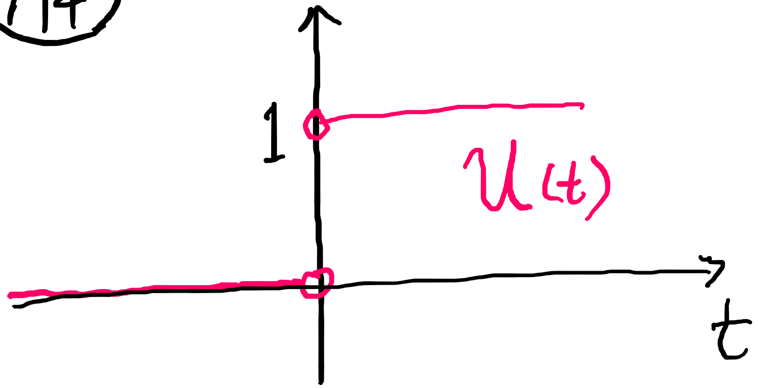
フーリエ解析とは(4)

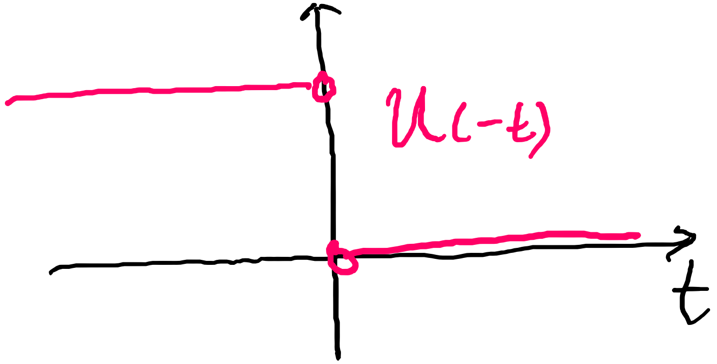
全　炳徳

前回で，偶奇分解が終わり
単位ステップ信号の詳述

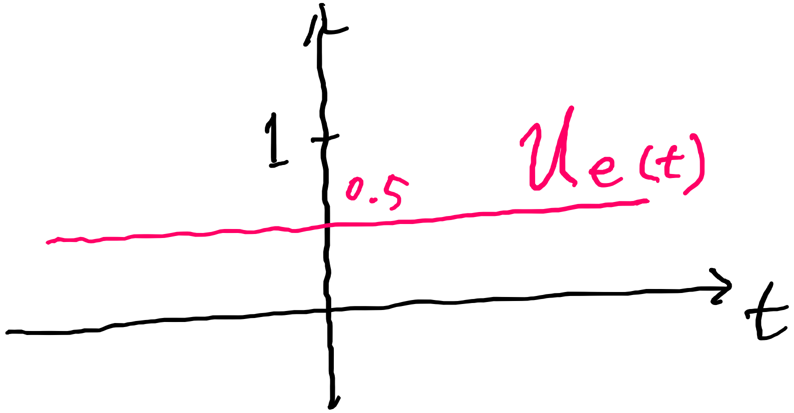
今日は手元に例題と解くための紙を用意してから授業に臨こと！

解

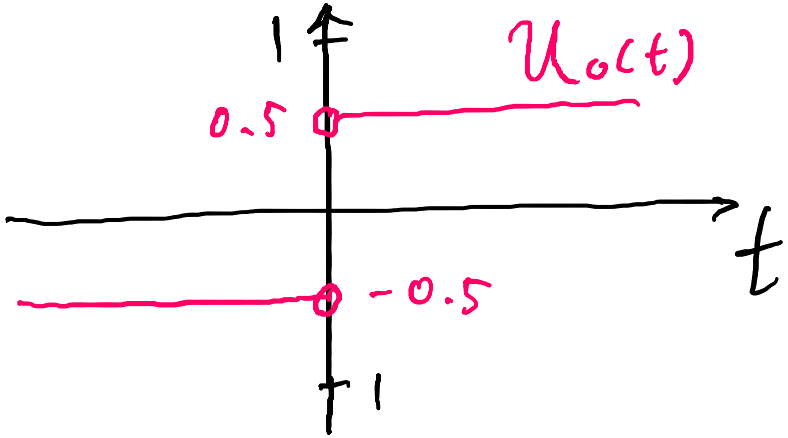




偶関数 $u_e(t) = \frac{1}{2}\left(u(t) + u(-t)\right)$

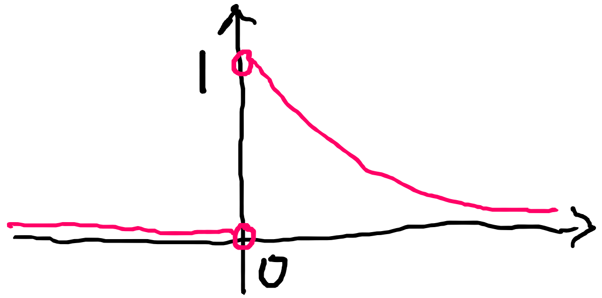


奇関数 $u_o(t) = \frac{1}{2}\left(u(t) - u(-t)\right)$

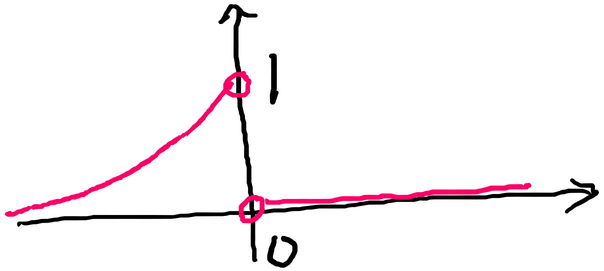


もう一つの事例の回答

- $f(t) = e^{-t}$ ただし、t>=0
- $f(t) = 0$ ただし、t<0

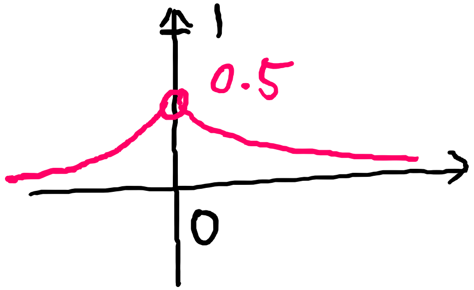


$f(-t)$
(時間を逆転)

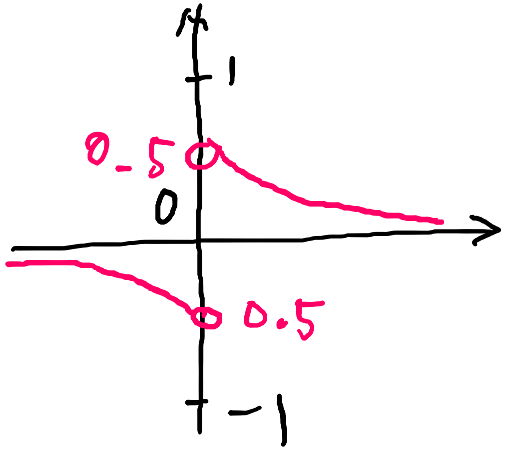


偶奇分解

$$f_e(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + f(-t)\right)$$



$$f_o(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) - f(-t)\right)$$

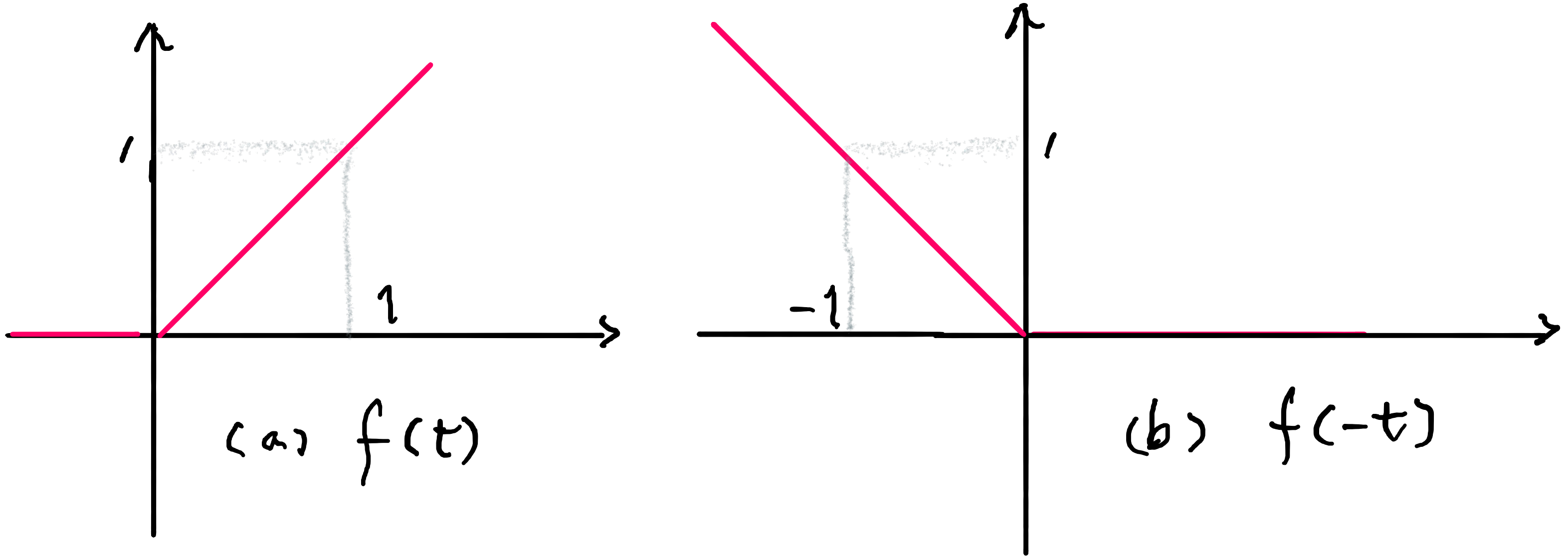


前回の課題2

- 以下の信号 f(t) に対して、f(t), f(-t) を図示せよ。その結果を用いて、f(t) の偶信号成分 $f_e(t)$ 及び奇信号成分 $f_o(t)$ を分解し、それぞれのグラフを図示せよ。

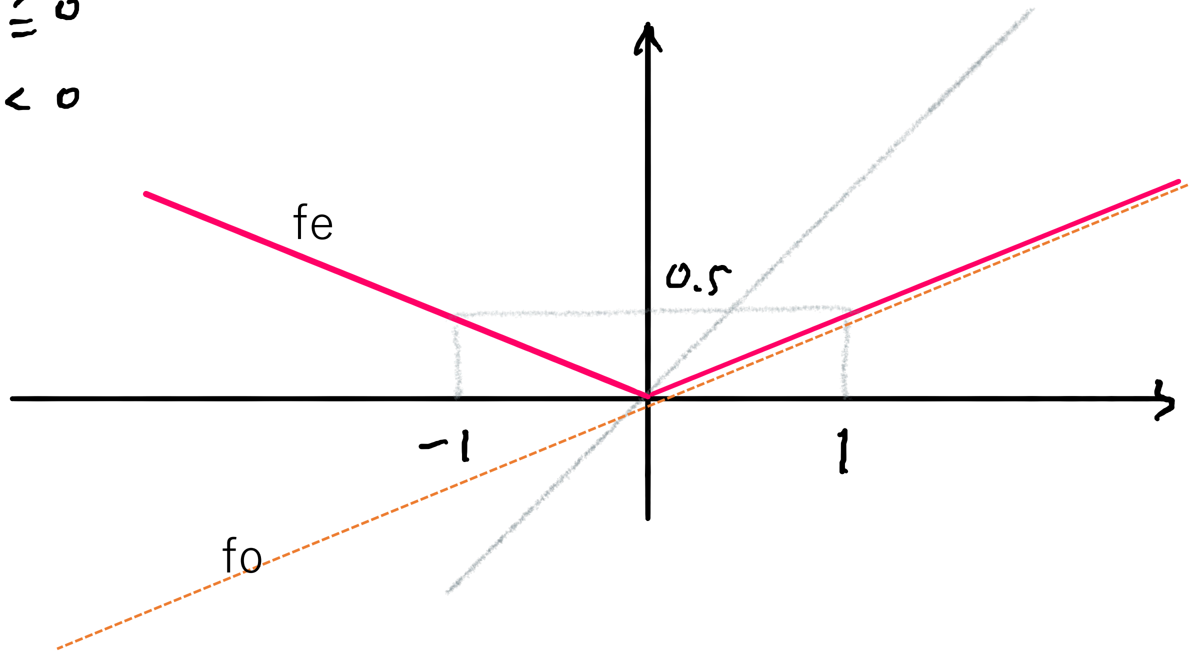
$$f(t) = \begin{cases} t, & t \geqq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

（解）



$$f_e(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + f(-t)\right) = \begin{cases} 0.5t & t \geq 0 \\ -0.5t & t < 0 \end{cases}$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) - f(-t)\right) = 0.5t$$



テイラー展開

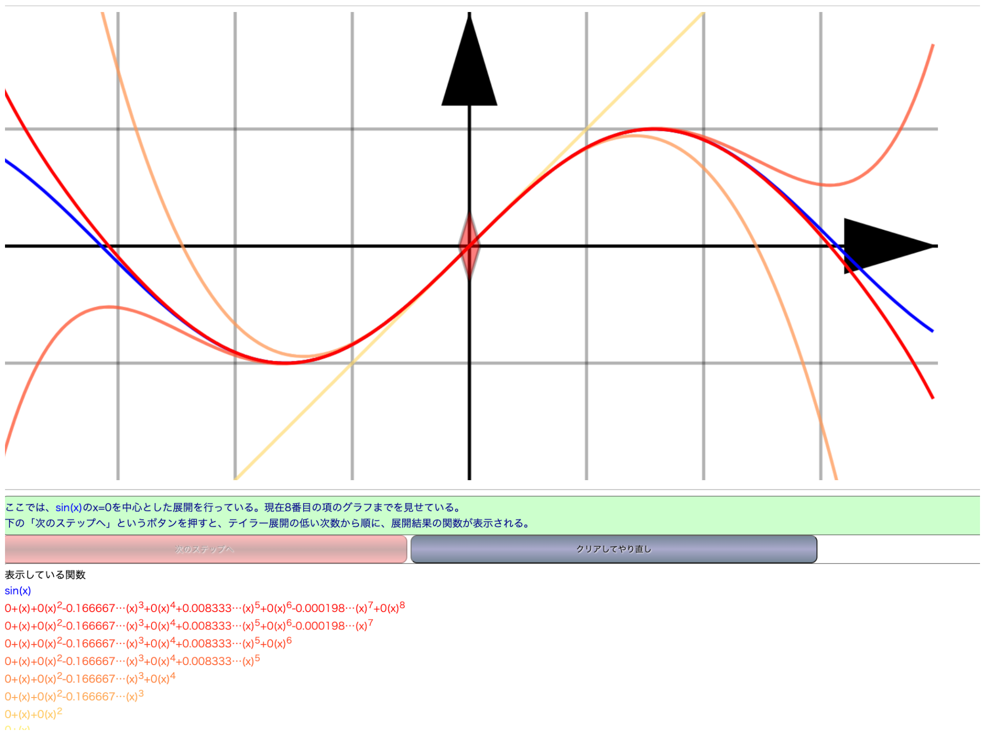
$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + \frac{t^{17}}{17} + \cdots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + \frac{t^{16}}{16} + \cdots$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^{18}}{18!} \cdots$$

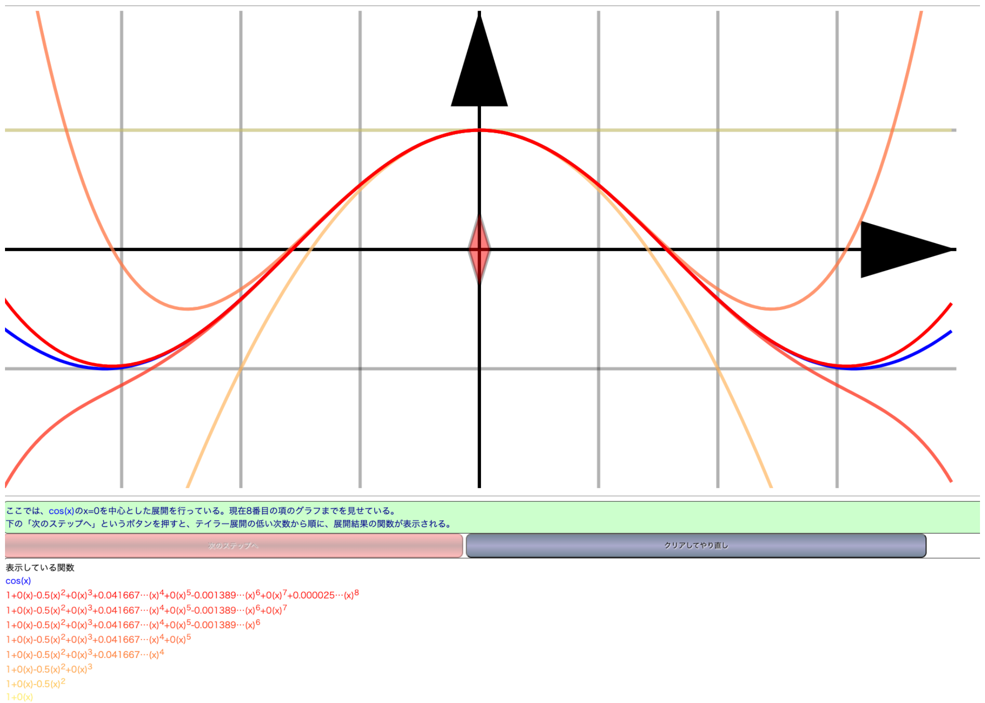
Kadai4-1.py or kadai4-1.R. ↑

Sin(x)



http://www.phys.u-ryukyu.ac.jp/~maeno/sizensuugaku/lec11_sin.html

Cos(x)

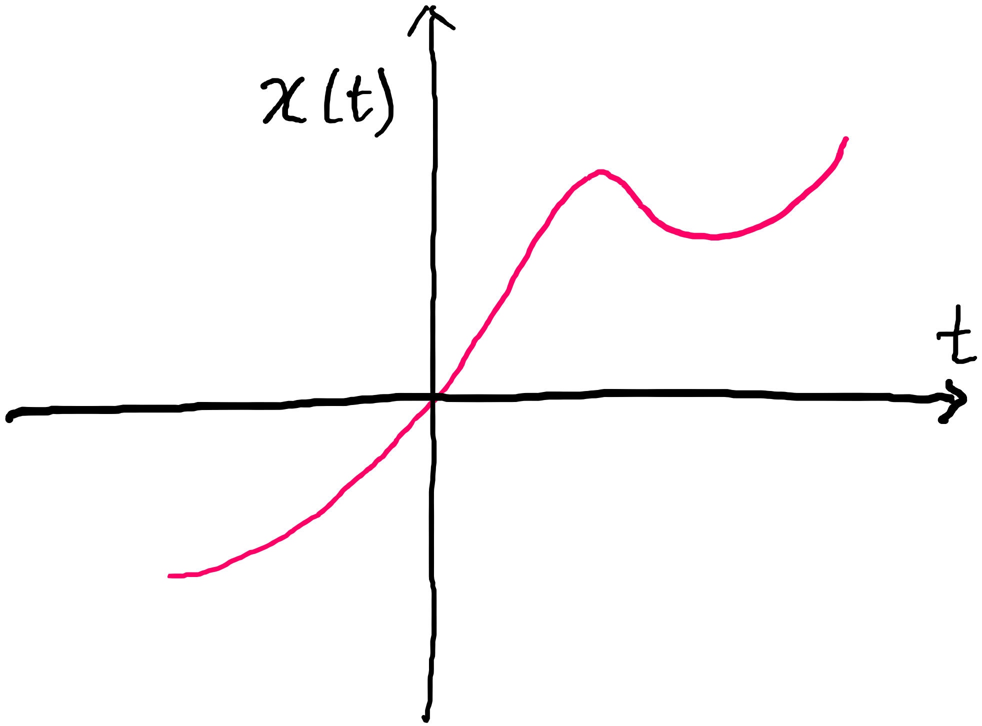


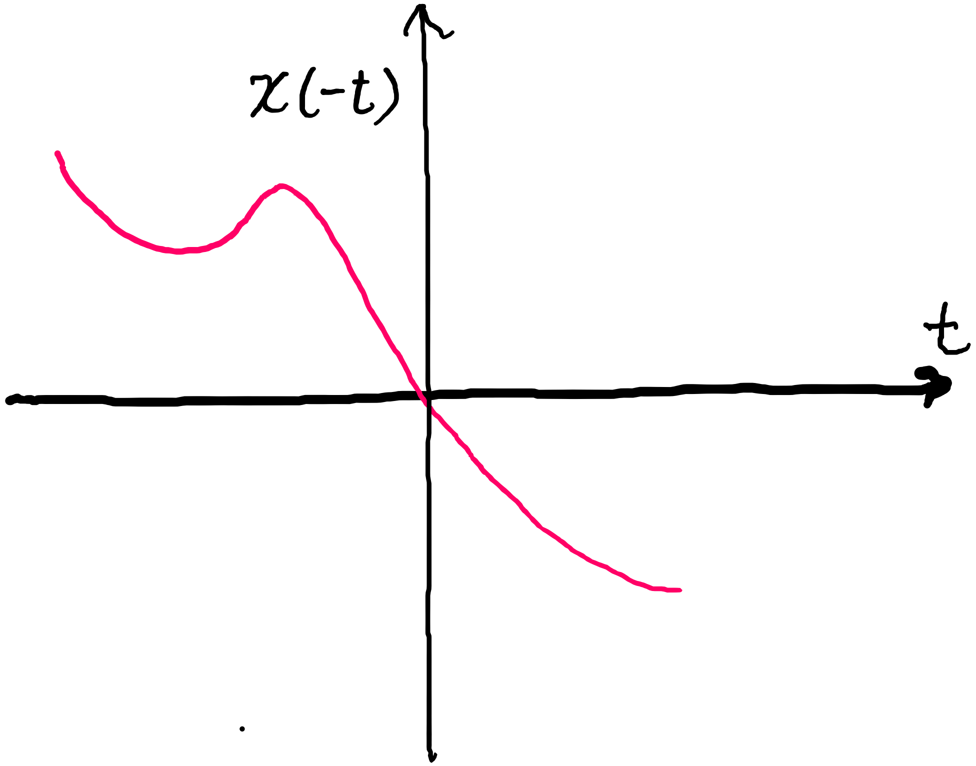
http://www.phys.u-ryukyu.ac.jp/~maeno/sizensuugaku/lec11_cos.html

信号の操作１

$x(t) \to x(-t)$

- 信号の反転 (時間の反転)

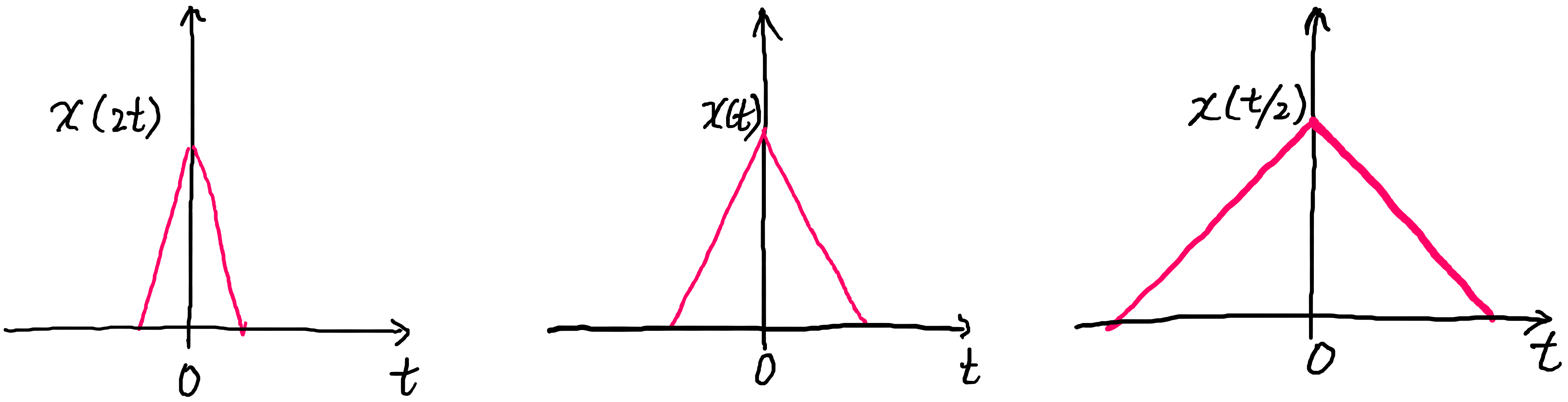




信号の操作２

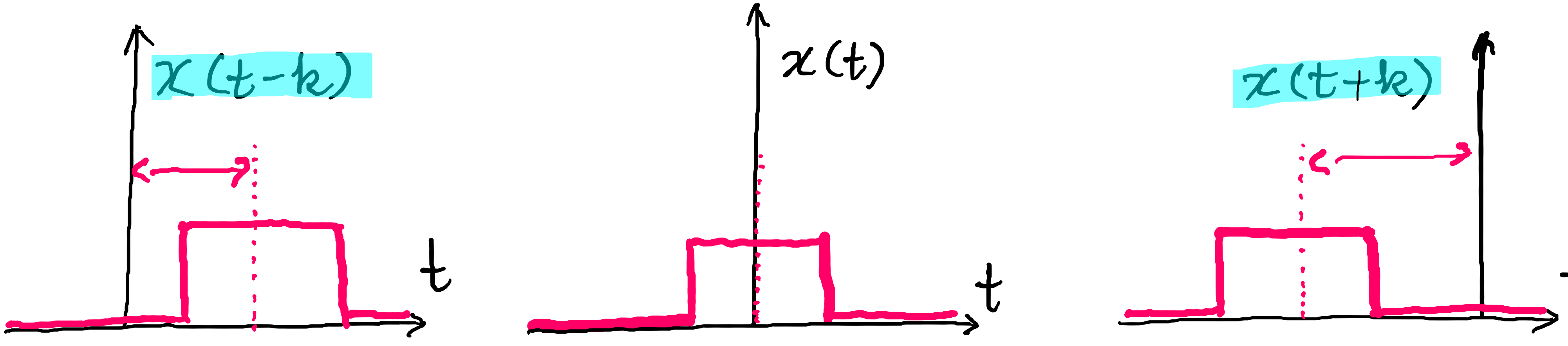
- 時間軸スケーリング

$x(t) \rightarrow x(at)$, $a>0$ の実数



信号の操作3

- 時間軸推移（シフト）　$x(t) \to x(t-k)$



(a)時間遅れ (lag)
$(k>0)$

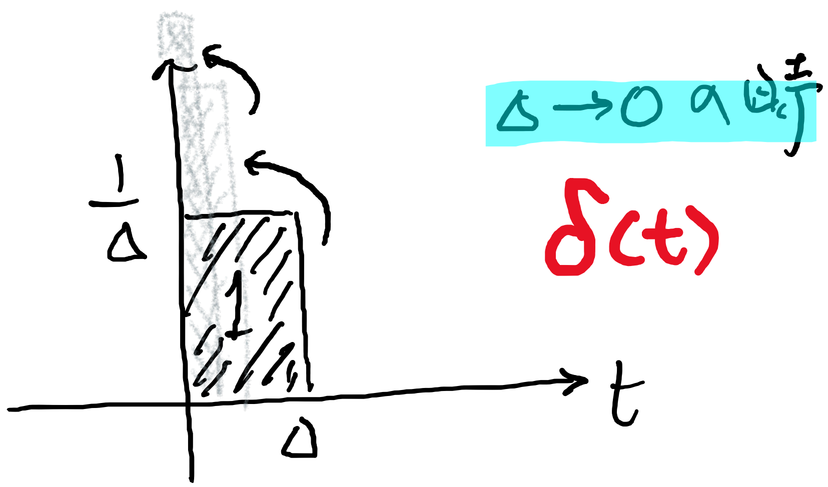
もとの波形

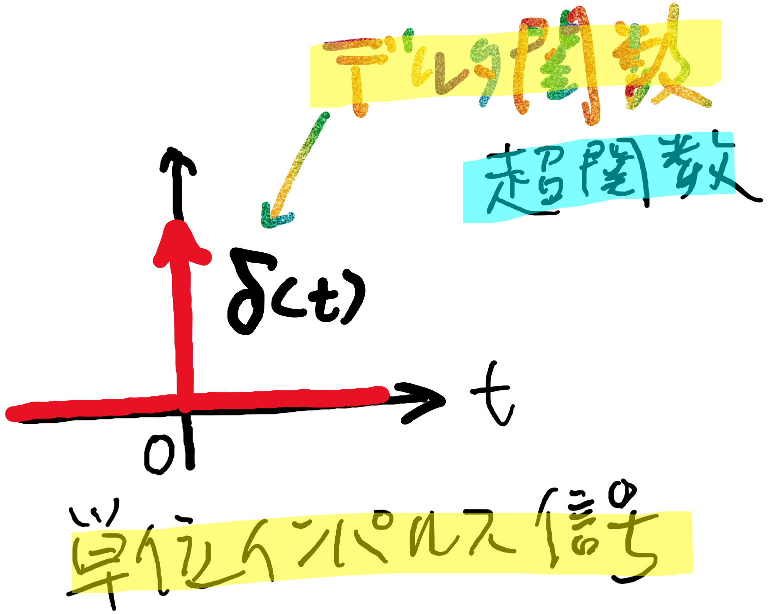
(b)時間進み (lead)
$(k<0)$

信号処理の重要な関数、
δ関数のことを考えよう，　まず

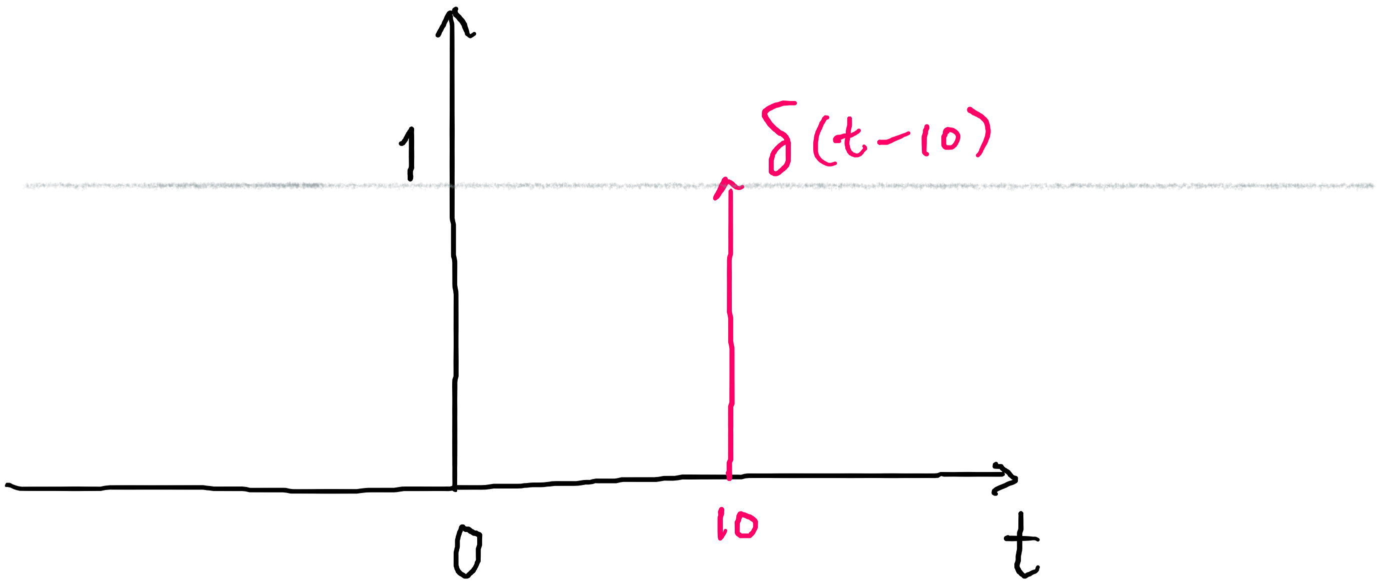
- δ(t-10)を図示してみよう

ヒント：δ関数の特徴については．．．





回答

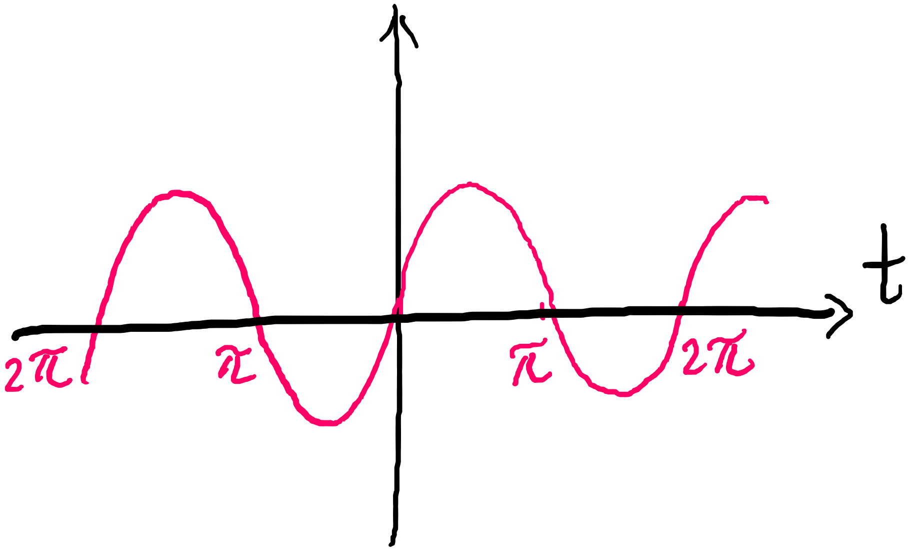


例題１

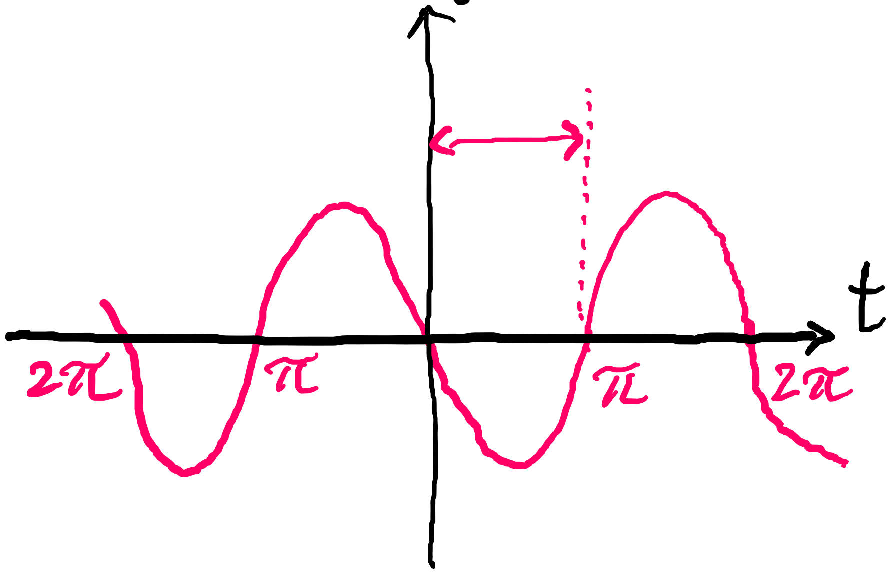
- 信号 $x(t) = \sin t$ を図示せよ。また、信号 $y(t) = \sin(t-\pi)$を図示せよ。

回答

$x(t) = \sin t$



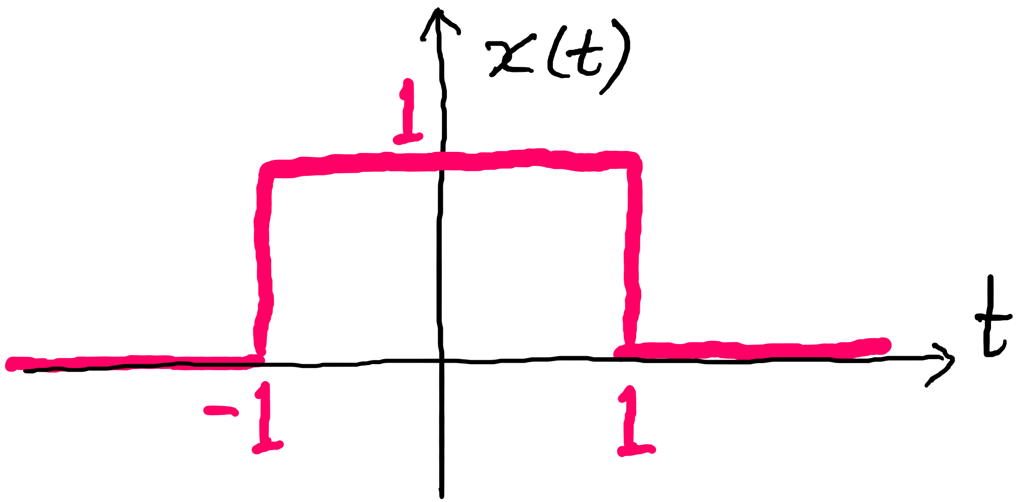
$y(t) = \sin(t - \pi)$



例題 2

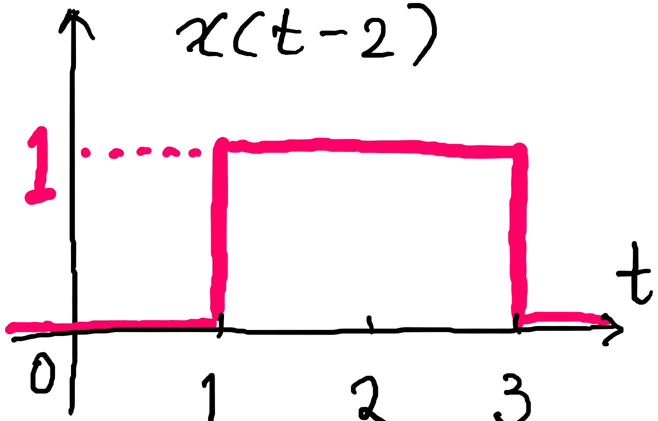
- 次の矩形信号がx(t)のもとの信号だとした場合、以下の信号を図示せよ。

1. x(t-2)
2. x(t+2)
3. x(2t)

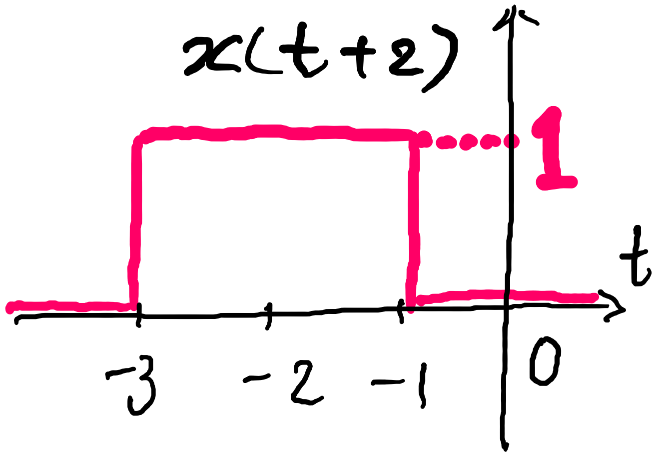


回答

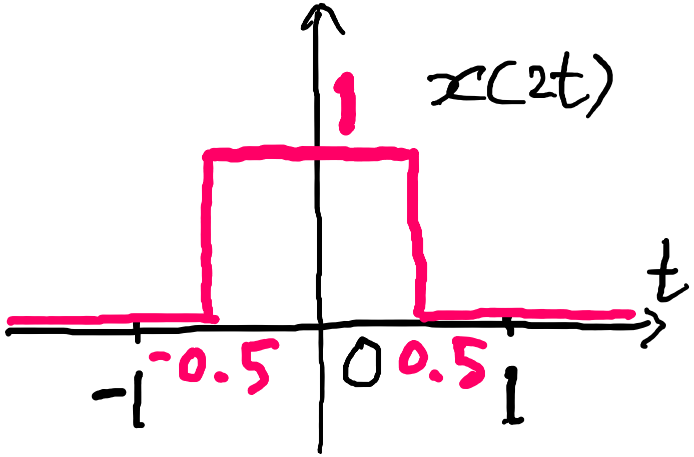
(1)



(2)



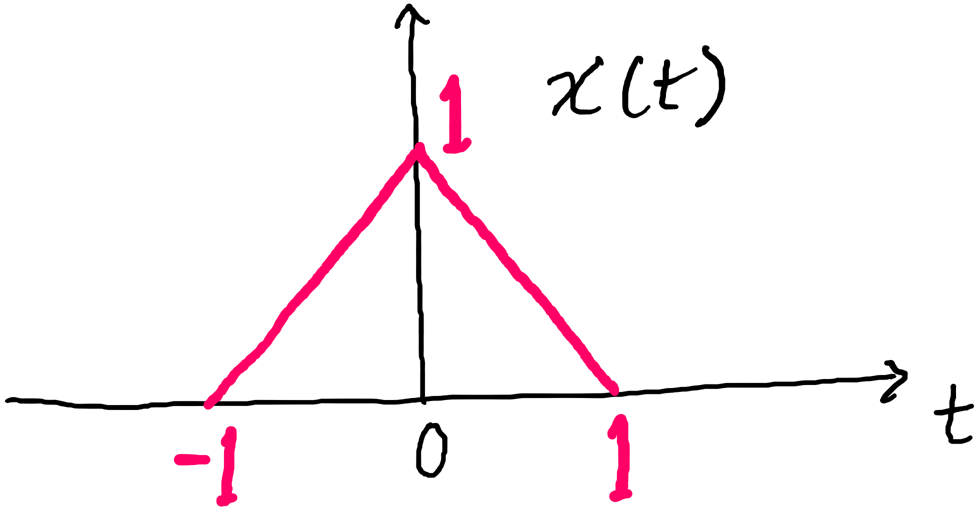
(3)



例題３

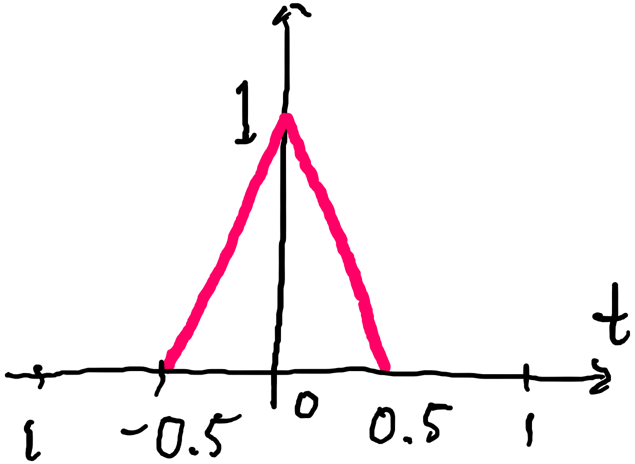
- 次に示す信号がx(t)のもとの信号だとした場合、以下の信号を図示せよ。

1. x(2t)
2. x(-t)
3. x(-t+1)

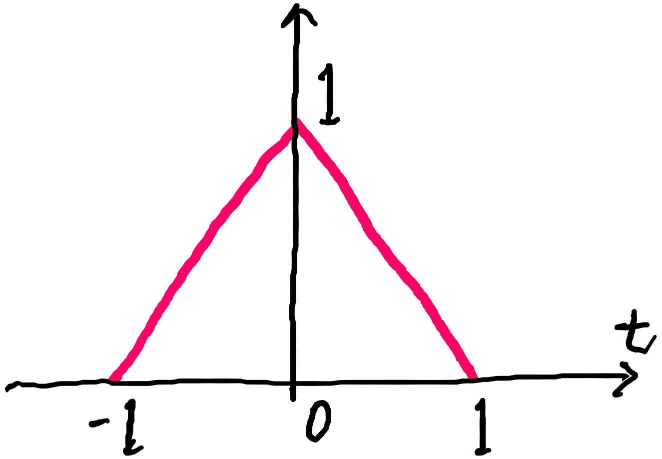


回答

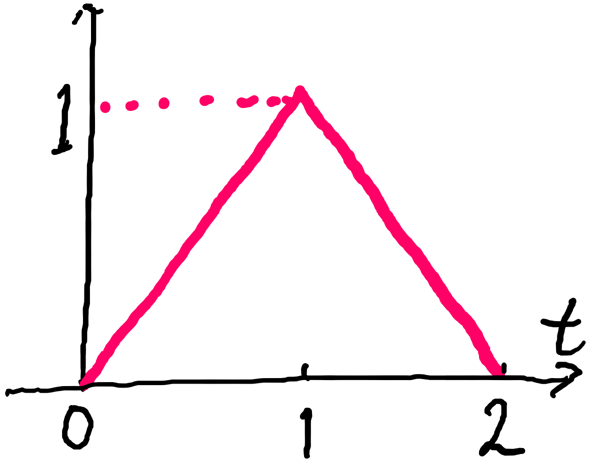
(1) $x(2t)$



(2) $x(-t)$



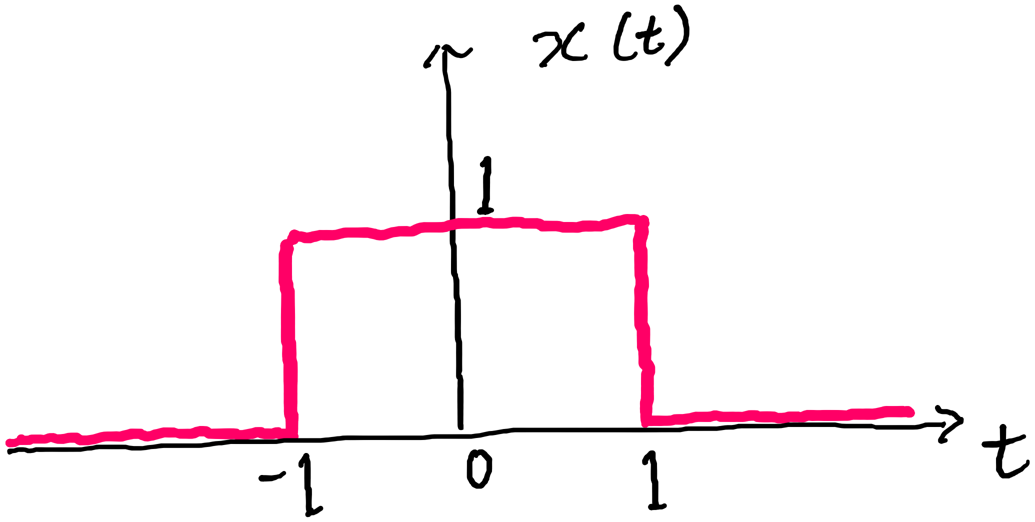
(3) $x(-t+1)$



例題 4

- 例題 2 で用いた矩形信号 x(t) に対して、信号 y(t)=x(2t+3)を次の手順で求め、図示せよ。

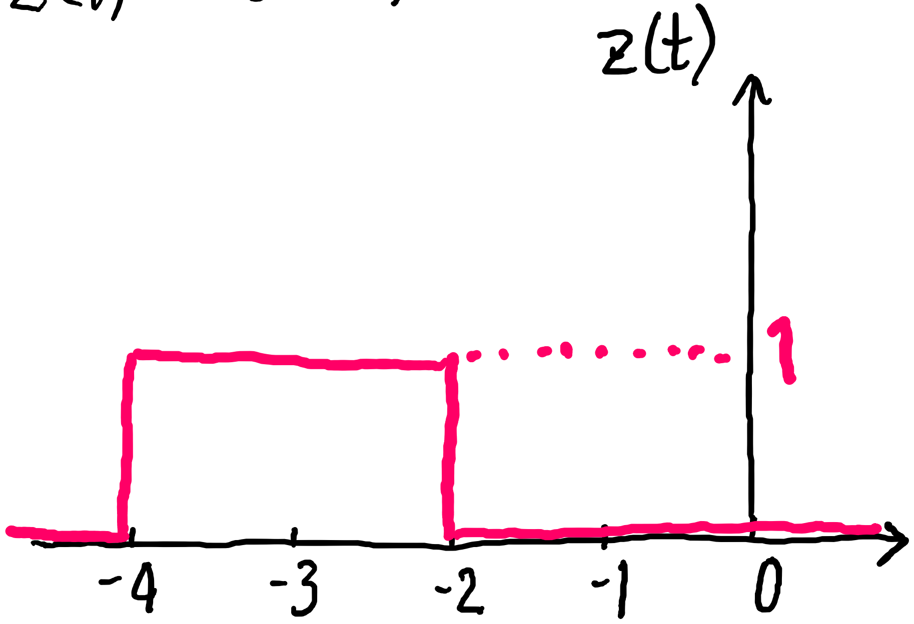
1. z(t) = x (t + 3) を図示せよ。
2. y(t) = z (2t) = x (2t + 3) を図示せよ。



回答

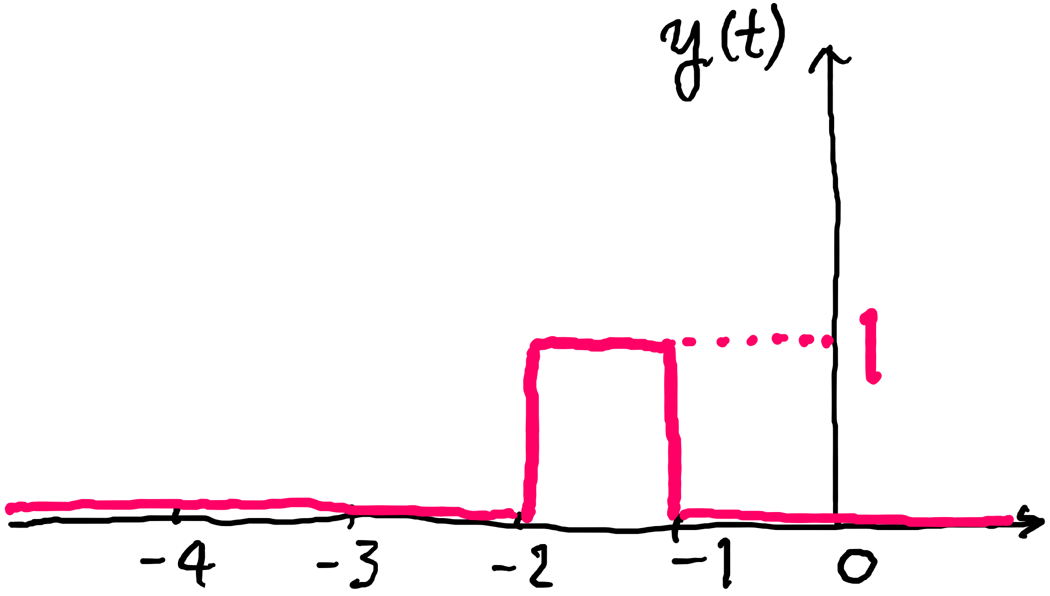
(1)

$z(t) = x(t+3)$



(2)

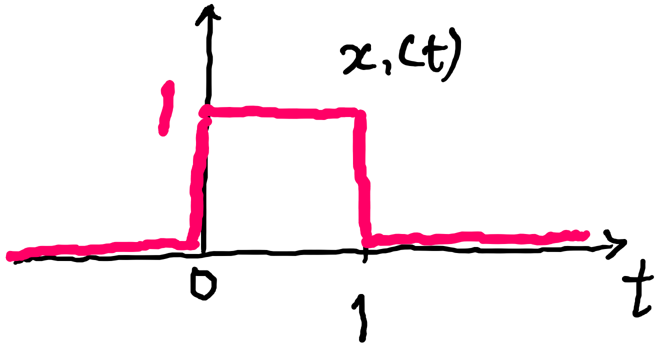
$y(t) = z(2t) = x(2t+3)$



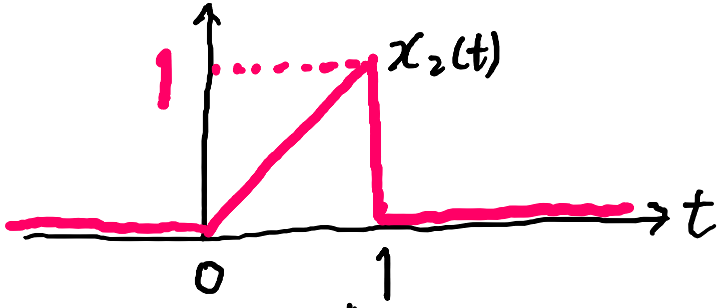
例題 5

- 次の図示した信号を単位ステップ信号の$u_s(t)$式で表そう！

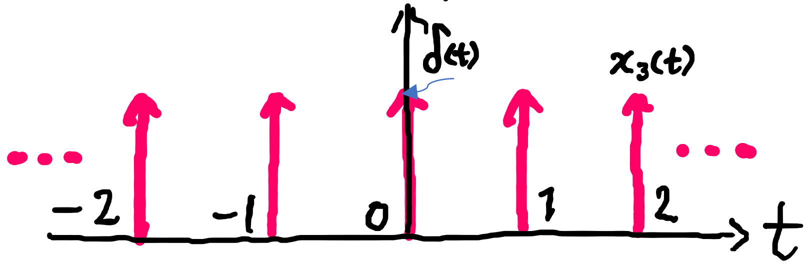
1.



2.



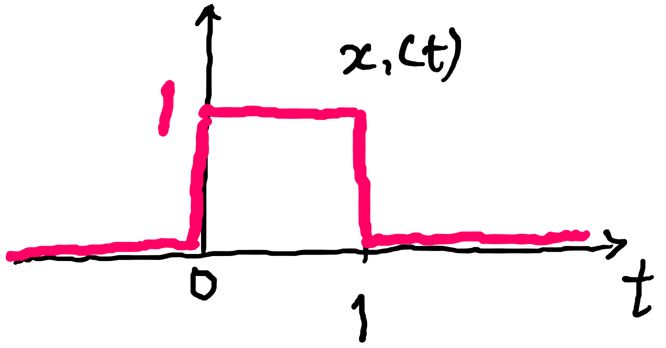
3.

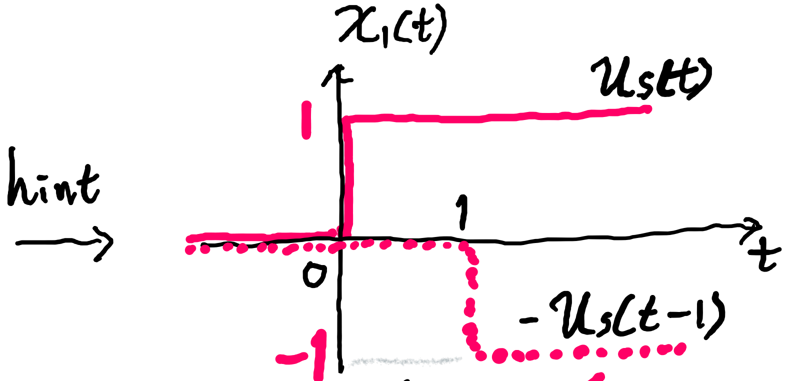


例題5 ヒント！

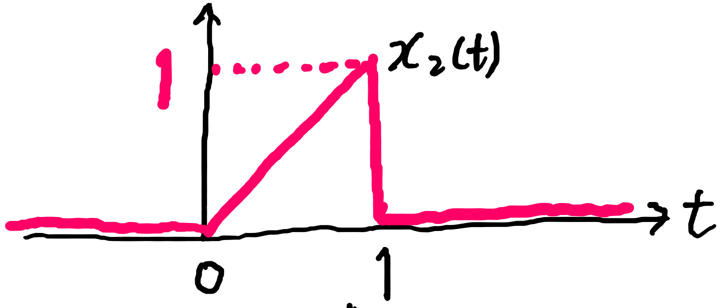
- 次の図示した信号を単位ステップ信号の$u_s(t)$式で表そう！

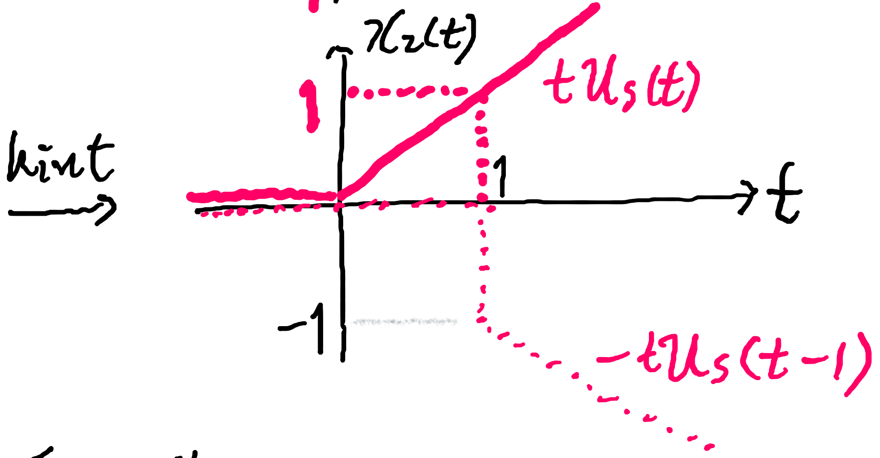
1.



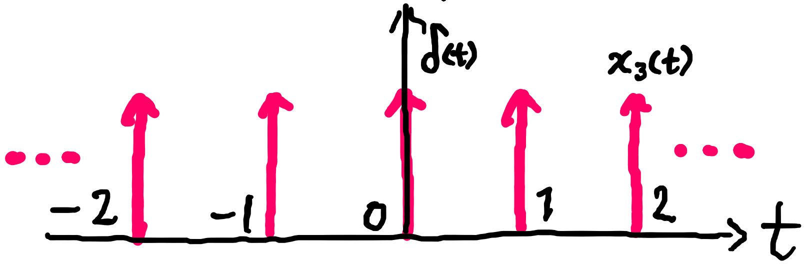


2.





3.



← 単位インパルス列

回答

1. $x_1(t) = u_s(t) - u_s(t-1)$
2. $x_2(t) = t\{u_s(t) - u_s(t-1)\}$
3. $x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$

追加：下記はどんな図面になるのだろうか？

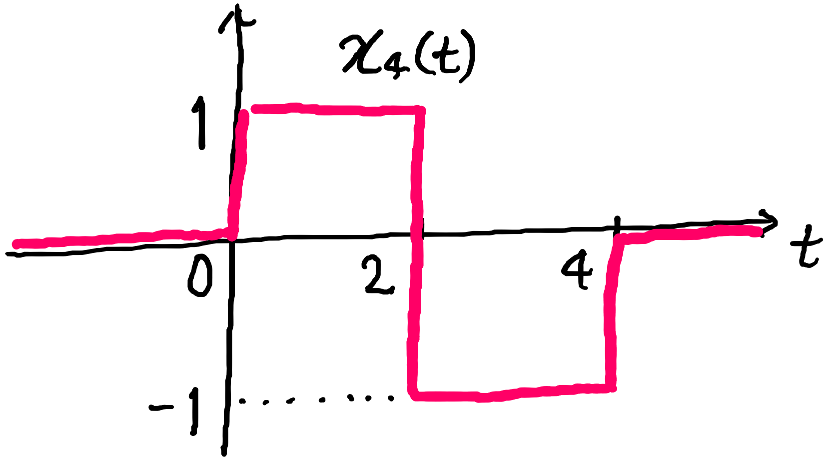
$x_4(t) = \sin t \cdot u_s(t)$ 課題４－１

$x_5(t) = e^{-t} \cdot u_s(t)$ 課題４－２

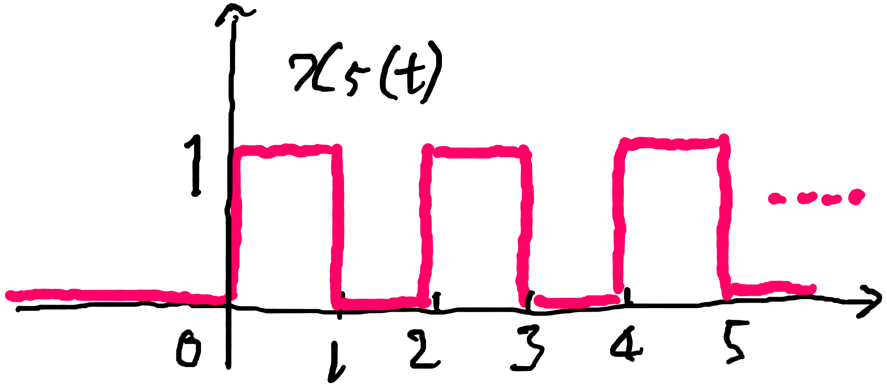
課題4-3、 課題4-4

- 例題５に倣って、下記の図示した信号$x_4(t)$、 $x_5(t)$を単位ステップ信号$u_s(t)$式で表そう！

1.



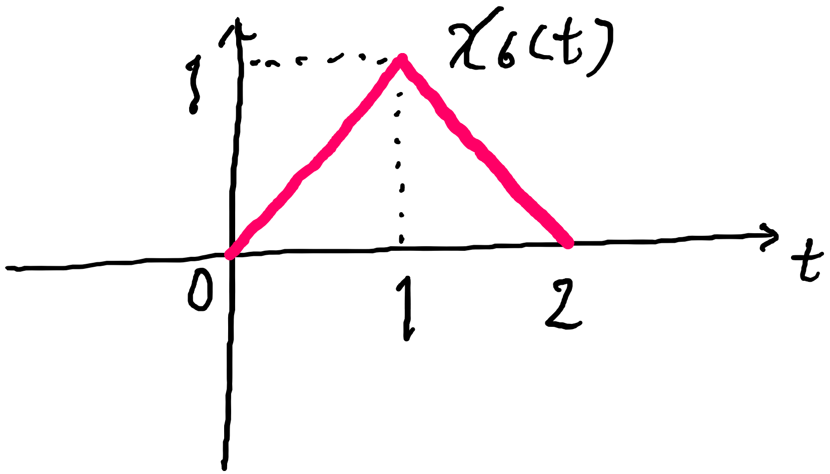
2.



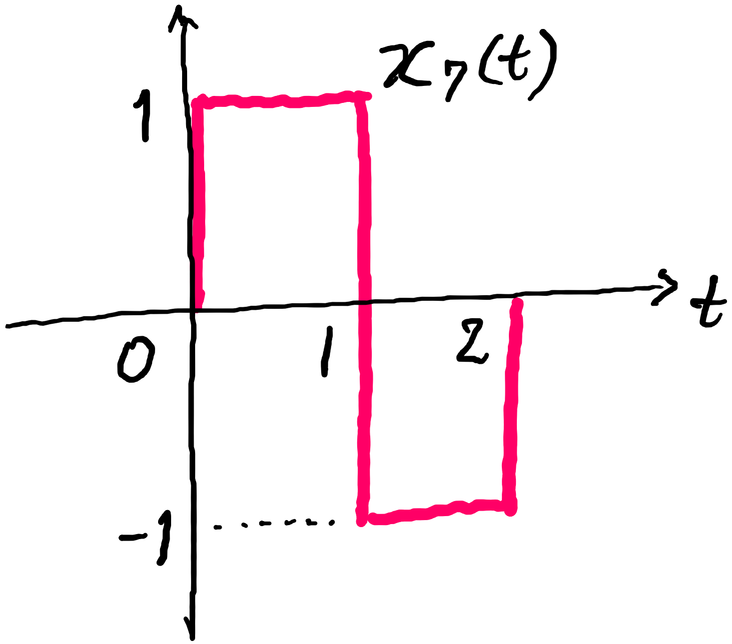
課題4-5、 課題4-6

- 例題５に倣って、下記の図示した信号$x_6(t)$、 $x_7(t)$を単位ステップ信号$u_s(t)$式で表そう！

1.



2.



課題4-7、 課題4-8、 課題4-9、 課題4-10

1. 課題4-7 → 例題３で用いた信号に対して$y(t) = x(0.5t + 2)$を図示せよ！
2. 課題4-8,4-9,4-10 → 次の信号を図示せよ。
   ① $u_s(6 - 2t)$
   ② $\delta(t^2 - 2t - 3)$
   ③ $e^{-t}\sin t \cdot u_s(t)$ → 概形も構わない

課題4-7のヒント！

- 単位ステップ信号の特徴を考えよう
- $u_s(t)$の図面を考えてみよう！
- t=0 の時に値を持つことを覚えよう！

- すると、6-2t = 0 の時に値を持つ、t = 3 の時から値を持つ
- しかし、符号がマイナスなので、 $u_s(t)$の反対図面となる！

システムとは

以上の、システムには類似性（Analogy）がある。
（線形システムとして考えることを前提）重ね合わせの理

これまでの、ポイント

- 信号とシステムを基本的な数学の複素数、三角関数で表した。
- 連続時間複素指数信号、正弦波などを理解した。
- 連続、離散、デジタルなどの信号とシステムの用語を理解した。
- 基本的な信号の波形を理解し、作図できた。
- 力学システムを例に、システムを理解した。

三角関数の復習（整理）して置こう！

- 加法定理（２種類）
- 倍角の公式
- ３倍角の公式
- 半角の公式
- 積→和の公式
- 和→積の公式
- 三角関数の合成

加法定理

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
  $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
  $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
  $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
  $\tan(A+B) = (\tan A + \tan B)/(1 - \tan A \tan B)$
  $\tan(A-B) = (\tan A - \tan B)/(1 + \tan A \tan B)$

２倍角， ３倍角， 半角

- $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$
  $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$
  $\tan 2A = 2 \tan A / (1-\tan^2 A)$
- $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin 3 A$
  $\cos 3A = 4 \cos 3 A - 3 \cos A$
- $\sin^2 \alpha/2 = 1 - \cos\alpha / 2$
  $\cos^2 \alpha/2 = 1 + \cos\alpha / 2$
  $\tan^2 \alpha/2 = (1-\cos\alpha) / (1+\cos\alpha)$

積→和，　和→積

- $\sin A \cos B = 1/2\ [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$
- $\cos A \sin B = 1/2[\ \sin(A+B) - \sin(A-B)]$
- $\cos A \cos B = 1/2\ [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$
- $\sin A \sin B = -\ 1/2\ [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$
- $\sin A + \sin B = 2\sin\{1/2\ (A+B)\}\cos\{1/2\ (A-B)\}$
  $\sin A - \sin B = 2\cos\{1/2\ (A+B)\}\sin\{1/2\ (A-B)\}$
  $\cos A + \cos B = 2\cos\{1/2\ (A+B)\}\cos\{1/2\ (A-B)\}$
  $\cos A - \cos B = -2\sin\{1/2\ (A+B)\}\sin\{1/2\ (A-B)\}$

三角関数の合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$