



『自動控制實習講義』  
電機系吳佳斌編著

實驗七 根軌跡技巧

## 實驗七 根軌跡技巧

實驗目的：練習 MATLAB 的根軌跡設計技巧，由所要求的控制系統規格配合根軌跡圖及二階近似的方法設計控制系統，並判斷系統穩定時控制器的 K 值範圍與加入極零點的設計技巧。

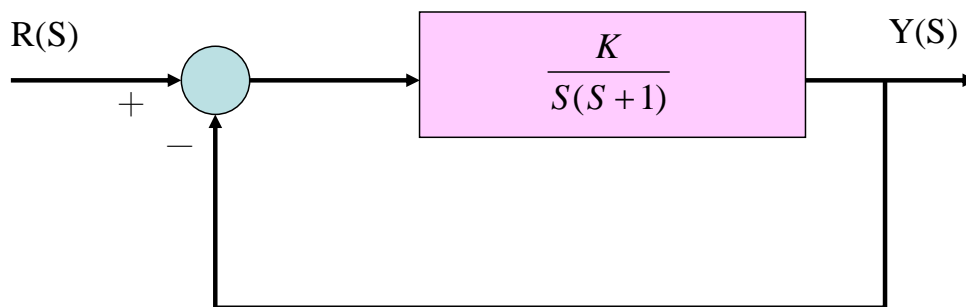
### ■ 根軌跡設計步驟

步驟：

- (1) 求系統的總轉移函數，包含未知的 K 值。
- (2) 由總轉移函數的特性方程式寫為  $1+KG(S)H(S)=0$  的形式。
- (3) 以  $G(S)H(S)$  繪根軌跡圖，並依系統規格以 mouse 指定所要的軌跡圖位置設計 K 值。
- (4) 繪出響應圖檢視設計結果是否符合規格，若否重做步驟(3)修正設計。

### 二階系統範例

EX.



試設計系統的安定時間  $T_s = 8$  秒及超越量百分比為 5%。

步驟：

- (1) 求系統的總轉移函數，包含未知的 K 值。

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1 + G(S)H(S)} = \frac{\frac{K}{S(S+1)}}{1 + \frac{K}{S(S+1)}} = \frac{K}{S(S+1) + K}$$

(2) 由總轉移函數的特性方程式寫為  $1 + KG(S)H(S) = 0$  的形式。

特性方程式  $S(S+1) + K = 0$ ，寫為  $1 + KG(S)H(S) = 0$  的形式

$$1 + K \frac{1}{S(S+1)} = 1 + KG(S)H(S) = 0$$

(3) 以  $G(S)H(S)$  繪根軌跡圖，並依系統規格以 mouse 指定所要的軌跡圖位置設計  $K$  值。

繪  $G(S)H(S) = \frac{1}{S(S+1)}$  的根軌跡圖

指令：

```
GH=tf(1,poly([0 -1]));
rlocus(GH);
```

超越量百分比公式  $\%OS = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100$ ，等式兩邊取對數再平方得

$$[\ln(\%OS)]^2 = \frac{\zeta^2 \pi^2}{1 - \zeta^2}$$

令  $x = [\ln(\%OS)]^2$  可得

$$\zeta = \sqrt{\frac{x}{x + \pi^2}}$$

安定時間  $T_s = \frac{4}{\zeta\omega}$  可得

$$\omega = \frac{4}{\zeta T_s}$$

指令：

```
x=log(0.05)^2;
zeta=sqrt(x/(x+pi^2))
```

$$w=4/(\zeta*8)$$

繪出阻尼比0.2~0.9及自然頻率0.1~1的輔助線

指令：

```
z=0.2:0.1:0.9;  
wn=0.1:0.1:1;  
sgrid(z,wn)
```

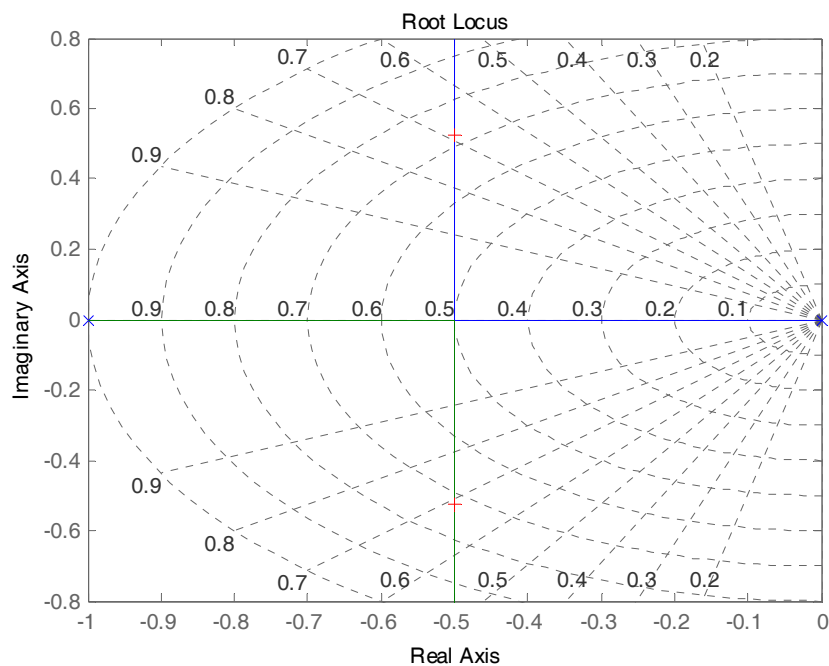
結果：

```
zeta =  
    0.6901  
w =  
    0.7245
```

以mouse指定所要的軌跡圖位置，阻尼比約0.6901無阻尼頻率約0.7245，並將設計值存在K及p的變數中

指令：

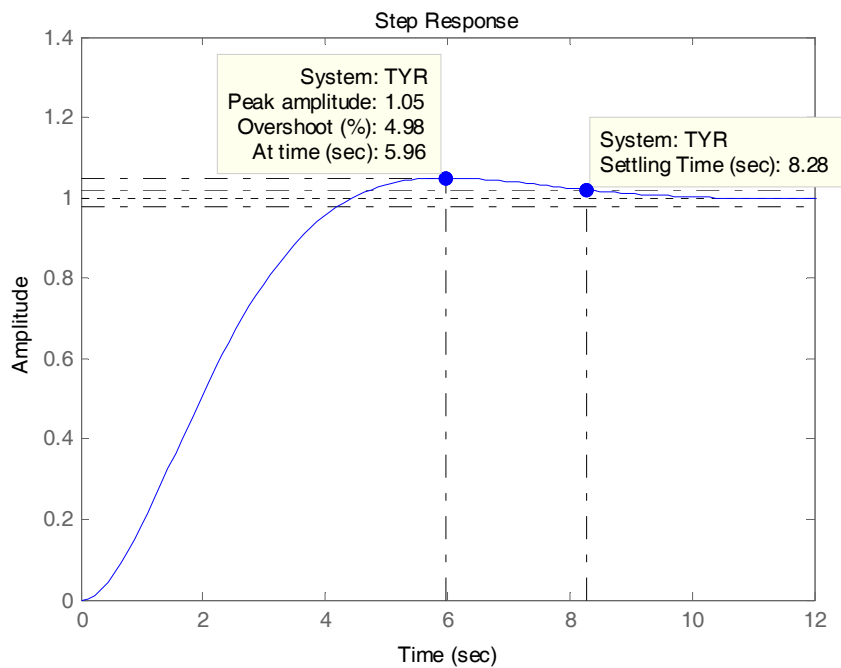
```
[K,p]=rlocfind(GH)
```



(4)繪出響應圖檢視設計結果是否符合規格，若否重步驟(3)修正設計。

指令：

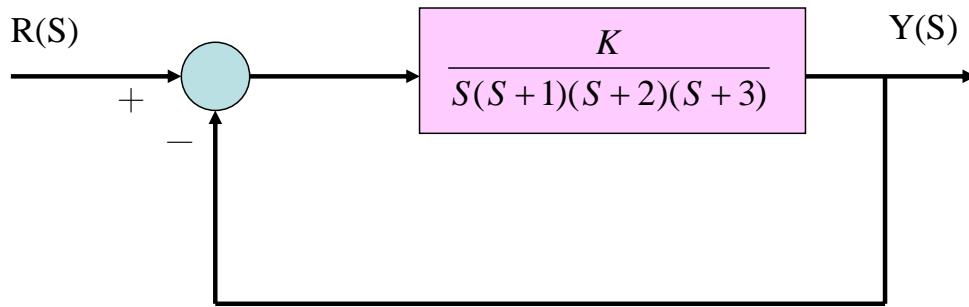
```
TYR=feedback(K*GH,1)  
step(TYR)
```



$K=0.5244$ 時安定時間 $T_s=8.28$ 秒及超越量百分比為4.98%，若要更精確可再以步驟(3)修正到系統設計要求的規格安定時間 $T_s=8$ 秒及超越量百分比為5%。

二階以上的系統範例(二階系統標準式的公式可當參考)

EX.



試設計系統的安定時間  $T_s = 8$  秒及超越量百分比為5%。

```

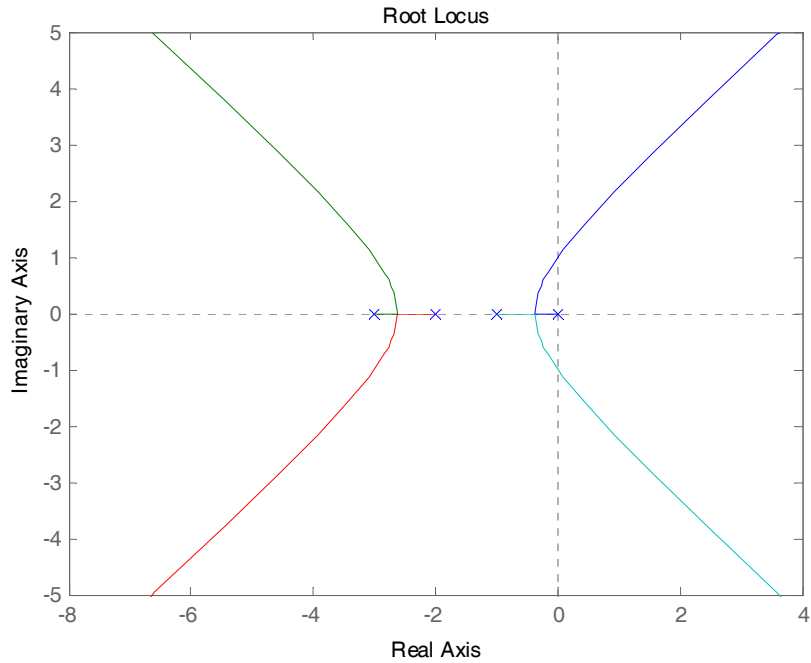
GH=tf(1,poly([0 -1 -2 -3]));
figure(1)
rlocus(GH);
pause
rlocus(GH,0:1e-3:2)           %繪出K=0~2精確度1e-3的根軌跡圖

x=log(0.05)^2;
zeta=sqrt(x/(x+pi^2))
w=4/(zeta*8)
z=0.2:0.1:0.9;
wn=0.1:0.1:1;
sgrid(z,wn)
[K,p]=rlocfind(GH)
TYR=feedback(K*GH,1)
pause
figure(2)
step(TYR)

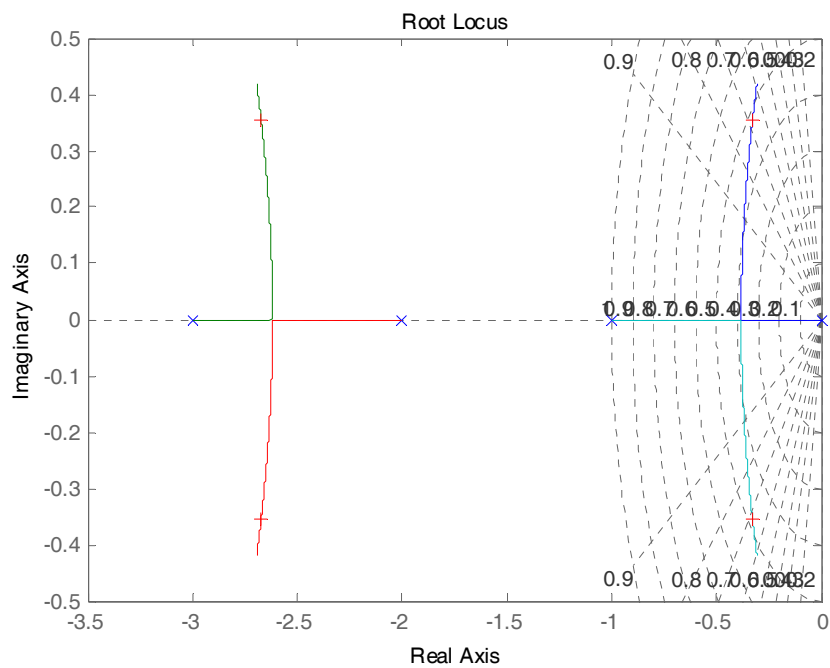
```

結果：

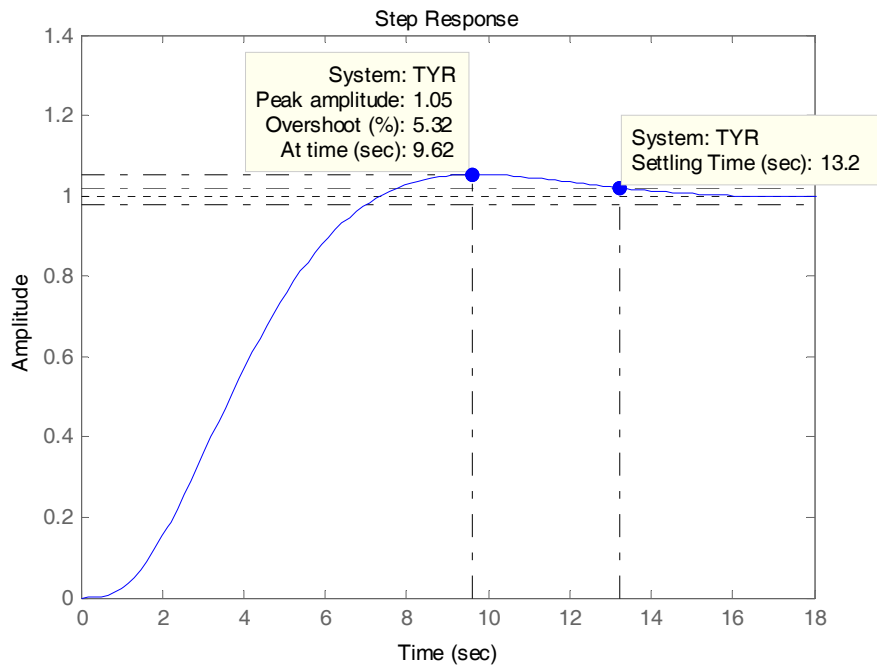
繪系統的根軌跡圖



繪出  $K=0\sim 2$  精確度  $1e-3$  的根軌跡圖，並繪出阻尼比  $0.2\sim 0.9$  及自然頻率  $0.1\sim 1$  的輔助線，再以 mouse 指定所要的軌跡圖位置，阻尼比約  $0.6901$  無阻尼頻率約  $0.7245$ ，並將設計值存在  $K$  及  $p$  的變數中

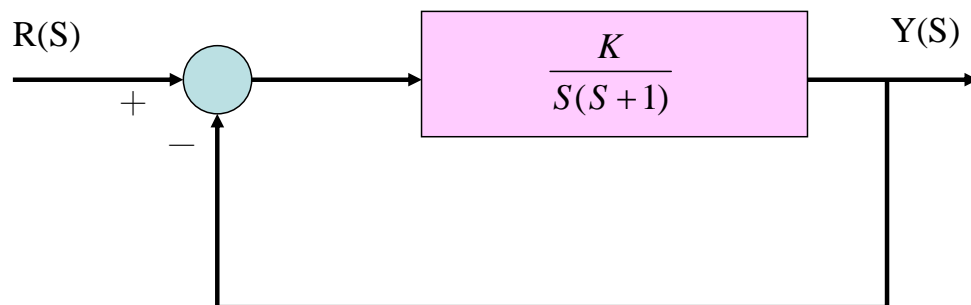


selected\_point =  $-0.3245 + 0.3539i$ ， $K = 1.6923$  的系統響應安定時間  $T_s = 13.2$  秒及超越量百分比為 5.32%，因此系統非二階系統，若要更精確再以步驟(3)修正到系統設計要求的規格安定時間  $T_s = 8$  秒及超越量百分比為 5% 較不容易。



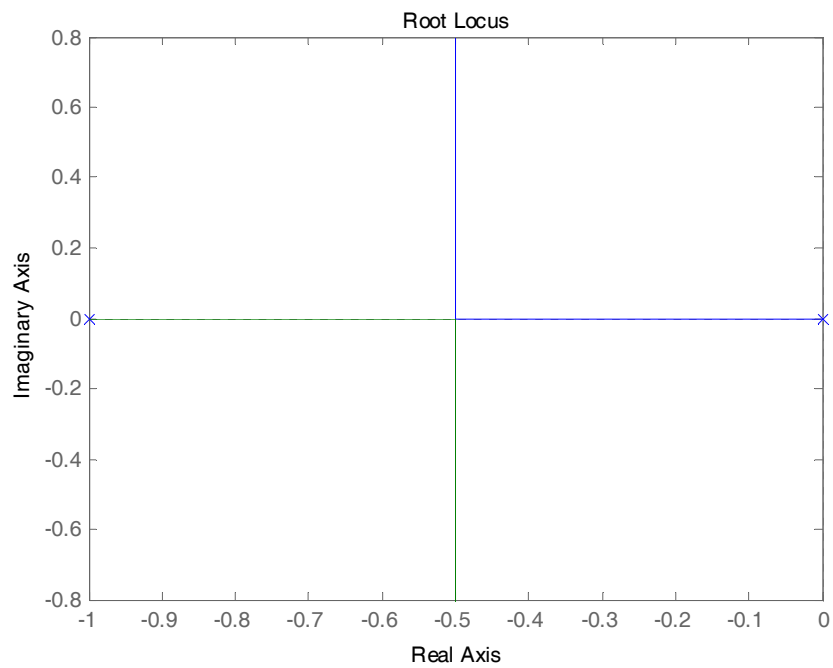
### ■ 加入極零點對系統的響應

EX.

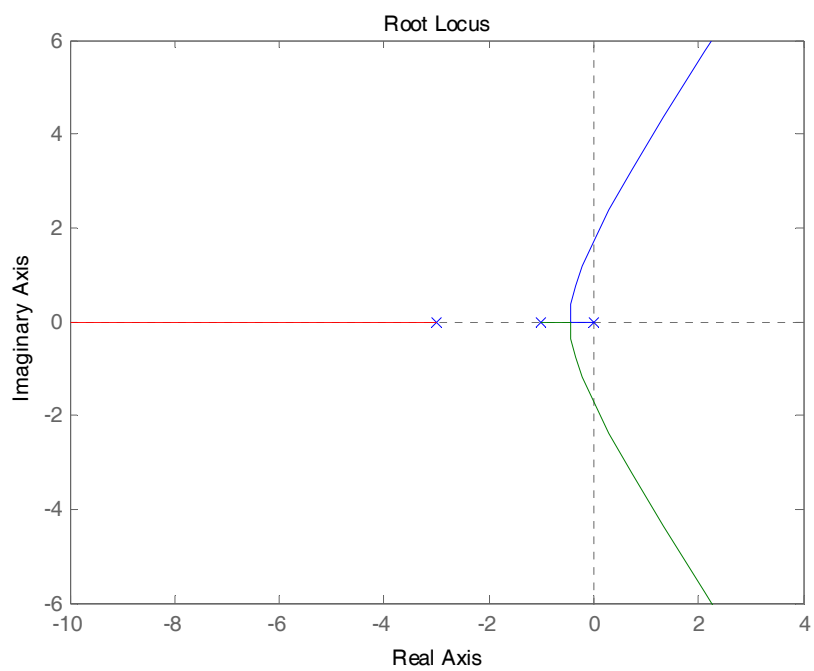


原系統的根軌跡圖

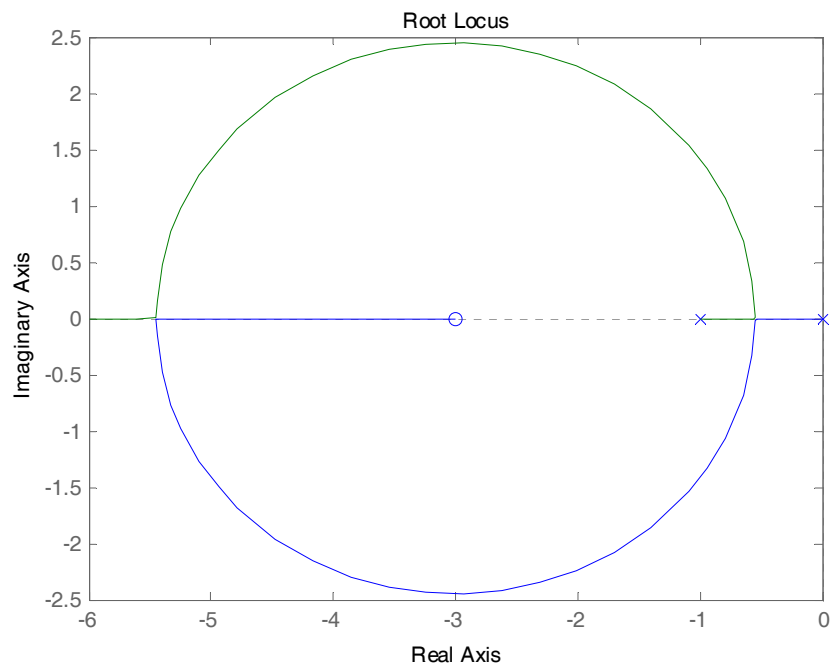




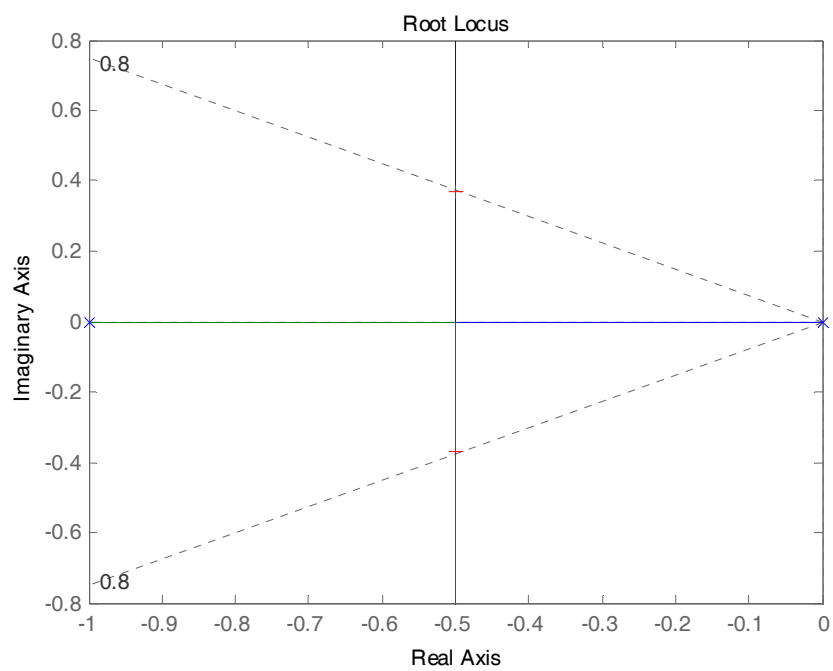
原系統加入—3 極點的根軌跡圖

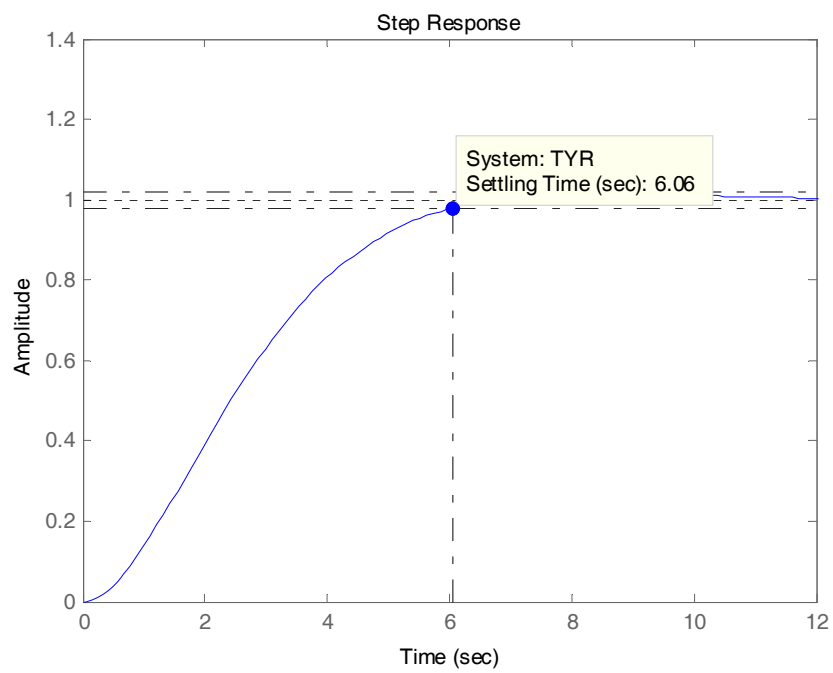


原系統加入—3 零點的根軌跡圖

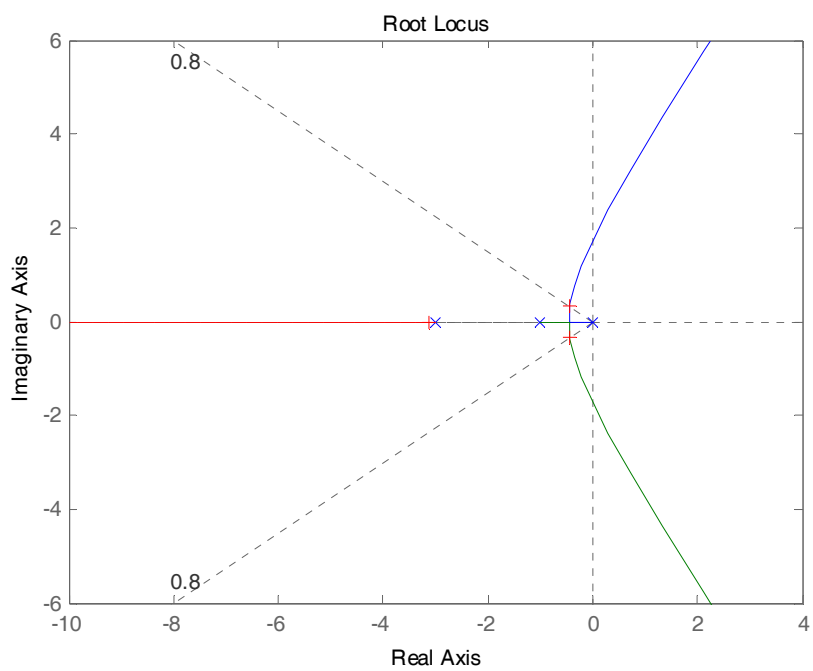


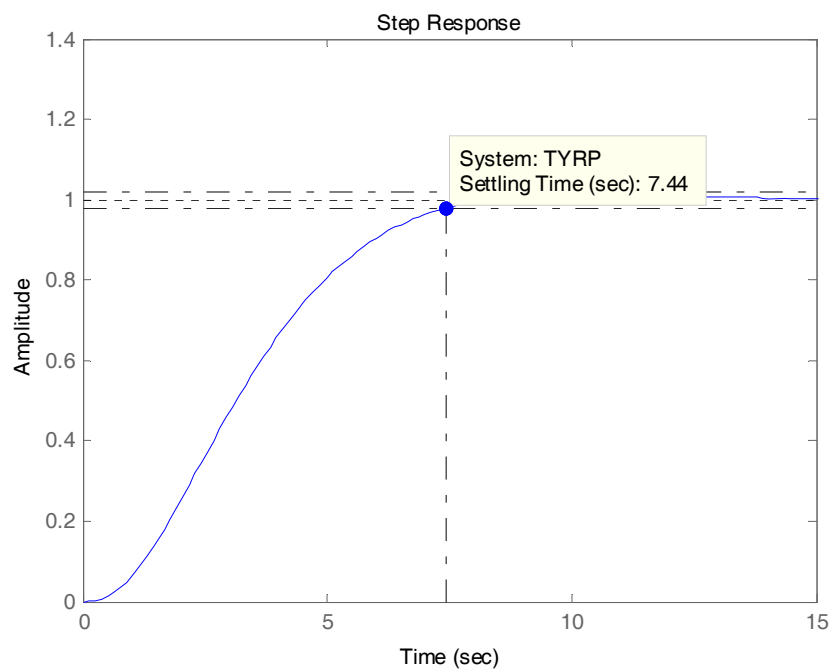
設計原系統阻尼比 0.8 的根軌跡圖與系統響應圖



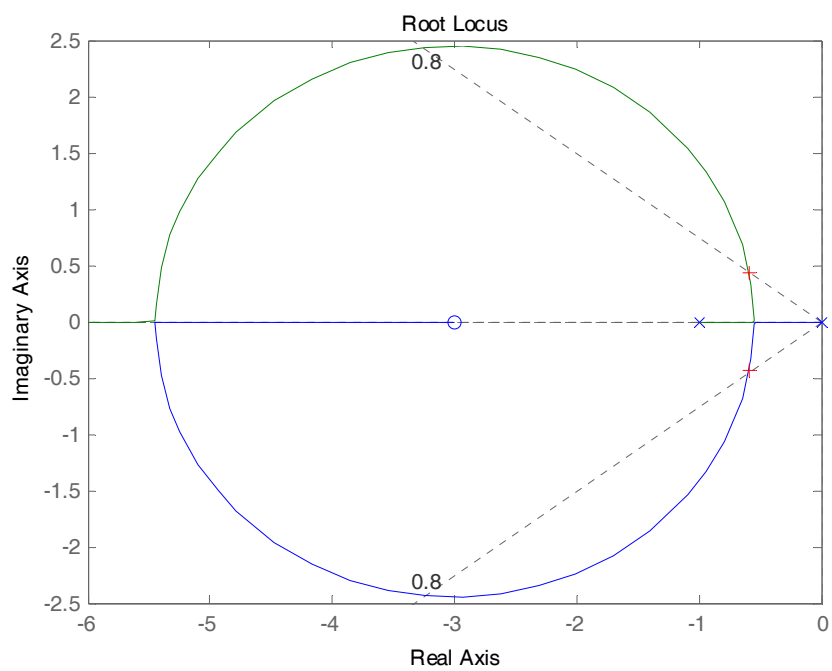


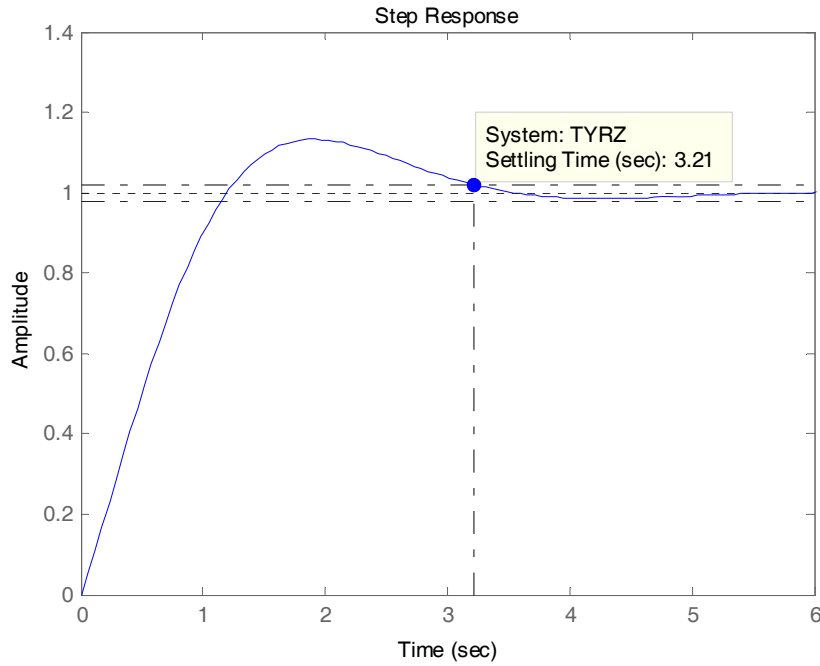
原系統加入 $-3$ 的極點，設計阻尼比  $0.8$  的根軌跡圖與系統響應圖





原系統加入 $-3$ 的零點，設計阻尼比 $0.8$ 的根軌跡圖與系統響應圖





觀察系統加入極零點的響應結果可做為設計 PID 控制器的參考。

#### ■ PID 控制器：比例(P)、積分(I)、微分(D)控制器

P 比例控制器  $K_p$ ，I 積分控制器  $\frac{K_I}{S}$ ，D 微分控制器  $K_D S$

(1) 比例控制器(P)：未加入任何極零點。

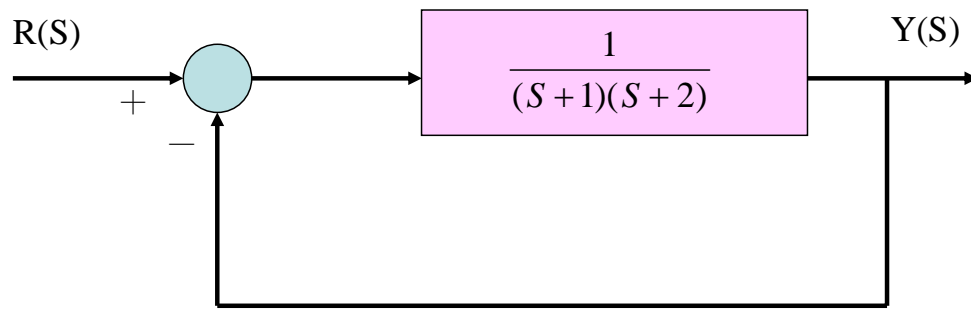
(2) 積分控制器(I)：加入一個在 0 的極點，可補償穩態誤差。

(3) PI 控制器： $K_p + \frac{K_I}{S} = \frac{K_p S + K_I}{S}$  相當於加入一個極點在 0 及一個零點在  $S = -\frac{K_I}{K_p}$ 。

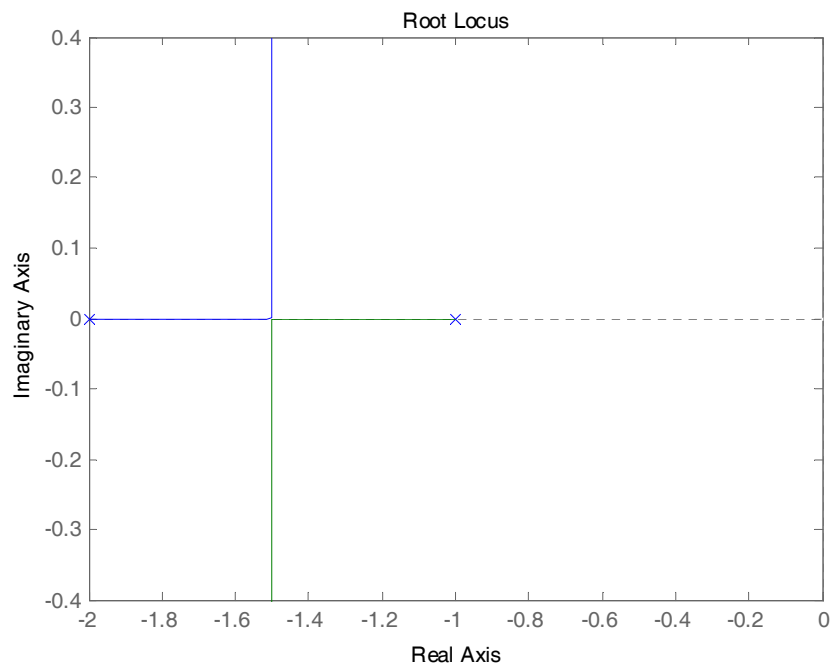
(4) PD 控制器： $K_p + K_D S$  相當於加入一個零點在  $S = -\frac{K_p}{K_D}$ ，可改善系統響應。

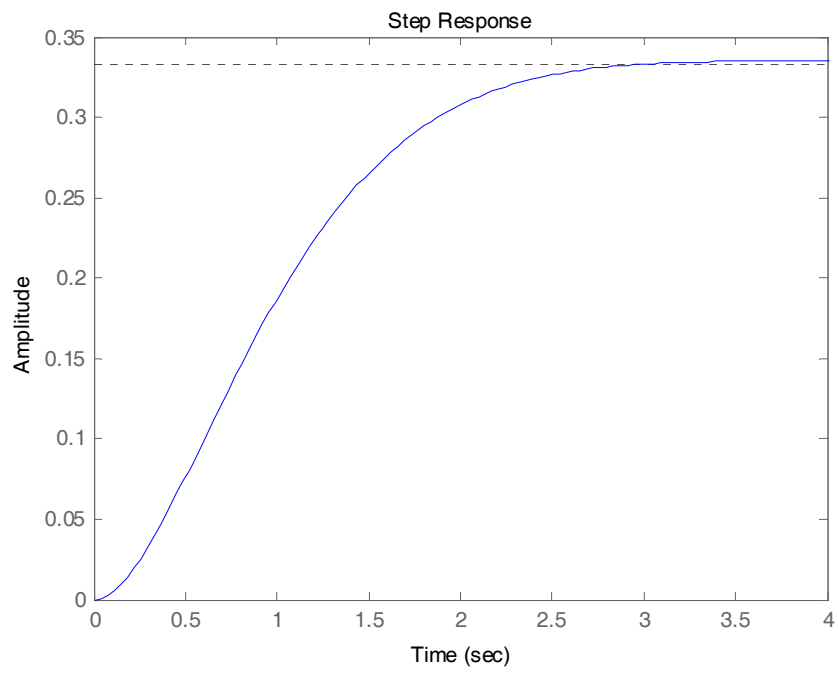
(5) PID 控制器： $K_p + \frac{K_I}{S} + K_D S = \frac{K_p S + K_I + K_D S^2}{S}$  相當於加入一個極點在 0 及二個零點在  $K_p S + K_I + K_D S^2 = 0$  的位置。

EX.

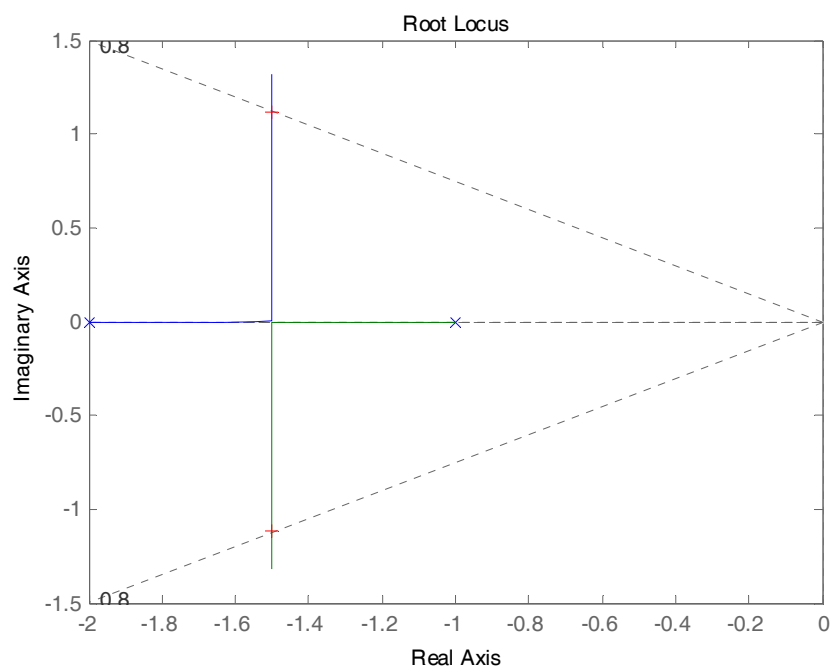


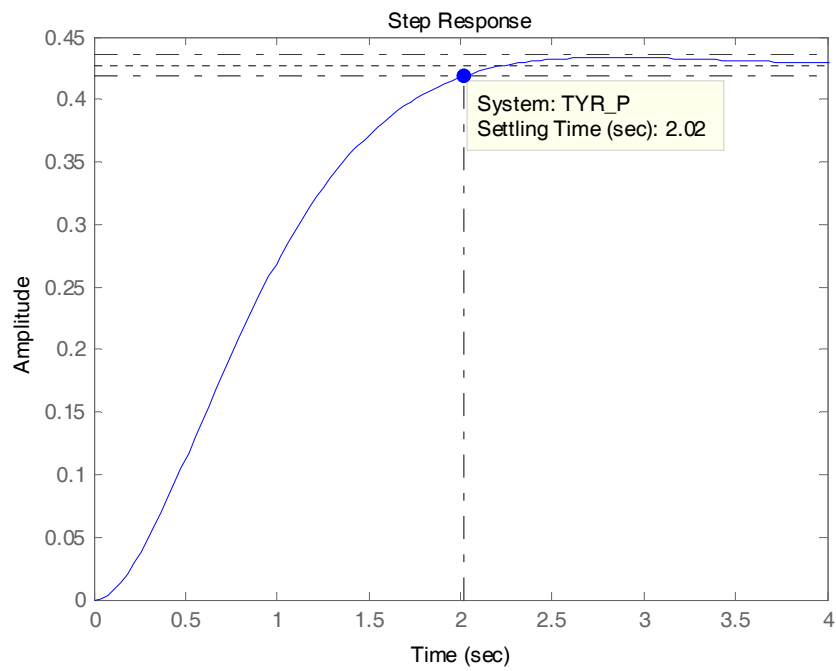
原系統的根軌跡圖及其步階響應





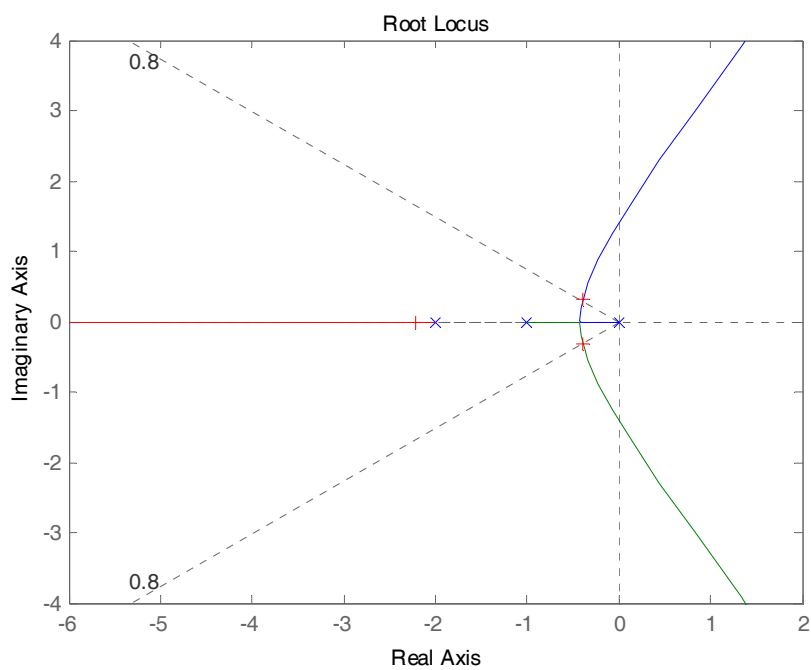
'加入P控制器的根軌跡圖及阻尼設計在約0.8的步階響應結果'



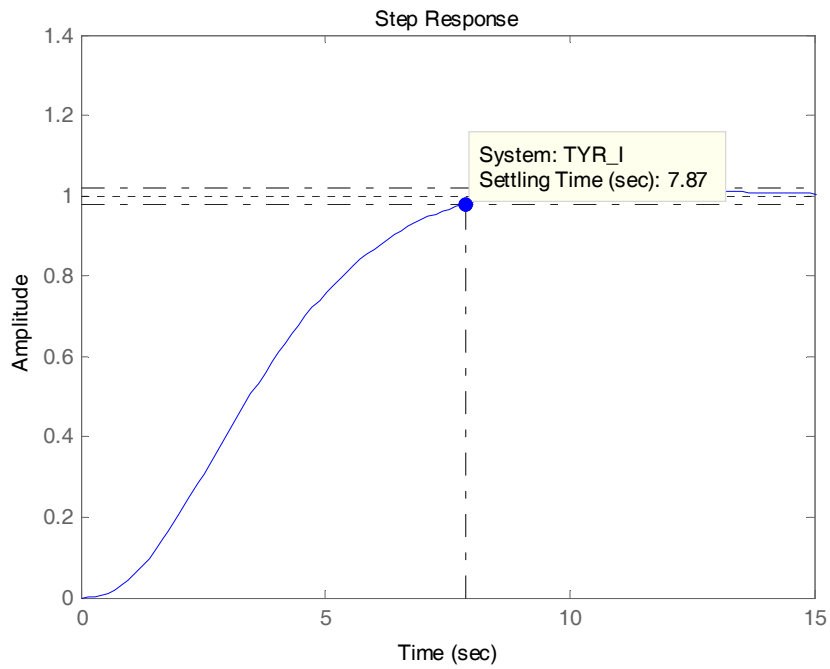


selected\_point =  $-1.5000 + 1.1147i$   
 $K_p = 1.4926$

■ 加入 I 控制器的根軌跡圖及阻尼設計在約 0.8 的步階響應結果





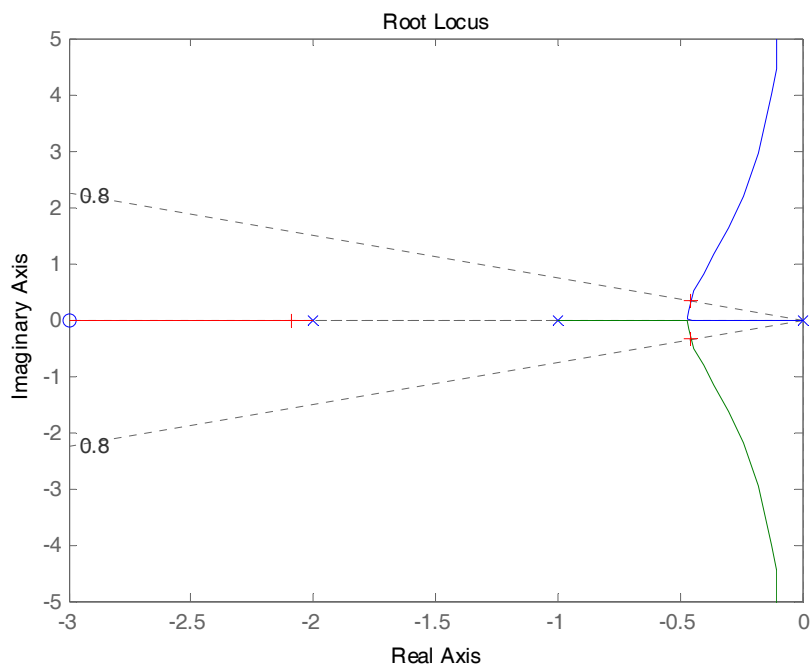


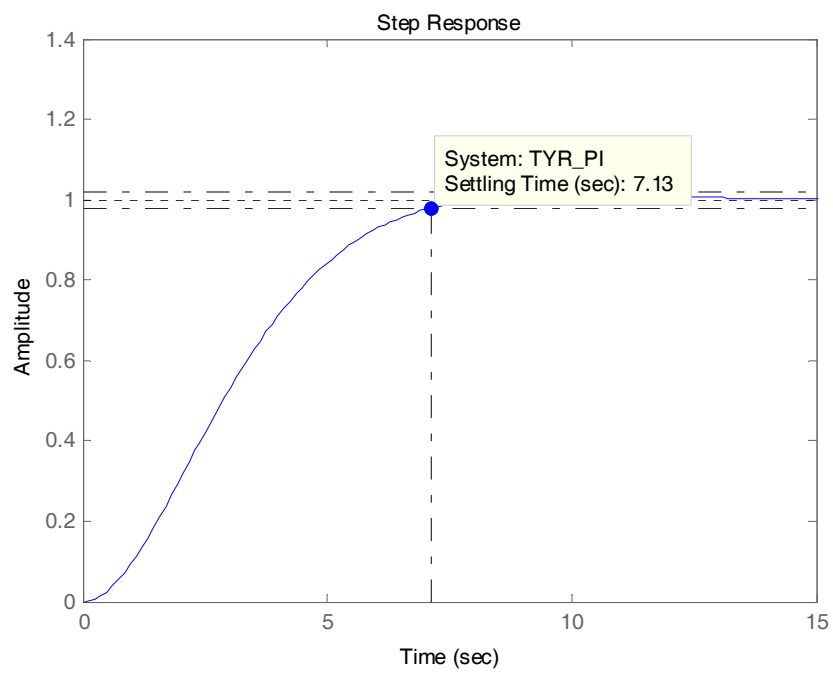
selected\_point =  $-0.3887 + 0.3059i$

$K_i = 0.5545$

此積分控制器設計改善了穩態誤差。

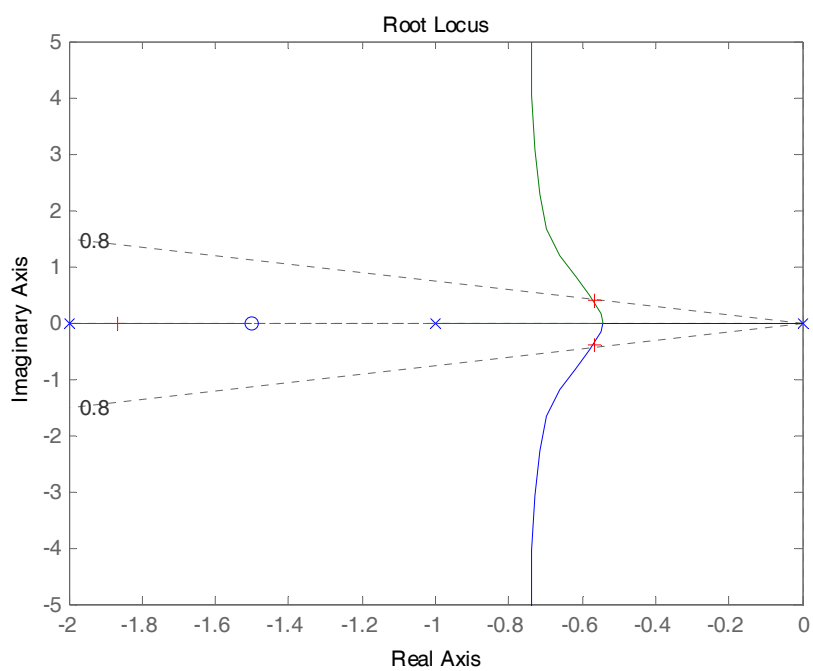
■ 加入 PI 控制器的根軌跡圖及阻尼設計在約 0.8 的步階響應結果，零點在-3

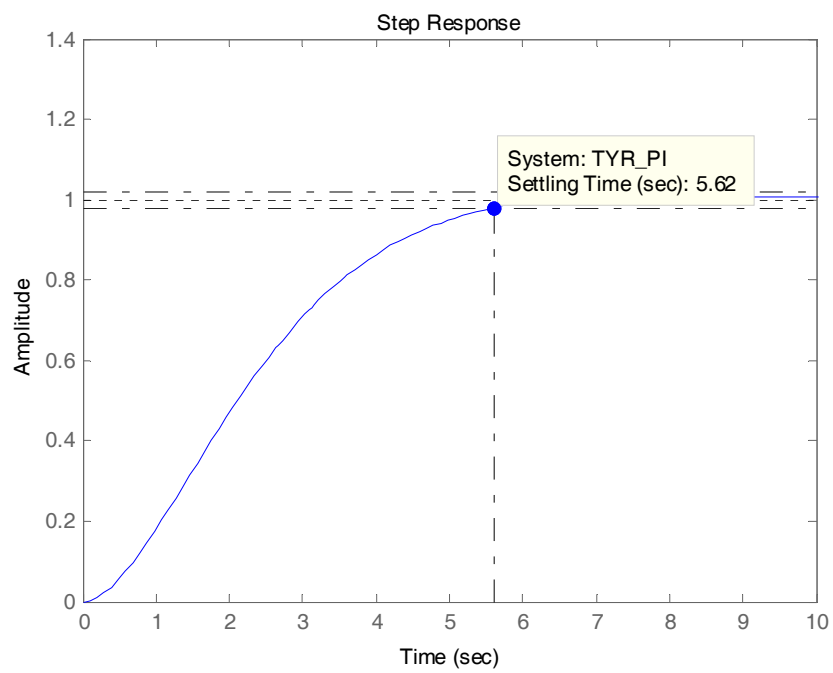




設計結果  $K_p = 0.2178$  ,  $K_i = 0.6535$

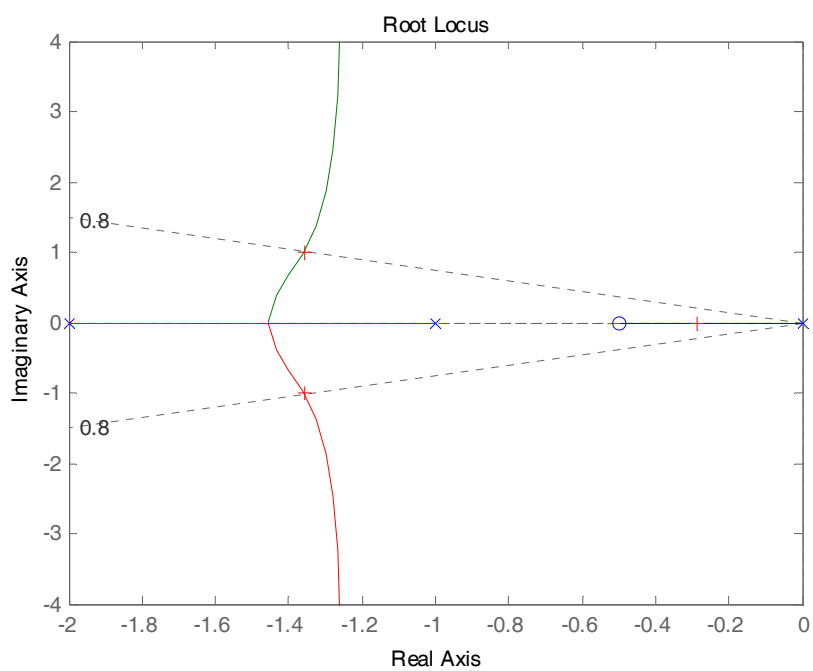
零點在-1.5

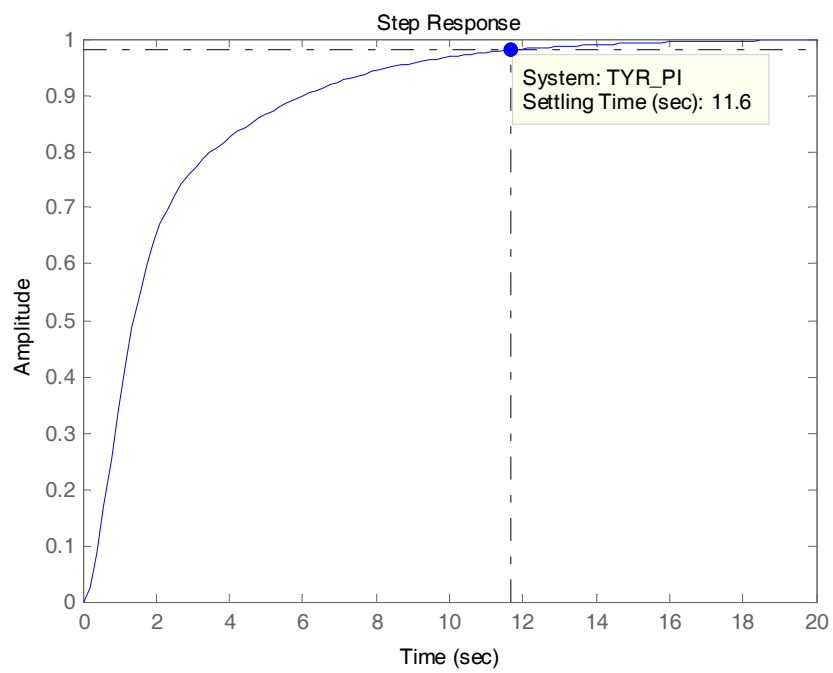




設計結果  $K_p = 0.5813$  ,  $K_i = 0.8719$

零點在 -0.5

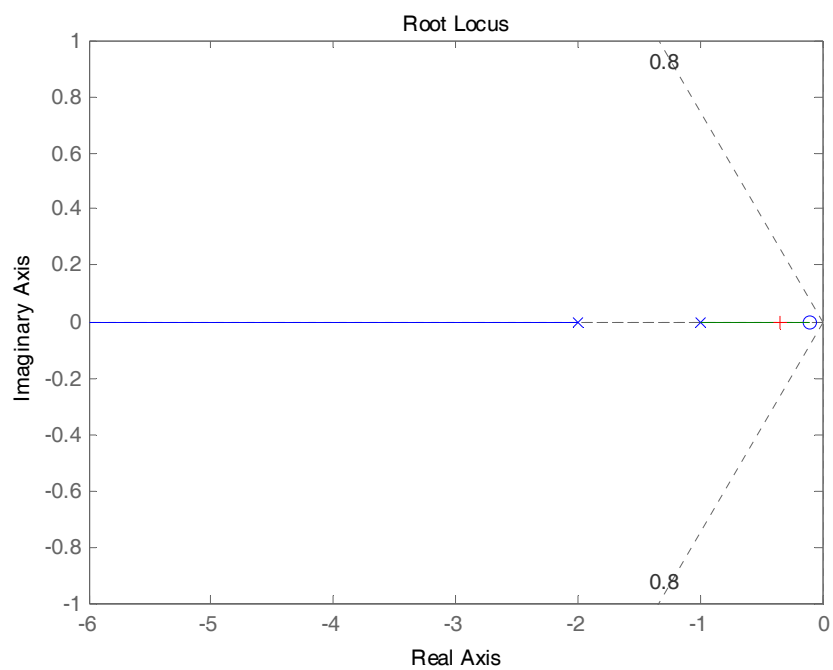




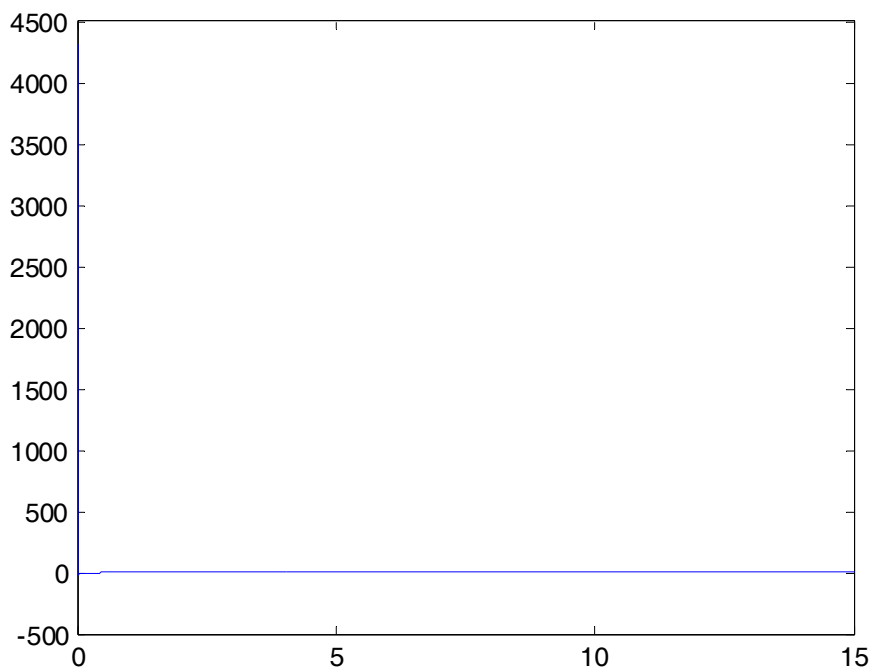
設計結果  $K_p = 1.6420$  ,  $K_i = 0.8210$

■ PD 控制器

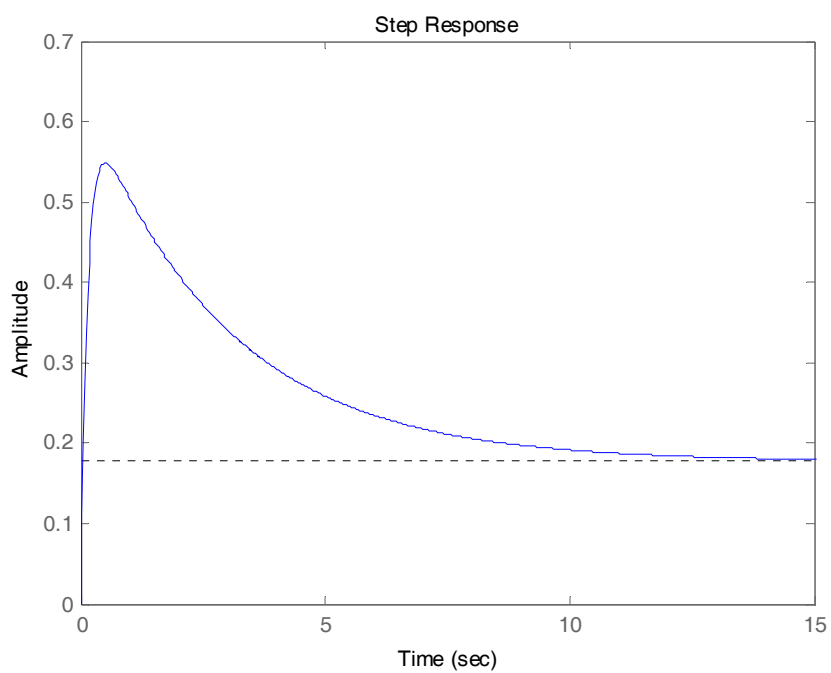
零點在-0.1



視為理想狀態(訊號沒有範圍限制)的控制器輸出



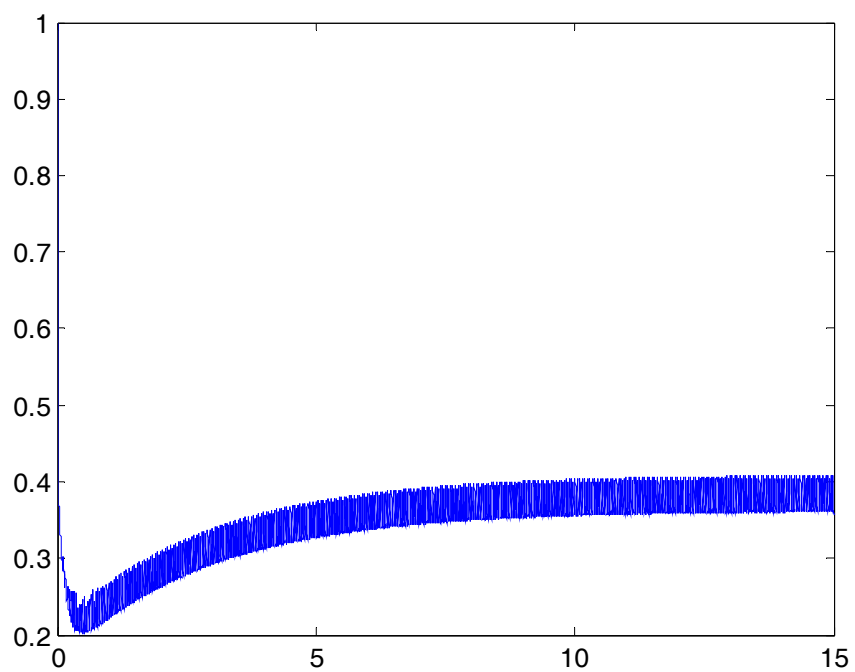
理想狀態的輸出響應



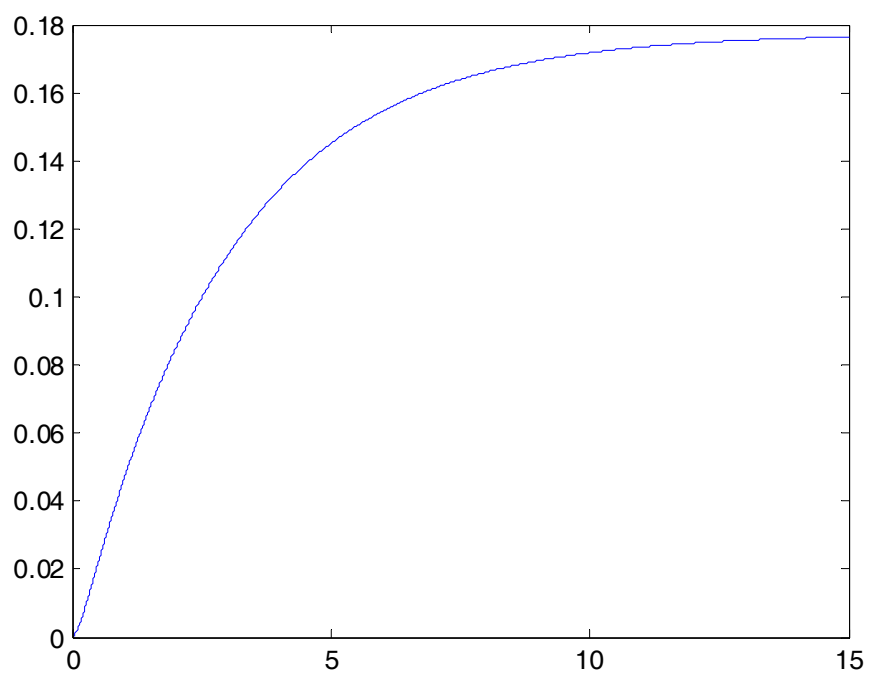
$K_p = 0.4314$ ， $K_d = 4.3136$ ，若考慮控制訊號非理想(具飽和效應)，則其控制器輸

出及響應結果如下圖：

控制器輸出訊號



輸出響應圖



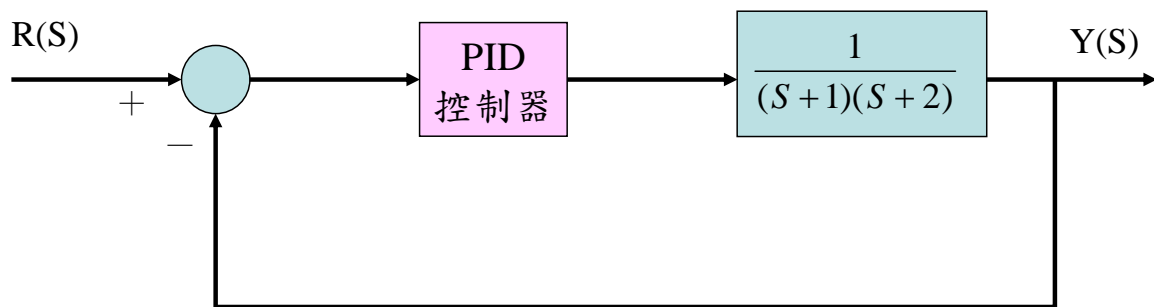
## ■ PID 控制器

設計步驟：

- (1) 將 PID 控制器分解為 PD 串接 PI， $K_p + \frac{K_I}{S} + K_D S = (1 + K_{D1}S) \left( K_{P1} + \frac{K_{I1}}{S} \right)$ 。
- (2) 單獨考慮 PD 及 PI 的作用設計符合系統規格的參數。
- (3) 同時考慮 PD 及 PI 的作用驗證是否符合系統規格需求，若不合則回步驟(2)

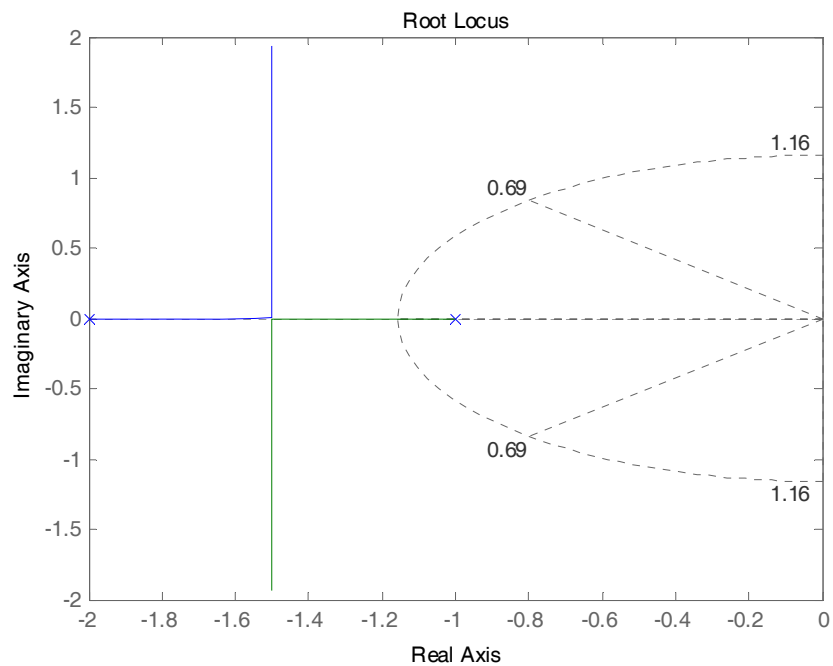
修正。

EX.

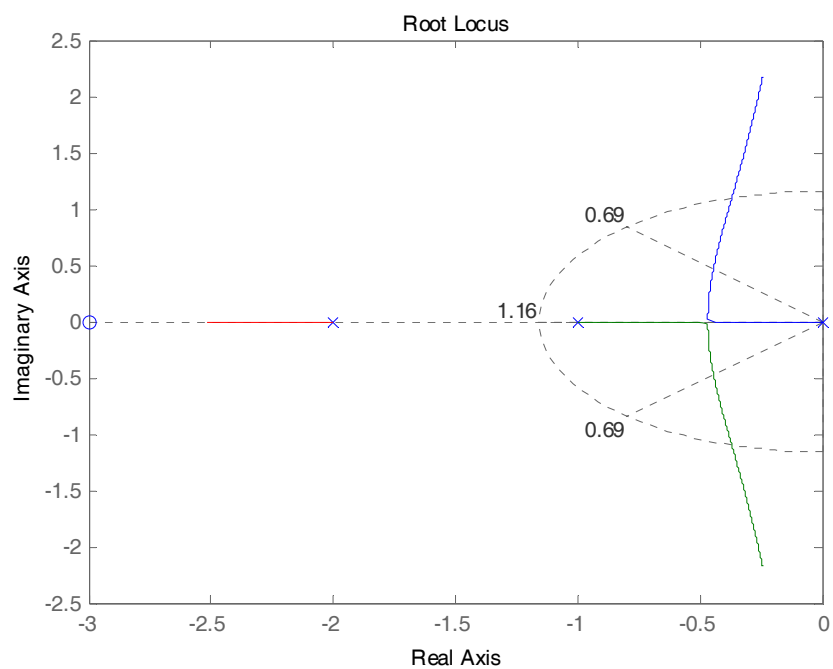


試設計 PID 控制器，使系統最大超越量小於 5% 及安定時間小於 5 秒，穩態誤差小於 2%。

原系統根軌跡圖

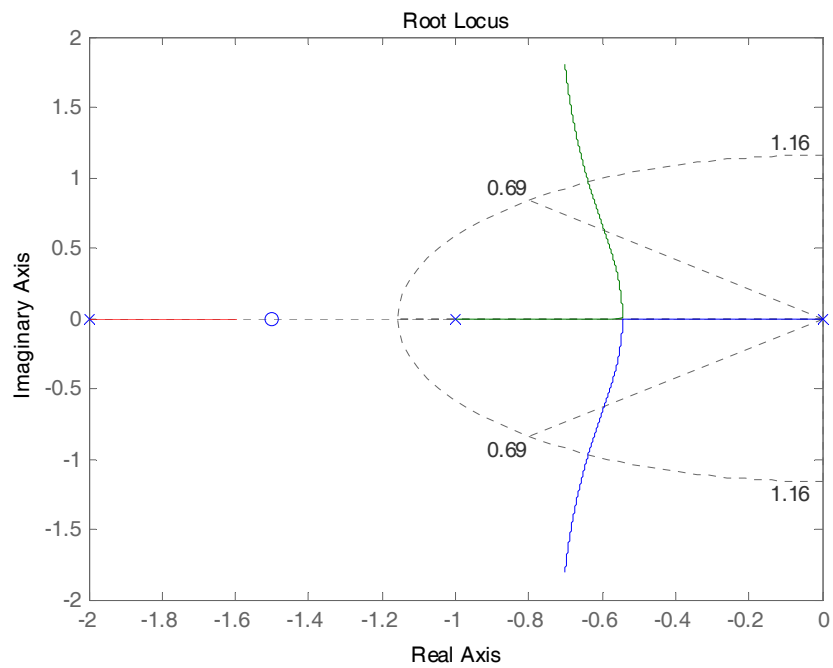


PI 控制器零點選在-3 的位置時的根軌跡圖

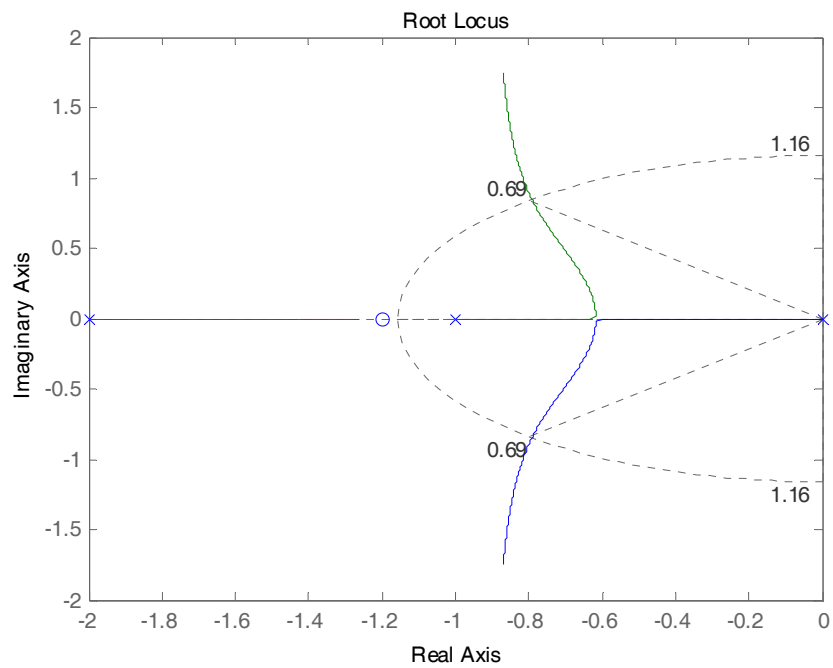


PI 控制器零點選在-1.5 的位置時的根軌跡圖

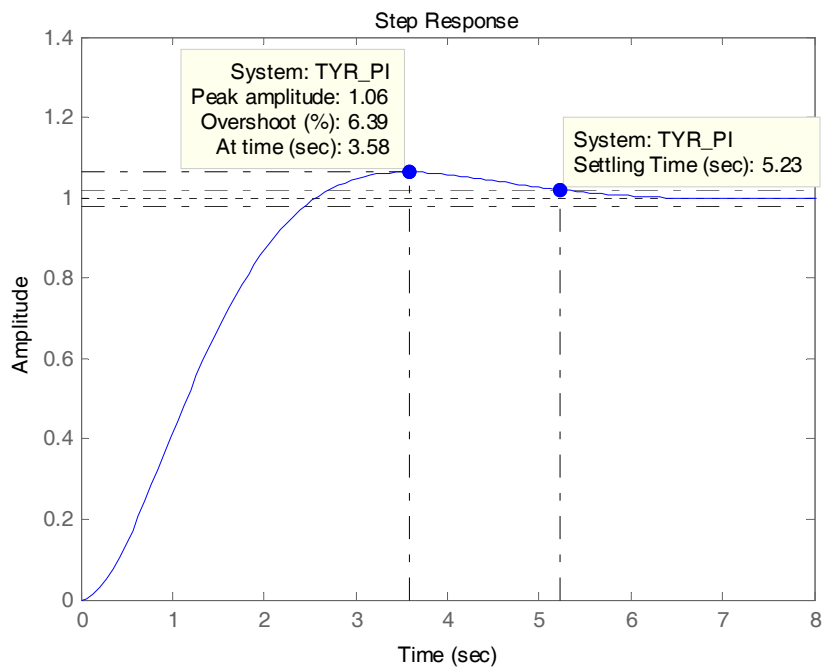




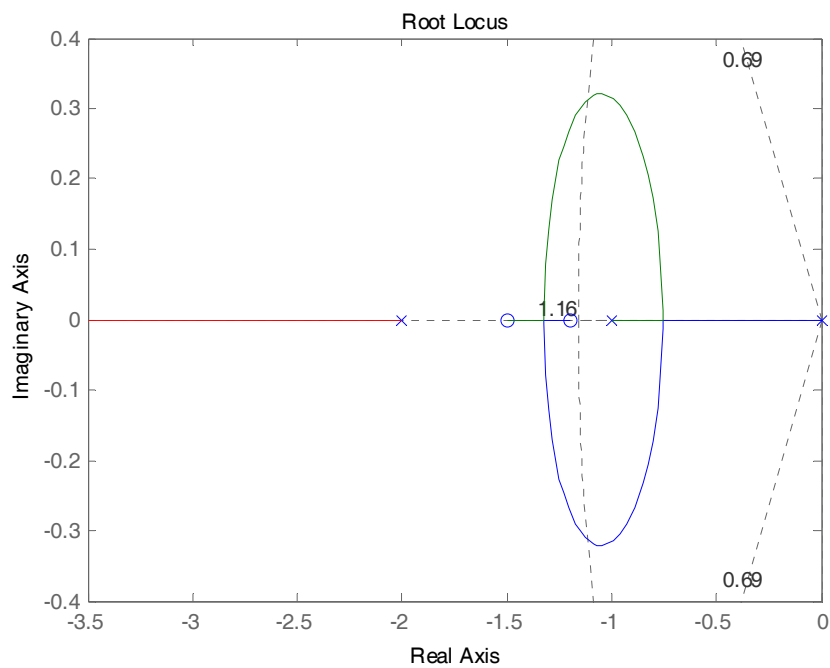
PI 控制器零點選在-1.2 的位置時的根軌跡圖



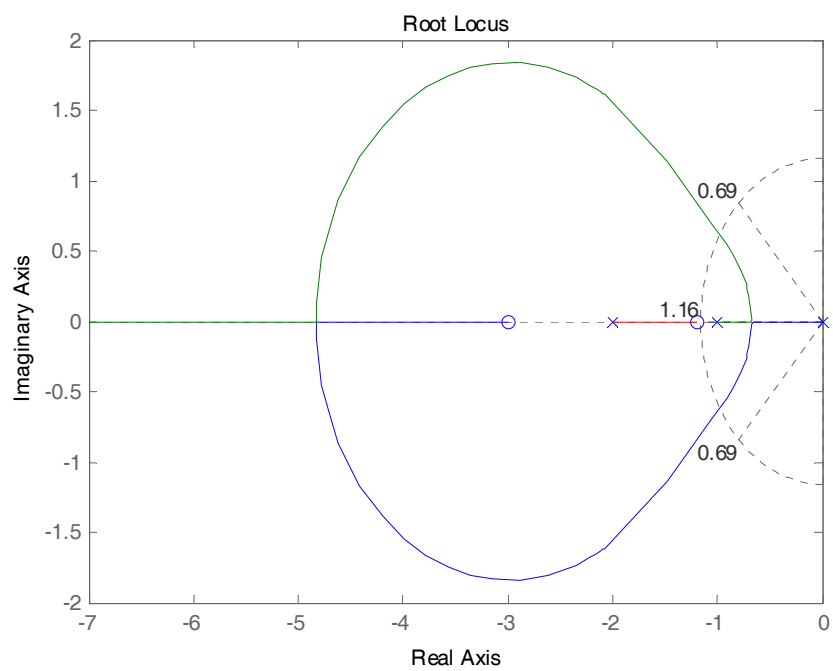
$K_p = 1.5375$  ,  $K_i = 1.8449$



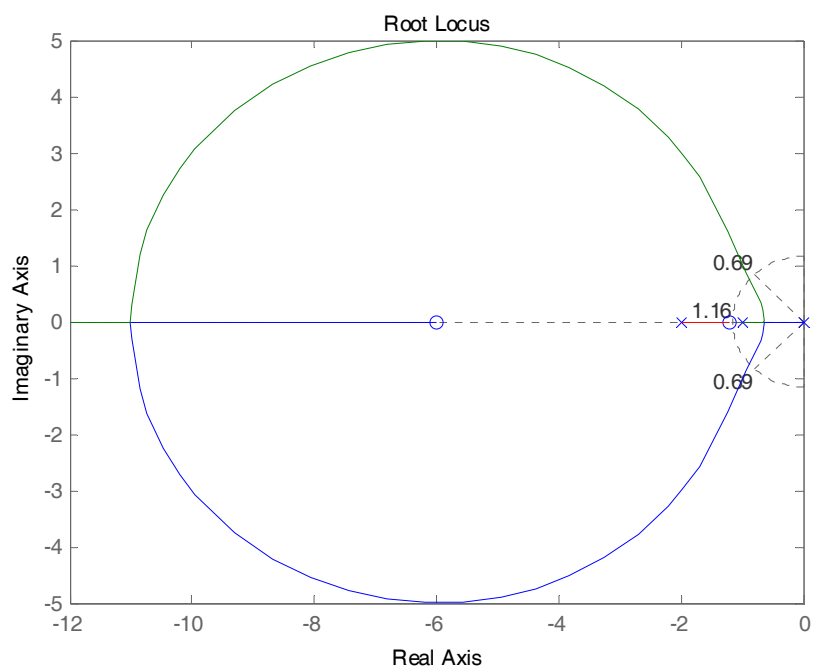
■ 再加入 PD 控制器零點選在-1.5 的位置時的根軌跡圖



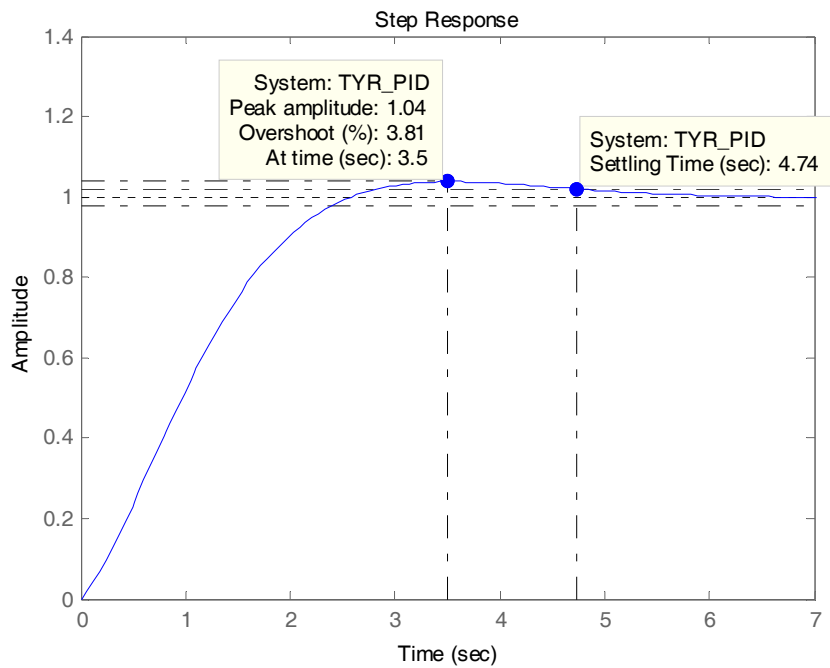
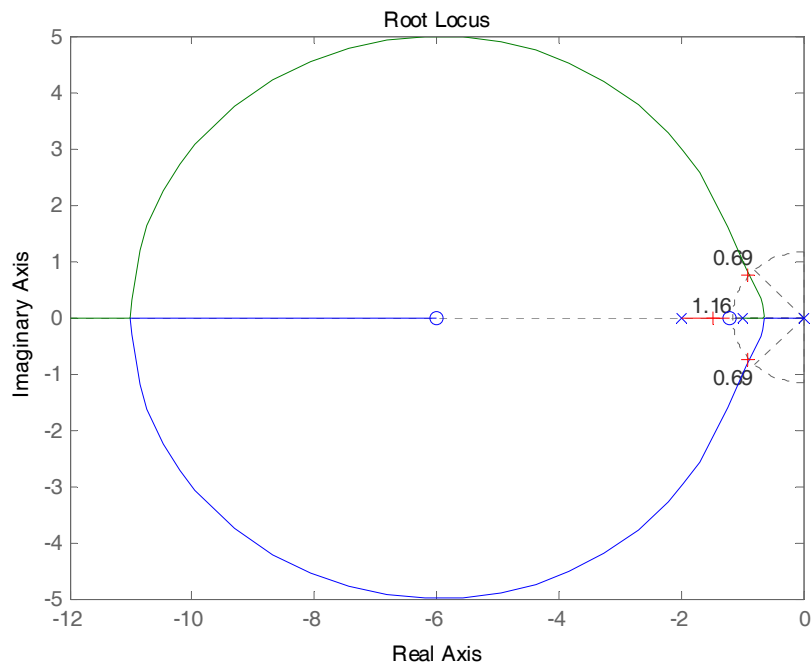
■ 再加入 PD 控制器零點選在-3 的位置時的根軌跡圖



■ 再加入 PD 控制器零點選在-6 的位置時的根軌跡圖



$K_{d1} = 0.1833$



PID 控制器設計結果： $K_d = K_{p1} * K_{d1} = 0.2824$ 、 $K_p = K_d(Z_{pi} + Z_{pd}) = 2.0334$ 、 $K_i = K_d * Z_{pi} * Z_{pd} = 2.0334$ ，響應結果系統最大超越量 3.68% 小於規格的 5%、安定時

間 4.77 秒小於規格的 5 秒，穩態誤差 0 小於規格的 2%，故符合系統的規格需求  
完成設計。

