



亞東技術學院

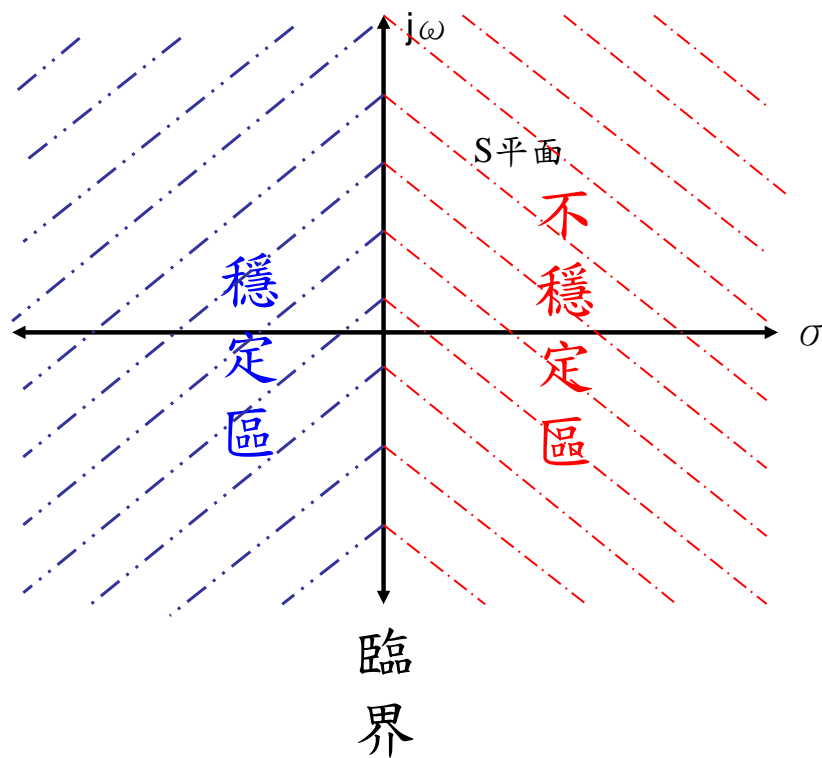
『自動控制實習講義』
電機系吳佳斌編著

實驗五 系統穩定度分析

實驗目的：練習 MATLAB 的方塊圖化簡操作及求轉移函數的應用，由方塊圖求轉移函數、再由轉移函數求特性方程式的根，判斷系統的穩定度、由穩定度判斷控制器的 K 值範圍，應用於解控制相關的問題可作為日後控制系統設計及分析的參考。

■ 判斷系統的穩定度

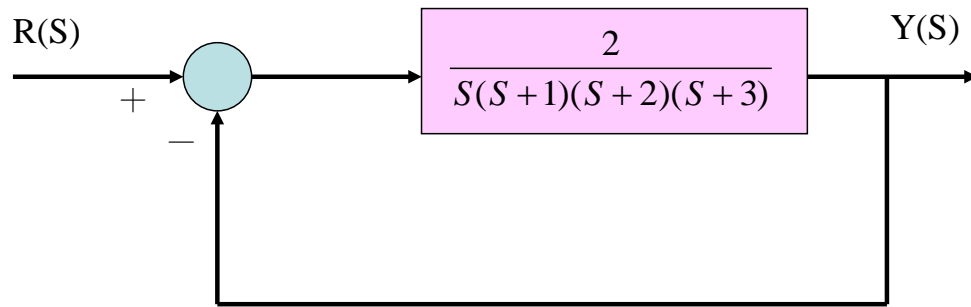
系統的穩定區



步驟：

- (1) 求系統的總轉移函數。
- (2) 由總轉移函數的特性根(極點)判斷穩定度，有正根系統不穩定。

Ex.



指令：

```
G1=tf(2,poly([0 -1 -2 -3]));           %輸入系統G1的轉移函數
T_YR=feedback(G1,1)                   %求系統的總轉移函數
step(T_YR)                            %繪步階響應圖驗證
YR_poles=pole(T_YR)                   %解總轉移函數的極點
```

結果：

轉移函數：

Transfer function:

2

 $s^4 + 6 s^3 + 11 s^2 + 6 s + 2$

特性方程式的根：

YR_poles =

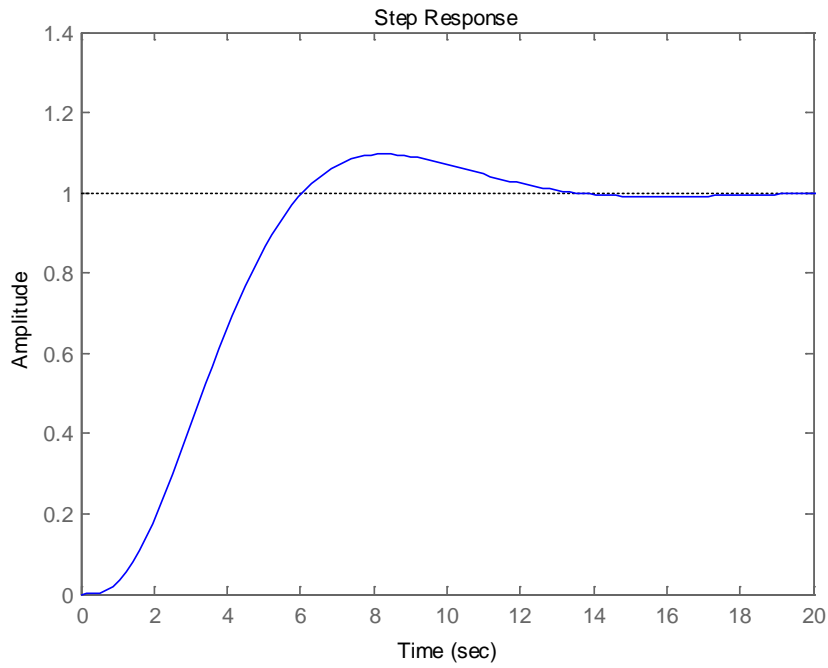
-2.6939 + 0.4188i

-2.6939 - 0.4188i

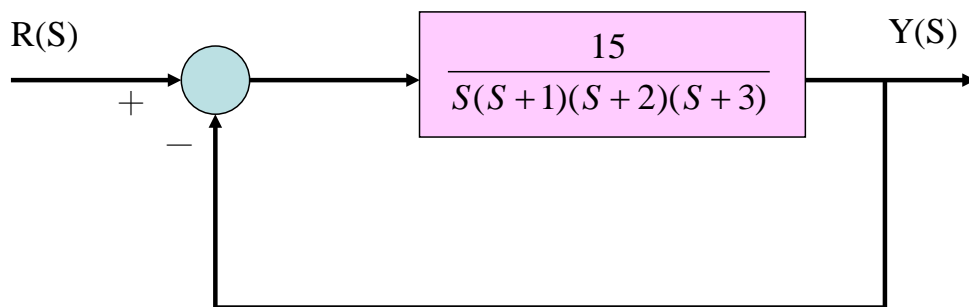
-0.3061 + 0.4188i

-0.3061 - 0.4188i

步階響應圖：



Ex.



指令：

```

G1=tf(15,poly([0 -1 -2 -3]));           %輸入系統G1的轉移函數
T_YR=feedback(G1,1)                     %求系統的總轉移函數
step(T_YR)                              %繪步階響應圖驗證
YR_poles=pole(T_YR)                     %解總轉移函數的極點
  
```

結果：

轉移函數

Transfer function:

$$15$$

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 15$$

特性方程式的根：

YR_poles =

$$-3.1117 + 1.1608i$$

$$-3.1117 - 1.1608i$$

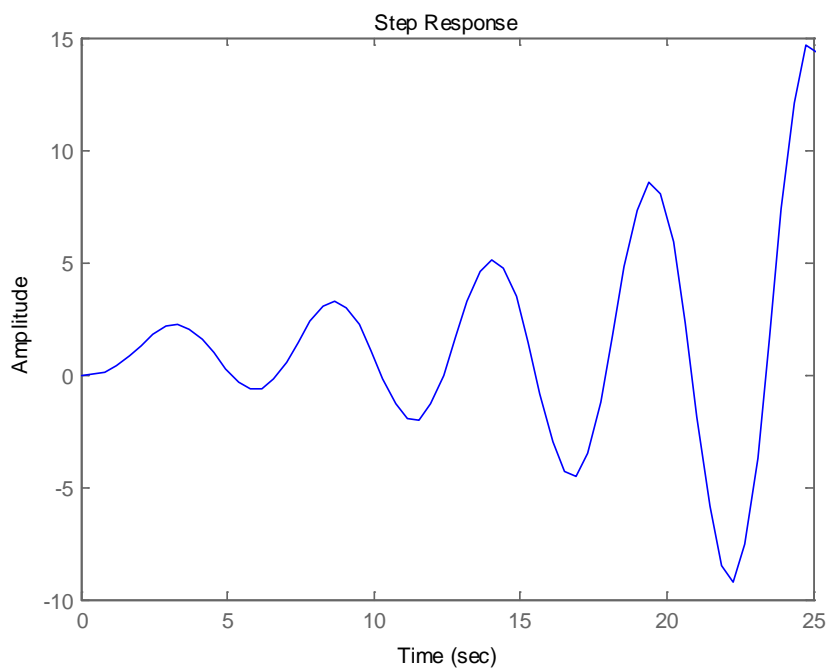
$$0.1117 + 1.1608i$$

%正根系統不穩定

$$0.1117 - 1.1608i$$

%正根系統不穩定

步階響應圖：



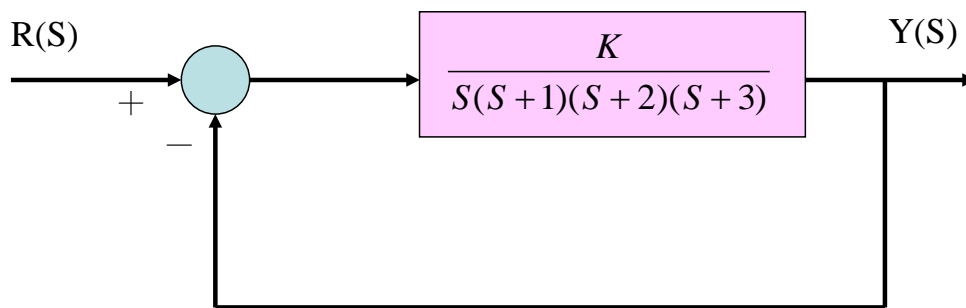
■ 求穩定範圍的K值

■ 以根軌跡圖求大約K值範圍

步驟：

- (1) 求系統的總轉移函數，包含未知的K值。
- (2) 由總轉移函數的特性方程式寫為 $1+KG(S)H(S)=0$ 的形式。
- (3) 以 $G(S)H(S)$ 繪根軌跡圖，並以mouse指定所要的軌跡圖上的K值。

Ex.



步驟：

- (1) 求系統的總轉移函數，包含未知的K值。

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1 + G(S)H(S)} = \frac{K}{S(S+1)(S+2)(S+3) + K}$$

- (2) 由總轉移函數的特性方程式寫為 $1+KG(S)H(S)=0$ 的形式。

總轉移函數的特性方程式

$$S(S+1)(S+2)(S+3) + K = 0$$

寫為 $1+KG(S)H(S)=0$ 的形式

$$1 + K \frac{1}{S(S+1)(S+2)(S+3)} = 0$$

- (3) 以 $G(S)H(S)$ 繪根軌跡圖。

$$G(S)H(S) = \frac{1}{S(S+1)(S+2)(S+3)}$$

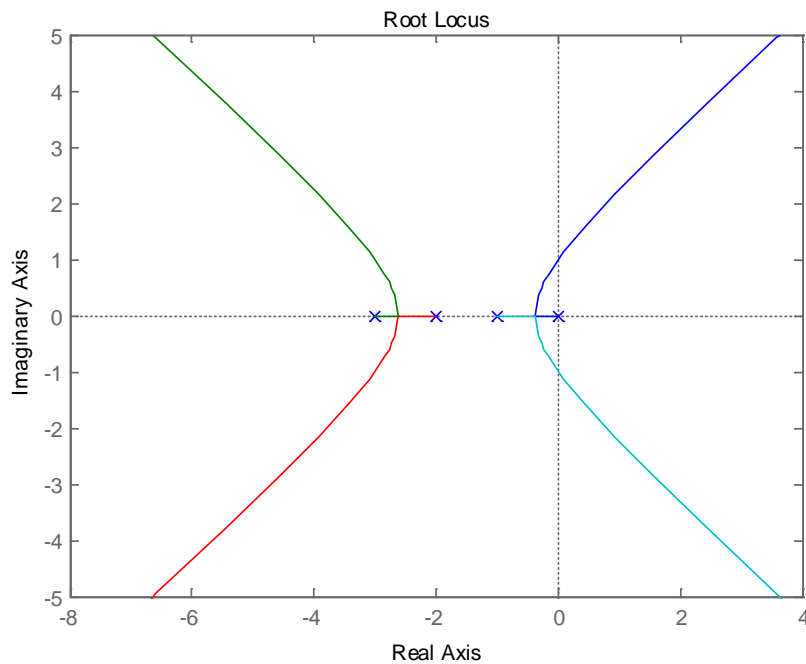
(4) 並以mouse指定所要的軌跡圖上的K值：以rlocfind()指令指定所要的軌跡圖上的K值。

指令：

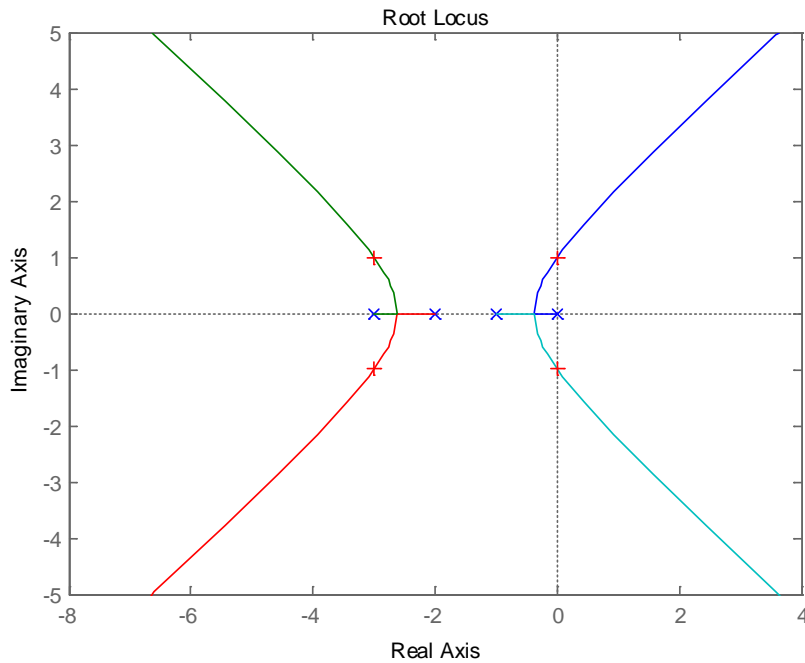
```
GH=tf(1,poly([0 -1 -2 -3]));           %輸入系統GH的轉移函數  
rlocus(GH)                             %繪根軌跡圖  
rlocfind(GH)                           %以mouse指定所要的軌跡圖上的K值
```

結果：

根軌跡圖如下：



以mouse在虛軸與根軌跡圖的交點上指定所要的K值，即臨界點的K值



Select a point in the graphics window

elected_point =

$0.0020 + 1.0376i$

ans =

10.7200

可得穩定的K值範圍約 $0 < K < 10.72$

■ 求穩定範圍的K值(以程式測出特性方程式的根)

步驟：

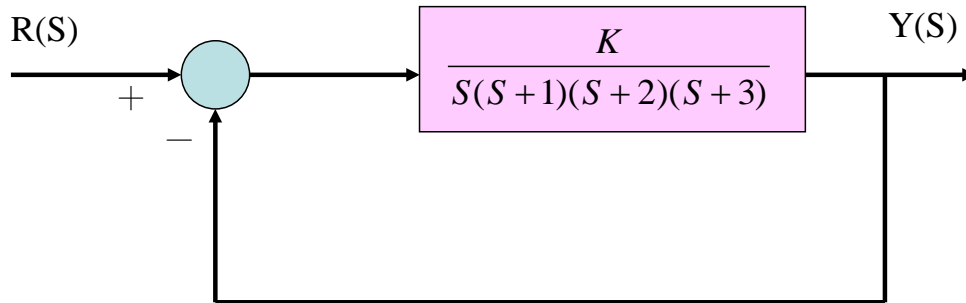
(1) 求系統的總轉移函數，包含未知的K值。

(2) 由總轉移函數求出特性方程式。

(3) 以 $G(S)H(S)$ 繪根軌跡圖，觀察K值的大約範圍。

(4) 設定K值的大約範圍，以程式解出特性方程式根的精確值。

Ex.



步驟：

(1) 求系統的總轉移函數，包含未知的K值。

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1 + G(S)H(S)} = \frac{K}{S(S+1)(S+2)(S+3) + K}$$

(2) 由總轉移函數求出特性方程式。

$$\text{總轉移函數的特性方程式： } S^4 + 6S^3 + 11S^2 + 6S + K = 0$$

(3) 以G(S)H(S)繪根軌跡圖。

$$G(S)H(S) = \frac{1}{S(S+1)(S+2)(S+3)}$$

(4) 設定K值範圍約0~100，以程式解出特性方程式根的精確值。

指令：

```
K=[1:1:100]; % 設K的範圍為1~100間隔為1
for n=1:length(K);
    dent=[1 6 11 6 K(n)]; % 第n個K的特性方程式
    poles=roots(dent); % 解第n個K的特性方程式根
    r=real(poles); % 取根的實數部分
```

```

        if max(r)>=0,                %判斷是否為正根

            poles                    %列出正根的值

            K=K(n)                   %列出該正根時的K值

            break                    %已找到正根，中斷迴圈

        end
    end
end

```

結果：

poles =

-3.0000 + 1.0000i

-3.0000 - 1.0000i

0.0000 + 1.0000i

%根在虛軸上

0.0000 - 1.0000i

%根在虛軸上

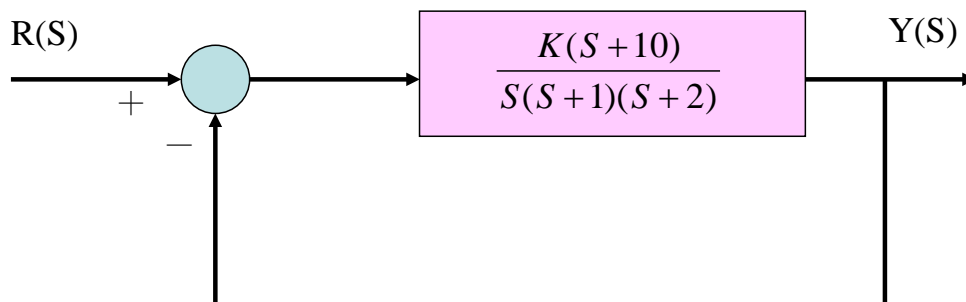
K =

10

可得穩定的正確K值範圍為 $0 < K < 10$

■ 以根軌跡圖求大約K值範圍

Ex.



步驟：

(1) 求系統的總轉移函數，包含未知的K值。

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1+G(S)H(S)} = \frac{K(S+10)}{S(S+1)(S+2)+K(S+10)}$$

(2) 由總轉移函數的特性方程式寫為 $1+KG(S)H(S)=0$ 的形式。

總轉移函數的特性方程式

$$S(S+1)(S+2)+K(S+10)=0$$

寫為 $1+KG(S)H(S)=0$ 的形式

$$1+K\frac{(S+10)}{S(S+1)(S+2)}=0$$

(3) 以 $G(S)H(S)$ 繪根軌跡圖。

$$G(S)H(S) = \frac{(S+10)}{S(S+1)(S+2)}$$

(4) 並以mouse指定所要的軌跡圖上的K值：以`rlocfind()`指令指定所要的軌跡圖上的K值。

指令：

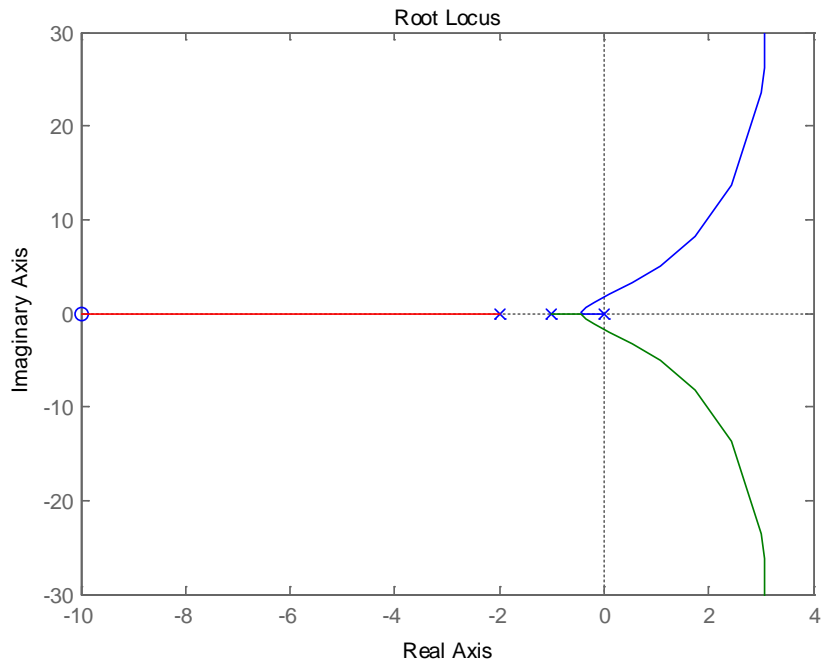
`GH=tf([1 10],poly([0 -1 -2]));` %輸入系統GH的轉移函數

`rlocus(GH)` %繪根軌跡圖

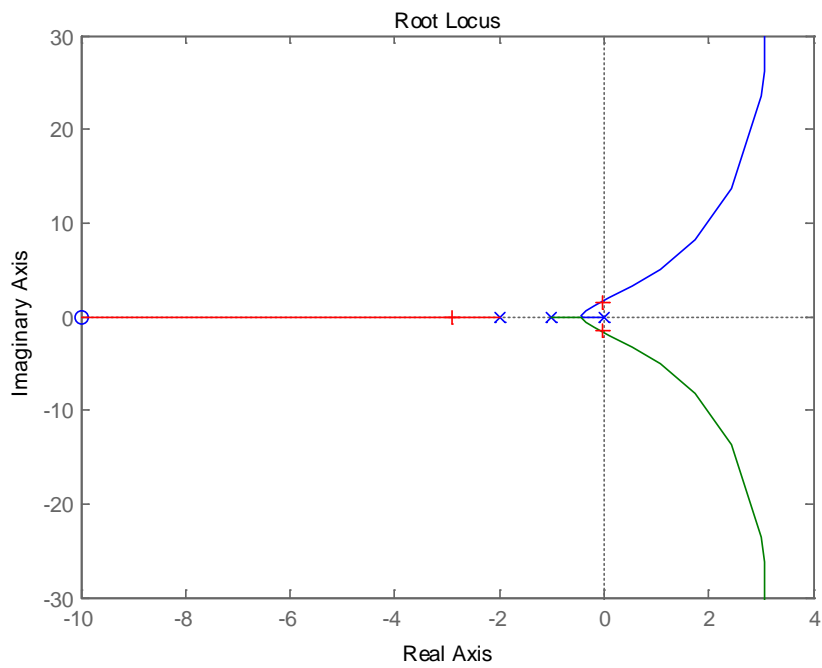
`rlocfind(GH)` %以mouse指定所要的軌跡圖上的K值

結果：

根軌跡圖如下：



以mouse在虛軸與根軌跡圖的交點上指定所要的K值，即臨界點的K值



selected_point =

$0.0071 + 1.5460i$

ans =

0.7137

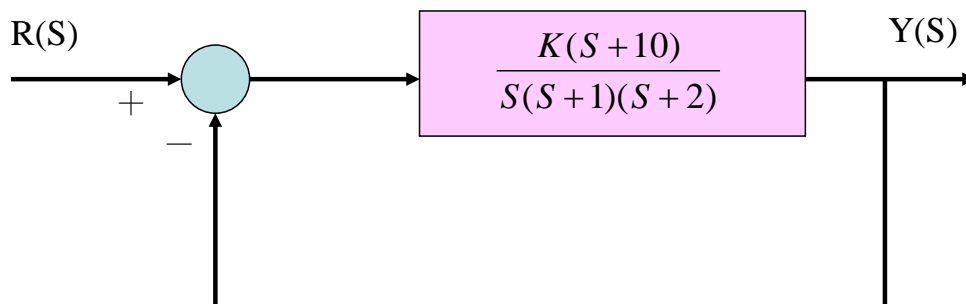
可得穩定的K值範圍約 $0 < K < 0.7137$

■ 求穩定範圍的K值(以程式測出特性方程式的根)

步驟：

- (1) 求系統的總轉移函數，包含未知的K值。
- (2) 由總轉移函數求出特性方程式。
- (3) 以 $G(S)H(S)$ 繪根軌跡圖，觀察K值的大約範圍。
- (4) 設定K值的大約範圍，以程式解出特性方程式根的精確值。

Ex.



步驟：

- (1) 求系統的總轉移函數，包含未知的K值。

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1 + G(S)H(S)} = \frac{K(S+10)}{S(S+1)(S+2) + K(S+10)}$$

- (2) 由總轉移函數求出特性方程式。

總轉移函數的特性方程式： $S^3 + 3S^2 + (2 + K)S + 10K = 0$

(3) 以 $G(S)H(S)$ 繪根軌跡圖。

$$G(S)H(S) = \frac{(S+10)}{S(S+1)(S+2)}$$

(4) 設定 K 值範圍約0~100，以程式解出特性方程式根的精確值。

指令：

```
K=[0.1:1:100]; %設K的範圍為1~100間隔1
for n=1:length(K);
    dent=[1 3 2+K(n) 10*K(n)]; %第n個K的特性方程式
    poles=roots(dent); %解第n個K的特性方程式根
    r=real(poles); %取根的實數部分
    if max(r)>=0, %判斷是否為正根
        poles %列出正根的值
        K=K(n) %列出該正根時的K值
        break %已找到正根，中斷迴圈
    end
end
```

結果：

```
poles =

-3.1317
0.0659 + 1.8730i %根接近在虛軸上
0.0659 - 1.8730i %根接近在虛軸上
```

$K =$

1.1000

改K=[0.1:1e-4:100]精確度設為1e-4

結果：

poles =

-3.0000

0.0000 + 1.6904i %根在虛軸上

0.0000 - 1.6904i %根在虛軸上

K =

0.8572

可得穩定的正確K值範圍為 $0 < K < 0.8572$

■ 狀態空間的穩定度

已知系統判斷穩定度：求特性方程式的根(特徵值)

Ex.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} x(t)$$

指令：

A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]

eigenvalues=eig(A)

結果：

eigenvalues =

16.1168

%正根系統不穩定

-1.1168

-0.0000