『自動控制實習講義 』

電機系吳佳斌編著

實驗二　時域模型

實驗目的：練習時域模型及狀態空間的分析設計，並熟悉 MATLAB 的操作及其應用，應用於解控制相關的問題可作為日後控制系統設計及分析的參考。

■ 矩陣不同的輸入方式

Ex. 某系統狀態方程式為 $\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}r(t)$，輸入其係數

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}x(t)$$

指令：

```
A=[0 1 0;0 0 1;-1 -2 -3]
B=[0;0;1]
C=[1 2 3]
D=0
'or'
A=[0 1 0
0 0 1
-1 -2 -3]
B=[0
   0
   1]
'or'
B=[0 0 1]'
```

以上不同的輸入方式結果相同

■ 動態方程式表示法

指令：

```
F=ss(A,B,C,D)
```

結果：

a =

	x1	x2	x3
x1	0	1	0
x2	0	0	1
x3	-1	-2	-3

b =

	u1
x1	0
x2	0
x3	1

c =

	x1	x2	x3
y1	1	2	3

d =

	u1
y1	0

Continuous-time model.

■ 已知轉移函數求動態方程式

Ex.

$$F(S)=\frac{5}{S^3+2S^2+3S+4}$$

■ 以'**Controller canonical form**'表動態方程式

指令：

num=5;
den=[1 2 3 4];

[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)

結果：

```
A =

   -2   -3   -4
    1    0    0
    0    1    0


B =

    1
    0
    0


C =

    0    0    5


D =

    0
```

■ 以'**Phase-variable form**'表動態方程式

$$P=\begin{bmatrix} 0 & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix}$$ 依系統的維度而定

轉換公式如下：

$$A_P = P^{-1}AP$$
$$B_P = P^{-1}B$$
$$C_P = CP$$

$D_P = D$

指令：

```
P=[0 0 1;0 1 0;1 0 0];
Ap=inv(P)*A*P
Bp=inv(P)*B
Cp=C*P
Dp=D
```

結果：

```
Ap =

     0     1     0
     0     0     1
    -4    -3    -2


Bp =

     0
     0
     1


Cp =

     5     0     0


Dp =

     0
```

■ 由轉移函數轉為動態方程式(非標準式)

Ex.

$$F(S) = \frac{5}{S^3 + 2S^2 + 3S + 4}$$

指令：

```
num=5;
den=[1 2 3 4];
T_tf=tf(num,den)
T_ss=ss(T_tf)
```

結果：

```
a =
            x1      x2      x3
    x1      -2    -1.5      -2
    x2       2       0       0
    x3       0       1       0


b =
         u1
    x1    2
    x2    0
    x3    0


c =
            x1      x2      x3
    y1       0       0    1.25


d =
         u1
    y1    0
```

■ 由動態方程式求轉移函數的分子分母

Ex. 某系統狀態方程式為 $\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}r(t)$，求轉移函數

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}x(t)$$

的分子分母

指令：

%輸入狀態方程式A B C D的係數

```
A=[0 1 0;0 0 1;-1 -2 -3];
B=[0;0;1];
C=[1 2 3];
D=0;
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1)          %由狀態方程式轉為轉移函數並
                                    %取出分子分母係數。
```

結果：

```
num =

          0    3.0000    2.0000    1.0000
den =

     1.0000    3.0000    2.0000    1.0000
```

其轉移函數為

$$F(S)=\frac{3S^2+2S+1}{S^3+3S^2+2S+1}$$

■ 已知動態方程式的A B C D係數，表示為動態方程式

指令：

```
Tss=ss(A,B,C,D)
```

結果：

```
a =
          x1   x2   x3
     x1    0    1    0
     x2    0    0    1
```

```
    x3   -1   -2   -3


b =
           u1
    x1      0
    x2      0
    x3      1


c =
           x1   x2   x3
    y1      1    2    3


d =
           u1
    y1      0
```

Continuous-time model.

■ 由動態方程式求轉移函數

Ex. 某系統狀態方程式為 $\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}r(t)$ ，求轉移函數

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}x(t)$$

指令：

Ttf=tf(Tss)

結果：

```
Transfer function:
    3 s^2 + 2 s + 1
---------------------
s^3 + 3 s^2 + 2 s + 1
```

■ 由動態方程式求轉移函數以zero/pole

指令：

Tzpk=zpk(Tss)

結果：

Zero/pole/gain:

```
      3 (s^2    + 0.6667s + 0.3333)
-----------------------------------
(s+2.325) (s^2    + 0.6753s + 0.4302)
```

■ 電路系統的動態方程式

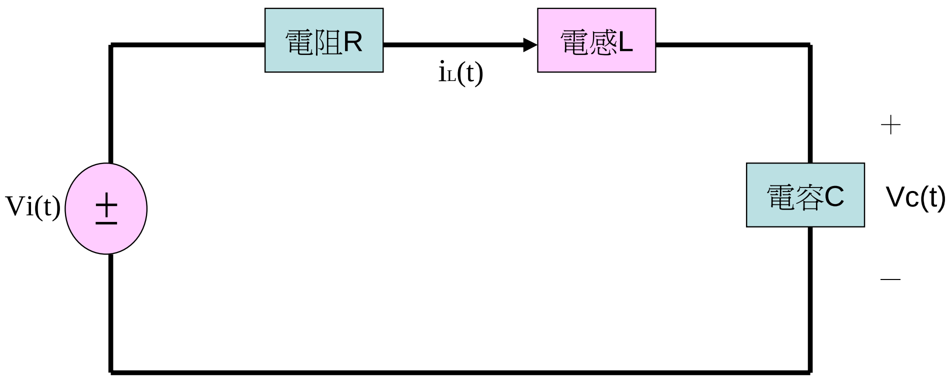
步驟：

1. 以電流源取代電感，以電壓源取代電容。

2. 求電流源端電壓 $v_L(t)$，求電壓源的電流 $i_C(t)$。

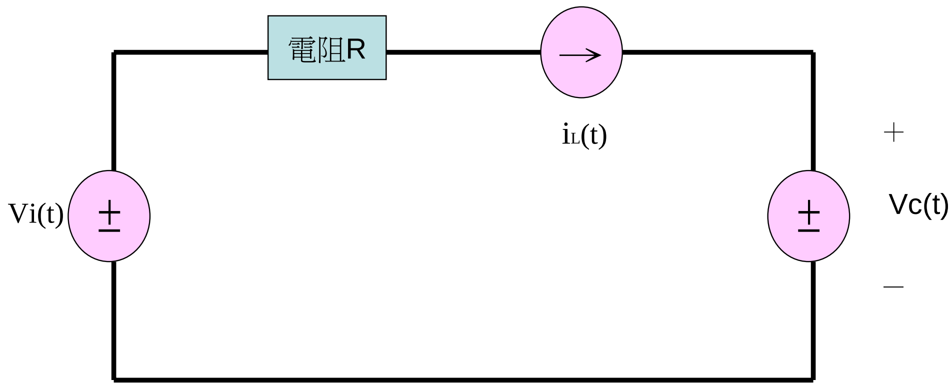
3. 以 $v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$、$i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$ 帶入方程式，寫為動態方程式。

Ex.

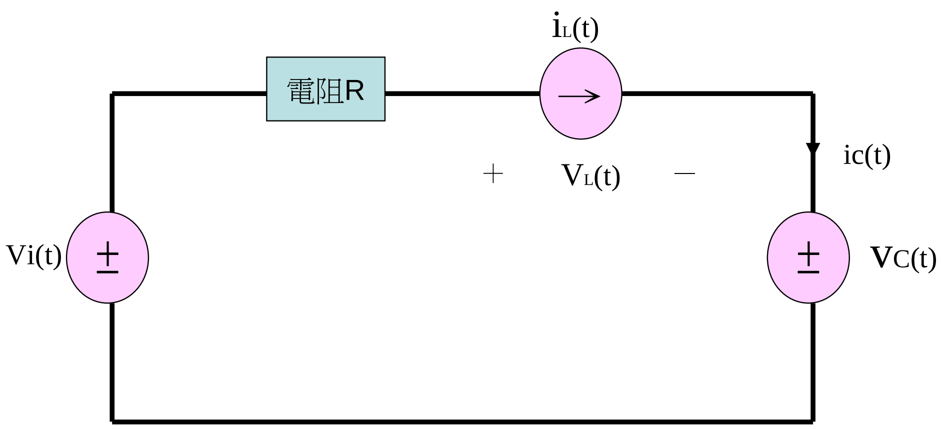


步驟：

1. 以電流源取代電感，以電壓源取代電容，如下圖所示。



2. 求電流源端電壓$v_L(t)$，求電壓源的電流$i_C(t)$，如下圖所示的電路求其$v_L(t)$及$i_C(t)$。



可得方程式：

$$i_C(t) = i_L(t) \tag{1}$$

$$v_L(t) = -v_c(t) + V_i(t) - i_L(t)R \tag{2}$$

3. 以$v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$、$i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$帶入方程式，寫為動態方程式。

$$C\frac{dv_C(t)}{dt} = i_C(t) = i_L(t) \tag{3}$$

$$L\frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t) = -v_c(t) + V_i(t) - i_L(t)R \tag{4}$$

寫為動態方程式形式

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_L(t) \tag{5}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{1}{L} v_c(t) + \frac{1}{L} V_i(t) - \frac{R}{L} i_L(t) \tag{6}$$

寫為矩陣動態方程式形式

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_C(t)}{dt} \\ \dfrac{di_L(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} V_i(t) \tag{7}$$