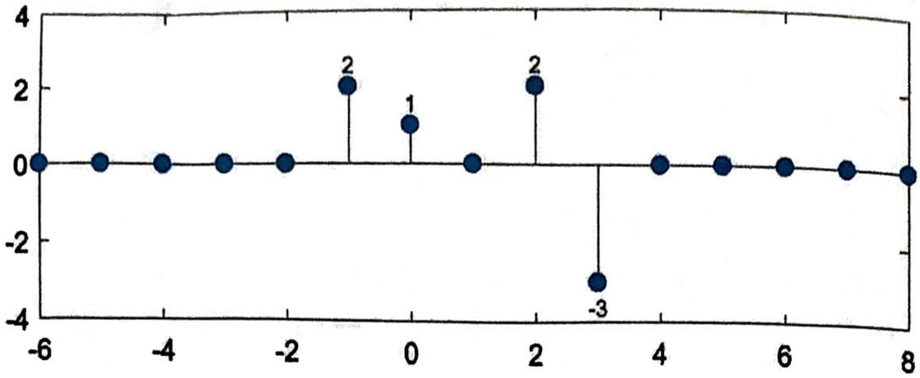
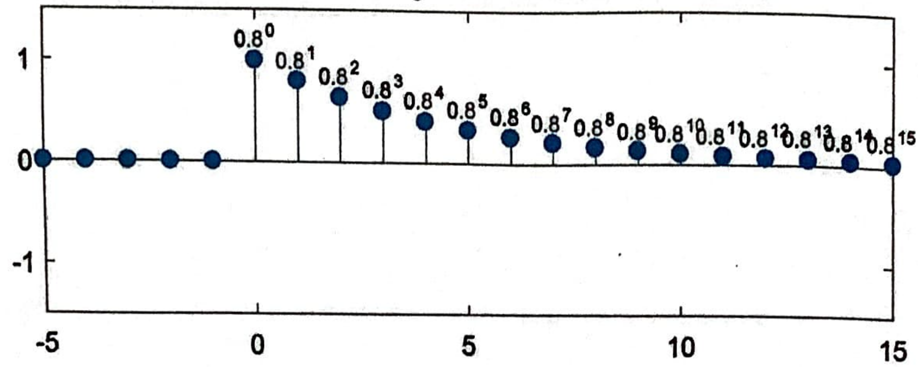
COMP.SGN.100 Signaalinkäsittelyn perusteet,
Harjoitus 5, 29.-30.3.2021

1. (*Kynä & paperi*)

   (a) Laske alla olevan kuvan mukaisen signaalin z-muunnoksen lauseke.



   (b) Laske alla olevan kuvan mukaisen signaalin z-muunnoksen lauseke.



   (c) Laske (a) ja (b) -kohdan signaalien diskreettiaikaisen Fourier-muunnoksen lausekkeet.

1. a)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = 2z^{-(-1)} + z^{0} + 0 + 2z^{-2} + (-3)z^{-3}$$

$$= 2z^{1} + 1 + 2z^{-2} - 3z^{-3}$$

(b).

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.8^{n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.8z^{-1})^{n}$$

Z-muunnos suppenee, kun $|0.8z^{-1}| < 1 \Rightarrow z > 0.8$

$$X(z) = \frac{1}{1-0.8z^{-1}} = \frac{z}{z-0.8}$$

(c) Sijoitetaan $z = e^{jw}$ yhtälöön saadaa Diskreettiaikainen Fourier-muunn

(a) $X(e^{jw}) = 2e^{jw} + 1 + 2e^{-j2w} - 3e^{-3jw}$

(b) $X(e^{jw}) = \dfrac{e^{jw}}{e^{jw} - 0.8}$.

2. (*Kynä & paperi*) Suotimen impulssivasteen z-muunnos on

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-1} + z^{-2}}.$$

Piirrä sen napa-nollakuvio. Onko suodin stabiili?

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z^1 + 1}{z^2 + z^1 + 1} = \frac{(z+1)(z+1)}{\left(z + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

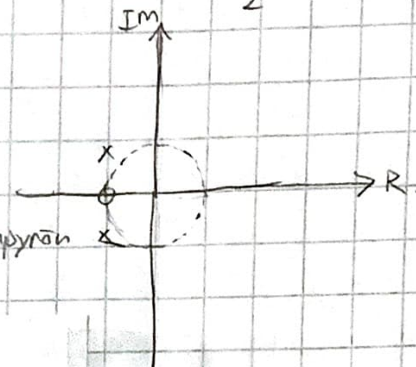
$$\left(z + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= z^2 + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} z + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} z + \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2}(1+3) = z^2 + z + 1$$

nolla: -1

napa: $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$



Ei ole stabiili, koska navat ovat yksikköympyrän ulkopuolella

3. (*Kynä & paperi*) Laske z-muunnos impulssivasteelle

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{kun } n \geq 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Onko suodin stabiili?

z-muunnos:
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n.$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)}$$

kun $\left|\frac{1}{3} z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > \left|\frac{1}{3}\right|$ suodin on stabiili silloin kun $|z| > \left|\frac{1}{3}\right|$.

napa on : $\frac{1}{3} < 1$, eli yksikköympyrän sisällä.

Suodin on stabiili