于：

$$\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$$

其中,  $S_0$  为股票价格,  $K$  为执行价格,  $r$  为无风险利率,  $T$  为到期期限。不付红利的欧式看跌期权的价格必须高于:

$$\max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$$

当支付红利的现值为  $D$  时, 欧式看涨期权的下限变为:

$$\max(S_0 - D - Ke^{-rT}, 0)$$

欧式看跌期权的下限变为:

$$\max(Ke^{-rT} + D - S_0, 0)$$

看涨期权和看跌期权之间的平价关系是股票的欧式看涨期权价格  $c$  和欧式看跌期权价格  $p$  之间的关系。对于不付红利的股票来说, 期权平价关系为:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

对于支付红利的看涨和看跌期权之间的平价关系为:

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

对美式期权来说, 看涨期权和看跌期权之间的平价关系并不成立。但是, 可利用套利理论获得美式看涨期权价格和看跌期权价格之间价差的上限和下限。

在第 13 章中, 借助对股票价格概率分布的一些特殊假定, 我们将对本章的一些结论做进一步的分析。这有助于我们推导欧式股票期权的精确的定价公式。在第 11 章和第 17 章, 我们将看到如何用数值方法推导美式期权定价公式。

## 参考读物

- Black, F., and M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973): 637-59.
- Broadie, M., and J. Detemple. "American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods," *Review of Financial Studies*, 9, 4 (1996): 1211-50.
- Merton, R. C.. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29, 2 (1974): 449-70.
- Merton, R. C. "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973): 141-83.
- Merton, R. C. "The Relationship between Put and Call Prices: Comment," *Journal of Finance*, 28 (March 1973): 183-84.
- Stoll, H. R. "The Relationship between Put and Call Option Prices," *Journal of Finance*, 24 (Dec 1969): 801-24.

## 问题和习题

9.1 列举影响期权价格的 6 个因素。

9.2 基于无红利支付股票的看涨期权, 期限为 4 个月, 执行价格为 \$25, 股票价格为 \$28,

无风险年利率为 8%。该看涨期权价格下限为多少?

- 9.3 基于无红利支付股票的欧式看跌期权，期限为 1 个月，股票价格为 \$12，执行价格为 \$15，无风险年利率为 6%，该期权的价格下限为多少?
- 9.4 请给出两个原因，说明为什么早执行无红利支付股票的美式看涨期权不是最佳的。第一个原因应包括货币的时间价值。第二个原因在利率为零时也应该成立。
- 9.5 “提前执行美式看跌期权是在货币的时间价值与看跌期权的保险价值之间的权衡”。请解释这句话。
- 9.6 请解释为什么不支付红利股票的美式看涨期权的价值总是大于等于它的内在价值。对于欧式看涨期权，也是这样吗？请解释你的答案。
- 9.7 一个无红利支付股票的价格为 \$19，执行价格为 \$20、基于该股票的 3 个月期欧式看涨期权价格为 \$1。无风险年利率为 4%。执行价格为 \$20 的、3 个月期欧式看跌期权的价格为多少?
- 9.8 请解释为什么对欧式看涨期权与看跌期权之间平价关系的讨论用于美式期权不可能得出同样的结论。
- 9.9 一个无红利支付股票的看涨期权，期限为 6 个月，执行价格为 \$75，股票价格为 \$80，无风险年利率为 10%。它的价格下限为多少?
- 9.10 一个无红利支付股票的欧式看跌期权，期限为 2 个月，股票价格为 \$58，执行价格为 \$65，无风险年利率 5%，它的价格下限为多少?
- 9.11 一个期限为 4 个月的无红利支付股票的欧式看涨期权现价为 \$5。股票价格为 \$64，执行价格为 \$60，1 个月后发红利 \$0.80。对所有期限的无风险年利率为 12%。对套利者而言存在什么样的机会?
- 9.12 一个期限为 1 个月的无红利支付股票的欧式看跌期权现价为 \$2.5。股票价格为 \$47，执行价格为 \$50，无风险年利率为 6%。对套利者而言存在什么样的机会?
- 9.13 请直观的解释为什么当无风险利率上升且波动率减少时，提前执行美式看跌期权变得很有吸引力。
- 9.14 执行价格为 \$30，6 个月后到期的欧式看涨期权的价格为 \$2。标的股票的价格为 \$29，2 个月后和 5 个月后分红利 \$0.50。期限结构为水平，无风险利率为 10%。执行价格为 \$30，6 个月后到期的欧式看跌期权的价格为多少?
- 9.15 在习题 9.14 中，如果欧式看跌期权的价格为 \$3，请说明存在什么样的套利机会。
- 9.16 一个无红利支付股票的美式看涨期权的价格为 \$4。股票价格为 \$31，执行价格为 \$30，3 个月后到期。无风险利率为 8%。请推出相同股票、相同执行价格、相同到期日的美式看跌期权的价格上下限。
- 9.17 在习题 9.16 中，如果美式看跌期权的价格大于以上计算的上限值时，会有什么样的套利机会?
- 9.18 请证明方程 (9.4) 中的结论。[提示：对于该结论的第一个部分，考虑 (a) 一个由欧式看涨期权和现金  $K$  组成的证券组合 (b) 一个由美式看跌期权和一股股票组成的证券组合。]
- 9.19 请证明方程 (9.8) 中的结论。[提示：对于该结论的第一个部分，考虑 (a) 一个由欧式看涨期权和现金  $D + K$  组成的证券组合 (b) 一个由美式看跌期权和一股股票组

成的证券组合。]

- 9.20 基于无红利支付股票的普通看涨期权不应该提前执行。但是，即使公司不支付任何红利，管理层股票期权倾向于提前执行（参见商业剪影 8.3 中关于管理层股票期权的讨论）。请给出可能的原因。
- 9.21 利用 DerivaGem 软件来证明图 9.1 和图 9.2 是正确的。

## 课后练习

- 9.22 执行价格为 \$20，3 个月后到期的欧式看涨期权和欧式看跌期权，售价都为 \$3。无风险年利率为 10%，股票现价为 \$19，预计 1 个月后发红利 \$1。请说明对投资者而言，存在什么样的套利机会。
- 9.23 假设  $c_1, c_2, c_3$  分别是执行价格为  $K_1, K_2, K_3$  的欧式看涨期权的价格。且  $K_3 > K_2 > K_1, K_3 - K_2 = K_2 - K_1$ 。所有的期权有相同的到期日。证明：

$$c_2 \leq 0.5(c_1 + c_3)$$

(提示：考虑如下期权组合，一个执行价格为  $K_1$  的期权多头，一个执行价格为  $K_3$  的期权多头，两个执行价格为  $K_2$  的期权空头。)

- 9.24 习题 9.23 中如果是欧式看跌期权，那么相应的结论是什么？
- 9.25 假设你是一家杠杆比例很高的公司经理及惟一的所有者。所有的债务在 1 年后到期。如果那时公司的价值高于债务的面值，你就可以偿还债务。如果公司的价值小于债务的面值，你就必须宣布破产，让债权人拥有公司。
- (a) 将公司的价值作为期权的标的物，描述你的头寸状况。
  - (b) 按照以公司价值为标的物的期权形式，描述债权人的头寸状况。
  - (c) 你应当如何做来提高你头寸的价值？
- 9.26 考虑一个股票期权。股票价格为 \$41、执行价格为 \$40、无风险利率为 6%、波动率为 35%、到期期限为 1 年。假设 6 个月后，将有支付红利 \$0.50。
- (a) 当期权是欧式看涨期权的时候，使用 DerivaGem 软件估值该期权。
  - (b) 当期权是欧式看跌期权的时候，使用 DerivaGem 软件估值该期权。
  - (c) 请证明看跌期权和看涨期权之间的平价关系成立。
  - (d) 利用 DerivaGem 软件，研究随着到期期限变长，期权价格会如何变化。其中假设没有红利支付。请解释你的答案。

## 期权的交易策略

在第 8 章中，我们讨论了投资于单个股票期权的损益状态。在本章中，我们讨论运用一些期权可获得范围更加广泛的损益状态。在假设标的资产是股票时，我们解释了这些损益状态。然而对其他标的资产，如外币、股票指数和期货合约等，我们可以获得类似的损益状态。我们将讨论的交易策略中利用的期权为欧式期权。在相同的情况下使用美式期权，结果可能会不一样，因为美式期权有提前执行的可能性。

在本章的第一节，我们考虑当股票期权头寸与其股票本身组合时将出现什么情况。接着我们讨论当投资于基于同一股票的两种或两种以上不同的期权时，它们所构造的损益状态。期权的吸引力之一在于利用它们可以创造一系列不同的损益函数（损益函数中把损益表示成股票价格的函数形式）。如果欧式期权的执行价格可以是任何可能的价格，则在理论上就可以创造任意形式的损益函数。

为了简化说明，表示交易策略收益的图表中将不考虑现金的时间成本。收益等于最终损益减去初始成本（理论上，应该以最终损益的现值减去初始成本）。

### 10.1 包括一个简单期权和一个股票的策略

包括一个简单股票期权和一个该股票的策略有许多不同的种类。这些策略的损益状态如图 10.1 所示。在本图和本章其他图中，虚线代表构造该组合中的单个证券的损益与股票价格之间的关系，而实线代表整个组合的损益和股票价格之间的关系。

在图 10.1 (a) 中，组合证券是由一个股票的多头加上一个看涨期权的空头组成。这一组合代表的投资策略被称为出售一个有保护看涨期权 (writing a covered call)。这是由于当股票价格急剧上升时，出售股票看涨期权的头寸可能遭受巨大损失，这时可用股票多头“轧平”损失，保护投资者免受更大的损失。在图 10.1 (b) 中，组合证券是由一个股票的空头加上一个看涨期权的多头组成。其损益状态与出售一个有保护看涨期权的损益状态相反。在图 10.1 (c) 中，投资策略包括购买一个股票看跌期权和该股票本身。这一策略有时被称为保护性看跌期权 (protective put) 策略。在图 10.1 (d) 中，组合证券由一个看跌期权的空头和一个股票的空头组成。其损益状态与保护性看跌期权的损益状态相反。

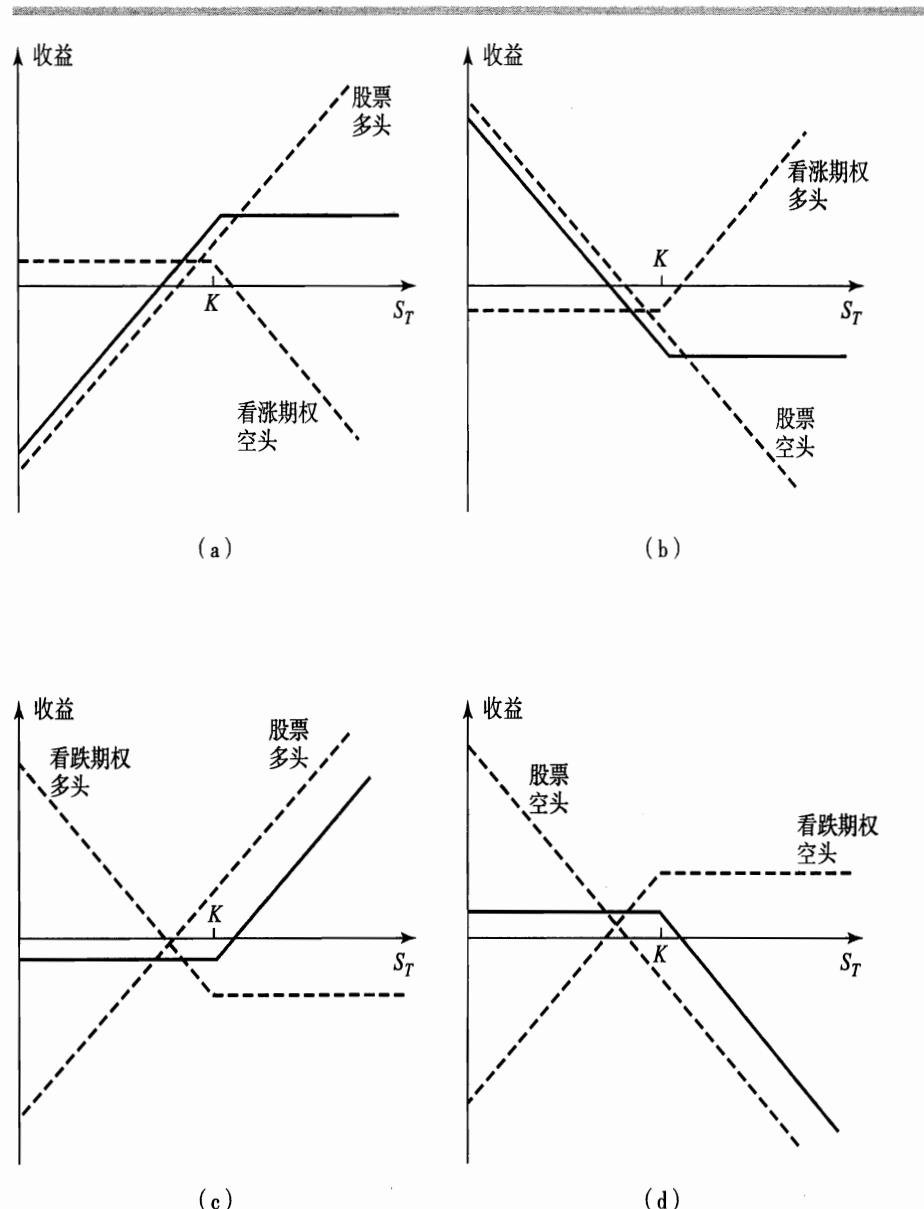


图 10.1 (a) 一个股票多头加上一个看涨期权空头组合; (b) 一个股票空头加上一个看涨期权多头组合; (c) 一个股票多头加上一个看跌期权多头组合; (d) 一个股票空头加上一个看跌期权空头组合的损益状态

图 10.1 中的损益状态分别与第 8 章中讨论的出售看跌期权、购买看跌期权、购买看涨期权和出售看涨期权的损益状态具有相同的形状。借助看涨期权与看跌期权之间的平价关系，就可以理解其中的原因。重新回忆一下第 9 章中的看涨和看跌期权之间平价公式：

$$p + S_0 = c + Ke^{-rT} + D \quad (10.1)$$

其中， $p$  为欧式看跌期权的价格， $S_0$  为股票价格， $c$  为欧式看涨期权的价格， $K$  是看涨期权和看跌期权的执行价格， $r$  为无风险利率， $T$  为看涨期权和看跌期权

的到期期限， $D$  为期权有效期内预期发放的红利的现值。

等式 (10.1) 表明，看跌期权的多头加上股票的多头等同于看涨期权的多头加上金额为  $Ke^{-rT} + D$  的现金。这就解释了图 10.1 (c) 的损益状态类似于看涨期权多头损益状态的原因。图 10.1 (d) 头寸与图 10.1 (c) 头寸正好相反，因此其损益状态类似于看涨期权空头的损益状态。

可以将等式 (10.1) 变形为：

$$S_0 - c = Ke^{-rT} + D - p$$

这表明，一个股票的多头加上一个看涨期权的空头等同于一个看跌期权的空头加上金额为  $Ke^{-rT} + D$  的现金。这就解释了图 10.1 (a) 的损益状态类似于看跌期权空头损益状态的原因。图 10.1 (b) 的头寸正好与图 10.1 (a) 的头寸相反，因此其损益状态类似于看跌期权多头的损益状态。

## 10.2 价差期权

价差期权交易策略是指持有相同类型的两个或多个期权头寸（即，两个或多个看涨期权，或者两个或多个看跌期权）。

### 牛市价差期权

最普遍的价差期权类型为牛市价差期权。这种期权可通过购买一个确定执行价格的股票看涨期权和出售一个相同股票的较高执行价格的股票看涨期权而得到。两个期权的到期日相同。该策略如图 10.2 所示。两条虚线分别表示两个单个期权头寸的损益状态。整个策略的损益为两个虚线表示的损益之和，在图中用实线表示。由于随着执行价格的上升，看涨期权的价格通常随之下降，售出的期权价值总是小于买入期权的价值。因此，用看涨期权组成牛市价差期权时，购买该牛市价差期权需要初始投资。

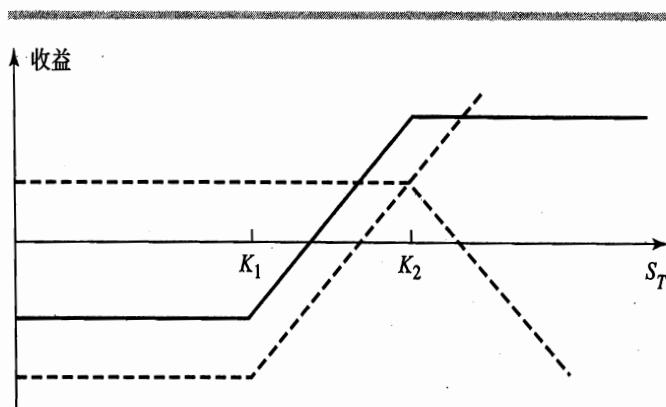


图 10.2 利用看涨期权构造的牛市价差期权的损益

表 10.1 利用看涨期权构造的牛市价差期权的损益

| 股票价格范围            | 买入看涨期权的损益   | 卖出看涨期权的损益      | 总损益         |
|-------------------|-------------|----------------|-------------|
| $S_T \geq K_2$    | $S_T - K_1$ | $-(S_T - K_2)$ | $K_2 - K_1$ |
| $K_1 < S_T < K_2$ | $S_T - K_1$ | 0              | $S_T - K_1$ |
| $S_T \leq K_1$    | 0           | 0              | 0           |

假定  $K_1$  为购买看涨期权的执行价格,  $K_2$  为出售的看涨期权的执行价格,  $S_T$  为期权到期日股票价格。表 10.1 显示在不同情况下, 牛市价差期权将实现的整体损益状态。如果股票价格上涨并高于较高的那个执行价格, 则收益为两个执行价格之差, 即  $K_2 - K_1$ ; 如果到期日股票价格在两个执行价格之间, 收益为  $S_T - K_1$ ; 如果到期日股票价格低于较小的那个执行价格, 则收益为 0。计算图 10.2 中的损益时扣除了初始投资。

牛市价差期权策略限制了投资者当股价上升时的潜在收益, 同时该策略也限制了投资者当股价下降时的损失。这一策略可表述为投资者拥有一个执行价格为  $K_1$  的看涨期权, 并且通过卖出一个执行价格为  $K_2$  ( $K_2 > K_1$ ) 的看涨期权而放弃了上升的潜在收益。作为对放弃上升潜在收益的补偿, 投资者获得了执行价格为  $K_2$  的看涨期权费。有三种不同类型的牛市价差期权:

1. 期初两个看涨期权均为虚值期权
2. 期初一个看涨期权为实值期权, 另一个看涨期权为虚值期权
3. 期初两个看涨期权均为实值期权

类型 1 的牛市价差期权策略最具挑战性。构造该策略时所需成本很低, 当然该策略获得相对高收益 ( $K_2 - K_1$ ) 的可能性也小。从类型 1 到类型 2, 从类型 2 到类型 3, 牛市价差期权策略趋于保守。

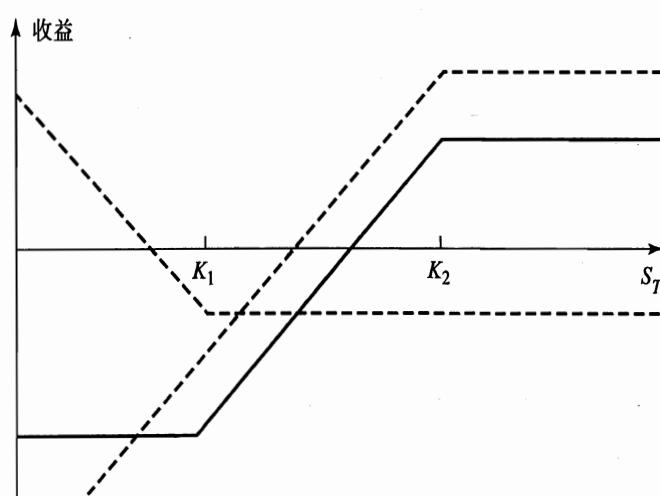


图 10.3 利用看跌期权构造的牛市价差期权的损益

**[例 10.1]** 某投资者以\$3 购买一个执行价格为\$30 的看涨期权，同时以\$1 售出一个执行价格为\$35 的看涨期权。如果股票价格高于\$35，则这一牛市价差期权策略的收益为\$5；如果股票价格低于\$30，则这一策略的收益为 0；如果股票价格在 \$30 和 \$35 之间，收益为股票价格与 \$30 的差额。该牛市价差期权策略的成本为 \$3 - \$1 = \$2。收益如下表所示：

| 股票价格变动范围        | 损益状态       |
|-----------------|------------|
| $S_T \leq 30$   | -2         |
| $30 < S_T < 35$ | $S_T - 30$ |
| $S_T \geq 35$   | 3          |

通过购买较低执行价格的看跌期权和出售较高执行价格的看跌期权也可以建立牛市价差期权，如图 10.3 所示。与用看涨期权建立的牛市价差期权不同，用看跌期权建立的牛市价差期权投资者开始会得到一个正的现金流（忽略保证金要求），并且其损益是负值或零。

### 熊市价差期权

持有牛市价差期权的投资者预期股票价格上升。与此相反，持有熊市价差期权的投资者预期股票价格下降。与牛市价差期权类似，熊市价差期权策略可通过购买某一执行价格的看跌期权并出售另一执行价格的看跌期权来构造。然而，在熊市价差期权策略中，所购买的看跌期权的执行价格高于所卖出的看跌期权的执行价格（牛市价差期权策略中，所购买的期权的执行价格低于所卖出的期权的执行价格，这里情况正好相反）。图 10.4 中的实线为熊市价差期权的损益。利用看跌期权构造的熊市价差期权需要一个初始的现金流出（忽略保证金的要求），这是因为出售的看跌期权的价格低于购买的看跌期权的价格。本质上，投资者购买某一执行价格的看跌期权，并通过出售一个较低执行价格的看跌期权而放弃了一些潜

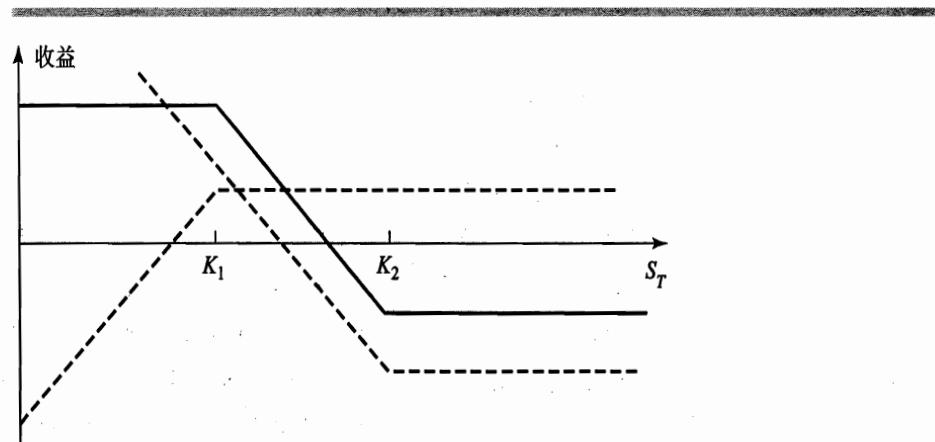


图 10.4 利用看跌期权构造的熊市价差期权的损益

表 10.2 利用看跌期权构造的熊市价差期权的损益

| 股票价格范围            | 买入看跌期权的损益   | 卖出看跌期权的损益      | 总损益         |
|-------------------|-------------|----------------|-------------|
| $S_T \geq K_2$    | 0           | 0              | 0           |
| $K_1 < S_T < K_2$ | $K_2 - S_T$ | 0              | $K_2 - S_T$ |
| $S_T \leq K_1$    | $K_2 - S_T$ | $-(K_1 - S_T)$ | $K_2 - K_1$ |

在的收益机会。作为对放弃收益机会的补偿，投资者获得了出售看跌期权的期权费。

假定执行价格为  $K_1$  和  $K_2$ ，且  $K_1 < K_2$ 。表 10.2 显示了不同情况下，熊市价差期权组合实现的损益状态。如果股票价格高于  $K_2$ ，损益为零；如果股票价格低于  $K_1$ ，损益为  $K_2 - K_1$ ；如果股票价格在  $K_1$  和  $K_2$  之间，损益为  $K_2 - S_T$ 。计算实际的收益时，减去了初始投资成本。

**[例 10.2]** 投资者以\$3 购买了执行价格为\$35 的看跌期权，并以\$1 的价格出售了执行价格为\$30 的看跌期权。如果股票价格高于\$35，熊市价差期权的收益为零；如果股票价格低于\$30，其收益为\$5；如果股票价格在\$30 和\$35 之间，其收益为  $35 - S_T$ 。这一投资的初始成本为  $$3 - $1 = $2$ 。因此损益状态如下：

| 股票价格变动范围        | 损益状态       |
|-----------------|------------|
| $S_T \leq 30$   | +3         |
| $30 < S_T < 35$ | $35 - S_T$ |
| $S_T \geq 35$   | -2         |

与牛市价差期权类似，熊市价差期权同时限制了股价向有利方向变动时的潜在盈利和股价向不利方向变动时的损失。熊市价差期权可以不用看跌期权而仅用看涨期权来构造。投资者购买执行价格较高的看涨期权并出售执行价格较低的看涨期权，如图 10.5 所示。利用看涨期权构造的熊市价差期权可以获得一个初始的现金流（忽略保证金的要求）。

## 盒式价差期权

盒式价差期权是执行价格为  $K_1$  和  $K_2$  的牛市看涨价差期权和同样两个执行价格的熊市看跌价差期权的组合。如表 10.3 所示，盒式价差期权的损益总是为  $K_2 - K_1$ 。因此，盒式价差期权的价值总是等于该损益的现值，即  $(K_2 - K_1)e^{-rt}$ 。如果盒式价差期权的价值不同于这个值，则存在套利机会。如果盒式价差期权的市价偏低，则购买这个盒式价差期权是有利可图的。那么，我们需要买入执行价格为  $K_1$  的一个看涨期权，买入执行价格为  $K_2$  的一个看跌期权，卖出执行价格为  $K_2$  的一个看涨期权，再卖出执行价格为  $K_1$  的一个看跌期权。如果盒式价差期权的市价偏高，则卖出这个盒式价差期权是有利可图的。那么，我们需要买入执行价格为  $K_2$

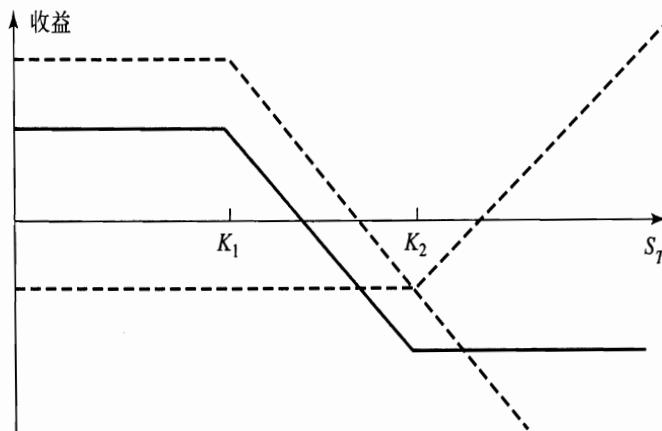


图 10.5 利用看涨期权构造的熊市价差期权的损益

表 10.3 盒式价差期权的损益

| 股票价格范围            | 牛市看涨价差期权损益  | 熊市看跌价差期权损益  | 总损益         |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|
| $S_T \geq K_2$    | $K_2 - K_1$ | 0           | $K_2 - K_1$ |
| $K_1 < S_T < K_2$ | $S_T - K_1$ | $K_2 - S_T$ | $K_2 - K_1$ |
| $S_T \leq K_1$    | 0           | $K_2 - K_1$ | $K_2 - K_1$ |

表 10.4 2 个月期不支付红利股票的欧式期权和美式期权价值。股票价格 = \$50；利率 = 8%p.a.；波动率 = 30%p.a.。

| 期权类型 | 执行价格 | 欧式期权价格 | 美式期权价格 |
|------|------|--------|--------|
| 看涨   | 60   | 0.26   | 0.26   |
| 看涨   | 55   | 0.96   | 0.96   |
| 看跌   | 60   | 9.46   | 10.00  |
| 看跌   | 55   | 5.23   | 5.44   |

的一个看涨期权，买入执行价格为  $K_1$  的一个看跌期权，卖出执行价格为  $K_1$  的一个看涨期权，再卖出执行价格为  $K_2$  的一个看跌期权。

我们必须注意盒式价差套利策略只适用于欧式期权。交易所中交易的绝大多数期权为美式期权。商业剪影 10.1 中，我们可以看到一些没有经验的交易员等地对待美式期权和欧式期权，这很可能导致他们遭受损失。

### 蝶式价差期权

蝶式价差期权策略由三种不同执行价格的期权头寸所组成。可通过如下方式

### 商业剪影 10.1 盒式价差期权的损失

假设一个股票的价格为 \$50，波动率为 30%。预计没有红利支付，无风险利率为 8%。一位交易员给你提议在 CBOE 以 \$5.10 出售 2 个月期盒式价差期权，其中的执行价格为 \$55 和 \$60。你应该怎么办呢？

这笔交易听起来很有吸引力。其中  $K_1 = 55$ ,  $K_2 = 60$ , 2 个月后的损益将为 \$5。以 \$5.10 出售该盒式价差期权，并把得到的资金进行投资，时间为 2 个月，那么 2 个月后可以得到比 \$5 更多的资金以满足支付需要。当前，这个盒式价差期权的理论价值为  $5 \times e^{-0.08 \times 2/12} = \$4.93$ 。

不幸的是，这里有个问题。CBOE 的股票期权都是美式的，而该盒式期权的 \$5 损益，是基于组成它的期权都是欧式期权的假设推导的。这个例子中，构造盒式价差期权的两个期权的价格（使用 DerivaGem 计算）请看表 10.4。执行价格为 \$55 和 \$60 的牛市看涨价差期权的价格为  $0.96 - 0.26 = \$0.70$ 。（这对于欧式看涨期权和美式看涨期权都是相同的。因为，我们在第 9 章中已经看到，无红利支付的欧式看涨期权和美式看涨期权价格相同。）当期权是欧式的时候，同样执行价格的熊市看跌价差期权的价格为  $9.46 - 5.23 = \$4.23$ ，以及当期权是美式的时候，价格为  $10.00 - 5.44 = \$4.56$ 。如果两个单个期权是欧式的时候，两个价差期权的总价值为  $0.70 + 4.23 = \$4.93$ 。这就是上面计算的盒式价差期权的理论价值。如果两个单个期权是美式的时候，两个价差期权的总价值为  $0.70 + 4.56 = \$5.26$ 。因此，以 \$5.10 卖出由美式期权组成的盒式价差期权是不明智的。我们应该意识到，我们以这样的价格卖出盒式价差期权后，对方会立即执行，执行价格为 \$60 的看跌期权。

**构造：**购买一个较低执行价格  $K_1$  的看涨期权，购买一个较高执行价格  $K_3$  的看涨期权，出售两个执行价格  $K_2$  的看涨期权，其中  $K_2$  为  $K_1$  与  $K_3$  的中间值。一般来说， $K_2$  非常接近股票的现价。该投资策略的损益如图 10.6 所示。如果股票价格保持在  $K_2$  附近，运用该策略就会获利；如果股票价格在任何方向上有较大波动，则会有少量损失。因此对于那些认为股票价格不可能发生较大波动的投资者来说，这是一个适当的策略。这一策略需要少量的初始投资。蝶式价差期权的损益如表 10.5 所示。

假定某一股票的现价为 \$61。如果某个投资者认为在以后的 6 个月中股票价格不可能发生很大变化。假定 6 个月期看涨期权的市场价格如下：

| 执行价格 (\$) | 看涨期权的价格 (\$) |
|-----------|--------------|
| 55        | 10           |
| 60        | 7            |
| 65        | 5            |

通过购买一个执行价格为 \$55 的看涨期权，购买一个执行价格为 \$65 的看涨期权，同时出售两个执行价格为 \$60 的看涨期权，投资者就可构造一个蝶式价差期

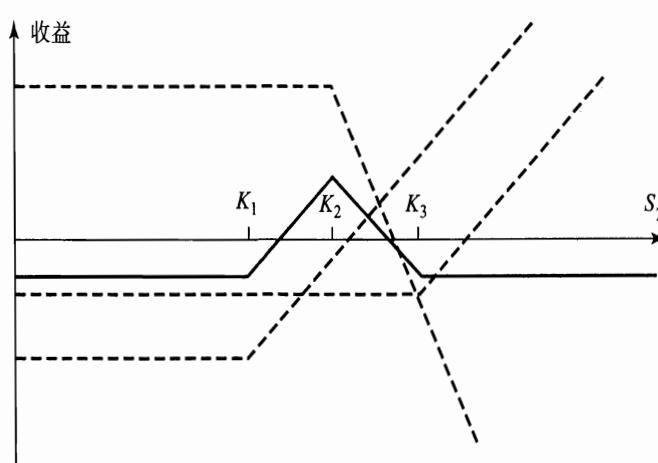


图 10.6 利用看涨期权构造的蝶式价差期权的损益

表 10.5 蝶式价差期权的损益

| 股票价格范围            | 第一个看涨期权     | 第二个看涨期权     | 看涨期权空头损益        | 组合的损益*      |
|-------------------|-------------|-------------|-----------------|-------------|
|                   | 多头的损益       | 多头的损益       |                 |             |
| $S_T < K_1$       | 0           | 0           | 0               | 0           |
| $K_1 < S_T < K_2$ | $S_T - K_1$ | 0           | 0               | $S_T - K_1$ |
| $K_2 < S_T < K_3$ | $S_T - K_1$ | 0           | $-2(S_T - K_2)$ | $K_3 - S_T$ |
| $S_T > K_3$       | $S_T - K_1$ | $S_T - K_3$ | $-2(S_T - K_2)$ | 0           |

\* 在以上计算中运用了如下关系，即  $K_2 = 0.5(K_1 + K_3)$ 。

权。构造这个蝶式价差期权的成本为  $\$10 + \$5 - (2 \times \$7) = \$1$ 。如果在 6 个月后，股票价格高于 \$65 或低于 \$55，该策略的收益为 0，投资者的净损失为 \$1；如果股票价格在 \$56 和 \$64 之间，运用该策略就可获利。当 6 个月后股票价格为 \$60 时，就会得到最大的利润 \$4。

也可运用看跌期权构造蝶式价差期权。投资者可购买一个执行价格较低的看跌期权，购买一个执行价格较高的看跌期权，同时出售两个中间执行价格的看跌期权，如图 10.7 所示。在本例中的蝶式价差期权也可通过如下方式构造：买入一个执行价格为 \$55 的看跌期权，买入一个执行价格为 \$65 的看跌期权，同时出售两个执行价格为 \$60 的看跌期权。如果以上所有的期权均为欧式期权，运用看跌期权构造的蝶式价差期权与运用看涨期权构造的蝶式价差期权完全一样。可以利用欧式看涨期权与看跌期权之间的平价关系可证明：在这两种情况下，初始投资也相同。

利用与以上描述策略相反的操作可以卖空蝶式价差期权。出售执行价格为  $K_1$  与  $K_3$  的期权，购买两个执行价格为  $K_2$  的期权 ( $K_2$  为  $K_1$  与  $K_3$  的中值)。如果股票价格发生较大的变化，这个策略将获得一定的利润。

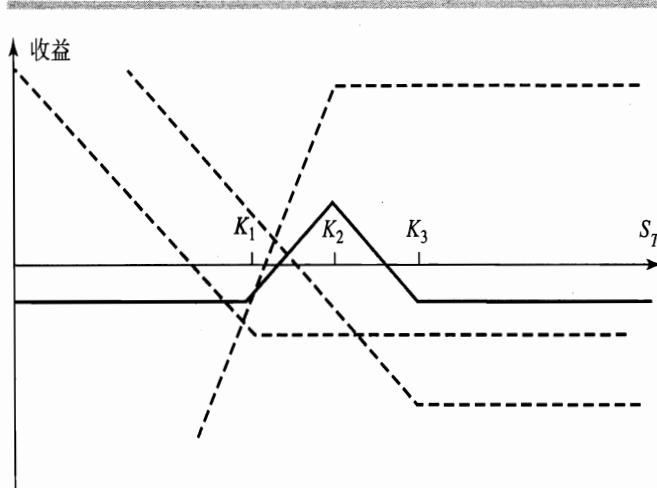


图 10.7 利用看跌期权构造的蝶式价差期权的损益

### 日历价差期权

至今为止，我们一直都假定构造价差期权的所有期权到期日相同。现在我们讨论日历价差期权，它涉及的期权执行价格相同，但到期日不同。

日历价差期权可通过以下方式构造：出售一个看涨期权同时购买一个具有相同执行价格且期限较长的看涨期权。期权的到期日越长，其价格越高。因此日历价差期权需要一个初始投资。假定在期限短的期权到期时，出售期限长的期权，则由看涨期权构造的日历价差期权的损益状态如图 10.8 所示。这与图 10.6 中的蝶式价差期权的损益状态类似。如果期限短的期权到期时，股票的价格接近期限较短的期权的执行价格，投资者可获得利润。然而，如果股票价格远高于或远低于

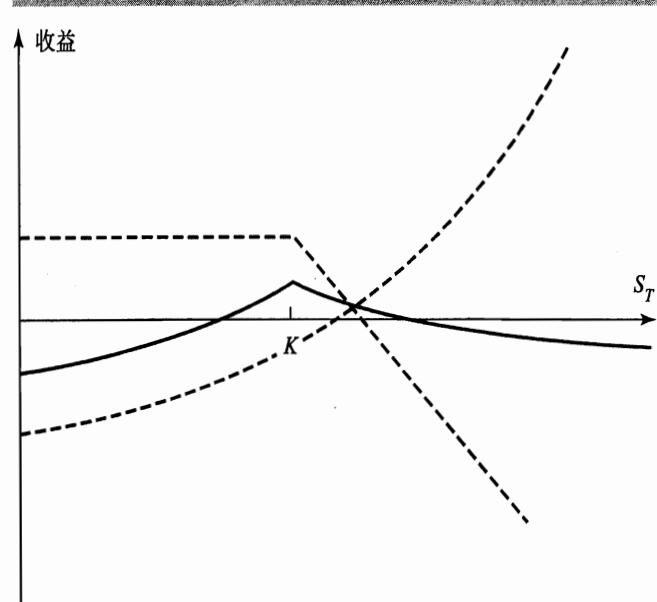


图 10.8 利用两个看涨期权构造的日历价差期权的损益

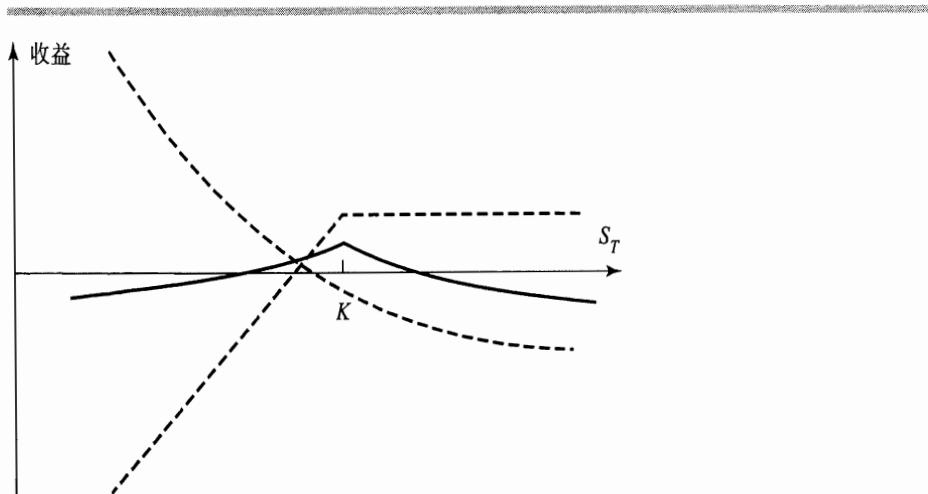


图 10.9 利用两个看跌期权构造的日历价差期权的损益

该执行价格时，就会发生损失。

为了理解日历价差期权的损益状态，我们首先考虑在期限短的期权到期时，股票价格非常低的情况。期限短的期权的价值为零，且期限长的期权的价值接近于零，投资者就会发生损失，损失的金额近似等于最初构造该投资策略时的成本。接着我们考虑在期限较短的期权到期时，股票价格  $S_T$  非常高的情况。期限短的期权的成本为  $S_T - K$ ，期限长的期权（假定提前执行是不明智的）的价值接近于  $S_T - K$ ，其中  $K$  为期权的执行价格。这时投资者也会发生净损失，损失的金额近似等于最初构造该投资策略时的成本。如果  $S_T$  接近  $K$ ，则期限短的期权的成本很小或几乎没有成本，而期限长的期权是很有价值的。在这种情况下，投资者就可获得一定的利润。

在一个中性的日历价差期权中，选取的执行价格非常接近股票的现价。牛市日历价差期权的执行价格较高，而熊市日历价差期权的执行价格较低。

日历价差期权既可以用看涨期权来构造，也可以用看跌期权来构造。投资者购买一个期限较长的看跌期权，同时卖出一个期限较短的看跌期权。其损益状态与使用看涨期权构造的日历价差期权的损益状态类似，如图 10.9 所示。

倒置日历价差期权正好与图 10.8 或图 10.9 中的损益状态相反。投资者购买期限短的期权，同时出售期限长的期权。当期限短的期权到期时，如果股票价格远高于或远低于该期权的执行价格，则可获得少量的利润。但是，当股票价格与该期权执行价格接近时，会导致一定的损失。

## 对角价差期权

牛市价差期权、熊市价差期权和日历价差期权都可通过购买一个看涨期权，同时出售另一个看涨期权来构造。在牛市价差期权和熊市价差期权两种情况下，两个看涨期权的执行价格不同而到期日相同。在日历价差期权情况下，两个看涨

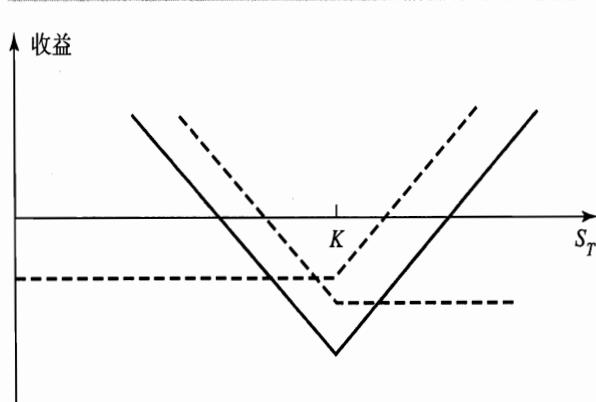


图 10.10 跨式期权的损益

期权的执行价格相同而到期日不同。

而在一个对角价差期权中，两个看涨期权的执行价格和到期日都不相同。这增加了不同的损益状态。

### 10.3 组合期权

组合期权是一种期权交易策略，该期权策略中包括同一种股票的看涨期权和看跌期权。我们将讨论所谓的跨式期权、条式期权、带式期权和宽跨式期权。

#### 跨式期权

一个常用的组合期权策略就是所谓的跨式期权 (straddle) 策略。同时买入具有相同执行价格、相同到期日、同种股票的看涨期权和看跌期权就可构造该策略，其损益状态如图 10.10 所示。执行价格用  $K$  来表示。如果在期权到期日，股票价格非常接近执行价格，跨式期权就会发生损失。但是，如果股票价格在任何方向上有很大偏移时，就会有大量的利润。表 10.6 计算了该期权策略的损益。

当投资者预期股票价格会有重大变动，但不知其变动方向时，则可应用跨式期权策略。假设某投资者认为某一股票的价格在以后的 3 个月中将发生重大的变化，该股票的现行市场价值为 \$69。该投资者可通过同时购买到期期限为 3 个月、执行价格为 \$70 的一个看涨期权和一个看跌期权来构造跨式期权。假定看涨期权的

表 10.6 跨式期权的损益

| 股票价格的范围      | 看涨期权的损益   | 看跌期权的损益   | 总损益       |
|--------------|-----------|-----------|-----------|
| $S_T \leq K$ | 0         | $K - S_T$ | $K - S_T$ |
| $S_T > K$    | $S_T - K$ | 0         | $S_T - K$ |

### 商业剪影 10.2 如何从跨式期权交易中获得收益

假设我们预计某家公司股票价格将来会有大幅度变化，因为有人要收购该公司或者该公司的一个诉讼案件要宣布判决结果。此时，你应该如何进行跨式期权交易呢？

这种情况下，跨式期权看起来是一个很正确的交易策略。但是，如果其他市场参与者也持有和你一样的想法的时候，这种想法会表现在期权价格上。公司股票的期权会比类似但预期没有大幅度变化的股票的期权昂贵得多。图 10.10 中跨式期权损益的 V 形图会向下移动。这样，你要获得收益的话股票价格应该有更大的变化。

为了跨式期权交易策略成功，应该保证股票价格将来会有大幅度变化的同时，还要保证其他多数投资者持有与你不同的看法。市场价格综合反映市场参与者的看法。任一投资策略中获得收益的条件是，你的看法应该和其他市场参与者不一样，同时你的看法要正确。

成本为 \$4，看跌期权的成本为 \$3。如果股票价格保持 \$69 不变，我们很容易知道该策略的成本为 \$6（初始投资需要 \$7，此时看涨期权到期时价值为 0，看跌期权到期时价值为 \$1）。如果到期时股票价格为 \$70，则会有 \$7 的损失（这是可能发生的最坏情况）。但是，如果股票价格跳跃到 \$90，则该策略可获利 \$13；如果股票价格跌到 \$55，可获利 \$8；依此类推。商业剪影 10.2 中说明了一位投资者在运用跨式期权策略之前，必须仔细考虑期权价格是否已经反映了其预测的重大变动。

我们有时称图 10.10 中的跨式期权为底部跨式期权（bottom straddle）或买入跨式期权（straddle purchase）。顶部跨式期权（top straddle）或卖出跨式期权（straddle write）的情况正好相反。同时出售相同执行价格和相同到期日的看涨期权和看跌期权可构造顶部跨式期权，这是一个高风险的策略。如果在到期日股票价格接近执行价格，会产生一定的利润。然而，一旦股票在任何方向上有重大变动，其损失是无限的。

### 条式期权与带式期权

一个条式期权（strip）是由具有相同执行价格和相同到期日的一个看涨期权和两个看跌期权的多头组成。一个带式期权（strap）是由具有相同执行价格和相同到期日的两个看涨期权和一个看跌期权的多头组成。图 10.11 为条式期权和带式期权的损益状态。在条式期权中，投资者认为股票价格会有很大的变化，且股价下降的可能性要大于股价上升的可能性。在带式期权中，投资者也认为股价将会有很大的变化，但他认为股价上升的可能性要大于股价下降的可能性。

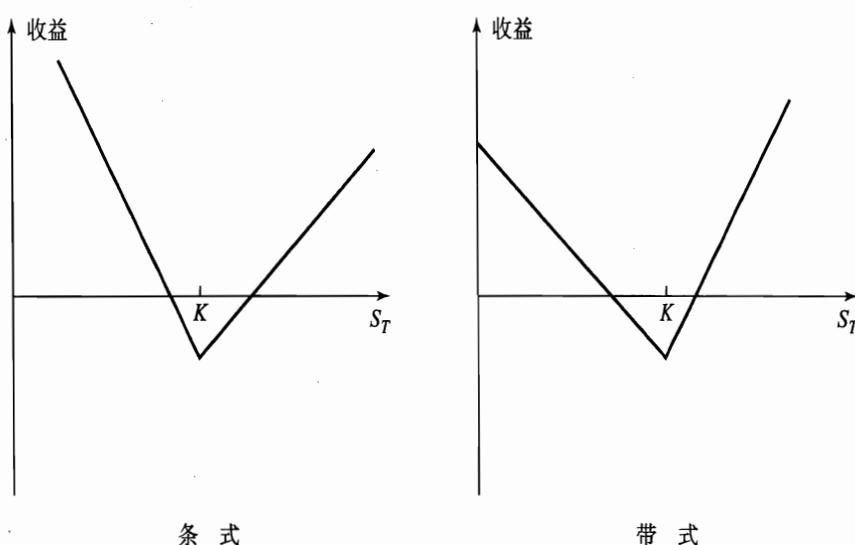


图 10.11 条式期权和带式期权的损益

### 宽跨式期权

宽跨式期权 (strangle) 有时也被称为底部垂直价差组合 (bottom vertical combination)，是指投资者购买相同到期日但执行价格不同的一个看跌期权和一个看涨期权。其损益状态如图 10.12 所示。看涨期权的执行价格  $K_2$  高于看跌期权的执行价格  $K_1$ 。表 10.7 计算了宽跨式期权的损益。

宽跨式期权策略与跨式期权策略类似。投资者预期股票价格会有大幅变化，但不能确定股价是上升还是下降。比较图 10.12 和图 10.10，我们可以发现，在宽跨式期权策略中股价的变动程度要大于跨式期权策略中的股价变动，投资者才能获利。但是，当股价最终处于中间价态时，宽跨式期权的损失也较小。

运用宽跨式期权所获的利润大小取决于两个执行价格的接近程度。它们距离越远，潜在的损失就越小，为获得利润，则股价的变动需要更大一些。

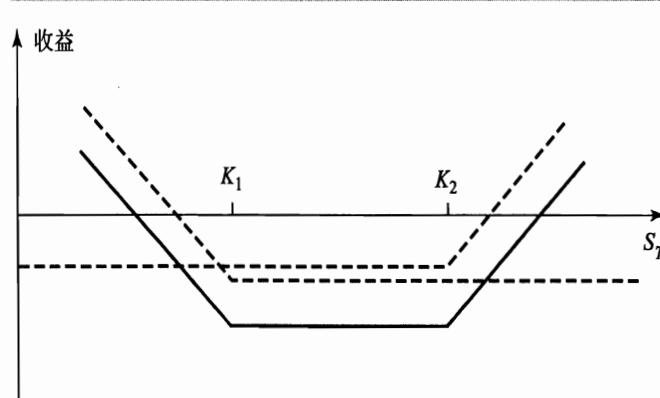


图 10.12 宽跨式期权的损益

表 10.7 宽跨式期权的损益

| 股票价格范围            | 看涨期权的损益     | 看跌期权的损益     | 总损益         |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|
| $S_T \leq K_1$    | 0           | $K_1 - S_T$ | $K_1 - S_T$ |
| $K_1 < S_T < K_2$ | 0           | 0           | 0           |
| $S_T \geq K_2$    | $S_T - K_2$ | 0           | $S_T - K_2$ |

有时将出售一个宽跨式期权称为顶部垂直价差组合 (top vertical combination)。如果投资者认为股价不可能发生巨大变化，则可运用该策略。但是，与出售跨式期权类似，由于投资者的潜在损失是无限的，所以该策略的风险极高。

#### 10.4 其他复合期权的损益状态

本章说明了有那么几种期权组合的方法，可得到令人感兴趣的收益和股票价格之间的关系式。如果在  $T$  时刻到期的欧式期权的执行价格可以取任何价位，理论上在  $T$  时刻就可获得任意形式的损益状态。说明这一问题的最简单的例子是蝶式价差期权。蝶式价差期权可通过购买执行价格分别为  $K_1$  和  $K_3$  的期权，同时出售两个执行价格为  $K_2$  的期权来构造，其中  $K_1 < K_2 < K_3$  且  $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$ 。蝶式价差期权的损益如图 10.13 所示。这种损益状态就很像一个“钉子”。随着  $K_1$  和  $K_3$  越来越接近，“钉子”变得越来越小。通过将大量的“小钉子”结合起来，就可近似得出任何损益状态方程。

### 小结

许多普通的期权交易策略都包括单一的期权和其标的股票。例如，出售一个有保护看涨期权包括购买股票，同时出售基于该股票的看涨期权；一个保护性看跌期权包括购买一个股票，同时购买基于该股票的看跌期权。前者类似于出售看跌期权；后者类似于购买看涨期权。

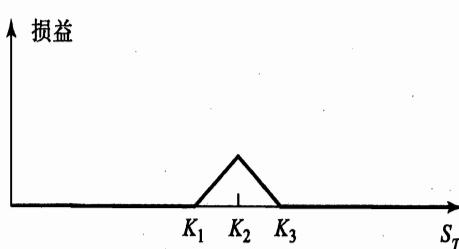


图 10.13 蝶式价差期权的损益

价差期权既包括持有两个或多个看涨期权，也包括持有两个或多个看跌期权。购买较低执行价格的看涨期权（或看跌期权），同时出售较高执行价格的看涨期权（或看跌期权）可构造牛市价差期权。购买较高执行价格的看跌期权（或看涨期权），同时出售较低执行价格的看跌期权（或看涨期权）可构造熊市价差期权。蝶式价差期权包括购买一个低执行价格的看涨期权（或看跌期权）和一个高执行价格的看涨期权（或看跌期权），同时出售两个中间价位执行价格的看涨期权（或看跌期权）。日历价差期权包括出售较短到期日的看涨期权（或看跌期权），同时购买较长到期日的看涨期权（或看跌期权）。对角价差期权包括购买一个期权同时卖出另一个期权，且这两个期权的到期日和执行价格均不相同。

组合期权策略包括既持有看涨期权，也持有同一股票的看跌期权。跨式期权包括持有具有相同执行价格和相同到期日的同种股票的看涨期权的多头和看跌期权的多头。条式期权包括持有相同执行价格和到期日的一个看涨期权多头和两个看跌期权多头。带式期权包括持有相同执行价格和到期日的两个看涨期权多头和一个看跌期权多头。宽跨式期权包括持有相同到期日不同执行价格的一个看涨期权多头和一个看跌期权多头。运用期权还可以构造很多有趣的损益状态。毫不奇怪，期权的运用将日趋广泛并不断受到投资者的青睐。

## 参考读物

- Bharadwaj, A. and J. B. Wiggins. "Box Spread and Put-Call Parity Tests for the S&P Index LEAPS Markets," *Journal of Derivatives*, 8, 4 (Summer 2001): 62-71.
- Chaput, J. S., and L. H. Ederington, "Option Spread and Combination Trading," *Journal of Derivatives*, 10, 4 (Summer 2003): 70-88.
- McMillan, L. G. *Options as a Strategic Investment*. 4th edn., Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2001.
- Rendleman, R. J. "Covered Call Writing from an Expected Utility Perspective," *Journal of Derivatives*, 8, 3 (Spring 2001): 63-75.
- Ronn, A. G. and E. I. Ronn. "The Box-Spread Arbitrage Conditions," *Review of Financial Studies*, 2, 1 (1989): 91-108.

## 问题和习题

- 10.1 什么是保护性看跌期权？看涨期权的什么头寸等价于保护性看跌期权？
- 10.2 解释构造熊市价差期权的两种方法。
- 10.3 对于投资者来说，什么时候购买蝶式期权是合适的？
- 10.4 有效期为3个月，执行价格分别为\$15、\$17 $\frac{1}{2}$ 和\$20的股票看涨期权，其期权价格分别为\$4、\$2和\$ $\frac{1}{2}$ 。解释如何应用这些期权来构造出蝶式价差期权。做个表格说明蝶式价差期权损益如何随股票价格变化而变化。
- 10.5 什么样的交易策略可构造出倒置日历价差期权？
- 10.6 宽跨式期权与跨式期权之间有何不同？
- 10.7 执行价格为\$50的看涨期权成本为\$2，执行价格为\$45的看跌期权成本为\$3，解释由这两种期权如何构造宽跨式期权，宽跨式期权的损益状态是怎么样的？
- 10.8 利用看跌期权和看涨期权之间的平价关系，说明由看跌期权构造的牛市价差期权的

初始投资和由看涨期权构造的牛市价差期权的初始投资之间的关系。

- 10.9 解释如何使用看跌期权构造进取型的熊市价差期权?
- 10.10 假设执行价格为\$30 和\$35 的股票看跌期权成本分别为\$4 和\$7, 怎样用期权构造 (a) 牛市价差期权; (b) 熊市价差期权? 做出表格说明这两个价差期权的损益状态。
- 10.11 利用看跌期权和看涨期权之间的等价关系式证明: 欧式看跌期权构造的蝶式价差期权的成本与欧式看涨期权构造的蝶式价差期权的成本是相等的。
- 10.12 执行价格为\$60 的看涨期权成本为\$6, 相同执行价格和到期日的看跌期权成本为\$4, 制表说明跨式期权损益状况。请问: 股票价格在什么范围时, 跨式期权将导致损失呢?
- 10.13 制表说明使用执行价格  $K_1$  和  $K_2$  ( $K_2 > K_1$ ) 的看跌期权所构造的牛市价差期权的损益状态。
- 10.14 投资者相信股票价格将有巨大变动但方向不确定。请说明投资者能采用的 6 种不同策略并解释它们之间的不同点。
- 10.15 运用期权如何构造出具有确定交割价格和交割日期的股票远期合约?
- 10.16 “盒式价差期权由 4 个期权组成的。其中两个可以一起组成远期多头头寸, 而另外两个可以一起组成远期空头头寸。”请解释这句话。
- 10.17 如果宽跨式期权中看跌期权的执行价格比看涨期权的执行价格高, 结果会是怎样?
- 10.18 假定现在一个澳元值\$0.64, 一年期的蝶式价差期权是由三个执行价格分别为\$0.60、\$0.65、\$0.70 的欧式看涨期权构成的, 美国和澳大利亚的无风险年利率分别为 5% 和 4%, 汇率的波动率为 15%。利用 DerivaGem 软件计算构造这个蝶式价差期权的成本, 并且说明用欧式看涨期权和欧式看跌期权来构造, 其成本是一样的。

## 课后练习

- 10.19 三种同一股票看跌期权有相同的到期日。执行价格为\$55、\$60 和\$65, 市场价格分别为\$3、\$5 和\$8。解释如何构造蝶式价差期权。做出表格说明这种策略带来的盈利。请问: 股票价格在什么范围时, 蝶式价差期权将导致损失呢?
- 10.20 购买执行价格为  $K_2$ 、到期日为  $T_2$  的看涨期权和出售执行价格为  $K_1$ 、到期日为  $T_1$  ( $T_2 > T_1$ ) 的看涨期权, 可构造对角价差期权, 画一简图说明当 (a)  $K_2 > K_1$  和 (b)  $K_2 < K_1$  时该期权的损益。
- 10.21 有如下四种有价证券组合。画出简图说明投资者收益和损失随最终股票价格的变化情况。
  - (a) 一份股票和一份看涨期权的空头
  - (b) 两份股票和一份看涨期权的空头
  - (c) 一份股票和两份看涨期权的空头
  - (d) 一份股票和四份看涨期权的空头
 在每种情况中假设看涨期权的执行价格等于目前股票价格。
- 10.22 假设一个不支付红利股票的价格为\$32, 其波动率为 30%, 所有期限的无风险利率为 5%p.a.。利用 DerivaGem 软件计算构造以下头寸的成本:
  1. 买入执行价格为 \$30 的看涨期权
  2. 卖出执行价格为 \$35 的看涨期权
  3. 买入执行价格为 \$30 的看跌期权
  4. 卖出执行价格为 \$35 的看跌期权

- (a) 利用执行价格为\$25 和\$30, 到期期限都为 6 个月的欧式看涨期权构造的牛市价差期权。
- (b) 利用执行价格为\$25 和\$30, 到期期限都为 6 个月的欧式看跌期权构造的熊市价差期权。
- (c) 利用执行价格为\$25、\$30 和\$35, 到期期限都为 1 年的欧式看涨期权构造的蝶式价差期权。
- (d) 利用执行价格为\$25、\$30 和\$35, 到期期限都为 1 年的欧式看跌期权构造的蝶式价差期权。
- (e) 利用执行价格都为\$30, 到期期限都为 6 个月的期权构造的跨式期权。
- (f) 利用执行价格为\$30 和\$35, 到期期限都为 6 个月的期权构造的宽跨式期权。

对于每种情况，制表说明损益和最终股价之间的关系。不考虑贴现的影响。

## 二叉树模型介绍

为期权进行估值的一个有用且常见的方法是构造二叉树图。这个树图表示了股票价格在期权的有效期内可能遵循的路径。在这里，我们基本的假设是股票价格遵循随机游走。每一时间步中，价格上升一定的百分比有一定的概率，价格下降一定的百分比也有一定的概率。极限情况下，也就是时间步变得很小的时候，这个模型会导致股票价格遵循对数正态分布的假设。这是第 13 章中我们将讨论的 Black-Scholes 模型对标的资产价格分布的基本假设。

在本章，我们首先简要看一下二叉树图，并解释它们与著名的风险中性估值这个重要原理之间的关系。我们采用的一般方法与 Cox、Ross 和 Rubinstein 在 1979 年发表的那篇重要论文中的方法类似。第 17 章将更详细地论述包括二叉树图和三叉树图的数值计算方法。

### 11.1 单步二叉树模型

我们从一个非常简单的例子开始。假设一种股票当前价格为 \$20，我们知道 3 个月后的价格将可能为 \$22 或 \$18。我们打算对 3 个月后以 \$21 执行价格买入股票的欧式看涨期权进行估值。3 个月后，期权价值是如下两个值之一：若到时股票价格为 \$22，期权的价值将是 \$1；若股票价格为 \$18，期权的价值将是 0。这种情况如图 11.11 所示。

这个例子说明，可用一个相当简单的方法为期权估值。我们需要做的唯一假设是对投资者而言没有套利机会。我们可以某种方式构造一个股票和基于该股票的期权的组合，使得在 3 月末该组合的价值是确定的。于是我们可以说，由于该组合无风险，它的收益率一定等于无风险利率。这使我们可以得出构造该组合所需成本，于是得出该期权的价格。由于只有两种证券（股票和股票期权），并只有两个可能的结果，所以总有可能构造出无风险证券组合。

考虑一种有价证券组合，该组合包含一个  $\Delta$  股股票多头和一个股票看涨期权的空头。我们将计算构造无风险组合时的  $\Delta$  值。如果股票价格从 \$20 上升到 \$22 时，股票的价值为  $22\Delta$ ，期权的价值为 \$1，所以该证券组合的总价值为  $22\Delta - 1$ ；如果股票价格从 \$20 下降到 \$18 时，股票的价值为  $18\Delta$ ，期权的价值为零，该证券组合的总价值为  $18\Delta$ 。如果选取某个  $\Delta$  值，以使得该组合的终值对两个股票价格

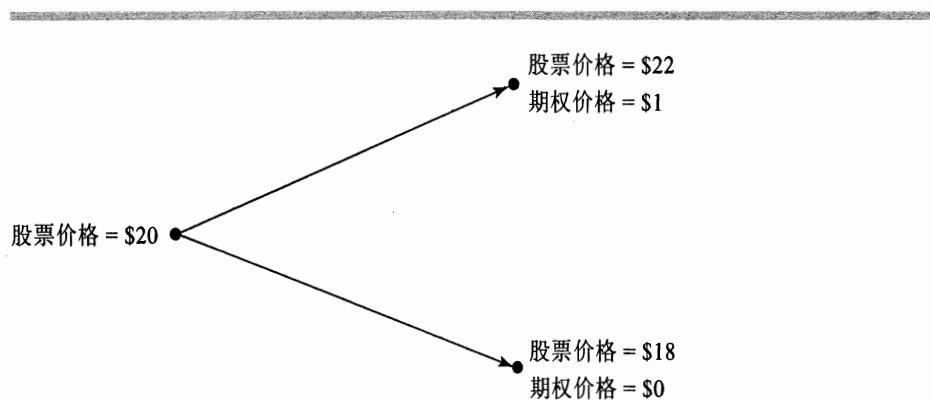


图 11.1 11.1 节的数字例子中股票价格变动

都是相等的，则该组合就是无风险的。这意味着：

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

即

$$\Delta = 0.25$$

因此，一个无风险的组合是：

多头：0.25 股股票

空头：一个股票看涨期权

如果股票价格上升到\$22，该组合的价值为：

$$22 \times 0.25 - 1 = 4.5$$

如果股票价格下跌到\$18，该组合的价值为：

$$18 \times 0.25 = 4.5$$

因此无论股票价格是上升还是下降，在期权有效期的末尾，该组合的价值总是\$4.5。

在无套利机会的情况下，无风险证券组合的收益必定为无风险利率。假设在这种情况下，无风险利率为每年 12%。因此我们知道今天该组合的价值一定是 \$4.5 的现值，即：

$$4.5e^{-0.12 \times 3/12} = 4.367$$

今天的股票价格已知为\$20。假设期权的价格由  $f$  来表示。因此今天该组合的价值为：

$$20 \times 0.25 - f = 5 - f$$

于是

$$5 - f = 4.367$$

即

$$f = 0.633$$

这说明，在无套利机会情况下，期权的当前价值一定为\$0.633。如果期权的价值超过了\$0.633，构造该组合的成本就有可能低于\$4.367，并将获得超过无风险利率的额外收益；如果期权的价值低于\$0.633，那么卖空该证券组合将获得借款利率低于无风险利率的资金。

## 一般结论

考虑一个价格为  $S_0$  的股票，基于该股票的某个期权的当前价格为  $f$ ，在这样的条件下，我们可将以上所得结论推广到一般情形。假设期权在时刻  $T$  到期，并且在期权有效期内，股票价格或者从  $S_0$  向上运动到一个新的水平  $S_0u$ （其中， $u > 1$ ），或者从  $S_0$  向下运动到新的水平  $S_0d$ （其中， $d < 1$ ）。当股票价格向上运动时，股票价格增长的比率为  $u - 1$ ；当股票价格向下运动时，股票价格减少的比率为  $1 - d$ 。如果股票价格运动到  $S_0u$ ，我们假设期权的损益为  $f_u$ ；如果股票价格运动到  $S_0d$ ，我们假设期权的损益为  $f_d$ 。图 11.2 描述了这样的情况。

如前所述，我们想像一个证券组合由  $\Delta$  股的股票多头和一个期权空头来组成。我们计算了使得该组合为无风险状态时的  $\Delta$  值。如果股票价格上升，在期权有效期内该组合的价值为：

$$S_0u\Delta - f_u$$

如果股票价格下降，组合的价值为：

$$S_0d\Delta - f_d$$

当二者价值相等时：

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$$

即

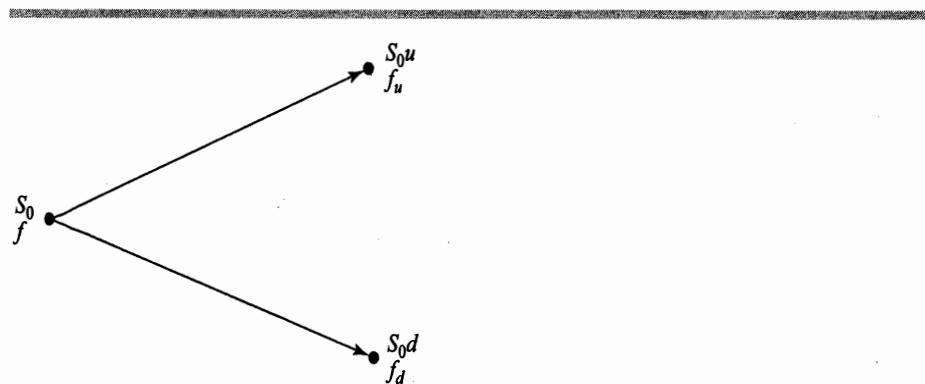


图 11.2 一般化的单步二叉树图中的股票价格和期权价格

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \quad (11.1)$$

在这种情况下，该组合是无风险的，收益一定是无风险利率。公式 (11.1) 说明，当我们在  $T$  时刻的两个节点之间运动时， $\Delta$  是期权价格变化与股票价格变化之比。

如果无风险利率用  $r$  来表示，该组合的现值一定是：

$$(S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}$$

而构造该组合的成本是：

$$S_0 \Delta - f$$

因此

$$S_0 \Delta - f = (S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}$$

即：

$$f = S_0 \Delta (1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

将公式 (11.1) 中的  $\Delta$  代入上式并化简，得到：

$$f = e^{-rT} [pf_u + (1 - p)f_d] \quad (11.2)$$

其中

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \quad (11.3)$$

当股价变动可由单步二叉树图表示的时候，利用公式 (11.2) 和公式 (11.3) 可为该期权估值。

再考虑前面的数值例子（参见图 11.1）， $u = 1.1$ ， $d = 0.9$ ， $r = 0.12$ ， $T = 0.25$ ， $f_u = 1$  和  $f_d = 0$ 。从式 (11.3) 可得：

$$p = \frac{e^{0.12 \times 0.25} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523$$

从式 (11.2) 可得：

$$f = e^{-0.12 \times 0.25} (0.6523 \times 1 + 0.3477 \times 0) = 0.633$$

这个结果与本节开始时所得结果相同。

## 股票预期收益的无关性

期权定价公式 (11.2) 没有用到股票上升和下降的概率。例如，当上升概率是 0.5 时，我们得到的欧式期权价格与上升概率为 0.9 时得到的欧式期权价格相等。这一点令人惊讶且违备常理。人们很自然假设如果股票价格上升的概率增加，基

于该股票的看涨期权价值也增加，基于该股票的看跌期权的价值则减少，其实情况并非如此。

该问题的关键是：我们并不是按绝对价值为期权估值。我们只是根据标的股票的价格估计期权的价值。未来上升和下降的概率已经包含在股票的价格中。它说明：当根据股票价格为期权估值时，我们不需要再考虑股票价格上升和下降的概率。

## 11.2 风险中性估值

虽然我们不需要对股票价格上升和下降的概率做任何假设，就推导出公式（11.2），很自然将公式（11.2）中的变量  $p$  解释为股票价格上升的概率，于是变量  $1 - p$  就是股票价格下降的概率。表达式：

$$pf_u + (1 - p)f_d$$

则是期权的预期收益。按照这种对  $p$  的解释，于是公式（11.2）可以表述为：期权的现价是其未来预期值按无风险利率贴现的值。

当上升运动的概率假设为  $p$  时，我们考察一下股票的预期收益。在  $T$  时刻预期的股票价格  $E(S_T)$  由下式给出：

$$E(S_T) = pS_0u + (1 - p)S_0d$$

即

$$E(S_T) = pS_0(u - d) + S_0d$$

将式（11.3）中的  $p$  代入上式，化简得：

$$E(S_T) = S_0e^{rT} \quad (11.4)$$

该式说明，平均来说，股票价格以无风险利率增长。因此，设定上升变动的概率等于  $p$  就是等价于假设股票收益等于无风险利率。

我们把所有人对于风险都是无差异的世界称为风险中性世界（risk-neutral world）。在这样的世界中，投资者对风险不要求补偿，所有证券的预期收益都是无风险利率。公式（11.4）说明：当我们设定上升变动的概率为  $p$  时，我们就在假设一个风险中性世界。公式（11.2）说明：期权的价值是其预期收益在风险中性世界中按无风险利率贴现的值。

期权估值中的所谓风险中性估值原理是一个重要的一般原理，而以上的结果只是这个原理的一个例子。这说明我们可以完全放心地假设：当为期权估值时，世界是风险中性的。我们得到的价格不仅仅在风险中性世界中是正确的，在其他世界中也是正确的。

## 回顾单步二叉树模型例子

本节我们重新讨论图 11.1 中的例子，我们将说明风险中性估值和无套利理论给出的结果是一样的。图 11.1 中，股票现价为 \$20，3 个月末股票价格可能上涨到 \$22 或下降到 \$18。本例中所考虑的期权是一份执行价格为 \$21、有效期为 3 个月的欧式看涨期权。无风险利率是每年 12%。

我们说过，在风险中性世界中，股票价格上升变动的概率是  $p$ 。在这样的世界中，股票的预期收益率一定等于无风险利率 12%。这意味着  $p$  一定满足：

$$22p + 18(1 - p) = 20e^{0.12 \times 3/12}$$

即

$$4p = 20e^{0.12 \times 3/12} - 18$$

则  $p$  一定为 0.6523。

在 3 月末，看涨期权价值为 \$1 的概率为 0.6523，价值为零的概率为 0.3477。因此，看涨期权的期望值为：

$$0.6523 \times 1 + 0.3477 \times 0 = \$0.6523$$

风险中性世界中，应该用无风险利率贴现。那么，该期权今天的价值为：

$$0.6523e^{-0.12 \times 3/12} = \$0.633$$

即 \$0.633。这个结果与前面所得结果相同，说明无套利理论和风险中性定价方法的结论相同。

## 现实世界与风险中性世界

必须强调的一点是， $p$  是在一个风险中性世界中股价上升的概率，而在现实世界中事实并不一定这样。我们的例子中  $p = 0.6523$ ，当价格上升的概率为 0.6523 的时候，股票和期权的预期收益率都等于无风险利率 12%。假设在现实世界中股票的预期收益率为 16%， $p^*$  是股票价格上升的概率。那么，有

$$22p^* + 18(1 - p^*) = 20e^{0.16 \times 3/12}$$

则  $p^* = 0.7041$ 。

因此，现实世界中期权的预期损益为

$$p^* \times 1 + (1 - p^*) \times 0 = 0.7041$$

不幸的是，现实世界中很难确定能适用于该预期收益的准确贴现率。持有看涨期权头寸比持有相应股票的头寸风险更大，所以用来贴现看涨期权损益的贴现率应该高于 16%。不知道期权价值的情况下，我们也不知道这个贴现率应该比 16% 高多少。<sup>1</sup> 风险中性估值法用起来比较便利，因为我们知道在一个风险中性世

---

<sup>1</sup> 因为该期权的准确价值为 0.633，我们可以推导出准确的贴现率应该是 42.58%。因为  $0.633 = 0.7041e^{-0.4258 \times 3/12}$ 。

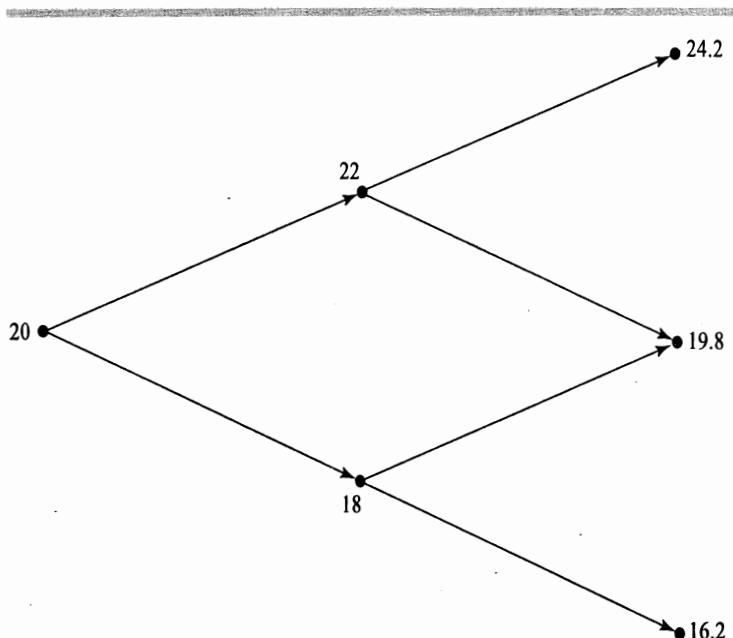


图 11.3 两步二叉树图中的股票价格

界，所有资产的预期收益（相同的，所有预期损益应该使用的贴现率）都是无风险利率。

### 11.3 两步二叉树图

我们可以将以上的分析推广到诸如图 11.3 那样的两步二叉树图中。此时，开始的股票价格为\$20，并在两步二叉树图的每个时间单步二叉树图中，股票价格可以上升 10%或者下降 10%。我们假设在每个单步二叉树的步长是 3 个月，无风险利率是每年 12%。像以前一样，我们考虑一个执行价格为\$21 的期权。

我们分析的目的是计算在树图初始节点的期权价格，这可以通过重复应用前面章节所建立的理论来求得。图 11.4 表示了与图 11.3 类似的树图，但在每个节点上包含了股票价格和期权价格（在每个节点，上面的数字是股票价格，下面的数字是期权价格）。在树图最后节点的期权价格比较容易计算，它们是期权的损益状态。在节点 D，股票价格是\$24.2，期权价格是\$24.2 - \$21 = \$3.2；在节点 E 和 F，期权处于虚值状态，其价值为零。

在节点 C，期权的价格为零，因为节点 C 的期权值来源于节点 E 和 F，而这两个节点的期权价值为零。将注意力集中在图 11.5 所示这部分树图，我们可计算在节点 B 的期权价格。利用在本章较早使用的符号， $u = 1.1$ ,  $d = 0.9$ ,  $r = 0.12$ ,  $T = 0.25$  和  $p = 0.6523$ ，公式 (11.2) 给出在节点 B 的期权价格为：

$$e^{-0.12 \times 3/12} (0.6523 \times 3.2 + 0.3477 \times 0) = 2.0257$$

最后我们计算节点 A 的期权价格。为此我们需要将注意力集中在树图的前面

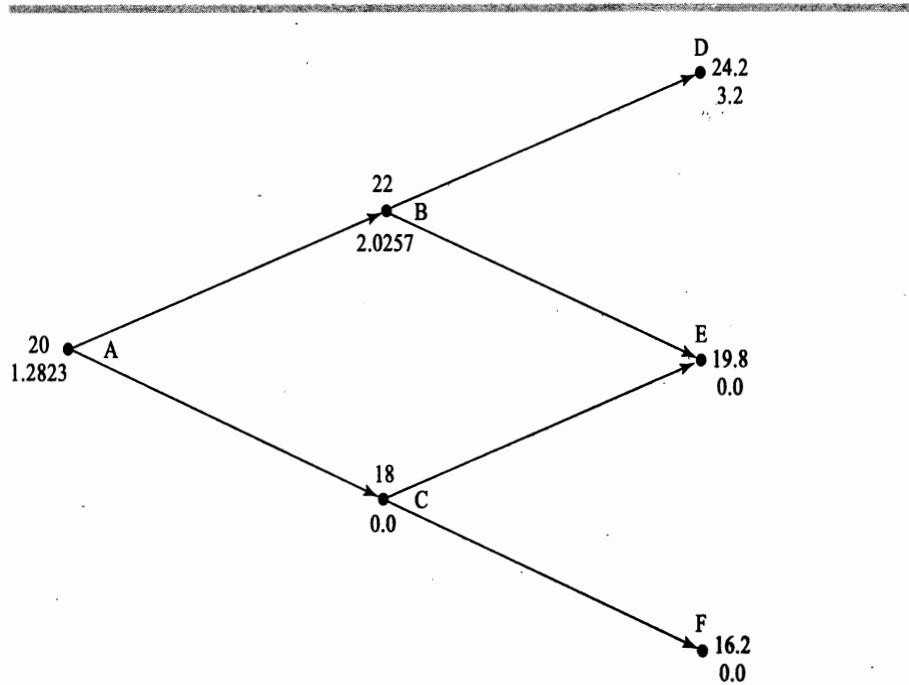


图 11.4 两步二叉树图中的股票价格和期权价格。在每个节点，上面的数字是股票价格，下面的数字是期权价格

第一个单步二叉树。我们知道在节点 B 的期权价值为 2.0257 以及在节点 C 的期权价值为零。因此，公式 (11.2) 给出节点 A 的期权价值：

$$e^{-0.12 \times 3/12} (0.6523 \times 2.0257 + 0.3477 \times 0) = 1.2823$$

于是期权的价格为 \$1.2823。

注意在构造这个例子时， $u$  和  $d$ （股票价格上升和下降的比率）在树图的每个节点上是相同的，并且每个单步二叉树的时间长度是相等的。由公式 (11.3) 可得风险中性的概率  $p$ ，而且在每个节点都是相同的。

### 一般结论

考虑图 11.6 所示的情况，我们可以得到两步树图的一般结论。初始股票价格为  $S_0$ ，在每个单步二叉树中，股票价格或者上升到初始值的  $u$  倍，或下降到初始值的  $d$  倍。期权价值的符号表示在树图中（例如，在两次上升运动后，衍生证券的价值为  $f_u$ ）。我们假设无风险利率是  $r$ ，每个单步二叉树的时间长度是  $\Delta t$  年。

现在，时间单步的长度为  $\Delta t$  而不是  $T$ ，式 (11.2) 和式 (11.3) 变成：

$$f = e^{-r\Delta t} [pf_u + (1-p)f_d] \quad (11.5)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (11.6)$$

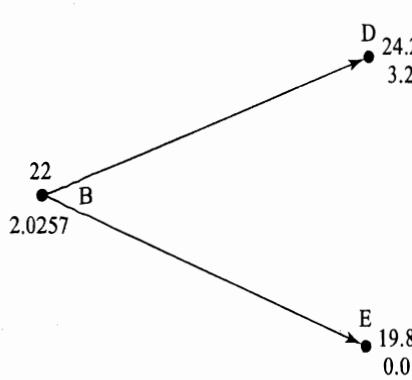


图 11.5 在节点 B 的期权定价

运用式 (11.5), 得到:

$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \quad (11.7)$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \quad (11.8)$$

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d] \quad (11.9)$$

把公式 (11.7) 与 (11.8) 代入 (11.9), 可以得到:

$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2f_{dd}] \quad (11.10)$$

这与前面提到的风险中性估值的原理一致。变量  $p^2$ 、 $2p(1-p)$  和  $(1-p)^2$  是达到最后上、中、下三个节点的概率。期权的价格等于它在风险中性世界的预期收益按无风险利率贴现的值。

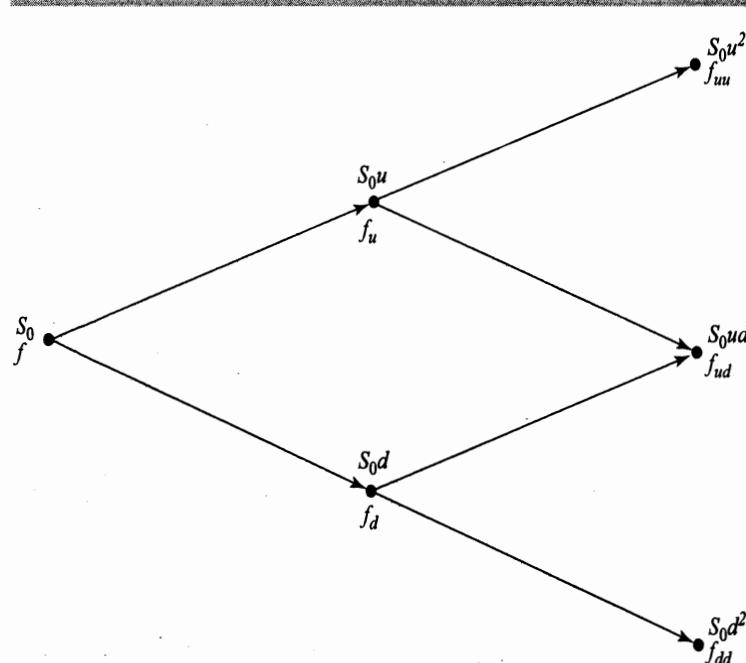


图 11.6 在一般的两步二叉树图中的股票价格和期权价格

如果在树图中加入更多的步，并推广应用二叉树图方法，我们发现风险中性估值的原理一直是成立的。期权的价格总是等于它在风险中性世界的预期收益按无风险利率贴现的值。

## 11.4 看跌期权的例子

运用本章所描述的方法，对看涨期权和看跌期权都可以进行估值。例如，考虑一个 2 年期欧式看跌期权，股票的执行价格为 \$52，当前价格为 \$50。我们假设价格为两步二叉树，每个步长为一年，在每个单步二叉树中股票价格或者按比率上升 20%，或者按比率下降 20%。我们也假设无风险利率是 5%。

树图如图 11.7 所示。在这种情况下， $u = 1.2$ ,  $d = 0.8$ ,  $\Delta t = 1$ ,  $r = 0.05$ ，根据公式 (11.6)，风险中性概率  $p$  的值为：

$$p = \frac{e^{0.05 \times 1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282$$

最后股票的可能价格为 \$72、\$48 和 \$32。在这种情况下， $f_{uu} = 0$ ,  $f_{ud} = 4$ ,  $f_{dd} = 20$ ，利用公式 (11.10)，我们有：

$$f = e^{-2 \times 0.05 \times 1} (0.6282^2 \times 0 + 2 \times 0.6282 \times 0.3718 \times 4 + 0.3718^2 \times 20) = 4.1923$$

看跌期权的价值是 \$4.1923。利用公式 (11.5) 并从每个单步二叉树向回倒推，也可以得到这个结果。图 11.7 表示了所计算的期权价格。

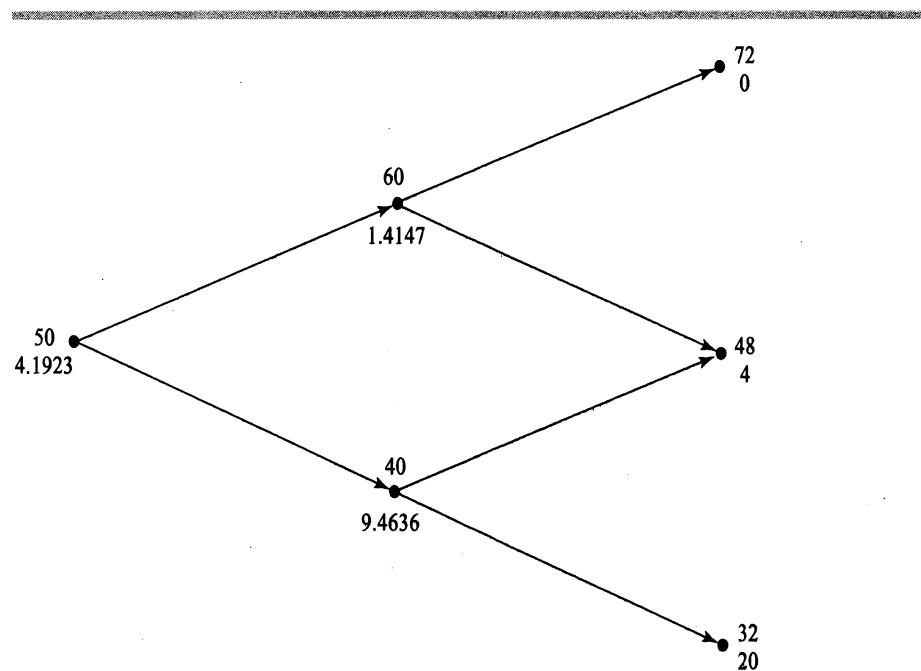


图 11.7 利用两步二叉树图方法为欧式看跌期权估值。在每个节点，上面的数字是股票价格，下面的数字是期权价格

## 11.5 美式期权

至今为止，我们一直考虑的是欧式期权。现在我们考虑如何利用诸如图 11.4 或图 11.7 所示的二叉树图方法为美式期权进行估值。方法是从树图末端向开始的起点倒推计算，在每个节点检验提前执行是否最佳。在最后节点的美式期权价值与欧式期权在最后节点的期权价值相同。在较前的一些节点，期权的价值是取如下两者之中较大者：

1. 由公式 (11.5) 求出的值
2. 提前执行所得的收益

图 11.8 说明了，如果所考虑的期权是美式的而不是欧式的，图 11.7 会发生什么变化。当然股票价格和它们的概率不会变化。在最后节点的期权价值也没有变化。在节点 B，公式 (11.5) 给出期权的价值为 \$1.4147，而提前执行期权的损益为负值 (-8)。很清楚，在节点 B 提前执行不是明智的，在这个节点的期权价值为 1.4147。在节点 C，公式 (11.5) 给出期权的价值为 \$9.4636，而提前执行期权的损益为 \$12。在这种情况下，提前执行是最佳的，因此期权的价值为 \$12。在初始节点 A，公式 (11.5) 给出的期权价值为：

$$e^{-0.05 \times 1} (0.6282 \times 1.4147 + 0.3718 \times 12.0) = 5.0894$$

而提前执行的价值为 \$2.0。在这种情况下，提前执行是不明智的。因此期权的价值为 \$5.0894。

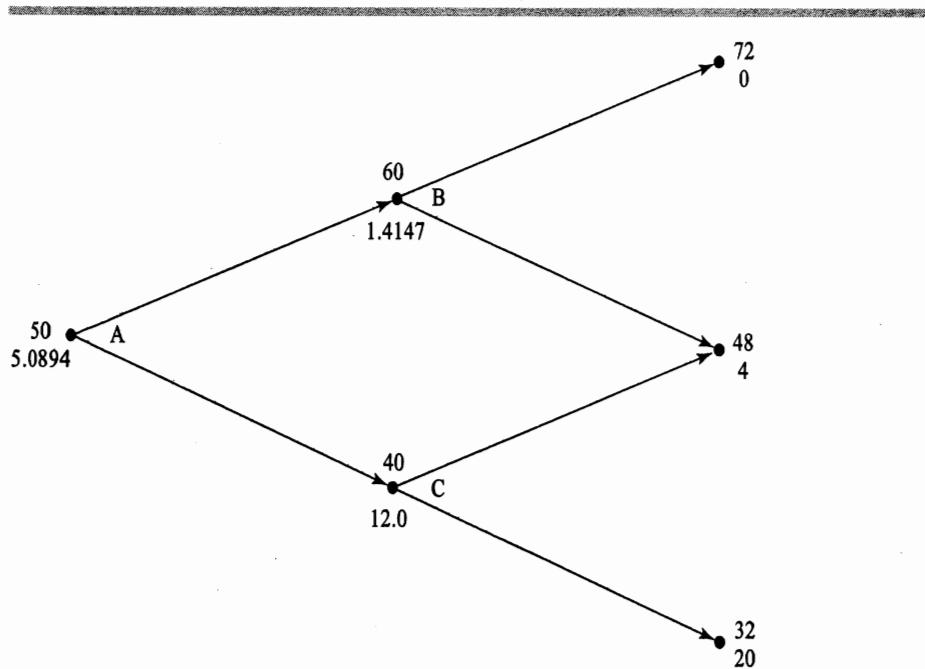


图 11.8 利用两步二叉树图方法为美式看跌期权估值。在每个节点，上面的数字是股票价格，下面的数字是期权价格

## 11.6 Delta值

在这个时候讨论 *delta* 是很合适的。在期权的对冲和估值中，*delta* 是一个重要的参数。

股票期权的 *delta* 是股票期权价格的变化与标的股票价格的变化之比。*delta* 是一个数字，即为了构造一个无风险对冲，对每一个卖空的期权头寸我们应该持有的股票数量。它与在本章较早时引入的  $\Delta$  是相同的。构造无风险对冲有时就称之为 *delta* 对冲。看涨期权的 *delta* 是正值，而看跌期权的 *delta* 是负值。

从图 11.1，我们可以计算该看涨期权的 *delta* 如下：

$$\frac{1 - 0}{22 - 18} = 0.25$$

这是因为当股票价格从\$18 变化到\$22 时，期权价格从\$0 变化到\$1。

在图 11.4 中，对于第一个时间步（即单步二叉树），股票价格变动的 *delta* 为：

$$\frac{2.0257 - 0}{22 - 18} = 0.5064$$

如果在第一个时间步之后，还有一个向上的变动，则在第二个时间步股票价格变动的 *delta* 为：

$$\frac{3.2 - 0}{24.2 - 19.8} = 0.7273$$

如果在第一个时间步之后，还有一个向下的变动，则在第二个时间步股票价格变动的 *delta* 为：

$$\frac{0 - 0}{19.8 - 16.2} = 0$$

在图 11.7 中，第一个时间步的 *delta* 为：

$$\frac{1.4147 - 9.4636}{60 - 40} = -0.4024$$

在第二个时间步，有两个 *delta*，或者为：

$$\frac{0 - 4}{72 - 48} = -0.1667$$

或者为：

$$\frac{4 - 20}{48 - 32} = -1.0000$$

两个时间步的例子说明，*delta* 值随时间而变化（在图 11.4 中 *delta* 从 0.5064 变化为 0.7273 或者 0；在图 11.7 中 *delta* 从 -0.4024 变化为 -0.1667 或者 -1.0000）。这意味着利用期权和标的股票来保持一个无风险对冲，我们需要定期调

整我们所持有的股票数量。这是期权的性质之一，在第15章中，我们还要讨论这些性质。

## 11.7 用 $u$ 和 $d$ 计算波动率

实际中，构建反映股票价格变动的二叉树图时，我们选择参数  $u$  和  $d$  来匹配股票价格波动率。为了解释这些过程，我们假定股票的预期收益（现实世界中）为  $\mu$ ，而其波动率为  $\sigma$ 。图11.9(a)给出了二叉树图中第一步股票价格的变动。该步的长度为  $\Delta t$ 。起始股票价格  $S_0$  上升到  $S_0u$  或下降到  $S_0d$ 。假定价格上升的概率（现实世界中）为  $p^*$ 。

第一个时间步结束之时的预期股票价格为  $S_0e^{\mu\Delta t}$ 。而树图中此时的预期股价为

$$p^*S_0u + (1 - p^*)S_0d$$

为了匹配树图参数表示的预期股票收益，下式应当成立：

$$p^*S_0u + (1 - p^*)S_0d = S_0e^{\mu\Delta t}$$

即

$$p^* = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} \quad (11.11)$$

我们将在第13章解释，股票价格的波动率  $\sigma$  应该使  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  等于较短时间长度  $\Delta t$  内，股票价格收益的标准方差。等价的条件是，收益的方差为  $\sigma^2\Delta t$ 。图11.9(a)中的树图中，股价收益的方差为<sup>2</sup>

$$p^*u^2 + (1 - p^*)d^2 - [p^*u + (1 - p^*)d]^2$$

为了匹配树图参数表示的股价波动率，下式应当成立：

$$p^*u^2 + (1 - p^*)d^2 - [p^*u + (1 - p^*)d]^2 = \sigma^2\Delta t \quad (11.12)$$

把式(11.11)代入式(11.12)，我们得到

$$e^{\mu\Delta t}(u + d) - ud - e^{2\mu\Delta t} = \sigma^2\Delta t$$

忽略  $\Delta t^2$  以及  $\Delta t$  的高阶，上述方程的一个解为<sup>3</sup>

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (11.13)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (11.14)$$

<sup>2</sup> 这里使用了以下结论：变量  $X$  的方差等于  $E(X^2) - [E(X)]^2$ ，其中  $E$  表示期望值。

<sup>3</sup> 其中使用了级数展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

这些就是 Cox、Ross 和 Robinstein (1979) 提出的匹配波动率的  $u$ 、 $d$  值。

利用 11.2 节中的分析，我们可以将图 11.9 (a) 中的树图替换成图 11.9 (b) 中的树图。新的树图中，上升的概率为  $p$ ，并假定是风险中性世界。根据公式 (11.6) 可以计算  $p$  值如下：

$$p = \frac{a - d}{u - d} \quad (11.15)$$

其中，

$$a = e^{r\Delta t} \quad (11.16)$$

这是上升的风险中性概率。在图 11.9 (b) 中，时间步结束之时的预期股价为  $S_0 e^{r\Delta t}$ ，如公式 (11.4) 所示。股票价格收益的方差为

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = [e^{r\Delta t}(u+d) - un - e^{2r\Delta t}]$$

代入式 (11.13) 和式 (11.14) 中的  $u$  和  $d$ ，并忽略  $\Delta t^2$  以及  $\Delta t$  的高阶，我们可以知道上式等于  $\sigma^2 \Delta t$ 。

以上分析说明，当我们从现实世界切换到风险中性世界的时候，股票的预期收益有变化，但是其波动率保持不变（至少在  $\Delta t$  趋近于零的时候）。至此，我们说明了 Girsanov 定理一个重要的一般结论。当我们从具有某种风险偏好集合的世界移到具有另外一种风险偏好集合的世界的时候，变量的预期增长率会有变化，但其波动率保持不变。我们将在第 25 章中更详细地讲述风险偏好对于市场变量的影响。从一种风险偏好的世界移到另外一种风险偏好的世界，有时被称为测度变换 (change the measure)。现实世界测度有时被称为  $P$  测度 ( $P$ -measure)，而风险中性世界测度被称为  $Q$  测度 ( $Q$ -measure)。<sup>4</sup>

再次考虑图 11.8 中美式看跌期权的例子，股价为 \$50，执行价格为 \$52，无风

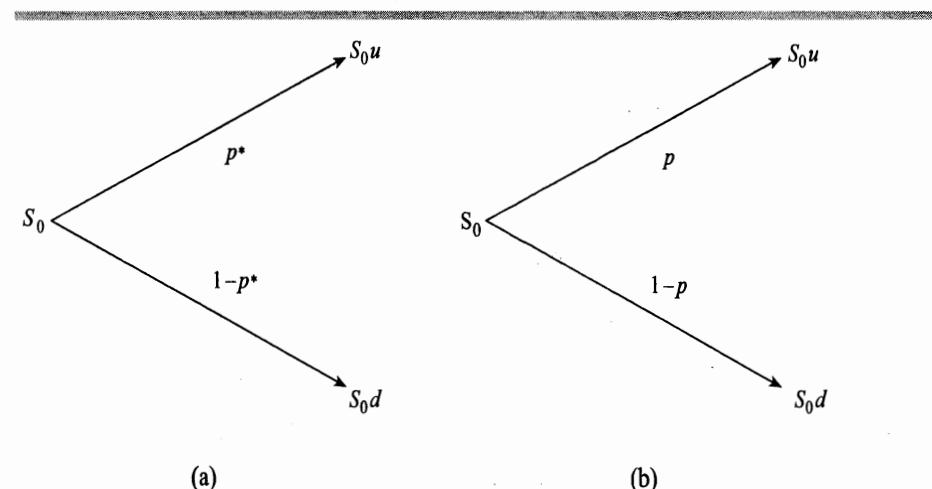


图 11.9 (a) 现实世界中以及 (b) 风险中性世界中， $\Delta t$  时间段后股票价格的变化

<sup>4</sup> 在我们一直使用的符号中， $p$  表示  $Q$  测度下的概率， $p^*$  表示  $P$  测度下的概率。

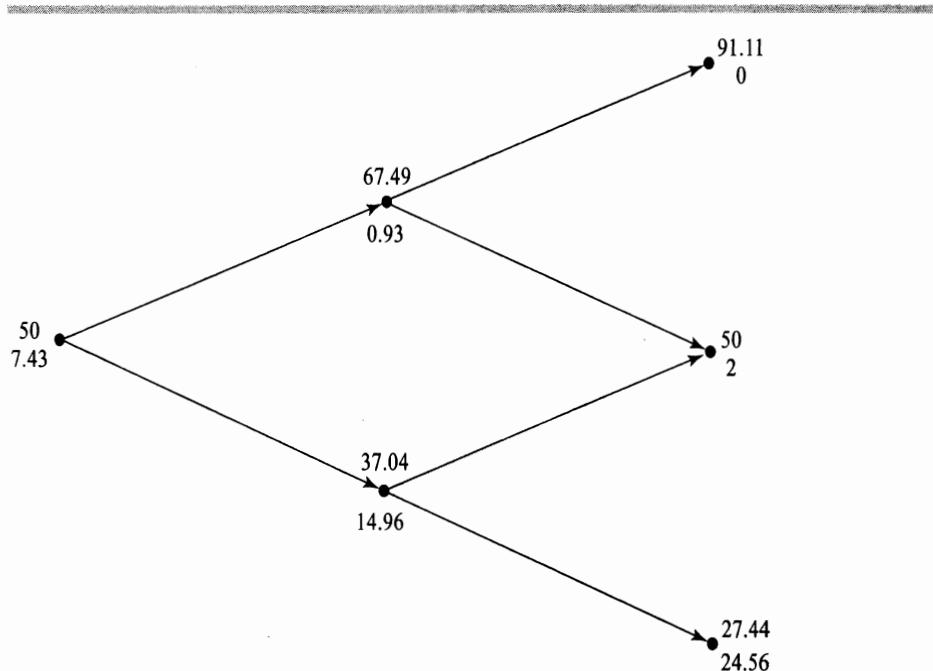


图 11.10 利用两步二叉树图估值 2 年期美式看跌期权。其中，股价为 50，执行价格为 52，无风险利率为 5%，波动率为 30%

险利率为 5%，期权的有效期限为 2 年，有两个时间步。此时， $\Delta t = 1$ 。假定波动率  $\sigma$  为 30%。根据公式 (11.13) ~ 公式 (11.16)，我们可以得到：

$$u = e^{0.3 \times 1} = 1.3499, \quad d = \frac{1}{1.3499} = 0.7408, \quad a = e^{0.05 \times 1} = 1.0513$$

因此，

$$p = \frac{1.053 - 0.7408}{1.3499 - 0.7408} = 0.5097$$

在图 11.10 中画出了相应的树图。看跌期权的价格为 7.43。这与图 11.8 中假定了  $u = 1.2$ 、 $d = 0.8$  所得出的价格不一样。

## 11.8 增加树图中的步数

我们在上面使用的二叉树模型非常简单，这并不切合实际。通过把期权有效期间内的股价变动分为一步或两步二叉树，分析师只能得到粗略的期权价格近似值。

在实际中应用二叉树图方法时，通常将期权有效期分成 30 或更多的时间步。在每一个时间步，就有一个单个二叉树股票价格变动。30 个时间步意味着最后有 31 个终端股票价格，并且  $2^{30}$  即大约有 10 亿个可能的股票价格路径。

不管有多少时间步，都可以使用公式 (11.13) ~ 公式 (11.16) 决定相应的二

叉树图。比如，我们假定图 11.10 中的例子中有 5 个时间步而不是 2 个。那么参数应该是  $\Delta t = 2/5 = 0.4$ ,  $r = 0.05$  且  $\sigma = 0.3$ 。那么，我们可以计算出  $u = e^{0.3\sqrt{0.4}} = 1.2089$ ,  $d = 1/1.2089 = 0.8272$ ,  $a = e^{0.05 \times 0.4} = 1.0202$  以及  $p = (1.0202 - 0.8272) / (1.2089 - 0.8272) = 0.5056$ 。

## DerivaGem 软件的使用

利用本书附带的 DerivaGem 软件，可以方便地进行二叉树模型的计算。根据本书最后讲述的方法运行该软件之后，进入 Equity\_FX\_Index\_Futures\_Options 工作表。将 Underlying Type 选择成 Equity, Option Type 选择成 Binomial American。输入股价、波动率、无风险利率、有效期限、执行价格和时间步个数，如分别输入 50、30%、5%、2、52 和 2。点击 Put 按钮，再点击 Calculate 按钮。标签为 Price 的框中显示期权价格为 7.428。再点击显示树图就可以看到和图 10.11 一样的二叉树图（软件中的红色数字表示执行期权的节点）。

回到 Equity\_FX\_Index\_Futures\_Options 工作表，把时间步个数改为 5。点击 Enter 和 Calculate 按钮，我们可以发现期权价格变为 7.671。点击 Display Tree，将显示五步二叉树图和相应的  $u$ 、 $d$ 、 $a$  和  $p$  的值。

DerivaGem 软件最多可以显示 10 步二叉树图，但最多可以计算 500 步的二叉树模型。在我们的例子中，设定 500 个时间步，则计算出来的期权价格为 7.47（保留小数点后两位）。这是非常精确的答案。把 Option Type 改为 Binomial European，我们就可以利用二叉树模型估值欧式期权。输入和上述美式期权例子中的相同的变量值，选择 500 个时间步，我们可以得到相应的欧式期权价格为 6.76（把 Option Type 改成 Analytic European，我们可以用 Black-Scholes 模型计算期权价值，同样为 6.76）。

选择不同的 Underlying Type，我们可以分析其他标的资产的期权价格。接下来，我们将讨论其他一些资产的期权。

## 11.9 其他一些资产的期权

我们在第 8 章中介绍过指数期权、外汇期权和期货期权，将在第 14 章中更深入地讨论这些期权。现在，我们可以利用二叉树模型分析这些资产的期权，除了计算  $p$  的公式变化之外，方法和股票期权的分析方法相同。股票期权的情况下，公式 (11.2) 说明了节点（不考虑期权提前执行）上的价值等于， $p$  乘以上升的价值加上  $1 - p$  乘以下降的价值，再以无风险利率贴现所得到的值。

### 支付连续红利收益的股票的期权

考虑支付已知红利收益率  $q$  的股票。在风险中性世界，红利与资本利润带来

的总收益率为  $r$ 。红利收益率为  $q$ ，所以资本收益率应该为  $r-q$ 。如果股票的起始价格为  $S_0$ ，那么一个长度为  $\Delta t$  的时间步结束之时的股票预期价格应该是  $S_0 e^{(r-q)\Delta t}$ 。那么，

$$pS_0u + (1-p)S_0d = S_0e^{(r-q)\Delta t}$$

因此

$$p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}$$

对于不支付红利的股票的期权，我们设定  $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  和  $d = 1/u$  来匹配波动率。这说明除了要设  $a = e^{(r-q)\Delta t}$  之外，我们可以使用公式 (11.13) ~ (11.16)。

## 股票指数期权

在第 5 章计算股票指数的未来价格时，我们假设指数的标的股票组合支付红利收益率为  $q$ 。在这里，沿用这个假设。因此，股票指数期权的估值和支付连续红利收益的股票的期权估值非常相似。

**[例 11.1]** 当前某个股票指数为 810，波动率为 20%，红利收益率为 2%。无风险利率是 5%。图 11.11 说明了利用两步二叉树模型，DerivaGem 对执行价格为 800、6 个月期欧式看涨期权进行估值。

这里，

$$\begin{aligned}\Delta t &= 0.25, \quad u = e^{0.20\sqrt{0.25}} = 1.1052 \\ d &= 1/u = 0.9048, \quad a = e^{(0.05-0.02)\times 0.25} = 1.0075 \\ p &= (1.0075 - 0.9048)/(1.1052 - 0.9048) = 0.5126\end{aligned}$$

期权的价格为 53.39。

## 外汇期权

在 5.10 节中提过，可以把一种外汇当作是支付外汇无风险利率  $r_f$  的一种资产。和股票指数期权的情况一样，我们可以利用公式 (11.13) ~ 公式 (11.16)，构建外汇期权的二叉树模型树图，在这种情况下设定  $a = e^{(r-r_f)\Delta t}$ 。

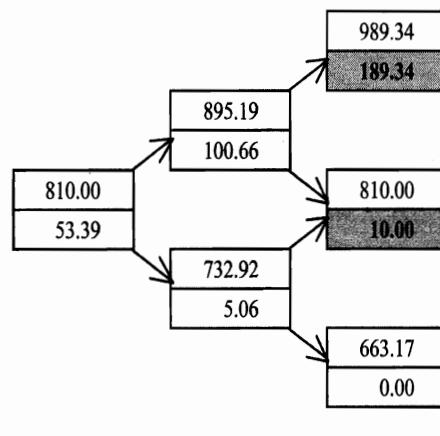
**[例 11.2]** 当前，一澳元等于 0.6100 美元，汇率波动率为 12%。澳元无风险利率为 7%，美元无风险利率为 5%。图 11.12 显示了用 DerivaGem 估值执行价格为 0.6000 的 3 个月期美式看涨期权的结果，使用了三步二叉树模型。

这里，

$$\begin{aligned}\Delta t &= 0.08333, \quad u = e^{0.12\sqrt{0.08333}} = 1.0352 \\ d &= 1/u = 0.9660, \quad a = e^{(0.05-0.07)\times 0.08333} = 0.9983 \\ p &= (0.9983 - 0.9660)/(1.0352 - 0.9660) = 0.4673\end{aligned}$$

在每个节点：  
 上面的数值：标的资产价格  
 下面的数值：期权价格  
 阴影部分表示期权在那个节点被执行

执行价格 = 800  
 每个时间步的贴现因子 = 0.9876  
 时间步， $dt = 0.2500$ 年，即91.25天  
 每个时间步的增长因子， $a = 1.0075$   
 上升的概率， $p = 0.5126$   
 上升步的规模， $u = 1.1052$   
 下降步的规模， $d = 0.9048$



节点时刻：  
 0.0000      0.2500      0.5000

图 11.1 利用两步二叉树图对基于一种指数的 6 个月期欧式看涨期权进行估值。其中，指数水平为 810，执行价格为 800，无风险利率为 5%，波动率为 20%，红利收益率为 2%

期权的价格为 0.019。

## 期货期权

买入或卖出期货合约不需要任何成本。因此，在风险中性世界，期货价格的预期增长率应该为零（在 14.7 节中我们将进一步讨论这个论点）。和上述的分析一样，我们可以定义  $p$  为期货价格上升的概率、 $u$  为价格上升的百分比以及  $d$  为价格下降的百分比。如果起始期货价格为  $F_0$ ，那么一个长度为  $\Delta t$  的时间步结束之时的预期期货价格也应该是  $F_0$ 。这说明

$$pF_0u + (1 - p)F_0d = F_0$$

在每个节点：  
 上面的数值：标的资产价格  
 下面的数值：期权价格  
 阴影部分表示期权在那个节点被执行

执行价格 = 0.6  
 每个时间步的贴现因子 = 0.9958  
 时间步， $dt = 0.0833$ 年，即30.42天  
 每个时间步的增长因子， $a = 0.9983$   
 上升的概率， $p = 0.4673$   
 上升步的规模， $u = 1.0352$   
 下降步的规模， $d = 0.9660$

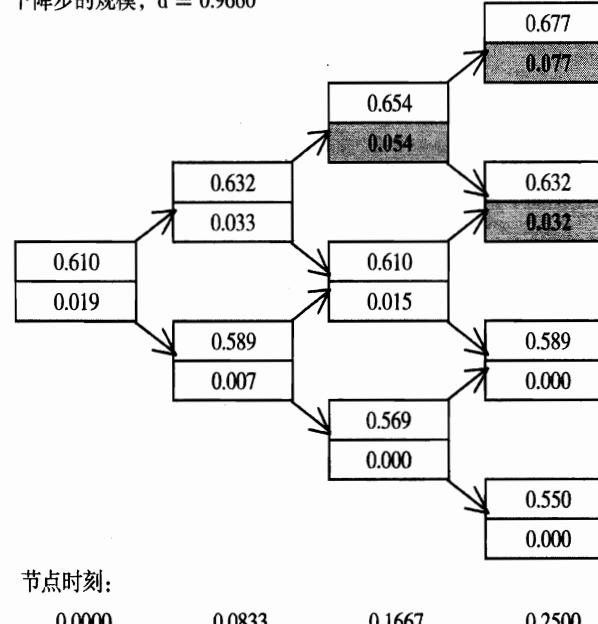


图 11.2 利用三步二叉树图估值基于一种外汇的 3 个月期美式看涨期权。其中，汇率为 0.6100，执行价格为 0.6000，美元无风险利率为 5%，波动率为 12%，外汇无风险利率为 7%

因此

$$p = \frac{1 - d}{u - d}$$

设  $a = 1$  之后，我们就可以使用公式 (11.13) ~ 公式 (11.16)。

[例 11.3] 当前的期货价格为 31，其波动率为 30%，无风险利率为 5%。图 11.13 显示了用 DerivaGem 估值执行价格为 30 的 9 个月期美式看涨期权的结果，使用了三步二叉树模型。

在每个节点：  
 上面的数值：标的资产价格  
 下面的数值：期权价格  
 阴影部分表示期权在那个节点被执行

执行价格 = 30  
 每个时间步的贴现因子 = 0.9876  
 时间步， $dt = 0.2500$ 年，即91.25天  
 每个时间步的增长因子， $a = 1.000$   
 上升的概率， $p = 0.4626$   
 上升步的规模， $u = 1.1618$   
 下降步的规模， $d = 0.8607$

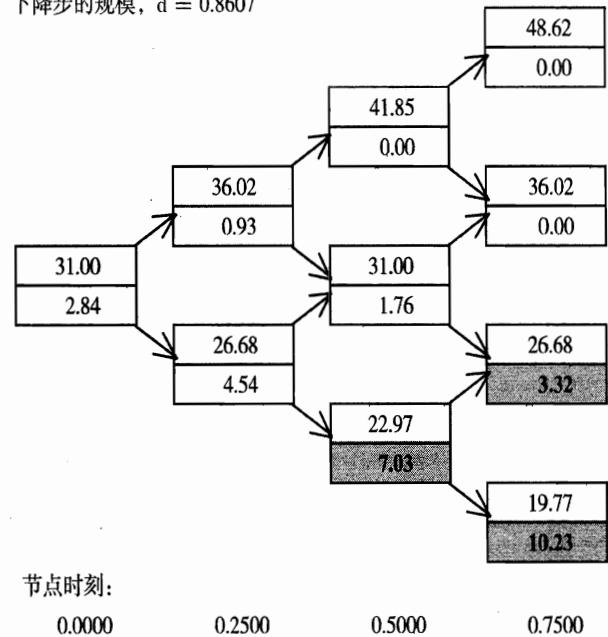


图 11.13 利用三步二叉树图估值基于一种期货的 9 个月期美式看跌期权。其中，期货价格为 31，执行价格为 30，无风险利率为 5%，波动率为 30%

这里，

$$\Delta t = 0.25, u = e^{0.30 \times \sqrt{0.25}} = 1.1618$$

$$d = 1/u = 1/1.1618 = 0.8607, a = 1,$$

$$p = (1 - 0.8607)/(1.1618 - 0.8607) = 0.4626$$

期权的价格为 2.84。

## 小 结

本章简要介绍了基于股票和其他一些资产的期权的估值问题。如果在股票期权有效期内股票价格的运动是按单步二叉树图方式进行的话，那么有可能构造一个由股票期权和股票本

身组成的无风险证券组合。无套利机会的世界中，无风险证券组合的收益率应该等于无风险利率。这有可能要根据股票来定价股票期权。有意思的是：没有必要在每个节点假设股票价格上升和下降的概率。

如果股票价格的运动是按多步二叉树图方式进行的，我们可以分别处理每个单步二叉树图，并从期权有效期的末尾倒推回到开始位置，获得期权的当前价值。只用到了无套利假设，而没有必要假设股票价格在每个节点上升和下降的概率。

另一个为期权估值的方法是运用所谓的风险中性估值原理。这是非常重要的一个原理，说明在为期权和其他衍生证券估值时，可以假设世界是风险中性的。在本章我们已经用数字和表达式来说明：无套利假设和风险中性估值都可得到同样的期权价格。

股票期权的 delta，即  $\Delta$ ，考虑了标的股票价格的一个小变化对期权价格的影响。它等于期权价格的变化与标的股票价格的变化之比。为了构造无风险头寸，投资者对出售的每一个期权，应该购买数量为  $\Delta$  的股票。考察典型的二叉树图可知，在期权有效期内 delta 是变化的。这意味着无风险头寸不能自动地保持无风险状态，它们必须定期进行调整。

和股票期权类似，我们可以构建二叉树模型来估值股票指数期权、外汇期权和期货期权。在第 17 章我们还要回顾二叉树图方法，更全面地讨论它们在实际中的应用。

## 参考读物

- Coval, J. E. and T. Shumway. "Expected Option Returns," *Journal of Finance*, 56, 3 (2001): 983–1009.
- Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein. "Option Pricing: A Simplified Approach." *Journal of Financial Economics* 7 (October 1979): 229–64.
- Rendleman, R., and B. Bartter. "Two State Option Pricing." *Journal of Finance* 34 (1979): 1092–1110.

## 问题和习题

- 11.1 股票现价为 \$40。已知在 1 个月后股价将为 \$42 或 \$38。无风险利率为每年 8%（连续复利）。执行价格为 \$39 的 1 个月期欧式看涨期权的价值为多少？
- 11.2 用单步二叉树图说明无套利和风险中性估值方法如何为欧式期权估值。
- 11.3 什么是股票期权的 delta？
- 11.4 某个股票现价为 \$50。已知 6 个月后将为 \$45 或 \$55。无风险利率为每年 10%（连续复利）。执行价格为 \$50，6 个月后到期的欧式看跌期权的价值为多少？
- 11.5 某个股票现价为 \$100。有连续 2 个时间步，每个时间步的步长为 6 个月，每个单步二叉树预期上涨 10%，或下跌 10%。无风险利率为每年 8%（连续复利）。执行价格为 \$100 的 1 年期欧式看涨期权的价值为多少？
- 11.6 考虑习题 11.5 中的情况，执行价格为 \$100 的 1 年期欧式看跌期权的价值为多少？证明欧式看涨期权和欧式看跌期权满足看涨看跌期权的平价关系。
- 11.7 如何用波动率表示  $u$  和  $d$ ？
- 11.8 考虑这样一种情况，在某个欧式期权的有效期内，股票价格的运动符合两步二叉树

运动模式。请解释为什么用股票和期权组合的头寸在期权的整个有效期内不可能一直是无风险的。

- 11.9 某个股票现价为\$50。已知在 2 个月后，股票价格为\$53 或\$48。无风险利率为每年 10% (连续复利)。请用无套利原理说明，执行价格为\$49 的 2 个月后到期的欧式看涨期权的价值为多少？
- 11.10 某个股票现价为\$80。已知在 4 个月后，股价将变为\$75 或\$85。无风险利率为每年 5% (连续复利)。请用无套利原理说明，执行价格为\$80 的 4 个月后到期的欧式看跌期权的价值为多少？
- 11.11 某个股票现价为\$40。已知 3 个月后，股价将变为\$45 或\$35。无风险利率为每年 8% (按季度计复利)。计算执行价格为\$40，有效期为 3 个月的欧式看跌期权的价值。证明利用无套利原理和风险中性估价原理得出的答案相同。
- 11.12 某个股票现价为\$50。有连续 2 个时间步，每个时间步的步长为 3 个月，每个单步二叉树的股价或者上涨 6%或者下跌 5%。无风险利率为每年 5% (连续复利)。执行价格为\$51，有效期为 6 个月的欧式看涨期权的价值为多少？
- 11.13 考虑习题 11.12 中的情况，执行价格为\$51，有效期为 6 个月的欧式看跌期权的价值为多少？证明欧式看涨期权和看跌期权满足看涨看跌期权平价关系。如果看跌期权是美式期权，在树图上的任何节点，提前执行期权是否会更优呢？
- 11.14 某个股票的现价为\$25。已知 2 个月后，股价会变为\$23 或\$27。无风险利率为每年 10% (连续复利)。设  $S_T$  为 2 个月后的股票价格。在这时收益为  $S_T^2$  的衍生证券的价值为多少？
- 11.15 利用二叉树图估值一种外汇期权，每个时间步的步长为 1 个月，国内无风险利率为 5%p.a.，外汇无风险利率为 8%p.a.，波动率为 12%p.a.。请计算  $u$ 、 $d$  和  $p$ 。

## 课后练习

- 11.16 某个股票现价为\$50。已知 6 个月后，股价将变为\$60 或\$42。无风险利率为每年 12% (连续复利)。计算执行价格为\$48，有效期为 6 个月的欧式看涨期权的价值为多少？证明利用无套利原理和风险中性估价原理得出的答案相同。
- 11.17 某个股票现价为\$40。有连续 2 个时间步，每个时间步的步长为 3 个月，每个单步二叉树的股价或者上涨 10%或者下跌 10%。无风险利率为每年 12% (连续复利)。
  - (a) 执行价格为\$42 的 6 个月期限的欧式看跌期权的价值为多少？
  - (b) 执行价格为\$42 的 6 个月期限的美式看跌期权的价值为多少？
- 11.18 用“试错法”来估算习题 11.14 中的期权的执行价格为多高时，立即执行期权是最佳的？
- 11.19 某个股票现价为\$30。有连续 2 个时间步，每个时间步的步长为 2 个月，每个单步二叉树的股价或者上涨 8%或者下跌 10%。无风险利率为 5%。利用二叉树图计算损益为  $\max [(30 - S_T), 0]^2$  的衍生证券的价值。其中， $S_T$  是 4 个月后的股票价格。如果该衍生证券是美的，它是否应该被提前执行？
- 11.20 考虑一种不支付红利股票的欧式看涨期权。股票价格为\$40，执行价格为\$40，无风

险利率为 4%p.a., 波动率为 30%p.a., 到期期限为 6 个月。

- (a) 两步二叉树图中, 计算  $u$ 、 $d$  和  $p$ 。
- (b) 利用两步二叉树图, 估值该期权。
- (c) 请验证 DerivaGem 软件给出的答案是正确的。
- (d) 利用 DerivaGem 软件, 以 5、50、100 和 500 个时间步估值该期权。

11.21 重新考虑习题 11.20, 如果是基于一个期货的美式看跌期权, 答案是什么? 这里, 执行价格和期货价格都是 \$50, 无风险利率为 10%, 到期期限为 6 个月, 波动率为 40% p.a.。

11.22 注释 1 说明了, 在现实世界中, 对图 11.1 中的看涨期权应该适用的正确的贴现率是 42.6%。请证明如果该期权是看跌期权, 而不是看涨期权, 则使用的贴现率应该是 -52.5%。请解释为什么这两个现实世界贴现率是如此不同。



# 第 12 章

## 维纳过程和伊藤定理

如果某变量的价值以某种不确定的方式随时间变化，则称该变量遵循某种随机过程 (stochastic process)。随机过程分为“离散时间”和“连续时间”两类。一个离散时间随机过程是指标的变量值只能在某些确定的时间点上变化的过程，而一个连续时间随机过程是指标的变量值的变化可以在任何时刻发生的过程。随机过程也可分为连续变量和离散变量两种过程。在连续变量过程中，标的变量在某一范围内可取任意值，而在离散变量过程中，标的变量只可能取某些离散值。

本章中我们导出股价的连续变量、连续时间的随机过程。理解这一过程是弄清期权定价和其他一些更复杂的衍生金融工具定价的第一步。应当指出，实际上我们观察到的股价并不是按照连续变量、连续时间过程来变化的。股票价格被限制为离散值（例如，是 1 美分的倍数），而且只有当交易所开市时才能观察到股价变化。但是在大多数应用中，可以看到连续变量、连续时间过程是一种有用的模型。

许多人认为连续时间随机过程太复杂，应当把它们全部留给“火箭专家”来处理。事实并不如此。理解这些过程的最大障碍是表达方式。本章我们提供一种循序渐进的方法以帮助读者克服这一困难。我们也将解释衍生产品定价中的核心结论伊藤定理 (Itô's lemma)。

### 12.1 马尔科夫性质

马尔科夫过程是一种特殊类型的随机过程。这个过程说明只有变量的当前值与未来的预测有关，变量过去的历史和变量从过去到现在的演变方式，则与未来的预测不相关。

人们通常假设股票价格遵循马尔科夫过程。假设现在 IBM 股票价格为 \$100。如果股票价格遵循马尔科夫过程，那么一个星期以前、一个月以前或是一年以前的股价并不会影响我们对将来的预测，惟一相关的信息就是股票的现价 \$100。<sup>1</sup> 对将来的预测是不确定的，必须以概率分布的方式表达。马尔科夫性质隐含了在将

<sup>1</sup> 在决定 IBM 股票价格遵循的随机过程特性（例如波动率）时，IBM 股票价格历史数据的统计特性也许有用。在这里我们指出的是：过去股票价格遵循的特殊路径是不相关的。

来任一特定时刻股价的概率分布与股票过去特定的运动路径无关。

股价的马尔科夫性质与弱型市场有效性相一致，也就是说，一种股票的现价已经反映了所有过去的股票价格信息。如果弱型市场有效性不正确的话，技术分析师可通过分析股价的过去历史数据图表获得高于平均收益率的收益。事实上，几乎没有什么证据表明他们能够做到这一点。

正是市场竞争保证了弱型市场有效性成立。有许多投资者紧盯着股票市场并试图从中获利，这种实际情况导致了在任何指定时刻的股价都反映了以往价格的信息。假设已经发现以往股价中某种特殊模式总是给出 65% 的未来价格上涨机会，这种方式一旦被观察到，众多投资者就会购买股票，从而股票的需求就会突然增加。其结果为股价骤然上涨，过去观察的效应将失效。任何可盈利的交易机会都会如此。

## 12.2 连续时间随机过程

考虑一个遵循马尔科夫随机过程的变量。假设该变量的当前价值为 10，1 年内变量价值的变化服从概率分布  $\phi(0, 1)$ 。其中  $\phi(\mu, \sigma)$  表示均值为  $\mu$ 、标准方差为  $\sigma$  的概率分布。那么 2 年内该变量价值变化应该服从什么样的概率分布？

2 年内该变量价值变化服从两个均值为零、标准方差为 1.0 的正态分布之和。因为变量遵循马尔科夫过程，所以上面两个概率分布是相互独立的。相加两个独立的正态分布，得到的是均值为两个正态分布的均值之和、方差为两个正态分布的方差之和的正态分布。<sup>2</sup> 那么我们考虑的变量 2 年内变化的均值为 0、方差为 2.0。因此，2 年内变量价值的变化服从  $\phi(0, \sqrt{2})$ 。

接下来，再考虑 6 个月内该变量价值的变化。1 年内变量价值变化的方差等于前 6 个月内的方差加上后 6 个月内的方差。我们假定后两个方差是一样的。那么 6 个月内变量价值变化的方差应为 0.5。则变化的标准方差为  $\sqrt{0.5}$ ，即 6 个月内变量价值的变化服从概率分布  $\phi(0, \sqrt{0.5})$ 。

类似地，我们可以得到 3 个月内变量价值变化服从概率分布  $\phi(0, \sqrt{0.25})$ 。更为一般地，长度为  $T$  的时间段内，变化服从概率分布  $\phi(0, \sqrt{T})$ 。特别是，在长度为  $\Delta t$  的很短的时间内变化服从  $\phi(0, \sqrt{\Delta t})$ 。

这些结果中的平方根可能看起来比较奇怪。这是因为，考虑马尔科夫过程的时候，连续时间段的变化的方差是可以相加的，而连续时间段的变化的标准方差是不可相加的。我们的例子中，1 年内变量变化的方差为 1.0。所以，2 年内变化的方差为 2.0，3 年内变化的方差为 3.0。2 年内和 3 年内变化的标准方差分别为  $\sqrt{2}$  和  $\sqrt{3}$ 。严格地说，我们不能说变化的标准方差为每年 1.0。我们应该说“每根号年 1.0”。这个结果表明，为什么有时不确定性会以时间的平方根的比例来表示。

---

<sup>2</sup> 方差是标准差的平方。因此，我们所考虑的变量 1 年内的价值变化的方差为 1.0。

## 维纳过程

我们在前面考虑的变量过程就是著名的维纳过程 (wiener process)。维纳过程是马尔科夫随机过程的一种特殊形式，其均值变化为 0，方差率为每年 1.0。物理学中这种观察用于描绘某个粒子受到大量小分子碰撞的运动，有时称为布朗运动 (Brownian motion)。

正规地表述，如果变量  $z$  满足如下两个基本性质，则变量  $z$  遵循维纳过程：

性质 1：一个小的时间间隔  $\Delta t$  内  $z$  的变化  $\Delta z$  为

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (12.1)$$

其中， $\epsilon$  服从标准正态分布  $\phi(0, 1)$ 。

性质 2：对于任何两个不同的短期时间间隔  $\Delta t$ 、 $\Delta z$  的值相互独立。

从性质 1，我们得到  $\Delta z$  本身具有正态分布，

$$\Delta z \text{ 的均值} = 0$$

$$\Delta z \text{ 的标准差} = \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta z \text{ 的方差} = \Delta t$$

性质 2 则隐含  $z$  遵循马尔科夫过程。

下面我们考虑在一段相对长的时间  $T$  内  $z$  值的变化。我们将它表示为  $z(T) - z(0)$ 。这可以被看作是在  $N$  个长度为  $\Delta t$  的小时间间隔中  $z$  的变化的总和，这里

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

因此，

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (12.2)$$

其中  $\epsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 服从  $\phi(0, 1)$ 。从性质 2 中可知， $\epsilon_i$  是相互独立的，从方程 (12.2) 可以得到  $z(T) - z(0)$  是正态分布的，其中

$$[z(T) - z(0)] \text{ 的均值} = 0$$

$$[z(T) - z(0)] \text{ 的方差} = N\Delta t = T$$

$$[z(T) - z(0)] \text{ 的标准差} = \sqrt{T}$$

这与我们在这一节开始时讨论的结果相一致。

**[例 12.1]** 假设一个遵循维纳过程的变量  $z$  的最初值为 25，以年为单位计时。在第 1 年末，变量值服从均值为 25、标准差为 1.0 的正态分布；第 5 年末，服从均值为 25、标准差为  $\sqrt{5}$  即 2.236 的正态分布。变量值在将来某一确定时刻的不确定性（用标准差表示）随着我们观察未来的时间长度的平方根增加而增加。

在常规微积分中，通常在微小变化接近为 0 时，将这个变化当作极限来处理。

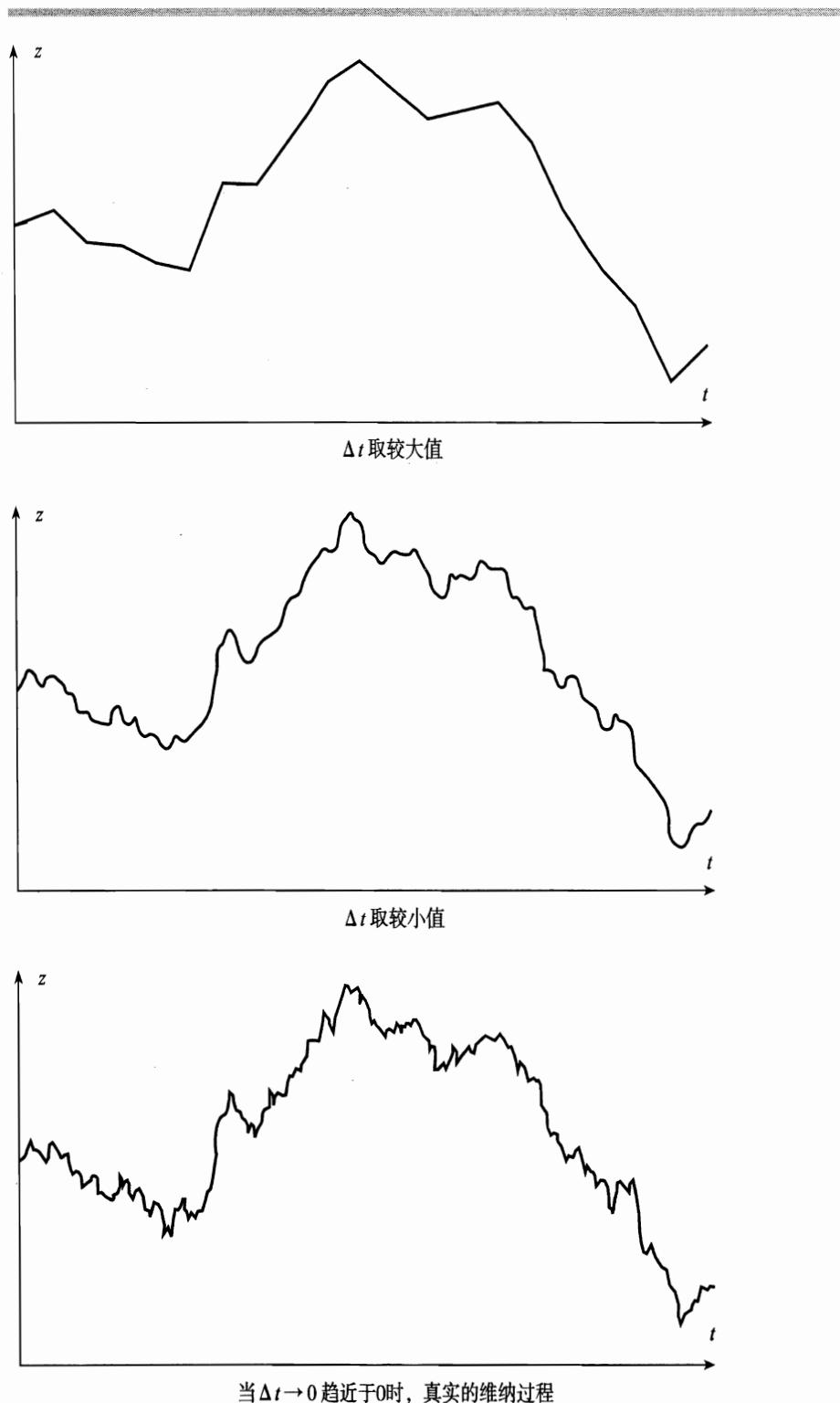


图 12.1 当公式 (12.1) 中  $\Delta t \rightarrow 0$  时维纳过程的图示

这样  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x = a\Delta t$  取极限就成为表达式  $dx = adt$ 。当处理连续时间随机过程时, 我们使用同样符号惯例。所以, 我们把  $dz$  看作是维纳过程, 则意味着它具有上述当  $\Delta t \rightarrow 0$  时的  $\Delta z$  的特性。

图 12.1 说明了  $\Delta t \rightarrow 0$  取极限时,  $z$  的轨迹运动情况。可以看到轨迹起伏很大。这是因为  $\Delta t$  时间内  $z$  的变化规模和  $\sqrt{\Delta t}$  成一定比例, 而  $\Delta t$  很小的时候,  $\sqrt{\Delta t}$  比  $\Delta t$  大很多。和这种  $\sqrt{\Delta t}$  的性质相关的维纳过程的两个有趣的性质如下:

1. 任一时间段内  $z$  轨迹的期望长度是无限的
2. 任一时间段内  $z$  等于某个特定值的期望次数是无限的

### 一般化的维纳过程

漂移率 (drift rate) 指随机过程中单位时间内变化的均值, 方差率 (variance rate) 指单位时间内变化的方差。到现在为止我们讨论的基本维纳过程漂移率为 0, 方差率为 1.0。漂移率为 0 意味着在未来任意时刻  $z$  的期望值等于它的当前值。方差率为 1.0 意味着在长度为  $T$  的一段时间后,  $z$  变化的方差为  $T$ 。变量  $x$  的一般化维纳过程用  $dz$  定义如下:

$$dx = adt + bdz \quad (12.3)$$

其中  $a$  和  $b$  为常数。

理解方程 (12.3) 较好的方法是分别考虑方程右边的两个组成部分。 $adt$  项说明了  $x$  变量单位时间的漂移率期望值为  $a$ 。如果缺省  $bdz$  项, 方程变为  $dx = adt$ , 这说明  $dx/dt = a$ 。对时间求积分, 我们得到

$$x = x_0 + at$$

其中  $x_0$  为  $x$  在零时刻的值。经过长度为  $T$  的时间段后,  $x$  增加的值为  $aT$ 。方程 (12.3) 右边的  $bdz$  项可被看作为附加到  $x$  轨迹上的噪声或变化率。这些噪声或变化率的值为维纳过程的  $b$  倍。维纳过程的标准差为 1.0, 那么  $b$  倍维纳过程标准差为  $b$ 。短时间  $\Delta t$  后, 从方程 (12.1) 和方程 (12.3) 可得  $x$  值的变化  $\Delta x$  为:

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

其中, 如前所述,  $\epsilon$  服从标准正态分布。因此  $\Delta x$  具有正态分布, 且

$$\Delta x \text{ 的均值} = a\Delta t$$

$$\Delta x \text{ 的标准差} = b\sqrt{\Delta t}$$

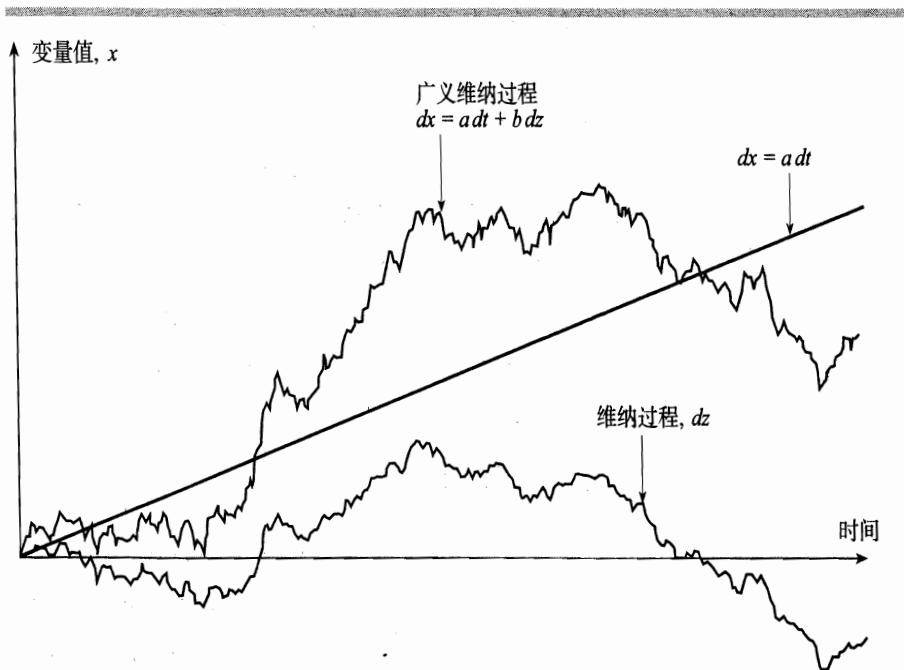
$$\Delta x \text{ 的方差} = b^2\Delta t$$

类似以上讨论, 可得任意时间  $T$  后  $x$  值的变化具有正态分布, 且

$$x \text{ 变化的均值} = aT$$

$$x \text{ 变化的标准差} = b\sqrt{T}$$

$$x \text{ 变化的方差} = b^2T$$

图 12.2 广义维纳过程:  $a = 0.3$ ,  $b = 1.5$ 

因此方程 (12.3) 给出的一般性维纳过程其漂移率 (即单位时间平均漂移) 的期望值为  $a$ , 方差率 (即单位时间的方差) 的期望值为  $b^2$ 。如图 12.2 所示。

**[例 12.2]** 考虑这样一种情况: 某公司以千美元计的现金头寸遵循一般化的维纳过程, 每年漂移为 20, 每年方差率为 900。最初的现金头寸为 50。第一年末现金头寸将具有正态分布, 均值为 70, 标准差为  $\sqrt{900} = 30$ 。在第 6 个月末, 它将具有正态分布, 均值为 60, 标准差为  $30\sqrt{0.5} = 21.21$ 。我们在未来某一时间用标准差衡量的现金头寸不确定性随我们考察将来时间长度的平方根增加而增加。注意现金头寸可能为负 (这种情况可解释为该公司在借款)。

### Itô 过程

我们还可进一步定义另一种类型随机过程: 即著名的 Itô 过程。这是一个一般化的维纳过程, 其中参数  $a$  和  $b$  是标的变量  $x$  和时间  $t$  的函数。Itô 过程数学表达式为:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (12.4)$$

Itô 过程的期望漂移率和方差率都随时间变化而变化。 $t$  到  $t + \Delta t$  的很小的时间段内, 变量从  $x$  变化到  $x + \Delta x$ , 其中

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

这个关系式是近似的结果。这里, 假定  $x$  的漂移率与方差率在  $t$  到  $t + \Delta t$  的很短的时间段内保持不变, 即分别等于  $a(x, t)$  和  $b(x, t)^2$ 。

### 12.3 股票价格的随机过程

这一部分我们讨论无红利支付的股票价格遵循的随机过程。

假定股票价格遵循一般化的维纳过程是很具诱惑力的，也就是说，它具有不变的期望漂移率和方差率。但是，这个模型不能抓住股价的关键特性，即投资者要求来自股票的期望收益不依赖于股票价格。如果投资者在股价为\$10 时要求预期收益为每年 14%，其他条件全部相同，那么他在股价为\$50 时仍然要求每年 14% 的预期收益。

显然，期望漂移率为常数的假设是不恰当的，需要修正，即假设预期收益率（即期望漂移除股票价格）为常数。这个假设意味着如果  $t$  时刻股价为  $S$ ， $S$  的期望漂移率为  $\mu S$ ， $\mu$  为某一恒定参数。因此，在短时间间隔  $\Delta t$  后， $S$  的增长期望值为  $\mu S \Delta t$ ，参数  $\mu$  是股票的期望收益率，以小数的形式表示。

若股票价格的波动率恒为 0，这个模型即为：

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

取极限  $\Delta t \rightarrow 0$ ，则

$$dS = \mu S dt$$

即

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

在  $0 \sim T$  的时间段内求积分，结果为：

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \quad (12.5)$$

其中  $S_0$  和  $S_T$  分别是 0 时刻和  $T$  时刻的股票价格。方程 (12.5) 说明了当方差率为 0 时，股票价格以单位时间为  $\mu$  的连续复利方式增长。

当然，实际上股票价格确实存在着波动率。一个合理假设是：无论股票价格如何，短时间  $\Delta t$  后的收益率的波动率保持不变。换句话说，不管股票价格为 \$50 还是 \$10，投资者认为他或她的收益率的不确定性是相同的。所以很短的  $\Delta t$  时间内变化的标准方差应该与股票价格成一定比例，由此得到模型：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

即

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (12.6)$$

方程 (12.6) 是描述股票价格行为最广泛使用的一种模型。变量  $\sigma$  通常被称为股票价格波动率。变量  $\mu$  为股票价格的预期收益率。方程 (12.6) 中的模型可以看作是，随着时间步变小，第 11 章中以二叉树模型表示的随机游走的极限情况。

[例 12.3] 考虑一种无红利支付的股票，波动率为每年 30%，预期收益率为每年 15%（以连续复利计）。即  $\mu = 0.15$ ,  $\sigma = 0.30$ ；股票价格的过程为：

$$\frac{dS}{S} = 0.15dt + 0.30dz$$

若  $S$  为某一特定时刻的股票价格， $\Delta S$  为短时间间隔后股票价格的增加，则

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.15\Delta t + 0.30\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

其中  $\epsilon$  是标准正态分布的随机抽样值。设时间间隔长度为 1 星期或 0.0192 年，股票价格的初始值为 \$100，即  $\Delta t = 0.0192$ ,  $S = 100$ ，且

$$\Delta S = 100(0.00288 + 0.0416\epsilon)$$

即

$$\Delta S = 0.288 + 4.16\epsilon$$

上式表示价格的增加是均值为 \$0.288、标准差为 \$4.16 的正态分布。

### 离散时间模型

刚才推导的股票价格行为模型也称为几何布朗运动，该模型的离散形式为：

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (12.7)$$

或

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (12.8)$$

变量  $\Delta S$  为短时间  $\Delta t$  后股票价格  $S$  的变化， $\epsilon$  为标准正态分布（均值为 0、标准差为 1.0 的正态分布）的随机抽样值。参数  $\mu$  为单位时间内股票的预期收益率，参数  $\sigma$  为股票价格的波动率。本章中假设这两个参数为常数。

方程 (12.7) 的左边是短时间  $\Delta t$  内股票的收益。 $\mu\Delta t$  项是这一收益的期望值，而  $\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$  项是收益的随机部分。随机部分的方差（也是整个收益的方差）为  $\sigma^2\Delta t$ 。这与 11.7 节中给出的波动率  $\sigma$  的定义一致。也就是说  $\sigma$  使得很短的时间  $\Delta t$  内的收益的标准方差为  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 。

方程 (12.7) 表明  $\Delta S/S$  服从均值为  $\mu\Delta t$ 、标准差为  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  的正态分布，换句话说，

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}) \quad (12.9)$$

## 蒙特卡罗模拟

一种随机过程的蒙特卡罗模拟是从该随机过程中随机取样的一种方法。我们现在利用这个方法深入理解方程 (12.6) 中股票价格行为过程的性质。

假设股票的预期收益率为每年 14%，收益率的标准差（即波动率）为每年 20%。如果以年计，可表示为  $\mu = 0.14$  以及  $\sigma = 0.20$ 。设  $\Delta t = 0.01$ ，我们考虑股票价格在长度为 0.01 年的股票价格变化。根据公式 (12.8)，我们得到

$$\Delta S = 0.14 \times 0.01S + 0.20\sqrt{0.01}S\epsilon$$

即

$$\Delta S = 0.0014S + 0.02S\epsilon \quad (12.10)$$

我们可以通过不断从  $\phi(0, 1)$  取  $\epsilon$  样本，并代入式 (12.10) 来模拟股票价格的轨迹。在 Excel 中表达式=RAND () 可以产生 0 和 1 之间的一系列随机样本。累积正态分布的反函数为 NORMSINV。所以，Excel 中从标准正态分布中随机取样的方法为=NORMSINV (RAND ())。表 12.1 显示了用这种方法取样的股票价格路径。设股票价格的初始值为 \$20。第一阶段中，取的随机数  $\epsilon$  为 0.52，根据方程 (12.10) 得到第一时间段内的变化为

$$\Delta S = 0.0014 \times 20 + 0.02 \times 20 \times 0.52 = 0.236$$

因此，在下一阶段的开始股票价格为 \$20.236。第二阶段中，抽取的随机数  $\epsilon$  为 1.44，根据方程 (12.10) 得到第二时间段内的变化为

$$\Delta S = 0.0014 \times 20.236 + 0.02 \times 20.236 \times 1.44 = 0.611$$

因此，第三阶段的开始股票价格为 \$20.847。注意，因为我们正在模拟的过程是马尔科夫过程， $\epsilon$  的样本值必须相互独立。<sup>3</sup>

表 12.1 假设股票价格精确到 0.001。我们应当认识到这张表只表示了股票价格变动的一种可能方式。不同的随机取样将会导致不同的价格变动。在模拟中可以使用任意小的时间段  $\Delta t$ 。然而，只有当极限  $\Delta t \rightarrow 0$  时才能得到随机过程的完整描述。表 12.1 的最后股票价格 \$21.124，可以被看作在 10 个时间段（即十分之一年末）的股票价格分布的随机抽样值。通过反复模拟股票价格变动，就可以得到十分之一年末股票价格的一个完整的概率分布。在第 17 章将继续详细讨论蒙特卡罗模拟。

## 12.4 各种参数

本章讨论的股票价格随机过程涉及两个参数： $\mu$  和  $\sigma$ 。参数  $\mu$  是投资者的年预

---

<sup>3</sup> 实际应用中，相比抽取  $S$  的样本，抽取  $\ln S$  的样本更为有效。第 17.6 节中将对此进行讨论。

表 12.1 当  $\mu = 0.14$ ,  $\sigma = 0.20$ , 时间长度为 0.01 年时股票价格的模拟值

| 每个周期开始时的股票价格 | $\epsilon$ 的随机样本 | 在该周期中股票价格变化 |
|--------------|------------------|-------------|
| 20.000       | 0.52             | 0.236       |
| 20.236       | 1.44             | 0.611       |
| 20.847       | -0.86            | -0.329      |
| 20.518       | 1.46             | 0.628       |
| 21.146       | -0.69            | -0.262      |
| 20.883       | -0.74            | -0.280      |
| 20.603       | 0.21             | 0.115       |
| 20.719       | -1.10            | -0.427      |
| 20.292       | 0.73             | 0.325       |
| 20.617       | 1.16             | 0.507       |
| 21.124       | 2.56             | 1.111       |

期连续复利收益率。多数投资者认为，如果让他们承担更大的风险，他们需要获得更高的预期收益率。所以  $\mu$  值应当取决于股票收益的风险。<sup>4</sup>  $\mu$  值也应当依赖经济体系中的利率水平。利率水平越高，任一给定股票的预期收益率就越高。

幸运的是，我们自己不必关心  $\mu$  值决定的细节，因为依附于某种股票的衍生证券的价值一般是独立于  $\mu$  的。相反，股票价格波动率参数  $\sigma$  对于决定大多数衍生证券的价值是相当重要的。根据经验估计  $\sigma$  的步骤将在第 13 章中讨论。股票  $\sigma$  的典型值处于 0.15~0.60（即 15%~60%）的范围之间。

短时间  $\Delta t$  后股票价格变化的标准差为  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 。做一粗略的近似，在相对较长时间  $T$  内，股票价格变化的标准差为  $\sigma\sqrt{T}$ 。这就是说，作为近似，波动率可被解释为 1 年内股票价格变化的标准差。在第 13 章，我们将证明股票价格的波动率精确地等于一年内股票连续复利收益的标准差。

## 12.5 伊藤定理

股票期权的价格是该标的股票价格和时间的函数。更一般地，我们可以说任何一种衍生证券的价格，都是该衍生证券的标的资产这个随机变量和时间的函数。任何研究衍生证券的严谨学者都必须对随机变量函数的行为有所了解。在这一领域内的一个重要结论是由一个叫 K. Itô 的数学家在 1951 年发现的，<sup>5</sup> 因此被称为伊藤定理 (Itô's lemma)。

假设变量  $x$  的值遵循 Itô 过程：

<sup>4</sup> 更准确地， $\mu$  取决于投资者不能分散掉的那一部分风险。

<sup>5</sup> 参见 K. Itô, “On Stochastic Differential Equations,” *Memoirs of the American Mathematical Society*, 4 (1951): 1–51.

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (12.11)$$

其中， $dz$  是一个维纳过程， $a$  与  $b$  是  $x$  和  $t$  的函数。变量  $x$  的漂移率为  $a$ ，方差率为  $b^2$ 。Itô 定理表明  $x$  和  $t$  的函数  $G$  遵循如下过程：

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (12.12)$$

其中  $dz$  是与方程 (12.11) 同样的维纳过程。因此  $G$  也遵循 Itô 过程。它的漂移率为：

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$$

方差率为：

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$$

伊藤定理的严格证明超越了本书的范围。在本章的附录中，我们将看到这个定理可视为微分方程的一个著名推论。

在本章前面部分，我们得到：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (12.13)$$

其中的  $\mu$  和  $\sigma$  为常数。这是股票价格变动的一个合理的模型。从伊藤定理得到  $S$  与  $t$  的函数  $G$  遵循的过程为：

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \quad (12.14)$$

注意， $S$  和  $G$  都受到同一个基本的不确定性来源  $dz$  的影响。在推导 Black-Scholes 结果中，这一点是很重要的。

## 在远期合约中的应用

为说明伊藤定理，我们考虑某个无红利支付股票的远期合约。假设无风险利率为常数，对于所有的到期日它都等于  $r$ 。从公式 (5.1) 我们得到：

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

其中， $F_0$  为 0 时刻的远期价格， $S_0$  是 0 时刻的即期价格， $T$  为远期合约到期时间。

我们将考虑，随着时间变化，远期价格会发生什么样的变化。定义  $F$  为一般时刻  $t$  的远期价格， $S$  为  $t$  时刻的股票价格， $t < T$ 。那么， $F$  和  $S$  之间的关系是

$$F = S e^{r(T-t)} \quad (12.15)$$

假设  $S$  遵循方程 (12.13) 表示的过程，我们就可以运用伊藤定理决定  $F$  的过

程。根据方程 (12.15)，有

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)}$$

根据方程 (12.14) 推出  $F$  的过程为：

$$dF = [e^{r(T-t)}\mu S - rSe^{r(T-t)}]dt + e^{r(T-t)}\sigma Sdz$$

将  $F$  代入  $Se^{r(T-t)}$ ，上式成为：

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma Fdz \quad (12.16)$$

同  $S$  一样， $F$  遵循几何布朗运动。它的期望增长率为  $\mu - r$  而不是  $\mu$ 。 $F$  的增长率为  $S$  超过无风险利率的超额部分。

## 12.6 对数正态特性

现在我们用伊藤定理推导  $\ln S$  遵循的过程，其中  $S$  遵循方程 (12.13) 表示的过程。定义：

$$G = \ln S$$

由于：

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

从方程 (12.14) 得出  $G$  的过程为：

$$dG = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (12.17)$$

由于  $\mu$  和  $\sigma$  为常数，这个方程表明了  $G = \ln S$  遵循一个一般化的维纳过程。它具有恒定的漂移率  $\mu - \sigma^2/2$  和恒定的方差率  $\sigma^2$ 。在当前时刻 0 和将来某一时刻  $T$  之间， $\ln S$  的变化是正态分布的，均值为  $(\mu - \sigma^2/2)T$ ，方差为  $\sigma^2 T$ 。这说明：

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \quad (12.18)$$

即

$$\ln S_T \sim \phi \left[ \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \quad (12.19)$$

其中， $S_T$  是  $T$  时刻的股票价格， $S_0$  是 0 时刻的股票价格， $\phi(m, s)$  表示均值为  $m$ 、标准差为  $s$  的正态分布。

式 (12.19) 中，我们看到  $\ln S_T$  服从正态分布。如果一个变量的自然对数服从正态分布，则该变量服从对数正态分布。因此，本章中我们推导的股票价格行为过程说明，给定某个股票的现价，未来  $T$  时刻的股票价格是服从对数正态分布的。

股票价格取对数的标准差为  $\sigma\sqrt{T}$ 。它与我们考虑的未来时间长度的平方根成正比。

## 小 结

随机过程描述了变量值的变化随时间的发展变化。马尔科夫过程中只有变量的现值与预测将来值相关。变量的以往历史以及如何演变成现值的方式则都与预测将来值不相关。

维纳过程  $dz$  是一个描述正态分布变量变化的过程。该过程的漂移为 0，每单位时间的方差率为 1.0。这就是说，若零时刻变量的值为  $x_0$ ，那么在  $T$  时刻它是均值为  $x_0$ 、标准差为  $\sqrt{T}$  的正态分布。

一般化的维纳过程描述了单位时间内漂移为  $a$ ，方差率为  $b^2$  的正态分布变量的变化过程，其中  $a$  和  $b$  为常数。这就是说，若零时刻变量的值为  $x_0$ ，在  $T$  时刻它是均值为  $x_0 + aT$ 、标准差为  $b\sqrt{T}$  的正态分布。

$It\delta$  过程是  $x$  的漂移率和方差率，均为  $x$  本身和时间的函数。在一个很短时间内，作为一个很好的近似， $x$  的变化为正态分布，但长时间内  $x$  的变化则可能是非正态分布。

通过模拟变量行为，可得到对变量随机过程的直观理解。这包括将一段时间分割成许多时间小段，对变量可能的轨迹进行随机取样，就可算出变量将来的概率分布。在第 17 章中将进一步讨论蒙特卡罗模拟。

伊藤定理是一种计算遵循随机过程的变量函数所遵循的随机过程的方法。在第 13 章我们将看到，伊藤定理在衍生证券定价中是非常重要的。关键点是：变量的随机过程中的维纳过程  $dz$ ，精确地等于该变量函数的随机过程中的维纳过程。两者不确定性的基本来源是相同的。

随机过程中通常假设股票价格服从几何布朗运动。在此过程中，股票持有者在任何短时间内的收益率都是正态分布，且任何两段不重合时间间隔的收益相互独立。未来时刻的股票价格服从对数正态分布。在下一章中我们要讨论的 Black-Scholes 模型就是基于几何布朗运动假设。

## 参考读物

### *On Efficient Markets and the Markov Property of Stock Prices*

Brealey, R. A. *An Introduction to Risk and Return from Common Stock*, 2nd edn. Cambridge, MA: MIT Press, 1983.

Cootner, P. H. (ed.) *The Random Character of Stock Market Prices*. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.

### *On Stochastic Processes*

Cox, D. R., and H. D. Miller. *The Theory of Stochastic Processes*. London: Chapman and Hall, 1965.

Feller, W. *Probability Theory and Its Applications*, Vols. 1 and 2. New York: Wiley, 1950.

Karlin, S., and H. M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd edn. New York: Academic Press, 1975.

Neftci, S. *Introduction to Mathematics of Financial Derivatives*, New York: Academic Press, 1996.

## 问题和习题

- 12.1 说一个地区的温度服从马尔可夫过程，有什么含义？你认为温度确实可以服从马尔可夫过程吗？
- 12.2 基于过去的股票价格这种交易准则，是否总是可以获得高于平均收益率的收益？请讨论这个问题。
- 12.3 一家公司的现金头寸，用百万美元计，服从一般化的维纳过程，每季度的漂移率为0.5，方差率为4.0。如果要求公司在1年后负值现金流的概率小于5%，公司的初始现金流要多高？
- 12.4 变量 $X_1$ 和 $X_2$ 服从一般化的维纳过程，漂移率为 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ ，方差率为 $\sigma_1^2$ 和 $\sigma_2^2$ 。如果：
- (a)  $X_1$ 和 $X_2$ 在任意小的时间间隔内的变化都是不相关的。
  - (b)  $X_1$ 和 $X_2$ 在任意小的时间间隔内的变化的相关系数为 $\rho$ 。  
 $X_1+X_2$ 服从什么样的过程？
- 12.5 考虑变量 $S$ ，服从如下过程

$$dS = \mu dt + \sigma dz$$

在头3年中， $\mu = 2$ ， $\sigma = 3$ ，在接下来的3年中 $\mu = 3$ ， $\sigma = 4$ 。如果变量的初始值为5，问在第6年末变量价值的分布概率为多少？

- 12.6 假设 $G$ 是股票价格 $S$ 和时间的一个函数，设 $\sigma_S$ 和 $\sigma_G$ 分别为 $S$ 和 $G$ 的波动率。请证明，当 $S$ 的预期收益率上升 $\lambda\sigma_S$ 时， $G$ 的增长率上升 $\lambda\sigma_G$ ，其中 $\lambda$ 是常数。
- 12.7 股票A和股票B均符合几何布朗运动。在任何短时期内二者的变化是不相关的。问由一股股票A和一股股票B构成的证券组合的价值是否遵循几何布朗运动？请解释原因。
- 12.8 等式(12.8)可以写成如下等式：

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

其中 $\mu$ 和 $\sigma$ 均为常数。请阐述上式和下述几个式子的不同之处：

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

为什么公式(12.8)的模型比上述三种模型更符合股票价格的变动趋势？

- 12.9 已知短期利率 $r$ 遵循如下随机过程：

$$dr = a(b-r)dt + c dz$$

其中 $a$ 、 $b$ 和 $c$ 均为正常数， $dz$ 是维纳过程。试描述这一随机过程的特性。

- 12.10 假设某个股票价格遵循几何布朗运动，其期望收益率为 $\mu$ ，波动率为 $\sigma$ ：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

变量 $S^a$ 遵循什么过程？证明 $S^a$ 也服从几何布朗运动。

12.11 假设  $x$  是在  $T$  时刻支付\$1 的零息票债券按连续复利计息的到期收益率。假设  $x$  遵循如下过程：

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz$$

其中  $a$ 、 $x_0$  和  $s$  是正常数， $dz$  是维纳过程。那么此债券的价格变动遵循何种过程？

### 课后练习

12.12 假设有一股票，其期望收益率为每年 16%，波动率为每年 30%。某天其股票价格为 \$50，计算如下问题：

- (a) 预期下一天的股票价格为多少？
- (b) 下一天的股票的标准差为多少？
- (c) 下一天该股票 95% 的置信区间为多少？

12.13 一家公司的现金头寸，用百万美元计，服从一般化的维纳过程，每月的漂移率为 0.1，方差率为 0.16，初始现金头寸为 2.0。

- (a) 分别说明 1 个月后、6 个月后和 1 年后，现金头寸的概率分布是什么？
- (b) 6 个月后和 1 年后负现金头寸的概率为多少？
- (c) 未来的什么时间负现金头寸的概率最大？

12.14 假设  $x$  是一永久性政府债券的收益率。此债券每年分发\$1 的利息。假设  $x$  是按连续复利计息的，债券的利息是连续支付的， $x$  遵循如下过程：

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz$$

其中  $a$ 、 $x_0$  和  $s$  是正常数， $dz$  是维纳过程。那么此债券的价格变动遵循何种过程？对于债券持有者来说，期望瞬时收益率（包括利息和投资收益）为多少？

12.15 方程 (12.6) 中的  $S$  符合几何布朗运动。考虑以下过程

- (a)  $y = 2S$
- (b)  $y = S^2$
- (c)  $y = e^S$
- (d)  $y = e^{r(T-t)}/S$

每种情形中，以  $y$  (而不是  $S$ ) 表示  $dt$  和  $dz$  之间的相关系数。

12.16 股价当前是 50。它的预期收益率和波动率分别为 12% 和 30%。2 年后股票价格大于 80 的概率是多少？

(提示：当  $\ln S_T > \ln 80$  时， $S_T > 80$ )

## 附录

### 伊藤定理的推导

在这个附录里，我们可以看到，伊藤定理可看作是其他更简单结论的自然扩展。考虑一个变量  $x$  的连续可微函数  $G$ 。如果  $x$  的一个小的变化为  $\Delta x$ ，相应地  $G$  的一个小的变化为  $\Delta G$ ，则

$$\Delta G \approx \frac{dG}{dx} \Delta x \quad (12A.1)$$

换句话说， $\Delta G$  近似等于  $G$  对  $x$  的变化率乘以  $\Delta x$ 。误差项包括高阶小量  $\Delta x^2$ 。如果要求更精确的话，可以运用  $\Delta G$  的泰勒展开式：

$$\Delta G = \frac{dG}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2G}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3G}{dx^3} \Delta x^3 + \dots$$

如果连续可微函数  $G$  有两个变量  $x, y$ ，则类似与式 (12A.1) 的结果为：

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y \quad (12A.2)$$

并且  $\Delta G$  的泰勒展开式为：

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \Delta y^2 + \dots \quad (12A.3)$$

当取  $\Delta x$  和  $\Delta y$  趋近于零的极限时，式 (12A.3) 转化为：

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy \quad (12A.4)$$

现在我们将式 (12A.4) 进行扩展，使它能够包括这些遵循 Itô 过程的变量的函数。假定变量  $x$  遵循一般 Itô 过程：

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (12A.5)$$

并且  $G$  是  $x$  和时间  $t$  的函数。与等式 (12A.3) 相比较，我们得出：

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \quad (12A.6)$$

将式 (12A.5) 进行离散化处理，可表示为：

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

或简写为：

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (12A.7)$$

这一等式揭示了式 (12A.6) 和式 (12A.3) 之间存在的一个重大的差异。当等式 (12A.3) 取极限转化为 (12A.4) 时，由于  $\Delta x^2$  项是二阶小量，所以忽略了这一

项。从式 (12A.7) 中我们可以得出：

$$\Delta x^2 = b^2 \epsilon^2 \Delta t + \Delta t \text{ 的更高阶小量} \quad (12A.8)$$

该式表明在等式 (12A.6) 中的高阶  $\Delta x^2$  项包含一个  $\Delta t$  阶的分量，而这一个  $\Delta t$  项是不可忽略的。

标准正态分布的方差为 1.0。这意味着：

$$E(\epsilon^2) - [E(\epsilon)]^2 = 1$$

其中  $E$  表示期望值。由于  $E(\epsilon) = 0$ ，所以  $E(\epsilon^2) = 1$ 。因此  $\epsilon^2 \Delta t$  的期望值为  $\Delta t$ 。同样  $\epsilon^2 \Delta t$  的方差的阶数为  $\Delta t^2$ ，因此，当  $\Delta t$  趋向于零时， $\epsilon^2 \Delta t$  变为非随机项且等于  $\Delta t$  的期望值。因此，等式 (12A.8) 右边第一项  $\Delta x^2$  就变为非随机项，并且当  $\Delta t$  趋向于零时等于  $b^2 dt$ 。等式 (12A.6) 中当  $\Delta x$  和  $\Delta t$  趋向于零时，运用这一最后结果，我们得到：

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt \quad (12A.9)$$

这就是伊藤定理。将等式 (12A.5) 中的  $dx$  代入 (12A.9)，得到

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$



## Black-Scholes-Merton 模型

20世纪70年代初，Fischer Black、Myron Scholes 和 Robert Merton 取得股票期权定价问题的一个重大突破。<sup>1</sup>他们的成果被称为 Black-Scholes（或 Black-Scholes-Merton）模型。该模型对交易员定价和对冲期权的方式产生了极大影响。该模型也对过去20年中金融工程的发展和成功起了关键性作用。1997年，Robert Merton 和 Myron Scholes 被授予诺贝尔经济学奖，此时该模型的重要性被广泛认可。令人惋惜的是，Fischer Black 在1995年去世，否则他无疑也是该奖项的获得者之一。

本章中我们将阐述如何推导无红利支付股票的欧式看涨和看跌期权的 Black-Scholes 定价模型。我们将说明既可以从历史数据估计波动率，也可以运用上述模型从实际的期权价格得到隐含波动率。我们也将阐述如何应用第11章的风险中性估值方法。我们还会看到扩展的 Black-Scholes 模型可以处理支付红利股票的欧式看涨期权和看跌期权的问题。此外，我们将给出支付红利股票的美式看涨期权定价问题的一些结论。

### 13.1 股票价格的对数正态分布特性

Black、Scholes 和 Merton 使用的股价行为模型就是我们在第12章推导过的模型。其中假定了很短的时间内股票价格变化百分比服从正态分布。定义：

$\mu$ : 股票的年预期收益率

$\sigma$ : 股票价格的年波动率

$\Delta t$  时间段的股票价格变化百分比的均值为  $\mu\Delta t$ 、标准差为  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 。所以，

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}) \quad (13.1)$$

其中  $\Delta S$  是  $\Delta t$  时间段的股票价格  $S$  的变化， $\phi(m, s)$  代表均值为  $m$ 、标准差为  $s$  的正态分布。

<sup>1</sup> 参见 F. Black and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81 (May-June 1973): 637-59; R. C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973): 141-83.

12.6 节中我们指出了，上述股价行为模型中：

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

那么

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \phi \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \quad (13.2)$$

并且

$$\ln S_T \sim \phi \left[ \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \quad (13.3)$$

其中  $S_T$  为未来时刻  $T$  的股票价格， $S_0$  为当前 0 时刻的股票价格。式 (13.3) 表明， $\ln S_T$  服从正态分布，所以  $S_T$  服从对数正态分布。 $\ln S_T$  的均值为  $\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2) T$ ，标准差为  $\sigma \sqrt{T}$ 。

**[例 13.1]** 考虑一种股票，价格初始值为 \$40，预期收益率为每年 16%，波动率为每年 20%。由方程 (13.3) 可知，6 个月后股票价格  $S_T$  遵循的概率分布为：

$$\ln S_T \sim \phi \left[ \ln 40 + (0.16 - 0.2^2/2) + 0.5, 0.2 \sqrt{0.5} \right]$$

$$\ln S_T \sim \phi(3.759, 0.141)$$

由于一个正态分布变量值位于均值两边 1.96 倍标准差范围内的概率为 95%。因此，95% 置信度下：

$$3.759 - 1.96 \times 0.141 < \ln S_T < 3.759 + 1.96 \times 0.141$$

可重新写成

$$e^{3.759-1.96 \times 0.141} < S_T < e^{3.759+1.96 \times 0.141}$$

即

$$32.55 < S_T < 56.56$$

因此，6 个月后股票价格落在 32.55~56.56 之间的概率为 95%。

服从对数正态分布的变量可以在零和无穷大之间任意取值。图 13.1 表示的是一个对数正态分布的形态。与正态分布不同，对数正态分布的图形是不对称的，这是因为它们的均值、中位数与众数都是不同的。由方程 (13.3) 及对数正态分布的特性，可以将  $S_T$  的期望值  $E(S_T)$  表示为：

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T} \quad (13.4)$$

这与  $\mu$  作为预期收益率的定义相符。 $S_T$  的方差  $\text{var}(S_T)$  可表示为：<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> 关于式 (13.4) 和式 (13.5) 的结论的证明，参照作者网站上的技术说明 2。关于对数正态分布特性的更广泛的讨论，参照 J. Aitchison and J. A. C. Brown, *The Lognormal Distribution*. Cambridge University Press, 1966.

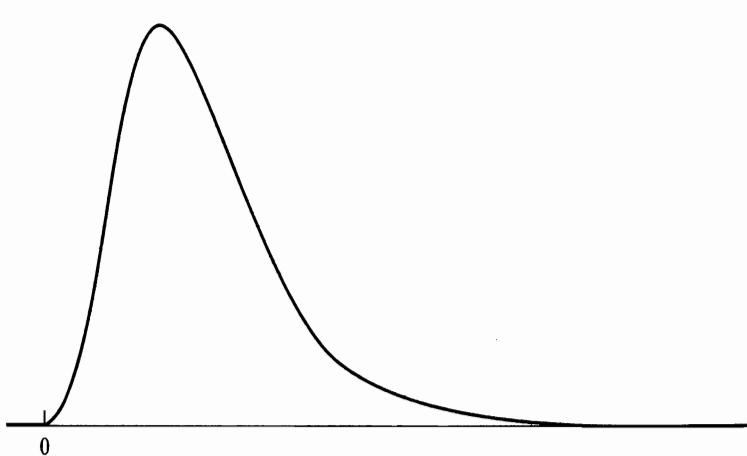


图 13.1 对数正态分布

$$\text{var}(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1) \quad (13.5)$$

**[例 13.2]** 考虑一种股票，当前价格为\$20，预期收益率为每年 20%，波动率为每年 40%。一年后的期望股票价格  $E(S_T)$  和股票价格方差  $\text{var}(S_T)$  为：

$$E(S_T) = 20e^{0.2 \times 1} = 24.43$$

$$\text{var}(S_T) = 400e^{2 \times 0.2 \times 1} (e^{0.4^2 \times 1} - 1) = 103.54$$

1 年后股票价格的标准差为  $\sqrt{103.54}$ ，即 10.18。

## 13.2 收益率的分布

利用股票价格的对数正态分布特性，可以得到 0 时刻与  $T$  时刻之间股票连续复利收益率的概率分布。将 0 时刻与  $T$  时刻之间的连续复利年收益率定义为  $x$ ，那么：

$$S_T = S_0 e^{xT}$$

因此

$$x = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0} \quad (13.6)$$

根据方程 (13.2)，得到

$$x \sim \phi \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \right) \quad (13.7)$$

因此，连续复利计算的年收益率服从均值为  $\mu - \sigma^2/2$ 、标准差为  $\sigma/\sqrt{T}$  的正态分布。随着  $T$  增大， $x$  的标准差减少。为了理解其中的原因，考虑以下两种情况：

$T = 1$  和  $T = 20$ 。比起任一年的年收益率，我们相对更容易确定多于 20 年的年平均收益率。

[例 13.3] 考虑一种股票预期收益率为每年 17%，波动率为每年 20%。3 年后得到的实际（连续复利）平均收益率的概率分布是正态分布，其均值为：

$$0.17 - \frac{0.2^2}{2} = 0.15$$

即每年 15%，标准差为：

$$\frac{0.2}{\sqrt{3}} = 0.1155$$

即每年 11.55%。因为一个正态分布的变量有 95% 的可能性落在其均值两边 1.96 倍标准差范围内，95% 置信度下，3 年后我们得到的实际年平均收益率在  $-7.6\% \sim +37.6\%$  之间。

### 13.3 预期收益率

对于股票投资者，预期收益率  $\mu$  取决于股票的风险程度。风险越高，预期收益率也越高。预期收益率同样也取决于整体经济中的利率水平。利率水平越高，任一给定股票的预期收益率也越高。幸运的是，我们在这里不必考虑  $\mu$  由什么来决定。一个期权的价值由标的股票的价值来表示时，股票期权的价值并不取决于  $\mu$ 。但是，股票预期收益率在某些时候会引起混乱。

公式 (13.1) 说明很短时间段  $\Delta t$  的股票价格的预期变化百分比为  $\mu\Delta t$ 。自然地，我们要假设  $\mu$  是连续复利计算的股票的预期收益率。但是，并不总是这样。根据式 (13.6)，在长度为  $T$  的时间段，实际实现的连续复利计算的预期收益率  $x$  为

$$x = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0}$$

而且根据公式 (13.7)， $x$  的期望值  $E(x)$  为  $\mu - \sigma^2/2$ 。

连续复利计算的预期收益率不同于  $\mu$  的原因比较隐晦，但懂得这一点是非常重要的。假设我们在考虑很多个非常短的时间段  $\Delta t$ 。定义  $S_i$  为第  $i$  个时间段末的股价， $\Delta S_i$  为  $S_{i+1} - S_i$ 。在股票价格行为过程的假定下，每个时间段内股票的平均收益率接近于  $\mu$ 。也就是说  $\mu\Delta t$  接近于  $\Delta S_i/S_i$  的算术平均值。但是数据覆盖的整个时间段内，以每  $\Delta t$  时间段计一次复利计算的预期收益率接近于  $\mu - \sigma^2/2$  而非  $\mu$ 。<sup>3</sup> 商业剪影 13.1 中，以一个共同基金行业中的数字例子解释这一问题。为了给出数学上的解释，我们首先考虑公式 (13.4)：

<sup>3</sup> 本节中的讨论说明“预期收益率”这一术语是非常模糊的。它可以指  $\mu$ ，也可以指  $\mu - \sigma^2/2$ 。除非另有说明，本书中该术语指的是  $\mu$ 。

### 商业剪影 13.1 共同基金收益率产生的误导

$\mu$  和  $\mu - \sigma^2/2$  之间的区别与共同基金报出的收益率问题紧密相关。假设一个共同基金经理发布的过去 5 年内的年收益率（连续复利）分别如下：

15%, 20%, 30%, -20%, 25%

这些收益率的总和除以 5，可以得到这些收益率的算术平均值为 14%。但是，一位在过去 5 年投资于该共同基金的投资者，实际上赚的比 14% 要小。投资的 \$100 在 5 年末的美元价值为：

$$100 \times 1.15 \times 1.20 \times 1.30 \times 0.80 \times 1.25 = \$179.40$$

相反地，每年复利的 14% 给出的价值为：

$$100 \times 1.14^5 = \$192.54$$

第 5 年末的 \$179.40 说明，过去 5 年的几何平均收益率为 12.4%。因为

$$100 \times (1.124)^5 = \$179.40$$

那么基金经理应该发布哪种平均收益率呢？基金经理可能更愿意发布如下：“过去 5 年中，我们实现的年平均收益率为 14%。”虽然这没有错误，但可能会产生误导。不会产生很大误导的发布如下：“过去 5 年中，我们实现的年平均收益率为 12.4%。”在某些管辖领域内，监管机构会要求基金经理以第 2 种方式发布。

这种现象是一个著名数学结论的一个例子。一组数（不全相等）的几何平均值总是小于其算术平均值。在我们的例子中，每年的收益率乘数为 1.15、1.20、1.30、0.80 以及 1.25。这些数的算术平均值为 1.140，但几何平均值只有 1.124。

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

两边取对数，得到

$$\ln[E(S_T)] = \ln S_0 + \mu T$$

这样，我们很希望能假设  $\ln[E(S_T)] = E[\ln(S_T)]$ ，以便  $E[\ln(S_T)] - \ln(S_0) = \mu T$ ，即  $E[\ln(S_T/S_0)] = \mu T$ ，最后我们得到  $E(R) = \mu$ 。但是， $\ln$  不是线性函数，所以不能有上述的推导过程。实际上  $\ln[E(S_T)] > E[\ln(S_T)]$ ，因此  $E[\ln(S_T/S_0)] < \mu T$ ，最终我们得到的是  $E(x) < \mu$  [上面已经提过， $E(x) = \mu - \sigma^2/2$ ]。

## 13.4 波动率

股票的波动率  $\sigma$  是我们对于股票收益率不确定性的一种度量。股票波动率典型值处于 15%~60% 的范围之间。

根据公式 (13.7)，股票的波动率可以定义为股票收益率的年标准差，收益率以连续复利计算。

$T$  比较小的时候，公式 (13.1) 说明  $\sigma\sqrt{T}$  近似等于  $T$  时间内股价变化百分比的标准差。假定  $\sigma = 0.3$ ，即每年 30%，当前股价为 \$50。1 星期的股票价格变化百分比的标准差近似等于

$$30 \times \sqrt{\frac{1}{52}} = 4.16\%$$

所以，1 星期的股价变动标准差等于  $50 \times 0.0416$ ，即 \$2.08。

公式 (13.1) 说明，我们以价格标准差来衡量未来股票价格的不确定性时，不确定性与我们考虑的未来时间长度的平方根成正比（至少近似地）。例如，4 星期内股价的标准差近似等于 1 星期内股价的标准差的两倍。

### 从历史数据估计波动率

为了从实际数据估计股票价格的波动率，观察股票价格的时间间隔通常是固定的（例如每天、每周和每月）。

定义：

$n+1$ : 观察次数

$S_i$ : 在第  $i$  个时间间隔末的股票价格， $i = 0, 1, \dots, n$

$\tau$ : 以年为单位表示的时间间隔的长度

令

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

$u_i$  的标准差  $s$  的一般估计值为：

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

即

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2}$$

其中， $\bar{u}$  为  $u_i$  的均值。

由方程 (13.2) 可知， $u_i$  的标准差为  $\sigma\sqrt{\tau}$ 。因此变量  $s$  是  $\sigma\sqrt{\tau}$  的估计值。 $\sigma$  本身可被估计为  $\hat{\sigma}$ ，其中：

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

此估计的标准误差近似为  $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$ 。

选择一个合适的  $n$  值并不容易。然而数据越多，一般来说获得的精度越高。但是， $\sigma$  确实随时间而变化，过多的历史数据对于预测将来可能不起作用。一个效果相当不错的解决办法是使用最近 90~180 天的每日数据收盘价格。经常使用的一般经验法则是设定  $n$  为波动率所对应的天数。因此，如果波动率估计值将用于两年期期权估值，可使用持续两年的日历史数据。第 19 章中讨论 GARCH 模型等更为复杂的估计波动率的方法。

**[例 13.4]** 表 13.1 给出了 21 个连续交易日的股票价格的一个可能序列。其中：

$$\sum u_i = 0.09531 \quad \text{且} \quad \sum u_i^2 = 0.00326$$

得到日收益标准差的估计值为：

$$\sqrt{\frac{0.00326}{19} - \frac{0.09531^2}{380}} = 0.01216$$

即 1.216%。假设以交易日为计算基础，每年有 252 个交易日，所以  $\tau = 1/252$ ，

表 13.1 波动率的计算

| 天  | 股票收盘价格<br>(\$) | 相对股票价格<br>$S_i/S_{i-1}$ | 每日收益<br>$u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$ |
|----|----------------|-------------------------|----------------------------------|
| 0  | 20.00          |                         |                                  |
| 1  | 20.10          | 1.00500                 | 0.00499                          |
| 2  | 19.90          | 0.99005                 | -0.01000                         |
| 3  | 20.00          | 1.00503                 | 0.00501                          |
| 4  | 20.50          | 1.02500                 | 0.02469                          |
| 5  | 20.25          | 0.98780                 | -0.01227                         |
| 6  | 20.90          | 1.03210                 | 0.03159                          |
| 7  | 20.90          | 1.00000                 | 0.00000                          |
| 8  | 20.90          | 1.00000                 | 0.00000                          |
| 9  | 20.75          | 0.99282                 | -0.00720                         |
| 10 | 20.75          | 1.00000                 | 0.00000                          |
| 11 | 21.00          | 1.01205                 | 0.01198                          |
| 12 | 21.10          | 1.00476                 | 0.00475                          |
| 13 | 20.90          | 0.99052                 | -0.00952                         |
| 14 | 20.90          | 1.00000                 | 0.00000                          |
| 15 | 21.25          | 1.01675                 | 0.01661                          |
| 16 | 21.40          | 1.00706                 | 0.00703                          |
| 17 | 21.40          | 1.00000                 | 0.00000                          |
| 18 | 21.25          | 0.99299                 | -0.00703                         |
| 19 | 21.75          | 1.02353                 | 0.02326                          |
| 20 | 22.00          | 1.01149                 | 0.01143                          |

以上数据给出的年波动率估计值就是  $0.01216\sqrt{252} = 0.193$ , 即 19.3%, 这一估计的标准误差为:

$$\frac{0.193}{\sqrt{2 \times 20}} = 0.031$$

即每年 3.1%。

上述分析中假设了股票不支付红利, 进行修改之后可适用于支付红利的股票。包含除权日内的一个时间间隔的收益  $u_i$  可表示为:

$$u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}}$$

其中  $D$  为红利数量。其他时间间隔的收益仍为:

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

然而, 由于在除权日税收因素对收益的确定有一定的作用, 所以我们最好舍弃所有包含除权日的时间段的数据。

### 交易天数和日历天数

在估计或使用波动率参数时, 一个重要的问题是究竟是以日历惯例还是以交易日惯例来度量时间。商业剪影 13.2 中可以看到, 相关研究结果说明交易所开市时比闭市时波动率要高很多。所以在计算期权有效期时, 从业人员从历史数据估计波动率, 扣除了交易所闭市的日子。年波动率由每个交易日的波动率计算得到, 计算公式为:

$$\text{年波动率} = \text{每交易日波动率} \times \sqrt{\text{年交易日数}}$$

这就是例 13.4 根据表 13.1 的数据计算波动率时使用的方法。在股票市场上, 通常的假设是每年有 252 个交易日。

期权的有效期间通常以交易日度量而非日历天数。 $T$  年是按如下方式计算的:

$$T = \text{期权到期前的交易日数}/252$$

### 13.5 Black-Scholes-Merton 微分方程隐含的基本概念

Black-Scholes-Merton 微分方程是以不付红利股票为标的的任何衍生证券价格必须满足的方程。在下一节中我们将推导该方程。这里我们考虑使用方法的特性。

Black-Scholes-Merton 定价方法类似于在第 11 章中当股票价格变动是两值时的期权定价的方法。构造一种包含衍生证券头寸和标的股票头寸的无风险证券组合。

### 商业剪影 13.2 波动率产生的原因

很自然的一个假设是：股票价格波动率是由于市场中新信息的出现而产生的。这些新的信息会改变人们对于股票价值的看法。因此，股票价格变化，波动率也随之产生。而实际研究结果并不支持这个论点。根据几年中的每日股票价格，研究者们可以计算：

1. 当中间不包含非交易日时，一个交易日收益与下一个交易日收益之间的股票价格收益方差。
2. 在周五收益与下周一收益之间股票价格收益方差。

情况 2 中的方差是 3 天期的收益率方差。情况 1 中的方差是 1 天期方差。那么，我们有理由预计情况 2 中的方差应该是情况 1 中方差的 3 倍。法马 (Fama, 1965)、弗伦奇 (French, 1980) 以及弗伦奇和罗尔 (French & Roll, 1984) 发现，事实并不是这样的。他们三者的研究结果分别表明，情况 2 中的方差仅比情况 1 中高出 22%、19% 以及 10.7%。

那么，你可能会认为，这些结果意味着交易所开市时有更多的信息到来。但是罗尔 (1984) 的研究结果并不支持这一解释。罗尔观察了橙汁期货。到目前为止，与橙汁期货价格相关的最重要的一些信息是有关天气的。而天气的信息传递速率在任意时刻都是相等的。罗尔对股票也做了类似的分析，他发现情况 2 (周五至下周一) 中的方差仅是情况 1 中的方差的 1.54 倍。

总之，惟一合理的解释是波动率主要由交易本身产生 (交易员们一般都支持这一结论！)。

在无套利机会条件下，该证券组合的收益必定为无风险利率  $r$ 。这样就得到了 Black-Scholes-Merton 微分方程。

可以建立无风险证券组合的原因是股票价格和基于该股票的衍生证券的价格都受同一种基本的不确定性来源的影响：股票价格变动。在任意一个短时间期内，衍生证券的价格与标的股票的价格总是完全相关。如果建立了一种恰当的股票和衍生证券的组合，股票头寸的收益（损失）总是会与衍生证券的损失（收益）相抵消，因而在短时期末证券组合的总价值也就确定了。

例如，假设在未来某个特殊的时点，股票价格小的变动  $\Delta S$  与该变动引起的欧式看涨期权价格变动  $\Delta c$  之间有如下关系：

$$\Delta c = 0.4 \Delta S$$

这意味着表示  $c$  和  $S$  之间关系的曲线斜率是 0.4，如图 13.2 所示。无风险组合的构造如下：

1. 0.4 股股票的多头
2. 一份看涨期权的空头

Black-Scholes-Merton 定价方法和在第 11 章中所使用的二叉树图的分析方法有个很重要的差别。在 Black-Scholes-Merton 方法中，所建立的头寸仅对一个非常短

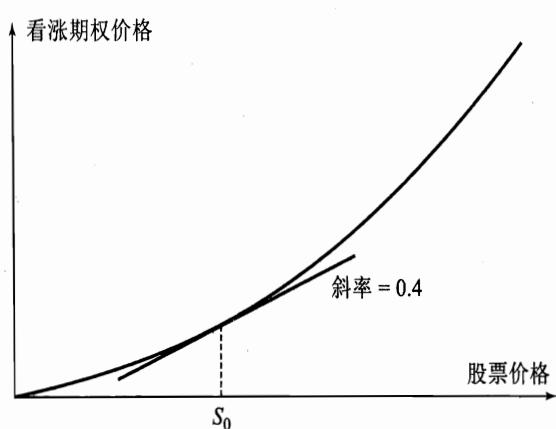


图 13.2 看涨期权价格和股票价格之间的关系。当前股价为  $S_0$ 。

的时期是无风险的（理论上，它只在瞬间时刻保持无风险）。为了保持无风险状态，必须频繁地对头寸进行调整或再调整。<sup>4</sup>例如， $\Delta c$  和  $\Delta S$  之间的关系也许从今天的  $\Delta c = 0.4\Delta S$  变为两周后的  $\Delta c = 0.5\Delta S$ 。这将意味着为了维持无风险头寸，对出售的每个期权而言，必须多买 0.1 股股票来对冲该期权。然而实际情况是：在任何非常短的时期，无风险证券组合的收益必须是无风险利率。这是 Black-Scholes-Merton 定价方法中的一个关键所在，并由此得出他们的定价公式。

## 假 设

推导 Black-Scholes-Merton 微分方程用到的假设如下：

1. 股票价格遵循第 12 章讨论的  $\mu$ 、 $\sigma$  为常数的随机过程
2. 允许使用全部所得卖空衍生证券
3. 没有交易费用或税收。所有证券都是高度可分的
4. 在衍生证券的有效期内没有红利支付
5. 不存在无风险套利机会
6. 证券交易是连续的
7. 无风险利率  $r$  为常数且对所有到期日都相同

正如在以后章节将要讨论的，有些假设条件可以放松，比如  $\sigma$  和  $r$  可以是  $t$  的函数。我们甚至可以允许利率是随机提供的，这不妨碍期权到期时股价仍服从对数正态分布。

<sup>4</sup> 第 15 章中，我们将更详细地讨论证券组合的再调整问题。

### 13.6 Black-Scholes-Merton 微分方程的推导

我们假设股票价格行为过程遵循 12.3 节中讨论的随机过程：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (13.8)$$

假设  $f$  是基于  $S$  的某个看涨期权或其他衍生证券的价格。变量  $f$  一定是  $S$  和  $t$  的某一函数。因此从方程 (12.14) 可得：

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (13.9)$$

方程 (13.8) 和 (13.9) 的离散形式为：

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (13.10)$$

和

$$\Delta f = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (13.11)$$

其中  $\Delta S$  和  $\Delta f$  是  $S$  和  $f$  在短时间间隔  $\Delta t$  后的变化量。回顾第 12.5 节伊藤定理的讨论，可知  $f$  和  $S$  所遵循的维纳过程相同。也就是说，方程 (13.10) 和方程 (13.11) 中的  $\Delta z$  ( $= \epsilon \sqrt{\Delta t}$ ) 相同。所以选择某种股票和衍生证券的证券组合就可以消除维纳过程。

恰当的证券组合应该是：

- 1: 衍生证券
- + $\partial f / \partial S$ : 股票

此证券组合的持有者卖空一份衍生证券，买入数量为  $\partial f / \partial S$  的股票。定义证券组合的价值为  $\Pi$ 。根据定义：

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (13.12)$$

$\Delta t$  时间后证券组合的价值变化  $\Delta \Pi$  为：

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (13.13)$$

将方程 (13.10) 和方程 (13.11) 代入方程 (13.13)，得到：

$$\Delta \Pi = \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (13.14)$$

因为这个方程不含有  $\Delta z$ ，经过  $\Delta t$  后证券组合必定是无风险的。从上一节中列出的假设可以得出该证券组合的瞬时收益率一定与其他短期无风险证券收益率相同。如果该证券组合的收益率大些，套利者就可以通过借钱来买该组合而获得无风险收益；如果该证券组合的收益率小些，套利者就可以通过卖出该证券组合购

买无风险证券来获取无风险收益。所以结果应该是：

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t \quad (13.15)$$

其中  $r$  为无风险利率。再把方程 (13.12) 和方程 (13.14) 代入方程 (13.15) 可以得到：

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left( f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (13.16)$$

方程 (13.16) 就是 Black-Scholes-Merton 微分方程。对应于标的变量  $S$  定义的所有不同衍生证券，此方程有许多解。求解该微分方程时得到的特定的衍生证券取决于所使用的边界条件。这些边界条件确定了在  $S$  和  $t$  的可能边界值对应的衍生证券价值。对于欧式看涨期权的情况，关键的边界条件为：

$$\text{当 } t = T \text{ 时, } f = \max(S - K, 0)$$

对于欧式看跌期权，边界条件为：

$$\text{当 } t = T \text{ 时, } f = \max(K - S, 0)$$

在方程 (13.16) 的推导过程中，应当强调的一点是：证券组合并不是永远无风险。只是对于无限短的时间间隔内，它才是无风险的。当  $S$  和  $t$  变化时， $\partial f / \partial S$  也会变化。为保持证券组合无风险，有必要连续调整证券组合中衍生证券与股票的相对比例。

**[例 13.5]** 基于不支付红利股票的远期合约是一个依赖于股票价格的衍生证券，所以它应当满足方程 (13.16)。由方程 (5.5)，某一  $t$  时刻，以该时刻股票价格  $S$  表示的远期合约的价值  $f$  为：

$$f = S - Ke^{-r(T-t)}$$

其中  $K$  为交割价格。这意味着：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

把这些代入方程 (13.16) 的左边，得到

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS$$

它等于  $rf$ ，说明确实满足方程 (13.16)。

## 可交易衍生证券的价格

任何函数  $f(S, t)$ , 只要它是微分方程 (13.16) 的一个解, 那么也就是一个可交易衍生证券的理论价格。如果相应的衍生证券的价格为该值, 则不存在套利机会。相反地, 如果函数  $f(S, t)$  不是微分方程 (13.16) 的一个解, 那么它不可能是不存在套利机会的衍生证券的价格。

为了解释其中原因, 首先考虑函数  $e^S$ , 它不满足微分方程 (13.16)。所以它也不可能依赖于股价的衍生证券的价格。如果存在一种价格总为  $e^S$  的金融工具, 那么存在套利机会。作为第二个例子, 我们考虑函数

$$\frac{e^{(\sigma^2-2r)(T-t)}}{S}$$

它满足微分方程, 所以在理论上可以是某个可交易衍生证券的价格 (它是在  $T$  时刻支付  $1/S_T$  的衍生证券的价格)。习题 13.11、13.12、13.23 和 13.28 中给出了其他可交易衍生证券的例子。

## 13.7 风险中性定价

第 11 章中在二叉树定价模型中引入了风险中性估值概念。毫无疑问, 风险中性定价是衍生证券分析中的一个最重要工具。它来源于 Black-Scholes-Merton 微分方程 (13.16) 的一个关键性质。这一性质是: 该方程不包含任何受投资者风险偏好影响的变量。方程中出现的变量为股票当前价格、时间、股票价格波动率和无风险利率, 它们都独立于风险偏好。

如果 Black-Scholes-Merton 微分方程包含股票的预期收益  $\mu$ , 那么它将不独立于风险偏好。因为  $\mu$  的值确实依赖于风险偏好。对于任何给定股票, 投资者厌恶风险程度越高,  $\mu$  的值就应该越大。而幸运的是, 在方程的推导过程中,  $\mu$  恰巧被消掉了。

因为 Black-Scholes-Merton 微分方程独立于风险偏好, 我们可以使用一个很巧妙的结论。如果方程中不存在风险偏好, 那么风险偏好将不会对其解产生影响。因此, 在对  $f$  进行定价时, 我们可以使用任何一种风险偏好。特别地, 可以提出一个非常简单的假设: 所有的投资者都是风险中性的。

在一个所有投资者都是风险中性的世界里, 所有证券的预期收益率皆为无风险利率  $r$ 。因为风险中性的投资者并不需要某种补偿来促使他们承担风险。而且在风险中性的世界中, 任何现金流的现值可通过将其期望值用无风险利率来贴现而获得。因此, 风险中性世界的假设确实在很大程度上简化了对衍生证券的分析。

考虑在一个特定时刻提供损益的一种衍生证券。对它进行风险中性估值的步骤如下:

1. 假定标的资产的预期收益率为无风险利率  $r$  (即假定  $\mu=r$ )

2. 计算衍生证券的期望损益
3. 以无风险利率贴现期望损益

我们应当认识到，风险中性估值（或所有投资者为风险中性的假设）仅仅是一个求解 Black-Scholes 微分方程的人为手段。这样获得的方程解对于所有世界都有效，而不仅仅是风险中性世界。当我们从风险中性世界进入到风险厌恶世界时会发生两件事情：股票价格的期望增长率改变了；对衍生证券的损益使用的贴现率改变了。然而以上两个变化的影响总是能相互完全抵消。

## 股票远期合约中的应用

在 5.7 节中已为基于不付红利股票的远期合约进行了定价。例 13.5 中，我们检验了其定价公式满足 Black-Scholes 微分方程。作为风险中性定价的一个例子，本节中我们对其进行推导。我们假设利率为常数，等于  $r$ 。这比第 5 章中的假设更严格了一些。

考虑购买一个交割价格为  $K$ 、在  $T$  时刻到期的远期合约。如图 1.2 中所描述的，到期日远期合约的价值为：

$$S_T - K$$

其中， $S_T$  为时刻  $T$  的股票价格。由风险中性定价讨论可知，在风险中性世界中，0 时刻远期合约的价值等于  $T$  时刻的期望价值以无风险利率贴现到 0 时刻的现值。用  $f$  表示远期合约在 0 时刻的价值，这意味着：

$$f = e^{-rT} \hat{E}(S_T - K)$$

其中， $E$  表示风险中性世界中的期望值。由于  $K$  为常数，上述方程可简化为：

$$f = e^{-rT} \hat{E}(S_T) - Ke^{-rT} \quad (13.17)$$

在风险中性世界中，股票价格预期收益率  $\mu$  等于  $r$ ，由方程 (13.4) 得：

$$\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT} \quad (13.18)$$

将方程 (13.18) 代入方程 (13.17) 中，得到：

$$f = S_0 - Ke^{-rT} \quad (13.19)$$

以上结果与方程 (5.5) 一致。

## 13.8 Black-Scholes 定价公式

在 0 时刻，不支付红利股票的欧式看涨和看跌期权的 Black-Scholes 定价公式分别为

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (13.20)$$

和

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \quad (13.21)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$N(x)$  是标准正态分布变量的累计概率分布函数。也就是说，它是一个服从标准正态分布  $\phi(0, 1)$  的变量小于  $x$  的概率。图 13.3 中对此进行了说明。对于其他的变量，大家会比较熟悉。变量  $c$  和  $p$  分别为欧式看涨期权和看跌期权的价格， $S_0$  是 0 时刻股票价格， $K$  是执行价格， $r$  是连续复利的无风险利率， $\sigma$  是股价波动率， $T$  是期权到期期限。

一种推导 Black-Scholes 定价公式的方法是，使用 13.6 节中提出的边界条件下求解微分方程 (13.16) 式。<sup>5</sup> 另一种方法是使用风险中性估值方法。考虑一个欧式看涨期权在风险中性世界中，到期时期权的期望价值为

$$\hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

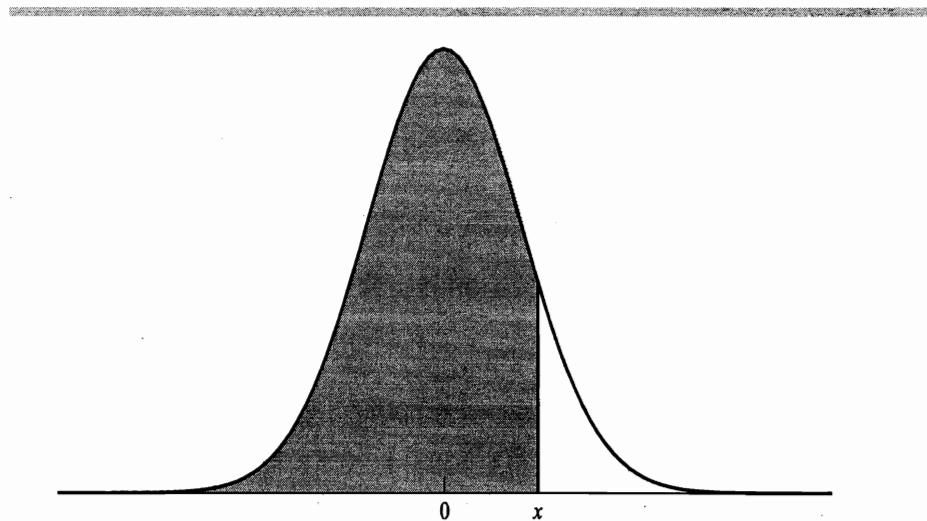


图 13.3 阴影部分表示  $N(x)$

<sup>5</sup> 这一微分方程给出了一般时间  $t$  所对应的看涨和看跌期权价格。例如，满足微分方程的看涨期权价格为  $c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ ，其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

并且  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ 。关于满足微分方程的相关证明，参照习题 13.17。

和前面一样， $E$  表示风险中性世界中的期望值。根据风险中性估值方法，欧式看涨期权的价格  $c$  等于以无风险利率贴现的期望值，也就是

$$c = e^{-rT} \hat{E} [\max(S_T - K, 0)] \quad (13.22)$$

本章的附录中解释了可以从这一方程中得到 (13.20)。

下面解释方程 (13.20) 中的各项含义。我们注意到，可以把方程写成

$$c = e^{-rT} [S_0 N(d_1) e^{rT} - K N(d_2)] \quad (13.23)$$

$N(d_2)$  表示在风险中性世界中期权被执行的概率，所以  $K N(d_2)$  是执行价格乘以支付执行价格的概率。表达式  $S_0 N(d_1) e^{rT}$  是如下变量的期望值：在风险中性世界中当  $S_T > K$  时，该变量等于  $S_T$ ，其他情况下该变量都为零。

因为不支付红利股票的美式期权和欧式期权的价格相同（参照 9.5 节）。方程 (13.20) 也给出了基于不付红利股票的美式看涨期权的价值。不幸的是，对于基于不付红利股票的美式看跌期权定价还不存在精确的解析公式。我们将在第 17 章中讨论计算美式看跌期权价值的数值算法。

实际中应用 Black-Scholes 定价公式时，设利率  $r$  为  $T$  期限的零息票无风险利率。我们将在以后的章节中看到，当  $r$  为时间的已知函数的时候，这种设定在理论上正确。而且当利率是随机提供的、 $T$  时刻股票价格服从对数正态分布、选择的波动率参数比较合理时，这种设定也在理论上正确。前面已经提过，时间的度量方法一般为：以期权有效期间内交易日天数除以 1 年内交易日天数。

## Black-Scholes 公式的性质

现在我们通过对某些参数取极值，来说明 Black-Scholes 公式具有的一般性质。

当股票价格  $S_0$  变得很大时，看涨期权肯定会被执行。这时它与执行价格为  $K$  的远期合约非常相似。根据方程 (5.5) 我们期望看涨期权价格为：

$$S_0 - K e^{-rT}$$

这实际上就是方程 (13.20) 给出的看涨期权的价格。因为，当  $S_0$  非常大时， $d_1$  和  $d_2$  也都变得相当大， $N(d_1)$  和  $N(d_2)$  都近似等于 1.0。当股票价格变得很大时，欧式看跌期权的价格  $p$  趋近于 0。这与方程 (13.21) 一致，因为  $N(-d_1)$  和  $N(-d_2)$  都近似等于 0。

下面再考虑波动率  $\sigma$  趋近于 0 的情况。由于股票实质上没有风险，它的价格将以  $r$  的速率增长到  $T$  时刻的  $S_0 e^{rT}$ ，从看涨期权得到的损益为：

$$\max(S_0 e^{rT} - K, 0)$$

用  $r$  贴现，今天看涨期权的价值为：

$$e^{-rT} \max(S_0 e^{rT} - K, 0) = \max(S_0 - K e^{-rT}, 0)$$

为证明它与方程(13.20)一致,首先考虑 $S_0 > Ke^{-rT}$ 的情况。这意味着, $\ln(S_0/K) + rT > 0$ 。由于 $\sigma$ 趋近于0, $d_1$ 、 $d_2$ 趋近于 $+\infty$ ,所以, $N(d_1)$ 和 $N(d_2)$ 趋近于1.0,方程(13.20)成为

$$c = S_0 - Ke^{-rT}$$

当 $S_0 < Ke^{-rT}$ 时, $\ln(S_0/K) + rT < 0$ 。由于 $\sigma$ 趋近于0, $d_1$ 、 $d_2$ 趋近于 $-\infty$ ,所以, $N(d_1)$ 和 $N(d_2)$ 趋近于0,方程(13.20)给出的看涨期权价格为0。因此当 $\sigma$ 趋近于0时,看涨期权的价格总是 $\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$ 。同样,可以证明当 $\sigma$ 趋近于0时,看跌期权的价格恒为 $\max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$ 。

### 13.9 累积正态分布函数

在应用方程(13.20)和方程(13.21)时,存在的惟一问题是累积正态分布函数 $N(x)$ 的计算。在本书的末尾提供了 $N(x)$ 表。Excel中可以用NORMSDIST函数计算 $N(x)$ 。一个能保证小数点后六位、精确求得 $N(x)$ 的多项式近似值公式如下:<sup>6</sup>

其中

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1k + a_2k^2 + a_3k^3 + a_4k^4 + a_5k^5) & x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & x < 0 \end{cases}$$

且

$$k = \frac{1}{1 + \gamma x}, \quad \gamma = 0.2316419$$

$$a_1 = 0.319381530, \quad a_2 = -0.356563782,$$

$$a_3 = 1.781477937, \quad a_4 = -1.821255978, \quad a_5 = 1.330274429$$

并且

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

[例13.6] 考虑一种期权,还有6个月的有效期,其标的股票现价为\$42,期权的执行价格为\$40,无风险利率为每年10%,波动率为每年20%。即 $S_0 = 42$ , $K = 40$ , $r = 0.10$ , $\sigma = 0.20$ , $T = 0.5$ 。

$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + (0.1+0.2^2/2) \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.7693$$

<sup>6</sup>参见M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications, 1972.

$$d_2 = \frac{\ln(42/40) + (0.1 - 0.2^2/2) \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.6278$$

并且

$$Ke^{-rT} = 40e^{-0.05} = 38.049$$

因此，若该期权为欧式看涨期权，它的价值  $c$  为：

$$c = 42N(0.7693) - 38.049N(0.6278)$$

若该期权为欧式看跌期权，它的价值  $p$  为：

$$p = 38.049N(-0.6278) - 42N(-0.7693)$$

使用多项式近似，得到：

$$N(0.7693) = 0.7791, N(-0.7693) = 0.2209$$

$$N(0.6278) = 0.7349, N(-0.6278) = 0.2651$$

所以

$$c = 4.76, p = 0.81$$

暂不考虑资金的时间价值，若要使看涨期权的购买者达到盈亏平衡，股票价格必须上涨\$2.76；同样，若要使看跌期权的购买者达到盈亏平衡，股票价格必须下降\$2.81。

### 13.10 权证和管理层股票期权

普通看涨期权的执行，对于相应公司的流通在外的股份数量没有任何影响。如果卖出期权的交易者不持有该公司的股票，他或她应该以通常方式在市场买入相应股票，并把它按执行价格卖给期权持有者。在第 8 章中解释过，权证和管理层股票期权和常规看涨期权不一样，它们被执行后，公司发行更多股份并把它们按执行价格卖给期权持有者。当执行价格低于市场价格的时候，这种行为将稀释当前股东利益。

潜在的股票稀释作用会如何影响权证和管理层股票期权的估值呢？答案是没有影响。在市场有效的假设下，股价会反映所有流通在外的权证和管理层股票期权的稀释作用。商业剪影 13.3 中解释了这个论点。<sup>7</sup>

接下来，考虑一家公司正打算发行新权证（或管理层股票期权）。公司很关心发行成本，同时假设没有补偿性的收益。该公司拥有  $N$  股价格为每股  $S_0$  的发行在外的流通股股票，打算发行  $M$  份权证，每份权证赋予购买者以执行价格  $K$  购买一

<sup>7</sup> 分析师们有时会假设权证和股权价值之和（而不单单是股权价值）服从对数正态分布。相应得到的结论是，具有权证价值项的权证估价的 Blacks-Scholes 微分方程。参照作者网站上的技术说明 3 中关于这一模型的解释。

### 商业剪影 13.3 股票权证、管理层股票期权以及稀释作用

考虑一家公司有 10 万股股份，每股 \$50。公司发布它将授予雇员 10 万份股票期权，期权的执行价格为 \$50，锁定期限为 3 年。如果公司通过授予雇员股票期权（间接降低了薪水）来激励管理人员，但股东收益没有明显改善的话，那么在雇员股票期权计划发布之后，股票会立即下跌。如果股价跌到 \$45，当前股东的稀释成本为 \$5 每股，总成本为 \$50 万。

假设锁定期限内公司表现良好，锁定期限到期之时，股价变成 \$100。进一步假设，所有期权在那一时刻执行。雇员在每份期权中获得 \$50 收益。那么，有些人可能会认为这会再次引起稀释，因为每股 \$100 的 10 万股股份和每股 \$50 的 10 万股股份汇聚到一起，所以 (a) 每股价格下降到 \$75，(b) 期权所有者在每份期权中只获得 \$25 收益。但这个观点并不正确。市场会预期到这些期权的执行，并已经把这种预期反映在每股价格中。每份期权被执行之后，提供的收益还是 \$50。

这个例子表示这样的一般观点：当市场是有效的时候，管理层股票期权或权证的稀释效应会在这些信息发布之后，立即表现在股票价格上。因此，估值期权的时候不必考虑这些影响。

股的权利。当前的公司价值为  $NS_0$ ，这个值不因发行权证而变化。假定不发行权证的情况下，权证到期时间相应的股价为  $S_T$ 。这说明（不管发不发行权证） $T$  时刻股权的总价值为  $NS_T$ 。权证的持有者执行了权证后，支付的执行价格使得公司获得了一笔现金流人，公司股权值增长到  $NS_T + MK$ 。这个值在  $N + M$  股中分配，所以，权证执行后股票价格立即变成

$$\frac{NS_T + MK}{N + M}$$

因此，若执行期权，期权持有者的损益为

$$\frac{NS_T + MK}{N + M} - K$$

即

$$\frac{N}{N + M} (S_T - K)$$

这说明了每份期权的价值相当于

$$\frac{N}{N + M}$$

份基于该公司股票的常规看涨期权的价值。所以，期权的总成本是这个值乘以  $M$ 。

**[例 13.7]** 一个拥有 100 万股，价格为每股 \$40 股票的公司考虑发行 20 万份权证，

每份权证赋予购买者在 5 年内以执行价格 \$60 买入一股的权利。公司想知道发行的成本。利率为 3% p.a., 波动率为每年 30%。公司不支付红利。根据公式 (13.20), 基于该公司股票的 5 年期欧式看涨期权的价值为 \$7.04。这里,  $N = 1\,000\,000$ ,  $M = 200\,000$ 。因此, 每份权证的价值为:

$$\frac{1\,000\,000}{1\,000\,000+200\,000} \times \$7.04 = \$5.87$$

即 \$5.87。发行权证的总成本为  $200\,000 \times \$5.87 = 117$  万美元。假设市场不会为该权证发行提供收益补偿, 我们可以预期股价降到 \$38.83 (降低了 \$1.17)。

### 13.11 隐含波动率

在 Black-Scholes 定价公式中, 不能直接观察到的一个参数是股票价格的波动率。在第 13.4 节中我们已经讨论了如何从股票价格的历史数据来估计波动率。实际中, 交易员们通常使用隐含波动率。隐含波动率是指在市场中观察的期权价格所蕴含的波动率。

为了解释如何计算隐含波动率, 我们假设当  $S_0 = 21$ ,  $K = 20$ ,  $r = 0.10$ ,  $T = 0.25$  时一种基于不付红利股票的欧式看涨期权的价值为 1.875。隐含波动率是将以上数据代入方程 (13.20) 中, 使得  $c = 1.875$  的  $\sigma$  值。不幸的是, 我们却不能直接解出方程 (13.20), 使得  $\sigma$  表示为  $S_0$ 、 $K$ 、 $r$ 、 $T$  和  $c$  的函数形式。然而, 我们可以用试错法得到隐含波动率  $\sigma$ 。例如, 开始时我们可以令  $\sigma = 0.20$ , 这个值使得  $c$  的值等于 1.76, 比 1.875 小。由于  $c$  是  $\sigma$  的增函数, 我们需要选取大一些的  $\sigma$  值。接着令  $\sigma = 0.30$ , 得到  $c$  的值等于 2.10, 比 1.875 大, 所以可以判断  $\sigma$  是在 0.20 和 0.30 之间的值。然后, 试着令  $\sigma$  的值为 0.25, 结果也偏大, 所以  $\sigma$  应该在 0.20 和 0.25 之间。用这种方法继续下去, 每次查找可以缩小  $\sigma$  的范围, 这样对任意要求的精度都可计算出  $\sigma$  的准确值。<sup>8</sup> 在本例中, 隐含波动率  $\sigma$  为每年 0.235 或 23.5%。结合二叉树图方法, 以同样的步骤, 可以计算出美式期权的隐含波动率。

隐含波动率可以用来监控市场对于某一特定股票波动率的态度。交易员们喜欢计算某一资产的交易比较活跃的一些期权的隐含波动率, 再对这些隐含波动率进行适当的加权, 计算出该资产的交易相对不活跃的期权的隐含波动率, 以便对其期权进行定价。在第 16 章中将讲述这一过程。我们必须注意到, 处于深度实值状态或深度虚值状态的期权对波动率的敏感程度相对较低。这就说明, 从这样的期权计算出来的波动率不太可靠。

---

<sup>8</sup> 这个方法只是用于说明求解。在实际中经常使用更有效的方法诸如牛顿迭代法 (参照第 4 章的脚注 5)。也可以使用 DerivaGem 计算隐含波动率。

## 13.12 红 利

到目前为止，我们一直假设期权的标的股票不支付红利。本节中我们修改 Black-Scholes 模型以反映红利的影响。我们假设在期权有效期内支付的红利数量和支付时刻可以准确预测。对于短期期权，这个假设是合理的。而对于长期期权，更为合理的假设是：假定红利收益率是已知的，而不是支付红利现金数额已知。在下一章中讲述这种情况下的期权定价问题。红利支付日应该假设为除权日。在除权日股票价格下降，下降幅度是每股支付的红利的数量。<sup>9</sup>

### 欧式期权

为了分析欧式期权，我们假设股票价格是以下两个部分的总和：期权有效期内，对应于已知红利的无风险部分和一个风险部分。任意给定时刻的无风险部分等于期权有效期内的所有红利，以无风险利率从除权日贴现到当前时刻的现值。期权到期时已经支付了红利，因此无风险部分就不存在了。所以如果令  $S_0$  等于股票价格的有风险部分， $\sigma$  等于有风险部分遵循的随机过程的波动率，Black-Scholes 公式仍是适用的。<sup>10</sup> 也就是说，在实际操作中，从股票价格减去期权有效期内的所有红利按无风险利率从除权日贴现的现值之后，就可以使用 Black-Scholes 公式。只有当在期权有效期中遇到除权日，才将红利纳入计算当中。

**[例 13.8]** 考虑一种欧式股票看涨期权，其标的股票在 2 个月和 5 个月后各有一个除权日。每个除权日的预期红利为 \$0.50。当前股票价格为 \$40，执行价格为 \$40，股票价格波动率为每年 30%，无风险利率为每年 9%，到期时间还有 6 个月。红利的现值为：

$$0.5e^{-0.1067 \times 0.09} + 0.5e^{-0.4167 \times 0.09} = 0.9741$$

由于  $S_0 = 40 - 0.9741 = 39.0259$ ,  $K = 40$ ,  $r = 0.09$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $T = 0.5$ ,

$$d_1 = \frac{\ln(39.0259/40) + (0.09 + 0.3^2/2) \times 0.5}{0.3\sqrt{0.5}} = 0.2017$$

$$d_2 = \frac{\ln(39.0259/40) + (0.09 - 0.3^2/2) \times 0.5}{0.3\sqrt{0.5}} = -0.0104$$

<sup>9</sup> 由于税制的原因，股价的下降幅度会比红利的现金数额小一些。为了把这样的现象考虑进来，我们应该把期权定价内容中的“红利”解释为股票价格在除权日由红利因素而下降的幅度。因此，如果预期红利为每股 \$1，而根据经验，除权日的股价下降幅度等于红利数额的 80%。那么，我们在进行分析的时候，应该假设红利为 \$0.80。

<sup>10</sup> 理论上，这个波动率并不完全等于整个股票价格遵循的随机过程的波动率。有风险部分的波动率近似等于整个股票价格波动率乘以  $S_0/(S_0 - D)$ ，这里  $D$  是红利的现值。但是，只有当波动率是由历史数据估计时，进行这种调整。股价减去红利现值后，可以计算隐含波动率。该隐含波动率是有风险部分的波动率。

因此，期权价格可以由Black-Scholes 公式求出：

利用 13.9 节的多项式近似可以得到：

$$N(d_1) = 0.5800, N(d_2) = 0.4959$$

再由方程 (13.20) 得到看涨期权价格：

$$39.0259 \times 0.5800 - 40e^{-0.09 \times 0.5} \times 0.4959 = 3.67$$

即\$3.67。

## 美式期权

下面我们考虑美式看涨期权。在 9.5 节，我们阐述了这样一个观点：没有红利支付的情况下这些看涨期权不应该提前执行。将这个论点进一步引申表明：在支付红利的情况下，只有股票付红利前的瞬时时刻执行才最优。我们假设预计有  $n$  个除权日  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ ,  $t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_n$ 。对应于这些时刻的红利分别表示为  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$ 。

我们先来考虑刚好在最后一个除权日（即在  $t_n$  时刻）前执行的可能性。如果期权在  $t_n$  时刻执行，投资者获得：

$$S(t_n) - K$$

其中， $S(t)$  是  $t$  时刻股票价格。若没有执行期权，股票价格下降到  $S(t_n) - D_n$ 。如方程 (9.5) 所示，期权的价值大于

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)}$$

所以，如果：

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)} \geq S(t_n) - K$$

即

$$D_n \leq K[1 - e^{-r(T-t_n)}] \quad (13.24)$$

则在时刻  $t_n$  执行期权不是最佳选择。另一方面，如果：

$$D_n > K[1 - Ke^{-r(T-t_n)}] \quad (13.25)$$

对任何股票价格所遵循随机过程的合理假设，可以证明对于足够大的  $S(t_n)$  的值，在  $t_n$  时刻执行期权总是最优的。当最后除权日与期权到期日相当接近（即  $T - t_n$  很小），而且红利很大时，不等式 (13.25) 就会被满足。

然后考虑时刻  $t_{n-1}$ ，即倒数第二个除权日。如果期权在时刻  $t_{n-1}$  之前瞬间执行，投资者得到  $S(t_{n-1}) - K$ 。如果期权在时刻  $t_{n-1}$  没有执行，股票价格下降到  $S(t_{n-1}) - D_{n-1}$ 。最接近的下一次能够执行的时间为  $t_n$ 。因此，由方程 (9.5) 可知，如果在  $t_{n-1}$  时刻不执行期权，则期权价格的下限为：

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n-t_{n-1})}$$

所以，如果：

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n-t_{n-1})} \geq S(t_{n-1}) - K$$

即

$$D_{n-1} \leq K[1 - e^{-r(t_n-t_{n-1})}]$$

则在时刻  $t_{n-1}$  之前瞬间执行期权不是最优选择。同样，对任意  $i < n$ ，如果：

$$D_i \leq K[1 - e^{-r(t_{i+1}-t_i)}] \quad (13.26)$$

在时刻  $t_i$  执行期权不是最佳选择。

不等式 (13.26) 近似等价于：

$$D_i \leq Kr(t_{i+1} - t_i)$$

假设  $K$  与股票现价相当接近，要使这个不等式不被满足，股票的红利收益率应该近似于或大于无风险利率。现实中经常不是这样。

从以上分析中，我们可以得出结论，即在大多数情况下，美式看涨期权最可能的提前执行时间是最终除权日之前的瞬时时刻  $t_n$ 。进一步，如果对于  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ，不等式 (13.26) 都成立，不等式 (13.24) 也成立，我们可以肯定提前执行不是最佳选择。

### Black 的近似

为了把提前执行看涨期权情况考虑进来，Black 提出一种近似处理方法。<sup>11</sup> 正如本节前面所描述的，该方法包括分别计算在时刻  $T$  和  $t_n$  到期的欧式期权的价格，然后将二者之中较大的值确定为美式期权的价格。大多数情况下，这种近似效果似乎都不错。<sup>12</sup>

**[例 13.9]** 考虑例 13.8 中的情况，但假设期权为美式的而不是欧式的，在这种情况下： $D_1 = D_2 = 0.5$ ， $S_0 = 40$ ， $K = 40$ ， $r = 0.09$ ， $t_1 = 2/12$ ， $t_2 = 5/12$ 。

$$K[1 - e^{-r(t_2-t_1)}] = 40(1 - e^{-0.09 \times 0.25}) = 0.89$$

因为这个值大于 0.5，所以 [见不等式 (13.26)] 在第一个除权日之前期权不应立即执行。

<sup>11</sup> 参见 F. Black, “Fact and Fantasy in the Use of Options,” *Financial Analysts Journal*, 31 (July/August 1975): 36–41, 61–72.

<sup>12</sup> Roll、Geske、Whaley 提出了只有一个除权日的看涨期权的更精确的定价公式，参照作者网站上的技术说明 4。其中涉及二维正态分布的累计概率分布函数。作者网站上的技术说明 5 中也提出了计算这一函数的过程。

此外，由于

$$K[1 - e^{-r(T-t_2)}] = 40(1 - e^{-0.09 \times 0.0833}) = 0.30$$

这个值小于0.5，所以 [见不等式 (13.25)] 当期权为深度实值期权时，应在第二个除权日之前立即执行。

我们再用 Black 近似为期权定价。第一笔红利的现值为：

$$0.5e^{-0.1667 \times 0.09} = 0.4926$$

在假设期权于最后除权日前立即执行的前提下，期权的价值可用 Black-Scholes-Merton 公式来计算， $S_0 = 40 - 0.4926 = 39.5074$ ， $K = 40$ ， $r = 0.09$ ， $\sigma = 0.30$ ， $T = 0.4167$ ，期权价值为\$3.52。按照 Black 近似，应当选取这个值和只能在 6 个月末执行的期权价值中较大的一个。由例 13.8 可知，后者为\$3.67。因此，Black 近似给出美式看涨期权的价值为\$3.67。

DerivaGem 软件中利用“Binomial American”以 500 时间步计算的期权价值为 \$3.72。二叉树模型 (BM) 和 Black 近似 (BA) 之间的差别有两个原因。第一个涉及到提前执行决策的时刻；第二个涉及波动率应用的方式。提前执行决策的时刻不同，使得 BM 计算的值比 BA 计算的值大些。在 BA 方法中，假设期权持有者必须今天决策该期权是在 5 个月后执行，还是在 6 个月后执行；而 BM 方法允许在 5 个月那个点提前执行的决策取决于股票的价格。波动率应用的方式不同，使得 BA 的波动率大于 BM 的波动率。在 BA 中，当我们假设在 5 个月后执行期权，这个波动率应用于扣除了第一个红利现值的股票价格；当我们假设在 6 个月后执行期权时，这个波动率应用于扣除了两个红利现值的股票价格。

## 小 结

本章开头我们检验了第 12 章中介绍的股票价格的随机过程特性。该过程表明给定股票现价，那么它在未来某一时刻的价格是对数正态分布的，还表明一段时间后股票的连续复利收益是正态分布的。我们预测未来的时间越远，未来股票价格的不确定性就越大。股票价格对数的标准差与我们预测未来时间长度的平方根成正比。

为根据实际数据估计股票价格的波动率  $\sigma$ ，应该按照固定的时间间隔观察股票价格（例如：每天、每周或每月）。对于每个时间段，求出该时间段末的股票价格与该时间段初的股票价格之比的自然对数。将这些对数除以以年计量的时间长度的平方根，所得到的标准差就是估计的波动率。通常为计算波动率，在计时时应扣除交易所闭市的日子。

通过建立一个包含期权和股票的无风险头寸，可得到任何基于股票的衍生证券价格的微分方程。由于衍生证券和股票价格都取决于同一个不确定性的来源，无风险头寸总是可以构成的。所建立的这一头寸仅在很短的时间内保持无风险状态。但是，如果没有套利机会的话，无风险头寸的收益一定总是无风

股票的预期收益并没有出现在 Black-Scholes 微分方程中。这就产生了很有用的“风险中性定价”结果，这个结果说明：当为基于股票价格的衍生证券定价时，我们可以假设这个世界是风险中性的。这就意味着我们可以假设股票的预期收益率为无风

险利率贴现期望收益。使用求解微分方程的方法或风险中性定价方法都可以得到欧式看涨期权和看跌期权的Black-Scholes方程。

隐含波动率是指将给定的期权市场价格代入Black-Scholes期权定价公式时求得的波动率。交易者监控着隐含波动率，有时他们也用从一些交易活跃的期权的价格中求得的隐含波动率，来计算基于同一资产的另一种交易不太活跃的期权价格。实证结果表明股票的波动率在交易所开市的时候比闭市的时候大得多。这说明，在某种程度上，交易本身产生了股票价格波动率。

Black-Scholes结果可以很容易推广到基于支付红利股票的欧式看涨期权和看跌期权的情况。其步骤是将Black-Scholes公式中使用的股票价格用原股票价格减去期权有效期内预计的红利现值来代替，使用的波动率等于股票价格减去这些红利现值的波动率。

理论上，美式看涨期权可能在任何除权日之前立即提前执行。实际上，通常只需考虑最后一个除权日。Fischer Black提出了一种近似解决方法，就是让美式看涨期权等于两个欧式看涨期权价格中的较大者。第一个欧式看涨期权与美式看涨期权到期日相同；第二个欧式看涨期权在最后除权日前立即被执行。

## 参考读物

### *On the Distribution of Stock Price Changes*

- Blattberg, R., and N. Gonedes, "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices," *Journal of Business*, 47 (April 1974): 244-80.
- Fama, E. F., "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, 38 (January 1965): 34-105.
- Kon, S. J., "Models of Stock Returns—A Comparison," *Journal of Finance*, 39 (March 1984): 147-65.
- Richardson, M., and T. Smith, "A Test for Multivariate Normality in Stock Returns," *Journal of Business*, 66 (1993): 295-321.

### *On the Black-Scholes Analysis*

- Black, F. "Fact and Fantasy in the Use of Options and Corporate Liabilities," *Financial Analysts Journal*, 31 (July/August 1975): 36-41, 61-72.
- Black, F. "How We Came Up with the Option Pricing Formula," *Journal of Portfolio Management*, 15, 2 (1989): 4-8.
- Black, F., and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973): 637-59.
- Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973): 141-83.

### *On Risk-Neutral Valuation*

- Cox, J. C., and S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3 (1976): 145-66.
- Smith, C. W., "Option Pricing: A Review," *Journal of Financial Economics*, 3 (1976): 3-54.

### *On the Causes of Volatility*

- Fama, E. F. "The Behavior of Stock Market Prices." *Journal of Business*, 38 (January 1965): 34-105.
- French, K. R. "Stock Returns and the Weekend Effect." *Journal of Financial Economics*, 8 (March 1980): 55-69.
- French, K. R., and R. Roll "Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders." *Journal of Financial Economics*, 17 (September 1986): 5-26.
- Roll R. "Orange Juice and Weather," *American Economic Review*, 74, 5 (December 1984): 861-80.

## 问题和习题

- 13.1 阐述 Black-Scholes 股票期权定价模型中，对于一年中股票价格概率分布的假设条件。  
这一模型中关于股票在这一年的连续复利收益率做什么假设？
- 13.2 若一股票价格的波动率为每年 30%，则在一个交易日内其相应的价格变化的标准差为多少？
- 13.3 阐述风险中性定价原理。
- 13.4 计算基于无红利支付股票的欧式看跌期权价格，其中执行价格为 \$50，现价为 \$50，有效期 3 个月期，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 30%。
- 13.5 若在 2 个月后预期支付的红利为 \$1.50，则习题 13.4 中计算会有何变化？
- 13.6 什么是隐含波动率？如何计算？
- 13.7 某个股票现价为 \$40。假设其预期收益率为 15%，波动率为 25%。2 年期间所得回报率（连续复利计息）的概率是什么？
- 13.8 某个股票价格遵循几何布朗运动，其预期收益率为 16%，波动率为 35%。现价为 \$38。
  - (a) 计算基于该股票的欧式看涨期权将被执行的概率。执行价格为 \$40，6 个月后到期执行。
  - (b) 若标的物的执行价格和到期日如上，则基于该股票的欧式看跌期权将被执行的概率是多少？
- 13.9 用本章所用符号，证明  $S_T$  的 95% 的置信区间是在  $S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T-1.96\sigma\sqrt{T}}$  和  $S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T+1.96\sigma\sqrt{T}}$  之间。
- 13.10 一个证券组合的经理在过去的 10 年中平均每年的回报率为 20%。这种说法在哪些方面有问题？
- 13.11 假设某个无红利支付股票的预期收益率为  $\mu$ ，波动率为  $\sigma$ 。某个具有创新意识的金融机构刚刚宣布：它将交易这样一种证券，即：该证券在  $T$  时刻以美元计的收益等价于  $\ln S_T$ ，其中  $S_T$  是  $T$  时刻该股票的价格。
  - (a) 利用风险中性定价，计算在  $t$  时刻此种证券的价格，用股票价格  $S$  和时间  $t$  来表示。
  - (b) 证明你所计算的价格满足公式(13.16)。
- 13.12 一个在  $T$  时刻支付  $S_T^n$  的衍生工具， $S_T$  是  $T$  时刻此种股票的价格。当这种股票的价格服从几何布朗运动时，在  $t$  时刻 ( $t \leq T$ ) 此种股票的价格有如下形式：

$$h(t, T)S^n$$

其中  $S$  是  $t$  时刻的股票的价格， $h$  仅只是  $t$  和  $T$  的函数。

- (a) 通过代入 Black-Scholes-Merton 偏微分方程，推导一个  $h(t, T)$  满足的普通微分方程。
- (b)  $h(t, T)$  的微分方程的边界条件是什么？
- (c) 证明

$$h(t, T) = e^{[0.5\sigma^2 n(n-1) + r(n-1)](T-t)}$$

其中  $r$  是无风险收益率,  $\sigma$  是股票价格的波动率。

- 13.13 求无红利支付股票的欧式看涨期权的价格。其中股票价格为\$52, 执行价格为\$50, 无风险利率为每年 12%, 年波动率为 30%, 到期日为 3 个月。
- 13.14 求无红利支付股票的欧式看跌期权的价格。其中股票价格为\$69, 执行价格为\$70, 无风险利率为每年 5%, 年波动率为 35%, 到期日为 6 个月。
- 13.15 有一个美式看涨期权, 其标的股票的当前股价是\$70, 有效期为 8 个月, 无风险年利率为 10%, 执行价格为\$65, 波动率为 32%。在 3 个月和 6 个月后, 期望分别得到 \$1 的红利。证明在任何两个红利支付日, 执行期权都不是最佳选择。利用 DerivaGem 软件, 计算该期权的价格。
- 13.16 一个基于无红利支付股票的看涨期权, 市场价格为 \$2\frac{1}{2}, 股票价格为 \$15, 执行价格为 \$13, 到期时间为 3 个月, 无风险利率为每年 5%。计算隐含波动率。
- 13.17 用本章所用的符号:
  - (a) 什么是  $N'(x)$ ?
  - (b) 证明

$$SN'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

其中  $S$  是  $t$  时刻的股票价格。

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

(c) 计算  $\partial d_1 / \partial S$  和  $\partial d_2 / \partial S$ 。

(d) 证明当

$$c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

它满足

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}N(d_2) - SN'(d_1) \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

其中  $c$  是基于无红利支付股票的看涨期权价格。

- (e) 证明  $\partial c / \partial S = N(d_1)$
- (f) 证明  $c$  满足 Black-Scholes 微分方程。
- (g) 证明  $c$  满足欧式看涨期权的边界条件。即, 当  $t \rightarrow T$  时  $c = \max(S-K, 0)$ 。
- 13.18 请证明 Black-Scholes 定价公式给出的看涨期权和看跌期权的价格满足看跌期权和看涨期权之间的平价关系。
- 13.19 目前股票价格为 \$50, 无风险利率为 5%。利用 DerivaGem 软件把下表中的基于上述股票的欧式看涨期权价格转换成隐含波动率的表, 假设没有红利。这些期权价格和 Black-Scholes 公式中的假设一致吗?

| 执行价格 (\$) | 到期期限 (月) |     |      |
|-----------|----------|-----|------|
|           | 3        | 6   | 12   |
| 45        | 7.0      | 8.3 | 10.5 |
| 50        | 3.7      | 5.2 | 7.5  |
| 55        | 1.6      | 2.9 | 5.1  |

- 13.20 即使支付一次红利，对支付红利股票的美式看涨期权的 Black 估价方法也可以给出一个近似结果，请详细解释。Black 近似方法是高估了还是低估了真正的期权价值？请解释原因。
- 13.21 考虑一个美式看涨股票期权。股票价格为 \$50，到期期限为 15 个月，无风险利率为 8%p.a.，执行价格为 \$55，波动率为 25%。4 个月后和 10 个月后将支付红利 \$1.50。请说明在两个支付日执行期权都不是最优选择。计算该期权的价格。
- 13.22 利用本章所用的符号，证明：在风险中性世界中，一个欧式看涨期权被执行的概率是  $N(d_2)$ 。若  $T$  时刻的股价大于  $K$ ，收益为 \$100 的衍生工具的价格的表达式是什么？
- 13.23 请证明  $S^{-2/\sigma^2}$  可以作为一个可交易证券的价格。
- 13.24 一家公司发行了管理层股票期权。定价这些期权的时候，需要考虑稀释效应吗？请解释原因。
- 13.25 一家公司的股价为 \$50，有 1 000 万股份流通在外。该公司考虑授予雇员们 300 万份处于两平状态的 5 年期看涨期权。执行期权的时候，以再发行更多股票的方式处理。股票价格的波动率为 25%，5 年期无风险利率为 5%，公司不支付红利。请计算公司发行雇员股票期权的成本。

### 课后练习

- 13.26 目前股票价格为 \$50，假设该股票的预期收益率为 18%，波动率为 30%。2 年后此种股票价格的概率分布是什么？计算该分布的均值和标准差（95% 的置信区间）。
- 13.27 假设一股票，在连续 15 周每个周末观察一次股票价格（以美元计算）如下：  
30.2, 32.0, 31.1, 30.1, 30.2, 30.3, 30.6, 33.0, 32.9, 33.0, 33.5, 33.5, 33.5, 33.7, 33.5, 33.2  
试估算此股票价格的波动率。你估算的标准误差为多少？
- 13.28 金融机构计划交易这样一种证券：该证券在  $T$  时刻以美元计的收益等价于  $S_{T_0}^2$ 。  
(a) 利用风险中性定价，计算此种证券在  $t$  时刻的价格， $t$  时刻的股票价格用  $S$  表示。  
(提示： $S_{T_0}^2$  的期望值可以从第 13.1 节中  $S_{T_0}$  的均值和方差求得。)  
(b) 证明你计算的价格满足微分方程 (13.16)。
- 13.29 有一个无红利支付股票的期权，股票价格为 \$30，执行价格为 \$29，无风险年利率为 5%，年波动率为 25%，到期日为 4 个月。  
(a) 如果这是一个欧式看涨期权，计算其价格。  
(b) 如果这是一个美式看涨期权，计算其价格。  
(c) 如果这是一个欧式看跌期权，计算其价格。  
(d) 证明看涨期权—看跌期权的平价关系成立。

13.30 假设习题 13.29 中的股票，打算在 1.5 个月后除权除息一次，期望红利为 50 美分。

- (a) 若是欧式看涨期权，计算其价格。
- (b) 若是欧式看跌期权，计算其价格。
- (c) 若是美式看涨期权，在什么条件下，可能提前执行呢？

13.31 有一个美式看涨期权，标的股票价格为 \$18，执行价格为 \$20，有效期为 6 个月，波动率为每年 30%，无风险年利率为 10%。在期权有效期内，两次除权日分别在 2 个月和 5 个月的月末，两次红利值都是每股 40 美分。用 Black 的近似值和 DerivaGem 软件为该期权定价。为了使美式期权价值不高于相应的欧式期权价值，红利最多为多少？

## 附录

### Black-Scholes-Merton 公式的证明

为了证明 Black-Scholes 公式，我们首先给出另一个关键结论，该结论在未来章节中也会非常有用。

### 关键结论

如果  $V$  服从对数正态分布， $\ln V$  的标准差为  $w$ ，那么

$$E[\max(V - K, 0)] = E(V)N(d_1) - KN(d_2) \quad (13A.1)$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln[E(V)/K] + w^2/2}{w} \\ d_2 &= \frac{\ln[E(V)/K] - w^2/2}{w} \end{aligned}$$

并且  $E$  表示期望值。

### 上述关键结论的证明过程

定义  $g(V)$  为  $V$  的概率密度函数。那么

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_K^\infty (V - K)g(V)dV \quad (13A.2)$$

变量  $\ln V$  服从标准差为  $w$  的正态分布。根据对数正态分布的性质， $\ln V$  的均值应该是  $m$ ，而且<sup>13</sup>

$$m = \ln[E(V)] - w^2/2 \quad (13A.3)$$

定义一个新的变量

$$Q = \frac{\ln V - m}{w} \quad (13A.4)$$

该变量服从均值为 0、标准差为 1.0 的正态分布。以  $h(Q)$  表示  $Q$  的概率密度函数，那么

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Q^2/2}$$

利用方程 (13A.4)，把方程 (13A.2) 的右式从  $V$  的积分转换成  $Q$  的积分，我们得到

---

<sup>13</sup> 证明参见作者网站技术说明 2。

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} (e^{Qw+m} - K) h(Q) dQ$$

即

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} e^{Qw+m} h(Q) dQ - K \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q) dQ \quad (13A.5)$$

现在

$$\begin{aligned} e^{Qw+m} h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-Q^2+2Qw+2m)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{[-(Q-w)^2+2m+w^2]/2} \\ &= \frac{e^{m+w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{[-(Q-w)^2]/2} \\ &= e^{m+w^2/2} h(Q-w) \end{aligned}$$

这说明，方程 (13A.5) 可以变成

$$E[\max(V - K, 0)] = e^{m+w^2/2} \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q-w) dQ - K \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q) dQ \quad (13A.6)$$

如果我们定义  $N(x)$  为一个服从标准正态分布的变量小于等于  $x$  的概率，那么方程 (13A.6) 中的第一个积分是

$$1 - N[(\ln K - m)/w - w]$$

即

$$N[-(\ln K + m)/w + w]$$

代出方程 (13A.3) 中的  $m$ ，得到

$$N\left(\frac{\ln[E(V)/K] + w^2/2}{w}\right) = N(d_1)$$

类似地，方程 (13A.6) 中的第二个积分变成  $N(d_2)$ 。因此，方程 (13A.6) 变成

$$E[\max(V - K, 0)] = e^{m+w^2/2} N(d_1) - K N(d_2)$$

根据方程 (13A.3)，替换  $m$ ，则得到关键结论。

### Black-Scholes-Merton 结论

我们现在考虑  $T$  时刻到期的不支付红利股票的看涨期权。执行价格为  $K$ ，无风险利率为  $r$ ，当前股价为  $S_0$ ，波动率为  $\sigma$ 。如方程 (13.22)，看涨期权的价格  $c$  为：

$$c = e^{-rT} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)] \quad (13A.7)$$

其中， $S_T$  是  $T$  时刻的股票价格， $\hat{E}$  表示风险中性世界中的期望。根据 Black-Scholes 假设的随机过程， $S_T$  服从对数正态分布。同样地，根据方程 (13.3) 和方程 (13.4)， $\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$ ， $\ln S_T$  的标准差为  $\sigma \sqrt{T}$ 。

根据上面证明的关键结论，方程 (13A.7) 说明

$$c = e^{-rT} [S_0 e^{rT} N(d_1) - K N(d_2)]$$

即

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[\hat{E}(S_T)/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

并且

$$d_2 = \frac{\ln[\hat{E}(S_T)/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

# 股票指数期权、货币期权和期货期权

本章我们将着手解决股票指数期权、货币期权和期货期权的定价问题。首先我们将分析支付已知红利收益率股票的期权。然后，我们再说明股票指数、货币以及期货价格类似于支付已知红利收益率的股票。因此，对基于支付某一红利收益率股票期权的定价的基本结论，可以推广到基于其他标的资产的期权的定价问题。

## 14.1 支付已知红利收益率股票的计算结果

本节中我们介绍一个简单的规则，无红利支付股票的欧式期权的结论可以扩展到支付已知红利收益率股票的欧式期权的情况。

红利的支付使得股票价格在除权日的降低幅度等于红利的数额。所以红利收益率  $q$  的支付使得股票价格的增长率比不支付红利股票价格增长率减少了  $q$ 。如果支付连续红利收益率  $q$  的股票价格，从当前的  $S_0$  增加到  $T$  时刻的  $S_T$ ，那么，没有红利支付股票价格将从当前的  $S_0$  增加到  $T$  时刻的  $S_T e^{qT}$ 。换个方式表达，也可以认为股票价格是从当前的  $S_0 e^{-qT}$  增加到  $T$  时刻的  $S_T$ 。

以上的分析说明，在以下两种情况下，我们得到  $T$  时刻股票价格的相同的概率分布：

1. 股票价格开始为  $S_0$ ，该股票连续支付红利，红利收益率为  $q$
2. 股票价格开始为  $S_0 e^{-qT}$ ，该股票不支付红利

这可得到一个简单的规则：当我们对有效期是  $T$ 、支付已知红利收益率是  $q$  的股票的欧式期权进行估值时，我们可将股票现价从  $S_0$  减小到  $S_0 e^{-qT}$ ，然后就像不支付红利股票的期权那样估值。

### 期权价格的下限

作为这个规则的第一个应用，考虑如何决定一个支付红利收益率  $q$  的股票的欧式期权价格上下限。将公式 (9.1) 中的  $S_0$  替换成  $S_0 e^{-qT}$ ，我们可以看到，欧式看涨期权价格  $c$  的下限由下式给出：

$$c \geq \max(S_0 e^{-qT} - Ke^{-rT}, 0) \quad (14.1)$$

为了得到欧式看跌期权的下限，类似地，我们简单地将公式 (9.2) 中的  $S_0$  替换成  $S_0 e^{-qT}$ ，得到：

$$p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0 e^{-qT}, 0) \quad (14.2)$$

也可以根据无套利关系证明这些结论（参照习题 14.36）。

### 看跌期权与看涨期权之间的平价关系

将公式 (9.3) 的  $S_0$  替换成  $S_0 e^{-qT}$ ，我们得到支付红利收益率为  $q$  的股票的看跌期权与看涨期权之间的平价关系：

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 e^{-qT} \quad (14.3)$$

也可以根据无套利关系证明这一结论（参照习题 14.36）。

## 14.2 期权定价公式

在 Black-Scholes 公式中以  $S_0 e^{-qT}$  代替方程 (13.20) 和方程 (13.21) 中的  $S_0$ ，我们得到支付红利收益率为  $q$  的股票的欧式看跌期权的价格  $p$  以及欧式看涨期权的价格  $c$ ：

$$c = S_0 e^{-qT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (14.4)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1) \quad (14.5)$$

因为

$$\ln\left(\frac{S_0 e^{-qT}}{K}\right) = \ln\frac{S_0}{K} - qT$$

$d_1$ 、 $d_2$  分别为：

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

这些结果最初是由 Merton 推导出的。<sup>1</sup> 如 13.12 节所述，在期权定价过程中，“红利”这个词应当被定义成在除权日，由红利支付引起的股票价格的减少额。如果在期权有效期内红利收益率不是恒定的，只要令  $q$  等于期权有效期内平均年红

<sup>1</sup> 参见 R. Merton, "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973): 141-83.

利收益率，方程（14.4）和方程（14.5）仍然正确。红利收益率应该以连续复利计算（参见5.6节）。

## 微分方程与风险中性估值

为了更正式地证明方程（14.4）与方程（14.5）中的结果，我们可以求解期权价格必须满足的微分方程或者进行风险中性估值。

在13.6节的分析中考虑红利收益率 $q$ 的影响，则微分方程（13.16）变成<sup>2</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (14.6)$$

同方程（13.16）一样，它不包含任何受风险偏好影响的变量。因此我们可以使用13.7节中阐述过的风险中性定价过程。

在风险中性世界中，股票的总收益率一定是 $r$ ，而红利提供的收益率是 $q$ ，所以股票价格预期的增长率一定是 $r - q$ 。那么股票价格的风险中性行为过程是

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma Sdz \quad (14.7)$$

因此，要为基于支付红利收益率 $q$ 的股票的衍生证券定价，我们设定股票的预期增长率等于 $r - q$ ，然后以贴现率 $r$ 贴现预期损益。当股票价格预期的增长率是 $r - q$ 的时候， $T$ 时刻股票预期价格为 $S_0 e^{(r-q)T}$ 。进行与第13章附录类似的分析，风险中性世界中的期望损益为：

$$e^{(r-q)T} S_0 N(d_1) - K N(d_2)$$

其中 $d_1$ 和 $d_2$ 和之前定义的一样。把 $T$ 时刻的损益以 $r$ 贴现到现在，就可得到方程（14.4）。

## 二叉树

可以利用第11章中描述过的二叉树模型估值支付已知红利收益率股票的期权。为了匹配股价波动率，我们设

$$u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

其中， $\Delta t$ 是时间步长度。在风险中性世界中，选择的价格上升概率为 $p$ ，那么预期收益率为 $r - q$ 。这就说明

$$pSu + (1 - p)Sd = S e^{(r-q)\Delta t}$$

即

$$p = \frac{u - d}{u + d}$$

<sup>2</sup> 相关证明见作者网站上的技术说明6。

其中

$$a = e^{(r-q)\Delta t}$$

这就是我们在 11.9 节中使用过的结果。

### 14.3 股票指数期权

如第 8 章所述，有些交易所交易股票指数期权。使用的一些指数大体上反映了股票市场整体的运动状况。其中一些反映了某种特殊行业股票（如：计算机技术、原油和天然气、运输以及电讯行业）的行情。

#### 行情报价

表 14.1 为 2004 年 2 月 5 日星期四，《华尔街日报》货币与投资版刊载的道琼斯工业平均指数 (DJK) 和 S&P 500 指数 (SPX) 的期权行情报价。《华尔街日报》也给出其他一系列指数，如纳斯达克 100 (NDX)、罗素 2000 (RUT) 和 S&P 100 (OEX) 的期权行情报价。除了 S&P 100 合约的期权是美式之外，芝加哥期权交易所内交易的所有指数期权都是欧式的。这些报价表示的是前一个交易日，即 2004 年 2 月 4 日星期三的最后成交价格。2004 年 2 月 4 日，DJK 和 SPX 的最后成交价格分别为 104.71 和 1 126.52。

一个指数期货合约规模为该指数乘以 100（注意：用于指数期权中标的道琼斯指数是 0.01 乘以道琼斯指数的普通报价）。所有指数期权用现金结算。这就意味着，在执行期权时，一份看涨期权的持有者收入  $(S-K) \times 100$  的现金，而期权出售者支付这笔现金，其中  $S$  是在期权执行日收盘时的指数值， $K$  是执行价格。同样，一份看跌期权的持有者收入  $(K-S) \times 100$  的现金，期权出售者支付这笔现金。

表 14.1 中可以看到，除了有效期相对短的期权之外，该交易所中还有期限更长的所谓长期股权预期证券 (LEAPS)。首字母缩写词 LEAPS 意味着“长期股权预期证券”，最初由 CBOE 引入。LEAPS 是期限可长达 3 年的场内交易期权（看表 14.1 时注意，设计 LEAPS 合约的时候，S&P 指数已经除以 10）。股票指数的 LEAPS 期权通常在 12 月份到期。正如第 8 章所述，CBOE 和其他几家交易所也进行基于许多个股的 LEAPS 期权的交易，这些期权都在 1 月份到期。

CBOE 还交易所谓的股票指数变通期权。正如第 8 章所述，在这些期权中，交易者可选择到期期限、执行价格以及美式期权还是欧式期权。

#### 估 值

在第 5 章中估值指数期货的时候，我们提过指数可视为支付已知红利收益率的证券。估值指数期权时，我们沿用相同的假设。这说明式 (14.1) 和式 (14.2)

表 14.1 2004 年 2 月 5 日《华尔街日报》股票指数期权的报价

| Wednesday, Feb. 4, 2004   |        |               |         |            |            |            |           |           |            |            |       |       |       |        |
|---------------------------|--------|---------------|---------|------------|------------|------------|-----------|-----------|------------|------------|-------|-------|-------|--------|
| STRIKE                    | VOL    | LAST          | CHG     | INT        | NET OPEN   | Call Vol.  | Open Int. | Call Avg. | Put Avg.   |            |       |       |       |        |
| Mar 108 c                 | 182    | 0.85          | ...     | 11,472     | Feb 1090 c | 30         | 43.60     | -5.40     | 319        |            |       |       |       |        |
| Mar 108 p                 | 41     | 4             | ...     | 614        | Feb 1090 p | 85         | 4         | 0.70      | 5,371      |            |       |       |       |        |
| Apr 108 p                 | 40     | 5             | 0.20    | 88         | Feb 1100 c | 447        | 31.30     | -8.10     | 21,191     |            |       |       |       |        |
| Feb 112 p                 | 23     | 7.30          | 0.10    | 435        | Feb 1100 p | 2,617      | 6.40      | 2.10      | 32,392     |            |       |       |       |        |
| Call Vol.....             | 8,251  | Open Int..... | 31,904  | Mar 1100 c | 33         | 40.50      | -6.50     | 40,878    | Feb 1185 c | 7          | 0.85  | -0.25 | 731   |        |
| Put Vol.....              | 14,484 | Open Int..... | 370,073 | Mar 1100 p | 4,203      | 15.80      | 1.80      | 44,776    | Feb 1190 c | 86         | 0.50  | -0.35 | 2,597 |        |
| Put Vol.....              | 14,484 | Open Int..... | 370,073 | Apr 1100 c | 32         | 50         | -4.50     | 462       | Mar 1190 c | 104        | 4.70  | ...   | ...   |        |
| <b>S &amp; P 500(SPX)</b> |        |               |         |            |            |            |           |           |            |            |       |       |       |        |
| Feb 850 p                 | 10     | 0.05          | ...     | 1,434      | Apr 1100 p | 8,895      | 24        | 4.00      | 9,380      |            |       |       |       |        |
| Mar 850 p                 | 430    | 0.40          | 0.10    | 29,388     | Feb 1105 p | 124        | 7.20      | 1.70      | 1,734      |            |       |       |       |        |
| Apr 850 p                 | 10     | 1.05          | ...     | 311        | Feb 1110 c | 6          | 26.50     | -5.50     | 13         |            |       |       |       |        |
| Feb 875 p                 | 5      | 0.05          | ...     | 613        | Feb 1110 p | 3,828      | 8.50      | 2.20      | 6,048      |            |       |       |       |        |
| Apr 875 p                 | 5      | 1.65          | 0.20    | 16         | Mar 1110 c | 11         | 34.40     | -9.80     | 20,786     |            |       |       |       |        |
| Feb 925 p                 | 96     | 1.05          | 0.05    | 14,592     | Mar 1110 p | 688        | 18.10     | 2.10      | 18,829     |            |       |       |       |        |
| Mar 900 p                 | 5      | 0.80          | ...     | 37,089     | Feb 1115 c | 4          | 20.60     | -5.20     | 973        |            |       |       |       |        |
| Apr 900 p                 | 85     | 1.90          | -0.15   | 2          | Feb 1115 p | 115        | 10.30     | 3.10      | 9,530      |            |       |       |       |        |
| Feb 925 c                 | 140    | 199.50        | 2.50    | 690        | Feb 1120 c | 93         | 18        | -6.00     | 152        |            |       |       |       |        |
| Feb 925 p                 | 4      | 0.10          | -0.05   | 3,579      | Feb 1120 p | 255        | 12.10     | 3.50      | 6,774      |            |       |       |       |        |
| Mar 925 p                 | 96     | 1.05          | 0.05    | 14,592     | Feb 1125 c | 1,803      | 14        | -7.00     | 19,486     |            |       |       |       |        |
| Feb 950 p                 | 200    | 0.40          | 0.30    | 17,129     | Feb 1125 p | 1,570      | 14.50     | 4.50      | 32,185     |            |       |       |       |        |
| Feb 975 p                 | 2,090  | 0.25          | 0.10    | 18,301     | Mar 1125 c | 4,980      | 24.70     | -4.90     | 80,288     |            |       |       |       |        |
| Feb 975 c                 | 10     | 5.90          | 0.10    | 328        | Mar 1125 p | 4,764      | 25        | 4.00      | 78,162     |            |       |       |       |        |
| Feb 990 p                 | 200    | 0.15          | ...     | 2,190      | Mar 1125 p | 360        | 2.05      | 0.05      | 40,000     |            |       |       |       |        |
| Apr 99 p                  | 3      | 1.35          | 0.05    | 606        | Apr 1125 c | 36         | 32.90     | -4.80     | 2,641      |            |       |       |       |        |
| Feb 100 p                 | 179    | 0.20          | ...     | 6,935      | Apr 1125 p | 327        | 32        | 3.20      | 2,931      |            |       |       |       |        |
| Mar 100 p                 | 3      | 0.90          | 0.05    | 21,574     | Feb 1130 c | 1,156      | 11.30     | -5.20     | 4,741      |            |       |       |       |        |
| Apr 100 p                 | 3      | 1.35          | -0.05   | 2,248      | Feb 1130 p | 2,693      | 16.60     | 4.20      | 11,001     |            |       |       |       |        |
| Mar 101 c                 | 10     | 4.80          | -0.70   | 3,075      | Mar 1130 c | 2,829      | 21.50     | -5.00     | 12,667     |            |       |       |       |        |
| Mar 101 p                 | 3      | 1             | -0.10   | 4,772      | Mar 1130 p | 256        | 0.35      | 0.05      | 36,093     |            |       |       |       |        |
| Feb 102 p                 | 151    | 0.40          | -0.10   | 2,925      | Mar 1135 c | 11,125     | -12.50    | 2,370     | Feb 1135 c | 322        | 9     | -4.50 | 1,262 |        |
| Apr 102 p                 | 2,133  | 2             | 0.15    | 2,206      | Mar 1135 p | 1,173      | 2.90      | -0.10     | 25,947     | Feb 1135 p | 396   | 19.90 | 5.60  | 2,600  |
| Feb 104 c                 | 40     | 1.75          | -0.05   | 5,265      | Mar 1125 c | 10,25      | 10.60     | -9.50     | 5,757      | Mar 1135 c | 413   | 19.10 | -4.10 | 9,978  |
| Feb 104 p                 | 422    | 1.05          | 0.15    | 7,282      | Feb 1125 p | 6,227      | 0.60      | 0.05      | 49,995     | Mar 1135 p | 851   | 30    | 5.00  | 9,651  |
| Mar 104 c                 | 378    | 2.50          | -0.30   | 11,255     | Mar 1025 c | 515        | 4.60      | 0.50      | 55,930     | Feb 1140 c | 1,779 | 7     | -5.00 | 6,401  |
| Mar 104 p                 | 458    | 2.10          | 0.20    | 12,450     | Apr 1025 p | 225        | 9         | 1.00      | 5,171      | Feb 1140 p | 948   | 22    | 5.50  | 8,040  |
| Feb 105 p                 | 1035   | 306           | 0.70    | ...        | 2,864      | Feb 1140 p | 1,401     | 18        | -3.00      | 3,698      |       |       |       |        |
| Apr 104 p                 | 5      | 2.85          | 0.10    | 1,799      | Feb 1040 p | 10         | 1         | 0.25      | 4,270      | Feb 1140 p | 1,30  | 2.00  | 2,151 |        |
| Feb 105 c                 | 2,068  | 1.05          | -0.15   | 13,467     | Feb 1040 p | 1          | 1         | 0.25      | 4,270      | Mar 1140 c | 52    | 6.60  | -2.90 | 944    |
| Feb 105 p                 | 2,335  | 1.50          | 0.20    | 15,555     | Feb 1040 p | 1,789      | 76.30     | -15.20    | 9,988      | Feb 1145 c | 52    | 6.60  | -2.90 | 944    |
| Mar 105 c                 | 646    | 1.90          | -0.15   | 39,444     | Feb 1050 p | 1,929      | 110       | ...       | 42,107     | Feb 1145 p | 47    | 26    | 5.00  | 1,584  |
| Mar 105 p                 | 122    | 2.35          | 0.15    | 21,489     | Mar 1050 c | 10         | 84        | -5.80     | 19,676     | Feb 1150 c | 3,479 | 42.00 | -3.30 | 26,943 |
| Apr 105 c                 | 200    | 2.75          | 0.05    | 1,914      | Mar 1050 p | 36         | 6.90      | 0.90      | 48,190     | Feb 1150 p | 943   | 28.70 | 6.20  | 6,483  |
| Apr 105 p                 | 102    | 3             | ...     | 895        | Feb 1055 p | 130        | 1.40      | 0.10      | 3,134      | Mar 1150 c | 520   | 13    | -3.70 | 35,491 |
| Feb 106 c                 | 1,071  | 0.65          | -0.10   | 4,647      | Mar 1060 c | 1          | 73        | -6.50     | 3,391      | Mar 1150 p | 52    | 38    | 5.00  | 23,226 |
| Feb 106 p                 | 65     | 2.10          | 0.15    | 3,485      | Mar 1060 p | 2,305      | 8.10      | 1.30      | 7,272      | Apr 1150 c | 23    | 20.60 | -3.40 | 2,122  |
| Mar 106 p                 | 30     | 3             | 0.25    | 5,426      | Mar 1070 p | 600        | 9         | 0.90      | 7,919      | Feb 1155 c | 179   | 3.80  | -2.00 | 1,557  |
| Apr 106 p                 | 5      | 3.80          | 0.20    | 1,547      | Feb 1075 c | 27         | 57.80     | -3.70     | 11,711     | Feb 1160 c | 1,351 | 2.55  | -1.85 | 6,062  |
| Feb 107 c                 | 118    | 0.35          | -0.10   | 4,414      | Feb 1075 p | 11,023     | 2.70      | 0.60      | 28,638     | Feb 1160 p | 126   | 37    | 7.80  | 1,159  |
| Mar 107 p                 | 2      | 3.50          | ...     | 125        | Mar 1075 c | 16         | 64.50     | -3.50     | 33,222     | Mar 1160 c | 402   | 10    | -2.90 | 2,098  |
| Apr 107 c                 | 10     | 1.50          | -0.75   | 617        | Mar 1075 p | 519        | 10.40     | 1.80      | 38,840     | Mar 1160 p | 1     | 45    | 1.00  | 14     |
| Apr 107 p                 | 5      | 4.30          | 0.20    | 742        | Apr 1075 p | 185        | 16.40     | 1.30      | 1,134      | Feb 1170 c | 3,054 | 1.50  | -0.90 | 6,733  |
| Feb 108 c                 | 6      | 0.20          | -0.10   | 3,305      | Feb 1085 c | 4          | 48.80     | -0.20     | 204        | Feb 1170 p | 13    | 42.80 | 3.80  | 261    |
| Feb 108 p                 | 2      | 3.90          | 0.40    | 2,585      | Feb 1085 p | 583        | 3.70      | 1.00      | 6,492      | Feb 1175 c | 1,617 | 1.15  | -0.85 | 28,065 |
| Feb 108 p                 | 2      | 3.90          | 0.40    | 2,585      | Mar 1085 p | 305        | 12        | 2.50      | 5,608      | Feb 1175 p | 55    | 49    | 6.00  | 2,196  |

资料来源：Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc. © 2004 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

提供欧式指数期权价格的下限；方程 (14.3) 可以是欧式指数期权的看跌与看涨期权之间的平价关系；方程 (14.4) 和方程 (14.5) 可以用来为基于股票指数的欧式期权定价。这里， $S_0$  等于指数值， $\sigma$  等于指数波动率， $q$  等于期权有效期间内指数的平均年红利收益率 (连续复利)。计算  $q$  的时候，应该只考虑除权日发生期权有效期内的红利。

在美国，除权日大多数是在 2 月份、5 月份、8 月份和 11 月份的第一周。因此，对于任一给定时间，正确的  $q$  值很大程度上依赖于期权的有效期限。在某些其他国家，这种季节性甚至更明显。比如在日本，所有的公司都倾向于相同的除权日。

[例 14.1] 考虑一种 S&P 500 的欧式看涨期权，还有 2 个月到期。指数的现值为 930，执行价格为 900，无风险利率为每年 8%，指数波动率为每年 20%。在第一个月和第二个月中期望得到的红利收益率分别是 0.2% 和 0.3%。即在这个例子中， $S_0 = 930$ ,  $K = 900$ ,  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.20$ ,  $T = 2/12$ 。期权有效期内的总红利收益率为  $0.2\% + 0.3\% = 0.5\%$ ，即每年 3%。因此， $q = 0.03$ ，且

$$d_1 = \frac{\ln(930/900) + (0.08 - 0.03 + 0.2^2/2) \times 2/12}{0.2\sqrt{2/12}} = 0.5444$$

$$d_2 = \frac{\ln(930/900) + (0.08 - 0.03 - 0.2^2/2) \times 2/12}{0.2\sqrt{2/12}} = 0.4628$$

$$N(d_1) = 0.7069, N(d_2) = 0.6782$$

所以，方程 (14.4) 给出的看涨期权价格  $c$  为

$$c = 930 \times 0.7069e^{-0.03 \times 2/12} - 900 \times 0.6782e^{-0.03 \times 2/12} = 51.83$$

一份合约的费用为 \$5 183。

如果期权的标的股票，其将要支付的红利的绝对数量是已知的（而非红利收益率已知），那么将最初的股票价格减去红利的现值就可以使用基本的 Black-Scholes-Merton 公式。这是第 13 章中提出的处理支付已知红利的股票的方法。对于成分股众多的股票指数，以上方法是难以实现的，因为该方法需要估计指数包含的每一种股票的红利收益。

## 二叉树

在某些情况下，在到期日前执行美式看涨指数期权和看跌指数期权是最优的。模仿 11.9 节的方法，可以利用二叉树估值美式指数期权。对于应用二叉树模型处理指数期权的例子，参照例 11.1 与图 11.11。

## 证券组合保险

证券组合经理可以用指数期权控制他们的价格风险。假设当前一种指数值为  $S_0$ 。一位经理经营一种完全分散化的证券组合，该证券组合的  $\beta$  为 1.0。 $\beta$  为 1.0 说明证券组合的收益正好反映了指数的收益。假设证券组合的红利收益率和指数的红利收益率相等，那么证券组合价值的变化将近似等于指数值的变化。每份 S&P 500 合约的规模为该指数值乘以 100。若对于证券组合中每  $100S_0$  美元，经理买入一份执行价格为  $K$  的看跌期权合约，就可以保护证券组合的价值使其免受指数下降到  $K$  值以下而损失。例如，假设证券组合价值为 50 万美元，指数的值为 1 000 点。证券组合的价值是指数的 500 倍。这位经理就可以通过买进 5 份执行价格为 900 点的看跌期权，使其证券组合在接下来的 3 个月中免受证券组合价值跌落到 45 万美元以下而损失。假设无风险利率为 12%，指数的红利收益率为 4% 以

### 商业剪影 14.1 我们可以确信长期中股票收益大于债券的收益吗？

人们经常说如果你是进行长期投资，那应该买股票而不是债券。考虑一个美国基金经理，他在劝服投资者购买可以反映 S&P500 的股票型基金作为长期投资。该经理给购买者推荐股票型基金的时候，也可能试图做一个担保，担保未来 10 年中该基金的收益率会比无风险利率债券的收益率要高。在美国，历史上的任何 10 年中，股票的确表现得比债券好。看起来，基金经理的推测不会偏离很大。

实际上，这类担保的成本出奇的昂贵。假设一个股票指数的当前值为 1 000，该指数的红利收益率为 1%p.a.，指数的波动率为 15%p.a.，10 年期无风险利率为 5%p.a.。为了超过债券的表现，指数的标的股票的年收益率应该大于 5%p.a.。红利收益将提供 1%p.a.。那么，股票的资本收益率应该超过 4%p.a.。这说明，我们在 10 年后要求的指数水平至少在  $1000e^{0.04 \times 10} = 1492$  以上。

未来 10 年中，指数上投资的 \$1 000 的收益率大于债券上投资的 \$1 000 的收益率，这样的担保等价于 10 年后以 1,492 卖出指数的权利。这是该指数的欧式看跌期权，在公式 (14.5) 中代入  $S_0 = 1000$ ,  $K = 1492$ ,  $r = 5\%$ ,  $\sigma = 15\%$ ,  $T = 10$  和  $q = 1\%$ ，就能得到该期权的价值。该看跌期权的价值为 169.7。这说明基金经理设想的担保成本是基金金额的 17%—这是完全不能忽略的！

及指数波动率为 22%。期权的各个参数值为：

$$S_0 = 1000, K = 900, r = 0.12, \sigma = 0.22, T = 0.25, q = 0.04$$

根据公式 (14.5)，期权的价值为 \$6.48。因此，证券组合保险的成本为  $5 \times 100 \times 6.48 = \$3240$ 。

为说明这种保险操作所具有的作用，我们考虑 3 个月后指数下降到 880 点的情况。证券组合价值大约是 44 万美元，但是从期权中得到的收益为  $5 \times (900 - 880) \times 100 = \$10000$ ，保证了证券组合的总价值仍为 45 万美元（考虑期权成本时为 \$446760）。

有时大家认为长期中股票的收益大于债券的收益。如果真的如此，执行价格等于债券组合未来价值的长期证券组合保险策略的期权成本就不会很大。但事实上，如商业剪影 14.1 所述，这是非常昂贵的。

### 证券组合 $\beta$ 不为 1.0 的情况

如果预期证券组合的收益率不是所期望的正好等于某个指数的收益率时，我们可以利用资本资产定价模型。该模型中一个证券组合的超过无风险利率的预期超额收益率，等于  $\beta$  乘以市场指数超过无风险利率的超额收益率。考虑现价为 50 万美元的一种证券组合，它的  $\beta$  为 2.0 而非 1.0。和前面一样，我们还是假设当前的 S&P 500 指数值为 1 000，无风险利率为 12%，指数红利收益率为 4%。表

表 14.2 当  $\beta = 2.0$  时，指数的价值与证券组合价值之间的关系

| 3个月后指数值 | 3个月后证券组合价值 (\$) |
|---------|-----------------|
| 1 080   | 570 000         |
| 1 040   | 530 000         |
| 1 000   | 490 000         |
| 960     | 450 000         |
| 920     | 410 000         |
| 880     | 370 000         |

14.2 给出了 3 个月后指数价值和证券组合价值之间的预期关系。为说明得到表 14.2 所需要的计算过程，表 14.3 给出了 3 个月后指数价值为 1 040 点时的相应计算。

若  $S_0$  是指数的价值，对于证券组合中每  $100S_0$  美元应当购买  $\beta$  份看跌期权。执行价格应当是当证券组合价值达到保险价值时所期望的指数价值。和之前  $\beta = 1.0$  的例子一样，设本例中保险价值为 45 万美元。表 14.2 表明了购买的看跌期权的执行价格应为 960 点。期权的各个参数为

$$S = 1 000, K = 960, r = 0.12, \sigma = 0.22, T = 0.25, q = 0.04$$

根据公式 (14.5)，得到期权的价格为 \$19.21。这种情况下， $100S_0 = \$100 000$ ， $\beta = 2.0$ ，所以对证券组合里的每 10 万美元，需要购买 2 份看跌期权。因为证券组合的价值是 50 万美元，应该总共购买 10 份期权合约。因此，证券组合保险的总成本为  $10 \times 100 \times 19.21 = \$19 210$ 。

为证实确实达到了需要的结果，让我们看看如果指数的值下降到 880 点时会发生什么情况。如表 14.2 所示，证券组合的价值为 37 万美元。看跌期权的收益为  $(960 - 880) \times 10 \times 100 = \$80 000$ ，这正是将证券组合经理的总价值由 37 万美元弥补到要求

表 14.3 3 个月后指数价值为 1 040 点时，表 14.2 中的相应计算

|                    |                                     |
|--------------------|-------------------------------------|
| 3 个月后指数值:          | 1 040                               |
| 指数变化所得收益:          | 每 3 个月 $40/1 000$ 即 4%              |
| 指数红利:              | 每 3 个月 $0.25 \times 4$ 即 1%         |
| 指数总收益:             | 每 3 个月 $4 + 1$ 即 5%                 |
| 无风险利率:             | 每 3 个月 $0.25 \times 12$ 即 3%        |
| 指数收益扣除无风险利率的净收益:   | 每 3 个月 $5 - 3$ 即 2%                 |
| 证券组合收益扣除无风险利率的净收益: | 每 3 个月 $2 \times 2$ 即 4%            |
| 证券组合收益:            | 每 3 个月 $3 + 4$ 即 7%                 |
| 证券组合红利:            | 每 3 个月 $0.25 \times 4$ 即 %          |
| 证券组合价值的增加值:        | 每 3 个月 $7 - 1$ 即 6%                 |
| 证券组合的总价值:          | $\$500 000 \times 1.06$ 即 \$530 000 |

的水平45万美元所需要的数量(考虑期权成本,证券组合的价值为\$430 790)。

对冲成本随着证券组合 $\beta$ 值的增加而增加有两个原因:一是需要更多的看跌期权;二是这些期权的执行价格更高。

## 14.4 货币期权

货币期权主要在场外市场交易。该市场的优点是可以进行大规模的货币期权交易,并且期权的执行价格、日期以及其他特性可以根据公司客户的特殊要求而订立。美国的费城交易所也可以进行欧式和美式货币期权的交易。但是场内市场的规模比场外市场小很多。

对一位打算对冲外汇头寸暴露的公司客户来讲,外汇期权方法是另一种比远期合约更引人注目的替代方法。在未来某一确定时间将收到英镑的某公司可以通过购买同一时间到期的英镑看跌期权来对冲风险。这样保证了英镑的价值将不会低于执行价格,而且允许该公司可以从任何有利的汇率变动中受益。类似地,在未来确定时间将支付英镑的某公司可以通过购买那个时刻到期的英镑看涨期权来对冲风险。这就保证了购买英镑的费用不会超过某一数额,并且允许该公司从有利的汇率变动中受益。远期合约锁定了将来的一笔交易的汇率而期权则提供了一种保险。当然,这种保险不是无偿的。进入远期市场交易无需费用而获得期权则需事先缴纳一笔费用。

## 估 值

为货币期权定价时,我们定义 $S_0$ 为即期汇率,即用美元表示的每一单位外币的价值。在5.10节中已经解释过,一种外币与一种支付已知红利收益的股票类似。外币的持有者收入的“红利收益率”等于外币无风险利率 $r_f$ (用外币表示)。在公式(14.1)和式(14.2)中,将 $q$ 替换成 $r_f$ ,欧式看涨期权价格 $c$ 和看跌期权价格 $p$ 为:

$$c \geq S_0 e^{-r_f T} - K e^{-r_f T}$$

$$p \geq K e^{-r_f T} - S_0 e^{-r_f T}$$

在公式(14.3)中,将 $q$ 替换成 $r_f$ ,基于外汇的欧式看涨和看跌期权之间的平价关系为

$$c + K e^{-r_f T} = p + S_0 e^{-r_f T}$$

最后,在公式(14.4)和公式(14.5)中,将 $q$ 替换成 $r_f$ ,那么可以得到货币期权的定价公式:

$$c = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-r_f T} N(d_2) \quad (14.7)$$

$$p = K e^{-r_f T} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1) \quad (14.8)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

国内的利率  $r$  和国外的利率  $r_f$  都为到期时刻  $T$  的利率。对一种货币看涨期权和看跌期权是对称的，一份以执行价格  $K$  出售 A 货币得到 B 货币的看跌期权等价于一份以执行价格  $1/K$  用 A 货币购买 B 货币的看涨期权。

**[例 14.2]** 考虑一份 4 个月期的英镑欧式看涨期权。假设当前的即期汇率为 \$1.6000，执行价格为 \$1.6000，美国的无风险利率为每年 8%，英国的无风险利率为每年 11%，期权价格为 4.3 美分。即  $S_0 = 1.6$ ,  $K = 1.6$ ,  $r = 0.08$ ,  $r_f = 0.11$ ,  $T = 0.3333$ ,  $c = 0.043$ 。可以通过试错法计算隐含波动率。波动率为 20% 时，期权价格为 \$0.0639；波动率为 10% 时，期权价格为 \$0.0285。依此类推。隐含波动率为 14.1%。

由方程 (5.9) 得到  $T$  时刻到期的远期汇率  $F_0$  为：

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T}$$

这使得方程 (14.7) 和方程 (14.8) 可简化为：

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - K N(d_2)] \quad (14.9)$$

$$p = e^{-rT} [K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (14.10)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

注意，在使用方程 (14.9) 和方程 (14.10) 估值基于即期汇率的欧式期权时，远期合约和期权的到期日必须相同。

## 二叉树

在某些时候，在到期日前执行美式货币期权是最优的。因此美式期权的价值比相应的欧式期权的价值要高一些。一般来说，高利率货币的看涨期权和低利率货币的看跌期权是最有可能提前执行的。这是因为我们预期高利率货币相对美元可能会贬值而低利率货币相对美元可能会升值。如 11.9 节中一样，可以运用二叉树模型估值美式货币期权。例 11.2 与图 11.12 中给出了有关货币期权估值的例子。

## 14.5 期货期权

如今在许多不同的交易所中交易基于期货合约的期权也称期货期权的交易。这些期权是美式的，被执行时需要交割一份标的期货合约。如果执行一份期货看涨期权，持有者将获得该期货合约的多头头寸，外加一笔数额等于最近的期货结算价格减去执行价格的现金。如果执行一份期货看跌期权，持有者将获得该期货合约的空头头寸，外加一笔数额等于执行价格减去最近的期货结算价格的现金。下面的例子中，我们可以看到看涨期货期权的有效损益等于执行时的期货价格减去执行价格；看跌期货期权的有效损益等于执行价格减去执行时的期货价格。

**[例 14.3]** 假设一个投资者在 8 月 15 日拥有一份执行价格为每磅 70 美分的黄铜 9 月份期货看涨期权。一份黄铜期货规模为 25 000 磅。假设 9 月份交割的黄铜期货价格当前为 81 美分，而且 8 月 14 日（最近的结算日）的收盘价格为 80 美分。如果执行该期权，投资者将收入

$$25\,000 \times (80 - 70) \text{ 美分} = \$2\,500$$

再加上一个 9 月份购买 25 000 磅黄铜期货合约的多头头寸。如果愿意的话，可以立即冲销期货头寸。这可以使投资者最终获得 \$2 500 的现金再加上

$$25\,000 \times (81 - 80) \text{ 美分} = \$250$$

的金额，后者反映从上一次结算以来的期货价格变化。8 月 15 日执行期权，则总收益为 \$2 750，等于  $25\,000(F-K)$ ，其中  $F$  是执行时的期货价格， $K$  为执行价格。

**[例 14.4]** 假设一个投资者拥有一份执行价格为每蒲式耳 200 美分的 12 月份到期的玉米期货的看跌期权。一份该玉米期货的合约规模为 5 000 蒲式耳。假设当前在 12 月份交割的玉米期货价格为 180 美分，而且最近一次结算价格为 179 美分。如果执行该期权，投资者将收入

$$5\,000 \times (200 - 179) \text{ 美分} = \$1\,050$$

再加上一个 12 月份出售 5 000 蒲式耳玉米的期货合约的空头头寸。如果愿意的话，可以立即冲销期货头寸。这可以使投资者最终获得 \$1 050 的现金加上

$$5\,000 \times (180 - 179) \text{ 美分} = \$50$$

的金额，后者反映从上一次结算以来的期货价格变化。执行期权的净收益为 \$1 000，等于  $5\,000(F-K)$ ，其中  $F$  是执行时的期货价格， $K$  为执行价格。

## 行情报价

期货期权以其标的期货的到期月报价，而不是期权本身的到期月。前面已经提过，期货期权是美式的。期权合约的到期日通常比标的期货合约的最早交割日要早几天或同时（例如，芝加哥期权交易所长期国债期货期权的到期日是：在期

货合约到期月的前一个月、离月末至少相距 2 个交易日的那个星期五)。一个例外是芝加哥商品交易所的 mid-curve 欧洲美元合约，该合约中期权合约到期 1 年后或 2 年后期货合约到期。

表 14.4 给出了 2004 年 2 月 5 日《华尔街日报》刊载的许多种期货期权的报价。交易最广泛的是(以未平仓量衡量)基于玉米、大豆、棉花、世界白糖、原油、天然气、黄金、长期国债、中期国债、5 年期中期国债、30 天期联邦基金、欧洲美元、1 年期与 2 年期 mid-curve 欧洲美元、欧洲同业拆借利率、10 年期长期德国政府债券以及 S&P 500 的期权。

## 基于利率期货的期权

在美国，交易所提供的交易最活跃的利率期权是基于长期国债期货、中期国债期货以及欧洲美元期货的期权。表 14.4 给出了 2004 年 2 月 4 日上述金融工具的收盘价格。

长期国债期货期权是基于长期国债期货的期权。在第 6 章提过，一份长期国债期货的交割规模为价值 10 万美元的长期国债。长期国债期货期权的价格以标的长期国债账面价值的百分比报价，近似到  $1/64\%$ 。表 14.4 中可以看到，2004 年 2 月 4 日，基于长期国债的 3 月看涨期货期权的报价为 2-06，即债券本金的  $2\frac{6}{64}\%$ ，执行价格为 110。这说明一份合约的价格为  $\$2\ 093.75$ 。中期国债期货期权的报价也是类似的。

欧洲美元期货期权是基于欧洲美元期货的期权。在第 6 章提过，当欧洲美元期货报价变化 1 个基点，即  $0.01\%$  的时候，欧洲美元期货相应的损益为  $\$25$ 。类似地，在欧洲美元期货期权的报价中，1 个基点代表  $\$25$ 。表 14.4 中《华尔街日报》的 CME 欧洲美元期货报价中，我们应该乘以 10 来得到 CME 报价相应的基点个数。例如，表 14.4 中，执行价格为 98.25 的 CME 3 月份看涨期货期权的报价为 5.90。这说明 CME 报价是 59.0 个基点，因此，一份合约的价格为  $59.0 \times \$25 = \$1\ 475.00$ 。

利率期货期权的性质和本章中讲述的其他期货期权类似。例如，看涨期权的损益为  $\max(F-K, 0)$ ，其中  $F$  为执行时刻期货价格， $K$  为执行价格。执行看涨期权的时候，除了现金损益，看涨期权持有者还可以得到期货多头，而看涨期权的出售者可以得到相应的期货空头。

债券价格上升的时候(即利率下降的时候)，利率期货价格上升。而债券价格下降的时候(即利率上升的时候)，利率期货价格下降。一位投资者认为短期利率将上升，他就可以买入欧洲美元期货的看跌期权进行投机。而一位投资者认为短期利率将下降，他就可以买入欧洲美元期货的看涨期权进行投机。一位投资者认为长期利率将上升，他就可以买入中长期国债期货的看跌期权进行投机。而一位投资者认为长期利率将下降，他就可以买入中长期国债期货的看涨期权进行投机。

表 14.4 2004 年 2 月 4 日期货期权收盘价格

| Wednesday, February 4, 2004   |                          |        |        |        |        |        |        |  |              |             |
|---|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|--------------|-------------|
| Final or settlement prices of selected contracts. Volume and open interest are totals in all contract months. |                          |        |        |        |        |        |        |  |              |             |
| Food and Fiber  |                          |        |        |        |        |        |        |  |              |             |
| <b>Grain and Oilseed</b>  |                          |        |        |        |        |        |        |  |              |             |
| <b>Corn (CBT)</b>   | Price                    | Mar    | May    | Jly    | Mar    | May    | Jly    | Strike                                 | CALLS-SETTLE | PUTS-SETTLE |
| 5,000 bu.; cents per bu.  | 260                      | 11,875 | 20,250 | 26,750 | 1,625  | 5,250  | 8,500  | Mar                                    | .244         | .585        |
|   | 270                      | 5,500  | 14,790 | 21,250 | 5,250  | 9,500  | 13,500 | May                                    | .164         | .521        |
|   | 280                      | 2,250  | 10,500 | 17,250 | 12,000 | 15,500 | 19,000 | Jly                                    | .69          | .460        |
|   | 290                      | 750    | 3,735  | 14,000 | 20,500 | 22,000 | 25,625 | Mar                                    | .46          | .404        |
|   | 300                      | 250    | 5,125  | 11,375 | 30,000 | 29,625 | 32,625 | May                                    | .28          | .354        |
|   | 310                      | 125    | 3,500  | 9,250  | ...    | ...    | ...    | Jly                                    | .15          | .307        |
| Est vol 14,610 Tu 8,885 calls 6,364 puts  | 260                      | 11,875 | 20,250 | 26,750 | 1,625  | 5,250  | 8,500  | Op int Tues 323,990 calls 227,010 puts | 2.45         | 2.90        |
| Op int Tues 21,744 calls 113,615 puts   | 270                      | 5,500  | 14,790 | 21,250 | 5,250  | 9,500  | 13,500 | ...                                    | 2.67         | 2.20        |
| Op int Tues 21,736 calls 17,368 puts  | 280                      | 2,250  | 10,500 | 17,250 | 12,000 | 15,500 | 19,000 | ...                                    | 2.34         | 2.58        |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 290                      | 750    | 3,735  | 14,000 | 20,500 | 22,000 | 25,625 | ...                                    | 2.11         | 2.78        |
| Op int Tues 39,831 calls 36,748 puts  | 300                      | 250    | 5,125  | 11,375 | 30,000 | 29,625 | 32,625 | ...                                    | 3.27         | 3.46        |
| Op int Tues 1,547 Tu 844 calls 5,904 puts   | 310                      | 125    | 3,500  | 9,250  | ...    | ...    | ...    | ...                                    | 3.95         | 3.95        |
| Op int Tues 21,736 calls 17,368 puts  | 5,000 bu.; cents per bu. | 760    | 47,500 | 58,500 | 60,000 | 1,875  | 13,000 | 28,500                                 | ...          | ...         |
| Op int Tues 42,351 calls 14,369 puts  | 780                      | 31,250 | 46,500 | 50,250 | 5,500  | 20,750 | 38,500 | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 21,736 calls 17,368 puts  | 800                      | 18,875 | 36,250 | 42,000 | 13,125 | 30,750 | 50,000 | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 21,736 calls 17,368 puts  | 820                      | 10,250 | 28,500 | 35,000 | 24,500 | 42,250 | 62,750 | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 840                      | 5,125  | 22,000 | 29,500 | 39,375 | 56,000 | 77,000 | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 860                      | 2,500  | 17,000 | 24,750 | 56,625 | 70,750 | 92,000 | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 880                      | 1,375  | 9,30   | 10,90  | 6,75   | 12,60  | 18,25  | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 900                      | 9.00   | 13,50  | 14,50  | 2,00   | 7,25   | 11,75  | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 920                      | 3.75   | 9.30   | 10,90  | 6,75   | 12,60  | 18,25  | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 940                      | 1.35   | 6.50   | 8,50   | 14,40  | 19,75  | 25,70  | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 960                      | 0.69   | 0.89   | 0.93   | 0.01   | 0.02   | 0.06   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 980                      | 0.25   | 0.47   | 0.55   | 0.07   | 0.09   | 0.17   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1000                     | 0.02   | 0.18   | 0.27   | 0.34   | 0.30   | 0.39   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1020                     | 0.01   | 0.05   | 0.12   | 0.83   | 0.67   | 0.74   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1040                     | 0.01   | 0.01   | 0.06   | 1.33   | 1.13   | 1.17   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1060                     | 0.19   | 1.39   | 1.40   | 0.01   | 0.01   | 0.02   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1080                     | 84.00  | 5.50   | 6.28   | 3.00   | 2.80   | 3.10   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1100                     | 2.50   | 4.00   | ...    | ...    | 3.50   | 3.30   | 3.90                                   | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1120                     | 1.60   | 3.10   | 4.00   | 4.60   | 4.60   | 4.80   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1140                     | 1.20   | ...    | ...    | ...    | 5.20   | ...    | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1160                     | 0.18   | 0.25   | 0.35   | 0.45   | 0.55   | 0.65   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1180                     | 0.08   | 0.18   | 0.28   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1200                     | 0.03   | 0.08   | 0.12   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1220                     | 0.01   | 0.03   | 0.05   | 0.10   | 0.15   | 0.20   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1240                     | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | 0.12   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1260                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1280                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1300                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1320                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1340                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1360                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1380                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1400                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1420                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1440                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1460                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1480                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1500                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1520                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1540                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1560                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1580                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1600                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1620                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1640                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1660                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1680                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1700                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1720                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1740                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1760                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1780                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1800                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1820                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1840                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1860                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1880                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1900                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1920                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1940                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1960                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 1980                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2000                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2020                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2040                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2060                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2080                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2100                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2120                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2140                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2160                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2180                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2200                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2220                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2240                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2260                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2280                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2300                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2320                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2340                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2360                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
| Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts  | 2380                     | 0.01   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.05   | 0.08   | ...                                    | ...          | ...         |
|   |                          |        |        |        |        |        |        |  |              |             |

| STRIKE                                | CALLS-SETTLE |           |        |           | PUTS-SETTLE |       |  |  | STRIKE | CALLS-SETTLE |  |  |  | PUTS-SETTLE |  |  |  |
|---------------------------------------|--------------|-----------|--------|-----------|-------------|-------|--|--|--------|--------------|--|--|--|-------------|--|--|--|
| Metals                                |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>Copper (CMX)</b>                   |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 25,000 lbs.; cents per lb.            |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Price                                 | Mar          | Apr       | May    | Mar       | Apr         | May   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 114                                   | 5.00         | 6.00      | 7.15   | 1.55      | 2.90        | 4.65  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 116                                   | 3.70         | 4.90      | 6.15   | 2.25      | 3.80        | 5.60  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 118                                   | 2.55         | 3.95      | 5.20   | 3.10      | 4.85        | 6.65  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 120                                   | 1.75         | 3.10      | 4.40   | 4.30      | 6.00        | 7.85  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 122                                   | 1.15         | 1.80      | 3.70   | 5.70      | 9.65        | 9.10  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 124                                   | 0.70         | 1.00      | 3.05   | 7.25      | 13.90       | 10.50 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Est vol                               | 1,650        | Tu        | 247    | calls     | 23          | puts  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Op int                                | Tues         | 12,848    | calls  | 3,638     | puts        |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>Gold (CMX)</b>                     |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 100 troy ounces; \$ per troy ounce    |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Price                                 | Mar          | Apr       | Jun    | Mar       | Apr         | Jun   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 390                                   | 13.50        | 16.80     | 21.80  | 1.90      | 5.10        | 9.20  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 395                                   | 10.00        | 13.70     | 19.00  | 3.30      | 7.00        | 11.40 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 400                                   | 7.00         | 11.00     | 17.50  | 5.30      | 9.30        | 14.90 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 405                                   | 4.80         | 8.80      | 14.30  | 8.10      | 12.10       | 16.60 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 410                                   | 3.20         | 6.60      | 12.50  | 11.50     | 14.90       | 19.70 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 415                                   | 2.10         | 5.50      | 10.80  | 15.40     | 18.80       | 23.00 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Est vol                               | 18,000       | Tu        | 4,487  | calls     | 5,463       | puts  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Op int                                | Tues         | 306,159   | calls  | 227,854   | puts        |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>Silver (CMX)</b>                   |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 5,000 troy ounces; cts per troy ounce |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Price                                 | Mar          | Apr       | May    | Mar       | Apr         | May   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 610                                   | 20.30        | 30.50     | 38.40  | 15.50     | 24.40       | 32.20 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 620                                   | 15.90        | 26.30     | 34.30  | 21.10     | 30.10       | 38.10 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 625                                   | 14.00        | 24.40     | 32.40  | 24.20     | 33.20       | 41.20 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 630                                   | 12.40        | 22.70     | 30.70  | 27.60     | 36.40       | 44.40 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 640                                   | 9.70         | 19.50     | 25.20  | 34.90     | 43.20       | 51.20 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 650                                   | 7.60         | 16.80     | 24.70  | 42.70     | 50.50       | 58.40 |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Est vol                               | 1,800        | Tu        | 1,474  | calls     | 1,954       | puts  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Op int                                | Tues         | 66,669    | calls  | 26,556    | puts        |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>Interest Rate</b>                  |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>T-Bonds (CBT)</b>                  |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| \$100,000; points and 64ths of 100%   |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Price                                 | Mar          | Apr       | May    | Mar       | Apr         | May   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 110                                   | 2.06         | 2.03      | 2.35   | 0.36      | 1.61        | 2.29  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 111                                   | 1.28         | 1.36      | 0.58   | 0.58      | 2.30        | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 112                                   | 0.58         | 1.11      | 1.42   | 1.24      | 3.04        | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 113                                   | 0.34         | 0.54      | ...    | 2.00      | 3.48        | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 114                                   | 0.19         | 0.39      | ...    | 2.49      | 4.32        | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 115                                   | 0.10         | 0.27      | 0.49   | 3.40      | 5.20        | 5.20  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Est vol                               | 23,701       |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Tu                                    | 14,191       | calls     | 17,000 | puts      |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Op int                                | Tues         | 412,644   | calls  | 444,891   | puts        |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>T-Notes (CBT)</b>                  |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| \$100,000; points and 64ths of 100%   |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Price                                 | Mar          | Apr       | May    | Mar       | Apr         | May   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 112                                   | 2.00         | 1.30      | 1.52   | 0.20      | 1.25        | 1.46  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 113                                   | 1.17         | 1.00      | 0.37   | 1.58      | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 114                                   | 0.44         | 0.41      | 0.59   | 1.00      | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 115                                   | 0.20         | 0.24      | 0.40   | 1.40      | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 116                                   | 0.08         | 0.14      | 0.26   | 2.28      | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 117                                   | 0.03         | 0.08      | 0.16   | ...       | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Est vol                               | 150,806      | Tu        | 61,052 | calls     | 65,301      | puts  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Op int                                | Tues         | 1,045,655 | calls  | 1,083,950 | puts        |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>5 Yr Treas Notes (CBT)</b>         |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| \$100,000; points and 64ths of 100%   |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Price                                 | Mar          | Apr       | May    | Mar       | Apr         | May   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 11150                                 | 1.16         | 0.49      | 0.62   | 1.15      | 1.08        | 1.21  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 11200                                 | 0.56         | 0.36      | 0.22   | 0.27      | 1.27        | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 11250                                 | 0.36         | 0.25      | 0.34   | 0.34      | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 11300                                 | 0.22         | 0.17      | 0.52   | 0.52      | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 11350                                 | 0.12         | 0.11      | 1.10   | 1.10      | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 11400                                 | 0.06         | ...       | 1.36   | 1.36      | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Est vol                               | 17,994       | Tu        | 4,736  | calls     | 25,086      | puts  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Op int                                | Tues         | 125,023   | calls  | 426,615   | puts        |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>30 Day Federal Funds (CBT)</b>     |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| \$5,000,000; 100 minus daily average  |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Price                                 | Feb          | Mar       | Apr    | Feb       | Mar         | Apr   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 988750                                | .127         | .117      | .120   | .002      | .002        | .005  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 989375                                | .065         | .062      | .060   | .002      | .007        | .007  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 990000                                | .007         | .007      | .007   | .007      | .017        | .017  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 990625                                | ...          | .002      | .002   | ...       | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>Japanese Yen (CME)</b>             |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 12,500,000 yen; cents per 100 yen     |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Price                                 | Feb          | Mar       | Apr    | Feb       | Mar         | Apr   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 9400                                  | 1.03         | 1.72      | 2.30   | 0.06      | 0.75        | 1.04  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 9450                                  | 0.60         | 1.44      | 2.03   | 1.35      | 0.97        | 1.27  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 9500                                  | 0.30         | 1.19      | 1.78   | 0.33      | 1.22        | 1.52  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 9550                                  | 0.13         | 0.98      | 1.56   | 0.66      | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 9600                                  | 0.06         | 0.81      | 1.36   | 1.09      | 1.84        | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 9650                                  | 0.04         | 0.67      | ...    | ...       | ...         | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Est vol                               | 1,352        | Tu        | 1,271  | calls     | 531         | puts  |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Op int                                | Tues         | 23,459    | calls  | 20,676    | puts        |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>Canadian Dollar (CME)</b>          |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 100,000 Can\$, cents per Can\$        |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Price                                 | Feb          | Mar       | Apr    | Feb       | Mar         | Apr   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 7400                                  | ...          | 1.35      | ...    | 0.07      | 0.50        | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 7450                                  | 0.51         | 1.04      | ...    | 0.16      | 0.69        | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| <b>British Pound (CME)</b>            |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 62,500 pounds; cents per pound        |              |           |        |           |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| Price                                 | Feb          | Mar       | Apr    | Feb       | Mar         | Apr   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 1810                                  | 2.01         | 3.13      | ...    | 0.24      | 1.36        | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 1820                                  | 1.13         | 2.53      | ...    | 0.36      | 1.76        | ...   |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |
| 1830                                  | 0.68         | 2.04      | ...    | 0.91      |             |       |  |  |        |              |  |  |  |             |  |  |  |

**[例 14.5]** 现在是 2 月份，6 月欧洲美元期货价格为 93.82（对应于 3 个月的欧洲美元利率为 6.18%p.a.）。执行价格为 94.00 的基于该期货的看涨期权在 CME 的报价为 0.1，即 10 个基点（对应于《华尔街日报》报价的 1.00）。一位认为利率将下降的投资者可能对该合约感兴趣。假设短期利率的确下降了 100 个基点，投资者在欧洲美元期货价格为 94.78（对应于 3 个月的欧洲美元利率为 5.22%p.a.）的时候执行看涨期权，则损益为  $25 \times (94.78 - 94.00) = \$1\,950$ 。而合约的成本是  $10 \times 25 = \$250$ 。因此投资者的净收益为 \$1\,700。

**[例 14.6]** 现在是 8 月份，CBOT 的 12 月长期国债期货报价为 96-09（即  $96\frac{9}{32} = 96.28125$ ）。长期国债收益率大约为 6.4%p.a.。一位投资者认为该收益率到 12 月份将下降，他可以选择买入执行价格为 98 的 12 月份看涨期权。假设该看涨期权的报价为 1-04（即本金的  $1\frac{4}{64} = 1.0625\%$ ）。如果长期利率下降到 6%p.a.，现长期国债期货价格上升到 100-00，则投资者可以在每 \$100 债券期货中获得净收益

$$100.00 - 98.00 - 1.0625 = 0.9375$$

因为每份期权合约规模为买卖面值为 10 万美元的债券。所以投资者在买入的每份期权合约中获得收益 \$937.50。

## 广泛使用期货期权的原因

那么有一个疑问，为什么大家会选择交易期货的期权而不是标的资产的期权呢？主要原因是很多情况下交易期货合约比交易资产本身流动性更强且更方便。进一步，通过期货交易所中的交易可以立即知道某个期货价格，而标的资产的即期价格也许不可能迅速得知。

考虑长期债券。长期债券期货市场比任何长期债券市场都为活跃。且 CBOT 交易中可以立即得知某个长期债券期货的价格，相反地，一个债券的当前市价只能通过联系一名或多名交易员才能得知。所以投资者们更愿意交割长期债券期货而不是长期债券，这并不奇怪。

交割基于商品的期货合约比交割标的商品本身更方便。例如，交割活猪期货合约比交割活猪本身更容易更方便。

期货期权的一个重要特点之一是执行该期权通常并不产生标的资产的交割，因为在大多数情况下，在交割前标的期货合约就已经冲销了。因此，期货期权通常以现金结算。这吸引了许多投资者，特别是那些资本有限，而当期权被执行时又难以筹措足够的资金购买标的资产的投资者。

人们有时也谈到期货期权的另一个优点，即在同一个交易所中，期货的交易池和期货期权合约的交易池彼此靠近。这方便了对冲、套利和投机。这也使得市场更有效率。

最后一点是：在许多情况下，期货期权比即期期权承担较低的交易费用。

## 看跌期权与看涨期权之间的平价关系

第9章中，我们推导了欧式股票看涨期权和看跌期权之间的平价关系。现在假设期货和远期合约损益完全相等，我们推导欧式期货看涨期权和看跌期权之间的平价关系。

考虑都是执行价格为  $K$ ,  $T$ 时刻到期的欧式期货看涨期权和欧式期货看跌期权。考虑以下两个证券组合：

组合A：一个欧式看涨期货期权加上数额为  $Ke^{-rT}$  的现金

组合B：一个欧式看跌期货期权加上一个期货多头，再加上数额为  $F_0e^{-rT}$  的现金

组合A中，现金可以以无风险利率  $r$  投资，在  $T$ 时刻增长到  $K$ 。令  $F_T$  为期权到期时的期货价格。如果  $F_T > K$ ，组合A中的看涨期权得到执行，组合A的价值为  $F_T$ 。如果  $F_T \leq K$ ，看涨期权不被执行，组合A的价值为  $K$ 。因此， $T$ 时刻组合A的价值为

$$\max(F_T, K)$$

组合B中，现金可以以无风险利率投资，在  $T$ 时刻增长到  $F_0$ 。看跌期权的损益为  $\max(K - F_T, 0)$ 。期货合约的损益为  $F_T - F_0$ 。因此， $T$ 时刻组合B的价值为：

$$F_0 + (F_T - F_0) + \max(K - F_T, 0) = \max(F_T, K)$$

由此， $T$ 时刻两个证券组合的价值相同，而且不能提前执行期权，因此当前它们的价值也应该相等。组合A当前的价值为

$$c + Ke^{-rT}$$

其中  $c$  是期货看涨期权的价格。盯市操作使得组合B中的期货的现价为零。因此，组合B当前的价值为

$$p + F_0e^{-rT}$$

其中  $p$  为期货看跌期权的价格。由此，

$$c + Ke^{-rT} = p + F_0e^{-rT} \quad (14.11)$$

除了股票价格被期货价格乘以  $e^{-rT}$  的值替代，这与公式(9.3)中不支付红利股票欧式看涨和看跌期权之间的平价关系一样。

对于美式期权，看涨和看跌期权之间的平价关系为(参见习题14.38)：

$$F_0e^{-rT} - K \leq C - P \leq F_0 - Ke^{-rT}$$

**[例14.7]** 假设一份6个月后交割、执行价格为\$8.50的欧式白银期货看涨期权的价格为每盎司\$0.56。设6个月后交割的白银期货价格现在是\$8.00，6个月后到期的投资的无风险利率为每年10%。将方程(14.11)变形，可以得到与看涨期权具有相同到期日和执行价格的欧式白银期货看跌期权的价格为：

$$0.56 + 8.50e^{-0.1 \times 0.5} - 8.00e^{-0.1 \times 0.5} = 1.04$$

## 14.6 运用二叉树为期货期权估价

本节中比第11章更为正式地检验如何利用二叉树模型定价期货期权。期货期权与股票期权之间关键的不同点是，期货合约不涉及初始成本。

假设当前期货价格为30，且预期1个月后它将上升到33或下降到28。考虑执行价格为29的1个月期看涨期货期权，忽略每日结算。图14.1中描述了这种情况。如果期货价格变成33，则期权损益为4，期货合约价值为3。如果期货价格变成28，则期权损益为0，期货合约价值为-2。<sup>3</sup>

为了进行无风险对冲，考虑一个包括一份期权合约空头和 $\Delta$ 份期货合约多头的证券组合。如果期货价格变成33，该组合的价值为 $3\Delta - 4$ ；如果期货价格变成28，该组合的价值为 $-2\Delta$ 。两值相同时，该组合是无风险的。这时

$$3\Delta - 4 = -2\Delta$$

即 $\Delta=0.8$ 。

对于该 $\Delta$ 值，我们可以知道1个月后组合的价值将为 $3 \times 0.8 - 4 = -1.6$ 。假设无风险利率为6%，则现在的组合的价值为

$$-1.6e^{-0.06 \times 0.08333} = -1.592$$

该组合包括1份期权合约空头和 $\Delta$ 份期货合约多头。因为当前期货合约价值为零，所以期权的现价应该是1.592。

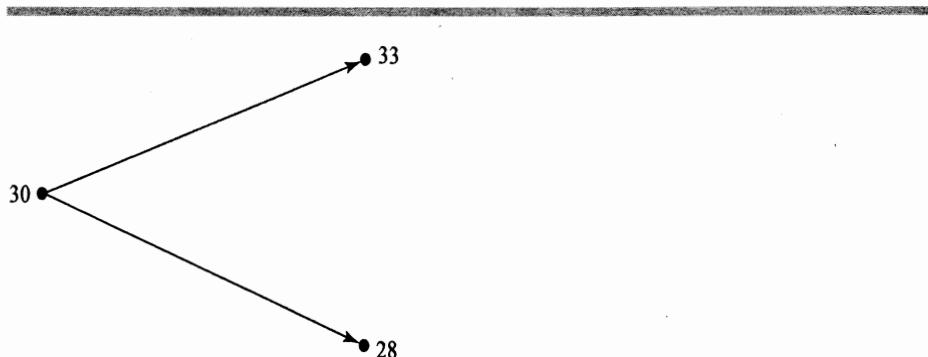


图14.1 数值化例子中的期货价格的变动

<sup>3</sup> 其中对期货合约的损益做了近似假设。期货合约的损益并不是在T时刻实现的，而是0~T时刻之间每天实现的。但是，随着二叉树图中的时间步越来越小，这种近似程度越来越好。极限情况下，即时间步趋近于零的时候，我们可以获得精确的答案。

## 一般结论

现在我们推导一般结果，设当前期货价格为  $F_0$ ，预期  $T$  期限后它将上升到  $F_0u$  或下降到  $F_0d$ 。考虑时间期限末到期的一种衍生品，我们假设期货价格上升的时候，其损益为  $f_u$ ；期货价格下降的时候，其损益为  $f_d$ 。图 14.2 中总结了这种情况。

这种情况下的无风险证券组合包括 1 份期权合约空头以及  $\Delta$  份期货合约多头，其中

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{F_0u - F_0d}$$

到期时组合的价值恒为

$$(F_0u - F_0)\Delta - f_u$$

以  $r$  表示无风险利率，我们可以得到今天的组合价值

$$[(F_0u - F_0)\Delta - f_u]e^{-rt}$$

该组合现值的另一种表达方式是  $-f$ ，其中  $f$  是期权的现价。那么

$$-f = [(F_0u - F_0)\Delta - f_u]e^{-rt}$$

代入  $\Delta$  的表达式，简化上面的方程，得到

$$f = e^{-rt}[pf_u + (1 - p)f_d] \quad (14.12)$$

其中

$$p = \frac{1 - d}{u - d} \quad (14.13)$$

在图 14.1 的数字例子中， $u = 1.1$ ， $d = 0.9333$ ， $r = 0.06$ ， $T = 0.08333$ ， $f_u = 4$  以及  $f_d = 0$ 。根据公式(14.13)，我们得到

$$p = \frac{1 - 0.9333}{1.1 - 0.9333} = 0.4$$

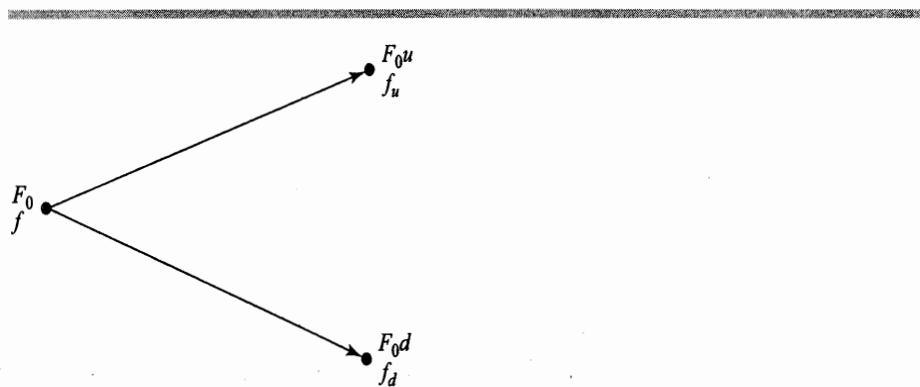


图 14.2 一般情况中的期货价格和期权价格

根据公式 (14.12) 得到

$$f = e^{-0.06 \times 0.08333} (0.4 \times 4 + 0.6 \times 0) = 1.592$$

这个结果和之前得到的结果完全一样。

## 多个时间步的二叉树

实际应用中，美式期货期权中二叉树的使用方法和它在股票期权中的使用方法类似。在 11.9 节中已经解释过这些。对于具体例子，参照例 11.3 和图 11.13。

## 14.7 风险中性世界中期货价格的增长率

有一个一般结论允许我们对期货期权进行类似于 14.1 节中的分析。这个结论是：风险中性世界中期货价格的行为和以国内无风险利率  $r$  为红利收益率的股票价格行为一致。

考察这个结论的时候，我们注意到第一条线索是期货价格二叉树模型中的  $p$  的表达式，类似于支付红利收益率  $q$  等于  $r$  的股票价格表达式。另一条线索是期货期权的看涨期权和看跌期权之间的平价关系，类似于支付红利收益率  $q$  等于  $r$  的股票的期权价格关系，其中  $q = r$ ，股票价格用期货价格代替。

为了正式地证明该结论，我们计算风险中性世界中期货价格的增长率。定义  $F_t$  为  $t$  时刻的期货价格。如果我们现在买入一个期货合约，其价值为 0。而在  $\Delta t$  时刻（第一次进行盯市的时刻），期货多头提供的损益为  $F_{\Delta t} - F_0$ 。如果  $r$  是 0 时刻的非常短时间段 ( $\Delta t$  期限) 的利率，则风险中性估值方法给出的 0 时刻合约价值为

$$e^{-r\Delta t} \hat{E}[F_{\Delta t} - F_0]$$

其中， $E$  表示风险中性世界中的期望。由此，我们得到

$$e^{-r\Delta t} \hat{E}(F_{\Delta t} - F_0) = 0$$

那么

$$\hat{E}(F_{\Delta t}) = F_0$$

类似地， $\hat{E}(F_{2\Delta t}) = F_{\Delta t}$ ， $\hat{E}(F_{3\Delta t}) = F_{2\Delta t}$ ，依此类推。把这些结果都聚在一起，我们可以得到等式

$$\hat{E}(F_T) = F_0$$

对任何  $T$  时刻都是成立的。

这说明，在风险中性世界中期货价格的预期增长率是零。根据公式 (14.7)，我们可以知道，期货价格的行为类似于红利收益率  $q$  等于  $r$  的股票价格。这是一

般结论，不管对利率、波动率等做何种假设，它对任何期货价格都成立。<sup>4</sup>

风险中性世界中，通常对期货价格  $F$  的行为过程做如下假设：

$$dF = \sigma F dz \quad (14.14)$$

其中  $\sigma$  是常数。

## 微分方程

从另一个角度看期货价格的行为类似于红利收益率为  $q$  的股票价格，我们可以模仿 13.6 节中推导基于不支付红利收益率股票的衍生品的微分方程的过程，来推导基于期货价格的衍生品应该满足的微分方程。这就是<sup>5</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial F^2} \sigma^2 F^2 = rf \quad (14.15)$$

设  $q = r$ ，上述方程的形式和方程 (14.6) 就一样了。这再次说明，估值衍生品时，对期货价格的处理方法可以和支付红利收益率  $r$  的股票一样。

## 14.8 期货期权估值的Black模型

通过扩展我们已经得到的结果，可以估值欧式期货期权。Fischer Black 在 1976 年出版的一篇论文中，第一次提出了这样的定价模型。<sup>6</sup> 基本假设和第 13 章中我们讨论过的股票价格一样，期货价格也具有对数正态分布性质。只要用  $F_0$  代替  $S_0$ ，并且  $q = r$ ，方程 (14.4) 和方程 (14.5) 就给出了欧式看涨期货期权价格  $c$  和欧式看跌期货期权价格  $p$ ：

$$c = e^{-rT}[F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \quad (14.16)$$

$$p = e^{-rT}[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (14.17)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

<sup>4</sup> 第 25 章中我们将说明，对该结论的更为准确的描述是“在以货币市场账户为基准的传统的风险中性世界中，期货价格的漂移率为零。”零漂移率随机过程被称为鞅 (martingale)。在以  $T$  时刻到期的零息票债券为基准的风险中性世界中，远期价格为鞅。

<sup>5</sup> 关于证明，参照作者网站上的技术说明 7。

<sup>6</sup> 参见 F. Black, “The Pricing of Commodity Contracts,” *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976) :167-79.

且  $\sigma$  是期货价格的波动率。当持有成本和便利收益仅仅是时间的函数时，我们还可以证明期货价格的波动率和其标的资产价格的波动率是一样的。注意，Black模型中并不要求期权合约与期货合约要在同一时间到期。

**[例 14.8]** 考虑一个原油的欧式看跌期货期权。期权到期日还有 4 个月，当前期货价格为 \$20，执行价格是 \$20，无风险利率是每年 9%，期货价格的波动率是每年 25%。在本例中， $F_0 = 20$ ,  $K = 20$ ,  $r = 0.09$ ,  $T = 4/12$ ,  $\sigma = 0.25$ 。由于  $\ln(F_0/K) = 0$ ，那么

$$d_1 = \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} = 0.07216$$

$$d_2 = -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2} = -0.07216$$

$$N(-d_1) = 0.4712, N(-d_2) = 0.5288$$

看跌期权价格  $p$  为：

$$p = e^{-0.09 \times 4/12}(20 \times 0.5288 - 20 \times 0.4712) = 1.12$$

即 \$1.12。

## 14.9 期货期权与现货期权

在这一节中，我们比较具有相同执行价格和到期日的期货期权以及现货期权。基于现货的期权或现货期权是涉及在现货市场买卖标的资产的期权。

执行价格为  $K$  的欧式看涨现货期权的损益为

$$\max(S_T - K, 0)$$

其中  $S_T$  为期权到期时的现货价格。相同执行价格的欧式看涨期货期权的损益为

$$\max(F_T - K, 0)$$

其中  $F_T$  为期权到期时的期货价格。如果欧式期货期权合约与期货合约到期日相同，则  $F_T = S_T$ ，期货期权和现货期权在理论上等价。如果欧式看涨期货期权合约比期货合约早日到期，则在正向市场（期货价格高于现货价格的市场）中，该期货期权比相应的现货期权价值更高。而在倒挂市场（期货价格低于现货价格的市场）中，该期货期权比相应的现货期权价值更低。

类似地，当期货期权合约与期货合约到期日相同，则欧式看跌期货期权和相应的现货期权等价。如果欧式看跌期货期权比期货合约早日到期，则在正向市场中，该期货期权比相应的现货期权价值更低。而在倒挂市场中，该期货期权比相应的现货期权价值更高。

## 美式期权的结果

进行交易的期货期权实际上通常是美式的。假如无风险利率  $r$  为正，提前执行美式期货期权有时是最优的。因此，美式期货期权的价值要高于相应的欧式期货期权。

当期货合约与期权合约具有相同的到期日时，美式期货期权并不总是与相应的美式现货资产期权具有相同的价值。例如，假设有一种正向市场，在到期日之前期货价格总是高于现货价格。大多数股票指数、黄金、白银、低利率货币和一些商品就是这种情况。在正向市场，美式看涨期货期权的价值一定比相应的该现货资产的美式看涨期权价值高。这是因为，在有些情况下，美式期货期权可能会提前执行，这时它将为持有者提供更大的收益。同样，美式看跌期货期权的价值一定比相应的现货资产的美式看跌期权的价值要低。如果存在着一个倒挂市场，期货价格总是低于现货价格，例如高利率货币和某些商品的情况就是这样的，此时的状况就与上面的结论相反。在这个市场中，美式看涨期货期权的价值一定比相应的该现货资产的美式看涨期权的价值低，而美式看跌期货期权的价值一定比相应的现货资产的美式看跌期权的价值高。

当期货合约比期权合约到期晚或两者同时到期时，以上所述的美式期货期权和美式现货资产期权的差异仍然正确。实际上，期货合约到期越晚，两者的差异就越大。

## 小 结

基于无红利支付股票的欧式期权定价的 Black-Scholes 公式，可以推广到基于支付连续已知红利收益率的欧式期权定价。这个结果是很有用的，因为一些其他的期权的标的资产可以认为与支付连续红利收益率的股票类似。特别是：

1. 指数与支付连续红利收益率的股票相似，其红利收益率是所有组成指数的股票的红利收益率的平均值
2. 外币与支付连续红利收益率的股票相似，其红利收益率等于外国无风险利率
3. 期货价格与支付连续红利收益率的股票相似，且红利收益率等于国内无风险利率

因此，Black-Scholes 扩展后可以用来为指数、外币和期货合约的欧式期权定价。

指数期权用现金交割。在执行指数看涨期权时，其持有者获得了数额等于交易收盘时，指数超过执行价格的那部分收益。同样，在执行指数看跌期权时，其持有者获得了数额等于交易收盘时，执行价格超过收盘指数的那部分收益。指数期权可以用来对证券组合进行保险。如果证券组合的  $\beta$  为 1.0，对于证券组合中每  $100S_0$  美元应当购买一份看跌期权，这里  $S_0$  是指数的值；当  $\beta$  为其他值时，对于证券组合中每  $100S_0$  美元应当购买  $\beta$  份看跌期权，其中  $\beta$  是用资本资产定价模型计算的证券组合的 beta 值。所购买的看跌期权的执行价格应当反映出要求的保险水平。

在有组织的交易所和 OTC 市场都存在着货币期权的交易。公司的财务主管运用这些期

权来对冲外汇头寸风险。比如，一个美国公司的财务主管已知在将来的某一时刻，他或她的公司将收入一笔英镑，他或她可以通过购买那一时刻到期的英镑看跌期权进行保值。同样，一个美国公司的财务主管已知在将来的某一时刻将支付一笔英镑，他或她可以通过购买那一时刻到期的英镑看涨期权进行保值。

期货期权要求在执行期权时交割标的期货合约。执行看涨期权时，持有者获得了一份期货合约的多头头寸，加上一笔数额等于期货价格减去执行价格的现金。同样，执行看跌期权时，持有者获得了一份期货合约的空头头寸，加上一笔数额等于执行价格减去期货价格的现金。进行交割的期货合约到期日通常比期权稍晚。如果我们假设两者到期日相同，欧式期货期权与相应的资产的欧式现货期权价值完全相同。但是对于美式期权这一结论不成立。若期货市场是正向的，美式期货看涨期权比标的资产的美式现货看涨期权价值高，而美式期货看跌期权比该标的资产的美式现货看跌期权价值低。若期货市场是倒挂市场，结果则相反。

## 参考读物

### *General*

- Merton, R. C. "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973): 141–83.  
 Bodie, Z. "On the Risk of Stocks in the Long Run," *Financial Analysts Journal*, 51, 3 (1995): 18–22.

### *On Options on Currencies*

- Amin, K., and R.A. Jarrow. "Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates," *Journal of International Money and Finance*, 10 (1991): 310–29.  
 Biger, N., and J.C. Hull. "The Valuation of Currency Options," *Financial Management*, 12 (Spring 1983): 24–28.  
 Garman, M.B., and S. W. Kohlhagen. "Foreign Currency Option Values," *Journal of International Money and Finance*, 2 (December 1983): 231–37.  
 Giddy, I.H. and G. Dufey. "Uses and Abuses of Currency Options," *Journal of Applied Corporate Finance*, 8, 3 (1995): 49–57.  
 Grabbe, J.O. "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange," *Journal of International Money and Finance*, 2 (December 1983): 239–53.  
 Jorion, P. "Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market," *Journal of Finance* 50, 2 (1995): 507–28.

### *On Options on Futures*

- Black, F. "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976): 167–79.  
 Hilliard, J. E., and J. Reis. "Valuation of Commodity Futures and Options under Stochastic Convenience Yields, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 1 (March 1998): 61–86.  
 Miltersen, K. R., and E.S. Schwartz. "Pricing of Options on Commodity Futures with Stochastic Term Structures of Convenience Yields and Interest Rates," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 1 (March 1998), 33–59.

## 问题和习题

- 14.1 一个证券组合当前价值为 1 000 万美元， $\beta$  值为 1.0，S&P 100 目前位于 500。解释一

- 一个执行价格为 480，标的物为 S&P 100 的看跌期权如何为该组合进行保险？
- 14.2 “一旦我们知道了支付连续红利收益率的股票期权的定价方法，我们便知道了股票指数期权、货币期权和期货期权的定价”。请解释这句话。
- 14.3 一个股票指数当前的值为 300，指数的红利收益率为 3%p.a.，无风险利率为 8%p.a.。执行价格为 290、6 个月期该指数的欧式看涨期权的价格下限为多少？
- 14.4 当前，一单位货币等价于 \$0.80。接下来 2 个月中，每个月内该货币的价值上升或下降 2%。本国以及外国无风险利率分别为 6% 和 8%。执行价格为 \$0.80、基于该货币的 2 个月期欧式看涨期权的价值为多少？
- 14.5 请说明日元看涨期权与日元期货看涨期权的不同之处。
- 14.6 请说明货币期权是如何计进行套期保值的。
- 14.7 计算 3 个月期，处于两平状态的欧式看涨股票指数期权的价值，指数为 250，无风险年利率为 10%，指数年波动率为 18%，指数的红利收益率为每年 3%。
- 14.8 有一美式看涨期货期权，期货合约和期权合约同时到期。在何种情况下期货期权比相应的标的物资产的美式期权更值钱？
- 14.9 请计算执行价格为 0.50、8 个月期欧式货币看跌期权的价值。当前的汇率为 0.52，汇率的波动率为 12%，国内无风险利率为 4%，外国的无风险利率为 8%p.a.。
- 14.10 为什么债券期货的期权比对应的债券期权交易更为活跃？
- 14.11 “一个期货价格类似于支付已知红利收益率的股票价格。”其中的红利收益率是什么？
- 14.12 一个期货的现价为 50。6 个月后它将变成 56 或 46。无风险利率为 6%p.a.。执行价格为 50、6 个月期欧式看涨期权的价值为多少？
- 14.13 计算 5 个月有效期的欧式看跌期货期权的价值。期货价格为 \$19，执行价格为 \$20，无风险利率为每年 12%，期货价格的年波动率为 20%。
- 14.14 假设交易所构造了一个股票指数，该指数反映了某个证券组合的收益率（包括红利），你如何为该指数的 (a) 远期合约以及 (b) 欧式期权进行定价？
- 14.15 目前 S&P 指数为 696 点。其年波动率为 30%，无风险收益率为每年 7%。指数的红利收益率为 4%。计算执行价格为 700 的 3 个月期欧式看跌期权的价格。
- 14.16 欧式货币期权的看跌期权—看涨期权的平价关系是什么？
- 14.17 当前，一单位的某种外汇等价于 \$1.50。本国以及外国无风险利率分别为 5% 和 9%。请计算执行价格为 \$1.40、6 个月期 (a) 欧式以及 (b) 美式外汇看涨期权的价值。
- 14.18 当前，一个股票指数的值稳定在 250。该指数的红利收益率为 4%p.a.，无风险利率为 6%p.a.。执行价格为 245 的，该指数的 3 个月期欧式看涨期权的现价为 \$10。执行价格为 245 的，该指数的 3 个月期欧式看跌期权的价值为多少？
- 14.19 一股票指数的波动率是大于还是小于一个典型股票的波动率？请说明原因。
- 14.20 随着组合 beta 值的增加，请解释组合保险的成本是增加还是减少。
- 14.21 解释一个组合价值为 6 000 万美元，S&P 500 为 1 200，若组合的价值反映了指数的价值，为防止该组合的价值在一年内降到 5 400 万美元以下，应买何种期权？
- 14.22 再次考虑习题 14.21 中的情况。假设组合的 beta 值为 2.0，无风险收益率为每年 5%。该组合和指数的红利收益率都是每年 3%。为防止组合价格降到 5 400 万美元以下，

应买何种期权?

- 14.23 假设你买入了一份执行价格为每盎司\$400、10月黄金期货的看跌期权。一份合约的规模为交割 100 盎司。当 10 月期货价格为 \$377，最近结算价格为 \$380 时，你执行了期权，这时候会发生什么情况?
- 14.24 假设你卖出了一份执行价格为每磅 70 美分、4 月份活牛期货的看涨期权。一份合约的规模为交割 4 万磅。当期货价格为 76 美分，最近结算价格为 75 美分时，你执行了期权，这时候会发生什么情况?
- 14.25 考虑一个执行价格为 40、2 个月期期货看涨期权，无风险利率为 10%p.a.。当前期货价格为 47。该期货期权是 (a) 欧式以及 (b) 美式时计算它的价值下限。
- 14.26 考虑一个执行价格为 50、4 个月期期货看跌期权，无风险利率为 10%p.a.。当前期货价格为 47。该期货期权是 (a) 欧式以及 (b) 美式时计算它的价值下限。
- 14.27 当前，一个期货的价格为 60。我们已经知道未来 6 个月内，每 3 个月该价格会上升 10% 或下降 10%。无风险利率为 8%p.a.。执行价格为 60、基于该期货的 6 个月期欧式看涨期权的价值为多少? 如果该看涨期权是美式的，那么我们需要提前执行吗?
- 14.28 习题 14.27 中，执行价格为 60、基于该期货的 6 个月期欧式看跌期权的价值为多少? 如果该看跌期权是美式的，那么我们需要提前执行吗? 请验证习题 14.27 中的看涨期权的价格和本习题中计算的看跌期权的价格，满足看跌期权和看涨期权之间的平价关系。
- 14.29 当前，一个期货价格为 25，其波动率为 30%p.a.，无风险利率为 10%p.a.。执行价格为 26、基于该期货的 9 个月期欧式看涨期权的价值为多少?
- 14.30 当前，一个期货价格为 70，其波动率为 20%p.a.，无风险利率为 6%p.a.。执行价格为 65、基于该期货的 5 个月期欧式看跌期权的价值为多少?
- 14.31 当前，一个期货价格为 35。基于该期货、执行价格为 34 的一个看涨期权和一个看跌期权的市场价格都是 2。无风险利率为 10%p.a.。请说明存在套利机会。两个期权的到期期限都是 1 年。
- 14.32 “处于两平状态的欧式看涨期货期权的价格总是等于类似的处于两平状态的欧式看跌期货期权的价格。”请解释这句话为什么是正确的。
- 14.33 当前，一个期货价格为 30。无风险利率为 5%p.a.。执行价格为 28、基于该期货的 3 个月期美式看涨期权的价格为 4。请计算执行价格为 28、3 个月期美式看跌期权的价格边界。
- 14.34 请问是否能够通过基于美元/欧元汇率和基于日元/美元汇率的两个期权，来构造一个欧元兑日元的汇率期权? 请解释你的答案。
- 14.35 一家公司知道，它将在 3 个月后有 500 万美元按 LIBOR-50 个基点投资 90 天。公司想保证获得的利率大于等于 6.5%。该公司应该持有什么样的场内交易利率期权头寸?
- 14.36 运用以下证券组合，证明方程 (14.1)、(14.2) 和方程 (14.3) 中的结论:  
 组合 A：一个欧式看涨期权加上金额为  $Ke^{-rt}$  的现金。  
 组合 B： $e^{-rt}$  股股票，其中的红利又投资于该股票。  
 组合 C：一个欧式看跌期权加上  $e^{-rt}$  股股票，其中的红利又投资于该股票。

组合 D：金额为  $Ke^{-rT}$  的现金。

- 14.37 若  $C$  为执行价格为  $K$ 、到期时间为  $T$ 、股票红利收益率为  $q$  的美式看涨期权的价格， $P$  是同一股票、相同执行价格和执行日的美式看跌期权的价格，证明：

$$S_0 e^{-rT} - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

其中， $S_0$  是股票价格， $r$  是无风险利率，且  $r > 0$ 。

(提示：为了获得不等式的前一部分，考虑如下组合的价值：

组合 A：一个欧式看涨期权加上金额为  $K$  的现金，该现金以无风险利率投资。

组合 B：一个美式看跌期货期权加上  $e^{-rT}$  股股票，其中的红利又投资于该股票。

为了获得不等式的后一部分，考虑如下组合的价值：

组合 C：一个美式看涨期权加上金额为  $Ke^{-rT}$  的现金，该现金以无风险利率投资。

组合 D：一个欧式看跌期权加上一股股票，其中的红利又投资于该股票。)

- 14.38 若  $C$  是一个执行价格为  $K$ 、到期时间为  $T$  的美式看涨期货期权的价格， $P$  是同一期权合约、相同执行价格和到期日的美式看跌期货期权的价格，证明：

$$F_0 e^{-rT} - K \leq C - P \leq F_0 - Ke^{-rT}$$

其中  $F_0$  是期货价格， $r$  是无风险利率。假设  $r > 0$ ，并且期货合约与远期合约没有区别。（利用习题 14.37 中使用的类似方法）

- 14.39 以货币 B 表示的货币 A 的价格遵循如下过程：

$$dS = (r_B - r_A)Sdt + \sigma Sdz$$

其中， $r_A$  是货币 A 的无风险利率， $r_B$  是货币 B 的无风险利率。请问以货币 A 表示的货币 B 的价格遵循什么过程？

## 课后练习

- 14.40 利用 DerivaGem 软件，计算表 14.1 中的基于道琼斯工业平均指数 (DJX) 的 March 104 看涨期权和 March104 看跌期权的隐含波动率。2004 年 2 月 4 日的 DJX 值为 104.71。假设无风险利率是 1.2%，红利收益率为 3.5%。这些期权在 2004 年 3 月 20 日到期。这两个期权的报价满足看跌期权和看涨期权之间的平价关系吗？
- 14.41 当前，一个股票指数值为 300。未来的 6 个月中，每 3 个月该指数值上升或下降 10%。无风险利率为 8%，指数的红利收益率为 3%。执行价格为 300、该指数的 6 个月期 (a) 欧式以及 (b) 美式看跌期权的价值为多少？
- 14.42 假设加拿大元的即期价格为 \$0.75，加拿大元/美元的汇率的年波动率为 4%。加拿大元和美元的无风险收益率分别为每年 9% 和 7%。计算 9 个月后购买 1 加元支付 \$0.75 的欧式看涨期权的价格。利用看跌期权和看涨期权之间的平价关系计算 9 个月后卖出 1 加元得到 \$0.75 的欧式看跌期权的价格。9 个月后支付 1 加元购买 \$0.75 的看涨期权的价格是多少？
- 14.43 一个共同基金宣布：其证券部经理的工资取决于公司基金的业绩。若该基金亏钱了，

则工资为 0；若该基金盈利了，则工资是盈利额的一个比例。试把基金部经理的工资描述成一个期权。如何运用这种报酬方式激励基金部经理？

14.44 当前，一个期货价格为 40。3 个月后，价格会变成 35 或 45。无风险利率为 7%p.a.。执行价格为 42、该期货的 3 个月期欧式看涨期权的价值为多少？

14.45 从如下有关的欧式大豆期货的看跌期货期权的信息中，计算大豆期货价格的隐含波动率：

|        |      |
|--------|------|
| 期货现价   | 525  |
| 执行价格   | 525  |
| 无风险年利率 | 6%   |
| 到期时间   | 5 个月 |
| 看跌期权价格 | 20   |

14.46 利用 DerivaGem 软件，计算表 14.4 中的 7 月份玉米期货期权的隐含波动率。假设期货价格如表 2.2，无风险利率为 1.1%p.a.。假设这些期权是美的，使用 100 个时间步。这些期权在 2004 年 6 月 19 日到期。从获得的隐含波动率模式中，你可以总结出什么结论？



## 套期保值参数

如果一个金融机构在场外市场出售给客户一份期权，那么该金融机构就面临着风险管理的问题了。如果出售的这个期权碰巧与在交易所交易的一份期权合约相同，这个金融机构就可以在交易所购买同样的一份期权来对冲它在场外市场出售那份期权所暴露的风险。但是，当在场外市场交易的这个期权为了适应客户的需要做了某些改变，从而与交易所交易的标准化期权合约不一致时，对该期权头寸进行对冲就很困难了。

本章中讨论解决这一问题的几种可选方法。我们介绍所谓的“希腊字母”，每个希腊字母从不同方面度量期权头寸风险。一位交易者的目标是管理这些希腊字母，以便控制所有风险都在可以接受的水平。本章这些分析方法不仅适用于期权交易所的做市商，也同样适用场外市场的金融机构的交易员们。

在本章的后面部分，我们将讨论构造合成期权的问题。这与期权套期保值密切相关。构造一种合成期权头寸实际上就是对相反的期权头寸进行套期保值。例如，构造一种合成看涨期权多头也就是对该看涨期权空头进行套期保值。

### 15.1 实例

在这一节和后几节，我们使用下面的例子。某金融机构出售了基于 10 万股不付红利股票的欧式看涨期权，收入 30 万美元。我们假设股票价格是 \$49，执行价格是 \$50，无风险利率是每年 5%，股票价格波动率是每年 20%，距到期时间还有 20 周（即 0.3846 年），股票的预期收益率是每年 13%。<sup>1</sup> 使用我们常用的符号，这意味着：

$$S_0 = \$49, K = \$50, r = 0.05, \sigma = 0.20, T = 0.3846, \mu = 0.13$$

由 Black-Scholes-Merton 定价模型可知该期权的价格大致为 24 万美元。这家机构因此以比该期权理论价值高出 6 万美元的价格出售了该期权，同时面临着如何对冲其暴露头寸的问题。<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 第 11 章和第 13 章中已经说明预期收益率与期权的价格并不相关。然而，在考虑某个特殊对冲计划的效果时，预期收益率还有一定的意义。

<sup>2</sup> 基于不付红利股票的看涨期权的例子便于推导本章结论，其中的逻辑也可以适用于其他类型的期权和衍生证券。

## 15.2 裸期权头寸与有保护期权头寸

金融机构的一种策略就是什么都不做，亦被称作裸期权头寸策略（naked position）。若在 20 个星期末股票价格低于 \$50，裸期权头寸策略将运行得有效。该期权不会被执行，金融机构分文无损，整个交易中金融机构净获利 30 万美元。但是如果看涨期权被执行，则裸期权头寸策略会失败。因为，该金融机构不得不以当前的市场价格购买 10 万股冲销该期权头寸，其损失为单个股票价格超出执行价格部分乘以 10 万。例如，若 20 周末到期时股票价格为 \$60，金融机构的期权成本为  $100\,000 \times (\$60 - \$50) = \$1\,000\,000$ ，这远远高出先前的期权费收入 30 万美元。

该金融机构替代裸期权头寸策略的另一种可选方法是有保护期权头寸策略（covered position），所做的就是在出售看涨期权的同时购买 10 万股股票。如果到期时该期权被执行，这个策略很有利，但在其余情况下，代价就会很昂贵。例如，如果股票价格降低到 \$40，该机构在股票头寸上的损失将达 90 万美元，这同样比从期权上收取的期权费 30 万美元高许多。<sup>3</sup>

所以裸期权头寸和有保护期权头寸这两种策略都不是理想的套期保值方法。如果 Black-Scholes 公式的前提假设成立的话，金融机构的这两种方法的成本平均来说应当为 24 万美元。<sup>4</sup>但是在以上任何一种情况下，成本的范围是从 0 到 100 万美元以上。一种理想的套期保值方法应当确保成本总是接近 24 万美元。

## 15.3 止损策略

套期保值方法中有时采用一种所谓的止损策略（stop-loss strategy）。为说明其基本思路，我们假设某金融机构已经出售了一个按执行价格  $K$  购买一单位的标的股票的欧式看涨期权。对冲的设想就是当价格刚刚升到  $K$  以上就购买一单位股票，刚刚落到  $K$  以下就出售该股票。其目的就是在股票价格刚刚低于  $K$  时持有裸期权头寸，而在股票价格刚刚高于  $K$  时持有有保护期权头寸。这个过程被设计为：保证在到期时刻  $T$ ，如果期权处于实值状态该机构持有股票，如果期权处于虚值状态则该机构不持有股票。该策略所形成的盈亏状态类似于该看涨期权的盈亏状态。在图 15.1 所示的情况下，止损策略的操作为： $t_1$  时刻买入， $t_2$  时刻卖出， $t_3$  时刻买入， $t_4$  时刻卖出， $t_5$  时刻又买入， $T$  时刻交割。

和以前一样，我们用  $S_0$  表示初始股票价格。当  $S_0 > K$  时，构造该对冲的初始成本支出为  $S_0$ ；其他时候，构造该对冲的初始成本支出为零。卖出看涨期权和对冲该期权的总支出  $Q$  似乎就是如下期权内在价值：

<sup>3</sup> 看涨期权和看跌期权之间的平价关系说明出售有保护看涨期权的风险暴露和出售无保护看跌期权的风险暴露相同。

<sup>4</sup> 更准确地说，假设使用合适的经风险调整的贴现率，这两种方法期望成本的现值为 24 万美元。

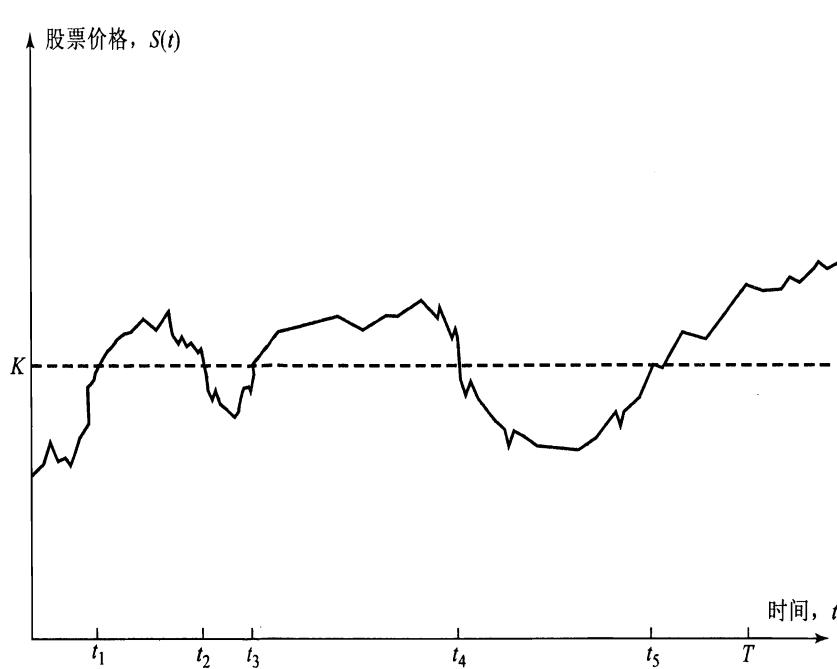


图 15.1 止损策略

$$Q = \max(S_0 - K, 0) \quad (15.1)$$

由于在零时刻后，都是以  $K$  的价格进行所有的买入和卖出操作，如果这个公式是正确的话，不考虑交易费用，这项对冲策略将非常有效，而且，对这个期权进行对冲的支出总是小于它的 Black-Scholes 公式的定价。因此，通过卖出该期权并将其对冲，投资者将获得无风险收益。

而实际上公式 (15.1) 是不正确的，主要有两个原因：第一个原因是套期保值者的现金流发生在不同的时刻，应当贴现为现值。第二个原因是买入和卖出操作不可能精确地在完全相同的价格  $K$  点执行。第二个原因很重要。假如我们处于利率为零的风险中性世界中，我们可以忽略货币的时间价值。但是，我们不能合理地假设买入和卖出都是在同一个价格进行的。若市场是有效率的，当股票价格恰好为  $K$  时，套期保值者并不知道它将继续变得高于  $K$  还是低于  $K$ 。

实际上，买入价格将为  $K + \epsilon$ ，卖出价格将为  $K - \epsilon$ ，其中  $\epsilon$  为某个小的正值，每一轮买入和随后的卖出将损失  $2\epsilon$  (不考虑交易费用)。对套期保值者而言，自然的反应当然是更加密切地监测价格的变动，减少  $\epsilon$ 。假设股票价格是连续变化，通过密切地跟踪股票价格的变化， $\epsilon$  则可以达到任意小。但是， $\epsilon$  越小，发生交易的机会就越频繁。每笔交易的成本减少了，但却被交易频率的增加所抵消。当  $\epsilon \rightarrow 0$  时，预计的交易次数可能达到无穷大。<sup>5</sup>

止损策略尽管相当诱人，但并不是很有效的套期保值手段。例如，考虑使用一个处于虚值状态的期权。当股票价格从来达不到执行价格  $K$  时，对于虚值期权

<sup>5</sup> 12.2 节中提过，一个维纳过程在给定时间间隔内等于某一特定值的期望次数为无限大。

表 15.1 止损策略的效果。保值效果参数以出售保值期权的总成本的标准差与该期权的理论价格的比率来衡量

| $\Delta t$ (周数) | 5    | 4    | 2    | 1    | 0.5  | 0.25 |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|
| 保值效果参数          | 1.02 | 0.93 | 0.82 | 0.77 | 0.76 | 0.76 |

则不存在保值成本支出。但当股票价格频繁等于执行价格  $K$  时，保值成本支出将会高得惊人。蒙特卡罗模拟可用来评价该策略的总效果。通过随机抽样得到股票价格路径，观察使用止损策略的结果。表 15.1 列出了前面例子中考虑的期权的结果。假设在时间间隔为  $\Delta t$  的末尾时刻观察股票价格并计算保值效果。<sup>6</sup> 保值效果参数以期权保值支出的标准差与该期权的 Black-Scholes 价格的比率来衡量。每一结果都取 1 000 个股票价格样本进行测试，标准误差为 2%。完全对冲策略中这样的比率将等于零。而在表中的例子中，可以看出无论  $\Delta t$  取得多么小，该策略都不可能使该参数减少到 0.70 以下。

## 15.4 Delta 套期保值

大多数的期权交易者使用比前面讨论过的方法更为复杂的保值策略。这些涉及计算参数 delta、gamma 以及 vega。这一节中我们考虑 delta 的角色。

在第 11 章我们引入了期权的 *delta* ( $\Delta$ )。delta 定义为期权的价格变化对其标的资产价格变化的比率。它是期权价格与标的资产价格关系曲线的斜率。假设某股票看涨期权的 delta 为 0.6，这意味着当股票价格变化一个小量时，该期权价格变化约为这个小量的 60%。图 15.2 为看涨期权价格与标的股票价格之间的关系曲线。当股票价格对应于 A 点，期权价格对应于 B 点，图中直线的斜率为  $\Delta$ 。一般地，有

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

其中  $c$  为看涨期权价格， $S$  为股票价格。

假设图 15.2 中，该期权价格是 \$10，股票价格为 \$100。设想某个投资者已经出售了 20 份该股票看涨期权合约（即购买 2 000 股股票的期权）。投资者可买入  $0.6 \times 2 000 = 1 200$  股股票来对冲该头寸。在期权头寸上的收益（损失）就可以由股票头寸上的损失（收益）所抵消。例如，如果股票价格上涨 \$1（持有股票就会增值 \$1 200），期权的价格将上升  $0.6 \times \$1 = \$0.60$ （出售看涨期权的头寸将损失 \$1 200）。

<sup>6</sup> 所使用的精确的对冲规则如下：如果在时间间隔  $\Delta t$ ，股票价格从低于  $K$  上升到高于  $K$ ，则在该时间间隔的末尾购买。如果在时间间隔  $\Delta t$ ，股票价格从高于  $K$  下降到低于  $K$ ，则在该时间间隔的末尾出售。其他情况下，不采取行动。

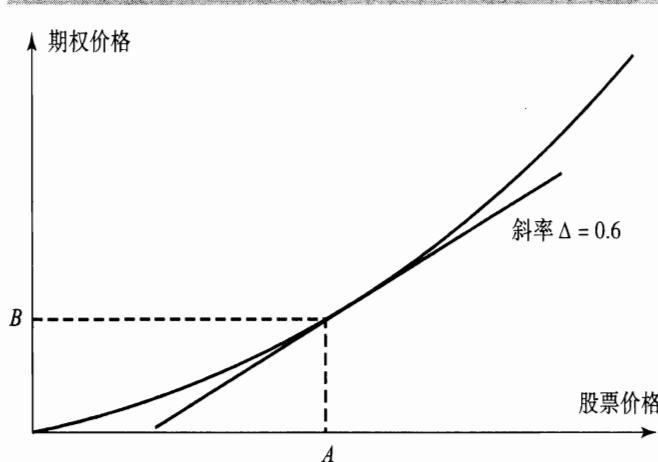


图 15.2 delta 的计算

如果股票价格下跌 \$1 (持有股票就会损失 \$1 200)，期权的价格将下降  $0.6 \times \$1 = \$0.60$  (出售看涨期权的头寸将增值 \$1 200)。

在本例子中，该投资者的期权头寸的 delta 值为

$$0.6 \times (-2\,000) = -1\,200$$

换句话说，当股票价格上升  $\Delta S$ ，该投资者在期权上就会损失  $1\,200\Delta S$ 。根据定义，股票的 delta 为 1.0，1 200 股股票多头的 delta 值为 +1 200，因此该投资者保值后总头寸 (2 000 股股票期权的空头，1 200 股票多头) 的 delta 为 0。标的资产股票头寸的 delta 抵销了期权头寸的 delta。delta 值为零的状态称为 delta 中性 (delta neutral)。

因为 delta 值在不断地变化，投资者的保值头寸保持 delta 对冲状态 (即 delta 中性状态) 只能维持一个相当短暂的时间，认识到这一点很重要。所以，进行这个套期保值操作后，需要定期地调整保值头寸，这种调整称为再调整 (rebalancing)。在本例中，第 3 天末股票价格也许增加到 \$110。如图 15.2 所示，股票价格的上升导致了 delta 的增加。假设 delta 从 0.60 上升到 0.65。这意味着如果仍要保持 delta 对冲中性的话，就需额外再购入  $0.05 \times 2\,000 = 100$  股股票。

以上描述的对冲操作是一种动态对冲操作 (dynamic hedging scheme)。这与静态对冲操作 (static hedging scheme) 是相对应的。在静态对冲操作中，对冲策略开始执行之后，不再进行调整。静态对冲操作有时也被称为保完即忘操作 (hedge-and-forget scheme)。delta 与 Black-Scholes-Merton 分析方法密切相关。如第 13 章的叙述，Black、Scholes 和 Merton 说明过，可以建立一种无风险的有价证券组合，其中包含  $\Delta$  个该股票的头寸和 1 个基于该股票的期权头寸。Black-Scholes 证券组合为：

-1：期权

+ $\Delta$ ：股票份额

用新术语表述，我们可以说 Black 和 Scholes 通过建立一个 delta 中性的头寸，

并假设在短期内该组合头寸收益等于无风险收益率，来为期权定价。

### 欧式股票期权的 Delta 值

对于不付红利股票的欧式看涨期权，有（参见习题 13.17）：

$$\Delta(\text{call}) = N(d_1)$$

其中  $d_1$  与公式（13.20）定义相同。如果对一个欧式看涨期权的空头进行 delta 套期保值，在任何给定时刻，需同时持有  $N(d_1)$  个股票多头头寸。类似地，如果对一个欧式看涨期权的多头进行 delta 套期保值，在任何给定时刻，需同时持有  $N(d_1)$  个股票空头头寸。

对于不付红利股票的欧式看跌期权，delta 值为：

$$\Delta(\text{put}) = N(d_1) - 1$$

这个 delta 为负值，这意味着看跌期权的多头应该利用标的股票的多头头寸来保值，看跌期权的空头应该利用标的股票的空头头寸来保值。股票看涨期权和看跌期权的 delta 值与股票价格之间的变化关系曲线如图 15.3 所示。图 15.4 为在实值期权、两平期权与虚值期权三种情况下，delta 值与到期时间之间的关系曲线。

### 其余欧式期权的 Delta 值

对基于收益率为  $q$  的标的资产的欧式看涨期权：

$$\Delta(\text{call}) = e^{-qT}N(d_1)$$

这里  $d_1$  与方程（14.4）中的定义相同。对基于同样标的资产的欧式看跌期权：

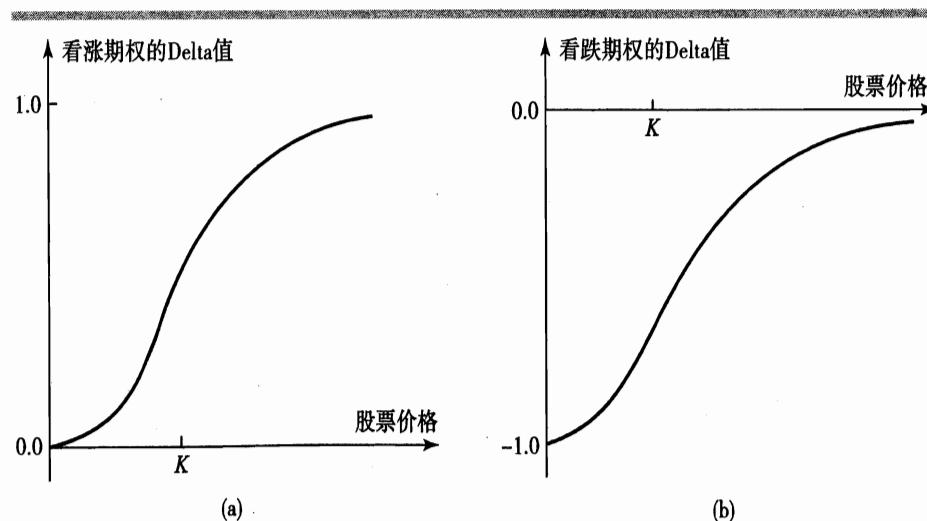


图 15.3 基于不付红利股票的 (a) 看涨期权和 (b) 看跌期权的 delta 值与股票价格之间的变化关系图

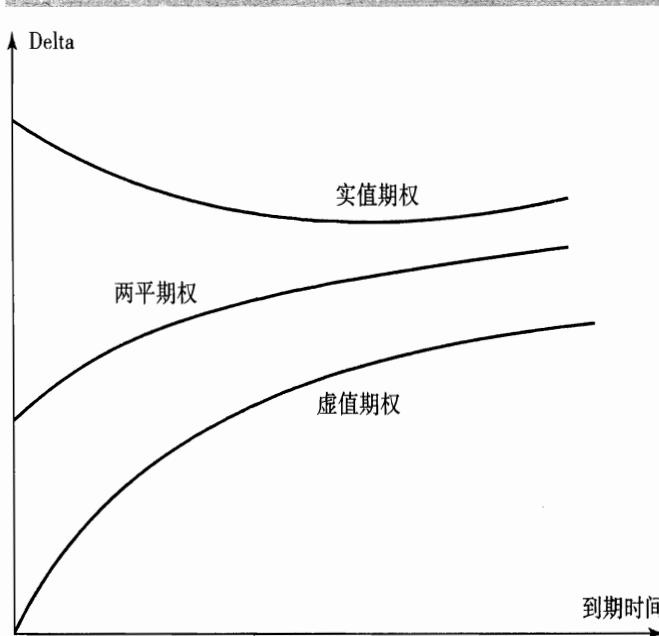


图 15.4 典型的看涨期权的 delta 与到期时间之间的变化关系图

$$\Delta(\text{put}) = e^{-qT} [N(d_1) - 1]$$

当标的资产是股票指数的时候，可以以指数红利收益率代替公式中的  $q$ 。当标的资产是货币的时候，可以以外国无风险利率  $r_f$  代替公式中的  $q$ 。当标的资产是期货合约的时候，可以以国内无风险利率  $r$  代替公式中的  $q$ ，而且在  $d_1$  的定义中设  $S_0 = F_0$ （后面的例子中，delta 给出期权价格变化对期货价格变化的比率）。

**[例 15.1]** 某个美国银行按\$1.6000 执行价格出售 100 万英镑、6 个月期的欧式看跌期权，希望使组合为 delta 中性。假设英镑兑美元的当前即期汇率为\$1.6200，英国的无风险利率为每年 13%，美国的无风险利率为每年 10%，英镑汇率波动率为每年 15%。在这种情况下， $S_0 = 1.6200$ ， $K = 1.6000$ ， $r = 0.10$ ， $r_f = 0.13$ ， $\sigma = 0.15$ ， $T = 0.5$ 。根据欧式货币看跌期权的计算公式可知该货币看跌期权的 delta 值为：

$$[N(d_1) - 1] e^{-rT}$$

这里  $d_1$  与方程 (14.7) 中的定义相同。

$$d_1 = 0.0287, \quad N(d_1) = 0.5115$$

看跌期权的 delta 值是-0.458，这是一个看跌期权多头方的 delta 值（也就是说汇率上升  $\Delta S$  时，看跌期权的价格下降  $\Delta S$  乘以 45.8%）。银行作为看跌期权的空头方，其 delta 值是以上这个值乘以 -1 000 000 得到 +458 000。因此，该银行进行 delta 套期保值时，开始就必须卖出 £458 000 现货，这个英镑现货空头的 delta 为 -458 000，正好对冲了银行的期权头寸的 delta 值。

## 远期合约的 Delta 值

除了期权，delta 的概念还可以适用在其他金融工具。考虑一个不支付红利股票的远期合约。公式 (5.5) 说明远期合约的价值为  $S_0 - Ke^{-rT}$ ，其中  $K$  是交割价格， $T$  是远期合约到期期限。在其他参数不变时，当不付红利股票价格变化  $\Delta S$ ，基于该股票的远期合约的价值也变化  $\Delta S$ 。因此基于某个不付红利股票的远期合约的 delta 值为 1.0。这就意味着基于一股股票的某个远期空头头寸可用购买一股该股票的方法来对冲，同样基于一股股票的某个远期多头头寸可用出售一股该股票的方法来对冲。<sup>7</sup>

对于支付红利收益率  $q$  的资产，公式 (5.7) 说明相应的期货的 delta 值应该是  $e^{-qT}$ 。标的资产是股票指数时，应该以指数红利收益率代替  $q$ 。标的资产为货币的时候，应该以外汇无风险利率  $r_f$  代替  $q$ 。

## 期货合约的 Delta 值

公式 (5.1) 给出，不支付红利股票的期货价格为  $S_0 e^{rT}$ ，其中  $T$  为期货合约到期期限。这说明在其他参数不变时，当股票价格变化  $\Delta S$ ，相应的期货合约的价值变化  $\Delta S e^{rT}$ 。因为期货合约中每天进行盯市操作，长期期货合约持有者的收益几乎是能即时实现的。所以期货合约的 delta 值为  $e^{rT}$ 。对于支付红利收益率  $q$  的标的资产的期货，公式 (5.3) 类似地可以推导 delta 值为  $e^{(r-q)T}$ 。有趣的是，因为盯市操作的影响，期货和远期合约的 delta 值有一些不同。即使在利率为常数，远期和期货价格相同的时候，也是这样的。

有时可以利用期货合约构建 delta 中性头寸。定义：

$T$ : 期货合约的到期日

$H_A$ : delta 中性保值所需标的资产的头寸数

$H_F$ : 另一种 delta 中性保值所需期货合约的头寸数

若标的资产为不付红利的股票，进行和前面类似的分析，得到：

$$H_F = e^{-rT} H_A \quad (15.2)$$

当标的资产支付红利收益率为  $q$  时，那么

$$H_F = e^{-(r-q)T} H_A \quad (15.3)$$

当标的资产为股票指数时，可以以指数红利收益率代替  $q$ 。当标的资产为外汇时，可以以外汇无风险利率  $r_f$  代替  $q$ ，得到：

$$H_F = e^{-(r-r_f)T} H_A \quad (15.4)$$

---

<sup>7</sup> 它们是保完即忘操作。因为 delta 总是等于 1.0，合约有效期内不必对股票头寸进行改变。

**[例 15.2]** 再考虑前面例子中的期权，其中利用外汇期货的套期保值需要的空头头寸为 £458 000。根据公式 (15.4)，9 个月期的外汇期货合约进行对冲所需的期货空头头寸为

$$e^{-(0.10-0.13) \times 9/12} 458\,000$$

即为 £468 442。由于买卖每份英镑期货合约的规模为 £62 500，所以应该出售 7 份 ( $468\,442/62\,500$  的近似整数值) 期货合约来对冲。

### Delta 对冲的动态过程

表 15.2 和表 15.3 给出了第 15.1 节例子中的 delta 套期保值操作的两个模拟过程。假设保值过程每周调整一次。从 15.1 节中的数据可以计算 delta 的初始值为 0.522。这意味着在出售该看涨期权的同时，必须借入 \$2 557 800，并以 \$49 的价格购买 52 200 股股票，利率为 5%。因此，第 1 周内发生的利息费用为 \$2 500。

从表 15.2 可知，到第 1 周末，股票价格下降到 \$48.12。这使得 delta 值相应减少到 0.458，要保持 delta 中性，此时应出售 6 400 股股票。以上操作得到 \$308 000 的现金，第 1 周末的累计借款余额将减少到 \$2 252 300。在第 2 周内，股票价格下降

表 15.2 delta 对冲的模拟；期权接近于实值期权状态；对冲成本为 \$263 300

| 周次 | 股票价格  | Delta | 购买的股票数<br>(以 \$1000 为单位) | 累计成本                      |   |
|----|-------|-------|--------------------------|---------------------------|---|
|    |       |       |                          | 购买股票的成本<br>(以 \$1000 为单位) | (包括利息，<br>以 \$1000 为单位)<br>利息成本<br>(以 \$1000 为单位) |
| 0  | 49.00 | 0.522 | 52 200                   | 2 557.8                   | 2.5   |
| 1  | 48.12 | 0.458 | (6 400)                  | (308.0)                   | 2 252.3   |
| 2  | 47.37 | 0.400 | (5 800)                  | (274.7)                   | 1 979.8   |
| 3  | 50.25 | 0.596 | 19 600                   | 984.9                     | 2 966.6   |
| 4  | 51.75 | 0.693 | 9 700                    | 502.0                     | 3 471.5   |
| 5  | 53.12 | 0.774 | 8 100                    | 430.3                     | 3 905.1   |
| 6  | 53.00 | 0.771 | (300)                    | (15.9)                    | 3 893.0   |
| 7  | 51.87 | 0.706 | (6 500)                  | (337.2)                   | 3 559.5   |
| 8  | 51.38 | 0.674 | (3 200)                  | (164.4)                   | 3 398.5   |
| 9  | 53.00 | 0.787 | 11 300                   | 598.9                     | 4 000.7   |
| 10 | 49.88 | 0.550 | (23 700)                 | (1 182.2)                 | 2 822.3   |
| 11 | 48.50 | 0.413 | (13 700)                 | (664.4)                   | 2 160.6   |
| 12 | 49.88 | 0.542 | 12 900                   | 643.5                     | 2 806.2   |
| 13 | 50.37 | 0.591 | 4 900                    | 246.8                     | 3 055.7   |
| 14 | 52.13 | 0.768 | 17 700                   | 922.7                     | 3 981.3   |
| 15 | 51.88 | 0.759 | (900)                    | (46.7)                    | 3 938.4   |
| 16 | 52.87 | 0.865 | 10 600                   | 560.4                     | 4 502.6   |
| 17 | 54.87 | 0.978 | 11 300                   | 620.0                     | 5 126.9   |
| 18 | 54.62 | 0.990 | 1 200                    | 65.5                      | 5 197.3   |
| 19 | 55.87 | 1.000 | 1 000                    | 55.9                      | 5 258.2   |
| 20 | 57.25 | 1.000 | 0                        | 0.0                       | 5 263.3   |

表 15.3 delta 对冲的模拟；期权接近于虚值期权状态；对冲成本为\$256 600

| 周次 | 股票价格  | Delta | 购买的股票数<br>(以\$1000为单位) | 购买股票的成本<br>(以\$1000为单位) | 累计成本<br>(包括利息,<br>以\$1000为单位) | 利息成本<br>(以\$1000为单位) |
|----|-------|-------|------------------------|-------------------------|-------------------------------|----------------------|
| 0  | 49.00 | 0.522 | 52 200                 | 2 557.8                 | 2 557.8                       | 2.5                  |
| 1  | 49.75 | 0.568 | 4 600                  | 228.9                   | 2 789.2                       | 2.7                  |
| 2  | 52.00 | 0.705 | 13 700                 | 712.4                   | 3 504.3                       | 3.4                  |
| 3  | 50.00 | 0.579 | (12 600)               | (630.0)                 | 2 877.7                       | 2.8                  |
| 4  | 48.38 | 0.459 | (12 000)               | (580.6)                 | 2 299.9                       | 2.2                  |
| 5  | 48.25 | 0.443 | (1 600)                | (77.2)                  | 2 224.9                       | 2.1                  |
| 6  | 48.75 | 0.475 | 3 200                  | 156.0                   | 2 383.0                       | 2.3                  |
| 7  | 49.63 | 0.540 | 6 500                  | 322.6                   | 2 707.9                       | 2.6                  |
| 8  | 48.25 | 0.420 | (12 000)               | (579.0)                 | 2 131.5                       | 2.1                  |
| 9  | 48.25 | 0.410 | (1 000)                | (48.2)                  | 2 085.4                       | 2.0                  |
| 10 | 51.12 | 0.658 | 24 800                 | 1 267.8                 | 3 355.2                       | 3.2                  |
| 11 | 51.50 | 0.692 | 3 400                  | 175.1                   | 3 533.5                       | 3.4                  |
| 12 | 49.88 | 0.542 | (15 000)               | (748.2)                 | 2 788.7                       | 2.7                  |
| 13 | 49.88 | 0.538 | (400)                  | (20.0)                  | 2 771.4                       | 2.7                  |
| 14 | 48.75 | 0.400 | (13 800)               | (672.7)                 | 2 101.4                       | 2.0                  |
| 15 | 47.50 | 0.236 | (16 400)               | (779.0)                 | 1 324.4                       | 1.3                  |
| 16 | 48.00 | 0.261 | 2 500                  | 120.0                   | 1 445.7                       | 1.4                  |
| 17 | 46.25 | 0.062 | (19 900)               | (920.4)                 | 526.7                         | 0.5                  |
| 18 | 48.13 | 0.183 | 12 100                 | 582.4                   | 1 109.6                       | 1.1                  |
| 19 | 46.63 | 0.007 | (17 600)               | (820.7)                 | 290.0                         | 0.3                  |
| 20 | 48.12 | 0.000 | (700)                  | (33.7)                  | 256.6                         |                      |

到\$47.37, delta 值又减小了, 如此等等。在期权临近到期时, 很明显该期权将被执行, delta 接近 1.0。因此, 到第 20 周时, 套期保值者具有完全的受保护的期权头寸。套期保值者持有股票的收入为 500 万美元, 因此出售该期权并对冲该期权风险的总计支出为\$263 300。

表 15.3 是另一个事件序列, 说明期权处于虚值状态时的情况。很明显, 期权将不会被执行, delta 接近 0。至第 20 周时, 套期保值者保持裸期权头寸, 总计支出为\$256 600。

在表 15.2 和表 15.3 中, 如果将套期保值支出贴现为期初值, 则对冲该期权的成本近似于 Black-Scholes 定价 24 万美元, 但不完全相等。如果套期保值运作完美的话, 对每一个模拟股票价格路径贴现后的对冲成本, 应该精确地等于每个模拟中期权的 Black-Scholes 理论价格。delta 对冲成本不同的原因是由于再调整的频率仅为一周一次。若再调整的频率增加, 套期保值成本的变化就会减少。当然, 在表 15.2 与表 15.3 中的模拟过程是假设波动率为常数, 并且无交易费用的理想过程。

表 15.4 列出了我们例子中模拟股票价格变化 1 000 次的 delta 保值效果统计数据。与表 15.1 一样, 保值效果参数仍以期权套期保值成本的标准差与该期权的 Black-Scholes 定价之间的比率来衡量。显然 delta 套期保值法比止损策略有很大的

表 15.4 delta 对冲的效果。保值效果参数以期权保值支出的标准差与该期权的理论价格的比率来衡量

| 对冲调整的时间间隔(周数) | 5    | 4    | 2    | 1    | 0.5  | 0.25 |
|---------------|------|------|------|------|------|------|
| 保值效果度量        | 0.43 | 0.39 | 0.26 | 0.19 | 0.14 | 0.09 |

改进。与止损策略不同，当 delta 对冲的观察愈频繁，delta 套期保值效果的稳定性就愈好。

delta 套期保值的目标是保持金融机构的头寸价值尽量不发生变化。最初，出售看涨期权的价值为 24 万美元。在表 15.2 中所述的情况下，通过计算，第 9 周该期权价值为 \$414 500，因此，该金融机构的期权头寸损失了 \$174 500。第 9 周用累计成本衡量的它的现货头寸比第 0 周多 \$1 442 900。然而，该机构持有的股票价值从 \$2 557 800 增加到 \$4 171 100。在 9 周内，所有这些操作的净效果是该金融机构总财富仅变化 \$4 100。

## 费用的来源

从实际效果上看，表 15.2 与表 15.3 中的 delta 套期保值操作是形成了一个合成期权头寸的多头，它对冲了卖出看涨期权而产生的看涨期权空头。在该套期保值过程中，必须在股票价格刚开始下降时即售出股票，在股票价格刚上涨时即购入股票。这就是所谓的“升买跌售”的过程！24 万美元费用的发生是由于实际购买股票时支付的价格与出售股票时收取的价格之间的平均差别。

## 有价证券组合的 Delta 值

基于价格为  $S$  的单个资产的期权或其他衍生证券组合的 delta 值为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S}$$

其中  $\Pi$  是证券组合的价值。

该组合的 delta 值可以从组合内每种期权的 delta 值得出。若一种有价证券组合中，第  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 种期权的数量为  $w_i$ ，则有价证券组合的 delta 值为：

$$\Delta = \sum_{i=1}^n w_i \Delta_i$$

其中， $\Delta_i$  为第  $i$  种衍生证券的 delta 值。令组合的 delta 等于零时，这个公式可用来计算保值所需的标的资产或基于该标的资产的期货合约的头寸。当持有 delta 值为 0 的组合头寸时，该证券组合就达到所谓的 delta 中性状态。

考虑美国某金融机构有如下三个澳元期权的头寸：

1. 10 万份看涨期权多头，执行价格为 0.55，3 个月后到期，每份期权的 delta 值为 0.533
2. 20 万份看涨期权空头，执行价格为 0.56，5 个月后到期，每份期权的 delta 值为 0.468
3. 5 万份看跌期权空头，执行价格为 0.56，2 个月后到期，每份期权的 delta 值为 -0.508

所以，整个有价证券组合的总 delta 值为：

$$100\,000 \times 0.533 - 200\,000 \times 0.468 - 50\,000 \times (-0.508) = -14\,900$$

这意味着可以通过购买 14 900 澳元使得该组合达到 delta 中性状态。

本例中亦可用 6 个月期的远期合约使该组合达到 delta 中性状态。假设澳大利亚和美国的无风险利率分别为每年 8% 和 5%（即  $r_f = 0.08$ ,  $r = 0.05$ ）。 $T$  时刻到期的澳元远期合约的 delta 值为  $e^{-rT}$ ，即  $e^{-0.05 \times 0.5} = 0.9608$ 。为使 delta 中性，要买入的澳元远期合约头寸为  $14\,900 / 0.9608 = 15\,508$ 。

另一种办法是利用 6 个月期货合约。根据公式 (15.4)，为使 delta 中性，要买入的澳元期货合约头寸为

$$14\,900 e^{-(0.05-0.08) \times 0.5} = 15\,125$$

## 交易成本

若要和前面所述一样，保持单个期权和相应标的资产的 delta 中性头寸，成本很可能是非常昂贵的，因为存在交易费用。对于大额期权证券组合，delta 中性保值策略更为可行。只要对标的资产进行一次交易就能使整个证券组合的 delta 变为零。那么，很多不同的交易收益可以抵消对冲策略中的交易成本。

## 15.5 Theta

期权组合的 *theta* ( $\Theta$ ) 定义为：在其他条件不变时，该证券组合的价值变化相对于时间变化的比率，有时  $\Theta$  也被称作有价证券组合的时间损耗。对基于不付红利股票的欧式看涨期权，根据 Black-Scholes 定价公式可以推导出

$$\Theta(\text{call}) = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - r K e^{-rT} N(d_2)$$

这里  $d_1$ 、 $d_2$  的定义如公式 (13.20)，且

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (15.5)$$

对基于不支付红利股票的欧式看跌期权（参照习题 13.17），

$$\Theta(\text{put}) = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

对基于支付红利收益率为  $q$  的资产的欧式看涨期权，

$$\Theta(\text{call}) = \frac{S_0 N'(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qS_0 N(d_1) e^{-qT} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

这里  $d_1, d_2$  的定义如公式 (14.4)。对基于支付红利收益率为  $q$  的资产的欧式看跌期权，

$$\Theta(\text{put}) = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} - qS_0 N(-d_1) e^{-qT} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

当标的资产是股票指数时，将  $q$  换作指数红利收益率，以上最后两个公式就是欧式股票指数期权的 theta 公式。将  $q$  换作外汇无风险利率  $r_f$ ，以上最后两个公式就是欧式外汇期权的 theta 公式。令  $S_0 = F_0$ ,  $q = r$ ，可得欧式期货期权的 theta 公式。

上述的公式中，时间以年来计算。通常在 theta 的报价中，时间是以天数来计算的，theta 也就是在其他条件不变时，1 天过去后证券组合价值的变化。我们可以以“每个日历天”或者“每个交易日”来度量 theta。为了得到基于每个日历天的 theta，上述 theta 的公式应该除以 365；为了得到基于每个交易日的 theta，上述 theta 的公式应该除以 252 (DerivaGem 软件中 theta 基于每个日历天)。

**[例 15.3]** 我们考虑一个 4 个月期的股票指数看跌期权。指数的现值为 305，执行价格是 300，红利收益率是每年 3%。无风险年利率是 8%，指数价格波动率为每年 25%。在本例中， $S_0 = 305$ ,  $K = 300$ ,  $q = 0.03$ ,  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $T = 0.3333$  年。这个期权的 theta 为：

$$-\frac{S_0 N'(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} - qS_0 N(-d_1) e^{-qT} + rKe^{-rT}N(-d_2) = -18.15$$

那么，基于每个日历天的 theta 值为  $-18.15/365 = -0.0497$ ，基于每个交易日的 theta 值为  $-18.15/252 = -0.0720$ 。

单个期权的 theta 通常是负的。<sup>8</sup> 因为当越来越临近到期日时，期权的时间价值就变得越来越不值钱。图 15.5 显示的是一种股票看涨期权的 theta 值随股票价格变化的曲线。当股票价格很低时，theta 近似为 0。对于一个处于两平状态的看涨期权，theta 相当大并且为负值。股票价格升高时，theta 趋近于  $-rKe^{-rT}$ 。图 15.6 给出了期权处于实值期权、两平期权和虚值期权三种状态下，theta 值随到期期限的变化而变化的典型状况。

theta 与 delta 不是同一种类型的保值参数。这是因为，虽然对于未来的股票价

---

<sup>8</sup> 有如下两个例外：处于实值状态的不付红利股票的欧式看跌期权或处于实值状态的附带有很高利率的外汇的欧式看涨期权。

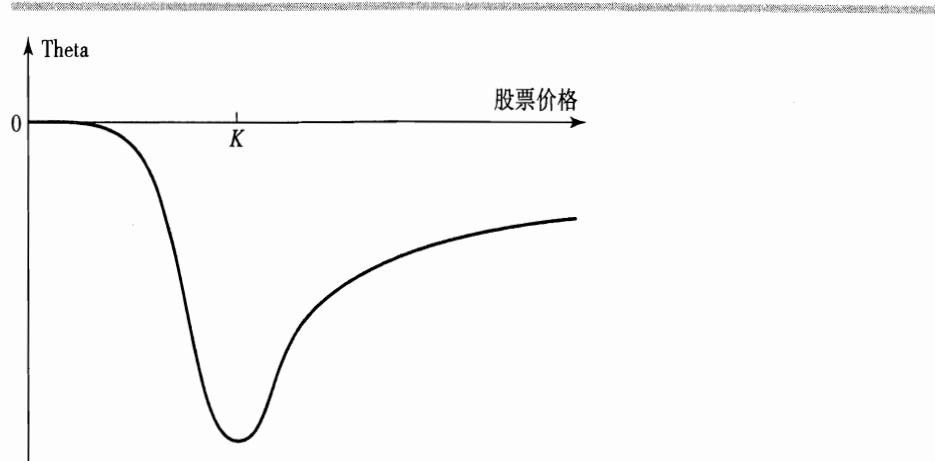


图 15.5 欧式看涨期权的 theta 与股票价格之间的变化关系图

格存在着某些不确定性因素，而到期时间的减少是确定的。对冲标的资产价格的变化有意义，但是用对冲的保值方法消除时间变化对期权组合价值的影响将毫无意义。尽管如此，很多交易者认为 theta 是一个非常有用的描述证券组合的统计量。我们将看到，这是因为 delta 中性证券组合的 theta 是 gamma 的镜像值。

## 15.6 Gamma

某种标的资产的期权组合的 *gamma* ( $\Gamma$ )，定义为该组合的 delta 变化相对于标

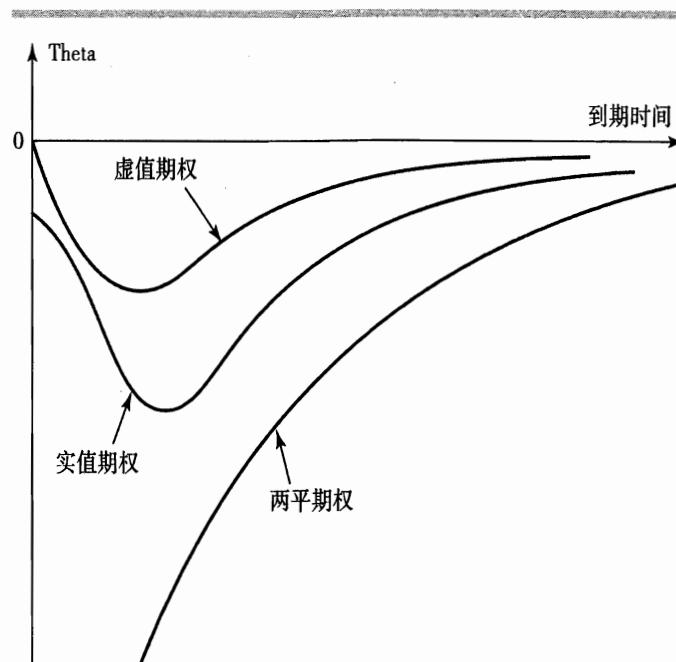


图 15.6 典型的欧式看涨期权的 theta 与到期时间之间的变化关系图

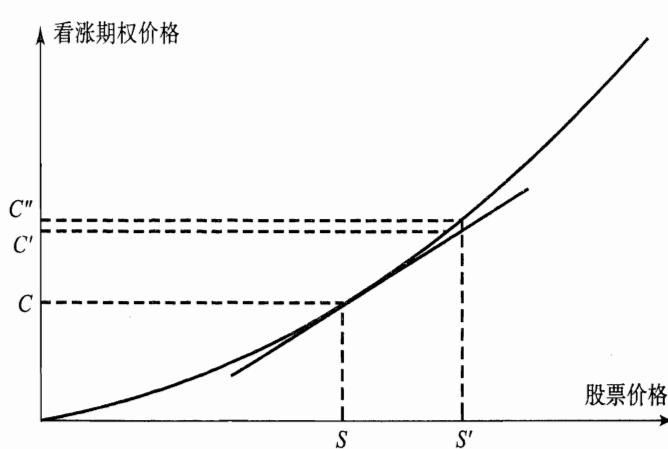


图 15.7 非线性对冲误差图示

的资产价格变化的比率。它等于证券组合价值对于资产价格的二阶导数：

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

当 gamma 值较小时，delta 变化缓慢，为保持 delta 中性并不需要进行频繁的调整。然而，当 gamma 绝对值较大时，该组合的 delta 对于标的资产价格相当敏感。此时在任一段时间内，若对一个 delta 中性的有价证券组合不做调整将有很大的风险。图 15.7 说明了这一点。当股票价格从  $S$  上涨到  $S'$ ，delta 中性保值法假设期权价格从  $C$  增加到  $C'$ ，而实际上期权价格已从  $C$  变到了  $C''$ 。 $C'$  和  $C''$  之间的误差引起保值误差，保值误差大小取决于期权价格与股票价格之间关系曲线的曲率，gamma 度量了这个曲率。<sup>9</sup>

假设  $\Delta S$  是在小的时间段  $\Delta t$  内标的资产价格的变化， $\Delta \Pi$  是相应的有价证券组合价格的变化。如果忽略比  $\Delta t$  高阶的项，本章附录表明：对于 delta 中性的证券组合：

$$\Delta \Pi = \Theta \Delta t + \frac{1}{2} \Gamma \Delta S^2 \quad (15.6)$$

这里  $\Theta$  是证券组合的 theta 值。图 15.8 表明了  $\Delta \Pi$  和  $\Delta S$  之间的关系特性。当  $\Gamma$  为正值时， $\Theta$  通常为负值。如果  $S$  的值不变的话，该组合价值将减小，但是，如果  $S$  的值有较大正值方向或负值方向的变化，则该组合的价值都会增加。当 gamma 为负值时， $\Theta$  通常是正的，反之亦然。如果  $S$  的值不变的话，该组合价值将增加，但是，如果  $S$  的值有较大正值方向或负值方向的变化，则该组合的价值都会减少。随着 gamma 绝对值的增加，有价证券组合价值对于  $S$  的敏感性也增加。

<sup>9</sup> 确实，从业人员有时称期权的 gamma 为期权的曲率。

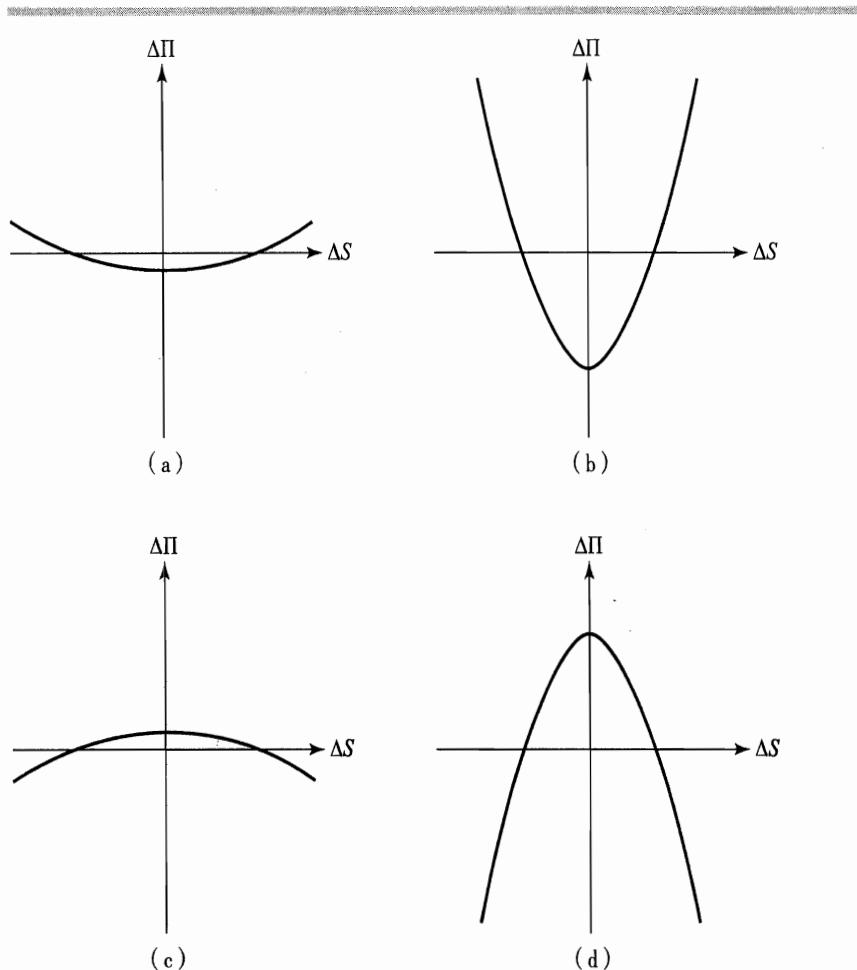


图 15.8 delta 中性组合中  $\Delta\Pi$  和  $\Delta S$  之间的几种关系特性图：(a) gamma 为绝对值较小的正值；(b) gamma 为绝对值较大的正值；(c) gamma 为绝对值较小的负值；(d) gamma 为绝对值较大的负值

**[例 15.4]** 假设某种期权组合是 delta 中性的，该组合的 gamma 为 -10 000。公式 (15.6) 说明如果标的资产的价格在一个短的时间内发生 +2 或 -2 的变化，那么该证券组合的价值预期减少  $0.5 \times 10 000 \times 2^2 = \$20 000$ 。

### 构造 Gamma 中性组合证券

标的资产头寸或该标的资产远期合约头寸的 gamma 值为 0，也就不能用来改变证券组合的 gamma。因此，金融机构改变它的有价证券组合的 gamma 值的办法就是持有期权这样的与标的资产不是线性关系的头寸。

假设某种 delta 中性的有价证券组合的 gamma 等于  $\Gamma$ ，某个可交易期权的 gamma 等于  $\Gamma_T$ 。如果加入到原证券组合中的可交易期权的数量是  $w_T$ ，则该组合的 gamma 是：

$$w_T \Gamma_T + \Gamma$$

要使证券组合的 gamma 中性化，则可交易期权的头寸应为 $-\Gamma/\Gamma_T$ 。当然，加入可交易期权肯定会改变原组合的 delta 值，所以，为了保持总的 delta 中性，还需调整标的资产的头寸。注意：总组合只是瞬间 gamma 中性。随时间变化，只有不断调整可交易期权头寸，并使得该期权头寸总是等于 $-\Gamma/\Gamma_T$ ，才可维持 gamma 中性。

使处于 delta 中性的证券组合成为 gamma 中性可看作一阶校正，因为当在进行 delta 对冲时，标的资产（或该标的资产的期货合约）头寸不能连续改变。delta 中性化可以为再调整操作期间内，较小的股票价格变动提供保护。而在对冲再调整操作期间内，gamma 中性化可以为较大的股票价格变动提供保护。假设某种有价证券组合是 delta 中性的，该组合的 gamma 为 -3 000。某个特殊的可交易看涨期权的 delta 和 gamma 分别为 0.62 和 1.50。为使 gamma 中性，组合中应购入

$$\frac{3\,000}{1.5} = 2\,000 \text{ 份}$$

可交易的看涨期权。但是，证券组合的 delta 值将从 0 变化到  $2\,000 \times 0.62 = 1\,240$ 。因此，为保持 delta 中性，还应出售数量为 1 240 份的标的资产。

### Gamma 的计算

基于不付红利股票的欧式看涨期权或看跌期权的 gamma 值为：

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

这里  $d_1$  与方程 (13.20) 中的定义相同，在方程 (15.5) 中给出了  $N'(x)$  的值。期权多头头寸的 gamma 总是为正值，它随  $S_0$  变化的曲线如图 15.9 所示。在实值期权、虚值期权和两平期权这三种不同情况下，gamma 值随到期时间的变化如

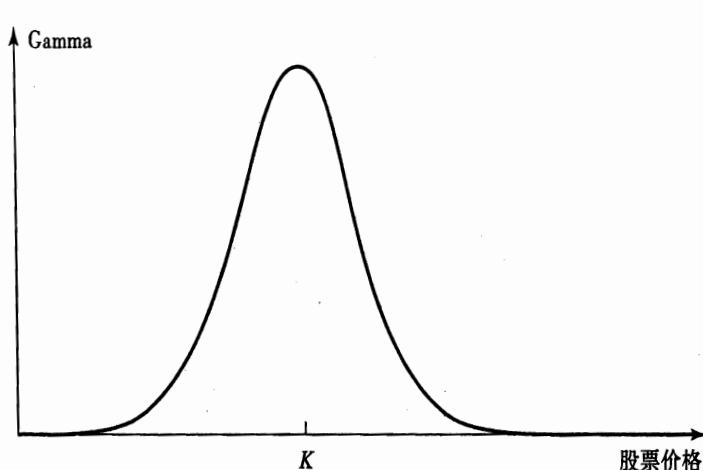


图 15.9 某个股票期权 gamma 与股票价格之间的关系图

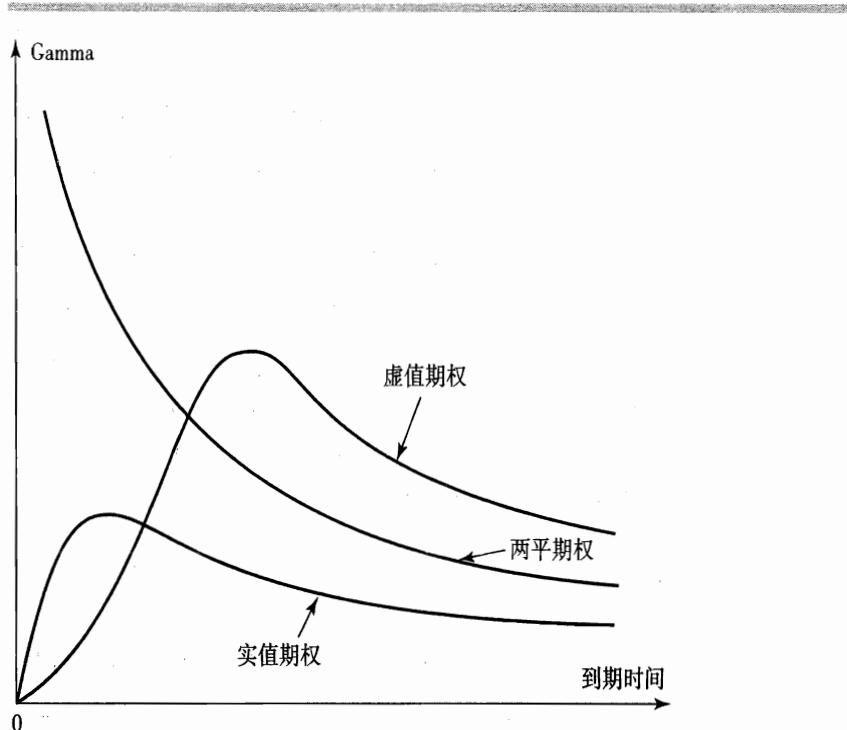


图 15.10 某个股票期权 gamma 与到期期限之间的关系图

图 15.10 所示。对于一个两平期权，越接近到期日，gamma 越大。期限很短的两平期权的 gamma 值可能非常大，这意味着持有者期权头寸的价值对于股票价格的跳跃极其敏感。

对于以红利收益率为  $q$  支付连续红利收益的欧式看涨期权或看跌期权：

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$$

这里  $d_1$  的定义如方程 (14.4)。当标的资产是股票指数时， $q$  设定为红利收益率，上式即为股票指数期权的 gamma 公式。当标的资产是外汇时， $q$  设定为外汇无风险利率，上式即为外汇欧式期权的 gamma 公式。当标的资产是期货合约时， $q = r$ ， $S_0 = F_0$ ，上式即为欧式期货期权的 gamma 公式。

**[例 15.5]** 我们考虑一个 4 个月期的股票指数看跌期权。假设指数的现值为 305，执行价格是 300，红利收益率是每年 3%，无风险利率是每年 8%，指数价格波动率为每年 25%。在本例中， $S_0 = 305$ ， $K = 300$ ， $q = 0.03$ ， $r = 0.08$ ， $\sigma = 0.25$ ， $T = 4/12$  年。则指数期权的 gamma 为：

$$\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}} = 0.00857$$

因此指数每增加 1 个点(即从 305 到 306)，引起期权的 delta 增加约 0.00857。

## 15.7 Delta、Theta和Gamma之间的关系

基于不付红利股票的单种衍生证券的价格必须满足微分方程 (13.16)。因此，由这些衍生证券组成的投资组合的价值  $\Pi$  也满足以下微分方程：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS \frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = r\Pi$$

由于

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}, \Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

可得：

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi \quad (15.7)$$

对其他资产的衍生证券，也可以推导类似的结果（参照习题 15.19）。

对于 delta 中性的组合， $\Delta = 0$ ，并且：

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Gamma$$

这意味着当 theta 为正值并且很大时，证券组合的 gamma 将会为负值并且也很大。反之亦然。这与图 15.8 所示的情况一致，并解释了在 delta 中性组合中，theta 可看出是 gamma 的镜像值。

## 15.8 Vega

到现在为止，我们的讨论都隐含这样一个前提：衍生证券的标的资产价格波动率为常数。实际上，标的资产的价格波动率随时间的变化而变化，它意味着衍生证券价值有可能随波动率的变动而变化，正如标的资产价格和时间发生变动时，衍生证券的价值有可能变化一样。

一个有价证券组合的 *vega* ( $\nu$ )，定义为有价证券组合的价值变化与标的资产波动率变化的比率。<sup>10</sup>

$$\nu = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$$

如果 vega 的绝对值很大，证券组合的价值对于波动率的小变化就很敏感；反之，如果 vega 的绝对值很小，波动率的变化就不怎么影响证券组合的价值。

标的资产头寸有零 vega 值。然而，增加可交易期权的头寸可改变组合证券的 vega 值。如果  $\nu$  是证券组合的 vega 值， $\nu_T$  是可交易期权的 vega 值，数量为  $-\nu/\nu_T$  的可交易期权头寸将使原证券组合达到暂时的 vega 中性状态。不幸的是，一种 gam-

<sup>10</sup> vega 是期权定价相关的套期保值参数的一种。事实上，希腊字母中并没有 vega。

ma 中性的证券组合一般来说并不是 vega 中性的。反之亦然。因此，若套期保值者要使证券组合同时达到 gamma 中性和 vega 中性状态，至少要使用两种基于该标的资产的可交易衍生证券。

**[例 15.6]** 考虑某个处于 delta 中性状态的有价证券组合，gamma 值为 -5 000，vega 值为 -8 000。假设某个可交易期权的 gamma 值为 0.5，vega 值为 2.0，delta 值为 0.6。如果购买 4 000 个可交易期权的多头头寸，则可使该组合达到 vega 中性状态，但同时将使 delta 值增加到 2 400，这要求出售 2 400 个标的资产以维持 delta 中性状态。该证券组合的 gamma 值将从 -5 000 变为 -3 000。

为了使得该组合处于 gamma 中性和 vega 中性状态，我们假设存在第二种可交易期权，gamma 值为 0.8，vega 值为 1.2，delta 值为 0.5。如果  $w_1$ 、 $w_2$  分别为证券组合中这两种可交易期权的数量，我们要求：

$$-5\,000 + 0.5w_1 + 0.8w_2 = 0$$

且

$$-8\,000 + 2.0w_1 + 1.2w_2 = 0$$

这个方程组的解为  $w_1 = 400$ ,  $w_2 = 6\,000$ 。因此，加入 400 份第一种可交易期权和 6 000 份第二种可交易期权将使得该组合处于 gamma 中性和 vega 中性状态。加入以上两种可交易期权头寸后，此时 delta 值为  $400 \times 0.6 + 6\,000 \times 0.5 = 3\,240$ 。所以仍需卖出 3 240 份标的资产以保持 delta 中性状态。

对基于不付红利股票的欧式看涨期权和看跌期权，得 vega 值为：

$$\nu = S_0 \sqrt{T} N'(d_1)$$

这里  $d_1$  的定义如公式 (13.20)。在方程 (15.5) 节中给出了  $N'(x)$  的计算公式。对连续支付红利收益率为  $q$  的资产的欧式看涨期权和看跌期权，得 vega 值为：

$$\nu = S_0 \sqrt{T} N'(d_1) e^{-qT}$$

这里  $d_1$  的定义如公式 (14.4)。如果  $q$  替换成红利收益率，以上公式给出欧式股票指数期权的 vega 值。如果  $q$  替换成外汇无风险利率  $r_f$ ，以上公式给出欧式外汇期权的 vega 值。令  $S_0 = F_0$  且  $q = r$ ，以上公式给出欧式期货期权的 vega 值。

普通欧式或美式期权多头的 vega 总是正值。vega 随  $S_0$  变化曲线如图 15.11 所示。

**[例 15.7]** 我们考虑一个 4 个月期的股票指数看跌期权。假设指数的现值为 305，执行价格是 300，红利收益率为每年 3%，无风险利率为每年 8%，指数价格波动率为每年 25%。在本例中， $S_0 = 305$ ,  $K = 300$ ,  $q = 0.03$ ,  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $T = 4/12$  年。该期权的 vega 为：

$$\nu = S_0 \sqrt{T} N'(d_1) e^{-qT} = 66.44$$

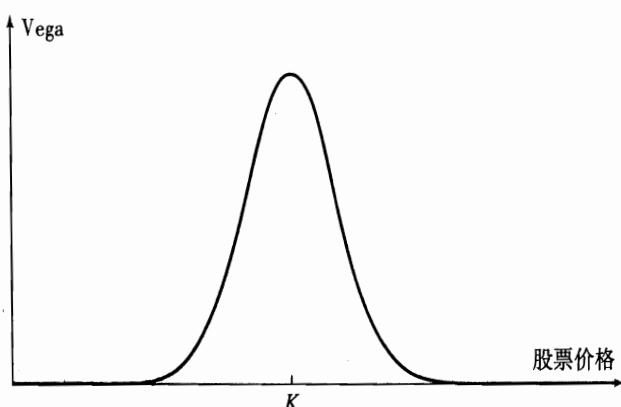


图 15.11 某个股票期权的 vega 与股票价格之间的关系图

因此波动率增加 1% 或 0.01（从 25% 到 26%）就会使期权价值增加约 0.6644 ( $0.01 \times 66.44$ )。

从 Black-Scholes 定价公式和扩展公式计算 vega 值似乎有些奇怪。这是由于 Black-Scholes 定价公式假设波动率为常数。理论上，我们可以从假设波动率为随机变量的模型中计算 vega。然而，这样考虑是相当复杂的。幸运的是，它说明从波动率为随机变量的模型中计算 vega 非常类似于从 Black-Scholes 定价公式计算的 vega 值。所以，从波动率为常数的模型中计算 vega 是很合理的。<sup>11</sup>

gamma 中性校正的是在对冲再调整期内，标的资产价格发生的较大变化，而 vega 中性校正的是波动率  $\sigma$  的变化。正如我们所期望的，当使用适当的可交易期权进行 vega 或 gamma 中性保值时，其效果如何依赖于对冲再调整期间的时间和波动率的变动率。<sup>12</sup>

当波动率变化时，期限短的期权的隐含波动率比期限长的期权的隐含波动率变化更大。因此，我们让期限长的期权的波动率变化比期限短的期权的波动率变化小一些，计算出组合的 vega 值。我们将在 19.6 节讨论这种做法。

## 15.9 Rho

衍生证券组合的 rho 定义为有价证券组合的价值变化与利率变化之间的比率。

$$\text{rho(call)} = \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

<sup>11</sup> 参见 J. C. Hull and A. White, “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities,” *Journal of Finance*, 42 (June 1987): 281–300; J. C. Hull and A. White, “An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility,” *Advances in Futures and Options Research*, 3 (1988): 27–61.

<sup>12</sup> 有关这个题目的讨论，参见 J. C. Hull and A. White, “Hedging the Risks from Writing Foreign Currency Options,” *Journal of International Money and Finance*, 6 (June 1987): 131–52.

它衡量有价证券组合的价值对利率的敏感性。对基于不付红利股票的欧式看涨期权：

$$\text{rho(call)} = KTe^{-rT}N(d_2)$$

这里  $d_2$  的定义如公式 (13.20)。对基于不付红利股票的欧式看跌期权：

$$\text{rho(put)} = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

以上这两个公式同时适用于支付已知红利收益率的股票或股票指数的欧式看涨期权和看跌期权，这种情况下， $d_2$  的定义如公式 (14.4)。

**[例 15.8]** 再考虑某个 4 个月期的股票指数的看跌期权。指数的现值为 305，执行价格是 300，红利收益率是每年 3%，无风险年利率是 8%，指数的波动率为每年 25%。在本例中， $S_0 = 305$ ,  $K = 300$ ,  $q = 0.03$ ,  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $T = 4/12$ 。可求得期权的 rho 为：

$$-KTe^{-rT}N(-d_2) = -42.6$$

这意味着无风险利率增加 1%，即 0.01（例如从 8% 到 9%），期权价值减少 0.426 ( $0.01 \times 42.6$ )。

对外汇期权，由于存在两种利率，就可得到两个对应的 rho 值。与国内利率相对应的 rho 的公式如前所述， $d_2$  的定义如公式 (14.7)；对应于国外利率的欧式看涨期权的 rho 值为：

$$-Te^{-qT}S_0N(d_1)$$

对应于国外利率的欧式看跌期权的 rho 值为：

$$Te^{-qT}S_0N(-d_1)$$

$d_1$  的定义如公式 (14.7)。

对于欧式看涨期货期权，rho 值为  $-cT$ ；对于欧式看跌期货期权，rho 值为  $-pT$ 。其中， $c$  和  $p$  分别为欧式看涨期权和看跌期权的价格。

## 15.10 对冲的实现

理想化的世界中，金融机构的交易者为了维持 delta 中性、gamma 中性和 vega 中性，将连续调整他们的组合。实际上这是不可能的。当管理基于单种标的资产的大额证券组合时，交易者们至少每天交易一次标的资产，以便 delta 总是为零或接近于零。不幸的是，很难达到 gamma 中性和 vega 中性。这是因为，很难找到以有利的竞争价格交易来满足对冲所需数量的期权或其他非线性衍生品（参见商业剪影 15.1 中关于动态对冲的讨论）。

作为期权交易者，应该注意规模经济。和前面提到的一样，维持单个期权比如 S&P 500 合约的 delta 中性，每日交易 S&P 500 合约的成本将是非常昂贵的。但

### 商业剪影 15.1 现实中的动态对冲

金融机构一般安排一个或一个团队的交易员负责基于某个特定资产的衍生证券组合。例如，一位高盛的交易员可能被委任管理所有基于澳元价值的衍生证券。计算机系统计算证券组合的价值和该组合的套期保值参数（即希腊字母）。套期保值参数有一个限额水平，如果交易员要在一个交易日结束之时想超过这一限额水平，则必须得到特殊许可。

$\text{delta}$  的限额水平通常以等价的标的资产的最大头寸来表示。例如，高盛对于微软股票的  $\text{delta}$  限制水平可能是 1 亿美元。如果微软股价为 \$50，那么  $\text{delta}$  的绝对值不应该超过 20 万。 $\text{vega}$  限额经常以波动率变化 1% 时的美元暴露的最大值来表示。

自然地，期权交易者们在每日结束之时保证  $\text{delta}$  中性——或接近于  $\text{delta}$  中性。 $\text{gamma}$  和  $\text{vega}$  被监测，但并不进行每日调整。金融机构经常会发现他们和客户之间的交易中，需要承兑期权，因此负的  $\text{gamma}$  和  $\text{vega}$  会累积。所以，金融机构经常寻找以有利的竞争价格买入期权的机会，以便管理  $\text{gamma}$  和  $\text{vega}$  风险。

期权组合的一种特性某种程度上会减轻  $\text{gamma}$  和  $\text{vega}$  的管理负担。期权在它们首次卖出的时刻，通常接近于两平状态，因此相应的  $\text{gamma}$  和  $\text{vega}$  值也相对较高。但是随着时间变化，标的资产价格的变化足够使期权处于深度虚值状态或深度实值状态。它们的  $\text{gamma}$  和  $\text{vega}$  值就变得非常小，问题就不那么重要了。对于期权交易者来说，最糟糕的情形是，期权快到期时还是处于接近两平状态。

是对于包括几百种 S&P 500 期权的证券组合，可以以这样的方法维持  $\text{delta}$  中性。这是因为，来自很多不同交易的收益可以抵消每日再调整的成本（不管是交易指数中的标的股票还是交易指数期货）。

### 15.11 情景分析

除了监测诸如  $\text{delta}$ 、 $\text{gamma}$  和  $\text{vega}$  这些风险外，期权交易者也常常进行情景分析。这包括计算某个指定时期各种不同情景下，他们证券组合的损益。所选择的时期有可能依赖于这些工具的流动性。情景既可以由管理者来选择，也可以由模型产生。

考虑某个银行，有一个外汇期权的组合。该证券组合的价值取决于两个主要的变量，即汇率和汇率波动率。假设当前汇率是 1.0000，汇率的波动率是年利率 10%。银行可以计算出诸如表 15.5 的一个表格，说明在两周时期内不同情景下该组合的损益状况。这个表考虑了 7 个不同的汇率和 3 个不同的波动率。由于在两周时期内，汇率一个标准差的变化近似等于 0.02，这里所考虑的汇率变动近似于 1 个、2 个和 3 个标准差。

在表 15.5 中，最大损失位于该表的右下角。此时对应的波动率增加到 12%，

表 15.5 在两个星期内不同情景下该组合的损益状况（以百万美元为单位）

| 波动率 | 汇 率  |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|
|     | 0.94 | 0.96 | 0.98 | 1.00 | 1.02 | 1.04 | 1.06 |
| 8%  | +102 | +55  | +25  | +6   | -10  | -34  | -80  |
| 10% | +80  | +40  | +17  | +2   | -14  | -38  | -85  |
| 12% | +60  | +25  | +9   | -2   | -18  | -42  | -90  |

汇率变动到 1.06。通常诸如表 15.5 的最大损失总是对应于该表 4 个角中的某一个。但情况并不总是如此。例如，假设某个银行的证券组合由蝶式价差期权空头（参见第 10.2 节）组成，如果汇率正好在某个位置上，该组合将产生最大的损失。

## 15.12 有价证券组合的保险

证券组合经理通常喜欢在他的证券组合中加入一个看跌期权。市场表现不好的时候，这样组合价值可以得到保护，而市场表现良好的时候，也可以不失去相应的收益。其中一种方法（第 14.3 节中讨论过）就是持有某种市场指数如 S&P 500 的看跌期权。另一种方法是构成合成期权。

构成合成期权的具体操作就是持有一种标的资产（或该标的资产的期货合约）的头寸，该头寸的 delta 等于所需期权的 delta。构造的合成期权所需的头寸应与对冲它的头寸相反。这反映了如下简单的事实，即期权套期保值的过程就是同时产生数量相同、头寸方向相反的合成期权的过程。

对有价证券组合经理来说，形成所要求的合成看跌期权比在市场上直接购买看跌期权更具吸引力，这里有两个原因。首先，期权市场并不总是具有足够的流动性吸收这些拥有大笔资金的基金经理将进行的大笔交易；其次，基金经理很难在交易所期权市场找到所需执行价格和到期日的期权。

他们可以通过证券组合本身或指数期货合约的交易构造合成期权。我们先来看由交易证券组合形成的看跌期权。回顾上面的公式，基于该证券组合的欧式看跌期权的 delta 值为：

$$\Delta = e^{-qT}[N(d_1) - 1] \quad (15.8)$$

利用通常使用的符号，其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$S_0$  是证券组合的价值， $K$  是执行价格， $r$  是无风险利率， $q$  是证券组合的红利收益率， $\sigma$  是证券组合的波动率， $T$  为期权有效期限。通常可以假设证券组合的波动率等于组合 beta 值乘以高度分散化市场指数波动率。

为构造合成看跌期权，基金经理必须确保其在任一给定时间卖出占原证券组合中比例为

$$e^{-qT}[1 - N(d_1)]$$

的那一部分股票，将所得资金投资于无风险资产。当原证券组合的价值减小时，看跌期权的 delta 值 [可由 (15.8) 式给出] 负向增长，原证券组合中卖出的份额必须增加；当原证券组合的价值增加时，看跌期权的 delta 值负向减小，原证券组合中卖出的份额必须减少（即还需重新购回原组合中的一部分）。

运用这种策略构造有价证券组合保险的实质就是：在任意给定时间，使得资金在有保险的股票组合和无风险资产之间进行分配。当股票组合的价值增加时，则出售无风险资产，增加股票组合的头寸；当股票组合的价值减小时，则减少股票组合头寸，购买无风险资产。基金经理总是在市场价格下降后卖出，在市场价格上升后买入，因此就产生了保险的成本。

**[例 15.9]** 有一个价值为 9 000 万美元的证券组合。为了在市场下滑时，证券组合的价值能得到保护，管理者需要基于该证券组合的执行价格为 8 700 万美元的 6 个月期欧式看跌期权。无风险利率为 9%p.a.，红利收益率为 3%p.a.，证券组合的波动率为 25%p.a.。S&P 500 指数值固定在 900。假设该证券组合模拟与 S&P 500 指数的组合非常相近，那么作为另外一种保护策略，我们可以买入 1 000 份执行价格为 870 的 S&P 500 看跌期权合约。还有一种办法是创造所需要的合成期权。这种情况下， $S_0 = 90\,000\,000$ ， $K = 87\,000\,000$ ， $r = 0.09$ ， $q = 0.03$ ， $\sigma = 0.25$  以及  $T = 0.5$ 。因此

$$d_1 = \frac{\ln(90/87) + (0.09 - 0.03 + 0.25^2/2)0.5}{0.25\sqrt{0.5}} = 0.4499$$

且所需期权的初始 delta 值为

$$e^{-qT}[N(d_1)-1] = -0.3215$$

这说明首先应卖掉证券组合的 32.15%，以便匹配所需期权的 delta 值。必须经常监测需要卖出的证券组合数量。例如，如果 1 天后证券组合价值减少到 8 800 万美元，所需期权的 delta 值变化到 0.3679，因此需要再卖出原证券组合的 4.64%。如果证券组合价值增加到 9 200 万美元，所需期权的 delta 值变化到 -0.2787，因此需要重新买入原证券组合的 4.28%。

## 使用指数期货

利用指数期货构造合成期权比使用标的股票本身进行保险更受投资者欢迎。因为买卖指数期货的交易费用通常比直接买卖标的股票的交易费用更少。从公式 (15.3) 和公式 (15.8) 可得，卖空的指数期货合约所对应的美元数额占有价证券组合价值的比例应为：

$$e^{-qT} e^{-(r-q)T^*} [1 - N(d_1)] = e^{q(T^*-T)} e^{-rT^*} [1 - N(d_1)]$$

其中， $T^*$ 为期货合约的到期时间。若有价证券组合价值为指数的  $A_1$  倍，每个指数期货合约的价值为该指数的  $A_2$  倍。这意味着在任意时刻卖空的指数期货合约数量应为：

$$e^{q(T^*-T)} e^{-rT^*} [1 - N(d_1)] \frac{A_1}{A_2}$$

**[例 15.10]** 假设在前面的例子中，我们用 9 个月期 S&P 500 指数期货合约来构造合成期权。在这种情况下，刚开始的时候： $T = 0.5$ ， $T^* = 0.75$ ， $A_1 = 100\,000$ ， $A_2 = 250$  以及  $d_1 = 0.4499$ 。所以卖空的该期货合约的数量应为：

$$e^{q(T^*-T)} e^{-rT^*} [1 - N(d_1)] \frac{A_1}{A_2} = 122.96$$

近似到最相近的整数，即为 123 份。随着时间变化和指数变化，期货头寸应该得到相应的调整。

这里的分析中，假设了有价证券组合与指数组合一一对应。如果不是这样，我们需要 (a) 计算证券组合的 beta；(b) 选择可以提供所需保护的指数期权头寸；(c) 选择能构造复合期权的指数期货头寸。与 14.3 节中讨论的一样，当证券组合达到保险价值的时候，期权的执行价格应该等于市场指数值的预期水平。所需期权数量等于 beta 乘以证券组合 beta 为 1.0 时所需的期权数量。

### 15.13 股票市场波动率

我们已经在第 13 章中讨论过如下的问题：波动率是仅由新信息引起的，还是由交易本身引起的。诸如我们刚刚描述过的有价证券保险操作方法有可能增加波动率。当市场价格下跌时，将使得证券组合经理要么卖出股票，要么卖出指数期货合约。而这两种行为都可能加速市场价格的下跌（参见商业剪影 15.2）。出售股票很可能会直接迫使指数进一步下降。出售指数期货合约有可能驱使指数期货价格下跌。根据指数套利机制（参见第 5 章），这将对股票产生出售压力，从而驱使市场指数也下降。同样，当市场价格上涨时，这些证券组合保险策略促使投资者买入股票或期货合约，于是更加剧了市场价格上涨。

除了一些正式规范的一般性保险操作方法，我们发现许多投资者有意无意地实施着他们自己的有价证券组合的保险操作方法。例如，一个投资者可能情愿当市场价格上涨时进入市场，当市场价格下跌时出售证券，来限制他的损失风险。

无论正式或非正式的，有价证券组合保险措施是否影响市场波动率，取决于市场吸收容纳证券组合保险产生交易的难易程度。若保险操作的交易仅是所有交易中很小的一部分，很可能就没有影响。但当保险操作的交易涉及很大范围的时候，就可能对市场产生不稳定的影响。

### 商业剪影 15.2 1987 年的市场崩溃应该谴责证券组合保险操作吗

在 1987 年 10 月 19 日，星期一，道琼斯工业平均指数下跌幅度超过 20%。很多人认为证券组合的保险操作在这一市场崩溃中扮演了很重要的角色。1987 年 10 月份有 600 亿美元到 900 亿美元的股权资产被实施了有价证券保险操作，运用 15.12 节讨论过的方法构造了合成看跌期权。从 1987 年 10 月 14 日（星期三）到 1987 年 10 月 16 日（星期五），市场价格下跌了约 10%，而主要的下跌发生在星期五下午。对应于已采取的有价证券保险策略，应该出售至少 120 亿美元的股权资产或指数期货合约。实际上，组合保险来不及全部售出这么大量的股票，售出的金额仅 40 亿美元，这意味着在接下来的一周，证券组合的保值者将执行他们模型<sup>13</sup>指示的巨额出售指令。后来估算的结果表明，10 月 19 日（星期一），三个有价证券组合保险者卖出的指令就占纽约股票交易所总出售额的 10%，有价证券保险者在指数期货市场上出售的期货合约数量达到总出售额的 21.3%。看起来似乎除了有价证券组合保险者大量抛售外，其他的投资者们也加入了组合保险者的抛售行列，因为他们预期到组合保险者的行为，从而造成了市场下跌的压力。

因为市场下跌过快，股票交易所的系统负荷过度，很多有价证券组合保险者没能执行他们模型产生的所有交易指令，并没能达到保护目的。不用多说，自 1987 年之后，有价证券组合保险策略远不如以前那么流行了。这个故事给我们的一个教训是，当其他很多市场参与者的策略和你一样时，遵循某一特定交易策略是非常危险的，即使是对冲策略。

## 小 结

金融机构向他们的客户提供各种期权产品。这些期权经常与在交易所交易的标准化的期权产品不同。因此金融机构面临对冲风险的问题。裸期权策略和有保护期权策略可能使得他们的风险水平不可接受。有时可采用的一个策略是止损策略，即当期权是处于虚值期权状态时，持有裸期权头寸；一旦期权变动到处于两平状态时，就将裸期权头寸转变为有保护期权头寸状态。虽然看起来有吸引力，该策略运作的效果并不好。

期权的 delta 值， $\Delta$ ，定义为期权价格的变化与标的资产价格变化之比。delta 对冲就是构造一个 delta 值为 0 的头寸（有时也称为 delta 中性套期保值头寸）。由于标的资产的 delta 值为 1.0，对每一个欲保值的期权多头而言，进行 delta 中性保值的一个方法就是持有 $-\Delta$  个标的资产头寸。期权的 delta 值随时间而变化，这意味着标的资产的头寸必须频繁进行调整。一旦某个期权的头寸已经是 delta 中性状态了，下一个步骤通常是看它的 gamma 值。期权的 gamma 定义为期权的 delta 的变化与标的资产价格变化之比。它是衡量期权价格与标的资产价格之间关系的曲率。通过构造期权的 gamma 中性头寸，可以减少这个曲率对 delta 套期保值效果的影响。如果  $\Gamma$  是欲保值头寸的 gamma 值，通过持有某个 gamma 值为 $-\Gamma$  的可

<sup>13</sup> 即所谓的程序交易模型——译者注。

交易期权的头寸，可以达到 gamma 中性套期保值状态。

delta 对冲和 gamma 对冲两者都是假设标的资产的波动率为常数。实际上，波动率确实随时间而变化。期权或某期权组合的 vega 定义为期权头寸价值变化与对应波动率变化之比。如果某个交易者希望对冲某个期权头寸以抵销波动率变化的影响，他或她可以构造一个 vega 中性状态的头寸。正如构造 gamma 中性状态的过程一样，持有某个可交易期权的抵销性的头寸就可获得 vega 中性化头寸。如果交易者希望同时获得 gamma 中性和 vega 中性，通常需要两类可交易期权。

衡量期权头寸风险的另外两个参数是 theta 和 rho。theta 衡量当其他因素保持不变时，期权头寸价值变化与时间变化的比率。rho 衡量当其他因素保持不变时，期权头寸价值变化与短期利率变化之比。

现实中，期权交易者至少每天调整一次证券组合，以维持 delta 中性。通常，不可能维持 gamma 中性和 vega 中性。交易者一般会监测这些风险，如果风险变得过大，他们会实施调整操作或缩减交易。

为了对股权投资组合进行保险，有价证券组合经理有时喜欢构造合成看跌期权。他们或者交易证券组合本身，或者交易该证券组合的指数期货合约，就能够做到这一点。交易证券组合本身就是将该组合在股权和无风险证券之间进行分配。当市场价格下降时，投资于无风险资产的比率就较高。当市场价格上升时，投资于股权的比率就较高。交易该证券组合的指数期货合约就是保持股权组合不变，同时出售指数期货合约。当市场价格下降时，出售指数期货合约的数量较多一些；当市场价格上升时，出售指数期货合约的数量就少一些。在正常的市场条件下，合成看跌期权这个策略效果较好。然而，在 1987 年 10 月 19 日，星期一，当道琼斯工业平均指数急剧下降时，该策略运作很糟糕。有价证券组合的保险者不能够很快地出售股票或指数期货合约以保护他们的头寸。

## 参考读物

Taleb, N. N., *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options*. New York: Wiley, 1996.

## 问题和习题

- 15.1 请解释一个虚值看涨期权的出售者怎么实施止损对冲策略。为什么该对冲效果相对较差？
- 15.2 一个看涨期权的 delta 值为 0.7 意味着什么？若每个期权的 delta 均为 0.7，如何使 1 000 个看涨期权的空头变成 delta 中性？
- 15.3 无风险利率为每年 10%，股票价格的波动率为每年 25%，计算标的物为不付红利股票，6 个月期两平状态欧式看涨期权的 delta 值。
- 15.4 若以年计，一个期权头寸的 theta 值为 -0.1 意味着什么？若一个交易者认为股票价格和隐含波动率都不会变，那么期权头寸是什么类型？
- 15.5 期权头寸的 gamma 代表什么？当一个期权空头头寸的 gamma 为很大的负值，并且 delta 为零，其风险是什么？

- 15.6 “构造一个合成期权头寸的过程就是对冲该期权头寸的逆过程。”请解释这句话的意思。
- 15.7 为什么在 1987 年 10 月 19 日证券组合的保险方式失效了？
- 15.8 一个执行价格为 \$40、处于虚值状态的看涨期权，其 Black-Scholes 公式的价格为 \$4.00。一个出售了该期权合约的交易商计划使用止损策略。交易商计划以 \$40.10 买入，以 \$39.90 卖出。估计股票被买入或卖出的预期次数。
- 15.9 假设一股票现价为 \$20，假想一个执行价格为 \$25 的看涨期权，由频繁变化的股票头寸合成。考虑下面两种情景：
- 在期权有效期内，股票价格由 \$20 稳定增长至 \$35。
  - 股票价格波动剧烈，最终价格为 \$35。
- 请解释哪种方案使合成的期权更值钱？解释你的答案。
- 15.10 1 000 个白银期货的欧式看涨期权的空头头寸的 delta 值为多少？该期权有效期为 8 个月，期权的标的期货合约有效期为 9 个月。当前 9 个月期的白银期货价格为每盎司 \$8.00，期权执行价格为每盎司 \$8.00，无风险年利率为 12%，白银价格的年波动率为 18%。
- 15.11 在习题 15.10 中，若进行 delta 套期保值，白银期货的初始头寸至少应为多少？如果使用白银本身，初始头寸为多少？如果使用一年期白银期货，初始头寸应为多少？假设没有贮存费用。
- 15.12 一家公司打算对一个货币的看涨期权和看跌期权组成的多头头寸组合进行 delta 套期保值。请解释下面哪种情况结果最佳？
- 一个基本稳定的即期汇率。
  - 一个变动剧烈的即期汇率。
- 请解释你的答案。
- 15.13 一家金融机构拥有一种货币的看涨期权和看跌期权组成的空头头寸组合，请重新分析习题 15.12。
- 15.14 一个金融机构刚刚卖出 1 000 个 7 个月期欧式日元看涨期权。假设即期汇率为 0.80 美分/日元，执行价格为 0.81 美分/日元，美元的无风险利率为每年 8%，日元的无风险利率为每年 5%，日元的波动率为每年 15%。计算并解释说明期权的 delta、vega、theta 和 rho。
- 15.15 在什么情况下，只需在组合中加入一个欧式可交易期权，就可使一个欧式股票指数期权的头寸获得 gamma 中性和 vega 中性？
- 15.16 某个基金经理拥有一个风险分散的组合，该组合的状况可由 S&P 500 来反映，价值 3.6 亿美元。S&P 500 的点数为 1 200，该组合的经理打算购买保险，防止在随后的 6 个月中组合价值下跌超过 5%。无风险利率为每年 6%。该组合以及 S&P 500 的红利收益率为 3%，指数的波动率为每年 30%。
- 如果基金经理购买可交易欧式看跌期权，保险费为多少？
  - 详细解释包括可交易欧式看涨期权在内的几种策略，并说明它们如何得到相同的结果。
  - 如果基金经理决定通过部分无风险证券组合来提供保险，初始头寸应为多少？

- (d) 如果基金经理决定通过使用 9 个月期指数期货来提供保险，初始头寸应为多少？
- 15.17 假设某证券组合的 beta 为 1.5，年红利收益率为 4%，重复习题 15.16 中的几个问题。
- 15.18 证明代替等式中的不同项，等式 (15.7) 在以下情况仍成立：
- 不付红利股票的单一欧式看涨期权。
  - 不付红利股票的单一欧式看跌期权。
  - 任何不付红利股票的欧式看涨期权和看跌期权的组合。
- 15.19 与等式 (15.7) 相对应的 (a) 一种货币衍生产品的组合以及 (b) 一种期货衍生产品的组合的等式是怎样的？
- 15.20 假设要为 700 亿美元的权益资产组合做个保险计划。假设此计划可防止资产价值在一年内下跌超过 5%。做任何你认为必要的估计，利用 DerivaGem 软件计算如果在一天之内市场下降 23%，该组合保险计划的管理者应出售价值多少的股票或期货合约？
- 15.21 一个股票指数的远期合约和对应的期货合约的 delta 值相同吗？请解释你的答案。
- 15.22 一个银行的基于美元/欧元汇率的期权头寸的 delta 值为 30 000，gamma 值为 -80 000。请说明这些数字的含义。汇率（每欧元对应的美元数额）为 0.90。为了 delta 中性化，你需要持有什么头寸？过了较短的时间段，汇率变成 0.93。请估计新的 delta 值。为了 delta 中性化，应该再进行什么交易？假设银行在刚开始时已经建立了 delta 中性头寸，那么汇率的上述变化中，银行获得了收益还是遭受了损失？
- 15.23 利用看涨期权一看跌期权之间的平价关系推导不付红利股票的如下二者之间的关系：
- 一个欧式看涨期权的 delta 值和一个欧式看跌期权的 delta 值。
  - 一个欧式看涨期权的 gamma 值和一个欧式看跌期权的 gamma 值。
  - 一个欧式看涨期权的 vega 值和一个欧式看跌期权的 vega 值。
  - 一个欧式看涨期权的 theta 值和一个欧式看跌期权的 theta 值。

## 课后练习

- 15.24 考虑一个 1 年期欧式股票看涨期权。股价为 \$30，执行价格为 \$30，无风险利率为 5%，波动率为 25% p.a.。利用 DerivaGem 软件计算期权的价格、delta、gamma、vega、theta 以及 rho。把股票价格改变成 \$30.1，重新计算期权价格，并验证上面计算的 delta 值是正确的。把股票价格改变成 \$30.1，重新计算 delta 值，并验证上面计算的 gamma 值是正确的。用类似的方法，验证 vega、theta 和 rho 值是正确的。利用 DerivaGem 的 Applications Builder Functions 来画图描述期权的价格、delta、gamma、vega、theta 和 rho 与股票价格之间的关系。
- 15.25 一家金融机构有下列英镑的柜台交易的期权组合：

| 种类   | 头寸状况   | 期权的 delta | 期权的 gamma | 期权的 vega |
|------|--------|-----------|-----------|----------|
| 看涨期权 | -1 000 | 0.5       | 2.2       | 1.8      |
| 看涨期权 | -500   | 0.8       | 0.6       | 0.2      |
| 看跌期权 | -2 000 | -0.40     | 1.3       | 0.7      |
| 看涨期权 | -500   | 0.70      | 1.8       | 1.4      |

某个可交易期权，其 delta 值为 0.6，gamma 值为 1.5，vega 值为 0.8。

- (a) 可交易期权和英镑的头寸为何值时，使得该组合为 delta 中性和 gamma 中性。  
 (b) 可交易期权和英镑的头寸为何值时，使得该组合为 vega 中性和 delta 中性。
- 15.26 再次考虑习题 15.25 中的情况。假设第二个可交易期权的 delta 值为 0.1, gamma 值为 0.5, vega 值为 0.6。如何才能使该组合为 delta、vega、gamma 中性？
- 15.27 一个银行提供了一种存款产品，保证投资者将在 6 个月中获得 (a) 0 以及 (b) 市场指数收益的 40%，这两者中的较大者。某人计划投资 10 万美元在该产品上。试描述该产品损益状况类似于某个指数期权。假设无风险利率为每年 8%，指数的年红利收益率为 3%，指数的波动率为每年 25%。这是一笔好交易吗？
- 15.28 第 14 章中，以期货价格  $F_0$  表示的欧式看涨期货期权的价格  $c$  的公式为：

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - K N(d_2)]$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} \quad \text{且} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$K$ 、 $r$ 、 $T$  和  $\sigma$  分别为执行价格、利率、到期期限和波动率。

- (a) 请证明  $F_0 N'(d_1) = K N'(d_2)$ 。  
 (b) 请证明关于期货价格的看涨期权价格的 delta 值为  $e^{-rT} N(d_1)$ 。  
 (c) 请证明看涨期权价格的 vega 为  $F_0 \sqrt{T} N'(d_1) e^{-rT}$ 。  
 (d) 请证明 15.9 节最后给出的看涨期货期权的 rho 公式。

看涨期货期权的 delta、gamma、theta 和 vega 值与支付红利收益率  $q$  的股票的期权的相应值类似，其中要以  $r$  替换  $q$ ，以  $F_0$  替换  $S_0$ 。请解释为什么对于看涨期货期权的 rho，上述的关系不成立。

- 15.29 利用 DerivaGem 软件来验证对于 15.1 节中考虑的期权，方程 (15.7) 成立（注意：DerivaGem 计算的 theta 值是“每日历天”，而方程 (15.7) 中的 theta 是“每年”）。
- 15.30 利用 DerivaGem 的 Applications Builder Functions 来重新给出表 15.2（表 15.2 中，股票头寸被近似为 100 股）。请计算每周的头寸的 gamma 和 theta 值。请计算每周证券组合价值的变化，并验证方程 (15.6) 是近似成立的（注意：DerivaGem 计算的 theta 值是“每日历天”，而方程 (15.6) 中的 theta 是“每年”）。

## 附录

### 泰勒展开和对冲参数

衍生证券组合的管理者可以对冲各种用套期保值参数表示的风险，这些方法可用短期内证券组合价值变化的泰勒展开来说明。如果标的资产的波动率设定为常数，证券组合的价值  $\Pi$  是标的资产价格  $S$  和时间  $t$  的函数。泰勒展开给出：

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\Delta t^2 + \frac{\partial^2\Pi}{\partial S\partial t}\Delta S\Delta t + \dots \quad (15A.1)$$

这里  $\Delta\Pi$  和  $\Delta S$  是在小时间间隔  $\Delta t$  内  $\Pi$  和  $S$  的变化。delta 对冲消掉了上式右边的第一项。第二项不是随机变量。当证券组合是 gamma 和 delta 中性时，第三项（是一阶  $\Delta t$ ）是 0。其他项都是  $\Delta t$  的高阶小量。

对 delta 中性证券组合，方程 (15A.1) 右边的第一项为 0，所以：

$$\Delta\Pi = \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2$$

当忽略  $\Delta t$  的高阶项时，这就是方程 (15.6)。

当标的资产的波动率不确定时， $\Pi$  是  $\sigma$ 、 $S$  和  $t$  的函数。方程 (15A.1) 变为：

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial\sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Pi}{\partial\sigma^2}\Delta\sigma^2 + \dots$$

这里  $\Delta\sigma$  是时间  $\Delta t$  内  $\sigma$  的变化。在这种情况下，delta 中性消掉了右边的第一项。证券组合的 vega 中性消掉了第二项。第三项不是随机变量。证券组合的 gamma 中性消掉了右边的第四项。交易员们有时定义其他套期保值参数来匹配这一展开式中的更高阶的项。

## 波动率微笑

Black-Scholes 模型预测期权市场价格的准确程度如何呢？交易者们在现实中确实是利用 Black-Scholes 模型来决定一个期权的价格吗？实际中资产价格真的服从对数正态分布吗？在本章中，我们将着手解答这些问题。我们将解释交易者们确实频繁使用 Black-Scholes 模型，但是与 Black 与 Scholes 的原先意图不完全一样。因为，交易者们在期权定价中，允许波动率依附于执行价格和有效期。

所谓的波动率微笑曲线是一个图，它反映了隐含波动率作为执行价格函数的关系。本章中我们将描述交易者们在股权和外汇市场使用的波动率微笑。我们将解释波动率微笑与未来资产价格服从风险中性概率分布这一假设之间的关系。我们也将讨论期权交易者是如何允许波动率成为期权有效期的函数，并讨论如何使用波动率集合来进行定价。

### 16.1 回顾看跌期权与看涨期权的平价关系

为了理解波动率微笑，我们从第 9 章中的看跌期权与看涨期权的平价关系开始。这是欧式看涨期权的价格  $c$  与欧式看跌期权的价格  $p$  之间的关系：

$$p + S_0 e^{-qT} = c + Ke^{-rT} \quad (16.1)$$

该看涨期权和看跌期权有相同的执行价格  $K$  和相同的到期日  $T$ 。变量  $S_0$  是标的资产当前的价格， $r$  是  $T$  期限的无风险利率， $q$  是资产的收益率。

看跌期权与看涨期权的平价关系建立在相对简单的无套利机会假设之上。该关系的推导中，并不需要对未来的资产价格概率分布做出任何假设。不管资产价格服从还是不服从对数概率分布，这个关系都是成立的。

假设  $p_{BS}$  和  $c_{BS}$  是基于某个特定的波动率值，以 Black-Scholes 模型计算出来的欧式看跌和看涨期权价值。进一步假设  $p_{mkt}$  和  $c_{mkt}$  分别为这些期权的市场价值。因为 Black-Scholes 模型的解也存在看跌期权与看涨期权的平价关系，我们得到

$$p_{BS} + S_0 e^{-qT} = c_{BS} + Ke^{-rT}$$

无套利情况下，市场价格也存在看跌期权与看涨期权的平价关系，我们得到

$$p_{mkt} + S_0 e^{-qT} = c_{mkt} + Ke^{-rT}$$

将以上两个式子相减，得到

$$P_{BS} - P_{mkt} = C_{BS} - C_{mkt} \quad (16.2)$$

该公式说明了，对于执行价格和有效期相同的欧式看跌期权和看涨期权，以 Black-Scholes 模型计算的欧式看跌期权价值的美元误差和以 Black-Scholes 模型计算的欧式看涨期权价值的美元误差正好相等。

假设这个看跌期权的隐含波动率为 22%。这说明在 Black-Scholes 模型以 22% 波动率计算时， $P_{BS} = P_{mkt}$ 。此时，根据公式 (16.2)，有  $C_{BS} = C_{mkt}$ 。所以相应的看涨期权的隐含波动率也同样为 22%。这个讨论说明执行价格和有效期间相同的欧式看涨期权和欧式看跌期权的隐含波动率总是相同的。也就是说，对于给定的执行价格和有效期间，以 Black-Scholes 模型定价欧式看跌期权时要用到的正确的波动率，和相应的欧式看涨期权定价中要用到的正确的波动率是一样的。这对于美式期权也是近似正确的。所以，当交易者们谈到隐含波动率与执行价格或有效期之间的关系时，不需要声明他们考虑的是看涨期权还是看跌期权。对于看涨期权和看跌期权，上述的关系是相同的。

**[例 16.1]** 澳元的价值为 \$0.60。美国和澳大利亚的无风险利率分别为 5%p.a. 与 10%p.a.。有效期为 1 年、执行价格为 \$0.59 的基于澳元的欧式看涨期权的市价为 0.0236。以 DerivaGem 计算的该看涨期权的隐含波动率为 14.5%。不存在套利机会时，公式 (16.1) 中的看跌期权与看涨期权的平价关系中，我们应该设  $q$  等于外汇无风险利率。所以，有效期为 1 年、执行价格为 \$0.59 的欧式看跌期权的价格  $p$  应该满足

$$p + 0.60e^{-0.10 \times 1} = 0.0236 + 0.59e^{-0.05 \times 1}$$

即  $p = 0.0419$ 。以 DerivaGem 可以算出价格如此的看跌期权的隐含波动率也是 14.5%。这就是我们希望得到的结果。

## 16.2 外汇期权

交易者们使用的典型的外汇期权波动率微笑如图 16.1 所示。期权处于两平状态时，波动率相对很低。移动到虚值状态或实值状态时，波动率变得越来越高。

在本章附录中，我们将解释如何从期权的波动率微笑中推导期权到期之时，在未来时间资产价格的风险中性概率分布。我们将它称为隐含分布 (implied distribution)。图 16.1 中波动率微笑所对应的概率分布如图 16.2 中的实线部分。与隐含分布具有相同均值和标准差的对数正态分布如图 16.2 中的虚线部分。我们可以看到隐含分布的尾部比对数正态分布的尾部更厚。<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 这被称为峰度 (kurtosis)。注意，除了尾部更厚之外，隐含分布更“尖”。比起对数正态分布，汇率的小幅度和大幅度变化发生的概率更高，中幅度变化的概率更小。

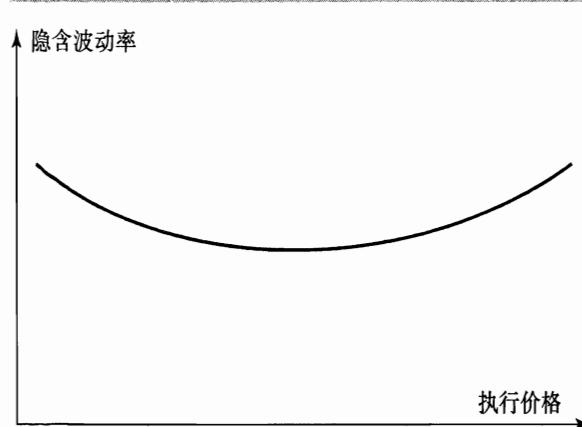


图 16.1 外汇期权的波动率微笑

为了解释图 16.1 与图 16.2 是相互一致的，首先考虑具有高执行价格  $K_2$  的深度虚值看涨期权。汇率上升到  $K_2$  以上时，期权才会执行。图 16.2 中可以看到，在隐含分布中这样的概率比对数正态分布中要高。我们可以知道根据隐含分布得到的期权价格相对更高。而相对较高的价格会伴随相对较高的隐含波动率，这与图 16.1 中观察到的结果一致。所以对于执行价格高的期权，两个图是相互一致的。再考虑具有低执行价格  $K_1$  的深度虚值看跌期权。汇率下降到  $K_1$  以下时，期权才会执行。图 16.2 中可以看到，在隐含分布中这样的概率还是比对数正态分布中要高。我们可以知道根据隐含分布得到的期权价格相对更高。而相对较高的价格会伴随相对较高的隐含波动率，这与图 16.1 中观察到的结果一致。

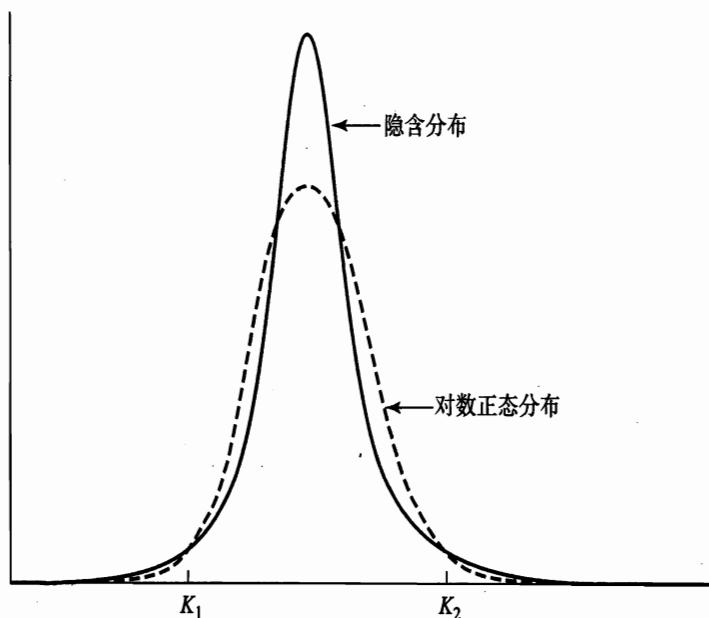


图 16.2 外汇期权的隐含分布和对数正态分布

## 实证结果

我们已经看到，交易者们使用外汇期权的波动率微笑说明对数正态分布会低估汇率极端移动的概率。为了检验是否真的是这样，表 16.1 中检验了 10 年中 12 种不同的汇率的每日变化。<sup>2</sup> 获取该表的第一个步骤是计算每种汇率的每日变化百分比的标准差。下一步是记录实际变化百分比超过 1 个标准差的频度，超过 2 个标准差的频度，依此类推。最后一步是计算变化百分比服从正态分布时，上述的频度是多少（对数正态分布模型中每日变化百分比近似服从正态分布）。

每日变化超过 3 个标准差的次数等于 1.34% 的天数。对数正态分布模型预测的上述值只有 0.27% 的天数。每日变化超过 4、5 以及 6 个标准差的次数分别为 0.29%、0.08% 以及 0.03% 的天数。而对数正态分布模型预测的是，这样的事情几乎不会发生。所以，该表说明了更厚尾部的确存在，交易者们使用的波动率微笑是可信的。商业剪影 16.1 中讲述了我们可以先于其他竞争者进行如表 16.1 中的分析，以便获利。

## 外汇期权的波动率微笑的原因

为什么汇率不服从对数正态分布？一种资产价格服从对数正态分布的两个条件是：

1. 资产的波动率是常数
2. 资产价格平滑变动，没有跳跃

现实中，汇率并不满足这两个条件。汇率的波动率不是常数，而且汇率经常发生跳跃。<sup>3</sup> 非常数波动率以及跳跃的存在使得极端情况发生的可能性变大。跳跃和非常数波动率的影响程度依赖于期权的有效期。随着期权有效期变长，非常数

表 16.1 每日汇率变化超过 1、2、…、6 个标准差的天

数百分比 (SD=每日变化的标准差)

|       | 现实世界  | 对数正态分布模型 |
|-------|-------|----------|
| >1 SD | 25.04 | 31.73    |
| >2 SD | 5.27  | 4.55     |
| >3 SD | 1.34  | 0.27     |
| >4 SD | 0.29  | 0.01     |
| >5 SD | 0.08  | 0.00     |
| >6 SD | 0.03  | 0.00     |

<sup>2</sup> 该表取自 J. C. Hull and A. White, “Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed.” *Journal of Derivatives*, 5, No.3 (Spring 1998) :9-19.

<sup>3</sup> 通常这些跳跃是对中央银行行为的反应。

### 商业剪影 16.1 从外汇期权中获得利润

假设大多数市场参与者认为汇率是服从对数正态分布的，他们可能对基于某种汇率的期权都使用相同的波动率。你刚刚完成了表 16.1 中的分析，发现对数正态分布并不能很好地描述汇率。此时你应该怎么办呢？

答案是你应该买入很多不同货币的深度虚值看涨期权和看跌期权，然后等待。这些期权将相对便宜，相比对数正态分布模型给出的预测，这些期权中的很多会接近于获利状态。你的损益现值平均来说会大于这些期权的成本。

20世纪 80 年代中期，一部分交易员发现了汇率概率分布具有厚尾部。而其他人还是认为 Black-Scholes 的对数正态分布假设是正确的。一小部分见多识广的交易员执行了上面描述的策略，获得了很多利润。到了 20 世纪 80 年代末，所有人都意识到了外汇期权应该用一种特别的波动率微笑定价，上述的交易机会随之消失。

波动率对于价格的影响比例更为显著，而非常数波动率对于波动率微笑的影响比例变得不显著。随着期权有效期变长，跳跃对于价格以及波动率微笑的影响变得不显著。当我们考虑足够长期限的期权时，跳跃的影响倾向于相互抵消，股价存在跳跃时的汇率概率分布与股价平滑变动时的汇率概率分布几乎是相同的。

### 16.3 权益性期权

Rubinstein (1985, 1994)、Jackwerth 和 Rubinstein (1996) 研究过权益性期权的波动率微笑。1987 年之前没有代表性的波动率微笑。到了 1987 年，交易者们开始用如图 16.3 所述的波动率微笑来定价权益性期权（基于单种股票以及股票指数）。它被称为波动率偏斜（volatility skew），随着执行价格上升，波动率下降。用来定价低执行价格期权（即深度虚值看跌期权或深度实值看涨期权）的波动率远远高于用来定价高执行价格期权（即深度实值看跌期权或深度虚值看涨期权）的波动率。

权益性期权的波动率微笑相应的隐含分布如图 16.4 中的实线部分。具有相同均值和标准差的对数正态分布的隐含分布如图 16.4 中的虚线部分。可以看到隐含分布比对数正态分布左尾部更厚，而右尾部更薄。

为了解释图 16.3 与图 16.4 是相互一致的，如分析图 16.1 与图 16.2 一样，我们考虑深度虚值期权。图 16.4 中可以看到在隐含分布中执行价格为  $K_2$  深度虚值看涨期权价格，比对数正态分布时计算的价格要低。这是因为当且仅当股票价格到达  $K_2$  以上时期权损益才会实现，而这样的概率在隐含分布中比对数正态分布中要低。因此，在隐含分布给出的期权价格相对更低。较低价格伴随较低的隐含波动率，而这就是我们在图 16.4 中观察到的结果。再考虑执行价格为  $K_1$  的深度虚值看跌期权。当且仅当股票价格达到  $K_1$  以下时，期权损益才会实现。图 16.3 中可以看

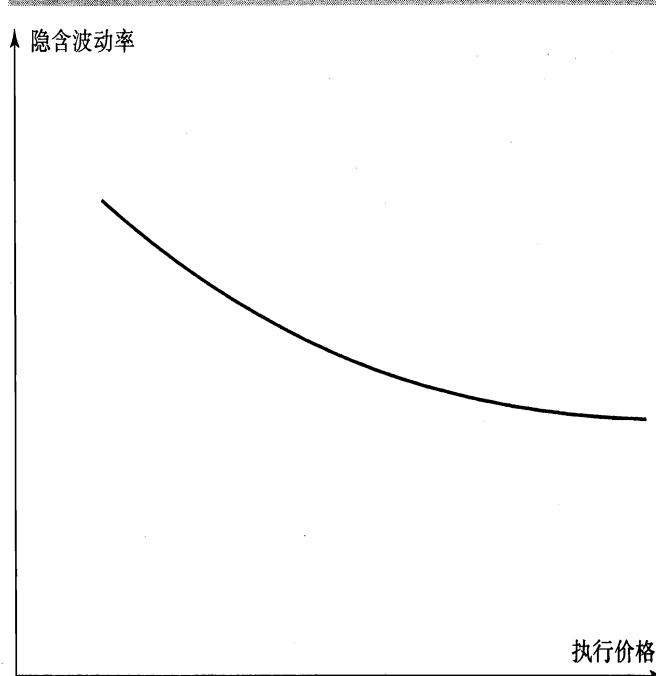


图 16.3 权益资产的波动率微笑

到，这种概率在隐含分布中比在对数正态分布中要高。所以，隐含分布给出的期权价格比对数正态分布中要高，也具有更高的隐含波动率。而这也正是我们在图 16.3 中观察到的结果。

### 权益性期权的波动率微笑的原因

对于权益性期权的波动率微笑的形状解释和杠杆有关。随着一家公司的权益

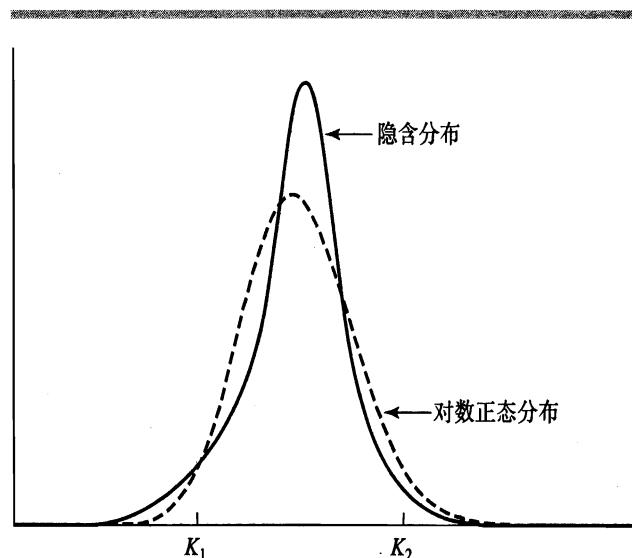


图 16.4 权益性期权的隐含分布与对数正态分布

### 商业剪影 16.2 崩盘恐惧症

有趣的是，图 16.3 中的权益性资产的波动率微笑模式是在 1987 年 10 月股市崩溃之后出现的。1987 年 10 月之前，隐含波动率依附于执行价格的程度没有那么明显。因此，Mark Rubinstein 提出权益性资产的波动率微笑形状的一个原因是“崩盘恐惧症”。交易员们担心类似于 1987 年 10 月的崩溃再次出现，所以他们按上述的波动率微笑定价。

有一些实证结果也支持这一解释。S&P 500 的下降中波动率偏斜倾向于陡峭。而 S&P 上升的时候，偏斜就不那么陡峭了。

价值降低，该公司的杠杆率上升。那么，该权益资产的风险更大，其波动率也上升。而随着一家公司的权益价值上升，该公司的杠杆率降低。那么，该权益资产的风险减少，其波动率也下降。所以，权益资产的波动率是价格的减函数，且和图 16.3、16.4 相一致。另一种解释是崩盘恐惧症（参见商业剪影 16.2）。

## 16.4 波动率期限结构和波动率集合

除了波动率微笑，交易者们在定价期权时也使用波动率期限结构。也就是说，在两平期权的定价中使用的波动率依赖于期权的有效期。当历史上短期波动率较低时，波动率一般是期限的增函数。这是因为，大家预期波动率会上升。类似地，当历史上短期波动率较高时，波动率一般是期限的减函数。这是因为，大家预期波动率会下降。

波动率集合（volatility surface）是把波动率微笑和波动率期限结构结合起来制成波动率表格，以便给任一执行价格和任一期限的期权定价。表 16.2 中给出了外汇期权定价中可能使用的波动率集合的一个例子。

表 16.2 中，一个尺度是执行价格，而另外一个尺度是期限。表的主体中给出了以 Black-Scholes 模型计算的隐含波动率。在一个给定时间，表中的一些项可能

表 16.2 波动率集合

|      | 执行价格 |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
|      | 0.90 | 0.95 | 1.00 | 1.05 | 1.10 |
| 1 个月 | 14.2 | 13.0 | 12.0 | 13.1 | 14.5 |
| 3 个月 | 14.0 | 13.0 | 12.0 | 13.1 | 14.2 |
| 6 个月 | 14.1 | 13.3 | 12.5 | 13.4 | 14.3 |
| 1 年  | 14.7 | 14.0 | 13.5 | 14.0 | 14.8 |
| 2 年  | 15.0 | 14.4 | 14.0 | 14.5 | 15.1 |
| 5 年  | 14.8 | 14.6 | 14.4 | 14.7 | 15.0 |

对应于存在可靠市场数据的期权。这些期权的隐含波动率直接从它们的市场价格计算得出，并被输入到该表中去。表中的其他项由线性插值方法得出。

当需要为一个新发行的期权定价时，金融工程师们通常从该表中寻找合适的波动率。例如，对执行价格为 1.05 的 9 个月期期权进行估值时，金融工程师们会对表 16.2 中的 13.4 和 14.0 进行线性插值，得到 13.7% 的波动率。接下来，可以在 Black-Scholes 模型或二叉树图中使用这个波动率了。

波动率微笑的形状依赖于期权的期限。表 16.2 中可以看到，随着期权的期限增加，波动率微笑变得不显著。定义  $T$  为有效期限， $F_0$  为资产的远期价格。一些金融工程师倾向于定义波动率微笑为隐含波动率和

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \ln \left( \frac{K}{F_0} \right)$$

之间的函数关系，而不是隐含波动率和  $K$  之间的函数关系。这种情况下，波动率微笑不是那么依赖于有效期限。<sup>4</sup>

## 模型的作用

如果交易者准备对每种期权使用不同的波动率，所使用的定价模型的重要性何在呢？实际上，Black-Scholes 模型不过是常用的、能保证一种期权的定价和其他交易活跃的期权的市价相互一致的一种插值工具。如果交易者们不使用 Black-Scholes 模型而使用另外的可行模型，那么波动率集合和波动率微笑的形状可能会有所改变。而有理由相信，市场中报出的期权的美元价格不会有多少变化。

## 16.5 套期保值参数

波动率微笑的引入会使得套期保值参数的计算变得更为复杂。Derman 描述过交易者们有时使用的一系列波动率体系或经验法则。<sup>5</sup> 最简单的一个法则是 sticky strike。其中假设从今天过渡到明天时，一个期权的隐含波动率保持不变。那么，对于一个期权使用的波动率是该期权当前的隐含波动率时，以 black-scholes 假设计算出来的套期保值参数是正确的。

一个更为复杂的法则则是所谓的 sticky delta。其中假设我们今天观察到的期权价格与  $S/K$  之间的关系式在明天也是成立的。这里假设，随着标的资产价格的变化，相应期权的隐含波动率的变化是反映期权的价值状况（即实值或虚值的程度）的。sticky delta 法则下，第 15 章中给出的套期保值参数计算公式不再适用。例

<sup>4</sup> 关于该方法的讨论，参见 S. Natenberg *Option Pricing and Volatility: Advanced Trading Strategies and Techniques*, 2nd edn. McGraw-Hill, 1994; R. Tompkins *Options Analysis: A State of the Art Guide to Options Pricing*, Burr Ridge, IL: Irwin, 1994.

<sup>5</sup> 参见 E. Derman, “Regimes of Volatility,” *Risk*, April 1999, 54–59.

如，看涨期权的 Delta 为

$$\frac{\partial c_{BS}}{\partial S} + \frac{\partial c_{BS}}{\partial \sigma_{imp}} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial S}$$

其中， $c_{BS}$  是以资产价格  $S$  和隐含波动率  $\sigma_{imp}$  的函数表示的期权的 Black-Scholes 价格。考虑该公式对权益性看涨期权的 Delta 有什么影响。图 16.3 中可以知道，波动率是执行价格  $K$  的减函数。那么，波动率也可以看作是  $S/K$  的增函数。因此，在 sticky delta 规则中，波动率随着资产价格上升而上升，则

$$\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial S} > 0$$

结果是得到的 Delta 值比 Black-Scholes 假设下得到的 Delta 值要大。

我们可以看到 sticky strike rule 与 sticky delta rule 所对应的模型不是内部一致的（除了波动率微笑曲线在所有期限都是平坦的）。和波动率微笑完全一致的一种模型是所谓的隐含波动率函数（implied volatility function）模型或隐含树图（implied tree）模型。我们将在第 24 章中解释这些模型。

现实中，银行等金融机构设法保证，它们对于能经常观察到的一些波动率集合变化的风险暴露降到一定水平以下。确定这些变化的一种方法是主成分分析法，将在第 18 章中讨论。

## 16.6 预期价格有一次大幅波动

现在，我们用一个例子来看权益性市场中不寻常的波动率微笑是怎么发生的。假设一种股票现价为 \$50，几天后会发布一则重要的信息，预期这种发布的影响是股价会上升 \$8 或者下降 \$8（该宣告可能和接管企图或者某个重要的诉讼裁决有关）。那么，比如说，1 个月后，股价的概率分布会是两个对数正态分布的组合，

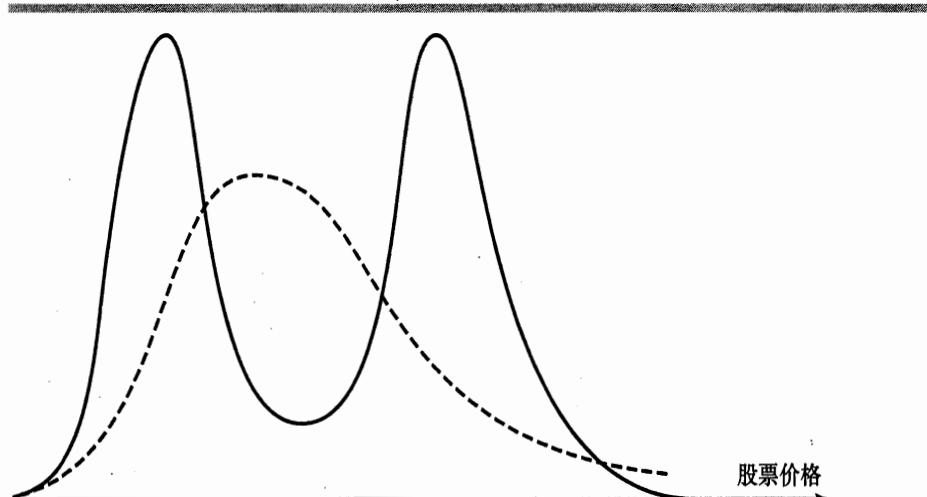


图 16.5 一次大幅波动的影响。实线部分是真实的概率分布；虚线部分是对数正态分布

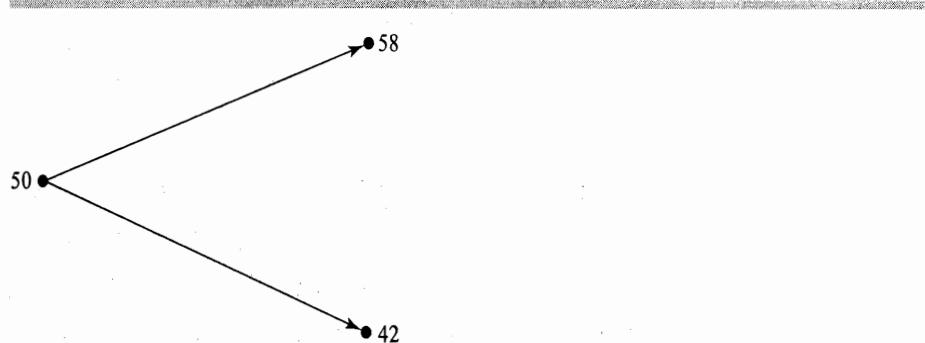


图 16.6 1 个月后的股价变化

第一个对应于好消息，第二个对应于坏消息。图 16.5 中描述了这种情况。实线部分是 1 个月后股价组合的对数正态分布，虚线部分是具有相同均值和标准差的对数正态概率分布。

正确的概率分布是双峰的（而不是对数正态分布）。研究双峰股价分布特点的一个简单途径是考虑二项式分布的极端情况。我们接下来进行这样的研究。

假设股票现价为 \$50，而且已经知道 1 个月后价格会达到 \$42 或 \$58。进一步假设无风险利率为 12%p.a.。图 16.6 中描述了这种情况。可以用第 11 章的二叉树模型估值期权，这里， $u = 1.16$ ,  $d = 0.84$ ,  $a = 1.0101$ ,  $p = 0.5314$ 。一系列不同期权的估值结果如表 16.3 中的数据。第一列给出了可能的执行价格；第二列给出了 1 个月期欧式看涨期权的价格；第三列给出了 1 个月期欧式看跌期权的价格；第四列给出了隐含波动率（如 16.1 节的讲述，相同执行价格和相同有效期的欧式看涨期权和欧式看跌期权的隐含波动率是相同的）。图 16.7 画出了相应的波动率微笑。它的形状和“皱眉”相似（和外汇期权的波动率微笑形状正好相反），当我们往虚值或实值状态移动时，波动率减小。这种情况下，运用执行价格为 50 的期权价格得到的隐含波动率，将会高估执行价格为 44 或 56 的期权价格。

表 16.3 真实概率分布是双峰分布时的隐含波动率

| 执行价格 (\$) | 看涨期权价格 (\$) | 看跌期权价格 (\$) | 隐含波动率 (\$) |
|-----------|-------------|-------------|------------|
| 42        | 8.42        | 0.00        | 0.0        |
| 44        | 7.37        | 0.93        | 58.8       |
| 46        | 6.31        | 1.86        | 66.6       |
| 48        | 5.26        | 2.78        | 69.5       |
| 50        | 4.21        | 3.71        | 69.2       |
| 52        | 3.16        | 4.64        | 66.1       |
| 54        | 2.10        | 5.57        | 60.0       |
| 56        | 1.05        | 6.50        | 49.0       |
| 58        | 0.00        | 7.42        | 0.0        |

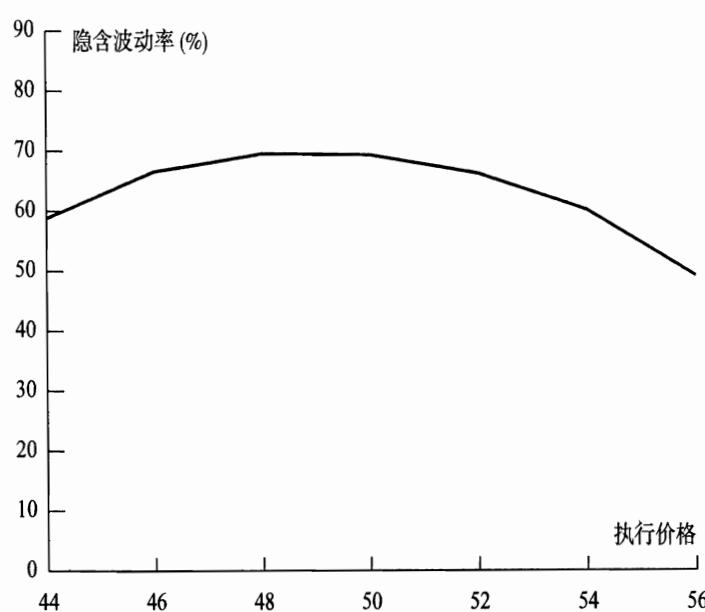


图 16.7 表 16.3 对应的波动率微笑

## 小 结

Black-Scholes 模型及其扩展形式中假定，未来某个时间的标的资产价格服从对数正态分布。交易者们有时不使用这一假设。交易者们假设权益性资产价格的概率分布比对数正态概率分布左尾部更厚、右尾部更薄。交易者们也假设汇率的概率分布比对数正态概率分布，左尾部和右尾部都更厚。

交易者们利用波动率微笑来处理非对数正态分布的情况。波动率微笑定义一个期权的隐含波动率与执行价格之间的关系。对于权益性期权，波动率微笑是向下倾斜的。也就是说，虚值看跌期权和实值看涨期权具有较高的隐含波动率，而虚值看涨期权和实值看跌期权具有较低的隐含波动率。对于外汇期权，波动率微笑呈现 U 形。虚值期权与实值期权比两平期权具有更高的隐含波动率。

交易者们也使用波动率期限结构。其中，期权的隐含波动率依赖于期权的期限。波动率微笑和波动率期限结构结合起来可以做出波动率集合表。这样，可以将隐含波动率定义为执行价格和有效期限的函数。

## 参考读物

- Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen. "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance*, 52, No. 5 (December 1997): 2004-49.
- Bates, D. S. "Post-'87 Crash Fears in the S&P Futures Market," *Journal of Econometrics*, 94 (January/February 2000): 181-238.
- Derman, E. "Regimes of Volatility," *Risk*, April 1999: 55-59.

- Ederington, L. H., and W. Guan. "Why Are Those Options Smiling," *Journal of Derivatives*, 10, 2 (2002): 9–34.
- Jackwerth, J.C., and M. Rubinstein. "Recovering Probability Distributions from Option Prices," *Journal of Finance*, 51 (December 1996): 1611–31.
- Lauterbach, B., and P. Schultz. "Pricing Warrants: An Empirical Study of the Black–Scholes Model and Its Alternatives," *Journal of Finance*, 4, No. 4 (September 1990): 1181–1210.
- Melick, W. R., and C. P. Thomas. "Recovering an Asset's Implied Probability Density Function from Option Prices: An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, 1 (March 1997): 91–115.
- Rubinstein, M. "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976, through August 31, 1978," *Journal of Finance*, 40 (June 1985): 455–80.
- Rubinstein, M. "Implied Binomial Trees," *Journal of Finance*, 49, 3 (July 1994): 771–818.
- Xu, X., and S.J. Taylor. "The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29 (1994): 57–74.

## 问题和习题

- 16.1 以下情况中，我们可以观察到什么样的波动率微笑：
- 股票价格分布的两条尾部都比对数正态分布的尾部薄。
  - 右尾部比对数正态分布要厚，左尾部比对数正态分布要薄。
- 16.2 权益性资产的波动率微笑是什么形状？
- 16.3 标的资产价格的跳跃运动会产生什么样的波动率微笑？这种波动率微笑的形状对 2 年期的期权比 3 个月期的期权更显著吗？
- 16.4 一个欧式看涨期权和看跌期权的执行价格和到期期限都相同。看涨期权和看跌期权的隐含波动率分别为 30% 和 25%。交易员们会怎么行动？
- 16.5 相比对数正态分布，一个分布的左尾部更厚，右尾部更薄。请仔细解释这种分布为什么使波动率微笑是向下倾斜的。
- 16.6 一个欧式看涨期权的市价为 \$3.00，以波动率 30% 给出的 Black–Scholes 价格为 \$3.50。相同执行价格和到期期限的欧式看跌期权的 Black–Scholes 定价为 \$1.00。那么，该看跌期权的市场价格为多少？请解释你的分析过程。
- 16.7 请解释“crashophobia”的含义。
- 16.8 当前，一个股票的价格为 \$20。预计明天会有新信息宣布股价会上升 \$5 或下降 \$5。以 Black–Scholes 模型估值基于上述股票的 1 个月期期权时，会存在什么问题？
- 16.9 当波动率是不确定的，并且和股票价格正相关，那么，6 个月期期权的波动率微笑形状会如何？
- 16.10 用实证检验一个股票期权定价模型的时候，你认为会遇到哪些问题？
- 16.11 假设一个中央银行的政策中，允许汇率波动在 0.97 和 1.03 之间。基于该汇率的期权的隐含波动率模式会如何？
- 16.12 期权交易员们有时将深度虚值期权称为基于波动率的期权。请给出你的解释。
- 16.13 一个欧式看涨股票期权的执行价格为 \$30，到期期限为 1 年，隐含波动率为 30%。相同股票的欧式看跌期权的执行价格为 \$30，到期期限为 1 年，隐含波动率为 33%。对于交易员来说，会存在什么样的套利机会？仅当 Black–Scholes 模型中的对数正态分

布假设成立的时候，该套利策略才会有效吗？请仔细解释原因。

- 16.14 假设明天会有和微软相关的重要的诉讼判决将发布。当前的微软估价为\$60。如果裁决有利于微软，股价会上升到\$75。如果裁决不利于微软，股价会下降到\$50。有利裁决的风险中性概率为多少？假设裁决之后 6 个月期间，裁决有利的时候，微软股价的波动率将为 25%；裁决不利的时候，为 40%。利用 DerivaGem 软件计算当前的微软股票的 6 个月期欧式期权的隐含波动率和执行价格之间的关系。微软公司不支付红利。假设 6 个月期无风险利率为 6%。考虑执行价格为 30、40、50、60、70 以及 80 的看涨期权。
- 16.15 当前汇率是 0.8000。该汇率的波动率报价为 12%，汇率相关的两个国家的利率相同。根据对数正态分布假设，估计该汇率在 3 个月后 (a) 小于等于 0.7000；(b) 在 0.7000 和 0.7500 之间；(c) 在 0.7500 和 0.8000 之间；(d) 在 0.8000 和 0.8500 之间；(e) 在 0.8500 和 0.9000 之间；(f) 大于等于 0.9000 的概率。如果考虑市场中观察到的汇率的波动率微笑，你上述的答案中哪些被低估或高估了？
- 16.16 一个股票价格为\$40。该股票的 6 个月期欧式看涨期权的执行价格为\$30，隐含波动率为 35%。该股票的 6 个月期欧式看涨期权的执行价格为\$50，隐含波动率为 28%。6 个月期无风险利率为 5%，预计没有红利支付。请解释为什么两个隐含波动率不同。利用 DerivaGem 软件计算执行价格分别为\$30 和\$50 的两个 6 个月期欧式看涨股票期权的价格。利用看涨期权一看跌期权平价关系式计算执行价格分别为\$30 和\$50 的两个 6 个月期欧式看跌股票期权的价格。利用 DerivaGem 软件计算上述执行价格分别为\$30 和\$50 的两个看跌期权的隐含波动率。
- 16.17 “对于交易者们来说，Black-Scholes 模型只是一种插值工具。”请讨论这一观点。

## 课后练习

- 16.18 一家公司的股票价格为\$4。该公司没有外债。分析师们估计该公司的清算价值大于等于 30 万美元，而且该公司流通在外的股份数额为 10 万美元。你预计波动率微笑形状会如何？
- 16.19 一家公司现在等待着一个诉讼结果，将在 1 个月内得知消息。当前的股价为\$20。如果结果是有利的，那么股价在 1 个月末将变成\$24。如果结果是不利的，那么股价在 1 个月末将变成\$18。1 个月期无风险利率为 8%p.a.。
- 有利结果发生的风险中性概率为多少？
  - 执行价格为\$19、\$20、\$21、\$22、\$23 的 1 个月期看涨期权的价值为多少？
  - 利用 DerivaGem 软件给出 1 个月期看涨期权的波动率微笑。
  - 请验证 1 个月期看跌期权的波动率微笑和 (c) 的答案是相同的。
- 16.20 当前，一个期货价格为\$40，无风险利率为 5%。明天会有新信息导致未来 3 个月的波动率会成为 10% 或 30%。第一种情况发生的概率为 60%，第二种情况发生的概率为 40%。利用 DerivaGem 软件给出 3 个月期期权的波动率微笑。
- 16.21 一系列外汇的相关数据在作者的网页给出：<http://www.rotman.utoronto.ca/~hull>  
请选择一种货币，并利用以上数据计算出和表 16.1 类似的表格。

- 16.22 一系列股票指数的相关数据在作者的网页给出：<http://www.rotman.utoronto.ca/~hull>  
请选择一种指数，并检验 3 个标准差的下降是否比 3 个标准差的上升发生得更频繁。
- 16.23 考虑执行价格和到期期限相同的欧式看涨期权和欧式看跌期权。请证明：当波动率在很短时间段内从  $\sigma_1$  水平上升到  $\sigma_2$  水平，两个期权价值的变化幅度是相同的。  
(提示：利用看跌期权和看涨期权之间的平价关系。)

## 附录

### 从波动率微笑曲线确定隐含的风险中性分布

执行价格为  $K$ ，有效期为  $T$  的一项资产的欧式看涨期权的价格可以表示如下：

$$c = e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} (S_T - K) g(S_T) dS_T$$

其中， $r$  为利率（假定其为常数值）， $S_T$  是资产时间  $T$  的价格， $g$  是  $S_T$  时的风险中性概率密度函数。对  $K$  求一次导数，可以得到：

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} g(S_T) dS_T$$

再对  $K$  求导得到：

$$\frac{\partial^2 c}{\partial K^2} = e^{-rT} g(K)$$

由此可以得出概率密度函数， $g$  的表达式：

$$g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}$$

Breeden 和 Litzenberger 于 1978 年得出的这一结果，可以通过波动率微笑估算风险中性概率分布。<sup>6</sup> 假设  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$  为欧式看涨期权的价格，有效期均为  $T$ ，执行价格分别为  $K - \delta$ 、 $K$  和  $K + \delta$ 。假定  $\delta$  足够小， $g(K)$  可近似估算为：

$$e^{rT} \frac{c_1 + c_3 - 2c_2}{\delta^2}$$

---

<sup>6</sup> 参见 D. T. Breeden and R. H. Litzenberger, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices," *Journal of Business*, 51 (1978), 621-51.



## 数值方法

若衍生证券估值没有精确解析公式时，可用数值方法，在本章中我们讨论可用于衍生证券估值的三种数值方法。第一种方法是第 11 章中介绍过的以树图表示资产价格变化的方法。第二种方法是第 12 章中解释随机过程时，简单叙述过的蒙特卡罗模拟方法。第三种方法是有限差分方法。

当衍生证券的收益依附于标的变量的历史数据或衍生证券依附于多个标的变量时，可用蒙特卡罗方法对该衍生证券进行估值。对于美式期权和持有者在到期前可做出提前执行决策的其他衍生证券，可用树图方法和有限差分方法来计算该衍生证券的价格。除了估值衍生证券，上述各种方法也可以用来计算诸如 delta、gamma 和 vega 等套期保值参数。

本章中讨论的基本方法可以用来解决绝大部分衍生证券的估值问题。但是有些时候，需要修改这些过程来处理一些特殊情况。我们将在第 24 章中对此进行讨论。

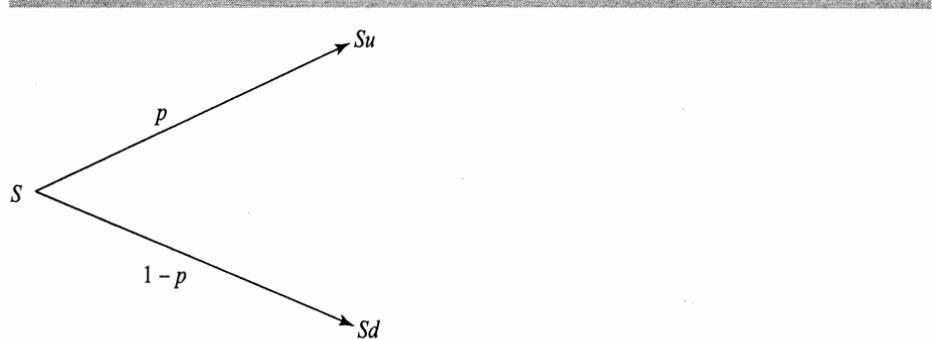
## 17.1 二叉树图

在第 11 章中我们介绍了二叉树模型，并说明了如何利用它们对欧式和美式期权进行估值。第 13 章与 14 章中的 Black-Scholes 公式及其扩展形式给出了欧式期权的解析解。<sup>1</sup> 美式期权的定价没有解析公式。所以，对这种期权进行估值时，二叉树是非常有用的方法。<sup>2</sup>

如第 11 章中所述，二叉树估值方法中将期权有效期分为很多很小的时间间隔  $\Delta t$ 。假设在每一个时间段内股票价值从开始的  $S$  运动到两个新值  $S_u$  和  $S_d$  中的一个。这一模型可用图 17.1 说明。一般情况下， $u > 1$ ,  $d < 1$ 。因此  $S$  到  $S_u$  是价格“上升”运动， $S$  到  $S_d$  是价格“下降”运动。假设价格上升的概率是  $p$ ，下降的概率则为  $1 - p$ 。

<sup>1</sup> Black-Scholes 公式与二叉树图的基础假设是相同的。我们可以预计到，随着时间步数量增加到极限情况，二叉树模型给出的欧式期权价格逐渐收敛于 Black-Scholes 价格。

<sup>2</sup> 关于美式期权的估值，有些学者提过一些解析近似方法。最有名的是二次近似方法。关于这一方法的描述，参见作者网站上的技术说明 8。

图 17.1 二叉树图模型中,  $\Delta t$  时间内资产价格的运动

## 风险中性估值

在第 11 章和第 13 章中我们介绍了所谓的风险中性定价原理。它可以表述如下：任何期权（或其他衍生证券）都可以在风险中性世界的假设基础上进行估值。它意味着我们可以使用如下的估值过程：

1. 假设所有可交易证券的期望收益都是无风险利率
2. 通过计算损益的期望值并按无风险利率贴现，可以估值衍生证券损益

应用二叉树图模型时，这个原理是非常重要的。

## $p$ 、 $u$ 和 $d$ 的确定

对于时间间隔  $\Delta t$  内，对于股票价格变化的均值和标准差，参数  $p$ 、 $u$  和  $d$  必须给出相应的正确值。由于我们在考虑风险中性世界，资产的期望收益是无风险利率  $r$ 。假设资产支付红利收益率  $q$ ，那么期望资本收益为  $r - q$ 。因此在时间间隔  $\Delta t$  段末的资产期望值为  $Se^{(r-q)\Delta t}$ ，其中  $S$  为该时间间初始股票价格。因此：

$$Se^{(r-q)\Delta t} = pSu + (1 - p)Sd \quad (17.1)$$

即

$$e^{(r-q)\Delta t} = pu + (1 - p)d \quad (17.2)$$

在 13.4 节中解释过，在一个小时段  $\Delta t$  内股票价格变化率的方差是  $\sigma^2\Delta t$ 。变量  $Q$  的方差被定义为  $E(Q^2) - [E(Q)]^2$ 。价格变化率为  $u$  的概率是  $p$ ，价格变化率为  $d$  的概率是  $1 - p$ 。期望变化率为  $e^{(r-q)\Delta t}$ 。则

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2\Delta t$$

根据方程 (17.2) 消去  $p$ ，则

$$e^{(r-q)\Delta t}(u + d) - ud - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2\Delta t \quad (17.3)$$

方程 (17.2) 和方程 (17.3) 给出了  $p$ 、 $u$  和  $d$  的两个条件。Cox、Ross 和 Ru-

binstein (1979) 使用的第三个条件是:<sup>3</sup>

$$u = \frac{1}{d}$$

忽略比  $\Delta t$  高阶的小量, 方程 (17.2) 和方程 (17.3) 的一个解为<sup>4</sup>

$$p = \frac{a - d}{u - d} \quad (17.4)$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (17.5)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (17.6)$$

其中

$$a = e^{(r-q)\Delta t} \quad (17.7)$$

变量  $a$  有时被称为增长因子 (growth factor)。方程 (17.4) ~ 方程 (17.9) 和 11.9 节中的结果一样。

## 资产价格树图

使用二叉树图模型时的资产价格完整树图如图 17.2 所示。时间为 0 时, 已知资产价格为  $S_0$ ; 时间为  $\Delta t$  时, 资产价格有两种可能:  $S_0u$  和  $S_0d$ ; 时间为  $2\Delta t$  时, 资产价格有三种可能:  $S_0u^2$ 、 $S_0$  和  $S_0d^2$ 。依此类推。一般情况下,  $i\Delta t$  时刻, 资产价格有  $i + 1$  种可能, 它们是

$$S_0u^j d^{i-j}, j = 0, 1, \dots, i$$

注意在计算图 17.2 中每个节点的股票价格时, 使用了  $u = 1/d$  的关系。例如,  $S_0u^2d = S_0u$ 。还要注意的是资产价格先上升再下降, 与先下降再上升得出的值是一样的, 也就是树图的节点是重合的。这样就大大减少了树图的节点个数。

## 通过树图倒推计算

期权的计算是从树图的末端 (时刻  $T$ ) 开始向前倒推进行的。 $T$  时刻期权的价值是已知的。例如, 一个看跌期权价值为  $\max(K - S_T, 0)$ , 而一个看涨期权价值为  $\max(S_T - K, 0)$ , 其中  $S_T$  是  $T$  时刻的股票价格,  $K$  是执行价格。由于假设在风险中性世界中,  $T - \Delta t$  时刻的每个节点上的期权价值都可以用  $T$  时刻期权价值的期望

<sup>3</sup> 参见 J. C. Cox, S. A. Ross, and M. Rubinstein, "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7 (October 1979), 229–63.

<sup>4</sup> 为了理解这点, 我们注意到方程 (17.4) 和方程 (17.7) 准确地满足方程 (17.2) 中的条件。指数函数  $e^x$  可以被展开成  $1 + x + x^2/2 + \dots$ 。忽略比  $\Delta t$  高阶的小量, 方程 (17.5) 意味着  $u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$ , 方程 (17.6) 意味着  $d = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$ 。还有,  $e^{(r-q)\Delta t} = 1 + (r-q)\Delta t$  且  $e^{2(r-q)\Delta t} = 1 + 2(r-q)\Delta t$ 。经过替换, 我们可以发现, 忽略掉比  $\Delta t$  高阶的小量后, 方程 (17.3) 得到满足。

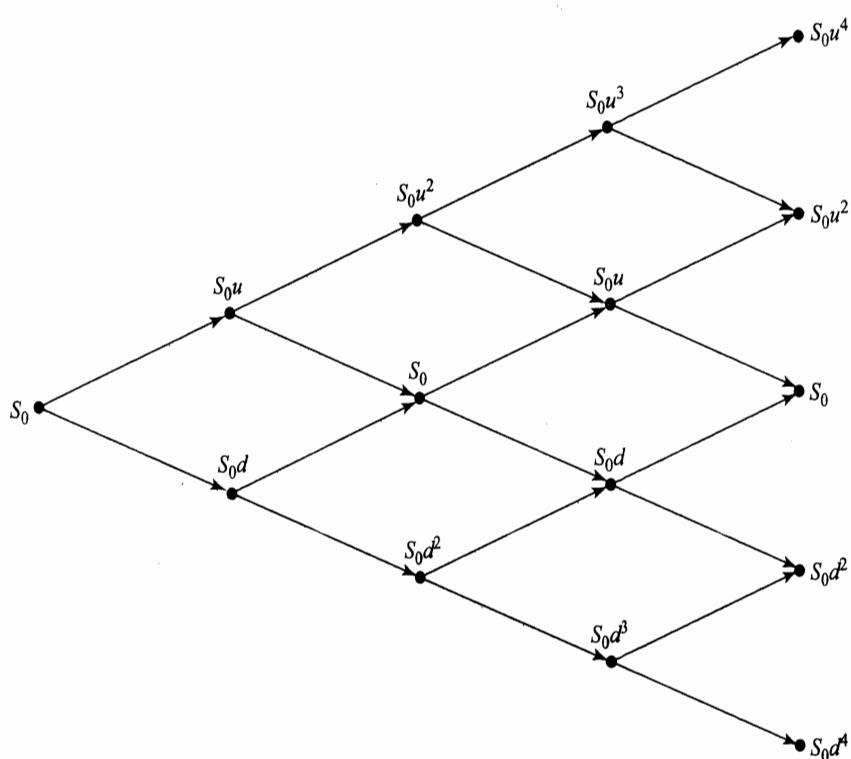


图 17.2 用于期权估值的树图

值以  $\Delta t$  时间内对应的利率  $r$  贴现求得。同理， $T - 2\Delta t$  时刻的每个节点的期权价值可用  $T - \Delta t$  时刻的期望值以  $\Delta t$  时间内对应的利率  $r$  贴现求出，其他节点依此类推。如果期权是美式的，则必须检查二叉树图的每个节点，以确定提前执行期权是否比将期权再持有  $\Delta t$  时间更有利。最后，向前倒推处理所有的节点就可得到 0 时刻的期权值。

**[例 17.1]** 考虑一个不付红利股票的 5 个月期美式看跌期权，股票价格为 \$50，执行价格为 \$50，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 40%。用我们常用的符号来表示就是， $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 0.10$ ,  $\sigma = 0.40$ ,  $T = 0.4167$ ,  $q = 0$ 。为构造一个二叉树，假如我们把期权的有效期分成 5 个时间段，每段长度 1 个月 ( $= 0.0833$  年)，则  $\Delta t = 0.0833$ 。运用公式 (17.4) ~ 公式 (17.7) 可得：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.1224, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.8909, \quad a = e^{r\Delta t} = 1.0084$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} = 0.5073, \quad 1 - p = 0.4927$$

图 17.3 所示的是本例中的二叉树图，由 DerivaGem 生成，在每个节点上有两个数字。上面的数字表示该节点的股票价格，下面的数字表示该节点的期权值。上升的概率总是 0.5073；下降的概率总是 0.4927。

在  $i\Delta t$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ) 时刻计算出的第  $j$  ( $j = 0, 1, \dots, i$ ) 个节点的股票价格为  $S_0 u^i d^{j-i}$ 。例如，A 节点 ( $i = 4, j = 1$ ) (即第 4 个时间步的价格向上的第 2

个节点) 的股票价格是  $50 \times 1.1224 \times 0.8909^3 = \$39.69$ 。最后面的节点的期权价格用  $\max(K - S_T, 0)$  来计算。例如，在 G 节点的期权价格是  $50 - 35.36 = 14.64$ 。从最后节点的期权价格可以计算出倒数第 2 个节点的期权的价格。首先，我们假设在这些节点期权没有执行。这意味着所计算的期权价格是一个时间步后  $\Delta t$  时间内期权价格期望值的现值。例如，E 节点期权价格的计算是：

$$(0.5073 \times 0 + 0.4927 \times 5.45)e^{-0.10 \times 0.0833} = 2.66$$

而 A 节点的计算则是

$$(0.5073 \times 5.45 + 0.4927 \times 14.64)e^{-0.10 \times 0.0833} = 9.90$$

然后，我们检查提前执行是否比等待更有利。在 E 节点，提前执行将使期权的值为 0，因为股票价格和执行价格都是 \$50。显然，最好等一等。因此 E 节点上正确的期权值是 \$2.66。A 节点则不然。期权如果执行，价值就是  $\$50.00 - \$39.69$ ，

在每个节点：

上面的数值：标的资产价格

下面的数值：期权价格

阴影部分表示期权在那个节点被执行

执行价格 = 50

每个时间步的贴现因子 = 0.9917

时间步， $dt = 0.0833$  年，即 30.42 天

每个时间步的增长因子， $a = 1.0084$

上升的概率， $p = 0.5073$

上升步的规模， $u = 1.1224$

下降步的规模， $d = 0.8909$

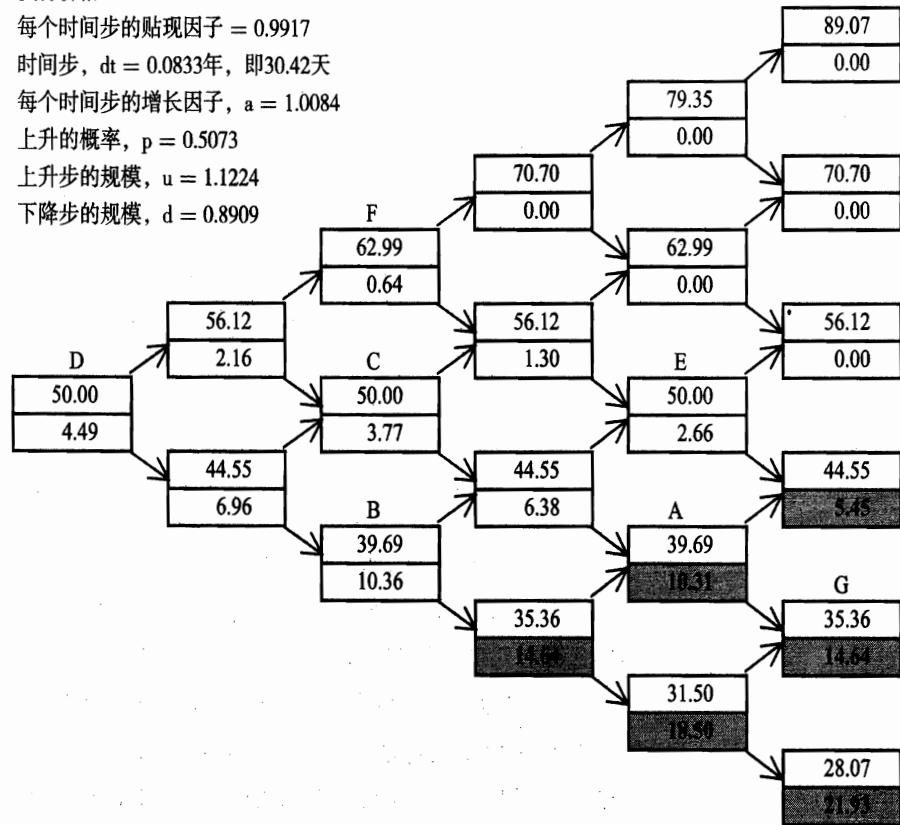


图 17.3 使用 DerivaGem 软件计算的不付红利股票的美式看跌期权的二叉树图（例 17.1）

即\$10.31，大于\$9.90。如果到达 A 节点，期权就应执行，从而 A 节点上正确的期权值为\$10.31。

前面节点的期权价格也用类似的方法计算。注意当期权是处于实值状态时提前执行并不总是最好的。考虑节点 B，期权如果执行，它的价值是\$50.00 - \$39.69，即\$10.31。然而，如果继续持有，期权值为：

$$(0.5073 \times 6.38 + 0.4927 \times 14.64)e^{-0.10 \times 0.0833} = 10.36$$

因此在这个节点上不应执行期权，因此该节点正确的期权值为\$10.36。

从树图的最后向前倒推，我们得到了初始节点上的期权值是\$4.49。这就是期权现值估计值。实际中所使用的  $\Delta t$  会更小，节点数会更多。利用 DerivaGem 软件，可以得出使用 30、50、100 以及 500 个时间步，我们分别可以得到期权值为 4.263、4.272、4.278 以及 4.283。

## 二叉树图方法的代数表达式

假设一个不付红利股票的美式看跌期权的有效期被分成  $N$  个长度为  $\Delta t$  的小段。设  $(i, j)$  为  $i\Delta t$  时刻第  $j$  个节点，其中  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq i$ 。定义  $f_{i,j}$  为节点  $(i, j)$  的期权值。在节点  $(i, j)$  的股票价格为  $S_0 u^j d^{i-j}$ 。由于美式看跌期权在到期日的价值为  $\max(K - S_T, 0)$ ，我们知道：

$$f_{N,j} = \max(K - S_0 u^j d^{N-j}, 0), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

在  $i\Delta t$  时刻从节点  $(i, j)$  向  $(i+1)\Delta t$  时刻的节点  $(i+1, j+1)$  移动的概率为  $p$ ，在  $i\Delta t$  时刻从节点  $(i, j)$  向  $(i+1)\Delta t$  时刻的节点  $(i+1, j)$  移动的概率为  $(1-p)$ 。假设不提前执行，风险中性估价公式给出：

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t} [pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]$$

$$0 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j \leq i$$

考虑提前执行期权时，式中的  $f_{i,j}$  必须与期权的内在价值进行比较，因此我们得到：

$$f_{i,j} = \max \{K - S_0 u^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t} [pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}] \}$$

注意，因为计算是从  $T$  时刻倒推回来的，所以  $i\Delta t$  时刻的期权价值不仅反映了在  $i\Delta t$  时刻提前执行这种可能性对期权价值的影响，而且也反映了在随后的时间里提前执行对期权价值的影响。

当  $\Delta t$  取趋于 0 的极限时，可以获得准确的美式看跌期权价值。实际上， $N=30$  通常就可以得到合理的结果。图 17.4 给出了我们例子中的期权值的收敛状态。该图是利用 DerivaGem 软件中的 Application Builder 函数（参见 Sample Application A）计算得出的。

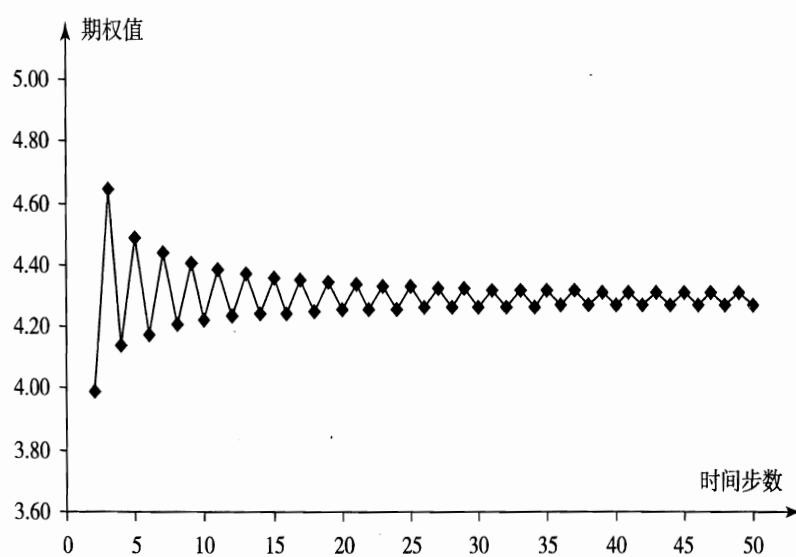


图 17.4 DerivaGem 软件中的 Application Builder 函数计算的例 17.1 的期权价格的收敛状态

### 估计 Delta 和其他套期保值参数的值

回顾一下，期权的 delta ( $\Delta$ ) 是期权价格变化与标的股票价格变化的比率。它的计算公式为

$$\frac{\Delta f}{\Delta S}$$

其中  $\Delta S$  是股票价格的微小改变， $\Delta f$  是相应的期权价格的微小变化。 $\Delta t$  时刻，在股票价格为  $S_0u$  时，估计出期权值  $f_{11}$ ；在股票价格为  $S_0d$  时，估计出期权值  $f_{10}$ 。换句话说，当  $\Delta S = S_0u - S_0d$  时， $\Delta f = f_{11} - f_{10}$ 。 $\Delta t$  时刻的 delta 估计值为：

$$\Delta = \frac{f_{11} - f_{10}}{S_0u - S_0d} \quad (17.8)$$

为了估计 gamma ( $\Gamma$ )，首先应注意到在  $2\Delta t$  时刻我们可以得到 2 个  $\Delta$  的估计值。当  $S = (S_0u^2 + S_0)/2$  时（在第 2 个和第 3 个节点的中间），delta 为  $(f_{22} - f_{21})/(S_0u^2 - S_0)$ ；当  $S = (S_0 + S_0d^2)/2$  时（在第 1 个和第 2 个节点的中间），delta 为  $(f_{21} - f_{20})/(S_0 - S_0d^2)$ 。这两个  $S$  的差值记作  $h$ ，其中

$$h = 0.5(S_0u^2 - S_0d^2)$$

于是 gamma 等于 delta 的变化除以  $h$ ，即：

$$\Gamma = \frac{[(f_{22} - f_{21})/(S_0u^2 - S_0)] - [(f_{21} - f_{20})/(S_0 - S_0d^2)]}{h} \quad (17.9)$$

以上计算过程给出了  $\Delta t$  时刻的 delta 估计值和  $2\Delta t$  时刻的 gamma 估计值。实

际中以上这些值常常作为 0 时刻的 delta 和 gamma 估计值。<sup>5</sup>

从二叉树图中可进一步直接估计的套期保值参数是 theta ( $\Theta$ )。它是当其他条件不变时，期权价格随时间的变化率。如果树图从 0 时刻开始，则  $\Theta$  的估计值为：

$$\Theta = \frac{f_{2t} - f_{0t}}{2\Delta t} \quad (17.10)$$

为计算 vega，可对波动率做微小的改变，即  $\Delta\sigma$ ，然后构造新的二叉树图，得到的新期权值（时间步长  $\Delta t$  应保持相等）。vega 估计值为：

$$\nu = \frac{f^* - f}{\Delta\sigma}$$

其中  $f$  和  $f^*$  分别是从最初的二叉树图和新建的二叉树图得出的期权价格估计值。rho 可以类似计算。

**[例 17.2]** 再考虑例 17.1 的情况，从图 17.3 可得  $f_{1,0} = 6.95$  和  $f_{1,1} = 2.16$ 。式 (17.8) 给出 delta 的估计值：

$$\frac{2.16 - 6.95}{56.12 - 44.55} = -0.41$$

用式 (17.9) 就可以从 B、C 和 F 节点的值得出期权的 gamma 估计值：

$$\frac{[(0.64 - 3.77)/(62.99 - 50.00)] - [(3.77 - 10.36)/(50.00 - 39.69)]}{11.65} = 0.03$$

用式 (17.10) 就可以从 D 节点和 C 节点的值得出 theta 的估计值：

$$\frac{3.77 - 4.49}{0.1667} = -4.3 \text{ (每年)}$$

即  $-0.012$  每日历天 (calendar day)。这些当然只是粗略的估计。如果用更小的  $\Delta t$ 、更多的时间步数来构造一个树图，就能得到更准确的估计值。使用 50 个时间步，DerivaGem 软件计算的 delta、gamma 和 theta 估计值分别为  $-0.415$ 、 $0.034$  和  $-0.0117$ 。对参数做微小的改变，再计算 vega 和 rho，估计值分别为  $0.123$  和  $-0.072$ 。

## 17.2 指数期权、货币期权和期货期权的二叉树法估值

在第 11 章与第 14 章中讲述过，估值期权的时候，股票指数、外汇以及期货合约可以看作是支付已知收益率的资产。对于股票指数，相应收益率就是计算股票指数的股票组合的红利收益率；对于外汇来说，收益率是国外无风险利率；对于期货合约，收益率是国内无风险利率。因此，通过以相应收益率代替公式

<sup>5</sup> 如果需要更精确地估计 delta 和 gamma，我们可以从  $-2\Delta t$  时刻的二叉树图开始，并假设此时的股票价格为  $S_0$ 。那么，零时刻有 3 个不同的股票值和对应的期权价值。

(17.7) 中的  $q$ , 二叉树法就可以用来对股票指数、外汇和期货期权进行估值了。

**[例 17.3]** 考虑一个 4 个月期的指数期货的美式看涨期权, 当前期货的价格是 300 点, 执行价格是 300 点, 无风险利率是年利率 8%, 指数的波动率为年利率 30%。为了构造二叉树图, 我们把期权的有效期分成 4 个时间段, 每个时间段为 1 个月。在这种情况下,  $F_0 = 300$ ,  $K = 300$ ,  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $T = 0.3333$ ,  $\Delta t = 0.0833$ 。由于期货合约可以看作是一个以利率  $r$  支付连续红利, 因此式 (17.7) 中的  $q$  就应该等于  $r$ 。这也就使得  $a = 1$ 。构造二叉树图所需的其他参数为:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0905, \quad d = \frac{1}{u} = 0.9170$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} = 0.4784, \quad 1 - p = 0.5216$$

在每个节点:  
上面的数值: 标的资产价格  
下面的数值: 期权价格  
阴影部分表示期权在那个节点被执行

执行价格 = 300  
每个时间步的贴现因子 = 0.9934  
时间步,  $dt = 0.0833$  年, 即 30.42 天  
每个时间步的增长因子,  $a = 1.0000$   
上升的概率,  $p = 0.4784$   
上升步的规模,  $u = 1.0905$   
下降步的规模,  $d = 0.9170$

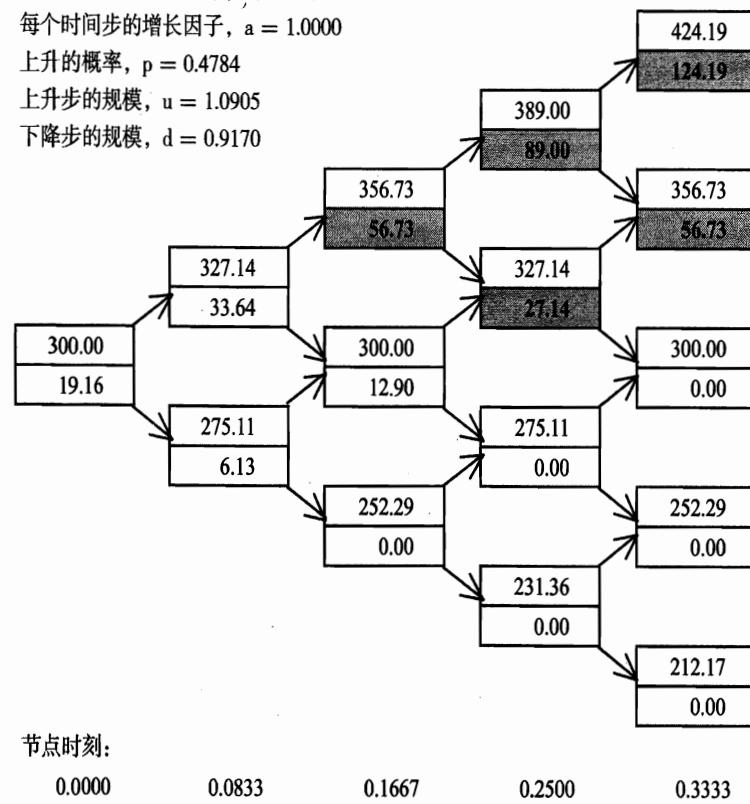


图 17.5 DerivaGem 软件给出的指数期货合约美式看涨期权的二叉树图 (例 17.3)

DerivaGem中得到的二叉树图如图 17.5 所示（上面的数字是期货价格；下面的数字是期权价格）。期权的估计值为 19.16。用更多的时间步来构造一个树图，就会得到更准确的估计值。使用 50 个时间步，DerivaGem 软件计算的估计值为 20.18；使用 100 个时间步，估计值为 20.22。

**[例 17.4]** 考虑一个 1 年期英镑美式看跌期权。当前的汇率是 \$1.6100，执行价格是 \$1.6000；美国的无风险利率是 8%/年，英镑的无风险利率是 9%/年，英镑汇率的波动率为每年 12%。这种情况下， $S_0 = 1.61$ ,  $K = 1.60$ ,  $r = 0.08$ ,  $r_f = 0.09$ ,  $\sigma = 0.12$ ,  $T = 1.0$ 。为了构造二叉树图，我们把期权的有效期分成 4 个时间段，每个时间段为 3 个月期，所以  $\Delta t = 0.25$ 。此时， $q = r_f$ ，因此式 (17.7) 给出：

$$a = e^{(0.08-0.09) \times 0.25} = 0.9975$$

构造二叉树所需的其他参数是：

在每个节点：

上面的数值：标的资产价格

下面的数值：期权价格

阴影部分表示期权在那个节点被执行

执行价格 = 1.6

每个时间步的贴现因子 = 0.9802

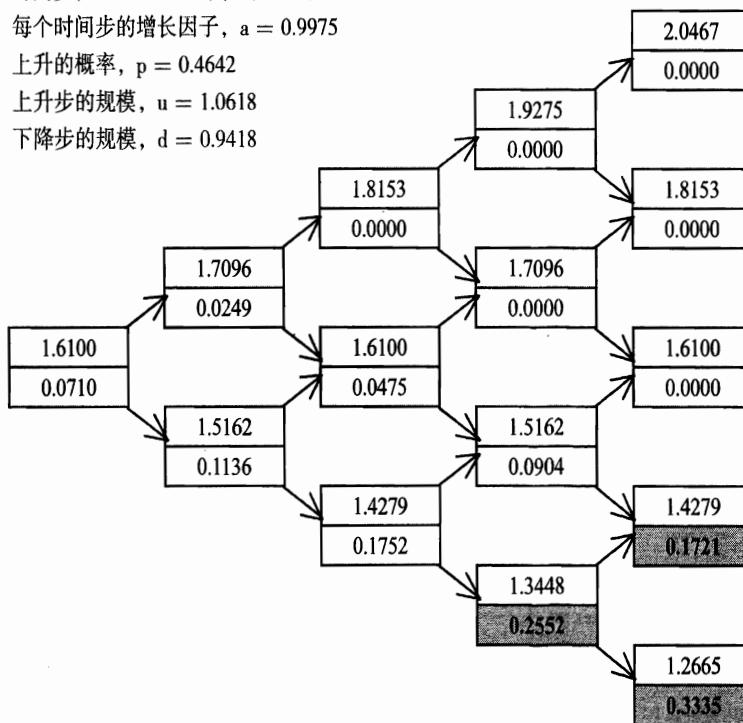
时间步， $dt = 0.2500$  年，即 91.25 天

每个时间步的增长因子， $a = 0.9975$

上升的概率， $p = 0.4642$

上升步的规模， $u = 1.0618$

下降步的规模， $d = 0.9418$



节点时刻：

0.0000

0.2500

0.5000

0.7500

1.0000

图 17.6 DerivaGem 软件给出的外汇美式看跌期权的二叉树图（例 17.4）

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0618, \quad d = \frac{1}{u} = 0.9418$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} = 0.4642, \quad 1 - p = 0.5358$$

DerivaGem 中得到的二叉树如图 17.6 所示（上面的数字是汇率；下面的数字是期权价格）。期权的估计值为 \$0.0710\$。使用 50 个时间步，DerivaGem 软件计算的估计值为 0.0738；使用 100 个时间步，估计值也为 0.0738。

### 17.3 支付已知红利的股票期权的二叉树模型

现在我们转向一个更棘手的问题，就是如何将二叉树图模型应用于支付红利的股票。与第 13 章一样，为了便于讨论，红利一词指在除息日，由于支付红利而导致的股票价格下降幅度。

#### 已知红利收益率

假设在未来某一确定时间将支付一次红利，且已知红利率（即红利与股票价格之比），那么，二叉树图的形状如图 17.7 所示，分析方法与刚才描述的方法类似。如果时刻  $i\Delta t$  在除息日之前，则树图上这些节点相应的股票价格为：

$$S_0 u^j d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

其中  $u$  和  $d$  与式 (17.5) 和式 (17.6) 中的定义相同。如果时刻  $i\Delta t$  在除息日之后，则树图上这些节点相应的股票价格为：

$$S_0 (1 - \delta) u^j d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

其中  $\delta$  是红利收益率。如果在期权有效期内有多个已知红利收益率时，可以进行同样处理。若  $\delta_i$  为 0 时刻到  $i\Delta t$  时刻之间所有除息日的总红利收益率，则  $i\Delta t$  时刻节点的相应的股票价格为：

$$S_0 (1 - \delta) u^j d^{i-j}$$

#### 已知红利数额

在某些情况下，最现实的假设莫过于事先已知红利数额而非红利收益率。如果假设股票的标准差  $\sigma$  是常数，则二叉树图的形状如图 17.8 所示。树枝不再重合，这意味着如果股票支付多次红利的话，所要估算的节点的数量可能变得很大。假如只有惟一一次红利，除息日  $\tau$  在  $k\Delta t$  到  $(k+1)\Delta t$  之间，而且红利数额为  $D$ 。当  $i \leq k$ ，在  $i\Delta t$  时刻，树图中节点对应的股票价格为：

$$S_0 u^j d^{i-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, i$$

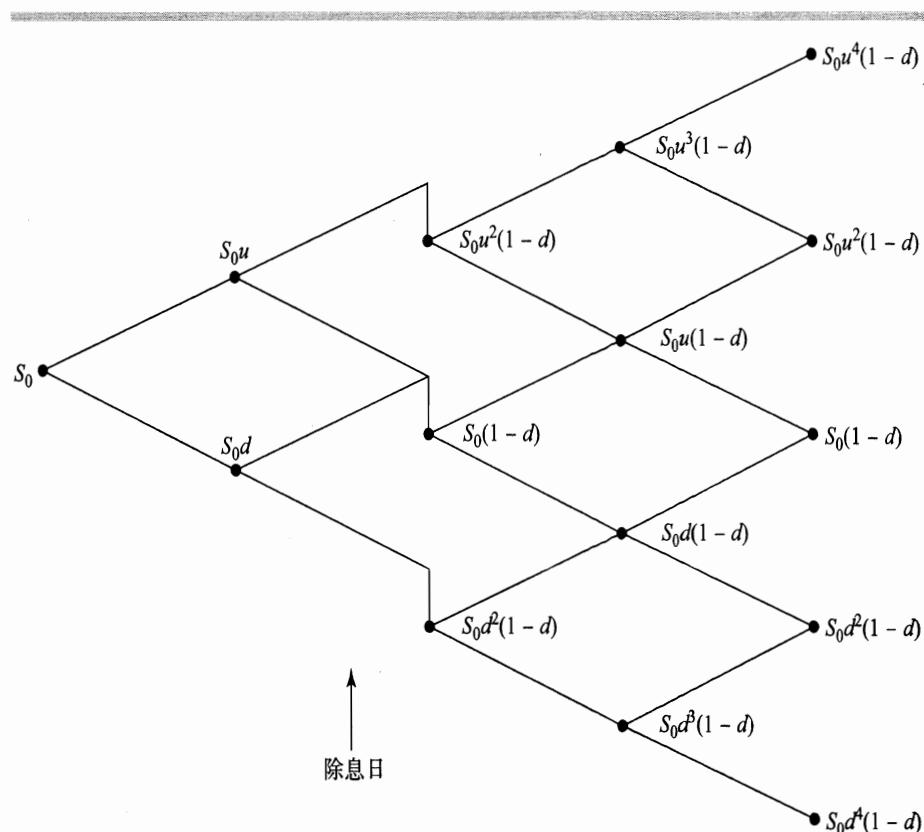


图 17.7 在一个特定时刻支付已知红利收益率的股票的二叉树图

与原来一样。当  $i = k + 1$  时，树图中节点对应的股票价格为：

$$S_0 u^j d^{i-j} - D, \quad j = 0, 1, 2, \dots, i$$

当  $i = k + 2$  时，树图中节点对应的股票价格为：

$$(S_0 u^j d^{i-1-j} - D)u \quad \text{和} \quad (S_0 u^j d^{i-1-j} - D)d$$

其中  $j = 0, 1, 2, \dots, i - 1$ ，因此将有  $2i$  而不是  $i + 1$  个节点。当  $i = k + m$  时，将有  $m(k + 2)$  个而不是  $k + m + 1$  个节点。

如第 13.12 节中的欧式期权分析一样，上述问题可以进行如下的简化。假设股票价格由两部分组成：一部分是不确定的，而另一部分是期权有效期内所有未来红利的现值。跟从前一样，假设在期权有效期内只有一个除息日  $\tau$ ，而且  $k\Delta t \leq \tau \leq (k + 1)\Delta t$ 。在  $i\Delta t$  时刻，股价不确定部分的价值  $S^*$  为：

$$\text{当 } i\Delta t > \tau \text{ 时, } S^* = S$$

和

$$\text{当 } i\Delta t \leq \tau \text{ 时, } S^* = S - D e^{-r(i\Delta t)}$$

其中  $D$  是红利。设  $\sigma^*$  为  $S^*$  的波动率，假设  $\sigma^*$  是常数。<sup>6</sup> 用  $\sigma^*$  代替式 (17.4)、

<sup>6</sup> 13.12 节中提过，理论上， $\sigma^*$  略微大于  $S$  的波动率  $\sigma$ 。实际应用中，因为使用隐含波动率的缘故，分析师们不必区分  $\sigma^*$  和  $\sigma$ 。

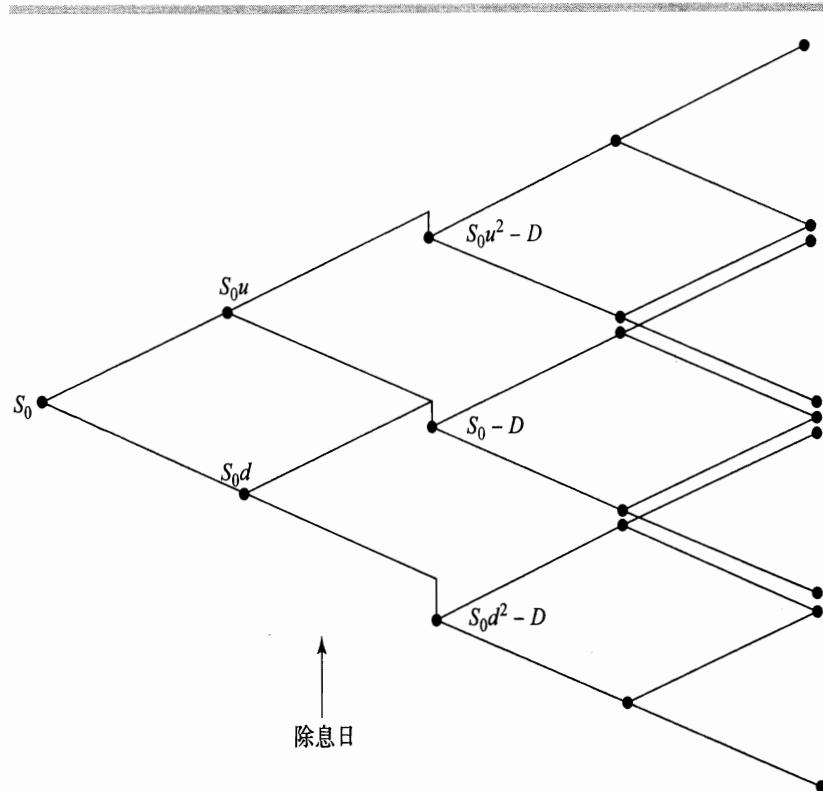


图 17.8 当假设已知红利数额已知，并且假设波动率为常数时的二叉树图

(17.5)、(17.6) 和式 (17.7) 中的  $\sigma$  可计算出参数  $p$ 、 $u$  和  $d$ ，这样就可按常规方法构造模拟  $S^*$  的二叉树图了。通过把未来红利（如果有的话）的现值加在每个节点的股票价格上，就会使原来的二叉树图转化为另一个模拟  $S$  的二叉树图。假设  $S_0^*$  是 0 时刻  $S^*$  的值。在  $i\Delta t$  时刻，当  $i\Delta t < \tau$  时，这个树图上的节点所对应的股票价格为：

$$S_0^* u^j d^{i-j} + De^{-r(i\Delta t)}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

当  $i\Delta t > \tau$  时，这个树图上的节点所对应的股票价格为：

$$S_0^* u^j d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

这种方法的优点是，它与第 13.12 节欧式期权处理方法相互一致，成功地恢复了树枝重合的状态，这样在  $i\Delta t$  时刻就只有  $i+1$  个节点了。这种方法可以直接推广到处理多个红利的情况。

**[例 17.5]** 考虑一个有效期为 5 个月期的股票看跌期权，预计在期权有效期内该股票支付一次 \$2.06 红利。初始的股票价格是 \$52，执行价格是 \$50，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 40%，除息日是在 3 个半月的那天。

我们首先构造一个树图来模拟  $S^*$ ， $S^*$  为股票价格减去期权有效期内未来红利的现值。首先，在零时刻红利的现值是：

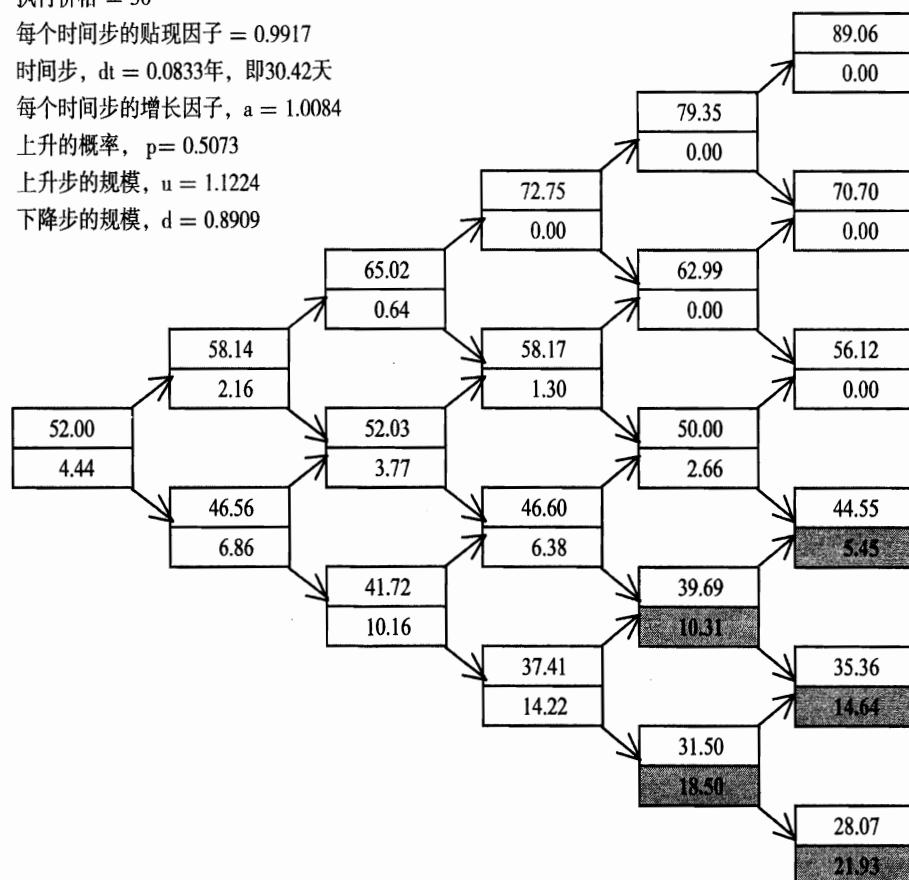
$$2.06e^{-0.2917 \times 0.1} = 2.00$$

因此  $S^*$  的初始值为 \$50.0。假设  $S^*$  的波动率为每年 40%，则图 17.3 给出了一个  $S^*$  的二叉树图 ( $S^*$  的初始值和波动率与构成图 17.3 的股票价格的初始值和波动率是一样的)。给每个节点加上红利的现值就得到了一个如图 17.9 所示的  $S$  的二叉树图模型。与图 17.3 一样，在每个节点上价格上升的概率是 0.5073，下降的概率是 0.4927。按通常的方法通过二叉树向后倒推就可得到期权的价格是 \$4.44。使用 50 个时间步，DerivaGem 软件计算的期权估计值为 4.202；使用 100 个时间步，估计值为 4.212。

当期权的有效期比较长（3 年或 3 年以上）的时候，更恰当的假设是已知红利收益率而不是已知红利数额，因为未来股票价格未知的情况下，很难正确知道红

在每个节点：  
 上面的数值：标的资产价格  
 下面的数值：期权价格  
 阴影部分表示期权在那个节点被执行

执行价格 = 50  
 每个时间步的贴现因子 = 0.9917  
 时间步， $dt = 0.0833$  年，即 30.42 天  
 每个时间步的增长因子， $a = 1.0084$   
 上升的概率， $p = 0.5073$   
 上升步的规模， $u = 1.1224$   
 下降步的规模， $d = 0.8909$



节点时刻：

0.0000      0.0833      0.1667      0.2500      0.3333      0.4167

图 17.9 DerivaGem 软件给出的例 17.5 中的二叉树图

利数额。<sup>7</sup> 假设已知连续支付的红利率通常是为了方便。这样，对支付红利股票的期权估值和对股票指数的期权估值是类似的。

## 控制变量的技术

进行美式期权定价时，我们可采用所谓的控制变量技术（control variate technique）方法。<sup>8</sup> 也就是用同一个树图分别计算出美式期权的价值 $f_A$  和与其对应的欧式期权的价值 $f_E$ ，并用 Black-Scholes 公式计算出欧式期权的价格 $f_{BS}$ 。假设用树图方法计算出的欧式期权价值的误差等于用树图方法计算出的美式期权价值的误差，则美式期权的价值估计值可由下式给出：

$$f_A + f_{BS} - f_E$$

为了说明控制变量技术，我们沿用图 17.3 的例子，并假设期权是欧式期权。这时的期权定价如图 17.10 所示，所得价格为 \$4.32。用 Black-Scholes 公式计算出真正的欧式期权价格是 \$4.08。图 17.3 中美式期权的估计值是 \$4.49。因此用控制变量技术估计的美式期权价格为：

$$4.49 + 4.08 - 4.32 = 4.25$$

使用 100 个时间步计算得到的更为精确的美式期权价格是 \$4.278。因此，在本例中，控制变量方法得到的结果比二叉树图方法得到的估计值 \$4.49，确实有了明显的改进。

控制变量方法实际上是利用树图来计算欧式期权与美式期权价格之间的差值，而不是美式期权价格本身。在下面讨论的蒙特卡罗模拟方法中，我们还要进一步运用该方法。

## 17.4 构造树图的几种方法

Cox、Ross 和 Rubinstein 方法并不是构造二叉树图的惟一方法。我们还可以令  $p = 0.5$ ，以代替式 (17.2) 和式 (17.3) 中  $u = 1/d$  的假设。当  $\Delta t$  的高阶小量可以忽略时，我们可以得到下面一组解：

$$u = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

这样，我们可以令  $p = 0.5$  来构造指数、外汇、期货合约的二叉树图模型。

与 Cox、Ross 和 Rubinstein 的方法相比，这一方法的优点在于，无论  $\sigma$  和时间

<sup>7</sup> 存在的另一种问题是，对于长期限的期权， $S^*$  显著小于  $S_0$ ，而波动率估计值非常高。

<sup>8</sup> 参见 J. Hull and A. White, “The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (September 1988): 237–51.

在每个节点：  
 上面的数值：标的资产价格  
 下面的数值：期权价格  
 阴影部分表示期权在那个节点被执行

执行价格 = 50  
 每个时间步的贴现因子 = 0.9917  
 时间步， $dt = 0.0833$  年，即 30.42 天  
 每个时间步的增长因子， $a = 1.0084$   
 上升的概率， $p = 0.5073$   
 上升步的规模， $u = 1.1224$   
 下降步的规模， $d = 0.8909$

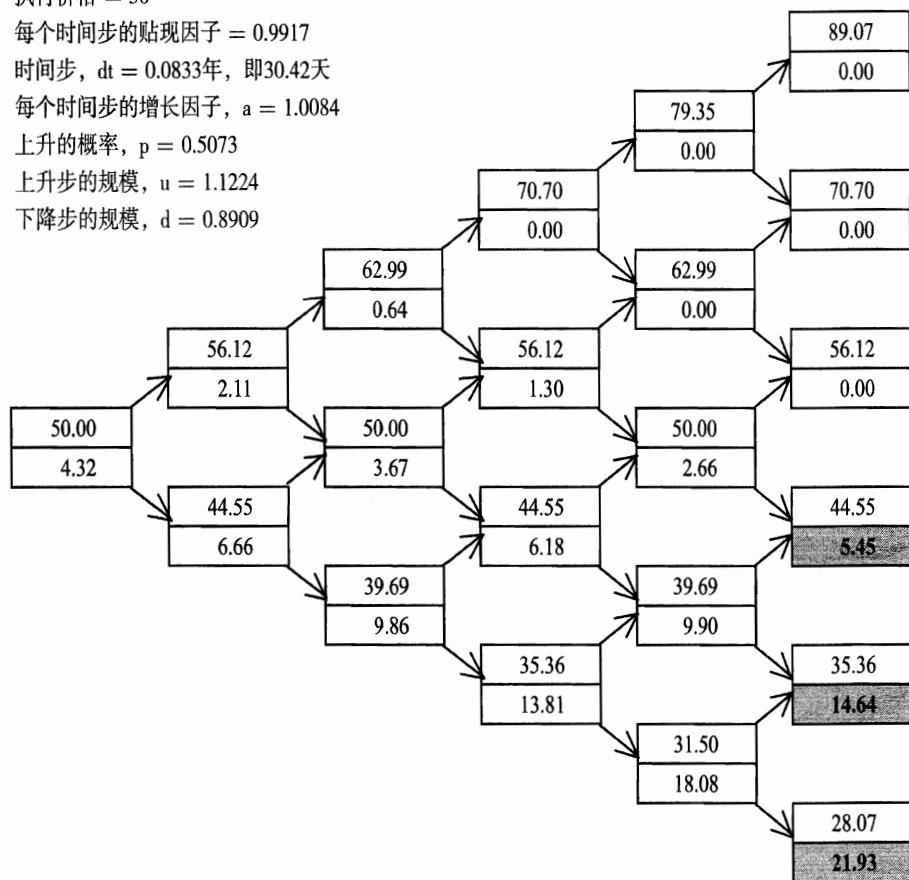


图 17.10 DerivaGem 软件给出的图 17.3 中期权改为欧式时的树图结构。每个节点上，上面的数字是股票价格，下面的数字是期权价格

步是多少，概率值总为 0.5。<sup>9</sup> 该方法的缺点是不能够直接地计算 delta、gamma 和 rho，因为树图不再以初始股票价格为中心了。

**[例 17.6]** 考虑一个 9 个月期的加元美式看涨期权。当前汇率为 0.7900，执行价格为 0.7950，美国无风险利率为每年 6%，加拿大市场上的无风险利率为每年 10%，汇率的波动率为 4%。用符号表示就是： $S_0 = 0.79$ ,  $K = 0.795$ ,  $r = 0.06$ ,  $r_f = 0.10$ ,  $\sigma = 0.04$ ,  $T = 0.75$ 。为构造二叉树图，我们将该期权有效期等分成 3 个时间

<sup>9</sup> 当时间步数很大以致于  $\sigma \sqrt{dt} > (r-q) \sqrt{dt}$ ，Cox、Ross 和 Rubinstein 的树图导致负的概率。这里所描述的替代方法没有这个缺点。

在每个节点：  
 上面的数值：标的资产价格  
 下面的数值：期权价格  
 阴影部分表示期权在那个节点被执行

执行价格 = 0.795  
 每个时间步的贴现因子 = 0.9851  
 时间步， $dt = 0.2500$ 年，即91.25天

上升步的概率， $p=0.5$

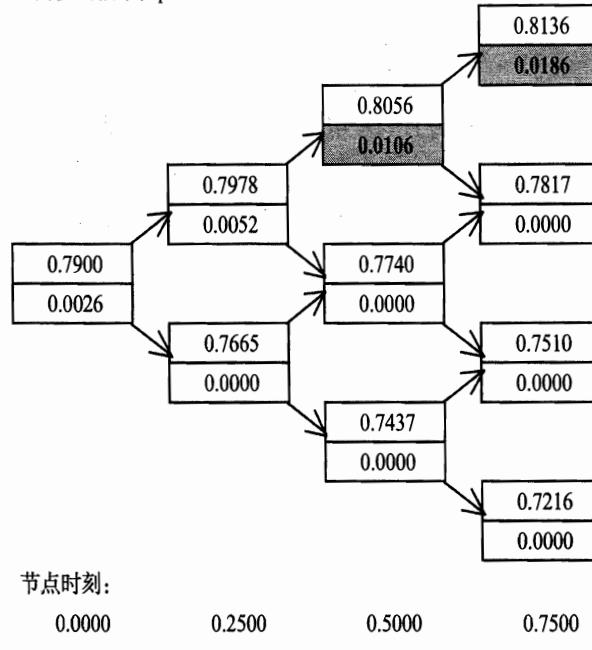


图 17.11 加元的美式看涨期权的二叉树图。在每一个节点，上面的值是即期汇率，下面的值是期权价格。所有的概率为 0.5

段，每个时间段为期 3 个月，因此  $\Delta t = 0.25$ 。令二叉树的每个分支概率等于 0.5，则

$$u = e^{(0.06 - 0.10 - 0.0016/2)0.25 + 0.04\sqrt{0.25}} = 1.0098$$

$$d = e^{(0.06 - 0.10 - 0.0016/2)0.25 - 0.04\sqrt{0.25}} = 0.9703$$

该汇率的二叉树图如图 17.11 所示。由二叉树方法得出该期权的价值为 \$0.0026。

### 三叉树图

另一种替换二叉树图的方法是三叉树图法。该树图的通常形状如图 17.12 所示。假设  $\Delta t$  为时间步的长度， $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  分别为每个节点价格上升、持平和下降的概率。对不付红利股票，当  $\Delta t$  的高阶小量可忽略时，满足股票价格变化均值和

方差的那些参数分别为：

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6}, \quad p_m = \frac{2}{3}, \quad p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6}$$

三叉树图中的计算过程类似于二叉树图方法中的计算过程。从树图的末端开始向前进行倒推计算。在每个节点上，我们计算提前执行时的价值和不提前执行时的价值。不提前执行时的价值为

$$e^{-r\Delta t} (p_u f_u + p_m f_m + p_d f_d)$$

其中， $f_u$ 、 $f_m$  和  $f_d$  分别为后一上、中、下节点上的期权价值。可以证明，三叉树图方法与第 17.8 节中介绍的显性有限差分方法一致。

Figlewski 和 Gao 提出了三叉树方法的改进形式，并称它为自适应 Mesh 模型。在该模型中，高分辨（即  $\Delta t$  小）的树图被嫁接到低分辨（即  $\Delta t$  大）的树图。<sup>10</sup> 对普通的美式期权进行估值时，对接近到期日执行价格的树图部分使用高分辨是非常有用的。

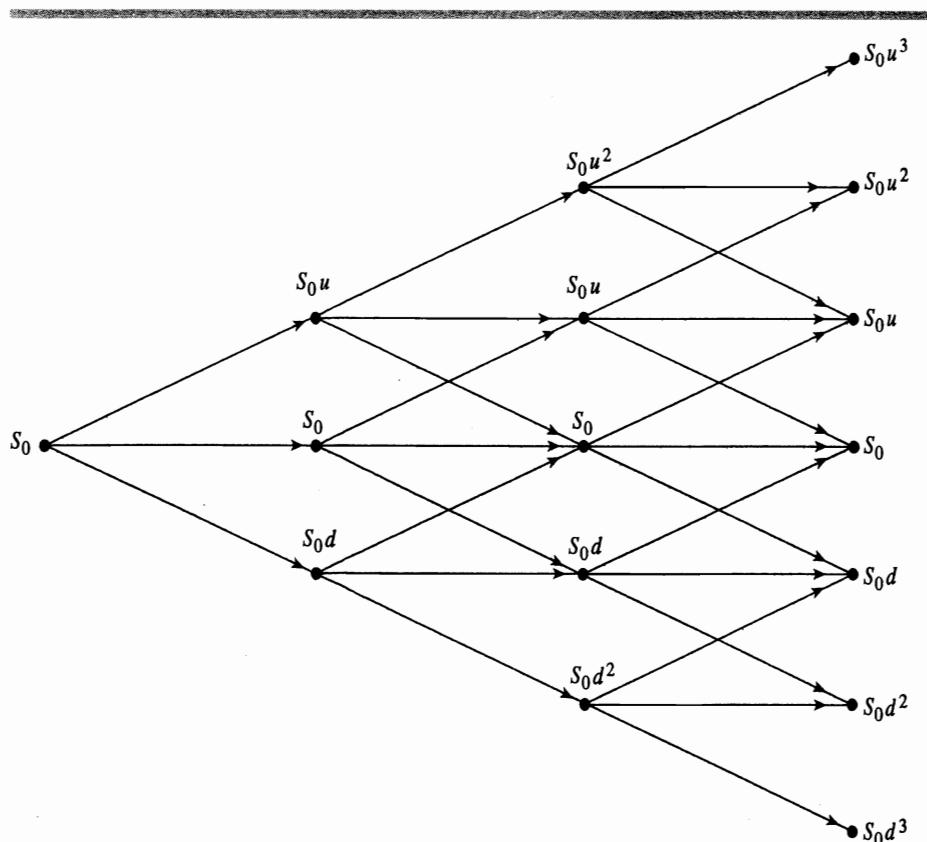


图 17.12 股票价格的三叉树图

<sup>10</sup> 参见 S. Figlewski and B. Gao, "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53 (1999) :313-51.

## 17.5 依赖时间变量的参数

到现在为止，我们假定了  $r$ 、 $q$ 、 $r_f$  和  $\sigma$  是常数。实际应用当中，它们更多被假定为依赖于时间。假设  $t$  至  $t + \Delta t$  之间的时间段内，这些变量的价值等于它们的远期价值。<sup>11</sup>

在 Cox-Ross-Rubinstein 二叉树模型中，可以将  $r$  和  $q$ （或  $r_f$ ）表示成时间的函数。我们设  $t$  时刻的节点上

$$a = e^{[f(t) - g(t)]\Delta t} \quad (17.11)$$

其中， $f(t)$  是  $t$  至  $t + \Delta t$  时刻之间的时段内的远期利率， $g(t)$  是这个时间段内的  $q$  的远期价值。由于  $u$  和  $d$  并不随  $a$  的变化而改变，所以该二叉树图模型的几何形状也不会改变。在  $t$  时刻节点分支的概率为：<sup>12</sup>

$$p = \frac{e^{[f(t) - g(t)]\Delta t} - d}{u - d} \quad (17.12)$$

$$1 - p = \frac{u - e^{[f(t) - g(t)]\Delta t}}{u - d}$$

除了对于  $t$  和  $t + \Delta t$  之间的时段使用贴现率  $f(t)$ ，余下过程和我们之前利用二叉树图的过程完全一样。

在二叉树图，假设波动率  $\sigma$  为时间的函数，则扩展过程更为复杂。一种办法是对时间步长度除以方差率。那么， $u$  和  $d$  的值总是相同，树图被重合了。假设  $\sigma(t)$  是  $t$  期限的波动率，那么到  $t$  时刻累计方差为  $\sigma(t)^2 t$ 。定义  $V = \sigma(T)^2 T$ ，其中  $T$  是树图的期限，并设  $t_i$  为第  $i$  个时间步结束的时刻。如果总共有  $N$  个时间步，我们需要选择  $t_i$ ，使得  $\sigma(t_i)^2 t_i = iV/N$  成立。那么，对于所有的  $i$ ， $t_i - 1$  至  $t_i$  时段内的方差等于  $V/N$ 。

对于三叉树图，我们可以使用构建树图的一般过程来满足依赖时间的利率和波动率（请参考作者网站中的技术说明 9）。

## 17.6 蒙特卡罗模拟

我们开始讲述蒙特卡罗模拟，它是和二叉树图很不一样的衍生品估值方法。商业剪影 17.1 中阐述了蒙特卡罗模拟的随机抽样思想，并且说明了如何设计简单的 Excel 程序来估值  $\pi$ 。

用来估值期权时，蒙特卡罗模拟中利用风险中性估值结论。我们模拟变量的很多路径，得出风险中性世界中的期望损益，再以无风险利率贴现这个期望损益。考虑一个  $T$  时刻实现损益、只依赖于单种市场变量  $S$  的衍生证券。假设利率是常

<sup>11</sup> 远期红利收益率和远期方差率的计算方式类似于远期利率的计算（方差率为波动率的平方）。

<sup>12</sup> 对足够大的时间步数，这些概率总是正的。

### 商业剪影 17.1 用蒙特卡罗模拟计算圆周率

假设图 17.3 中正方形的边长为 1 单位。如果你随机地往正方形扔 5 个标，那么它们都中在圆内的概率为多少呢？正方形的面积为 1.0，圆的半径为 0.5，面积是  $\pi$  乘以半径的平方，即  $\pi/4$ 。因此，标中在圆内的概率应该是  $\pi/4$ 。那么我们可以通过 4 乘以标中在圆内的概率来估计  $\pi$ 。

我们可以利用 Excel 工作表来模拟投标过程，如表 17.1。我们定义单元 A1 和 B1 = RAND ()。A1 和 B1 都是 0 和 1 之间的随机数字，分别定义所投的标离图 17.13 中的正方形右边和底边的距离。随后，我们定义单元 C1

```
=IF((A1-0.5)^2+(B1-0.5)^2<0.5^2, 4, 0)
```

如果标在圆内，设定 C1 的值为 4。其他情况下都为 0。

和第 1 行类似地定义工作表接下来的 99 行（这是在 Excel 中“选择—拉伸”的操作）。定义 C102 = AVERAGE (C1:C100), C103 = STDEV (C1:C100)。C102（表 17.1 中是 3.04）从 100 次模拟运算估计的  $\pi$  值。C103 是我们得到的结果的标准差。我们将在例 17.7 中看到，这可以用来评估估计值的准确程度。增加模拟运算次数，可以提高准确程度，但是往正确的值 3.14162 收敛的速度比较慢。

数，我们就能通过以下步骤对衍生证券进行估值：<sup>13</sup>

1. 模拟风险中性世界中  $S$  的一种随机抽样路径。
2. 计算衍生证券的损益。
3. 重复步骤 1 和 2，得出风险中性世界中衍生证券损益的更多样本值。
4. 计算样本损益值的算术平均，得到风险中性世界中期望损益的估计值。

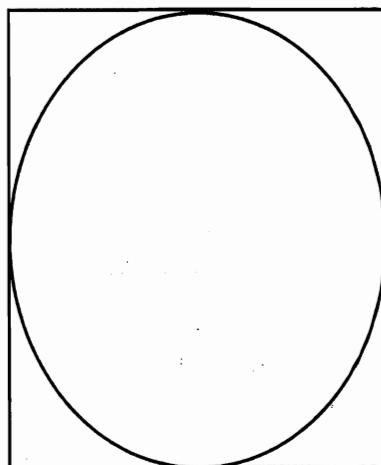


图 17.13 以投标法计算  $\pi$

<sup>13</sup> 我们将在 25.4 节中讨论如何对随机利率的情况使用蒙特卡罗模拟。

表 17.1 商业剪影 17.1 中的模拟计算工作表

|     | A     | B     | C    |
|-----|-------|-------|------|
| 1   | 0.207 | 0.690 | 4    |
| 2   | 0.271 | 0.520 | 4    |
| 3   | 0.007 | 0.221 | 0    |
| :   | :     | :     | :    |
| 100 | 0.198 | 0.403 | 4    |
| 101 |       |       |      |
| 102 |       | Mean: | 3.04 |
| 103 |       | SD:   | 1.69 |

5. 以无风险利率贴现期望损益，得出衍生证券的估计值。

假设这个标的市场变量在风险中性世界中的行为过程如下：

$$dS = \hat{\mu} S dt + \sigma S dz \quad (17.13)$$

其中  $dz$  服从维纳过程， $\hat{\mu}$  是风险中性世界中的期望收益， $\sigma$  是波动率。<sup>14</sup> 为了模拟  $S$  的路径，我们将衍生证券的有效期分成  $N$  个长度为  $\Delta t$  的小时间段。方程 (17.13) 近似地变成

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \hat{\mu} S(t) \Delta t + \sigma S(t) \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (17.14)$$

其中  $S(t)$  表示  $t$  时刻的  $S$  值， $\epsilon$  是标准正态分布中抽取的一个随机样本。这样，可以从初始的  $S$  值得到  $\Delta t$  时刻的  $S$  值。再从  $\Delta t$  时刻的  $S$  值得到  $2\Delta t$  时刻的  $S$  值，依此类推。在 12.3 节中给出了这种过程的一个例子。一次模拟运算中需要从正态分布抽取  $N$  个随机样本并构建  $S$  的完整路径。

实际应用中，模拟  $\ln S$  比模拟  $S$  本身得到的结果通常更为准确。依据伊藤定理， $\ln S$  的轨迹为

$$d\ln S = \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (17.15)$$

那么

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

即

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[ \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \right] \quad (17.16)$$

<sup>14</sup> 如果  $S$  是不付红利股票的价格，则  $\hat{\mu} = r$ ；如果是汇率，则  $\hat{\mu} = r - r_f$ 。如此等等。注意，如第 11.7 节中所述，风险中性世界中和现实世界中的波动率相同。

## 商业剪影 17.2 验证 Black-Scholes

一个欧式看涨期权的 Black-Scholes 定价公式可以用非常多时间步的二叉树图来进行验证。另一种验证方法是蒙特卡罗模拟法。我们构建的工作表可能如表 17.2。单元 C2、D2、E2、F2 和 G2 分别包含  $S_0$ 、 $K$ 、 $r$ 、 $\sigma$  和  $T$ 。单元 D4、E4 和 F4 分别计算  $d_1$ 、 $d_2$  和 Black-Scholes 价格（工作表样本中的 Black-Scholes 价格为 4.817）。

NORMSINV 是标准正态分布函数的逆累积分布函数。因此，用 NORMSINV (RAND ()) 可以从标准正态分布抽取一个随机样本。我们定义单元 A1

```
=\$C$2*EXP((\$E\$2-\$F\$2*\$F\$2/2)*\$G\$2+\$F\$2*NORMSINV(RAND())*SQRT(\$G\$2))
```

这是从  $T$  时刻所有股票价格集合中抽取的一个随机样本。我们定义单元 B1

```
=EXP(-\$E\$2*\$G\$2)*MAX(A1-\$D\$2, 0)
```

这是一个看涨期权损益的现值。和第一行类似地定义工作表中随后的 999 行（这是在 Excel 中“选择—拉伸”的操作）。定义 B1002 = AVERAGE (B1:B1000)，B1003 = STDEV (B1:B1000)。B1002（样本工作表中的值是 4.98）是期权价格的估计值。该估计值和 Black-Scholes 价格接近。我们将在例 17.8 看到，B1003 可以用来评估这一估计值的准确程度。

这个方程用来构建  $S$  的路径。

使用  $\ln S$  的一个优点是它服从广义维纳过程。也就是说，对于所有的  $T$ ，下式成立：<sup>15</sup>

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \epsilon \sqrt{T}$$

因此

$$S(T) = S(0) \exp \left[ \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \epsilon \sqrt{T} \right] \quad (17.17)$$

该公式可以用来对  $T$  时刻提供非标准化损益的衍生证券估值。商业剪影 17.2 中可以看到，该公式也可以用来检验 Black-Scholes 公式。

蒙特卡罗模拟方法的主要优点在于，不管损益依赖于标的变量  $S$  的路径，还是只依赖于  $S$  终值，都可以使用这个方法（例如，损益依赖于  $S$  的平均值的时候，可以使用蒙特卡罗模拟方法）。损益很可能在衍生证券有效期内的多个时点上发生，而不是在到期时刻全部发生，对  $S$  的任意随机过程都适用。在下面部分，我们将看到该方法可以扩展到衍生证券损益依赖于多个市场变量的情况。蒙特卡罗模拟方法的缺点是计算过程花费很多时间，而且很难处理有提前执行可能性的情况。<sup>16</sup>

<sup>15</sup> 相比之下，方程 (17.4) 只在  $\Delta t$  趋近于 0 的极限情况下成立。

<sup>16</sup> 第 24 章中我们将看到一些研究者提出了扩展蒙特卡罗模拟的方法，以便处理美式期权。

表 17.2 用蒙特卡罗模拟方法验证 Black-Scholes

|      | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> | <i>F</i> | <i>G</i> |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1    | 45.95    | 0        | $S_0$    | $K$      | $r$      | $\sigma$ | $T$      |
| 2    | 54.49    | 4.38     | 50       | 50       | 0.05     | 0.3      | 0.5      |
| 3    | 50.09    | 0.09     |          | $d_1$    | $d_2$    | BS price |          |
| 4    | 47.46    | 0        |          | 0.2239   | 0.0118   | 4.817    |          |
| 5    | 44.93    | 0        |          |          |          |          |          |
| :    | :        | :        |          |          |          |          |          |
| 1000 | 68.27    | 17.82    |          |          |          |          |          |
| 1001 |          |          |          |          |          |          |          |
| 1002 | Mean:    | 4.98     |          |          |          |          |          |
| 1003 | SD:      | 7.68     |          |          |          |          |          |

## 依赖多个市场变量的衍生品

考虑衍生证券损益依赖于  $n$  个市场变量  $\theta_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 的情况。定义  $s_i$  为  $\theta_i$  的波动率,  $\hat{m}_i$  为  $\theta_i$  在风险中性世界中的期望增长率,  $\rho_{ik}$  为  $\theta_i$  和  $\theta_k$  之间的瞬态相关系数。<sup>17</sup> 与单变量情况一样, 衍生证券的有效期必须被分成  $N$  个长度为  $\Delta t$  的小段, 则  $\theta_i$  过程的离散形式为:

$$\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t) = \hat{m}_i \theta_i(t) \Delta t + s_i \theta_i(t) \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (17.18)$$

其中,  $\epsilon_i$  是标准正态分布的一个随机样本。 $\epsilon_i$  和  $\epsilon_k$  之间的相关系数是  $\rho_{ik}$  ( $1 \leq i, k \leq n$ )。一次模拟运算包括从多维标准正态分布中获得  $N$  个样本  $\epsilon_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )。把这些样本值代入式 (17.18) 可以产生每个  $\theta_i$  的模拟路径, 并由此计算出衍生证券的一个样本值。

## 从正态分布中产生随机样本

运用下式可以从一个单变量标准正态分布中获得近似样本值。

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{12} R_i - 6 \quad (17.19)$$

其中  $R_i$  ( $1 \leq i \leq 12$ ) 是  $0 \sim 1$  之间的相互独立的随机数,  $\epsilon$  是从  $\phi(0, 1)$  中获得的所要求的样本。这一近似方法可满足大多数要求。另一种方法是在 Excel 中利用=NORMSINV(RAND()), 如商业剪影 17.2 所述。

如需从标准正态分布中抽取两个相关的样本  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ , 则可用如下的方法。 $x_1$  和  $x_2$  是用前述方法从单变量标准正态分布中抽取的独立样本。则所求样本  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的计算如下:

<sup>17</sup> 注意,  $s_i$ 、 $\hat{m}_i$  和  $\rho_{ik}$  并不一定为常数。它们可能依赖于  $\theta_i$ 。

$$\epsilon_1 = x_1$$

$$\epsilon_2 = \rho x_1 + x_2 \sqrt{1 - \rho^2}$$

其中  $\rho$  是相关系数。

更为一般地，设  $n$  维正态分布中变量  $i$  和变量  $j$  之间的相关系数是  $\rho_{ij}$ ，我们需要从中抽取  $n$  个相关变量。我们首先从单变量标准正态分布中抽取  $n$  个独立变量  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )，则所求样本  $\epsilon_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 可以定义如下：

$$\epsilon_1 = \alpha_{11}x_1$$

$$\epsilon_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2$$

$$\epsilon_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3$$

如此等等。

我们需要选择相关系数  $\alpha_{ij}$ ，以保证正确的方差与正确的相关关系。可以按照如下的步骤完成。设  $\alpha_{11} = 1$ ；选择  $\alpha_{21}$  使得  $\alpha_{21}\alpha_{11} = \rho_{21}$ ；选择  $\alpha_{22}$  使得  $\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1$ ；选择  $\alpha_{31}$  使得  $\alpha_{31}\alpha_{11} = \rho_{31}$ ；选择  $\alpha_{32}$  使得  $\alpha_{31}\alpha_{21} + \alpha_{32}\alpha_{22} = \rho_{32}$ ；选择  $\alpha_{33}$  使得  $\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1$ ；依此类推。<sup>18</sup> 这一过程被称为 Cholesky 分解法 (Cholesky decomposition)。

## 模拟运算数目

运用蒙特卡罗进行模拟运算的精度取决于模拟次数的多少。通常需要计算该衍生证券模拟运算给出的贴现终值的标准差及均值。定义  $\mu$  和  $\omega$  分别是其均值和标准差，变量  $\mu$  是模拟运算给出的衍生证券估计值。则该估计值的标准误差是：

$$\frac{\omega}{\sqrt{M}}$$

其中， $M$  是模拟运算数目。则衍生证券价格  $f$  的 95% 的置信区间为

$$\mu - \frac{1.96\omega}{\sqrt{M}} < f < \mu + \frac{1.96\omega}{\sqrt{M}}$$

上式表明，我们对该衍生证券价值的不确定性和模拟运算次数的平方根成反比。因此，若要将精确度提高一倍，模拟运算次数需提高为原来的 4 倍；若要将精确度提高为原有的 10 倍，则模拟运算次数需为原来的 100 倍。如此等等。

**[例 17.7]** 在表 17.1 中，计算 100 个数据的平均值，得到了  $\pi$  值。这些数据的标准差为 1.69。这里， $\omega = 1.69$ ， $M = 100$ 。因此，估计值的标准误差是  $1.69/\sqrt{100} = 0.169$ 。根据电子表格得出的  $\pi$  的 95% 置信区间为  $(3.04 - 1.96 \times 0.169) \sim (3.04 + 1.96 \times 0.169)$ ，即 2.71~3.37。

<sup>18</sup> 如果对  $\alpha$  的方程没有实数解 (real solutions)，那么假设的相关结构不满足内部一致。对此，第 19 章中将进一步讨论。

**[例 17.8]** 在表 17.2 中，计算 1 000 个数据的平均值，得到了期权值。这些数据的标准差为 7.68。这里， $\omega = 7.68$ ， $M = 1 000$ 。因此，估计值的标准误差是  $7.68/\sqrt{1 000} = 0.24$ 。根据电子表格得出的该期权价值的 95% 置信区间为  $4.98 - 1.96 \times 0.24$  至  $(4.98 + 1.96 \times 0.24)$ ，即  $(4.51, 5.45)$ 。

## 应 用

与其他方法相比，在有三个和三个以上多个随机变量时，蒙特卡罗模拟的运算是很有效率的。这是因为随变量个数的增加，蒙特卡罗模拟运算的时间近似为线性增长，而其他大多数方法随变量个数的增加其计算时间呈指数增长。蒙特卡罗模拟方法还有一个优点就是给出了估计值的标准误差，另一个优点是适用于复杂随机过程以及复杂终值的计算。特别是当损益值依赖于某个变量遵循的整个路径的函数，而不是该变量终值时，该方法也适用。

### 计算套期保值参数

第 15 章中讨论过的套期保值参数可以用蒙特卡罗模拟来计算。假设我们希望计算  $f$  对  $x$  的偏微分值，其中  $f$  是衍生证券的价值，而  $x$  是某个标的变量或参数的值。首先，按通常的蒙特卡罗模拟方法计算出衍生证券的估计值  $\hat{f}$ 。然后在  $x$  值基础上增加一个小量  $\Delta x$ ，并用计算  $\hat{f}$  的相同方法计算出一个新的衍生证券值  $\hat{f}^*$ 。于是得出套期保值参数的一个估计值：

$$\frac{\hat{f}^* - \hat{f}}{\Delta x}$$

为了使估计值的标准误差最小化，在估计  $\hat{f}$  和  $\hat{f}^*$  时，时间段的个数  $N$ 、随机数流、模拟运算次数  $M$  应该相同。

### 通过一个树图采样

对于一个标的变量，除了从随机过程以随机取样的方式进行蒙特卡罗模拟之外，我们也可以利用  $N$  个时间步的二叉树图，并且模拟可能的  $2^n$  个路径。考虑一个“上升”概率为 0.6 的二叉树。通过二叉树随机取样的步骤如下。在每个节点上，我们随机抽取 0~1 之间的一个数。如果这个数小于 0.4，我们选择“下降”路径。如果大于 0.4，则选择“上升”路径。完成初始节点到树图的最终节点的完整路径之后，我们就可以计算损益。完成了第一次模拟过程，使用同样方法得到更多的模拟过程。这些样本的损益的平均值以无风险利率贴现，得到衍生证券的估计值。<sup>19</sup>

<sup>19</sup> 参见 D. Mintz, “Less is More,” *Risk*, July 1997: 42–45, 讨论了如何有效地从树图中抽样。

[例 17.9] 用图 17.3 中的树图为一个损益为  $\max(S_{\text{ave}} - 50, 0)$  的期权估值。其中， $S_{\text{ave}}$  为 5 个月内股票价格的平均值（包括初始和期末价格）。这就是所谓的亚式期权。表 17.3 中给出了模拟运算数目为 10 时的一种可能结果。

以无风险利率贴现损益平均值，得出期权价值。这个例子中，损益的平均值为 \$7.08，无风险利率为 10%，得出的期权值为  $7.08e^{-0.1 \times 5/12} = 6.79$ （这个例子只是解释了这种方法。实际应用中，我们会使用更多时间步和更多的模拟运算次数来得到更精确的结果）。

## 17.7 方差减少方法

如果模拟过程是按照我们以上描述的方法进行，则往往需要取很大的模拟运算数目值，才能得到精度合理的  $f$  估计值。这将消耗大量的计算时间。在本节我们介绍几种方差减少方法，可使所需计算时间显著减少。

### 对偶变量技术

在对偶变量技术中，一次模拟运算包括计算衍生证券的两个值，第一个值  $f_1$  是用通常的方法算得的；第二个值  $f_2$  是通过改变所有标准正态分布样本的符号计算出的（如果  $\epsilon$  是用来计算  $f_1$  的样本，则  $-\epsilon$  是用来计算  $f_2$  的样本）。由该模拟运算得出的衍生证券的样本值是  $f_1$  和  $f_2$  的平均。这种方法很有效，因为当一个值高于真实值时，则另一个值必偏低，反之亦然。

令  $\bar{f}$  代表  $f_1$  和  $f_2$  的平均值：

---

表 17.3 用蒙特卡罗模拟和图 17.3 中的树图估值亚式期权。损益等于股票价格的平均值超过 \$50 的部分。U = 上升移动；D = 下降移动

| 模拟运算 | 路 径   | 平均股票价格 | 期权损益  |
|------|-------|--------|-------|
| 1    | UUUUD | 64.98  | 14.98 |
| 2    | UUUDD | 59.82  | 9.82  |
| 3    | DDDUU | 42.31  | 0.00  |
| 4    | UUUUU | 68.04  | 18.04 |
| 5    | UDDDU | 55.22  | 5.22  |
| 6    | UDUUD | 55.22  | 5.22  |
| 7    | DDUDD | 42.31  | 0.00  |
| 8    | UDDDU | 55.22  | 5.22  |
| 9    | UUUDU | 62.25  | 12.25 |
| 10   | DDUUD | 45.56  | 0.00  |
| 平 均  |       |        | 7.08  |

---

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

衍生证券的最终估计值是  $\bar{f}$  值的平均。如果  $\bar{\omega}$  是  $\bar{f}$  的标准差， $M$  是模拟运算的次数（即，成对计算值的对数），估计值的标准误差是

$$\bar{\omega}/\sqrt{M}$$

它通常比使用  $2M$  次模拟运算得到的估计值的标准误差要小很多。

## 控制变量技术

在讨论美式期权的定价时，我们曾经给出过一个控制变量技术的例子（参见第 17.3 节）。控制变量技术适用于有两种相似衍生证券 A 和 B 的情况。衍生证券 A 是想要估值证券；衍生证券 B 是与衍生证券 A 相似且能得到解析解。使用相同的随机数流和相同的  $\Delta t$  平行地进行两次模拟。第一次模拟是用来获得对 A 的价值的估计值  $f_A^*$ ；第二次模拟是用来获得对 B 的价值的估计值  $f_B^*$ 。用下式可以得到一个对 A 的价值的更好的估计值  $f_A$ ：

$$f_A = f_A^* - f_B^* + f_B \quad (17.20)$$

其中  $f_B$  是已知的衍生证券 B 的解析解的真实值。Hull 和 White 曾经举例说明了如何用控制变量技术分析随机波动率对于欧式看涨期权价格的影响。<sup>20</sup> 在这种情况下， $f_A$  为假设波动率为随机变量时的期权价值，而  $f_B$  则为假设波动率为常数时以 Black-Scholes 公式得出的该期权的价值。

## 重点抽样法

下面的例子可以很好地说明重点抽样法的应用。假设我们要为一个处于深度虚值状态的欧式看涨期权定价，其执行价格为  $K$ ，有效期为  $T$ 。如果我们还用通常的办法对  $T$  时刻标的资产价格的路径抽样，大部分路径上的损益的终值为零。由于零终值的路径对最终的期权价值影响很小，这样计算无疑是浪费很多时间。因此我们只选取那些股票价格在到期日大于  $K$  的路径，也就是只选择重要路径来进行期权定价。

如果  $F$  是  $T$  时刻股票价格的无条件概率分布函数， $q$  为到期日股票价格大于  $K$  的概率（解析值已知），那么  $G = F/q$  是以股票价格大于  $K$  为条件的股票价格概率分布。在重点抽样法下，我们是从  $G$  而不是从  $F$  抽取样本。该期权价值的最终估计值是贴现终值的平均值与  $q$  的乘积。

---

<sup>20</sup> 参见 J. Hull and A. White, "The Pricing of Option on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42 (June 1987): 281-300.

## 间隔抽样法

相比用概率分布抽取随机变量，抽取代表值可以提高准确度。间隔抽样法就是这样的方法。假设我们需要从一个概率分布抽取 1 000 个样本，那么我们可以将分布分为 1 000 个相同长度的间隔，并从每个间隔抽取该间隔的代表值（通常为均值或中位数）。

在将标准正态分布分为  $n$  个间隔的情况下，第  $i$  个间隔的代表值为：

$$N^{-1}\left(\frac{i - 0.5}{n}\right)$$

这里  $N^{-1}$  为累计正态分布函数的反函数。例如，当  $n = 4$  时，这 4 个间隔的代表值分别为  $N^{-1}(0.125)$ 、 $N^{-1}(0.375)$ 、 $N^{-1}(0.625)$  和  $N^{-1}(0.875)$ 。利用 Excel 的 NORM-SINV 函数，可求得函数  $N^{-1}$  的值。

## 矩匹配法

矩匹配法中对标准正态分布中抽取的样本进行调整，使其一阶、二阶或者更高阶的其他矩彼此匹配。假设为计算在某个特定时间段内某个特定变量值的变化量，我们从均值为 0、标准差为 1.0 的正态分布取样。假设样本是  $\epsilon_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )。为使前两个矩相匹配，我们分别计算样本值的均值  $m$  和样本值的标准差  $s$ 。然后定义调整变量  $\epsilon_i^*$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 为：

$$\epsilon_i^* = \frac{\epsilon_i - m}{s}$$

这些经调整的样本的均值为零，标准差为 1.0。随后的所有计算中采用这些经过调整后的样本。

矩匹配法可以节省计算时间，但却加重了存储负担，因为所有的抽样值都要存储至模拟过程的最后阶段。矩匹配法又称为二次抽样法 (quadratic resampling)。经常与对偶变量技术结合起来使用。因为后者可以自动使所有奇数阶矩相匹配，这样矩匹配法中只需来匹配二阶矩，可能情况下，继续匹配四阶矩。

## 利用拟随机数序列

拟随机数序列 (quasi-random sequences)，也称低差异序列 (low-discrepancy sequences)，是指概率分布中的代表样本组成的序列。<sup>21</sup> 有关拟随机数序列的具体应用，Brotherton-Ratcliffe 以及 Press 等人在他们相关的论文中都有阐述。<sup>22</sup> 拟随机

<sup>21</sup> “拟随机”这一术语用得不是很恰当。一个拟随机序列是完全确定性的。

<sup>22</sup> 参见 R. Brotherton-Ratcliffe, "Monte Carlo Motoring," *Risk*, December 1994: 53–58; W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. Cambridge University Press, 1992.

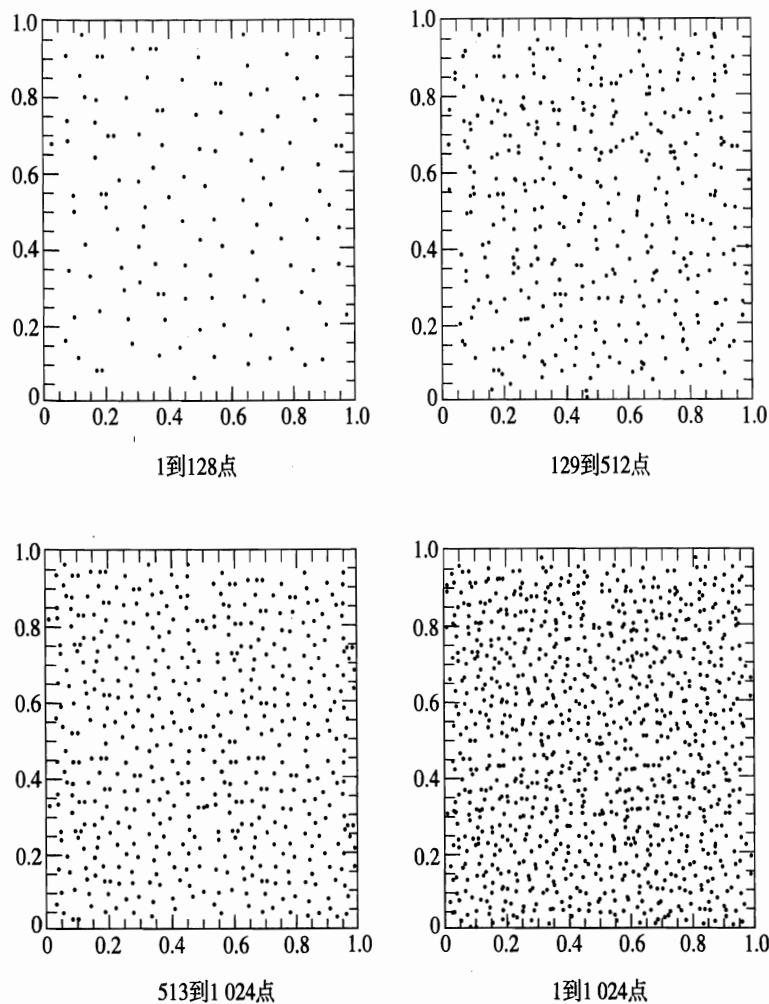


图 17.14 某个 Sobol 序列的前 1 024 个点

数序列的优点在于当  $M$  表示样本大小时，其结果的标准误差与  $1/M$  正比而不是与  $1/\sqrt{M}$  成正比。

拟随机数序列抽样法类似于间隔抽样法，目的是抽取标的变量的代表值。间隔抽样法中我们假定了事先已知道需要抽取的样本数。而拟随机数序列抽样法更为灵活，其中抽取样本的时候，总是不断“填补”已存在样本之间的空隙。因此在模拟过程中的每个阶段，抽取的样本点总是大致均匀地分布于整个概率分布空间。

图 17.14 显示的是用 Sobol 提出的方法产生的二维随机点。<sup>23</sup> 可以看出，后来抽取的样本点总在试图填补前面的样本点留下的空隙。

<sup>23</sup> 参见 I. M. Sobol', *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7, 4 (1967): 86–112.

Sobol' 的方法的一个描述在 W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. Cambridge University Press, 1992.

## 17.8 有限差分方法

有限差分方法通过求解衍生证券所满足的微分方程为衍生证券估值。将微分方程转化为一系列的差分方程后，再用迭代法求解这些差分方程。

为了说明这种方法，我们考虑如何用它来估算一个红利收益率为  $q$  的股票的美式看跌期权的价格。根据方程 (14.6)，该期权必须满足的微分方程是：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (17.21)$$

假设期权的有效期为  $T$ 。我们将有效期间分为  $N$  个长度为  $\Delta t = T/N$  的等间隔时间段。这样就总共有  $N + 1$  个时间点：

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$$

我们设  $S_{\max}$  为可达到的足够高的股票价格，当达到这一价格时，看跌期权实质上已没有价值了。我们定义  $\Delta S = S_{\max}/M$  并考虑  $M + 1$  个等间距的股票价格点：

$$0, \Delta S, 2\Delta S, \dots, S_{\max}$$

选择  $S_{\max}$  的时候，要保证上述的股票价格中存在当前股价。

这些时间点和股票价格点定义了由  $(M + 1)(N + 1)$  个点组成的坐标方格，如图 17.15 所示。坐标方格中的点  $(i, j)$  对应于时刻  $i\Delta t$  与股价  $j\Delta S$ 。我们将用变量  $f_{i,j}$  来定义  $(i, j)$  点上的期权价值。

### 隐性有限差分方法

对于坐标方格内部的点  $(i, j)$ ， $\partial f / \partial S$  可以近似为：

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} \quad (17.22)$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \quad (17.23)$$

式 (17.22) 是所谓的前向差分近似 (forward difference approximation)；式 (17.23) 是所谓的后向差分近似 (backward difference approximation)。我们用一个更加对称的近似方法，即两者的平均：

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \quad (17.24)$$

对于  $\partial f / \partial t$ ，我们将采用前向差分近似以使  $i\Delta t$  时刻的值与  $(i + 1)\Delta t$  时刻的值相关联：

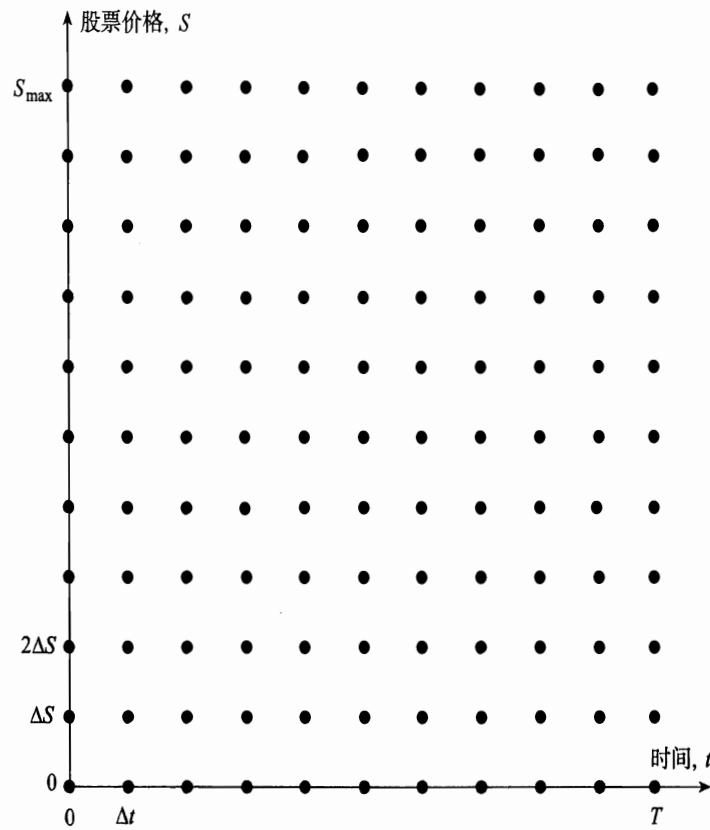


图 17.15 有限差分方法的坐标方格

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \quad (17.25)$$

点 \$(i, j)\$ 的 \$\partial f / \partial S\$ 的后向有限差分近似可由式 (17.23) 给出。\$(i, j+1)\$ 点的后向差分近似为：

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S}$$

因此，点 \$(i, j)\$ 的 \$\partial^2 f / \partial S^2\$ 的有限差分近似为：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \right) / \Delta S$$

即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} \quad (17.26)$$

把式 (17.24)、(17.25) 和式 (17.26) 代入式 (17.21) 的微分方程中，并注意 \$S = j\Delta S\$ 就能得到：

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q)j\Delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} = \eta f_{i,j}$$

其中  $j = 1, 2, \dots, M - 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ 。以上各项经过合并, 我们得到:

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \quad (17.27)$$

其中

$$a_j = \frac{1}{2}(r - q)j\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

$$b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t$$

$$c_j = -\frac{1}{2}(r - q)j\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

$T$  时刻看跌期权的价值为  $\max(K - S_T, 0)$ , 其中  $S_T$  为  $T$  时刻的股票价格。因此:

$$f_{N,j} = \max(K - j\Delta S, 0), \quad j = 0, 1, \dots, M \quad (17.28)$$

当股票价格为零时, 看跌期权的价值是  $K$ 。因此:

$$f_{i,0} = K, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (17.29)$$

假设  $S = S_{\max}$  时, 看跌期权的价值为零。因此:

$$f_{i,M} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (17.30)$$

式 (17.28)、(17.29) 和式 (17.30) 定义了图 17.15 的坐标方格中三个边界的看跌期权值, 其中,  $S = 0$ ,  $S = S_{\max}$  和  $t = T$ 。还需用式 (17.27) 来求出所有其他点的  $f$  值。首先求解与  $T - \Delta t$  时刻相对应的点。利用式 (17.27) 和  $i = N - 1$  可以给出联立方程组:

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{N,j} \quad (17.31)$$

其中  $j = 1, 2, \dots, M - 1$ 。这些方程中的右边值已由式 (17.28) 求出。此外, 由式 (17.29) 和式 (17.30), 得:

$$f_{N-1,0} = K \quad (17.32)$$

$$f_{N-1,M} = 0 \quad (17.33)$$

因此, 可以求解(17.31) 式中  $M - 1$  个方程, 求出  $M - 1$  个未知数:  $f_{N-1,1}, f_{N-1,2}, \dots, f_{N-1,M-1}$ 。<sup>24</sup> 这一步完成之后, 把每个  $f_{N-1,j}$  的值与  $K - j\Delta S$  进行比较。如果  $f_{N-1,j} < K - j\Delta S$ , 最好在  $T - \Delta t$  时刻提前执行期权, 这样就使  $f_{N-1,j}$  等于  $K - j\Delta S$ 。与  $T - 2\Delta t$  对应的节点也按同样方式处理, 并依此类推。最后, 就会得到  $f_{0,1}, f_{0,2}, f_{0,3}, \dots, f_{0,M-1}$ 。在这些值中有一个就是我们要求出的期权价格。

控制变量技术可与有限差分方法联系起来使用。用同一个坐标方格可以估算

<sup>24</sup> 其中并不涉及求一个矩阵的逆矩阵, 式 (17.31) 中的  $j = 1$  方程可用  $f_{N-1,1}$  来表示  $f_{N-1,2}$ ; 结合  $j = 1$  方程,  $j = 2$  方程可用  $f_{N-1,1}$  表示  $f_{N-1,3}$ 。如此等等。结合之前的方程,  $j = M - 2$  方程可用  $f_{N-1,1}$  表示  $f_{N-1,M-1}$  的值。最后一个  $j = M - 1$  方程给出  $f_{N-1,1}$  的值, 而这个值可用来求出其他的  $f_{N-1,j}$ 。

出某个期权的价值，该期权类似于所要求计算的那个期权，但可得到解析解。然后再用式(17.20)。

**[例 17.10]** 表 17.4 表示了用上述隐性有限差分方法求解例 17.1 中美式看跌期权定价的结果。 $M$ 、 $N$  和  $\Delta S$  的值分别取 20、10 和 5。因此就把股票价格从 \$0 到 \$100 分成了每 \$5 一个间隔段，把期权整个有效期分成每半个月一个间隔段，由此可估算期权价格。由坐标方格得出的期权价格为 \$4.07。用同一个坐标方格得出的相应欧式期权价格是 \$3.91。用 Black-Scholes-Merton 公式得出真正的欧式期权价格是 \$4.08。因此用控制变量方法估计的美式期权价格为：

$$\$4.07 + \$4.08 - \$3.91 = \$4.24$$

### 显性有限差分方法

隐性有限差分方法的优点在于它很有效。当  $\Delta S$  和  $\Delta t$  趋于零时它总是收敛于微分方程的解。<sup>25</sup> 隐性有限差分方法的缺点之一是为了从  $f_{i+1,j}$  的值计算出  $f_{i,j}$  的值

表 17.4 用隐性有限差分方法估算例 17.1 中美式期权值的坐标方格

| 股价<br>(美元) | 有效期(月) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|            | 5      | 4.5   | 4     | 3.5   | 3     | 2.5   | 2     | 1.5   | 1     | 0.5   | 0     |
| 100        | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 95         | 0.02   | 0.02  | 0.01  | 0.01  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 90         | 0.05   | 0.04  | 0.03  | 0.02  | 0.01  | 0.01  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 85         | 0.09   | 0.07  | 0.05  | 0.03  | 0.02  | 0.01  | 0.01  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 80         | 0.16   | 0.12  | 0.09  | 0.07  | 0.04  | 0.03  | 0.02  | 0.01  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 75         | 0.27   | 0.22  | 0.17  | 0.13  | 0.09  | 0.06  | 0.03  | 0.02  | 0.01  | 0.00  | 0.00  |
| 70         | 0.47   | 0.39  | 0.32  | 0.25  | 0.18  | 0.13  | 0.08  | 0.04  | 0.02  | 0.00  | 0.00  |
| 65         | 0.82   | 0.71  | 0.60  | 0.49  | 0.38  | 0.28  | 0.19  | 0.11  | 0.05  | 0.02  | 0.00  |
| 60         | 1.42   | 1.27  | 1.11  | 0.95  | 0.78  | 0.62  | 0.45  | 0.30  | 0.16  | 0.05  | 0.00  |
| 55         | 2.43   | 2.24  | 2.05  | 1.83  | 1.61  | 1.36  | 1.09  | 0.81  | 0.51  | 0.22  | 0.00  |
| 50         | 4.07   | 3.88  | 3.67  | 3.45  | 3.19  | 2.91  | 2.57  | 2.17  | 1.66  | 0.99  | 0.00  |
| 45         | 6.58   | 6.44  | 6.29  | 6.13  | 5.96  | 5.77  | 5.57  | 5.36  | 5.17  | 5.02  | 5.00  |
| 40         | 10.15  | 10.10 | 10.05 | 10.01 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 |
| 35         | 15.00  | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 |
| 30         | 20.00  | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 |
| 25         | 25.00  | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 |
| 20         | 30.00  | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 |
| 15         | 35.00  | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 |
| 10         | 40.00  | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 |
| 5          | 45.00  | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 |
| 0          | 50.00  | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 |

<sup>25</sup> 有限差分方法的一个一般规则是当  $\Delta S$  和  $\Delta t$  趋于零时， $\Delta S$  应该保持与  $\sqrt{\Delta t}$  成比例。

必须同时求解  $M - 1$  个联立方程。如果能够假设在坐标方格上  $(i, j)$  点的  $\partial f / \partial S$  值和  $\partial^2 f / \partial S^2$  值与  $(i+1, j)$  点的值对应值相同，该方法就可以简化。于是式 (17.24) 和式 (17.26) 变成：

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1, j+1} - f_{i+1, j-1}}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1, j+1} + f_{i+1, j-1} - 2f_{i+1, j}}{\Delta S^2}$$

差分方程为：

$$\frac{f_{i+1, j} - f_{i, j}}{\Delta t} + (r - q)j\Delta S \frac{f_{i+1, j+1} - f_{i+1, j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i+1, j+1} + f_{i+1, j-1} - 2f_{i+1, j}}{\Delta S^2} = r f_{i, j}$$

即

$$f_{i, j} = a_j^* f_{i+1, j-1} + b_j^* f_{i+1, j} + c_j^* f_{i+1, j+1} \quad (17.34)$$

其中

$$a_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t} \left[ -\frac{1}{2}(r - q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right]$$

$$b_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t} (1 - \sigma^2 j^2 \Delta t)$$

$$c_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t} \left[ \frac{1}{2}(r - q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right]$$

这样就产生了所谓的显性有限差分方法 (explicit finite difference method)。<sup>26</sup> 图 17.16 表明了隐性有限差分方法与显性有限差分方法之间的区别。隐性方法得到式 (17.27)，该式给出  $i\Delta t$  时刻的三个不同的期权值 ( $f_{i, j-1}$ 、 $f_{i, j}$  和  $f_{i, j+1}$ ) 与  $(i+1)\Delta t$  时刻的一个期权值 ( $f_{i+1, j}$ ) 之间的关系式。显性方法得到式 (17.34)，该式给出  $i\Delta t$  时刻的一个期权值 ( $f_{i, j}$ ) 与  $(i+1)\Delta t$  时刻的三个不同的期权值 ( $f_{i+1, j-1}$ 、 $f_{i+1, j}$  和  $f_{i+1, j+1}$ ) 之间的关系式。

**[例 17.11]** 表 17.5 表示了用显性有限差分方法为例 17.1 中美式看跌期权定价的结果。同在例 17.10 中一样， $M$ 、 $N$  和  $\Delta S$  的值分别取 20、10 和 5。由坐标方格得出期权价格是 \$4.26。<sup>27</sup>

## 置换变量

使用有限差分方法时，以  $\ln S$  作为标的变量而不是  $S$ ，可以提高计算效率。定义  $Z = \ln S$ 。方程 (17.21) 变成：

<sup>26</sup> 对  $\partial f / \partial t$  使用后向差分近似而不是前向差分近似，也可以得到显性有限差分方法。

<sup>27</sup> 稍后我们解释在坐标方格左手边顶部的负数值和其他不一致的部分。

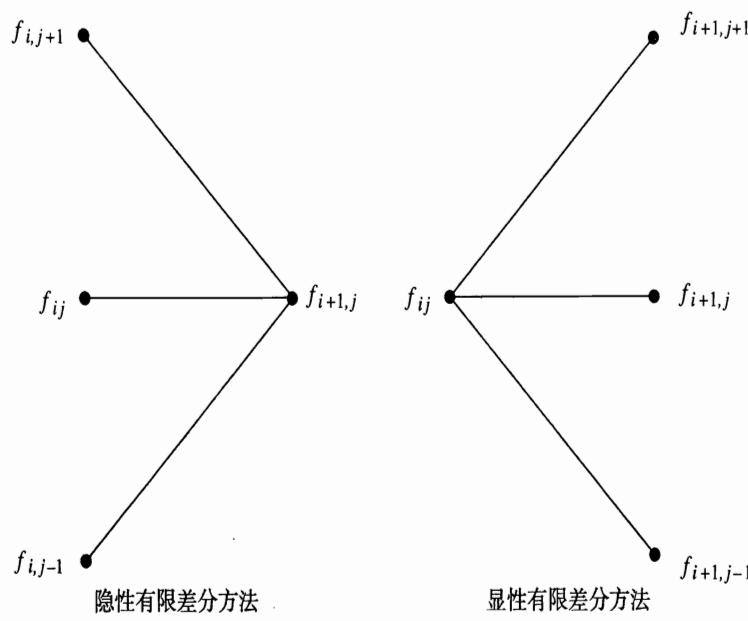


图 17.16 隐性和显性有限差分方法的区别

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = rf$$

那么该坐标方格估算的就是  $Z$  的相等间隔值的衍生证券值，而不是  $S$  的相等间隔值时的衍生证券值。隐性有限差分方程变成：

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q - \sigma^2/2) \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta Z} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta Z^2} = rf_{i,j}$$

即

$$\alpha_j f_{i,j-1} + \beta_j f_{i,j} + \gamma_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \quad (17.35)$$

其中

$$\alpha_j = \frac{\Delta t}{2\Delta Z} (r - q - \sigma^2/2) - \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2} \sigma^2$$

$$\beta_j = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta Z^2} \sigma^2 + r\Delta t$$

$$\gamma_j = -\frac{\Delta t}{2\Delta Z} (r - q - \sigma^2/2) - \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2} \sigma^2$$

显性有限差分方程变成：

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q - \sigma^2/2) \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta Z} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta Z^2} = rf_{i,j}$$

即

$$\alpha_j^* f_{i+1,j-1} + \beta_j^* f_{i+1,j} + \gamma_j^* f_{i+1,j+1} = f_{i,j} \quad (17.36)$$

表 17.5 用显性有限差分方法估算例 17.1 中美式期权值的坐标方格

| 股价<br>(美元) | 有效期(月) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|            | 5      | 4.5   | 4     | 3.5   | 3     | 2.5   | 2     | 1.5   | 1     | 0.5   | 0     |
| 100        | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 95         | 0.06   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 90         | -0.11  | 0.05  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 85         | 0.28   | -0.05 | 0.05  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 80         | -0.13  | 0.20  | 0.00  | 0.05  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 75         | 0.46   | 0.06  | 0.20  | 0.04  | 0.06  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 70         | 0.32   | 0.46  | 0.23  | 0.25  | 0.10  | 0.09  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 65         | 0.91   | 0.68  | 0.63  | 0.44  | 0.37  | 0.21  | 0.14  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 60         | 1.48   | 1.37  | 1.17  | 1.02  | 0.81  | 0.65  | 0.42  | 0.27  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 55         | 2.59   | 2.39  | 2.21  | 1.99  | 1.77  | 1.50  | 1.24  | 0.90  | 0.59  | 0.00  | 0.00  |
| 50         | 4.26   | 4.08  | 3.89  | 3.68  | 3.44  | 3.18  | 2.87  | 2.53  | 2.07  | 1.56  | 0.00  |
| 45         | 6.76   | 6.61  | 6.47  | 6.31  | 6.15  | 5.96  | 5.75  | 5.50  | 5.24  | 5.00  | 5.00  |
| 40         | 10.28  | 10.20 | 10.13 | 10.06 | 10.01 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 |
| 35         | 15.00  | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 |
| 30         | 20.00  | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 |
| 25         | 25.00  | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 |
| 20         | 30.00  | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 |
| 15         | 35.00  | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 |
| 10         | 40.00  | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 |
| 5          | 45.00  | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 |
| 0          | 50.00  | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 |

其中

$$\alpha_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t} \left[ -\frac{\Delta t}{2\Delta Z} (r - q - \sigma^2/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2} \sigma^2 \right] \quad (17.37)$$

$$\beta_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t} \left( 1 - \frac{\Delta t}{\Delta Z^2} \sigma^2 \right) \quad (17.38)$$

$$\gamma_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t} \left[ \frac{\Delta t}{2\Delta Z} (r - q - \sigma^2/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2} \sigma^2 \right] \quad (17.39)$$

置换变量方法具有  $\alpha_j$ 、 $\beta_j$  和  $\gamma_j$  以及  $\alpha_j^*$ 、 $\beta_j^*$  和  $\gamma_j^*$  独立于  $j$  的性质。可以证明，设定  $\Delta Z = \sigma\sqrt{3\Delta t}$  时数值计算最有效。

## 与三叉树图方法的关系

显性有限差分方法等价于三叉树图方法。<sup>28</sup> 在式 (17.34) 中  $a_j^*$ 、 $b_j^*$ 、 $c_j^*$  的表达

<sup>28</sup> 也能证明隐性有限差分方法等价于每个节点中散发  $M+1$  个分支的多叉树图方法。

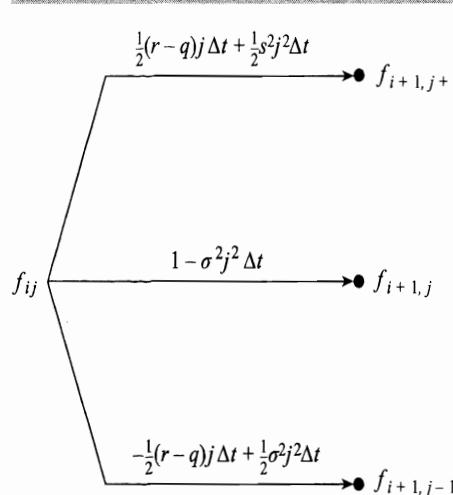


图 17.17 用三叉树来解释显性有限差分方法

式中，我们把以下项式解释为：

$-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$ :  $\Delta t$  时间间隔内股票价格从  $j\Delta S$  下降到  $(j-1)\Delta S$  的概率

$1 - \sigma^2 j^2 \Delta t$ :  $\Delta t$  时间间隔内股票价格保持为  $j\Delta S$  不变的概率

$\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$ :  $\Delta t$  时间间隔内股票价格从  $j\Delta S$  上升到  $(j+1)\Delta S$  的概率

在图17.17中对这一解释进行了说明。这三个概率合起来为1。它们给出的  $\Delta t$  时间间隔内股票价格的预期增长为  $(r-q)j\Delta S\Delta t = (r-q)S\Delta t$ 。这就是在风险中性世界中的预期增长值。当  $\Delta t$  很小时，它们还给出了  $\Delta t$  时间间隔内股票价格变化的方差是  $\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \Delta t = \sigma^2 S^2 \Delta t$ 。这满足  $S$  所遵循的随机过程。 $i\Delta t$  时刻的  $f$  值是由  $(i+1)\Delta t$  时刻， $f$  在风险中性世界中的期望值以无风险利率贴现计算出的。

为了使显性有限差分方法能更好地运用，三个“概率”：

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \\ & 1 - \sigma^2 j^2 \Delta t \\ & \frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \end{aligned}$$

必须都为正。在例 17.11 中，当  $j \geq 13$ （即当  $S \geq 65$ ）时， $1 - \sigma^2 j^2 \Delta t$  为负值。这解释了负的期权价格和表 17.5 左上方的其他矛盾现象的原因。这个例子说明了显性有限差分方法存在的主要问题：由于与树图有关的概率可能为负值，所以它的解有可能不收敛于微分方程的解。<sup>29</sup>

<sup>29</sup> J. Hull and A. White, “Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (March 1990): 87–100. 该论文说明，如何克服这个问题。在这里所考虑的情况，用  $\ln S$  而不是用  $S$  构造该坐标方格已经足以保证收敛。

当应用置换变量方法时 [参见式 (17.36) ~ 式 (17.39)]，则  $Z = \ln S$ 。 $Z$  减少  $\Delta Z$ 、 $Z$  保持相等、 $Z$  增加  $\Delta Z$  的概率分别为：

$$-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r - q - \sigma^2/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$1 - \frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r - q - \sigma^2/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$Z$  中的这三个变动对应于股票价格从  $S$  分别变化到  $Se^{-\Delta Z}$ 、 $S$  和  $Se^{\Delta Z}$ 。如果我们设定  $\Delta Z = \sigma\sqrt{3\Delta t}$ ，所得到的树图和概率就与第 17.4 节讨论的三叉树图方法相同了。

## 其他有限差分方法

人们提出了许多种其他有限差分方法，它们兼具隐性有限差分方法的某些特性和显性有限差分方法的某些特性。

从一个节点向另一个节点运动时，我们选择使用隐性方法或显性方法，这就是所谓的“跳格子方法”(hopscotch method)。图 17.18 说明了这种方法。在每个时刻，我们首先按通常的显性方法计算所有“显性节点”。然后，我们不用求解联立方程组就可以得到“隐性节点”，这是因为在附近节点的值已经求出来了。

Crank-Nicholson 方法是求隐性有限差分方法和显性有限差分方法的平均值。隐性的有限差分方程 (17.27) 给出：

$$f_{i,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1}$$

显性有限差分方程 (17.34) 给出：

$$f_{i-1,j} = a_j^* f_{i-1,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}$$

Crank-Nicholson 方法将这两个公式进行平均，得到：

$$f_{i,j} + f_{i-1,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1} + a_j^* f_{i-1,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}$$

令

$$g_{i,j} = f_{i,j} - a_j^* f_{i-1,j-1} - b_j^* f_{i,j} - c_j^* f_{i,j+1}$$

我们得到

$$g_{i,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j}$$

这说明使用 Crank-Nicholson 方法类似于使用隐性有限差分方法。Crank-Nicholson 方法的优点是它比隐性和显性有限差分方法收敛更快。

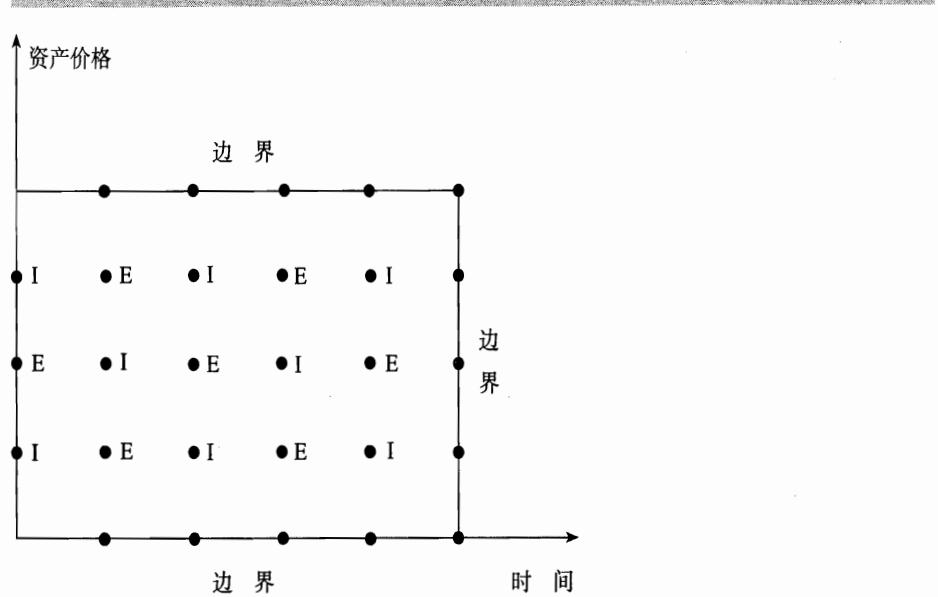


图 17.18 跳格子方法。I 表示由隐性差分方法计算的节点；E 表示由显性差分方法计算的节点

## 有限差分方法的应用

在为衍生证券定价时，有限差分法可处理的衍生证券类型与树图方法相同。它们既能处理欧式又能处理美式衍生证券，但是当衍生证券损益取决于标的变量过去的历史时，却不能方便地使用这些方法。有限差分法可用于多个标的变量的情况，但代价是计算时间会大大增加。这时图 17.15 中的坐标方格就变成多维的了。

计算套期保值参数的方法与在树图方法中所用的计算是类似的。delta、gamma 和 theta 可以直接用坐标方格中计算出的  $f_{i,j}$  求出。要计算 vega，首先必须让波动率有一个很小的变化，然后再用同一个坐标方格重新计算衍生证券的价值。

## 小 结

在本章，我们讨论了当不存在解析解时，用三种不同的数值计算方法为衍生证券估值。包括二叉树图方法、蒙特卡罗模拟方法和有限差分方法。

二叉树图方法假设在每个小的时间间隔  $\Delta t$  内，股票价格或者按比例  $u$  上升，或者按比例  $d$  下降。 $u$ 、 $d$  的大小和相应的概率经过仔细选择后，可使股票价格的变化在风险中性世界中具有正确的均值和标准差。从二叉树图的末端开始向前进行倒推计算，可以求出衍生证券的价格。对美式期权而言，在某个节点的价值是如下两个值之中的较大者：(a) 它立即执行时的价值；(b) 继续持有  $\Delta t$  时间的贴现期望值。

蒙特卡罗模拟方法利用随机数对许多不同的路径进行抽样，在风险中性世界中衍生证券

的标的变量遵循这些轨迹。每个路径都可计算出终值，并将这个终值按无风险利率进行贴现。贴现后的终值算术平均值是衍生证券价值的估计值。

有限差分方法将标的变量的微分方程转换成差分方程来求解。类似树图方法，计算是从衍生证券有效期最后时刻开始，倒推至衍生证券有效期的初始时刻。显性有限差分方法在功能上与三叉树图方法类似。隐性有限差分方法比显性有限差分方法更复杂，但优点是使用者不必为保证收敛性而进行任何特定的事先假设。

在实际中选择什么方法取决于被估值的衍生证券的特性以及所要求的精度。蒙特卡罗模拟从证券有效期的开始到结束一直都在运作，适用于欧式衍生证券，能处理许多损益状态很复杂的情况。随着标的资产数量增加，这个方法相对而言效率提高。树图方法和有限差分方法，其计算都是从衍生证券有效期最后时刻开始，倒推至衍生证券有效期的初始时刻，能够处理美式和欧式衍生证券定价。然而，当最终的损益状态依赖于标的变量的过去历史以及它们的当前值时，应用这些方法有很大的困难。并且，当包括三个或更多变量时，计算量相当大。

## 参考读物

### *General*

- Clewlow, L., and C. Strickland, *Implementing Derivatives Models*. Chichester: Wiley, 1998.  
 Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. Cambridge University Press, 1992.

### *On Tree Approaches*

- Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein. "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7 (October 1979): 229–64.  
 Figlewski, S., and B. Gao. "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53 (1999): 313–51.  
 Hull, J. C., and A. White, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (September 1988): 237–51.  
 Rendleman, R., and B. Bartter, "Two State Option Pricing," *Journal of Finance*, 34 (1979): 1092–1110.

### *On Monte Carlo Simulation*

- Boyle, P. P., "Options: A Monte Carlo Approach," *Journal of Financial Economics*, 4 (1977): 323–38.  
 Boyle, P. P., M. Broadie, and P. Glasserman. "Monte Carlo Methods for Security Pricing," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 (1997): 1267–1322.

Broadie, M., P. Glasserman, and G. Jain. "Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices," *Journal of Derivatives*, 5 (Fall 1997): 25–44.

### *On Finite Difference Methods*

- Hull, J. C., and A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (March 1990): 87–100.  
 Wilmott, P., *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*. Chichester: Wiley, 1998.

## 问题和习题

- 17.1 美式期权的 delta、gamma、vega、theta 和 rho 参数，哪一个可通过构造单一的二叉树

图来估值？

- 17.2 某不分红利股票的美式看跌期权，有效期 3 个月，股票市价和执行价格均为 \$60，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 45%。请构造时间间隔为 1 个月期的二叉树图模型为该期权估值。
- 17.3 请解释当用树图法估计美式期权价值时，如何应用控制变量技术。
- 17.4 某谷物期货的美式看涨期权，有效期 9 个月期，期货币价为 198 美分，执行价格为 200 美分，无风险利率为每年 8%，波动率为每年 30%。请构造时间间隔为 3 个月的二叉树图模型为该期权估值。
- 17.5 试想一个期权，其最终收益为期权有效期期末的股票价格，高出有效期内平均股价的部分。请问这一期权能否用二叉树图方法定价？请解释说明。
- 17.6 “对于支付红利的股票，其股价的树图不重合；但从股价中减去将来的红利的现值之后，其树图重合。”请解释这一论述。
- 17.7 请说明在脚注 9 所示的情况下，应用 Cox、Ross 和 Rubinstein 的二叉树图方法时，概率将出现负值。
- 17.8 利用间隔抽样法，以 100 次模拟运算来改进商业剪影 17.1 和表 17.1 中的  $\pi$  的估计值。
- 17.9 请解释说明为什么蒙特卡罗模拟不适用于美式衍生证券的定价。
- 17.10 某个不付红利股票的美式看跌期权，有效期为 9 个月，执行价格为 \$49。股票价格为 \$50，无风险利率为每年 5%，股价的波动率为每年 30%。用三个时间步的二叉树图对该期权定价。
- 17.11 利用三个时间步的树图估值小麦期货的 9 个月期美式看涨期权。当前的期货价格为 400 美分，执行价格为 420 美分，无风险利率为 6%，波动率为 35%p.a.。根据树图，估计期权的 delta 值。
- 17.12 一个 3 个月期美式看涨股票期权的执行价格为 \$20。股票价格为 \$20，无风险利率为 3%p.a.，波动率为 25%p.a.。预计 1.5 月之后有红利 \$2。利用三个时间步的二叉树图计算期权价格。
- 17.13 某个不付红利股票的美式看跌期权，有效期为 1 年，执行价格为 \$18。股票价格为 \$20，无风险利率为每年 15%，股价的波动率为每年 40%。利用 DerivaGem 软件和 4 个 3 个月的时间步来计算该期权的价值。画出树图，并验证最后的和倒数第二个节点上的期权价格是正确的。该期权是欧式期权的时候，利用 DerivaGem 软件计算该期权的价值。并用控制变量技术对美式期权价格估计值进行修正。
- 17.14 一个股票指数的美式看跌期权，有效期为 2 个月，执行价格为 480。目前的指数水平为 484，无风险利率为每年 10%，股票指数年红利收益率为 3%，指数的波动率为每年 25%。请将该有效期等分为 4 个时间段，每个时间段为期半个月。用树图方法对该期权定价。
- 17.15 当使用树图方法时，如何用变量控制技术改进美式期权的 delta 估计值？
- 17.16 假设用蒙特卡罗模拟方法为某个不支付红利股票的欧式看涨期权定价，股价的波动率是随机的。控制变量技术和对偶变量技术是怎样改进数值计算效率的？请解释当同时应用控制变量技术和对偶变量技术时，每次模拟运算为什么需要计算 6 个期权

的价值。

- 17.17 请说明当用隐性有限差分方法为美式货币看涨期权定价时，式 (17.27) 和式 (17.30) 的变动情况。
- 17.18 某个不支付红利股票的美式看跌期权，还有 4 个月到期，执行价格为 \$21，股票市价为 \$20，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 30%。请用显性有限差分方法为该期权估值。设时间间隔为 1 个月，股价间隔为 \$4。
- 17.19 当前铜的即期价格为每磅 \$0.60。假设其期货价格（每磅美元数）如下所示：

|        |      |
|--------|------|
| 3 个月期  | 0.59 |
| 6 个月期  | 0.57 |
| 9 个月期  | 0.54 |
| 12 个月期 | 0.50 |

铜价的波动率为每年 40%，无风险利率为每年 6%。请用二叉树方法对该美式看涨期权定价，已知执行价格为 \$0.60，该期权还有 1 年到期。在构造二叉树图模型时，请将该期权有效期等分为 4 个时间段，每个时间段为期 3 个月。（提示：如 14.7 节所述，风险中性世界中，一个变量的期货价格和其预期未来价格相同。）

- 17.20 请用题 17.19 中的二叉树图模型对以下证券估值：已知该证券一年内的收益为  $x^2$ ，其中  $x$  为铜价。
- 17.21 在应用显性有限差分方法对衍生证券估价时，什么情况下，边界条件  $S = 0$  和  $S \rightarrow +\infty$  会对估值结果产生影响？
- 17.22 如何用对偶变量技术改进商业剪影 17.2 和表 17.2 中的欧式期权价格估计值？
- 17.23 某公司发行了有效期为 3 年的可转换债券，面值为 \$25，可随时转换为该公司的股票 2 股。当股价高于或等于 \$18 时，公司可提前赎回债券并强制转换。假设该公司将尽可能早的强制转换。那么，请问可转换债券价格的边界条件是什么？假设利率为常数，你如何用有限差分方法对该可转换债券进行估值？假设该公司无违约风险。
- 17.24 请给出从标准正态分布中抽取三个随机样本的公式。设样本  $i$  和样本  $j$  的相关系数为  $\rho_{i,j}$ 。

## 课后练习

- 17.25 一个美式看跌期权，赋予卖出瑞士法郎得到美元的权利，执行价格为 \$0.80，到期期限为 1 年。瑞士法郎的波动率为 10%，美元的无风险利率为 6%，瑞士法郎的无风险利率为 3%，当前的汇率为 0.81。使用三个时间步的树图估值该期权。根据树图，计算期权的 delta。
- 17.26 某个白银金属期货的美式看涨期权，有效期为 1 年，执行价格为 \$9.00。当前期货合约的市价为 \$8.50，无风险利率为每年 12%，期货价格的波动率为每年 25%。请将该有效期等分为 4 个时间段，每个时间段为期 3 个月，利用 DerivaGem 软件计算该期权的价值。给出树图，并验证最后的和倒数第二个节点上的期权价格是正确的。该期权是欧式期权的时候，利用 DerivaGem 软件计算该期权的价值。并用控制变量技

- 术对美式期权价格估计值进行修正。
- 17.27 某个股票的美式看涨期权，有效期为 6 个月，预计在第 2 个月的月末和第 5 个月的月末将支付每股\$1 的红利。该股票的市价为\$30，执行价格为\$34，无风险利率为每年 10%，不支付红利的股价部分的波动率为每年 30%。请将该期权有效期等分为 6 个时间段，每个时间段为期 1 个月。用 DerivaGem 软件对该期权估值。并且将这一结果与 Black 近似方法得到的结果（参见第 13.12 节）进行比较。
- 17.28 当前英镑的汇价为\$1.60，其英镑/美元汇率波动率为每年 15%。某美式看涨期权执行价格为 1.62，还有 1 年到期。美元市场和英镑市场上的无风险年利率分别为每年 6% 和每年 9%。请用显性有限差分方法对该期权定价。设时间间隔为 3 个月，只需考虑间隔为 0.20 的汇率在 0.80~2.40 之间的情况。
- 17.29 请回答以下几个和 17.4 节中构造树图的几种方法有关的问题：
- 请证明 17.4 节中的二叉树模型和股票价格对数在  $\Delta t$  时间段内的变化的均值和方差是一致的。
  - 请证明 17.4 节中的三叉树模型和股票价格对数在  $\Delta t$  时间段内的变化的均值和方差是一致的 [忽略  $(\Delta t)^2$  和更高阶的项的时候]。
  - 当上升、持平和下降的概率分别为  $1/6$ 、 $2/3$  和  $1/6$  的时候，给出 17.4 节中的三叉树模型的另外一种形式。假设从  $S$  分出  $S_u$ 、 $S_m$  或  $S_d$ ，并且  $m^2 = ud$ 。请正确匹配股票价格对数变化的均值和方差。
- 17.30 你可以利用 DerivaGem 软件的 Application Builder Function 来研究，从二叉树图计算的期权价格是如何随着时间步的增加，收敛到正确价格的（参照图 17.4 和 DerivaGem 的 Sample Application A）。考虑一个股票指数的看跌期权。指数水平为 900，执行价格为 900，无风险利率为 5%，红利率为 2%，到期期限为 2 年。
- 当该期权是欧式的，指数波动率为 20% 的时候，给出与 Sample Application A 类似的收敛研究结果。
  - 当该期权是美的，指数波动率为 20% 的时候，给出与 Sample Application A 类似的收敛研究结果。
  - 指数波动率为 20%。使用变量控制技术的时候，用图表方式给出美式期权的定价和时间步数量之间的关系。
  - 假设当前美式期权的市价为 85.0。以图表给出隐含波动率估计值和时间步数量之间的关系。



## 在险值

在第 15 章中，我们分析了从不同角度描述一个衍生证券组合风险的一系列参数，例如 delta、gamma 和 vega。通常，一家金融机构每天对它暴露于每个市场变量的风险计算这些参数值。这样的市场变量常常有数百种或上千种。所以，进行 delta-gamma-vega 分析每天产生数量巨大的不同的风险参数。如果交易员只是负责管理金融机构中依赖某个特定市场变量的投资组合部分的话，这些风险参数提供的信息对他是有价值的。但是它们不能度量金融机构面临的总风险。

在险值（VaR）是一个全面衡量金融投资组合风险的单一参数。它已经被公司财务主管和基金经理以及金融机构广泛应用。中央银行监管机构也利用 VaR 来决定一家银行需要保有多少资本，以便反映它所承受的市场风险。

本章中我们会解释 VaR 方法，并且介绍两种主要的计算途径。它们分别是历史模拟方法和建模计算方法。

### 18.1 VaR 参数

当使用在险值方法的时候，我们感兴趣的是得出如下的论断：“我们有百分之  $X$  的可能在将来的  $N$  天里的损失不会超过  $V$  美元。”这里的变量  $V$  是投资组合的 VaR。它是关于两个变量的函数：时间长度（ $N$  天）和置信度（ $X\%$ ）。我们有

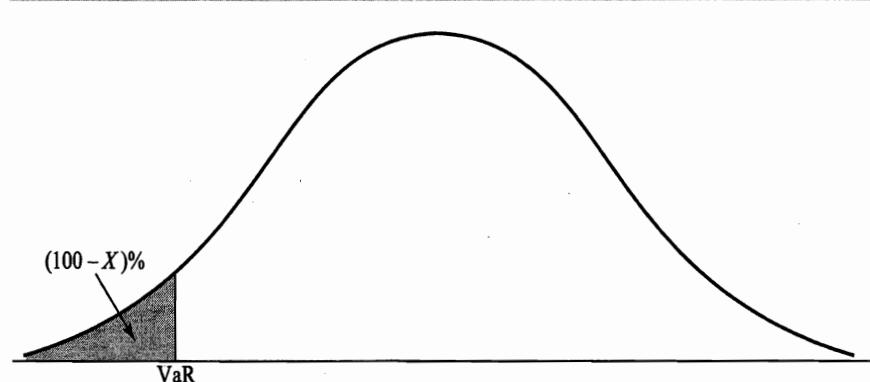


图 18.1 通过投资组合价值变化的概率分布计算 VaR，置信度为  $X\%$

### 商业剪影 18.1 监管机构如何使用 VaR

巴塞尔银行监督管理委员会是世界银行监管机构，定期在瑞士的巴塞尔开会。1988年它发布了被大家称为“1988年巴塞尔资本协定”（The 1988 BIS Accord）[简单称为“协定”（The Accord）]的文件。这是监管机构针对银行信用风险计算银行应该保有的相关资本的协议。几年后，巴塞尔委员会发布了“1996年修正案”（The 1996 Amendment），自1998年开始实行。其中要求银行除了信用风险之外，还要为市场风险保留相应资本。该修正案中区分了交易账册和银行账册。银行账册主要记录贷款项目，不进行管理和会计目的的定期再评估。交易账册中记录银行交易的许多不同种类的金融工具（股票、债券、互换、远期合约、期权等等），该账册中的项目每日进行再评估。

“1996年巴塞尔修正案”中计算交易账册相关资本的时候，用  $N = 10$ 、 $X = 99$  的 VaR 度量。这说明，我们侧重于反复评估 10 天期限内，发生的概率只有 1% 的损失。修正案要求银行持有上述 VaR 值（还要根据特殊风险进行调整）乘以  $k$  的资本。监管机构基于整个银行业状况选择乘数  $k$ ，而  $k$  要大于等于 3.0。经过测试，对于 VaR 估值程序非常优秀的银行，监管机构要求的  $k$  是最低值 3.0；而对于其他银行，监管机构要求的  $k$  可能比这个值要高。

$X\%$  的把握在将来的  $N$  天里损失不会超过这个水平。银行监管部门要求银行计算  $N = 10$ 、 $X = 99$  时的 VaR（参见商业剪影 18.1 的讨论）。

通常，如果时间长度为  $N$  天，置信度为  $X\%$ ，VaR 就是接下来  $N$  天中投资组合的价值变化的分布在第  $(100 - X)$  个百分点所对应的损失。例如，如果  $N = 5$ ， $X = 97$ ，VaR 是在接下来的 5 天中投资组合价值的变化分布的第 3 个百分点。图 18.1 描述的是投资组合价值变化近似正态分布情况下的 VaR。

VaR 是一个很有吸引力的参数，因为它易于理解。事实上，它给出了一个简单的问题“情况会变得多糟糕？”所有高级主管都想知道这个问题的答案。把投资组合所有的市场变量的所有套期保值参数统一成一个参数，能够带来很大的方便。

如果我们认同以单个参数描述投资组合风险是非常有用的，那么一个有意义的问题是 VaR 是否是最好的选择。一些研究者曾经提出 VaR 可能会促使交易员选择回报分布类似图 18.2 所示的投资组合。图 18.1 和图 18.2 所示的投资组合有相同的 VaR，但是由于后者的潜在损失更高，图 18.2 的投资组合风险更大。

处理上述问题的一种参数是条件在险值（Conditional VaR, C-VaR）。<sup>1</sup> VaR 关注“情况会变得多糟？”，而 C-VaR 关注“如果情况变糟，我们预计会损失多少？”C-VaR 是我们处于分布左尾部  $(100 - X)\%$  的情况下， $N$  天的时间长度中的预期损

<sup>1</sup> 这个参数也被称为期望损失（expected shortfall）或尾部损失（tail loss），是由 P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber and D. Heath, “Coherent Measures of Risk,” *Mathematical Finance*, 9 (1999): 203–28. 这些作者们定义了一个优秀的风险参数应该具有一些性质，说明了标准 VaR 参数并不完全具有这些性质。

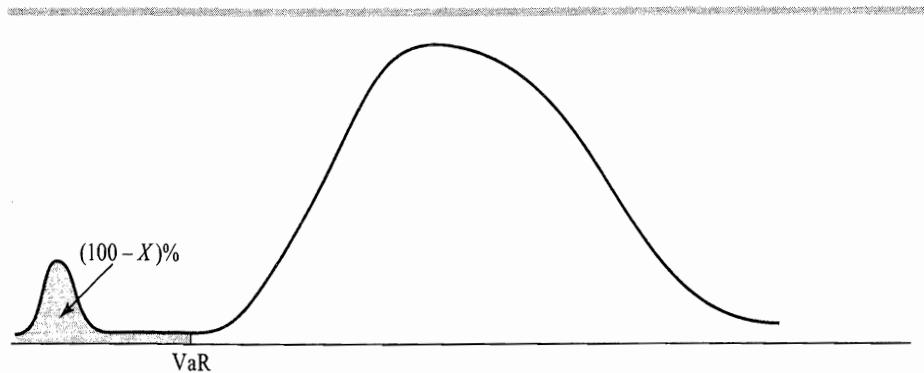


图 18.2 图 18.1 的另一种情况：VaR 相同，但是潜在损失更大

失。例如， $X = 99$ ， $N = 10$ ，C-VaR 是假设最坏的情况有 1% 的可能发生时，10 天内我们的平均损失。

虽然 VaR 存在一些缺点，VaR（而不是 C-VaR）仍然是在监管机构和风险管理中最流行的参数。本章接下来的内容中将主要介绍如何计算 VaR。

### 时间长度

理论上，VaR 有两个参数： $N$  为时间长度，用天数来衡量； $X$  为置信度。实际计算时分析师通常先设  $N$  恒为 1。这是因为没有足够的数据来直接估计时间跨度超过 1 天的市场变量的变化。通常的假设是：

$$N\text{-day VaR} = 1\text{-day VaR} \times \sqrt{N}$$

如果投资组合的价值变化在随后几天里的分布，遵循均值为 0 的正态分布，而且相互独立，则该公式严格成立。其他情况下该公式是一个近似。

如商业剪影 18.1 所述，我们提到监管机构要求银行必须保有 3 倍于 10 天 99% 的 VaR 的资本。假设 10 天 VaR 已经求得，这个最小资本水平实际上是  $3 \times \sqrt{10} = 9.49$  倍的 1 天 99% VaR。

## 18.2 历史模拟方法

历史模拟是一种估算 VaR 的通用方法。它是直接利用过去的数据来预测将来可能发生变化。假设我们利用时间长度为 1 天，置信度为 99%，以及过去 500 天的数据来计算一个投资组合的 VaR。第一步是确定影响这个投资组合的市场变量。通常这些变量包括汇率、股价、利率等等。然后，我们搜集这些市场变量在过去 500 天里的变动数据。我们可以得到 500 个今天到明天可能发生的情景。第一种情景下，假设所有变量的变化百分数都等同于我们在第 1 天收集的数据变化百分数；第二种情景下，假设所有变量的变化百分数都等同于我们在第 2 天收集

的数据变化百分数。依此类推。对每种情景，我们计算今天到明天投资组合价值的美元变化。据此，它定义了投资组合价值的日变化值遵循的概率分布。损失排第 5 位的日变化值是该分布的第 1 个百分点。VaR 的估计值就是概率分布的第 1 个百分点处的损失。假设过去 500 天能够很好地预示下一天的变化，那么我们有 99% 的把握损失不会超过所得的 VaR 值。

历史模拟方法可以用表 18.1 和表 18.2 来表示。表 18.1 给出了过去 500 天里的市场变量观测值。观测值来自每天某一特定时间点（通常为收盘时）。我们把包含第一份数据对应的天记为第 0 天；包含第二份数据对应的天记为第 1 天；依此类推。今天是第 500 天；明天是第 501 天。

表 18.2 给出了明天的市场变量值，其中假设了今明两天之间的变化百分数和第  $i - 1$  天与第  $i$  天之间 ( $1 \leq i \leq 500$ ) 的变化百分数相同。假设今天与明天之间市场变量的变化百分数等于第 0 天和第 1 天之间市场变量的变化百分数，那么明天的市场变量值就如表 18.2 中第 1 行所示；假设今天与明天之间市场变量的变化百分数等于第 1 天和第 2 天之间市场变量的变化百分数，那么明天的市场变量值就如表 18.2 中第 2 行所示；依此类推。表 18.2 的 500 行表示我们要考虑的 500 种情景。

定义  $v_i$  为第  $i$  天的某个市场变量的值，并假设今天为第  $m$  天。第  $i$  种情景中，明天的市场变量值将为：

$$v_m \frac{v_i}{v_{i-1}}$$

在我们的例子中， $m = 500$ 。对第一个变量，今天的数值  $v_{500}$  是 25.85。同时  $v_0 = 20.33$ ， $v_1 = 20.78$ 。由此可得在第一种情景中第一个市场变量的值为

$$25.85 \times \frac{20.78}{20.33} = 26.42$$

表 18.2 的倒数第二列表示 500 种情形下所对应的投资组合价值。假设今天的投资组合价值为 2 350 万美元。我们可以针对各种不同情景计算今明两天

表 18.1 历史模拟计算 VaR 所用的数据

| 天数  | 市场变量 1 | 市场变量 2 | ... | 市场变量 N |
|-----|--------|--------|-----|--------|
| 0   | 20.33  | 0.1132 | ... | 65.37  |
| 1   | 20.78  | 0.1159 | ... | 64.91  |
| 2   | 21.44  | 0.1162 | ... | 65.02  |
| 3   | 20.97  | 0.1184 | ... | 64.90  |
| ⋮   | ⋮      | ⋮      | ⋮   | ⋮      |
| 498 | 25.72  | 0.1312 | ... | 62.22  |
| 499 | 25.75  | 0.1323 | ... | 61.99  |
| 500 | 25.85  | 0.1343 | ... | 62.10  |

表 18.2 从表 18.1 的数据所得明天的情形 (第 501 天)

| 情景编号 | 市场变量 1 | 市场变量 2 | ... | 市场变量 $N$ | 投资组合价值 |       |
|------|--------|--------|-----|----------|--------|-------|
|      |        |        |     |          | (百万美元) | 价值变化值 |
| 1    | 26.42  | 0.1375 | ... | 61.66    | 23.71  | 0.21  |
| 2    | 26.67  | 0.1346 | ... | 62.21    | 23.12  | -0.38 |
| 3    | 25.28  | 0.1368 | ... | 61.99    | 22.94  | -0.56 |
| :    | :      | :      | :   | :        | :      | :     |
| 499  | 25.88  | 0.1354 | ... | 61.87    | 23.63  | 0.13  |
| 500  | 25.95  | 0.1363 | ... | 62.21    | 22.87  | -0.63 |

之内的价值变化。对第一种情景，价值变化值是 21 万美元；对第二种情景，价值变化值是 -38 万美元。依此类推。

我们感兴趣的是投资组合价值变化遵循的分布的 1% 分界点。表 18.2 中总共有 500 种情况，所以我们可以从表最后一栏中找出排名第 5 的损失，就能得到上述百分点的估计值。另一种方法是所谓的极值理论 (extreme value theory)，该方法中平滑处理了分布的左端尾部数字，以便得到更为准确的分布的 1% 分界点。<sup>2</sup> 如前一节所述，置信度为 99% 的  $N$  天 VaR 是  $\sqrt{N}$  倍的 1 天 VaR。

本例中的 VaR 估计值每天都应该用最新的过去 500 天的数据进行更新。比如，考虑在第 501 天发生的变化。我们可以得到所有市场变量的最新值并且能够计算出我们的投资组合要用的最新值。然后我们可以重复前述的过程来计算新的 VaR。<sup>3</sup> 我们所用的市场变量数据是第 1 天到第 501 天的数据（我们可以得到所需的 500 个市场变量的变化百分数；第 0 天的市场变量值不再被使用）。类似地，在第 502 天我们使用第 2 到第 502 天的数据来计算 VaR，依此类推。

### 18.3 建模计算方法

可以代替历史模拟方法的一个重要方法是建模计算方法。讲述该方法的细节之前，我们需要讨论相关波动率度量单位的一个问题。

#### 每日波动率

在期权定价中，我们通常以年度量时间，而且某个资产的波动率通常表示成

<sup>2</sup> 参见 P. Embrechts, C. Kluppelberg, and T. Mikosch. *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*. New York: Springer, 1997; A. J. McNeil, “Extreme Value Theory for Risk Managers,” in *Internal Modeling and CAD II*. London, Risk Books, 1999, 也可以在 [www.math.ethz.ch/~mcneil](http://www.math.ethz.ch/~mcneil) 找到。

<sup>3</sup> 第 500 天和第 501 天之间，投资组合的构成也有可能发生了变化。

“年波动率”。当使用建模计算方法计算 VaR 的时候，我们通常以日来度量时间，资产的波动率通常表示成“日波动率”。

那么期权定价中的年波动率和 VaR 计算中的日波动率有什么联系呢？定义  $\sigma_{\text{year}}$  为某个资产的年波动率， $\sigma_{\text{day}}$  为该资产的相应的日波动率。假设每年有 252 个交易日，根据公式 (13.2)，我们可以将 1 年后资产的连续复利收益的标准差表示成  $\sigma_{\text{year}}$  或  $\sigma_{\text{day}}\sqrt{252}$ 。因此

$$\sigma_{\text{year}} = \sigma_{\text{day}}\sqrt{252}$$

即

$$\sigma_{\text{day}} = \frac{\sigma_{\text{year}}}{\sqrt{252}}$$

因此，日波动率大约为年波动率的 6%。

在 13.4 节中提过， $\sigma_{\text{day}}$  近似等于 1 天后资产价格变化百分数的标准差。为了计算 VaR，我们假定两者是完全相等的。我们就设资产价格（或其他任何变量）的日波动率等于 1 天后价格变化百分比的标准差。

接下来的几节中假设我们已经知道波动率与相关系数的估计值。在第 19 章中，我们将讨论如何求得这些估计值。

## 单资产案例

考虑最为简单的情形，证券组合只包括单种股票头寸，我们解释如何以建模计算方法得到 VaR。我们考虑的证券组合包括 1 000 万美元微软股份。我们设  $N = 10$ ， $X = 99$ ，这样，我们关心的就是 99% 置信度下 10 天中的损失水平的上限。首先，我们以一天时间为单位进行研究。

我们假设微软股票的日波动率是 2%（相当于年波动率为 32%）。因为头寸的大小为 1 000 万美元，那么该头寸价值的日变动的标准差就是 1 000 万美元的 2%，即 20 万美元。

在建模计算方法中普遍使用以下假设：某市场变量在考察的时间范围内的预期变化为零。这种假设并不严格成立，但还是比较合理。一个市场变量的价格在短时间内的预期变化与这种变化的标准差相比通常微不足道。举个例子来说，如果微软每年的预期回报率是 20%，那么每天的回报率则是  $0.20/252$ ，即约 0.08%，而该回报率的标准差是 2%。若以 10 天为时间单位，则预期回报率是  $0.08 \times 10$ ，即大约 0.8%，而该回报率的标准差是  $2\sqrt{10}$ ，即大约 6.3%。

到现在为止，我们已经确定了微软股票证券组合价值在一天内变化的标准差为 20 万美元，均值为零（至少近似为零）。我们假设变化服从正态分布。<sup>4</sup> 在本书

<sup>4</sup> 为了与第 13 章中的期权定价过程相互一致，我们可以假设微软明天的股价服从对数正态分布。因为 1 天是很短的时间段，这与我们已经做的假设——今天和明天之间股价的变化服从正态分布——几乎没有区别。

末尾的附表中可以查出  $N(-2.33) = 0.01$ 。这意味着一个正态分布变量值有 1% 的可能性会下降 2.33 个标准差以上。同样，这也意味着我们有 99% 的把握可以认为一正态分布变量不会下降 2.33 个标准差以上。所以，由 1 000 万美元微软股票头寸组成的证券组合的 1 天 99% 置信度的 VaR 等于：

$$2.33 \times 200\,000 = \$466\,000$$

之前提过， $N$  天的 VaR 可由  $\sqrt{N}$  乘以 1 天的 VaR 来得到。所以微软 10 天 99% 的 VaR 等于

$$466\,000 \times \sqrt{10} = \$1\,473\,621$$

接下来考虑由 500 万美元 AT&T 股票头寸组成的证券组合，我们假设 AT&T 的日波动率为 1%（年波动率接近于 16%）。使用与微软例子相似的计算过程，我们得出证券组合价值 1 天内变化的标准差是

$$5\,000\,000 \times 0.01 = 50\,000$$

假设变化服从正态分布，则 1 天 99% 的 VaR 为

$$50\,000 \times 2.33 = \$116\,500$$

10 天 99% 的 VaR 为

$$116\,500 \times \sqrt{10} = \$368\,405$$

## 两资产案例

现在考虑这样一个证券组合，它由 1 000 万美元的微软股票和 500 万美元的 AT&T 股票组成。我们假设两种股票的回报率服从相关系数为 0.3 的二维正态分布。统计学中的一个标准结论是说，如果两个变量  $X$  和  $Y$  的标准差分别为  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$ ，相关系数等于  $\rho$ ，那么  $X + Y$  的标准差可以表示如下：

$$\sigma_{x+y} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y}$$

为了应用上述结论，我们定义  $X$  等于微软头寸价值在 1 天内的变化，而  $Y$  定义为 AT&T 头寸价值在 1 天内的变化，那么

$$\sigma_x = 200\,000, \sigma_y = 50\,000$$

因此 1 天内两种资产组合的价值变化的标准差为

$$\sqrt{200\,000^2 + 50\,000^2 + 2 \times 0.3 \times 200\,000 \times 50\,000} = 220\,227$$

我们假设了变化的均值为零。此变化服从正态分布，所以 1 天 99% 的 VaR 为

$$220\,227 \times 2.33 = \$513\,129$$

10 天的 99% 置信区间的 VaR 为  $\sqrt{10}$  乘以上述结果，即 1 622 657 美元。

## 分散化投资的好处

上面的例子中我们刚刚计算过：

1. 微软股票组合 10 天 99% 的 VaR 是 1 473 621 美元
2. AT&T 股票组合 10 天 99% 的 VaR 为 368 405 美元
3. 微软和 AT&T 股票证券组合 10 天 99% 的 VaR 是 1 622 657 美元

差额

$$(1\ 473\ 621 + 368\ 405) - 1\ 622\ 657 = \$219\ 369$$

就代表分散投资的价值。如果微软和 AT&T 完全相关，那么有微软和 AT&T 组合资产的 VaR 就等于微软单种组合 VaR 和 AT&T 单种组合 VaR 的和。如果两者非完全相关，就可以分散部分风险。<sup>5</sup>

## 18.4 线性模型

我们刚才讨论的例子简单地描述了应用线性模型计算 VaR 的方法。假设我们有价值为  $P$  的资产组合，它由  $n$  项资产组成，第  $i$  项资产的份额为  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )。我们将  $\Delta x_i$  定义成资产  $i$  在 1 天之内的回报。可以得出 1 天之内我们在资产  $i$  上投资价值的美元变化量为  $\alpha_i \Delta x_i$ ，有

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i \quad (18.1)$$

其中  $\Delta P$  是 1 天内总资产组合价值的美元变化量。

在前一节所考虑过的例子中，我们将 1 000 万美元投资在第一项资产（微软）上，将 500 万美元投资在第二项资产（AT&T）上。因此（以百万美元为单位） $\alpha_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 5$ ，有

$$\Delta P = 10\Delta x_1 + 5\Delta x_2$$

如果我们假设在等式 (18.1) 中的  $\Delta x_i$  服从多维正态分布，那么  $\Delta P$  便服从正态分布。那么，为了求得 VaR，我们需要计算的仅仅是  $\Delta P$  的均值和标准差。与前一节一样，我们假设每个  $\Delta x_i$  的期望值为零，这意味着  $\Delta P$  的均值也是零。

为计算得到  $\Delta P$  的标准差，我们假设  $\sigma_i$  为第  $i$  项资产的日波动率， $\rho_{ij}$  为第  $i$  项资产收益和第  $j$  项资产收益之间的相关系数。也就是说  $\sigma_i$  是  $\Delta x_i$  的标准差，而  $\rho_{ij}$  则是  $\Delta x_i$  和  $\Delta x_j$  的相关系数。 $\Delta P$  的方差由  $\sigma_P^2$  表示，则

---

<sup>5</sup> Harry Markowitz 是第一批研究分散化投资带给证券组合经理好处的学者之一。他在这方面的研究成果使他在 1990 年获得了诺贝尔奖。参照 H. Markowitz, “Portfolio Selection,” *Journal of Finance*, 7, 1 (March 1952): 77-91.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j$$

上述等式也可以表示成

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \quad (18.2)$$

$N$  天内变化量的标准差为  $\sigma_p \sqrt{N}$ ,  $N$  天 99% 的 VaR 为  $2.33\sigma_p \sqrt{N}$ 。

在前一节我们讨论过的例子中,  $\sigma_1 = 0.02$ ,  $\sigma_2 = 0.01$  且  $\rho_{12} = 0.3$ 。我们已经提过  $\alpha_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 5$ , 所以

$$\sigma_p^2 = 10^2 \times 0.02^2 + 5^2 \times 0.01^2 + 2 \times 10 \times 5 \times 0.3 \times 0.02 \times 0.01 = 0.0485$$

得出  $\sigma_p = 0.220$ 。这就是资产组合价值日变化量的标准差 (以百万美元为单位)。10 天置信度为 99% 的 VaR 是  $2.33 \times 0.220 \times \sqrt{10} = 1.623$  (百万美元)。这与前一节中所得到的结论相同。

## 处理利率的方法

要将一个公司所面临的每一个债券价格或利率风险一一定义成对应的市场变量是不可能的。因此, 使用建模计算方法的时候, 我们需要做出简化处理。一个可行方法是假设收益率曲线只发生平行移动。接下来我们只需定义一个市场变量: 平行移动的幅度。一个债券组合的价值变化就可以用久期关系式计算出来:

$$\Delta P = -DP\Delta y$$

这里  $P$  是资产组合的价值,  $\Delta P$  是一天内  $P$  的变化量,  $D$  是资产组合的修正久期,  $\Delta y$  是一天中的平移幅度。

这种计算方法的准确度一般不太高。接下来通常要做的就是选择标准期限的零息债券作为市场变量: 标准期限有 1 个月、3 个月、6 个月、1 年、2 年、5 年、7 年、10 年和 30 年。为了计算 VaR, 资产组合内金融工具的所有现金流被映射分解为标准到期日的现金流。考虑 100 万美元的 1.2 年期长期债券头寸, 息票率为 6%, 每半年支付一次息票。息票在 0.2 年、0.7 年和 1.2 年支付, 本金在 1.2 年支付。于是, 我们第一步可以把这支债券分解为 3 万美元的 0.2 年期零息债券、3 万美元的 0.7 年期零息债券和 103 万美元的 1.2 年期零息债券头寸。0.2 年期债券的头寸可以由 1 个月期和 3 个月期零息债券头寸组合而成; 0.7 年期债券可以由 6 个月和 1 年期零息债券头寸组合而成; 1.2 年期零息债券头寸可以由 1 年期零息债券头寸和 2 年期零息债券头寸组合而成。结果在进行 VaR 计算时, 1.2 年期附息债券被分解为 1 个月期、3 个月期、6 个月期、1 年期和 2 年期零息债券头寸的组合。

上述过程被称为现金流映射分解。本章附录中解释了这种方法。

## 线性模型的应用

线性模型的最简单的应用对象是不包含任何基于股票、债券、外汇和商品的衍生工具的资产组合。这种情况下资产组合价值变化量与组合中各资产价格的变化百分数呈线性关系。需要注意的是，为了计算 VaR，所有的资产价格都以国内货币作为衡量单位。因此，一个美国大银行所考虑的市场变量很可能包括以美元衡量的 Nikkei255 指数，以美元衡量的 10 年期英镑零息债券的价格等等。

可以用线性模型处理的一种衍生品是购买外币的远期合约。假设合约在  $T$  时刻到期。我们可以将合约视为  $T$  时刻到期的外币零息债券与  $T$  时刻到期的国内零息债券的兑换。为了计算 VaR，远期合约可被分解为外币债券的多头头寸和本币债券的空头头寸。每种债券都可以用现金流映射分解过程来处理。

接下来考虑利率互换。如第 7 章中所述，利率互换可视为浮动利率债券和固定利率债券的交换。固定利率债券是常规的附息债券，浮动利率债券在下一个付息日之后的即刻价值等于票面值。我们可以将其理解为到期日等于下个付息日的零息债券。所以，利率互换被简化成债券多头与空头的组合，每个债券可以用现金流映射分解过程来处理。

## 线性模型和期权

我们现在考虑存在期权的情况下如何运用线性模型。首先考虑由一种股票的期权组成的证券组合，该股票的现价是  $S$ 。假设头寸的 delta（以 15 章中给出的方法进行计算）是  $\delta$ 。<sup>6</sup> 因为  $\delta$  是资产组合价值变化对于  $S$  变化的比率，则下式近似成立：

$$\delta = \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

或者

$$\Delta P = \delta \Delta S \quad (18.3)$$

其中  $\Delta S$  是股价 1 天之内的美元变化量， $\Delta P$  跟之前一样，是 1 天内证券组合价值的美元变化量。我们定义  $\Delta x$  是 1 天内股价变化百分比，那么有

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

于是  $\Delta P$  和  $\Delta x$  之间的近似关系就可以表示为：

$$\Delta P = S \delta \Delta x$$

当我们持有包括期权在内的几个标的市场变量的头寸之时，我们可以类似地

7

---

<sup>6</sup> 通常我们用  $\Delta$  和  $\Gamma$  表示证券组合的 delta 和 gamma。本节与下一节中我们使用小写字母  $\delta$  和  $\gamma$ ，以免过多使用  $\Delta$ 。

推导出  $\Delta P$  和  $\Delta x_i$  之间的近似线性关系。它们的关系如下：

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n S_i \delta_i \Delta x_i \quad (18.4)$$

其中  $S_i$  是第  $i$  个市场变量的值， $\delta_i$  是关于第  $i$  个市场变量的证券组合的 delta。得出的等式与式 (18.1) 一致：

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i \quad (18.5)$$

其中  $\alpha_i = S_i \delta_i$ 。于是等式 (18.2) 可以用来计算  $\Delta P$  的标准差。

**[例 18.1]** 考虑由微软和 AT&T 的期权组成的证券组合。微软期权的 delta 为 1 000，AT&T 期权的 delta 为 20 000。微软股价是 \$120，AT&T 股价是 \$30。根据等式 (18.4)，下式近似成立：

$$\Delta P = 120 \times 1000 \times \Delta x_1 + 30 \times 20000 \times \Delta x_2$$

即

$$\Delta P = 120000 \Delta x_1 + 600000 \Delta x_2$$

其中  $\Delta x_1$  和  $\Delta x_2$  是 1 天内微软和 AT&T 的回报， $\Delta P$  是资产组合价值的相应变化（假设资产组合包括 12 万美元的微软和 60 万美元的 AT&T）。假设微软的日波动率是 2%，AT&T 的日波动率是 1%，日变化之间的相关系数是 0.3， $\Delta P$  的标准差（以千美元为单位）计算如下：

$$\sqrt{(120 \times 0.02)^2 + (600 \times 0.01)^2 + 2 \times 120 \times 0.02 \times 600 \times 0.01 \times 0.3} = 7.099$$

因为  $N(-1.65) = 0.05$ ，5 天 95% 置信度的 VaR 为  $1.65 \times \sqrt{5} \times 7099 = \$26193$ 。

## 18.5 二次模型

当资产组合包含期权的时候，线性模型只是一种近似。线性模型不考虑资产组合的 gamma。如第 15 章中所述，delta 定义为资产组合价值对标的市场变量的变化率。gamma 定义为 delta 对标的市场变量的变化率。gamma 衡量组合价值和标的市场变量之间关系曲线的曲率。

图 18.3 描述了非零 gamma 对于资产组合价值概率分布的影响。当 gamma 为正的时候，概率分布倾向于正偏；当 gamma 是负的时候，概率分布倾向于负偏。图 18.4 和图 18.5 说明了产生这种结果的原因。图 18.4 描述了看涨期权多头的价值与标的资产价格之间的关系。看涨期权多头是正 gamma 值期权头寸的一个例子。图中显示当 1 天结束时刻的标的资产价格的概率分布为正态分布时，期权价格的概

率分布正偏。<sup>7</sup> 图 18.5 表明看涨期权空头和标的资产价格之间的关系。看涨期权空头有负的 gamma 值。在本例中我们看到，在 1 天结束时标的资产价格的正态分布，对应于期权头寸价值的负偏分布。

资产组合的 VaR 严格依赖于证券组合价值概率分布的左半尾部。比如，我们使用的置信度为 99% 时，VaR 可以由左半尾部 1% 分界点左边的部分衡量。如图 18.3 (a) 和图 18.4 中的描述，正 gamma 资产组合比正态分布倾向于有更薄的左尾部。正态分布的假设下，我们计算出来的 VaR 会偏高。类似地，如图 18.3 (b) 和图 18.5 中的描述，负 gamma 证券组合比正态分布倾向于有更厚的左尾部。正态分布的假设下，我们计算出来的 VaR 会偏低。

为了得到比线性模型结果更加准确的 VaR 估计值，我们可以同时使用 delta 和 gamma 参数，将  $\Delta P$  与  $\Delta x_i$  联系起来。考虑基于价格为  $S$  的单个资产的证券组合。假设  $\delta$  和  $\gamma$  分别为这项证券组合的 delta 和 gamma。第 15 章附录中有以下等式：

$$\Delta P = \delta \Delta S + \frac{1}{2} \gamma (\Delta S)^2$$

这个等式是近似式 (18.3) 的一种改进。<sup>8</sup> 设

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

简化为

$$\Delta P = S \delta \Delta x + \frac{1}{2} S^2 \gamma (\Delta x)^2 \quad (18.6)$$

更为一般地，考虑依附于  $n$  个标的市场变量的证券组合，而组合内的每个金融工具只依附于其中单个市场变量。公式 (18.6) 变成

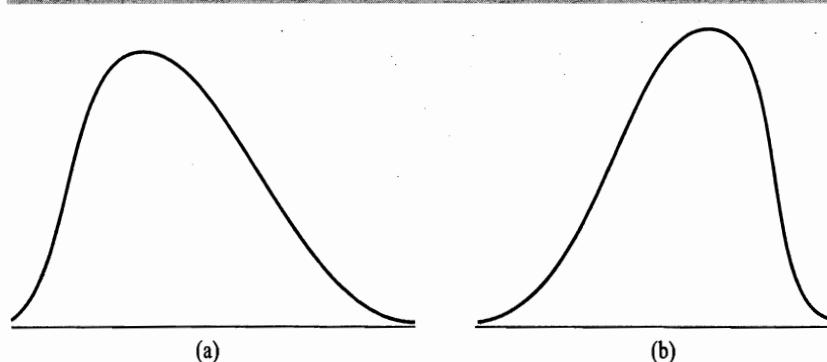


图 18.3 (a) 正 gamma、(b) 负 gamma 资产组合价值的概率分布

<sup>7</sup> 脚注 4 中提过，VaR 的计算中我们可以把正态分布作为对数正态分布的一种近似。

<sup>8</sup> 当忽略  $\Delta t$  的高阶项的时候，第 15 章附录中的泰勒展开式给出了近似值，有

$$\Delta P = \Theta \Delta t + \delta \Delta S + \frac{1}{2} \gamma (\Delta S)^2$$

实际应用中，因为  $\Theta \Delta t$  项非常小，通常将其忽略。

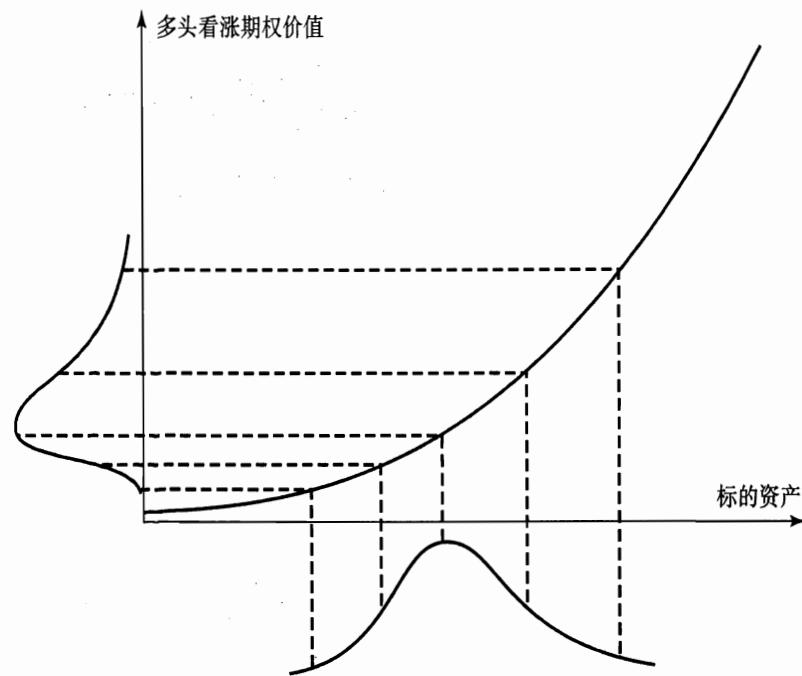


图 18.4 把标的资产的正态概率分布转换成该资产的看涨期权多头的概率分布

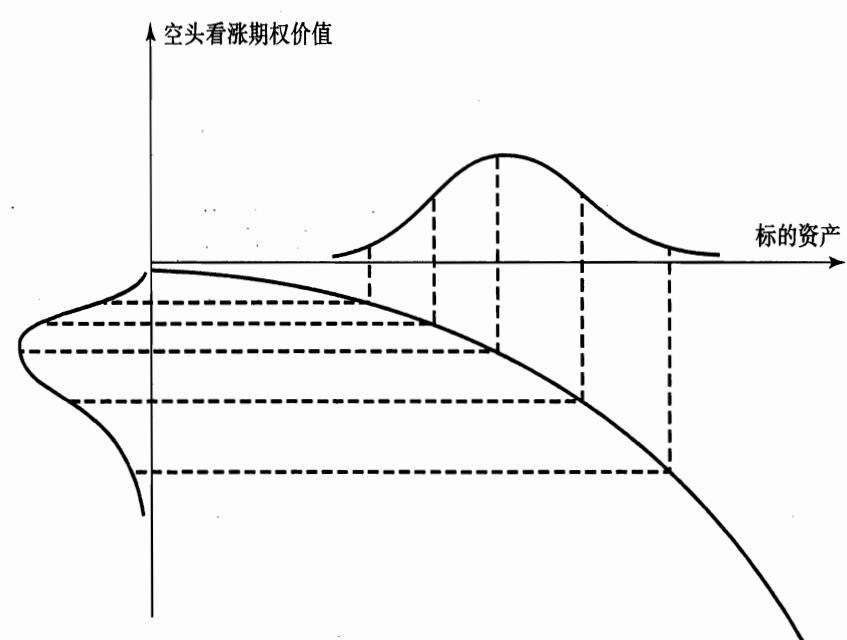


图 18.5 把标的资产的正态概率分布转换成该资产的看涨期权空头的概率分布

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n S_i \delta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} S_i^2 \gamma_i (\Delta x_i)^2$$

其中， $S_i$  是第  $i$  个市场变量的值， $\delta_i$  和  $\gamma_i$  分别是证券组合关于第  $i$  个市场变量的 delta 值和 gamma 值。当证券组合内的单个金融工具依赖于多个市场变量的时候，得到更为一般化的公式：

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n S_i \delta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} S_i S_j \gamma_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \quad (18.7)$$

其中  $\gamma_{ij}$  是“交叉 gamma”，它被定义为：

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_i \partial S_j}$$

公式 (18.7) 用起来没有公式 (18.5) 方便。但是它可以用来计算  $\Delta P$  的矩。利用统计学的 Cornish-Fisher 展开，根据上面计算的矩，可以估计概率分布的分界点。<sup>9</sup>

## 18.6 蒙特卡罗模拟

除了上述所述的方法，我们可以在建模计算方法中执行蒙特卡罗模拟得出  $\Delta P$  的概率分布。假设我们要计算一个证券组合一天的 VaR。该方法的步骤如下：

1. 利用当前的市场变量值，计算当前的证券组合价值
2. 从多维正态分布抽取样本  $\Delta x_i$ <sup>10</sup>
3. 根据  $\Delta x_i$  的样本值，计算今天结束之时的各个市场变量值
4. 以常规方法，计算今天结束之时的证券组合价值
5. 第 4 步中得到的价值减去第 1 步中得到的价值，得到  $\Delta P$  的样本值
6. 反复第 2 到第 5 步，建立  $\Delta P$  的概率分布

VaR 就等于  $\Delta P$  概率分布中相应的分位点。例如，我们按上述的方法计算出了 5 000 个不同的  $\Delta P$  样本值。那么 1 天 99% 置信度的 VaR 就是最坏情况中排名第 50 的  $\Delta P$  值；1 天 95% 置信度的 VaR 是最坏情况中排名第 250 的  $\Delta P$  值。依此类推。<sup>11</sup> 通常假定  $N$  天的 VaR 等于 1 天的 VaR 乘以  $\sqrt{N}$ 。<sup>12</sup>

<sup>9</sup> 关于矩的计算以及 Cornish-Fisher 展开的应用细节，参考作者网站上的技术说明 10。当只有一个标的变量时， $E[\Delta P] = 0.5S^2T\sigma^2$ ， $E[\Delta P^2] = S^2\Delta^2\sigma^2 + 0.75S^4T^2\sigma^4$ ， $E[\Delta P^3] = 4.5S^4\Delta^2T\sigma^4 + 1.875S^6T^3\sigma^6$ ，其中  $S$  是该变量的值，且  $\sigma$  是日波动率。DerivaGem Application Builder 中的 Sample Application E 中，对上述情况使用了 Cornish-Fisher 展开。

<sup>10</sup> 第 17 章中给出了一种抽样方法。

<sup>11</sup> 和历史模拟中的情况一样，极值理论可被用来平滑分布的尾部，就能得到更好的分位点的估计值。

<sup>12</sup> 当证券组合包含期权的时候，这一结论只能近似成立。但是实际应用中，绝大多数的 VaR 计算方法采用这一假设。

蒙特卡罗模拟的缺点是计算过程比较慢，因为需要多次反复重估公司的整个证券组合（可能包括千百种不同的金融工具）。<sup>13</sup>一种加快计算过程的方法是，假设公式（18.7）表示的是  $\Delta P$  与  $\Delta x_i$  之间的关系。那么，在蒙特卡罗模拟中，我们可以直接从第 2 步跳到第 5 步，不需重新全面估值证券组合。这种方法有时被称为部分模拟方法。

## 18.7 不同方法之间的比较

我们至此讨论了两种估计 VaR 的方法：历史模拟方法和建模计算方法。建模计算方法的优点是可以很快产生结果，并且可以和波动率更新操作（在下一章中讲述）一起使用。建模计算方法的主要缺点是，它假定市场变量服从多维正态分布。实际上，市场变量的每日变化并不服从正态分布（参见表 16.1 中的例子）。

历史模拟方法的优点是历史数据决定市场变量的联合概率分布。该方法中也不需要现金流映射分解（参见习题 18.2）。历史模拟方法的主要缺点是计算过程慢，而且不能和波动率更新操作一起使用。<sup>14</sup>

建模计算方法的一种缺陷是，对 delta 值较低的证券组合，它给出的结果不是很好（参见习题 18.21）。

## 18.8 压力测试与回溯检验

除了计算 VaR，很多公司也对它们持有的证券组合进行压力测试。压力测试中估计的是，如果遭遇过去 10~20 年之间真实发生过的极端市场变动，证券组合会有什么样的表现。

例如，为了测试美国权益资产价格的剧烈变动产生的影响，公司会设定所有市场变量的变化百分比等于 1987 年 10 月 19 日（这一天，S&P 500 指数变动了 22.3 个标准差）的情况。如果认为选这一天太极端了的话，公司可以选择 1988 年 1 月 8 日（S&P 500 指数变动了 6.8 个标准差）这一天。为了测试英国利率剧烈变化的影响，公司会设定所有市场变量的变化百分比等于 1992 年 4 月 10 日（这一天，10 年期债券收益率移动了 7.7 个标准差）的变化百分比。

压力测试中假想的情景有时由高级主管创造。一种方式是高级主管定期的会面以及“头脑风暴法”创造当前经济环境和全球不确定中可能产生的极端情景。

压力测试考虑了将来可能发生的极端状况（也就是按照通常的市场变量的概

<sup>13</sup> F. Jamshidian and Y. Zhu 提出了一种减少证券组合重估次数的方法：“Scenario simulation model: theory and methodology,” *Finance and Stochastic*, 1 (1997), 43–67.

<sup>14</sup> 可以对历史模拟方法进行修改，以便纳入波动率更新。参见 J. Hull and A. White. “Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk,” *Journal of Risk*, No.1 (1998) : 5–19.

率分布假设，根本不可能发生的情形）。市场变量如果一天有 5 个标准差的移动，这可以被认为是极端情况。在正态分布假设下，这样的事情每 7 000 年才能发生一次，而现实中，10 年看到一两次 5 个标准差移动是不奇怪的事情。

不管用什么方法计算 VaR，回溯检验（back testing，也称事后检验）是非常重要的。它检验过去的时间内的 VaR 估计值的表现。假设我们正在计算 1 天 99% 置信度的 VaR。回溯检验中我们要观察一天损失超过 1 天 99% 的 VaR 值的频度。如果只有 1% 的天中发生这样的事情，我们就有理由信任我们使用的 VaR 计算方法。如果观察到 7% 的天中发生这样的事情，那么我们会认为 VaR 的计算方法存在问题。

## 18.9 主成分分析法

处理一组高度相关的市场变量引起的风险的一种方法是主成分分析法。这个方法中，根据市场变量的历史变化，找出能解释该变化的一组成分或因子。

举一个例子，可以很好地解释该方法。我们要考虑的市场变量是 3 个月到 30 年的 10 个美国国债利率。表 18.3 和表 18.4 中给出了 Frye 用 1989~1995 年的 1 543 个每日观察值计算出来的结果。<sup>15</sup> 表 18.3 的第一列是这些利率的期限。表中后 10 列显示的是描述利率变化的 10 个因子（或为主成分）。标记为 PC1 的列中给出了第一个因子，大体上对应于收益率曲线的平行移动。一单位该因子使 3 个月期利率增加 0.21 个基点，6 个月期利率增加 0.26 个基点，依此类推。标记为 PC2 的列中给出了第二个因子，对应于收益率曲线的旋转。3 个月期到 2 年期的利率往一个方向移动，而 3 年期到 30 年期的利率往另外一个方向移动。第 3 个因子对应于收益率曲线的扭曲。收益率曲线的两头往相同方向移动，而中间部分往另一种

表 18.3 美国国债数据的因子载荷

|     | <i>PC1</i> | <i>PC2</i> | <i>PC3</i> | <i>PC4</i> | <i>PC5</i> | <i>PC6</i> | <i>PC7</i> | <i>PC8</i> | <i>PC9</i> | <i>PC10</i> |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| 3m  | 0.21       | -0.57      | 0.50       | 0.47       | -0.39      | -0.02      | 0.01       | 0.00       | 0.01       | 0.00        |
| 6m  | 0.26       | -0.49      | 0.23       | -0.37      | 0.70       | 0.01       | -0.04      | -0.02      | -0.01      | 0.00        |
| 12m | 0.32       | -0.32      | -0.37      | -0.58      | -0.52      | -0.23      | -0.04      | -0.05      | 0.00       | 0.01        |
| 2y  | 0.35       | -0.10      | -0.38      | 0.17       | 0.04       | 0.59       | 0.56       | 0.12       | -0.12      | -0.05       |
| 3y  | 0.36       | 0.02       | -0.30      | 0.27       | 0.07       | 0.24       | -0.79      | 0.00       | -0.09      | -0.00       |
| 4y  | 0.36       | 0.14       | -0.12      | 0.25       | 0.16       | -0.63      | 0.15       | 0.55       | -0.14      | -0.08       |
| 5y  | 0.36       | 0.17       | -0.04      | 0.14       | 0.08       | -0.10      | 0.09       | -0.26      | 0.71       | 0.48        |
| 7y  | 0.34       | 0.27       | 0.15       | 0.01       | 0.00       | -0.12      | 0.13       | -0.54      | 0.00       | -0.68       |
| 10y | 0.31       | 0.30       | 0.28       | -0.10      | -0.06      | 0.01       | 0.03       | -0.23      | -0.63      | 0.52        |
| 30y | 0.25       | 0.33       | 0.46       | -0.34      | -0.18      | 0.33       | -0.09      | 0.52       | 0.26       | -0.13       |

<sup>15</sup> 参见 J. Frye, "Principals of Risk: Finding VAR through Factor-Based Interest Rate Scenarios," in *VAR: Understanding and Applying Value at Risk*, pp. 275~88. London: Risk Publications, 1997.

表 18.4 因子得分的标准差 (单位为基点)

| <i>PC1</i> | <i>PC2</i> | <i>PC3</i> | <i>PC4</i> | <i>PC5</i> | <i>PC6</i> | <i>PC7</i> | <i>PC8</i> | <i>PC9</i> | <i>PC10</i> |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| 17.49      | 6.05       | 3.10       | 2.17       | 1.97       | 1.69       | 1.27       | 1.24       | 0.80       | 0.79        |

方向移动。由某个主成分因子引起的利率变化称为因子载荷 (factor loading)。在我们的例子中 3 个月期利率的第一个因子载荷为 0.21。<sup>16</sup>

因为例子中有 10 个利率和 10 个因子，通过解 10 个联立方程，特定一天的利率变化可以表示为这些因子的线性组合。特定一天的利率变化中某个因子占据的数量称为那一天该因子的因子得分 (factor score)。

一个因子的重要程度以它的因子得分的标准差度量。表 18.4 中给出了上述例子中各个因子的得分的标准差，并以它们的重要程度进行了排列。表 18.4 中的数据是以基点表示的。第一个因子的数量等于 1 个标准差。因此，3 个月期利率相应地移动  $0.21 \times 17.49 = 3.67$  个基点，6 个月期利率相应地移动  $0.26 \times 17.49 = 4.55$  个基点，依此类推。

如何求得这些因子的技术细节超出了本书的范围。我们只需记住选择这些因子的时候会让它们的因子得分互不相关。例如，在上面的例子中，1 543 天内第一个因子的得分（平移的数量）和第二个因子的得分（旋转的数量）总是保持不相关。因子得分的方差（即标准差的平方）的总和等于数据的总方差。从表 18.4 可以知道，原数据的总方差（即 3 个月期利率观测值的方差的总和，6 个月期利率观测值的方差的总和，依此类推）是

$$17.49^2 + +6.05^2 + 3.10^2 + \cdots + 0.79^2 = 367.9$$

我们可以知道，第一个因子的方差占据原数据总方差的  $17.49^2/367.9 = 83.1\%$ ；第二个因子的方差占据原数据总方差的  $(17.49^2 + 6.05^2)/367.9 = 93.1\%$ ；第三个因子的方差占据原数据总方差的 2.8%。这说明前两三个因子解释了利率变化风险的大部分。所以，我们可以断定证券组合的利率风险依赖于这几个因子，而不必考虑全部 10 个利率。图 18.6 中画出了表 18.3 中三个最重要的因子的形状。<sup>17</sup>

## 用主成分分析法计算 VaR

为了说明如何利用主成分分析法计算 VaR，考虑表 18.5 中证券组合，它暴露于利率变化风险。1 年期利率的一个基点变化会引起证券组合价值增加 1 000 万美元，2 年期利率的一个基点变化会引起证券组合价值增加 400 万美元，如此等等。

<sup>16</sup> 因子载荷具备的一种性质是：所有因子的因子载荷的平方和等于 1.0。

<sup>17</sup> 对任一国家的几乎所有的收益率曲线进行主成分分析的时候，根据有关因子的性质以及它们能解释的部分占据总风险的比例，可以得到与本节中类似的结论。

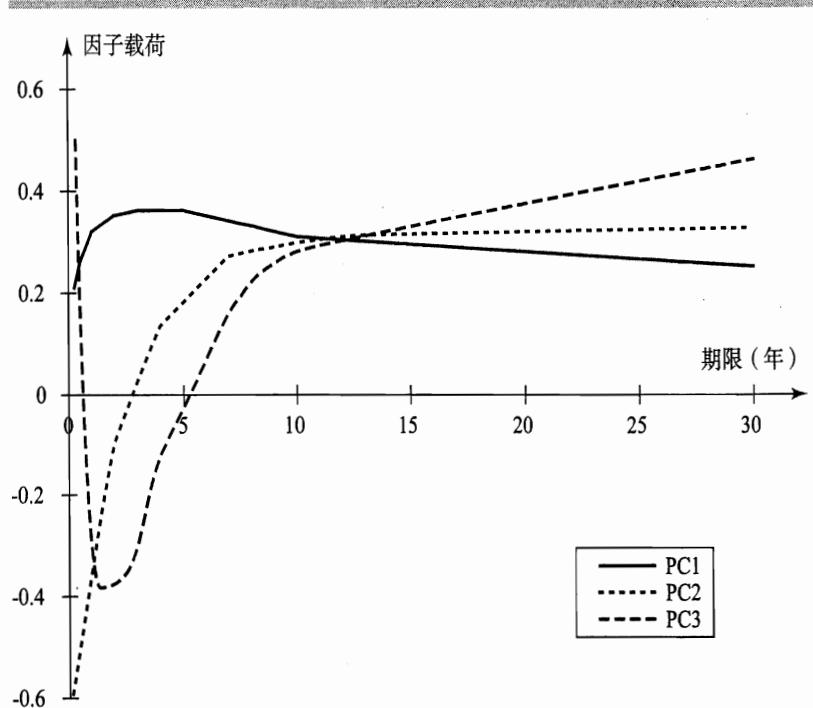


图 18.6 促使收益率曲线变动的三个重要因素

我们利用前两个主成分因子，建立利率变化模型（已经叙述过，前两个主成分因子可以解释 90% 以上的利率变化）。利用表 18.3 中数据，我们对于第一个主成分因子的暴露（以每因子得分基点个数对应的百万美元数量度量）是：

$$10 \times 0.32 + 4 \times 0.35 - 8 \times 0.36 - 7 \times 0.36 + 2 \times 0.36 = -0.08$$

对于第二个主成分因子的暴露是

$$10 \times (-0.32) + 4 \times (-0.10) - 8 \times 0.02 - 7 \times 0.14 + 2 \times 0.17 = -4.40$$

假设  $f_1$  和  $f_2$  是因子得分（以基点个数度量）。证券组合价值变化的近似值可以表示为

$$\Delta P = -0.08f_1 - 4.40f_2$$

这两个因子得分不相关，而且它们的标准差如表 18.4 中数据。那么， $\Delta P$  的标准差为

$$\sqrt{0.08^2 \times 17.49^2 + 4.40^2 \times 6.05^2} = 26.66$$

因此，1 天 99% 置信度的 VaR 为  $26.66 \times 2.33 = 62.12$ 。注意到表 18.5 中的数据对于第一个因子的暴露很小，而对于第二个因子的暴露很大。所以只用某一个因子计算，VaR 会被低估很多（参见习题 18.13）。如果使用 18.4 节的久期方法处理利率，则 VaR 会被低估很多，因为该方法只能捕捉收益率曲线的平行移动。

理论上，主成分分析法可以应用到利率以外的其他市场变量。假设一家金融

表 18.5 1个基点的变化引起的证券组合价值的变化 (百万美元)

| 1年期利率 | 2年期利率 | 3年期利率 | 4年期利率 | 5年期利率 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| +10   | +4    | -8    | -7    | +2    |

机构暴露于一系列不同股票指数的变化风险。使用主成分分析法，可以确定描述指数变化的因子，而其中最重要的几个因子可以用来代替市场指数，进行 VaR 计算。主成分分析法的有效程度取决于这一组市场变量的相关程度。

在本章前面提过，计算 VaR 的时候，通常计算实际证券组合价值变化相对于市场变量的变化百分数（即  $\Delta x_i$ ）。所以，在 VaR 计算当中，更为合适的方法是对市场变量变化百分数进行主成分分析法，而不是考察这些变量的实际变化。

## 小 结

计算 VaR 是为了得出如下判断：“我们有百分之  $X$  的可能在将来  $N$  天里的损失不会超过  $V$  美元。”这里的变量  $V$  是投资组合的 VaR， $X\%$  为置信度， $N$  天为时间长度。

一种计算 VaR 的方法是历史模拟方法。首先要建立过去时间内的所有相关市场变量每日变化的数据库。第一次模拟运算中假设市场变量的变化百分数和我们收集到的数据的第一天的数值变化的百分数相同；第二次模拟运算中假设市场变量的变化百分数和我们收集到的数据的第二天的数值变化的百分数相同；依此类推。对每次模拟运算计算证券组合价值变化  $\Delta P$ ，根据  $\Delta P$  的概率分布的分位点计算 VaR。

另一种方法是建模计算方法。基于以下两个假设，这个方法就变得非常直观。

1. 证券组合价值变化 ( $\Delta P$ ) 依赖于市场变量变化线性组合
2. 市场变量变化百分比服从多维正态分布

那么， $\Delta P$  服从正态分布，就能得到  $\Delta P$  的标准差与波动率、标的市场变量相关系数之间的解析关系式。然后，可从我们熟悉的正态分布性质计算出 VaR。

当证券组合包括期权的时候， $\Delta P$  并不依赖于市场变量变化的线性组合。从证券组合的 gamma 值，我们可以得到  $\Delta P$  与市场变量变化之间的近似二次关系式。接着，利用蒙特卡罗模拟可以估计 VaR。

下一章中，我们将讨论如何计算并监测波动率与相关系数。

## 参考读物

- Artzner P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance*, 9 (1999): 203–28.
- Basak, S., and A. Shapiro. "Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices," *Review of Financial Studies*, 14, 2 (2001): 371–405.
- Beder, T. "VaR: Seductive but Dangerous," *Financial Analysts Journal*, 51, 5 (1995): 12–24.

- Boudoukh, J., M. Richardson, and R. Whitelaw. "The Best of Both Worlds," *Risk*, May 1998: 64–67.
- Dowd, K. *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*. New York: Wiley, 1998.
- Duffie, D., and J. Pan. "An Overview of Value at Risk," *Journal of Derivatives*, 4, 3 (Spring 1997): 7–49.
- Embrechts, P., C. Kluppelberg, and T. Mikosch. *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*. New York: Springer, 1997.
- Frye, J. "Principals of Risk: Finding VAR through Factor-Based Interest Rate Scenarios" in *VAR: Understanding and Applying Value at Risk*, pp. 275–88. London: Risk Publications, 1997.
- Hendricks, D. "Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data," *Economic Policy Review*, Federal Reserve Bank of New York, 2 (April 1996): 39–69.
- Hopper, G. "Value at Risk: A New Methodology for Measuring Portfolio Risk," *Business Review*, Federal Reserve Bank of Philadelphia, July/August 1996: 19–29.
- Hua P., and P. Wilmott, "Crash Courses," *Risk*, June 1997: 64–67.
- Hull, J. C., and A. White. "Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed," *Journal of Derivatives*, 5 (Spring 1998): 9–19.
- Hull, J. C., and A. White. "Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk," *Journal of Risk*, 1, 1 (1998): 5–19.
- Jackson, P., D. J. Maude, and W. Perraudin. "Bank Capital and Value at Risk." *Journal of Derivatives*, 4, 3 (Spring 1997): 73–90.
- Jamshidian, F., and Y. Zhu. "Scenario Simulation Model: Theory and Methodology," *Finance and Stochastics*, 1 (1997): 43–67.
- Jorion, P. *Value at Risk*, 2nd edn. McGraw-Hill, 2001.
- Longin, F. M. "Beyond the VaR," *Journal of Derivatives*, 8, 4 (Summer 2001): 36–48.
- Marshall, C., and M. Siegel. "Value at Risk: Implementing a Risk Measurement Standard," *Journal of Derivatives* 4, 3 (Spring 1997): 91–111.
- McNeil, A. J. "Extreme Value Theory for Risk Managers," in *Internal Modeling and CAD II*, London: Risk Books, 1999. See also: [www.math.ethz.ch/~mcneil](http://www.math.ethz.ch/~mcneil).
- Neftci, S. N. "Value at Risk Calculations, Extreme Events and Tail Estimation," *Journal of Derivatives*, 7, 3 (Spring 2000): 23–38.
- Rich, D. "Second Generation VaR and Risk-Adjusted Return on Capital," *Journal of Derivatives*, 10, 4 (Summer 2003): 51–61.

## 问题和习题

- 18.1 考虑一个由 10 万美元的资产 A 和 10 万美元的 B 组成的证券组合。假设两种资产的日波动率都是 1%，两个资产收益之间的相关系数为 0.3。该证券组合的 5 天期 99% 置信度的 VaR 为多少？
- 18.2 使用建模计算方法计算 VaR 的时候，处理依附于利率的衍生证券有三种方式。请描述这三种方式。当利用历史模拟方法计算 VaR 的时候，应该如何处理这些衍生证券？
- 18.3 一家金融机构持有基于美元—英镑汇率的期权的组合。该组合的 delta 为 56.0。当前的汇率为 1.5000。推导证券组合价值变化和汇率变化间的近似线性关系式。汇率的日波动率为 0.7%，请计算 10 天期 99% 置信度的 VaR。
- 18.4 假设上一题中，你已经知道证券组合的 gamma 为 16.2。你估计的证券组合价值和汇率变化百分比之间的关系式将如何变化？
- 18.5 假设一个证券组合价值的每日变化近似地和两个因子成线性关系，两个因子是从主

成分分析中得到的。关于第一个因子的证券组合的 delta 为 6，关于第二个因子的证券组合的 delta 为 -4。两个因子的标准差分别为 20 和 8。5 天期 90% 置信度的 VaR 为多少？

- 18.6 假设一家公司持有的证券组合由股票、债券、外汇以及商品的头寸组成。假设没有衍生证券。请解释使用 (a) 线性模型 (b) 历史模拟模型计算 VaR 的时候，会基于什么样的假设。
- 18.7 请解释计算 VaR 的时候，利率互换如何被映射分解成标准期限的零息票债券的组合。
- 18.8 请解释 VaR 与 C-VaR 之间的区别。
- 18.9 请解释计算包含期权的证券组合的 VaR 时，为什么线性模型只能给出近似的估计值。
- 18.10 请验证：本章附录的现金流映射分解例子中，0.3 年期零息票债券被映射分解成 \$37 397 的 3 个月期债券头寸和 \$11 793 的 6 个月期债券头寸。
- 18.11 假设 5 年期利率为 6%，7 年期利率为 7%（两个利率都是连续复利的），5 年期零息票债券的日波动率为 0.5%，7 年期零息票债券的日波动率为 0.58%。两个债券的日收益率之间的相关系数为 0.6。利用本章附录中的方法，把 6.5 年后将收到的 \$1 000 现金流映射分解成 5 年期债券头寸和 7 年期债券头寸。和第 6.5 年现金流等价的第 5 年和第 7 年的现金流为多少？
- 18.12 不久前，一家公司签订了一个远期合约，将以 1 500 万美元购买 100 万英镑。当前，该合约还有 6 个月的有效期。6 个月期零息票英镑债券的日波动率（当债券的价格以美元表示的时候）为 0.6%，6 个月期零息票美元债券的日波动率为 0.05%。两个债券收益之间的相关系数为 0.8。当前的汇率为 1.53。请计算 1 天后远期合约美元价值变化的标准差。10 天期 99% 置信度的 VaR 为多少？假设美元和英镑的 6 个月期利率都是连续复利的 5%p.a.。
- 18.13 表 18.5 的例子中计算 VaR 估计值时，假设了存在两个因子。如果假设存在 (a) 1 个因子 (b) 3 个因子的时候，你的估计值会怎么变化？
- 18.14 一家银行持有某个资产的期权的组合。该期权的 delta 为 -30，gamma 为 -5。请解释这些数字说明什么。资产价格为 20，其波动率为每天 1%。模仿 DerivaGem Application Builder 软件中的 Sample Application E 来计算 VaR。
- 18.15 假设习题 18.14 中，年波动率每变化 1% 的时候，证券组合的 vega 为 -2。推导 1 天的证券组合价值变化与 delta、gamma 和 vega 之间的关系模型。不用详细计算，请解释，你如何用该模型来简单地计算一个 VaR 估计值。

## 课后练习

- 18.16 一家公司持有价值为 600 万美元的债券头寸组合。该组合的修正久期为 5.2 年。假设收益率曲线只发生平行移动，每日收益率变化（当收益率是以百分比表示的时候）的标准差为 0.09。利用久期模型来估计该组合的 20 天期 90% 置信度的 VaR。请仔细解释利用该模型计算 VaR 的方式中存在的缺陷。请解释另外两种准确度更高的方法。
- 18.17 考虑一个头寸，包括 30 万美元的黄金和 50 万美元的白银。假设上述两个资产的日波动率分别为 1.8% 和 1.2%。两个资产收益之间的相关系数为 0.6。该组合的 10 天期

97.5%置信度的 VaR 为多少？分散化操作可以减少多少 VaR？

- 18.18 考虑一个基于单种资产的期权组合。假设该组合的 delta 为 12，资产的价值为 \$10，资产的日波动率为 2%。根据 delta，估计该组合的 1 天期 95%置信度 VaR。接下来假设该组合的 gamma 为 -2.6。推导 1 天的证券组合价值变化与标的资产价格变化之间的二次关系式。你如何在蒙特卡罗模拟中利用该关系式？
- 18.19 一家公司持有 2 年期债券和 3 年期债券的多头以及 5 年期债券的空头。每个债券的本金为 \$100，息票率为 5%，每年支付一次息票。分别计算这家公司对于 1 年期、2 年期、3 年期、4 年期、5 年期利率的暴露。利用表 18.3 和表 18.4 中的数据来计算 20 天期 95%置信度 VaR，其中假设利率变化由 (a) 单因子 (b) 两因子 (c) 三因子解释。假设零息票收益率曲线是平坦的，等于 5%。
- 18.20 一家银行承约了一个股票的看涨期权以及另一个股票的看跌期权。第一个期权中，股票价格为 50，执行价格为 51，波动率为 28%p.a.，到期期限为 9 个月。第二个期权中，股票价格为 20，执行价格为 19，波动率为 25%p.a.，到期期限为 1 年。两个股票都不支付红利，无风险利率为 6%p.a.，两个股票价格收益之间的相关系数为 0.4。请用下述方法分别计算 10 天期 99%置信度的 VaR。
- (a) 只使用 delta
  - (b) 使用部分模拟方法
  - (c) 使用完整模拟方法
- 18.21 风险管理者们常常抱怨，delta 接近于 0 的时候，建模计算方法（不管线性模型还是二次模型）的结果都不够精确。根据 DerivaGem Application Builder 软件中的 Sample Application E，检验 delta 接近于 0 的时候发生什么情况（你可以通过尝试不同期权头寸并调整标的资产的头寸来得到零 delta）。请解释你得到的结果。

## 附录

### 现金流映射分解

本附录中我们解释将现金流映射分解得到标准到期期限的一种方法。为了解释这个方法，我们考虑一个简单的例子。一个证券组合由单种长期债券的一个多头组成，国债的本金为1百万美元，0.8年后到期。我们假设该债券的息票率为10%，每半年支付一次息票。这说明该债券在0.3年后和0.8年后支付息票5万美元。0.8年后，债券也会将支付本金100万美元。因此，该长期国债头寸可理解为本金为5万美元的0.3年期零息票债券头寸和本金为105万美元的0.8年期零息票债券头寸。

0.3年期零息票债券的头寸被映射分解成等价的3个月期和6个月期的零息票债券。0.8年期零息票债券的头寸被映射分解成等价的6个月期和1年期的零息票债券。结果是，为了VaR的计算，0.8年期附息债券头寸被分解成3个月期、6个月期和1年期零息票债券的头寸。

### 映射分解方法

考虑0.8年后将收到的105万美元。我们假设零息率、债券价格的日波动率和债券收益之间的相关系数如表18.6的数据。

第一步是，对6个月期利率6.0%和1年期利率7.0%进行插值，得到0.8年期利率6.6%（所有利率是每年计一次复利的）。0.8年后收到的现金流105万美元的现值为：

$$\frac{1\,050\,000}{1.066^{0.8}} = 997\,662$$

我们也对6个月期债券的波动率0.1%和1年期债券的波动率0.2%进行插值，得到0.8年期债券的波动率0.16%。

假设我们对6个月期债券的现值分配 $\alpha$ ，对1年期债券的现值分配 $1 - \alpha$ 。使用方程(18.2)，并匹配方差，我们得到：

表18.6 映射分解过程例子中的数据

| 到期期限：          | 3个月  | 6个月  | 1年期  |
|----------------|------|------|------|
| 零息率（%，每年复利一次）： | 5.50 | 6.00 | 7.00 |
| 债券价格的波动率（%/日）： | 0.06 | 0.10 | 0.20 |
| 回报之间的相关系数      | 3个月  | 6个月  | 1年期  |
| 3个月期债券         | 1.0  | 0.9  | 0.6  |
| 6个月期债券         | 0.9  | 1.0  | 0.7  |
| 1年期债券          | 0.6  | 0.7  | 1.0  |

表 18.7 映现金流映射分解的结果

|                  | 0.3 年后接收的<br>\$50 000 | 0.8 年后接收的<br>\$1 050 000 | 总 和     |
|------------------|-----------------------|--------------------------|---------|
| 3 个月期债券的头寸 (\$): | 37 397                |                          | 37 397  |
| 6 个月期债券的头寸 (\$): | 11 793                | 319 589                  | 331 382 |
| 9 个月期债券的头寸 (\$): |                       | 678 074                  | 678 074 |

$$0.0016^2 = 0.001^2 \alpha^2 + 0.002^2(1 - \alpha)^2 + 2 \times 0.7 \times 0.001 \times 0.002\alpha(1 - \alpha)$$

按普通方法求解这个二次方程，我们得到  $\alpha = 0.320337$ 。这说明应该分配 32.0337% 的现值给 6 个月期零息票债券，应该分配 67.9663% 的现值给 1 年期零息票债券。因此，价值为 \$997 662 的 0.8 年期债券被替换成价值为

$$997 662 \times 0.320337 = \$319 589$$

的 6 个月期债券和价值为

$$997 662 \times 0.679663 = \$678 074$$

的 1 年期债券。

这种现金流映射分解操作的优点是，它可以保留现金流的价值和方差。而且我们可以看到，两个相邻的零息票债券被赋予的权数总是正的。

对于 0.3 年后将收到的现金流 \$50 000，我们可以进行类似的计算（参见习题 18.10）。结果是，现金流的现值为 \$49 189。它可以映射分解成价值为 \$37 397 的 3 个月期债券头寸和价值为 \$11 793 的 6 个月期债券头寸。

表 18.7 中总结了这些计算过程。0.8 年期附息债券被映射分解成价值为 \$37 397 的 3 个月期债券头寸、价值为 \$331 382 的 6 个月期债券头寸以及价值为 \$678 074 的 1 年期债券头寸。使用表 18.6 中的波动率和相关系数，方程 (18.2) 中  $n = 3$ ,  $\alpha_1 = 37 397$ ,  $\alpha_2 = 331 382$ ,  $\alpha_3 = 678 074$ ,  $\sigma_1 = 0.0006$ ,  $\sigma_2 = 0.001$ ,  $\sigma_3 = 0.002$  以及  $\rho_{12} = 0.9$ ,  $\rho_{13} = 0.6$ ,  $\rho_{23} = 0.7$ 。我们得到的 0.8 年期债券价格变化的方差为 2 628 518。债券价格变化的标准差为  $\sqrt{2 628 518} = 1 621.3$ 。因为，我们假设了该组合只包含这一债券，组合的 10 天期 99% 置信度 VaR 为：

$$1 621.3 \times \sqrt{10} \times 2.33 = 11 946$$

即大约 \$11 950。

# 估计波动率和相关系数

本章中，我们将解释如何使用历史数据来估计当前的以及未来的波动率和相关系数。本章内容和 VaR 计算中的建模计算方法以及衍生证券估值都是有关联的。计算 VaR 时，我们最感兴趣的是波动率和相关系数的当前水平。因为，我们在估计很短的时间段内证券组合价值的可能变化。估值衍生证券时，通常需要预测衍生证券整个有效期内的波动率和相关系数水平。

本章中考虑一些著名的模型，如指数加权移动平均 (EWMA)、自回归条件异方差 (ARCH) 和一般自回归条件异方差 (GARCH) 模型。这些模型的独特之处在于，它们可以处理非常数的波动率与相关系数。一些时间段内，某个特定的波动率和相关系数可以相对较低，而另外一些时间段内这些波动率和相关系数也可以相对较高。这些模型捕捉波动率或相关系数跟随着时间的改变。

## 19.1 估计波动率

定义  $\sigma_n$  为  $n$  天后的某个市场变量的波动率，由第  $n - 1$  天结束之时估计得出。第  $n$  天的波动率的平方  $\sigma_n^2$  被称为方差率 (variance rate)。我们已经在 13.4 节中描述过从历史数据估计  $\sigma_n$  的标准方法。假设第  $i$  天结束之时，该市场变量值为  $S_i$ 。定义变量  $u_i$  为第  $i$  天内（即第  $i - 1$  天结束之时到第  $i$  天结束之时）的连续复利收益：

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

利用  $u_i$  的最近  $m$  个观测值，日方差率  $\sigma_n^2$  的无偏估计为

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (u_{n-i} - \bar{u})^2 \quad (19.1)$$

其中， $\bar{u}$  是  $u_i$  的均值：

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}$$

为了监测日波动率，通常对公式 (19.1) 做以下几种调整：

1.  $u_i$  被定义为第  $i - 1$  天结束之时到第  $i$  天结束之时的市场变量的变化百分数，即<sup>1</sup>

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \quad (19.2)$$

2. 假定  $u$  为零<sup>2</sup>

3. 用  $m$  替代  $m - 1$ <sup>3</sup>

做这三种调整之后，计算出来的估计值不会发生多大变化，但是经过调整之后，方差率的计算公式被简化为

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}^2 \quad (19.3)$$

其中  $u_i$  由公式 (19.2) 给出。<sup>4</sup>

## 权数设计

公式 (19.3) 对  $u_{n-1}^2, u_{n-2}^2, \dots, u_{n-m}^2$ ，赋予同样的权数。我们的目标是估计当前的波动率水平  $\sigma_n$ 。所以，给近期的数据赋予更大的权数是比较合理的。这样的一种模型是

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 \quad (19.4)$$

变量  $\alpha_i$  是赋予  $i$  天前的观测值的权数。 $\alpha$  值都为正数。我们选择权数，使得当  $i > j$  时， $\alpha_i < \alpha_j$ ，即对于旧观测值赋予相对较小的权数。权数之和应该等于 1，即

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

基于长期平均方差率存在的假设，应该给它也赋予一些权数，可以得到公式 (19.4) 的一种扩展形式：

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 \quad (19.5)$$

<sup>1</sup> 这与 18.3 节 VaR 计算过程中定义波动率的思路一致。

<sup>2</sup> 如 18.3 节中的解释，估计方差的时候，这种假设的影响通常很小。因为，变量在一天内的期望变化相比标准差的变化非常小。

<sup>3</sup> 用  $m$  替换  $m - 1$  使得方差的无偏估计变成了极大似然估计。本章中将讨论极大似然估计。

<sup>4</sup> 注意， $u$  在本章中的作用类似于第 18 章中  $\Delta x$  的作用。两者都是市场变量的日变化百分数。而  $u$  的下标对应于同一市场变量在不同日期的观测值， $\Delta x$  的下标对应于同一日期的不同市场变量的观测值。两章中的  $\sigma$  的下标也有类似的区别。本章中下标对应于不同日期，而第 18 章中下标对应于不同市场变量。

其中,  $V_L$  是长期平均方差率,  $\gamma$  是  $V_L$  的权数。因为权数之和为 1, 有

$$\gamma + \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

这就是著名的 ARCH( $m$ ) 模型。Engle 首次提出了该模型。<sup>5</sup> 基于长期平均方差率和  $m$  个观测值可以估计方差。观测值的日期越早, 赋予的权数越小。定义  $\omega = \gamma V_L$ , 公式 (19.5) 中模型可以重写为:

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 \quad (19.6)$$

接下来的两节中, 我们讨论监测波动率的两种重要方法, 其中利用了公式 (19.4) 和公式 (19.5) 中的思想。

## 19.2 指数加权移动平均模型

指数加权移动平均模型是公式 (19.4) 给出的模型的一个特殊情况。其中, 随着时间倒退, 权数  $\alpha_i$  指数递减。这里有  $\alpha_{i+1} = \lambda \alpha_i$ , 其中  $\lambda$  是 0~1 之间的一个常数。

这样设计权数之后, 可以得出更新波动率估计值的特别简单的公式。该公式为

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2 \quad (19.7)$$

第  $n$  天 (第  $n-1$  天结束之时得到) 的波动率估计值  $\sigma_n$  可以从  $\sigma_{n-1}$  (第  $n-2$  天结束之时得到的第  $n-1$  天的波动率的估计值) 和  $u_{n-1}$  (最近的日价格变化百分数) 计算出。

公式 (19.7) 中权数是指数递减的, 为了解释这个结论, 我们把  $\sigma_{n-1}^2$  替换出来, 得到

$$\sigma_n^2 = \lambda [\lambda \sigma_{n-2}^2 + (1 - \lambda) u_{n-2}^2] + (1 - \lambda) u_{n-1}^2$$

即

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2 \sigma_{n-2}^2$$

类似地, 把  $\sigma_{n-2}^2$  替换出来, 得到

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2) + \lambda^3 \sigma_{n-3}^2$$

---

<sup>5</sup> 参见 R. Engle “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation,” *Econometrica*, 50 (1982): 987–1008.

继续这种替换，我们可以得到：

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} u_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_{n-m}^2$$

对于大的  $m$ ， $\lambda^m \sigma_{n-m}^2$  项变得很小，可以忽略掉。此时，令  $\alpha_i = (1-\lambda)\lambda^{i-1}$ ，公式 (19.7) 和公式 (19.4) 就相同了。随着时间倒退， $u_i$  的权数以比率  $\lambda$  减小。每个权数等于  $\lambda$  乘以之前一个权数。

**[例 19.1]** 假设  $\lambda$  是 0.90。某个市场变量的第  $n - 1$  天的波动率估计值为每日 1%，且在第  $n - 1$  天内市场变量价格上升了 2%。也就是说  $\sigma_{n-1}^2 = 0.01^2 = 0.0001$  且  $u_{n-1}^2 = 0.02^2 = 0.0004$ 。由公式 (19.7) 得出：

$$\sigma_n^2 = 0.9 \times 0.0001 + 0.1 \times 0.0004 = 0.00013$$

所以，第  $n$  天的波动率估计值  $\sigma_n$  为  $\sqrt{0.00013}$ ，即每日 1.14%。注意到  $u_{n-1}^2$  的期望值为  $\sigma_{n-1}^2$ ，即 0.0001。这个例子中， $u_{n-1}^2$  最终实现价值大于它的期望价值，所以我们得到的波动率估计值上升。如果  $u_{n-1}^2$  的最终实现价值小于它的期望价值，我们得到的波动率估计值会下降。

EWMA 方法的一个有吸引力的性质是我们只需要储存较少的数据。任何一个时刻，我们只需记录方差率当前的估计值以及市场变量价值的最近一些观测值。当我们获得市场变量价值的最新观测值时，我们需要计算新的日变化百分数，并利用公式 (19.7) 来更新我们的方差率估计值。然后就可以删除旧的方差率估计值和旧的市场变量观测值。

EWMA 方法被设计为跟踪波动率的变化。假设第  $n - 1$  天，市场变量有一个大幅度变化，即  $u_{n-1}^2$  较大。根据公式 (19.7)，这会引起当前波动率的估计值上升。 $\lambda$  值支配着日波动率估计值反映最近日变化百分数的情况。低的  $\lambda$  值下计算  $\sigma_n$  的时候， $u_{n-1}^2$  被赋予了非常大的权数。这种情况下，连续时间内估计的波动率自身的波动也会较大。高的  $\lambda$  值（即接近于 1.0 的值）下估计的日波动率反映日变化百分数最新信息的速度较慢。

由 J. P. Morgan 首次创建的 RiskMetrics 数据库在 1994 年公开使用。RiskMetrics 数据库中，使用  $\lambda=0.94$  的 EWMA 模型来更新日波动率估计值。公司发现对于一系列不同的市场变量，该  $\lambda$  值可以给出的方差率预测值接近于最终实现方差率。<sup>6</sup> 在后续的 25 天当中，对  $u_i^2$  赋予相同的权数，可计算出某一特定日期的实际方差率（参见习题 19.17）。

<sup>6</sup> 参见 J. P. Morgan, *RiskMetrics Monitor*, Fourth Quarter, 1995。本章后面部分中，我们将解释另一种参数估计方法（极大似然估计）。

### 19.3 GARCH(1,1)模型

我们接着讨论 Bollerslev 在 1986 年首次提出的 GARCH(1,1) 模型。<sup>7</sup> GARCH(1,1) 模型与 EWMA 模型之间的区别类似于公式 (19.4) 与公式 (19.5) 的区别。在 GARCH(1,1) 模型中,  $\sigma_n^2$  由长期平均方差率  $V_L$ 、 $\sigma_{n-1}^2$  以及  $u_{n-1}$  计算出。GARCH(1,1) 模型的公式为

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (19.8)$$

其中,  $\gamma$  为  $V_L$  的权数,  $\alpha$  为  $u_{n-1}^2$  的权数,  $\beta$  为  $\sigma_{n-1}^2$  的权数。因为权数之和为 1, 有

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

EWMA 模型是 GARCH(1,1) 模型的一个特殊情况, 其中,  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 1 - \gamma$  以及  $\beta = \gamma$ 。

GARCH(1,1) 模型中的 “(1, 1)” 表示  $\sigma_n^2$  是基于  $u^2$  的最近观测值和方差率的最近估计值。一般的 GARCH( $p, q$ ) 模型中, 根据  $u^2$  的最新的  $p$  个观测值以及方差率的最新的  $q$  个估计值计算出  $\sigma_n^2$ 。<sup>8</sup> 目前为止, GARCH(1,1) 模型是 GARCH 模型中最广泛使用的一个。

设  $\omega = \gamma V_L$ , 则 GARCH(1,1) 模型可以重写为

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (19.9)$$

估计参数的时候, 常用模型的上述形式。一旦得到  $\omega$ 、 $\alpha$  以及  $\beta$  的估计值,  $\gamma$  就等于  $1 - \alpha - \beta$ 。长期平均方差率  $V_L$  可以计算成  $\omega/\gamma$ 。为了得到稳定的 GARCH(1, 1) 过程, 需要满足  $\alpha + \beta < 1$ , 不然长期方差率的权数将是负值。

**[例 19.2]** 假设从每日数据中估计到的 GARCH(1,1) 模型为

$$\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.13 u_{n-1}^2 + 0.86 \sigma_{n-1}^2$$

相应地,  $\alpha = 0.13$ ,  $\beta = 0.86$  以及  $\omega = 0.000002$ 。因为  $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ , 所以  $\gamma = 0.01$ 。因为  $\omega = \gamma V_L$ , 所以  $V_L = 0.0002$ 。也就是说, 模型隐含的长期平均每日方差为 0.0002。相应的日波动率为  $\sqrt{0.0002} = 0.014$ , 即 1.4%。

<sup>7</sup> 参见 T. Bollerslev, “Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31 (1986): 307–27。

<sup>8</sup> 学者们也提出了一些能反映不对称信息的 GARCH 模型。这些模型被设计为  $\sigma_n$  依赖于  $u_{n-1}$  的符号。我们可以论证这些模型相比 GARCH 模型更适合处理权益性资产。第 16 章中提过, 一个股票价格的波动率与价格是负相关的, 所以负的  $u_{n-1}$  应该比正的  $u_{n-1}$  对  $\sigma_n$  的影响更大。关于反映不对称信息的模型, 参见 D. Nelson, “Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 59 (1990): 340–70; R. F. Engle and V. Ng, “Measuring and Testing the Impact of News on Volatility,” *Journal of Finance*, 48 (1993): 1749–78.)

假设第  $n - 1$  天的波动率估计值为每日 1.6%，那么  $\sigma_{n-1}^2 = 0.016^2 = 0.000256$ 。而且第  $n - 1$  天，市场变量下降了 1%，所以  $u_{n-1}^2 = 0.01^2 = 0.0001$ 。那么

$$\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.13 \times 0.0001 + 0.86 \times 0.000256 = 0.00023516$$

最新的波动率估计值为  $\sqrt{0.00023516} = 0.0153$ ，即每日 1.53%。

## 权 数

公式 (19.9) 中替换  $\sigma_{n-1}^2$ ，可以得到

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta(\omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta \sigma_{n-2}^2)$$

即

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \beta^2 \sigma_{n-2}^2$$

替换  $\sigma_{n-2}^2$ ，我们得到

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \beta^2\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \alpha\beta^2 u_{n-3}^2 + \beta^3 \sigma_{n-3}^2$$

继续这样的替换，我们可以看到  $u_{n-1}^2$  的权数为  $\alpha\beta^{i-1}$ 。该权数以比率  $\beta$  指数递减。参数  $\beta$  可以解释为“衰减率”。它类似于 EWMA 模型中的  $\lambda$ 。它定义了在求解当前方差时， $u$  的观测值的相对重要性。例如，如果  $\beta = 0.9$ ， $u_{n-2}^2$  的重要性是  $u_{n-1}^2$  的 90%； $u_{n-3}^2$  的重要性是  $u_{n-1}^2$  的 81%。如此等等。GARCH(1,1) 模型类似于 EWMA 模型，但不同的一点是，GARCH(1,1) 模型中给过去的  $u^2$  赋予指数递减的权数，也给长期平均波动率赋予一些权数。

## 均值回复

GARCH (1, 1) 模型中，当我们考查的时间越来越长时，方差率拉回到长期平均水平  $V_L$ 。指定给  $V_L$  的权数为  $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ 。所以，GARCH (1, 1) 模型等价于方差  $V$  满足以下随机过程的模型：

$$dV = a(V_L - V)dt + \xi V dz$$

其中，以天数度量时间， $a = 1 - \alpha - \beta$  且  $\xi = \alpha\sqrt{2}$ （参见习题 19.14）。这是一个均值回复模型。方差有一个漂移，以比率  $a$  拉回到  $V_L$ 。当  $V > V_L$  时，方差具有负的漂移；当  $V < V_L$  时，方差具有正的漂移。还有，波动率  $\xi$  将被添加在漂移上。我们将在第 24 章中进一步讨论这种模型。

## 19.4 模型的选择

实际上，方差率倾向于均值回复。GARCH(1,1) 模型有均值回复性质，但 EWMA 模型没有。所以理论上来看，GARCH(1,1) 模型比 EWMA 模型更有吸引力。

在下一节中，我们将讨论如何最优拟合 GARCH(1,1) 模型中的参数  $\omega$ 、 $\alpha$  和  $\beta$ 。当参数  $\omega$  为零的时候，GARCH(1,1) 模型退化成 EWMA 模型。当模型经过最优拟合后计算出  $\omega$  值为负数的时候，GARCH(1,1) 模型不稳定，我们需要转到 EWMA 模型。

## 19.5 极大似然估计法

现在讨论如何从历史数据估计上述模型中的参数。我们要使用极大似然估计法。其中，我们选取参数来最大化这种数据真实发生的机会（或可能性）。

为了解释这个方法，我们先考虑一个简单的例子。假设我们在某天随机抽取了 10 种股票，发现其中一个股票的价格在当天有所下降，而其他 9 种股票的价格保持不变或有所上升。那么价格下降概率的最佳估计值应该是多少呢？很自然可以想到是 0.1。现在我们看看极大似然估计法是否能给出这一结果。

假设价格下降的概率为  $p$ 。一个股票价格下降，而其他 9 个股票价格不下降的概率为  $p(1-p)^9$ （股价下降的概率为  $p$ ，而不下降的概率为  $1-p$ ）。极大似然估计法中， $p$  的最佳估计值是将  $p(1-p)^9$  最大化对应的那个  $p$  值。把该式子关于  $p$  求导，并设其为零。则我们得到  $p = 0.1$  能最大化该表达式的值。和我们想像的一样， $p$  的极大似然估计为 0.1。

### 估计常数方差

我们接下来的例子中根据变量  $X$  的  $m$  个观测值，以极大似然估计法估计变量  $X$  的方差，其中标的变量的分布是均值为零的正态分布。我们假设观测值为  $u_1, u_2, \dots, u_m$ ，标的变量分布的均值为零。以  $v$  表示方差。 $u_i$  被观察到的可能性等于  $X = u_i$  时的  $X$  的概率密度函数，也就是：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2v}\right)$$

$m$  个观测值按顺序被观测到的可能性为：

$$\prod_{i=1}^m \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2v}\right) \right] \quad (19.10)$$

根据极大似然估计法， $v$  的最佳估计值就是使上述表达式最大化的  $v$  值。

求某个表达式的最大值等价于求该表达式对数的最大值。取公式 (19.10) 的

对数，并忽略常数乘数因子，我们只需使下式最大化

$$\sum_{i=1}^m \left[ -\ln(v) - \frac{u_i^2}{v} \right] \quad (19.11)$$

即

$$-mln(v) - \sum_{i=1}^m \frac{u_i^2}{v}$$

将该表达式关于  $v$  求导，并令它等于零。我们得到的  $v$  的极大似然估计为<sup>9</sup>

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i^2$$

### 估计 GARCH(1,1) 模型中的参数

我们现在讨论如何用极大似然估计法估计 GARCH(1,1) 模型的参数，也讨论极大似然估计法在其他波动率更新操作上的应用。定义第  $i$  天的方差估计值  $v_i = \sigma_n^2$ 。我们假设  $u_i$  关于方差的条件概率分布为正态分布。那么，最佳的参数应该最大化以下表达式的值：

$$\prod_{i=1}^m \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi v_i}} \exp\left(\frac{-u_i^2}{2v_i}\right) \right]$$

取对数，我们只需使得下式最大化

$$\sum_{i=1}^m \left[ -\ln(v_i) - \frac{u_i^2}{v_i} \right] \quad (19.12)$$

这与式 (19.11) 类似，只是  $v$  被代替成  $v_i$ 。用迭代法可以求得使表达式 (19.12) 最大的模型参数。

表 19.1 的电子数据表表示了计算 GARCH(1,1) 模型参数的过程。表中分析了 1988 年 1 月 6 日到 1997 年 8 月 15 日的日元汇率数据。表中的数据基于三个 GARCH(1,1) 模型参数 ( $\omega$ 、 $\alpha$  和  $\beta$ ) 的模拟估计值。第 1 列中记录了日期。第 2 列中计算天数。第 3 列中给出了第  $i$  天结束之时的汇率  $S_i$ 。第 4 列中给出了第  $i-1$  天结束之时到第  $i$  天结束之时的汇率变化比例， $u_i = (S_i - S_{i-1})/S_{i-1}$ 。第 5 列表示了在第  $i-1$  天结束之时估计的第  $i$  天的方差率， $v_i = \sigma_i^2$ 。在第 3 天开始方差的计算，首先设初始方差等于  $u_2^2$ 。随后的天中，使用公式 (19.9)。第 6 列给出了似然参数  $-\ln(v_i) - u_i^2/v_i$ 。第 5 列与第 6 列中的数值基于当前  $\omega$ 、 $\alpha$  和  $\beta$  的模拟估计值。我们感兴趣的是选择  $\omega$ 、 $\alpha$  和  $\beta$  使第 6 列中的数据之和最大化。这涉及迭代

---

<sup>9</sup> 这证实了脚注 3 中的观点。

表 19.1 GARCH(1,1) 模型的参数估计

| 日期        | Day <i>i</i> | <i>S<sub>i</sub></i> | <i>u<sub>i</sub></i> | <i>v<sub>i</sub></i> = $\sigma_i^2$ | $-\ln(v_i) - u_i^2/v_i$ |
|-----------|--------------|----------------------|----------------------|-------------------------------------|-------------------------|
| 06-Jan-88 | 1            | 0.007728             |                      |                                     |                         |
| 07-Jan-88 | 2            | 0.007779             | 0.006599             |                                     |                         |
| 08-Jan-88 | 3            | 0.007746             | -0.004242            | 0.00004355                          | 9.6283                  |
| 11-Jan-88 | 4            | 0.007816             | 0.009037             | 0.00004198                          | 8.1329                  |
| 12-Jan-88 | 5            | 0.007837             | 0.002687             | 0.00004455                          | 9.8568                  |
| 13-Jan-88 | 6            | 0.007924             | 0.011101             | 0.00004220                          | 7.1529                  |
| ⋮         | ⋮            | ⋮                    | ⋮                    | ⋮                                   | ⋮                       |
| 13-Aug-97 | 2421         | 0.008643             | 0.003374             | 0.00007626                          | 9.3321                  |
| 14-Aug-97 | 2422         | 0.008493             | -0.017309            | 0.00007092                          | 5.3294                  |
| 15-Aug-97 | 2423         | 0.008495             | 0.000144             | 0.00008417                          | 9.3824                  |
|           |              |                      |                      |                                     | 22 063.5763             |

GARCH参数的模拟估计值

$$\omega = 0.00000176 \quad \alpha = 0.0626 \quad \beta = 0.8976$$

算法。<sup>10</sup>

在我们的例子中，最理想的参数值为：

$$\omega = 0.00000176, \alpha = 0.0626, \beta = 0.8976$$

相应的式 (19.12) 中函数的最大值为 22 063.5763。表 19.1 中的数据是在搜寻最佳  $\omega$ 、 $\alpha$  和  $\beta$  值的最后迭代过程给出的。

例子中，长期方差率  $V_L$  为：

$$\frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} = \frac{0.00000176}{0.0398} = 0.00004422$$

长期波动率为  $\sqrt{0.00004422}$ ，即每日 0.665%。

图 19.1 中显示了数据覆盖的 10 年期间，GARCH(1, 1) 模型给出的日元变化波动率。绝大部分时间里，波动率在每日 0.4%~0.8% 之间。但某些时间上也有超过 1% 的时候。

另一种更加直观的估计 GARCH(1, 1) 模型参数的方法是所谓的 *variance targeting*。<sup>11</sup> 该方法中设定长期平均方差率  $V_L$  等于从数据（或其他一些可信的变量值）得到的样本方差。那么， $\omega$  值就等于  $V_L(1 - \alpha - \beta)$ ，只需考虑剩下的两个参数了。根据表 19.1 中的数据，样本方差为 0.00004341，等价于日波动率 0.659%。设  $V_L$  等于样本方差，则将最大化表达式 (19.12) 值的  $\alpha$  和  $\beta$  分别为 0.0607 和

<sup>10</sup> 随后的讨论中我们将看到，可以利用如微软 Excel 的 Solver 之类的通用计算模型。此外，也可以利用 Levenberg-Marquardt 之类的专业计算模型。例如，参照 W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1988。

<sup>11</sup> 参见 R. Engle and J. Mezrich, “GARCH for Groups,” *Risk*, August 1996: 36–40。

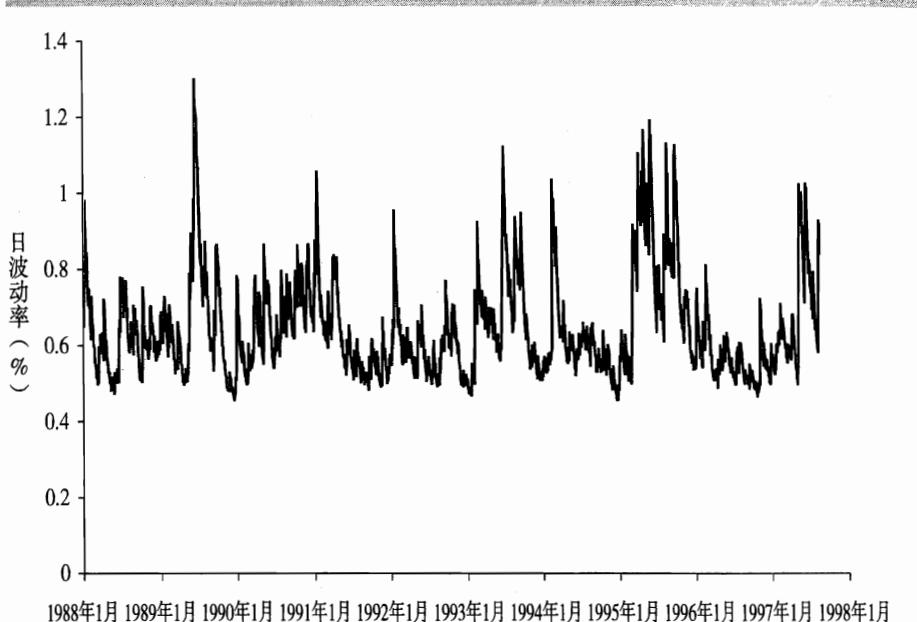


图 19.1 1988~1997, 日元/美元汇率的日波动率

0.8990。此时，目标函数的值为 22 063.5274，和之前得到的 22 063.5763 只有微小的差异。

使用 EWMA 模型的时候，参数估计过程相对比较简单。我们设  $\omega = 0$ ， $\alpha = 1 - \lambda$  以及  $\beta = \lambda$ ，也就只需估计一个参数。根据表 19.1 中的数据，使式 (19.12) 中的目标函数值最大的  $\lambda$  值为 0.9686，相应的目标函数值为 21 995.8377。

使用 GARCH(1,1) 模型和 EWMA 模型的时候，可以使用 Excel 中的 Solver 程序来寻找满足极大似然估计的参数值。建立电子数据表的时候，如果我们设置待求的参数值大体相同的话，该程序可以更好地运行。例如，GARCH(1,1) 模型的执行过程中，我们可以让单元 A1、A2 和 A3 分别相当于  $\omega \times 10^5$ 、 $\alpha$  和  $0.1\beta$ 。接着，我们可以设 B1=A1/100000、B2=A2 和 B3=10\*A3。我们用 B1、B2 和 B3 计算似然函数。而我们可以让 Solver 计算出当似然函数最大化时的 A1、A2 和 A3。

## 模型的表现

GARCH 模型中假设波动率随着时间变化而变化。某些期间内波动率相对较高，而其他期间内波动率相对较低。换句话说， $u_i^2$  高的时候， $u_{i+1}^2$ 、 $u_{i+2}^2$ 、…也倾向于高； $u_i^2$  低的时候， $u_{i+1}^2$ 、 $u_{i+2}^2$ 、…也倾向于低。我们接下来检验  $u_i^2$  的自相关结构以检测上述的波动率变化方式的准确性。

我们假设  $u_i^2$  确实是自相关的。如果 GARCH 模型没什么问题的话，应该能消除自相关。我们为了检测自相关是否被消除，考虑变量  $u_i^2/\sigma_i^2$  的自相关结构。如果该变量几乎不存在自相关，那么我们  $\sigma_i$  的模型在解释  $u_i^2$  的自相关方面非常成功。

表 19.2 给出了对于日元/美元汇率数据进行上述分析的结果。第 1 列是计算自

表 19.2 使用 GARCH 模型之前和之后的自相关情况

| 滞后期数 | $u_i^2$<br>的自相关系数 | $u_i^2/\sigma_i^2$<br>的自相关系数 |
|------|-------------------|------------------------------|
| 1    | 0.072             | 0.004                        |
| 2    | 0.041             | -0.005                       |
| 3    | 0.057             | 0.008                        |
| 4    | 0.107             | 0.003                        |
| 5    | 0.075             | 0.016                        |
| 6    | 0.066             | 0.008                        |
| 7    | 0.019             | -0.033                       |
| 8    | 0.085             | 0.012                        |
| 9    | 0.054             | 0.010                        |
| 10   | 0.030             | -0.023                       |
| 11   | 0.038             | -0.004                       |
| 12   | 0.038             | -0.021                       |
| 13   | 0.057             | -0.001                       |
| 14   | 0.040             | 0.002                        |
| 15   | 0.007             | -0.028                       |

相关系数的时候考虑的滞后期数。第 2 列给出了  $u_i^2$  的自相关系数。第 3 列给出了  $u_i^2/\sigma_i^2$  的自相关系数。<sup>12</sup> 表中可以看到对于 1~15 的滞后期数， $u_i^2$  都显示出了正的自相关。而  $u_i^2/\sigma_i^2$  有时显示出了正的自相关，有时显示出了负的自相关。而它的自相关系数都远小于  $u_i^2$  的自相关系数。

由此可见，GARCH 模型对数据做出了很好的解释。为了进行更为科学的计算，我们可以利用 Ljung-Box 统计量。<sup>13</sup> 如果某一个序列有  $m$  个观测值，它的 Ljung-Box 统计量为：

$$m \sum_{k=1}^K w_k \eta_k^2$$

其中， $\eta_k$  是滞后期数为  $k$  时的自相关系数， $K$  是我们考虑的滞后期数的个数，且

$$w_k = \frac{m+2}{m-k}$$

对于  $K = 15$ ，当 Ljung-Box 统计量大于 25 的时候，在 95% 置信度上拒绝自相关为零的假设。

表 19.2 中， $u_i^2$  序列的 Ljung-Box 统计量大约为 123。这是存在自相关的有力证据。对于  $u_i^2/\sigma_i^2$  序列，Ljung-Box 统计量为 8.2，可以认为 GARCH 模型消除了绝大部分的自相关。

<sup>12</sup> 对于序列  $x_i$ ，滞后期数为  $k$  时的自相关系数就是  $x_i$  与  $x_{i+k}$  之间的相关系数。

<sup>13</sup> 参见 G. M. Ljung and G. E. P. Box, “On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models,” *Biometrika*, 65 (1978): 297–303.

部分的自相关。

## 19.6 利用GARCH(1,1) 模型预测未来的波动率

第  $n$  天的方差率可从第  $n - 1$  天结束之时估计得出。当使用 GARCH(1,1) 模型的时候，该值为

$$\sigma_n^2 = (1 - \alpha - \beta)V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

即

$$\sigma_n^2 - V_L = \alpha(u_{n-1}^2 - V_L) + \beta(\sigma_{n-1}^2 - V_L)$$

在未来的第  $n + t$  天，有

$$\sigma_{n+t}^2 - V_L = \alpha(u_{n+t-1}^2 - V_L) + \beta(\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)$$

$u_{n+t-1}^2$  的期望值为  $\sigma_{n+t-1}^2$ 。因此

$$E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha + \beta)E[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L]$$

其中  $E$  表示期望值。反复利用该等式，可以得到

$$E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha + \beta)^t(\sigma_n^2 - V_L)$$

即

$$E[\sigma_{n+t}^2] = V_L + (\alpha + \beta)^t(\sigma_n^2 - V_L) \quad (19.13)$$

该公式利用了第  $n - 1$  天结束之时存在的信息，预测了第  $n + t$  天的波动率。EWMA 模型中， $\alpha + \beta = 1$ ，公式 (19.13) 说明未来方差率的期望等于当前的方差率。当  $\alpha + \beta < 1$  时，上面公式中的最后一项随着  $t$  增加而递减。图 19.2 描述了，当前的方差率不同于  $V_L$  时的方差率的预期轨迹。在前面提过，方差率显示均值回复特性，回复水平为  $V_L$ ，回复比率为  $1 - \alpha - \beta$ 。我们观察的时间足够长的时候，预测的未来方差率接近于  $V_L$ 。以上分析再次强调了，为了使 GARCH(1,1) 过程稳定，应该有  $\alpha + \beta < 1$ 。当  $\alpha + \beta > 1$  时，长期平均方差的权数是负值，以上过程呈现均值发散而不是均值回复。

在前面考虑的日元/美元汇率例子中， $\alpha + \beta = 0.9602$  以及  $V_L = 0.00004422$ 。假设日方差率的当前估计值为 0.00006（这等价于日波动率 0.77%）。10 天后的期望方差率为

$$0.00004422 + 0.9602^{10}(0.00006 - 0.00004422) = 0.00005473$$

期望波动率为每日 0.74%，还是大于每天 0.665% 的长期波动率。但是，100 天后的期望方差率为

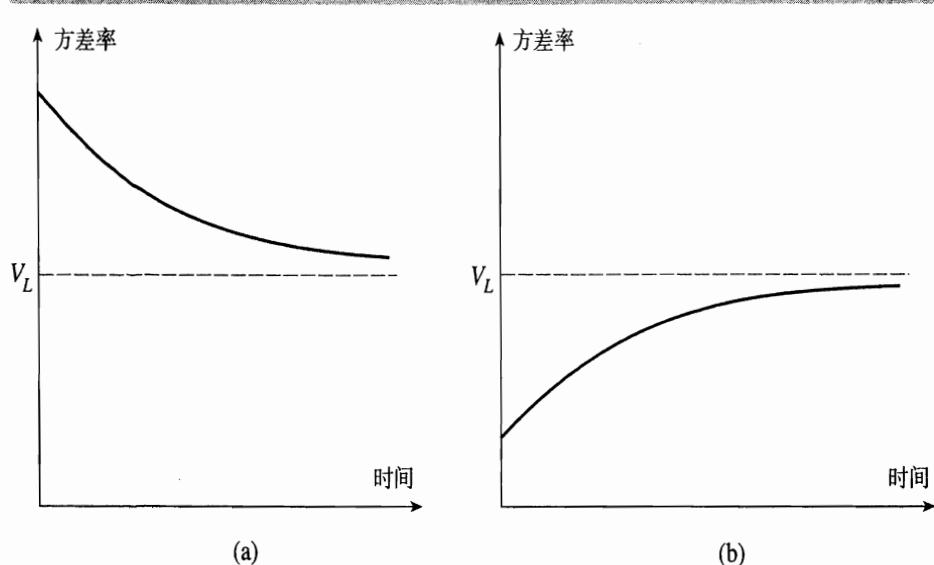


图 19.2 方差率的预期轨迹。 (a) 当前方差率大于长期方差率; (b) 当前方差率小于长期方差率

$$0.00004422 + 0.9602^{100} (0.00006 - 0.00004422) = 0.00004449$$

且期望波动率为每日 0.667%，这非常接近于长期波动率。

### 波动率期限结构

假设现在是第  $n$  天。定义:

$$V(t) = E(\sigma_{n+t}^2)$$

以及

$$a = \ln \frac{1}{\alpha + \beta}$$

所以，公式 (19.13) 变成

$$V(t) = V_L + e^{-at} [V(0) - V_L]$$

这里， $V(t)$  是  $t$  天后瞬态方差率的一个估计值。今天和  $T$  时刻之间的平均日方差率为

$$\frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = V_L + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - V_L]$$

期权的有效期越长，该值越接近  $V_L$ 。定义  $\sigma(T)$  为适合 GARCH(1,1) 模型中定价  $T$  天期期权的年波动率。假设一年有 252 天， $\sigma(T)^2$  是平均日方差率的 252 倍，因此

表 19.3 以 GARCH(1,1) 模型估计的日元/美元波动率期限结构

| 期权有效期 (天)   | 10    | 30    | 50    | 100   | 500   |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 期权波动率 (%/年) | 12.00 | 11.59 | 11.33 | 11.00 | 10.65 |

$$\sigma(T)^2 = 252 \left( V_L + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - V_L] \right) \quad (19.14)$$

如第 16 章的讨论，通常使用基于相同资产的不同期权的市价计算波动率期限结构。它描述了期权的隐含波动率和有效期限之间的关系。公式 (19.14) 可以用来估计基于 GARCH(1, 1) 模型的波动率期限结构。估计出来的波动率期限结构不总是和实际的波动率期限结构相同。但是我们将看到，估计出的波动率期限结构可以用来预测实际的波动率期限结构对于波动率变化的反映情况。

当前的波动率高于长期波动率时，GARCH(1,1) 模型估计出来的是向下倾斜的波动率期限结构。当前的波动率低于长期波动率时，GARCH(1,1) 模型估计出来的是向上倾斜的波动率期限结构。在日元/美元汇率例子中， $a = \ln(1/0.9602) = 0.0406$  以及  $V_L = 0.00004422$ 。假设当前的日方差率  $V(0)$  的估计值为每日 0.00006。根据公式 (19.14)，有

$$\sigma(T)^2 = 252 \left[ 0.00004422 + \frac{1 - e^{-0.0406T}}{0.0406T} (0.00006 - 0.00004422) \right]$$

其中  $T$  按照天数来度量。表 19.3 中给出了不同的  $T$  所对应的年波动率。

## 波动率变化的影响

公式 (19.14) 可以重写为

$$\sigma(T)^2 = 252 \left( V_L + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} \left[ \frac{\sigma(0)^2}{252} - V_L \right] \right)$$

$\sigma(0)$  变化  $\Delta\sigma(0)$  时， $\sigma(T)$  的变化程度为：

$$\frac{1 - e^{-aT}}{aT} \frac{\sigma(0)}{\sigma(T)} \Delta\sigma(0) \quad (19.15)$$

表 19.4 中给出了日元/美元汇率例子中，波动率变化对不同期限期权的影响。

表 19.4 以 GARCH(1, 1) 模型预测的瞬态波动率的 1%变化的影响

| 期权有效期 (天)  | 10   | 30   | 50   | 100  | 500  |
|------------|------|------|------|------|------|
| 波动率的上升 (%) | 0.84 | 0.61 | 0.46 | 0.27 | 0.06 |

在这里我们同样设  $V(0) = 0.00006$ ，因此  $\sigma(0) = 12.30\%$ 。该表中考虑的是瞬态波动率从每年 12.30% 变化到每年 13.30%，即 100 个基点的变化。也就是说  $\Delta\sigma(0) = 0.01$ ，即 1%。

很多金融机构在决定账面资产对波动率变化的暴露程度时，做上述的分析。银行在计算 Vega 值时，并不设定隐含波动率全面上升 1%，而是根据期权的期限选择波动率上升幅度。基于表 19.4 中的数据，对于 10 天期期权将考虑 0.84% 的波动率上升幅度，对于 30 天期期权将考虑 0.61% 的波动率上升幅度，对于 50 天期期权将考虑 0.46% 的波动率上升幅度，如此等等。

## 19.7 相关系数

到现在为止的讨论集中在如何估计和预测波动率。第 18 章中解释过，计算 VaR 的时候相关系数也是关键变量。这一节中我们将看到，相关系数估计值的更新操作类似于波动率估计值的更新操作。

变量  $X$  和  $Y$  的相关系数的定义如下：

$$\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

其中  $\sigma_X$  和  $\sigma_Y$  分别为  $X$  和  $Y$  的标准差， $\text{cov}(X, Y)$  为  $X$  和  $Y$  的协方差。 $X$  和  $Y$  之间的协方差定义为

$$E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

其中  $\mu_X$  和  $\mu_Y$  分别为  $X$  和  $Y$  的均值， $E$  表示期望。虽然相关系数的意义看起来比协方差的意义要直观，但在我们的分析中正是以协方差为基本变量。<sup>14</sup>

定义  $x_i$  和  $y_i$  分别为第  $i - 1$  天结束之时到第  $i$  天结束之时的  $X$  和  $Y$  的变化百分比：

$$x_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}}, \quad y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}$$

其中  $X_i$  和  $Y_i$  分别为第  $i$  天结束之时的变量  $X$  和  $Y$  的值。我们也定义其他符号如下：

$\sigma_{x,n}$ : 变量  $X$  的日波动率，适用于第  $n$  天的估计值

$\sigma_{y,n}$ : 变量  $Y$  的日波动率，适用于第  $n$  天的估计值

$\text{cov}_n$ : 变量  $X$  和  $Y$  每日变化的协方差的估计值，第  $n$  天计算得到

第  $n$  天的  $X$  和  $Y$  的相关系数的估计值为

---

<sup>14</sup> 一种类似情况就是，本章前面部分的 EWMA 和 GARCH 设计中，方差率是基本变量，即使波动率更容易理解。

$$\frac{\text{cov}_n}{\sigma_{x,n} \sigma_{y,n}}$$

使用相同的权数并假设  $x_i$  和  $y_i$  的均值为零。公式 (19.3) 表明，可以从最近的  $m$  个观测值中估计  $X$  和  $Y$  的方差率。它们分别为：

$$\sigma_{x,n}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{n-i}^2, \quad \sigma_{y,n}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{n-i}^2$$

类似地， $X$  和  $Y$  之间的协方差估计值为

$$\text{cov}_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{n-i} y_{n-i} \quad (19.16)$$

另一种更新协方差的方法是利用和公式 (19.7) 类似的 EWMA 模型。所以更新协方差估计值的公式为

$$\text{cov}_n = \lambda \text{cov}_{n-1} + (1 - \lambda) x_{n-1} y_{n-1}$$

利用类似于分析 EWMA 波动率模型中使用过的方法，我们可以看到赋予观测值  $x_i y_i$  的权数，随着时间倒退而下降。 $\lambda$  值越低，赋予最近观测值的权数也越高。

**[例 19.3]** 假设  $\lambda = 0.95$  且第  $n - 1$  天的变量  $X$  和  $Y$  之间的相关系数的估计值为 0.6。进一步假设，第  $n - 1$  天的  $X$  和  $Y$  的波动率估计值分别为 1% 和 2%。根据相关系数和协方差之间的关系式，第  $n - 1$  天的  $X$  和  $Y$  之间的协方差估计值为

$$0.6 \times 0.01 \times 0.02 = 0.00012$$

假设第  $n - 1$  天的  $X$  和  $Y$  的变化百分比分别为 0.5% 和 2.5%。所以，第  $n$  天的方差和协方差将有如下的更新：

$$\sigma_{x,n}^2 = 0.95 \times 0.01^2 + 0.05 \times 0.005^2 = 0.00009625$$

$$\sigma_{y,n}^2 = 0.95 \times 0.02^2 + 0.05 \times 0.025^2 = 0.00041125$$

$$\text{cov}_n = 0.95 \times 0.00012 + 0.05 \times 0.005 \times 0.025 = 0.00012025$$

$X$  的最新波动率为  $\sqrt{0.00009625} = 0.981\%$ ， $Y$  的最新波动率为  $\sqrt{0.00041125} = 2.028\%$ 。 $X$  和  $Y$  之间的最新相关系数为

$$\frac{0.00012025}{0.00981 \times 0.02028} = 0.6044$$

GARCH 模型也可以用来更新协方差估计值以及预测协方差的未来水平。例如，更新协方差的 GARCH(1,1) 模型为

$$\text{cov}_n = \omega + \alpha x_{n-1} y_{n-1} + \beta \text{cov}_{n-1}$$

且长期平均协方差为  $\omega/(1 - \alpha - \beta)$ 。可以推导类似于 (19.13) 和 (19.14) 的

公式，以便预测未来协方差以及计算期权有效期间内的平均协方差。<sup>15</sup>

## 协方差的一致性条件

一旦计算出所有方差和协方差，我们就能建立方差—协方差矩阵。当  $i \neq j$  时，矩阵的第  $(i, j)$  个元素是变量  $i$  和变量  $j$  的协方差。当  $i = j$  时，这个元素是变量  $i$  的方差。

不是所有方差—协方差矩阵都是内部一致的。一个  $N \times N$  方差—协方差矩阵  $\Omega$  内部一致的条件是：

对于所有  $N \times 1$  向量  $\omega$ ，

$$\omega^T \Omega \omega \geq 0 \quad (19.17)$$

其中  $\omega^T$  是  $\omega$  的转置。满足这种性质的矩阵就是半正定的。

为了理解公式 (19.17) 的成立条件，假设  $\omega^T$  是  $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ 。表达式  $\omega^T \Omega \omega$  是  $\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n$  的方差，其中  $x_i$  是变量  $i$  的值，也就不可能是负值。

为了保证能产生半正定矩阵，方差和协方差的计算必须要一致。例如，如果对最近的  $m$  个观测值赋予相同权数计算出方差，则协方差也需要类似地求出。如果在利用 EWMA 模型更新方差的时候设定了  $\lambda = 0.94$ ，则在协方差的计算中也要做同样的设定。

一个内部不一致的方差—协方差矩阵的例子是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

每个变量的方差为 1，因此协方差等于相关系数值。第一个变量和第三个变量高度相关，第二个变量和第三个变量也高度相关。但是，第一个变量和第二个变量都不相关。这看起来有点奇怪。当我们设定  $\omega$  等于  $(1, 1, -1)$ ，我们将发现公式 (19.17) 中的条件不成立，所以该矩阵不是半正定的。<sup>16</sup>

<sup>15</sup> 利用本章中的思路对公式进行扩展，可以得到多元 GARCH 模型。其中，整个方差—协方差矩阵进行一致的更新。对于其他方法的讨论，参见 R. Engle and J. Mezrich, “GARCH for Groups,” *Risk*, August 1996: 36–40。

<sup>16</sup> 可以证明，一个  $3 \times 3$  的相关系数矩阵内部一致的条件是

$$\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} \leq 1$$

其中  $\rho_{ij}$  是变量  $i$  与  $j$  之间的相关系数。

## 小 结

大多数广泛使用的期权定价模型，如 Black-Scholes 模型，其中假定标的资产的波动率是不变的。但是这一假设很不完美。现实中，一个资产的波动率与资产价格一样遵循随机过程。不同于资产价格，波动率并不是直接能观察到的。本章中讨论了跟踪波动率的当前水平的一些操作。

定义  $u_i$  为第  $i - 1$  天结束之时到第  $i$  天结束之时的一个市场变量的变化百分数。该市场变量的方差率（即波动率的平方）可以计算为  $u_i^2$  的加权平均。本章中讨论的操作的核心性质是，给不同的  $u_i^2$  观测值赋予不同的权数。对最近的观测值赋予更大的权数。在 EWMA 模型和 GARCH(1,1) 模型中，观测值权数随着观测的时间倒退以指数方式衰减。GARCH(1,1) 模型和 EWMA 模型不同的是，它给长期平均方差率也赋予权数。利用 EWMA 模型和 GARCH(1,1) 模型的结构，我们可以方便地预测方差率的未来水平。

极大似然估计法通常用来从历史数据估计 GARCH (1,1) 模型以及类似的其他模型的参数。这要用迭代计算来找出能使历史数据重演的可能性最大的参数。决定参数值之后，衡量模型的表现的方法是，考查模型消除  $u_i^2$  自相关的程度。

对于每个被设计为跟踪方差变化的模型，我们都可以找到相应的模型来跟踪协方差。所以，根据我们讨论过的方法，可以更新计算 VaR 的方差—协方差矩阵。

## 参考读物

- Bollerslev, T. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity," *Journal of Econometrics*, 31 (1986): 307–27.
- Cumby, R., S. Figlewski, and J. Hasbrook. "Forecasting Volatilities and Correlations with EGARCH Models," *Journal of Derivatives*, 1, 2 (Winter 1993): 51–63.
- Engle, R. F. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation," *Econometrica* 50 (1982): 987–1008.
- Engle R. F., and J. Mezrich. "Grappling with GARCH," *Risk*, September 1995: 112–117.
- Engle, R. F., and J. Mezrich, "GARCH for Groups," *Risk*, August 1996: 36–40.
- Engle, R. F., and V. Ng, "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility," *Journal of Finance*, 48 (1993): 1749–78.
- Nelson, D. "Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59 (1990): 347–70.
- Noh, J., R. F. Engle, and A. Kane. "Forecasting Volatility and Option Prices of the S&P 500 Index," *Journal of Derivatives*, 2 (1994): 17–30.

## 问题和习题

- 19.1 请解释 EWMA 模型中如何从历史数据估计波动率。
- 19.2 EWMA 模型和 GARCH(1,1) 模型在更新波动率的时候，有哪些不同之处？
- 19.3 一个资产的日波动率的最近估计值为 1.5%，昨天该资产的收盘价为 \$30.00。EWMA 模型中的参数  $\lambda$  等于 0.94。假设今天的资产收盘价为 \$30.50。请问 EWMA 模型中，波动率会怎么被更新？

- 19.4 一家公司利用 EWMA 模型来预测波动率。公司决定把参数  $\lambda$  从 0.95 改成 0.85。请解释这一改变对预测可能会产生什么影响。
- 19.5 某个市场变量的波动率为 30%p.a.。请计算 99%置信度的该变量的每日变化百分比幅度。
- 19.6 一家公司使用 GARCH(1,1) 模型来更新波动率。三个参数为  $\omega$ 、 $\alpha$  和  $\beta$ 。把其中一个参数值略微增加，而其他参数保持不变。请问会产生什么影响？
- 19.7 美元/英镑汇率的日波动率的最新估计值为 0.6%。昨天下午 4 点的汇率为 1.5000。EWMA 模型中的参数  $\lambda$  等于 0.9。假设今天下午 4 点的汇率变成 1.4950，日波动率估计值将会如何被更新？
- 19.8 假设昨天 S&P 500 收盘价为 1 040，那一时刻的指数日波动率的估计值为每天 1%。GARCH(1,1) 模型中的参数为  $\omega = 0.000002$ 、 $\alpha = 0.06$  和  $\beta = 0.92$ 。如果今天的指数收盘价为 1 060，最新的波动率估计值为多少？
- 19.9 假设昨天收盘的时候计算的资产 A 和资产 B 的日波动率分别为 1.6% 和 2.5%。昨天的资产收盘价分别为 \$20 和 \$40，两个资产收益之间的相关系数的估计值为 0.25。EWMA 模型中的参数  $\lambda$  为 0.95。  
 (a) 请计算两个资产之间的协方差的当前估计值。  
 (b) 假设今天两个资产的收盘价分别为 \$20.5 和 \$40.5。请更新相关系数估计值。
- 19.10 GARCH(1,1) 模型中的参数估计值为  $\omega = 0.000004$ 、 $\alpha = 0.05$  和  $\beta = 0.92$ 。长期平均波动率为多少？描述方差率回复到它的长期平均的表达式是什么？当前的波动率为 20%p.a.，20 天后的期望波动率为多少？
- 19.11 假设资产 X 和资产 Y 的当前日波动率分别为 1.0% 和 1.2%。昨天资产的收盘价分别为 \$30 和 \$50，两个资产收益之间的相关系数估计值为 0.50。使用 GARCH(1,1) 模型来更新相关系数和波动率。模型的参数估计值为  $\alpha = 0.04$  和  $\beta = 0.94$ 。对于相关系数的  $\omega = 0.000001$ ，对于波动率的  $\omega = 0.000003$ ，如果今天的两个资产的收盘价分别为 \$31 和 \$51，更新的相关系数估计值为多少？
- 19.12 假设 FTSE 100 股票指数（以英镑衡量）的日波动率为 1.8%，美元/英镑汇率的日波动率为 0.9%。进一步假设 FTSE 100 和美元/英镑汇率之间的相关系数为 0.4。以美元表示的时候，FTSE 100 的波动率为多少？假设美元/英镑汇率以 1 英镑对应的美元数额表示。（提示：当  $Z = XY$  的时候， $Z$  的日变化百分数近似等于  $X$  的日变化百分数加上  $Y$  的日变化百分数。）
- 19.13 假设习题 19.12 中，S&P 500 指数（以美元衡量）和 FTSE 100 指数（以英镑衡量）之间的相关系数为 0.7，S&P 500 指数（以美元衡量）和美元/英镑汇率之间的相关系数为 0.3，S&P 500 指数的日波动率为 1.6%。转换成美元的 FTSE 100 指数和 S&P 500 指数（以美元衡量）之间的相关系数为多少？（提示：对应三个变量  $X$ 、 $Y$  和  $Z$ ， $X + Y$  和  $Z$  之间的协方差等于  $X$  和  $Z$  之间的协方差加上  $Y$  和  $Z$  之间的协方差。）
- 19.14 请证明方程 (19.9) 中的 GARCH(1,1) 模型  $\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$  等价于随机波动率模型  $dV = a(V_L - V)dt + \xi v dz$ 。其中，时间以天数度量， $V$  是资产价格波动率的平方，并且

$$\alpha = 1 - \alpha - \beta, V_L = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}, \xi = \alpha \sqrt{2}$$

当时间是以年度量的时候，相应的随机波动率模型应该是什么？（提示：变量  $u_{n-1}$  是资产价格在  $\Delta t$  时间段内的收益。可以假设它服从均值为零、标准差为  $\sigma_{n-1}$  的正态分布。那么， $u_{n-1}^2$  和  $u_{n-1}^4$  的均值分别为  $\sigma_{n-1}^2$  和  $3\sigma_{n-1}^4$ 。）

## 课后练习

- 19.15 假设昨天的黄金收盘价为\$300，其波动率的估计值为 1.3%/天。今天的收盘价是\$298。利用下面的方法来更新波动率估计值：
- (a) EWMA 模型， $\lambda = 0.94$
  - (b) GARCH(1, 1) 模型， $\omega = 0.000002$ ,  $\alpha = 0.04$ ,  $\beta = 0.94$
- 19.16 假设习题 19.15 中，昨天的白银收盘价为\$8，其波动率的估计值为 1.5%/天。黄金和白银之间的相关系数估计值为 0.8。今天的白银收盘价还是\$8。使用习题 19.15 中的两个模型，更新白银的波动率和黄金和白银之间的相关系数。实际应用中，黄金和白银对应的参数  $\omega$  有可能相同吗？
- 19.17 可以从作者的网页下载包含 900 天的汇率和股票指数的每日数据的Excel 工作表：

<http://www.rotman.utoronto.ca/~hull>

选择一个汇率和一个股票指数。使  $\sum_i(v_i - \beta_i)^2$  最小化来估计 EWMA 模型的  $\lambda$  值。其中， $v_i$  是第  $i - 1$  天结束之时预测的方差值， $\beta_i$  是根据第  $i$  天至第  $i + 25$  天之间的数据计算的方差。使用 Excel 中的 Solver 工具。开始 EWMA 计算的时候，设定第一天结束之时的方差预测值等于那一天收益率的平方。

- 19.18 假设 GARCH(1,1) 模型中的参数值如下： $\alpha = 0.03$ 、 $\beta = 0.95$  以及  $\omega = 0.000002$ 。
- (a) 长期平均波动率为多少？
  - (b) 当前波动率为每天 1.5%，20、40 和 60 天后的波动率估计值为多少？
  - (c) 定价 20 天期、40 天期、60 天期期权的时候，应该使用的波动率分别为多少？
  - (d) 假设发生了一个事件，当前波动率从 0.5% 上升到 2% 每天。请估计 20、40 和 60 天后的波动率受到的影响。
  - (e) 请估计该事件发生后，在为 20 天期、40 天期、60 天期期权定价时，使用的波动率上升了多少？同时使用方程 (19.14) 和方程 (19.15) 进行估计。

## 信用风险

我们在第 18 章中讲述 VaR 与第 15 章讲述套期保值参数，其目的是量化市场风险。在本章，我们考虑金融机构面临的另外一种重要风险：信用风险。大多数金融机构都把相当多的资源和精力花费在信用风险的度量和管理上。监管者要求银行维持足够的资本来承受他们所承担的信用风险（商业剪影 18.1 中讲述过针对市场风险需要保持相应的资本，针对信用风险也需要添加额外的资本）。

借款人以及衍生品交易双方的潜在违约可能性带来了信用风险问题。本章，我们将集中在信用风险的量化上，同时将讨论一系列评估公司违约概率的方法，解释风险中性和真实世界违约概率之间的关键区别。我们将考查 OTC 市场衍生证券交易中信用风险的性质，并讲述衍生证券交易者们为了减少信用风险而在合约写入的条款。本章最后讲述违约的相关性和 Gaussian copula 模型以及信用 VaR 的估计。

第 21 章中将讨论信用衍生品，我们将看到本章中的结论可以用来定价这些金融工具。

## 20.1 信用评级

评级机构，比如穆迪或者标准普尔，提供公司债券信用价值的评级。在穆迪系统中，最佳的信用评级是 Aaa。具有这一等级的债券被认为几乎没有违约风险。第二等级是 Aa。接着是 A、Baa、Ba、B 以及 Caa。只有具备 Baa 或者以上等级的债券被认为属于投资级。标准普尔相对于穆迪的 Aaa、Aa、A、Baa、Ba、B 和 Caa 的评级分别是 AAA、AA、A、BBB、BB、B 和 CCC。为了有更精细的评级，穆迪将 Aa 分成 Aa1、Aa2 以及 Aa3；将 A 归入 A1、A2、A3，如此等等。类似地，标准普尔将 AA 分为 AA+、AA 和 AA-；而将 A 级别又分成 A+、A 和 A-，等等（只有穆迪的 Aaa 和标准普尔的 AAA 没有被再细分）。

## 20.2 历史违约概率

表 20.1 是一个典型的评级机构给出的数据。它展示了期初具有某个特定的信用等级的公司随着时间变化而产生的违约概率变动。例如，表 20.1 中可以看出一

个初始发行等级为 Baa 的债券，在随后 1 年内的违约概率是 0.20%，2 年内的违约概率是 0.57%，如此等等。某一特定年内的债券的违约概率可由该表得出。例如，初始评级为 Baa 的债券在第 2 年内的违约概率为  $0.57\% - 0.20\% = 0.37\%$ 。

表 20.1 说明，对于投资级的债券，违约概率是时间的增函数（如 A 级债券在 1、2、3、4 和 5 年内违约的概率分别为 0.02%、0.07%、0.14%、0.15% 和 0.16%）。这是因为债券发行者在初始阶段被认为是有信誉的，而随着时间变化，发行者的财务状况下滑的可能性变大。对于等级低的债券，违约概率通常为时间的减函数（如 Caa 级债券在 1、2、3、4 和 5 年内违约的概率分别为 23.65%、13.55%、10.82%、7.54% 和 5.27%）。这是因为对于一个等级低的债券，发行之后的一两年是最为关键的。如果发行者成功过渡这段时间，其财务状况有可能变好。

## 违约强度

从表 20.1 我们可以计算出一个等级为 Caa 的债券在第 3 年内违约的概率为  $48.02\% - 37.20\% = 10.82\%$ 。我们将称它为无条件违约概率（unconditional default probability）。这是在 0 时刻计算的第 3 年内的违约概率。Caa 级债券存活到第 2 年末的概率为  $100\% - 37.20\% = 62.80\%$ 。所以在不会提前违约的条件下，第 3 年内的违约概率为  $0.1082/0.6280$ ，即 17.23%。条件违约概率被称为违约强度（default intensity）或风险比率（hazard rate）。

我们计算的 17.23% 是 1 年期限的数据。假设我们考虑很小的时间段  $\Delta t$ 。 $t$  时刻的违约强度定义为  $\lambda(t)$ ， $\lambda(t)\Delta t$  是  $t$  时刻和  $t + \Delta t$  时刻之间的在不会提前违约的条件下的违约概率。如果  $V(t)$  是公司存活到  $t$  时刻（即到  $t$  时刻不发生违约）的累计概率，则

$$V(t + \Delta t) - V(t) = -\lambda(t)V(t)\Delta t$$

取极限

$$\frac{d V(t)}{dt} = -\lambda(t)V(t)$$

我们得到

表 20.1 平均累积违约概率（%），1970~2003（资料来源：穆迪）

| 期限<br>(年) | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 7     | 10    | 15    | 20    |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Aaa       | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.04  | 0.12  | 0.29  | 0.62  | 1.21  | 1.55  |
| Aa        | 0.02  | 0.03  | 0.06  | 0.15  | 0.24  | 0.43  | 0.68  | 1.51  | 2.70  |
| A         | 0.02  | 0.09  | 0.23  | 0.38  | 0.54  | 0.91  | 1.59  | 2.94  | 5.24  |
| Baa       | 0.20  | 0.57  | 1.03  | 1.62  | 2.16  | 3.24  | 5.10  | 9.12  | 12.59 |
| Ba        | 1.26  | 3.48  | 6.00  | 8.59  | 11.17 | 15.44 | 21.01 | 30.88 | 38.56 |
| B         | 6.21  | 13.76 | 20.65 | 26.66 | 31.99 | 40.79 | 50.02 | 59.21 | 60.73 |
| Caa       | 23.65 | 37.20 | 48.02 | 55.56 | 60.83 | 69.36 | 77.91 | 80.23 | 80.23 |

$$V(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$$

定义  $Q(t)$  为期限  $t$  对应的违约概率，则

$$Q(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$$

或

$$Q(t) = 1 - e^{-\bar{\lambda}(t)t} \quad (20.1)$$

其中， $\bar{\lambda}(t)$  是  $0 \sim t$  时刻的平均违约强度。

### 20.3 回收率

当一个公司破产的时候，公司的债权人具有对公司资产的求偿权。<sup>1</sup> 有时进行重组以满足债权人的一部分求偿权。其他情况下，这些资产被出售给清算人，用所得资金尽量满足那些求偿权。一些求偿权比其他的求偿权有更高的优先级，完全被补偿的可能性更大。

一个债券的回收率通常被定义为违约发生时刻的债券市场价格占其账面价值的比例。表 20.2 提供了美国不同类别债券的平均回收率的历史数据。它显示出最高级别债权人每美元账面价值获得 51.6 美分的平均回收率，而最低级的债权人每美元账面价值仅获得 24.5 美分的平均回收率。

债券的回收率和违约概率高度负相关。穆迪收集了 1982~2003 年之间的平均回收率和平均违约概率。可以发现如下的关系式可以对这些数据做出很好的解释：<sup>2</sup>

$$\text{平均回收率} = 50.3 - 6.3 \times \text{平均违约概率}$$

表 20.2 按账面价值比例表示的公司债券回收率，1982~2003

(资料来源：穆迪)

| 类 别   | 平均回收率 (%) |
|-------|-----------|
| 高级担保  | 51.6      |
| 高级非担保 | 36.1      |
| 高级附属  | 32.5      |
| 次 级   | 31.1      |
| 更次一级  | 24.5      |

<sup>1</sup> 在美国，债券持有者的求偿额等于债券的账面价值加上应计利息。

<sup>2</sup> 参见 D. T. Hamilton, P. Varma, S. Ou, and R. Cantor, “Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers,” Moody’s Investor’s Services, January 2004. 回复的  $R^2$  值为 0.6。关于相关性的确定和讨论，参见 E. I. Altman, B. Brady, A. Resti, and A. Sironi, “The Link between Default and Recovery Rates: Implications for Credit Risk Models and Pro cyclicality,” Working Paper, New York University, 2003.

其中平均回收率和平均违约概率都以百分数表示。

## 20.4 根据债券价格估计违约概率

一个公司的违约概率可由它发行的债券价格来估计。通常的假设是，一个公司债券比类似的无风险债券价格较低的惟一原因是存在违约可能性。<sup>3</sup>

首先，考虑一个近似计算。假设一个债券的收益率比类似的无风险债券高 200 个基点，在违约发生的情况下的预期回收率为 40%。该公司债券的持有者会预期到如果违约发生，他将损失 200 个基点（即每年 2%）。给定回收率为 40%，在没有提前违约的条件下，违约概率的估计值为每年  $0.02/(1 - 0.04)$ ，即 3.33%。一般表达式为：

$$h = \frac{s}{1 - R} \quad (20.2)$$

其中， $h$  是每年违约强度， $s$  是公司债券收益率高于无风险利率的价差部分， $R$  是预期回收率。

### 更加精确的计算

为了更精确地计算，假设我们考虑过的公司债券已经持续了 5 年，提供每年 6%（每半年支付一次）的复利，并且该公司债券的收益率为每年 7%。类似的无风险债券的收益率为 5%（连续复利）。这些收益率数据说明公司债券价格为 95.34，无风险债券的收益率为 104.09。债券有效期 5 年之内预期违约损失为  $104.09 - 95.34$ ，即 \$8.75。假设每年的违约概率为  $Q$ （在这个简单例子中，假设每年违约概率相同）。表 20.3 计算预期违约损失时，基于违约发生在 0.5、1.5、2.5、3.5 以及 4.5 年（刚好在支付发生之前）的假设。所有期限的无风险利率被假定为 5%（连续复利）。

为了解释这个计算过程，考虑表 20.2 中的“3.5 年”一行。无风险债券在 3.5 年的预期价值（使用远期利率计算）为

$$3 + 3e^{-0.05 \times 0.5} + 3e^{-0.05 \times 1.0} + 103e^{-0.05 \times 1.5} = 104.34$$

根据前一节中的回收率定义，违约发生时得到的赔偿为 40，所以违约损失为  $104.34 - 40$ ，即 \$64.34。损失的现值为 54.01，预期损失为  $54.01Q$ 。

总预期损失为  $288.48Q$ 。设该值等于 8.75，则我们得到  $Q$  等于 3.03%。我们的计算中假设了违约的概率每年都相等，且违约在某年的特定时间只发生一次。我们可以假设违约更频繁发生，对计算过程进行推广。我们也可以以违约强度不变

---

<sup>3</sup> 这个假设并不是完美的。实际应用中，一个公司债券的价格也受其流动性的影响。流动性越低，价格也越低。

表 20.3 以年违约概率为  $Q$  来计算一个债券的违约损失。名义本金 = \$100

| 时刻<br>(年) | 违约概率 | 回收额<br>(\$) | 无风险价值<br>(\$) | 违约损失<br>(\$) | 贴现因子   | 预期损失<br>的现值 |
|-----------|------|-------------|---------------|--------------|--------|-------------|
| 0.5       | $Q$  | 40          | 106.73        | 66.73        | 0.9753 | 65.08 $Q$   |
| 1.5       | $Q$  | 40          | 105.97        | 65.97        | 0.9277 | 61.20 $Q$   |
| 2.5       | $Q$  | 40          | 105.17        | 65.17        | 0.8825 | 57.52 $Q$   |
| 3.5       | $Q$  | 40          | 104.34        | 64.34        | 0.8395 | 54.01 $Q$   |
| 4.5       | $Q$  | 40          | 103.46        | 63.46        | 0.7985 | 50.67 $Q$   |
| 总计        |      |             |               |              |        | 288.48 $Q$  |

或违约概率随时间变化遵循某种模式的假设，来代替无条件违约概率不变的假设。根据多个债券，我们可以估计几个描述违约概率期限结构的参数。例如，我们考虑 3、5、7 和 10 年后到期的债券。我们可以用第 1 个债券来估计前 3 年的每年违约概率；用第 2 个债券来估计第 4 年和第 5 年的年违约概率；用第 3 个债券来估计第 6 年和第 7 年的年违约概率；用第 4 个债券来估计第 8、9 和 10 年的年违约概率（参见习题 20.15 和习题 20.27）。这种方法和在 4.5 节中计算零息票收益率曲线的息票剥离方法相似。

## 无风险利率

利用债券价格估计违约概率的时候，关键的一点是理解“无风险利率”和“无风险债券”的含义。在公式 (20.2)，价差  $s$  是公司债券收益率超过类似的无风险债券收益率的部分。表 20.3 中，债券的无风险价值需要以无风险利率计算。通常，公司债券收益率的报价中以类似的国债收益率为基准无风险利率（例如，一个债券交易者在报价某个特定的公司债券的时候，使用比国债收益率高 250 个基点的收益率）。

如 4.1 节中的讨论，交易者在估值衍生证券的时候，通常以 LIBOR/互换率作为无风险利率。计算违约概率的时候，交易者也经常以 LIBOR/互换率作为无风险利率。例如，当他们利用债券价格决定违约概率的时候，公式 (20.2) 中的价差  $s$  是债券收益率超过 LIBOR/互换率的部分。同样地，表 20.3 中计算使用的无风险贴现率为 LIBOR/互换零息率。

信用违约互换（在下一章中将进行讨论）可以用来表示交易者假设的无风险利率。其中使用的利率近似等于 LIBOR/互换率平均减去 10 个基点。<sup>4</sup> 这种估计是可行的。如 7.5 节中的解释，互换率中的信用风险是给 AA 级交易方放出 6 个月期贷款相应的信用风险，而对于 AA 级 6 个月金融工具，10 个基点差是合理的违约

<sup>4</sup> 参见 J. Hull, M. Predescu, and A. White, “The Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields, and Credit Rating Announcements,” *Journal of Banking and Finance*, 28 (November 2004): 2789–2811.

风险溢价。

## 资产互换

现实中，交易者经常利用资产互换价差作为从债券价格提取违约概率的途径。这是因为资产互换价差提供债券收益率超过 LIBOR/互换率的价差部分的直接估计值。

为了解释资产互换的应用过程，考虑这样的情况：某个特定债券的资产互换价差报价为 150 个基点。考虑三种如下情况：

1. 债以面值 100 出售。那么这个互换中一方（公司 A）支付该债券的息票率，而另一方（公司 B）支付 LIBOR + 150 个基点。<sup>5</sup>
2. 债券以 95（低于面值）出售。那么互换中，公司 A 除了息票，合约开始的时候对于每\$100 名义本金还支付\$5。
3. 债券以 108（高于面值）出售。那么互换中，公司 B 在合约开始的时候对于每\$100 本金支付\$8。

以上情况的结果都是资产互换价差的现值等于公司债券价格超过类似的无风险债券价格的部分，其中假设无风险利率由 LIBOR/互换曲线给出（参见习题 20.24）。再次考虑表 20.3 中的例子，假设 LIBOR/互换零息率曲线是平坦的，为 5%。假设，我们并不知道债券价格，而是知道资产互换价差为 150 个基点。这说明无风险债券价格超过公司债券价格的部分等于每年 150 个基点（总共 5 年）的现值。假设每半年进行支付，这等于每\$100 本金支付\$6.55。

这种情况下，表 20.3 中的总损失应该被设定在\$6.55。这说明年违约概率  $Q$  等于  $6.55/288.48$ ，即 2.27%。

## 20.5 不同违约概率估计方法的比较

从历史数据估计的违约概率比从债券价格得到的估计值小很多。表 20.4 说明了这一结果。<sup>6</sup> 该表给出了，对于某个初始评级的公司，从 (a) 历史数据或 (b) 债券价格计算出的 7 年之间的年平均违约强度。

从历史数据计算违约强度是基于公式 (20.1) 与表 (20.1)。从公式 (20.1)，我们得到：

$$\bar{\lambda}(7) = -\frac{1}{7} \ln[1 - Q(7)]$$

其中  $\bar{\lambda}(t)$  是到期限  $t$  的平均违约强度（或风险比率）， $Q(t)$  是期限  $t$  的累计违

<sup>5</sup> 注意，这是在交换约定的息票。无论债券是否违约，都继续进行这种交换。

<sup>6</sup> 表 20.4 与 20.5 的出处为 J. Hull, M. Predescu, and A. White, “Bond Prices, Default Probabilities and Risk Premiums” *Journal of Credit Risk*, forthcoming.

约概率。 $Q(7)$  的值可以从表 20.1 直接获取。举一个例子，考虑一个 A 级公司， $Q(7)$  值为 0.0091。那么，7 年期平均违约强度为

$$\bar{\lambda}(7) = -\frac{1}{7} \ln(0.9909) = 0.0013$$

即 0.13%。

用债券价格计算违约强度是基于公式 (20.2) 和美林公司公布的债券收益率。这里给出的是 1996 年 12 月到 2004 年 7 月之间的平均值。其中假设了回收率为 40%，与前一节讨论中的数据相同，无风险利率被假定为 7 年期互换率减去 10 个基点。例如，美林发布的 A 级债券的平均收益率为 6.274%。平均互换率为 5.605%，所以无风险利率为 5.505%。于是平均 7 年期违约概率为

$$\frac{0.06274 - 0.05505}{1 - 0.4} = 0.00128$$

即 1.28%。

表 20.4 给出了从债券价格计算的违约概率与从历史数据计算的违约概率的比率，对于投资级公司，该比率随着信用程度的下降而以非常高的速度快速下降。两个违约概率之间的差别随着信用程度的下降而上升。

表 20.5 中以另外一种方式考察了这些结果。表中给出了不同信用等级的债券超过无风险利率（仍假定它等于 7 年期互换率减去 10 个基点）的超额收益。再次考虑 A 级债券。国债的平均价差为 120 个基点。其中 43 个基点是由 7 年期国债和无风险利率（用 7 年期互换率减 10 个基点来表示）的平均价差来解释。8 个基点的价差对应于预期违约的补偿（这等于表 20.4 中现实世界违约概率乘以 1 减去假定回收率为 0.4 的值）。剥去上述的基点之后，预期超额收益（考虑完预期违约之后）为 69 个基点。

表 20.4 和表 20.5 说明违约概率估计值之间的很大百分比的差别，转换成该债券的预期超额收益会比较小（但值得注意）。对于 Aaa 级债券，两个违约概率之间的比率为 16.8，但是预期超额收益只有 38 个基点。预期收益随着信用程度的下降而上升。<sup>7</sup>

表 20.4 7 年的平均违约强度 (%p.a.)

| 评级  | 历史违约强度 | 从债券计算的<br>违约强度 |      |      |
|-----|--------|----------------|------|------|
|     |        | 比率             | 差别   |      |
| Aaa | 0.04   | 0.67           | 16.8 | 0.63 |
| Aa  | 0.06   | 0.78           | 13.0 | 0.72 |
| A   | 0.13   | 1.28           | 9.8  | 1.15 |
| Baa | 0.47   | 2.38           | 5.1  | 1.91 |
| Ba  | 2.40   | 5.07           | 2.1  | 2.67 |
| B   | 7.49   | 9.02           | 1.2  | 1.53 |
| Caa | 16.90  | 21.30          | 1.3  | 4.40 |

<sup>7</sup> 表 20.4 和表 20.5 中，B 级债券的结果和总体模式是相背离的。

表 20.5 债券的预期超额收益（基点）

| 评 级 | 债券收益率超过<br>国债收益率的价差 | 无风险利率超过<br>国债收益率的价差 | 历史违约<br>相关的价差 | 预期<br>超额收益 |
|-----|---------------------|---------------------|---------------|------------|
| Aaa | 83                  | 43                  | 2             | 38         |
| Aa  | 90                  | 43                  | 4             | 43         |
| A   | 120                 | 43                  | 8             | 69         |
| Baa | 186                 | 43                  | 28            | 115        |
| Ba  | 347                 | 43                  | 144           | 160        |
| B   | 585                 | 43                  | 449           | 93         |
| Caa | 1321                | 43                  | 1014          | 264        |

## 现实世界中的概率与风险中性世界中的概率

由债券收益率得到的违约概率为违约的风险中性概率。为了解释其中原因，考虑表 20.3 中违约概率的计算。计算中假设了预期违约损失是以无风险利率贴现的。风险中性估值原理说明这是在风险中性世界中计算预期损失的正确方法。这说明表 20.3 中的违约概率  $Q$  应该是风险中性概率。

相比之下，从历史数据得到的违约概率为现实世界的违约概率（有时也称为物理概率）。现实世界和风险中性世界的违约概率之间的区别直接产生了表 20.5 中的预期超额收益。如果不存在预期超额收益，那么现实世界和风险中性世界中的违约概率相等，反之亦然。

为什么现实世界和风险中性世界中的违约概率之间存在这么大的区别？我们刚刚讨论过，这和公司债券交易者的收益率平均来说比无风险利率要高的原因一样。可能存在以下几个潜在原因：

1. 公司债券流动性相对较低，交易者们需要超额收益来补偿。
2. 债券交易者们主观认为的违约概率可能比表 20.1 中的数据要高很多。交易者们认为也有可能发生比 1970~2003 年期间观察到的还要糟糕的萧条。<sup>8</sup>
3. 债券的违约可能性不是相互独立的。这是解释表 20.4 和表 20.5 中结论的最重要的原因。一些期间内违约率非常低，而另外一些期间内违约率非常高。<sup>9</sup>这就引起了系统风险（即不可能分散的风险），为了承担这样的风险，债券交易者们需要预期超额收益。年复一年违约率发生变化的原因是整个经济环境变化，或者是因为一家公司违约可能引发了其他一系列公司的违约（后者被研究者们称为信用传染）。

<sup>8</sup>除了制定基于 1970~2003 年期间的表 20.1，穆迪也制定了类似的基于 1920~2003 年期间的表。使用后者的时候，投资级债券的历史违约强度比表 20.4 中的数据有一些上升。Aaa 级的违约强度从 4 上升到 6 个基点；Aa 级的违约强度从 6 上升到 22 个基点；A 级的违约强度从 13 上升到 29 个基点；Baa 级从 47 上升到 73 个基点。

<sup>9</sup>观察不同年份的违约率就能得到支持上述结论的证据。穆迪的统计说明 1970~2003 年之间，年违约率最低为 1979 年的 0.09%，最高为 2001 年的 3.81%。

4. 债券收益率曲线高度倾斜并有一个上界。所以，分散债券组合的风险比分散股票组合的风险要困难得多。<sup>10</sup> 为了分散风险需要持有很多数量的不同债券。现实中，很多债券组合根本达不到完全分散化。因此，债券交易者们可能需要超额收益来承担这样的非系统风险和上面提过的系统风险。

那么在信用风险的分析中应该使用现实世界违约概率还是风险中性违约概率呢？答案取决于分析目标。当估值信用衍生品或者是估计金融工具定价中违约风险的影响时，我们应该使用风险中性违约概率。这是因为这些分析当中需要计算预期未来现金流的现值，而且总是（间接或直接地）要使用风险中性估值。当运用情景分析来计算潜在的未来违约损失，我们需要使用现实世界违约概率。

## 20.6 利用股本价格估计违约概率

当我们利用如表 20.1 中的方法来估计一家公司的现实世界违约概率的时候，我们依赖于该公司的信用评级。不幸的是，信用评级数据并不是经常校订的。所以，一些分析师们提出股本价格含有的最新信息可被用来估计违约概率。

1974 年，Merton 提出了一个模型，认为公司的股本是基于该公司资产的一种期权。<sup>11</sup> 为了简化说明，假设公司拥有 1 个流通在外的零息票债券，在  $T$  时刻到期。定义：

$V_0$ : 当前公司资产的价值

$V_T$ :  $T$  时刻公司资产的价值

$E_0$ : 当前公司股本的价值

$E_T$ :  $T$  时刻公司股本的价值

$D$ :  $T$  时刻需要偿还的债务本金以及贷款利息的数额

$\sigma_V$ : 资产的波动率（假定为常数）

$\sigma_E$ : 股本的瞬态波动率

如果  $V_T < D$ ，公司在  $T$  时刻违反债务协议是合理的（至少在理论上），那么股本值为 0。如果  $V_T > D$ ，公司则应该在  $T$  时刻偿还债务，该时刻的股本价值为  $V_T - D$ 。因此，Merton 模型给出的  $T$  时刻的公司股本价值为

$$E_T = \max(V_T - D, 0)$$

这说明股本是执行价格等于债务偿还额、基于资产价值的看涨期权。Black-Scholes 公式给出的当前的股本价值为

$$E_0 = V_0 N(d_1) - D e^{-rT} N(d_2) \quad (20.3)$$

<sup>10</sup> 参见 J. D. Amato and E. M. Remolona, “The Credit Spread Puzzle,” *BIS Quarterly Review*, 5, December 2003: 51–63.

<sup>11</sup> 参见 R. Merton “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk structure of Interest Rates,” *Journal of Finance*, 29 (1974): 449–70.

其中

$$d_1 = \frac{\ln V_0/D + (r + \sigma_v^2/2)T}{\sigma_v \sqrt{T}} \quad \text{且} \quad d_2 = d_1 - \sigma_v \sqrt{T}$$

当前的债务价值为  $V_0 - E_0$ 。

公司违约债务协议的风险中性概率为  $N(-d_2)$ 。为了计算该值，我们需要知道  $V_0$  和  $\sigma_v$ 。两个变量都不是能直接观测到的。但是如果该公司是一家上市公司，我们就可以观测  $E_0$ 。这说明方程 (20.3) 提供了  $V_0$  和  $\sigma_v$  必须满足的一个条件。我们也可以从伊藤定理估计  $\sigma_E$  如下：

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_v V_0$$

即

$$\sigma_E E_0 = N(d_1) \sigma_v E_0 \quad (20.4)$$

该方程给出了  $V_0$  和  $\sigma_v$  需要满足的另一个方程。根据方程 (20.3) 和方程 (20.4) 这两个瞬态方程可求出  $V_0$  和  $\sigma_v$ 。<sup>12</sup>

**[例 20.1]** 一家公司的股本价值为 300 万美元，股本波动率为 80%。1 年之后需要偿还的债务为 1 000 万美元。无风险利率为 5%p.a.。那么  $E_0 = 3$ 、 $\sigma_E = 0.80$ 、 $r = 0.05$ 、 $T = 1$  以及  $D = 10$ 。解出方程 (20.3) 和方程 (20.4)，可得到  $V_0 = 12.40$  以及  $\sigma_v = 0.2123$ 。参数  $d_2$  为 1.1408，所以违约概率为  $N(-d_2) = 0.127$ ，即 12.7%。债务的市价为  $V_0 - E_0$ ，即 9.40。规定的债务支付额的现值为  $10e^{-0.05 \times 1} = 9.51$ 。债务的预期损失为  $(9.51 - 9.40)/9.51$ ，即无违约价值的 1.2%。比较该值和违约概率，我们得到违约发生的情况下，预期回收率为  $(12.7 - 1.2)/12.7$ ，即 91%。

我们给出的基本 Merton 模型可以扩展为多种形式。例如，该模型的一种形式中假设资产价值一旦下降到一个障碍水平以下时发生违约。

Merton 模型及其扩展形式给出的违约概率和现实违约情况吻合到什么程度呢？我们的结论是，Merton 模型及其扩展形式能给出的违约概率的（不管是风险中性世界还是现实世界）较好的排序状况。也就是说，将 Merton 模型给出的违约概率进行单调转换，可以产生很好的现实世界或风险中性世界的违约概率估计值。<sup>13</sup>

<sup>12</sup> 为了求解形式为  $F(x, y) = 0$  和  $G(x, y) = 0$  的两个非线性方程，我们可以利用 Excel 的 Solver 程序来寻找使  $[F(x, y)]^2 + [G(x, y)]^2$  最小化的  $x$  和  $y$ 。

<sup>13</sup> 穆迪的 KMV 模型提供一种能将 Merton 模型给出的违约概率转换成现实世界违约概率的服务（以 EDF 表示，这是预期违约频度的简称）。信用等级利用 Merton 模型来估计信用价差，这就和风险中性违约概率联系起来。

## 20.7 衍生品交易中的信用风险

一个衍生证券交易中的信用风险暴露比贷款交易的信用风险情况要复杂很多。这是因为发生违约时，提出的求偿权是更为不确定的。考虑一家金融机构和另一方签订了衍生证券合约。我们可以给出以下三种分类：

1. 合约总是该金融机构的负债
2. 合约总是该金融机构的资产
3. 合约或是该金融机构的负债，或是资产

符合第一类情况的一个例子是期权空头头寸；符合第二类情况的一个例子是期权多头头寸；符合第三类情况的一个例子是远期合约头寸。

第一类情形中，金融机构不存在信用风险暴露。即使交易的另一方破产了，该金融机构不遭受任何损失。而该衍生证券是另一方的资产，衍生证券很可能被保留或平仓或卖给第三方。对于金融机构来说不存在任何损失（或收益）。

第二类情形中，金融机构总是暴露于信用风险。如果交易的另一方破产了，该金融机构很可能遭受损失。而该衍生证券是另一方的负债。金融机构需要对另一方的资产提出求偿权，可能会收到相当于部分衍生证券价值的数额。

第三类情形中，金融机构可能暴露于信用风险，也可能不存在信用风险暴露。如果对于该金融机构的衍生证券价值为正的时候，另一方违约，则金融机构会对另一方的资产提出求偿权，但还是很可能遭受一些损失。如果对于该金融机构的衍生证券价值为负的时候，另一方违约，则金融机构不遭受任何损失，因为该衍生证券会被保留、平仓或卖给第三方。<sup>14</sup>

### 调整衍生证券估值来反映另一方的违约风险

金融机构（或衍生证券的最终用户）应该如何调整衍生证券价值来反映另一方的信用风险？考虑没有违约的情况下，当前价格为  $f_0$  的衍生证券。我们假设违约可能发生在  $t_1, t_2, \dots, t_n$  时刻，而  $t_i$  时刻衍生证券对于该金融机构（假设金融机构不违约）的价值为  $f_i$ 。定义  $t_i$  时刻的风险中性违约概率为  $q_i$ ，预期回收率为  $R$ 。<sup>15</sup>

$t_i$  时刻的风险暴露为金融机构潜在的损失，这等于  $\max(f_i, 0)$ 。假设发生违约的时候，预期补偿额为  $R$  乘以上述的风险暴露值。再假设回收率、违约概率与衍生证券价值相互独立。 $t_i$  时刻的风险中性预期违约损失为：

$$q_i(1 - R)\hat{E}[\max(f_i, 0)]$$

其中  $\hat{E}$  表示风险中性世界中的期望值。计算现值，则违约成本是：

<sup>14</sup> 注意，一家公司违约通常针对它的资产和负债的总价值，而不是针对任何单一交易的价值。

<sup>15</sup> 以 20.4 节中描述的方法，可以从债券价格计算违约概率。

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (20.5)$$

其中  $u_i$  等于  $q_i(1 - R)$ ,  $v_i$  是  $t_i$  时刻支付上述衍生证券风险暴露的一个金融工具的现价。

再次考虑上面提过的三类情形。第一类情形（就是合约总是该金融机构的负债的情形）很容易处理。 $f_i$  总是负值，公式 (20.5) 给出的总预期违约损失恒为零。金融机构不必因为违约成本而进行任何调整（当然，另一方可能在其定价过程中要考虑该金融机构违约的可能性）。

第二类情形（就是合约总是该金融机构的资产的情形）中， $f_i$  总是正值。表达式  $\max(f_i, 0)$  总是等于  $f_i$ 。因为  $v_i$  是  $f_i$  的现值，所以恒等于  $f_0$ 。<sup>16</sup> 因此，预期违约损失为  $f_0$  乘以衍生证券有效期间内的总违约概率再乘以  $1 - R$ 。

**[例 20.2]** 考虑 2 年期 OTC 期权，它的价值（假设没有违约）为 \$3。假设卖出该期权的公司，2 年期的风险中性违约概率为 4%，违约发生时回收率为 25%。则违约的预期成本为  $3 \times 0.04 \times (1 - 0.25)$ ，即 \$0.09。所以，该期权的买者只准备支付 \$2.91。

第三类情形中， $f_i$  的正负是不确定的。变量  $v_i$  是执行价格为 0 的基于  $f_i$  的看涨期权。一种计算  $v_i$  的方法是模拟衍生证券有效期内的标的市场变量。有时也可以进行近似解析计算（例如，参见习题 20.17 和 20.18）。

我们给出的分析中假定了违约概率和衍生证券价值是相互独立的。当交易另一方的证券组合中该衍生证券只占很小的一部分，或者当交易另一方使用该衍生证券只是用来进行套期保值的时候，这种假定近似符合现实情况。但是当交易另一方想签订大量的衍生证券交易以进行投机的时候，该金融机构需要警觉了。当这个交易对另一方的价值为很大的负值时（而且对于该金融机构是很大的正值时），相比其他情况，另一方宣布破产的可能性也非常高。

## 20.8 信用风险缓释方法

很多时候，我们在上面给出的分析夸大了衍生证券交易中的信用风险问题。这是因为衍生证券交易员们通常在签订合约时添加很多条款来减小信用风险。

### 净额结算

OTC 衍生证券交易中净额结算成为一个标准条款之一。该条款是说，如果一家公司违反了和另一方的某个合约，那么它和另一方的其他所有未到期合约也都将转为无效。

---

<sup>16</sup> 这里假设了衍生证券在  $t$  时刻之前不支付损益。

净额结算在大部分的司法条件下应用很成功。它可以充分减小金融机构的信用风险。例如，考虑一家金融机构和某一交易对方之间有3个未到期的合约。对于这家金融机构，3个合约的价值分别为+1 000万美元、+3 000万美元以及-2 500万美元。假设该交易对方遇到财务恶化并对未到期的债务违约。该交易对方的3个合约的估值分别为-1 000万美元、-3 000万美元以及+2 500万美元。不存在净额结算条款的时候，该交易对方可能对前两个合约不履行责任，并保留第3个合约，金融机构遭受损失4 000万美元。而存在净额结算条款的时候，该交易对方被迫也放弃第3个合约，金融机构只损失1 500万美元。<sup>17</sup>

假设一家金融机构和某一交易方之间签订了包含 $N$ 个衍生证券的证券组合合约。假设第 $i$ 个合约的无违约价值为 $V_i$ ，且违约发生时得到的赔偿等于回收率乘以上述无违约价值。没有净额结算条款的时候，金融机构损失为

$$(1 - R) \sum_{i=1}^N \max(V_i, 0)$$

其中 $R$ 是回收率。存在净额结算条款的时候，金融机构损失为

$$(1 - R) \max\left(\sum_{i=1}^N V_i, 0\right)$$

没有净额结算条款时，金融机构的损失等于所有基于这些合约的看涨期权（每一期权的执行价格为0）的证券组合的损益。存在净额结算条款时，金融机构的损失等于基于整个证券组合的单个期权的损益。基于一个证券组合的单个期权的价值决不会大于（且通常非常小于）相应的期权组合的价值。

我们可以扩展前一节中的分析，则公式(20.5)可给出存在净额结算条款的情况下，与某一交易方签订的所有合约的预期损失的现值。在方程中可以通过重新定义 $v_i$ 为一种衍生证券的现值，这个衍生证券支付包含和某一交易方签订的所有合约的证券组合在 $t_i$ 时刻的暴露。

一家金融机构在考虑是否和另一交易方签订新合约的时候，一个具有挑战性的任务是计算预期信用损失的附加值。可以应用公式(20.5)根据上面描述过的方式计算签订和不签订新合约时对应的预期违约成本。注意到因为净额结算条款的存在，新合约对于预期违约损失的附加影响可能是负值。这种情况发生在新合约价值和之前存在的合约价值负相关的时候。

## 抵 押

另一种经常用来缓释信用风险的条款是抵押条款。假设一家公司和一家金融机构之间签订了一系列衍生证券合约。一个典型的抵押协议规定必须根据一个事先决定的公式对该合约定期地进行盯市操作。如果某一天，对金融机构的这些合

<sup>17</sup>注意，如果第3个合约对于这家金融机构的价值为-4 500万美元，而不是-2 500万美元，则另一方不会违约，这家金融机构也不会遭受任何损失。

约的总价值在一个特定水平的阀值之上，它可以要求该公司提供一些担保品。该公司在已经提供的担保额数之上附加的担保额数，应该等于这些合约对于金融机构的价值与那一阀值之间的差别。如果合约朝对金融机构有利的方向变化，金融机构的合约的价值与阀值之间的差别小于公司已经提供的总的保证金，公司可以收回一些担保品。如果公司违约，金融机构可以没收这些担保品。如果公司不能按要求提供相应的担保品，金融机构可以对这些合约进行平仓。

例如，假设对公司的阀值水平为 1 000 万美元，为了计算抵押价值，需要每日对合约进行盯市操作。如果某天，对于金融机构的合约价值 1 050 万美元，金融机构就可以要求附加 50 万美元的担保品。如果接下来的一天，合约价值进一步涨到 1 140 万美元，金融机构可以再要求 90 万美元担保品。如果又过了一天，合约价值降到 1 090 万美元，公司可以要求收回 50 万美元担保品。注意，阀值（例子中是 1 000 万美元）可看成是金融机构愿意赋予公司的一个信用额度。

公司储存在金融机构的担保品可以是现金或诸如债券这样的可接受证券。为了计算担保额，这些证券必须根据它们的市价进行所谓的扣减。利息通常以现金支付。

如果抵押协议是双向协议，那么也会规定该金融机构的阀值。当流通在外的合约对于公司的盯市价值超过这个阀值的时候，公司可以要求金融机构提供附加担保品。

抵押协议可以在很大程度上防止违约的可能性（如第 2 章中讨论过的保证金账户会对交易所内的交易者们提供保护）。但是，阀值的数额并不在保护范围之内。此外，即使是阀值为 0 的时候，这样的保护也不是完全的。如果公司进入财政困难的状况，它很可能不会履行附加担保品的责任。另一方执行自己的权利进行平仓的时候，可能是合约价值往对它有利的方向移动的时候。

## 降级触发

金融机构使用的又一种缓释信用风险的技术是降级触发（downgrade trigger）。这个条款规定当另一方的信用评级下降到一定水平（如 Baa）以下的时候，金融机构可以选择以市价平仓衍生证券合约（和抵押协议一样，需要事先规定计算市价的一个公式）。

当公司的信用评级大幅下降（如 A 级公司突然违约）时，降级触发条款并不能提供相应的保护。而且只有存在少量降级触发协议的时候，才能发挥它们的保护作用。如果一家公司和交易方们签订很多降级触发协议，那么这些协议对这些交易方能提供的保护程度相对很低（参见商业剪影 20.1）。

## 20.9 违约的相关性

违约的相关性（default correlation）描述的是两个公司在近似相同的时刻同时

### 商业剪影 20.1 降级触发和安然的破产

2001 年 12 月，美国最大公司之一——安然公司宣布破产。而前几天之前，它还是属于投资级别。刚好在违约之前，穆迪和标准普尔给出的安然的信用评级分别为 Baa3 和 BBB-。但是股票市场在某种程度上预测到这一违约，因为在走向破产的这段期间内安然的股价急剧下跌。诸如 20.6 节中的模型估计出的违约概率在这一期间内急剧上升。

安然签订了很多具有降级触发条款的衍生证券合约。降级触发条款声明，如果安然的等级下降到投资级以下（即 Baa3/BBB- 以下），它的交易对手可以平仓这些合约。假设安然的评级在 2001 年 10 月下降到投资级以下，那么交易对手们会选择平仓那些对安然公司的价值为负值（对交易对手的价值是正值）的合约。因此，安然会被要求向交易对手支付大量的现金。但安然没能满足这些要求，立即走向了破产。

这一例子说明只有存在少量降级触发协议时，才能发挥它们的保护作用。如果一家公司签订很多降级触发协议，那公司很可能过早破产。安然的案例中，我们也可以反驳说，这家公司迟早会破产，降级触发协议只是让它早破产了 2 个月而已，没有太大负面影响。实际上，安然在 2001 年 10 月有存活机会。安然尝试着和 Dynergy 能源公司达成一个交易，可见 2001 年 10 月的强制破产不符合债权人和股东的利益。

信用评级公司发现他们的处境非常困难。如果他们选择降低安然的评级，以便反映安然财务情况的恶化，评级公司等于是签订安然的死亡许可证。如果评级公司没有给安然降级，那安然还有一些存活机会。

违约的倾向。违约的相关性存在的理由有很多种。相同行业或者相同地理区域的公司趋向于受到类似的相同的外部事件的影响，所以也可能同时经历财务困境。整体经济环境的原因使得某些年的平均违约率比其他一些年份要高。一家公司的违约可能会引发其他公司违约，也就是 20.5 节中提过的信用传染。违约的相关性说明信用风险不可能完全被分散化，这也是风险中性违约概率比现实世界违约概率要高的主要原因（参见 20.5 节）。

在决定一个暴露于不同交易方的证券组合的违约损失概率分布时，考虑违约的相关性变得非常重要。研究者们提出了两种违约相关性模型：约化模型和结构化模型。

约化模型假设不同公司的违约强度遵循随机过程，并且与宏观变量相关。当公司 A 的违约强度高的时候，公司 B 的违约强度也倾向于高。这引起两家公司之间存在违约的相关性。

约化模型在其数学模式方面比较有吸引力，而且能反映经济循环中产生违约相关性的倾向。该模型的主要缺点是不能反映其他一些种类的相关性。即使两个违约强度之间完全相关时，该模型给出某一特定时间段内的违约相关度相对很低。在某些情况下这会产生一些问题。例如，当两家公司在相同行业、相同国家，或者其中一家公司的财务状况由于某些原因非常依赖于另一家公司的财务状况的时候，我们有理由相信它们之间存在很高的违约相关度。解决这个缺点的一种方法

是，对模型进行扩展，使违约强度显示出大幅度变化。

结构化模型的基础模型类似于 Merton 模型（参见 20.6 节）。其中，一家公司在其资产价值下降到一定水平以下时会违约。引入公司 A 和公司 B 之间的违约相关性时，模型中假设公司 A 的资产遵循的随机过程和公司 B 的资产遵循的随机过程是相关的。结构化模型比约化模型优越的一点是，可以反映很高的相关度。结构化模型的主要缺点是计算过程花费很多时间。

## 违约时刻的 Gaussian Copula 模型

已经成为普遍应用工具的违约相关性的约化模型，是违约时刻的 Gaussian Copula 模型。该模型量化两家公司违约时刻之间的相关性。模型隐含的假设是所有公司最终都会违约。但是应用该模型的时候，我们一般只是对未来 1 年、5 年和 10 年的违约可能性感兴趣。也就是说，我们只对违约时刻的概率分布的左尾部感兴趣。

该模型可以和现实世界或风险中性世界的违约概率一起使用。一家公司违约时刻的现实世界概率分布的左尾部，可以从评级机构发布的数据（如表 20.1）进行估计。违约时刻的风险中性概率分布的左尾部可以用 20.4 节中的方法从债券价格求得。

定义  $t_1$  为公司 1 违约的时刻， $t_2$  为公司 2 违约的时刻。如果  $t_1$  和  $t_2$  的概率分布为正态分布，我们可以假定  $t_1$  和  $t_2$  的联合概率分布为二维正态分布。实际上，一家公司的违约时刻的概率分布并不总是近似为正态分布。这时候要引入 Gaussian Copula 模型。我们把  $t_1$  和  $t_2$  变换为新变量  $x_1$  和  $x_2$ ：

$$x_1 = N^{-1}[Q_1(t_1)], \quad x_2 = N^{-1}[Q_2(t_2)]$$

其中， $Q_1$  和  $Q_2$  分别是  $t_1$  和  $t_2$  的累计概率分布。 $N^{-1}$  是累计正态分布的反函数 [若  $v = N(u)$ ，则  $u = N^{-1}(v)$ ]。这就是“分界点对分界点”变换。 $t_1$  的概率分布中 5% 分界点转换成  $x_1 = -1.645$ ，这是标准正态分布的 5% 分界点； $t_1$  的概率分布中 10% 分界点转换成  $x_1 = -1.282$ ，这是标准正态分布的 10% 分界点。如此等等。 $t_2$  到  $x_2$  的变换也是类似的。

通过变换， $x_1$  和  $x_2$  服从均值为 0、标准差为 1 的正态分布。我们假设  $x_1$  和  $x_2$  的联合概率分布是相关系数为  $\rho_{12}$  的二维正态分布。该假设被称为“引入 Gaussian Copula”。该假设可以简化问题，因为它说明  $t_1$  和  $t_2$  的联合概率分布完全可由  $t_1$  和  $t_2$  的累计违约概率分布  $Q_1$  和  $Q_2$  以及单个相关系数参数  $\rho_{12}$  定义。

Gaussian Copula 模型的一个吸引之处是它可以扩展成多个公司的情形。假设我们在考虑  $n$  家公司， $t_i$  是第  $i$  家公司的违约时刻。将每个  $t_i$  变换成新变量  $x_i$ ，后者服从标准正态分布。这一变换就是“分界点对分界点”变换：

$$x_i = N^{-1}[Q_i(t_i)]$$

其中， $Q_i$  是  $t_i$  的累计概率分布。于是我们假定这些  $x_i$  服从多维正态分布。 $t_i$  和  $t_j$  之间的违约相关性可以用  $x_i$  和  $x_j$  之间的相关系数度量。这被称为 copula 相关系数。

数。<sup>18</sup>

Gaussian Copula 方法可以很好地表述非正态分布的变量之间的相关结构。我们可以从这些变量的边际（无条件地）分布分别估计这些变量的相关结构。虽然这些变量本身不服从多维正态分布，但是该方法中假设每个变量经过变换后，这些变量服从多维正态分布。

**[例 20.3]** 假设我们要模拟 10 家公司在未来 5 年之间的违约情况。每两家公司之间的 copula 违约相关度都是 0.2。对于每家公司，未来 1、2、3、4、5 年的违约累计概率分别为 1%、3%、6%、10%、15%。引入 Gaussian copula 的时候，我们从多维正态分布抽取样本  $x_i$  ( $1 \leq i \leq 10$ )，其中保证任意两个  $x_i$  之间的相关系数为 0.2。随后，我们将  $x_i$  变换成  $t_i$ ，即违约时刻。当从正态分布抽取的样本小于  $N^{-1}(0.01) = -2.33$  时，违约在第 1 年发生；当从正态分布抽取的样本在  $-2.33$  和  $N^{-1}(0.03) = -1.88$  之间时，违约在第 2 年发生；当从正态分布抽取的样本在  $-1.88$  和  $N^{-1}(0.06) = -1.55$  之间时，违约在第 3 年发生；当从正态分布抽取的样本在  $-1.55$  和  $N^{-1}(0.10) = -1.28$  之间时，违约在第 4 年发生；当从正态分布抽取的样本在  $-1.28$  和  $N^{-1}(0.15) = -1.04$  之间时，违约在第 5 年发生；当从正态分布抽取的样本大于  $-1.04$  时，在 5 年内不发生违约。

## 利用因子定义相关性结构

为了在 Gaussian Copula 模型中避免定义每对公司  $i$  和公司  $j$  的  $x_i$  和  $x_j$  之间不同的相关系数，经常使用单因子模型。该假设如下：

$$x_i = a_i M + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i \quad (20.6)$$

其中， $M$  是对所有公司的违约都产生影响的共同因子， $Z_i$  是只影响公司  $i$  的一个因子。变量  $M$  和  $Z_i$  服从标准正态分布，两分布相互独立。 $a_i$  是  $-1$  和  $+1$  之间的不变参数。 $x_i$  和  $x_j$  之间的相关系数为  $a_i a_j$ 。<sup>19</sup>

假设公司  $i$  在  $T$  时刻违约的概率为  $Q_i(T)$ 。Gaussian Copula 模型中，当  $N(x_i) < Q_i(T)$  时，即  $x_i < N^{-1}[Q_i(T)]$  时，违约发生。代入方程 (20.6)，该条件是：

$$a_i M + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i < N^{-1}[Q_i(T)]$$

即

$$Z_i < \frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_i M}{\sqrt{1 - a_i^2}}$$

<sup>18</sup> 作为一种近似方法， $t_i$  和  $t_j$  之间的 copula 相关系数经常被假定为是公司  $i$  和  $j$  的股权收益之间的相关系数。

<sup>19</sup> 参数  $a_i$  有时被近似为公司  $i$  的股本收益与高度分散化的市场指数之间的相关系数。

基于因子  $M$  值的条件，违约概率为

$$Q_i(T|M) = N\left(\frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_i M}{\sqrt{1 - a_i^2}}\right) \quad (20.7)$$

单因子 Gaussian 模型的一个特殊情形是，对于所有  $i$  违约的概率分布相等， $x_i$  和  $x_j$  之间的相关系数对于所有  $i$  和  $j$  都是相同的。假设对于所有  $i$ ， $Q_i(T) = Q(T)$ ，共同相关系数为  $\rho$ 。那么，对于所有  $i$ ，有  $a_i = \sqrt{\rho}$ 。公式 (20.7) 变成

$$Q(T|M) = N\left(\frac{N^{-1}[Q(T)] - \sqrt{\rho} M}{\sqrt{1 - \rho}}\right) \quad (20.8)$$

## 二项相关性估计

评级机构使用的另一种相关系数估计方法是二项相关性估计法。对于公司 A 和公司 B，二项相关性估计值是以下两个变量之间的相关系数：

1. 当公司 A 在 0 时刻到  $T$  时刻之间违约，则该变量值为 1。其他情况下为 0。
2. 当公司 B 在 0 时刻到  $T$  时刻之间违约，则该变量值为 1。其他情况下为 0。

二项相关性估计值为

$$\beta_{AB}(T) = \frac{P_{AB}(T) - Q_A(T)Q_B(T)}{\sqrt{[Q_A(T) - Q_A(T)^2][Q_B(T) - Q_B(T)^2]}} \quad (20.9)$$

其中， $P_{AB}(T)$  是 A 和 B 都在 0 和  $T$  之间违约的联合概率， $Q_A(T)$  是公司 A 在  $T$  期限内违约的累计概率， $Q_B(T)$  是公司 B 在  $T$  期限内违约的累计概率。一般地， $\beta_{AB}(T)$  依赖于  $T$ ，也就是所考虑的期限长度，它一般随着  $T$  增加而上升。

根据 Gaussian Copula 模型的定义， $P_{AB}(T) = M[x_A(T), x_B(T); \rho_{AB}]$ ，其中  $x_A(T) = N^{-1}[Q_A(T)]$  和  $x_B(T) = N^{-1}[Q_B(T)]$ ，是公司 A 和 B 的违约时刻的变换值， $\rho_{AB}$  是公司 A 和 B 的违约时刻的 Gaussian copula 相关系数。这里， $M(a, b; \rho)$  是这样的一种概率：在变量之间的相关系数为  $\rho$  的二维正态分布中，第一个变量小于等于  $a$ 、第二个变量小于等于  $b$  的概率。<sup>20</sup> 那么

$$\beta_{AB}(T) = \frac{M[x_A(T), x_B(T); \rho_{AB}] - Q_A(T)Q_B(T)}{\sqrt{[Q_A(T) - Q_A(T)^2][Q_B(T) - Q_B(T)^2]}} \quad (20.10)$$

这说明，如果  $Q_A(T)$  和  $Q_B(T)$  是已知的，则  $\beta_{AB}(T)$  可从  $\rho_{AB}$  计算得出，反之亦然。通常  $\rho_{AB}$  显著地大于  $\beta_{AB}(T)$ 。这说明相关性测度的大小和我们定义该系数的方式有关。

**[例 20.4]** 假设公司 A 在 1 年内违约的概率为 1%，公司 B 在 1 年内违约的概率也为 1%。那么， $x_A(1) = x_B(1) = N^{-1}(0.01) = -2.326$ 。如果  $\rho_{AB}$  为 0.20，则  $M[x_A(1), x_B(1); 0.20]$

<sup>20</sup> 关于  $M(a, b; \rho)$  的计算，参考作者网站上的技术说明 5。

$x_B(1), \rho_{AB}] = 0.000337$ 。根据公式 (20.10)，当  $T = 1$  时， $\beta_{AB}(T) = 0.024$ 。

## 20.10 信用VaR

信用 VaR 的定义与第 18 章中对市场风险的 VaR 的定义类似。例如，1 年内 99.9% 置信度的信用 VaR 就是我们认为在 1 年之内有 99.9% 的把握认为信用损失不会超过的水平。

考虑一家持有包含类似贷款的大规模证券组合的银行。近似地，我们假定每个贷款的违约概率相同，每两两贷款之间的相关系数也相同。当应用违约时刻的 Gaussian Copula 模型时，方程 (20.8) 的右边近似等于  $T$  期限内违约百分比和  $M$  之间的函数关系式。因子  $M$  服从标准正态分布。我们有  $X\%$  的把握认为该价值会大于  $N^{-1}(1 - X) = -N^{-1}(X)$ 。所以，我们有  $X\%$  的把握认为  $T$  年之间的大证券组合的损失百分比不会超过  $V(X, T)$ ，其中：

$$V(X, T) = N\left(\frac{N^{-1}[Q(T)] + \sqrt{\rho} N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (20.11)$$

Vasicek 第一次给出了这个结果。<sup>21</sup> 如公式 (20.8)， $Q(T)$  是  $T$  时间内的违约概率， $\rho$  是每对贷款之间的 copula 相关系数。

因此， $T$  期限  $X\%$  置信度的信用 VaR 的近似估计值为  $L(1 - R)V(X, T)$ ，其中  $L$  是该贷款组合的规模， $R$  是回收率。某个特定规模为  $L_i$  的贷款对于信用 VaR 的贡献为  $L_i(1 - R)V(X, T)$ 。该模型隐含着监管机构要求的信用风险资本的计算公式（参见商业剪影 20.2）。

**[例 20.5]** 假设一家银行有 1 亿美元的零售风险暴露。1 年期违约概率的平均水平为 2%，回收率的平均水平是 60%。copula 相关系数参数估计值为 0.1。那么，

$$V(0.999, 1) = N\left(\frac{N^{-1}(0.02) + \sqrt{0.1} N^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-0.1}}\right) = 0.128$$

这说明有 99.9% 的把握认为违约率为 12.8%。所以，一年 99.9% 置信度的信用 VaR 为  $100 \times 0.128 \times (1 - 0.6)$ ，即 513 万美元。

## 信用矩阵法

很多银行开发出其他计算信用 VaR 的程序，以便内部使用。一种著名的方法是信用矩阵法。通过对所有交易对手的信用等级变化情况进行蒙特卡罗模拟，来估计信用损失的概率分布。假设我们要决定 1 年期限损失的概率分布。在每次模拟运算，我们抽取样本来决定所有交易对手的信用评级变化以及所有交易对手在

<sup>21</sup> 参见 O. Vasicek, "Probability of Loss on a Loan Portfolio," *Working Paper*, KMV, 1987.

## 商业剪影 20.2 巴塞尔新资本协议

巴塞尔银行监督管理委员会现在打算检查他们关于银行需要为它们承担的风险而持有资本的计算公式，这就是所谓的巴塞尔新资本协议（Basel II）。关于市场风险资本的计算方法没有什么变化（参见商业剪影 18.1）。对操作风险提出新的资本要求，并提议对信用风险资本的计算方法进行重大改变。

符合使用内部评级法资格的银行中，一个交易相关的信用风险资本的计算公式为

$$UDR \times LGD \times EAD \times MatAd$$

其中， $UDR$  是非预期违约率，它等于 99.9% 置信度下最坏情形的 1 年期违约率超过预期 1 年期违约率的部分。利用方程 (20.11)，它的计算公式为  $V(X, T) - Q(T)$ ，其中的  $X = 99.9\%$ ， $T = 1$ 。变量  $LGD$  是违约情况中的损失百分比（类似于我们以  $1 - R$  表示的变量）； $EAD$  为违约时的风险暴露； $MatAd$  为期限调整。

决定这些数值的规则比较复杂。对于  $UDR$ ，我们需要 1 年期违约概率  $Q(1)$  和相关系数参数  $\rho$ 。银行估计 1 年期违约概率，相关系数参数的决定取决于风险暴露的种类（零售层面、公司层面、主权层面等等）。对于零售层面风险暴露，银行内部决定  $LGD$  和  $EAD$ 。对于公司层面暴露，使用“高级法”的银行内部决定  $LGD$  和  $EAD$ ，但对于使用“初级法”的银行， $LGD$  和  $EAD$  的决定有指定规则。期限调整是金融工具到期期限的增函数，当金融工具的到期期限为 1 年时，期限调整等于 1.0。

该年内违约的概率。之后我们重新估值所有未平仓的合约来决定该年的总信用损失。进行很多次模拟运算，我们可以得到信用损失的概率分布。这一结果可以用来计算信用 VaR。

执行这一方法的时候，计算过程可能非常花费时间。但是，它的优点是根据信用评级下降可能性和相应的违约可能性来计算信用损失。同样地，如 20.8 节中讨论过的信用风险缓释条款也可以引入到分析该过程中。

表 20.6 是典型的评级机构发布的信用评级变化的历史数据，可作为信用矩阵法中蒙特卡罗模拟的一个基础数据。该表给出了某个等级的债券在 1 年后移动到另外一个等级的概率。例如，开始时为 A 级信用等级的债券 1 年后还是 A 级的概率为 91.84%。它在这 1 年内违约的概率为 0.02%，并且掉到 B 级的概率为 0.13%，如此等等。<sup>2</sup>

为了决定信用损失而抽取样本的时候，不同交易对手的信用评级变化不能被假定是相互独立的。类似于前一节中以模型描述违约时刻的联合概率分布一样，可以利用 Gaussian copula 模型推导等级变化的联合概率分布。使用类似于 20.9 节中的单因子模型，通常设定两家公司的等级变化之间的 copula 相关系数等于它们的股本收益之间的相关系数。

<sup>2</sup> 作者网站上的技术说明 11 中解释了如何使用像表 20.6 一样的表来计算超过 1 年期限的转移矩阵。

表 20.6 年等级变化矩阵（概率以百分比表示）。来自穆迪 2004 年的报告，但是调整了 WR 类型。

| 初始评级    | 年末评级  |       |       |       |       |       |       |         |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
|         | Aaa   | Aa    | A     | Baa   | Ba    | B     | Caa   | Default |
| Aaa     | 92.18 | 7.06  | 0.73  | 0.00  | 0.02  | 0.00  | 0.00  | 0.00    |
| Aa      | 1.17  | 90.85 | 7.63  | 0.26  | 0.07  | 0.01  | 0.00  | 0.02    |
| A       | 0.05  | 2.39  | 91.84 | 5.07  | 0.50  | 0.13  | 0.01  | 0.02    |
| Baa     | 0.05  | 0.24  | 5.20  | 88.48 | 4.88  | 0.80  | 0.16  | 0.18    |
| Ba      | 0.01  | 0.05  | 0.50  | 5.45  | 85.13 | 7.05  | 0.55  | 1.27    |
| B       | 0.01  | 0.03  | 0.13  | 0.43  | 6.52  | 83.21 | 3.04  | 6.64    |
| Caa     | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.58  | 1.74  | 4.18  | 67.99 | 25.50   |
| Default | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 100.00  |

用一个例子来解释信用矩阵法应用过程。我们在利用表 20.6 中的转移矩阵，模拟一年期 Aaa 级公司和 Bbb 级公司的等级变化。假设两家公司股本之间的相关系数为 0.2。每次模拟运算中，我们从正态分布抽取变量  $x_A$  和  $x_B$  的样本，使得它们的相关系数为 0.2。变量  $x_A$  决定 Aaa 级公司的最新等级，变量  $x_B$  决定 Bbb 级公司的最新等级。因为  $N^{-1}(0.9218) = 1.4173$ ,  $N^{-1}(0.9218 + 0.0706) = 2.4276$  以及  $N^{-1}(0.9218 + 0.0706 + 0.0073) = 3.4319$ , Aaa 级公司在  $x_A < 1.4173$  时保持在 Aaa 级；在  $1.4173 \leq x_A < 2.4276$  时，降到 Aa 级；在  $2.4276 \leq x_A < 3.4319$  时，降到 A 级。类似地，因为  $N^{-1}(0.0005) = -3.2905$ ,  $N^{-1}(0.0005 + 0.0024) = -2.7589$  以及  $N^{-1}(0.0005 + 0.0024 + 0.0520) = -1.5991$ , Baa 级公司在  $x_B < -3.2905$  时升到 Aaa 级；在  $-3.2905 \leq x_B < -2.7589$  时，升到 Aa 级；在  $-2.7589 \leq x_B < -1.5991$  时，升到 A 级。Aaa 级公司没有违约的可能性。Baa 级公司在  $x_B > N^{-1}(0.9982)$  时违约，即  $x_B > 2.9113$  的时候。

## 小 结

可以从历史数据、债券价格或股本价格估计未来一段特定时间内一个公司的违约概率。从债券价格中得到的违约概率是风险中性概率。从历史数据中得到的违约概率是现实世界概率。现实世界概率应该用于情景分析和信用 VaR 计算。风险中性概率的计算应该用于信用敏感型工具定价。总的来说，风险中性违约概率总明显高于现实世界概率。

交易对手违约可能性带来的预期损失可以被所谓的“净额结算”所减少。大多数金融机构签定的合约中都有这一条款，它规定，当一个交易对手对它与某金融机构的某个合约进行违约时，与该金融机构的所有其他合约也转为无效。损失也可被抵押和降级触发条款所减少。抵押条款规定交易对手出具担保品，而降级触发条款则规定当交易对手的信用评级下降到某一特定水平时，合约可被平仓。

和基于市场风险的 VaR 定义类似，我们可以定义信用 VaR。一个计算信用 VaR 的方法

是使用违约时刻的 Gaussian copula 模型。监管机构使用该模型计算并提议信用风险资本应该变化多少。另一种常用的方法是信用矩阵法。这是利用关于信用评级变化的 Gaussian copula 模型。

## 参考读物

- Altman, E. I., "Measuring Corporate Bond Mortality and Performance," *Journal of Finance*, 44 (1989): 902–22.
- Duffie, D., and K. Singleton, "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds," *Review of Financial Studies*, 12 (1999): 687–720.
- Finger, C. C., "A Comparison of Stochastic Default Rate Models," *RiskMetrics Journal*, 1 (November 2000): 49–73.
- Hull, J., M. Predescu, and A. White, "Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields, and Credit Rating Announcements," *Journal of Banking and Finance*, 28 (November 2004): 2789–2811.
- Kealhofer, S., "Quantifying Default Risk I: Default Prediction," *Financial Analysts Journal*, 59, 1 (2003a): 30–44.
- Kealhofer, S., "Quantifying Default Risk II: Debt Valuation," *Financial Analysts Journal*, 59, 3 (2003b): 78–92.
- Li, D. X. "On Default Correlation: A Copula Approach," *Journal of Fixed Income*, March 2000: 43–54.
- Litterman, R., and T. Iben, "Corporate Bond Valuation and the Term Structure of Credit Spreads," *Journal of Portfolio Management*, Spring 1991: 52–64.
- Merton, R. C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29 (1974): 449–70.
- Rodriguez, R. J., "Default Risk, Yield Spreads, and Time to Maturity," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (1988): 111–17.

## 问题和习题

- 20.1 一个 3 年期公司债券收益率与类似的无风险债券的收益率之间的价差为 50 个基点。回收率为 30%。请估计 3 年期间内的平均年违约强度。
- 20.2 假设习题 20.1 中相同公司的 5 年期债券收益率与类似的无风险债券的收益率之间的价差为 60 个基点。假设回收率同样为 30%。请估计 5 年期间内的平均年违约强度。关于第 4 年和第 5 年平均违约强度，你的结果说明什么？
- 20.3 研究人员 (a) 计算信用 VaR 以及 (b) 针对违约而调整衍生证券价格的时候，应该使用现实世界还是风险中性违约概率？
- 20.4 通常如何定义回收率？
- 20.5 请解释无条件违约概率密度和违约强度之间的区别。
- 20.6 请验证 (a) 表 20.4 中第 2 列的数字和表 20.1 中的数字一致，(b) 表 20.5 中第 4 列的数字和表 20.4 中的数字一致。其中，回收率为 40%。
- 20.7 请描述净额结算是怎么运作的。一家银行的账面上已经有和交易对手进行的一次交易。请解释为什么银行和交易对手之间的一次新的交易，可以提高或降低银行对于该交易对手的信用风险暴露。

- 20.8 假设方程 (20.9) 中的测度  $\beta_{AB}(T)$  在现实世界和风险中性世界都是相同的。Gaussian Copula 测度  $\rho_{AB}$  也是这样吗？
- 20.9 抵押协议中的“扣减”是什么意思？一家公司想把它的权益作为担保品。你会如何回应？
- 20.10 请解释：在 (a) 定义信用损失以及 (b) 违约相关性的建模中，违约时刻的 Gaussian copula 模型和信用矩阵法之间的区别。
- 20.11 假设公司 A 在 2 年期间违约的概率为 0.2，公司 B 在这段期间内违约的概率为 0.15。如果违约相关性的 Gaussian copula 测度为 0.3，二项相关性估计值为多少？
- 20.12 假设 LIBOR/互换曲线是平坦的，连续复利为 6%。一个 5 年期债券的息票率为 5%（每半年支付），价格为 90.00。请问如何构建基于这个债券的资产互换？这种情况下，我们计算的资产互换价差为多少？
- 20.13 请说明当违约时的求偿额数等于债券的无违约价值时，一个附息公司债券的价值等于它的成分零息票债券的价值总和，但是当求偿额数等于债券的账面价值加上应计利息的时候，并不是这样。
- 20.14 一个 4 年期公司债券的息票率为 4%p.a.，每半年支付息票，债券收益率为连续复利 5%。无风险收益率曲线是平坦的，为连续复利 3%。假设违约可以在每个年末发生（刚好在息票或本金支付之前），回收率为 30%。基于每年都一样的假设，估计风险中性违约概率。
- 20.15 一家公司发行了 3 年期和 5 年期债券，息票率都为 4%p.a.，每年支付一次息票。这些债券的收益率（连续复利）分别为 4.5% 和 4.75%。所有期限的无风险利率（连续复利）为 3.5%。回收率为 40%。违约可以在每年的年中发生。第 1 年至第 3 年的风险中性的年违约率为  $Q_1$ ，第 4 年和第 5 年的风险中性的年违约率为  $Q_2$ 。请估计  $Q_1$  和  $Q_2$ 。
- 20.16 假设一家金融机构和交易对手 X 签订了基于英镑利率的互换合约，并且和交易对手 Y 签订了正好相反的互换合约。请判断以下的陈述中哪些是对的，哪些是错的：
- 违约成本的总现值等于与 X 签订的合约相关的违约成本的现值加上与 Y 签订的合约相关的违约成本的现值。
  - 1 年后的、关于两个合约的预期暴露等于，与 X 签订的合约相关的预期暴露加上与 Y 签订的合约相关的预期暴露。
  - 1 年后的、两个合约相关的 95% 置信上限的暴露等于，与 X 签订的合约相关的、1 年后的 95% 置信上限的暴露加上与 Y 签订的合约相关的、1 年后的 95% 置信上限的暴露。
- 请解释你的理由。
- 20.17 一家公司签订了 1 年期远期合约，出售 \$100 获得 150 澳元。初始时刻，合约处于平价状态。也就是说，远期汇率为 1.50。1 年期美元无风险利率为 5%p.a.。交易对手的 1 年期美元借款利率是 6%p.a.。汇率波动率为 12%p.a.。请估计合约的违约成本的现值。假设只有在合约到期之时，可以确认是否违约。
- 20.18 假设习题 20.17 中，6 个月期远期汇率同样为 1.50，6 个月期美元无风险利率为 5%p.a.。进一步假设，交易对手的 6 个月期美元借款利率是 5.5%p.a.。假设违约可以发生在 6

个月时点或者 1 年时点。请估计违约成本的现值（如果违约发生在 6 个月时点，则公司的潜在损失为合约的市场价值）。

- 20.19 “暴露于信用风险的一个远期合约多头是，一个无违约看跌期权空头和一个暴露于信用风险的看涨期权的多头的组合。”请解释这句话。
- 20.20 请解释为什么两个配对的远期合约的信用暴露类似于 Straddle 期权。
- 20.21 请解释信用风险对于两个配对的利率互换的影响比两个配对的货币互换的影响要小。
- 20.22 “当一家银行在商议货币互换的时候，它应该尽量保证它是从信用风险较低的公司收取低利率的货币。”请解释原因。
- 20.23 存在违约风险的时候，看跌期权和看涨期权之间的平价关系还成立吗？请解释原因。
- 20.24 假设一个资产互换中， $B$  是债券的市价除以本金的美元额数， $B^*$  是债券的无违约价值除以本金的美元额数， $V$  是资产互换价差的现值除以本金的美元额数。请证明：  

$$V = B^* - B_0$$
- 20.25 请证明 20.6 节的 Merton 模型下， $T$  年期零息票债券的信用价差是  $-\ln[N(d_2) + N(-d_1)]/L]/T$ 。其中， $L = De^{-rT}/V_{00}$

## 课后练习

- 20.26 假设一个 3 年期公司债券的息票率为 7%p.a.，每半年支付一次息票，收益率为 5%（每半年计一次复利）。所有期限的无风险债券的收益率为 4%p.a.（每半年计一次复利）。假设每 6 个月可以发生违约（刚好在息票支付之前），回收率为 45%。假设（a）无条件违约概率在每个可能的违约日都是相同的，或（b）基于不会提前违约的条件下，违约概率在每个可能的违约日都是相同的。在每个假设下，估计相应的违约概率。
- 20.27 一个公司有 1 年期和 2 年期债券流通在外，两个债券的息票率都为 8%p.a.，每年支付一次。两个债券的收益率（连续复利）分别为 6.0% 和 6.6%。所有期限的无风险利率为 4.5%。回收率为 35%。违约可以在每年的年中发生。请估计每年的风险中性违约率。
- 20.28 请仔细解释现实世界和风险中性世界违约概率之间的区别。哪个更高？一家银行签订了信用衍生品合约，如果在 1 年内某个特定公司的信用评级从 A 下降到 Baa 以下，那么银行将在第 1 年末支付 \$100。1 年期无风险利率为 5%。使用表 20.6，估计该衍生品的价值。你会做出哪些假设？这些假设会高估还是低估衍生品的价值？
- 20.29 一家公司的股本价值为 400 万美元，股本的波动率为 60%。公司在 2 年后需要偿还债务 1 500 万美元。无风险利率为 6%p.a.。利用 Merton 模型来估计预期违约损失，违约概率以及违约发生时的回收率。请解释为什么 Merton 模型给出的回收率较高。（提示：可以利用 Excel 的 Solver 功能。）
- 20.30 假设一家银行的某一种类的暴露为 1 000 万美元。平均 1 年期违约概率为 1%，平均回收率为 40%。copula 相关系数参数为 0.2。请估计 1 年期 99.5% 置信度的信用 VaR。

# 信用衍生品

自 20 世纪 90 年代末以来，衍生品市场中最激动人心的是信用衍生品领域的发展。2000 年，流通在外的信用衍生品合约的总名义本金达到 8 000 亿美元。2003 年这一数值又涨到 3 万亿美元。信用衍生品的损益依附于一个或多个公司或国家的信用状况。本章中，我们解释信用衍生品的作用，并讨论一些估值相关的问题。

信用衍生品允许公司交易信用风险，如同它们交易市场风险一样。以前，银行和其他一些金融机构总是面临这样的情况，一旦认为有了信用风险，除了等待（并希望好的情况发生）没有什么其他办法。现在，它们可以更积极地管理它们的信用风险组合，保留其中一些并签订信用衍生品合约来抵消其他的信用风险保护它们自己。如商业剪影 21.1 所述，银行成为信用保险的最大购买方，而保险公司成为最大出卖方。

## 21.1 信用违约互换

最流行的信用衍生品是信用违约互换 (CDS)。这是一份合约，对某一特定公司违约的风险提供保险。这一公司就被称为参考实体 (reference entity)，这家公司的违约行为被称为信用事件 (credit event)。保险的购买者获得这样的权利：在信用事件发生时，保险的购买者可以按账面价值卖掉这家公司发行的债券，而保险的出售者同意按账面价值购买这些债券。<sup>1</sup> 可售卖的债券的总账面价值就是所谓的信用违约互换的名义本金 (notional principal)。

CDS 的购买者给出售者进行定期支付，直到 CDS 到期或者信用事件发生。这些付款一般在每季度、每半年或每年的后端支付。违约发生的时候，以实际交割债券或现金支付的方式来进行结算。

举例说明一个典型的交易是如何构建的。假设交易双方在 2004 年 3 月 1 日签订 5 年期信用违约互换。假设名义本金为 1 亿美元，购买者同意每年支付 90 个基点，以便参考实体违约时能受到保护。

图 21.1 中描述了这个 CDS。如果参考实体不违约（即不发生信用事件），购买者不发生任何损益，但在 2005、2006、2007、2008 和 2009 年的 3 月 1 日都要支

<sup>1</sup> 不发生违约的时候，一个债券的账面价值等于发行者在到期之时将偿还的本金数额。

### 商业剪影 21.1 谁在承担信用风险

传统上，银行贷出资金，因此他们承担了借款人违约相关的信用风险。但是这种局面在发生变化。一段时间内，银行的确很不情愿地在资产负债表上记录贷款。这是因为，监管机构要求银行持有一定资本，考虑这个因素之后，贷款的平均收益率通常比其他资产要低。20世纪90年代期间，银行创造了资产支持证券（与第29章中的住房抵押贷款证券相似），把贷款（以及贷款的信用风险）传递给了投资者们。20世纪90年代末和21世纪初，银行广泛使用信用衍生品，把贷款的信用风险转移给了金融体系中的其他部门。

如果银行是信用保护的纯粹购买者，那么谁是纯粹的出售者呢？答案是保险公司。保险公司和银行的监管方式不一样，因此保险公司有时比银行更愿意承担信用风险。

所有这些情况的结果是承担贷款的信用风险的金融机构常常与原先对贷款进行过信用分析的金融机构不一样。这种现象对金融体系的总体健康会产生什么影响，还要继续观察。

付90万美元。如果发生信用事件，实质的损益会发生。假设购买者发现信用事件的出售者在2007年6月1日违约（即4年零3个月后）。如果合约指定了实际交割，购买者可以按1亿美元价格卖出参考实体发行的账面价值为1亿美元的债券。如果合约指定了现金交割，信用事件发生几天（事先设定的）后，一个独立计算机构会组织交易商决定最便宜交割债券的中间市场价值。假设这样的债券每100美元账面价值的市场价值为35美元。这种情况下，现金损益为6500万美元。

信用事件发生的时候，信用保护的购买者对信用保护的出售者的每季度、每半年或每年的定期支付会终止。但是，因为这些支付是后端延迟支付的，通常需要购买者支付一个最终累计应计额。我们的例子中，购买者会被要求支付2007年3月1日至2007年6月1日之间的累计应计额（大约为225000美元）给出售方，但是不会再被要求继续支付其他款额。

购买保护的时候，每年的总支付款额占名义本金的比例被称为CDS价差。几个大银行是信用违约互换市场的做市商。当报价基于福特汽车信用的5年期CDS的时候，一位做市商给出的买价为250个基点，卖价为260个基点。这说明该做市商准备以每年250个基点（即每年本金的2.5%）买入关于福特信用的保护，并

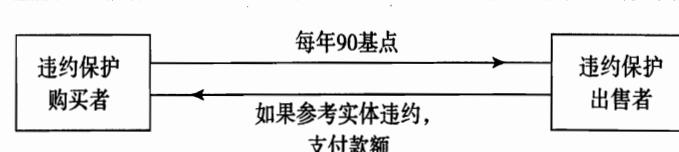


图 21.1 信用违约互换

准备以每年 260 个基点（即每年本金的 2.6%）卖出关于福特信用的保护。

## 信用违约互换和债券收益率

CDS 可用来对冲一个公司债券的头寸。假设一位投资者以账面价值购买了一个收益率为 7% 的 5 年期公司债券，同时签订了一个 5 年期 CDS，购买了债券发行者违约相关的保护。假设该 CDS 的价差为 2%p.a.。该 CDS 的效果是把公司债券转换成了无风险债券（至少近似）。如果该债券的发行者不违约，投资者可以每年赚取 5%（公司债券收益率减去 CDS 价差）。如果债券发行者违约，则到违约时刻之前投资者赚取 5%。在 CDS 条款下，投资者可以把这些债券以账面价值卖出。5 年期中剩下的期限内，获得的账面价值可以以无风险利率投资。

$n$  年期 CDS 价差应该近似等于， $n$  年期公司债券的票面收益率超过  $n$  年期无风险债券的票面收益率部分。如果价差显著小于后面的值，投资者可以通过买入公司债券和 CDS 保护，赚取的收益率比无风险利率要大。如果价差显著大于后面的值，投资者可以通过卖空公司债券和 CDS 保护，那么，投资者的借款利率比无风险利率要小。这些虽然不是完美的套利，但可以帮助我们理解 CDS 价差和债券收益率之间的联系。CDS 价差隐含着市场参与者所使用的无风险利率。如 20.4 节所述，平均隐含无风险利率近似等于 LIBOR/互换率减去 10 个基点。

## 最便宜交割债券

如 20.3 节所述，一个债券的回收率定义为违约刚刚发生之后债券价值对于其账面价值的比例。这说明 CDS 提供的损益为  $L(1 - R)$ ，其中， $L$  是名义本金， $R$  是回收率。

通常，CDS 条款指定违约发生之时可以交割的几种不同债券。这些债券的优先级通常相同，但违约刚刚发生之后，它们的卖价和账面价值之间的比例并不一定相同。<sup>2</sup> 因此，CDS 持有者具有最便宜交割债券选择权。违约发生时，保护的购买者（现金结算的情况下是计算代理机构）会评估几个可以交割的债券，并会选择购买最便宜债券去交割。

## 21.2 信用指数

信用衍生品市场的参与者们开发了可以跟踪信用违约互换价差的一些指数。2004 年，指数开发者们进行了协商，统一了一些指数。现在使用的指数中有：

---

<sup>2</sup> 其中有很多种原因。违约发生时，求偿金额通常等于债券的账面价值加上应计利息。违约时刻具有较高应计利息的债券，在违约刚刚发生之后也具有更高的价格。市场也会判断公司重组事件发生时，一些债券持有者的处境比其他人要好。

1. 5 年期和 10 年期的跟踪 125 家投资级北美公司的信用价差 CDX NA IG 指数
2. 5 年期和 10 年期的跟踪 125 家投资级的欧洲公司的信用价差 iTraxx Europe 指数

除了监测信用价差，指数还可以让市场参与者们更容易购买或出售信用违约互换的组合。例如，一家投资银行作为做市商报出了 CDX NA IG 5 年期指数的买价为 65 个基点，卖价为 66 个基点。那么，一位投资者可以按每年 66 万美元购买针对 125 家标的公司每个公司 80 万美元的 5 年期 CDS 保护。一位投资者可以按每年 65 万美元出售针对 125 家标的公司，每个公司 80 万美元的 5 年期 CDS。当一家公司违约的时候，每年的支付减少  $\$660\,000/125 = \$5\,280$ 。<sup>3</sup>

### 21.3 信用违约互换的估值

单个参考实体的中间市场 CDS 价差（即经纪人报出的竞买 CDS 价差和竞卖 CDS 价差的均值）可从违约概率估计值计算得出。我们举一个简单的例子说明这一过程。

假设一个参考实体，基于不会提前违约的条件下的年违约概率为 2%。<sup>4</sup> 表 21.1 中给出了存活概率和无条件违约概率（即 0 时刻观察的违约概率）。第 1 年内违约的概率为 0.02，到第 1 年结束之时，参考实体存活的概率为 0.98。第 2 年内违约的概率为  $0.02 \times 0.98 = 0.0196$ ，到第 2 年结束之时，参考实体存活的概率为  $0.98 \times 0.98 = 0.9604$ 。第 3 年内违约的概率为  $0.02 \times 0.9604 = 0.0192$ ，如此等等。

我们假设违约可在每年的年中发生，而信用违约互换的支付在每年年末发生一次。我们也假设无风险利率（LIBOR）为连续复利的 5%p.a.，回收率为 40%。计算过程可分为 3 个部分，分别表示在表 21.2、21.3 和表 21.4。

表 21.1 无条件违约概率和存活概率

| 时刻（年） | 违约概率   | 存活概率   |
|-------|--------|--------|
| 1     | 0.0200 | 0.9800 |
| 2     | 0.0196 | 0.9604 |
| 3     | 0.0192 | 0.9412 |
| 4     | 0.0188 | 0.9224 |
| 5     | 0.0184 | 0.9039 |

<sup>3</sup> 指数值比组合中各家公司的平均 CDS 价差稍微小一些。为了理解其中原因，我们考虑两家公司，一家的价差为 1 000 个基点，另外一家的价差为 10 个基点。同时购买针对两家公司的保护的平均成本会略低于每家公司 505 个基点。这是因为 1 000 个基点的预期支付期间比 10 个基点的预期支付期间要短，因此前者的权重应该小一些。

<sup>4</sup> 20.2 节中提过，条件违约概率即为违约强度。

表 21.2 预期支付的现值计算。支付额 = 每年  $s$ 

| 时刻(年) | 存活概率   | 预期支付    | 贴现因子   | 预期支付的现值 |
|-------|--------|---------|--------|---------|
| 1     | 0.9800 | 0.9800s | 0.9512 | 0.9322s |
| 2     | 0.9604 | 0.9604s | 0.9048 | 0.8690s |
| 3     | 0.9412 | 0.9412s | 0.8607 | 0.8101s |
| 4     | 0.9224 | 0.9224s | 0.8187 | 0.7552s |
| 5     | 0.9039 | 0.9039s | 0.7788 | 0.7040s |
| 总计    |        |         |        | 4.0704s |

表 21.2 中计算了 CDS 相关预期支付的现值，其中假设了每年以比率  $s$  付款，名义本金为 \$1。例如，第 3 次支付  $s$  发生的概率为 0.9412。因此，预期支付为  $0.9412s$ ，它的现值为  $0.9412s e^{-0.05 \times 3} = 0.8101s$ 。预期支付的总现值为  $4.0704s$ 。

表 21.3 中计算了预期损益的现值，其中假设了名义本金为 \$1。我们假设违约可在每年的年中发生，例如，第 3 年内发生违约的概率是 0.0192。因为回收率为 40%，这一时刻的预期损益为  $0.0192 \times 0.6 \times 1 = 0.0115$ 。预期损益的现值为  $0.0115e^{-0.05 \times 2.5} = 0.0102$ 。预期损益的总现值为 \$0.0511。

作为最后一步，表 21.4 评估了违约发生时的累计应计支付。例如，最后的应计支付发生在第 3 年中的概率是 0.0192。应计支付额等于  $0.5s$ 。这一时刻的预期应计支付为  $0.0192 \times 0.5s = 0.0096s$ 。它的现值为  $0.0096s e^{-0.05 \times 2.5} = 0.0085s$ 。预期应计支付的总现值为  $0.0426s$ 。

根据表 21.1 和表 21.3，预期支付的现值为

$$4.0704s + 0.0426s = 4.1130s$$

根据表 21.2，预期损益的总现值为 0.0511。令两个值相同，我们可以得到这一新 CDS 的 CDS 价差：

$$4.1130s = 0.0511$$

即  $s = 0.0124$ 。中间市场价差应该等于 0.0124 乘以本金，即每年 124 个基点。通过上述例子，我们解释了计算方法。实际应用中，我们很可能发现计算过程会比表 21.2~表 21.4 要复杂很多，因为 (a) 支付发生频率多于每年一次，并且 (b)

表 21.3 预期损益的现值计算。名义本金 = \$1

| 时刻<br>(年) | 违约概率   | 回收率 | 预期损益<br>(\$) | 贴现因子   | 预期损益的现值<br>(\$) |
|-----------|--------|-----|--------------|--------|-----------------|
| 0.5       | 0.0200 | 0.4 | 0.0120       | 0.9753 | 0.0117          |
| 1.5       | 0.0196 | 0.4 | 0.0118       | 0.9277 | 0.0109          |
| 2.5       | 0.0192 | 0.4 | 0.0115       | 0.8825 | 0.0102          |
| 3.5       | 0.0188 | 0.4 | 0.0113       | 0.8395 | 0.0095          |
| 4.5       | 0.0184 | 0.4 | 0.0111       | 0.7985 | 0.0088          |
| 总计        |        |     |              |        | 0.0511          |

表 21.4 应计支付的现值计算

| 时刻<br>(年) | 违约概率   | 预期应计支付  | 贴现因子   | 预期应计支付<br>的现值 |
|-----------|--------|---------|--------|---------------|
| 0.5       | 0.0200 | 0.0100s | 0.9753 | 0.0097s       |
| 1.5       | 0.0196 | 0.0098s | 0.9277 | 0.0091s       |
| 2.5       | 0.0192 | 0.0096s | 0.8825 | 0.0085s       |
| 3.5       | 0.0188 | 0.0094s | 0.8395 | 0.0079s       |
| 4.5       | 0.0184 | 0.0092s | 0.7985 | 0.0074s       |
| 总计        |        |         |        | 0.0426s       |

我们可能要假设一年之中违约频率多于每年一次。

## CDS 的盯市操作

合约签订时刻，CDS 和其他互换一样，合约的价值接近于 0。随着时间变化，价值可能会变成正值或负值。假设考虑例子中的信用违约互换，它是不久前签订的，价差为 150 个基点。这种情况下，购买者的支付额的现值为  $4.1130 \times 0.0150 = 0.0617$ ，损益的现值与上面一样还是 0.0511。那么，对于卖方，该互换的价值为  $0.0617 - 0.0511$ ，即 0.0106 乘以本金。类似地，对于保护的购买者，该互换的盯市价值为 -0.0106 乘以本金。

## 估计违约概率

用来估值 CDS 的违约概率应该是风险中性违约概率，而不是现实世界违约概率（关于两者之间的区别，参见 20.5 节）。如第 20 章所述，风险中性违约概率可从债券价格或资产互换中计算出来。另一种方法是从 CDS 报价中找出隐含的违约概率。这个方法类似于在实际期权市场中，根据交易活跃的期权的价格找出隐含波动率的方法。

假设我们改变表 21.2、21.3 和表 21.4 中的例子，我们并不知道违约概率。但是，我们知道一个新发行的 5 年期 CDS 的中间市场 CDS 价差为每年 100 个基点。我们可以用反向工程的方法计算，得到每年的隐含违约概率（基于不会提前违约的条件下）为每年 1.61%。<sup>5</sup>

## 两值信用违约互换

构造一个两值信用违约互换和普通信用违约互换类似，不过其损益是固定的

<sup>5</sup> 理想的情况下，我们可以对每年使用不同的违约概率进行估计而不是单一的违约概率强度。如果我们知道 1、2、3、4 和 5 年期 CDS 互换或债券的价格，就可以做到这一点。

表 21.5 两值信用违约互换中预期损益的现值计算。本金 = \$1

| 时刻<br>(年) | 违约概率   | 预期损益<br>(\$) | 贴现因子   | 预期损益的现值<br>(\$) |
|-----------|--------|--------------|--------|-----------------|
| 0.5       | 0.0200 | 0.0200       | 0.9753 | 0.0195          |
| 1.5       | 0.0196 | 0.0196       | 0.9277 | 0.0182          |
| 2.5       | 0.0192 | 0.0192       | 0.8825 | 0.0170          |
| 3.5       | 0.0188 | 0.0188       | 0.8395 | 0.0158          |
| 4.5       | 0.0184 | 0.0184       | 0.7985 | 0.0147          |
| 总计        |        |              |        | 0.0852          |

美元数额。假设我们在表 21.1~表 21.4 中考虑的例子中，损益为 \$1，而不是  $(1 - R)$  美元，互换价差为  $s$ 。这种情况下，表 21.1、21.2 和表 21.4 保持不变，表 21.3 变成表 21.5。这一新的两值 CDS 的 CDS 价差满足

$$4.1130s = 0.0852$$

因此，CDS 价差  $s$  为 0.0207，即 207 个基点。

## 回收率有多么重要

无论我们利用 CDS 价差还是利用债券价格来估计违约概率，我们需要知道回收率的估计值。但是，如果我们在 (a) 估计风险中性违约概率以及 (b) 估值 CDS 的时候，使用同样的回收率，那么 CDS 的价值（或者是 CDS 价差的估计值）对回收率不是非常敏感。这是因为隐含违约概率近似与  $1/(1 - R)$  成正比，CDS 的损益与  $1 - R$  成正比。

上述的分析在两值 CDS 的估值中并不成立。隐含违约概率还是与  $1/(1 - R)$  成正比。但是对于两值 CDS，CDS 的损益和  $R$  相互独立。如果我们知道标准型 CDS 和两值 CDS 的 CDS 价差，就能估计回收率和违约概率（参见习题 21.25）。

## CDS 市场的未来

从 20 世纪 90 年代末期到 21 世纪初期，信用违约互换的市场增长得非常快。信用违约互换占所有信用衍生品的 70%。它们已经成为管理信用风险的重要工具。金融机构通过购买保护，可以减少它对于特定公司的信用风险暴露。金融机构同样可以用 CDS 来分散信用风险。例如，如果一家金融机构对于某一特定业务部门的信用暴露过大，那么它可以购买针对这一部门的公司违约的保护，同时卖出其他不相关部门的公司违约的保护。

一些市场参与者认为 CDS 市场将会继续增长，到 2010 年可能会达到和利率互换市场相同的规模。而其他一些人没有这么乐观。在 CDS 市场中存在信息不对称的问题，而其他 OTC 衍生品市场不是这样的（参见商业剪影 21.2）。

### 商业剪影 21.2 CDS 市场中的竞争是否公平

信用违约互换和我们在这本书上考虑的其他 OTC 衍生证券之间存在一个重要区别。其他 OTC 衍生证券依附于利率、汇率、权益指数、商品价格等。因此没有理由认为，有一个市场参与者比其他的市场参与者对这些变量掌握着更多的信息。

信用违约互换价差依附于某一特定公司在某一特定时间段内违约的概率。可以确信，一些市场参与者比其他人掌握着更多估值违约概率相关的信息。一家金融机构和某一特定公司接触非常频繁，如提供建议、贷款和处理新证券的发行等，那么，相比其他与这家公司没有接触的金融机构，这家金融机构更了解这家公司的信用状况。经济学家们把这种现象称为“信息不对称”。

信息不对称问题是否会影响信用违约互换市场的发展，我们还得继续观察。金融机构强调，购买某一公司的违约风险相关保护的决策，正常情况下是由风险管理做出，而不是基于金融机构对于这个公司的特殊信息。

## 21.4 CDS远期和期权

CDS 市场完整成形之后，衍生证券交易者们很自然地开始交易基于信用违约互换价差的远期和期权合约。<sup>6</sup>

一个远期信用违约互换是一项义务，在某一未来时刻  $T$ ，必须按事先规定购买或出售基于某一特定参考实体的某一特定的信用违约互换。如果参考实体在  $T$  时刻之前违约，则远期合约失效。一家银行签订了一个远期合约，1 年后开始的以 280 个基点出售基于福特汽车信用的 5 年期保护。如果福特在下一年中违约，远期合约中这家银行的义务不再存在。

一个信用违约互换期权是一项选择权利，在某一未来时刻  $T$ ，可以选择购买或出售基于某一特定参考实体的某一特定的信用违约互换。例如，一位投资者可能签下了一个选择权，1 年后可以按 280 个基点购买基于福特汽车信用的 5 年期保护，这是一种看涨期权。如果 1 年后，福特的 5 年期 CDS 价差大于 280 个基点，该看涨期权会被执行；其他情况下，该期权不会被执行。需要预先支付期权成本。类似地，一位投资者可能签下了一个选择权，1 年后可以按 280 个基点出售基于福特汽车信用的 5 年期保护。这是一种看跌期权。如果 1 年后，福特的 5 年期 CDS 价差小于 280 个基点，该看跌期权会被执行；其他情况下，该期权不会被执行。同样地，需要预先支付期权成本。与 CDS 远期类似的，如果参考实体在期权到期之前违约，CDS 期权会失效。

在信用衍生品市场越来越流行的一种期权合约是基于一篮子参考实体的看涨

<sup>6</sup> 关于这些金融工具的估值，参见 J. C. Hull and A. White，“The Valuation of Credit Default Swap Options,” *Journal of Derivatives*, 10, 5 (Spring 2003) : 40–50.

期权。如果篮子中有  $m$  个参考实体，期权有效期内没有发生违约，那么该期权赋予持有者选择权利，持有者有权利可以按  $mK$  个基点买入一个基于这些参考实体的 CDS 组合。其中  $K$  是执行价格。此外，如果合约有效期内有一参考实体违约，持有者就获得标准型 CDS 的损益。

## 21.5 总收益互换

总收益互换 (total return swap) 是一种信用衍生品。其中以一个债券 (或资产组合) 的总收益交换 LIBOR 加上价差。总收益中包括息票、利息以及互换有效期内资产的收益或损失。

一个总收益互换的例子是名义本金为 1 亿美元的 5 年期协议，以一个公司债券的总收益交换 LIBOR + 25 个基点。图 21.2 中解释了这样的协议。在息票支付日，支付方支付 1 亿美元债券投资所对应的息票。接受方支付本金 1 亿美元乘以 LIBOR + 25 个基点的利息 (如标准型利率互换，一个支付日支付的 LIBOR 是在前一个支付日设定的)。互换到期之时，还有一笔支付反映债券价值变化额。例如，如果互换有效期内债券价值上升 10%，支付方需要在第 5 年末支付 1 000 万美元 (1 亿美元的 10%)。类似地，如果互换有效期内债券价值下降 15%，接受方需要在第 5 年末支付 1 500 万美元。如果债券发生违约，互换通常终止，接受方最后支付等于 1 亿美元超过债券市场价值的那个部分。

如果互换到期之时，我们给两方添加名义本金，总收益互换可以描述如下：支付方支付 1 亿美元的债券投资相关的现金流。接受方支付 1 亿美元债券的 LIBOR+25 个基点的相关的现金流。如果支付方持有该公司债券，总收益互换允许支付方把债券的信用风险转移给接受方。如果支付方并不持有该公司债券，总收益互换允许支付方持有公司债券的空头。

总收益互换经常被用作为一种融资工具。图 21.2 中的互换描述了以下情景。接受方想融资 1 亿美元，并把它投资到参考债券。接受者联系支付方 (可能是一家金融机构)，签订互换合约。随后，支付方在该债券投资 1 亿美元。因此，接受方的头寸与上面相同，仿佛是以 LIBOR + 25 个基点借款来购买这一债券。支付方在互换有效期内保持着这一债券的所有权，相比它给接受方贷款，接受方购买债券并把债券作为贷款的担保品，支付方可以承担较小的信用风险。如果接受方违约，支付方也并不存在没收担保品相关的法律问题。总收益互换类似于回购 (参见 4.1 节)，它们都设计成使得证券融资时的信用风险最小化。

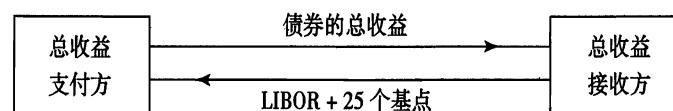


图 21.2 总收益互换

支付方收取的超过 LIBOR 的价差，是为了补偿支付方承担的接受方违约的风险。如果在参考债券的价格下降的时候，接受方违约了，支付方将遭受损失。因此，价差大小依赖于接受方的信用状况、债券发行者的信用状况以及两方之间的违约相关性。

除了我们描述的标准化交易以外，还存在很多非标准化交易。有些交易中，债券价值变化时并不进行现金支付，而进行实际交割，即互换到期之时，支付方以标的资产直接交换名义本金。有些交易中，定期进行价值变化相关的支付，而不是到期之时一次性支付。

## 21.6 篮子信用违约互换

篮子信用违约互换 (basket credit default swap) 中存在很多参考实体。*add-up basket* CDS 中，当任意参考实体违约的时候，提供损益。*first-to-default* CDS 中，只在第一次违约发生时，提供损益。*second-to-default* CDS 中，只在第二次违约发生时，提供损益。更为一般地，*nth-to-default* CDS 中，只在第  $n$  次违约发生时，提供损益。损益的计算方法和标准型 CDS 相同。当相应的违约发生之后，进行结算。随后，互换合约终止，任何一方都不再进行其他支付。

## 21.7 债务抵押债券

债务抵押债券 (CDO) 创造出与债务工具组合具有广泛不同风险性质的证券。图 21.3 中给出了一个例子。其中，从债券组合中创造了四种证券（或分券）。第一个分券包含 5% 的总债券本金，并在 CDO 有效期内吸收组合的所有信用损失，直到损失达到 5% 的总债券本金为止。第二个分券包含 10% 的总债券本金，并在 CDO 有效期内吸收组合的所有超过本金 5%、小于本金 15% 的信用损失。第三个分券包含 10% 的总债券本金，并在 CDO 有效期内吸收组合的所有超过本金 15%、小于本金 25% 的损失。第四个分券包含 75% 的总债券本金，并在 CDO 有效期内吸收组合的所有超过本金 25% 的信用损失。图 21.3 中的收益率等于支付分券持有者的利率。利息支付是基于分券中补偿了损失之后的剩余本金。考虑第一个分券。刚开始的时候，针对分券 1 持有者的投资金额，以 35% 收益率进行支付，但是过了一段时间，损失达到总债券本金的 1% 之后，分券 1 持有者损失 20% 的投资金额，得到的收益只是按初始投资金额计算的 80%。分券 1 被称为权益分券 (equity trache)。债券组合的违约损失达到 2.5%，则分券本金会损失 50%。相反地，分券 4 的等级通常为 Aaa。如果债券组合的违约损失不超过 25%，该分券的持有者不需要承担任何信用风险。

CDO 的创造者通常保留权益分券并把剩下的分券卖到市场。CDO 是一种从一般等级（或低等级）的债券中创造高等级债券的方法。

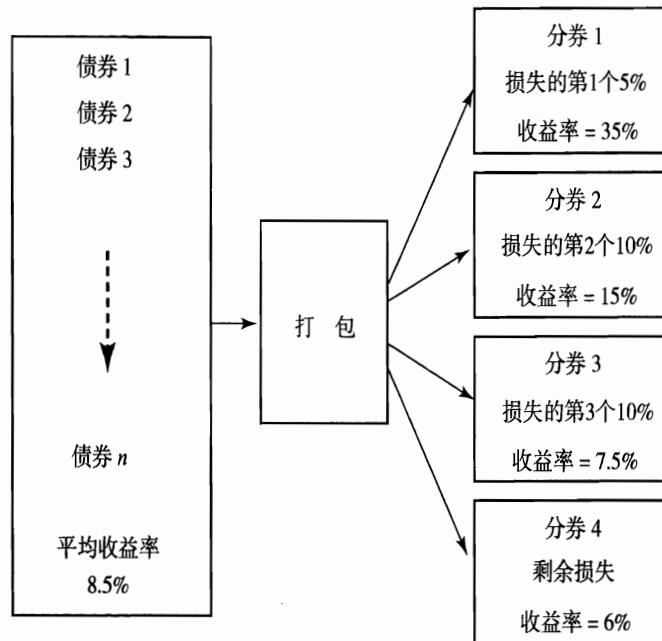


图 21.3 债务抵押债券

### 合成债务抵押债券

图 21.3 中的 CDO 被称为现金 CDO。另一种越来越大众化的结构是合成债务抵押债券 (synthetic CDO)，CDO 的创建者将信用违约互换的组合出售给第三方。那么违约风险就可以转移给合成债务抵押债券的分券持有者了。与图 21.3 中的情况类似，第一个分券需要支付信用违约互换的损益，直到它们达到 5% 的总名义本金；第二个分券需要支付大于 5%、小于 15% 的总名义本金的信用违约互换的损益。如此等等。从信用违约互换得到的收益分配到分券的方式，取决于该分券所承担的风险。例如，第一个分券可能会得到 3 000 个基点；第二个分券得到 1 000 个基点，如此等等。和现金 CDO 一样，随着分券承担的违约的发生，支付相关分券的本金将减小。

### 单分券交易

21.2 节中我们讨论过，CDX 和 iTraxx 指数包含了 125 家公司的组合。市场中也利用这些组合来定义标准 CDO 分券。这些标准分券的交易被称为单分券交易 (single trache trading)。一个单分券交易是这样的一种协议：一方承诺出售基于一个分券损失的保护，另一方同意购买该保护。该分券不是合成债务抵押债券的一部分，但它的现金流计算与合成债务抵押债券分券的计算方法相同。这些分券被称为“未融资的”，因为他们并没有通过出售信用违约互换或购买债券来创造。

表 21.6 2004 年 8 月 4 日，5 年期 CDX IG NA 和 iTraxx Europe 的分券。除了 0~3% 分券，报价的单位是基点（资料来源：GFI）

| CDX IG NA     |       |       |        |         |         |
|---------------|-------|-------|--------|---------|---------|
| 分券            | 0~3%  | 3%~7% | 7%~10% | 10%~15% | 15%~30% |
| 报 价           | 41.8% | 347   | 135.5  | 47.5    | 14.5    |
| iTraxx Europe |       |       |        |         |         |
| 分券            | 0~3%  | 3%~6% | 6%~9%  | 9%~12%  | 12%~22% |
| 报 价           | 27.6% | 168   | 70     | 43      | 20      |

CDX NA IG 指数中，权益分券覆盖相当于 0~3% 的本金的损失。第二个分券，即所谓的中间分券（mezzanine trache）覆盖 3%~7% 之间的本金的损失。剩下的分券覆盖 7%~10%、10%~15%、15%~30% 之间的本金的损失。iTraxx Europe 指数中，权益分券覆盖相当于 0~3% 的本金的损失。中间分券覆盖 3%~6% 之间的本金的损失。剩下的分券覆盖 6%~9%、9%~12%、12%~22% 之间的损失。

表 26.1 给出了 2004 年 8 月 4 日的 5 年期 CDX 和 iTraxx 分券的中间市场报价。这一天，CDX 指数水平为 63.25 个基点，iTraxx 指数水平为 42 个基点。例如，CDX 指数和 iTraxx Europe 指数的中间保护的中间市场价格分别为每年 347 个基点和 168 个基点。注意，权益分券的报价方式不同于其他分券。CDX 的市场报价 41.75% 说明，保护的出售者收取等于 41.75% 的本金的初始支付加上每年 500 个基点的价差。类似地，iTraxx 的市场报价 27.6% 说明保护出售者收取等于 27.6% 的本金的初始支付加上每年 500 个基点的价差。

## 21.8 一篮子 CDS 和 CDO 的估值

一个第  $n$  期违约 CDS 或 CDO 分券的价差取决于违约相关性。假设用一个包含 100 个参考实体的篮子来定义 5 年期第  $n$  期违约 CDS，其中的每个参考实体在 5 年期间违约的风险中性概率为 2%。参考实体之间的违约相关性为零的时候，双峰分布说明 5 年期间发生 1 次或更多次违约的概率为 86.74%，发生 10 次或更多次违约的概率为 0.0034%。此时，首期违约 CDS 的价值非常高，但第 10 期违约 CDS 的价值几乎为零。

随着违约相关性的提高，发生 1 次或更多次违约的概率下降，而发生 10 次或更多次违约的概率上升。极限情况下，参考实体之间的违约完全相关，发生 1 次或更多次违约的概率正好等于发生 10 次或更多次违约的概率，都为 2%。这是因为在极端状况下，所有参考实体本质上是相同的。它们或者是全部一起违约（概率为 2%），或者全部都不违约（概率为 98%）。

类似地，一个 CDO 分券的价值也取决于违约相关性。如果相关性非常低，低

级权益分券的风险非常大，而高级分券的风险非常小。随着违约相关性提高，低级分券的风险逐渐减小，而高级分券的风险逐渐加大。极限情况下，参考实体之间的违约完全相关，各个分券的风险程度相同。

## 利用违约时刻的 Gaussian copula 模型

之前讲述过的违约时刻的单因子 Gaussian copula 模型逐渐变成估值第  $n$  期违约 CDS 或 CDO 分券的标准市场模型。

考虑一个包含  $N$  个参考实体的组合。根据方程 (20.7)

$$Q_i(T \mid M) = N\left(\frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_i M}{\sqrt{1 - a_i^2}}\right) \quad (21.1)$$

其中， $Q_i(T \mid M)$  是基于因子价值  $M$  的、第  $i$  个实体在  $T$  时刻违约的条件概率。以  $P(k, T)$  表示到  $T$  时刻违约次数多于  $k$  的概率，对应的基于  $M$  值的条件概率为  $P(k, T \mid M)$ 。当我们固定  $M$  值的时候，违约概率相互独立，我们就可以简化  $P(k, T \mid M)$  的计算。

这一标准市场模型中，我们假设了组合包含的所有参考实体的违约时刻分布相同，并且假设了每对参考实体的 copula 相关系数是相同的。<sup>7</sup> 这说明，对于所有的  $i$ ， $Q_i(T \mid M) = Q(T \mid M)$ 。而且方程 (20.8) 可以代替方程 (20.7)，那么

$$Q(T \mid M) = N\left(\frac{N^{-1}[Q(T)] - \sqrt{\rho} M}{\sqrt{1 - \rho}}\right) \quad (21.2)$$

根据双峰分布的性质，有

$$P(k, T \mid M) = \frac{N!}{(N - k)! k!} Q(T \mid M)^k [1 - Q(T \mid M)]^{N-k}$$

基于  $M$  的  $T_1$  和  $T_2$  期间第  $n$  次违约发生的条件概率为  $P(n, T_2 \mid M) - P(n, T_1 \mid M)$ 。这给出了第  $n$  次违约时刻关于  $M$  的条件概率分布。因子  $M$  服从标准正态分布。对  $M$  的分布进行积分，我们可以得到第  $n$  次违约时刻的无条件概率分布。<sup>8</sup> 根据这一分布，我们可以估值第  $n$  期违约 CDS，方法和常规 CDS 的估值一致。为了估值 CDO 分券，我们可以计算基于  $M$  条件的分券的预期损益和支付额，然后再关于  $M$  进行积分。

衍生证券交易者们根据市场的一系列第  $n$  期违约 CDS 和 CDO 分券的价差报价，计算方程 (21.2) 中的隐含 copula 相关系数  $\rho$ 。并且，交易者们倾向于报出这一相关系数，而不是价差本身。这和实际期权市场的情形类似，在期权市场上，交易者喜欢报价 Black-Scholes 隐含波动率而不是美元价格。商业剪影 21.3 中

<sup>7</sup> 没有这些假设时的更为一般的模型，参见 J. C. Hull and A. White，“Valuation of a CDO and nth-to-Default Swap without Monte Carlo Simulation,” *Journal of Derivatives*, 12, 2 (Winter 2004), 8–23.

<sup>8</sup> 使用高斯求积过程，可以迅速有效地求出  $M$  的积分。

### 商业剪影 21.3 相关系数微笑

信用衍生品交易者们从分券价差中获得隐含违约相关系数。如果所有分券的隐含相关系数都相同，我们可以推导市场价格与违约时刻的单因子 Gaussian copula 模型相互一致。实际应用中，我们发现大多数低级（权益）分券和大多数高级分券的隐含相关系数大于中间分券的隐含相关系数。例如，表 21.6 中，5 个 CDX IG NA 指数分券（从权益分券开始）的隐含相关系数分别为 21.0%、4.2%、17.7%、19.0% 和 27.4%。类似地，相应的 iTraxx Europe 分券的隐含相关系数分别为 20.4%、5.5%、16.1%、23.3% 和 31.1%。

期权市场中的波动率微笑说明，Black-Scholes 模型（虽然广泛使用）并不反映市场参与者们的看法（参见第 16 章）。同样地，CDO 市场中的相关系数微笑说明单因子 Gaussian copula 模型（虽然广泛使用）并不反映市场参与者们的看法。

说明了，如期权市场中的波动率微笑现象一样，CDO 市场中也存在相关系数微笑现象。

## 21.9 可转换债券

可转换债券由公司发行，其中，可转换债券的持有者具有选择权，他们可以选择在未来的某些时刻将这些债券转换成该公司的股票。转换率（conversion ratio）是一个债券换取的股份数额（这可能是时间的函数）。债券几乎总是可赎回的（即发行者有权利在某一时刻以事先决定的价格买回这些债券）。一旦债券被通知赎回，持有者总是有权把债券转换成股票。因此赎回的目的通常是为了强迫持有者提前转换。有时，持有者的赎回选择权是基于该公司股票价格是否在某一水平之上。

可转换债券的估值中信用风险占据非常重要的地位。如果我们忽略信用风险，得到的价格估计值会很差，因为债券的息票和本金支付会被高估。

Ingersoll 提出了一种估值可转换债券的方法，他使用的模型与 20.6 节中讨论的 Merton 模型（1974）相似。<sup>9</sup> 他假设了发行者的总资产遵循几何布朗运动，并对公司的股本、可转换债券以及求偿取决于资产价值的其他债券建立了模型。他考虑了信用风险，因为只有当资产价值超过公司对债券持有者的欠款时，债券持有者才会得到完全的偿还。

实际应用中，广泛使用的一个简单模型是发行者的股票价格模型。其中假设了股票服从几何布朗运动，但假设了它在每个很短的时间段  $\Delta t$  内违约的概率为  $\lambda \Delta t$ 。违约发生时，股票价格下降到零，债券会被收回。变量  $\lambda$  是 20.2 节中介绍

<sup>9</sup> 参见 J. E. Ingersoll, “A Contingent Claims Valuation of Convertible Securities,” *Journal of Financial Economics*, 4 (May 1977), 289–322.

过的风险中性违约强度。

为了重新表示股票价格的行为过程，修正普通的二叉树图，在每个节点上：

1. 下一个长度为  $\Delta t$  的时间段内上升百分比为  $u$  的概率为  $p_u$
2. 下一个长度为  $\Delta t$  的时间段内下降百分比为  $d$  的概率为  $p_d$
3. 下一个长度为  $\Delta t$  的时间段内发生违约，股票价格变成 0 的概率为  $\lambda \Delta t$ ，或更精确地为  $1 - e^{-\lambda \Delta t}$

用来匹配股票价格分布的前二阶矩的参数值如下：

$$p_u = \frac{a - de^{-\lambda \Delta t}}{u - d}, \quad p_d = \frac{ue^{-\lambda \Delta t} - a}{u - d}, \quad u = e^{\sqrt{(r-q)\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}$$

其中  $a = e^{(r-q)\Delta t}$ ,  $r$  是无风险利率,  $q$  为股票的红利收益率。

树图的总时间长度和可转换债券的有效期相同。树图的最终节点上的可转换债券价值根据那一时刻的持有者的转换选择权来计算。随后，我们通过树图进行倒推计算。在每个转换可以发生的节点上，我们检验转换是否是最优的。我们也检验，发行者的状况是否可以通过赎回而改善。如果是的话，我们假设这些债券被赎回，并重新检验进行转换是否是最优的。这等价于把节点上的价值设定为

$$\max[\min(Q_1, Q_2), Q_3]$$

其中， $Q_1$  是倒推得到的价值（假设该节点上，债券并没有被转换也没有被赎回）， $Q_2$  是赎回价值， $Q_3$  是转换发生时的价值。

**[例 21.1]** 考虑 XYZ 公司发行的一个 9 个月期零息票债券，账面价值为 \$100。假设这一 9 个月期内的任意时刻，债券都可以被转换成两股 XYZ 公司的股票。假设债券也可以在任意时刻以 \$113 赎回。期初股票价格为 \$50，其波动率为 30%p.a.，股票不支付红利。违约强度  $\lambda$  为 1%p.a.，所有期限的无风险利率都是 5%。我们假设违约发生的情况下，债券的价值为 \$40（即通常定义的回收率，为 40%）。

图 21.4 中给出了可用来为可转换债券估值的股票价格树图，有三个时间步 ( $\Delta t = 0.25$ )。每个节点中，上面的数字表示股票价格，下面的数字表示可转换债券的价格。树图参数为：

$$u = e^{\sqrt{(0.09-0.01) \times 0.25}} = 1.1519, \quad d = 1/u = 0.8681 \\ a = e^{0.05 \times 0.25} = 1.0126, \quad p_u = 0.5167, \quad p_d = 0.4808$$

违约的概率（即走向树图的最低节点的概率）为  $1 - e^{-0.01 \times 0.25} = 0.002497$ 。在三个违约节点上，股票价格都是 0，债券价格都是 40。

我们首先考虑最终的节点。在节点 G 和 H，债券应该被转换，其价值等于股票价格的两倍。在节点 I 和 J，债券不应该被转换，价值等于 100。

我们接着在树图倒推，计算前面的节点上的价值。例如，考虑节点 E。如果转换债券，价值等于  $2 \times 50 = \$100$ 。如果不转换债券，则 (a) 移到 H 点的概率为 0.5167，对应的债券价值为 115.19；(b) 移到 I 点的概率为 0.4808，对应的债券价值为 100；(c) 违约的概率为 0.002497，对应的债券价值为 40。因此，不转换

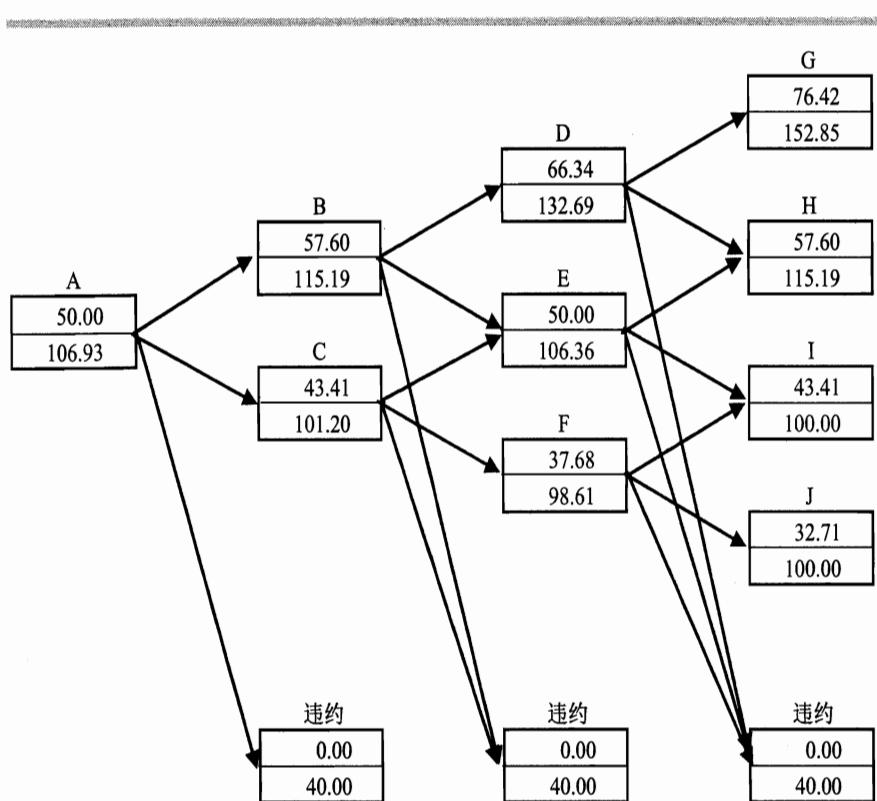


图 21.4 可转换债券估值树图。每一个节点上方的数字代表股票价格，下方的数字代表可转换债券价格

的时候，债券价值等于

$$(0.5167 \times 115.19 + 0.4808 \times 100 + 0.002497 \times 40) \times e^{-0.05 \times 0.25} = 106.36$$

其大于进行转换时的价值 100。我们可以断定在节点 E 不值得进行转换。最后，我们可以知道在节点 E 上，债券发行者不能赎回债券，因为他是以 113 赎回了价值为 106.36 的债券。

作为另一个例子，考虑节点 B。如果转换，债券的价值为  $2 \times 57.596 = 115.19$ 。如果不转换，进行和节点 E 类似的计算，可以得到价值为 118.31。因此，可转换债券的持有者不会选择转换债券。但是此时，债券发行者会选择以 113 赎回债券。那么，债券持有者会认为进行转换比被赎回更好。因此，节点 B 的债券价值为 115.19。节点 D 中的分析也是类似的。不进行转换的时候，债券价值为 132.79。但是，债券被赎回了，因此债券持有者被迫进行转换，该节点的债券价值减小到 132.69。

这个可转换债券的价值为它在初始节点 A 上的价值，即 106.93。

当债券支付利息的时候，我们也应该把这种影响考虑进来。在每个节点上，基于不转换的假设计算债券价值时，我们应该计算下一时间步后的债券可能支付的利息的现值，并把这一值也考虑进来。风险中性违约强度  $\lambda$  可从债券价格或信用违约互换价差计算得出。在更为一般化的执行过程中， $\lambda$ 、 $\sigma$  和  $r$  是时间的函

数。那么我们可以用三叉树图来处理这种情况（参见 17.4 节）。

上述模型的一个缺点是，违约概率和股票价格相互独立。因此，一些研究者提出以隐性有限差分方法执行这个模型，其中违约强度  $\lambda$  是股票价格和时间的函数。<sup>10</sup>

## 小 结

信用衍生品允许银行和其他金融机构更主动地管理信用风险。信用衍生品可用来把信用风险从一家公司转移给另一家公司，也可用来以一种类型的暴露交换另一种，以此达到分散信用风险的目的。

最常见的信用衍生品是信用违约互换。这一合约中，一家公司购买与某一特定公司违约相关的保险。损益通常等于第二个公司发行的债券的账面价值和刚刚发生违约之后的价值之间的差值。分析信用违约互换时，计算预期支付的现值和预期损益的现值。

远期信用违约互换中，双方有义务在某一特定时刻签订某种信用违约互换。信用违约互换期权赋予一种选择权，某一特定时刻该期权持有者可以选择决定是否签订某种信用违约互换。如果有效期内，参考实体违约，那么上述两种金融工具都失效。

总收益互换中是以信用敏感性资产组合的总收益，交换 LIBOR 加上价差。总收益互换通常被用为融资。一家希望购买债券组合的公司会联系一家金融机构，金融机构为公司购买债券。然后，金融机构会签订总收益互换合约，其中金融机构支付债券的收益给公司，并收取 LIBOR。这样安排的优点是金融机构减少了这家公司违约风险的暴露。

第  $n$  期违约 CDS 中，只有当一个公司组合中发生第  $n$  次违约时，提供损益。债务抵押债券中，从公司债券或商业贷款的组合中创造一系列不同的证券。有特殊规则决定信用损失分配到每个证券的方式。这一规则给出的结果是，从组合中产生了信用评级非常高和非常低的一些证券。合成债务抵押债券中，从信用违约互换创造类似的证券集合。定价第  $n$  期违约 CDS 和 CDO 分券的标准市场模型是违约时刻的单因子 Gaussian copula 模型。

可转换债券中，持有者可以按照事先决定的条款把债券转换成发行者的股本。可转换债券估值中需要考虑信用风险问题。这是因为，如果债券没有被转换，债券中应该得到的支付就暴露于信用风险。一种估值可转换债券的流行方法是，基于已知违约强度的假设，建立股票价格的模型。违约发生时，股票价格降低到零，债券价格下降的幅度和回收率相关。

---

<sup>10</sup> 例如，参见 L. Andersen and D. Buffum, “Calibration and Implementation of Convertible Bond Models,” *Journal of Computational Finance*, 7, 1 (Winter 2003/04), 1–34。这些作者提出假设违约强度与  $S^\alpha$  成反比例关系，其中  $S$  是股票价格， $\alpha$  是正的常数。

## 参考读物

- Andersen, L., J. Sidenius, and S. Basu, "All Your Hedges in One Basket," *Risk*, November 2003.
- Das S. *Credit Derivatives: Trading & Management of Credit & Default Risk*. Singapore: Wiley, 1998.
- Hull, J. C., and A. White, "Valuation of a CDO and  $n$ th-to-Default Swap without Monte Carlo Simulation," *Journal of Derivatives*, 12, 2 (Winter 2004), 8–23.
- Tavakoli, J. M., *Credit Derivatives: A Guide to Instruments and Applications*. New York: Wiley, 1998.
- Schonbucher, P. J., *Credit Derivatives Pricing Models*. New York: Wiley, 2003.

## 问题与习题

- 21.1 请解释普通信用违约互换和两值信用违约互换之间的区别。
- 21.2 一个信用违约互换要求每年 60 个基点的支付率，每半年支付一次。本金为 3 亿美元，以现金结算。4 年零 2 个月后，违约发生。计算代理人估计的最便宜交割债券的价格为，违约刚刚发生之后的账面价值的 40%。请给出信用违约互换出售者的现金流以及对应时间。
- 21.3 请解释信用违约互换的两种结算方式。
- 21.4 请说明 CDO 和合成 CDO 的创造方法。
- 21.5 请说明什么是首期违约信用违约互换。篮子内公司之间的违约相关系数提高时，上述互换的价值上升还是下降？请解释原因。
- 21.6 请解释风险中性和现实世界概率之间的区别。
- 21.7 请说明为什么总收益互换是一个有用的融资工具。
- 21.8 假设无风险利率曲线是平坦的，连续复利的年率为 7%。在一个刚签订的 5 年期信用违约互换中，违约可以在每年年中发生。假设回收率为 30%，基于不会提前违约的条件下，每年的违约概率是 3%。请估计信用违约互换价差。假设每年支付一次。
- 21.9 当信用违约互换价差是 150 个基点的时候，对于保护购买者的、1 美元名义本金的，在习题 21.8 中的互换的价值为多少？
- 21.10 习题 21.8 中，互换是两值 CDS 时，信用违约互换价差为多少？
- 21.11 请说明 5 年期第  $n$  期违约信用违约互换的运作方式。考虑一个包括 100 个参考实体的篮子，其中每个参考实体的每年的违约概率为 1%。随着参考实体之间的违约相关系数上升，当 (a)  $n = 1$  以及 (b)  $n = 25$  时，你会预计互换价值会怎么变化？请解释你的答案。
- 21.12 通常怎么定义一个债券的回收率？
- 21.13 请证明一个新的标准型 CDS 的价差等于类似的新两值 CDS 价差乘以  $(1 - R)$ ，其中的  $R$  是回收率。
- 21.14 如果表 21.1~表 21.4 中的例子中，CDS 的价差是 100 个基点，请验证，一年的违约概率（基于不会提前违约的条件下）应该为 1.61%。当回收率为 20% 而不是 40% 的时候，违约概率会怎么变化？请验证你的答案和以下结论相一致：隐含违约概率近似和  $1/(1 - R)$  正比，其中  $R$  是回收率。

- 21.15 一家公司签订了总收益互换合约，其中公司收取某个息票率为 5% 的公司债券的收益，并支付 LIBOR。请说明该互换和以 5% 交换 LIBOR 的普通互换之间的区别。
- 21.16 请解释如何构建信用违约互换的远期合约和期权合约。
- 21.17 “信用违约互换的购买者的头寸类似于一个无风险债券多头和公司债券空头的组合。”请解释这句话。
- 21.18 为什么在信用违约互换中存在信息不对称问题？
- 21.19 相比用风险中性违约概率，用现实世界违约概率估值 CDS 会高估还是低估它的价值？请解释你的答案。
- 21.20 总收益互换和资产互换之间的区别是什么？
- 21.21 考虑一个 18 个月期零息票债券。它的账面价值为 \$100，在有效期内的任意时刻都可以被转换成 5 股这家公司的股票。假设当前的股价为 \$20，股票不支付红利，所有期限的无风险利率为连续复利的 6%p.a.，股价的波动率为 25%p.a.。假设违约强度为每年 3%，回收率为 35%。债券可以以 \$110 赎回。利用三个时间步的树图，计算该债券的价值，转换选择权（扣除发行者的赎回选择权）的价值为多少？
- 21.22 假设在一个单因子 Gaussian copula 模型中 125 家公司的 5 年期违约概率都为 3%，每对公司的 copula 相关系数为 0.2。因子值为 -2、-1、0、1 和 2 时，计算：
- (a) 基于因子值的条件违约概率。
  - (b) 基于因子值条件的，违约发生次数大于 10 次的概率。
- 21.23 什么是 CDO 平方？什么是 CDO 立方？

### 课后练习

- 21.24 假设无风险零息率曲线是平坦的，连续复利的年利率为 6%。一个 2 年期标准型信用违约互换中，每半年支付一次，违约可在 0.25 年、0.75 年、1.25 年和 1.75 年发生。假设回收率为 20%，0.25 年和 0.75 年的无条件违约概率（0 时刻观察的）为 1%，1.25 年和 1.75 年的为 1.5%。信用违约互换的价差是多少？如果这是一个两值信用违约互换，那么信用违约价差是多少？
- 21.25 假设基于不会提前违约的条件下，1 年的某一公司的违约概率为  $\lambda$ 。回收率为  $R$ ，无风险利率为 5%p.a.。违约总是在一年的年中发生。每年支付一次的 5 年期标准型 CDS 的价差为 120 个基点，每年支付一次的 5 年期两值 CDS 的价差为 160 个基点。请估计  $R$  和  $\lambda$ 。
- 21.26 当组合内债券之间的相关系数提高的时候，一个 CDO 中不同的分券提供的收益率会怎么变化？
- 21.27 假设：
- (a) 5 年期无风险债券的收益率为 7%。
  - (b) 公司 X 发行的 5 年期公司债券的收益率为 9.5%
  - (c) 某个 5 年期信用违约互换中，对公司 X 的违约提供相应保险，但每年要支付 150 个基点。
- 这种情况下，存在什么样的套利机会？如果信用违约价差不是 150 个基点，而

是 300 个基点，那么存在什么样的套利机会？你发现的套利机会为什么不会特别理想？请用两种原因解释。

21.28 公司 ABC 发行了一个 3 年期可转换债券，它的账面价值为 \$100，每年年末支付息票 \$5。第 1 年末或第 2 年末，该债券可转换成该公司的股票。在第 1 年年末，息票支付刚刚结束之时，一个债券可转换成 3.6 股。在第 2 年年末，息票支付刚刚结束之时，一个债券可转换成 3.5 股。当前的股票价格为 \$25，股价波动率为 25%。股票不支付红利。无风险利率是连续复利 5%。公司 ABC 发行的债券收益率为连续复利的 7%，回收率为 30%。

- (a) 利用三个时间步的树图，计算债券价值。
- (b) 转换选择权的价值为多少？
- (c) 如果债券在前两年内的任意时刻，可按 \$115 赎回，那么债券价值和转换选择权价值会发生什么变化？
- (d) 如果股票在第 6 个月、18 个月和第 30 个月时刻都支付红利 \$1，你的可转换债券分析过程会发生什么变化？不需给出详细的计算过程。

[提示：利用方程 (20.2)，估计违约强度。]

## 奇 异 期 权

如欧式或美式看涨期权和看跌期权这样的衍生品被称为标准型产品 (plain vanilla product)。它们有明确的标准化性质，交易也非常活跃。交易所或经纪人经常报出这些衍生品的价格和隐含波动率。OTC 市场令人兴奋的地方是金融工程师创造出了很多非标准化的产品。这些衍生证券被称为奇异期权 (exotic options 或 exotics)。虽然奇异期权通常只占据证券组合的一个很小部分，但因为它们能比标准型产品带来更高的收益率，投资银行很重视奇异期权。

开发奇异期权的原因有好几种。有时，它们是为了满足真实市场中对冲策略的要求；有时，由于税收、会计、法律或监管等相关原因，财务主管、基金经理或金融机构需要奇异期权；有时，为了设计相应的衍生品来预测某个特定市场变量未来的潜在移动；投资银行偶尔设计出比其他财务主管或基金经理没注意到的更具有吸引力的奇异期权。

在本章中，我们描述不同种类的奇异期权，并讨论它们的估值方法。这一节中的奇异期权分类法，类似于 1991 和 1992 年《风险》杂志中刊登的由 Eric Reiner 和 Mark Rubinstein 撰写的优秀系列文章中的分类法。本章中，我们假设标的资产以利率  $q$  支付红利收益。如第 14 章所述，对股票指数期权，我们设定  $q$  等于该指数的红利收益率；对货币期权，设定  $q$  值为外汇无风险利率；对期货期权，设定  $q$  值为国内无风险利率。本章中讨论的大部分期权可用 DerivaGem 软件进行估值。

## 22.1 一揽子组合期权

一揽子组合期权 (packages) 是由标准欧式看涨期权、标准欧式看跌期权、远期合约、现金及标的资产本身构成的证券组合。我们在第 10 章中讨论过多种类型的一揽子组合期权：牛市价差期权、熊市价差期权、蝶式价差期权、跨式期权、宽跨式期权等。

交易员们经常喜欢设计具有零初始成本的一揽子组合期权。一个例子是范围远期合约。<sup>1</sup> 图 22.1 中给出了范围远期合约多头情况和空头情况的损益。一个范

<sup>1</sup> 用于范围远期合约的其他名称有：零成本领型期权 (zero-cost collar)、灵活远期 (flexible forward)、cylinder option、option fence、min-max 以及 forward band.

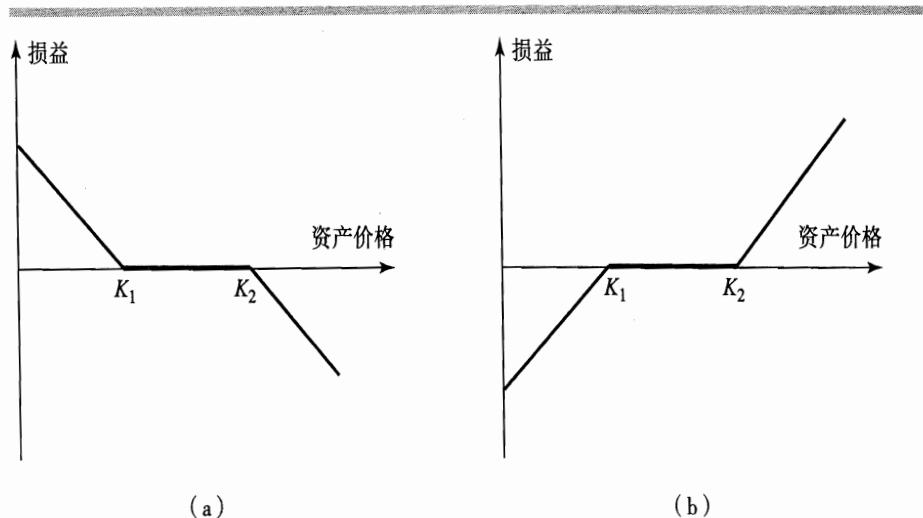


图 22.1 范围远期合约 (a) 空头头寸 (b) 多头头寸的损益

围远期合约空头由一个具有低执行价格  $K_1$  的看跌期权多头和一个具有高执行价格  $K_2$  的看涨期权空头构成。这样就能保证该期权到期之时，可以以  $K_1$  和  $K_2$  之间的价格卖出标的资产。一个范围远期合约多头由一个具有低执行价格  $K_1$  的看跌期权空头和一个具有高执行价格  $K_2$  的看涨期权多头构成。这样就能保证该期权到期之时，可以以  $K_1$  和  $K_2$  之间的价格买入标的资产。合约初始时刻，看涨期权的价值通常等于看跌期权的价值。当  $K_1$  和  $K_2$  值比较相近的时候，到期时资产的买入或卖出价格变得更为确定。极限情况下，即  $K_1 = K_2$  的时候，范围远期合约变成普通的远期合约。

不需要任何成本，就能把支付延迟到合约到期时刻，那么任何衍生品都能转换成零成本产品。考虑一个欧式看涨期权。当支付发生在零时刻的时候，期权成本是  $c$ 。那么，支付发生在期权到期时刻  $T$  时，期权成本是  $A = ce^r T$ 。于是损益状态为  $\max(S_T - K, 0) - A$  或  $\max(S_T - K - A, -A)$ 。当执行价格  $K$  等于远期价格时，延迟支付期权又可称为中止式远期、波士顿期权、可选退出的远期和可撤销远期。

## 22.2 非标准美式期权

标准美式期权在有效期内任何时间均可行使期权且执行价格总是相同的。而实际中，OTC 市场中交易的美式期权不一定总是具有这些标准特征。例如：

1. 有一种非标准美式期权称为百慕大期权。在这种期权中，提前执行只限于期权有效期内的几个特定日期。
2. 提前执行只限于期权有效期内某个部分时间。例如，合约签订时可能规定不能提前执行的“锁定期”。
3. 执行价格在期权有效期内随着时间变化而发生变化。

公司发行的基于公司股票的权证中，经常出现一些或全部上述特征。例如，某个 7 年期的权证，在第 3 年到第 7 年中的一些特定日期，才允许执行；第 3 年到第 4 年中执行价格是 \$30，而在随后两年中执行价格为 \$32，在最后一年执行价格为 \$33。

通常可以利用二叉树图估值非标准美式期权。在每个节点上，根据期权的特殊条款检验提前执行的情况（如果发生）。

### 22.3 远期生效期权

**远期生效期权** (forward start options) 是在未来某时刻开始的期权。在商业剪影 8.3 中讨论过的管理层期权就是一种远期生效期权。这是因为公司答应（明确地或默认地）给雇员在未来时刻提供两平期权。

考虑一种远期生效欧式看涨两平期权，在  $T_1$  时刻该期权启动，到期日为  $T_2$ 。假设在零时刻的标的资产价格为  $S_0$ ，在  $T_1$  时刻的标的资产价格为  $S_1$ 。为了对该期权进行估值，我们从第 13、14 章中讲述过的欧式期权定价公式中得知处于两平状态的看涨期权与资产价格成正比。因此  $T_1$  时刻的远期生效期权价值为  $cS_1/S_0$ ，其中  $c$  是持续时间为  $T_2 - T_1$  的处于两平状态期权在零时刻的价值。使用风险中性评估法，在零时刻的远期生效期权价值为：

$$e^{-\gamma T_1} \hat{E} \left[ c \frac{S_1}{S_0} \right]$$

其中， $\hat{E}$  代表风险中性世界中期望值。因为  $c$  和  $S_0$  已知，且  $\hat{E}(S_1) = S_0 e^{(r-q)T_1}$ ，则远期生效期权价值为  $c e^{-q T_1}$ 。对于不支付红利的股票， $q = 0$ ，远期生效期权的价值与具有相同有效期的处于平价状态的常规期权价值完全相同。

### 22.4 复合期权

复合期权是基于期权的期权。复合期权主要有四种类型：基于某个看涨期权的看涨期权，基于某个看涨期权的看跌期权，基于某个看跌期权的看涨期权，基于某个看跌期权的看跌期权。复合期权有两个执行价格和两个到期日。例如，考虑如下基于某个看涨期权的看涨期权情形，在第一个执行日  $T_1$ ，复合期权的持有人必须付清第一笔执行价格  $K_1$ ，并获得某个看涨期权。该看涨期权给予持有人以第二个执行价格  $K_2$  在第二个执行日  $T_2$  购买标的资产的权利。只有当第二个到期日的期权价值大于第一个执行价格时，复合期权可在第一个执行日行使期权。

当通常的几何布朗运动假设成立时，欧式复合期权可以用二维正态分布的积分解析形式来估值。<sup>2</sup> 所用符号如前所述，零时刻基于某个看涨期权的欧式看涨期

<sup>2</sup> 参见 R. Geske, “The Valuation of Compound Options,” *Journal of Financial Economics*, 7 (1979): 63–81; M. Rubinstein, “Double Trouble,” *Risk*, December 1991/January 1992: 53–56.

权价值为：

$$S_0 e^{-q T_2} M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - K_2 e^{-r T_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-r T_1} K_1 N(a_2)$$

其中

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S^*) + (r - q + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + (r - q + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}$$

$M(a, b; \rho)$  是累计二维正态分布的函数，当两个变量之间的相关系数为  $\rho$  时，则第一个变量小于  $a$ ，第二个变量小于  $b$ 。<sup>3</sup> 变量  $S^*$  为  $T_1$  时刻的股票价格，应用该价格， $T_1$  时刻的期权价格等于  $K_1$ 。如果  $T_1$  时刻的实际股票价格大于  $S^*$ ，则第一个期权将被行使；若它不大于  $S^*$ ，则期权到期无价值。

运用类似的符号，基于某个看涨期权的欧式看跌期权价值为：

$$K_2 e^{-r T_2} M(-a_2, b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) - S_0 e^{-q T_2} M(-a_1, b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-r T_1} K_1 N(-a_2)$$

基于某个看跌期权的欧式看涨期权价值为：

$$K_2 e^{-r T_2} M(-a_2, -b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - S_0 e^{-q T_2} M(-a_1, -b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-r T_1} K_1 N(-a_2)$$

基于某个看跌期权的欧式看跌期权价值为：

$$S_0 e^{-q T_2} M(a_1, -b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) - K_2 e^{-r T_2} M(a_2, -b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-r T_1} K_1 N(a_2)$$

## 22.5 后定选择权

后定选择权（或任选期权，chooser option，有时称为“任你选择”）具有如下的特征：经过一段指定时期后，持有人能选择期权，或者是看涨期权或者是看跌期权。假设做出选择的时刻为  $T_1$ ，此时任选期权的价值为：

$$\max(c, p)$$

其中， $c$  为任选期权的标的看涨期权价值，而  $p$  为任选期权的标的看跌期权价值。

如果任选期权的两个标的期权都是欧式的且具有相同执行价格，则可运用看跌期权和看涨期权之间的平价关系来获得估值公式。假定  $S_1$  为  $T_1$  时刻的股票价格， $K$  为执行价格， $T_2$  为标的期权的到期日， $r$  为无风险利率。则看跌期权与看涨期权之间的平价关系式意味着：

$$\begin{aligned} \max(c, p) &= \max[c, c + K e^{-r(T_2-T_1)} - S_1 e^{-q(T_2-T_1)}] \\ &= c + e^{-q(T_2-T_1)} \max[0, K e^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S_1] \end{aligned}$$

<sup>3</sup> 关于计算  $M$  的数值过程，参考作者网站上的技术说明 5。

这表明任选期权是一种一揽子组合期权，它由以下两部分构成：

1. 一份执行价格为  $K$ , 到期日为  $T_2$  的看涨期权
2.  $e^{-q(T_2-T_1)}$  份执行价格为  $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$ , 到期日为  $T_1$  的看跌期权

这样一来, 就可以对它进行估值了。

更复杂的任选期权可以允许看涨期权和看跌期权的执行价格与到期日不同。

如果这样的话, 它们就不再是一揽子组合期权了, 但是具有像复合期权那样的特性。

## 22.6 障碍期权

障碍期权的损益依附于标的资产的价格在一段特定时期内, 是否达到了某个特定水平。

通常有许多种不同类型的障碍期权在场外市场进行交易。它们吸引了一些市场参与者, 因为它们通常比常规的期权便宜。这些障碍期权可以归为敲出期权和敲入期权这两类。敲出期权是这样一种期权, 即当标的资产价格达到一个特定障碍水平时, 该期权作废。敲入期权是这样一种期权, 即只有当标的资产价格达到一个特定障碍水平时, 该期权得以存在。

公式 (14.4) 和公式 (14.5) 说明, 零时刻常规看涨期权和看跌期权的价值为:

$$c = S_0 e^{-qT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

一个下跌敲出看涨期权 (down-and-out call) 是一种敲出期权。它是一个常规看涨期权, 但如果资产价格达到某个障碍水平  $H$ , 则该期权作废。障碍水平低于初始资产价格。相应的敲入期权是下跌敲入看涨期权。它是一个常规看涨期权, 但只有当标的资产价格达到一个特定障碍水平时, 该期权得以存在。

如果  $H$  小于或等于执行价格  $K$ , 在零时刻的下跌敲入看涨期权的价值为:

$$c_{di} = S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y) - Ke^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T})$$

其中

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}$$

$$y = \frac{\ln[H^2/(S_0K)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

由于一份常规看涨期权的价值等于一份相应的下跌敲入看涨期权价值和一份下跌敲出看涨期权价值之和，因此一份下跌敲出看涨期权价值等于一份常规看涨期权价值减去相应的下跌敲入看涨期权的价值：

$$c_{do} = c - c_{di}$$

如果  $H \geq K$ ，那么：

$$\begin{aligned} c_{do} &= S_0 N(x_1) e^{-qT} - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma \sqrt{T}) \\ &\quad - S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y_1) + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma \sqrt{T}) \end{aligned}$$

和

$$c_{di} = c - c_{do}$$

其中

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma \sqrt{T}} + \lambda \sigma \sqrt{T} \\ y_1 &= \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma \sqrt{T}} + \lambda \sigma \sqrt{T} \end{aligned}$$

上升敲出看涨期权 (up-and-out call) 是一个常规看涨期权，但如果资产价格达到某个障碍水平  $H$ ，则该期权作废，其中  $H$  大于当前资产价格。上升敲入看涨期权是一个常规看涨期权，但只有当标的资产价格达到一个特定障碍水平时，该期权得以存在。当  $H$  小于等于  $K$ ，上升敲出看涨期权的价值  $c_{uo}$  为零，上升敲入看涨期权的价值  $c_{ui}$  为  $c$ 。当  $H$  大于等于  $K$  时：

$$\begin{aligned} c_{ui} &= S_0 N(x_1) e^{-qT} - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma \sqrt{T}) - S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)] \\ &\quad + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma \sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma \sqrt{T})] \end{aligned}$$

和

$$c_{uo} = c - c_{ui}$$

看跌障碍期权的定义类似于看涨障碍期权。上升敲出看跌期权是一个常规看跌期权，但如果资产价格达到某个障碍水平  $H$ ，则该期权作废，其中  $H$  大于当前资产价格。上升敲入看跌期权是一个常规看跌期权，但只有当标的资产价格达到一个特定障碍水平时，该期权得以存在。当障碍水平  $H$  大于或等于  $K$  时，它们的价格为：

$$p_{ui} = -S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(-y) + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma \sqrt{T})$$

并且

$$p_{uo} = p - p_{ui}$$

当  $H$  小于等于  $K$  时：

$$\begin{aligned} p_{uo} = & -S_0 N(-x_1) e^{-qT} + K e^{-rT} N(-x_1 + \sigma \sqrt{T}) \\ & + S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(-y_1) - K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma \sqrt{T}) \end{aligned}$$

并且

$$p_{ui} = p - p_{uo}$$

一个下跌敲出看跌期权是一个看跌期权，当达到某个低于当前资产价格的障碍水平  $H$  时，则该期权作废。下跌敲入看跌期权是一个看跌期权，只有当标的资产价格达到一个特定障碍水平时，该期权得以存在。当障碍水平大于执行价格时， $p_{do} = 0$  和  $p_{di} = p$ 。当障碍小于执行价格时：

$$\begin{aligned} p_{di} = & -S_0 N(-x_1) e^{-qT} + K e^{-rT} N(-x_1 + \sigma \sqrt{T}) + S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)] \\ & - K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma \sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma \sqrt{T})] \end{aligned}$$

并且

$$p_{do} = p - p_{di}$$

所有这些估值中都使用了通常的假设，即资产价格在未来时刻的概率分布是对数正态分布（应看到，障碍期权的价格有时对这个对数正态分布假设很敏感）。障碍期权还有一个重要问题是：在检验资产价格是否达到障碍水平时，观测资产价格  $S$  的频率为多少。在这一节所给出的解析公式假设  $S$  为连续观测值，有时实际中也的确如此。<sup>4</sup> 合约中经常声明对  $S$  进行定期观测。例如，每天中午 12 点观测一次。对于标的资产价格是离散观测值的情况，布罗迪、格拉瑟曼和库给出了一种调整我们上面给出那些公式的方法。<sup>5</sup> 对于上升敲入期权和上升敲出期权，障碍水平  $H$  替代成  $He^{+0.5826\sigma\sqrt{T/m}}$ ；对于下跌敲入期权和下跌敲出期权，障碍水平  $H$  替代成  $He^{-0.5826\sigma\sqrt{T/m}}$ 。其中， $m$  是观测资产价格的次数（所以  $T/m$  是这些观测值相隔的时间段）。

障碍期权的性质非常不同于普通期权。例如，有时，其 Vega 可以是负值。当资产价格接近于障碍水平时，考虑一个上升敲出看涨期权。如果波动率上升，那么达到障碍水平的概率也上升。因此，这种情况下，波动率上升，则障碍期权价格下降。

<sup>4</sup> 一种跟踪资产价格是否从下（上）达到障碍水平的方法是，给交易所发送一个限价指令，以障碍水平的价格出售（购买）资产，并查看指令是否被满足。

<sup>5</sup> M. Broadie, P. Glasserman, and S. G. Kou, "A Continuity Correction for Discrete Barrier Options," *Mathematical Finance* 7, 4 (October 1997): 325–49.

## 22.7 两值期权

两值期权是具有不连续收益的期权。一个简单的例子是现金或无价值看涨期权。在  $T$  时刻，标的资产价格低于执行价格时该期权一文不值，而当标的资产价格超过执行价格时，该期权支付一个固定数额  $Q$ 。在风险中性世界中，期权到期时标的资产价格超过执行价格的概率为  $N(d_2)$ 。那么现金或无价值看涨期权的价值就是  $Qe^{-qT}N(d_2)$ 。现金或无价值看跌期权和现金或无价值看涨期权类似。标的资产价格超过执行价格时该期权一文不值，而当标的资产价格低于执行价格时该期权支付一个固定数额  $Q$ 。现金或无价值看跌期权的价值就是  $Qe^{-qT}N(-d_2)$ 。

另一种两值期权是资产或无价值看涨期权。若标的资产价格在期权到期时低于执行价格则期权一文不值，若标的资产价格在期权到期时超过执行价格，则支付等于标的资产价格本身的款额。资产或无价值看涨期权的价值为  $S_0e^{-qT}N(d_1)$ 。资产或无价值看跌期权中标的资产价格超过执行价格时该期权一文不值，而当标的资产价格低于执行价格时，支付等于标的资产价格本身的款额。资产或无价值看跌期权的价值就是  $S_0e^{-qT}N(-d_1)$ 。

一个常规欧式看涨期权等价于一个资产或无价值看涨期权多头头寸和一个现金或无价值看涨期权（此时，基于现金或无价值看涨期权的损益等于执行价格）空头头寸的组合。类似地，一个常规欧式看跌期权等价于一个现金或无价值看跌期权多头头寸和一个资产或无价值看跌期权（此时，基于现金或无价值看跌期权的损益等于执行价格）空头头寸的组合。

## 22.8 回望期权

回望期权的损益依附于期权有效期内资产达到的最大或最小价格。欧式回望看涨期权的损益，等于最后资产价格超过期权有效期内资产达到的最低价格的那个量。欧式回望看跌期权的损益，等于期权有效期内资产达到的最高价格超过最后资产价格的那个量。

欧式回望期权的定价公式已经推导出来了。<sup>6</sup>零时刻的欧式回望看涨期权的价值为：

$$S_0e^{-qT}N(a_1) - S_0e^{-qT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} N(-a_1) - S_{\min} e^{-qT} \left[ N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{qT} N(-a_3) \right]$$

其中

---

<sup>6</sup> 参见 B. Goldman, H. Sosin, and M. A. Gatto, "Path-Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High," *Journal of Finance*, 34 (December 1979), 1111-27; M. Garman, "Recollection in Tranquility," *Risk*, March 1989: 16-19.

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$a_3 = \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_1 = \frac{-2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_0/S_{\min})}{\sigma^2}$$

并且， $S_{\min}$  为截止到现在的资产价格的最小值（如果回望期权是刚刚开始，则  $S_{\min} = S_0$ ）。参见习题 22.23 中  $r = q$  的情形。

欧式回望看跌期权的价值是：

$$S_{\max}e^{-rT} \left[ N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{rT} N(-b_3) \right] + S_0 e^{-qT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} N(-b_2) - S_0 e^{-qT} N(b_2)$$

其中

$$b_1 = \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$b_3 = \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_2 = \frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_{\max}/S_0)}{\sigma^2}$$

并且， $S_{\max}$  为截止到现在的资产价格的最大值（如果回望期权是刚刚开始，则  $S_{\max} = S_0$ ）。

**[例 22.1]** 考虑一个新发行的基于不付红利股票的回望看跌期权，执行价格为 50，股票价格波动率是年利率 40%，无风险利率是年利率 10%，有效期限为 3 个月。此时， $S_{\max} = 50$ ， $S_0 = 50$ ， $r = 0.1$ ， $q = 0$ ， $\sigma = 0.4$ ， $T = 0.25$ 。从刚给出的公式中， $b_1 = -0.025$ ， $b_2 = -0.225$ ， $b_3 = 0.025$ ， $Y_2 = 0$ ，所以回望看跌期权的价值为 7.79。新发行的基于同样股票的回望看涨期权价值为 8.04。

回望看涨期权定义为持有者能够以期权有效期内所能达到的最低价格购买标的资产。同样地，回望看跌期权定义为持有者能够以期权有效期内所能达到的最高价格出售标的资产。回望期权中的标的资产通常是商品。就像障碍期权那样，回望期权价值对用以计算最大或最小资产价格时的观测频率敏感。以上公式假设资产价格是连续观测的。对于资产价格是不连续观测值的情况，Broadie、Glasserman 和 Kou 给出了一种调整我们上面给出那些公式的方法。<sup>7</sup>

<sup>7</sup> M. Broadie, P. Glasserman, and S. G. Kou, “Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options,” *Finance and Stochastics*, 2 (1998): 1–28.

## 22.9 叫停期权

叫停期权 (shout option) 是一种欧式期权，期权有效期内持有者可以向期权卖方“叫停”一次。期权到期之时，期权持有者的损益是欧式期权的一般损益与叫停时刻的内在价值中价值更大的那一个。假设执行价格为\$50，看涨期权的持有者在标的资产价格为\$60时发出了叫停。如果到期时最终资产价格小于\$60，持有者的收益为\$10。如果最终资产价格大于\$60，持有者的收益为该最终价格超过\$50的部分。

叫停期权的一些性质和回望期权类似，而相比之下，叫停期权非常的便宜。如果持有者在  $\tau$  时刻资产价格为  $S_\tau$  时发出了叫停，那么期权的损益为

$$\max(0, S_T - S_\tau) + (S_\tau - K)$$

其中，和之前一样， $K$  表示执行价格， $S_T$  表示  $T$  时刻资产价格。如果  $\tau$  时刻持有者发出叫停，则该期权的价值为  $S_\tau - K$  的现值加上执行价格为  $S_\tau$  的欧式期权的价值。后者可以用 Black-Scholes 公式计算出来。

可以按常用的方法建立标的资产的二叉树图或三叉树图来估值叫停期权。在树图进行倒推计算时，我们需要在每个节点上计算叫停时的期权价值以及不叫停时的期权价值。两者中间较大者就是该节点上的期权价格。因此，叫停期权的估值过程和普通美式期权一样。

## 22.10 亚式期权

亚式期权的损益依附于有效期至少为期权有效期中的一部分的标的资产平均价格。平均价格看涨期权的损益是  $\max(0, S_{\text{ave}} - K)$ ，平均价格看跌期权的损益为  $\max(0, K - S_{\text{ave}})$ ，其中  $S_{\text{ave}}$  是按预定平均时期计算的标的资产的平均价值。平均价格期权比常规期权便宜，并有说法认为它比常规期权更适合公司财务主管的某些需求。假设一家美国公司的财务主管期望在明年内平稳地收到来自澳大利亚子公司的一份 1 亿澳元的现金流。他可能对一种能保证该年内平均汇率高于某一水平的期权感兴趣。平均价格看跌期权能比常规看跌期权更好地满足这一要求。

另一种类型的亚式期权是平均执行价格期权。平均执行价格看涨期权损益为  $\max(0, S_T - S_{\text{ave}})$ ，而平均执行价格看跌期权损益为  $\max(0, S_{\text{ave}} - S_T)$ 。平均执行价格期权可以保证购买在一段时间内频繁交易资产所支付的平均价格低于最终价格。另外，它能保证销售在一段时间内频繁交易资产所收取的平均价格高于最终价格。

若假定标的资产价格  $S$  服从对数正态分布，且  $S_{\text{ave}}$  是  $S$  的几何平均值，就可获得欧式平均价格期权的定价解析计算公式。<sup>8</sup> 这是因为一系列对数正态分布变量的

---

<sup>8</sup> 参见 A. Kemna and A. Vorst, “A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values,” *Journal of Banking and Finance*, 14 (March 1990), 113–29.

几何平均值仍为对数正态分布。考虑一个新发行的期权，在 $T$ 时刻提供基于0时刻到 $T$ 时刻的几何平均值的损益。在风险中性世界中，某个确定时期的资产价格的几何平均值的概率分布等同于该时期末某个资产价格的概率分布，此资产的预期增长率为 $(r - q - \sigma^2/6)/2$ （而不是 $r - q$ ）且波动率为 $\sigma/\sqrt{3}$ （而不是 $\sigma$ ）。那么几何平均价格期权就可按一种常规期权来处理，其波动率为 $\sigma/\sqrt{3}$ 且红利收益率等于：

$$r - \frac{1}{2} \left( r - q - \frac{\sigma^2}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( r + q + \frac{\sigma^2}{6} \right)$$

更普遍的情况是亚式期权定义为算术平均值，然而没有精确的解析定价公式。这是因为一系列对数正态分布的算术平均值分布没有可解析处理的特性。然而，该分布近似对数正态分布，对基于算术值的平均价格期权的定价我们有一种近似的解析方法。我们在风险中性世界中，精确地计算算术平均的概率分布的前二阶矩，然后再假定算术平均的分布是具有相同阶矩的对数正态分布。<sup>9</sup>

考虑一个新发行的亚式期权，在 $T$ 时刻提供基于0时刻到 $T$ 时刻的算术平均值的亚式期权损益。当 $q \neq r$ 时（对于 $q = r$ 的情况，参照习题22.23），观察风险中性世界中，算术平均的一阶矩 $M_1$ 与二阶矩 $M_2$ 可以定义为：

$$M_1 = \frac{e^{(r-q)T} - 1}{(r - q)T} S_0$$

以及

$$M_2 = \frac{2e^{[2(r-q)+\sigma^2]T}S_0^2}{(r - q + \sigma^2)(2r - 2q + \sigma^2)T^2} + \frac{2S_0^2}{(r - q)T^2} \left[ \frac{1}{2(r - q) + \sigma^2} - \frac{e^{(r-q)T}}{r - q + \sigma^2} \right]$$

如果我们假设平均资产价格服从对数正态分布，我们可以把平均价格期权看作为期货期权，就可以利用公式(14.16)和公式(14.17)。这时应该设

$$F_0 = M_1 \tag{22.1}$$

以及

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \ln \left( \frac{M_2}{M_1^2} \right) \tag{22.2}$$

**[例 22.2]** 考虑一个新发行的基于不付红利股票的平均价格看涨期权，股票价格为50，执行价格为50，股票价格波动率为年利率40%，无风险利率是年利率10%，有效期限为1年。此时， $S_0 = 50$ ， $K = 50$ ， $r = 0.1$ ， $q = 0$ ， $\sigma = 0.4$ ， $T = 1$ 。如果平均值是几何平均，我们可以像常规期权那样为该期权估值，波动率为 $0.4/\sqrt{3}$ ，即23.09%，股票收益率为 $(0.1 + 0.4^2/6)/2$ ，即6.33%。该期权的价值为

<sup>9</sup> 参见 S. M. Turnbull and L. M. Wakeman, "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (September 1991), 377-89.

5.13。如果平均值是算术平均，我们首先计算  $M_1 = 52.59$  和  $M_2 = 2922.76$ 。当我们假设平均值服从对数正态分布时，该期权和期货期权的价值一样。根据公式(22.1)和公式(22.2)，得到  $F_0 = 52.59$  以及  $\sigma = 23.54\%$ 。DerivaGem 软件计算出来的该期权价值为 5.62。

上面给出的  $M_1$  和  $M_2$  的计算公式基于的假设是，平均值是由资产价格的连续观测值计算出来的。本章附录中讲述了当平均值是由资产价格的离散观测值计算出来的时候，如何得到  $M_1$  和  $M_2$ 。

通过调整上述分析，我们可以处理当期权不是新发行的，及已经观察到决定平均值的一些价格的情况。假设正在取平均时期是由已经观测到价格的长度为  $t_1$  的时期和未来的长度为  $t_2$  的时期（期权的剩余期限）构成。假设在第一个时期的平均资产价格为  $\bar{S}$ 。则平均价格看涨期权的收益为：

$$\max \left( \frac{\bar{S}t_1 + S_{\text{ave}}t_2}{t_1 + t_2} - K, 0 \right)$$

其中， $S_{\text{ave}}$  是正在取平均的剩余时期内的资产平均价格。它等于下式：

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2} \max(S_{\text{ave}} - K^*, 0)$$

其中

$$K^* = \frac{t_1 + t_2}{t_2} K - \frac{t_1}{t_2} \bar{S}$$

当  $K^* > 0$  时，我们把执行价格从  $K$  调整到  $K^*$ ，并把得到的结果乘以  $t_2/(t_1 + t_2)$ ，则该期权的估值过程和新发行的亚式期权类似。当  $K^* < 0$  时，该期权肯定会被执行，其估值过程就和远期合约类似。此时的期权价值为

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2} (M_1 e^{-r_2} - K^* e^{-r_2})$$

## 22.11 一项资产换取另一项资产的期权

一项资产换取另一项资产的期权（有时也称为交换期权）包括多种内容。从美国投资者的观点来看，使用澳元购买日元的期权是把一种外币资产交换成为另一种外币资产的期权。股票投标是将一种股票交换为另一种股票的期权。

考虑在  $T$  时刻放弃价值  $U_T$  的资产而换回价值  $V_T$  的资产的欧式期权。该期权的损益为

$$\max(V_T - U_T, 0)$$

Margrabe 率先给出了这种期权的定价公式。<sup>10</sup> 假设资产价格  $U$  和  $V$  都遵循几何布朗运动，其波动率为  $\sigma_U$  和  $\sigma_V$ 。更进一步假设  $U$  和  $V$  之间的瞬态相关系数为  $\rho$ ，且  $U$  和  $V$  提供的收益率为  $q_U$  和  $q_V$ 。在零时刻该期权的定价为：

$$V_0 e^{-q_V T} N(d_1) - U_0 e^{-q_U T} N(d_2) \quad (22.3)$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_U - q_V + \hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

且

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V}$$

$U_0$  和  $V_0$  是零时刻的  $U$  值和  $V$  值。

在第 25 章中将证明上述结论。有意思的是公式 (22.3) 是独立于无风险利率  $r$  的。这是因为当  $r$  上升时，风险中性世界中的两种资产价格增长率都上升了，但这被贴现率的上升精确地抵消了。变量  $\hat{\sigma}$  是  $V/U$  的波动率。与公式 (14.4) 比较后可以看出，这个期权的价格与  $U_0$  份基于价值为  $V/U$  的资产的欧式看涨期权价格相同，其执行价格为 1.0，无风险利率为  $q_U$ ，资产红利收益率为  $q_V$ 。Mark Rubinstein 说明，同类美式期权在进行估价时可表示出类似的性质。<sup>11</sup> 它可视为  $U_0$  份美式期权，该美式期权以 1.0 美元的执行价格购买价值  $V/U$  的资产，无风险利率为  $q_U$ ，资产红利收益率为  $q_V$ 。这个期权可以用第 17 章所述的二叉树图方法来估值。

获得两个资产中较好或较差资产的期权，可以看作是由两个资产之一的某个资产头寸加上将其交换为另一个资产的期权所组成：

$$\min(U_T, V_T) = V_T - \max(V_T - U_T, 0)$$

$$\max(U_T, V_T) = U_T + \max(V_T - U_T, 0)$$

## 22.12 包含几种资产的期权

包含两种或更多风险资产的期权，有时也称作为彩虹期权。一个例子是第 5 章中提到的在 CBOT 交易的债券期货合约。允许空头方在交割时可以从大量不同的债券中进行选择。

最流行的含几种资产的期权是篮子期权。该期权的损益依附于某个资产组合（或篮子）的价值。资产通常为单种股票、股票指数或货币。欧式篮子期权可由蒙特卡罗模拟方法进行估值，其中要假设这些资产遵循相关的几何布朗运动。一个

<sup>10</sup> 参见 W. Margrabe, "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another," *Journal of Finance*, 33 (March 1978), 177-86.

<sup>11</sup> 参见 M. Rubinstein, "One for Another," *Risk*, July-August 1991: 30-32.

更迅速的方法是，在风险中性世界中计算期权到期之时篮子的前两阶矩，再假设篮子价值在这一时刻服从对数正态分布。那么，可以将这种期权看作是期货期权，根据公式（22.1）和公式（22.2）得到的参数进行计算。本章附录讲述如何从两个资产的波动率和它们之间的相关系数，求得未来某一时刻篮子价值的前两阶矩。通常从历史数据估计相关系数。

## 22.13 静态期权复制

如果我们使用第 15 章中的方法来对奇异期权进行套期保值，则我们会发现有些情况容易处理，而其他情况中处理非常难，因为存在不连续性（参照商业剪影 22.1）。对难处理的情况，可以适用所谓的静态期权复制方法。<sup>12</sup> 这涉及寻找某个活跃的可交易期权的组合，并在所考虑的条件下近似复制奇异期权。卖空这个头寸就可以对冲了。基于静态期权复制的基本原则如下：如果在某个确定的边界条件下两个组合的价值相等，那么它们在边界内所有内在点的价值也相同。

考虑如下例子，一个 9 个月期的基于不支付红利股票的上升敲出看涨期权，股票现价为 50，执行价格为 50，障碍水平为 60，无风险年利率为 10%，年波动率为 30%。假设  $f(S, t)$  为时间  $t$  股价为  $S$  时的期权的价值。为了构造复制的组合，我们可以使用在  $(S, t)$  空间内的任何边界。我们选择了处理起来较为方便的边界，如图 22.2 中描述。这一边界由  $S = 60$  和  $t = 0.75$  组成。边界上，上升敲出看涨期权的价值为

$$\text{当 } S < 60 \text{ 时, } f(S, 0.75) = \max(S - 50, 0)$$

$$\text{当 } 0 \leq t \leq 0.75 \text{ 时, } f(60, t) = 0$$

有很多方法可以使我们用常规期权来近似满足这个边界条件。满足第一个边界条件的现成工具是一个常规的执行价格为 50 的 9 个月期的欧式看涨期权。因此，进入复制组合中的第一个工具很可能是一个单位的该期权（我们称此期权为期权 A）。那么随后进行的一种方法如下：我们将期权的有效期分成许多个时间步长，然后在每个步长的开始选择满足第二个边界条件的期权。

假设我们选择 3 个月为时间步长。我们选择的下一个工具应当使得第二个边界条件在  $t = 0.5$  时满足。换句话说，在  $t = 0.5$  和  $S = 60$  时，它应当使完全复制的组合价值为零。该期权应当有这样的特性：在条件已经匹配满足的情况下，它在第一个边界上的值为零。一种可能是某个常规的 9 个月期的欧式看涨期权，执行价格为 60（我们将此期权称为期权 B）。Black-Scholes 公式说明：当  $S = 60$  时，在 6 个月点上，它的价值为 4.33。它们也说明了在该点上期权 A 的头寸价值为 11.54。那么，我们所需要的期权 B 的头寸为  $-11.54/4.33 = -2.66$ 。

---

<sup>12</sup> 参见 E. Derman, D. Ergener, and I. Kani, “Static Options Replication,” *Journal of Derivatives* 2, 4 (Summer 1995): 78–95.

### 商业剪影 22.1 奇异期权的 Delta 套期保值更容易还是更难

如第 15 章所述，我们对奇异期权套期保值时，可以创造 Delta 中性头寸，频繁进行再调整来维持 Delta 中性化。此时，我们会发现一些奇异期权比标准型期权更容易处理，而其他一些则非常难处理。

一种非常容易套期保值的奇异期权是平均价格期权，其中计算平均值的期限为期权的总期限。随着时间变化，我们可以观测更多的可用于最后平均值计算中的资产价格。这说明，随着时间变化，我们对损益的不确定性降低。因此，该期权也越来越容易套期保值。最后几天中，该期权的 Delta 总是接近于零，因为这段期间内的价格变化对损益的影响很小。

相反地，障碍期权的套期保值非常难。考虑一个货币的下跌敲出看涨期权，汇率超过障碍水平 0.0005。如果触击到障碍水平，期权作废。如果没触击到障碍水平，期权价值可能很高。障碍期权的 Delta 的不连续性使得传统套期保值策略很难执行。

接下来，我们考虑在  $t = 0.25$  时匹配满足第二个边界条件的情况。所用的期权应当具有如下特性：在所有至今为止已经满足的边界上，该期权价值为零。一种可能是某个常规的 6 个月期的欧式看涨期权，执行价格为 60（我们将此期权称为期权 C）。当  $S = 60$  时，在 3 个月时间点上，它的价值为 4.33。期权 A 和期权 B 的头寸在该点上价值为 -4.21。那么我们所需要的期权 C 的头寸为  $4.21/4.33 = 0.97$ 。

最后，我们在  $t = 0$  点满足第二个边界条件。为此，我们使用某个常规的 3 个月期的执行价格为 60 的欧式期权（我们将此期权称为期权 D）。与上面类似，计

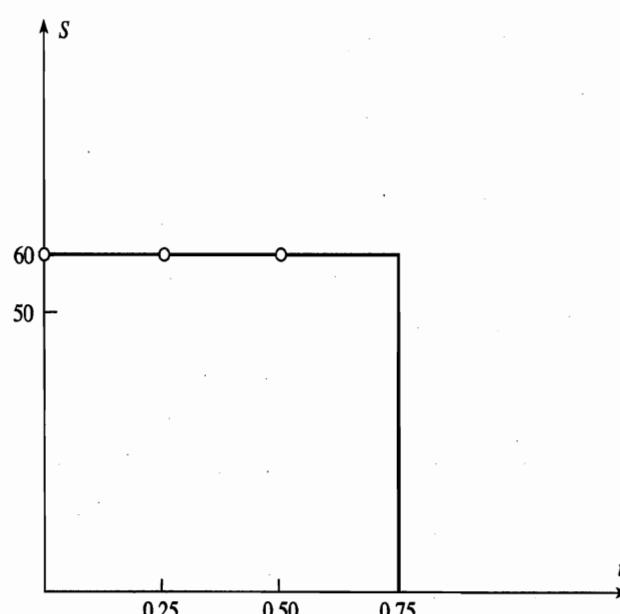


图 22.2 静态期权复制例子中使用的边界点

表 22.1 用于复制上升敲出期权的欧式看涨期权的组合

| 期 权 | 执行价格 | 到期期限(年) | 头 寸   | 初始价值  |
|-----|------|---------|-------|-------|
| A   | 50   | 0.75    | 1.00  | +6.99 |
| B   | 60   | 0.75    | -2.66 | -8.21 |
| C   | 60   | 0.50    | 0.97  | +1.78 |
| D   | 60   | 0.25    | 0.28  | +0.17 |

算期权 D 所需要的头寸为 0.28。

在表 22.1 中总结了我们选择的证券组合（也可以参照 DerivaGem Application Builder 的 Sample Application F）。刚开始，它的价值为 0.73（即零时刻，股票价格为 50 时）。将此结果与本章前面给出的上升敲出看涨期权的解析解 0.31 做比较。复制组合价值并不精确等于上升敲出看涨期权价值，这是因为它只在第二边界上的 3 个点上与后者匹配。如果我们运用同样的策略，在第二个边界上如果有 18 个点相匹配（使用每半个月到期的期权），复制组合的价值减少到 0.38。如果有 100 个点相匹配，复制组合的价值进一步减少到 0.32。

为了对某个衍生证券进行套期保值，我们使满足边界条件的组合处于空头。在 Delta 套期保值上的优势是，它不需要频繁地进行头寸的再调整。范围更加广泛的衍生证券都可以使用静态复制方法。使用者在选择需满足的边界条件和所使用的期权上有很大的灵活性。但是，当该边界的任一部分满足时，使用者必须将该组合拆散。

## 小 结

奇异期权是其支配收益的规则比标准期权更加复杂的一类期权。我们已讨论了 12 种不同类型的奇异期权：一揽子组合期权、非标准美式期权、远期生效期权、复合期权、任选期权、障碍期权、两值期权、回望期权、叫停期权、亚式期权、资产交换期权以及包含多种资产的期权。我们已经讨论过，如何沿用第 13 章的 Black-Scholes 定价公式的基本假设，对这些奇异期权进行定价。有一些是可以进行解析方式定价，但需采用比常规欧式看涨期权和看跌期权复杂得多的公式来运算。还有一些可以通过近似解析公式定价，再有一些可以通过第 17 章中的数值方法的扩展形式进行定价。我们将在第 24 章中给出更多估值奇异期权的数值方法。

有些奇异期权比起相应的常规期权来说更易于对冲；而另一些就难得多。一般来说，亚式期权更易于对冲，因为越接近到期日，期权的收益就越确定。障碍期权就难以对冲了，因为障碍期权的 Delta 值可能是不连续的。对冲奇异期权的一种方法是静态期权复制方法，找到一个常规期权的组合，在一些边界上，这些常规期权价值与奇异期权的价值吻合。通过卖空这个组合来对冲该奇异期权。

## 参考读物

- Clewlow, L., and C. Strickland, *Exotic Options: The State of the Art*. London: Thomson Business Press, 1997.
- Derman, E., D. Ergener, and I. Kani, "Static Options Replication," *Journal of Derivatives*, 2, 4 (Summer 1995): 78–95.
- Derman, E., I. Kani, and N. Chriss, "Static Options Replication," *Journal of Derivatives*, 1, 4 (Summer 1994): 6–14.
- Geske, R., "The Valuation of Compound Options," *Journal of Financial Economics*, 7 (1979): 63–81.
- Goldman, B., H. Sosin, and M. A. Gatto, "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High," *Journal of Finance*, 34 (December 1979); 1111–27.
- Margrabe, W., "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another," *Journal of Finance*, 33 (March 1978): 177–86.
- Milevsky, M. A., and S. E. Posner, "Asian Options: The Sum of Lognormals and the Reciprocal Gamma Distribution," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 3 (September 1998), 409–22.
- Ritchken, P. "On Pricing Barrier Options," *Journal of Derivatives*, 3, 2 (Winter 1995): 19–28.
- Ritchken P., L. Sankarasubramanian, and A. M. Vijh, "The Valuation of Path Dependent Contracts on the Average," *Management Science*, 39 (1993): 1202–13.
- Rubinstein, M., and E. Reiner, "Breaking Down the Barriers," *Risk*, September (1991): 28–35.
- Rubinstein, M., "Double Trouble," *Risk*, December/January (1991/1992): 53–56.
- Rubinstein, M., "One for Another," *Risk*, July/August (1991): 30–32.
- Rubinstein, M., "Options for the Undecided," *Risk*, April (1991): 70–73.
- Rubinstein, M., "Pay Now, Choose Later," *Risk*, February (1991): 44–47.
- Rubinstein, M., "Somewhere Over the Rainbow," *Risk*, November (1991): 63–66.
- Rubinstein, M., "Two in One," *Risk* May (1991): 49.
- Rubinstein, M., and E. Reiner, "Unscrambling the Binary Code," *Risk*, October 1991: 75–83.
- Stulz, R. M., "Options on the Minimum or Maximum of Two Assets," *Journal of Financial Economics*, 10 (1982): 161–85.
- Turnbull, S. M., and L. M. Wakeman, "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (September 1991): 377–89.
- Zhang, P. G., *Exotic Options: A Guide to Second Generation Options*, 2nd edn. Singapore: World Scientific, 1998.

## 问题和习题

- 22.1 解释远期生效期权和任选期权之间的差别。
- 22.2 描述具有同样有效期的一个回望期权看涨期权和一个回望期权看跌期权的组合的损益状态图。
- 22.3 考虑某个任选期权，持有者有权在两年期限内的任何时间，在欧式看涨期权和欧式看跌期权之间进行选择。不考虑所做出的选择的时刻，看涨期权和看跌期权的到期日和执行价格是相同的。在两年有效期之前做出选择是最佳的吗？请解释原因。
- 22.4 假设  $c_1$  和  $p_1$  是执行价格为  $K$ 、有效期为  $T$  的欧式平均价格看涨期权和欧式平均价格看跌期权的价格， $c_2$  和  $p_2$  是有效期为  $T$  的欧式平均执行价格看涨期权和欧式平均执行价格看跌期权的价格， $c_3$  和  $p_3$  是执行价格为  $K$ 、有效期为  $T$  的常规欧式看涨期权

和常规欧式看跌期权的价格。证明：

$$c_1 + c_2 - c_3 = p_1 + p_2 - p_3$$

- 22.5 文中给出了某个特殊的任选期权分解成为一个有效期为  $T_2$  的看涨期权和一个有效期为  $T_1$  的看跌期权的推导过程。请给出另外一种将任选期权分解为一个有效期为  $T_1$  的看涨期权和一个有效期为  $T_2$  的看跌期权。
- 22.6 第 22.6 节给出下跌敲出看涨期权的两个公式。第一个适用于障碍  $H$  小于或等于执行价格  $K$  的情况。第二个适用于障碍  $H \geq K$  的情况。证明：当  $H = K$  时，两个公式是一样的。
- 22.7 当障碍大于执行价格时，为什么下跌敲出看跌期权价值为零？请解释。
- 22.8 假设基于不付红利股票的美式看涨期权的执行价格按比率  $g$  增长。证明如果  $g$  小于无风险利率为每年  $r$ ，则提前执行该看涨期权决不是最优的。
- 22.9 如何计算基于不付红利股票的远期生效看跌期权的价值，假设执行价格比期权开始生效时刻的股票价格还要高 10%。
- 22.10 如果某个股票价格遵循几何布朗运动， $A(t)$  遵循什么样的过程？其中  $A(t)$  是零时刻和  $t$  时刻之间股票价格的算术平均值。
- 22.11 解释为什么运用 Delta 对冲亚式期权要比对冲障碍期权容易得多？
- 22.12 计算收取 1 盎司黄金支付 100 盎司白银的一年期欧式期权的价值。当前黄金和白银的价格分别为 \$380 和 \$4，无风险利率为每年 10%，每个商品价格的波动率为 20%，两个价格之间的相关性为 0.7。忽略贮存成本。
- 22.13 基于某个资产价格的欧式下跌敲出期权的价值与基于该资产期货价格的欧式下跌敲出期权的价值相等吗？假设该期货合约到期日与期权到期日相同。
- 22.14 回答如下复合期权的问题：
- (a) 为什么基于某个看涨期权的欧式看涨期权与基于某个看涨期权的欧式看跌期权之间存在看跌期权-看涨期权的平价关系？证明在课文中给出的公式满足这个关系式。
  - (b) 为什么基于某个看跌期权的欧式看涨期权与基于某个看跌期权的欧式看跌期权之间存在看跌期权-看涨期权的平价关系？证明在课文中给出的公式满足这个关系式。
- 22.15 在计算最小值时，我们增加观测资产价格的频率，某个回望看涨期权的价格是增加了还是减少了？
- 22.16 在判断障碍是否达到时，我们增加观测资产价格的频率，某个下跌敲出看涨期权的价格是增加了还是减少了？如果是下跌敲入看涨期权，同样问题的答案又如何？
- 22.17 解释为什么常规欧式看涨期权是下跌敲出欧式看涨期权和下跌敲入欧式看涨期权之和？对美式看涨期权是否有相同结果呢？
- 22.18 某个衍生证券，在 6 个月内如果 S&P 500 指数大于 1 000，则支付 \$100，其他情况下则为零，该期权的价值为多少？假设当前指数水平是 960，无风险利率为每年 8%，该指数的红利收益率为 3%，指数的波动率为 20%。
- 22.19 某个基于白银期货的下跌敲出看涨期权，有效期限为 3 个月，执行价格为每盎司 \$20，障碍水平为 \$18。当前期货价格是 \$19，无风险利率是每年 5%，白银期货的波

动率是每年 40%。解释该期权如何运作，并计算它的价值。具有同样期限的常规白银期货看涨期权的价值为多少？具有同样期限的基于白银期货的下跌敲入看涨期权的价值为多少？

- 22.20 基于某个股票指数的欧式回望看涨期权有效期限为 9 个月。当前指数水平为 400，无风险利率为每年 6%，该指数的红利收益率是每年 4%，该指数的波动率为每年 20%。使用 DerivaGem 软件估值该期权。
- 22.21 某个基于不付红利股票的欧式平均价格看涨期权，有效期限为 6 个月，初始股票价格为 \$30，执行价格为 \$30，无风险利率为每年 5%，股票价格波动率为每年 30%。估算该期权的价值。
- 22.22 利用 DerivaGem 软件计算以下值：
- 一个不支付红利股票的普通欧式看涨期权。股票价格为 \$50，执行价格为 \$50，无风险利率为 5%p.a.，波动率为 30%，到期期限为 1 年。
  - 一个障碍水平为 \$45 的下跌敲出欧式看涨期权。其他条件和 (a) 相同。
  - 一个障碍水平为 \$45 的下跌敲入欧式看涨期权。其他条件和 (a) 相同。
- 请证明 (a) 中期权的价值等于 (b) 和 (c) 中期权的价值之和。
- 22.23 请解释当  $r = q$  时，对于 (a) 22.8 节中回望看涨期权的估值公式；(b) 22.10 节中  $M_1$  和  $M_2$  的公式，应该做出哪些调整？

### 课后练习

- 22.24 如果 1 年后英镑兑美元的汇率大于 1.5000，某个衍生证券将支付 £10 000，该衍生证券的美元价值为多少？当前汇率是 1.4800，美元和英镑的年利率分别为 4% 和 8%，汇率的年波动率是 12%。
- 22.25 考虑一个不支付红利股票的上升敲出看涨障碍期权。股票价格为 \$50，执行价格为 \$50，无风险利率为 5%，波动率为 30%，到期期限为 1 年，障碍水平是 \$80。利用软件来计算期权的价格，并画图描述以下关系：(a) 期权价格和股票价格；(b) delta 和期权价格；(c) 期权价格和到期期限；(d) 期权价格和波动率。请对你得到的结果，给出一种直觉上的解释。请说明一个上升敲出看涨障碍期权的 delta、gamma、theta 和 vega 可以是正值或负值。
- 22.26 DerivaGem Application Builder 软件中的 Sample Application F 中考虑了 22.13 节的静态期权复制相关的例子。其中给出了用 4 个期权进行套期保值的一种方法（如 22.13 节所述）和用 16 个期权进行套期保值的两种方法。
- 利用 16 个期权构造对冲的两个方法之间有什么不同？用直觉解释为什么第二种方法更好。
  - 通过改变第 3 个、第 4 个期权的到期时刻  $T_{mat}$ ，改进使用 4 个期权的对冲方法。
  - 检验 16 个期权组合匹配障碍期权 delta、gamma、vega 的情况。
- 22.27 考虑一个外汇的下跌敲出看涨期权。期初汇率为 0.90，到期期限为 2 年，执行价格为 1.00，障碍水平为 0.80，本国无风险利率为 5%，外国无风险利率为 6%，波动率为 25%p.a.。利用 DerivaGem 制造一个包含 5 个期权的静态期权复制策略。

- 22.28 假设当前一个股票指数为 900。红利率为 2%，无风险利率为 5%，波动率为 40%。利用附录中的结论来计算 1 年期平均价格看涨期权的价值，其中执行价格为 900，每季度末观测指数水平用于平均值计算。再把这一计算结果和 DerivaGem 算出的连续观测指数水平的、1 年期平均价格看涨期权的价值做对比。对于两个价格之间的区别，给出直觉上的解释。
- 22.29 利用 DerivaGem Application Builder 软件，比较 (a) 表 15.2 和表 15.3 中考虑的期权和 (b) 具有相同参数的平均价格看涨期权的每日 delta 套期保值的有效程度。利用 Sample Application C。对于平均价格看涨期权，你需要改变单元 C16 的期权价格计算公式，单元 H15 和 H16 中损益的计算公式以及 delta 的计算公式（单元 G46~G186 以及 N46~N186）。通过重复按 F9，对于每个期权执行 20 次蒙特卡罗模拟。每次运行中记录出售和对冲期权的成本、20 周内的交易量和 11~20 周的交易量。对所得结果，给出你的看法。
- 22.30 在 DerivaGem Application Builder 软件修改 Sample Application D，以验证基于 100 000 单位外汇的复合期权（看涨期权的看涨期权）的 delta 和 gamma 套期保值的有效程度。其中，汇率为 0.67，本国的无风险利率为 5%，外国的无风险利率为 6%，波动率为 12%。第一个期权的到期期限为 20 周，执行价格为 0.015。第二个期权的到期期限为 40 周，执行价格为 0.68。请解释你将如何修改单元。对套期保值有效程度，给出你的看法。

## 附录

### 亚式期权和篮子期权价格的前二阶矩的计算

首先考虑如何计算风险中性世界中未来  $T$  时刻的篮子期权价值的前二阶矩。假设篮子里面的每个资产价格都服从对数正态分布。定义：

$n$ : 资产个数

$S_i$ : 第  $i$  个资产在  $T$  时刻的价值<sup>13</sup>

$F_i$ :  $T$  时刻到期合约的第  $i$  个资产的远期价格

$\sigma_i$ : 0~ $T$  时刻之间的第  $i$  个资产的波动率

$\rho_{ij}$ : 第  $i$  个和第  $j$  个资产收益之间的相关系数

$P$ :  $T$  时刻的篮子期权的价格

$M_1$ : 风险中性世界中,  $P$  的一阶矩

$M_2$ : 风险中性世界中,  $P$  的二阶矩

因为  $P = \sum_{i=1}^n S_i$ ,  $\hat{E}(S_i) = F_i$ ,  $M_1 = \hat{E}(P)$  和  $M_2 = \hat{E}(P^2)$  (其中的  $\hat{E}$  表示风险

中性世界中的期望值), 所以

$$M_1 = \sum_{i=1}^n F_i$$

同样有

$$P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n S_i S_j$$

根据对数正态分布的性质

$$\hat{E}(S_i S_j) = F_i F_j e^{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j T}$$

因此

$$M_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j e^{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j T}$$

### 亚式期权

我们现在考虑如何计算风险中性世界的资产价格算术平均值的前二阶矩, 其中平均值由离散观测值计算。假设  $T_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 时刻观测资产价格, 我们重新定义变量如下:

<sup>13</sup> 如果第  $i$  个资产是某个股票, 例如篮子中的 200 股股票, 那么(附录第一部分中)第  $i$  个“资产”被定义为 200 股股票,  $S_i$  为 200 股股票的价值。

$S_i$ :  $T_i$ 时刻的资产价值

$F_i$ :  $T_i$ 时刻到期合约的资产的远期价格

$\sigma_i$ :  $T_i$ 时刻到期的资产期权的隐含波动率

$\rho_{ij}$ : 到  $T_i$ 时刻的资产收益和到  $T_j$ 时刻的资产收益之间的相关系数

$P$ : 资产价格算术平均值

$M_1$ : 风险中性世界中,  $P$ 的一阶矩

$M_2$ : 风险中性世界中,  $P$ 的二阶矩

这种情况下,

$$M_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m F_i$$

同样有

$$P^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m S_i S_j$$

在这种情况下

$$\hat{E}(S_i S_j) = F_i F_j e^{\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \sqrt{T_i T_j}}$$

当  $i < j$  时, 可以证明,

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_i \sqrt{T_i}}{\sigma_j \sqrt{T_j}}$$

因此

$$\hat{E}(S_i S_j) = F_i F_j e^{\sigma_i^2 T_i}$$

且

$$M_2 = \frac{1}{m^2} \left[ \sum_{i=1}^m F_i^2 e^{\sigma_i^2 T_i} + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{j-1} F_i F_j e^{\sigma_i^2 T_i} \right]$$

# 气象、能源和保险衍生品

衍生证券合约中最常见的标的变量是股票价格、汇率、利率以及商品价格。基于这些变量的期货、远期、期权和互换合约获得了很大成功。如第 21 章所述，信用衍生品在最近几年也越来越流行。第 22 章说明交易员们发展衍生产品市场的一种方式——通过开发非标准（或新型）结构来确定损益。本章讨论他们发展市场的另一种方式——交易基于“非主流”标的变量的衍生证券。

本章将分析为了管理气象风险、能源价格风险和保险风险而开发的产品。我们将讨论的市场在某些情况下处于早期发展阶段，随着市场的进化，它所提供的产品以及产品的使用方法很可能发生重大变化。

## 23.1 定价问题的再次探讨

第 11 章和第 13 章中，我们解释了风险中性估值结论。其中，估值衍生证券时，假设了投资者的偏好是风险中性的。在风险中性世界中计算预期损益，然后以无风险利率进行贴现，不仅是在风险中性世界中，在所有其他世界中，这一方法可以给出正确价格。

有时采用的另一种定价方法是根据历史数据计算预期损益，并以无风险利率贴现，得到相应的价格。我们将这一方法称为历史数据方法。历史数据给出现实世界中预期损益的估计值。因此，只有当现实世界和风险中性世界中的衍生证券的预期损益总是相同时，历史数据方法才是正确的。

在第 11.7 节提到过，从现实世界移动到风险中性世界时，变量的波动率保持不变，但是它们的预期增长率很可能变化。例如，从现实世界移动到风险中性世界时，某个股票市场指数的预期增长率可能减少 4% 或 5%。如果一个变量的系统风险为 0，那么变量的百分比变化和股票市场收益之间的相关度为 0，此时，可以合理假设一个变量的预期增长率在现实世界和风险中性世界都是一样的。<sup>1</sup>那么，从这里我们可以推导，当所有标的变量的系统风险为 0 的时候，历史数据方法能给出正确的答案。本章中要讨论的大多数衍生证券的共同特点是，都可以利用历史数据方法。因此可以合理假设标的变量的系统风险为 0。

<sup>1</sup> 我们将在第 31 章对此进行进一步讨论。

## 23.2 气象衍生品

很多公司的业绩可能受到天气的不利影响。<sup>2</sup>如同它们对冲汇率风险或利率风险一样，这些公司有必要考虑对冲气象风险。

1997年，第一次出现了OTC气象衍生品。为了理解该衍生品的作用，我们解释两个变量：

HDD：热度日数

CDD：冷度日数

某一天的HDD被定义为：

$$\text{HDD} = \max(0, 65 - A)$$

某一天的CDD被定义为：

$$\text{CDD} = \max(0, A - 65)$$

其中， $A$ 是某个指定气象站观测的该天内最高和最低气温的平均值，以华氏温度度量。例如，某一天（午夜至午夜）的最高气温为68华氏度，最低气温为48华氏度，则 $A=56$ 。那么，日HDD为9，日CDD为0。

一个典型的气象OTC产品是远期或期权合约，它的损益取决于一个月的累计HDD或CDD（即该月中每日的HDD或CDD的总和）。例如，在2004年1月一个交易员可能给客户出售了基于芝加哥O'Hare机场气象站的2005年2月累计HDD的看涨期权，执行价格为700，每一个温度日数的支付率为\$10 000。如果实际的累计HDD为820，损益为120万美元。合约中通常包括一个支付上限。如果我们的例子中的支付上限为150万美元，则该合约等价于牛市价差期权。客户持有执行价格为700的累计HDD的看涨期权多头以及执行价格为850的看涨期权空头。

某一天的HDD是该天中加热所需能源量的一种度量，某一天的CDD是该天中冷却所需能源量的一种度量。大多数气象衍生品合约的交易发生在能源供给商和能源消耗者之间，但是零售商、连锁超市、食品和饮料生产商、医疗卫生服务公司，农产品公司以及休闲行业中的公司也是潜在的气象衍生品用户。气象风险管理协会（www.wrma.org）为气象风险管理行业服务。

1999年9月CME开始交易气象期货和气象期货的欧式期权。合约基于某个气象站观测的某个月的累计HDD和CDD。<sup>3</sup>这些合约在这一月末得到HDD和CDD值后，以现金结算。一个期货合约的规模为\$100乘以累计HDD或CDD。地球卫星公司计算这些HDD和CDD，其中利用了自动化数据搜集设备。

有理由假设某个地区的气温的系统风险为0。根据第23.1节中的讲述，气象衍生品可用历史数据方法定价。例如，考虑前面提过的2005年2月份芝加哥

<sup>2</sup>据美国能源部的估计，七分之一的美国经济体受气象风险的影响。

<sup>3</sup>CME引入了基于10个不同气象站（亚特兰大、芝加哥、辛辛那提、达拉斯、得梅因、拉斯维加斯、纽约、费城、波特兰以及图森）观测值的合约。

O'Hare 机场气象站的累计 HDD 的看涨期权。我们可以搜集 50 年的数据，并估计 2 月 HDD 的概率分布。这个结果可用来计算期权损益的概率分布。那么，期权价值的估计值是上述概率分布的均值以无风险利率贴现的现值。我们需要根据气温变化趋势调整概率分布。例如，线性回归过程可能表明（可能是因为温室效应）2 月的 HDD 平均以速率 10 每年减小。这样的话，回归结果可用来估计根据趋势调整的 2005 年 2 月的 HDD 的概率分布。

### 23.3 能源衍生品

能源公司一直以来是积极的复杂衍生品的用户。很多能源产品在 OTC 市场和交易所场内市场交易。本节中我们讲述原油、天然气以及电力衍生品的交易。

#### 原 油

原油是世界上最重要的商品之一，世界原油需求量大约为每天 8 000 万桶。10 年期固定价格供给合约在 OTC 市场已经交易了许多年。这是一种互换合约，以固定价格的原油交换浮动价格的原油。

20 世纪 70 年代原油价格高度波动。1973 年的中东战争引起原油价格上涨到 3 倍。70 年代后期，伊朗国王被推翻，使得原油价格再次上涨。这些事变使得原油供给商和使用者意识到，他们需要更多复杂的工具来管理原油价格风险。20 世纪 80 年代，OTC 市场和交易所场内市场中都开发了此类产品以满足用户需要。

OTC 市场中，事实上存在基于普通股和股票指数的任何衍生证券，而现在存在基于原油的任何衍生证券。互换、远期以及期权合约非常受欢迎。合约有时以现金结算，有时也以实际交割（即交割原油）来结算。

场内交易合约也非常盛行。纽约商品交易所和伦敦国际石油交易所中交易着很多原油期货以及期货期权合约。一些期货合约以现金结算，而其他一些以实物交割结算。例如，IPE 的布伦特原油期货基于布伦特指数价格进行现金结算。纽约商品交易所的轻质原油期货以实物交割结算。上述两种合约中，每份合约的标的原油数量为 1 000 桶。纽约商品交易所中也广泛交易基于两个精炼石油产品的合约：民用燃料油和汽油。以上两种合约中，每份合约的交割规模为 42 000 加仑。

#### 天 然 气

世界的天然气行业经历了解除管制到消除政府垄断的一个历程。天然气的供给商并不一定是天然气的生产商。因此，供给商们面临解决每日天然气需求的问题。

一个典型的 OTC 合约中，需要以近似相同的速率在 1 个月内交割指定数量的天然气。场外市场中交易着各类远期、期权以及互换合约。天然气卖方通常

有责任通过管道把天然气输送到指定地点。

NYMEX 中交易着一种天然气合约，交割规模为 100 亿英热单位。交易该合约的时候，如果没有平仓，则需要进行实际交割，在交割月期间以近似相同的速率把天然气输送到路易斯安那的指定中心。伦敦的 IPE 中也交易类似的合约。

## 电 力

电力并不是常规的商品，因为它不易存储。<sup>4</sup>某一时刻某一地区的最大供给电力取决于该地区所有电厂的最大生产能力。美国有 140 个所谓的“控制区”。首先在一个控制区匹配需求和供给，剩余电力往其他控制区卖出。这些剩余电力组成电力的批发市场。一个控制区往另一个控制区出售电力的能力取决于两个地区之间管道的输送能力。从一个地区到另一个地区的输送发生输送成本，管道业主收取输送费用，而且输送过程中通常有一些能源损失。

电力的一个主要用途在空调系统。因此，电力的需求以及电力的价格在夏天比冬天要更高。由于电力的非存储性，即期价格偶尔会发生大幅度变化。夏季高温会使即期价格在短期限内上升最多达到 1 000%。

和天然气行业一样，电力行业也经历了解除管制到消除政府垄断的一个历程。与此同时，电力衍生品市场也一直在发展。NYMEX 中交易基于电力价格的期货合约，在 OTC 市场中活跃地交易远期、期权和互换合约。一个典型的合约（场内交易的或场外交易的）中一方可以在某一特定月份在指定地点以指定价格接收指定数量的兆瓦时。一个 5×8 合约中，在指定月份非高峰时段（晚 11 点至早 7 点），每周中 5 天（星期一到星期五），接收电力。一个 5×16 合约中，在指定月份高峰时段（早 7 点至晚 11 点），每周中 5 天，接收电力。一个 7×24 合约中，在指定月份的每天 24 小时都接收电力。期权合约中可以每日执行或每月执行。每日执行的情形中，期权持有者可以选择在月中的每一天（以每日通告方式）以指定执行价格接收指定数量的电力。每月执行的情形中，期权持有者在每月开始的时候选择是否在这一整个月内以指定执行价格接收电力。

电力和天然气市场中一个有趣的合约是所谓的振荡期权（swing option 或 take-and-pay option）。该合约中规定了月中每天的或整月期间的，期权持有者能以某一价格购买的最低或最高电力数量。期权持有者可以改变月间购买电力的速率，但是改变次数通常有一个限制。

## 能源定价模型

能源和其他商品价格的现实模型应该包含均值回复和波动率。一种可能的模型是：

---

<sup>4</sup> 有闲置生产能力的发电商有时使用电力来把水抽到水电站的顶部。这样，在未来时刻它们可以再用来生产电力。这是存储电力所能做到的最相近的方式。

$$d\ln S = [\theta(t) - a\ln S]dt + \sigma dz \quad (23.1)$$

其中， $S$ 是能源价格， $a$ 和 $\sigma$ 是常参数。 $\theta(t)$ 捕捉季节性和价格趋势。第31章中我们将说明如何从期货价格估计 $\theta(t)$ ，并对方程(23.1)的模型构建三叉树图。参数 $a$ 和 $\sigma$ 可从历史数据估计得出。

不同种类能源的参数 $a$ 和 $\sigma$ 是不同的。对于原油，方程(23.1)中的均值回复参数 $a$ 约为0.5，波动率参数 $\sigma$ 约为20%；对于天然气， $a$ 约为1.0， $\sigma$ 约为40%；对于电力， $a$ 一般在10~20之间， $\sigma$ 一般在100%~200%之间。电力价格的季节性因素非常高。<sup>5</sup>

## 能源生产商如何对冲风险

能源生产商面临的风险由两个部分组成。一个是价格风险，另一个是数量风险。虽然价格的调整反映数量变化，但两者之间的关系并不完美，能源生产商在考虑套期保值策略的时候，应该把两个因素都要考虑进来。价格风险可用本节中讨论的能源衍生品合约对冲。数量风险可用前一节的气象衍生品来对冲。

定义：

$Y$ : 一个月的利润

$P$ : 该月平均能源价格

$T$ : 该月的相关温度变量 (HDD 或 CDD)

能源生产商可以利用历史数据进行回归得到最优拟合直线：

$$Y = a + bP + cT + \epsilon$$

其中， $\epsilon$ 是误差项。那么，能源生产商在该月的套期保值策略是，持有 $-b$ 份能源远期或期货合约头寸和 $-c$ 份气象远期或期货合约头寸。该关系式也可用来分析其他期权策略的有效性。

## 23.4 保险衍生品

当衍生品合约用于套期保值目的的时候，这些合约和保险合约有很多类似的特征。两种合约都是被设计为当不好事件发生时，提供相应的保护。很多保险公司设立子公司来交易衍生品，并且很多保险公司的行为类似于投资银行，这并不奇怪。

传统上，保险公司以再保险方式对冲它对巨灾(CAT)风险(如飓风、地震)的暴露。再保险合约可以有很多形式。假设一家保险公司对于加利福尼亚发生地

---

<sup>5</sup> 关于能源产品即期价格行为的完整讨论，参见 D. Pilipovic, *Energy Risk*, New York: McGraw-Hill, 1997.

震这一风险的暴露为 1 亿美元，它想把这一暴露限制在 3 000 万美元。一种方法是每年签订补偿 70% 损失的再保险合约。如果某年加利福尼亚地震带来的损失为 5 000 万美元，则该公司的损失只有  $0.3 \times 5$ ，即 1 500 万美元。另一种更为流行的方法可以使再保险费降低，其中购买一系列包括所谓的分段补偿（excess cost layer）的再保险合约。第一个分段对 3 000 万~4 000 万美元的损失提供补偿；第二个分段对 4 000 万~5 000 万美元的损失提供补偿；如此等等。每个再保险合约被称为额外损失（excess-of-loss）再保险合约。再保险人卖出了基于总损失的牛市价差期权。这是一个执行价格等于处于低端分段下限的看涨期权多头和一个执行价格等于处于高端分段上限的看涨期权空头。<sup>6</sup>

传统上，CAT 再保险的资金提供者为再保险公司和劳埃德辛迪加（具有无限责任的富人财团）。近几年中，行业中的状况是再保险需求超过了这些传统的供给能力。人们开始寻求新的方法，研究如何利用资本市场提供再保险。给整个行业敲响警钟的一个事件是 1992 年的 Andrew 飓风。它导致了佛罗里达州的保险支付高达 150 亿美元，这超过了佛罗里达州在前 7 年累计收取的相关保险费。如果 Andrew 飓风还袭击了迈阿密，估计保险损失会超过 400 亿美元。Andrew 飓风和其他一些巨灾事件引起了保险/再保险费的上涨。

CBOT 开发了场内交易的保险期货合约，但是没有取得多大成功。OTC 市场中出现了很多可以替代传统再保险的产品。最流行的是 CAT 债券。这是一家保险公司的某个子公司发行的债券，它支付的利息率比较高。债券持有者收取超额利率的同时，需要同意提供额外损失再保险合约。根据 CAT 债券中的条款，利息或本金（或两者的全部）有时可以用来补偿损失。考虑上面的例子中，对加利福尼亚地震引起的损失在 3 000 万~4 000 万美元的状况，保险公司想寻求相应的保护。该保险公司可以发行总本金为 1 000 万美元的 CAT 债券。当加利福尼亚地震引起的公司损失超过 3 000 万美元的时候，债券持有者可能会失去一些或全部债券本金。另一种覆盖这一分段补偿的方法是，该保险公司可以发行更大量的债券，那么只有债券持有者的利息处于风险中。

一般地，CAT 债券超过正常利率的概率比较高，而发生高损失的概率比较低。投资者们为什么对这样的金融工具感兴趣呢？这是因为 CAT 风险和市场收益中间不存在统计学上的相关性。<sup>7</sup> 因此，投资者们愿意把 CAT 债券附加到他们的证券组合里面。这种工具没有系统风险，因此它们的总风险可以用大额证券组合来完全分散化。如果一个 CAT 债券的预期收益大于无风险利率（一般是这样的），那么它有潜力改进风险—收益权衡关系。

---

<sup>6</sup> 有时，再保险合约也会对超过特定水平的损失提供一次性付款。那么，再保险人等于出售了基于该损失的现金或无价值两值看涨期权。

<sup>7</sup> 参见 R. H. Litzenberger, D. R. Beaglehole and C. E. Reynolds, "Assessing Catastrophe Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class," *Journal of Portfolio Management*, Winter (1996): 76-86.

## 小 结

本章说明了在风险管理中，衍生品市场开发了很多创新产品来满足市场参与者们的需求。

气象衍生品当中的两个度量方式 HDD 和 CDD，描述某一月的气温状况。场内交易和场外交易的衍生品用上述两个度量方式来定义衍生品的损益。毫无疑问，随着气象衍生品市场的发展，我们很可能看到基于降雨、降雪以及类似变量的衍生品合约越来越普遍。

能源市场中，石油衍生品在一段时间内占据了重要地位，它帮助石油生产商和消费者管理价格风险。天然气和电力衍生品诞生的时间比较晚。当它们的市场中解除管制并取消政府垄断之后，风险管理中，这类衍生品变得非常重要。

保险衍生品开始成为替代传统的再保险方式，保险公司可以用该类衍生品管理巨灾事件的风险（如飓风或地震）。毫无疑问，随着市场的发展，我们很可能将看到其他种类的保险（如人寿保险和汽车保险）也被证券化。

气象、能源和保险衍生品的共同性质是标的变量的变化百分比和市场收益之间没有多少相关性。这说明，我们可以利用历史数据计算预期损益并以无风险利率贴现，这样就能得到此类衍生品的价值。

## 参考读物

### *On Weather Derivatives*

- Arditti, F., L. Cai, M. Cao, and R. McDonald, "Whether to Hedge," *Risk*, Supplement on Weather Risk (1999): 9–12.
- Cao, M., and J. Wei, "Weather Derivatives Valuation and the Market Price of Weather Derivatives," *Journal of Futures Markets*, 24, 11 (November 2004): 1065–89.
- Hunter, R., "Managing Mother Nature," *Derivatives Strategy*, February (1999).

### *On Energy Derivatives*

- Clewlow, L., and C. Strickland, *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*, Lacima Group, 2000.
- Eydeland, A., and H. Geman, "Pricing Power Derivatives," *Risk*, October (1998): 71–73.
- Joskow, P., "Electricity Sectors in Transition," *The Energy Journal*, 19 (1998): 25–52.
- Kendall, R., "Crude Oil: Price Shocking," *Risk* Supplement on Commodity Risk, May (1999).

### *On Insurance Derivatives*

- Canter, M. S., J. B. Cole, and R. L. Sandor, "Insurance Derivatives: A New Asset Class for the Capital Markets and a New Hedging Tool for the Insurance Industry," *Journal of Applied Corporate Finance*, Autumn (1997): 69–83.
- Froot, K. A., "The Market for Catastrophe Risk: A Clinical Examination," *Journal of Financial Economics*, 60 (2001): 529–71.
- Froot, K. A., *The Financing of Catastrophe Risk*. University of Chicago Press, 1999.
- Geman, H., "CAT Calls," *Risk*, September (1994): 86–89.
- Hanley, M., "A Catastrophe Too Far," *Risk* Supplement on Insurance, July (1998).
- Litzenberger, R. H., D. R. Beaglehole, and C. E. Reynolds, "Assessing Catastrophe Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class," *Journal of Portfolio Management*, Winter (1996): 76–86.

## 问题和习题

- 23.1 请说明 HDD 和 CDD 的含义。
- 23.2 请说明典型的天然气远期合约的结构。
- 23.3 请说明估值一个衍生品时利用历史数据方法和风险中性方法之间的区别。什么情况下，两种方法给出的答案相同呢？
- 23.4 假设 7 月中每天的最低温度为 68 华氏度，最高温度为 82 华氏度。一个基于 7 月累计 CDD 的看涨期权的执行价格为 250，支付速率为每一度日数 \$5 000。请问该期权的损益为多少？
- 23.5 请解释电力的价格比其他能源价格波动更高的原因。
- 23.6 为什么对气象衍生品和 CAT 债券的定价，使用历史数据方法更为合理？
- 23.7 请解释这句话：“HDD 和 CDD 可视为基于气温的期权的损益。”
- 23.8 假设我们知道 50 年的气温数据。请仔细说明，对基于某一特定月份的累计 CDD 的远期合约，我们应该使用什么估值过程。
- 23.9 石油的 1 年期远期价格将高于还是低于即期价格的波动率？请解释你的答案。
- 23.10 价格的波动率很高，均值回复的速率也高的能源的性质是什么？请给出这样的一种能源种类。
- 23.11 一个能源生产商应该如何利用衍生品市场对冲风险？
- 23.12 请解释每日执行的基于 2006 年 5 月的电力 5x8 期权合约的运作方式。请解释每月执行的基于 2006 年 5 月的电力 5x8 期权合约的运作方式。请问哪个合约的成本更高？
- 23.13 请解释 CAT 债券的运作方式。
- 23.14 考虑两个息票率、价格和期限相同的债券。其中一个是 B 级公司债券，另外一个是 CAT 债券。运用历史数据方法得到的结果是，两个债券在它们的有效期内的每年预期损失相同。请问你会给证券组合经理推荐哪个债券？并解释你的原因。

## 课后练习

- 23.15 一家保险公司的一类损失近似地服从均值为 1.5 亿美元、标准差为 5 000 万美元的正态分布（假设风险中性世界中的损失和现实世界中的损失没有区别）。1 年期无风险利率为 5%。请估计以下两个合约的成本：
  - (a) 一个合约中，1 年内按 60% 比例补偿保险公司的损失。
  - (b) 一个合约中，1 年内的损失如果超过 2 亿美元就得到 1 亿美元的支付。

## 关于模型和数值过程的进一步讨论

到现在为止，我们为期权估价的模型都是基于 Black-Scholes 模型中标的资产价格行为的几何布朗运动模型，而且我们使用的数值过程比较直观。本章中我们将介绍一系列新的模型，并解释在一些特殊情况下如何对数值过程做相应调整。

第 16 章中我们解释了交易者们使用波动率集合来克服几何布朗运动模型当中的不足之处。估价标准型期权时，波动率集合可以决定在 Black-Scholes 模型中需要使用的恰当的波动率。不幸的是，它很少能给出适用于第 22 章中奇异期权定价公式的波动率。假设估价 1 年期执行价格为 \$40 的标准型期权时，波动率集合给出的恰当的波动率为 27%。而这一波动率可能完全不适合使用于 1 年期执行价格为 \$40 的障碍期权（或一些其他奇异期权）的定价过程。

本章第一部分中讨论可以用来定价奇异期权，也能定价标准型期权的一系列可以替代几何布朗运动模型的其他模型。这些其他模型当中，相应的资产价格的行为过程比几何布朗运动更接近标准型期权的市价。我们也更有理由相信它们可以用来估值奇异期权。

本章第二部分中我们把数值过程的讨论进行扩展。我们解释如何用树图来估值某些类型的路径依赖衍生证券。我们将讨论以数值方法估值障碍期权时，存在哪些特殊问题并如何处理这些问题。最后，我们略述对两个相关变量建立树图的一些其他方法，也给出如何在具有提前执行可能的衍生证券估值过程中使用蒙特卡罗模拟。

在前面的几个章节中，我们给出了基于支付红利收益率  $q$  的资产的衍生证券的相关结论。对于股票指数期权， $q$  应该等于指数的收益率；对于货币期权， $q$  应该等于外国无风险利率；对于期货期权， $q$  应该是本国无风险利率。

### 24.1 Black-Scholes 的几种替代模型

Black-Scholes 模型中假定一个连续变化的资产价格在未来任何时刻都服从对数正态分布。我们也可以假定很多其他的资产价格行为过程。一种是保留资产价格连续变化的性质，但假定不同于几何布朗运动的一个随机过程。另一种资产价格过程是在连续变化过程中含有跳跃过程。还有一种资产价格过程是所有资产价

格都遵循跳跃过程。这一章我们将考虑所有这三种类型的过程。资产价格连续变化的模型被称为扩散模型 (diffusion model)；资产价格过程既有跳跃过程也有连续变化过程的模型被称为混合跳跃—扩散模型 (mixed jump-diffusion model)；资产价格遵循一种跳跃过程的模型被称为纯跳跃模型 (pure jump model)。这类过程被称为 Levy 过程 (Levy process)。<sup>1</sup>

## 方差的弹性为常数的模型

一种可以替代 Black-Scholes 的模型是方差的弹性为常数的 CEV 模型。这是一种扩散模型，其中股票价格  $S$  的风险中性过程如下：

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma S^\alpha dz$$

其中， $r$  为无风险利率， $q$  为红利收益率， $dz$  是一个维纳过程， $\sigma$  是波动率参数， $\alpha$  是一个正的常数。<sup>2</sup>

当  $\alpha = 1$  时，CEV 模型就是我们之前一直使用的几何布朗运动模型。当  $\alpha < 1$  时，随股票价格下降波动率增加。这种情况下股票价格的概率分布类似于观察到的左尾部较厚、右尾部较薄的股价分布（参见图 16.4）。<sup>3</sup> 当  $\alpha > 1$  时，随股票价格上涨波动率增加。这种情况下股票价格的概率分布的右尾部比较厚，左尾部相对薄。对应的波动率微笑中隐含波动率是执行价格的增函数。这样的波动率微笑有时在期货期权中能够观察到（参见课后练习 14.46）。

CEV 模型中，欧式看涨期权和看跌期权的定价公式为

$$\begin{aligned} c &= S_0 e^{-qT} [1 - \chi^2(a, b + 2, c)] - K e^{-rT} \chi^2(c, b, a) \\ p &= K e^{-rT} [1 - \chi^2(c, b, a)] - S_0 e^{-qT} \chi^2(a, b + 2, c) \end{aligned}$$

当  $0 < \alpha < 1$  时，有

$$\begin{aligned} c &= S_0 e^{-qT} [1 - \chi^2(c, -b, a)] - K e^{-rT} \chi^2(a, 2 - b, c) \\ p &= K e^{-rT} [1 - \chi^2(a, 2 - b, c)] - S_0 e^{-qT} \chi^2(c, -b, a) \end{aligned}$$

当  $\alpha > 1$  时，有

$$a = \frac{[K e^{-(r-q)T}]^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 v}, \quad b = \frac{1}{1-\alpha}, \quad c = \frac{S^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 v}$$

其中

$$v = \frac{\sigma^2}{2(r-q)(\alpha-1)} [e^{2(r-q)(\alpha-1)T} - 1]$$

<sup>1</sup> 用粗略的描述，Levy 过程是一种具有稳态独立增量的连续时间随机过程。

<sup>2</sup> 参见 J. C. Cox and S. A. Ross, “The Valuation of Option for Alternative Stochastic Processes,” *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976), 145–66.

<sup>3</sup> 原因如下：随着股价下降，波动率增加，股价很可能变得更低；当股价上升，波动率减少，股价变得更高的可能性降低。

并且  $\chi^2(z, k, v)$  是一个服从非中心卡方分布（非中心参数  $v$  以及自由度  $k$ ）的变量小于等于  $z$  的累计概率。作者网页的技术说明 12 中给出了计算  $\chi^2(z, k, v)$  的方法。

CEV 模型非常适合用来定价奇异股票期权。通过把标准型期权模型价格和市场价格之差的平方和最小化，这种价格的最优拟合可以确定模型参数。

## Merton 混合跳跃—扩散模型

Merton 提出了一种模型，其中结合了连续变化和跳跃。<sup>4</sup> 定义：

$\lambda$ ：平均年跳跃次数

$k$ ：平均跳跃幅度占资产价格的百分比

假定跳跃幅度的百分比例从该模型的概率分布中抽取。

在  $\Delta t$  时间段内发生跳跃的概率是  $\lambda \Delta t$ 。因此，跳跃引起的资产价格的平均增长率为  $\lambda k$ 。资产价格的风险中性过程是：

$$\frac{dS}{S} = (r - q - \lambda k)dt + \sigma dz + dp$$

其中  $dz$  是维纳过程， $dp$  是引发跳跃的泊松过程， $\sigma$  是几何布朗运动中的波动率。 $dz$  和  $dp$  的过程被假定为是相互独立的。

Merton 模型的一个重要的特殊情况是，跳跃幅度百分比的对数服从正态分布。

假设该正态分布的标准差为  $s$ 。Merton 给出一个欧式期权价格可以写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T} (\lambda' T)^n}{n!} f_n$$

其中  $\lambda' = \lambda(1 + k)$ 。变量  $f_n$  是红利收益率为  $q$  时的 Black-Scholes 期权价格，方差率为

$$\sigma^2 + \frac{ns^2}{T}$$

无风险利率为

$$r - \lambda k + \frac{n\gamma}{T}$$

其中  $\gamma = \ln(1 + k)$ 。

相比 Black-Scholes 中的概率分布，该模型的概率分布左尾部和右尾部都更厚。该模型可以用来定价货币期权。和 CEV 模型中一样，通过把模型价格和市场价格之差的平方和最小化，可以确定该模型的参数。

---

<sup>4</sup> 参见 R. C. Merton, “Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous,” *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976), 125–44.

Merton 模型的另外一种特殊形式是我们在第 21.9 节中定价可转换债券时使用的模型。这种情况下，跳跃总是向下的，且等于当前股票价格（参见习题 24.5）。

## Variance-Gamma 模型

十分常见的纯跳跃模型的一个例子是 Variance-Gamma 模型。<sup>5</sup> 我们首先定义变量  $g$  为一个服从均值为 1、方差率为  $v$  的 gamma 过程的变量在期限  $T$  内的变化。gamma 过程是一种小幅度跳跃经常发生、大幅度跳跃偶尔发生的纯跳跃过程。 $g$  的概率密度为

$$\phi(g) = \frac{g^{T/v-1} e^{-g/v}}{v^{T/v} \Gamma(T/v)}$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  表示 gamma 函数。这可用 Excel 的 GAMMADIST( $\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot$ ) 函数来计算。其中第一个自变数为  $g$ ，第二个为  $T/v$ ，第三个为  $v$ ，第四个为“是”或“否”。“是”给出的结果是累计概率分布函数，“否”给出的结果是我们已经提过的概率密度函数。

和之前一样，定义  $S_T$  为  $T$  时刻的资产价格， $S_0$  为当前的资产价格， $r$  为无风险利率， $q$  为红利收益率。在风险中性世界，Variance-Gamma 模型的  $\ln S_T$  基于  $g$  的条件概率分布是正态分布。条件均值为

$$\ln S_0 + (r - q)T + \omega + \theta g$$

且条件函数的标准差为

$$\sigma \sqrt{g}$$

其中

$$\omega = \frac{T}{v} \ln(1 - \theta v - \sigma^2 v / 2)$$

Variance-Gamma 模型有三个参数： $v$ 、 $\sigma$  以及  $\theta$ 。<sup>6</sup> 参数  $v$  是 gamma 过程的方差率， $\sigma$  是波动率， $\theta$  是偏态系数。当  $\theta = 0$  时， $\ln S_T$  是中心对称的；当  $\theta < 0$  时， $\ln S_T$  是负偏的（例如股票就是如此）；当  $\theta > 0$  时， $\ln S_T$  是正偏的。

假设我们要使用 Excel 抽取 1 万个 Variance-Gamma 模型中，0~ $T$  时刻之间的资产价格变化的随机样本。首先，我们分别设定单元 E1、E2、E3、E4、E5、E6 以及 E7 分别等于  $T$ 、 $v$ 、 $\theta$ 、 $\sigma$ 、 $r$ 、 $q$  以及  $S_0$ 。我们再设定 E8 为  $\omega$ ，它被定义为：

$$= \$E\$1 * LN(1 - \$E\$3 * \$E\$2 - \$E\$4 * \$E\$4 * \$E\$2 / 2) / \$E\$2$$

<sup>5</sup> 参见 D. B. Madan, P. P. Carr and E. C. Chang, "The Variance-Gamma Process and Option Pricing," *European Finance Review*, 2 (1998): 7–105.

<sup>6</sup> 注意，从现实世界切换到风险中性世界时，所有这些参数倾向于发生变化。这与波动率不变的纯扩散模型情况相反。

接着可以执行以下几个步骤：

1. 我们用 GAMMAINV 函数抽取  $g$  值的样本。我们设定单元 A1、A2、…、A10000 分别为

$$= \text{GAMMAINV}(\text{RAND }(), \$E\$1/\$E\$2, \$E\$2)$$

2. 对于每个  $g$  值，我们从均值为  $\theta g$ 、标准差为  $\sigma \sqrt{g}$  的正态分布抽取样本  $z$ 。为了执行这一步骤，设定单元 B1 为

$$= A1*\$E\$3 + \text{SQRT}(A1)*\$E\$4*\text{NORMSINV}(\text{RAND }())$$

类似地设定单元 B2、B3、…、B10000。

3. 股票价格  $S_T$  的计算公式为

$$S_T = S_0 \exp[(r - q)T + \omega + z]$$

如果我们设定 C1 为

$$= \$E\$7*\text{EXP}((\$E\$5 - \$E\$6)*\$E\$1 + B1 + \$E\$8)$$

类似地设定单元 C2、C3、…、C10000。那么在单元 C1、C2、…、C10000 中产生了  $S_T$  的概率分布中抽取的随机样本。

图 24.1 给出了当  $S_0 = 100$ ,  $T = 0.5$ ,  $v = 0.5$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $\sigma = 0.2$  以及  $r = q = 0$  时，利用 Variance-Gamma 模型得到的  $S_T$  的概率分布。作为比较，该图中也给出了几何布朗运动给出的概率分布，其中波动率  $\sigma$  为 0.2 (即 20%)。虽然图 24.1 中显示得不是很清楚，Variance-Gamma 分布比几何布朗运动给出的对数正态分布尾部

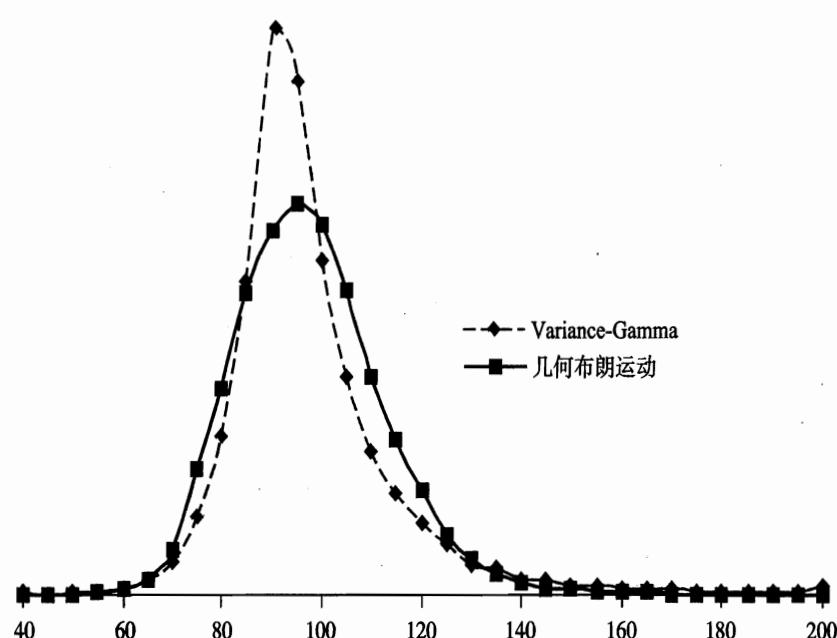


图 24.1 Variance-Gamma 过程以及几何布朗运动给出的分布

更厚。

一种描述 Variance-Gamma 分布的方式是， $g$  定义了  $T$  时刻新信息发生之时的比率。如果  $g$  比较大，则大量信息发生，我们在第 2 步骤中抽取样本的正态分布的均值和方差都相对较高。如果  $g$  比较小，则相对较少信息发生，抽取样本的正态分布的均值和方差都相对较低。参数  $T$  是一般的时间测度， $g$  有时被称为是经济时间或根据信息流调整的时间测度。

Madan 等人 (1998) 给出了不完全解析的欧式期权定价公式。Variance-Gamma 模型通常给出  $U$  形波动率微笑。该波动率微笑并不一定要中心对称。短期限的波动率微笑非常显著，但是长期限的波动率微笑越来越不明显。该模型可以适用于股票或外汇的标准型期权定价。

## 24.2 随机波动率模型

Black-Scholes 模型中假设波动率是常数。实际上，如我们在第 19 章看到的一样，波动率随着时间变化。Variance-Gamma 模型通过参数  $g$  反映这样的波动率变化。较低的  $g$  值相应于少量信息的发生以及低的波动率；较高的  $g$  值相应于多量信息的发生以及高的波动率。

有一种可以替代 Variance-Gamma 模型的模型，其中波动率变量的行为过程可以外生地指定。首先假设几何布朗运动的波动率参数是已知的时间函数。则资产价格的风险中性过程为

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma(t)Sdz \quad (24.1)$$

如果假定方差率等于期权有效期内的平均方差率（参见习题 24.6），那么，Black-Scholes 模型是正确的。方差率就是波动率的平方。假设 1 年之中，一个股票在前半年的波动率为 20%，后半年的波动率为 30%。平均方差率为：

$$0.5 \times 0.20^2 + 0.5 \times 0.30^2 = 0.065$$

所以在 Black-Scholes 模型中使用 0.065 的方差率是正确的。相应的波动率为  $\sqrt{0.065} = 0.255$ ，即 25.5%。

公式 (24.1) 中假设一个资产的瞬态波动率是可以完全预测的。实际上，波动率随机变化。因此，我们要建立包含两个随机变量（股票价格以及股票价格的波动率）的复杂模型。

研究者们使用的一种模型是

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sqrt{V} dz_s \quad (24.2)$$

$$dV = a(V_L - V)dt + \xi V^\alpha dz_V \quad (24.3)$$

其中  $a$ 、 $V_L$ 、 $\xi$  以及  $\alpha$  是常数； $dz_s$  和  $dz_V$  遵循维纳过程。模型中的变量  $V$  是资产的方差率。方差率的漂移以比率  $a$  回复到  $V_L$  水平。

Hull 和 White 给出了，当波动率是随机变化，但与资产价格不相关的时候，一个欧式期权的价格是基于期权有效期内平均方差率的概率分布，对 Black-Scholes 价格求积分所得到的值。<sup>7</sup>那么，欧式看涨期权的价格为

$$\int_0^\infty c(\bar{V})g(\bar{V})d\bar{V}$$

其中， $\bar{V}$ 是方差率的平均值， $c$ 是以 $\bar{V}$ 的函数表示的 Black-Scholes 价格， $g$ 是风险中性世界中的 $\bar{V}$ 的概率密度函数。这一结果可以用来解释 Black-Scholes 模型倾向于高估处于（或接近于）平价状态的期权价格和低估处于深度实值或虚值状态的期权价格。这一模型符合我们观察到的货币期权隐含波动率的模式（参见 16.2 节）。

资产价格和波动率相关的时候，情况变得更为复杂。可以利用蒙特卡罗模拟得到期权价格。对于  $\alpha = 0.5$  的特殊情形，Hull 和 White 给出了一种级数展开，Heston 给出了解析解。<sup>8</sup>当波动率和资产价格负相关的时候，我们得到的隐含波动率的模式和权益性期权的观测情况相符合（参见 16.3 节）。<sup>9</sup>

第 19 章中讨论了指数加权移动平均模型 EWMA 和 GARCH(1,1) 模型。它们也可以用来描述随机波动率模型。Duan 提出，可以基于 GARCH(1,1) 模型给出一个内部一致的期权的定价模型<sup>10</sup> [关于 GARCH(1,1) 和随机波动率模型的等价关系，参见习题 19.14]。

随机波动率模型可以适用于标准型期权的定价，也可以适用于奇异期权的定价。<sup>11</sup>对于有效期小于等于 1 年的期权，随机波动率在定价中对于绝对项的影响比较小（但是对于百分比项，定价深度虚值期权时这种影响可能比较大）。随着期权有效期变长，这种影响也越来越大。一般来说，随机波动率对于 Delta 对冲表现的影响是比较大的。交易员们了解这些情况，并且如第 15 章中的讨论，通过计算 Vega 来监测他们对于波动率的暴露。

<sup>7</sup> 参见 J. C. Hull and A. White, “The Pricing of Option on Assets with Stochastic Volatilities,” *Journal of Finance*, 42 (June 1987), 281–300.这个结果独立于方差率所遵循的过程。

<sup>8</sup> 参见 J. C. Hull and A. White, “An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility,” *Advances in Futures and Options Research*, 3 (1988), 27–61; S. L. Heston, “A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options,” *Review of Financial Studies*, 6, 2 (1993), 327–43.

<sup>9</sup> 脚注 3 中给出了其中原因。

<sup>10</sup> 参见 J.-C. Duan, “The GARCH Option Pricing Model,” *Mathematical Finance*, vol.5 (1995), 13–32; J.-C. Duan, “Cracking the Smile” *RISK*, vol. 9 (December 1996), 55–59.

<sup>11</sup> 参见 J. C. Hull and W. Suo, “A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 2 (June 2002): 297–318.

## 24.3 IVF模型

到现在为止，模型的参数的选择依据是，在任一给定日它们能给出标准型期权价格的近似值。金融机构有时要使用一种模型来给出这些期权价格完全相同的值。<sup>12</sup> 1994年，Derman和Kani、Dupire、Rubinstein开发了这类模型。该模型被称为隐含波动率函数（implied volatility function, IVF）模型或隐含树图（implied tree）模型。<sup>13</sup> 不管波动率集合是什么形式，该模型可以给出与任一天观察的欧式期权价格完全相同的拟合值。

该模型中资产价格的风险中性过程是

$$dS = [r(t) - q(t)]Sdt + \sigma(S, t)Sdz$$

其中， $r(T)$  是  $t$  时刻到期的合约的瞬态远期利率， $q(t)$  是以时间的函数表示的红利收益率。波动率  $\sigma(S, t)$  是  $S$  和  $t$  的函数，该函数的选择依据是，所有欧式期权的模型价格能和市场价格完全一致。Dupire、Andersen 和 Brotherton-Ratcliffe 都提出了  $\sigma(S, t)$  的解析计算公式：<sup>14</sup>

$$[\sigma(K, T)]^2 = 2 \frac{\partial c_{\text{mkt}}/\partial T + q(T)c_{\text{mkt}} + K[r(t) - q(T)]\partial c_{\text{mkt}}/\partial K}{K^2(\partial^2 c_{\text{mkt}}/\partial K^2)} \quad (24.4)$$

其中， $c_{\text{mkt}}(K, T)$  是执行价格为  $K$ 、有效期为  $T$  的欧式看涨期权的市场价格。如果市场中可以观测足够多的欧式看涨价格，该方程可以用来估计函数  $\sigma(S, t)$ 。<sup>15</sup>

Andersen 和 Brotherton-Ratcliffe 一起使用方程 (24.4) 和隐含有限差分模型来执行这一模型。另一种执行模型的方法是 Derman、Kani 和 Rubinstein 提出的隐含树图方法。该方法中建立与期权市价一致的资产价格树图。

实际应用中，IVF 模型根据标准型期权价格每日进行再校订。该模型可以使奇异期权的定价和标准型期权定价一致。如第 16 章中的讨论，标准型期权可以决定所有未来时刻资产价格的风险中性概率分布。那么，IVF 模型也可以给出所有未来时刻的资产价格的准确的风险中性概率分布。也就是说，IVF 模型可以正确的定价某个时刻一次性提供损益的期权（例如，all-or-nothing 期权以及资产或无价值期权）。但是，该模型不一定能给出正确的两个或多个时间的资产价格联合分

<sup>12</sup> 这里有一个现实理由。如果银行不使用具有上述特征的模型，隐含的危险是，为该银行工作的交易员们可能会花时间对银行的内部模型进行套利。

<sup>13</sup> 参见 B. Dupire, “Pricing with a Smile,” *Risk*, February (1994): 18–20; E. Derman and I. Kani, “Riding on a Smile,” *Risk*, February 1994: 32–39; M. Rubinstein, “Implied Binomial Trees,” *Journal of Finance*, 49, 3 (July 1994), 771–818.

<sup>14</sup> 参见 B. Dupire, “Pricing with a Smile,” *Risk*, February (1994): 18–20; L. B. G. Andersen 和 R. Brotherton-Ratcliffe “The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite Difference Approach,” *Journal of Computation Finance* 1, No. 2 (Winter 1997/98): 5–37. Dupire 考虑的是  $r$  和  $q$  都为零的情形；Andersen 和 Brotherton-Ratcliffe 考虑了最为一般的情形。

<sup>15</sup> 通常需要平滑波动率集合的观测值。

布。这说明对于如复合期权或障碍期权的奇异期权，该模型给不出正确价格。<sup>16</sup>

## 24.4 路径依赖型衍生证券

我们接下来讨论如何调整第 17 章中的数值过程以处理特殊的估值问题。首先，我们考虑对于路径依赖型衍生证券如何使用树图。

路径依赖型衍生证券（或历史依赖型衍生证券）中损益依附于标的资产价格遵循的路径而不是最终资产价格。亚式期权和回望期权就是路径依赖型衍生证券。如第 22 章所述，亚式期权的损益依附于标的资产的平均价格；回望期权的损益依附于标的资产的最高或最低价格。当不存在解析结果的时候，估值路径依赖型衍生证券的一种方法是蒙特卡罗模拟方法，如第 17 章中所述。在风险中性世界中抽取标的资产的一个随机路径，计算损益，再以无风险利率贴现，就可以计算出衍生证券的样本价值。以这种方式得到衍生证券的很多样本价值之后，计算它们的平均值，就可以得到衍生证券价格的估计值。

用蒙特卡罗模拟方法为路径依赖型期权估值的主要问题是：为获得所需精度水平，所需的计算时间可能过长。另外，路径依赖型美式衍生证券（即有提前执行可能性或者其他选择权的路径依赖型衍生证券）不易处理。在本节我们将说明如何扩展第 17 章所述的二叉树图方法以处理一些路径依赖型衍生证券。<sup>17</sup> 我们提出的这些方法可以处理美式路径依赖型衍生证券，并且在处理欧式路径依赖型衍生证券时比蒙特卡罗方法计算效率更高。

为了使该方法能有效运作，必须满足如下两个条件：

1. 衍生证券的收益依附于某个单一函数  $F$ ， $F$  是标的随机变量所遵循路径的函数
2. 可从  $\tau$  时刻的  $F$  值及在  $\tau + \Delta t$  时刻的标的资产价值计算得出  $\tau + \Delta t$  时刻的  $F$  值

### 利用回望期权来说明

为了说明这一方法，我们对基于无红利支付股票的美式回望看跌期权进行估

---

<sup>16</sup> Hull and Suo 假设了所有衍生品价格取决于一个随机波动率模型，对 IVF 模型进行了测试。他们发现这个模型在定价复合期权的时候表现不错，但在定价障碍期权的时候，时而出现严重误差。参照 J. C. Hull 和 W. Suo, “A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 2 (June 2002): 297–318.

<sup>17</sup> 这个方法由 J. Hull 和 A. White 提出，参见 J. Hull and A. White “Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options,” *Journal of Derivatives*, (Fall 1993), 21–31.

价。<sup>18</sup>若在  $\tau$  时刻执行看跌期权，收益等于时刻  $0 \sim \tau$  之间最高股价超过当前股价的数额。我们假设初始股价为 \$50，则股票价格波动率为每年 40%，无风险利率为每年 10%，期权的总有效期为 3 个月。我们考虑一种三个时间步长的树图。使用常用的符号，即  $S_0 = 50$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.10$ ,  $\Delta t = 0.08333$ ,  $u = 1.1224$ ,  $d = 0.8909$ ,  $a = 1.0084$ , 且  $p = 0.5073$ 。

从而得出图 24.2 所示树图。每个节点上面的数字是股价，每个节点中间一层的数字表示了通向该节点的路径中可能得到的最大股票价格，最下面一层的数字显示了对应于每种可能的最大股价的衍生证券的价值。

树图最后一排节点上衍生证券的价值是由股票价格的最大值减去实际股票价格计算得到的。为说明滚动倒推的方法，假设我们在 A 节点处的股价为 \$50。到目前为止的最高股价或者是 \$56.12 或者是 \$50。首先考虑股票价格为 \$50 的情况。若向上移动，则最高股价为 \$56.12 且衍生证券的价值为 0。若向下移动，则最大股票价格停留在 \$50 且衍生证券的价值变为 \$5.45。假定无提前执行，迄今为止最高股价为 \$50 的衍生证券在 A 处的价值为：

$$(0 \times 0.5073 + 5.45 \times 0.4924)e^{-0.1 \times 0.08333} = 2.66$$

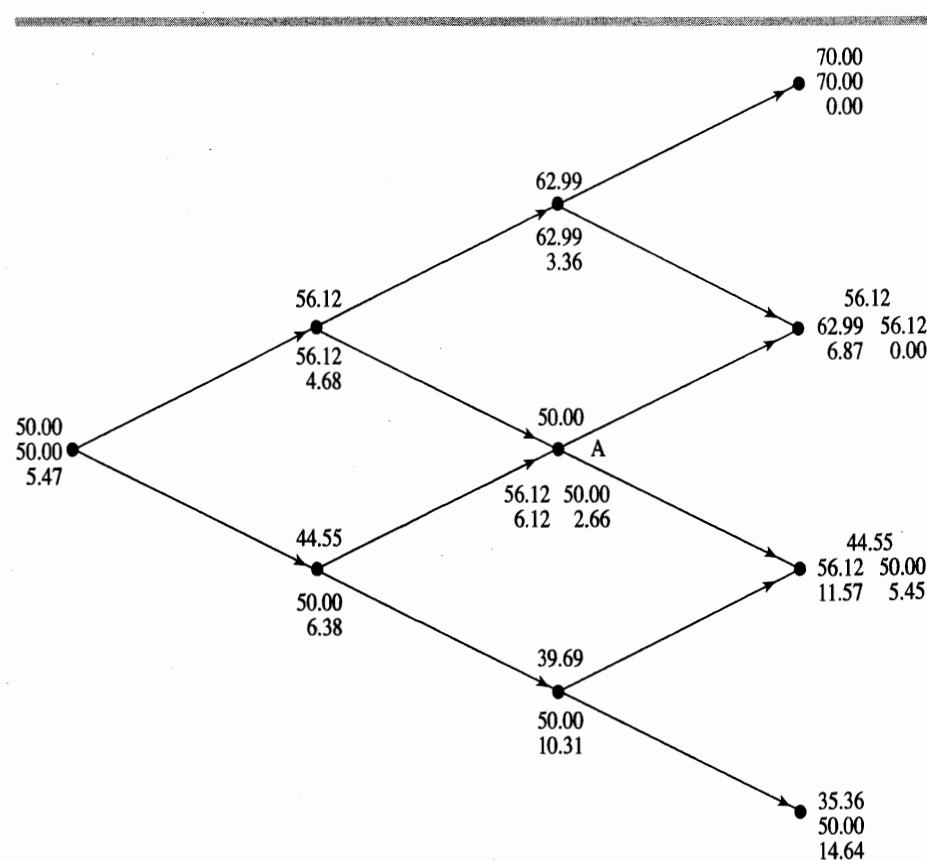


图 24.2 美式回望期权定价的树图

<sup>18</sup>这个例子首先用于说明处理路径依赖型的一般方法。关于估计美式回望期权的价值的更为有效方法，参考作者网站上的技术说明 13。

显然在这种情况下在 A 节点行使期权是不经济的，因为执行期权的收益为零。对于节点 A 处最高股价为 \$56.12 的情况可以进行类似的计算，从而得到无提前执行的衍生证券在节点 A 处的价值为：

$$(0 \times 0.5073 + 11.57 \times 0.4927)e^{0.10 \times 0.08333} = 5.65$$

在这种情况下，提前行使是最佳方案，因为它可以获得 \$6.12 的价值，这是最佳策略。按这种方法沿树图滚动倒推可以得出衍生证券的价值为 \$5.47。

## 一般结论

如果每个节点可能得到的路径函数  $F$  值的数量随时间步长  $n$  的增加不是增加那么快的话，上面所说的方法可用计算机实现。在我们所用的回望期权的例子中，因为可能得到的  $n$  个步长二叉树图节点的最大资产价格值的数量从未比  $n$  大，所以从未出现过任何问题。

幸运的是，此方法可以扩展到每个节点有很多不同路径函数值时的情况。基本思路如下：在一个节点，我们对少数的有代表的  $F$  值进行计算。当计算其他的路径函数的值需要衍生证券的价值时，我们用插值法从已知的值中计算。

第一步是沿树图建立每个节点的路径函数的最小值和最大值。假设在时刻  $\tau + \Delta t$  的路径函数值只依赖于时刻  $\tau$  的路径函数值和时刻  $\tau + \Delta t$  的标的变量的值，时刻  $\tau + \Delta t$  路径函数的最大值和最小值可通过时刻  $\tau$  的节点处的这些值直接计算。第二步是选择每个节点的有代表性的路径函数值。有很多种方法。一个简单的规则是选择最大值、最小值和这两个值之间的相等间距的其他值为代表性路径函数值。随着我们从树图进行滚动倒推，我们为每个有代表性的路径函数值估计衍生证券的值。

我们通过对例 22.2 中的平均价格看涨期权估值来说明计算的性质。我们假设收益依赖于股票价格算术平均值。初始股票价格为 50，执行价格为 50，无风险利率为年利率 10%，股价年波动率为 40%，1 年后到期，树图的时间步长为 20。在这个例子中，二叉树图的参数为  $\Delta t = 0.05$ ,  $u = 1.0936$ ,  $d = 0.9144$ ,  $p = 0.5056$ ,  $1 - p = 0.4944$ 。路径函数为股票价格的算术平均。

图 24.3 说明了树图中一小部分所进行的计算。节点 X 是在时刻 0.2 年时的中心节点（在第四步长的结尾）。节点 Y 和 Z 是从节点 X 出发在时刻 0.25 年所能达到的两个节点。节点 X 的股票价格为 50。向前的推导说明达到节点 X 的最大股票价格平均值为 53.83，最小股票价格平均值为 46.65（在计算平均值时，我们同时包括初始和最终的股票价格）。从节点 X 我们分叉为两个节点 Y 和 Z。节点 Y 的股票价格为 54.68，平均值的上下边界为 47.99 和 57.39。节点 Z 的股票价格为 45.72，平均值的上下边界为 43.88 和 52.48。

我们假设我们已经为每个节点选定了 4 个等步长的平均值作为代表值。这意味着在节点 X 我们考虑平均值 46.65、49.04、51.44、53.83。在节点 Y 我们考虑平均值 47.99、51.12、54.26、57.39。在节点 Z 我们考虑平均值 43.88、46.75、49.61、

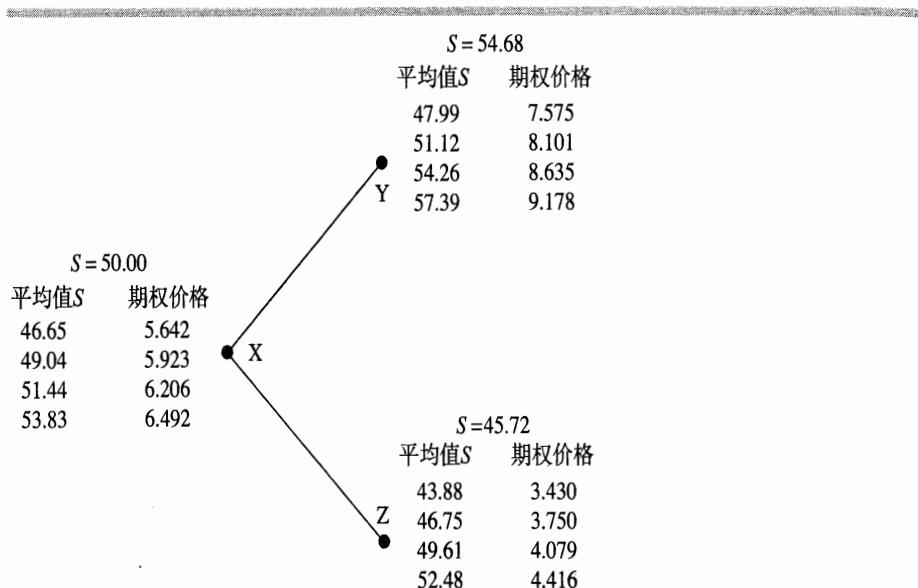


图 24.3 基于算术平均值的期权的估值树图

52.48。我们假设已经使用向后归纳法计算节点 Y 和 Z 可能出现的几个平均值的期权价值。期权价值已经在图 24.3 中给出（例如，在节点 Y，当平均值为 51.12 时的期权价值为 8.101）。

考虑节点 X 当平均值为 51.44 时的计算。如果股票价格向节点 Y 运动，新的平均值为：

$$\frac{5 \times 51.44 + 54.68}{6} = 51.98$$

节点 Y 在此平均值下的衍生证券的价值，可以通过平均值为 51.12 的衍生证券价值和平均值为 54.26 的衍生证券价值进行插值法获得：

$$\frac{(51.98 - 51.12) \times 8.635 + (54.26 - 51.98) \times 8.101}{54.26 - 51.12} = 8.247$$

同样地，如果股票价格向节点 Z 运动，新的平均值为：

$$\frac{5 \times 51.44 + 45.72}{6} = 50.49$$

用插值法计算衍生证券的价值为 4.182。

在节点 X 当平均值为 51.44 时，衍生证券的价值是：

$$(0.5056 \times 8.247 + 0.4944 \times 4.182) e^{-0.1 \times 0.05} = 6.206$$

节点 X 的其他值可用同样的方法获得。当时间为 0.2 年的所有节点的值用这种方法得到后，我们可以转向时间为 0.15 年的节点。

在零时刻整个树图的期权价格为 7.17。随着时间步长的数量和每个节点所考虑的平均值数量的增长，期权的价值收敛于正确答案。在时间步长数为 60，每个

节点有 100 个平均值时，期权价值为 5.58。例 22.2 中的期权价值的近似解析解为 5.62。

这里所述方法的一个主要优点是可以处理美式期权。除了我们在每个节点处为每个节点可能的路径函数值做是否提前执行的检验之外，计算方法与我们所描述的一致（实际上，提前执行的决定通常取决于路径函数的价值和标的物资产的价值）。我们已经考虑过欧式平均价格看涨期权，这里我们考虑美式平均价格看涨期权。如果时间步长有 20 个，每节点有 4 个平均值，所计算的期权价值为 7.77。如果时间步长有 60 个，每节点有 100 个平均值，所计算的期权价值为 6.17。

刚刚描述的方法可广泛用于多种不同的情况。两个必须满足的条件在这一节的开头已经列出。如果在每个节点处使用二次方程而不是线性插值法，可以提高效率。

## 24.5 障碍期权

我们在第 22 章中给出了标准障碍期权的解析解。这里，我们考虑对于没有解析解的障碍期权，如何使用数值过程。

理论上，可以用第 17 章的二叉树图或三叉树图方法为障碍期权估值。考虑一个上升敲出期权。它的估值过程和普通期权的估值过程类似，但是我们在考虑障碍之上的节点时，需要设该期权价值为零。

三叉树图方法的效果比二叉树图要好，但估值过程中收敛还是非常缓慢的。只有用很大量的时间步长才能获得一个精确合理的结果。原因是由于树图设定的障碍与真实的障碍有所不同。<sup>19</sup> 我们定义内部障碍 (inner barrier) 为包含真实障碍在内的那些节点所形成的障碍（即更靠近树图中央），外部障碍 (outer barrier) 为在真实障碍之外的那些节点所形成的障碍（即远离树图中央）。图 24.4 说明了，假设真实障碍为水平时，某个三叉树的内部障碍和外部障碍。通常树图的计算隐含地假设外部障碍为真实障碍，因为障碍条件首先在这些障碍的节点处使用。当时间步为  $\Delta t$  的时候，节点之间的垂直间距为  $\sqrt{\Delta t}$  的阶。这说明由真实障碍和外部障碍之间的不同产生的误差也近似为  $\sqrt{\Delta t}$  的阶。

一种克服这个问题的方法是：

1. 在假设内部障碍是真实障碍下，计算衍生证券的价格
2. 在假设外部障碍是真实障碍下，计算衍生证券的价格
3. 对两个价格使用插值法

另一种克服这个问题的方法是保证节点正好位于障碍上。假设初始股票价格为  $S_0$ ，障碍水平为  $H$ 。在某个三叉树图中，每个节点的资产价格都有三种可能的

---

<sup>19</sup> 关于这一问题的讨论，参见 P. P. Boyle and S. H. Lau，“Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method,” *Journal of Derivatives* 1, 4 (Summer 1994), 6–14.

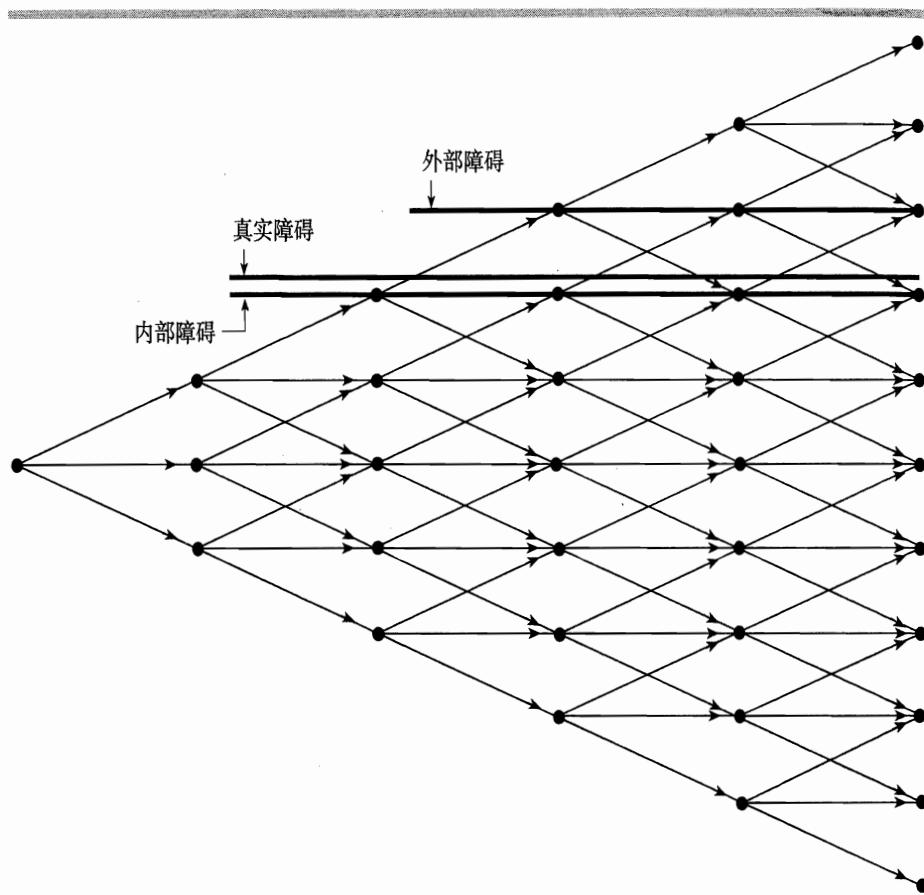


图 24.4 三叉树图中假设的几种障碍

运动：按比例  $u$  上升、不变，按比例  $d$  下降，且  $d = 1/u$ 。我们总可以选择  $u$  使得节点位于两种障碍上。对某个正的或负的整数  $N$ ， $u$  必须满足的条件为：

$$H = S_0 u^N$$

即

$$\ln H = \ln S_0 + N \ln u$$

在第 17.4 节中讨论三叉树图时，建议的  $u$  值为  $e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}$ ，因此  $\ln u = \sigma\sqrt{3\Delta t}$ 。在这里所考虑的情况下，一个好的规则是选择  $\ln u$  使其尽可能地与上面给定条件的值一致。这意味着我们设

$$\ln u = \frac{\ln H - \ln S_0}{N}$$

其中

$$N = \text{int} \left[ \frac{\ln H - \ln S_0}{\sigma\sqrt{3\Delta t}} + 0.5 \right]$$

并且  $\text{int}(x)$  是  $x$  的整数部分。

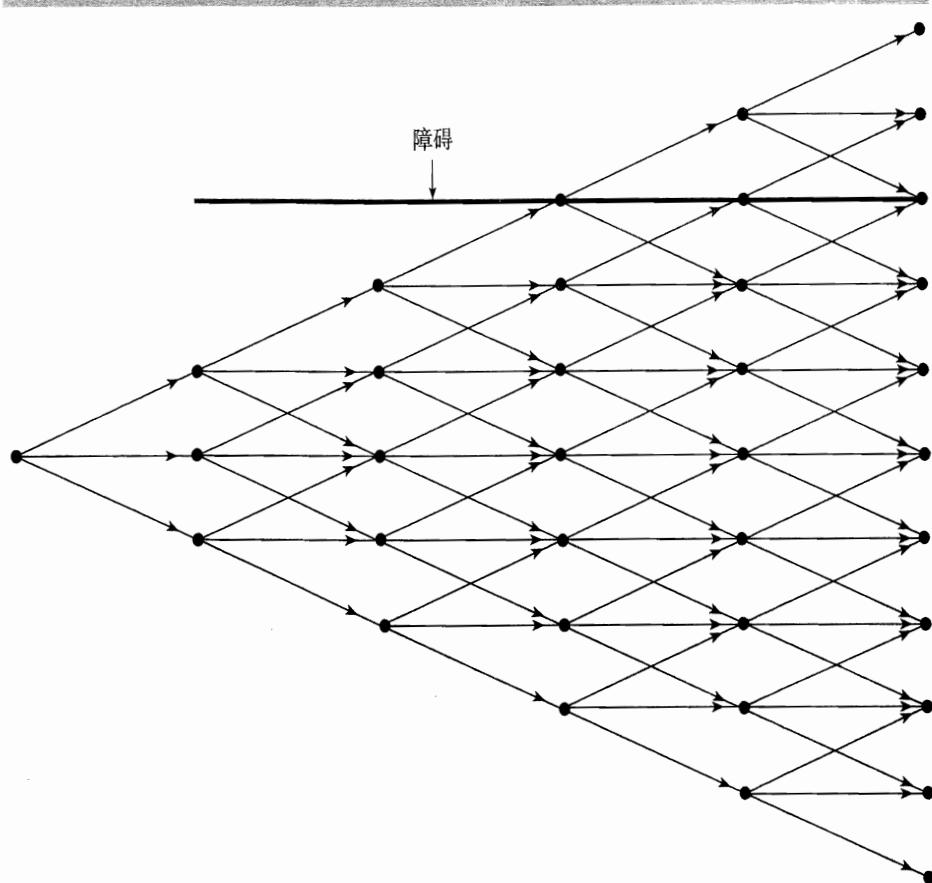


图 24.5 障碍正好在节点上的树图

这样产生了如图 24.5 形状的树图。上升、不变以及下降的概率  $p_u$ 、 $p_m$ 、 $p_d$  的选择依据是匹配收益的前两阶矩。那么，

$$p_d = \frac{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t}{2\ln u} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2(\ln u)^2}, \quad p_m = 1 - \frac{\sigma^2\Delta t}{(\ln u)^2}, \quad p_u = \frac{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t}{2\ln u} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2(\ln u)^2}$$

其中  $p_u$ 、 $p_m$  以及  $p_d$  分别是上升、不变以及下降的概率。

## 自适应 Mesh 模型

当初始资产价格不接近障碍水平时，上面给出的方法可以很好的处理问题。当初始资产价格接近障碍水平时，我们可以使用已在 17.4 节中介绍过的自适应 Mesh 模型。<sup>20</sup> 模型隐含的观点是，通过把高精度的树图嫁接到低精度的树图，以便在最符合需要的树图区域对资产价格建立细致的模型，那么可以大大提高计算效率。

为了定价障碍期权，在障碍附近构建高精度的树图是非常有用的。图 24.6 说

<sup>20</sup> 参见 S. Figlewski and B. Gao, “The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing,” *Journal of Financial Economics*, 53 (1999): 313–51.

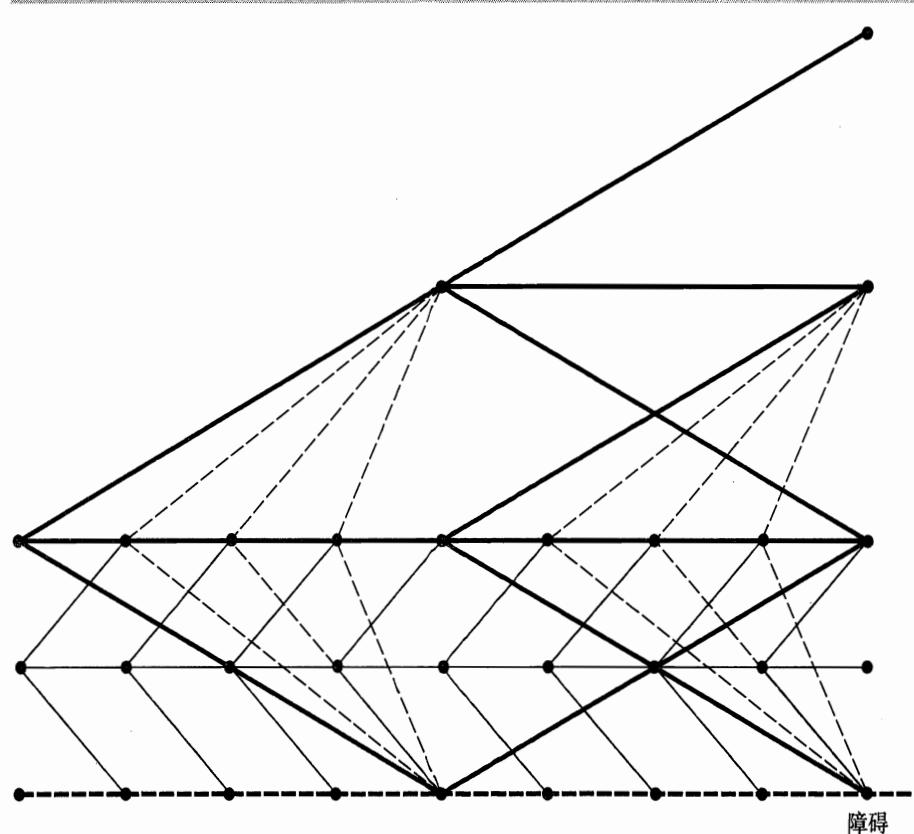


图 24.6 估值障碍期权的自适应 Mesh 模型

明了这种树图的设计。树图被设计为节点位于障碍上。每个分支的概率选择依据是匹配标的资产行为过程的前两阶矩。图 24.6 中的粗线是低精度树图的分支。细实线是高精度树图的分支。我们首先在低精度树图以通常的方式进行倒推计算。接着我们使用以虚线表示的分支，计算附加节点上的价值。最后，我们在高精度树图进行倒推计算。

## 24.6 基于两项相关资产的期权

另一项棘手的数值问题是为依附于两个相关资产的美式期权估值。人们提出了许多种估值方法，我们讲述其中三种。

### 转换变量

构造一个三维树图来表示两个不相关变量的运动是很容易的。方法如下：首先我们为每个变量分别构造一个二维树图，然后我们将这两个二维树图组合成一个单一的三维树图。三维树图上的每个分支的概率等于二维树图对应的概率的乘积。例如，假设两个变量是股票价格  $S_1$  和  $S_2$ 。每个可以用 Cox、Ross 和 Rubinstein

二叉树图的二维来表示。假设  $S_1$  按比率  $u_1$  向上运动的概率为  $p_1$ , 按比率  $d_1$  向下运动的概率为  $1 - p_1$ ; 更进一步假设  $S_2$  按比率  $u_2$  向上运动的概率为  $p_2$ , 按比率  $d_2$  向下运动的概率为  $1 - p_2$ 。在三维树图中, 从每个节点出发有 4 个分支。概率为:

$$\begin{aligned} p_1 p_2: & S_1 \text{ 增加; } S_2 \text{ 增加} \\ p_1(1-p_2): & S_1 \text{ 增加; } S_2 \text{ 减少} \\ (1-p_1)p_2: & S_1 \text{ 减少; } S_2 \text{ 增加} \\ (1-p_1)(1-p_2): & S_1 \text{ 减少; } S_2 \text{ 减少} \end{aligned}$$

其次考虑  $S_1$  和  $S_2$  是相关的情况。我们假设风险中性过程为:

$$\begin{aligned} dS_1 &= (r - q_1)S_1 dt + \sigma_1 S_1 dz_1 \\ dS_2 &= (r - q_2)S_2 dt + \sigma_2 S_2 dz_2 \end{aligned}$$

其中维纳过程  $dz_1$  和  $dz_2$  之间的瞬态相关系数为  $\rho$ 。这意味着:

$$\begin{aligned} d\ln S_1 &= (r - q_1 - \sigma_1^2/2)dt + \sigma_1 dz_1 \\ d\ln S_2 &= (r - q_2 - \sigma_2^2/2)dt + \sigma_2 dz_2 \end{aligned}$$

我们定义两种新的不相关变量:<sup>21</sup>

$$\begin{aligned} x_1 &= \sigma_2 \ln S_1 + \sigma_1 \ln S_2 \\ x_2 &= \sigma_2 \ln S_1 - \sigma_1 \ln S_2 \end{aligned}$$

这些变量遵循如下过程:

$$\begin{aligned} dx_1 &= [\sigma_2(r - q_1 - \sigma_1^2/2) + \sigma_1(r - q_2 - \sigma_2^2/2)]dt + \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2(1 + \rho)} dz_A \\ dx_2 &= [\sigma_2(r - q_1 - \sigma_1^2/2) - \sigma_1(r - q_2 - \sigma_2^2/2)]dt + \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2(1 - \rho)} dz_B \end{aligned}$$

其中  $dz_A$  和  $dz_B$  是不相关的维纳过程。

变量  $x_1$  和  $x_2$  可以使用两个单独的二叉树图来建模。二叉树图中, 在  $\Delta t$  时间内,  $x_i$  的上升  $h_i$  的概率为  $p_i$ , 下降  $h_i$  的概率为  $1 - p_i$ 。选择合适的变量  $h_i$  与  $p_i$ , 使得树图对  $x_1$  和  $x_2$  分布前两阶矩给出正确的价值。由于变量是不相关的, 这两个二叉树图可以合并为一个三叉树图, 如上所述。在该树图的每一个节点上,  $S_1$  和  $S_2$  可以使用以下的互逆关系式从  $x_1$  和  $x_2$  计算得出:

$$\begin{aligned} S_1 &= \exp\left[\frac{x_1 + x_2}{2\sigma_2}\right] \\ S_2 &= \exp\left[\frac{x_1 - x_2}{2\sigma_1}\right] \end{aligned}$$

类似二维树图估值方法, 我们从三维树图滚动倒推, 可以求出衍生证券的价格。

<sup>21</sup> 这个思想由如下论文提出: J. Hull and A. White "Valuing Derivatives Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (1990): 87-100.

## 使用非矩形树图

Rubinstein 建议如下方法：对于两个不相关股票价格，通过将树图节点安排成非矩形，构造两个关联股票价格的三维树图。<sup>2</sup> 从第一个股票价格为  $S_1$  和第二个股票价格为  $S_2$  的节点  $(S_1, S_2)$ ，我们有 0.25 的机会运动到以下每一个节点：

$$(S_1u_1, S_2A), \quad (S_1u_1, S_2B), \quad (S_1d_1, S_2C), \quad (S_1d_1, S_2D)$$

其中

$$u_1 = \exp[(r - q_1 - \sigma_1^2/2)\Delta t + \sigma_1 \sqrt{\Delta t}]$$

$$d_1 = \exp[(r - q_1 - \sigma_1^2/2)\Delta t - \sigma_1 \sqrt{\Delta t}]$$

且

$$A = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\Delta t + \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})]$$

$$B = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\Delta t + \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho - \sqrt{1 - \rho^2})]$$

$$C = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\Delta t - \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho - \sqrt{1 - \rho^2})]$$

$$D = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\Delta t - \sigma_2 \sqrt{\Delta t}(\rho + \sqrt{1 - \rho^2})]$$

当相关系数为零时，该方法等价于：用第 17.4 节中构造二叉树图的方法分别构造  $S_1$  和  $S_2$  树图。

## 调整概率

构造  $S_1$  和  $S_2$  的三维树图的第三种方法是：首先假设它们不相关，然后在每个节点调整概率以反映相关性。<sup>3</sup> 我们利用第 17.4 节中构造二叉树图的方法分别构造  $S_1$  和  $S_2$  树图。该方法的一个特征是所有概率都为 0.5。

当假设它们之间没有相关性时，将两个二叉树图组合起来，概率如表 24.1 所述。当我们调整这些概率以反映相关性时，它们变为表 24.2 中的情况。

表 24.1 没有相关性时的二叉树图组合

| $S_2$ 运动 | $S_1$ 运动 |      |
|----------|----------|------|
|          | 向 下      | 向 上  |
| 向 上      | 0.25     | 0.25 |
| 向 下      | 0.25     | 0.25 |

<sup>2</sup> 参见 M. Rubinstein, "Return to Oz," *Risk*, November 1994, pp. 67-70.

<sup>3</sup> 这个方法在以下论文中的利率树图部分中给出：J. Hull and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models," *Journal of Derivatives*, 2, 2 (Winter 1994), 37-48.

表 24.2 相关系数为  $\rho$  时二叉树图的组合

| $S_2$ 运动 | $S_1$ 运动          |                   |
|----------|-------------------|-------------------|
|          | 向 下               | 向 上               |
| 向 上      | 0.25(1 - $\rho$ ) | 0.25(1 + $\rho$ ) |
| 向 下      | 0.25(1 + $\rho$ ) | 0.25(1 - $\rho$ ) |

## 24.7 蒙特卡罗模拟与美式期权

蒙特卡罗模拟适用于路径依赖型期权和依附于多个随机变量的期权定价问题。树图和有限差分模型适用于美式期权的定价问题。如果一个期权既是路径依赖型的也是美的，那么应该采用什么方法？如果一个美式期权依附于多个随机变量，那么应该该采用什么方法？在 24.4 节，我们解释了利用调整的二叉树图方法，可以对一些路径依赖型期权进行定价。很多研究者提出了一些修改蒙特卡罗模拟的方法，以便对美式期权进行定价。<sup>24</sup> 这里我们解释其中两种。

### 最小二乘法

为了估值一个美式期权，我们需要在具有提前执行可能的时点上选择执行还是继续。“执行”的价值通常容易决定。包括 Longstaff 和 Schwartz 在内的一系列研究者提出了很多以蒙特卡罗模拟决定“继续”的估值方法。<sup>25</sup> 这些方法中使用最小二乘法在提前执行可能发生的每个时点上，决定继续的价值和相关变量的价值之间的最优拟合关系式。用具体数字例子可以很好地解释这一方法。我们使用 Longstaff-Schwartz 论文中的例子。

考虑一个基于不支付红利股票的 3 年期美式看跌期权，可在第 1 年末、第 2 年末或第 3 年末执行这个期权。无风险利率为 6%p.a. (连续复利)。股票现价为 1.00，期权执行价格为 1.10。假设我们抽取的 8 个股票价格路径如表 24.3 所述 (这仅仅是举例说明，实际应用中会模拟更多的样本路径)。如果期权只能在第 3 年末执行，那么收到的现金流等于该时点上期权的内在价值。表 24.4 的最后一列给出了这个值。

如果在第 2 年末，该看跌期权处于实值状态，那么期权持有者要决定是否提前执行。从表 24.3，我们看到路径 1、3、4、6、7 中期权在第 2 年年末处于实值状态。对这些路径，假设存在这样的近似关系式：

<sup>24</sup> Tilley 是发表该问题解决方案的第一位研究者。参见 J. A. Tilley, “Valuing American Options in a Path Simulation Model,” *Transactions of the Society of Actuaries*, 45 (1993): 83–104.

<sup>25</sup> 参见 F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Squares Approach,” *Review of Financial Studies*, 14, 1 (Spring 2001): 113–47.

表 24.3 看跌期权例子中的样本路径

| 路径 | $t = 0$ | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ |
|----|---------|---------|---------|---------|
| 1  | 1.00    | 1.09    | 1.08    | 1.34    |
| 2  | 1.00    | 1.16    | 1.26    | 1.54    |
| 3  | 1.00    | 1.22    | 1.07    | 1.03    |
| 4  | 1.00    | 0.93    | 0.97    | 0.92    |
| 5  | 1.00    | 1.11    | 1.56    | 1.52    |
| 6  | 1.00    | 0.76    | 0.77    | 0.90    |
| 7  | 1.00    | 0.92    | 0.84    | 1.01    |
| 8  | 1.00    | 0.88    | 1.22    | 1.34    |

$$V = a + bS + cS^2$$

其中  $S$  是第 2 年末股票价格,  $V$  是继续的价值, 已经被贴现到第 2 年末这一时点。 $S$  的 5 个观测值分别为 1.08、1.07、0.97、0.77 和 0.84。从表 24.4 可以知道, 对应的  $V$  值为  $0.00, 0.07e^{-0.06\times 1}, 0.18e^{-0.06\times 1}, 0.20e^{-0.06\times 1}, 0.09e^{-0.06\times 1}$ 。利用这些数据, 我们计算使以下表达式达到最小时的  $a$ 、 $b$  和  $c$  值:

$$\sum_{i=1}^5 (V_i - a - bS_i - cS_i^2)^2$$

其中,  $S_i$  和  $V_i$  分别为  $S$  和  $V$  的第  $i$  个观测值。得到的结果是  $a = -1.070$ 、 $b = 2.983$  以及  $c = -1.813$ 。那么, 最优拟合关系式为

$$V = -1.070 + 2.983S - 1.813S^2$$

对于路径 1、3、4、6、7, 这一关系式给出的第 2 年末继续的价值分别为 0.0369、0.0461、0.1176、0.1520、0.1565。根据表 24.3, 执行的价值分别为 0.02、0.03、0.13、0.33、0.26。这说明对于路径 4、6、7, 我们应该在第 2 年末提前执行。表 24.5 总结了假设执行只发生在第 2 年末或第 3 年末时 8 个路径的现金流。

接下来, 我们考虑哪些路径在第 1 年末处于实值状态。这样的路径是路径 1、4、6、7、8。根据表 24.3, 对于以上路径  $S$  的值分别为 1.09、0.93、0.76、0.92 和 0.88。根据表 24.5, 对应的已贴现到  $t = 1$  时刻, 继续的价值分别为  $0.00, 0.13e^{-0.06\times 1}, 0.33e^{-0.06\times 1}, 0.26e^{-0.06\times 1}$  和  $0.00$ 。最小二乘关系式为:

表 24.4 只能在第 3 年末执行时的现金流

| 路 径 | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ |
|-----|---------|---------|---------|
| 1   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |
| 2   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |
| 3   | 0.00    | 0.00    | 0.07    |
| 4   | 0.00    | 0.00    | 0.18    |
| 5   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |
| 6   | 0.00    | 0.00    | 0.20    |
| 7   | 0.00    | 0.00    | 0.09    |
| 8   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |

表 24.5 只能在第 2、3 年末执行时的现金流

| 路 径 | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ |
|-----|---------|---------|---------|
| 1   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |
| 2   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |
| 3   | 0.00    | 0.00    | 0.07    |
| 4   | 0.00    | 0.13    | 0.00    |
| 5   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |
| 6   | 0.00    | 0.33    | 0.00    |
| 7   | 0.00    | 0.26    | 0.00    |
| 8   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |

$$V = 2.038 - 3.335S + 1.356S^2$$

对于路径 1、4、6、7、8，这一关系式给出的第 1 年末继续的价值分别为 0.0139、0.1092、0.2866、0.1175、0.1533。从表 24.3，执行的价值分别为 0.01、0.17、0.34、0.18、0.22。这说明对于路径 4、6、7、8，我们应该在第 1 年末提前执行。表 24.6 总结了假设执行可发生在任何 3 个时点末时的现金流。将每个现金流以无风险利率贴现到 0 时刻，并计算所有结果的平均值，就能得到期权价格的估计值：

$$\frac{1}{8} (0.07e^{-0.06 \times 3} + 0.17e^{-0.06 \times 1} + 0.34e^{-0.06 \times 1} + 0.18e^{-0.06 \times 1} + 0.22e^{-0.06 \times 1}) = 0.1144$$

因为这一值大于 0.10，所以不应该立即执行期权。

有很多途径可以扩展这一方法。如果期权可在任一时刻提前执行，那么我们可以考虑很多执行时刻（正如二叉树图中的方法）来近似估计期权价值。 $V$  和  $S$  之间的关系式可能会变得更复杂。例如，我们可以假设  $V$  是  $S$  的三次式而不是二次式。当提前执行决策依赖于几个状态变量时，我们可以如前面的例子进行定价。其中，需要假设  $V$  和这些变量之间的关系函数，并且以最小二乘法估计相应的参数。

## 提前执行边界参数化方法

很多研究者，如 Andersen，提出了用参数表示提前执行边界的方法，从期权

表 24.6 期权的现金流

| 路 径 | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ |
|-----|---------|---------|---------|
| 1   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |
| 2   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |
| 3   | 0.00    | 0.00    | 0.07    |
| 4   | 0.17    | 0.00    | 0.00    |
| 5   | 0.00    | 0.00    | 0.00    |
| 6   | 0.34    | 0.00    | 0.00    |
| 7   | 0.18    | 0.00    | 0.00    |
| 8   | 0.22    | 0.00    | 0.00    |

到期时开始倒推计算，以迭代法决定这些参数的最优值。<sup>26</sup>为了解释这一方法，我们再次考虑上面看跌期权的例子，并假设产生了如表 24.3 的 8 个样本路径。这种情况下， $t$  时刻的提前执行边界以  $S$  的临界值  $S^*(t)$  参数化。如果  $t$  时刻资产价格低于  $S^*(t)$ ，我们在  $t$  时刻执行期权；如果高于  $S^*(t)$ ，在  $t$  时刻并不执行期权。 $S^*(3)$  的值为 1.10。如果  $t = 3$  时（期权到期时），股票价格大于 1.10，我们在  $t$  时刻并不执行期权。如果股票价格低于 1.10，我们就执行期权。现在我们考虑如何决定  $S^*(2)$ 。

假设我们选择了小于 0.77 的  $S^*(2)$  值。那么在第 2 年末，每个路径中期权都不被提前执行。则 8 个路径中第 2 年末的期权价值分别为 0.00、0.00、 $0.07e^{-0.06\times 1}$ 、 $0.18e^{-0.06\times 1}$ 、0.00、 $0.20e^{-0.06\times 1}$ 、 $0.09e^{-0.06\times 1}$  和 0.00。这些值的平均值为 0.0636。接下来假设  $S^*(2) = 0.77$ ，8 个路径中第 2 年末的期权价值分别为 0.00、0.00、 $0.07e^{-0.06\times 1}$ 、 $0.18e^{-0.06\times 1}$ 、0.00、0.33、 $0.09e^{-0.06\times 1}$  和 0.00。这些值的平均值为 0.0813。类似的，假设  $S^*(2)$  等于 0.84、0.97、1.07、1.08 时，第 2 年末期权价值的平均值分别为 0.1032、0.0982、0.0938、0.0963。分析说明  $S^*(2)$  的最优值（即最大化期权平均价值）为 0.84（更准确地说，最优情况是选择  $0.84 \leq S^*(2) < 0.97$ ）。我们选择了该  $S^*(2)$  的最优值之后，8 个路径中第 2 年末的期权价值分别为 0.00、0.00、0.0659、0.1695、0.00、0.33、0.26 和 0.00。这些值的平均值为 0.1032。

我们接下来再计算  $S^*(1)$ 。如果  $S^*(1) < 0.76$ ，则在第 1 年末，每个路径中期权都不被提前执行，第 1 年末的期权价值为  $0.1032e^{-0.06\times 1} = 0.0972$ 。如果  $S^*(1) = 0.76$ ，8 个路径中第 1 年末的期权价值分别为 0.00、0.00、 $0.0659e^{-0.06\times 1}$ 、 $0.1695e^{-0.06\times 1}$ 、0.0、0.34、 $0.26e^{-0.06\times 1}$  和 0.00。这些值的平均值为 0.1008。类似地，取  $S^*(1)$  等于 0.88、0.92、0.93、1.09 时，期权价值的平均值分别为 0.1283、0.1202、0.1215、0.1228。这样的分析说明  $S^*(1)$  的最优值为 0.88（更准确地说，最优情况是选择  $0.88 \leq S^*(1) < 0.92$ ）。0 时刻不提前执行的情况下，期权的价值为  $0.1283e^{-0.06\times 1} = 0.1208$ 。这个值大于 0 时刻执行所获得的 0.10。

实际应用中，进行数千万次模拟以决定提前执行边界。一旦得到提前执行边界之后，我们放弃之前的变量路径样本，使用这些提前执行边界所用的新蒙特卡罗模拟，以定价期权。这里的美式看跌期权例子非常简单，因为某一时刻的提前执行边界可由那个时刻的股票价格推导出。更为复杂的情形中，对于提前执行边界参数化的方式需要做一些其他的假设。

## 上 界

以上两种方法倾向于低估美式期权的价值，因为其中假定了并不最优的提前执行边界。基于这些缺点，Andersen 和 Broadie 提出了决定价格上界的一种过程。<sup>27</sup>

<sup>26</sup> 参见 L. Andersen, “A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model,” *Journal of Computational Finance*, 3, 2 (Winter 2000): 1-32.

<sup>27</sup> 参见 L. Andersen and M. Broadie, “A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multi-Dimensional American Options,” *Management Science*, 50, 9 (2004), 1222-34.

这些过程可以和能产生下界的运算法则一起使用，而且能比这些运算法则更准确地确定美式期权的真实价值。

## 小 结

为了匹配实际中观察到的波动率微笑，学者们提出了很多模型。方差的常数弹性模型给出的波动率微笑和权益性期权中所观察到的情况相似。跳跃—扩散模型给出的波动率微笑和货币期权中所观察到的情况相似。Variance-Gamma 模型和随机波动率模型更为灵活，它们既能给出权益性期权的波动率微笑，也能给出货币期权的波动率微笑。隐含波动率函数模型甚至还要灵活。这个模型可用来精确拟合市场中观测到的欧式期权价格的任一模式。

通常以蒙特卡罗模拟方法处理路径依赖型期权的定价问题。它的缺点是计算过程非常慢，而且不能很好地处理美式衍生证券的定价问题。幸运的是，树图方法可以用来定价很多种类的路径依赖型衍生证券。使用这一方法就要在树图的每个节点上选取标的路径函数的代表值，再根据路径函数的各个值进行倒推计算，最后计算出衍生证券的价值。

树图方法可以用来定价很多种类的障碍期权。但是随着时间步数量的加大，期权价格往正确价格方向收敛的速度非常缓慢。一种解决收敛性的方法是改变树图几何形状，保证节点正好位于障碍上。另一种解决方法是利用插值法，修正树图中假定的障碍和真实障碍之间的差别。第三种解决方法是设计树图时，保证在障碍附近，树图能高精度地处理标的资产价格的变化。

基于两个相关资产的期权的定价问题，一种处理方法是对资产价格进行变换，产生两个不相关变量。对两个变量，各自建立树图，两个树图在被组合起来构建单个三维树图。在树图的每个节点，反向变换可以得到资产价格。第二种处理方法是通过三维树图节点的特殊安排来反映相关关系。第三种处理方法是在不相关的假定下构建树图，之后再对树图中的概率进行调整以反映相关关系。

本质上，蒙特卡罗模拟并不适合估值美式期权，但是有两种方法可以对蒙特卡罗模拟进行调整，这样就可以估值美式期权了。第一种方法：利用最小二乘法来得到继续（即不执行）的价值和相关变量值之间的关系式。第二种方法：以参数表示提前执行边界，从期权期末到期初进行倒推计算，以迭代法得出提前执行边界。

## 参考读物

- Andersen, L., "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model," *Journal of Computational Finance*, 3, 2 (Winter 2000): 1–32.
- Andersen, L. B. G., and R. Brotherton-Ratcliffe, "The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite Difference Approach," *Journal of Computational Finance*, 1, 2 (Winter 1997/98): 3–37.
- Boyle, P. P., and S. H. Lau, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method," *Journal of Derivatives*, 1, 4 (Summer 1994): 6–14.
- Conze, A., and R. Viswanathan, "Path Dependent Options: The Case of Lookback Options," *Journal of Finance*, 46 (1991): 1893–1907.
- Cox, J. C. and S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976), 145–66.

- Derman, E., and I. Kani, "Riding on a Smile," *Risk*, February (1994): 32–39.
- Duan, J.-C., "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5 (1995): 13–32.
- Duan, J.-C., "Cracking the Smile," *Risk*, December (1996): 55–59.
- Dupire, B., "Pricing with a Smile," *Risk*, February (1994): 18–20.
- Figlewski, S., and B. Gao, "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53 (1999): 313–51.
- Heston, S. L., "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options," *Review of Financial Studies*, 6, 2 (1993): 327–43.
- Hull, J., and A. White, "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options," *Journal of Derivatives*, 1, 1 (Fall 1993): 21–31.
- Hull J. C., and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42 (June 1987): 281–300.
- Hull, J. C. and A. White, "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility," *Advances in Futures and Options Research*, 3 (1988): 27–61.
- Hull, J. C. and W. Suo, "A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 2 (2002): 297–318.
- Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach," *Review of Financial Studies*, 14, 1 (Spring 2001): 113–47.
- Madan D. B., P. P. Carr, and E. C. Chang, "The Variance-Gamma Process and Option Pricing" *European Finance Review*, 2 (1998): 7–105.
- Merton, R. C., "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976): 125–44.
- Rebonato, R., *Volatility and Correlation: The Perfect Hedger and the Fox*, 2nd edn. Chichester: Wiley, 2004.
- Ritchken, P., and R. Trevor, "Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes," *Journal of Finance* 54, 1 (February 1999): 377–402.
- Rubinstein, M., "Implied Binomial Trees," *Journal of Finance*, 49, 3 (July 1994): 771–818.
- Rubinstein, M., "Return to Oz," *Risk*, November (1994): 67–70.
- Stutzer, M., "A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation," *Journal of Finance*, 51 (December 1996): 1633–52.
- Tilley, J. A., "Valuing American Options in a Path Simulation Model," *Transactions of the Society of Actuaries*, 45 (1993): 83–104.

## 问题和习题

- 24.1 请证明 CEV 模型的公式满足看跌期权和看涨期权之间的平价关系。
- 24.2 当使用 Merton 混合跳跃—扩散模型时，你会如何利用蒙特卡罗模拟来抽取资产价格的样本路径？
- 24.3 请证明：跳跃幅度服从对数正态分布时，Merton 混合跳跃—扩散模型满足看跌期权和看涨期权之间的平价关系。
- 24.4 假设一个资产的波动率在 0~6 月为 20%，6~12 月为 22%，12~24 月为 24%。用 Black-Scholes 模型估值 2 年期期权时应该使用什么样的波动率？
- 24.5 考虑 Merton 混合跳跃—扩散模型，跳跃总是将资产价格降低到零。假设平均年跳跃次数为  $\lambda$ 。请证明此时的欧式看涨期权价格等于没有跳跃的情形下，无风险利率为  $r + \lambda$  (而不是  $r$ ) 时的期权价格。请问跳跃的存在使得看涨期权价格上升还是下降？

(提示：在没有跳跃和存在1次或多次跳跃的两个假设下分别计算期权价值。 $T$ 时刻没有跳跃的概率为 $e^{-\lambda T}$ 。)

- 24.6 零时刻，不支付红利股票的价格为 $S_0$ 。把 $0 \sim T$ 之间的时间段分成长度为 $t_1$ 和 $t_2$ 的两个子时间段。第一个子时间段内，无风险利率和波动率分别为 $r_1$ 和 $\sigma_1$ 。第二个时间段内，无风险利率和波动率分别为 $r_2$ 和 $\sigma_2$ 。假设世界是风险中性的。
- (a) 利用第13章的结论，以 $r_1$ 、 $r_2$ 、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $t_1$ 、 $t_2$ 和 $S_0$ 表示 $T$ 时刻的股票价格分布。
  - (b) 假设 $\bar{r}$ 是 $0 \sim T$ 期间的平均利率， $\bar{V}$ 是 $0 \sim T$ 期间的平均方差率。函数由 $\bar{r}$ 、 $\bar{V}$ 、 $T$ 和 $S_0$ 表示，求由 $T$ 表示的股票价格分布。
  - (c) 当有三个子时间段，每个时间段内的无风险利率和波动率都不相同时，重新计算(a)和(b)。
  - (d) 请证明：如果无风险利率 $r$ 和波动率 $\sigma$ 是时间的已知函数，那么风险中性世界中 $T$ 时刻的股票价格分布为

$$\ln S_T \sim \phi \left[ \ln S_0 + \left( \bar{r} - \frac{\bar{V}}{2} \right) T, \sqrt{VT} \right]$$

其中， $\bar{r}$ 是 $r$ 的平均值， $\bar{V}$ 是 $\sigma^2$ 的平均值， $S_0$ 是当前的股票价格。

- 24.7 方程(24.2)和方程(24.3)的随机波动率模型中，模拟资产价格路径的公式是什么？
- 24.8 “IVF模型中并不一定要准确地知道波动率集合的演变过程。”请解释这句话。
- 24.9 “利率是常数的时候，IVF模型可以正确地估值其损益依附于某一时间标的资产唯一的衍生证券。”请解释这句话。
- 24.10 利用三个时间步的树图来估值某个货币的美式回望看涨期权。期初的汇率为1.6，本国无风险利率为5%p.a.，外国无风险利率为8%p.a.，汇率的波动率为15%，到期期限为18个月。使用24.4节中的方法。
- 24.11 随着参数 $v$ 趋近于零，Variance-Gamma模型会发生什么变化？
- 24.12 利用三个时间步的树图，估值基于不支付红利股票价格的几何平均值的美式看跌期权。股票价格为\$40，执行价格为\$40，无风险利率为10%p.a.，波动率为35%p.a.，到期期限为3个月。几何平均值的计算期间为，从今天到期权到期为止。
- 24.13 24.4节中路径依赖型期权的估值方法是否可用来处理损益为 $\max(S_{\text{ave}} - K, 0)$ 的2年期美式期权？其中的 $S_{\text{ave}}$ 是执行前3个月内的平均资产价格。请解释你的答案。
- 24.14 请验证图24.3中的数字6.492是正确的。
- 24.15 关于24.7节的例子中的8个路径，检验提前执行方案。最小二乘方法和执行边界参数化方法给出的提前执行方案之间有什么区别？对取样路径来说哪一个方法计算的期权价格更高？
- 24.16 考虑一个不支付红利股票的欧式看跌期权。股票价格为\$100，执行价格为\$110，无风险利率为5%p.a.，到期期限为1年。假设期权有效期内的平均方差率为0.06的概率是0.20，为0.09的概率是0.5，为0.12的概率是0.30。波动率和股票价格不相关。利用DerivaGem软件，估计期权价值。
- 24.17 有两个障碍水平时，如何设计两个障碍正好在节点上的树图？

## 课后练习

- 24.18 一个新签订的、基于股票指数的欧式回望看涨期权的到期期限为 9 个月。指数的当前水平是 400，无风险利率是 6%p.a.，指数的红利收益率为 4%p.a.，指数波动率为 20%。利用 24.4 节的方法估值期权，并把你得到的结果和 DerivaGem 中使用解析估值公式来计算的结果进行比较。
- 24.19 假设用来定价 6 个月期货币期权的波动率如表 16.2。假设本国和外国的无风险利率都是 5%p.a.，当前的汇率为 1.00。考虑一个牛市价差期权，它由执行价格为 1.05 的 6 个月期看涨期权多头和执行价格为 1.10 的 6 个月期看涨期权空头构成。
- 该价差期权的价值为多少？
  - 对两个期权使用同样的波动率时，如果要得到牛市价差期权的正确价值，该波动率应该为多少？（使用 DerivaGem Application Builder 和 Goal Seek 或 Solver。）
  - 本章前面提过，定价奇异期权时，我们应该使用的正确波动率是和直觉相反的。你在上面求得的结果支持这一结论吗？
  - IVF 模型能给出牛市价差期权的正确价格吗？
- 24.20 假设执行价格是 1.13，请重复 24.7 节中看跌期权例子的分析过程。分别利用最小二乘方法和执行边界参数化方法。
- 24.21 当标的资产是不支付红利股票的时候，考虑 Merton 跳跃—扩散模型。平均跳跃频率为每年一次。平均跳跃幅度百分比为 2%，跳跃幅度百分比的对数的标准差为 20%。股票价格为 100，无风险利率为 5%，行为过程中的扩散部分给出的波动率  $\sigma$  为 15%，到期期限为 6 个月。利用 DerivaGem Application Builder 分别计算，当股票价格为 80、90、100、110 和 120 时对应的隐含波动率。你得到的波动率微笑或波动率偏斜意味着什么样的股票价格概率分布？

## 鞅和测度

到现在为止定价期权时，我们假设利率是常数。本章中我们放宽这一假设，为第 26~30 章中的利率衍生证券定价做准备。

根据风险中性估值方法，(a) 可以通过在标的资产的预期收益等于无风险利率的假设下，计算预期损益；(b) 再对预期损益以无风险利率贴现，就可以得到衍生证券的价值。当利率是常数时，风险中性估值方法是明确的估值工具。但是利率是随机变化的时候，该方法就没那么明确了。如标的资产的预期收益等于无风险利率的假定意味着什么？(a) 这是说每一天的预期收益率等于一天的无风险利率？(b) 还是说每年的预期收益率等于一年的无风险利率？或者是说(c) 5 年期的预期收益率等于该期限开始时的 5 年的无风险利率？以无风险利率贴现预期损益的确切含义是什么呢？例如未来 5 年的预期损益可否用当前的 5 年期无风险利率贴现呢？

本章中我们讲述当利率随机变化时的风险中性估值方法的理论基础，并且说明对于任一给定的情形，可以假定很多不同的风险中性世界。我们首先定义所谓的风险的市场价格参数，并说明一个衍生证券在一个很短的期间，超过无风险利率的收益与标的随机变量风险的市场价格之间存在线性关系。传统风险中性世界中，假定所有风险的市场价格等于零。但是，我们将看到在某些情形中对风险的市场价格要做其他假设。

要完整地理解风险中性估值方法，就要懂得鞅和测度。鞅是零漂移随机过程。测度是我们估值证券价格时采用的单位。等价鞅测度是本章的一个重点结论。该结论说明当我们以可交易证券的价格作为测度中的单位时，存在一些风险的市场价格，使得所有的证券价格遵循鞅。

本章中我们通过在随机利率的股票期权以及资产交换期权定价问题中，应用等价鞅测度结论来说明该结论的作用。第 26 章中，我们利用这一结论来理解估值利率衍生证券的标准市场模型。第 27 章中，我们利用该结论来估值一些非标准的衍生证券。第 29 章中，该结论也会帮助我们建立 LIBOR 市场模型。

## 25.1 风险的市场价格

首先，我们考虑依赖单个变量  $\theta$  的衍生证券的特性。假设变量  $\theta$  遵循如下随

机过程：

$$\frac{d\theta}{\theta} = mdt + sdz \quad (25.1)$$

其中  $dz$  是一个维纳过程。相应地，参数  $m$  和  $s$  分别为  $\theta$  的预期增长率和波动率。我们假设它们只取决于  $\theta$  和  $t$ 。但是  $\theta$  不一定是投资资产的价格。它可能是离金融市场极其遥远的某种东西，如美国新奥尔良中部地区的气温。

设  $f_1$  和  $f_2$  是仅决定于  $\theta$  和时间  $t$  的两种衍生证券的价格，可能是期权或其他衍生证券，在将来的某一时刻这些衍生证券的盈利为  $\theta$  的某一函数。假设在我们考虑的时间段内， $f_1$  和  $f_2$  不支付任何收益。<sup>1</sup>

假设  $f_1$ 、 $f_2$  遵循的过程如下：

$$\frac{df_1}{f_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz$$

和

$$\frac{df_2}{f_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz$$

其中  $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  是  $\theta$  和  $t$  的函数，这一过程中的“ $dz$ ”与方程 (25.1) 中的  $dz$  是相同的维纳过程，因为这是  $f_1$  和  $f_2$  价格中唯一的不确定性来源。

现在我们通过和 13.6 节中 Black-Scholes 分析做类似的分析过程，来找出  $f_1$  与  $f_2$  价格之间的联系。 $f_1$  和  $f_2$  遵循的过程的离散形式为：

$$\Delta f_1 = \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta z \quad (25.2)$$

$$\Delta f_2 = \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta z \quad (25.3)$$

将  $\sigma_2 f_2$  个第一种衍生证券和  $-\sigma_1 f_1$  个第二种衍生证券组合起来，我们可以消去  $\Delta z$ ，构造一个瞬时无风险证券组合。若  $\Pi$  为该证券组合的价值，那么有

$$\Pi = (\sigma_2 f_2) f_1 - (\sigma_1 f_1) f_2 \quad (25.4)$$

和

$$\Delta \Pi = \sigma_2 f_2 \Delta f_1 - \sigma_1 f_1 \Delta f_2$$

将方程 (25.2) 和 (25.3) 代入，得到：

$$\Delta \Pi = (\mu_1 \sigma_2 f_1 f_2 - \mu_2 \sigma_1 f_1 f_2) \Delta t \quad (25.5)$$

由于  $\Pi$  是瞬时无风险的，它的盈利率一定为无风险利率。因此，

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t$$

将方程 (25.4) 和 (25.5) 代入上式，得到：

---

<sup>1</sup> 这个分析过程可以被扩展到支付收益衍生证券的情形（参见习题 25.7）。

$$\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1 = r\sigma_2 - r\sigma_1$$

即

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \quad (25.6)$$

注意，方程 (25.6) 的左边只依附于  $f_1$  过程的参数，而右边只依附于  $f_2$  过程的参数。定义  $\lambda$  为方程 (25.6) 的每一边的值，所以：

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \lambda$$

如果  $f$  为一种依赖于  $\theta$  和  $t$  的某个证券的价格，去掉以上公式中的下标，我们可得：

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dz \quad (25.7)$$

于是：

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda \quad (25.8)$$

$\lambda$  被称为  $\theta$  的风险市场价格 (market price of risk)。一般来说，参数  $\lambda$  取决于  $\theta$  和  $t$ ，但不依赖于衍生证券  $f$  的性质。我们的分析说明在不存在套利机会时，对于每个只依附于  $\theta$  和  $t$  的衍生证券，任一时刻的  $(\mu - r)/\sigma$  都是相同的。

值得注意的是， $f$  的波动率  $\sigma$  被定义为公式 (25.7) 中  $dz$  的系数。它可以是正的也可以是负的。如果  $\theta$  的波动率  $s$  是正数，且  $f$  和  $\theta$  正相关（即  $\partial f / \partial \theta$  是正的），则  $\sigma$  是正数。但如果  $f$  和  $\theta$  负相关，则  $\sigma$  是负数。以前定义的  $f$  的波动率实际上是  $|\sigma|$ 。

$\theta$  的风险市场价格，衡量了风险与收益的权衡关系，这种关系是对依赖于  $\theta$  的证券而言的。方程 (25.8) 可以写为：

$$\mu - r = \lambda \sigma \quad (25.9)$$

为了直观地理解这个方程，我们注意到变量  $\sigma$  可以被粗略地解释为  $f$  中代表的  $\theta$  风险的数量。因此，在方程的右边，我们可以看作是用  $\theta$  风险的价格乘以  $\theta$  风险的数量。方程的左边是要求得到风险补偿的超过无风险利率的预期收益。许多读者会注意到方程 (25.9) 和资本资产定价模型的相似之处，资本资产定价模型将股票的预期超额收益与它的风险联系起来。

我们在本章中不会讨论风险的市场价格的度量方式。但是在第 31 章中讨论实物期权估价时将涉及这个问题。

第 5 章中我们对投资资产和消费资产进行了区分。投资资产是众多投资者仅为了进行投资而持有的资产。消费资产是几乎完全为了进行消费而持有的资产。对于不支付收益、只依附于  $\theta$  的所有投资资产，公式 (25.8) 是正确的。如果变量  $\theta$  本身碰巧是一种这样的投资资产，那么

$$\frac{m - r}{s} = \lambda$$

但其他情况，这一关系式通常不成立。

**[例 25.1]** 考虑一种衍生证券，其价格与石油的价格正相关，但不依赖于任何其他的随机变量。假设它提供预期收益率为每年 12%，波动率为每年 20%，假设无风险利率为每年 8%。可以得到石油风险的市场价格是：

$$\frac{0.12 - 0.08}{0.2} = 0.2$$

注意，石油是一种消费资产而不是投资资产。因此，它的风险的市场价格不能通过令  $\mu$  等于石油投资的预期收益、 $\sigma$  等于石油价格的波动率，由方程 (25.8) 而得到。

**[例 25.2]** 考虑两种证券，都与 90 天利率正相关。假设第一种证券预期收益率为每年 3%，波动率为每年 20%；第二种证券波动率为每年 30%。假设瞬时无风险利率为每年 6%。用第一种证券的预期收益和波动率可得利率风险的市场价格为：

$$\frac{0.03 - 0.06}{0.2} = -0.15$$

由方程 (25.9) 变形可知第二种证券的预期收益为：

$$0.06 - 0.15 \times 0.3 = 0.015$$

即每年 1.5%。

## 其他世界

衍生证券价格  $f$  遵循的过程是

$$df = \mu f dt + \sigma f dz$$

$\mu$  值依赖于投资者的风险偏好。在风险的市场价格为 0 的世界中， $\lambda$  等于 0。根据公式 (25.9)，有  $\mu = \lambda$ 。因此， $f$  遵循的过程也是：

$$df = rf dt + \sigma f dz$$

我们将这样的世界称为传统风险中性世界 (traditional risk-neutral world)。

对风险的市场价格  $\lambda$  做其他的假设，我们可以定义其他的内部一致的世界。一般来说，从公式 (25.9) 我们可以看到

$$\mu = r + \lambda\sigma$$

那么

$$df = (r + \lambda\sigma)f dt + \sigma f dz \quad (25.10)$$

变量的风险市场价格决定所有依附于该变量的衍生证券的增长率。我们从某个风险的市场价格转到另一个风险的市场价格时，衍生证券价格的预期增长率会变化，但是它们的波动率保持不变。这就是遵循扩散过程变量的一般属性，这在 11.7 节中简单介绍过。选择某一特定的风险市场价格也被称为定义“概率测度 (probability measure)”。选择某些风险的市场价格，我们可以进入“现实世界”，其中的衍生证券价格增长率可在现实中观测到。

## 25.2 多个状态变量

假设  $n$  个变量  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  遵循如下随机过程：

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dz_i \quad (25.11)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ ，其中  $dz_i$  是维纳过程。参数  $m_i$  和  $s_i$  是预期增长率和波动率，也可以是  $\theta_i$  和时间的函数。本章附录给出了包含几个变量函数的伊藤定理表达式。其中，说明了依赖于  $\theta_i$  的证券价格  $f$  遵循的过程为：

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dz_i \quad (25.12)$$

在这个方程中， $\mu$  为证券的预期收益， $\sigma_i dz_i$  是对  $\theta_i$  起作用的收益的风险组成部分。

本章附录中给出了：

$$\mu - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i \quad (25.13)$$

其中  $\lambda_i$  是  $\theta_i$  风险的市场价格。这个方程将投资者对该证券所要求的预期超额净收益与  $\lambda_i$  和  $\sigma_i$  联系起来。方程 (25.9) 是上述方程在  $n = 1$  时的特殊形式。上式右边的  $\lambda_i \sigma_i$  项衡量了投资者要求的证券收益受证券对  $\theta_i$  依赖的影响程度。如果  $\lambda_i \sigma_i = 0$ ，没有任何影响；如果  $\lambda_i \sigma_i > 0$ ，投资者将要求更高的收益来补偿由  $\theta_i$  引起的风险；如果  $\lambda_i \sigma_i < 0$ ，证券对  $\theta_i$  的依赖性使得投资者要求一个比其他情况更低的收益。当变量的效果是减小而不是增加典型投资者的证券组合风险时，就可以出现  $\lambda_i \sigma_i < 0$  的情况。

[例 25.3] 一种股票价格依赖于三个标的变量：石油价格、黄金价格和股票市场整体情况。假设这些变量风险的市场价格分别为 0.2、-0.1 和 0.4。再假设方程 (25.12) 中相应于三个变量的  $\sigma_i$  因子，分别估计为 0.05、0.1 和 0.15。该股票超过无风险利率的净收益为：

$$0.2 \times 0.05 - 0.1 \times 0.1 + 0.4 \times 0.15 = 0.06$$

即每年 6%。如果有这三个以外的其他变量影响  $f$ ，当这些另外变量风险的市

场价格都为 0 时，以上结果仍是正确的。

方程 (25.13) 与 Stephen Ross 在 1976 年提出的套利定价理论 APT 密切相关。<sup>2</sup> 资本资产定价模型 (CAPM) 的连续时间形式可以看作是这个方程的一种特殊情况。CAPM 说明投资者要求用超额净收益来补偿与股票市场收益的整体风险有关的任何风险，但对其他的风险则不要求超额净收益。与股票市场收益有关的风险称为系统风险 (systematic)，其余风险称为非系统风险 (nonsystematic)。如果 CAPM 正确的话， $\lambda_i$  正比于  $\theta_i$  的变化与市场整体收益之间的相关性。当  $\theta_i$  与市场整体收益不相关时， $\lambda_i$  为 0。

## 25.3 鞅

鞅 (martingale) 是零漂移随机过程。遵循鞅的变量的行为过程如下：

$$d\theta = \sigma dz$$

其中  $dz$  是一个维纳过程。变量  $\sigma$  自身可以是随机变化的。它也可以依附于  $\theta$  和其他一些随机变量。鞅有一个很实用的性质，它在任意的未来时刻的期望值等于今天的价值。也就是说

$$E(\theta_T) = \theta_0$$

其中， $\theta_0$  和  $\theta_T$  分别表示 0 时刻和  $T$  时刻的  $\theta$  值。为了理解这一结果，我们注意在很短的时间段内  $\theta$  的变化服从均值为 0 的正态分布。因此，在很短的时间段内， $\theta$  的预期变化为 0。0 时刻和  $T$  时刻之间  $\theta$  的变化，可视为它在很多很短时间段内变化的总和。那么，0 时刻和  $T$  时刻之间  $\theta$  的预期变化也是 0。

### 等价鞅测度结论

假设  $f$  和  $g$  是依附于单个不确定性来源的可交易衍生证券的价格。假设该衍生证券在我们考虑的时间段内不支付任何收益。<sup>3</sup> 定义：

$$\phi = \frac{f}{g}$$

变量  $\phi$  是  $f$  对于  $g$  的相对价格。我们可以看作是以  $g$  而不是以美元为单位度量  $f$  的价格。衍生证券  $g$  的价格被称为计价标准 (numeraire)。

等价鞅测度结论说明，当不存在套利机会的时候，对于某些风险的市场价格的选取值， $\phi$  遵循鞅。进一步，对于一个给定的计价标准证券  $g$ ，同样选取这些风险的市场价格值，对于所有衍生证券  $f$ ， $\phi$  遵循鞅。这个风险的市场价格的选取值

<sup>2</sup> 参见 S. A. Ross, "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing," *Journal of Economic Theory*, 13 (December 1976): 343–62.

<sup>3</sup> 习题 25.8 中将这个分析过程推广到支付收益证券的情形。

是  $g$  的波动率。也就是说，如果风险的市场价格被设定为  $g$  的波动率，则所有衍生证券  $f$ ，比率  $f/g$  遵循鞍。

为了证明这一结果，我们假设  $f$  和  $g$  的波动率分别为  $\sigma_f$  和  $\sigma_g$ 。根据方程 (25.10)，风险的市场价格为  $\sigma_g$  的世界中，有

$$\begin{aligned} df &= (r + \sigma_g \sigma_f) f dt + \sigma_f f dz \\ dg &= (r + \sigma_g^2) g dt + \sigma_g g dz \end{aligned}$$

根据依藤定理，我们得到

$$\begin{aligned} d\ln f &= (r + \sigma_g \sigma_f - \sigma_f^2/2) dt + \sigma_f dz \\ d\ln g &= (r + \sigma_g^2/2) dt + \sigma_g dz \end{aligned}$$

那么

$$d(\ln f - \ln g) = (\sigma_g \sigma_f - \sigma_f^2/2 - \sigma_g^2/2) dt + (\sigma_f - \sigma_g) dz$$

即

$$d\left(\ln \frac{f}{g}\right) = -\frac{(\sigma_f - \sigma_g)^2}{2} dt + (\sigma_f - \sigma_g) dz$$

根据依藤定理，从  $\ln(f/g)$  的过程决定  $f/g$  的过程。我们得到

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = (\sigma_f - \sigma_g) \frac{f}{g} dz \quad (25.14)$$

这说明  $f/g$  遵循鞍。

这给出了所需的结论。我们将风险的市场价格等于  $g$  的波动率  $\sigma_g$  的世界，称为关于  $g$  的远期风险中性 (forward risk neutral respect to  $g$ ) 世界。

因为  $f/g$  在“关于  $g$  的远期风险中性世界”中遵循鞍，根据本章开始部分中的结论，得到

$$\frac{f_0}{g_0} = E_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right)$$

即

$$f_0 = g_0 E_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right) \quad (25.15)$$

其中， $E_g$  是“关于  $g$  的远期风险中性世界”中的期望值。

## 25.4 计价标准的其他选择

我们现在举一些例子来说明等价鞍测度结论。第一个例子说明该结论和我们之前使用的传统风险中性估值结果是一致的。其他的例子作为第 26 章中对债券期

权、利率上限以及互换期权估值的准备。

## 货币市场账户作为计价标准

美元货币市场账户是一种 0 时刻价值为 \$1，在任意给定时刻获得瞬间无风险利率  $r$  的证券。<sup>4</sup> 变量  $r$  可能是随机的。如果我们设  $g$  为货币市场账户，则它以比率  $r$  增长。那么

$$dg = rgdt \quad (25.16)$$

$g$  的漂移率也是随机的，但  $g$  的波动率为 0。那么，“关于  $g$  的远期风险中性世界”是一个风险的市场价格为 0 的世界。这就是我们已经定义过的传统风险中性世界。根据方程 (25.15)，得到

$$f_0 = g_0 \hat{E} \left( \frac{f_T}{g_T} \right) \quad (25.17)$$

其中， $\hat{E}$  表示传统风险中性世界中的期望。

这种情况下， $g_0 = 1$  且

$$g_T = e^{\int_0^T r dt}$$

那么，方程 (25.17) 简化成

$$f_0 = \hat{E}(e^{-\int_0^T r dt} f_T) \quad (25.18)$$

即

$$f_0 = \hat{E}(e^{-\bar{r}T} f_T) \quad (25.19)$$

其中， $\bar{r}$  是 0~ $T$  时刻之间  $r$  的平均值。该方程说明估值利率衍生证券的一种方法是在传统风险中性世界模拟短期利率  $r$ 。每次模拟运算中，我们计算预期损益，并以路径样本中的短期利率的平均值贴现。

如果假定短期利率  $r$  是常数，则方程 (25.19) 简化为

$$f_0 = e^{-\bar{r}T} \hat{E}(f_T)$$

这就是之前的章节中我们使用的风险中性估值关系式。

## 零息票债券价格作为计价标准

定义  $P(t, T)$  为  $T$  时刻支付 \$1 的零息票债券在  $t$  时刻的价格。现在设定  $g$  等于

---

<sup>4</sup> 货币账户是如下证券中  $\Delta t$  接近于零时的极限情况。第一个很短的时间段  $\Delta t$  内，以初始  $\Delta t$  期限内的利率进行投资； $\Delta t$  时刻，以新的  $\Delta t$  期限利率重新投资  $\Delta t$  期限； $2\Delta t$  时刻，以新的  $\Delta t$  期限利率重新投资  $\Delta t$  期限；如此等等。其他货币的货币市场账户的定义也类似于美元货币市场账户。

$P(t, T)$ , 我们来解释它的意义。以  $E_T$  来表示 “ $P(t, T)$  的远期风险中性世界” 中的期望。因为  $g_T = P(T, T) = 1$  且  $g_0 = P(0, T)$ , 根据方程 (25.15), 得到

$$f_0 = P(0, T)E_T(f_T) \quad (25.20)$$

注意方程 (25.19) 和方程 (25.20) 之间的区别。方程 (25.19) 中, 贴现在期望算子内部。方程 (25.20) 中, 贴现 [以  $P(0, T)$  项表述] 在期望算子外部。利用 “关于  $P(t, T)$  的远期风险中性世界”, 我们可以很简单地处理在  $T$  时刻一次性支付的证券。

考虑不是利率的任意变量  $\theta$ 。<sup>5</sup>  $T$  期限的基于  $\theta$  的远期合约是一种在  $T$  时刻支付  $\theta_T - K$  的合约。其中,  $\theta_T$  是  $T$  时刻  $\theta$  的值。定义  $f$  为该远期合约的价值。根据方程 (25.20), 我们得到

$$f_0 = P(0, T)[E_T(\theta_T) - K]$$

$\theta$  的远期价格  $F$  等于使  $f_0$  等于 0 的  $K$  值。那么

$$P(0, T)[E_T(\theta_T) - F] = 0$$

即

$$F = E_T(\theta_T) \quad (25.21)$$

方程 (25.21) 说明任意变量 (除了利率) 的远期价格是 “关于  $P(t, T)$  的远期风险中性世界” 中的未来即期价格的期望。这里要注意区分远期价格与期货价格。在 14.7 节中说明了一个变量的期货价格是传统风险中性世界中的未来即期价格的期望。

方程 (25.20) 说明了我们可以这样估值在  $T$  时刻提供损益的任意证券: “关于  $T$  时刻到期的债券的远期风险中性世界” 中计算证券的预期损益, 再以  $T$  期限的无风险利率进行贴现。方程 (25.21) 说明了, 在计算预期损益时, 假设标的变量的期望值等于变量的远期价值是正确的。这些结果对于我们理解下一章中债券期权的标准市场模型是非常关键的。

## 债券价格作为计价标准时的利率

定义  $R(t, T, T^*)$  为  $t$  时刻观察的  $T$  时刻与  $T^*$  时刻之间的远期利率, 以  $T^* - T$  作为复利计算间隔 (例如, 如果  $T^* - T = 0.5$ , 表述的利率是每半年计一次复利计算的; 如果  $T^* - T = 0.25$ , 按每季度计一次复利计算; 如此等等)。 $t$  时刻观察到的  $T$  与  $T^*$  之间有效的零息票债券的远期价格为

$$\frac{P(t, T^*)}{P(t, T)}$$

---

<sup>5</sup> 我们以后将看到, 利率远期合约的定义不同于其他变量的远期合约。

我们这里的远期利率的定义和大部分变量的远期价格的定义有些区别。远期利率是对应的远期债券价格隐含的利率。那么

$$\frac{1}{[1 + (T^* - T)R(t, T, T^*)]} = \frac{P(t, T^*)}{P(t, T)}$$

所以

$$R(t, T, T^*) = \frac{1}{T^* - T} \left[ \frac{P(t, T)}{P(t, T^*)} - 1 \right]$$

即

$$R(t, T, T^*) = \frac{1}{T^* - T} \left[ \frac{P(t, T) - P(t, T^*)}{P(t, T^*)} \right]$$

设

$$f = \frac{1}{T^* - T} [P(t, T) - P(t, T^*)]$$

且  $g = P(t, T^*)$ 。则根据等价鞅测度结论,  $R(t, T, T^*)$  在“关于  $P(t, T^*)$  的远期风险中性世界”中遵循鞅。也就是说

$$R(0, T, T^*) = E_{T^*}[R(T, T, T^*)] \quad (25.22)$$

其中,  $E_{T^*}$  表示“关于  $P(t, T^*)$  的远期风险中性世界”中的期望。

我们已经证明了, 在“关于  $T^*$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世界”中, 远期利率等于未来期望的利率。结合该结果和方程 (25.20), 会对于我们理解下一章中的利率上限的标准市场模型非常有帮助。

## 年金因子作为计价标准

作为又一个等价鞅测度结论的应用, 我们考虑未来  $T$  时刻开始的一个互换合约, 支付日期在  $T_1, T_2, \dots, T_N$ 。定义  $T_0 = T$ 。假设互换的标的本金为 \$1。假设  $t$  ( $t \leq T$ ) 时刻的远期互换率 (即对于支付固定利率方, 互换价值为 0 时的相应利率) 为  $s(t)$ 。对于支付固定利率方, 互换的价值为

$$s(t)A(t)$$

其中

$$A(t) = \sum_{i=0}^{N-1} (T_{i+1} - T_i)P(t, T_{i+1})$$

我们在第 7 章中已经提过, 在互换的最后支付日的支付包括本金时, 对于支付浮动利率方, 期初的互换价值等于标的本金。那么, 当我们在  $T_N$  时刻附加 \$1, 则  $T$  时刻对于支付浮动利率方的互换价值为 \$1。 $T_N$  时刻收到的 \$1 的价值为  $P(t, T_N)$ 。 $$1$  在  $T_0$  时刻的价值为  $P(t, T_0)$ 。因此,  $t$  时刻对于支付浮动利率方的价值为

$$P(t, T_0) - P(t, T_N)$$

令支付固定利率方与支付浮动利率方的价值相等，应该有

$$s(t)A(t) = P(t, T_0) - P(t, T_N)$$

即

$$s(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{A(t)} \quad (25.23)$$

通过设定  $f$  等于  $P(t, T_0) - P(t, T_N)$ 、 $g$  等于  $A(t)$ ，我们可以应用等价鞍测度结论。我们可以得到

$$s(t) = E_A[s(T)] \quad (25.24)$$

其中， $E_A$  表示“关于  $A(t)$  的远期风险中性世界”中的期望。因此，在“关于  $A(t)$  的远期风险中性世界”中，未来互换率的期望值为当前的互换率。

对于任意的证券  $f$ ，方程 (25.15) 的结果说明

$$f_0 = A(0)E_A\left[\frac{f_T}{A(T)}\right] \quad (25.25)$$

结合该结果和方程 (25.24)，会对于我们理解下一章中的欧式互换期权的标准市场模型非常有帮助。

## 25.5 扩展到多因子模型

25.3 节和 25.4 节中的结果可以扩展到存在很多独立因子的情况。<sup>6</sup> 假设有  $n$  个独立因子， $f$  和  $g$  在传统风险中性世界中的行为过程如下：

$$df = r f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

和

$$dg = r g dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} g dz_i$$

根据 25.2 节的讲述，我们可以定义其他内部一致的世界，这需要设定

$$df = \left[ r + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{f,i} \right] f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

和

---

<sup>6</sup> 独立条件并不是必须的。如果因子之间不互相独立，我们可以对它们进行正交化。

$$dg = \left[ r + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{g,i} \right] g dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} g dz_i$$

其中， $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 为第  $n$  个风险的市场价格。其他世界中也包含现实世界。

我们定义“关于  $g$  的远期风险中性世界”，其中  $\lambda_i = \sigma_{g,i}$ 。根据依藤定理，利用  $dz_i$  互不相关的事，我们可以证明这个世界中  $f/g$  的行为过程的漂移率为 0（参见习题 25.12）。因此，之前两节中的其他结果 [从方程 (25.15) 开始] 也是正确的。

## 25.6 应用

本节中我们给出两个远期风险中性估值方法的应用。将在第 26、27、29 和第 30 章给出其他一些应用过程。

### Black-Scholes 结论

当利率是随机变量时，我们可以使用远期风险中性估值方法来扩展 Black-Scholes 结论。考虑一个  $T$  时刻到期的基于不支付红利股票的欧式看涨期权。根据方程 (25.20)，该看涨期权的价格是：

$$c = P(0, T) E_T [\max(S_T - K, 0)] \quad (25.26)$$

其中， $S_T$  是  $T$  时刻股票价格， $K$  是执行价格， $E_T$  表示“关于  $T$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世界”中的期望。定义  $R$  为  $T$  期限对应的零息率，那么

$$P(0, T) = e^{-RT}$$

方程 (25.26) 变成

$$c = e^{-RT} E_T [\max(S_T - K, 0)] \quad (25.27)$$

如果我们假设  $S_T$  在远期风险中性世界中服从对数正态分布，令  $\ln(S_T)$  的标准差等于  $\omega$ ，根据第 13 章附录，可以得出

$$E_T [\max(S_T - K, 0)] = E_T (S_T) N(d_1) - K N(d_2) \quad (25.28)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[E_T(S_T)/K] + \omega^2/2}{\omega}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_T(S_T)/K] - \omega^2/2}{\omega}$$

根据方程 (25.21)， $E_T(S_T)$  是  $T$  时刻到期的一个合约的远期股票价格。根据第 5 章的无套利假设，我们得到

$$E_T(S_T) = S_0 e^{RT} \quad (25.29)$$

根据方程 (25.27)、(25.28) 以及方程 (25.29)，我们得到

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[S_0/K] + RT + w^2/2}{w}$$

$$d_2 = \frac{\ln[S_0/K] + RT - w^2/2}{w}$$

如果股票价格波动率  $\sigma$  满足  $\sigma\sqrt{T} = w$ ， $d_1$  和  $d_2$  的表达式变成

$$d_1 = \frac{\ln[S_0/K] + (R + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[S_0/K] + (R - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

这说明可由 Black-Scholes 定价公式给出该看涨期权的价格，其中要以  $R$  替换  $r$ 。对于欧式看跌期权也可以得到类似的结论。

## 资产交换期权

接下来考虑一个以价值为  $U$  的投资资产换取价值为  $V$  的投资资产的期权。在 22.11 节中已经提过这种期权。我们假设  $U$  和  $V$  的波动率分别为  $\sigma_U$  和  $\sigma_V$ ，并且两者之间的相关系数为  $\rho$ 。

首先假设这些资产不支付收益。我们选择  $U$  作为计价标准衍生证券  $g$ 。在方程 (25.15) 中设  $f = V$ ，那么

$$V_0 = U_0 E_U \left[ \frac{V_T}{U_T} \right] \quad (25.30)$$

其中， $E_U$  表示“关于  $U$  的远期风险中性世界”中的期望值。

接下来，设方程 (25.15) 中的  $f$  为我们所考虑的期权的价值，则  $f_T = \max(V_T - U_T, 0)$ 。那么

$$f_0 = U_0 E_U \left[ \frac{\max(V_T - U_T, 0)}{U_T} \right]$$

即

$$f_0 = U_0 E_U \left[ \max \left( \frac{V_T}{U_T} - 1, 0 \right) \right] \quad (25.31)$$

$V/U$  的波动率 (参见习题 25.14) 为  $\hat{\sigma}$ ，其中

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 - 2\rho\sigma_u\sigma_v$$

根据第 13 章的附录，方程 (25.31) 可以变成

$$f_0 = U_0 \left[ E_u \left( \frac{V_T}{U_T} \right) N(d_1) - N(d_2) \right]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + \hat{\sigma}^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} \quad \text{且} \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma} \sqrt{T}$$

代入方程 (25.30)，得到

$$f_0 = V_0 N(d_1) - U_0 N(d_2) \quad (25.32)$$

习题 25.8 提出了，当  $f$  和  $g$  支付  $q_f$  和  $q_g$  的收益率，方程 (25.15) 变成

$$f_0 = g_0 e^{(q_f - q_g)T} E_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right)$$

那么方程 (25.30) 和方程 (25.31) 相应地变成

$$E_u \left( \frac{V_T}{U_T} \right) = e^{(q_u - q_v)T} \frac{V_0}{U_0}$$

和

$$f_0 = e^{-q_v T} U_0 E_u \left[ \max \left( \frac{V_T}{U_T} - 1, 0 \right) \right]$$

方程 (25.32) 变成

$$f_0 = e^{-q_v T} V_0 N(d_1) - e^{-q_v T} U_0 N(d_2)$$

$d_1$  和  $d_2$  被重新定义为

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_u - q_v + \hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma} \sqrt{T}} \quad \text{且} \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma} \sqrt{T}$$

这就是方程 (22.3) 给出的结果。

## 25.7 计价标准的改变

本节中，我们考虑计价标准的改变对一个市场变量的行为过程产生什么影响。“关于  $g$  的远期风险中性世界” 中，可交易证券  $f$  遵循的行为过程如下：

$$df = \left[ r + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} \sigma_{f,i} \right] f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

类似地，在“关于另一个证券  $h$  的远期风险中性世界”中，可交易证券  $f$  遵循的行为过程为：

$$df = \left[ r + \sum_{i=1}^n \sigma_{h,i} \sigma_{f,i} \right] f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

其中， $\sigma_{h,i}$  是  $h$  的波动率的第  $i$  个组成部分。

从“关于  $g$  的远期风险中性世界”变化到“关于另一个证券  $h$  的远期风险中性世界”（即计价标准从  $g$  变为  $h$ ）的影响是，可交易证券  $f$  的预期增长率上升了

$$\sum_{i=1}^n (\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}) \sigma_{f,i}$$

接下来考虑变量  $v$ ，它是可交易证券价格的函数（ $v$  并不一定等于可交易证券价格本身）。定义  $\sigma_{v,i}$  为  $v$  的波动率的第  $i$  个组成部分。根据本章附录中的伊藤定理的形式，当计价标准改变，标的可交易证券的预期增长率变化时，我们可以计算相应的  $v$  的行为过程的变化。结论是  $v$  的预期增长率对计价标准改变的反映与可交易证券价格的预期增长率的变化相似（参见习题 12.6，它对应只有一个随机变量的情况；习题 25.13 对应一般情况）。它上升了

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^n (\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}) \sigma_{v,i} \quad (25.33)$$

定义  $w = h/g$  且  $\sigma_{w,i}$  为  $w$  的波动率的第  $i$  个组成部分。根据伊藤定理（参见习题 25.14），我们得到

$$\sigma_{w,i} = \sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}$$

方程 (25.33) 变成

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^n \sigma_{w,i} \sigma_{v,i} \quad (25.34)$$

我们将  $w$  称为计价标准比率 (numeraire ratio)。方程 (25.34) 等价于

$$\alpha_v = \rho \sigma_v \sigma_w \quad (25.35)$$

其中， $\sigma_v$  是  $v$  的总波动率， $\sigma_w$  是  $w$  的总波动率， $\rho$  是  $v$  和  $w$  之间的瞬态相关系数。<sup>7</sup>

<sup>7</sup> 为了得到这个结论，注意到  $v$  和  $w$  在很短时间段  $\Delta t$  内的变化  $\Delta v$  和  $\Delta w$  为：

$$\Delta v = \dots + \sum \sigma_{v,i} v \epsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta w = \dots + \sum \sigma_{w,i} w \epsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

因为  $dz_i$  之间互不相关，当  $i \neq j$  时， $E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0$ 。同时，从  $\rho$  的定义，我们可以得到

$$\rho v \sigma_v w \sigma_w = E(\Delta v \Delta w) - E(\Delta v)E(\Delta w)$$

当忽略  $\Delta t$  的高阶项时，上述等式变化成

$$\rho \sigma_v \sigma_w = \sum \sigma_{w,i} \sigma_{v,i}$$

这一结果出奇的简单。改变计价标准时需要对一个变量  $v$  的预期增长率做出的调整，是  $v$  的变化百分比以及计价标准比率的变化百分比之间的瞬态相关系数。第 27 章中讲述时刻调整和跨币衍生证券调整时将使用这一结论。

## 小 结

一个变量的风险的市场价格，衡量了依附于这一变量的可交易证券的风险与收益的权衡关系。当只有一个标的变量时，一个衍生证券的超过无风险利率的超额收益，等于风险的市场价格乘以这一变量的波动率。当存在多个标的变量时，超额收益等于风险价格乘以每个变量波动率的总和。

衍生证券定价中最重要的工具是风险中性估值方法。第 11 章和第 13 章中已经介绍过这一方法。风险中性估值方法的原理是，当为衍生证券定价时，如果我们假定世界是风险中性的，我们可以得到正确的结果，不仅仅是风险中性世界，在其他世界也是如此。在传统风险中性世界，所有变量的风险的市场价格为 0。进一步，该世界中任意资产的预期价格就是它的期货价格。

本章中，我们推广了风险中性估值原理。我们证明了利率是随机变量时，有很多有趣并有用的世界可以替代传统风险中性世界。当只有一个随机变量时，如果变量的风险的市场价格等于上述证券价格的波动率，就可以定义一种“关于证券价格的远期风险中性世界”。存在多个随机变量时，也可以做类似的规定。

鞅是零漂移随机过程。遵循鞅的任何变量有一个简单的性质，即未来任一时刻它的期望价值等于它当前的价值。我们证明了在一个“关于  $g$  的远期风险中性世界”中，对于所有衍生证券价格  $f$ ，比率  $f/g$  遵循鞅。那么，通过选择恰当的计价标准证券  $g$ ，我们可以简化很多依附于利率的衍生证券的估值问题。

本章中我们说明了当利率是随机变量时，如何使用扩展的风险中性估值方法，来定价欧式资产互换期权。第 26、27、29 和第 30 章中定价利率衍生证券时，这一扩展结果将非常有用。

## 参考读物

- Baxter, M., and A. Rennie, *Financial Calculus*. Cambridge University Press, 1996.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, “An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices,” *Econometrica*, 53 (1985): 363–84.
- Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, 1992
- Garman, M., “A General Theory of Asset Valuation Under Diffusion State Processes,” Working Paper 50, University of California, Berkeley, 1976.
- Harrison, J. M., and D. M. Kreps, “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets,” *Journal of Economic Theory*, 20 (1979): 381–408.
- Harrison, J. M., and S. R. Pliska, “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading,” *Stochastic Processes and Their Applications*, 11 (1981): 215–60.

## 问题和习题

- 25.1 不是投资资产价格的变量，其风险的市场价格是如何定义的？
- 25.2 假设黄金的风险的市场价格为零，如果贮存成本为每年 1%，无风险年利率为 6%，那么黄金价格的预期增长率为多少？假设黄金不支付收益。
- 25.3 两个衍生证券都依附于同样的市场变量。两个衍生证券的预期收益率分别为 8% 和 12%。第一个衍生证券的波动率为 15%。瞬态无风险利率为 4%。第二个衍生证券的波动率为多少？
- 25.4 某个石油公司只是为了开发德克萨斯一个很小区域的石油。其价值主要依赖于如下两个随机变量：石油的价格和已探明石油的储存量。讨论：这两个变量中的第二个变量风险的市场价格有可能为正数、负数还是零？
- 25.5 通过两个无红利支付的可交易证券和一个依赖于这两个无红利支付可交易证券价格的衍生工具，构成一个无风险组合，推导出这个衍生工具的微分方程。
- 25.6 假设一利率  $x$  遵循如下过程：

$$dx = a(x_0 - x)dt + c\sqrt{x} dz$$

其中  $a$ 、 $x_0$  和  $c$  是正常数。假设  $x$  的风险市场价格是  $\lambda$ 。传统风险中性世界中， $x$  所遵循的过程如何？

- 25.7 请证明：当衍生证券  $f$  提供收益率  $q$  时，方程 (25.9) 变成  $\mu + q - r = \lambda\sigma$ 。（提示：假设所有从  $f$  得到的收益被重新投资在  $f$ ，构造一个新的无收益的衍生证券  $f^*$ 。）
- 25.8 当  $f$  和  $g$  的收益率分别为  $q_f$  和  $q_g$  的时候，方程 (25.15) 变成

$$f_0 = g_0 e^{(q_f - q_g)T} E_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right)$$

（提示：假设所有从  $f$  得到的收益被重新投资在  $f$ ，所有从  $g$  得到的收益被重新投资在  $g^*$ ，构造新的无收益的衍生证券  $f^*$  和  $g^*$ 。）

- 25.9 “相比现实世界，风险中性世界中的利率的未来期望值更大。”对于 (a) 利率和 (b) 债券价格的风险市场价格，这句话意味着什么？你认为这句话是正确的吗？请给出理由。
- 25.10 变量  $S$  是一个以货币  $A$  表示支付收益率  $q$  的投资资产。它在现实世界中的过程如下：

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz$$

在如下的几个情形中，定义所需的变量，给出  $S$  的过程和对应的风险的市场价格。

- (a) 货币 A 的传统风险中性世界。
- (b) 货币 B 的传统风险中性世界。
- (c) 关于  $T$  时刻到期的货币 A 的零息票债券的远期风险中性世界。
- (d) 关于  $T$  时刻到期的货币 B 的零息票债券的远期风险中性世界。

- 25.11 请解释远期利率的定义方式与其他如股票价格、商品价格和汇率的远期值的定义方式之间的区别。
- 25.12 当

$$df = \left[ r + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{f,i} \right] f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

和

$$dg = \left[ r + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{g,i} \right] g dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} g dz_i$$

与  $dz_i$  不相关,  $\lambda_i = \sigma_{g,i}$  时,  $f/g$  遵循鞅。此时, 证明 25.5 节中的结论。

- 25.13 请证明 25.7 节中的方程 (25.33)。
- 25.14 请证明: 如果  $w=h/g$ ,  $h$  和  $g$  都依附于  $n$  个维纳过程, 则  $w$  的波动率的第  $i$  个成分等于  $h$  的波动率的第  $i$  个成分减去  $g$  的波动率的第  $i$  个成分。证明时使用以下结论: 如果  $\sigma_u$  是  $U$  的波动率,  $\sigma_v$  是  $V$  的波动率, 则  $U/V$  的波动率是  $\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - 2\rho\sigma_u\sigma_v}$ 。(提示: 使用注释 7 中的结论。)

## 课后练习

- 25.15 一个证券的价格与以下两个变量正相关: 铜的价格和日元兑美元的汇率, 假设这两个变量的风险市场价格分别为 0.5 和 0.1。若铜的价格固定, 则该证券的波动率为每年 8%; 如果日元兑美元的汇率固定, 则该证券的波动率为每年 12%。无风险利率为每年 7%。证券的预期回报率为多少? 如果两个变量彼此之间是不相关的, 该证券的波动率为多少?

- 25.16 假设  $T$  时刻到期的零息票债券价格的过程如下:

$$dP(t, T) = \mu_p P(t, T) dt + \sigma_p P(t, T) dz$$

并且依附于该债券的一个衍生证券价格的过程如下:

$$df = \mu_f f dt + \sigma_f f dz$$

假设只有一个不确定性来源,  $f$  不支付收益。

- (a) 对  $T$  时刻到期的合约  $f$  的远期价格  $F$  是什么?
- (b) “关于  $P(t, T)$  的远期风险中性世界”中,  $F$  的过程是什么?
- (c) 传统风险中性世界中,  $F$  的过程是什么?
- (d) “关于  $T^*$  时刻到期的债券的远期风险中性世界”中,  $f$  遵循什么过程? 其中,  $T^* \neq T$ 。假设该债券的波动率是  $\sigma_p^*$ 。

- 25.17 考虑一个不是利率的变量:

- (a) 在什么世界中, 变量的期货价格遵循鞅?
- (b) 在什么世界中, 变量的远期价格遵循鞅?
- (c) 定义所需的变量, 推导传统风险中性世界中, 期货价格的漂移率和远期价格的漂移率之差的表达式。
- (d) 5.8 节中分析过期货价格大于远期价格时的情形。请证明你的结果和 5.8 节中的要点是相互一致的。

## 附录

### 处理多个不确定性来源

这一附录中，我们把伊藤定理扩展到存在多个不确定性来源的情况，并证明方程 (25.13) 中的结论（多个不确定性来源的情况下，存在超额收益和风险的市场价格之间的关系）。

### 多个变量函数的伊藤定理

第 12 章附录中表示的伊藤定理给出了单个随机变量的函数所满足的过程。这里我们介绍几个随机变量函数遵循过程的伊藤定理的一般表达式。

假设函数  $f$  依赖于  $n$  个变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和时间  $t$ 。进一步假设  $x_i$  遵循 Itô 过程，其瞬态漂移率  $a_i$  和瞬态波动率为  $b_i^2$  ( $1 \leq i \leq n$ )，即：

$$dx_i = a_i dt + b_i dz_i \quad (25A.1)$$

这里  $dz_i$  是维纳过程 ( $1 \leq i \leq n$ )。每个  $a_i$  和  $b_i$  可以是所有的  $x_i$  和  $t$  的任意函数。 $\Delta f$  的泰勒展开式给出：

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} \Delta x_i \Delta t + \dots \quad (25A.2)$$

方程 (25A.1) 的离散形式为：

$$\Delta x_i = a_i \Delta t + b_i \epsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

这里  $\epsilon_i$  是来自标准正态分布中的随机样本。 $dz_i$  和  $dz_j$  之间的相关系数  $\rho_{ij}$  定义为  $\epsilon_i$  和  $\epsilon_j$  之间的相关系数。在第 12 章附录中，已经讨论过：

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x_i^2 = b_i^2 dt$$

类似地：

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x_i \Delta x_j = b_i b_j \rho_{ij} dt$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$ ，方程 (25A.2) 中  $\Delta f$  展开式的前两项是一阶  $\Delta t$ ，所有其他项是高阶  $\Delta t$ 。因此，

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} dt$$

这就是伊藤定理的一般表达式。用 (25A.1) 式中  $dx_i$  代入上式，得：

$$df = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} b_i dz_i \quad (25A.3)$$

下面用另一种方法推导伊藤定理的一般形式。假设  $f$  依附于单个变量  $x$ ，而  $x$  的过程包含多个维纳过程：

$$dx = adt + \sum_{i=1}^m b_i dz_i$$

这种情况下

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + \dots$$

$$\Delta x = a \Delta t + \sum_{i=1}^m b_i \epsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

并且

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x_i^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_i b_j \rho_{ij} dt$$

其中，和之前一样， $\rho_{ij}$  是  $dz_i$  和  $dz_j$  之间的相关系数。那么

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} b_i dz_i \quad (25A.4)$$

最后，我们考虑更为一般的情况， $f$  依附于多个变量  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )，并且

$$dx_i = a_i dt + \sum_{k=1}^m b_{ik} dz_k$$

经过类似的分析，可以证明

$$df = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{ik} b_{jl} \rho_{kl} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} b_{ik} dz_k \quad (25A.5)$$

## 依附于多个不确定性来源的衍生证券的收益

25.1 节中我们给出了当存在单个不确定性来源时，收益和风险之间的关系。我们现在证明方程 (25.13)，其中存在多个不确定性来源的情况。

假设有  $n$  个随机变量服从维纳过程。考虑  $n+1$  个可交易证券，它们的价格取决于某些或全部  $n$  个随机变量。定义  $f_j$  为第  $j$  个衍生证券的价格 ( $1 \leq j \leq n+1$ )。我们假设  $n+1$  个可交易证券不支付红利或其他收益。<sup>8</sup> 根据附录前面部分，这些证券的行为过程如下：

$$df_j = \mu_j f_j dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} f_j dz_i \quad (25A.6)$$

<sup>8</sup> 这并不是限制性的。通过把一个支付收益衍生证券的红利重新投资于证券本身，我们就能获取不支付红利衍生证券。

因为有  $n + 1$  个可交易证券和  $n$  个维纳过程，我们可以用这些证券构造一个瞬间无风险组合  $\Pi$ 。定义  $k_j$  为组合中第  $j$  个证券的数额，那么

$$\Pi = \sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j \quad (25A.7)$$

选择  $k_j$  的依据是，使得这些证券收益的随机部分被消除。根据方程 (25A.6)，这说明，对于  $1 \leq i \leq n$ ，

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j \sigma_{ij} f_j = 0 \quad (25A.8)$$

那么，证券组合的收益为

$$d\Pi = \sum_{j=1}^{n+1} k_j \mu_j f_j dt$$

构造证券组合的成本是

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j$$

如果不存在套利机会，该组合的收益率应该等于无风险利率，即

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j \mu_j f_j = r \sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j \quad (25A.9)$$

即

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j (\mu_j - r) = 0 \quad (25A.10)$$

方程 (25A.8) ~ 方程 (25A.10) 可视为  $n + 1$  个  $k_j$  的齐次线性方程。 $k_j$  不全为 0。根据线性代数的众所周知的理论，方程 (25A.8) ~ 方程 (25A.10) 一致，当且仅当对于所有的  $j$ ，对于一些只取决于静态变量和时间的  $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$ ，有

$$f_j (\mu_j - r) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{ij} f_i \quad (25A.11)$$

或

$$\mu_j - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{ij} \quad (25A.12)$$

取消下标  $j$ ，这说明，对于任一依附于  $n$  个随机变量的证券  $f$ ，有

$$df = \mu f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i f dz_i$$

其中

$$\mu - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$$

这样，我们就证明了方程 (25.13)。



# 利率衍生证券：标准市场模型

利率衍生证券是其收益在某种程度上依附于利率水平的金融工具。在 20 世纪 80 年代和 90 年代早期，OTC 市场和场内交易市场的利率衍生证券的成交量迅速增加，已经开发出许多新产品以满足最终客户的需要。对衍生证券从业人员的一个重要挑战是找出强有力的定价方法以及对冲该产品的方法。

利率衍生证券的估值比股票和外汇衍生证券的估值要困难得多。原因如下：

1. 单个利率的行为过程比股票价格或汇率的行为过程复杂得多
2. 对许多衍生产品估值而言，有必要开发出描述整个零息票收益率曲线行为过程的模型
3. 在收益率曲线上不同点的波动率是不同的
4. 这些利率既用于贴现，又用于定义衍生证券的收益状况

本章中我们考虑三种最受欢迎的 OTC 利率期权产品：债券期权、利率上限/下限以及互换期权。我们将给出估值这些产品的标准市场模型，并利用第 25 章中的分析来说明这些模型是内部一致的。

## 26.1 Black 模型

自从 1973 年 Black-Scholes 公式首次公布以来，该公式已成为非常普遍的工具。正如在第 14 章所述，该模型经过扩展之后，可为外汇期权、指数期权以及期货期权估值。交易员非常习惯于该模型的对数正态分布假设和描述不确定性的波动率。为了使该模型适用于利率衍生证券，出现各种扩展该模型的做法也就不奇怪了。

本章中我们将讨论三种最流行的利率衍生证券（债券期权、利率上限/下限以及互换期权），并描述如何利用 Black-Scholes 模型的标的变量对数正态分布假设，对这些衍生证券进行定价。我们将使用的模型通常被称为 Black 模型，因为它的结构和 Fischer Black 的基于商品期货的期权（参见 14.8 节）估值模型结构类似。这一模型中，如果期货合约和期权合约的到期日相同，那么在期权到期日期货价格等于即期价格。这说明，该模型可以给出现货期权的价格以及期货期权的价格。

## 利用 Black 模型为欧式期权定价

考虑一个基于价格为  $V$  的变量的欧式看涨期权（变量  $V$  并不一定是可交易证券的价格）。定义：

$T$ : 期权到期期限

$F$ : 在期限为  $T$  的一个合约中的  $V$  的远期价格

$F_0$ : 0 时刻的  $F$  值

$K$ : 期权的执行价格

$P(t, T)$ :  $T$  时刻支付 \$1 的零息票债券在  $t$  时刻的价格

$V_T$ : 在时刻  $T$  时  $V$  的价值

$\sigma$ :  $F$  的波动率

估值期权的步骤如下：

1. 假设  $\ln V_T$  是均值为  $F_0$ 、标准差为  $\sigma\sqrt{T}$  的正态分布。
2. 以  $T$  年期利率贴现预期损益 [这等价于预期损益乘以  $P(0, T)$ ]。

在时刻  $T$ , 期权的损益状态是  $\max(V_T - K, 0)$ 。根据第 13 章附录, 对于  $V_T$  的对数正态分布假设说明预期损益为

$$E(V_T)N(d_1) - KN(d_2)$$

其中  $E(V_T)$  是  $V_T$  的期望值, 并且

$$d_1 = \frac{\ln[E(V_T)/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E(V_T)/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

因为我们假设  $E(V_T) = F_0$ , 期权的价值为

$$c = P(0, T)[F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \quad (26.1)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

类似地, 对应的看跌期权的价值  $p$  为

$$p = P(0, T)[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (26.2)$$

从现在开始我们将这一模型称为 Black 模型。Black 模型的一个重要特征是, 我们不需要在推导当中假设  $V$  或  $F$  服从几何布朗运动, 我们只需假设  $V_T$  在  $T$  时刻服从对数正态分布。参数  $\sigma$  通常被称为  $F$  的波动率或是  $V$  的远期波动率。但是它

只有一个作用，就是根据以下关系式决定  $\ln V_T$  的标准差：

$$\ln V_T \text{ 的标准差} = \sigma \sqrt{T}$$

波动率参数不决定其他时刻（即不是  $T$  时刻）的  $\ln V$  的标准差。

## 延迟支付

考虑损益是从变量  $V$  在  $T$  时刻的值计算的，而损益实际发生的时间在更晚的一个时刻  $T^*$ 。我们可以扩展 Black 模型来处理这种情况。预期损益应该从  $T^*$  时刻贴现到现在，而不是  $T$  时刻。所以，方程 (26.1) 和方程 (26.2) 变成

$$c = P(0, T^*)[F_0 N(d_1) - K N(d_2)] \quad (26.3)$$

$$p = P(0, T^*)[K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (26.4)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

## Black 模型的有效性

很容易看到，当利率是不变的或者是确定的，以 Black 模型处理是非常恰当的。这种情况下，如第 5 章所述， $V$  的远期价格和其期货价格相同。根据 14.7 节的内容，在风险中性世界，有  $E(S_T) = F_0$ 。

当利率为随机变量时，方程 (26.1) 到方程 (26.4) 的推导中存在两个问题：

1. 为什么我们设定  $E(V_T)$  等于  $V$  的远期价格  $F_0$ ，这并不和期货价格相等
2. 在贴现时，我们忽略了利率是随机变化的

实际上，这两个假设具有相互抵消的效应。利用 Black 模型定价债券期权、利率上限/下限以及互换期权时，我们利用 25.4 节中的结论来说明当利率是随机变量时，方程 (26.1) 到方程 (26.4) 也是准确的。因此，Black 模型有强大的理论基础以及很高的适用性。

## 26.2 债券期权

债券期权是在未来一个确定日期按一个确定价格购买或出售某个债券的选择权利。除了在 OTC 市场中的交易，债券期权也常常被嵌入发行的债券，使得这些债券对于发行者和潜在购买者更有吸引力。

## 嵌入债券的期权

嵌入债券的期权的一个例子是可提前赎回债券 (callable bond)。可提前赎回债券包含了允许发债公司在未来某一时间以预先确定价格购回债券的条款。这种债券的持有者出售给发行者一个看涨期权。在该期权中的执行价格即赎回价格是该债券发行者必须支付给该债券持有者的预先确定价格。可提前赎回债券在债券有效期内的前几年通常不能赎回 (这就是所谓的锁定期)。之后，随着到期日临近，赎回价格通常是减少的。例如，某个 10 年期可提前赎回债券，前 2 年没有赎回的权利。之后，该债券的发行者有权在第 3 年和第 4 年按 110 的价格，在第 5 年和第 6 年按 107.5 的价格，在第 7 年和第 8 年按 106 的价格，在第 9 年和第 10 年按 103 的价格赎回。这个看涨期权的价值包含在债券所报出的收益率中。附有赎回条款债券提供了比没有赎回条款债券更高的收益率。

嵌入债券的期权的另一个例子是可回售债券 (puttable bond)。可回售债券包括允许持有者在未来某一时间内以预先确定价格提前退还债券收回现金的条款。这种债券的持有者不但购买了债券本身而且还购买了债券的看跌期权。对持有者而言，由于看跌期权增加了债券的价值，附有回售条款的债券提供的收益率比没有回售条款的债券的收益率低。一个简单的可回售债券的例子是，某个 10 年期债券的持有者有权在第 5 年末得到偿还 (这样的债券有时被称为可撤销债券)。

贷款以及存款票据也经常有嵌入债券的期权。例如，某个金融机构的 5 年期固定利率存款它包含了债券的美式看跌期权，在任何时刻都可以被赎回而不用支付任何罚金 (存款票据是投资者在任意时刻有权按面值退还给金融机构的债券)。贷款和抵押中的提前偿还权利可以看作是债券的看涨期权。

最后我们需要注意，银行或金融机构所做的贷款承诺是基于债券的看跌期权。例如，考虑如下情况：银行向某个潜在的借款人报出 5 年期的利率为每年 5% 的报价，并声明随后 2 个月这个利率报价一直有效。客户实际上取得了在随后 2 个月内，随时向金融机构按面值出售息票 5% 的 5 年期债券的权利。

## 欧式债券期权

很多 OTC 市场交易的债券期权以及某些嵌入债券的期权都是欧式的。我们现在考虑估值这些欧式期权的标准市场模型。

通常假设期权到期时的债券价格是对数正态分布的。令  $F_0$  等于远期债券价格  $F_B$ ，方程 (26.1) 和方程 (26.2) 可用作对期权进行定价。 $\sigma$  被设定为等于远期债券价格的波动率  $\sigma_B$ 。如 26.1 节中的解释，定义  $\sigma_B$  时，我们让  $\sigma_B \sqrt{T}$  等于期权到期之时的债券价格对数的标准差。因此，欧式债券期权的定价公式为

$$c = P(0, T)[F_B N(d_1) - K N(d_2)] \quad (26.5)$$

$$p = P(0, T)[K N(-d_2) - F_B N(-d_1)] \quad (26.6)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F_B/K) + \sigma_B^2 T/2}{\sigma_B \sqrt{T}} \quad \text{和} \quad d_2 = d_1 - \sigma_B \sqrt{T}$$

根据第 5.5 节内容， $F_B$  的计算公式为

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0, T)} \quad (26.7)$$

其中， $B_0$  是 0 时刻的债券价格， $I$  是期权有效期内所支付息票的现值。在这个公式中，即期债券价格和远期债券价格都是现金价格，而不是报价价格。在第 6.2 节中解释了债券现金价格和债券报价之间的关系。

在方程 (26.5) 和方程 (26.6) 中的执行价格  $K$  应该是现金执行价格。为了正确选择  $K$  的值，准确确定期权的条款很重要。如果执行价格定义为期权履约时交换该债券的现金量， $K$  应该设定等于这个执行价格。更常见的情况是，执行价格定义为期权履约时该债券相应的报价， $K$  应该设定等于执行价格加上截止到期权到期日的应计利息。交易员将债券的报价看作为“净价”（clean price），而将现金价格看作为“全价”（dirty price）。

**[例 26.1]** 考虑一个 10 个月期欧式看涨期权，标的证券是有效期 9.75 年的债券，面值为 \$1 000（当期权到期时，该债券的有效期为 8 年 11 个月）。假设当前现金债券价格为 \$960，执行价格为 \$1 000，10 个月期无风险利率为每年 10%，在 10 个月内该债券远期价格的波动率为每年 9%。债券息票率为 10%，每半年支付一次，预计在 3 个月后和 9 个月后各支付 \$50 息票（这意味着应计利息为 \$25，报价为 \$935）。我们假设 3 个月期和 9 个月期的无风险利率分别为每年 9.0% 和 9.5%。因此，所付息票的现值为：

$$50e^{-0.25 \times 0.09} + 50e^{-0.75 \times 0.095} = 95.45$$

即 \$95.45。从公式 (26.7) 得到债券远期价格如下：

$$F_B = (960 - 95.45)e^{0.10 \times 0.8333} = 939.68$$

(a) 如果执行价格是执行时支付该债券的现金价格，公式 (26.5) 中的参数是  $F_B = 939.68$ ,  $K = 1 000$ ,  $P(0, T) = e^{-0.1 \times (10/12)} = 0.9200$ ,  $\sigma_B = 0.09$ ,  $T = 10/12$ 。看涨期权的价格为 \$9.49。

(b) 如果执行价格是执行时支付该债券的报价，由于期权的到期日是息票支付日之后的 1 个月，1 个月的应计利息必须加到  $K$  中去。得到  $K$  的值为：

$$1 000 + 50 \times 0.16667 = 1 008.33$$

在公式 (26.5) 中的其他参数不变 [即,  $F_B = 939.68$ ,  $P(0, T) = 0.9200$ ,  $\sigma_B = 0.09$ ,  $T = 0.8333$ ]。看涨期权的价格为 \$7.97。

图 26.1 说明债券价格对数的标准差如何随时间变化。今天的标准差为零，因为今天债券的价格没有不确定性。在债券的到期日标准差也是零，因为我们知道到期时债券价格将等于它的面值。在今天和债券到期日之间，标准差开始是增加

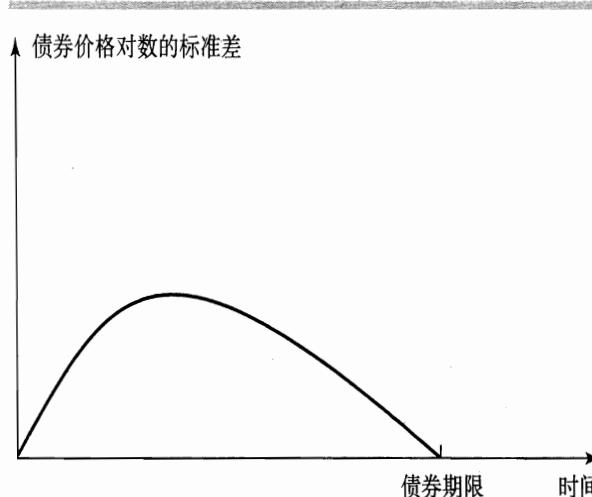


图 26.1 债券价格对数的标准差随时间变化的关系图

的，然后减少。

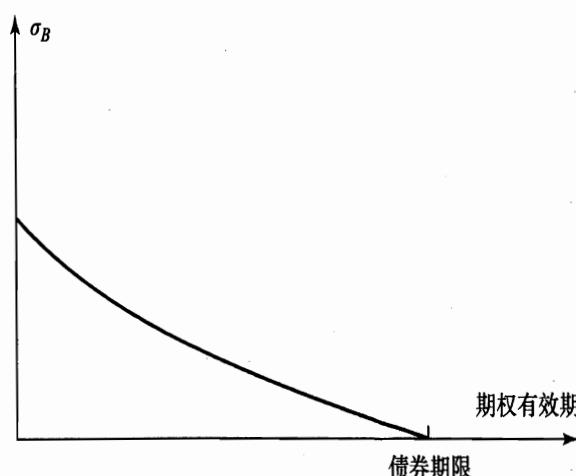
在为债券的欧式期权进行估值时，所使用的波动率  $\sigma_B$  为：

$$\frac{\text{期权到期时债券价格对数的标准偏差}}{\sqrt{\text{期权到期时的时间长度}}}$$

标的债券不变而期权有效期变长时会发生什么情况呢？图 26.2 说明  $\sigma_B$  作为期权有效期限的函数的一种典型模式。一般来说，随着期权有效期限的增加， $\sigma_B$  减少。

### 收益率的波动率

债券期权报价所对应的波动率常常是收益率波动率而不是价格波动率。市场运用在第 4 章所引入的久期概念，将报价的收益率波动率转换为价格波动率。假

图 26.2 期权有效期内远期债券价格波动率  $\sigma_B$  的变化图（债券保持不变）

设  $D$  是第 4 章所定义期权的标的远期债券在期权到期时的修正久期。那么，远期债券价格  $F_B$  的变化量  $\Delta F_B$  与其远期收益率  $y_F$  的变化量  $\Delta y_F$  之间的关系是：

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D\Delta y_F$$

即

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -Dy_F \frac{\Delta y_F}{y_F}$$

波动率表示一个变量价值的变化百分比的标准差。上述关系式说明，在 Black 模型中使用的远期债券价格波动率  $\sigma_B$  与对应的远期债券收益率波动率  $\sigma_y$  之间有近似的关系，公式如下：

$$\sigma_B = D y_0 \sigma_y \quad (26.8)$$

其中， $y_0$  是  $y_F$  的初始值。当债券期权报价给出收益率的波动率时，隐含的假设常常是：使用公式 (26.8) 将该波动率转换为价格波动率，然后将它与公式 (26.5) 或公式 (26.6) 联立起来，得到一个价格。考虑一个看涨期权的标的债券，期权到期之时该债券的修正久期是 5 年，远期收益率为 8%，经纪人报出的远期收益率波动率为 20%。这说明当波动率变量  $\sigma_B$  为

$$5 \times 0.08 \times 0.2 = 0.08$$

即为 8%p.a. 时，经纪人的报价所对应的期权的市价等于方程 (26.5) 给出的价格。图 26.2 说明远期债券波动率取决于所考虑的期权。我们刚才定义的远期收益率波动率则更接近于常数，这就是交易者们喜欢使用远期收益率波动率的原因。

附于本书的 DerivaGem 软件中选择 Bond\_Options 工作表，再选择 Black European 为 Pricing Model，那么就可以使用 Black 模型定价欧式债券期权了。使用者可以输入特定的收益率波动率，收益率波动率的处理方法和我们在上面描述的一样。执行价格可以是现金价格或者是报价价格。

**[例 26.2]** 考虑一个欧式债券看跌期权，债券期限为 10 年，本金为 100，息票率为 8%p.a.，每半年支付一次息票。期权有效期为 2.25 年，期权执行价格为 115。远期收益率波动率为 20%。零息率曲线是平坦的，年利率 5%，按连续复利计算。DerivaGem 给出的债券报价为 122.84。当执行价格为报价价格时，期权价格为 2.37。当执行价格为现金价格时，期权价格为 \$1.74（注意，DerivaGem 给出的价格和手算的价格可能不完全一致。这是因为 DerivaGem 软件假设每年有 365 天，并且它自动把时间近似到最接近的天数。对于手算，参见习题 26.16）。

## 模型的理论解释

在 25.4 节中，我们给出了估值衍生证券时可以替代常规风险中性估值假设的其他一些假设。其中一种是“关于  $T$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世

界”。我们证明过：

1. 任意衍生证券的现价等于该世界中它的  $T$  时刻的期望值乘以零息票债券在  $T$  时刻的价格 [参照方程 (25.20)]
2. 这个世界中，任意变量（除了利率）在  $T$  时刻的期望值等于它的远期值（参照方程 25.21）

第一个结论说明基于  $T$  时刻到期的债券的看涨期权的价格为：

$$c = P(0, T)E_T[\max(B_T - K, 0)] \quad (26.9)$$

其中， $B_T$  是  $T$  时刻的债券价格， $E_T$  表示“关于  $T$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世界”中的期望。第二个结论说明

$$E_T(B_T) = F_B \quad (26.10)$$

假设债券价格是对数正态分布，债券价格对数的标准差等于  $\sigma_B \sqrt{T}$ 。根据第 13 章附录，公式 (26.9) 变成

$$c = P(0, T)[E_T(B_T)N(d_1) - KN(d_2)]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[E_T(B_T)/K] + \sigma_B^2 T/2}{\sigma_B \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_T(B_T)/K] - \sigma_B^2 T/2}{\sigma_B \sqrt{T}} = d_1 - \sigma_B \sqrt{T}$$

利用方程 (26.10)，这个结果可以简化为方程 (26.5) 中的 Black 模型。设定了期望债券价格等于远期债券价格，我们就可以把当前的  $T$  年期利率作为贴现率。

### 26.3 利率上限和下限

在场外交易市场金融机构提供的普通利率期权是利率上限。为了理解利率上限，首先考虑一个浮动利率票据，其中利率水平定期地被重新设定为 LIBOR。重新设定之间的时间间隔被称为循环期限 (tenor)。假设循环期限为 3 个月。上述票据的前 3 个月的利率等于初始时的 3 个月的 LIBOR；接下来 3 个月的票据利率被设定为是 3 个月时点观测到的市场普遍的 3 个月 LIBOR。如此等等。

设计利率上限是为了提供某种保险，保证浮动利率票据的利息率不超过某一确定的利率水平。这个利率水平被称为上限利率 (caps rate)。假设本金为 1 000 万美元，循环期限为 3 个月，利率上限的有效期为 3 年，上限利率为 4%（因为每季度进行支付，该上限利率是每季度计一次复利计算的）。该利率上限提供了保险，保证浮动利率票据的利息率不超过 4%。

我们忽略日算惯例并假设每个支付日之间正好相隔 0.25 年。在本节最后，我们将考虑日算惯例。假设在某一特定重设日，3 个月的 LIBOR 为 5%。那么，3 个月后需要支付的浮动利率票据的利息为

$$0.25 \times 0.05 \times \$10\,000\,000 = \$125\,000$$

如果，3 个月的 LIBOR 为 4%，则需要支付的利息为

$$0.25 \times 0.04 \times \$10\,000\,000 = \$100\,000$$

因此，利率上限的损益为 \$25\,000。注意，损益并不是在观测到 5% 的重设日实现的。损益是在 3 个月后实现的。这反映了利率观测时刻到对应的支付实现时刻之间的时间滞后。

利率上限有效期内的每个重设日，我们观测 LIBOR。如果 LIBOR 小于 4%，3 个月后利率上限不提供损益。如果 LIBOR 大于 4%，损益等于 LIBOR 超过上限利率的部分乘以 1/4 再乘以本金 1 000 万美元。注意，利率上限通常被设计为，初始 LIBOR 不会在第一个重设日就发生损益，即使初始 LIBOR 大于利率上限。我们的例子中，利率上限的有效期为 5 年。所以，一共有 19 个重设日（第 0.25 年、第 0.50 年、第 0.75 年、…、第 4.75 年）和 19 个利率上限的潜在损益（第 0.50 年、第 0.75 年、第 1.00 年、…、第 5.00 年）。

### 利率上限可看作为利率期权的组合

我们现在考虑一个利率上限，有效期为  $T$ ，本金为  $L$ ，上限利率为  $R_K$ 。假设重设日分别为  $t_1, t_2, \dots, t_n$  并且定义  $t_{n+1} = T$ 。定义  $R_k$  为  $t_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) 时刻观察到的  $t_k$  至  $t_{k+1}$  期间的利率。在  $t_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 时刻，利率上限的损益为

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0) \quad (26.11)$$

其中， $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ 。<sup>1</sup>  $R_k$  和  $R_K$  的复利计算频率等于重设频率。

公式 (26.11) 是一个  $t_{k+1}$  时刻实现损益、基于  $t_k$  时刻观察到的 LIBOR 的看涨期权。一个利率上限就是  $n$  个这种期权的组合。在  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  时刻观察 LIBOR，而相应的损益发生在  $t_2, t_3, t_4, \dots, t_{n+1}$  时刻。标的利率上限的  $n$  个看涨期权被称为利率看涨期权元 (caplets)。

### 利率上限可看作为债券期权的组合

利率上限也可以看作是一个基于零息票债券的看跌期权组合，这些看跌期权的收益出现在计算它们的那个时刻。公式 (26.11) 中的  $t_{k+1}$  时刻的损益等价于  $t_k$  时刻的：

---

<sup>1</sup> 本节最后我们将讨论日算惯例。

$$\frac{L\delta_k}{1 + R_k\delta_k} \max(R_k - R_K, 0)$$

经过代数变换，可以化简为：

$$\max\left[L - \frac{L(1 + R_k\delta_k)}{1 + R_k\delta_k}, 0\right] \quad (26.12)$$

表达式

$$\frac{L(1 + R_k\delta_k)}{1 + R_k\delta_k}$$

是一个在  $t_{k+1}$  时刻提供损益  $L(1 + R_k\delta_k)$  的零息票债券在  $t_k$  时刻的价值。因此式 (26.12) 中的表达式就是一个到期期限为  $t_k$  的、基于在  $t_{k+1}$  时刻到期的零息票债券看跌期权的收益，该零息票债券的面值为  $L(1 + R_k\delta_k)$ ，看跌期权的执行价格为  $L$ 。这就证明了利率上限可看作是一个基于零息票债券的欧式看跌期权的组合。

## 利率下限和利率双限

利率下限和利率双限（有时叫作地板—顶板协议）的定义与利率上限相似。利率下限在标的浮动利率票据的利息率下降到一个下限水平以下时，提供损益。使用上面已经定义的符号， $t_{k+1}(k = 1, 2, \dots, n)$  时刻，利率下限的损益为

$$L\delta_k \max(R_K - R_k, 0)$$

类似于利率上限的讨论，一个利率下限是一个基于利率的看跌期权的组合或是一个基于零息票债券的看涨期权的组合。组成利率下限的单个期权被称为 *floorlet*。利率双限被设计为，保证标的浮动利率票据的利息率保持在一个上限和下限水平之间。一个利率双限是由一个利率上限的多头和一个利率下限的空头组合而成的。在构造利率双限时，通常使得初始利率上限的价格等于初始利率下限的价格，于是利率双限的净成本为零。

如商业剪影 26.1 所述，利率上限和利率下限之间存在一种看跌—看涨平价关系。

## 利率上限和利率下限的估值

正如式 (26.11) 所示，对应于  $t_k$  时刻所观察的利率看涨期权元给出了  $t_{k+1}$  时刻的损益为：

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0)$$

如果假设利率  $R_k$  服从对数正态分布，波动率为  $\sigma_k$ ，公式 (26.3) 给出了这个利率看涨期权元的价值为：

### 商业剪影 26.1 利率上限和利率下限之间的看跌—看涨平价关系

利率上限和下限的价格之间存在一种看跌—看涨平价关系：

$$\text{利率上限价值} = \text{利率下限价值} + \text{互换价值}$$

这一关系式中，利率上限和利率下限有相同的执行价格  $R_K$ 。互换是一个接受 LIBOR、支付固定利率  $R_K$  且第一个重设日不进行支付交换的协议。三个金融工具的有效期和支付频率都相同。

为了解释这一结论，我们考虑利率上限多头和利率下限空头的组合。在 LIBOR 大于  $R_K$  的期间内，利率上限提供现金流  $\text{LIBOR} - R_K$ 。在 LIBOR 小于  $R_K$  的期间内，利率下限空头提供现金流  $-(R_K - \text{LIBOR}) = \text{LIBOR} - R_K$ 。因此所有情形下，该组合提供的现金流为  $\text{LIBOR} - R_K$ 。这就等价于互换的现金流。因此，利率上限的价值减去利率下限的价值应该等于互换的价值。

我们需要注意，互换通常被设计为，0 时刻的 LIBOR 决定第一个重设日的支付量。利率上限和下限被设计为第一个重设日不进行支付。因此，我们在上述关系式中定义的互换在第一个重设日不进行支付。

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d_1) - R_k N(d_2)] \quad (26.13)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F_k/R_K) + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_k/R_K) - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

$F_k$  为在  $t_k$  与  $t_{k+1}$  时刻期间的远期利率。从 (26.4) 式得到对应的利率下限估值的表达式为：

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [R_k N(-d_2) - F_k N(-d_1)] \quad (26.14)$$

[例 26.3] 考虑一个利率上限，1 年后开始，本金为 \$10 000，把 LIBOR 的上限利率限制在每年 8%（每季度计一次复利）。这是一个利率看涨期权元，可以作为利率上限的一个组成部分。假设 LIBOR/互换零息率曲线总是年利率 7%（每季度计一次复利），利率看涨期权元所依附的 3 个月期利率的波动率为 20%。各个期限的连续复利零息率都为 6.9394%。在式 (26.13) 中， $F_k = 0.07$ ， $\delta_k = 0.25$ ， $L = 10 000$ ， $R_K = 0.08$ ， $t_k = 1.0$ ， $t_{k+1} = 1.25$ ， $P(0, t_{k+1}) = e^{-0.069394 \times 1.25} = 0.9169$  且  $\sigma_k = 0.20$ 。同时，

$$d_1 = \frac{\ln(0.07/0.08) + 0.2^2 \times 1/2}{0.20 \times 1} = -0.5677$$

$$d_2 = d_1 - 0.20 = -0.7677$$

所以利率看涨期权元的价格是：

$$0.25 \times 10\,000 \times 0.9169[0.07N(-0.5677) - 0.08N(-0.7677)] = \$5.162$$

(DerivaGem 给出的利率看涨期权元的价格是 \$5.146。这是因为其中假定一年为 365 日，并且把时间近似到相近的天数)

每个利率上限的利率看涨期权元必须使用公式 (26.13) 分别进行估值。一种方法是对每个利率看涨期权元使用不同的波动率。于是这些波动率称之为即期波动率 (spot volatility)。另一种方法是对所有的组成任何特定利率上限的利率看涨期权元都使用相同的波动率，但按利率上限有效期限的不同来改变这个波动率。于是，所使用的这些波动率称之为单一波动率 (flat volatility)。<sup>2</sup> 市场上所报出的波动率通常是单一波动率。然而，许多交易员喜欢使用即期波动率，因为这可使得他们识别被低估或高估的利率看涨期权元。欧洲美元期货期权非常类似于利率看涨期权元，人们经常将基于 3 个月期 LIBOR 的利率看涨期权元所使用的即期波动率与从欧洲美元期货期权价格中计算的波动率进行比较。

## 即期波动率和单一波动率

图 26.3 表示了即期波动率和单一波动率作为到期日函数的一种典型模式（在即期波动率情况下，到期日是利率看涨期权元的到期日；在单一波动率情况下，到期日是利率上限的到期日）。单一波动率类似于即期波动率的累积平均值，因此表现出较小的变动。如图 26.3 所示，我们通常观测到某种波动率的“弓状隆起”。“弓状隆起”的顶峰大约出现在 2 年到 3 年处。无论是期权价格所隐含的波动率还是从历史数据计算的波动率，都可以观测到这种“弓状隆起”现象。对“弓状隆起”存在的原因，至今还没有提出令人信服的解释。一种可能的原因如下：零息率曲线中短期限的利率由中央银行控制。相反地，2 年期和 3 年期利率在很大程度上取决于交易者的行为。这些交易者可能对于他们观察到短期利率做出过度的反应，结果导致相应的利率的波动率比短期利率的波动率高。对于大于 2 年或 3 年的利率，第 28 章将讨论利率的均值回复特性使得相应的波动率降低。

市场上提供适用于利率上限和下限的单一隐含波动率数据表。报价给出的金融工具通常处于平价状态。这说明上限/下限利率等于一个与利率上限具有相同支付日互换的互换率。表 26.1 表示了经纪人在美元市场中的一个典型报价。利率上限的循环期限为 3 个月，利率上限的有效期在 1~10 年之间。这些数据正好展示了图 26.3 中的“弓状隆起”。

## 模型的理论解释

从 Black 模型中我们可以知道，在“关于  $t_{k+1}$  时刻到期的零息票债券的远期风

---

<sup>2</sup> 可从即期波动率求得单一波动率，反之亦然（参见习题 26.20）。

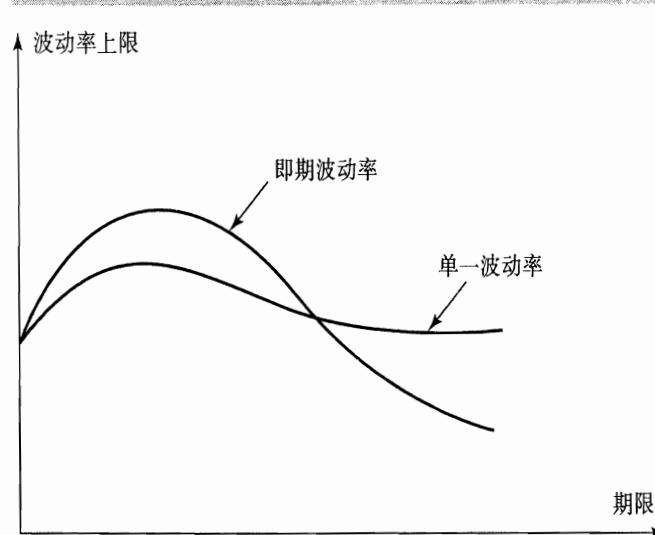


图 26.3 波动率的弓状隆起

险中性世界”中，利率看涨期权元是内部一致的。25.4 节中的分析说明：

1. 任意证券的现价等于上述世界中该证券的  $t_{k+1}$  时刻的期望价值乘以  $t_{k+1}$  时刻到期的零息票债券的价格 [参照方程 (25.20)]
2.  $t_k$  时刻到  $t_{k+1}$  时刻之间的利率期望值等于该世界中的远期利率 [参照方程 (25.22)]

使用前面定义过的符号，第一个结论说明，一个在  $t_{k+1}$  时刻提供损益的利率看涨期权元的价格为

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) E_{k+1} [\max(R_k - R_K, 0)]$$

其中， $E_{k+1}$  表示“关于  $t_{k+1}$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世界”的期望值。根据第 13 章附录，假定  $R_k$  服从对数正态分布时，上式变成

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [E_{k+1}(R_k)N(d_1) - R_K N(d_2)]$$

其中

表 26.1 美元利率上限和下限市场中经纪人单一波动率报价 (%p.a.)

| 期限   | 上限买价  | 上限卖价  | 下限买价  | 下限卖价  |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1 年  | 18,00 | 20.00 | 18.00 | 20.00 |
| 2 年  | 23.25 | 24.25 | 23.75 | 24.75 |
| 3 年  | 24.00 | 25.00 | 24.50 | 25.50 |
| 4 年  | 23.75 | 24.75 | 24.25 | 25.25 |
| 5 年  | 23.50 | 24.50 | 24.00 | 25.00 |
| 7 年  | 21.75 | 22.75 | 22.00 | 23.00 |
| 10 年 | 20.00 | 21.00 | 20.25 | 21.25 |

$$d_1 = \frac{\ln[E_{k+1}(R_k)/R_k] + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_{k+1}(R_k)/R_k] - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma \sqrt{t_k}$$

第二个结论隐含

$$E_{k+1}(R_k) = F_k$$

结合这些结果，就能得到方程 (26.13) 中的利率上限定价模型。设定了预期利率等于远期利率，我们就可以把市场中观察到的当前的  $t_{k+1}$  期限利率作为贴现率。

## DerivaGem 软件的使用

使用附于本书的 DerivaGem 软件，可以以 Black 模型定价利率上限以及利率下限。在 Cap\_and\_Swap\_Option 工作表选择 Underlying Type 为 Cap/Floor，选择 Pricing Model 为 Black-European。输入零息率曲线时用连续复利计算的利率。需要输入利率上限开始时刻以及到期时刻、单一波动率以及利率上限循环期限（即为 tenor）。软件在计算支付日时，从利率上限的到期时刻开始进行倒推计算。初始利率看涨期权元/利率看跌期权元覆盖的期限被假设为，正常期限乘以 0.5~1.5 之间的值所得到的期限。例如，假设利率上限覆盖的期限是 1.22~2.80 年，结算频率为每个季度。那么一共有 6 个利率看涨期权元，它们覆盖的期限依次为 2.55~2.80 年、2.30~2.55 年、2.05~2.30 年、1.80~2.05 年、1.55~1.80 年、1.22~1.55 年。

## 日算惯例的影响

本节中给出过的公式中没有考虑日算惯例（对于日算惯例的说明，参见 6.1 节）。假设上限利率  $R_k$  是以实际天数/360 方式表示的（符合美国的一般情况）。那么，我们公式中的时间间隔  $\delta_k$  应该替换成  $a_k$ ，这是  $t_k \sim t_{k+1}$  的时间期限的实际年限。基于实际天数/360 方式，支付日之间相隔 92 天，因此  $a_k = 92/360 = 0.2521$ 。我们也要以实际天数/360 方式表示远期利率  $F_k$ 。那么我们应该解如下方程：

$$1 + a_k F_k = \frac{P(0, t_k)}{P(0, t_{k+1})}$$

这些影响和把  $R_k$  从实际天数/360 方式变换到实际天数/实际天数方式、基于实际天数/实际天数方式计算  $F_k$  是一样的。换句话说，这种影响和将上限利率的报价乘以 365/360 或 366/360 得到  $R_k$ ，并通过解出以下方程来计算  $F_k$  是一样的：

$$1 + \delta_k F_k = \frac{P(0, t_k)}{P(0, t_{k+1})}$$

## 26.4 欧式互换期权

互换的期权或互换期权是基于利率互换的期权，它是另一种大众化的利率期权。它们给予持有者一个在未来某个确定时间进行某个确定利率互换的权利（当然持有者并不是必须执行这个权利）。许多向其公司客户提供利率互换合约的大型金融机构，也准备向其客户出售或从客户处购买互换期权。如商业剪影 26.2 所述，互换期权可以视为一种债券期权。为了说明互换期权是如何使用的，考虑如下例子：某公司已知在 6 个月后要签署一个 5 年期浮动利率贷款协议，它希望将浮动利息支付方式换成固定利息支付方式以使该贷款转化为固定利率贷款（参照第 7 章中关于如何以这种方式使用互换的讨论）。支付一定的代价后，该公司可以获得一项互换期权，即：对 6 个月后开始的 5 年期贷款，该公司具有收取 6 个月期 LIBOR 浮动利息支付某个确定的固定利息（比如年率 8%）的权利。如果 6 个月后发现常规的 5 年期互换的固定利率小于年利率 8%，则公司将不执行互换期权而选择按通常的方式签署一项互换协议。然而，如果以上的固定利率大于年利率 8%，公司将选择执行互换期权，并获得比市场的互换具有更有利条款的一项互换。

当互换期权以刚才所描述的方式使用时，互换期权为公司提供了担保，即保证在某个未来时间内公司为某个贷款所支付的固定利率将不会超过某个水平。互换期权也是不同于远期互换（有时叫作延迟互换）的另一种方法。远期互换不必事先支付成本，但不利之处在于公司要承担签署某个互换协议的义务。而互换期权可使公司在利率向有利方向变动时获益而在利率向不利方向变动时受到保护。互换期权与远期互换之间的区别类似于外汇期权和外汇远期合约之间的区别。

### 欧式互换期权的估值

第 7 章中已经解释过，在某个特定时刻、特定期限的互换率是相同期限的刚发行的互换中与 LIBOR 进行交换的（中间市场的）固定利率。欧式互换期权的定价模型中，通常假设期权到期日的互换率是对数正态分布的。考虑如下互换期权：有一个利率互换在  $T$  年后开始，持续  $n$  年，我们具有对这个互换支付固定利率  $s_k$

#### 商业剪影 26.2 互换期权和债券期权

回想在第 7 章中，利率互换可看作是把固定利率债券换成浮动利率债券的协议。在互换的开始，浮动利率债券的价值总是等于互换的本金金额。因此，一个互换期权可以看作是一个把固定利率债券换成互换的本金的期权，即典型的债券期权。

如果一个互换期权给予它的持有者支付固定利息和收取浮动利息的权利，它就是一个执行价格等于本金的基于固定利率债券的看跌期权。如果一个互换期权给予它的持有者支付浮动利息和收取固定利息的权利，它就是一个执行价格等于本金的基于固定利率债券的看涨期权。

收取 LIBOR 的权利。我们假设该互换名义本金为  $L$ , 每年支付  $m$  次。

第 7 章中说明过, 日算惯例会使得每个支付日的固定利率支付额数有些不同。在这里, 我们忽略这种日算惯例的影响, 假定互换的每次固定支付额数为固定利率乘以  $L/M$ 。本节最后, 我们将考虑日算惯例的影响。

假设  $T$  时刻开始的  $n$  年期互换的互换率为  $s_T$ 。将固定利率为  $s_T$  的互换现金流与固定利率为  $s_K$  的互换现金流进行比较, 我们看到该互换期权的收益由一系列的现金流组成, 这些现金流等于:

$$\frac{L}{m} \max(s_T - s_K, 0)$$

在互换有效期限  $n$  年内每年接收  $m$  次现金流。假设这些互换支付日依次为  $T_1, T_2, \dots, T_{mn}$ , 单位是年 (从今天开始)。(如下等式近似成立:  $T_k = T + k/m$ ) 每个现金流是执行价格为  $s_K$  的、基于  $s_T$  的看涨期权的收益。

运用方程 (26.3), 在  $T_i$  时刻收到的现金流价值是:

$$\frac{L}{m} P(0, T_i) [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(s_0/s_K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(s_0/s_K) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$s_0$  是 0 时刻根据方程 (25.23) 计算的远期互换率,  $\sigma$  是远期互换率的波动率 (因此  $\sigma \sqrt{T}$  等于  $\ln s_T$  的标准差)。

该互换期权的总价值为:

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i) [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

定义  $A$  为在  $T_i$  时刻 ( $1 \leq i \leq mn$ ) 支付  $1/m$  的合约的价值, 互换期权的价值为:

$$LA [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)] \quad (26.15)$$

其中

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{mn} P(0, T_i)$$

如果互换期权给持有者收取固定利率  $s_K$  而不是支付  $s_K$  的权利, 该互换期权的收益为:

$$\frac{L}{m} \max(s_K - s_T, 0)$$

这是一个基于  $s_T$  的看跌期权。和前面一样，在  $T_i$  时刻 ( $1 \leq i \leq mn$ ) 收取收益。公式 (26.4) 给出互换期权的价值为：

$$LA [s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)] \quad (26.16)$$

**[例 26.4]** 假设 LIBOR 收益率曲线是平坦的，年利率 6%，按连续复利计息。考虑如下互换期权，持有者具有在 5 年后开始为 3 年期互换支付 6.2% 的权利。远期互换率的波动率是 20%。每半年支付一次，本金为 \$100。在这种情况下：

$$A = \frac{1}{2} [e^{-0.06 \times 5.5} + e^{-0.06 \times 6} + e^{-0.06 \times 6.5} + e^{-0.06 \times 7} + e^{-0.06 \times 7.5} + e^{-0.06 \times 8}] = 2.0035$$

年利率为 6% 的连续复利转换为按半年计复利的结果是 6.09%。在这个例子中， $s_0 = 0.0609$ ,  $s_K = 0.062$ ,  $T = 5$ ,  $\sigma = 0.2$ , 所以

$$d_1 = \frac{\ln(0.0609/0.062) + 0.2^2 \times 5/2}{0.2\sqrt{5}} = 0.1836$$

且

$$d_2 = d_1 - 0.2\sqrt{5} = -0.2636$$

从公式 (26.15) 可得互换期权的价值为：

$$100 \times 2.0035 [0.0609 \times N(0.1836) - 0.062 \times N(-0.2636)] = 2.07$$

即 \$2.07 (这与 DerivaGem 软件给出的价格相同)。

## 经纪人的报价

经纪人提供欧式互换期权的隐含波动率数据表。报价给出的金融工具通常处于平价状态。这说明执行互换率等于远期互换率。表 26.2 表示了经纪人在美元市场中的一个典型报价。期权的期限在纵坐标给出，变化幅度从 1 个月到 5 年不同。期权到期之时的标的互换的剩余期限在横坐标给出，从 1 年到 10 年不同。表中的“1 年”列显示出了“弓状隆起”，与之前利率上限中所论述的类似。移动到基于更长剩余期限的互换期权，“弓状隆起”还存在，但其程度明显减弱。

## 互换期权模型的理论解释

我们可以证明在“关于年金  $A$  的远期风险中性世界”中互换期权的 Black 模型是内部一致的。25.4 节中的分析说明：

- 上述世界中，任意证券的现价等于年金的现价乘以

$$\frac{T \text{时刻的证券价格}}{T \text{时刻的年金价值}}$$

在该世界中的期望值 [参见方程 (25.25)]

表 26.2 经纪人在美元欧式互换期权市场中的一个典型报价 (中间市场波动率以每年的百分数表示)

| 有效期 | 互换期限(年) |       |       |       |       |       |       |
|-----|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|     | 1       | 2     | 3     | 4     | 5     | 7     | 10    |
| 1个月 | 17.75   | 17.75 | 17.75 | 17.50 | 17.00 | 17.00 | 16.00 |
| 3个月 | 19.50   | 19.00 | 19.00 | 18.00 | 17.50 | 17.00 | 16.00 |
| 6个月 | 20.00   | 20.00 | 19.25 | 18.50 | 18.75 | 17.75 | 16.75 |
| 1 年 | 22.50   | 21.75 | 20.50 | 20.00 | 19.50 | 18.25 | 16.75 |
| 2 年 | 22.00   | 22.00 | 20.75 | 19.50 | 19.75 | 18.25 | 16.75 |
| 3 年 | 21.50   | 21.00 | 20.00 | 19.25 | 19.00 | 17.75 | 16.50 |
| 4 年 | 20.75   | 20.25 | 19.25 | 18.50 | 18.25 | 17.50 | 16.00 |
| 5 年 | 20.00   | 19.50 | 18.50 | 17.75 | 17.50 | 17.00 | 15.50 |

2.  $T$  时刻互换率的期望值等于远期互换率 [参见方程 (25.24)]

第一个结论说明，互换期权的价格为

$$LAE_A [\max(s_T - s_K, 0)]$$

根据第 13 章附录，上述式子变成

$$LA [E_A(s_T)N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[E_A(s_T)/s_K] + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_A(s_T)/s_K] - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

第二个结论说明  $E_A(s_T)$  等于  $s_0$ 。结合两个结论，我们可以得到方程 (26.15) 中的互换期权定价公式。设定了互换率的期望值等于远期互换率，我们在贴现的时候就能把利率当作一个常数。

## 日算惯例的影响

我们现在考虑日算惯例，给出更为准确的定价公式。互换期权中标的互换的固定利率以实际天数/365 或 30/360 方式表述日算惯例。假设  $T_0 = T$ ，并且对所应用的日算惯例， $T_{i-1}$  至  $T_i$  期间的实际年限为  $a_i$  (例如，如果  $T_{i-1}$  对应于 3 月 1 日， $T_i$  对应于 9 月 1 日，并且日算惯例为实际天数/365，则  $a_i = 184/365 = 0.5041$ )。定义年金因子  $A$  如下：

$$A = \sum_{i=1}^{mn} a_i P(0, T_i)$$

此时，我们给出的定价公式是正确的。

根据方程 (25.23)，为了得到互换率  $s_0$ ，可以解如下的方程：

$$s_0 A = P(0, T) - P(0, T_{mn})$$

## 26.5 一般结论

我们已经给出了 Black 模型的三种不同形式：关于债券期权的、关于利率上限的以及关于互换期权的。三个模型都是内部一致的，但这些模型相互之间并不一致。例如，当债券的未来价格是对数正态分布时，未来零息率和未来互换率并不是对数正态分布的；当未来零息率是对数正态分布时，债券的未来价格和未来互换率并不是对数正态分布的。

我们已经得到的结论可以被一般化：

1. 考虑依附于  $T$  时刻某个变量观测值的任一金融工具，它在  $T$  时刻提供损益。它的现价为  $P(0, T)$  乘以预期损益，该期望值是在该标的变量的期望值等于该变量远期价格的世界中计算的
2. 考虑在  $T^*$  时刻提供损益的任一金融工具，它依附于  $T$  时刻观测到的  $T$  至  $T^*$  期的利率。它的现价为  $P(0, T^*)$  乘以预期损益，该期望值是在该标的利率的期望值等于远期利率的世界中计算的
3. 考虑以年金形式提供损益的任一金融工具。作为  $T$  时刻的  $n$  年期互换率的函数，我们假设年金额数在  $T$  时刻决定。我们也假设年金持续  $n$  年，年金的支付日与互换的支付日相同。金融工具的价值等于  $A$  乘以年预期损益，其中，  
(a)  $A$  是每年支付\$1 的年金的现价；(b) 在一个未来互换率的期望值等于远期互换率的世界中计算期望

第一个结论是欧式债券期权模型的一般推广；第二个结论是利率上限/下限模型的一般推广；第三个结论是互换期权模型的一般推广。

## 26.6 利率衍生品的套期保值

本节中讨论如何扩展第 15 章中关于套期保值参数的结论，以便进行利率衍生证券的套期保值。利率衍生证券的情况下，Delta 风险是零息率曲线移动所带来的风险。因为零息率曲线的移动方式有很多种，可以计算很多 Delta。举其中的一些例子：

1. 计算零息率曲线平行移动 1 个基点的影响。它有时被表示成 DV01
2. 计算与零息率曲线构建相关的金融工具的报价有小幅度变化时，产生什么影响
3. 把零息率曲线（或远期利率曲线）分成几个部分（或桶）。计算某个“桶”中

的利率移动 1 个基点的影响，剩下的初始期限结构保持不变（在商业剪影 6.3 中已经描述过）

4. 执行 18.9 节中的主成分分析过程。对于前几个主成分因子的每一个变化计算对应的 Delta 值。那么，第一个 Delta 值衡量零息率曲线的小幅度近似平行移动的影响；第二个 Delta 值衡量零息率曲线的小幅度旋转的影响。如此等等

实际应用中，交易者们喜欢使用第二个方法。他们认为如果零息率曲线变化，惟一的原因就是用来计算零息率曲线的某个金融工具的报价变化了。所以，他们集中精力处理与这些金融工具价格变化相关的风险暴露。

当计算多个 Delta 测度时，也有很多可能的 Gamma 测度。假设 10 个金融工具用来计算零息率曲线，我们根据这些金融工具每一个报价变化计算相应的 Delta 测度。Gamma 是衍生证券的二阶导数，它的表达式为  $\partial^2\Pi/\partial x_i\partial x_j$ 。其中， $\Pi$  是证券组合价值。 $x_i$  有 10 种选择， $x_j$  也有 10 种选择，一共建产生 55 个不同的 Gamma 测度。这可能引起“信息过多”。一种方法是忽略交叉 Gamma，只考虑 10 个当  $i = j$  时的衍生证券的二阶导数。另一种方法是计算单个 Gamma 测度，即求证券组合价值对于零息率曲线平行移动的二阶导数。再一种可行的方法是，通过主成分分析，只对前两个主成分因子求相应的 Gamma 值。

利率衍生证券组合的 Vega 衡量证券组合的价值对于波动率变化的暴露。一种方法是，对于所有利率上限以及欧式互换期权的 Black 波动率的小幅变化，计算证券组合价值受到的影响。但是，这里假定了一个因子驱动了所有波动率，导致处理过于简单化。更好的一个方法是，对于利率上限和欧式互换期权的波动率变化进行主成分分析，并对前两三个主成分因子求相应的 Vega 值。

## 小 结

Black 模型提供了一种为欧式利率期权进行估值的普遍方法。Black 模型的本质是假设期权中标的变量的价值在期权到期时是对数正态分布的。在欧式债券期权情况下，Black 模型假设标的债券的价格在期权到期日是对数正态分布。对利率上限，Black 模型假设组成利率上限的每个利率看涨期权元的标的利率是对数正态分布的。在互换期权的情况下，Black 模型假设标的互换率是对数正态分布的。三个形式的模型都是内部一致的，但不同形式之间并不相互一致。

使用 Black 模型计算预期损益时，假设变量的期望值等于其远期值，并以当前在市场观察到的零息率贴现预期损益。这对于我们在本章考虑的“标准型”金融工具是正确的。但是，下一章中我们将看到这并不适用于所有的情况。

## 参考读物

Black, F., “The Pricing of Commodity Contracts,” *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976): 167–79.

## 问题和习题

- 26.1 一家公司 3 个月期 LIBOR 的上限为每年 10%，本金为 2 000 万美元。在重新设定日，3 个月期的 LIBOR 为每年 12%。根据利率上限，需如何支付？什么时候支付？
- 26.2 请解释为什么互换期权可以被看作为一种债券期权？
- 26.3 用 Black 模型为有效期 1 年的基于某个 10 年期债券的欧式看跌期权估值。假设债券的现价为 \$125，执行价格为 \$110，1 年期利率为每年 10%，债券的远期价格的年波动率为 8%，期权有效期内将支付的息票的现值为 \$10。
- 26.4 请仔细说明如何使用 (a) 即期的波动率和 (b) 单一的波动率来为 5 年期利率上限估值。
- 26.5 计算如下期权的价格。该期权本金为 \$1 000，在 15 个月后的开始时刻将 3 个月期利率（按季度复利报价）的上限定为 13%。对应期限的远期利率为每年 12%（按季度复利报价），18 个月期的无风险利率为每年 11.5%（按连续复利计息），远期利率的波动率为每年 12%。
- 26.6 某银行运用 Black 模型为欧式债券期权定价。假设使用基于某个 10 年期债券的 5 年期期权的隐含价格波动率，为基于该债券的 9 年期期权定价。你认为最后的定价结果是偏高还是偏低，为什么？
- 26.7 使用 Black 模型为某个 4 年期的、基于今天开始的 5 年期债券的欧式看涨期权定价。5 年期债券价格为 \$105，息票利息相同的 4 年期债券的价格为 \$102，期权的执行价格为 \$100，4 年期无风险利率为每年 10%（按连续复利计息），4 年内债券价格的波动率为每年 2%。
- 26.8 基于到期期限为 10 年的债券的 5 年期看跌期权，债券的收益波动率为 22%。应该怎么估值该期权？假设基于今天的利率，期权到期之时的该债券的修正久期为 4.2 年，该债券的远期收益率为 7%。
- 26.9 哪种金融工具等价于 5 年期零成本利率双限（其利率上下限的执行价格相等）？共同的执行价格等于多少？
- 26.10 推导欧式债券期权之间的看涨期权一看跌期权平价关系。
- 26.11 推导欧式互换期权之间的看涨期权一看跌期权平价关系。
- 26.12 请解释如果利率上限隐含 Black（平坦的）波动率不等于利率下限隐含 Black（平坦的）波动率，为什么就存在套利机会？表 26.1 中的经纪人报价中存在套利机会吗？
- 26.13 对数正态分布的债券定价模型允许债券的收益率变为负值吗？请解释。
- 26.14 一个欧式互换期权，持有者可以在 4 年后选择是否签订 3 年期互换，互换中支付 5% 固定利率，收取 LIBOR。互换本金为 1 000 万美元。假设收益率曲线是平坦的，为连续复利为 5% p.a.。互换率的波动率为 20%。请估值该欧式互换期权。请比较这个结果和以 DerivaGem 软件计算的结果。
- 26.15 假设某个零息票债券的收益率  $R$  遵循如下过程：

$$dR = \mu dt + \sigma dz$$

$\mu$  和  $\sigma$  是  $R$  和  $t$  的函数， $dz$  是维纳过程。使用伊藤定理证明：随到期日的邻近，零息票债券价格的波动率减少为零。

- 26.16 通过手算验证例 26.2 中的期权价格。

- 26.17 假设 1 年期、2 年期、3 年期、4 年期和 5 年期零息率分别为 6%、6.4%、6.7%、6.9% 和 7%。一个 5 年期利率上限中，每半年支付一次，本金为 \$100，上限利率为 8%。该利率上限的价格为 \$3。利用 DerivaGem 计算：
- 5 年期利率上限和下限的单一波动率。
  - 一个零成本 5 年期利率双限中，上限利率为 8%，计算下限利率。
- 26.18  $V_1$  是一个互换期权的价值，可以选择在  $T_1$  至  $T_2$  期间内支付固定利率  $s_k$ ，收取 LIBOR。 $f$  是远期互换的价值，其中，在  $T_1$  至  $T_2$  期间内支付固定利率  $s_k$ ，收取 LIBOR。 $V_2$  是一个互换期权的价值，可以选择在  $T_1$  至  $T_2$  期间内收取固定利率  $s_k$ 。请证明： $V_1 + f = V_2$ 。请推导，当  $s_k$  等于当前远期互换率的时候， $V_1 = V_2$ 。
- 26.19 假设零息率如表 26.17 中的数据。利用 DerivaGem 计算一个互换期权的价值。其中，在 1 年后开始有权从某个 5 年期互换中支付固定利率 6%，收取 LIBOR。假设本金是 1 亿美元，每半年交换一次支付，互换率的波动率为 21%。
- 26.20 请描述你会如何 (a) 从利率上限即期波动率计算利率上限单一波动率，以及 (b) 从利率上限单一波动率计算利率上限即期波动率。

## 课后练习

- 26.21 考虑一个 8 个月期的基于从现在算起还有 14.25 年到期国债的欧式看跌期权。债券现价为 \$910，执行价格为 \$900，债券价格的波动率为每年 10%，3 个月后该债券将付息 \$35。一年期限内所有期限的无风险利率为每年 8%。使用 Black 模型为该期权定价。同时考虑如下两种情况：执行价格对应于债券现金价格；执行价格对应于债券报价。
- 26.22 某个 9 个月期的基于 90 天 LIBOR 的利率上限期权，本金为 \$1 000。使用 Black 模型和如下信息，为该期权估值：
- 9 个月期欧洲美元期货价格报价为 92。（忽略期货利率和远期利率之间的区别。）
  - 9 个月期欧洲美元期权隐含的利率波动率为每年 15%。
  - 当前按连续复利计息的 12 个月期利率为每年 7.5%。
  - 利率上限为每年 8%。（假设日算惯例为实际天数/360）
- 26.23 假设 LIBOR 收益率曲线是水平的，为年复利 8%。某个互换期权赋予持有者这样一种权利：4 年后开始有权从某个 5 年期互换中收取 7.6%，每年支付一次。远期互换利率的年波动率为 25%，本金为 100 万美元。用 Black 模型为该互换期权定价。把这个答案和 DerivaGem 给出的价格相互比较。
- 26.24 利用 DerivaGem 软件计算一个 5 年期利率双限的价值。该利率双限中保证，某个 LIBOR 贷款（每季度重新设定）的最高和最低利率分别为 5% 和 7%。当前，LIBOR 零息率曲线是平坦的，连续复利为 6%，使用单一波动率 20%，假设本金为 \$100。
- 26.25 利用 DerivaGem 软件计算一个欧式互换期权的价值。该互换期权赋予持有者这样一种权利：2 年后开始有权从某个 5 年期互换中支付固定利率 6%，收取浮动利率。互换中每半年交换一次现金流。1 年期、2 年期、5 年期和 10 年期零息票率（连续复利的）分别为 5%、6%、6.5% 和 7%。假设本金为 \$100，波动率为 15%p.a.。请举例说明，公司会怎么利用互换期权。什么样的债券期权等价于互换期权？

# 凸性调整、时刻调整及跨币衍生证券调整

一种广泛使用的欧式衍生证券的两步估值过程如下：

1. 假设每个标的变量的期望值等于远期值，计算预期损益
2. 找出可适用于估值日和损益实现日期限之间的无风险利率，以该无风险利率贴现预期损益

在第 4 章估值远期利率协议 (FRA) 时，我们第一次用到了这种估值过程。估值 FRA 时，基于远期利率将实现的假设，计算了损益，并以无风险利率对该损益进行了贴现。类似地，在第 7 章估值互换时，基于远期利率将实现的假设下，计算了现金流并以无风险利率进行了贴现。第 26 章中，我们说明了 Black 模型可以对很多欧式期权进行定价。并且如 26.1 节所述，Black 模型正是以上两步过程的一种应用。第 26 章中给出的债券期权、利率上限/下限以及互换期权的模型都是上述两步过程的应用实例。

那么，利用上述两步过程定价欧式利率衍生证券时，结果总是正确的吗？答案是否定的！对于非标准的利率衍生证券，有时我们需要对上述两步过程进行调整，使得第一步中的变量远期值得到修正。本章中我们考虑三种调整方法：凸性调整、时刻调整以及跨币调整。

## 27.1 凸性调整

首先，我们讨论一个金融工具的定价问题，它的损益依附于损益发生时观察到的某个债券的收益率。

通常，根据在  $T$  时刻提供损益  $S_T - K$  的远期合约，计算一个变量  $S$  的远期值。 $K$  值等于上述远期值时，合约价值等于零。如 25.4 节所述，远期利率和远期收益率的定义不同。远期利率是远期零息票债券隐含的利率。更为一般地，远期债券收益率是远期债券价格隐含的收益率。

假设  $B_T$  是一个债券在  $T$  时刻的价格， $y_T$  是它的收益率， $B_T$  和  $y_T$  之间的（债券定价）关系式为：

$$B_T = G(y_T)$$

定义  $F_0$  为在 0 时刻、一个  $T$  时刻到期的合约的隐含远期债券价格， $y_0$  为 0 时刻的远期债券收益率。远期债券收益率的定义说明

$$F_0 = G(y_0)$$

函数  $G$  是非线性的。这说明当未来债券价格的期望值等于远期债券价格（即我们在考虑“关于  $T$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世界”）时，未来债券收益率的期望值与远期债券收益率并不相等。

图 27.1 中解释了这种情况，图中表示了  $T$  时刻的债券价格与债券收益率之间的关系。为简单起见，我们假设只有三个可能的债券价格： $B_1$ 、 $B_2$  和  $B_3$ ，它们在“关于  $P(t, T)$  的远期风险中性世界”中出现的可能性相同。我们假设债券价格是等间距的，即  $B_2 - B_1 = B_3 - B_2$ 。远期债券价格是期望债券价格  $B_2$ 。这些债券价格转换成等概率的收益率： $y_1$ 、 $y_2$  和  $y_3$ 。这些收益率不是等间距的。变量  $y_2$  是远期债券收益率，因为它是远期债券价格对应的收益率。期望债券收益率是  $y_1$ 、 $y_2$  和  $y_3$  的平均值，显然大于  $y_2$ 。

考虑一种衍生证券，它的损益依附于  $T$  时刻的债券收益率。根据方程(25.20)，我们知道可以在“关于  $T$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世界”中计算预期损益，再以当前的  $T$  期限无风险利率来贴现上述预期损益。我们知道在上述世界中，期望债券价格和远期价格是相等的。所以，我们需要知道当期望债券价格和远期价格相等时的期望债券收益率。本章后面的附录中给出了期望债券收益率的一个近似表达式：

$$E_T(y_T) = y_0 - \frac{1}{2}y_0^2\sigma_y^2T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)} \quad (27.1)$$

其中， $G'$  和  $G''$  表示衍生证券  $G$  的一阶导数以及二阶导数。 $E_T$  表示“关于  $P(t, T)$  的远期风险中性世界”中的期望值。 $\sigma_y$  是远期收益率的波动率。那么，我

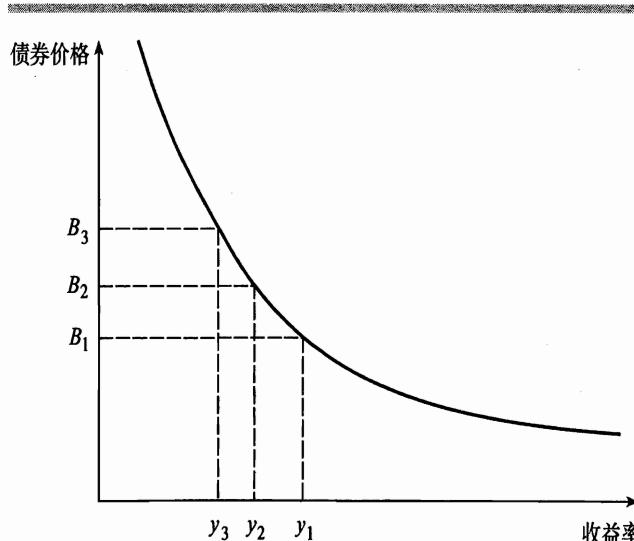


图 27.1  $T$  时刻的债券价格和债券收益率之间的关系

们假设期望债券收益率为

$$y_0 - \frac{1}{2} y_0^2 \sigma_y^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

而不是  $y_0$ , 那么就能以当前  $T$  期限的无风险利率来贴现预期损益了。期望债券收益率与远期债券收益率之间的差额

$$-\frac{1}{2} y_0^2 \sigma_y^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

就是所谓的凸性调整 (*convexity adjustment*)。它对应  $y_2$  和图 27.1 中预期收益率之间的差额 [因为  $G'(y_0) < 0$  且  $G''(y_0) > 0$ , 凸性调整是正数]。

## 应用 1：利率

作为方程 (27.1) 的第一个应用例子, 我们考虑一个在  $T$  时刻提供现金流的金融工具, 现金流数额基于本金  $L$  和  $T$  至  $T^*$  期间所对应的利率 (第 30 章中我们考虑后定 LIBOR 利率的互换时, 这个例子非常有用)。注意到适用于  $T$  至  $T^*$  期间的利率支付通常发生在  $T^*$  时刻。这里, 我们假设它的支付较早发生——在  $T$  时刻。

该金融工具中  $T$  时刻的现金流为  $LR_T\tau$ 。其中  $\tau = T^* - T$ , 并且  $R_T$  是适用于  $T$  至  $T^*$  期间的零息票率 (复利计算间隔为  $\tau$ )。<sup>1</sup> 变量  $R_T$  可视为  $T^*$  时刻到期的零息票债券在  $T$  时刻的收益率。该债券价格和收益率之间的关系式为

$$G(y) = \frac{1}{1 + y\tau}$$

根据公式 (27.1), 有

$$E_T(R_T) = R_0 - \frac{1}{2} R_0^2 \sigma_R^2 T \frac{G''(R_0)}{G'(R_0)}$$

即

$$E_T(R_T) = R_0 + \frac{R_0^2 \sigma_R^2 \tau T}{1 + R_0 \tau} \quad (27.2)$$

其中,  $R_0$  是适用于  $T$  至  $T^*$  期间的远期利率,  $\sigma_R$  是该远期利率的波动率。

因此, 该金融工具的价值为

$$P(0, T) L \tau \left[ R_0 + \frac{R_0^2 \sigma_R^2 \tau T}{1 + R_0 \tau} \right]$$

<sup>1</sup> 像往常一样, 为了简化说明, 我们的例子中假设了实际/实际日算惯例。

**[例 27.1]** 考虑一个 3 年后实现损益的衍生证券，损益等于 3 年后的 1 年期零息票债券利率（每年计一次复利计算）乘以 \$1 000。假设所有期限的零息率为 10% p.a.，每年计一次复利。第 3 年末和第 4 年末期限之间的远期利率的波动率为 20%。这个例子中， $R_0 = 0.10$ ,  $\sigma_R = 0.20$ ,  $T = 3$ ,  $\tau = 1$  以及  $P(0.3) = 1/1.10^3 = 0.7513$ 。衍生证券的价值为：

$$0.7513 \times 1 000 \times 1 \times \left( 0.10 + \frac{0.10^2 \times 0.20^2 \times 1 \times 3}{1 + 0.10 \times 1} \right)$$

即 \$75.95 (没有凸性调整时，这一价格为 \$75.13)。

## 应用 2：互换率

接下来考虑一个  $T$  时刻实现损益的衍生证券，损益等于那一时刻观察到的互换率。该互换率是票面收益率。为了计算一个凸性调整，我们可以近似地假设， $T$  时刻的  $N$  年期互换率等于那一时刻的  $N$  年期债券的收益率，该债券的息票率等于当前的远期互换率。那么就能使用方程 (27.1)。

**[例 27.2]** 考虑如下衍生证券，3 年后损益等于那时的 3 年期互换率乘以 \$100。假设该互换每年支付一次，对所有期限的零息票率都是年利率 12%（每年计一次复利），在 3 年后的 3 年期远期互换率（互换期权价格隐含的）的波动率是 22%。我们可以认为互换率近似等于息票率为 12% 的债券的收益率。那么相应的函数  $G(y)$  为：

$$\begin{aligned} G(y) &= \frac{0.12}{1+y} + \frac{0.12}{(1+y)^2} + \frac{1.12}{(1+y)^3} \\ G'(y) &= -\frac{0.12}{(1+y)^2} - \frac{0.24}{(1+y)^3} - \frac{3.36}{(1+y)^4} \\ G''(y) &= \frac{0.24}{(1+y)^3} + \frac{0.72}{(1+y)^4} + \frac{13.44}{(1+y)^5} \end{aligned}$$

这种情况下，远期收益率  $y_0$  为 0.12，那么  $G'(y_0) = -2.4018$  且  $G''(y_0) = 8.2546$ 。根据方程 (27.1)，有

$$E_T(y_T) = 0.12 + \frac{1}{2} \times 0.12^2 \times 0.22^2 \times 3 \times \frac{8.2546}{2.4018} = 0.1236$$

因此，在为该金融工具估值时，我们应该假设远期互换率为 0.1236 (12.36%) 而不是 0.12。该金融工具的价值为：

$$\frac{100 \times 0.1236}{1.12^3} = 8.80$$

即 \$8.80 (没有凸性调整时，这一价格为 \$8.54)。

## 27.2 时刻调整

本节中我们考虑这样的一种情况：我们根据  $T$  时刻的某个市场变量  $V$  的观测值来计算随后  $T^*$  时刻发生的损益。定义：

$V_T$ :  $T$  时刻的  $V$  值

$E_T(V_T)$ : “关于  $P(t, T)$  的远期风险中性世界” 中  $V_T$  的期望值

$E_{T^*}(V_T)$ : “关于  $P(t, T^*)$  的远期风险中性世界” 中  $V_T$  的期望值

计价标准从  $P(t, T)$  变化到  $P(t, T^*)$  时，计价标准比率为（参见 25.7 节）

$$W = \frac{P(t, T^*)}{P(t, T)}$$

这就是有效期为  $T$  至  $T^*$  期间的零息票债券的远期价格。定义：

$\sigma_V$ :  $V$  的波动率

$\sigma_W$ :  $W$  的波动率

$\rho_{VW}$ :  $V$  和  $W$  之间的相关系数

根据方程 (25.35)，计价标准的变化引起  $V$  的增长率上升  $\alpha_V$ ，其中

$$\alpha_V = \rho_{VW} \sigma_V \sigma_W \quad (27.3)$$

我们可以用  $T$  至  $T^*$  之间的远期利率来表示上述结论。定义：

$R$ :  $T$  至  $T^*$  期间的远期利率，复利频率为  $m$

$\sigma_R$ :  $R$  的波动率

$W$  与  $R$  之间的关系式为

$$W = \frac{1}{(1 + R/m)^{m(T^*-T)}}$$

根据伊藤定理得到的  $W$  的波动率与  $R$  的波动率之间的关系式为<sup>2</sup>

$$\sigma_W = \frac{\sigma_R R (T^* - T)}{1 + R/m}$$

因此方程 (27.3) 变成

$$\alpha_V = -\frac{\rho_{VR} \sigma_V \sigma_R R (T^* - T)}{1 + R/m}$$

其中  $\rho_{VR} = -\rho_{VW}$  为  $V$  与  $R$  之间的瞬态相关系数。我们可以近似地假设  $R$  恒等于  $R_0$ ，并且下面表达式中的波动率和相关系数也是常数，分别等于各自在 0 时刻的值。

$$E_{T^*}(V_T) = E_T(V_T) \exp \left[ -\frac{\rho_{VR} \sigma_V \sigma_R R_0 (T^* - T)}{1 + R_0/m} T \right] \quad (27.4)$$

<sup>2</sup>除了伊藤定理，我们也可以使用 26.2 节中的久期结论。

**[例 27.3]** 考虑一个 6 年后实现损益的衍生证券，损益等于第 5 年年末观察到的某个股票指数的价值。假设从某个 5 年后到期的合约中得到的股票指数的远期值为 1 200。假设该指数的波动率为 20%，第 5 年年末到第 6 年年末间的远期利率的波动率为 18%，并且刚刚所述两个变量的相关系数为 -0.4。进一步假设零息率曲线是平坦的，年利率 8%，每年计一次复利。我们把上面刚得到的结论应用于  $V$  等于指数值的情形。这个例子中  $T = 5$ ,  $T^* = 6$ ,  $m = 1$ ,  $R_0 = 0.08$ ,  $\rho_{VR} = -0.4$ ,  $\sigma_V = 0.20$  以及  $\sigma_R = 0.18$ 。那么

$$E_{T^*}(V_T) = E_T(V_T) \exp \left[ -\frac{-0.4 \times 0.20 \times 0.18 \times 0.08 \times 1}{1 + 0.08} \times 5 \right]$$

即  $E_{T^*}(V_T) = 1.00535 E_T(V_T)$ 。根据第 25 章中的讲述，我们知道  $E_T(V_T)$  为指数的远期价格，即 1 200。因此， $E_{T^*}(V_T) = 1 200 \times 1.00535 = 1 206.42$ 。根据第 25 章中的论述以及方程 (25.20)，该衍生证券的价值为  $1 206.42 \times P(0, 6)$ 。这个例子中， $P(0, 6) = 1/1.08^6 = 0.6302$ 。因此，衍生证券的价值为 760.25。

## 再次探讨应用 1

利用刚刚给出的分析，可以用另一种方式得到 27.1 节的应用 1 中的结果。使用应用 1 中的符号，我们定义  $R_T$  为  $T$  至  $T^*$  之间期限的利率， $R_0$  为  $T$  至  $T^*$  之间期限的远期率。从方程 (25.22)，得到

$$E_{T^*}(R_T) = R_0$$

我们再应用方程 (27.4)，设定  $V$  等于  $R$ ，则

$$E_{T^*}(R_T) = E_T(R_T) \exp \left[ -\frac{\sigma_R^2 R_0 \tau}{1 + R_0 \tau} T \right]$$

其中  $\tau = T^* - T$  (注意， $m = 1/\tau$ )。那么，有

$$R_0 = E_T(R_T) \exp \left[ -\frac{\sigma_R^2 R_0 T \tau}{1 + R_0 \tau} \right]$$

即

$$E_T(R_T) = R_0 \exp \left[ -\frac{\sigma_R^2 R_0 T \tau}{1 + R_0 \tau} \right]$$

取指数函数的近似值，我们得到

$$E_T(R_T) = R_0 + \frac{R_0^2 \sigma_R^2 \tau T}{1 + R_0 \tau}$$

这和方程 (27.2) 一致。

### 27.3 跨币衍生证券

跨币衍生证券中涉及两个货币。衍生证券的损益是根据第一个货币度量的变量价值来定义的，而获得的损益则是以第二种货币表示。跨币衍生证券的一个例子是 CME 的日经指数 Nikkei 期货合约，在商业剪影 5.3 中讨论过。该合约的标的市场变量是 Nikkei 225 指数，但是以美元结算合约。

考虑一种在  $T$  时刻以货币  $X$  提供损益的跨币衍生证券。我们假设损益依附于  $T$  时刻以货币  $Y$  观察到的某个变量值  $V$ 。定义：

$P_x(t, T)$ :  $T$  时刻支付一个单位货币  $X$  的零息票债券在  $t$  时刻以货币  $X$  给出的  
价值

$P_y(t, T)$ :  $T$  时刻支付一个单位货币  $Y$  的零息票债券在  $t$  时刻以货币  $Y$  给出的  
价值

$V_T$ :  $T$  时刻的  $V$  值

$E_x(V_T)$ : “关于  $P_x(t, T)$  的远期风险中性世界” 中  $V_T$  的期望值

$E_y(V_T)$ : “关于  $P_y(t, T)$  的远期风险中性世界” 中  $V_T$  的期望值

当计价标准从  $P_y(t, T)$  变化到  $P_x(t, T)$  时，计价标准比率为

$$W(t) = \frac{P_x(t, T)}{P_y(t, T)} S(t)$$

其中  $S(t)$  是  $t$  时刻的即期汇率（一单位  $X$  所对应的  $Y$  的单位数）。那么，计价标准比率  $W(t)$  是  $T$  时刻到期的合约的远期汇率（一单位  $X$  所对应的  $Y$  的单位数）。定义：

$\sigma_w$ :  $W$  的波动率

$\sigma_v$ :  $V$  的波动率

$\rho_{vw}$ :  $V$  和  $W$  之间的瞬态相关系数

根据方程 (25.35)，计价标准的变化引起  $V$  的增长率上升  $\alpha_v$ ，其中

$$\alpha_v = \rho_{vw} \sigma_v \sigma_w \quad (27.5)$$

如果我们近似地假设波动率和相关系数是常数，这说明

$$E_x(V_T) = E_y(V_T) e^{\rho_{vw} \sigma_v \sigma_w T}$$

上述表达式近似等价于

$$E_x(V_T) = E_y(V_T) (1 + \rho_{vw} \sigma_v \sigma_w T) \quad (27.6)$$

第 30 章中在为所谓的差异互换定价时，我们将应用这一公式。

**[例 27.4]** 假设 1 年期合约的 Nikkei 股票指数现在的值为 15 000 日元。并且 1 年期美元无风险利率为 5%，1 年期日元无风险利率为 2%，Nikkei 的红利收益率为 1%。以日元表示的合约隐含的 Nikkei 的远期价格可由公式 (5.8) 计算：

$$15\ 000e^{(0.02-0.01)\times 1} = 15\ 150.75$$

假设该指数的波动率为 20%，美元兑日元 1 年期远期汇率的波动率为 12%，两个变量之间的相关系数为 0.3。这里， $F(0) = 15\ 150.75$ ， $\sigma_F = 0.20$ ， $\sigma_W = 0.12$  以及  $\rho = 0.3$ 。根据方程 (27.6)，“关于 1 年后到期的美元债券的远期风险中性世界”中 Nikkei 的期望值为

$$15\ 150.75e^{0.3 \times 0.2 \times 0.12 \times 1} = 15\ 260.23$$

这是以美元而非以日元支付损益的 Nikkei 合约的远期价格（近似地，它也是该合约的期货价格）。

## 使用传统风险中性测度

我们已经看到，当损益只发生在某一时刻的情况下，远期风险中性测度非常好用。而其他一些情况中，传统风险中性测度是更恰当的选择。假设我们已经知道变量  $V$  在“传统的货币  $Y$  的风险中性世界”中的行为过程，并希望估计该变量在“传统的货币  $X$  的风险中性世界”中的行为过程。定义：

$S$ : 即期汇率（每单位  $X$  对应的  $Y$  单位数）

$\sigma_S$ :  $S$  的波动率

$\sigma_V$ :  $V$  的波动率

$\rho$ :  $S$  和  $V$  之间的瞬态相关系数

这种情况下，计价标准从货币  $Y$  的货币市场账户变化到货币  $X$  的货币市场账户（两个货币市场账户都以货币  $X$  表述）。定义  $g_X$  为货币  $X$  的货币市场账户的价值， $g_Y$  为货币  $Y$  的货币市场账户的价值。计价标准比率为

$$\frac{g_X}{g_Y} S$$

如 25.4 节所述，变量  $g_X(t)$  和  $g_Y(t)$  的漂移率是随机的，但波动率为零。根据伊藤定理，该计价标准比率的波动率为  $\sigma_S$ 。计价标准的变化引起  $V$  的预期增长率上升

$$\rho \sigma_V \sigma_S \quad (27.7)$$

风险的市场价格从 0 变化到  $\rho \sigma_S$ 。该结果的一个应用就是 Siegel 悖论（参见商业剪影 27.1）。

**[例 27.5]** 一个 2 年期美式期权提供的损益为  $S - K$  英镑。其中， $S$  是执行时刻的 S&P 500 的值， $K$  为执行价格。S&P 500 当前的值为 1 200。英镑和美元的无风险利率分别为 5% 和 3%，保持不变。美元/英镑汇率和 S&P 500 之间的相关系数为 0.2，S&P 500 的波动率为 25%，汇率的波动率为 12%。S&P 500 的红利收益率为 1.5%。

### 商业剪影 27.1 Siegel 悖论

考虑两种货币  $X$  和  $Y$ 。假设两个国家的利率分别为  $r_X$  和  $r_Y$ ，都是常数。定义  $S$  为一单位货币  $X$  对应的货币  $Y$  的单位数量。如第 5 章所述，外汇是一种支付收益（收益率等于外国无风险利率）的资产。因此， $S$  的传统风险中性过程为

$$dS = (r_Y - r_X)Sdt + \sigma_S Sdz$$

根据伊藤定理， $1/S$  的过程是

$$d(1/S) = (r_X - r_Y + \sigma_S^2)(1/S)dt - \sigma_S(1/S)dz$$

这个结果会导致所谓的 Siegel 悖论。因为  $S$  在风险中性世界的预期增长率为  $r_Y - r_X$ ，对称地， $1/S$  的预期增长率应该是  $r_X - r_Y$ ，而不是  $r_X - r_Y + \sigma_S^2$ 。

为了解释 Siegel 悖论，我们应该注意，上述的  $S$  过程是风险中性过程， $S$  处于计价单位为货币  $Y$  的货币市场账户的世界中。 $1/S$  的过程是由  $S$  的过程推导的，因此，其中的计价单位也是相同的。因为  $1/S$  是每单位货币  $Y$  对应的货币  $X$  的单位数量，对称地， $1/S$  的过程中应该使用计价单位是货币  $X$  的货币市场账户的世界。方程 (27.7) 说明，计价单位从货币  $Y$  的货币市场账户变化到货币  $X$  的货币市场账户时，一个变量  $V$  的增长率会上升  $\rho\sigma_V\sigma_S$ 。其中， $\rho$  是  $S$  和  $V$  之间的相关系数。这种情况下， $V = 1/S$ ，因此， $\rho = -1$  且  $\sigma_V = \sigma_S$ 。那么，计价单位的变化会引起  $1/S$  的增长率上升  $-\sigma_S^2$ 。这就和上述给出的  $1/S$  的过程中的  $+\sigma_S^2$  项相抵。因此，在计价单位为货币  $X$  的货币市场账户的世界中， $1/S$  的过程是

$$d(1/S) = (r_X - r_Y)(1/S)dt - \sigma_S(1/S)dz$$

这和  $S$  的过程是相互对称的。该悖论得到了解决！

我们通过对 S&P 500 构建二叉树图估值这样的期权，计价标准为英国的货币市场账户（即以英国投资者的角度考虑的传统风险中性世界）。根据方程 (27.7)，计价标准从美国货币市场账户变化到英国货币市场账户，则 S&P 500 预期增长率上升

$$0.2 \times 0.25 \times 0.12 = 0.006$$

即 0.6%。计价标准为美元时，S&P 500 的增长率为  $3\% - 1.5\% = 1.5\%$ 。因此，计价标准为英镑时，S&P 500 的增长率为 2.1%。英镑的无风险利率为 5%。因此，计价标准为英镑时，S&P 500 类似于支付红利收益率  $5\% - 2.1\% = 2.9\%$  的资产。利用参数值  $S = 1200$ ,  $K = 1200$ ,  $r = 0.05$ ,  $q = 0.029$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $T = 2$  以及 100 个时间步，DerivaGem 估计的期权价值为 £179.83。

## 小 结

为在某一未来时刻提供损益的衍生证券进行估值时，很自然的一个假设是该衍生证券的标的变量等于它们的远期值，那么可以选取适用于估值日至损益发生日期限之间的利率来进行贴现。本章说明了这并不总是正确的估值过程。

当损益依附于  $T$  时刻观察的某个债券收益率  $y$ ，则应该假设预期收益率大于远期收益率，如方程 (27.1) 所示。这一结果可以适用于损益依附于某个互换率的情况。变量值是在  $T$  时刻观察的，而损益在随后的某个时刻  $T^*$  发生，那么该变量的远期值应该进行如方程 (27.4) 的调整。当一个变量是以一种货币观察的，而损益是以另一种货币实现时，该变量的远期值也应该进行调整。方程 (27.6) 显示了这一调整。

第 30 章中，我们将利用这些结果讨论非标准互换。

## 参考读物

Brotherton-Ratcliffe, R., and B. Iben, "Yield Curve Applications of Swap Products," in *Advanced Strategies in Financial Risk Management* (R. Schwartz and C. Smith, eds.). New York Institute of Finance, 1993.

Jamshidian, F., "Corraling Quantos," *Risk*, March (1994): 71–75.

Reiner, E., "Quanto Mechanics," *Risk*, March (1992), 59–63.

## 问题和习题

- 27.1 请解释你如何估值 5 年后提供损益  $100R$  的衍生证券。其中， $R$  是 4 年后观察的 1 年期利率（每年计一次复利的）。如果损益在第 4 年发生，你的答案将如何变化？如果损益在第 6 年发生，你的答案将如何变化？
- 27.2 请解释当出现如下情况时，是否需要凸性调整或时刻调整：
  - (a) 我们想要对某个价差期权进行估值，该期权的收益为每季度 5 年期的互换率超过 3 个月的 LIBOR 的超额部分（如果存在这个差额的话），本金为 \$100。损益在这些利率出现后的 90 天才发生。
  - (b) 我们想要对某个衍生证券进行估价，其损益为 3 个月期的 LIBOR 减 3 个月期的国债利率。损益在这些利率出现后的 90 天才发生。
- 27.3 假设在第 26.3 节的例 26.3 中，损益在 1 年内发生（即该利率被观察）而不是在 15 个月后。这使得输入到 Black 模型的值有什么不同？
- 27.4 收益率曲线为年利率 10%（年复利）的水平曲线。计算如下金融工具的价值：在 5 年内，收取 2 年期互换率（年复利），支付 10% 的固定利率。名义本金都是 \$100。假设互换利率的年波动率为 20%。请说明为什么此金融工具的价值不为零？
- 27.5 习题 27.4 中如果互换率是第 5 年后观察的，但支付的交换发生在
  - (a) 第 6 年以及
  - (b) 第 7 年时，你的答案会如何变化？假设所有远期利率的波动率为 20%。第 5 年和第 7 年之间的远期互换率与第 5 年和第 6 年之间的远期利率之间的相关系数为

0.8，第 5 年和第 7 年之间的远期互换率与第 5 年和第 7 年之间的远期利率之间的相关系数为 0.95。

- 27.6 以收益率表示的， $T$  时刻的债券价值为  $G(y_T)$ 。假设“关于  $T$  时刻到期的债券的远期风险中性世界”中，远期债券收益率  $y$  服从几何布朗运动。假设远期债券收益率的增长率为  $\alpha$ ，它的波动率为  $\sigma_y$ 。

(a) 利用伊藤定理计算以  $\alpha$ 、 $\sigma_y$ 、 $y$  和  $G(y)$  表示的远期债券价格过程。

(b) 我们考虑的世界中，远期债券价格应该遵循鞅。利用这个结论，计算  $\alpha$  的一种表达式。

(c) 请证明  $\alpha$  的一阶表达式近似地和方程 (27.1) 相互一致。

- 27.7 变量  $S$  是提供收益率  $q$  的投资资产，并以货币  $A$  度量。现实世界中，变量  $S$  的过程为：

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz$$

在下述的情形中，定义所需的变量，给出  $S$  的过程和对应的风险的市场价格。

(a) 货币 A 的传统风险中性世界

(b) 货币 B 的传统风险中性世界

(c) 关于  $T$  时刻到期的货币 A 的零息票债券的远期风险中性世界

(d) 关于  $T$  时刻到期的货币 B 的零息票债券的远期风险中性世界

- 27.8 一个看涨期权在  $T$  时刻提供损益  $\max(S_T - K, 0)$  日元。其中， $S_T$  是  $T$  时刻的黄金的美元价格， $K$  是执行价格。假设黄金的贮存成本为 0。定义所需的变量，计算合约的价值。

- 27.9 假设某个加拿大股票指数的当前水平为 400。当前，每加元等价于 0.70 美元。加拿大和美国的无风险利率分别保持在 6% 和 4%。指数的红利收益率为 3%。定义  $Q$  为每美元对应的加元数量， $S$  为指数值。 $S$  和  $Q$  的波动率分别为 20% 和 6%， $S$  和  $Q$  之间的相关系数为 0.4。以下两种情况下，使用 DerivaGem 软件分别计算基于该指数的 2 年期美式看涨期权的价值：

(a) 期权以加元支付损益，损益为指数超过 400 的部分。

(b) 期权以美元支付损益，损益为指数超过 400 的部分。

## 课后练习

- 27.10 一个金融工具在 2 年后支付  $S$  美元，其中的  $S$  是日经指数值。当前的指数值为 20 000。日元/美元汇率为 100（一美元对应的日元数量）。汇率和指数之间的相关系数为 0.3，指数的红利收益率是 1%p.a.。日经指数的波动率是 20%，日元/美元汇率的波动率是 12%。美国和日本的利率（假设是常数）分别为 4% 和 2%。

(a) 金融工具的价值为多少？

(b) 金融工具在有效期内某一时刻的汇率为  $Q$ ，指数水平为  $S$ 。一位美国投资者创造了这样的投资组合：在日经指数投资  $S$  美元，卖空  $SQ$  日元。请证明：当指数值变化  $\Delta S$  日元时，该美元投资者的组合价值近似变化  $\Delta S$  美元。

(c) 假设指数从 20 000 变化到 20 050，汇率从 100 变化到 99.7，请验证你给出的 (b) 的答案是否正确。

(d) 你如何对该金融工具进行 Delta 对冲？

- 27.11 假设 LIBOR 收益率曲线是水平的，利率 8%（按连续复利计息）。某个衍生产品的损益在 4 年后发生。它等于在这个时刻的 5 年期利率减去 2 年期利率，本金为 \$100，两个利率都是按连续复利计息（损益可正可负）。计算该衍生产品的价值。假设所有利率的波动率为 25%。如果损益并不是在 4 年后，而是在 5 年后发生的，那么答案会如何变化？假设所有利率是完全相关的。
- 27.12 假设一个衍生证券的损益在 10 年后发生，损益等于那个时刻观察的每半年支付一次的互换的 3 年期美元互换率（其应用于指定数额的本金）。假设美元和日元收益率曲线是水平的，分别为每年 8% 和每年 3%（两个利率都是每半年计一次复利的）。远期互换率的波动率为 18%，10 年期“美元兑日元”远期汇率的波动率为 12%，汇率和美元利率之间的相关系数为 0.25。
- (a) 如果以上互换率用于本金 1 亿美元中，当损益是以美元表示时，衍生证券的价值为多少？
- (b) 如果以上互换率用于本金 1 亿日元中，当损益是以日元表示时，衍生证券的价值为多少？
- 27.13 一个衍生证券的损益在 8 年后发生。损益等于在第 5、6、7 和第 8 年时刻观测的 1 年期利率的平均值，本金为 \$1 000。收益率曲线是水平的，利率 6%（每年计一次复利）。所有利率的波动率为 16%。假设所有利率之间完全相关。该衍生证券的价值为多少？

## 附录

### 凸性调整公式的证明

在这个附录中我们证明远期债券收益率的凸性调整公式。假设  $T$  时刻某个衍生产品的损益依附于在那个时刻观测到的某个债券收益。定义：

$y_0$ : 当前观测的  $T$  时刻到期的远期合约的远期债券收益率

$y_T$ :  $T$  时刻的债券收益率

$B_T$ :  $T$  时刻的债券价格

$\sigma_y$ : 远期债券收益率的波动率

我们假设

$$B_T = G(y_T)$$

在  $y_T = y_0$  点按泰勒展开式将  $G(y_T)$  展开得到以下近似：

$$B_T = G(y_0) + (y_T - y_0)G'(y_0) + 0.5(y_T - y_0)^2G''(y_0)$$

其中  $G'$  和  $G''$  是  $G$  的一阶偏导数和二阶偏导数。在“关于  $T$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世界”中取期望值，得到：

$$E_T(B_T) = G(y_0) + E_T(y_T - y_0)G'(y_0) + \frac{1}{2}E_T[(y_T - y_0)^2]G''(y_0)$$

其中， $E_T$  表示该世界中的期望值。表达式  $G(y_0)$  是远期债券价格。而在我们考虑的世界中， $E_T(B_T)$  等于远期债券价格。因此， $E_T(B_T) = G(y_0)$ ，

$$E_T(y_T - y_0)G'(y_0) + \frac{1}{2}E_T[(y_T - y_0)^2]G''(y_0) = 0$$

那么，表达式  $E_T[(y_T - y_0)^2]$  近似等于  $y_0^2 \sigma_y^2 T$ 。因此，以下关系式近似成立：

$$E_T(y_T) = y_0 - \frac{1}{2}y_0^2 \sigma_y^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

这说明，为了得到“关于  $T$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世界”中的预期债券收益率，我们应该在远期债券收益率添加

$$-\frac{1}{2}y_0^2 \sigma_y^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

这就是方程 (27.1) 的结果。关于另一种证明方法，参见习题 27.6。



# 利率衍生证券：短期利率模型

到现在为止，我们给出的利率期权定价模型假设在未来某个时点的利率、债券价格或其他变量的概率分布是对数正态分布。它们广泛应用于诸如利率上限、欧式债券期权以及欧式互换期权等金融工具的估值。然而，它们存在局限性。它们不能描述利率随时间演变的方式。因此，它们不能用于许多正在交易的诸如美式互换期权、可提前赎回债券以及结构化票据等这些利率衍生证券的估值。

本章和下一章中我们讨论一种新方法，目的是克服这种局限性。这包括构造所谓的期限结构模型。这是一个描述零息票率可能行为的模型。<sup>1</sup> 本章重点讨论基于特定的短期利率  $r$  行为过程构造的期限结构模型。

## 28.1 背景

$t$  时刻的短期利率  $r$  是适用于  $t$  时刻一个无穷小的时间期限内的利率。有时这种短期利率也称之为瞬态短期利率 (instantaneous short rate)。债券价格、期权价格和其他衍生证券价格仅只依赖于  $r$  在风险中性世界中所遵循的过程，与现实世界中  $r$  所遵循的过程无关。我们在这里考虑的风险中性世界指的是传统风险中性世界，在一个  $t$  至  $t + \Delta t$  之间的很短的时间段内，投资者平均获得  $r(t)\Delta t$ 。我们将给出的所有  $r$  遵循的过程，都是在该风险中性世界中得到的。

根据方程 (25.19)，在  $T$  时刻给出收益为  $f_T$  的利率衍生证券的价值为：

$$\hat{E}[e^{-\bar{r}(T-t)}f_T] \quad (28.1)$$

其中  $\bar{r}$  是在  $t$  到  $T$  时间间隔内  $r$  的平均值， $\hat{E}$  代表传统风险中性世界的期望值。

和之前一样，设  $P(t, T)$  为  $t$  时刻零息票债券的价格，该债券在  $T$  时刻支付 \$1。由 (28.1) 得：

$$P(t, T) = \hat{E}[e^{-\bar{r}(T-t)}] \quad (28.2)$$

若  $R(t, T)$  为  $t$  时刻的  $T - t$  期限的连续复利率，那么

---

<sup>1</sup> 注意，使用期限结构模型时，我们无需进行凸性、时间或跨币衍生证券调整。

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (28.3)$$

所以

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \quad (28.4)$$

而且由式 (28.2) 得：

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln \hat{E}[e^{-r(T-t)}] \quad (28.5)$$

根据该时刻的  $r$  值和  $r$  的风险中性过程，这个公式可获得任意给定时刻的利率期限结构。它说明了：一旦我们定义了  $r$  的过程，我们就已经完全定义了初始零息率曲线所需的所有内容以及它随时间的演变过程。

## 28.2 均衡模型

通常均衡模型是从假设一些经济变量开始，并推出短期无风险利率  $r$  的一个过程。然后它们寻找该过程对债券价格和期权价格的含义。

在单因子模型中， $r$  的过程只包含一个不确定性的来源。通常在风险中性世界中，短期利率由如下形式的 Itô 过程来描述：

$$dr = m(r)dt + s(r)dz$$

假设瞬态漂移率  $m$  和瞬态标准差  $s$  是  $r$  的函数，但它们独立于时间。单因子的假设不像它看起来那样严格。单因子模型意味着：在任意短时间间隔内所有利率按相同的方向变动，但它并不意味着所有利率以相同的幅度变动。因此随时间变化，零息率曲线的形状也发生变化。

我们将考虑三个单因子均衡模型：

$$m(r) = \mu r; s(r) = \sigma r \quad (\text{Rendleman 和 Bartter 模型})$$

$$m(r) = a(b - r); s(r) = \sigma \quad (\text{Vasicek 模型})$$

$$m(r) = a(b - r); s(r) = \sigma \sqrt{r} \quad (\text{Cox, Ingersoll 和 Ross 模型})$$

### Rendleman 和 Bartter 模型

在 Rendleman 和 Bartter 的模型中， $r$  的风险中性过程是：<sup>2</sup>

$$dr = \mu r dr + \sigma r dz$$

其中  $\mu$  和  $\sigma$  是常数。这意味着  $r$  服从几何布朗运动。 $r$  所遵循的过程与第 13

<sup>2</sup> 参见 R. Rendleman and B. Batter, "The Pricing of Options on Debt Securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15 (March 1980): 11-24.

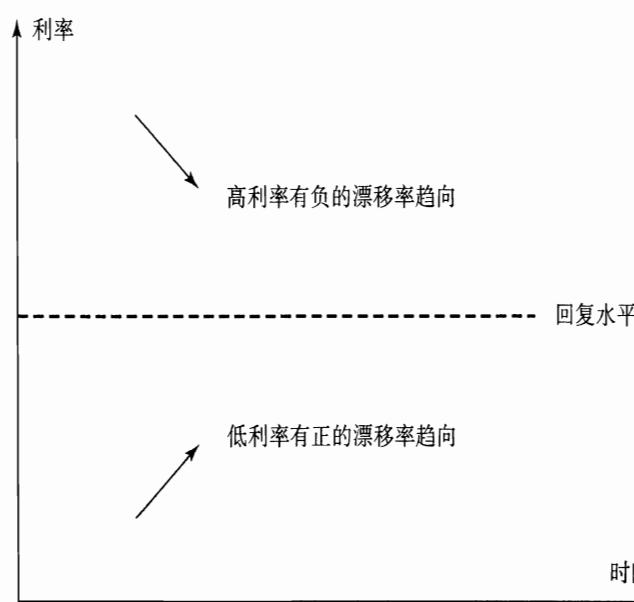


图 28.1 均值回复

章假设的股票价格所遵循的过程类型相同。它可以用一个类似于第 11 章中使用的股票的二叉树图来表示。<sup>3</sup>

这里假设短期利率的行为与股票价格相似是很自然的，但这个假设很不理想。在利率和股票价格之间的一个重要差别是随着时间的推移，利率呈现出向某个长期平均水平收敛的趋势。这个现象称之为均值回复 (mean reversion)。当  $r$  较高时，均值回复会使  $r$  具有负的漂移率；当  $r$  较低时，均值回复会使  $r$  具有正的漂移率。均值回复可用图 28.1 来说明。而 Rendleman 和 Bartter 的模型并没有刻画出这个特性。

有些强有力经济学观点支持均值回复。当利率较高时，经济发展会放慢，借款人对资金的需求就会减少。结果导致利率下降。当利率较低时，则借款人会对资金有很高的需求，结果导致利率上升。

## Vasicek 模型

在 Vasicek 模型中，短期利率  $r$  的风险中性过程是：

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz$$

其中  $a$ 、 $b$  和  $\sigma$  为常数。<sup>4</sup> 这个模型包含了均值回复。短期利率以速率  $a$  拉向水平  $b$ 。这个额外的“拉力”是服从正态分布的随机项  $\sigma dz$ 。

<sup>3</sup> 利率树图的应用方法将在本章随后部分中解释。

<sup>4</sup> 参见 O. A. Vasicek, “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, 5 (1977): 177–88.

Vasicek 说明，从方程 (28.2) 可获得如下的  $T$  时刻到期支付\$1 的零息票债券，在  $t$  时刻的价格表达式为：

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (28.6)$$

在这个式子中， $r(t)$  是  $t$  时刻  $r$  的值，

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (28.7)$$

和

$$A(t, T) = \exp \left[ \frac{(B(t, T) - T + t)(a^2 b - \sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right] \quad (28.8)$$

当  $a = 0$  时， $B(t, T) = T - t$ ,  $A(r, T) = \exp[\sigma^2(T - t)^3/6]$ 。

利用公式 (28.4) 得到：

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln A(t, T) + \frac{1}{T-t} B(t, T) r(t) \quad (28.9)$$

该式说明，只要选择出  $a$ 、 $b$  和  $\sigma$ ，整个期限结构就可以被表示为  $r(t)$  的函数。它的形状可以上倾、下倾或稍稍“隆起”（参见图 28.2）。

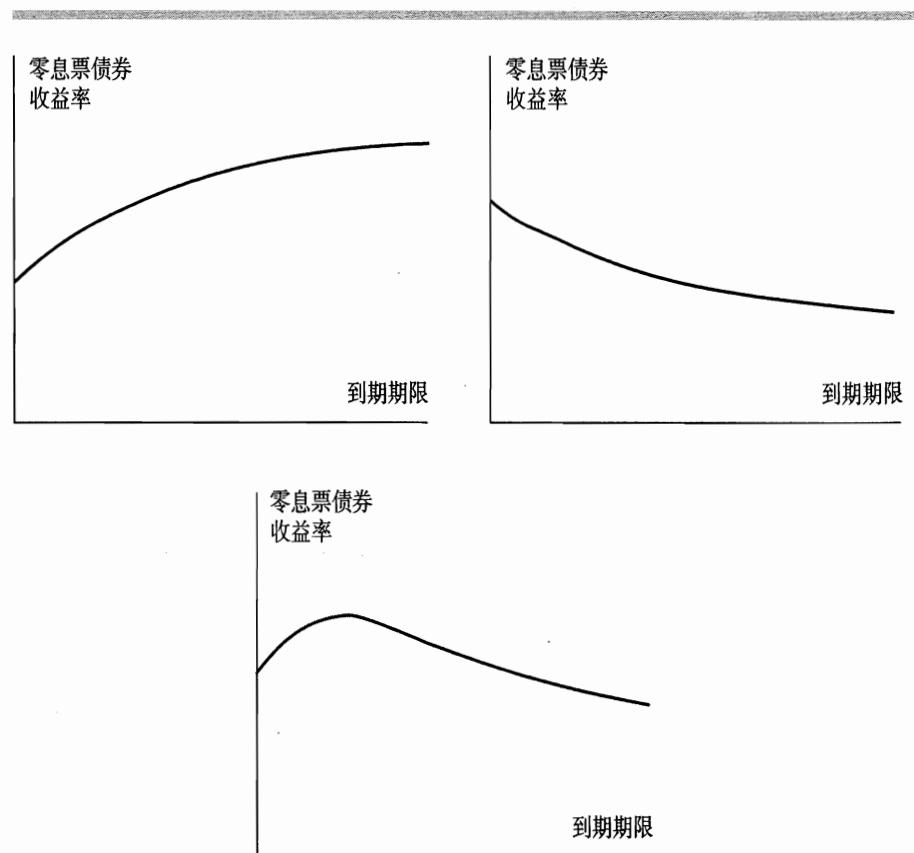


图 28.2 运用 Vasicek 模型时期限结构的可能形状

## Cox、Ingersoll 和 Ross 模型

在 Vasicek 模型中，在未来某时刻的短期利率  $r$  可能为负值。Cox、Ingersoll 和 Ross 曾提出了一个利率总是为非负值的模型。<sup>5</sup> 模型中  $r$  的风险中性过程是：

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r} dz$$

这与 Vasicek 有同样的均值回复漂移，但短期利率变化的标准差正比于  $\sqrt{r}$ 。这意味着其标准差随着短期利率的上升而上升。

Cox、Ingersoll 和 Ross 在他们的模型中指出：债券价格与在 Vasicek 模型中的一般形式相同，即：

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r}$$

但函数  $B(t, T)$  和  $A(t, T)$  不同：

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

和

$$A(t, T) = \left[ \frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2ab/\sigma^2}$$

其中  $\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$ 。上倾、下倾和稍稍隆起的收益率曲线都有可能。像在 Vasicek 模型中一样，长期利率  $R(t, T)$  线性地依赖于  $r(t)$ 。这意味着  $r(t)$  的值决定了  $t$  时刻期限结构的水平。在  $t$  时刻的一般期限结构形状是独立于  $r(t)$ ，但确实依赖于  $t$ 。

## 双因子均衡模型

许多研究者对双因子均衡模型的性质进行研究。例如，Brennan 和 Schwartz 曾建立了一个当短期利率回复到长期利率，而长期利率服从随机过程的模型。<sup>6</sup> 长期利率被选择作为每年支付\$1 的永久性债券的收益率。由于这个债券的收益率是该债券价格的倒数，运用伊藤定理可从债券价格所遵循的过程计算出其收益所遵循的过程。该债券是一种可交易证券的情况使分析得以简化，因为我们知道在风险中性世界中债券的预期收益率必然等于无风险利率。

另一个双因子模型是由 Longstaff 和 Schwartz 提出的。作者从经济学的一般均

<sup>5</sup> 参见 J. C. Cox, J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53 (1985): 385-407.

<sup>6</sup> 参见 M. J. Brennan and E. S. Schwartz, "A Continuous Time Approach to Pricing Bonds," *Journal of Banking and Finance*, 3 (July 1979): 133-55; M. J. Brennan and E. S. Schwartz, "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21, 3 (September 1982): 301-29.

衡模型开始并推导出一个有随机波动率的期限结构。<sup>7</sup> 可以证明用解析法很容易处理该模型。

### 28.3 无套利模型

在前几节中所表示的均衡模型的缺点是它们不能自动匹配今天的利率期限结构。通过谨慎地选择参数，它们可以提供一种近似于实际的许多种期限结构。但是这种拟合通常并不精确，而且在有些情况下，无法找到合理的拟合公式。大多数交易员认为它不能令人满意。当模型不能对标的债券做出正确定价时，他们有理由说他们对债券期权的定价几乎没有信心。标的债券价格 1% 的误差会导致期权价格 25% 的误差。

无套利模型 (no-arbitrage model) 被设计为模型能很精确地匹配今天的利率期限结构。因此，均衡模型与无套利模型之间的本质区别如下：在均衡模型中今天的利率期限结构是输出量；在无套利模型中今天的利率期限结构是输入量。

均衡模型中短期利率的漂移率（即  $dt$  的系数）通常不是时间的函数。无套利模型中该漂移率通常依赖于时间。这是因为在无套利模型中，初始零息率曲线的形状决定未来短期利率所经历的平均路径。如果  $t_1$  至  $t_2$  期限之间内零息率曲线是急剧向上倾斜的，那么  $r$  在该期限内漂移率为正；如果  $t_1$  至  $t_2$  期限之间内零息率曲线是急剧向下倾斜的，那么  $r$  在该期限内漂移率为负。

那么，在一些均衡模型中把短期利率的漂移率表示为时间的函数，就能把均衡模型转换成无套利模型。我们接下来介绍 Ho-Lee 模型、Hull-White 模型（单因子以及双因子）以及 Black-Karasinski 模型。

#### Ho-Lee 模型

Ho-Lee 在 1986 年的论文中首先提出了期限结构的无套利模型。<sup>8</sup> 他们用债券价格二叉树图的形式提出了该模型。模型有两个参数：短期利率标准差和该短期利率风险的市场价格。模型的连续时间极限被表示为：

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \quad (28.10)$$

其中短期利率的瞬态标准差  $\sigma$  是常数，而  $\theta(t)$  是为了保证模型与初始期限结构一致而选择的时间函数。变量  $\theta(t)$  定义了在  $t$  时刻  $r$  的平均运动方向，它独立于  $r$  的值。有趣的是，当模型用来定价利率衍生证券时，Ho-Lee 模型中与风险市场价格有关的参数是一个不相关的变量。这类似于在股票期权定价中的风险偏好无关

<sup>7</sup> 参见 F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, “Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model,” *Journal of Finance*, 47, 4 (September 1992): 1259–82.

<sup>8</sup> 参见 T. S. Y. Ho and S. -B. Lee, “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims,” *Journal of Finance*, 41 (December 1986): 1011–29.

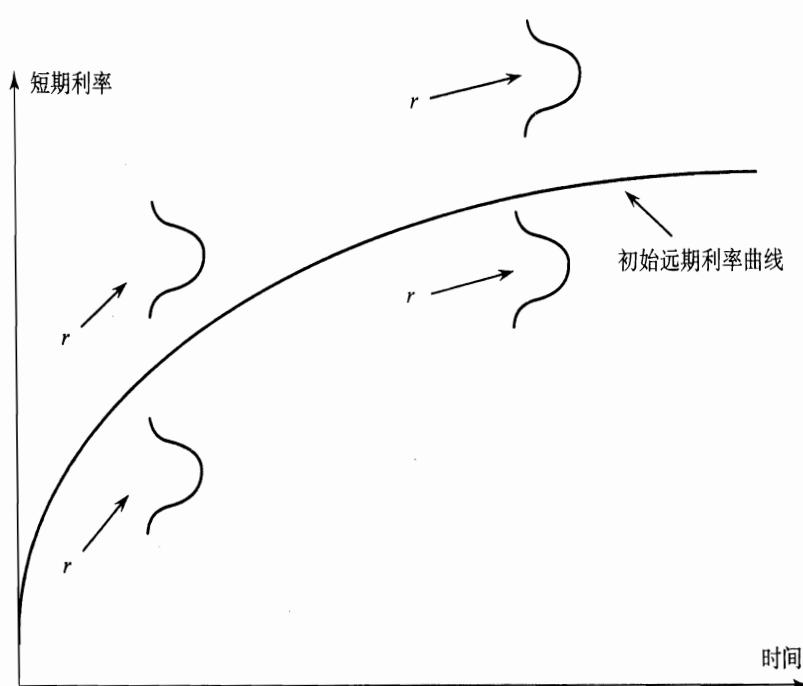


图 28.3 Ho-Lee 模型

性的情形。

利用如下的解析公式可以计算出变量  $\theta(t)$ ：

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t \quad (28.11)$$

其中， $F(0, t)$  是 0 时刻观察到的  $t$  期限的瞬态远期利率，下标  $t$  表示对  $t$  的偏导数。 $\theta(t)$  的近似值等于  $F_t(0, t)$ ，这意味着短期利率未来运动的平均方向近似等于瞬态远期利率曲线的斜率。Ho-Lee 模型如图 28.3 所示，远期利率曲线的斜率定义了在任何指定时刻短期利率正在运动的平均方向。施加这个斜率的量是正态分布随机输出量。

在 Ho-Lee 模型中，零息票债券和基于零息票债券的欧式期权可以求出估值解析式子。用短期利率表示的  $t$  时刻的零息票债券价格的表达式是：

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-r(t)(T-t)} \quad (28.12)$$

其中：

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + (T-t)F(0, t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)^2$$

在这些公式中，设定今天是时间零点。时间  $t$  和  $T$  是指未来一般时间，其中  $T \geq t$ 。因此，根据  $t$  时刻短期利率及今天债券的价格，这些方程定义了在未来  $T$  时刻的零息票债券的价格。今天债券价格可以通过今天的期限结构计算出来。

## Hull-White (单因子) 模型

在 1990 年发表的一篇论文中，Hull 和 White 探讨了 Vasicek 和 Cox、Ingersoll 和 Ross 模型的扩展情况，并提供了一个精确符合初始期限结构的模型。<sup>9</sup> 他们建议的 Vasicek 模型的一个扩展形式是：

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz \quad (28.13)$$

即

$$dr = a \left[ \frac{\theta(t)}{a} - r \right] dt + \sigma dz$$

其中  $a$  和  $\sigma$  是常数。我们将把它称作 Hull-White 模型。与 Ho-Lee 模型一样，Hull 和 White 模型以速率  $a$  向均值回复。另外，Hull 和 White 模型与 Vasicek 模型类似，具有依赖时间的回复水平。在  $t$  时刻，短期利率以  $a$  的速度回复到  $\theta(t)/a$ 。Ho-Lee 模型是  $a = 0$  时 Hull-White 模型的特例。

与 Ho-Lee 模型类似，该模型具有同样程度的解析易用性。从初始期限结构可计算  $\theta(t)$  函数如下（参照习题 28.14）：

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (28.14)$$

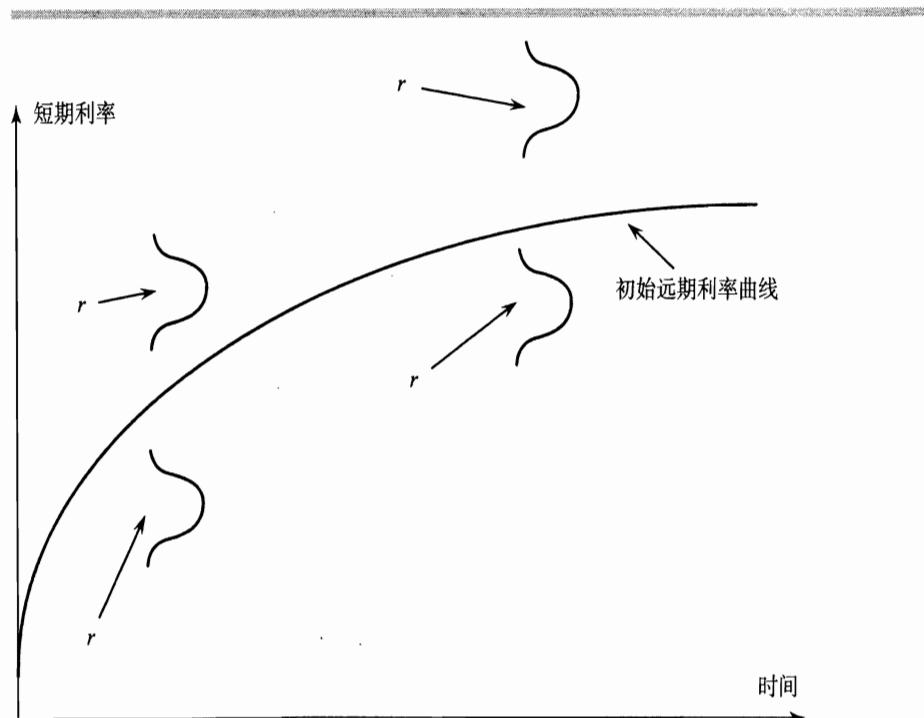


图 28.4 Hull-White 模型

<sup>9</sup> 参见 J. Hull and A. White, “Pricing Interest Rate Derivative Securities,” *Review of Financial Studies*, 3, 4 (1990): 573–92.

这个方程中的最后一项通常很小。如果我们忽略这一项，该方程就说明在  $t$  时刻  $r$  过程的漂移是  $F_t(0, t) + a[F(0, t) - r]$ 。这说明平均而言， $r$  近似等于初始瞬态远期利率曲线的斜率。当它偏离该曲线时，它以  $a$  的速率回复到该曲线。图 28.4 中解释了这一模型。

Hull-White 模型中  $t$  时刻的债券价格由下式给出：

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (28.15)$$

其中：

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (28.16)$$

且

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T)F(0, t) - \frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT} - e^{-at})^2(e^{2a} - 1) \quad (28.17)$$

根据  $t$  时刻短期利率及今天债券的价格，方程 (28.15)、(28.16) 和方程 (28.17) 定义了在未来  $t$  时刻的零息票债券的价格。今天债券价格可以通过今天的期限结构计算出来。

## Black-Karasinski 模型

Ho-Lee 模型和 Hull-White 模型的缺点是短期利率  $r$  可能是负值。Black 和 Karasinski 提出了保证利率是正值的模型：<sup>10</sup>

$$d\ln r = [\theta(t) - a(t)\ln(r)]dt + \sigma(t)dz \quad (28.18)$$

变量  $\ln r$  遵循的过程和 Hull-White 模型中  $r$  遵循的过程相同。Ho-Lee 模型和 Hull-White 模型中某个未来时刻的  $r$  值服从正态分布，Black-Karasinski 模型中服从对数正态分布。

Black-Karasinski 模型在解析方面不像 Ho-Lee 模型和 Hull-White 模型那样易于处理。例如，该模型中不能给出债券价值关于  $r$  的解析公式。

## Hull-White 双因子模型

和双因子均衡模型类似，Brennan 和 Schwartz 提出了如下的无套利模型：<sup>11</sup>

$$df(r) = [\theta(t) + u - af(r)]dt + \sigma_1 dz_1 \quad (28.19)$$

<sup>10</sup> 参见 F. Black and P. Karasinski, “Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal,” *Financial Analysis Journal*, July/August (1991), 52–59.

<sup>11</sup> 参见 J. Hull and A. White, “Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models,” *Journal of Derivatives*, 2, 2 (Winter 1994): 37–48.

其中， $u$  的初始值为 0，并且遵循如下过程：

$$du = -b u dt + \sigma_2 dz_2$$

如上面单因子模型中的情况，根据初始期限结构选择参数  $\theta(t)$ 。随机变量  $u$  是  $r$  的回复水平的一个组成部分，并且随机变量  $u$  以速率  $b$  拉向 0 水平。参数  $a$ 、 $b$ 、 $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  都是常数， $dz_1$  和  $dz_2$  是维纳过程，两者的瞬态相关系数为  $\rho$ 。

上述模型比  $r$  的单因子模型更充分解释了期限结构移动模式以及波动率模式。关于该模型的更多细节，参照作者网页中的技术说明 14。

## 28.4 债券期权

我们到现在为止讲述过的有些模型中，对零息票债券的期权可以进行解析估值。Vasicek 模型、Ho-Lee 模型以及 Hull-White 模型中，在零时间点，基于到期期限为  $s$ 、零息票债券的到期期限为  $T$  的看涨期权价格为：

$$LP(0, s) N(h) - KP(0, T)N(h - \sigma_p) \quad (28.20)$$

其中  $L$  是该债券的本金， $K$  是它的执行价格，并且

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{LP(0, s)}{P(0, T)K} + \frac{\sigma_p}{2}$$

该债券的看跌期权价格为：

$$KP(0, T)N(-h + \sigma_p) - LP(0, s)N(-h)$$

Vasicek 模型以及 Hull-White 模型中，

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(s-T)}] \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}$$

Ho-Lee 模型中，

$$\sigma_p = \sigma(s - T) \sqrt{T}$$

方程(28.20) 本质上等价于 26.2 节中所描述的债券期权的 Black 模型。债券价格的波动率为  $\sigma_p/\sqrt{T}$ ， $T$  时刻债券价格对数的标准差为  $\sigma_p$ 。如 26.3 节描述，利率上限或下限可视为基于零息票债券期权的组合。用上述的解析公式，也可以估值利率上限或下限。

Cox、Ingersoll 和 Ross 模型（28.2 节中描述过）也有对应的零息票债券期权的定价公式。公式中需要对非中心卡方分布求积分。

## 附息债券期权

$r$  的单因子模型中，当  $r$  下降时，所有零息票债券的价格上升；而  $r$  上升时，

所有零息票债券的价格下降。因此，利用单因子模型，欧式附息债券期权可以表示为欧式零息票债券期权的总和。分析过程如下：

1. 计算  $r$  的临界值  $r^*$ ，使得期权到期之时的附息债券价格和期权的执行价格相同
2. 计算组成附息债券的零息票债券期权的价格。每个期权的执行价格被设定为等于相应的零息票债券在  $T$  时刻  $r = r^*$  时的价值
3. 设定附息债券期权的价格等于第 2 步中计算的零息票债券期权的价格总和

那么，我们可以在 Vasicek、Cox、Ingersoll、Ross、Ho-Lee 模型以及 Hull-White 模型中利用上述过程对附息债券期权进行定价。如商业剪影 26.2 所述，一个欧式互换期权可视为一种附息债券期权。那么，也可以用上述过程进行定价。对于上述过程的更多细节，参见作者网页中的技术说明 15。

## 28.5 波动率结构

我们已经看到的几个模型都对应于不同的波动率环境。图 28.5 中，我们可以看到 Ho-Lee 模型、Hull-White 单因子模型和 Hull-White 双因子模型中的 3 个月远期利率的波动率与其期限之间的关系。假设利率期限结构是平的。

在 Ho-Lee 模型中，3 个月远期利率的波动率对于所有期限都是一样的。Hull-White 单因子模型中，由于均值回复效应，3 个月远期利率的波动率是关于期限的

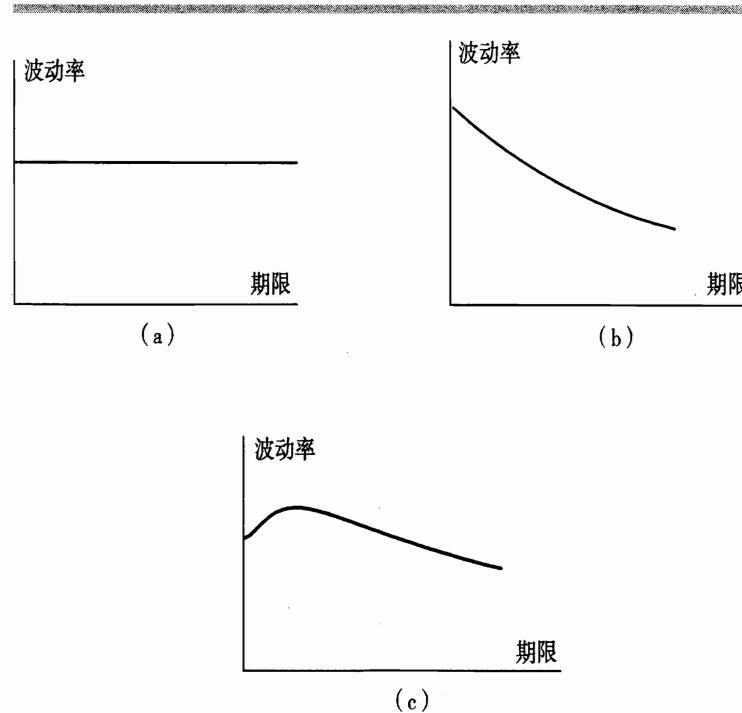


图 28.5 (a) Ho-Lee 模型；(b) Hull-White 单因子模型；(c) Hull-White 双因子模型  
(选择了恰当的参数之后) 中 3 个月远期利率的波动率与其期限之间的关系

减函数。在 Hull-White 双因子模型中，选择了恰当的参数之后，3 个月远期利率的波动率呈现“弓状隆起”，这与实证结果相符，也与 26.3 中讨论过的利率上限隐含波动率的情况相符。

## 28.6 利率树图

利率树图是短期利率随机过程的离散时间的表达式，它类似于股票价格遵循的离散时间表达式——股票价格树图。如果在树图中的时间步长为  $\Delta t$ ，在树图中的利率是连续计复利的  $\Delta t$  期利率。当构造树图时，通常假设  $\Delta t$  期利率  $R$  遵循与对应连续时间模型中瞬态利率  $r$  同样的随机过程。在利率树图和股票价格树图之间的主要区别在于进行贴现的方式。在股票价格树图中，通常假设在每个节点（或时间函数）贴现率相同。在利率树图中，每个节点的贴现率都在变化。

事实证明，使用利率三叉树图比使用二叉树图更方便。三叉树图主要的优点是它提供了一个额外的自由度，因此，用树图表示利率过程中诸如均值回复这些特性更容易。正如在第 17.8 节所指出的，使用三叉树图方法等价于使用外推有限差分方法。

### 三叉树图应用的说明

为说明如何使用利率三叉树图为衍生证券估值，我们考虑图 28.6 所示的简单例子。这是一个两步树图，每个步长的时间长度是 1 年，即  $\Delta t = 1$  年。我们假设在每个节点上升、持平和下降的概率分别为 0.25、0.50 和 0.25。在图中的每个节点，上面的数字为假设的  $\Delta t$  期利率。<sup>12</sup>

利用该树图为这样一个衍生证券估值，该衍生证券在第二个时间步长末给出的收益为：

$$\max[100(R - 0.11), 0]$$

其中  $R$  是  $\Delta t$  期的利率。每个节点下面的数字为计算出的该衍生证券的价值。在最后一个节点，衍生证券的价值等于收益。例如在节点 E，价值为  $100 \times (0.14 - 0.11) = 3$ 。对更早的节点，利用第 11 章和第 17 章所述的滚动回推的方法，可以计算出该衍生证券的价值。在节点 B，1 年期利率是 12%。用这个值进行贴现，从节点 E、F 和 G 衍生证券的价值可得到节点 B 的价值为：

$$[0.25 \times 3 + 0.5 \times 1 + 0.25 \times 0]e^{-0.12 \times 1} = 1.11$$

在节点 C，1 年期利率为 10%。用这个值进行贴现得到节点 C 的价值为：

$$[0.25 \times 1 + 0.5 \times 0 + 0.25 \times 0]e^{-0.1 \times 1} = 0.23$$

---

<sup>12</sup> 后面我们解释利率树图中的概率和比率是如何决定的。

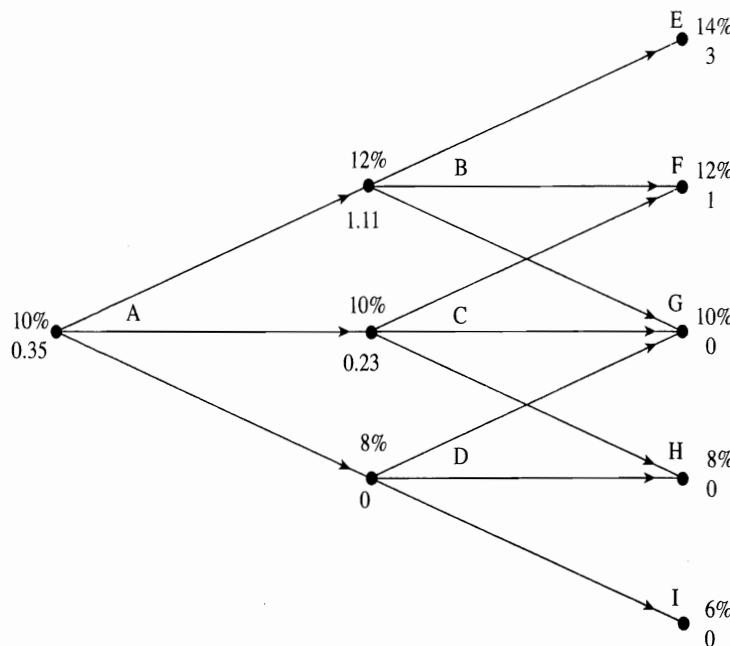


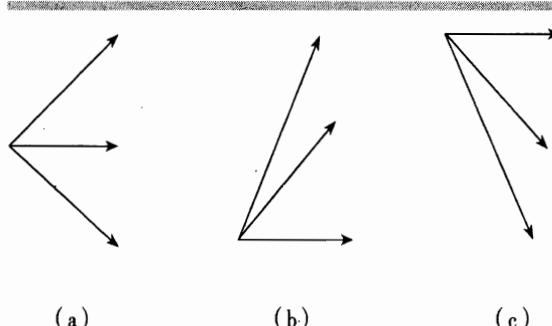
图 28.6 三叉树图应用的例子。在图中的每个节点，上面的数字为利率，下面的数字为金融工具价值

在初始节点 A，利率也是 10%，该衍生证券的价值为：

$$[0.25 \times 1.11 + 0.5 \times 0.23 + 0.25 \times 0]e^{-0.1 \times 1} = 0.35$$

### 非标准化分支

有时对标准分支模式进行调整是非常有用的，图 28.6 中所有节点都是使用了标准分支模式。图 28.7 中给出了三种分支模式。标准分支模式如图 28.7 (a) 所示。标准分支模式是“上升一个单位/持平/下降一个单位”。与这不一样的另一种模式是“上升两个单位/上升一个单位/持平”，这种模式如图 28.7 (b) 所示。当利率很小时，考虑均值回复是有益的。第三种分支模式如图 28.7 (c) 所示，是“持平一个单位/上升一个单位/下降一个单位”。



平/下降一个单位/下降两个单位”。当利率很大时，考虑均值回复是有益的。在下一章节我们说明不同分支方法的应用。

## 28.7 构造树图的一般方法

Hull 和 White 提出了构造三叉树图以表示单因子模型广泛应用的两步骤方法。<sup>13</sup>本节中，我们首先解释该方法如何应用于方程 (28.13) 中的 Hull-White 模型，然后说明该方法如何扩展来表示其他模型。

### 第一个步骤

瞬态短期利率  $r$  的 Hull-White 模型是：

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz$$

假设树图的时间步长度为常数，等于  $\Delta t$ 。<sup>14</sup>

假设  $\Delta t$  期利率  $R$  遵循的过程和  $r$  一样：

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz$$

显然，在  $\Delta t$  趋近于零的情况下，这是合理的。为该模型构造树图的第一步是为变量  $R^*$  构造树图，其初始值为零，并遵循如下过程：

$$dR^* = -aR^*dt + \sigma dz$$

这个过程对  $R^* = 0$  是对称的。变量  $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$  是正态分布的。如果忽略比  $\Delta t$  更高阶的项， $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$  的期望值是  $-aR^*(t)\Delta t$ ， $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$  的方差是  $\sigma^2\Delta t$ 。

树图中利率之间的间隔  $\Delta R$  设定为：

$$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

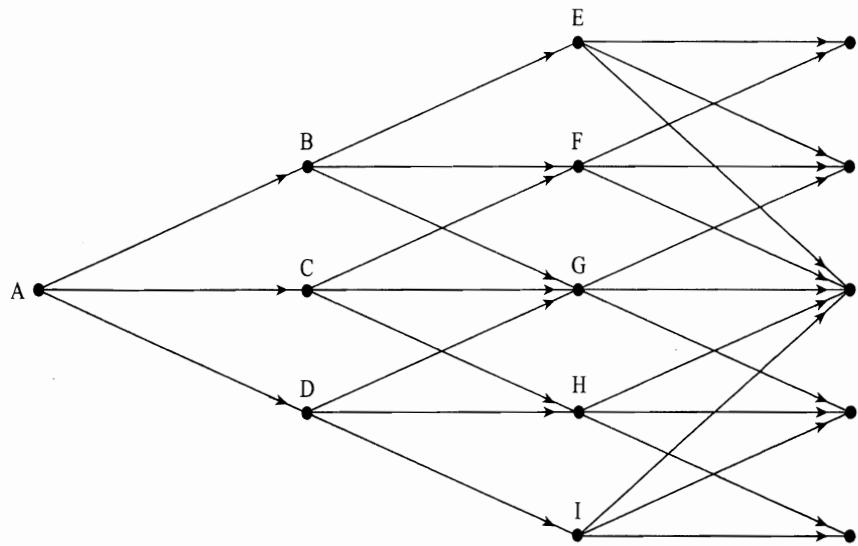
理论研究表明：从误差最小化的角度看，上述的  $\Delta R$  是很好的选择。

在这种方法的第一个步骤中，我们的目的是构造一个类似于图 28.8 所示的关于  $R^*$  树图。为此，我们必须决定图 28.7 中哪个三分支方法应该在每个节点使用。这将决定整个树图的几何形状。一旦做完这些，一定可计算出每个分支的概率。

定义  $(i, j)$  为  $t = i\Delta t$  和  $R^* = j\Delta R$  的节点 ( $i$  为正整数， $j$  为正整数或负整数)。在某个节点所使用的分支方法必须使得所有三个概率都为正值。大多数情况下图 28.7 (a) 的分支方法是合适的。当  $a > 0$ ，对足够大的  $j$  值，有必要从图 28.7

<sup>13</sup> 参见 J. Hull and A. White, “Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single Factor Models,” *Journal of Derivatives*, 2, 1 (1994): 7–16; J. Hull and A. White, “Using Hull-White Interest Rate Trees,” *Journal of Derivatives*, (Spring 1996): 26–36.

<sup>14</sup> 关于非常数时间步的应用，参照作者网站上的技术说明 16。



| 节点:     | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $R(\%)$ | 0.000  | 1.732  | 0.000  | -1.732 | 3.464  | 1.732  | 0.000  | -1.732 | -3.464 |
| $p_u$   | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$   | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$   | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

图 28.8 在 Hull-White 模型中（第一个步骤） $R^*$  的树图

(a) 的分支转换到图 28.7 (c) 的分支。类似地，当  $j$  值是足够大的负值时，有必要从图 28.7 (a) 的分支转换到图 28.7 (b) 的分支。定义  $j_{\max}$  为我们从图 28.7 (a) 分支转换到图 28.7 (c) 分支的  $j$  的值， $j_{\min}$  为我们从图 28.7 (a) 分支转换到图 28.7 (b) 分支的  $j$  的值。Hull 和 White 证明：如果我们设定  $j_{\max}$  大于等于  $0.184/(a\Delta t)$  的最小整数，设定  $j_{\min}$  等于  $-j_{\max}$ ，这些概率总是正的。<sup>15</sup> 定义  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  为从节点散发出来的最高、居中和最低分支的概率。选择这些概率以给出在下一个时间间隔  $\Delta t$  内  $R^*$  的预期变化及该变化的方差。概率的总和必须为 1，这得到 3 个概率的三个公式。

之前已经讲述过， $R^*$  在  $\Delta t$  时间段内的变化的均值为  $-aR^*\Delta t$ ，变化的方差为  $\sigma^2\Delta t$ 。在节点  $(i, j)$  上， $R^* = j\Delta r$ 。如果节点  $(i, j)$  的分支模式如图 28.7 (a) 所示，该节点上的  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  应该满足以下三个公式：

$$\begin{aligned} p_u \Delta R - p_d \Delta R &= -aj\Delta R\Delta t \\ p_u \Delta R^2 + p_d \Delta R^2 &= \sigma^2\Delta t + a^2j^2\Delta R^2\Delta t^2 \\ p_u + p_m + p_d &= 1 \end{aligned}$$

<sup>15</sup> 对于  $0.184/(a\Delta t)$  到  $0.816/(a\Delta t)$  之间的任意  $j_{\max}$  和  $-0.184/(a\Delta t)$  到  $-0.816/(a\Delta t)$  之间的任意  $j_{\min}$ ，概率总是正的。在第一个可能的节点上转换分支，计算过程更为有效。

利用  $\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$ , 三个公式的解为:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 - aj\Delta t)$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2j^2\Delta t^2$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 + aj\Delta t)$$

类似地, 如果该分支具有如图 28.7 (b) 的形式, 概率为:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 + aj\Delta t)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2j^2\Delta t^2 - 2aj\Delta t$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 + 3aj\Delta t)$$

最后, 如果该分支具有如图 28.7 (c) 的形式, 概率为:

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 - 3aj\Delta t)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2j^2\Delta t^2 + 2aj\Delta t$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 - aj\Delta t)$$

为详细说明构造树图的第一个步骤, 我们假设  $\sigma = 0.01$ ,  $a = 0.1$  和  $\Delta t = 1$  年。在这种情况下,  $\Delta R = 0.01\sqrt{3} = 0.0173$ , 设定  $j_{\max}$  为大于等于  $0.184/0.1$  的最小整数, 以及  $j_{\min} = -j_{\max}$ 。这意味着  $j_{\max} = 2$  和  $j_{\min} = -2$ , 该树图如图 28.8 所示。从每个节点发射出来的分支的概率表示在树图的下面, 是利用上面  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  的三个公式计算出来的。

注意, 在图 28.8 中每个节点的概率仅只依赖于  $j$ 。例如, 在节点 B 的概率与在节点 F 的概率相同。更进一步地, 树图是对称的。在节点 D 的概率是节点 B 概率的镜像值。

## 第二个步骤

构造树图的第二个步骤是将  $R^*$  的树图转换为  $R$  的树图。通过取代  $R^*$  树图上的节点使其精确满足初始的利率期限结构, 可以得到  $R$  的树图。定义

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t)$$

我们反复迭代计算  $\alpha$  序列，以便完全匹配初始期限结构。<sup>16</sup> 定义  $\alpha_i$  为  $\alpha$  ( $i\Delta t$ )，这是  $R$  树图中  $R$  在  $i\Delta t$  时刻的值减去相应的  $r^*$  树图中  $R^*$  在  $i\Delta t$  时刻的值。定义  $Q_{i,j}$  为某个证券的现值，如果达到节点  $(i, j)$  该证券收益\$1，在其他节点则为零。通过初始期限结构精确匹配的方式使用前面的推导，可以计算出  $\alpha_i$  和  $Q_{i,j}$  的值。

## 第二个步骤的说明

假设在图 28.8 所示例子中连续复利的零息率如表 28.1 中的数据。 $Q_{0,0}$  的值为 1.0。选择  $\alpha_0$  的值，以便得到在  $\Delta t$  时刻到期的零息票债券的正确价格。即是说，设定  $\alpha_0$  等于初始  $\Delta t$  期利率。由于在这个例子中， $\Delta t = 1$ ， $\alpha_0 = 0.03824$ 。这定义了在图 28.9 中  $R$  树图的初始节点的位置。下一步是计算  $Q_{1,1}$ 、 $Q_{1,0}$  和  $Q_{1,-1}$  的值。达到  $(1, 1)$  节点的概率为 0.1667 且第一个时间步长的贴现率是 3.82%。因此  $Q_{1,1}$  的值为  $0.1667e^{-0.0382} = 0.1604$ 。类似地， $Q_{1,0} = 0.6417$ ， $Q_{1,-1} = 0.1604$ 。

一旦计算出  $Q_{1,1}$ 、 $Q_{1,0}$  和  $Q_{1,-1}$  的值，就可以决定  $\alpha_1$ 。选择  $\alpha_1$  的值，以便得到在  $2\Delta t$  时刻到期的零息票债券的正确价格。由于  $\Delta R = 0.01732$  和  $\Delta t = 1$ ，在节点 B 看到的该债券价格为  $e^{-(\alpha_1+0.01732)}$ 。类似地，在节点 C 所看到的价格是  $e^{-\alpha_1}$ ，在节点 D 所看到的价格是  $e^{-(\alpha_1-0.01732)}$ 。因此在初始节点 A 所看到的价格是：

$$Q_{1,1}e^{-(\alpha_1+0.01732)} + Q_{1,0}e^{-\alpha_1} + Q_{1,-1}e^{-(\alpha_1-0.01732)} \quad (28.21)$$

对初始期限结构，该债券价格应该是  $e^{-0.04512 \times 2} = 0.9137$ 。将  $Q$  的值代入公式 (28.21)，我们得到：

表 28.1 图 28.8 与 28.9 中使用的零息率

| 到期期限 | 利率 (%) |
|------|--------|
| 0.5  | 3.430  |
| 1.0  | 3.824  |
| 1.5  | 4.183  |
| 2.0  | 4.512  |
| 2.5  | 4.812  |
| 3.0  | 5.086  |

<sup>16</sup> 可用解析式估计  $\alpha(t)$ 。因为

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz \quad \text{和} \quad dR^* = -aR^*dt + \sigma dz$$

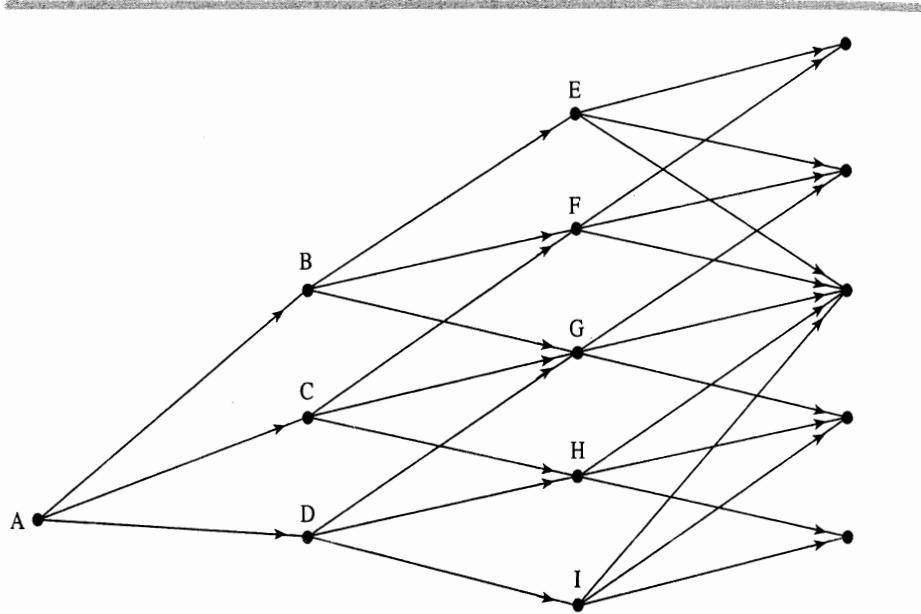
因此

$$d\alpha = [\theta(t) - a\alpha(t)]dt$$

如果我们忽略  $r$  和  $R$  之间的差异，上述方程的解为：

$$\alpha(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$$

但是，这些  $\alpha$  都是瞬态的，并不能使树图计算完全匹配利率期限结构。



| 节点:   | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| R (%) | 3.824  | 6.937  | 5.205  | 3.473  | 9.716  | 7.984  | 6.252  | 4.520  | 2.788  |
| $p_u$ | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$ | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$ | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

图 28.9 在 Hull-White 模型中（第二个步骤）R 的树图

$$0.1604e^{-(\alpha_1+0.01732)} + 0.6417e^{-\alpha_1} + 0.1604e^{-(\alpha_1-0.01732)} = 0.9137$$

即

$$e^{-\alpha_1}(0.1604e^{-0.01732} + 0.6417 + 0.1604e^{0.01732}) = 0.9137$$

或

$$\alpha_1 = \ln \left[ \frac{0.1604e^{-0.01732} + 0.6417 + 0.1604e^{0.01732}}{0.9137} \right] = 0.05205$$

这意味着在 R 的利率树图中，在  $\Delta t$  时刻中心节点对应的利率为 5.20%（参见图 28.9 所示）。

下一步是计算  $Q_{2,2}$ 、 $Q_{2,1}$ 、 $Q_{2,0}$ 、 $Q_{2,-1}$  和  $Q_{2,-2}$  的值。利用前面计算出的 Q 值，可以简化计算过程。举  $Q_{2,1}$  为例。这是某个证券的值，如果达到节点 F 该证券收益 \$1，在其他节点则为零。只有通过节点 B 和节点 C 才可达到节点 F。这两个节点的利率分别为 6.937% 和 5.205%。B-F 分支和 C-F 分支所对应的概率分别为 0.6566 和 0.1667。因此，在节点 F 支付 \$1 的某个债券在节点 B 的价值为  $0.6566e^{-0.06937}$ 。节点 C 的价值为  $0.1667e^{-0.05205}$ 。因此，变量  $Q_{2,1}$  是  $0.6566e^{-0.06937}$  乘以在节点 B 收取 \$1 的现值，加上  $0.1667e^{-0.05205}$  乘以在节点 C 收取 \$1 的现值，即：

$$Q_{2,1} = 0.6566e^{-0.0693} \times 0.1604 + 0.1667e^{-0.05205} \times 0.6417 = 0.1998$$

类似地， $Q_{2,2} = 0.0182$ 、 $Q_{2,0} = 0.4736$ 、 $Q_{2,-1} = 0.2033$  和  $Q_{2,-2} = 0.0189$ 。

在构造图 28.9 所示  $R$  树图的最后一步是计算  $\alpha_2$ 。之后，就可以计算出  $Q_{3,j}$ ，接着，计算  $\alpha_3$ ，依此类推。

## $\alpha$ 和 $Q$ 的表达式

为了更正式表示该方法，我们假设已经决定了  $Q_{i,j}$  的值，其中  $i \leq m$  ( $m \geq 0$ )。下一步就是决定  $\alpha_m$ ，以使该树图正确地为在  $(m+1)\Delta t$  时刻到期的零息票债券定价。在节点  $(m, j)$  的利率是  $\alpha_m + j\Delta R$ ，所以在  $(m+1)\Delta t$  时刻到期的零息票债券的价格为：

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t] \quad (28.22)$$

其中  $n_m$  是在  $m\Delta t$  时刻处于中心节点每一侧边的节点数。这个公式的解为：

$$\alpha_m = \frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta R\Delta t} - \ln P_{m+1}}{\Delta t}$$

一旦决定了  $\alpha_m$ ，则  $i = m + 1$  的  $Q_{i,j}$  可通过下式计算出来：

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t]$$

其中  $q(k, j)$  是从节点  $(m, k)$  运动到节点  $(m+1, j)$  的概率，求和是对所有的非零  $k$  值进行的。

## 扩展到其他模型

刚才简要描述的方法可以扩展到如下更一般形式的模型中：

$$df(r) = [\theta(t) - af(r)]dt + \sigma dz \quad (28.23)$$

这一类模型具有符合任何期限结构的特性。<sup>17</sup>

和之前一样，我们假设  $\Delta t$  期利率  $R$  遵循的过程和  $r$  一样：

$$df(R) = [\theta(t) - af(R)]dt + \sigma dz$$

我们从设定  $x = f(R)$  开始，因此：

---

<sup>17</sup> 并不是所有的无套利模型具有这个特性。例如 Cox、Ingersoll 与 Ross (1985)、Hull 与 White (1990) 的扩展 CIR 模型具有如下形式：

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma \sqrt{r} dz$$

这个模型不符合远期利率大幅下降的收益率曲线。这是因为当  $\theta(t)$  是负值时，该过程无法很好地定义。

$$dx = [\theta(t) - ax]dt + \sigma dz$$

第一个步骤是构造  $x^*$  的树图，其中  $x^*$  遵循的过程和  $x$  一样，但  $\theta(t) = 0$  以及  $x^*$  的初始值为 0，此时的构造方法与已经描述过的构造图 28.8 树图方法相同。

正如图 28.9 中所示，然后我们用  $\alpha_i$  替换在  $i\Delta t$  时刻的节点，使得它们与初始期限结构精确符合。通过归纳确定  $\alpha_i$  和  $Q_{i,j}$  的公式，与  $f(R) = R$  时确定这些值的公式略有不同。设第一个节点上的  $Q$  值， $Q_{0,0}$  为 1。假设当  $i \leq m$  ( $m \geq 0$ ) 时的  $Q_{i,j}$  已经确定。下一步是决定  $\alpha_m$ ，以使该树图正确地为  $(m+1)\Delta t$  时刻到期的零息票债券定价。定义  $g$  作为  $f$  的反函数，所以在  $m\Delta t$  时刻第  $j$  个节点的  $\Delta t$  期利率为：

$$g(\alpha_m + j\Delta x)$$

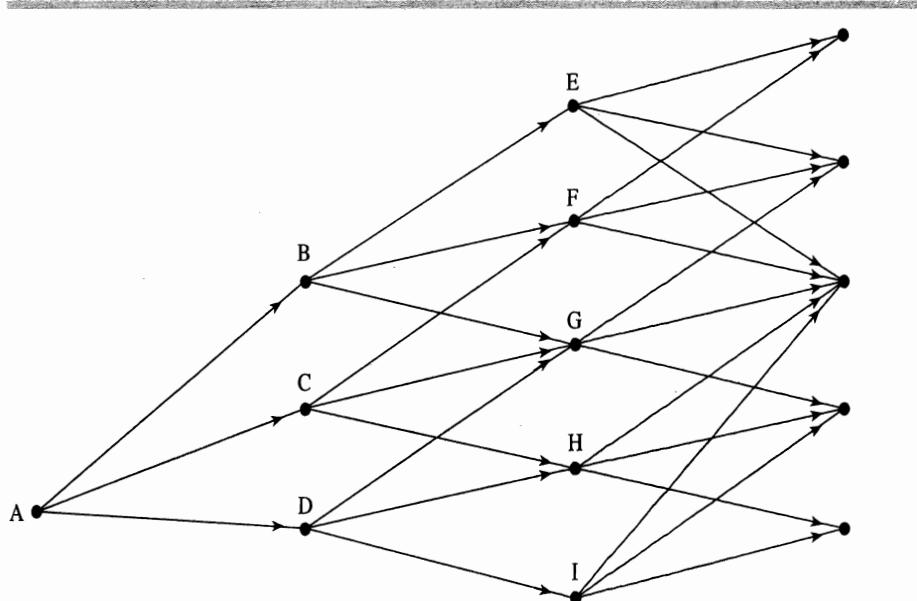
在  $(m+1)\Delta t$  时刻到期的零息票债券的价格为：

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-g(\alpha_m + j\Delta x)\Delta t] \quad (28.24)$$

利用诸如牛顿迭代法等数值方法可以求解该方程。当  $m = 0$  时， $\alpha_0 = f(R(0))$ 。

一旦确定了  $\alpha_m$ ， $i = m+1$  时的  $Q_{i,j}$  就可以用如下公式求出：

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) \exp[-g(\alpha_m + k\Delta x)\Delta t]$$



| 节点:    | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x$    | -3.373 | -2.875 | -3.181 | -3.487 | -2.430 | -2.736 | -3.042 | -3.349 | -3.655 |
| $R(%)$ | 3.430  | 5.642  | 4.154  | 3.058  | 8.803  | 6.481  | 4.772  | 3.513  | 2.587  |
| $p_u$  | 0.1667 | 0.1177 | 0.1667 | 0.2277 | 0.8609 | 0.1177 | 0.1667 | 0.2277 | 0.0809 |
| $p_m$  | 0.6666 | 0.6546 | 0.6666 | 0.6546 | 0.0582 | 0.6546 | 0.6666 | 0.6546 | 0.0582 |
| $p_d$  | 0.1667 | 0.2277 | 0.1667 | 0.1177 | 0.0809 | 0.2277 | 0.1667 | 0.1177 | 0.8609 |

图 28.10 对数正态分布模型的树图

其中  $q(k, j)$  是从节点  $(m, k)$  运动到节点  $(m + 1, j)$  的概率，求和是对所有的非零  $k$  值进行的。

图 28.10 给出了将该方法运用于如下模型时的结果：

$$d\ln(r) = [\theta(t) - a\ln(r)]dt + \sigma dz$$

图中， $a = 0.22$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $\Delta t = 0.5$ , 且零息率如表 28.1 所示。

### 选择 $f(r)$

当  $f(r) = r$  时，我们就获得方程 (28.13) 中的 Hull-White 模型；当  $f(r) = \ln r$  时，我们获得方程 (28.18) 中的 Black-Karasinski 模型。绝大多数情况下，上述两个模型很适合处理交易活跃的如利率上限，以及欧式互换期权的金融工具的市场数据。 $f(r) = r$  模型的主要优点是它允许解析处理。它的主要缺点是利率可能是负值。绝大多数情况下，该模型中利率是负值的发生概率非常小，但是一些分析师们有时不愿意使用利率可能是负值的模型。 $f(r) = \ln r$  模型不存在解析公式，但是它的优点是保证利率是正值。它还有一个优点是交易者们通常信任从对数正态分布模型得到的  $\sigma$  序列，而不是从正态分布模型得到的  $\sigma$  序列。

对于利率水平比较低的国家，选择令人满意的模型可能是比较棘手的问题。正态分布模型是不合理的，因为初始利率较低时，未来利率也有可能是负值。对数正态分布模型也是不合理的，因为在利率水平比较低时，相比利率水平较高的情况，利率的波动率（即对数正态分布模型中的参数  $\sigma$ ）很高（例如，短期利率小于 1% 时，100% 的波动率也很有可能；而短期利率大于 4% 时，20% 的波动率是比较恰当的）。这种情况下有一种方法是，对小于 1% 的  $r$ ，使用对数正态分布模型；而对大于 4% 的  $r$ ，使用正态分布模型。<sup>18</sup>

### 将解析计算结果与树图结合起来

当为  $f(r) = r$  的 Hull-White 模型构造树图时，可以使用 28.3 节的解析结果得到完整的期限结构和在每个节点的欧式期权价格。在 Hull-White 树图中的利率是  $\Delta t$  期的利率  $R$ ，而不是瞬态短期利率  $r$ ，了解这一点很重要。

根据方程 (28.15)、(28.16) 和方程 (28.17)，我们可以得到（参见习题 28.21）

$$P(t, T) = \hat{A}(t, T)e^{-\hat{B}(t, T)R} \quad (28.25)$$

其中

$$\begin{aligned} \ln \hat{A}(t, T) &= \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - \frac{B(t, T)}{B(t, t + \Delta t)} \ln \frac{P(0, t + \Delta t)}{P(0, t)} \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2a}) B(t, T) [B(t, T) - B(t, t + \Delta t)] \end{aligned} \quad (28.26)$$

<sup>18</sup> 参见 J. Hull and A. White “Taking Rates to the Limit,” *Risk*, December (1997) :168–69.

并且

$$\hat{B}(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, t + \Delta t)} \Delta t \quad (28.27)$$

(对 Ho-Lee 模型, 我们在这些方程中设定  $\hat{B}(t, T) = T - t_0$ )

因此, 我们可以利用方程 (28.25) 计算债券价格, 而不是方程 (28.15)。

**[例 28.1]** 作为该模型应用的一个例子, 我们使用表 28.2 的零息率数据。利用线性插值方法得到表中所示期限之间的利率数据点。

利用零息率为 3 年 ( $3 \times 365$  天) 期限的基于 9 年 ( $9 \times 365$  天) 到期期限的零息票债券的欧式看跌期权进行估值。假设利率遵循 Hull-White ( $f(r) = r$ ) 模型。执行价格为 63,  $a = 0.1$ ,  $\sigma = 0.01$ 。我们构造 3 年的树图, 利用前面章节所述的方法可解析计算在最后节点的零息票债券价格。如表 28.3 所示, 从树图方法得到的结果与期权的解析计算价格一致。

这个例子较好地检验了该模型的一个应用, 因为在期权到期之后, 零息率曲线的梯度立即发生很大的变化。在树图的构造和使用过程中, 一个小的误差有可能对得到的期权价值产生很大的影响 (参照 DerivaGem Application Builder 软件中的 Sample Application G)。

## 美式债券期权树图

除了 Black 模型, 附于本书的 DerivaGem 软件还可以运行正态分布模型和对数

表 28.2 所有利率均为连续复利的零息率曲线

| 到期期限 | 天 数   | 利率 (%)  |
|------|-------|---------|
| 3 天  | 3     | 5.01772 |
| 1 个月 | 31    | 4.98284 |
| 2 个月 | 62    | 4.97234 |
| 3 个月 | 94    | 4.96157 |
| 6 个月 | 185   | 4.99058 |
| 1 年  | 367   | 5.09389 |
| 2 年  | 731   | 5.79733 |
| 3 年  | 1 096 | 6.30595 |
| 4 年  | 1 461 | 6.73464 |
| 5 年  | 1 826 | 6.94816 |
| 6 年  | 2 194 | 7.08807 |
| 7 年  | 2 558 | 7.27527 |
| 8 年  | 2 922 | 7.30852 |
| 9 年  | 3 287 | 7.39790 |
| 10 年 | 3 653 | 7.49015 |

表 28.3 执行价格为 63 的基于 9 年期零息票债券的 3 年期看跌期权的价值,  $a = 0.1$ ,  $\sigma = 0.01$ ; 零息率曲线如表 28.2 所示

| 步 数 | 树图方法   | 解析方法   |
|-----|--------|--------|
| 10  | 1.8658 | 1.8093 |
| 30  | 1.8234 | 1.8093 |
| 50  | 1.8093 | 1.8093 |
| 100 | 1.8144 | 1.8093 |
| 200 | 1.8097 | 1.8093 |
| 500 | 1.8093 | 1.8093 |

正态分布模型, 这样可以估值欧式债券期权、利率上限/下限以及欧式互换期权。此外, 还可以估值美式债券期权。图 28.11 表示了软件中估值基于 10 年期债券的 1.5 年有效期美式看涨期权得到的树图, 时间步个数为 4, 使用了对数正态分布模型。对数正态分布中使用的参数值为  $a = 5\%$  和  $\sigma = 20\%$ 。标的债券持续 10 年, 本金为 100, 年息票率为 5%, 每半年支付一次息票。收益率曲线是平坦的, 年利率 5%。执行价格为 105。如 26.2 节所述, 执行价格可以是现金价格或者是报价价格。在这里执行价格是报价价格, 树图上的债券价格是债券现金价格。每个节点上的应计利息在树图下面给出。执行价格的现金价格等于应计利息加上执行价格的报价价格。债券报价价格等于债券现金价格减去应计利息。该期权的损益等于债券现金价格减去现金执行价格。等价地, 损益也等于债券报价价格减去执行价格的报价价格。

树图给出的期权价格为 0.668。使用 100 个时间步, 更大的树图给出的期权价格是 0.699。图 28.11 中需要注意以下两点:

1. 软件在计算期权到期期限时用整数天数计算。例如, 输入的期权有效期为 1.5 年时, 期权有效期被认为是 1.5014 年 (即 1 年零 183 天)。
2. 对数正态分布模型中, 10 年期债券的价格不能以解析公式给出。它是在比上述更复杂的树图中以数值方法滚动回推计算的。

## 28.8 校 准

到现在为止, 我们假设了波动率参数  $a$  与  $\sigma$  是已知的。我们接下来讨论如何决定这些参数。这一过程被称为校准模型 (calibrating model)。

从交易活跃的期权市场数据中决定这些波动率参数 (例如, 表 26.1 和 26.2 中经纪人给出的利率上限和互换期权的报价)。这些金融工具被称为校准金融工具 (calibrating instrument)。第一步是选择拟合测度。假设有  $n$  个校准金融工具, 则一种广泛使用的拟合测度是:

在每个节点：  
 上面的数值：债券的现金价格  
 中间的数值：期权价格  
 下面的数值：dt期限的利率  
 阴影部分的数值表示提前执行后的结果

执行价格 = 105  
 时间步， $dt = 0.3753$ 年，即137.00天

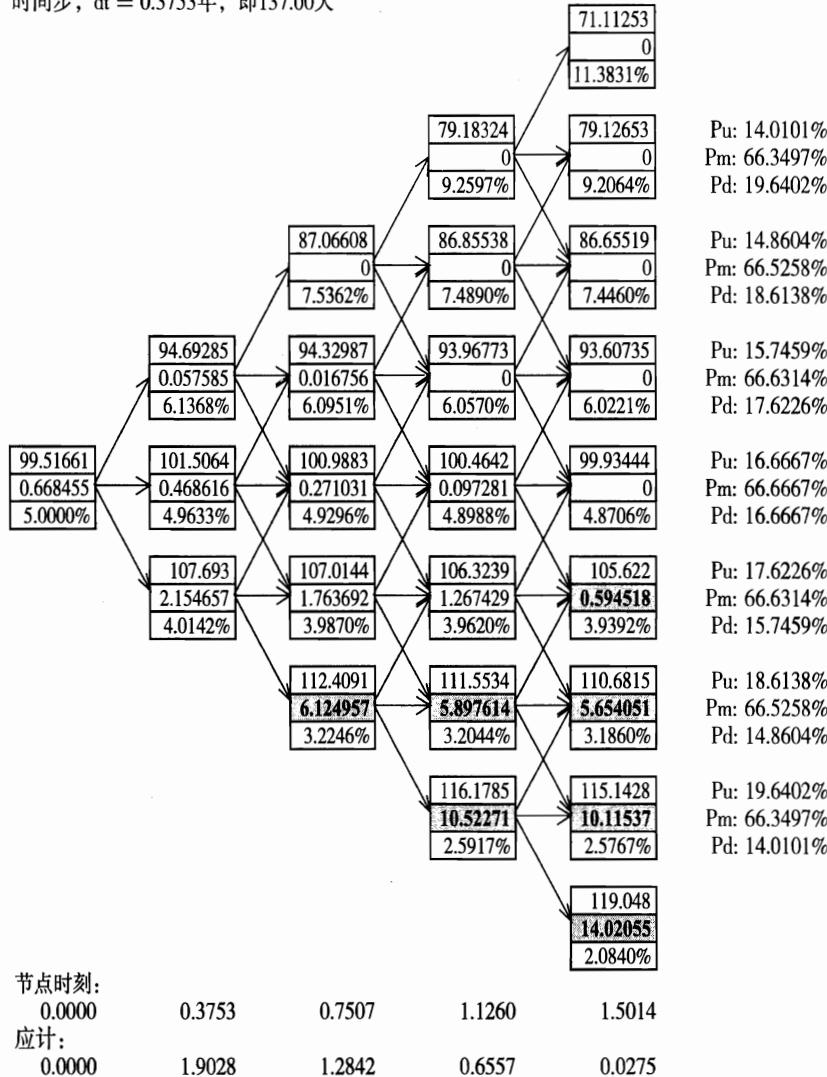


图 28.11 美式债券期权定价的树图，由 DerivaGem 软件生成

$$\sum_{i=1}^n (U_i - V_i)^2$$

其中， $U_i$ 是第*i*个校准金融工具的市场价格， $V_i$ 是模型给出的金融工具的价格。校准的目的是选择使拟合测度最小化的模型参数。

如果  $a$  和  $\sigma$  是常数，则只有两个波动率参数。模型可以扩展成  $a$  或  $\sigma$ ，或两者都是时间的函数。可以使用阶梯函数。例如，假设我们把  $a$  当作是常数， $\sigma$  当

作是时间的函数。我们可能选择时刻  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , 并假设  $t \leq t_1$  时,  $\sigma(t) = \sigma_0$ ;  $t_i < t \leq t_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) 时,  $\sigma(t) = \sigma_i$ ;  $t > t_n$  时,  $\sigma(t) = \sigma_n$ 。此时一共有  $n+2$  个波动率参数, 分别为  $a, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ 。波动率参数个数不应该大于校准金融工具数量。

拟合测度的最小化可以使用 Levenberg-Marquardt 方法。<sup>19</sup> 当  $a$  或  $\sigma$ , 或两者都是时间的函数时, 罚函数通常被加进拟合测度, 这样能较好处理时间函数。上述例子中, 当  $\sigma$  是阶梯函数时, 我们选择的目标函数应该是:

$$\sum_{i=1}^n (U_i - V_i)^2 + \sum_{i=1}^n w_{1,i}(\sigma_i - \sigma_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} w_{2,i}(\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1} - 2\sigma_i)^2$$

上式的第 2 项为  $\sigma$  从一个阶梯到下一个阶梯的大幅度变化提供“罚”。第 3 项为  $\sigma$  的高曲率提供“罚”。在经验基础上, 找出能使  $\sigma$  函数的平滑度在适当水平的  $w_{1,i}$  和  $w_{2,i}$

选择校准金融工具要尽可能地与要估值的金融工具类似。例如, 假设我们要估值百慕大式互换期权, 该互换期权的有效期为 10 年, 在第 5 年至第 9 年之间的互换支付日中期权可以执行, 并进入从今天算起 10 年期的一个互换。最接近的校准金融工具有  $5 \times 5, 6 \times 4, 7 \times 3, 8 \times 2, 9 \times 1$  欧式互换期权 (一个  $n \times m$  欧式互换期权是有效期为  $n$  年期权, 标的互换在期权到期之后  $m$  年后才到期)。

把  $a$ 、 $\sigma$ , 或两者表示为时间的函数, 这种处理的一个优点是模型可以更精确地定价市场中交易活跃的金融工具。缺点是其中的波动率结构并不是稳定的。模型给出的未来波动率期限结构可能和当前市场中观察到的波动率期限结构非常不一样。<sup>20</sup>

一种稍微不同的校准方法是利用所有可行的校准金融工具, 计算“整体拟合最优”的参数  $a$  和  $\sigma$ 。把参数  $a$  固定在它的最优值, 这一模型就可以像 Black-Scholes 一样地运用。期权价格与参数  $\sigma$  之间存在一对一的关系式。模型可以将表 26.1 和表 26.2 转变成隐含  $\sigma$  序列的表。<sup>21</sup> 定价某个衍生证券时, 这些表可用来选择定价最适合的  $\sigma$ 。

## 28.9 运用单因子模型进行套期保值

我们在 26.6 节中概述了对冲利率衍生证券组合的一些一般方法。这些对冲方法可以和本章中的期限结构模型结合使用。delta、gamma 以及 vega 的计算, 会使

<sup>19</sup> 关于这个方法的清楚描述, 参见 W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1988.

<sup>20</sup> 关于  $a$  和  $\sigma$  都为时间函数的模型的执行方法, 参照作者网站上的技术说明 16。

<sup>21</sup> 注意, 期限结构模型中的隐含  $\sigma$  序列不同于根据表 26.1 和表 26.2 从 Black 模型计算出来的隐含波动率。计算隐含  $\sigma$  的方法如下: Black 方法的波动率转换为运用 Black 模型的价格。于是运用迭代方法从价格的期限结构模型中得到  $\sigma$ 。

零息率曲线利率期限结构或波动率环境发生小变化，所以需重新计算证券组合的价值。

注意，虽然我们在定价利率衍生证券时经常假设只存在一个因子，但这并不是说对冲时也只存在一个因子。例如，我们对于收益率曲线的很多不同移动，计算相应的 delta，而这种曲线移动并不局限于模型所对应的移动种类。我们也考虑模型中不可能发生的期限结构的变化，这就是所谓的外推模型套期保值（outside model hedging），这也是交易员们使用的标准手段。<sup>22</sup> 事实上，只要利用好很简单的单因子模型，也可以得到非常可信的金融工具的价格。但是，好的对冲操作中一定要直接或间接地考虑很多因素。

## 小 结

在金融领域中使用的传统的期限结构模型是所谓的均衡模型。在理解经济变量之间的潜在关系方面，它们是有用的，但缺点是初始期限结构是模型的输出量而不是模型的输入量。当在为衍生证券估值时，所使用的模型与在市场上观测到的初始期限结构一致是很重要的。无套利模型是具有上述特性的模型。它们将初始期限结构看作为已知量，并定义期限结构演变的方式。

本章中描述了一系列短期利率的单因子无套利模型。这些模型功能强大，可以和任意初始零息率集合一起使用。最简单的是 Ho-Lee 模型。它的优点是它可用解析方法来处理。其主要缺点是它隐含着在所有时间所有利率的可变性相同的假设。Hull-White 模型是包括均值回复的 Ho-Lee 模型的另一种形式。该模型在保持解析特性条件下，允许对波动率环境进行更充分的描述。对数正态分布的单因子模型的优点是它们避免了负利率的可能性，但不幸的是，它们无法用解析方法求解。

## 参考读物

### *Equilibrium Models*

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53 (1985): 385–407.

Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz, "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance*, 47, 4 (September 1992): 1259–82.

Vasicek, O. A., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5 (1977): 177–88.

### *No-Arbitrage Models*

Black, F., and P. Karasinski, "Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal," *Financial Analysts Journal*, July/August (1991): 52–59.

Ho, T. S. Y., and S.-B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, 41 (December 1986): 1011–29.

<sup>22</sup> 外推模型套期保值的一个简单例子是交易员们使用 Black-Scholes 模型的方式。Black-Scholes 模型中假设波动率为常数——但是交易员们一般计算 Vega，并对波动率变化进行套期保值。

- Hull, J., and A. White, "Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices," *Advances in Futures and Options Research*, 6 (1993): 1–13.
- Hull, J., and A. White, "Pricing Interest Rate Derivative Securities," *The Review of Financial Studies*, 3, 4 (1990): 573–92.
- Hull, J., and A. White, "Using Hull–White Interest Rate Trees," *Journal of Derivatives*, Spring (1996): 26–36.
- Kijima, M., and I. Nagayama, "Efficient Numerical Procedures for the Hull–White Extended Vasicek Model," *Journal of Financial Engineering*, 3 (September/December 1994): 275–92.
- Kijima, M., and I. Nagayama, "A Numerical Procedure for the General One-Factor Interest rate Model" *Journal of Financial Engineering*, 5 (December 1996): 317–37.
- Li, A., P. Ritchken, and L. Sankarasubramanian, "Lattice Models for Pricing American Interest Rate Claims," *Journal of Finance*, 50, 2 (June 1995): 719–37.
- Rebonato, R., *Interest Rate Option Models*. Chichester: Wiley, 1998.

## 问题和习题

- 28.1 均衡模型与无套利模型的区别是什么？
- 28.2 假设当前短期利率为 4%，其标准差为每年 1%。当短期利率以如下方式：  
 (a) Vasicek 的模型；(b) Rendleman 和 Bartter 的模型；(c) Cox、Ingersoll 和 Ross 的模型上升为 8%时，标准差为多少？
- 28.3 如果某个股票价格为均值回复或遵循某种路径依赖的过程，就存在市场无效状态。  
 请说明：当短期利率为以上行为过程时，为什么就不存在市场无效状态？
- 28.4 请解释单因子和双因子利率模型之间的区别。
- 28.5 第 28.4 章节描述了将基于某附息票债券的期权分解为基于零息票债券的期权组合的方法，问：该方法是否可以与某个双因子模型结合起来使用？请解释你的答案。
- 28.6 假设在 Vasicek 模型和 Cox、Ingersoll 和 Ross 模型中  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$ 。在两个模型中，初始短期利率为 10%，短期利率在很短的时间段  $\Delta t$  内变化的初始标准差为  $0.02\sqrt{\Delta t}$ 。利用上述模型估值 10 年期零息票债券，比较两种模型产生的价格。
- 28.7 假设在初始短期利率为 5% 的 Vasicek 的模型中， $a = 0.1$ 、 $b = 0.08$  和  $\sigma = 0.015$ 。计算某个执行价格为 \$87，有效期为 1 年，基于 3 年后到期、本金为 \$100 的零息票债券的欧式看涨期权的价格。
- 28.8 将习题 28.7 中的条件改为执行价格为 \$87 的欧式看跌期权，重新估值。欧式看涨期权和欧式看跌期权之间的看涨—看跌平价关系是什么样的？证明在这种情况下，看涨期权价格和看跌期权的价格满足看涨—看跌平价关系。
- 28.9 假设在初始短期利率为 6% 的 Vasicek 的模型中， $a = 0.1$ ， $b = 0.08$ ， $\sigma = 0.015$ 。计算某个有效期为 2.1 年的基于 3 年后到期债券的欧式看涨期权的价格。假设该债券每半年支付息票率 5%。债券的本金为 \$100，期权的执行价格为 \$99。执行价格为债券将要支付的现金价格（不是报价价格）。
- 28.10 使用习题 28.9 的结果及看涨—看跌平价关系，计算与习题 28.9 中欧式看涨期权同样期限的欧式看跌期权的价格。
- 28.11 在 Hull–White 的模型中， $a = 0.08$ ， $\sigma = 0.01$ 。计算有效期限为 1 年的基于 5 年有效期限的零息票债券的欧式看涨期权价格。设利率期限结构是水平的，为 10%，债券本

金为\$100，执行价格为\$68。

- 28.12 在 Hull-White 模型中， $a = 0.05$ ,  $\sigma = 0.015$ 。假设利率期限结构是水平的，为 6% (按半年计复利)。计算某个有效期为 2.1 年的基于 3 年后到期债券的欧式看涨期权的价格。假设该债券每半年支付息票率 5%。债券的本金为 \$100，期权的执行价格为 \$99。执行价格为债券将要支付的现金价格 (不是报价价格)。
- 28.13 利用计价标准变化的相关结论，如 6.4 节中一样，推导 Ho-Lee 模型中期货利率和远期利率之间的关系。利用这一关系式，验证方程 (28.11) 中的 Ho-Lee 模型的  $\theta(t)$  的表达式。(提示：当风险的市场价格为 0 时，期货价格遵循鞅。当风险的市场价格等于和远期合约有效期相同的零息票债券价格时，远期价格遵循鞅。)
- 28.14 使用和习题 28.13 类似的方法，推导 Hull-White 模型中期货利率和远期利率之间的关系。利用这一关系式，验证方程 (28.14) 中的 Hull-White 模型的  $\theta(t)$  的表达式。
- 28.15 假设  $a = 0.05$ ,  $\sigma = 0.015$ ，利率期限结构是水平的，为年利率 10%。为 Hull-White 模型建造一个两个时间步的三叉树，每个时间步长为 1 年。
- 28.16 从图 28.6 的树图中计算某个 2 年期零息票债券的价格。
- 28.17 从图 28.9 的树图中计算某个 2 年期零息票债券的价格，并证明它与初始期限结构一致。
- 28.18 从图 28.10 的树图中计算某个 18 个月期零息票债券的价格，并证明它与初始期限结构一致。
- 28.19 应该如何对单因子期限结构模型进行校准？
- 28.20 利用 DerivaGem 软件估值  $1 \times 4$ 、 $2 \times 3$ 、 $3 \times 2$  和  $4 \times 1$  欧式互换期权。其中标的互换为收取固定利率，支付浮动利率。假设 1 年期、2 年期、3 年期、4 年期和 5 年期利率分别为 6%、5.5%、6%、6.5% 和 7%。互换支付为每半年一次，固定利率为每年 6% (每半年计一次复利)。使用  $a = 3\%$ ,  $\sigma = 1\%$  的 Hull-White 模型。计算每个期权的 Black 模型隐含波动率。
- 28.21 证明方程 (28.25)、(28.26) 和方程 (28.27)。

## 课后练习

- 28.22 为 Ho-Lee 模型建造一个三叉树，其中  $\sigma = 0.02$ 。假设到期期限为 0.5、1.0 和 1.5 年的初始零息票率分别为 7.5%、8% 和 8.5%。使用 2 个时间步，每个步长为 6 个月，计算在树图的最后节点的末端，剩余有效期只有 6 个月、面值为 \$100 零息票债券的价值。用树图方法为 1 年期的基于该债券的执行价格为 95 的欧式看跌期权估值。将树图方法计算出的价格与 DerivaGem 给出的解析解进行比较。
- 28.23 一个交易员想计算基于 5 年期债券的 1 年期美式看涨期权的价值。债券账面价值为 100，每半年支付一次息票，息票率为 6%，期权的执行价格 (报价价格) 为 \$100。6 个月期、1 年期、2 年期、3 年期、4 年期和 5 年期的连续复利的零息率为 4.5%、5%、5.5%、5.8%、6.1% 和 6.3%。正态分布模型和对数正态分布模型的最优拟合回报率估计值都是 5%。

一个交易活跃的基于债券的 1 年期欧式看涨期权，执行价格 (报价价格) 为

100。期权的市价为 \$0.50。交易员决定利用该期权进行校准。利用 DerivaGem 软件，使用 10 个时间步，回答以下的问题：

- (a) 使用正态分布模型。计算欧式期权的价格隐含的  $\sigma$  参数值。
- (b) 使用求出来的参数  $\sigma$ ，计算对应的美式期权的价格。
- (c) 使用对数正态分布模型，重新计算 (a) 和 (b)。请说明：根据已知欧式期权价格进行校准之后，不管使用哪种模型，我们得到的期权价格不受多大影响。
- (d) 画出正态分布模型中的树图，计算负利率发生的概率。
- (e) 画出对数正态分布模型中的树图，使用 28.7 节中的符号，验证  $i = 9, j = -1$  的节点上的期权价格是正确的。

- 28.24 利用 DerivaGem 软件估值  $1 \times 4$ 、 $2 \times 3$ 、 $3 \times 2$  和  $4 \times 1$  欧式互换期权。标的互换为收取固定利率，支付浮动利率。假设 1 年期、2 年期、3 年期、4 年期和 5 年期利率分别为 3%、3.5%、3.8%、4.0% 和 4.1%。互换的支付频率为每半年支付一次，固定利率为每年 4%（每半年计一次复利计算）。使用  $a = 5\%$ ,  $\sigma = 15\%$ , 50 个时间步的对数正态分布模型。计算每个期权的 Black 模型隐含波动率。
- 28.25 证明 DerivaGem 软件给出的作为思考案例的图 28.11。利用 DerivaGem 软件，计算当执行价格为 95、100 和 105 时，对数正态分布和正态分布模型下的美式债券期权的价格。正态分布模型中假设  $a = 5\%$ ,  $\sigma = 1\%$ , 50 个时间步。结合第 16 章中关于尾部厚度的分析，解释你得到的答案。
- 28.26 修改 DerivaGem Application Builder 软件的 Sample Application G，验证三叉树图给出的 2 年期欧式看涨期权（基于账面价值为 100 的、5 年期债券）价格的收敛状态。该期权的执行价格（报价价格）为 100，债券的息票率为 7%，息票每年支付两次。假设零息率曲线如表 28.2。对于下述几种情况，比较你得到的结果：
- (a) 期权是欧式的；使用  $\sigma = 0.01$  和  $a = 0.05$  的正态分布模型。
  - (b) 期权是欧式的；使用  $\sigma = 0.15$  和  $a = 0.05$  的对数正态分布模型。
  - (c) 期权是美式的；使用  $\sigma = 0.01$  和  $a = 0.05$  的正态分布模型。
  - (d) 期权是美式的；使用  $\sigma = 0.15$  和  $a = 0.05$  的对数正态分布模型。



## 利率衍生品：HJM 和 LMM

当第 26 章中的简单模型不适用于做定价工具时，第 28 章中的利率期限结构模型就得到广泛应用。这些模型很容易使用，而且通过谨慎应用，可以保证大多数的不标准利率衍生品的定价与活跃交易的金融工具（如利率上限、欧式互换期权和欧式债券期权）的定价保持一致。这些模型有如下两个局限性：

1. 他们只包含一个因子（也就是只有一个不确定性因素）
2. 这些模型不允许用户完全自由地选择波动率结构

令参数  $a$  和  $\sigma$  为时间的函数，一个分析师利用这些模型可以很好地拟合在当前市场上所观察到的波动率，但是如 28.8 节所述，此时的波动率期限结构是不稳定的。未来的波动率结构很可能跟今天市场上观察到的大不相同。

本章将讨论一些通用方法，在指定的波动率环境下，用户能够更加灵活地构建期限结构模型，并允许使用多个因子。这些模型比第 28 章中的模型需要更多计算时间。因此，它们通常用来研究或开发，而不是常规定价。

本章还包括美国 MBS 市场的内容，并介绍如何用本章的方法来对市场中的金融工具定价。

## 29.1 Heath、Jarrow 和 Morton 模型

1990 年，David Heath、Bob Jarrow 和 Andy Morton (HJM) 发表了一篇重要的论文，其中提出了收益率曲线模型应该满足的无套利条件。<sup>1</sup> 为了解释他们的模型，我们定义以下符号：

$P(t, T)$ : 在  $T$  时刻到期本金为 \$1 的零息票债券在时间  $t$  的价格

$\Omega_t$ : 在  $t$  时刻，利率和债券价格（与债券价格波动率的决定有关）的过去及当前值向量

$v(t, T, \Omega_t)$ :  $P(t, T)$  的波动率

$f(t, T_1, T_2)$ : 在  $t$  时刻的从  $T_1$  到  $T_2$  期间内的远期利率

<sup>1</sup> 参见 D. Heath, R. A. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology," *Econometrica*, 60, 1 (1992): 77–105.

- $F(t, T)$ : 在  $T$  时刻到期的合约在  $t$  时刻的瞬态远期利率  
 $r(t)$ : 在  $t$  时刻的短期无风险利率  
 $dz(t)$ : 驱使期限结构变动的维纳过程

## 零息票债券价格和远期利率遵循的过程

首先，我们假设只有一个因子，并考虑传统风险中性世界。一个零息票债券是不支付任何收益的可交易证券。因此，它在传统风险中性世界的收益率为  $r$ 。这意味着该零息票债券价格的随机过程有如下形式：

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + v(t, T, \Omega_t)P(t, T)dz(t) \quad (29.1)$$

正如自变量  $\Omega_t$  所反映的，在这个模型的大多数一般形式下，零息票债券的波动率  $v$  可以是过去和现在的利率和债券价格的任何表现良好的函数形式。因为债券价格波动率在到期日趋近于零，我们即有：<sup>2</sup>

$$v(t, t, \Omega_t) = 0$$

根据等式 (4.5)，远期利率  $f(t, T_1, T_2)$  与零息票债券价格之间存在如下关系：

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\ln[P(t, T_1)] - \ln[P(t, T_2)]}{T_2 - T_1} \quad (29.2)$$

根据等式 (29.1) 和伊藤定理，

$$d\ln[P(t, T_1)] = \left[ r(t) - \frac{v(t, T_1, \Omega_t)^2}{2} \right] dt + v(t, T_1, \Omega_t) dz(t)$$

和

$$d\ln[P(t, T_2)] = \left[ r(t) - \frac{v(t, T_2, \Omega_t)^2}{2} \right] dt + v(t, T_2, \Omega_t) dz(t)$$

得到

$$df(t, T_1, T_2) = \frac{v(t, T_2, \Omega_t)^2 - v(t, T_1, \Omega_t)^2}{2(T_2 - T_1)} dt + \frac{v(t, T_1, \Omega_t) - v(t, T_2, \Omega_t)}{T_2 - T_1} dz(t) \quad (29.3)$$

等式 (29.3) 说明  $f$  的风险中性过程仅仅依赖于  $v$  序列的过程。只有当  $v$  序列的过程本身取决于  $r$  和  $P$  序列时， $f$  过程才会取决于  $r$  和  $P$  序列的过程。

对等式 (29.3)，当我们设定  $T_1 = T$  且  $T_2 = T + \Delta t$ ，并使  $\Delta t$  的极限趋近于零， $f(t, T_1, T_2)$  就变成  $F(t, T)$ ， $dz(t)$  的系数变为  $v_T(t, T, \Omega_t)$ ， $dt$  的系数变为：

---

<sup>2</sup> 条件  $v(t, t, \Omega_t) = 0$  等价于假设在所有时刻，所有贴现债券具有有限漂移率，这是因为，如果债券的波动率在到期时并不减少到零，就需要一个无限漂移率以确保在到期时债券的价格等于它的面值。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [v(t, T, \Omega_t)^2]}{\partial T} = v(t, T, \Omega_t) v_T(t, T, \Omega_t)$$

其中  $v$  的下标代表偏导数。有如下等式成立：

$$dF(t, T) = v(t, T, \Omega_t) v_T(t, T, \Omega_t) dt - v_T(t, T, \Omega_t) dz(t) \quad (29.4)$$

一旦指定了函数  $v(t, T, \Omega_t)$ , 就知道了  $F(t, T)$  序列的风险中性过程。

等式 (29.4) 表示瞬态远期利率的漂移率和标准差之间有一定的联系。这是 HJM 模型的关键结论。从  $\tau = t$  到  $\tau = T$ , 我们对  $v_\tau(t, \tau, \Omega_t)$  进行积分, 得到:

$$v(t, T, \Omega_t) - v(t, t, \Omega_t) = \int_t^T v_\tau(t, \tau, \Omega_t) d\tau$$

因为  $v(t, t, \Omega_t) = 0$ , 所以有

$$v(t, T, \Omega_t) = \int_t^T v_\tau(t, \tau, \Omega_t) d\tau$$

如果  $m(t, T, \Omega_t)$  和  $s(t, T, \Omega_t)$  是  $F(t, T)$  的瞬态漂移率和标准差, 那么

$$dF(t, T) = m(t, T, \Omega_t) dt + s(t, T, \Omega_t) dz$$

根据等式 (29.4) 得到:

$$m(t, T, \Omega_t) = s(t, T, \Omega_t) \int_t^T s(t, \tau, \Omega_t) d\tau \quad (29.5)$$

这就是 HJM 结论。

普通 HJM 模型中短期利率  $r$  的过程是非马尔可夫过程。为了解释其中含义, 假设现在是零时刻, 我们要计算未来  $T$  时刻的  $r$  的过程。我们会发现这一过程很可能依附于方程 (29.1) 中的维纳过程  $z(t)$  在零时刻到  $t$  时刻之间的某一行为路径。<sup>3</sup>

上述讨论给出了执行一般 HJM 模型时需要解决的关键问题。我们需要使用蒙特卡罗模拟。树图不太好用。当我们构建树图来表示期限结构移动时, 通常很难重新组合。假设模型只有一个因子, 二叉树如图 29.1 所示。 $n$  个时间步后, 有  $2^n$  个节点。如果模型有两个因子, 那么应该使用三维树图,  $n$  个时间步后, 有  $4^n$  个节点。因此, 比如当  $n = 30$  时, 单因子模型中的最终节点个数为  $10^9$ ; 双因子模型中, 这一个数为  $10^{18}$ 。

## 扩展到多因子模型

HJM 模型的结果可以扩展到多个独立因子的情况。假设:

$$dF(t, T) = m(t, T, \Omega_t) dt + \sum_k s_k(t, T, \Omega_t) dz_k$$

---

<sup>3</sup> 关于更详细的解释, 参照作者网站上的技术说明 17。

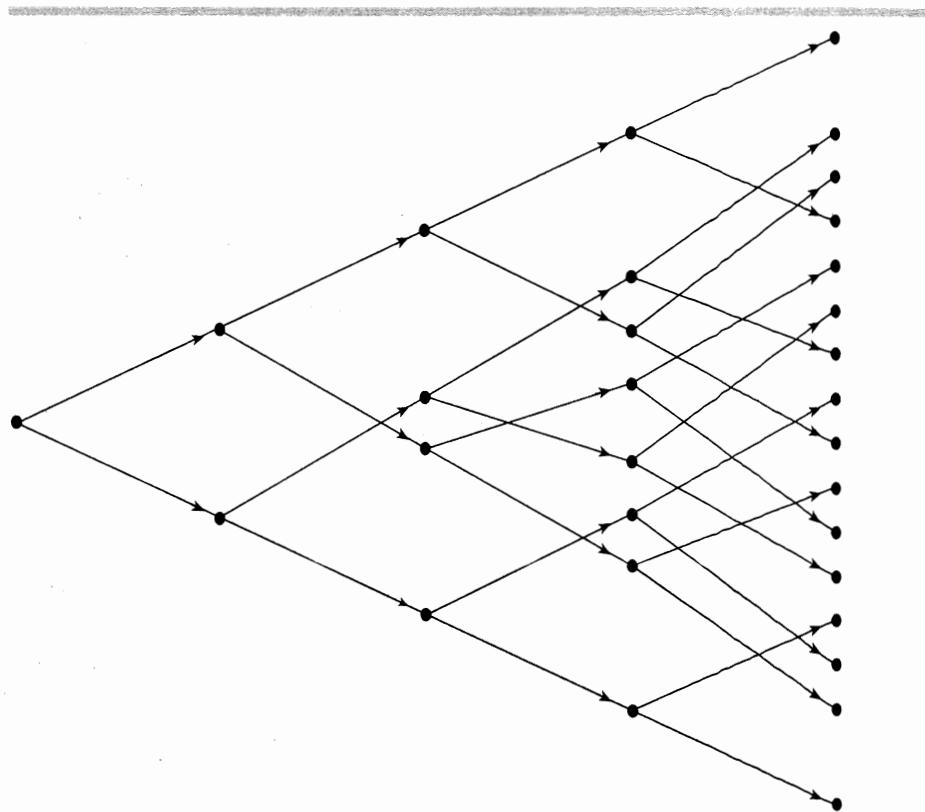


图 29.1 普通 HJM 模型中导出的一个非重新组合的树

和之前一样进行类似的分析(参照习题 29.2), 得到:

$$m(t, T, \Omega_t) = \sum_k s_k(t, T, \Omega_t) \int_t^T s_k(t, \tau, \Omega_t) d\tau \quad (29.6)$$

## 29.2 LIBOR 市场模型

HJM 模型的一个不足在于它的表现形式为瞬态远期利率, 而这些利率不能直接从市场中观测到。另一个不足之处是很难用市场上活跃交易的金融工具的价格来校准模型。这促使 Brace、Gatarek、Musiela (BGM) 和 Jamshidian, 还有 Miltersen、Sandmann 和 Sondermann 提出一种新的方法。<sup>4</sup> 这就是 LIBOR 市场模型 (LMM) 或者也称为 BGM 模型, 它以交易员工作中习惯的远期利率形式来表述。

<sup>4</sup> 参见 A. Brace, D. Gatarek and M. Musiela “The Market Model of Interest Rate Dynamics,” *Mathematical Finance* 7, 2 (1997) :127–55; F. Jamshidian, “LIBOR and Swap Market Models and Measures,” *Finance and Stochastics*, 1 (1997) : 293–330; K. Miltersen, K. Sandmann and D. Sondermann, “Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with LogNormal Interest Rate,” *Journal of Finance*, 52, 1 (March 1997): 409–30.

## 模 型

定义  $t_0 = 0$ , 并且令  $t_1, t_2, \dots$  为当前市场上交易的利率上限的重设时间。在美国, 最普遍的利率上限都是安排每季度调整一次, 所以, 近似有  $t_1 = 0.25, t_2 = 0.5, t_3 = 0.75$ , 如此等等。定义  $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ , 并且:

$F_k(t)$ : 在  $t$  时刻观察到的  $t_k$  到  $t_{k+1}$  时期的远期利率, 用一个  $\delta_k$  复利期表示, 日算惯例为实际天数/实际天数

$m(t)$ : 在  $t$  时刻的下一个调整日期的指数, 这意味着  $m(t)$  是使  $t \leq t_{m(t)}$  的最小整数

$\zeta_k(t)$ : 在  $t$  时刻  $F_k(t)$  的波动率

$v_k(t)$ : 在  $t$  时刻零息票债券价格  $P(t, t_k)$  的波动率

起初, 我们假设只有一个因子。正如 25.4 节所述, “关于  $P(t, t_{k+1})$  的远期风险中性世界” 中,  $F_k(t)$  遵循鞅, 有如下过程:

$$dF_k(t) = \zeta_k(t)F_k(t)dz \quad (29.7)$$

其中,  $dz$  是一个维纳过程。

在实际中, “关于在下一个重设日到期的债券的远期风险中性世界” 中, 对利率衍生品定价是最为方便的。我们把它称作“滚动远期风险中性世界 (rolling forward risk-neutral world)”。<sup>5</sup> 在这样的世界中, 我们可以利用在  $t_k$  时刻观察到的、 $t_{k+1}$  时刻到期的零息率来对  $t_{k+1}$  至  $t_k$  之间的期限贴现。我们不用考虑在  $t_k$  至  $t_{k+1}$  期间利率会发生怎样的变化。

在  $t$  时刻, 滚动远期风险中性世界是“关于债券价格  $P[t, t_{m(t)}]$  的远期风险中性世界”。等式 (29.7) 给出了“关于  $P(t, t_{k+1})$  的远期风险中性世界” 中的  $F_k(t)$  的过程。根据 25.7 节, 在滚动远期风险中性世界,  $F_k(t)$  遵循的过程为:

$$dF_k(t) = \zeta_k(t)[v_{m(t)}(t) - v_{k+1}(t)]F_k(t)dt + \zeta_k(t)F_k(t)dz \quad (29.8)$$

远期利率与债券价格的关系式为:

$$\frac{P(t, t_i)}{P(t, t_{i+1})} = 1 + \delta_i F_i(t)$$

或

$$\ln P(t, t_i) - \ln P(t, t_{i+1}) = \ln[1 + \delta_i F_i(t)]$$

利用伊藤定理, 我们可以计算等式左边和右边的行为过程。令  $dz$  的系数相

<sup>5</sup> 使用 25.4 节中的术语, 这个世界对应于使用“滚动 CD”作为计价标准。一个滚动 CD (certificate of deposit, 定期存单) 是从 \$1 开始, 买入  $t_1$  时刻到期的债券, 在  $t_1$  时刻将得到的收益重新投资于  $t_2$  时刻到期的债券, 在  $t_2$  时刻将得到的收益重新投资于  $t_3$  时刻到期的债券, 如此等等。严格来说, 我们在第 28 章中构造的利率树图是在滚动远期风险中性世界, 而不是传统风险中性世界。在每个时间步末尾, 其中的计价标准是向前滚动延展的 CD。

等，我们得到：

$$v_i(t) - v_{i+1}(t) = \frac{\delta_i F_i(t) \zeta_i(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} \quad (29.9)$$

所以，根据方程 (29.8)，滚动远期风险中性世界中， $F_k(t)$  的过程为：

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \zeta_i(t) \zeta_k(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \zeta_k(t) dz \quad (29.10)$$

方程 (29.4) 中的 HJM 结果是上式中的  $\delta_i$  趋近于零时的极限情况（参见习题 29.7）。

## 远期利率波动率

我们现在来简化模型，假设  $\zeta_k(t)$  只是在下一个重设日到  $t_k$  时刻之间全部付息期间个数的函数。当有  $i$  个这样的付息期间时，我们定义  $\Lambda_i$  为  $\zeta_k(t)$  的值。这说明  $\zeta_k(t) = \Lambda_{k-m(t)}$  是一个阶梯函数。

可以通过（至少理论上可以）Black 模型中用来给利率看涨期权元定价的波动率（就是在图 26.3 中的即期波动率），来估计  $\Lambda_i$ 。<sup>6</sup> 假设  $\sigma_k$  是对应在时间  $t_k$  到  $t_{k+1}$  内的利率看涨期权元的 Black 波动率。构建方差的等式，我们得到：

$$\sigma_k^2 t_k = \sum_{i=1}^k \Lambda_{k-i}^2 \delta_{i-1} \quad (29.11)$$

利用这个方程反复迭代，就可以得到  $\Lambda$  的值。

**[例 29.1]** 假设所有的  $\sigma_i$  都相等，而且前三个 Black 利率看涨期权元的即期波动率分别为 24%、22%、20%。这说明  $\Lambda_0 = 24\%$ 。因为

$$\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 = 2 \times 0.22^2$$

$\Lambda_1$  等于 19.80%。又因为

$$\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 = 3 \times 0.20^2$$

$\Lambda_2$  等于 15.23%。

**[例 29.2]** 考虑表 29.1 中关于利率看涨期权元波动率  $\sigma_k$  的数据。这些数据展现了 26.3 节中所讨论的“隆起”。 $\Lambda$  的值在第二行显示。注意， $\Lambda$  序列的“隆起”形状比  $\sigma$  “隆起”更显著。

---

<sup>6</sup> 实际应用中，使用最小二乘校准方法决定  $\Lambda$  序列，将在后面讨论。

表 29.1 波动率数据；付息期为 1 年

| 年, $k$ :            | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma_k$ (%)      | 15.50 | 18.25 | 17.91 | 17.71 | 17.27 | 16.79 | 16.30 | 16.01 | 15.76 | 15.54 |
| $\Lambda_{k-1}$ (%) | 15.50 | 20.64 | 17.21 | 17.22 | 15.25 | 14.15 | 12.98 | 13.81 | 13.60 | 13.40 |

## 模型的实现

LIBOR 市场模型可以通过蒙特卡罗模拟来实现。使用  $\Lambda_i$  序列，方程 (29.10) 可以表示为

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \Lambda_{k-m(t)} dz \quad (29.12)$$

或

$$d\ln F_k(t) = \left[ \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \delta_i F_i(t)} - \frac{(\Lambda_{k-m(t)})^2}{2} \right] dt + \Lambda_{k-m(t)} dz \quad (29.13)$$

如果，作为近似，我们在计算  $\ln F_k(t)$  的漂移率时，假设对于  $t_j < t < t_{j+1}$ ，有  $F_i(t) = F_i(t_j)$ ，那么

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j) \exp \left[ \left( \sum_{i=j+1}^k \frac{\delta_i F_i(t_j) \Lambda_{i-j-1} \Lambda_{k-j-1}}{1 + \delta_i F_i(t_j)} - \frac{\Lambda_{k-j-1}^2}{2} \right) \delta_j + \Lambda_{k-j-1} \epsilon \sqrt{\delta_j} \right] \quad (29.14)$$

这里  $\epsilon$  是从均值为 0、标准差为 1 的正态分布中抽取的随机样本。

## 扩展到多因子模型

LIBOR 市场模型可以扩展到包含几个独立的因子。假设有  $p$  个因素并且  $\zeta_{k,q}$  是可以归因于第  $q$  个因子的  $F_k(t)$  波动率的组成部分。方程 (29.10) 变为（见习题 29.11）

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \sum_{q=1}^p \zeta_{i,q}(t) \zeta_{k,q}(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \sum_{q=1}^p \zeta_{k,q}(t) dz_q \quad (29.15)$$

当在下一个重设日到远期合约的到期日之间还有  $i$  个付息期间时，定义  $\lambda_{i,q}$  是波动率的第  $q$  个成分。方程 (29.14) 变为：

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j) \exp \left[ \left( \sum_{i=j+1}^k \frac{\delta_i F_i(t_j) \sum_{q=1}^p \lambda_{i-j-1,q} \lambda_{k-j-1,q}}{1 + \delta_i F_i(t_j)} - \frac{\sum_{q=1}^p \lambda_{k-j-1,q}^2}{2} \right) \delta_j + \sum_{q=1}^p \lambda_{k-j-1,q} \epsilon_q \sqrt{\delta_j} \right] \quad (29.16)$$

其中  $\epsilon_q$  是从均值为 0、标准差为 1 的正态分布中抽取的随机样本。

近似地可以认为，在每个付息期间，远期利率的漂移率保持不变。那么，我们可以在模拟时从一个重设日跳到下一个。前面已经提过，这样很方便，因为滚动远期风险中性世界允许我们从一个重设日跳到下一个进行贴现。假设我们要模拟  $N$  个付息期间内的一个零息率曲线。每一次模拟运算中，我们从零时刻的远期利率开始。从初始零息率曲线，我们计算出  $F_0(0), F_1(0), \dots, F_{N-1}(0)$ 。然后我们用等式 (29.16) 来计算  $F_1(t_1), F_2(t_1), \dots, F_{N-1}(t_1)$ ；然后再次运用等式 (29.16) 来计算  $F_2(t_2), F_3(t_2), \dots, F_{N-1}(t_2)$ 。如此反复，直到我们得到  $F_{N-1}(t_{N-1})$ 。注意，随着时间移动，零息率曲线变得越来越短。例如，假设每个付息期间长度为 3 个月，并且  $N = 40$ 。我们从一个 10 年期零息率曲线开始。在 6 年期的点上 ( $t_{24}$  时刻)，模拟告诉我们 4 年期零息率曲线的信息。

利用方程 (29.16) 估值利率看涨期权元，把得到的价格与 Black 模型给出的价格相比较，就能检验漂移率的近似程度。 $F_k(t_k)$  为  $t_k$  至  $t_{k+1}$  期间的实现利率，利用它可以计算  $t_{k+1}$  时刻的利率看涨期权元的损益。把该损益贴现到零时刻，每次一个付息期间，利率看涨期权元的价值是该损益现值的平均值。这种类型的分析结果说明，蒙特卡罗模拟给出利率上限值与 Black 模型给出的没有显著的不同。当付息期间长度为 1 年，并且进行了大量的模拟运算时，结果仍然成立。<sup>7</sup> 这表明我们的漂移率假设在大多数情况下是成立的。

## Ratchet 利率上限、Sticky 利率上限和变通利率上限

LIBOR 市场模型可用来估值某些类型的非标准利率上限。考虑 Ratchet 利率上限和 Sticky 利率上限。这些利率上限中，对于每个利率看涨期权元设定上限利率的规则是混合的。Ratchet 利率上限中，上限利率等于前一个重设日的 LIBOR 加上价差。Sticky 利率上限中，上限利率等于上一次实现的上限利率加上价差。假设  $t_j$  时刻的上限利率为  $K_j$ ， $t_j$  时刻的 LIBOR 为  $R_j$ ，价差为  $s$ 。Ratchet 利率上限中， $K_{j+1} = R_j + s$ 。Sticky 利率上限中， $K_{j+1} = \min(R_j, K_j) + s$ 。

表 29.2 和 29.3 中给出了利用单因子、双因子以及三因子 LIBOR 市场模型对 Ratchet 利率上限和 Sticky 利率上限进行估值的结果。本金为 \$100，期限结构被假设为是平坦的，年利率 5%。利率看涨期权元的波动率如表 29.1 中的数据。利率每年被重新设定。价差为 25 个基点。表 29.4 与表 29.5 中给出了利用双因子或三因子模型时，相应的波动率如何分解为几个分量。这些结果都是基于 10 万次蒙特卡罗模拟以及 17.7 节中提过的对偶变量方法得到的。每个价格的标准误差为 0.001。

第三种非标准利率上限是变通利率上限 (flexi cap)。它类似于普通的利率上限，但是可以执行的利率看涨期权元的总个数受到限制。考虑每年支付的一个变通利率上限，本金为 \$100。期限结构被假设为是平坦的，年利率 5%。利率上限波动率如表 29.1、29.4 和表 29.5 中的数据。假设所有处于实值利率看涨期权元被执行

<sup>7</sup> 参见 J. C. Hull and A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, 10, 2 (September 2000): 46–62. 唯一的例外是利率上限的波动率非常高的情况。

表 29.2 Ratchet 利率看涨期权元的估值

看涨期权元的初始时刻

| (年) | 单因子   | 双因子   | 三因子   |
|-----|-------|-------|-------|
| 1   | 0.196 | 0.194 | 0.195 |
| 2   | 0.207 | 0.207 | 0.209 |
| 3   | 0.201 | 0.205 | 0.210 |
| 4   | 0.194 | 0.198 | 0.205 |
| 5   | 0.187 | 0.193 | 0.201 |
| 6   | 0.180 | 0.189 | 0.193 |
| 7   | 0.172 | 0.180 | 0.188 |
| 8   | 0.167 | 0.174 | 0.182 |
| 9   | 0.160 | 0.168 | 0.175 |
| 10  | 0.153 | 0.162 | 0.169 |

行的个数达到了最大限制个数 5。单因子、双因子和三因子 LIBOR 市场模型给出的该金融工具的价格分别为 3.43、3.58 和 3.61（关于其他种类的变通利率上限，参照习题 29.15）。

标准型利率上限的定价只依附于总波动率，并且独立于因子个数。这是因为一个标准型利率看涨期权元的价格依附于单个远期利率的行为过程。我们刚讨论过的非标准金融工具中的利率看涨期权元的价格则有些不同，它们依附于几个不同远期利率的联合概率分布。因此，这些价格依附于因子个数。

### 欧式互换期权的估值

Hull 和 White 证明了，以 LIBOR 市场模型估值欧式互换期权时存在一种近似

表 29.3 Sticky 利率看涨期权元的估值

看涨期权元的初始时刻

| (年) | 单因子   | 双因子   | 三因子   |
|-----|-------|-------|-------|
| 1   | 0.196 | 0.194 | 0.195 |
| 2   | 0.336 | 0.334 | 0.336 |
| 3   | 0.412 | 0.413 | 0.418 |
| 4   | 0.458 | 0.462 | 0.472 |
| 5   | 0.484 | 0.492 | 0.506 |
| 6   | 0.498 | 0.512 | 0.524 |
| 7   | 0.502 | 0.520 | 0.533 |
| 8   | 0.501 | 0.523 | 0.537 |
| 9   | 0.497 | 0.523 | 0.537 |
| 10  | 0.488 | 0.519 | 0.534 |

表 29.4 双因子模型中的波动率分量

| 年, $k$ :              | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\lambda_{k-1,1}$ (%) | 14.10 | 19.52 | 16.78 | 17.11 | 15.25 | 14.06 | 12.65 | 13.06 | 12.36 | 11.63 |
| $\lambda_{k-1,2}$ (%) | -6.45 | -6.70 | -3.84 | -1.96 | 0.00  | 1.61  | 2.89  | 4.48  | 5.65  | 6.65  |
| 总波动率 (%)              | 15.50 | 20.64 | 17.21 | 17.22 | 15.25 | 14.15 | 12.98 | 13.81 | 13.60 | 13.40 |

的解析结果。<sup>8</sup>令  $T_0$  为互换期权的期限, 假设互换的支付日为  $T_1, T_2, \dots, T_N$ 。定义  $\tau_i = T_{i+1} - T_i$ 。根据方程 (25.23),  $t$  时刻的互换率为:

$$s(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t, T_{i+1})}$$

对  $1 \leq i \leq N$ , 也存在如下关系式:

$$\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_0)} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{1 + \tau_j G_j(t)}$$

其中,  $G_j(t)$  是  $t$  时刻的  $T_j$  至  $T_{j+1}$  期限之间的远期利率。上述两个方程联合确定了  $s(t)$  和  $G_j(t)$  之间的关系式。使用伊藤定理 (参照习题 29.12), 互换率  $s(t)$  的方差  $V(t)$  为:

$$v(t) = \sum_{q=1}^p \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_{k,q}(t) G_k(t) \gamma_k(t)}{1 + \tau_k G_k(t)} \right]^2 \quad (29.17)$$

其中

表 29.5 三因子模型中的波动率分量

| 年, $k$ :              | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\lambda_{k-1,1}$ (%) | 13.65 | 19.28 | 16.72 | 16.98 | 14.85 | 13.95 | 12.61 | 12.90 | 11.97 | 10.97 |
| $\lambda_{k-1,2}$ (%) | -6.62 | -7.02 | -4.06 | -2.06 | 0.00  | 1.69  | 3.06  | 4.70  | 5.81  | 6.66  |
| $\lambda_{k-1,3}$ (%) | 3.19  | 2.25  | 0.00  | -1.98 | -3.47 | -1.63 | 0.00  | 1.51  | 2.80  | 3.84  |
| 总波动率 (%)              | 15.50 | 20.64 | 17.21 | 17.22 | 15.25 | 14.15 | 12.98 | 13.81 | 13.60 | 13.40 |

<sup>8</sup> 参见 J. C. Hull and A. White, “Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model,” *Journal of Fixed Income*, 10, 2 (September 2000): 46–62. 关于其他的解析近似结果, 参见 A. Brace, D. Gatarek, M. Musiela “The Market Model of Interest Rate Dynamics,” *Mathematical Finance*, 7, 2 (1997): 127–55 和 L. Andersen and J. Andreasen, “Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model,” *Applied Mathematical Finance*, 7, 1 (March 2000), 1–32.

$$\gamma_k(t) = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} [1 + \tau_j G_j(t)]}{\prod_{j=0}^{N-1} [1 + \tau_j G_j(t)] - 1} - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1} [1 + \tau_j G_j(t)]}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^N [1 + \tau_j G_j(t)]}$$

并且  $\beta_{j,q}(t)$  是  $G_j(t)$  的波动率的第  $q$  个分量。为了近似  $V(t)$ ，对于所有  $j$  和  $t$ ，设定  $G_j(t) = G_j(0)$ 。那么，以标准市场模型估值互换期权时，需要代进去的互换波动率为

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} V(t) dt}$$

或

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} \sum_{q=1}^p \left[ \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \tau_k \beta_{k,q}(t) G_k(0) \gamma_k(0)}{1 + \tau_k G_k(0)} \right]^2 dt} \quad (29.18)$$

互换期权的标的互换的付息期间长度等于利率上限的付息期间的长度时， $\beta_{k,q}(t)$  是剩余期限为  $T_k - t$  的上限远期利率波动率的第  $q$  个分量。表 29.5 中可以看到这些情况。

经纪人报出的欧式互换期权的标的互换的付息期间长度并不总是等于经纪人报出的利率上限/利率下限的付息期间的长度。例如在美国，标准的利率上限和利率下限，每季度重新设定，而标准欧式互换期权的标的互换的固定利率方每半年重新设定。幸运的是，欧式互换期权的估值结果可以扩展到这样的情况：每个互换付息期间包含  $M$  个子期间，而这些子期间是典型利率上限的付息期间。定义  $\tau_{j,m}$  为第  $j$  个付息期间中的第  $m$  个子期间的长度。那么

$$\tau_j = \sum_{m=1}^M \tau_{j,m}$$

定义  $G_{j,m}(t)$  为  $t$  时刻观察到的  $\tau_{j,m}$  付息期间的远期利率。因为：

$$1 + \tau_j G_j(t) = \prod_{m=1}^M [1 + \tau_{j,m} G_{j,m}(t)]$$

我们可以对推导方程 (29.18) 的分析过程进行调整，使得  $s(t)$  的波动率可以从  $G_{j,m}(t)$  的波动率得出，而不是从  $G_j(t)$  的波动率得出。以标准市场模型估值互换期权时需要代进去的互换波动率为（参照习题 29.13）：

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} \sum_{q=1}^p \left[ \sum_{k=n}^{N-1} \sum_{m=1}^M \frac{\tau_{k,m} \beta_{k,m,q}(t) G_{k,m}(0) \gamma_k(0)}{1 + \tau_{k,m} G_{k,m}(0)} \right]^2 dt} \quad (29.19)$$

其中， $\beta_{j,m,q}(t)$  是  $G_{j,m}(t)$  的波动率的第  $q$  个分量。它是一个上限远期利率波动率的第  $q$  个分量，该上限远期利率的期限为  $t$  时刻至  $(T_j, T_{j+1})$  互换付息期间中第  $m$  个子期间的开始时刻。

假设  $G_j(t) = G_j(0)$  和  $G_{j,m}(t) = G_{j,m}(0)$ ，方程 (29.18) 和 (29.19) 中互换波

动率的表达式确实包含某种近似。Hull 和 White 比较了从方程 (29.18) 和 (29.19) 中计算的欧式互换期权的价格和从蒙特卡罗模拟中计算的价格，他们发现两个价格非常接近。一旦 LIBOR 市场模型被校准后，利用方程 (29.18) 和 (29.19) 可以快速估值欧式互换期权。分析师可以决定相比利率上限，欧式互换期权价格是被低估了还是被高估了。我们马上将看到，分析师们也利用这些结果对互换期权的市场价格模型进行校准。

## 校准模型

为了校准 LIBOR 市场模型，我们需要决定  $\Lambda_j$  以及如何将它分解为  $\lambda_{j,q}$ 。第一步通常是利用 18.9 节中的主成分分析来决定  $\Lambda$  分解为  $\lambda$  的方式。该主成分模型为：

$$\Delta F_j = \sum_{q=1}^M \alpha_{j,q} x_q$$

其中， $M$  是因子的总个数， $\Delta F_j$  是第  $j$  个付息期间到期的远期合约隐含的远期利率的变化， $\alpha_{j,q}$  是关于第  $j$  个远期利率和第  $q$  个因子的因子载荷， $x_q$  是第  $q$  个因子的因子得分。并且

$$\sum_{j=1}^M \alpha_{j,q_1} \alpha_{j,q_2}$$

在  $q_1 = q_2$  时等于 1，在  $q_1 \neq q_2$  时等于 0。定义  $s_q$  为第  $q$  个因子得分的标准差。如果 LIBOR 市场模型的因子个数  $p$  等于主成分因子总个数  $M$ ，就能设定

$$\lambda_{j,q} = \alpha_{j,q} s_q$$

对于  $1 \leq j, q \leq M$  成立。当  $p < M$  时，应该指定  $\lambda_{j,q}$  范围，使得

$$\Lambda_j = \sqrt{\sum_{q=1}^p \lambda_{j,q}^2}$$

那么，我们需要设定

$$\lambda_{j,q} = \frac{\Lambda_j s_q \alpha_{j,q}}{\sqrt{\sum_{q=1}^p s_q^2 \alpha_{j,q}^2}} \quad (29.20)$$

方程 (29.11) 给出了决定  $\Lambda$  序列的一种方式，使它们和利率看涨期权元价格相一致。而实际应用中并不使用这一方法，因为这一方法中经常会出现  $\Lambda$  序列的强烈摆动。<sup>9</sup> 同样地，虽然 LIBOR 市场模型被设计为与利率看涨期权元的价格相一致，但是分析师们常常根据欧式互换期权校准该模型。

最广泛使用的 LIBOR 市场模型的校准过程，类似于 28.8 中校准单因子模型的过程。假设  $U_i$  是第  $i$  个校准金融工具的市场价格， $V_i$  是对应的模型价格。我们选

<sup>9</sup> 有时，不存在与利率上限的报价集合相互一致的  $\Lambda$  序列集合。

择  $\Lambda$  序列来最小化如下的表达式：

$$\sum_i (U_i - V_i)^2 + P$$

其中， $P$  是我们选择的罚函数，它保证  $\Lambda$  序列的过程是“好的”。类似于 28.8 节， $P$  的形式如下：

$$P = \sum_i w_{1,i} (\Lambda_{i+1} - \Lambda_i)^2 + \sum_i w_{2,i} (\Lambda_{i+1} + \Lambda_{i-1} - 2\Lambda_i)^2$$

当一些校准金融工具是欧式互换期权时，利用方程 (29.18) 和 (29.19) 以及 Levenberg–Marquardt 过程就能执行最小化过程。利用方程 (29.20) 可以从  $\Lambda$  序列决定  $\lambda$  序列。

## 波动率偏斜

经纪人提供利率上限的报价，其中有处于平价状态的，也有不处于平价状态的。在某些市场中可以观察到这样的波动率偏斜：利率上限或下限的 (Black) 波动率报价是执行价格的减函数。可以用 CEV 模型处理这种情况（参照 24.1 节中关于股本的 CEV 模型的应用）。该模型为：

$$dF_i(t) = \cdots + \sum_{q=1}^p \zeta_{i,q}(t) F_i(t)^\alpha dz_q \quad (29.21)$$

其中， $\alpha$  是常数 ( $0 < \alpha < 1$ )。该模型的处理类似于对数正态分布模型。利用累计非中心卡方  $\chi^2$  分布，可以用解析方式估值利率上限和下限。其中的解析近似过程和我们在上面给出的欧式互换期权的情形类似。<sup>10</sup>

## 百慕大互换期权

一种受欢迎的利率衍生证券是百慕大互换期权。这种互换期权中，可以在某些或全部的标的互换的支付日上执行期权。很难用 LIBOR 市场模型估值百慕大互换期权，因为 LIBOR 市场模型要依靠于蒙特卡罗模拟，而利用蒙特卡罗模拟时，很难处理该期权的提前执行情况。幸运的是，我们可以利用 24.7 节中描述的过程。当存在很多因子时，Longstaff 和 Schwartz 应用了最小二乘法。在某个支付日不提前执行时的价值被假定为是这些因子值的一种多项式函数。<sup>11</sup> Andersen 提出可以

<sup>10</sup> 关于更多细节，参见 L. Andersen and J. Andreasen, “Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model,” *Applied Mathematical Finance*, 7, 1 (2000): 1–32; J. C. Hull and A. White, “Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model,” *Journal of Fixed Income*, 10, 2 (September 2000): 46–62.

<sup>11</sup> 参见 F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Squares Approach,” *Review of Financial Studies*, 14, 1 (2001): 113–47.

使用最优提前执行边界方法。他对提前执行边界的参数化方式进行了很多试验，发现假设提前执行只依赖于期权的内在价值时，能给出很好的结果。<sup>12</sup> 绝大多数交易者以一个单因子无套利模型（第 28 章中讨论过）来估值百慕大互换期权。但是，单因子模型定价百慕大互换期权价格的精确度，存在很多争论。<sup>13</sup>

### 29.3 住房抵押贷款证券

美国的住房抵押贷款证券（mortgage-backed security, MBS）市场是运用本章讲述模型的一个应用。当金融机构决定向投资者出售部分住房抵押组合时，创造了这种住房抵押贷款证券。把被出售的抵押都合并到资产池中，投资者通过购买其中一些份额单位，从抵押组合池中得到利益。这些份额单位就是所谓的住房抵押贷款证券。通常为这些份额单位建立二级市场，以使投资者能够根据意愿将它们出售给其他投资者。拥有代表某个组合池中的 X% 的份额单位的投资者，有权从抵押组合池中得到本金和利息现金流的 X%。

组合池中的抵押物通常由诸如政府国民抵押协会或联邦国民抵押协会（FNMA）这些与政府密切相关的机构来担保，以使投资者免受违约的损失。这使得 MBS 好像一个由政府发行的常规的固定收入证券。实际上，MBS 与常规的固定收入证券之间有个很大的不同。这就是 MBS 组合中的抵押具有某种提前偿付特权。对持有者来说，这些提前偿付特性可能是很有价值的。例如在美国，抵押通常持续 25 年，并可以在任意时刻提前偿付。换句话说，这意味着 MBS 的持有者具有 25 年期的美式期权，按其面值将抵押提前退还给贷款人。

实际上，有各种理由提前偿付抵押贷款。有时利率已经下跌了，房屋的主人决定以更低的利率再融资。在另外一些情况下，提前偿付抵押贷款的简单原因是房屋已经出售了。对 MBS 进行估值的关键在于确定所谓的提前偿付函数。这个函数描述了在  $t$  时刻某个抵押组合依据  $t$  时刻收益率曲线和其他相关变量的预期提前支付情况。

用提前偿付函数预测单个抵押提前偿付的实际情况，将是很不可靠的。当许多类似的抵押贷款合并在同样的某个组合池中时，有一个“大数法则”在起作用，通过分析历史数据，可以更精确地预测提前偿付情况。我们已经说过，纯粹从利率考虑，提前偿付并不总是有益的。然而，利率较低时提前偿付的趋势远强于利率较高时提前偿付的趋势。这意味着，投资者要求 MBS 比其他固定收入证券更高的利率以补偿这些已经出售了的提前偿付选择权。

<sup>12</sup> L. Andersen, “A simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model,” *Journal of Computational Finance*, 3, 2 (Winter 2000): 5–32.

<sup>13</sup> 关于反面观点，参见 L. Andersen 和 J. Andreasen 的 “Factor Dependence of Bermudan Swaptions: Fact or Fiction,” ; F. A. Longstaff, P. Santa-Clara 和 E. S. Schwartz 的 “Throwing Away a Billion Dollars: The Cost of Suboptimal Exercise Strategies in the Swaption Market”。两个文献都在 *Journal of Financial Economics*, 62, 1 (October 2001) .

### 商业剪影 29.1 IO 和 PO

在所谓的剥离 MBS (Stripped MBS) 中，本金和利息分开支付。所有的本金支付对应于一类证券，称之为只有本金证券 (PO)。所有的利息支付对应于另一类证券，称之为只有利息证券 (IO)。PO 和 IO 都是有风险的投资。随着提前偿付比率的上升，PO 的价值增加而 IO 的价值减少。随着提前偿付比率的减少，情况则相反。在 PO 证券中，投资者收到固定数额的本金作为回报，但时刻是不确定的。在一组抵押的组合中，较高的提前偿付的比率，将提前收到本金（当然，对 PO 的持有者来说，这是好消息）。在一组抵押的组合中，较低的提前偿付的比率，将延迟收到本金，并减少了由 PO 提供的收益。在 IO 证券中，投资者收取的总现金流是不确定的。提前偿付比率越高，由投资者收取的总现金流越低。反之亦然。

## 抵押担保证券

至今我们一直描述的 MBS 有时看作是贯彻始终的。所有的投资者获得同样的收益并承受同样的提前偿付风险。并不是所有的住房抵押贷款证券都是以这种方式运作的。在抵押担保证券 (Collateralized Mortgage Obligations, CMO) 中，将投资者分成不同的类别，并开发出一套规则以决定不同种类的投资者是如何支付本金的。

我们看看如下 CMO 的例子。考虑某个 MBS，投资者被分为三类：A 类、B 类和 C 类。所有的本金支付（不但包括那些按计划支付的，而且包括那些提前支付的）先分配给 A 类投资者，直到该类的投资者全部支付完毕。然后，本金支付分配给 B 类投资者，直到该类的投资者全部支付完毕。最后，本金支付分配给 C 类投资者。在这种情况下，A 类投资者承受的提前偿付风险最大。可以预计到 A 类证券持续时间比 B 类证券持续时间短，同样，可以预计到 B 类证券持续时间比 C 类证券持续时间短。

这种结构类型的是产生各种类型的证券，对机构投资者而言，这些证券比那些由更简单的贯彻始终的 MBS 所产生的证券更有吸引力。不同类型证券所假设的提前偿付风险取决于每一类中的平价价值。例如，如果 A 类、B 类和 C 类的平价价值分别为 400、300 和 100 时，C 类承受很小的提前偿付风险。当各类的平价价值分别为 100、200 和 500 时，C 类承受更大的提前偿付风险。

住房抵押贷款证券 MBS 的创造者们还创造了更多的比我们刚才描述的更新型结构的证券。商业剪影 29.1 中给出了其中一个例子。

## 估值 MBS

通常使用蒙特卡罗模拟来估值 MBS。在一个 MBS 的有效期内，我们可以用 HJM 或 LIBOR 市场模型来逐月模拟利率行为。我们考虑一次模拟运算的过程。每

个月，根据当前的收益率曲线和收益率曲线的历史移动，计算预期提前偿付额。这些提前偿付额决定 MBS 持有者的预期现金流，这些现金流再被贴现到零时刻。由此得到 MBS 的一个样本价值。经过多次模拟运算，取很多样本平均值，就能得到 MBS 价值的估计值。

## 期权调整利差

除了要计算嵌入期权和 MBS 的理论价格之外，交易员也可能需要计算所谓的期权调整利差 (option-adjusted spread, OAS)。考虑所有的期权之后，OAS 度量以上金融工具收益超过政府长期债券收益的差值。

任何期限结构模型的一个输入量是初始零息票收益率曲线，通常是 LIBOR 零息率曲线。但是，计算某个金融工具的 OAS 时，首先利用政府长期零息票收益率曲线进行估值。把模型给出的该金融工具的价格与它在市场中的价格进行比较。运用一系列迭代过程以确定加在输入的国债收益率曲线上的平行漂移量，该平行漂移量将使得模型的价格等于市场的价格。这个平行漂移量就是 OAS。

为说明这种计算的特性，假设市场价格是 \$102.00，利用国债收益曲线计算出的价格为 \$103.27。作为第一步试算，我们可以选择加在到国债零息票曲线上的平行漂移量为 60 个基点。假设这个漂移量给出该金融工具价格为 \$101.20。这低于 \$102.00 的市场价格，意味着在 0~60 点之间的某个平行漂移量将使模型所计算的价格等于市场价格。我们可以利用线性插值计算得：

$$60 \times \frac{103.27 - 102.00}{103.27 - 101.20} = 36.81$$

即 36.81 点，将它作为下一次试算的漂移量。假设这个漂移量给出的价格为 \$101.95。这说明 OAS 比 36.81 点要稍微小一些。线性插值给出的下一次试算的漂移量为：

$$36.81 \times \frac{103.27 - 102.00}{103.27 - 101.95} = 35.41$$

即 35.41 点。如此等等。

## 小 结

以 HJM 模型和 LMM 模型估值利率衍生证券时，我们可以自由选择波动率期限结构。LMM 模型比 HJM 模型有两个重要优点。第一，它以决定利率上限定价的远期利率表示，而不是瞬态远期利率。第二，很容易根据利率上限价格或欧式互换期权价格来校准这一模型。HJM 模型和 LMM 模型共同的缺点是，它们都不能以重新组合的树图表述。这说明实际应用中，我们必须用蒙特卡罗方法模拟这些模型。

美国的 MBS 市场中产生很多新型的利率衍生证券：CMO、IO、PO 等等。这些金融工具

给持有者提供的现金流依附于一个抵押组合池中的提前偿付情况。这些提前偿付情况取决于利率水平以及其他一些变量。因为它们是路径依赖的，一般只能用蒙特卡罗模拟方法估值MBS，其中就要使用HJM模型或LMM模型。

## 参考读物

- Amin, K., and A. Morton, "Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models," *Journal of Financial Economics*, 35 (1994): 141–80.
- Andersen, L., "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaption in the Multi-Factor LIBOR Market Model," *The Journal of Computational Finance*, 3, 2 (2000): 5–32.
- Andersen, L., and J. Andreasen, "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model," *Applied Mathematical Finance*, 7, 1 (March 2000): 1–32.
- Brace A., D. Gatarek, and M. Musiela "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, 7, 2 (1997): 127–55.
- Buhler, W., M. Ulrig-Homberg, U. Walter, and T. Weber, "An Empirical Comparison of Forward and Spot-Rate Models for Valuing Interest Rate Options," *Journal of Finance*, 54, 1 (February 1999): 269–305.
- Carverhill, A., "When is the Short Rate Markovian," *Mathematical Finance*, 4 (1994): 305–12.
- Cheyette, O., "Term Structure Dynamics and Mortgage Valuation," *Journal of Fixed Income*, (March 1992): 28–41.
- Duffie, D. and R. Kan, "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance* 6, 4 (1996), 379–406.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 4 (December 1990): 419–40.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of the Interest Rates: A New Methodology," *Econometrica*, 60, 1 (1992): 77–105.
- Hull, J., and A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, 10, 2 (September 2000): 46–62.
- Inui, K., and M. Kijima, "A Markovian Framework in Multifactor Heath, Jarrow, and Morton Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 3 (September 1998): 423–40.
- Jamshidian, F., "LIBOR and Swap Market Models and Measures," *Finance and Stochastics*, 1 (1977): 293–330.
- Jarrow, R. A., *Modeling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*. New York: McGraw-Hill, 1995.
- Jarrow, R. A., and S. M. Turnbull, "Delta, Gamma, and Bucket Hedging of Interest Rate Derivatives," *Applied Mathematical Finance*, 1 (1994): 21–48.
- Jeffrey, A., "Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models Based on Markov Spot Interest Rate Dynamics," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30 (1995): 619–42.
- Miltersen, K., K. Sandmann, and D. Sondermann, "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Lognormal Interest Rates," *Journal of Finance*, 52, 1 (March 1997): 409–30.
- Rebonato, R., *Interest Rate Option Models* 2nd edn. Chichester, UK: Wiley, 1998.
- Ritchken, P., and L. Sankarasubramanian, "Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure," *Mathematical Finance*, 5 (1995): 55–72.

## 问题和习题

- 29.1 请解释马尔可夫和非马尔可夫短期利率模型之间的区别。
- 29.2 请证明方程 (29.6) 的 HJM 多因子形式中远期利率的漂移率和波动率之间的关系式。
- 29.3 “当 HJM 中的远期利率波动率  $s(t, T)$  是常数时，模型演变成 Ho-Lee 模型。”证明 HJM 模型给出的债券价格的过程和第 28 章的 Ho-Lee 模型给出的过程是相一致的，以此来验证上述的论点是正确的。
- 29.4 “当 HJM 中的远期利率波动率  $s(t, T)$  等于  $\sigma e^{-\alpha(T-t)}$  时，模型演变成 Hull-White 模型。”证明 HJM 模型给出的债券价格的过程和第 28 章的 Hull-White 模型给出的过程是相一致的，以此来验证上述的论点是正确的。
- 29.5 相比 HJM, LMM 的优势有哪些？
- 29.6 请直观地解释：当因子个数增加时，Ratchet 利率上限的价值上升。
- 29.7 请证明随着  $\delta_i$  趋近于零，方程 (29.10) 退化成方程 (29.4)。
- 29.8 请解释为什么 Sticky 利率上限比相似的 Ratchet 利率上限更昂贵。
- 29.9 请解释为什么 IO 和 PO 关于提前偿付率的敏感程度是相反的。
- 29.10 “一个期权调整利差和债券的收益率是类似的。”请解释这句话。
- 29.11 请证明方程 (29.15)。
- 29.12 请证明方程 (29.17) 的互换率的方差  $V(T)$  的公式。
- 29.13 请证明方程 (29.19)。

## 课后练习

- 29.14 在一个每年支付的利率上限中，1 年期、2 年期、3 年期和 5 年期的利率看涨期权元的 Black 波动率分别为 18%、20%、22% 和 20%。有效期如下时，请估计 LIBOR 市场模型中的 1 年期远期利率的波动率：(a) 0~1 年；(b) 1~2 年；(c) 2~3 年；(d) 3~5 年。假设零息率曲线是平坦的，年利率 5%（每年计一次复利计算）。使用 DerivaGem 计算 2 年期、3 年期、4 年期、5 年期和 6 年期利率上限的单一波动率。
- 29.15 29.2 节中考虑过的变通利率上限中，持有者有义务执行前  $N$  个实值状态的利率看涨期权元。之后，不能执行任何利率看涨期权元（例子中， $N = 5$ ）。另外两种定义变通利率上限的方式是：
  - (a) 持有者可以选择是否执行任何利率看涨期权元，但是可执行的利率看涨期权元的数量有一个上限  $N$ 。
  - (b) 一旦持有者选择执行一个利率看涨期权元，所有随后的实值状态的利率看涨期权元必须执行，最大执行个数为  $N$ 。
 请讨论这些类型的变通利率上限估值相关的问题。三种变通利率上限中，你认为哪种最昂贵？而哪种最便宜？

## 互换的再次探讨

在 20 世纪 80~90 年代，互换一直是 OTC 衍生证券市场成功的核心。他们是管理风险的非常灵活的工具。从目前每年交易的不同合约的范围和交易总额来看，互换无疑是金融市场上最成功的创新之一。

第 7 章中我们讨论了如何估值标准利率互换。标准的方法可以概括为：“假定远期利率将实现。”估值步骤如下：

1. 假设未来 LIBOR 等于从当前的 LIBOR/互换零息率曲线计算的远期利率，在此假设上计算互换的净现金流
2. 利用当前的 LIBOR/互换零息率曲线来贴现，使互换的价格等于净现金流的现值

本章中我们将描述一些非标准互换。其中一些可以通过“假定远期利率可以实现”的方法来定价；一些将用到我们在第 27 章提到的凸性调整、时刻调整和跨币调整；还有一些包含嵌入式期权的可以通过第 26、28 和第 29 章中的方法来定价。

### 30.1 利率互换交易中的变化

将第 7 章讨论过的标准利率互换结构中做一个相对较小的改变，可以得到很多新的利率互换。在一些互换中，名义本金以一种预先决定的方式随时间而变化。名义本金是时间的增函数的互换被认为是本金递增型互换 (step-up swap)。名义本金是时间的减函数的互换被认为是本金递减型互换 (amortizing swap)。如果一家建筑公司计划对一个特定的项目以浮动利率筹借逐步增加的款项，并希望与固定利率的资金做互换交易，递增型互换可能对他们有帮助。如果一家公司有一个预定还款计划的固定利率借款，并希望和一笔浮动利率借款做互换，递减型互换则可能会对他们有用。

互换双方的本金可能会是不同的，支付的频率也可能不同。商业剪影 30.1 展现了一个假想的微软公司同高盛公司所做的互换，其中浮动方的名义本金是 1.2 亿美元而固定方为 1 亿美元。浮动方采用每月付款方式而固定方为每 6 个月付一次款。这些在普通利率互换的基础上的变化并不对估值方法产生影响。我们仍然能够使用“假定远期利率将实现”的方法。

### 商业剪影 30.1 一个假想的非标准互换结构摘录

|              |  |
|--------------|--|
| 交易日期         | 2004 年 1 月 5 日   |
| 生效日期         | 2004 年 1 月 11 日  |
| 工作日约定 (所有日期) | 下一工作日  |
| 节假日日历        | 美国   |
| 中止日期         | 2009 年 1 月 11 日  |
| <b>固定额</b>   |  |
| 固定利率付款方      | 微软公司   |
| 固定利率名义本金     | 1 亿美元  |
| 固定利率         | 每年 6%  |
| 固定利率日算惯例     | 实际天数/365   |
| 固定利率付款日      | 每个 7 月 11 日和 1 月 11 日, 从 2004 年 7 月 11 日起计至并包含 2009 年 1 月 11 日 |
| <b>浮动额</b>   |  |
| 浮动利率付款方      | 高盛公司   |
| 浮动利率名义本金     | 1.2 亿美元  |
| 浮动利率         | 美元 1 个月期 LIBOR   |
| 浮动利率日算惯例     | 实际天数/360   |
| 浮动利率付款日      | 2004 年 7 月 11 日及之后每个月的 11 日至并包含 2009 年 1 月 11 日                |

对于一个互换的浮动参考利率并不总是 LIBOR。例如, 在一些互换中使用的是商业票据 (CP) 利率。基准互换 (basis swap) 由根据一个浮动参考利率产生的现金流和另外一个浮动参考利率产生的现金流相互交换而产生。例如: 一个互换是将 3 个月商业票据利率加 10 个基点交换为 3 个月的 LIBOR, 双方的本金都是 1 亿美元。一个其资产和负债分别依赖于不同的浮动参考利率的金融机构, 可以用基准互换进行风险管理。

浮动参考利率不是 LIBOR 的互换可以使用“假定远期利率将实现”的方法来估值。假定远期利率将实现, 一个 LIBOR 以外的零息率曲线对于计算未来净现金流而言是必要的。不过, 我们通常仍然将现金流按照 LIBOR 来贴现。

## 30.2 复利互换

另一种标准型互换的变形是复利互换。商业剪影 30.2 给出了一个假想的复利互换的结构摘录。对于浮动利率方和固定利率方来说都只有一个付款日期, 即在互换期限结束时。浮动利率等于 LIBOR 加上 20 个基点, 利息以 LIBOR 加上 10 个

### 商业剪影 30.2 一个假想的复利互换结构摘录

|              |  |
|--------------|--|
| 交易日期         | 2004 年 1 月 5 日   |
| 生效日期         | 2004 年 1 月 11 日  |
| 节假日日历        | 美国   |
| 工作日约定 (所有日期) | 下一工作日  |
| 中止日期         | 2009 年 1 月 11 日  |
| <b>固定额</b>   |  |
| 固定利率付款方      | 微软公司   |
| 固定利率名义本金     | 1 亿美元  |
| 固定利率         | 每年 6%  |
| 固定利率日算惯例     | 实际天数/365   |
| 固定利率付款日      | 2009 年 1 月 11 日  |
| 固定利率复合利率     | 采用 6.3%  |
| 固定利率复利日期     | 每个 7 月 11 日和 1 月 11 日, 从 2004 年 7 月 11 日起计至并包含 2008 年 7 月 11 日 |
| <b>浮动额</b>   |  |
| 浮动利率付款方      | 高盛公司   |
| 浮动利率名义本金     | 1 亿美元  |
| 浮动利率         | 美元 6 个月期 LIBOR 加 20 个基点  |
| 浮动利率日算惯例     | 实际天数/360   |
| 浮动利率付款日      | 2009 年 1 月 11 日  |
| 浮动利率复合利率     | 采用 LIBOR 加 10 个基点  |
| 浮动利率复利日期     | 每个 7 月 11 日和 1 月 11 日, 从 2004 年 7 月 11 日起计至并包含 2008 年 7 月 11 日 |

基点的利率进行滚存直到互换期限结束时, 而不是每期进行支付。固定利率是 6%, 利息以 6.3% 的固定利率进行滚存直到互换期限结束时, 而不是每期进行支付。

我们可以使用“假定远期利率将实现”的方法来对如商业剪影 30.2 中的复利互换进行估值。处理互换的固定利率方的方法是直接的, 因为在到期日付款的金额是确定的。对浮动利率方使用的“假定远期利率将实现”的方法是有道理的, 因为我们可以设想出一系列的远期利率合约, 当每一期浮动利率相等于对应的远期利率时, 浮动利率现金流即被转换为它们的价值。<sup>1</sup>

**[例 30.1]** 一个按年度滚存的复利互换期限为 3 年, 付出固定利率并收到浮动利

<sup>1</sup> 关于细节, 参照作者网站上的技术说明 18。

率。固定利率为 4%，浮动利率为 12 个月的 LIBOR。固定利率方的滚存利率为 3.9%，浮动利率方的滚存利率为 12 个月的 LIBOR 减去 20 个基点。LIBOR 的零息率曲线是平的，为 5% 按年度计复利，名义本金为 1 亿美元。

对固定利率方而言，第 1 年末应收到的利息为 400 万美元，在第 2 年末该利息增加至  $400 \times 1.039 = 415.6$  万美元，加上第 2 年末的年利 400 万美元，使总滚存利息增加至 815.6 万美元。第 3 年末该利息增加至  $815.6 \times 1.039 = 847.4$  万美元，加上第 3 年末的年利 400 万美元，因此在第 3 年末互换的固定利率方的现金流为 1 247.4 万美元。

对浮动利率方而言，我们假定所有未来的利率都等于相应的远期 LIBOR 利率。根据给定的 LIBOR 零息率曲线，该假设即为我们假定所有未来的利率都为 5% 按年度计复利。计算得到第 1 年末的利息为 500 万美元，将此按照 4.8% 进行滚存（远期 LIBOR 减去 20 个基点）得到第 2 年末该利息  $500 \times 1.048 = 524$  万美元。加上年利息后，应进行滚存的利息变为 1 024 万美元。滚存到第 3 年末该利息增加至  $1 024 \times 1.048 = 1 073.1$  万美元，加上年利息后最终利息总额为 1 573.1 万美元。

我们可以以此来对该互换进行估值，假定其导致了在第 3 年年末有一笔 1 573.1 万美元的现金流入和一笔 1 247.4 万美元的现金流出，因此该互换的价值为：

$$\frac{1 573.1 - 1 247.4}{1.05^3} = 281.4$$

即 281.4 万美元（本分析过程忽略了日算惯例的影响）。

### 30.3 货币互换

第 7 章中介绍了货币互换。其中，我们可以将基于一种货币的利率暴露交换为基于另一种货币的利率暴露。通常指定两种货币的本金数额。如 7.8 节所述，互换期初和到期之时交换本金。

假设货币互换中的两种货币分别为美元（USD）和英镑（GBP）。固定对固定货币互换中，指定两种货币的固定利率。一方的支付数额基于美元固定利率和美元本金，另一方的支付数额基于英镑固定利率和英镑本金。7.9 节中我们讨论过这种互换的估值方法。

另一种流行的货币互换是浮动对浮动货币互换。一方的支付数额基于美元 LIBOR（可能再加上价差）和美元本金，另一方的支付数额基于英镑 LIBOR（可能再加上价差）和英镑本金。还有一种互换是交叉货币利率互换，其中以一种货币的浮动利率交换另一种货币的固定利率。

浮动对浮动和交叉货币利率互换可以用“假定远期利率将实现”的方法来估值。假定每种货币的未来 LIBOR 等于当前的远期利率。这样就能确定每种货币的现金流。美元现金流以美元 LIBOR 零息率曲线贴现，英镑现金流以英镑 LIBOR 零息率曲线贴现。根据当前的汇率，把得到的两个现值转换成通常使用的货币。

有时对这些过程进行调整，以便反映市场的真实情况。理论上，一个新的浮动对浮动互换应该包括把一种货币的 LIBOR 交换为另一种货币的 LIBOR (不加价差)。现实中，宏观经济效应带来价差。因此，金融机构经常调整它们使用的贴现率。举一个例子，假设市场状况是，所有期限的浮动对浮动互换中美元 LIBOR 交换为日元 LIBOR 减去 20 个基点。在估值过程中，一个美国金融机构对美元现金流以美元 LIBOR 贴现，而对日元现金流以日元 LIBOR 减去 20 个基点所得到的利率来贴现。<sup>2</sup> 对于所有涉及美元和日元现金流的互换，金融机构都会使用这样的贴现率。

### 30.4 更为复杂的互换

接下来我们考虑一些互换，其中，“假定远期利率将实现”的方法失效。每种情形中，我们都要对远期利率做出调整。

#### 后定 LIBOR 利率的互换

标准型利率互换被设计为，一个支付日所观测到的浮动利率，将在下一个支付日支付。有时大家也交易另一种被称为后定 LIBOR 利率的互换 (LIBOR-in-arrears swap) 的金融工具。其中，一个支付日所支付的利率等于那个支付日所观测到的利率。

假设互换中的重设日为  $t_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , 并且  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ 。定义  $R_i$  为  $t_i$  至  $t_{i+1}$  期间的 LIBOR,  $F_i$  为  $R_i$  的远期值,  $\sigma_i$  为该远期值的波动率 (利率看涨期权元的价格一般隐含着  $\sigma_i$  值)。后定 LIBOR 利率的互换中，浮动利率方在  $t_i$  时刻的支付数额依赖于  $R_i$  而不是  $R_{i-1}$ 。如 27.1 节所述，估值上述支付额时，我们需要对远期利率做出凸性调整。估值过程基于的假设应该是远期利率等于：

$$F_i + \frac{F_i^2 \sigma_i^2 \tau_i}{1 + F_i \tau_i} \quad (30.1)$$

而不是  $F_i$ 。

**[例 30.2]** 在一个后定 LIBOR 利率的互换中，本金为 1 亿美元。每年收取固定利率 5%，并支付 LIBOR。在第 1、2、3、4 和第 5 年末交换支付。收益率曲线是平坦的，年利率 5% (每年计一次复利)。所有利率看涨期权元的波动率为年利率 22%。

每次支付的浮动利率的远期利率是 5%。如果这是一个常规互换而不是后定互换，那么它的价值 (忽略日算惯例等等) 将正好等于 0。因为这是一个后定互换，

<sup>2</sup> 这是一种特定的调整。如果不进行调整，交易员们在每次交易一个新的日元/美元浮动对浮动互换时，立刻会实现收益或损失。

我们应该做出凸性调整。根据方程 (30.1)，对于所有的  $i$ ，有  $F_i = 0.05$ ,  $\sigma_i = 0.22$  以及  $\tau_i = 1$ ，凸性调整使得  $t_i$  时刻的利率应该从 0.05 调整到：

$$0.05 + \frac{0.05^2 \times 0.2^2 \times 1 \times t_i}{1 + 0.05 \times 1} = 0.05 + 0.000115t_i$$

第 1、2、3、4 和第 5 年末支付的浮动利率分别为 5.0115%、5.0230%、5.0345%，5.0460% 和 5.0575%。第一个支付日的净交换额等价于 1 亿美元的 0.0115% 的现金流出，即 \$11 500。可以类似地计算出其他交换对应的净现金流出。互换的价值为：

$$-\frac{11\ 500}{1.05} - \frac{23\ 000}{1.05^2} - \frac{34\ 500}{1.05^3} - \frac{46\ 000}{1.05^4} - \frac{57\ 500}{1.05^5}$$

即 -\$144 514。

## CMS 和 CMT 互换

一个固定期限利率互换 (CMS) 中浮动利率等于某个期限互换的互换率。例如，一个 CMS 互换中，每 6 个月支付浮动利率等于 5 年期互换率。通常存在时滞，所以某一支付日的支付利率等于前一个支付日观察到的互换率。假设利率的重设时间分别为  $t_0, t_1, t_2, \dots$ ，支付时间为  $t_1, t_2, t_3, \dots$ ， $L$  为名义本金。 $t_{i+1}$  时刻的浮动支付额为

$$\tau_i L S_i$$

其中， $\tau_i = t_{i+1} - t_i$  和  $S_i$  是  $t_i$  时刻的互换率。

假设  $y_i$  是互换率  $S_i$  的远期值。为了估值  $t_{i+1}$  时刻的支付额，需要对远期互换率进行凸性调整。那么互换率被设定为：

$$y_i - \frac{1}{2} y_i^2 \sigma_{y,t_i}^2 \frac{G''_i(y_i)}{G'_i(y_i)} - \frac{y_i \tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i} \sigma_{F,i} t_i}{1 + F_i \tau_i} \quad (30.2)$$

而不是  $y_i$ 。上述表达式中， $\sigma_{y,i}$  是远期互换率的波动率， $F_i$  是当前的  $t_i$  至  $t_{i+1}$  期间的远期利率， $\sigma_{F,i}$  是这个远期利率的波动率， $\rho_i$  是远期互换率和远期利率之间的相关系数。 $G_i(x)$  是  $t_i$  时刻的债券价格，它是收益率  $x$  的函数。该债券的息票率为  $y_i$ ，债券的有效期和支付频率和 CMS 对应的互换相互一致。 $G'_i(x)$  和  $G''_i(x)$  是  $G_i$  关于  $x$  的一阶导数和二阶导数。互换期权隐含波动率  $\sigma_{y,i}$ ，利率看涨期权元的价格隐含波动率  $\sigma_{F,i}$ ，相关系数  $\rho_i$  可以从历史数据估计。

式 (30.2) 包括凸性调整和时刻调整。

$$-\frac{1}{2} y_i^2 \sigma_{y,t_i}^2 \frac{G''_i(y_i)}{G'_i(y_i)}$$

类似于我们在 27.1 节的例 27.2 中计算的项。它的基本假设是，互换率  $S_i$  只和  $t_i$  时刻的一次支付有关。

$$-\frac{y_i \tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i} \sigma_{F,i} t_i}{1 + F_i \tau_i}$$

类似于我们在27.2节中计算的项。它表示了，从 $S_i$ 计算的支付额在 $t_{i+1}$ 时刻实现，而不是 $t_i$ 时刻。

**[例 30.3]** 一个6年期 CMS 互换中，收取一个5年期互换率并支付固定利率5%，名义本金为1亿美元。每半年交换支付（标的5年期互换和 CMS 互换都是这样的）。某一支付日的交换取决于前一支付日观察到的互换率。期限结构是平坦的，年利率5%，每半年计一次复利。基于5年期互换的所有期权都隐含15%的波动率，所有循环期限为6个月的利率看涨期权元有20%的隐含波动率。每个上限利率和每个互换率之间的相关系数都为0.7。

这个例子中，对于所有的*i*，有 $y_i = 0.05$ ,  $\sigma_{y,i} = 0.15$ ,  $\tau_i = 0.5$ ,  $F_i = 0.05$ ,  $\sigma_{F,i} = 0.20$ 以及 $\rho_i = 0.7$ 。并且

$$G_i(x) = \sum_{i=1}^{10} \frac{2.5}{(1+x/2)^i} + \frac{100}{(1+x/2)^{10}}$$

那么， $G'_i(y_i) = -437.603$ 且 $G''_i(y_i) = 2261.23$ 。方程(30.2)给出的所有凸性/时刻调整等于0.0001197 $t_i$ ，即每年1.197个基点，直到观测互换率之前。比如，为了估值 CMS 互换，4年后的5年期互换率应该被假定为5.0479%，而不是5%。到4.5年时收取的净现金流应该被假定为 $0.5 \times 0.000479 \times 100\,000\,000 = \$23\,940$ 。可以类似地计算其他净现金流。计算它们的现值，我们得到的互换的价值为\$159 811。

固定期限国债利率互换(CMT swap)和 CMS 互换相似，其中浮动利率等于某一指定期限的长期国债的收益率。CMT 互换的分析过程本质上和 CMS 互换相同，我们只需将 $S_i$ 定义为指定期限的长期国债的票面收益率。

## 差异互换

差异互换(differential swap, 或 diff swap)是一种利率互换，其中浮动利率是以一种货币观测的，但相应的本金是以另一种货币表示的。假设我们以货币Y观察 $t_i$ 至 $t_{i+1}$ 期间的LIBOR，对应的本金是以货币X表示的，且支付发生在 $t_{i+1}$ 时刻。定义 $V_i$ 为以货币Y表示的 $t_i$ 至 $t_{i+1}$ 期间的远期利率， $W_i$ 为 $t_{i+1}$ 期限的合约的远期汇率(以一单位货币X相应的货币Y的单位数量给出)。如果货币Y的LIBOR对应的本金是以货币Y表示的，那么我们估值现金流时，会假设LIBOR等于 $F_i$ 。根据27.3节的分析，当用于货币X表示的本金时，需要进行跨币调整。正确的估值现金流的方法应该是假设LIBOR等于

$$V_i + V_i \rho_i \sigma_{W,i} \sigma_{V,i} t_i \quad (30.3)$$

其中， $\sigma_{V,i}$ 是 $V_i$ 的波动率， $\sigma_{W,i}$ 是 $W_i$ 的波动率， $\rho_i$ 是 $V_i$ 和 $W_i$ 之间的相关系数。

**[例 30.4]** 美国和英国的零息率都稳定在年利率 5%，每年计一次复利。一个 3 年期差异互换中每年支付一次，收取美元 12 个月期 LIBOR，支付英镑 12 个月期 LIBOR，两个利率的本金都是 1 000 万英镑。在美国，所有 1 年期远期利率的波动率估计值为 20%，所有期限的远期美元/英镑汇率（每英镑对应的美元数量）的波动率为 12%，两者之间的相关系数为 0.4。

这个例子中， $V_i = 0.05$ ,  $\rho_i = 0.4$ ,  $\sigma_{w,i} = 0.12$ ,  $\sigma_{v,i} = 0.2$ 。在计算取决于  $t_i$  时刻观测到的 1 年期美元利率的浮动利率现金流时，应该假设该利率将等于

$$0.05 + 0.05 \times 0.4 \times 0.12 \times 0.2 \times t_i = 0.05 + 0.00048t_i$$

这说明估值过程中应该假设：互换中第 1、2、3 年的净现金流分别为 0、4 800、9 600 英镑。因此，互换的价值为

$$\frac{0}{1.05} + \frac{4800}{1.05^2} + \frac{9600}{1.05^3} = 12\,647$$

即 12 647 英镑。

## 30.5 权益性互换

权益性互换中，一方承诺在某个名义本金基础上支付基于某个股票指数的收益，另一方承诺支付基于某个名义本金的固定或浮动收益。权益性互换允许基金经理不需买入或卖出股票，就能加大或减少他们对于某个指数的风险暴露。权益性互换是基于某个指数的远期合约的一揽子组合，它符合市场需求且非常方便。

股票指数通常是总收益指数，其中红利再投资到组成指数的股票中去。商业剪影 30.3 中给出了假想的权益性互换的结构摘录。其中，以 S&P 500 的 6 个月期收益来交换 LIBOR。互换合约双方的名义本金都是 1 亿美元，每 6 个月进行支付。

对于如商业剪影 30.3 中的权益对浮动互换，它的初始价值为 0。这是因为金融机构不需要任何成本就能“复制”一方的现金流。方法是：在每个支付日以 LIBOR 借入本金，并把它重新投资到指数，直到下一次支付日，任何红利也都被再投资。类似的讨论说明互换在每次支付日之后的价值刚好等于 0。

支付日之间，我们需要估值下一次支付日的权益现金流和 LIBOR 现金流。LIBOR 现金流已在上一次的重设日确定，因此估值非常容易。权益现金流的价值应该是  $LE/E_0$ 。其中， $L$  是本金， $E$  是股票指数的当前值， $E_0$  是上一次重设日股票指数的价值。<sup>3</sup>

<sup>3</sup> 关于更详细的讨论，参照作者网站上的技术说明 19。

### 商业剪影 30.3 一个假想的权益性互换结构摘录

|             |   |
|-------------|---|
| 交易日期        | 2004年1月5日   |
| 生效日期        | 2004年1月11日  |
| 工作日约定(所有日期) | 下一工作日   |
| 节假日日历       | 美国  |
| 中止日期        | 2009年1月11日  |
|             |   |
| 权益额         |   |
| 权益支付方       | 微软公司  |
| 权益本金        | 1亿美元  |
| 权益指数        | S&P 500指数总收益  |
| 权益支付额       | 100 $(I_1 - I_0) / I_0$ , 其中 $I_1$ 是支付日的指数水平, $I_0$ 是前一个支付日的指数水平。关于第一个支付日, $I_0$ 是 2004 年 1 月 11 日的指数水平 |
|             |   |
| 权益支付日期      | 每个 7 月 11 日和 1 月 11 日, 从 2004 年 7 月 11 日起计至并包含 2009 年 1 月 11 日  |
|             |   |
| 浮动额         |   |
| 浮动利率付款方     | 高盛公司  |
| 浮动利率名义本金    | 1亿美元  |
| 浮动利率        | 美元 6 个月期 LIBOR  |
| 浮动利率日算惯例    | 实际天数/360  |
| 浮动利率支付日期    | 每个 7 月 11 日和 1 月 11 日, 从 2004 年 7 月 11 日起计至并包含 2009 年 1 月 11 日  |

## 30.6 包含嵌入期权的互换

某些互换包含嵌入期权。本节中, 我们考虑几种常见的例子。

### 条件累计互换

条件累计互换 (accrual swap) 中, 只有当浮动参考利率在某一范围内变化时, 其中一方的利息才会被累计。有时在互换整个有效期内该范围是保持不变的, 而有时定期地重新设定这一范围。

作为条件累计互换的一个简单例子, 我们考虑一个交易。其中, 每季度以固定利率  $Q$  交换 3 个月期 LIBOR。假设只有在 3 个月期 LIBOR 小于年利率 8% 的日期中, 固定利率才会被累计。假设本金为  $L$ , 在一个普通互换中, 固定利率支付方在每个支付日支付  $QLn_1/n_2$ 。其中,  $n_1$  是前一季度的天数,  $n_2$  是一年的天数 (这里

假设了日算惯例是实际天数/实际天数)。在条件累计互换中, 上述值变成  $QLn_3/n_2$ 。其中,  $n_3$  是前一季度中 3 个月期 LIBOR 小于 8% 的天数。在每个 3 个月期 LIBOR 大于 8% 的日期中, 固定利率支付方每天节省  $QL/n_2$ 。<sup>4</sup> 因此, 固定利率支付方的头寸可看作是普通互换加上一系列两值期权, 每个两值期权对应互换有效期内每一天。当 3 个月期 LIBOR 大于 8% 时, 两值期权的损益为  $QL/n_2$ 。

为了一般化, 我们假设 LIBOR 截止率 (刚才的例子中是 8%) 为  $R_K$ , 每  $\tau$  年交换支付。考虑互换有效期内的第  $i$  天, 假设  $t_i$  是现在到第  $i$  天之间的时间长度。假设第  $i$  天的  $\tau$  年期 LIBOR 为  $R_i$ 。那么,  $R_i < R_K$  时, 利率被累计。定义  $F_i$  为  $R_i$  的远期值,  $\sigma_i$  为  $F_i$  的波动率 (后者从即期利率看涨期权无波动率中估计得出)。使用常规的对数正态分布假设, 在“关于  $t_i + \tau$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世界”中, LIBOR 大于  $R_K$  的概率是  $N(d_2)$ , 其中

$$d_2 = \frac{\ln(F_i/R_K) - \sigma_i^2 t_i / 2}{\sigma_i \sqrt{t_i}}$$

两值期权的损益在第  $i$  天后面的互换支付日实现。我们假设这个时间是  $s_i$ 。在“关于  $s_i$  时刻到期的零息票债券的远期风险中性世界”中 LIBOR 大于  $R_K$  的概率是  $N(d_2^*)$ , 其中  $d_2^*$  的计算公式和  $d_2$  一样, 但是需要对  $F_i$  进行小量时间调整, 这是为了反映时间  $t_i + \tau$  和时间  $s_i$  之间的区别。

第  $i$  天对应的两值期权的价值为

$$\frac{QL}{n_2} P(0, s_i) N(d_2^*)$$

在互换有效期内的每一天计算上述表达式的值, 再进行加总, 得到两值期权的总价值。这里的时刻调整 (使得  $d_2$  被替换成  $d_2^*$ ) 非常小, 实际应用中常常忽略。

## 可撤销互换

可撤销互换是一种标准型利率互换, 其中一方有权在一个或多个支付日终止合约。终止互换合约类似于获得抵消 (或相反的) 合约。考虑微软和高盛之间的互换, 如果微软有权撤销, 那么微软可以将该互换看作为普通互换加上获得抵消合约选择权的多头。如果高盛有可撤销权, 微软持有一个普通互换加上获得抵消合约选择权的空头。

如果只有一个终止日, 该可撤销互换等价于普通互换加上一个欧式互换期权的头寸。例如, 考虑一个 10 年期互换, 其中, 微软收取 6%, 支付 LIBOR。假设微软可以选择在第 6 年末终止合约。该互换等价于普通 10 年期互换 (收取 6% 支付 LIBOR) 加上基于支付 6% 收取 LIBOR 的 4 年期互换的 6 年期欧式期权的多头 (后者就是所谓的  $6 \times 4$  欧式期权)。估值欧式互换期权的标准市场模型已在第 26

<sup>4</sup> 通常的惯例是, 如果某天是节假日, 那么假定适用于当天的利率等于之前离这天最近工作日的利率。

章中描述过。

当互换在一系列不同的支付日可被终止时，它等价于普通互换加上百慕大互换期权。例如，考虑微软签订了这样的 5 年期互换合约：收取 6% 支付 LIBOR，每半年支付一次。假设另一方有权在第 2 年至第 5 年之间的支付日上终止合约。该互换等价于普通互换加上基于收取 6% 支付 LIBOR 的 5 年期互换的百慕大互换期权空头。该百慕大互换期权可在第 2 年至第 5 年之间的任何支付日上提前执行。第 28 章和第 29 章中我们讨论过估值百慕大互换期权的方法。

## 可撤销复利互换

有时复利互换也可在一些指定的支付日上提前终止。终止时，浮动利率支付方支付到终止时刻的浮动额的滚存额，固定利率支付方支付到终止时刻的固定额的滚存额。

估值可撤销复利互换时可以利用一些技巧。首先假设浮动利率是 LIBOR，并以 LIBOR 滚存。假设互换到期之时，固定方和浮动方支付互换的本金。这与标准互换中从表 7.1 变化到表 7.2 的情况是类似的。这并不改变互换价值，并保证在支付日，对于浮动方的价值总是等于名义本金。为了做撤销决策，我们只需要看固定利率方。我们构建如第 28 章中所述的利率树图。估值固定方的价值时，我们在树图以常规方式进行倒推计算。在每个可撤销互换的节点上，我们检验维持互换合约和终止合约之间，哪一选择是最优的。撤销互换的结果是，固定方的价值等于账面价值。如果我们支付固定利率收取浮动利率，则我们的目标是使固定方的价值最小化；如果收取固定利率支付浮动利率，则我们的目标是使固定方的价值最大化。

当浮动方是 LIBOR 加上价差再以 LIBOR 滚存时，我们可以在固定方减去对应于价差利息的现金流，而不是对浮动方加上该现金流。那么，估值这些期权的过程和没有价差的情况相同。

以 LIBOR 加上价差的利率滚存时，一种近似方法如下：<sup>5</sup>

1. 假设远期利率将实现，对每个可撤销日，计算互换对于浮动方的价值
2. 假设浮动利率是 LIBOR 且以 LIBOR 滚存，对每个可撤销日，计算互换对于浮动方的价值
3. 定义步骤 1 结果超过步骤 2 结果的部分为每个可撤销日的“价差的价值”
4. 以之前的方法处理期权。在决定是否执行可撤销选择权时，从固定方的价值减去价差的价值

---

<sup>5</sup> 这个方法并不完全准确的原因在于，其中假设了，以不同于 LIBOR 的利率滚存未来支付额的情况，不影响是否执行撤销选择权的决定。

### 商业剪影 30.4 宝洁公司和信孚银行之间的奇异交易

1993年11月2日宝洁公司(P&G)和信孚银行(BT)之间签订的“5/30”互换是一种非常奇异的互换。这是每半年支付一次的5年期互换。名义本金为2亿美元。信孚银行支付宝洁公司5.30%p.a.。宝洁公司支付信孚银行平均30天期商业票据(CP)利率减去75个基点再加上一个价差。平均商业票据利率由前一个付息期间内每天的30天期商业票据利率观测值计算，然后再取平均值。

第一个支付日(1994年5月2日)的价差为0。对于剩下的9个支付日，价差等于：

$$\max \left[ 0, \frac{98.5 \left( \frac{\text{5年期CMT\%}}{5.78\%} \right) - (\text{30年期TSY价格})}{100} \right]$$

其中，5年期CMT是固定期限国债收益率(即5年期中期国债的收益率，由美国联邦储备委员会发布)。30年期TSY价格是2023年8月到期的6.25%长期国债的现金债券价格买价和卖价的均值。注意，根据上述公式计算的价差是以十进制的小数表示的，而不是以基点表示的。如果公式给出0.1，而商业票据利率是6%，那么宝洁公司支付15.25%。

宝洁公司希望价差停留在0附近，它可以把固定利率5.30%的资金交换成商业票据利率减去75个基点的资金。实际上，1994年初，利率急剧上升，债券价格下降，该互换就变得非常昂贵(参照习题30.10)。

## 30.7 其他互换

本章中讨论了在市场交易的一小部分非标准互换。实际应用中，金融工程师的想像力和公司财务主管关于创新风险管理工具的需求带来了非常多的金融工具在交易。

20世纪90年代中期，在美国非常流行的一种互换是指数分期偿付互换(有时也被称为指数本金互换)。该互换中本金递减的方式取决于利率水平。利率水平越低，本金减少越多。刚开始，指数分期偿付互换的固定方被设计为“复制”(至少近似地)MBS的投资者获得的收益(提前偿还选择权被考虑进去之后)。因此，该互换以某个MBS的收益交换了浮动利率收益。

商品互换越来越受欢迎。一家每年消耗10万桶石油的公司同意在未来10年中，每年支付400万美元并收取100 000S。其中S是每桶石油的市场价格。这一协议的作用是把公司的石油成本锁定在每桶\$40。一个石油生产商也许同意作为互换的另一方，锁定它未来的销售价格在每桶\$40。我们在第23章中已讨论过能源衍生品。

互换市场中最近的一个创新是波动率互换。其中支付额依附于某个股票(或其他一些资产)的波动率。假设本金为L，在每个支付日，一方支付L $\sigma$ ，其中的

$\sigma$ 是历史波动率，是从前一次付息期间的每日股票观测值计算的。另一方支付 $L\sigma_k$ ，其中的 $\sigma_k$ 是预先指定的常数波动率水平。方差互换、相关系数互换以及协方差互换的定义也是类似的。

本书的其他部分中也讨论了很多其他种类的互换。如第20章中的资产互换，第21章中的总收益互换和不同种类的信用违约互换。

## 奇异交易

一些互换的损益的计算方式非常奇异。一个例子是宝洁公司和信孚银行在1993年进行的交易（参见商业剪影30.4）。因为它后来成为诉讼对象，所以该交易的细节公布在媒体上了。<sup>6</sup>

## 小结

互换是用途非常广泛的金融工具。很多互换可以按如下方式估值：(a)假设LIBOR(或其他浮动参考利率)将等于其远期值(b)把现金流以LIBOR/互换率贴现。能这样估值的互换包括标准型利率互换、绝大多数货币互换、本金以预先决定的方式变化的互换、两方的支付日不同的互换以及复利互换。

估值某些互换时，需要对远期利率进行调整。这些调整被称为凸性调整、时刻调整以及跨币调整。需要进行这种调整的互换包括后定LIBOR利率的互换、CMS/CMT互换以及差异互换。

权益性互换中以某个股票指数的收益交换固定或浮动利率。它们通常被设计为支付日过后价值正好等于0。但是两个支付日之间它们的价值并不为0。

某些互换包含嵌入期权。一个条件累计互换等价于普通互换加上大量两值期权(互换有效期内每天一个两值期权)的组合。可撤销互换等价于普通互换加上一个百慕大互换期权。

## 参考读物

- Chance, D., and Rich, D., "The Pricing of Equity Swap and Swaptions," *Journal of Derivatives* 5, 4 (Summer 1998): 19-31.
- Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., and Zou, J., "A Guide to Volatility and Variance Swaps," *Journal of Derivatives* 6, 4 (Summer 1999): 9-32.
- Smith D.J., "Aggressive Corporate Finance: A Close Look at the Procter and Gamble-Bankers Trust Leveraged Swap," *Journal of Derivatives*, 4, 4 (Summer 1997): 67-79.

<sup>6</sup>参见D.J.Smith, "Aggressive Corporate Finance: A Close Look at the Procter and Gamble-Bankers Trust Leveraged Swap," *Journal of Derivatives* 4, 4 (Summer 1997): 67-79.

## 问题和习题

- 30.1 计算商业剪影 30.1 中互换的所有固定现金流以及对应的时刻。假设用日算惯例确定目标支付日，而不是用实际支付日。
- 30.2 假设一个互换合约中，以固定利率交换双倍 LIBOR。我们可以用“远期利率将实现”的假设对该互换进行定价吗？
- 30.3 2 年期固定对浮动复合互换中，本金为 1 亿美元，每半年支付一次，收取固定利率，支付浮动利率。固定利率是 8%，以 8.3% 滚存（两个利率都是每半年计一次复利）。浮动利率为 LIBOR 加上 10 个基点，以 LIBOR 加上 20 个基点滚存。LIBOR 零息率曲线是平坦的，每半年计一次复利的 8%。该复合互换的价值为多少？
- 30.4 一个 5 年期互换中，以通常的方式支付 LIBOR，而收取的 LIBOR 则以另一方收取的 LIBOR 滚存。两方的本金都是 1 亿美元。支付方的支付频率和接受方的滚存频率都是每 6 个月一次。收益率曲线是平坦的，每半年计一次复利的 5%。该互换的价值为多少？
- 30.5 请解释为什么一家银行在贴现货币互换的现金流时使用的贴现率和 LIBOR 稍微不同。
- 30.6 考虑 30.4 节的例 30.3。如果所有上限利率的波动率为 18%（而不是 20%），基于 5 年期互换的所有期权的波动率为 13%（而不是 15%）。请计算所有凸性/时刻调整。估值互换时，应该使用的 3 年后的 5 年期互换率为多少？互换的价值为多少？
- 30.7 请解释标准利率互换和 30.2 节的复利互换为什么可用“远期利率将实现”规则来进行估值，而 30.4 节的后定 LIBOR 利率的互换中不行。
- 30.8 课文中讨论的条件累计互换中，浮动参考利率在某一水平以下时，固定方的利息才会被累计。如果浮动参考利率大于某一水平，小于另一水平时，固定方的利息才会被累计，那么分析师们会怎么处理这种扩展情形？

## 课后练习

- 30.9 美国和澳大利亚的 LIBOR 零息率曲线都是平坦的，分别为 5% 和 10%（两者都是每年计一次复利）。在一个 4 年期互换中，接受澳元 LIBOR，支付 9%，两个本金都是 1 000 万美元。每年交换支付。澳大利亚的所有 1 年期远期利率的波动率为 25%，所有期限的远期美元/澳元汇率（一美元对应的澳元数量）为 15%，两者之间的相关系数为 0.3。该互换的价值为多少？
- 30.10 对于下述情形，分别估计 30.7 节的 5/30 互换中宝洁公司支付的利率。（a）CP 率为 6.5%，国债收益率曲线是平坦的，每半年计一次复利的 6%；（b）CP 率为 7.5%，国债收益率曲线是平坦的，每半年计一次复利的 7%
- 30.11 假设你与一位不太精明的交易对手交易一个后定 LIBOR 利率的互换，你的交易对手不进行凸性调整。为了利用这一情况，你应该支付固定利率还是接受固定利率？你应该怎样构造互换，包括有效期和支付频率？  
考虑这样的情形：收益率曲线是平坦的，每年 10%（每年计一次复利）。所有上限利率的波动率为 18%。后定 LIBOR 利率的互换中，每年支付一次，而且互换的有

效期为 (a) 5 年; (b) 10 年; (c) 20 年时, 精明的交易者和不精明的交易者估计的这一后定 LIBOR 利率的互换价值之间的区别。

30.12 假设 LIBOR 零息率曲线是平坦的, 每年计一次复利的 5%。一个 5 年期互换中, 公司 X 支付固定利率 6%, 收取 LIBOR。3 年后的 2 年期互换率的波动率为 20%。

(a) 该互换的价值为多少?

(b) 如果公司 X 具有 3 年后可撤销合约的权利, 利用 DerivaGem 软件计算该互换的价值。

(c) 如果交易对手具有 3 年后可撤销合约的权利, 利用 DerivaGem 软件计算该互换的价值。

(d) 如果双方都具有 3 年后可撤销合约的权利, 该互换的价值为多少?



## 实物期权

到现在为止，我们一直在考虑金融资产的估值方法。本章中我们对前面章节中讲述过的一些理念进行扩展，评估实物资产（如土地、建筑物、厂房和设备等）的资本投资机会。通常这些投资机会中都嵌入了选择权（如扩张投资的选择权、放弃投资的选择权、延迟投资的选择权等）。这些选择权很难用传统资本投资评估方法来估值。所谓的实物期权方法，就是以期权定价理论处理这些问题。

本章刚开始讲述传统的实物资产评估方法，并说明它很难正确地估值内嵌选择权。我们解释如何把风险中性估值方法扩展到实物资产情形，并举很多例子来说明在一系列不同情形下如何应用这个方法。

### 31.1 资本投资评估

估值潜在资本投资方案的传统方法是所谓的净现值（NPV）方法。一个方案的 NPV 是预期未来现金流变动的现值。用来计算现值的贴现率是“风险调整贴现率”，它的选择依据是要反映方案的风险。随着方案的风险程度提高，贴现率也会上升。

举一个例子，考虑一笔投资，成本为 1 亿美元，持续 5 年。每年的预期现金流估计值为 2 500 万美元。如果风险调整贴现率为 12%（连续复利），则投资的净现值为（百万美元）。

$$-100 + 25e^{-0.12 \times 1} + 25e^{-0.12 \times 2} + 25e^{-0.12 \times 3} + 25e^{-0.12 \times 4} + 25e^{-0.12 \times 5} = -11.53$$

计算出的负 NPV 表示执行该方案会减少公司对于股东的价值，因此不应该执行该方案。正 NPV 表明应该执行这一方案，它会增加股东权益。

风险调整贴现率应该是公司、公司股东或投资本身要求的收益率。可以用很多方法计算该值。一种经常使用的方法是利用资本资产定价模型。计算步骤如下：

1. 取一系列公司样本，它们的主要业务和我们的方案类似
2. 计算这些公司的 beta，取平均值，得到该方案的代用 beta
3. 设定要求收益率等于无风险利率加上代用 beta 乘以市场证券组合超过无风险利率的超额收益率

运用传统 NPV 方法时，碰到的难点是很多方案都包含内嵌选择权。例如，一

家公司考虑建设一个新的厂房来制造一种新产品。通常，这家公司有这样的选择权，如果事情不顺利，它可以放弃这一方案。公司同样也具有选择权，如果对产品的需求超过预期，它可以扩展厂房。这些选择权的风险性质通常和初级方案非常不一样，应该使用不同的贴现率。

为了解释这个问题，我们回顾第 11 章开始部分的例子。一个股票的当前价格为 \$20。3 个月后价格会变成 \$22 或 \$18。根据风险中性估值方法，执行价格为 21、基于该股票的 3 个月期看涨期权的价格为 0.633。第 11 章的注释 1 说明，如果现实世界中，投资者关于股票的要求预期收益率为 16%，那么该看涨期权的要求收益率为 42.6%。类似的分析说明，如果期权是看跌而不是看涨，那么期权的要求预期收益率为 -52.5%。这些分析说明，如果用传统 NPV 方法估值看涨期权，正确的贴现率应该是 42.6%，用来估值看跌期权，正确的贴现率应该是 -52.5%。但是不太容易确定这些贴现率（我们知道这是因为我们有其他估值期权的方法）。类似地，估计扩张、放弃以及其他选择权相关现金流的风险调整贴现率也是非常困难的事情。这就是定价金融资产期权的风险中性估值原理被扩展到实物资产期权情形的原因。

传统 NPV 方法中存在的另一个问题是如何估计初级方案（即没有内嵌选择权的方案）适用的风险调整贴现率。之前用上述三步过程估计代用 beta 的公司本身都有扩张或放弃选择权。它们的 beta 反映这些选择权，因此并不适用于初级方案的 beta 估计。

## 31.2 风险中性估值框架的扩展

25.1 节中我们定义了一个变量  $\theta$  的风险的市场价格：

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (31.1)$$

其中， $r$  是无风险利率， $\mu$  是只依附于  $\theta$  的可交易证券的收益率， $\sigma$  是其波动率。如 25.1 节所述，不管选择哪个可交易证券，我们得到的风险的市场价格  $\lambda$  是相同的。

假设一个实物资产取决于多个变量  $\theta_i$  ( $i = 1, 2 \dots$ )。令  $m_i$  和  $s_i$  为  $\theta_i$  的预期增长率和波动率，那么

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dz_i$$

其中， $z_i$  是维纳过程。定义  $\lambda_i$  为  $\theta_i$  的风险的市场价格。我们可以扩展风险中性估值方法，依附于  $\theta_i$  的任何资产可以按以下步骤估值：<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 为了解释这与常规的风险中性估值方法相互一致，假设  $\theta_i$  为一个不支付红利股票的价格。因为它是可交易证券的价格，根据式 (31.1)，有  $(m_i - r)/s_i = \lambda_i$ ，即  $m_i - \lambda_i s_i = r$ 。因此，设定股票收益率等于无风险利率，就能调整预期增长率。关于一般结论的证明，参照作者网站上的技术说明 20。

1. 把每个  $\theta_i$  的预期增长率从  $m_i$  减小到  $m_i - \lambda_i s_i$
2. 以无风险利率贴现现金流

**[例 31.1]** 某个城市中，商业房地产的租借费用以 5 年期租借协议中每平方英尺的支付金额来报价。当前的费用是每平方英尺 \$30。费用的预期增长率是 12%p.a.，波动率为 20%p.a.，风险的市场价值为 0.3。当前，一家公司可以以 100 万美元购买一种期权，2 年后开始的 5 年期间内可以按每平方英尺 \$35 租借 10 万平方英尺。无风险利率为 5%p.a.（假设为常数）。定义  $V$  为 2 年后办公场所每平方英尺的报价。我们简单地假设，租金每年预先支付。因此，该期权的损益为：

$$100\ 000 A \max(V - 35, 0)$$

其中  $A$  是年金因子，

$$A = 1 + 1 \times e^{-0.05 \times 1} + 1 \times e^{-0.05 \times 2} + 1 \times e^{-0.05 \times 3} + 1 \times e^{-0.05 \times 4} = 4.5355$$

风险中性世界中的期望损益为：

$$100\ 000 \times 4.5355 \times \hat{E}[\max(V - 35, 0)] = 453\ 550 \times \hat{E}[\max(V - 35, 0)]$$

其中， $\hat{E}$  是风险中性世界中的期望值。利用方程 (13A.1) 的结论，这等于

$$453\ 550 [\hat{E}(V)N(d_1) - 35N(d_2)]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[\hat{E}(V)/35] + 0.2^2 \times 2/2}{0.2\sqrt{2}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[\hat{E}(V)/35] - 0.2^2 \times 2/2}{0.2\sqrt{2}}$$

风险中性世界中，商业房地产费用的预期增长率为  $m - \lambda s$ 。其中  $m$  是现实世界增长率， $s$  是波动率， $\lambda$  是风险的市场价格。这个例子中， $m = 0.12$ ， $s = 0.2$  以及  $\lambda = 0.3$ 。因此，预期风险中性增长率为 0.06，即 6%p.a.。那么， $\hat{E}(V) = 30e^{0.06 \times 2} = 33.82$ 。以该值替换上述表达式，风险中性世界中的预期损益为 150.15 万美元。以无风险利率贴现，期权价值为  $150.15e^{-0.05 \times 2} = 135.86$  万美元。这说明，公司会愿意以 100 万美元购买期权。

### 31.3 风险的市场价格估计

以实物期权方法评估一个投资时，不需要以 31.1 节中讲述的方式估计风险调整贴现率，但是确实需要估计所有随机变量的风险的市场价格参数。如果我们能得到某个变量的市场数据，就能使用资本资产定价模型估计该变量的风险的市场价格。为了解释这一过程，我们考虑只依附于这个变量的投资资产。定义：

- $\mu$ : 投资资产的预期收益率
- $\sigma$ : 投资资产收益的波动率
- $\lambda$ : 变量的风险的市场价格
- $\rho$ : 变量变化百分比和包含很多股票市场价格指数的收益之间的瞬态相关系数
- $\mu_m$ : 包含很多股票的市场指数的预期收益率
- $\sigma_m$ : 包含很多股票的市场指数的收益率的波动率
- $r$ : 短期无风险利率

因为投资资产只依附于这个市场变量，投资资产收益和股票市场价格指数收益之间的瞬态相关系数也是  $\rho$ 。根据资本资产定价模型的连续时间形式，我们得到

$$\mu - r = \frac{\rho\sigma}{\sigma_m}(\mu_m - r)$$

根据方程 (31.1),  $\mu - r$  的另一种表达式为

$$\mu - r = \lambda\sigma$$

那么

$$\lambda = \frac{\rho}{\sigma_m}(\mu_m - r) \quad (31.2)$$

该方程可用来估计  $\lambda$ 。

**[例 31.2]** 逐季度分析公司的销售额得到的历史数据说明，销售额变化百分比和 S&P 500 指数收益之间的相关系数为 0.3。S&P 500 的波动率为 20%p.a.。根据历史数据，S&P 500 指数的超过无风险利率的预期超额收益为 5%。根据方程 (31.2)，公司销售额的风险的市场价格为

$$\frac{0.3}{0.2} \times 0.05 = 0.075$$

如果我们考虑的特定变量不存在相应的历史数据，可以代用其他类似的变量。例如，建造一个厂房生产新商品，此时可以收集类似产品的销售额数据。并且，假设新产品和市场指数之间的相关系数等于其他类似产品和市场指数之间的相关系数。某些情形中，需要主观判断方程 (31.2) 中的  $\rho$  估计值。如果一位分析师确信某个变量和市场指数的表现没有任何关联，那么该变量的风险市场价格应该等于 0。

对于某些变量，我们并不需要计算风险的市场价格，因为我们可以直接估计变量在风险中性世界中遵循的过程。例如，如果变量是某个投资资产的价格，风险中性世界中该变量的总收益率等于无风险利率。如果变量是短期利率  $r$ ，第 28 章中说明了如何从初始利率期限结构估计风险中性过程。本章的后面部分中，我们将说明如何从期货价格估计一个商品的风险中性过程。

### 31.4 企业估值的应用

传统企业估值方法，如将市盈率乘数应用于当前收益，往往不适用于新企业的估值。一般地，一家公司在前几年中会有负的损益，因为公司企图获得市场份额以及建立客户关系。估值这样的公司时，我们应该估计多种情形下的公司未来损益和现金流。

公司的未来现金流通常依附于一系列的变量，如销售额、和销售额成正比的可变成本、固定成本等等。对于一些变量，单个估计值就足够了。对于关键变量，我们应该如前两节中讲述的一样，估计风险中性随机过程。随后，可以用蒙特卡罗方法模拟不同情形下的风险中性世界中每年的净现金流。在某些情形下，公司可能表现良好，而在某些情形下，公司可能破产并终止经营（模拟过程应该构建一种决定破产发生条件的规则）。以无风险利率贴现每年的预期现金流，得到公司的价值。商业剪影 31.1 中利用了这种方法估计了 Amazon.com 的价值。

### 31.5 商品价格

很多投资涉及未来商品价格相关的不确定性。通常可以直接利用期货价格估计某个商品价格的风险中性随机过程。那么，我们不必直接计算该商品的风险市场价格。

14.7 节中我们看到，在传统风险中性世界，一个商品的未来预期价格就是它的期货价格。如果我们假设商品价格的预期增长率只依附于时间，且商品价格的波动率是常数，那么商品价格  $S$  的风险中性过程为：

$$\frac{dS}{S} = \mu(t)dt + \sigma dz \quad (31.3)$$

并且

$$F(t) = \hat{E}[S(t)] = S(0)e^{\int_0^t \mu(\tau)d\tau}$$

其中， $F(t)$  是期限为  $t$  的合约的期货价格， $\hat{E}$  表示风险中性世界中的期望值。那么

$$\ln F(t) = \ln S(0) + \int_0^t \mu(\tau)d\tau$$

两边关于时间求导，得到

$$\mu(t) = \frac{\partial}{\partial t}[\ln F(t)]$$

**[例 31.3]** 假设 2005 年 7 月末的活牛期货价格（美分/磅）如下：

### 商业剪影 31.1 估值 Amazon.com

早期的一篇关于实物期权方法估值公司的论文是由施瓦茨和穆恩 (Schwartz & Moon, 2000) 发表的，其中他们考虑的是 1999 年末的 Amazon.com。他们假设了公司的销售收入  $R$  和收入增长率  $\mu$  遵循如下的随机过程：

$$\frac{dR}{R} = \mu dt + \sigma(t) dz_1$$

$$d\mu = \kappa(\bar{\mu} - \mu)dt + \eta(t)dz_2$$

他们假设了两个维纳过程  $dz_1$  和  $dz_2$  互不相关，基于可得到的数据，对  $\sigma(t)$ 、 $\eta(t)$ 、 $\kappa$  和  $\bar{\mu}$  也做出了合理的假设。

他们假设了销售商品成本等于销售额的 75%，其他支付等于销售额的 19%，固定支出为每季度 7 500 万美元。初始销售水平为 3.56 亿美元，初始赋税亏损结转为 5.59 亿美元，假设的税率是 35%。用前一节中描述的历史数据法，估计风险市场价格  $R$ 。假设  $\mu$  的风险市场价格为零。

分析的时间范围是 25 年，假设了公司最终价值等于 10 乘以税前经营利润。初始现金头寸是 9.06 亿美元，如果现金余额变成负值，那么认为公司破产了。

使用蒙特卡罗模拟在风险中性世界中创建了不同的未来情形。评估各种情形时也考虑了可能发生的可转换债券的执行和可能发生的雇员股票期权的执行。以无风险利率贴现净现金流，得到的现值被认为是公司对股东的价值。

根据这些假设，施瓦茨和穆恩估计的 1999 年末 Amazon.com 股份的价值为 \$12.42。那一时刻的市价为 \$76.125 (市价在 2000 年急剧下降了)。实物期权方法的主要优点是，它和一些重要假设相互一致。施瓦茨和穆恩发现股份价值估计值对增长率的波动率  $\eta(t)$  非常敏感。而这正是一个重要的选择性的来源。 $\eta(t)$  的一个小幅度增长可以带来更多的选择性机会，也使得 Amazon.com 股份的价值大幅度上升。

|          |       |
|----------|-------|
| 2005年8月  | 62.20 |
| 2005年10月 | 60.60 |
| 2005年12月 | 62.70 |
| 2006年2月  | 63.37 |
| 2006年4月  | 64.42 |
| 2006年6月  | 64.40 |

这些数据可以用来估计活牛价格在风险中性世界上的预期增长率。例如，使用方程 (31.3) 的模型，在风险中性世界中，活牛价格在 2005 年 10 月到 12 月期间的预期增长率为

$$\ln\left(\frac{62.70}{60.60}\right) = 0.034$$

即连续复利的 3.4%。如果按年计算，就是 20.4%p.a.。

**[例 31.4]** 假设活牛的期货价格如例 31.3。某个饲养计划中，现在要投资 10 万美元，3 个月、6 个月、9 个月后都要支出 2 万美元。我们希望到年末有额外的活牛可以出售。主要存在两种不确定性：可供销售的额外活牛的磅数和每磅价格。预期磅数为 30 万。根据例 31.3，风险中性世界中，1 年后的预期活牛价格为每磅 64.40 美分。假设无风险利率是 10%p.a.，那么投资价值为（千美元）：

$$-100 - 20e^{-0.1 \times 0.25} - 20e^{-0.1 \times 0.50} - 20e^{-0.1 \times 0.75} + 300 \times 0.644e^{-0.1 \times 1} = 17.729$$

其中假设了可供销售的额外活牛数量不确定性的系统风险为 0，并且可供销售的活牛数量和活牛价格不相关。

### 均值回复过程

有些人可能认为方程 (31.3) 中的商品价格过程过于简单。现实中，绝大多数商品价格遵循均值回复过程。它们倾向于被拉回到某个中心值。比方程 (31.3) 更为实际的商品价格  $S$  的风险中性过程是

$$d\ln S = [\theta(t) - a\ln S]dt + \sigma dz \quad (31.4)$$

上述过程表现了均值回复特性，它与第 28 章的短期利率的对数正态分布过程类似。可用 28.7 节中的三叉树图方法构建  $S$  的树图，并决定使  $F(t) = \hat{E}[S(t)]$  的  $\theta(t)$  值。

我们通过构建石油价格的三个时间步的树图来解释上述行为过程。假设石油的即期价格为每桶 \$20，1 年期、2 年期和 3 年期期货价格分别为 \$22、\$23 和 \$24。假设方程 (31.4) 中  $a = 0.1$ ,  $\sigma = 0.2$ 。我们首先定义变量  $X$ ，它的初始值为 0，它的过程如下：

$$dX = -adt + \sigma dz \quad (31.5)$$

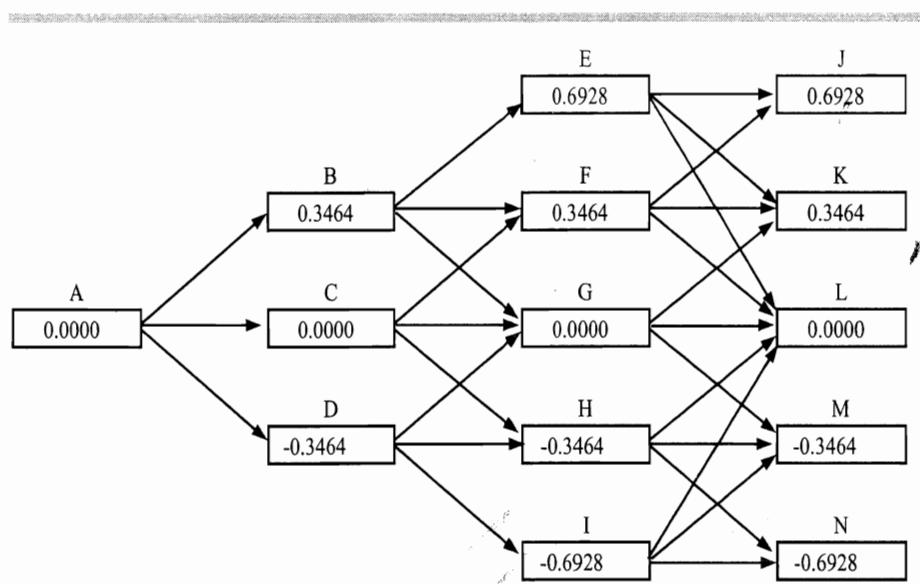
利用 28.7 节的方法，可以构建  $X$  的三叉树图。图 31.1 中给出了  $X$  的树图。

除了时间依赖漂移率， $\ln S$  遵循的过程类似于  $X$ 。与 28.7 节类似，我们可以通过置换节点位置，把  $X$  的树图转换成  $\ln S$  的树图。图 31.2 中显示了这一树图。初始节点对应于石油价格 20，因此，该节点上应该换入  $\ln 20$ 。假设第 1 年节点上的替换量是  $\alpha_1$ 。第 1 年的 3 个节点上的  $X$  值分别为  $+0.3464$ 、0 和  $-0.3464$ 。对应的  $\ln S$  的值为  $0.3464 + \alpha_1$ 、 $\alpha_1$  和  $-0.3464 + \alpha_1$ 。因此， $S$  值分别为  $e^{0.3464+\alpha_1}$ 、 $e^{\alpha_1}$  和  $e^{-0.3464+\alpha_1}$ 。我们要求  $S$  的期望值等于期货价格。也就是说

$$0.1667e^{0.3464+\alpha_1} + 0.6666e^{\alpha_1} + 0.1667e^{-0.3464+\alpha_1} = 22$$

解方程，得到  $\alpha_1 = 3.071$ 。第 1 年的  $S$  值分别为 30.49、21.56 和 15.25。

第 2 年，我们首先根据节点 B、C 和 D 的“到达”概率计算节点 E、F、G、H 和 I 的“到达”概率。到达节点 F 的概率等于节点 B 的“到达”概率乘以从 B 到



| 节 点:   | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_u:$ | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m:$ | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d:$ | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

图 31.1  $X$  的树图。构建这一树图是构建石油即期价格树图的第一步。其中的  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  分别是一个节点“上升”、“持平”和“下降”的概率

达 F 的概率，加上到达节点 C 概率乘以从 C 到达 F 的概率。这也就是

$$0.1667 \times 0.6566 + 0.6666 \times 0.1667 = 0.2206$$

类似地计算出，“到达”节点 E、G、H 和 I 的概率分别为 0.0203、0.5183、0.2206 和 0.0203。第 2 年节点上的替换量  $\alpha_2$  应该满足：

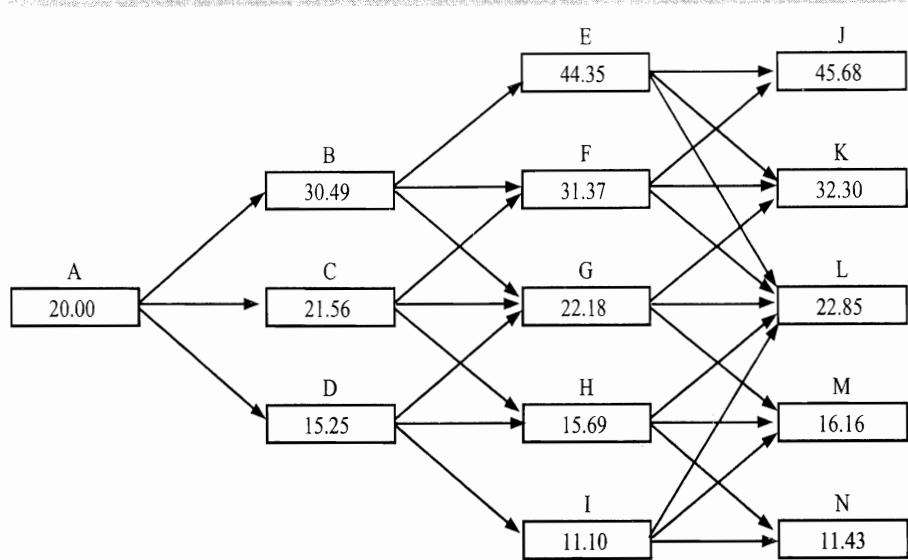
$$0.0203e^{0.6928+\alpha_2} + 0.2206e^{0.3464+\alpha_2} + 0.5183e^{\alpha_2} + 0.2206e^{-0.3464+\alpha_2} + 0.0203e^{-0.6928+\alpha_2} = 23$$

解方程，得到  $\alpha_2 = 3.099$ 。那么，第 2 年的 S 值分别为 44.35、31.37、22.18、15.69 和 11.10。

对于第 3 年节点，也可以做类似的计算。图 31.2 显示了最终得到的 S 的树图。下一节中，我们要讲述实物期权的估值中如何利用树图。

## 31.6 评估投资机会中的选择权价值

前面已经提过，很多投资方案包含选择权。这些选择权可以使方案价值大幅增加，但经常被人们忽略或被错误地估值。下面给出一些嵌入方案的选择权的例子：



| 节点:     | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_u$ : | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$ : | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$ : | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

图 31.2 石油期货价格的树图：其中的  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  分别是一个节点“上升”、“持平”和“下降”的概率

1. 放弃选择权 (abandonment option)。该选择权赋予这样的权利：可以出售或停止一个方案。这是一种关于方案价值的美式看跌期权。期权的执行价格等于方案的清算（或转售）价值减去停止成本。当清算价值较低时，执行价格可以是负值。放弃的选择权可以缓解不好的投资结果带来的影响，就能增加方案的初始估价了。
2. 扩张选择权 (expansion option)。该选择权赋予这样的权利：在环境有利时，可以做进一步的投资并增加产量。这是关于额外产量价值的美式看涨期权。看涨期权的执行价格等于创造额外生产能力的成本贴现到期权执行时刻的值。执行价格通常取决于初始投资。如果管理层起初已经选择对超过预期水平的产量建立相关的生产能力，执行价格相对会非常小。
3. 缩减选择权 (contraction option)。该选择权赋予这样的权利：可以选择缩减方案经营规模。这是关于损失的生产能力价值的美式看跌期权。执行价格等于节省的未来支出在期权执行时刻的现值。
4. 延迟选择权 (option to defer)。对于管理者这是最重要的一种期权。管理者可以选择延迟投资方案。这是关于方案价值的一种美式看涨期权。
5. 展期选择权 (option to extend)。有时，通过支付一个固定数额，可以延长某个资产的寿命。这是关于资产未来价值的欧式看涨期权。

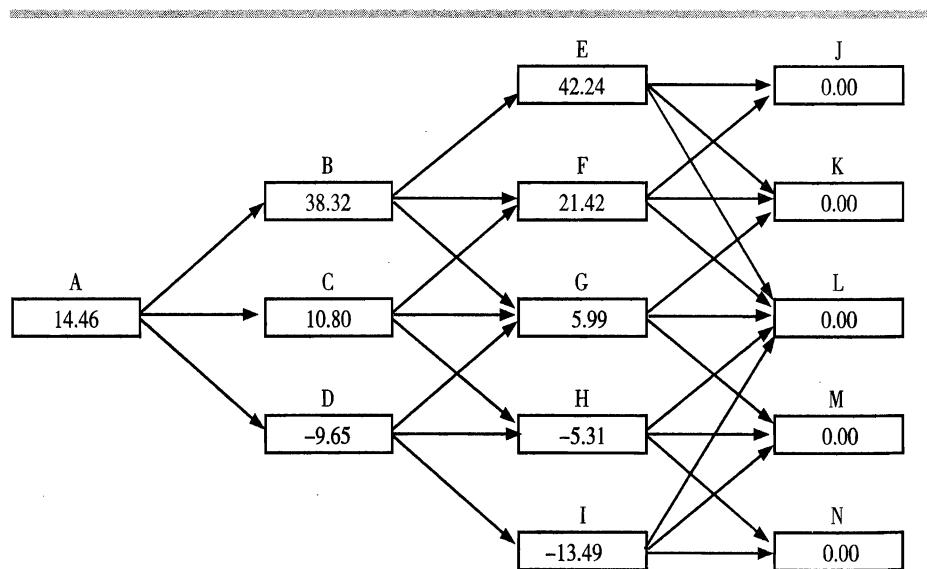
举一个例子说明如何评估内嵌选择权的投资方案。一家公司需要决定是否投资 1 500 万美元，在未来 3 年内以每年 200 万桶的速率从某个源区获得 600 万桶石油。运转设备的固定成本是每年 600 万美元，可变成本是每桶 \$17。我们假设所有期限的无风险利率是 10% p.a.，石油的即期价格为每桶 \$20，1 年期、2 年期和 3 年期期货价格分别为每桶 \$22、\$23 和 \$24。我们假设已经估计到石油价格的随机过程和方程 (31.4) 一样， $a = 0.1$  且  $\sigma = 0.2$ 。这说明，图 31.2 中的树图描述了风险中性世界中的石油价格的行为。

首先假设方案没有内嵌选择权。风险中性世界中，1 年、2 年和 3 年后的预期石油价格分别为 \$22、\$23 和 \$24。根据成本数据，风险中性世界中的第 1、2 和第 3 年的方案的预期损益 (百万美元) 分别为 4.0、6.0 和 8.0。因此，方案价值为：

$$-15.0 + 4.0e^{-0.1\times 1} + 6.0e^{-0.1\times 2} + 8.0e^{-0.1\times 3} = -0.54$$

上述分析表明，不应该执行方案，因为执行方案会使得股东权益减少 54 万美元。

图 31.3 给出了图 31.2 中的每个节点上的方案价值。这些数据是从图 31.2 计算的。例如，考虑节点 H。第 3 年末石油价格为 22.85 的概率为 0.2217，对应的第 3 年内的收益为  $2 \times 22.58 - 2 \times 17 - 6 = 5.70$ 。类似地，第 3 年末石油价格为 16.16 的概率为 0.6566，对应收益为 -7.68；第 3 年末的石油价格为 11.43 的概率有 0.1217，对应收益为 -17.14。因此，图 31.3 中，节点 H 上方案价值为：



| 节 点:   | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_u:$ | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m:$ | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d:$ | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

图 31.3 没有内嵌选择权的初级方案的估值过程： $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  分别是一个节点“上升”、“持平”和“下降”的概率

$$[0.2217 \times 5.70 + 0.6566 \times (-7.68) + 0.1217 \times (-17.14)]e^{-0.1 \times 1} = -5.31$$

作为另一个例子，考虑节点 C。移到石油价格为 31.37 的节点 F 上的概率为 0.1667。对应的第 2 年的现金流为  $2 \times 31.37 - 2 \times 17 - 6 = 22.74$ 。随后的现金流在节点 F 上的价值为 21.42。如果移动到节点 F，方案的总价值为  $21.42 + 22.74 = 44.16$ 。类似地，如果移到节点 G 和 H，方案的总收益分别为 10.35 和 -13.93。因此，节点 C 上的方案价值为：

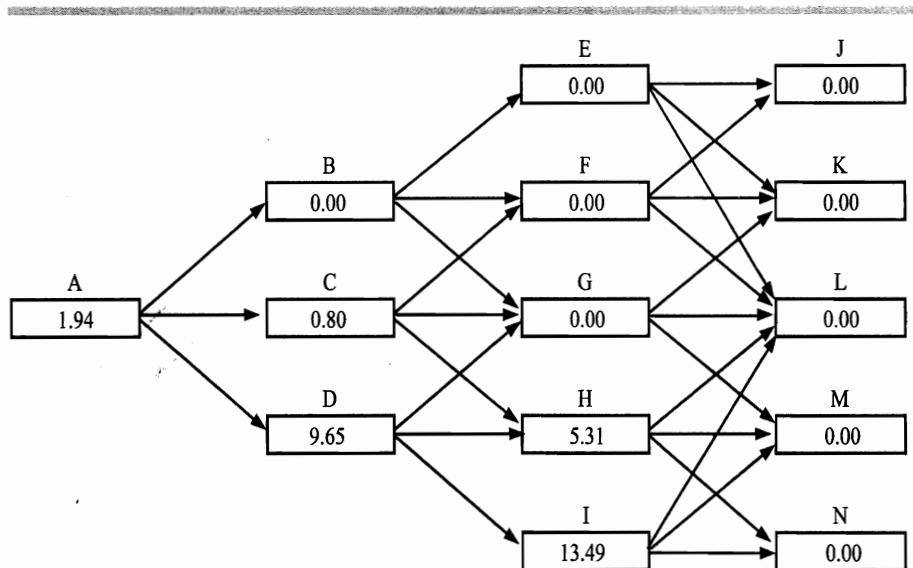
$$[0.1667 \times 44.16 + 0.6666 \times 10.35 + 0.1667 \times (-13.93)]e^{-0.1 \times 1} = 10.80$$

图 31.3 显示初始节点 A 上的方案价值为 14.46。如果考虑初始投资，方案价值变成 -0.54。这就和我们之前计算的结果相一致。

假设，现在公司具有选择权，可以在任意时刻放弃这项方案。我们假设，一旦方案被放弃，则不存在残余价值，也不需要额外的支付。这种情况下，放弃选择权是一种执行价格为零的美式看跌期权，可用图 31.4 估值。在节点 E、F 和 G 上，该看跌期权不应该被执行，因为这些节点上的方案价值是正的。在节点 H 和 I 上，期权应该被执行。节点 H 和 I 上的看跌期权价值分别为 5.31 和 13.49。对树图进行倒推计算，在节点 D 上，如果不执行期权，则放弃看跌期权的价值为：

$$(0.1217 \times 13.49 + 0.6566 \times 5.31 + 0.2217 \times 0)e^{-0.1 \times 1} = 4.64$$

如果执行看跌期权，则节点 D 上的价值为 9.65。这大于 4.64，所以我们应该



| 节点:     | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_u$ : | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$ : | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$ : | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

图 31.4 放弃选择权的估值： $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  分别是一个节点“上升”、“持平”和“下降”的概率

在节点 D 上执行看跌期权。节点 C 上的看跌期权的价值为：

$$[0.1667 \times 0 + 0.6666 \times 0 + 0.1667 \times (5.31)]e^{-0.1 \times 1} = 0.80$$

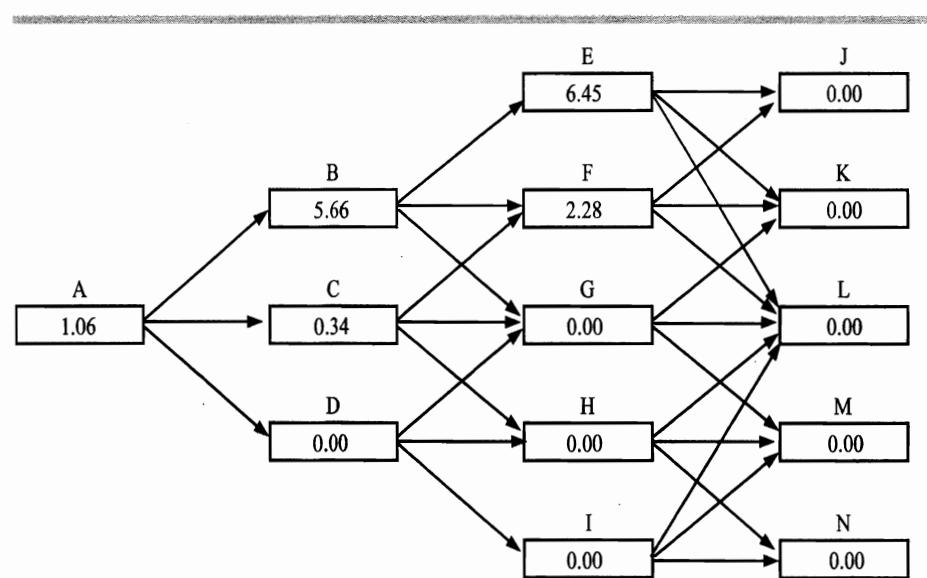
节点 A 上的看跌期权的价值为：

$$(0.1667 \times 0 + 0.6666 \times 0.80 + 0.1667 \times 9.65)e^{-0.1 \times 1} = 1.94$$

因此，放弃选择权的价值为 194 万美元。它使方案价值从 -54 万美元增加到 +140 万美元。因此，之前并不具有吸引力的方案现在对股东来说变成了正值。

接下来，假设公司不具有放弃选择权。但它具有另外的选择权，在任意时刻可以把方案的规模增加 20%。增加规模的成本是 200 万美元。石油产量从 200 万桶上升到 240 万桶。可变成本还是每桶 \$17，固定成本上升 20%，从 600 万美元变成 720 万美元。这是一种美式看涨期权，可以以 200 万美元买入图 31.3 中初级方案的 20%。图 31.5 对这个期权进行了估值。在节点 E，期权应该被执行，损益为  $0.2 \times 42.24 - 2 = 6.45$ 。在节点 F，期权应该被执行，损益为  $0.2 \times 21.42 - 2 = 2.28$ 。在节点 G、H 和 I，不应该执行期权。节点 B 上，执行期权比继续等待要好，对应的期权价值为  $0.2 \times 38.32 - 2 = 5.66$ 。节点 C 上，如果不执行期权，期权价值为：

$$(0.1667 \times 2.28 + 0.6666 \times 0.00 + 0.1667 \times 0.00)e^{-0.1 \times 1} = 0.34$$



| 节点:     | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_u$ : | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$ : | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$ : | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

图 31.5 扩张选择权的估值： $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  分别是一个节点“上升”、“持平”和“下降”的概率

如果执行期权，期权价值为  $0.2 \times 10.80 - 2 = 0.16$ 。因此，在节点 C，不应该执行期权。在节点 A，如果不执行期权，期权价值为：

$$(0.1667 \times 5.56 + 0.6666 \times 0.34 + 0.1667 \times 0.00)e^{-0.1 \times 1} = 1.06$$

如果执行期权，期权价值为  $0.2 \times 14.46 - 2 = 0.89$ 。因此，在节点 A，提前执行不是最优的选择。这种情况下，期权将方案价值从 -0.54 增加到 +0.52。我们再次发现，之前价值为负的方案的价值变成了正值。

图 31.5 中的扩张选择权的估值非常容易，因为一旦执行了期权，所有随后现金流人和现金流出上升 20%。在固定成本保持不变或上升幅度小于 20% 时，我们需要从图 31.3 中的节点获取更多的信息。我们需要明确记录以下几个量：

1. 后续固定成本的现值
2. 后续收入（扣减可变成本）的现值

那么，可以计算执行期权所得损益。

当一个方案中有两个或更多个选择权时，这些选择权之间一般相互关联。一般来说，同时具有选择权 A 和选择权 B 的价值不等于两个选择权的价值之和。为了解释其中原因，假设我们在上面考虑的公司现在同时具有放弃和扩张选择权。如果方案已经被放弃，则不能再选择扩张。此外，放弃看跌期权的价值也取决于方案是否被扩张。<sup>2</sup>

为了处理我们例子中选择权之间的相互作用，在每个节点上定义以下 4 种状态：

1. 还没放弃；还没扩张
2. 还没放弃；已经扩张
3. 已经放弃；还没扩张
4. 已经放弃；已经扩张

沿着树图进行倒推计算时，在每个节点上，我们计算 4 种状态下的选择权的联合价值。24.4 节中详细讲述过这种估值路径依赖型期权的方法。

当存在多个随机变量时，通常用蒙特卡罗模拟初级方案的价值。此时，内嵌选择权的方案的估值变得非常困难，因为蒙特卡罗模拟的运作方向是从方案开始到结束。当我们到达某个点时，我们就不知道关于方案未来现金流的现值的信息。但是，有些时候可以利用 24.7 节中提过的使用蒙特卡罗模拟方法估值美式期权的技术。

施瓦茨和穆恩（2000）解释了商业剪影 31.1 中，他们关于 Amazon.com 的分析可以扩展到存在放弃选择权的情形。当未来现金流的价值为负时，公司可以宣布破产。<sup>3</sup> 在每个时间步，设定一种多项式关系式，建立不放弃的价值和一些变量

---

<sup>2</sup> 图 31.4 与 31.5 中的两个选择权恰好不相互影响。但是，当以更小的时间步构建更大树图时，选择权之间的相互作用会被体现出来。

<sup>3</sup> 31.4 节的分析中假设了破产发生在现金余额减少到零以下时，但这种假设对 Amazon.com 未必最佳。

(如当前收入、收入增长率、波动率、现金余额以及亏损结转等)之间的关系。每次模拟运算提供的观测值,可用来计算每个时刻的关系式的最小二乘估计结果。这就是24.7节中的Lonstaff和Schwartz方法。<sup>4</sup>

## 小 结

本章中,我们研究了如何将本书前面章节中的理念应用到实物资产和实物期权的估值过程。我们已经说明了如何用风险中性估值原理来估值一个依附于任意变量集合的资产。为了反映变量的风险市场价格,我们对每个变量的预期增长率进行调整。那么,资产价值等于以无风险利率贴现预期现金流所得到的现值。

风险中性估值为资本投资评估提供了内部一致性方法。同时,我们可以利用这一方法为实际中常见的、在许多方案中的内嵌选择权进行估值。我们举了1999年末Amazon.com的估值例子和一个石油方案的估值例子,说明了执行上述方法的过程。

## 参考读物

- Amran, M., and N. Kulatilaka, *Real Options*, Boston, MA: Harvard Business School Press, 1999.
- Copeland, T., T. Koller, and J. Murrin, *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies*, 3rd edn. New York: Wiley, 2000.
- Copeland, T., and V. Antikarov, *Real Options: A Practitioners Guide*, New York: Texere, 2001.
- Schwartz, E. S., and M. Moon, "Rational Pricing of Internet Companies," *Financial Analysts Journal*, May/June (2000): 62-75.
- Trigeorgis, L., *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, Cambridge, MA: MIT Press, 1996.

## 问题和习题

- 31.1 请解释,估值一个新的资本投资机会时,净现值方法和风险中性估值方法之间存在什么区别。估值实物期权时,风险中性估值方法有哪些优势?
- 31.2 铜的风险市场价格为0.5,铜价的波动率为20%p.a.,即期价格为每磅80美分,6个月期期货价格为每磅75美分。未来6个月的铜价的预期增长率为多少?
- 31.3 考虑一个商品,波动率 $\sigma$ 为常数,预期增长率只是时间的函数。请证明,在传统的风险中性世界中,有:

$$\ln S_T \sim \phi[\ln F(T) - \frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma\sqrt{T}]$$

其中, $S_T$ 是 $T$ 时刻的商品价格, $F(t)$ 是零时刻观察的, $t$ 时刻到期的合约的期货价格。

<sup>4</sup> 参见 F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach," *Review of Financial Studies*, 14, 1 (Spring 2001): 113-47.

- 31.4 推导商品的便利收益和风险市场价格之间的关系式。
- 31.5 一家公司的收入总额和市场指数之间的相关系数为 0.2。市场的超过无风险利率的超额收益率为 6%，市场指数的波动率为 18%。公司收入的风险的市场价格为多少？
- 31.6 一家公司可以买入一个期权，可以选择 3 年后以每桶\$25 接收 100 万桶石油。石油的 3 年期期货价格为每桶\$24。无风险利率为连续复利的 5%p.a.，期货价格的波动率为 20%p.a.。该期权的价值为多少？
- 31.7 一个驾驶员签订了车辆租借协议，获得了一种选择权，4 年后可以以\$10 000 买入轿车。轿车的当前价值为\$30 000。轿车价格  $S$  遵循的过程是：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

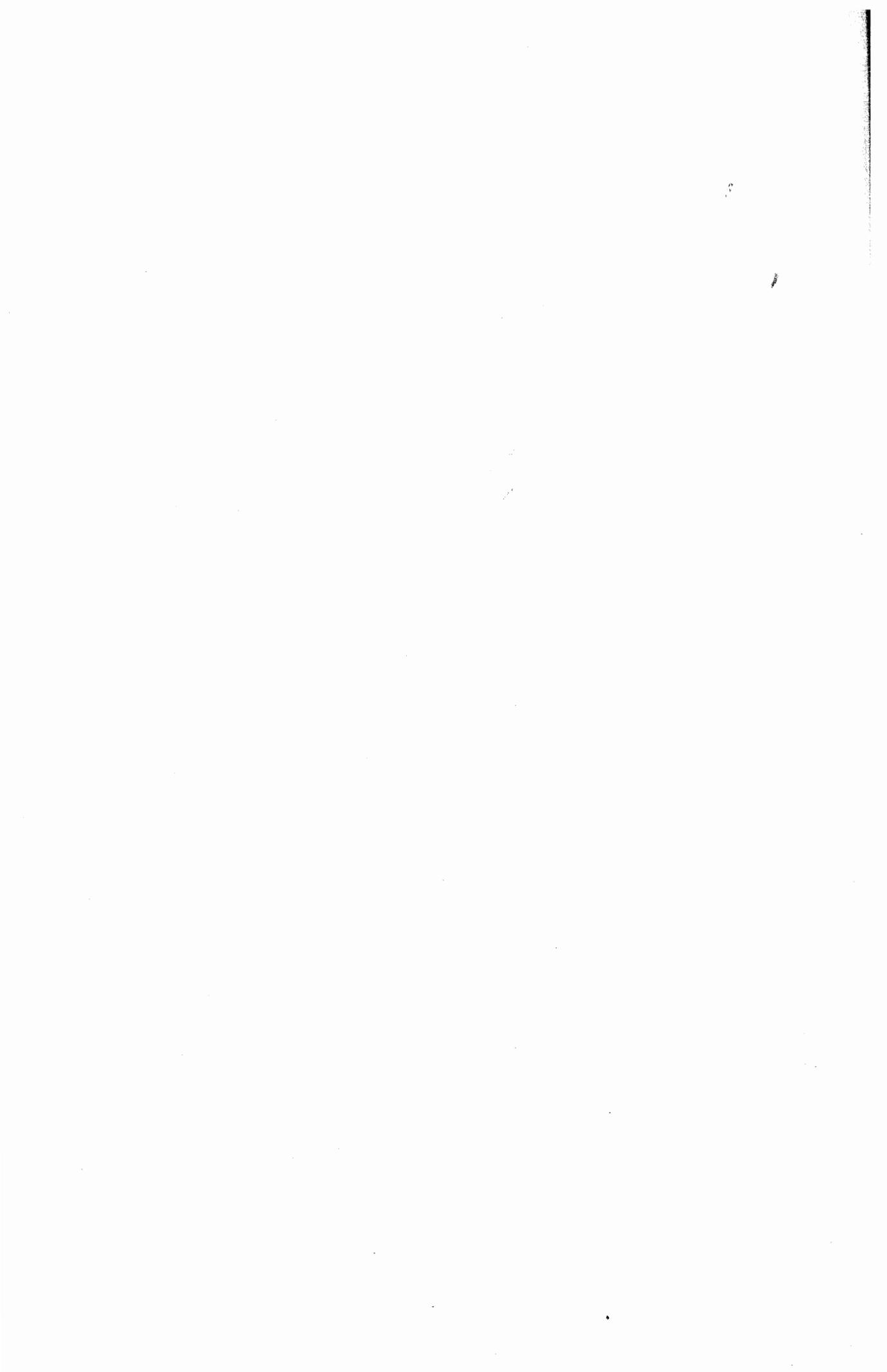
其中， $\mu = -0.25$ ， $\sigma=0.15$ ， $dz$  是一个维纳过程。轿车价格的风险市场价格估计值为-0.1。该选择权的价值为多少？假设所有期限的无风险利率都是 6%。

## 课后练习

- 31.8 假设小麦的即期价格、6 个月期期货价格和 12 个月期期货价格分别为每蒲式耳 250、260 和 270 美分。假设小麦价格遵循方程 (31.4) 中的过程， $a = 0.05$  且  $\sigma = 0.15$ 。关于风险中性世界中的小麦价格，构建两个时间步的树图。

一个农场主有一个计划方案，其中需要支出\$10 000，6 个月后再进一步支出\$90 000。执行方案可以使得 1 年后收割并出售的小麦产量会增加 40 000 蒲式耳。该方案的价值为多少？假设农场主可以在 6 个月后放弃方案，这样可以避免在那一时刻支出\$90 000。该放弃选择权的价值是多少？假设无风险利率为连续复利的 5%。

- 31.9 考虑 31.6 节中的石油例子：
- 如果放弃选择权的成本是 300 万美元而不是零，那么该选择权的价值为多少？
  - 如果扩张选择权的成本是 500 万美元而不是 200 万美元，那么该选择权的价值为多少？



## 衍生品灾难及其教训

自 20 世纪 80 年代中期开始，衍生品市场中发生了一系列惊人的损失事件。商业剪影 32.1 中列出了一些金融机构遭受的损失，商业剪影 32.2 中列出了一些非金融机构遭受的损失。值得注意的是，这些列表中的许多巨大损失都是由某个别雇员的交易行为引起的。1995 年尼克·里森的交易断送了具有 200 多年历史的英国巴林银行；1994 年罗伯特·西罗恩的交易给加州的橘郡带来了 20 亿美元损失；约瑟夫·杰特的交易使凯德公司损失了 3.5 亿美元；2002 年，约翰·拉斯纳克带给爱尔兰联合银行的 7 亿美元损失公之于众。大和银行、壳牌公司和住友遭受的巨大损失也都是由个人行为引起的。

我们不能因为这些损失而指责整个衍生品行业。衍生品市场的规模达数万亿美元，市场的各种工具手段都非常有效，而且市场很好地满足了用户的需求。列出来的事件只占总交易中的非常小的部分（不管是从数量还是价值）。但是，我们要仔细从这些事件中吸取教训。这就是最后一章将要讲述的内容。

### 32.1 对所有衍生品使用者的教训

不管使用者是金融机构还是非金融机构，首先，我们考虑对所有衍生品使用者有意义的教训。

#### 制定风险限制水平

最关键的是，所有公司应该用直观而明确的方式，制定它们能承担的金融风险上限。随后，公司应该建立一种机制，保证这些限制得到遵守。理想的情况下，由董事会设定总风险限额水平。之后，对每个负责管理某种特定风险的个人指定相应的风险限额水平。每日报告中应该说明特定市场变量的变动会带来的收益或损失。并根据历史的实际收益和损失数据，检验这些报告，保证报告中使用的估值过程是准确的。

非常重要的一点是，使用衍生品时，公司需要仔细监测风险。第 1 章中我们提过，衍生品可用来套期保值、投机或套利。如果不进行紧密监测，我们不能确认一个衍生品交易员是否从套期保值者转变成投机者，或从套利者转变成投机者。

### 商业剪影 32.1 金融机构遭受的巨大损失

#### 爱尔兰联合银行

该银行的一位外汇交易员约翰·拉斯纳克持续几年的投机行为给银行带来了 7 亿美元的损失。拉斯纳克构造虚假的期权交易，并一直掩盖着这些事实。

#### 巴林银行（参见第 15 页）

新加坡的一位交易员尼克·里森的行为使得具有 200 多年历史的英国银行倒闭。尼克·里森的任务是：基于新加坡和大阪市场中的日经 225 期货报价寻找套利机会。但是，他使用期货和期权，对日经 225 的未来变动方向下了很大的赌注。总损失接近 10 亿美元。

#### 大和银行

20 世纪 90 年代，这一日本银行在纽约的一位交易员给银行带来了超过 10 亿美元的损失。

#### 凯德公司（参见第 97 页）

一个交易员约瑟夫·杰特的行为，使这家纽约投资交易商在美国国债和其 Strip 上损失了 3.5 亿美元。（Strip 从一个债券的每个现金流创造出来，并作为独立的证券出售。）公司的计算机系统的计算收益方法存在错误，导致了损失发生。

#### 长期资本管理公司（参见第 28 页）

1998 年这个对冲基金损失了大约 40 亿美元。该基金采取的策略是所谓的收敛套利。寻找两个近乎相似的证券，而其中一个证券的价格暂时和另外一个不一致。公司就买入相对便宜的证券并卖空相对贵的证券，对冲残余的风险。1998 年中期，俄罗斯债券发生违约，信用价差被扩大，公司遭受了巨大损失。这种对冲基金太大了不允许它破产，纽约联邦储备系统筹备了 35 亿美元来鼓励 14 家银行投资在这些基金上。

#### 米兰银行

这家英国银行因为对利率变动方向下了错误的赌注，在 20 世纪 90 年代初期遭受了 5 亿美元损失。后来汇丰银行收购了这家银行。

#### 国民西敏银行

1997 年，因为使用了不恰当的模型来估值互换期权，这家英国银行损失了 1.3 亿美元。

巴林银行的例子非常典型。尼克·里森的任务是：基于新加坡和大阪市场中的日经 225 期货进行低风险套利。但在伦敦的上司不知道的情况下，里森从一位套利者转变成投机者，他对日经 225 的未来变动方向下了很大的赌注。然而，巴林银行的系统不是很好，导致没人知道他在做什么。

上述的论点并不是说我们不能承担任何风险。公司的财务主管、金融机构的

## 商业剪影 32.2 非金融机构遭受的巨大损失

### 联合利华公司

这家饮料和食品公司的财务部门在1991年出售基于日元/英镑汇率的看涨期权时损失了1.5亿美元。

### 吉布森贺卡公司

1994年，这家辛辛那提的贺卡生产商的财务部门和信孚银行交易了高度奇异的利率衍生品合约，损失了2000万美元。它后来控告了信孚银行，最终在法庭外私下和解。

### 哈默史密斯—富勒姆区（参见第162页）

1988年，这家英国地方政府在英镑利率互换和期权上损失了6亿美元。它交易的所有合约被英国法庭判定为无效，作为交易另一方的银行非常愤怒。

### 德国金属股份公司（参见第63页）

这家德国公司签订了长期合约来供给石油和天然气，并通过延展短期期货合约来对它们进行套期保值。公司损失了18亿美元，被迫停止这种交易行为。

### 加州橘郡（参见第80页）

财务主管罗伯特·西罗恩的行为使得加州橘郡在1994年损失了15亿美元。这位财务主管利用衍生品进行投机，他预测利率不会上涨，对此下了赌注。

### 宝洁公司（参见第682页）

1994年，这家美国大公司的财务部门和信孚银行签订了高度奇异的利率衍生品合约，损失了9000万美元。后来它控告了信孚银行，最终在法庭外私下和解。

### 壳牌公司

这家公司的日本子公司的一位雇员在未被授权的情况下进行了货币期货交易，损失了10亿美元。

### 住友公司

20世纪90年代初，这家日本公司的一位交易员在铜的即期、期货和期权市场损失了20亿美元。

交易员或基金经理应该被允许在相关市场变量的未来变化方向下持有头寸。我们的论点是说，他们可以持有的头寸应该被限制，并且用优化的系统准确报告当前承担的风险。

## 认真对待风险限制水平

如果个人越过了风险限制水平并且获得了收益，我们应该怎么办？对于高层

管理者来说这是非常棘手的问题。表面上看来，对获得收益的情况中无需惩罚违反风险限制水平的行为。但是，我们不能短视，放任会造成一种风气，大家都不认真对待风险限制水平，这将造成潜在的灾难发生危险。商业剪影 32.1 和 32.2 中，很多公司对它们承担的风险自鸣得意，因为灾难发生之前的前几年他们也承担过类似风险且获得了收益。

加洲橘郡就是一个典型的例子。1991~1993 年，罗伯特·西罗恩的交易策略给橘郡带来了丰厚的收益，橘郡的附加融资资金都来自该财务主管的交易。人们只看到了他所创造的利润，而忽略了他所承担的风险。不幸的是，1994 年发生的损失远远超过了前几年的收益。

不管最后获得收益还是遭受损失，应该同样地处罚超过风险限制水平的行为。不然，遭受损失的交易员很可能增加他们下的赌注，因为他们希望最后能创造利润以便获得宽恕。

## 不要认为你能看透市场

一些交易员很有可能比其他交易员优秀，但没有人总是对的。一位交易员如果能在 60% 的情况中准确地预测市场变量的变动方向，他就很不错了。一位交易员具有优秀记录（例如 20 世纪 90 年代初，罗伯特·西罗恩的行为），很可能归因于运气而不是非凡的交易技能。

假设一家金融机构雇佣了 16 位交易员，其中 1 位交易员在 1 年的每个季度都创造收益。那么，该交易员应不应该获得丰厚的奖金？他的风险限制水平是否应该被提高？对于第一个问题，该交易员当然要获得丰厚的奖金。对于第二个问题，回答是“否”。随机的交易中，能在连续的 4 个季度都获得收益的概率为 0.5<sup>4</sup>，即 1/16。这说明 16 位交易员中的某一位在 1 年的每个季度都获得收益是一个偶然事件。我们不能认为这位交易员的运气会持续，也不应该提高他的风险限制水平。

## 不要低估风险分散化的好处

当一位交易员擅长预测某个特定市场变量，公司会倾向于提高该交易员的风险限制水平。我们刚刚讲述过，这并不是明智的决策。因为，很可能是因为这位交易员运气好，而不是因为他优秀。但是，如果这位交易员确实是拥有特殊的才能，那么我们是否应该不做风险分散化，以便利用这位交易员的特殊才能？答案是风险分散化给我们的好处是非常大的，不能因为一位交易员非常优秀，就放弃分散化的好处，而只对单个市场变量进行投机。

举一个例子说明。假设有 20 种股票，每个股票的预期收益率为 10%p.a.，收益率的标准差为 30%。任意一对股票的收益之间的相关系数为 0.2。把一笔投资等同地划分给 20 种股票，投资者的预期收益率为 10%，收益率的标准差为 14.7%。分散化操作可以使投资者的风险减少一半。换句话说，分散化操作可以使投资者

的每单位风险的预期收益率加倍。相比投资于单个股票，当投资于多个股票时，投资者可以较好地权衡风险和收益。

### 进行情景分析和压力测试

风险测度（如 VaR）的计算必须和情景分析和压力测试一起进行，这样可以知道可能会发生的糟糕情况。第18章中已经提过这些技术，它们非常重要。不幸的是，人们在评估决策时，倾向于只考虑1种或2种情景。例如，1993年和1994年，宝洁公司和吉布森贺卡公司确信利率会保持较低水平，它们在决策时，忽略了利率上升100个基点的可能性。

创建情景时，应该发挥想像力。一种方法是，回顾过去10年或20年的数据，并选择几个最极端的事件作为我们将使用的情景。有时，缺乏一个关键变量的数据，此时，明智的方法是选择有很多市场数据的类似的变量，用新变量的每日变化百分比来代替关键变量的每日变化百分比。例如，某一特定国家发行的债券价格相关数据非常少。我们可以寻找其他类似国家的债券价格的历史数据，就能创建可能的情景。

## 32.2 对金融机构的教训

接下来，我们主要考虑和金融机构相关的教训。

### 仔细监控交易员

交易室中有一种倾向是，人们把表现非常优秀的交易员视为“远不可及的”，也不像对其他交易员那样，详细严格审查他们的交易行为。很明显，约瑟夫·杰特是凯德公司的国债工具明星交易员，因为他“太忙”，所以回答不了问题，也不能和公司风险管理讨论他的头寸状况。

很重要的一点是，所有交易员（特别是创造高利润的）应该负责全部责任。金融机构需要确认高利润中是否伴随着不可想像的高风险。此外，公司还需要重点检验计算机系统和定价模型，看看它们是否是正确的，而且要保证不会被人为地利用。

### 分离前台、中台和后台

一家金融机构的前台由执行交易、持有头寸等的交易员组成。中台有监测承担的风险水平的风险经理们。后台负责记录和保存。一些衍生品灾难是因为没有分离这些职能而产生的。尼克·里森控制着巴林银行在新加坡的前台和后台，因此在伦敦的上司不知情的情况下，他可以在一段时间内隐瞒那些足以致命的交易。

虽然没有详细的资料，住友的铜交易的巨大损失也在某种程度上归因于前台和后台没有被分离。

## 不要盲目地相信模型

一些金融机构的巨大损失和它们使用的模型、计算机系统有关。我们在第 67 页中讨论过，凯德公司是如何被它的计算机系统误导的。另一个错误模型使用例子是国民西敏银行事件。它在估值互换期权时使用的模型是错误的，由此遭受了巨大损失。

如果相对简单的策略中报出的利润非常大，那么利润计算模型很可能是错误的。类似地，如果一家金融机构对某个类型交易的报价非常有竞争力，那很可能这家机构使用的模型和其他市场参与者的模型不同，金融机构应该仔细分析自己是否正确。对交易室的主管来说，某一种类的交易太多或太少都是令人不安的。

## 保守地确认初始收益

当一家金融机构向一家非金融机构出售高度奇异的金融工具时，估值可能高度依附于其使用的基本模型。例如，嵌入长期利率期权的金融工具可能高度依附于使用的利率模型。这种情况下，一种用来描述交易的每日盯市操作的语句是“盯住模型”。这是因为没有类似交易的市场价格可作为基准。

假设一家金融机构设法将一个金融工具比其价值高出 1 000 万美元的价格（或至少比模型给出的价格高 1 000 万美元）卖给了客户，那么，这个 1 000 万美元就是所谓的初始收益（inception profit）。什么时候应该确认该收益？不同投资银行的方法都不尽相同。一些银行立即确认这一 1 000 万美元，而其他一些银行在交易有效期内缓慢地确认该收益。

立即确认初始收益是非常危险的行为。这会鼓励交易员们使用激进的模型，拿取奖金并在模型和交易的详细审查开始之前离开。相比之下，缓慢地确认初始收益会好很多。这种情况下，交易员们会研究几个不同模型和不同假设的影响，再进行相应的交易。

## 不要给客户出售不恰当的产品

给公司客户出售不恰当的产品有时非常具有吸引力，特别是客户看起来愿意承担高风险的时候。但这是一种短视行为。一个戏剧性的例子是信孚银行在 1994 年春季期间的行为。很多信孚银行的客户被说服购买高风险的完全不恰当的产品。一个典型的该类产品（如第 682 页讲述的 5/30 互换）中，大部分情况下，客户可以减少一些借款的成本，但是存在较小概率，可能发生巨大损失。对信孚银行的客户来说，这些产品在 1992 年和 1993 年的表现非常良好，但是 1994 年利率急剧上升时，表现非常糟糕。因此，信孚银行的名声扫地，对银行造成了重大打击。

它多年以来建立的公司客户关系和衍生品创新方面的名誉被一些过于激进的推销员毁于一旦。为了在法庭外私下和解，信孚银行被迫向客户赔偿了很多资金。1999年德意志银行收购了信孚银行。

## 不要忽视流动性风险

金融工程师们通常基于交易活跃的金融工具价格，来计算交易相对不活跃的金融工具和奇异金融工具。例如：

1. 一位金融工程师经常从交易活跃的政府债券（所谓的 on-the-run bonds）计算零息率曲线，并利用它来定价交易相对不活跃的债券（off-the-run bonds）。
2. 一位金融工程师经常从交易活跃的期权计算对应资产的隐含波动率，并定价交易相对不活跃的期权。
3. 一位金融工程师经常从交易活跃的利率上限和互换期权得到隐含的利率行为信息，并定价奇异结构的产品。

这些方法不是没有道理的。但是，不能假设交易相对不活跃的金融工具的交易价格总是和它们的理论价格非常接近。当金融市场经历一种动荡时，经常出现“安全投资转移”现象。这种情况下，流动性对投资者变得非常重要，流动性差的金融工具的出售价格比理论价格低很多。交易策略中如果假设立即能以理论价格出售大量流动性相对低的金融工具，这种假设是非常危险的。

商业剪影 2.2 中讨论的长期资本管理公司的遭遇就是一个流动性风险相关的例子。这种对冲基金采取的策略是所谓的收敛套利（convergence arbitrage）。它会寻找两个理论价格相似的证券（或证券组合），如果其中一个证券的市价低于另外一个，公司就买入相对便宜的证券并卖空相对贵的证券。这个策略的理念是：如果两个证券的理论价格相同，则市场价格最终也会相同。

1998 年夏天，长期资本管理公司遭受了巨大损失。主要原因是俄罗斯债券发生违约，引发了“安全投资转移”。长期资本管理公司倾向于持有流动性差的证券的多头和对应的流动性强的证券空头（例如，它会持有流动性差债券多头和流动性强的债券空头）。流动性差的证券价格和对应的流动性强的证券价格之间的价差在俄罗斯违约后急剧上升。而长期资本管理公司的杠杆率非常高。结果，长期资本管理公司遭受了巨大损失，它没能满足头寸的追加保证金通知要求。

长期资本管理公司的事例再次说明了情景分析和压力测试的重要性，我们要确认最坏的情况下事情会变得如何。长期资本管理公司本应该根据历史中发生过的安全投资转移情形，进行情景分析来检验它所面临的流动性风险。

## 谨慎对待每个人都采取相同交易策略的情况

有时很多市场交易者会遵循本质上相同的策略。这会造成非常危险的环境，很可能出现市场的大幅波动，市场非常不稳定，市场交易者可能会遭受很大损失。

在第 15 章中，我们给出一个例子——当讨论证券组合时提过的 1987 年 10 月

的市场崩盘。崩盘发生之前的几个月中，越来越多的组合管理者企图构造合成看跌期权来保护他们的证券组合。他们在市场上升之后买入股票或股票指数期货，并在市场下跌之后出售它们。这就造成市场非常不稳定。股票价格的小幅度下降可以引起很多证券组合经理们的一轮出售，这就引起了市场进一步下跌，进而又引起又一轮出售，如此等等。我们可以确信，没有这样的证券组合保险行为，1987年10月的崩盘不会那么严重。

另一个例子是1998年的长期资本管理公司的事例。很多其他对冲基金使用着相同的收敛套利，长期资本管理公司的状况就更为糟糕了。俄罗斯违约并发生“安全投资转移”现象之后，长期资本管理公司试着满足与证券组合的流动性较强部分相关的追加保证金通知要求。不幸的是，其他的对冲基金也面临着相同的困难，也在进行类似的交易。情况进一步恶化，流动性价差也进一步变大，进而加强了“安全投资转移”现象。例如，考虑长期资本管理公司的美国国债头寸，由流动性差债券多头和流动性好债券空头组成。当“安全投资转移”引起两个种类债券收益率之前的价差扩大时，为了清算头寸，长期资本管理公司只能卖出流动性差的债券，买入流动性好的债券。其他大的对冲基金也在做相似的交易。结果，流动性好的债券关于流动性差的债券的相对价格提高，两个收益率之间的价差进一步变大。

另一个例子是，20世纪90年代后期的英国保险公司的行为。保险公司签订了很多合约，其中承诺个人收到的退休年金的利率大于市场利率和某个保证利率。差不多相同的时刻，所有保险公司决定从金融机构购买长期互换期权，对冲它们的上述合约的风险。而这些金融机构通过购买非常多的长期英镑债券来对冲它们的风险。结果，债券价格上升，长期英镑利率下降。为了保持动态对冲，更多债券被购买，长期英镑利率进一步下降，如此等等。金融机构遭受了巨大损失，因为长期利率的下降，保险公司发现它们暴露于它们之前没有选择对冲的那部分风险。

这些事例给我们的主要教训是，我们要观看整个金融市场中的行为，并且要懂得当很多市场参与者采取相同的交易策略的时候，会带来内在风险。

### 32.3 对非金融公司的教训

现在，我们考虑主要和非金融机构相关的一些教训。

#### 保证你完全了解自己进行的交易

公司不应该执行它们不完全了解的交易或交易策略。某种程度上，这是非常显然的。但是很多时候，一家非金融机构的交易员给公司带来巨大损失之后，他承认自己并不完全了解情况，也声称自己被投资银行误导了。加州橘郡的财务主管罗伯特·西罗恩就是一个例子。哈默史密斯—富勒姆的交易员们也是对他们交易的互换和利率衍生品缺乏相关了解。

如果一家公司的高级经理不完全明白下属提议的一种交易，则不应该批准这个交易。一个简单的经验法则是，如果一个交易及其签订的基本原理非常复杂，以至于经理不能完全了解这些交易，那么这些交易也不适合整个公司。宝洁公司和吉布森贺卡公司进行的交易本来应该根据这种法则被否决掉。

一种保证你完全了解一个金融工具的方法是对它进行估值。如果一家公司自己没有能力估值一个金融工具，那么就不应该进行该金融工具的交易。实际中，很多公司经常依靠投资银行家的估值建议，这是非常危险的，宝洁公司和吉布森贺卡公司就是一个例子。当这些公司想开展交易时，它们面临的是信孚银行专有模型给出的价格，而这些模型没办法获得检验。

### 保证套期保值者不变成投机者

一个不幸的事实是，套期保值相对无趣，而投机是非常令人兴奋的。当公司雇佣交易员来处理外汇、商品价格或利率风险的时候，可能会发生危险的情况。比如，起初交易员勤劳地执行任务，获得了高层管理者的信任。交易员评估公司的暴露，并进行套期保值。随着时间变化，交易员确信自己能看透市场，慢慢地就变成投机者了。开始的时候可能一切运行良好，但随后可能会遭受损失。为了补偿这一损失，交易员增加他的赌注。损失进一步加大，如此等等。最后，很可能发生一个灾难性事件。

我们已经提过，高层管理者应该明确设定风险限制水平。同时，应该实施积极的监控，保证这些限制水平得到遵守。公司在执行一种交易策略之前，应该分析公司面临的外汇、利率、商品市场和风险等问题。随后要决定如何把这些风险降低到可接受的水平。如果公司的交易策略并不是直接地从风险暴露中推导的，那么这分明是一个危险的信号。

### 谨慎对待财务部门变成利润中心的问题

过去20年的一种趋势是，公司把自己的财务部门转变成一个利润中心。表面上看起来，这是值得提倡的决定。这促进财务主管们节省融资成本，并且尽可能经济地管理风险。但是有一个问题是，财务主管创造利润的潜力是有限的。进行融资和投资剩余资金时，财务主管面对的是一个有效市场。一般来说，财务主管只能通过承担附加风险来提高利润底线。公司的套期保值程序中，财务主管有余地做一些精明的决策来增加利润。但是，我们要铭记套期保值程序的目的是减少风险，而不是增加利润。第3章中讲述过，有50%的可能性，进行套期保值的结果比不进行套期保值的结果要坏。把财务部门转变成利润中心的一个隐患是，财务主管有动机转变成投机者。加州橘郡、宝洁公司和吉布森贺卡公司的事例已经告诉了我们这一点。

## 小 结

衍生品交易中出现的一系列巨大损失给很多财务主管敲响了警钟。1994年和1995年期间灾难接连发生，致使很多非金融机构声称要减少或消除衍生品的使用，这当然是不明智的，因为衍生品可以给财务主管提供管理风险的一些非常有效的方式。

损失背后的故事再次强调了第1章中已经提过的一点，即衍生品可用来套期保值，也可用来投机。也就是说，衍生品可用来降低风险，也可用来冒风险。绝大多数的损失归因于对衍生品的不恰当使用。直接或间接地负责对冲公司风险的雇员有时会转变成投机者。

这些损失给我们的关键教训是内部控制的重要性。公司高层管理者应该发布直观而明确的声明，说明如何使用衍生品，并给出雇员持有头寸的限额水平。随后，应该积极地监控，保证这些规则得到遵守。如果不积极监控衍生品交易员的风险，有可能会造成灾难性事件。

## 参考读物

- Dunbar, N. *Inventing Money: The Story of Long-Term Capital Management and the Legends Behind It*. Chichester, UK: Wiley, 2000.
- Jorion, P. *Big Bets Gone Bad: Derivatives and Bankruptcy in Orange County*. New York: Academic Press, 1995.
- Jorion, P. "How Long-Term Lost Its Capital," *Risk* (September 1999).
- Ju, X., and N. Pearson. "Using Value at Risk to Control Risk Taking: How Wrong Can You Be?" *Journal of Risk*, 1 (1999): 5-36.
- Persaud, A. D. (ed.) *Liquidity Black Holes: Understanding, Quantifying and Managing Financial Liquidity Risk*. London, Risk Books, 2003.
- Thomson, R. *Apocalypse Roulette: The Lethal World of Derivatives*. London: Macmillan, 1998.
- Zhang, P. G. *Barings Bankruptcy and Financial Derivatives*. Singapore: World Scientific Publishing, 1995.

# 词汇表

## 条件累计互换

**Accrual Swap** An interest rate swap where interest on one side accrues only when a certain condition is met.

## 应计利息

**Accrued Interest** The interest earned on a bond since the last coupon payment date.

## 自适应Mesh 模型

**Adaptive Mesh Model** A model developed by Figlewski and Gao that grafts a high-resolution tree on to a low-resolution tree so that there is more detailed modeling of the asset price in critical regions.

## 美式期权

**American Option** An option that can be exercised at any time during its life.

## 本金递减互换

**Amortizing Swap** A swap where the notional principal decreases in a predetermined way as time passes.

## 解析解

**Analytic Result** Result where answer is in the form of an equation.

## 套利

**Arbitrage** A trading strategy that takes advantage of two or more securities being mispriced relative to each other.

## 套利者

**Arbitrageur** An individual engaging in arbitrage.

## 亚式期权

**Asian Option** An option with a payoff dependent on the average price of the underlying asset during a specified period.

## 竞卖价

**Ask Price** The price that a dealer is offering to sell an asset.

## 竞卖价

**Asked Price** See Ask Price.

## 资产或无价值看涨期权

**Asset-or-Nothing Call Option** An option that provides a payoff equal to the asset price if the asset price is above the strike price and zero otherwise.

## 资产或无价值看跌期权

**Asset-or-Nothing Put Option** An option that provides a payoff equal to the asset price if the asset price is below the strike price and zero otherwise.

## 资产互换

**Asset Swap** Exchanges the coupon on a bond for LIBOR plus a spread.

## “任你选择”期权

**As-You-Like-It Option** See Chooser Option.

## 平价期权，等价期权

**At-the-Money Option** An option in which the strike price equals the price of the underlying asset.

## 平均价格看涨期权

**Average Price Call Option** An option giving a payoff equal to the greater of zero and the amount by which the average price of the asset exceeds the strike price.

## 平均价格看跌期权

**Average Price Put Option** An option giving a payoff equal to the greater of zero and the amount by which the strike price exceeds the average price of the asset.

**平均执行价格期权**

**Average Strike Option** An option that provides a payoff dependent on the difference between the final asset price and the average asset price.

**回溯检验**

**Back Testing** Testing a value-at-risk or other model using historical data.

**逆向推演法**

**Backwards Induction** A procedure for working from the end of a tree to its beginning in order to value an option.

**障碍期权**

**Barrier Option** An option whose payoff depends on whether the path of the underlying asset has reached a barrier (i.e., a certain predetermined level).

**巴塞尔新资本协议**

**Basel II** New international regulations for calculating bank capital expected to come into effect in about 2007.

**基差**

**Basis** The difference between the spot price and the futures price of a commodity.

**基点**

**Basis Point** When used to describe an interest rate, a basis point is one hundredth of one percent (0.01%).

**基差风险**

**Basis Risk** The risk to a hedger arising from uncertainty about the basis at a future time.

**基准互换**

**Basis Swap** A swap where cash flows determined by one floating reference rate are exchanged for cash flows determined by another floating reference rate.

**篮子信用违约互换**

**Basket Credit Default Swap** Credit default swap where there are several reference entities.

**篮子期权**

**Basket Option** An option that provides a payoff dependent on the value of a portfolio of assets.

**熊市价差期权策略**

**Bear Spread** A short position in a put option with strike

price  $K_1$  combined with a long position in a put option with strike price  $K_2$  where  $K_2 > K_1$ . (A bear spread can also be created with call options.)

**百慕大期权**

**Bermudan Option** An option that can be exercised on specified dates during its life.

**Beta 值**

**Beta** A measure of the systematic risk of an asset.

**竞买价—竞卖价价差**

**Bid-Ask Spread** The amount by which the ask price exceeds the bid price.

**买卖价差**

**Bid-Offer Spread** See Bid-Ask Spread.

**竞买价**

**Bid Price** The price that a dealer is prepared to pay for an asset.

**两值信用违约互换**

**Binary Credit Default Swap** Instrument where there is a fixed dollar payoff in the event of a default by a particular company.

**两值期权**

**Binary Option** Option with a discontinuous payoff, e.g., a cash-or-nothing option or an asset-or-nothing option.

**二叉树模型**

**Binomial Model** A model where the price of an asset is monitored over successive short periods of time. In each short period it is assumed that only two price movements are possible.

**二叉树**

**Binomial Tree** A tree that represents how an asset price can evolve under the binomial model.

**二维正态分布**

**Bivariate Normal Distribution** A distribution for two correlated variables, each of which is normal.

**Black 近似**

**Black's Approximation** An approximate procedure developed by Fischer Black for valuing a call option on a dividend-paying stock.

**Black 定价模型**

**Black's Model** An extension of the Black-Scholes model for valuing European options on futures contracts. As described in Chapter 26, it is used extensively in practice to value European options when the distribution of the asset price at maturity is assumed to be lognormal.

**Black-Scholes 定价模型**

**Black -Scholes Model** A model for pricing European options on stocks, developed by Fischer Black, Myron Scholes, and Robert Merton.

**场内经纪人**

**Board Broker** The individual who handles limit orders in some exchanges. The board broker makes information on outstanding limit orders available to other traders.

**债券期权**

**Bond Option** An option where a bond is the underlying asset.

**债券收益率**

**Bond Yield** Discount rate which, when applied to all the cash flows of a bond, causes the present value of the cash flows to equal the bond's market price.

**息票剥离方法**

**Bootstrap Method** A procedure for calculating the zero-coupon yield curve from market data.

**波士顿期权**

**Boston Option** *See* Deferred Payment Option.

**盒式价差期权策略**

**Box Spread** A combination of a bull spread created from calls and a bear spread created from puts.

**中止式远期**

**Break Forward** *See* Deferred Payment Option.

**布朗运动**

**Brownian Motion** *See* Wiener Process.

**牛市价差期权策略**

**Bull Spread** A long position in a call with strike price  $K_1$  combined with a short position in a call with strike price  $K_2$ , where  $K_2 > K_1$ . (A bull spread can also be created with put options.)

**蝶式价差期权策略**

**Butterfly Spread** A position that is created by taking a long position in a call with strike price  $K_1$ , a long position in a call with strike price  $K_3$ , and a short position in two calls with strike price  $K_2$ , where  $K_3 > K_2 > K_1$  and  $K_2 = 0.5 (K_1 + K_3)$ . (A butterfly spread can also be created with put options.)

**日历价差期权策略**

**Calendar Spread** A position that is created by taking a long position in a call option that matures at one time and a short position in a similar call option that matures at a different time. (A calendar spread can also be created using put options.)

**校准**

**Calibration** Method for implying a model's parameters from the prices of actively traded options.

**可提前赎回债券**

**Callable Bond** A bond containing provisions that allow the issuer to buy it back at a predetermined price at certain times during its life.

**看涨期权**

**Call Option** An option to buy an asset at a certain price by a certain date.

**可撤销互换**

**Cancelable Swap** Swap that can be canceled by one side on prespecified dates.

**利率上限**

**Cap** *See* Interest Rate Cap.

**上限利率**

**Cap Rate** The rate determining payoffs in an interest rate cap.

**资本资产定价模型**

**Capital Asset Pricing Model** A model relating the expected return on an asset to its beta.

**利率看涨期权元**

**Caplet** One component of an interest rate cap.

**现金流映射分解**

**Cash Flow Mapping** A procedure for representing an in-

strument as a portfolio of zero-coupon bonds for the purpose of calculating value at risk.

#### 现金或无价值看涨期权

**Cash-or-Nothing Call Option** An option that provides a fixed predetermined payoff if the final asset price is above the strike price and zero otherwise.

#### 现金或无价值看跌期权

**Cash-or-Nothing Put Option** An option that provides a fixed predetermined payoff if the final asset price is below the strike price and zero otherwise.

#### 现金结算

**Cash Settlement** Procedure for settling a futures contract in cash rather than by delivering the underlying asset.

#### CAT 债券

**CAT Bond** Bond where the interest and, possibly, the principal paid are reduced if a particular category of “catastrophic” insurance claims exceed a certain amount.

#### 冷度日数

**CDD** Cooling degree days. The maximum of zero and the amount by which the daily average temperature is greater than 65~ Fahrenheit. The average temperature is the average of the highest and lowest temperatures (midnight to midnight).

#### 债务抵押债券

**CDO** See Collateralized Debt Obligation.

#### CDO 平方

**CDO Squared** An instrument in which the default risks in a portfolio of CDO tranches are allocated to new securities.

#### 最便宜交割债券

**Cheapest-to-Deliver Bond** The bond that is cheapest to deliver in the Chicago Board of Trade bond futures contract.

#### Cholesky 分解

**Cholesky Decomposition** A method of sampling from a multivariate normal distribution.

#### 后定选择权

**Chooser Option** An option where the holder has the right to choose whether it is a call or a put at some point during its life.

#### 期权类

**Class of Options** See Option Class.

#### 债券的净价

**Clean Price of Bond** The quoted price of a bond. The cash price paid for the bond (or dirty price) is calculated by adding the accrued interest to the clean price.

#### 清算所

**Clearinghouse** A firm that guarantees the performance of the parties in an exchange-traded derivatives transaction (also referred to as a clearing corporation).

#### 清算保证金

**Clearing Margin** A margin posted by a member of a clearinghouse.

#### 抵押担保证券

**CMO** Collateralized Mortgage Obligation.

#### 利率双限

**Collar** See Interest Rate Collar.

#### 抵押

**Collateralization** A system for posting collateral by one or both parties in a derivatives transaction.

#### 债务抵押债券

**Collateralized Debt Obligation** A way of packaging credit risk. Several classes of securities (known as tranches) are created from a portfolio of bonds and there are rules for determining how the cost of defaults are allocated to classes.

#### 抵押担保证券

**Collateralized Mortgage Obligation (CMO)** A mortgage-backed security where investors are divided into classes and there are rules for determining how principal repayments are channeled to the classes.

#### 组合期权策略

**Combination** A position involving both calls and puts on the same underlying asset.

#### 佣金经纪人

**Commission Brokers** Individuals who execute trades for other people and charge a commission for doing so.

**商品期货交易委员会**

**Commodity Futures Trading Commission** A body that regulates trading in futures contracts in the United States.

**商品互换**

**Commodity Swap** A swap where cash flows depend on the price of a commodity.

**复合期权**

**Compound Option** An option on an option.

**复利频率**

**Compounding Frequency** This defines how an interest rate is measured.

**复利互换**

**Compounding Swap** Swap where interest compounds instead of being paid.

**C-VaR, 条件在险值**

**Conditional Value at Risk (C-VaR)** Expected loss during N days conditional on being in the  $(100 - X)\%$  tail of the distribution of profits/losses. The variable N is the time horizon and X% is the confidence level.

**确认书**

**Confirmation** Contract confirming verbal agreement between two parties to a trade in the over-the-counter market.

**方差弹性为常数的模型**

**Constant Elasticity of Variance (CEV) Model** Model where the variance of the change in a variable in a short period of time is proportional to the value of the variable.

**固定期限利率互换**

**Constant Maturity Swap** A swap where a swap rate is exchanged for either a fixed rate or a floating rate on each payment date.

**固定期限国债利率互换**

**Constant Maturity Treasury Swap** A swap where the yield on a Treasury bond is exchanged for either a fixed rate or a floating rate on each payment date.

**消费性资产**

**Consumption Asset** An asset held for consumption rather than investment.

**期货溢价**

**Contango** A situation where the futures price is above the expected future spot price.

**连续复利**

**Continuous Compounding** A way of quoting interest rates. It is the limit as the assumed compounding interval is made smaller and smaller.

**变量控制技术**

**Control Variate Technique** A technique that can sometimes be used for improving the accuracy of a numerical procedure.

**便利收益**

**Convenience Yield** A measure of the benefits from ownership of an asset that are not obtained by the holder of a long futures contract on the asset.

**转换因子**

**Conversion Factor** A factor used to determine the number of bonds that must be delivered in the Chicago Board of Trade bond futures contract.

**可转换债券**

**Convertible Bond** A corporate bond that can be converted into a predetermined amount of the company's equity at certain times during its life.

**凸性**

**Convexity** A measure of the curvature in the relationship between bond prices and bond yields.

**凸性调整**

**Convexity Adjustment** An overworked term. For example, it can refer to the adjustment necessary to convert a futures interest rate to a forward interest rate. It can also refer to the adjustment to a forward rate that is sometimes necessary when Black's model is used.

**Copula** A way of defining the correlation between variables with known distributions.

**Cornish–Fisher 展开**

**Cornish–Fisher Expansion** An approximate relationship between the fractiles of a probability distribution and its moments.

**持有成本**

**Cost of Carry** The storage costs plus the cost of financing an asset minus the income earned on the asset.

**交易对手**

**Counterparty** The opposite side in a financial transaction.

**息票**

**Coupon** Interest payment made on a bond.

**协方差**

**Covariance** Measure of the linear relationship between two variables (equals the correlation between the variables times the product of their standard deviations).

**有保护看涨期权，备兑看涨期权**

**Covered Call** A short position in a call option on an asset combined with a long position in the asset.

**信用违约互换**

**Credit Default Swap** An instrument that gives the holder the right to sell a bond for its face value in the event of a default by the issuer.

**信用衍生品**

**Credit Derivative** A derivative whose payoff depends on the creditworthiness of one or more companies or countries.

**信用评级**

**Credit Rating** A measure of the creditworthiness of a bond issue.

**信用评级转移矩阵**

**Credit Ratings Transition Matrix** A table showing the probability that a company will move from one credit rating to another during a certain period of time.

**信用风险**

**Credit Risk** The risk that a loss will be experienced because of a default by the counterparty in a derivatives transaction.

**信用价差期权**

**Credit Spread Option** Option whose payoff depends on the spread between the yields earned on two assets.

**信用 VaR**

**Credit Value at Risk** The credit loss that will not be exceeded at some specified confidence level.

**信用矩阵法**

**CreditMetrics** A procedure for calculating credit value at risk.

**交叉对冲**

**Cross Hedging** Hedging an exposure to the price of one asset with a contract on another asset.

**累计概率分布函数**

**Cumulative Distribution Function** The probability that a variable will be less than  $x$  as a function of  $x$ .

**货币互换**

**Currency Swap** A swap where interest and principal in one currency are exchanged for interest and principal in another currency.

**日算**

**Day Count** A convention for quoting interest rates.

**当日交易**

**Day Trade** A trade that is entered into and closed out on the same day.

**违约的相关性**

**Default Correlation** Measures the tendency of two companies to default at about the same time.

**违约强度**

**Default intensity** See Hazard Rate.

**违约概率密度**

**Default Probability Density** Measures the unconditional probability of default in a future short period of time.

**延迟支付期权**

**Deferred Payment Option** An option where the price paid is deferred until the end of the option's life.

**延迟互换**

**Deferred Swap** An agreement to enter into a swap at some time in the future (also called a forward swap).

**交割价格**

**Delivery Price** Price agreed to (possibly some time in

the past) in a forward contract.

### Delta 值

**Delta** The rate of change of the price of a derivative with the price of the underlying asset.

### Delta 对冲

**Delta Hedging** A hedging scheme that is designed to make the price of a portfolio of derivatives insensitive to small changes in the price of the underlying asset.

### Delta 中性证券组合

**Delta-Neutral Portfolio** A portfolio with a delta of zero so that there is no sensitivity to small changes in the price of the underlying asset.

**DerivaGem** The software accompanying this book.

### 衍生品

**Derivative** An instrument whose price depends on, or is derived from, the price of another asset.

### 确定性变量

**Deterministic Variable** A variable whose future value is known.

### 对角价差期权

**Diagonal Spread** A position in two calls where both the strike prices and times to maturity are different. (A diagonal spread can also be created with put options.)

### 差异互换

**Differential Swap** A swap where a floating rate in one currency is exchanged for a floating rate in another currency and both rates are applied to the same principal.

### 扩散过程模型

**Diffusion Process** Model where value of asset changes continuously (no jumps).

### 债券的全价

**Dirty Price of Bond** Cash price of bond.

### 贴现债券

**Discount Bond** See Zero-Coupon Bond.

### 贴现金融工具

**Discount Instrument** An instrument, such as a Treasury bill, that provides no coupons.

### 贴现率

**Discount Rate** The annualized dollar return on a Treasury bill or similar instrument expressed as a percentage of the final face value.

### 红利

**Dividend** A cash payment made to the owner of a stock.

### 红利收益

**Dividend Yield** The dividend as a percentage of the stock price.

### 下跌敲入期权

**Down-and-In Option** An option that comes into existence when the price of the underlying asset declines to a prespecified level.

### 下跌敲出期权

**Down-and-Out Option** An option that ceases to exist when the price of the underlying asset declines to a prespecified level.

### 降级触发

**Downgrade Trigger** A clause in a contract that states that the contract will be terminated with a cash settlement if the credit rating of one side falls below a certain level.

### 漂移率

**Drift Rate** The average increase per unit of time in a stochastic variable.

### 久期

**Duration** A measure of the average life of a bond. It is also an approximation to the ratio of the proportional change in the bond price to the absolute change in its yield.

### 久期匹配

**Duration Matching** A procedure for matching the durations of assets and liabilities in a financial institution.

### 动态对冲

**Dynamic Hedging** A procedure for hedging an option position by periodically changing the position held in the underlying asset. The objective is usually to maintain a delta-neutral position.

### 提前执行

**Early Exercise** Exercise prior to the maturity date.

**有效市场假设**

**Efficient Market Hypothesis** A hypothesis that asset prices reflect relevant information.

**电子交易方式**

**Electronic Trading** System of trading where a computer is used to match buyers and sellers.

**嵌入期权**

**Embedded Option** An option that is an inseparable part of another instrument.

**实证研究**

**Empirical Research** Research based on historical market data.

**均衡模型**

**Equilibrium Model** A model for the behavior of interest rates derived from a model of the economy.

**权益性互换**

**Equity Swap** A swap where the return on an equity portfolio is exchanged for either a fixed or a floating rate of interest.

**欧元**

**Eurocurrency** A currency that is outside the formal control of the issuing country's monetary authorities.

**欧洲美元**

**Eurodollar** A dollar held in a bank outside the United States.

**欧洲美元期货合约**

**Eurodollar Futures Contract** A futures contract written on a Eurodollar deposit.

**欧洲美元利率**

**Eurodollar Interest Rate** The interest rate on a Eurodollar deposit.

**欧式期权**

**European Option** An option that can be exercised only at the end of its life.

**指数加权移动平均模型**

**EWMA** Exponentially Weighted Moving Average.

**交换期权**

**Exchange Option** An option to exchange one asset for another.

**除息日，除权日**

**Ex-dividend Date** When a dividend is declared, an ex-dividend date is specified. Investors who own shares of the stock just before the ex-dividend date receive the dividend.

**管理层股票期权**

**Executive Stock Option** A stock option issued by company on its own stock and given to its executives as part of their remuneration.

**执行限额**

**Exercise limit** Maximum number of option contracts that can be exercised within a five-day period.

**执行价格，行权价格**

**Exercise Price** The price at which the underlying asset may be bought or sold in an option contract (also called the strike price).

**奇异期权**

**Exotic Option** A nonstandard option.

**预期理论**

**Expectations theory** The theory that forward interest rates equal expected future spot interest rates.

**期望损失法**

**Expected Shortfall** See Conditional Value at Risk.

**变量的期望值**

**Expected Value of a Variable** The average value of the variable obtained by weighting the alternative values by their probabilities.

**期满日或执行日**

**Expiration Date** The end of life of a contract.

**显性有限差分方法**

**Explicit Finite Difference Method** A method for valuing a derivative by solving the underlying differential equation. The value of the derivative at time  $t$  is related to three values at time  $t + \Delta t$ . It is essentially the same as the trinomial tree method.

|  |   |
|--|---|
| 指数加权移动平均模型   | 单一波动率   |
| <b>Exponentially Weighted Moving Average Model</b> A model where exponential weighting is used to provide forecasts for a variable from historical data. It is sometimes applied to variances and covariances in value at risk calculations.                                       | <b>Flat Volatility</b> The name given to volatility used to price a cap when the same volatility is used for each caplet.                               |
| 指数加权   | 变通期权  |
| <b>Exponential Weighting</b> A weighting scheme where the weight given to an observation depends on how recent it is. The weight given to an observation $i$ time periods ago is $\lambda$ times the weight given to an observation $i - 1$ time periods ago where $\lambda < 1$ . | <b>Flex Option</b> An option traded on an exchange with terms that are different from the standard options traded by the exchange.                      |
| 暴露   | 变通利率上限  |
| <b>Exposure</b> The maximum loss from default by a counterparty.   | <b>Flexi Cap</b> Interest rate cap where there is a limit on the total number of caplets that can be exercised.   |
| 可延长债券  | 利率下限  |
| <b>Extendable Bond</b> A bond whose life can be extended at the option of the holder.  | <b>Floor</b> See Interest Rate Floor.   |
| 可延长互换  | 利率双限  |
| <b>Extendable Swap</b> A swap whose life can be extended at the option of one side to the contract.  | <b>Floor-Ceiling Agreement</b> See Collar.  |
| 因子   | 利率下限的单个期权   |
| <b>Factor</b> Source of uncertainty.   | <b>Floorlet</b> One component of a floor.   |
| 因子分析法  | 下限利率  |
| <b>Factor analysis</b> An analysis aimed at finding a small number of factors that describe most of the variation in a large number of correlated variables (similar to a principal components analysis).  | <b>Floor Rate</b> The rate in an interest rate floor agreement.   |
| 美国财务会计准则委员会  | 外汇期权  |
| <b>FASB</b> Financial Accounting Standards Board.  | <b>Foreign Currency Option</b> An option on a foreign exchange rate.  |
| 金融中介   | 远期合约  |
| <b>Financial Intermediary</b> A bank or other financial institution that facilitates the flow of funds between different entities in the economy.  | <b>Forward Contract</b> A contract that obligates the holder to buy or sell an asset for a predetermined delivery price at a predetermined future time. |
| 有限差分方法   | 远期汇率  |
| <b>Finite Difference Method</b> A method for solving a differential equation.  | <b>Forward Exchange Rate</b> The forward price of one unit of a foreign currency.   |
| 远期利率   | 远期利率  |
|  | <b>Forward Interest Rate</b> The interest rate for a future period of time implied by the rates prevailing in the market today.                         |
|  | 远期价格  |
|  | <b>Forward Price</b> The delivery price in a forward contract that causes the contract to be worth zero.  |
|  | 远期利率  |
|  | <b>Forward Rate</b> Rate of interest for a period of time in the future implied by today's zero rates.  |

**远期利率协议**

**Forward Rate Agreement (FRA)** Agreement that a certain interest rate will apply to a certain principal amount for a certain time period in the future.

**远期风险中性世界**

**Forward Risk-Neutral World** A world is forward risk-neutral with respect to a certain asset when the market price of risk equals the volatility of that asset.

**远期生效期权**

**Forward Start Option** An option designed so that it will be at-the-money at some time in the future.

**远期互换**

**Forward Swap** See Deferred Swap.

**期货合约**

**Futures Contract** A contract that obligates the holder to buy or sell an asset at a predetermined delivery price during a specified future time period. The contract is settled daily.

**期货期权**

**Futures Option** An option on a futures contract.

**期货价格**

**Futures Price** The delivery price currently applicable to a futures contract.

**Gamma 值**

**Gamma** The rate of change of delta with respect to the asset price.

**Gamma中性证券组合**

**Gamma-Neutral Portfolio** A portfolio with a gamma of zero.

**GARCH 模型**

**GARCH Model** A model for forecasting volatility where the variance rate follows a mean-reverting process.

**一般化的维纳过程**

**Generalized Wiener Process** A stochastic process where the change in a variable in time  $t$  has a normal distribution with mean and variance both proportional to  $t$ .

**几何平均**

**Geometric Average** The  $n$ th root of the product of  $n$  numbers.

**几何布朗运动**

**Geometric Brownian Motion** A stochastic process often assumed for asset prices where the logarithm of the underlying variable follows a generalized Wiener process.

**套期保值参数**

**Greeks** Hedge parameters such as delta, gamma, vega, theta, and rho.

**扣 减**

**Haircut** Discount applied to the value of an asset for collateral purposes.

**风险比率**

**Hazard Rate** Measures probability of default in a short period of time conditional on no earlier default.

**热度日数**

**HDD** Heating Degree Days. The maximum of zero and the amount by which the daily average temperature is less than 65° Fahrenheit. The average temperature is the average of the highest and lowest temperatures (midnight to midnight).

**套期保值**

**Hedge** A trade designed to reduce risk.

**套期保值者**

**Hedger** An individual who enters into hedging trades.

**套期保值率**

**Hedge Ratio** The ratio of the size of a position in a hedging instrument to the size of the position being hedged.

**历史模拟方法**

**Historical Simulation** A simulation based on historical data.

**历史波动率**

**Historic Volatility** A volatility estimated from historical data.

**节假日日历**

**Holiday Calendar** Calendar defining which days are holidays for the purposes of determining payment dates in a swap.

**隐性有限差分方法**

**Implicit Finite Difference Method** A method for valuing a derivative by solving the underlying differential e-

quation. The value of the derivative at time  $t + \Delta t$  is related to three values at time  $t$ .

### 隐含分布

**Implied Distribution** A distribution for a future asset price implied from option prices.

### 隐含树图

**Implied Tree** A tree describing the movements of an asset price that is constructed to be consistent with observed option prices.

### 隐含波动率

**Implied Volatility** Volatility implied from an option price using the Black Scholes or a similar model.

### 隐含波动率函数模型

**Implied Volatility Function (IYF) Model** Model designed so that it matches the market prices of all European options.

### 初始收益

**Inception Profit** Profit created by selling a derivative for more than its theoretical value.

### 指数分期偿付互换

**Index Amortizing Swap** *See* indexed principal swap.

### 指数套利

**Index Arbitrage** An arbitrage involving a position in the stocks comprising a stock index and a position in a futures contract on the stock index.

### 指数期货

**Index Futures** A futures contract on a stock index or other index.

### 指数期权

**Index Option** An option contract on a stock index or other index.

### 指数本金互换

**Indexed Principal Swap** A swap where the principal declines over time. The reduction in the principal on a payment date depends on the level of interest rates.

### 初始保证金

**Initial Margin** The cash required from a futures trader at the time of the trade.

### 瞬态远期利率

**Instantaneous Forward Rate** Forward rate for a very short period of time in the future.

### 利率上限

**Interest Rate Cap** An option that provides a payoff when a specified interest rate is above a certain level. The interest rate is a floating rate that is reset periodically.

### 利率双限

**Interest Rate Collar** A combination of an interest-rate cap and an interest rate floor.

### 利率衍生证券

**Interest Rate Derivative** A derivative whose payoffs are dependent on future interest rates.

### 利率下限

**Interest Rate Floor** An option that provides a payoff when an interest rate is below a certain level. The interest rate is a floating rate that is reset periodically.

### 利率期权

**Interest Rate Option** An option where the payoff is dependent on the level of interest rates.

### 利率互换

**Interest Rate Swap** An exchange of a fixed rate of interest on a certain notional principal for a floating rate of interest on the same notional principal.

### 实值期权，价内期权

**In-the-Money Option** Either (a) a call option where the asset price is greater than the strike price or (b) a put option where the asset price is less than the strike price.

### 内在价值

**Intrinsic Value** For a call option, this is the greater of the excess of the asset price over the strike price and zero. For a put option, it is the greater of the excess of the strike price over the asset price and zero.

### 逆向市场，倒挂市场

**Inverted Market** A market where futures prices decrease with maturity.

### 投资资产

**Investment Asset** An asset held by at least some indi-

viduals for investment purposes.

**只获得利息类证券，纯息证券**

**I0 Interest Only.** A mortgage-backed security where the holder receives only interest cash flows on the underlying mortgage pool.

**Itô 过程**

**Itô Process** A stochastic process where the change in a variable during each short period of time of length  $\Delta t$  has a normal distribution. The mean and variance of the distribution are proportional to  $\Delta t$  and are not necessarily constant.

**伊藤定理**

**Itô's lemma** A result that enables the stochastic process for a function of a variable to be calculated from the stochastic process for the variable itself.

**峰度**

**Kurtosis** A measure of the fatness of the tails of a distribution.

**混合跳跃—扩散模型**

**Jump-Diffusion Model** Model where asset price has jumps superimposed on to a diffusion process such as geometric Brownian motion.

**长期股权预期证券**

**LEAPS** Long-term Equity Anticipation Securities. These are relatively long-term options on individual stocks or stock indices.

**伦敦银行同业拆入利率**

**LIBID** London Interbank Bid Rate. The rate bid by banks on Eurocurrency deposits (i.e., the rate at which a bank is willing to borrow from other banks).

**伦敦银行同业拆出利率**

**LIBOR** London Interbank Offer Rate. The rate offered by banks on Eurocurrency deposits (i.e., the rate at which a bank is willing to lend to other banks).

**LIBOR 曲线**

**LIBOR Curve** LIBOR zero-coupon interest rates as a function of maturity.

**后定 LIBOR 利率的互换**

**LIBOR-in-Arrears Swap** Swap where the interest paid

on a date is determined by the interest rate observed on that date (not by the interest rate observed on the previous payment date).

**涨跌停板变动**

**Limit Move** The maximum price move permitted by the exchange in a single trading session.

**限价指令**

**Limit Order** An order that can be executed only at a specified price or one more favorable to the investor.

**流动性偏好理论**

**Liquidity Preference Theory** A theory leading to the conclusion that forward interest rates are above expected future spot interest rates.

**流动性溢价**

**Liquidity Premium** The amount that forward interest rates exceed expected future spot interest rates.

**流动性风险**

**Liquidity Risk** Risk that it will not be possible to sell a holding of a particular instrument at its theoretical price.

**自营商**

**Locals** Individuals on the floor of an exchange who trade for their own account rather than for someone else.

**对数正态分布**

**Lognormal Distribution** A variable has a lognormal distribution when the logarithm of the variable has a normal distribution.

**多头对冲**

**Long Hedge** A hedge involving a long futures position.

**多头**

**Long Position** A position involving the purchase of an asset.

**回望期权**

**Lookback Option** An option whose payoff is dependent on the maximum or minimum of the asset price achieved during a certain period.

**确定性的超均匀分布序列，低差异序列**

**Low Discrepancy Sequence** See Quasi-random Sequence.

**维持保证金**

**Maintenance Margin** When the balance in a trader's margin account falls below the maintenance margin level, the trader receives a margin call requiring the account to be topped up to the initial margin level.

**保证金**

**Margin** The cash balance (or security deposit) required from a futures or options trader.

**追加保证金通知**

**Margin Call** A request for extra margin when the balance in the margin account falls below the maintenance margin level.

**做市商**

**Market Maker** A trader who is willing to quote both bid and offer prices for an asset.

**市场模型**

**Market Model** A model most commonly used by traders.

**风险的市场价格**

**Market Price of Risk** A measure of the trade-offs investors make between risk and return.

**市场分割理论**

**Market Segmentation Theory** A theory that short interest rates are determined independently of long interest rates by the market.

**盯市**

**Marking to Market** The practice of revaluing an instrument to reflect the current values of the relevant market variables.

**马尔科夫过程**

**Markov Process** A stochastic process where the behavior of the variable over a short period of time depends solely on the value of the variable at the beginning of the period, not on its past history.

**鞅**

**Martingale** A zero drift stochastic process.

**到期日**

**Maturity Date** The end of the life of a contract.

**极大似然估计法**

**Maximum Likelihood Method** A method for choosing the values of parameters by maximizing the probability of a set of observations occurring.

**均值回复**

**Mean Reversion** The tendency of a market variable (such as an interest rate) to revert back to some long-run average level.

**测度**

**Measure** Sometimes also called a probability measure, it defines the market price of risk.

**修正久期**

**Modified Duration** A modification to the standard duration measure so that it more accurately describes the relationship between proportional changes in a bond price and actual changes in its yield. The modification takes account of the compounding frequency with which the yield is quoted.

**货币市场账户**

**Money Market Account** An investment that is initially equal to \$1 and, at time  $t$ , increases at the very short-term risk-free interest rate prevailing at that time.

**蒙特卡罗模拟**

**Monte Carlo Simulation** A procedure for randomly sampling changes in market variables in order to value a derivative.

**住房抵押贷款证券**

**Mortgage-Backed Security** A security that entitles the owner to a share in the cash flows realized from a pool of mortgages.

**裸头寸，无保护头寸，未套期保值头寸**

**Naked Position** A short position in a call option that is not combined with a long position in the underlying asset.

**净额结算**

**Netting** The ability to offset contracts with positive and negative values in the event of a default by a counterparty.

**牛顿迭代法**

**Newton-Raphson Method** An iterative procedure for solving nonlinear equations.

无套利假设

**No-Arbitrage Assumption** The assumption that there are no arbitrage opportunities in market prices.

无套利利率模型

**No-Arbitrage Interest Rate Model** A model for the behavior of interest rates that is exactly consistent with the initial term structure of interest rates.

非稳定模型

**Nonstationary Model** A model where the volatility parameters are a function of time.

非系统风险

**Nonsystematic Risk** Risk that can be diversified away.

现货溢价

**Normal Backwardation** A situation where the futures price is below the expected future spot price.

正态分布

**Normal Distribution** The standard bell-shaped distribution of statistics.

正常市场

**Normal Market** A market where futures prices increase with maturity.

名义本金

**Notional Principal** The principal used to calculate payments in an interest rate swap. The principal is "notional" because it is neither paid nor received.

计价标准

**Numeraire** Defines the units in which security prices are measured. For example, if the price of IBM is the numeraire, all security prices are measured relative to IBM. If IBM is \$80 and a particular security price is \$50, the security price is 0.625 when IBM is the numeraire.

数值方法

**Numerical Procedure** A method of valuing an option when no formula is available.

期权清算公司

**OCC** Options Clearing Corporation. *See* Clearinghouse.

卖出价

**Offer Price** *See* Ask Price.

未平仓量

**Open Interest** The total number of long positions outstanding in a futures contract (equals the total number of short positions).

公开喊价

**Open Outcry** System of trading where traders meet on the floor of the exchange.

期权

**Option** The right to buy or sell an asset.

期权调整利差

**Option-Adjusted Spread** The spread over the Treasury curve that makes the theoretical price of an interest rate derivative equal to the market price.

期权类

**Option Class** All options of the same type (call or put) on a particular stock.

期权序列

**Option Series** All options of a certain class with the same strike price and expiration date.

指令登记员

**Order Book Official** *See* Board Broker.

虚值期权，价外期权

**Out-of-the-Money Option** Either (a) a call option where the asset price is less than the strike price or (b) a put option where the asset price is greater than the strike price.

场外交易市场

**Over-the-Counter Market** A market where traders deal by phone. The traders are usually financial institutions, corporations, and fund managers.

一揽子组合

**Package** A derivative that is a portfolio of standard calls and puts, possibly combined with a position in forward contracts and the asset itself.

面值，账面价值

**Par Value** The principal amount of a bond.

票面收益率

**Par Yield** The coupon on a bond that makes its price equal the principal.

平行移动

**Parallel Shift** A movement in the yield curve where each point on the curve changes by the same amount.

路径依赖型期权

**Path-Dependent Option** An option whose payoff depends on the whole path followed by the underlying variable—not just its final value.

损益

**Payoff** The cash realized by the holder of an option or other derivative at the end of its life.

最基本的，标准型的

**Plain Vanilla** A term used to describe a standard deal.

P 测度

**P-Measure** Real-world measure.

只有本金类证券，纯本证券

**PO** Principal Only. A mortgage-backed security where the holder receives only principal cash flows on the underlying mortgage pool.

泊松过程

**Poisson Process** A process describing a situation where events happen at random. The probability of an event in time  $\Delta t$  is  $\lambda \Delta t$ , where  $\lambda$  is the intensity of the process.

资产组合免疫

**Portfolio Immunization** Making a portfolio relatively insensitive to interest rates.

证券组合保险

**Portfolio Insurance** Entering into trades to ensure that the value of a portfolio will not fall below a certain level.

头寸限额

**Position Limit** The maximum position a trader (or group of traders acting together) is allowed to hold.

权利金

**Premium** The price of an option.

提前偿付函数

**Prepayment function** A function estimating the prepayment of principal on a portfolio of mortgages in terms of other variables.

本金

**Principal** The par or face value of a debt instrument.

主成分分析法

**Principal Components Analysis** An analysis aimed at finding a small number of factors that describe most of the variation in a large number of correlated variables (similar to a factor analysis).

程序交易

**Program Trading** A procedure where trades are automatically generated by a computer and transmitted to the trading floor of an exchange.

有保护看跌期权

**Protective Put** A put option combined with a long position in the underlying asset.

回复面值

**Pull-to-Par** The reversion of a bond's price to its par value at maturity.

看跌期权和看涨期权之间的平价关系

**Put-Call Parity** The relationship between the price of a European call option and the price of a European put option when they have the same strike price and maturity date.

看跌期权

**Put Option** An option to sell an asset for a certain price by a certain date.

可提前回售债券

**Puttable Bond** A bond where the holder has the right to sell it back to the issuer at certain predetermined times for a predetermined price.

可赎回互换

**Puttable Swap** A swap where one side has the right to terminate early.

Q 测度

**Q-Measure** Risk-neutral measure.

跨币衍生证券

**Quanto** A derivative where the payoff is defined by variables associated with one currency but is paid in another currency.

**拟随机数序列**

**Quasi-random Sequences** A sequences of numbers used in a Monte Carlo simulation that are representative of alternative outcomes rather than random.

**彩虹期权**

**Rainbow Option** An option whose payoff is dependent on two or more underlying variables.

**范围远期合约**

**Range Forward Contract** The combination of a long call and short put or the combination of a short call and long put.

**Ratchet 利率上限**

**Ratchet Cap** Interest rate cap where the cap rate applicable to an accrual period equals the rate for the previous accrual period plus a spread.

**实物期权**

**Real Option** Option involving real (as opposed to financial) assets. Real assets include land, plant, and machinery.

**再调整**

**Rebalancing** The process of adjusting a trading position periodically. Usually the purpose is to maintain delta neutrality.

**回收率**

**Recovery Rate** Amount recovered in the event of a default as a percent of the face value.

**回购**

**Repo** Repurchase agreement. A procedure for borrowing money by selling securities to a counterparty and agreeing to buy them back later at a slightly higher price.

**回购利率**

**Repo Rate** The rate of interest in a repo transaction.

**重设日**

**Reset Date** The date in a swap or cap or floor when the floating rate for the next period is set.

**回复水平**

**Reversion Level** The level that the value of a market variable (e.g., an interest rate) tends to revert.

**Rho 值**

**Rho** Rate of change of the price of a derivative with the interest rate.

**配股**

**Rights Issue** An issue to existing shareholders of a security giving them the right to buy new shares at a certain price.

**无风险利率**

**Risk-Free Rate** The rate of interest that can be earned without assuming any risks.

**风险中性估值方法**

**Risk-Neutral Valuation** The valuation of an option or other derivative assuming the world is risk neutral. Risk-neutral valuation gives the correct price for a derivative in all worlds, not just in a risk-neutral world.

**风险中性世界**

**Risk-Neutral World** A world where investors are assumed to require no extra return on average for bearing risks.

**逆向推演法**

**Roll Back** See Backwards Induction.

**抢帽子者**

**Scalper** A trader who holds positions for a very short period of time.

**情景分析**

**Scenario Analysis** An analysis of the effects of possible alternative future movements in market variables on the value of a portfolio.

**证券交易委员会**

**SEC** Securities and Exchange Commission.

**结算价格**

**Settlement Price** The average of the prices that a contract trades for immediately before the bell signaling the close of trading for a day. It is used in mark-to-market calculations.

**空头套期保值**

**Short Hedge** A hedge where a short futures position is taken.

**空头**

**Short Position** A position assumed when traders sell shares they do not own.

**短期利率**

**Short Rate** The interest rate applying for a very short period of time.

**卖空**

**Short Selling** Selling in the market shares that have been borrowed from another investor.

**短期无风险利率**

**Short-Term Risk-Free Rate** *See* Short Rate.

**叫停期权**

**Shout Option** An option where the holder has the right to lock in a minimum value for the payoff at one time during its life.

**模拟**

**Simulation** *See* Monte Carlo Simulation.

**特定经纪人**

**Specialist** An individual responsible for managing limit orders on some exchanges. The specialist does not make the information on outstanding limit orders available to other traders.

**投机者**

**Speculator** An individual who is taking a position in the market. Usually the individual is betting that the price of an asset will go up or that the price of an asset will go down.

**即期利率**

**Spot Interest Rate** *See* Zero-Coupon Interest Rate.

**即期价格**

**Spot Price** The price for immediate delivery.

**即期波动率**

**Spot Volatilities** The volatilities used to price a cap when a different volatility is used for each caplet.

**价差期权**

**Spread Option** An option where the payoff is dependent on the difference between two market variables.

**价差交易**

**Spread Transaction** A position in two or more options of the same type.

**静态对冲**

**Static Hedge** A hedge that does not have to be changed once it is initiated.

**静态期权复制**

**Static Options Replication** A procedure for hedging a portfolio that involves finding another portfolio of approximately equal value on some boundary.

**递增型互换**

**Step-up Swap** A swap where the principal increases over time in a predetermined way.

**Sticky 利率上限**

**Sticky Cap** Interest rate cap where the cap rate applicable to an accrual period equals the capped rate for the previous accrual period plus a spread.

**随机过程**

**Stochastic Process** An equation describing the probabilistic behavior of a stochastic variable.

**随机变量**

**Stochastic Variable** A variable whose future value is uncertain.

**股票红利**

**Stock Dividend** A dividend paid in the form of additional shares.

**股票指数**

**Stock Index** An index monitoring the value of a portfolio of stocks.

**股票指数期货**

**Stock Index Futures** Futures on a stock index.

**股票指数期权**

**Stock Index Option** An option on a stock index.

**股票期权**

**Stock Option** Option on a stock.

**股票分割**

**Stock Split** The conversion of each existing share into

more than one new share.

### 贮存成本

**Storage Costs** The costs of storing a commodity.

### 跨式期权

**Straddle** A long position in a call and a put with the same strike price.

### 宽跨式期权

**Strangle** A long position in a call and a put with different strike prices.

### 带式期权

**Strap** A long position in two call options and one put option with the same strike price.

### 压力测试

**Stress Testing** Testing of the impact of extreme market moves on the value of a portfolio.

### 行权价格，执行价格

**Strike Price** The price at which the asset may be bought or sold in an option contract (also called the exercise price).

### 条式期权

**Strip** A long position in one call option and two put options with the same strike price.

### 互换

**Swap** An agreement to exchange cash flows in the future according to a prearranged formula.

### 互换利率

**Swap Rate** The fixed rate in an interest rate swap that causes the swap to have a value of zero.

### 互换期权

**Swaption** An option to enter into an interest rate swap where a specified fixed rate is exchanged for floating.

### 振荡期权

**Swing Option** Energy option in which the rate of consumption must be between a minimum and maximum level.

There is usually a limit on the number of times the option holder can change the rate at which the energy is consumed.

### 合成债务抵押债券

**Synthetic CDO** A CDO created by selling credit default

swaps.

### 合成期权

**Synthetic Option** An option created by trading the underlying asset.

### 系统风险

**Systematic Risk** Risk that cannot be diversified away.

### 尾部损失

**Tail Loss** See Conditional Value at Risk.

### 振荡期权

**Take-and-Pay Option** See Swing Option.

### 利率期限结构

**Term Structure of Interest Rates** The relationship between interest rates and their maturities.

### 最终价值

**Terminal Value** The value at maturity.

### Theta 值

**Theta** The rate of change of the price of an option or other derivative with the passage of time.

### 时间损耗

**Time Decay** See Theta.

### 时间价值

**Time Value** The value of an option arising from the time left to maturity (equals an option's price minus its intrinsic value).

### 时刻调整

**Timing Adjustment** Adjustment made to the forward value of a variable to allow for the timing of a payoff from a derivative.

### 总收益互换

**Total Return Swap** A swap where the return on an asset such as a bond is exchanged for LIBOR plus a spread. The return on the asset includes income such as coupons and the change in value of the asset.

### 分券

**Tranche** One of several securities that have different risk attributes. Examples are the tranches of a CDO or CMO.

|  |   |
|--|---|
| <b>交易成本</b>  | when the price of the under-lying asset increases to a pre-specified level.   |
| <b>Transaction Costs</b> The cost of carrying out a trade (commissions plus the difference between the price obtained and the midpoint of the bid-offer spread). |   |
| <b>短期国债</b>  |   |
| <b>Treasury Bill</b> A short-term non-coupon-bearing instrument issued by the government to finance its debt.  |   |
| <b>长期国债</b>  |   |
| <b>Treasury Bond</b> A long-term coupon-bearing instrument issued by the government to finance its debt.   |   |
| <b>长期国债期货</b>  |   |
| <b>Treasury Bond Futures</b> A futures contract on Treasury bonds.   |   |
| <b>中期国债</b>  |   |
| <b>Treasury Note</b> <i>See</i> Treasury Bond. (Treasury notes have maturities of less than 10 years.)   |   |
| <b>中期国债期货</b>  |   |
| <b>Treasury Note Futures</b> A futures contract on Treasury notes.   |   |
| <b>树图</b>  |   |
| <b>Tree</b> Representation of the evolution of the value of a market variable for the purposes of valuing an option or other derivative.                         |   |
| <b>三叉树图</b>  |   |
| <b>Trinomial Tree</b> A tree where there are three branches emanating from each node. It is used in the same way as a binomial tree for valuing derivatives.     |   |
| <b>三重巫时刻</b>   |   |
| <b>Triple Witching Hour</b> A term given to the time when stock index futures, stock index options, and options on stock index futures all expire together.      |   |
| <b>标的变量</b>  |   |
| <b>Underlying Variable</b> A variable on which the price of an option or other derivative depends.   |   |
| <b>非系统风险</b>   |   |
| <b>Unsystematic Risk</b> <i>See</i> Nonsystematic Risk.  |   |
| <b>上升敲入期权</b>  |   |
| <b>Up-and-In Option</b> An option that comes into existence  | when the price of the underlying asset increases to a prespecified level.   |
|  | <b>上升敲出期权</b>   |
|  | <b>Up-and-Out Option</b> An option that ceases to exist when the price of the underlying asset increases to a prespecified level.               |
|  | <b>价格报升</b>   |
|  | <b>Uptick</b> An increase in price.   |
|  | <b>在险值</b>  |
|  | <b>Value at Risk</b> A loss that will not be exceeded at some specified confidence level.   |
|  | <b>方差-协方差矩阵</b>   |
|  | <b>Variance-Covariance Matrix</b> A matrix showing variances of, and covariances between, a number of different market variables.               |
|  | <b>Variance-Gamma 模型</b>  |
|  | <b>Variance-Gamma Model</b> A pure jump model where small jumps occur often and large jumps occur infrequently.                                 |
|  | <b>方差率</b>  |
|  | <b>Variance Rate</b> The square of volatility.  |
|  | <b>方差减少方法</b>   |
|  | <b>Variance Reduction Procedures</b> Procedures for reducing the error in a Monte Carlo simulation.   |
|  | <b>变动保证金</b>  |
|  | <b>Variation Margin</b> An extra margin required to bring the balance in a margin account up to the initial margin when there is a margin call. |
|  | <b>Vega 值</b>   |
|  | <b>Vega</b> The rate of change in the price of an option or other derivative with volatility.   |
|  | <b>Vega 中性证券组合</b>  |
|  | <b>Vega-Neutral Portfolio</b> A portfolio with a vega of zero.  |
|  | <b>波动率</b>  |
|  | <b>Volatility</b> A measure of the uncertainty of the return realized on an asset.  |
|  | <b>波动率偏斜</b>  |
|  | <b>Volatility Skew</b> A term used to describe the volatility   |

smile when it is nonsymmetrical.

### 波动率微笑

**Volatility Smile** The variation of implied volatility with strike price.

### 波动率集合

**Volatility Surface** A table showing the variation of implied volatilities with strike price and time to maturity.

### 波动率互换

**Volatility Swap** Swap where the realized volatility during an accrual period is exchanged for a fixed volatility. Both percentage volatilities are applied to a notional principal.

### 波动率期限结构

**Volatility Term Structure** The variation of implied volatility with time to maturity.

### 权证

**Warrant** An option issued by a company or a financial institution. Call warrants are frequently issued by companies on their own stock.

### 气象衍生品

**Weather Derivative** Derivative where the payoff depends on the weather.

### 维纳过程

**Wiener Process** A stochastic process where the change in a variable during each short period of time of length  $\Delta t$

has a normal distribution with a mean equal to zero and a variance equal to  $\Delta t$ .

### 百搭牌游戏

**Wild Card Play** The right to deliver on a futures contract at the closing price for a period of time after the close of trading.

### 承约期权

**Writing an Option** Selling an option.

### 收益率

**Yield** A return provided by an instrument.

### 收益率曲线

**Yield Curve** *See* Term Structure.

### 零息票债券

**Zero-Coupon Bond** A bond that provides no coupons.

### 零息票利率

**Zero-Coupon Interest Rate** The interest rate that would be earned on a bond that provides no coupons.

### 零息票收益率曲线

**Zero-Coupon Yield Curve** A plot of the zero-coupon interest rate against time to maturity.

### 零息率曲线

**Zero Curve** *See* Zero-Coupon Yield Curve.

### 零息率

**Zero Rate** *See* Zero-Coupon Interest Rate.

# DerivaGem 软件<sup>1</sup>

本书所附送的 DerivaGem 软件 1.51 版本的运行环境为 Excel。它要求 Excel 7.0 或更高版本。软件由三个文件组成：DG151.dll、DG151.xls 以及 DG151functions.xls。安装软件的时候，需要创建一个名为 DerivaGem（或其他自选名）的目录，并将 DG151.xls 和 DG151functions.xls 拷至目录中。DG151.dll 应该被拷至 Windows\System 目录（Windows 95 和 98 用户）或 WINNT\System 32 目录（Windows 2000 和 Windows NT 用户）。<sup>2</sup>

Excel 2000 用户必须设置宏的安全级别为“中”或“低”。在 Excel 中点击“工具”，下拉菜单中查看“宏”，可以改变安全级别。当运行这一软件的时候，弹出窗口问你是否启用宏，此时应该点击“启用宏”（Enable Macros）。

这一软件的更新文件可从作者的网站下载：<http://www.rotman.utoronto.ca/~hull>

该软件由两个部分组成：Options Calculator（DG151.xls）和 Applications Builder（DG151function.xls）。运行这两个部分，都需要把 DG151.dll 拷至 Windows\System 或 WINNT\System32 目录下。

建议新用户从 Options Calculator 起步。

## 期权计算表

DG151.xls 是用户容易掌握使用的期权计算表。它由三个工作表组成。第一个工作表用来执行股票期权、货币期权、指数期权和期货期权的计算；第二个工作表适用于欧式和美式债券期权；第三个工作表适用于利率上限、下限和欧式互换期权。

这一软件可以算出一系列不同金融工具的价格、套期保值参数和隐含波动率。它显示的图表说明期权价格和套期保值参数如何依赖输入量。它也显示计算所用

<sup>1</sup> 需要该软件的读者可凭购书证明向本社索取。联系方式：010-84931276。

<sup>2</sup> 注意，有时因为 Windows 资源管理器的设置原因，出现.dll 文件不显示的情况。为了显示.dll 文件，执行如下操作。在 Windows 95，点击查看（View）—选项（Options）—显示所有文件（Show All Files）。在 Windows 98，点击查看（View）—文件夹选项（Folder Options）—查看（View）—显示所有文件（Show All Files）。在 Windows 2000，点击工具（Tools）—文件夹选项（Folder Options）—查看（View）—显示隐藏文件和文件夹（Show Hidden Files and Folders）。

的二叉树图和三叉树图。

## 通用操作

使用期权计算表的时候，首先应该选择一个工作表，并选择期权类型、标的资产类型等。接着，需要输入期权的相应参数，按键盘的“Enter”，再点击“Calculate”。DerivaGem 会显示相应期权的价格、隐含波动率以及套期保值参数。如果你在使用第一个或第二个工作表时，价格是使用树图计算的，那么可以点击“Display Tree”来查看树图。我们在第 11 章和第 17 章中看到过软件展示的树图例子。三个工作表中都可以显示各种不同的图表。为了展示一种图表，首先应该选择用户希望放置在纵轴的变量、希望放置在横轴上的变量以及横轴覆盖的值域。接着按“Enter”键，再点击“Draw Graph”。注意，不管什么时候改变一个或多个单元格的取值，必须按“Enter”键之后再去点击其它按钮。

如果用户的 Excel 版本低于 7.0，当用户首次保存这一软件的时候，会出现“是否更新到新版本”。用户应该选择“Yes”按钮。

## 股票期权、货币期权、指数期权和期货期权

第一个工作表 (Equity\_FX\_Index\_Futures) 适用于股票期权、货币期权、指数期权和期货期权。使用的时候，首先应该选择标的资产类型 (Equity, Currency, Index 或 Futures)。接着需要选择期权类型 (Analytic European, Binomial European, Binomial American, Asian, Barrier Up and In, Barrier Up and Out, Barrier Down and In, Barrier Down and Out, Binary Cash or Nothing, Binary Asset or Nothing, Chooser, Compound Option on Call, Compound Option on Put 或 Lookback)。之后再输入标的资产和期权的相应数据。注意，所有的利率以连续复利表示。

欧式和美式权益性期权的情况下，可以在弹出表输入红利数据。第一列中输入每个除息日的时刻（以年度量的今天到除息日之间的时间），第二列中输入相应的红利数额。必须以时间顺序输入红利数据。

用户需要点击相关按钮来选择期权是看涨的还是看跌的，是否希望计算隐含波动率。如果用户希望计算隐含波动率，需要在标签为“Price”的单元格上输入期权价格。

输入完所有数据之后，用户需要按“Enter”键，再点击“Calculate”。如果选择了“Implied Volatility”，DerivaGem 会在 Volatility (%/年) 单元格上显示隐含波动率。如果没有选择“Implied Volatility”，软件会根据用户在 Volatility 单元格上输入的波动率，在 Price 单元格显示期权价格。

完成计算之后，可以查看相关树图（如果使用的话）和图表。

选择 Analytic European 时，DerivaGem 使用第 13 章和第 14 章中的 Black-Scholes 公式来计算价格，使用第 15 章中的公式来计算套期保值参数。如果选择 Binomial European 或 Binomial American 时，软件构建与第 17 章中一样的二叉树图。

最多可以设定 500 个时间步。

大部分情况下，很容易明白需要输入的数据。如亚式期权的情况下，Current Average 就是从期初开始到现在为止的平均价格。如果亚式期权是刚生效的（初始时间等于零），则不必考虑 Current Average 单元格，维持空白即可。回望期权的情况下，定价看涨期权的时候，使用 Minimum to Date；定价看跌期权的时候，使用 Maximum to Date。对于一个新合约，上述值应该等于标的资产的现价。

## 债券期权

第二个工作表（Bond\_Option）适用于基于债券的欧式和美式期权。首先需要选择定价模型（Black-European, Normal-Analytic European, Normal-Tree European, Normal-American, Lognormal-European 或 Lognormal-American）。接着需要输入债券数据和期权数据。息票数据要以年利率输入，可以选择支付频率为每季度、每半年或每年。在标签为 Term Structure 的表上输入零息票收益率曲线。第一列中输入期限（以年度量），第二列中输入相应的连续复利。期限数据应该以时间顺序排列。DerivaGem 中使用分段线性零息率曲线（如图 4.1）。注意，估值利率衍生品的时候，DerivaGem 把所有时间四舍五入取整到最相近的天数。

输入完所有数据之后，按“Enter”键。根据零息率曲线计算的，每\$100 本金对应的债券报价会在计算结束之后显示。用户必须指定期权是看涨的还是看跌的，执行价格是报价（净价）还是现金价格（全价）（关于两者之间的区别，参照 26.2 节中的讨论和例子）。注意，要输入每\$100 本金对应的执行价格。用户必须指定期权是看涨的还是看跌的，是否要计算隐含波动率。如果用户选择隐含波动率并使用正态分布模型或对数正态分布模型，DerivaGem 会给出短期利率波动率，其中的回复率是固定的。

输入完所有数据之后，用户需要按“Enter”键，再点击“Calculate”。随后，可以查看相关树图（如果使用的话）和图表。注意，显示的树图只持续到期权到期日。而 DerivaGem 在计算标的债券时使用更大的树图。

注意，当选择 Black 模型时，DerivaGem 使用 26.2 节中的公式。同样，软件中也使用 26.2 节中的过程，把输入的收益率波动率转换成价格波动率。

## 利率上限和互换期权

第三个工作表（Caps\_and\_Swap\_Options）适用于利率上限和互换期权。首先需要选择期权种类（Swap Option 或 Cap/Floor）和定价模型（Black-European, Normal-European 或 Lognormal-European）。接着需要输入相应的期权数据。Settlement Frequency 表示支付频率，可以是每年、每半年、每季度或每月。软件从利率上限或互换期权的到期日开始反向计算支付日。在常规付息期限的 0.5 倍至 1.5 倍之间，初始付息期限可能是非标准长度。软件可以根据价格数据，给出波动率或上限利率/互换率。当使用正态分布模型或对数正态分布模型时，DerivaGem 给出短

期利率的波动率（固定的回复率下）。在名为 Term Structure 的表上输入零息票收益率曲线。第一列中输入期限（以年度量），第二列中输入相应的连续复利。期限数据应该以时间顺序排列。DerivaGem 中使用分段线性零息率曲线（如图 4.1）。

输入完所有数据之后，点击“Calculate”。随后，可以查看相关图表。注意，使用 Black 模型时，DerivaGem 使用 26.3 和 26.4 节中的公式。

## 套期保值参数

在 Equity\_FX\_Index\_Futures 工作表中，套期保值参数的计算如下：

**Delta**：标的资产价格每上升 1 美元时，相应的期权价格变化量。

**Gamma**：标的资产价格每上升 1 美元时，相应的 Delta 变化量。

**Vega**：波动率每上升 1%（如波动率从 20% 上升到 21%）时，相应的期权价格变化量。

**Rho**：利率每上升 1%（如利率从 5% 上升到 6%）时，相应的期权价格变化量。

**Theta**：过去的每一日历天相应的期权价格变化量。

在 Bond\_Options 和 Caps\_and\_Swap\_Options 工作表中，套期保值参数的计算如下：

**DV01**：零息率曲线每往上平行移动 1 个基点时，相应的期权价格变化量。

**Gamma01**：零息率曲线每往上平行移动 1 个基点时，相应的 DV01 变化量乘以 100。

**Vega**：波动率参数每上升 1%（如波动率从 20% 上升到 21%）时，相应的期权价格变化量。

## Applications Builder

DG151functions.xls 就是 Application Builder。它包含 21 个函数和 7 个样本程序，用户可以利用它们建立个人程序。

## 函 数

下面列出的是 Application Builder 中包含的 21 个函数。第一个工作表（FunctionsSpecs）上有更详细的说明。

1. **Black-Scholes**。对基于股票、股票指数、货币或期货合约的欧式期权，执行 Black-Scholes 计算。
2. **TreeEquityOpt**。对基于股票、股票指数、货币或期货合约的欧式/美式期权，

执行二叉树计算。

3. BinaryOption。对基于股票、股票指数、货币或期货合约的两值期权，执行相应计算。
4. BarrierOption。对基于不支付红利股票、股票指数、货币或期货合约的障碍期权，执行相应计算。
5. AverageOption。对基于不支付股票、股票指数、货币或期货合约的亚式期权，执行相应计算。
6. ChooserOption。对基于不支付股票、股票指数、货币或期货合约的后定选择权，执行相应计算。
7. CompoundOption。对基于不支付股票、股票指数、货币或期货合约的复合期权，执行相应计算。
8. LookbackOption。对基于不支付股票、股票指数、货币或期货合约的回望期权，执行相应计算。
9. EPortfolio。对基于股票、股票指数、货币或期货合约的期权的组合，执行相应计算。
10. BlackCap。使用 Black 模型，执行利率上限或下限的计算。
11. HullWhiteCap。使用 Hull-White 模型，执行利率上限或下限的计算。
12. TreeCap。使用三叉树图，执行利率上限或下限的计算。
13. BlackSwapOption。使用 Black 模型，执行互换期权的计算。
14. HullWhiteSwap。使用 Hull-White 模型，执行互换期权的计算。
15. TreeSwapOption。使用三叉树图，执行互换期权的计算。
16. BlackBondOption。使用 Black 模型，执行债券期权的计算。
17. HullWhiteBondOption。使用 Hull-White 模型，执行债券期权的计算。
18. TreeBondOption。使用三叉树图，执行债券期权的计算。
19. BondPrice。估值债券。
20. SwapPrice。估值标准型利率互换。注意，其中忽略开始时刻之前的重设日上发生的现金流。
21. IPPortfolio。执行利率衍生品组合的计算。

## 样本程序

DG151functions.xls 包含 7 个带有样本程序的工作表。

- A. Binomial Convergence。研究第 11 章和第 17 章中的二叉树模型的收敛状况。
- B. GreekLetters。提供了第 15 章中套期保值参数的相关图表。
- C. Delta Hedge。研究表 15.2 和 15.3 中 Delta 套期保值的表现。
- D. Delta and Gamma Hedge。研究对两值期权头寸进行 Delta 和 Gamma 套期保值的表现。
- E. Value and Risk。对由单个股票的三种期权组成的证券组合，应用三种不同

方法，计算风险价值。

F. Barrier Replication。执行 22.13 节中的静态期权复制例子中的计算。

G. Trinomial Convergence。研究第 28 章中的三叉树模型的收敛状况。

## 主要期权、期货交易所

---

|  |          |  |
|--|----------|--|
| American Stock Exchange                                      | AMEX     | <a href="http://www.amex.com">www.amex.com</a>               |
| Australian Stock Exchange                                    | ASX      | <a href="http://www.asx.com.au">www.asx.com.au</a>           |
| Bolsa de Mercadorias y Futuros, Brazil                       | BM&F     | <a href="http://www.bmf.com.br">www.bmf.com.br</a>           |
| Chicago Board of Trade                                       | CBOT     | <a href="http://www.cbot.com">www.cbot.com</a>               |
| Chicago Board Options Exchange                               | CBOE     | <a href="http://www.cboe.com">www.cboe.com</a>               |
| Chicago Mercantile Exchange                                  | CME      | <a href="http://www.cme.com">www.cme.com</a>                 |
| Coffee, Sugar & Cocoa Exchange, New York                     | CSCE     | <a href="http://www.csce.com">www.csce.com</a>               |
| Commodity Exchange, New York                                 | COMEX    | <a href="http://www.nymex.com">www.nymex.com</a>             |
| Copenhagen Stock Exchange                                    | FUTOP    | <a href="http://www.xcse.dk">www.xcse.dk</a>                 |
| Deutsche Termin Börse, Germany                               | DTB      | <a href="http://www.exchange.de">www.exchange.de</a>         |
| Eurex  | EUREX    | <a href="http://www.eurexchange.com">www.eurexchange.com</a> |
| Euronext   | EURONEXT | <a href="http://www.euronext.com">www.euronext.com</a>       |
| Hong Kong Futures Exchange                                   | HKFE     | <a href="http://www.hkfe.com">www.hkfe.com</a>               |
| International Petroleum Exchange, London                     | IPE      | <a href="http://www.ipe.uk.com">www.ipe.uk.com</a>           |
| International Securities Exchange                            | ISE      | <a href="http://www.iseoptions.com">www.iseoptions.com</a>   |
| Kansas City Board of Trade                                   | KCBT     | <a href="http://www.kcbt.com">www.kcbt.com</a>               |
| London International Financial Futures<br>& Options Exchange | LIFFE    | <a href="http://www.liffe.com">www.liffe.com</a>             |
| London Metal Exchange  | LME      | <a href="http://www.lme.co.uk">www.lme.co.uk</a>             |
| Malaysian Derivatives Exchange                               | MDEX     | <a href="http://www.mdex.com.my">www.mdex.com.my</a>         |
| Marché à Terme International de France                       | MATIF    | <a href="http://www.matif.fr">www.matif.fr</a>               |
| Marché des Options Négociables de Paris                      | MONEP    | <a href="http://www.monep.fr">www.monep.fr</a>               |
| MEFF Renta Fija and Variable, Spain                          | MEFF     | <a href="http://www.meff.es">www.meff.es</a>                 |
| Mexican Derivatives Exchange                                 | MEXDER   | <a href="http://www.mexder.com">www.mexder.com</a>           |
| Minneapolis Grain Exchange                                   | MGE      | <a href="http://www.mgex.com">www.mgex.com</a>               |
| Montreal Exchange  | ME       | <a href="http://www.me.org">www.me.org</a>                   |
| New York Board of Trade                                      | NYBOT    | <a href="http://www.nybot.com">www.nybot.com</a>             |
| New York Cotton Exchange                                     | NYCE     | <a href="http://www.nyce.com">www.nyce.com</a>               |
| New York Futures Exchange                                    | NYFE     | <a href="http://www.nyfe.com">www.nyfe.com</a>               |
| New York Mercantile Exchange                                 | NYMEX    | <a href="http://www.nymex.com">www.nymex.com</a>             |
| New York Stock Exchange                                      | NYSE     | <a href="http://www.nyse.com">www.nyse.com</a>               |
| OMHEX  | MHEX     | <a href="http://www.omhex.com">www.omhex.com</a>             |
| Osaka Securities Exchange                                    | OSA      | <a href="http://www.ose.or.jp">www.ose.or.jp</a>             |
| Pacific Exchange   | PXS      | <a href="http://www.pacificex.com">www.pacificex.com</a>     |
| Philadelphia Stock Exchange                                  | PHLX     | <a href="http://www.phlx.com">www.phlx.com</a>               |
| Singapore International Monetary Exchange                    | SIMEX    | <a href="http://www.simex.com.sg">www.simex.com.sg</a>       |
| Sydney Futures Exchange                                      | SFE      | <a href="http://www.sfe.com.au">www.sfe.com.au</a>           |
| Swiss Exchange   | SWX      | <a href="http://www.swx.com">www.swx.com</a>                 |
| Tokyo Grain Exchange   | TGE      | <a href="http://www.tge.or.jp">www.tge.or.jp</a>             |
| Tokyo International Financial Futures Exchange               | TIFFE    | <a href="http://www.tiffe.or.jp">www.tiffe.or.jp</a>         |
| Winnipeg Commodity Exchange                                  | WCE      | <a href="http://www.wce.ca">www.wce.ca</a>                   |

---

许多交易所已经合并，例如，Eurex 已由 DTB 和 SWX 联合兼并，Euronext 拥有了 LIFFE、MATIF 和 MONEP 三家交易所。

当  $x \leq 0$  时,  $N(x)$  表

这个表表示了当  $x \leq 0$  时  $N(x)$  的值。这张表应该与内插法结合起来使用。例如：

$$\begin{aligned}
 N(-0.1234) &= N(-0.12) - 0.34[N(-0.12) - N(-0.13)] \\
 &= 0.4522 - 0.34 \times (0.4522 - 0.4483) \\
 &= 0.4509
 \end{aligned}$$

当  $x \geq 0$  时,  $N(x)$  表

这个表表示了当  $x \geq 0$  时  $N(x)$  的值。这张表应该与内插法结合起来使用。例如：

$$\begin{aligned}N(0.6278) &= N(0.62) + 0.78[N(0.63) - N(0.62)] \\&= 0.7324 + 0.78 \times (0.7357 - 0.7324) \\&= 0.7350\end{aligned}$$



# 作者索引

- Abramowitz, M., 285  
Aitchison, J., 270  
Allayannis, G., 64  
Allen, S.L., 88  
Altman, E.I., 467, 486  
Amato, J.D., 473  
Amin, K., 323, 669  
Amran, M., 700  
Andersen, L. B. G., 546, 559, 665, 666  
Andreasen, J., 662, 665, 666  
Antikarov, V., 700  
Arditti, F., 537  
Artzner, P., 422, 440  
Arzac, E.R., 188  
  
Bakshi, G., 371  
Bartter, B., 247, 416, 624  
Basak, S., 439  
Basu, S., 506  
Bates, D. S., 371  
Baxter, M., 580  
Baz, J., 164  
Beaglehole, D.R., 536, 537  
Beder, T., 439  
Bharadwaj, A., 224  
Biger, N., 323  
Black, F., 201, 206, 227, 242  
Blattberg, R., 293  
Bodie, Z., 323  
Bodnar, G. M., 64  
Bollerslev, T., 449, 462  
  
Boudoukh, J., 440  
Box, G. E. P., 455  
Boyle, P.P., 416, 551, 561  
Brace, A., 662, 669  
Brady, B., 467  
Brealey, R.A., 263  
Breedon, D.T., 375  
Brennan, M.J., 627, 631  
Broadie, M., 206, 416, 560  
Brotherton-Ratcliffe, R., 404, 546, 561  
  
Brown, G.W., 65  
Brown, J. A. C., 270  
Brown, K.C., 164  
Buffum, D., 506  
Buhler, W., 669  
Burghardt, G., 136  
  
Cai, L., 537  
Canter, M. S., 65, 537  
Cantor, R., 467  
Cao, C., 371  
Cao, M., 537  
Carr, P.P., 542, 561  
Carverhill, A., 669  
Chance, D., 683  
Chancellor, E., 16  
Chang, E.C., 542, 561  
Chang, R.P., 115  
Chaput, J. S., 224  
Chen, Z., 371  
Cheyette, O., 669  
  
Chriss, N., 525  
Clellow, L., 416, 525, 537  
Cole, J.B., 537  
Conze, A., 561  
Cooper, I., 164  
Cootner, P.H., 263  
Copeland, T., 700  
Core, J.E., 188  
Coval, J. E., 247  
Cox, D. R., 263  
Cox, J. C., 115, 119, 293, 580  
Culp, C., 65  
Cumby, R., 462  
  
Das, S., 506  
Dattatreya, R.E., 164  
Delbaen, F., 422, 439  
Demeterfi, K., 683  
Derman, E., 371, 525, 562, 683  
Detemple, J., 206  
Dowd, K., 440  
Duan, J.-C., 545, 562  
Dufey, G., 323  
Duffle, D., 40, 136, 440, 580  
Dunbar, N., 712  
Dupire, B., 546, 562  
  
Eber, J.-M., 422, 439  
Ederington, L.H., 65, 224, 372  
Edwards, F. R., 65  
Embrechts, P., 440  
Engle, R.F., 447, 449, 462  
Ergener, D., 522, 525

- Eydeland, A., 537  
 Fabozzi, F.J., 88  
 Fama, E.F., 277, 293  
 Feller, W., 263  
 Figlewski, S., 394, 416, 462  
 Finger, C.C., 486  
 Flannery, B.P., 416, 453, 647  
 Flavell, R., 164  
 French, K.R., 277, 293  
 Froot, K.A., 537  
 Frye, J., 440  
 Gao, B., 416, 553, 562  
 Garman, M.B., 323, 580  
 Gastineau, G.L., 40  
 Gatarek, D., 656, 662, 669  
 Gatto, M.A., 525  
 Geczy, C., 65  
 Geman, H., 537  
 Geske, R., 291, 525  
 Ghon, R.S., 115  
 Giddy, I.H., 323  
 Glasserman, P., 416, 515, 517  
 Goldman, B., 516, 255  
 Gonedes, N., 293  
 Grabbe, J.O., 323  
 Graham, J.R., 65  
 Grinblatt, M., 88, 136  
 Guan, W., 377  
 Guay, W.R., 188  
 Gupta, A., 164  
 Hamilton, D.T., 467  
 Hanley, M., 537  
 Harrison, J.M., 580  
 Hasbrook, J., 462  
 Haushalter, G.D., 65  
 Hayt, G.S., 65  
 Heath, D., 422, 440, 669  
 Hendricks, D., 440  
 Heston, S.L., 562  
 Hicks, J.R., 112  
 Hilliard, J.E., 323  
 Ho, T.S.Y., 131, 648  
 Hopper, G., 440  
 Hoskins, W., 136  
 Hotta, K., 164  
 Hua, P., 440  
 Hull, J.C., 188, 323, 562, 649  
 Hunter, R., 537  
 Iben, T., 486, 618  
 Ingersoll, J.E., 115, 580, 627, 648  
 Inui, K., 669  
 Itô, K., 260  
 Jackson, P., 440  
 Jackwerth, J.C., 365, 372  
 Jain, G., 416  
 Jamshidian, F., 323, 618, 669  
 Jarrow, R.A., 115, 323, 669  
 Jeffrey, A., 669  
 Jegadeesh, N., 136  
 Jones, F.J., 40  
 Jorion, P., 40, 88, 323, 712  
 Joskow, P., 537  
 Ju, X., 712  
 Kamal, E., 683  
 Kan, R., 669  
 Kane, A., 462  
 Kane, E.J., 115  
 Kani, I., 525, 562  
 Karasinski, P., 631, 648  
 Karlin, S., 263  
 Kawaller, I.G., 40  
 Kealhofer, S., 486  
 Kemna, A., 518  
 Kendall, R., 537  
 Keynes, J.M., 112  
 Kijima, M., 648, 669  
 Kleinstein, A.D., 88  
 Kluppelberg, C., 425, 440  
 Koch, P.D., 40  
 Kohlhagen, S.W., 323  
 Koller, T., 700  
 Kon, S.J., 293  
 Kou, S.G., 515, 517  
 Kreps, D.M., 580  
 Kulatilaka, N., 700  
 Lau, S.H., 551, 561  
 Lauterbach, B., 372  
 Lee, S.-B., 628, 648  
 Li, A., 648  
 Li, D.X., 486  
 Litterman, R., 486  
 Litzenberger, R.H., 164, 375, 537  
 Ljung, G.M., 455  
 Longin, F.M., 440  
 Longstaff, F.A., 88, 562, 648, 700  
 Lowenstein, R., 40  
 McDonald, R., 537  
 McMillan, L.G., 224  
 McNeil, A.J., 425, 440  
 Madan, D.B., 542, 562  
 Margrabe, W., 521, 525  
 Markowitz, H., 428  
 Marshall, C., 440  
 Marston, R.C., 64  
 Maude, D.J., 440  
 Melick, W.R., 372  
 Mello, A.S., 65, 164  
 Merton, R.C., 16, 206, 269, 323  
 Mezrich, J., 453, 462  
 Mikosch, T., 425, 440  
 Milevsky, M.A., 525  
 Miller, H.D., 263  
 Miller, M.H., 16, 65  
 Miltersen, K.R., 323, 669  
 Minton, B.A., 65, 164  
 Mintz, D., 401  
 Moon, M., 692, 700  
 Morgan, J.P., 448  
 Morton, A., 653, 669  
 Murrin, J., 700  
 Musiela, M., 656, 662, 669

- Nagayama, I., 649  
 Natenberg, S., 368  
 Neftci, S., 263, 440  
 Nelson, D., 449, 462  
 Ness, A., 54  
 Neuberger, A.J., 65  
 Ng, V., 449, 462  
 Noh, J., 462  
 Oldfield, G.S., 115  
 Ou, S., 467  
 Pan, J., 439  
 Parsons, J.E., 65  
 Pascutti, M., 164  
 Pearson, N., 712  
 Perraudin, W., 440  
 Persaud, A.D., 712  
 Petersen, M.A., 65  
 Pilipovic, D., 535  
 Pindyck, R.S., 115  
 Pliska, S.R., 580  
 Posner, S.E., 525  
 Predescu, M., 469, 486  
 Press, W.H., 416, 647  
 Rawnsley, J.H., 16  
 Rebonato, R., 525, 649, 669  
 Reiner, E., 509, 537, 618  
 Reis, J., 323  
 Remolona, E.M., 473  
 Rendleman, R.J., 133, 224, 247  
 Rennie, A., 580  
 Resti, A., 467  
 Reynolds, C.E., 536, 537  
 Rich, D., 440, 683  
 Richard, S., 115  
 Richardson, M., 293, 440  
 Ritchken, P., 525, 562, 649, 669  
 Robinson, F.L., 88  
 Rodriguez, R.J., 486  
 Roll, R., 277, 291, 293  
 Ronn, A.G., 224  
 Ronn, E.I., 224  
 Ross, S.A., 115, 293, 416, 561  
 Routledge, B.R., 115  
 Rubinstein, M., 188, 247, 416, 562  
 Sandmann, K., 656, 669  
 Sandor, R.L., 537  
 Sankarasubramanian, L., 525, 649, 669  
 Santa-Clara, P., 666  
 Scholes, M., 206, 293, 361  
 Schonbucher, P.J., 506  
 Schrand, C., 65  
 Schultz, P., 372  
 Schwartz, E.S., 323, 562, 648, 700  
 Seppi, D.J., 115  
 Shapiro, A., 439  
 Shumway, T., 247  
 Sidenius, J., 506  
 Siegel, M., 440  
 Singleton, K., 486  
 Sironi, A., 467  
 Smith, C.W., 65, 293  
 Smith, D.J., 40, 164, 683  
 Smith, T., 293  
 Sobol', I.M., 405  
 Sondermann, D., 656, 669  
 Sosin, H., 516, 525  
 Spatt, C.S., 115  
 Stegun, I., 285  
 Stigum, M., 88  
 Stoll, H.R., 206  
 Strickland, C., 416, 525, 537  
 Stulz, R.M., 65, 525  
 Stutzer, M., 562  
 Subrahmanyam, M.G., 164  
 Sun, T., 164  
 Sundaresan, M., 115  
 Sundaresan, S., 164  
 Suo, W., 545, 562  
 Taleb, N.N., 356  
 Tavakoli, J.M., 506  
 Taylor, H.M., 263  
 Taylor, S.J., 372  
 Teukolsky, S.A., 416, 453, 647  
 Teweles, R.J., 40  
 Thiagarajan, S.R., 65  
 Thomas, C.P., 372  
 Thomson, R., 712  
 Tilley, J.A., 557, 562  
 Titman, S., 164  
 Todd, R., 40  
 Tompkins, R., 368  
 Trevor, R., 562  
 Trigeorgis, L., 700  
 Tufano, P., 65  
 Turnbull, S.M., 519, 525  
 Ulrig-Homberg, M., 669  
 Varma, P., 476  
 Vasicek, O.A., 483, 625, 648  
 Vetterling, W.T., 404, 416, 647  
 Vijh, A.m., 525  
 Viswanathan, R., 561  
 Vorst, A., 518  
 Wakeman, L.M., 519, 525  
 Walter, U., 669  
 Wang, C., 164  
 Warwick, B., 40  
 Weber, T., 669  
 Wei, J., 537  
 Weston, J., 64  
 Whaley, R., 291  
 White, A., 188, 440, 562, 669  
 Whitelaw, R., 440  
 Wiggins, J. B., 224  
 Wilmott, P., 431, 416, 440  
 Xu, X., 372  
 Zhang, P.G., 16, 525, 712  
 Zhu, Y., 435, 440  
 Zou, J., 683



# 主题索引

References to items in the Glossary of Terms are **bolded**

在术语表中出现的词条页码用**黑体**标出

- Abandonment option  
放弃选择权, 695
- Accord  
协定 (1988 年巴塞尔资本协定), 422
- Accounting  
会计, 36
- Accrual fraction  
实际年限, 600
- Accrual swap  
条件累计互换, 163, 679, 680, **713**
- Accrued interest  
应计利息, **645, 713**
- Adaptive mesh model  
自适应 Mesh 模型, 394, 553, **713**
- valuing Barrier option  
    为障碍期权估值, 551
- Add-up basket credit default swap  
add-up 篮子信用违约互换, 498
- All Ordinaries Share Price Index  
普通股股价指数, 58
- Allied Irish Bank  
爱尔兰联合银行, 703, 730
- Allied Lyons  
联合里昂公司, 705
- Amazon.com, valuation  
估值 Amazon.com, 692
- American option  
美式期权, 6, 169, 200, **713**
- analytic approximation to prices  
    解析近似方法, 377, **713**
- binomial tree  
二叉树, 377
- Black's approximation  
Black 的近似, 291
- dividend, effect of  
红利的影响, 204, 298
- early exercise  
提前执行, 171, 187
- future options compared to spot options  
期货期权与现货期权, 321, 323
- Monte Carlo simulation and  
蒙特卡罗模拟, 259, 263
- nonstandard  
非标准, 510, 511
- option on a dividend-paying stock  
支付红利股票的期权, 301, 391
- option on a non-dividend-paying stock  
不支付红利股票的期权, 301
- put-call relationship  
看跌期权与看涨期权之间的平价关系, 205, 302
- American Stock Exchange  
美国股票交易所, 173
- Amortizing swap  
本金递减互换, 162, **713**
- Analytic result  
解析解, 377, 403, **713**
- Antithetic variable technique, variance reduction procedure  
对偶变量技术, 方差减少方法, 402, 671
- Arbitrage  
套利, 9, 14, **713**
- Arbitrageur  
套利者, 14, 96, 100, **713**
- Asian option  
亚式期权, 402, 518, 519, **713**
- Ask price  
竞卖价, 34, 144, 149, **713**
- Asset liability management (ALM)  
资产-负债管理 (ALM), 135
- Asset-or-nothing call option  
资产或无价值看涨期权, 516, **713**
- Asset-or-nothing put option  
资产或无价值看跌期权, 516, **713**
- Asset swap  
资产互换, 470, 494, **713**
- Assigned investor  
指定投资者, 184
- Asymmetric information  
信息不对称, 495, 496
- As-you-like-it option  
任你选择期权, 512, 513, **713**
- At-the-money option  
平价期权, 等价期权, 176, 345, 347, **713**
- Average price call  
平均价格看涨期权, 518
- Average price option  
平均价格期权, 518, 519, **713**
- Average price put option  
平均价格看跌期权, 518
- Average strike call  
平均执行价格看涨期权, 518
- Average strike option  
平均执行价格期权, 518, **714**
- Average strike put  
平均执行价格看跌期权, 518
- Back office  
后台, 707
- Back testing  
回溯检验, 事后检验, 435, 436, **714**

- Backward difference approximation  
后向差分近似, 406
- Backwards induction  
逆向推演法, 714
- Bankers Trust (BT)  
信孚银行, 682, 705, 708
- Barings Bank  
巴林银行 15, 703, 704
- Barrier options  
障碍期权, 513, 514, 539, 551, 714
- inner barrier  
内部障碍, 551
  - outer barrier  
外部障碍, 551
  - valuing, using adaptive mesh model  
用自适应 Mesh 模型估值, 554
- Basel II  
巴塞尔新资本协议, 484, 714
- Basis  
基差, 49, 714
- Basis point  
基点, 84, 129, 714
- Basis risk  
基差风险, 48, 49, 50, 714
- hedging and  
套期保值, 43, 46, 48
- Basis swap  
基准互换, 672, 714
- Basket credit default swap  
篮子信用违约互换, 498, 714
- add-up basket credit default swap  
参考实体篮子中任一个违约触发的信用违约互换, 498
  - first-to-default basket credit default swap  
参考实体篮子中第一次违约发生时的信用违约互换, 498
  - $n$ th-to-default basket credit default swap  
参考实体篮子中第  $n$  次违约发生时的信用违约互换, 498
- Basket option  
篮子期权, 521, 529, 714
- Bear spread  
熊市价差期权策略, 213, 214, 714
- Bearish calendar spread  
熊市日历价差期权, 219
- Bermudan option  
百慕大期权, 510
- Bermudan swap option  
百慕大互换期权, 665, 666, 714
- Beta  
 $\beta$ , 69, 714
- changing  
改变, 64
- BGM model, *see* LIBOR market model.  
BGM, 参见 LIBOR 市场模型
- Bid  
竞价, 180
- Bid ask spread  
竞买价-竞卖价价差, 714
- Bid offer spread  
买卖差价, 180, 182, 188, 714
- Bid price  
竞买价, 2, 34, 714
- Binary credit default swap  
两值信用违约互换, 494, 506, 714
- Binary option  
两值期权, 516, 524, 680, 714
- Binomial correlation measure  
两值相关性估计, 482
- Binomial model  
二叉树模型, 714
- Binomial tree  
二叉树, 714
- alternative for constructing  
构造树图的几种方法, 391
  - American options example  
一个美式期权例子, 200
  - control variate technique  
控制变量的技术, 391
  - defined  
(二叉树的) 定义, 227
  - delta, 238
  - dollar dividend-paying stocks  
支付已知红利数额的股票, 387~391
  - European options examples  
欧式期权的例子, 227~236
  - futures option  
期货期权, 244, 247, 301, 311
  - matching volatility  
(用 u 和 d 计算) 波动率, 239
  - non-dividend-paying stock  
不支付红利的股票, 377~384
- one-step  
单步二叉树, 227, 230, 232
- options on index, currency, and futures  
指数期权, 货币期权, 期货期权, 384~387
- risk-neutral valuation and  
风险中性定价, 281, 282, 292
- stock paying a known dividend yield  
支付已知红利收益率的股票, 301, 350
- time-dependent interest rates and  
依赖时间的利率, 395
- two-step  
两步二叉树, 233, 235, 236, 241
- BIS Accord 1988  
1988 年巴塞尔资本协定, 422
- Bivariate normal distribution  
二维正态分布, 714
- Black Monday, 112. *See also* October 19, 1987.
- 黑色星期一, 105
- Black's approximation  
Black 近似, 714
- American call option  
美式看涨期权, 290, 292
- Black's model  
Black 模型, 320, 321, 357, 715
- forward risk-neutral valuation and  
远期风险中性估值, 576
  - pricing European options  
为欧式期权定价, 588~589
  - validity of  
有效性, 589
- Black-Scholes bias  
Black-Scholes 基差
- Black-Scholes 基差  
equity option and  
权益性期权, 365~367
- foreign currency options and  
外汇期权, 362~365
- single jumps in asset price anticipated  
预期价格有一次大幅波动, 369~370
- Black-Scholes model  
Black-Scholes 定价模型, 269~300, 715
- cumulative normal distribution function  
累积正态分布函数, 285
  - delta and
  - Delta 值, 333~334

- difference between binomial tree model  
二叉树模型与 (Black-Sholes 定价模型)  
的差别, 277
- dividend  
红利, 289~292
- European option on non-dividend-paying  
stock  
不支付红利的欧式期权, 282~285
- expected return  
期望收益率, 272~273
- implied volatility  
隐含波动率, 288
- known dividend yield  
已知红利收益率, 301, 302
- pricing formulas  
定价公式, 302, 303
- proof of pricing formulas  
定价公式的证明, 298~300
- risk-neutral valuation and  
风险中性定价, 281~284
- verifying the  
证实, 398
- volatility  
波动率, 373
- Black-Scholes Merton differential equation  
Black-Scholes-Merton 微分方程, 276, 281
- Board broker  
场内经纪人, 715
- Board order  
看板指令, 34
- Bolsa de Mercadorias y Futuros (BM&F)  
巴西商品期货交易所, 19
- Bond, pricing  
债券的定价, 74~76
- Bond option  
债券期权, 589, 590
- embedded  
嵌入, 590
  - European  
欧式, 590
  - forward risk-neutral valuation and Black's  
model  
远期风险中性估值和 Black 模型, 593,  
594
  - on coupon bearing bonds  
付息债券期权, 632, 633
- tree for American bond options  
美式债券期权树图, 644, 645
- valuation using Vasicek model  
用 Vasicek 模型估值, 625, 626
- yield volatilities  
收益率的波动率, 592
- Bond yield  
债券收益率, 75, 715
- Bond yield volatilities  
债券收益率的波动率, 621
- Bootstrap method  
息票剥离方法, 76~78, 88, 715
- Boston option  
波士顿期权, 510, 715
- Bottom straddle  
底部跨式期权, 221
- Bottom vertical combination  
底部垂直价差组合, 222
- Boundary conditions  
边界条件, 280, 283
- Box spread  
盒式价差期权, 214, 216, 715
- Break forward  
中止式远期, 510, 715
- British Local Authority  
英国地方政府, 705
- Brownian motion  
布朗运动, 253, 258, 262, 715
- Bull spread  
牛市价差期权, 211, 212, 219, 715
- Bullish calendar spread  
牛市日历价差期权, 219
- Business day conventions  
工作日约定, 146, 672
- Business valuation  
企业估值, 691
- Butterfly spread  
蝶式价差期权, 215~218, 715
- Buying on margin  
押金购买, 182
- CAC-40 Index  
CAC-40 指数, 58
- Calendar spread  
日历价差期权, 218, 219, 224, 715
- Calibrating instruments  
校准金融工具, 645, 646, 647
- Calibration  
校准, 645, 646, 715
- Call option  
看涨期权, 6, 7, 8, 715
- Callable bond  
可提前赎回债券, 590, 715
- Cancelable compounding swaps  
可撤销复利互换, 681
- Cancelable forward  
可撤销远期, 510
- Cancelable swap  
可撤销互换, 680, 681, 715
- Cap, interest rate  
利率上限, 572, 594, 595, 715
- flexi cap  
变通利率上限, 660, 661, 721
  - ratchet cap  
Ratchet 利率上限, 660
  - sticky cap  
Sticky 利率上限, 660, 729
- Capital asset pricing model  
资本资产定价模型, 58, 113, 307, 567,  
715
- Cap rate  
上限利率, 594, 595, 715
- Capital investment appraisal  
资本投资评估, 687, 700
- Caplet, interest rate  
利率看涨期权元, 595, 597, 598, 715
- Cash CDO  
现金 CDO, 499
- Cash-flow mapping  
现金流映射分解, 429, 430, 435, 715
- Cash-or-nothing call option  
现金或无价值看涨期权, 516, 716
- Cash-or-nothing put option  
现金或无价值看跌期权, 516, 716
- Cash price, bond and Treasury bill  
现金价格, 短期和长期国债, 122, 591
- Cash settlement  
现金结算, 33, 38, 716
- CAT bond, catastrophic bond  
CAT 债券, 536
- Changing the measure/numeraire  
测度变换, 240

|  |  |   |
|--|--|---|
| Cheapest-to-deliver bond                       | interest rate swap   | Conversion factor                             |
| 最便宜交割债券, 126~128, 134, <b>716</b>              | 利率互换, 146, 148   | 转换因子, 125, 126, <b>717</b>                    |
| Chicago Board of Trade (CBOT)                  | Compound option  | Conversion ratio                              |
| 芝加哥期货交易所, 1, 19, 521                           | 复合期权, 511, <b>717</b>                                      | 转换率, 502                                      |
| Chicago Board Options Exchange (CBOE)          | Compounding frequency                                      | Convertible bond                              |
| 芝加哥期权交易所, 2, 173, 304                          | 复利频率, 69, 72, 81, <b>717</b>                               | 可转换债券, 186, 502, <b>717</b>                   |
| CBOEdirect, 180                                | Compounding swap   | Convexity, bonds                              |
| Chicago Mercantile Exchange (CME)              | 复利互换, 163, 672, <b>717</b>                                 | 凸性, 债券, 86, 87, <b>717</b>                    |
| 芝加哥商品交易所 2, 19, 129                            | Conditional default probabilities                          | Convexity adjustment                          |
| Cholesky decomposition                         | 条件违约概率, 466  | 凸性调整, 609, 611, 621, <b>717</b>               |
| Cholesky 分解法, 400, <b>716</b>                  | Conditional value at risk (CVaR)                           | Eurodollar futures                            |
| Chooser option                                 | 条件在险值, 422, <b>717</b>                                     | 欧洲美元期货, 129, 130                              |
| 后定选择权, 512, <b>716</b>                         | Confirmation   | interest rates                                |
| Claim amount                                   | 确认书, 145, 146, <b>717</b>                                  | 利率, 611                                       |
| 求偿额, 467                                       | Constant elasticity of variance (CEV) model                | swap rates                                    |
| Clean price, bond                              | 方差的弹性为常数的模型, 540, 541, <b>717</b>                          | 互换率, 612                                      |
| 债券的净价, 591, <b>716</b>                         | Constant maturity swap (CMS)                               | Cooling degree days (CDD)                     |
| Clearing margin                                | 固定期限利率互换, 162, 676, 677, <b>717</b>                        | 冷度日数, 532, <b>716</b>                         |
| 清算保证金, 27, <b>716</b>                          | Constant maturity Treasury swap (CMT)                      | Copula, 483, <b>717</b>                       |
| Clearinghouse                                  | 固定期限国债利率互换, 162, 676, 677, <b>717</b>                      | Corner the market                             |
| 清算所, 27, <b>716</b>                            | Constructive sale  | 操纵市场, 36                                      |
| Collar, interest rate                          | 推定出售, 185  | Cornish–Fisher expansion                      |
| 利率双限, 596, <b>716</b>                          | Consumption asset  | Cornish–Fisher 展开, 434, <b>717</b>            |
| Collateralization                              | 消费性资产, 111, 115, <b>717</b>                                | Correlation                                   |
| 抵押, 477, 478                                   | Contango   | 相关度, 479, 480                                 |
| Collateralized debt obligation (CDO)           | 期货溢价, 114, <b>717</b>                                      | Correlation smiles                            |
| 债务抵押债券, 498, <b>716</b>                        | Continuous compounding                                     | 相关系数微笑, 502                                   |
| Collateralized mortgage obligation (CMO)       | 连续复利, 72, 73, <b>717</b>                                   | Cost of carry                                 |
| 抵押担保证券, 667, <b>716</b>                        | Continuous-time stochastic process                         | 持有成本, 111, 115                                |
| Combination, option trading strategy           | 连续时间随机过程, 251, 252, 255                                    | Counterparty                                  |
| 组合期权策略, 220, 224, <b>716</b>                   | Continuous variable  | 交易对手, 479, <b>718</b>                         |
| Commission, stock option                       | 连续变量, 251  | default risk                                  |
| 佣金, 股票期权, 181                                  | Contract size  | 违约风险, 475                                     |
| Commission brokers                             | 合约的规模, 22, 31  | Coupon  |
| 佣金经纪人, 34, <b>716</b>                          | Contraction option   | 息票, <b>718</b>                                |
| Commodity Futures Trading Commission<br>(CFTC) | 缩减选择权, 695   | Covariance                                    |
| 商品期货交易委员会, 35, 184, <b>717</b>                 | Control areas, electricity-producing region                | 协方差, 459, 460, 461, <b>718</b>                |
| Commodity price                                | 控制区, 电力生产地区, 534   | Covered call                                  |
| 商品价格, 691, 693                                 | Control variate technique, variance reduction<br>procedure | 有保护看涨期权, 备兑看涨期权, 183,<br>209, 223, <b>718</b> |
| Commodity swap                                 | 控制变量技术, 方差减少方法, 403, <b>717</b>                            | Covered position                              |
| 商品互换, 682, <b>717</b>                          | Convenience yield  | 有保护期权头寸策略, 330                                |
| Comparative–advantage argument                 | 便利收益, 110, 111, <b>717</b>                                 | Crank–Nicolson scheme                         |
| 比较优势的观点  | Convergence arbitrage                                      | Crank–Nicolson 方法, 414                        |
| currency swap                                  | 收敛套利, 709, 710, <b>717</b>                                 | Crashophobia                                  |
| 货币互换, 154, 155                                 |  | 崩盘恐惧症, 367                                    |

- Credit default swap (CDS)  
信用违约互换, 489, 490, 492, **718**
- basket CDS  
篮子信用违约互换, 498
- forwards and options on  
CDS 远期和期权, 496
- valuation of  
(信用违约互换) 的估值, 492
- Credit default swap spread (CDS spread)  
信用违约互换价差, 496, 504
- Credit derivative  
信用衍生品, 489, **718**
- Credit event  
信用事件, 489
- Credit indices  
信用指数, 491
- Credit rating  
信用评级, 465
- Credit rating mitigation  
信用风险缓释方法, 476~478
- Credit ratings transition matrix  
信用评级转移矩阵, 484, 485, **718**
- Credit risk  
信用风险, 2, 27, 28, 465, **718**
- comparison of default probability estimates  
违约概率估计方法的比较, 470, 471
  - credit ratings and  
信用评级, 465
  - default correlation and  
违约相关性, 480
  - derivatives transactions and  
衍生品交易, 465, 475
  - estimating default probabilities from bond  
prices and  
根据债券价格估计违约概率, 468, 469
  - estimating default probabilities from equity  
prices and  
利用股本价格估计违约概率, 473
  - historical default probabilities and  
历史违约概率, 465
  - mitigation  
缓释, 476
  - recovery rates and  
回收率, 467, 468
- Credit spread option  
信用价差期权, 496, **718**
- Credit value at risk  
信用 VaR, 483~485, **718**
- CreditMetrics  
信用矩阵法, 483, 484, 485, **718**
- Cross-currency derivative  
跨币衍生证券, 615
- Cross-currency swap  
交叉货币利率互换, 163, 674
- Cross gamma  
交叉 Gamma, 434
- Cross hedging  
交叉对冲, 52, **718**
- Crude oil derivatives  
原油衍生品, 533
- Cumulative distribution function  
累计概率分布函数, 283, 291, **718**
- Cumulative normal distribution function  
累计正态分布函数, 285
- polynomial approximation  
多项式近似, 285, 290
- Currency forward and futures  
货币的远期和期货合约, 105~108
- Currency option  
货币期权, 309
- early exercise  
提前执行, 205
  - implied distribution and lognormal distribution  
隐含分布和对数分布, 362, 363
  - quotation  
(货币期权的) 报价, 311
- Currency swap  
货币互换, 154, 163, 674, **718**
- to transform liabilities and assets  
利用货币互换转换负债和资产, 142
- Curvature  
曲率, 343
- Cylinder option  
Cylinder 期权, 509
- Daiwa Bank  
大和银行, 703
- DAX-30 Index  
DAX-30 指数, 58
- Day count conventions  
日算惯例, 121~122, 129, **718**
- Day order  
当天指令, 35
- Day trade  
当日交易, 26, **718**
- Day trader  
当日交易者, 34
- Default correlation  
违约的相关性, 478~482, **718**
- binomial correlation measure  
两项相关性估计, 482
  - factors to define correlation structure  
利用因子定义相关性结构, 481~482
  - Gaussian copula model for time to default  
违约时刻的 Gaussian Copula 模型, 480
  - reduced form models  
约化模型, 479
  - structural models  
结构化模型, 479
- Default intensity  
违约强度, 466, **718**
- Default probabilities, historical  
违约概率, 历史, 465~466
- Default probability, *see* Probability of default.  
违约概率, 参见违约的可能性
- Default probability density  
违约概率密度, **718**
- Default risk, counterparty, adjusting  
derivatives' valuation  
违约风险, 另一方, 调整衍生证券估值, 475~476
- Deferred payment option  
延迟支付期权, 510, **718**
- Deferred swap  
延迟互换, 601, **718**
- Delivery  
交割, 4, 19~26, 112
- Delivery price  
交割价格, **718**
- Delta  
Delta 值, 238, **719**
- estimating, using binomial tree  
估计, 用二叉树图, 383~384
  - European options  
欧式股票期权, 334~337
- forward contract  
远期合约, 336

|  |   |                                    |
|--|---|------------------------------------|
| futures contract   | Dirty price, bond   | DJ Stoxx 50 Index                  |
| 期货合约, 336~337  | 债券的全价, 591, 719   | DJ Stoxx 50 指数, 58                 |
| interest rate derivatives                                      | Discount bond   | Dow Jones Industrial Average (DJX) |
| 利率衍生品, 605   | 贴现债券, 719   | 道琼斯工业平均指数, 56                      |
| portfolio  | Discount broker   | Down-and-in call                   |
| 组合, 339  | 贴现经纪人, 181  | 下跌敲入看涨期权, 513                      |
| relationship with theta and gamma                              | Discount instrument                                       | Down-and-in option                 |
| 和 theta、gamma 的关系, 347   | 贴现金融工具, 719   | 下跌敲入期权, 719                        |
| Delta hedging  | Discount rate   | Down-and-in put                    |
| Delta 对冲, 238, 719   | 贴现率, 122, 719   | 下跌敲入看跌期权, 515                      |
| dynamic aspects  | Discrete-time stochastic process                          | Down-and-out call                  |
| 动态方面, 337~339  | 离散时间随机过程, 251, 258  | 下跌敲出看涨期权, 513                      |
| exotic options   | Discrete variable   | Down-and-out option                |
| 奇异期权, 523  | 离散变量, 122   | 下跌敲出期权, 719                        |
| impact of stochastic volatility on delta hedging               | Discretionary order                                       | Down-and-out put                   |
| 随机波动性对 Delta 对冲的影响, 546  | 授权指令, 35  | 下跌敲出看跌期权, 515                      |
| performance measure  | Diversification benefits                                  | Downgrade trigger                  |
| 效果度量, 339  | 分散化投资的好处, 428, 706~707                                    | 降级触发, 478, 479, 719                |
| transaction cost   | Dividend  | Drift rate                         |
| 交易成本, 340  | 红利, 289, 387, 719   | 漂移率, 255, 719                      |
| Delta-neutral portfolio  | American call option valuation, using Black Scholes model | Duration                           |
| Delta 中性证券组合, 333, 339, 719                                    | 用 Black-Scholes 模型, 估值美式看涨期权, 289~292                     | 久期, 83, 719                        |
| DerivaGem, 719   | binomial model for stocks paying dollar dividend          | bond                               |
| Derivative   | 用二叉树模型, 为支付现金红利的股票估值, 387~391                             | 债券, 83~85                          |
| 衍生品或衍生产品, 1, 719   | bounds of option prices                                   | bond portfolio                     |
| nonstandard  | 期权的价格下限, 204~206  | 债券组合, 85                           |
| 非标准化, 176  | European option valuation, using Black - Scholes model    | modified                           |
| plain vanilla  | 用 Black-Scholes 模型, 估值欧式期权, 289~290                       | 修正, 84                             |
| 标准型, 139   | stock option and  | Duration matching                  |
| Derivatives transactions, credit risk and衍生品交易, 信用风险, 475, 476 | 股票期权, 174~178, 194  | 久期匹配, 134~135, 719                 |
| Deterministic variable   | stock prices and  | Duration-based hedge ratio         |
| 确定性变量, 719   | 股票价格, 174~178, 194  | 基于久期的套期比率, 133                     |
| Deutsche Bank  | stock splits and  | Duration-based hedging strategies  |
| 德意志银行, 709   | 股票分割, 176~178   | 基于久期的套期策略, 133~134                 |
| Diagonal spread  | Dividend yield  | Dynamic hedging                    |
| 对角价差期权, 219~220, 719   | 红利收益, 719   | 动态对冲操作, 333, 351, 719              |
| Differential swap (diff swap)                                  | binomial tree and   | Early exercise                     |
| 差异互换, 163, 677, 719  | 二叉树, 306, 388   | 提前执行, 171, 201, 202, 719           |
| Diffusion model  | DJ Euro Stoxx 50 Index                                    | Earth Satellite Corporation        |
| 扩散模型, 540  | DJ Euro Stoxx 50 指数, 58                                   | 地球卫星公司, 532                        |
| Diffusion process  |   | Efficient market hypothesis        |
| 扩散过程, 719  |   | 有效市场假设, 720                        |
| Dilution   |   | Electricity derivatives            |
| 稀释, 287  |   | 电力衍生品, 534                         |
|  |   | Electronic trading                 |
|  |   | 电子交易方式, 2, 720                     |

- Embedded option  
嵌入期权, 679~682, 720
- Empirical research  
实证研究, 720
- Energy derivatives  
能源衍生品, 533~535
- hedge risks  
对冲风险, 535
  - modeling energy prices  
能源定价模型, 534~535
- Enron's bankruptcy  
安然的破产, 479
- Equilibrium model, interest rates  
均衡模型, 利率, 624~628, 720
- Equity swap  
权益性互换, 163, 678, 720
- Equity tranche  
权益分券, 498
- Equivalent martingale measure result  
等价鞅测度, 565, 570~571
- Eurex  
欧洲期货交易所, 19, 58, 180
- Eurocurrency  
欧元, 720
- Eurodollar  
欧洲美元, 720
- Eurodollar futures  
欧洲美元期货, 129~133, 150, 720
- Eurodollar interest rate  
欧洲美元利率, 720
- European option  
欧式期权, 6, 169, 720
- binomial trees  
二叉树, 227~236, 303, 317~319
  - Black-Scholes model, on a non-dividend-paying stock  
用 Black-Sholes 模型计算不分配红利的(欧式期权的)价格, 282~285
  - Black-Scholes model, on a stock paying a known dividend yield  
用 Black-Sholes 模型计算已知红利收益率的(欧式期权的)价格, 302~303
  - delta  
delta 值, 238, 239
  - dividend-paying stock  
支付红利的股票, 204~205, 289, 301
- futures option compared to spot option  
期货期权与现货期权的比较, 321~322
- non-dividend-paying stock  
不支付红利的股票, 201~204, 282~285
- put call parity  
看跌期权与看涨期权的平价关系, 198~201, 205, 210~211
- risk-neutral valuation  
风险中性估值, 303
- stock paying a known dividend yield  
已知红利收益率的股票, 301~303
- EWMA, *see* Exponentially weighted moving average  
指数加权移动平均模型, 720
- Excess cost layer, reinsurance  
分段补偿, 再保险, 536
- Excess-of-loss reinsurance contract  
额外损失, 再保险合约, 536
- Exchange clearinghouse  
交易清算所, 27
- Exchange option  
交换期权, 520, 577, 720
- Exchange rates, Black Scholes and  
汇率, Black-Scholes, 362~365
- Exchange-traded market  
场内交易市场, 1~2
- difference between over-the-counter market  
和场外交易市场的区别, 2~3
  - for options  
期权的, 176
- Ex-dividend date  
除权日, 289, 305, 720
- Executive stock option  
管理层股票期权, 186, 286, 720
- Exercise boundary parameterization approach, Monte Carlo simulation for American options  
提前执行边界参数化方法, 蒙特卡罗模拟美式期权, 559, 560
- Exercise limit  
执行限额, 178, 720
- Exercise price  
执行价格, 6, 720
- Exotic option  
奇异期权, 187, 509, 720
- Asian options  
亚式期权, 518~520, 529, 713
- barrier options  
障碍期权, 513~515, 551~554, 714
- basket options  
篮子期权, 521, 714
- binary options  
两值期权, 516, 714
- chooser options  
后定选择权, 512~513, 716
- compound options  
复合期权, 511~512, 717
- forward start options  
远期期权, 511, 722
- lookback options  
回望期权, 516~517, 547~549, 724
- nonstandard American option  
非标准美式期权, 510, 511
- packages  
一揽子, 509, 510
- shout options  
叫停期权, 518, 729
- options to exchange one asset for another  
一项资产换取另一项资产的期权, 520, 521
- Exotics, *see* Exotic option.  
奇异, 参见奇异期权
- Expansion option  
扩张选择权, 695
- Expectations theory, shape of zero curve  
预期理论, 用来解释零息率曲线的形状, 87, 88, 720
- Expected return, stock's  
股票的预期收益率, 272~273
- stock option price and  
股票期权价格, 230~231
- Expected spot price  
预期的即期价格, 112
- Expected value of a variable  
变量的期望值, 720
- Expiration date  
期满日或执行日, 6, 169, 720
- Explicit finite difference method  
显性有限差分方法, 409, 412, 720
- relation to trinomial tree approach  
和三叉树图方法的关系, 412~414

- other finite difference methods
- 其他有限差分方法, 414~415
- Exponential weighting
- 指数加权, **721**
- Exponentially weighted moving average  
(EWMA)
- 指数加权移动平均模型, 447~448, **721**
- compared with GARCH
- 和 GARCH 模型相比, 451
- estimating parameters, maximum likelihood methods
- 用极大似然估计法估计参数, 451
- Exposure
- 暴露, 160~161, 475, **721**
- Extendable bond
- 可延长债券, **721**
- Extendable swap
- 可延长互换, 163, **721**
- Factor
- 因子, 436~439, **721**
- Factor analysis
- 因子分析法, 436~439, **721**
- Factor loading
- 因子载荷, 437
- Factor score
- 因子得分, 437
- FAS 123, 187
- FAS 133, 37, **721**
- FASB. *see* Financial Accounting Standards Board
- 美国财务会计准则委员会, **721**
- FBI
- 美国联邦调查局, 36
- Federal National Mortgage Association (FNMA)
- 联邦国民抵押协会, 666
- Federal Reserve Board
- 联邦储备委员会, 35
- Fill-or-kill order
- 成交或取消指令, 35
- Financial Accounting Standards Board (FASB)
- 美国财务会计准则委员会, 37, 187, **721**
- Financial intermediary
- 金融中介, 143~144, **721**
- Finite difference method
- 有限差分方法, 406~416, **721**
- applications of
- 应用, 415
- explicit
- 显性, 409, 410
- implicit
- 隐性, 406~409
- relation to trinomial tree approach
- 和三叉树图方法的关系, 412~414
- other
- 其他, 414~415
- First notice day
- 起始通知日, 33
- First-to-default basket credit default swap
- 参考实体篮子中第一次违约发生时的信用违约互换, 498
- Flat volatility
- 单一波动率, 598~599, **721**
- Flex option
- 变通期权, 176, 304, **721**
- Flexi cap
- 变通利率上限, 660, **721**
- Flexible forwards
- 灵活远期, 509
- Flight to quality
- 安全投资转移, 709
- Floor. *See also* Interest rate caps and floors
- 利率下限, 596, **721**
- Floor rate
- 下限利率, **721**
- Floor ceiling agreement, *see* Collar
- 利率双限, **721**
- Floorlet, interest rate
- 利率下限的单个期权, 596, **721**
- Foreign currency option, *see* Currency option
- 外汇期权, **721**
- Forward band
- 范围远期合约, 509
- Forward contract
- 远期合约, 3~5, **721**
- delivery
- 交割, 112
- delivery price
- 交割价格, 5
- delta, 336
- difference between futures and options and (远期的) 差别, 6, 19, 38~39, 103~104
- difference between options and futures and (远期的) 差别, 7, 169
- foreign exchange quotes
- 外汇 (远期合约) 报价, 4, 39
- hedging, using
- (用远期合约) 套期保值, 9
- valuing
- 定价, 101~103, 261
- Forward difference approximation
- 前向差分近似, 406
- Forward exchange rate
- 远期汇率, **721**
- Forward induction
- 向前的推导, 549
- Forward interest rate
- 远期利率, 78~80, 152~154, 610, **721**
- future interest rates vs. forward interest rates
- 期货利率和 (远期利率), 130~132
- Forward price
- 远期价格, 5, **721**
- for an investment asset that provides known cash income
- 已知现金收益的投资资产 (的远期价格), 98~100
- for an investment asset that provides known yield
- 已知红利收益率的投资资产 (的远期价格), 100
- for an investment asset that provides no income
- 没有收益的投资资产 (的远期价格), 95~97
- Itô's lemma, applied to
- 伊藤定理, 261
- relation to futures price
- 和期货价格的关系, 103
- risk-neutral valuation
- 风险中性定价, 281~282
- Forward rate
- 远期利率, **721**
- Forward rate agreement (FRA)
- 远期利率协议, 80~81, **722**

- Forward rate volatilities  
远期利率波动, 658
- Forward risk-neutral  
远期风险中性, 571, 610, 613, 615
- Forward risk-neutral world  
远期风险中性世界, 571, 722
- Forward start option  
远期生效期权, 511, 722
- Forward swap  
远期互换, 162, 722
- Forward with optional exit  
可选退出的远期, 510
- Front office  
前台, 707
- FTSE 100 Index  
FT-SE 100 指数, 58
- Full-service broker  
全面服务经纪人, 181
- Futures contract  
期货合约, 6, 722
- asset underlying  
标的资产, 21~22
  - closing out positions  
平仓, 20
  - commodities  
商品, 108~111
  - contract size  
合约规模, 22
  - currencies  
货币, 105~108
  - delivery month  
交割月份, 22
  - difference between options and  
和期权的差别, 6~7, 169
  - foreign exchange quotes  
外汇报价, 39
  - long position  
多头, 19, 20
  - margins and  
保证金, 24~27
  - marking to market  
盯市, 24
  - price quotes  
报价, 23
  - risk  
风险, 113~114
  - short position  
空头, 19, 20
  - specification of  
细则, 20~23
  - Treasury bond and Treasury note futures  
长期国债和中期国债的期货, 21~22, 121~129
  - Futures interest rate  
利率期货, 121~136
  - Futures market, regulation of  
期货市场, 监管, 35, 36
  - Futures option  
期货期权, 174, 311~316, 722
  - interest rate futures option  
基于利率期货的期权, 312~315
  - popularity of  
广泛, 315
  - put-call parity  
看涨期权与看跌期权之间的平价关系, 316~317
  - quotations  
报价, 311~312
  - spot options compared to  
现货期权与(期货期权的)比较, 321~322
  - valuation, using binomial trees  
用二叉树模型估值, 317~319
  - valuation, using Black's model  
Black 模型估值, 320~321
- Futures price  
期货价格, 20, 722
- convergence to spot price  
(期货价格)收敛于现货价格, 23
  - cost of carry  
持有成本, 111~112
  - expected future spot prices and  
预期将来的即期价格, 112~114
  - expected growth rate  
预期增长率, 319~320
  - relationship to forward prices  
和远期价格的关系, 103
- Gamma  
Gamma 值, 342, 722
- cross gamma  
交叉 gamma, 434
- effect on the probability distribution of the  
value of a portfolio  
对资产组合价格概率分布的影响, 431~434
- estimating, using binomial tree  
用二叉树模型估计, 383~384
- formula  
公式, 346, 348
- interest rate derivatives  
利率衍生品, 605
- relationship with delta and theta  
和 delta、theta 的关系, 347
- Gamma-neutral portfolio  
gamma 中性证券组合, 343, 722
- GAP-management  
GAP 管理, 135
- GARCH model  
GARCH 模型, 449~450, 722
- compared with EWMA  
和 EWMA 模型的比较, 451
  - estimating parameters, maximum likelihood  
methods  
用极大似然估计法估计参数, 451~455
  - forecasting future volatility  
预测未来的波动率, 456~459
- Gaussian copula  
Gaussian Copula 模型, 480~481, 484
- Generalized Wiener Process  
一般化的维纳过程, 255~257, 722
- Geometric average  
几何平均, 722
- Geometric Brownian motion  
几何布朗运动, 722
- Gibson Greetings  
吉布森贺卡公司, 705, 707, 711
- Girsanov's theorem  
Girsanov 定理, 240
- Goldman Sachs Commodity Index (GSCI)  
高盛商品指数, 58
- Good-till-canceled order  
取消前有效指令, 35
- Government National Mortgage Association  
(GNMA)  
政府国民抵押协会, 666

Greek letters, Greeks. *See also* Delta, Theta, Gamma, Vega, Rho.  
 套期保值参数, 329, 368, 722  
 estimating, using binomial tree  
 用二叉树模型估计, 383, 384  
 estimating, using finite difference method  
 用有限差分方法估计, 415  
 estimating, using Monte Carlo simulation  
 用蒙特卡罗模拟估计, 401~402  
 interest rate derivatives  
 利率衍生品, 605~606  
 Taylor series expansions and  
 泰勒展开, 360  
 Gross basis  
 基于总头寸, 27  
 Growth factor  
 增长因子, 379  
 Gucci Group  
 古琦集团, 177  
 Haircut  
 扣减, 478, 722  
 Hammersmith and Fulham  
 哈默史密斯和富勒姆, 162, 705, 710  
 Hazard rate  
 风险比率, 466, 722  
 Heath, Jarrow, and Morton model  
 Heath、Jarrow 和 Morton 模型, 653~656  
 Heating degree days (HDD)  
 热度日数, 532, 722  
 Hedge accounting  
 对冲会计法, 36  
 Hedge funds  
 对冲基金, 9  
 Hedge ratio  
 套期保值率, 722  
 Hedge-and-forget schemes  
 保完即忘操作, 333, 336  
 Hedge-and-forget strategy  
 保完即忘策略, 43  
 Hedger  
 套期保值者, 9~11, 43, 711, 722  
 Hedging/hedge  
 套期保值, 722  
 arguments for and against  
 有关对冲的各种争论, 46~48

basic principles  
 基本原理, 43~45  
 basis risk  
 基差风险, 48~52  
 competitors and  
 (对冲) 与竞争对手, 46~47  
 delta hedging  
 delta 套期保值, 332~340  
 duration-based hedging strategies  
 基于久期的套期保值策略, 133~136  
 effectiveness  
 套期保值效益, 53  
 equity portfolio  
 股票组合, 58~60  
 exotic options  
 奇异期权, 522, 523  
 gamma  
 gamma 值, 342~346  
 gold mining companies and  
 采金公司, 48  
 in practice  
 现实中的 (动态对冲), 351  
 long hedge  
 多头对冲, 44~45  
 Metallgesellschaft (MG) and  
 德国金属股份公司, 63  
 naked and covered position  
 裸期权头寸与有保护期权头寸, 330  
 perfect hedge  
 完全对冲, 43  
 performance measure  
 保值效果度量, 338~339  
 rho  
 rho 值, 349  
 rolling forward  
 向前延展 (的套期保值), 62~63  
 stop-loss strategy  
 止损策略, 330~332  
 short  
 空头, 44  
 theta, 340~342  
 using index futures  
 用指数期货, 57~61  
 vega  
 vega 值, 347~349  
 Historic volatility  
 历史波动率, 274~276, 722  
 Historical simulation, value at risk  
 历史模拟方法, VaR, 423~425, 722  
 compared with model-building approach  
 和建模计算方法比较, 435  
 History-dependent derivative  
 历史依赖型的衍生证券, 547  
 Holiday calendar  
 节假日日历, 722  
 Hopscotch method  
 跳格子方法, 414  
 Hunt brothers  
 亨特兄弟公司, 36  
 Hurricane Andrew  
 Andrew 飓风, 536  
 IAS 2  
 国际会计准则 2, 187  
 IAS 133  
 国际会计准则 133, 37  
 Implicit finite difference method  
 隐性有限差分方法, 406~409, 722  
 relation to explicit finite difference method  
 和显性有限差分方法的关系, 409  
 Implied distribution  
 隐含分布, 723  
 currency options  
 货币期权, 362~365  
 stock options  
 权益性期权, 365~367  
 determining  
 确定, 375  
 Implied tree model, *see* Implied volatility function (IVF) model  
 隐含树图, 723  
 Implied volatility  
 隐含波动率, 288~289, 723  
 Implied volatility function (IVF) model  
 隐含波动率函数模型, 369, 546, 723  
 Importance sampling, variance reduction procedure  
 重点抽样法, 方差减少方法, 403  
 Inception profit  
 初始收益, 708, 723  
 Index amortizing swap  
 指数分期偿付互换, 682, 723

- Index arbitrage  
指数套利, 105, 723
- Index currency option note (ICON)  
指数化外汇期权票据, 17
- Index futures  
指数期货, 723
- hedging, using index futures  
用指数期货(套期保值), 56~61
  - portfolio insurance  
证券组合保险, 335
  - stock index futures  
股票指数期货, 56~62
- Index option  
指数期权, 174, 304~309, 723
- portfolio insurance  
证券组合保险, 306
  - quotations  
报价, 304
  - valuation, binomial tree  
用二叉树法估值, 384~387
  - valuation, Black-Scholes  
用 Black-Scholes 模型估值, 306
- Indexed principal swap  
指数本金互换, 682, 723
- Initial margin  
初始保证金, 24, 723
- Inner barrier  
内部障碍, 551
- Instantaneous forward rate  
瞬态远期利率, 723
- Instantaneous short rate. *See also* Short rate.  
瞬态短期利率, 623
- Insurance derivatives  
保险衍生品, 1, 535, 536
- Interest only (IO)  
只有利息证券, 667, 724
- Interest rate  
利率, 71~72
  - continuous compounding  
连续复利, 72~73
  - day count conventions  
日算惯例, 121, 122, 145
  - forward  
远期, 78~80
  - forward-rate agreements (FRA)  
远期利率协议, 80~82
- term structure theories  
期限结构理论, 87
- types of  
种类, 69~71
- zero-coupon yield curve  
零息票收益率曲线, 76~78
- Interest rate caps and floors  
利率上限和下限, 594~600, 724
- cap as a portfolio of bond options  
利率上限可看作为债券期权的组合, 595
  - cap as a portfolio of interest rate options  
利率上限可看作为期权的组合, 595
  - floors and collars  
利率下限和双限, 596
  - impact of day count conventions  
日算惯例的影响, 600
  - put-call parity  
看涨和看跌的平价关系, 597
  - spot volatilities vs. flat volatilities  
即期波动率与单一波动率, 598~599
  - valuation of cap and floors  
利率上限与利率下限的估值, 596~598
- interest rate collar  
利率双限, 596, 724
- Interest rate derivative  
利率衍生证券, 587, 724
- bond options  
债券期权, 589~594, 532~633
  - calibration  
校准, 645~636
  - equilibrium models  
均衡模型, 624~628
  - European swap option  
欧式互换期权, 601~605
  - hedging  
套期保值, 605, 647
  - interest rate caps and floors  
利率上限和下限, 594~600
  - mortgage-backed securities  
住房抵押贷款证券, 666~668
  - no-arbitrage models  
无套利模型, 628~632
  - spot volatilities vs. flat volatilities  
即期波动率与单一波动率, 598
  - tree-building procedure  
构造树图的方法, 636~645
- trees for  
(利率) 树图, 634~635
- volatility structures  
波动率结构, 663~664
- Interest rate floor, *see* Interest rate caps and floors  
利率下限, 723
- Interest rate futures  
利率期货, 121~135
  - Eurodollar futures  
欧洲美元期货, 129~133
  - relation to forward interest rate  
和远期利率的关系, 130~133
  - Treasury bond futures  
长期国债期货, 123~129
- Interest rate futures option  
基于利率的期货期权, 312~315
- interest rate model  
利率模型
  - Black  
Black 模型, 587~589
  - Black Karasinski  
Black Karasinski 模型, 631
  - Brennan-Schwartz  
Brennan-Schwartz 模型, 627
  - calibration  
校准, 645~646
  - Cox-Ingersoll-Ross  
Cox-Ingersoll-Ross 模型, 627
  - Heath-Jarrow-Morton  
Heath-Jarrow-Morton 模型, 653~656
  - Ho-Lee  
Ho-Lee 模型, 628, 629, 632, 633
  - Hull-White (one factor)  
Hull-White 单因子模型, 630~631
  - Hull-White (two factor)  
Hull-White 双因子模型, 631~632
  - LIBOR market model  
LIBOR 市场模型, 656~666
  - Longstaff-Schwartz  
Longstaff-Schwartz 模型, 628
  - Rendleman-Bartter  
Rendleman-Bartter 模型, 624~625
  - Vasicek  
Vasicek 模型, 625~626

- Interest rate option  
利率期权, 723
- interest rate parity  
利率平价关系式, 106
- Interest rate swap  
利率互换, 139~154, 161~164, 723
- comparative-advantage argument  
比较优势的观点, 146~149
- confirmation  
确认书, 145~146
- day count conventions  
日算惯例, 145
- financial intermediary, role of  
金融中介的作用, 143
- mechanics of  
(利率互换的)机制, 139~145
- plain vanilla interest rate swap  
标准型利率互换, 139
- to transform a liability  
(利用互换)转换某项负债, 142
- to transform an asset  
(利用互换)转换某项资产, 142~143
- valuation  
估值, 151~154
- Interest rate trees  
利率树图, 634~636
- Internal controls  
内部控制, 712
- International Accounting Standards Board  
国际会计准则理事会, 37, 187
- International Petroleum Exchange (IPE)  
伦敦国际石油交易所, 533
- International Swaps and Derivatives  
Association (ISDA)  
国际互换与金融衍生产品协会, 145
- Master Agreement  
总协议, 146
- In-the-money option  
实值期权, 176, 334, 341, 371, 723
- Intrinsic value  
内涵价值, 176, 723
- Inverted market  
逆向市场, 32, 723
- Investment asset  
投资资产, 93, 723
- forward price for an  
远期价格, 95~98
- market price of risk  
风险的市场价格, 565~569
- Investment grade  
投资级, 465
- Itô process  
Itô 过程, 256, 724
- Itô's lemma  
伊藤定理, 260, 261, 569, 571, 583, 724
- multiple sources of uncertainty  
多个不确定性, 583~586
- proof  
证明, 266~267
- J.P. Morgan  
J.P. Morgan 公司, 448
- Jump diffusion model  
混合跳跃-扩散模型, 541~544, 724
- Kidder Peabody  
凯德公司, 97, 704, 707, 708
- Knock-in and knock-out options  
敲入期权和敲出期权, 513
- Kurtosis  
峰度, 362, 724
- Last notice day  
最后通知日, 33
- Last trading day  
最后交易日, 33
- LEAPS (long-term equity anticipation  
securities)  
长期股权预期证券, 176, 304, 724
- Least-squares approach.  
Monte Carlo simulation for American options  
最小二乘方法, 美式期权的蒙特卡罗模拟,  
557~559
- Levenberg-Marquardt procedure  
Levenberg-Marquardt 方法, 647
- Levy processes  
Levy 过程, 540
- LIBID  
伦敦银行同业拆入利率, 724
- LIBOR  
伦敦银行同业拆出利率, 71, 724
- LIBOR curve  
LIBOR 曲线, 132~133, 150~151, 724
- LIBOR market model (LMM), interest rate  
derivatives  
LIBOR 市场模型, 利率衍生品, 656~666
- LIBOR-in-arrears swap  
后定 LIBOR 利率的互换, 163, 675~676,  
724
- Limit move  
涨跌停板变动, 23, 724
- limit down  
跌停板, 23
- limit up  
涨停板, 23
- Limit order  
限价指令, 34, 724
- Linear model, value at risk  
线性模型, VaR, 428~431
- Liquidity preference theory, shape of zero  
curve  
流动性偏好理论, 零息率曲线形状, 87,  
724
- Liquidity premium  
流动性溢价, 724
- Liquidity risk  
流动性风险, 709, 724
- Lloyds syndicate  
劳埃德辛迪加, 536
- LMM, see LIBOR market model  
LMM, 也可参见 LIBOR 市场模型
- Locals  
自营商, 34, 724
- Lock-out period  
锁定期, 510, 590
- Lognormal distribution  
对数正态分布, 724
- Lognormal property  
对数正态特性, 262~263, 269~271
- London Interbank Bid Rate (LIBID)  
伦敦银行同业拆入利率, 71, 724
- London Interbank Offer Rate (LIBOR)  
伦敦银行同业拆出利率, 71, 724
- zero curve. See also Swap zero curve.  
零息率曲线, 132~133, 150~151
- London International Financial Futures and  
Options Exchange (LIFFE)  
伦敦金融期货期权交易所, 19

- London Stock Exchange  
伦敦股票交易所, 14, 58
- Long hedge  
多头对冲, 44~45, 724
- Long position  
多头, 4, 8, 724
- Long-Term Capital Management (LTCM)  
长期资本管理公司, 28, 704, 710
- Long-term equity anticipation securities (LEAPS)  
长期股权预期证券, 175, 304, 724
- Lookback option  
回望期权, 516~517, 547~549, 724
- Low-discrepancy sequence, *see* Quasi-random sequence  
确定性的超均匀分布序列, 低差异序列, 724
- Maintenance margin  
维持保证金, 25, 26, 27, 182, 725
- Margin  
保证金, 24~27, 182, 183, 725
- buying on margin  
押金购买, 182
  - clearing margin  
清算保证金, 27~28
  - futures contracts  
期货合约 (的保证金), 24~25
  - gross margining  
基于总头寸计算保证金, 27
  - initial margin  
初始保证金, 24~27, 182
  - margin call  
追加保证金通知, 725
  - margin requirements  
保证金要求, 183
  - net margining  
基于净头寸额计算保证金, 27
  - stock options  
股票期权 (的保证金), 182~183
  - variation margin*  
变动保证金, 25
- Margin account  
保证金账户, 12, 24~27, 94, 182
- Market maker  
做市商, 144~149, 180, 725
- Market model  
市场模型, 725
- Market order  
市价指令, 34
- Market price of risk  
风险的市场价格, 565~569, 689~690, 725
- Market segmentation theory, shape of zero curve  
市场分割理论, 零息率曲线的形状, 87, 725
- Market-if-touched (MIT) order  
触及市价指令, 34
- Market-not-held order  
授权指令, 35
- Marking to market  
盯市, 24, 725
- Marking to model  
盯住模型, 708
- Markov process/property  
马尔科夫过程/性质, 251~252, 725
- Martingale  
鞅, 565, 570, 571, 725
- equivalent martingale measure result  
等价鞅测度, 565, 570, 571
- Maturity date  
到期日, 6, 169, 725
- Maximum likelihood method  
极大似然估计, 451~455, 725
- Mean reversion  
均值回复, 450, 625, 693~694, 725
- Measure  
测度, 565, 725
- Metallgesellschaft (MG)  
德国金属股份公司, 63, 705
- Mezzanine tranche  
中间分券, 500
- Mid-curve Eurodollar futures option  
Mid-curve 欧洲美元期货期权, 312
- Middle office  
中台, 707
- Midland Bank  
米兰银行, 704
- Minimum variance hedge ratio  
最小方差的套期保值率, 52~54
- Min-max, 509
- Mixed jump diffusion model  
混合跳跃-扩散模型, 541~542
- Model-building approach, value at risk  
建模计算方法, VaR, 425~428
- compared with historical simulation  
和历史模拟法比较, 435
- Modified duration  
修正久期, 84~85, 725
- Moment matching, variance reduction procedure  
矩匹配法, 方差减少方法, 404
- Money market account  
货币市场账户, 572, 725
- Monte Carlo simulation  
蒙特卡罗模拟, 259, 332, 377, 395~402, 434~435, 725
- American options and  
美式期权, 557~561
  - calculating  $\pi$  with  
(用蒙特卡洛模拟) 计算  $\pi$ , 396
  - exercise boundary parameterization approach  
执行边界参数化方法, 559~560
  - generating random samples  
产生随机样本, 399
  - Greek letters and  
套期保值参数, 401
  - least-squares approach  
最小二乘方法, 557~561
  - number of trials  
模拟运算数目, 400~401
  - value-at-risk measure  
计算 VaR, 434~435
  - valuing derivatives on more than one market variable  
为依赖多个市场变量的衍生品估值, 399
  - valuing mortgage-backed securities  
为住房抵押贷款债券估值, 666
  - valuing new business  
为新企业估值, 691, 699
  - Moody's  
穆迪, 465
  - Mortgage-backed security (MBS)  
住房抵押贷款债券, 666~669, 725
  - collateralized mortgage obligations  
抵押担保证券, 667

- option-adjusted spread (OAS) 无套利利差, 664
- stripped mortgage-backed security 为住房抵押贷款债券估值, 667~668
- Mutual fund's return 共同基金收益率, 273
- Naked option 无保护期权 (裸期权), 182~183
- Naked position 裸期权头寸, 330, 725
- Nasdaq 100 index (NDX) 纳斯达克 100 指数, 22, 56, 174
- Mini Nasdaq 100 index futures 微型纳斯达克 100 指数期货, 22, 56
- index options 指数期权, 174
- National Association of Securities Dealers Automatic Quotations Service 全国证券交易商协会自动报价服务, 56
- National Futures Association (NFA) 国家期货协会, 35
- National Westminster Bank 国民西敏银行, 704, 708
- Natural gas derivatives 天然气衍生品, 533~534
- Net present value (NPV) approach 净现值方法, 687~688
- Netting 净额结算, 476~477, 725
- Neutral calendar spread 中性的日历差价期权, 219
- New York Cotton Exchange 纽约棉花交易所, 21
- New York Federal Reserve 纽约联邦储备, 704
- New York Mercantile Exchange (NYMEX) 纽约商品交易所, 44, 533
- New York Stock Exchange (NYSE) 纽约股票交易所, 14, 56
- Newton Raphson method 牛顿迭代法, 75, 288, 642, 725
- Nikkei 225 日经 225, 57
- futures 期货, 104, 615, 704
- No-arbitrage assumption 无套利假设, 726
- No-arbitrage interest rate model 无套利利率模型, 628~632, 726
- Black-Karasinski model Black-Karasinski 模型, 631
- Ho-Lee model Ho-Lee 模型, 628~629
- Hull-White (one-factor) model Hull-White (单因子) 模型, 630~631
- Hull-White (two-factor) model Hull-White (双因子) 模型, 631~632
- L1BOR market model (LMM) LIBOR 市场模型, 656~666
- Heath-Jarrow-Morton (HJM) model Heath-Jarrow-Morton 模型, 651~656
- Nonstandard American options 非标准美式期权, 510~511
- Nonstationary model 非稳定模型, 647, 726
- Nonsystematic risk 非系统风险, 113, 570, 726
- Normal backwardation 现货溢价, 114, 726
- Normal distribution 正态分布, 252~253, 269, 726
- Normal market 正常市场, 32, 726
- Notice of intention to deliver 交割意向通知书, 20
- Notional principal 名义本金, 141, 489, 726
- Numeraire 计价标准, 570, 726
- annuity factor as the numeraire 年金因子作为计价标准, 574~575
- impact of a change in numeraire 计价标准改变的影响, 578~579
- interest rates when a bond price is the numeraire 债券价格作为计价标准时的利率, 573~574
- money market account as the numeraire 货币市场账户作为计价标准, 572
- numeraire ratio 计价标准比率, 579
- zero-coupon bond price as the numeraire 零息票债券价格作为计价标准, 572~573
- Numerical procedure 数值方法, 726
- OCC, see Options Clearing Corporation (OCC) 期权清算公司, 726
- October 19 1987 年 10 月 19 日 (黑色星期一), 27, 355, 356, 435
- Offer 竞卖价, 2, 180, 726
- Offsetting orders 冲销指令, 180
- Off-the-run bond 交易不活跃的债券, 709
- On-the-run bond 交易活跃的债券, 709
- Open interest 未平仓量, 31, 178, 726
- Open order 取消前有效指令, 35
- Open outcry trading system 公开喊价交易系统, 2, 726
- Option 期权, 6~8, 726
- class 期权类, 176, 726
- difference between futures (or forward) contracts and 和远期、期货合约的区别, 7, 169
- exercise limits 执行限额, 178
- exercising 行权
- (期权的) 执行, 184
- exotic 奇异期权, 187, 509
- fence, 509
- hedging, using 对冲, 10~11
- intrinsic value 内在价值, 176
- position limits 头寸限额, 178
- positions 头寸, 171~173
- regulation of 法规, 184
- series 序列, 176, 726

|   |  |   |
|---|--|---|
| taxation                                  | options                                  | Premium                                       |
| 税收, 181~182                               | 期权, 186~187                              | 权利金, 727                                      |
| time value                                | Pacific Exchange                         | Prepayment function                           |
| 时间价值, 176                                 | 太平洋股票交易所, 173                            | 提前偿付函数, 656, 727                              |
| trading                                   | Package                                  | Price sensitivity hedge ratio                 |
| 交易, 180                                   | 一揽子组合, 509~510, 726                      | 价格敏感的套期比率, 133                                |
| types of                                  | Par value                                | Prices  |
| 类型, 6, 169~171                            | 面值, 726                                  | 价格  |
| Option-adjusted spread (OAS)              | Par yield                                | lifetime highs                                |
| 期权调整利差, 668, 726                          | 票面收益率, 75~76, 726                        | 最高价, 31                                       |
| Options Clearing Corporation (OCC)        | Parallel shift                           | lifetime lows                                 |
| 期权清算公司, 183~184, 726                      | 平行移动, 429, 436, 727                      | 最低价, 31                                       |
| Options in an investment opportunity      | Partial simulation approach, Monte Carlo | opening price                                 |
| 投资机会中的选择权价值, 694~700                      | simulation                               | 开盘价, 31                                       |
| Options involving several assets          | 部分模拟方法, 蒙特卡罗方法, 435                      | settlement price                              |
| 包含几种资产的期权, 521~522                        | Pass-throughs                            | 结算价格, 31                                      |
| Options on bonds                          | 贯彻始终的, 667                               | Principal                                     |
| 债券期权, 682~683                             | Path-dependent derivative                | 本金, 727                                       |
| Options on two correlated assets          | 路径依赖型衍生证券, 547~551, 727                  | Principal components analysis                 |
| 两项相关资产的期权, 554~556                        | Payoff                                   | 主成分分析法, 436~439, 727                          |
| Options to defer                          | 损益, 727                                  | Principal only (PO)                           |
| 延迟选择权, 695                                | Perfect hedge                            | 只有本金类证券, 纯本证券, 667, 727                       |
| Options to exchange one asset for another | 完全对冲, 43                                 | Probability measure                           |
| 用一项资产换取另一项资产的期权, 520~521                  | Philadelphia Stock Exchange (PHLX)       | 概率测度, 569                                     |
| forward risk-neutral valuation            | 费城股票交易所, 173, 309                        | Probability of default                        |
| 远期风险中性估值, 557~558                         | Physical probabilities                   | 违约概率, 466~467                                 |
| Options to extend                         | 物理概率, 472                                | comparison of default probabilities estimates |
| 展期选择权, 695                                | Plain vanilla product                    | 和违约概率估计相比, 470~473                            |
| Orange County                             | 最基本的, 标准型的产品, 509, 727                   | estimating, using bond prices                 |
| 橘郡, 80, 705, 706, 710                     | P-measure                                | 根据债券价格和(信用风险)估计违约                             |
| Order book official                       | P 测度, 240, 727                           | 概率, 468~470                                   |
| 指令登记员, 726                                | Poisson process                          | estimating, using equity prices               |
| Order, types of                           | 泊松过程, 541, 727                           | 利用股本价格和(信用风险)估计违约                             |
| 指令, 类型, 34~35                             | Portfolio immunization                   | 概率, 473~474                                   |
| Outer barrier                             | 资产组合免疫, 134, 727                         | historical default probabilities              |
| 外部障碍, 551                                 | Port/olio insurance                      | 历史违约概率, 465~467                               |
| Out-of-the-money option                   | 证券组合保险, 306~307, 352~354, 727            | implied from bond data                        |
| 虚值, (虚值)期权, 176, 334, 338, 641, 726       | stock market volatility and              | 从债券数据推断, 468~470                              |
| Outside model hedging                     | 股市波动率, 354~355                           | implied from credit default swaps             |
| 外推模型套期保值, 648                             | Position limit                           | 从信用违约互换推断, 492~496                            |
| Overnight repo                            | 头寸限额, 23, 178, 727                       | risk-neutral world vs. real world             |
| 隔夜回购, 71                                  | Positive semidefinite                    | 风险中性世界和现实世界, 472~473                          |
| Over-the-counter market                   | 半正定, 461                                 | Procter and Gamble                            |
| 场外交易市场, 2, 726                            | Position traders                         | 宝洁公司, 682, 705, 707, 711                      |
|   | 长线交易者, 34                                | Program trading                               |
|   |  | 程序交易, 105, 727                                |

|   |   |   |
|---|---|---|
| Protective put                                      | Treasury bills                          | Reversion level                           |
| 有保护看跌期权, 209, 727                                   | 短期国债的 (报价), 124                         | 回复水平, 728                                 |
| Pull-to-par   | Treasury bond and note futures          | Rho                                       |
| 回复面值, 727   | 中长期国债期货的 (报价), 123, 124                 | estimating, using binomial tree           |
| Pure jump model                                     | Treasury bonds                          | 估值, 用二叉树模型, 384                           |
| 纯跳跃模型, 540  | 长期国债的 (报价), 123                         | Rights issue                              |
| Put option  | US dollar swaps                         | 配股, 728                                   |
| 看跌期权, 2, 6, 170, 171~175, 727                       | 美元互换的 (报价), 145                         | Risk                                      |
| Put-call parity                                     | USD/GBP exchange rate                   | 风险  |
| 看跌期权和看涨期权之间的平价关系, 198, 201, 205, 302                | 美元/英镑汇率的 (报价), 4                        | back testing                              |
| Puttable bond                                       | Quoted price, bond and Treasury bill    | 回溯检验, 435                                 |
| 可提前回售债券, 590, 727                                   | 报价, 长期国债, 123~125                       | basis                                     |
| Puttable swap                                       | Rainbow option                          | 基差风险, 48~52                               |
| 可赎回互换, 163, 727                                     | 彩虹期权, 521, 728                          | credit                                    |
| Q measure   | Random walk                             | 信用风险, 160~151                             |
| Q 测度, 240, 727                                      | 随机游走, 227                               | foreign exchange                          |
| Quadratic model, value at risk                      | Range forward contract                  | 外汇风险, 158~160                             |
| 二次模型, VaR, 431~434                                  | 范围远期合约, 509, 728                        | market                                    |
| Quadratic resampling, variance reduction procedure  | Ratchet cap                             | 市场风险, 161                                 |
| 二次抽样法, 方差减少方法, 404                                  | Ratchet 利率上限, 660, 728                  | nonsystematic                             |
| Quanto  | Real options                            | 非系统风险, 113, 570, 726                      |
| 跨币衍生证券, 163, 615~617, 727                           | 实物期权, 1, 687~700, 728                   | stress test                               |
| Quasi-random sequence, variance reduction procedure | Rebalancing                             | 压力测试, 435, 707                            |
| 拟随机数序列, 404, 728                                    | 再调整, 278, 333, 728                      | systematic                                |
| Quotations  | Reference entity                        | 系统性风险, 113, 570, 730                      |
| 报价  | 参考实体, 489                               | Risk and return, relationship between     |
| commodity futures                                   | Reinsurance, against catastrophic risks | 风险和收益, 两者之间的关系, 113                       |
| 商品期货的 (报价), 29~30                                   | (CAT reinsurance)                       | Risk limits                               |
| currency futures                                    | 再保险, 针对灾难性风险, 535~536                   | 风险限制水平, 703~706                           |
| 货币期货的 (报价), 39, 108                                 | Repo                                    | Risk-free interest rate                   |
| currency options                                    | 回购, 71, 728                             | 无风险利率, 58, 69~71, 95, 193, 728            |
| 货币期权的 (报价), 314                                     | Repo rate                               | Risk-free zero curve                      |
| futures options                                     | 回购利率, 71, 728                           | 无风险零息率曲线, 150~151                         |
| 期货期权的 (报价), 311~314                                 | overnight repo                          | RiskMetrics, 448                          |
| interest rate futures                               | 隔夜回购, 71                                | Risk-neutral valuation                    |
| 利率期货的 (报价), 124                                     | term repo                               | 风险中性估值方法, 231~233, 281~282, 303, 531, 728 |
| stock index futures                                 | 期限回购, 71                                | Risk-neutral world                        |
| 股指期货的 (报价), 57                                      | Repurchase agreement                    | 风险中性世界, 231, 728                          |
| stock index options                                 | 回购协议, 71                                | forward risk neutral                      |
| 股指期权的 (报价), 305                                     | Reset date                              | 远期风险中性, 576                               |
| stock options                                       | 重设日, 728                                | real world vs.                            |
| 股票期权的 (报价), 179                                     | Retractable bond                        | 现实世界和 (风险中性世界的) 对比, 232~233               |
|   | 可撤销债券, 590                              | rolling forward risk neutral              |
|   | Reverse calendar spreads                | 滚动远期风险中性世界, 657                           |
|   | 倒置日历价差期权, 219                           |   |

- traditional  
传统(风险中性世界), 565, 563
- Roll back  
逆向推演法, 728
- Rolling forward risk neutral  
滚动远期风险中性世界, 657
- Russell 2000 index  
罗素 2000 指数, 57, 304
  - options  
期权, 304
- Scalper  
抢帽子者, 34, 728
- Scenario analysis  
情景分析, 351, 707, 728
- Securities and Exchange Commission (SEC)  
证券交易委员会, 35, 184, 728
- Segmentation theory, shape of zero curve  
分割理论, 零息率曲线的形状, 87
- Settlement price  
结算价格, 31, 728
- Share price index  
股价指数, 58
- Shell  
壳牌公司, 705
- Short hedge  
空头对冲, 44, 728
- Short position  
空头, 4, 729
- Short rate  
短期利率, 623, 729
  - calibration  
校准, 645~646
  - equilibrium models  
均衡模型, 624~625
  - no-arbitrage models  
无套利模型, 628~632
  - volatility structures  
波动率结构, 633~634
- Short selling  
卖空, 93, 729
- Short squeezed investor  
被挤空的投资者, 94
- Short-term risk-free rate, *see* Short rate  
短期无风险利率, 729
- Shout option  
叫停期权, 518, 729
- Siegel's paradox  
Siegel悖论, 617
- Simulation  
模拟, 729
- Singapore International Monetary Exchange (SIMEX)  
新加坡国际金融交易所, 19
- Single-tranche trading  
单分券交易, 499
- Specialist  
特定经纪人, 729
- Speculation  
投机
  - using futures  
用期货, 11~12
  - using options  
用期权, 12~14
- Speculator  
投机者, 11~15, 34, 703, 729
- Spot  
即期
  - convergence of futures price to spot price  
期货价格收敛到(即期价格), 23
  - interest rate  
利率, 729
  - price  
价格, 729
  - volatility  
波动率, 602, 606, 729
- Spread option  
价差期权, 729
- Spread trading strategy  
价差期权交易策略, 211~220
- Spread transaction  
价差交易, 26, 729
- Standard and Poor's (S&P)  
标准普尔, 465
- Standard and Poor's (S&P) Index  
标准普尔指数, 56
  - 100 Index (OEX)  
100 指数, 174, 304
  - 500 Index (SPX)  
500 指数, 27, 56, 174
- Static hedging scheme  
静态对冲操作, 333, 729
- Static options replication  
静态期权复制, 522~524, 729
- Step-up swap  
递增型互换, 162, 671, 729
- Sticky cap  
Sticky 利率上限, 660, 729
- Sticky delta rule, 369
- Sticky strike rule, 369
- Stochastic process  
随机过程, 251, 729
- Stochastic variable  
随机变量, 729
- Stochastic volatility models  
随机波动率模型, 544~545
- Stock dividend  
股票红利, 729
- Stock index/indices  
股票指数, 56, 729
- Stock index futures, *see* Index futures  
股票指数期货, 729
- Stock index option, *see* Index option  
股票指数期权, 729
- Stock option. *See also* Black-Scholes model.  
股票期权, 173, 174~178
  - commissions  
(股票期权交易的)佣金, 182~182
  - dividend and stock split  
红利和股票分割, 176~178
  - executive  
管理层, 186~187
  - expiration dates  
失效日, 175
  - flex option  
变通期权, 176
  - margins  
保证金, 182~183
  - position and exercise limits  
(股票期权的)头寸限额和执行限额, 178
  - regulations of  
法规, 184
  - specification of  
(股票期权合约的)性质, 174~178
  - terminology  
术语, 176

- Stock option value  
股票期权价值
- American options on dividend-paying stock  
支付红利的股票的美式期权, 204~205, 290~291
- American options on non-dividend-paying stock  
不支付红利的股票的美式期权, 201~203
- assumptions  
假设, 195
- binomial tree  
二叉树, 227~231
- Black's approximation  
Black 的近似, 291~292
- dividend yield  
红利收益率, 301~303
- dividends  
红利, 176~177, 194, 204~205
- factors affecting prices  
影响价格的因素, 191~194
- implied distribution and lognormal distribution  
隐含分布和对数分布, 362, 363
- risk-neutral valuation  
风险中性估值, 303
- single large jump in asset anticipated  
预期价格有一次大幅波动, 369~370
- stock's expected return and  
股票预期收益, 230
- volatility smile (skew)  
波动率微笑, 364~365
- Stock prices  
股价
- expected return  
预期收益率, 272~276
- lognormal property  
对数正态特性, 262~263, 269~271
- rate of return, distribution of  
收益率的分布, 271~272
- the process for  
(股价的随机) 过程, 257~259
- volatility  
波动率, 273~276
- Stock split  
股票分割, 176~178, 729
- Stock's expected return  
股票预期收益率, 272~273
- irrelevance of the  
(股票预期收益的) 无关性, 230~231
- stock option price and  
股票期权价格和 (股票预期收益), 230~231
- Stop-and-limit order  
停损及限价指令, 34
- Stop limit order  
停损限价指令, 34
- Stop-loss order  
限损指令, 34
- Stop-loss strategy  
止损策略, 330~332
- Stop order  
限损指令, 34
- Storage cost  
贮存成本, 109, 730
- Straddle  
跨式期权, 220~221, 730
- Strangle  
宽跨式期权, 222~223, 730
- Strap  
带式期权, 221, 730
- Stratified sampling, variance reduction procedure  
间隔抽样法, 方差减少方法, 404
- Strengthening of the basis  
基差扩大, 49
- Stress testing  
压力测试, 435, 707, 730
- Strike price  
行权价格, 执行价格, 6, 730
- Strip  
条式期权, 221, 730
- Stripped mortgage-backed securities  
剥离 MBS, 667
- Sumitomo  
住友公司, 705, 708
- Swap  
互换, 139, 730
- accrual  
条件累计 (互换), 163, 679
- amortizing  
本金分期递减 (互换), 162, 671
- basis  
基准 (互换), 672
- cancelable  
可撤销 (互换), 680~681
- cancelable compounding  
可撤销复利 (互换), 681~682
- compounding  
复利, 163, 672
- constant maturity (CMS)  
固定期限利率 (互换), 162, 676
- constant maturity Treasury (CMT)  
固定期限国债利率 (互换), 162, 677
- correlation  
相关系数, 683
- covariance  
协方差, 683
- credit risk and  
信贷风险和, 160~161
- currency  
货币, 154~158, 674~675
- differential (diff swap)  
差异 (互换), 677
- embedded options  
包含嵌入期权的 (互换), 679~682
- equity  
权益, 163, 678
- Swap rate  
互换率, 144, 149, 612, 730
- Swap zero curve. See also LIBOR zero curve.  
互换零息率曲线, 也可参见 LIBOR 零息率曲线, 132~133, 150~151
- Swaption  
互换期权, 163, 601, 730
- European swaption  
欧式互换期权, 601~605, 661, 664
- forward risk-neutral valuation and Black's model  
远期风险中性估值和 Black 模型, 603
- relation to bond options  
和债券期权的关系, 601
- Swing option, energy and natural gas market  
震荡期权, 能源和天然气市场, 534, 730
- Sydney Futures Exchange (SFE)  
悉尼期货交易所, 19

- Synthetic CDO  
合成债务抵押债券, 499, 730
- Synthetic option  
合成期权, 352, 730
- Systematic risk  
系统风险, 113~114, 473, 570, 730
- Tail loss  
尾部损失, 422, 730
- Tailing the hedge  
调整对冲头寸, 59
- Take-and-pay option, energy and natural gas market  
振荡期权, 能源和天然气市场, 534, 730
- Tax  
税收, 37~38
- planning strategy  
税务计划, 186
- Taxpayer Relief Act of 1997  
1997, 饶让抵免法案, 185
- Tenor  
循环期限, 593
- Term repo  
期限回购, 71
- Term structure model of interest rates. *See also* Short rate.  
利率期限结构模型, 也可参照短期利率, 623, 730
- Term structure theories, shape of zero curve  
期限结构理论, 87
- Terminal value  
最终价值, 730
- Theta  
Theta 值, 730
- Time decay  
时间损耗, 340, 730
- Time value  
时间价值, 176, 730
- Time-dependent parameters  
依赖时间变量的参数, 395
- Time-of-day order  
当天特定时段指令, 35
- Time-to-expiration effects  
到期期限的影响, 192
- Timing adjustment  
时刻调整, 613~614, 730
- accrual swap  
条件累计互换, 679
- constant maturity swap (CMS)  
固定期限利率互换, 676
- To-arrive contract, 1
- Tokyo International Financial Futures Exchange (TIFFE)  
东京国际金融期货交易所, 19
- Tokyo Stock Exchange  
东京股票交易所, 57
- Top straddles  
顶部跨式期权, 221
- Top vertical combination  
顶部垂直价差组合, 223
- Total return swap  
总收益互换, 497~498, 730
- Tradeable derivatives, prices of  
可交易衍生证券的价格, 281
- Trading irregularities  
违规交易, 35
- Trading strategies, involving options  
交易策略, 涉及期权, 209
- combinations  
组合期权, 220~223
- for single option and stock  
对单一期权和股票, 209~211
- spreads  
价差期权 (的交易策略), 211~220
- Traditional risk-neutral world  
传统的风险中性世界, 565~569
- Tranches  
分券, 498~500, 730
- Transactions costs  
交易成本, 340, 731
- Treasury bill  
短期国债, 69~70, 731
- Treasury bond  
长期国债, 69~70, 731
- Treasury Bond futures  
长期国债期货, 123~129, 731
- cheapest-to-deliver bond  
最便宜交割 (的中长期国债), 126
- conversion factors  
(中长期国债的) 转换因子, 125~126
- quotations  
报价, 124
- quoted futures price  
报出的期货价格, 128
- wild card play  
百搭牌游戏, 127~128
- Treasury bond futures option  
国债期货期权, 312
- Treasury note  
中期国债, 123, 731
- Treasury note futures  
中期国债期货, 123, 731
- Treasury rate  
国债利率, 69~70, 71
- zero rate  
零息率, 74
- Tree. *See also* Binomial tree and trinomial tree.  
树图, 731
- Trinomial tree  
三叉树图, 393~394, 634~636, 731
- relation to finite difference method  
和有限差分方法的关系, 412~415
- Triple witching hour  
三重巫时刻, 731
- Unconditional default probability  
无条件的违约概率, 466
- Underlying variable  
标的变量, 731
- Unsystematic risk  
非系统风险, 113, 570, 731
- Up-and-in calls  
上升敲入看涨期权, 514
- Up-and-in option  
上升敲入期权, 731
- Up-and-in puts  
上升敲入看跌期权, 514
- Up-and-out calls  
上升敲出看涨期权, 514
- Up-and-out option  
上升敲出期权, 731
- Up-and-out puts  
上升敲出看跌期权, 514
- Uptick  
价格报升, 94, 731
- US Department of Energy  
美国能源部, 532
- US Dollar index  
美元指数, 57
- US Treasury Department  
美国财政部, 35

- Valuation on business  
企业估值, 691
- Value at risk (VAR)  
在险值, 421, 731
- bank regulators use  
监管机构使用, 422
- comparison of approaches  
不同方法之间的比较, 435
- conditional VaR (C-VaR)  
条件在险值, 422
- diversification benefits and  
分散化投资的好处, 428
- historical simulation  
历史模拟, 423~425
- linear model  
线性模型, 428~431
- model-building approach  
建模计算方法, 425~428
- Monte Carlo simulation  
蒙特卡罗模拟, 434~435
- principal components analysis  
主成分分析法, 436~439
- quadratic model  
二次模型, 431~434
- single-asset case and  
单资产案例, 426~427
- time horizon  
时间长度, 423
- two-asset case  
两资产案例, 427~428
- Variance rate  
方差率, 445, 731
- estimating constant variance, maximum likelihood methods  
估计常数方差, 极大似然估计方法, 451~456
- Variance reduction procedures  
方差减少方法, 402~405, 731
- antithetic variable technique  
对偶变量技术, 402
- control variate technique  
控制变量技术, 403
- importance sampling  
重点抽样法, 403
- moment matching  
矩匹配法, 404
- quadratic resampling  
二次抽样法, 404
- quasi-random sequences  
拟随机数序列, 404
- stratified sampling  
间隔抽样法, 404
- Variance targeting  
variance targeting 方法, 453
- Variance covariance matrix  
方差-协方差矩阵, 460~461, 731
- Variance-gamma model  
Variance-Gamma 模型, 542~544, 731
- Variation margin  
变动保证金, 25, 731
- Vega  
Vega 值, 347~349, 731
- estimating, using binomial tree  
估计, 用二叉树模型, 384
- interest rate derivatives  
利率衍生品, 605
- Vega-neutral portfolio  
Vega 中性证券组合, 731
- Volatility  
波动率, 731
- Volatility, interest rate derivatives  
波动率, 利率衍生品
- flat volatility  
单一 (波动率), 598~599
- forward rate volatility  
远期波动率, 658
- spot volatility  
即期波动率, 598~599
- structures  
结构, 633~634
- volatility skews  
波动率偏斜, 665, 731
- Volatility, stock prices  
波动率, 股价
- causes of  
产生 (波动) 的原因, 277
- defined  
(波动率的) 定义, 192~193
- forecast future volatility  
预测未来的波动率, 456~459
- matching volatility with u and d  
(用 u 和 d 计算) 波动率, 239~241
- portfolio insurance and stock market  
组合保险和股市波动率, 354~355
- term structure, volatility of stock return  
期限结构, 股票回报的波动率, 367~368, 457, 730
- volatility surface  
波动率集合, 367~368
- Volatility skew  
波动率偏斜, 365, 665, 731
- Volatility smile  
波动率微笑, 361, 732
- equity options  
权益性期权, 365~367
- foreign currency options  
外汇期权, 362~365
- Volatility surface  
波动率集合, 367~368, 732
- Volatility swap  
波动率互换, 163, 682, 732
- Volatility term structure  
波动率期限结构, 367~368, 457, 732
- Wall Street Journal  
华尔街日报, 28, 39, 56, 108, 178, 304, 312
- Warrant  
权证, 186~187, 286~288, 732
- Wash sale rule  
虚售规则, 185
- Weakening of the basis  
基差减少, 49
- Weather derivative  
气象衍生品, 1, 532~533, 732
- Weather Risk Management Association (WRMA)  
气象风险管理协会, 532
- Wiener Process  
维纳过程, 253~255, 255~256, 732
- Wild card play  
百搭牌游戏, 127, 732
- Writing a covered call  
出售有保护看涨期权, 209
- Writing an option  
承约期权, 8, 732
- Yield  
收益率, 732

- Yield curve  
收益率曲线, 732  
Orange County and  
橘郡, 80
- Yield volatilities  
收益率的波动率, 592~593
- Zero curve  
零息率曲线, 77~78, 732
- buckets and  
桶, 135
- shape of zero curve, theories  
零息率曲线形状, 理论, 87
- Zero rate  
零息率, 74, 732
- Zero-cost collar  
零成本领型期权, 509
- Zero-coupon bond  
零息票债券, 732
- Zero-coupon interest rate  
零息票利率, 83, 732
- Zero-coupon yield curve, *see* Zero curve.  
零息票收益率曲线, 732

