COMP.SGN.100 Signaalinkäsittelyn perusteet,
Harjoitus 6, 7.-9.4.2021

1. (*Kynä & paperi*) Oletetaan, että kausaalisen järjestelmän heräte $x(n)$ ja vaste $y(n)$ toteuttavat differenssiyhtälön

sivu 67

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) + 3y(n-1) - \frac{37}{16}y(n-2).$$

(a) Määritä siirtofunktio.
(b) Piirrä napa-nollakuvio.
(c) Onko järjestelmä stabiili?

(a)
$$y(n) = \sum_{k=0}^{K} a_k x(n-k) + \sum_{m=1}^{M} b_m y(n-m)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{K} a_k X(z) z^{-k} + \sum_{m=1}^{M} b_m Y(z) z^{-m}$$

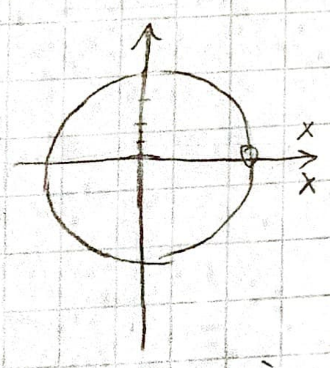
$$Y(z) = X(z) - 2X(z)z^{-1} + X(z)z^{-2} + 3Y(z)z^{-1} - \frac{37}{16}Y(z)z^{-2}$$

$$Y(z)\left(1 - \left(3z^{-1} - \frac{37}{16}z^{-2}\right)\right) = X(z)\left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right)$$

$$Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 3z^{-1} + \frac{37}{16}z^{-2})}$$

$$= \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 3z + \frac{37}{16}}$$

(b)
$$z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$$
$$z^2 - 3z + \frac{37}{16} = \left(z - \frac{3}{2} + \frac{i}{4}\right)\left(z - \frac{3}{2} - \frac{i}{4}\right)$$



Nollat: 1, 1
Navat: $\frac{3}{2} - \frac{i}{4}$, $\frac{3}{2} + \frac{i}{4}$.

$$P_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{i}{4}$$

c) Järjestelmä ei ole stabiili. Koska IIR-suotin napojen itseisarvo $\left|\frac{3}{2} \pm \frac{i}{4}\right| > 1$

2. (*Kynä & paperi*) Signaali $x(n) = u(n)\sin(\frac{1}{5} \cdot 2\pi n)$ suodatetaan järjestelmällä, jonka impulssivaste on

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kun } n = 0 \text{ tai } n = 2, \\ 1, & \text{kun } n = 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Vaste on muotoa $y(n) = Au(n)\sin(\frac{1}{5} \cdot 2\pi n + \phi)$. Määritä reaaliluvut A ja ϕ. Laske tehtävä siis kynällä ja paperilla. Voit kuitenkin käyttää Matlabia lopullisen lausekkeen numeroarvon laskentaan.

$Y(n) = A\,X(n)$ Oltava: $X(n+\phi) = x(n)$.

Siirtofunktion on impulssivasteen z-muunnos:

$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} = \frac{1}{2} z^0 + 1 z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}$

$H(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2} = \frac{\frac{1}{2}(z^2+2z+1)}{z^2} = \frac{\frac{1}{2}(z+1)^2}{z^2}$

nollat: $z = -1$

navat: $z = 0$

$\frac{Y(z) =}{X(z) =} \frac{\frac{1}{2}(z+1)^2}{z^2}$

$Y(n) = h(n) \star x(n)$

$= \frac{1}{2} X(0) + X(1) + \frac{1}{2} X(2)$

$= A\,X(n) \Leftarrow A = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kun } n=0 \text{ tai } n=2 \\ 1, & \text{kun } n=1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

$\phi = 0$

3. (*Kynä & paperi*) Minkä suotimen siirtofunktio on

$$H(z) = -0.04 - 0.9z^{-1} + 3.29z^{-2} - 0.9z^{-3} - 0.04z^{-4}?$$

Mikä on siis herätteen $x(n)$ ja vasteen $y(n)$ välinen laskukaava?

$$H(z) = -0,04 - 0.9z^{-1} + 3.29z^{-2} - 0,9z^{-3} - 0,04z^{-4}.$$

$$= \frac{-0,04z^{4} - 0,9z^{3} + 3.29z^{2} - 0.9z^{1} - 0,04.}{z^{4}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$y(n) = -0,04\,\delta(n+4) - 0,9\delta(n+3) + 3,29\,\delta(n+2) - 0,9\,\delta(n+1) - 0,04\,\delta(n)$$

$$x(n) = \delta(n+4)$$