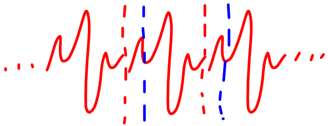
# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)



- Sovellusten kannalta tärkein mainituista neljästä muunnostyypistä on diskreetti Fourier-muunnos joka muuntaa diskreettiaikaisen jaksollisen signaalin diskreettiaikaiseksi jaksolliseksi signaaliksi.
- Muunnoksen lopputulos sisältää tiedon alkuperäisen signaalin sisältämistä taajuuksista, joita on äärellinen määrä.
- Jakson pituutta kasvatettaessa kohti ääretöntä on lopputuloksena diskreettiaikainen Fourier-muunnos, eli taajuusakseli muuttuu tällöin jatkuvaksi.
- Koska jaksollisesta signaalista tarvitsee tietää vain yksi jakso, voidaan koko operaatio esittää vektoreiden avulla.
- Tällöin itse operaatio on matriisikertolasku.

# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

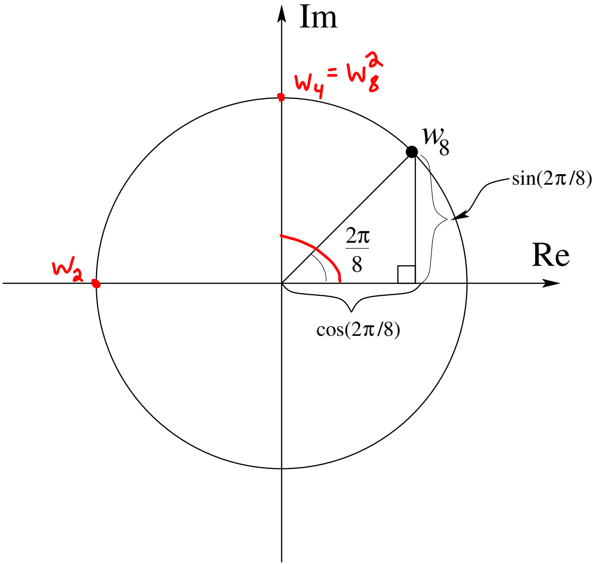
- Tähän muotoon palataan määritelmien jälkeen.
- Diskreetin Fourier-muunnoksen määritelmässä on kertoimena luku $w_N = e^{2\pi i/N}$, joka on nimeltään **ykkösen** $N$**:s juuri** ($N$'th root of unity).
- Nimensä mukaisesti tämän luvun $N$:s potenssi on yksi:

$$w_N^N = (e^{2\pi i/N})^N = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1.$$

- Luku $w_N$ sijaitsee kompleksitason yksikköympyrällä kulmassa $2\pi/N$. Kulma on $\frac{1}{N}$ koko ympyrästä, ks. kuva.

# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Luvun $w_8$ sijainti:



# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Diskreettiaikaisen jaksollisen signaalin $x(n)$ (jakso $N$) Fourier-muunnos määritellään kaavalla
$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) w_N^{-kn}.$$
- Signaalin $X(n)$ käänteinen diskreetti Fourier-muunnos on
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) w_N^{kn}.$$
- Diskreetti Fourier-muunnos (DFT) ja käänteinen diskreetti Fourier-muunnos (IDFT) on mahdollista esittää myös matriisimuodossa.

# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Tämä onkin yleensä kaikkein kätevin esitysmuoto. Olkoon $x(n)$ muunnettava signaali, ja vektori

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

sen yksi jakso.

# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Tällöin sen diskreetti Fourier-muunnos saadaan kertomalla vektori $\mathbf{x}$ matriisilla

$$\begin{pmatrix} w_N^0 & w_N^0 & w_N^0 & \cdots & w_N^0 \\ w_N^0 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \cdots & w_N^{-(N-1)} \\ w_N^0 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \cdots & w_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N^0 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \cdots & w_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

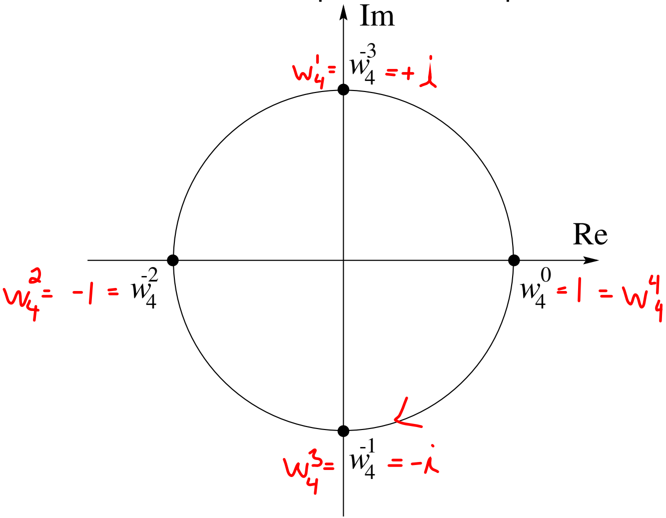
- Esimerkiksi perusjaksolla $N = 4$ DFT saadaan laskettua kertomalla vektori matriisilla

$$\begin{pmatrix} w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 \\ w_4^0 & w_4^{-1} & w_4^{-2} & w_4^{-3} \\ w_4^0 & w_4^{-2} & w_4^{-4} & w_4^{-6} \\ w_4^0 & w_4^{-3} & w_4^{-6} & w_4^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

- Matriisi on generoitavissa kompleksitason yksikköympyrän avulla.
- Tapauksessa $N = 4$ kaikki termit ovat luvun $w_4$ ei-positiivisia potensseja.
- Luku $w_4$ sijaitsee yksikköympyrällä kulmassa $\frac{2\pi}{4}$, joka on neljäsosa koko ympyrästä.

# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Negatiiviset potenssit saadaan kuten positiivisetkin, paitsi että kiertosuunta vaihtuu.



# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Muunnosmatriisin ylimmällä rivillä eksponentti on aina nolla, seuraavalla rivillä se pienenee aina yhdellä, sitä seuraavilla kahdella, kolmella, jne.
- Esimerkiksi tapauksessa $\mathrm{N} = 6$ muunnosmatriisi on seuraava.

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} w_6^0 & w_6^0 & w_6^0 & w_6^0 & w_6^0 & w_6^0 \\ w_6^0 & w_6^{-1} & w_6^{-2} & w_6^{-3} & w_6^{-4} & w_6^{-5} \\ w_6^0 & w_6^{-2} & w_6^{-4} & w_6^{-6} & w_6^{-8} & w_6^{-10} \\ w_6^0 & w_6^{-3} & w_6^{-6} & w_6^{-9} & w_6^{-12} & w_6^{-15} \\ w_6^0 & w_6^{-4} & w_6^{-8} & w_6^{-12} & w_6^{-16} & w_6^{-20} \\ w_6^0 & w_6^{-5} & w_6^{-10} & w_6^{-15} & w_6^{-20} & w_6^{-25} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{eksponentin muutos on } \quad 0 \\ \leftarrow \text{eksponentin muutos on } -1 \\ \leftarrow \text{eksponentin muutos on } -2 \\ \leftarrow \text{eksponentin muutos on } -3 \\ \leftarrow \text{eksponentin muutos on } -4 \\ \leftarrow \text{eksponentin muutos on } -5 \end{array} \end{array}$$

# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Muunnosmatriisi on helppo tehdä piirtämällä yksikköympyrälle luvun $w_N$ ei-positiiviset potenssit ja hyppimällä näin saatuja pisteitä myötäpäivään nollan, yhden, kahden, jne. askeleen välein.

**Esimerkki:** Lasketaan lukujonon $x(n)$: $(0, 1, 2, 3)^T$ diskreetti Fourier-muunnos. Muunnos tapahtuu matriisikertolaskulla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2+2i \\ -2 \\ -2-2i \end{pmatrix}$$

- Perusjakson $N = 4$ tapauksessa muunnosmatriisi on yksinkertainen.
- Tilanne saattaa olla toinen muilla perusjaksoilla.

# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

**Esimerkki:** Lasketaan lukujonon $x(n)$: $(0,1,2)^T$ diskreetti Fourier-muunnos. Nyt perusjakso on $N = 3$, jolloin tarvittava muunnosmatriisi on

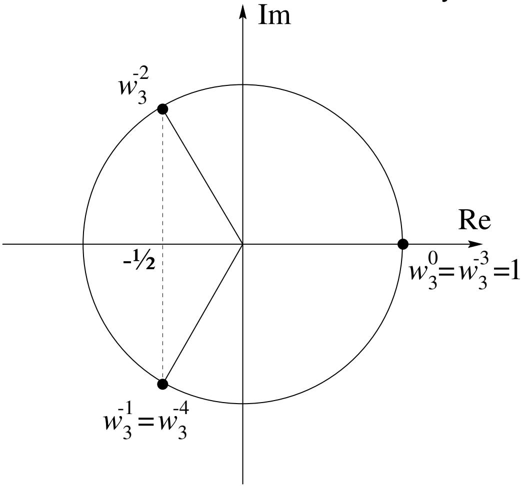
$$\begin{pmatrix} w_3^0 & w_3^0 & w_3^0 \\ w_3^0 & w_3^{-1} & w_3^{-2} \\ w_3^0 & w_3^{-2} & w_3^{-4} \end{pmatrix}.$$

- Nyt luvut $w_3^{-k}$, $k = 0, 1, 2, 4$, saadaan laskettua Eulerin kaavan avulla, jolloin muunnosmatriisiksi tulee

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Muunnosmatriisin laskemista voidaan havainnollistaa yksikköympyrän avulla:



# DFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Haluttu diskreetti Fourier-muunnos on nyt siis

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

# IDFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Vektorin $\mathbf{X}$ käänteismuunnos saadaan kertomalla vektori matriisilla

$$\frac{1}{N}\begin{pmatrix} w_N^0 & w_N^0 & w_N^0 & \cdots & w_N^0 \\ w_N^0 & w_N & w_N^2 & \cdots & w_N^{N-1} \\ w_N^0 & w_N^2 & w_N^4 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N^0 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix},$$

eli aiemmin olleen matriisin käänteismatriisilla.

- Matriisi eroaa aikaisemmasta siten, että eksponentit ovat vastakkaismerkkisiä ja matriisilla on kerroin $\frac{1}{N}$.

# IDFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

- Kertoimet nähdään tässäkin tapauksessa yksikköympyrältä, mutta nyt vastapäivään kiertämällä.
- Tapauksessa $N = 4$ matriisi saa muodon

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 \\ w_4^0 & w_4 & w_4^2 & w_4^3 \\ w_4^0 & w_4^2 & w_4^4 & w_4^6 \\ w_4^0 & w_4^3 & w_4^6 & w_4^9 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

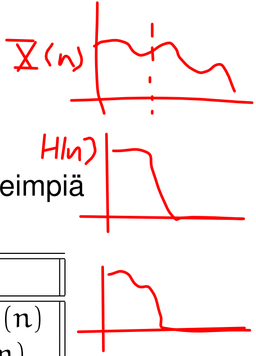
# IDFT (diskreettiaikainen jaksollinen signaali)

**Esimerkki:** Olkoon erään signaalin diskreetti Fourier-muunnos $X(n)$: $(-3, \frac{3i+9\sqrt{3}}{3i+\sqrt{3}}, \frac{6i+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}})^T$. Määrätään alkuperäinen signaali $x(n)$ eli signaalin $X(n)$ käänteinen Fourier-muunnos.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3i+9\sqrt{3}}{3i+\sqrt{3}} \\ \frac{6i+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

joten $x(n)$: $(1, 0, -4)^T$.

# DFT:n ominaisuuksia




- Seuraavassa tarkastellaan diskreetin Fourier-muunnoksen tärkeimpiä ominaisuuksia.

| **Lukujono** | **DFT** |
|---|---|
| $x(n), x_1(n), x_2(n)$ | $X(n), X_1(n), X_2(n)$ |
| $ax_1(n) + bx_2(n)$ | $aX_1(n) + bX_2(n)$ |
| $x(n+m)$ | $w_N^{nm} X(n)$ |
| $w_N^{-nm} x(n)$ | $X(n+m)$ |
| $x_1(n) * x_2(n)$ (konvoluutio) | $X_1(n)X_2(n)$ |
| $x_1(n)x_2(n)$ | $\frac{1}{N} X_1(n) * X_2(n)$ |
| $\overline{x(n)}$ (kompleksikonjugaatti) | $\overline{X(-n)}$ |

# DFT:n ominaisuuksia

- Lisäksi seuraavat ominaisuudet pitävät paikkansa jos lukujono $x(n)$ on reaalinen.
  - $X(n) = \overline{X(-n)}$
  - Re $[X(n)] =$Re $[X(-n)]$
  - Im $[X(n)] = -$Im $[X(-n)]$
  - $|X(n)| = |X(-n)|$ (DFT on siis symmetrinen origon suhteen.)
  - arg$[X(n)] = -$ arg$[X(-n)]$.

# DFT:n ominaisuuksia

- Fourier-muunnos muuntaa siis konvoluution kertolaskuksi.
- Ominaisuus on voimassa muillakin muunnostyypeillä sekä seuraavan kappaleen $z$-muunnoksella.
- Kertolaskun yksinkertaisuus ja havainnollisuus konvoluutioon verrattuna tekee tästä ominaisuudesta tärkeän työkalun jatkossa.
- Tämä myös antaa konvoluutiolle taajuustulkinnan: konvoluutiossa taajuusjakaumat kerrotaan keskenään.
- Tämä mahdollistaa sellaisten jonojen suunnittelun, jotka konvoluutiossa poistavat tietyt taajuudet kokonaan—riittää, että taajuusvaste on poistettavalla alueella nolla.

# FFT

- Vektoreiden Fourier-muunnosten laskeminen suoraan määritelmän perusteella on käytännössä melko vaivalloista.
- $\mathrm{N}$-ulotteisen vektorin kertominen $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$-matriisilla vaatii $\mathrm{N}^2$ kertolaskua ja $\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)$ yhteenlaskua.
- $\mathrm{N}$-ulotteisen Fourier-muunnoksen ajantarve on siis suoraan verrannollinen dimension neliöön.
- Kuitenkin niin sanotulla **nopealla Fourier-muunnoksella** (engl. Fast Fourier Transform; FFT) voidaan Fourier-muunnos toteuttaa kompleksisuudella $\mathrm{O}(\mathrm{N} \log \mathrm{N})$, eli huomattavasti nopeammin etenkin kun $\mathrm{N}$ on suuri.

# FFT

- Vuonna 1965 julkaistussa artikkelissaan Cooley ja Tukey esittelivät nopeamman tavan suorittaa diskreetti Fourier-muunnos, ja tämä tulos antoikin Fourier-analyysille aivan uusia ulottuvuuksia ja käytännön sovelluksia.
- Vaikka nopean Fourier-muunnoksen periaate olikin jo Gaussin keksimä, vasta Cooley ja Tukey havaitsivat sen käyttökelpoisuuden tietokoneilla suoritettavassa laskennassa.
- Tämä Cooleyn ja Tukeyn nopea Fourier-muunnos perustuu niin sanottuun **hajoita ja hallitse** -algoritmien suunnittelumenetelmään, jossa annettu tehtävä muunnetaan ensin pienemmiksi osaongelmiksi, jotka sitten voidaan ratkaista huomattavasti helpommin kuin alkuperäinen ongelma.
- FFT-algoritmin tapauksessa muunnettava vektori jaetaan kahteen osaan ja näin saadut vektorit muunnetaan rekursiivisesti samalla algoritmilla.

# FFT

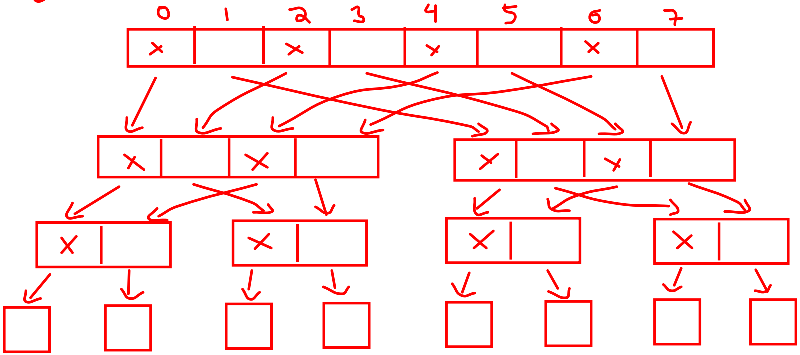
- Rekursio loppuu kun muunnettavan vektorin dimensio on yksi, koska yksiulotteisen vektorin Fourier-muunnos on määritelmän perusteella se itse.
- Koska joka vaiheessa vektori jaetaan kahtia, on sen alkuperäinen dimensio oltava muotoa $2^k$, $k \in \mathbb{N}$.
- Itse muunnoksen johtamisessa tarvitaan seuraavaa huomiota luvuista $w_k$ ja $w_{2k}$. Näillä luvuilla on nimittäin voimassa sääntö

$$w_{2k}^2 = e^{\frac{2 \cdot 2\pi i}{2k}} = e^{\frac{2\pi i}{k}} = w_k. \tag{2}$$

- Säännön mukaan ylä- ja alaindeksi voidaan ”supistaa” esimerkiksi näin: $w_4^2 = w_2$ ja $w_{10}^2 = w_5$.

# FFT

N=8



# FFT

- Yhtälöstä (2) nähdään helposti, että sääntö on voimassa myös muille yhteisille tekijöille kuin kakkoselle.
- Seuraavassa Fourier-muunnoksen algoritmin johtamisessa tarvitaan kuitenkin vain kaavan (2) tapausta.
- Olkoon $x(n)$ jaksollinen lukujono, jonka jakso on $N = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Sen diskreetti Fourier-muunnos on määritelmän mukaan

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) w_N^{-nk}.$$

# FFT

- Tarkastellaan erikseen parillis- ja paritonindeksisiä komponentteja:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) w_N^{-n(2k)} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) w_N^{-n(2k+1)}.$$

- Koska kaavan (2) mukaan $w_N^2 = w_{N/2}$, niin

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) w_{N/2}^{-nk} + w_N^{-n} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) w_{N/2}^{-nk}.$$

# FFT

- Jos merkitään $x_0(k) = x(2k)$ ja $x_1(k) = x(2k+1)$ (ja Fourier-muunnoksia vastaavasti $X_0(n)$ ja $X_1(n)$), niin saadaan yhtälö

$$X(n) = X_0(n) + w_N^{-n} X_1(n), \tag{3}$$

kun $n = 0, 1, 2, \ldots, N/2 - 1$ ja

$$X(n) = X_0(n - N/2) + w_N^{-n} X_1(n - N/2), \tag{4}$$

kun $n = N/2, N/2 + 1, \ldots, N - 1$.

# FFT

- Jakojäännöksen avulla nämä voidaan esittää myös yhtenä kaavana:

$$X(n) = X_0\,(\mathrm{mod}\,(n, N/2)) + w_N^{-n} X_1\,(\mathrm{mod}\,(n, N/2))\,, \tag{5}$$

  missä $n = 0, 1, \ldots, N-1$ ja $\mathrm{mod}(a, b)$ on jakojäännös jaettaessa luku $a$ luvulla $b$.
- Näin ollen Fourier-muunnos periodiselle jonolle, jonka jakso on $N$ saadaan laskemalla kaksi Fourier-muunnosta, joiden pituudet ovat $N/2$.
- Nämä kaksi edelleen saadaan rekursiivisesti laskemalla yhteensä neljä Fourier-muunnosta, joiden pituudet ovat $N/4$.

# FFT

- Näin saatiin nopean Fourier-muunnoksen algoritmi.

**FFT algoritmi**

1. Jos muunnettavan vektorin dimensio on $N = 1$, palauta se sellaisenaan.
2. Jaetaan muunnettava lukujono $x(n)$ kahdeksi lukujonoksi $x_0(n)$ ja $x_1(n)$, joista $x_0(n)$ koostuu parillisindeksisistä ja $x_1(n)$ paritonindeksisistä komponenteista.
3. Lasketaan lukujonojen $x_0(n)$ ja $x_1(n)$ Fourier-muunnokset rekursiivisesti tällä algoritmilla.
4. Lopputulos saadaan yhdistämällä jonot $X_0(n)$ ja $X_1(n)$ kaavojen (3) ja (4) tai (5) mukaisesti.

# FFT

**Esimerkki:** Tarkastellaan jaksollista lukujonoa $(0, 1, 2, 3)^T$, jonka jakso on 4 ja suoritetaan sille nopea Fourier-muunnos.

- Ensin muodostetaan lukujonot

$$x_0(n) : (0, 2)^T \text{ ja } x_1(n) : (1, 3)^T$$

ja edelleen rekursiivisesti niistä muodostetaan lukujonot

$$x_{00}(n) : 0, x_{01}(n) : 2, x_{10}(n) : 1 \text{ ja } x_{11}(n) : 3.$$

- Nyt muunnettavien vektorien dimensio on $N = 1$, joten saadaan

$$X_{00}(0) = 0, X_{01}(0) = 2, X_{10}(0) = 1 \text{ and } X_{11}(0) = 3.$$

# FFT

- Kaavoista (3) ja (4) saadaan $X_0(n)$ yhdistämällä jonot $X_{00}(n)$ ja $X_{01}(n)$:

$$
\begin{aligned}
X_0(0) &= \underbrace{X_{00}(0)}_{=0} + \underbrace{w_2^0}_{=1} \underbrace{X_{01}(0)}_{=2} = 2, \\
X_0(1) &= \underbrace{X_{00}(1-1)}_{=0} + \underbrace{w_2^{-1}}_{=-1} \underbrace{X_{01}(1-1)}_{=2} = -2.
\end{aligned}
$$

$X_1(n)$ saadaan tekemällä sama jonoille $X_{10}(n)$ ja $X_{11}(n)$:

$$
\begin{aligned}
X_1(0) &= \underbrace{X_{10}(0)}_{=1} + \underbrace{w_2^0}_{=1} \underbrace{X_{11}(0)}_{=3} = 4, \\
X_1(1) &= \underbrace{X_{10}(1-1)}_{=1} + \underbrace{w_2^{-1}}_{=-1} \underbrace{X_{11}(1-1)}_{=3} = -2.
\end{aligned}
$$

# FFT

- Jonojen Fourier-muunnokset ovat siis $X_0(n)$: $(2, -2)^T$ ja $X_1(n)$: $(4, -2)^T$.
- Lopuksi nämä yhdistetään kaavoilla (3) ja (4), jolloin saadaan $X(n)$:

$$
\begin{aligned}
X(0) &= \underbrace{X_0(0)}_{=2} + \underbrace{w_4^0}_{=1} \underbrace{X_1(0)}_{=4} = 6, \\
X(1) &= \underbrace{X_0(1)}_{=-2} + \underbrace{w_4^{-1}}_{=-i} \underbrace{X_1(1)}_{=-2} = -2 + 2i, \\
X(2) &= \underbrace{X_0(2-2)}_{=2} + \underbrace{w_4^{-2}}_{=-1} \underbrace{X_1(2-2)}_{=4} = -2, \\
X(3) &= \underbrace{X_0(3-2)}_{=-2} + \underbrace{w_4^{-3}}_{=i} \underbrace{X_1(3-2)}_{=-2} = -2 - 2i.
\end{aligned}
$$

# FFT

- Tätä kutsutaan **radix-2** FFT-algoritmiksi.
- Vastaavasti voidaan alkuperäinen Fourier-muunnoksen määräävä summa jakaa neljään eri osaan, jolloin saadaan niin sanottu **radix-4** FFT-algoritmi.
- Kahdeksaan osaan jakaminen tuottaa vastaavasti **radix-8**-algoritmin, jne.
- Tällöin lukujonojen pituuden pitää olla joku neljän tai kahdeksan potenssi.

# $z$-muunnos

- $z$-muunnosta voidaan pitää Fourier-muunnoksen yleistyksenä, ja se on tärkeä työkalu diskreettiaikaisten järjestelmien analyysissä ja suunnittelussa.
- $z$-muunnos on myös läheistä sukua jatkuva-aikaisten järjestelmien tarkastelussa käytetylle **Laplace-muunnokselle.**
- $z$-muunnos muuntaa lukujonon rationaalifunktioksi, jonka ominaisuuksia tarkastelemalla saadaan selville tiettyjä lukujonon ominaisuuksia.
- Esimerkiksi impulssivasteen $z$-muunnoksesta nähdään helposti onko lukujono kausaalinen tai stabiili.

# $z$-muunnoksen määritelmä

- Olkoon $x(n)$ lukujono. Sen $z$-muunnos on sarja

$$X(z) = \ldots + x(-3)z^3 + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ldots$$

- Jatkossa tästä käytetään lyhyempää merkintää

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}. \tag{6}$$

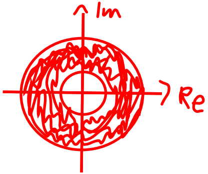
- Äärettömänä sarjana $z$-muunnoksen suppeneminen riippuu sekä lukujonon $x(n)$ arvoista, että pisteestä $z \in \mathbf{C}$, jossa $X(z)$ lasketaan.

# $z$-muunnoksen määritelmä

- Siksi $z$-muunnoksen käsitteeseen liittyy olennaisesti se kompleksitason osa, jossa sarja suppenee.
- Sarjan **suppenemisalue** (engl. region of cenvergence, ROC) on se kompleksitason alue, jossa sarja (6) suppenee itseisesti, eli

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| < \infty.$$

- Voidaan osoittaa, että sarjan $X(z)$ suppenemisalue on aina renkaan muotoinen alue




$$r_- < |z| < r_+.$$

# $z$-muunnoksen määritelmä

- Mahdollisesti suppenemisalueeseen kuuluu myös renkaan reunapisteitä eli pisteitä, jotka toteuttavat ehdon $|z| = r_-$ tai $|z| = r_+$.
- Lisäksi $r_+$ saattaa olla myös ääretön ja $r_-$ voi olla nolla.
- Koska $z$-muunnos on Fourier-muunnoksen yleistys, käytetään siitä samaa merkintätapaa kuin Fourier-muunnoksestakin: lukujonoa merkitään pienellä kirjaimella ja muunnosta vastaavalla isolla kirjaimella, esimerkiksi

$$
\begin{aligned}
x(n) &\leftrightarrow X(z),\\
y(n) &\leftrightarrow Y(z),\\
w(n) &\leftrightarrow W(z).
\end{aligned}
$$

# $z$-muunnoksen määritelmä

- Signaalinkäsittelyn ongelmissa tullaan usein käsittelemään lukujonoja, joiden $z$-muunnos on rationaalifunktio, eli muotoa

$$H(z)\,\cancel{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} a_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{K} b_k z^{-k}}$$

- Tällaisten funktioiden nimittäjän $D(z)$ nollakohtia kutsutaan **navoiksi** ja osoittajan $N(z)$ nollakohtia **nolliksi**.
- Huomaa, että kaikki eksponentit ovat tavallisesti negatiivisia, joten nollakohtien laskentaa varten ne täytyy laventaa positiivisiksi.

# $z$-muunnoksen määritelmä

**Esimerkki:** Lasketaan navat ja nollat, kun

$$X(z) = \frac{1 - 4z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

- Lavennetaan negatiiviset potenssit pois kertomalla osoittaja ja nimittäjä termillä $z^2$:

$$X(z) = \frac{z^2 - 4z + 1}{z^2 - z + \frac{1}{2}}.$$

# $z$-muunnoksen määritelmä

$az^2+bz+c$

- Tämän jälkeen ratkaistaan osoittajan nollakohdat (eli **nollat**) toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} 3.73, \\ +0.27. \end{cases}$$

Luentomonisteessa on tässä virhe. Pitäisi olla +0.27 eli napa-nollakuvio on oikein.

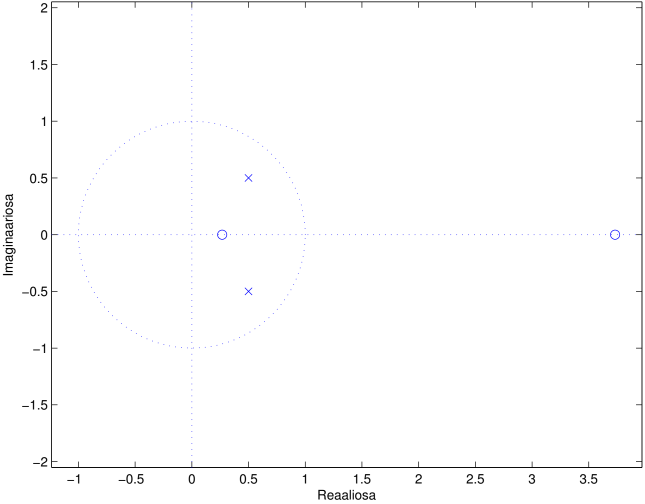
- Nimittäjän nollakohdat (eli **navat**) saadaan vastaavasti:

$$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}.$$

- Navat ja nollat kuvataan usein kompleksitason koordinaatistossa.
- Kuviossa nollista käytetään merkintää '$\circ$' ja navoista '$\times$'.

# $z$-muunnoksen määritelmä

- Edellisen esimerkin **napa-nollakuvio** on alla.



# $z$-muunnoksen määritelmä

- Funktio $X(z)$ määrää yhdessä suppenemisalueen kanssa signaalin $x(n)$ yksikäsitteisesti.
- Jos suppenemisalue ei ole tiedossa, saattaa $X(z)$ esittää useiden funktioiden $z$-muunnosta.
- Jatkossa tarkastellaan enimmäkseen kausaalisia signaaleja $x(n)$, joille siis $x(n) = 0$, kun $n < 0$.
- Tällöin $z$-muunnos saa muodon

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

# Tavallisimpien jonojen $z$-muunnokset

- Seuraavassa esitetään muutamia esimerkkejä joidenkin signaalien $z$-muunnoksista.
- Koska $z$-muunnos on lineaarinen, voidaan monimutkaisemman $z$-muunnoksen määrittäminen usein palauttaa näiden yksinkertaisten tapausten muunnoksiin.

**Impulssi:** Signaalin $x(n) = \delta(n)$ $z$-muunnos on

$$X(z) = 1$$

ja suppenemisalue on koko kompleksitaso $\mathbf{C}$.

# Tavallisimpien jonojen $z$-muunnokset

**Viivästetty impulssi:** Olkoon jono $x(n) = \delta(n-d)$ ($d \in \{1, 2, 3, \ldots\}$). Silloin

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(n-d)}_{=0,\text{kun } n \neq d} z^{-n} = z^{-d},$$

ja suppenemisalue on $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

# Tavallisimpien jonojen $z$-muunnokset

**Yksikköaskel:** Signaalin $x(n) = u(n)$ $z$-muunnos on

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \end{aligned}$$

$|z^{-1}| < 1$

$\frac{1}{|z|} < 1$

ja suppenemisalue $|z| > 1$ (vrt. geometrisen sarjan suppeneminen).

- Lisäksi lausekkeesta havaitaan, että funktiolla $X(z)$ on nolla pisteessä $z = 0$ ja napa pisteessä $z = 1$.

# Tavallisimpien jonojen $z$-muunnokset

**Eksponenttijono:** Signaalin $x(n) = a^n u(n)$ $z$-muunnos on

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a},
\end{aligned}
$$

$|az^{-1}| < 1$

$|a| < |z|$

ja suppenemisalue $|z| > |a|$ (kts. geometrisen sarjan suppeneminen).

- Lisäksi $z$-muunnoksella on napa pisteessä $z = a$ ja nolla pisteessä $z = 0$.

# Tavallisimpien jonojen $z$-muunnokset

- Edellisessä esimerkissä tuli vastaan tilanne, jossa funktion ensimmäisessä muodossa on muuttujan $z$ negatiivisia potensseja.
- Napojen ja nollien laskemista varten lauseke täytyy laventaa sellaiseksi, että kaikki eksponentit ovat positiivisia.
- Esimerkiksi funktion
$$X(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1} + z^{-2} - 0.9z^{-3}}{1 + 0.5z^{-1} - 0.25z^{-2}}$$
pienin eksponentti on $-3$, joten se lavennetaan termillä $z^3$.
- Tällöin saadaan tulokseksi
$$X(z) = \frac{z^3 - 0.9z^2 + z - 0.9}{z^3 + 0.5z^2 - 0.25z}.$$

# Tavallisimpien jonojen $z$-muunnokset

- Nyt navat ovat $p_1 = -0.809$, $p_2 = 0$ ja $p_3 = 0.309$.
- Nollat puolestaan ovat pisteissä $z_1 = 0.9$, $z_2 = i$ ja $z_3 = -i$.
- Kahdella eri signaalilla voi olla sama $z$-muunnoksen lauseke, mutta eri suppenemisalue.
- Nimittäin, signaalin

$$x(n) = \begin{cases} -a^n, & \text{kun } n < 0 \\ 0, & \text{kun } n \geqslant 0 \end{cases}$$

# Tavallisimpien jonojen $z$-muunnokset

$z$-muunnos on

$$
\begin{aligned}
X(n) &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^n \\
&= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = 1 + \frac{a}{z-a} = \frac{z}{z-a},
\end{aligned}
$$

ja sarjan suppenemisalue on $\left|\frac{z}{a}\right| < 1$, eli $|z| < |a|$.

# Tavallisimpien jonojen $z$-muunnokset

- Tällä ja edellisen esimerkin sarjalla on siis sama $z$-muunnoksen lauseke, mutta eri suppenemisalue.
- Näin ollen suppenemisalue liittyy olennaisesti $z$-muunnokseen.
- Taulukossa on yleisimpien signaalien $z$-muunnokset.

| Jono | Z-muunnos | Suppenemisalue |
|---|---|---|
| $\delta(n)$ | 1 | kaikilla $z$ |
| $\delta(n-d)$, $d>0$ | $z^{-d}$ | kaikilla $z$ paitsi $z=0$ |
| $u(n)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ | $\|z\|>1$ |
| $a^n u(n)$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ | $\|z\|>\|a\|$ |

# Käänteinen $z$-muunnos

- Funktion $X(z)$ käänteismuunnos on

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) z^{n-1}\, dz,$$

jossa integroidaan yli suppenemisalueella sijaitsevan $r$-säteisen ympyrän

$$C : |z| = r, r_- < r < r_+.$$

- Käytännössä $x(n)$ saadaan kuitenkin kätevämmin jakolaskulla tai osamurtojen avulla.

# Käänteinen $z$-muunnos

**Esimerkki:** Olkoon signaalin $x(n)$ $z$-muunnos

$$X(z) = \frac{z^{-2} + 2z^{-1} + 2}{z^{-1} + 1}.$$

Selvitä $x(n)$, kun suppenemisalue on $|z| > 1$.

# Käänteinen $z$-muunnos

- Yritetään muokata lauseke sellaiseen muotoon, että se koostuu 'tutuista' $z$-muunnoksista.

$$\begin{aligned}
&\frac{z^{-2}+2z^{-1}+2}{z^{-1}+1} \\
=\ &\frac{z^{-1}(z^{-1}+1)+(z^{-1}+1)+1}{z^{-1}+1} \\
=\ &z^{-1}+1+\frac{1}{z^{-1}+1} \\
=\ &z^{-1}+1+\frac{1}{1-(-z^{-1})}.
\end{aligned}$$

# Käänteinen $z$-muunnos

- Nyt havaitaan, että $X(z)$ koostuu signaalien $\delta(n-1)$, $\delta(n)$ ja $(-1)^n u(n)$ $z$-muunnosten summasta. Siis

$$x(n) = \delta(n-1) + \delta(n) + (-1)^n u(n) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n < 0 \\ 2, & \text{kun } n = 0 \\ 0, & \text{kun } n = 1 \\ (-1)^n, & \text{kun } n > 1. \end{cases}$$

- Edellä käytetty rationaalilausekkeen hajottaminen ei välttämättä onnistu aina näin helposti.
- Yleispätevä menetelmä on käyttää polynomien jakolaskua.

# Käänteinen $z$-muunnos

**Esimerkki:** Tarkastellaan signaalia $x(n)$, jonka $z$-muunnos on

$$X(z) = \frac{z^3 - 2z - 1}{z^3 - z^2 - z}$$

suppenemisalueenaan $z \neq 0$.

- Suoritetaan polynomien jakolasku jakokulmassa:

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 1 + z^{-1} & & & \\
\hline
z^3 - z^2 - z & z^3 & -2z & -1 & \\
 & \mp z^3 \pm z^2 \pm z & & & \\
\hline
 & z^2 - z & & & \\
 & \mp z^2 \pm z & \pm 1 & & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

# Käänteinen $z$-muunnos

- Siis $X(z)$ koostuu signaalien $\delta(n-1)$ ja $\delta(n)$ $z$-muunnosten summasta, joten

$$x(n) = \delta(n-1) + \delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 0, 1 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

# $z$-muunnoksen ominaisuuksia

**$z$-muunnos on lineaarinen:**

- Olkoot $X(z)$ ja $Y(z)$ jonojen $x(n)$ ja $y(n)$ $z$-muunnokset.
- Silloin jonon $ax(n) + by(n)$ $z$-muunnos on $aX(z) + bY(z)$.
- Jos $X(z)$ suppenee alueessa $R_x$ ja $Y(z)$ alueessa $R_y$, niin $aX(z) + bY(z)$ suppenee **ainakin** alueessa $R_x \cap R_y$.

**Jonon viivästys:**

- Jos jonon $x(n)$ $z$-muunnos on $X(z)$ ja jono $w(n) = x(n-d)$ ($d \in \mathbb{N}$) niin jonon $w(n)$ $z$-muunnos on
$$W(z) = z^{-d}X(z)$$
ja sen suppenemisalue on funktion $X(z)$ suppenemisalue, josta on poistettu $z = 0$ (koska $W(z)$ on ääretön, kun $z = 0$).

# $z$-muunnoksen ominaisuuksia

- Vastaava tulos on voimassa myös jonon edistämiselle, mutta se on vähemmän käytetty.
- Se muotoillaan seuraavasti:

$$w(n) = x(n + d) \Rightarrow W(z) = z^d X(z),$$

  aina kun $d \in \mathbb{N}$.
- Suppenemisalue on funktion $X(z)$ suppenemisalue, josta on poistettu $z = \infty$ (koska $W(z)$ on ääretön, kun $z = \infty$).

# $z$-muunnoksen ominaisuuksia

**Konvoluution $z$-muunnos:**

- Merkitään $w(n) = x(n) * y(n)$.
- Silloin $W(z) = X(z)Y(z)$, ja funktion $W(z)$ suppenemisalue sisältyy funktioiden $X(z)$ ja $Y(z)$ suppenemisalueiden leikkaukseen.

**Jonojen komponenteittainen tulo:**

- Merkitään $w(n) = x(n)y(n)$.
- Silloin jonon $w(n)$ $z$-muunnos on

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C Y\left(\frac{z}{v}\right) X(v) v^{-1} \, dv,$$

missä $C$ on origon kiertävä ympyrä joka on sekä funktion $X(z)$ että funktion $Y(z)$ suppenemisalueessa.

# $z$-muunnoksen ominaisuuksia

**Kompleksikonjugaatti:**

- Jos $y(n) = \overline{x(n)}$, niin $Y(z) = \overline{X(\bar{z})}$.

**Parsevalin lause:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\overline{x_2(n)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C X_1(v)\overline{X_2\left(\frac{1}{\bar{v}}\right)}v^{-1}\,dv.$$

**Funktion $X(z)$ derivointi:**

- Lukujonon $nx(n)$ $z$-muunnos on $-zX'(z)$, jonka suppenemisalue on funktion $X(z)$ suppenemisalue, josta on poistettu raja-alue jos $X(z)$ on irrationaalinen.

# $z$-muunnoksen ominaisuuksia

**Ajan kääntäminen:**

- Jonon $x(-n)$ $z$-muunnos on $X(z^{-1})$ ja suppenemisalue on $\frac{1}{r_+} < |z| < \frac{1}{r_-}$.

**Alkuarvolause:**

- Jos jono $x(n)$ on kausaalinen (eli $x(n) = 0$, kun $n < 0$), niin

$$x(0) = \lim_{|z|\to\infty} X(z).$$

- Tässä siis riittää, että $|z|$ lähestyy ääretöntä mitä reittiä hyvänsä.

**Konvoluution laskenta $z$-muunnoksen avulla:**

- Oletetaan, että $w(n) = x(n) * y(n)$.

$y(n) = h(n) * x(n)$

$Y(z) = H(z) \cdot \underline{X}(z)$

# $z$-muunnoksen ominaisuuksia

- Silloin

$$
\begin{aligned}
W(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \right) z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)z^{-k}z^{-(n-k)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( x(k)z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)z^{-(n-k)} \right) \\
&= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \right) \\
&= X(z)Y(z).
\end{aligned}
$$

# FIR-suotimen siirtofunktio

- Impulssivasteen lisäksi suodin voidaan esittää siirtofunktion avulla.
- Aiemmin todettiin, että lineaarinen aikainvariantti järjestelmä on täysin määrätty, kun sen impulssivaste $h(n)$ on tiedossa.
- Yleisempi tapa on kuitenkin käyttää impulssivasteen $z-$muunnosta $H(z)$.
- Impulssivasteen avulla esitettynä herätteen $x(n)$ ja vasteen $y(n)$ välinen relaatio on muotoa
$$y(n) = h(n) * x(n).$$
- Ottamalla $z-$muunnokset yhtälön molemmista puolista saadaan yhtälö
$$Y(z) = H(z)X(z). \tag{7}$$
- Impulssivasteen $h(n)$ $z-$muunnoksesta $H(z)$ käytetään nimeä **siirtofunktio** (transfer function).

# FIR-suotimen siirtofunktio

**Esimerkki:** Tarkastellaan järjestelmää, jonka määrittelee differenssiyhtälö

$$y(n) = 0.0349x(n) + 0.4302x(n-1) - 0.5698x(n-2) + 0.4302x(n-3) + 0.0349x(n-4).$$

- Järjestelmän impulssivaste on

$$h(n) = \begin{cases} 0.0349, & \text{kun } n = 0 \text{ tai } n = 4, \\ 0.4302, & \text{kun } n = 1 \text{ tai } n = 3, \\ -0.5698, & \text{kun } n = 2, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

- Siirtofunktio on impulssivasteen $z$-muunnos:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} = 0.0349 + 0.4302z^{-1} - 0.5698z^{-2} + 0.4302z^{-3} + 0.0349z^{-4}.$$

# FIR-suotimen siirtofunktio

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) - 3x(n-2)$$

$$Y(z) = X(z) + 2X(z)z^{-1} - 3X(z)z^{-2}$$

$$Y(z) = (1 + 2z^{-1} - 3z^{-2})X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}$$

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

# Taajuusvaste

- Siirtofunktion avulla määritellään myös muita tärkeitä käsitteitä.
- Sijoittamalla $z = e^{i\omega}$ yhtälöön (7) saadaan sen erikoistapaus

$$Y(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega})X(e^{i\omega}). \tag{8}$$

- Tämä tarkoittaa, että signaalia suodatettaessa sen taajuudet (eli signaalin diskreettiaikainen Fourier-muunnos $X(e^{i\omega})$) kerrotaan järjestelmän taajuusvasteella $H(e^{i\omega})$.
- Näin ollen järjestelmän taajuuskäyttäytyminen riippuu täysin funktiosta $H(e^{i\omega})$.
- Tästä funktiosta käytetään nimitystä **taajuusvaste** (frequency response).
- Taajuusvaste on siis reaalimuuttujan $\omega$ kompleksiarvoinen funktio, joka saadaan evaluoimalla siirtofunktio kuljettaessa kompleksitason yksikköympyrä ympäri vastapäivään.

# Taajuusvaste

- Tämä johtuu siitä, että lauseke $e^{i\omega}$ käy läpi kaikki yksikköympyrän pisteet kun muuttuja $\omega \in [0, 2\pi]$.
- Sijoittamalla $z = e^{i\omega}$ $z$-muunnoksen määritelmään saadaan taajuusvasteen laskentakaava:

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-i\omega n}.$$

- Itse asiassa kyseessä on impulssivasteen $h(n)$ diskreettiaikainen Fourier-muunnos.

**Esimerkki:** Edellisen esimerkin järjestelmän taajuusvaste on

$$H(e^{i\omega}) = 0.0349 + 0.4302e^{-i\omega} - 0.5698e^{-2i\omega} + 0.4302e^{-3i\omega} + 0.0349e^{-4i\omega}.$$

# Amplitudi- ja vaihevaste

- Taajuusvasteen itseisarvoa $|H(e^{i\omega})|$ kutsutaan nimellä **amplitudivaste** (amplitude response, magnitude response tai gain) ja sen vaihekulmaa arg$(H(e^{i\omega}))$ nimellä **vaihevaste** (phase response, phase shift).
- Amplitudivasteen merkitys käy ilmi kun otetaan yhtälöstä (8) itseisarvot molemmilta puolilta:

$$|Y(e^{i\omega})| = |H(e^{i\omega})| \cdot |X(e^{i\omega})|.$$

- Amplitudivaste kertoo siis kuinka paljon signaalin eri taajuudet vaimenevat tai vahvistuvat suodatuksessa.
- Jos esimerkiksi suotimen amplitudivaste saa arvon 0.6 jollain taajuudella $\omega$ (eli $|H(e^{i\omega})| = 0.6$), muuttuu tuolla taajuudella olevan signaalin amplitudi 0.6-kertaiseksi.

# Amplitudi- ja vaihevaste

- Jos amplitudivaste on yksi, kyseinen taajuus ei muutu suodatuksessa lainkaan (viivästymistä lukuunottamatta) ja jos amplitudivaste on nolla, taajuus häviää suodatuksessa täysin.
- Vaihevasteen merkitys tulee ilmi tarkasteltaessa yhtälön (8) molempien puolten vaihekulmia.
- Kompleksilukujen kertolaskussa vaihekulmat lasketaan yhteen, joten saadaan yhtälö
$$\text{arg}(Y(e^{i\omega})) = \text{arg}(H(e^{i\omega})) + \text{arg}(X(e^{i\omega})).$$
- Vaihevasteesta voidaan siis päätellä kuinka paljon kukin taajuus viivästyy suodatettaessa.

# Amplitudi- ja vaihevaste

$f = 1000\,Hz$

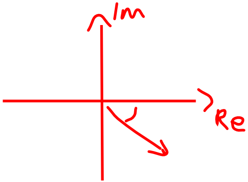
$F_s = 20000\,Hz$

$\omega = \frac{f}{F_s} 2\pi = 0.05 \cdot 2\pi$

- Jos suotimen vaihevaste on esimerkiksi $\arg(H(e^{i\omega})) = -\pi/2$ jollain taajuudella $\omega$, muuntaa suodin signaalin $\sin(\omega n)$ signaaliksi $\sin(\omega n - \pi/2)$ (ja mahdollisesti vaimentaa tai vahvistaa sitä).

**Esimerkki:** Edellisen esimerkin järjestelmän taajuusvaste taajuudella $\omega = 0.05 \cdot 2\pi$ on

$$H(e^{0.05 \cdot 2\pi i}) = 0.2467 - 0.1793i.$$




# Amplitudi- ja vaihevaste

- Amplitudivaste tällä taajuudella on

$$|0.2467 - 0.1793i| = \sqrt{0.2467^2 + (-0.1793)^2} = 0.3050$$

ja vaihevaste

$$\arg(0.2467 - 0.1793i) = \arctan(-0.1793/0.2467) = -0.6283.$$

- Jos järjestelmän herätteenä on nyt kyseisellä taajuudella värähtelevä signaali

$$x(n) = u(n)\sin(0.05 \cdot 2\pi n),$$

vaste on samantaajuinen signaali, jonka amplitudi on 0.3050-kertainen ja vaihe viivästynyt 0.6283 radiaania.

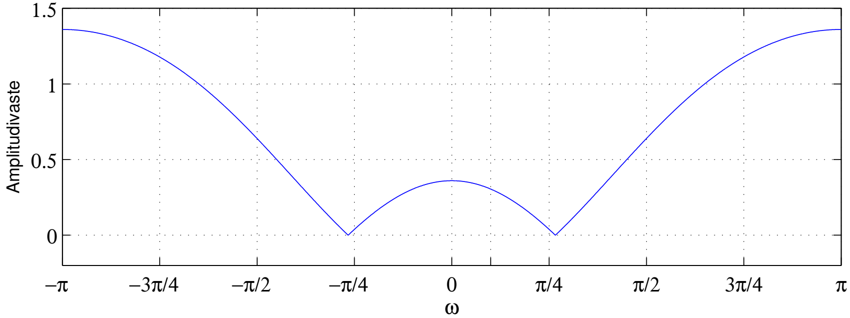
# Amplitudi- ja vaihevaste

- Kaavamuodossa tämä signaali on $y(n) = 0.3050u(n)\sin(0.05 \cdot 2\pi n - 0.6283)$.
- Todellinen suodatustulos poikkeaa tästä arviosta hieman suodatuksen alkuvaiheessa.
- Harjoitustehtävässä havaitaan kuitenkin, että muualla arvio on tarkalleen sama kuin todellinen suodatustulos.
- On syytä muistaa, että amplitudi- ja vaihevasteet ovat funktioita, joiden arvot riippuvat taajuusmuuttujasta $\omega$.
- Edellisessä esimerkissä amplitudivasteen kaava on

$$|H(e^{i\omega})| = |0.0349 + 0.4302e^{-i\omega} - 0.5698e^{-2i\omega} + 0.4302e^{-3i\omega} + 0.0349e^{-4i\omega}|.$$

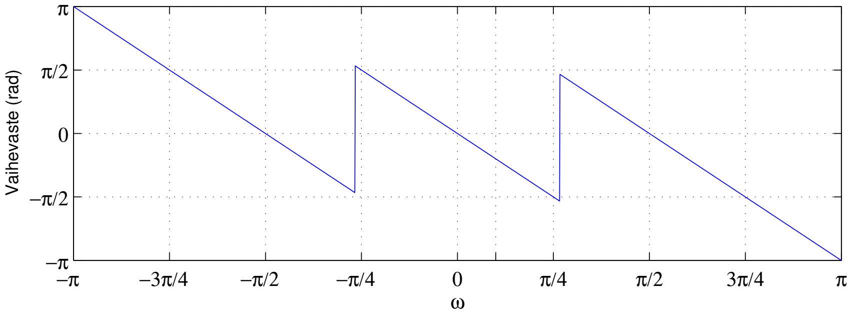
# Amplitudi- ja vaihevaste

- Tämän funktion kuvaaja on alla.



# Amplitudi- ja vaihevaste

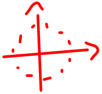
- Vaihevasteen kuvaaja puolestaan on seuraavan näköinen.



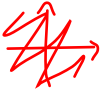

- Vaihevaste tekee hyppäyksen niissä pisteissä, joissa taajuusvaste menee nollaksi. (Hyppäyksen suuruus on $\pi$, ja syy tähän selviää myöhemmin.)

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

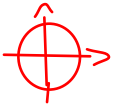
$Y(n) = H(n) \cdot X(n)$ DFT →



$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$ z-muunnos →



$Y(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega}) \cdot X(e^{i\omega})$ DTFT →



$$|Y(e^{i\omega})| = |H(e^{i\omega})|\,|X(e^{i\omega})|$$

$$\arg(Y(e^{i\omega})) = \arg(H(e^{i\omega})) + \arg(X(e^{i\omega}))$$

# Amplitudi- ja vaihevaste

**Esimerkki:** Tarkastellaan siirtofunktiota

$$\mathrm{H}(z) = \frac{z^2 + 0.5z + 1}{-2z^2 + z + 0.5}.$$

- Järjestelmän taajuusvaste saadaan sijoittamalla muuttujan $z$ paikalle lauseke $e^{i\omega}$,

$$\mathrm{H}(e^{i\omega}) = \frac{(e^{i\omega})^2 + 0.5e^{i\omega} + 1}{-2(e^{i\omega})^2 + e^{i\omega} + 0.5} = \frac{e^{2i\omega} + 0.5e^{i\omega} + 1}{-2e^{2i\omega} + e^{i\omega} + 0.5}.$$

# Amplitudi- ja vaihevaste

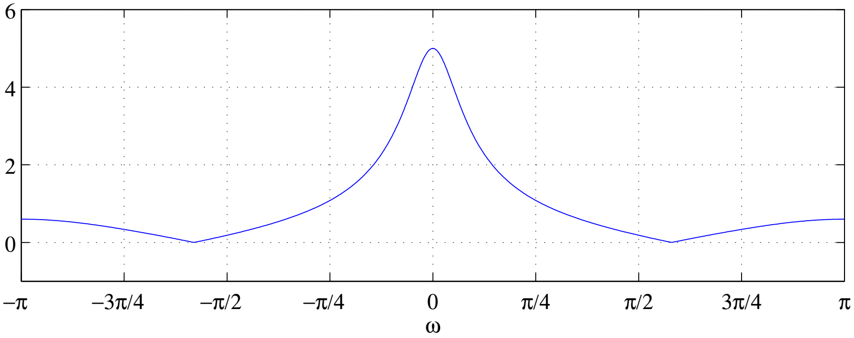
- Amplitudivaste on nyt tämän lausekkeen itseisarvo,

$$|H(e^{i\omega})| = \frac{|e^{2i\omega} + 0.5e^{i\omega} + 1|}{|-2e^{2i\omega} + e^{i\omega} + 0.5|},$$

joka ei enää sievene.

# Amplitudi- ja vaihevaste

- Sen kuvaaja (alla) voidaan kuitenkin piirtää Matlabilla.



# Amplitudi- ja vaihevaste

**Esimerkki:** Olkoon $h(n) = 0.9^n u(n)$. Silloin

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}, \qquad |z| > 0.9.$$

- Siirtofunktion $H(z)$ taajuusvaste on

$$H(e^{i\omega}) = \frac{1}{1 - 0.9e^{-i\omega}},$$

jolloin amplitudivaste on

$$\left|H(e^{i\omega})\right| = \frac{1}{|1 - 0.9e^{-i\omega}|},$$

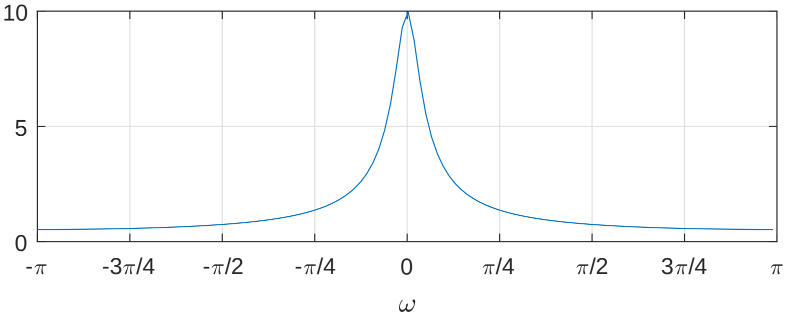
# Amplitudi- ja vaihevaste

ja vaihevaste

$$\arg(\mathrm{H}(e^{i\omega})) = \arg\left(\frac{1}{1 - 0.9e^{-i\omega}}\right).$$

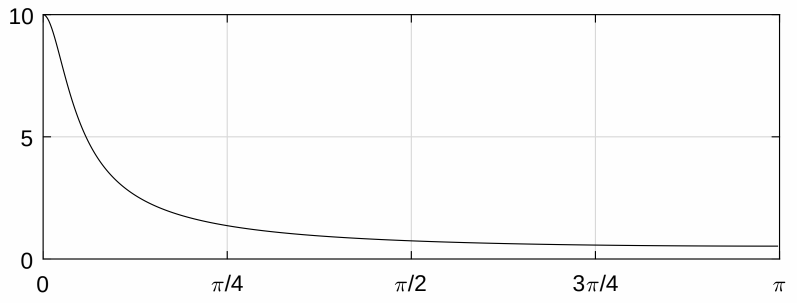
# Amplitudi- ja vaihevaste

- Seuraavassa kuvassa on esitetty amplitudivasteen kuvaaja.



# Amplitudi- ja vaihevaste

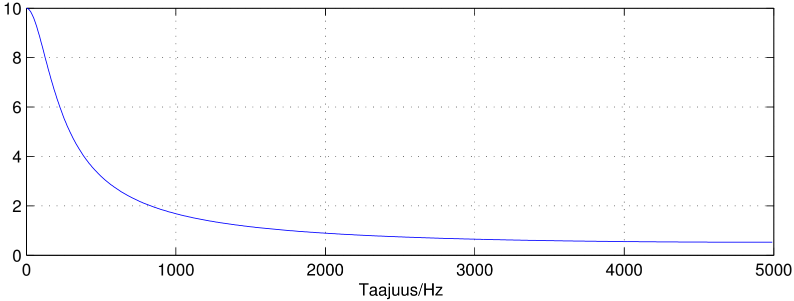
- Jos impulssivaste koostuu reaaliluvuista (kuten yleensä on), amplitudivaste on symmetrinen pystyakselin suhteen.
- Näin ollen tavallisesti kuvataan vain oikeanpuoleinen haara.



# Amplitudi- ja vaihevaste

- Kuten aiemmin mainittiin, taajuusvasteen merkitys on, että siitä nähdään, kuinka järjestelmä toimii saadessaan eritaajuisia signaaleja syötteeksi.
- Oletetaan, että edellisen esimerkin järjestelmä saa syötteekseen signaalin, jonka näytteenottotaajuus on 10000 Hz.
- Tällöin edellisen kuvaajan asteikon nollataajuus vastaa signaalia, jonka taajuus on 0 Hz, ja taajuus $\omega = \pi$ (äärimmäisenä oikealla) vastaa Nyquistin rajataajuutta 5000 Hz.

# Amplitudi- ja vaihevaste




- Nyt nähdään suoraan, että esimerkiksi taajuudella 2500 Hz soiva signaali pienenee amplitudiltaan noin 0.8-kertaiseksi.
- Vastaavasti pienet taajuudet voimistuvat.