Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Edellä olleen määritelmän mukaan kaikki operaatiot signaalien joukolla ovat suotimia.
- Suotimia on siis erittäin paljon, ja suurin osa niistä on käytännön kannalta tarpeettomia.
- Seuraavassa käydään läpi ominaisuuksia, joita suotimilla voi olla.
- Näin suotimia voidaan luokitella käyttötarpeen mukaan.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

Ominaisuus 1. Muistittomuus:

- Järjestelmä on **muistiton**, jos sen ulostulo $y(n)$ riippuu vain samanaikaisesti sisääntulevasta näytteestä $x(n)$.
- Esimerkiksi
  - $y(n) = e^{x(n)}$ on muistiton,
  - $y(n) = x(n)^2$ on muistiton, mutta
  - $y(n) = x(n-10)$ ei ole muistiton.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

Ominaisuus 2. Lineaarisuus:

- Järjestelmä $\mathcal{F}(\cdot)$ on **lineaarinen**, jos

$$\mathcal{F}[ax_1(n) + bx_2(n)] = a\mathcal{F}[x_1(n)] + b\mathcal{F}[x_2(n)], \tag{1}$$

  kaikilla signaaleilla $x_1(n), x_2(n)$ ja kaikilla kertoimilla a, b.
- Sanallisesti sama asia voidaan ilmaista esimerkiksi seuraavasti:
  - Vasteiden summa on summan vaste.
  - Vaste herätteellä $ax(n)$ saadaan kertomalla herätteen $x(n)$ vaste $\mathcal{F}[x(n)]$ skalaarilla a.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Toisaalta ehto tarkoittaa myös, että:
  - Skalaarilla kertominen voidaan suorittaa ennen tai jälkeen suodatuksen.
  - Yhteenlasku voidaan suorittaa ennen tai jälkeen suodatuksen.
- Järjestelmän lineaarisuus osoitetaan näyttämällä, että yhtälön (1) vasen ja oikea puoli ovat yhtäsuuret riippumatta kertoimista a ja b ja signaaleista $x_1(n)$ ja $x_2(n)$.
- Esimerkiksi järjestelmä

$$\mathcal{F}[x(n)] = \frac{1}{2K+1} \sum_{k=0}^{2K} x(n-k).$$

on lineaarinen.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Se voidaan osoittaa seuraavasti:
  Olkoot a ja b mitkä tahansa reaaliluvut ja $x_1(n)$ sekä $x_2(n)$ mitkä tahansa kaksi lukujonoa. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[ax_1(n) + bx_2(n)] &= \frac{1}{2K+1}\sum_{k=0}^{2K}(ax_1(n-k) + bx_2(n-k)) \\
&= a\frac{1}{2K+1}\sum_{k=0}^{2K}x_1(n-k) + b\frac{1}{2K+1}\sum_{k=0}^{2K}x_2(n-k) \\
&= a\mathcal{F}[x_1(n)] + b\mathcal{F}[x_2(n)].
\end{aligned}$$

- Näin ollen järjestelmä on lineaarinen.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Epälineaarisuuden osoittaminen on yleensä helpompaa: riittää löytää sellaiset kertoimet ja signaalit, että vasen ja oikea puoli ovat erisuuret edes jollakin indeksin n arvolla.
- Esimerkiksi järjestelmä

$$\mathcal{F}[x(n)] = x(n)^2$$

ei ole lineaarinen, koska yhtälö (1) ei ole voimassa esimerkiksi seuraavilla arvoilla: olkoon $x_1(n) = u(n)$ ja $x_2(n)$ nollasignaali. Asetetaan vielä $a = 2$ sekä $b = 0$. Valitaan vielä $n = 0$, jolloin

$$\begin{aligned} \text{vasen puoli} &= \mathcal{F}[ax_1(n) + bx_2(n)] = \mathcal{F}[2 \cdot 1] = 2^2 = 4, \\ \text{oikea puoli} &= a\mathcal{F}[x_1(n)] + b\mathcal{F}[x_2(n)] = 2 \cdot 1^2 = 2. \end{aligned}$$

- Koska nämä kaksi lauseketta saavat erisuuret arvot, järjestelmä ei ole lineaarinen.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

Ominaisuus 3. Siirtoinvarianssi:

- Merkitään $y(n) = \mathcal{F}[x(n)]$.
- Järjestelmä $\mathcal{F}(\cdot)$ on tällöin **siirtoinvariantti** (shift-invariant) eli **aikainvariantti** (time-invariant), jos
$$y(n-k) = \mathcal{F}[x(n-k)]$$
aina, kun $k \in \mathbb{Z}$.
- Tämä tarkoittaa toisin sanoen sitä, ettei järjestelmä ole riippuvainen ajasta, vaan siirto voidaan tehdä suodatusta ennen tai sen jälkeen.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

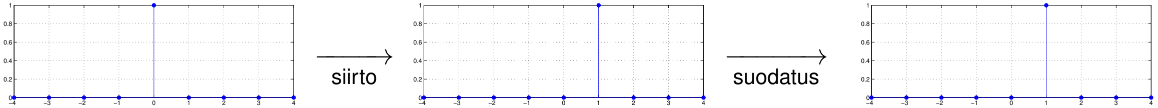
- Siirtoinvarianssia voidaan tarkastella myös seuraavan kaavion avulla:

$$
\begin{tikzcd}
x(n) \arrow[r, "\text{siirto}"] \arrow[d, "\text{suodatus}"'] & x(n-k) \arrow[d, "\text{suodatus}"] \\
F[x(n)] \arrow[r, "\text{siirto}"] & ?
\end{tikzcd}
$$

- Jos tulos on sama molempia kaavion reittejä pitkin, on kyseinen järjestelmä siirtoinvariantti.
- Jos sen sijaan saadaan eri signaalit, niin järjestelmä ei ole siirtoinvariantti.

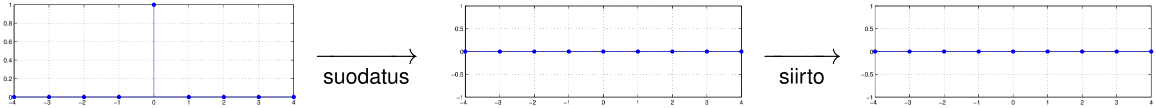
Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Esimerkiksi järjestelmä $\mathcal{F}[x(n)] = nx(n)$ ei ole siirtoinvariantti.
- Tämä voidaan osoittaa keksimällä sellainen signaali $x(n)$, että siirron ja suodatuksen tulos on eri kuin suodatuksen ja siirron.
  Valitaan $x(n) = \delta(n)$.
- Jos tätä siirretään yksi askel oikealle, saadaan signaali $\delta(n-1)$.
  Suodatettaessa tämä signaali kerrotaan kussakin pisteessä indeksillä n, eli pisteessä $n = 1$ luvulla yksi.
- Lopputuloksena on siis $\delta(n-1)$, kuten alla olevassa kuvassa näkyy.



Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Jos operaatiot tehdään toisessa järjestyksessä, tulos on toinen.
- Suodatettaessa signaali $\delta(n)$ kerrotaan kukin arvo indeksillä n.
- Pisteessä $n = 0$ oleva arvo kerrotaan siis nollalla, joten tuloksena on nollasignaali.
- Nollasignaalin siirto ei muuta sitä mitenkään, joten tuloksena on nollasignaali, ks. alla oleva kuva.



- Koska ”siirto+suodatus” tuottaa signaalin $y(n) = \delta(n-1)$ ja ”suodatus+siirto” signaalin $y(n) = 0$, ei järjestelmä ole siirtoinvariantti.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Toisena esimerkkinä olkoon järjestelmä $\mathcal{F}[x(n)] = e^{x(n)}$.
- Osoitetaan, että $\mathcal{F}$ on siirtoinvariantti.
- Olkoon $y(n) = \mathcal{F}[x(n)]$ jokaisella indeksillä $n \in \mathbb{Z}$ ja olkoon $k \in \mathbb{Z}$ mielivaltainen.
- Määritellään lisäksi $x_1(n) = x(n-k)$.
- Tällöin $y(n-k) = e^{x(n-k)}$, joka on sama kuin $\mathcal{F}[x(n-k)] = \mathcal{F}[x_1(n)] = e^{x_1(n)} = e^{x(n-k)}$.
- Näin ollen $\mathcal{F}$ siis on siirtoinvariantti.
- Siirtoinvarianssi on tärkeä lähinnä teorian kannalta.
- Käytännössä kaikki järkevät järjestelmät ovat siirtoinvariantteja.
- Ei-siirtoinvariantti järjestelmähän toimisi eri tavalla eri ajanhetkillä.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

Ominaisuus 4. Kausaalisuus:

- Järjestelmän $\mathcal{F}(\cdot)$ sanotaan olevan **kausaalinen**, jos vaste $y(n)$ riippuu pelkästään herätteen arvoista $x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots$ eikä arvoista $x(n+1), x(n+2), x(n+3), \ldots$
- Kausaalisuus siis tarkoittaa sitä, ettei järjestelmän tarvitse tietää etukäteen, mitä arvoja heräte tulee jatkossa saamaan.
- Tarkastellaan järjestelmää

$$\mathcal{F}[x(n)] = \frac{1}{5}(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)).$$

- Vasteen laskemiseen kohdassa n tarvitaan selvästi ainoastaan herätteen arvoja $x(n), x(n-1), x(n-2), x(n-3)$ ja $x(n-4)$, joten järjestelmä on kausaalinen.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Jos sen sijaan tarkasteltavana on järjestelmä

$$\mathcal{F}[x(n)] = \frac{1}{5}(x(n+2) + x(n+1) + x(n) + x(n-1) + x(n-2)),$$

niin vasteen laskemiseen kohdassa n tarvitaan herätteen arvoja $x(n+2)$ ja $x(n+1)$, joten järjestelmä ei ole kausaalinen.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

Ominaisuus 5. Stabiilisuus:

- Lukujonon $x(n)$ sanotaan olevan **rajoitettu**, jos on olemassa sellainen yläraja $M \in \mathbb{R}$, että
$$|x(n)| \leqslant M,$$
jokaisella indeksillä n.
- Diskreetti järjestelmä $\mathcal{F}(\cdot)$ on **stabiili**, jos jokainen rajoitettu heräte aiheuttaa rajoitetun ulostulon.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Toisin sanoen, ehdosta

$$\exists M_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{Z} : |x(n)| \leqslant M_1$$

seuraa ehto

$$\exists M_2 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{Z} : |y(n)| \leqslant M_2,$$

missä $y(n) = \mathcal{F}[x(n)]$.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Tarkastellaan järjestelmää

$$y(n) = \mathcal{F}[x(n)] = \frac{1}{5}(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)),$$

  ja osoitetaan sen olevan stabiili.
- Oletetaan, että $x(n)$ on rajoitettu.
- Silloin on olemassa sellainen reaaliluku M_1, että $|x(n)| \leqslant M_1$ jokaisella indeksillä n.
- Stabiilisuuden osoittamiseksi on näytettävä, että on olemassa sellainen $M_2 \in \mathbb{R}$, että $|y(n)| \leqslant M_2$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}$.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Voidaan helposti todistaa, että viiden sisäänmenonäytteen keskiarvo on aina näytteistä suurimman ja pienimmän välillä:

$$-M_1 \leqslant \min_{n-4\leqslant k\leqslant n} x(k) \leqslant y(n) \leqslant \max_{n-4\leqslant k\leqslant n} x(k) \leqslant M_1.$$

- Näin ollen vaste $y(n)$ on rajoitettu aina, kun $n \in \mathbb{Z}$, joten järjestelmä $\mathcal{F}$ on stabiili.
- Sen sijaan järjestelmä $y(n) = \mathcal{F}[x(n)] = nx(n)$ on epästabiili, sillä esimerkiksi yksikköaskeljonolla $u(n)$ (joka on rajoitettu) saadaan vasteeksi jono

$$y(n) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n < 0, \\ n, & \text{kun } n \geqslant 0, \end{cases}$$

joka ei selvästikään ole rajoitettu.

Diskreettien järjestelmien ominaisuuksia

- Myöskään järjestelmä
$$y(n) = 1.1y(n-1) + x(n)$$
ei ole stabiili, sillä syötteellä $u(n)$ vaste kasvaa rajatta.
- Seuraavissa kappaleissa nähdään, että tämän tyyppisten järjestelmien stabiilisuustarkastelu voidaan tehdä yksinkertaisesti tarkastelemalla järjestelmästä laskettavaa ns. napa-nollakuviota.

Lineaariset siirtoinvariantit (LTI) järjestelmät

- Tässä kappaleessa tutustutaan järjestelmiin, jotka ovat lineaarisia ja siirtoinvariantteja (linear time-invariant; LTI).
- Tulemme havaitsemaan, että tällaisten järjestelmien suunnittelu ja toteutus on suoraviivaista ja niiden avulla voidaan toteuttaa taajuuksia muokkaavia suotimia.
- Tutustutaan ensin näiden järjestelmien perusominaisuuksiin.
- Lineaarisuusominaisuus tarkoitti, että
  1. **kertolasku voidaan suorittaa ennen suodatusta tai sen jälkeen**
  2. **yhteenlasku voidaan suorittaa ennen suodatusta tai sen jälkeen**
- Siirtoinvarianssi puolestaan tarkoitti, että
  3. **siirto voidaan tehdä ennen suodatusta tai sen jälkeen**
- Siispä LTI-järjestelmän tapauksessa on yhdentekevää, suoritetaanko kertolasku, yhteenlasku tai siirto ennen suodatusta vai sen jälkeen.

LTI: Impulssivaste ja konvoluutio

- Mainittujen kolmen ominaisuuden ollessa voimassa järjestelmälle saadaan kätevä esitysmuoto: **konvoluutio**, jossa kaikki järjestelmän ominaisuudet määräytyvat **impulssivasteen** kautta.
- Impulssivaste määritellään seuraavasti:

> *Olkoon $\mathcal{F}(\cdot)$ lineaarinen siirtoinvariantti järjestelmä. Silloin sen* **impulssivaste** *(eli järjestelmän vaste impulssille) on $\mathcal{F}[\delta(n)]$ ja siitä käytetään merkintää $h(n) = \mathcal{F}[\delta(n)]$.*

LTI: Impulssivaste ja konvoluutio

- Näimme aiemmin, että jokainen signaali voidaan esittää siirrettyjen ja skaalattujen impulssien avulla:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k).$$

- Tätä muotoa käyttäen voidaan johtaa kaikille LTI-järjestelmille yhteinen konvoluutioesitys.

LTI: Impulssivaste ja konvoluutio

- Jos järjestelmä $\mathcal{F}(\cdot)$ on lineaarinen ja siirtoinvariantti, niin silloin sen vaste herätteellä $x(n)$ voidaan esittää muodossa

$$
\begin{aligned}
y(n) = \mathcal{F}[x(n)] &= \mathcal{F}[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[x(k)\delta(n-k)] && \text{(Lineaarisuus)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathcal{F}[\delta(n-k)] && \text{(Lineaarisuus)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). && \text{(Siirtoinvarianssi)}
\end{aligned}
$$

LTI: Impulssivaste ja konvoluutio

- LTI-järjestelmän vaste mille tahansa herätteelle voidaan siis esittää yksikäsitteisesti siirrettyjen yksikkönäytteiden $\delta(n-k)$ vasteiden

$$h(n-k) = \mathcal{F}[\delta(n-k)]$$

  avulla.
- Kyseistä esitysmuotoa kutsutaan jonojen $x(n)$ ja $h(n)$ **konvoluutioksi** tai **konvoluutiosummaksi**, ja konvoluution käsitteeseen tutustutaan seuraavassa tarkemmin.

LTI: Impulssivaste ja konvoluutio

- Tarkastellaan kahta lukujonoa $x(n)$ ja $h(n)$. Lukujonojen $x(n)$ ja $h(n)$ **konvoluutiosta** käytetään merkintää $x(n) * h(n)$ ja se määritellään seuraavasti:

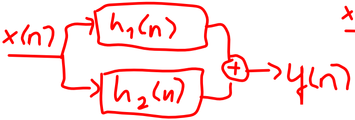
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

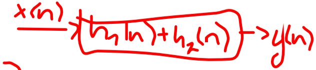
- Seuraavassa kappaleessa osoitetaan, että konvoluutio on kommutatiivinen.
- Näin ollen yllä olevan määritelmän sijasta voidaan käyttää seuraavaa yhtäpitävää muotoa:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

- Jälkimmäinen muoto on useimmissa tapauksissa havainnollisempi.

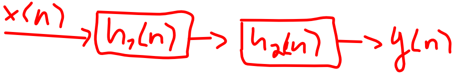
LTI: Konvoluution ominaisuuksia

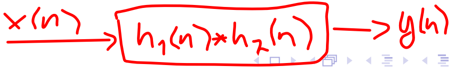




Seuraavassa esitetään lyhyesti tärkeimpiä konvoluution ja siten myös LTI-järjestelmien ominaisuuksia.:

- **Kommutatiivisuus (vaihdantalaki):** $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$.
- **Distributiivisuus (osittelulaki):** $a \cdot (b+c) = a \cdot b + ac$
  $x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$.
- **Kaskadi:** Jos sellaiset järjestelmät $\mathcal{F}_1(\cdot)$ ja $\mathcal{F}_2(\cdot)$, joiden impulssivasteet ovat $h_1(n)$ ja $h_2(n)$, kytketään sarjaan, niin kokonaisuuden eli järjestelmän $\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2(\cdot))$ impulssivaste on $h_1(n) * h_2(n)$.
- Järjestelmää $\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2(\cdot))$ sanotaan siis järjestelmien $\mathcal{F}_1(\cdot)$ ja $\mathcal{F}_2(\cdot)$ **kaskadiksi** (cascade) ja siitä käytetään merkintää $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2(\cdot) = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2(\cdot))$.





LTI: Konvoluution ominaisuuksia

- **Kausaalisuus:** Järjestelmä on kausaalinen tarkalleen silloin, kun sen impulssivaste $h(n)$ toteuttaa ehdon:

$$n < 0 \Rightarrow h(n) = 0.$$

- **Stabiilisuus:** Järjestelmä on stabiili tarkalleen silloin, kun sen impulssivaste $h(n)$ toteuttaa ehdon

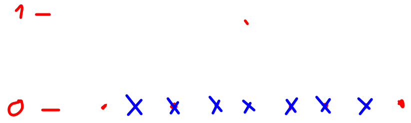
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty,$$

eli jonon $h(k)$ kaikkien alkioiden itseisarvojen summa on äärellinen.

$y(n) = \mathrm{med}\{x(n-1), x(n), x(n+1)\}$

LTI: FIR-suodin

$h(n) = 0, \forall n$



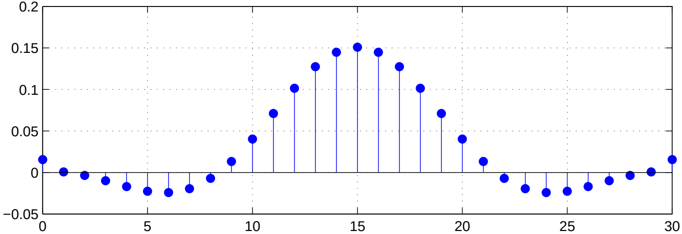
- Konvoluution avulla voidaan siis esittää kaikki LTI-järjestelmät.
- Konvoluutio käsittelee sisääntulevan signaalin $x(n)$ lukujonon $h(n)$ kertoimien määrittämällä tavalla.
- LTI-järjestelmät jaetaan kahteen luokkaan impulssivasteen pituuden mukaan.

FIR-suodin: Niin sanotun FIR-suotimen (finite impulse response) impulssivaste on äärellisen mittainen (eli tietyn rajan jälkeen molempiin suuntiin impulssivaste on aina nolla). (Huomaa, että tämä on eri asia kuin lause: ”impulssivaste on äärellinen”.)

- Alla oleva kuva esittää Matlabilla suunnitellun FIR-suotimen impulssivastetta.
- Konvoluutio kyseisen impulssivasteen kanssa poistaa signaalista tiettyä rajataajuutta suuremmat taajuudet.

LTI: FIR-suodin

- Impulssivasteen pituus on nyt 31.
- Kaikki muut impulssivasteen arvot ovat nollia.



- Kun lasketaan vastetta hetkellä n, kerrotaan herätteen x uusin näyte $x(n)$ impulssivasteen nollannella termillä $h(0)$, toiseksi uusin näyte $x(n-1)$ ensimmäisellä termillä $h(1)$, näyte $x(n-2)$ termillä $h(2)$, jne.

LTI: FIR-suodin

- Lopuksi näin saadut tulot lasketaan yhteen.
- Kaavana tämä ilmaistaan muodossa

$$y(n) = \sum_{k=0}^{30} h(k)x(n-k).$$

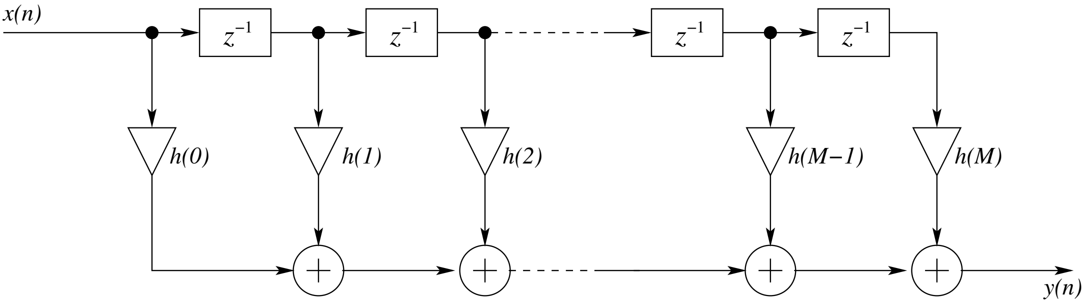
- Kausaalinen FIR-suodin määritellään yleisessä muodossaan kaavalla

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k).$$

- Suotimen **aste** M määräytyy suurimman viiveen mukaan.
- Tämän suotimen aste on M, mutta siinä on $N = M + 1$ kerrointa.

LTI: FIR-suodin

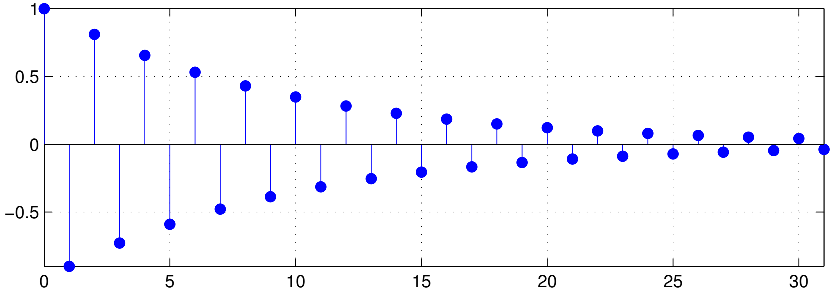
- Alla on FIR-suotimen lohkokaavio.



LTI: IIR-suodin:

IIR-suodin: Niin sanotun IIR-suotimen (infinite impulse response) impulssivaste on äärettömän pitkä (eli ei ole rajaa, jonka jälkeen impulssivaste olisi aina nolla).

- Esimerkiksi impulssivaste: $h(n) = u(n)(-0.9)^n$.



LTI: IIR-suodin:

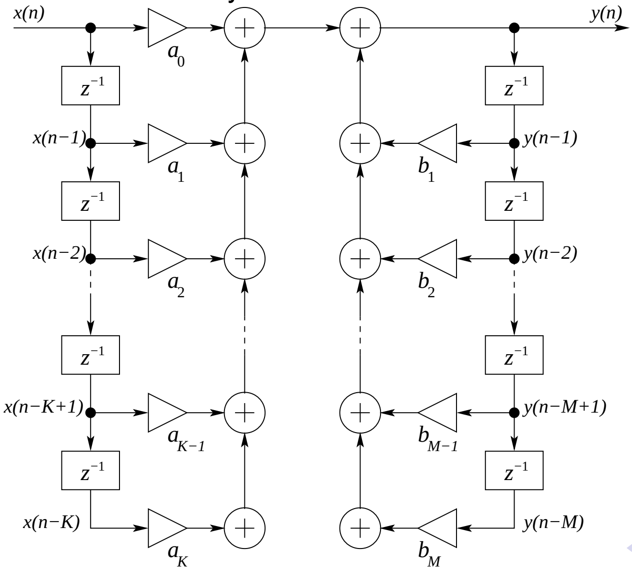
- Kuvassa on vasteen 32 ensimmäistä termiä.
- Impulssivasteessa on kuitenkin äärettömän paljon nollasta poikkeavia arvoja.
- IIR-suotimet voidaan toteuttaa differenssiyhtälöiden avulla.
- Äärettömän mittainen impulssivaste saadaan aikaiseksi takaisinkytkennällä, eli käyttämällä aiemmin laskettuja vastearvoja.
- Yleisessä muodossaan IIR-suodatin on operaatio, joka toteuttaa seuraavan differenssiyhtälön ulostulojonon $y(n)$ ja sisäänmenojonon $x(n)$ välillä:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K} a_k x(n-k) + \sum_{m=1}^{M} b_m y(n-m). \tag{1}$$

- Suodin määritellään kertoimien $a_k, k = 0, 1, \ldots, K$ ja $b_m, m = 1, 2, \ldots, M$ avulla.

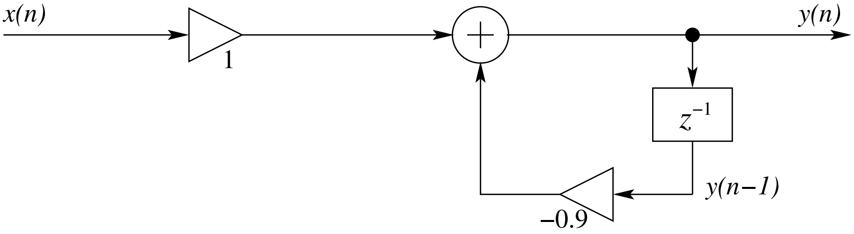
LTI: IIR-suodin:

- Seuraavassa on tämä differenssiyhtälö kaaviomuodossa.:



LTI: IIR-suodin:

- Esimerkiksi aiemmin ollut impulssivaste $h(n) = u(n)(-0.9)^n$ saadaan differenssiyhtälöstä
$$y(n) = -0.9y(n-1) + x(n),$$
kun herätteenä on impulssi $\delta(n)$.
- Kuva järjestelmästä on alla.



LTI: IIR-suodin:

Esimerkki: Lasketaan differenssiyhtälön

$$y(n) = -0.9y(n-1) + x(n)$$

määräämän järjestelmän impulssivaste.

- Olkoon siis heräte $x(n)$ yksikkönäyte.
- Tällaisessa tehtävässä oletetaan, että $y(n) = 0$, kun $n < 0$ eli että vaste on kausaalinen.
- Aletaan laskea vastetta indeksistä $n = 0$ alkaen:

$$y(0) = -0.9\underbrace{y(0-1)}_{=0} + \underbrace{x(0)}_{=1} = 1.$$

LTI: IIR-suodin:

- Seuraavaksi asetetaan indeksiksi $n = 1$, sitten $n = 2$ ja niin edelleen:

$$
\begin{aligned}
y(1) &= -0.9\underbrace{y(1-1)}_{=1} + \underbrace{x(1)}_{=0} = -0.9 \\
y(2) &= -0.9\underbrace{y(2-1)}_{=-0.9} + \underbrace{x(2)}_{=0} = (-0.9)^2 \\
y(3) &= -0.9\underbrace{y(3-1)}_{=(-0.9)^2} + \underbrace{x(3)}_{=0} = (-0.9)^3 \\
y(4) &= -0.9\underbrace{y(4-1)}_{=(-0.9)^3} + \underbrace{x(4)}_{=0} = (-0.9)^4 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

LTI: IIR-suodin:

- Tässä vaiheessa havaitaan, että vasteen yleinen muoto on

$$y(n) = (-0.9)^n, \text{ kun } n \geqslant 0$$

eli

$$y(n) = u(n)(-0.9)^n,$$

joka on tietenkin sama kuin edellisen esimerkin $h(n)$.

- Haluttaessa perustella täsmällisesti lausekkeen $y(n)$ yleinen muoto on käytettävä matemaattista induktiota luvun n suhteen: väitteenä on $y(n) = (-0.9)^n$.

LTI: IIR Filters

- Eri lähteissä kertoimien rooli saattaa olla toinen kuin yllä.
- Kyseessä on makuasia, joka saattaa kuitenkin joissain tapauksissa aiheuttaa sekaannuksia.
- Esimerkiksi Matlabia käytettäessä kertoimet annetaan vektoreina b ja a, missä b sisältää herätteen $x(n)$ kertoimet $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_M)$ ja vektori a sisältää vasteen $y(n)$ aikaisemmin laskettujen termien kertoimet $(a_0, a_1, \ldots, a_K)$; siis juuri päinvastoin kuin kaavassa (1).

LTI: IIR Filters

- Yllä olevat kertoimet toteuttavat Matlabissa järjestelmän

$$\sum_{k=0}^{K} b_k x(n-k) = \sum_{m=0}^{M} a_m y(n-m),$$

eli

$$y(n) = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{K} b_k x(n-k) - \sum_{m=1}^{M} a_m y(n-m)\right).$$

LTI: IIR Filters

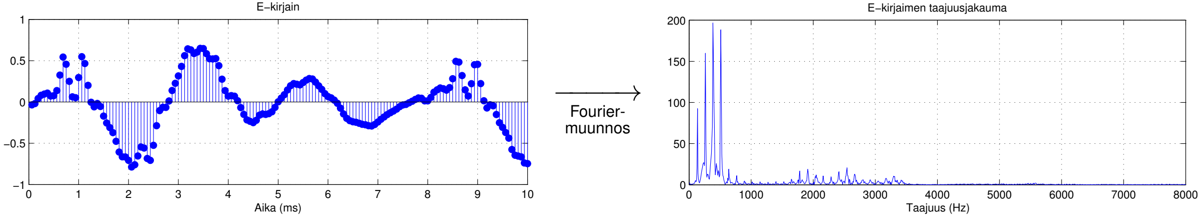
- Jos $a_0 = 1$ (kuten kaikissa Matlabin suunnittelemissa suotimissa on), saadaan lauseke vastaavaan muotoon kuin kaavassa (1):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K} b_k x(n-k) - \sum_{m=1}^{M} a_m y(n-m).$$

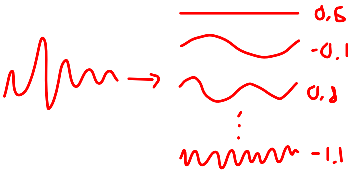
- Ainoana erona (vektorien a ja b roolien vaihtumisen lisäksi) nyt on, että vasteen kertoimet a_m ($m = 1, 2, \ldots, M$) ovat vastakkaismerkkisiä.

Fourier-muunnos

- Fourier-muunnos liittää signaalin näytearvot sen sisältämiin taajuuksiin ja vastaa kysymykseen: ”kuinka paljon signaalissa on kutakin taajuutta”.
- Muunnoksen tuloksena saadaan signaalin taajuusjakauma.
- Alla olevassa kuvassa on vasemmalla eräs testisignaali ja oikealla sen Fourier-muunnos, josta näkyy selvästi mikä on äänisignaalin hallitseva taajuus.



Fourier-muunnos



- Fourier-muunnos voidaan tehdä jatkuvalle tai diskreetille signaalille.
- Riippuen signaalin jaksollisuudesta tuloksena on vektori, diskreetti signaali tai jatkuva-aikainen signaali, jotka kuvaavat signaalin sisältämiä taajuuksia.

Fourier-muunnos

- Alla oleva taulukko esittää neljää eri muunnostyyppiä.

Muunnettavan signaalin tyyppi	**Jatkuva-aikainen**	**Diskreettiaikainen**
Ei-jaksollinen	Tuloksena on ei-jaksollinen jatkuva-aikainen signaali. Käytetään nimitystä **Fourier-muunnos**. (jatkuva $\to$ jatkuva)	Tuloksena on jaksollinen jatkuva-aikainen signaali. Käytetään nimitystä **diskreetti-aikainen Fourier-muunnos (DTFT)**. (diskreetti $\to$ jatkuva)
Jaksollinen	Tuloksena on ei-jaksollinen diskreettiaikainen signaali. Käytetään nimitystä **Fourier-sarja**. (jatkuva $\to$ diskreetti)	Tuloksena on jaksollinen diskreettiaikainen signaali. Käytetään nimitystä **diskreetti Fourier-muunnos (DFT)**. (diskreetti $\to$ diskreetti)

Fourier-muunnos

- Fourier-muunnos esittää muunnettavan signaalin kompleksisten eksponenttifunktioiden $(\ldots, e^{-3it}, e^{-2it}, e^{-it}, e^{0}, e^{it}, e^{2it}, e^{3it}, \ldots)$ avulla, missä $i = \sqrt{-1}$ on **imaginääriyksikkö**.
- Eulerin kaavan mukaan kukin näistä funktioista on itse asiassa sinin ja kosinin summa:

$$e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt).$$

- Näin ollen kompleksinen eksponenttifunktio koostuu sinin ja kosinin värähtelyistä, missä k määrää taajuuden.

Fourier-muunnos

- Kumpi tahansa muoto on käyttökelpoinen, mutta käytännössä eksponettifunktion kanssa on paljon helpompi työskennellä (esim. kahden kompleksisen eksponettifunktion tulo: $e^{ikt}e^{imt}$ on helpompi sieventää kuin $(\cos(kt) + i\sin(kt))(\cos(mt) + i\sin(mt))$).
- Fourier-analyysin ideana on selvittää voidaanko tietty signaali (funktio, lukujono) esittää kompleksisten eksponenttifunktioiden painotettuna summana (eli lineaarikombinaationa).
- Jos tämä on mahdollista, täytyy vielä ratkaista kunkin eksponenttifunktion painokerroin.
- Tästä painokertoimesta voidaan sitten päätellä kuinka paljon signaalissa on kyseistä taajuutta.

Fourier-muunnos

- Lisäksi siitä käy ilmi missä vaiheessa kyseinen taajuuskomponentti on.
- Digitaalisen signaalinkäsittelyn sovelluksissa käytetään pääasiassa diskreettiä Fourier-muunnosta signaalin taajuussisältöä analysoitaessa.
- Syynä on se, että laskenta on tällöin puettavissa matriisikertolaskun muotoon ja laskut ovat näin ollen äärellisiä ja helppoja suorittaa tietokoneella.
- Muut muunnostyypit ovat teoreettisia työkaluja joita käytetään esimerkiksi suodinsuunnittelussa.
- Näiden laskukaavat sisältävät äärettömiä summia sekä integraaleja, jotka ovat tietokoneella laskettaessa hankalia käsiteltäviä.
- Näin ollen ne soveltuvat huonommin taajuuksien automaattiseen analyysiin.
- Sen sijaan ne ovat korvaamaton työkalu suunnitteluvaiheessa.

Fourier-muunnos

- Sovellusten kannalta tärkein muunnostyyppi on diskreetti Fourier-muunnos ja sen toteuttava nopea algoritmi FFT.
- Muun muassa ikkunamenetelmän yhteydessä tarvitaan kuitenkin diskreettiaikaista Fourier-muunnosta, joten siihenkin on syytä tutustua lyhyesti.
- Täydellisyyden vuoksi mainitaan myös jatkuva-aikaisten signaalien muunnokset.
- Ne saattavat tulla kuitenkin myöhemmin vastaan jatkuvia signaaleja käsiteltäessä, esimerkiksi tietoliikennetekniikassa.
- Jonon Fourier-muunnoksesta on tapana käyttää vastaavaa isoa kirjainta; siis esim. jonon x Fourier-muunnos on X ja jonon y Fourier-muunnos on Y.

Fourier-muunnos (ei-jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Ensimmäinen muunnostyyppi muuntaa jatkuva-aikaisen signaalin jatkuva-aikaiseksi signaaliksi, eli selvittää kuinka jatkuva funktio voidaan esittää kompleksisten eksponentiaalien painotettuna integraalina. (Painotettu integraali tarkoittaa integraalia, jossa integroitava funktio kerrotaan painofunktiolla ennen integrointia. Vastaava kuin painotettu summa, mutta summan tilalla integraali.)
- Jos muunnettavana on ei-jaksollinen jatkuva-aikainen signaali $x(t)$ ($t \in \mathbf{R}$), määritellään sen Fourier-muunnos integraalina

$$X(e^{i\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

- Tuloksena saadaan muuttujan $\omega \in \mathbf{R}$ funktio.

Fourier-muunnos (ei-jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Fourier-muunnoksesta päästään takaisin alkuperäiseen signaaliin **käänteisellä Fourier-muunnoksella**:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(e^{i\omega}) e^{i\omega t} \, d\omega.$$

- Merkintä $X(e^{i\omega})$ saattaa näyttää hankalalta, mutta kuvastaa myöhemmin tarkasteltavaa Fourier-muunnoksen ja z-muunnoksen yhteyttä.
- Funktio $X(e^{i\omega})$ on nyt siis reaalimuuttujan ω funktio.
- Periaatteessa voitaisiin siis käyttää merkintää $X(\omega)$, mutta se saattaisi aiheuttaa sekaannuksia jatkossa.

Fourier-muunnos (ei-jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Esimerkiksi signaalin

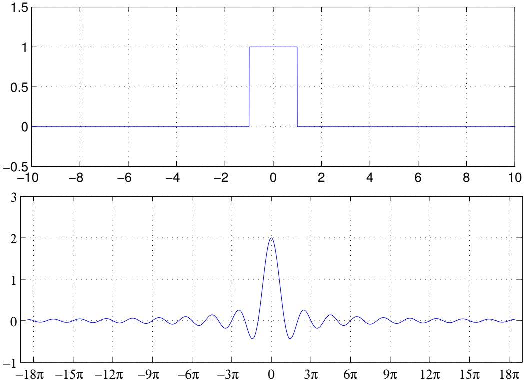
$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Fourier-muunnos on

$$X(e^{i\omega}) = \begin{cases} \frac{2\sin(\omega)}{\omega}, & \text{kun } \omega \neq 0 \\ 2, & \text{kun } \omega = 0. \end{cases}$$

Fourier-muunnos (ei-jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Kuvaajat ovat alla olevissa kuvissa; ylemmässä on $x(t)$ ja alemmassa $X(e^{i\omega})$.



Fourier-muunnos (ei-jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Yleensä Fourier-muunnos on kompleksiarvoinen funktio, mutta tässä esimerkissä tulosfunktio sattumoisin oli reaalinen.
- Näin käy aina kun muunnettava signaali on symmetrinen y-akselin suhteen.
- Useimmiten lopputuloksessa on kuitenkin myös kompleksiosa.
- Tällöin muunnos esitetään kahtena kuvaajana: ensimmäisessä on funktion itseisarvo ja toisessa sen vaihekulma.

Fourier-sarja (jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Toinen muunnostyyppi muuntaa jatkuva-aikaisen signaalin diskreettiaikaiseksi, eli selvittää kuinka jaksollinen funktio on esitettävissä kompleksisten eksponentiaalien painotettuna summana.
- Jaksollisen signaalin tapauksessahan ei voida käyttää edellisen kappaleen Fourier-muunnosta, koska jaksollisen signaalin tapauksessa Fourier-muunnoksen määräävä integraali ei suppene. (Ainoa poikkeus on nollasignaali $x(t) \equiv 0$.)
- Jaksollisen signaalin tapauksessa informaation määrä on siinä mielessä pienempi, että yksi jakso signaalista määrää sen käyttäytymisen täysin.
- Osoittautuukin, että jaksollisen signaalin esittämiseen riittää diskreetti määrä taajuuksia.

Fourier-sarja (jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Tuloksena on siis kokonaislukuarvoilla määritelty lukujono.
- Olkoon $x(t)$ 2π-jaksollinen jatkuva-aikainen signaali (siis $x(t) = x(t + 2\pi)$).
- Sen Fourier-sarja on diskreettiaikainen signaali

$$X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int} \, dt,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

- Jos tiedetään Fourier-sarja $X(n)$, päästään takaisin alkuperäiseen signaaliin kaavalla

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) e^{int}.$$

Fourier-sarja (jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Tarkastellaan esimerkkiä jatkuvan jaksollisen signaalin Fourier-sarjaesityksestä.
- Määritellään funktio $x(t)$ seuraavasti:

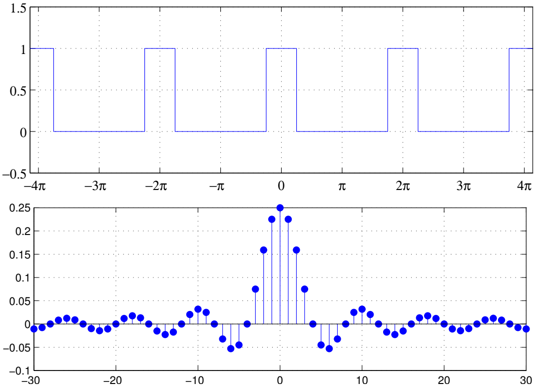
$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } -\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{muissa välin } [-\pi, \pi] \text{ pisteissä.} \end{cases}$$

- Funktio $x(t)$ on nimeltään **kanttiaalto.**
- Välin $[-\pi, \pi]$ ulkopuolella f on periodinen: $x(t) = x(t + 2\pi)$.
- Tämän funktion Fourier-sarjaesitys on

$$X(n) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4}, & \text{kun } n \neq 0, \\ \frac{1}{4}, & \text{kun } n = 0. \end{cases}$$

Fourier-sarja (jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Signaalin $x(t)$ ja sen Fourier-sarjakehitelmän kertoimien kuvaajat:



Fourier-sarja (jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Tässäkin tapauksessa tulos on reaalinen, koska muunnettava signaali on symmetrinen y-akselin suhteen.
- Fourier-sarjaa voidaan käyttää hyväksi mm. generoitaessa sinien ja kosinien avulla monimutkaisempia aaltomuotoja.
- Sähköteknisissä laitteissa eritaajuuksiset siniaallot ovat generoitavissa melko luontevasti, mutta esimerkiksi edellämainittu jaksollinen kanttiaalto täytyy muodostaa sinien ja kosinien avulla.
- Tämä onnistuu käyttäen pientä osaa edellä lasketun Fourier-sarjan kertoimista.

Fourier-sarja (jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

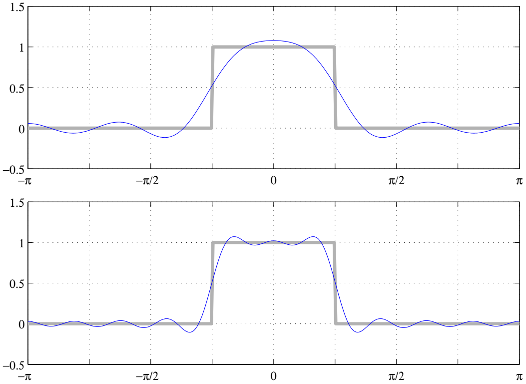
- Käyttämällä kertoimia $X(-5), X(-4), \ldots, X(5)$ (kaikkiaan 11 kpl) saadaan approksimaatio kanttiaallolle:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= X(-5)e^{-5it} + X(-4)e^{-4it} + X(-3)e^{-3it} + \cdots + X(4)e^{4it} + X(5)e^{5it} \\
&= -0.0450e^{-5it} + 0.0750e^{-3it} + 0.1592e^{-2it} + 0.2251e^{-it} + 0.2500 \\
&+ 0.2251e^{it} + 0.1592e^{2it} + 0.0750e^{3it} - 0.0450e^{5it}.
\end{aligned}
$$

- Valitsemalla kertoimet symmetrisesti nollan molemmin puolin, supistuvat kaikki lausekkeessa olevat imaginaariosat pois, ja lopputulos on reaalinen funktio.
- Yhdentoista kertoimen avulla saatava approksimaatio ei ole vielä kovin tarkka, mutta kertoimia lisäämällä saadaan funktio lähemmäs todellista kanttiaaltoa.

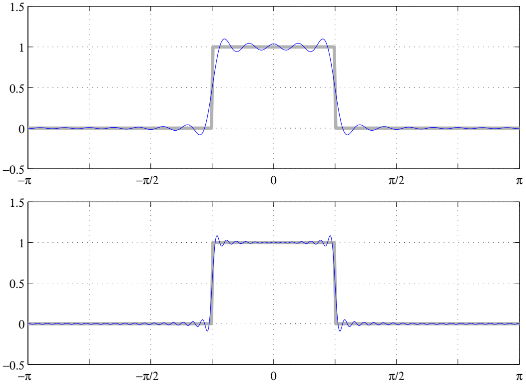
Fourier-sarja (jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- 11 (ylhäällä) ja 21 (alhaalla) kerrointa:



Fourier-sarja (jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- 41 (ylhäällä) ja 101 (alhaalla) kerrointa:



Fourier-sarja (jaksollinen jatkuva-aikainen signaali)

- Kuvista havaitaan, että approksimaatio muuttuu tarkemmaksi kun kertoimien määrää lisätään.
- Pystyakselille jää kuitenkin aina noin kymmenen prosentin heitto reunan molemmille puolille.
- On havaittu, ettei tätä maksimipoikkeamaa voida pienentää kertoimien määrää kasvattamalla.
- Kertoimien lisääminen kyllä kaventaa korkeinta huippua, mutta sen korkeus pysyy suunnilleen vakiona.
- Tästä Fourier-sarjalle tyypillisestä käyttäytymisestä käytetään nimeä **Gibbs-ilmiö** (engl. **Gibbs phenomenon**).

DTFT (diskreettiaikainen ei-jaksollinen signaali)

- Kolmannessa muunnostyypissä ei-jaksollinen lukujono esitetään kompleksisten eksponentiaalien painotettuna integraalina.
- Toisin kuin ensimmäisessä muunnostyypissä, nyt riittää integroida välillä $[-\pi, \pi]$.
- Diskreettiaikaisen ei-jaksollisen signaalin $x(n)$ Fourier-muunnos on signaali

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}.$$

- Tuloksena on siis reaalimuuttujan ω funktio X.

DTFT (diskreettiaikainen ei-jaksollinen signaali)

- Jos tämä funktio tiedetään, päästään takaisin alkuperäiseen signaaliin kaavalla

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega})e^{i\omega n}\, d\omega.$$

- Kaavoista havaitaan, että itse asiassa tämä muunnos määritellään melkein samoilla kaavoilla kuin edellisen kappaleen Fourier-sarja.

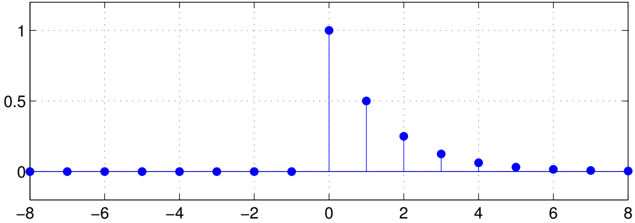
DTFT (diskreettiaikainen ei-jaksollinen signaali)

Esimerkki: Määrätään signaalin $x(n) = 0.5^n u(n)$ Fourier-muunnos. Nyt

$$\begin{aligned} X(e^{i\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5^n e^{-i\omega n} u(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n e^{-i\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (0.5e^{-i\omega})^n \qquad (\text{Geom. sarja, } |0.5e^{-i\omega}| = 0.5 < 1) \\ &= \frac{1}{1 - 0.5e^{-i\omega}}. \end{aligned}$$

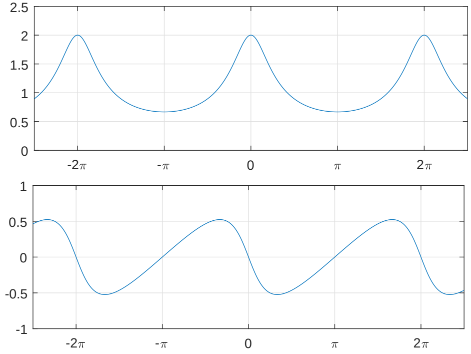
DTFT (diskreettiaikainen ei-jaksollinen signaali)

- Alla ovat alkuperäisen signaalin ja sen Fourier-muunnoksen kuvaajat; alkuperäisen signaalin $x(n)$ kuvaaja:



DTFT (diskreettiaikainen ei-jaksollinen signaali)

- Fourier-muunnoksen itseisarvon $|X(e^{i\omega})|$ ja vaihekulman $\arg(X(e^{i\omega}))$ kuvaajat kulmataajuuden ω funktiona:



DTFT (diskreettiaikainen ei-jaksollinen signaali)

- Diskreettiaikainen Fourier-muunnos $X(e^{i\omega})$ ilmaisee millä kertoimella eri kompleksiset eksponenttifunktiot tulee ottaa mukaan muodostettaessa tarkasteltavan signaalin esitystä taajuuksien avulla.
- Jos halutaan tietää kuinka suurella kertoimella taajuus f Hertseinä on mukana annetussa lukujonossa, jaetaan f ensin näytteenottotaajuudella F_s ja näin saatu normalisoitu taajuus $\frac{f}{F_s}$ muunnetaan kulmataajuudeksi ω kertomalla luvulla 2π.
- Oletetaan esimerkiksi, että edellisen esimerkin signaali $x(n) = 0.5^n u(n)$ on saatu aikaan järjestelmällä, jonka näytteenottotaajuus on 8000 Hz.

DTFT (diskreettiaikainen ei-jaksollinen signaali)

- Nyt 1000 Hertsin taajuus (eli signaali $e^{in\cdot(2\pi\cdot 1000/8000)}$) on signaalissa mukana kertoimella

$$X(e^{i\cdot 2\pi\frac{f}{Fs}}) = X(e^{i\cdot 2\pi\frac{1000}{8000}}) = X(e^{\frac{\pi i}{4}}) = \frac{1}{1-0.5e^{-\frac{\pi i}{4}}} = 1.19 - 0.65i.$$

- Vastaavasti 2000 Hertsin taajuus (eli signaali $e^{in\cdot(2\pi\cdot 2000/8000)}$) on signaalissa $x(n)$ mukana kertoimella

$$X(e^{i\cdot 2\pi\frac{f}{Fs}}) = X(e^{i\cdot 2\pi\frac{2000}{8000}}) = X(e^{\frac{\pi i}{2}}) = \frac{1}{1-0.5e^{-\frac{\pi i}{2}}} = 0.8 - 0.4i.$$

- Koska tuhannen Hertsin kerroin on itseisarvoltaan 1.36 ja kahdentuhannen Hertsin kerroin 0.89, on signaalissa enemmän tuhannen Hertsin taajuutta kuin kahdentuhannen Hertsin taajuutta.

DTFT (diskreettiaikainen ei-jaksollinen signaali)

- Kaikkien signaalin sisältämien taajuuksien jakauma voidaan lukea yllä olevasta funktion $|X(e^{i\omega})|$ kuvaajasta.
- Nollataajuus on luonnollisesti nollan kohdalla ja signaalin sisältämä suurin taajuus (eli Nyquistin rajataajuus) on kulmataajuuden $\omega = 2\pi \cdot (0.5F_s)/F_s = \pi$ kohdalla.
- Eniten signaalissa on nollataajuutta (kertoimen itseisarvo on 2) ja vähiten Nyquistin taajuutta (kertoimen itseisarvo on $\frac{2}{3}$).
- Vaikka kertoimet ja eksponenttifunktiot ovatkin kompleksisia, integroinnin tuloksena on tässä tapauksessa reaalinen lukujono, koska negatiiviset taajuudet kumoavat kompleksitermit.