Problem Set #1

1. An individual has the Bernoulli utility function $u(x) = \sqrt{x}$.

(a) Consider a lottery that wins \$100 with probability p and \$225 with probability $1-p$, where $p \in (0,1)$. Calculate the certainty equivalent and show that it is smaller then the expected return.

(b) Calculate the absolute risk aversion of the Bernoulli utility function $u(x) = \sqrt{x}$. Are they increasing, decreasing or constant in x?

2. Suppose there are two consumers, 1 and 2, each with the Bernoulli utility function $u_i(\cdot)$, $i = 1, 2.$. Assume that $u_2(x) = \psi(u_1(x))$ for some increasing function $\psi(\cdot)$.

(a) Suppose $\psi(\cdot)$ is concave for all x. Prove that the certainty equivalent of consumer 1 is greater than the certainty equivalent of consumer 2.

(**Hint:** Use the fact that

$$\psi(u_1(CE_2)) = u_2(CE_2) = \int u_2(x)dF(x) = \int \psi(u_1(x))dF(x)$$

and Jensen's inequality: if $f(x)$ is a concave function, then $\mathbb{E}[f(X)] \leq f(\mathbb{E}[X])$.)

(b) Suppose $CE_2 \leq CE_1$. Consider a lottery that wins x with probability λ and y with probability $1-\lambda$, where $\lambda \in [0,1]$. Show that

$$\psi(\lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_1(y)) \geq \lambda\psi(u_1(x)) + (1-\lambda)\psi(u_1(y)).$$

3. Consider Example 2 in the lecture note. Let $r_b = -10\%$, $r_g = 20\%$, $\pi = 1/2$ and $w = \$100$. Assume that the agent's Bernoulli utility function is $u(x) = \ln x$, where $x > 0$.

(a) Express the agent's expected utility in terms of his investment level z.

(b) Find the optimal amount of investment z and denote it by z^*. Find the consumption levels and denote them by $x_b(z^*)$ and $x_g(z^*)$ for each state.

(c) Suppose the agent's income increased from $w = \$100$ to $w' = \$300$. Find the optimal amount of investment z and denote it by z^{**}. Find $x_b(z^{**})$ and $x_g(z^{**})$. .

(d) Compare $x_g(z^*) - x_b(z^*)$ and $x_g(z^{**}) - x_b(z^{**})$. Which one is greater than the other? Explain why it is.

4. Recall the insurance example covered in class. Let $u(x) = \ln x$ and $\pi = \frac{1}{2}$.

(a) Find the optimal purchase of insurance α^*. (NB. we do not assume $P = \pi$ here.)

(b) Suppose $P > \frac{1}{2}$. Show the individual is not fully insure.

Problem Set #2

There is a regulator (government) and a natural monopoly. The regulator concerns with protecting consumer welfare and attempting to force the monopoly to charge the competitive price. The difficulty is that the regulator does not have full knowledge of the firm's intrinsic cost structure.

Consider the monopoly with an exogenous cost parameter $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$ with $\Delta\theta := \theta_H - \theta_L > 0$. Assume that the cost parameter is θ_L with probability β and θ_H with probability $1-\beta$. The firms' cost of producing good is given by $c = \theta - e$, where $e > 0$ stands for the cost-reducing effort. Expending effort e entails cost $\psi(e) = e^2/2$.

The regulator is concerned about the monopoly not putting enough effort to maintain its production cost, c, at an optimal level. Indeed, the regulator tries to minimize its payment $P = c + s$ to the firm, where s is a "subsidy" to compensate for the cost-reducing effort.

1. Assume that there is no information asymmetry, as a benchmark. For each type $i = H, L$, the regulator solves

$$\min_{(e_i, s_i)} \underbrace{\theta_i - e_i}_{=c_i} + s_i$$

subject to

$$s_i - e_i^2/2 \geq 0. \tag{IR_i}$$

Find the optimal solution and denote it by $(\hat{e}_i, \hat{s}_i)$ for $i = H, L$.

2. Consider the incomplete information game from now on. The regulator can only observe c while both e and θ are unobservable. Call (s_i, c_i), $i = H, L$, the contract that will be chosen by type θ_i. If type θ_i accepts a contract (s_j, c_j), where $j = H, L$, then the firm gets subsidy s_j and is required to maintain cost level c_j. Show that the contract found in question 1 is no longer feasible.

3. Under the asymmetric information, the regulator chooses contracts $(s_i, c_i)_{i=H,L}$ so as to minimize $\beta(s_L + c_L) + (1-\beta)(s_H + c_H)$, or equivalently (since θ_H and θ_L are exogenous), to solve

$$\min_{\substack{(e_L, s_L)\\(e_H, s_H)}} \beta(s_L - e_L) + (1-\beta)(s_H - e_H)$$

subject to

$$s_L - e_L^2/2 \geq 0 \tag{IR_L}$$

$$s_H - e_H^2/2 \geq 0 \tag{IR_H}$$

$$s_L - e_L^2/2 \geq s_H - (e_H - \Delta\theta)^2/2 \tag{IC_L}$$

$$s_H - e_H^2/2 \geq s_L - (e_L + \Delta\theta)^2/2. \tag{IC_H}$$

(Note that achieving $c_H = \theta_H - e_H$ implies effort level e_H for type θ_H, obviously. But for type θ_L, the effort level $e_H - \Delta\theta$ is sufficient to achieve c_H.)

(a) Show that (IR_L) is automatically satisfied, provided that (IC_L) and (IR_H) are satisfied.

(b) Show that (IR_H) and (IC_L) are binding at the optimal solution. Express s_H and s_L as functions of e_H and e_L.

(c) Given the results above, show that (IC_H) is satisfied if and only if $e_L \geq e_H - \Delta\theta$.

4. Using the answers in question 3, rewrite the optimization problem as

$$\min_{e_L, e_H} \beta\left(e_L^2/2 - e_L + e_H^2/2 - (e_H - \Delta\theta)^2/2\right) + (1-\beta)\left(e_H^2/2 - e_H\right).$$

(a) Find the optimal solution ignoring the inequality condition in 3-(c). Denote it by (e_L^*, e_H^*) and check if the inequality condition is satisfied.

(b) Compare e_i^* with $\hat{e}_i$ (which is found in 1) for both $i = L, H$ and interpret the results.

Economics of Information and Uncertainty

Problem Set #3

Suppose there is an employer (principal) and an employee (agent). In order to produce a good, the agent must put effort, either e_L with cost $c_L = 0$ or e_H with cost of c_H. Assume that $e_L < e_H$ and $c_L < c_H$. Agent's utility from exerting e_j, $j = H, L$, and being paid t is $u(t) - c_j$, where $u(\cdot)$ is strictly increasing, concave and $u(0) = 0$.

There are three possible output levels, $\{q_1, q_2, q_3\}$, where $q_1 < q_2 < q_3$. Each q_i is realized with probability π_{ji}, where $j = H, L$ denotes the effort level and $i = 1, 2, 3$ denotes the output level. For outcome q_i, the principal's payoff is given by $q_i - t_i$. The probability density of q given e is

	q_1	q_2	q_3
e_L	0	1	0
e_H	0.25	0.5	0.25

1. Suppose the principal designs a scheme that induces the agent to choose e_H. That is, the principal wants to maximize $\pi_{H1}(q_1 - t_1) + \pi_{H2}(q_2 - t_2) + \pi_{H3}(q_3 - t_3)$. Find incentive compatibility constraint (IC) and individual rationality constraint (IR).

2. Set up the Lagrangian for the maximization problem. Let λ and μ be the Lagrangian multipliers for (IC) and (IR), respectively. Write down first-order condition for each i and the complementary slackness conditions.

3. Show that both λ and μ are positive at the optimal solution.

4. Let t_1^*, t_2^* and t_3^* be the optimal solution. Rank them in the decreasing order and interpret your result.

1. 어떤 사람의 기대효용은 포트폴리오의 평균과 분산에만 의존한다. 구체적으로 $U(L) = \mathbb{E}(L) - \frac{a}{2}\text{Var}(L)$ 이다. 이 사람의 초기 부는 W로 주어져 있고, 무위험자산에 B만큼 투자를 고려하고 있다. 이때 B만큼 투자 시 그 사람은 $B(1+r)$만큼 돌려받는다. 나머지 부 $W-B$만큼은 위험자산에 투자를 고려하고 있다. 이때 $W-B$만큼 투자시 $(W-B)(1+\rho)$만큼 돌려받는다. 이때 $\rho \sim (\mu, \sigma^2)$을 따른다.

(a) 이 사람의 투자 후의 기대 부를 표현해보라.

(b) 이 사람의 부의 기대효용을 극대화하는 위험자산에 대한 최적 수요 $W-B$를 구하라. 이것이 W, a, μ, σ^2에 따라 어떻게 달라지는가?

2. 독점기업의 이급 가격차별을 고려하자. 소비자는 두 타입 θ_L, θ_H 이 존재한다. $\theta_i\ (i = L, H)$ 타입이 q만큼 소비하고, T만큼 지불했을 때 그 소비자의 효용은 $u(q,T) = \theta_i v(q) - T$ (단, $v(q) = \frac{1-(1-q)^2}{2}$) 로 정의된다. $\theta_L = 1 < \theta_H = 2$이다. 독점기업의 한계비용은 상수로 $C < \theta_L$ 이다. 독점기업은 가격전략으로 이부가격제($T(q) = F + pq$)를 고려한다.

(a) 개별 타입 소비자 $\theta_i\ (i = L, H)$ 의 가격에 대한 수요함수를 구해보라. 그리고 독점기업이 가격 P에서 직면하는 총수요함수를 구해보라. 개별 타입 소비자 $\theta_i\ (i = L, H)$ 의 순 소비자잉여(net surplus)도 구해보라.

(b) 독점기업이 두 소비자의 타입을 구분 가능하다고 하자. 기업의 최적 묶음 $(P_i, F_i)_{i=H,L}$을 구하고 이를 해석하라.

(c) 독점기업이 두 소비자의 타입을 구분하지 못한다고 하자. 그러나 (b)에서 구한 최적 묶음을 여전히 제시할 수 있다고 해보자. 이 때 무슨 일이 일어날 것인가? 개별 타입 소비자 $\theta_i\ (i = L, H)$ 의 순 소비자잉여(net surplus)를 구해보라.

(d) 독점기업이 두 소비자의 타입을 구분하지 못한다고 하자. 독점기업이 두 타입의 소비자 모두에게 판매하려 한다는 가정 아래, 최적의 이부가격제도는 어떻게 될 것인가? 결과를 (b)에 있는 답과 비교해보라.

3. 주인-대리인 문제를 고려하자. 주인은 고용주고 대리인은 근로자이다. 대리인이 재화를 생산하기 위해 노력을 해야 한다. 이때 노력수준 e_L에 따르는 비용은 $c_L = 1$이다. 노력수준 e_H에 따르는 비용은 $c_H = 2$이다. t 수준의 임금을 받을 때, 대리인의 효용은 $u(t) - c_j, j = H, L$이며 $u(t) = \sqrt{t}$ 이다. 대리인의 노력에 따른 가능한 생산량은 $\{q_1, q_2, q_3\}$ 이며 $q_1 < q_2 < q_3$이다. 생산량 q_i는 j 수준의 노력을 할 때, π_{ji}의 확률로 가능하며, $j = L, H, i = 1,2,3$ 이다. 노력수준과 생산량에 대한 확률은 $\pi = \begin{pmatrix} \pi_{L1} & \pi_{L2} & \pi_{L3} \\ \pi_{H1} & \pi_{H2} & \pi_{H3} \end{pmatrix}$로 주어진다. 생산량 q_i에 대해 주인의 보수는 $q_i - t_i$로 주어진다.

(a) 주인은 대리인이 높은 수준의 노력 e_H을 하도록 유도하는 임금 전략을 고려한다고 해보자. 이때, 주인의 기대보수는 $\pi_{H1}(q_1 - t_1) + \pi_{H2}(q_2 - t_2) + \pi_{H3}(q_3 - t_3)$로 이를 극대화하려고 한다. 대리인의 높은 수준의 노력을 하도록 하는 유인합치성(IC) 조건과 개인합리성(IR) 조건을 구하라.

(b) 극대화문제의 라그랑지안을 세워보라. λ와 μ가 각각 유인합치성(IC)과 개인합리성(IR) 조건의 라그랑지 승수라고 해보자. 개별 i에 대해서 일계조건(First Order Condition)과 상보적여분성조건(Complementary Slackness Condition)을 구해보라.

(c) $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$ 라고 해보자. 이 때 $t_1^*, t_2^*, t_3^*, \lambda^*, \mu^*$가 최적해라고 할 때, 이를 구해보라. 이를 이용해서 e_H의 노력수준을 유도하기 위한 주인의 비용 $C^* = \pi_{H1}t_1^* + \pi_{H2}t_2^* + \pi_{H3}t_3^*$ 을 구해보라.

(d) $\pi = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$ 라고 해보자. 이 때 $t_1^{**}, t_2^{**}, t_3^{**}, \lambda^{**}, \mu^{**}$가 최적해라고 할 때, 이를 구해보라. 이를 이용해서 e_H의 노력수준을 유도하기 위한 주인의 비용 $C^{**} = \pi_{H1}t_1^{**} + \pi_{H2}t_2^{**} + \pi_{H3}t_3^{**}$ 을 구해보라.

(e) C^*와 C^{**}를 비교해보라. 무엇이 더 큰가? 왜 그런지 이유를 설명해보라.