FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

- Ensimmäinen mieleen tuleva tapa on yksinkertaisesti keksiä sellainen amplitudivasteen kuvaaja, että se toteuttaa annetut ehdot.
- Tämä kuitenkin tuottaa ongelmia, kuten kohta tulemme näkemään.
- Tarkastellaan esimerkiksi edellä annettuja ehtoja:

$$
\begin{array}{ll}
\delta_p & 0.026 \text{ dB}, \\
\delta_s & -30 \text{ dB}, \\
\omega_p & 2\pi \cdot 2500/16000 = \frac{5\pi}{16} \text{ rad} \\
\omega_s & 2\pi \cdot 3000/16000 = \frac{3\pi}{8} \text{ rad}
\end{array}
$$

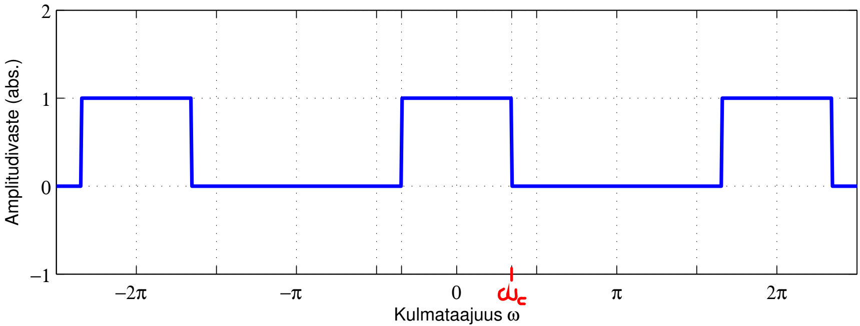
FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

- Nämä ehdot toteuttaa esimerkiksi taajuusvaste, joka putoaa ykkösestä nollaan ω_p:n ja ω_s:n puolivälissä, eli kulmataajuudella $\frac{11\pi}{32}$:

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \frac{11\pi}{32} \\ 0, & \omega \geqslant \frac{11\pi}{32}. \end{cases}$$

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

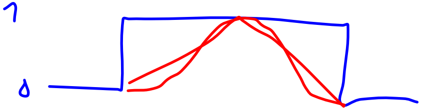
- Kuvassa nähdään tämän taajuusvasteen kuvaaja, jossa on huomioitu myös vasteen periodisuus ja konjugaattisymmetrisyys välillä $[0, 2\pi]$.



FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

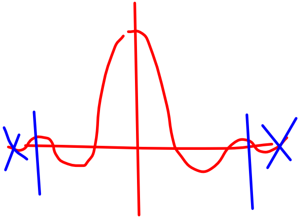
- Voidaan osoittaa yleisesti, että taajuusvaste

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \omega < \omega_c, \\ 0, & \text{kun } \omega \geqslant \omega_c \end{cases}$$



löytyy suotimelta, jonka impulssivaste on

$$h(n) = \begin{cases} 2f_c \operatorname{sinc}(\omega_c n), & \text{kun } n \neq 0, \\ 2f_c, & \text{kun } n = 0. \end{cases}$$



- Tässä funktio $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$.
- Ongelmana tämän suotimen toteuttamisessa on impulssivasteen ääretön pituus.
- Käytännössä se täytyy aina katkaista, mikä puolestaan aiheuttaa ongelmia taajuusvasteessa. (Siitä tarkemmin jatkossa.)

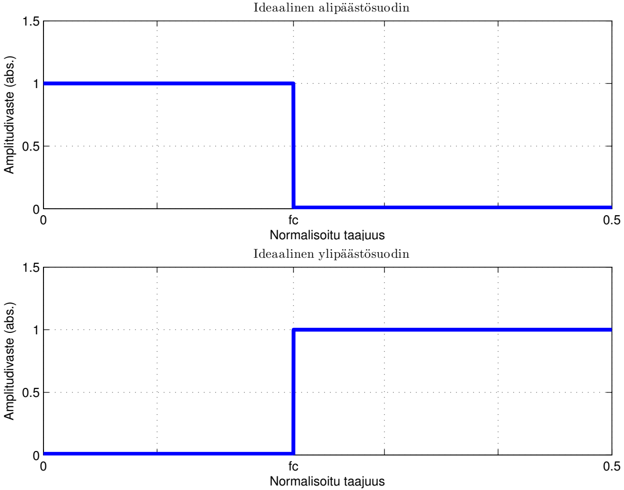
FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

- Seuraavassa taulukossa on esitetty vastaavat ideaaliset impulssivasteet erityyppisille suotimille:
  - **alipäästösuotimille** (taajuudet välillä $[0, f_c]$ päästetään läpi),
  - **ylipäästösuotimille** (taajuudet välillä $[f_c, 0.5]$ päästetään läpi),
  - **kaistanpäästösuotimille** (taajuudet välillä $[f_1, f_2]$ päästetään läpi) ja
  - **kaistanestosuotimille** (taajuudet välillä $[f_1, f_2]$ poistetaan).

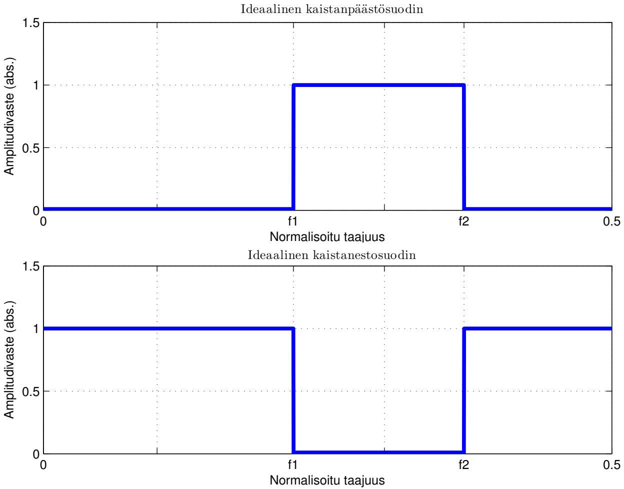
Ideaalinen suodintyyppi	Impulssivaste kun	
	$n \neq 0$	$n = 0$
Alipäästö	$2f_c \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$2f_c$
Ylipäästö	$-2f_c \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$1 - 2f_c$
Kaistanpäästö	$2f_2 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_2) - 2f_1 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_1)$	$2(f_2 - f_1)$
Kaistanesto	$2f_1 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_1) - 2f_2 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_2)$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

- Näitä suodintyyppejä vastaavien ideaalisten taajuusvasteiden kuvaajat ovat alla.



FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna



FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

- Ideaalisen suotimen impulssivasteen suoraviivainen katkaiseminen on luonnollisin menetelmä pyrkiä lähelle ideaalisen alipäästösuotimen ominaisuuksia.
- Näin saatu impulssivaste vastaa ideaalista impulssivastetta kerrottuna 'ikkunasignaalilla'

$$w(n) = \begin{cases} 1, & \text{kun } -M < n < M, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

- Kyseisestä ikkunafunktiosta käytetään nimeä **suorakulmainen ikkuna** (**engl. rectangular window**).
- Ikkunan kertoimien kokonaismäärästä käytetään merkintää N, ja se riippuu rajasta M kaavan $N = 2M + 1$ mukaan.

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

- Toisaalta raja M saadaan jakamalla N kahdella ja alaspäin pyöristämällä, t.s. $M = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.
- Katkaistun impulssivasteen $h_t(n) = w(n)h(n)$ käyttäytymistä taajuustasossa voidaan approksimoida sen diskreetin Fourier-muunnoksen avulla.
- Tulomuodossa olevan signaalin DFT voidaan ilmaista konvoluution avulla:

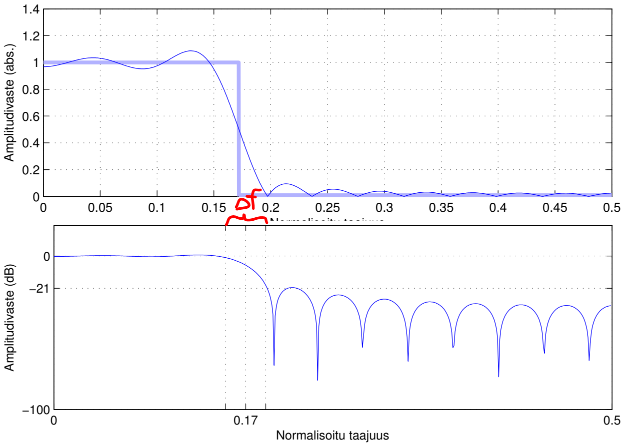
$$H_t(n) = \frac{1}{N} W(n) * H(n).$$

- Suoran katkaisun vaikutus taajuustasossa on siis konvoluutio ikkunafunktion $w(n)$ diskreetin Fourier-muunnoksen kanssa.
- Toisaalta $W(n)$ on vastaavaa muotoa kuin $h(n)$, siinä on nimittäin tärkeällä sijalla sinc-funktio.

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

- Konvoluutio tällaisen signaalin kanssa aiheuttaa alkuperäiseen taajuusvasteeseen värähtelyä ja Gibbsin ilmiön, missä värähtelyä on erityisesti taajuuskaistojen reunoilla.
- Gibbsin ilmiö oli esillä jo Fourier-sarjan yhteydessä.
- Alla olevassa kuvassa on ideaalisen alipäästösuotimen amplitudivaste impulssivasteen katkaisun jälkeen.
- Kyseessä on edellä ollut esimerkki, jossa rajataajuus oli $\omega_c = \frac{11\pi}{32}$, eli normalisoituna $f_c = \frac{11}{64} \approx 0.17$.

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

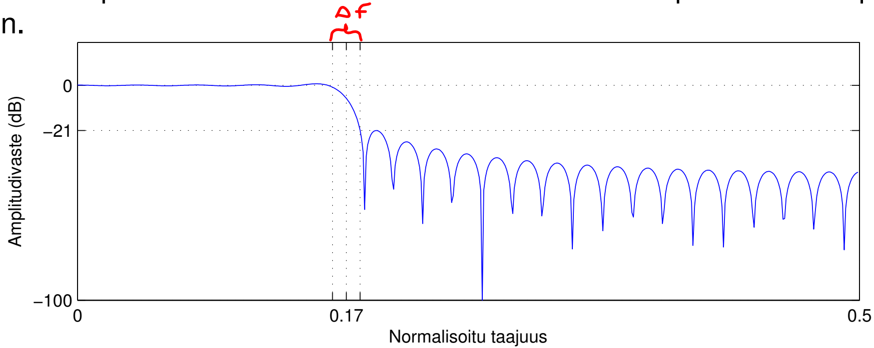


FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

- Impulssivasteeseen on otettu mukaan $N = 25$ termiä, eli ideaalinen impulssivaste pisteissä $-12, -11, -10, \ldots, 10, 11, 12$.
- Kuvasta nähdään selvästi ylimääräinen värähtely rajataajuuden ympärillä.
- Erityisen selvästi tämä värähtely näkyy desibeliasteikolla, jossa korkein huippu on -21 desibelin kohdalla.
- Kokeilemalla eri mittaisia impulssivasteita havaitaan, ettei pituuden N kasvattaminen paranna vaimennusominaisuuksia lainkaan: amplitudivasteen korkein huippu estokaistalla pysyy -21:ssä desibelissä.

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

- Alla oleva amplitudivaste saadaan kaksinkertaistamalla impulssivasteen pituus 51:een.



FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: suorakulmainen ikkuna

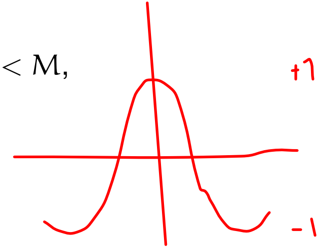
- Ainoa vaikutus on estokaistan huippujen sekä siirtymäkaistan kapeneminen.
- Myöskään päästökaistan värähtelyyn ei voida näin vaikuttaa, vaan sitäkin on aina vakiomäärä, noin 0.74 dB.
- Sen sijaan suurempi N kaventaa siirtymäkaistaa, ja siirtymäkaistan leveyden $\Delta\mathrm{f}$ ja kertoimien määrän välillä onkin voimassa suorakulmaisen ikkunan tapauksessa kaava

$$\Delta\mathrm{f} = \frac{0.9}{\mathrm{N}}. \qquad N = \frac{0.9}{\Delta f}$$

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Hamming-ikkuna

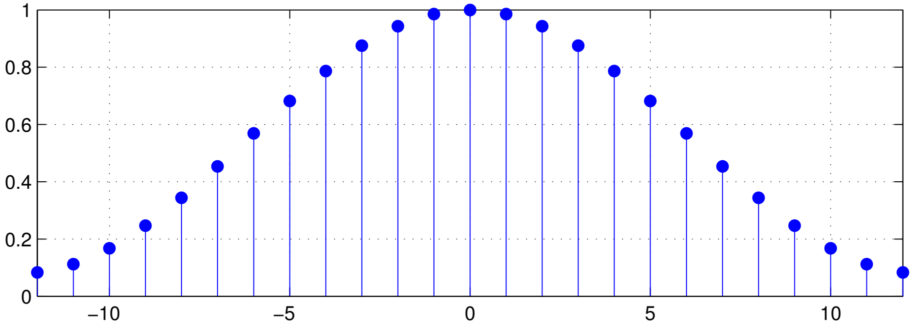
- Suotimen vaimennusominaisuuksiin ei siis voida vaikuttaa kertoimia lisäämällä, mutta niitä voidaan parantaa käyttämällä jotain pehmeämmin laskevaa ikkunafunktiota suoran katkaisun asemesta.
- Yksi usein käytetyistä ikkunafunktioista on **Hamming-ikkuna** (Hamming window), joka määritellään seuraavasti:

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & \text{kun } -M < n < M, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$



FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Hamming-ikkuna

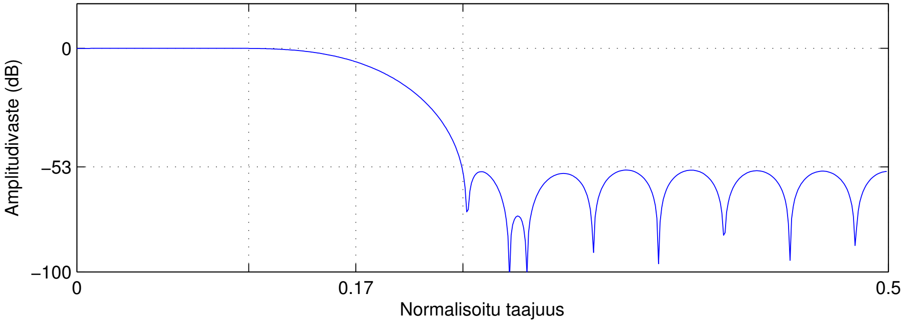
- Alla olevassa kuvassa on Hamming-ikkunan kertoimien kuvaaja tapauksessa $N = 25$.



FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Hamming-ikkuna

- Hamming-ikkunaa käytetään siis niin, että yllä olevalla lausekkeella $w(n)$ kerrotaan vastaava ideaalisen impulssivasteen termi.
- Alla olevassa kuvassa on näin saatava amplitudivaste suunniteltaessa vastaavaa alipäästösuodinta kuin aikaisemmassakin esimerkissä.

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Hamming-ikkuna



- Amplitudivasteen kuvaajasta havaitaan Hamming-ikkunan parantavan vaimennusominaisuuksia.

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Hamming-ikkuna

- Nyt suodin vaimentaa kaikkia estokaistan taajuuksia vähintään 53 dB.
- Lisäksi päästökaistan värähtely ei ole enää paljaalla silmällä havaittavissa.
- Kokeilemalla eri kertoimien määriä havaitaan korkeimman estokaistalla olevan huipun pysyvän 53 dB:ssä sekä päästökaistan värähtelyn pysyvän noin 0.019 desibelissä.
- Lisäksi siirtymäkaistan leveys näyttäisi nytkin olevan kääntäen verrannollinen kertoimien määrään nähden.

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Hamming-ikkuna

- Siirtymäkaista on selvästi leveämpi kuin vastaava suorakulmaista ikkunaa käyttäen saatu siirtymäkaista ja osoittautuukin, että leveys riippuu kertoimien määrästä kaavan

$$\Delta \mathrm{f} = \frac{3.3}{\mathrm{N}}$$

  mukaisesti.
- Ikkunan valinta on näin ollen aina kompromissi vaimennusominaisuuksien ja kertoimien määrän välillä.
- Hamming-ikkuna tarvitsee nimittäin aina suuremman määrän kertoimia (noin 3.7-kertaisen määrän) suorakulmaiseen ikkunaan verrattuna, jotta siirtymäkaistat olisivat yhtä leveät.

Tampereen yliopisto

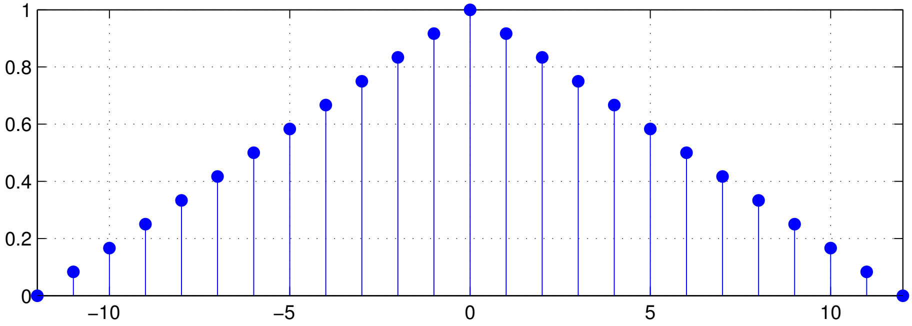
FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä

- Muita tavallisesti käytettyjä ikkunafunktioita on lueteltu alla.
- Taulukosta voidaan ratkaista myös tarvittavien kertoimien määrä, kun halutaan jokin tietty normalisoitu siirtymäkaistan leveys.
- Mitä paremmat ikkunalla saatavat vaimennus- ja värähtelyominaisuudet ovat, sitä suurempi kerroin siirtymäkaistan leveyden kaavassa on ja sitä enemmän kertoimia tarvitaan saman siirtymäkaistan saamiseksi.

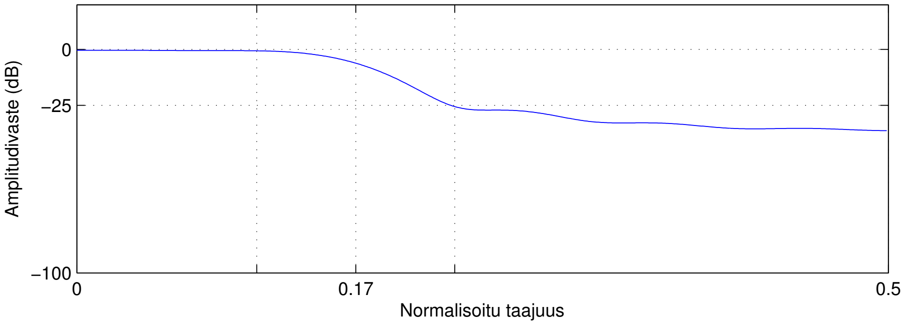
Ikkuna-funktion nimi	Siirtymäkaistan leveys (normalisoitu)	Päästökaistan värähtely (dB)	Estokaistan minimi-vaimennus (dB)	Ikkunan lauseke $w(n)$, kun $\lvert n\rvert \leqslant (N-1)/2$
Suorakulmainen	$0.9/N = \Delta f$	0.7416	21	1
Bartlett	$3.05/N$	0.4752	25	$1 - \frac{2\lvert n\rvert}{N-1}$
Hanning	$3.1/N$	0.0546	44	$0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	53	$0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	74	$0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Bartlett-ikkuna

- Taulukon ikkunoista Bartlett-ikkuna on harvemmin suodinsuunnittelussa käytetty, kolmionmuotoinen ikkunafunktio.
- Alla on Bartlett-ikkunan kuvaaja ($N = 25$) ja sitä käyttäen suunnitellun alipäästösuotimen amplitudivaste.

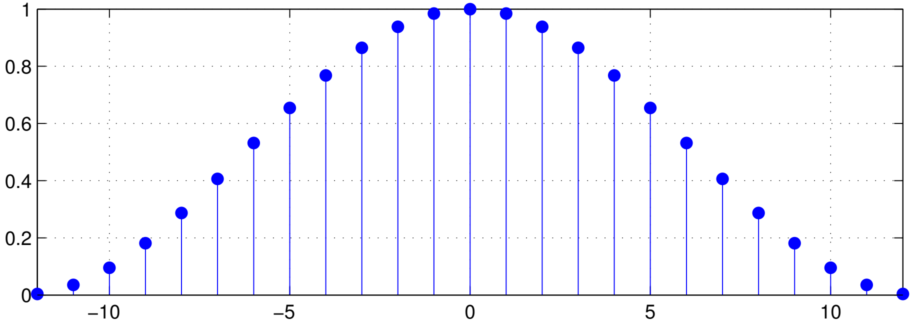


FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Bartlett-ikkuna

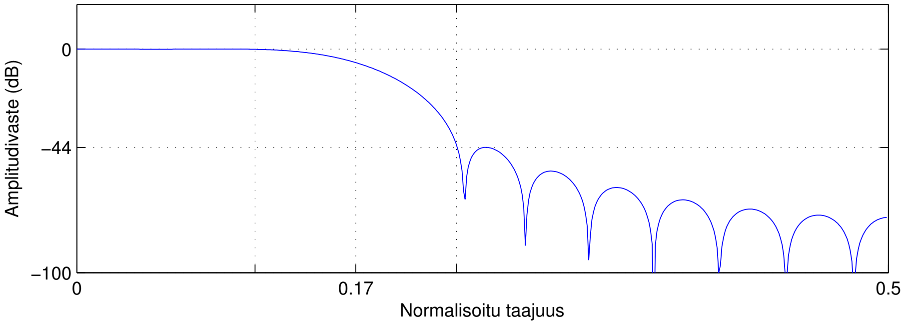


FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Hanning-ikkuna

- Hanning- eli Hann-ikkuna on melko lähellä Hamming-ikkunaa.
- Kuitenkin sen vaimennus- ja värähtelyominaisuudet ovat hieman huonommat ja kertoimien määrä on toisaalta pienempi.
- Alla on Hanning-ikkunan kuvaaja ($N = 25$) ja sitä käyttäen suunnitellun alipäästösuotimen amplitudivaste.



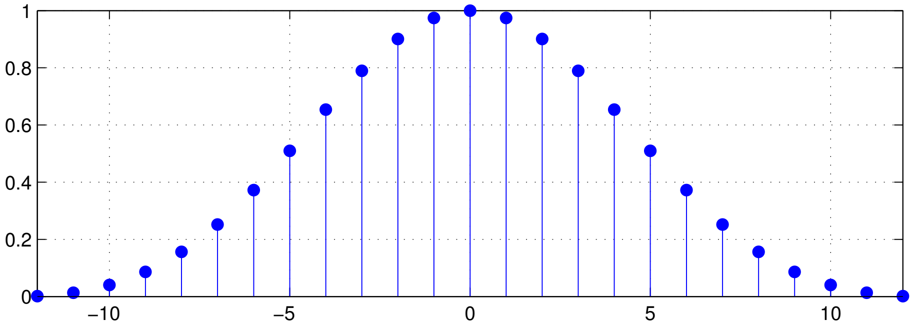
FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Hanning-ikkuna



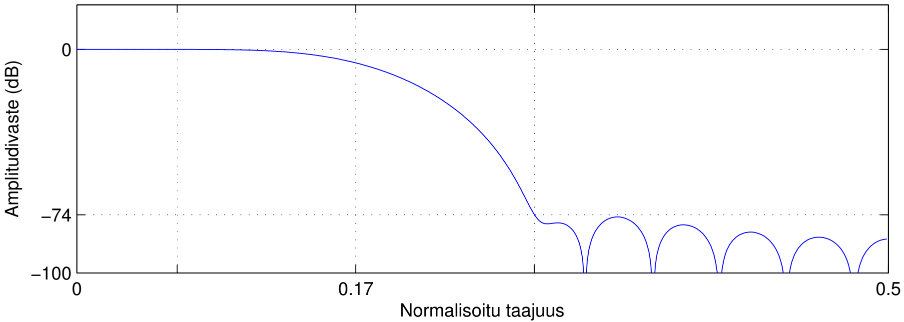
FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Blackman-ikkuna

- Taulukossa alimpana on Blackman-ikkuna, jonka lauseke koostuu kahdesta kosinitermistä.
- Näin saadaan aikaan erittäin hyvä minimivaimennus sekä päästökaistan värähtely, mutta vastaavasti tarvittavien kertoimien määrä on suurempi.
- Alla on Blackman-ikkunan kuvaaja ($N = 25$) ja sitä käyttäen suunnitellun alipäästösuotimen amplitudivaste.

FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Blackman-ikkuna



FIR suunnittelu ikkunamenetelmällä: Blackman-ikkuna



Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Määritä ideaalinen taajuusvaste suotimelle.
- Laske tätä taajuusvastetta vastaava ideaalinen impulssivaste käänteisen Fourier-muunnoksen avulla. Tavallisimmat impulssivasteet on lueteltu edellä olleessa taulukossa.
- Valitse sellainen ikkunafunktio, joka täyttää halutut vaatimukset päästökaistalla ja estokaistalla. Selvitä myös tarvittavien kertoimien määrä N normalisoidusta siirtymäkaistan leveydestä Δf lähtien.
- Suunnitellun suotimen impulssivaste on

$$h_t(n) = w(n)h(n),$$

Missä $h(n)$ on ideaalinen impulssivaste ja $w(n)$ on valittu ikkunafunktio.

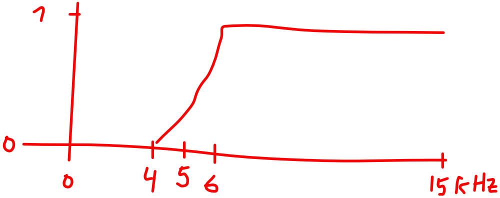
Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

Ratkaistaan esimerkkinä yksi aiemmin käyttämäni tenttitehtävä:

4. Suunnittele ikkunamenetelmällä ylipäästösuodin (selvitä käsin impulssivasteen lauseke), jonka vaatimukset ovat seuraavat:

Estokaista	[0 kHz, 4 kHz]
Päästökaista	[6 kHz, 15 kHz]
Päästökaistan maksimivärähtely	0.04 dB
Estokaistan minimivaimennus	24 dB
Näytteenottotaajuus	30 kHz

Käytä oheisia taulukoita hyväksesi. (6p)



Tampereen yliopisto

4. Suunnittele ikkunamenetelmällä ylipäästösuodin (selvitä käsin impulssivasteen lauseke), jonka vaatimukset ovat seuraavat:

Estokaista	[0 kHz, 4 kHz]
Päästökaista	[6 kHz, 15 kHz]
Päästökaistan maksimivärähtely	0.04 dB
Estokaistan minimivaimennus	24 dB
Näytteenottotaajuus	30 kHz

Käytä oheisia taulukoita hyväksesi. (6p)

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

$$\Delta f = \frac{6-4}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \quad 1p \qquad f_c = \frac{(4+6)/2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \quad 1p$$

Hamming ja Blackman ok, valitsemme Hamming-ikkunan koska se tarvitsee vähemmän kertolmia. 1p

$$\Delta f = \frac{3.3}{N} \quad N = \frac{3.3}{\Delta f} = \frac{3.3}{1/15} = 3.3 \cdot 15 = 49.5 \approx 51 \quad 1p$$

(pyöristetään ylöspäin lähimpään parittomaan kokonaislukuun)

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{51}\right), & |n| \le 25 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} -2f_c \operatorname{sinc}(n 2\pi f_c), & n \ne 0 \\ 1 - 2f_c, & n = 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{3}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{3}\right), & n \ne 0 \\ \frac{2}{3}, & n = 0 \end{cases} \quad 1p$$

$$h_t(n) = w(n) \cdot h(n) = \begin{cases} \left(0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{51}\right)\right)\left(-\frac{1}{3}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right), & 0 < |n| \le 25 \\ \frac{2}{3}, & n = 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \quad 1p$$

Tampereen yliopisto

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

4. Suunnittele ikkunamenetelmällä ylipäästösuodin (selvitä käsin impulssivasteen lauseke), jonka vaatimukset ovat seuraavat:

Estokaista	[0 kHz, 4 kHz]
Päästökaista	[6 kHz, 15 kHz]
Päästökaistan maksimivärähtely	0.04 dB
Estokaistan minimivaimennus	24 dB
Näytteenottotaajuus	30 kHz

Käytä oheisia taulukoita hyväksesi. (6p)

Suodintyyppi	Impulssivaste kun	
	$n \neq 0$	$n = 0$
Alipäästö	$2f_c \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$2f_c$
Ylipäästö	$-2f_c \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$1 - 2f_c$
Kaistanpäästö	$2f_2 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_2) - 2f_1 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_1)$	$2(f_2 - f_1)$
Kaistanesto	$2f_1 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_1) - 2f_2 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_2)$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

Ikkuna-funktion nimi	Siirtymäkaistan leveys (normalisoitu)	Päästökaistan värähtely (dB)	Estokaistan minimi-vaimennus (dB)	Ikkunan lauseke $w(n)$, kun $\|n\| \leq (N-1)/2$
Suorakulmainen	$0.9/N$	~~0.7416~~	~~21~~	1
Bartlett	$3.05/N$	~~0.4752~~	25	$1 - \frac{2\|n\|}{N-1}$
Hanning	$3.1/N$	~~0.0546~~	44	$0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	53	$0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	74	$0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$

Δf

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

Esimerkki.: Suunnitellaan seuraavat vaatimukset täyttävä alipäästösuodin ikkunamenetelmällä:

δ_p	0.026 dB,
δ_s	-30 dB,
f_p	5000 Hz,
f_s	6000 Hz,
Näytteenottotaajuus	16000 Hz.

- Koska $\delta_p = 0.026$ dB, ainoat mahdolliset ikkunat ovat Hamming-ikkuna ($\delta_p = 0.0194$ dB) ja Blackman-ikkuna ($\delta_p = 0.0017$ dB).

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Näistä valitsemme Hamming-ikkunan, sillä sitä käytettäessä tarvittavien kertoimien määrä on Blackman-ikkunaa pienempi:

$$N = \begin{cases} \frac{3.3}{\Delta f}, & \text{Hamming-ikkunalle} \\ \frac{5.5}{\Delta f}, & \text{Blackman-ikkunalle.} \end{cases}$$

- Taulukosta nähdään lisäksi, että Hamming-ikkunaa käyttäen on mahdollista täyttää myös annetut estokaistan vaatimukset.
- Sarakkeesta **Estokaistan minimivaimennus** nähdään nimittäin, että minimivaimennus on 53 dB, kun vaatimuksena oli ainoastaan $\delta_s = -30$ dB (-53 dB $<$ -30 dB).
- Seuraavaksi täytyy selvittää suotimen kertoimien määrä.

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Se saadaan siirtymäkaistan leveydestä.
- Meidän tapauksessamme siirtymäkaistan tulee olla välillä 5000-6000 Hz.
- Näytteenottotaajuudella normalisoituina tämä on väli $[5000/16000, 6000/16000]$, joten siirtymäkaistan normalisoitu leveys on $\Delta f = 1000/16000 = 1/16$.
- Koska Hamming-ikkunaa käytettäessä

$$\Delta f = \frac{3.3}{N},$$

niin tarvittavien kertoimien määrä N on tarkoilla arvoilla

$$N = \frac{3.3}{\Delta f} = \frac{3.3}{1/16} = 3.3 \cdot 16 = 52.8.$$

- Tämä pyöristetään ylöspäin lukuun $N = 53$.

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Tällä kurssilla pyöristys tehdään aina suurempaan **parittomaan** kokonaislukuun.
- Ideaalinen impulssivaste on alipäästösuotimen tapauksessa

$$h(n) = \begin{cases} 2f_c \operatorname{sinc}(n \cdot 2\pi f_c), & n \neq 0 \\ 2f_c, & n = 0, \end{cases}$$

eli meidän tapauksessamme

$$h(n) = \begin{cases} 2 \cdot 5500/16000 \operatorname{sinc}(2\pi \cdot 5500/16000 \cdot n), & n \neq 0 \\ 2 \cdot 5500/16000, & n = 0, \end{cases}$$

- Tässä luku $f_c = \frac{5500}{16000} = \frac{11}{32}$ on valittu siirtymäkaistan puolivälistä.

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Todellinen impulssivaste saadaan nyt kertomalla tämä $h(n)$ Hamming-ikkunalla

$$h_t(n) = \begin{cases} (0.54 + 0.46\cos(2\pi n/53)) \cdot 2 \cdot 11/32 \cdot \mathrm{sinc}\,(2\pi \cdot 11/32 \cdot n), & 0 < |n| \leqslant 26 \\ 2 \cdot 11/32 \cdot, & n = 0, \\ 0, & \text{muulloin}, \end{cases}$$

joka sievenee muotoon

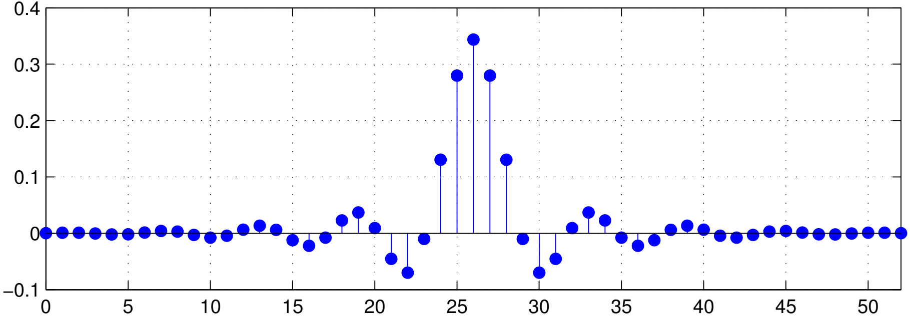
$$h_t(n) = \begin{cases} (11/16) \cdot (0.54 + 0.46\cos(2\pi n/53)) \cdot \mathrm{sinc}\,(11\pi n/16), & 0 < |n| \leqslant 26 \\ 11/16, & n = 0, \\ 0, & \text{muulloin}. \end{cases}$$

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Saadaksemme kausaalisen suotimen, meidän on siirrettävä tätä impulssivastetta vielä 26 askelta oikealle (viivästys).
- Tämä ei vaikuta tulokseen muuten kuin 26 askeleen viivästymisenä, taajuustason käyttäytyminen pysyy ennallaan.

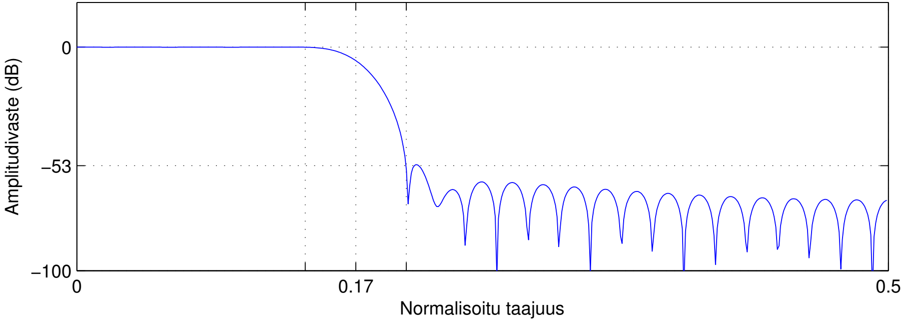
Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Näin saatavan impulssivasteen kuvaaja on alla.



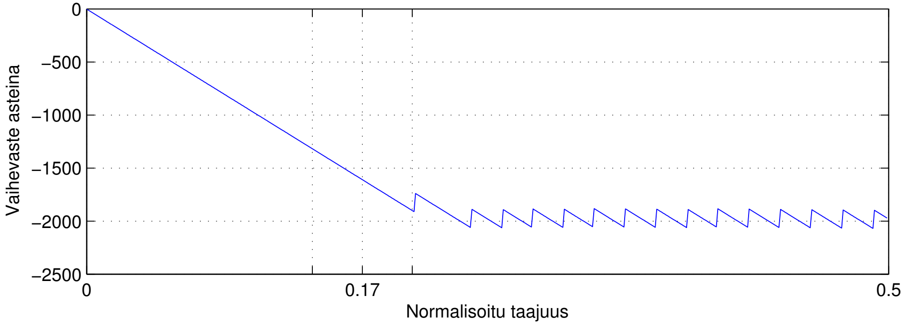
Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Tämän suotimen amplitudivasteen kuvaaja on seuraavanlainen.



Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Vaihevaste on alla. Huomaa lineaarisuus päästökaistalla. Ryhmäviive on $\tau(\omega) = 26$, eli suodin viivästää kaikkia taajuuksia 26 askelta.

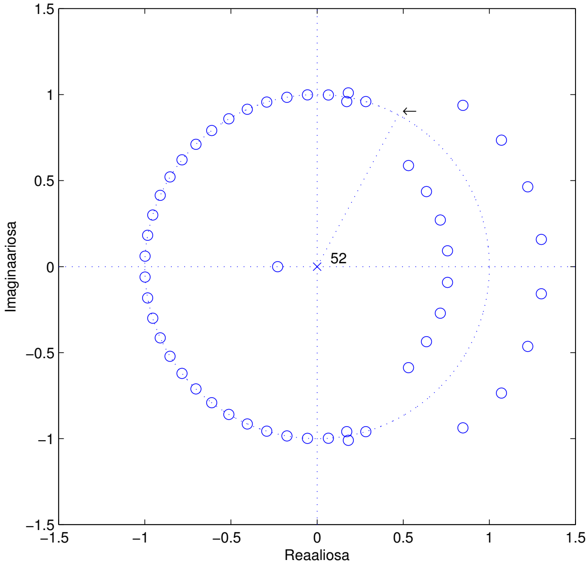


Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Lopuksi vielä napa-nollakuvio.
- Kuvasta puuttuu kauimmainen nolla, joka on pisteessä $z = 4.37$.
- Kuviosta näkyy selvästi kuinka Fourier-muunnoksen taajuusakseli vastaa yksikköympyrän ylempää puolikasta eli pisteitä $\{e^{i\omega} \mid \omega \in [0, \pi]\}$.
- Taajuusvaste taajuudella ω saadaan evaluoimalla siirtofunktio $H(z)$ pisteessä $z = e^{i\omega}$.
- Kuvassa on merkitty katkoviivalla siirtymäkaistan puoliväliä vastaava vaihekulma $\omega_c = \frac{11\pi}{32}$, ja taajuusvaste tällä taajuudella saadaan evaluoimalla siirtofunktio nuolella merkityssä pisteessä.

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

$$H(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2} - 0.5z^{-3}$$
$$= \frac{z^3 + z^2 + 2z - 0.5}{z^3}$$



Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Tätä pienemmät taajuudet saadaan kiertämällä yksikköympyrää myötäpäivään ja suuremmat vastapäivään.
- Nollataajuus on kompleksitason pisteessä $1 + 0i$ ja Nyquistin rajataajuus pisteessä $-1 + 0i$.
- Näin ollen kaikki siirtofunktion nollat sijaitsevat yksikköympyrällä vaihekulmaa $\omega_c = \frac{11\pi}{32}$ suuremmassa kulmassa ja jokainen niistä aiheuttaakin amplitudivasteeseen yhden alaspäin ulottuvan piikin.

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

Esimerkki: Toisena esimerkkinä suunnitellaan ylipäästösuodin, kun vaaditaan, että

δ_p	0.06 dB
δ_s	-28 dB
f_s	9 kHz
f_p	10 kHz
Näytteenottotaajuus	48 kHz

- Taulukosta nähdään, että suorakulmainen ja Bartlett-ikkuna eivät käy, ja Hanning-ikkuna on ensimmäinen, joka toteuttaa päästökaistan $(0.0546 < 0.06)$ ja estokaistan $(-44 \text{ dB} < -28 \text{ dB})$ vaatimukset.
- Koska Hanning-ikkunalle tarvitaan vähemmän kertoimia kuin muilla sopivilla, käytetään sitä.

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Tällöin siis

$$\Delta f = \frac{3.1}{N}.$$

- Näytteenottotaajuudella normalisoitu siirtymäkaistan leveys on

$$\Delta f = \frac{10\text{ kHz}}{48\text{ kHz}} - \frac{9\text{ kHz}}{48\text{ kHz}} = \frac{1}{48}.$$

- Nyt tarvittavien kertoimien määrä on

$$N = \frac{3.1}{\Delta f} = \frac{3.1}{1/48} = 148.8,$$

joka pyöristetään lukuun $N = 149$.

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Valitaan luku f_c normalisoidun siirtymäkaistan $[9/48, 10/48]$ puolivälistä eli luku $f_c = 9.5/48$.
- Silloin saadaan

$$h(n) = \begin{cases} -2 \cdot \frac{9.5}{48} \text{sinc}(2\pi \cdot \frac{9.5}{48} n), & n \neq 0, \\ 1 - 2 \cdot \frac{9.5}{48}, & n = 0. \end{cases}$$

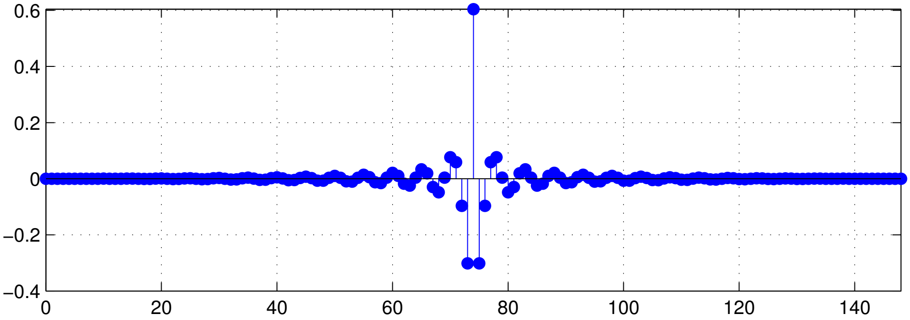
- Tämä lauseke on vielä kerrottava Hanning-ikkunan lausekkeella, jolloin todelliseksi impulssivasteeksi saadaan sievennettynä

$$h_t(n) = \begin{cases} -(0.5 + 0.5\cos(\frac{2\pi n}{149}))(\frac{19}{48}\text{sinc}(\frac{19}{48}\pi n)), & 0 < |n| \leqslant 74 \\ \frac{29}{48}, & n = 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

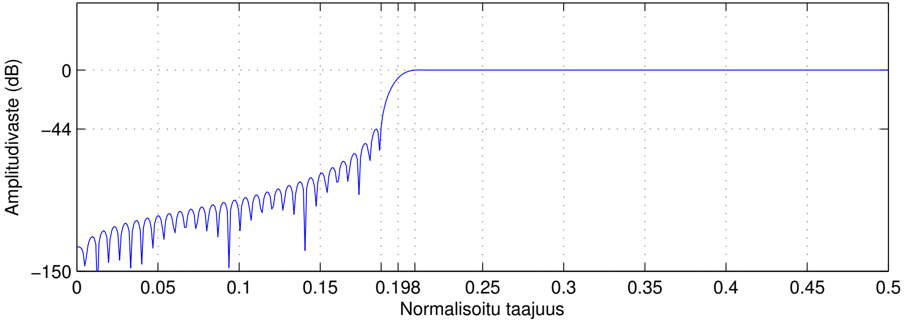
Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä

- Jälleen on siirrettävä tätä impulssivastetta 74 askelta oikealle, jotta saadaan kausaalinen suodin.
- Tämän impulssivasteen ja amplitudivasteen kuvaajat ovat alla, ja lopuksi nollakuvio. Nollakuviosta puuttuvat kauimmaiset nollat, jotka ovat pisteissä $z = 7.9116$ ja $z = -3.1176$.

Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä



Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä



Yhteenveto ikkunamenetelmän käytöstä