『自動控制實習講義 』

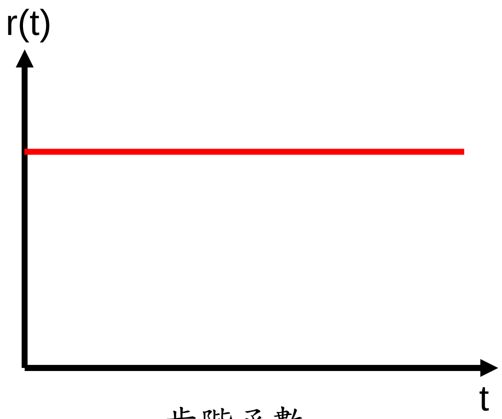
電機系吳佳斌編著

實驗六　穩態誤差

實驗目的：練習 MATLAB 的方塊圖化簡操作及求轉移函數的應用，由方塊圖計算系統的穩態誤差、由穩態誤差的規格設計控制系統，由穩態誤差判斷控制器的 K 值範圍，應用於解控制相關的問題可作為日後控制系統設計及分析的參考。

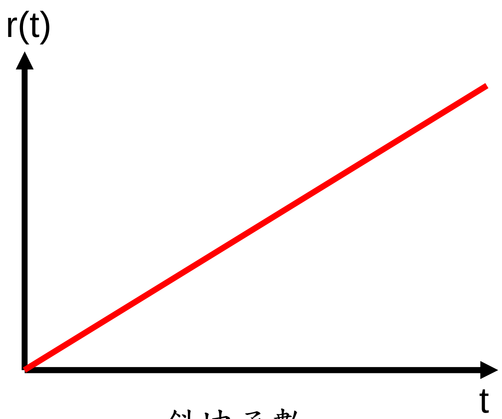
■　控制系統典型的測試訊號：步階輸入、斜坡輸入及拋物線輸入。

(1)步階訊號：$r(t) = R\ u(t)$



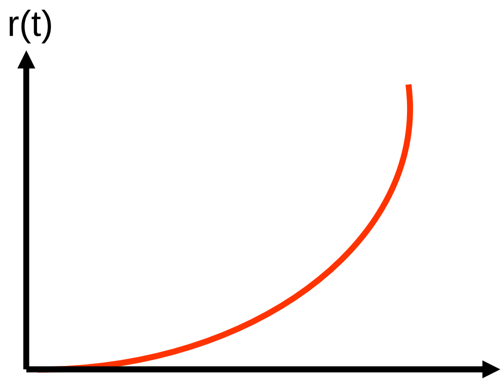
步階函數

(2) 斜坡訊號：$r(t) = R\,t\ u(t)$



斜坡函數

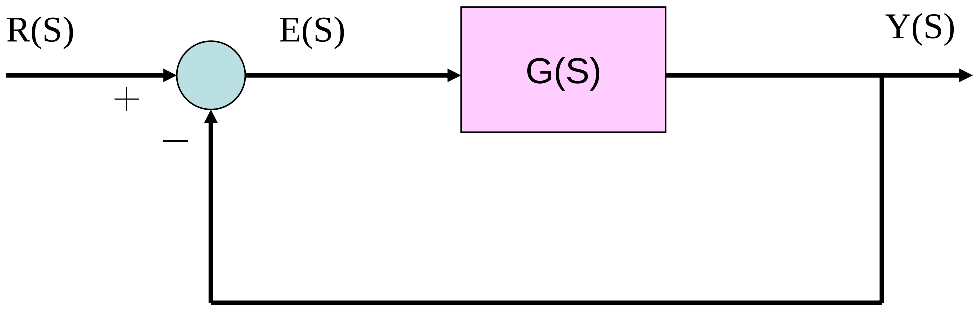
(3) 拋物線訊號：$r(t) = \dfrac{R\,t^2}{2}\ u(t)$



拋物線函數

- 誤差定義：輸入 R 與輸出 Y 的差。
- 穩態誤差定義：穩態的輸入 R 與輸出 Y 的差。
- 方法一：以公式算出穩態誤差

單位負回授控制系統



計算步階、斜坡、拋物線輸入下的誤差常數及穩態誤差公式：

(1) 步階輸入誤差常數 $K_p = \lim_{S \to 0} G(S)$、穩態誤差 $e_{ss} = e(\infty) = \dfrac{R}{1+K_p}$。

(2) 斜坡輸入誤差常數 $K_V = \lim_{S \to 0} S\,G(S)$、穩態誤差 $e_{ss} = e(\infty) = \dfrac{R}{K_v}$。

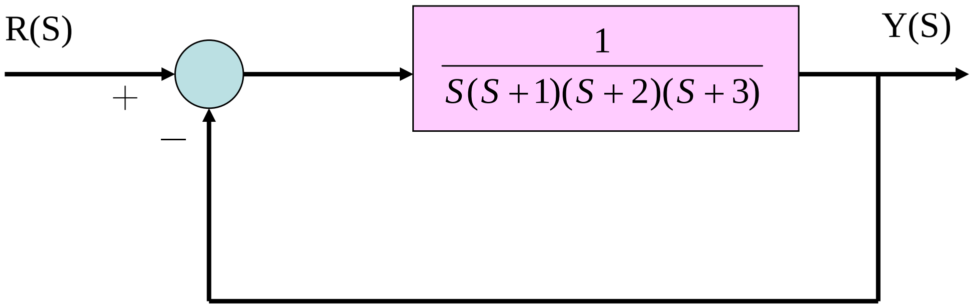
(3) 拋物線輸入誤差常數 $K_a = \lim_{S \to 0} S^2 G(S)$、穩態誤差 $e_{ss} = e(\infty) = \dfrac{R}{K_a}$。

步驟：

(1) 求系統的總轉移函數，由總轉移函數的特性根(極點)判斷穩定度，有正根系統不穩定。

(2)若系統穩定再以公式計算步階、斜坡、拋物線輸入等的誤差常數及穩態誤差。

Ex.



指令：

```
G=tf(1,poly([0 -1 -2 -3]));
T=feedback(G,1);

poles=pole(T)                                %判斷系統是否穩定

'Step Input'
Kp=dcgain(G)
ess_Step=1/(1+Kp)
'Ramp Input'
S_1=tf([1 0],1);
SG=minreal(S_1*G);
Kv=dcgain(SG)
ess_Ramp=1/Kv
'Parabolic Input'
S_2=tf([1 0 0],1);
S2G=minreal(S_2*G);
Ka=dcgain(S2G)
ess=1/Ka
```

結果：

由以下轉移函數的特性根(極點)判斷穩定度，沒有正根系統穩定。

poles =

   -2.6180 + 0.0000i

-2.6180 - 0.0000i
-0.3820 + 0.0000i
-0.3820 - 0.0000i

單位步階輸入誤差常數

Kp =

Inf

單位步階輸入穩態誤差

ess_Step =

0

單位斜坡輸入誤差常數

Kv =

0.1667

單位斜坡輸入穩態誤差

ess_Ramp =

6.0000

單位拋物線輸入誤差常數

Ka =

0

單位拋物線輸入穩態誤差

ess =

Inf

■ 方法二：由系統的總轉移函數求穩態誤差

誤差 $E(S) = R(S) - Y(S) = R(S)\left(1 - \dfrac{Y(S)}{R(S)}\right)$

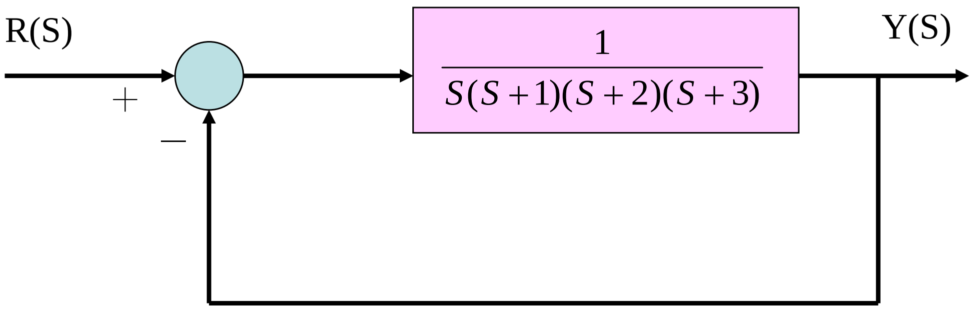
以終值定理求穩態誤差 $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{S\to 0} SE(S)$

步驟：

(1) 求系統的總轉移函數，由總轉移函數的特性根(極點)判斷穩定度，有正根系統不穩定。

(2) 若系統穩定再以終值定理求穩態誤差計算步階、斜坡、拋物線輸入等的穩態誤差。

Ex.



指令：

```
'由系統的總轉移函數求穩態誤差'
G=tf(1,poly([0 -1 -2 -3]));
TYR=feedback(G,1);
poles=pole(TYR)                          %判斷系統是否穩定
S1=tf([1 0],1);                          %S的一次方
'Step Input'
R_Step=tf(1,[1 0]);
E_Step=minreal(S1*R_Step*(1-TYR));
ess_Step=dcgain(E_Step)
'Ramp Input'
R_Ramp=tf(1,[1 0 0]);
```

```
E_Ramp=minreal(S1*R_Ramp*(1-TYR));
ess_Ramp=dcgain(E_Ramp)
'Parabolic Input'
R_Parabolic=tf(1,[1 0 0 0]);
E_Parabolic=minreal(S1*R_Parabolic*(1-TYR));
ess_Parabolic=dcgain(E_Parabolic)
```

結果：

由以下轉移函數的特性根(極點)判斷穩定度，沒有正根系統穩定。

```
poles =

  -2.6180 + 0.0000i
  -2.6180 - 0.0000i
  -0.3820 + 0.0000i
  -0.3820 - 0.0000i
```

單位步階輸入穩態誤差

```
ess_Step =

     0
```

單位斜坡輸入穩態誤差

```
ess_Ramp =

    6.0000
```

單位拋物線輸入穩態誤差

```
ess =

   Inf
```

■ 方法三：由 Simulink 測試系統的穩定度及穩態誤差

誤差 $E(S) = R(S) - Y(S)$

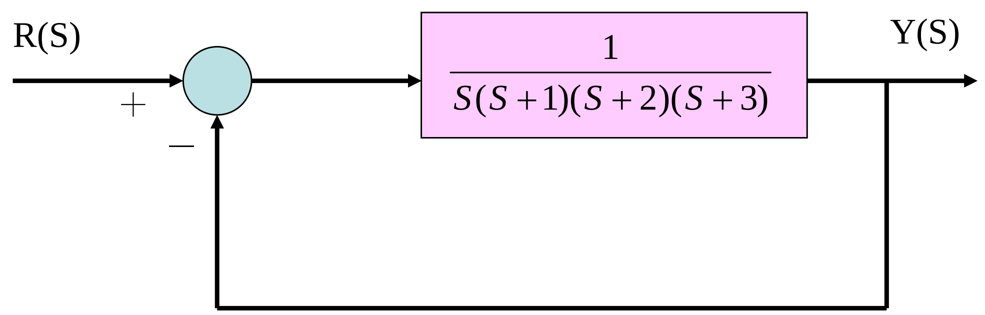
步驟：

(1) 繪系統的方塊圖。

(2) 分別加入步階、斜坡、拋物線輸入等測試訊號，觀察輸出判斷系統的穩定度，

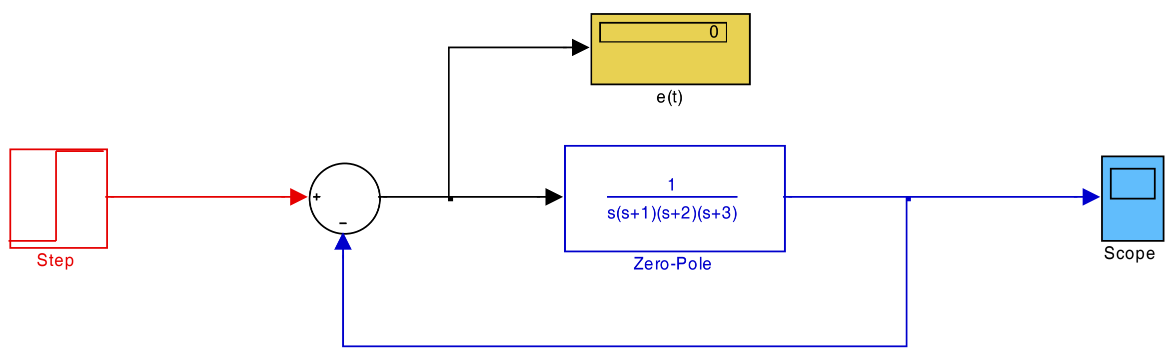
若系統穩定調整時間再觀察誤差 $E(S) = R(S) - Y(S)$ 的穩態值。

Ex.

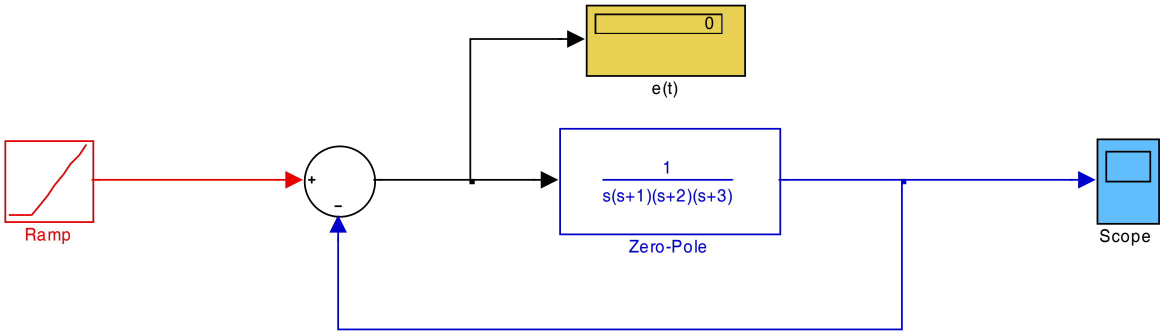


指令：

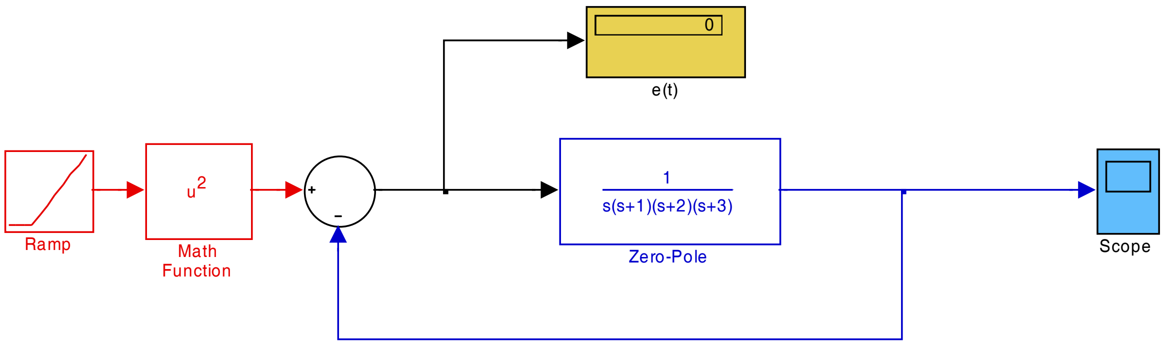
加入步階測試訊號



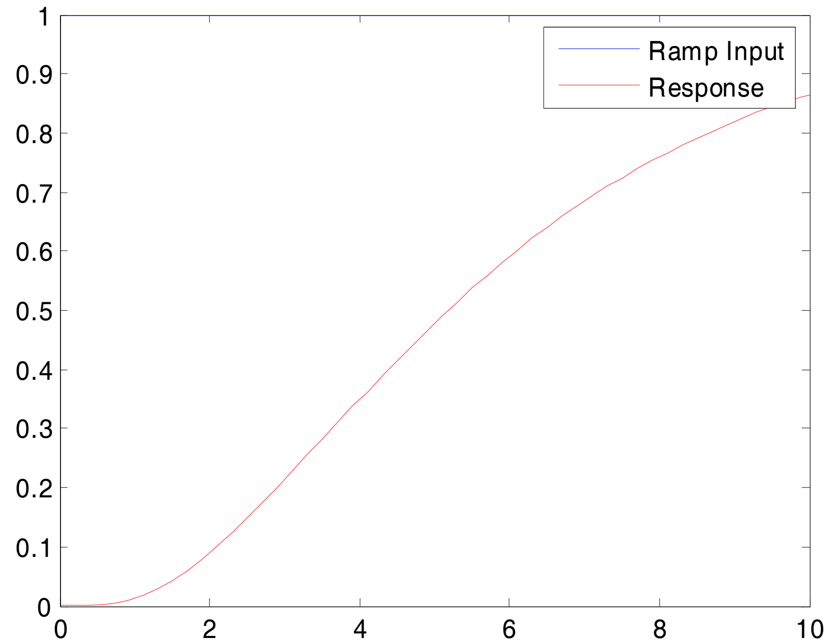
加入斜坡測試訊號



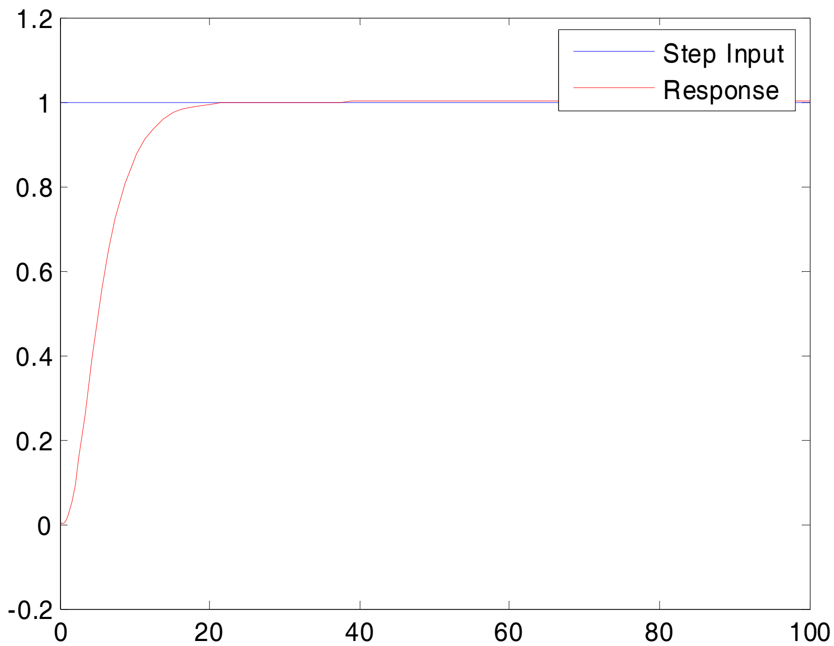
加入拋物線測試訊號



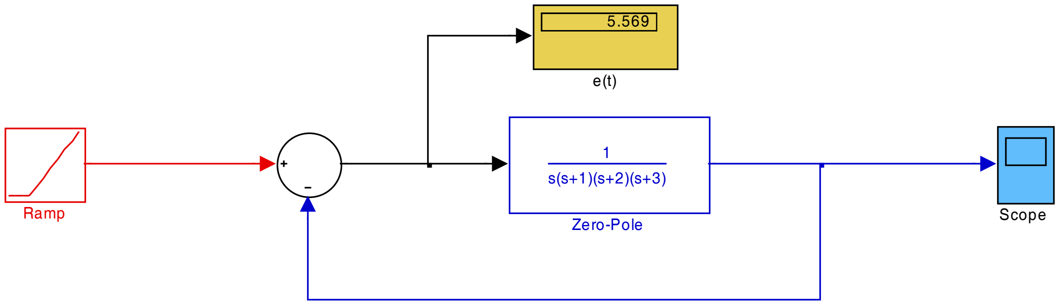
■ 加入步階測試訊號結果：設 t=10 秒，加入步階測試訊號，e(t)=0.1347，輸出如下圖尚未穩定，無法判斷是否為穩定系統，再延長時間測試一次



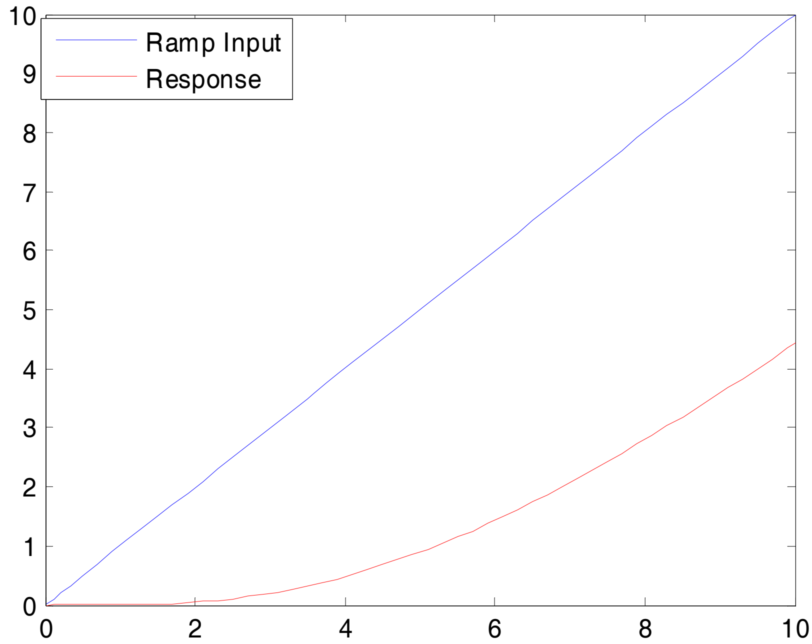
■ 加入步階測試訊號結果：設 t=100 秒，加入步階測試訊號，e(t)=-4.728e-007，輸出如下圖逐漸穩定，故判斷為穩定的系統，若再延長時間可推定 ess_Step =0。



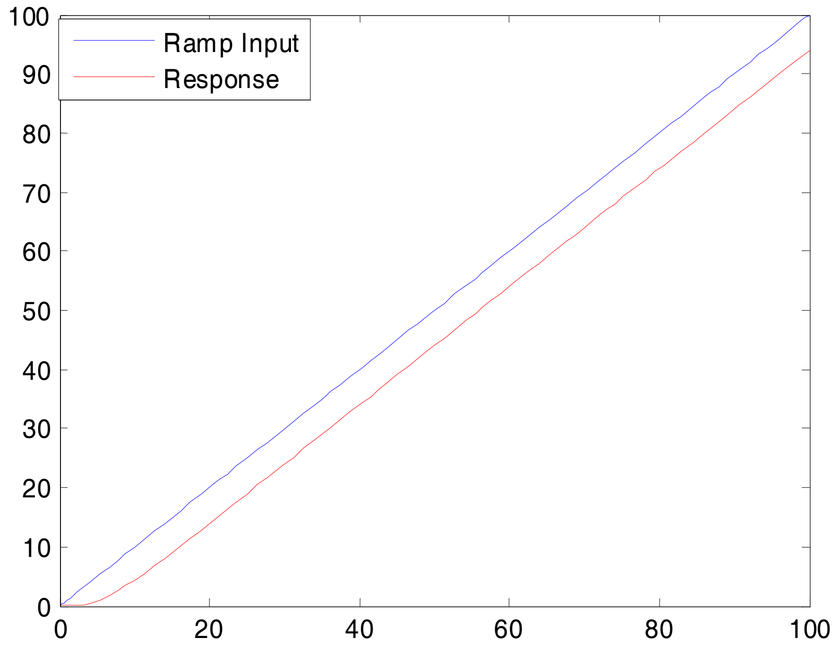
■ 加入斜坡測試訊號結果：設 t=10 秒，加入斜坡測試訊號，得 e(t)=5.569



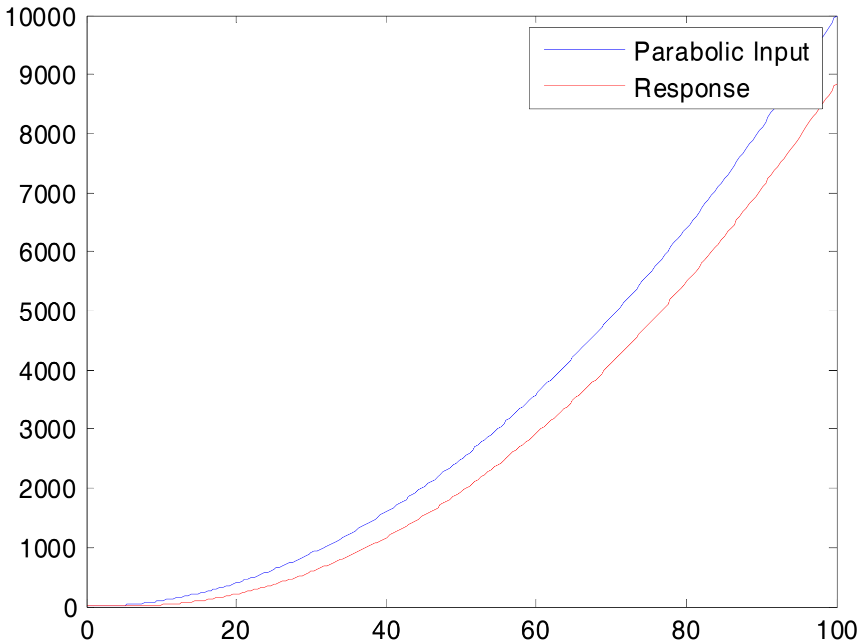
■ 輸出如下圖尚未穩定，無法判斷是否為穩定系統，再延長時間測試一次



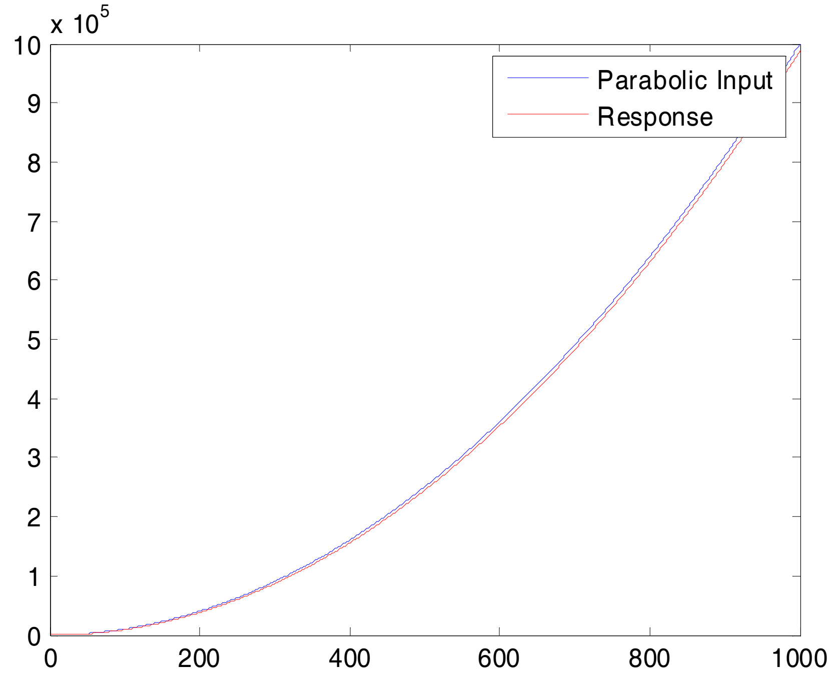
■ 加入斜坡測試訊號結果：設 t=100 秒，加入斜坡測試訊號，e(t)=6



■ 加入拋物線測試訊號結果：設 t=100 秒，加入斜坡測試訊號，得 e(t)=1150

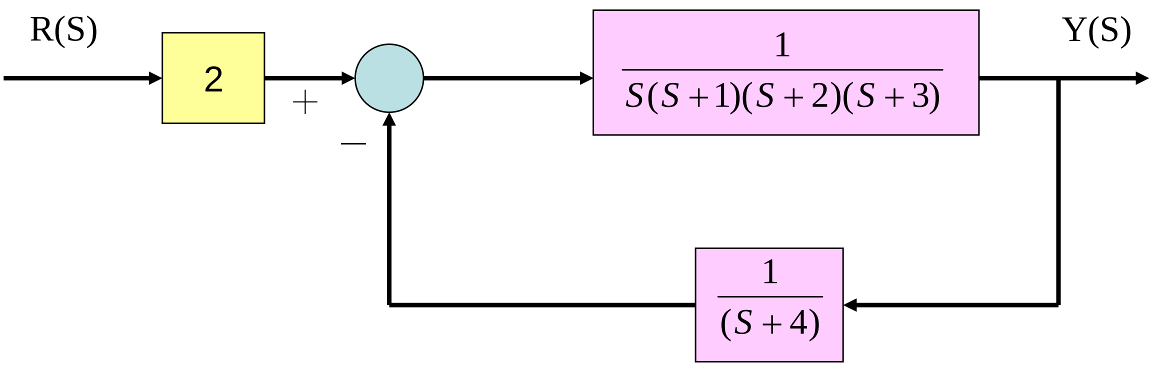


■ 加入拋物線測試訊號結果：設 t=1000 秒，加入斜坡測試訊號，e(t)= 1.1950e+004，推估穩態誤差 ess_Ramp =∞



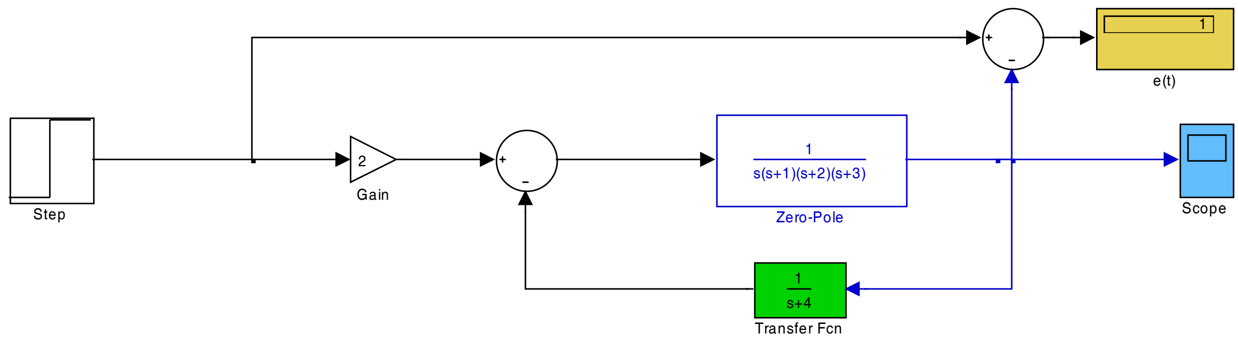
■ 以Simulink測試非單一回授系統的穩定度及穩態誤差

Ex.

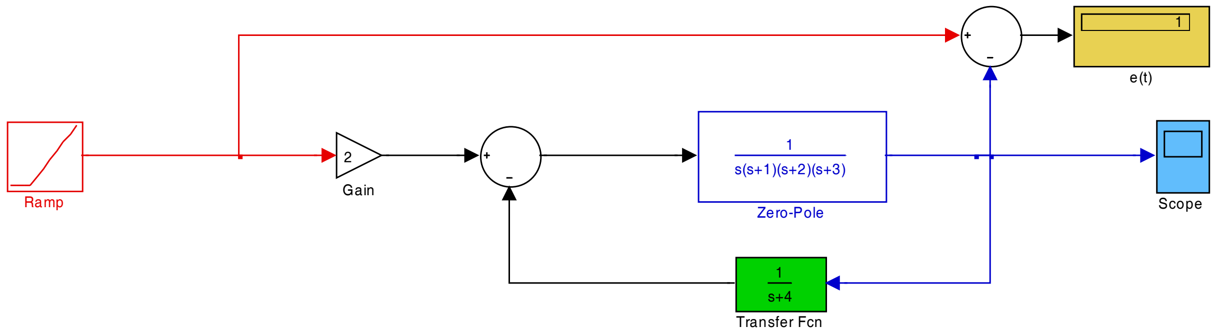


指令：

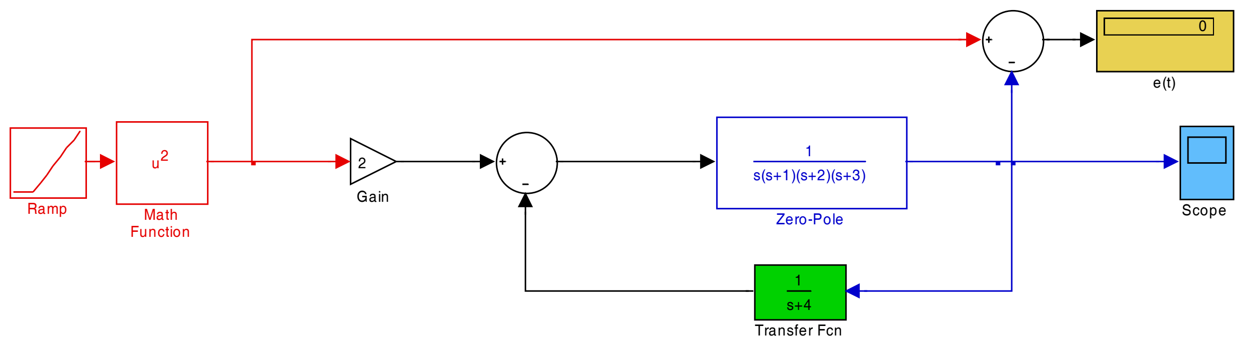
加入步階測試訊號



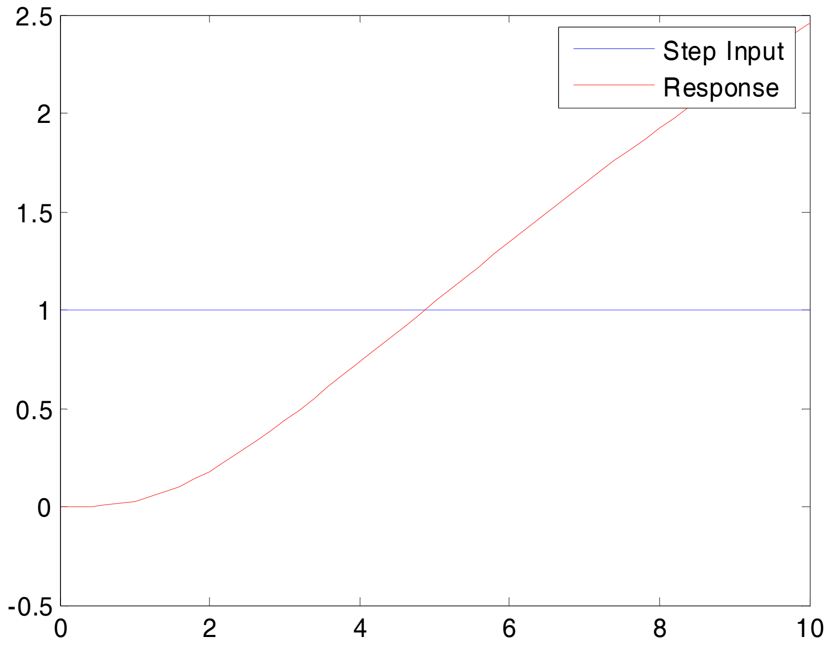
加入斜坡測試訊號



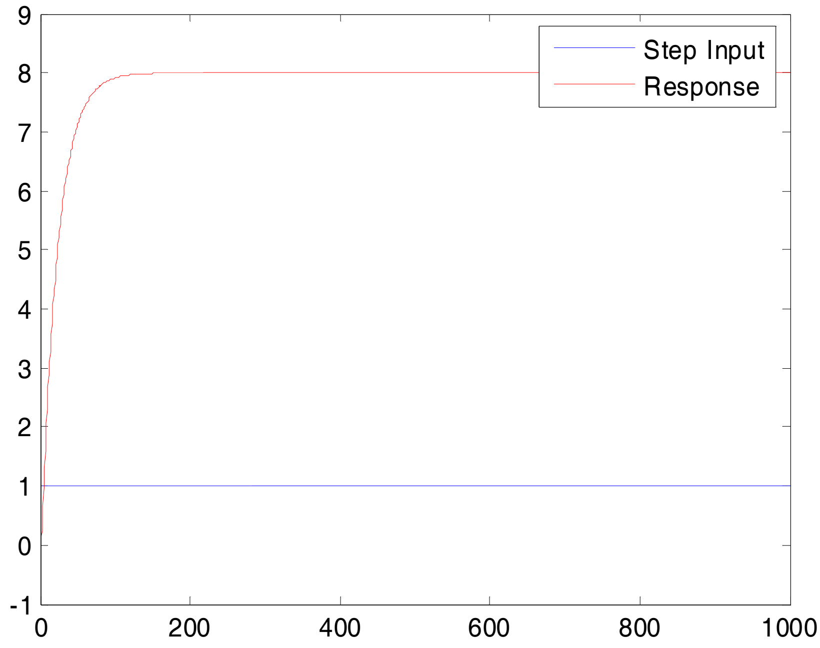
加入拋物線測試訊號



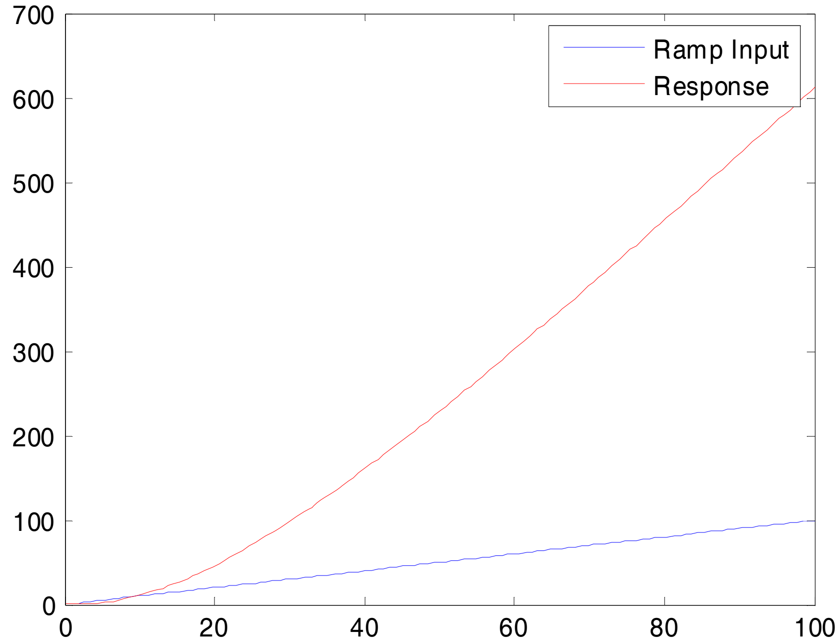
■ 加入步階測試訊號結果：設 t=10 秒，加入步階測試訊號，e(t)= -1.4563，輸出如下圖尚未穩定，無法判斷是否為穩態值，再延長時間測試一次



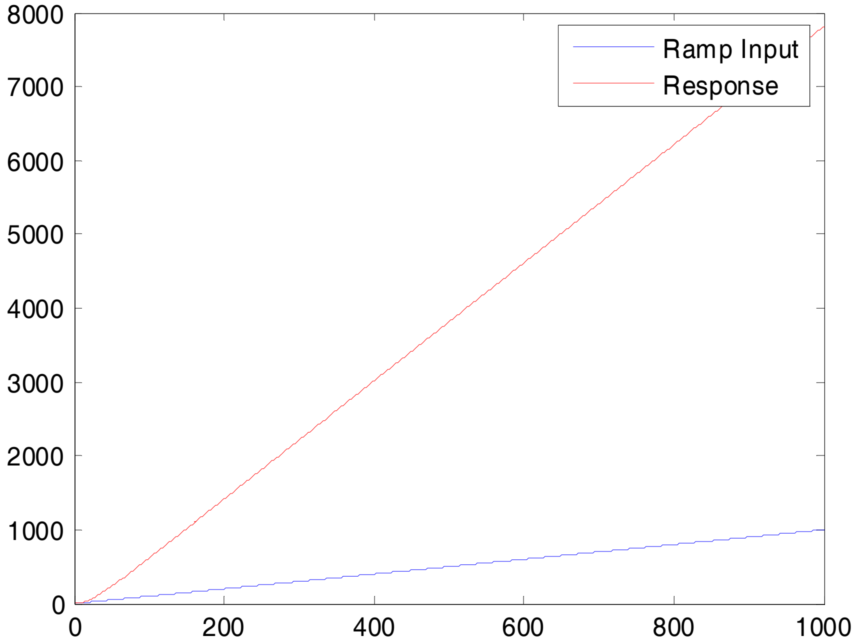
■ 加入步階測試訊號結果：設 t=1000 秒，加入步階測試訊號，e(t)= -7，輸出如下圖逐漸穩定，故判斷 ess_Step =-7。



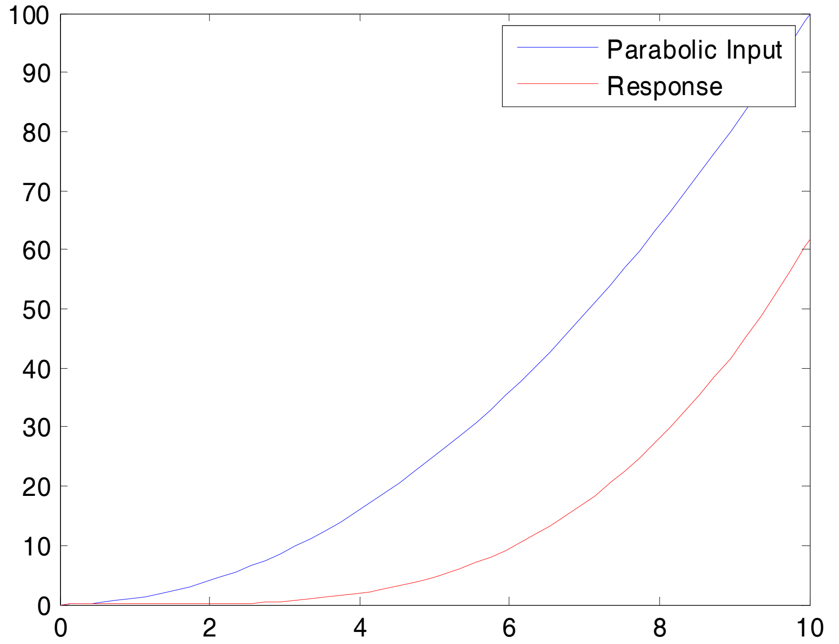
■ 加入斜坡測試訊號結果：設 t=100 秒，加入斜坡測試訊號，e(t)= -511.9362



■ 加入斜坡測試訊號結果：設 t=1000 秒，加入斜坡測試訊號，e(t)= -6.8100e+003，推估穩態誤差 ess_Ramp =－∞



■ 加入拋物線測試訊號結果：設 t=10 秒，加入拋物線測試訊號，e(t)= 38.2092



■ 加入拋物線測試訊號結果：設 t=1000 秒，加入拋物線測試訊號，e(t)= -6.6283e+006，推估穩態時的誤差 ess 為－∞