

BIBLIOTHÈQUE ÉLECTRONIQUE DES CLASSES PREPAS



Visiter notre Forum : <http://prepa-book.forummaroc.net/>

Visiter notre page :

<https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa>
<https://www.facebook.com/groups/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa/>



LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Physique

EXERCICES
MPSI

Énoncés

Solutions

Commentaires

J. BERGUA • P. GOULLEY
D. NESSI

Tout le nouveau programme



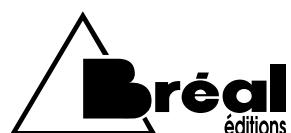


LES NOUVEAUX
Précis
B R É A L

PHYSIQUE
MPSI

J. BERGUA • P. GOULLEY • D. NESSI

Professeurs en classes préparatoires scientifiques



LES NOUVEAUX

Précis

B R É A L

Titres disponibles dans la filière MPSI

Mathématiques 1^{re} année

- Analyse MPSI
- Algèbre et géométrie MPSI

Physique 1^{re} année

- Mécanique MPSI
- Électromagnétisme MPSI
- Électrocinétique MPSI
- Optique MPSI - PCSI - PTSI
- Thermodynamique MPSI

Chimie 1^{re} année

- Chimie MPSI

Exercices 1^{re} année

- Mathématiques MPSI
- Physique MPSI

Maquette : Joëlle Parreau.

Couverture : Sophie Martinet.

Réalisation : Alpha-Edit.

© Bréal 2003

Toute reproduction même partielle interdite.

Dépôt légal : août 2003.

ISBN 978 2 84291 961 0

ref : 209 0354 - e-sbn : 978 2 7495 2038 4

Avant-propos

Les Nouveaux Précis Bréal sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires une aide efficace dans leur travail.

Ils ont pour objectif de dégager, à travers des énoncés variés et classiques, les méthodes qui permettent la **construction progressive et raisonnée** de la solution d'un exercice ou d'un problème. C'est pourquoi il est souhaitable de les utiliser tout au long de l'année, parallèlement à l'acquisition des connaissances.

Les exercices proposés ont été sélectionnés pour leur représentativité : ils permettent de présenter l'**ensemble des méthodes et des raisonnement**s qui, une fois assimilés, doivent permettre de résoudre, sans trop de difficultés, des exercices analogues.

Ce volume traite l'**ensemble du programme de physique de première année MPSI**.

Chaque chapitre propose une série d'**exercices structurés** dont la **solution** est très détaillée, suivis de quelques exercices corrigés de réinvestissement.

Chaque exercice de la première catégorie est caractérisé par :

- un **énoncé** constitué de questions progressives ;
- « **Ce qu'il faut savoir** » : la liste des connaissances – en physique (« Points de cours ») et parfois en mathématiques (« Outils mathématiques ») – nécessaires pour traiter l'exercice ;
- « **Ce qu'il faut comprendre** » : l'analyse qui propose brièvement les chemins à suivre pour répondre efficacement aux questions posées. C'est un moment essentiel dans la recherche de la solution : assez brève, l'analyse doit précéder la mise en œuvre des calculs. Il nous paraît très important que la recherche de la solution passe systématiquement par cette étape. Il n'y a rien de plus stérile que de se lancer dans les calculs sans savoir de façon précise dans quel but ils sont entrepris...;
- la solution proprement dite dans laquelle sont souvent rappelés et développés quelques « **Points cours** » dont une bonne compréhension est indispensable. Des « **Points méthodes** » (sur fond grisé) permettent d'affiner la réflexion : il s'agit soit de mises en garde afin d'éviter une erreur fréquente de raisonnement, soit le plus souvent d'explications supplémentaires justifiant le choix d'un théorème ou la pertinence d'un raisonnement. Des « **commentaires** » conduisent à une discussion des résultats obtenus et à une vérification de leur cohérence (recherche de cas ou de valeurs limites, approches différentes pouvant donner un autre éclairage...). Ces commentaires jouent un rôle comparable à l'analyse, mais cette fois après le développement des calculs : c'est une forme de contrôle des résultats obtenus.

Analyse et discussion, qui sont finalement les deux points les plus importants pour le physicien, sont aussi sans doute les étapes les plus difficiles à mettre en œuvre, mais leur bonne prise en compte facilitera considérablement la construction d'une solution structurée (et exacte...) de chaque exercice.

Nous espérons que cet ouvrage aidera les étudiants dans cette voie, dans la perspective d'une réussite aux concours. Nous accueillerons avec reconnaissance les remarques et les critiques des lecteurs, qui peuvent nous être adressées par courrier électronique à l'adresse suivante : infos@editions-breal.fr.

Sommaire

Mémento de mathématiques	9
--------------------------------	---

PARTIE 1 27

Chapitre 1 Mécanique 1.....	29
-----------------------------	----

• Exercices avec solution détaillée	
101. Risque de collision au freinage	30
102. Projectile soumis au frottement de l'air.....	32
103. Deux mouvements sur la même trajectoire.....	35
104. Pendule simple	39
105. Pendule dont le fil casse.....	42
106. Enroulement d'un fil sur un cylindre.....	44
107. Anneau coulissant sur un cercle. Analyse de portraits de phase	48
• Exercices corrigés	
108. Ralentissement d'une voiture	54
109. Mouvement sur un axe dans un champ gravitationnel	55
110. Particule dans une cuvette	57

Chapitre 2 Électrocinétique 1	65
-------------------------------------	----

A - RÉGIME CONTINU

• Exercices avec solution détaillée	
201. Intensité dans une branche.....	66
202. Association en parallèle	70
203. Circuit actif réductible à une résistance	72
204. Résistances équivalentes	75
• Exercices corrigés	
205. Générateurs ou récepteurs.....	80
206. Voie électrifiée	84

B - RÉGIME TRANSITOIRE

• Exercices avec solution détaillée	
211. Bilan d'énergie	90
212. Conditions initiales – conditions d'équilibre	94
213. Deux bobines en parallèle.....	96
214. Circuit LC réel en signaux carrés	106
• Exercices corrigés	
215. Simulation de résistance.....	113
216. Attaque par un générateur à caractéristique rectangulaire	118

Chapitre 3 Optique géométrique	125
--------------------------------------	-----

• Exercices avec solution détaillée	
301. Prisme à réflexion totale.....	126
302. Doubleur de focale.....	127

303. Association de deux lentilles	131
304. Miroir équivalent	137
• Exercices corrigés	
305. Viseur	139
306. Association de deux miroirs	144
307. « Mise au point » pour un objectif photographique	146
308. Étude sommaire d'un microscope	151

PARTIE 2 157

Chapitre 4 Électrocinétique 2 159

A - RÉGIME SINUSOÏDAL

• Exercices avec solution détaillée	
401. Générateur sinusoïdal	160
402. Circuit RLC	162
403. Sonde adaptée pour oscilloscope	169
404. Fonction de transfert	176
405. Adaptation d'impédance	187
• Exercices corrigés	
406. Deux branches en parallèle	191
407. Puissance consommée	198

B - FILTRES ACTIFS ET AUTRES CIRCUITS AVEC AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL

• Exercices avec solution détaillée	
411. Filtre de Butterworth	203
412. Amplificateur différentiel	208
413. Simulation d'une inductance	215
414. Condition de fonctionnement d'un filtre	219
• Exercices corrigés	
415. Filtre « entièrement » réglable	222
416. Dérivateur	228

Chapitre 5 Mécanique 2 233

A - OSCILLATEURS

• Exercices avec solution détaillée	
501. Association de deux ressorts	234
502. Décollement d'une masse	237
503. Oscillateur harmonique amorti : temps de réponse – Sélectivité	240
• Exercices corrigés	
504. Vibrographe	246
505. Pendule « amorti »	250

B - FORCES CENTRALES ET SYSTÈMES DE DEUX POINTS MATÉRIELS

• Exercices avec solution détaillée	
511. Demi-ellipse dite de transfert	259
512. Écart à la satellisation sur orbite circulaire	261
513. Comète quasi-parabolique de 1843	264
514. Trajectoires de météorites	267
515. Étoile double	272
516. Conditions de satellisation	276
517. Autre présentation du mouvement newtonien	279
• Exercices corrigés	
518. Interaction coulombienne répulsive	282
519. Météore traversant un nuage peu dense	287
520. Marées	292

C - CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

• Exercices avec solution détaillée	
521. Rebond d'une balle sur un obstacle en mouvement	300
522. Traversée d'une rue	302
523. Traversée d'une rivière	305
524. Roulement sans glissement d'une roue	311
525. Courses poursuites : « les quatre mouches »	316
526. Gerbe de feu d'artifice	319
527. Verticale apparente sur un manège	321
528. Interaction répulsive	325
• Exercices corrigés	
529. Point matériel sur une sphère	330
531. Point matériel sur un cercle vertical tournant	337
532. Deux masses liées par un fil	340
533. Système couplé de deux masses	343
534. Pendule double	351

D - MOUVEMENTS DANS DES CHAMPS \vec{E} ET \vec{B}

• Exercices avec solution détaillée	
541. Mouvement dans un champ magnétique d'un électron soumis à une force de freinage	356
542. Spectrographe de masse	359
• Exercices corrigés	
543. Stabilisation par champ magnétique	364
544. Optique électronique	368
545. Lentille magnétique	372

Chapitre 6 Thermodynamique	379
---	-----

A - HYDROSTATIQUE ET GAZ PARFAIT

• Exercices avec solution détaillée	
601. Baromètre	380
602. Cône au fond d'un récipient	384
603. Ballons ascensionnels	388
604. Effusion par un trou	393

• Exercices corrigés	
605. Cloche renversée.	396
606. Retenue d'eau par un barrage	398
607. Pompe aspirante et refoulante	401
B - BILANS D'ÉNERGIE	
• Exercices avec solution détaillée	
611. Équilibre mécanique – Équilibre thermique	407
612. Transformations polytropiques	410
613. Évolution d'un gaz réel	413
614. Remplissage d'un réservoir	418
• Exercices corrigés	
615. Détente irréversible d'un gaz parfait	423
616. Chauffages d'un gaz	426
C - BILANS D'ÉNERGIE ET D'ENTROPIE	
• Exercices avec solution détaillée	
621. Compression d'un gaz parfait	430
622. Solides en contact thermique	433
623. Variations d'entropie d'un gaz	436
• Exercices corrigés	
624. Évolutions adiabatiques d'un gaz parfait	440
625. Évolution irréversible – Évolution réversible	445
626. Optimisation d'un compresseur	448
C - CORPS PUR DIPHASE	
• Exercices avec solution détaillée	
631. Vaporisation dans le vide	454
632. Détendeur	457
633. Évolution isenthalpique	460
634. Point triple	464
• Exercices corrigés	
635. Eau liquide en équilibre avec sa vapeur	466
636. Détente isentropique de vapeur saturante	469
637. Condensation – Surfusion	473
638. Vaporisation à T et P variables	477
D - MACHINES THERMIQUES	
• Exercices avec solution détaillée	
641. Machines dithermes : les trois cas intéressants	480
642. Cycle réversible – Cycle irréversible	484
643. Cycle de Joule	488
644. Climatiseur	493
645. Pompe à chaleur	496
646. Moteur Diesel	500
• Exercices corrigés	
647. Moteur avec sources à températures variables	504
648. Réfrigérateur et pompe à chaleur imparfaits	508

649. Moteur à explosion	513
650. Réfrigérateur à absorption	518
651. Centrale électrique nucléaire	520
Chapitre 7 Électromagnétisme	527
A - ÉLECTROSTATIQUE	
• Exercices avec solution détaillée	
701. Deux lames de charges opposées	528
702. Couronne plane chargée	532
703. Demi-espace chargé	537
704. Lignes de champ	543
705. Interaction entre charges identiques	552
• Exercices corrigés	
706. Potentiel de Yukawa	556
707. Point de champ nul	559
<i>Les mouvements dans les champs \vec{E} et \vec{B} sont classés en mécanique (chapitre 5, partie D).</i>	
B - MAGNÉTOSTATIQUE	
• Exercices avec solution détaillée	
711. Spire circulaire	564
712. Solénoïde épais	568
713. Solénoïde en forme de tore	571
714. Ligne de champ	575
• Exercices corrigés	
715. Cartes de lignes de champ	579

chapitre

0

Rappels de mathématiques

Expression approchée d'une grandeur physique

On supposera dans ce mémento que toutes les fonctions que l'on manipule sont honnêtes et fréquentables par un physicien, c'est-à-dire continues et dérivables autant que les nécessités de calcul l'exigeront.

Dérivées

- Dérivée première

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Dérivée seconde

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Le physicien préfère les notations $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour les dérivées respectivement première et seconde par rapport à x de y .

Il utilise parfois la notation \dot{y} pour $\frac{dy}{dt}$ et \ddot{y} pour $\frac{d^2y}{dt^2}$, dérivées respectivement première et seconde par rapport à t de $y(t)$.

- Dérivées d'une fonction composée

La dérivée par rapport à t de la fonction $y[x(t)]$ se met sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

- Dérivée d'une fonction réciproque

Soit $x(y)$ la fonction réciproque de $y(x)$, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Différentielle

Soit f une fonction décrivant les variations d'une grandeur physique dépendant de x .

Considérons une variation dx de x . On note df l'application différentielle de f au point x , ou « différentielle de f », d'expression

$$df = f'(x) dx$$

La différentielle est une expression linéaire de l'accroissement dx de la variable ; géométriquement, elle donne l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$: $df = y_1 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Développement de Taylor

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Si l'on considère l'accroissement $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ de la fonction f depuis le point d'abscisse x_0 , celui-ci est donné, en première approximation (c'est-à-dire pour h petit) par la valeur prise par la différentielle.

Approximation des grandeurs physiques

Le développement de Taylor va nous être très utile en physique.

En effet, le physicien élabore des « modèles », correspondant à un comportement « idéal » pour lequel il existe des lois simples.

L'examen des écarts à ces lois, lorsqu'ils sont mesurables, permet d'accéder à la connaissance du phénomène complexe.

Exemples

Électronique : AO idéal = \lim AO réel lorsque $\mu \rightarrow \infty$
avec μ coefficient d'amplification de l'AO.

Thermodynamique : gaz parfait = \lim gaz réel lorsque $P \rightarrow 0$.

Mécanique newtonienne d'une particule de vitesse v : domaine de validité lorsque $v \ll c$ (vitesse de la lumière dans le vide).

Optique : propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène : domaine de validité $\lambda \ll R$ (λ = longueur d'onde, R rayon du diaphragme). C'est l'approximation de l'optique géométrique qui permet de négliger le phénomène de diffraction par le diaphragme.

Dans certains cas l'utilisation du développement de Taylor-Young permet de modéliser le phénomène au voisinage de x_0 .

- Approximation au premier ordre

Elle est obtenue en négligeant les termes au-delà du 1^{er} ordre.

On approximera $f(x)$ par $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ soit $ax + b$.

C'est l'approximation linéaire du physicien : la courbe est remplacée par sa tangente.

- Approximation au second ordre

On approximera $f(x)$ par $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2f''(x_0)$

soit $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Dans ce cas, la courbe est approximée par une parabole.

Souvent, nous nous ramènerons au développement de Taylor-Young au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Les développements suivants doivent être connus (on se limite en général au second ordre) ; s'il faut poursuivre, on reprend la formule générale.

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} \dots \text{ avec } \alpha \text{ positif ou négatif, entier ou fractionnaire.}$$

$$\sin x \approx \tan x \approx x \dots \text{ (les termes suivants dans les deux cas sont du 3^e ordre).}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \dots \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} \dots \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \dots$$

Le physicien choisit d'approximer le résultat à un ordre donné et ne tient alors plus compte des termes suivants.

Exemple : champ de pesanteur $g(z)$ au voisinage du sol terrestre.

Expression générale de $g(z) = g_0 \cdot \left(\frac{R}{R+z} \right)^2$.

Cherchons une expression approchée au premier ordre pour $z \ll R$ de :

$$g(z) = g_0 \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{z}{R}} \right)^2 = g_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{R} \right)^{-2} \approx g_0 \cdot \left(1 - \frac{2z}{R} \right).$$

Ainsi au sommet du Mont-Blanc (4 807 m), en prenant $g = g_0$, on a une incertitude relative de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{-3}$.

Rassurons immédiatement ceux qui sont générés de ne pas avoir pris le terme d'ordre 2. Un calcul rapide leur permettra de trouver :

$$g(z) \approx g_0 \cdot \left(1 - \frac{2z}{R} + \frac{3z^2}{R^2} \right), \text{ ce qui ajoutera une incertitude relative de } 1,7 \cdot 10^{-6}.$$

On remarquera que le terme d'ordre 2 est très inférieur au terme d'ordre 1.

Ce résultat est très général : dans le développement de Taylor-Young, le terme d'ordre n est inférieur au terme d'ordre $(n-1)$, ce qui justifie en physique de prendre un nombre très limité de termes (souvent en fonction de la précision souhaitée, en n'oubliant pas que le physicien n'a aucun besoin d'une précision de calcul qui serait supérieure à celle de ses mesures !).



Résolution de quelques équations différentielles

Préliminaire : primitive d'une fonction

Soit F une primitive de f .

Elle est définie par
$$F'(x) = f(x)$$

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(u) du$$

Le physicien qui ne veut pas s'embarrasser de précautions d'écriture écrira le plus souvent :

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx$$

Équation différentielle du premier ordre à variables séparables

Ce sont des équations du premier ordre pour lesquelles on peut :

– résoudre en $x'(t)$
$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = f_1(x, t)$$

– et séparer les variables
$$h(x) \frac{dx}{dt} = g(t)$$

par intégration par rapport à t (on recherche une primitive H de h et G de g)
 $H(x) = G(t) + \text{cste.}$

Soit x_0 la valeur de x correspondant à $t = t_0$

$$H(x) - H(x_0) = G(t) - G(t_0)$$

Exemple : soit une particule de masse m soumise à son poids $\vec{P} = mg\vec{u}_z$ et à la résistance de l'air modélisée par la force $\vec{f} = -\lambda v^2 \vec{u}_z$. On obtient $ma = m \frac{dv}{dt} = mg - \lambda v^2$ par projection de la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe $z'z$. On peut séparer les deux variables v et t en mettant l'équation sous la forme :

$$\frac{m dv}{mg - \lambda v^2} = dt$$

Le premier membre n'est fonction que de v , le second que de t . Il suffira alors de trouver la primitive de chaque membre, soit pour le premier membre $\int_{v_0}^v \frac{m dv}{mg - \lambda v^2}$ et pour le second $\int_{t_0}^t dt$ avec v_0 la vitesse à l'instant t_0 .

Équation linéaire du premier ordre à coefficients constants

La forme générale est $ay'(t) + by(t) = h(t)$ (E)

On appelle *équation homogène* l'équation sans le second membre :

$$ay'(t) + by(t) = 0$$

l'équation homogène est à variables séparables car on peut écrire :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{b}{a} = -\alpha \quad \text{d'où} \quad y_1(t) = Ae^{-\alpha t}.$$

La solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète.

Il ne reste plus qu'à trouver une solution particulière de (E) (peu importe laquelle, la plus simple fera l'affaire !).

- Si la fonction h est une constante notée c , une solution particulière est $y_2 = \frac{c}{b}$.
- Si h n'est pas une constante, « on se débrouille » comme on peut pour trouver une solution particulière. C'est assez simple pour les fonctions polynômes en t^n et pour les fonctions sinusoïdales où l'on peut procéder par identification.

Soit y_2 cette solution particulière.

On arrive alors à :

$$y(t) = y_2(t) + Ae^{-\alpha t}$$

où A est une constante à déterminer à partir des conditions initiales.

Dans tous les cas, pour une équation du premier ordre, se rappeler qu'il y aura une constante à déterminer.

Équation différentielle du second ordre linéaire, à coefficients constants

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$$

De la même manière que pour les équations du premier ordre :

la solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète.

Si f est une constante d , la solution particulière est évidente, c'est $x = \frac{d}{c}$. Sinon, en général, des considérations d'ordre physique donnent une solution particulière (la plupart du temps, elle représente le régime permanent qui s'établit pour t suffisamment grand).

- Résolution de l'équation homogène

Soit $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$ (1)

On cherche alors des solutions de la forme $x(t) = Ae^{\alpha t}$ où $A, \alpha \in \mathbb{C}$ (ou \mathbb{R}) car les mathématiciens montrent que la solution la plus générale est une combinaison linéaire de deux solutions de ce type.

Recherche des valeurs de α : $x'(t) = \alpha Ae^{\alpha t}$ et $x''(t) = \alpha^2 Ae^{\alpha t}$.

En reportant dans (1), il vient : $Ae^{\alpha t}(a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$.

L'équation du second degré dont α doit être solution est dite « équation caractéristique ».

Il y a trois cas possibles :

1. Discriminant positif soit $b^2 - 4ac > 0$

Il y a deux solutions α_1 et α_2 dans \mathbb{R} , on a donc :

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

2. Discriminant nul soit $b^2 - 4ac = 0$

Il y a une racine double α dans \mathbb{R} et dans ce cas :

$$x = (A + Bt)e^{\alpha t} \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

(C'est un cas limite, physiquement sans grande signification.)

3. Discriminant négatif soit $b^2 - 4ac < 0$

Il y a deux solutions α_1 et α_2 dans \mathbb{C} : $\alpha = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

(On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.) On a alors :

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \quad A \text{ et } B \in \mathbb{C}.$$

Seules des solutions réelles peuvent avoir une signification physique, α_1 et α_2 étant imaginaires conjuguées, on peut poser $\alpha = -\lambda \pm i\omega$ et dans ces conditions, les solutions $x(t)$ réelles sont de la forme

$$\begin{aligned} x &= e^{-\lambda t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \\ x &= De^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) \\ x &= D'e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \phi') \end{aligned}$$

$$C_1, C_2, D, D', \phi, \phi' \in \mathbb{R} \quad \lambda = \frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \omega^2 = \frac{4ac - b^2}{2a}$$

Il ne reste plus qu'à ajouter une solution particulière de l'équation différentielle initiale et à déterminer les valeurs des constantes, à l'aide des conditions initiales...

Dans tous les cas, pour une équation du second ordre, se rappeler qu'il y a deux constantes à déterminer.

Éléments de calcul vectoriel

Produit scalaire de deux vecteurs

- Définition – expression

Soient \vec{V}_1 et \vec{V}_2 deux vecteurs non nuls de composantes respectives (X_1, Y_1, Z_1) (X_2, Y_2, Z_2) dans une base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Soit α l'angle orienté des vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos \alpha = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

- Propriétés

- Module du vecteur \vec{V}

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = V^2$$

d'où $V = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

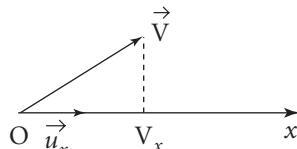
- Composantes du vecteur \vec{V} sur un axe

En remarquant que lorsqu'on écrit $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos \alpha$, $V_2 \cos \alpha$ représente la projection de \vec{V}_2 sur la direction de \vec{V}_1 , la projection de \vec{V} sur un axe Ox (resp Oy, Oz) de vecteur unitaire \vec{u}_x (resp. \vec{u}_y , \vec{u}_z) s'écrit :

$$V_x = \vec{V} \cdot \vec{u}_x$$

(resp. $V_y = \vec{V} \cdot \vec{u}_y$ et $V_z = \vec{V} \cdot \vec{u}_z$)

- Orthogonalité de deux vecteurs



$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$$

- Dérivée d'un produit scalaire

Si \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont fonctions du temps, alors :

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

Conséquence : soit \vec{u} un vecteur unitaire

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2 = 1$$

$$\frac{du^2}{dt} = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0.$$

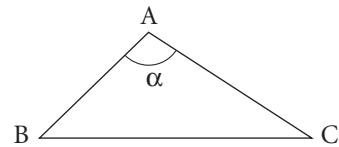
Le vecteur $\frac{d\vec{u}}{dt}$ est orthogonal au vecteur \vec{u} .

– Propriétés métriques dans les triangles

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC}$$

$$\boxed{BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2BA \cdot AC \cos \alpha}$$



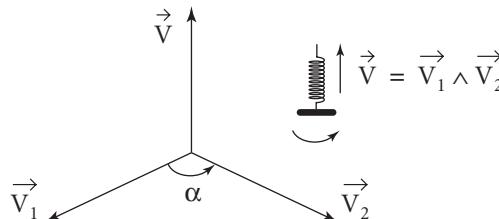
Produit vectoriel de deux vecteurs

- Définition : soit \vec{V}_1 et \vec{V}_2 deux vecteurs non nuls. Soit α l'angle orienté des vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est un vecteur orthogonal au plan défini par \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , orienté de telle sorte que $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V})$ forment un trièdre direct, de module $V_1 V_2 |\sin \alpha|$.

- Autres méthodes pour définir le sens :

- règles des 3 doigts de la main droite,
- tire-bouchon de Maxwell.



- Propriétés

$$-\boxed{\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1}$$

$$-\boxed{\vec{V}_1 \text{ colinéaire à } \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}}$$

– Soit une base orthonormée directe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3; \quad \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = \vec{u}_1; \quad \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 = \vec{u}_2.$$

– Composantes de \vec{V} dans une base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

En utilisant les propriétés énoncées plus haut :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (V_{1x}\vec{u}_x + V_{1y}\vec{u}_y + V_{1z}\vec{u}_z) \wedge (V_{2x}\vec{u}_x + V_{2y}\vec{u}_y + V_{2z}\vec{u}_z)$$

$$\vec{V} = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2)\vec{u}_x + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2)\vec{u}_y + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2)\vec{u}_z$$

(X_1, Y_1, Z_1) , (X_2, Y_2, Z_2) étant les composantes respectives de \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

On peut remarquer que chaque terme correspond respectivement aux déterminants 2×2 :

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ X_1 & X_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

– Moyen mnémotechnique

Écrire les composantes colonnes des vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 :

$$\begin{matrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} & \\ & \\ & \end{matrix} \quad \text{On obtient le 1er déterminant (composante sur } \vec{u}_x \text{) en barrant la } 1^{\text{re}} \text{ ligne puis les autres par permutation circulaire.}$$

• Dérivée d'un produit vectoriel

Si \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont fonctions du temps

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \frac{d\vec{V}_2}{dt}}$$

• Calcul de l'aire d'un triangle ABC

$$\mathcal{A}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} AB \times AC |\sin \alpha|$$

$$\mathcal{A}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\|.$$

Produit mixte de trois vecteurs

• Définition

Soit $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ trois vecteurs. Le produit mixte $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ est défini par :

$$\boxed{(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)}$$

• Propriétés

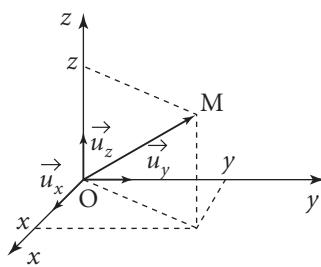
$$\boxed{\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = \vec{V}_2 \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1)}$$

Le produit mixte est nul si deux vecteurs sont colinéaires ou si les trois vecteurs sont coplanaires.

Systèmes de coordonnées et bases

Soit un point M étudié dans un référentiel \mathcal{R} . On munit \mathcal{R} d'un repère d'origine O, d'axes orthogonaux Ox, Oy, Oz.

Base cartésienne



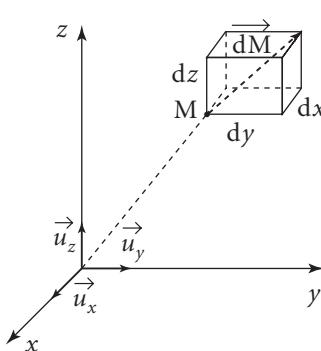
Les coordonnées de M sont x, y, z dans la base cartésienne $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$.

Propriété : $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sont fixes par rapport au référentiel \mathcal{R} .

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

Les données $x(t), y(t), z(t)$ constituent les équations paramétriques du mouvement.

Il est utile de connaître l'expression d'un petit déplacement \vec{dM} dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.



$$\vec{dM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

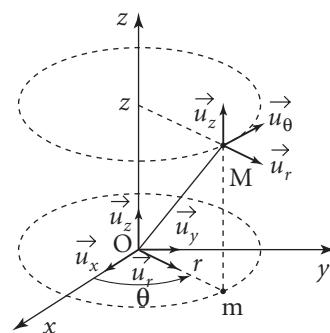
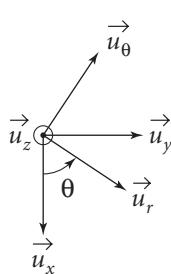
Cette expression permettra de déterminer le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

Elle permet également d'exprimer une surface élémentaire $\delta S = dx dy$ (respectivement $dy dz$, $dx dz$) ainsi qu'un volume élémentaire $\delta \tau = dx dy dz$.

Base cylindrique

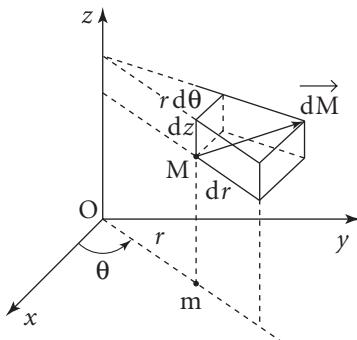
Elle s'obtient par rotation de $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ d'un angle θ autour de l'axe Oz.



Les coordonnées cylindriques de M dans la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ sont r, θ et z . En associant la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ au point M, on obtient une base locale en mouvement par rapport à \mathcal{P} .

Expression du vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$.

Les données $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$ constituent les équations paramétriques du mouvement.



Expression d'un petit déplacement de M dans $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$:

$$d\mathbf{M} = d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

Cette expression permet de déterminer le vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

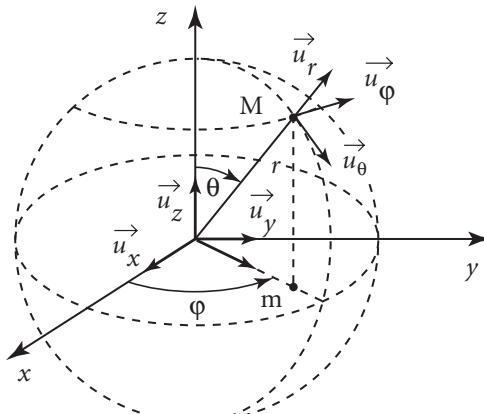
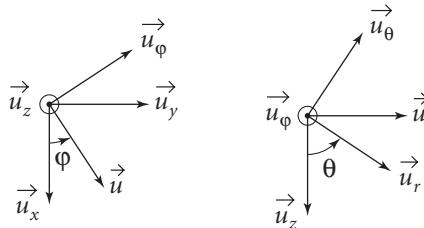
Elle permet également de déterminer :

- une surface élémentaire $\delta S = r dr d\theta$,
- un volume élémentaire $\delta \tau = r dr d\theta dz$.

Cette représentation est à utiliser pour un système admettant une symétrie cylindrique (invariance par rotation autour de Oz).

Base sphérique

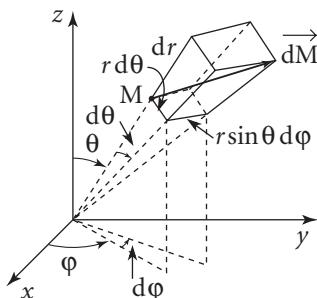
On l'obtient par une rotation de $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ d'un angle φ autour de Oz, suivie d'une rotation d'un angle θ autour de \vec{u}_φ .



Dans cette base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$, les coordonnées sphériques de M sont r, θ et φ .

Expression du vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$.

En associant la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ au point M, on obtient une base locale en mouvement dans \mathcal{R} .



Expression d'un petit déplacement de M dans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$:

$$\overrightarrow{dM} = d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\phi.$$

Cette expression permet de déterminer le vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\phi.$$

Elle permet également de déterminer :

– une surface élémentaire sur la sphère de rayon r : $\delta S = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$;

– un volume élémentaire : $\delta V = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$.

Cette représentation est à utiliser pour un système admettant une symétrie sphérique (forces en $f\vec{u}_r$ par exemple).

Si $\theta = \text{constante}$, on retrouve des coordonnées polaires pour $\rho = r\sin\theta$ et φ .

Si $\varphi = \text{constante}$, on retrouve des coordonnées polaires pour r, θ .

Opérateur gradient

Définition

Soit U une fonction scalaire d'un point M de l'espace. Lors du déplacement \overrightarrow{dM} du point M de M en M' , $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM}$, U varie de $dU = U(M') - U(M)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}U$ est défini par $dU = \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dM}$.

Exemple : U peut être une énergie potentielle E_p : $dE_p = \overrightarrow{\text{grad}}E_p \cdot \overrightarrow{dM}$.

Propriétés

- Considérons une surface telle que quel que soit M appartenant à cette surface, $U(M) = \text{constante}$. Alors pour tout petit déplacement sur cette surface,

$$dU = 0 = \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dM}.$$

$\overrightarrow{\text{grad}}U$ est donc perpendiculaire à cette surface.

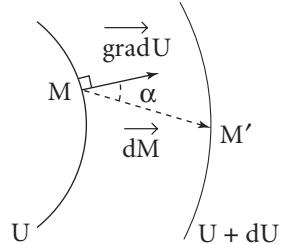
Exemple: dans le cas d'une énergie potentielle, la surface pour laquelle $E_p(M) = \text{constante}$ est appelée « equipotentielle ». $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ est donc perpendiculaire à la surface equipotentielle.

- Soit maintenant U et $U + dU$, deux surfaces equipotielles différentes contenant M et M' avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM}$.

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{dM}.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{dM} > 0 \Leftrightarrow \cos \alpha > 0 \text{ avec } \alpha \in [0, \pi/2].$$

Alors $dU > 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} U$ est orienté dans le sens des U croissants.



Expression dans les différentes bases

- Base cartésienne

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{dOM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z.$$

Soient A, B, C les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}} U$ sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: $dU = Adx + Bdy + Cdz$.

D'autre part : $U = U(M) = U(x, y, z)$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

où $\frac{\partial U}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$) représente la dérivée partielle de U par rapport à x, y et z restant constants (resp. par rapport à y, x et z restant constants, par rapport à z, x et y restant constants).

Par identification :

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z.$$

- Base cylindrique

La méthode est la même. Attention à l'expression : $\overrightarrow{dM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$.

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z.$$

- Base sphérique

Attention $\overrightarrow{dM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + rsin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$.

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi.$$

Linéarité de la fonction $\overrightarrow{\text{grad}}$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U_1 + U_2) = \overrightarrow{\text{grad}} U_1 + \overrightarrow{\text{grad}} U_2$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda U) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} U.$$

Notation del ou nabla

On définit l'opérateur del ou nabla, en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Appliqué à la fonction scalaire $U(M)$:

$$\vec{\nabla} U(M) = \vec{u}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Coniques

Équations des coniques en coordonnées polaires

$$(r = OM > 0, \theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}))$$

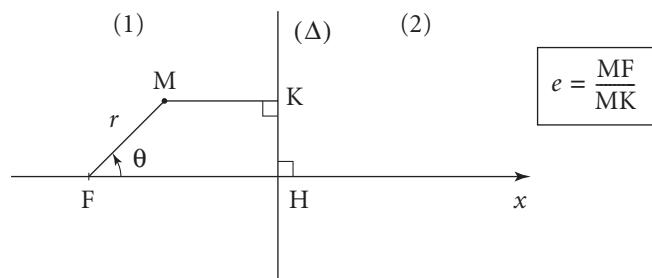
Soit un point F appelé foyer et une droite (Δ) appelée directrice associée ($F \notin (\Delta)$). Une conique est le lieu des points dont le rapport des distances à F et à la droite (Δ) est constant. Ce rapport est appelé excentricité e de la conique.

Suivant les valeurs de e , on distingue le type de conique :

$e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
ellipse	parabole	hyperbole

La droite (Δ) divise le plan en deux régions notées (1) et (2).

- 1^{er} cas : le point M de la conique appartient à la région (1).



Cherchons l'équation de la branche de conique appartenant à cette région du plan en coordonnées polaires :

$$MK = FH - r \cos \theta$$

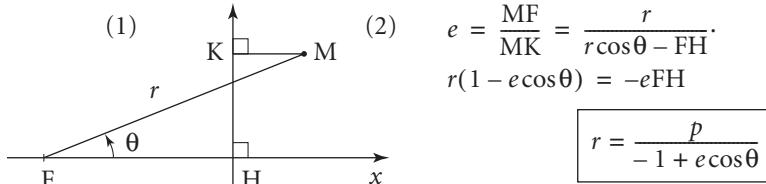
$$e = \frac{r}{FH - r \cos \theta}$$

$$r(1 + e \cos \theta) = e \times FH.$$

On pose $e \times FH = p$: paramètre de la conique

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

• 2^e cas : le point M de la conique appartient à la région (2).



$$(2) \quad e = \frac{MF}{MK} = \frac{r}{r \cos \theta - FH}$$

$$r(1 - e \cos \theta) = -eFH$$

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \theta}$$

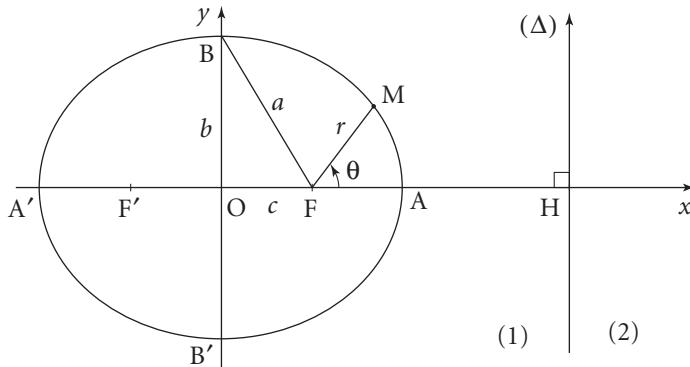
équation de la branche de conique appartenant à la région du plan ne contenant pas F.

Étude de différentes coniques

• $e < 1$: ellipse

L'ellipse possède un centre de symétrie O et deux foyers F et F' ($OF = OF' = c$)
 FOF' est l'axe focal de l'ellipse.

On définit son demi grand axe $OA = OA' = a$, son demi petit axe $OB = OB' = b$.



$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$$

– Son équation en coordonnées polaires est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{avec } e < 1 \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (\text{l'ellipse appartient à la région (1)}).$$

Pour $\theta = 0$

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}$$

$\theta = \pi$

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - e}$$

$$r_{\max} + r_{\min} = 2a \quad \text{ce qui permet de retrouver } p = a(1 - e^2).$$

– Aire de l'ellipse $\boxed{\mathcal{A} = \pi ab}$

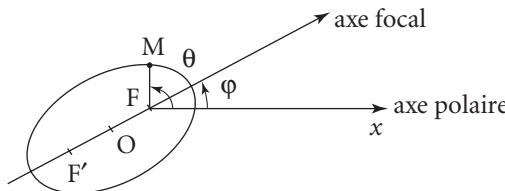
– Remarque : choix de l'axe polaire

L'axe focal $F'OF$ n'est pas forcément confondu avec l'axe polaire.

Si l'axe focal fait un angle φ avec l'axe polaire, l'équation de l'ellipse en polaire s'écrit :

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varphi)}}$$

On retrouve que pour $\theta = \varphi$, $r = \frac{p}{1 + e} = r_{\min}$, ce qui caractérise le point A qui appartient bien évidemment à l'axe focal.

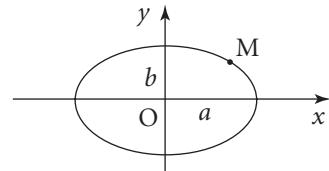


Application : mouvement des planètes autour du Soleil.

Si le texte du problème n'impose pas d'axe polaire, on choisira celui-ci confondu avec l'axe focal.

– Équation cartésienne de l'ellipse

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



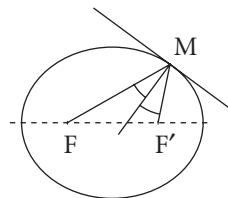
– Définition géométrique de l'ellipse

C'est le lieu des points M tels que :

$$\boxed{MF' + MF = 2a}$$

– Propriété géométrique

La tangente en un point M de l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$.



• $e > 1$: hyperbole

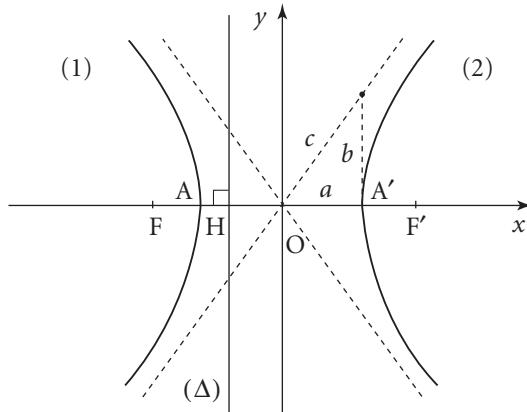
L'hyperbole possède un centre de symétrie O et deux foyers F et F'.

On définit toujours $a = OA = OA'$

$$c = OF = OF'.$$

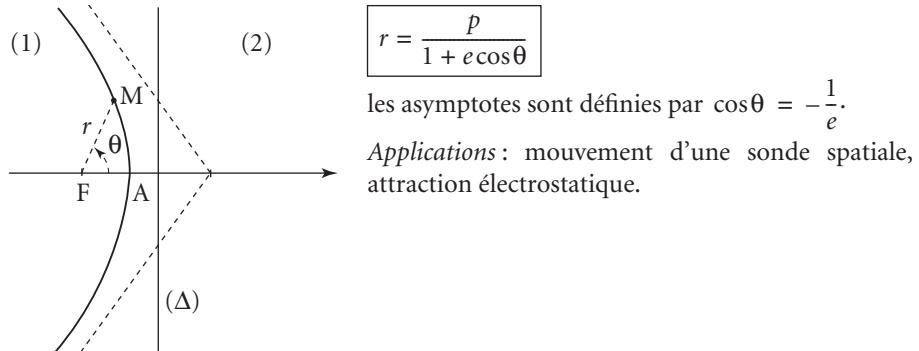
$$\text{On a toujours : } e = \frac{c}{a}; \quad p = a(e^2 - 1).$$

$$\text{Par contre } a^2 = -b^2 + c^2.$$

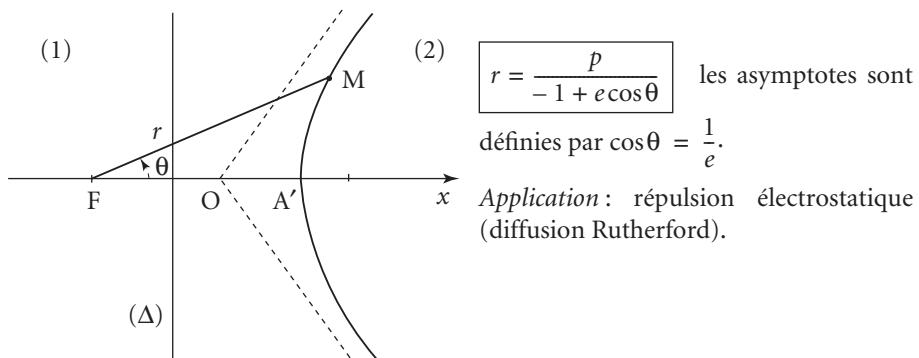


En physique, le point matériel en mouvement ne décrit qu'une des branches de l'hyperbole.

– Si la branche décrite appartient à la région (1) :



– Si la branche décrite appartient à la région (2) :



– Équation cartésienne de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

– Équation des asymptotes

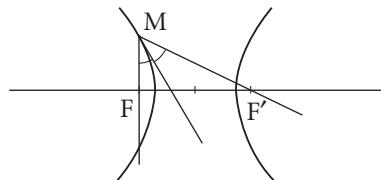
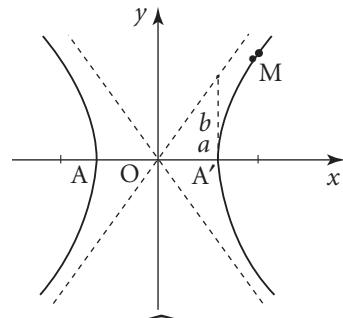
$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

– Définition géométrique de l'hyperbole

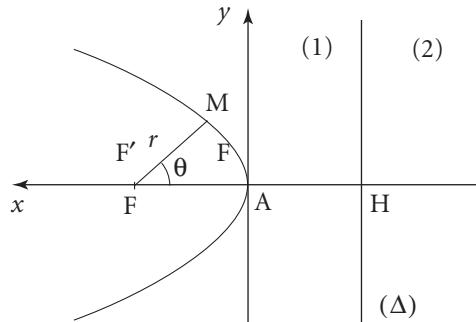
C'est le lieu des points M tels que $|MF' - MF| = 2a$

– Propriété géométrique

La tangente en un point M est la bissectrice intérieure de l'angle $F'MF$



• $e = 1$: parabole



– Équation en coordonnées polaires

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta}$$
 car la parabole appartient à la région (1) de l'espace.

$$\theta \in]-\pi, \pi[$$

$$FA = a = AH; \quad p = 2a.$$

Application : mouvement de certaines comètes.

– Équation en cartésienne

$$y^2 = 2px$$

Partie

1

Chapitre

1

Mécanique 1

101 Risque de collision au freinage

1. Une voiture roule à une vitesse constante V_0 en ligne droite. Au temps $t = 0$, le conducteur aperçoit un obstacle, mais il ne commence à freiner (avec une décélération constante de $7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) qu'au bout d'un temps $\varepsilon = 0,6 \text{ s}$. Calculer la distance parcourue par le véhicule depuis l'instant initial jusqu'à l'arrêt.

Application numérique : $V_0 = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, puis $V_0 = 108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

2. Deux voitures se suivent sur une route droite, à une distance d , et roulent à la même vitesse constante V_0 . À l'instant $t = 0$, la première voiture commence à freiner avec une décélération a , la seconde voiture ne commence à freiner qu'au temps $t = \varepsilon = 0,6 \text{ s}$ avec une décélération b .

Quelle condition doit satisfaire d pour que la seconde voiture s'arrête en arrière de la première ?

Application numérique : $V_0 = 108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $a = 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $b = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

La condition trouvée est-elle suffisante pour garantir qu'il n'y aura pas collision entre les deux voitures (pour des valeurs différentes de V_0 , ε , a et b ...) ?

Pourquoi cette condition est-elle suffisante avec les données numériques fournies ?

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Mouvement à accélération constante.
- Équation horaire.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

- Il est astucieux de résoudre la première question en tenant compte de la deuxième : on prendra des notations telles qu'il ne soit pas nécessaire de refaire plusieurs fois le même calcul.
- Pour la deuxième question, il faut prendre en compte les différentes phases du mouvement, avec des conditions initiales pertinentes.

■ 3. Solution

1. On peut prendre l'origine des abscisses à la position de la voiture à la date $t = 0$: elle parcourt une distance $x_1 = V_0\varepsilon$ avant de freiner – avec une accélération – $-a$ (a constante > 0) à partir de la date $t_1 = \varepsilon$.

Pour $t > t_1$, le mouvement est caractérisé par une vitesse :

$$V = \dot{x} = -a(t - t_1) + V_0$$

et une position

$$x = -\frac{1}{2}a(t - t_1)^2 + V_0(t - t_1) + x_1 \quad (1)$$

compte tenu des conditions initiales ci-dessus.

L'arrêt est obtenu lorsque $V = 0$, soit $t - t_1 = \frac{V_0}{a}$.

En reportant cette valeur dans l'expression de $x(t)$, on obtient la distance d'arrêt D :

$$D = -\frac{1}{2}a\left(\frac{V_0}{a}\right)^2 + V_0\frac{V_0}{a} + x_1;$$

$$D = \frac{V_0^2}{2a} + V_0\varepsilon$$

Application numérique :

$$V_0 = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ d'où : } D = 24 \text{ m.}$$

$$V_0 = 108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ d'où : } D = 78 \text{ m.}$$

2. L'équation horaire de la première voiture est donnée par la relation (1), en faisant $t_1 = 0$ et $x_1 = 0$:

$$x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + V_0t;$$

et elle s'arrête à l'abscisse $x_2 = x\left(\frac{V_0}{a}\right)$, soit :

$$x_2 = \frac{V_0^2}{2a}.$$

À la date $t = 0$, la seconde voiture était à l'abscisse $-d$, et à la date $t_1 = \varepsilon$, elle était donc à l'abscisse $x_1 = -d + V_0\varepsilon$.

La relation (1) donne alors pour la seconde voiture une position (avec a remplacé par b) :

$$x'(t) = -\frac{1}{2}b(t - t_1)^2 + V_0(t - t_1) + V_0\varepsilon - d;$$

ce qui donne une distance x'_2 parcourue jusqu'à l'arrêt (à la date $t = t_1 + \frac{V_0}{b}$) :

$$x'_2 = \frac{V_0^2}{2b} + V_0\varepsilon - d.$$

La condition demandée correspond à $x'_2 < x_2$ (on néglige les dimensions des voitures, assimilées à des points matériels...), soit :

$$\frac{V_0^2}{2b} + V_0\varepsilon - d < \frac{V_0^2}{2a};$$

$$d > \frac{V_0^2}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + V_0\varepsilon$$

Soit, avec les valeurs données : $d > 33 \text{ m.}$

Cette condition n'est pas suffisante : il suffit d'imaginer une situation telle que $b > a$, avec $d < V_0\varepsilon$.

La seconde voiture heurte la première avant même le début de son freinage, alors que la condition trouvée peut être vérifiée !

Mais si $b < a$, la condition trouvée est effectivement suffisante. En effet, la seconde voiture se rapproche alors constamment de la première (la différence des vitesses $\dot{x}' - \dot{x}$ reste toujours positive ou nulle) : c'est donc lorsqu'elles sont arrêtées que leur distance d est minimale.

102

Projectile soumis au frottement de l'air

Un projectile M de masse m est lancé dans un plan vertical ($0xz$) avec une vitesse initiale \vec{V}_0 faisant un angle θ avec l'horizontale $0x$. Ce référentiel, lié à la surface de la Terre, sera supposé galiléen, et l'accélération \vec{g} de la pesanteur constante. Ce projectile est soumis de plus à une force de frottement due à l'air, force que l'on peut mettre sous la forme $\vec{F}_f = -k \cdot \vec{V}$ avec $k > 0$ et \vec{V} vitesse instantanée du projectile.

1. Établir les équations du mouvement : on introduira la constante de temps $\tau = \frac{m}{k}$.

Montrer que la trajectoire du projectile admet une asymptote verticale, et que sa vitesse tend vers une limite \vec{V}_l que l'on précisera.

Exprimer alors les vitesses et position du mobile en fonction de t , τ , θ , V_0 et V_l .

2. Calculer le temps t_s nécessaire au projectile pour atteindre le sommet S de sa trajectoire, et donner la position de S.

Application numérique : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $V_0 = V_l$: calculer l'altitude de S, et comparer à l'altitude atteinte lorsqu'on néglige le frottement de l'air.

1. Ce qu'il faut savoir

Point de cours

- Loi fondamentale de la dynamique.

Outil mathématique

- Résolution d'équation différentielle du premier ordre avec second membre.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On appliquera la loi fondamentale de la dynamique au projectile M assimilé à un point matériel. La vitesse limite peut être trouvée directement en cherchant à quelle condition l'accélération \vec{a} s'annule. On pourra intégrer l'équation différentielle sous sa forme vectorielle et projeter les expressions obtenues pour \vec{V} et \overrightarrow{OM} .

- 2.** À cause du freinage dû à l'air, la trajectoire étudiée doit se situer « au-dessous » de la trajectoire parabolique « classique » obtenue en l'absence de frottement.

3. Solution

- 1.** La loi fondamentale de la dynamique appliquée au point M à un instant t s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{V}$. On trouve directement que $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V} = \text{constante}$.

Ce qui est réalisé pour $m\vec{g} - k\vec{V} = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{V}_l = \frac{m\vec{g}}{k}}$

ou encore en posant $\tau = \frac{m}{k}$ $\boxed{\vec{V}_l = \tau\vec{g}}$

POINT MÉTHODE

En écrivant le principe fondamental sous la forme $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{\Sigma F}$, on obtient directement une équation différentielle en \vec{V} :

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{V}}$$

Résolvons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{k\vec{V}}{m} &= \vec{g} \quad \text{soit en posant } \tau = \frac{m}{k}: \\ \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{\vec{V}}{\tau} &= \frac{\vec{V}_l}{\tau}. \end{aligned}$$

Résolvons l'équation différentielle vectorielle :

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_l + \vec{A} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Le vecteur \vec{A} est défini par la condition initiale $\vec{V} = \vec{V}_0$ à $t = 0$: $\vec{A} = \vec{V}_0 - \vec{V}_l$

$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{V}_l + (\vec{V}_0 - \vec{V}_l)e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (1)$$

En intégrant une nouvelle fois par rapport à t , on obtient :

$$\vec{OM}(t) = \vec{V}_l t + (\vec{V}_0 - \vec{V}_l)(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}} + \vec{B}.$$

\vec{B} est défini par la condition initiale $\vec{OM} = \vec{0}$ à $t = 0$:

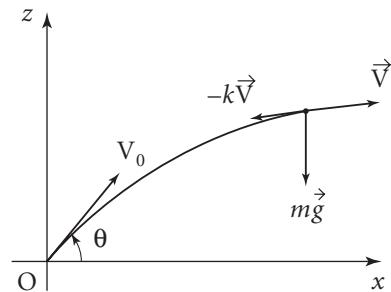
$$\vec{B} = \tau(\vec{V}_0 - \vec{V}_l)$$

d'où

$$\boxed{\vec{OM}(t) = \vec{V}_l t + \tau(\vec{V}_0 - \vec{V}_l)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad (2)$$

d'où en projection sur (\vec{u}_x, \vec{u}_z) , avec
 $\vec{V}_l = -V_l \vec{u}_z$ (V_l est un module...):

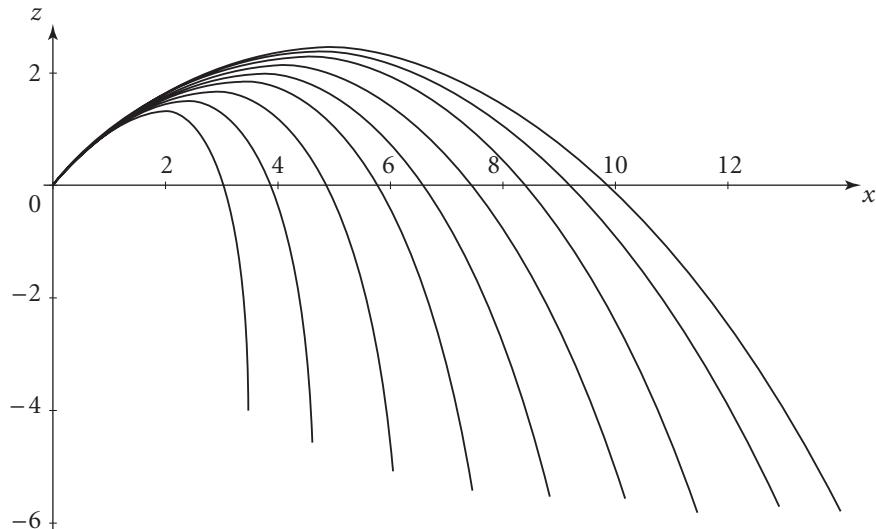
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{V} &= \begin{cases} V_x = V_0 \cos \theta e^{-\frac{t}{\tau}} \\ V_z = -V_l + (V_0 \sin \theta + V_l) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \end{aligned}}$$



On retrouve bien sûr que pour $t \rightarrow \infty$
 $\vec{V} \rightarrow \vec{V}_l$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{OM} &= \begin{cases} x = \tau V_0 \cos \theta \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ z = -V_l t + \tau (V_0 \sin \theta + V_l) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{cases} \end{aligned}}$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow x_{\lim} = \tau V_0 \cos \theta$ ce qui correspond bien à une asymptote verticale.



2. Le sommet S de la trajectoire est déterminé par $V_z = 0$, ce qui correspond à une date t_s telle que : $0 = -V_l + (V_0 \sin \theta + V_l) e^{-\frac{t_s}{\tau}}$

soit :

$$\boxed{t_s = \tau \ln \left[1 + \frac{V_0 \sin \theta}{V_l} \right]}$$

et, en reportant :

$$x_s = \tau V_0 \cos \theta \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{V_0}{V_l} \sin \theta} \right)$$

$$z_s = -\tau V_l \ln \left(1 + \frac{V_0}{V_l} \sin \theta \right) + \tau (V_0 \sin \theta + V_l) \cdot \left(1 - \frac{V_l}{V_0 \sin \theta + V_l} \right)$$

$$z_s = \tau V_0 \sin \theta - \tau V_l \ln \left(1 + \frac{V_0}{V_l} \sin \theta \right)$$

si $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $V_0 = +V_l$, il vient :

$$\begin{cases} x_s = 0 \\ z_s = \tau V_l - \tau V_l \ln 2 = \tau V_l (1 - \ln 2) \end{cases}$$

En l'absence de tout frottement de l'air, le mouvement sur l'axe Oz devient :

$$\ddot{z} = -g$$

$$\dot{z} = -g t + V_0, \text{ d'où } t_{s'} = \frac{V_0}{g}$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t$$

$$\text{et } z_{s'} = z(t_{s'}) = \frac{V_0^2}{2g}.$$

Pour comparer les altitudes de S et S', exprimons z_s en fonction de V_0 et g :

$$\left(V_l = V_0 \text{ et } \tau = \frac{m}{k} = \frac{V_l}{g} = \frac{V_0}{g} \right) : z_s = \frac{V_0^2}{g} (1 - \ln 2)$$

d'où :

$$\frac{z_s}{z_{s'}} = 2(1 - \ln 2) \approx 0,6.$$

$z_s < z_{s'}$: le résultat est bien cohérent ; en présence de frottement le point matériel monte moins haut.

103

Deux mouvements sur la même trajectoire

A. Un mobile M décrit une hélice circulaire d'axe Oz, son mouvement étant défini en coordonnées cylindriques (r, θ, z) par les équations :

$$r = R \quad \theta = \omega t \quad z = H \cdot \left(1 - \frac{\theta}{2\pi} \right)$$

expressions dans lesquelles R , ω et H sont des constantes positives. On pourra poser $h = \frac{H}{2\pi}$. Le mobile part à l'instant $t = 0$, et fait un tour complet avant d'atteindre le plan $z = 0$.

1. Exprimer la vitesse \vec{V} du mobile, dans la base associée aux coordonnées cylindriques.

Préciser son module et son orientation.

Calculer la longueur de la trajectoire pour un tour du mobile.

Représenter la trajectoire dans un plan, en portant $R\theta$ sur l'axe horizontal et z sur l'axe vertical.

2. Exprimer de même l'accélération \vec{A} du mobile.

Que peut-on dire du produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{V}$? Quelle(s) conclusion(s) peut-on en tirer?

B. Le mouvement de M est maintenant défini par les équations :

$$r = R \quad \theta = \frac{1}{2}at^2 \quad z = H \cdot \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)$$

a étant une constante positive.

1. Qu'y a-t-il d'inchangé et qu'y a-t-il de changé par rapport au mouvement précédent?

2. Exprimer le vecteur vitesse dans la base des coordonnées cylindriques ; en déduire son module.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

A. 1. Il s'agit de mettre la vitesse sous la forme $\vec{V} = V \cdot \vec{u}_T$ (\vec{u}_T unitaire), en précisant chacun des deux termes.

Le système de coordonnées choisi facilitera l'interprétation géométrique, la grandeur V restant constante.

2. L'accélération \vec{A} se déduira des expressions classiques de ses composantes en coordonnées cylindriques.

B. 1. Dans tout mouvement, on peut distinguer la trajectoire (parcours géométrique), et l'équation horaire du mobile sur celle-ci : dans le cas présent, seule l'équation horaire est modifiée...

2. Les calculs sont analogues à ceux du **A. 1.** La remarque précédente permet de prévoir une partie du résultat : le vecteur \vec{u}_T est inchangé.

3. Solution

A. 1. La vitesse \vec{V} a pour expression générale, dans la base des coordonnées cylindriques :

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z.$$

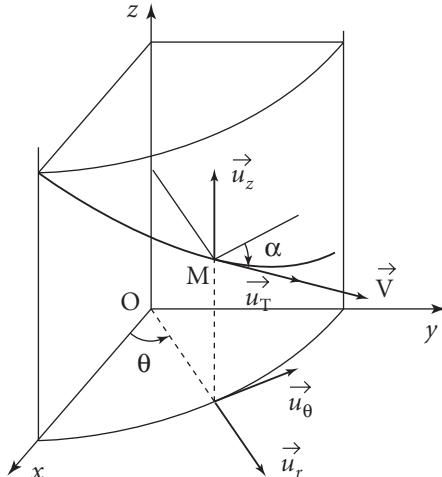
$$\text{Ici } \dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = \omega \quad \text{et} \quad \dot{z} = \frac{dz}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{H}{2\pi} \cdot \dot{\theta} = -h\omega$$

d'où : $\boxed{\vec{V} = R\omega \vec{u}_\theta - h\omega \vec{u}_z}$

et \vec{u}_θ et \vec{u}_z étant orthogonaux :

$$V = \|\vec{V}\| = \sqrt{(R\omega)^2 + (h\omega)^2}$$

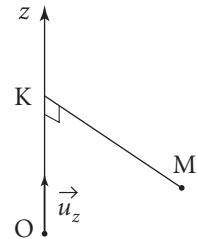
$\boxed{V = \omega \sqrt{R^2 + h^2}}$ ($V = \text{constante}$).



POINT COURS

Composition des mouvements :

Le mouvement peut se décomposer en un mouvement de translation selon Oz, de vitesse $\vec{V}_{tr} = \dot{z} \vec{u}_z$ et en mouvement de rotation autour de Oz à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$).



Dans le plan $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, la direction de \vec{V} est donnée par $\tan \alpha = -\frac{h\omega}{R\omega} = -\frac{h}{R}$.

C'est donc une direction fixe de ce plan...

Écrivant $\vec{V} = V \cdot \vec{u}_T$ (\vec{u}_T est donc orienté dans le sens du mouvement, puisque $V > 0$), le vecteur \vec{u}_T a pour composantes sur \vec{u}_θ et \vec{u}_z :

$$\vec{u}_T \left| \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{R\omega}{V} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \\ \sin \alpha = -\frac{h\omega}{V} = \frac{-h}{\sqrt{R^2 + h^2}}. \end{array} \right.$$

L'abscisse curviligne sur la trajectoire est déterminée par $\frac{ds}{dt} = V$, soit, puisque la vitesse V est constante :

$$s = V \cdot t = \omega t \sqrt{R^2 + h^2} \quad (\text{avec } s(0) = 0).$$

Pour un tour du mobile, $\theta = \omega t = 2\pi$, ce qui donne pour s :

$$s_{(\theta = 2\pi)} = l = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}.$$

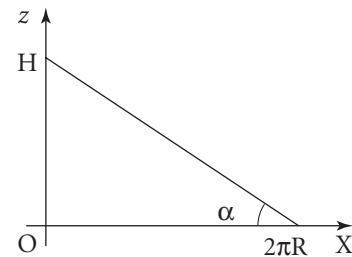
On peut représenter la trajectoire dans un plan, en posant $X = R\theta$.

$$\text{On a alors } z = H - \frac{H}{2\pi} \cdot \theta = H - h \cdot \frac{X}{R}.$$

La trajectoire est représentée par une droite de pente $-\frac{h}{R}$ qui fait donc un angle α avec l'axe OX.

Cette représentation correspond à « dérouler » la surface latérale du cylindre (axe Oz, $r = R$) sur lequel est tracée la trajectoire réelle du mobile

$$\left(X = R\theta = R\omega t = \int_0^t \vec{V} \cdot \vec{u}_\theta \cdot dt \right).$$



A. 2. L'accélération \vec{A} a pour expression générale, dans la base des coordonnées cylindriques :

$$\vec{A} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

ce qui donne, en tenant compte de $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{z} = -h\omega$:

$$\boxed{\vec{A} = -R\omega^2 \vec{u}_r}$$

POINT COURS

On peut obtenir l'accélération en dérivant directement l'expression de la vitesse :

$$\vec{V} = \omega R \vec{u}_\theta - \omega h \vec{u}_z \Rightarrow \vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \omega R \cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\text{avec } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r, \text{ il vient } \vec{A} = -\omega^2 R \vec{u}_r.$$

On constate immédiatement que $\vec{A} \cdot \vec{V} = 0$: l'accélération est donc purement normale, car le mouvement étudié ici est uniforme ($V = \text{cte.} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0$).

B. 1. La relation entre z et θ est inchangée : la trajectoire reste donc la même, et sa représentation plane (z en fonction de $R\theta$) également.

Le vecteur \vec{u}_T , défini à partir de la trajectoire, ne change pas, mais les expressions de V et \vec{A} seront différentes, puisque l'équation horaire est différente.

B. 2. Le calcul est le même qu'au A. 1., en tenant compte de la nouvelle expression de $\dot{\theta} = at$ (au lieu de $\omega \dots$).

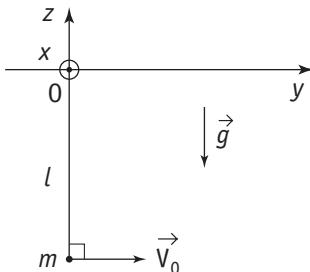
Donc $\vec{V} = Rat \vec{u}_\theta - hat \vec{u}_z$

et $V = at \cdot \sqrt{R^2 + h^2}$.



104 Pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une corde inextensible et sans masse de longueur l à laquelle est suspendu un point matériel M de masse m .



L'autre extrémité est fixée en un point 0, et le point M se déplace dans le plan vertical Oyz,

À l'instant initial, on lance M, fil tendu, avec une vitesse horizontale $\vec{V}_0 = V_0 \vec{u}_y$.

Que peut-on dire du mouvement ultérieur de la masse m ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Théorème de l'énergie mécanique.
- Loi fondamentale de la dynamique.
- Accélération pour un mouvement circulaire.

2. Ce qu'il faut comprendre

Le fil étant initialement tendu, la masse m amorce un mouvement circulaire de centre O et de rayon l . Son altitude augmentant elle gagne en énergie potentielle de pesanteur et corrélativement elle perd en énergie cinétique.

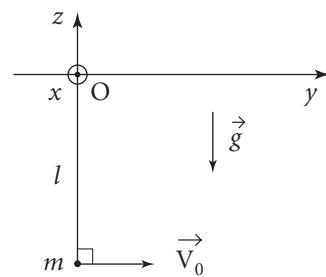
A priori, trois cas peuvent se produire.

- La corde reste tendue et le mouvement du pendule est oscillatoire $\left(\theta_{\max} < \frac{\pi}{2}\right)$.

- La corde reste tendue et le mouvement du pendule est révolutif, ce qui exige une énergie initiale suffisamment importante.
- La vitesse V_0 est trop faible pour qu'un mouvement révolutif ait lieu et trop forte pour que le mouvement soit oscillatoire. La corde finira par se détendre.

3. Solution

- On peut rapporter la vitesse V à V_0 et la tension T du fil à mg ($T = mg$ à l'équilibre) et définir ainsi les variables réduites $\frac{V}{V_0}$ et $\frac{T}{mg}$, variables sans dimension qui vont dépendre de θ et du paramètre $\eta = \frac{V_0^2}{gl}$ (grandeur également sans dimension que l'on peut former à partir de V_0, g, l grandeurs caractérisant le problème physique).



- Déterminons $\frac{V}{V_0} = f(\eta, \theta)$ tant que la corde reste tendue :

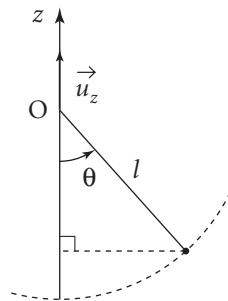
La corde étant tendue, le point matériel décrit un arc de cercle et la tension \vec{T} ne travaille pas (\vec{T} perpendiculaire au déplacement). Il en résulte la conservation de l'énergie mécanique du système :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV_0^2 - mgl$$

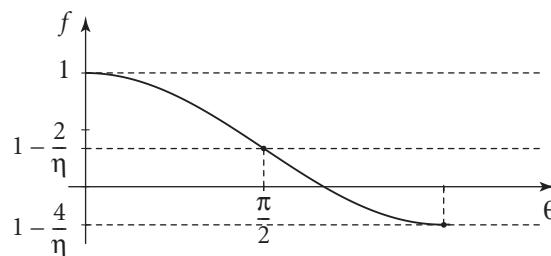
(origine de l'énergie potentielle prise en O)

$$E_p = -mgz \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 - mgl\cos\theta = \frac{1}{2}mV_0^2 - mgl.$$

Soit : $\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 1 + \frac{2}{\eta}(\cos\theta - 1)$ (1)



Traçons la courbe $\theta \rightarrow f(\theta) = 1 + \frac{2}{\eta}(\cos\theta - 1)$.



- Déterminons la tension $T = g(\eta, \theta)$ de la corde tendue :

D'après la loi fondamentale de la dynamique, on a en projection sur \vec{u}_r : $ma_r = -T + mg \cos \theta$

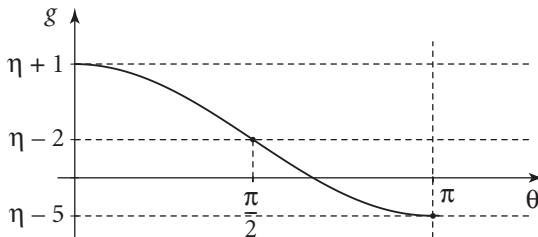
$$\text{avec } a_r = -\frac{V^2}{l}, \text{ d'où : } T = mg \cos \theta + m \frac{V^2}{l}.$$

$$\text{Soit } \frac{T}{mg} = \cos \theta + \frac{V^2}{gl}$$

$$\text{et avec (1) } \Rightarrow \frac{T}{mg} = \cos \theta + \eta \left[1 + \frac{2}{\eta} (\cos \theta - 1) \right].$$

Finalement :
$$\boxed{\frac{T}{mg} = 3 \cos \theta + \eta - 2} \quad (2)$$

Traçons la courbe $\theta \rightarrow g(\theta) = 3 \cos \theta + \eta - 2$.



Discussion

■ 1^{er} cas : mouvement révolutif.

La corde doit être toujours tendue et la vitesse ne doit pas s'annuler ce qui exige :

$$\eta - 5 > 0 \quad (T > 0) \text{ et } 1 - \frac{4}{\eta} > 0 \quad (V^2 > 0).$$

Soit en définitif : $\eta > 5$.

■ 2^e cas : mouvement non révolutif et la corde reste toujours tendue.

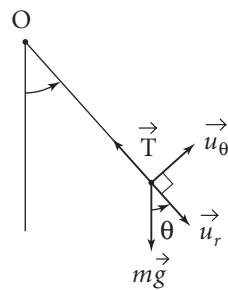
On observe alors des oscillations entre des valeurs extrêmes $\pm \theta_{\max}$. Il faut donc que l'on ait : $V^2(\theta_{\max}) = 0$ et $T(\theta) > 0$ pour $\theta \in (0, \theta_{\max})$.

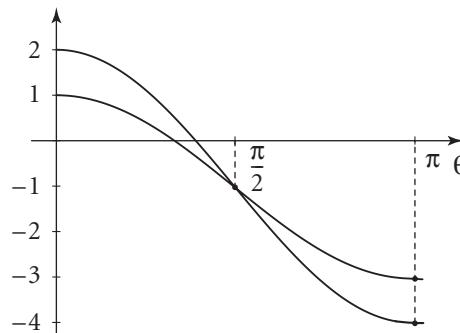
La fonction $V^2(\theta)$ s'annule pour $\theta = \theta_V$ tel que $\cos \theta_V = 1 - \frac{\eta}{2}$. De même, la fonction $T(\theta)$ s'annule pour $\theta = \theta_T$ tel que $\cos \theta_T = \frac{2}{3} - \frac{\eta}{3}$.

Ces deux valeurs n'existent que pour $\eta < 4$. D'autre part, la condition cherchée impose $\theta_V < \theta_T$ ($\theta \in [0, \pi]$), la vitesse devant s'annuler avant que la tension ne puisse le faire. Il faut donc que l'on ait :

$$\cos \theta_V > \cos \theta_T \Rightarrow 1 - \frac{\eta}{2} > \frac{2}{3} - \frac{\eta}{3}$$

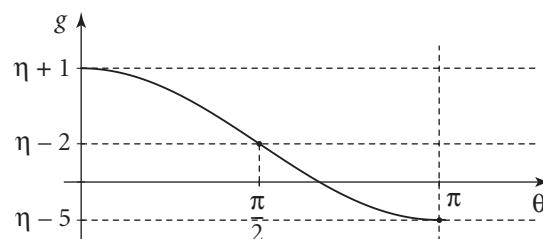
ce qui donne $6 - 3\eta > 4 - 2\eta \Rightarrow \eta < 2$. Dans ces conditions, on obtient un mouvement pendulaire d'amplitude inférieur à $\frac{\pi}{2}$ ($\theta_{\max} = \text{Arcos}\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$).



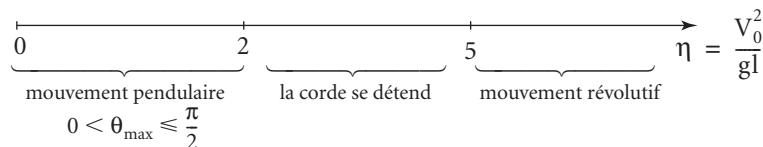


■ 3^e cas : $2 < \eta < 5$.

La corde finit par se détendre pour une valeur de θ comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π . La tension s'annule avant la vitesse ($\theta_V > \theta_T$). La suite du mouvement est celui d'une particule de masse m dans le seul champ de pesanteur (mouvement parabolique) du moins tant que le fil reste détendu... La corde se détend pour $\theta = \theta_T = \text{Arcos}\left(\frac{2-\eta}{3}\right)$.



Conclusion



105

Pendule dont le fil casse

Un pendule simple – masse m , fil de longueur l , inextensible et de masse négligeable – est suspendu en un point fixe 0 et lâché sans vitesse initiale depuis une position où le fil est horizontal et tendu. Soit h la distance entre le point 0 et le sommet de la trajectoire décrite ensuite par la masse m .

1. Donner qualitativement le domaine de variations de h .
2. Déterminer h .

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Conservation de l'énergie mécanique.
- Loi fondamentale de la dynamique.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

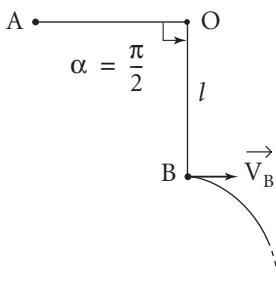
Il est inutile de déterminer l'équation de la trajectoire pour répondre à la question.

Entre le point de départ et le point atteint à l'instant où le fil casse, la masse m n'est soumise qu'à son poids et à la tension du fil qui ne travaille pas. La conservation de l'énergie mécanique permet de relier la vitesse et l'altitude.

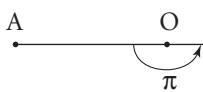
À partir du moment où le fil casse, la masse uniquement soumise à son poids a une trajectoire parabolique. On pourra remarquer que lors de ce mouvement, la composante horizontale de la vitesse est conservée.

■ 3. Solution

- 1.** Notons α l'angle dont aura tourné le fil avant qu'il ne casse. Quand $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$: $h = l$.



La vitesse en B est horizontale. La masse m décrit une portion de parabole de sommet B.



Quand $\alpha \rightarrow \pi$: $h \rightarrow 0$.

B La vitesse en B est nulle. La masse m décrit la verticale à B puisqu'elle n'est soumise qu'à son poids.

2.

POINT COURS

Considérons un point matériel soumis à des forces conservatives (donc dérivant d'une énergie potentielle). Leur travail élémentaire est $\delta W = -dE_p$) et à des forces non conservatives dont le travail élémentaire est $\delta W'$. Appliquons au point M le théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} dE_{\text{cin}} &= \delta W + \delta W' = -dE_p + \delta W' \\ d(E_{\text{cin}} + E_p) &= \delta W'. \end{aligned}$$

$E_{\text{cin}} + E_p$ constitue l'énergie mécanique du point M.

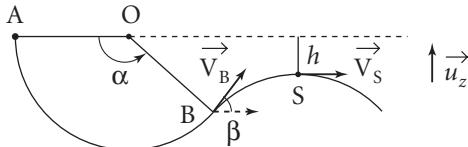
La variation d'énergie mécanique du point M est égale au travail des forces non conservatives s'appliquant à M. Si ces forces non conservatives ne travaillent pas, alors l'énergie mécanique du point M se conserve.

Le mouvement de la masse m , soumise à son poids et à la tension du fil, s'effectue dans le plan vertical contenant le fil à l'instant initial : $\vec{ma} = \vec{mg} + \vec{T}$.

Le poids est une force conservative.

La tension \vec{T} du fil ne travaille pas. Il y a donc conservation de l'énergie mécanique du point M.

$$E_{\text{cin}} + E_p(\vec{mg}) = \text{constante.}$$



POINT MÉTHODE

Calcul de l'énergie potentielle dont dérive une force conservative :

On reviendra à la définition $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$. Lorsque le problème est à un degré de dimension, on exprimera cette relation dans une base possédant un vecteur unitaire colinéaire à \vec{f} . Ainsi, pour le poids, $\vec{P} = \vec{mg} = -mg\vec{u}_z = -\frac{dE_p}{dz}\vec{u}_z$
d'où $E_p = mgz + \text{constante.}$

Choisissons A pour origine de l'énergie potentielle et écrivons l'énergie mécanique en A, B et S :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} + E_p &= 0 + 0 = \frac{1}{2}mV_B^2 - mgl\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1) \\ &= \frac{1}{2}mV_S^2 - mgh. \end{aligned}$$

Or, entre B et S, où seul le poids intervient, la projection horizontale de la quantité de mouvement est conservée ($\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{mg}$) et : $V_S = V_B \cos\beta = V_B \cdot \sin\alpha$

$$\text{d'où : } h = \frac{V_S^2}{2g} = \frac{V_B^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

$$\text{Or d'après (1) : } V_B^2 = 2gl \cdot \sin\alpha$$

soit :

$$h = l \sin^3\alpha$$

Commentaire

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \pi$, on retrouve les résultats du 1.

106

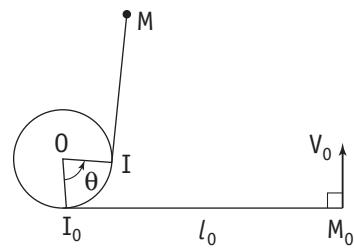
Enroulement d'un fil sur un cylindre

Un point matériel M, de masse m est mobile sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à une ficelle (de masse négligeable et inextensible) qui s'enroule sur un cylindre d'axe vertical et de rayon a .

Initialement, la masse m est lancée avec une vitesse V_0 perpendiculaire à la ficelle, qui est tendue, et de longueur l_0 . Soit $\theta(t)$ l'angle dont s'est enroulé le fil à l'instant t .

1. Préciser la vitesse – module et orientation – du mobile à la date t .

2. En déduire la loi $\theta(t)$ du mouvement. Au bout de combien de temps le point M touchera-t-il le cylindre ? Commenter.



■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Coordonnées polaires.
- Théorème de l'énergie cinétique.
- Loi fondamentale de la dynamique.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. On construira la base polaire $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ permettant de repérer le point $I(t)$ où la ficelle quitte le cylindre (\vec{u}_r porté par \overrightarrow{OI}).

On écrira $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$, et on montrera que la vitesse \vec{V} du point M est perpendiculaire à IM et donc au fil.

On en déduira que la vitesse garde une norme constante V_0 .

2. La loi $\theta(t)$ et l'instant t_1 se déduisent directement des résultats précédents.

Il faudra s'assurer que la ficelle reste tendue au cours du mouvement. On cherchera donc à déterminer sa tension $\vec{T}(t)$, et le problème physique, tel qu'il est posé, n'a de sens que si $\|\vec{T}\|$ reste borné...

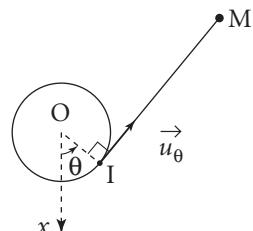
■ 3. Solution

1. Dans le référentiel terrestre (supposé galiléen), le mobile est soumis à trois forces : son poids et la réaction du plan (qui se compensent), la tension \vec{T} du fil qui incurve la trajectoire de M vers le cylindre.

La ficelle restant tendue la partie libre IM est un segment de droite tangent en I au cylindre.

Repérons ce point I par l'angle θ (cf. figure) et introduisons la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$.



D'où : $\vec{V}(M) = \vec{V}_I + \frac{d}{dt}(\vec{IM})$.

Or $\vec{V}_I = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{IM} = l\vec{u}_\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{IM}) = l\vec{u}_\theta + l \cdot (-\dot{\theta}\vec{u}_r)$.

Finalement $\vec{V}(M) = (a\dot{\theta} + l)\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}\vec{u}_r$.

Il reste à traduire que la longueur de la ficelle est invariable, soit :

$$l_0 = l(t) + a\theta(t) \Rightarrow 0 = \dot{l} + a\dot{\theta}.$$

Dès lors on obtient : $\vec{V}(M) = -l\dot{\theta}\vec{u}_r \quad (1)$

Cette vitesse reste, à chaque instant, perpendiculaire au brin IM de la ficelle. Il en résulte que la tension \vec{T} qu'exerce le fil sur la masse m ne travaille pas.

L'application du théorème de la puissance cinétique au point matériel M donne alors :

$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\vec{T}} = 0$ (le poids et la réaction du support se compensent)

d'où $E_c = \text{cste}$ et $\|\vec{V}(M)\| = V_0$.

En conclusion on a :

$$\boxed{\vec{V}(M) = -V_0\vec{u}_r} \quad (2)$$

2. La loi du mouvement s'obtient immédiatement en comparant (1) et (2).

$$l\dot{\theta} = V_0 \quad \text{et} \quad l + a\theta = l_0.$$

D'où en éliminant $l(t)$ entre ces deux équations :

$$(l_0 - a\theta)\dot{\theta} = V_0 \quad (3)$$

Équation différentielle en $\theta(t)$ qui s'intègre immédiatement (avec $l = l_0$ et $\theta = 0$ à $t = 0$) :

$$l_0\dot{\theta} - a\frac{\theta^2}{2} = V_0t$$

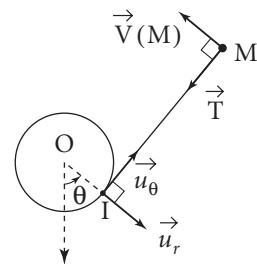
$$\text{ou encore } \theta^2 - 2\frac{l_0}{a}\theta + \frac{2V_0}{a}t = 0 \Rightarrow \left(\theta - \frac{l_0}{a}\right)^2 = \frac{l_0^2}{a^2} - \frac{2V_0}{a}t \quad (4).$$

La solution physique est alors donnée par (la ficelle s'enroule sur le cylindre et $\theta(t)$ croît avec t) :

$$\theta(t) = \frac{l_0}{a} - \frac{l_0}{a}\sqrt{1 - \frac{2V_0at}{l_0^2}} \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{l_0}{a}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2V_0at}{l_0^2}}\right]} \quad (5)$$

Le point M arrivera au contact du cylindre (si le problème physique a un sens) lorsque $a\theta = l_0$, soit à l'instant t_1 tel que (cf. (4) ou (5)) :

$$\boxed{t_1 = \frac{l_0^2}{2V_0a}}$$



Commentaires

On aurait pu essayer d'évaluer t_1 à partir d'arguments simples définissant des ordres de grandeur.

Une fois la ficelle totalement enroulée autour du cylindre, l'angle θ aura varié de $\Delta\theta = \frac{l_0}{a}$.

D'autre part la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ vaut $\frac{V_0}{l_0}$ sur un voisinage de $t = 0^+$.

On peut donc penser que le temps t_1 cherché va dépendre des grandeurs l_0, a, V_0 définissant le problème physique selon : $t_1 \approx \frac{\Delta\theta}{\dot{\theta}_0} \approx \left(\frac{l_0/a}{V_0/l_0} \right) \approx \frac{l_0^2}{aV_0}$.

On retrouve ainsi les variations pertinentes de t_1 avec l_0, a et V_0 .

Il reste à remarquer que l diminuant $\dot{\theta}$ va augmenter et qu'en identifiant $t_1 = \frac{l_0^2}{aV_0}$ on aboutirait à une surévaluation de t_1 . De façon plus précise, entre les instants t et $t + dt$, on aurait :

$$\begin{cases} d\theta = -\frac{dl}{a} & (d\theta > 0 \text{ et } dl < 0) \\ \dot{\theta} = \frac{V_0}{l}. \end{cases}$$

$$\text{D'où : } dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{-\frac{dl}{a}}{\frac{V_0}{l}} = -\frac{1}{aV_0} l dl \quad \text{et} \quad \int_0^{t_1} dt = -\frac{1}{aV_0} \int_{l_0}^0 l dl \Rightarrow t_1 = \frac{l_0^2}{2aV_0}$$

- La résolution précédente suppose que la ficelle demeure constamment tendue et que la situation physique envisagée reste réaliste. Il nous faut donc calculer la tension $T(t)$ de la ficelle.

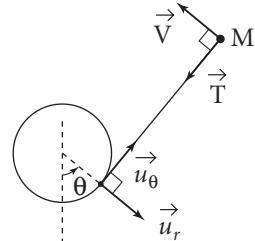
À cet effet appliquons la loi fondamentale de la dynamique

au point matériel M : $m\vec{a}(M) = \vec{T}$

$$\text{or } \vec{V} = -V_0 \vec{u}_r \text{ et } \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -V_0 \frac{d\vec{u}_r}{dt} = -V_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad (6).$$

$$\text{D'où } \vec{T} = -mV_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

$$\text{Posons } \vec{T} = -T \vec{u}_\theta \Rightarrow T = mV_0 \dot{\theta}.$$



$$\text{Et d'après (3) : } T = \frac{mV_0^2}{l_0 - a\theta(t)} \Rightarrow T = \frac{mV_0^2}{l_0 \sqrt{1 - \frac{t}{t_1}}}$$

On a bien $T > 0$ pour $0 < t < t_1$, et la ficelle reste effectivement tendue. Cependant l'expression de T nous montre que $T \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow t_1^-$ ce qui n'est pas cohérent (dans cette modélisation – point matériel M sans dimension... – la ficelle casserait avant de s'être complètement enroulée...).

$$\text{On a pour } t = \frac{99}{100} t_1 \quad l = \frac{l_0}{10} \quad \text{et} \quad T = 10T_0 \dots$$

107 Anneau coulissant sur un cercle

Analyse de portraits de phase

Une circonference, de rayon a , est située dans un plan vertical et tourne à vitesse angulaire Ω constante autour de son diamètre vertical. Sur cette circonference, un petit anneau M , assimilable à un point matériel de masse m , glisse sans aucun frottement. Sa position sur le cercle est repérée par l'angle θ que fait le rayon CM avec la verticale descendante (cf. figure).

Le référentiel terrestre est supposé galiléen, et l'accélération de la pesanteur est notée g .

En posant $\omega_0^2 = \frac{g}{a}$ et $\lambda = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}$, l'équation

différentielle du mouvement de la masse m sur la circonference peut se mettre sous la forme :

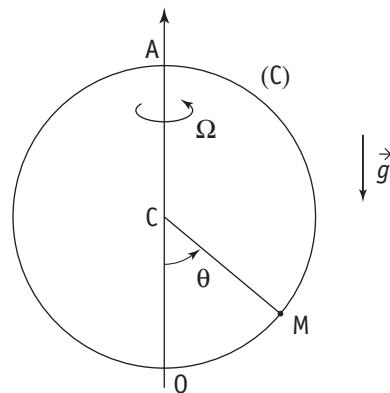
$$\ddot{\theta}(t) = \omega_0^2 \sin \theta (\lambda \cos \theta - 1) \quad (1)$$

L'équation de conservation de l'énergie mécanique dans le référentiel lié à la circonference peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 u(\theta) = K \text{ (constante)} \quad (2)$$

$$\text{avec } u(\theta) = 1 - \cos \theta - \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \theta.$$

$u(\theta)$ représente au facteur mga près l'énergie potentielle du système avec : $m = 5 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$; $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $a = 0,39 \text{ m}$.



1. En analysant la courbe $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = y(\theta)$ (fig. 2) donnée pour une valeur particulière de λ , montrer qu'il y a dans ce cas trois types possibles de mouvement de l'anneau. À l'aide de la figure 1, représentant $u(\theta)$ pour différentes valeurs de λ , montrer que chaque type de mouvement correspond à un domaine précis de l'énergie mécanique : préciser les limites de ces différents domaines.

2. La figure 3 représente $\frac{\dot{\theta}}{\omega}$ en fonction de θ avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda}$.

Déterminer la valeur de λ correspondant à l'ensemble de ces courbes.

Pour quelles valeurs du coefficient $K = \frac{E_m}{mga}$ l'oscillation de l'anneau est-elle à peu près sinusoïdale ?

3. La figure 4 représente $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ pour $\lambda = 1$. L'oscillation de l'anneau est-elle approximativement sinusoïdale ?

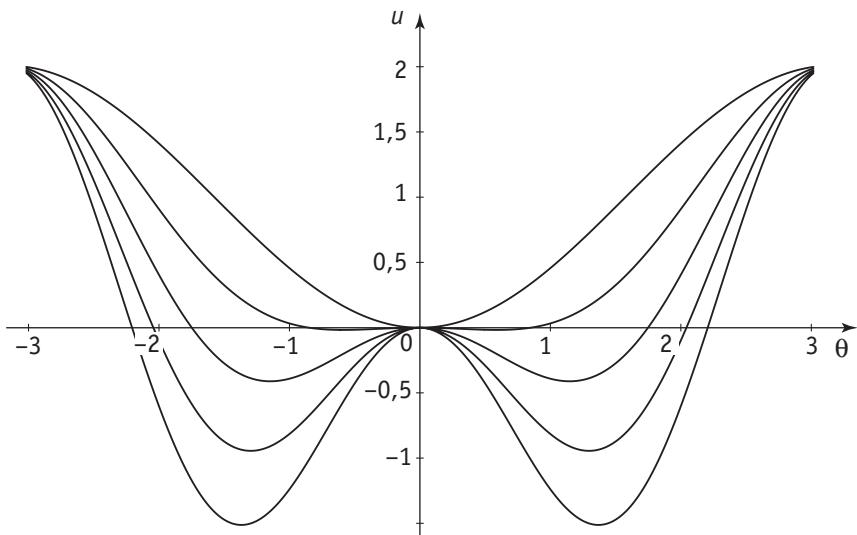


Fig. 1

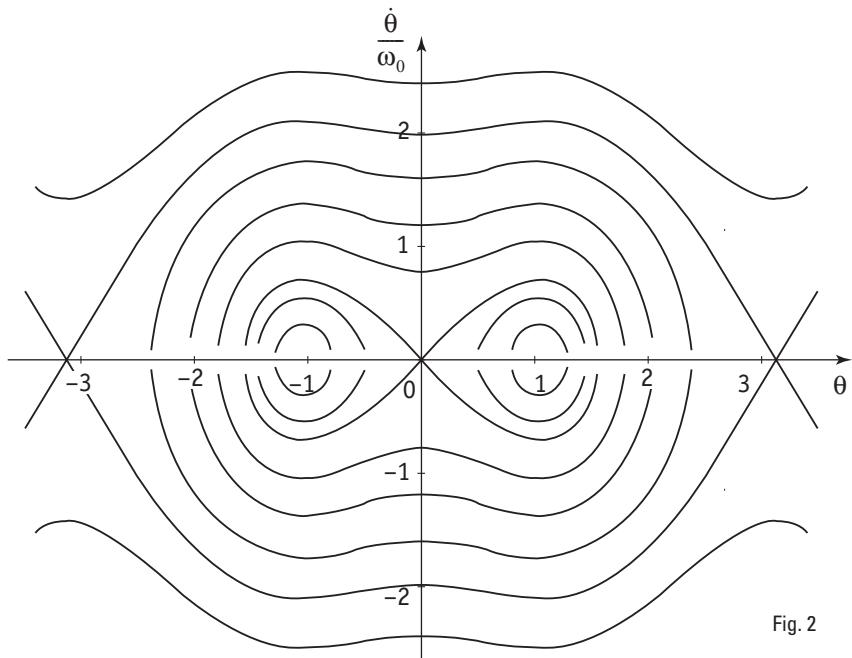


Fig. 2

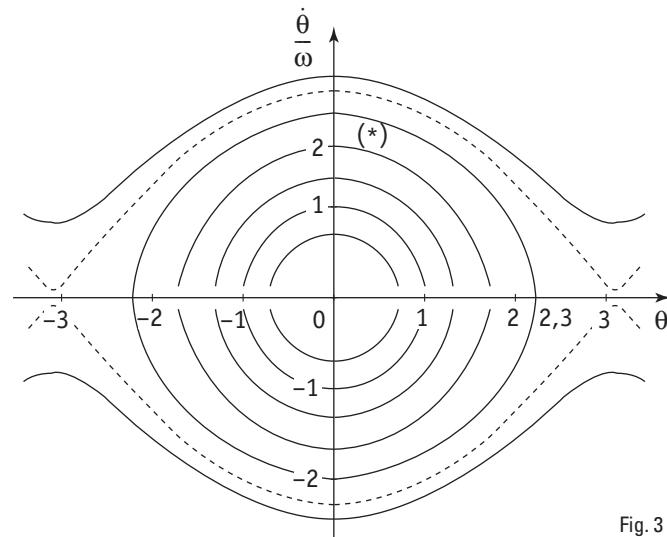


Fig. 3

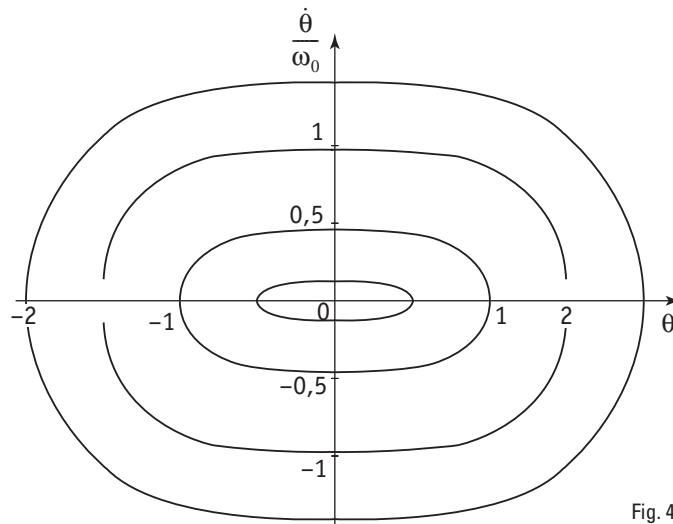


Fig. 4

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Énergie cinétique – énergie potentielle – conservation de l'énergie – oscillations.
- Portrait de phase.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le portrait de phase $\dot{\theta} = f(\theta)$ permet d'étudier qualitativement un mouvement. Les courbes d'énergie potentielle permettent également, en utilisant la conservation de l'énergie mécanique, de prévoir des oscillations...
2. En choisissant des variables réduites, le portrait de phase d'une oscillation harmonique est un cercle...

3. Autour d'une position d'équilibre stable, les oscillations ne sont pas forcément sinusoïdales.

3. Solution

POINT COURS

Le portrait de phase représente $\dot{\theta}$ au facteur $\frac{1}{\omega_0}$ près en fonction de θ .

Des oscillations se caractérisent par un changement de signe de $\dot{\theta}$ en θ_{\max} et donc par des courbes fermées.

Pour $\dot{\theta} > 0$, θ augmente jusqu'à θ_{\max} , alors $\dot{\theta} = 0$ puis $\dot{\theta} < 0$, donc θ diminue jusqu'à $-\theta_{\max}$ (s'il n'y a pas de frottement).

Au contraire, si $\dot{\theta}$ garde un signe constant, θ varie toujours dans le même sens, il n'y donc pas d'oscillations.

1. On reconnaît trois types de mouvements sur la figure 2.

(a) Courbes fermées, intérieures à la courbe en huit passant par l'origine. Il s'agit d'oscillations autour de positions d'équilibre différentes de $\theta = 0$.

(b) Courbes fermées, entourant l'origine. Il s'agit d'oscillations autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.

(c) Courbes non fermées, $\dot{\theta}$ garde un signe constant : l'anneau fait le tour complet sur le cercle, $\theta(t)$ croît indéfiniment, $\dot{\theta}(t)$ est périodique.

Étudions les courbes d'énergie potentielle. Les minima correspondent aux positions d'équilibre.

Alors $\frac{du}{d\theta} = 0 = \sin\theta - \lambda \sin\theta \cos\theta$. L'anneau est donc en équilibre pour $\sin\theta = 0$ soit $\theta = 0$ ou π et pour $\theta = \pm\theta_e$ avec $\cos\theta_e = \frac{1}{\lambda}$, ces dernières positions n'existant que si $\lambda > 1$.

Le signe de $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ permet d'établir la stabilité des positions d'équilibre.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \cos\theta - \lambda \cos^2\theta + \lambda \sin^2\theta = \cos\theta + \lambda - 2\lambda \cos^2\theta$$

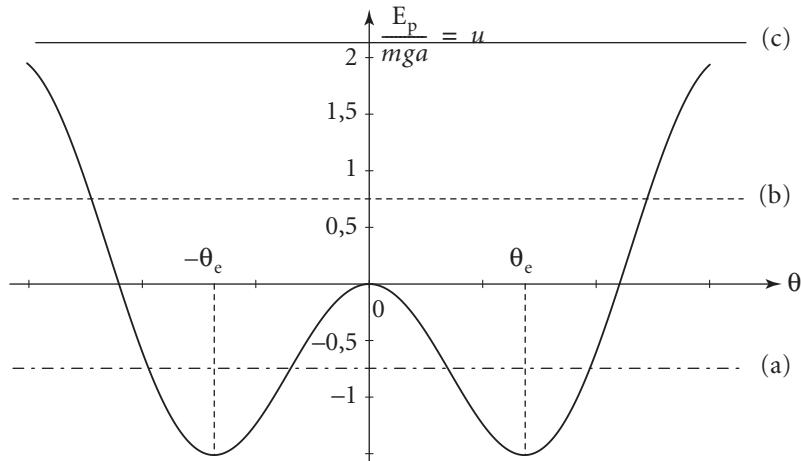
$\theta = \pi$ est une position d'équilibre toujours instable $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=\pi} = -1 - \lambda < 0$.

$\theta = 0$ est une position d'équilibre stable si $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = 1 - \lambda > 0$ donc pour $\lambda < 1$.

$\theta_e = \text{Arccos} \frac{1}{\lambda}$ est une position d'équilibre stable si $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta_e} = \frac{1}{\lambda} + \lambda - \frac{2}{\lambda} = \lambda - \frac{1}{\lambda} > 0$ donc pour $\lambda > 1$, c'est-à-dire lorsque cette solution existe.

Les courbes de la figure 2 ont donc été tracées pour une valeur de $\lambda > 1$ qui permet d'observer des oscillations autour des positions d'équilibre θ_e et $-\theta_e$.

L'énergie potentielle a donc la forme suivante :



- Si $E_m < 0$, il y a possibilité d'oscillations autour des positions θ_e ou $-\theta_e \rightarrow$ courbe (a).



POINT COURS

$E_m = \text{constante}$ est représentée par une droite horizontale. Or $E_m = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}}$ et $E_{\text{cin}} \geq 0$. Seuls les points tels que $E_m - E_{\text{pot}} \geq 0$, c'est-à-dire $E_{\text{pot}} \leq E_m$, sont possibles pour le système.

- Si $0 < \frac{E_m}{mga} < 2$, il y a oscillations autour de $\theta = 0 \Rightarrow$ courbes (b).
- Si $\frac{E_m}{mga} > 2$, l'angle θ peut prendre toutes les valeurs possibles, il y a mouvement révolutif \rightarrow courbes (c).

2. Les courbes de la figure 3 correspondent à une seule cuvette de potentiel autour de l'origine donc $\lambda \leq 1$. Chaque courbe correspond à des conditions initiales, donc des valeurs de K, différentes.

On fait une mesure pour $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{\max}$ sur une courbe donnée (* par exemple sur la fig. 3) : $\frac{1}{2}\dot{\theta}_{\max}^2 = K$ car $u(0) = 0$, puis une mesure pour $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = \theta_{\max}$ sur la même courbe.

$$\omega_0^2 \left(1 - \cos \theta_{\max} - \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \theta_{\max} \right) = K.$$

Pour $\theta = 0$ sur la courbe (*), on lit $\frac{\dot{\theta}_{\max}}{\omega_0 \sqrt{1-\lambda}} = 2$ et pour $\dot{\theta}_{\max} = 0$, on lit sur la même courbe $\theta_{\max} = 2,3$ rad.

$$\text{de } \begin{cases} K = \frac{1}{2} \dot{\theta}_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \omega_0^2 (1 - \lambda) \\ K = \omega_0^2 \left(1 - \cos 2,3 - \frac{1}{2} \lambda \sin^2 2,3 \right) \end{cases} \text{ on tire } \boxed{\lambda = 0,2}$$

La figure 3 a donc été tracée pour $\lambda = 0,2$.

● POINT MÉTHODE

La conservation de l'énergie s'écrit : $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\left(1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\lambda\sin^2\theta\right) = K$.

Pour θ petit, $1 - \cos\theta \sim \frac{\theta^2}{2}$; $\sin\theta \sim \theta$.

Alors $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\frac{\theta^2}{2}(1 - \lambda) = K$.

Si l'on représente $\dot{\theta}$ en fonction de θ , on obtient une ellipse.

On a également $\frac{\dot{\theta}^2}{\omega^2} + \theta^2 = \frac{2K}{\omega^2}$ ($\lambda < 1$ et $\omega^2 = \omega_0^2(1 - \lambda)$).

Si l'on représente $\frac{\dot{\theta}}{\omega}$ en fonction de θ , on obtient alors un cercle de rayon $\frac{\sqrt{2K}}{\omega}$.

On a choisi ici de représenter $\frac{\dot{\theta}}{\omega}$ (variable réduite) pour obtenir un cercle lorsque les oscillations sont sinusoïdales. On voit que l'on obtient des oscillations sinusoïdales pour des amplitudes θ_{\max} inférieures à environ 1 rad ce qui correspond à $K \leq 0,39\omega_0^2$.

Soit une énergie mécanique $E_m = Kma^2 \leq 0,39 \times gma$.

Application numérique : $E_m \leq 0,075$ J.

3. La figure 4 représente $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ .

Quelle que soit la valeur de K , les courbes ne sont manifestement pas des ellipses : l'oscillation de l'anneau n'est jamais sinusoïdale.

Ici la courbe qui représente $u(\theta)$ pour $\lambda = 1$ présente un « méplat » en 0 caractéristique d'une dérivée seconde $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = 0$. Le développement limité de u autour de $\theta = 0$ nous donne alors :

$$u(\theta) = u(0) + \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=0}\theta^2 + o(\theta^2)$$

$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0$ puisque $\theta = 0$ est position d'équilibre

$$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = 1 - \lambda = 0 \text{ pour } \lambda = 1$$

$u(\theta)$ n'est donc pas parabolisable et les oscillations ne sont pas sinusoïdales.

108 Ralentissement d'une voiture

Une automobile de masse $m = 10^3 \text{ kg}$ est équipée d'un moteur d'une puissance maximale $P_m = 50 \text{ kW}$. Avec cette puissance, la voiture atteint la vitesse maximale $V_m = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. En supposant que les forces de frottement que subit la voiture sont essentiellement dues à l'air, et de la forme $f = -kv^2$ (v étant la vitesse, et k une constante), calculer le temps τ nécessaire pour que, en roue libre (moteur débrayé), la voiture ralentisse de sa vitesse maximale jusqu'à la moitié de cette valeur. Quelle est la distance d parcourue pendant ce temps ?

Quelle distance la voiture parcourra-t-elle avant de s'arrêter ? Que pensez-vous de ce résultat ?

Solution

Lorsque le moteur est débrayé, la voiture est soumise uniquement à la force de freinage due à l'air (poids et réaction du sol se compensent). D'après le théorème du centre

$$\text{d'inertie : } m \frac{dv}{dt} = -kv^2.$$

Équation à variable séparable que l'on intègre de 0 à τ , v variant de V_m à $\frac{V_m}{2}$

$$\tau = -\frac{m}{k} \int_{V_m}^{\frac{V_m}{2}} \frac{dv}{v^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\tau = \frac{m}{kV_m}}$$

Déterminons k en appliquant le théorème de la puissance cinétique. Lorsque la voiture roule à vitesse constante V_m , la puissance du moteur sert à vaincre la force de frottement soit : $\frac{dE_{\text{cin}}}{dt} = 0 = P_m + P(f(V_m))$

$$\text{d'où } P_m = -P(f(V_m)) = -(-kV_m^2) \cdot V_m$$

$$\text{soit } k = \frac{P_m}{V_m^3} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau = \frac{mV_m^2}{P_m}}$$

L'application numérique donne : $\tau = 32 \text{ s}$.

La loi d'évolution de la vitesse se détermine de façon analogue. Pour un instant t quelconque :

$$t = -\frac{m}{k} \int_{V_m}^v \frac{dv}{v^2} \quad \text{soit} \quad t = -\frac{m}{k} \left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{V_m} \right)$$

$$\text{d'où } \frac{1}{v} = \frac{1}{V_m} \left(1 + \frac{V_m}{m} t \right) = \frac{1}{V_m} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin } v &= \frac{V_m}{1 + \frac{t}{\tau}} \text{ expression d'où l'on déduit la distance parcourue : } x = \int_0^t v(t) dt \\ &= \int_0^t \frac{V_m}{1 + \frac{t}{\tau}} dt \quad \text{soit} \quad x = \tau V_m \ln \left(1 + \frac{t}{\tau} \right). \end{aligned}$$

Donc à l'instant $t = \tau$, la voiture aura parcouru une distance :

$$d = \tau V_m \ln 2 = \frac{m V_m^3}{P_m} \ln 2$$

Soit numériquement $d = 887$ m.

D'après les calculs précédents, la vitesse décroît mais ne tend vers zéro que pour t tendant vers l'infini, et $x(t \rightarrow \infty) \rightarrow +\infty$, ce qui est manifestement irréaliste.

Cela provient du « modèle » choisi pour représenter les forces de frottements ($f = -kv^2$) : la force de frottement tend trop rapidement vers zéro aux basses vitesses.

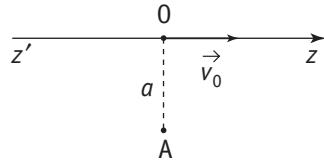
109

Mouvement sur un axe dans un champ gravitationnel

Une particule de masse m est assujettie à se déplacer sans frottement sur un axe $z'z$. Elle est soumise à la réaction de l'axe et au champ gravitationnel de la masse M (fixe) placée au point A. On note a la distance de A à l'axe $z'z$.

À l'instant initial $t = 0$, la particule se trouve en O (projection de A sur l'axe) avec une vitesse :

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z \quad (v_0 > 0).$$



1. Que peut-on dire du mouvement ultérieur de la particule ?

2. Dans le cas où le mouvement reste borné, déterminer ses caractéristiques lorsque la particule reste localisée **au voisinage** du point O. On notera T_0 la période d'un tel mouvement et on en donnera l'expression.

Solution

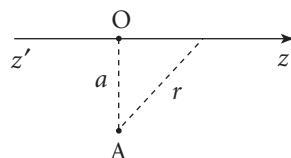
1. Le mouvement s'effectuant sans frottements, appliquons le théorème de l'énergie cinétique. La seule force intervenant dans ce théorème correspond à l'interaction gravitationnelle entre les masses M et m .

Cette interaction est associée à une énergie potentielle

E_p donnée par l'expression :

$$E_p = -\frac{GMm}{r}.$$

On a donc $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{cste} = K$.



La constante est déterminée par les conditions initiales :

$$\text{à } t = 0, v = v_0 \text{ d'où } \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{a}.$$

$$\text{Ce qui s'écrit encore } v^2 = v_0^2 - \frac{2\mathcal{G}M}{a} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \quad (1)$$

Cette quantité reste positive dès que $v_0^2 > \frac{2\mathcal{G}M}{a}$. Il apparaît ainsi une valeur critique v_c de la vitesse définie selon :

$$v_c^2 = \frac{2\mathcal{G}M}{a}.$$

Pour $v_0 = v_c$ la constante K a une valeur nulle, ce qui donne dans ce cas $v^2 = v_c^2 \cdot \left(\frac{a}{r}\right)$, et la particule va à l'infini où sa vitesse s'annule.

L'équation (1) devient :
$$v^2 = (v_0^2 - v_c^2) + v_c^2 \frac{a}{r} \quad (2)$$

Deux cas sont alors envisageables :

- $v_0 \geq v_c$: d'où $v^2 \geq 0$ pour tout r . La particule va à l'infini sa vitesse diminuant de la valeur v_0 à la valeur $\sqrt{v_0^2 - v_c^2}$.
- $v_0 < v_c$: la relation (2) fait apparaître une valeur limite r_1 de r où la vitesse s'annule :

$$r_1 \text{ est défini par } 0 = v_0^2 - v_c^2 + v_c^2 \frac{a}{r_1} \Rightarrow r_1 = \frac{a}{1 - \left(\frac{v_0}{v_c}\right)^2}.$$

Dans un premier temps, la particule se déplace du point O (vitesse v_0) au point B de cote z_B telle que $z_B = \sqrt{r_1^2 - a^2}$ ($v_B = 0$). En ce point, la projection \vec{F}' sur l'axe Oz de la force \vec{F} n'est pas nulle.

Le point B ne correspond pas à une position d'équilibre et la particule va rebrousser chemin.

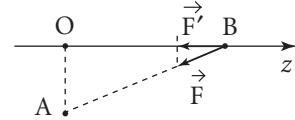
Elle repassera aux mêmes points avec, d'après (2), une vitesse de même module mais de sens opposé. Elle décrira finalement un mouvement périodique entre les points extrêmes B(z_B) et B'($-z_B$).

2. Le mouvement devant rester borné, cela exige $v_0 < v_c$.

Il s'effectuera dans un voisinage du point O d'autant

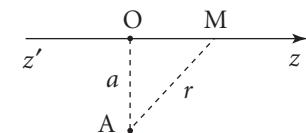
plus réduit que le paramètre $\eta = \frac{v_0}{v_c}$ est petit devant

l'unité. En effet, on a : $a < r < r_1 = \frac{a}{1 - \eta^2}$.



L'équation (2) se réécrit en fonction de z selon ($r = \sqrt{a^2 + z^2}$ et $v = \dot{z}$) :

$$\dot{z}^2 = (v_0^2 - v_c^2) + v_c^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}}} \quad (3)$$



Et pour $|z| \ll a$ on a $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}}} \approx 1 - \frac{z^2}{2a^2} + o(z^3)$

$$(3) \text{ devient, à l'ordre considéré : } z^2 + \frac{\nu_c^2}{2a^2} z^2 \neq \text{cste} \quad (4)$$

Cette dernière relation s'identifie à l'équation énergétique d'un oscillateur harmonique libre non amorti de pulsation propre $\omega_0 = \frac{\nu_c}{\sqrt{2}a}$.

$$\text{Soit une période } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi \frac{a\sqrt{2}}{\nu_c}$$

Remarque

La solution approchée à (4) est $z(t) = \frac{\nu_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ puisque $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = \nu_0$. On est bien dans le cadre des petits mouvements pour $\frac{\nu_0}{\omega_0} \ll a$, soit encore :

$$\frac{\frac{\nu_0}{\nu_c}}{\sqrt{2}} \ll 1 \Rightarrow \nu_0 \ll \nu_c \quad (\eta \ll 1 \text{ comme il se doit}).$$

110

Particule dans une cuvette

Une particule M de masse m peut se déplacer sans frottements sur un cercle vertical de centre O et de rayon a . Elle est reliée au point A le plus haut du cercle par un ressort sans masse, de raideur k et de longueur à vide l_0 .

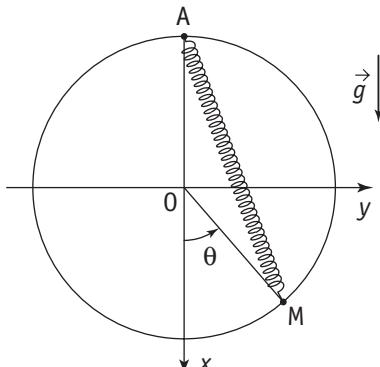
On note θ l'angle (\vec{Ox}, \vec{OM}) et on prendra $-\pi < \theta < \pi$.

1. Justifier que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre. Étudier simplement sa stabilité.

2. a. Déterminer, par application du théorème de l'énergie cinétique, l'intégrale première du mouvement :

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \left\{ \frac{1}{2}k \left[2a \cos \frac{\theta}{2} - l_0 \right]^2 - mga \cos \theta \right\} = \text{cte}$$

b. Dénombrer les positions d'équilibre possibles pour la masse m . Tracer les courbes donnant $|\theta_{\text{eq}}|$ (pour $\theta_{\text{eq}} \neq 0$) en fonction de $\frac{mg}{ka}$ pour des valeurs de la grandeur $\frac{l_0}{2a}$ égales à 0,5 puis 0,8.



3. a. Étudier la stabilité des positions d'équilibre $\theta_e \neq 0$ lorsqu'elles existent. On vérifiera que l'on a :

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \Big|_{\theta_e \neq 0} = ka^2 \left(1 - \frac{mg}{ka}\right) \sin^2 \frac{\theta_e}{2}$$

b. On fait $\frac{l_0}{2a} = 0,4$.

a) Représenter la fonction $\theta \rightarrow E_p(\theta)$ pour des valeurs de $\frac{mg}{ka}$ égales à 0,2 ; 0,6 puis 1. Commenter.

b) On prend $\frac{mg}{ka} = 0,2$. Déterminer la pulsation Ω des petites oscillations par rapport aux positions d'équilibre stables. Donner la valeur de Ω en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Solution

1. Le point B ($\theta = 0$) constitue une position d'équilibre pour laquelle la réaction normale \vec{R} du support s'ajuste pour équilibrer l'action du poids $\vec{P} = mg \vec{u}_x$ et du ressort $\vec{F} = -k(AB - l_0) \vec{u}_x$.

On aura $\vec{0} = \vec{R} + mg \vec{u}_x - k(AB - l_0) \vec{u}_x$.

Pour étudier la stabilité de cet équilibre, envisageons un petit déplacement par rapport à cette position et appliquons au point matériel le théorème du moment cinétique au point O (on élimine ainsi la réaction \vec{R} qui passe par O).

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{OM} \wedge (\vec{F} + \vec{mg}) \quad (1)$$

$$\text{où } \vec{\sigma}(O) = ma^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

$$\text{On a } \vec{OM} \wedge \vec{mg} = -mg a \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\text{et } \vec{OM} \wedge \vec{F} = aF \sin \frac{\theta}{2} \vec{u}_z$$

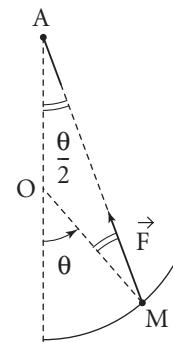
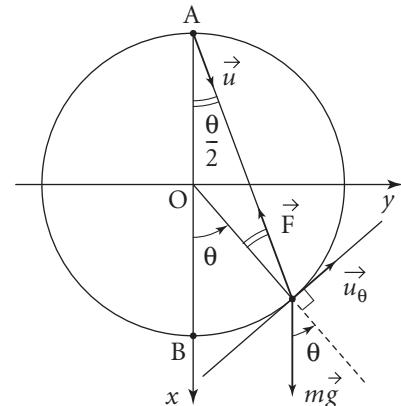
$$\text{où } F = k(AM - l_0) \quad (F > 0 \text{ pour } AM > l_0).$$

L'équation (1) s'écrit alors :

$$ma^2 \ddot{\theta} = -mg a \sin \theta + ka(AM - l_0) \sin \frac{\theta}{2}.$$

Il suffit alors de se limiter aux petites valeurs de θ ($\theta_{eq} = 0$). Ainsi au premier ordre en θ , le second membre s'écrit :

$$-mga\theta - ka[l_0 - AM(\theta = 0)] \frac{\theta}{2}.$$



On a donc, à cet ordre avec $AM(\theta = 0) = 2a$:

$$ma^2\ddot{\theta} \approx -mga\theta - ka(l_0 - 2a)\frac{\theta}{2}$$

c'est-à-dire : $\ddot{\theta} = -\frac{1}{ma}\left[mg - k\left(a - \frac{l_0}{2}\right)\right]\theta.$

La position d'équilibre $\theta = 0$ est stable si l'équation précédente s'identifie à celle d'un oscillateur harmonique. Ce qui est le cas pour :

$$mg > k\left(a - \frac{l_0}{2}\right).$$

Conclusion

- Pour $l_0 > 2a$, $\theta = 0$ est toujours une position d'équilibre stable, le poids et la force du ressort agissent dans le même sens (forces de rappel).
- Pour $l_0 < 2a$, le poids (force de rappel) et la force du ressort agissent en sens inverse. Deux cas peuvent alors se présenter :

$$\frac{mg}{ka} > 1 - \frac{l_0}{2a} \quad \theta = 0 \text{ stable}$$

$$\frac{mg}{ka} < 1 - \frac{l_0}{2a} \quad \theta = 0 \text{ instable.}$$

2. a. Le mouvement de M s'effectuant sans frottements, il y a conservation de l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$.

L'énergie cinétique du point M se déplaçant sur l'arc de cercle de centre O s'écrit simplement :

$$E_c = \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

(puisque $\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$).

L'énergie potentielle a deux origines, l'une liée à la pesanteur, l'autre au ressort, d'où :

$$E_p = E_p(\text{pesanteur}) + E_p(\text{ressort})$$

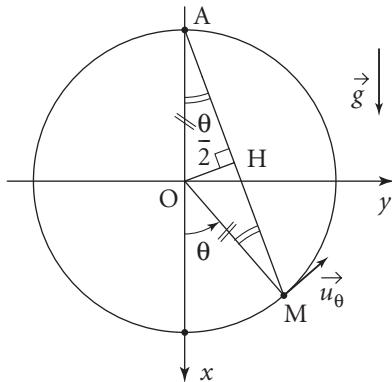
avec
$$\begin{cases} E_p(\text{pesanteur}) = -mgx & (\text{origine en } O) \\ E_p(\text{ressort}) = \frac{1}{2}k[AM - l_0]^2. \end{cases}$$

$$\text{Or } AM = 2AH = 2OA\cos\frac{\theta}{2} = 2a\cos\frac{\theta}{2} \quad (-\pi < \theta < \pi).$$

$$\text{Finalement : } E_p(\theta) = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right]^2.$$

La conservation de l'énergie se traduit alors par l'équation :

$$\boxed{\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \left[\frac{1}{2}k\left[2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right]^2 - mga\cos\theta\right] = E_m = \text{cste}} \quad (1)$$



2. b. Les positions d'équilibre correspondent ici aux extrema de l'énergie potentielle $E_p(\theta)$. Les valeurs de θ cherchées vérifient donc $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$.

Soit : $mg a \sin \theta - k \left(2a \cos \frac{\theta}{2} - l_0 \right) a \sin \frac{\theta}{2} = 0$.

Soit encore : $2 \frac{mg}{k} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \left(2a \cos \frac{\theta}{2} - l_0 \right) \sin \frac{\theta}{2} = 0$

d'où : $\sin \frac{\theta}{2} \left[l_0 - 2 \left(a - \frac{mg}{k} \right) \cos \frac{\theta}{2} \right] = 0$.

La solution $\theta_1 = 0$ est toujours position d'équilibre (stable ou instable). Il existe deux autres positions d'équilibre θ_2 et $-\theta_2$ si l'équation $l_0 = 2 \left(a - \frac{mg}{k} \right) \cos \frac{\theta_2}{2}$ admet des solutions (avec $\theta_2 \in (0, \pi)$ et donc $\frac{\theta_2}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$).

Il faut donc que l'on ait $\frac{l_0}{2a} < 1 - \frac{mg}{ka}$ soit $\frac{mg}{ka} < 1 - \frac{l_0}{2a}$.

Pour que cette condition soit réalisée, il est donc nécessaire que l'on ait $l_0 < 2a$.

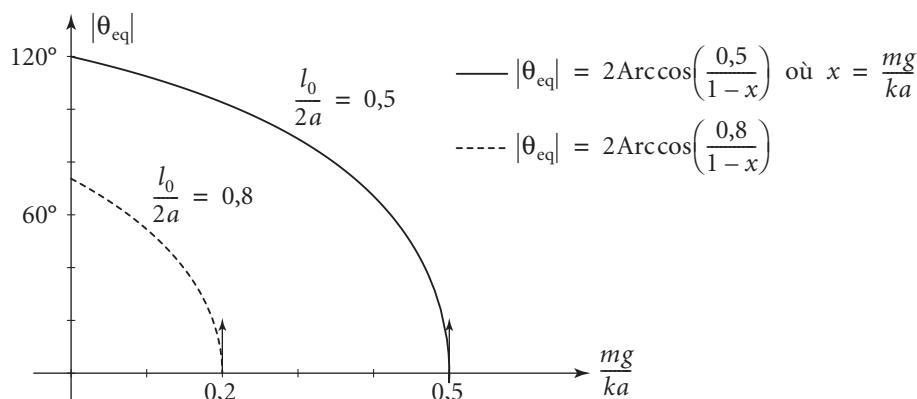
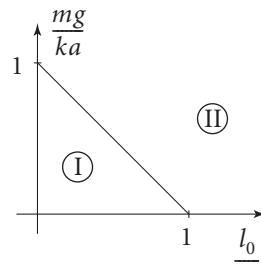
Conclusion

Domaine (I) : trois positions d'équilibre $\theta_1 = 0$ et $\pm \theta_2$

avec $\cos \frac{\theta_2}{2} = \frac{l_0}{2 \left(a - \frac{mg}{k} \right)}$.

Domaine (II) : une position d'équilibre $\theta_1 = 0$.

• Courbes $|\theta_{eq}| = f \left[\frac{mg}{ka} \right]$ pour $\frac{l_0}{2a} = 0,5$ puis $\frac{l_0}{2a} = 0,8$:



3. a. La stabilité de la position d'équilibre $\theta = 0$ a déjà été étudiée (cf. 1.). Plaçons-nous alors dans le cas où $\frac{mg}{ka} < 1 - \frac{l_0}{2a}$ et considérons la position d'équilibre $\theta = \theta_2$. L'étude de la stabilité peut se faire en développant la fonction $E_p(\theta)$ au voisinage de $\theta = \theta_2$. On a ainsi :

$$E_p(\theta) = E_p(\theta_2) + (\theta - \theta_2) \frac{dE_p}{d\theta} \Big|_{\theta_2} + \frac{1}{2} (\theta - \theta_2)^2 \frac{d^2E_p}{d\theta^2} \Big|_{\theta_2} + o[(\theta - \theta_2)^2].$$

$\frac{dE_p}{d\theta} \Big|_{\theta_2} = 0$ puisque θ_2 est une position d'équilibre. Il nous faut alors calculer la dérivée seconde de cette énergie potentielle.

$$\text{Or } \frac{dE_p}{d\theta} = mg \sin \theta - ka \left[2a \cos \frac{\theta}{2} - l_0 \right] \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = (mga - ka^2) \sin \theta + kal_0 \sin \frac{\theta}{2}$$

d'où $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = ka^2 \left\{ \left[\frac{mg}{ka} - 1 \right] \cos \theta + \frac{l_0}{2a} \cos \frac{\theta}{2} \right\}.$

Déterminons enfin l'expression de $K = \frac{d^2E_p}{d\theta^2} \Big|_{\theta_2}$ avec $\cos \frac{\theta_2}{2} = \frac{l_0}{2a}$.

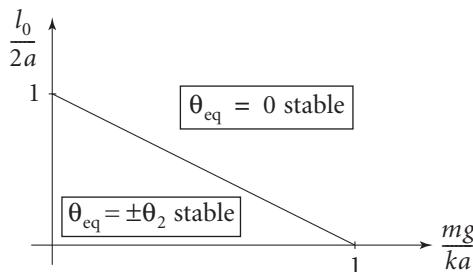
$$K = ka^2 \left[1 - \frac{mg}{ka} \right] \left\{ -\cos \theta_2 + \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \right\}$$

$$K = ka^2 \left[1 - \frac{mg}{ka} \right] \left\{ 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \right\}$$

$$K = ka^2 \left[1 - \frac{mg}{ka} \right] \left[1 - \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \right] = ka^2 \left(1 - \frac{mg}{ka} \right) \sin^2 \frac{\theta_2}{2}.$$

K est défini positif et les positions d'équilibre $\pm \theta_2$ sont bien stables lorsqu'elles existent.

Conclusion



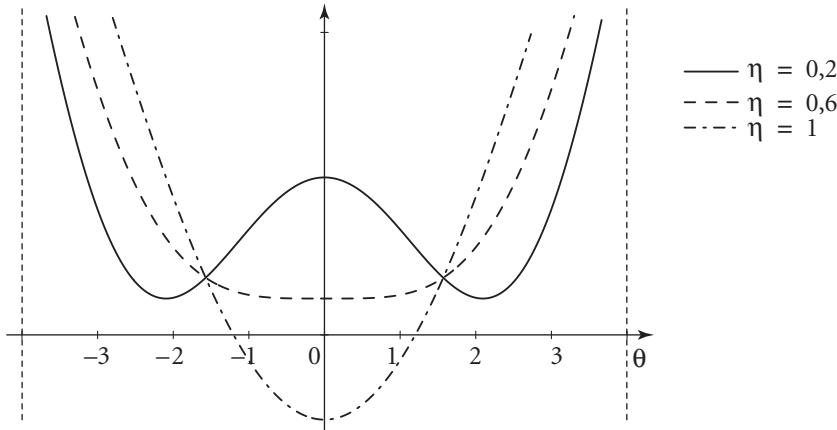
3. b. a) Représentons la fonction $\theta \rightarrow E_p(\theta)$, soit encore (cf. 2.a.) :

$$y(\theta) = \frac{E_p(\theta)}{ka^2} = -\frac{mg}{ka} \cos \theta + 2 \left[\cos \frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a} \right]^2.$$

On fixe ici la valeur de $\frac{l_0}{2a}$ ($\frac{l_0}{2a} = 0,4$) et on trace :

$$\theta \rightarrow y(\theta) = -\eta \cos \theta + 2 \left[\cos \frac{\theta}{2} - 0,4 \right]^2$$

pour les valeurs $\eta = 0,2 ; 0,6$ et 1 :



- Pour $\eta = 0,2$ on a bien $\frac{mg}{ka} < 1 - \frac{l_0}{2a}$ et le graphe confirme que $\theta = 0$ est une position d'équilibre instable (maximum local de E_p) alors que les valeurs $\pm\theta_2$ de θ correspondant aux minimums de E_p sont stables.
- Pour $\eta = 0,6$ on a $\frac{mg}{ka} = 1 - \frac{l_0}{2a}$ et les valeurs θ_2 et $\theta_1 = 0$ se confondent. $\theta = 0$ est stable, mais la cuvette de potentiel n'est pas harmonique au voisinage de $\theta = 0$.
- Pour $\eta = 1$ il vient $\frac{mg}{ka} > 1 - \frac{l_0}{2a}$ et le graphe nous montre qu'il n'existe qu'une seule position d'équilibre $\theta = 0$, et qu'elle est stable.

3. b. β) Pour $\frac{l_0}{2a} = 0,4$ et $\frac{mg}{ka} = 0,2$ les positions d'équilibre stable sont $\pm\theta_2$ avec :

$$\cos \frac{\theta_2}{2} = \frac{\frac{l_0}{2a}}{1 - \frac{mg}{ka}} = \frac{0,4}{0,8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

D'autre part, $K = ka^2 \left[(0,2 - 1) \cos \frac{2\pi}{3} + 0,4 \cos \frac{\pi}{3} \right] = ka^2 [0,4 + 0,2] = 0,6ka^2$.

L'énergie potentielle développée au second ordre en $\theta - \theta_2$ donne :

$$E_p = E_p(\theta_2) + \frac{1}{2}K(\theta - \theta_2)^2 + o[(\theta - \theta_2)^2].$$

Et la conservation de l'énergie s'écrit à cet ordre :

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}K(\theta - \theta_2)^2 = \text{constante.}$$

Soit encore $[(\dot{\theta} - \dot{\theta}_2)]^2 + \frac{K}{ma^2}(\theta - \theta_2)^2 = \text{constante.}$

Il s'agit là de l'équation énergétique d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω telle que : $\Omega^2 = \frac{K}{ma^2}$.

D'où

$$\Omega^2 = 0,6 \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\Omega = 0,77\omega_0}$$

Chapitre

2

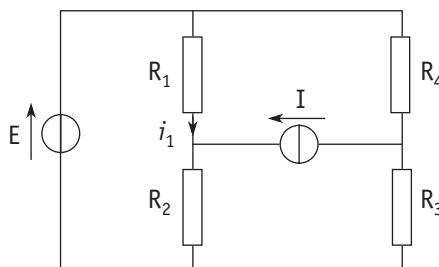
Électrocinétique 1

- A . Régime continu
- B . Régime transitoire

A. Régime continu

201 Intensité dans une branche

On considère le montage représenté ci-dessous.



1. Les deux générateurs étant parfaits, déterminer le courant i_1 traversant le résistor R_1 :

a. par une méthode directe ;

b. en calculant les courants imposés dans R_1 par chaque générateur supposé seul générateur présent dans le circuit :

– générateur E seul : alors $I = 0$ (ce qui correspond à un circuit ouvert) ;

– générateur I seul : alors $E = 0$ (ce qui correspond à un court-circuit).

2. Que devient le courant i_1 si on tient compte du caractère non parfait du générateur de tension E (on ajoute une résistance r en série avec lui) ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Circuits linéaires en régime continu.
- Théorème de superposition.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. On remarquera que les courants traversant R_1 et R_2 sont parfaitement définis à partir des résistances R_1 et R_2 et des générateurs E et I . Ils ne dépendent pas de R_3 et R_4 .

b. Le circuit linéaire comportant deux générateurs parfaits (l'un de tension E , l'autre de courant I), l'application du théorème de superposition permet, dans chaque cas, d'aboutir à un circuit plus simple.

2. On pourra partiellement se ramener au 1. en notant u la tension aux bornes du générateur de tension imparfait.

Dans les deux cas, ladétermination du générateur équivalent aux bornes de R_1 ne paraît pas très judicieuse, car elle fait disparaître les éléments de symétrie existant entre les quatre résistances...

3. Solution

1. a. On peut tout d'abord remarquer que les courants i_1 et i_2 traversant R_1 et R_2 ne dépendent que de E et I et pas de R_3 et R_4 .

On a en effet :

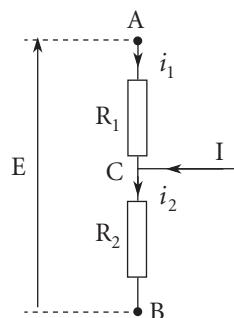
$$\begin{aligned} i_2 &= i_1 + I \quad (\text{loi des nœuds en } C) \\ \text{et } E &= R_1 i_1 + R_2 i_2. \end{aligned}$$

D'où en éliminant i_2 entre ces deux équations :

$$E = R_1 i_1 + R_2(i_1 + I).$$

Donc :

$$i_1 = \frac{E - R_2 I}{R_1 + R_2} \quad (1)$$



Commentaires

- Quand $E = R_2 I$, tout le courant I passe dans R_2 et on a bien : $i_1 = 0$.
- Lorsque la branche BC est ouverte ($R_2 \rightarrow \infty$), il vient comme il se doit : $i_1 = -I$.
- Enfin, si la branche AC est coupée ($R_1 \rightarrow \infty$), $i_1 = 0$ ce que redonne la formule (1).

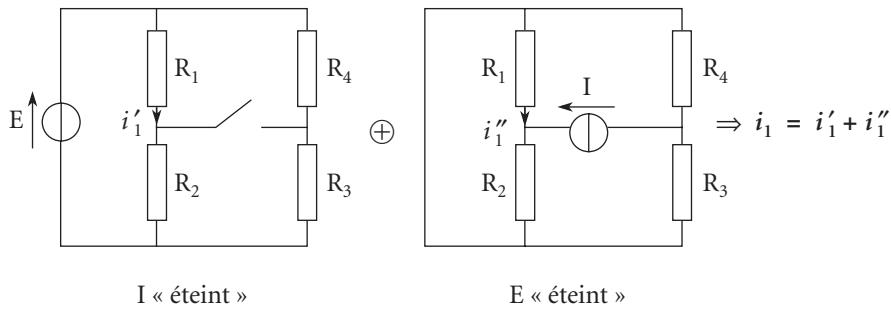
1. b. Tous les éléments du circuit sont linéaires. Le courant dans une branche est donc une expression linéaire des forces électromotrices et des courants des générateurs autonomes. On a donc ici :

$$i_1 = \alpha E + \beta I$$

$$\text{avec } \alpha = \left. \frac{i_1}{E} \right|_{I=0} \quad \text{et} \quad \beta = \left. \frac{i_1}{I} \right|_{E=0}$$

ce que l'on peut encore noter :

$$\begin{aligned} i_1 &= i'_1 + i''_1 \\ \text{où } i'_1 &= i_1|_{I=0} \quad \text{et } i''_1 = i_1|_{E=0}. \end{aligned}$$

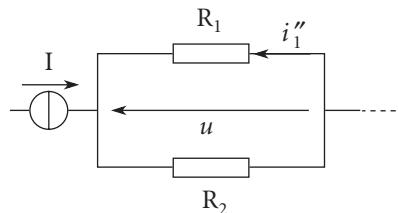


Calcul de i'_1 : I étant « éteint », le même courant i'_1 parcourt les résistances R_1 et R_2 , d'où :

$$E = (R_1 + R_2)i'_1 \quad \text{et} \quad i'_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Calcul de i''_1 : E « éteint » correspond à un court-circuit. Les résistances R_1 et R_2 en parallèle sont parcourues par le courant total I.

Il en est de même des résistances R_3 et R_4 :



$$u = -R_1 i''_1 \quad \text{et} \quad I = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2}$$

d'où le résultat : $i''_1 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} I.$

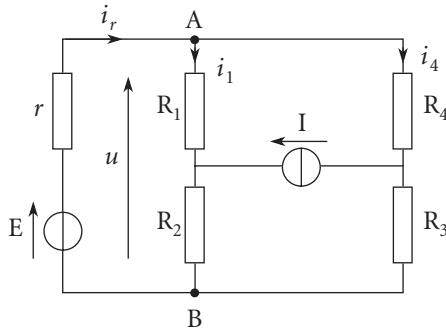
Commentaire

On retrouve le résultat d'un pont diviseur de courant.

Le courant total cherché a donc pour expression :

$$i_1 = \frac{E - R_2 I}{R_1 + R_2}$$

2. Le schéma du circuit devient (le générateur de tension n'est plus parfait et il faut tenir compte de sa résistance interne r) :



Notons u la tension aux bornes du générateur. Le calcul de i_1 en fonction de u et I nous ramène à la question 1. d'où :

$$i_1 = \frac{u - R_2 I}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

Pour déterminer u , il faut connaître le courant i_r traversant r .

Or $i_r = i_1 + i_4$.

Il faut donc calculer i_4 . Mais la configuration $R_4 - R_3$ est identique à celle $R_1 - R_2$ au changement près $I \rightarrow -I$, d'où :

$$i_4 = \frac{u + R_3 I}{R_3 + R_4}$$

$$\text{soit } i_r = \frac{u - R_2 I}{R_1 + R_2} + \frac{u + R_3 I}{R_3 + R_4}.$$

Et pour la branche BA contenant E :

$$u = E - i_r r = E - r \left\{ \frac{u - R_2 I}{R_1 + R_2} + \frac{u + R_3 I}{R_3 + R_4} \right\}.$$

Soit encore :

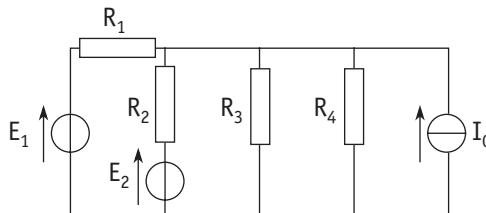
$$u \left[1 + r \left\{ \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right\} \right] = E + r \left\{ \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right\} I \quad (3)$$

Et en reportant dans (2) la valeur de u , tirée de l'expression (3) :

$$i_1 = \frac{1}{R_1 + R_2} \left[\frac{E + r I \left\{ \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right\}}{1 + r \left\{ \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right\}} - R_2 I \right] \quad (4)$$

202 Association en parallèle

Déterminer l'intensité du courant passant dans la résistance R_4 .



1. Ce qu'il faut savoir

- Représentation de Thévenin, de Norton d'un générateur.
- Pont diviseur de courant.

2. Ce qu'il faut comprendre

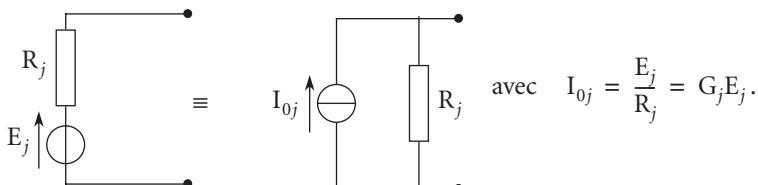
Les branchements étant parallèles, on cherchera à substituer aux générateurs de tension des générateurs de courant.

Il sera astucieux de mettre le montage sous la forme d'un diviseur de courant.

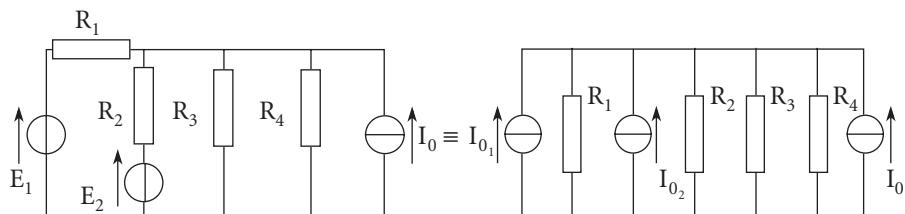
3. Solution

Transformons le circuit en remplaçant les dipôles $[E_1, R_1]$ et $[E_2, R_2]$ par les générateurs de Norton équivalents.

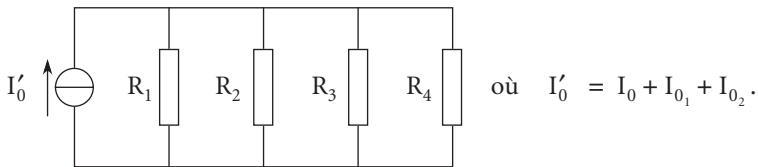
Nous avons :



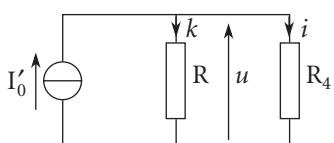
D'où :



Tous les branchements obtenus étant parallèles, on peut regrouper les générateurs de courant ; le circuit devient :



Les conductances $G_1 = \frac{1}{R_1}$, $G_2 = \frac{1}{R_2}$, $G_3 = \frac{1}{R_3}$ en parallèle s'ajoutent, d'où
 $G = \frac{1}{R} = G_1 + G_2 + G_3$ et :



Notons i et k les courants dans R_4 et R , nous avons :

$$\begin{cases} u = R_4 i = R k \\ I'_0 = i + k \end{cases}$$

D'où $i \cdot \left(1 + \frac{R_4}{R}\right) = I'_0$

et $i = \frac{G_4}{G_4 + G} I'_0 = \frac{G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} I'_0$.

Or $I'_0 = I_0 + G_1 E_1 + G_2 E_2$. Finalement :

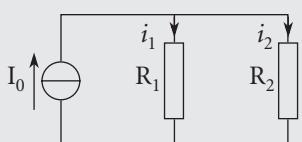
$$i = \frac{G_4 \cdot (I_0 + G_1 E_1 + G_2 E_2)}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} \Rightarrow i = \boxed{\frac{\frac{1}{R_4} \left(I_0 + \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}}$$

POINT MÉTHODE

Pont diviseur de courant

Dans le dernier circuit représenté, on reconnaît un diviseur de courant.

- **Diviseur de courant :** considérons deux résistances R_1 et R_2 en parallèle sur un générateur de courant I_0 .



$R_1 i_1 = R_2 i_2$ et $I_0 = i_1 + i_2$ ce qui donne :

$$I_0 = i_1 \cdot \left(1 + \frac{G_2}{G_1}\right) \Rightarrow \boxed{i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I_0}$$

et le courant I_0 se distribue dans les résistances en proportion de leurs conductances G_i .

Ainsi pour des résistances R_1, \dots, R_N en parallèle sur I_0 , on aurait :

$$i_p = \frac{G_p}{\sum_1^N G_m} I_0.$$

Le courant le plus important passera par la résistance la plus faible (c'est-à-dire celle de conductance la plus élevée), ce qui est bien naturel.

203

Circuit actif réductible à une résistance

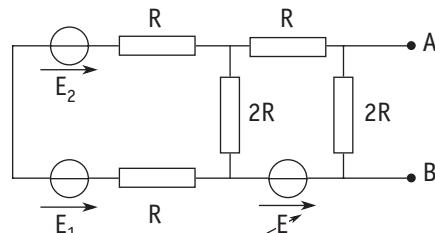
On considère le circuit représenté ci-dessous. On prendra :

$$R = 5 \Omega, E_1 = 2 \text{ V} \text{ et } E_2 = 8 \text{ V}.$$

1. Déterminer le générateur de Thévenin équivalent entre les bornes A et B.

2. a. En déduire la valeur de E pour laquelle le circuit est équivalent (entre A et B) à une résistance pure R_{eq} dont on précisera la valeur.

b. Retrouver ce résultat en faisant une analyse directe de la condition $(V_A - V_B)_{co} = 0$: (co pour circuit ouvert) : condition nécessaire pour que le dipôle soit réductible à une résistance (on admettra que cette condition est suffisante).



1. Ce qu'il faut savoir

- Association de résistances.
- Diviseur de tension.

2. Ce qu'il faut comprendre

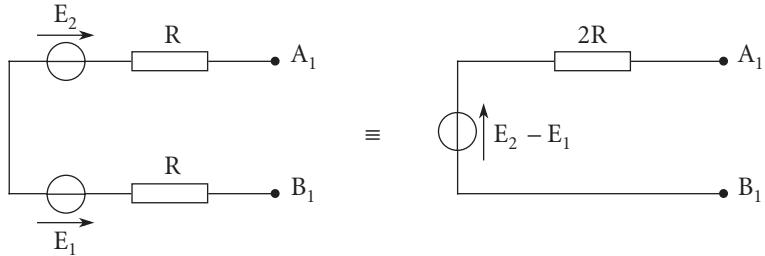
1. Le plus rapide est de modifier le circuit de proche en proche, en utilisant les règles d'association de résistances et de f.e.m. et en tirant profit des modèles de Thévenin et de Norton appliqués à des sous-systèmes plus simples.

2. Le dipôle AB étant remplacé par son générateur de Thévenin équivalent (E_{eq}, R_{eq}) déterminé précédemment, il suffira d'annuler E_{eq} (E_{eq} s'exprimera nécessairement sous une forme linéaire de E_1, E_2, E et plus précisément de E et $E_2 - E_1$).

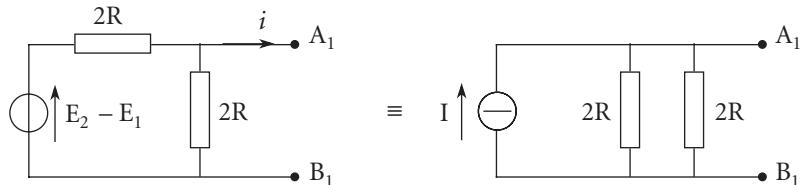
Une autre méthode consisterait à traduire directement que E_{eq} doit s'annuler ou ce qui revient au même que l'on doit avoir $(V_A - V_B)_{co} = 0$ (co pour circuit ouvert).

3. Solution

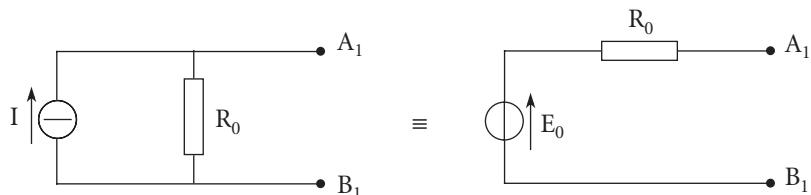
1. Les générateurs $[E_1, R]$ et $[E_2, R]$ sont en série ; ils sont donc réductibles au générateur $[E_2 - E_1, 2R]$:



Ajoutons la résistance $2R$ en parallèle entre A_1 et B_1 . Nous obtenons en représentation de Norton :



avec $I = \frac{E_2 - E_1}{2R}$; les deux résistances $2R$ en parallèle sont équivalentes à une seule résistance R_0 , d'où, en revenant à la représentation de Thévenin :



avec $R_0 = (2R // 2R)$.

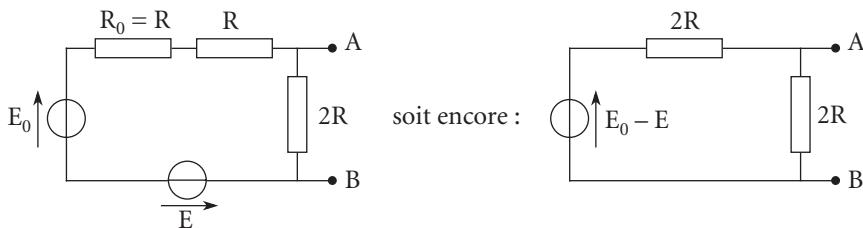
$$\text{Soit : } R_0 = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R}$$

$R_0 = R$

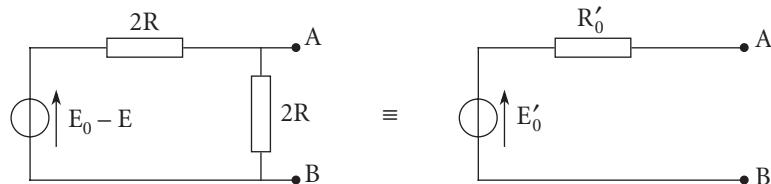
$$\text{Et : } E_0 = R_0 I = R_0 \cdot \frac{E_2 - E_1}{2R}$$

$E_0 = \frac{1}{2}(E_2 - E_1)$

Le circuit initial devient, en utilisant les résultats précédents :



On refait alors – comme plus haut – la double transformation : représentation de Norton, regroupement des résistances, et retour à la représentation de Thévenin :



On a $R'_0 \equiv (2R // 2R) \Rightarrow R'_0 = R$.

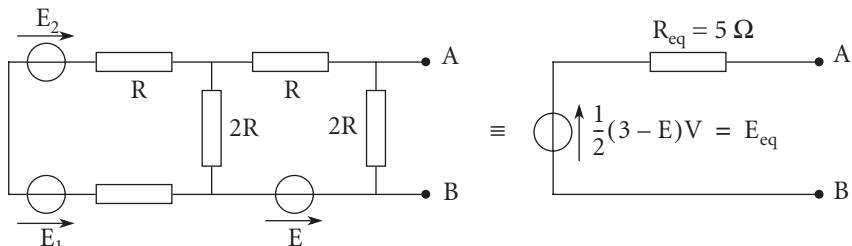
$$\text{Et : } E'_0 = R'_0 I' = R'_0 \cdot \frac{E_0 - E}{2R} = \frac{1}{2}(E_0 - E)$$

$$E'_0 = \frac{1}{4}(E_2 - E_1 - 2E).$$

Finalement, le circuit proposé est équivalent entre les bornes A et B à un générateur (dit de Thévenin) caractérisé par :

– une résistance interne $R_{eq} = R'_0 = R \Rightarrow R_{eq} = 5 \Omega$;

– une f.e.m. $E_{eq} = E'_0 = \frac{1}{4}(E_2 - E_1 - 2E) \Rightarrow E_{eq} = \frac{1}{2}(3 - E)$.



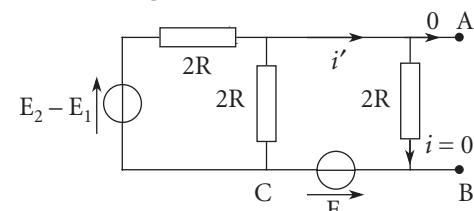
2. a. le circuit se réduit à une résistance pure pour $E_{eq} = 0$, soit : $E = 3 \text{ V}$.

Il est alors équivalent à une résistance pure égale à $R_{eq} = 5 \Omega$.

2. b. Si on suppose nulle la tension $(V_A - V_B)_{co}$ aux bornes du circuit proposé, alors aucun courant ne passe dans la résistance $2R$ en parallèle entre A et B, la tension à ses bornes étant nulle.

D'où :

$$(V_A - V_C)_{co} = V_B - V_C = E.$$



Or (diviseur de tension puisque $i' = 0$) :

$$(V_A - V_C)_{co} = \frac{2R}{2R+2R}(E_2 - E_1) = \frac{1}{2}(E_2 - E_1)$$

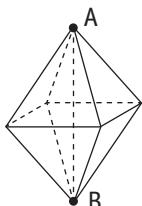
ou $(V_A - V_C)_{co} = \frac{1}{2}(E_2 - E_1) = E \Rightarrow E = 3 \text{ V.}$

204

Résistances équivalentes

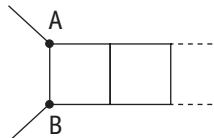
1. Déterminer la résistance équivalente des dipôles A–B représentés ci-dessous.
Chaque branche possède la même résistance r .

a.



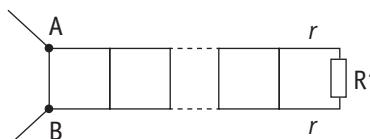
octaèdre régulier

b.

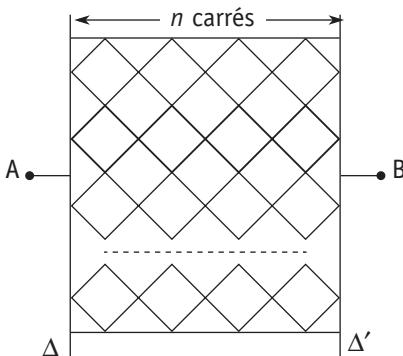


motif infini

Comment obtenir – pour b. – le même résultat avec un nombre fini N de cellules, la dernière cellule étant branchée sur une résistance R' à déterminer ?



2.



Le motif carré est répété n fois en ligne et p fois en colonne. Les côtés Δ et Δ' sont infiniment conducteurs. On notera λ la résistance par unité de longueur du fil utilisé pour réaliser ces maillages.

Déterminer la résistance équivalente entre A et B.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Éléments de symétrie.
- Associations série et parallèle de résistances.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

Il n'est guère intéressant de chercher à déterminer les courants traversant chacune des branches pour un courant d'entrée I donné. Il est plus rapide de tenir compte des symétries (ou antisymétries) caractérisant éventuellement le système (cas a.) afin de substituer à ce dernier un système plus simple. Le calcul de la résistance équivalente s'effectue ensuite par application des règles d'association des résistances.

Il est également possible de supprimer judicieusement certains contacts existants, et de prouver, pour le système ainsi obtenu, que les potentiels de chaque couple de points ainsi créé sont les mêmes, ce qui démontre l'équivalence entre les deux systèmes (cas 2.).

Enfin, pour les systèmes infinis (cas b.), on peut procéder de deux façons différentes :

- soit en considérant un système fini (de résistance notée R_n), et en construisant à partir de ce système un système similaire mais comportant une maille de plus (soit R_{n+1} sa résistance). On cherche alors à établir une relation de récurrence liant R_{n+1} et R_n . La résistance cherchée apparaît comme la limite de R_n quand n tend vers l'infini. Ainsi si $R_{n+1} = f(R_n)$, R est solution de $R = f(R)$;
- soit en ajoutant un maillon au système infini considéré : on obtient un système infini de même nature...

■ 3. Solution

POINT COURS

- À propos de la symétrie et de l'antisymétrie :

– Un axe Δ sera dit axe de symétrie si la topologie du système est invariante par la symétrie d'axe Δ et si cette symétrie ne modifie pas le signe des courants d'entrée et de sortie.

Les courants sont alors à répartition symétrique par rapport à Δ .

Un axe Δ' sera dit axe d'antisymétrie si la topologie du système est invariante par la symétrie d'axe Δ et si cette symétrie change le signe des courants d'entrée et de sortie.

La répartition des courants est alors antisymétrique.

Pour les potentiels, on peut remarquer que les potentiels aux noeuds symétriques sont opposés (pour des potentiels en A et B qui le seraient). Il en résulte que les potentiels des noeuds appartenant à Δ' sont nuls et de façon plus générale égaux.

1. a. Le plan EFGH est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants.

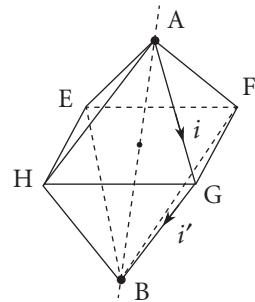
On a donc : $i(A \rightarrow G) = i'(G \rightarrow B)$.

$$\text{D'où } V_G = \frac{V_A + V_B}{2} = V_F = V_E = V_H.$$

Les branches EF, HE, HG et FG ne sont parcourues par aucun courant. Il reste donc quatre résistances $R' = 2r$ en parallèle, d'où :

$$\frac{1}{R} = \frac{4}{R'} \Rightarrow R = \frac{R'}{4} \Rightarrow R = \frac{r}{2}$$

1. b.



POINT MÉTHODE

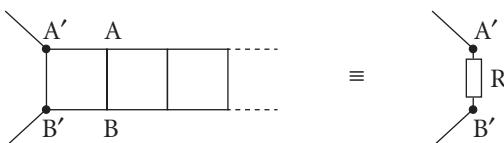
- On a cette fois-ci un motif théoriquement infini. Le plus simple consiste à remarquer que l'on ne change pas la valeur de la résistance équivalente en ajoutant – en amont – un maillon supplémentaire.
- On pourrait également établir une relation de récurrence sur la suite R_n des résistances équivalentes associées à des chaînes de n maillons. La résistance cherchée R est la limite de R_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Envisageons la première méthode :

On a :



De même :



On a donc :



D'où

$$R = r // (2r + R) \Rightarrow R = r \frac{(2r + R)}{3r + R} \quad (1)$$

La résistance cherchée est donc solution de l'équation :

$$R^2 + 3rR = 2r^2 + rR \Rightarrow R^2 + 2rR = 2r^2.$$

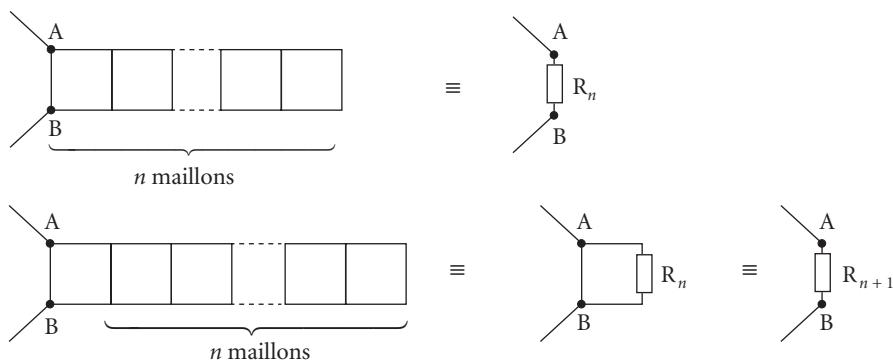
Soit encore : $(R+r)^2 = 3r^2$ et $R = -r + \sqrt{3}r$ ($R > 0$).

Finalement, nous obtenons

$$R = (\sqrt{3} - 1)r$$

Commentaires

La deuxième méthode consiste à relier R_n à R_{n+1} .



On a donc :

$$R_{n+1} = (r // (2r + R_n)).$$

$$\text{D'où } R_{n+1} = \frac{r(2r + R_n)}{3r + R_n} = f(R_n).$$

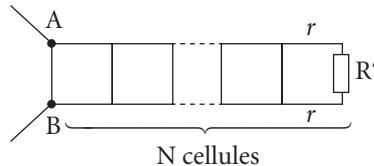
La résistance équivalente R d'un système infini est alors donnée par la solution de l'équation :

$$R = f(R).$$

$$\text{Soit ici : } R(3r + R) = r(2r + R) \Rightarrow R^2 + 2rR - 2r^2 = 0 \Rightarrow (R + r)^2 = 3r^2$$

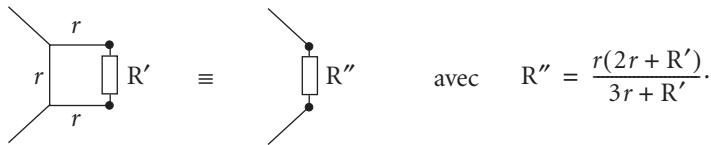
et $R = r(\sqrt{3} - 1)$.

Considérons maintenant une série de N cellules branchée sur une résistance R' , soit :



Il suffit donc de prendre $R' = R$ pour que la résistance équivalente vue entre les points A et B soit également R. En effet, on peut alors remplacer R' par la chaîne infinie étudiée précédemment.

D'une autre manière, on a :



On a donc $R'' = f(R')$. Or R est solution de : $R = f(R)$ (cf. (1)).

Le choix $R' = R$ implique donc $R'' = R$ et de proche en proche :

$$(R_{\text{eq}})_{AB} = R \text{ comme il se doit.}$$

1. Les droites Δ et Δ' étant infiniment conductrices, elles constituent des lignes équipo-tentielles non résistives. Décomposons le système comme l'indique la figure ci-dessous.

On a supprimé les contacts (P_0, P'_1) , (P''_1, P'_2) , etc.

Soit V_0 la d.d.p. créée entre les points B et

A. On a alors :

$$V(Q_1) = \frac{V_0}{n}; \quad V(P'_1) = \frac{V_0}{2n} = V(P''_1).$$

$$\text{De même } V(Q_2) = \frac{V_0}{n}$$

$$\text{et } V(P'_2) = V(P''_2) = \frac{V_0}{2n}.$$

$$\text{Enfin, on a également } V(P_0) = \frac{V_0}{2n},$$

le brin OP_0 représentant la fraction $\frac{1}{2n}$ de la longueur totale OO' .

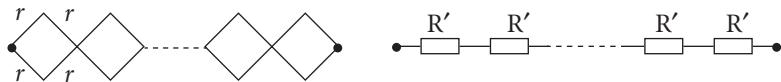
Il en résulte que : $V(P_0) = V(P'_1) = V(P''_1) = V(P'_2) = \dots$

On a de même : $V(S_0) = V(S'_1) = V(S''_1) = V(S'_2)$.

Le système considéré est alors équivalent à celui proposé dans l'énoncé (on peut relier les points au même potentiel P_0 et P'_1 , S_0 et S'_1 , ..., P''_1 et P'_2 , ...).

On a donc en parallèle p rangées de n losanges et deux lignes droites OO' et JJ' .

Or



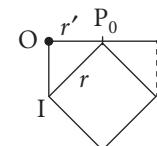
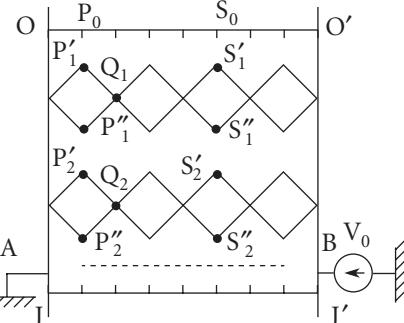
$$\text{avec } R' = (2r // 2r) = r \Rightarrow R \text{ (1 rangée)} = nr$$

$$\text{et } R(p \text{ rangées en } //) = \frac{nr}{p} \quad \text{où } r = a\lambda.$$

$$\text{De plus } OP_0 = IP_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad r(OP_0) = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{D'où } R(OO') = 2n \frac{r}{\sqrt{2}} = R(JJ').$$

Finalement



$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{2}{R(\text{OO}') + R(p \text{ rangées //})}.$$

$$\text{D'où } \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{\sqrt{2}}{nr} + \frac{p}{nr} \Rightarrow R_{\text{eq}} = \frac{nr}{\sqrt{2} + p}.$$

Soit avec $r = \lambda a$:

$$R_{\text{eq}} = \frac{n\lambda a}{\sqrt{2} + p}$$

205 Générateurs ou récepteurs

Le circuit représenté ci-contre comprend deux accumulateurs A_1 et A_2 de forces électromotrices E_1 et E_2 et de résistances internes r_1 et r_2 . Ces accumulateurs sont branchés en parallèle sur le résistor R dont on peut faire varier la résistance.

On cherche à déterminer, selon les domaines de valeurs de R , le type de fonctionnement de chacune des sources (générateur ou récepteur).

1. Justifier que l'on peut se limiter au cas $E_2 \geq E_1$.

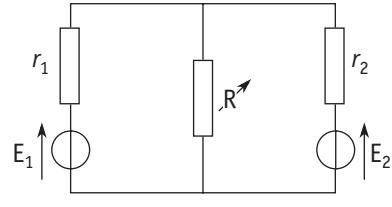
2. a. On suppose $E_2 > E_1$.

Que se passe-t-il pour $R \rightarrow 0$, puis pour $R \rightarrow \infty$? Mettre en évidence l'existence d'une valeur critique R_c de R . Donner l'expression de R_c .

b. Que se passe-t-il pour $E_2 = E_1$?

c. Conclure.

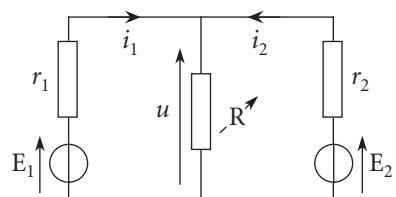
3. Reprendre l'étude d'une façon plus générale.



$$E_1 > 0 \text{ et } E_2 > 0$$

Solution

1. La permutation des indices « 1 » et « 2 » ne change pas le problème physique. On aura donc intérêt à choisir des notations respectant cette « symétrie » (courants i_1 et i_2).



Du fait même de cette « symétrie », on peut imposer dès le départ $E_2 \geq E_1$.

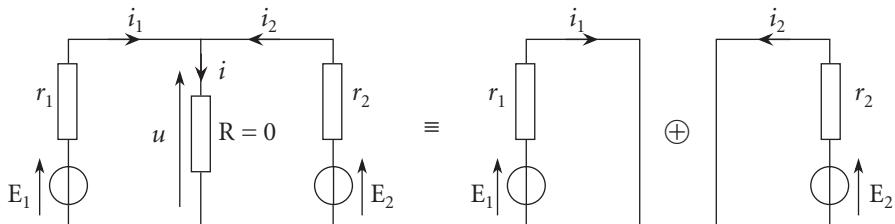
Le cas $E_1 > E_2$ s'en déduit immédiatement en permutant les indices « 1 » et « 2 ».

Remarquons de plus que l'accumulateur A_2 se comportera effectivement comme un générateur si i_2 (tel qu'il est noté sur la figure ci-dessus) est positif. On sera donc amené à calculer les courants i_1 et i_2 et à discuter leur signe.

On peut également déterminer la tension u aux bornes de R , le signe de i_1 et de i_2 s'en déduisant par simple comparaison de u à E_1 et E_2 :

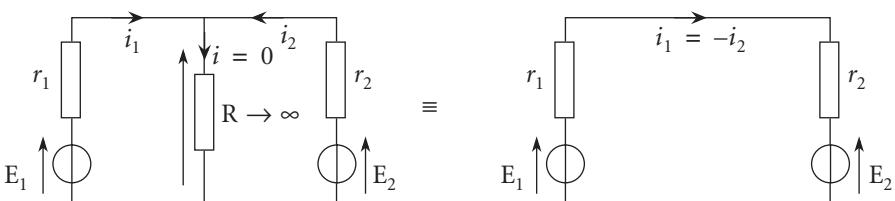
$$i_1 = \frac{E_1 - u}{r_1} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{E_2 - u}{r_2}.$$

2. a. • Quand R tend vers une valeur nulle (court-circuit pour $R = 0$) tout se passe – à la limite – comme si les deux mailles étaient découpées ($u = 0$ et $i = i_1 + i_2$) :



Il vient alors $i_1 = \frac{E_1}{r_1}$ et $i_2 = \frac{E_2}{r_2}$, A_1 et A_2 fonctionnent en générateurs.

• Pour $R \rightarrow \infty$ (branche R ouverte à la limite), les deux accumulateurs tendent vers une situation où ils sont en série et en opposition :



C'est celui qui possède la f.e.m. la plus grande qui aura un fonctionnement en générateur, le deuxième jouant le rôle de récepteur, d'où :

$$R \rightarrow \infty \quad \begin{cases} E_2 > E_1 \Rightarrow A_2 \equiv \text{générateur et } A_1 \equiv \text{récepteur} \\ E_2 = E_1 \Rightarrow \text{aucun courant ne traverse } A_1 \text{ et } A_2 \quad (i_1 = -i_2 = 0). \end{cases}$$

• Résistance critique R_c :

L'examen des cas particuliers $R \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$ a mis en évidence deux états limites du système :

(I) $R \rightarrow 0$ $\begin{cases} A_1 \text{ générateur} \\ A_2 \text{ générateur} \end{cases}$

(II) $R \rightarrow \infty$ $\begin{cases} A_1 \text{ récepteur} \\ A_2 \text{ générateur} \end{cases}$

Or les courants sont des fonctions continues de R . Il existe donc (pour $E_2 > E_1$) une valeur critique R_c de R telle que le système est dans une configuration du type (I) pour $R < R_c$ et du type (II) pour $R > R_c$.

La valeur de R_c s'obtient en remarquant que pour $R = R_c$, l'accumulateur A_1 n'est traversé par aucun courant ($E_2 > E_1$), ce qui correspond au passage de A_1 de l'état générateur à l'état récepteur. On a alors :

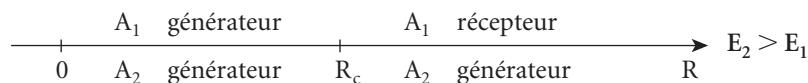
$$u = E_1 \text{ et } u = E_2 \frac{R_c}{R_c + r_2} \text{ (diviseur de tension). } E_1$$

$$\text{D'où : } E_1 = E_2 \frac{R_c}{R_c + r_2}$$

soit

$$R_c = r_2 \frac{E_1}{E_2 - E_1}, \text{ pour } E_2 > E_1$$

On a donc :



2. b. Pour $E_2 = E_1$, les deux accumulateurs fonctionnent en générateur (faire $R_c \rightarrow +\infty$ sur le diagramme précédent), quelle que soit la valeur de R , avec :

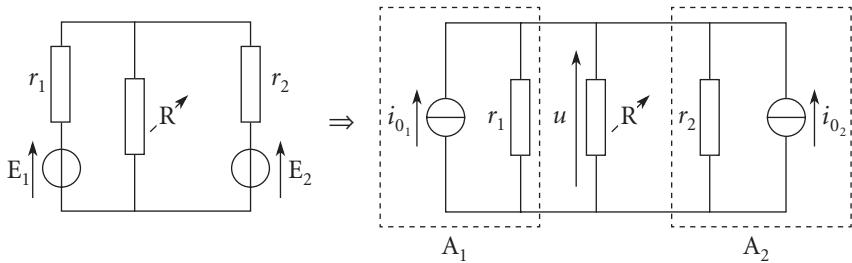
$$\begin{cases} i_1 > 0 \text{ et } i_2 > 0 & \text{pour } r_1 \neq r_2 \\ i_1 = i_2 = 0 & \text{pour } r_1 = r_2 \end{cases} \quad (\text{cf. symétrie du circuit}).$$

2. c. Conclusion :

En posant $R_c = r_2 \frac{E_1}{E_2 - E_1}$, on obtient :

	$R > R_c$	A_1 récepteur A_2 générateur	$i_1 < 0$ $i_2 > 0$
$E_2 > E_1$	$R = R_c$	A_1 « neutre » A_2 générateur	$i_1 = 0$ $i_2 > 0$
	$R < R_c$	A_1 générateur A_2 générateur	$i_1 > 0$ $i_2 > 0$
Pour $E_1 > E_2$, on permute les indices « 1 » et « 2 » et R_c devient $R'_c = r_1 \frac{E_2}{E_1 - E_2}$			
$E_1 = E_2$	A_1 et A_2 générateurs	$i_1 > 0, i_2 > 0$ pour $r_1 \neq r_2$ $i_1 = i_2 = 0$ pour $r_1 = r_2$	

3. Déterminons dans un premier temps la tension u aux bornes de r . À cet effet, les branchements étant plutôt du type parallèle, il semble judicieux de remplacer les accumulateurs A_1 [E_1, r_1] et A_2 [E_2, r_2] par leurs représentations de Norton :



$$\text{On a } i_{01} = \frac{E_1}{r_1} \text{ et } i_{02} = \frac{E_2}{r_2}.$$

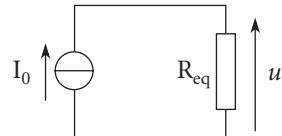
Soit encore, en associant les deux générateurs de courant et en remplaçant les conductances $g_1 = \frac{1}{r_1}$, $g_2 = \frac{1}{r_2}$ et $G = \frac{1}{R}$ en parallèle par leur conductance équivalente

$$G_{\text{eq}} = \frac{1}{R_{\text{eq}}}:$$

$$G_{\text{eq}} = g_1 + g_2 + G, \text{ soit :}$$

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R}, \text{ et :}$$

$$I_0 = i_{01} + i_{02} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} = g_1 E_1 + g_2 E_2.$$



Nous obtenons alors $G_{\text{eq}} u = I_0$; d'où $u = \frac{I_0}{G_{\text{eq}}} = R_{\text{eq}} I_0$ et :

$$u = \frac{g_1 E_1 + g_2 E_2}{g_1 + g_2 + G}.$$

• Pour déterminer le type de fonctionnement de l'accumulateur A_1 , il suffit alors de comparer u à E_1 .

$$\text{Or } u - E_1 = \frac{g_1 E_1 + g_2 E_2}{g_1 + g_2 + G} - E_1 = \frac{g_2 E_2 - (g_2 + G) E_1}{g_1 + g_2 + G}.$$

Le courant i_1 est donné par $i_1 = \frac{1}{r_1}(E_1 - u) = g_1(E_1 - u)$.

A_1 fonctionnera en **récepteur** dès que i_1 est **négatif**, c'est-à-dire pour $u > E_1$, soit pour

$$E_1 < E_2 \frac{g_2}{g_2 + G} \quad (1) \text{ soit encore :}$$

$$E_1 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{R} \right) < \frac{E_2}{r_2} \Rightarrow \frac{1}{R} E_1 < \frac{E_2 - E_1}{r_2}.$$

- Limitons pour l'instant l'étude au cas où $E_2 > E_1$; il vient alors ($E_2 - E_1 > 0$) :

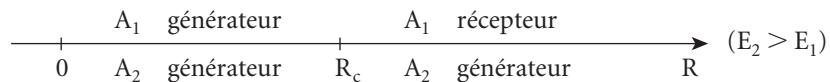
– pour $R > r_2 \frac{E_1}{E_2 - E_1}$: A_1 récepteur et A_2 nécessairement générateur

(Au moins l'un des accumulateurs fonctionne en générateur quand les courants sont non nuls : il faut fournir l'énergie dissipée par effet Joule dans les résistors.)

– pour $R < r_2 \frac{E_1}{E_2 - E_1}$: A_1 générateur. Et il en est de même de A_2 , A_2 fonctionnant en générateur dès que $E_2 > E_1 \frac{g_1}{g_1 + G}$ (on a permuté les indices « 1 » et « 2 » dans (1), où l'on a changé le sens de l'inégalité (récepteur → générateur)). Cette relation est automatiquement vérifiée pour $E_2 > E_1$;

– pour $R = r_2 \frac{E_1}{E_2 - E_1}$: il ne passe aucun courant dans A_1 ($i_1 = 0$) et A_2 fonctionne en générateur $\left(E_2 > E_1 > E_1 \frac{g_1}{g_1 + G}\right)$.

D'où les résultats avec $R_c = r_2 \frac{E_1}{E_2 - E_1}$:



• Pour $E_2 = E_1$, on a $E_1 > E_2 \frac{g_2}{g_2 + G}$ et $E_2 > E_1 \frac{g_1}{g_1 + G}$, ce qui montre que A_1 et A_2 se comportent en générateurs. Dans ce cas, la valeur de R n'a plus d'importance. Tous les courants sont nuls pour $r_1 = r_2$ (système complètement symétrique).

On retrouve bien tous les résultats du 2. On peut remarquer que l'accumulateur de plus grande f.e.m. fonctionne systématiquement en générateur, et ceci quelles que soient les valeurs de R , r_1 et r_2 ... Il est donc normal que A_1 et A_2 soient générateurs lorsque $E_1 = E_2$.

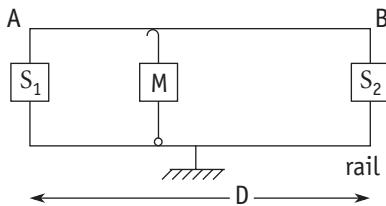
206 Voie électrifiée

Une locomotive électrique est alimentée en courant continu. L'alimentation est réalisée par des sous-stations S_i distantes de D .

Ces sous-stations relient les rails (au potentiel nul) à la caténaire AB. Chaque source S_i sera représentée par un générateur idéal de tension E (borne \oplus du côté de la caténaire).

La motrice « M » est branchée entre les rails et la caténaire. On supposera que son moteur doit être alimenté par un courant constant I.

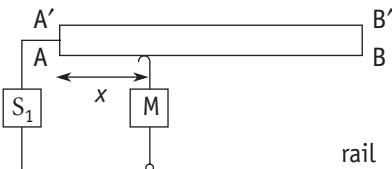
De plus, la caténaire présente une résistance linéaire de valeur ρ et on négligera la résistance des rails et des câbles de liaison à la caténaire.



- 1.** On considère une section de ligne de longueur D alimentée par deux sous-stations (cf. figure ci-dessus). On note x la longueur de caténaire séparant la motrice de la sous-station S_1 . Exprimer la tension U aux bornes de la motrice, et en déduire la chute de tension $\Delta U = E - U$.

Calculer la valeur maximale D_{\max} de D pour $\rho = 5 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot m^{-1}$; $I = 800 \text{ A}$ et $(\Delta U)_{\max} = 45 \text{ V}$.

- 2.** Une section de même longueur D est – dans cette question – alimentée par une seule station selon le schéma ci-contre. La caténaire est constituée de deux fils identiques AB et A'B' (longueur D, résistance linéaire ρ) reliés aux extrémités. La motrice est branchée entre les rails et l'un des fils.

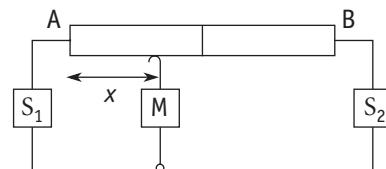


Reprendre les questions du **1**.

- 3.** On revient à un système de deux stations, mais avec une caténaire à deux fils court-circuités au milieu de la ligne.

Calculer ΔU et D_{\max} .

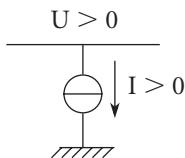
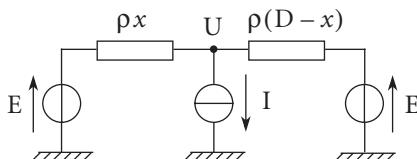
Que pensez-vous de ces trois systèmes ?



Solution

- 1.** Étant donné le sens de E, la motrice absorbera un courant la traversant dans le sens indiqué sur le dessin ci-contre (ainsi la puissance absorbée UI est bien positive).

Le dispositif étudié se réduit donc au circuit électrique représenté ci-dessous :



Les deux résistances ρx et $\rho(D - x)$ sont soumises à la même tension $E - U$: tout se passe comme si elles étaient en parallèle entre la motrice et une seule source de tension E .

$$\text{Donc } R_{\text{eq}} = \frac{\rho^2 x(D - x)}{\rho x + \rho(D - x)}$$

$$R_{\text{eq}} = \rho \cdot \frac{x(D - x)}{D}$$

et

$$\boxed{\Delta U = \rho I \cdot \frac{x(D - x)}{D} \quad (\Delta U = R_{\text{eq}} \cdot I).}$$

Commentaire

On peut aussi calculer U en faisant le bilan des courants au point de potentiel U :

$$\frac{E - U}{\rho x} + \frac{E - U}{\rho(D - x)} - I = 0$$

ce qui donne :

$$E - U = \Delta U = I \cdot \frac{\rho^2 x(D - x)}{\rho x + \rho(D - x)} = R_{\text{eq}} \cdot I.$$

Cette méthode correspond à l'application du théorème de Millmann au point de potentiel U ...

Cette chute de tension ΔU est bien évidemment nulle pour $x = 0$ et $x = D$ (proximité immédiate des sous-stations qui imposent un potentiel E par rapport à la terre).

Elle est maximale pour $x = \frac{D}{2}$ avec :

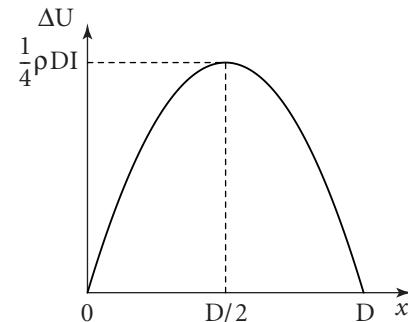
$$\boxed{\Delta U_{\text{max}} = \frac{1}{4} \rho D I}$$

D'où, pour ΔU_{max} fixé :

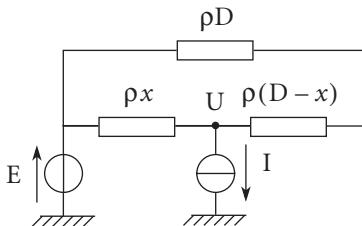
$$D = D_{\text{max}} = \frac{4 \Delta U_{\text{max}}}{\rho I}$$

Pour $\Delta U_{\text{max}} = 45$ V, il vient $D_{\text{max}} = \frac{4 \times 45}{5 \cdot 10^{-5} \times 800}$.

D'où $D_{\text{max}} = 4,5$ km.



2. De la même manière que pour la première question, redessinons le circuit électrique : on remarque que la résistance ρD est alors en série avec $\rho(D - x)$, ce qui donne une résistance totale égale à $\rho(2D - x)$.



Cette résistance $\rho(2D - x)$ est elle-même en parallèle avec la résistance ρx , d'où ici :

$$R_{eq} = \frac{\rho^2 x (2D - x)}{\rho x + \rho(2D - x)}$$

$$R_{eq} = \frac{\rho x (2D - x)}{2D}.$$

Commentaire

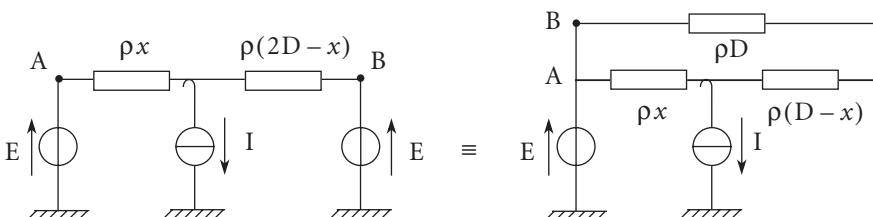
On peut aussi remarquer, en « dépliant » vers la droite le fil A'B' et en ajoutant une source de tension E en A' (pour maintenir son potentiel à E), que l'on retrouve le montage de la question 1., avec simplement 2D à la place de D...

On en déduit ($\Delta U = R_{eq} \cdot I$) :

$$\Delta U = \rho I \cdot \frac{x(2D - x)}{2D}$$

L'expression trouvée ici est de même nature que celle établie au 1., D y étant remplacé par 2D. Ainsi, une ligne de longueur D pour le deuxième système est équivalente à une « demi-ligne » de longueur 2D.

En effet, on a :



Il résulte de cette remarque que l'on peut reprendre l'application numérique de la première question sous la forme :

$$(2D)_{max} = 4,5 \text{ km} \quad \text{d'où} \quad D_{max} = 2,25 \text{ km.}$$

3. Remarquons tout d'abord que la symétrie du système impose :

$$U(x) = U(D - x) \quad (\text{positions symétriques par rapport au milieu de la ligne}).$$

On peut donc limiter l'étude à $0 \leq x \leq \frac{D}{2}$.

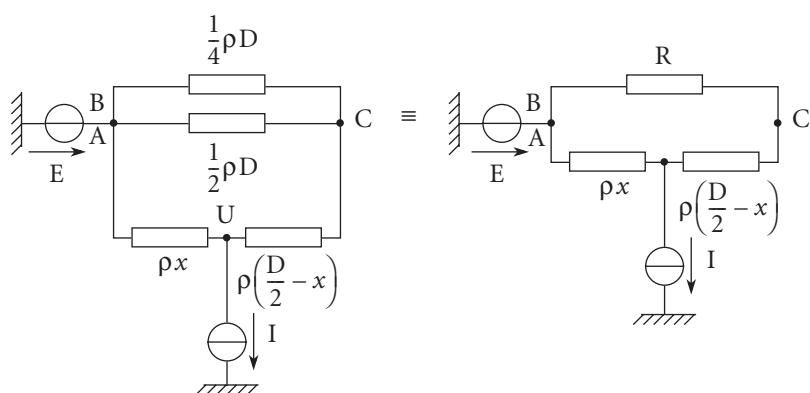
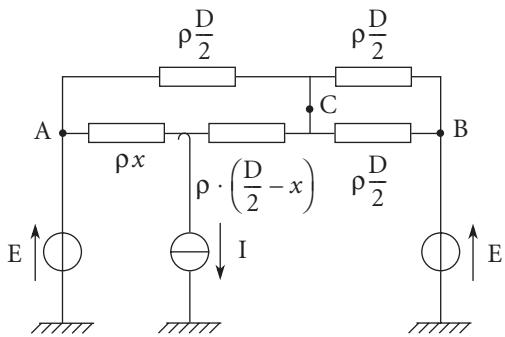
Le système proposé correspond au circuit représenté ci-contre.

Transformons ce circuit :

Les deux résistances $\left(\rho \frac{D}{2}\right)$ entre C et B sont en parallèle. On peut donc les remplacer par la résistance $\frac{1}{2} \left(\rho \frac{D}{2}\right)$.

D'autre part, les deux nœuds A et B sont au même potentiel E : on peut donc les confondre (ce qui revient à « replier » le circuit, et supprimer une des sources E...).

D'où le schéma :



$$\text{où } R = \left[\left(\frac{1}{2} \rho D \right) // \left(\frac{1}{4} \rho D \right) \right]; \text{ soit } R = \frac{1 \times 2}{1 + 2} \cdot \left(\frac{1}{4} \rho D \right) \text{ et } R = \frac{1}{6} \rho D.$$

D'où :

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagram showing a circuit with a voltage source E, a resistor R', a resistor rho * x, and a voltage source U. The current I flows through the circuit.} & & R' = R + \rho \cdot \left(\frac{D}{2} - x \right) \\ & & R' = \rho \cdot \left(\frac{2D}{3} - x \right) \end{array}$$

et finalement :

$$R_{\text{eq}} = \frac{\rho x R'}{\rho x + R'} = \frac{\rho^2 x \left(\frac{2D}{3} - x \right)}{\rho x + \rho \left(\frac{2D}{3} - x \right)}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{\rho x (2D - 3x)}{2D}$$

On en déduit ($\Delta U = R_{eq} \cdot I$) :

$$\boxed{\Delta U = \rho x \frac{(2D - 3x)I}{2D}} \quad \text{avec } 0 \leq x \leq \frac{D}{2}.$$

Cette chute est maximale pour x_0 tel que :

$$\frac{d}{dx}[x(2D - 3x)] = 0 \Rightarrow (2D - 3x_0 - 3x_0 = 0) \quad \text{soit} \quad x_0 = \frac{D}{3}.$$

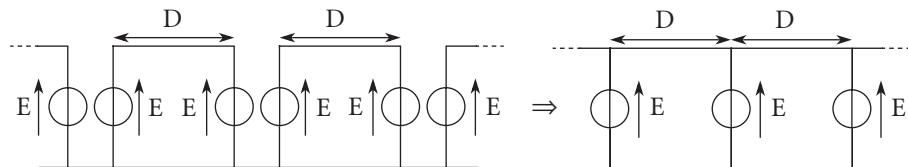
La chute maximale de tension a pour valeur :

$$(\Delta U)_{\max} = \frac{\rho \frac{D}{3}(2D - D)}{2D} \quad \text{et} \quad \boxed{(\Delta U)_{\max} = \frac{1}{6}\rho DI}$$

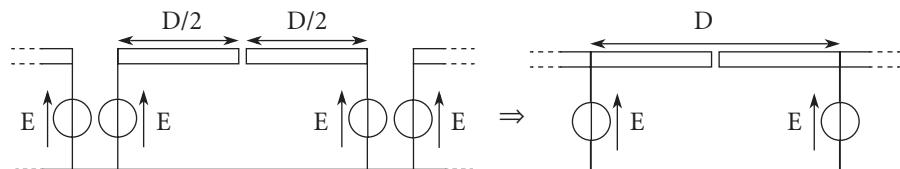
Ce qui donne $D_{\max} = 6,75 \text{ km}$.

Pour comparer les trois systèmes, redessinons une ligne comportant plusieurs sections :

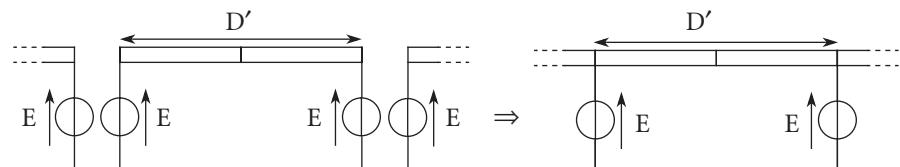
- Système (I) : ($D = 4,5 \text{ km}$)



- Système (II) : ($D = 4,5 \text{ km}$)



- Système (III) : ($D' = 6,75 \text{ km} = 1,5D$)

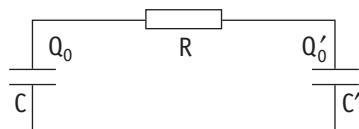


Les figures de droite représenteraient une optimisation du coût d'établissement de la ligne (minimisation du nombre de stations). Ainsi, les systèmes (I) et (II) sont semblables mais (II) nécessite deux fois plus de cuivre (ligne double). Le système (III) semble plus avantageux dans le sens où il exige moins de stations pour une même longueur de ligne.

B. Régime transitoire

211 Bilan d'énergie

On relie deux condensateurs (capacités C et C' , charges initiales respectives Q_0 et Q'_0) par une résistance R :



1. Déterminer l'évolution du système, et préciser l'état d'équilibre final.
2. Faire un bilan énergétique : on exprimera les résultats en fonction de C et C' et des tensions de charge initiale U_0 et U'_0 des condensateurs.

1. Ce qu'il faut savoir

- Tension aux bornes d'un condensateur.
- Énergie emmagasinée dans un condensateur.

2. Ce qu'il faut comprendre

L'état d'équilibre final correspond à un courant nul, et la tension aux bornes de chaque condensateur résultera de la conservation de la charge électrique « emprisonnée » sur les armatures des condensateurs.

Faire un bilan énergétique consiste à montrer que la perte d'énergie emmagasinée dans les condensateurs entre le début et la fin est égale (en valeur absolue) à l'énergie électrique absorbée par la résistance et dissipée sous forme thermique (effet Joule).

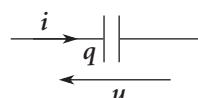
3. Solution

1.

POINT COURS

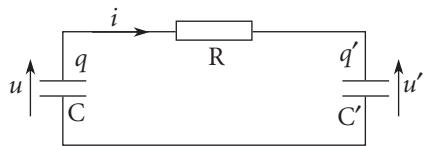
$$q = Cu \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

Ces relations concernent les condensateurs en convention récepteur, en notant q la charge de l'armature par laquelle entre le courant i .



Remarque : i et q peuvent être négatifs.

Soit i le courant dans la résistance R . Avec les orientations précisées sur le schéma, il vient :



$$i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du}{dt}$$

$$i = +\frac{dq'}{dt} = +C' \frac{du'}{dt}.$$

D'après la loi des mailles :

$$-u + Ri + u' = 0.$$

On dérive cette équation, et on élimine les tensions :

$$-\frac{du}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{du'}{dt} = 0$$

$$\frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C'} = 0.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\frac{RCC'}{C+C'} \cdot \frac{di}{dt} + i = 0}$$

C'est une équation différentielle du 1^{er} ordre dont la solution générale s'écrit :

$$i(t) = Ae^{-t/\tau} \quad \text{en posant} \quad \tau = \frac{RCC'}{C+C'}.$$

La valeur de A est déterminée par les conditions initiales :

$$A = i(0^+) = \frac{1}{R}(u_0 - u'_0)$$

(d'après la loi des mailles à l'instant initial, les tensions aux bornes des condensateurs sont des fonctions continues du temps...).

Finalement :

$$i(t) = \frac{1}{R}(u_0 - u'_0)e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{R} \left(\frac{Q_0}{C} - \frac{Q'_0}{C'} \right) e^{-t/\tau}}$$

Le régime permanent ($t \rightarrow +\infty$) correspond bien à $i = 0$,

$$\text{soit } u = u' = u_\infty \text{ ou encore } \frac{Q_\infty}{C} = \frac{Q'_\infty}{C'} = u_\infty$$

Q_∞ et Q'_∞ désignant les charges finales des deux condensateurs.



POINT COURS

La conservation de la charge emprisonnée entre les armatures des condensateurs découle de la définition de i :

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{dq'}{dt} \quad \text{d'où} \quad \frac{dq}{dt} + \frac{dq'}{dt} = 0$$

soit en intégrant $q(t) + q'(t) = \text{cte.}$

Cette conservation des charges impose ici :

$$Q_0 + Q'_0 = q + q' = Q_\infty + Q'_\infty$$

$$\text{d'où : } u_\infty = \frac{Q_\infty}{C} = \frac{Q'_\infty}{C'} = \frac{Q_\infty + Q'_\infty}{C + C'} = \frac{Q_0 + Q'_0}{C + C'}.$$

Il est alors facile d'obtenir l'expression de $u(t)$, nécessairement de la forme $u(t) = (\lambda + \mu e^{-t/\tau})$ (puisque $\frac{du}{dt} = -\frac{i}{C} \dots$) et vérifiant $u(0^+) = u_0$ et $u(t \rightarrow \infty) = u_\infty$,

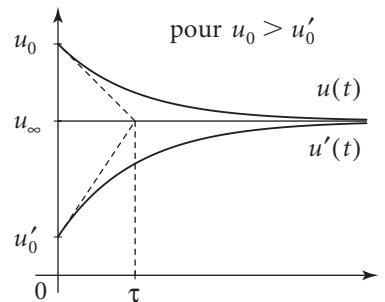
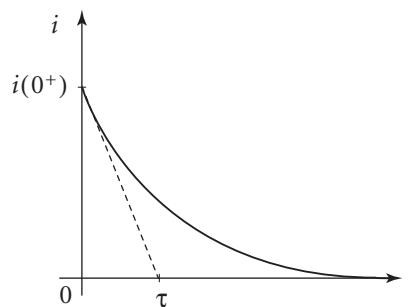
$$\text{soit} \quad \lambda = u_\infty \quad \text{et} \quad \lambda + \mu = u_0$$

ce qui impose :

$$u(t) = u_\infty + (u_0 - u_\infty)e^{-t/\tau}$$

et l'expression analogue pour $u'(t)$.

Allure des courbes :

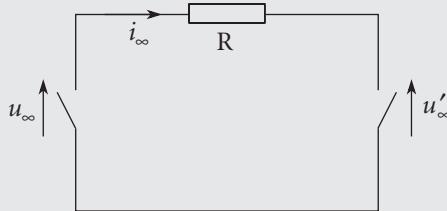


POINT MÉTHODE

Étude du régime permanent

En régime permanent continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

On obtient donc pour $t \rightarrow \infty$ le schéma suivant.



On doit donc avoir $i_{\infty} = 0$ (circuit ouvert)

et $u_{\infty} = u'_{\infty}$.

Il est toujours bon de vérifier que le comportement attendu correspond bien à l'étude mathématique faite précédemment.

2. Calculons les énergies des condensateurs dans l'état initial ($t = 0$) et dans l'état final ($t \rightarrow +\infty$) :

$$E_i = \frac{1}{2}Cu_0^2 + \frac{1}{2}C'u_0'^2$$

$$E_f = \frac{1}{2}Cu_{\infty}^2 + \frac{1}{2}C'u_{\infty}'^2 = \frac{1}{2}(C+C')u_{\infty}^2 \quad (u'_{\infty} = u_{\infty}).$$

On en déduit la variation d'énergie du système :

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2}(C+C')u_{\infty}^2 - \frac{1}{2}Cu_0^2 - \frac{1}{2}C'u_0'^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left[\frac{(Cu_0 + C'u_0')^2}{C+C'} - Cu_0^2 - C'u_0'^2 \right]$$

$$\Delta E = \frac{1}{2(C+C')} \cdot [2CC'u_0u'_0 - CC'u_0^2 - CC'u_0'^2]$$

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{CC'}{C+C'} (u_0 - u'_0)^2.$$

D'autre part, l'énergie reçue par la résistance a pour expression :

$$W_J = \int_0^{\infty} Ri^2 dt$$

$$W_J = R \int_0^{\infty} i^2(0^+) e^{-2t/\tau} dt$$

$$W_J = Ri^2(0^+) \cdot \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\tau R i^2(0^+)$$

soit, en remplaçant τ :

$$W_J = \frac{1}{2} \cdot \frac{CC'}{C+C'} [Ri(0^+)]^2$$

et (loi des mailles : $Ri(0^+) = u(0^+) - u'(0^+) = u_0 - u'_0$) :

$$W_J = \frac{1}{2} \cdot \frac{CC'}{C+C'} (u_0 - u'_0)^2.$$

On a bien

$$\Delta E + W_J = 0$$

ou encore, avec le langage de la thermodynamique et en notant U l'énergie interne du système total (l'ensemble du circuit) **thermostaté** :

$$\Delta U = W^{\text{ext}} + Q_{\text{th}}$$

ici

$$W^{\text{ext}} = 0 \quad \text{d'où} \quad \Delta U = Q_{\text{th}}.$$

Or $\Delta U = \Delta E$ que l'on vient de calculer (pas de modification de l'état thermique du système)

soit

$$\Delta E = Q_{\text{th}} \Rightarrow Q_{\text{th}} = -W_J.$$

La température du système étant imposée, l'effet Joule correspond à un transfert d'énergie thermique au thermostat ($Q_{\text{th}} < 0$).



212 Conditions initiales – conditions d'équilibre

On donne le circuit ci-contre.

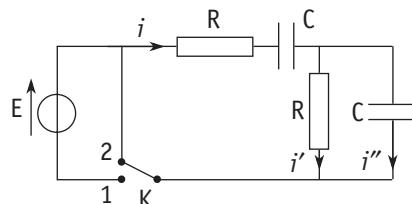
Pour $t < 0$, l'interrupteur K est dans la position 2, et les deux condensateurs (de même capacité C) sont déchargés.

À la date $t = 0$, K bascule de la position 2 à la position 1.

Déterminer les valeurs des courants i , i' et i'' (voir figure) à la date $t = \varepsilon$, ε positif et très voisin de zéro.

Au bout d'un temps T suffisamment long (les courants étant alors tous nuls), l'interrupteur K bascule à nouveau, et revient en position 2.

Déterminer les valeurs des courants i , i' et i'' aussitôt après le basculement de K , puis lorsque le régime permanent est atteint.



1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de continuité aux bornes d'un condensateur.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

L'exercice n'est pas du tout calculatoire. Il demande de déterminer les différentes grandeurs (intensité ou tension) en utilisant la loi de continuité aux bornes d'un condensateur (aux changements d'états) ou les lois du régime permanent (pour un temps infiniment long).

■ 3. Solution

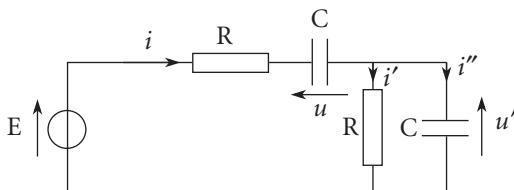


POINT COURS

Lorsqu'on bascule un interrupteur dans un circuit, il y a continuité de la charge des condensateurs (et donc de la tension aux bornes des condensateurs).

Par continuité de la tension aux bornes des condensateurs, on a :

$$\begin{cases} u(\varepsilon) = u(0^-) = 0 \\ u'(\varepsilon) = u'(0^-) = 0 \end{cases}$$



ce qui entraîne, puisque $u' = Ri'$: $i'(\varepsilon) = 0$

D'après la loi des mailles, $E = Ri + u + u'$ d'où : $i(\varepsilon) = \frac{E}{R}$

Et puisque $i'' = i - i'$ $i''(\varepsilon) = \frac{E}{R}$

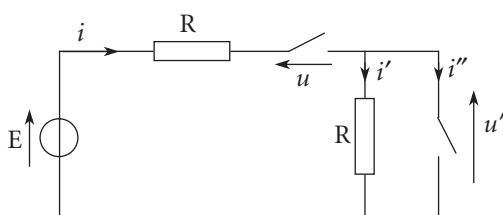
- Au bout d'un temps T suffisamment long, le régime permanent est atteint.



POINT COURS

En régime permanent continu, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts (intensité nulle).

On a alors :

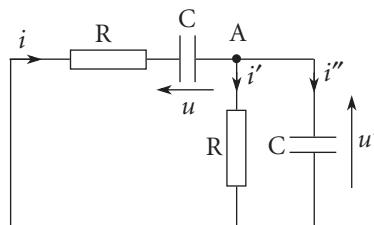


Puisque $i' = i - i''$, $i'(T) = 0$ d'où $u'(T) = 0$

et puisque $E = Ri + u + u'$, $u(T) = E$

On bascule alors l'interrupteur dans la position 2.

Le circuit devient :



On a donc, par continuité aux bornes des condensateurs :

$$\begin{cases} u(T + \varepsilon) = u(T) = E \\ u'(T + \varepsilon) = u'(T) = 0 \end{cases}$$

On a toujours : $u' = Ri'$, alors $i'(T + \varepsilon) = 0$

$$\text{En maintenant, } 0 = Ri + u + u' \quad \text{soit} \quad i(T + \varepsilon) = -\frac{E}{R}$$

On en déduit :

$$i''(T + \varepsilon) = -\frac{E}{R} \quad (i'' = i - i').$$

Au bout d'un temps suffisamment long, un nouveau régime permanent est atteint,

alors $i_\infty = i''_\infty = 0$

d'où $i'_\infty = 0$

soit $u'_\infty = 0$ et $u_\infty = 0$. Les condensateurs sont déchargés.



Deux bobines en parallèle

On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$.

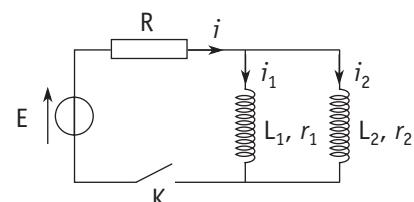
1. On suppose dans cette question que les deux bobines sont identiques ($L_1 = L_2 = L$ et $r_1 = r_2 = r$). Déterminer les courants $i(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Commenter les résultats obtenus.

2. Même question dans le cas où $L_1 \neq L_2$ et $r_1 \neq r_2$ avec cependant $\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2} = \tau$.

On pourra également poser, avec $R_{//} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$: $\tau' = \frac{\tau}{1 + \frac{R}{R_{//}}}$; $i_\infty = \frac{E}{R + R_{//}}$.

Commenter.



3. On se place désormais dans le cas général et on pose :

$$\tau_1 = \frac{L_1}{r_1}; \quad \tau_2 = \frac{L_2}{r_2}; \quad T_1 = \frac{L_1}{R} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{L_2}{R}.$$

a. Donner le système différentiel du premier ordre vérifié par le couple de variables $[i_1(t), i_2(t)]$. Que peut-on en déduire sur la nature des solutions en $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$? On ne développera pas les calculs.

b. On donne ci-dessous les courbes $\frac{t}{\tau_1} \rightarrow i_1(t)$, $\frac{t}{\tau_1} \rightarrow i_2(t)$ et $\frac{t}{\tau_1} \rightarrow i(t)$ pour $r_1 = r_2$; $\frac{E}{r_1} = 1 \text{ A}$; $L_1 = 50 L_2$ et différentes valeurs du paramètre $\eta = \frac{R}{r_1}$:

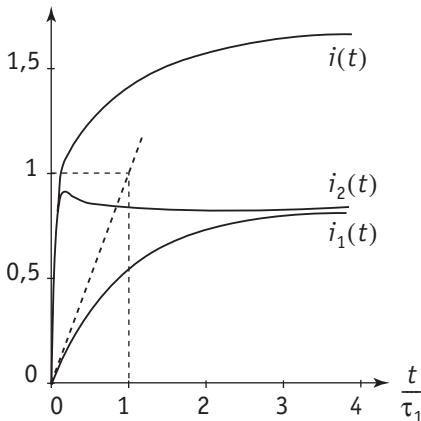


Fig. 1 : $\frac{R}{r_1} = 0,1$

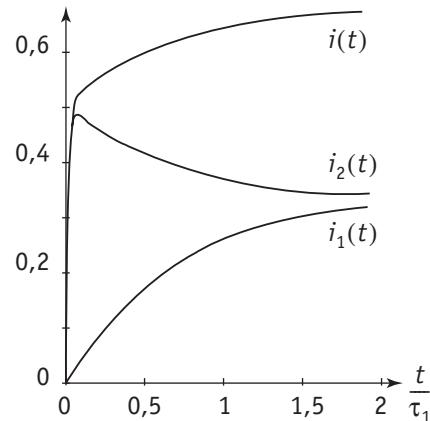


Fig. 2 : $\frac{R}{r_1} = 1$

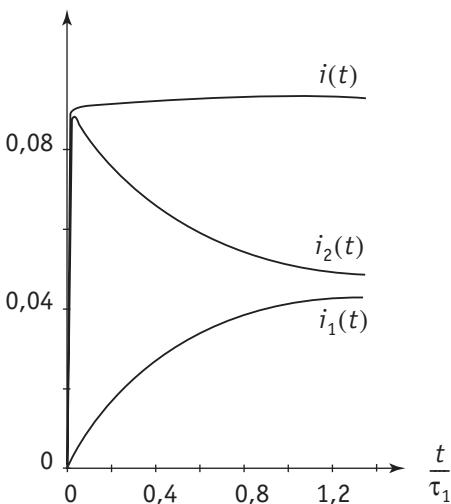


Fig. 3 : $\frac{R}{r_1} = 10$

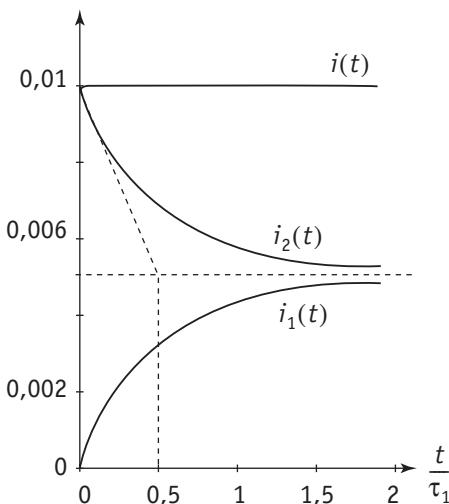


Fig. 4 : $\frac{R}{r_1} = 100$

Commenter ces courbes.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Circuit rL série.
- Continuité du courant dans une bobine.
- Régime transitoire – régime permanent.

Outils mathématiques

- Équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre.
- Système différentiel linéaire du 1^{er} ordre.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1 et 2. La présence des bobines retarde l'établissement des courants i_1 et i_2 , et donc du courant i dans la branche principale. Pour R suffisamment faible, les constantes de temps qui vont intervenir sont certainement celles des bobines, à savoir $\tau_1 = \frac{L_1}{r_1}$ et $\tau_2 = \frac{L_2}{r_2}$.

Le problème se présentera simplement lorsque $\tau_1 = \tau_2$, les deux bobines ayant des comportements « similaires ».

Au bout d'un temps suffisamment long, les courants seront établis et les inductances L_1 et L_2 pourront être supprimées. On a alors un circuit purement résistif, et les valeurs asymptotiques $(i)_\infty$, $(i_1)_\infty$ et $(i_2)_\infty$ sont connues. Il pourra être utile de faire intervenir la tension u aux bornes des deux bobines.

■ 3. Solution

1. Les lois de l'électrocinétique permettent d'écrire :

$$u = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (\text{bobine } \mathcal{L}_1)$$

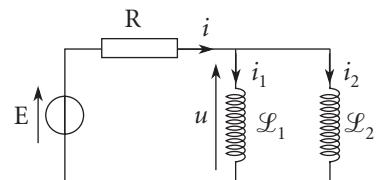
$$u = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (\text{bobine } \mathcal{L}_2)$$

$$u = E - Ri \text{ avec } i = i_1 + i_2 \text{ (loi des noeuds).}$$

Nous nous sommes placés dans le cas où les deux bobines sont identiques ce qui implique bien évidemment $i_1(t) = i_2(t) = \frac{i}{2}$.

Les équations précédentes donnent alors :

$$u = E - Ri = r \frac{i}{2} + \frac{L di}{2 dt}$$



soit encore $\frac{L}{2} \frac{di}{dt} + \left(R + \frac{r}{2} \right) i = E$.

Posons $\tau' = \frac{L}{2R+r}$

$$\Rightarrow \boxed{\tau' \frac{di}{dt} + i = \frac{2E}{2R+r}}$$

La solution générale de cette équation différentielle est fournie par :

$$i(t) = \frac{2E}{2R+r} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau'}}.$$

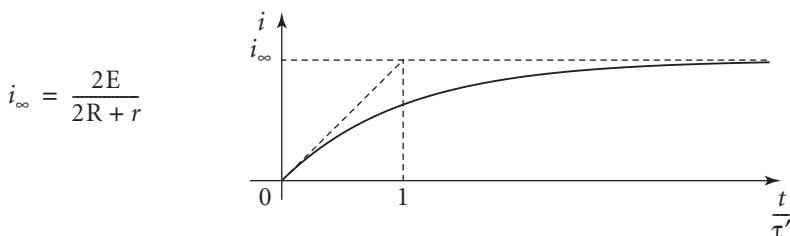
Or à $t = 0^+$, on doit avoir $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ (continuité du courant dans les bobines)

d'où $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = 0$ et $\lambda = -\frac{2E}{2R+r}$.

Finalement :

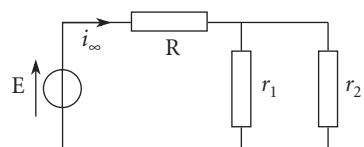
$$\boxed{i(t) = \frac{2E}{2R+r} \left(1 - e^{-\frac{(2R+r)t}{L}} \right)}$$

et $i_1(t) = i_2(t) = \frac{i}{2}$.



Commentaires

- Le courant i_∞ correspond au régime continu établi pour lequel le circuit est purement résistif ($\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = 0$).

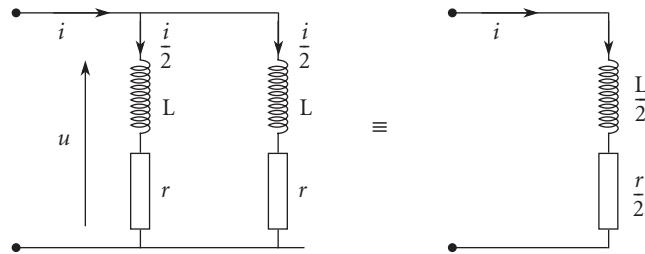


On a donc :

$$i_\infty = \frac{E}{R_{eq}} \quad \text{où} \quad R_{eq} = R + (r_1 // r_2) = R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = R + \frac{r}{2} \quad (r_1 = r_2 = r).$$

On aurait pu remarquer directement que, les mêmes courants traversant les deux bobines identiques, on pouvait réduire l'ensemble de ces deux bobines (L, r) à une bobine unique

$$\left(\frac{L}{2}, \frac{r}{2} \right).$$

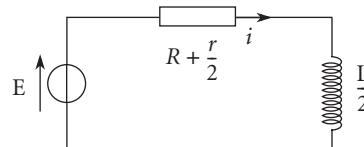


Dans les deux cas, on a bien : $u = L \frac{d}{dt} \left(\frac{i}{2} \right) + r \frac{i}{2} = \frac{L}{2} \frac{di}{dt} + \frac{r}{2} i.$

Le circuit global devient :

et

$$E = \left(R + \frac{r}{2} \right) i + \frac{L}{2} \frac{di}{dt}$$



2. Cette fois, les deux bobines sont différentes bien que leurs constantes de temps aient une même valeur ($\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2} = \tau$).

Les équations précédentes peuvent se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} u = E - Ri = r_1 \left(i_1 + \tau \frac{di_1}{dt} \right) = r_2 \left(i_2 + \tau \frac{di_2}{dt} \right) \\ \text{avec } i = i_1 + i_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} i_1 + \tau \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{r_1} (E - Ri) \\ i_2 + \tau \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{r_2} (E - Ri) \end{cases} \quad (i_1 + i_2) + \tau \frac{d}{dt} (i_1 + i_2) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (E - Ri).$$

Soit $i + \tau \frac{di}{dt} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} (E - Ri)$; notons $R_{//} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$

et regroupons les termes : $\tau \frac{di}{dt} + i \left[1 + \frac{R}{R_{//}} \right] = \frac{E}{R_{//}}$

$$\boxed{\frac{\tau}{1 + \frac{R}{R_{//}}} \frac{di}{dt} + i(t) = \frac{E}{R + R_{//}}}$$

Soit en notant $i_\infty = \frac{E}{R + R_{//}}$ et $\tau' = \frac{\tau}{1 + \frac{R}{R_{//}}}$:

$$\boxed{i(t) = i_\infty \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau'} \right) \right)} \quad \text{puisque } i(0) = 0.$$

Soit encore

$$i(t) = \frac{E}{R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \left[1 - \exp \left(- \left[1 + \frac{R}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \right] \frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (2)$$

On a d'autre part, d'après (1) : $i_1 + \tau \frac{di_1}{dt} = \frac{E}{r_1} - \frac{R}{r_1} i = \frac{E}{r_1} - \frac{R}{r_1} i_{1\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}} \right)$

soit en posant $i_{1\infty} = \frac{E - R i_{1\infty}}{r_1}$:

$$i_1 + \tau \frac{di_1}{dt} = i_{1\infty} + \frac{R}{r_1} i_{1\infty} e^{-\frac{t}{\tau'}}.$$

Nous avons donc $i_1(t) = i_{1\infty} + i'_1(t)$ ($i_{1\infty}$: solution de régime permanent), $i'_1(t)$ étant solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$i'_1 + \tau \frac{di'_1}{dt} = \frac{R}{r_1} i_{1\infty} e^{-\frac{t}{\tau'}} \quad (3)$$

La solution de l'équation homogène est $\lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$.

La solution particulière est de la forme $A e^{-\frac{t}{\tau'}}$ avec, en reportant dans (3) :

$$A \left(1 - \frac{\tau}{\tau'} \right) = \frac{R}{r_1} i_{1\infty}.$$

Finalement, nous obtenons :

$$i_1(t) = i_{1\infty} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R}{r_1} i_{1\infty} \frac{1}{1 - \frac{\tau}{\tau'}} e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

et avec $i_1(0^+) = 0$:

$$i_1(t) = i_{1\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + \frac{R}{r_1} \frac{i_{1\infty}}{1 - \frac{\tau}{\tau'}} \left(e^{-\frac{t}{\tau'}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

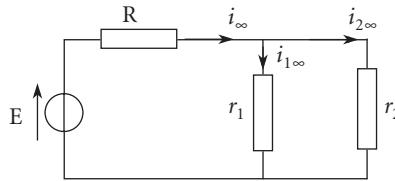
Il apparaît ainsi deux constantes de temps : $\tau_1 = \tau$ et $\tau_2 = \tau' = \frac{\tau}{1 + \frac{R}{r_1 r_2} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$.

Commentaires

• La valeur de $i_{1\infty}$ est donnée par : $i_{1\infty} = \frac{E}{r_1} - \frac{R}{r_1} i_{1\infty}$ soit :

$$i_{1\infty} = \frac{E}{r_1} - \frac{R}{r_1} \frac{E(r_1 + r_2)}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \frac{E r_1 r_2}{r_1 [R(r_1 + r_2) + r_1 r_2]}.$$

D'où $i_{1\infty} = \frac{Er_2}{R(r_1 + r_2) + r_1r_2}$, expression que l'on peut retrouver à partir du montage équivalent en régime continu établi.



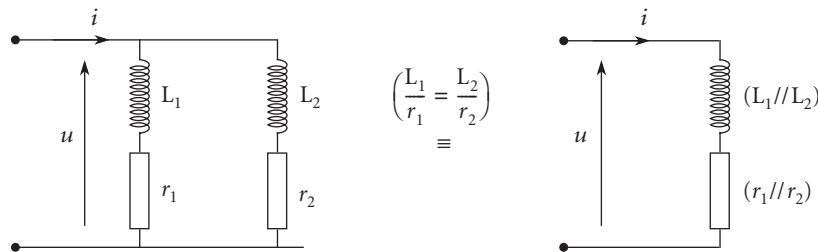
On a ainsi (diviseur de courant) : $i_{1\infty} = i_\infty \frac{r_2}{r_2 + r_1}$ avec $i_\infty = \frac{E}{R + \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}}$ d'où le résultat.

- Pour déterminer le courant $i(t)$, on peut remplacer le système (L_1, r_1) en parallèle avec (L_2, r_2) par une bobine unique d'inductance $L_{//} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ et de résistance $R_{//} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. En effet, pour $\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2}$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{u}{r_1} = i_1 + \tau \frac{di_1}{dt} \\ \frac{u}{r_2} = i_2 + \tau \frac{di_2}{dt} \end{array} \right\} \quad u \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = (i_1 + i_2) + \tau \frac{d}{dt}(i_1 + i_2)$$

$$u = R_{//}i + \tau R_{//} \frac{di}{dt}.$$

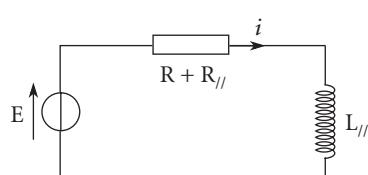
On a bien $R_{//} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ et $L_{//} = \tau R_{//} = \frac{L_1 r_1 r_2}{r_1 r_1 + r_2} = L_1 \frac{1}{\frac{L_1}{r_1} + 1} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$.



Le circuit global devient alors :

d'où

$$E = (R + R_{//})i + L_{//} \frac{di}{dt}$$



3. a. Désormais les deux bobines sont distinctes et leurs constantes de temps sont différentes ($\tau_1 \neq \tau_2$). On a donc :

$$\begin{cases} u = E - Ri & \text{et } i = i_1 + i_2 \\ u = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} & \text{et } u = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

soit encore

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = E - R(i_1 + i_2) = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

d'où

$$\frac{di_1}{dt} = -\left(\frac{r_1}{L_1} + \frac{R}{L_1}\right)i_1 - \frac{R}{L_1}i_2 + \frac{E}{L_1}.$$

L'équation permettant d'obtenir $\frac{di_2}{dt}$ résulte de la permutation des indices 1 et 2, d'où le système différentiel du 1^{er} ordre par rapport aux variables $i_1(t)$ et $i_2(t)$:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{T_1}\right)i_1 - \frac{1}{T_1}i_2 + \frac{E}{L_1} \\ \frac{di_2}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{T_2}\right)i_2 - \frac{1}{T_2}i_1 + \frac{E}{L_2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{L_1}{r_1} & \tau_2 &= \frac{L_2}{r_2} \\ T_1 &= \frac{L_1}{R} & T_2 &= \frac{L_2}{R}. \end{aligned}$$

Avec les conditions initiales $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$.

D'autre part, le système précédent implique :

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{0^+} = \frac{E}{L_1} \quad \text{et} \quad \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{0^+} = \frac{E}{L_2}.$$

Posons alors $i_1(t) = i_{1\infty} + i'_1(t)$ et $i_2(t) = i_{2\infty} + i'_2(t)$ où $i_{1\infty}$ a été défini au 2. et $i_{2\infty} = i_\infty - i_{1\infty}$ d'où :

$$\begin{cases} \frac{di'_1}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{T_1}\right)i'_1 - \frac{i'_2}{T_1} \\ \frac{di'_2}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{T_2}\right)i'_2 - \frac{i'_1}{T_2} \end{cases} \quad (4)$$

Il suffit alors de chercher des solutions de la forme $i'_1(t) = A_1 e^{pt}$ et $i'_2(t) = A_2 e^{pt}$.

En reportant dans (4), on peut alors remarquer que p doit vérifier une équation du second degré dont les deux solutions sont nécessairement de la forme :

$$p = -\frac{1}{\tau''} \quad \text{et} \quad lp = -\frac{1}{\tau'''}$$

(un régime pseudo-périodique est ici impossible).

Finalement, on aura :

$$\begin{cases} i_1(t) = i_{1\infty} + \lambda_1 e^{-\frac{t}{\tau''}} + \mu_1 e^{-\frac{t}{\tau'''}} \\ i_2(t) = i_{2\infty} + \lambda_2 e^{-\frac{t}{\tau''}} + \mu_2 e^{-\frac{t}{\tau'''}} \\ i(t) = i_\infty + (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-\frac{t}{\tau''}} + (\mu_1 + \mu_2)e^{-\frac{t}{\tau'''}} \end{cases}$$

Les coefficients λ_1 , λ_2 , μ_1 et μ_2 se calculent avec les conditions initiales précisées plus haut.

3. b. Les courbes données sont bien représentatives des résultats précédents.

■ Valeurs asymptotiques :

$$i_\infty = \frac{\frac{E}{r_1}}{R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{\frac{E}{r_1}}{\frac{R}{r_1} + \frac{r_2}{r_1 + r_2}} ; \text{ or } \frac{E}{r_1} = 1 \text{ et } r_1 = r_2 \text{ d'où :}$$

$$i_\infty = \frac{1}{\frac{R}{r_1} + 0,5} \quad \text{et} \quad i_{1\infty} = i_\infty \frac{r_2}{r_1 + r_2} = 0,5 i_\infty = i_{2\infty}.$$

$\frac{R}{r_1}$	$i_\infty(A)$	$i_{1\infty}(A) = i_{2\infty}(A)$
0,1	1,67	0,83
1	0,67	0,33
10	$9,5 \cdot 10^{-2}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$
100	$\sim 10^{-2}$	$\sim 5 \cdot 10^{-3}$

■ Pentes à l'origine :

$$\text{On a } \frac{di_1}{dt} = \frac{E}{L_1} \Rightarrow \frac{di_1}{d\left(\frac{t}{\tau_1}\right)} = \frac{E}{L_1} \tau_1 = \frac{E}{r_1} = 1$$

$$\text{de même } \frac{di_2}{dt} = \frac{E}{L_2} \Rightarrow \frac{di_2}{d\left(\frac{t}{\tau_1}\right)} = \frac{E}{L_2} \tau_1 = \frac{E L_1}{r_1 L_2} = 50.$$

On a bien $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{0^+} \gg \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{0^+}$ (rapport 50) comme l'indiquent les graphes. De plus, en traçant les tangentes à l'origine pour les courbes $t \rightarrow i_1(t)$, on montre la cohérence avec la valeur 1 calculée ci-dessus.

Par exemple, en reprenant la figure 1 (cf. également la figure 2) :

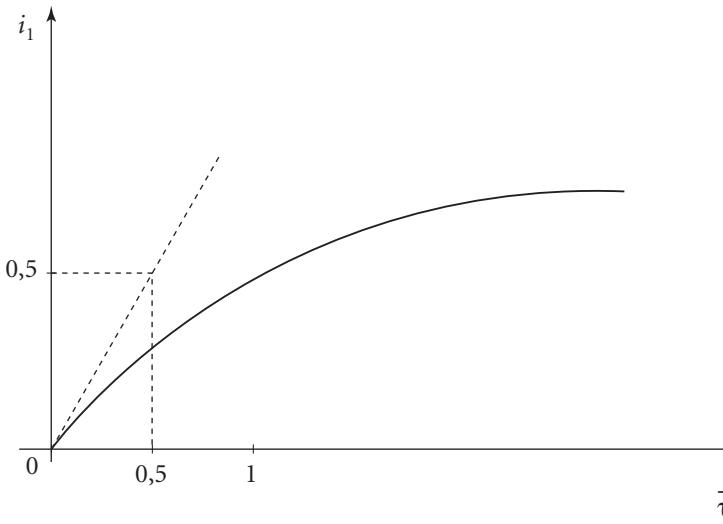


Fig. 1

■ Constantes de temps :

- Le courant $i_1(t)$ dans \mathcal{L}_1 ne présente pas, au voisinage de $t = 0^+$, de « brusques » variations comparativement à $i_2(t)$ (et par voie de conséquence à $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$). Ceci est dû à ce que $L_1 \gg L_2 \dots$
- On remarque également que le temps d'établissement du régime permanent semble diminuer quand R augmente, ce qui paraît naturel.
- Pour R suffisamment grand, le courant $i(t)$ devient, très vite, pratiquement constant, les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ évoluent alors en sens inverse avec la même constante de temps.

On pourrait montrer que pour R « très grand », les constantes de temps τ'' et τ''' tendent asymptotiquement vers les valeurs :

$$\frac{1}{\tau''} = R \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \sim \left(\frac{R}{L_2} \quad \text{ici} \right)$$

$$\frac{1}{\tau'''} = \frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2} \sim \left(\frac{2r_1}{L_1} \quad \text{ici} \right).$$

τ'' correspond en fait à la constante de temps du circuit que l'on obtiendrait en négligeant r_1 et r_2 ($R \gg r_1$ et $R \gg r_2$).

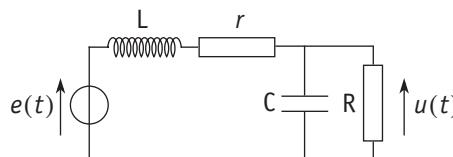
τ''' est associée à la constante de temps des deux bobines en série.

On peut vérifier sur la figure 4 ($\frac{R}{r_1} = 100$ et donc $R \gg (r_1 = r_2)$) que l'on a bien

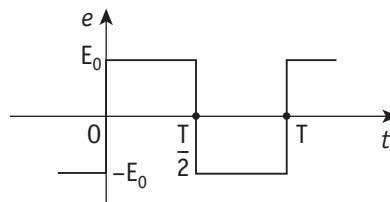
$$\tau''' \sim 0,5 \tau_1 \quad (\text{cf. courbe } \frac{t}{\tau_1} \rightarrow i_2(t) \dots)$$

214 Circuit LC réel en signaux carrés

On donne le circuit :



Il est alimenté par un générateur de « signaux carrés », périodiques, de période T.



1. Préliminaires :

- Rappeler l'expression de la résistance critique r_c d'un circuit rLC série.
- Dans le cas où le régime transitoire s'amortit suffisamment rapidement, déterminer les valeurs asymptotiques de $u(t)$, quand $t \rightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right)T^-$ puis $t \rightarrow (n+1)T^-$.

2. Établir l'équation différentielle régissant la fonction $u(t)$.

Classer les différents types de solutions à l'aide d'une condition portant sur r , r_c et R. Commenter les résultats obtenus.

On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'} \right)$ avec $\tau = RC$ et $\tau' = \frac{L}{r}$.

- Dans le cas où le régime est pseudo-périodique amorti et d'amortissement relativement faible (on supposera que l'on a : $\lambda \ll \omega_0 \sqrt{1 + \frac{r}{R}}$), quel doit être l'ordre de grandeur de T pour que chaque « train » d'oscillations – généré par la commutation du générateur – soit indépendant du « train » précédent, c'est-à-dire indépendant de la valeur précise de T ? Donner l'expression de $u(t)$ dans ce cas.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Circuit rLC série : étude du régime transitoire.
- Régimes pseudo-périodique, apériodique critique et apériodique hypercritique.

Outil mathématique

- Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

- 1. a.** Étant donné un circuit rLC série, la valeur critique r_c de r est celle qui permet de passer d'un régime transitoire pseudo-périodique ($r < r_c$, « faible » amortissement) à un régime transitoire apériodique ($r \geq r_c$, « fort » amortissement).
- b. Pour $e = E_0$ (ou $e = -E_0$), le régime transitoire s'étant suffisamment amorti, le système finit par atteindre un régime continu où courants et tensions sont des constantes.
2. L'établissement de l'équation différentielle ne présente guère de difficultés. C'est une équation du second ordre (présence simultanée de L et C) et la nature des solutions dépendra du signe du discriminant de l'équation caractéristique associée.
3. Les oscillations de $u(t)$ sont simples à étudier dans le cas où elles peuvent être considérées comme complètement amorties sur la durée $\frac{T}{2}$: chaque série d'oscillations débute dans les mêmes conditions, indépendantes de la valeur exacte de T ... Ces conditions sont alors celles du régime continu permanent du circuit.

■ 3. Solution

- 1. a.** Considérons le circuit rLC série alimenté par un générateur continu :

$e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) = E_0$ pour $t > 0$. L'évolution du circuit est régie par l'équation différentielle :

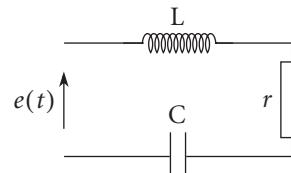
$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \quad \text{avec} \quad i = \frac{dq}{dt}.$$

Soit encore :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + r\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0$$

dont la solution est fournie par $q(t) = CE_0 + q'(t)$ avec :

$$L\frac{d^2q'}{dt^2} + r\frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{C} = 0.$$



POINT COURS

La solution générale de cette équation homogène associée (équation sans second membre) s'obtient à partir de l'équation caractéristique que doit vérifier la grandeur α pour que $e^{\alpha t}$ soit solution :

$$L\alpha^2 + r\alpha + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{r}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0.$$

C'est une équation du second degré, de discriminant Δ tel que :

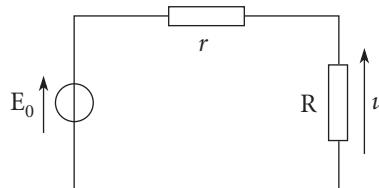
$$\Delta = \left(\frac{r}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}.$$

C'est le signe de ce discriminant qui détermine la nature des solutions du problème physique.

La résistance critique r_c correspond donc à la valeur de r qui annule Δ soit :

$$\frac{r_c^2}{L^2} = \frac{4}{LC} \Rightarrow r_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1)$$

1. b. Pour $e = +E_0$, supposons le régime permanent atteint. On a alors $i_L = \text{cste}$ et $q = \text{cste}$, soit encore : $u_L = 0$ et $i_C = 0$. Le circuit devient :



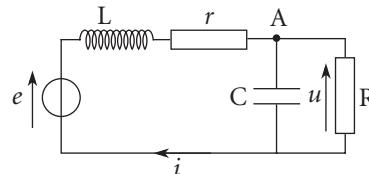
Il se réduit à un simple diviseur de tension, de sorte que :

$$u \left(t \rightarrow \left(n + \frac{1}{2} \right) T^- \right) \sim E_0 \frac{R}{r+R} \quad (2)$$

De même, pour $e = -E_0$:

$$u(t \rightarrow (n+1)T^-) \sim -E_0 \frac{R}{r+R} \quad (2')$$

2. Soit $i(t)$ le courant traversant le générateur.



D'après la loi des mailles :

$$L \frac{di}{dt} + ri + u - e = 0$$

et, d'après la loi des noeuds en A :

$$i = i_C + i_R = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$$

d'où, en éliminant i :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R} \cdot \frac{du}{dt} + rC \frac{du}{dt} + \frac{r}{R}u + u = e = \pm E_0$$

et finalement :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L} \right) \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{r}{R} \right) u = \pm \frac{E_0}{LC}$$

POINT MÉTHODE

- La solution générale de cette équation différentielle du second ordre s'écrit :

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{solution} \\ \text{particulière} \\ \text{de l'éq. complète} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{solution générale} \\ \text{de l'équation} \\ \text{homogène associée} \end{array} \right\}.$$

- Une solution particulière est $u = \pm E_0 \cdot \frac{R}{R+r}$.

- L'équation homogène associée admet des solutions en $e^{\alpha t}$ telles que :

$$\alpha^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L} \right) \alpha + \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{r}{R} \right) = 0 \quad (3)$$

comme on l'a déjà indiqué précédemment, la nature des solutions physiques dépendra du signe du discriminant Δ .

Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $2\lambda = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'} \right) = \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L} \right)$; (3) devient :

$$\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2 \left(1 + \frac{r}{R} \right) = 0$$

et $\Delta = 4 \left[\lambda^2 - \omega_0^2 \left(1 + \frac{r}{R} \right) \right]$.

- 1^{er} cas : $\Delta > 0$**

Les solutions de l'équation caractéristique sont alors :

$$\alpha_1, \alpha_2 = -\lambda \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \quad (\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 < 0)$$

et les solutions $u(t)$ cherchées sont de la forme :

$$u(t) = \pm \frac{RE_0}{R+r} + Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \quad (4)$$

On dit que le régime est **apériodique amorti**.

- 2^e cas : $\Delta = 0$**

L'équation caractéristique admet une racine double $-\lambda$ et les solutions $u(t)$ s'écrivent alors :

$$u(t) = \pm \frac{RE_0}{R+r} + (A + Bt)e^{-\lambda t} \quad (5)$$

C'est le régime **apériodique critique**.

- 3^e cas : $\Delta < 0$**

On pose alors $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{r}{R} \right) - \lambda^2$

d'où $\alpha_1, \alpha_2 = -\lambda \pm i\omega \quad (i^2 = -1)$

et $u(t) = \pm \frac{RE_0}{R+r} + (A \cos \omega t + B \sin \omega t)e^{-\lambda t} \quad (6)$

et le régime est alors appelé **pseudo-périodique amorti**.

Le régime pseudo-périodique est donc obtenu pour $\Delta < 0$, c'est-à-dire pour :

$$\lambda^2 < \omega_0^2 \left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

et en revenant aux données du problème

$$\left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)^2 < \frac{4}{LC} \left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

et avec $r_c^2 = 4\frac{L}{C}$:

$$\left(r + \frac{r_c^2}{4R}\right)^2 < r_c^2 \left(1 + \frac{r}{R}\right) \Rightarrow \left(r - \frac{r_c^2}{4R}\right)^2 < r_c^2.$$

Finalement

$$\boxed{\left|r - \frac{r_c^2}{4R}\right| < r_c} \quad (7)$$

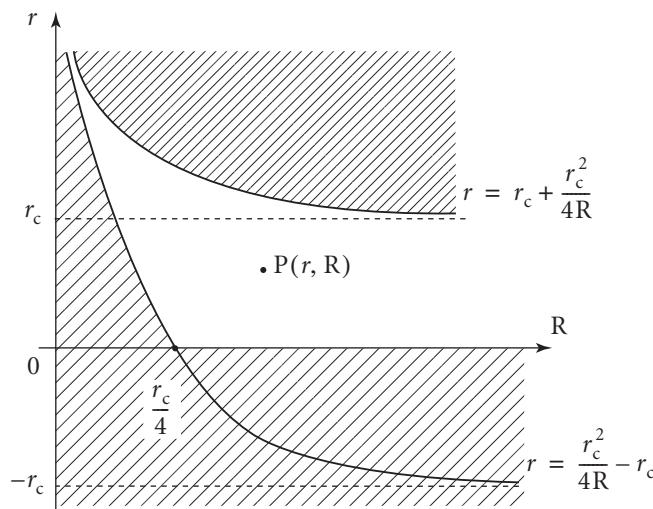
Le régime pseudo-périodique correspond donc à :

$$\frac{r_c^2}{4R} - r_c < r < r_c + \frac{r_c^2}{4R}$$

soit encore à :

$$\boxed{\sup \left[0, \frac{r_c^2}{4R} - r_c \right] < r < r_c + \frac{r_c^2}{4R}}$$

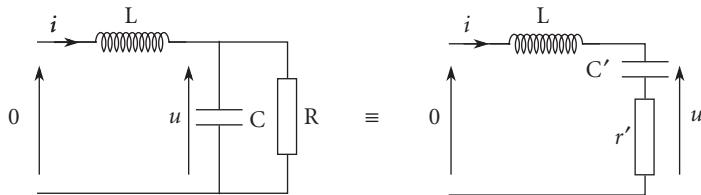
Donnons-en une représentation graphique à L et C fixés (donc à r_c fixé) :



Tout point représentatif $P(r, R)$ appartenant au domaine non hachuré convient (régime pseudo-périodique).

Commentaires

- Pour R infinie, le montage se réduit au circuit rLC série classique. Le régime pseudo-périodique correspond bien à $r < r_c$, par définition de r_c .
- Pour $R = 0$, il n'y a plus de valeur possible pour r , la capacité étant court-circuitée.
- Pour $r = 0$, il suffit de remarquer que l'on peut établir pour le régime transitoire l'équivalence suivante :



En effet, on a :

$$\begin{cases} 0 = L \frac{di}{dt} + u \\ \text{et } i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = L \frac{di}{dt} + r'i + \frac{q'}{C'} \\ \text{et } i = \frac{dq'}{dt} \end{cases}$$

$$\text{d'où } i = -\frac{L}{R} \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2i}{dt^2}$$

$$\text{soit } \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$\text{d'où } 0 = L \frac{d^2i}{dt^2} + r' \frac{di}{dt} + \frac{i}{C'} = 0$$

$$\text{soit } \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{r'}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC'} i = 0.$$

Les deux équations régissant les variations de $i(t)$ deviennent identiques pour $C' = C$ et $\frac{r'}{L} = \frac{1}{RC} \Rightarrow r' = \frac{L}{RC} = \frac{r_c^2}{4R}$.

Le régime sera donc bien pseudo-périodique pour $r' < r_c$, c'est-à-dire pour :

$$R > \frac{r_c}{4}$$



3. La condition (7) est réalisée, et le régime est pseudo-périodique : on a donc pour les valeurs $\pm E_0$ de $e(t)$:

$$u(t) = \pm E_0 \frac{R}{R+r} + e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (8)$$

$$\text{soit encore } u(t) = \pm E_0 \frac{R}{R+r} + \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi).$$

On considère que les oscillations deviennent « imperceptibles » lorsque leur amplitude (à savoir $\sqrt{A^2 + B^2} e^{-\lambda t}$) est devenue négligeable comparée au saut de tension $2E_0 \frac{R}{R+r}$ imposé à $u(t)$ par le générateur.

On prendra par exemple :

$$\sqrt{A^2 + B^2} e^{-\lambda t} \leq 10^{-2} \cdot 2E_0 \frac{R}{R+r}$$

et si t_0 désigne la valeur de t correspondant à l'égalité, la condition cherchée s'exprimera sous la forme $t_0 \leq \frac{T}{2} \dots$

Il faut donc déterminer A et B : on peut le faire en supposant que l'on est bien dans la situation décrite ci-dessus, c'est-à-dire qu'au moment d'une commutation ($t = nT$ par exemple) où $e(t)$ passe de $-E_0$ à $+E_0$, la tension u vaut $-\frac{RE_0}{R+r}$ et le courant i (régime permanent continu) :

$$i = -\frac{E_0}{R+r}.$$

D'où, en prenant une nouvelle origine des temps à cet instant :

$$\begin{aligned} u(0^+) &= -\frac{RE_0}{R+r} \\ \frac{du}{dt}(t=0^+) &= \left(\frac{i}{C} - \frac{u}{RC}\right)_{t=0^+} \\ \frac{du}{dt}(t=0^+) &= -\frac{1}{C} \cdot \frac{E_0}{R+r} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{RE_0}{R+r} = 0. \end{aligned}$$

En reportant dans l'expression (8) de $u(t)$ (signe \oplus pour $t > 0$) :

$$\begin{cases} \frac{RE_0}{R+r} + A = -\frac{RE_0}{R+r} & \left(u(0^+) = -\frac{RE_0}{R+r}\right) \\ -\lambda A + B\omega = 0 & \left(\frac{du}{dt}(0^+) = 0\right) \end{cases}$$

Il vient $A = -2\frac{RE_0}{R+r}$ et $B = \frac{\lambda}{\omega} \cdot A$

d'où l'amplitude des oscillations :

$$\sqrt{A^2 + B^2} = 2\frac{RE_0}{R+r} \cdot \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}$$

et la condition cherchée (avec $t_0 \leq \frac{T}{2}$) :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\lambda T}{2}} &< 10^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}} \\ \lambda \frac{T}{2} &> 2 \ln 10 + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right). \end{aligned}$$

Si on se place dans le cas de l'amortissement faible (λ « pas trop grand », c'est-à-dire $\lambda \ll \omega_0 \sqrt{1 + \frac{r}{R}}$ pour que les oscillations soient visibles sur plusieurs pseudo-périodes), on peut négliger le dernier terme :

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2} \approx \frac{\lambda^2}{\omega_0^2 \left(1 + \frac{r}{R}\right)} \ll 1 \Rightarrow \lambda T \geq 4 \ln(10) \sim 10 \text{ (ordre de grandeur).}$$

Il faut donc, avec $\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'} \right)$ ($\tau = RC$ et $\tau' = \frac{L}{r}$) :

$$T \geq 20 \frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'}$$

Lorsque cette condition est réalisée, les oscillations sont effectivement amorties au bout du temps $\frac{T}{2}$, ce qui justifie les conditions initiales prises pour calculer A et B.

L'expression de $u(t)$ est bien alors :

pour $nT < T \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)T$

$$u(t) = \frac{RE_0}{R+r} \left[1 - 2e^{-\lambda t'} \left(\frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t' + \cos \omega t' \right) \right]$$

où $t' = t - nT$;

pour $\left(n + \frac{1}{2}\right)T < t \leq (n+1)T$, $u(t)$ change de signe et t' est remplacé par $t' - \frac{T}{2}$...

Commentaire

La valeur de l'expression $\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'}$ est toujours inférieure à la plus petite des deux valeurs τ et τ' ...

On peut donc prendre (condition suffisante...)

$$T \geq 20 \cdot \text{Min}(\tau, \tau')$$

215

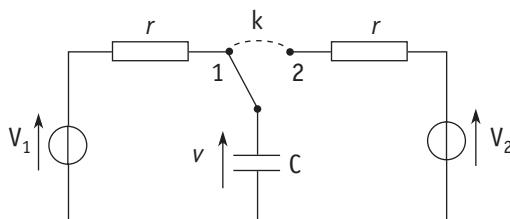
Simulation de résistance

Dans le circuit ci-dessous, le commutateur k bascule périodiquement d'une position à l'autre, suivant la loi :

$$nT < t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)T \quad k \text{ en position 1}$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)T < t \leq (n+1)T \quad k \text{ en position 2}$$

(n entier relatif, et $V_2 < V_1$).



On suppose le phénomène établi depuis longtemps : **toutes les grandeurs électriques du circuit sont périodiques de période T** et on prend comme instant initial $t = 0$, la commutation correspondant à $n = 0$.

1. On pose $v(0) = V_0$: déterminer la loi donnant $v(t)$ pour $0 < t \leq \frac{T}{2}$, puis pour $\frac{T}{2} < t \leq T$. On notera $v\left(\frac{T}{2}\right) = V'_0$ et $a = \frac{T}{2rC}$.

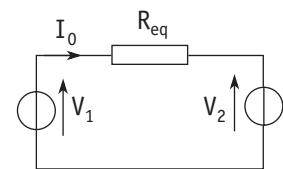
2. Exprimer V_0 et V'_0 en fonction de V_1 , V_2 et a .

En déduire l'expression de la quantité d'électricité qui transite du générateur « V_1 » au générateur « V_2 » pendant une période T , et calculer l'intensité moyenne I_0 correspondant à ce transfert de charges.

3. Quelle serait la résistance R_{eq} qui serait traversée par le même courant moyen ?

Donner son expression en fonction de r et a . Comment varie R_{eq} lorsque T (ou a) est modifié ?

4. Interpréter physiquement les valeurs limites de R_{eq} .



Solution

1. Le commutateur k étant en position 1, le circuit se réduit à un circuit rC :

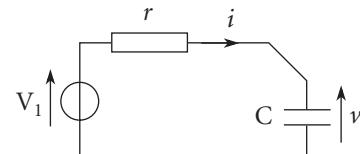
$$V_1 = ri + v$$

avec

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

soit :

$$rC \frac{dv}{dt} + v = V_1$$



équation différentielle du 1^{er} ordre dont la solution générale est de la forme :

$$v(t) = V_1 + Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = rC.$$

Tenant compte de la condition initiale

$$v(0) = V_0 = V_1 + A$$

il vient :

$$A = V_0 - V_1$$

et :

$$v(t) = V_1 + (V_0 - V_1)e^{-t/\tau} \quad \text{pour} \quad 0 < t \leq \frac{T}{2}.$$

À $t = \frac{T}{2}$, le commutateur bascule en position 2, et le circuit devient :

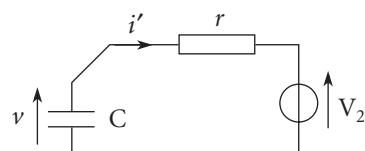
$$v - ri' = V_2$$

avec

$$i' = -C \frac{dv}{dt}$$

soit encore :

$$rC \frac{dv}{dt} + v = V_2$$



ce qui était prévisible, étant donnée la symétrie de l'ensemble du circuit...

La solution, pour $\frac{T}{2} < t \leq T$, est donc de la forme :

$$v(t) = V_2 + Be^{-\frac{(t-T/2)}{\tau}}.$$

Il reste à exprimer la continuité de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur à la date

$$t = \frac{T}{2} :$$

$$V'_0 = v\left(\frac{T}{2}\right) = V_1 + (V_0 - V_1)e^{-\frac{T}{2\tau}}$$

$$\text{et : } V'_0 = v\left(\frac{T}{2}\right) = V_2 + B$$

$$\text{d'où : } B = V'_0 - V_2$$

$$\text{avec } \frac{T}{2\tau} = \frac{T}{2rC} = a, \text{ il vient } e^{+T/2\tau} = e^a$$

$$\text{et finalement pour } \frac{T}{2} < t \leq T : \boxed{v(t) = V_2 + (V'_0 - V_2)e^a \cdot e^{-t/\tau}}$$

$$\text{et } V'_0 = V_1 + (V_0 - V_1)e^{-a} \quad (1)$$

2. Le régime périodique étant supposé atteint, on doit de plus avoir :

$$v(t+T) = v(t)$$

$$\text{soit : } v(T) = V_0$$

$$\text{or : } v(T) = V_2 + (V'_0 - V_2)e^a \cdot e^{-T/\tau}$$

$$\text{avec } e^{-T/\tau} = e^{-2a} : \quad V_2 + (V'_0 - V_2)e^{-a} = V_0 \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) déterminent V_0 et V'_0 :

$$\begin{cases} V'_0 - V_0 e^{-a} = V_1(1 - e^{-a}) \\ -V'_0 e^{-a} + V_0 = V_2(1 - e^{-a}) \end{cases}$$

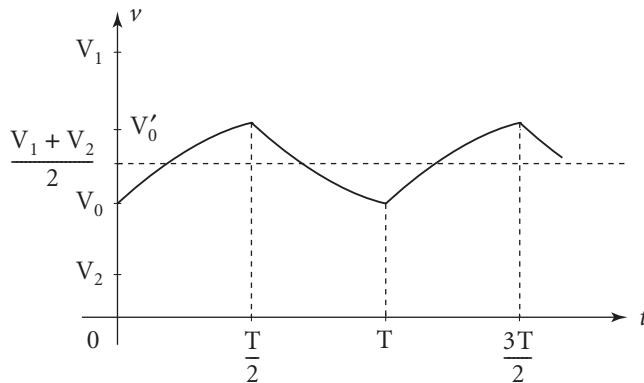
$$\text{et, par addition : } V'_0 + V_0 = V_1 + V_2$$

d'où les solutions (en éliminant V'_0 ou V_0)

$$\boxed{V_0 = \frac{V_2 + V_1 e^{-a}}{1 + e^{-a}}} \quad \boxed{V'_0 = \frac{V_1 + V_2 e^{-a}}{1 + e^{-a}}}$$

On en déduit l'allure de la courbe donnant $v(t)$ (V_0 et V'_0 sont des barycentres des tensions V_1 et V_2 , avec des coefficients positifs 1 et e^{-a} , et sont symétriques par rapport

$$\text{à } \frac{V_1 + V_2}{2} \dots).$$



Pendant la charge de C de V_0 à V'_0 , le générateur « V_1 » a fourni au condensateur C la quantité d'électricité :

$$q = CV'_0 - CV_0 = C(V'_0 - V_0)$$

$$q = C(V_1 - V_2) \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}}$$

$$q = C(V_1 - V_2) \cdot \tanh\left(\frac{a}{2}\right).$$

Puis, entre $\frac{T}{2}$ et T , cette même quantité d'électricité est transmise au générateur « V_2 » (décharge de C). Au total, une charge q est transmise d'un générateur à l'autre à chaque période T , ce qui correspond à une intensité moyenne :

$$I_0 = \frac{q}{T} = \frac{C}{T}(V_1 - V_2) \tanh\left(\frac{a}{2}\right)$$

ou encore :

$$I_0 = \frac{(V_1 - V_2)}{2ra} \tanh\left(\frac{a}{2}\right)$$

3. Par définition de R_{eq} :

$$R_{eq} = \frac{(V_1 - V_2)}{I_0}$$

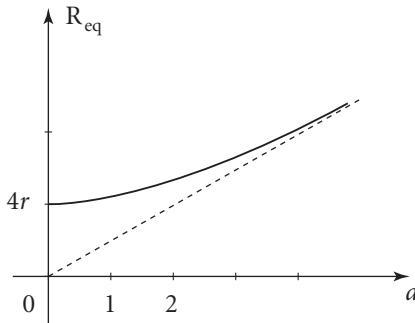
soit :

$$R_{eq} = \frac{2ra}{\tanh\left(\frac{a}{2}\right)} = 2ra \coth\left(\frac{a}{2}\right)$$

Si la commutation est très rapide : $T \ll rC$, soit $a \ll 1$, $\tanh\left(\frac{a}{2}\right) \approx \frac{a}{2}$ et $R_{eq} \rightarrow 4r$.

Si au contraire $T \gg rC$, soit $a \gg 1$, $\tanh\left(\frac{a}{2}\right) \rightarrow 1$ et $R_{eq} \approx 2ra$.

D'où le graphe :



4. On peut interpréter physiquement les valeurs limites de R_{eq} :

- Lorsque $T \gg rC$, le condensateur C a le temps de se charger (sous la tension V_1) et de se décharger (dans le générateur « V_2 ») presque complètement : la charge transférée à chaque période ne dépend plus de T et $I_0 = \frac{q}{T}$ est inversement proportionnel à T ; on a donc R_{eq} proportionnelle à T .
- Lorsque $T \ll rC$, la tension $v(t)$ varie très peu et les courants sont pratiquement constants :

$$i \# \frac{V_1 - v}{r} \# i' = \frac{v - V_2}{r}$$

et la conservation de la charge impose :

$$q = i \cdot \frac{T}{2} = i' \cdot \frac{T}{2} = I_0 \cdot T$$

et

$$I_0 = \frac{i}{2} = \frac{V_1 - v}{2r} = \frac{v - V_2}{2r} = \frac{(V_1 - v) + (v - V_2)}{2r + 2r}$$

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2}{4r}, \text{ soit } R_{eq} = 4r.$$

Ce dernier résultat est cohérent avec la conservation de l'énergie : évaluons l'effet Joule dans les résistances r :

$$W_J = ri^2 \cdot \frac{T}{2} + ri'^2 \cdot \frac{T}{2} = ri^2 \cdot T$$

avec $i = 2I_0$; $W_J = 4rI_0^2 \cdot T$

ce qui est en accord avec $R_{eq} = 4r...$

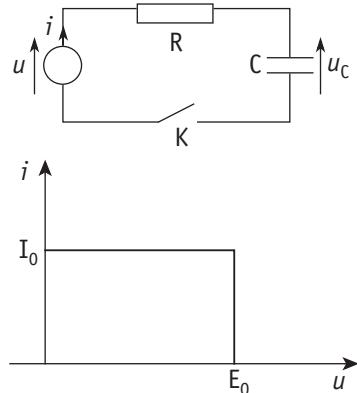
216 Attaque par un générateur à caractéristique rectangulaire

1. Un circuit RC série est attaqué par un générateur à caractéristique rectangulaire :

$$\begin{cases} i = I_0 & \text{pour } u \leq E_0 \\ u = E_0 & \text{pour } i \leq I_0 \end{cases}$$

(c'est un générateur parfait de tension pour les intensités inférieures à I_0 , et un générateur parfait de courant – de valeur I_0 – lorsque l'intensité dans le circuit atteint cette valeur I_0 : la tension aux bornes du générateur s'établit alors à une valeur inférieure à E_0 ...).

Le condensateur est déchargé pour $t < 0$. L'interrupteur est fermé à $t = 0$.



Déterminer les graphes des fonctions :

$t \rightarrow i(t)$, $t \rightarrow u_C(t)$, $t \rightarrow u(t)$ pour t positif.

On pourra poser $R_0 = \frac{E_0}{I_0}$ et on envisagera plusieurs cas selon la valeur de R comparée à celle de R_0 .

2. On remplace la capacité C par une inductance pure L , u_C devenant u_L . Reprendre la question précédente.

3. Application numérique :

$E_0 = 40 \text{ V}$; $I_0 = 10 \text{ mA}$; $L = 50 \text{ mH}$; $C = 2 \mu\text{F}$; $R = 2 \text{ k}\Omega$.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Continuité de la charge d'un condensateur et du courant dans une bobine.
- Relation courant-tension pour une capacité et pour une inductance.

Outil mathématique

- Résolution des équations différentielles linéaires du premier degré.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le courant initial de charge d'un condensateur à travers une résistance R (et sous l'effet d'un générateur de tension de f.e.m. E_0) est $I(0) = \frac{E_0}{R}$. On peut donc s'attendre à ce que l'évolution du système dépende de la valeur de $I(0)$ comparée à $I_0 = \frac{E_0}{R_0}$,

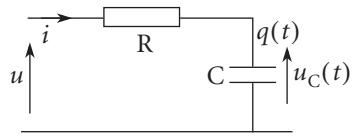
c'est-à-dire de celle de R comparée à R_0 . Deux cas seront alors à envisager selon que $I(0)$ est inférieur ou égal à I_0 (soit $R \geq R_0$), ou que $I(0)$ est supérieur à I_0 ($R < R_0$).

- 2.** On a remplacé la capacité par une inductance. De ce fait, le courant $i(t)$ reste nul à l'instant $t = 0^+$, la tension $u(t)$ se fixant à E_0 . Le courant $i(t)$ va donc s'établir dans le circuit en « tendant » asymptotiquement vers $I_\infty = \frac{E_0}{R}$. Le même problème se pose alors selon que I_∞ est inférieur ou égal à I_0 ($R \geq R_0$), ou que $I_\infty > I_0$ ($R < R_0$).

3. Solution

- 1.** Les équations générales du circuit s'écrivent :

$$\begin{cases} u = Ri + u_C \\ i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \quad (\text{puisque } q = Cu) \end{cases}$$



Les conditions initiales imposent $u_C(0^+) = 0$ et par la même $u(0^+) = Ri(0^+)$. Si le courant « demandé » par le circuit RC est inférieur à I_0 , le générateur fonctionne en générateur parfait de tension, et $u(0^+) = E_0$. Alors :

$$i(0^+) = \frac{E_0}{R} < I_0$$

correspond à :

$$\frac{E_0}{R} < \frac{E_0}{R_0}, \quad \text{soit : } R > R_0.$$

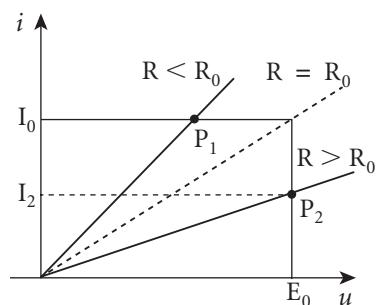
Dans le cas contraire ($R < R_0$), le courant dans le circuit est limité à I_0 , et on a alors :

$$u(0^+) = RI_0, \quad \text{avec } u(0^+) < E_0.$$

On peut représenter ces deux situations graphiquement en traçant la droite $i = \frac{u}{R}$ sur le graphe de la caractéristique du générateur :

l'intersection de cette droite avec la courbe représentative du fonctionnement du générateur donne le « point de fonctionnement » du circuit (couple de valeur (u, i) acceptable par les deux branches du circuit) :

- Pour $R < R_0$, il s'agit du point P_1 : dans un premier temps, le condensateur se chargera donc à courant constant...
- Pour $R \geq R_0$, il s'agit du point P_2 : le condensateur se charge à tension d'attaque constante ($u = E_0$). En effet, le courant de charge est maximal à $t = 0^+$ et vaut ici I_2 ; on aura donc $i(t) < I_2$ et la tension u restera bloquée à E_0 .



D'où l'étude qui suit :

■ 1^{er} cas : $R \geq R_0$

D'après ce qui précède, on a pour tout $t > 0$ $u = E_0 = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$.

Notons $\tau = RC$ la constante de temps qui apparaît dans cette équation différentielle :

$$u_C + \tau \frac{du_C}{dt} = E_0 \quad (1) \Rightarrow u_C(t) = E_0 + \lambda e^{-t/\tau}.$$

La continuité de la charge du condensateur implique celle de u_C soit :

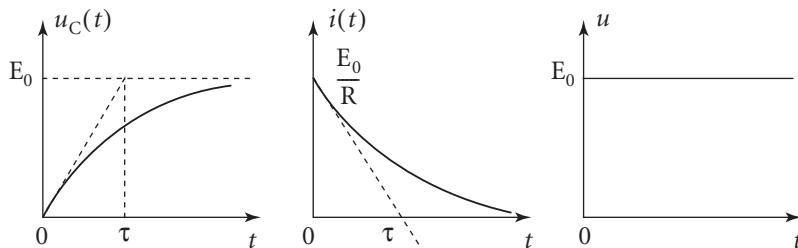
$$q(0^-) = q(0^+) = 0 \Rightarrow u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0 \quad \text{et donc} \quad \lambda = -E_0.$$

Dès lors : $u_C(t) = E_0(1 - e^{-t/\tau})$

et $i(t) = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-t/\tau}$

On a bien : $i(t) \leq \frac{E_0}{R}$ soit $i(t) \leq I_0$ comme il se doit.

D'où les graphes :



■ 2^e cas : $R < R_0$

Dans une première phase, la charge s'effectue à courant constant I_0 .

La tension u_C va augmenter, et il en sera de même de u ($u = RI_0 + u_C$) qui va finir par atteindre la valeur E_0 . Il s'ensuit une deuxième phase de charge à $u = \text{constante}$, le courant $i(t)$ diminuant et tendant vers zéro en fin de charge.

$$- 1^{\text{re}} \text{ phase} : i(t) = I_0 = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow u_C = \frac{I_0}{C} t \quad (u_C(0^+) = 0).$$

D'autre part, $u = RI_0 + u_C$, d'où $u(t) = RI_0 + \frac{I_0}{C} t$

et $u(t) = RI_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right); \quad t < t_0$

$u(t)$ atteint la valeur E_0 à l'instant t_0 défini par :

$$u(t_0) = E_0$$

$$\Rightarrow E_0 = RI_0 \left(1 + \frac{t_0}{\tau}\right) \Rightarrow t_0 = \tau \left(\frac{R_0}{R} - 1\right).$$

– 2^e phase : pour $t > t_0$, la tension u se bloque à E_0 et l'évolution de $u_C(t)$ est définie par l'équation (1) d'où :

$$u_C(t > t_0) = E_0 + \lambda e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}.$$

Traduisons alors la continuité de u_C en $t = t_0$: $u_C(t_0^+) = u_C(t_0^-)$.

$$\text{Or } u_C(t_0^-) = \frac{I_0}{C} t_0 = \frac{I_0}{C} R C \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right) = I_0 (R_0 - R) = E_0 - RI_0 = u_C(t_0^+).$$

Finalement :

$$\begin{aligned} E_0 + \lambda &= E_0 - RI_0 \\ \Rightarrow \lambda &= -RI_0 \end{aligned}$$

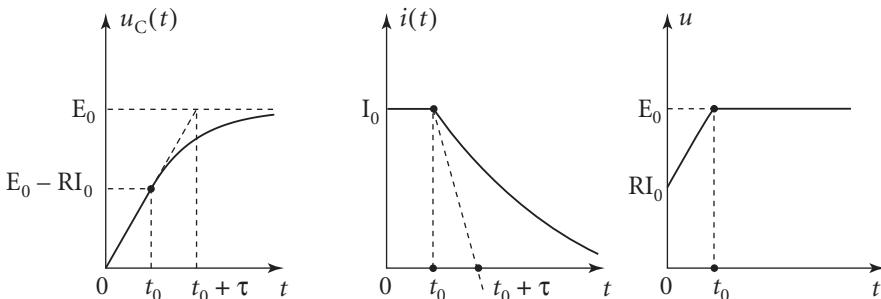
d'où :

$$u_C(t > t_0) = E_0 - RI_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

$$\text{D'autre part : } i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{RCI_0}{\tau} e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

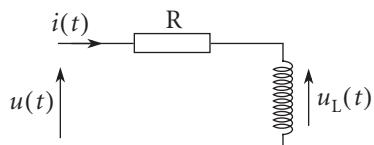
$$\Rightarrow i(t > t_0) = I_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

D'où les graphes :



2. En remplaçant le condensateur par une bobine, les équations du circuit deviennent :

$$\begin{cases} u = Ri + L \frac{di}{dt} \\ u_L = L \frac{di}{dt} \end{cases}$$



Les conditions initiales imposent ici $i(0^+) = 0$ (continuité du flux et donc de l'intensité dans la bobine). Dans un premier temps, la tension de sortie du générateur sera fixée à E_0 (point P₀ de la caractéristique : $i = 0$ et $u = E_0$).

On a donc :

$$L \frac{di}{dt}(0^+) = u(0^+) - Ri(0^+) = E_0$$

et le courant $i(t)$ va croître à partir de 0. Tant que $i(t) < I_0$, la tension $u(t)$ conserve la valeur E_0 , l'équation fixant l'évolution de $i(t)$ s'écrivant :

$$E_0 = Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{E_0}{R} = i(t) + \tau \frac{di}{dt} \text{ où } \tau = \frac{L}{R}$$

représente la constante de temps du circuit L-R. L'intégration de cette équation donne :

$$i(t) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \text{ tant que } i(t) \leq I_0.$$

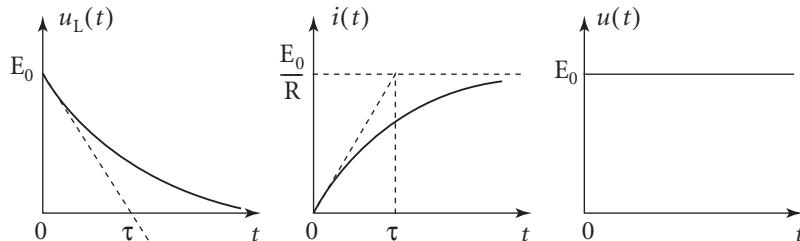
Donc deux cas sont à envisager :

• 1^{er} cas : $\frac{E_0}{R} \leq I_0$ soit $R \geq R_0$ ($R_0 = \frac{E_0}{I_0}$)

On a bien, pour tout t , $i(t) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$

Dès lors, $u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow u_L = \frac{LE_0}{R\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow u_L(t) = E_0 e^{-t/\tau}$

D'où les graphes :



• 2^e cas : $R < R_0$

La première phase décrite précédemment s'arrête à l'instant t_0 tel que $i(t_0) = I_0$, d'où :

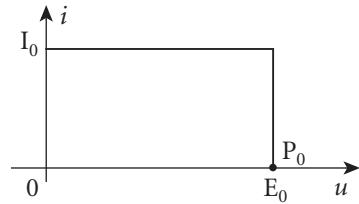
$$\frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right) = I_0 = \frac{E_0}{R_0}$$

soit : $e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 1 - \frac{R}{R_0} \Rightarrow t_0 = -\tau \ln \left(1 - \frac{R}{R_0} \right).$

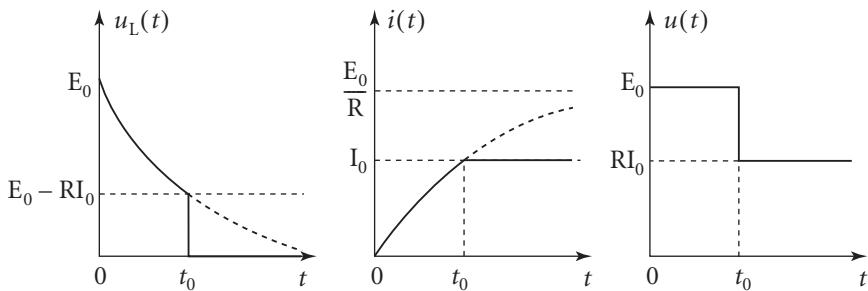
À cet instant, on a $u(t) = E_0$ et $i(t_0) = I_0$, d'où :

$$u_L(t_0^-) = u(t_0^-) - Ri(t_0^-) = E_0 - RI_0 > 0.$$

Pour $t > t_0$, le courant $i(t)$ se fixe à I_0 et la tension u_L tombe à zéro et s'y maintient, u passant à la valeur : $u = RI_0 + u_L = RI_0$.



D'où les graphes :



3. Application numérique :

Il nous faut donc comparer R_0 et R .

Or $R_0 = \frac{E_0}{I_0} = \frac{40}{10 \cdot 10^{-3}} = 4 \text{ k}\Omega$ et $R = 2 \text{ k}\Omega$, ce qui implique : $R < R_0$ et l'évolution du système correspond au 2^e cas aussi bien avec C qu'avec L.

Les autres caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous :

	τ	t_0
C	4 ms	4 ms
L	$25 \mu\text{s}$	$17 \mu\text{s}$

$$\tau_C = RC$$

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

chapitre

3

Optique géométrique

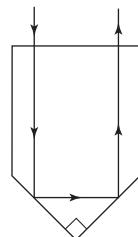
301 Prisme à réflexion totale

Un rayon lumineux arrive sous incidence normale sur un prisme de verre d'indice n , et ressort parallèlement au rayon incident après deux réflexions totales sous une incidence de 45° à l'intérieur du verre (cf. figure), lorsque le prisme est dans l'air.

Par contre, la réflexion totale n'a pas lieu si la partie inférieure du prisme est plongée dans l'eau.

Dans quelles limites se situe la valeur de l'indice n ?

L'indice de l'eau vaut $\frac{4}{3}$, et l'indice de l'air sera pris égal à 1.



1. Ce qu'il faut savoir

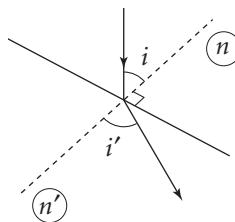
- Loi de la réfraction (Descartes) : cas de la réflexion totale.

2. Ce qu'il faut comprendre

Le rayon émergent peut ne pas exister (réflexion totale) lorsque l'indice du second milieu est plus petit que celui du premier milieu. La condition d'existence de ce rayon dépend de l'angle d'incidence et du rapport des indices des deux milieux.

3. Solution

Considérons la réfraction d'un rayon lumineux entre deux milieux d'indices respectifs n et n' . D'après la loi de Descartes, $n \sin i = n' \sin i'$



soit $\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i$ avec, dans le cas présent,

$$i = 45^\circ \text{ et } \sin i = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ d'où : } \sin i' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n}{n'}, \quad (1)$$

La réflexion totale correspond au cas où il n'existe pas de valeur de i' vérifiant cette relation, donc pour : $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n}{n'} > 1$.

Dans le cas contraire, il existe un rayon émergent dans la direction i' définie par la relation (1).

D'où les deux conditions :

– dans l'air, $n' = 1$, et la réflexion totale exige $n > \frac{2n'}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;

– si le prisme est plongé dans l'eau ($n' = \frac{4}{3}$), il existe un rayon émergent, ce qui implique : $n \leq \frac{2n'}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

ce qui donne, numériquement : $1,414 < n \leq 1,886$

Un tel dispositif peut servir – par exemple – de détecteur de niveau d'eau : tant que le prisme baigne dans l'eau, le faisceau émergent est très atténué, alors qu'il a l'intensité du faisceau incident lorsque le prisme est dans l'air.



302 Doubleur de focale

À l'aide d'un objectif – assimilable à une lentille mince convergente L de distance focale f' – on désire former l'image d'un objet réel AB sur une plaque photographique située à une distance D de l'objet.

1. Entre quelles valeurs peut varier D pour qu'il en soit ainsi ? Préciser la distance d séparant la lentille de la plaque photographique (on se limitera à $d \leq \frac{D}{2}$).

2. La lentille convergente L restant fixe par rapport à l'objet AB, on recule la plaque photographique, et on intercale entre celle-ci et L une lentille divergente L_1 de « distance » focale $f'_1 = -6$ cm.

Comment doit-on placer L_1 pour que le grandissement linéaire du système soit multiplié par deux ? De combien a-t-il fallu déplacer la plaque photographique ?

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Relation(s) de conjugaison pour une lentille mince.
- Objets et images réels ou virtuels.

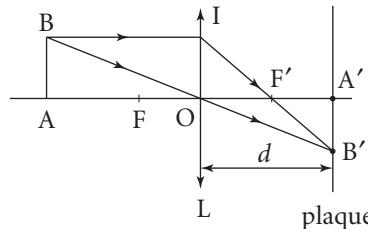
■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le principe de l'appareil photographique exige que l'objet et l'image soient réels, ce qui ne laisse que peu de possibilités...

2. La lentille divergente L_1 doit donner une nouvelle image, agrandie et toujours réelle : c'est cette condition qui va déterminer la position de L_1 par rapport à l'image de l'objet donnée par L.

3. Solution

1. L'image $A'B'$ d'un objet réel AB donnée par la lentille L est déterminée par la position du point B' , intersection du rayon BO (qui n'est pas dévié dans L) et du rayon émergent IF' correspondant à un rayon incident parallèle à l'axe de L .



Dans le cas de figure, B' est réel ; il est virtuel lorsque BO coupe le prolongement (à gauche de L) du rayon IF' . Il faut donc que A soit à gauche de F ($\overline{FA} < 0$) ce qui implique (relation de conjugaison de Newton : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f^2 < 0$) que A' est à droite de F' ...

En utilisant la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}.$$

Avec $p' = \overline{OA'} = d$, $p = \overline{OA}$ et $D = \overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = -p + d$,

il vient $\frac{1}{d} + \frac{1}{D-d} = \frac{1}{f'}$

$$\frac{1}{D-d} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{d} = \frac{d-f'}{df'}$$

et $D = d + \frac{df'}{d-f'} = \frac{d^2}{d-f'}$.

Traçons le graphe de $D(d)$ pour $d \geq f'$:

- $d \rightarrow \infty : \frac{D}{d} \rightarrow 1$

et $D - d \rightarrow f'$;

- la courbe a pour asymptote la droite :

$$D = d + f'$$

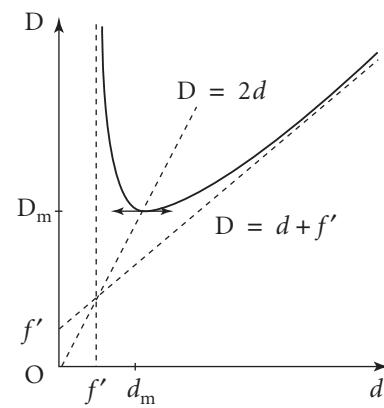
- $d \rightarrow f'$ par valeurs supérieures :

$$D \rightarrow +\infty$$

- la courbe admet un minimum D_m pour

$$\left. \frac{\partial D}{\partial d} \right|_{d=d_m} = 0 \text{ ce qui conduit à } d_m = 2f'$$

et $D_m = \frac{d_m^2}{d_m - f'} = 4f'$.



Les solutions cherchées (avec $d \leq \frac{D}{2}$) vérifient donc $f' \leq d \leq 2f'$

et

$$+\infty > D \geq 4f'.$$

Remarque : pour D fixé ($D > 4f'$), les valeurs de d supérieures à $\frac{D}{2}$ correspondent à échanger les rôles de l'objet et de l'image (D et $D - d$ jouent des rôles symétriques dans la relation de Descartes...). Ces valeurs de d correspondent aussi au cas où l'image est plus grande que l'objet (cas de la « macrophotographie »...).

2. La lentille divergente L_1 doit transformer l'image précédente $A'B'$ en une nouvelle image A_1B_1 sur la plaque photographique, telle que :

$$|\gamma_1| = \left| \frac{A_1B_1}{A'B'} \right| = 2 \quad \text{et} \quad A_1B_1 \text{ réel}$$

soit $\overline{O_1A_1} = p'_1 > 0$ (en notant O_1 le centre de la lentille L_1).

En utilisant la relation de Descartes, avec

$$p_1 = \overline{O_1A'} :$$

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f'_1} = -\frac{1}{|f'_1|}$$

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p'_1} + \frac{1}{|f'_1|} > 0 \text{ puisque } p'_1 > 0,$$

$p_1 = \overline{O_1A'} > 0$ montre que $A'B'$ joue le

rôle d'objet virtuel pour L_1 , ce qui est cohérent avec l'énoncé : on a placé L_1 entre L et la position initiale de la plaque photographique...

Le grandissement γ_1 est donc positif, et :

$$\gamma_1 = +2 = \frac{p'_1}{p_1} \Rightarrow p'_1 = 2p_1$$

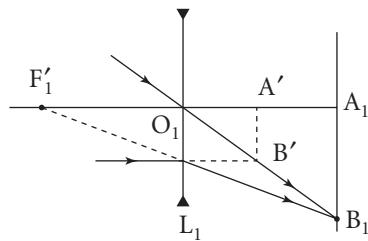
et (relation de Descartes) :

$$\frac{1}{2p_1} - \frac{1}{p_1} = -\frac{1}{|f'_1|} \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}|f'_1| \text{ et } p'_1 = |f'_1|.$$

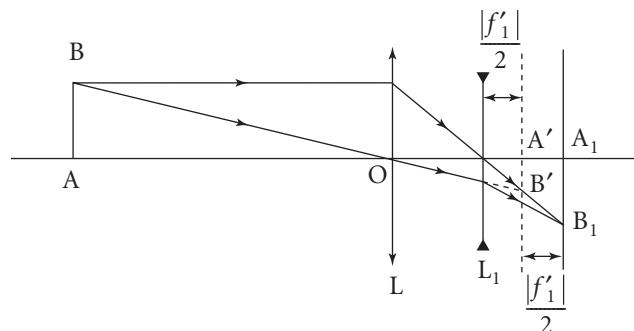
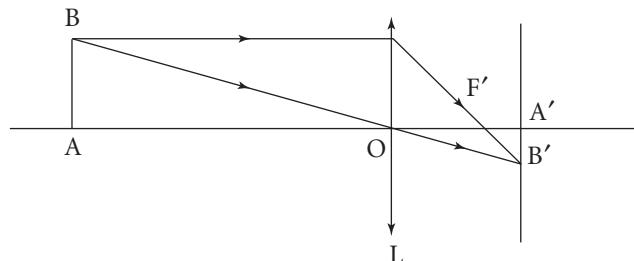
La plaque photographique doit se trouver dans le plan focal objet de la lentille divergente L_1 , celle-ci étant placée à une distance $\frac{1}{2}|f'_1| = 3 \text{ cm}$ en avant de la position initiale de la plaque photographique.

Il faut maintenant reculer la plaque photographique d'une distance :

$$p'_1 - p_1 = \frac{1}{2}|f'_1| = 3 \text{ cm.}$$



On peut facilement construire l'image de l'objet AB dans les deux cas envisagés :



Commentaires

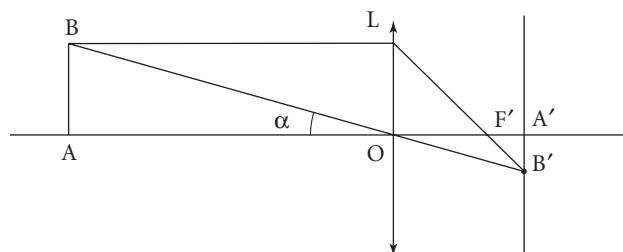
Pour la seconde question, on peut remarquer que l'introduction de la lentille L_1 et le déplacement de la plaque photographique sont indépendants de :

- la « mise au point », liée à la distance de l'objet AB à la lentille L,
- la distance focale f' de cette lentille.

Un tel dispositif, adaptable à un appareil photographique, est appelé « doubleur de focale » : l'image est agrandie d'un facteur deux, ce qui correspond (pour un objet éloigné, pratiquement à l'infini) à l'image que l'on obtiendrait avec une lentille unique de focale $2f'$:

pour A très éloigné $\overline{OA'} \rightarrow \overline{OF'} = f'$

et, pour α donné : $\overline{A'B'} = \alpha \cdot \overline{OA'} \approx \alpha \cdot \overline{OF'} = \alpha f'$ (α est petit...).



La dimension de l'image est pratiquement proportionnelle à f' ...

Il est également possible de généraliser ce dispositif (grandissement linéaire multiplié par un facteur N donné) : il suffit de reprendre les calculs du 2. ...

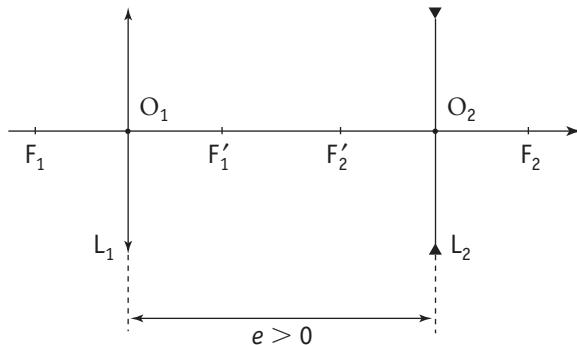
Mais la qualité de l'image obtenue diminue rapidement lorsque N augmente, car ce dispositif revient à agrandir la partie centrale de l'image donnée par l'objectif seul.

303

Association de deux lentilles

Soit un système centré constitué de deux lentilles :

- une lentille L_1 convergente de centre O_1 et de distance focale $f'_1 = a = \overline{O_1 F'_1}$;
 - une lentille L_2 divergente de centre O_2 et de distance focale $f'_2 = -a = \overline{O_2 F'_2}$.
- On note $e = \overline{O_1 O_2}$.



1. a. Déterminer, en fonction de e et a , les grandeurs $\overline{O_1 F}$ et $\overline{O_2 F'}$, où F et F' sont les foyers objet et image du système.

b. Faire deux constructions géométriques séparées et commentées permettant de définir les points F et F' .

2. a. On considère un objet AB situé dans le plan de front de F_1 ($A = F_1$).

Donner une construction géométrique claire et commentée définissant l'image $A'B'$ de AB .

En déduire, dans ce cas, la valeur du grandissement linéaire γ .

b. Retrouver le résultat précédent (valeur de γ) par le calcul.

c. Montrer que la connaissance des positions des foyers F et F' ainsi que de la propriété démontrée au **2. a.** est suffisante pour construire l'image d'un objet quelconque.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Lentilles minces convergentes ou divergentes : formules de Descartes ou de Newton.
- Grandissement linéaire.
- Constructions géométriques.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Les constructions géométriques utilisent des rayons particuliers :

- rayon parallèle à l'axe ;
- rayon passant par le centre d'une lentille ;
- rayon passant par un foyer.

• Il est également intéressant d'utiliser les propriétés des foyers secondaires d'une lentille, c'est-à-dire des points se trouvant dans le même plan de front des foyers F_i et F'_i .

2. b. Pour le calcul de γ , on prendra un objet AB quelconque (A non confondu avec F_1) puis on fera tendre A vers F_1 .

2. c. On cherchera à déterminer l'image A'B' d'un objet à partir d'une simple construction géométrique utilisant à nouveau des rayons particuliers.

■ 3. Solution

1. a.

■ Point focal objet F du système des deux lentilles :

$$F \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \infty \quad (\text{par définition de } F).$$

Il en résulte que : $A'_1 = F_2$, d'où $F \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_2$.

Utilisons alors la formule de conjugaison de Descartes appliquée à la lentille \mathcal{L}_1 de centre O_1 , de foyer image F'_1 :

$$\frac{1}{O_1 F_2} - \frac{1}{O_1 F} = \frac{1}{O_1 F'_1}$$

$$\text{or} \quad \overline{O_1 F'_1} = a \quad \overline{O_1 F_2} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F_2} = e + a.$$

$$\text{Soit} \quad \frac{1}{e+a} - \frac{1}{\overline{O_1 F}} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1 F}} = \frac{1}{e+a} - \frac{1}{a}.$$

$$\text{D'où} \quad \overline{O_1 F} = \frac{a(e+a)}{a-e-a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{O_1 F} = -\frac{a(e+a)}{e}}$$

Commentaires

Pour $e \rightarrow 0^+$, $\overline{O_1 F} \rightarrow -\infty$ et le foyer F est rejeté à l'infini, ce qui est normal puisqu'alors les deux lentilles confondues étant de focales opposées n'ont plus d'effet sur les rayons lumineux.

■ Point focal image F' du système des deux lentilles :

On a cette fois-ci :

$$\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F' \quad (\text{par définition de } F').$$

$$\text{D'où } A'_1 = F'_1 \quad \text{et} \quad F'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'.$$

Soit avec la formule de Descartes pour la seconde lentille de centre O_2 , de foyer image F'_2 :

$$\frac{1}{O_2 F'} - \frac{1}{O_2 F'_1} = \frac{1}{O_2 F'_2}$$

$$\text{or } \overline{O_2 F'_2} = -a \quad \text{et} \quad \overline{O_2 F'_1} = \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 F'_1} = -e + a.$$

$$\text{D'où } \frac{1}{O_2 F'} - \frac{1}{a - e} = \frac{1}{-a} \Rightarrow \frac{1}{O_2 F'} = \frac{1}{-a} + \frac{1}{a - e}$$

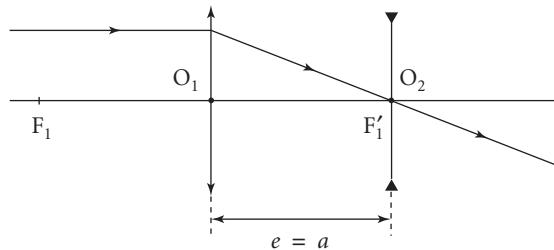
et

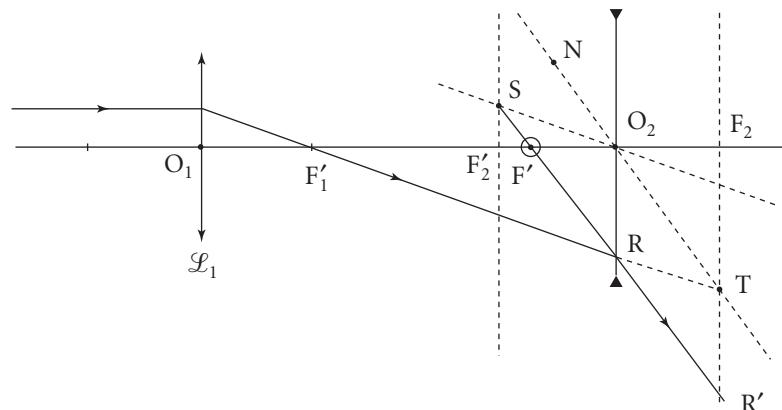
$$\boxed{\overline{O_2 F'} = \frac{a(a - e)}{e}}$$

Commentaires

• On a également $\overline{O_2 F'} \rightarrow +\infty$ quand $e \rightarrow 0$ (même raison que ci-dessus).

• D'autre part, pour $a = e$, il vient $\overline{O_2 F'} = 0$ et le foyer image se confond avec le centre O_2 de la lentille \mathcal{L}_2 :



1. b. Constructions géométriques.■ Foyer image F' :

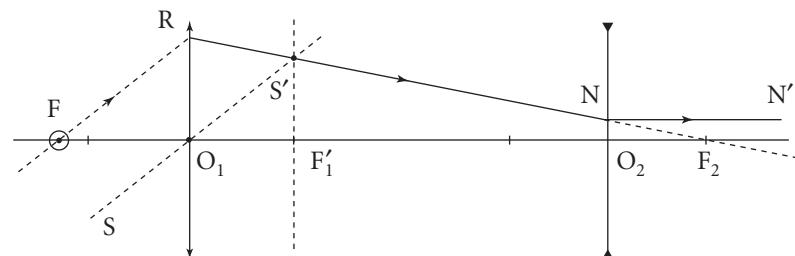
Un rayon parallèle à l'axe converge vers F'_1 après la traversée de \mathcal{L}_1 . Pour dessiner le rayon émergent de \mathcal{L}_2 , on considère le rayon « fictif » SO_2 parallèle à $F'_1 R$, S appartenant au plan focal image de \mathcal{L}_2 . Les rayons parallèles SO_2 et $F'_1 R$ donnent après la traversée de \mathcal{L}_2 des rayons émergents dont les prolongements passent par S (foyer image secondaire).

On aurait également pu considérer le foyer secondaire objet T situé dans le plan de front de F_2 et obtenu en prolongeant la droite $F'_1 R$.

Les rayons NO_2 et $F'_1 R$ qui convergent en T ressortent donc parallèles. Le rayon NO_2 n'étant pas dévié, on a RR' parallèle à $O_2 T$.

Commentaire

Sur la figure, on a $e > a$ et $\overline{O_2 F'} \in (-a, 0)$, conformément à la formule $\overline{O_2 F'} = -a + \frac{a^2}{e}$.

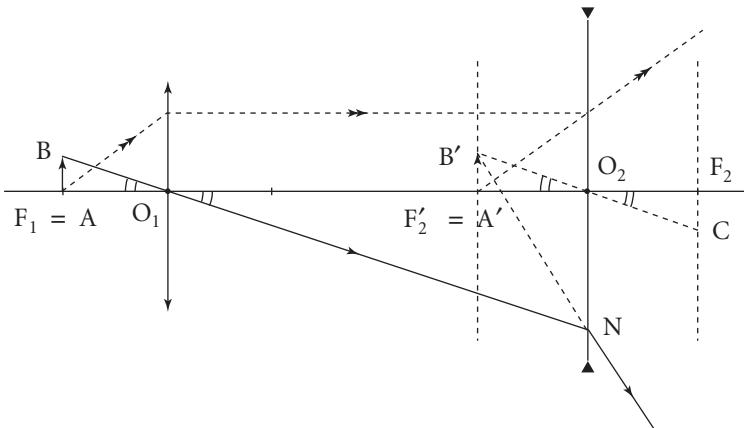
■ Foyer objet F :

La construction peut se faire en sens inverse. Étant donné le rayon émergent NN' , parallèle à l'axe, on construit le rayon incident pour \mathcal{L}_2 , RN , dont le prolongement passe par F_2 . Ce rayon coupe le plan focal image de \mathcal{L}_1 en S' , foyer image secondaire. Il suffit alors de tracer la droite FR , parallèle à $O_1 S'$ (les rayons incidents parallèles SO_1 et FR convergent nécessairement en S' , SO_1 n'étant pas dévié).

2. a. On a ici $A = F_1$ d'où :

$$A = F_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \infty \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'_2 \quad \text{et donc} \quad A = F_1 \xrightarrow{\mathcal{G}} F'_2.$$

■ Construction géométrique :



Le point B appartient au plan focal objet de \mathcal{L}_1 , il a donc une image par rapport à $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ située dans le plan de front de F'_2 (B est dans le plan de front de F_1).

On obtient B' en construisant le « rayon » passant par O_2 et parallèle à BO_1 : les rayons parallèles $B'O_2$ et O_1N sortent de \mathcal{L}_2 en semblant diverger à partie de B' .

Or $B'O_2 // BO_1 \Rightarrow$ les angles $\widehat{AO_1B}$ et $\widehat{A'O_2B'}$ sont égaux.

De plus, $AO_1 = a = A'O_2$.

On a donc :

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow \gamma = +1, \text{ le grandissement linéaire } \gamma \text{ étant donné par } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

■ Conclusion :

$$\boxed{A = F_1 \Rightarrow A' = F'_2}$$

$$\gamma = +1$$

2. b. Retrouvons le résultat relatif au grandissement linéaire γ .

Prenons un objet quelconque AB (A n'est pas en F_1). On a :

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$$

et d'après les formules de Newton :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{F_1O_1}}{\overline{F_1A}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\overline{F'_2A'}}{\overline{F'_2O_2}}$$

(on a privilégié F_1 pour \mathcal{L}_1 et F'_2 pour \mathcal{L}_2).

$$\text{D'où } \gamma = \frac{\overline{F_1 O_1}}{\overline{F_1 A}} \cdot \frac{\overline{F'_2 A'}}{\overline{F'_2 O_2}} = \frac{\overline{F'_2 A'}}{\overline{F_1 A}} \quad \text{car} \quad \overline{F_1 O_1} = \overline{F'_2 O_2} = a$$

or $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'$ avec :

$$\overline{F_1 A} \cdot \overline{F'_1 A'_1} = -a^2$$

et $\overline{F_2 A'_1} \cdot \overline{F'_2 A'} = -a^2$.

Soit encore :

$$\overline{F'_2 A'} \cdot [\overline{F_2 F'_1} + \overline{F'_1 A'_1}] = -a^2$$

$$\overline{F'_2 A'} \cdot \left[\overline{F_2 F'_1} - \frac{a^2}{\overline{F_1 A}} \right] = -a^2$$

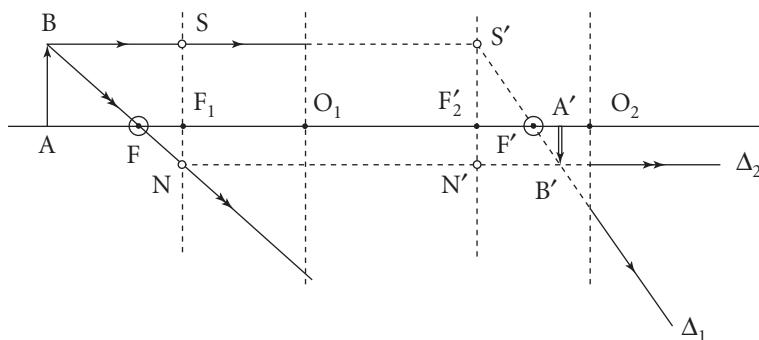
$$\text{et } \overline{F'_2 A'} \cdot \overline{F_2 F'_1} + a^2 = a^2 \frac{\overline{F'_2 A'}}{\overline{F_1 A}}.$$

D'où :

$$\boxed{\gamma(A, A') = 1 + \frac{\overline{F_2 F'_1}}{a^2} \overline{F'_2 A'}}$$

Quand A tend vers F_1 , on a montré que A' se confondait avec F'_2 , d'où $\overline{F'_2 A'} = 0$ et $\gamma = 1$ comme il se doit.

2. c. Image d'un objet quelconque : on va utiliser les propriétés des points F et F' , ainsi que les plans conjugués $[F_1, F'_2]$ pour lesquels le grandissement linéaire vaut $+1$.



Étant donné l'objet AB , on construit :

- le rayon parallèle à l'axe issu de B : le rayon émergent Δ_1 correspondant a un prolongement qui passe par F' , foyer image du système. D'autre part, les points S et S' sont images (ils appartiennent aux plans de front de F_1 et F'_2 , plans conjugués pour $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, avec $\gamma = +1$), le point B' se trouve donc sur la droite Δ_1 passant par S' et F' ;

– le rayon issu de B et passant par F foyer du système : il ressort parallèlement à l'axe, or les points N et N' sont conjugués (comme S et S') ; le rayon émergent Δ_2 est celui qui parallèle à l'axe a un prolongement qui passe par N' ; B' est situé sur Δ_2 .

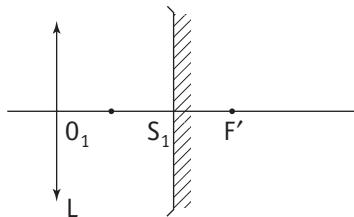
En conclusion, on a $B' = \Delta_1 \cap \Delta_2$.



304 Miroir équivalent

On considère le système optique constitué d'une lentille mince convergente L (centre O_1 , distance focale $f' = 1,5 \text{ m}$) et d'un miroir sphérique concave (sommet S_1 , rayon $R = 1 \text{ m}$, avec $\overline{O_1S_1} = 1 \text{ m}$).

Montrer que ce système est équivalent à un miroir sphérique unique, miroir dont on précisera le centre et le sommet.



1. Ce qu'il faut savoir

- Propriétés des miroirs et des lentilles.
- Formules de conjugaison.

2. Ce qu'il faut comprendre

Les propriétés remarquables du centre et du sommet d'un miroir permettent de déterminer facilement les points de l'axe du système qui possèdent ces propriétés spécifiques.

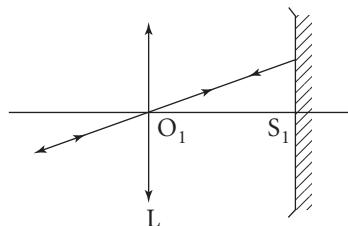
Il reste alors à démontrer que la connaissance de ces points suffit à déterminer complètement la correspondance objet-image.

3. Solution

On sait que tout rayon incident dont le support passe par le centre d'un miroir se réfléchit sur lui-même au niveau du miroir.

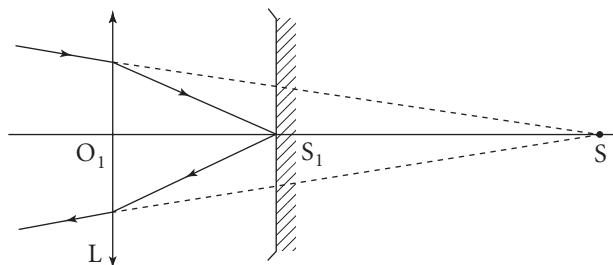
Or, ici, le centre C_1 du miroir (de sommet S_1) est confondu avec le centre O_1 de la lentille L ($R = O_1S_1$) :

tout rayon incident passant par O_1 se réfléchit sur lui-même dans le système {lentille + miroir} ; il a les propriétés du centre C d'un miroir.



D'autre part un rayon incident arrivant au sommet S d'un miroir donne un rayon émergent symétrique par rapport à l'axe.

Dans le cas présent, le rayon incident qui, après la traversée de la lentille L, se réfléchira en S_1 sur le miroir, aura ensuite un trajet symétrique par rapport à l'axe du système, et émergera donc symétriquement au rayon incident.



S_1 est donc l'image à travers L du point S intersection du rayon incident avec l'axe.

Le point S est déterminé par la relation de conjugaison de Descartes.

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

$$\text{avec } p' = \overline{O_1 S_1}, \quad p = \overline{O_1 S}$$

$$\text{soit } \frac{1}{p} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{f'} = \frac{f' - p'}{p' f'}$$

$$\Rightarrow p = \frac{p' f'}{f' - p'}$$

$$\text{d'où : } \overline{O_1 S} = \frac{1 \times 1,5}{1,5 - 1} = 3 \text{ m.}$$

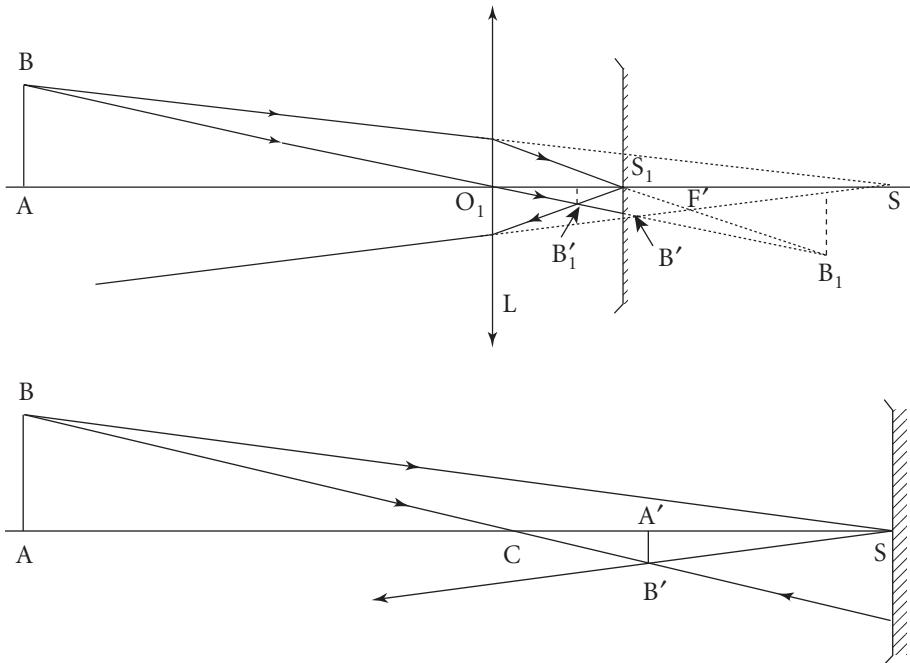
Un rayon incident « visant » S donne un rayon émergent qui semble venir de S : le point S joue le même rôle que le sommet d'un miroir...

La connaissance des propriétés du point $C = O_1$ et du point S suffit pour construire, dans tous les cas, l'image d'un objet AB donné :

B_1 est l'image de B dans L ;

B'_1 est l'image de B_1 dans le miroir de sommet S_1 ;

B' est l'image de B'_1 dans L (traversée en sens inverse).



Le point B' est directement déterminé comme l'intersection du rayon BC (qui revient sur lui-même) et du symétrique du rayon BS : l'image $A'B'$ obtenue est celle donnée par le seul miroir de centre C et de sommet S .

Commentaire

Cette équivalence entre le système {lentille + miroir} et un miroir unique est générale : le miroir équivalent est toujours déterminé par ses deux points remarquables :

- le sommet S , point dont l'image par L est le sommet S_1 du miroir « vrai »,
- le centre C , point dont l'image par L est le centre C_1 du miroir « vrai ».

Ceci suppose que les points C et S restent à la distance finie

305 Viseur

Un viseur est constitué d'un objectif L_1 (assimilé à une lentille mince convergente de distance focale $f'_1 = 10 \text{ cm}$) et d'un oculaire L_2 (assimilé à une lentille mince convergente de distance focale $f'_2 = 2 \text{ cm}$). La distance D entre L_1 et L_2 est réglable.

- 1.** Déterminer D pour que le système soit afocal (réglage pour la vision à l'infini). Représenter la marche d'un pinceau lumineux venant d'un point à l'infini dans une direction faisant un angle α avec l'axe du viseur.

Calculer le grandissement angulaire $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de l'appareil (α' est l'angle que font les rayons émergents avec l'axe).

- 2.** On règle maintenant le viseur pour que l'œil d'un observateur, regardant à travers l'oculaire, voit nettement, sans accomoder, un objet AB situé à 20 cm en avant de la face d'entrée de l'objectif.

- a. Déterminer la nouvelle valeur de D.

- b. L'observateur voit alors l'image de AB sous un angle α' . Calculer, en dioptries, la quantité $P = \frac{\alpha'}{AB}$.

- c. En accommodant, l'œil peut voir des objets situés au-delà d'une distance minimale $d_m = 20$ cm.

L'œil de l'observateur ayant sa pupille dans le plan de l'image de L_1 donnée par L_2 , quelle région de l'espace objet peut être vue nettement par l'observateur regardant à travers le viseur ?

Solution

- 1.** Pour que le système soit afocal, il faut qu'un objet à l'infini sur l'axe ait son image également à l'infini sur l'axe.

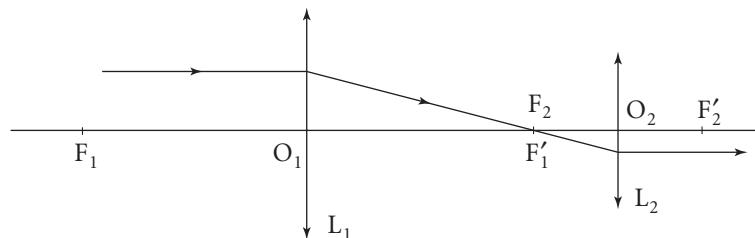
L'image par L_1 du point à l'infini sur l'axe est le foyer image F'_1 de L_1 .

Pour que l'image finale soit à l'infini sur l'axe, il faut que l'objet intermédiaire soit au foyer objet F_2 de L_2 .

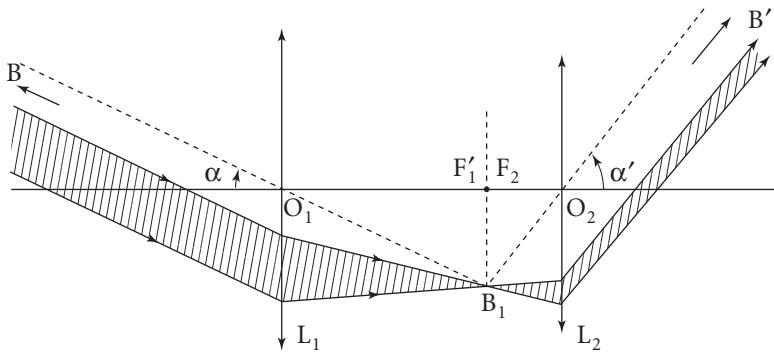
Il faut donc que F'_1 et F_2 soient confondus.

$$\text{D'où : } D = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F_2 O_2} = f'_1 + f'_2.$$

Soit $D = 12$ cm.



Un point source B à l'infini en dehors de l'axe du viseur – dans une direction α – a pour image dans L_1 un point B_1 du plan focal image (plan de front de F'_1 ...), et ce point B_1 a pour image dans L_2 un point B' à l'infini dans une direction α' , d'où la marche d'un pinceau de rayons lumineux :



Le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$ se calcule immédiatement dans les triangles $O_1F'_1B_1$ et $O_2F_2B_1$ ($F_2 = F'_1$) :

$$\alpha = \frac{F'_1 B_1}{O_1 F'_1} \quad \alpha' = \frac{F'_1 B_1}{O_2 F_2} \quad (\text{angles petits : approximation de Gauss}).$$

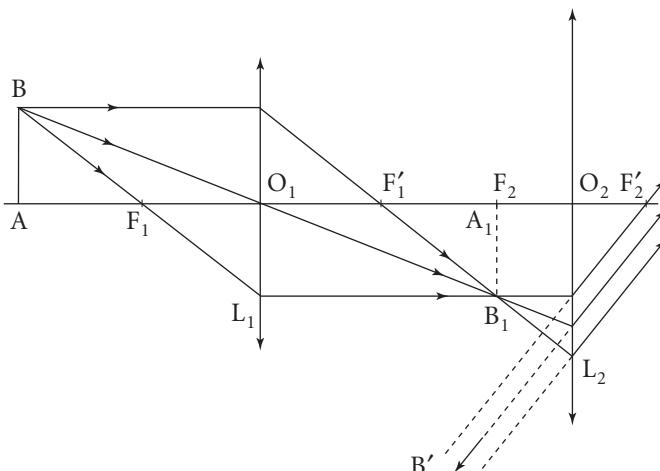
$$\text{et } \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{O_1 F'_1}{O_2 F_2} = \frac{f'_1}{-f'_2} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

soit

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -5.$$

2. a. Pour que l'image finale soit à l'infini, il faut que l'image intermédiaire de l'objet AB soit dans le plan focal objet de la lentille L_2 .

On a donc géométriquement :



Et par le calcul :

$$p = \overline{O_1 A} = -20 \text{ cm}$$

$$p' = \overline{O_1 A_1}$$

la relation de conjugaison de Descartes s'écrivant :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'_1} \quad (f'_1 = \overline{O_1 F'_1} = 10 \text{ cm})$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{p} \quad \text{soit} \quad p' = \frac{pf'_1}{p+f'_1}$$

on a alors :

$$D = \overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 A_1} + \overline{F_2 O_2} = p' + f'_2$$

$$D = \frac{pf'_1}{p+f'_1} + f'_2$$

soit

$$D = 22 \text{ cm.}$$

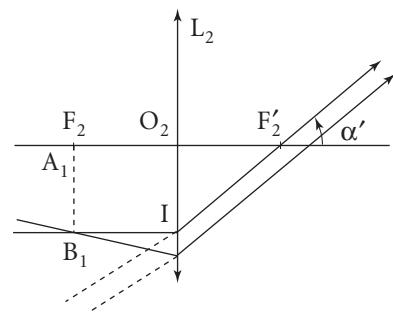
2. b. Reprenons la construction de l'image de $A_1 B_1$ dans L_2 :

l'angle α' étant petit :

$$\alpha' = \frac{\overline{O_2 I}}{\overline{F'_2 O_2}} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{-\overline{f'_2}}$$

Utilisons le grandissement γ_1 dans L_1 :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} = \frac{p'}{p}$$



il vient alors :

$$P = \frac{\alpha'}{\overline{AB}} = \frac{\alpha'}{\overline{A_1 B_1}} \cdot \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \left(-\frac{1}{f'_2} \right) \cdot \frac{p'}{p} = -\frac{1}{f'_2} \cdot \frac{f'_1}{p+f'_1}$$

soit, numériquement :

$$P = -\frac{10^2}{2} \cdot \frac{10}{-20+10} = +50 \text{ dioptries}$$

(dioptries : inverse d'une longueur exprimée en mètres).

2. c. Déterminons d'abord la position de l'œil de l'observateur, c'est-à-dire l'abscisse de l'image de L_1 dans L_2 :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'_2}$$

avec $p = \overline{O_2 O_1} = -D$ et $p' = \overline{O_2 O'}$

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{f'_2} - \frac{1}{D}$$

et $p' = \frac{Df'_2}{D-f'_2} = 2,2 \text{ cm.}$

Pour être vue nettement par l'observateur, l'image $A'B'$ doit vérifier

$$d_m \leq \overline{A'O'} \leq +\infty.$$

Or $\overline{A'O'} = \overline{A'F'_2} + \overline{F'_2O_2} + \overline{O_2O'} = \overline{A'F'_2} - f'_2 + p'$

d'où : $d_m + f'_2 - p' \leq \overline{A'F'_2} \leq +\infty$

et : $-\infty \leq \overline{F'_2A'} \leq -19,8 \text{ cm} = -l$

$(d_m + f'_2 - p' = 19,8 \text{ cm}).$

Utilisons alors les formules de Newton :

$$\overline{F'_1A} \cdot \overline{F'_1A_1} = -f'^2_1 \quad \text{et} \quad \overline{F_2A_1} \cdot \overline{F'_2A'} = -f'^2_2$$

en posant $\overline{F'_1A} = x$:

$$\overline{F'_1A_1} = \left(-\frac{f'^2_1}{x} \right) = \overline{F'_1F_2} + \overline{F_2A_1} = (D - f'_1 - f'_2) - \frac{f'^2_2}{\overline{F'_2A'}}$$

d'où : $\frac{f'^2_2}{\overline{F'_2A'}} = D - f'_1 - f'_2 + \frac{f'^2_1}{x}$

et : $\overline{F'_2A'} = \frac{f'^2_2}{D - f'_1 - f'_2 + \frac{f'^2_1}{x}}.$

La position x de l'objet AB doit donc vérifier la double condition :

$$-\infty \leq \frac{f'^2_2}{D - f'_1 - f'_2 + \frac{f'^2_1}{x}} \leq -l$$

$$0 \geq D - f'_1 - f'_2 + \frac{f'^2_1}{x} \geq -\frac{f'^2_2}{l}$$

$$-(D - f'_1 - f'_2) \geq \frac{f'^2_1}{x} \geq -\left(D - f'_1 - f'_2 + \frac{f'^2_2}{l}\right)$$

et finalement :

$$-\frac{f'^2_1}{D - f'_1 - f'_2} \leq x \leq -\frac{f'^2_2}{D - f'_1 - f'_2 + \frac{f'^2_2}{l}}$$

soit :

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}.$$

Numériquement, on trouve :

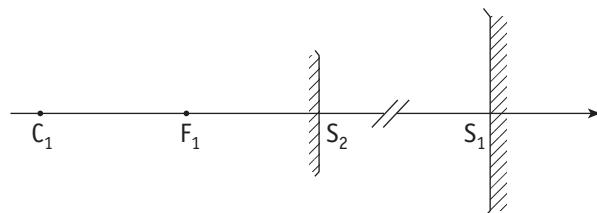
$x_{\min} = -10 \text{ cm}$, ce qui correspond à la position de AB pour laquelle l'œil n'a pas à accommoder,

$x_{\max} = -9,8 \text{ cm}$, l'œil accommodant alors au maximum.

L'observateur ne pourra voir nettement que les objets situés dans une « tranche » d'épaisseur $\Delta x = 2 \text{ mm}$.

306 Association de deux miroirs

On considère un système optique (du type objectif de télescope) constitué d'un miroir principal sphérique concave (de grande taille, centre C_1 , sommet S_1 , foyer F_1 , avec $\overline{C_1S_1} = R_1 = 6 \text{ m}$) et d'un miroir secondaire sphérique convexe (beaucoup plus petit, centre C_2 , sommet S_2 , foyer F_2 , avec $\overline{C_2S_2} = R_2 = 60 \text{ cm}$). Ce second miroir est placé de façon telle que $F_1S_2 = 20 \text{ cm}$.

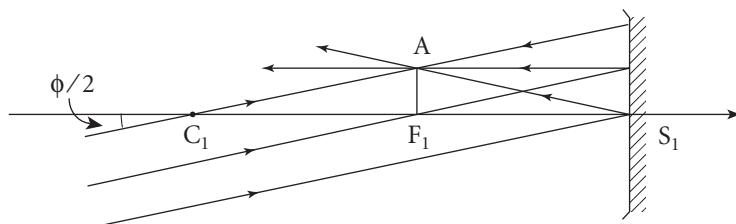


(échelle non respectée pour la position de S_1 ...)

On observe un objet lumineux infiniment éloigné, de diamètre apparent $\phi = 0,2^\circ$: les rayons lumineux sont reçus par le miroir principal, qui les renvoie sur le miroir secondaire... Déterminer les caractéristiques (position, dimensions) de l'image fournie par ce système.

Solution

■ Le miroir principal donne, de l'objet « à l'infini », une image dans son plan focal. Si le télescope est pointé vers le centre de l'objet, l'image est centrée sur le point F_1 , et un point A du bord de l'image est donné par la construction classique :



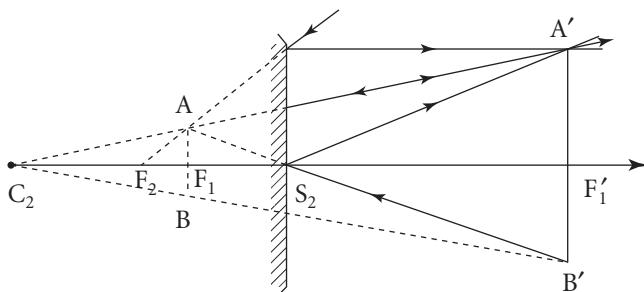
Le faisceau de rayons parallèles issu d'un point du bord de l'objet arrive en faisant l'angle $\frac{\phi}{2}$ avec l'axe du miroir, et se réfléchit en un faisceau convergent au point A.

L'angle ϕ étant petit, $F_1A = \frac{\phi}{2} \cdot F_1S_1 = \frac{\phi}{2} \cdot \frac{R_1}{2}$,

(le foyer F_1 est au milieu du segment C_1S_1).

D'où la dimension de l'image : $AB = \frac{1}{2}R_1\phi$.

- L'image AB sert d'objet virtuel pour le miroir secondaire (d'après la position de celui-ci...), qui en donne une image A'B', que l'on construit facilement : cette image A'B' est centrée en F'_1, conjugué de F_1 dans le miroir secondaire.



En appliquant la relation de conjugaison de Descartes (pour le miroir de sommet S₂) :

$$\overline{S_2 F_1} = p, \quad \overline{S_2 F'_1} = p', \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_2} = \frac{2}{\overline{S_2 C_2}} = -\frac{2}{R_2}$$

$$\text{soit} \quad \frac{1}{p'} = -\frac{1}{p} - \frac{2}{R_2}$$

$$\Rightarrow p' = -\frac{p R_2}{R_2 + 2p} \quad \text{et} \quad p' = 60 \text{ cm}$$

$$\text{avec un grandissement : } \gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{p'}{p} = +3.$$

D'où la dimension de l'image A'B' :

$$A'B' = \gamma_2 \cdot AB = \frac{1}{2} \gamma_2 R_1 \phi = 9 \cdot \phi = 3,14 \text{ cm.}$$

Commentaire

La dimension de l'image obtenue donne un bon ordre de grandeur de la dimension minimale que doit avoir le miroir secondaire pour recevoir tous les rayons qui se sont réfléchis sur le miroir principal : le faisceau de rayons convergeant vers le point A est très étroit, et sera complètement « intercepté » par le miroir secondaire si celui-ci a un diamètre de l'ordre de A'B'.

Le miroir principal peut être beaucoup plus grand : un diamètre de 80 cm correspond à un diamètre angulaire $\frac{0,8}{R_1}$ de l'ordre de $7,7^\circ$, ce qui est compatible avec l'approximation de Gauss...

On vérifie bien que le miroir secondaire n'occulte qu'une faible partie de la surface du miroir principal, ce qui est essentiel pour une bonne luminosité de l'appareil.

307

« Mise au point » pour un objectif photographique

On assimile l'objectif d'un appareil photographique à une lentille mince convergente (L) de centre O et de distance focale image f' .

La distance d entre (L) et l'écran (E) où se trouve la pellicule sensible est variable, ce qui permet d'effectuer la mise au point.

1. On désire photographier des objets dont la distance x à (L) varie de x_m à l'infini. Dans quel domaine doit pouvoir varier d ?

Calculer les valeurs extrêmes d_{\min} et d_{\max} de d pour $x_m = 60$ cm et $f' = 50$ mm.

2. Le faisceau entrant dans la lentille est limité par un diaphragme circulaire (D) dont le diamètre ϕ est variable, afin de laisser entrer dans l'appareil plus ou moins de lumière.

(On supposera le diaphragme accolé à la face avant de la lentille).

On appelle « ouverture relative » de l'objectif le rapport $\frac{\phi}{f'} = \frac{1}{N}$. La suite usuelle des valeurs de N est 2,8 ; 4 ; 5,6 ; 8 ; 11 et 16.

Comment varie la puissance lumineuse reçue par la pellicule quand on passe d'une valeur de N à la suivante ?

Expliquer le lien entre la suite des valeurs de N et celle des durées d'exposition T_e (en seconde), $\frac{1}{15}, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \frac{1}{125}, \frac{1}{250}, \frac{1}{500}$.

3. L'appareil étant mis au point « sur l'infini », un point A situé sur l'axe à distance finie donne, après développement, une tache circulaire sur la pellicule. On admet que l'image reste nette tant que cette tache n'est pas plus grande que la taille moyenne g des grains de l'émulsion de la pellicule.

Déterminer l'expression de la distance hyperfocale L_0 , valeur minimale de x pour laquelle l'image d'un objet A reste nette.

Exprimer le résultat en fonction de g, f' et N.

Calculer L_0 pour $N = 2,8$ et $N = 16$, dans le cas où $g = 0,02$ mm.

La profondeur de champ P_r est la zone de l'espace objet pour laquelle l'image est nette : quel est, qualitativement, le lien entre N et P_r ? entre P_r et f' .

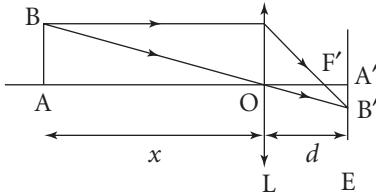
4. Pour améliorer la profondeur de champ, dans les appareils sans réglage de mise au point, on fixe la distance d à une valeur d_1 telle que l'image d'un point à l'infini reste nette.

Donner l'expression de d_1 correspondant à la profondeur de champ maximale, en fonction de g, f' et N (on a $d_1 > f'$).

En déduire l'expression de la nouvelle distance hyperfocale L'_0 : on l'exprimera en fonction de f' et L_0 , et on en donnera la valeur pour $N = 2,8$ et $N = 16$.

Solution

1. Construisons d'abord l'image A'B' d'un objet AB situé à la distance x de (L) : l'image A'B' doit se former dans le plan de la pellicule photographique, à la distance d de (L).



La relation de conjugaison de Descartes $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ donne ici, avec $p = \overline{OA} = -x$,

$p' = \overline{OA'} = d$ et $f' = \overline{OF'}$:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{x} = \frac{x - f'}{xf'}$$

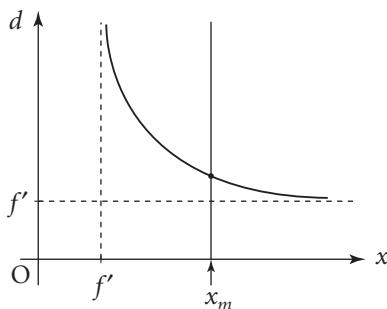
soit
$$d = \frac{xf'}{x - f'} \quad \text{avec } d > 0 \text{ soit } x > f'.$$

d est une fonction décroissante de x , et la condition :

$$x_m \leq x \leq \infty$$

correspond à :

$$d_{\max} \geq d \geq d_{\min} = f'$$



avec :
$$d_{\max} = \frac{x_m f'}{x_m - f'}.$$

Le calcul donne :

$d_{\min} = 50 \text{ mm}$
$d_{\max} = 54,5 \text{ mm}$

2. La puissance lumineuse reçue par la pellicule est proportionnelle à la surface du diaphragme, donc à ϕ^2 , et – pour f' donné – à $\frac{1}{N^2}$.

Calculons la suite des valeurs de N^2 :

N	2,8	4	5,6	8	11	16
N^2	$7,84 \approx 8$	16	$31,4 \approx 32$	64	$121 \approx 128$	256

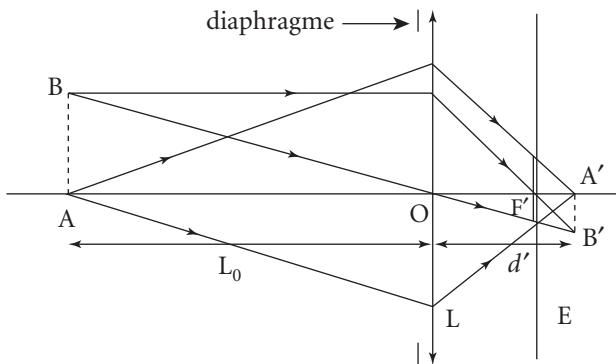
La suite des valeurs de N^2 , aux erreurs d'arrondi près – correspond à des valeurs successives de la suite 2^n : à chaque fois que l'on augmente N d'une valeur à la suivante, la quantité de lumière reçue par la pellicule est divisée par 2.

La suite des valeurs de T_e étant construite également à partir des valeurs de $\frac{1}{2^n}$, un changement de diaphragme et une modification de T_e en sens inverse (d'un même nombre d'unités) laissent inchangée l'énergie reçue par la pellicule, c'est-à-dire son « exposition » (imposée par la nature de l'émulsion, plus ou moins « rapide »...) : énergie = puissance lumineuse \times temps d'exposition.

3. La mise au point « sur l'infini » correspond à régler l'objectif pour que $d = d_{\min} = f'$.

Or, pour un point A à distance finie, l'image A' se forme en arrière de ce plan (objet et image se déplacent dans le même sens).

On a donc :



ce qui correspond dans le plan (E) – plan de front de F' – à une tache d'autant plus grande que le diaphragme a une valeur N plus petite. Pour un diamètre ϕ du diaphragme, la tache dans le plan E doit avoir un diamètre maximal égal à g , soit, avec $OA' = d'$ et $OF' = f'$

$$\frac{g}{\phi} = \frac{d' - f'}{d'} \text{ (triangles semblables)}$$

soit, avec $d' = \frac{L_0 f'}{L_0 - f'}$ (cf. 1.) et $\phi = \frac{f'}{N}$:

$$\frac{Ng}{f'} = 1 - \frac{f'}{d'} = 1 - \frac{L_0 - f'}{L_0} = \frac{f'}{L_0}$$

$$L_0 = \frac{f'^2}{Ng}$$

Numériquement, pour $N = 2,8$, $L_0 = 44,6 \text{ m}$;

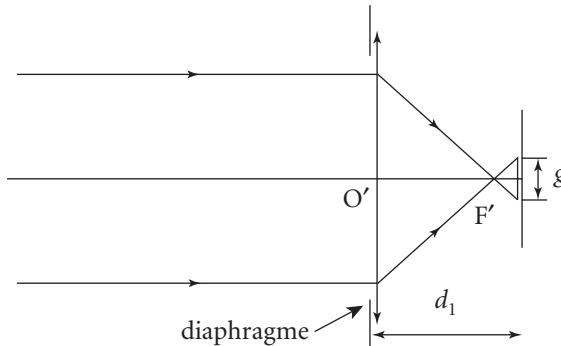
pour $N = 16$, $L_0 = 7,81 \text{ m}$.

La profondeur de champ est d'autant plus grande que L_0 est plus petite : on peut par exemple la caractériser par la valeur de $\frac{1}{L_0}$, qui varie proportionnellement à $\frac{N}{f'^2}$:

Commentaire

On augmente la profondeur de champ en augmentant N , ce qui, pour une pellicule donnée, conduit à augmenter T_e (pour garder une exposition correcte...), ce qui augmente le risque de « bougé » ou de « flou » dû au mouvement éventuel de l'objet photographié.

4. Dans le cas d'un objet à l'infini, et pour une valeur d_1 de d , différente de f' , on obtient la figure suivante :



Les triangles semblables donnent encore :

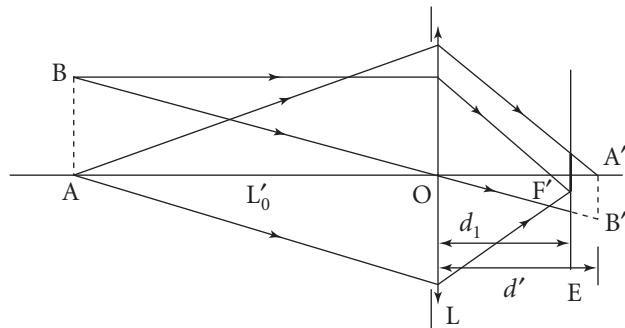
$$\frac{g}{\phi} = \frac{d_1 - f'}{f'} = \frac{d_1}{f'} - 1$$

$$\frac{d_1}{f'} = \frac{g}{\phi} + 1 = \frac{Ng}{f'} + 1 \quad \left(\phi = \frac{f'}{N} \right)$$

soit

$$d_1 = f' + Ng$$

Le plan de la pellicule se trouvant à cette distance d_1 de (L), l'image d'un point objet A (à une distance de L inférieure à L_0) sera en un point A' , à une distance $d' > d_1$, ce qui donne la figure suivante :



Si A est à la distance L'_0 de (L), la tache dans le plan de (E) est de diamètre g , et les triangles semblables donnent encore :

$$\frac{g}{\phi} = \frac{d' - d_1}{d'} = 1 - \frac{d_1}{d'}$$

avec $\phi = \frac{f'}{N}$, et d'après le 1. : $d' = \frac{L'_0 f'}{L'_0 - f'}$

soit $\frac{Ng}{f'} = 1 - \frac{d_1}{d'} = 1 - (f' + Ng) \cdot \frac{L'_0 - f'}{L'_0 f'}$

$$\frac{L'_0 - f'}{L'_0} = \frac{f' - Ng}{f' + Ng}$$

$$\frac{f'}{L'_0} = 1 - \frac{f' - Ng}{f' + Ng} = \frac{2Ng}{f' + Ng}$$

et finalement :

$$L'_0 = f' \cdot \frac{f' + Ng}{2Ng}$$

$$L'_0 = \frac{f'}{2} + \frac{f'^2}{2Ng} = \frac{f'}{2} + \frac{L_0}{2}$$

soit, puisque $L_0 \gg f'$, quel que soit N :

$$L'_0 \approx \frac{L_0}{2}$$

$$L'_0 = 22,3 \text{ m pour } N = 2,8$$

$$L'_0 = 3,91 \text{ m pour } N = 16.$$

Commentaires

Notons que l'amélioration de la profondeur de champ obtenue au 4. nécessite un positionnement du plan de la pellicule qui dépend de la valeur de N : pour que l'image d'un point

à l'infini reste toujours nette, il faut choisir la valeur de d_1 correspondant à la plus petite valeur de N, et si on modifie ensuite N, la valeur de d_1 n'est pas changée (ce serait trop compliqué, le but étant de réaliser un appareil très simple...).

Le calcul de L'_0 n'a donc de sens que pour un appareil à mise au point fixe **et diaphragme fixe** : pour obtenir des photos nettes d'objets relativement proches ($L'_0 \approx 4$ m), il faudra donc un diaphragme de valeur élevée... ou réduire la valeur de f' : pour L_0 et L'_0 inchangés, un objectif de focale $f' = 35$ mm conduit à $N = 8$.

Si d_1 est calculé pour un diaphragme minimal N_1 , le calcul de L'_0 en fonction de N (à d_1 fixé) conduit à :

$$L'_0 = f' \cdot \frac{f' + N_1 g}{(N_1 + N)g}$$

soit, pour $N_1 = 2,8$ et $N = 16$ (et $f' = 50$ mm)

$$L'_0 = 6,65 \text{ m}$$

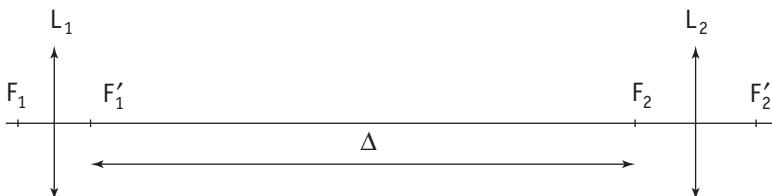
le gain est facile par rapport à L_0 (cas où $d = f'$).

L'opération n'est intéressante que pour des diaphragmes de valeur élevée pour l'ouverture relative maximale... └

308

Étude sommaire d'un microscope

Un microscope est constitué d'un objectif et d'un oculaire, placés relativement loin l'un de l'autre. On peut le schématiser par l'association de deux lentilles minces convergentes, L_1 représentant l'objectif et L_2 l'oculaire :



Pour les applications numériques, on prendra L_1 et L_2 de distances focales respectives $f'_1 = 1,2 \text{ cm}$ et $f'_2 = 2 \text{ cm}$. On notera Δ la distance entre le foyer image de L_1 et le foyer objet de L_2 , avec $\Delta = 18 \text{ cm}$.

1. L'image donnée par l'oculaire étant normalement située à l'infini (ceci afin de limiter la fatigue visuelle de l'observateur), à quelle distance de l'objectif faut-il placer l'objet à observer ?

Faire un schéma du tracé des rayons lumineux issus d'un point B de l'objet, situé en dehors de l'axe du système.

Calculer dans ces conditions le grossissement de l'objectif, et déterminer la dimension angulaire α de l'image vue par l'observateur.

2. Quand l'objet, placé à une distance d de l'œil de l'observateur, est directement observé à l'œil nu, il est vu sous un angle α' .

Calculer le rapport $\frac{\alpha}{\alpha'} = G_c$, grossissement commercial du microscope. Faire l'application numérique ($d = 0,25$ m).

La quantité $\frac{G_c}{d}$ est appelée « puissance intrinsèque » du microscope : donner l'expression littérale de cette puissance intrinsèque.

3. Le microscope n'étant pas parfaitement réglé, l'image observée n'est plus à l'infini, mais on suppose qu'elle se forme à la distance d précédente au-delà du foyer image de L_2 : grâce à l'accommodation de l'œil, l'observateur la voit encore nettement...

Par rapport à sa position initiale (question 1.), de combien l'objet a-t-il été déplacé ? Ce déplacement correspond à la « profondeur de champ » du microscope...

Le rapport $\frac{\alpha}{\alpha'}$ a-t-il été modifié ?

Si oui, calculer sa nouvelle valeur.

4. On remplace la lentille L_2 par un oculaire dit « de Ramsden », constitué de deux lentilles convergentes L_2 identiques à la précédente, placées à la distance $e = 1$ cm l'une de l'autre.

L'objet étant placé dans la position du 1., comment faut-t-il placer ces deux lentilles pour que l'image donnée par cet oculaire se forme encore à l'infini ? On déterminera précisément la position de l'image A' donnée par l'objectif (image de A située sur l'axe du microscope) par rapport aux lentilles de l'oculaire.

Faire une figure du tracé des rayons lumineux issus de B' et traversant l'oculaire.

Le rapport $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est-il modifié ?

Si oui, calculer sa nouvelle valeur.

Solution

1. Pour que l'image donnée par l'oculaire soit située à l'infini, il faut que l'objet correspondant (image intermédiaire) soit placé en F_2 .

On a ainsi $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \equiv F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2$ à l'infini.

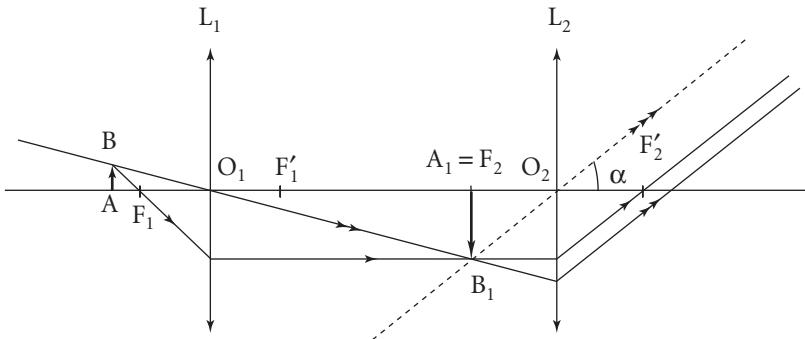
En utilisant la formule de conjugaison de Newton, on a donc :

$$\overline{F_1 A} \cdot \overline{F'_1 F_2} = -f'_1{}^2$$

soit
$$\boxed{\overline{F_1 A} = \frac{-f'_1{}^2}{\Delta}}$$

Application numérique : $\overline{F_1 A} = -0,08$ cm = $-0,8$ mm.

Conclusion : A est pratiquement en F_1 (l'échelle n'est pas respectée pour la figure).



Déterminons le grandissement de l'objectif :

$$\gamma = \frac{\overline{F'_1 A_1}}{\overline{F'_1 O_1}} = -\frac{\Delta}{f'_1} \quad \boxed{\gamma = -\frac{\Delta}{f'_1}}$$

Application numérique : $\gamma = -15$.

Soit α la dimension angulaire de l'image vue par l'observateur :

$$\alpha = \tan \alpha = \frac{A_1 B_1}{O_2 F_2} = |\gamma| \frac{AB}{f'_2} = \frac{\Delta}{f'_1 f'_2} AB.$$

2. On a : $\tan \alpha' = \alpha' = \frac{AB}{d}$ (vision directe : d correspond à la distance minimale d'accommodation pour l'œil).

$$\boxed{G_c = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\Delta d}{f'_1 f'_2}}$$

Application numérique : $G_c = 187,5$.

La puissance intrinsèque \mathcal{P}_i est définie par $\mathcal{P}_i = \frac{G_c}{d}$

$$\boxed{\mathcal{P}_i = \frac{\Delta}{f'_1 f'_2}}$$

Application numérique : $\mathcal{P}_i = 750 \text{ m}^{-1}$ (750 dioptries).

3. On applique à nouveau la formule de conjugaison de Newton (nouvelle position de A) :

$$(A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2)$$

$$\overline{F_2 A'_1} \cdot \overline{F'_2 A_2} = -f'_2{}^2; \quad \overline{F_1 A} \cdot \overline{F'_1 A'_1} = -f'_1{}^2.$$

$$\overline{F'_1 A'_1} = \overline{F'_1 F_2} + \overline{F_2 A'_1} = \Delta - \frac{f'_2{}^2}{d} \quad (\overline{F_2 A'_1} = d > 0)$$

$$\overline{F_1 A} = \frac{-f'_1{}^2}{\Delta - \frac{f'_2{}^2}{d}} = \frac{-f'_1{}^2}{\Delta} \left[1 - \frac{f'_2{}^2}{d \Delta} \right]^{-1}$$

$\frac{f'_2}{d\Delta} \ll 1$, un développement limité au 1^{er} ordre nous donne :

$$\overline{F_1 A} \approx \frac{-f'_1}{\Delta} \left(1 + \frac{f'_2}{d\Delta} \right).$$

L'objet a donc été déplacé de :

$$-\frac{f'_1^2 f'_2^2}{d\Delta^2}, \text{ soit } 7 \cdot 10^{-4} \text{ cm !!!}$$

Commentaire

La profondeur de champ que l'on vient de calculer est très faible, ce qui justifie l'utilisation d'une vis de mise au point rapide et d'une vis micrométrique de réglage fin.

α' est inchangé ($\alpha' = \frac{AB}{d}$)

et $\gamma' = \frac{\overline{F_1 O_1}}{\overline{F_1 A}} = -f'_1 \cdot \frac{1}{f'_1^2} \cdot \left(\Delta - \frac{f'_2}{d} \right) = \gamma + \frac{f'_2}{df'_1}$ (γ' : grossissement de l'objectif pour la nouvelle position de l'objet)

$$\alpha = \frac{|\gamma'| AB}{f'_2}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{|\gamma| d}{f'_2} - \frac{f'_2}{f'_1}} \quad (|\gamma'| = |\gamma| - \frac{f'_2}{df'_1})$$

On trouve un grossissement commercial inférieur à celui trouvé au 2.

Application numérique : $\frac{\alpha}{\alpha'} = 185,8$.

4. Pour que l'image de A soit à l'infini, il faut que A' (image de A par l'objectif) soit au foyer objet de l'oculaire.

En appelant \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}'_2 les foyers objet et image de la 2^e lentille \mathcal{L}_2 , formant avec L_2 (foyers F_2 et F'_2) l'oculaire de Ramsden, on a (cf. figure 2) :

$$A' \xrightarrow{L_2} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \text{point à l'infini.}$$

D'après la formule de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_2 A'} \times \overline{F'_2 \mathcal{F}_2} = -f'_2^2$$

$$\text{avec } \overline{F'_2 \mathcal{F}_2} = \overline{F'_2 O_2} + \overline{O_2 O'_2} + \overline{O'_2 \mathcal{F}_2} = e - 2f'_2$$

d'où

$$\boxed{\overline{F_2 A'} = \frac{-f'_2^2}{e - 2f'_2}}$$

Construction de $A'B'$ (\mathcal{F}_2B_2 image de $A'B'$ par rapport à L_2) :

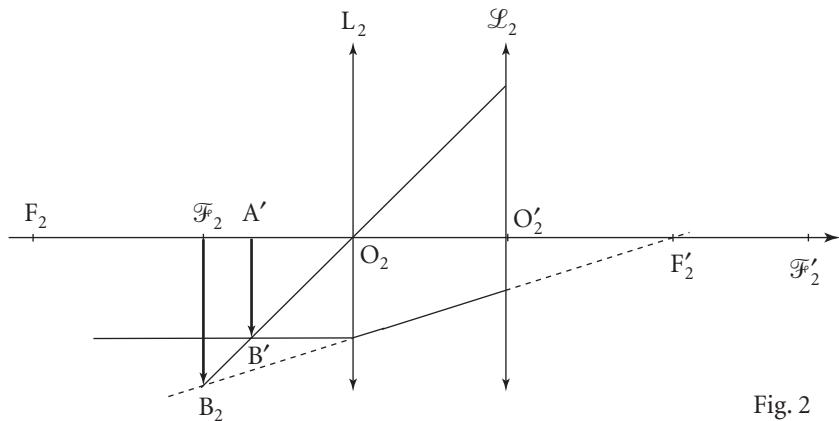


Fig. 2

Tracé des rayons lumineux :

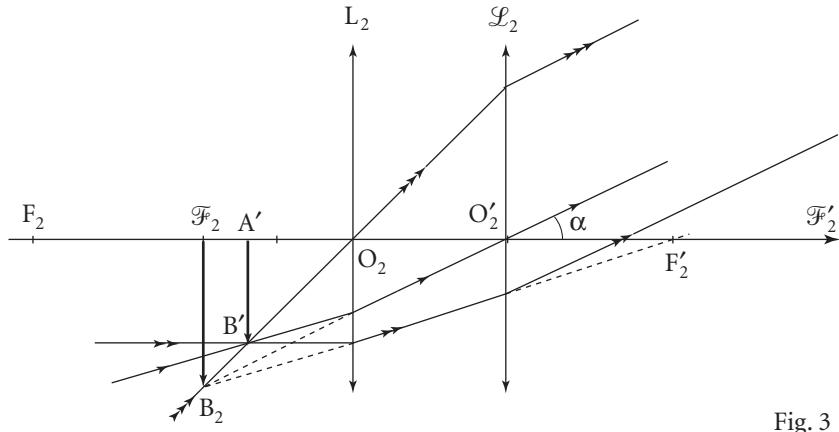


Fig. 3

Déterminons la nouvelle expression de α :

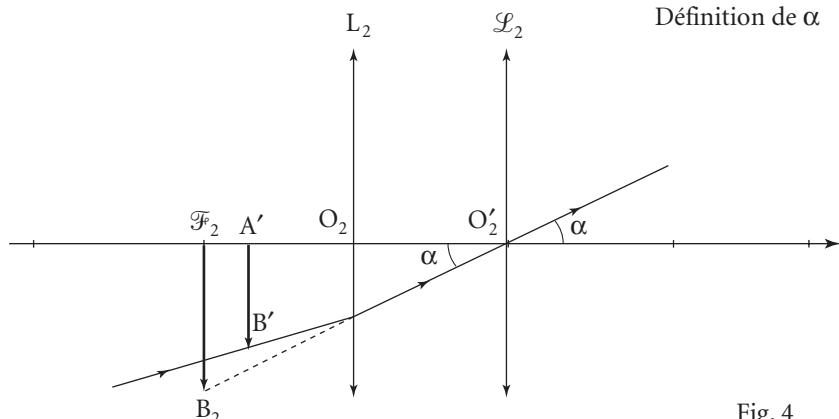


Fig. 4

D'après la figure 4 :

$$\alpha = \frac{\mathcal{F}_2 B_2}{O'_2 \mathcal{F}_2} = \frac{\mathcal{F}_2 B_2}{f'_2}.$$

D'après la figure 3 :

$$\overline{\mathcal{F}_2 B_2} = \overline{A'B'} \frac{O_2 \mathcal{F}_2}{\overline{O_2 A'}} = \gamma \overline{AB} \frac{\overline{O_2 O'_2} + \overline{O'_2 \mathcal{F}_2}}{\overline{O_2 F_2} + \overline{F_2 A'}} = \gamma \overline{AB} \frac{e - f'_2}{-f'_2 - \frac{f'^2_2}{e - 2f'_2}}$$

$$\overline{\mathcal{F}_2 B_2} = \gamma \overline{AB} \left(\frac{2f'_2 - e}{f'^2_2} \right)$$

$$\text{d'où } \alpha = |\gamma| AB \left(\frac{2f'_2 - e}{f'^2_2} \right) \text{ et } \frac{\alpha}{\alpha'} = |\gamma| d \left(\frac{2f'_2 - e}{f'^2_2} \right)$$

$$\text{avec } \gamma = -\frac{\Delta}{f'_1} \text{ (cf. 1.)}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\Delta d}{f'_1 \times f'_2} \left(\frac{2f'_2 - e}{f'^2_2} \right)}$$

On retrouve la valeur initiale du grossissement commercial trouvée au 2. multipliée par le terme $\frac{2f'_2 - e}{f'^2_2}$ qui vaut ici $\frac{3}{2}$.

A.N. : $G_c = 281,2$.

Partie

2

Chapitre

4

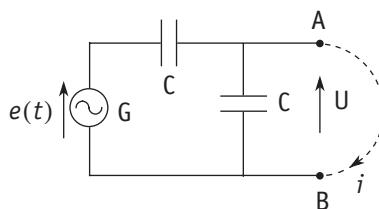
Électrocinétique 2

- A . Régime sinusoïdal
- B . Filtres actifs et autres circuits avec amplificateur opérationnel

A. Régime sinusoïdal

401 Générateur sinusoïdal

Un générateur parfait G de tension sinusoïdale délivre une tension $e(t) = E \cos \omega t$, avec $E = 220\sqrt{2}$ V et $\omega = 2\pi f$, $f = 50$ Hz. Il est connecté à deux condensateurs C en série ($C = 7 \mu\text{F}$), et l'ensemble constitue une source sinusoïdale de bornes A et B :



On veut déterminer les caractéristiques, en régime permanent, de ce générateur.

1. Donner l'équation de la caractéristique – en amplitudes complexes – de ce générateur : $\underline{U} = f(\underline{I})$. On posera $R_0 = \frac{1}{2C\omega}$.

2. En déduire la caractéristique, en amplitudes réelles, $U = g(I)$ lorsque l'utilisation branchée entre A et B est une résistance pure.

Tracer la courbe représentative de la fonction g . Quel est le courant de court-circuit de ce générateur ? Préciser le domaine des valeurs de I pour lesquelles $U \geqslant 0,9 \cdot U_{\max}$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équivalence Norton/Thevenin.
- Utilisation des amplitudes complexes.

2. Ce qu'il faut comprendre

On peut appliquer les théorèmes vus en régime permanent continu, à condition d'utiliser les amplitudes complexes associées aux tensions et aux intensités et les impédances complexes qui caractérisent les différents dipôles passifs.

3. Solution

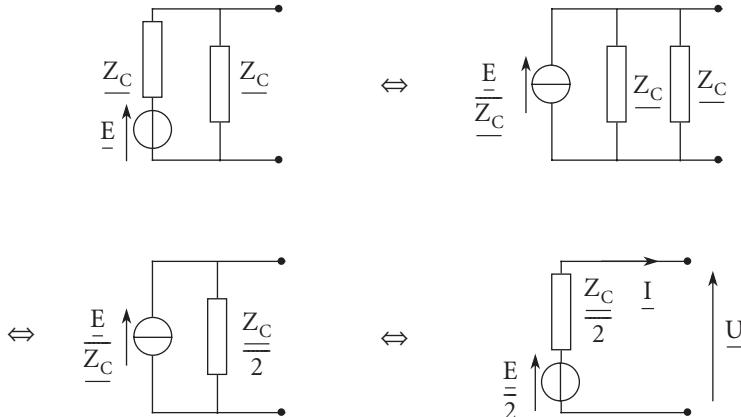
1.

POINT COURS

À une tension sinusoïdale quelconque $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ est associée une amplitude complexe $\underline{U} = U e^{j\varphi}$, nombre complexe de module U et d'argument φ .

Ainsi à $e(t) = E \cos \omega t$, on associe l'amplitude complexe $\underline{E} = E$.

Le condensateur C est caractérisé par son impédance complexe $\underline{Z_C} = \frac{1}{j\omega C}$.
On peut procéder par simplification (Thévenin \Leftrightarrow Norton).



$$\text{On a donc } \underline{U} = \frac{\underline{E}}{2} - \frac{\underline{Z_C}}{2} \underline{I}$$

$$\text{et puisque } \underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{2R_0}{j} = -2jR_0, \text{ alors :}$$

$$\boxed{\underline{U} = \frac{\underline{E}}{2} + jR_0 \underline{I}}$$

2. Si l'utilisation branchée entre A et B est une résistance pure (impédance complexe réelle), \underline{U} et \underline{I} sont en phase, et donc \underline{U} et $jR_0 \underline{I}$ sont déphasés de $+\frac{\pi}{2}$.

En utilisant la représentation de Fresnel, il vient immédiatement :

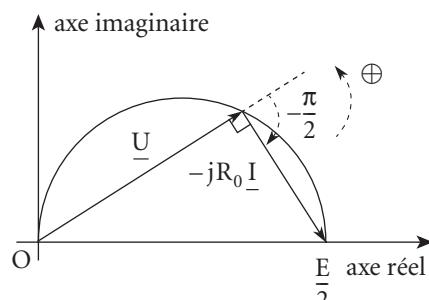
$$U^2 + (R_0 I)^2 = \frac{E^2}{4}$$

$$\text{et : } \boxed{U = \sqrt{\frac{E^2}{4} - R_0^2 I^2}}$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\frac{U^2}{\left(\frac{E}{2}\right)^2} + \frac{I^2}{\left(\frac{E}{2R_0}\right)^2} = 1$$

équation caractéristique d'une ellipse rapportée à ses axes principaux.



D'où le graphe de $U = g(I)$:

le courant de court-circuit ($U = 0$) est donc :

$$I_{cc} = \frac{E}{2R_0} = EC\omega = 0,68 \text{ A}$$

soit $(I_{cc})_{eff} = 0,48 \text{ A}$

d'où l'expression de $I = g^{-1}(U)$

$$I^2 = I_{cc}^2 - \left(\frac{U}{R_0}\right)^2$$

$$I = \sqrt{I_{cc}^2 - \left(\frac{U}{R_0}\right)^2}$$

et on aura $U \geq 0,9 \cdot U_{max}$ (avec $U_{max} = \frac{E}{2}$)

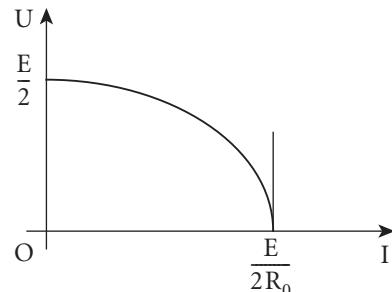
tant que : $I^2 \leq I_{cc}^2 - (0,9)^2 \left(\frac{U_{max}}{R_0}\right)^2$

$$I^2 \leq I_{cc}^2 (1 - (0,9)^2); \quad \left(\frac{U_{max}}{R_0} = \frac{E}{2R_0} = I_{cc}\right)$$

$$I^2 \leq 0,19 \cdot I_{cc}^2$$

soit : $I \leq 0,44 \cdot I_{cc}$

$$I_e \leq 0,21 \text{ A} \quad (\text{en valeur efficace}).$$

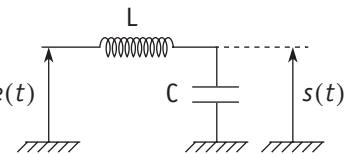


402 Circuit RLC

1. La source de tension est sinusoïdale :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t.$$

a. Préciser, sans calculs, le comportement du signal de sortie, en régime établi, en B.F., en H.F. et enfin pour $\omega = \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.



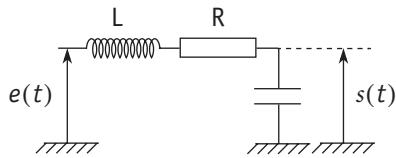
b. On note $s(t) = R_e(s(t))$ et $e(t) = R_e(e(t))$ avec $s(t) = S e^{j\omega t}$ et $e(t) = E e^{j\omega t}$.

Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = |\underline{H}| e^{j\psi} \quad (j^2 = -1)$.

Tracer les courbes donnant $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$ et ψ en fonction de $X = \log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)$.

2. On désire tenir compte de la résistance R de la bobine, résistance que l'on place en série avec l'inductance pure L. On pose

$$Q = \frac{L\omega_c}{R}.$$

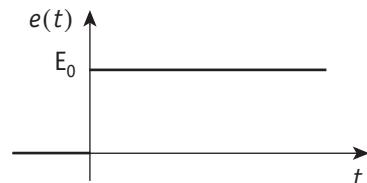


a. Déterminer la nouvelle fonction de transfert $\underline{H}' = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = |\underline{H}'|e^{i\psi'}$ en fonction de Q et de $\frac{\omega}{\omega_c}$ (régime sinusoïdal établi).

b. Tracer les courbes donnant $G_{dB} = 20\log|\underline{H}'|$ et ψ' en fonction de $X = \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$. On prendra $L = 10 \text{ mH}$; $C = 2,2 \text{ nF}$ et $R = 12 \Omega$.

c. Pour étudier le régime transitoire, on attaque le circuit précédent par un échelon de tension $e(t)$ d'amplitude E_0 – la capacité est initialement déchargée.

Déterminer la tension de sortie $s(t)$ ainsi que le courant $i(t)$ dans le circuit. Les résultats seront exprimés en fonction de ω_c , Q, E_0 et t .



■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Utilisation des amplitudes complexes.
- Détermination et étude d'une fonction de transfert.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

En régime continu établi ($\omega \rightarrow 0$), une capacité ne se laisse pas traverser par un courant. Une inductance s'oppose aux variations brusques de courant (intensité nulle pour $\omega \rightarrow \infty$).

■ 3. Solution

1. a. • À la limite en T.B.F. (très basse fréquence), l'inductance L constitue un court-circuit et la capacité C un coupe-circuit : on a donc $s = e$ (pas de courant) et $\underline{H} = 1$.
- En T.H.F., les rôles de L et C sont inversés et la sortie est court-circuitée, d'où $s = 0$ et $\underline{H} = 0$.
- Pour la pulsation ω_c , caractéristique du circuit série L-C, l'impédance devient nulle et le courant théoriquement infini. Il en résulte que s prend une valeur également infinie.

1. b. Notons $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ et $\underline{Z}_L = jL\omega$ les impédances complexes de la capacité et de l'inductance. Le système constitue un **diviseur de tension** (même courant dans L et C), soit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \underline{Y}_C \underline{Z}_L}.$$

Finalement

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Il vient alors :

- $G_{dB} = -20\log\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right|$ d'où :

$$-\frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow 0 \Rightarrow G_{dB} \rightarrow 0$$

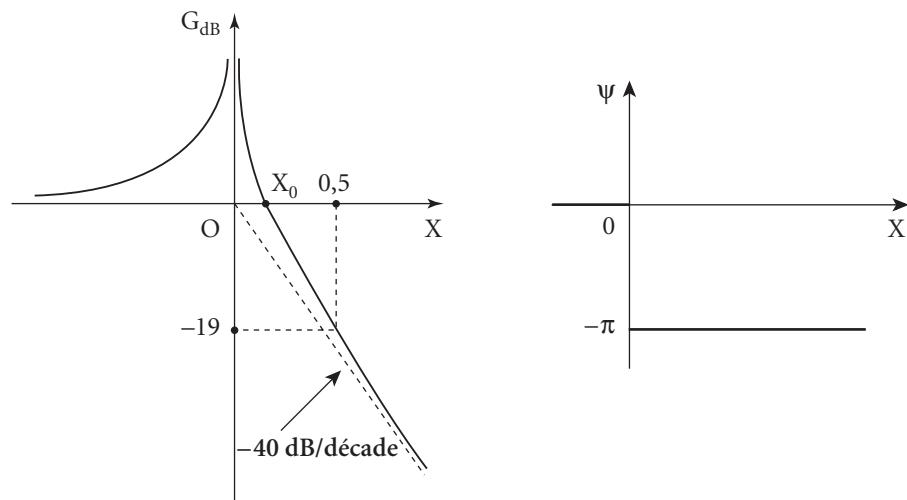
$$-\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1 \Rightarrow G_{dB} \sim -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -40X$$

$$-\omega = \omega_c \Rightarrow G_{dB} \rightarrow +\infty.$$

- D'autre part, on a \underline{H} réel positif pour $\omega < \omega_c$ et \underline{H} réel négatif pour $\omega > \omega_c$, on peut donc prendre :

$$\boxed{\psi = 0 \quad \text{pour} \quad \omega < \omega_c \quad \text{et} \quad \psi = -\pi \quad \text{pour} \quad \omega > \omega_c}$$

D'où les graphes :



Remarque : on a $G_{dB} = 0$ pour $\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right| = 1$, c'est-à-dire pour

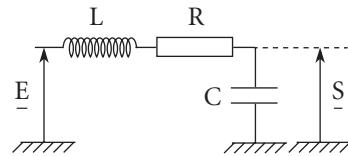
$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = 2 \Rightarrow \omega = \sqrt{2}\omega_c \quad \left(X_0 = \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \log\sqrt{2} = 0,15\right).$$

POINT MÉTHODE

Il est rare d'observer une discontinuité de la phase. Ici, la phase est discontinue lorsque $G_{dB} \rightarrow \infty$.

2. a. Avec $Z_R = R$, impédance de la résistance R, il vient maintenant :

$$\underline{H}' = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R + Z_L}.$$



$$\text{Soit encore : } \underline{H}' = \frac{1}{1 + Y_C(Z_R + Z_L)}.$$

$$\text{D'où } \underline{H}' = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}.$$

$$\text{Or } LC\omega^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \text{ et } RC\omega = RC\omega_c \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right).$$

$$\text{De plus } Q = \frac{LC\omega_c}{R} = \frac{LC\omega_c^2}{RC\omega_c} = \frac{1}{RC\omega_c} \quad (\text{puisque } LC\omega_c^2 = 1),$$

soit

$$\boxed{\underline{H}' = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + j\left(\frac{\omega}{Q\omega_c}\right)}}$$

Il est à remarquer que R ne joue aucun rôle dans les comportements asymptotiques ($\omega \rightarrow 0$; et $\omega \rightarrow +\infty$, en fait $\omega \gg \omega_c$) qui restent donc identiques à ceux décrits dans le 1.

Pour $\omega = \omega_c$, la présence de la résistance limite la valeur de $|\underline{H}'|$:

$$\underline{H}'(\omega_c) = \frac{1}{(j/Q)} = -jQ \quad \text{et} \quad G_{dB}(\omega_c) = 20\log Q.$$

2. b. Diagramme de Bode :

Cette fois-ci, nous avons :

$$G_{dB} = 20\log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = -10\log \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \right].$$

Comme on vient de le souligner, on peut écrire :

- $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G_{dB} \rightarrow 0$

$$\bullet \omega \gg \omega_c \Rightarrow G_{dB} \sim -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -40X \quad \text{avec} \quad X = \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\bullet \omega = \omega_c \Rightarrow G_{dB} \rightarrow 20 \log Q.$$

Cherchons si la courbe présente un maximum :

S'il existe, il se produit pour ω tel que $\frac{dG_{dB}}{d\omega} = 0$,

$$\text{c'est-à-dire pour } 2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\left[\frac{1}{Q^2} - 2\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)\right] = 0$$

$$\text{ou encore } \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\left[\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right] = 0;$$

$$\text{d'où la conclusion : } \begin{cases} \frac{\omega_M}{\omega_c} = 1 - \frac{1}{2Q^2} & \text{dès que } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \omega_M = 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Commentaires

Le facteur $Q = \frac{L\omega_C}{R}$ est en fait le facteur de qualité du circuit RLC série. La réponse du circuit étant prise aux bornes de la capacité (réponse en amplitude), celle-ci ne présentera de maximum (différent de $\omega = 0$) que pour une valeur de Q supérieure à une valeur critique Q_C égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans le cas qui nous intéresse ici, on a :

$$Q = \frac{L\omega_c}{R} = \frac{1}{R\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{1}{12\sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3}}{2,2 \cdot 10^{-9}}}} \Rightarrow Q = 178$$

$$\text{et donc } \frac{\omega_M}{\omega_c} = 1 \quad (\text{à } 10^{-5} \text{ près}).$$

$$\text{De plus } 20 \log Q = 45 \text{ dB.}$$

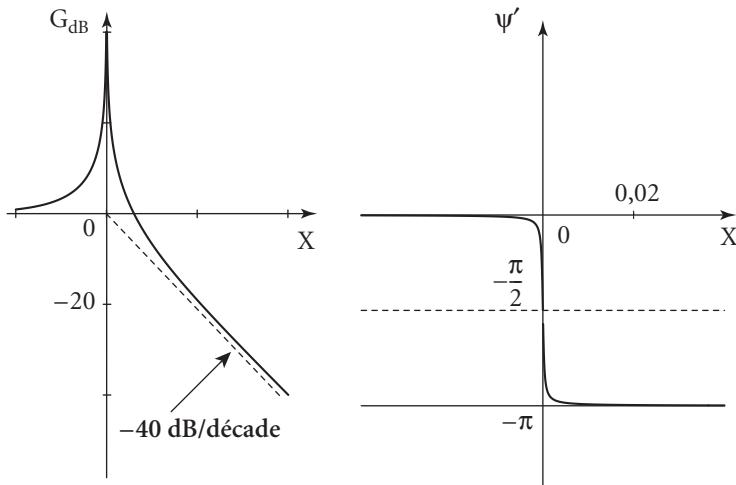
En ce qui concerne la phase ψ' , celle-ci est fournie par : $\psi' = \text{Arg}(\underline{H'})$.

$$\text{Soit } \tan \psi' = -\frac{1}{Q} \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \sin \psi' < 0.$$

Ainsi : – pour $\omega < \omega_c$: $\psi' \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et décroît de 0 à $-\frac{\pi}{2}$ quand ω augmente de 0 à ω_c ;

– pour $\omega > \omega_c$: $\psi' \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ et décroît de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\pi$ quand ω croît de ω_c à l'infini.

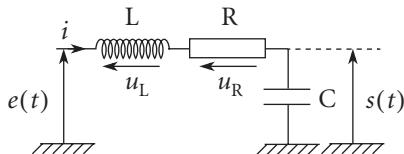
D'où les graphes :



Commentaire

La phase est maintenant continue, le gain restant fini.

2. c. On se place désormais en régime transitoire :



POINT COURS

On peut obtenir l'équation différentielle en $s(t)$ à partir de la connaissance de la fonction de transfert \underline{H}' . En effet :

$$\underline{H}' = \frac{s}{e} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \frac{j}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)},$$

d'où

$$\underline{s} - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \underline{s} + \frac{1}{Q\omega_c} j\omega \underline{s} = \underline{e}$$

soit en remplaçant $j\omega$ par $\frac{d}{dt}$ et $(-\omega^2)$ par $\frac{d^2}{dt^2}$ nous obtenons (avec $\underline{s} \rightarrow s(t)$ et $\underline{e} \rightarrow e(t)$) :

$$s(t) + \frac{1}{Q\omega_c} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\omega_c^2} \frac{d^2s}{dt^2} = e(t)$$

On peut aussi retrouver directement cette équation différentielle.

On a :

$$e(t) = u_L + u_R + s$$

avec :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri$$

et :

$$i = C \frac{ds}{dt}$$

D'où, en fonction de $s(t)$ et de ses dérivés :

$$e(t) = s(t) + RC \frac{ds}{dt} + LC \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Or

$$\omega_c^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \frac{1}{Q} = RC\omega_c$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{\omega_c^2} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_c} \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)}$$

Posons $s(t) = S(u)$ avec $u = \omega_c t$ (« temps réduit »), il vient :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dS}{du} \omega_c \quad \text{et} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2S}{du^2} \omega_c^2$$

$$\text{soit} \quad \frac{d^2S}{du^2} + \frac{1}{Q} \frac{dS}{du} + S = E_0 \quad \text{pour } u > 0 \quad (t > 0).$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est fournie par :

$$x^2 + \frac{1}{Q}x + 1 = 0 \quad (\text{solution en } e^{xu})$$

$$\text{d'où} \quad x = -\frac{1}{2Q} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} \quad (\text{ici } Q \sim 180 > \frac{1}{2}).$$

$$\text{Or } Q \gg 1 \text{ soit} \quad x \# -\frac{1}{2Q} \pm j$$

$$\text{soit} \quad S(u) \# E_0 + e^{-\frac{u}{2Q}} [A \cos(u) + B \sin(u)].$$

Les conditions initiales imposent $S(0) = 0$ (continuité de la charge du condensateur) et $i(0) = 0$ (présence de l'inductance L), d'où :

$$S(0) = 0 \Rightarrow E_0 + A = 0 \quad \text{et} \quad A = -E_0$$

$$i(0) = 0 \Rightarrow \frac{dS}{du}(0) = 0 \Rightarrow B - \frac{1}{2Q}A = 0 \text{ et à la même approximation (}Q \gg 1\text{)}:$$

$$B \sim 0.$$

$$\text{Finalement : } S(u) \# E_0 \left\{ 1 - e^{-\frac{u}{2Q}} \cos(u) \right\}$$

et

$$\boxed{s(t) \# E_0 \left\{ 1 - e^{-\frac{\omega_c t}{2Q}} \cos \omega_c t \right\}}$$

Le courant $i(t)$ s'obtient facilement avec $i = C \frac{ds}{dt}$, soit pour $Q \gg 1$:

$$i(t) \approx CE_0\omega_c e^{-\frac{\omega_c t}{2Q}} \sin \omega_c t$$

Commentaire

La présence de l'exponentielle met en évidence un temps caractéristique τ (pour $t \gg \tau$, $s(t) \sim E_0$ et $i(t) \sim 0$).

Posons en effet, $\tau = \frac{Q}{\omega_c}$, alors l'exponentielle présente dans $s(t)$ et $i(t)$ s'écrit $e^{-\frac{t}{2\tau}}$ et les grandeurs énergétiques comme $\frac{1}{2}Li^2$ varient notamment en $e^{-\frac{t}{\tau}}$.

403 Sonde adaptée pour oscilloscope

L'impédance d'entrée Z_e d'une voie X (ou Y) d'un oscilloscope est assimilable – en mode DC – à l'association en parallèle d'une résistance $R_2 = 1,0 \text{ M}\Omega$ et d'une capacité $C_2 = 20 \text{ pF}$.

1. Déterminer le module Z_e de cette impédance pour une fréquence $f = 1 \text{ kHz}$, puis $f = 100 \text{ kHz}$.

Proposer une méthode, utilisant l'oscilloscope, pour mesurer R_2 et C_2 .

2. On branche, entre les bornes A et B, le quadripôle passif [Q] représenté sur la figure 2.

a. On alimente le système avec une source idéale de tension sinusoïdale $v(t) = V_0 \cos \omega t$ de pulsation ω fixée.

À quelle condition portant sur R_1 , R_2 , C_1 et C_2 le rapport $\frac{u}{v}$ est-il constant et indépendant de la valeur de ω (on se placera en régime sinusoïdal établi) ?

b. Calculer R_1 et C_1 pour $\frac{u}{v} = \frac{1}{10}$. En déduire la valeur du module de l'impédance d'entrée Z'_e vue entre les bornes A' B' pour $f = 1 \text{ kHz}$ puis $f = 100 \text{ kHz}$. Conclure.

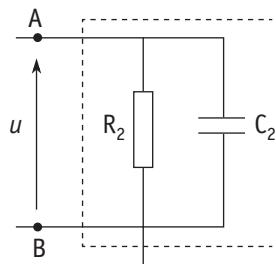


Fig.1

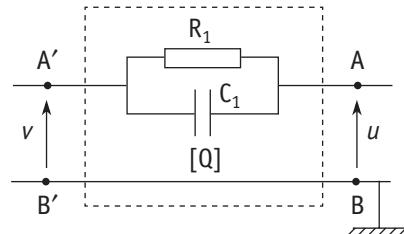


Fig.2

c. Le quadripôle [Q] représente une sonde de mesure que l'on intercale entre le dipôle où l'on prélève la tension et l'entrée de l'oscilloscope.

R_1 est fixée à la valeur calculée au 2.b. et C_1 est ajustable.

Proposer une méthode de réglage de la sonde sachant que l'on dispose sur l'oscilloscope d'une tension carrée de quelques kHz.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Notion d'impédance complexe – association d'impédances.
- Fonction de transfert en régime sinusoïdal pour un système linéaire stable.

Outil mathématique

Retenir qu'un signal physique $s(t)$ « quelconque », donc non nécessairement sinusoïdal, peut être décomposé en une somme – en général continue – de signaux sinusoïdaux...

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

2. Le circuit proposé constitue un pont diviseur de tension. Pour être constant, le rapport $\frac{U}{V}$ doit être indépendant du temps, et on le veut indépendant de ω : en termes d'amplitudes complexes, cela correspond à $\frac{\underline{U}}{\underline{V}} = \{ \text{nombre réel} \}$, indépendant de ω .

Le rapport $\frac{\underline{U}}{\underline{V}}$ (ou $\frac{\underline{V}}{\underline{U}}$) s'exprime simplement en fonction des impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 des deux groupes RC.

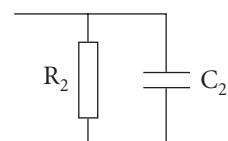
Si la condition cherchée est réalisée, la tension $u(t)$ est semblable à $v(t)$ ($u(t) = \frac{v(t)}{10}$) : l'observation à l'oscilloscope n'est pas perturbée (le réglage des gains permet de compenser la différence d'amplitude...).

L'intérêt du montage ne peut provenir que de l'augmentation de l'impédance d'entrée de l'appareil de mesure ($R_1 C_1 +$ oscilloscope), c'est-à-dire finalement de la diminution de la perturbation apportée au circuit étudié, qui est la « source » fournissant la tension $v(t)$.

■ 3. Solution

1. Les deux composants R_2 et C_2 sont en parallèle, leurs admittances \underline{Y} s'ajoutent donc :

$$\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega.$$



D'où :

$$\underline{Z}_e = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$$

$$\Rightarrow Z_e = \frac{R_2}{\sqrt{1 + (R_2C_2\omega)^2}}.$$

POINT MÉTHODE

Le module Z_e de \underline{Z}_e est obtenu à partir de $Z_e^2 = |\underline{Z}_e|^2 = \underline{Z}_e \underline{Z}_e^*$...

On a encore pour $\underline{z} = x + jy \Rightarrow |\underline{z}|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

et pour $\underline{z} = \frac{a}{b} \Rightarrow |\underline{z}| = \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

D'où le résultat.

Application numérique :

$$Z_e = \frac{10^6}{\sqrt{1 + (10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi f)^2}}$$

$$f = 1 \text{ kHz} \rightarrow Z_e = 0,99 \text{ M}\Omega;$$

$$f = 100 \text{ kHz} \rightarrow Z_e = 79 \text{ k}\Omega.$$

- Mesure expérimentale de R_2 et C_2 :

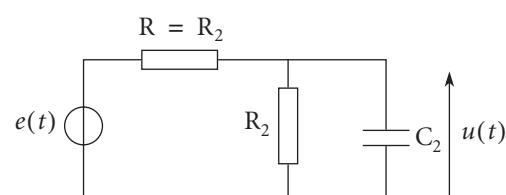
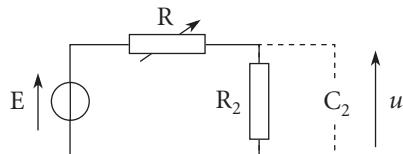
– Mesure de R_2 : on réalise le montage représenté ci-contre où E est un générateur de tension continue. En régime permanent, la capacité est équivalente à un circuit court.

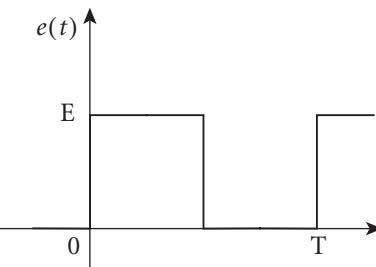
Pour $R = 0$, on a $u = E$ et on observe une trace horizontale sur l'écran associée à une déviation verticale Δ .

Pour $R = R_2$, on a $u = \frac{E}{2}$ (diviseur de tension) et la déviation verticale devient $\frac{\Delta}{2}$.

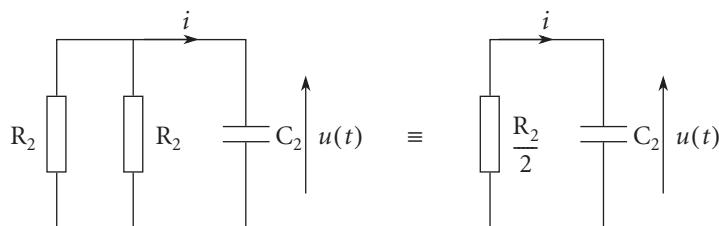
On ajuste donc la valeur de R pour que la déviation verticale soit divisée par 2 (alors $R = R_2$).

– Mesure de C_2 : $e(t)$ est un générateur délivrant des signaux carrés de tension crête à crête E et de fréquence quelques kHz. On fait de plus $R = R_2$ (cf. réglage précédent).





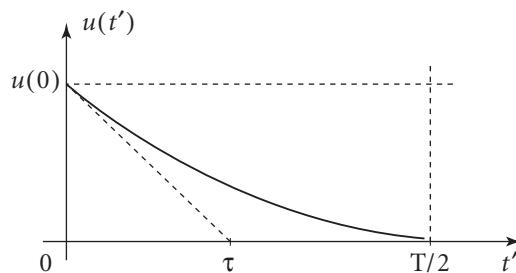
Pour $t \in \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) T, (n + 1)T \right]$, $E = 0$ et le circuit se réduit à :



$$\text{Dès lors : } u = -\frac{R_2}{2}i \text{ et } i = C_2 \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{2}{R_2 C_2} u = 0$$

$$\text{d'où } u(t') = u(0) e^{-\frac{t'}{\tau}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \tau = \frac{R_2 C_2}{2} \\ t' = t - \left(n + \frac{1}{2} \right) T \end{cases}$$

Il suffit alors de mesurer τ et d'en déduire C_2 connaissant R_2 (pour $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$ et $C_2 = 20 \text{ pF}$, on doit avoir $\tau = 10 \mu\text{s}$).



$$\text{Ainsi } \frac{u(\tau)}{u(0)} = \frac{1}{e} \dots$$

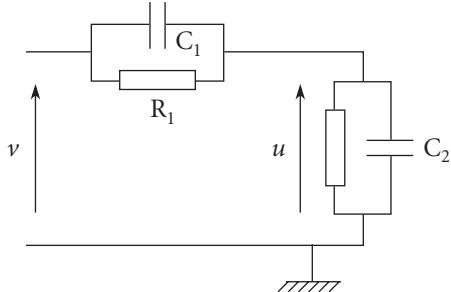
Le phénomène est facilement observable si l'on impose une demi-période de l'ordre de quelques τ , soit : $\frac{T}{2} \sim q \frac{R_2 C_2}{2} \Rightarrow q f \sim \frac{1}{R_2 C_2} = 50 \text{ kHz}$.

Une fréquence f de l'ordre de quelques kHz semble convenir.

2. a. On se place en régime sinusoïdal établi, on a donc en notation réelle :

$$v = V_0 \cos \omega t$$

$$u = H(\omega) V_0 \cos(\omega t + \varphi(\omega)).$$



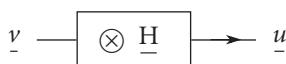
POINT COURS

La relation entrée ($v(t)$) – sortie ($u(t)$) s'exprime simplement en notation complexe. On a en effet :

$$\underline{v} = V_0 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u} = V_0 \cdot [H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}] e^{j\omega t}.$$

Soit

$$\underline{u} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \underline{v} \Rightarrow \boxed{\underline{u} = H(\omega) \underline{v}}$$



La grandeur \underline{H} est appelée fonction de transfert.

On a ainsi en notant V_m (ici $V_m = V_0$) et U_m les amplitudes des signaux sinusoïdaux $v(t)$ et $u(t)$, et φ' l'avance de phase du signal de sortie sur le signal d'entrée :

$$H = |\underline{H}| = \frac{U_m}{V_m} \quad \text{et} \quad \varphi' = \varphi.$$

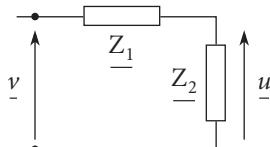
Passons en notation complexe.

Le montage proposé s'identifie à un diviseur de tension.

On a donc :

$$\underline{u} = \underline{v} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

$$\text{D'où } \frac{\underline{v}}{\underline{u}} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega = \frac{1}{R_2}(1 + jR_2C_2\omega) \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1} + jC_1\omega = \frac{1}{R_1}(1 + jR_1C_1\omega) \end{cases}$$



soit :

$$\boxed{\frac{\underline{v}}{\underline{u}} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{1 + jR_2C_2\omega}{1 + jR_1C_1\omega}}$$

On veut que le rapport de ces tensions soit une constante indépendante de ω . Il faut donc que :

$$\frac{1 + jR_2C_2\omega}{1 + jR_1C_1\omega} = \text{cste} = k.$$

Or pour $\omega = 0$, il vient $k = 1$, ce qui implique pour tout ω :

$$1 + jR_2C_2\omega = 1 + jR_1C_1\omega \Rightarrow R_2C_2 = R_1C_1$$

$$\text{On a alors : } \frac{v}{u} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Les tensions u et v sont en phase, et leurs amplitudes sont dans un rapport constant quelle que soit la pulsation ω .

2. b. On a $\frac{u}{v} = \frac{1}{10}$ pour $1 + \frac{R_1}{R_2} = 10 \Rightarrow R_1 = 9R_2$

$$\text{soit } R_1 = 9 \text{ M}\Omega$$

La condition $R_1C_1 = R_2C_2$ devant être réalisée, il vient :

$$C_1 = C_2 \frac{R_2}{R_1} = 20 \times \frac{1}{9} \Rightarrow C_1 \approx 2,2 \text{ pF.}$$

L'impédance Z'_e vue entre A' et B' correspond à la mise en série des impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 . D'où :

$$\underline{Z}'_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \text{ et } \underline{Z}'_e = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} + \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}.$$

Or $R_1C_1 = R_2C_2$ soit :

$$\underline{Z}'_e = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega} \cdot (R_1 + R_2) = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}.$$

$$\text{Nous avons donc : } \underline{Z}'_e = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \underline{Z}_e \Rightarrow \underline{Z}'_e = 10 \underline{Z}_e$$

$$\text{soit encore : } \underline{Z}'_e = 10 \underline{Z}_e \Rightarrow \begin{cases} f = 1 \text{ kHz : } \underline{Z}'_e \approx 9,9 \text{ M}\Omega \\ f = 100 \text{ kHz : } \underline{Z}'_e \approx 0,8 \text{ M}\Omega. \end{cases}$$

L'avantage résulte de l'augmentation de l'impédance du circuit, $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ remplaçant la seule impédance \underline{Z}_2 (lorsque la tension $v(t)$ est branchée directement à l'entrée de l'oscilloscope).

Le dispositif de mesure absorbe alors (par rapport au montage électrique fournissant la tension $v(t)$ étudiée) un courant 10 fois plus petit : la perturbation apportée par l'appareil de mesure en est diminuée d'autant.

On applique donc à l'entrée de la sonde branchée sur l'une des voies de l'oscilloscope la tension carrée de quelques kHz disponible sur l'oscilloscope lui-même. Lorsque le réglage de C_1 est correct, on doit obtenir à l'écran un signal « parfaitement » carré ; dans le cas contraire, la relation entre $u(t)$ et $v(t)$ ne se réduisant plus à une simple proportionnalité, le carré est déformé.

Commentaires

Un signal « quelconque » $v(t)$ peut être interprété comme une somme (infinie) de composantes sinusoïdales : $a(\omega)\cos(\omega t + \varphi_v(\omega))$.

Le système linéaire transforme la composante « ω » en :

$$a(\omega)H(\omega)\cos[\omega t + \varphi_v(\omega) + \varphi(\omega)] \quad (\text{cf. } H = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}).$$

Lorsque $H(\omega) = H_0 = \text{cste}$ et $\varphi(\omega) = 0$, chaque composante est simplement multipliée par la constante réelle H_0 . Le signal de sortie $u(t)$ s'identifie alors à $H_0v(t)$ et reproduit donc, à une constante multiplicative près H_0 , le signal d'entrée $v(t)$...

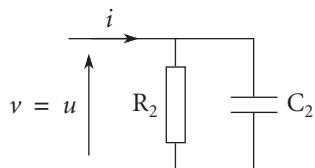
Ce dispositif constitue une **sonde**, qui permet de mesurer à l'oscilloscope une tension en réduisant notamment la perturbation apportée au circuit surtout lorsqu'on est contraint d'utiliser des câbles coaxiaux, dits « blindés », pour se protéger de tensions parasites...

On peut se poser la question du comportement d'un tel circuit en régime quelconque, non sinusoïdal permanent.

Le plus simple est de comparer les courants i et i' imposés par la tension $v(t)$ branchée directement à l'entrée (R_2, C_2) de l'oscilloscope, et par la tension $v(t)$ aux bornes du circuit étudié.

Dans le cas de l'oscilloscope seul :

$$i = \frac{v}{R_2} + C_2 \frac{dv}{dt} = C_2 \left(\frac{v}{R_2 C_2} + \frac{dv}{dt} \right)$$



et, pour le montage étudié :

$$i' = \frac{v - u}{R_1} + C_1 \frac{d(v - u)}{dt}$$

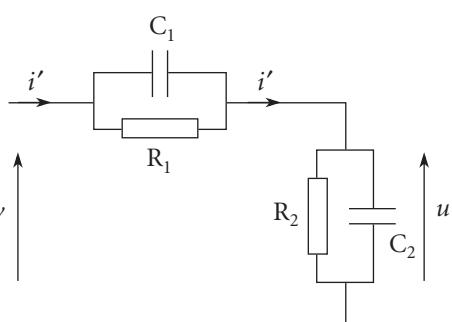
soit :

$$i' = \frac{v}{R_1} + C_1 \frac{dv}{dt} - \frac{u}{R_1} - C_1 \frac{du}{dt}$$

$$i' = C_1 \left(\frac{v}{R_1 C_1} + \frac{dv}{dt} \right) - C_1 \left(\frac{u}{R_1 C_1} + \frac{du}{dt} \right)$$

avec également, pour le bloc R_2C_2 :

$$i' = C_2 \left(\frac{u}{R_2 C_2} + \frac{du}{dt} \right).$$



Dans le cas où $R_1C_1 = R_2C_2$, il vient :

$$i' = C_1 \left(\frac{v}{R_2C_2} + \frac{dv}{dt} \right) - C_1 \left(\frac{u}{R_2C_2} + \frac{du}{dt} \right)$$

soit :

$$i' = C_1 \left(\frac{i}{C_2} \right) - C_1 \left(\frac{i'}{C_2} \right)$$

et finalement :

$$i' = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot i = \frac{i}{10}$$

Pour toute tension $v(t)$, le courant dérivé dans le dispositif de mesure est dix fois plus faible que dans le cas du branchement direct (ce qui implique bien une impédance dix fois plus grande dans le cas du régime sinusoïdal permanent...).

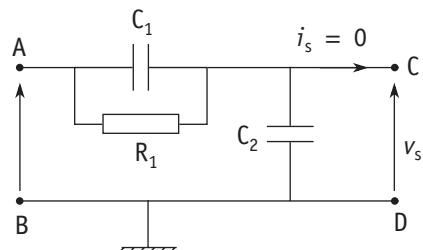
Pour que cette propriété soit indépendante de la forme de la fonction $v(t)$, il faut que les deux blocs (R_1C_1) et (R_2C_2) soient « semblables », ce qui correspond à l'égalité des constantes de temps...

404

Fonction de transfert

On cherche à déterminer les caractéristiques du quadripôle représenté sur la figure ci-contre.

On prendra $C_1 = 1 \text{ nF}$, $C_2 = 10 \text{ nF}$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ et on supposera que le quadripôle est branché en sortie sur une charge infinie de telle sorte que le courant de sortie i_s reste constamment nul.



1. On se place dans cette question en régime continu établi.

Déterminer les résistances d'entrée R_e et de sortie R_s du montage dans le cas où le circuit est alimenté – entre A et B – par :

a. un générateur idéal de tension continue E_0 ;

b. un générateur de tension continue de f.e.m. E_0 et de résistance interne $R_0 = 50 \Omega$.

2. Le générateur de tension est désormais sinusoïdal et de pulsation ω . On considère le régime sinusoïdal établi.

a. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$. Commenter.

Tracer les diagrammes de Bode donnant $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ ainsi que $\varphi(\omega) = \text{Arg}(\underline{H})$ en fonction de $\log\omega$.

On posera : $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$; $\omega_2 = \frac{1}{R_1(C_1 + C_2)}$ et $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

b. On ajoute en parallèle avec C_2 une résistance R_2 .

Reprendre l'étude précédente. On envisagera plusieurs cas selon que $R_2 C_2$ est supérieur, égal, ou inférieur à $R_1 C_1$.

Poser $\omega'_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}$ et $\omega'_0 = \sqrt{\omega_1 \omega'_2}$.

Tracer les diagrammes de Bode pour $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$; $C_1 = 1 \text{ nF}$ et :

- $\frac{R_2}{R_1} = 1$ avec $\frac{C_2}{C_1} = 10$;
- $\frac{C_2}{C_1} = 1$ avec $\frac{R_1}{R_2} = 10$.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Résistance d'entrée – résistance de sortie.
- Fonction de transfert.
- Diagrammes de Bode : comportements asymptotiques.

Outil mathématique

- Calculs sur les nombres complexes.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. On se place en régime continu établi, régime pour lequel les capacités sont équivalentes à des circuits ouverts.

2. Le courant i_s étant nul (charge infinie), le même courant traverse les branches AC et CD. On est alors en présence d'un diviseur de tension, ce qui permet de déterminer simplement l'expression de la fonction de transfert \underline{H} .

Les diagrammes de Bode doivent mettre en évidence les comportements asymptotiques (à T.B.F. et à T.H.F.), comportements que l'on peut retrouver directement en modifiant « à vue » le circuit proposé (à T.B.F., les capacités se réduisent – à la limite – à des circuits ouverts alors qu'en T.H.F., leur impédance tend vers zéro...).

3. Solution

1. a.

POINT COURS

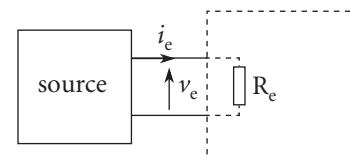
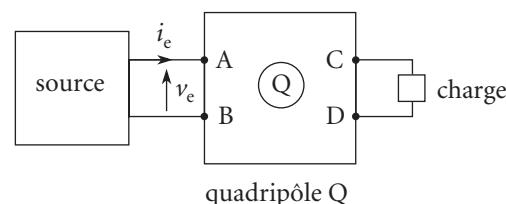
Considérons le système source - quadripôle [ABCD] - charge.

En régime continu établi, le dipôle [AB] vu de la source est équivalent à une résistance appelée résistance d'entrée R_e . On a ainsi :

$$R_e = \frac{v_e}{i_e}.$$

Elle ne dépend pas de la source mais dépend du quadripôle Q et en général de la charge.

Pour un générateur de tension (E_0, R_0) , le courant i_e sera d'autant moins sensible au « défaut » R_0 que la résistance d'entrée est grande ($R_e \gg R_0$).



En régime continu établi, les condensateurs ne se laissent pas traverser par un courant : ils sont alors équivalents à des coupe-circuit. Le montage devient :

On a donc : $i_e = 0$ et $R_e = \frac{v_e}{i_e}$ est infinie.

Dans cette question, le générateur de tension continue est idéal (E_0), l'ensemble source-quadripôle se réduit alors à :

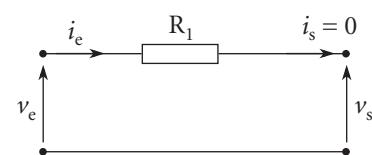
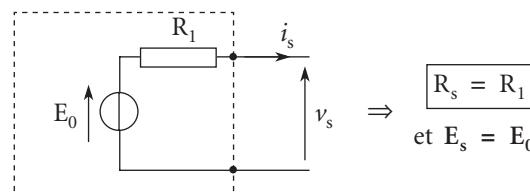


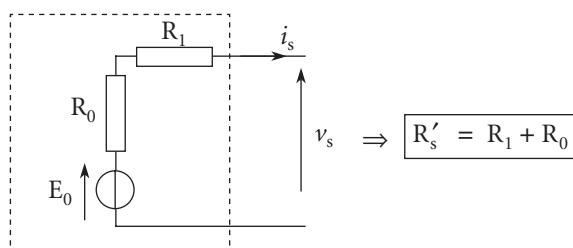
Fig. 1



D'où $R_s = R_1 = 10 \text{ k}\Omega$

1. b. Le générateur de tension continue n'est plus idéal (E_0, R_0). La valeur de la résistance d'entrée n'en est pas modifiée (elle n'est pas liée à la source). Pour la résistance de sortie, le système source-quadripôle devient :

Mais $R_0 = 50 \Omega$ et $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ soit $R'_s = R_s = 10 \text{ k}\Omega$



2. a.

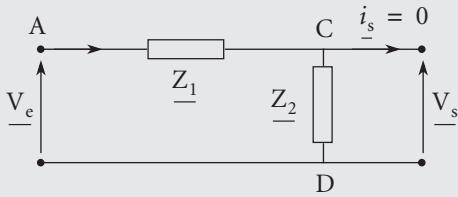
POINT MÉTHODE

Notons \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 les impédances des branches AC et CD. Le courant i_s étant nul, \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 constituent un *diviseur de tension*. On a donc :

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}, \text{ où } \underline{Y}_1 \text{ et}$$

\underline{Y}_2 sont les admittances complexes associées à \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 ($\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}$ et $\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}$).

Ceci suppose que $i_s = 0$ et donc que l'impédance d'entrée du système placé en aval de CD soit idéalement infinie ($|\underline{Z}_e| \gg \underline{Z}_2$ en pratique...).



$$\text{Or } \underline{Y}_2 = jC_2\omega \quad \text{et} \quad \underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1} + jC_1\omega = \frac{1}{R_1}(1 + jR_1C_1\omega)$$

$$\text{soit } \underline{H} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega + jR_1C_2\omega} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{1 + jR_1(C_1 + C_2)\omega}.$$

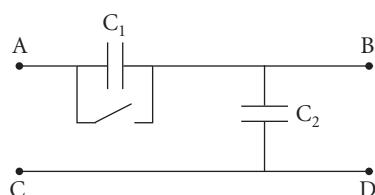
$$\text{Posons alors } \omega_1 = \frac{1}{R_1C_1} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_1(C_1 + C_2)} \quad (\omega_2 < \omega_1) :$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}}$$

Commentaires

- Pour ω tendant vers zéro on obtient $\underline{H} \rightarrow 1$, ce qui s'explique en considérant qu'à la limite les deux condensateurs constituent des coupe-circuit. On est alors ramené au circuit représenté à la figure 1. Dès lors $\underline{V}_e = \underline{V}_s$ et $\underline{H} = 1$. De plus $\varphi = 0$.
- Pour ω tendant vers l' ∞ (c'est-à-dire en fait pour $\omega \gg \omega_1 > \omega_2$) \underline{H} devient équivalent, à la limite, à $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, soit : $\underline{H} \sim \frac{C_1}{C_1 + C_2}$.

Cette fois-ci le circuit se réduit à :



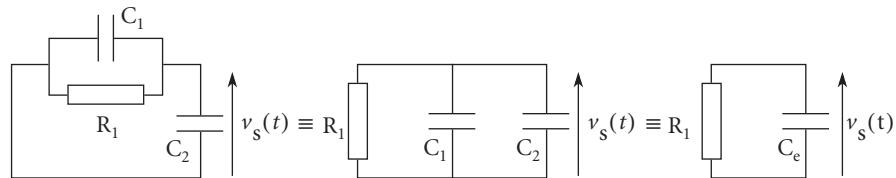
$$\text{D'où : } \underline{H} \sim \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_1} = \frac{jC_1\omega}{jC_2\omega + jC_1\omega} \quad \text{et} \quad \underline{H} \sim \frac{\underline{C}_1}{\underline{C}_1 + \underline{C}_2}.$$

De même $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi = 0$.

- Les deux pulsations ω_1 et ω_2 intervenant dans la fonction de transfert 2. a. sont en fait celles des circuits : $[R_1 - C_1]$ d'une part ($\tau_1 = R_1 C_1$ et $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{R_1 C_1}$) et $[R_1 - (C_1 // C_2)]$ d'autre part ($\tau_2 = R_1(C_1 + C_2)$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{R_1(C_1 + C_2)}$). Ceci peut se comprendre aisément en considérant l'équation différentielle associée au circuit proposé et en prenant en compte deux cas particuliers :

$$\underline{H} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} \Rightarrow v_s + \tau_2 \frac{dv_s}{dt} = v_e + \tau_1 \frac{dv_e}{dt}.$$

Si l'on fait donc $v_e(t) = 0$, on a pour $v_s(t)$:



avec $C_e = C_1 + C_2$, d'où la constante de temps $\tau_2 = R_1 C_e = R_1(C_1 + C_2)$.

De même, en faisant cette fois-ci $v_s(t) = 0$, nous obtenons pour $v_e(t)$:



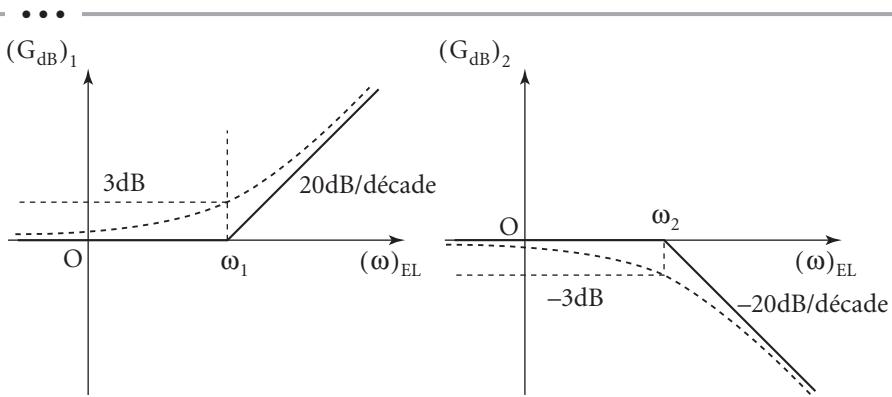
POINT COURS

La fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$ peut se réécrire :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 \quad \text{avec} \quad \underline{H}_1 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1} \quad \text{et} \quad \underline{H}_2 = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}.$$

\underline{H}_1 et \underline{H}_2 sont des fonctions de transfert du premier ordre dont les diagrammes asymptotiques sont donnés, pour G_{dB} , par (traits pleins) :

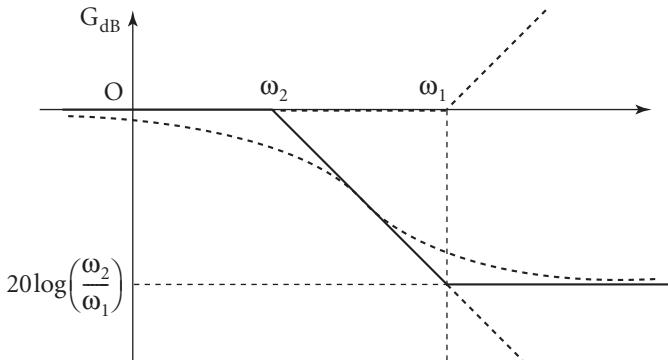
• • •



$$\omega \ll \omega_1 : (G_{dB})_1 \rightarrow 0 ; \quad \omega \ll \omega_2 : (G_{dB})_2 \rightarrow 0 .$$

$$\omega \gg \omega_1 : (G_{dB})_1 \sim 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) ; \quad \omega \gg \omega_2 : (G_{dB})_2 \sim -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right).$$

On peut ainsi obtenir un diagramme asymptotique de $G_{dB} = 20\log|H|$ par simple « addition » des diagrammes précédents ; soit dans le cas où $\omega_2 < \omega_1$:



$$\text{En effet : } \omega \ll \omega_2 \text{ et } \omega_1 \quad G_{dB} \rightarrow 0 + 0 = 0$$

$$\omega \gg \omega_2 \text{ et } \omega_1 \quad G_{dB} \rightarrow 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right) = 20\log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

■ Diagramme de Bode donnant $\log\omega \rightarrow G_{dB} = 20\log|H|$

$$\text{On a } |H| = \frac{\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right|}{\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right|} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}$$

$$\text{D'où } G_{dB} = 10\log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) - 10\log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)$$

– Pour $\omega \ll \omega_1 < \omega_2$: $G_{\text{dB}} \rightarrow 0$ ($G_{\text{dB}} \sim 10\omega^2 \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right)$).

– Pour $\omega \gg \omega_1 > \omega_2$: $G_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \right) \sim 20 \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = G_0$.

– Pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$: $G_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}}{1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}} \right) = 10 \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{G_0}{2}$.

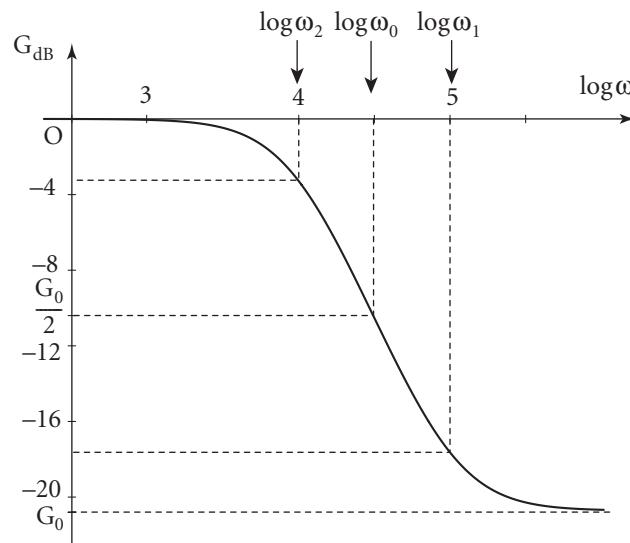
D'autre part, G est ici une fonction monotone décroissante de ω , d'où le graphe avec :

$$\omega_1 = \frac{1}{10^4 \cdot 10^{-9}} = 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \rightarrow \log \omega_1 = 5 \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}}(\omega_1) = -17,85 \sim -17,9$$

$$\omega_2 = \frac{1}{10^4 \cdot 11 \cdot 10^{-9}} = 9,09 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \rightarrow \log \omega_2 = 3,96 \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}}(\omega_2) = -2,97$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad \text{et} \quad \log \omega_0 = \frac{1}{2}(\log \omega_1 + \log \omega_2) = 4,48 \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}}(\omega_0) = -10,4.$$

$$G_0 = 20 \log \frac{C_1}{C_1 + C_2} \rightarrow G_0 = -20,8.$$



- Diagramme de Bode donnant le déphasage φ de la tension de sortie sur la tension d'entrée : $\log\omega \rightarrow \varphi(\omega)$

POINT MÉTHODE

φ est complètement défini par la valeur de sa tangente et par le signe de $\cos\varphi$ ou de $\sin\varphi$.

On cherchera donc à déterminer l'expression de $\tan\varphi$ ainsi que l'intervalle auquel appartient φ .

$$\text{On a } \underline{H} = |\underline{H}| e^{j\varphi} \text{ avec } \underline{H} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} = \frac{a_1 e^{j\theta_1}}{a_2 e^{j\theta_2}} = \frac{a_1}{a_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

où a_1 et a_2 sont les modules du numérateur et du dénominateur ($a_1 > 0$ et $a_2 > 0$).

On a donc $\varphi = \theta_1 - \theta_2$

$$\text{avec : } \begin{cases} \tan\theta_1 = \frac{\omega}{\omega_1} \quad \text{et} \quad \cos\theta_1 > 0 \rightarrow \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan\theta_2 = \frac{\omega}{\omega_2} \quad \text{et} \quad \cos\theta_2 > 0 \rightarrow \theta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

D'autre part, $\omega_1 > \omega_2$ implique $\theta_2 > \theta_1$ et donc :

$$\varphi < 0 \text{ avec } -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0.$$

$$\text{De plus, } \tan\varphi = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega}{\omega_2}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_1 \omega_2}}.$$

$$\text{Posons } x = \frac{\omega}{\omega_0} (\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}) \Rightarrow \tan\varphi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \frac{1}{x + \frac{1}{x}}.$$

On constate alors que φ est invariant par le changement de x en $\frac{1}{x}$: $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

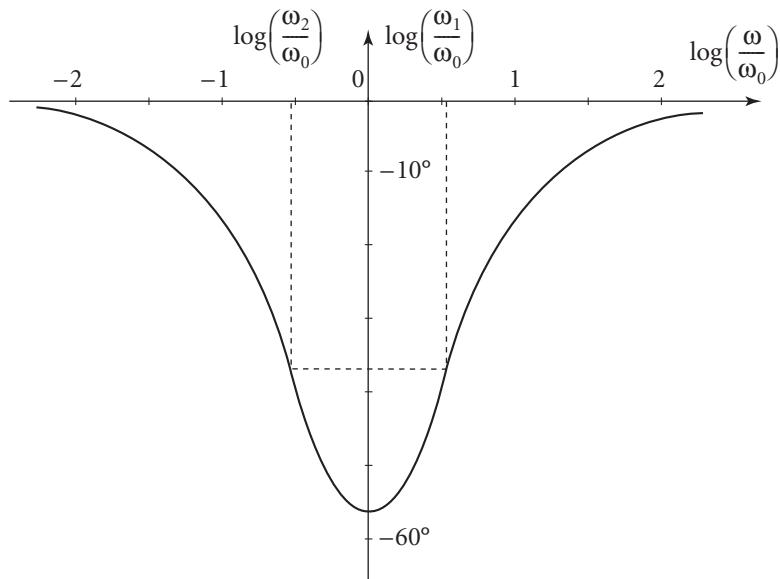
$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x) = F(\log x) \\ \text{Or } \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = F(-\log x) \end{array} \right\} \text{La fonction } X = \log x \rightarrow F(X) \text{ est donc paire et le graphe associé est symétrique par rapport à l'axe } X = 0 \text{ (c'est-à-dire } \omega = \omega_0).$$

Une étude rapide de la fonction $\varphi(\omega)$ donne :

– pour $\omega \ll \omega_1$ et ω_2 : $\varphi \sim \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega}{\omega_2}$ et φ tend vers 0 en même temps que ω ;

- pour $\omega \gg \omega_1$ et ω_2 : θ_2 et $\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $\varphi \rightarrow 0$;
- pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ (soit $x = 1$): $\tan \varphi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0}$;
- de plus, φ est minimal pour $\omega = \omega_0$, la quantité $x + \frac{1}{x}$ étant minimale pour $x = 1$ (et $\omega_2 - \omega_1$ est négatif).

D'où le graphe $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \rightarrow \varphi(\omega)$ avec $\varphi(\omega_1) = -39,8^\circ$, $\varphi(\omega_2) = -39,8^\circ$ et $\varphi(\omega_0) = -56,4^\circ$.



2. b. La résistance R_2 étant placée en parallèle avec C_2 , l'admittance \underline{Y}_2 s'écrit :

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega = \frac{1}{R_2}(1 + jR_2C_2\omega).$$

La fonction de transfert devient :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{\frac{1}{R_1}(1 + jR_1C_1\omega)}{\frac{1}{R_1}(1 + jR_1C_1\omega) + \frac{1}{R_2}(1 + jR_2C_2\omega)}$$

$$\text{soit encore : } \underline{H} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + jR_1C_1\omega}{1 + j\frac{R_2R_1}{R_1 + R_2}(C_1 + C_2)\omega}.$$

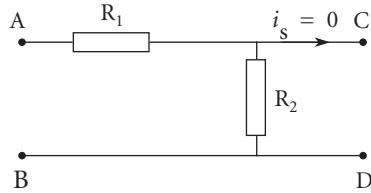
$$\text{Posons : } H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{R_1C_1} \quad \text{et} \quad \omega'_2 = \frac{1}{\frac{R_2R_1}{R_1 + R_2}(C_1 + C_2)}$$

d'où

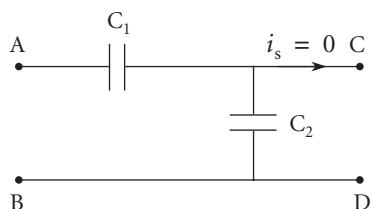
$$\underline{H} = H_0 \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega'_2}}$$

Commentaires

• À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_1$ et ω'_2),
 $\underline{H} \rightarrow H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, les capacités se réduisent à des coupe-circuit et le circuit devient un simple diviseur de tension (ici formé des résistances R_1 et R_2).



• À très haute fréquence, le résultat est inchangé par rapport au 2.a., le circuit étant équivalent à un diviseur de tension capacitif.



Et :

$$\underline{H} \rightarrow \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

• La fréquence « centrale » ω'_0 s'écrit maintenant :

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_1 \omega'_2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{\left(\frac{1}{(R_1 C_1)^2} + \frac{1}{C_2}\right)}} = \frac{1}{R_1 C_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{C_2}{C_1}}}$$

$$(on a \quad \omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_2}}).$$

Pour ce circuit, et pour les mêmes raisons que celles exposées dans le commentaire de la question 2.a., les pulsations ω_1 et ω'_2 sont celles associées aux circuits $[R_1 - C_1]$ et $[(R_1 // R_2) - (C_1 // C_2)]$.

D'où les différents diagrammes de Bode :

1^{er} cas :

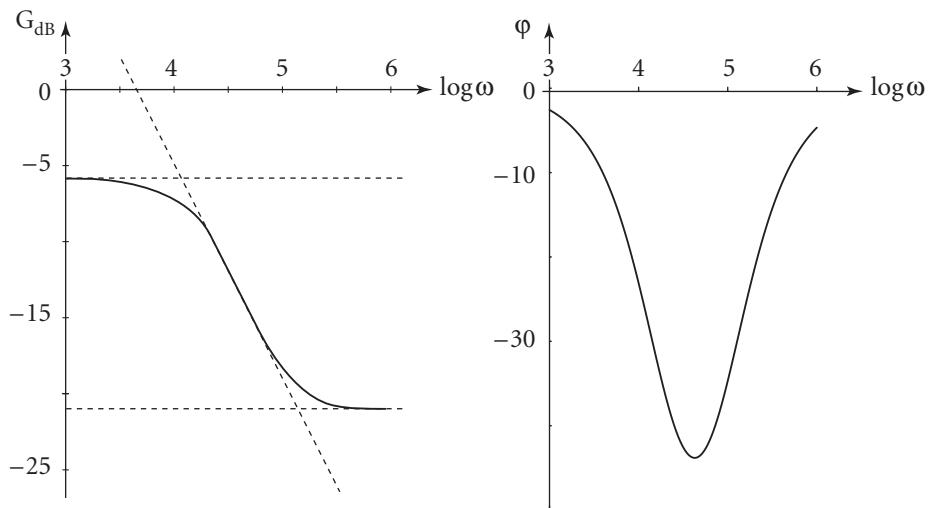
$$\omega_1 = \omega'_2 \text{ soit } R_1 C_1 = R_1 C_1 \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \text{ ce qui exige } \frac{R_1}{R_2} = \frac{C_2}{C_1} \text{ et donc}$$

$R_1 C_1 = R_2 C_2$. Dans ce cas, la fonction de transfert est indépendante de la pulsation ω :

$$\underline{H} = H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \text{ et } G_{dB} = 20 \log H_0; \phi = 0.$$

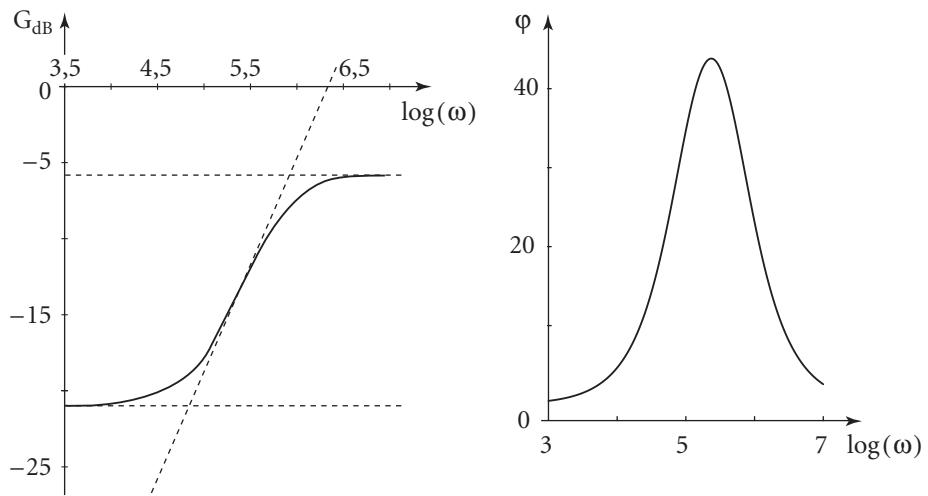
2^e cas :

$R_1 C_1 < R_2 C_2$ et donc $\frac{R_1}{R_2} < \frac{C_2}{C_1}$ soit $\omega'_2 < \omega_1$; les courbes sont de même nature que celles tracées au 2. a. :



Ici, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$; $C_1 = 1 \text{ nF}$, $C_2 = 10 \text{ nF}$ et on a pris : $R_2 = R_1$. On a alors $\log \omega'_0 = 4,63$.

3^e cas : $R_1 C_1 > R_2 C_2$ soit $\omega'_2 > \omega_2$ les courbes sont alors « inversées ». On obtient :



Ici, $C_1 = C_2 = 1 \text{ nF}$; $\frac{R_1}{R_2} = 10$ ($R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 1 \text{k}\Omega$) et $\log \omega'_0 = 4,63$.

405

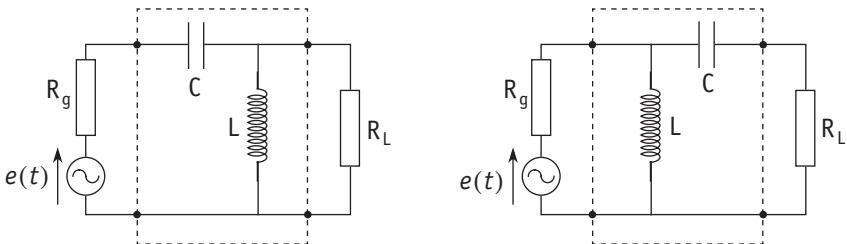
Adaptation d'impédance

1. Un générateur de tension sinusoïdale alternative de f.e.m. $e(t) = E \cos \omega t$ et d'impédance interne (*complexe*) \underline{Z} alimente une impédance de charge \underline{Z}' .

À quelle(s) condition(s) sur \underline{Z}' la puissance électrique reçue par la charge est-elle maximale ?

2. Le générateur précédent a maintenant une impédance interne réelle Z_g et doit alimenter une charge réelle R_L avec $R_L \neq R_g$.

Pour réaliser l'adaptation en puissance ci-dessus, on propose d'intercaler entre générateur et charge un module L-C selon l'un des montages suivants :



Quel montage faut-il adopter ? Quelles valeurs faut-il prendre pour L et C ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Utilisation des amplitudes complexes.
- Puissance reçue par un dipôle.

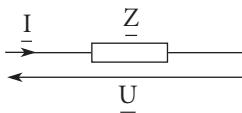
2. Ce qu'il faut comprendre

Déterminer les caractéristiques de l'impédance de charge qui permet de recevoir la puissance maximale d'un générateur donné consiste à « adapter » la charge au générateur.

3. Solution

1.

POINT COURS



La puissance moyenne reçue par un dipôle d'impédance complexe \underline{Z} , soumis à une tension sinusoïdale $u = U \cos \omega t$ et parcouru par un courant $i = I \cos(\omega t + \varphi)$ s'écrit :

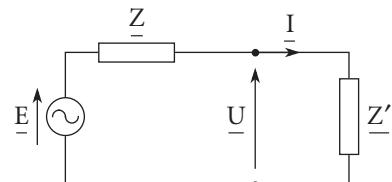
$$P = \frac{1}{2} UI \cos \varphi = \frac{1}{2} I^2 \cdot \operatorname{Re}\{\underline{Z}\}.$$

En adoptant la notation en amplitudes complexes,

$$\text{on a } \frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}' \cdot \underline{I}}{\underline{E} - \underline{Z} \underline{I}}.$$

Soit ici avec $\underline{E} = E$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z} + \underline{Z}'}.$$



La puissance reçue par \underline{Z}' est $P = \frac{1}{2} \underline{I}^2 \cdot \operatorname{Re}\{\underline{Z}'\}$.

Soit en notant $\underline{Z} = R + jX$ et $\underline{Z}' = R' + jX'$:

$$P = \frac{1}{2} \frac{R'E^2}{|\underline{Z} + \underline{Z}'|^2} \quad P = \frac{1}{2} \frac{R'E^2}{(R+R')^2 + (X+X')^2}.$$

P est une fonction des deux variables R' et X' .

Remarquons que pour obtenir la puissance maximale, X' pouvant être de signe quelconque, la première chose à faire est d'annuler le terme $(X+X')^2$, d'où $X' = -X$.

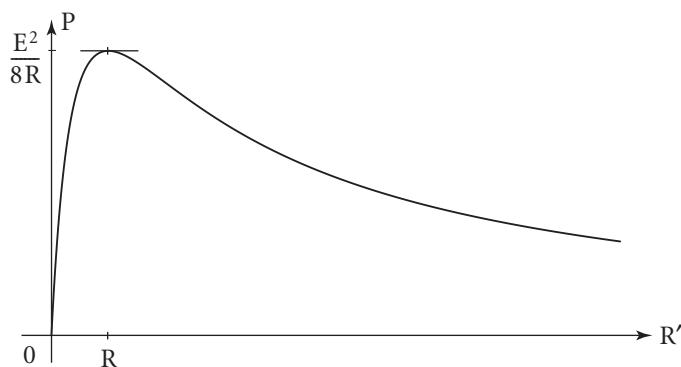
Il reste alors à chercher le maximum de la fonction $P(R') = \frac{R'E^2}{2(R+R')^2} = \frac{E^2}{2} f(R')$

soit en dérivant par rapport à R' :

$$f'(R') = \frac{1}{(R+R')^2} - \frac{2R'}{(R+R')^3}$$

$$f'(R') = \frac{1}{(R+R')^3}(R+R'-2R').$$

Cette dérivée s'annule pour $R = R'$ et correspond bien à un maximum : la fonction f est positive, s'annule pour $R' = 0$ et $R' \rightarrow \infty$. D'où le graphe de $P(R')$:



On peut regrouper les deux conditions trouvées pour obtenir le maximum de P :

$$\left. \begin{array}{l} X' = -X \\ R' = R \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}' = \underline{Z}^*}$$

\underline{Z}^* désignant l'impédance imaginaire conjuguée de \underline{Z} .

Dans ces conditions, on a « adapté » l'impédance au générateur.

2. Dans le cas d'impédances réelles, la condition précédente se réduit à : $R_L = R_g$. Cette condition n'est évidemment pas réalisée.

- Considérons l'impédance de charge Z' branchée aux bornes du générateur dans le cas du premier montage proposé : la puissance absorbée par ce dipôle est égale à la puissance consommée dans R_L , seul élément dissipatif du dipôle, la condition d'adaptation établie au 1. s'écrit donc ici :
- $$R_g = Z'$$

avec $R_g = \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R_L}}$

soit

$$\begin{aligned} R_g - \frac{1}{jC\omega} &= \frac{jL\omega R_L}{R_L + jL\omega} \\ \left(R_g - \frac{1}{jC\omega} \right) (R_L + jL\omega) &= jL\omega R_L \\ R_g R_L - \frac{L}{C} + j \left(L\omega R_g + \frac{R_L}{C\omega} \right) &= jL\omega R_L \end{aligned}$$

d'où les deux conditions :

$$\begin{cases} R_g R_L - \frac{L}{C} = 0 \\ L\omega R_g + \frac{R_L}{C\omega} = L\omega R_L \end{cases}$$

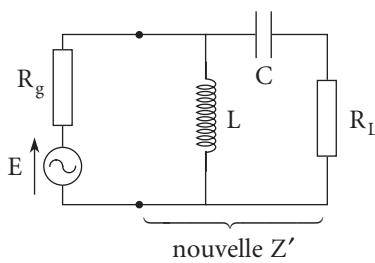
La seconde relation impose $LC\omega^2 = \frac{R_L}{R_L - R_g}$

ce qui n'est possible que si $R_L > R_g$.

Dans ce cas, avec $\frac{L}{C} = R_g R_L$, on obtient :

$$\begin{aligned} L &= \frac{R_L}{\omega \sqrt{R_L - R_g}} && (\text{si } R_L > R_g) \\ C &= \frac{1}{\omega \sqrt{R_g(R_L - R_g)}} \end{aligned}$$

- Il reste à étudier le second montage proposé :



On veut $\underline{Z}' = R_g$ ou $\underline{Y}' = \frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1}{R_g}$

soit :

$$\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R_L + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{R_g}$$

$$\frac{jC\omega}{1 + jC\omega R_L} = \frac{1}{R_g} - \frac{1}{jL\omega}$$

$$\frac{jC\omega}{1 + jC\omega R_L} = \frac{jL\omega - R_g}{jL\omega R_g}$$

$$-LC\omega^2 R_g = (1 + jC\omega R_L)(jL\omega - R_g).$$

D'où les deux conditions :

$$\begin{cases} -LC\omega^2 R_g = -R_g - LC\omega^2 R_L \\ 0 = L\omega - C\omega R_L R_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} LC\omega^2 = \frac{R_g}{R_g - R_L} \\ \frac{L}{C} = R_L R_g \end{cases}$$

Ceci n'est possible que si $R_g > R_L$ et dans ce cas :

$$L = \frac{R_g}{\omega} \sqrt{\frac{R_L}{R_g - R_L}}$$

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{R_L(R_g - R_L)}}$$
(si $R_g > R_L$).

Les deux montages proposés permettent donc de trouver une solution dans tous les cas, le choix du montage dépendant des valeurs relatives de R_L et R_g .

Commentaire

Ce problème d'adaptation d'impédance a une grande importance pratique dans le cas des émetteurs d'ondes radio :

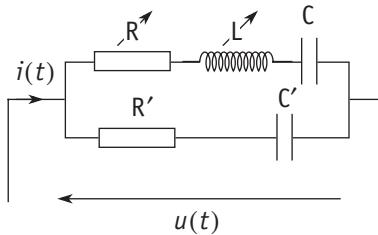
L'adaptation correspond à la transmission d'un maximum de puissance à l'antenne, afin de rendre maximale la puissance rayonnée.

406

Deux branches en parallèle

Partie A

Le dipôle représenté ci-dessous est alimenté en régime permanent par une source de tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos \omega t$.



1. On prend $R = R'$ dans cette question, les valeurs de C, C', R', U_0 et ω étant imposées.
- a. Pour quelle(s) valeur(s) de L les deux branches du circuit absorbent-elles la même puissance électrique ?
- b. Retrouver les résultats précédents à partir d'une représentation de Fresnel.

2. Reprendre les questions du 1. dans le cas où R est différente de R' .

$$\text{On posera } R_0 = R' \left(1 + \frac{1}{R'^2 C'^2 \omega^2} \right).$$

Partie B

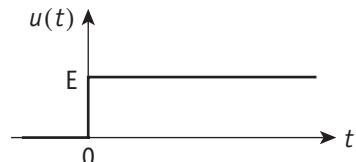
On supprime la capacité de la branche supérieure.

1. À quelle(s) condition(s) portant sur R, R', L et C' l'impédance complexe du dipôle est-elle indépendante de ω ?

2. Le condensateur C' n'étant pas chargé pour $t < 0$, on applique au dipôle un échelon de tension d'amplitude E .

Déterminer le courant $i(t)$ traversant le dipôle.
À quelles conditions ce courant est-il constant pour $t > 0$?

3. Commenter les résultats obtenus aux B.1. et B.2.



1. Solution

Partie A

1. a. La puissance moyenne P absorbée par un dipôle d'impédance complexe Z s'exprime par :

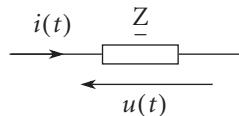
$$P = \frac{1}{2} U_0 I \cos \phi$$

avec : $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$

soit encore : $U_0 = \underline{Z}Ie^{j\phi}$.

Posons $\underline{Z} = A + jX$ et donc $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{A^2 + X^2}$:

$$Ie^{j\phi} = \frac{U_0}{\underline{Z}} = \frac{U_0}{Z^2} \underline{Z}^*$$



$$u(t) = U_0 \cos \omega t$$

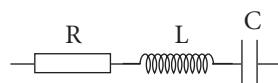
$$i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{et } I \cos \phi = \operatorname{Re} \left\{ \frac{U_0}{Z^2} \underline{Z}^* \right\} = \frac{U_0}{Z^2} \operatorname{Re}(\underline{Z}^*) = \frac{U_0}{Z^2} A.$$

$$\text{Finalement : } P = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{Z^2} A$$

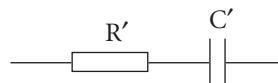
soit pour chaque branche :

$$\bullet \underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$



$$\text{d'où : } A = R \text{ et } Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}.$$

$$\bullet \underline{Z}' = R' - j \frac{1}{C'\omega}$$



$$\text{d'où : } A' = R' \text{ et } Z' = \sqrt{R'^2 + \frac{1}{C'^2 \omega^2}}.$$

D'où $P = \frac{1}{2} U_0^2 \frac{R}{Z^2}$ et $P' = \frac{1}{2} U_0^2 \frac{R'}{Z'^2} = \frac{1}{2} U_0^2 \frac{R}{Z'^2}$ puisque dans cette question, on a $R' = R$.

On aura $P = P'$ (même puissance absorbée dans les deux branches) pour $Z = Z'$ soit :

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 = R'^2 + \frac{1}{C'^2 \omega^2}$$

$$\text{ce qui donne : } L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm \frac{1}{C'\omega}.$$

Une première solution correspond à

$$L = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right) \frac{1}{\omega^2}$$

Il en existe une seconde pour $C < C'$:

$$L = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'} \right) \frac{1}{\omega^2}$$

1. b. On peut également exprimer la puissance P selon :

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}) I^2 = \frac{1}{2} RI^2.$$

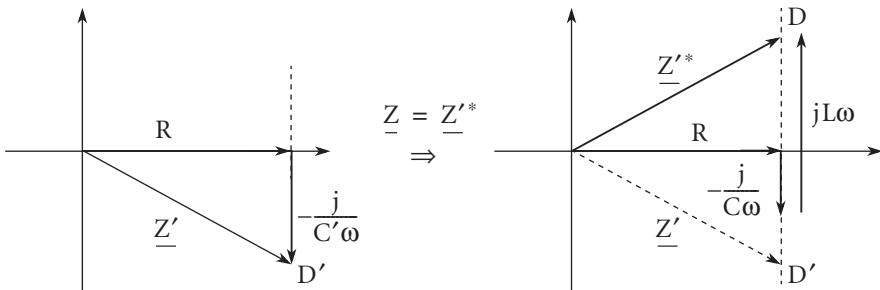
Or $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$ donne $\underline{U}_0 = \underline{Z}\underline{I}$ ($\underline{i} = \underline{I}e^{j\omega t}$)

$$\text{d'où } \underline{U}_0 = \underline{Z}\underline{I} \text{ et } P = \frac{1}{2}R\frac{\underline{U}_0^2}{\underline{Z}^2}$$

$P = P'$ avec $R = R'$ se traduit donc par $Z' = Z$.

Et $Z' = Z$ avec $R = R' \Rightarrow \underline{Z} = \underline{Z}'^*$ (conjugué de \underline{Z}') ou $\underline{Z} = \underline{Z}'$ soit en représentation de Fresnel :

■ 1^{er} cas

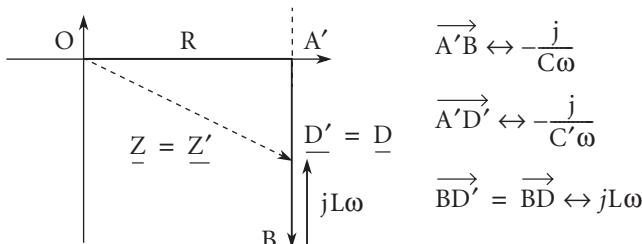


Cas toujours possible

On doit avoir dans ce cas (points D et D' symétriques) : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C'\omega}$

$$\text{d'où : } L\omega = \frac{1}{C'\omega} + \frac{1}{C\omega} \text{ soit } \boxed{L = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{C'} + \frac{1}{C} \right)}$$

■ 2^e cas



Cette dernière configuration n'est possible que pour $A'B > A'C$ soit $\frac{1}{C\omega} > \frac{1}{C'\omega}$, c'est-à-dire pour $C < C'$. Dès lors, il vient :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} - \frac{1}{C'\omega} \Rightarrow \boxed{L = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'} \right) \frac{1}{\omega^2}}$$

2. On a maintenant $R' \neq R$, et la relation $P = P'$ s'écrit alors :

$$\frac{R}{Z^2} = \frac{R'}{Z'^2}, \text{ soit } Z'^2 = \frac{R'}{R}Z^2.$$

Soit encore :

$$R'^2 + \frac{1}{C'^2\omega^2} = \frac{R'}{R} \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right], \text{ et } \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 = RR' - R^2 + \frac{R}{R'C'^2\omega^2}$$

ce qui n'est possible que pour : $RR' - R^2 + \frac{R}{R'C'^2\omega^2} \geq 0$

c'est-à-dire pour : $R \leq R' \cdot \left(1 + \frac{1}{R'^2 C'^2 \omega^2} \right)$.

Posons $R_0 = R' \cdot \left(1 + \frac{1}{R'^2 C'^2 \omega^2} \right) \Rightarrow R \leq R_0$.

On obtient alors :

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 = R(R_0 - R)$$

ce qui donne :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \sqrt{R(R_0 - R)} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{\sqrt{R(R_0 - R)}}{\omega}}$$

et $L\omega - \frac{1}{C\omega} = -\sqrt{R(R_0 - R)}$ pour $\frac{1}{C} > \sqrt{R(R_0 - R)}\omega$

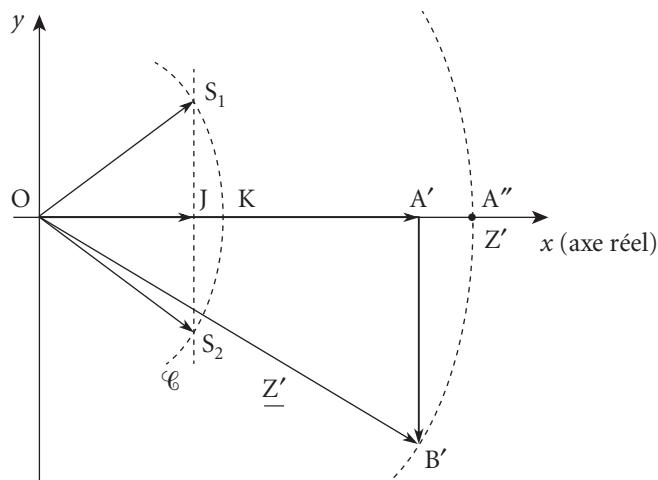
soit

$$\boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} - \frac{\sqrt{R(R_0 - R)}}{\omega}}$$

Il y a là encore (pour $R \leq R_0$) une ou deux valeurs de L satisfaisant à la condition imposée.

■ À l'aide de la représentation de Fresnel :

on a ici $R' \neq R$ et $Z' = \sqrt{\frac{R'}{R}}Z$. Pour illustrer le propos, supposons $R' > R$.



On a $OA' = R'$ et $A'B' = \frac{1}{C'\omega}$. On trace alors le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon $OK = Z = \sqrt{\frac{R}{R'}}Z' < (Z' = OA'')$. L'impédance \underline{Z} est représentée par un vecteur \overrightarrow{OS} dont l'extrémité S doit se situer sur ce cercle avec :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right), \text{ soit } \overrightarrow{OS} \cdot \vec{i} = R = OJ.$$

Le problème n'est possible que pour $OJ \leq OK$ ($R \leq Z$), soit pour :

$$R^2 \leq \frac{R}{R'}Z'^2 \Rightarrow R \leq \left[\frac{1}{R'} \left(R'^2 + \frac{1}{C'^2\omega^2} \right) = R_0 \right].$$

On retrouve la condition $R \leq R_0$.

Dans ce cas ($R \leq R_0$), il existe *a priori* deux solutions (points S_1 et S_2).

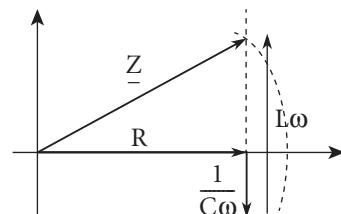
- La solution associée à S_1 est toujours possible, elle correspond à :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} + \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$\text{soit } L\omega = \frac{1}{C\omega} + \sqrt{\frac{R}{R'} \left(R'^2 + \frac{1}{C'^2\omega^2} \right) - R^2}$$

et

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} + \sqrt{RR_0 - R^2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{\sqrt{R(R_0 - R)}}{\omega}}$$



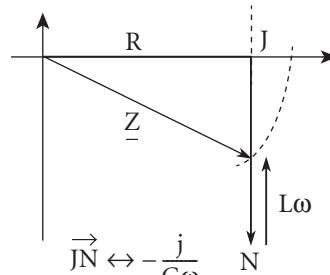
- La seconde solution (point S_2) n'est envisageable que pour :

$$\frac{1}{C\omega} > \sqrt{Z^2 - R^2} \Rightarrow \frac{1}{C\omega} > \sqrt{RR_0 - R^2}.$$

On a alors :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} - \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$\text{soit} \quad \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} - \frac{\sqrt{R(R_0 - R)}}{\omega}}$$



Commentaire

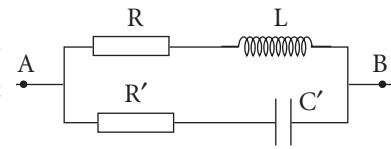
Notons que, dans le cas où $R \neq R'$, les arguments de \underline{Z} et \underline{Z}' ne sont pas plus égaux ou opposés, et qu'il existe un cas particulier ($Z = R$) pour lequel \underline{Z} est réel, alors que \underline{Z}' ne l'est pas. On a alors :

$$Z = R = R_0 = R' \left(1 + \frac{1}{(R'C'\omega)^2} \right)$$

$$\text{et } L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \text{ soit } LC\omega^2 = 1.$$

Partie B

1. Lorsque l'impédance complexe \underline{Z} du dipôle [AB] est indépendante de la pulsation ω , il en est de même de son admittance complexe $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$.



Or $\underline{Y} = \underline{Y}_{RL} + \underline{Y}_{R'C'}$ (association en parallèle) et $\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1}{R \left(1 + j\frac{L\omega}{R}\right)}$.

$$\text{De même } \underline{Y}_{R'C'} = \frac{1}{R' + \frac{1}{jC'\omega}} = \frac{jC'\omega R'}{R'(1 + jR'C'\omega)}.$$

Posons $\tau = \frac{L}{R}$ et $\tau' = R'C'$, il vient :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau} + \frac{1}{R'} \cdot \frac{j\omega\tau'}{1 + j\omega\tau'}$$

soit encore :

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{R'} + \left\{ \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau} - \frac{1}{R'} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau'} \right\}}$$

On a alors $\underline{Y}(0) = \frac{1}{R}$ et $\lim_{\infty} \underline{Y} = \frac{1}{R'}$. Une condition nécessaire est donc $R = R'$; \underline{Y} devient alors :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{1}{1 + j\omega\tau} - \frac{1}{1 + j\omega\tau'} \right\}.$$

Cette nouvelle expression est indépendante de ω pour $\tau = \tau'$.

Les conditions cherchées sont :

$$R = R' \text{ et } \tau = \tau' \Rightarrow \underline{Y}(\omega) = \frac{1}{R} \text{ et } \underline{Z}(\omega) = R.$$

Il faut donc que :

$$\boxed{R' = R \text{ et } L = R^2 C'}$$

2. On soumet le dipôle AB à un échelon de tension d'amplitude E. Pour $t > 0$, les équations des branches sont :

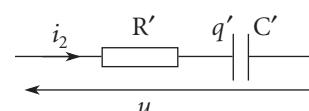
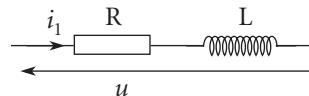
$$E = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} \quad (1)$$

$$E = R'i_2 + \frac{q'}{C'}$$

$$\text{soit avec } i_2 = \frac{dq'}{dt}; 0 = C'R' \frac{di_2}{dt} + i_2 \quad (2)$$

Intégrons ces deux équations :

$$(1) \text{ donne : } i_1(t) = \frac{E}{R} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ (où } \tau = \frac{L}{R} \text{)}$$



or $i_1(0^+) = 0$ (continuité du courant dans l'inductance) $\Rightarrow i_1(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

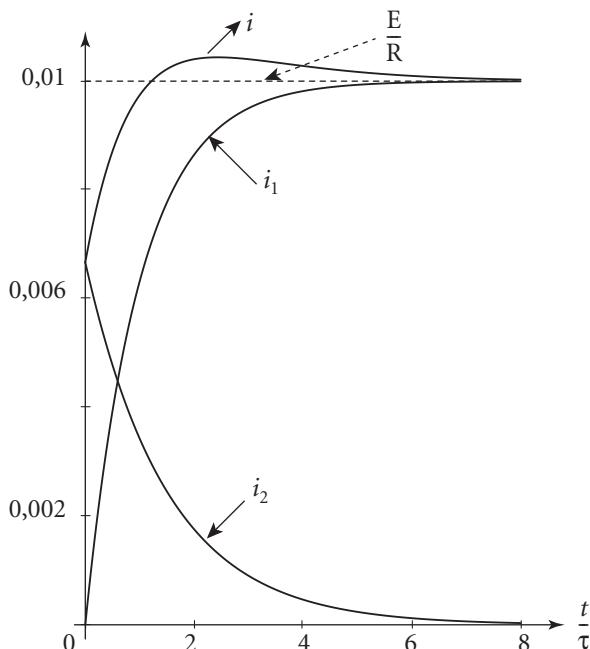
(2) fournit : $i_2(t) = \mu e^{-\frac{t}{\tau'}}$ (où $\tau' = R'C'$)

or $u(0^+) = E = R'i_2(0^+) + \frac{q'(0^+)}{C'} = R'i_2(0^+)$ (continuité de la charge du condensateur) $\Rightarrow i_2(t) = \frac{E}{R'} e^{-\frac{t}{\tau'}}$.

D'où, avec $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$i(t) = \frac{E}{R} + \left\{ \frac{E}{R'} e^{-\frac{t}{\tau'}} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right\}$$

On a représenté ci-dessous les courbes donnant $\frac{t}{\tau} \rightarrow i_1$, i_2 , i et $\frac{E}{R} = \frac{u(t > 0)}{R}$ pour $R = 1\,000\ \Omega$; $R' = 1\,500\ \Omega$ et $\tau' = 1,5\tau$.



Le courant $i(t)$ est constant pour $t > 0$ et vaut $\frac{E}{R}$ si les deux termes où figurent les exponentielles s'annulent, ce qui se produit dès que :

$$R' = R \text{ et } \tau' = \tau$$

On retrouve les conditions établies au B.1.

3. Les résultats obtenus au B.1. et B.2. sont identiques. Ces deux approches permettent de conclure, les conditions $R' = R$ et $L = R^2C'$ étant réalisées, à la proportionnalité entre la tension imposée $u(t)$ et le courant $i(t)$ que doit débiter le générateur de tension délivrant $u(t)$, à savoir :

$$i(t) = \frac{1}{R}u(t).$$

Ceci n'a rien d'étonnant si on se rappelle que l'on peut « toujours » décomposer un signal temporel $u(t)$ en une somme continue de composantes sinusoïdales. Si l'on obtient ainsi une même relation de proportionnalité entre les composantes sinusoïdales de $i(t)$ et $u(t)$, il en sera évidemment de même pour ces deux grandeurs (à rapprocher de la relation étroite associant fonction de transfert et équation différentielle...).

407

Puissance consommée

1. Le dipôle AB représenté sur la figure ci-contre est alimenté par un générateur **idéal** de tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace $U_e = 220V$, R est une résistance variable.

a. Déterminer la puissance moyenne P (puissance active) absorbée par le circuit.

b. On constate que cette puissance P fournie par le générateur est maximale pour une valeur $R_1 = 25 \Omega$ de R . En déduire les valeurs de L' et de la puissance maximale P_m effectivement consommée.

c. Pour une valeur R_2 de R ($R_2 > R_1$), le facteur de puissance du circuit devient égal à l'unité, et la puissance consommée est de 500 W.

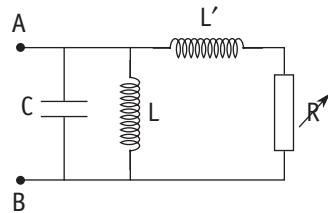
Donner les valeurs de la capacité C et de R_2 sachant que $L = 1 H$.

2. Le dipôle AB est désormais alimenté par un générateur parfait de courant sinusoïdal de valeur efficace I_e et de pulsation ω .

Déterminer la puissance P consommée dans le circuit, et tracer la courbe donnant $\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)}$ en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ à R, L, L', C fixés. On prendra les valeurs de L' et C déterminées plus haut ainsi que $R = R_2$.

Commenter le résultat obtenu.

On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.



Solution

1. a. La puissance moyenne fournie par le générateur est celle qui est consommée dans l'élément dissipatif constitué par la résistance R.

Or la tension U s'applique directement au dipôle L'-R. Il reste donc à calculer la valeur efficace du courant traversant R (la capacité C et l'inductance L ne jouent aucun rôle quant à la détermination de cette puissance).

Désignons par $i'(t)$ le courant parcourant la branche L'-R. On a :

$$P = \langle R i'^2(t) \rangle = R \langle i'^2 \rangle \text{ avec } \langle i'^2 \rangle^2 = \frac{1}{T} \int_{t'=0}^{t'=T} i'^2(t') dt' = I_e'^2$$

d'où $P = RI_e'^2$

I_e' = intensité efficace.

Or $\underline{u} = \underline{Z}' \underline{i}'$ en notation complexe où $\underline{Z}' = R + jL'\omega$.

Soit $U_e = Z'I_e'$ (Z' : module de \underline{Z}')

$$\text{et } I_e' = \frac{U_e}{\sqrt{R^2 + L'^2\omega^2}} \Rightarrow P = U_e^2 \frac{R}{R^2 + L'^2\omega^2} \quad (1)$$

$$\text{1. b. } \text{Cette puissance se réécrit : } P = \frac{U_e^2}{\left(R + \frac{L'^2\omega^2}{R} \right)} = \frac{U_e^2}{f(R)}.$$

L'expression au dénominateur est minimale pour $R = L'\omega$ ($f(R)$ tend vers l'infini pour $R = 0$ et R infini, et $\frac{df}{dR} = 1 - \frac{L'^2\omega^2}{R^2}$).

$$\text{On a donc : } R_1 = L'\omega \text{ et } P_m = \frac{U_e^2}{2R_1}.$$

Application numérique :

$$L' = \frac{25}{2\pi \cdot 50} \Rightarrow L' = 80 \text{ mH}$$

$$P_m = \frac{(220)^2}{2 \cdot 25} \Rightarrow P_m = 968 \text{ W.}$$

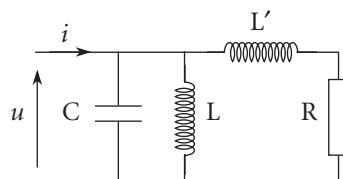
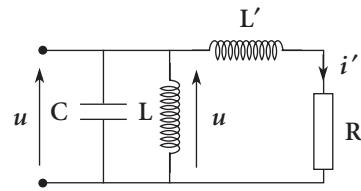
1. c. Si l'on désigne par $i(t)$ le courant débité par le générateur :

$$u(t) = U_e \sqrt{2} \cos \omega t$$

$$i(t) = I_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi).$$

La puissance consommée dans le circuit peut s'écrire :

$$P = I_e U_e \cos \varphi \text{ où } \cos \varphi \text{ est le facteur de puissance.}$$



Commentaire

Le facteur de puissance est lié au déphasage du courant délivré par le générateur sur la tension à ses bornes. Ce déphasage ϕ dépendra de L' et R mais aussi de L et C .

Le facteur de puissance prend la valeur unité pour $\phi = 0$, c'est-à-dire lorsque le courant $i(t)$ est en phase avec la tension $u(t)$.

Or $I = \underline{Y}U$ (\underline{Y} admittance du circuit).

La condition cherchée se traduit alors par :

$$\text{Im}(\underline{Y}) = 0 \quad (\text{Im} \equiv \text{partie imaginaire})$$

Le circuit étant constitué de trois branches en parallèle, nous avons : $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$ avec :

$$\underline{Y}_1 = jC\omega, \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{jL\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Y}_3 = \frac{1}{R + jL'\omega}.$$

D'où :

$$\underline{Y} = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) + \frac{1}{R + jL'\omega}.$$

Soit encore :

$$\underline{Y} = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) + \frac{R - jL'\omega}{R^2 + L'^2\omega^2}$$

et

$$\text{Im}(\underline{Y}) = C\omega - \frac{1}{L\omega} - \frac{L'\omega}{R^2 + L'^2\omega^2}.$$

Il faut donc que $\text{Im}(\underline{Y}) = 0$, c'est-à-dire : $C = \frac{1}{L\omega^2} + \frac{L'}{R^2 + L'^2\omega^2}$

d'où :
$$C = \frac{1}{L\omega^2} + \frac{R_1}{(R_2^2 + R_1^2)\omega} \quad (2) \quad (R = R_2 \text{ d'après l'énoncé, et } L'\omega = R_1).$$

La valeur de R_2 se déduit de celle de la puissance consommée :

$$P = 500 \text{ W} = U_e^2 \frac{R_2}{R_2^2 + R_1^2} \quad (\text{cf. 1. a. avec } L'\omega = R_1).$$

D'où :

$$R_2^2 - \left(\frac{U_e^2}{P}\right)R_2 + R_1^2 = 0$$

et

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{U_e^2}{PR_1}\right)\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + 1 = 0.$$

Cette équation admet deux solutions p_1 et p_2 par rapport à la variable $\frac{R_2}{R_1}$ avec $p_2 p_1 = 1$ et $p_2 + p_1 = \frac{U_e^2}{PR_1}$. Ces racines sont donc positives, l'une est inférieure à 1 et l'autre supérieure à 1. Le texte impose $R_2 > R_1$. On a alors :

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_e^2}{PR_1} + \sqrt{\left(\frac{U_e^2}{PR_1}\right)^2 - 4} \right].$$

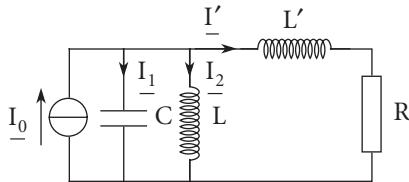
Application numérique : $\frac{R_2}{R_1} = 3,59$ d'où : $R_2 = 90 \Omega$.

On en déduit d'après (2) : $C = 19,3 \mu F$.

2. Les trois branches (C , L et $L'-R$) constituent un **diviseur de courant**.

On a alors :

$$\underline{I}' = \frac{\underline{Y}'}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}'} \underline{I}_0$$



avec $\underline{Y}_1 = jC\omega$, $\underline{Y}_2 = \frac{1}{jL\omega}$ et $\underline{Y}' = \frac{1}{jL'\omega + R}$.

$$\text{Soit encore : } \underline{I}' = \frac{1}{1 + Z'(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)} \underline{I}_0$$

$$\text{et } \underline{I}' = \frac{1}{1 + j(R + jL'\omega)(C\omega - \frac{1}{L\omega})} \underline{I}_0 \quad (3)$$

La puissance consommée dans le circuit, donc dans R , s'écrit :

$$P = \frac{1}{2}R <i'^2(t)> = RI_e'^2.$$

Or d'après (3) et I_e désignant la valeur efficace du courant débité par le générateur ($\underline{I}_0 = I_e\sqrt{2}$),

$$I'_e = I_e \sqrt{\frac{1}{\left(1 - L'\omega \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right) + jR \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}}$$

$$\text{et } P = \frac{RI_e^2}{\left(1 - L'\omega \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right)^2 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}.$$

$$\text{Soit encore } P = \frac{RI_e^2}{\left\{1 + \frac{L'}{L}(1 - LC\omega^2)\right\}^2 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}(1 - LC\omega^2)^2}$$

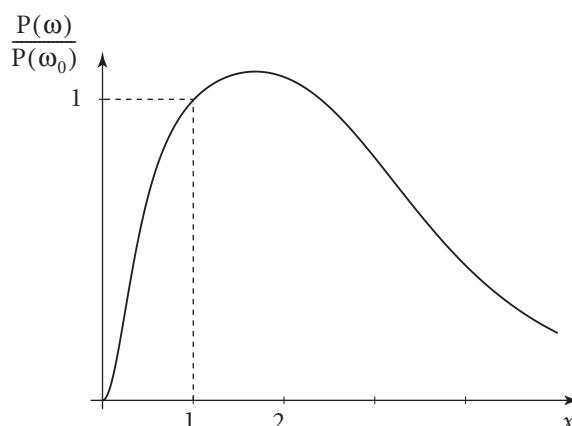
et en posant $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$ (Q représente le facteur de qualité du circuit $\{R // L // C\}$) :

$$P = \frac{RI_e^2}{\left\{1 + \frac{L'}{L}(1 - x^2)\right\}^2 + \frac{Q^2}{x^2}(1 - x^2)^2}.$$

Pour $\omega = \omega_0$ il vient $P(\omega_0) = P(x = 1) = RI_e^2$

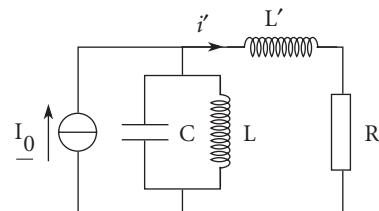
d'où

$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)} = \frac{x^2}{\left\{x\left[1 + \frac{L'}{L}(1-x^2)\right]\right\}^2 + Q^2(1-x^2)^2}$$

Avec les valeurs $L' = 8 \cdot 10^{-2} \text{ H}$; $C = 19,3 \mu\text{F}$; $L = 1 \text{ H}$; $R = 90 \Omega$,nous avons : $\frac{L'}{L} = 8 \cdot 10^{-2}$ et $Q = 90 \sqrt{\frac{19,3 \cdot 10^{-6}}{1}} \approx 0,4$.D'où la courbe tracée pour $0 \leq x \leq 5$:**Commentaires**

- On remarque que cette puissance tend vers une valeur nulle à très basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$) où à très haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$). Ceci s'explique aisément si l'on prend en compte le circuit bouchon ($C//L$) placé en parallèle avec la branche $L'-R$.

En effet, en T.B.F., l'inductance L joue le rôle de court-circuit, et le courant source I_0 passe « entièrement » dans L , ce qui implique que i' devient nul et P tend bien vers zéro. De même, en T.H.F., c'est la capacité C qui joue le rôle de court-circuit : la conclusion est la même.



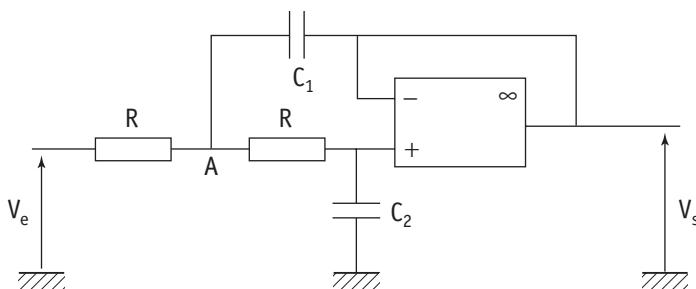
- Pour la pulsation caractéristique du circuit bouchon, c'est-à-dire pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, tout le courant va passer dans la branche $L'-R$ (l'impédance de l'ensemble $L//C$ devenant infinie). Dès lors, on a :

$$P = RI_e'^2 = RI_e^2 = P(\omega_0).$$

B. Filtres actifs et autres circuits avec amplificateur opérationnel

411 Filtre de Butterworth

On étudie le circuit ci-dessous, dans lequel l'amplificateur opérationnel est supposé idéal :



1. Montrer que la fonction de transfert de ce circuit peut s'écrire :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + 2jRC_2\omega - R^2C_1C_2\omega^2}.$$

En introduisant la pulsation caractéristique $\omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_c}$, mettre H sous la forme :

$$H = \frac{1}{1 + 2j\alpha x - x^2}$$

et donner l'expression de α .

2. On étudie $G_{dB} = 20\log|H|$; étudier – en fonction de α – le comportement de G_{dB} en fonction de $\log x$. Préciser la nature du circuit.

Donner l'allure des courbes représentatives (diagramme de Bode en amplitude).

3. Dans le cas particulier où $\frac{dG_{dB}}{dx} = 0$ admet $x = 0$ comme solution triple, déterminer :

– la valeur de $\frac{C_1}{C_2}$ correspondante, et l'expression simplifiée de $G_{dB}(x)$;

– la fréquence de coupure de filtre obtenue.

On obtient alors un filtre dit « de Butterworth ».

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Propriétés de l'AO idéal.
- Fonction de transfert.
- Loi des nœuds en termes de potentiels : théorème de Millmann.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

- L'application judicieuse de la loi des nœuds (exprimée en termes de potentiels) et l'hypothèse du fonctionnement linéaire de l'AO (avec $\varepsilon = 0$) – nécessaire à la définition de la fonction de transfert – suffisent pour éliminer les potentiels \underline{V}^- , \underline{V}^+ et \underline{V}_A (en amplitudes complexes évidemment).
- Pour G_{dB} , on étudie d'abord le comportement asymptotique. Le calcul – ultérieur – de la dérivée de G_{dB} en fonction de $\log x$ se ramène au calcul de $\frac{dG_{dB}}{dx}$, et même à celui de $\frac{dG}{dx}$...

■ 3. Solution

1. Écrivons le potentiel \underline{V}_A (en amplitudes complexes) du nœud A en fonction des potentiels des nœuds voisins (théorème de Millmann) :

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{V_e}{R} + \frac{V^+}{R} + jC_1\omega V_s}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC_1\omega} = \frac{\underline{V}_e + \underline{V}^+ + jRC_1\omega \underline{V}_s}{2 + jRC_1\omega}.$$

D'autre part, l'AO est idéal (courants d'entrée nuls) et (pont diviseur de tension) :

$$\underline{V}^+ = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{R + \frac{1}{jC_2\omega}} \underline{V}_A = \frac{1}{1 + jRC_2\omega} \underline{V}_A.$$

En régime linéaire (ce que suppose l'existence de la fonction de transfert) :

$$\underline{V}^+ = \underline{V}^-, \text{ avec ici } \underline{V}^- = \underline{V}_s.$$

Écrivons alors l'égalité des deux expressions de \underline{V}_A , en tenant compte des deux égalités ci-dessus :

$$\underline{V}_A = (1 + jRC_2\omega) \underline{V}_s = \frac{\underline{V}_e + \underline{V}_s + jRC_1\omega \underline{V}_s}{2 + jRC_1\omega};$$

$$(1 + jRC_2\omega)(2 + jRC_1\omega) \underline{V}_s = \underline{V}_e + (1 + jRC_1\omega) \underline{V}_s;$$

$$[(1 + jRC_2\omega)(2 + jRC_1\omega) - (1 + jRC_1\omega)] \underline{V}_s = \underline{V}_e;$$

d'où :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{(1 + jRC_2\omega)(2 + jRC_1\omega) - (1 + jRC_1\omega)};$$

en effectuant les produits et simplifiant, on obtient bien :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 2jRC_2\omega - R^2C_1C_2\omega^2}$$

En introduisant $\omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$, il vient :

$$R^2C_1C_2\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = x^2;$$

et

$$RC_2\omega = \frac{RC_2}{R\sqrt{C_1C_2}} \cdot \frac{\omega}{\omega_c} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \cdot x$$

soit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 2j\alpha x - x^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$$

2. Exprimons G_{dB} :

$$G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 10\log|\underline{H}|^2;$$

$$G_{dB} = -10\log[(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2x^2].$$

Pour $x \rightarrow 0$, $G_{dB} \rightarrow 0$ et pour $x \rightarrow +\infty$, $G_{dB} \sim -10\log x^4 = -40\log x$, ce qui correspond à une asymptote (pour la courbe G_{dB} en fonction de $\log x$) de pente -40 dB/décade :

la structure du circuit proposé est celle d'un filtre passe-bas du second ordre.

Les deux asymptotes se coupant en $x = 1$, valeur pour laquelle,

$$G_{dB}(x = 1) = -10\log(4\alpha^2) = -20\log(2\alpha).$$

Pour connaître le comportement de G_{dB} autour de $x = 1$, il faut déterminer le signe de sa dérivée, ou encore, la fonction logarithme étant monotone croissante, le signe de $\frac{dG_{dB}}{dx}$.

$$\text{Or } \frac{dG_{dB}}{dx} = -10 \frac{d\log D}{dx} = -\frac{10}{D} \frac{dD}{dx};$$

$$\text{avec } D = (1 - x^2)^2 + 4\alpha^2x^2;$$

$$\text{d'où } \frac{dD}{dx} = 2(1 - x^2)(-2x) + 8\alpha^2x;$$

$$\frac{dD}{dx} = 4x(x^2 - 1 + 2\alpha^2)$$

$$\text{et } \frac{dD}{dx} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{1 - 2\alpha^2} \end{cases} \quad \text{si } \alpha^2 < \frac{1}{2}.$$

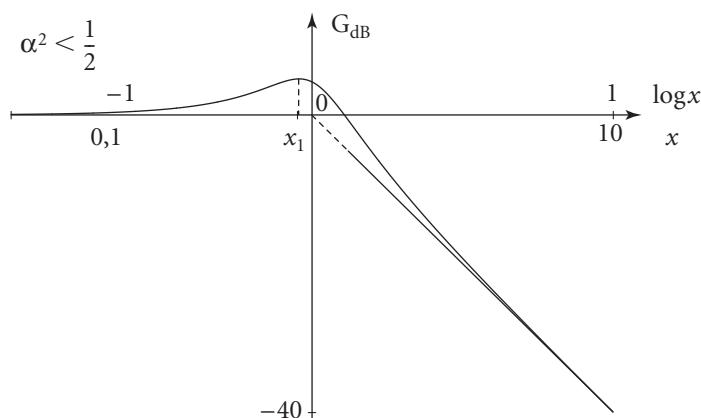
D'où deux cas à envisager :

- $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\frac{C_2}{C_1} < \frac{1}{2}$:

$\frac{dD}{dx}$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \sqrt{1 - 2\alpha^2} = x_1$ (x est toujours > 0) et est négative entre ces deux valeurs, positive pour $x > x_1$.

Du fait du signe – dans l'expression de $\frac{dG_{dB}}{dx}$, G_{dB} est donc croissante de $x = 0$ à $x = x_1$, puis décroissante pour $x > x_1$ (ce qui est cohérent avec le comportement asymptotique de G_{dB}).

On peut donc donner l'allure des courbes :



Le maximum de G_{dB} (pour $x = x_1$) est facilement calculable :

$$G_{dB}(x = x_1) = -10 \log D$$

avec

$$D = (1 - (1 - 2\alpha^2))^2 + 4\alpha^2(1 - 2\alpha^2);$$

$$D = 4\alpha^4 + 4\alpha^2 - 8\alpha^4;$$

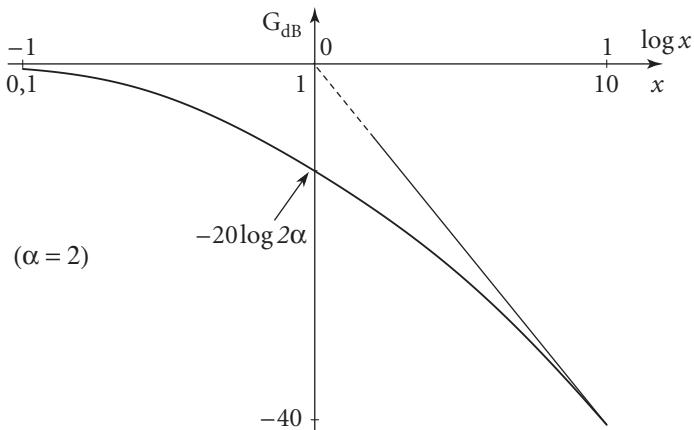
$$D = 4\alpha^2(1 - \alpha^2);$$

ce qui correspond bien à une valeur $G_{dB_{max}}$ positive (sauf pour le cas limite $\alpha^2 = \frac{1}{2}$: $D - 1 = -(2\alpha^2 - 1)^2$).

- $\alpha \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{1}{2}$:

la solution x_1 n'existe plus (ou, si $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, est nulle : elle se confond alors avec l'autre solution $x = 0$).

G_{dB} est alors monotone décroissante, d'où l'allure des courbes représentatives :



3. Le cas $x = 0$ solution simple de $\frac{dG_{dB}}{dx} = 0$ correspond à $x_1 = 0$, soit $\alpha^2 = \frac{1}{2}$ (d'après le 2.), et $\frac{C_1}{C_2} = 2$.

Dans ce cas, G_{dB} devient : $G_{dB} = -10 \log[(1-x^2)^2 + 2x^2]$;

$$G_{dB} = -10 \log(1+x^4)$$

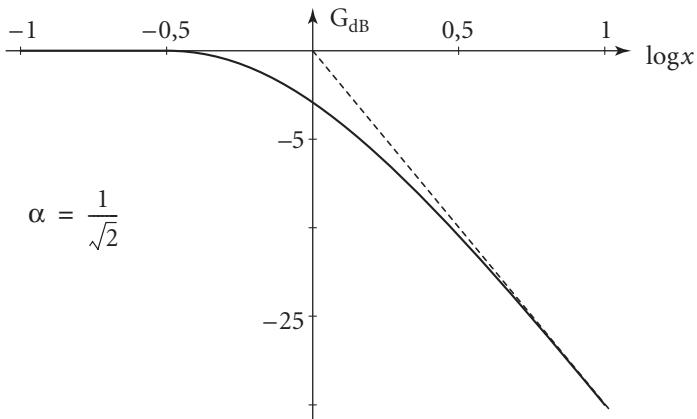
et $G_{dB}(x = 1) = -10 \log 2 = -3 \text{ dB}$.

$x = 1$ correspond donc à la fréquence de coupure du filtre passe-bas (cf. figure précédente), soit :

$$\omega = \omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{1}{2\pi R\sqrt{C_1 C_2}}.$$

La courbe représentative de G_{dB} reste alors toujours au-dessous ses asymptotes, mais elle en est très proche : écart -3 dB à l'abscisse du point de croisement de celle-ci.

La courbe est semblable à celle d'un filtre passe-bas d'ordre 1, mais la pente de l'asymptote (pour les fréquences élevées) est deux fois plus forte.



412 Amplificateur différentiel

Les AO seront supposés idéaux et en fonctionnement linéaire avec $v_+ = v_-$.

1. On considère le montage de la figure 1.

a. À quelle condition sur les résistances a-t-on $v_s = G_0(e_2 - e_1)$? Donner la valeur de G_0 pour $R'_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$.

b. On suppose que les valeurs des résistances sont définies avec une précision de $p \%$.

On pose $e_c = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$; $e_d = e_2 - e_1$

$$\text{et : } v_s = G_d e_d + G_c e_c.$$

Calculer, en fonction des résistances R_1 , R'_1 , R_2 et R'_2 , les coefficients G_d et G_c . En déduire l'expression du taux de réjection de mode commun défini par $T = 20 \log \left| \frac{G_d}{G_c} \right|$:

le résultat sera donné en fonction du paramètre $\eta = \frac{(R'_2/R_2)}{(R'_1/R_1)}$ et $G_0 = \frac{R'_1}{R_1}$.

Application numérique : on prendra $G_0 = 10$ et $p = 1 \%$, puis $G_0 = 100$ et $p = 0,1 \%$ et on calculera la valeur minimale de T (ce qui revient à se placer dans le cas le plus défavorable compte tenu de la précision sur la valeur des résistances).

2. Le montage de la figure 2 comprend trois AO.

R est une résistance variable.

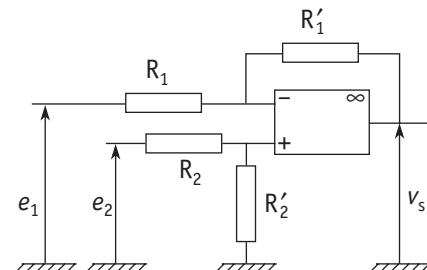


Fig. 1

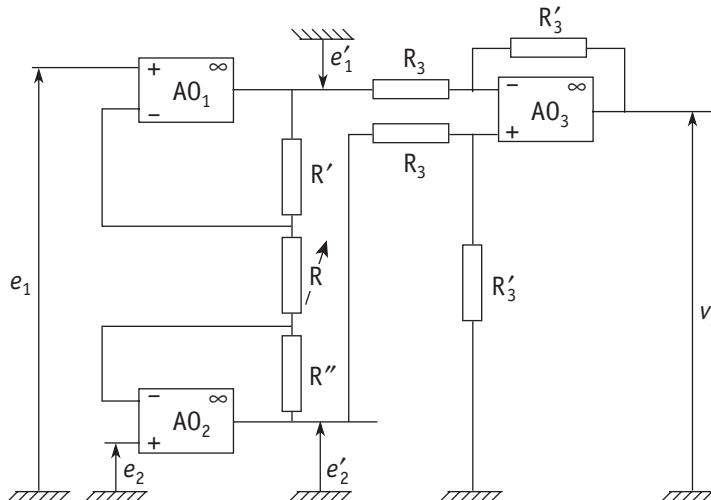


Fig. 2

Montrer que l'on a ainsi constitué un amplificateur différentiel de tension dont on exprimera le gain G en fonction des résistances R' , R , R'' , R_3 et R'_3 .

3. Comparer les deux montages.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Lois de l'électrocinétique.
- Propriétés d'un AO idéal.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le système fonctionnant en régime linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition.
2. On retrouvera dans le circuit le bloc étudié au 1.

■ 3. Solution

1. a. L'AO est supposé idéal ($i_- = 0$, $i_+ = 0$, absence d'offset) et en fonctionnement linéaire. Le théorème de superposition donne alors :

$$v_s = A_1 e_1 + A_2 e_2 \quad (1)$$

On a donc :

$$A_1 = \left(\frac{v_s}{e_1} \right)_{e_2=0} \quad \text{et} \quad A_2 = \left(\frac{v_s}{e_2} \right)_{e_1=0}.$$

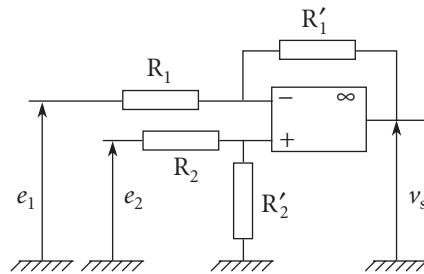


Fig. 3

• Calcul de A_1 :

Faire $e_2 = 0$ consiste à réduire le montage à celui représenté ci-contre : en effet, $e_2 = 0$ implique qu'aucun courant ne traverse R_2 et R'_2 ($i_+ = 0$), soit $v_+ = 0$. Il s'agit alors d'un simple montage inverseur pour lequel on a :

$$v_+ = 0$$

$$v_- = v_+ \quad (\text{AO idéal en régime linéaire})$$

$$i_- = 0 \Rightarrow i = i'$$

$$\text{d'où : } i = \frac{e_1 - 0}{R_1} = i' = \frac{0 - v_s}{R'_1} \Rightarrow \frac{v_s}{e_1} = -\frac{R'_1}{R_1}$$

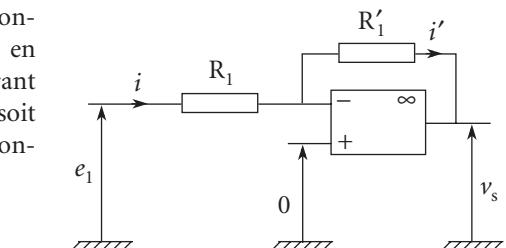


Fig. 4

$$A_1 = -\frac{R'_1}{R_1}$$

• Calcul de A_2 :

Cette fois-ci, on annule e_1 et le montage de la figure 5 est un montage amplificateur non inverseur pour lequel on a :

$$v_+ = e$$

$v_- = v_+$; $i = i'$, d'où :

$$i = \frac{0 - v_+}{R_1} = i' = \frac{v_+ - v_s}{R'_1}$$

$$\text{soit : } v_s = \left(1 + \frac{R'_1}{R_1}\right)v_+ \Rightarrow \left(\frac{v_s}{v_+}\right)_{e_1=0} = 1 + \frac{R'_1}{R_1}$$

D'autre part, le montage branché sur l'entrée non inverseuse de l'AO est un **diviseur de tension** puisque $i_+ = 0$.

$$\text{D'où : } \frac{v_+}{e_2} = \frac{R'_2}{R_2 + R'_2}.$$

Au total, il vient :

$$\frac{v_s}{e_2} = \left(\frac{v_s}{v_+}\right) \cdot \left(\frac{v_+}{e_2}\right) = \left(1 + \frac{R'_1}{R_1}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{R'_2}{R_2}\right)}$$

$$\text{soit : } A_2 = \frac{\left(1 + \frac{R'_1}{R_1}\right)}{\left(1 + \frac{R'_2}{R_2}\right)}.$$

Reportant les valeurs obtenues pour A_1 et A_2 dans (1), il vient :

$$\boxed{v_s = -\frac{R'_1}{R_1}e_1 + \frac{1 + \frac{R'_1}{R_1}}{1 + \frac{R'_2}{R_2}}e_2} \quad (2)$$

Pour réaliser un amplificateur différentiel de tension, on doit avoir $v_s = G_0(e_2 - e_1)$ ce qui impose :

$$G_0 = \frac{1 + \frac{R'_1}{R_1}}{1 + \frac{R'_2}{R_2}} = \frac{R'_1}{R'_2}$$

$$\text{soit : } 1 + \frac{R'_1}{R_1} = \frac{R'_1}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R'_2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{R'_1}{R_1} = \frac{R'_2}{R_2}}$$

$$\text{Application numérique : } G_0 = \frac{100}{10} \Rightarrow G_0 = 10.$$

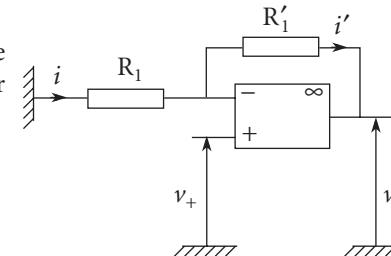
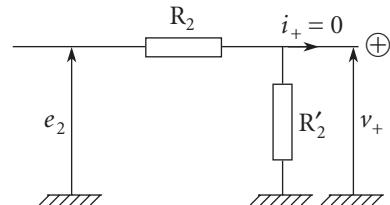


Fig. 5



1. b. Il suffit de réécrire la relation (2) avec :

$$\begin{cases} e_c = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \\ e_d = e_2 - e_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_2 = e_c + \frac{e_d}{2} \\ e_1 = e_c - \frac{e_d}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$v_s = -\frac{R'_1}{R_1} \left(e_c - \frac{e_d}{2} \right) + \frac{1 + \frac{R'_1}{R_1}}{1 + \frac{R'_2}{R_2}} \left(e_c + \frac{e_d}{2} \right)$$

soit encore :

$$v_s = e_d \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{1 + \frac{R'_1}{R_1}}{1 + \frac{R'_2}{R_2}} + \frac{R'_1}{R_1} \right]}_{G_d} + e_c \underbrace{\left[\frac{1 + \frac{R'_1}{R_1}}{1 + \frac{R'_2}{R_2}} - \frac{R'_1}{R_1} \right]}_{G_c}.$$

Dès lors, le rapport des gains de mode commun G_c ($G_c = \frac{v_s}{e_0}$ pour $e_1 = e_2 = e_0$) et différentiel ($G_d = \frac{v_s}{e'_0}$ pour $e_2 = -e_1 = \frac{e'_0}{2}$) est donné par :

$$\frac{G_c}{G_d} = \frac{\left(1 + \frac{R'_1}{R_1}\right) - \left(1 + \frac{R'_2}{R_2}\right)\frac{R'_1}{R_1}}{\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{R'_1}{R_1}\right) + \left(1 + \frac{R'_2}{R_2}\right)\frac{R'_1}{R_1} \right]}.$$

D'où :

$$\frac{G_c}{G_d} = \frac{1 - \frac{R'_1}{R_1} \frac{R_2}{R'_2}}{\frac{1}{2} \left[1 + \frac{2R'_1}{R_1} + \frac{R_2}{R'_2} \frac{R'_1}{R_1} \right]} \Rightarrow \frac{G_c}{G_d} = \frac{\frac{R'_2}{R_2} - \frac{R'_1}{R_1}}{\frac{1}{2} \left[\frac{R'_2}{R_2} + \frac{R'_1}{R_1} + \frac{2R'_1 R'_2}{R_1 R_2} \right]}.$$

Posons $\frac{R'_2}{R_2} = \eta \frac{R'_1}{R_1}$ et $G_0 = \frac{R'_1}{R_1}$, nous obtenons :

$$\frac{G_c}{G_d} = \frac{\eta - 1}{\frac{1}{2} [1 + \eta + 2\eta G_0]}.$$

Le taux de réjection T devient :

$$T = 20 \log \left| \frac{1 + \eta + 2\eta G_0}{2(\eta - 1)} \right|$$

Pour un montage parfaitement réglé, on aurait $\frac{R'_2}{R_2} = \frac{R'_1}{R_1} = G_0$, c'est-à-dire $\eta = 1$, et T serait infini ($G_c = 0$ et $G_d = G_0$). Cependant, les valeurs des résistances ne sont connues qu'avec une précision limitée (ici $p\%$) :

$$\eta = \frac{R'_2}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R'_1} \Rightarrow \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta R'_2}{R'_2} + \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R'_1}{R'_1}.$$

Soit en prenant (pour simplifier) une valeur commune – égale à $p\%$ – pour les incertitudes relatives $\frac{\Delta R_i}{R_i}$:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = 4p \quad \text{et} \quad \Delta\eta \approx 4p \quad (\text{puisque } \eta \approx 1).$$

Identifions alors $|\eta - 1|$ à $\Delta\eta$ (imprécision sur la connaissance de la valeur du paramètre η) :

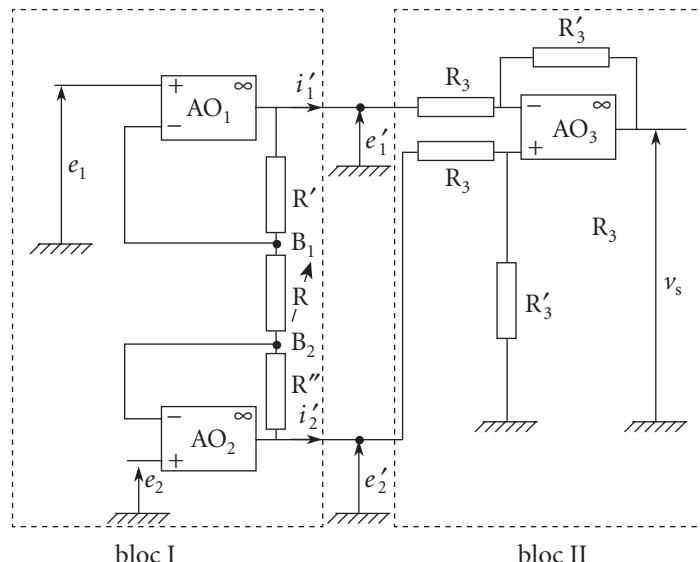
$$T \approx 20 \log \left| \frac{1 + 1 + 2G_0}{2 \cdot 4p} \right|.$$

Application numérique :

$$G_0 = 10 \quad \text{et} \quad p = 0,01 \quad \Rightarrow \quad T = 49 \text{ dB}$$

$$G_0 = 100 \quad \text{et} \quad p = 0,001 \quad \Rightarrow \quad T = 88 \text{ dB.}$$

2. On peut décomposer le système en deux blocs :



Le bloc II est identique au montage étudié au 1. a. Il présente un gain $G_0 = \frac{R'_3}{R_3}$ et constitue un amplificateur différentiel tel que $v_s = G_0(e'_2 - e'_1)$.

Étudions le bloc I.

POINT MÉTHODE

Remarquons tout d'abord que les AO étant supposés idéaux, les tensions e'_1 et e'_2 ne dépendront pas des courants i'_1 et i'_2 , l'étude du bloc I peut donc se faire indépendamment de celle du bloc II.

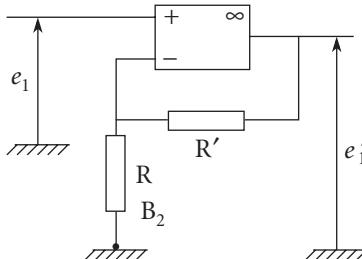
Dès lors, les AO fonctionnant en régime linéaire, le théorème de superposition donne :

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 \\ e'_2 = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 \end{cases}$$

- **Calcul des coefficients α_{11} et α_{21} :**

Nous avons $\alpha_{11} = \left(\frac{e'_1}{e_1}\right)_{e_2=0}$ et $\alpha_{21} = \left(\frac{e'_2}{e_1}\right)_{e_2=0}$. Faisons $e_2 = 0$, dès lors

$$(\nu_-)_2 = (\nu_+)_2 = 0 \Rightarrow \nu(B_2) = 0 \text{ d'où le schéma :}$$



On reconnaît là un montage du type non inverseur, de gain G_1 tel que (cf. 1. a.) :

$$G_1 = 1 + \frac{R'}{R} \Rightarrow \left(\frac{e'_1}{e_1}\right)_{e_2=0} = G_1 = 1 + \frac{R'}{R}$$

d'où : $\alpha_{11} = 1 + \frac{R'}{R}$.

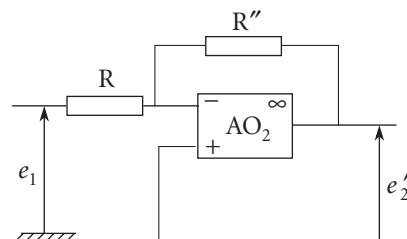
La détermination de α_{21} se fait aisément en remarquant que $\nu_{B_1} = e_1$ et que l'AO₂ constitue – pour $e_2 = 0$ – un montage du type inverseur. Soit :

$$e'_2 = -\frac{R''}{R}e_1 \Rightarrow \alpha_{21} = -\frac{R''}{R}.$$

- **Calcul des coefficients α_{22} et α_{12} :**

Cette fois-ci, $\alpha_{22} = \left(\frac{e'_2}{e_2}\right)_{e_1=0}$ et $\alpha_{12} = \left(\frac{e'_1}{e_2}\right)_{e_1=0}$. Il suffit alors de faire $e_1 = 0$, et on est ramené au cas précédent en permutant R' et R'' soit :

$$\alpha_{22} = 1 + \frac{R''}{R} \quad \text{et} \quad \alpha_{12} = -\frac{R'}{R}.$$



Finalement, on a, dans le cas général :

$$\boxed{\begin{aligned} e'_1 &= \left(1 + \frac{R'}{R}\right)e_1 - \frac{R'}{R}e_2 \\ e'_2 &= -\frac{R''}{R}e_1 + \left(1 + \frac{R''}{R}\right)e_2 \end{aligned}}$$

- Calculons la différence $(e'_2 - e'_1)$:

$$\begin{aligned} e'_2 - e'_1 &= \left(1 + \frac{R''}{R} + \frac{R'}{R}\right)e_2 - \left(1 + \frac{R'}{R} + \frac{R''}{R}\right)e_1 \\ e'_2 - e'_1 &= \left(1 + \frac{R''}{R} + \frac{R'}{R}\right)(e_2 - e_1). \end{aligned}$$

- Considérons pour terminer l'association des blocs I et II :

$$\nu_s = \frac{R'_3}{R_3}(e'_2 - e'_1) = \frac{R'_3}{R_3} \left(1 + \frac{R'' + R'}{R}\right)(e_2 - e_1).$$

On a ainsi réalisé un amplificateur différentiel de tension de gain global G :

$$\boxed{G = \frac{R'_3}{R_3} \left(1 + \frac{R'' + R'}{R}\right)}$$

3. • Réglage du gain :

Le montage du 1. impose la modification des valeurs de deux résistances (puisque l'on doit avoir au mieux $\frac{R'_1}{R_1} = \frac{R'_2}{R_2}$), ce qui est donc un inconvénient, les valeurs de résistances n'étant pas connues avec exactitude. Par contre, pour le montage du 2. la valeur du gain peut être contrôlée par la seule résistance R. (On a préalablement réalisé, autant que possible, la condition $\left(\frac{R'_3}{R_3}\right)_+ = \left(\frac{R'_3}{R_3}\right)_-$).

- Impédances d'entrée :

Le montage du 1. présente des impédances d'entrée finies $R_{e_1} = \left(\frac{e_1}{i_1}\right)_{e_2=0} = R_1$ et $R_{e_2} = \left(\frac{e_2}{i_2}\right)_{e_1=0} = R_2 + R'_2$ (i_1 et i_2 courants traversant R_1 et R_2), ce qui peut être un inconvénient. Pour le montage du 2., ces mêmes impédances sont infinies, du moins pour des AO idéaux ($i_+(AO_1) = 0$ et $i_+(AO_2) = 0$).

- Charge :

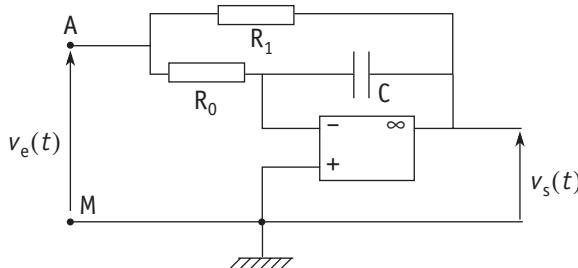
Pour les deux montages, on peut placer en sortie une charge dont l'un des pôles sera relié à la masse. La présence de la charge ne perturbe pas le fonctionnement de ces montages pour des AO idéaux (sauf si limitation en courant de sortie...)

- Les deux montages présenteront un taux de réjection non idéal (le bloc II du 2. étant identique au 1.).

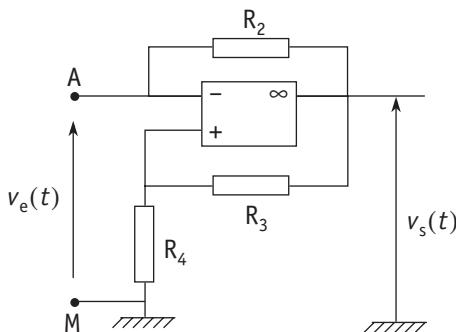
413

Simulation d'une inductance

1. On considère le circuit ci-dessous, en régime sinusoïdal permanent (l'AO est idéal avec $v_+ = v_-$ en régime linéaire).



- a. Établir la relation liant les amplitudes complexes V_e et V_s : à quoi correspond-elle ?
 b. Calculer l'admittance d'entrée du montage : montrer que c'est celle de deux éléments passifs en parallèle dont on précisera la nature.
 2. On monte en parallèle entre les bornes A et M le circuit suivant (AO idéal supposé en fonctionnement linéaire) :



Que devient l'admittance d'entrée de l'ensemble du montage ?

À quelle condition sur les résistances obtient-on l'équivalent d'une inductance pure ?

Application numérique : $R_0 = R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \mu\text{F}$.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- AO idéal en fonctionnement linéaire.
- Notion d'impédance d'entrée.
- Association d'impédances en parallèle.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'AO étant idéal, il ne circule aucun courant dans la borne d'entrée inverseuse.

L'admittance d'entrée \underline{Y}_e est l'inverse de l'impédance d'entrée \underline{Z}_e : $\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{\underline{I}_e}{\underline{V}_e}$, \underline{I}_e étant l'amplitude complexe du courant entrant par la borne A. Il suffit d'exprimer la somme des courants circulant dans les résistances R_0 et R_1 pour calculer \underline{I}_e .

2. Dans ce second montage, le courant d'entrée est le courant circulant dans la résistance R_2 , et la tension \underline{V}_s est reliée à \underline{V}_e par le pont diviseur de tension ($R_3 - R_4$) ($V^+ = V^-$ car l'AO est idéal). L'admittance d'entrée de ce montage s'ajoute à celle du montage précédent (éléments connectés en parallèle).

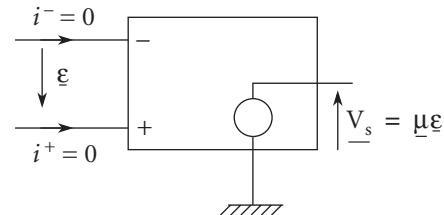
3. Solution

1. a.

POINT COURS

Un amplificateur opérationnel est dit **idéal** lorsque ses courants d'entrée sont nuls ($i^- = i^+ = 0$), son impédance interne de sortie également nulle, et lorsqu'il ne présente aucun décalage constant en courant et en tension.

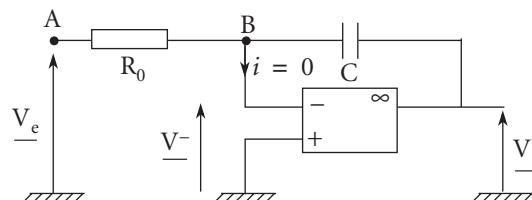
Par contre, son gain en boucle ouverte peut ne pas être infini, ce qui implique, en régime linéaire, une tension d'entrée ε non rigoureusement nulle (bien qu'en général négligeable, au moins dans le cadre des exercices proposés... et pour des fréquences pas trop élevées).



On adoptera ici pour un AO en fonctionnement idéal :

- régime linéaire : $\varepsilon = 0$ et $|V_s| < V_{sat}$;
- régime à saturation : $V_s = +V_{sat}$ et $\varepsilon > 0$
ou $V_s = -V_{sat}$ et $\varepsilon < 0$.

Exprimons le bilan des courants au nœud B correspondant à l'entrée inverseuse de l'AO :



L'AO étant idéal, $i = 0$ dans l'entrée inverseuse, et un même courant traverse la résistance R_0 et la capacité C , d'où :

$$\frac{V_A - V^-}{R_0} = jC\omega_0(V^- - V_s).$$

De plus, $\underline{V}^- = \underline{V}^+ = 0$ (fonctionnement linéaire : $\epsilon = 0$).

Soit la relation demandée : $\frac{1}{R_0}\underline{V}_e + jC\omega\underline{V}_s = 0$

et :

$$\underline{V}_s = -\frac{1}{jR_0C\omega} \cdot \underline{V}_e \quad (1)$$

On retrouve la relation caractéristique d'un circuit intégrateur (la résistance R_1 ne joue ici aucun rôle...).

1. b. L'admittance d'entrée est définie par :

$$\underline{Y}_e = \frac{\underline{I}_e}{\underline{V}_e}.$$

Le courant d'entrée \underline{I}_e du montage s'exprime selon :

$$\underline{I}_e = \underline{I}_1 + \underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e = \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_s}{R_1} + \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_-}{R_0}$$

$$\underline{I}_e = \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_s}{R_1} + \frac{\underline{V}_e}{R_0}.$$

$$\text{D'où : } \underline{I}_e = \underline{V}_e \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} \right) - \frac{\underline{V}_s}{R_1}$$

et en remplaçant \underline{V}_s par son expression en fonction de \underline{V}_e (relation (1)) :

$$\underline{I}_e = \underline{V}_e \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} \right) + \frac{1}{jR_0R_1C\omega} \underline{V}_e.$$

D'où l'admittance d'entrée \underline{Y}_e du montage :

$$\underline{Y}_e = \frac{\underline{I}_e}{\underline{V}_e} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} \right) + \frac{1}{jR_0R_1C\omega}.$$

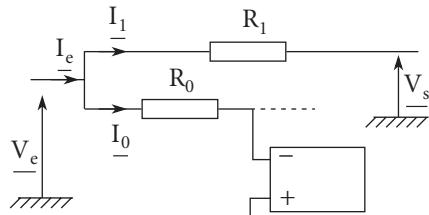
Cette admittance est de la forme :

$$\boxed{\underline{Y}_e = \frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{jL_{eq}\omega}}$$

à condition de poser :

$$\begin{cases} \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} \\ L_{eq} = R_0R_1C \end{cases}$$

Le montage proposé est donc équivalent – dans le domaine de fonctionnement linéaire – à une résistance et une inductance pure montées en parallèle.



2. L'AO étant idéal, les courants d'entrée sont notamment nuls, d'où :

$$\bullet \quad I'_e = I_2 = \frac{V_e - V_s}{R_2}$$

• et le même courant I traverse les résistances R_3 et R_4 qui constituent ainsi un pont diviseur de tension, d'où :

$$V^+ = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_s.$$

Or $V^+ = V^- = V_e$ ($V^+ = V^-$: AO idéal en fonctionnement linéaire).

$$\text{Soit } \underline{V}_s = \frac{R_3 + R_4}{R_4} \underline{V}_e = \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \underline{V}_e$$

et en reportant dans l'expression de I'_e :

$$I'_e = \frac{1}{R_2} \underline{V}_e - \frac{1}{R_2} \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \underline{V}_e \Rightarrow I'_e = -\frac{R_3}{R_2 R_4} \underline{V}_e$$

d'où l'admittance d'entrée :

$$\underline{Y}'_e = -\frac{R_3}{R_2 R_4}.$$

Cette admittance s'ajoute à l'admittance \underline{Y}_e du montage précédent (branchement en parallèle), d'où la nouvelle expression de l'admittance de l'ensemble du montage :

$$\underline{Y}_e + \underline{Y}'_e = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{jL_{eq}\omega}.$$

Cette admittance est celle d'une inductance pure si le terme réel est nul :

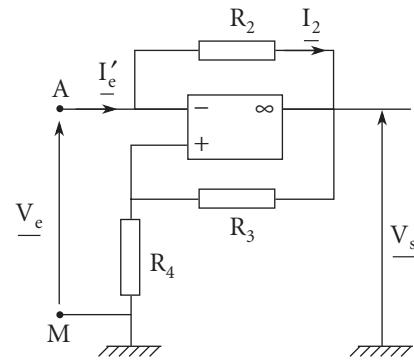
$$\boxed{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_2 R_4} = 0}$$

À cette condition, le circuit simule une inductance pure L_{eq} de valeur :

$$\boxed{L_{eq} = R_0 R_1 C}$$

Remarquons que l'on peut obtenir ainsi des inductances de très fortes valeurs :

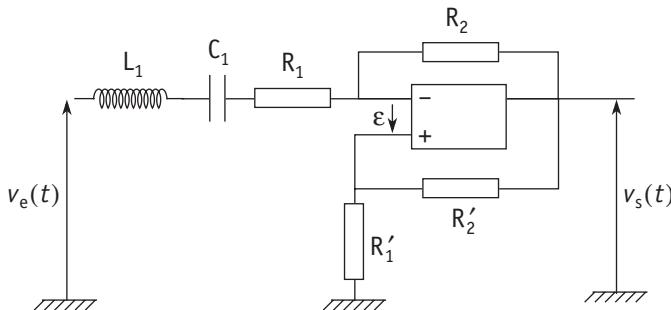
$$R_0 = R_1 = 10 \text{ k}\Omega, \quad C = 0,1 \mu\text{F} \Rightarrow L_{eq} = 10 \text{ H}!$$



4/14

Condition de fonctionnement d'un filtre

On considère le circuit ci-dessous.



- 1.** Un générateur parfait impose une tension sinusoïdale $v_e(t)$. Caractériser la nature du montage. On supposera que l'AO idéal fonctionne en régime linéaire ($\varepsilon = 0$).

Application numérique : $\frac{R'_2}{R'_1} = 10$; $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 9 \text{ k}\Omega$; $L_1 = 50 \text{ mH}$ et $C_1 = 10 \text{ nF}$.

- 2.** L'étude précédente suppose le régime sinusoïdal établi. Afin de valider cette hypothèse, on doit s'intéresser au régime transitoire.
- Établir l'équation différentielle reliant $v_s(t)$ à $v_e(t)$.
 - En déduire la condition portant sur R_1 , R_2 , R'_1 et R'_2 permettant de justifier l'étude faite en **1.** Commenter.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Lois de l'électrocinétique.
- AO idéal en fonctionnement linéaire.

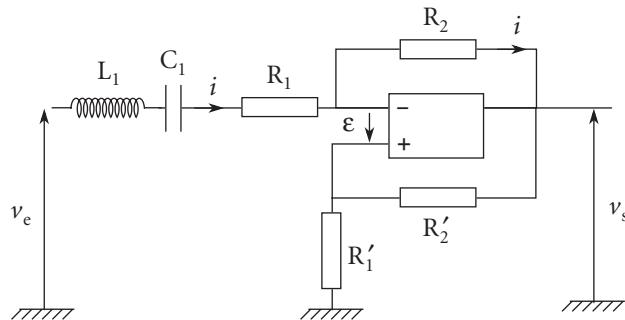
■ 2. Ce qu'il faut comprendre

- 1.** et **2.** On suppose que le régime de l'AO est linéaire.

La question 2. propose d'étudier la condition de stabilité, condition pour laquelle l'AO fonctionne en régime linéaire.

■ 3. Solution

- 1.** On suppose que le montage fonctionne en régime linéaire et que l'AO est idéal ($\varepsilon = 0$).



D'où, en remarquant que le même courant i traverse R_1 et R_2 :

$$\underline{V}_e = \left[j \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right) + R_1 + R_2 \right] \underline{I} + \underline{V}_s \quad (i_- = 0).$$

$$\text{Or : } \underline{V}_- = \underline{V}_+ = \frac{R'_1}{R'_1 + R'_2} \underline{V}_s \quad \text{et} \quad \underline{V}_- - \underline{V}_s = R_2 \underline{I}.$$

$$\text{D'où : } R_2 \underline{I} = \frac{R'_1}{R'_1 + R'_2} \underline{V}_s - \underline{V}_s = -\frac{R'_2}{R'_1 + R'_2} \underline{V}_s \Rightarrow \underline{I} = -\frac{R'_2}{R_2(R'_1 + R'_2)} \underline{V}_s.$$

$$\text{Soit : } \underline{V}_e = \underline{V}_s \left\{ 1 + \left[j \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right) + R_1 + R_2 \right] \left(-\frac{R'_2}{R_2(R'_1 + R'_2)} \right) \right\}$$

$$\underline{V}_s \left\{ -R_2 \left(1 + \frac{R'_1}{R'_2} \right) + j \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right) + R_1 + R_2 \right\} = -R_2 \left(1 + \frac{R'_1}{R'_2} \right) \underline{V}_e.$$

Et après simplifications :

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{-R_2 \left(1 + \frac{R'_1}{R'_2} \right)}{\left(R_1 - R_2 \frac{R'_1}{R'_2} \right) + j \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right)} \quad (1)$$

Soit encore :

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\left[-\frac{\left(1 + \frac{R'_1}{R'_2} \right)}{\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R'_1}{R'_2} \right)} \right]}{1 + \frac{j L_1 \omega_0}{\left(R_1 - R_2 \frac{R'_1}{R'_2} \right)} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$. Posons alors $H_0 = \frac{1 + \frac{R'_1}{R'_2}}{\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R'_1}{R'_2}\right)}$ et $Q = \frac{L_1 \omega_0}{R_1 - R_2 \frac{R'_1}{R'_2}}$

nous obtenons :

$$\boxed{H = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = - \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

Il s'agit d'un filtre passe bande centré sur ω_0 , de facteur de qualité Q , et de gain H_0 pour la pulsation centrale ω_0 .

Application numérique :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{50 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-8}}} \Rightarrow \omega_0 = 4,5 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow f_0 = 7,1 \text{ kHz};$$

$$Q = \frac{50 \cdot 10^{-3} \times 4,47 \cdot 10^4}{10^3 \left(1 - 9 \cdot \frac{1}{10}\right)} \Rightarrow Q = 22,4;$$

$$H_0 = \frac{1 + \frac{1}{10}}{\frac{1}{9} - \frac{1}{10}} \Rightarrow H_0 = 99.$$

2. a. On a : $v_e(t) = L_1 \frac{di}{dt} + \frac{q}{C_1} + R_1 i + R_2 i + v_s \quad (2) \quad \left(i = \frac{dq}{dt}\right)$

$$\text{et } \begin{cases} v_- = v_+ = \frac{R'_1}{R'_1 + R'_2} v_s \\ v_- - v_s = R_2 i \end{cases} \Leftrightarrow v_s \left(\frac{R'_1}{R'_1 + R'_2} - 1 \right) = R_2 i$$

$$\text{d'où : } v_s = -R_2 \frac{(R'_1 + R'_2)}{R'_2} i = -R_2 \left(1 + \frac{R'_1}{R'_2}\right) i \quad (3)$$

et en dérivant (2) par rapport au temps et en remplaçant i à l'aide de (3) :

$$L_1 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{1}{C_1} v_s + (R_1 + R_2) \frac{dv_s}{dt} - R_2 \left(1 + \frac{R'_1}{R'_2}\right) \frac{dv_s}{dt} = -R_2 \left(1 + \frac{R'_1}{R'_2}\right) \frac{dv_e}{dt}$$

soit :
$$\boxed{\frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{R_2}{L_1} \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R'_1}{R'_2} \right) \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = -\frac{R_2}{L_1} \left(1 + \frac{R'_1}{R'_2}\right) \frac{dv_e}{dt}} \quad (4)$$

2. b. Il est donc nécessaire que la solution à l'équation différentielle sans second membre ne diverge pas, ce qui impose $\boxed{\frac{R_1}{R_2} - \frac{R'_1}{R'_2} > 0}$ (l'équation correspondante s'identifiant alors à celle d'un oscillateur harmonique amorti...)

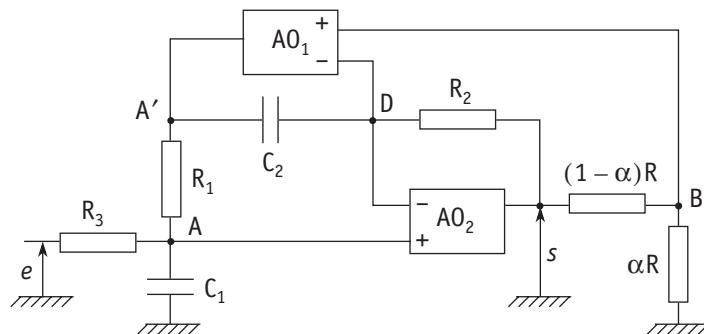
Commentaires

Pour $\frac{R_1}{R_2} < \frac{R'_1}{R'_2}$, $v_s(t)$ tend à diverger et l'AO va atteindre la saturation. On peut alors montrer que cet état n'est pas stable et que finalement $v_s(t)$ va osciller entre $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$. Ces oscillations ne seront pas sinusoïdales, sauf pour $\frac{R_2}{R_1}$ suffisamment proche de $\frac{R'_2}{R'_1}$ (par valeur supérieures) où elles apparaissent comme quasi-sinusoïdales de pulsation peu différente de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$.

415

Filtre « entièrement » réglable

Les AO sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.



1. On se place en régime sinusoïdal établi de pulsation ω . Déterminer la fonction de transfert complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}.$$

En déduire la nature du montage et en dégager les caractéristiques essentielles.

2. Tracer les diagrammes de Bode donnant $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$ et $\varphi = \arg(\underline{H})$ en fonction de $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ avec :

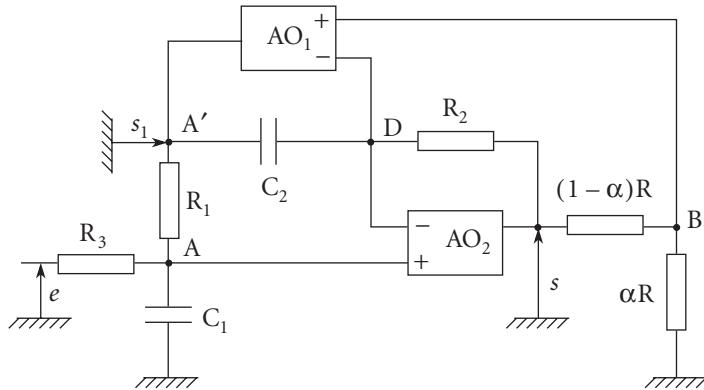
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha R_1 C_1 R_2 C_2}}.$$

Solution

1. Les AO sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire. On a donc :

$$(v_+)_1 = (v_-)_1 \quad \text{soit} \quad v_D = v_B;$$

$$(v_+)_2 = (v_-)_2 \quad \text{d'où} \quad v_D = v_A;$$



Finalement $v_A = v_D = v_B$, et on peut prendre s, s_1 et v_A comme inconnues principales, e étant imposé.

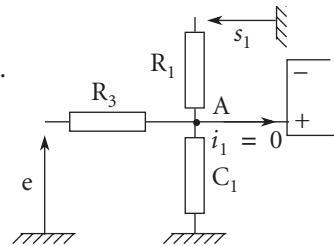
Les trois équations nécessaires à la résolution du problème s'obtiendront en écrivant la loi des nœuds (ou encore le « théorème de Millemann ») aux points A, D et B.

• Nœud A :

$$\frac{1}{R_3}(\underline{E} - \underline{V}_A) + jC_1\omega(0 - \underline{V}_A) + \frac{1}{R_1}(\underline{S}_1 - \underline{V}_A) = I_+)_1 = 0.$$

D'où :

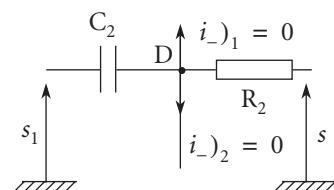
$$\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} + jC_1\omega \right) \underline{V}_A = \frac{1}{R_3} \underline{E} + \frac{1}{R_1} \underline{S}_1 \quad (1)$$



• Nœud D :

$$jC_2\omega(\underline{S}_1 - \underline{V}_D) + \frac{1}{R_2}(\underline{S} - \underline{V}_D) = I_-)_1 + I_-)_2 = 0$$

$$\text{soit } \left(jC_2\omega + \frac{1}{R_2} \right) \underline{V}_D = jC_2\omega \underline{S}_1 + \frac{1}{R_2} \underline{S} \quad (2)$$



• Nœud B :

$$\frac{1}{(1-\alpha)R}(\underline{S} - \underline{V}_B) + \frac{(0 - \underline{V}_B)}{\alpha R} = I_+)_2 = 0$$

$$\text{soit } (1-\alpha)\underline{V}_B = \alpha(\underline{S} - \underline{V}_B)$$

$$\text{et } \underline{V}_B = \alpha \underline{S} \Rightarrow \underline{V}_A = \alpha \underline{S} \quad (3)$$

puisque $\underline{V}_A = \underline{V}_B$.

(2) entraîne avec $\underline{V}_D = \underline{V}_A$:

$$jR_2C_2\omega \underline{S}_1 = \underline{V}_A(1 + jR_2C_2\omega) - \underline{S}$$

et avec (3) :

$$jR_2C_2\omega \underline{S}_1 = \underline{S}[-1 + \alpha + \alpha jR_2C_2\omega] \quad (4)$$

Enfin avec (1), (3) et (4) :

$$\left(\frac{1}{R_3} + jC_1\omega + \frac{1}{R_1} \right) \underline{S} = \frac{1}{R_3} \underline{E} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{jR_2C_2\omega} [-1 + \alpha + \alpha jR_2C_2\omega] \underline{S}.$$

Regroupons les termes :

$$\underline{S} \left[\alpha \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} + jC_1\omega \right) + \frac{1-\alpha}{jR_1R_2C_2\omega} - \frac{\alpha}{R_1} \right] = \frac{\underline{E}}{R_3}$$

$$\underline{S} \left[\frac{1}{R_3}\alpha + j \left(C_1\alpha\omega - \frac{1-\alpha}{R_1R_2C_2\omega} \right) \right] = \frac{\underline{E}}{R_3}$$

Soit enfin

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{\alpha + j \left[R_3C_1\alpha\omega - \frac{(1-\alpha)}{\frac{R_1R_2}{R_3}C_2\omega} \right]}.$$

D'où une fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + j \left[R_3C_1\omega - \frac{1-\alpha}{\frac{\alpha R_1 R_2}{R_3} C_2 \omega} \right]}$$

On peut remarquer que le crochet s'annule pour une valeur particulière ω_0 de la pulsation ω . Elle est donnée par la relation :

$$\omega_0^2 = \frac{1-\alpha}{\alpha R_2 C_2 R_3 C_1 \frac{R_1}{R_3}} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{(1-\alpha)}{\alpha R_2 C_2 R_1 C_1}}}$$

et en posant $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

D'autre part, la valeur de la fonction de transfert pour $\omega = \omega_0$ est définie par $\underline{H} = H_0 = \frac{1}{\alpha}$. On peut alors écrire :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jR_3C_1\omega_0 \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right]}.$$

Introduisons le facteur $Q = R_3C_1\omega_0 \Rightarrow$

$$\boxed{Q = \frac{R_3}{R_1} \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}}$$

La fonction de transfert prend la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]}$$

On reconnaît là un **filtre passe bande** :

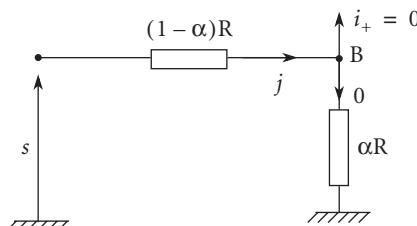
- centré sur la pulsation ω_0 ;
- de gain réel H_0 pour $\omega = \omega_0$;
- et de facteur de qualité Q .

Commentaires

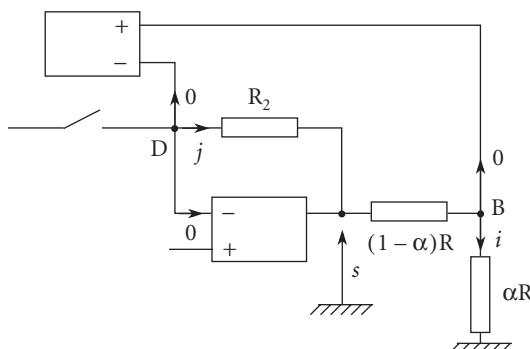
- En très haute fréquence, et à la limite, le condensateur C_1 constitue un court-circuit et le potentiel du point A devient nul. Il en est donc de même pour le nœud B, et il n'y a pas de courant traversant la résistance αR .

D'où $j = 0$ et $s = v_B = 0$.

On a bien $H \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow \infty$.



- En très basse fréquence, et à la limite, les condensateurs se transforment en circuits ouverts ; on a donc au niveau du nœud D :



$$j = 0 \quad (i_{-\oplus} = i_{-\ominus} = 0)$$

d'où $v_D = s = (v_-)_1 = (v_+)_1 = v_B$.

Il n'y a pas de courant traversant la résistance $(1-\alpha)R$. Il vient $i = 0$ (loi des nœuds en B) et $s = v_B = 0$:

$$H \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow 0.$$

La bande passante à -3 dB est définie selon :

$(\Delta\omega)_{\text{BP}} = \omega_H - \omega_B$, avec ω_H et ω_B solutions de l'équation :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \quad \left(20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\text{dB} \right).$$

Soit

$$1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{1}{Q}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - \frac{1}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\omega_H}{\omega_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right] \\ \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_0} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right]. \end{cases}$$

D'où

$$\frac{\omega_H - \omega_B}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad \text{et} \quad (\Delta\omega)_{\text{BP}} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_3 C_1}$$

Le filtre passe bande peut être caractérisé par les grandeurs ω_0 , H_0 et $(\Delta\omega)_{\text{BP}}$. De ces trois grandeurs, seule $(\Delta\omega)_{\text{BP}}$ dépend de R_3 , ce qui permet de régler la largeur de la bande passante indépendamment des valeurs de la pulsation centrale ω_0 et du gain maximal H_0 .

H_0 peut ensuite être fixé en jouant sur la valeur du paramètre α (et en restant dans le domaine linéaire...). ω_0 est alors ajustable à la valeur désirée en jouant sur R_1 , R_2 ou C_2 .

2. ■ Diagrammes de Bode :

$$G_{\text{dB}} = 20\log \frac{H_0}{\left[1 + Q^2 \left(X - \frac{1}{X} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{en notant } X = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \text{d'où :}$$

$G_{\text{dB}} = 20\log H_0 - 10\log \left[1 + Q^2 \left(X - \frac{1}{X} \right)^2 \right]$, ce qui donne les comportements asymptotiques suivants :

- $X \ll 1$: $G_{\text{dB}} \sim -10\log \left(\frac{Q^2}{H_0^2 X^2} \right) = +20\log \left(\frac{H_0}{Q} \right) + 20\log X$

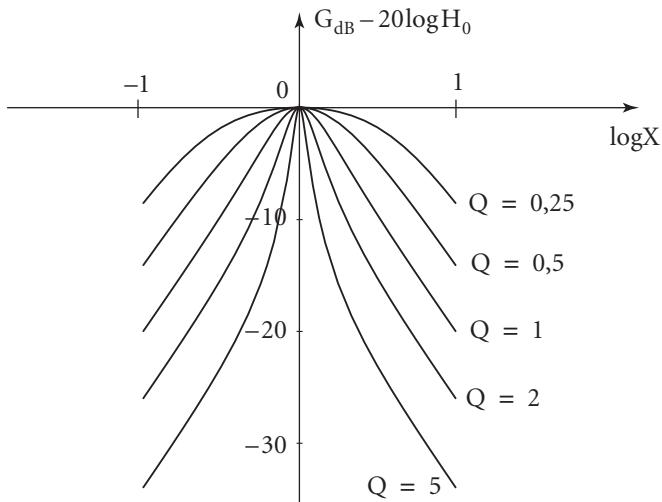
ce qui correspond à une pente de $+20\text{ dB}$ par décade.

- $X \gg 1$: $G_{\text{dB}} \sim -10\log \left(\frac{Q^2 X^2}{H_0^2} \right) = +20\log \left(\frac{H_0}{Q} \right) - 20\log X$

(pente de -20 dB / décade).

- $X = 1$: $G_{\text{dB}} = 20\log H_0$.

D'où les courbes donnant G_{dB} en fonction de $\log X$, et en remarquant que les deux asymptotes se coupent au point $(0; 20\log H_0)$ pour $Q = 1$, en dessous pour $Q > 1$, et au-dessus pour $Q < 1$:



■ Diagramme de phase :

$$\text{On a } \underline{H} = Ge^{j\varphi} \Rightarrow e^{-j\varphi} = \frac{G}{H_0} \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right].$$

$$\text{D'où } \tan \varphi = -Q \left(X - \frac{1}{X} \right) \quad \text{avec} \quad \cos \varphi > 0 \quad \text{où} \quad X = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

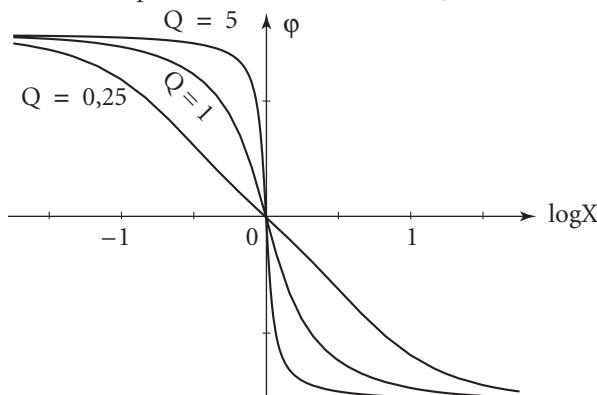
Dès lors :

- $X \ll 1$: $\tan \varphi \sim \frac{Q}{X}$ et $\varphi \rightarrow +\frac{\pi}{2}$;
- $X = 1$: $\tan \varphi = 0$ et $\varphi = 0$;
- $X \gg 1$: $\tan \varphi \sim -QX$ et $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

Remarquons de plus que la courbe donnant φ en fonction de $\log X$ est symétrique par rapport au point O(0 ; 0), $X_0 = \log 1 = 0$ et $\varphi = 0$, en effet :

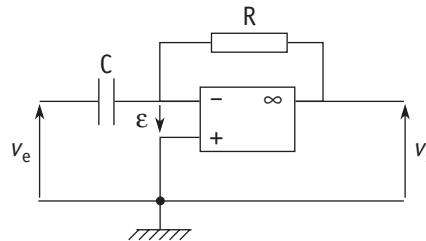
$$\begin{aligned} X \Rightarrow \frac{1}{X} \\ \log X \Rightarrow -\log X. \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \varphi \Rightarrow -\varphi \\ \log X \Rightarrow -\log X. \end{aligned} \right\}$$

D'où les courbes dessinées pour différentes valeurs de Q :



416 Dérivateur

- 1.** Donner la fonction de transfert du circuit ci-dessous, pour un A0 idéal dans le cas où $\varepsilon = 0$ en régime linéaire.

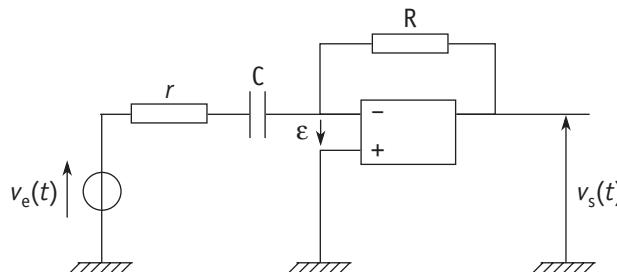


Donner l'équation différentielle liant $v_s(t)$ et $v_e(t)$, pour un régime linéaire quelconque. Quel est le rôle de ce circuit ?

- 2.** On veut tenir compte maintenant d'une résistance r en série, située à l'entrée du montage. L'A0 est toujours supposé idéal, mais de gain fini : on l'assimile à un système linéaire du premier ordre obéissant à l'équation différentielle :

$$v_s(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_s}{dt} = \mu_0 \varepsilon$$

avec $\mu_0 = 10^6$ et $\omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



- a.** Établir que l'équation différentielle vérifiée par $v_s(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{\Omega_0^2} \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\Omega_0} \frac{dv_s}{dt} + v_s = -RC \frac{dv_e}{dt} \quad (\text{avec } 1 + \frac{1}{\mu_0} \approx 1).$$

Montrer que pour $r \ll R$, les expressions approchées des coefficients Ω_0 et λ sont données par :

$$\Omega_0 \approx \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{RC}} \quad \text{et} \quad \lambda \approx \frac{rC}{2} \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{RC}}.$$

On prendra : $C = 0,1 \mu\text{F}$ et $R = 10^4 \Omega$.

- b.** À quelle(s) condition(s) peut-on retrouver, pour le montage étudié, un comportement voisin de celui du déivateur parfait ?

Quelle valeur a-t-on intérêt à donner à r ?

Solution

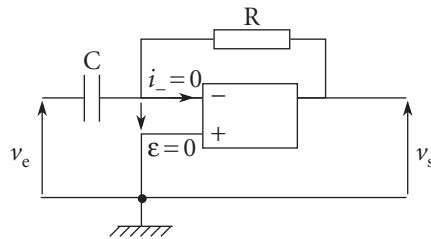
1. La fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ caractérise le comportement du circuit en régime sinusoïdal permanent, \underline{V}_s et \underline{V}_e étant les amplitudes complexes des tensions sinusoïdales de sortie et d'entrée.

Ici, l'AO étant idéal (pas de courants d'entrée), le même courant traverse le condensateur C et la résistance R, soit avec $\varepsilon = 0$ (fonctionnement linéaire) :

$$\frac{\underline{V}_e - 0}{\frac{1}{jC\omega}} = \frac{0 - \underline{V}_s}{R}.$$

Soit : $\underline{V}_s = -jRC\omega\underline{V}_e$

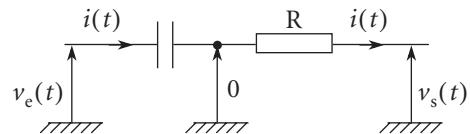
et $\boxed{\underline{H} = -jRC\omega}$ (1)



Équation différentielle liant $v_e(t)$ et $v_s(t)$:

$$i(t) = C \frac{d}{dt}(v_e - 0) = \frac{0 - v_s(t)}{R}$$

d'où : $\boxed{v_s(t) = -RC \frac{dv_e(t)}{dt}}$ (2)



Commentaires

- L'équation (2) est celle d'un dérivateur parfait.
- On aurait pu directement passer de (1) à (2) en substituant au facteur $j\omega$ l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$ et en remplaçant les tensions \underline{V} par $v(t)$.

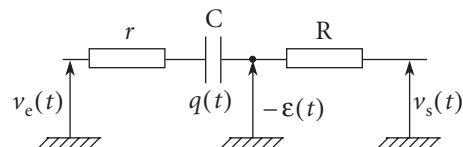
2. a. On a toujours $i_- = 0$, et le même courant $i(t)$ traverse les composants r , C et R .

On a donc :

$$v_e(t) - v_s(t) = (r + R)i + \frac{q}{C} \text{ avec}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

d'où : $\frac{dv_e}{dt} = \frac{dv_s}{dt} + (r + R)\frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$ (3)



D'autre part, $i = \frac{-\varepsilon - v_s}{R}$ (4)

On reporte (4) dans (3), en éliminant i :

$$\frac{dv_e}{dt} = \frac{dv_s}{dt} + \frac{(r + R)}{R} \left(-\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{dv_s}{dt} \right) - \frac{1}{RC}(\varepsilon + v_s).$$

Soit encore :

$$-RC \frac{d\nu_e}{dt} = \varepsilon + \nu_s + rC \frac{d\nu_s}{dt} + (r+R)C \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (5)$$

De plus, l'AO fonctionne en régime linéaire selon :

$$\nu_s + \frac{1}{\omega_0} \frac{d\nu_s}{dt} = \mu_0 \varepsilon.$$

(5) devient alors :

$$-RC \frac{d\nu_e}{dt} = \nu_s + rC \frac{d\nu_s}{dt} + \frac{1}{\mu_0} \left(\nu_s + \frac{1}{\omega_0} \frac{d\nu_s}{dt} \right) + \frac{(r+R)C}{\mu_0} \left(\frac{d\nu_s}{dt} + \frac{1}{\omega_0} \frac{d^2\nu_s}{dt^2} \right).$$

Regroupons les termes :

$$\frac{(r+R)C}{\mu_0 \omega_0} \frac{d^2\nu_s}{dt^2} + \left(rC + \frac{1}{\mu_0 \omega_0} + \frac{(r+R)C}{\mu_0} \right) \frac{d\nu_s}{dt} + \left(1 + \frac{1}{\mu_0} \right) \nu_s = -RC \frac{d\nu_e}{dt}.$$

Équation de la forme (avec $1 + \frac{1}{\mu_0} \approx 1$; $\mu_0 = 10^6$) :

$$\boxed{\frac{1}{\Omega_0^2} \frac{d^2\nu_s}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\Omega_0} \frac{d\nu_s}{dt} + \nu_s = -RC \frac{d\nu_e}{dt}} \quad (6)$$

où : $\Omega_0^2 = \frac{\mu_0 \omega_0}{(r+R)C} \approx \frac{\omega_0 \mu_0}{RC}$ (pour $R \gg r$).

$$\frac{2\lambda}{\Omega_0} = rC + \frac{1}{\mu_0 \omega_0} + \frac{(r+R)C}{\mu_0} \approx rC + \frac{1}{\mu_0 \omega_0} + \frac{RC}{\mu_0}.$$

Avec les valeurs numériques indiquées dans le texte, il vient :

$$\Omega_0^2 = \frac{10^6 \cdot 10}{10^4 \cdot 10^{-7}} = 10^{10} \Rightarrow \Omega_0 \approx 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\frac{2\lambda}{\Omega_0} = rC + 10^{-7} + 10^{-9} \sim rC \text{ pour } r \text{ multiple de } 100 \Omega.$$

Avec ces approximations, on a donc :

$$\boxed{\Omega_0 \approx \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{RC}} \quad \text{et} \quad \lambda \approx \frac{rC}{2} \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{RC}}}$$

L'équation différentielle homogène associée à l'équation (6) s'écrit :

$$\frac{d^2\nu_s}{dt^2} + 2\lambda\Omega_0 \frac{d\nu_s}{dt} + \Omega_0^2 \nu_s = 0.$$

C'est celle d'un circuit R'-L'-C' série de pulsation propre Ω_0 et de facteur de qualité $Q = \frac{1}{2\lambda}$.

2. b. La solution $\nu_s(t)$ est approximativement celle du déivateur parfait $\left(\nu_s(t) = -RC \frac{d\nu_e}{dt} \right)$ dans la mesure où l'effet du (pseudo) circuit R'-L'-C' est négligeable. Il faut ainsi réaliser deux conditions :

- les solutions de l'équation homogène doivent être rapidement négligeables, donc suffisamment amorties ;
- les termes faisant intervenir les dérivées de $v_s(t)$ doivent rester petits.

Plus précisément, les solutions de l'équation (6) peuvent s'écrire :

$$v_s(t) = \tilde{v}_s(t) + v_{sp}(t).$$

(transitoire) (solution particulière
correspondant à $v_c(t)$)

■ La première condition doit donc se traduire par $\tilde{v}_s(t) \rightarrow 0$ le plus rapidement possible, ce qui correspond à $\lambda \approx 1$ ($\lambda = 1$ est associé à l'amortissement critique).

Commentaires

Dans le cas d'une équation différentielle « classique » :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\lambda\Omega_0 \frac{dv}{dt} + \Omega_0^2 v = \Omega^2 E \quad (7)$$

les solutions de l'équation homogène (équation (7) où $E = 0$) se déduisent des racines de l'équation caractéristique :

$$X^2 + 2\lambda\Omega_0 X + \Omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant (réduit) est :

$$\Delta' = (\lambda\Omega_0)^2 - \Omega_0^2 = \Omega_0^2(\lambda^2 - 1)$$

d'où deux cas :

- $\lambda \geq 1$: racines réelles $X = -\Omega_0$. ($\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$).

Soit $v(t) = ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + be^{-\frac{t}{\tau_2}}$

avec $\tau_1\tau_2 = \Omega_0^{-2}$: $\tau_1 = \frac{1}{\Omega_0(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})}$ et $\tau_2 = \frac{1}{\Omega_0}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})$.

Quand λ varie de 1 à l'**« infini »**, τ_1 décrit l'intervalle $\frac{1}{\Omega_0} \rightarrow 0$ et τ_2 l'intervalle $\frac{1}{\Omega_0} \rightarrow \infty$.

Il vaut mieux choisir λ proche de 1 (ici par valeurs supérieures) pour avoir une décroissance rapide (alors $\tau_1 \sim \tau_2 \sim \tau_0 = \frac{1}{\Omega_0}$).

- $\lambda < 1$: racines complexes conjuguées de la forme $-\lambda\Omega_0 \pm j\omega'$, d'où des solutions à (7) :

$$v(t) = e^{-\lambda\Omega_0 t} (A \cos \omega' t + B \sin \omega' t)$$

soit $v(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \omega' t + B \sin \omega' t)$ où $\tau = \frac{1}{\lambda\Omega_0}$ signal qui s'atténue d'autant plus rapidement, à Ω_0 fixé, que λ est proche de 1.

En conclusion, cette étude montre bien que l'amortissement le plus rapide du régime « transitoire » est obtenu pour $\boxed{\lambda = 1}$ $\left(\tau \sim \frac{1}{\Omega_0}\right)$.

■ La seconde condition impose Ω_0 suffisamment grand pour que l'équation (6) se réduise à :

$$v_s(t) = -RC \frac{dv_e}{dt}$$

Si $v_e(t)$ présente une constante de temps τ_c caractéristique de ses variations, il en sera de même pour $v_{sp}(t)$, et :

$$\left| \frac{dv_s}{dt} \right| \sim \frac{1}{\tau_c} |v_s|$$

soit : $\frac{1}{\Omega_0^2} \left| \frac{d^2 v_s}{dt^2} \right| \ll |v_s| \Rightarrow \frac{1}{\Omega_0^2 \tau_c^2} \ll 1, \quad \Omega_0 \gg \frac{1}{\tau_c}$

et $\frac{2\lambda}{\Omega_0} \left| \frac{dv_s}{dt} \right| \ll |v_s| \Rightarrow \frac{2\lambda}{\Omega_0 \tau_c} \ll 1, \quad \Omega_0 \gg \frac{1}{\tau_c}$
(si $\lambda \approx 1$)

Avec les valeurs proposées, on a $\Omega_0 = 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à une fréquence f_0 telle que :

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} \Rightarrow f_0 \approx 16 \text{ kHz.}$$

Ainsi, le déivateur pourra valablement fonctionner pour des signaux de fréquence nettement inférieure à $f_0 = 16 \text{ kHz...}$

D'autre part, le choix $\lambda = 1$ impose : $r \approx \frac{2}{C\sqrt{\omega_0 \mu_0}} \sqrt{RC}$.

Soit encore $r = \frac{2}{10^{-7} \sqrt{10^4 \cdot 10^{-7}}} \Rightarrow r \approx 200 \Omega$.

Commentaires

- Cette valeur de r vérifie à peu près la condition $r \ll R$. On a en effet :

$$\frac{r}{R} = \frac{200}{10^4} = 2 \cdot 10^{-2}.$$

- On peut aussi penser que le circuit réel fonctionnera à peu près comme un déivateur parfait tant que l'effet de r sera négligeable devant l'impédance du condensateur :

$$r \leq \frac{1}{C\omega}$$

ce qui impose une limite supérieure aux pulsations ω compatibles avec un bon fonctionnement :

$$\omega \leq \frac{1}{rC} = \frac{1}{200 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

ce qui correspond à peu près à $\omega \ll \Omega_0$...

Notons que la présence de cette résistance r est en pratique indispensable pour la stabilité du montage : avec $r = 0$, le gain (montage inverseur) tendrait vers l'infini lorsque $\frac{1}{C\omega} \rightarrow 0 \dots$, effet heureusement compensé par la limitation du gain de l'AO aux fréquences élevées !

chapitre

5

Mécanique 2

- A . Oscillateurs
- B . Forces centrales et systèmes de deux points matériels
- C . Changements de référentiels
- D . Mouvements dans des champs \vec{E} et \vec{B}

A. Oscillateurs

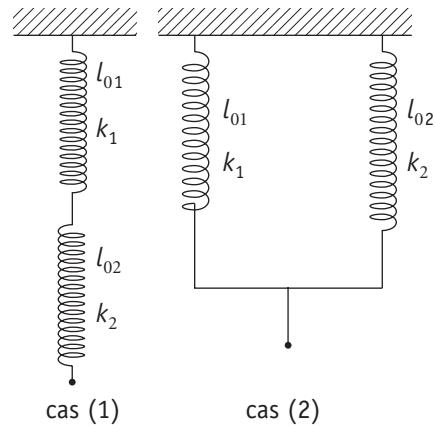
501 Association de deux ressorts

Un ressort « idéal » supposé de masse négligeable, est caractérisé uniquement par sa longueur au repos l_0 et sa raideur k .

1. On accroche deux tels ressorts bout à bout : montrer que l'ensemble est équivalent à un ressort unique, dont on précisera les caractéristiques.

2. Même question si les deux ressorts sont montés côte à côte, un dispositif convenable, de masse négligeable, imposant à la barre de liaison un mouvement de translation parallèle aux axes des ressorts (la barre reste constamment perpendiculaire à cet axe).

3. Commenter les résultats obtenus au 1. et 2.



1. Ce qu'il faut savoir

- Oscillateur harmonique non amorti : énergie potentielle élastique.

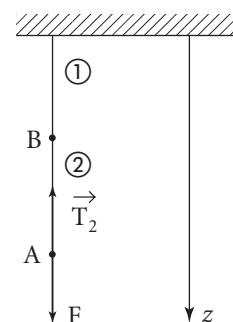
2. Ce qu'il faut comprendre

1. et 2. D'une manière générale, il faut étudier le comportement du dispositif soumis à une force d'intensité F donnée, et déterminer l'allongement Δl . Si le résultat peut se mettre sous la forme $F = k\Delta l$, l'ensemble est bien équivalent à un ressort unique de raideur k . Dans le premier cas, l'équilibre du système impose l'égalité des tensions des deux ressorts, tandis que le second dispositif impose l'égalité des longueurs (et non des allongements...).

3. Solution

1. Soumettons le système à une force d'intensité $\vec{F} = Fu_z$ et $F > 0$) et étudions le système dans sa position d'équilibre.

Le point A, sans masse, est soumis à la force \vec{F} et à la tension du ressort $\vec{T}_2 = -k_2(l_2 - l_{02})\vec{u}_z$.



L'équilibre impose :

$$\vec{F} + \vec{T}_2 = \vec{0} \Rightarrow F - k_2(l_2 - l_{02}) = 0 \quad (1)$$

De même, le point B est soumis, de la part du ressort ②, à la force $-\vec{T}_2$ et de la part du ressort ①, à la force $\vec{T}_1 = -k_1(l_1 - l_{01})\vec{u}_z$. On a donc :

$$-k_1(l_1 - l_{01}) + k_2(l_2 - l_{02}) = 0. \quad (2)$$

Il en résulte un allongement total du dispositif Δl tel que :

$$\Delta l = (l_2 - l_{02}) + (l_1 - l_{01}).$$

Soit d'après (2) : $\Delta l = (l_2 - l_{02}) \left[1 + \frac{k_2}{k_1} \right]$

et avec (1) : $\Delta l = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} F.$

L'ensemble est donc bien équivalent à un ressort unique de raideur $K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ ($F = K\Delta l$), et bien entendu de longueur à vide $l_0 = l_{01} + l_{02}$.

Les deux systèmes contiennent également la même énergie. On a ainsi pour le système des deux ressorts :

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(l_1 - l_{01})^2 + \frac{1}{2}k_2(l_2 - l_{02})^2$$

soit $E_p = \frac{1}{2k_1}[k_1(l_1 - l_{01})]^2 + \frac{1}{2k_2}[k_2(l_2 - l_{02})]^2$

d'où avec (1) et (2) $\Rightarrow E_p = \frac{F^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (3)$

Et pour le système équivalent :

$$E_p = \frac{1}{2}K(\Delta l)^2 = \frac{1}{2K}[K(\Delta l)]^2 = \frac{F^2}{2K}. \quad (4)$$

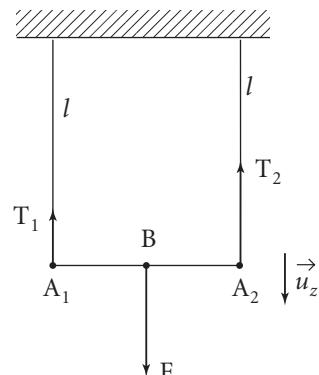
Les expressions (3) et (4) sont identiques puisque $\frac{1}{K} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1}$.

2. Le système de guidage impose la même longueur l aux deux ressorts. On a donc $\vec{T}_2 = -k_2(l - l_{02})\vec{u}_z$ et $\vec{T}_1 = -k_1(l - l_{01})\vec{u}_z$.

Dans le cas général, ces tensions ne sont pas égales. Leur moment en B n'est donc pas nul, et le système de guidage doit compenser ce moment. On peut alors supposer que cela s'effectue par l'intermédiaire d'un couple qui n'affecte pas le bilan des forces s'exerçant sur la barre. L'équilibre de cette dernière s'écrit ainsi :

$$F - k_2(l - l_{02}) - k_1(l - l_{01}) = 0 \quad (5)$$

Pour $F = 0$, on obtient :
$$l = l_0 = \frac{k_2 l_{02} + k_1 l_{01}}{k_1 + k_2}$$



Et pour $F \neq 0$, il vient : $F = (k_1 + k_2)[l - l_0] = (k_1 + k_2)\Delta l$ où Δl représente l'allongement du système.

L'ensemble est équivalent à un ressort unique de longueur au repos l_0 et de raideur $K = k_1 + k_2$.

D'un point de vue énergétique, il faut prendre une origine associée à la configuration d'équilibre pour $F = 0$. Ainsi pour une force $F \neq 0$ et donc une longueur d'équilibre l , il apparaît une énergie élastique supplémentaire :

$$\begin{aligned} E'_p &= E_p(l) - E_p(l_0) \\ \text{soit } E'_p &= \frac{1}{2}k_1(l - l_{01})^2 + \frac{1}{2}k_2(l - l_{02})^2 - \frac{1}{2}k_1(l_0 - l_{01})^2 - \frac{1}{2}k_2(l_0 - l_{02})^2 \quad (6) \end{aligned}$$

quantité qu'il nous faut comparer à $E''_p = \frac{1}{2}K \cdot (l - l_0)^2$.

Calculons donc $E''_p - E'_p$:

$$\begin{aligned} E''_p - E'_p &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}k_1(l - l_{01})^2 - \frac{1}{2}k_2(l - l_{02})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}k_1(l_0 - l_{01})^2 + \frac{1}{2}k_2(l_0 - l_{02})^2 \\ E''_p - E'_p &= \left\{ \frac{1}{2}k_1[(l - l_0)^2 + (l_0 - l_{01})^2] - \frac{1}{2}k_1(l - l_{01})^2 \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2}k_2[(l - l_0)^2 + (l_0 - l_{02})^2] - \frac{1}{2}k_2(l - l_{02})^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } (l - l_0)^2 + (l_0 - l_{01})^2 &= (l - l_0 + l_0 - l_{01})^2 - 2(l - l_0)(l_0 - l_{01}) \\ &= (l - l_{01})^2 - 2(l - l_0)(l_0 - l_{01}). \end{aligned}$$

Soit après des simplifications évidentes :

$$\begin{aligned} E''_p - E'_p &= -k_1(l - l_0)(l_0 - l_{01}) - k_2(l - l_0)(l_0 - l_{02}) \\ E''_p - E'_p &= -(l - l_0) \underbrace{[k_1(l_0 - l_{01}) + k_2(l_0 - l_{02})]}_0 = 0 \text{ d'après (5)} \quad (l = l_0 \text{ pour } F = 0). \end{aligned}$$

Il y a bien identité entre l'énergie E''_p associée au ressort équivalent de raideur K de longueur à vide l_0 et le supplément d'énergie élastique pour le système réel (entre les états $F = 0$ et $F \neq 0$).

3. • Considérons d'abord les raideurs. Dans le premier cas, les deux ressorts sont en série et on a $\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. Dans le second cas, ils sont montés en parallèle et $K = k_1 + k_2$.

• L'association en série met en évidence le lien entre raideur K et longueur à vide l_0 d'un ressort. Ainsi si l'on divise un tel ressort en N parties égales, chaque partie aura :

– une longueur à vide $\frac{l_0}{N}$ ($l_0 = N \frac{l_0}{N}$);

– une raideur NK ($\frac{1}{K} = N \frac{1}{NK}$).

Un type de ressort donné suit la loi :

$$\boxed{\text{longueur à vide} \times \text{raideur} = \text{constante}}$$

la constante étant caractéristique du matériau (propriétés de déformation élastique) et de la géométrie (diamètre des « spires » et rayon du « fil » constituant le ressort à boudin...).

L'expérience montre bien que, soumis à une force donnée, un ressort d'un modèle donné s'allonge d'autant moins qu'il est au départ plus court...

Remarquons que – dans le deuxième cas – si les ressorts ne sont pas identiques, l'équilibre au repos impose $T_2 = -T_1$ ($F = 0$).

La barre est soumise à un couple, qui est compensé par le dispositif de guidage ; ce couple existe de manière générale. Il n'est nul que dans le cas particulier où :

$$T_1 = T_2 = \frac{F}{2}$$

soit :

$$k_1(l - l_{01}) = k_2(l - l_{02}) = \frac{F}{2}$$

c'est-à-dire :

$$l = l_{01} + \frac{F}{2k_1} = l_{02} + \frac{F}{2k_2}$$

ce qui impose :

$$F\left(\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2}\right) = l_{02} - l_{01}$$

soit, si $k_2 \neq k_1$:

$$F = 2k_1k_2 \cdot \frac{l_{02} - l_{01}}{k_2 - k_1}.$$

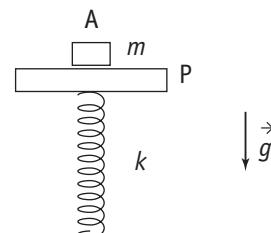
Dans le cas où $k_2 = k_1$, cette absence de couple n'est possible que si $l_{02} = l_{01}$, mais est alors réalisée quel que soit F (cas de deux ressorts identiques).

502

Décollement d'une masse

1. Un point matériel A, de masse m , est posé sur un plateau horizontal P, de masse M, soutenu par des ressorts équivalents à un ressort unique de raideur k : ce plateau ne peut se déplacer que verticalement. On appuie sur le plateau, qui se déplace d'une longueur l , comptée à partir de sa position d'équilibre initiale, et on le lâche sans vitesse initiale.

Déterminer la condition que doit vérifier le déplacement l pour que A ne quitte jamais le plateau.

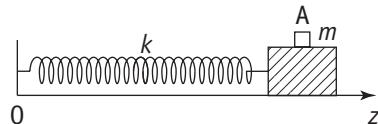


2. Un chariot de masse M peut glisser sans frottement sur l'axe Oz . Il supporte un point matériel A de masse m . Il y a frottement entre m et M .

On admet la condition de non glissement de A sur M :

$$|F_f| < fmg \quad (f \text{ coefficient de frottement})$$

où $\vec{F}_f = F_f \vec{u}_z$ représente la force de contact tangentielle exercée par M sur A . Quelle est l'amplitude maximale a_{\max} des oscillations du chariot compatible avec l'équilibre sur celui-ci de la masse m ?



1. Ce qu'il faut savoir

- Loi fondamentale de la dynamique – théorème de la quantité de mouvement.
- Oscillateurs harmoniques.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Tout mouvement – autre que rectiligne uniforme – nécessite une accélération (c'est la réciproque du principe d'inertie...) à laquelle correspond nécessairement la résultante de forces subies par le mobile. Dans le cas présent, la masse m est soumise à son poids (vertical vers le bas) et à la réaction du plateau (vers le haut) : l'accélération que peut subir le point A – en orientant selon la verticale descendante – est donc limitée par la valeur de g .

Il faut donc calculer l'accélération liée au mouvement d'oscillation du système, et chercher à quelle condition elle restera effectivement inférieure à g .

3. Solution

1. Le point matériel A est soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{u}_z$ et à la réaction \vec{R} du plateau.

Posons $\vec{R} = -R\vec{u}_z$.

Le contact subsistera si R demeure positif.

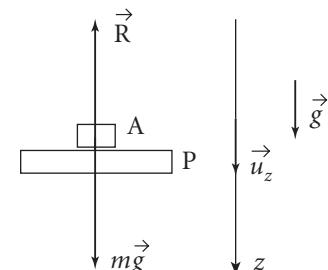
Le point matériel quittera le plateau dès que $R = 0$.

On est donc amené à calculer R . Pour cela, appliquons la loi fondamentale de la dynamique à A en supposant qu'il reste solidaire du plateau :

$$m\ddot{z} = mg - R \Rightarrow R = m(g - \ddot{z}).$$

R positif implique donc une accélération \ddot{z} inférieure

à g . Le calcul de cette accélération s'effectue à partir de la loi fondamentale de la dyna-



mique appliquée au système matériel {masse A + plateau} assimilé à un point matériel, c'est-à-dire en notant $\vec{F} = F \vec{u}_z$ la force exercée ici par le ressort :

$$(m+M)\ddot{z} = (m+M)g + F.$$

$$\text{D'où : } g - \ddot{z} = -\frac{F}{m+M} \quad \text{et} \quad R = \frac{m}{m+M} \cdot (-F).$$

Ainsi, il y a contact tant que $F < 0$. Pour déterminer F, prenons l'origine des z pour un ressort ni tendu, ni comprimé ; dès lors :

$$F = -kz \quad \text{et} \quad R = \frac{mk}{m+M}z$$

La masse A ne quittera jamais le plateau si, compte tenu des conditions initiales, la position $z = 0$ n'est jamais atteinte.

Le système est un oscillateur harmonique non amorti qui va osciller autour de sa position d'équilibre z_0 définie selon :

$$(m+M)g = kz_0.$$

Or à $t=0$, on a $z = z_0 + l$ et $\dot{z} = 0$; les oscillations vont donc s'effectuer entre les limites $z_0 - l$ et $z_0 + l$.

A restera solidaire du plateau si la valeur minimale $z_0 - l$ de z reste positive, soit pour :

$$z_0 - l > 0 \Rightarrow l \leq \frac{(m+M)g}{k}$$

Dans le cas contraire, A quitte le plateau pour $z = 0$.

2. La condition de non glissement de la masse m par rapport au chariot est :

$$|F_f| < fmg.$$

La loi fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel A donne :

$$m\ddot{z} = F_f \quad (\text{avec } \vec{F}_f = F_f \vec{u}_z).$$

De la même façon qu'au 1., le théorème de la quantité de mouvement pour le système masse A-chariot s'écrit :

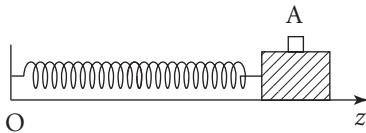
$(m+M)\ddot{z} = -kz$ (pas de frottements sol/chariot, et la force exercée par le ressort est $\vec{F}' = -kz\vec{u}_z$, l'origine des z étant choisi pour un ressort ni tendu ni comprimé).

Le non glissement de A par rapport au chariot est assuré tant que :

$$\frac{m}{m+M}|kz| < fmg \Rightarrow |z| < \frac{f(M+m)g}{k}.$$

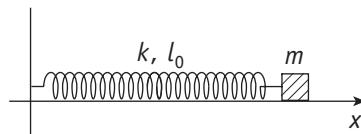
Enfin si l'on note a_0 l'amplitude des oscillations (A et chariot solidaires), l'inégalité précédente se traduit selon :

$$a_0 < \frac{f(M+m)g}{k} \Rightarrow a_{\max} = \frac{f(M+m)g}{k}$$



503

Oscillateur harmonique amorti : temps de réponse – Sélectivité



Une masse m peut glisser sans frottements sur l'axe $x'0x$ d'un plan horizontal. Elle est reliée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . On repère son mouvement $x(t)$ par rapport à sa position ressort ni tendu ni comprimé. Elle est de plus soumise à une force de frottement fluide $\vec{f} = -2\lambda m \dot{x} \vec{u}_x$ ($\dot{x} = \frac{dx}{dt}$).

On posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$.

1. À l'instant initial $t = 0$, la masse m est en $x = 0$ avec une vitesse nulle. On la soumet alors à la force constante $\vec{F}_0 = F_0 \vec{u}_x$. Déterminer la loi du mouvement $x(t)$ dans le cas où le facteur Q est suffisamment grand devant 1. Représenter le graphe de $x(t)$. Commenter.

On notera $X_0 = \frac{F_0}{k}$.

2. Soumise à \vec{F}_0 , la masse m est maintenant immobile en $x = X_0$.

On supprime la force F_0 à un instant pris pour origine des temps ($t = 0$). Donner la nouvelle expression de $x(t)$ dans le cas où $Q \gg 1$.

Dans les mêmes conditions, montrer que l'énergie mécanique $E_m(t)$ du système vérifie $E_m(t) = E_m(0)e^{-t/\tau}$: on exprimera τ en fonction de ω_0 et Q . En déduire que l'on a :

$$Q = 2\pi \frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t + T_0)} \quad \text{où } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad \text{Conclure.}$$

3. Le système est désormais soumis à une force sinusoïdale $\vec{F}_0 = F_0 \cos \omega t \cdot \vec{u}_x$. Étudier la réponse de l'oscillateur en régime forcé. Dans le cas où $Q \gg 1$, déterminer la bande passante $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q .

4. Commenter les résultats obtenus au **2.** et au **3.**

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Oscillateur harmonique amorti forcé.
- Énergie mécanique.

Outils mathématiques

- Équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre.
- Utilisation de la notation complexe.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. On désire faire passer le système de l'état $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ à l'état $(x, \dot{x}) = (X_0, 0)$.

Cette évolution s'effectue via un régime transitoire quasi sinusoïdal, à l'échelle de quelques T_0 , dès que l'amortissement est faible, ce qui est le cas pour $Q \gg 1$: le régime est alors pseudo-périodique...

2. On peut faire la même remarque qu'au **1.** le système évoluant cette fois-ci dans l'autre sens (les conditions initiales seront différentes). On peut s'attendre à ce que le temps τ soit d'autant plus grand que Q est grand (faible amortissement) et que ω_0 est faible (T_0 grand)...

3. Il s'agit de l'étude classique du régime sinusoïdal forcé. La bande passante doit être d'autant plus étroite que Q est grand (meilleure sélectivité) et que ω_0 est faible.

Il apparaît que τ varie en sens inverse de $\Delta\omega$...

■ 3. Solution

1. Appliquons au point matériel m la loi fondamentale de la dynamique, en projection sur l'axe $x' Ox$:

$$m\ddot{x} = -kx - 2\lambda m\dot{x} + F_0.$$

Soit avec $k = m\omega_0^2$ et $2\lambda = \frac{\omega_0}{Q}$:

$$(1) \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{k}\omega_0^2 = X_0\omega_0^2, \text{ en posant } X_0 = \frac{F_0}{k}.$$

En fait, X_0 correspond à l'abscisse de la nouvelle position d'équilibre due à la force extérieure F_0 appliquée au système.

Posons alors $x(t) = X_0 + u(t)$. Dès lors :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (2)$$

Cherchons des solutions sous la forme e^{pt} ; p doit vérifier l'équation caractéristique :

$$p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2 = 0 \quad (3)$$

Son discriminant est $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$. Il est négatif pour $Q > \frac{1}{2}$, et donc *a fortiori* pour $Q \gg 1$. Dans ces conditions, les solutions de (3) sont données par :

$$p_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad p_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Posons $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \Rightarrow \omega \neq \omega_0$ pour $Q \gg 1$ il vient :

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

et

$$x(t) = X_0 + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Traduisons les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$:

$$x(0) = 0 \Rightarrow X_0 + A = 0 \Rightarrow A = -X_0$$

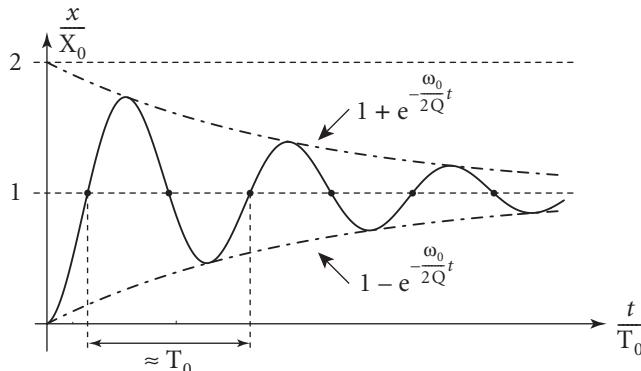
$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A\left(-\frac{\omega_0}{2Q}\right) + B\omega = 0 \Rightarrow B = -\frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{2Q} X_0.$$

Finalement
$$x(t) = X_0 \left[1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\cos \omega t + \frac{1}{2Q} \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t \right) \right].$$

Et pour $Q \gg 1$, soit $\omega \approx \omega_0$, et en négligeant le terme en sinus, terme d'amplitude proportionnelle à $\frac{1}{2Q}$ très faible devant l'unité :

$$x(t) \approx X_0 \left[1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos \omega_0 t \right]$$

D'où les graphes $t \rightarrow x(t)$:



Commentaires

- Le système a « atteint » son régime établi (encore appelé régime permanent ou régime forcé, et correspondant ici à $x = X_0 = \frac{F_0}{k}$) dès que le temps t écoulé est suffisamment grand devant un temps caractéristique que l'on peut évaluer à $\tau' = \frac{2Q}{\omega_0}$ (cf. $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$).

C'est le temps nécessaire pour que le système puisse « oublier » ces conditions initiales.

- Pour $t \leq \tau'$, on a affaire à un régime transitoire qui présente ici les caractéristiques d'un régime pseudo-périodique (pseudo-période $\sim T_0$ pour $Q \gg 1$).

- 2.** En régime établi, et sous l'action de la force extérieure F_0 , on a une élongation du ressort $x = X_0$. Supprimant F_0 , le système va tendre vers sa nouvelle position d'équilibre $x = 0$ en effectuant des oscillations pseudo-sinusoidales autour de cette position.

D'après le 1. $x(t)$, solution de l'équation $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = 0$, est donnée par :

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t); \quad \left(Q > \frac{1}{2}\right).$$

Avec ici $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ soit : $X_0 = A$ et $-\frac{\omega_0}{2Q}A + B\omega_0 = 0$.

Et avec les mêmes approximations qu'au 1. nous obtenons pour $Q \gg 1$:

$$x(t) = X_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos \omega_0 t$$

• L'énergie cinétique de la masse m a pour valeur, à chaque instant :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \approx \frac{1}{2}mX_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} \left[-\frac{\omega_0}{2Q} \cos \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega_0 t \right]^2.$$

Et, en tenant compte de ce que $Q \gg 1$:

$$E_c \approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} \sin^2 \omega_0 t.$$

De même, l'énergie potentielle associée au ressort s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{1}{2}kX_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} \cos^2 \omega_0 t$$

ou encore, avec $k = m\omega_0^2$: $E_p \approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} \cos^2 \omega_0 t$.

L'énergie mécanique totale du système $E_m = E_c + E_p$ vaut donc :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}.$$

À cette approximation, nous avons : $E_m(t) = E_m(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$

en notant $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$ temps caractéristique de décroissance de l'énergie emmagasinée dans le système. Plus le facteur de qualité Q est grand, plus ce temps τ possède une valeur élevée (à ω_0 fixé) et corrélativement moins les pertes d'énergie, « rapportées » à un intervalle de temps T_0 , sont importantes.

$$\text{Ainsi on a : } \frac{E_m(t) - E_m(t + T_0)}{E_m(t)} = 1 - e^{-\frac{\omega_0}{Q}T_0} \approx \frac{2\pi}{Q}$$

$$\text{soit encore : } Q = 2\pi \frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t + T_0)}$$

d'où :
$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie emmagasinée à l'instant } t}{\text{énergie perdue pendant } T_0 \text{ au voisinage de l'instant } t}$$

Cette définition est assez générale. Elle peut justifier le nom de facteur de qualité (ou de mérite) donné à Q. Elle est suffisamment large pour s'appliquer à des systèmes variant de l'oscillateur harmonique étudié ici à la cavité Laser...

3. L'équation différentielle du mouvement s'écrit maintenant :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t = X_0 \omega_0^2 \cos \omega t \quad (4)$$

Le régime forcé correspond ici au régime sinusoïdal établi de la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

On pose alors $x(t) = \text{Re}[x(t)]$ et $\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$ où $\underline{X} = A e^{j\varphi}$.

Ainsi $\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \text{Re}[j\omega \underline{x}]$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}[-\omega^2 \underline{x}].$$

L'équation (4) se résout sous la forme :

$$\text{Re}\left[-\omega^2 \underline{x} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x}\right] = X_0 \omega_0^2 \text{Re}[e^{j\omega t}].$$

\underline{x} est alors solution de l'équation : $\underline{x} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \right] = X_0 \omega_0^2 e^{j\omega t}$

$$\text{soit encore : } \underline{x} = \frac{X_0}{(1 - \eta^2) + j\frac{\eta}{Q}} \text{ en notant } \eta = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

On obtient donc d'après ce qui précède ($\underline{X} = A e^{j\varphi}$) :

$$A = \frac{X_0}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \frac{\eta^2}{Q^2}}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tan \varphi = -\frac{1}{Q} \frac{\eta}{1 - \eta^2} \text{ avec } \sin \varphi < 0 \\ \text{soit } -\pi \leq \varphi \leq 0. \end{cases}$$

• Étude rapide du terme d'amplitude A(η) :

$$-\text{Pour } \eta \ll 1, \text{ on a } A \sim X_0 = \frac{F_0}{k} \text{ et pour } \eta \gg 1, A \sim \frac{X_0}{\eta^2} = \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Ainsi en très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$), c'est l'élasticité (ici le ressort) qui limite la réponse du système, alors qu'en très haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), c'est l'inertie (ici la masse m).

– D'autre part, A(η) admet un maximum si l'égalité suivante est réalisée (annulation de la dérivée par rapport à η^2 de l'expression sous la racine) :

$$-2(1 - \eta^2) + \frac{1}{Q^2} = 0 \Rightarrow \eta^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

ce qui exige $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (condition bien évidemment remplie pour $Q \gg 1$).

Reportant cette valeur de η dans A, il vient :

$$A_{\max} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}} \Rightarrow A_{\max} = \frac{X_0 Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

On a bien $A_{\max} > X_0$, et pour $Q \gg 1$: $A_{\max} \approx QX_0$.

Il y a résonance (ici d'amplitude) pour la pulsation $\omega \approx \omega_0$ ($Q \gg 1$).

À cette pulsation, la réponse du système présente une amplitude à peu près Q fois plus grande (pour $Q \gg 1$) que celle que l'on obtiendrait en très basse fréquence...

- Pour caractériser l'acuité de la résonance, on définit la bande bassante $\Delta\omega$ à -3 dB selon :

$$\Delta\omega = \omega_H - \omega_B \text{ où } \frac{\omega_H}{\omega_0} \text{ et } \frac{\omega_B}{\omega_0} \text{ sont solutions de l'équation } A(\eta) = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}.$$



POINT COURS

$$A(\eta) = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20\log A(\eta) = 20\log A_{\max} - 20\log \sqrt{2},$$

$$\text{soit } [A(\eta)]_{\text{dB}} = [A_{\max}]_{\text{dB}} - 3 \text{ dB} \quad (10\log 2 \approx 3).$$

Les valeurs de η cherchées vérifient donc $\left(Q > \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$$\frac{X_0^2}{(1-\eta^2)^2 + \frac{\eta^2}{Q^2}} = \frac{1}{2} \frac{X_0^2 Q^2}{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\text{soit encore : } (1-\eta^2)^2 + \frac{\eta^2}{Q^2} = \frac{2}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) \quad (5)$$

or pour $Q \gg 1$, les valeurs de η satisfaisant (5) deviennent très proches de 1.

Posons $\eta = 1 + \varepsilon(Q)$ avec $|\varepsilon| \ll 1$, dès lors :

$$(1-\eta^2)^2 = (1-\eta)^2(1+\eta)^2 \approx \varepsilon^2 \cdot 4$$

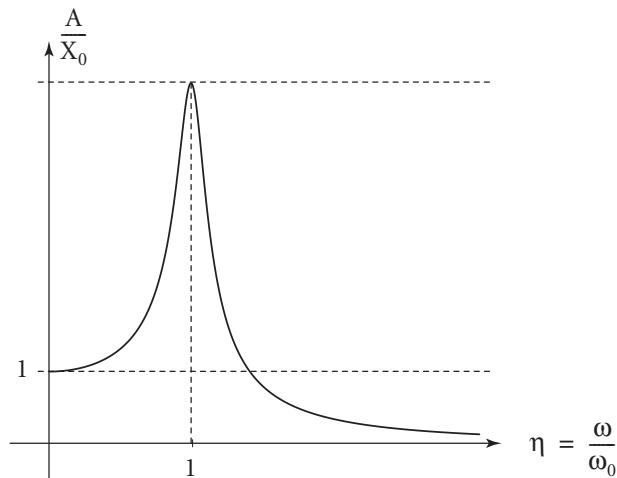
$$\text{et } 4\varepsilon^2 \# \frac{1}{Q^2} \left[2 - \eta^2 - \frac{1}{2Q^2}\right] \approx \frac{1}{Q^2} \text{ (car } \eta \approx 1 \text{ et } Q \gg 1 \text{) d'où } \varepsilon \# \pm \frac{1}{2Q}$$

$$\text{soit : } \omega_H \# \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \quad \text{et} \quad \omega_B \# \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right).$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta\omega \# \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad Q \gg 1 \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

D'où la courbe donnant $\frac{A}{X_0}$ en fonction de $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$



4. On a montré que le système proposé pouvait être caractérisé par un temps de réponse en régime transitoire de l'ordre de $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$ et par une bande passante en régime sinusoïdal forcé égale à $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ ($Q \gg 1$ pour la réponse en amplitude). On a donc :

$$\tau \cdot \Delta\omega \sim 1$$

Plus le temps de réponse est élevé, plus la bande passante est étroite et plus la sélectivité du système est importante...

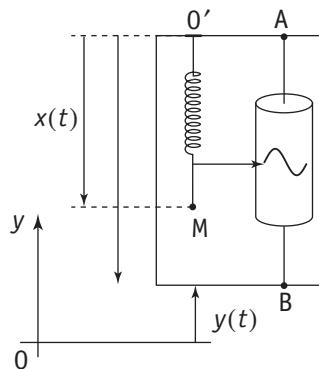
On obtient un système analogue en électricité avec un circuit série RLC : R (« frottements » : dissipation d'énergie) L (« inertie ») et C (« élasticité »). L'étude en $x(t)$ correspondrait à celle de la tension $u_c(t)$ aux bornes de la capacité. Les « forces » $F(t)$ seraient fournies par un générateur...

504

Vibrographe

Un vibrographe est constitué d'une masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . L'extrémité O' de cet oscillateur est solidaire d'un bâti subissant, par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R}_0 , un mouvement vertical représenté par la fonction $y(t)$.

La masse m subit de plus une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$ ($\dot{x} = \frac{dx}{dt}$). En l'absence de mouvement du bâti ($y = 0$), la position d'équilibre de M est repérée par $x = x_0$.



On suppose que le bâti subit dans \mathcal{R}_0 des oscillations sinusoïdales de pulsation ω : $y(t) = Y_m \cos \omega t$.

1. Déterminer, en régime établi, l'amplitude X_m des oscillations de la masse m par rapport au bâti ainsi que le déphasage φ de ces mêmes oscillations par rapport à celles du bâti.

$$\text{On posera } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}.$$

Tracer les courbes donnant $\frac{X_m}{Y_m}$ et φ en fonction de la variable réduite $\frac{\omega}{\omega_0}$. Commenter.

2. Comment choisir la valeur de Q pour que X_m se confonde avec Y_m , à 2 % près, sur un domaine continu en fréquence aussi grand que possible, la valeur de ω_0 étant fixée ? On donne :

$$\frac{2x^2}{\sqrt{4x^2 - 1}} = 1,02 \text{ pour } x = 0,789 ;$$

$$f(0, x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2}}} \Rightarrow f(0,789 ; 1,44) = 0,98.$$

Solution

1. Plaçons-nous dans le référentiel \mathcal{R}' lié au bâti et posons $X = x - x_0$ ce qui élimine les forces définissant l'équilibre en l'absence de mouvement du bâti. Par rapport à cet état, la masse M est soumise aux forces supplémentaires :

- $\vec{f}_1 = -k \vec{X} u_x$ (allongement supplémentaire X par rapport à la situation de référence).
- $\vec{f}_2 = -\lambda \dot{\vec{X}} u_x$ (la force de frottement ne dépend que de la vitesse de la masse par rapport au bâti).
- $\vec{f}_e = -m(-\ddot{y} \vec{u}_x)$ (force d'inertie d'entraînement résultant du mouvement de translation du bâti par rapport au référentiel galiléen).

D'où en appliquant, dans \mathcal{R} , la loi fondamentale de la dynamique.

$m \ddot{X} = -kX - \lambda \dot{X} + m\ddot{y}$, soit encore :

$$\ddot{X} + \frac{\lambda}{m} \dot{X} + \omega_0^2 X = \ddot{y} \Rightarrow \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \ddot{y} \quad \left(Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}\right).$$

Pour un mouvement sinusoïdal du bâti $y = Y_m \cos \omega t$, le mouvement relatif de la masse M est solution de l'équation :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = -\omega^2 Y_m \cos \omega t \quad (1)$$

Au-delà d'une durée de quelques τ où $\tau \sim \frac{\omega_0}{Q}$ (cf. Ex n° 503), la réponse du système en $X(t)$ devient sinusoïdale (le système atteint son régime permanent encore appelé régime forcé et oublie ses conditions initiales...). Les oscillations sont déphasées par rapport aux oscillations du bâti (cf. termes de frottement). On a donc, dans ces conditions :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Passons en notation complexe : $X(t) = \operatorname{Re}[(X_m e^{j\varphi}) e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}(\chi e^{j\omega t})$.

Dès lors, il vient : $\chi \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \right] = -(\omega)^2 Y_m$.

D'où :
$$\chi = X_m e^{j\varphi} = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{j\omega}{Q\omega_0}} Y_m.$$

Soit une amplitude X_m telle que (avec $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$) :

$$X_m = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \frac{1}{Q^2} \eta^2}} Y_m$$

et $\tan \varphi = \left(-\frac{1}{Q}\right) \frac{\eta}{1 - \eta^2}$ avec $\sin \varphi > 0$, soit $0 \leq \varphi \leq \pi$.

■ Traçons les courbes $\eta \rightarrow \frac{X_m}{Y_m} = F(\eta)$ et $\eta \rightarrow \varphi(\eta)$.

• comportements asymptotiques :

– En très haute fréquence, les termes inertIELS sont les plus importants de sorte que $m\ddot{X} \approx -m\omega^2 Y_m \cos \omega t$, d'où $X \approx Y_m \cos \omega t$, soit :

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow X_m \sim Y_m \text{ et } \varphi \sim 0.$$

– En très basse fréquence, le terme élastIQUE est prépondérant dans le membre de gauche de l'équation (1). On a donc :

$$\omega_0^2 X \approx -\omega^2 Y_m \cos \omega t \quad \text{d'où} \quad X \# -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} Y_m \cos \omega t$$

soit $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow X_m \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^2} Y_m \text{ et } \varphi \rightarrow \pi.$

• Pour $\eta = 1$, soit $\omega = \omega_0$, il vient $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($|\tan \varphi| \rightarrow +\infty$ et $\varphi \in (0, \pi)$) et $\frac{X_m}{Y_m} = F(1) = Q$.

- Enfin, $F(\eta)$ présente un maximum lorsque $\left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 \eta^2}$ passe par un minimum, c'est-à-dire (dériver par exemple par rapport à $\frac{1}{\eta^2}$) pour :

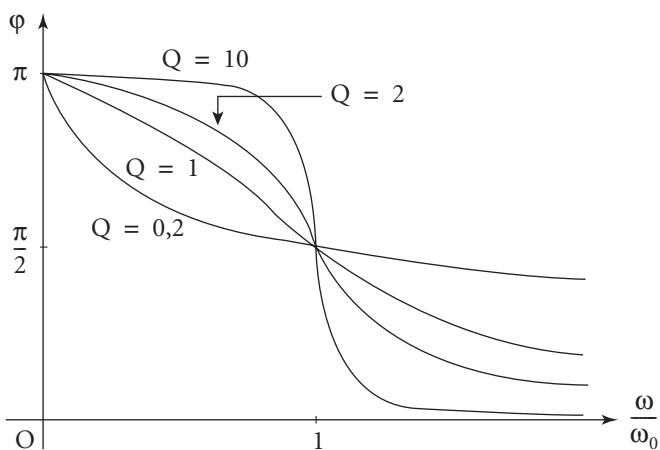
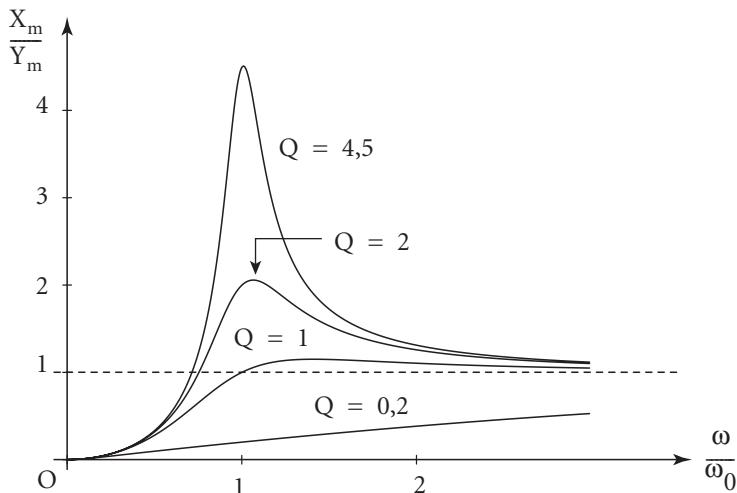
$$\frac{1}{\eta^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2},$$

ce qui ne peut se produire que pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Alors $\frac{\omega_m}{\omega_0} = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

et $\omega_m \sim \omega_0$ (dès que $Q \gg 1$).

D'où les différentes courbes tracées pour quelques valeurs du facteur de qualité Q .



- 2.** On désire que l'amplitude X_m des oscillations de la masse M s'identifie – à 2 % près – à celle Y_m des oscillations du bâti. On cherche donc à obtenir : $(1 - 0,02)Y_m \leq X_m \leq Y_m(1,02)$ sur une bande continue de fréquence aussi large que possible.

$$\text{Soit } 0,98 \leq \frac{X_m}{Y_m} < 1,02.$$

On obtiendra ce résultat en choisissant la valeur de Q supérieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, telle que le maximum

$$\text{soit juste égal à } 1,02, \text{ ce que } \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = 1,02$$

montrent les courbes présentées ci-contre.

On a donc :

$$\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = 1,02 = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

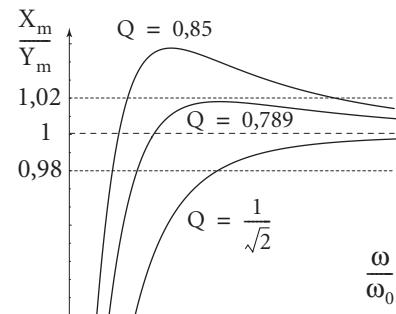
On a donc (*cf. énoncé*) : $Q = 0,789$.

La plage de pulsations sur laquelle on pourra confondre X_m et Y_m (à 2 % près) s'étend théoriquement d'une valeur minimale ω'_m à l'infini, avec ω'_m solution de :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2\eta^2}}} = 0,98 \quad \left(\eta = \frac{\omega'_m}{\omega_0}\right)$$

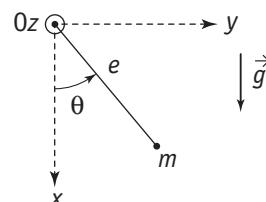
ce qui donne (*cf. énoncé*) : $\eta = 1,44$, soit : $\omega'_m = 1,44\omega_0$.

Une valeur supérieure de Q (*cf. graphe précédent avec $Q = 0,85$*) donnerait une plage en fréquence plus étroite et un phénomène de résonance plus aigu ce qui pourrait avoir pour effet « d'amplifier » des fréquences non désirées...



505 Pendule « amorti »

Un pendule simple (masse ponctuelle m au bout d'une tige sans masse de longueur l) peut tourner librement autour de l'axe horizontal Oz . Il présente un mouvement d'oscillations dans le plan vertical Oxy .



1. Donner l'équation du mouvement en $\theta(t)$. On posera $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. **On se limite, par la suite, à l'étude des petits mouvements par rapport à la position d'équilibre stable $\dot{\theta} = 0$.**

Définir l'énergie mécanique E du système (on prendra $E = 0$ pour $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = 0$).

2. On désire tenir compte des phénomènes dissipatifs. À cet effet, on suppose que la masse m est soumise à une force de « frottement fluide » dont le moment en 0 est donné par l'expression :

$$\vec{M}_f(0) = \Gamma \vec{u}_z, \text{ avec } \Gamma = -ml^2\gamma \frac{d\theta}{dt} \quad (\gamma \text{ constante fixée}).$$

a. Exprimer le taux de variation $\frac{dE}{dt}$ de l'énergie mécanique E du système.

b. Dans le cas des amortissements faibles, on pose en première approximation :

$$\theta(t) = \alpha(t) \cos(\omega t + \varphi)$$

où $\alpha(t)$ est une fonction très lentement variable à l'échelle de la « pseudo-période »

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

On définit la « valeur moyenne » sur une durée T d'une fonction $f(t)$ selon :

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt.$$

Donner la valeur moyenne – sur une pseudo-période T – de la relation établie au **2.a.**

En déduire qu'à l'approximation considérée, on a : $\alpha(t) \approx \theta_0 \exp(-\gamma t)$

on prendra $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Justifier les approximations envisagées et donner l'expression de l'énergie mécanique $E(t)$.

c. On définit un espace de phases $(\theta', \dot{\theta}')$ en termes de variables réduites :

$$t' = \omega t; \quad \theta'(t') = \left(\frac{\theta(t)}{\theta_0} \right) \text{ et } \dot{\theta}'(t') = \frac{d\theta'}{dt'}.$$

Représenter les différentes trajectoires possibles selon les valeurs du paramètre γ , tout en restant dans le cadre des petits mouvements.

3. Pour décrire un oscillateur entretenu, on modifie le modèle en supposant maintenant que le paramètre γ est une fonction de θ . On écrira :

$$\gamma(\theta) = \gamma_0 [1 - \beta^2 \theta^2].$$

L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \gamma(\theta)\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0.$$

On définit les variables réduites $t' = \omega t$, $y(t') = \theta(t)$.

$$\text{On pose } \varepsilon = \frac{\gamma_0}{\omega} \text{ et } \theta_1 = \frac{1}{\beta}.$$

On appelle « énergie » la quantité $E' = \frac{1}{2}(\dot{y}^2 + y^2)$ où \dot{y} représente la dérivée $\frac{dy}{dt'}$.

a. Exprimer la quantité $\frac{dE'}{dt'}$ en fonction de ε , β , y et \dot{y} . Commenter le résultat obtenu pour $\varepsilon < 0$, inégalité que l'on supposera vérifiée par la suite.

b. L'expérience montre que le système tend, dans l'espace des phases, vers une trajectoire fermée appelée cycle limite. Commenter.

On se place, pour cette question, dans le cas où le paramètre $|\varepsilon|$ est suffisamment petit. Il est alors possible d'adopter pour le cycle la solution approchée $y(t') = \alpha \cos(t' + \varphi)$.

En déduire, dans ces conditions, l'expression de α en fonction de θ_1 , et dessiner l'allure des trajectoires de phase dans l'espace $u(t') = \frac{y(t')}{2\theta_1}$, $\frac{du}{dt'}$ avec $\frac{du}{dt'}(0) = 0$.

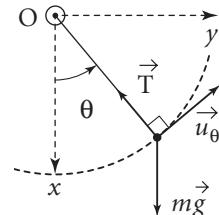
c. Que se passe-t-il pour $|\varepsilon|$ ne vérifiant pas la condition du b. ?

Solution

1. Appliquons le théorème du moment cinétique au point fixe O du référentiel galiléen d'étude, le mouvement de la masse m s'effectuant dans le plan vertical Oxy (sa trajectoire s'inscrit sur le cercle de centre O et de rayon l).

$$\text{On a } \frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{M}(O) = \vec{OM} \wedge \vec{T} + \vec{OM} \wedge \vec{mg} = -mg l \sin \theta \vec{u}_z.$$

$$\text{Or } \vec{\sigma}(O) = ml^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} = -mg l \sin \theta.$$



Et

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad (1)$$

On a posé $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ pulsation propre de l'oscillateur.

Dans le cas de petits mouvements, on peut linéariser l'équation (1) en confondant $\sin \theta$ avec θ . Nous obtenons :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (2)$$

L'énergie mécanique du système se définit ici par la somme de l'énergie cinétique E_c de la masse m ($E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$) et de son énergie potentielle de pesanteur E_p .

Or $E_p = -mgx + \text{constante} = -mgl \cos \theta + \text{constante}$.

Soit avec $E_p(\theta = 0) = 0$ (origine de l'énergie potentielle au point le plus bas de la trajectoire de la particule) :

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta).$$

D'où une énergie mécanique $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$. Lorsque θ reste suffisamment faible (petits mouvements), on peut substituer $\frac{1}{2}\theta^2$ à $1 - \cos \theta$, ce qui donne :

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow E = ml^2 \left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \theta^2 \right] \quad (3)$$

Remarquons qu'en dérivant (3), nous obtenons l'équation (2).

2. a. Appliquons ici le théorème de la puissance cinétique, l'énergie mécanique ayant été définie à la question précédente. Il vient :

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}_\Gamma = \vec{M}_f(O) \cdot \dot{\theta} \vec{u}_z = -ml^2\gamma\dot{\theta}^2.$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -ml^2\gamma\dot{\theta}^2} \quad (4)$$

2. b. On suppose maintenant que l'évolution du système est, à chaque instant, très proche du régime d'oscillations sinusoïdales de l'oscillateur non amorti. Cela implique bien évidemment que le coefficient γ reste suffisamment faible. Dès lors, on envisage une solution approchée :

$$\theta(t) = \alpha(t)\cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{signal quasi-sinusoïdal}).$$

À cette approximation, ω reste la pulsation de l'oscillateur non amorti et $\alpha(t)$ doit varier avec une échelle de temps τ très grande devant $T = \frac{2\pi}{\omega}$. *On considérera donc que $\alpha(t)$ est « constant » sur « une pseudo-période ».*

Intégrons alors l'équation (4) sur un intervalle de temps $\Delta t = T$:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\frac{dE}{dt} \right) dt = -ml^2\gamma \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{\theta}^2(t) dt \quad (5)$$

À l'échelle de T , les variations de $\theta(t)$ sont essentiellement imposées par le terme sinusoïdal $\cos(\omega t + \varphi)$ de telle sorte que :

$$\dot{\theta}(t) \# -\alpha(t)\omega\sin(\omega t + \varphi) \text{ avec } \alpha(t) \approx \text{cste} = \alpha(t_0)$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{\theta}^2(t) dt \# \alpha^2(t_0)\omega^2 \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2(\omega t + \varphi) dt \right\}$$

l'accolade correspond à la valeur moyenne de $\sin^2(\omega t + \varphi)$, elle ne dépend pas de t_0 , et elle vaut $\frac{1}{2}$. On a donc : $-ml^2\gamma \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{\theta}^2(t) dt = -\frac{1}{2}ml^2\gamma\alpha^2(t_0)\omega^2$

quant à la première intégrale elle s'exprime sous la forme :

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dE}{dt} dt = \frac{E(t_0+T) - E(t_0)}{T}.$$

Or $E(t) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \theta^2\omega^2)$, et à la même approximation :

$$E(t) \# \frac{1}{2}ml^2[\alpha^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi) + \alpha^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2}ml^2\alpha^2\omega^2.$$

$$\text{D'où} \quad \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dE}{dt} dt \# \frac{1}{2}ml^2\omega^2 \left[\frac{\alpha^2(t_0+T) - \alpha^2(t_0)}{T} \right].$$

La fonction $\alpha(t)$ variant très peu sur l'intervalle $\Delta t = T$ on peut confondre la quantité entre crochets avec la dérivée par rapport au temps t_0 de la grandeur $\alpha^2(t_0)$; dès lors l'équation (5) devient :

$$\frac{1}{2}ml^2\omega^2 \frac{d(\alpha^2)}{dt_0} = -\frac{1}{2}ml^2\gamma\alpha^2(t_0)\omega^2.$$

Soit après simplifications : $\frac{d(\alpha^2)}{dt_0} = -\gamma\alpha^2(t_0) \Rightarrow \frac{d(\alpha^2)}{\alpha^2} = -\gamma dt_0$.

Une simple intégration donne : $\alpha^2(t_0) = \alpha^2(0)\exp[-\gamma t_0]$.

Avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ nous avons :

$$\alpha(0)\cos\varphi = \theta_0 \text{ et } \alpha(0)\omega\sin\varphi = 0$$

ce qui permet de prendre $\varphi = 0$ et $\alpha(0) = \theta_0$.

Finalement $\alpha^2(t_0) = \theta_0^2\exp[-\gamma t_0] \Rightarrow \boxed{\alpha(t_0) = \theta_0\exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right)}$ avec $\tau = \frac{2}{\gamma}$.

Soit $\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\omega t$.

Ainsi les approximations envisagées seront d'autant plus acceptables que l'on a $\tau \gg T$, soit encore $\frac{\gamma}{\omega} \ll 1$.

Enfin $E(t) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2) = \frac{1}{2}ml^2\alpha^2(t)\omega^2$.

Soit $\boxed{E(t) = E(0)\exp(-\gamma t)}$ avec $E(0) = \frac{1}{2}ml^2\omega^2\theta_0^2$.

2. c. D'après les résultats précédents, nous avons :

$$E(t) = E(0)e^{-\gamma t} = \dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2 = \omega^2\theta_0^2e^{-\gamma t} \quad (6)$$

Considérons alors les variables réduites t' , θ' définies par :

$$t' = \omega t, \quad \theta'(t') = \frac{\theta(t)}{\theta_0} \text{ et } \dot{\theta}' = \frac{d\theta'}{dt'}.$$

D'où $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \frac{d\theta'}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \theta_0 \omega \dot{\theta}'$.

L'équation (6) devient

$$\theta_0^2\omega^2(\dot{\theta}')^2 + \omega^2\theta_0^2\theta'^2 = \omega^2\theta_0^2e^{-\frac{\gamma}{\omega}t'}$$

Soit $\dot{\theta}'^2 + \theta'^2 = \exp\left[-\frac{\gamma}{\omega}t'\right]$.

Dans l'espace des phases (en terme de variables réduites), le point figuratif suit une trajectoire qui prend la forme :

– d'un cercle (fig. 1) lorsque $\gamma = 0$: $OM = \sqrt{\dot{\theta}'^2 + \theta'^2} = 1$

– d'une spirale (fig. 2) aboutissant au point O pour

$\gamma > 0$ (cas de l'amortissement) : $OM = \exp\left[-\frac{\gamma}{2\omega}t'\right]$;

– d'une spirale (fig. 3) s'écartant du point O si l'on envisageait des valeurs de γ négatives (« amortissement » → amplification du mouvement).

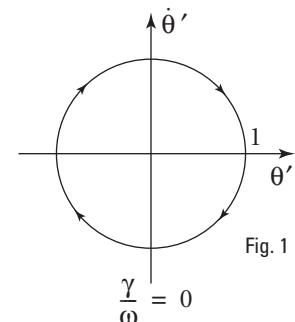


Fig. 1

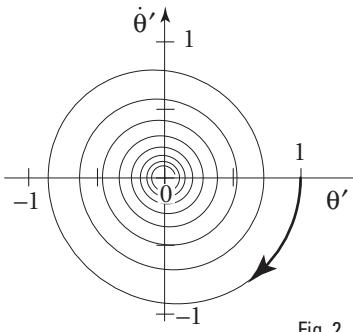


Fig. 2

$$\frac{\gamma}{\omega} = +0,1 \quad \theta'(0) = 1 \\ \dot{\theta}'(0) = 0$$

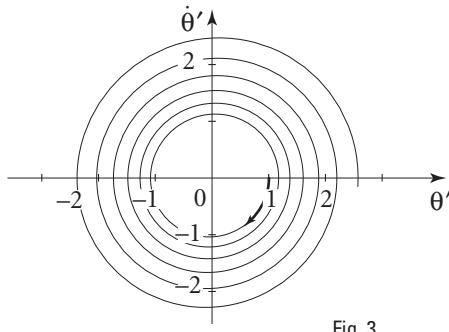


Fig. 3

$$\frac{\gamma}{\omega} = -0,05 \quad \theta'(0) = 1 \\ \dot{\theta}'(0) = 0$$

Remarques

- Pour $\gamma > 0$, toutes les trajectoires, dans l'espace de phase, finissent par aboutir au point $(0, 0)$ qui constitue un **attracteur**.
- L'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0$. On a donc $\ddot{\theta}(0^+) = -\omega^2\theta(0^+)$ pour $\dot{\theta}(0^+) = 0$, d'où $\ddot{\theta}'(0^+) = -\theta'(0^+)$. Il en résulte que $\dot{\theta}'$ devient négatif dans un voisinage de $t = 0^+$...

3. a. « L'énergie » est définie par l'expression $E' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dy}{dt'} \right)^2 + y^2 \right]$.

Sa dérivée devient : $\frac{dE'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} \cdot \left[\frac{d^2y}{dt'^2} + y \right]$.

Or d'après la définition des variables réduites, nous avons :

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\omega} \frac{d\theta}{dt}; \text{ de même } \frac{d^2y}{dt'^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{dE'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} \cdot \left[\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta \right]$$

Soit avec l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = -\gamma(\theta)\dot{\theta}$

$$\frac{dE'}{dt'} = -\frac{\gamma(\theta)}{\omega^2} \frac{dy}{dt'} \cdot \left(\omega \frac{dy}{dt'} \right) = -\varepsilon(1 - \beta^2\theta^2) \left(\frac{dy}{dt'} \right)^2$$

$$\boxed{\text{D'où} \quad \frac{dE'}{dt'} = -\varepsilon(1 - \beta^2y^2) \left(\frac{dy}{dt'} \right)^2} \quad (7)$$

Commentaires

Cette équation peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{dE'}{dt'} = \underbrace{-\varepsilon\dot{y}^2}_{(I)} + \underbrace{\varepsilon\beta^2y^2\dot{y}^2}_{(II)} \quad \text{où} \quad \dot{y} = \frac{dy(t')}{dt'}$$

Pour un coefficient $\varepsilon < 0$, le second terme correspond à une dissipation d'énergie alors que le premier est associé à un apport continual d'énergie permettant d'assurer l'entretien de l'oscillateur.

De plus, le rapport $\left| \frac{\text{II}}{\text{I}} \right| = \beta^2 y^2$ dépend de « l'amplitude » $y(t')$; ainsi, les mouvements de faible amplitude seront caractérisés par des oscillations croissantes alors que ceux de grande amplitude verront leurs oscillations décroître.

3. b. L'existence d'un cycle limite s'interprète en considérant que les termes (I) et (II), d'apport et de dissipation d'énergie ($\varepsilon < 0$), doivent se compenser en moyenne. Ce qui se traduit en désignant par le symbole $\langle \rangle$ les valeurs moyennes calculées sur le cycle attracteur :

$$\langle \frac{dE'}{dt'} \rangle = -\varepsilon [\langle \dot{y}^2 \rangle - \langle \beta^2 y^2 \dot{y}^2 \rangle].$$

Or sur un cycle, le premier terme est nul puisque :

$$\int_0^{\tau'} \frac{dE'}{dt'} dt' = E'(\tau') - E'(0) = 0 \quad (\text{après un cycle, le système repasse par le même état})$$

et possède donc la même énergie.

Dès lors, le bilan d'énergie implique l'égalité :

$$\langle \dot{y}^2 \rangle = \langle \beta^2 y^2 \dot{y}^2 \rangle \quad (8)$$

Pour $|\varepsilon| = \left| \frac{\gamma_0}{\omega} \right|$ suffisamment petit, on pose $y(t') \# \alpha \cos(t' + \varphi)$. Reportons cette expression dans (8) :

$$\langle \dot{y}^2 \rangle = \frac{1}{\tau'} \int_0^{\tau'} \alpha^2 \sin^2(t' + \varphi) dt'.$$

$$\text{Soit} \quad \langle \dot{y}^2 \rangle = \alpha^2 \langle \sin^2(t' + \varphi) \rangle_{1 \text{ cycle}} = \frac{1}{2} \alpha^2.$$

$$\begin{aligned} \text{De même} \quad \langle \beta^2 y^2 \dot{y}^2 \rangle &= \beta^2 \alpha^4 \langle \cos^2(t' + \varphi) \sin^2(t' + \varphi) \rangle \\ &= \frac{1}{4} \beta^2 \alpha^4 \langle \sin^2(2t' + \varphi) \rangle = \frac{1}{8} \beta^2 \alpha^4. \end{aligned}$$

L'équation énergétique (2) se traduit alors par :

$$\frac{1}{2} \alpha^2 = \frac{1}{8} \beta^2 \alpha^4 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{\beta^2} \text{ et } \alpha = 2\theta_1.$$

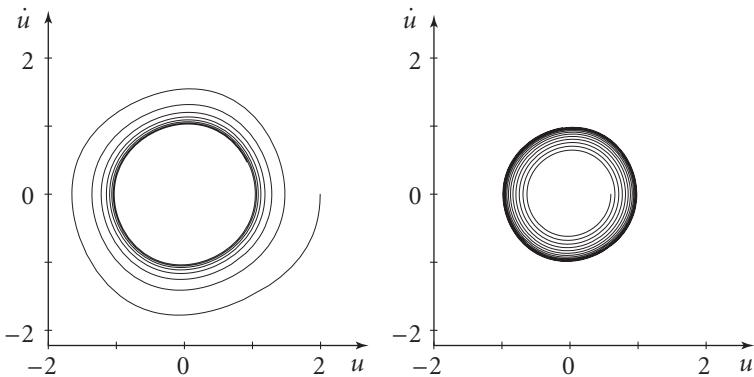
Soit à l'approximation considérée :

$$y(t') = 2\theta_1 \cos(t' + \varphi) \text{ et } \theta(t) \# 2\theta_1 \cos(\omega t + \varphi).$$

La trajectoire limite, dans l'espace des phases associé aux variables réduites $y(t')$ et $\frac{dy}{dt'}(t')$, est donc un cercle de rayon $2\theta_1$. Le système présente dans ce cas un **attracteur cyclique**.

On a tracé ci-dessous différentes trajectoires respectant les hypothèses retenues dans cet exercice (notamment $|\varepsilon|$ suffisamment petit) avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

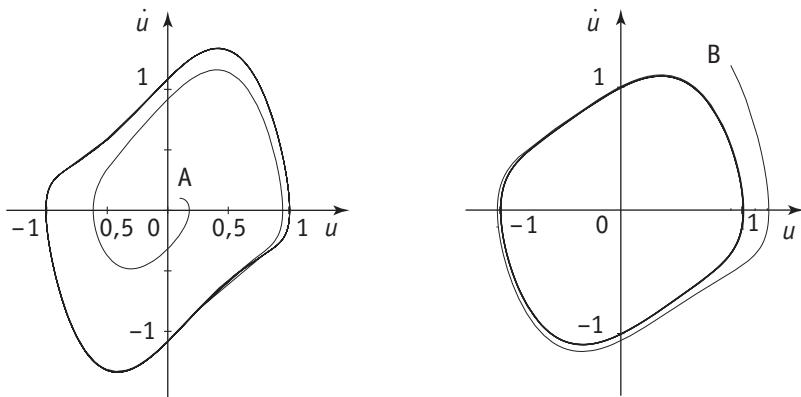
On a porté sur les axes les variables $u = \frac{y}{2\theta_1}$ et $\frac{du}{dt'} = \frac{1}{2\theta_1} \frac{dy}{dt'}$, le cercle limite ayant alors un rayon unité.



$$\varepsilon = -0,05 \quad u(0) = 2 \quad \dot{u}(0) = 0 \qquad \qquad \varepsilon = -0,05 \quad u(0) = 0,6 \quad \dot{u}(0) = 0$$

3. c. La trajectoire du système, dans l'espace des phases, va toujours tendre vers un cycle limite *indépendant des conditions initiales*. Mais ce cycle ne sera plus circulaire dans l'espace (u, \dot{u}) .

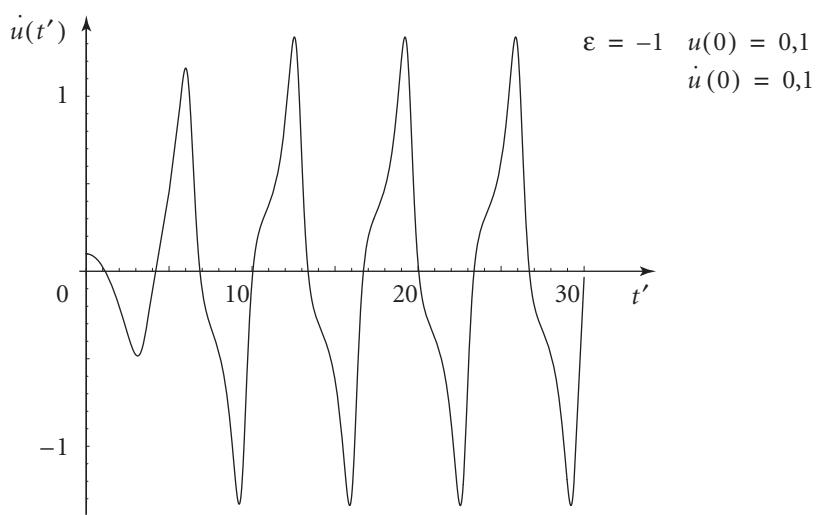
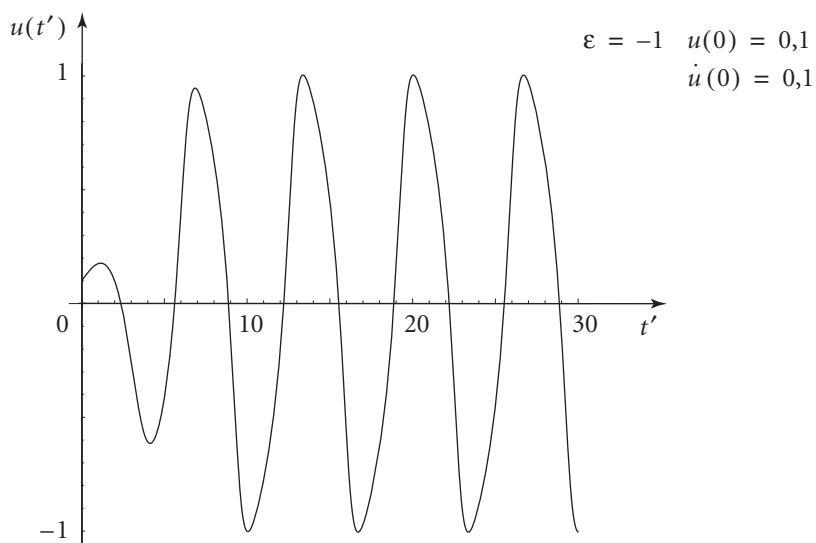
On donne ci-après les portraits de phase en coordonnées (u, \dot{u}) où $u(t') = \frac{\theta(t)}{2\theta_1}$ et $\dot{u}(t') = \frac{du}{dt'}$:



$$\varepsilon = -1 \quad u(0) = 0,1 \quad \dot{u}(0) = 0,1$$

$$\varepsilon = -0,5 \quad u(0) = 0,9 \quad \dot{u}(0) = 1,2$$

On donne également les courbes correspondantes de $y(t')$ montrant clairement l'influence des termes non linéaires dans l'équation de mouvement ($y(t')$ n'est pas sinusoïdal).



B. Forces centrales et systèmes de deux points matériels

511

Demi-ellipse dite de transfert

Un satellite de masse m tourne autour de la Terre sur une orbite circulaire (orbite « basse », rayon r_1 , vitesse du satellite V_1), on veut le transférer sur une autre orbite circulaire (orbite « haute », rayon r_2 , vitesse V_2). Pour cela, on lui fait décrire une demi-ellipse (dite « orbite de transfert ») dont un des foyers est le centre de la Terre, et qui se raccorde tangentiellement aux deux orbites circulaires précédentes. On allume donc les propulseurs du satellite pendant une durée brève au début et à la fin de cette demi-ellipse, ce qui correspond à communiquer à chaque fois au satellite un supplément de vitesse (sans changement de sa direction) de façon quasi-instantanée. Calculer ces suppléments de vitesse.

On donne : $r_1 = 6,70 \cdot 10^3$ km ; $r_2 = 42,0 \cdot 10^3$ km ;

rayon terrestre $R = 6,40 \cdot 10^3$ km ;

pesanteur au niveau du sol : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Forces centrales.
- Gravitation.

2. Ce qu'il faut comprendre

Le calcul des vitesses V_1 et V_2 ne présente pas de difficultés, le produit $\mathcal{G}M$ de la force de gravitation $\vec{f}_G = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\vec{u}$ étant déterminé à partir du poids d'un corps au voisinage du sol (en négligeant l'effet de la rotation de la Terre sur la valeur de g).

On utilisera les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique pour calculer les vitesses nécessaires au début et à la fin de l'orbite de transfert.

3. Solution

Appliquons au satellite en orbite circulaire le théorème du centre d'inertie :

$$m\vec{A} = \vec{f}_G.$$

L'accélération est purement normale soit : $\frac{mV^2}{r} = \|\vec{f}_G\| = \frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}$

$$V^2 = \frac{\mathcal{G}M}{r}.$$

POINT COURS

Déterminons le produit $\mathcal{G}M$ en écrivant que le poids d'un corps – au voisinage du sol – est essentiellement dû à la force de gravitation :

$$mg \# \frac{\mathcal{G}Mm}{R_T^2}$$

d'où

$$\mathcal{G}M = g \cdot R_T^2.$$

Et en reportant $V_1 = R_T \sqrt{\frac{g}{r_1}}$ $V_2 = R_T \sqrt{\frac{g}{r_2}}$

d'où numériquement :

$$V_1 = 7,74 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad V_2 = 3,09 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Moteurs éteints, l'ellipse de transfert est décrite sous le seul effet de la force de gravitation terrestre.

La vitesse au départ de la demi-ellipse (au périgée) vaut u_1 ($u_1 > V_1$), et elle vaut u_2 ($u_2 < V_2$) à l'autre extrémité de l'orbite de transfert qui correspond à l'apogée : en effet le périgée et l'apogée sont les seuls points d'une trajectoire elliptique où la vitesse est orthogonale au rayon vecteur.
L'énergie mécanique se conserve sur cette trajectoire :

$$E_m = \frac{1}{2}mu_1^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_1} = \frac{1}{2}mu_2^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_2}.$$

Soit en remplaçant $\mathcal{G}M$ par $g R_T^2$:

$$u_1^2 - \frac{2g R_T^2}{r_1} = u_2^2 - \frac{2g R_T^2}{r_2} \quad (1)$$

La conservation du moment cinétique donne :

$$C = r_1 u_1 = r_2 u_2 \quad (2)$$

De (1) et (2) on tire : $u_1^2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] = 2g R_T^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$

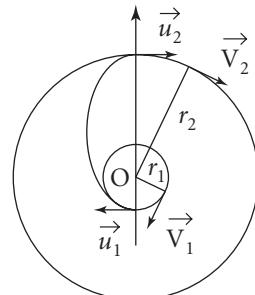
$$u_1^2 \cdot r_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) = 2g R_T^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$u_1^2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot (r_1 + r_2) = 2g R_T^2 \quad (r_1 \neq r_2).$$

Soit $u_1 = R_T \sqrt{\frac{2gr_2}{r_1(r_1 + r_2)}}$

et symétriquement $u_2 = R_T \sqrt{\frac{2gr_1}{r_2(r_1 + r_2)}}.$

Numériquement $u_1 = 10,16 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ $u_2 = 1,62 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$



On en déduit les suppléments de vitesse cherchées :

$$\Delta V_1 = u_1 - V_1 = 2,42 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Delta V_2 = V_2 - u_2 = 1,47 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Commentaire

Les deux mises en marche des propulseurs correspondent effectivement à des augmentations de vitesse ($u_1 > V_1$ et $V_2 > u_2$).

C'était prévisible, car l'ellipse de transfert est extérieure à la première orbite circulaire – ce qui correspond à une énergie mécanique plus élevée – alors que c'est la situation inverse pour la deuxième orbite circulaire.

512

Écart à la satellisation sur orbite circulaire

1. Un satellite décrit une orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre O de la Terre. Celle-ci a une masse M , et la constante de gravitation est notée \mathcal{G} .

Calculer la vitesse V_0 du satellite ainsi que son énergie mécanique.

2. On suppose maintenant qu'un satellite a été lancé en un point $M_0(0M_0 = r_0)$ avec une vitesse \vec{V} de module V_0 (calculé au **1.**) et telle que $(\overrightarrow{OM_0}, \vec{V}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Déterminer les caractéristiques de l'orbite décrite par ce satellite.

On rappelle que pour une trajectoire elliptique d'équation en coordonnées polaires

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} :$$

- le paramètre p est défini selon $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}M}$ ($C = \frac{\sigma_0}{m}$, $\sigma_0 \equiv$ moment cinétique en 0).

- p , l'excentricité e , et le demi-grand axe a sont liés par la relation $a = \frac{p}{1 - e^2}$.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Forces centrales.
- Gravitation.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Si le mouvement est circulaire, il est uniforme. L'accélération est normale.

2. À l'instant $t = 0$, le satellite est lancé à la même distance que précédemment et le module de sa vitesse est le même, donc l'énergie mécanique garde la même valeur : elle est négative, et la trajectoire est elliptique dans le plan défini par $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{V_0}$. Le moment cinétique est modifié, ce qui donne la nouvelle valeur du paramètre p .

3. Solution

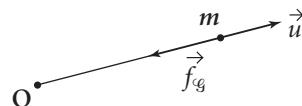
D'après le théorème du centre d'inertie du satellite de masse m

$$m\vec{A} = \vec{f}_g = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r_0^2}\vec{u}$$

or $\vec{A} = -\frac{V_0^2}{r_0}\vec{u}$

d'où $-m\frac{V_0^2}{r_0} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r_0^2}$

et $V_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_0}}$ (1)



L'énergie mécanique s'écrit $E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r_0} + \frac{1}{2}mV_0^2$.

Soit encore $E_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}Mm}{r_0} = -\frac{1}{2}mV_0^2 = -E_c$.

Commentaire

On trouve bien évidemment une énergie négative caractéristique d'un état lié (le satellite est sur orbite, il ne peut partir à l'infini).

2. Le satellite a toujours la même énergie mécanique (mêmes valeurs de r_0 et V_0). Cette énergie est négative. On a donc toujours un état lié. Mais $\overrightarrow{V_0}$ n'est plus perpendiculaire à $\overrightarrow{OM_0}$, la trajectoire est donc une ellipse.

La force de gravitation est une force centrale. Il y a conservation du moment cinétique

$$\vec{\sigma}_0 \text{ d'après le théorème du moment cinétique : } \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{M}_{f/O} = \vec{0},$$

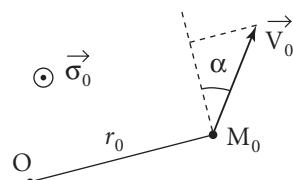
$C = \frac{\sigma_0}{m}$ est une constante dite constante des aires.

Ici $\sigma_0 = mr_0V_0\cos\alpha$;

$$C = r_0V_0\cos\alpha.$$

$$\text{Or } p = \frac{C^2}{\mathcal{G}M}, \text{ d'où } p = \frac{r_0^2V_0^2\cos^2\alpha}{\mathcal{G}M} = \frac{r_0^2V_0^2\cos^2\alpha}{r_0V_0}$$

$$p = r_0\cos^2\alpha$$



- Déterminons maintenant le demi-grand axe a de l'ellipse.

Pour un satellite décrivant une orbite elliptique, $E_m = -\frac{GMm}{2a}$.

En identifiant avec l'expression de l'énergie mécanique obtenue au 1. et toujours valable :

$$-\frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow [a = r_0]$$

Et en reprenant l'équation de l'ellipse, on obtient :

pour le périgée $r_p = \frac{p}{1+e}$; pour l'apogée $r_A = \frac{p}{1-e}$

soit $r_p + r_A = 2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$ (expression fournie par l'énoncé).

Soit $1-e^2 = \frac{p}{a} = \cos^2\alpha$.

L'excentricité étant positive, $e = |\sin\alpha|$.

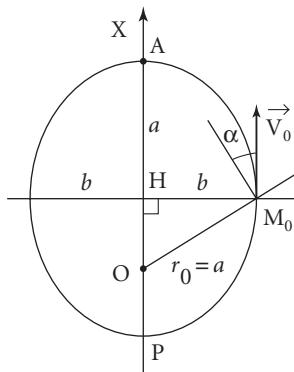
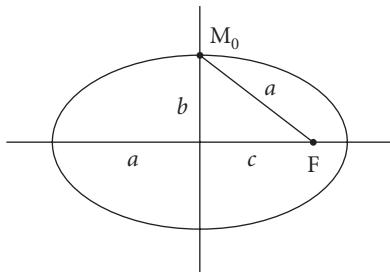
Commentaire

On retrouve bien dans le cas du cercle $e = 0$ pour $\alpha = 0$.

Pour situer les axes de l'ellipse par rapport à la direction OM_0 du point de lancement, on peut remarquer que les seuls points de l'ellipse à la distance a d'un foyer sont les extrémités du petit axe :

$$(a^2 = b^2 + c^2).$$

Et qu'en ces points, la tangente à l'ellipse est parallèle au grand axe : la direction du grand axe est donc la parallèle en O à \vec{V}_0 , ce qui permet de construire les axes de l'ellipse cherchée à partir de $\overrightarrow{OM_0}$ et \vec{V}_0 :



$OX // V_0$
 $M_0H \perp OX$
 $HP = HA = r_0$
P : périgée
A : apogée

513

Comète quasi-parabolique de 1843

La Terre décrit autour du Soleil – de centre S – une orbite pratiquement circulaire de rayon $a_0 = 1,5 \cdot 10^8$ km, à la vitesse $V_T = 30$ km · s⁻¹.

En 1843, une comète (C) est passée extrêmement près du Soleil : distance au périhélie SP = $d = 6,1 \cdot 10^{-3}a_0$.

1. En considérant que l'orbite de (C) est parabolique, calculer la vitesse maximale V_{\max} de la comète.

2. Des mesures précises ont montré que l'orbite de (C) était en fait une ellipse d'excentricité $e = 1 - x$, avec $x = 9,4 \cdot 10^{-5}$ (on considérera donc que $x \ll 1$).

a. Jusqu'à quelle distance D la comète va-t-elle s'éloigner du Soleil ? Évaluer sa vitesse à cette distance.

b. En quelle année reviendra-t-elle ?

Rappel : pour une trajectoire elliptique, on a $\alpha = \frac{p}{1-e^2}$ ($p \equiv$ paramètre de l'ellipse) $e \equiv$ excentricité ; $\alpha \equiv$ demi-grand axe).

c. Estimer l'incertitude relative commise sur la valeur de V_{\max} , en adoptant l'hypothèse du **1.** Conclure.

1. Ce qu'il faut savoir

- Mouvement circulaire.
- Énergie mécanique et force centrale newtonienne.
- Troisième loi de Kepler.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La constante K intervenant dans l'expression de l'énergie potentielle de gravitation $E_p = -\frac{mK}{r}$ sera calculée à partir des données concernant l'orbite terrestre.

2. La connaissance de l'excentricité e et de la distance au périhélie $d = \frac{p}{1+e}$ permet de calculer le paramètre p de l'ellipse, puis la distance à l'aphélie D : les caractéristiques de l'ellipse sont alors complètement connues... La date de son retour pourra se déduire simplement de la 3^e loi de Kepler, en comparant la période T de la comète à la période T_0 de la Terre...

3. Solution

1. La comète est essentiellement soumise à la force attractive due à son interaction gravitationnelle avec le Soleil :

$$\vec{F} = -\frac{mK}{r^2}\vec{u} \quad (r = \text{SM, et } K = GM_S).$$

La trajectoire étant parabolique, l'énergie mécanique de la comète est nulle, soit :

$$E_m = 0 = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{mK}{r}.$$

$$\text{On a donc : } V^2 = \frac{2K}{r}.$$

Et la vitesse est maximale pour r minimal, c'est-à-dire lorsque la comète passe au point P de sa trajectoire ($r = SP = d$).

$$\text{Finalement on a : } V_{\max} = \sqrt{\frac{2K}{d}} \quad (1)$$

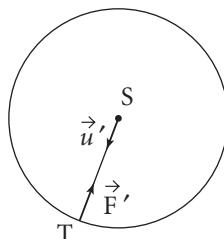
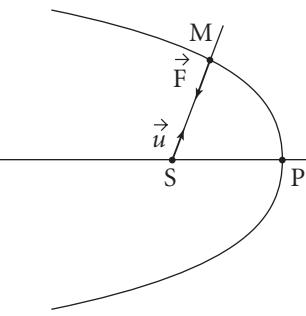
Pour calculer le coefficient K, il suffit d'exprimer que la Terre de masse M_T décrit, autour du Soleil, une orbite pratiquement circulaire de rayon a_0 , à la vitesse V_T (mouvement circulaire uniforme). On a donc :

$$M_T \vec{A}_T = \vec{F}' = -M_T \frac{K}{a_0^2} \vec{u},$$

$$\text{or } \vec{A}_T = -\frac{V_T^2}{a_0} \vec{u}' \Rightarrow V_T^2 = \frac{K}{a_0} \quad (2)$$

Reportant (2) dans (1), il vient :

$$V_{\max} = V_T \sqrt{\frac{2a_0}{d}} \quad \text{et} \quad V_{\max} = 543 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$



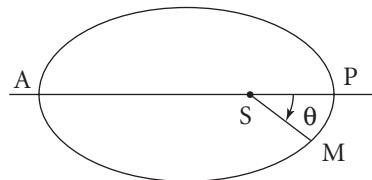
2. a. L'équation de la trajectoire dans son plan est donnée, en coordonnées polaires, par :

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta.$$

La distance au périhélie (point P) s'en déduit :

$$r_P = \frac{p}{1+e} \quad (\text{faire } \theta = 0)$$

$$\text{celle à l'aphélie (point A : } \theta = \pi) : r_A = \frac{p}{1-e}.$$



La distance D cherchée correspond donc au point A : $D = \frac{p}{1-e}$.

$$\text{Le paramètre } p \text{ se déduit de } SP = d = \frac{p}{1+e}.$$

$$\text{On a donc : } D = d \frac{1+e}{1-e}$$

$$\text{or } e = 1-x, \text{ avec } x \ll 1 \Rightarrow D \approx \frac{2d}{x}$$

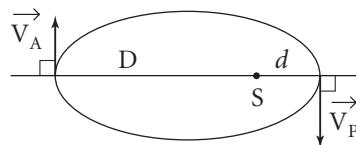
Application numérique :

$$D \approx 130a_0 \Rightarrow D \approx 19,5 \cdot 10^9 \text{ km.}$$

2. b. Pour calculer la vitesse de la comète à cette distance, remarquons que périhélie et aphélie sont les deux points de la trajectoire où la vitesse est orthogonale au rayon vecteur. La conservation du moment cinétique donne, en exprimant en ces deux points la constante C de la loi des aires :

$$C = V_p d = V_A D$$

d'où la vitesse cherchée : $V_A = V_p \frac{d}{D}$.



La trajectoire elliptique ayant une excentricité proche de 1, il est possible de substituer à la vraie valeur de V celle calculée au **1.** dans le cas de la trajectoire parabolique.

Avec cette approximation, on obtient :

$$V_A \approx \frac{d}{D} V_{\max} \approx V_T \frac{d}{D} \sqrt{\frac{2a_0}{d}} \Rightarrow V_A \approx V_T x \sqrt{\frac{a_0}{2d}}$$

Application numérique : $V_A \approx 25,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



POINT COURS

La période T se déduit de la troisième loi de Kepler. Pour des « satellites » (de masse m) du Soleil (de masse M_S), on a (pour des états liés : orbites circulaires ou elliptiques) :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_S + m)} \quad (a : \text{demi-grand axe} ; \quad G : \text{constante de gravitation}).$$

$$\text{Et dans le cas où } m \ll M_S \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} \approx \frac{4\pi^2}{GM_S} = \frac{4\pi^2}{K}.$$

Appliquons cette dernière relation à la comète (sur sa trajectoire elliptique) et à la Terre (sur sa trajectoire quasi circulaire) :

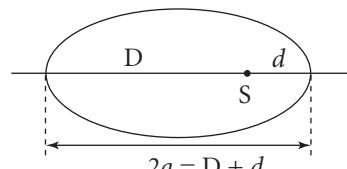
$$\frac{T^2}{\left(\frac{D+d}{2}\right)^3} = \frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{4\pi^2}{K}.$$

$$\text{D'où } T = T_0 \left(\frac{D+d}{2a_0} \right)^{3/2}$$

$$\text{or } D+d = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2} = 2d \frac{1+e}{1-e^2} = 2 \frac{d}{1-e} = 2 \frac{d}{x}$$

soit

$$T = T_0 \left(\frac{d}{x \cdot a_0} \right)^{3/2}$$



Application numérique : $T = 523 T_0 = 523 \text{ ans}$.

Son retour aura donc lieu, en principe, en 2366 !

2. c. Dans l'hypothèse d'une trajectoire parabolique ($e = 1$), on aurait :

$$E_c = \frac{Km}{d} = \frac{1}{2}mV_{\max}^2 \quad (E_m = 0 = E_c + E_p).$$

Pour la trajectoire réelle (ellipse d'excentricité $e = 1 - x$ avec $x \ll 1$), il vient :

$$E'_m = E'_c + E'_p = -\frac{mK}{2a} \quad (a : \text{demi-grand axe}).$$

Or on a établi (cf. 2. b.) que $a = \frac{D+d}{2} = \frac{d}{x}$ d'où :

$$E'_c + E'_p = -\frac{mKx}{2d}.$$

Au périhélie (point P) : $E'_p = -\frac{mK}{d} \Rightarrow E'_c(P) = \frac{mK}{d}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

Soit une vitesse maximale telle que $\frac{1}{2}mV'^{\prime 2}_{\max} = \frac{mK}{d}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

La valeur réelle V'_{\max} est reliée à la valeur approchée V_{\max} selon :

$$V'^{\prime 2}_{\max} = V_{\max}^2\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

et en tenant compte du fait $x \ll 1$: $V'_{\max} \approx V_{\max}\left(1 - \frac{x}{4}\right)$.

Soit en valeur relative :

$$\boxed{\frac{V_{\max} - V'_{\max}}{V'_{\max}} \# \frac{x}{4}} \quad \approx 2,4 \cdot 10^{-5}.$$

L'approximation faite en 2. a. pour calculer la vitesse de la comète à l'aphélie s'en trouve ainsi justifiée (on a confondu V'_{\max} avec V_{\max}).

5.14

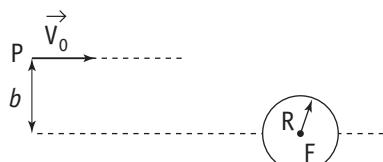
Trajectoires de météorites

Un point matériel P de masse m est soumis à l'interaction d'une boule de centre F et de rayon R. Cette interaction est caractérisée par une énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{K}{r} \quad (K > 0, \quad r = FP).$$

On suppose que la boule reste fixe dans un référentiel \mathcal{R} galiléen de centre F, référentiel dans lequel s'effectuera l'étude qui suit.

À l'instant initial, la particule est à l'infini, elle est animée d'une vitesse \vec{V}_0 et présente un « paramètre d'impact » b (cf. figure ci-dessus).



1. Donner la condition pour que le point matériel P évite la boule. Commenter.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire de P, et retrouver le résultat précédent.

Dans toute cette étude, on pourra poser $\eta = \frac{K}{mV_0^2 b}$.

Rappels : la trajectoire de la conique peut s'écrire $\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\theta - \theta_1)$ où $p = \frac{L_0^2}{mK}$ (L_0 moment cinétique en F). Son énergie mécanique E_m est reliée à l'excentricité e par l'expression :

$$E_m = \frac{mK^2}{2L_0^2}(e^2 - 1).$$

■ 1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Forces centrales.
- Formules de Binet.
- Lois de conservation – constante du mouvement.

Outil mathématique

- Hyperbole (paramètre, foyer, excentricité...).

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'interaction masse m -boule est attractive, et la trajectoire hyperbolique (potentiel du type newtonien en $-\frac{K}{r}$) entoure le centre attracteur F. Pour que P évite la boule, il est donc nécessaire (mais évidemment pas suffisant) que le paramètre d'impact b soit supérieur à R, rayon de la boule.

D'autre part, pour b fixé (supérieur à R), si V_0 tend vers « l'infini », la trajectoire est « rectiligne » et $r_{\min} = b$, et si V_0 est nulle la trajectoire devient une droite « passant » par F et $r_{\min} = 0$: ainsi pour $0 < V_0 < \infty$, on a $0 < r_m < b$; il existe donc une valeur limite V_{0l} (à b fixé $> R$) telle que pour $V_0 > V_{0l}(b)$, la particule ne rencontre pas la boule.

2. Il faut déterminer les valeurs de p et e (paramètre et excentricité de l'hyperbole) ainsi que la valeur θ_1 de θ définissant la position de l'axe de l'hyperbole. p et e s'expriment à l'aide de formules du cours faisant intervenir les grandeurs L_0 (moment cinétique) et E. θ_1 sera défini à partir de la position initiale de la particule.

■ 3. Solution

1.

POINT MÉTHODE

Il ne s'agit pas ici de déterminer l'équation de la trajectoire (objet de la question 2.) mais plutôt de déduire la condition cherchée des lois de conservation.

Il faudra donc traduire :

- la loi de conservation de l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{K}{r}$;
- et celle du moment cinétique en F noté \vec{L} .

Si l'on désigne par P_1 le point de la trajectoire le plus proche de F (et $r_m = FP_1$), il suffit d'écrire que $r_m > R$ pour que le point matériel ne rencontre pas la boule.

Or en P_1 la vitesse \vec{V}_1 est nécessairement perpendiculaire à FP_1 puisque $\dot{r}(P_1) = 0$ (P_1 point le plus proche).

Calculons donc r_m :

- On a $\vec{L}(P_1) = \vec{L}_0$ avec

$$\vec{L} = \vec{FP} \wedge m\vec{V} = mFP\|\vec{V}\| \vec{k} \sin \alpha \vec{k}.$$

Or $FP \sin \alpha = HP \Rightarrow \vec{L} = mHP\|\vec{V}\| \vec{k}$.

Pour la position initiale, $HP = b$ et $\|\vec{V}\| = V_0$, d'où : $\vec{L}(P_1) = \vec{L}_0 = mbV_0 \vec{k}$.

De plus

$$\vec{L}(P_1) = mr_m \vec{V}_1 \vec{k} \Rightarrow r_m \vec{V}_1 = b \vec{V}_0 \quad (1)$$

- La conservation de l'énergie entre P_0 et P_1 se traduit par la relation :

$$\frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{K}{r_m} = \frac{1}{2}mV_0^2 \quad (2)$$

Reportons dans (2) la valeur de V_1 tirée de (1) :

$$\frac{1}{2}m \frac{b^2 V_0^2}{r_m^2} - \frac{K}{r_m} = \frac{1}{2}mV_0^2.$$

$$\text{Soit encore } r_m^2 + \frac{2K}{mV_0^2} r_m - b^2 = 0.$$

D'où, en ne retenant que la solution physiquement acceptable ($r_m > 0$) :

$$r_m = -\frac{K}{mV_0^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{mV_0^2}\right)^2 + b^2} \quad (3)$$

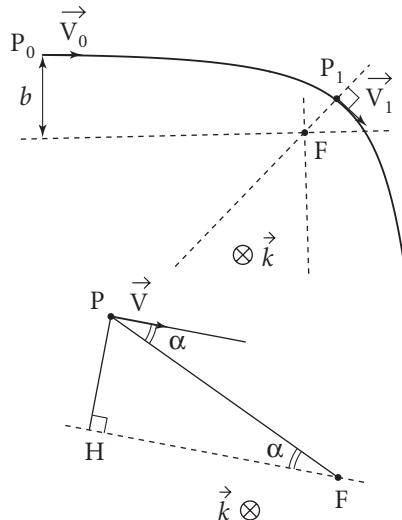
La condition cherchée s'écrit alors $r_m > R$, soit :

$$\left(\frac{K}{mV_0^2}\right)^2 + b^2 > \left(R + \frac{K}{mV_0^2}\right)^2$$

$$\text{d'où } b^2 > R^2 + \frac{2KR}{mV_0^2}$$

c'est-à-dire

$$b > b_1 = R \sqrt{1 + \frac{2K}{RmV_0^2}} \quad (4)$$



Commentaires

• L'expression de $\frac{b_1}{R}$ ne fait intervenir que la grandeur $\eta = \frac{2K}{mRV_0^2}$ qui représente le rapport entre l'énergie potentielle ($|E_p| = \frac{K}{R}$), pour $r = R$, du champ de force, et l'énergie cinétique initiale ($\frac{1}{2}mV_0^2$) :

$$\eta = \frac{K/R}{\frac{1}{2}mV_0^2}.$$

• Pour $\eta \ll 1$ et à la limite, $b_1 \sim R$: la particule n'étant pratiquement pas déviée, on a en effet, $r_m \sim b$ et $r_m > R$ implique bien $b_1 \approx R$.

• En conclusion, la boule sera évitée (pour R imposé) :

– à V_0 fixé pour : $b > b_1 = R \sqrt{1 + \frac{2K}{mV_0^2 R}}$;

– à b fixé pour : $V_0 > V_{01} = \sqrt{\frac{2KR}{m(b^2 - R^2)}}$.

Il faut évidemment que $b > R$, sinon il y aura collision, et ceci quelle que soit la valeur de V_0 .

2. La trajectoire est une hyperbole (branche infinie).

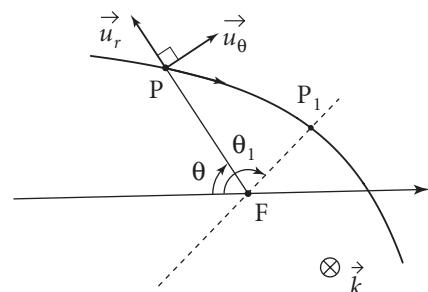
La particule P est soumise à un champ de force attractif en $\frac{1}{r}$ de centre F.

Ici, on a $E_m = E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 > 0$ d'où une trajectoire hyperbolique contournant le foyer F (potentiel attractif).

L'équation de cette trajectoire est donnée par :

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\theta - \theta_1)$$

p : paramètre ; e : excentricité (ici on a $e > 1$: hyperbole).



avec $p = \frac{L_0^2}{mK}$ soit
$$p = \frac{mb^2V_0^2}{K}$$
 et $e^2 = 1 + \frac{2L_0^2E_m}{mK^2}$.

Or $E_m = \frac{1}{2}mV_0^2$ d'où $e^2 = 1 + \frac{2mV_0^2b^2\frac{1}{2}mV_0^2}{K^2}$.

Finalement
$$e^2 = 1 + \left(\frac{mV_0^2b}{K}\right)^2$$
 (on a bien $e^2 > 1$).

L'équation de la trajectoire s'écrit alors :

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta_1 \cos \theta + e \sin \theta_1 \sin \theta.$$

Pour $\theta = 0$, on doit avoir r infini, d'où : $1 + e \cos \theta_1 = 0 \Rightarrow e \cos \theta_1 = -1$.

D'autre part : $e \sin \theta_1 = \sqrt{e^2 - e^2 \cos^2 \theta_1} = \sqrt{e^2 - 1} = \frac{m V_0^2 b}{K}$ ($\sin \theta_1 > 0$).

Dès lors $\frac{p}{r} = (1 - \cos \theta) + \frac{m V_0^2 b}{K} \sin \theta$

$$\boxed{\frac{b}{r} = (1 - \cos \theta)\eta + \sin \theta} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{K}{m V_0^2 b}.$$

• Retrouvons le résultatat de la question 1. À cet effet, nous devons calculer r_m qui correspond à :

$$r_m = \frac{p}{1+e} = \frac{\frac{mb^2V_0^2}{K}}{1 + \sqrt{\left(\frac{mV_0^2b}{K}\right)^2 + 1}}.$$

$$\text{Soit encore } r_m = \frac{mb^2V_0^2}{K} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mV_0^2b}{K}\right)^2} \right] \cdot \frac{1}{\left(\frac{mV_0^2b}{K}\right)^2}$$

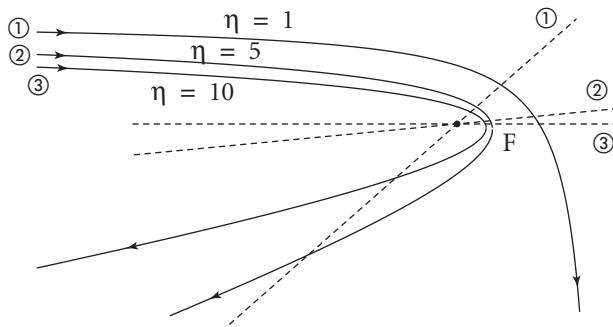
$$\text{d'où } r_m = \frac{K}{mV_0^2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mV_0^2b}{K}\right)^2} \right] \Rightarrow \boxed{r_m = -\frac{K}{mV_0^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{mV_0^2}\right)^2 + b^2}}$$

Résultat identique à (3) comme il se doit.

• On peut tracer différentes trajectoires obtenues en fixant b et en faisant varier V_0 :

$$\frac{b}{r} = \eta(1 - \cos \theta) + \sin \theta \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{K}{mbV_0^2}.$$

D'où les courbes tracées sur ordinateur :



515 Étoile double

Deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 sont en interaction gravitationnelle. On se placera dans le référentiel \mathcal{R} , ici galiléen, du centre de masse G du système $\{M_1, M_2\}$.

On notera $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ et $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (vitesse calculée dans \mathcal{R}).

1. Donner, en fonction de r (module de \vec{r}), v (module de \vec{v}), m_1 , m_2 et G (constante de gravitation) les expressions de l'énergie mécanique E_m du système ainsi que de son moment cinétique $\vec{\sigma}(G)$ au point G . Que peut-on dire de ces quantités ? Commenter.

2. On suppose que les points M_1 et M_2 décrivent des orbites circulaires de centre G et de rayons R_1 et R_2 , avec $R_1 + R_2 = d$.

a. Déterminer la période orbitale T_0 de chaque particule en fonction de G , d , m_1 et m_2 . Commenter.

b. Donner également les expressions des grandeurs E_m et $\vec{\sigma}(G)$ en fonction de G , m_1 , m_2 et d .

c. Application numérique :

Calculer T_0 pour $R_1 = 2,05 \cdot 10^{10}$ m, $R_2 = 4,46 \cdot 10^9$ m et $m_1 = 1,00 \cdot 10^{31}$ kg.

On prendra $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³ · kg⁻¹ · s⁻².

1. Ce qu'il faut savoir

- Forces centrales.
- Loi de la gravitation de Newton.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Dans \mathcal{R} (référentiel du centre de masse G), chaque particule soumise à l'action de l'autre particule subit une force centrale (dont le support passe constamment par le point G). Il en résulte, dans le cas général, que le mouvement est plan et suit la loi des aires. Les forces étant d'origine newtonienne, les trajectoires peuvent être circulaires, elliptiques, paraboliques ou hyperboliques (selon les conditions initiales et plus précisément selon la valeur de l'énergie mécanique E_m)... On remarquera que le système est isolé (les forces sont intérieures).

Les deux mouvements circulaires sont évidemment synchrones (G, M_1, M_2 alignés) et s'effectuent donc avec la même période T_0 . Il suffira – par application de la loi fondamentale de la dynamique – de traduire que les masses m_1 et m_2 décrivent effectivement des trajectoires circulaires.

3. Solution

1. L'énergie mécanique – dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R} – du système des deux masses est la somme de leurs énergies cinétiques et de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle. Soit :

$$E_m = E_c + E_p, \text{ avec :}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2$$

(\vec{v}_1 et \vec{v}_2 calculées dans \mathcal{R})

$$\text{et } E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

On a avec $\vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{GM_2}$:

$$\begin{cases} m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{0} & (\text{G : centre de masse}) \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \text{ et } \vec{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad (1)$$

Les trajectoires des particules M_1 et M_2 sont homothétiques dans \mathcal{R} .

Les vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 s'expriment alors simplement en fonction de $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$:

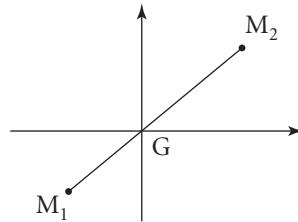
$$\vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}.$$

$$\text{D'où } E_c = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{-m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}\right)^2$$

$E_c = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2$: résultat classique où $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ représente la masse réduite. Finalement :

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}^2 - G\frac{m_1m_2}{r} \quad (2)$$

Cette énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, le système étant isolé dans le référentiel \mathcal{R} galiléen.



POINT COURS

En appliquant dans \mathcal{R} , le théorème de la puissance cinétique au système des deux masses, on a :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext.}}$$

Ici $\mathcal{P}_{\text{ext.}} = 0$ (système globalement isolé)

$$\text{et } \mathcal{P}_{\text{int}} = \frac{\delta W}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} \quad (\text{E}_p \text{ défini plus haut})$$

$$\text{d'où } E_m = E_c + E_p = \text{cte} \quad (\text{E}_p : \text{énergie potentielle intérieure}).$$

- Le moment cinétique en G, calculé dans \mathcal{R} , est défini selon :

$$\vec{\sigma}(G) = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2.$$

Soit avec $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0}$: $\vec{\sigma}(G) = m_2 \vec{r}_2 \wedge (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

et en tenant compte de (1) et de ce que $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

$$\boxed{\vec{\sigma}(G) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \wedge \vec{v}} \quad (3)$$

$\vec{\sigma}(G) = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}$ constitue une constante du mouvement dans \mathcal{R} (système isolé).

En effet le théorème du moment cinétique en G, point fixe de \mathcal{R} , s'écrit :

- pour M_1 : $\frac{d\vec{\sigma}_1(G)}{dt} = \vec{r}_1 \wedge \vec{f}_1$;

- pour M_2 : $\frac{d\vec{\sigma}_2(G)}{dt} = \vec{r}_2 \wedge \vec{f}_2$.

Soit en faisant la somme de ces deux équations :

$$\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{r}_1 \wedge \vec{f}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{f}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge \vec{f}_2 = \vec{r} \wedge \vec{f}_2 = \vec{0}$$

(\vec{r} et \vec{f}_2 étant colinéaires).

On a bien $\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{0}$ et donc $\vec{\sigma}(G) = \text{cste.}$

Commentaires

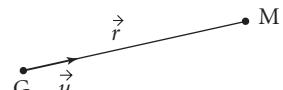
- Les relations (2) et (3) nous montrent que l'on peut réduire l'étude du mouvement à celui d'une particule M de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (masse réduite) distante vectoriellement de \vec{r} du point fixe G. On peut alors considérer qu'elle est soumise à une force centrale (de centre G) associée à l'énergie potentielle E_p telle que :

$$E_p = -\frac{K}{r} \quad \text{où} \quad K = \mathcal{G} m_1 m_2.$$

Ce que l'on peut confirmer en remarquant que l'on a également :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \quad (\text{cf. relation (1) entre } \vec{r}_1 \text{ et } \vec{r}_2).$$

$$\text{Soit} \quad \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2 = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{r^2} \vec{u} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}.$$



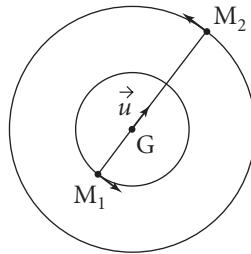
- Le mouvement est plan (plan passant par G et perpendiculaire à $\vec{\sigma}(G)$ ou encore plan défini par $\vec{r}(0)$ et $\vec{v}(0)$), dans le cas général.

- Le cours nous apprend que l'on a un état lié (orbites elliptiques, voire circulaires) lorsque l'énergie mécanique est négative...

2. a. Les points M_1 , G et M_2 restent alignés à tout instant, M_1 et M_2 décrivant des orbites circulaires de centre G et de rayons respectifs R_1 et R_2 . On a alors pour M_1 :

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{f}_1, \text{ soit } m_1 \vec{a}_1 = \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{d^2} \vec{u} \text{ avec } \vec{a}_1 = \frac{v_0^2}{R_1} \vec{u},$$

$$\text{d'où } m_1 \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{d^2}.$$



Notons ω la vitesse angulaire de rotation de M_1 (et donc également de M_2), il vient $v_1 = \omega R_1$ (respectivement $v_2 = \omega R_2$), d'où :

$$\omega^2 R_1 = \frac{\mathcal{G}m_2}{d^2}; \text{ de même } \omega^2 R_2 = \frac{\mathcal{G}m_1}{d^2}.$$

Soit en faisant la somme des relations précédentes (avec $R_1 + R_2 = d$)

$$\omega^2 d = \mathcal{G} \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{d^2} \right) \Rightarrow \omega = \frac{1}{d^{3/2}} \sqrt{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} \quad (4)$$

La période (commune) T_0 du mouvement de chaque particule est alors donnée par :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ d'où} \quad T_0 = \boxed{\frac{2\pi d^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}}}$$

Commentaires

La période des mouvements circulaires de M_1 et M_2 est donnée par l'expression :

$$T_0 = \frac{2\pi d^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}}, \text{ avec } d = R_1 + R_2 \text{ et } R_2 = \frac{m_1}{m_2} R_1.$$

Supposons maintenant que $m_1 \gg m_2$, dès lors $R_2 \gg R_1$ et $d \sim R_2$, de sorte que l'expression de T_0 se réduit à $T_0 \approx 2\pi R_2^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}m_1}}$ (indépendant de m_2 – tant que $m_2 \ll m_1$) : 3^e loi de Kepler...

2. b. • L'énergie mécanique E_m du système vaut alors :

$$E_m = \frac{1}{2} m_1 (\omega R_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\omega R_2)^2 - \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{d}$$

$$E_m = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) - \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{d}$$

or $m_1 R_1 = m_2 R_2$ (G centre de masse), et $d = R_1 + R_2$, d'où :

$$E_m = \frac{1}{2} \omega^2 m_1 R_1 d - \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{d}$$

$$E_m = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2 - \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{d} \quad \left(R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \right)$$

$$\text{soit } E_m = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 d^2 - \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{d}.$$

Ce résultat est conforme à celui du 1. puisque $\|\vec{v}\| = \omega d$. D'autre part, en utilisant la valeur de ω (relation (4)), il vient :

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{d} - \frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{d} \Rightarrow E_m = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{2d} \quad (E_m < 0 : \text{état lié}).$$

On a ici (mouvement circulaire) :

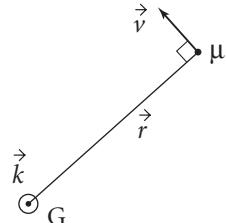
$$E_c = -\frac{1}{2} E_p \text{ et donc } E_m = -E_c.$$

De même pour le moment cinétique, en notant \vec{k} le vecteur unitaire perpendiculaire au plan des orbites :

$$\vec{\sigma}(G) = \mu \|\vec{r}\| \|\vec{v}\| \vec{k}$$

or $\|\vec{r}\| = d$ et $\|\vec{v}\| = \omega d$, d'où :

$$\vec{\sigma}(G) = \mu \omega d^2 \vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}(G) = m_1 m_2 \sqrt{\frac{\mathcal{G} d}{m_1 + m_2}} \vec{k}}$$



2. c. Application numérique :

$$\text{On a } m_2 = m_1 \frac{R_1}{R_2} = 1 \cdot 10^{31} \frac{20,5}{4,46} \Rightarrow m_2 = 4,60 \cdot 10^{31} \text{ kg.}$$

$$T_0 = 2\pi \frac{(24,96 \cdot 10^9)^{\frac{3}{2}}}{\left(6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{31} \left(1 + \frac{20,5}{4,46}\right)\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_0 = 4,06 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$\text{et } T_0 = 4,69 \text{ jours.}$$

516

Conditions de satellisation

Un satellite de masse m est lancé d'un point M_0 à la distance r_0 du centre O de la Terre, avec une vitesse V . On note V_0 la vitesse de satellisation en orbite circulaire de rayon r_0 .

1. La vitesse \vec{V} est orthogonale au rayon vecteur $\overrightarrow{OM_0}$. Déterminer les caractéristiques de l'orbite décrite dans l'hypothèse où il y a effectivement satellisation. Dans quel domaine faut-il choisir le rapport $\mu = \frac{V}{V_0}$ pour qu'il en soit ainsi ? On posera $\rho = \frac{r_0}{R_T}$ où R_T est le rayon de la Terre.

On rappelle que pour une trajectoire elliptique de paramètre p , de demi-grand axe a , d'excentricité e et d'énergie mécanique E_m , on a (C désignant la constante des aires) :

$$p = \frac{C^2}{GM} \quad (M \text{ est la masse de la Terre})$$

$$p = a \cdot (1 - e^2); \quad E_m = -\frac{GMm}{2a}.$$

2. La vitesse V est peu différente de V_0 : $V = V_0 \cdot (1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$, et fait un petit angle α avec la direction perpendiculaire à $\overrightarrow{OM_0}$ (dans le plan de la trajectoire). Déterminer l'expression approchée de l'excentricité e de l'orbite en fonction de α et ε .

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Champ de force centrale newtonien – Trajectoires circulaires et elliptiques.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Il faut traduire que la trajectoire est elliptique (état lié), et qu'elle ne rencontre pas la Terre.
2. Pour $\varepsilon \ll 1$ la trajectoire est elliptique.

■ 3. Solution

1. D'après le théorème du centre d'inertie appliqué au satellite de masse m pour une trajectoire circulaire de rayon r_0 :

$$mA_N = m \frac{V^2}{r_0} = \left\| \vec{f}_G \right\| = \frac{GMm}{r_0^2} \quad (M \text{ : masse de la Terre}).$$

Soit $r_0 V_0^2 = GM$. (1)

La vitesse initiale étant perpendiculaire au rayon vecteur, la constante des aires vaut

$$C = \frac{\sigma_0}{m} = r_0 V \text{ et le paramètre de la conique trajectoire : } p = \frac{C^2}{GM}$$

$$\text{soit } p = \frac{r_0^2 V^2}{r_0 V_0^2} = r_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^2.$$

$$\text{Et en posant } \mu = \frac{V}{V_0}: \quad p = r_0 \mu^2$$

L'énergie mécanique du satellite a pour valeur : $E_m = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{GMm}{r_0}$.

Pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe a , on a : $E_m = -\frac{GMm}{2a}$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} m V^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{2a}.$$

Or d'après (1) $GM = r_0 V_0^2$ et :

$$\frac{2E_m}{m} = V^2 - 2V_0^2 = -\frac{r_0 V_0^2}{a}$$

$$\text{d'où } \frac{r_0}{a} = 2 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 2 - \mu^2 \quad (2)$$

$$\text{or } p = a(1 - e^2)$$

$$\text{d'où } e^2 = 1 - \frac{p}{a} = 1 - r_0 \mu^2 \times \frac{2 - \mu^2}{r_0}$$

$$e^2 = 1 - \mu^2(2 - \mu^2) = (1 - \mu^2)^2$$

$$\text{et } e = |1 - \mu^2|.$$

La trajectoire est une ellipse si $E_m < 0$ soit alors :

$$V^2 < 2V_0^2$$

$$\mu^2 < 2$$

$$\mu < \sqrt{2} \text{ ce qui correspond bien à } e < 1.$$

Commentaire

La valeur limite $\mu = \sqrt{2}$ correspond à la vitesse de libération pour la distance r_0 .

$V_1 = \sqrt{2}V_0$: c'est la vitesse minimale permettant d'échapper à l'attraction de la Terre, c'est-à-dire correspondant à l'énergie $E_m = 0$.

Écrivons maintenant que cette ellipse ne rencontre pas la Terre ; il faut qu'au périhélie :

$$r_p = \frac{p}{1+e} > R_T \quad (e > 0)$$

$$1 + e < \frac{p}{R_T} = \frac{r_0}{R_T} \cdot \mu^2.$$

En posant $\rho = \frac{r_0}{R_T}$ et avec $e = |1 - \mu^2|$, il vient $|1 - \mu^2| < \rho\mu^2 - 1$

• 1^{er} cas :

$$\frac{V}{V_0} = \mu > 1 \Rightarrow \mu^2 - 1 < \rho\mu^2 - 1$$

ce qui est toujours réalisé puisque $\rho = \frac{r_0}{R_T} > 1$.

• 2^e cas :

$$\frac{V}{V_0} = \mu < 1 \Rightarrow 1 - \mu^2 < \rho\mu^2 - 1 \quad \text{soit} \quad \mu^2 > \frac{2}{\rho + 1}.$$

Finalement, il faut donc que : $\sqrt{\frac{2}{\rho + 1}} < \mu < \sqrt{2}$

pour que le satellite ait une trajectoire elliptique extérieure à la Terre, de grand axe OM_0 , de paramètre p , et d'excentricité e calculés précédemment.

2. Avec les conditions données, la trajectoire est toujours elliptique :

$$\mu = \frac{V}{V_0} = 1 + \varepsilon < \sqrt{2}.$$

L'expression (2) nous donne donc : $\frac{r_0}{a} = 2 - \mu^2 = 2 - (1 + \varepsilon)^2$.

Comme \vec{V} fait un angle α avec la direction perpendiculaire à $\overrightarrow{OM_0}$, on a maintenant :

$$C = \frac{\sigma_0}{m} = r_0 \cdot V \cdot \cos \alpha$$

$$C = r_0 V_0 (1 + \varepsilon) \cos \alpha$$

$$p = \frac{C^2}{gM} = r_0 (1 + \varepsilon)^2 \cdot \cos^2 \alpha \text{ en utilisant (1).}$$

On obtient alors :

$$e^2 = 1 - \frac{p}{a} = 1 - (1 + \varepsilon)^2 \cdot \cos^2 \alpha [2 - (1 + \varepsilon)^2]$$

$$e^2 = 1 - \cos^2 \alpha \cdot (1 + \varepsilon)^2 (1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2)$$

$$e^2 = 1 - \cos^2 \alpha \cdot [1 - (2\varepsilon + \varepsilon^2)^2].$$

Si α est très petit : $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \alpha^2$

et avec $\varepsilon \ll 1$, $e^2 \approx 1 - (1 - \alpha^2)(1 - 4\varepsilon^2)$

et en supposant que ε et α sont des infinitésimales du même ordre :

$$e^2 \approx \alpha^2 + 4\varepsilon^2$$

$$e \approx \sqrt{\alpha^2 + 4\varepsilon^2}.$$

Pour $\varepsilon = 0$ on aurait :

$$e^2 = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$e = |\sin \alpha|.$$

517

Autre présentation du mouvement newtonien

On considère un point P de masse m en mouvement dans un champ de force centrale. L'étude se fera dans un référentiel galiléen d'origine O, centre de force. On notera :

$\vec{r} = \vec{OP}$, \vec{v} vitesse de P, \vec{L} moment cinétique au point O, $E_p(r)$ énergie potentielle de la particule et E son énergie mécanique.

1. a. Que peut-on dire de E et \vec{L} ? En déduire que le mouvement est plan.

b. On repère la position de P, dans ce plan, par ses coordonnées polaires r et θ .

Donner l'expression de L (module de \vec{L}) en fonction notamment des variables r et θ ou de leurs dérivées.

Exprimer l'énergie cinétique de P en fonction de L, m et des variables $w = \frac{1}{r}$ et $\frac{dw}{d\theta}$.

2. Le point P subit le champ gravitationnel d'une masse M fixée en O.

a. Montrer que la trajectoire de P vérifie une équation différentielle du type :

$$\left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 + (w - \beta)^2 = \beta^2 \gamma \quad (1)$$

où β et γ sont des constantes du mouvement que l'on exprimera en fonction de m , L, E et $K = \frac{GM}{r}$.

b. Montrer que l'équation (1) est analogue à celle du mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti, et que la trajectoire de P est une conique dont on calculera le paramètre p et l'excentricité e d'abord en fonction de β et γ et ensuite en fonction de m , K , L et E .

c. Quel est en fonction de β le rayon r_c d'une orbite circulaire ?

Donner en fonction de K et r_c l'énergie associée à une telle orbite.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Mouvements à force centrale.
- Oscillateur harmonique libre non amorti.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Résultats classiques du cours.
2. a. L'équation à établir doit traduire la conservation de l'énergie.

■ 3. Solution

1. a. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle : $E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r)$. La particule P est uniquement soumise à une force centrale associée à l'énergie potentielle $E_p(r)$. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\frac{dE_p}{dt} \text{ (par définition de } E_p).$$

D'où $E_c + E_p = \text{constante}$ et $E = E_0 = \text{constante} = \frac{1}{2}mv_0^2 + E_p(r_0)$.

• Le théorème du moment cinétique appliqué en O donne :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0(O) = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0} \text{ (la force est centrale).}$$

D'où $\vec{L} = \vec{L}_0$ (avec $\vec{L}_0 = \vec{OP}_0 \wedge m\vec{v}_0$ non nul tant que \vec{v}_0 et \vec{OP}_0 ne sont pas colinéaires). Dans le cas général, la particule se déplace donc dans un plan π passant par O et perpendiculaire à \vec{L}_0 ($\vec{OP}_0 \perp \vec{L}_0$). Deux intégrales premières du mouvement sont fournies par les équations $E = E_0$ et $\vec{L} = \vec{L}_0$.

1. b. On a $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ avec $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$\text{d'où } \vec{L} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + \dot{\theta}\vec{u}_\theta) \Rightarrow \vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$$

(\vec{k} , vecteur directeur de \vec{L} , est perpendiculaire au plan π).

$$\text{Nous avons } E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

$$\text{Or } \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{w} \right) \cdot \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\theta} \cdot \left(\frac{L}{m} w^2 \right) = -\frac{L}{m} \frac{dw}{d\theta}$$

$$\text{et } r\dot{\theta} = \frac{1}{w} \left(\frac{L}{m} w^2 \right) = \frac{L}{m} w.$$

Soit

$$E_c = \frac{L^2}{2m} \left[w^2 + \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 \right]$$

2. a. L'énergie potentielle prend la forme $E_p(r) = -\frac{GmM}{r} = -Kw$. La conservation de l'énergie mécanique se traduit par l'équation :

$$\frac{L^2}{2m} \left[w^2 + \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 \right] - Kw = E$$

$$\text{d'où } \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 + w^2 - \frac{2mK}{L^2} w = \frac{2mE}{L^2}$$

$$\text{soit encore } \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 + \left(w - \frac{mK}{L^2} \right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2K^2}{L^4} = \left(\frac{mK}{L^2} \right)^2 \left(1 + \frac{2EL^2}{mK^2} \right).$$

Il vient

$$\beta = \frac{mK}{L^2} \quad \text{et} \quad \gamma = 1 + \frac{2EL^2}{mK^2}$$

$$\text{et } \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 + (w - \beta)^2 = \beta^2 \gamma. \quad (1)$$

2. b. Si l'on considère un oscillateur harmonique constitué par une masse m et un ressort de longueur à vide l_0 , de raideur k et de longueur x , la conservation de l'énergie donne :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k(x - l_0)^2 = E \Rightarrow \dot{x}^2 + \omega_0^2(x - l_0)^2 = \frac{2E}{m} \quad (2)$$

L'équation différentielle en $w(\theta)$ établie au 2. a.s'identifie à (2) à condition d'y faire $\omega_0 = 1$.

On a donc $w - \beta = A \cos \theta + B \sin \theta$

$$\text{ou } w = \beta(1 + e \cos(\theta - \theta_1)) = \frac{1}{p}(1 + e \cos(\theta - \theta_1)) \quad (3)$$

Commentaire

Si l'on avait dérivé (1) par rapport à θ on aurait obtenu :

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = \beta \text{ dont la solution générale est bien donnée par l'expression (3)...}$$

Reportons l'expression (3) dans (1) en remarquant que $\frac{dw}{d\theta} = -\beta e \sin(\theta - \theta_1)$:

$$\beta^2 e^2 \sin^2(\theta - \theta_1) + \beta^2 e^2 \cos^2(\theta - \theta_1) = \beta^2 \gamma \Rightarrow e^2 = \gamma.$$

On a donc obtenu :

$$p = \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad e^2 = \gamma$$

D'où les expressions fournissant le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire conique :

$$p = \frac{L^2}{mK} \quad \text{et} \quad e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{mK^2}$$

2. c. Le point P suit une orbite circulaire si sa distance au centre O est fixe, ce qui implique $w = \text{constante}$ et donc $e = 0$. Dès lors, en notant r_c le rayon de la trajectoire, il vient :

$$r_c = \frac{1}{\beta} = \frac{L^2}{mK} \quad \text{et} \quad E = -\frac{mK^2}{2L^2} \quad (e = 0)$$

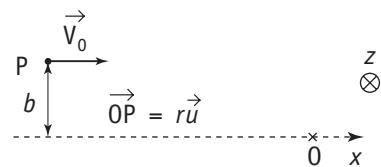
soit

$$E = -\frac{K}{2r_c}$$

518 Interaction coulombienne répulsive

1. Une particule P de masse m est soumise, dans \mathcal{R} galiléen, à une force centrale répulsive de centre O fixe :

$$\vec{F} = \frac{mK\vec{u}}{r^2} \quad (K > 0).$$



Initialement, la particule est à l'infini avec une vitesse \vec{V}_0 , le paramètre d'impact est b (cf. figure).

Déterminer la déviation subie par la particule (les forces gravitationnelles et de pesanteur sont négligées dans tout l'exercice).

Indication : on pourra intégrer – par rapport au temps – l'équation vectorielle traduisant la loi fondamentale de la dynamique pour la particule P, puis projeter sur les axes Ox et Oy.

Application :

La force \vec{F} résulte d'une interaction électrostatique due à une charge Q fixée en O ($qQ > 0$). Quelle valeur K_0 doit-on attribuer au coefficient K ? Que devient la déviation ?

2. On revient au cas précédent, la charge Q initialement fixe étant maintenant libre de se déplacer (sa masse est M).

a. Que peut-on dire – à partir des lois de conservation – dans le cas particulièrement simple où $m = M$?

b. Cas général ($m \neq M$) :

α) On se place dans le référentiel \mathcal{R}_G du centre de masse G et on note $\vec{r}' = \vec{GP}$. Montrer que la force \vec{F} subie par P s'écrit : $\vec{F} = K'\frac{\vec{u}}{r'^2}$. Exprimer K' en fonction de K_0 et du rapport $\frac{m}{M}$.

β) Soit φ' l'angle mesurant la déviation de P dans \mathcal{R}_G . Montrer que l'on a :

$$\tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{K_0}{v_0^2 b} \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

γ) En déduire une expression donnant $\tan \varphi$ (φ angle de déviation de P dans \mathcal{R}) en fonction de φ' et de $\frac{m}{M}$. Commenter.

Solution

1. Le point matériel P est soumis à une force centrale répulsive, le centre de force (point O) étant fixe dans le référentiel d'étude.

Le mouvement est donc plan et la trajectoire hyperbolique (O est un foyer).

Notons \vec{V}_1 la vitesse après interaction (particule à l'« infini »).

Il y a donc conservation du moment cinétique $\vec{\sigma}(O)$, soit en désignant par \vec{k} un vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la trajectoire :

$$\vec{\sigma}(O) = \vec{OP} \wedge m\vec{V} = \lim_{\langle P \rightarrow \infty \rangle} (\vec{OP} \wedge m\vec{V}).$$

D'où $\vec{\sigma}(O) = mV_0 b \vec{k}$.

D'autre part $\vec{\sigma}(O) = r\vec{u} \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$ ($\vec{u} = \vec{u}_r$)

Soit $r^2\dot{\theta} = V_0 b$ (1)

La conservation de l'énergie mécanique implique celle de l'énergie cinétique pour r « infini » (on est en dehors du champ d'interaction de la force).

D'où $V_1 = V_0$ (2)

La déviation de la particule se mesure par l'angle $\varphi = (\vec{V}_0, \vec{V}_1)$, θ variant de la valeur 0 à la valeur $\pi - \varphi$. Écrivons la loi fondamentale de la dynamique : $m \frac{d\vec{V}}{dt} = mK \frac{\vec{u}_r}{r^2}$.

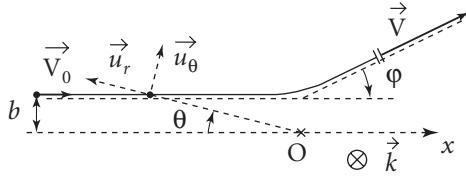
Intégrons cette équation entre les états limites « avant interaction » et « après interaction »

$$\int_{av}^{ap} d\vec{V} = K \int_{av}^{ap} \frac{\vec{u}_r dt}{r^2}$$

or $\int_{av}^{ap} d\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_0$

et avec (1) $\int_{av}^{ap} \frac{\vec{u}_r dt}{r^2} = \frac{1}{V_0 b} \int_0^{\pi - \varphi} \vec{u}_r d\theta$ (d'après (1) : $\frac{dt}{r^2} = \frac{d\theta}{r^2 \dot{\theta}} = \frac{1}{V_0 b} d\theta$).

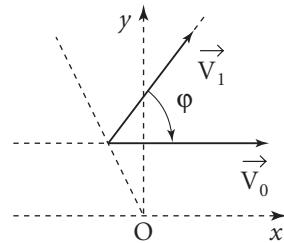
Nous avons donc $\vec{V}_1 - \vec{V}_0 = \frac{K}{V_0 b} \int_0^{\pi - \varphi} \vec{u}_r(\theta) d\theta$.



Projetons sur les axes Ox et Oy

$$(\vec{u}_r = -\cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y) :$$

$$\begin{cases} V_0(\cos\varphi - 1) = -\frac{K}{V_0 b} \int_0^{\pi-\varphi} \cos\theta d\theta \\ V_0 \sin\varphi = \frac{K}{V_0 b} \int_0^{\pi-\varphi} \sin\theta d\theta \end{cases}$$



$$\text{Soit : } \begin{cases} V_0(\cos\varphi - 1) = \frac{K}{V_0 b}(-\sin\varphi) \Rightarrow \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{V_0^2 b} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ V_0 \sin\varphi = \frac{K}{V_0 b}(1 + \cos\varphi) \Rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{V_0^2 b} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{cases}$$

Les deux équations sont évidemment identiques et se résument à :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{V_0^2 b}} \quad (3)$$

La déviation est d'autant plus forte que le paramètre d'impact b et la vitesse V_0 sont faibles et que la constante de force K est élevée, ce qui est cohérent.

Application : le champ de force est le champ coulombien répulsif, on a donc :

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{u}}{r},$$

2. a. Écrivons les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie mécanique du système des deux particules chargées, dans le référentiel d'étude supposé galiléen, entre les états « bien avant » interaction et « bien après » interaction, états pour lesquels les particules sont à l'infini et infiniment distantes l'une de l'autre. Dans ces états, l'énergie mécanique se réduit à l'énergie cinétique. D'où :

$$\begin{aligned} m\vec{V}_0 + \vec{0} &= m\vec{V}_q(\text{ap}) + M\vec{V}_Q(\text{ap}) \\ \frac{1}{2}mV_0^2 + 0 &= \frac{1}{2}m\vec{V}_q^2(\text{ap}) + \frac{1}{2}M\vec{V}_Q^2(\text{ap}). \end{aligned}$$

Soit avec $m = M \Rightarrow \vec{V}_0 = \vec{V}_q(\text{ap}) + \vec{V}_Q(\text{ap})$ et $V_0^2 = V_q^2(\text{ap}) + V_Q^2(\text{ap})$.

Et en éliminant V_0 : $\left[\vec{V}_q(\text{ap}) + \vec{V}_Q(\text{ap}) \right]^2 = V_q^2(\text{ap}) + V_Q^2(\text{ap})$.

Soit finalement

$$\boxed{\vec{V}_q(\text{ap}) \cdot \vec{V}_Q(\text{ap}) = 0}$$

Les deux particules repartent après interaction dans des directions perpendiculaires (résultat classique pour $m = M$ indépendant de la nature de l'interaction).

2. b. α) Considérons le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_G , ce référentiel est en translation par rapport au référentiel galiléen d'étude avec une vitesse \vec{V}_G telle que :

$$\vec{V}_G = \frac{m\vec{V}_0 + \vec{0}}{m+M} \Rightarrow \vec{V}_G = \frac{m}{m+M}\vec{V}_0 \quad (\vec{V}_G = \text{constante})$$

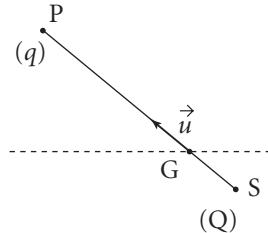
\mathcal{R}_G est donc galiléen. Dans ce référentiel, la charge q est

$$\text{soumise à la force } \vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \text{ avec } r = \|\vec{SP}\|.$$

$$\text{Or } GP = \frac{M}{m+M}SP \quad (4) \text{ (G barycentre).}$$

$$\text{Posons } r' = GP, \text{ il vient } r = \left(1 + \frac{m}{M}\right)r', \text{ et :}$$

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 r'^2} \vec{u}.$$



On est alors – dans \mathcal{R}_G – ramené au problème précédent avec un centre de force fixe placé en G , et une constante de force d'expression :

$$K' = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} \quad \boxed{K' = \frac{K_0}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2}}$$

2.b. β) Dans ce même référentiel, la particule q va subir une déviation d'angle ϕ' donnée par la relation (cf. (3)) :

$$\tan\left(\frac{\phi'}{2}\right) = \frac{K'}{V_0'^2 b'}, \text{ il reste donc à déterminer les paramètres } V_0' \text{ et } b'.$$

• Pour V_0' , appliquons la composition des vitesses dans le cas de la translation

$$\text{soit } \vec{V}_0 = \vec{V}_0' + \vec{V}_G \Rightarrow \vec{V}_0' = \vec{V}_0 - \vec{V}_G$$

$$\text{et } \vec{V}_0' = \vec{V}_0 - \frac{m}{m+M}\vec{V}_0 = \frac{M}{m+M}\vec{V}_0 \Rightarrow V_0' = \frac{M}{m+M}V_0.$$

• b' s'obtient à partir de b par une formule barycentrique identique à (4).

$$\text{d'où } b' = b \frac{M}{m+M}.$$

$$\text{Finalement : } \tan\left(\frac{\phi'}{2}\right) = \frac{K'}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 V_0'^2 b \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^3}}.$$

Soit :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\phi'}{2}\right) = \frac{K_0}{V_0'^2 b} \left(1 + \frac{m}{M}\right)} \quad (4)$$

2.b.γ) La déviation cherchée dans le référentiel d'étude \mathcal{R}_e , où initialement Q est immobile s'obtiendra aisément en composant de nouveau les vitesses. Après interaction, on aura :

$$\vec{V}_q(\text{après}) = \vec{V}_G + \vec{V}'_1 \quad \text{avec} \quad V'_1 = V'_0.$$

Soit en projetant sur les directions \vec{u}_x et \vec{u}_y :

$$\left. \begin{array}{l} V_q(\text{ap}) \cos \varphi = V_G + V'_0 \cos \varphi' \\ V_q(\text{ap}) \sin \varphi = V'_0 \sin \varphi' \end{array} \right\} \Rightarrow \tan(\varphi) = \frac{\sin \varphi'}{\left(\frac{V_G}{V'_0} \right) + \cos \varphi'} \quad (5)$$

Or $\frac{V_G}{V'_0} = \frac{m}{M}$ d'où une déviation φ telle que :

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{\sin \varphi'}{\frac{m}{M} + \cos \varphi'} \quad \text{avec} \quad \tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{K_0}{V_0^2 b} \left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

Commentaire

Un calcul utilisant les relations entre $\sin \varphi'$, $\cos \varphi'$ et $\tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right)$ donne après simplifications :

$$\tan \varphi = \frac{\frac{2K_0}{V_0^2 b}}{\left(1 - \frac{K_0^2}{V_0^4 b^2}\right) + \frac{m^2 K_0^2}{M^2 V_0^4 b^2}}.$$

- Pour $m \ll M$, on obtient $\tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right) \approx \frac{K_0}{V_0^2 b}$ (cf. relation (4)) et $V_G \ll V'_0$ ce qui implique (en fait pour $\frac{m}{M} \ll \cos \varphi'$), cf. figure, $\varphi \sim \varphi'$, soit finalement :

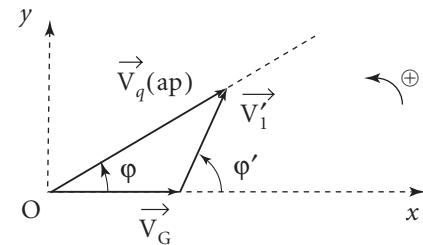
$$\tan \varphi \approx \frac{K_0}{V_0^2 b}$$

comme il se doit. En effet, à la limite où la masse M est très grande devant m , on pourra considérer en première approximation qu'elle reste fixe.

- Pour $m = M$, on a $V_G = \frac{m}{m+M} V_0 = \frac{V_0}{2}$ et $V'_0 = V'_1 = \frac{V_0}{2}$.

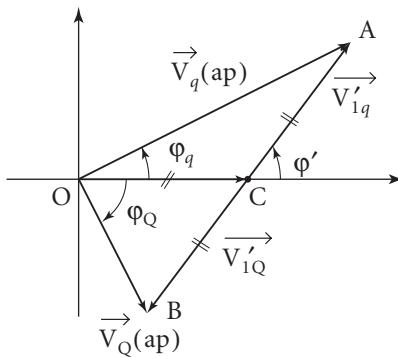
D'autre part, dans \mathcal{R}_G $M\vec{V}'_Q + m\vec{V}'_q = \vec{0}$ soit, pour $m = M$, $\vec{V}'_Q = -\vec{V}'_q$.

D'où le diagramme des vitesses dans \mathcal{R}_e en se rappelant que $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_G$



$$V'_{1q} = V'_{1Q} = \frac{V_0}{2}$$

$$OC = V_G = \frac{V_0}{2}$$



C est le milieu de AB et le triangle OAB est rectangle en O ($OC = BC = CA$), on a donc, dans ce cas particulier, un angle de $\frac{\pi}{2}$ entre les deux directions de vol des particules après interaction.

519

Météore traversant un nuage peu dense

Une particule M de masse m est soumise à un champ gravitationnel central \vec{g} (de centre 0) tel que :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{g}(r) = -K \frac{\vec{r}}{r^3} \text{ pour } r > R \\ \vec{g}(r) = -K \frac{\vec{r}}{R^3} \text{ pour } r < R \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{r} = \overrightarrow{OM} \text{ et } r = \|\vec{r}\|, K > 0.$$

1. À un instant t_0 , la particule se trouve en un point M_0 ($OM_0 = R$) et sa vitesse \vec{V}_0 fait un angle α avec le rayon vecteur \overrightarrow{OM}_0 .

On prendra $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $V_0 (= \|\vec{V}_0\|) < V_\ell = \sqrt{\frac{2K}{R}}$.

On posera $\eta = \frac{V_0}{V_\ell}$.

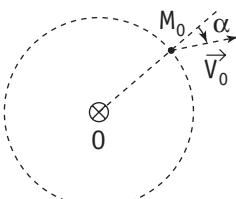
a. À quoi correspond la condition $V_0 < V_\ell$?

b. Caractériser la trajectoire suivie par la particule tant que r reste supérieur à R .

On rappelle que pour une trajectoire elliptique d'équation polaire $\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\theta - \theta_1)$, on a :

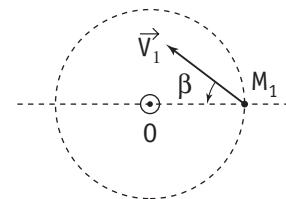
$$p = \frac{C^2}{K} \text{ (où } mC = L_0 \text{ avec } \vec{L}_0 \text{ moment cinétique en 0)}.$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \text{ (} a \equiv \text{demi-grand axe de l'ellipse)}.$$



Dessiner quelques trajectoires (prendre par exemple $\eta = 0,9$ et $\alpha = \{0,5 ; 0,8 ; 1,0\}$).

- 2.** La particule se trouve en un point M_1 ($OM_1 = R$) et sa vitesse \vec{V}_1 , de module V_0 , est maintenant orientée de telle façon que $(\vec{V}_1, \vec{M}_1\vec{O}) = \beta$ avec $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.



a. Déterminer la nature de la trajectoire suivie pour la particule tant que r reste inférieur à R .

b. On peut montrer que la particule recoupe le cercle de centre O et de rayon R en un point M'_1 tel que $(\vec{OM}'_1, \vec{OM}_1) = \psi$ avec :

$$\tan \psi = -\frac{2\eta^2 \sin 2\beta}{1 + 2\eta^2 \cos 2\beta}.$$

Vérifier la cohérence de cette expression.

- 3.** On se replace dans les conditions du **1.** Décrire le mouvement ultérieur de la particule. Tracer la trajectoire pour $\eta = 0,9$ et $\alpha = 0,5$ rad.

Solution

- 1. a.** La particule M se déplace dans le champ $\vec{g}(r) = -K \frac{\vec{r}}{r^3}$.

Il lui est associé une énergie potentielle $E_p = -\frac{mK}{r}$:

La conservation de l'énergie lors du mouvement s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m V^2 + E_p(r) = E_0 = \frac{1}{2} m V_0^2 + E_p(r_0).$$

Or la force est centrale attractive et de type newtonien. La trajectoire reste à distance finie (état lié) pour $E_0 < 0$ soit pour :

$$\frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{mK}{R} < 0 \Rightarrow V_0^2 < \frac{2K}{R} \Rightarrow V_0^2 < V_\ell^2.$$

La condition $V_0 < V_\ell$ traduit donc que la trajectoire restera bornée (trajectoire elliptique).

- 1. b.** D'après ce qui précède, on obtiendra donc une portion d'ellipse d'équation polaire $\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\theta - \theta_1)$, où p et e représentent le paramètre et l'excentricité de l'ellipse (grandeur prises positives).

- D'après le cours, on a $p = \frac{C^2}{K}$ où C est la constante des aires.

$$C = RV_0 \sin \alpha \quad (C = \left\| \vec{OM}_0 \wedge \vec{V}_0 \right\|) \Rightarrow p = \frac{R^2 V_0^2 \sin^2 \alpha}{K}.$$

Et

$$\boxed{\frac{p}{R} = 2 \left(\frac{V_0}{V_\ell} \right)^2 \sin^2 \alpha}$$

- Le demi-grand axe a s'obtient par $E_m = -\frac{mK}{2a}$ soit :

$$\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{mK}{R} = -\frac{mK}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}mV_\ell^2 = -\frac{1}{2}mV_\ell^2 \left(\frac{R}{2a} \right).$$

Soit $\frac{V_\ell^2 - V_0^2}{V_\ell^2} = \frac{R}{2a}$ et $a = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{V_0}{V_\ell} \right)^2}$

d'où

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{2(1 - \eta^2)} \quad (2)$$

L'excentricité de l'ellipse trajectoire est alors fournie par l'expression $a = \frac{p}{1 - e^2}$

soit $e^2 = 1 - \frac{p}{a}$

$$e^2 = 1 - \frac{2\eta^2 \sin^2 \alpha}{\left(\frac{1}{2(1 - \eta^2)} \right)}$$

et

$$e = \sqrt{1 - 4\eta^2(1 - \eta^2)\sin^2 \alpha} \quad (3)$$

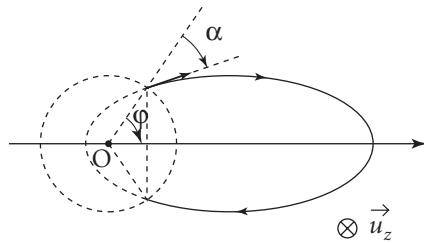
Enfin, déterminons l'angle φ définissant la position du grand axe de l'ellipse (dont le périhélie se situe à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon R.) la trajectoire a pour équation, en coordonnées polaires, $\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta$ (dans un premier temps, avec les conventions adoptées (cf. figure) θ augmente.

D'où

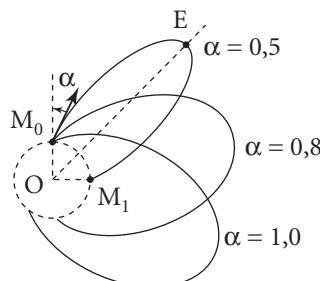
$$\frac{p}{R} = 1 + e \cos(\pi - \varphi) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1 - \frac{p}{R}}{e} \quad (\theta = \pi - \varphi)$$

soit

$$\cos \varphi = \frac{1 - 2\eta^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - 4\eta^2(1 - \eta^2)\sin^2 \alpha}} \quad (4)$$



Donnons quelques trajectoires pour $\eta = 0,9$:



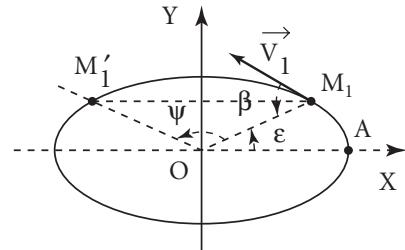
2. a. La particule M est soumise à la force $\vec{F} = -\frac{Km}{R^3}\vec{r}$ (oscillateur harmonique spatial de centre O). L'équation de son mouvement est donnée par :

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Km}{R^3}\vec{r}, \quad \text{soit} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{K}{R^3}\vec{r} = \vec{0}.$$

Posons $\Omega^2 = \frac{K}{R^3}$ (Ω n'est autre que la pulsation angulaire du mouvement circulaire de rayon R...), il vient : $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \Omega^2\vec{r} = \vec{0}$. (5)

La trajectoire décrite par la particule est plane (force centrale, plan défini par OM₁ et \vec{V}_1) : c'est un **arc d'ellipse de centre O** : en choisissant pour axes OX et OY les axes principaux de cette ellipse, l'équation (5) donne, en projection :

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dt^2} + \Omega^2 X = 0 \Rightarrow X = X_0 \cos \Omega(t - t_0) \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + \Omega^2 Y = 0 \Rightarrow Y = Y_0 \sin \Omega(t - t_0). \end{cases}$$

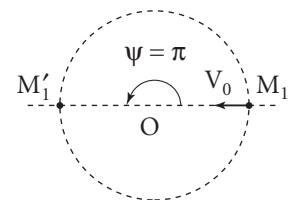


2. b. La particule ressortira du disque de centre O et de rayon R au point M'₁ symétrique de M₁ par rapport à l'axe OY. Le rayon vecteur \vec{r} aura alors tourné d'un angle $\psi = \pi - 2\epsilon$. D'après le texte, on a :

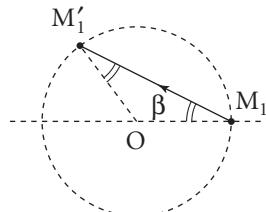
$$\tan \psi = -\frac{2\eta^2 \sin 2\beta}{1 + 2\eta^2 \cos 2\beta} \quad (6)$$

Vérifions la cohérence de cette expression.

– pour $\beta = 0$, la particule quitterait le disque au point M'₁ diamétralement opposé, ce qui impose $\psi = \pi$ pour $\beta = 0$ en accord avec (6).



– Pour V_0 suffisamment grand ($\frac{1}{2}mV_0^2 \gg \frac{mK}{R}$, soit $\eta^2 \gg 1$), la particule présente un déplacement quasi rectiligne. Elle ressort en M'₁ tels que $\psi = \pi - 2\beta$ (cohérent avec (6)).



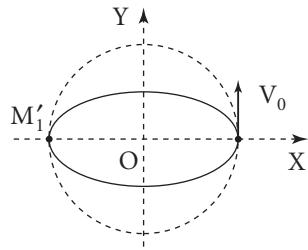
– Pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ la trajectoire a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} X = R \cos \Omega t \\ Y = \frac{V_0}{\Omega} \sin \Omega t \end{cases}$$

Cette trajectoire est effectivement intérieure au disque de rayon R pour $\frac{V_0}{\Omega} < R$, c'est-à-dire

$$\frac{V_0^2}{K/R^3} < R^2 \Rightarrow \frac{2V_0^2}{V_l^2} < 1 \Rightarrow 2\eta^2 < 1.$$

On doit donc avoir $\psi \rightarrow \pi$ pour $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ quand $2\eta^2 < 1$ ce qui est également vérifié.

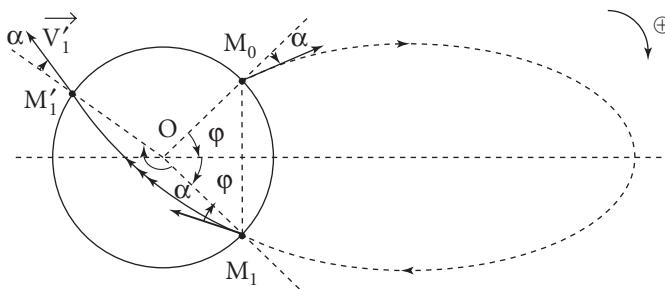
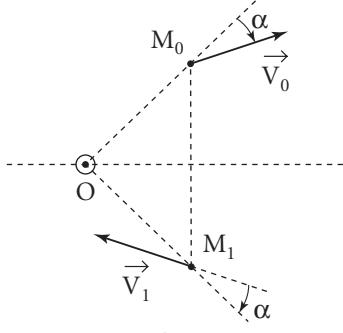
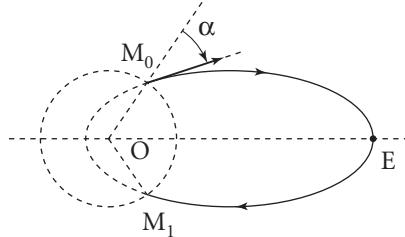


3. Dans un premier temps, la particule décrit l'arc M_0EM_1 de l'ellipse de foyer O caractérisée au 1. b. Elle revient sur le cercle de rayon R en un point M_1 symétrique de M_0 par rapport à l'axe OE de cette ellipse. La conservation de l'énergie implique (puisque de plus $OM_1 = OM_0 = R$ et donc $E_p(M_1) = E_p(M_0)$) :

$$\|\vec{V}_1\| = V_0.$$

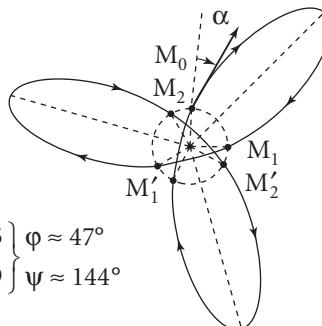
D'autre part, la conservation du moment cinétique va se traduire (puisque $\|\vec{V}_1\| = V_0$) par $(\overrightarrow{OM_1}, \vec{V}_1) = \pi - \alpha$, (cf. figure).

On est alors ramené au cas traité à la question 2. et la particule décrit l'arc $M_1M'_1$ de l'ellipse de centre O , le rayon vecteur tournant d'un angle ψ ($\beta = \alpha$).



La particule ressort en M'_1 avec une vitesse \vec{V}'_1 telle que $\|\vec{V}'_1\| = V_0$ (conservation de l'énergie) et $(\overrightarrow{OM'_1}, \overrightarrow{V}'_1) = \alpha$ (conservation du moment cinétique). On est alors ramené à la même situation qu'en M_0 , la particule redécrivant un arc d'ellipse de foyer O obtenu à partir de l'arc M_0EM_1 par une rotation d'angle $\Lambda = 2\phi + \psi$.

D'où le dessin :



520 Marées

1. On considère deux masses $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ formant un système isolé en interaction gravitationnelle. Elles décrivent des trajectoires circulaires (autour de leur centre de masse G) dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_G . On a $M_1M_2 = D = \text{cte}$.

On appelle \mathcal{R}' le référentiel **en translation** centré sur M_1 . On étudie dans \mathcal{R}' le mouvement d'une particule de masse m dont on suppose qu'elle ne perturbe pas le système (M_1, M_2).

a. Montrer que la loi fondamentale de la dynamique appliquée dans \mathcal{R}' , à la masse

$$m, s'écrit : m\vec{a}' = -\frac{\mathcal{G}m_1m\vec{r}}{r^3} + m\delta\vec{G} = m(\vec{G}_1 + \delta\vec{G})$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M}$, le point M désignant la masse m .

On montrera que le terme « perturbateur » $\delta\vec{G}$ qui tient compte de la présence du corps M_2 peut se mettre sous la forme :

$$\delta\vec{G} = \frac{\mathcal{G}m_2}{D^2}\vec{F}\left(\frac{\vec{r}}{D}\right).$$

Dans le cas où l'on a $r \ll D$, montrer que la fonction vectorielle \vec{F} s'écrit au premier ordre en $\frac{\vec{r}}{D}$:

$$\vec{F} = 3\vec{u}\left(\vec{u} \cdot \frac{\vec{r}}{D}\right) - \frac{\vec{r}}{D} \quad (\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}).$$

b. Application numérique :

Calculer la valeur du rapport $\frac{\|\vec{\delta\zeta}\|_{\max}}{\|G_1\|}$ pour $\frac{r}{D} \approx 1,66 \cdot 10^{-2}$ (D = distance Terre-Lune,

$r_{\max} = R_T$ rayon de la Terre) et $\frac{m_2}{m_1} = 1,22 \cdot 10^{-2}$ (rapport des masses de la Lune (m_2) et de la Terre (m_1)).

2. Approche simplifiée du phénomène des marées. La Terre est assimilée à une boule rigide de centre T et de rayon R_T recouverte sous une faible épaisseur par de l'eau. Il s'agit de déterminer la forme de la surface libre en tenant compte de la seule influence de la Lune. On fera donc les hypothèses suivantes :

- le système Terre-Lune est isolé, et la distance D séparant la Terre de la Lune est constante (la Lune est assimilée à un point matériel de masse m_L , et on note m_T la masse de la Terre) ;
- une masse δm de fluide est soumise à l'attraction terrestre, à celle de la Lune ainsi qu'aux forces de pression de résultante $\vec{\delta f}_p$ telle que

$$\vec{\delta f}_p = -\frac{\delta m}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} P$$

ρ_0 = masse volumique invariable de l'eau supposée incompressible).

a. On se place dans le référentiel \mathcal{R}' centré en T et en translation par rapport au référentiel galiléen du centre de masse du système Terre-Lune. Donner l'équation traduisant l'équilibre de la masse δm dans \mathcal{R}' . On utilisera les résultats du 1.

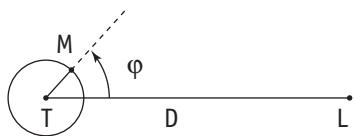
b. On suppose que l'eau est en « équilibre à chaque instant » et que l'on peut appliquer le résultat précédent.

α) Montrer que la force perturbatrice liée à la Lune peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\delta f}_L = -\delta m \overrightarrow{\text{grad}} V_p(\vec{r}).$$

On exprimera V_p en fonction de g , m_L , D , $r = TM$ (le point M repère la particule fluide) et de l'angle $\varphi = (\vec{TL}, \vec{TM})$.

Indication : on pourra projeter $\vec{\delta f}_L$ sur les axes cartésiens Tx , Ty , Tz ($u_z \parallel \vec{TL}$).



β) En déduire que la surface libre est associée à l'équation :

$$V_1(r_S) + V_p(r_S, \varphi) = \text{cste} \quad \text{où} \quad V_1(r_S) = -\frac{g m_T}{r_S}.$$

γ) Montrer alors que la variation $s(\varphi)$ du niveau de l'eau (par rapport à une Terre sans lune) s'exprime sous la forme :

$$s \approx \frac{1}{2} \frac{m_L R_T^4}{m_T D^3} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

À cet effet, on notera $r_s(\varphi) = R'_T + s(\varphi)$ (R'_T rayon d'une Terre sphérique recouverte d'une épaisseur d'eau uniforme : $R'_T \approx R_T$) et on utilisera le résultat du **2. b. β**).

On tiendra compte de ce que : $\frac{m_L}{m_T} \left(\frac{R_T}{D} \right)^3 \ll 1$.

δ) Application numérique.

Donner dans ce cadre d'hypothèses :

- la hauteur h du marnage (différence entre le niveau le plus haut et le niveau le plus bas) pour un point situé dans le plan équatorial (on supposera que la Lune reste dans ce plan). On prendra $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km ;
- l'intervalle de temps séparant deux marées hautes consécutives (on considérera que la Lune a dans \mathcal{R}' une trajectoire circulaire autour de T de période $T_L = 28$ jours).

Commenter les résultats obtenus.

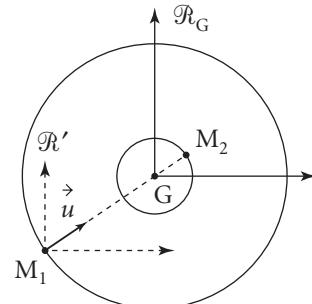
Solution

1. a. Le système M_1M_2 forme un système isolé en interaction gravitationnelle.

La distance M_1M_2 étant invariable ($M_1M_2 = D$), les masses m_1 et m_2 décrivent, dans le référentiel \mathcal{R}_G du centre de masse, des cercles centrés en G.

On a donc, dans \mathcal{R}_G : $m_1 \vec{a}(M_1) = \frac{G m_1 m_2}{D^2} \vec{u}$.

- On étudie maintenant le mouvement d'une masse m ($m \ll m_1$ et $m \ll m_2$) dans le référentiel \mathcal{R}' en translation circulaire par rapport à \mathcal{R}_G .



Ce référentiel \mathcal{R}' n'étant pas galiléen, il est nécessaire d'introduire la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(M_1) = -\frac{Gmm_2}{D^2}\vec{u}$.

Appliquons la loi fondamentale de la dynamique à la masse m située en M ($\vec{r} = \overrightarrow{M_1M}$), en tenant compte des forces de gravitation exercées sur m par M_1 et M_2 :

$$m\vec{a}' = -\frac{Gmm_1}{r^3}\vec{r} - Gmm_2 \frac{\overrightarrow{M_2M}}{M_2M^3} + \vec{f}_{ie}.$$

$$\text{Soit } m\vec{a}' = -\frac{Gmm_1}{r^3}\vec{r} + \underbrace{\left[-Gmm_2 \frac{\overrightarrow{M_2M}}{M_2M^3} - Gmm_2 \frac{\vec{u}}{D^2} \right]}_{m\delta\vec{G}}.$$

$$\text{D'où : } \delta\vec{G} = -Gm_2 \left\{ \frac{\overrightarrow{M_2M}}{M_2M^3} + \frac{\vec{u}}{D^2} \right\}$$

$$\text{or } \overrightarrow{M_2 M} = \overrightarrow{M_1 M} - \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r} - D \vec{u}.$$

$$\text{Et } \vec{\delta G} = -G m_2 \left\{ \frac{\vec{r} - D \vec{u}}{\|\vec{r} - D \vec{u}\|^3} + \frac{\vec{u}}{D^2} \right\}.$$

$$\text{Soit encore : } \vec{\delta G} = \frac{G m_2}{D^2} \left\{ \frac{\left(\vec{u} - \frac{\vec{r}}{D} \right)}{\left\| \vec{u} - \frac{\vec{r}}{D} \right\|^3} - \vec{u} \right\} \quad (1)$$

Le champ perturbateur est bien de la forme $\vec{\delta G} = \frac{G m_2}{D^2} F\left(\frac{\vec{r}}{D}\right)$ avec :

$$F\left(\frac{\vec{r}}{D}\right) = \frac{\vec{u} - \frac{\vec{r}}{D}}{\left\| \vec{u} - \frac{\vec{r}}{D} \right\|^3} - \vec{u} \quad (2)$$

Supposons maintenant que $r \ll D$, et développons l'expression (2) au premier ordre en $\frac{\vec{r}}{D}$. Dès lors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left\| \vec{u} - \frac{\vec{r}}{D} \right\|^3} &= \left[\left(\vec{u} - \frac{\vec{r}}{D} \right)^2 \right]^{-3/2} = \left(1 - 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{D} + \frac{r^2}{D^2} \right)^{-3/2} = 1 + \frac{3 \vec{u} \cdot \vec{r}}{D} + o\left(\frac{r}{D}\right). \\ \text{Et } \frac{\vec{u} - \frac{\vec{r}}{D}}{\left\| \vec{u} - \frac{\vec{r}}{D} \right\|^3} &= \left(\vec{u} - \frac{\vec{r}}{D} \right) \left(1 + \frac{3 \vec{u} \cdot \vec{r}}{D} + o\left(\frac{r}{D}\right) \right) \# \vec{u} - \frac{\vec{r}}{D} + 3 \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{D} \right) \vec{u}. \end{aligned}$$

$$\text{Soit finalement } \boxed{F\left(\frac{\vec{r}}{D}\right) \# 3 \vec{u} \left(\vec{u} \cdot \frac{\vec{r}}{D} \right) - \frac{\vec{r}}{D}} \quad (3).$$

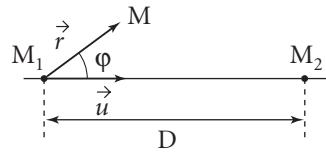
À cette approximation, le champ perturbateur s'écrit :

$$\boxed{\vec{\delta G} = \frac{G m_2}{D^3} [3 \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{r}) - \vec{r}]} \quad (4)$$

$$\textbf{1. b.} \text{ On a } \|\vec{\delta G}\| = \frac{G m_2}{D^3} \sqrt{r^2 + 9(\vec{u} \cdot \vec{r})^2 - 6(\vec{u} \cdot \vec{r})^2}$$

$$\|\vec{\delta G}\| = \frac{G m_2}{D^3} \sqrt{r^2 + 3r^2 \cos^2 \varphi}.$$

$$\text{D'où } \|\vec{\delta G}\|_{\max} = \frac{G m_2}{D^3} 2r. \text{ Et } \frac{\|\vec{\delta G}\|_{\max}}{\|\vec{G}_1\|} \sim \frac{\frac{G m_2 2r}{D^3}}{\frac{G m_1}{r^2}} = 2 \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \cdot \left(\frac{r}{D} \right)^3.$$



Application numérique :

$$\frac{\|\vec{\delta G}\|_{\max}}{\|\vec{G}_1\|} = 2 \cdot 1,22 \cdot 10^{-2} \times (1,66 \cdot 10^{-2})^3 = 1,12 \cdot 10^{-7}.$$

On a bien $\|\vec{\delta G}\|_{\max} \ll \|\vec{G}_1\|$ et l'influence de M_2 sur le mouvement dans \mathcal{R}' de la masse m peut effectivement être traitée en terme de perturbation.

2. a. Le système M_1 et M_2 de la première question est ici remplacé par le système Terre-Lune. La masse δm joue le rôle de m . Elle sera en équilibre dans \mathcal{R}' (repère en translation lié à la Terre) si la résultante des forces appliquées est nulle, soit en tenant compte des résultats du **1.)** :

$$\vec{0} = \vec{\delta f_p} + \delta m(\vec{G}_1 + \vec{\delta G}).$$

Soit :

$$\boxed{\vec{0} = -\frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{G}_1 + \vec{\delta G}} \quad (5)$$

Avec $\vec{G}_1 = -\frac{Gm_T \vec{r}}{r^3}$ ($\vec{r} = \overrightarrow{\text{TM}}$) et $\vec{\delta G} = \frac{Gm_L}{D^3} [3\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{r}) - \vec{r}]$
où $\overrightarrow{\text{TL}} = D\vec{u}$.

2. b. α) Il faut montrer que $\vec{\delta G} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_p(\vec{r})$.

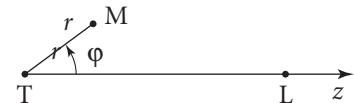
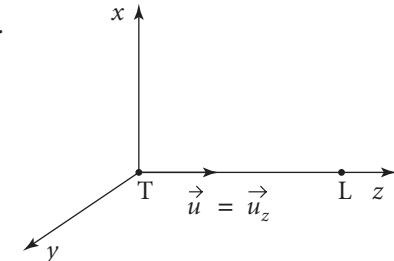
Introduisons l'axe Tz et un repère $Txyz$. Alors,

$$\begin{aligned} 3\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{r}) - \vec{r} &= 3z\vec{u}_z - (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) \\ &= 2z\vec{u}_z - (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y) \\ \text{et } -\frac{\partial V_p}{\partial x} &= -\frac{Gm_L}{D^3}x; \quad -\frac{\partial V_p}{\partial y} = -\frac{Gm_L}{D^3}y; \\ -\frac{\partial V_p}{\partial z} &= \frac{Gm_L}{D^3}2z. \end{aligned}$$

D'où l'on peut prendre : $V_p(x, y, z) = \frac{Gm_L}{D^3} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} - z^2 \right) = \frac{Gm_L}{2D^3} (r^2 - 3z^2)$.

Or $z = r \cos \varphi$, soit :

$$\boxed{V_p(r, \varphi) = \frac{Gm_L}{2D^3} r^2 (1 - 3\cos^2 \varphi)} \quad (6)$$



2. b. β) Le champ gravitationnel \vec{G}_1 peut également être associé au potentiel $V_1 = -\frac{Gm_T}{r}$. L'équation (5) traduisant « l'équilibre » de la masse d'eau δm devient ($\rho_0 = \text{cste}$) :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{P}{\rho_0} + V_1(r) + V_p(r, \varphi) \right].$$

La pression au sein de l'eau en « équilibre » se traduit ainsi par l'équation :

$$\frac{P}{\rho_0} + V_1(r) + V_p(r, \varphi) = \text{cste.}$$

Et la surface libre, associée à une pression uniforme (atmosphère) P_0 admet pour équation :

$$V_1(r_s) + V_p(r_s, \varphi) = \text{cste} \quad (7)$$

Pour une Terre sans Lune, on aurait $V_p(r_s, \varphi) = 0$ et $V_1(r_s) = \text{cste}$, ce qui correspond à une surface bien évidemment sphérique pour le modèle présenté ici.

2.b.γ Notons R'_T son rayon ($R'_T \approx R_T$).

La présence de la Lune modifie cet état et pour un angle φ donné (symétrie de révolution par rapport à l'axe TL), on note :

$$r_s(\varphi) = R'_T + s(\varphi) \text{ avec } s(\varphi) \text{ grandeur algébrique très petite devant } R'_T.$$

L'équation (7) donne alors :

$$-\frac{Gm_T}{(R'_T + s)} + \frac{Gm_L}{2D^3}(R'_T + s)^2(1 - 3\cos^2\varphi) = \text{cte.}$$

Et en tenant compte de ce que $|s| \ll R'_T$ et en ne gardant que les termes du premier ordre par rapport à la variable s :

$$-\frac{Gm_T}{R'_T}\left(1 - \frac{s}{R'_T}\right) + \frac{Gm_L}{2D^3}R'^2_T \left(1 + \frac{2s}{R'_T}\right)(1 - 3\cos^2\varphi) = \text{cte.}$$

D'où

$$\frac{s}{R'_T} \left\{ \underbrace{\frac{m_T}{R'_T}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{m_L R'^2_T}{D^3}(1 - 3\cos^2\varphi)}_{\textcircled{2}} \right\} + \frac{m_L R'^2_T}{2D^3}(1 - 3\cos^2\varphi) = \text{cte.}$$

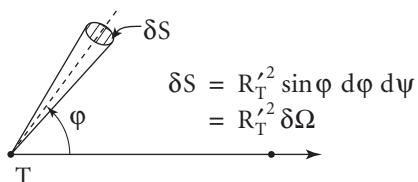
Or $\left|\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}}\right| \lesssim 2 \frac{m_L}{m_T} \left(\frac{R_T}{D}\right)^3 \ll 1$ (cf. Application numérique du 1.b.), d'où :

$$\frac{s}{R'_T} \approx \text{cte} + \frac{1}{2} \frac{m_L}{m_T} \left(\frac{R'_T}{D}\right)^3 (3\cos^2\varphi - 1).$$

Il reste à traduire, pour déterminer la constante, que le volume d'eau n'a pas varié. Or l'élément de surface δS s'est algébriquement déplacé de $\vec{s u_r}$. Soit une variation de volume :

$$\delta V = s \delta S = R'^2_T s \delta \Omega.$$

Et au total : $\delta V_T = R'^2_T \int s \delta \Omega$.



s ne dépendant que de φ on peut prendre $\delta\Omega = 2\pi \sin \varphi d\varphi$ ($\psi : 0 \rightarrow 2\pi$), d'où :

$$\delta V_T = R'_T^2 2\pi \int_0^\pi s(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

On doit avoir $\delta V_T = 0$, ce qui impose $\int_0^\pi s(\varphi) \sin \varphi d\varphi$

$$\begin{aligned} \text{or } \int_0^\pi (3\cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi d\varphi &= \int_0^\pi (1 - 3\cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) \\ &= \left[\cos \varphi - \cos^3 \varphi \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

On doit donc prendre cste = 0, ce qui donne finalement (avec $R'_T \approx R_T$) :

$$s \# \frac{1}{2} \frac{m_L R_T^4}{m_T D^3} (3\cos^2 \varphi - 1)$$

2.b.δ) Pour un point N dans le plan équatorial qui contient la Lune (cf. énoncé), on a : $s_{\max} = s(\varphi = 0) = s(\varphi = \pi)$ points N₁ et N₃

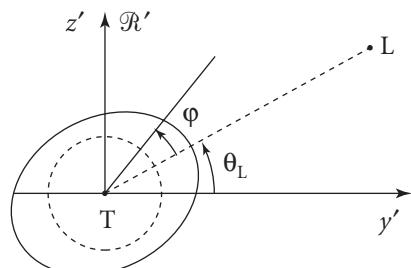
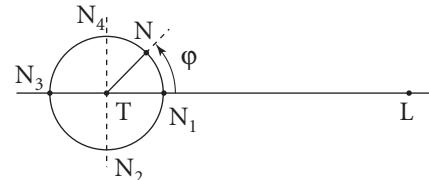
$$s_{\min} = s\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) \text{ points N}_2 \text{ et N}_4.$$

D'où

$$h = s_{\max} - s_{\min} = \frac{1}{2} \frac{m_L}{m_T} \cdot \frac{R_T^4}{D^3} [(3 - 1) - (0 - 1)]$$

$$h = \frac{3}{2} \frac{m_L}{m_T} \cdot \frac{R_T^4}{D^3} \Rightarrow h \# 54 \text{ cm.}$$

D'autre part, dans la modélisation retenue ici, l'eau forme un bourrelet d'axe TL qui tourne dans \mathcal{R}' à la vitesse angulaire ω_L alors que la partie rigide de la Terre tourne à la vitesse angulaire ω_T . Le point N, lié à la Terre, et contenu dans le plan équatorial, voit le niveau de l'eau s'élever de $s(t)$ avec $\varphi(t) = (\omega_T - \omega_L)t$ (on a considéré qu'à $t = 0$, N est situé sur l'axe TL entre T et L) soit :



$$s(t) = \frac{1}{2} \frac{m_L}{m_T} \cdot \frac{R_T^4}{D^3} [3 \cos^2(\omega_T - \omega_L)t - 1].$$

Dans ces conditions, le phénomène des marées présenterait une période T_m définie selon :

$$2(\omega_T - \omega_L)T_m = 2\pi \Rightarrow T_m = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_L}} = \frac{T_T}{2} \frac{1}{1 - \frac{T_T}{T_L}}$$

or $T_T = 24$ heures et $T_L = 28$ jours d'où :

$$T_m = 12 \frac{1}{1 - \frac{1}{28}} \text{ heures} \Rightarrow T_m = 12 \text{ h } 27 \text{ min.}$$

Commentaires

On observe bien des régions de la Terre où les marées sont semi-diurnes (c'est ce qui se passe sur les côtes atlantiques françaises). Mais cette périodicité n'est pas valable pour tous les points du globe.

Par contre, le marnage est très influencé par la forme des côtes. Ainsi certaines baies forment des cavités résonantes qui entraînent des valeurs de h beaucoup plus élevées (baie du mont Saint Michel).

C. Changements de référentiels

521

Rebond d'une balle sur un obstacle en mouvement

Une balle arrive avec une vitesse verticale \vec{V}_1 sur le pare-brise d'une voiture roulant, sur une route horizontale, à la vitesse \vec{V}_0 . On assimile le pare-brise à une surface plane inclinée à 45° par rapport à la verticale, et on admet que – **dans un référentiel lié à la voiture** – la balle rebondit symétriquement par rapport à la normale \vec{N} au pare-brise, le module de la vitesse étant conservé (le choc est parfaitement élastique, et la masse de la balle est bien évidemment très faible devant celle de la voiture...) Déterminer, dans un référentiel lié au sol, les composantes horizontale et verticale de la vitesse de la balle juste après le rebond sur le pare-brise. Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de composition des vitesses, mouvement de translation.

2. Ce qu'il faut comprendre

On ne connaît le résultat du choc que dans le référentiel de la voiture, il faut donc procéder aux changements de référentiels nécessaires.

Les données fournies sont telles que les calculs resteront simples en utilisant **une base** (\vec{u}_x, \vec{u}_z), \vec{u}_x dans la direction de \vec{V}_0 et \vec{u}_z verticale ascendante $\vec{V}_1 = -V_1 \vec{u}_z$.

3. Solution

Désignons par \mathcal{R}_{sol} et $\mathcal{R}_{\text{voiture}}$ deux référentiels liés respectivement au sol et à la voiture. $\mathcal{R}_{\text{voiture}}$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_{sol} à la vitesse \vec{V}_0 .

L'énoncé nous indique que, dans le référentiel de la voiture, la balle rebondit symétriquement par rapport à la normale \vec{N} du pare-brise tout en conservant la norme de sa vitesse. On est donc invité à étudier le choc dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{voiture}}$.

La vitesse de la balle nous est donnée par application de la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V}(\text{balle}/\mathcal{R}_{\text{sol}}) = \vec{V}(\text{balle}/\mathcal{R}_{\text{voiture}}) + \vec{V}_e$$

\vec{V}_e désigne la vitesse d'entraînement associée au mouvement de $\mathcal{R}_{\text{voiture}}$ par rapport à \mathcal{R}_{sol} .

POINT COURS

Soient deux référentiels $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ et $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$. M étant un point en mouvement, il possède une vitesse $\vec{V}_{\mathcal{R}}(M)$ dans \mathcal{R} et $\vec{V}_{\mathcal{R}'}(M)$ dans \mathcal{R}' . La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{V}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{V}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{V}_e(M).$$

La vitesse $\vec{V}_e(M)$ encore appelée vitesse d'entraînement est celle dans \mathcal{R} du point coïncidant avec M et appartenant à \mathcal{R}' .

Dans le cas d'une simple translation (pas forcément rectiligne uniforme) on a $\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{\mathcal{R}}(O')$.

Le mouvement de translation est caractérisé par le fait que les directions d'axe $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ restent fixes dans \mathcal{R} , le mouvement dans \mathcal{R} du point O' étant quelconque.

On a ici $\vec{V}_e = \vec{V}_0$ et $\vec{V}(\text{balle}/\mathcal{R}_{\text{sol}}) = -V_1 \vec{u}_z$ (Oz verticale ascendante).

Soit : $-V_1 \vec{u}_z = \vec{V}(\text{balle}/\mathcal{R}_{\text{voiture}}) + \vec{V}_0$

et $\boxed{\vec{V}(\text{balle}/\mathcal{R}_{\text{voiture}}) = -V_1 \vec{u}_z - V_0 \vec{u}_x = \vec{V}'_1}$

Fig. 1

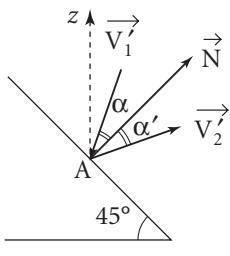
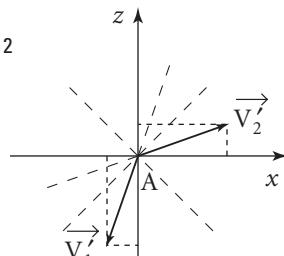


Fig. 2



La balle rebondit symétriquement en conservant le module de sa vitesse, d'où :

$$\alpha = \alpha' \text{ et } \|\vec{V}'_1\| = \|\vec{V}'_2\|.$$

Il revient au même de dire que les vecteurs (A, \vec{V}'_2) et (A, \vec{V}'_1) sont symétriques par rapport à la seconde bissectrice (cf. figure 2), ce qui implique :

$$V'_{2x} = -V'_{1z} \text{ et } V'_{2z} = -V'_{1x}.$$

Soit encore

$$V'_{2x} = V_1 \text{ et } V'_{2z} = V_0.$$

D'où après rebond, et dans \mathcal{R}' : $\vec{V}'_2 = V_1 \vec{u}_x + V_0 \vec{u}_z$.

Il reste à repasser dans \mathcal{R}_{sol} en appliquant de nouveau la loi de composition des vitesses.

Désignons par \vec{V}_2 la vitesse de la balle, il vient :

$$\vec{V}_2 = \vec{V}'_2 + \vec{V}_0$$

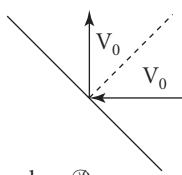
D'où : $\vec{V}_2 = (V_1 + V_0)\vec{u}_x + V_0\vec{u}_z$

Commentaires

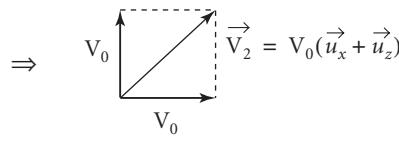
- Pour $V_0 = 0$ (voiture immobile dans \mathcal{R}_{sol}), on obtient :

$$\vec{V}_2 = V_1\vec{u}_x \text{ ce qui est évidemment le résultat attendu.}$$

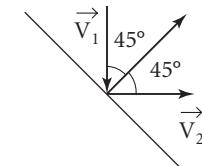
- Pour $V_1 \rightarrow 0$, on a bien :



dans $\mathcal{R}_{\text{voiture}}$



dans \mathcal{R}_{sol}



• La représentation classique du rebond élastique sur un obstacle n'est géométriquement simple que dans le référentiel où l'obstacle est fixe, d'où l'intérêt d'opérer le changement de référentiel correspondant.

• Les origines précises des deux référentiels utilisés n'interviennent pas ; pour exprimer les vitesses par leurs composantes, les vecteurs unitaires \vec{u}_x et \vec{u}_z suffisent, et on peut utiliser la même base dans les deux référentiels.

• Notons que sous l'effet du choc la balle, malgré une vitesse initiale faible, sera projetée à une grande distance car sa vitesse aura considérablement augmenté (prendre par exemple $V_1 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$).

Bien sûr, il y a conservation de l'énergie et le gain en énergie cinétique de la balle (dans \mathcal{R}_{sol}) se fait au détriment de l'énergie cinétique de la voiture... L'effet est imperceptible du fait de la grande masse de celle-ci (comparée à celle de la balle).

522

Traversée d'une rue

Un piéton désire traverser une rue parcourue par des voitures sur une seule file (voie à sens unique). Une voiture arrive à la vitesse V_0 constante. Le piéton marche (ou court !) en ligne droite, à la vitesse v constante, dont il choisit librement la direction.

En assimilant la voiture à un rectangle de largeur l pratiquement égale à la largeur de la voie, calculer, en fonction de la distance d à laquelle se trouve initialement la voiture, la direction optimale du mouvement du piéton, c'est-à-dire la direction qui lui permet de traverser sans risque de collision, et avec la vitesse v la plus faible possible.

On cherchera la solution par deux méthodes différentes.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Composition des vitesses.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

Le piéton doit atteindre le côté opposé de la rue avant que la voiture ne le rejoigne. Pour une direction α donnée de la vitesse \vec{v} , on calculera donc la valeur minimale v_{\min} que doit avoir cette vitesse pour qu'il en soit bien ainsi.

Cette valeur v_{\min} dépendant de α , il restera à chercher la valeur optimale de α ...

Spontanément, l'étude est en général conduite dans un référentiel lié au sol ; mais on peut également adopter le point de vue du conducteur de l'automobile, et se placer dans un référentiel lié à la voiture, ce qui fournit une seconde méthode de résolution.

■ 3. Solution

■ Première méthode

Dans un référentiel lié au sol, le piéton traverse avec la vitesse v dans la direction α : il arrive donc en B, tel que :

$$X_B = \frac{l}{\tan \alpha}$$

au bout d'un temps $t_1 = \frac{l}{v \sin \alpha}$.

Pendant ce temps, la voiture, initialement à l'abscisse $-d$, a parcouru la distance $V_0 t_1$ et arrive à l'abscisse $X_v = -d + V_0 t_1$.

La condition de non collision s'écrit $X_v < X_B$, soit :

$$-d + V_0 \frac{l}{v \sin \alpha} < \frac{l}{\tan \alpha}$$

$$V_0 l < v(l \cos \alpha + d \sin \alpha)$$

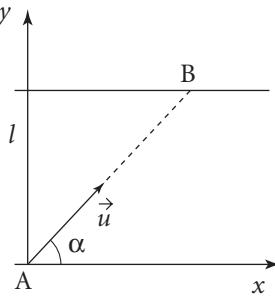
$$v > \frac{V_0 l}{l \cos \alpha + d \sin \alpha} = v_{\min}.$$

Cette valeur v_{\min} est fonction de α : elle sera la plus petite possible lorsque $(l \cos \alpha + d \sin \alpha)$ sera maximal. Il suffit donc de chercher la valeur de α qui annule la dérivée de cette expression : $-l \sin \alpha + d \cos \alpha = 0$

soit

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{d}{l}}$$

(il s'agit bien d'un maximum : la dérivée est positive pour $\alpha \sim 0$ et négative pour $\alpha = \frac{\pi}{2} \dots$).



Pour cette valeur de α ,

$$v_{\min} = \frac{V_0 l}{\cos \alpha \left(l + \frac{d^2}{l} \right)}$$

et

$$v_{\min} = V_0 \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}}$$

■ Seconde méthode

Dans un référentiel lié à la voiture, donc en translation à la vitesse \vec{V}_0 par rapport au référentiel précédent, le piéton se déplace à la vitesse \vec{v}' telle que :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}_0 \quad (\text{composition des vitesses})$$

soit : $\vec{v}' = -\vec{V}_0 + \vec{v}$

et sa trajectoire ne doit pas rencontrer la voiture, d'où la figure, dans le cas de la trajectoire limite.

Pour un α donné, la vitesse \vec{v}_{\min} est celle qui (ajoutée à $-\vec{V}_0$) donne $\vec{v}' \parallel \overrightarrow{AB'}$.

Le minimum du module de \vec{v}_{\min} correspond à la longueur CH, plus courte distance de l'extrémité C du vecteur $-\vec{V}_0$ à la droite AB' ; il faut donc prendre :

$$\vec{v}_{\min} = \overrightarrow{CH} \text{ orthogonal à } \overrightarrow{AB'}.$$

La valeur α correspondante est donc telle que :

$$\cos \alpha = \frac{v_{\min}}{V_0}.$$

Or le triangle des vitesses ACH et le triangle AB'D sont semblables, et l'angle α se retrouve en B', d'où :

$$\cos \alpha = \frac{l}{AB'} = \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}}$$

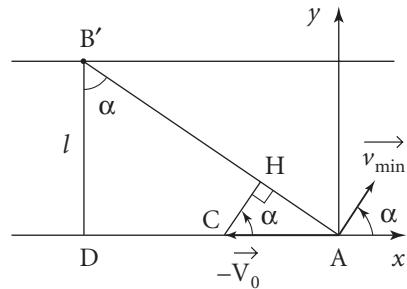
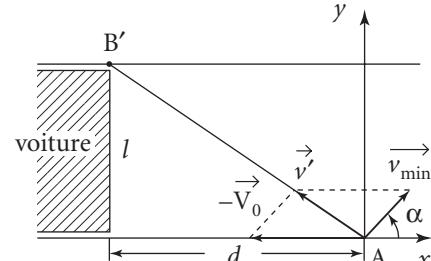
et la valeur de v_{\min} est alors :

$$v_{\min} = V_0 \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}}$$

valeur obtenue pour :

$$\tan \alpha = \frac{d}{l}.$$

On retrouve bien les résultats de la première méthode.



Commentaire

La figure, dans le référentiel lié à la voiture, permet de comprendre pourquoi, en cas de collision, on entend souvent, de la part des passagers de la voiture, l'expression : « le piéton s'est littéralement jeté sous la voiture »... même s'il « fuyait » devant celle-ci (projection de \vec{v}_{\min} sur Ax positive) !

523

Traversée d'une rivière

On étudie la traversée d'une rivière par un bateau à moteur. On fait les hypothèses simplistes suivantes :

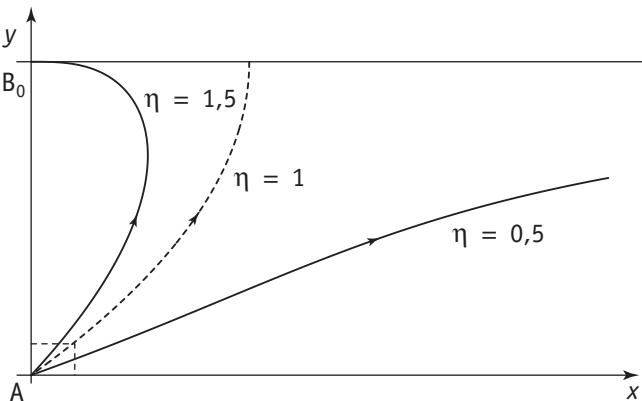
- le cours de la rivière est rectiligne et de largeur d ;
- la vitesse \vec{W} du courant est supposée uniforme : $\vec{W} = W \vec{u}_x$;
- le moteur du bateau maintient une vitesse de module constant V dans un référentiel lié à l'eau.

1. Déterminer la direction de \vec{V} , vitesse relative du bateau par rapport à l'eau pour que :

- a. le temps de traversée soit minimal ;
- b. le chemin parcouru, dans le référentiel lié aux rives soit minimal. On proposera une méthode analytique et une approche géométrique.

2. On suppose maintenant que le pilote, expérimenté..., oriente constamment la vitesse relative \vec{V} du bateau par rapport à l'eau vers le point B_0 de la rive opposée situé exactement en face de son point de départ.

- a. On donne la trajectoire du bateau pour différentes valeurs du paramètre $\eta = \frac{V}{W}$ ($\eta = 0,5$; $\eta = 1$ et $\eta = 1,5$).



Commenter les courbes obtenues.

b. Déterminer la trajectoire du bateau dans le repère lié aux rives et retrouver les résultats précédents. On se placera en coordonnées polaires de centre B_0 et on posera $\eta = \frac{V}{W}$.

On donne une primitive de $\frac{1}{\sin \theta}$: $\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|$.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Composition des vitesses.
- Vitesse en coordonnées polaires.

Outils mathématiques

- Coordonnées polaires.
- Équations différentielles du premier ordre à variables séparables.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. En mécanique classique, le temps est indépendant du référentiel choisi. On peut donc minimiser la durée de traversée en se plaçant dans le référentiel où le problème est le plus simple.

b. Dans cette question, il faut évidemment se placer dans le référentiel lié aux rives. On peut jouer sur l'angle α que fait la vitesse \vec{V} avec la normale aux rives, et une discussion devra être envisagée selon les valeurs comparées de V et de W .

2. a. Deux cas se présentent selon que $V > W$ ou $V < W$, ce qui était physiquement attendu.

b. Il suffit de traduire qu'en chaque point de la trajectoire, la tangente est colinéaire à la vitesse. On peut s'attendre à ce que le rapport $\eta = \frac{V}{W}$ joue un rôle important. Ainsi si $V < W$, le bateau n'est pas assez rapide pour « remonter » le courant, et il est prévisible que le point de visé ne sera pas accessible.

■ 3. Solution

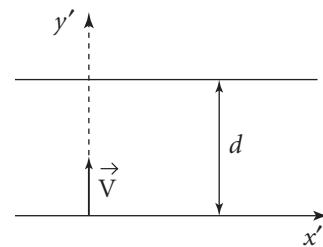
1. a. Plaçons-nous dans le référentiel \mathcal{R}' lié à l'eau. Le bateau s'y déplace avec une vitesse de module constant V .

La durée de la traversée correspond alors à :

$$\Delta t' = \frac{L}{V}$$

où L est la longueur du trajet suivi dans \mathcal{R}' .

Elle sera minimale pour $L = d$. Il faut donc orienter l'axe du bateau (direction de \vec{V}) perpendiculairement aux rives.



Dans \mathcal{R} , référentiel lié aux rives, le bateau possède la vitesse (composition des vitesses) :

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{W}$$

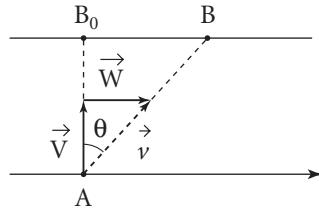
(\vec{W} vitesse d'entraînement par le courant).

Il parcourt la distance $AB = \frac{d}{\cos \theta}$ à la vitesse

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{V^2 + W^2} = \frac{V}{\cos \theta}.$$

La traversée dure un temps $\Delta t = \frac{AB}{\|\vec{v}\|} = \frac{d}{V} = \Delta t'$.

On retrouve bien que la durée ne dépend pas du référentiel choisi.



1. b. On désire maintenant que le trajet parcouru soit le plus court dans le référentiel \mathcal{R} lié aux rives. Dans l'absolu, le trajet le plus court correspondrait au segment AB. Mais cela n'est pas toujours possible.

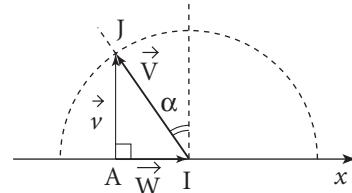
■ Approche géométrique

La vitesse du bateau dans \mathcal{R} est $\vec{v} = \vec{V} + \vec{W} = V\vec{u} + W\vec{u}_x$; V et W sont imposées et la direction du vecteur unitaire \vec{u} peut être ajustée. Associons à ces vitesses les vecteurs \vec{AI} pour \vec{W} , \vec{IJ} pour \vec{V} et donc \vec{AJ} pour \vec{v} . L'extrémité J se situe ainsi sur le demi-cercle de centre I et de rayon V. On a donc selon que V est supérieure ou inférieure à W :

• $V > W$

La vitesse \vec{v} du bateau dans \mathcal{R} peut constamment pointer vers B_0 . Il suffit pour cela que \vec{V} soit orientée vers l'amont avec un angle α (cf. figure) tel que :

$$\sin \alpha = \frac{W}{V} \quad (\text{ce qui exige bien } W < V).$$

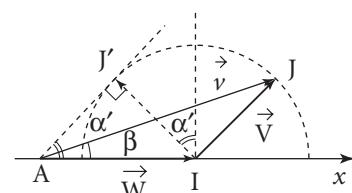


• $V < W$

Dans \mathcal{R} , la trajectoire sera un segment de direction AJ. Le trajet parcouru sera donc d'autant plus court que l'inclinaison β ($\beta < \frac{\pi}{2}$) est grande.

Cette situation correspond au point J' (AJ' tangent au cercle de centre I et de rayon V). Il faut donc orienter \vec{V} vers l'amont selon un angle α' tel que :

$$\sin \alpha' = \frac{IJ'}{AI} = \frac{V}{W} \quad (\text{et } V < W).$$



• Pour $V = W$, le point J' tend vers le point A et v tend vers une valeur nulle. On retrouve, à la limite, le trajet AB_0 mais le temps de traversée devient infini !

■ Approche analytique

La vitesse du bateau dans \mathcal{R} est $\vec{v} = \vec{V} + \vec{W}$, soit en notant α l'angle (\vec{u}_y, \vec{V}) :

$$\begin{cases} v_x = W - V \sin \alpha \\ v_y = V \cos \alpha. \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est alors (origine en A) :

$$\begin{cases} x = (W - V \sin \alpha)t \\ y = V \cos \alpha t. \end{cases}$$

L'abscisse du point d'arrivée C est donnée par $y(t_C) = d$, d'où :

$$x_C = (W - V \sin \alpha) \frac{d}{V \cos \alpha}.$$

Le chemin parcouru sera d'autant plus court que C est proche de B_0 .

- Pour $V > W$, on peut réaliser $C = B_0$, c'est-à-dire $x_C = 0$. Il suffit d'imposer :

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{W}{V}}$$

- Pour $V < W$, la situation précédente n'est plus réalisable et $x_C > 0$.

Étudions rapidement la fonction $\alpha \rightarrow x_C(\alpha)$. Sa dérivée s'écrit :

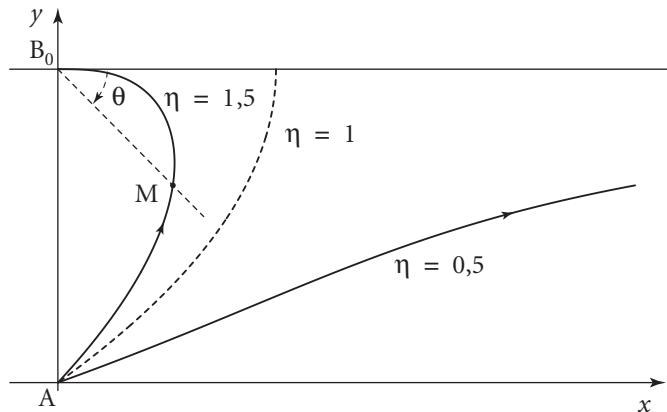
$$\frac{dx_C}{d\alpha} = \frac{d}{V} \cdot \left\{ \left(\frac{W - V \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \sin \alpha - \frac{V \cos \alpha}{\cos \alpha} \right\}$$

soit $\frac{dx_C}{d\alpha} = \frac{d}{V \cos^2 \alpha} \{ W \sin \alpha - V \sin^2 \alpha - V \cos^2 \alpha \} = \frac{d}{V \cos^2 \alpha} \{ W \sin \alpha - V \}$.

Elle s'annule pour α tel que $\boxed{\sin \alpha = \frac{V}{W}}$ et il s'agit bien d'un minimum.

On retrouve ainsi les résultats obtenus par la méthode géométrique.

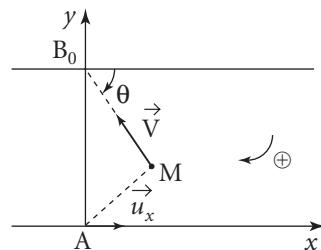
2. a. Examinons les différentes trajectoires :



Comme on pouvait s'y attendre, les courbes précédentes nous indiquent que le bateau n'atteindra le point opposé B_0 que si sa vitesse V (par rapport à l'eau) est suffisante pour ne pas être entraîné par le courant.

Ainsi, le bateau finira par rejoindre B_0 pour $\eta > 1$, soit $V > W$. Si nous paramétrons les trajectoires par $r = B_0M$ et $\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{BM})$ où $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, il semble qu'en B_0 on ait $\theta = 0$, la vitesse \vec{V} devenant de même direction et de sens opposé à celle du courant (ce qui renforce la condition $V > W$). Par contre, pour $V < W$ ($\eta < 1$), la vitesse du bateau est insuffisante pour vaincre le courant, et la rive opposée ne sera jamais atteinte (d'une autre manière, on aura $r \rightarrow +\infty$ et $\theta \rightarrow 0$).

2. b. Plaçons-nous en coordonnées polaires de centre B_0 ($B_0M = r$ et $\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{B_0M})$). Soient v_r et v_θ les coordonnées de la vitesse du bateau dans \mathcal{R} . L'équation de la trajectoire s'obtient en écrivant que le vecteur \vec{v} et le vecteur $\vec{dl}(dr, rd\theta)$ tangent à la trajectoire sont colinéaires.



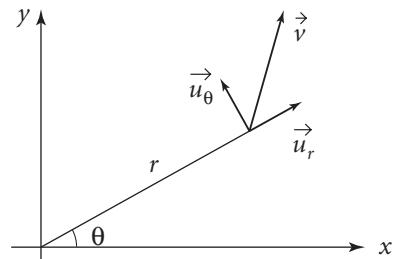
POINT COURS

Les composantes de la vitesse \vec{v} sont données en coordonnées polaires par :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

et

$$\begin{cases} v_r = \frac{dr}{dt} & (v_r = \vec{v} \cdot \vec{u}_r) \\ v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} & (v_\theta = \vec{v} \cdot \vec{u}_\theta). \end{cases}$$



L'équation différentielle de la trajectoire s'obtient alors pour $v_r = f(r, \theta)$ et $v_\theta = g(r, \theta)$ selon :

$$\frac{v_r}{v_\theta} = \frac{dr}{rd\theta} = \frac{f(r, \theta)}{g(r, \theta)} \quad (1)$$

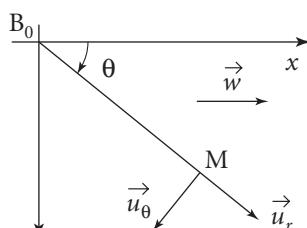
Déterminons les composantes v_r et v_θ sachant que $\vec{v} = \vec{W} + \vec{V}$ avec $\vec{V} = -V\vec{u}_r$ (vitesse \vec{V} orientée constamment vers le point B_0).

$$\text{Or } \vec{W} = W\vec{u}_x = W\cos\theta\vec{u}_r - W\sin\theta\vec{u}_\theta.$$

$$\text{D'où } v_r = -V + W\cos\theta \quad \text{et} \quad v_\theta = -W\sin\theta$$

$$(1) \text{ devient : } \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{W\cos\theta - V}{-W\sin\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{V}{W\sin\theta}$$

$$\text{soit encore : } \frac{dr}{r} = -\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta} + \frac{V}{W\sin\theta} d\theta.$$



Et après intégration, avec $r = d$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (à $t = 0$ le bateau est en A) :

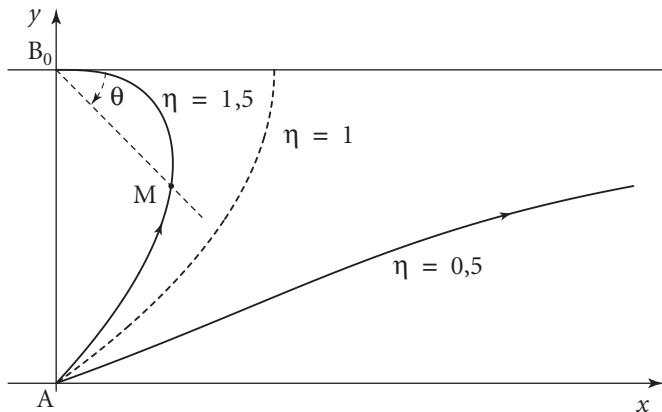
$$\left[\ln(r) \right]_d^r = \left[-\ln|\sin \theta| + \frac{V}{W} \ln \left| \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \right]_{\frac{\pi}{2}}^\theta$$

$$\text{d'où : } \ln\left(\frac{r(\theta)}{d}\right) = -\ln|\sin \theta| + \frac{V}{W} \ln \left| \tan\frac{\theta}{2} \right|$$

et

$$r(\theta) = d \frac{\left[\tan\frac{\theta}{2} \right]^{\frac{V}{W}}}{\sin \theta}$$

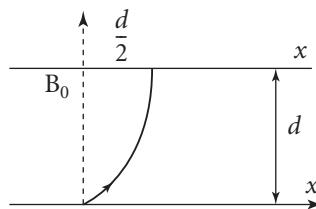
On a représenté ci-dessous différentes trajectoires possibles en fonction du paramètre $\eta = \frac{V}{W}$.



- Remarquons que pour $\eta = 1$, il vient :

$$r(\theta) = d \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sin \theta} = d \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2 \sin\frac{\theta}{2} \cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{d}{2 \cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{d}{1 + \cos\theta}.$$

La trajectoire est un arc de parabole qui coupe l'axe B_0x en $r = \frac{d}{2}$, et le point B_0 ne peut être atteint.



POINT COURS

Une équation en polaire du type $r = \frac{d}{1 + e \cos \theta}$ est représentative d'une conique.

On rencontre ce type de trajectoire lors de l'étude du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale attractive $\vec{f} = -\frac{\mathbf{K}}{r^2} u_r$ de centre O.

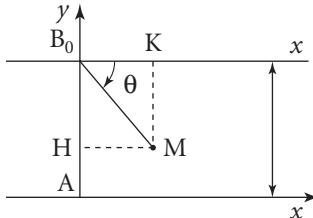
- $|e| < 1$ correspond à une ellipse dont O est l'un des foyers.
- $|e| > 1$ est associé à une hyperbole dont O est l'un des foyers.
- $|e| = 1$ donne une parabole.

• Par ailleurs, on a :

$$\overline{HB_0} = r \sin \theta = d \cdot \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^\eta \quad (2)$$

et $\overline{B_0K} = r \cos \theta = d \frac{\left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^\eta \cos \theta}{\sin \theta}$

$$\overline{B_0K} = \frac{d}{2} \frac{\left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{\eta-1} \cos \theta}{\left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{\eta+1}} \quad (3)$$



L'équation (2) traduit le fait que le bateau coupera l'axe des x, lorsque cela est possible, pour la valeur 0 de θ . L'équation (3) met alors en évidence deux cas :

– Soit $\eta > 1$ ($V > W$) et $\overline{B_0K}$ tend vers 0 avec θ .

Il en résulte que le bateau atteindra bien l'autre rive en B_0 point visé.

– Soit $\eta < 1$ ($V < W$) et $\overline{B_0K}$ tend vers l'infini quand $\theta \rightarrow 0$, le bateau n'atteindra jamais l'autre rive. Il est entraîné par le courant.

On retrouve bien la condition $V > W$ pour que le point visé B_0 soit effectivement atteint.

524

Roulement sans glissement d'une roue

Une roue de rayon R roule sans glisser sur un rail rectiligne Ox. Un point B à la périphérie de la roue coïncide à la date $t = 0$ avec l'origine O du repère. Le centre C de la roue a une vitesse $\vec{V}_0 = V_0 \vec{u}_x$ ($V_0 > 0$).

1. Déterminer les coordonnées $x(t), z(t)$ du point B. On introduira l'angle $\theta(t)$ dont la roue a tourné depuis la date $t = 0$.

Quelle est la trajectoire de B dans un référentiel \mathcal{R} lié au rail ?

2. a. Déterminer la vitesse \vec{V} du point B dans ce référentiel \mathcal{R} et étudier les variations de son module en fonction de θ .

b. Calculer l'accélération \vec{A} dans \mathcal{R} du point B, et préciser son orientation.

3. En introduisant un référentiel d'origine C en translation par rapport au précédent, utiliser la composition des mouvements pour retrouver les résultats du **2**.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Description d'un mouvement dans un référentiel.
- Changements de référentiel. Lois de composition des mouvements.

Outil mathématique

- Produit vectoriel.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Les composantes du vecteur \vec{OB} dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_z) s'obtiennent facilement en décomposant \vec{OB} en une somme de vecteurs dont les projections ont une expression simple : il faut pour cela introduire le point I, point de contact de la roue avec Ox .

La condition de roulement sans glissement impose une relation entre θ et la vitesse V_0 : on pourra exprimer cette relation du point de vue géométrique.

2. Les expressions de la vitesse \vec{V} et de l'accélération \vec{A} s'obtiennent par simple dérivation des composantes de \vec{OB} .

3. On exprime la condition de roulement sans glissement en écrivant que le point de la roue en contact avec le rail a une vitesse nulle par rapport au rail.

■ 3. Solution

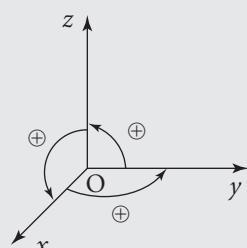
1.



POINT MÉTHODE

Il est astucieux de faire un schéma avec $\theta < \frac{\pi}{2}$ (car alors $\sin\theta$ et $\cos\theta$ sont positifs) et de choisir des axes correspondant à un $\theta > 0$.

On rappelle que pour un trièdre direct, on a les sens positifs suivants pour θ (cf. figure).



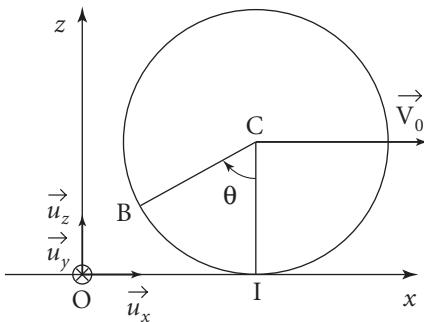
$$\begin{aligned}\vec{OB} &= \vec{OI} + \vec{IC} + \vec{CB} \\ &= V_0 t \vec{u}_x + R \vec{u}_z - R \sin \theta \vec{u}_x - R \cos \theta \vec{u}_z.\end{aligned}$$

D'où les composantes de \vec{OB} :

$$\vec{OB} \begin{cases} V_0 t - R \sin \theta \\ R(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

Il reste à exprimer la condition de roulement sans glissement : dans ce cas, la longueur de l'arc \widehat{IB} est égale à la distance OI soit $R\theta = V_0 t$.

Avec le choix des axes, θ est positif lorsque V_0 est positif.



Soit $\theta = \frac{V_0 t}{R} = \omega t$ avec $\omega = \frac{V_0}{R} = \text{constante}$

et finalement $\begin{cases} x(t) = V_0 t - R \sin\left(\frac{V_0 t}{R}\right) \\ z(t) = R\left(1 - \cos\left(\frac{V_0 t}{R}\right)\right) \end{cases}$

ou encore $\vec{OB} \begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \sin \theta) \\ z(\theta) = R(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (1)$

Ce sont les équations paramétriques d'une cycloïde dans le référentiel \mathcal{R} lié au rail.

POINT COURS

La trajectoire d'un point dépend du référentiel choisi. Dans le référentiel \mathcal{R}' , lié au centre de la roue en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} , la trajectoire de B est un cercle de centre C et de rayon R.

2. a. $\vec{V} = \frac{d\vec{OB}}{dt}$ avec $\dot{\theta} = \omega$, on obtient ainsi en dérivant (1) :

$$\vec{V} \begin{cases} \omega R(1 - \cos \theta) \\ \omega R \sin \theta. \end{cases}$$

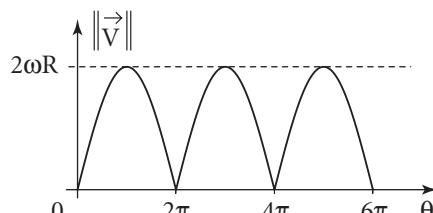
Calculons $\|\vec{V}\|$: $\|\vec{V}\| = \sqrt{\|\vec{V}\|^2} = \sqrt{(\omega R(1 - \cos \theta))^2 + (\omega R \sin \theta)^2} = \omega R \sqrt{2 - 2 \cos \theta}$

d'où

$$\|\vec{V}\| = 2\omega R \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$$

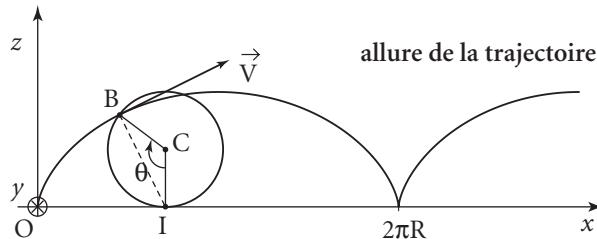
Variations de $\|\vec{V}\|$ en fonction de θ :

La vitesse s'annule chaque fois que le point B est en contact avec le sol (B confondu avec I pour $\theta = 0$ [2π]).



Commentaire

Le point I (point de la roue en contact avec le rail), momentanément immobile dans \mathcal{R} , est le centre instantané de rotation, et le point B est, dans ce référentiel, en rotation instantanée autour de l'axe Iy .



2. b. On calcule de même l'accélération de B en dérivant \vec{V} par rapport au temps :

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad \text{d'où} \quad \vec{A} = \begin{cases} \omega^2 R \sin \theta \\ \omega^2 R \cos \theta \end{cases} \quad \boxed{\vec{A} = \omega^2 (R \sin \theta \vec{u}_x + R \cos \theta \vec{u}_z) = \omega^2 \vec{BC}}$$

L'accélération est donc centripète par rapport à C.

3. Dans le référentiel \mathcal{R}' d'origine C, en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} , le mouvement de B est un mouvement circulaire défini par la loi $\theta(t)$.

POINT COURS

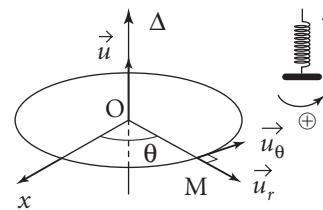
Considérons un point M se déplaçant sur un cercle de centre O et de rayon R. M est en rotation autour d'un axe Δ passant par O normal au plan de la trajectoire.

Dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, exprimons $\vec{OM} = R\vec{u}_r$ et $\vec{V} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

On définit le *vecteur rotation* $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire de l'axe de rotation orienté selon le sens positif : un tire-bouchon tournant dans le sens des θ croissants se déplace dans le sens de \vec{u} .

Le vecteur vitesse \vec{V} peut alors s'exprimer indépendamment de toute base :

$$\vec{V}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$



Le mouvement circulaire étudié ici est caractérisé par le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_y$ et $\vec{V}(B) = \vec{V}(B)/\mathcal{R}' = \vec{\Omega} \wedge \vec{CB}$. D'après la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V}(B)/\mathcal{R} = \vec{V}(B)/\mathcal{R}' + \vec{V}_e(B)$$

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_0 \quad (\mathcal{R}' \text{ en translation par rapport à } \mathcal{R} \text{ à la vitesse } \vec{V}_0)$$

$$\vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \vec{CB} + \vec{V}_0.$$

Exprimons maintenant la condition de roulement sans glissement : on a vu que la vitesse s'annulait chaque fois que le point B était en contact avec le sol, soit B confondu avec I.

Alors $\vec{V}(I) = \vec{0} = \vec{\Omega} \wedge \vec{CI} + \vec{V}_0$.

$$\vec{0} = \dot{\theta} \vec{u}_y \wedge (-R \vec{u}_z) + V_0 \vec{u}_x$$

$$\vec{0} = -R \dot{\theta} \vec{u}_x + V_0 \vec{u}_x$$

d'où
$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{V_0}{R} = \omega = \text{constante}}$$

On obtient donc : $\vec{V} = \frac{V_0}{R} \vec{u}_y \wedge (-R \sin \theta \vec{u}_x - R \cos \theta \vec{u}_z) + V_0 \vec{u}_x$

d'où l'on trouve
$$\vec{V} \begin{cases} V_0 - V_0 \cos \theta = \omega R (1 - \cos \theta) \\ V_0 \sin \theta = \omega R \sin \theta \end{cases}$$

POINT COURS

Pour le calcul de l'accélération, la loi générale de composition donne :

$$\vec{A}(B)/\mathcal{R} = \vec{A}(B)/\mathcal{R}' + \vec{A}_e(B) + \vec{A}_c(B).$$

\vec{A}_e est l'accélération d'entraînement :

$$\vec{A}_e(B) = \vec{A}(C)/\mathcal{R} + \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{CB} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{CB})$$

où $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ est le vecteur rotation du référentiel \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

\vec{A}_c est l'accélération de Coriolis : $\vec{A}_c(B) = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(B)/\mathcal{R}'$.

POINT MÉTHODE

Dans le cas d'une translation, $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}$. Il n'y a pas d'accélération de Coriolis et $\vec{A}_e = \vec{A}(C)/\mathcal{R}$. On peut retrouver \vec{A}_e en utilisant le point P coïncidant avec B à l'instant t : $\vec{A}_e(B) = \vec{A}(P)/\mathcal{R}$.

\mathcal{R}' étant en translation par rapport à \mathcal{R} , on a : $\vec{A}(P)/\mathcal{R} = \vec{A}(C)/\mathcal{R}$.

Ici on a donc : $\vec{A}(B)/\mathcal{R} = \vec{A}(B)/\mathcal{R}' + \vec{A}(C)/\mathcal{R}$

or $\vec{A}(C)/\mathcal{R} = \frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{0}$ donc $\vec{A}(B)/\mathcal{R} = \vec{A}(B)/\mathcal{R}'$.

Le mouvement de B dans \mathcal{R}' est circulaire uniforme ; l'accélération est donc centripète de module $\omega^2 R$.

$$\boxed{\vec{A}(B)/\mathcal{R} = \vec{A}(B)/\mathcal{R}' = \omega^2 \vec{BC}}$$

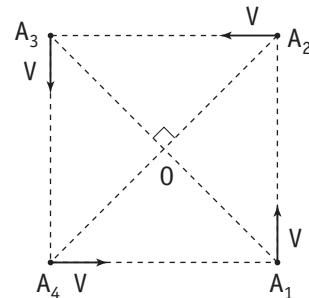
On retrouve donc le résultat du 2.

525 Courses poursuites : « les quatre mouches »

Quatre mouches sont aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4 d'un carré ($OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = a$). La mouche A_i se dirige constamment vers la mouche A_{i+1} ($A_5 = A_1$) avec une vitesse de norme constante V .

1. Au bout de quelle durée τ les mouches finissent-elles par se rencontrer ? Quelle est alors la distance parcourue par chaque mouche ?

2. Déterminer la trajectoire suivie par chaque mouche ainsi que les lois horaires définissant le mouvement sur ces trajectoires.



1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Vitesse et coordonnées polaires.
- Composition des vitesses.

Outils mathématiques

- Coordonnées polaires.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le système est totalement symétrique, les quatre mouches jouant un rôle identique. D'une autre façon, on peut affirmer qu'il y a invariance par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour du point O . Il en résulte que la trajectoire de la mouche M_i se déduit de celle de la mouche M_{i-1} par cette même rotation. La vitesse de la mouche sur sa trajectoire étant constante (elle vaut V), on doit avoir $L = V\tau\dots$

2. On pourra repérer le mouvement de la mouche M_1 par ses coordonnées polaires $r = OM_1$ et $\theta = (\overrightarrow{OA}_1, \overrightarrow{OM}_1)$. La trajectoire sera obtenue en exprimant les composantes V_r et V_θ de la vitesse \vec{V}_1 de M_1 ...

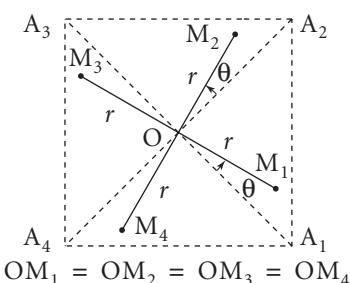
3. Solution

1. Le système est invariant par permutation circulaire $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.

On a donc à chaque instant :

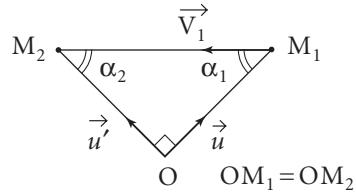
$$OM_1 = OM_2 = OM_3 = OM_4 = r(t)$$

$$\text{et } (\overrightarrow{OA}_i, \overrightarrow{OM}_i) = \theta(t).$$



La vitesse instantanée du point M_1 est constamment dirigée vers M_2 et son module est constant et vaut V .

Or le triangle M_1OM_2 est rectangle et isocèle puisque $OM_1(t) = OM_2(t)$, et :



$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \underbrace{(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OM_2})}_{\theta} - \underbrace{(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OM_1})}_{\theta}.$$

Il vient alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$. D'où en projetant la vitesse \vec{V}_1 sur la base orthonormée \vec{u}, \vec{u}' (\vec{u} porté par OM_1 et \vec{u}' par OM_2) :

$$\vec{V}_1 = \left(-V \cos \frac{\pi}{4}\right) \vec{u} + \left(V \sin \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}' = V \frac{\sqrt{2}}{2} (-\vec{u} + \vec{u}'). \quad (1)$$

Or les composantes de la vitesse \vec{V}_1 en coordonnées polaires d'axe OA_1 s'écrivent :

$$\vec{V}_1 = \dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad (2)$$

avec (cf. figure) $\vec{u}_r = \vec{u}$ et $\vec{u}_\theta = \vec{u}'$.

On a donc en particulier $\dot{r}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}V$.

À l'instant initial $t = 0$, on a $r = OA_1 = a$.

Le point matériel atteindra le point O (lieu de rencontre des quatre mouches) au bout d'un temps tel que :

$$\int_0^\tau \dot{r}(t) dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}V \int_0^\tau dt \quad (V \text{ est une constante}).$$

$$\text{Soit encore } \int_a^0 dr = -\frac{\sqrt{2}}{2}V\tau \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}V\tau,$$

d'où

$$\boxed{\tau = \frac{a\sqrt{2}}{V}}$$

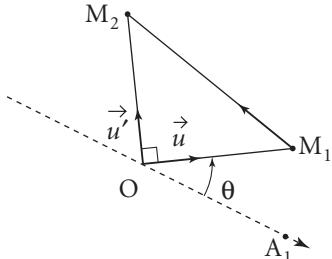
Pendant dt , la mouche M_1 aura ainsi parcouru la distance $ds = Vdt$. Au total, son trajet aura une longueur $L = \int ds$, d'où :

$$L = \int_0^\tau Vdt \Rightarrow L = V\tau \Rightarrow \boxed{L = a\sqrt{2}}$$

2. On a montré, à la question précédente, que (cf. (1) et (2)) :

$$\vec{V}_1 = V \frac{\sqrt{2}}{2} (-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta) = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

$$\text{On a donc } \frac{dr}{dt} = -V \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } r \frac{d\theta}{dt} = V \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$



POINT MÉTHODE

Pour déterminer l'équation différentielle, il suffit d'éliminer dt dans (3).

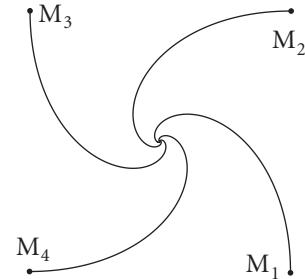
L'équation différentielle de la trajectoire $r(\theta)$ est alors donnée par l'équation :

$$\frac{dr}{r \frac{d\theta}{dt}} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{-V \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{V \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -1.$$

Soit $\frac{dr}{r} = -d\theta$. Et, après intégration, en remarquant que $\theta(0) = 0$ et $r(0) = a$:

$$\ln \frac{r(t)}{a} = -\theta(t) \Rightarrow r = a \exp(-\theta)$$

La trajectoire est une spirale logarithmique.



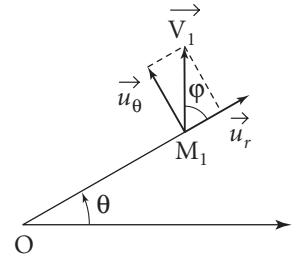
Commentaire

On a montré que $(\overrightarrow{OM}_1, \overrightarrow{V}_1) = \text{constante}$ (ici $\frac{3\pi}{4}$).

C'est une propriété caractéristique d'une spirale logarithmique. En effet, on a (cf. figure ci-contre) :

$$\cotan \varphi = \frac{dr}{r d\theta} = K = \text{constante} \Rightarrow \frac{dr}{r} = K d\theta$$

$$\text{et } r = r_0 e^{K\theta}.$$



Les lois horaires $r(t)$ et $\theta(t)$ s'obtiennent à partir des relations (3) :

$$\frac{dr}{dt} = -V \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donne : } r(t) = -V \frac{\sqrt{2}}{2} t + a \quad (r(0) = a).$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = V \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ devient } \frac{d\theta}{dt} = V \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{a - V \frac{\sqrt{2}}{2} t} \quad \left(t < \frac{a\sqrt{2}}{V} \right).$$

$$\text{D'où } d\theta = \frac{\left(V \frac{\sqrt{2}}{2} dt \right)}{a - V \frac{\sqrt{2}}{2} t} = -d \ln \left(a - V \frac{\sqrt{2}}{2} t \right)$$

$$\text{et } \theta(t) = - \left[\ln \left(a - V \frac{\sqrt{2}}{2} t \right) \right]_0^t \text{ puisque } \theta(0) = 0.$$

$$\text{Soit : } \theta(t) = - \ln \left[1 - V \frac{\sqrt{2}}{2a} t \right]$$

Et en faisant apparaître le temps caractéristique $\tau = \frac{a\sqrt{2}}{V}$

$$r(t) = a \left[1 - \frac{t}{\tau} \right] \quad \text{et} \quad \theta(t) = -\ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)$$

Commentaire

Les mouches se rejoignent en O à l'instant $t_1 = \tau$ ($r(t_1) = 0$).

526 Gerbe de feu d'artifice

Depuis un point 0, on lance au même instant un grand nombre de projectiles, tous avec la même vitesse v_0 , mais dans des directions quelconques (directions que l'on pourra repérer par leur angle α avec l'axe vertical Oz). Ces projectiles sont soumis à l'action de la pesanteur $\vec{g} = -g \cdot \vec{u}_z$.

1. Sur quelle surface se répartissent les projectiles à un instant t donné ?
2. Interpréter ce résultat en termes de composition de mouvements, en introduisant un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport au sol, d'accélération d' entraînement \vec{g}' , et de vitesse nulle à $t = 0$ (référentiel \mathcal{R}' « en chute libre » ...).

1. Ce qu'il faut savoir

- Changement de référentiel : repères en translation.
- Composition des accélérations.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Pour un projectile en particulier, il s'agit du mouvement classique dans le champ de pesanteur terrestre : la trajectoire est définie par $x(t, \alpha)$ et $z(t, \alpha)$, fonction de t et du paramètre α .

Pour obtenir les positions de l'ensemble des projectiles à une date t , il suffira d'éliminer α entre les deux équations du mouvement...

2. Le mouvement dans \mathcal{R}' peut s'obtenir par deux méthodes :
 - en soustrayant des équations $(x(t), z(t))$ du mouvement dans \mathcal{R} , les expressions du mouvement du référentiel \mathcal{R}' ;
 - en utilisant la loi de composition des accélérations.

3. Solution

1. Le mouvement d'un projectile soumis à la seule force de pesanteur est plan, dans le plan défini par O, \vec{g} et \vec{v}_0 (le référentiel terrestre \mathcal{R} est supposé galiléen...). Prenons Ox horizontal dans ce plan.

L'équation du mouvement

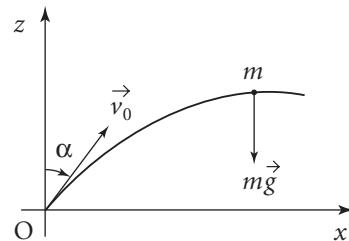
$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$$

donne alors, en projection :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

d'où : $\begin{cases} \dot{x} = \text{constante} = v_0 \sin \alpha \\ \dot{z} = -gt + \text{constante} = -gt + v_0 \cos \alpha \end{cases}$

et : $\begin{cases} x = v_0 \sin \alpha \cdot t & (x(t=0) = 0) \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cos \alpha \cdot t & (z(t=0) = 0). \end{cases}$



À une date t donnée, la position (x, z) de chaque projectile est fonction de α . L'équation vérifiée par les coordonnées de tous les projectiles s'obtient en éliminant α entre les deux équations du mouvement :

$$\sin \alpha = \frac{x}{v_0 t}; \quad \cos \alpha = \frac{z + \frac{1}{2}gt^2}{v_0 t}.$$

Soit $\left(\frac{x}{v_0 t}\right)^2 + \left(\frac{z + \frac{1}{2}gt^2}{v_0 t}\right)^2 = 1 \quad (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1)$

$$x^2 + \left(z + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = (v_0 t)^2$$

équation d'un cercle de rayon $v_0 t$, centré sur Oz en C ($x_C = 0$, $z_C = -\frac{1}{2}gt^2$) : dans l'espace, les projectiles seront répartis sur la sphère de centre C et de rayon $R = v_0 t$.

2. Le référentiel \mathcal{R}' est en translation rectiligne par rapport au référentiel \mathcal{R} , avec l'accélération constante $\vec{a}_e = \vec{g}$, et confondu avec \mathcal{R} à la date $t = 0$.

Il est donc caractérisé par le mouvement de chute libre $z_{\mathcal{R}'} = -\frac{1}{2}gt^2$: il a pour origine le point C, et les projectiles s'éloignent tous uniformément de C.

Les trajectoires dans \mathcal{R}' sont donc des droites parcourues à la vitesse v_0 (à la date t , ils sont à la distance $R = v_0 t$...). Le résultat est évident si l'on compare les accélérations d'un point M dans les deux référentiels :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}_e(M)$$

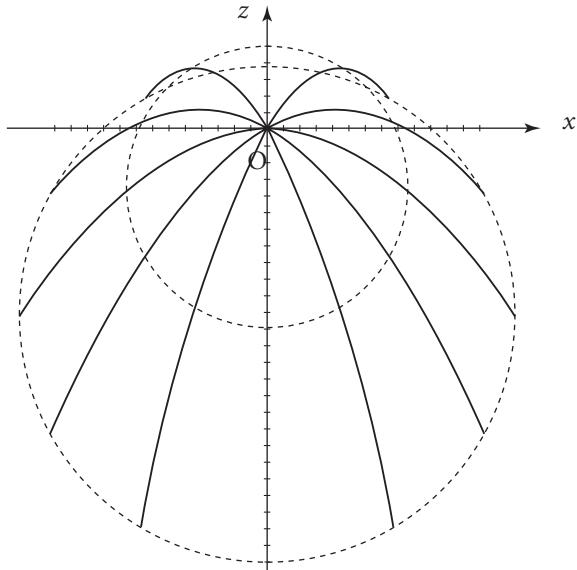
avec ici : $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{g}$ (mouvement de translation)

soit : $\vec{g} = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{g}$ et : $\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$.

Le mouvement de M dans \mathcal{R}' est rectiligne et uniforme (à la vitesse v_0 , d'après la loi de composition des vitesses, appliquée à $t = 0$), ce qui est bien le résultat déjà obtenu.

Remarque

On peut visualiser le cercle obtenu (dans le plan xOz) en « arrêtant » le mouvement des projectiles à une date t donnée :



527

Verticale apparente sur un manège

Sur le plancher d'un manège, tournant à une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical (verticale définie par la direction de \vec{g} , le référentiel terrestre étant supposé galiléen), un observateur veut déterminer la direction de la « verticale » dans le référentiel du manège à l'aide d'un fil à plomb (masse m suspendue à un fil de masse négligeable). L'observateur tient le fil en un point A, à la distance x_0 de l'axe de rotation, et à une hauteur h au-dessus du plancher du manège.

Il ajuste alors la longueur du fil du pendule, de façon à ce que la masse m effleure un point B du plancher (sans qu'il y ait contact...), et il appelle « verticale » du point A la direction AB du fil.

1. Caractériser cette direction pour un point A quelconque.
2. Que pensez-vous de cette définition de la verticale ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Équilibre dans un référentiel non galiléen.
- Forces d'inertie.

2. Ce qu'il faut comprendre

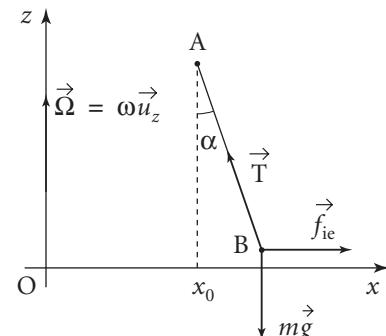
1. Le bilan des forces (et des forces d'inertie...) appliquées à la masse m située pratiquement au point B doit permettre de déterminer la direction AB.
2. On pourra rechercher l'existence de cas singuliers et/ou de cas limites, et s'interroger sur la signification physique d'une telle verticale.

3. Solution

1. Quel que soit le référentiel envisagé, la masse m en B, pratiquement dans le plan $z = 0$ du manège (tournant autour de l'axe Oz), est soumise à deux forces :

- son poids $\vec{mg} = -mg\vec{u}_z$;
- la tension \vec{T} du fil, portée par AB.

Si on se place dans le référentiel \mathcal{R} lié au manège (celui où le point B est immobile, donc en équilibre...), il faut y ajouter les forces d'inertie liées au mouvement de \mathcal{R} , en rotation uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen.



POINT COURS

Les forces d'inertie appliquées à un point matériel M, dans un référentiel en rotation (rotation d'axe Oz caractérisée par le vecteur $\vec{\Omega}$) sont :

– la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \right);$$

– la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}).$$

Dans le cas présent, $M = B$, la rotation est uniforme ($\vec{\Omega} = \text{cste}$) et \vec{f}_{ie} devient :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OB}) = +m\Omega^2 \vec{HB} = +m\Omega^2 \vec{OB}$$

(H est le projeté du point mobile sur l'axe de rotation...).

D'autre part, $\vec{f}_{ie} = \vec{0}$ puisque le point B est immobile dans \mathcal{R} . La loi fondamentale de la dynamique, appliquée à la masse m , immobile dans \mathcal{R} , donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f}_{ie}.$$

Il en résulte que AB est dans le plan vertical contenant Oz et A (plan Oxz).

Appelons x l'abscisse de B et α l'angle de AB avec Oz. En projetant sur la direction perpendiculaire à \vec{T} : $-mgsin\alpha + m\omega^2x\cos\alpha = 0$ soit : $\tan\alpha = \frac{\omega^2x}{g}$ (1)

D'autre part : $\tan\alpha = \frac{x - x_0}{h}$ soit : $x = x_0 + h\tan\alpha$

et, en reportant : $\tan\alpha = \frac{\omega^2}{g}(x_0 + h\tan\alpha)$

$$\tan\alpha\left(1 - \frac{\omega^2h}{g}\right) = \frac{\omega^2}{g}x_0$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{x_0}{\frac{g}{\omega^2} - h} = \frac{x_0}{h_{\max} - h}} \quad \text{en posant } h_{\max} = \frac{g}{\omega^2}.$$

La direction AB est ainsi déterminée par l'angle α qu'elle fait avec Oz, dans le plan xOz.

2. Le résultat ci-dessus appelle quelques commentaires :

- Le calcul et le résultat n'ont de sens que pour $h < h_{\max} = \frac{g}{\omega^2}$. Pour $h \geq h_{\max}$, le point B est rejeté à l'infini (α augmente et tend vers $\frac{\pi}{2}$ à mesure que l'observateur laisse glisser le fil...).
- Pour un point A donné, la méthode proposée définit donc bien une direction AB unique, repérée par α tel que :

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{x_0}{h_{\max} - h} & \text{si} & \quad h < h_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} & \text{si} & \quad h \geq h_{\max}. \end{aligned}$$

Pour $h \geq h_{\max}$, la « verticale » du point A dans \mathcal{R} est horizontale dans $\mathcal{R}_{\text{terrestre}}$!

- Le calcul précédent garde un sens pour $h \rightarrow 0$, c'est-à-dire pour un point A très proche du plancher du manège :

$$\tan\alpha \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{\omega^2x_0}{g} = \frac{\omega^2x}{g} \quad (\text{cohérent avec la relation (1)}).$$

(À la limite, on a un fil à plomb de longueur nulle !).

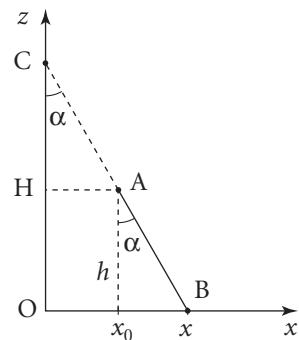
- Même si cette définition de la « verticale » est logiquement cohérente, on peut s'interroger sur sa signification physique. En particulier, pour un point A' situé le long de AB, la « verticale » est-elle la direction de AB ?

Étudions cette droite AB, elle coupe l'axe Oz en un point C, d'ordonnée z_C et $\tan \alpha = \frac{x}{z_C} = \frac{x_0}{z_C - h}$ (les triangles COB et CHA sont semblables...).

On a donc, par identification : $z_C = h_{\max} = \frac{g}{\omega^2}$.

La position du point C est indépendante du choix de A : toutes les « verticales » des points A tels que $h < h_{\max}$ sont concourantes au point C !

Réciproquement, tous les points A' alignés avec C et A ont même « verticale » CAB.



528

Interaction répulsive

Deux points matériels P (masse m , charge q), Q (masse M , charge q) peuvent glisser sans frottements sur un axe horizontal $x'0x$.

À l'instant initial, Q est en 0 et est immobile, P est à l'infini animé d'une vitesse $V_0 \vec{u}_x$ dirigée vers Q.

1. On se propose de déterminer la distance minimale d'approche d_m (valeur la plus faible de la distance PQ). On posera $PQ = r$.

a. Calculer d_m par une étude effectuée dans le référentiel du laboratoire. Commenter le résultat obtenu.

b. On veut retrouver le résultat précédent en se plaçant dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_G .

α) Redéfinir l'état initial du système dans \mathcal{R}_G .

β) Retrouver la valeur de d_m .

2. On suppose maintenant qu'à l'instant initial $t = 0$, $PQ = a$, Q étant toujours immobile et P étant animé de la vitesse $V_0 \vec{u}_x$. On demande d'établir l'expression de $r(t)$, où $r = PQ$, et d'en déduire le temps nécessaire τ' pour atteindre la distance minimale d'approche notée r_m . On se placera dans \mathcal{R}_G .

$$\text{On pose } \tau = \frac{r_m}{V_0 \sqrt{d_m}} ; \quad u = \frac{r}{r_m} \text{ et on donne } \int \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{1}{u}}} = \operatorname{Arg ch}(\sqrt{u}) + \sqrt{u} \sqrt{u-1}.$$

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Référentiel barycentrique : étude d'un système de points matériels dans le référentiel barycentrique.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. Le système est pseudo-isolé. On pourra donc écrire :

- la conservation de l'énergie mécanique totale (énergie cinétique des deux masses et énergie potentielle d'interaction) ;
- la conservation de la quantité de mouvement du système.

La distance $PQ = r$ sera extrémale (ici minimale lorsque $\dot{r} = 0$, c'est-à-dire puisque $r = x_Q - x_P$ lorsque $\dot{x}_Q = \dot{x}_P$).

b. On utilisera les propriétés du référentiel barycentrique (introduire le mobile fictif de masse réduite $\mu = \frac{mM}{m+M}$).

3. Solution

1. a. On se place dans le référentiel du laboratoire.

Le système des deux masses est pseudo-isolé, les deux charges se déplaçant librement sans frottements le long de $x' \text{O}x$.



POINT COURS

La somme des forces extérieures (poids et réaction de l'axe) s'appliquant sur le système des deux points en translation est égale au vecteur nul : le système est pseudo-isolé. Il y a alors conservation de sa quantité de mouvement et de son énergie mécanique.

La conservation de la quantité de mouvement du système s'écrit :

$$m \vec{V}_0 + \vec{0} = m \vec{V}_P + M \vec{V}_Q .$$

Soit par projection sur $x' \text{O}x$: $m V_0 = m \dot{x}_P + M \dot{x}_Q \quad (1)$

La conservation de l'énergie mécanique nous donne :

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2} m \dot{x}_P^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_Q^2 + E_P = \text{constante.}$$



POINT COURS

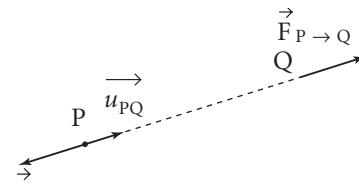
Le point P exerce sur Q la force $\vec{F}_{P \rightarrow Q}$

$$\vec{F}_{P \rightarrow Q} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 PQ^2} \vec{u}_{PQ} .$$

(Le point Q exerce sur P la force opposée.)

On définit l'énergie potentielle d'interaction du système par :

$$\vec{F}_{P \rightarrow Q} = -\vec{\text{grad}}_Q E_P \quad \text{d'où} \quad E_P = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 PQ} .$$



À l'instant $t = 0$, Q étant immobile et infiniment éloigné de P : $E_{\text{mec}} = \frac{1}{2} m V_0^2$.

On obtient donc $\frac{1}{2} m \dot{x}_P^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_Q^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 PQ} = \frac{1}{2} m V_0^2 . \quad (2)$

Lorsque la distance $PQ = r$ est minimale, on a $\dot{r} = 0$ et donc $\dot{x}_P = \dot{x}_Q$.

Soit V_1 cette valeur commune, d'après (1), $V_1 = \frac{m}{m+M} V_0$

et donc $\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M} V_0\right)^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_m} = \frac{1}{2} m V_0^2$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_m} = \frac{1}{2} m V_0^2 \left[1 - \frac{m}{m+M} \right] = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} V_0^2$$

d'où finalement :

$$d_m = \frac{q^2(m+M)}{2\pi\epsilon_0 m M V_0^2}$$

Commentaires

- Si V_0 augmente, la distance minimale d'approche est plus faible, ce qui est cohérent puisqu'on lance P avec une énergie cinétique plus grande.
- En introduisant $\mu = \frac{mM}{m+M}$ (masse réduite du système), $d_m = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 \mu V_0^2}$.

1. b. α)

POINT COURS

Le référentiel barycentrique est un référentiel d'origine G centre de masse en translation par rapport au référentiel du laboratoire.

Si le système est pseudo-isolé, il y a conservation de la quantité de mouvement du système et donc le barycentre G a une vitesse constante. Si le référentiel du laboratoire est galiléen, il en sera donc de même du référentiel barycentrique.

Dans le référentiel du laboratoire, la vitesse du centre de masse donnée par

$$\vec{V}_G = \frac{m \vec{V}_P + M \vec{V}_Q}{m+M} \text{ vaut ici } \vec{V}_G = \frac{m V_0}{m+M} \vec{u}_x.$$

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{V}_0 = \vec{V}_G + (\vec{V}'_P)_0 \\ \vec{0} = \vec{V}_G + (\vec{V}'_Q)_0 \end{cases}$$

\vec{V}'_P et \vec{V}'_Q étant respectivement les vitesses initiales de P et Q dans le référentiel barycentrique,

$$\text{d'où : } (\dot{x}'_P)_0 = V_0 - \frac{mV_0}{m+M} = \frac{MV_0}{m+M}$$

$$(\dot{x}'_Q)_0 = - \frac{mV_0}{m+M}.$$

1. b. β)

POINT COURS

Dans le référentiel barycentrique et à chaque instant

$$\text{avec } x_G = \frac{mx_P + Mx_Q}{m+M}$$

$$\begin{cases} x'_P = \overline{GP} = x_P - x_G \\ x'_Q = \overline{GQ} = x_Q - x_G \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x'_P = \frac{M(x_P - x_Q)}{m + M} = -\frac{Mr}{m + M} & (PQ = r > 0) \\ x'_Q = \frac{m(x_Q - x_P)}{m + M} = \frac{mr}{m + M} \end{cases}$$

En dérivant par rapport à t dans le référentiel barycentrique ($r(t)_{\mathcal{R}_G} = r(t)_{\text{Labo}}$) :

$$\dot{x}'_P = -\frac{M}{m + M} \frac{dr}{dt}$$

$$\dot{x}'_Q = \frac{m}{m + M} \frac{dr}{dt}.$$

On retrouve que la quantité de mouvement totale du système dans le référentiel barycentrique est nulle :

$$m\dot{x}'_P + M\dot{x}'_Q = 0$$

et $\frac{dr}{dt} = V$ est aussi la vitesse relative de Q par rapport à P.

L'énergie cinétique E'_C du système dans le référentiel barycentrique s'écrit :

$$E'_C = \frac{1}{2} m\dot{x}'_P^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}'_Q^2.$$

soit, en remplaçant : $E'_C = \frac{1}{2} \frac{MmV^2}{m + M}$.

On voit apparaître la masse réduite définie précédemment $\mu = \frac{Mm}{m + M}$ et $E'_C = \frac{1}{2}\mu V^2$.

À l'instant initial, P est à l'infini, l'énergie mécanique du système dans le référentiel barycentrique vaut $E'_0 = \frac{1}{2}\mu V_0^2$

et la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}\mu V_0^2.$$

Pour d_m minimale, $V = \frac{dr}{dt} = 0$, on retrouve l'expression de d_m établie précédemment.

2. À l'instant initial, $PQ = a$ donc l'énergie mécanique initiale du système dans \mathcal{R}_G vaut

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{mM}{m + M} V_0^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

et la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{mM}{m + M} V^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} \frac{mM}{m + M} V_0^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

on a donc $V^2 = \dot{r}^2 = V_0^2 \left[1 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 m M} \frac{m + M}{V_0^2} \right) \right]$.

On reconnaît l'expression de $d_m = \frac{q^2(m+M)}{2\pi\varepsilon_0 m M V_0^2}$

$$\text{d'où } \left(\frac{\dot{r}}{V_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) d_m \quad (4)$$

La distance minimale d'approche est r_m telle que $\dot{r} = 0$.

$$\text{Soit } 1 = d_m \left(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{a}\right) \Rightarrow r_m = \frac{d_m}{1 + \left(\frac{d_m}{a}\right)}.$$

Remarquons que lorsque $a \rightarrow \infty$, on se retrouve dans le cas précédent et $r_m \rightarrow d_m$.

L'expression (4) se réécrit à l'aide de d_m et r_m :

$$\left(\frac{\dot{r}}{V_0}\right)^2 = d_m \left(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r}\right) = \frac{d_m}{r_m} \left(1 - \frac{r_m}{r}\right).$$



POINT MÉTHODE

Mathématiquement, l'équation $\left(\frac{\dot{r}}{V_0}\right)^2 = f(r)$ donne $\frac{\dot{r}}{V_0} = \pm\sqrt{f(r)}$.

Physiquement, on lève l'indétermination du signe.

Ici, r diminue au cours du temps donc $\dot{r} < 0$ (phase de rapprochement).

$$\dot{r} = -V_0 \sqrt{\frac{d_m}{r_m}} \sqrt{1 - \frac{r_m}{r}} \quad (\text{relation manifestement homogène}).$$

$$\text{Posons } u = \frac{r}{r_m}, \text{ on obtient } \frac{\dot{r}}{r_m} = -\frac{V_0}{r_m} \sqrt{\frac{d_m}{r_m}} \sqrt{1 - \frac{1}{u}}.$$

Il apparaît un temps caractéristique :

$$\tau = \frac{r_m}{V_0} \sqrt{\frac{r_m}{d_m}}.$$

L'équation du mouvement devient :

$$\frac{\frac{du}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{1}{u}}} = -\frac{dt}{\tau}.$$

On reconnaît la primitive donnée par l'énoncé lorsque r varie de a à $r(t)$, u varie de $\frac{a}{r_m}$ à $\frac{r(t)}{r_m}$. On obtient donc :

$$[\operatorname{Arg ch}(\sqrt{u}) + \sqrt{u} \sqrt{u-1}]_{a/r_m}^{r(t)/r_m} = -\frac{t}{\tau}.$$

Le temps τ' pour atteindre l'état $r = r_m$ s'obtient en faisant $\frac{r(t)}{r_m} = 1$ dans l'expression précédente soit :

$$\tau' = \tau \left[\operatorname{Arg ch} \left(\sqrt{\frac{a}{r_m}} \right) + \sqrt{\frac{a}{r_m}} \sqrt{\frac{a}{r_m} - 1} \right].$$

529 Point matériel sur une sphère

Un point matériel M de masse m est assujetti à se déplacer sur une sphère de centre O et de rayon a . La liaison est bilatérale (le point M ne peut donc pas quitter la sphère) et sans frottements. Le mouvement du point M est repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z , l'axe Oz étant confondu avec un des diamètres de la sphère.

À l'instant initial, le point M possède une vitesse $\vec{V}_0 = V_0 \vec{u}_\theta$ tangente à la sphère et perpendiculaire à Oz ; Il se confond avec un point M_0 tel que $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}_0) = \alpha_0$ ($\alpha_0 \in]0, \pi[$) et donc de cote $z_0 = a \cos \alpha_0$.

1. On suppose dans cette question l'absence de pesanteur.

Décrire le mouvement ultérieur du point matériel.

2. On désire prendre en compte la pesanteur, l'axe Oz correspondant à la verticale ascendante : $\vec{g} = -g \vec{u}_z$.

a. Montrer que dans certains cas, on peut observer un mouvement circulaire d'axe Oz. Quelle valeur V_c faut-il alors donner à V_0 ? Commenter.

b. α) Justifier que l'énergie mécanique E_m associée au point matériel est une constante du mouvement.

Cette énergie E_m peut se mettre sous la forme :

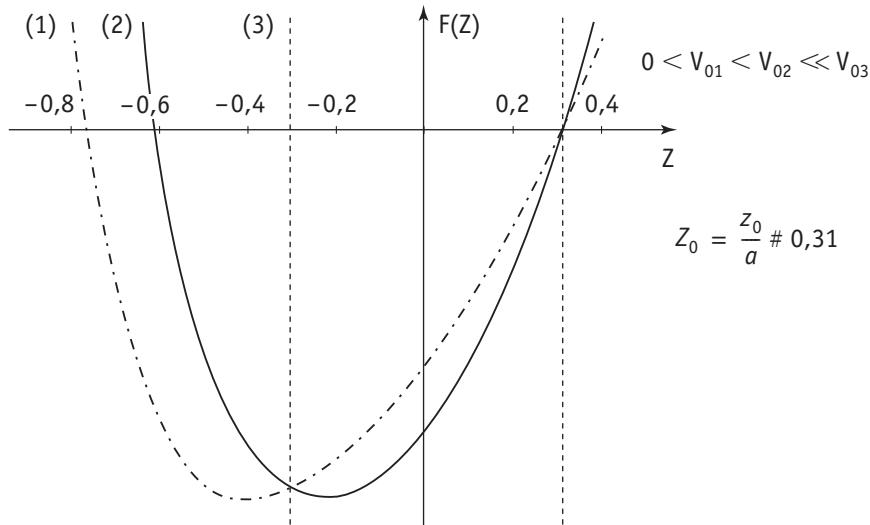
$$E_m = \frac{1}{2} m z^2 f(z) + U_{\text{eff}}(z) = E_0.$$

E_0 étant définie par les conditions initiales, et $f(z) > 0$.

On a tracé les courbes donnant :

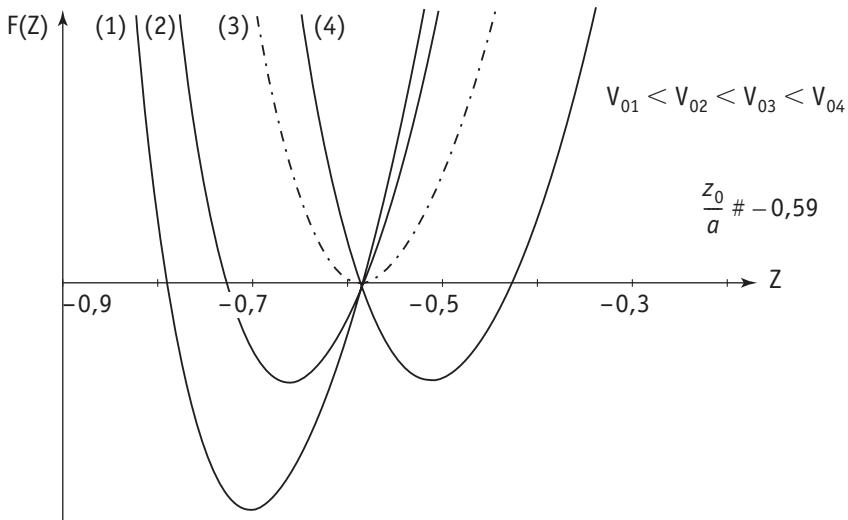
$$Z = \frac{z}{a} \rightarrow F(Z) = \frac{U_{\text{eff}}(z) - E_0}{mga}.$$

■ **1^{er} cas :** $\alpha_0 = 0,4\pi$.



$$Z_0 = \frac{z_0}{a} \# 0,31$$

■ 2^e cas : $\alpha_0 = 0,7\pi$.



Commenter ces courbes et préciser le mouvement selon z .

β) L'expression de $U_{\text{eff}}(z)$ est donnée par :

$$U_{\text{eff}}(z) = mgz + \frac{ma^2v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2(a^2 - z^2)}.$$

L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est prise en 0.

Retrouver les résultats obtenus au 2. a.

δ) Montrer que la composante σ_z , selon \vec{u}_z , du moment cinétique en 0, $\vec{\sigma}(0)$, est également une constante du mouvement. Justifier alors l'expression de $U_{\text{eff}}(z)$ donnée au 2. β).

Que peut-on dire du mouvement du point M ?

Solution

1. Le point matériel se déplace sur une surface sphérique de centre O et de rayon a . Il est soumis à la réaction \vec{R} qui est normale à cette surface (liaison sans frottements) et donc colinéaire à \vec{u} .

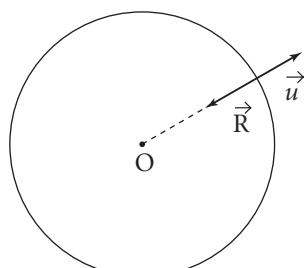
$$\vec{R} = R\vec{u} \quad (\text{R algébrique dans cette expression}).$$

Le support de cette force passant par O, son moment en ce point est nul :

$$\vec{M}_{\vec{R}}(O) = \vec{0}.$$

On est donc invité à appliquer le théorème du moment cinétique en O selon :

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{M}(O) = \vec{M}_{\vec{R}}(O) = \vec{0}.$$



Il en résulte que le moment cinétique $\vec{\sigma}(O)$ est une **constante du mouvement** dont la valeur est donnée à partir des conditions initiales :

$$\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OM_0} \wedge maV_0 \vec{u}_0$$

soit $\vec{\sigma}(O) = maV_0 \vec{u}_0$

\vec{u}_0 est un vecteur constant contenu dans le plan (Oz, OM_0) et perpendiculaire à OM_0 (cf. figure ci-contre).

On a donc, quel que soit t : $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} = maV_0 \vec{u}_0$.

Le vecteur \overrightarrow{OM} est ainsi perpendiculaire à \vec{u}_0 .

La trajectoire suivie par la particule est de ce fait un grand cercle de centre O passant par M_0 et contenu dans le plan ($OM_0, V_0 = V_0 \vec{u}_0$) perpendiculaire à \vec{u}_0 .

Cette trajectoire circulaire sera décrite à vitesse de module V_0 constant comme nous l'indique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\vec{R}} = \vec{R} \cdot \vec{V} = 0.$$

La réaction \vec{R} est à chaque instant perpendiculaire à la vitesse (absence de frottements).

On a bien $E_c = \text{constante}$, soit $\|\vec{V}\| = \text{cste} = V_0$.

2. a. On tient compte désormais de la pesanteur avec $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Il n'y a donc en général ni conservation du moment cinétique en O (le poids ne passe pas par O) ni conservation de l'énergie cinétique (le poids travaille quand z varie).

On cherche à démontrer qu'une trajectoire circulaire d'axe Oz est envisageable.

Dans ce cas, l'altitude du point M est constante ainsi que son énergie potentielle ($E_p = mgz$ avec une origine arbitraire en O). Le théorème de l'énergie cinétique se traduit alors selon :

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = \mathcal{P}_{\vec{R}} = 0 \text{ (absence de frottements).}$$

Soit encore $E_c + E_p = \text{cste}$, et donc $E_c = \text{cste}$.

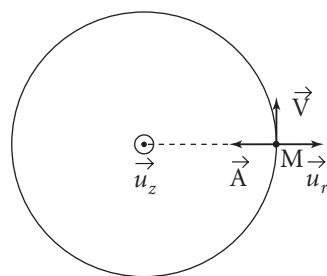
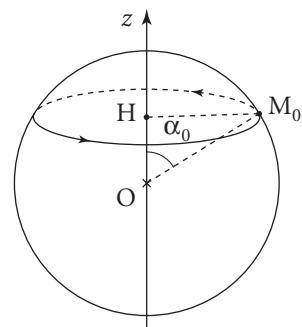
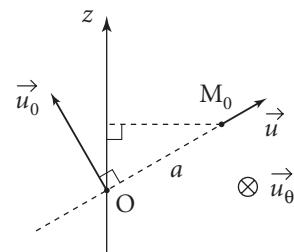
Un tel mouvement s'effectue à module de vitesse constant $\|\vec{V}\| = V_0$.

Ainsi l'accélération \vec{A} de M sur sa trajectoire est centripète et vaut :

$$\vec{A} = -\frac{V_0^2}{HM} \vec{u}_r \quad \text{où} \quad HM = a \sin \alpha_0.$$

La loi fondamentale de la dynamique n'est alors vérifiée que si l'égalité suivante est réalisée :

$$m\vec{A} = m\vec{g} + \vec{R} = -mg\vec{u}_z + \vec{R}.$$



$$\text{Soit : } -m \frac{V_0^2}{a \sin \alpha_0} \vec{u}_r = -mg \vec{u}_z + R \vec{u}.$$

Une condition nécessaire est déjà que $\alpha_0 > \frac{\pi}{2}$ (cf. figure)

($m\vec{A}$, résultante des forces mg et \vec{R} doit être opposée à \vec{u}_r).

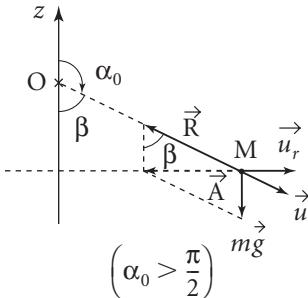
D'autre part, on doit avoir avec $\beta = \pi - \alpha_0$:

$$\tan \beta = \frac{\|\vec{A}\|}{mg} = \frac{V_0^2}{ag \sin \alpha_0} = \tan(\pi - \alpha_0) = -\tan \alpha_0.$$

$$\text{D'où : } \frac{V_0^2}{ag} = -\frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0}.$$

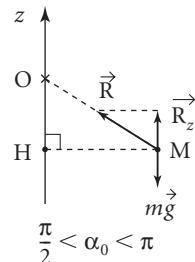
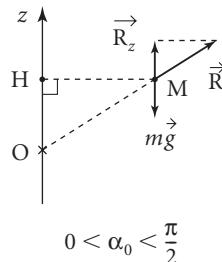
En conclusion une trajectoire circulaire d'axe Oz n'est possible que pour $\alpha_0 > \frac{\pi}{2}$ et un module de vitesse V_c tel que :

$$V_c = \left[-ag \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} \right]^{1/2} \quad (\cos \alpha_0 < 0).$$



Commentaires

- La particule devant se déplacer dans le plan $z = \text{cste}$, il faut que la composante R_z puisse équilibrer le poids, soit :



Ainsi, dans le premier cas, la résultante des forces serait centrifuge, ce qui est incompatible avec un mouvement circulaire de centre H. On retrouve la condition $\alpha_0 > \frac{\pi}{2}$.

- Et pour $\alpha_0 > \frac{\pi}{2}$ on aura :

$$\begin{cases} R_z = -\|\vec{R}\| \cos \alpha_0 = mg \\ R_r = -\|\vec{R}\| \sin \alpha_0 = -\frac{mV^2}{HM}. \end{cases}$$

Ainsi quand α_0 diminue et tend vers $\frac{\pi}{2}^+$, on doit avoir (du moins théoriquement)

$\|\vec{R}\| \rightarrow +\infty$ et donc $V \rightarrow +\infty$, ce qui redonne bien $V_c \rightarrow +\infty$ quand $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$.

2. b. α) La particule est soumise à son poids et à la réaction \vec{R} . Cette dernière ne travaille pas (\vec{R} perpendiculaire à la surface de la sphère : absence de frottements). Quant au poids, on peut lui associer une énergie potentielle $E_p = mgz$ (origine prise arbitrairement en $z = 0$). On a donc d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\vec{R}} + \mathcal{P}_{\text{poids}} = 0 - \frac{dE_p}{dt}$$

d'où : $\frac{d}{dt}(E_p + E_c) = \text{cste} \Rightarrow E_m = E_c + E_p = \text{cste} = E_0$

Ici, l'énergie mécanique est bien une constante du mouvement définie à partir des conditions initiales : $E_m = E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgz_0$.

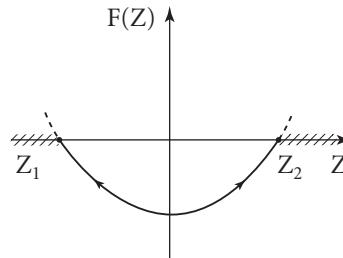
On a de ce fait : $\frac{1}{2}mV^2 + mgz = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgz_0$ avec $V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + z^2$.

En éliminant \dot{r} et $\dot{\theta}$, on aboutit à l'expression donnée dans le texte. Les valeurs de z correspondant au mouvement doivent vérifier :

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2f(z) \geq 0 \text{ c'est-à-dire } U_{\text{eff}}(z) \leq E_0.$$

Les valeurs de $Z = \frac{z}{a}$ accessibles à la particule sont définies à partir de la condition $F(Z) \leq 0$.

Ainsi sur la figure ci-contre, on peut conclure que $Z(t)$ oscille (de façon non sinusoïdale) entre les valeurs extrêmes $Z_{\min} = Z_1$ et $Z_{\max} = Z_2$. Aux points Z_1 et Z_2 on a bien $F(Z) = 0$, et donc $\dot{z} = 0$, mais la particule ne peut pas se maintenir aux altitudes correspondantes ($\frac{dF}{dZ}$ est non nul en Z_1 et Z_2).

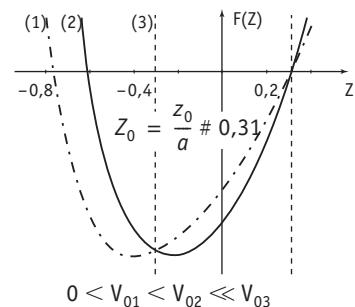


■ 1^{er} cas : $\alpha_0 = 0,4\pi$ soit $z_0 = 0,31a$. La position initiale se situe dans l'hémisphère supérieur.

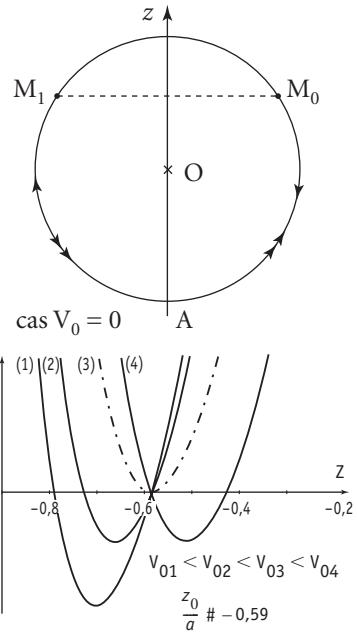
Le mouvement est bien périodique selon Oz,

$$Z(t) \text{ variant entre les valeurs } Z_{\max} = \frac{z_0}{a} \text{ et } Z_{\min}.$$

D'une part, Z_{\min} tend naturellement vers la valeur -1 quand V_0 diminue à z_0 fixé (pour $V_0 = 0$ la particule décrit dans le plan vertical contenant l'axe Oz et M_0 l'arc de cercle $M_0 \rightarrow A \rightarrow M_1 \rightarrow A \dots$).



D'autre part, Z_{\min} tend vers $-\frac{z_0}{a}$ quand V_0 augmente « indéfiniment ». En effet pour une vitesse initiale suffisamment importante on pourra négliger l'effet de la pesanteur $\frac{1}{2}mV^2 \gg mga$ et on retrouve à la limite le cas décrit au 1. pour lequel la trajectoire se situe bien entre $-z_0$ et $+z_0$.



■ 2^e cas : $\alpha_0 = 0,7\pi$ soit $z_0 \approx -0,59a$. le point M_0 se trouve alors dans l'hémisphère inférieur.

- Il apparaît une vitesse initiale critique V_c associée à V_{03} . La seule valeur possible de z correspond alors à z_0 (on a $F(Z)$ positif pour $Z \neq Z_0$, et $F(Z) = 0$ pour $Z = Z_0$ soit $z = z_0$).

La particule décrit un petit cercle d'axe Oz à la vitesse constante V_c . C'est la situation du 2. a.

- Pour $V_0 < V_c$ (cas V_{01} et V_{02}), $z(t)$ oscille entre une valeur $z_{\min} < z_0$ et une valeur maximale $z_{\max} = z_0$. On observe que z_{\min} tend, comme il se doit, vers $-a$ quand V_0 diminue (cf. explication donnée lors du 1^{er} cas).
- Pour $V_0 > V_c$ (cas V_{04}) $z(t)$, varie périodiquement entre $z_{\min} = z_0$ et $z_{\max} > z_0$, z_{\max} tendant vers $-z_0$ ($z_0 < 0$) quand V_0 croît indéfiniment (cf. explication donnée lors du 1^{er} cas).

2. b. β) L'énoncé donne l'expression de $U_{\text{eff}}(z)$:

$$U_{\text{eff}}(z) = mgz + \frac{ma^2V_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2(a^2 - z^2)}.$$

La trajectoire suivie par la particule sera un cercle d'axe Oz et de rayon $r_0 = a \sin \alpha_0$ ($z_0 = a \cos \alpha_0$) si le graphe de $U_{\text{eff}}(z)$ correspond à la figure ci-contre. Il faut ainsi assurer que seule la valeur z_0 de z est possible. On doit donc avoir :

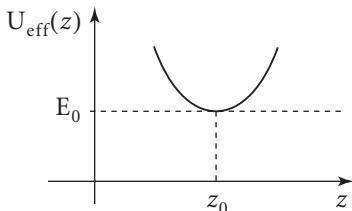
$$U_{\text{eff}}(z_0) = E_0 \quad (1)$$

$$\text{et } U_{\text{eff}}(z) \text{ minimale pour } z = z_0 \quad (2)$$

La première condition est automatiquement vérifiée puisque les conditions initiales sont telles que $z = z_0$, et $\vec{V} = V_0 \vec{u}_\theta$ et donc $\dot{z}_0 = 0$.

Calculons alors la dérivée première de $U_{\text{eff}}(z)$

$$\frac{dU_{\text{eff}}(z)}{dz} = mg + \frac{ma^2V_0^2 \sin^2 \alpha_0}{(a^2 - z^2)^2} z$$



$$(2) \text{ s'écrit avec } z_0 = a \cos \alpha_0 : \frac{a^2 V_0^2 \sin^2 \alpha_0 a \cos \alpha_0}{a^4 \sin^4 \alpha_0} = -g.$$

D'où : $V_0^2 = -ag \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} = V_c^2 \quad (\cos \alpha_0 < 0).$

On retrouve bien la valeur critique $V_c(\alpha_0)$ de V_0 qui ne peut être réalisée que pour $\cos \alpha_0 < 0$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$ (soit $z_0 < 0$).

2. b. δ) Le théorème du moment cinétique en O s'écrit :

$$(3) \quad \frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{M}_R(O) + \vec{M}_P(O) \quad (P \equiv \text{poids}).$$

Or la réaction \vec{R} passe par O, son moment y est donc nul ($\vec{M}_R(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \vec{0}$).

D'autre part $\vec{M}_P(O) = \overrightarrow{OM} \wedge mg = \overrightarrow{OM} \wedge (-mg)\vec{u}_z$ et le moment du poids n'a donc pas de composante selon Oz, soit $\vec{M}_P(O) \cdot \vec{u}_z = 0$.

L'équation (3) donne alors en projection sur Oz :

$$\vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(O) \cdot \vec{u}_z) = 0 \quad (\vec{u}_z \text{ vecteur constant})$$

La composante $\sigma_z = \vec{\sigma}(O) \cdot \vec{u}_z$ est bien une constante du mouvement.

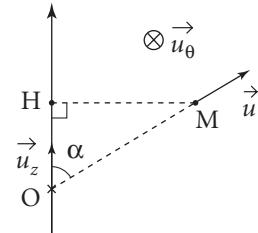
$$\sigma_z = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}) \cdot \vec{u}_z = m\overrightarrow{OM}(\vec{u} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u}_z$$

$$\sigma_z = m \cdot \overrightarrow{OM}(\vec{u}_z \wedge \vec{u}) \cdot \vec{V} = m\overrightarrow{OM} \sin \alpha \vec{u}_\theta \cdot \vec{V}$$

or $OM \sin \alpha = r$ et $\vec{u}_\theta \cdot \vec{V} = V_\theta = r\dot{\theta}$, d'où :

$$\sigma_z = mrV_\theta = mr^2\dot{\theta}.$$

À l'instant initial, on a $V_\theta = V_0$ et $r = a \sin \alpha_0$, soit :



$$\boxed{\sigma_z = mr^2\dot{\theta} = maV_0 \sin \alpha_0} \quad (4)$$

Il en résulte que $\dot{\theta}$ garde toujours le même signe.

D'après le 2. b. α) la conservation de l'énergie s'exprime sous la forme :

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz = E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgz_0 \quad (5)$$

Éliminons r et $\dot{\theta}$ à l'aide de (4) et de la relation $r^2 + z^2 = a^2$ qui traduit que le point matériel se déplace sur la sphère de rayon a . D'où :

$$r\dot{r} + z\dot{z} = 0 \Rightarrow \dot{r}^2 = \dot{z}^2 \frac{z^2}{r^2} = \dot{z}^2 \frac{z^2}{a^2 - z^2}.$$

Et (5) devient : $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 \left(1 + \frac{z^2}{a^2 - z^2}\right) + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{aV_0 \sin \alpha_0}{r^2}\right)^2 + mgz = E_0.$

Soit encore :

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 \frac{a^2}{a^2 - z^2} + \left\{ \frac{1}{2}m \frac{a^2 V_0^2 \sin^2 \alpha_0}{a^2 - z^2} + mgz \right\} = E_0$$

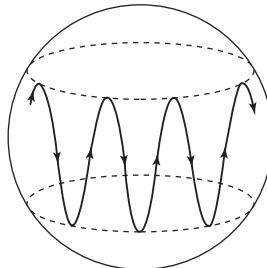
et $f(z) = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{a^2}} > 0$;

$$U_{\text{eff}}(z) = mgz + \frac{ma^2 V_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2(a^2 - z^2)}$$

On retrouve bien l'expression proposée au 2. b. β).

Les études précédentes montrent que la trajectoire dessinée sur la sphère résulte de la combinaison d'un mouvement oscillant selon Oz ($z_{\min} < z < z_{\max}$) et d'un mouvement de rotation par rapport à ce même axe caractérisé par une vitesse de rotation $\bar{\theta}$ définie positive et donnée par (4).

On peut ainsi tracer l'allure de cette trajectoire :



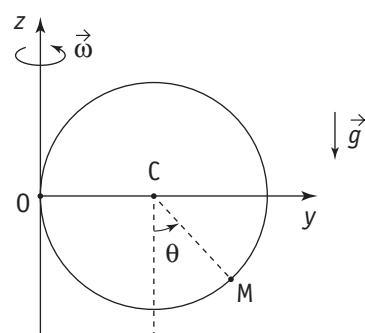
530

Point matériel sur un cercle vertical tournant

Un point matériel M, de masse m, se déplace sans frottement sur une circonference de centre C et de rayon a, contenue dans un plan vertical. Par rapport au référentiel terrestre, supposé galiléen, ce cercle tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical tangent à la circonference. La position du point M est repérée par l'angle θ que fait \vec{CM} avec la verticale descendante.

1. Déterminer les positions d'équilibre relatif du point M par rapport au cercle.

2. Étudier la stabilité de ces positions d'équilibre. Commenter.



Solution

1. Introduisons le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ (Oz est l'axe de rotation du cercle dans le référentiel terrestre, et Oy contient le point C centre du cercle : cf. figure).

Ce référentiel n'est pas galiléen. Dans \mathcal{R} , le point M est soumis à son poids $\vec{P} = mg\hat{g}$, à la réaction \vec{R} de la circonference (R est perpendiculaire à celle-ci puisqu'il n'y a pas de frottements), ainsi qu'aux forces d'inertie (pour une étude d'équilibre dans \mathcal{R} , ces dernières forces se réduisent à la seule force d'inertie d'entraînement).

On a donc, pour M immobile dans \mathcal{R} :

$$\vec{0} = mg\hat{g} + \vec{R} + \vec{f}_{ie}$$

$$\text{or } \vec{\omega} = \omega \vec{u}_z = \text{cte} \Rightarrow \vec{f}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM}$$

$$\text{d'où } -mg\vec{u}_z + m\omega^2 \vec{HM} + \vec{R} = \vec{0}.$$

Projetons cette équation sur la tangente \vec{u}_θ à la circonference : $-mg\vec{u}_z \cdot \vec{u}_\theta + m\omega^2 \vec{HM} \cdot \vec{u}_\theta + 0 = 0$.

$$\text{Soit } -mg\sin\theta + m\omega^2(a + a\sin\theta)\cos\theta = 0$$

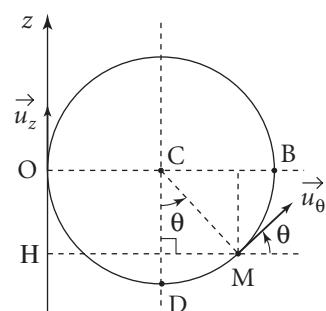
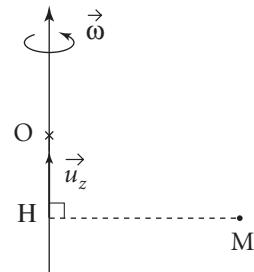
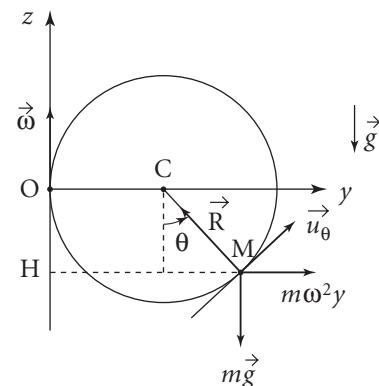
et ($\theta = \frac{\pi}{2}$ n'étant pas solution) :

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\omega^2 a}{g}(1 + \sin\theta)} \quad (1)$$

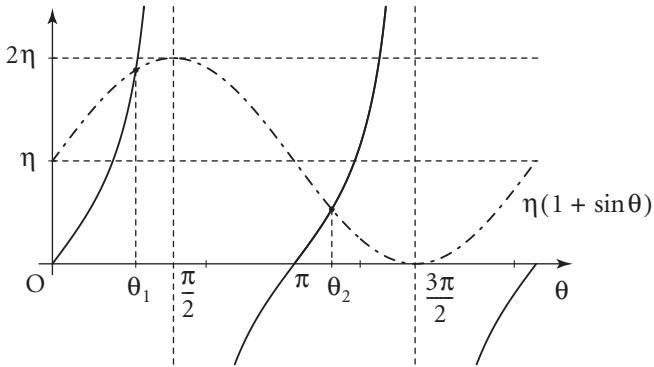
Les solutions ne dépendent que du paramètre sans dimension $\eta = \frac{\omega^2 a}{g}$ qui compare « l'accélération centrifuge » pour $r = HM = a$ – qui aurait tendance, à elle seule, à placer la particule en B – à l'accélération de la pesanteur pour laquelle la position préférentielle serait D.

Les deux effets vont clairement dans le même sens pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ et $\theta \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ (on a pris $\theta = 0$ pour M = D). Il n'existe donc pas de position d'équilibre dans ces deux domaines.

Les positions d'équilibre ne peuvent correspondre qu'à une compensation de ces deux effets, ce qui se traduit par une force tangentielle f_θ nulle qui nous a conduit à la relation (1). Cela va se produire pour une première valeur $\theta_1 \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et pour une



seconde $\theta_2 \in [\pi ; \frac{3\pi}{2}]$, comme nous le montre le graphe ci-dessous où l'on a représenté les deux fonctions : $\theta \mapsto \tan \theta$ et $\theta \mapsto \eta(1 + \sin \theta)$



2. Pour étudier la stabilité, on peut soit s'intéresser aux variations en fonctions de θ de la force tangentielle f_θ pour θ voisin de θ_1 (ou de θ_2), soit étudier la fonction énergie potentielle $E_p(\theta)$ dont dérive f_θ (on a en effet $f_\theta = -\frac{1}{a} \frac{dE_p}{d\theta}$).

Déterminons $E_p(\theta)$: $E_p(\theta) = E_p(\theta ; \text{pesanteur}) + E_p(\theta ; \text{force d'inertie}) = E_{p_1} + E_{p_2}$ or $E_{p_1} = +mgz(M) = -mg a \cos \theta$ (origine prise en C)

$$\text{et } dE_{p_2} = -\delta W_{f_{ie}} = -m\omega^2 \vec{HM} d\vec{CM} = -m\omega^2 \vec{HM} d(\vec{HM})$$

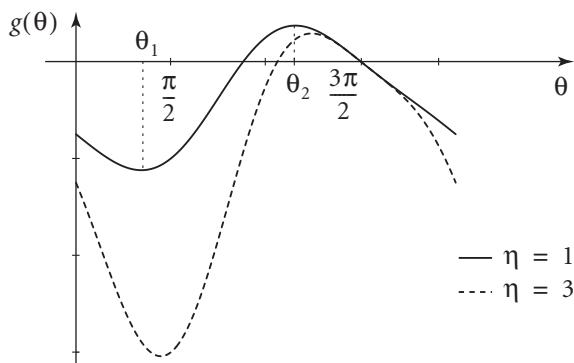
$$\text{soit } E_{p_2} = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 \Rightarrow E_{p_2} = -\frac{1}{2} m \omega^2 a^2 (1 + \sin \theta)^2.$$

$$\text{Au total, } E_p = -\frac{1}{2} m \omega^2 a^2 (1 + \sin \theta)^2 - mg a \cos \theta$$

$$\text{ou encore, en divisant par } mga: \frac{E_p}{mga} = -\cos \theta - \frac{\omega^2 a}{2g} (1 + \sin \theta)^2$$

$$\text{soit: } \boxed{\frac{E_p}{mga} = -\cos \theta - \frac{1}{2} \eta (1 + \sin \theta)^2} = g_\eta(\theta) \quad (2)$$

Traçons la fonction $\eta \rightarrow g_\eta(\theta)$ pour $\theta \in [0 ; 2\pi]$:



La position θ_1 constitue une position d'équilibre stable (minimum de E_p) alors que θ_2 est instable (maximum d'énergie potentielle). On peut vérifier ces résultats en examinant sommairement le signe de f_θ dans un voisinage de θ_1 puis de θ_2 .

$$\text{Or : } f_\theta = -mg\sin\theta + m\omega^2 a(1 + \sin\theta)\cos\theta$$

$$\frac{f_\theta}{mg} = \cos\theta[\eta(1 + \sin\theta) - \tan\theta]$$

- Pour θ_1 , on a $\cos\theta > 0$ ($\theta \in \mathcal{V}_{\theta_1}$) et :

- pour $\theta > \theta_1$: $\tan\theta > \eta(1 + \sin\theta)$ d'où $f_\theta < 0$;
- pour $\theta < \theta_1$: $\tan\theta < \eta(1 + \sin\theta)$ d'où $f_\theta > 0$.

f_θ apparaît comme une force de rappel $\Rightarrow \theta_1$ position d'équilibre stable.

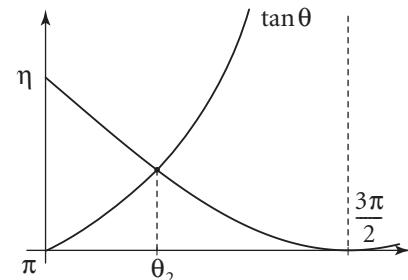
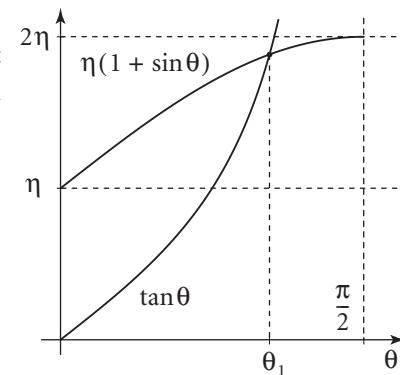
- Pour θ_2 , il vient $\cos\theta < 0$ et les positions relatives des deux courbes restent les mêmes, d'où :

$f_\theta > 0$ pour $\theta > \theta_2$;

$f_\theta < 0$ pour $\theta < \theta_2$.

f_θ ne correspond plus dans ce cas à une force de rappel $\Rightarrow \theta_2$ position d'équilibre instable.

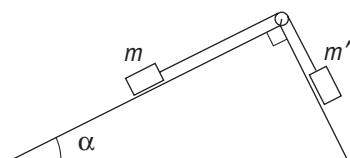
Commentaire



Si l'on s'intéresse à la position d'équilibre stable (θ_1), on peut remarquer qu'elle tend vers $\frac{\pi}{2}$ (point B) lorsque $\eta \gg 1$ ce qui est naturel puisque l'effet de la rotation l'emporte largement sur celui de la pesanteur, et vers 0 (point D) pour $\eta \ll 1$ (c'est l'effet inverse).

531 Deux masses liées par un fil

Deux masses m et m' , liées par un fil inextensible et de masse négligeable sont posées sur deux plans inclinés orthogonaux, d'intersection horizontale (cf. figure). Les deux masses et le fil sont dans le plan vertical perpendiculaire à cette intersection, initialement immobiles (fil tendu). On suppose $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



1. Calculer l'accélération des masses, dans l'hypothèse où il n'y a aucun frottement (l'inertie de la poulie est négligeable).

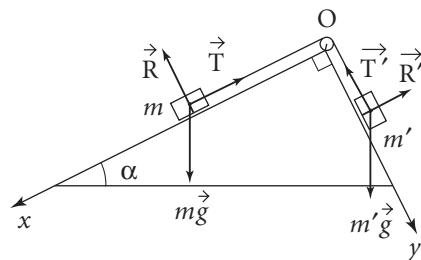
2. Le contact de la masse m avec le plan est caractérisé maintenant par un coefficient de frottement solide f (m est au repos pour $\|\vec{R}_T\| \leq f \|\vec{R}_N\|$, où \vec{R}_T et \vec{R}_N représentent les composantes tangentielle et normale de la force de contact exercée par le support). En envisageant les deux cas limites de mouvement dans un sens ou dans l'autre, déterminer le domaine de valeurs de m' qui assurent l'équilibre. On posera $f = \tan \varphi$ et on exprimera le résultat en fonction de m , φ et α .

Solution

1. Dans le plan vertical des deux masses, définissons un repère Oxy orienté selon les lignes de plus grande pente des deux plans inclinés.

Chaque masse est soumise à trois forces :

- son poids $m\vec{g}$ ou $m'\vec{g}'$;
- la réaction du plan incliné (\vec{R} ou \vec{R}') perpendiculaire à celui-ci (pas de frottements) ;
- la tension du fil \vec{T} ou \vec{T}' .



On applique le théorème du centre d'inertie à chaque masse :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{T} \quad (1)$$

$$m'\vec{a}' = m'\vec{g}' + \vec{R}' + \vec{T}' \quad (2)$$

L'absence de masse du fil et d'inertie de la poulie implique : $T = T'$.

Le fil étant inextensible : $\vec{a} = a\vec{u}_x$ et $\vec{a}' = -a\vec{u}_y$ (m et m' ont la même accélération en module).

Par projection de (1) sur Ox , de (2) sur Oy :

$$ma = mg \sin \alpha - T$$

$$-m'a = m'g \cos \alpha - T'$$

d'où par soustraction, on obtient après simplifications :

$$a = g \frac{m \sin \alpha - m' \cos \alpha}{m + m'}.$$

On vérifie qu'en cas de données symétriques ($m = m'$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$), on obtient bien $a = 0$.

2. Le problème est inchangé en ce qui concerne la masse m' . En cas d'équilibre ($a = 0$), il vient donc :

$$T = T' = m'g \cos \alpha.$$

Écrivons maintenant la condition d'équilibre de la masse m :

$$m\vec{a} = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

(\vec{R}_T composante tangentielle de la force de contact).

Soit, en projection :

$$0 = mg \sin \alpha - T \pm R_T \quad (\text{avec } R_T > 0)$$

$$0 = mg \cos \alpha - R_N$$

et, dans le cas de l'équilibre limite :

$$R_T = f \cdot R_N = \tan \varphi \cdot R_N.$$

D'où deux cas selon que le mouvement s'amorce vers le bas ou vers le haut :

- soit, à la limite du mouvement vers les x positifs :

$$(\vec{R}_T = -R_T \cdot \vec{u}_x)$$

$$T = m' g \cos \alpha = mg \sin \alpha - \tan \varphi \cdot mg \cos \alpha \quad (R_N = mg \cos \alpha)$$

l'équilibre est donc rompu dès que :

$$m' < m'_{\lim 1} = \frac{m}{\cos \alpha} (\sin \alpha - \tan \varphi \cdot \cos \alpha) = m (\tan \alpha - \tan \varphi);$$

- soit à la limite du mouvement vers les x négatifs :

$$(\vec{R}_T = +R_T \cdot \vec{u}_x)$$

$$T = m' g \cos \alpha = mg \sin \alpha + \tan \varphi \cdot mg \cos \alpha$$

l'équilibre est donc rompu dès que :

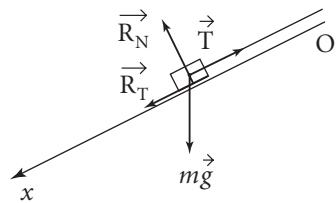
$$m' > m'_{\lim 2} = m (\tan \alpha + \tan \varphi).$$

Finalement, les conditions fixant la possibilité d'équilibre sont données par :

$$\tan \alpha - \tan \varphi \leq \frac{m'}{m} \leq \tan \alpha + \tan \varphi.$$

Évidemment, si $\alpha < \varphi$, la limite inférieure ne joue pas, ce qui traduit le fait que le glissement vers les x positifs est alors impossible.

On vérifie facilement que dans le cas où le frottement disparaît ($f = \tan \varphi \rightarrow 0$), la condition d'équilibre devient $\frac{m'}{m} = \tan \alpha$, ce qui correspond bien à $a = 0$ d'après le résultat de la première question.



532 Système couplé de deux masses

Deux points matériels M_1 (masse m_1) et M_2 (masse m_2) sont reliés par un fil inextensible (longueur l) sans masse et parfaitement souple. La masse M_1 est assujettie à se déplacer sur l'axe vertical Oz et la masse M_2 sur le plan horizontal Oxy . Le fil passe par un trou suffisamment fin situé au point O du plan Oxy . Toutes les liaisons sont sans frottement.

Dans l'état initial, la masse m_1 est en un point de cote z_0 ($0 < z_0 < l$) et sa vitesse est nulle, la masse m_2 est à la distance $r_0 = l - z_0$ de O et possède une vitesse orthoradiale de norme V_0 ($V_0 > 0$).

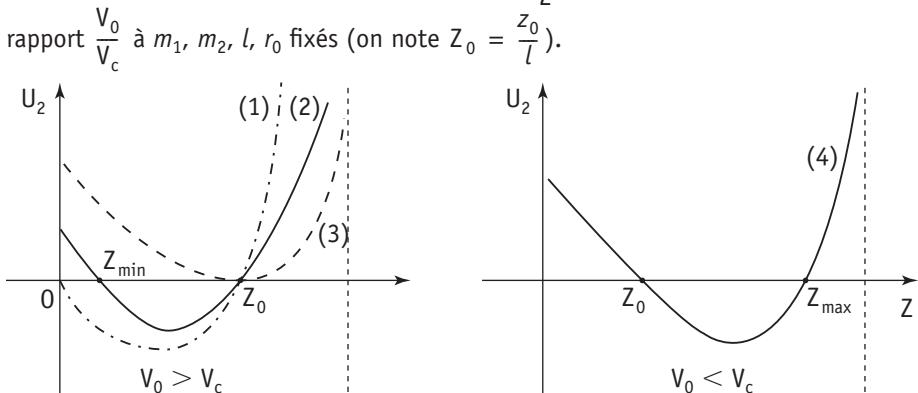
Le mouvement est repéré pour le point M_1 par sa cote $z(t)$ et pour M_2 par ses coordonnées polaires $r(t) = OM_2$ et $\theta(t) = (\vec{u}_x, \vec{OM}_2)$.

- Montrer qu'il existe une valeur critique V_c de V_0 pour laquelle le point M_1 reste fixe.
- Justifier que l'énergie mécanique E_m du système des deux masses m_1 et m_2 est une constante du mouvement. Quelle est sa valeur ?
- Décrire ce qui se passe qualitativement pour $V_0 < V_c$ puis pour $V_0 > V_c$.
- Donner les expressions reliant $z(t)$ et $\theta(t)$ à $r(t)$.
- Compte tenu des relations du 2. a., l'équation énergétique du 1. b. peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 + U(z) = 0.$$

a) Vérifier que l'on a $U(z) = \frac{1}{2}m_2V_0^2\left(\frac{r_0^2}{(l-z)^2} - 1\right) - m_1g(z - z_0)$.

On donne l'allure des courbes $Z = \frac{z}{l} \rightarrow U_2(Z) = \frac{U(z)}{\frac{1}{2}m_2V_c^2}$ pour différentes valeurs du rapport $\frac{V_0}{V_c}$ à m_1, m_2, l, r_0 fixés (on note $Z_0 = \frac{z_0}{l}$).



Que représentent les courbes (1), (2), (3) et (4) ?

b) Donner les caractéristiques générales du mouvement et tracer l'allure de la trajectoire suivie par le point M_2 .

3. On donne maintenant la valeur $V_c(1 + \varepsilon)$ à la vitesse initiale V_0 , où $|\varepsilon|$ est supposé petit devant l'unité. On pose $r = r_0(1 + \eta(t))$ avec $\eta(t) \ll 1$. Établir l'équation du mouvement en $\eta(t)$ en fonction de ε , du temps t et de la grandeur

$$\Omega = \sqrt{\frac{3m_1g}{(m_1 + m_2)r_0}}.$$

4. Comment sont modifiés les résultats précédents si l'on supprime m_1 et que l'on exerce au point M_1 une force verticale constante $\vec{F}_1 = F_0 \cdot \vec{u}_z$? Que se passe-t-il pour $F_0 = m_1g$?

Solution

1. a. Lorsque M_1 reste fixe, c'est que M_2 décrit un cercle de centre O , de rayon r_0 et de vitesse (bien évidemment orthoradiale) $V_0 = V_c$ (vitesse critique que l'on cherche à déterminer).

La masse m_1 demeurant immobile, la tension \vec{T}_1 du fil équilibre le poids $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$ soit : $\vec{T}_1 = -m_1 \vec{g}$.

Le fil est idéal (inextensible, sans masse et infinitement souple), les contacts en O et sur le plan s'effectuent sans frottement, on a donc :

$$T_1 = T_2 \quad \text{d'où} \quad T_2 = m_1 g.$$

Enfin, le point M_1 décrivant une trajectoire circulaire possède une accélération \vec{a}_2 telle que (coordonnées polaires) :

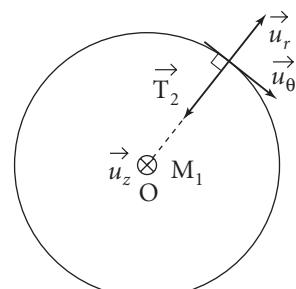
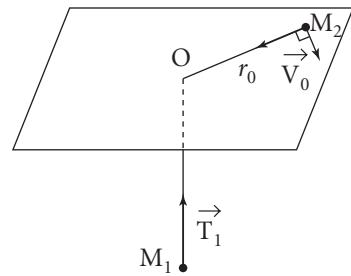
$$\vec{a}_2 = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{V^2}{r_0} (-\vec{u}_r).$$

Et d'après la loi fondamentale de la dynamique appliquée à M_2 (en projection sur le plan horizontal Oxy) :

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{T}_2 = -m_1 g \vec{u}_r.$$

On a donc :

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{m_2 V^2}{r_0} = m_1 g \Rightarrow V_c = \sqrt{\frac{m_1 g r_0}{m_2}} \quad (1)$$



1. b.

POINT COURS

Le théorème de la puissance cinétique appliquée à un système matériel s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}.$$

Si l'on considère comme système l'ensemble constitué par les points matériels M_1 et M_2 , les forces de tension \vec{T}_1 et \vec{T}_2 sont intérieures au système (elles se transmettent ici d'un point à l'autre par l'intermédiaire du fil). Il faut donc s'intéresser à la puissance intérieure \mathcal{P}_{int} qu'elles développent.

POINT MÉTHODE

Il revient au même d'appliquer le théorème de la puissance cinétique à chacun des points.

Ainsi, pour le point matériel M_1 :

$$\frac{dE_{c_1}}{dt} = \mathcal{P}_1(\text{poids}) + \vec{T}_1 \cdot \vec{V}_1 = - \frac{dE_{p_1}}{dt} + T_1 \cdot V_1.$$

E_{p_1} représente l'énergie potentielle de pesanteur associée à la masse m_1 , soit :

$$E_{p_1} = -m_1 g z \quad (\text{origine prise en } z = 0).$$

De même, pour le point matériel M_2 :

$\frac{dE_{c_2}}{dt} = \vec{T}_2 \cdot \vec{V}_2$ (le poids ne travaille pas, pas plus que la réaction verticale – absence de frottements – du plan).

Au total, avec $E_c = E_{c_1} + E_{c_2}$ et $E_p = E_{p_1}$:

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = \vec{T}_1 \cdot \vec{V}_1 + \vec{T}_2 \cdot \vec{V}_2.$$

Or $\vec{T}_1 \cdot \vec{V}_1 = -T_1 \cdot \dot{z}$ ($T_1 = -\vec{T}_1 \cdot \vec{u}_z$ et $\vec{V}_1 = \dot{z} \vec{u}_z$).

De plus, en coordonnées polaires $\vec{V}_2 = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$

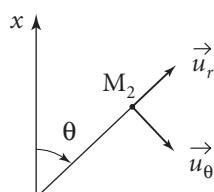
et avec $T_2 = -\vec{T}_2 \cdot \vec{u}_r$ il vient : $\vec{T}_2 \cdot \vec{V}_2 = -T_2 \dot{r}$

D'où : $\vec{T}_1 \cdot \vec{V}_1 + \vec{T}_2 \cdot \vec{V}_2 = -T_1 \dot{z} - T_2 \dot{r}$.

Or $T_1 = T_2$ (cf. 1. a.) et $z + r = l$ soit $\dot{r} = -\dot{z}$.

On a donc :

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = -T_1 \dot{z} - T_1 \cdot (-\dot{z}) = 0.$$



L'énergie mécanique du système, définie selon $E_m = E_{c_1} + E_{c_2} + E_p$, est bien une constante du mouvement. Elle vaut $E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 - m_1gz_0$.

Soit

$$E_m(t) = E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 - m_1gz_0 \quad (2)$$

1. c. ■ Remarquons tout d'abord que le point matériel M_2 n'est horizontalement soumis qu'à la force de tension $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ du fil (pas de frottements). Cette force est centrale (de centre O), ainsi le mouvement plan de M_2 doit conserver son moment cinétique en O ; on a donc :

$$rV_\theta = r_0V_0 \quad (3) \quad (\vec{\sigma}(O)) = m_2 \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{V}_2 = m_2rV_\theta \vec{u}_z.$$

L'évolution du système doit donc respecter les constantes du mouvement ((2) et (3)) ainsi que la relation $r(t) + z(t) = l$ traduisant l'inextensibilité du fil.

■ Soulignons maintenant que la vitesse V_0 (différente de V_c) correspondrait, pour M_2 , à un mouvement circulaire de rayon r_0 pour une valeur T_0 de la tension définie selon :

$$\frac{m_2V_0^2}{r_0} = T_0 \Rightarrow T_0 = m_1g \left(\frac{V_0}{V_c} \right)^2 \quad (cf. 1.)$$

Ainsi pour $V_0 < V_c$, on aura $T_0 < m_1g$ et la masse m_1 est tout d'abord entraînée vers le bas (m_1g supérieure à la tension du fil) : z augmente et r diminue.

Pour $V_0 > V_c$, le même raisonnement conduit à la situation inverse.

■ On peut également définir la valeur r' de r pour laquelle le système finirait par se stabiliser en imaginant, par exemple, une force de frottement du type $\vec{f} = -\lambda\dot{r}\vec{u}_r$ s'exerçant sur M_2 (cette force conserve (3)).

Dès lors :

$$\frac{m_2V'^2}{r'} = m_1g \quad \text{avec} \quad r'V' = r_0V_0.$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{m_2r_0^2V_0^2}{r'^3} &= m_1g \Rightarrow r'^3 = r_0^3 \frac{m_2V_0^2}{m_1g r_0} \\ r' &= r_0 \left(\frac{V_0}{V_c} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

On a donc $r' < r_0$ pour $V_0 < V_c$ et $r' > r_0$ pour $V_0 > V_c$.

■ Analyse qualitative :

Le mouvement du système doit obéir aux lois de conservation :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2V_\theta^2 - m_1gz = E_0 \\ rV_\theta = r_0V_0 \\ r + z = l \Rightarrow \dot{z}^2 = \dot{r}^2. \end{cases}$$

• 1^{er} cas : $V_0 < V_c$

D'après ce qui précède, on peut conclure que dans un premier temps, r diminue (et z croît), passe par la valeur r' définie plus haut avec une vitesse $\dot{r} < 0$ non nulle, et finit par atteindre une valeur $r_{\min} < r'$ ($\dot{r} = 0$) sur laquelle il ne peut pas se stabiliser ($r_{\min} \neq r'$; de plus on a nécessairement $r_{\min} > 0$ puisque V_θ restant borné, r ne peut pas tendre vers 0). Le système repart donc dans l'autre sens. On observera des oscillations non sinusoïdales de $r(t)$ entre les valeurs r_{\min} et r_0 (et de M_1 entre $z_{\max} = l - r_{\min}$ et $z_0 = l - r_0$). La trajectoire de M_2 ressemblera à une « rosace » tangente intérieurement au cercle (O, r_0) et extérieurement au cercle (O, r_{\min}) ($\dot{\theta} = \frac{V_\theta}{r} = \frac{r_0 V_0}{r^2(t)}$).

• 2^e cas : $V_0 > V_c$

Les conclusions restent les mêmes $r(t)$ évoluant cette fois-ci de r_0 à $r_{\max} > r_0$ (on a bien ici $r' > r_0$).

Un tel mouvement n'est entièrement possible que pour $r_{\max} < l$. Déterminons alors la vitesse limite V_1 pour qu'il en soit ainsi :

(2) entraîne avec $\dot{r} = 0$ pour $r = r_{\max} = l$ ($z = 0$) :

$$0 + \frac{1}{2}m_2 V_\theta^2 - m_1 g \cdot 0 = \frac{1}{2}m_2 V_1^2 - m_1 g z_0 \quad (z_0 = l - r_0)$$

Soit avec (3) : $l V_\theta = r_0 V_1$.

$$\text{D'où : } \frac{1}{2}m_2 \frac{r_0^2}{l^2} V_1^2 = \frac{1}{2}m_2 V_1^2 - m_1 g z_0$$

$$\text{et } \frac{1}{2}V_1^2 m_2 \left(1 - \frac{r_0^2}{l_0^2}\right) = m_1 g z_0 \Rightarrow V_1^2 = \frac{2m_1 g z_0}{m_2 \left(1 - \frac{r_0^2}{l_0^2}\right)}$$

$$V_1^2 = \frac{2m_1 g z_0}{m_2 \left(1 - \frac{r_0}{l}\right) \left(1 + \frac{r_0}{l}\right)}$$

$$V_1^2 = V_c^2 \frac{2}{\left(1 + \frac{r_0}{l}\right) \cdot \frac{r_0}{l}} \quad (4)$$

Ainsi pour $V_c < V_0 < V_1$, M_2 décrira une « rosace » s'inscrivant entre les cercles de rayon r_0 et r_{\max} ($r_{\max} < l$).

2. a. On a vu que $[z(t) = l - r(t)]$ et $r(t)V_\theta(t) = r_0 V_0$.

Or $V_\theta(t) = r(t)\dot{\theta}(t)$, d'où : $\boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{r_0 V_0}{r^2(t)}}$

2. b. α) L'équation traduisant la conservation de l'énergie s'écrit (*cf. 2. a.* : $\dot{r} = -\dot{z}$ et

$$V_\theta = \frac{r_0 V_0}{r}) :$$

$$\frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2 \frac{r_0^2 V_0^2}{r^2} - m_1 g z = \frac{1}{2}m_2 V_0^2 - m_1 g z_0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2 V_\theta^2}_{\text{énergie cinétique}}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 + \left\{ \frac{1}{2}m_2 V_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right) - m_1 g(z - z_0) \right\} = 0.$$

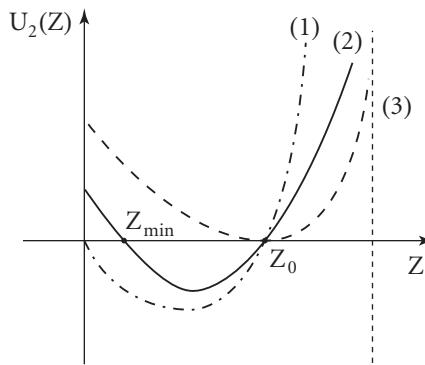
On a bien ($r = l - z$) : $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 + U(z) = 0$ avec :

$$U(z) = \frac{1}{2}m_2 V_0^2 \left(\frac{r_0^2}{(l-z)^2} - 1 \right) - m_1 g(z - z_0) \quad (5)$$

Soit encore avec $V_c^2 = \frac{m_1 g r_0}{m_2}$ et $Z = \frac{r}{l}$ (et $Z_0 = \frac{r_0}{l}$)

$$\frac{1}{2}m_2 V_c^2 = \left(\frac{V_0}{V_c} \right)^2 \left[\left(\frac{1-Z_0}{1-Z} \right)^2 - 1 \right] - 2 \left[\frac{Z-Z_0}{1-Z_0} \right] = U_2(Z).$$

• **1^{er} cas : $V_0 > V_c$**



– La courbe (1) correspond à $V_0 = V_1$ pour laquelle $Z_{\min} = 0$. Ainsi, pour $V_0 \in (V_c, V_1)$, M_1 oscille entre les valeurs de $Z_{\min} > 0$ et Z_0 (les valeurs de Z accessibles étaient définies par $U(z) < 0$ et donc $U_2(Z) < 0$).

– La courbe (3) est associée à $V_0 = V_c$: une seule valeur possible pour Z ($Z = Z_0$, c'est-à-dire $z = z_0$ et $r = r_0$).

– La courbe (2) représente une situation intermédiaire ($V_c < V_0 < V_1$).

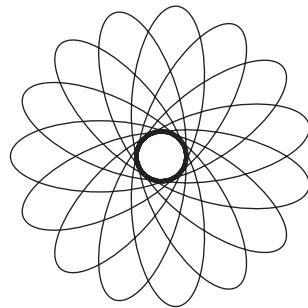
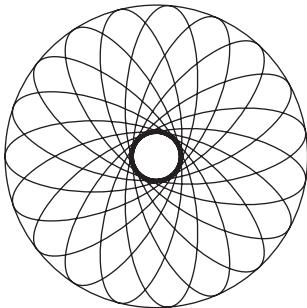
• **2^e cas : $V_0 < V_c$**

Alors $Z(t)$ varie entre les valeurs extrêmes Z_0 et Z_{\max} ($Z_0 < Z_{\max} < 1$).

- 2. b. b)** Les caractéristiques générales du mouvement ont été signalées au 1. c.
On donne ci-après l'allure de la trajectoire du point M₂ tracée à l'ordinateur :

$$\frac{V_0}{V_c} = 0,2 ; \quad \frac{m_2}{m_1} = 2$$

$$\frac{V_0}{V_c} = 4 ; \quad \frac{m_2}{m_1} = 2$$



3.

POINT MÉTHODE

On pourrait reconSIDérer l'équation énergétique (5) du mouvement dans le cadre des petits mouvements. Il est aussi simple de reprendre la démonstration à partir de la loi fondamentale de la dynamique appliquée successivement à M₁ et M₂ : on aboutira directement à une équation différentielle du second ordre en $r(t)$.

On a ainsi :

$$m_2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T \quad \text{et} \quad m_1\ddot{z} = m_1g - T.$$

Éliminons T entre ces deux équations en tenant compte de ce que $r + z = l_0$ et donc $\ddot{z} = -\ddot{r}$.

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_2r\dot{\theta}^2 = -m_1g$$

$$\text{or } r^2\dot{\theta} = r_0V_0, \text{ d'où } r\dot{\theta}^2 = \frac{r_0^2V_0^2}{r^3}.$$

$$\text{Soit : } (m_2 + m_1)\ddot{r} - \frac{m_2r_0^2V_0^2}{r^3} = -m_1g \quad (6)$$

• Linéarisons cette équation (r reste voisin de r_0) : $r = r_0(1 + \eta)$ où $\eta \ll 1$;

$$\text{et } \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}(1 + \eta)^{-3} \approx \frac{1}{r_0^3}(1 - 3\eta) \quad (\text{au premier ordre en } \eta).$$

$$(6) \text{ devient : } (m_2 + m_1)r_0\ddot{\eta} - \frac{m_2V_0^2}{r_0}(1 - 3\eta) = -m_1g.$$

$$\text{Or } V_c^2 = \frac{m_1g r_0}{m_2} \quad \text{soit} \quad \frac{m_2}{r_0} = \frac{m_1 g}{V_c^2}$$

d'où :

$$(m_1 + m_2)r_0\ddot{\eta} - \left(\frac{V_0}{V_c}\right)^2 m_1 g(1 - 3\eta) = -m_1 g.$$

Enfin avec $V_0 = V_c(1 + \varepsilon)$ et $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \left(\frac{V_0}{V_c}\right)^2 \approx (1 + 2\varepsilon)$, et au premier ordre en ε et η :

$$(m_1 + m_2)r_0\ddot{\eta} - m_1 g(1 - 3\eta + 2\varepsilon) = -m_1 g.$$

Et après simplifications :

$$(m_1 + m_2)r_0\ddot{\eta} + 3m_1 g\eta \approx 2m_1 g\varepsilon.$$

Posons :

$$\Omega^2 = \frac{3m_1 g}{(m_1 + m_2)r_0} : \quad \ddot{\eta} + \Omega^2\eta = \frac{2}{3}\Omega^2\varepsilon \quad (7)$$

Les conditions initiales sont :

- $r(0) = r_0$ d'où $\eta(0) = 0$.
- $\dot{r}(0) = 0$ soit $\dot{\eta}(0) = 0$.

La solution à l'équation différentielle (7) est alors donnée par :

$$\boxed{\eta(t) \approx \frac{2}{3}\varepsilon[1 - \cos\Omega t]}$$

On aura de même $z(t) = l - r_0(1 + \eta(t))$. Le point M₁ oscille de façon sinusoïdale avec une pulsation Ω (amplitude $a = \frac{2}{3}r_0\varepsilon$: oscillations entre $z_0 = l - r_0$ et $z_{\min} = z_0 - \frac{4}{3}r_0\varepsilon$).

Le point M₂ voit son rayon vecteur osciller avec la même pulsation Ω (entre r_0 et $r_0 + \frac{4}{3}\varepsilon$).

4. • La valeur de la vitesse V_c du mouvement circulaire s'obtient en substituant la force

$$F_0 \text{ à } m_1 g \text{ soit : } V_c = \sqrt{\frac{F_0 r_0}{m_2}} \quad (\text{cf. 1.})$$

Pour l'équation énergétique (cf. 2. a.), l'énergie cinétique se réduit à E_{c_1} (on n'a plus m_2) et il faut substituer à l'énergie potentielle de pesanteur $-m_1 g z$ l'énergie potentielle E'_p associée à la force constante F_0 , définie selon :

$$dE'_p = -\delta W_{F_0} = -F_0 dz = -d(F_0 z).$$

On peut donc prendre $E'_p = -F_0 z$.

On a donc : $\frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + U(z) = 0$ avec maintenant :

$$U(z) = \frac{1}{2}m_2V_0^2 \left[\frac{r_0^2}{(l-z)^2} - 1 \right] - F_0(z - z_0).$$

Les valeurs de V_{\lim} , z_{\min} , z_{\max} se déduisent également de l'étude précédente (cf. 2.) en remplaçant $m_1 g$ par F_0 . Quant à la pulsation Ω des petits mouvements, elle s'obtient en faisant :

$$m_1 + m_2 \rightarrow m_2 \quad (\text{le terme inertiel dû à } m_1 \text{ n'existe plus})$$

$$m_1 g \rightarrow F_0.$$

$$\text{Soit } \Omega = \sqrt{\frac{3F_0}{m_2 r_0}}.$$

- Si l'on fait $F_0 = m_1 g$, les résultats relatifs à V_c , $V_{\lim} = V_1$, z_{\min} , z_{\max} sont inchangés. La valeur de Ω est elle modifiée selon :

$$\Omega = \sqrt{\frac{3m_1 g}{m_2 r_0}}.$$

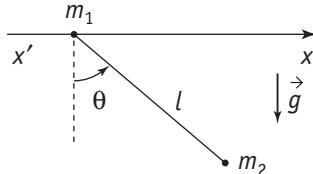
533 Pendule double

Un pendule double est constitué de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 placées aux extrémités M_1 et M_2 d'une tige sans masse de longueur l .

Le point M_1 est assujetti à se déplacer sans frottements sur l'axe horizontal $x'x$.

Le pendule peut osciller librement sous l'action de la pesanteur tout en restant dans un même plan vertical contenant l'axe $x'x$.

Le système est abandonné sans vitesse initiale dans un référentiel \mathcal{R}_0 supposé galiléen, θ ayant une valeur θ_0 .



1. Que peut-on dire du mouvement du centre de masse G du système ?

2. Déterminer, par application du théorème de l'énergie cinétique, une intégrale première du mouvement en $\theta(t)$.

3. Donner la période des petites oscillations. On pourra poser $\omega = \sqrt{\frac{g}{l(m_1 + m_2)}}$. Commenter le résultat obtenu.

Solution

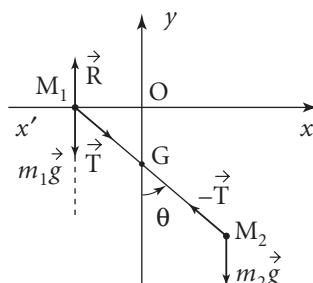
1. Le mouvement du centre de masse G se déduit de l'application de la loi fondamentale de la dynamique appliquée à chacune des masses m_1 et m_2 .

Pour m_1 seule, on a, en notant \vec{R} la réaction du support $x'x$:

$$m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} = m_1 \vec{g} + \vec{R} + \vec{T} \quad (1)$$

De même pour m_2 :

$$m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt} = m_2 \vec{g} + (-\vec{T}) \quad (2)$$



(la tige étant supposée sans masse, les forces \vec{T} et $-\vec{T}$ sont bien portées par M_1M_2 et sont de sens opposés).

Éliminons \vec{T} entre les deux équations :

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2) = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{R} \quad (3)$$

Le glissement du point M_1 sur l'axe horizontal $x'x$ s'effectuant sans frottement, la réaction \vec{R} est normale à $x'x$ (elle est de plus contenue dans le plan vertical Oxy). Soit :

$$\vec{R} = R\vec{u}_y$$

$$(3) \text{ donne alors en projection sur } Ox : \frac{d}{dt}(m_1V_{1x} + m_2V_{2x}) = 0$$

c'est-à-dire $m_1V_{1x} + m_2V_{2x} = \text{cste} = 0$, les vitesses initiales étant nulles.

Or par définition du point G, on a : $(m_1 + m_2)\vec{V}_G = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$.

Il vient alors $V_{Gx} = 0$.

Le centre de masse se déplace sur la verticale passant par $G_0 = G(t=0)$. On pourra donc étudier le mouvement dans le référentiel galiléen Oxy (O point fixe de $x'x$, l'axe Oy passant par G_0).

2. Le théorème de la puissance cinétique appliquée au système des deux masses s'écrit :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}.$$

Ici $\mathcal{P}_{\text{ext}} = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{poids}) + \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R})$.

Or $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{R}) = 0$ (force perpendiculaire au déplacement) ;

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\text{poids}) = -\frac{dE_p}{dt} \text{ avec } E_p = E_p(m_1) + E_p(m_2) = 0 + mg(y(m_2))$$

(origine de l'énergie potentielle prise en $y=0$).

Montrons que les tensions \vec{T} et $-\vec{T}$ fournissent une puissance \mathcal{P}_{int} globalement nulle. En effet :

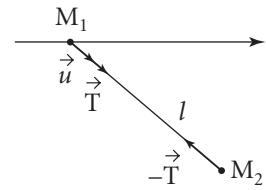
$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{T} \cdot \vec{V}(M_1) - \vec{T} \cdot \vec{V}(M_2) = \vec{T} \cdot [\vec{V}(M_1) - \vec{V}(M_2)]$$

$$\text{et } \mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{T} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_2 M_1}}{dt}, \text{ soit avec } \vec{T} = T\vec{u} \text{ et } \overrightarrow{M_1 M_2} = +l\vec{u}$$

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = T\vec{u} \cdot \left(-l \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \text{ (distance } M_1M_2 \text{ constante égale à } l)$$

$$\text{soit } \mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{lT}{2} \frac{d}{dt}(\vec{u}^2) = 0 \quad (\vec{u}^2 = 1)$$

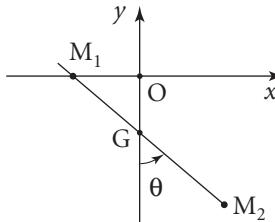
$$\text{on a donc finalement : } \frac{dE_c}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} \text{ et } \boxed{E_c + E_p = \text{cste}}$$



Avec $E_p = -m_2 gl \cos \theta$.

Pour calculer l'énergie cinétique, on écrira en notant $(x_1, 0)$ et (x_2, y_2) les coordonnées des points M_1 et M_2 dans le référentiel Oxy :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$



Exprimons x_1, x_2, y_2 en fonction de l'angle θ .

On a : $\begin{cases} m_1 GM_1 = m_2 GM_2 \text{ (propriété du centre de masse)} \\ GM_1 + GM_2 = l. \end{cases}$

$$\text{Soit : } GM_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}l = l_1 \text{ et } GM_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}l = l_2.$$

Les coordonnées des points M_1 et M_2 s'écrivent dans le repère Oxy :

$$M_1 \begin{cases} x_1 = -l_1 \sin \theta \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ et } M_2 \begin{cases} x_2 = l_2 \sin \theta \\ y_2 = -l_2 \cos \theta \end{cases}$$

D'où en remplaçant :

$$E_c = \left[\frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \right] + \frac{1}{2}m_2 [l_2^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta]$$

et, en utilisant les valeurs de l_1 et l_2 :

$$E_c = \frac{1}{2(m_1 + m_2)^2} [m_1 m_2^2 \cos^2 \theta + m_2 m_1^2 \cos^2 \theta + m_2 (m_1 + m_2)^2 \sin^2 \theta]$$

$$E_c = \frac{1}{2(m_1 + m_2)^2} [m_1 m_2 (m_1 + m_2) \cos^2 \theta + m_2 (m_1 + m_2)^2 \sin^2 \theta]$$

$$\text{et } E_c = \frac{1}{2} \frac{m_2 l^2 \dot{\theta}^2}{m_1 + m_2} [m_1 \cos^2 \theta + (m_1 + m_2) \sin^2 \theta]$$

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \dot{\theta}^2 \left[1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta \right].$$

La conservation de l'énergie se traduit alors par l'équation $(\theta(t=0) = \theta_0 \text{ et } \dot{\theta}(t=0) = 0)$:

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \dot{\theta}^2 \left[1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta \right] - m_2 g l \cos \theta = -m_2 g l \cos \theta_0.$$

Soit encore :

$$\dot{\theta}^2 \left[1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta \right] + \frac{g}{l} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) 2(\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0 \quad (4)$$

Posons $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}$, l'équation devient :

$$\dot{\theta}^2 \left[1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta \right] + 4\omega^2 \left[\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right] = 0 \quad (5)$$

Les valeurs permises de θ doivent vérifier $\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) > \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$ ce qui impose $|\theta| \leq \theta_0$.

Le pendule double va osciller, de façon non sinusoïdale, entre les valeurs $-\theta_0$ et θ_0 , la vitesse s'annulant lorsque M_2 atteint les positions d'altitude maximale ($\theta = \pm \theta_0$: énergie potentielle maximale pour le système), les vitesses de M_1 et M_2 étant non nulles quand θ passe par la valeur 0 (énergie potentielle minimale pour le système)...

3. Le mouvement est d'autant plus proche d'un mouvement sinusoïdal que $\theta(t)$ reste suffisamment petit (il faut donc qu'il en soit de même de θ_0). Cette approximation permet de ne conserver que les termes d'ordre deux (au plus) en θ et $\dot{\theta}$ dans l'équation (5), ce qui donne :

$$1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta = 1 + o(\theta) \quad \left(\frac{m_2}{m_1} \theta_0^2 \ll 1 \right)$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4} \theta^2 + o(\theta^2) \quad \left(\frac{\theta_0^2}{12} \ll 1 \right).$$

D'où : $\dot{\theta}^2 + 4\omega^2 \left(\frac{\theta^2}{4} - \frac{\theta_0^2}{4} \right) \neq 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 + \omega^2 (\theta^2 - \theta_0^2) = 0}$

Cette dernière relation est l'équation énergétique d'un oscillateur harmonique non amorti et non forcé, de pulsation caractéristique ω .

La période T' des petites oscillations est alors :

$$T' = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}} \quad (6)$$

Commentaires

- Pour $m_1 \gg m_2$, on obtient $T' \approx T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. La masse M_1 est alors quasiment fixe, et le système se réduit pratiquement à un pendule simple de longueur l et donc de période T_0 pour les petites amplitudes des mouvements.

- Pour $m_2 \gg m_1$, on a à la limite $G \sim M_2$ et $m_1 \ddot{x}_1 \approx -T\theta$ où $l\theta \sim x_1$.

$$\text{Soit } m_1 \ddot{x}_1 + \frac{T}{l} x_1 = 0$$

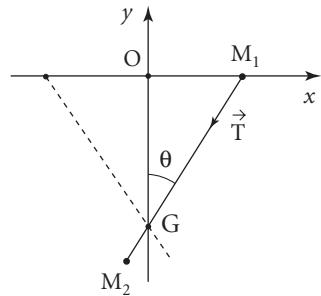
et en faisant (au premier ordre en x_1) $T \sim m_2 g$
(M_2 pratiquement immobile) :

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{m_2 g}{l} x_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \left(\frac{m_2 g}{m_1 l} \right) x_1 = 0.$$

D'où une pulsation $\omega_2 = \sqrt{\frac{m_2 g}{m_1 l}}$ et une période :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (m_2 \gg m_1)$$

le résultat est conforme à l'expression générale (6) dans l'hypothèse où la masse m_2 est suffisamment grande devant $m_1 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sim \frac{m_2}{m_1} \right)$.



D. Mouvements dans des champs \vec{E} et \vec{B}

541 Mouvement dans un champ magnétique d'un électron soumis à une force de freinage

Un électron de masse m et de charge $-e$ ($e > 0$) pénètre dans une région où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$ ($B > 0$).

À l'instant $t = 0$, il est en O avec une vitesse $\vec{V}_0 = V_0 \vec{u}_x$ ($V_0 > 0$).

Le milieu matériel dans lequel se déplace l'électron à la vitesse \vec{V} exerce sur celui-ci une force de type visqueux donnée par $\vec{F}_f = -\alpha \vec{V}$ où α est un coefficient de proportionnalité positif. On néglige le poids de l'électron.

1. Montrer que le mouvement est plan. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$, ainsi que son module. On posera $\beta = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega = \frac{eB}{m}$ et on introduira la variable complexe $V = V_x + iV_y$.

2. Montrer que l'électron finit par s'arrêter en un point C .

3. Déterminer la nature de la trajectoire suivie par la particule. On pourra poser $\frac{\omega}{\beta} = \tan \varphi$.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Loi fondamentale de la dynamique.
- Théorème de la puissance cinétique.
- Particule chargée dans un champ magnétique.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Par application de la loi fondamentale de la dynamique, déterminer les équations différentielles vérifiées par les composantes de la vitesse \vec{V} . On montrera que $V_z(t) = 0$, donc que le mouvement est plan.

2. En introduisant la variable complexe $r = x + iy$ on détermine x et y et on étudie leur comportement lorsque $t \rightarrow \infty$.

3. On adopte un nouveau repère d'origine C , d'axe Cx' parallèle à Ox et Cy' parallèle à Oy . On utilisera les coordonnées polaires $r' = CM$ et $\theta = (Cx', CM)$. On détermine $r'(t)$ puis $\theta(t)$ et on élimine t pour obtenir $r'(\theta)$.

3. Solution

1. Appliquons la loi fondamentale de la dynamique à l'électron de masse m , de charge $q = -e$.

POINT COURS

Une particule de charge q , animée d'une vitesse \vec{V} , placée dans un champ magnétique \vec{B} est soumise à une force $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$.

En négligeant le poids de l'électron, et en tenant compte par ailleurs d'une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha\vec{V}$, il vient :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -e\vec{V} \wedge \vec{B} - \alpha\vec{V}.$$

Or $\vec{B} = B\vec{u}_z$ et $\vec{V} = V_x\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y + V_z\vec{u}_z$ à t quelconque.

On obtient donc par projection :

$$\begin{cases} m\dot{V}_x = -eBV_y - \alpha V_x \\ m\dot{V}_y = eBV_x - \alpha V_y \\ m\dot{V}_z = -\alpha V_z \end{cases}$$

Soit en posant $\beta = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega = \frac{eB}{m}$:

$$\begin{cases} \dot{V}_x = -\omega V_y - \beta V_x \\ \dot{V}_y = \omega V_x - \beta V_y \\ \dot{V}_z = -\beta V_z \end{cases}$$

Montrons que le mouvement est plan :

$\dot{V}_z + \beta V_z = 0$ donc $V_z = V_z(0)e^{-\beta t} = 0$ puisque $V_z(0) = 0$.

En intégrant à nouveau, il vient $z = \text{constante} = 0$ puisque l'électron est en O à $t = 0$: le mouvement se fait donc dans le plan xOy .

POINT MÉTHODE

Pour résoudre le système couplé d'équations différentielles $\begin{cases} \dot{V}_x = -\omega V_y - \beta V_x \\ \dot{V}_y = \omega V_x - \beta V_y \end{cases}$ on peut introduire la variable complexe $\underline{V} = V_x + iV_y$. On obtiendra ainsi une équation différentielle en \underline{V} .

Après résolution, il suffit d'identifier partie réelle à V_x partie imaginaire à V_y .

Ainsi on obtient $\dot{\underline{V}} + (\beta - i\omega)\underline{V} = 0$

et par intégration $\underline{V} = Ae^{-(\beta - i\omega)t}$

A est déterminée par les conditions initiales : à $t = 0$, $\underline{V}(0) = V_0 = A$.

On a donc $\underline{V} = V_0 e^{-\beta t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$ que l'on identifie à $\underline{V} = V_x + i V_y$

$$\begin{cases} V_x = V_0 e^{-\beta t} \cos \omega t \\ V_y = V_0 e^{-\beta t} \sin \omega t \end{cases}$$

Déterminons $V(t)$:

$$V(t) = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = V_0 e^{-\beta t}$$

$\frac{1}{\beta} = \frac{m}{\alpha}$ est un temps caractéristique de décroissance du module de la vitesse.

POINT MÉTHODE

Pour déterminer $V(t)$, on peut également écrire le théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = (\vec{F} + \vec{F}_f) \cdot \vec{V}.$$

En remarquant que la force magnétique ne travaille pas car elle est constamment perpendiculaire à la vitesse :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_f \cdot \vec{V} = -\alpha V^2.$$

$$\text{On a donc } \frac{1}{2} m \frac{dV^2}{dt} + \alpha V^2 = 0.$$

$$\text{Soit encore } \frac{dV}{dt} + \beta V = 0 \quad \text{et} \quad V(t) = V_0 e^{-\beta t}.$$

2. On introduit de la même façon la variable $\underline{r} = x + iy$ pour déterminer $x(t)$ et $y(t)$.

$$\dot{\underline{r}} = V_x + i V_y = \underline{V} = V_0 e^{-(\beta - i\omega)t}$$

$$\underline{r} = \frac{V_0}{(i\omega - \beta)} \cdot e^{-(\beta - i\omega)t} + \text{constante.}$$

$$\text{Or } \underline{r}(0) = 0, \text{ donc constante} = \frac{V_0}{\beta - i\omega}.$$

$$\text{On obtient ainsi : } \underline{r} = \frac{V_0}{\beta^2 + \omega^2} (\beta + i\omega)(1 - e^{-\beta t} e^{i\omega t}).$$

Puis en séparant partie réelle et partie imaginaire et en identifiant :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\beta V_0}{\beta^2 + \omega^2} + \frac{V_0 e^{-\beta t}}{\beta^2 + \omega^2} (\omega \sin \omega t - \beta \cos \omega t) \\ y(t) = \frac{\omega V_0}{\beta^2 + \omega^2} - \frac{V_0 e^{-\beta t}}{\beta^2 + \omega^2} (\omega \cos \omega t + \beta \sin \omega t) \end{cases}$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, l'électron finit par s'arrêter en un point C de coordonnées :

$$\begin{cases} x_C = \frac{\beta V_0}{\beta^2 + \omega^2} \\ y_C = \frac{\omega V_0}{\beta^2 + \omega^2} \end{cases}$$

Commentaires

[En l'absence de forces dissipatives, la trajectoire suivie par la particule serait un cercle passant par O. La force de frottement va avoir pour effet de diminuer le module de la vitesse et par là même le rayon du « cercle ». La trajectoire ne passe plus par O et va s'enrouler autour du point limite C.]

3. Dans le nouveau repère choisi, l'électron à un instant t quelconque a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x - x_C = \frac{V_0 e^{-\beta t}}{\beta^2 + \omega^2} (\omega \sin \omega t - \beta \cos \omega t) \\ y' = y - y_C = -\frac{V_0 e^{-\beta t}}{\beta^2 + \omega^2} (\omega \cos \omega t + \beta \sin \omega t) \end{cases}$$

Posons $r' = CM$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{V_0 e^{-\beta t}}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}.$$

$\theta = (Cx', CM)$ est défini par :

$$\tan \theta = \frac{y'}{x'} = \frac{\omega \cos \omega t + \beta \sin \omega t}{\beta \cos \omega t - \omega \sin \omega t}.$$

En posant $\tan \varphi = \frac{\omega}{\beta}$:

$$\tan \theta = \frac{\tan \varphi \cos \omega t + \sin \omega t}{\cos \omega t - \tan \varphi \sin \omega t} = \frac{\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t}{\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t} = \tan(\omega t + \varphi)$$

d'où $\theta = \omega t + \varphi$ (modulo π)

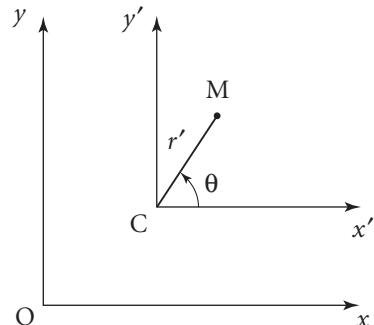
à $t = 0$: M est en O donc $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$.

On a donc $t = \frac{\theta - \varphi}{\omega}$

et

$$r' = \frac{V_0 e^{-\frac{\beta}{\omega}(\theta - \varphi)}}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}$$

On reconnaît l'équation polaire d'une spirale logarithmique.



542

Spectrographe de masse

Un faisceau de particules (masse m , charge $q > 0$), accélérées par une différence de potentiel U , entre en M dans une région où règne un champ magnétique \vec{B} uniforme, perpendiculaire au plan de la figure.

Cette région de champ \vec{B} est un secteur angulaire de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, limité par les demi-droites OM et ON. Le faisceau entre et sort normalement aux limites de cette zone.

1. Déterminer, en fonction de $\frac{q}{m}$, l'abscisse x_0 du point C d'impact des particules sur l'axe Ox.

2. Le faisceau pénètre maintenant en M dans la zone où règne le champ \vec{B} . Comment est modifiée la trajectoire des particules ?

En considérant $MM' = \delta y$ comme un infinité petit ($\varepsilon = \frac{\delta y}{OM} = \frac{\delta y}{R} \ll 1$) montrer, qu'après avoir traversé la zone de champ \vec{B} , le faisceau passe par un point fixe (au second ordre près en $\frac{\delta y}{R}$).

Que peut-on conclure de la valeur des coordonnées de ce point ?

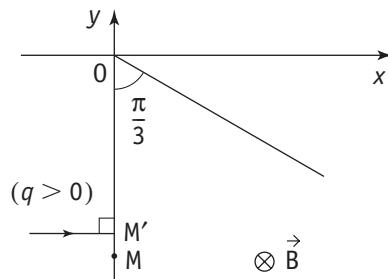
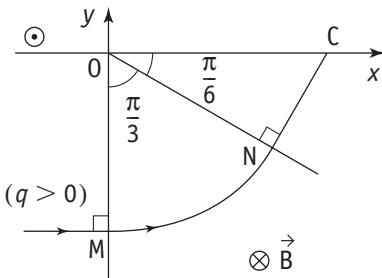
Comment peut-on espérer réaliser expérimentalement la configuration décrite au **1.** ?

3. Le faisceau pénétrant en M dans la région de champ \vec{B} est maintenant composé de deux sortes de particules (m, q) et (m', q) de même charge q et de masses légèrement différentes :

$$m' = m + \delta m \quad \text{avec} \quad \frac{\delta m}{m} = \eta \ll 1.$$

Déterminer – au premier ordre en η – l'écart $CC' = \delta x$ des impacts sur l'axe Ox des deux sortes de particules. Application ?

On négligera le poids des particules.



1. Ce qu'il faut savoir

- Charge (q, m) en mouvement dans un champ magnétique uniforme.
- Accélération d'une particule chargée sous une différence de potentiel donnée.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Dans un champ magnétique uniforme, les particules chargées ont une trajectoire circulaire : les conditions imposées au faisceau permettent de situer le centre de la trajectoire. Le problème est alors géométriquement simple.

2. En changeant le point d'entrée M du faisceau dans le champ \vec{B} , on change la position du centre du cercle décrit : le faisceau ne sort plus perpendiculairement à la frontière de la zone de champ.

3. Dans le cas d'une modification de la masse des particules, le rayon des trajectoires est modifié (ce qui déplace aussi le centre...) : il faudra adapter à ce cas, la méthode de calcul utilisée à la question précédente.

3. Solution

1. Sur la partie MN de la trajectoire des particules, la seule force agissante est la force magnétique $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

POINT COURS

Cette force, perpendiculaire à la vitesse, ne travaille pas : l'énergie cinétique de la particule se conserve, ainsi que la norme v_0 de sa vitesse.

De plus, la force est perpendiculaire à \vec{B} . En notant $\vec{B} = Bu_z$ et $\vec{v} = \vec{v}_\perp + v_{||}\vec{u}_z$ on a :

$$\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge B\vec{u}_z = q\vec{v}_\perp \wedge B\vec{u}_z.$$

• \vec{f}_m est dans le plan xOy , avec $qv_\perp B$ pour module.

La vitesse $v_{||}$ est constante, et v_\perp aussi.

• $\vec{f}_m \perp \vec{v}_\perp$: l'accélération est normale, et le mouvement est circulaire uniforme, de rayon R tel que :

$$\frac{mv_\perp^2}{R} = qv_\perp B, \quad \text{soit : } R = \frac{mv_\perp}{qB}.$$

La force en M est $\vec{f}_m(M) = qv_0 B \vec{u}_y$ et la vitesse initiale \vec{v}_0 est perpendiculaire à \vec{B} .

La particule décrit donc, dans le secteur où règne le champ \vec{B} , un arc de cercle de centre O puisque, d'après le texte, on a $\vec{v}(M) \perp \vec{OM}$ et $\vec{v}_N \perp \vec{ON}$.

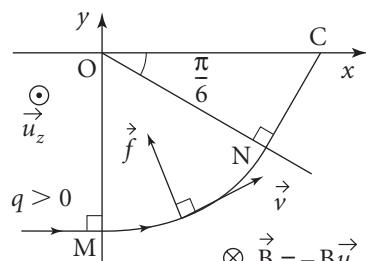
$$\text{Ainsi } OM = ON = R = \frac{mv_0}{qB}. \quad (2)$$

Le point C, impact des particules sur Ox, a pour

$$\text{abscisse : } OC = x_0 = \frac{ON}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{R}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \Rightarrow x_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{m}{q} \frac{2v_0}{\sqrt{3}B}.$$

Enfin, les particules ayant été accélérées sous la différence de potentiel U, le théorème de l'énergie cinétique donne immédiatement :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qU \quad \text{soit } v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$



d'où, en reportant :

$$x_0 = \sqrt{\frac{m}{q}} \cdot \frac{2\sqrt{2U}}{\sqrt{3} \cdot B} \quad (3)$$

2. Le rayon R du cercle décrit par le faisceau n'est pas modifié : le centre O' de ce cercle est donc décalé :

$$OO' = MM' = \delta y = \varepsilon \cdot OM = \varepsilon R$$

et le faisceau ne ressort plus normalement à ON de la zone de champ \vec{B} ; il émerge en N', et a ensuite une trajectoire rectiligne orthogonale à O'N'.

• Déterminons le point N'.

Dans le triangle OO'N' on a :

$$ON'^2 = OO'^2 + O'N'^2 - 2OO' \cdot O'N' \cos \theta.$$

$$\text{Or } OO' = \varepsilon R, O'N' = R$$

$$\text{d'où : } ON'^2 = R^2[\varepsilon^2 + 1 - 2\varepsilon \cos \theta] \text{ et}$$

$$ON' = R[1 - 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Au premier ordre en ε , on peut confondre θ et $\frac{\pi}{3}$ dans

l'expression précédente (la différence entre θ et $\frac{\pi}{3}$ est du premier ordre en ε et introduirait donc un terme d'ordre deux...).

$$\text{Soit avec } \cos \theta \approx \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad ON' \# R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (4)$$

D'où les coordonnées x' et y' du point N' (toujours au premier ordre en ε) :

$$x' = ON' \sin \frac{\pi}{3}$$

$$y' = -ON' \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' \# \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ y' \# -\frac{R}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{cases} \quad (5)$$

• Au-delà de N', la trajectoire est rectiligne ($\vec{B} = \vec{0}$) et orthogonale à la droite O'N'.

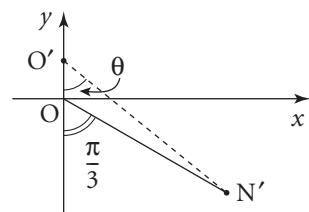
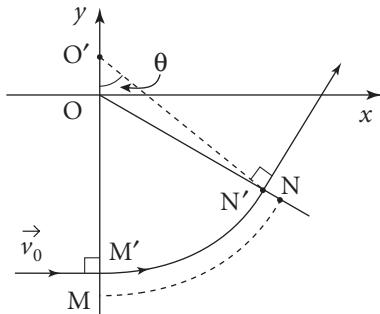
Soit en notant C' le point d'impact, d'abscisse x'_0 , sur l'axe Ox :

$$\text{soit } \overrightarrow{O'N'} \cdot \overrightarrow{N'C'} = 0 \Rightarrow (x' - 0)(x'_0 - x') + (y' - \varepsilon R)(0 - y') = 0.$$

$$\text{D'où : } x'_0 = x' + \frac{y'}{x'}(y' - \varepsilon R).$$

Remplaçant les grandeurs x' et y' par leurs valeurs (cf. (5)), et ne gardant que des termes du premier ordre en ε , il vient :

$$x'_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\frac{R}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \varepsilon R\right].$$



$$\text{Soit : } x'_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}R - \frac{\sqrt{3}}{4}R\epsilon + \frac{R}{2\sqrt{3}} + \underbrace{\frac{\epsilon R}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{4} \right]}_{\frac{\sqrt{3}R\epsilon}{4}}$$

Les termes en ϵ disparaissent de sorte que :

$$x'_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}}[1 + o(\epsilon)]$$

d'où $x'_0 = x_0(1 + o(\epsilon))$.

Au second ordre près en ϵ , les points C' et C sont donc confondus. Si le point d'entrée M du faisceau dans la zone de champ \vec{B} est décalé d'un infiniment petit du premier ordre, la position du point d'impact C sur l'axe Ox ne varie qu'au second ordre : il y a focalisation en C du faisceau émergent.

La focalisation au point C montre comment on peut expérimentalement réaliser la condition $OM = R = \frac{mv_0}{qB}$. Si l'on déplace progressivement le point M d'entrée du faisceau dans le champ magnétique, l'abscisse du point C' varie au second ordre par rapport à ϵ ($\epsilon = \frac{MM'}{R}$) (à démontrer ; on a vérifié ici qu'elle ne dépendait pas de ϵ au premier ordre) : le bon réglage de la position du faisceau correspondra alors à la valeur extrémale de x'_0 .

3. Les particules ayant des masses différentes, les trajectoires dans le champ B ont des rayons différents $R = \frac{mv_0}{qB}$ et

$$R' = \frac{m'v_0}{qB} = \frac{mv_0}{qB} \left(1 + \frac{\delta m}{m} \right) = R(1 + \eta)$$

les particules de masse m suivent le trajet MNC (étudié au 1.) ; quant aux particules de masse m' , elles décrivent l'arc de cercle MN'_1 de centre O_1 , avec $O_1M = R' = R(1 + \eta)$ soit $OO_1 = \eta R$.

On peut alors reprendre les calculs faits au 2. :

$$ON'^2 = OO_1^2 + O_1N'^2 - 2OO_1 \cdot O_1N' \cos \theta$$

$$\text{or } OO_1 = \eta R \text{ et } O_1N'_1 = R(1 + \eta)$$

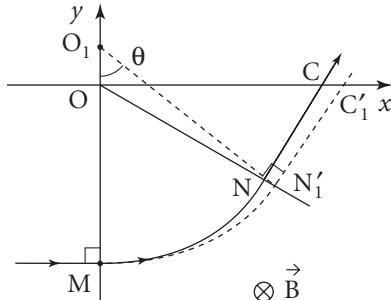
$$\text{d'où : } ON'^2 = \eta^2 R^2 + R^2(1 + \eta)^2 - 2\eta R^2(1 + \eta) \cos \theta.$$

Ne gardant que des termes du premier ordre en η , et remplaçant θ par $\frac{\pi}{3}$ (cf. 1.) :

$$ON'^2 \approx R^2(1 + 2\eta) - 2R^2\eta \frac{1}{2} \approx R^2(1 + \eta).$$

Soit

$$ON'_1 \approx R \left(1 + \frac{\eta}{2} \right).$$



D'où les coordonnées du point N'_1 au premier ordre en η , (cf. 5. $\epsilon \rightarrow -\eta$) :

$$x'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(1 + \frac{\eta}{2}\right) \text{ et } y'_1 = -\frac{R}{2}\left(1 + \frac{\eta}{2}\right).$$

Au-delà, la trajectoire est rectiligne perpendiculaire à $O_1N'_1$, et recoupe Ox en $C'_1(x''_0)$.

Le même calcul que celui effectué au 2. conduit à ($OO_1 = \eta R$) :

$$x''_0 = x'_1 + \frac{y'_1}{x'_1}(y'_1 - \eta R).$$

$$\text{Soit au premier ordre en } \eta : x''_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(1 + \frac{\eta}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\frac{R}{2}\left(1 + \frac{\eta}{2}\right) - \eta R\right]$$

$$x''_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}R\eta + \frac{\eta R}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{2R}{\sqrt{3}} + \frac{3R}{4\sqrt{3}}\eta + \frac{5\eta R}{4\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{\text{Finalement } x''_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}}[1 + \eta + o(\eta)] \Rightarrow x''_0 = x_0(1 + \eta + o(\eta)).}$$

L'écart δx des impacts $C'_1(x''_0)$ et $C(x_0)$ sur l'axe Ox est alors :

$$\delta x = x''_0 - x_0 \Rightarrow \boxed{\delta x \approx x_0\eta} \quad \left(x_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}}\right).$$

Ce dispositif constitue un **spectrographe de masse**, qui peut permettre de mettre en évidence la présence d'isotopes : on a dans ce cas $\frac{\delta m}{m} = \frac{1}{M}$ (M : nombre de masse).

- Pour une utilisation en spectrographe de masse, si on peut mesurer des écarts $\frac{\delta x}{x_0} \approx 5 \cdot 10^{-3}$, on aura comme limite de résolution :

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{1}{M} = \eta \sim 5 \cdot 10^{-3} \quad \text{soit} \quad M \approx 200.$$

Remarquons que l'on a intérêt, pour augmenter x_0 , à utiliser des tensions accélératrices élevées, et un champ magnétique pas trop grand...

543

Stabilisation par champ magnétique

Une particule chargée (masse m , charge $q < 0$) est soumise à un champ électrostatique extérieur associé au potentiel $V(x, y, z)$ tel que :

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{2a^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

a est une longueur et V_0 un potentiel ($V_0 > 0$).

- Montrer que la position $x = y = z = 0$ correspond à une position d'équilibre. Cet équilibre est-il stable ?

2. On désire, dans certaines circonstances, que la particule puisse rester piégée au voisinage de la position $x = y = z = 0$. À cet effet on ajoute un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ ($B_0 > 0$).

a. Que dire du mouvement selon Oz ?

b. On étudie la projection du mouvement dans le plan xOy . Écrire les équations du mouvement. On posera :

$$\omega_0^2 = \frac{-qV_0}{ma^2} \text{ et } \omega_c = \frac{-qB_0}{m}.$$

On cherche des solutions de la forme $x(t) = x_0 e^{pt}$ et $y(t) = y_0 e^{pt}$. Donner l'équation simple dont p est solution.

Discuter de la stabilité de l'équilibre en présence du champ \vec{B} .

Commenter.

3. On se place maintenant dans le référentiel tournant $Ox'y'z'$ avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ ($\Omega = \text{cste}$).

Comment faut-il choisir la valeur de Ω pour que l'équation du mouvement dans le plan $x'Oy'$ s'écrive :

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = G(\omega_0, \omega_c) \vec{r}' ?$$

Déterminer la fonction $G(\omega_0, \omega_c)$ puis conclure.

Solution

1. La particule est soumise à la force électrostatique $\vec{F} = -\nabla(qV)$, avec :

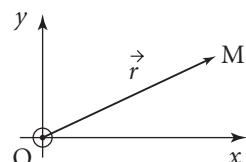
$$\vec{F} = -\frac{qV_0}{a^2}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y - 2z\vec{u}_z).$$

Une position d'équilibre correspond à $\vec{F} = \vec{0}$, c'est-à-dire à $x = y = z = 0$.

L'origine O est bien associée à une position d'équilibre ($\vec{F}(0, 0, 0) = \vec{0}$).

Montrons que cet équilibre est instable. Il suffit ici de constater que la particule est soumise, dans le plan xOy , à la force $\vec{F}_{||}$ telle que :

$$\vec{F}_{||} = \frac{(-q)V_0}{a^2} \vec{r} \quad \text{où} \quad \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y.$$



Cette force a naturellement tendance à éloigner la particule de sa position d'équilibre ce qui traduit l'instabilité ; par contre la force selon Oz — $\vec{F}_z = \frac{2qV_0}{a^2}z\vec{u}_z$ — présente un effet stabilisateur.

2. a. À la force précédente, s'ajoute la force magnétique $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Le champ $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ étant dirigé selon Oz, la force \vec{f}_m n'a aucune influence sur le mouvement selon $z'z$. La loi fondamentale de la dynamique donne, en projection sur Oz :

$$m\ddot{z} = +\frac{2qV_0}{a^2}z \Rightarrow \ddot{z} + 2\omega_0^2 z = 0$$

où l'on a posé $\omega_0^2 = \frac{(-q)V_0}{ma^2} > 0$.

Il s'agit du mouvement d'un oscillateur harmonique libre non amorti et de pulsation caractéristique $\omega'_0 = \sqrt{2}\omega_0$.

Soit avec des conditions initiales $z(0)$ et $\dot{z}(0)$:

$$z(t) = z(0)\cos\omega'_0 t + \frac{\dot{z}(0)}{\omega'_0} \sin\omega'_0 t$$

Ce résultat traduit également la stabilité de l'équilibre par rapport aux mouvements selon $z'z$.

2. b. La loi fondamentale de la dynamique s'écrit ici avec $\overrightarrow{OM} = \vec{r} + z\vec{u}_z$:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{qV_0}{a^2}(\vec{r} - 2z\vec{u}_z) + q\vec{v} \wedge B_0 \vec{u}_z$$

soit en projection sur le plan xOy :

$$m(\ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y) = -\frac{qV_0}{a^2}\vec{r} + q\vec{v} \wedge B_0 \vec{u}_z$$

ce qui donne :
$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{qV_0}{ma^2}x + \frac{qB_0}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{qV_0}{ma^2}y - \frac{qB_0}{m}\dot{x}. \end{cases}$$

Et en posant $\omega_0^2 = \frac{(-q)V_0}{ma^2}$ et $\omega_c = \frac{(-q)B_0}{m}$, on aboutit à :

$$(1) \quad \begin{cases} \ddot{x} = \omega_0^2 x - \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = \omega_0^2 y + \omega_c \dot{x} \end{cases} \text{ système d'équations couplées (rôle de } \vec{B} \text{).}$$

On cherche des solutions au système linéaire constitué par les équations (1) sous la forme $x(t) = x_0 e^{pt}$ et $y(t) = y_0 e^{pt}$. Reportant ces solutions dans (1) et (2) et sim-

plifiant par e^{pt} , il vient :
$$\begin{cases} p^2 x_0 = \omega_0^2 x_0 - \omega_c p y_0 \\ p^2 y_0 = \omega_0^2 y_0 + \omega_c p x_0 \end{cases}$$

soit encore
$$\begin{cases} (p^2 - \omega_0^2)x_0 + \omega_c p y_0 = 0 \\ -\omega_c p x_0 + (p^2 - \omega_0^2)y_0 = 0. \end{cases}$$

Il s'agit là d'un système de Cramer en x_0 et y_0 paramétré par p .

On obtient $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ pour $\begin{vmatrix} (p^2 - \omega_0^2) & \omega_c p \\ -\omega_c p & (p^2 - \omega_0^2) \end{vmatrix} = 0$.

Les valeurs de p (dans \mathbb{C}) sont donc solutions de l'équation :

$$(p^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_c^2 p^2 = 0 \Rightarrow p^4 + (\omega_c^2 - 2\omega_0^2)p^2 + \omega_0^4 = 0$$

Notons p_1^2 et p_2^2 les racines correspondantes. Elles vérifient :

$$p_1^2 p_2^2 = \omega_0^4 > 0 \quad \text{et} \quad p_1^2 + p_2^2 = 2\omega_0^2 - \omega_c^2.$$

$$\text{De plus, } \Delta = (\omega_c^2 - 2\omega_0^2)^2 - 4\omega_0^4 = \omega_c^4 - 4\omega_c^2\omega_0^2 = \omega_c^2(\omega_c^2 - 4\omega_0^2).$$

D'où :

- pour $\Delta < 0$, il vient $p_1^2 = \alpha + i\beta$ et $p_2^2 = \alpha - i\beta$ et par conséquent :

$p_1 = \pm(\alpha' + i\beta')$ et $p_2 = \pm(\alpha' - i\beta')$; les solutions en $e^{(\alpha' \pm i\beta')t} = e^{\alpha' t} e^{\pm i\beta' t}$ avec $\alpha' > 0$ divergeraient ce qui entraînerait l'instabilité.

- Pour $\Delta > 0$, les racines en p^2 sont réelles et négatives puisque $\Delta > 0$ assure également $p_1^2 + p_2^2 < 0$ ($p_1^2 p_2^2 > 0$ nous indiquant que les racines réelles sont de même signe). Dans ce cas, on a donc $p_1 = \pm i\alpha_1$ et $p_2 = \pm i\alpha_2$ ce qui correspond à des solutions sinusoïdales, donc bornées.

Pour assurer la stabilité de l'équilibre $x = y = z = 0$, il faut donc que l'on ait $\Delta > 0$, c'est-à-dire $\omega_c^2 > 4\omega_0^2$, ce qui donne :

$$\omega_c > 2\omega_0 \Rightarrow B_0 > \frac{2}{a} \sqrt{\frac{mV_0}{(-q)}} \quad (2)$$

Commentaires

• Le sens de \vec{B}_0 ne modifie en rien la conclusion (changer z en $-z$ et x en y n'affecte pas la nature physique du problème). On écrira donc la condition (2) sous la forme :

$$|B_0| > \frac{2}{a} \sqrt{\frac{mV_0}{(-q)}}.$$

• En présence du champ magnétique, on a toujours $E_m = E_c + E_p = \text{cste}$ (la force magnétique $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne travaille pas). Ainsi bien que le point O corresponde, pour le plan xOy , à un maximum d'énergie potentielle ($E_p(x, y, z=0) = \frac{qV_0}{2a^2}(x^2 + y^2)$, et $q < 0$), la force supplémentaire \vec{f}_m stabilise la charge q : dans ce cas, un maximum d'énergie potentielle n'est donc pas nécessairement associé à une position d'équilibre instable...

3. L'équation du mouvement dans \mathcal{R} s'écrit :

$$m\vec{a} = -\frac{qV_0}{a^2}\vec{r} + \frac{2qV_0}{a^2}zu_z\vec{u}_z + q\vec{v} \wedge \vec{B}_0\vec{u}_z \quad (3)$$

Le plus simple, pour passer dans le référentiel non galiléen \mathcal{R}' en rotation uniforme par rapport à \mathcal{R} , est d'exprimer l'accélération \vec{a} et la vitesse \vec{v} (grandeur définies dans \mathcal{R}) en fonction des grandeurs correspondantes dans \mathcal{R}' . Ainsi on a :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c \text{ avec } \begin{cases} \vec{a}_e = -\Omega^2 \vec{r}', \\ \vec{a}_c = 2\Omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}, \end{cases} \quad (\Omega = \text{cste} \text{ et } \vec{r}' = x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'})$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e \text{ où } \vec{v}_e = \vec{0} + \Omega \vec{u}_z \wedge \vec{r}'.$$

L'équation (3) devient, en projection sur $Ox'y'$ ($\vec{a}' = \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2}$):

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \omega_0^2 \vec{r}' + \omega_c \vec{u}_z \wedge (\vec{v}' + \Omega \vec{u}_z \wedge \vec{r}') + \Omega^2 \vec{r}' - 2\Omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}' \quad (4)$$

Il s'agit maintenant de supprimer les termes en \vec{v}' , ce qui est réalisé si on impose la relation $2\Omega = \omega_c$.

On obtient alors : $\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \left(\omega_0^2 + \frac{\omega_c^2}{4} \right) \vec{r}' + \frac{\omega_c^2}{2} \vec{u}_z \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{r}')$.

Le double produit vectoriel a pour valeur $-\frac{\omega_c^2}{2} \vec{r}'$ ($\vec{u}_z \perp \vec{r}'$), d'où :

$$(5) \quad \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \left(\omega_0^2 - \frac{\omega_c^2}{4} \right) \vec{r}' \Rightarrow G(\omega_0, \omega_c) = \omega_0^2 - \frac{1}{4} \omega_c^2.$$

La particule restera confinée dans un voisinage de O (point d'équilibre), dans \mathcal{R}' comme dans \mathcal{R} , si l'équation précédente (5) se réduit à celle d'un oscillateur harmonique, ce qui nécessite :

$$\omega_0^2 - \frac{\omega_c^2}{4} < 0 \Rightarrow |\omega_c| > 2\omega_0.$$

On retrouve bien la condition établie au **2. b.**

544

Optique électronique

Des électrons (masse m , charge $-e$) sont émis, avec une vitesse négligeable, par une source maintenue au potentiel zéro. Cette source est située du côté des z négatifs.

Ils pénètrent dans un domaine D dans lequel des électrodes assurent la répartition suivante du potentiel :

$$z < 0 : (V(x, y, z) = V_1 = \text{constante}) > 0.$$

$$z > a : (V(x, y, z) = V_2 = \text{constante}) \quad (V_2 > V_1).$$

Dans la zone intermédiaire ($0 \leq z \leq a$) le potentiel varie continûment entre les valeurs $V_1(z=0)$ et $V_2(z=a)$: $V(x, y, z) = f(z)$ avec $f(0) = V_1$ et $f(a) = V_2$.

1. Un électron arrive sur le plan $z = 0$ avec une vitesse \vec{v}_1 faisant un angle i_1 avec \vec{u}_z : $(\vec{u}_z, \vec{v}_1) = i_1$. L'électron ressort en $z = a$ avec une vitesse \vec{v}_2 faisant un angle i_2 avec \vec{u}_z : $(\vec{u}_z, \vec{v}_2) = i_2$. Déterminer la relation liant V_1, V_2, i_1, i_2 . Commenter.

2. Les équipotentialles sont maintenant des calottes sphériques concentriques d'axe Oz. On a $V = V_1$ pour $r = R_1$ et $V = V_2$ pour $r = R_2$. $V(r)$ variant continûment de V_1 à V_2 pour $R_2 < r < R_1$.

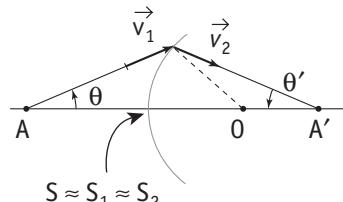
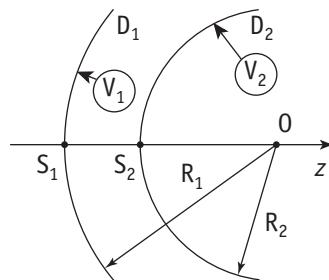
a. Reprendre l'étude précédente pour un électron ayant une vitesse \vec{v}_1 contenue dans un plan méridien.

b. Les électrons sont émis d'un point A de l'axe Oz situé à gauche de S_1 . Le dispositif est aménagé pour que leurs trajectoires soient assimilables à des droites en deçà du diopstre D_1 ainsi qu'au-delà du diopstre D_2 . On suppose que la relation établie au **2. a.** reste toujours valable.

Un électron émis de A recoupe l'axe des z (à droite de D_2) en un point A' . En supposant que $S_1 S_2 \ll R_1$ et R_2 , et que les vitesses prises en compte sont faiblement inclinées sur l'axe, montrer que l'on a :

$$\frac{\sqrt{V_1}}{SA'} - \frac{\sqrt{V_2}}{SA} = C \quad (S \neq S_1 \neq S_2)$$

où C est une constante que l'on déterminera en fonction de V_1, V_2 et de $\overline{SO} = R \sim R_1 \sim R_2$.



Solution

1. L'électron part de la source avec une vitesse négligeable (on la prendra nulle). Soumis au champ électrostatique, il possède une vitesse $\vec{v}(M)$ quand il atteint un point de l'espace de potentiel $V(M)$ et une énergie potentielle $E_p = qV = -eV$.

La conservation de l'énergie mécanique de l'électron s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}mv^2 - eV = 0 - 0$$

(au point d'émission on a $v \sim 0$ et $V = 0$).

D'où

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

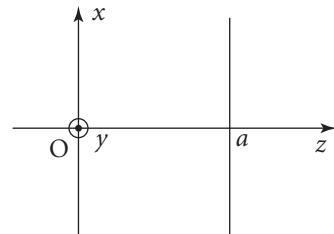
Quand il atteint le plan $z = 0$, sa vitesse est \vec{v}_1 et $V = V_1$: $v_1 = \sqrt{\frac{2eV_1}{m}}$ (1)

De même, on aura en $z = a$, $v_2 = \sqrt{\frac{2eV_2}{m}}$ (2)

- Étudions maintenant le passage $z = 0 \rightarrow z = a$: l'électron est soumis à la force électrostatique

$\vec{F} = (-e) \left(-\frac{dV}{dz} \right) \vec{u}_z = e \frac{dV}{dz} \vec{u}_z$ (puisque le potentiel $V(M)$ ne dépend, dans cette région, que de z). La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \text{cste} \\ v_y = \text{cste.} \end{cases}$$



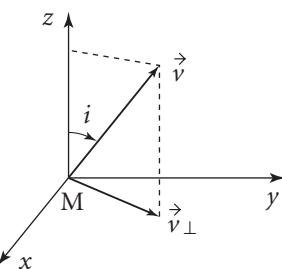
Ainsi la composante $\vec{v}_\perp(v_x, v_y, 0)$ de la vitesse, perpendiculaire à l'axe Oz est conservée.

Or : $\|v_\perp\| = v \sin i$.

D'où : $v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2$.

Soit en utilisant les relations (1) et (2) :

$$\boxed{\sqrt{V_1} \sin i_1 = \sqrt{V_2} \sin i_2} \quad (3)$$



Commentaire

• Le résultat trouvé au 1. s'apparente à la relation de Descartes en optique géométrique (passage à travers un « dioptre » plan d'un milieu d'indice n_1 proportionnel à $\sqrt{V_1}$ à un milieu d'indice n_2 proportionnel à $\sqrt{V_2}$ (même constante de proportionnalité)) : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

2. a. Les arguments précédents sur la conservation de l'énergie restent valables. On a

donc : $v_1 = \sqrt{\frac{2eV_1}{m}}$ et $v_2 = \sqrt{\frac{2eV_2}{m}}$.

Cette fois-ci, le potentiel ne dépend que de $r(r = OM)$ et le champ qui en résulte est donc radial :

$$V = V(r) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r.$$

Il en est de même de la force électrostatique $\vec{F} = -e\vec{E} = e \frac{dV}{dr} \vec{u}_r$.

L'électron est donc soumis à une force centrale dans la zone $R_2 < r < R_1$, son moment cinétique se conserve et le mouvement est plan (si la vitesse \vec{v}_1 passait par O le mouvement serait rectiligne). Un électron se déplaçant initialement dans un plan méridien y restera. Traduisons la conservation du moment cinétique en O :

$$\vec{\sigma}_1 = \overrightarrow{OM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 = -mR_1 v_1 \sin i_1 \vec{k}$$

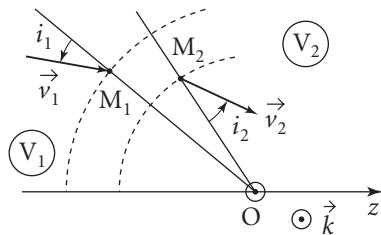
$$\vec{\sigma}_2 = \overrightarrow{OM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 = -mR_2 v_2 \sin i_2 \vec{k}.$$

Le passage $[r = R_1] \rightarrow [r = R_2]$ se traduit donc par la relation :

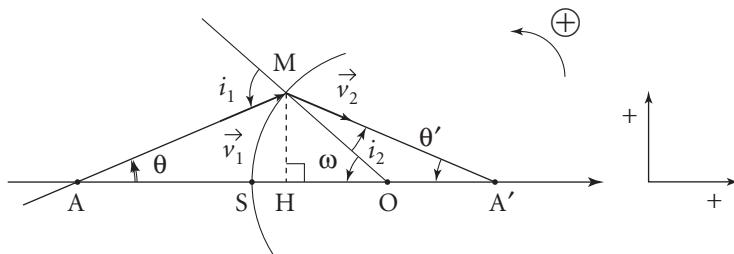
$$R_1 v_1 \sin i_1 = R_2 v_2 \sin i_2.$$

Soit encore :

$$R_1 \sqrt{V_1} \sin i_1 = R_2 \sqrt{V_2} \sin i_2 \quad (4)$$



2. b. Considérons, à l'approximation envisagée, que les points S_1 et S_2 sont pratiquement confondus ($S_1 \# S_2 = S$) et les angles i_1, i_2 suffisamment petits pour que l'on puisse assimiler la tangente et le sinus d'un angle à son argument ($\tan i \# \sin i \# i$).



$$\text{Dès lors : } \omega \# \frac{\overline{HM}}{\overline{HO}}, \theta \# \frac{\overline{HM}}{\overline{AH}} \text{ et } \theta' \# \frac{\overline{HM}}{\overline{HA'}} \quad (\text{posons } \delta = \overline{HM}).$$

À l'approximation considérée, on a également :

$$R_1 \# R_2 \Rightarrow S_1 O \# S_2 O = R \text{ avec } OH = R \cos \omega.$$

$$\text{On a donc } S_1 O = HO \text{ au second ordre près en } \omega \left(\cos \omega \# 1 - \frac{\omega^2}{2} \right).$$

Il est donc possible, dans une approximation au 1^{er} ordre (M voisin de S_1 et S_2) de confondre les points H et S d'où :

$$\omega \# \frac{\delta}{SO} \quad \theta \# \frac{\delta}{AS} \text{ et } \theta' \# \frac{\delta}{SA'}.$$

La relation (4) s'écrit en confondant R_1 et R_2 : $\sqrt{V_1} i_1 \# \sqrt{V_2} i_2$.

$$\text{Or : } i_1 = \theta + \omega \# \delta \left(\frac{1}{AS} + \frac{1}{SO} \right) \text{ et } i_2 = \omega - \theta' \# \delta \left(\frac{1}{SO} - \frac{1}{SA'} \right).$$

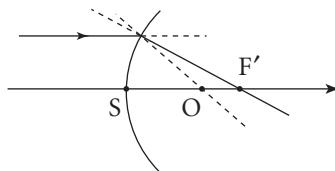
$$\text{D'où : } \sqrt{V_1} \left(\frac{1}{AS} + \frac{1}{SO} \right) = \sqrt{V_2} \left(\frac{1}{SO} - \frac{1}{SA'} \right).$$

$$\text{C'est-à-dire : } \frac{\sqrt{V_2}}{SA'} - \frac{\sqrt{V_1}}{SA} = \frac{\sqrt{V_2} - \sqrt{V_1}}{SO} \quad (5), \quad \text{soit : } C = \frac{\sqrt{V_2} - \sqrt{V_1}}{SO}.$$

On pourrait montrer que ce système est l'équivalent en optique d'un dioptre sphérique de centre O et de sommet S séparant des milieux d'indice n_1 et n_2 tels que $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{V_2}}{\sqrt{V_1}}$.

Le dioptre est convergent pour $V_2 > V_1$. Ainsi, pour A « rejeté à l'infini », le point A' se confondant alors avec le foyer F', la formule de conjugaison précédente (5) donne :

$$\frac{\sqrt{V_2}}{SF'} = \frac{\sqrt{V_2} - \sqrt{V_1}}{SO}$$



545

Lentille magnétique

1. Des électrons de masse m et de charge $-e$ ($e > 0$) sont émis à partir du point O de l'axe Oz avec des vitesses de même module V_0 ($\vec{V}_0 \cdot \vec{u}_z > 0$). Ils sont soumis à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. On note α l'angle entre l'axe Oz et la vitesse \vec{V}_0 : $\alpha = (\vec{u}_z, \vec{V}_0)$.

Montrer que pour des angles α suffisamment petits, les électrons convergent, pour la première fois, en un point C de l'axe Oz dont on déterminera la cote z_C en fonction des grandeurs m , e , B_0 et V_0 .

2. On suppose maintenant que les électrons, de vitesse de norme fixée V_0 , sont soumis à l'action d'un champ magnétique de révolution par rapport à l'axe z'Oz de composantes :

$$B_z(r, z) = f(z); \quad B_r(r, z) = -\frac{r df}{2 dz}; \quad B_\theta = 0$$

(r, θ, z) représentent les coordonnées cylindriques d'axe Oz.

Un électron est ainsi repéré par ses coordonnées $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$.

(Ce champ est par exemple celui créé, sur son axe Oz, par une bobine de centre O.)

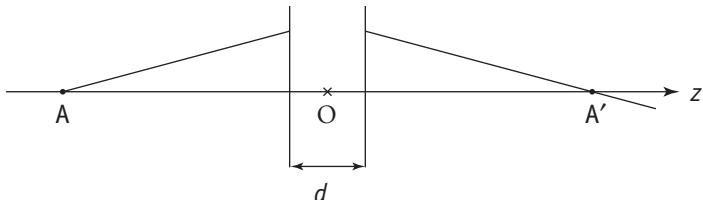
a. Montrer que l'on a $r^2 \dot{\theta} = \frac{e}{2m} r^2 B_z + \text{cste}$; on prendra par la suite cste = 0.

b. On considère désormais les trajectoires **peu inclinées** sur l'axe Oz, et on pose $r(t) = \rho[z(t)]$. Montrer que la fonction $\rho(z)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} + \frac{e^2 B_z^2(z)}{4mV_0^2} \rho = 0.$$

En déduire, dans ces conditions, que si un électron passe par un point A de l'axe Oz et recoupe cet axe en un point A', cette propriété ne dépend pas de l'angle α (petit) que fait la vitesse \vec{V}_0 en A avec l'axe Oz. On dira que les points A et A' sont conjugués.

c. a) On suppose maintenant que la région où le champ \vec{B} exerce une action significative reste **très localisée** autour du point O.



Notons d l'ordre de grandeur de la largeur de la zone en dehors de laquelle le champ \vec{B} est négligeable. On fera les hypothèses suivantes :

- \vec{B} est négligeable pour $|z| > \frac{d}{2}$: on le prendra nul ;
- $d \ll OA$ et $d \ll OA'$;
- la distance $r(z)$ de l'électron à l'axe Oz ne varie pas dans la zone étroite d'interaction ;
- on confondra $\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} B_z^2 dz$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} B_z^2 dz$.

Montrer que le système est alors équivalent à une lentille mince dont on donnera l'expression de la distance focale f' .

β) Déterminer f' pour $B_z = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}$. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{\pi}{2}$.

Application numérique :

Calculer f' pour $B_0 = 0,01$ Tesla ; $a = 5$ mm ; $V_0 = 2,5 \cdot 10^7$ ms⁻¹ ; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

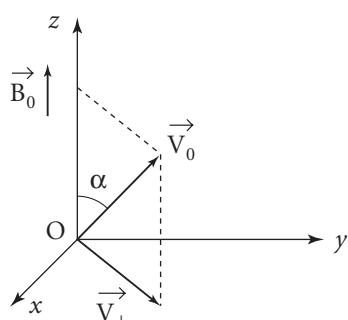
Solution

1. L'électron est soumis à la force magnétique $\vec{f}_m = -e\vec{V} \wedge \vec{B}_0$. Cette force ne produit aucun travail de sorte que l'énergie cinétique se conserve. On a donc :

$$\|\vec{V}\| = \text{cste} = V_0.$$

De plus, \vec{B}_0 étant orienté selon Oz, \vec{f}_m n'a pas de composante selon cet axe, d'où :

$$V_z = \text{cste} = V_0 \cos \alpha.$$



Le mouvement en projection dans le plan Oxy est circulaire, de rayon R tel que :

$$\frac{mV_{\perp}^2}{R} = eV_{\perp}B_0 \Rightarrow \frac{V_{\perp}}{R} = \frac{eB_0}{m}.$$

Ce cercle est donc décrit avec une pulsation $\omega = \frac{eB_0}{m}$ et une durée $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

La particule recoupera pour la première fois l'axe des z au bout d'un temps $t = T$, soit en un point C tel que :

$$z_C = V_z T \Rightarrow z_C = \frac{2\pi m}{eB_0} V_0 \cos \alpha.$$

Pour α infiniment petit du premier ordre, on a $\cos \alpha \approx 1$ et :

$$z_C \approx \frac{2\pi m V_0}{eB_0}$$

Ainsi, à cette approximation, les électrons passant par le point O, avec une vitesse V_0 peu inclinée sur l'axe, convergent au même point C de cet axe.

2. L'électron est soumis à la force $\vec{f}_m = -e\vec{V} \wedge (\vec{B}_r \vec{u}_r + \vec{B}_z \vec{u}_z)$.

La vitesse garde donc une norme constante $\|\vec{V}\| = V_0$. Appliquons la loi fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{f}_m.$$

$$\vec{f}_m = -e \begin{vmatrix} \dot{r} & B_r \\ r\dot{\theta} & 0 \\ \dot{z} & B_z \end{vmatrix} = -e \begin{vmatrix} \dot{r}\theta B_z & \vec{u}_r \\ \dot{z}B_r - \dot{r}B_z & \vec{u}_{\theta} \\ -r\dot{\theta}B_r & \vec{u}_z \end{vmatrix}$$

Et d'après le cours, $\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_{\theta} \vec{u}_{\theta} + a_z \vec{u}_z$ avec :

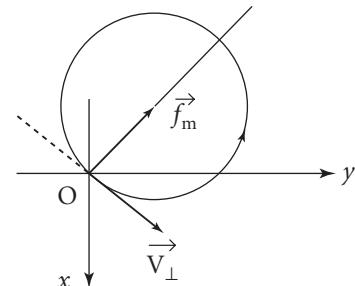
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2; \quad a_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}); \quad a_z = \ddot{z}.$$

D'où le système d'équations :

$$\left\{ m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -er\dot{\theta}B_z \right. \quad (1)$$

$$\left\{ m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = -e(\dot{z}B_r - \dot{r}B_z) \right. \quad (2)$$

$$\left\{ m\ddot{z} = e r\dot{\theta}B_r \right. \quad (3)$$



La relation demandée peut être obtenue à partir de (2). On a en effet :

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -\frac{e}{m}\left[-\frac{r^2}{2}\frac{df}{dz}\frac{dz}{dt} - f(z)r\frac{dr}{dt}\right].$$

Soit $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{e}{2m}\left[r^2\frac{df}{dt} + f(z)\frac{dr^2}{dt}\right]$, en considérant que l'on a $f[z(t)]$

et $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{e}{m}\frac{d}{dt}[r^2f] \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \frac{e}{2m}r^2f + \text{cste}$

Et pour des électrons émis sur l'axe ($r = 0$) ou dans une région où $B = 0$ et avec $\dot{\theta} = 0$, on a :

$$\dot{\theta} = \frac{e}{2m}f[z(t)] \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{e}{2m}B_z[z(t)] \quad (4)$$

2. b. À un instant t , la particule se situe en un point M de coordonnées $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$. Dans le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ tournant autour de Oz à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, la trajectoire de l'électron est associée à $\rho(z)$ tel que :

$$r(t) = \rho[z(t)].$$

Utilisons alors l'équation (1). Elle donne avec (4) :

$$\ddot{r} - r\frac{e^2}{4m^2}B_z^2 = -\frac{e}{m}rB_z\left(\frac{e}{2m}B_z\right).$$

Soit $\ddot{r} + \frac{e^2}{4m}B_z^2r = 0 \quad (5)$

or $\frac{dr}{dt} = \frac{dp}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$ avec $\frac{dz}{dt} = V_z = V_0 \cos \alpha$ ($\alpha = (\vec{u}_z, \vec{V})$).

Pour des trajectoires peu inclinées sur l'axe, on pourra faire, au premier ordre en α , $\cos \alpha \sim 1$ et $\frac{dz}{dt} \sim V_0$, d'où :

$$\frac{dr}{dt} \sim \frac{dp}{dz}V_0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2r}{dt^2} \sim \frac{d^2p}{dz^2}V_0^2$$

(5) se réécrit alors selon :

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} + \frac{e^2}{4m^2V_0^2}B_z^2\rho = 0 \quad (6) \text{ où } B_z^2 = f^2(z).$$

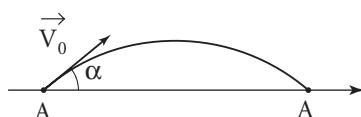
La solution générale à cette équation différentielle linéaire du second ordre s'exprime à partir de deux solutions $\rho_1(z)$ et $\rho_2(z)$ formant un système libre. On a donc :

$$\rho(z) = \lambda\rho_1(z) + \mu\rho_2(z).$$

L'électron passe par le point A ($\rho = 0$ pour $z = z_A$), ce qui se traduit par :

$$0 = \lambda\rho_1(z_A) + \mu\rho_2(z_A)$$

avec une vitesse de composante verticale $\dot{r}_A = V_0 \sin \alpha \sim V_0 \alpha$.



$$\text{Soit : } \dot{r}_A = \frac{dr}{dt} \Big|_A \# \frac{d\rho}{dz} \Big|_A \cdot V_0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dz} \Big|_A \sim \alpha.$$

$$\text{D'où : } \alpha = \lambda \frac{d\rho_1}{dz}(z_A) + \mu \frac{d\rho_2}{dz}(z_A).$$

Il vient alors $\lambda = \alpha\lambda'$ et $\mu = \alpha\mu'$, les grandeurs λ' et μ' s'exprimant en fonction de $\rho_1(z_A)$, $\rho_2(z_A)$, $\frac{d\rho_1}{dz}(z_A)$ et $\frac{d\rho_2}{dz}(z_A)$.

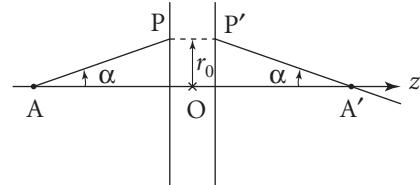
$$\text{Soit } \rho(z) = \alpha[\lambda'\rho_1(z) + \mu'\rho_2(z)]. \quad (7)$$

Ainsi, si la trajectoire de l'un de ces électrons (issus de A) recoupe l'axe Oz en un point A' , c'est-à-dire si l'on a $\rho(z_{A'}) = 0$, il en sera de même pour tous les autres électrons (dans le cadre des approximations envisagées : α faible). En effet, la condition $\rho(z_{A'}) = 0$ est réalisée pour $\lambda'\rho_1(z_{A'}) + \mu'\rho_2(z_{A'}) = 0$ indépendamment de la valeur – petite – de α .

Les points A et A' sont dits conjugués.

2. c. α) D'après les hypothèses de l'énoncé, on peut considérer que les trajectoires des particules sont assimilables à des droites pour $|z| > \frac{d}{2}$. Un tel électron pénètre dans

la zone d'interaction avec une vitesse \vec{V}_0 incliné de α sur l'axe Oz de telle sorte que :



$$\frac{d\rho}{dz} \Big|_P \# \frac{r_0}{AO} \quad (\text{OA} \gg d).$$

De même, après interaction :

$$\frac{d\rho}{dz} \Big|_{P'} \# \frac{r_0}{A'O} \quad (\text{sur la figure } \overline{A'O} < 0 \text{ et } \overline{AO} > 0).$$

On a considéré que la distance à l'axe $r(t)$ ne variait pas lors de la traversée de la zone d'interaction très étroite.

Intégrons alors l'équation (6) par rapport à z :

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{d^2\rho}{dz^2} dz = -\frac{e^2}{4m^2V_0^2} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho B_z^2 dz.$$

Soit encore en faisant $\rho \approx r_0$ dans la deuxième intégrale :

$$\frac{d\rho}{dz} \Big|_{P'} - \frac{d\rho}{dz} \Big|_P \# -\frac{e^2}{4m^2V_0^2} r_0 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} B_z^2 dz.$$

Mais le champ B étant négligeable au-delà de la zone $|z| \leq \frac{d}{2}$, on peut étendre l'inté-

$$\text{grale de } -\infty \text{ à } +\infty, \text{ d'où : } \frac{r_0}{A'O} - \frac{r_0}{AO} \# r_0 \left(-\frac{e^2}{4m^2V_0^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} B_z^2 dz.$$

Soit après simplification par r_0 : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'} = \frac{1}{f'}$ (8).

Avec
$$\frac{1}{f'} \# \frac{e^2}{4m^2V_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_z^2 dz$$

La relation (8) s'identifie à la formule de conjugaison des lentilles minces.

Le système proposé correspond, pour les charges, à une **lentille magnétique convergente** (f' défini positif).

2. c. β) Un calcul immédiat donne :

$$\frac{1}{f'} = \frac{e^2}{4m^2V_0^2} B_0^2 a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{z}{a}\right)}{\left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^2} \Rightarrow f' = \frac{8m^2V_0^2}{\pi e^2 B_0^2 a}$$

Application numérique : $f' = 10$ cm.

Chapitre

6

Thermodynamique

- A . Hydrostatique et gaz parfait
- B . Bilans d'énergie
- C . Bilans d'énergie et d'entropie
- D . Corps pur diphasé
- E . Machines thermiques

A. Hydrostatique et gaz parfait

601 Baromètre

1. Baromètre de Huyghens : cet appareil est constitué – sur une cuve à mercure (A), où le mercure a une surface libre d'aire S_0 – d'un tube barométrique comportant un renflement (B) de section S_1 surmonté d'un tube (C) plus fin, de section S_2 .

Pour une valeur P_0 de la pression atmosphérique, le mercure monte, à l'équilibre, jusqu'à un niveau N_1 dans B, celui-ci étant surmonté de glycérine (de masse volumique μ) jusqu'au niveau N_2 . Le mercure dans la cuve correspond au niveau N_0 .

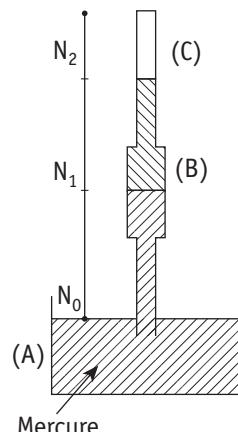
On suppose que le tube au-dessus de la glycérine est vide.

La pression atmosphérique varie légèrement, et devient $P = P_0 + \Delta P$, ce qui correspond à une variation ΔH de la pression atmosphérique exprimée en hauteur de mercure ($\Delta P = \rho g \Delta H$, ρ étant la masse volumique du mercure).

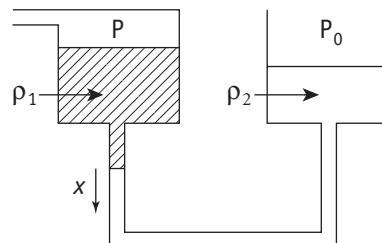
a. Exprimer la variation ΔN du niveau atteint par la glycérine, par rapport à sa position d'équilibre antérieure.

b. Application numérique : $S_0 = 50 \text{ cm}^2$; $S_1 = 5 \text{ cm}^2$; $S_2 = 0,25 \text{ cm}^2$; $\mu = 1,05 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $\rho = 13,6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Calculer $\frac{\Delta N}{\Delta H}$. Quel est l'intérêt de ce dispositif ?



2. Manomètre différentiel : deux cuves de même section S sont reliées par un tube de section s (cf. figure). À gauche, le liquide de masse volumique ρ_2 est surmonté d'un liquide de masse volumique ρ_1 ($\rho_1 < \rho_2$) soumis à sa surface supérieure à une pression P . Au-dessus de la cuve de droite, s'exerce la pression atmosphérique constante P_0 .



L'appareil étant en équilibre pour $P = P_0$, la pression P subit une petite variation, et devient $P = P_0 + \delta P$.

a. Exprimer le déplacement x de la surface de séparation des deux liquides.

b. Application numérique :

On donne $\frac{S}{s} = 10$; $\rho_2 = 1,024 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $\rho_1 = 0,998 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Calculer $\frac{x}{\delta P}$. Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de l'hydrostatique.

2. Ce qu'il faut comprendre

Dans les deux cas, il faut exprimer le fait que la pression varie verticalement dans un fluide en équilibre ($\frac{dP}{dz} = -\rho g$), et qu'elle garde la même valeur en deux points d'un même fluide situés à la même altitude ($P = P(z)$ seulement à l'intérieur d'une zone de fluide homogène).

Lorsque la pression varie, les niveaux d'équilibre des différents liquides sont modifiés, y compris dans la cuve (A), les variations de ces niveaux étant liées par la conservation du volume de chacun des liquides (que l'on suppose bien sûr incompressibles : leurs masses volumiques sont données comme constantes).

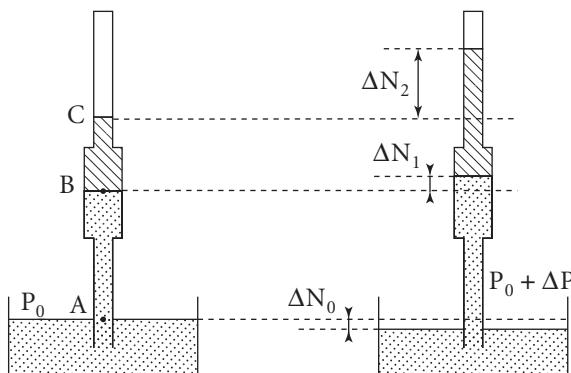
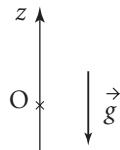
3. Solution

1. a. Considérons un fluide incompressible de masse volumique ρ_0 soumis au seul champ de pesanteur $\vec{g} = -g\hat{u}_z$. La loi de l'hydrostatique s'écrit :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho_0 \vec{g} = \vec{0}.$$

Par projection sur Oz, il vient :

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0(-g) = 0 \Rightarrow P(z) = \text{cste} - \rho_0 g z.$$



Considérons que les niveaux correspondent à des hauteurs (exprimées en mètre). Dans le premier état, ($P = P_0$) la pression en A vaut P_0 , et d'après la loi de l'hydrostatique, on a : $P_A = (P_A - P_B) + (P_B - P_C) + P_C$

or $P_A - P_B = \rho g(N_1 - N_0)$; $P_B - P_C = \mu g(N_2 - N_1)$ et $P_C = 0$ (cf. énoncé).

D'où : $P_0 = \rho g(N_1 - N_0) + \mu g(N_2 - N_1)$ (1)

quand la pression extérieure passe à $P_0 + \Delta P$, les niveaux varient respectivement de ΔN_1 , ΔN_2 et ΔN_0 ($\Delta N_1 > 0$ $\Delta N_2 > 0$ et $\Delta N_0 < 0$ pour $\Delta P > 0$).

On a ainsi :

$$P_0 + \Delta P = \rho g(N_1 + \Delta N_1 - N_0 - \Delta N_0) + \mu g(N_2 + \Delta N_2 - N_1 - \Delta N_1) \quad (2)$$

Et en faisant la différence (2) – (1) :

$$\Delta P = \rho g(\Delta N_1 - \Delta N_0) + \mu g(\Delta N_2 - \Delta N_1).$$

Il reste à traduire la conservation du volume :

– du mercure, soit : $S_1 \Delta N_1 = -S_0 \Delta N_0$ ($\Delta N_0 < 0$ pour $\Delta N_1 > 0$)

– de la glycérine, soit $S_2 \Delta N_2 = S_1 \Delta N_1$.

Éliminons ΔN_1 et ΔN_0 et faisons $\Delta N_2 = \Delta N$:

$$\Delta P = g \Delta N \left[\rho \left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_1 S_2}{S_0 S_1} \right) + \mu \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right) \right]$$

or $\Delta P = \rho g \Delta H$ (ΔH = variation de pression exprimée en hauteur de mercure).

$$\text{D'où } \Delta H = \Delta N \left[\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_2}{S_0} + \frac{\mu}{\rho} \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right) \right]$$

et

$$\boxed{\frac{\Delta N}{\Delta H} = \frac{1}{\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_2}{S_0} + \frac{\mu}{\rho} \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right)}}$$

1. b. Avec les valeurs fournies, l'application numérique donne :

$$\frac{\Delta N}{\Delta H} = 7,79.$$

La variation de niveau est notablement plus importante que la variation ΔH de hauteur de la colonne de mercure d'un tube barométrique « ordinaire » : la sensibilité du baromètre a été augmentée.

En effet, avec un tube barométrique ordinaire, on aurait :

$$H = H_0 + \Delta H = H_0 + x \left(1 + \frac{s}{S} \right)$$

$$\text{soit : } \frac{x}{\Delta H} = \frac{1}{1 + \frac{s}{S}}$$

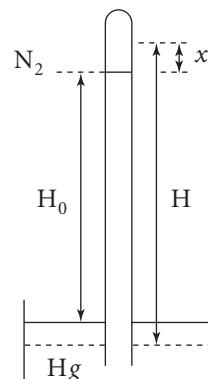
$$\text{et, en prenant } s = S_2 : \frac{x}{\Delta H} = 0,995 \# 1$$

d'où $x \# \Delta H$ pour un tube barométrique ordinaire.

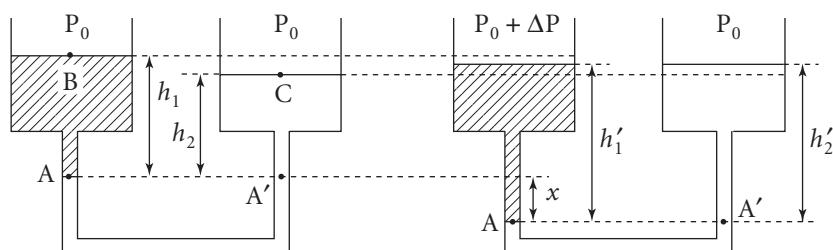
Par contre : $\Delta N = 7,79 \Delta H \# 7,8 \cdot x$;

le rapport $\frac{\Delta N}{\Delta H}$ exprime bien – à très peu près – le gain

en sensibilité dû au dispositif adopté...



2. a.



L'équilibre hydrostatique se traduit dans le premier cas par :

$$P_A = P_{A'} \text{ avec } P_A = P_0 + \rho_1 gh_1 \text{ et } P_{A'} = P_0 + \rho_2 gh_2.$$

$$\text{Soit } \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \quad (3)$$

Puis pour le nouvel équilibre :

$$P_A = P_{A'} \text{ avec } P_A = P_0 + \Delta P + \rho_1 gh'_1 \text{ et } P_{A'} = P_0 + \rho_2 gh'_2.$$

$$\text{Soit } \Delta P = (\rho_2 h'_2 - \rho_1 h'_1)g \quad (4)$$

Traduisons maintenant la conservation des volumes des deux fluides :

$$\left. \begin{aligned} xs &= (h_1 + x - h'_1)S \Rightarrow h_1 - h'_1 = x\left(\frac{s}{S} - 1\right) \\ xs &= (h'_2 - x - h_2)S \Rightarrow h'_2 - h_2 = x\left(\frac{s}{S} + 1\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$(3) \text{ et } (4) \text{ donnent alors : } \Delta P = [\rho_2(h'_2 - h_2) - \rho_1(h'_1 - h_1)]g$$

$$\text{Soit avec (5) : } \Delta P = \left[\rho_2 \left(1 + \frac{s}{S} \right) - \rho_1 \left(1 - \frac{s}{S} \right) \right] g x.$$

D'où

$$\boxed{\frac{x}{\Delta P} = \frac{1}{\left[(\rho_2 - \rho_1) + \frac{s}{S}(\rho_2 + \rho_1) \right] g}}$$

$$\text{2. b. Application numérique : } \frac{x}{\Delta P} = 4,47 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{Pa}^{-1}$$

$$\text{soit } \frac{x}{\Delta P} \approx 0,45 \text{ mm} \cdot \text{Pa}^{-1}, \text{ ce qui correspond à une sensibilité élevée.}$$

Pour s'en convaincre, on peut comparer à ce que donnerait un manomètre constitué d'un simple tube en U rempli d'un liquide de masse volumique $\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$:

$$P = P_0 + \Delta P = P_0 + 2x' \rho g$$

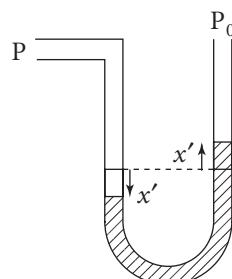
soit :

$$\frac{x'}{\Delta P} = \frac{1}{2\rho g} = \frac{1}{g(\rho_1 + \rho_2)}$$

d'où, en comparant x à x' :

$$\frac{x}{x'} = \frac{1}{\frac{s}{S} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}} = 8,86$$

ce qui montre bien l'amélioration de la sensibilité...



602 Cône au fond d'un récipient

Un cône de hauteur h et de base circulaire de rayon R repose sur le fond d'un récipient contenant de l'eau sur une hauteur H . La pression extérieure est supposée uniforme et égale à P_0 . La masse volumique de l'eau est ρ_e .

On cherche à déterminer la résultante \vec{F}_P des efforts de pression s'exerçant sur la surface latérale du cône.

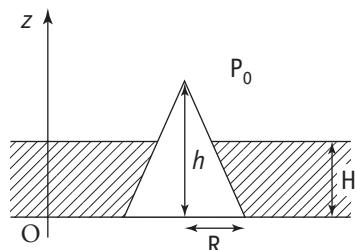
1. Déterminer la force \vec{F}_P en utilisant la notion de poussée d'Archimède. On envisagera deux cas et on tracera la courbe donnant

$$F_P = \|\vec{F}_P\| \text{ en fonction de } X = \frac{h}{h}$$

On fera les approximations nécessaires, tenant compte d'une masse volumique de l'eau à peu près 1 000 fois supérieure à celle de l'air.

On pourra exprimer tous les résultats en fonction des grandeurs : $F_0 = \pi R^2 P_0$ et $F_1 = \rho_e g V$ où V désigne le volume du cône ($V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$).

2. Retrouver les résultats précédents en effectuant un calcul direct de \vec{F}_P . Commenter.



1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de l'hydrostatique.
- Poussée d'Archimède.

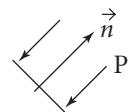
2. Ce qu'il faut comprendre

1. Pour appliquer correctement le théorème d'Archimède, il est nécessaire que le solide soit entièrement entouré de fluide(s). Il en est ainsi si l'on imagine le cône maintenu en position par rapport au niveau haut de l'eau et que l'on abaisse le niveau bas.

La poussée d'Archimède \vec{P}_A comprend alors la résultante \vec{F} des efforts de pression qui s'exercent alors sur la surface de base du cône, et qu'il faudra donc retrancher pour obtenir \vec{F}_P .

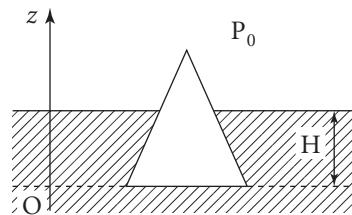
2. Il suffit de se rappeler que la force élémentaire s'exerçant sur un élément de surface $\delta\Sigma$ est donnée par l'expression : $\delta\vec{F} = -P\vec{n}\delta\Sigma$.

On intégrera sur toute la surface latérale du cône, et on tiendra compte des symétries du système.



3. Solution

1. La résultante des forces de pression s'exerçant sur la surface latérale n'est pas modifiée si l'on décale le fond du récipient vers le bas tout en maintenant fixe le cône. Dans cette configuration, la résultante des efforts de pression sur la surface totale du cône s'identifie à la poussée d'Archimède \vec{P}_A .



Nous avons donc : $\vec{P}_A = \vec{F}_p + \vec{F}'$ (1) avec $\vec{P}_A = -m_{\text{fluides déplacés}} \vec{g}$

où \vec{F}' est associée aux efforts de pression qui s'exercent sur la base du cône. Il vient :

$$\vec{F}' = [P_0 + \rho_e g H] \pi R^2 \vec{u}_z \quad (2)$$

En effet, la loi de l'hydrostatique s'écrit ici : $-\frac{dP}{dz} - \rho_e g = 0$

soit avec $\rho = \rho_e = \text{cste} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho_e g = \text{cste}$.

Et après intégration : $P(z) = P(H) - \rho_e g(z - H) = P_0 - \rho_e g(z - H)$.

Pour $z = 0$, nous obtenons donc $P = P_0 + \rho_e gH$.

(1) et (2) donnent : $\vec{F}_p = \vec{P}_A - \pi R^2 (P_0 + \rho_e gH) \vec{u}_z$. (3)

Il reste à déterminer la poussée d'Archimède dans la configuration précisée ci-dessus.

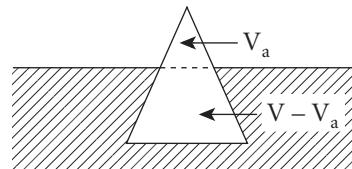
Elle est égale et opposée au poids des fluides déplacés. Deux cas sont donc à envisager :

$\alpha)$ $H \geq h$, le cône est entouré d'eau de telle sorte que : $\vec{P}_A = -\rho_e V \vec{g} = \rho_e V g \vec{u}_z$ (4)

$\beta)$ $0 < H < h$, le cône n'est que partiellement immergé dans l'eau ce qui donne :

$$\vec{P}_A = -[\rho_a V_a + \rho_e (V - V_a)] \vec{g}$$

V_a désigne le volume « baigné » par l'air.



Il faut alors remarquer que la masse volumique de

l'eau est bien supérieure à celle de l'air ($\frac{\rho_e}{\rho_a} \sim 10^3$), ce qui permet d'adopter le cadre d'hypothèses suivant :

H1 – La pression dans l'air est uniforme et vaut P_0 .

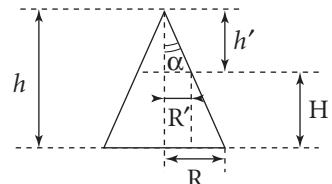
H2 – La contribution de la poussée d'Archimède due à l'air est négligée ce qui impose :

$$\vec{P}_A \approx -\rho_e (V - V_a) \vec{g} \quad (5)$$

En toute rigueur, il faudrait que l'on ait $\rho_e (V - V_a) \gg \rho_a V_a$; cependant, pour $V_a = V$,

on a $\vec{P}_A = -\rho_a V \vec{g} = +\frac{1}{3} \pi R^2 \rho_a h g \vec{u}_z$ grandeur qui est effectivement négligeable dans la mesure où l'on a fait l'hypothèse H1, qui revient à ne pas tenir compte de la chute de pression ($\rho_a h g$) sur la hauteur du cône...

Calculons V et V_a : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$
 $V_a = \frac{1}{3}\pi R'^2 h'$ et $\tan \alpha = \frac{R}{h} = \frac{R'}{h'}$
d'où $V_a = \frac{1}{3}\pi R^2 h \left(\frac{h'}{h}\right)^3$ avec $h' = h - H$
soit $V_a = V \left[1 - \frac{H}{h}\right]^3$.



À cette approximation, nous obtenons donc: $\vec{P}_A \# \rho_e g V \left[1 - \left(1 - \frac{H}{h}\right)^3\right] \vec{u}_z$.

Nous pouvons maintenant donner l'expression de la force \vec{F}_P :

$$\text{a) } H \geq h : \quad \vec{F}_P = \rho_e V g \vec{u}_z - \pi R^2 (P_0 + \rho_e g H) \vec{u}_z$$

$$\text{D'où :} \quad \vec{F}_P = \left\{ -\pi R^2 P_0 - \rho_e g V \left(\frac{3H}{h} - 1 \right) \right\} \vec{u}_z.$$

Et avec les notations du texte $F_0 = \pi R^2 P_0$, $F_1 = \rho_e g V$:

$$\boxed{\vec{F}_P = \left\{ -F_0 - F_1 \left(3 \frac{H}{h} - 1 \right) \right\} \vec{u}_z} \quad (6)$$

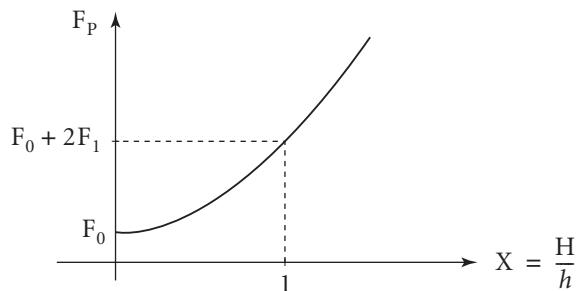
Dans ce cas, la pression varie linéairement en fonction de H en tout point de la surface latérale du cône, il en est donc de même de la force \vec{F}_P :

$$\text{b) } H \leq h : \quad \vec{F}_P = \rho_e g V \left[1 - \left(1 - \frac{H}{h} \right)^3 \right] \vec{u}_z - \pi R^2 (P_0 + \rho_e g H) \vec{u}_z.$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{\vec{F}_P = - \left\{ F_0 + F_1 \left[\frac{3H}{h} - 1 + \left(1 - \frac{H}{h} \right)^3 \right] \right\} \vec{u}_z} \quad (7)$$

Il y a bien continuité de \vec{F}_P (conférer (6) et (7)) pour $h = H$.

Traçons le graphe donnant F_P ($\vec{F}_P = -F_P \vec{u}_z$) en fonction de la variable $X = \frac{H}{h}$:



On a $F_P(0) = F_0$; $F(1) = F_0 + 2F_1$.

• Remarquons enfin que le solide reposera (sans intervention extérieure) sur le fond du récipient que si son poids est supérieur à la poussée d'Archimède, soit pour :

$$Mg > \rho_e (V - V_a) \text{ pour } H < h$$

$$Mg > \rho_e V \text{ pour } H > h.$$

2. On a : $\vec{F}_P = - \iint P(M) \vec{n} \delta\Sigma$.

La répartition des efforts de pression possède la symétrie de révolution autour de l'axe Az du cône, de telle sorte que la résultante de ces efforts est colinéaire à \vec{u}_z soit :

$$\vec{F}_P = (\vec{F}_P \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z = \left\{ - \iint P(M) \vec{n} \cdot \vec{u}_z \delta\Sigma \right\} \vec{u}_z = -F_P \vec{u}_z.$$

Notons que $\vec{n} \cdot \vec{u}_z = \sin \alpha$.

Pour calculer $\delta\Sigma$, considérons la portion de la surface du cône située entre les plans de cotes z et $z + dz$; nous avons :

$$\delta\Sigma = 2\pi r dl, \text{ avec } dl \cos \alpha = dz.$$

De plus, $\tan \alpha = \frac{r(z)}{-z}$ (origine prise au sommet A du cône)

$$\text{soit } \delta\Sigma = -2\pi z \tan \alpha \frac{dz}{\cos \alpha} \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{u}_z \delta\Sigma = -2\pi z \tan^2 \alpha dz.$$

D'où

$$\boxed{F_P = -2\pi \tan^2 \alpha \int_{-h}^0 P(z) z dz} \quad (8)$$

Envisageons alors les deux cas de figure selon que le cône est complètement immergé ou non dans l'eau :

a) $H \geq h$:

$P(z) = P_0 + \rho_e g(H - h - z)$ puisque la pression doit augmenter lorsque $(-z)$ croît.

L'intégrale (8) s'écrit alors :

$$F_P = -2\pi \tan^2 \alpha \int_{-h}^0 [P_0 + \rho_e g(H - h - z)] z dz$$

ce qui donne :

$$F_P = -2\pi \tan^2 \alpha \left[P_0 \cdot \left(\frac{-h^2}{2} \right) + \rho_e g(H - h) \cdot \left(\frac{-h^2}{2} \right) - \rho_e g \frac{h^3}{3} \right].$$

Soit avec $\tan \alpha = \frac{R}{h}$ (et donc $R = h \tan \alpha$) : $F_P = \pi R^2 P_0 + \pi R^2 \rho_e g \left[H - h + \frac{2h}{3} \right]$.

Finalement, nous obtenons avec $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$:

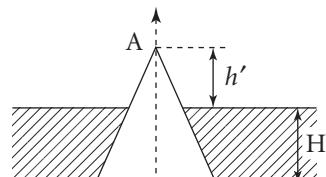
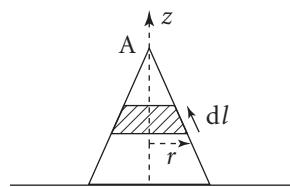
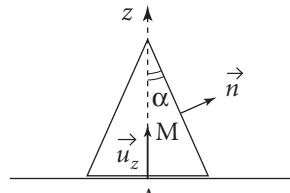
$$\boxed{F_P = \pi R^2 P_0 + \rho_e g V \left[\frac{3H}{h} - 1 \right]}$$

b) $H \leq h$:

Rappelons que $h' = h - H$, d'où :

$P = P_0$ pour $-(h - H) \leq z \leq 0$.

$P = P_0 + \rho_e g(H - h - z)$ pour $-h \leq z \leq -(h - H)$.



L'intégrale devient ici :

$$\begin{aligned} F_P &= -2\pi \tan^2 \alpha \left\{ \int_{-h}^{-(h-H)} [P_0 + \rho_e g(H-h-z)z dz] + \int_{-(h-H)}^0 P_0 z dz \right\} \\ F_P &= -2\pi \tan^2 \alpha \left\{ [P_0 + \rho_e g(H-h)] \left[\frac{(h-H)^2}{2} - \frac{h^2}{2} \right] \dots \right. \\ &\quad \left. + \rho_e g \left[\frac{(h-H)^3}{3} - \frac{h^3}{3} \right] - P_0 \left(\frac{(h-H)^2}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} F_P &= -2\pi \tan^2 \alpha \left\{ -P_0 \frac{h^2}{2} - \rho_e g(h-H)^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \rho_e g \left[\frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{3}(H-h) \right] \right\} \\ F_P &= \pi R^2 \left\{ P_0 + \rho_e g \frac{h}{3} \left(1 - \frac{H}{h} \right)^3 + \rho_e g \left[H - h + \frac{2}{3}h \right] \right\}. \\ \text{Finalement } & F_P = \pi R^2 P_0 + \rho_e g V \left\{ \left(1 - \frac{H}{h} \right)^3 - 1 + \frac{3H}{h} \right\} \end{aligned}$$

Ces résultats, établis par un calcul direct sous forme d'intégrale, sont bien sûr identiques à ceux obtenus à partir d'un bilan de forces utilisant le théorème d'Archimède.



POINT MÉTHODE

La première méthode semble donc préférable à la seconde.

Encore faut-il s'assurer que l'on peut utiliser la notion de poussée d'Archimède (l'état de référence devant correspondre à un état d'équilibre hydrostatique...).

603 Ballons ascensionnels

1. Montgolfière : on considère une enveloppe de volume constant V_0 , remplie d'air (supposé gaz parfait) à la température T' . Ce ballon est ouvert à sa partie inférieure, de façon à rester constamment en équilibre uniquement de pression avec l'air extérieur (dont la température est T). On note M_0 la masse totale de l'enveloppe, du dispositif de chauffage, de la nacelle et des passagers.

a. Exprimer la relation liant T' notamment à T et P pour que le ballon soit en équilibre du point de vue mécanique, à la pression ambiante P .

b. Application numérique : $V_0 = 1200 \text{ m}^3$; $M_0 = 400 \text{ kg}$; $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $P_1 = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$; $T_1 = 290 \text{ K}$ (valeurs de T et P au sol). Masse volumique de l'air dans les conditions normales (P_0 et $T_0 = 273 \text{ K}$) : $\rho_0 = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Montrer que le ballon décolle si T' est supérieure à une température limite T'_1 que l'on calculera.

c. Pour quelle valeur T'_2 de T' le ballon serait-il en équilibre à l'altitude de 200 m ? On posera $T'_2 = T'_1 + \Delta T'$ et on cherchera à déterminer $\Delta T'$ sachant qu'à cette altitude, la température est $T_2 = 289$ K. Commenter.

2. Ballon-sonde : dans ce cas, l'enveloppe du ballon (souple et ouverte à la partie inférieure) a un volume maximal $V_m = 1\ 200\ m^3$, et ne contient initialement, au moment du décollage, qu'un volume V_0 d'hélium, aux conditions de température et de pression de l'air environnant (valeurs $T_1 = 290$ K et $P_1 = P_0 = 10^5$ Pa au niveau du sol), la masse de l'enveloppe et du matériel employé est $M_0 = 250$ kg.

On donne : $R = 8,31\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$; $g = 9,81\ m \cdot s^{-2}$; masses molaires de l'air et de l'hélium : 29 et 4 g · mol⁻¹.

a. Quelle masse minimale d'hélium faut-il introduire dans l'enveloppe pour que le ballon décolle ? Quel est le volume V_0 correspondant ?

b. Le ballon a été rempli, au sol, avec un volume d'hélium $V_0 = 300\ m^3$. Quelle est la force ascensionnelle au départ ?

Comment évolue cette force avec l'altitude ?

Quelle peut être la loi du mouvement ascendant du ballon ?

c. Déterminer la relation liant les valeurs T et P de la température et de la pression de l'air à l'altitude où le ballon est en équilibre. Donner la valeur du plafond H atteint par le ballon dans l'hypothèse d'une atmosphère isotherme. Commenter.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Poussée d'Archimète.
- Loi des gaz parfaits.
- Loi de l'hydrostatique.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. Le ballon est soumis à son poids et à la poussée d'Archimète : il est important de bien préciser le système, et le volume qu'il occupe ; le poids sera donc celui du « matériel » (masse M_0), et celui de l'air chaud contenu dans le ballon (masse m').

b. Pour de petites variations d'altitude, température et pression de l'air atmosphérique varient peu : on pourra utiliser une relation approchée pour calculer la variation de pression.

2. Dans le cas du ballon-sonde, les forces en présence sont les mêmes, mais on a alors intérêt à limiter le système au matériel et à l'hélium emporté, de volume total pratiquement égal à celui de l'hélium. Enfin, lorsque l'altitude varie :

- de nouvelles forces peuvent apparaître ;
- les conditions de température et de pression changent, et le volume occupé par l'hélium change : si ce volume atteint la valeur V_m , de l'hélium s'échappe du ballon...

3. Solution

1. a. Prenons comme système le ballon, ses accessoires et son contenu : il est soumis aux forces de pesanteur et à la poussée d'Archimète \vec{P}_A , soit une force ascensionnelle :

$$f = P_A - (M_0 + m')g \quad (1)$$

en notant m' la masse de l'air – à la température T – contenu dans le ballon.

La poussée d'Archimète \vec{P}_A est égale au poids du volume V d'air – à la température T – dont le ballon occupe la place : on peut raisonnablement prendre $V = V_0$ (ce qui revient à négliger devant V_0 le volume occupé par le matériel et les passagers...).

Exprimons P_A : $P_A = \rho_{\text{air}} V_0 g$.

Et d'après la loi des gaz parfaits, $PV = nRT = \frac{nM}{M}RT$ (M = masse molaire de l'air).

$$\text{Or } \rho_{\text{air}} = \frac{nM}{V} \Rightarrow \rho_{\text{air}} = \frac{MP}{RT} \quad \text{avec } \rho_0 = \frac{MP_0}{RT_0} \quad (\text{cf. énoncé}).$$

$$\text{D'où } \rho_{\text{air}} = \rho_0 \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T} \quad (2) \quad \text{et} \quad P_A = \rho_0 V_0 g \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T}.$$

Pour déterminer la masse m' d'air contenue dans le ballon, il suffit d'utiliser (2) en y remplaçant T par T' (air chauffé). D'où :

$$m' = \rho' V_0 \Rightarrow m' = \rho_0 V_0 \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T'}.$$

La force de propulsion (1) s'écrit alors :

$$f = \rho_0 g V_0 \frac{PT_0}{P_0} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) - M_0 g \quad (3)$$

Le ballon est en équilibre à l'altitude considérée (air ambiant à la pression P et à la température T) pour une température T' de l'air du ballon telle que $f(T') = 0$.

Commentaire

Cela suppose l'existence de frottements fluides (du type $\vec{f}' = -\alpha \vec{V}$) de telle sorte que la vitesse de montée s'annule en même temps que la force...

$$\text{Soit : } \frac{1}{T'} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \frac{M_0}{\rho_0 V_0} \cdot \frac{P_0}{P} \quad (4)$$

1. b. Le ballon décollera si l'on a $f > 0$ pour $P = P_0$ et $T = T_1 = 290$ K. Cela suppose donc, d'après (3) :

$$T' > T'_1 \quad \text{avec d'après (4) : } \frac{1}{T'_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{M_0}{T_0 \rho_0 V_0} \quad (5)$$

D'où

$$T'_1 = \frac{\frac{T_1}{1 - \frac{T_1}{T_0} \frac{M_0}{\rho_0 V_0}}}{T_1} \quad T'_1 = 399 \text{ K (398,6 K)}.$$

1. c. Le ballon est en équilibre à l'altitude de $z = 200$ m pour une température T'_2 telle que (*cf.* (4)) :

$$\frac{1}{T'_2} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0 \rho_0 V_0 P_2} \quad (6)$$

Il reste à déterminer la pression P_2 de l'air ambiant. Écrivons la loi de l'hydrostatique :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{où} \quad \rho = \rho_0 \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T}.$$

T variant peu (T (au sol) = $T_1 = 290$ K ; $T(z = 200 \text{ m}) = T_2 = 289$ K), on négligera les variations de ρ sur une différence d'altitude de 200 m, d'où :

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz} = -\rho_0 g \frac{T_0}{P_0 T} \sim -\frac{1,3 \times 273 \times 9,81}{10^5 \times 290} \sim -10^{-4} \text{ m}^{-1}.$$

La pression varie donc également très peu sur le même intervalle.

Posons $P_2 = P_0 + \Delta P$. Nous ferons l'approximation : $\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g \frac{T_0}{T_1} \cdot \frac{P_2}{P_0} \approx -\rho_0 g \frac{T_0}{T_1}$.

Soit $\Delta P \approx -\rho_0 g z \frac{T_0}{T_1}$. Soustrayons alors les relations (5) et (6). Il vient :

$$\frac{1}{T'_1} - \frac{1}{T'_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0 \rho_0 V_0} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta P}{P_0}} \right)$$

soit avec $T'_2 = T'_1 + \Delta T'$ et $\Delta T' \ll T'_1 \Rightarrow \frac{1}{T'_1} - \frac{1}{T'_2} \approx \frac{\Delta T'}{T'^2_1}$.

De même $T_2 = T_1 + \Delta T$ et $|\Delta T| \ll T_1 \Rightarrow \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \approx \frac{\Delta T}{T^2_1}$.

Et $1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta P}{P_0}} \approx \frac{\Delta P}{P_0}$ d'où : $\Delta T' \approx T'^2_1 \left[\frac{\Delta T}{T^2_1} + \frac{M_0}{T_0 \rho_0 V_0} \rho_0 g z \frac{T_0}{T_1 P_0} \right]$

soit

$$\boxed{\Delta T' = \frac{T'^2_1}{T_1} \left[\frac{\Delta T}{T_1} + \frac{M_0 g z}{V_0 P_0} \right]}$$

L'application numérique donne $\Delta T' = 1,7 \text{ K}$ avec ($\Delta T = -1 \text{ K}$).

Commentaire

La température T' d'équilibre est une fonction lentement variable de z . Un faible échauffement de l'air emprisonné dans le ballon suffira à faire varier notablement l'altitude du ballon.

2. a. Comme précédemment, le bilan des forces s'exerçant sur le système (enveloppe + hélium + matériel) fait apparaître une force « motrice » résultante :

$$f = P_A - m_{He} g - M_0 g.$$

La poussée d'Archimède correspond ici à :

$$P_A = \rho_{1(\text{air})} g V_0 \quad \text{avec} \quad \rho_{1(\text{air})} = \frac{M_{\text{air}} P_0}{R T_1}.$$

Or l'hélium contenu dans le ballon est dans les mêmes conditions de température (T_1) et de pression ($P_1 = P_0$) que l'air extérieur, soit :

$$m_{\text{He}} = \rho_{\text{He}} g \quad \text{et} \quad \rho_{\text{He}} = \frac{M_{\text{He}} P_0}{R T_1}.$$

Finalement :

$$f = \rho_{\text{He}} \frac{M_{\text{air}}}{M_{\text{He}}} V_0 g - m_{\text{He}} g - M_0 g.$$

$$f = \left[\left(\frac{M_{\text{air}}}{M_{\text{He}}} - 1 \right) m_{\text{He}} - M_0 \right] g$$

Commentaire

Le rapport $\frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{air}}} = d$ représente la densité du gaz Hélium par rapport à l'air.

Le décollage n'est possible que pour $f > 0$, c'est-à-dire :

$$m_{\text{He}} > \frac{M_0}{\frac{1}{d} - 1} \quad \text{soit} \quad m_{\text{He}} > 40 \text{ kg.}$$

Ce qui correspond à un volume V_0 tel que :

$$V_0 = \frac{m_{\text{He}}}{\rho_{\text{He}}} = \frac{m_{\text{He}} R T_1}{M_{\text{He}} P_0} \quad \text{soit} \quad V_0 = 241 \text{ m}^3.$$

2. b. Il suffit d'exprimer f en fonction du volume d'hélium introduit dans l'enveloppe.

$$f = \left[\left(\frac{M_{\text{air}}}{M_{\text{He}}} - 1 \right) \frac{M_{\text{He}} P_0}{R T_1} V_0 - M_0 \right] g \quad (7)$$

L'application numérique donne $f = 601 \text{ N}$.

Sous l'effet de cette force, le ballon va monter, ce qui entraîne une diminution de la pression (et de la température...). Mais f ne dépend que de la masse d'hélium introduite au départ : tant que celle-ci reste constante, la force reste constante.

Cependant, il serait tout à fait abusif d'en déduire que le ballon va avoir un mouvement uniformément accéléré ! En effet, lorsqu'il y a mouvement, apparaît une force supplémentaire, due au frottement de l'air sur l'enveloppe, force qui croît avec la vitesse. En pratique, le ballon va s'élever à la vitesse limite pour laquelle la force de frottement est égale à f ...

2. c. Le mouvement précédent – pratiquement uniforme – va durer tant que m_{He} reste constante, c'est-à-dire tant que $V_{\text{He}} < V_m$ (l'hélium n'occupe pas tout le volume du ballon).

À partir du moment où V_{He} atteint la valeur V_m , la masse d'hélium peut diminuer (de l'hélium s'échappe par l'ouverture à la partie inférieure) et la force f également : le mouvement ascendant se ralentit, et le ballon atteint son altitude d'équilibre pour $f = 0$, avec $V = V_m$:

$$f = \left[(M_{\text{air}} - M_{\text{He}}) \frac{P}{R T} V_m - M_0 \right] g = 0$$

on a remplacé dans (7) P_0 par P , T_1 par T et V_0 par V_m .

Soit

$$\frac{P}{T} = \frac{M_0 R}{(M_{\text{air}} - M_{\text{He}}) V_m} \quad (8)$$

Application numérique : $\frac{P}{T} = 69,25 \text{ Pa} \cdot \text{K}^{-1}$.

On peut comparer cette valeur à la valeur au sol : $\frac{P_0}{T_1} \approx 345 \text{ Pa} \cdot \text{K}^{-1}$

et remarquer que $\frac{P}{T}$ diminue régulièrement avec l'altitude (les variations de pression l'emportent largement sur les variations de température...).

Si l'on fait l'hypothèse d'une atmosphère isotherme entre le sol et l'altitude atteinte par le ballon sonde, soit $T(z) = T_1$, on peut alors déterminer la pression $P(z)$ en fonction de l'altitude z et en déduire le plafond H .

Revenant à la loi locale de l'hydrostatique, nous avons :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_{\text{air}} g = -\rho_0 g \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T_1}$$

d'où $\frac{1}{P} dP = -\frac{\rho_0 g T_0}{P_0 T_1} dz$.

Et après une simple intégration : $\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\rho_0 g T_0}{P_0 T_1} z = -\frac{z}{a}$ où $a = \frac{P_0 T_1}{\rho_0 g T_0} = 8,33 \text{ km}$.

Le plafond (*cf. commentaire du 1. a.*) ($z = H$) est obtenu pour $\frac{P}{T} = 69,25$ soit :

$$H = -a \ln \left(69,25 \cdot \frac{T_1}{P_0} \right) \Rightarrow H = 13,4 \text{ km.}$$

Commentaire

L'hypothèse de l'atmosphère isotherme n'est certainement pas très réaliste dans le cas envisagé...

604

Effusion par un trou

1. De l'hélium est enfermé dans un récipient de volume $V = 1 \text{ L}$ maintenu à 0°C . La pression initiale est $P_0 = 1 \text{ mmHg}$.

À l'extérieur du récipient, c'est le vide absolu. Sachant que la paroi est percée d'un petit trou d'aire $s = 1 \text{ }(\mu\text{m})^2$, établir l'expression de la pression P dans le récipient en fonction du temps. Au bout de combien de temps, la pression aura-t-elle diminué de moitié ?

2. Au lieu de sortir dans le vide, les atomes passent du récipient (1) à un récipient (2) de volume V identique au précédent. Les deux récipients sont séparés par une paroi diatherme percée d'un petit trou de même surface que précédemment.

À la date $t = 0$, le récipient (1) contient de l'hélium sous pression P_0 ; l'autre est vide. L'ensemble est maintenu à 0°C .

Établir la loi donnant la pression P_2 dans le deuxième récipient en fonction du temps.

Calculer la date à laquelle $P_2 = \frac{P_0}{4}$.

L'hélium est un gaz monoatomique de masse molaire $M = 4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Le trou est assez petit pour considérer que le gaz reste au repos. On considère que tous les atomes ont une vitesse égale à la vitesse quadratique $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. Ces vitesses ne sont orientées que selon $\pm \vec{u}_x$, $\pm \vec{u}_y$, $\pm \vec{u}_z$. La répartition dans ces six directions est isotrope.

On donne la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Vitesse quadratique moyenne d'un gaz parfait monoatomique.
- Loi des gaz parfaits.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Il faut déterminer le nombre d'atomes qui s'échappent par unité de temps, puis relier ce nombre à la variation de pression.

2. Il y a à la fois passage des atomes de 1 → 2 et de 2 → 1.

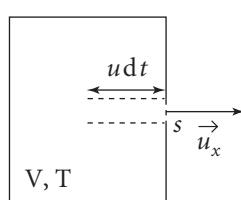
■ Solution

1. • Soit u la vitesse quadratique moyenne des atomes d'hélium.

L'hélium étant un gaz monoatomique :

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

• La répartition des vitesses étant isotrope, $\frac{1}{6}$ des atomes a une vitesse orientée selon \vec{u}_x .



• Les atomes sortant par le trou d'aire s pendant la durée élémentaire dt sont contenus dans le cylindre de volume $dv = s u dt$.

• La densité atomique étant $\frac{N}{V}$, le nombre V d'atomes présents dans le récipient diminue pendant le temps dt de

$$dN = -\frac{s u dt N}{6V} = -\frac{s}{6V} \sqrt{\frac{3RT}{M}} dt \cdot N.$$

Soit en notant $\tau = \frac{6V}{s} \sqrt{\frac{M}{3RT}}$ (1) :

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau}$$

et en tenant compte des conditions initiales ($N = N_0$ à $t = 0$) :

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Par ailleurs, d'après la loi des gaz parfaits :

$$P = \frac{NRT}{N_a}, \quad N_a \text{ étant le nombre d'Avogadro.}$$

Il vient donc $P = P_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$P = \frac{P_0}{2} \text{ pour } \frac{t_1}{2} = \tau \ln 2 \quad \text{soit} \quad \frac{t_1}{2} = \frac{6V}{s} \sqrt{\frac{M}{3RT}} \ln 2 \quad (2).$$

Application numérique :

$$\frac{t_1}{2} \approx 37 \text{ jours.}$$

2. Il faut maintenant tenir compte du passage des atomes de 1 vers 2 et de leur passage de $2 \rightarrow 1$ tout en conservant le nombre d'atomes :

$$N_0 = N_1 + N_2 \quad (3)$$

on a $\frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{\tau} + \frac{N_2}{\tau}$ (4) comme précédemment avec $\tau' = \tau$ car V et T sont identiques pour les 2 récipients.

Soit, en éliminant $\frac{dN_1}{dt}$ et N_1 dans (4), à l'aide de (3) :

$$\frac{dN_2}{dt} + \frac{2N_2}{\tau} = \frac{N_0}{\tau}$$

d'où $N_2 = \frac{N_0}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right)$ en tenant compte des conditions initiales

$$\text{et } P_2 = \frac{N_2 RT}{N_a V} = \frac{N_0}{2N_a} \frac{RT}{V} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right).$$

$$P_2 = \frac{P_0}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right)$$

$$P_2 = \frac{P_0}{4} \text{ pour } t' = \frac{\tau}{2} \ln 2.$$

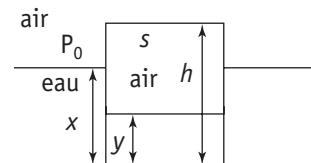
$$\text{Application numérique : } t' = \frac{1}{2} t_{1/2} = 18,5 \text{ jours.}$$

605 Cloche renversée

On renverse une cloche cylindrique de section s , de hauteur h et de masse m , et on la laisse descendre verticalement dans une cuve à eau. La cloche s'enfonce dans l'eau en emprisonnant l'air qu'elle contenait et occupant initialement son volume intérieur.

À l'équilibre, la cloche flotte, la pression atmosphérique vaut P_0 et la masse volumique de l'eau est ρ . L'épaisseur des parois de la cloche est supposée négligeable.

1. Déterminer les hauteurs x et y repérant les surfaces libres de l'eau par rapport aux bords de la cloche.



2. a. À quelle condition – sur le volume $V_0 = hs$ de la cloche – celle-ci peut-elle effectivement flotter ?

b. Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème d'Archimède.

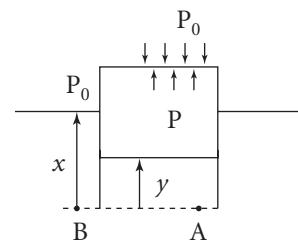
Solution

1. L'air emprisonné dans la cloche est comprimé par l'eau qui y pénètre. Notons P sa pression.

L'équilibre mécanique de la cloche s'écrit alors :

$$Ps = P_0s + mg \quad (1)$$

Pour déterminer la pression P , on supposera l'équilibre thermique atteint, et on assimilera l'air à un gaz parfait, soit en notant n_0 le nombre de moles d'air emprisonnées.



$$P_0V_0 = P \cdot (V_0 - sy) = n_0RT \quad (2)$$

Éliminons P entre les relations (1) et (2) :

$$P_0s + mg = \frac{P_0V_0s}{V_0 - sy}.$$

Soit avec $V_0 = sh$:

$$h - y = \frac{P_0sh}{P_0s + mg} \Rightarrow y = h \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{mg}{P_0s}} \right].$$

Finalement

$$y = h \cdot \frac{\frac{1}{P_0s}}{1 + \frac{mg}{P_0s}} \quad (3)$$

La valeur de x s'en déduit en évaluant de deux façons différentes la pression en A :

on a d'une part : $P_A = P + \rho gy$

et d'autre part : $P_A = P_B = P_0 + \rho gx$.

$$\text{D'où } x = \gamma + \frac{P - P_0}{\rho g} \quad (4)$$

Et d'après (3) et (1) :

$$x = \frac{h}{1 + \frac{mg}{P_0 s}} + \frac{m}{\rho s} \quad (5)$$

2. a. Le calcul fait ci-dessus n'a de sens que si la cloche flotte, c'est-à-dire si la pression P_0 de l'air s'exerce effectivement sur la face supérieure (*cf. relation (1)*). Il faut pour cela :

$$x < h.$$

Soit

$$h \frac{mg}{P_0 s + mg} + \frac{m}{\rho s} < h$$

$$h \left[1 - \frac{mg}{P_0 s + mg} \right] > \frac{m}{\rho s}$$

et avec $V_0 = hs$:

$$V_0 > \frac{m}{\rho} \cdot \frac{P_0 s + mg}{P_0 s}$$

soit $V_0 > V_c$ avec

$$V_c = \frac{m}{\rho} \left(1 + \frac{mg}{P_0 s} \right)$$

2. b. Plaçons-nous à la limite où la surface supérieure de la cloche renversée affleure à la surface de l'eau. On a donc $x = x_1 = h$.

La cloche renferme alors un volume V_e d'eau associée à la hauteur y_1 .

Écrivons que le système cloche + air emprisonné + eau qui a pénétré dans la cloche (volume V_e) est en équilibre.

La poussée d'Archimède P_A doit alors compenser le poids total du système (poids de la cloche auquel s'ajoute celui du volume V_e d'eau, poids de l'air négligé). D'où :

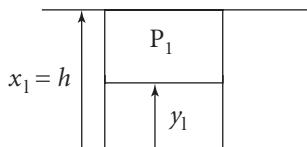
$$P_A = (m + \rho V_e)g$$

or

$$P_A = \rho V_c g \Rightarrow \rho V_c = \rho V_e + m \quad (6)$$

V_c désigne la valeur limite de V_0 pour qu'il en soit ainsi.

$$\begin{aligned} \text{Soit avec } P_0 s + mg = P_1 s \\ \text{et } n_0 RT = P_1 (V_c - V_e) = P_0 V_c \end{aligned} \left. \right\} P_0 V_c = \frac{(V_c - V_e)}{s} (P_0 s + mg).$$



$$\text{D'où } P_0 V_c = V_c \left(P_0 + \frac{mg}{s} \right) - V_e \left(P_0 + \frac{mg}{s} \right)$$

$$V_e \left(P_0 + \frac{mg}{s} \right) = V_c \frac{mg}{s}.$$

Soit avec (6) $V_c = \frac{m}{\rho} + V_c \frac{\frac{mg}{s}}{P_0 + \frac{mg}{s}}$

$$V_c \left(P_0 + \frac{mg}{s} \right) = \frac{m}{\rho} \left(P_0 + \frac{mg}{s} \right) + V_c \frac{mg}{s}$$

$$P_0 V_c = \frac{m}{\rho} \left(P_0 + \frac{mg}{s} \right).$$

Finalement $V_c = \frac{m}{\rho} \left(1 + \frac{mg}{P_0 s} \right).$

On retrouve bien la même expression de la valeur limite du volume intérieur de la cloche. L'équilibre n'est donc possible que pour :

$$V_0 > V_c$$

V_c est naturellement une fonction croissante de la masse m de la cloche et décroissante de la masse volumique du fluide.

606

Retenue d'eau par un barrage

1. Un barrage droit permet de réaliser une retenue d'eau sur une profondeur H et une largeur L .

La pression de l'air est P_0 , et la masse volumique de l'eau est constante et vaut ρ_0 .

Déterminer la résultante \vec{F} des efforts de pression qu'exerce l'eau sur le barrage.

On écrira $\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_z \vec{u}_z$.

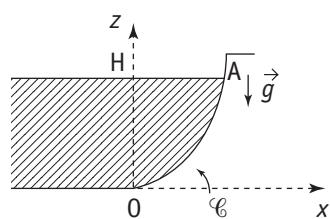
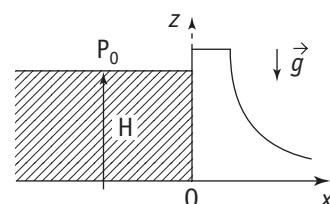
Déterminer le centre de poussée C .

2. Le profil du barrage est modifié. Il correspond à une courbe \mathcal{C} d'équation $z = f(x)$. La hauteur d'eau demeure H et la largeur est L . On notera x_0 l'abscisse du point le plus haut de la courbe \mathcal{C} atteint par l'eau.

Donner les expressions des composantes F_x et F_z de la résultante des efforts de pression exercés par l'eau sur le barrage.

Application à un profil parabolique d'équation $z = \frac{1}{h}x^2$.

3. Commenter les résultats obtenus aux 1. et 2. relatifs à la composante F_x .



Solution

1. La résultante des efforts de pression s'exerçant sur le barrage est donnée par l'expression :

$$\vec{F} = \iiint P(M) \vec{n} \delta\Sigma.$$

Ici \vec{n} est orienté dans le sens fluide \rightarrow solide, et l'on a $\vec{n} = \vec{u}_x$,

d'où :
$$\vec{F} = \left\{ \iiint P(M) \delta\Sigma \right\} \vec{u}_x \quad (1)$$

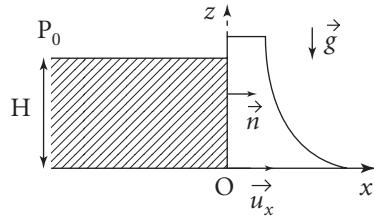
La pression dans l'eau varie linéairement avec z (loi de l'hydrostatique) :

$$P(z) = P_0 + \rho_0 g(H - z); \quad P(H) = P_0.$$

L'intégrale (1) s'écrit alors avec $\delta\Sigma = Ldz$:
$$\vec{F} = \int_0^H [P_0 + \rho_0 g(H - z)] Ldz \vec{u}_x$$

soit :
$$\vec{F} = L \left[P_0 H + \rho_0 g \left(H^2 - \frac{H^2}{2} \right) \right] \vec{u}_x$$

D'où :
$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= LH \left[P_0 + \rho_0 g \frac{H}{2} \right] \\ F_z &= 0 \end{aligned}} \quad (1)$$



Centre de poussée C :

Il se situe sur l'axe Oz à mi-largeur et à une altitude z_c (comptée à partir de O) définie en écrivant que le moment en C des forces de pression y est nul. On a nécessairement $z_c < \frac{H}{2}$ la pression diminuant quand z augmente au sein du fluide.

On a donc pour la force $\vec{\delta F} = P(z)Ldz \vec{u}_x$

$$\vec{\delta M}(C) = (z - z_c)P(z)Ldz \vec{u}_y$$

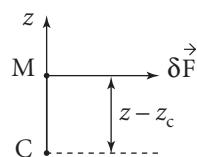
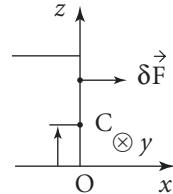
et au total :
$$\vec{M}(C) = \int_0^H (z - z_c)\delta F \vec{u}_y = \vec{0}.$$

D'où :
$$z_c \cdot F = \int_0^H z \delta F = \int_0^H z P(z) L dz = I.$$

L'intégrale I donne :
$$I = \int_0^H z [P_0 + \rho_0 g(H - z)] L dz$$

et
$$I = L \left[P_0 \frac{H^2}{2} + \rho_0 g \left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right) \right] = \frac{LH^2}{2} \left[P_0 + \rho_0 g \frac{H}{3} \right].$$

Soit avec (1) :
$$z_c = \frac{\frac{LH^2}{2} \left[P_0 + \rho_0 g \frac{H}{3} \right]}{LH \left[P_0 + \rho_0 g \frac{H}{2} \right]}$$



d'où

$$z_c = \frac{H}{2} \frac{P_0 + \rho_0 g \frac{H}{3}}{P_0 + \rho_0 g \frac{H}{2}}$$

on a bien $z_c < \frac{H}{2}$ comme il se doit...**2.** Le profil du barrage correspond désormais à la courbe d'équation $z = f(x)$.Notons s l'abscisse curviligne repérant – à partir du point O – tout point M de cette courbe. Calculons la force élémentaire s'exerçant sur la « bande » de longueur L et de largeur ds

$$\delta \vec{F} = P(M) \vec{n} \delta \Sigma \text{ où } \delta \Sigma = L ds$$

avec $P(M) = P_0 + \rho_0 g(H - z)$ (cf. 1.).

Projetons cette force sur les axes Ox et Oz, nous obtenons :

$$\delta F_x = P(M) \vec{n} \cdot \vec{u}_x \delta \Sigma = P(M) \cos \alpha L ds$$

or $\cos \alpha ds = dz$, d'où $\delta F_x = P(z) L dz$

$$\text{et au total } F_x = L \int_0^H P(z) dz.$$

De même : $\delta F_z = P(M) \vec{n} \cdot \vec{u}_z \delta \Sigma = -P(M) \sin \alpha L ds$ avec cette fois-ci $\sin \alpha ds = dx$, d'où :

$$\delta F_z = -P(z) L dx \text{ et } F_z = -L \int_0^{x_0} P(f(x)) dx.$$

Finalement, nous avons $\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_z \vec{u}_z$ avec :

$$F_x = L \int_0^H P(z) dz = L \int_0^H [P_0 + \rho_0 g(H - z)] dz = LH \left[P_0 + \rho_0 g \frac{H}{2} \right].$$

$$F_x = LH \left[P_0 + \rho_0 g \frac{H}{2} \right]$$

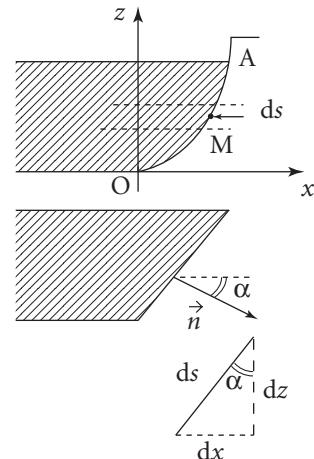
$$\text{et } F_z = -L \int_0^{x_0} [P_0 + \rho_0 g(H - f(x))] dx \quad \text{où } H = f(x_0).$$

• Application à un profil parabolique $z = \frac{1}{h}x^2$:Il vient $Hh = x_0^2$ d'où $x_0 = \sqrt{Hh}$

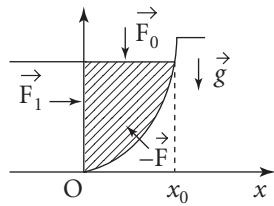
$$\text{et } F_z = -L \int_0^{\sqrt{Hh}} \left[P_0 + \rho_0 gH - \rho_0 \cdot g \frac{x^2}{h} \right] dx$$

$$F_z = -L \left[P_0 \sqrt{Hh} + \rho_0 gH \sqrt{Hh} - \frac{\rho_0 g}{3h} Hh \sqrt{Hh} \right].$$

$$\text{D'où } F_z = -L \sqrt{Hh} \left[P_0 + \frac{2}{3} \rho_0 gH \right].$$



- On pourrait s'étonner que la composante F_x de la résultante des efforts de pression ne dépende pas du profil du barrage. Pour s'en persuader aisément, considérons le volume de fluide délimité par le barrage et le plan $x = 0$. Écrivons qu'il est en équilibre sous l'effet de son poids, des efforts de pression (eau + air) et de la réaction du barrage sur l'eau.



$$M_e \vec{g} + \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + (-\vec{F}) = \vec{0}, \text{ où } \vec{F} \text{ est la force que l'on cherche.}$$

Projetons cette équation sur l'axe des x :

$$\vec{0} + \vec{0} + F_1 \vec{u}_x - F_x \vec{u}_x = \vec{0} \Rightarrow F_x = F_1.$$

La composante F_x ne dépend pas du profil $f(x)$ du barrage.

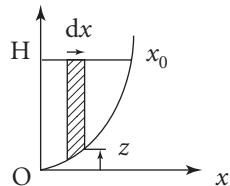
- On peut profiter de la remarque précédente pour calculer la composante F_z . Soit en projetant maintenant sur z : $-M_e g - F_0 + 0 - F_z = 0 \Rightarrow F_z = -M_e g - F_0$ avec $F_0 = P_0 L x_0$ et $M_e = \rho_e L \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est l'aire de la surface hachurée, soit :

$$\mathcal{S} = \int_0^{x_0} (H - z) dx.$$

$$\text{D'où } F_z = -P_0 L x_0 - \rho_e L g \int_0^{x_0} (H - z) dx$$

que l'on peut encore écrire :

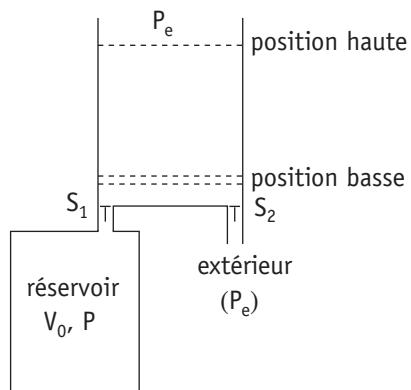
$$F_z = -L \int_0^{x_0} [P + \rho_e g(H - f(x))] dx.$$



607

Pompe aspirante et refoulante

On désire faire le vide dans un réservoir de volume V_0 fixé et contenant de l'air sous la pression initiale $P = P_e$ (pression atmosphérique). On utilise une pompe constituée d'un cylindre dans lequel se déplace un piston \mathcal{P} effectuant N allers et retours par seconde. En position haute, le volume dans le cylindre est V_2 ; en position basse, il est V_1 . La soupape S_1 (respectivement S_2) s'ouvre dès que la pression dans le cylindre est inférieure (respectivement supérieure) ou égale à celle du réservoir (respectivement de l'atmosphère : P_e), et reste fermée dans le cas contraire.



On prendra $P_e = \text{constante} = 10^5 \text{ Pa}$, et toutes les transformations seront supposées isothermes ($T = 300 \text{ K}$, température de l'atmosphère). De plus $V_1 \ll V_2 \ll V_0$:

$$V_0 = 1\ 000 \text{ L}, \frac{V_2}{V_0} = 10^{-3} \text{ et } \frac{V_1}{V_2} = 10^{-2}.$$

L'air est assimilé à un gaz parfait, de masse molaire $M = 29 \text{ g}$, et $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Le déplacement du piston s'effectue sans frottements. $N = 10$.

1. La pression dans le réservoir est P et le piston est en position basse.

Déterminer la nouvelle pression P' dans le réservoir ainsi que la masse d'air δm_p pompée après un aller et retour du piston. Quelle est la pression limite P_l que permet d'atteindre la pompe ?

Application numérique : calculer P_l , puis δm_p et $\delta P = P' - P$ pour $P = P_e$.

2. Après le n ème aller et retour du piston, la pression dans le réservoir est devenue P_n .

a. Donner la relation déterminant P_n en fonction de P_e , P_l , n et du rapport $\frac{V_0}{V_0 + V_2}$.

b. Montrer que l'on peut considérer que la pression P dans le réservoir varie de façon quasi continue selon une loi $P(t)$ que l'on précisera.

c. Retrouver le résultat précédent en remarquant (*cf. 1.*) que δP est très petit devant P .

3. Déterminer le travail $W_T(n \rightarrow n+1)$ que l'on doit fournir pour un aller retour du piston, la pression dans le réservoir passant de la valeur P_n à P_{n+1} . On exprimera le résultat en fonction de P_n , P_{n+1} , P_e et V_0 .

En déduire l'expression du travail total W'_T qui permet d'atteindre la pression limite P_l .

Application numérique : calculer W'_T .

Solution

1. En fin de descente, le cylindre contient un volume V_1 d'air à la pression P_e , soit une masse m_1 telle que :

$$P_e V_1 = m_1 \frac{RT}{M} \Rightarrow m_1 = \frac{P_e V_1 M}{RT} \quad (\text{M = masse molaire de l'air}).$$

Dès que le piston amorce sa remontée, la soupape S_2 se ferme et la pression diminue dans le cylindre (S_1 fermée) jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur P du réservoir.

Dès lors, la soupape S_1 s'ouvre, la masse m d'air contenue dans le réservoir et celle m_1 du cylindre subissent une détente isotherme amenant l'ensemble au volume $V_0 + V_2$ (S_2 reste fermée, la pression diminuant encore).

$$\text{On a } m = \frac{PV_0}{RT} M.$$

Quand le piston commence à redescendre, la soupape S_1 se referme, le réservoir contenant alors de l'air à la pression P' définie selon :

$$P'(V_0 + V_2) = (m + m_1) \frac{RT}{M} = PV_0 + P_e V_1.$$

On a donc
$$\boxed{P' = P \frac{V_0}{V_0 + V_2} + P_e \frac{V_1}{V_0 + V_2}} \quad (1)$$

La masse d'air δm_p pompée après un aller et retour correspond à :

$$\delta m_p = m(P) - m(P') = \frac{MV_0}{RT}(P - P').$$

Soit
$$\boxed{\delta m_p = \frac{MV_0}{RT} \frac{PV_2 - P_e V_1}{V_0 + V_2}} \quad (2)$$

On atteint la pression limite pour $P' = P = P_\ell$, d'où :

$$P_\ell = P_e \frac{V_0}{V_0 + V_2} + P_e \frac{V_1}{V_0 + V_2} \Rightarrow \boxed{P_\ell = P_e \frac{V_1}{V_2}} \quad (3)$$

Commentaire

On aurait également pu écrire que la limite étant atteinte, on a nécessairement $\delta m_p = 0$ pour $P = P_\ell$ ce qui redonne bien le même résultat.

Application numérique : si l'on tient compte de $V_0 \gg V_2$ et $V_2 \gg V_1$

$$\delta P = P' - P \approx \frac{1}{V_0}(P_e V_1 - PV_2) = P_e \left(\frac{V_1 - V_2}{V_0} \right) \approx -P_e \frac{V_2}{V_0} \Rightarrow \delta P \sim -100 \text{ Pa}$$

$$\delta m_p = \frac{MV_0}{RT}(-\delta P) \Rightarrow \delta m_p = 1,15 \text{ g}$$

$$P_\ell = P_e \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow P_\ell = 10^3 \text{ Pa.}$$

2. a. Avant le n ième aller et retour, la pression dans le réservoir est P_{n-1} .

Après, elle devient P_n . La relation définissant P_n à partir de P_{n-1} est la même que celle établie au 1. entre P' et P (faire $P \rightarrow P_{n-1}$ et $P' \rightarrow P_n$), soit :

$$P_n = P_{n-1} \frac{V_0}{V_0 + V_2} + P_e \frac{V_1}{V_0 + V_2}.$$

Il suffit de noter $P_0 = P_e$ (pression de l'air dans le réservoir avant le début du pompage). Les différentes pressions successives dans le réservoir forment une suite $\{P_n\}$. Sachant que cette pression doit tendre vers P_ℓ , posons : $P'_n = P_n - P_\ell$.

D'où :
$$P_\ell + P'_n = \frac{V_0}{V_0 + V_2}(P_\ell + P'_{n-1}) + P_e \frac{V_1}{V_0 + V_2}$$

soit encore :
$$P'_n = \frac{V_0}{V_0 + V_2}P'_{n-1} + \underbrace{\frac{P_e V_1}{V_0 + V_2} - \frac{P_\ell V_2}{V_0 + V_2}}_0 \quad \left(P_\ell = P_e \frac{V_1}{V_2} \right).$$

La suite $\{P'_n\}$ constitue donc une suite géométrique et :

$$P'_n = P'_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_2} \right)^n \quad \text{avec } P'_0 = P_0 - P_\ell = P_e - P_\ell.$$

Finalement, nous obtenons :
$$\boxed{P_n = P_\ell + \left(\frac{V_0}{V_0 + V_2} \right)^n \cdot [P_e - P_\ell]} \quad (3)$$

2. b. La pression dans le réservoir vaut :

$$\begin{cases} P = P_e \text{ à } t_0 = 0 \\ P = P_1 \text{ à } t_1 = \Delta t \\ P = P_n \text{ à } t_n = n\Delta t \text{ etc.} \end{cases}$$

où $\Delta t = \frac{1}{N}$ est la durée d'un aller et retour du piston.

$$\text{On a donc } P_n = P(t_n) = P_\ell + (P_e - P_\ell) \left(\frac{V_0}{V_0 + V_2} \right)^{Nt_n}.$$

$$\text{Soit encore : } P(t_n) = P_\ell + (P_e - P_\ell) \exp \left\{ -Nt_n \ln \left(\frac{V_0 + V_2}{V_0} \right) \right\}$$

$$\text{or } \frac{V_2}{V_0} \ll 1 \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{V_2}{V_0} \right) \approx \frac{V_2}{V_0}, \text{ ce qui donne : } P(t_n) \approx P_\ell + (P_e - P_\ell) \exp \left(-\frac{NV_2}{V_0} t_n \right).$$

Il apparaît un temps caractéristique τ d'évolution de la pression :

$$\boxed{\tau = \frac{V_0}{NV_2}} \quad \tau = 100 \text{ s.}$$

Le temps est très grand devant la durée Δt de chaque « cycle » puisque :

$$\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{V_2}{V_0} \approx 10^{-3}.$$

On peut alors considérer que la pression P dans le réservoir évolue de façon quasi continue selon la loi :

$$\boxed{P(t) = P_\ell + (P_e - P_\ell) \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right)}$$

2. c. On a établi au 1. que :

$$\delta P = P_{n+1} - P_n = P_n \left(\frac{V_0}{V_0 + V_2} - 1 \right) + P_e \frac{V_1}{V_0 + V_2} = \frac{P_e V_1 - P_n V_2}{V_0 + V_2}$$

$$\text{et } \frac{\delta P}{P_n} = \frac{1}{V_0 + V_2} \left[V_1 \frac{P_e}{P_n} - V_2 \right] \Rightarrow \left(-\frac{\delta P}{P} \right) = \frac{1}{V_0 + V_2} \left[V_2 - V_1 \frac{P_e}{P_n} \right].$$

$$\text{Ainsi, on a } \left(-\frac{\delta P}{P} \right)_n \leq \frac{1}{V_0 + V_2} (V_2 - V_1) \sim \frac{V_2}{V_0} \sim 10^{-3}.$$

La quantité δP étant très faible devant P , on peut confondre la dérivée de $P(t)$ avec le taux d'accroissement $\frac{\delta P}{\Delta t}$, ce qui donne :

$$\frac{dP}{dt} \approx \frac{\delta P}{\Delta t} = \frac{N}{V_0 + V_2} (P_e V_1 - PV_2) \quad \Delta t = \frac{1}{N}.$$

$$\text{D'où l'équation différentielle : } \frac{dP}{dt} + \frac{NV_2}{V_0 + V_2} P = \frac{N}{V_0 + V_2} P_e V_1.$$

$$\text{Soit avec } \tau = \frac{1}{N} \frac{V_0 + V_2}{V_2} \approx \frac{V_0}{NV_2} \quad \text{et } P_\ell = P_e \frac{V_1}{V_2}: \tau \frac{dP}{dt} + P = P_\ell.$$

Donc la solution est bien, avec $P(0) = P_e$:

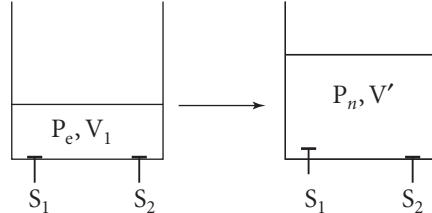
$$P(t) = P_\ell + (P_e - P_\ell) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

3. Remarquons tout d'abord que la pression ambiante P_e au-dessus du piston n'exerce globalement aucun travail puisque le piston revient à sa position initiale au bout d'un cycle. Reconsidérons un cycle, la pression est P_n dans le réservoir et le piston en position basse amorce sa remontée.

• 1^{re} phase :

Le piston remonte jusqu'à une position pour laquelle la pression à l'intérieur du cylindre devient P_n (ce qui provoque l'ouverture de la soupape S_1). Le travail « fourni » par le piston est alors :

$$W_1 = - \int_{V_1}^{V'} P dV, \text{ avec } PV = P_e V_1$$



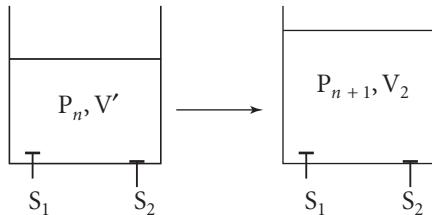
$$\text{d'où } W_1 = - \int_{V_1}^{V'} P_e V_1 \frac{dV}{V} \Rightarrow W_1 = P_e V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V'}\right)$$

or $P_n V' = P_e V_1$, soit :
$$W_1 = P_e V_1 \ln\left(\frac{P_n}{P_e}\right)$$

• 2^e phase :

S_1 étant ouverte, l'air contenu dans le cylindre et le réservoir se détend, la pression passant de P_n à P_{n+1} et le volume de $V' + V_0$ à $V_2 + V_0$.

$$\text{D'où } W_2 = - \int_{V_0 + V'}^{V_2 + V_0} P dV$$



$$\text{avec } PV = P_n V_0 + P_n V'. \quad \text{D'où } W_2 = -(P_n V_0 + P_n V') \int_{V_0 + V'}^{V_0 + V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\text{soit encore } W_2 = -P_n (V_0 + V') \ln\left(\frac{V_0 + V_2}{V_0 + V'}\right).$$

$$\text{Or on a } P_n (V_0 + V') = P_{n+1} (V_0 + V_2) \text{ d'où : } W_2 = P_n (V_0 + V') \ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)$$

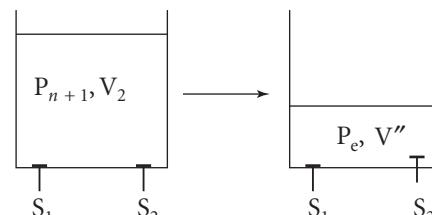
et avec $P_n V' = P_e V_1$:
$$W_2 = (P_n V_0 + P_e V_1) \ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)$$

• 3^e phase :

Le piston redescend et S_1 se referme ; l'air contenu dans le cylindre subit une compression qui l'amène à la pression P_e pour laquelle la soupape S_2 s'ouvrira :

$$W_3 = - \int_{V_2}^{V''} P dV$$

avec $PV = P_{n+1} V_2 = P_e V''$



d'où : $W_3 = -P_{n+1}V_2 \int_{V_2}^{V''} \frac{dV}{V}$, et $W_3 = -P_{n+1}V_2 \ln \frac{V''}{V_2}$.

$$\text{Soit } W_3 = -P_{n+1}V_2 \ln \left(\frac{P_{n+1}}{P_e} \right)$$

• 4^e phase :

L'air est refoulé à pression constante P_e ,

d'où : $W_4 = -P_e(V_1 - V'')$

soit $W_4 = -P_e V_1 + P_e V''$

avec $P_e V'' = P_{n+1}V_2$

$$\text{et : } W_4 = -P_e V_1 + P_{n+1}V_2$$

Le travail total qu'il aura fallu fournir est :

$$W_T(n \rightarrow n+1) = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$\begin{aligned} W_T(n \rightarrow n+1) &= P_e V_1 \ln \left(\frac{P_n}{P_e} \right) + (P_n V_0 + P_e V_1) \ln \left(\frac{P_{n+1}}{P_n} \right) \\ &\quad - P_{n+1} V_2 \ln \left(\frac{P_{n+1}}{P_e} \right) + P_{n+1} V_2 - P_e V_1 \end{aligned}$$

$$\text{avec, de plus : } P_{n+1}(V_0 + V_2) = P_n V_0 + P_e V_1 \quad (4)$$

Ce qui peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} W_T(n \rightarrow n+1) &= [P_e V_1 - (P_n V_0 + P_e V_1)] \ln \left(\frac{P_n}{P_e} \right) \\ &\quad + [(P_n V_0 + P_e V_1) - P_{n+1} V_2] \ln \left(\frac{P_{n+1}}{P_e} \right) + [P_{n+1} V_2 - P_e V_1] \end{aligned}$$

$$\text{or d'après (4) : } P_n V_0 + P_e V_1 - P_{n+1} V_2 = P_{n+1} V_0$$

$$\text{et } P_{n+1} V_2 - P_e V_1 = V_0(P_n - P_{n+1}).$$

$$\text{D'où : } W_T(n \rightarrow n+1) = -P_n V_0 \ln \left(\frac{P_n}{P_e} \right) + P_{n+1} V_0 \ln \left(\frac{P_{n+1}}{P_e} \right) - V_0(P_{n+1} - P_n)$$

Calculons maintenant le travail nécessaire pour atteindre la pression limite P_ℓ dans le réservoir :

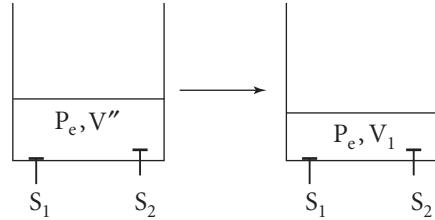
$$W'_T = -V_0 \sum_0^{\infty} (P_{n+1} - P_n) + \sum_0^{\infty} \left[V_0 P_{n+1} \ln \left(\frac{P_{n+1}}{P_e} \right) - V_0 P_n \ln \left(\frac{P_n}{P_e} \right) \right]$$

$$\text{soit avec } P_0 = P_e : \quad W'_T = -V_0(P_\ell - P_e) + V_0 \left\{ P_\ell \ln \left(\frac{P_\ell}{P_e} \right) - P_e \ln \left(\frac{P_e}{P_e} \right) \right\}.$$

Finalement

$$W'_T = -V_0(P_\ell - P_e) + V_0 P_\ell \ln \left(\frac{P_\ell}{P_e} \right)$$

$$\text{Application numérique : } W'_T = -1 \cdot (10^3 - 10^5) + 1 \cdot 10^3 \ln \left(\frac{10^3}{10^5} \right) \Rightarrow W'_T = 94 \text{ kJ.}$$



B. Bilans d'énergie

611 Équilibre mécanique – Équilibre thermique

Un cylindre, à parois thermiquement isolantes, est séparé en deux compartiments par un piston initialement bloqué. Ce piston est faiblement conducteur de l'énergie thermique et de capacité thermique négligeable. Dans l'état initial, le compartiment de gauche contient n_1 moles d'un gaz parfait dans les conditions P_1 , V_1 , T_1 et le compartiment de droite contient n_2 moles du même gaz parfait dans les conditions P_2 , V_2 , T_2 .

1. On libère le piston, et l'équilibre mécanique s'établit rapidement entre les deux compartiments, avant réalisation de l'équilibre thermique. Calculer la pression P .
2. Montrer qu'ensuite l'équilibre thermique s'établit à pression constante. Calculer la température T d'équilibre. Quelle température d'équilibre aurait-on obtenu si le piston était resté bloqué dans sa position initiale ?
3. Comment sont modifiés les résultats précédents lorsque les deux gaz parfaits ne sont plus de même atomicité ?

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Énergie interne d'un gaz parfait.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le système constitué des deux gaz et du piston est isolé de l'extérieur. L'état de départ est un état hors équilibre et le système finira par tendre vers un état d'équilibre correspondant nécessairement à :

- l'égalité des pressions (piston mobile) : $P'_1 = P'_2 = P$;
- l'égalité des températures (piston conducteur de l'énergie thermique) : $T'_1 = T'_2 = T$.
La conduction thermique du piston étant faible, on peut considérer que l'équilibre mécanique se fera avant l'équilibre thermique. On supposera donc qu'après une 1^{re} phase, les pressions s'égalisent dans les deux compartiments sans pour autant que les températures des gaz soient identiques. Dans une 2^e phase, le système évoluera pour atteindre également l'équilibre thermique tout en maintenant des pressions égales de part et d'autre du piston.

2. À la fin de la 1^{re} phase, on a $P'_1 = P'_2 = P$ (pression calculée au 1.).

Le système maintient ensuite $P'_1 = P'_2$. Cette valeur commune reste en fait constante car on s'est placé dans un cas particulier : même gaz parfait dans chaque compartiment (c'est-à-dire même capacité thermique à volume constant...).

3. La nouvelle pression commune P obtenue à la fin de la 1^{re} phase évoluera en fonction des volumes V'_1 et V'_2 et donc des températures T'_1 et T'_2 jusqu'à une valeur finale P_f correspondant à la température T_f associée à l'équilibre thermique final.

3. Solution

1. Considérons le système correspondant au contenu du cylindre (gaz dans les deux compartiments plus piston). Appliquons-lui le premier principe entre l'état initial et un état intermédiaire pour lequel les températures sont T'_1 et T'_2 et l'équilibre mécanique réalisé (soit $P'_1 = P'_2 = P$). On supposera que l'on peut négliger l'énergie cinétique du piston ainsi que les variations éventuelles de son énergie interne (piston de capacité thermique négligeable...).

On a donc : $\Delta U = \Delta U(\text{gaz } ①) + \Delta U(\text{gaz } ②) = W + Q$.

Or le système évolue à volume total constant et $W = 0$.

D'autre part, les parois du cylindre sont adiabatiques : $Q = 0$.

On a donc : $\Delta U(\text{gaz } ①) + \Delta U(\text{gaz } ②) = 0 + 0 = 0 \quad (1)$

La variation d'énergie interne de n moles d'un gaz parfait s'écrit en introduisant la capacité thermique C_v à volume constant : $dU = nC_vdT$.

Et en prenant $C_v = \text{constante}$: $\Delta U = nC_v(T' - T) \quad (2)$

Soit ici d'après (1) et (2) : $n_1 C_{v_1} (T'_1 - T_1) + n_2 C_{v_2} (T'_2 - T_2) = 0 \quad (3)$

On a le même gaz parfait dans les deux compartiments, d'où avec $C_{v_1} = C_{v_2}$:

$$n_1 (T'_1 - T_1) + n_2 (T'_2 - T_2) = 0 \quad (4)$$

Cette relation entre T'_1 et T'_2 reste valable, dans le cadre des hypothèses précisées plus haut, même si l'équilibre mécanique n'est pas atteint.

L'énoncé suppose maintenant que l'équilibre mécanique s'est établi ($P'_1 = P'_2 = P$) avec des températures des gaz différentes ($T'_1 \neq T'_2$). La loi des gaz parfaits donne alors pour les deux compartiments :

$$PV'_1 = n_1 RT'_1 \quad (\text{avec } P_1 V_1 = n_1 R T_1)$$

$$PV'_2 = n_2 RT'_2 \quad (\text{avec } P_2 V_2 = n_2 R T_2).$$

De plus, la conservation du volume total s'écrit : $V'_1 + V'_2 = V_1 + V_2$.

$$\text{Soit } \frac{R}{P} [n_1 T'_1 + n_2 T'_2] = V_1 + V_2 \quad (5)$$

Et avec (4) qui s'écrit $n_1 T'_1 + n_2 T'_2 = n_1 T_1 + n_2 T_2 = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{R}$.

$$(5) \text{ devient } \frac{R}{P} \cdot \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{R} = V_1 + V_2.$$

Finalement

$$P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2} \quad (6)$$

2. À partir du moment où il y a égalité des pressions de part et d'autre, le système ayant atteint l'équilibre mécanique (égalité des pressions) va également tendre vers l'équilibre thermique (égalité des températures). La relation définissant P est indépendante de T'_1 et T'_2 . Il en résulte que l'évolution vers l'équilibre thermique s'effectuera à pression constante (égale à P calculée au 1.), les volumes évoluant en même temps que les températures :

$$\frac{V'_1}{T'_1} = n_1 \frac{R}{P} = \text{constante} \quad \frac{V'_2}{T'_2} = n_2 \frac{R}{P} = \text{constante}.$$

À l'équilibre thermique : $T'_1 = T'_2 = T$. Et d'après (4) : $T(n_1 + n_2) = n_1 T_1 + n_2 T_2$

d'où

$$T = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} \quad (7)$$

Les volumes finaux sont alors donnés par :

$$\frac{V'_{1f}}{n_1} = \frac{V'_{2f}}{n_2} = \frac{RT}{P} \quad \text{et} \quad V'_{1f} + V'_{2f} = V_1 + V_2.$$

Soit $V'_{1f} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}(V_1 + V_2)$ et $V'_{2f} = \frac{n_2}{n_1 + n_2}(V_1 + V_2)$.

Si le piston était resté bloqué, il y aurait eu uniquement transfert thermique entre les deux gaz, la relation (4) restant toujours valable. L'équilibre thermique atteint, la température T aurait donc été la même, mais avec des pressions différentes dans chaque compartiment :

$$P_{1f} = n_1 \frac{RT}{V_1} \quad \text{et} \quad P_{2f} = n_2 \frac{RT}{V_2}.$$

3. Les deux gaz parfaits possèdent des capacités thermiques C_{v_1} et C_{v_2} différentes. L'équation (4) traduisant la conservation de l'énergie s'écrit maintenant :

$$n_1 C_{v_1} (T'_1 - T_1) + n_2 C_{v_2} (T'_2 - T_2) = 0 \quad (4')$$

L'équilibre thermique atteint correspondra à une température finale T_f définie selon ($T'_1 = T'_2 = T_f$) :

$$T_f = \frac{n_1 C_{v_1} T_1 + n_2 C_{v_2} T_2}{n_1 C_{v_1} + n_2 C_{v_2}} \quad (8)$$

Supposons maintenant qu'après une première phase, l'équilibre mécanique est atteint. On a donc $P'_1 = P'_2 = P$. Mais cette fois-ci, cette pression commune va dépendre de l'état des températures T'_1 et T'_2 (et donc des volumes intermédiaires V'_1 et V'_2).

Les relations permettant de définir P sont alors :

$$PV'_1 = n_1 RT'_1 \quad (\text{avec } P_1 V_1 = n_1 RT_1)$$

$$PV'_2 = n_2 RT'_2 \quad (\text{avec } P_2 V_2 = n_2 RT_2)$$

et $V'_1 + V'_2 = V_1 + V_2$.

D'où $P(V'_1 + V_2) = P(V_1 + V_2) = n_1 RT'_1 + n_2 RT'_2$ soit $P = \frac{R(n_1 T'_1 + n_2 T'_2)}{V_1 + V_2}$.

En utilisant l'équation (4'), on aboutit ainsi à $P = f(T'_1)$ ou $P = g(T'_2)$.

À l'équilibre final, la pression commune P prend la valeur P_f telle que :

$$P_f = \frac{R(n_1 + n_2)T_f}{V_1 + V_2} \quad \text{d'où} \quad P_f = \frac{(n_1 + n_2)R}{V_1 + V_2} \cdot \frac{n_1 C_{v_1} T_1 + n_2 C_{v_2} T_2}{n_1 C_{v_1} + n_2 C_{v_2}}.$$

Soit encore :

$$P_f = \frac{n_1 + n_2}{V_1 + V_2} \cdot \frac{C_{v_1} P_1 V_1 + C_{v_2} P_2 V_2}{n_1 C_{v_1} + n_2 C_{v_2}} \quad (9)$$

Commentaire

Les expressions (8) et (9) redonnent bien les valeurs de T et P obtenues aux 1. et 2. dans le cas où $C_{v_1} = C_{v_2}$.

612 Transformations polytropiques

On étudie les transformations quasi statiques d'un gaz parfait (caractérisé par le rapport γ – supposé constant – de ses capacités thermiques molaires à pression constante C_p et à volume constant C_v) pour lesquelles la pression P et le volume V vérifient :

$$PV^\alpha = \text{constante} \quad (\alpha \text{ constante} \neq 1).$$

1. Calculer le travail W et l'énergie thermique Q reçus par le gaz dans une telle transformation mécaniquement réversible, depuis l'état (P_1, V_1) jusqu'à l'état (P_2, V_2) .

Exprimer le rapport $\frac{Q}{W}$ en fonction seulement de α et γ .

2. a. Pour quelle valeur de α la transformation envisagée ici est-elle adiabatique ? Commenter.

b. Plus généralement, on définit la capacité thermique molaire $C(\alpha)$ selon :

$$Q_{\text{mol}} = C(\alpha)\Delta T.$$

Exprimer $C(\alpha)$ en fonction de C_v , α et γ . Cas particuliers ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Calcul du travail dans le cas d'une transformation mécaniquement réversible ($\delta W = -PdV \dots$).
- Premier principe – variation d'énergie interne d'un gaz parfait.
- Relation de Mayer $C_p - C_v = R$.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La transformation étant mécaniquement réversible, le calcul du travail reçu s'effectue directement à partir de la relation $\delta W = -PdV \dots$

On obtiendra l'énergie thermique Q reçue par le gaz par application du premier principe.

2. Par définition, une transformation adiabatique correspond à l'absence de tout transfert d'énergie thermique au gaz.

Les cas particuliers simples seront associés à des transformations :

- adiabatiques ;
- isobares ;
- isochores ;
- isothermes.

3. Solution

1. • La transformation subie par le gaz étant quasi statique et mécaniquement réversible, on a : $\delta W = -PdV$.

Dans le cas présent : $PV^\alpha = \text{constante} = P_1 V_1^\alpha$

ce qui donne, pour le travail W cherché :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P_1 V_1^\alpha \cdot \frac{dV}{V^\alpha} = -P_1 V_1^\alpha \cdot \left[\frac{V^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{V_1}^{V_2} = \frac{P_1 V_1^\alpha}{\alpha-1} [V_2^{1-\alpha} - V_1^{1-\alpha}]$$

et en tenant compte de $P_1 V_1^\alpha = P_2 V_2^\alpha$:

$$W = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\alpha - 1} \quad (1)$$

- D'autre part, d'après le premier principe appliqué au gaz : $\Delta U = Q + W$.

D'où

$$Q = \Delta U - W \quad (2)$$

- Pour un gaz parfait $\Delta U = nC_v \Delta T = \frac{nR}{\gamma-1} \Delta T$ et $\Delta(PV) = nR\Delta T$.

Donc $\Delta U = \frac{\Delta(PV)}{\gamma-1}$.

On a donc pour la transformation considérée :

$$\Delta U = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1} \quad (4)$$

Puis d'après (2) et avec (1) :

$$Q = (P_2 V_2 - P_1 V_1) \left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{\alpha - 1} \right)$$

et

$$Q = \frac{\alpha - \gamma}{(\gamma - 1)(\alpha - 1)} \cdot (P_2 V_2 - P_1 V_1) \quad (5)$$

Soit le rapport $\frac{Q}{W}$:

$$\frac{Q}{W} = \frac{\alpha - \gamma}{\gamma - 1}$$

- 2. a.** La transformation est adiabatique si $Q = 0$, c'est-à-dire pour :

$$\alpha = \gamma$$

Dans ce cas, on a $PV^\gamma = \text{constante}$, une relation connue sous le nom de loi de Laplace.

Commentaires

- Cette transformation est aussi une isentropique, puisque la fonction entropie du gaz parfait peut s'écrire :

$$S(P, V) = S_0 + n C_v \ln \left[\frac{P \cdot V^\gamma}{P_0 \cdot V_0^\gamma} \right].$$

Ce résultat est logique, car ici, le caractère quasi statique ($P_{\text{ext}} = P_{\text{fluide}}$) garantit la réversibilité mécanique pour le fluide (ici le gaz parfait) et la question de la réversibilité thermique ne se pose pas, puisqu'il n'y a pas de transfert d'énergie thermique.

- Ces transformations polytropiques sont souvent prises comme « modèle » pour représenter des transformations quasi statiques « pas tout à fait adiabatiques ».

Par exemple, dans un compresseur, le gaz reçoit du travail et s'échauffe, ce qui entraîne presque toujours un transfert de chaleur vers l'extérieur : si on admet que 20 % de l'énergie W apportée est reperdue sous forme d'énergie thermique, on écrit :

$$\frac{Q}{W} = \frac{\alpha - \gamma}{\gamma - 1} = -0,2 \quad (Q < 0 \dots)$$

ce qui donne $\alpha = 0,8\gamma + 0,2$ soit $\alpha = 1,32$ pour $\gamma = 1,40$.

2. b. On a établi (relations (4) et (5)) : $Q = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - 1} \Delta U$.

Or pour 1 mole de gaz parfait $\Delta U = 1 \cdot C_v \Delta T$, d'où : $Q_{\text{mol}} = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - 1} C_v \Delta T$.

On a donc d'après la définition de la capacité thermique molaire $C(\alpha)$:

$$C(\alpha) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - 1} \cdot C_v$$

■ Cas particuliers :

- $\alpha = \gamma$ transformation adiabatique et $C(\gamma) = 0$ ($Q = 0$) ;
- $\alpha = 0$ est associé à une transformation isobare ($PV^\alpha = \text{cste} \Rightarrow P = \text{cste}$).

On a alors $C(0) = \gamma C_v = C_p$ et $Q = C_p \Delta T$, ce qui correspond bien à :

$$\Delta H = \Delta U + \Delta PV = \Delta U + P \Delta V = -P \Delta V + Q + P \Delta V \quad \text{soit : } Q = \Delta H$$

et pour une mole de gaz parfait (avec $C_p = \text{cste}$) : $\Delta H = C_p \Delta T$.

Ce qui redonne $Q = C_p \Delta T$.

- α très grand (mathématiquement $\alpha \rightarrow \infty$) :

$C(\infty) \rightarrow C_v$, et $PV^\alpha = \text{cste}$ peut encore s'écrire pour α fini :

$$P^{1/\alpha} V = \text{cste}.$$

À la limite, on a donc affaire à une transformation isochore ($\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow V = \text{cste}$), ce qui est cohérent avec $C(\alpha \rightarrow \infty) = C_v$. En effet : $\Delta U = Q$ puisque $V = \text{cste}$.

Or $\Delta U(1 \text{ mole}) = C_v \Delta T$ (avec $C_v = \text{cste}$).

D'où $Q = C_v \Delta T$ et $C(\alpha \rightarrow \infty) = C_v$.

- Enfin, les calculs faits ici excluent le cas $\alpha = 1$, pour lequel le calcul de W doit être repris.

Remarquons cependant que pour cette valeur de α , $\frac{Q}{W} = -1$ et $C(1)$ est infini, ce qui correspond bien au cas de la transformation isotherme ($\Delta U = 0$).

613

Évolution d'un gaz réel

1. On considère un gaz non parfait d'équation d'état, pour une mole :

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

équation de Van der Waals dans laquelle $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits, et a et b deux constantes caractéristiques du gaz.

La fonction énergie interne est donnée, pour une mole, par :

$$U(T, V) = -\frac{a}{V} + f(T).$$

On donne :

gaz	$a(\text{J} \cdot \text{mol}^{-2} \cdot \text{m}^{-3})$	$b(\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1})$
CO_2	0,36	$4,3 \cdot 10^{-5}$
N_2	0,13	$3,8 \cdot 10^{-5}$
H_2	0,025	$2,7 \cdot 10^{-5}$

a. À quelle(s) condition(s) sur a et b le comportement d'un tel gaz se rapproche-t-il de celui d'un gaz parfait ? Commenter dans le cas où le gaz est le dioxyde de carbone avec les conditions $V = V_1 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ (pour une mole) et $P = P_1 = 10^5 \text{ Pa}$.

b. Montrer que la capacité calorifique à volume constant C_v ne dépend que de la température T .

c. Donner la relation liant C_v et C_p (capacité calorifique molaire à pression constante) en fonction de $\frac{b}{V}$, R , T et $T_i = \frac{2a}{Rb} \left(1 - \frac{b}{V} \right)^2$.

Faire l'application numérique pour N_2 et H_2 avec $T = 290 \text{ K}$ et $V = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

2. On fait subir à une mole de CO_2 une compression isotherme réversible depuis l'état (P_1, V_1) jusqu'à un volume final $V_2 = \frac{V_1}{10}$. Calculer les transferts de travail W et d'énergie thermique occasionnés par cette transformation.

Comparer aux valeurs obtenues dans l'hypothèse d'un gaz parfait. Commenter.

3. Le gaz (ici N_2 ou H_2) s'écoule très lentement dans une canalisation horizontale calorifugée. Il y subit une détente de Joule-Kelvin (présence d'un étranglement ... en un « point » de la canalisation). Rappeler les caractéristiques d'une telle détente.

On définit le coefficient $\eta = \frac{\partial T}{\partial P}_H$ où H désigne l'enthalpie. Les calculs donnent :

$$\eta = -\frac{b}{C_p} \frac{T - T_i}{T - \frac{b}{V} T_i}.$$

Préciser le rôle de la température T_i appelée température d'inversion.

Calculer T_i pour le diazote N_2 et le dihydrogène H_2 . $V \sim 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

Commenter les résultats obtenus.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Définition des capacités calorifiques C_v et C_p .
- Fonctions énergie interne U et enthalpie H.
- Premier principe (système fermé ; cas des écoulements).
- Détente de Joule-Kelvin (= Joule-Thomson).

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

- 1.** Les coefficients a et b traduisent les écarts au modèle du gaz parfait pour lequel les molécules (ou atomes) seraient ponctuelles et sans interaction.

Pour C_v et C_p , il faut revenir aux définitions du cours...

- 2.** La réversibilité de la transformation permet un calcul direct du travail W reçu par le gaz.

- 3.** On cherche à savoir si une détente ($dP < 0$) isenthalpique ($H = \text{constante}$: détente du type Joule-Kelvin) s'accompagne d'un refroidissement ($dT < 0$) ou d'un échauffement ($dT > 0$) du gaz.

La température T_i apparaît comme une température pour laquelle, dans cette détente isenthalpique, le comportement du gaz réel s'apparente à celui du gaz parfait : on aura donc à envisager les cas où $T > T_i$ et $T < T_i$.

■ 3. Solution

- 1. a.** L'équation d'état du gaz parfait (pour une mole) s'écrit $PV = RT$, ce qui correspond au cas limite $a = b = 0$ dans l'équation de Van der Waals. (Notons que l'on retrouve bien alors la fonction énergie interne du gaz parfait $U = C_v T + \text{constante}$, fonction de T seulement : 1^{re} loi de Joule.) Le comportement du gaz sera proche de celui du gaz parfait si a et b sont suffisamment petits, c'est-à-dire si : $a \ll PV^2$ et $b \ll V$. Dans le cas présent (état initial du gaz) :

$$V_1 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \text{et} \quad \frac{b}{V_1} = 1,7 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

$$P_1 V_1^2 = 62,5 \text{ J} \cdot \text{m}^3 \quad \text{et} \quad \frac{a}{P_1 V_1^2} = 5,8 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

ce qui correspond bien aux conditions ci-dessus. Mais il n'en sera peut-être plus de même après une compression réduisant fortement le volume...

- 1. b.** Par définition $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$.

Or ici $U(T, V) = -\frac{a}{V} + f(T)$; d'où $C_v = 0 + \frac{df}{dT}$

$$\text{et} \quad C_v = \frac{df(T)}{dT} \quad (1)$$

Cette relation traduit bien que C_v ne dépend pas de la température.

1. c. Par définition $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$.

$$\text{On a } H = U + PV = -\frac{a}{V} + f(T) + PV.$$

$$\text{D'où } C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = \frac{df}{dT} + \left(P + \frac{a}{V^2}\right) \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \quad (2)$$

Pour déterminer la dérivée $\frac{\partial V}{\partial T}$, il suffit de reprendre l'expression de l'équation d'état dans laquelle on considère que P est fixée :

$$T = \frac{1}{R} \left[P + \frac{a}{V^2} \right] (V - b) \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \frac{1}{R} \left\{ P + \frac{a}{V^2} + (V - b) \left(-\frac{2a}{V^3} \right) \right\}.$$

D'où avec (1), (2) et $P + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V - b}$:

$$C_p - C_v = R \frac{\frac{RT}{V - b}}{\frac{RT}{V - b} - \frac{2a}{V^3}(V - b)} = R \frac{1}{1 - \frac{2a}{RTV^3}(V - b)^2}.$$

$$\text{Et avec } T_i = \frac{2a}{Rb} \left(1 - \frac{b}{V} \right)^2 : \boxed{C_p - C_v = \frac{R}{1 - \frac{bT_i}{VT}}}$$

On retrouve la loi des gaz parfaits ($C_p - C_v = R$) dès que $a = 0$ et $b = 0$ ($a = 0$ suffit).

Application numérique : on a en fait $\frac{bT_i}{VT} \ll 1 \Rightarrow C_p - C_v \approx R \left(1 + \frac{bT_i}{VT} \right)$

$$\text{d'où } \frac{C_p - C_v}{R} - 1 \approx \frac{bT_i}{VT}.$$

$$\begin{aligned} \text{On trouve pour N}_2 &\rightarrow \frac{C_p - C_v}{R} - 1 = 4,8 \cdot 10^{-3} \\ \text{H}_2 &\rightarrow \frac{C_p - C_v}{R} - 1 = 9,2 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{écart faibles.} \end{array} \right.$$

2. Le travail reçu par un fluide au cours d'une transformation s'écrit : $W = - \int P_{\text{ext}} \cdot dV$.

Ici, la transformation est réversible (en particulier, il n'y a pas de frottements) et, à chaque instant : $P_{\text{ext}} = P_{\text{gaz}} = P(V)$.

$$\text{Avec, d'après l'équation d'état : } P(V) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

$$\text{ce qui donne : } W = - \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \right) dV$$

expression dans laquelle T est constante (transformation isotherme). Il vient :

$$W = - \left[RT \ln |V - b| + \frac{a}{V} \right]_{V_1}^{V_2}$$

soit

$$W = RT \ln \left[\frac{V_1 - b}{V_2 - b} \right] - a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

expression dans laquelle RT s'exprime à partir de l'équation d'état...Pour calculer le transfert thermique Q , exprimons le premier principe :

$$\Delta U = U(T, V_2) - U(T, V_1) = W + Q$$

soit

$$Q = \Delta U - W = -\frac{a}{V_2} + \frac{a}{V_1} - W$$

et

$$Q = -RT \ln \left[\frac{V_1 - b}{V_2 - b} \right]$$

Commentaire

On a $\Delta U = a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) < 0$ ce qui correspond à une diminution de l'énergie potentielle des forces d'interaction de Van der Waals (la compression a eu pour effet de diminuer les distances moyennes interparticules...), l'énergie cinétique moyenne étant invariable (la température étant fixée).

Application numérique : on a : $T = \frac{1}{R} \left(P_1 + \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - b) \Rightarrow T = 302 \text{ K.}$

$$Q = -5,82 \text{ kJ} \quad \text{et} \quad W = 5,69 \text{ kJ.}$$

Pour un gaz parfait, les résultats sont ceux que l'on obtient en faisant $a = b = 0$ dans les expressions précédentes :

$$\Delta U_{GP} = 0 \quad (\text{prévisible !})$$

$$Q_{GP} = -W_{GP} = -RT' \ln \frac{V_1}{V_2} = -P_1 V_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

car la température a une valeur différente à P_1 et V_1 fixés.

$$\begin{aligned} \text{Numériquement } & \left| \begin{aligned} T' &= 301 \text{ K} \# T \\ Q_{GP} &= -W_{GP} = -5,76 \text{ kJ,} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

résultats du même ordre de grandeur pour les valeurs de W et Q (écart de l'ordre de 1 %...).

Par contre, l'écart sur les pressions finales n'est pas nécessairement négligeable !

On peut le vérifier facilement, en comparant P_2 et P'_2 .

$$P_2 = \frac{RT}{V_2 - b} - \frac{a}{V_2^2} = 9,64 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P'_2 = \frac{RT'}{V_2} = P_1 \frac{V_1}{V_2} = 10^6 \text{ Pa}$$

l'écart est notable ($\sim 4\%$), mais a peu d'effet sur le résultat de l'intégrale donnant W ...

3. La détente de Joule-Thomson est une détente isenthalpique. Il y a conservation de l'enthalpie : $\Delta H = 0$.

Pour les gaz parfaits, H n'est fonction que de la température de sorte que cette dernière reste constante dans une détente de Joule-Thomson.

Ici, avec les valeurs indiquées, on a $b \ll V \left(\frac{b}{V} \sim 10^{-3} \right)$ si bien que le signe de $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H$ est lié à celui de $T - T_i$. Ainsi :

- pour $T < T_i$, le coefficient de Joule-Thomson est positif, donc une détente ($dP < 0$) s'accompagne d'un abaissement de température ($dT < 0$) ;
- pour $T > T_i$, c'est l'effet inverse qui sera observé puisque $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H < 0$; le gaz subit un échauffement ($dT > 0$ pour $dP < 0$) ;
- pour $T = T_i$, la détente s'effectue à température constante (comme pour un gaz parfait).

Remarquons que pour $V \sim 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$, nous pouvons confondre T_i avec la quantité $\frac{2a}{Rb}$: $T_i \# \frac{2a}{Rb}$ pour $b \ll V$.

Cette température T_i est appelée « **température d'inversion** ». Donnons-en la valeur numérique pour le diazote (N_2) et le dihydrogène (H_2).

$$\begin{aligned} - N_2: \quad T_i &\# \frac{2 \times 0,13}{8,31 \times 38 \cdot 10^{-6}} \left(1 - \frac{38 \cdot 10^{-6}}{22,4 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \Rightarrow T_i = 821 \text{ K}; \quad \left(\frac{2a}{Rb} \# 823 \text{ K} \right). \\ - H_2: \quad T_i &\# \frac{2 \times 0,025}{8,31 \times 27 \cdot 10^{-6}} \left(1 - \frac{27 \cdot 10^{-6}}{22,4 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \Rightarrow T_i = 222 \text{ K}; \\ &\left(\frac{2a}{Rb} \# 222 \text{ K} \text{ également} \right). \end{aligned}$$

Commentaires

- En conclusion, si l'on désire abaisser la température du gaz par une **détente isenthalpique**, les valeurs déterminées précédemment pour l'azote et l'hydrogène nous indiquent :
 - qu'une telle opération est possible à température initiale ambiante pour N_2 : $(T \sim 290 \text{ K}) < (T_i \sim 821 \text{ K})$;
 - que ce n'est pas le cas pour H_2 qu'il faudra préalablement refroidir : $(T \sim 290 \text{ K}) > (T_i \sim 222 \text{ K})$.

Soulignons que ce type de détente est effectivement utilisé pour obtenir des basses températures et pour la liquéfaction de gaz (application dans certains réfrigérateurs et liquéfacteurs).

- Pour un gaz parfait ($a = 0$ et $b = 0$), on a bien $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = 0$.

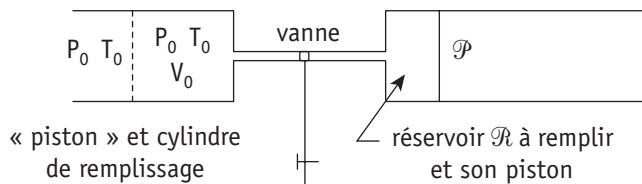
614 Remplissage d'un réservoir

On considère l'atmosphère comme un réservoir infini d'air à la pression $P_0 = 1,0 \text{ atm}$ et à la température $T_0 = 300 \text{ K}$, supposées constantes. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de coefficient $\gamma = 1,4$.

On désire étudier différentes opérations de remplissage d'un réservoir \mathcal{R} . Ce dernier a un volume V fixe, une section S et une longueur l .

Il est muni d'un piston \mathcal{P} , mobile sans frottement, de masse négligeable. Une vanne permet de mettre ce réservoir en communication avec l'atmosphère ; elle possède une ouverture assez petite pour que l'air pénètre très lentement dans \mathcal{R} . Le remplissage se termine lorsque l'air est à la pression P_0 dans \mathcal{R} .

De façon à modéliser simplement l'opération de remplissage, on propose le schéma suivant :

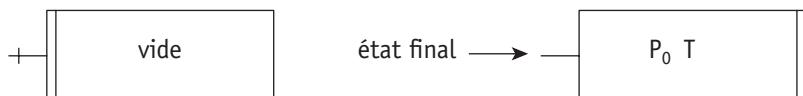


Le système (P_0, V_0, T_0) représente l'air qui aura pénétré dans \mathcal{R} à la fin de l'opération, où il se trouvera dans tous les cas à la pression finale P_0 .

$$V = 10 \text{ L}; \quad S = 100 \text{ cm}^2; \quad l = 1 \text{ m}.$$

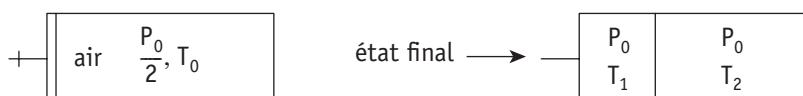
1. On étudie trois opérations partant de conditions initiales différentes. Dans cette question, le cylindre \mathcal{R} et son piston sont adiabatiques.

a.



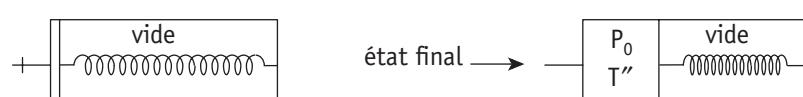
Déterminer T .

b.



Déterminer T_1 et T_2 .

c.



Le ressort a une longueur à vide l et une raideur k telle que $P_0 \cdot S = \frac{kl}{2}$.

Déterminer T'' , le ressort étant comprimé à mi-longueur dans l'état final.

2. Dans la réalité, l'hypothèse adiabatique pour le cylindre et le piston n'est réaliste que peu de temps après la fin de l'opération.

On considère donc qu'après avoir atteint les états précédents, le gaz qui a pénétré dans \mathcal{R} se retrouve au bout d'un certain temps à la température T_0 de l'atmosphère.

Exprimer et calculer les quantités de chaleur Q_1 , Q_2 et Q_3 que le gaz échangera au cours de cette phase, dans les trois cas étudiés précédemment, la vanne étant restée ouverte.

3. Dans cette question, on ne suppose plus que l'ouverture de la vanne est petite. De ce fait, l'air pénètre de façon brutale dans \mathcal{R} au cours du remplissage.

Indiquer dans quel(s) cas il y a modification de la valeur (ou des valeurs) de la température atteinte en fin de remplissage.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Loi de Laplace.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

- Dans les questions **1.** et **2.**, l'air rentre lentement dans le réservoir. Les transformations du gaz sont quasi statiques. Ce n'est plus le cas dans la question **3**.
- On définira soigneusement le système étudié : les n moles d'air qui pénètrent dans le réservoir et les transformations subies.

■ 3. Solution

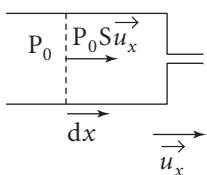
1. a. Les n moles de gaz qui rentrent dans le réservoir subissent une transformation quasi statique adiabatique.

Avant d'entrer dans \mathcal{R} , elles occupent un volume V_0 à la pression P_0 et la température T_0 .

La loi des gaz parfaits s'écrit $P_0V_0 = nRT_0$. Une fois dans \mathcal{R} , elles occupent un volume V toujours à la pression P_0 et à la température T . On a de même $P_0V = nRT$.

Écrivons le 1^{er} principe : $\Delta U = W + Q$.

La transformation est adiabatique $Q = 0$. Calculons W .



Le gaz est soumis à la force pressante $P_0 \vec{S} \vec{u}_x$ qui lui fournit dans le déplacement $d\vec{x}$ le travail élémentaire :

$$\delta W = P_0 S dx = P_0 dV.$$

Le travail fourni au gaz s'obtient en intégrant dV sur le volume V_0 « bloqué par le piston » $W = P_0 V_0$.

POINT MÉTHODE

Dans le premier principe, W représente le travail reçu par le gaz au niveau des surfaces mobiles. Une étude mécanique du problème remplace avantageusement des formules toutes faites.

D'après la 1^{re} loi de Joule, $\Delta U = nC_v(T - T_0)$.

On a donc : $nC_v(T - T_0) = P_0V_0 = nRT_0$

$$T = \frac{T_0(C_v + R)}{C_v} = T_0 \frac{C_p}{C_v}$$

$$\boxed{T = T_0\gamma}$$

Application numérique : $T = 420$ K.

1. b. Soit n_2 le nombre de moles de gaz contenues dans le compartiment de droite, n_1 le nombre de moles de gaz qui vont entrer dans le compartiment de gauche. On a :

- avant le remplissage : $\frac{P_0}{2}V = n_2RT_0$ et $P_0V_0 = n_1RT_0$;

- après le remplissage (même pression P_0) :

$$P_0V_2 = n_2RT_2 \quad \text{et} \quad P_0V_1 = n_1RT_1$$

avec $V_1 + V_2 = V$.

Le 1^{er} principe nous donne toujours : $\Delta U = W + Q = W = P_0V_0 \quad (1)$

POINT COURS

L'énergie interne est une fonction extensive pour les systèmes usuels.

L'énergie interne d'un système composé de deux sous-systèmes est égale à la somme des énergies internes respectives des deux sous-systèmes.

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = n_1C_v(T_1 - T_0) + n_2C_v(T_2 - T_0)$$

$$\Delta U = \frac{1}{\gamma - 1}(P_0V_1 - P_0V_0) + \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_0V_2 - \frac{P_0V}{2}\right) \quad (2)$$

de (1) et (2), on tire $V_0 = \frac{V}{2\gamma} \quad (3)$

Appliquons la loi de Laplace aux n_2 moles de gaz dans le compartiment de droite.

$$\frac{P_0}{2}V^\gamma = P_0V_2^\gamma \quad \text{d'où} \quad V_2 = V\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma} = 0,61V$$

et $V_1 = 0,39V$

$$\text{donc } T_2 = \frac{P_0V_2}{n_2R} = \frac{P_0V_2}{\frac{P_0V}{2T_0}} = \frac{2V_2}{V}T_0 \quad \boxed{T_2 = T_0 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Application numérique : $T_2 = 365,7$ K.

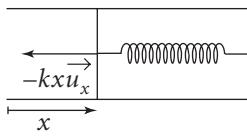
$$\text{De même } T_1 = \frac{P_0V_1}{n_1R} = \frac{P_0V_1}{P_0V_0}T_0 = T_0\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = 2\gamma T_0 \frac{V_1}{V}$$

$$\boxed{T_1 = 2\gamma T_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma}\right)}$$

Application numérique : $T_1 = 328$ K.

1. c. Appliquons à nouveau le premier principe aux n moles de gaz entrant dans \mathcal{R} :

$$\Delta U = W + Q = W \text{ (transformation adiabatique).}$$



Au travail précédent, s'ajoute le travail de la force élastique exercée par le ressort qui fournit un travail élémentaire $\delta W' = -kx dx$.

Le ressort étant comprimé à mi-longueur, $W' = -\frac{1}{2}k\frac{l^2}{4}$

Commentaire

Le gaz est poussé à gauche par l'atmosphère et reçoit donc le travail P_0V_0 . À droite, il comprime le ressort, le travail W' est donc donné à l'extérieur ($W' < 0$).

On a ainsi

$$\Delta U = P_0V_0 - \frac{1}{2}k\frac{l^2}{4}$$

avec $P_0S = k\frac{l}{2}$ et $V = lS$.

$$\Delta U = P_0V_0 - \frac{P_0V}{4} \quad (4)$$

Et d'après la 1^{re} loi de Joule :

$$\Delta U = nC_v(T'' - T_0) \quad (5)$$

Avant le remplissage, on a toujours $P_0V_0 = nRT_0$.

Après le remplissage, $P_0\frac{V}{2} = nRT''$

en reportant dans (4), il vient :

$$\Delta U = nR\left(T_0 - \frac{T''}{2}\right).$$

D'où d'après (5) :

$$nR\left(T_0 - \frac{T''}{2}\right) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T'' - T_0)$$

et donc

$$T'' = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}T_0$$

Application numérique : $T'' = 350$ K.

2. a. Les transformations ne sont plus adiabatiques. Par contre, tous les refroidissements se font à pression extérieure constante P_0 .

POINT COURS

Pour un système en équilibre mécanique avec l'extérieur dans l'état initial et l'état final, subissant une transformation à pression extérieure constante (transformation dite monobare) $Q = \Delta H$.

$$Q_1 = \Delta H_1 = nC_p(T_0 - T) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0 V}{T} (T_0 - T)$$

$$Q_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_0 V \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_0 V \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \quad \left(\frac{T_0}{T} = \frac{1}{\gamma} \right)$$

$$Q_1 = -P_0 V$$

Application numérique : $Q_1 = -10^3$ J.

2. b. $Q_2 = \Delta H_2 = n_1 C_p(T_0 - T_1) + n_2 C_p(T_0 - T_2)$
 $= C_p[(n_1 + n_2)T_0 - n_1 T_1 - n_2 T_2]$.

D'après l'expression (2) $(n_1 + n_2)T_0 - n_1 T_1 - n_2 T_0 = -\frac{\Delta U}{C_v}$

$$Q_2 = -\frac{C_p}{C_v} \Delta U = -\gamma \Delta U = -\gamma P_0 V_0 \text{ d'après (1)}$$

$$Q_2 = -\frac{P_0 V}{2} \text{ d'après (3)}$$

Application numérique : $Q_2 = -500$ J.

2. c. L'état mécanique du système n'est pas modifié.

$$Q_3 = \Delta H_3 = nC_p(T_0 - T'') = \frac{P_0 V}{2RT''} C_p (T_0 - T'')$$

$$Q_3 = \frac{P_0 V}{2} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{T_0}{T''} - 1 \right) = \frac{P_0 V}{2} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} - 1 \right)$$

$$Q_3 = -\frac{P_0 V}{4}$$

Application numérique : $Q_3 = -250$ J.

Commentaire

- Dans la réalité, l'équilibre mécanique s'établit beaucoup plus rapidement que l'équilibre thermique, ce qui justifie les modèles proposés en 1. puis en 2.
- Le système considéré reste, dans chaque cas, l'air présent au début du refroidissement dans le réservoir. Du fait de ce refroidissement, un peu de gaz pénètre alors dans le réservoir, mais il se retrouve à la fin dans les conditions (T_0, P_0) , il n'intervient donc pas dans le bilan énergétique...

3. Le caractère quasi statique de l'opération de remplissage n'a été utilisé que dans le cas b. : sans cette hypothèse, la fin du calcul n'est pas possible et on ne peut pas calculer T_1 et T_2 . On sait seulement que :

$$W = P_0 V_0 = \Delta U = n_1 C_v(T_1 - T_0) + n_2 C_v(T_2 - T_0).$$

On a toujours $V_0 = \frac{V}{2\gamma}$ (3). Il vient finalement

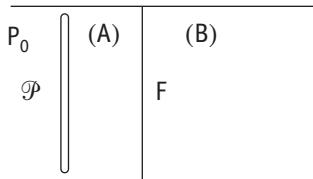
$$\gamma T_2 + T_1 = 2\gamma T_0$$

relation vérifiée bien sûr par les valeurs T_1 et T_2 trouvées au 1.b.

615

Détente irréversible d'un gaz parfait

Un cylindre horizontal est fermé par un piston \mathcal{P} mobile sans frottements. L'intérieur du cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe F. Sur la face extérieure du piston, s'exerce la pression atmosphérique constante $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques, mais la cloison F est diathermique.



Toutes ces parois sont de capacité thermique négligeable.

À l'état initial, le compartiment A contient une mole de gaz parfait caractérisé par la valeur $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$, occupant un volume $V_A = 25 \text{ L}$. Le compartiment B est vide.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1. Préciser la température T_A du gaz dans A.
2. On perce un orifice dans la paroi fixe F.
 - a. Par une analyse qualitative du problème, montrer que selon la valeur du volume V_B de B, deux types de solution existent.
 - b. En supposant que V_B est inférieur à la valeur-seuil V_s (inconnue pour l'instant...), déterminer les caractéristiques P_1, V_1, T_1 du gaz contenu dans A + B quand le nouvel état d'équilibre est atteint. Application numérique : $V_B = 25 \text{ L}$.
 - c. Déterminer la valeur-seuil V_s en fonction de V_A et γ .
 - d. Pour $V_B > V_s$, déterminer P_2, V_2, T_2 du gaz enfermé dans le cylindre lorsque l'état d'équilibre est atteint. Application numérique : $V_B = 50 \text{ L}$.
3. Quels commentaires peut-on faire sur la nature de la transformation ?

Solution

1. L'équation du gaz parfait s'écrit, pour la mole de gaz initialement contenue dans A :

$$PV = RT \quad \text{soit} \quad T_A = \frac{P_0 V_A}{R} = 301 \text{ K.}$$

2. a. Le gaz va passer du compartiment A vers le compartiment B ce qui va provoquer le déplacement du piston. La fin de cette transformation sera atteinte :

- soit parce que la pression dans B atteint la valeur P_0 , ce qui réalise l'équilibre mécanique ;
- soit parce que le piston \mathcal{P} vient buter sur la cloison fixe F, tout le gaz de A étant passé dans B.

Il est évident que la seconde possibilité ne peut se réaliser que pour un volume du compartiment B suffisamment grand, soit $V_B > V_s$, valeur-seuil qui reste à déterminer...

2. b. Dans ce cas, d'après ce qui précède, à l'équilibre, on a :

$$P_A = P_B = P_0 \quad \text{soit} \quad P_1 = P_0$$

et $V_1 = V_B + V'_A$ (V'_A volume du gaz restant en A) avec $P_1 V_1 = RT_1$.

D'autre part, considérons le système constitué par les compartiments A et B et leur contenu, et appliquons-lui le premier principe :

$$\Delta U_{\text{syst}} = W + Q \quad (1)$$

avec $\Delta U_{\text{syst}} = \Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{parois}} = \Delta U_{\text{gaz}}$,

car les parois – par hypothèse – n'absorbent pas d'énergie (parois adiabatiques, et cloison F de capacité thermique négligeable).

D'où $\Delta U_{\text{gaz}} = C_v(T_1 - T_A)$.

D'autre part $Q = 0$ (parois adiabatiques) (2)

Et $W = -\int P_{\text{ext}} dV = -P_0 \Delta V$ (puisque $P_{\text{ext}} = P_0$).

ΔV représentant le volume balayé par le piston mobile :

$$\Delta V = V'_A - V_A = (V_1 - V_B) - V_A = V_1 - (V_A + V_B),$$

soit $W = -P_0[V_1 - V_A - V_B]$ (3)

(1) donne alors avec (2) et (3) : $C_v(T_1 - T_A) = -P_0 V_1 + P_0(V_A + V_B)$.

Or $P_1 V_1 = RT_1$ et $P_0 V_A = RT_A$, soit :

$$\frac{C_v}{R}(P_1 V_1 - P_0 V_A) = -P_0 V_1 + P_0(V_A + V_B).$$

Soit en tenant compte de $P_1 = P_0$ et $\frac{C_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$

$$V_1 - V_A = (\gamma - 1) \cdot [-V_1 + V_A + V_B] \Rightarrow \gamma V_1 = \gamma V_A + (\gamma - 1)V_B.$$

D'où : $V_1 = V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B$

Il lui correspond une température T_1 définie par $P_1 V_1 = RT_1$ avec $P_1 = P_0$.

$$T_1 = \frac{P_0}{R} \left[V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B \right]$$

Application numérique : $V_1 = 25 + \frac{0,4}{1,4} \cdot 25 \Rightarrow V_1 = 32,1 \text{ L}$

$$T_1 = 387 \text{ K.}$$

2. c. La solution ci-dessus reste valable tant qu'il reste du gaz dans le compartiment A.

C'est-à-dire tant que : $V'_A > 0$, soit $V_1 > V_B$,

et, en remplaçant V_1 par son expression : $V_B < V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B$

$$V_B < \gamma V_A$$

la valeur-seuil de V_B est donc

$$V_s = \gamma V_A$$

2. d. Dans ce cas, tout le gaz passe de A dans B, et

$$V_2 = V_B$$

avec $P_2 \leq P_0$ et $P_2 V_2 = RT_2$,

et le travail W reçu par le gaz a pour expression :

$$W = -P_0 \Delta V = -P_0(-V_A) = +P_0 V_A.$$

L'application du premier principe donne alors :

$$\Delta U_{\text{système}} = \Delta U_{\text{gaz}} = Q + W = 0 + W.$$

Soit encore :

$$C_v(T_2 - T_A) = P_0 V_A,$$

d'où : $\frac{C_v}{R}(P_2 V_2 - P_0 V_A) = P_0 V_A \Rightarrow P_2 V_2 = P_0 V_A \left(1 + \frac{R}{C_v}\right)$

et

$$P_2 = \gamma P_0 \frac{V_A}{V_B} \quad (V_2 = V_B).$$

On en déduit T_2 :

$$T_2 = \frac{1}{R} P_2 V_2 = \frac{1}{R} \cdot \gamma P_0 \frac{V_A}{V_B} \cdot V_B,$$

$$T_2 = \gamma \frac{P_0 V_A}{R} = \gamma T_A$$

Et on peut vérifier que la condition $P_2 \leq P_0$ correspond bien à $V_B \geq \gamma V_A = V_s \dots$

Application numérique :

$$P_2 = \frac{\gamma}{2} \cdot P_0 = 0,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_2 = 421 \text{ K.}$$

3. Notons que l'état final – quand il reste du gaz dans le compartiment A, $V_1 > V_B$ – ne dépend pas du caractère quasi statique ou non de la transformation (on peut faire un gros trou dans la paroi F !), puisque l'expression du travail reste la même.

La transformation est de toute façon irréversible, ce qui se traduit par l'augmentation de l'entropie du gaz (évolution spontanée d'un système thermiquement isolé...).

On a pour un gaz parfait (avec $C_v = \text{cste}$) :

$$\Delta S = n C_v \ln \left(\frac{P_F V_F^\gamma}{P_I V_I^\gamma} \right).$$

• Cas du 2. b. où $P_F = P_I = P_0$; $V_I = V_A$ et $V_F = V_1 > V_A$:

$$\Delta S = C_v \ln \left(\frac{V_1}{V_A} \right)^\gamma = \gamma C_v \ln \left(\frac{V_1}{V_A} \right) > 0.$$

• Cas du 2. d. où $P_F = P_2$, $P_I = P_0$; $V_I = V_A$ et $V_F = V_B$:

$$\Delta S = C_v \ln \left[\frac{P_2}{P_0} \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^\gamma \right] = C_v \ln \left[\gamma \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} \right]$$

or $V_B > V_s = \gamma V_A \Rightarrow \Delta S > C_v \ln [\gamma \gamma^{\gamma-1}] = C_v \gamma \ln \gamma > 0.$

On a bien dans les deux cas $\Delta S > 0$ comme nous l'indique l'application du second principe : $\Delta S = 0 + \sigma > 0$ (pas d'échanges thermiques avec l'extérieur), la transformation étant irréversible.

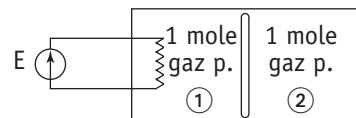
On voit bien qu'il serait faux d'écrire $PV^\gamma = \text{cste}$ (qui conduirait à $\Delta S = 0$) : la transformation est certes adiabatique, mais elle est – dans tous les cas – irréversible.

616 Chauffages d'un gaz

- 1.** On considère un réservoir à parois adiabatiques séparé en deux parties par un piston adiabatique et mobile sans frottement.

Initialement, chaque compartiment contient une mole du même gaz parfait, à la pression $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ et à la température $T_0 = 290 \text{ K}$ (constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; pour le gaz

considéré : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,40$).

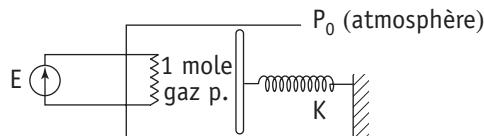


Grâce à une résistance électrique, on chauffe progressivement le gaz ① dans le compartiment de gauche, jusqu'à la pression $P = 2P_0$.

a. Déterminer l'état du gaz dans chacun des deux compartiments.

b. Calculer l'énergie thermique Q apportée au gaz de gauche par l'intermédiaire de la résistance, ainsi que le travail W échangé entre les deux gaz.

- 2.** La mole de gaz parfait ① considérée précédemment est maintenant contenue dans un cylindre adiabatique fermé par un piston – lui-même adiabatique – de section $S = 0,05 \text{ m}^2$, retenu par un ressort de raideur $k = 25 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.



Il n'y a pas de frottement. Le gaz est dans le même état initial que précédemment, et il est à nouveau chauffé progressivement jusqu'à la pression $P = 2P_0$.

a. Calculer l'état final du gaz.

Que peut-on dire de la relation $P(V)$ au cours de ce chauffage ?

b. Calculer l'énergie thermique Q_1 fournie au gaz par la résistance, ainsi que l'énergie absorbée par le ressort.

Solution

- 1. a.** Considérons le gaz ② : il subit une transformation adiabatique quasi statique et réversible, c'est-à-dire que son volume et sa pression vérifient la loi de Laplace :

$$P \cdot V^\gamma = \text{constante}$$

soit ici, en notant V_2 le volume du gaz :

$$P \cdot V_2^\gamma = P_0 \cdot V_0^\gamma$$

avec

$$P = 2P_0, \text{ et } V_0 = \frac{RT_0}{P_0}$$

d'où :

$$V_2 = \frac{RT_0}{P_0} \cdot \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

numériquement : $V_2 = 24,1 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1,4}}$

$$V_2 \approx 14,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

On en déduit la température T_2 de ce gaz :

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{PV_2}{R} = \frac{P}{P_0} \cdot T_0 \cdot \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ T_2 &= T_0 \cdot \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

soit

$$T_2 \approx 353 \text{ K}$$

et le volume V_1 du gaz ① : $V_1 = 2V_0 - V_2$

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{RT_0}{P_0} \left[2 - \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] \\ V_1 &\approx 33,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3. \end{aligned}$$

On en déduit la température T_1 de ce gaz :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{PV_1}{R} \\ T_1 &= T_0 \cdot \frac{P}{P_0} \left[2 - \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] \end{aligned}$$

soit

$$T_1 \approx 806 \text{ K.}$$

1. b. • Appliquons d'abord le premier principe à l'ensemble des deux gaz : le volume est constant, donc $W = 0$, et le système reçoit par l'intermédiaire de la résistance chauffante une énergie thermique Q .

D'où $\Delta U_{\text{syst}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 + Q$

soit $Q = C_v(T_1 - T_0) + C_v(T_2 - T_0)$

or $PV_1 = RT_1$, $PV_2 = RT_2$ et $P_0V_0 = RT_0$, d'où :

$$Q = \frac{C_v}{R} [P(V_1 + V_2) - 2P_0V_0]$$

et avec $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $V_1 + V_2 = 2V_0$:

$$Q = \frac{2V_0}{\gamma - 1} (P - P_0) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{2RT_0}{\gamma - 1} \left(\frac{P}{P_0} - 1\right)}$$

Application numérique : $P = 2P_0$ donne $Q = \frac{2RT_0}{\gamma - 1} \Rightarrow Q \approx 12,0 \text{ kJ}$

- Calculons maintenant le travail W reçu par le gaz ②. Le premier principe appliquée au seul gaz ② qui subit une compression adiabatique donne :

$$\Delta U_2 = W \Rightarrow W = C_v(T_2 - T_0) = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_0).$$

D'où

$$W = \frac{RT_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P}{P_0} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right].$$

Application numérique : $P = 2P_0$ et $W = 1,32 \text{ kJ}$.

- 2. a.** Le chauffage du gaz est quasi statique : le piston, sans frottement, est donc constamment en quasi-équilibre, ce qui se traduit par un bilan nul des forces qu'il subit :

$$Ps - P_0 s - kx = 0$$

en notant x le déplacement du piston depuis sa position initiale (le ressort a au départ sa longueur au repos puisque $P_I = P_0$). D'autre part, le volume est devenu :

$$V = V_0 + sx,$$

$$\text{soit } P = P_0 + \frac{k}{s}x = P_0 + \frac{k}{s} \cdot \frac{V - V_0}{s}.$$

La pression varie selon une fonction affine de V , ce qui se traduit par un trajet rectiligne en diagramme $P(V)$.

La valeur de la raideur k du ressort « fixe » la pente de la droite représentative de la transformation : plus la raideur k est élevée et plus on se rapproche d'un chauffage à volume constant.

$$\text{À l'état final, } P = 2P_0 \text{ soit } x = x_F = \frac{s}{k}(P - P_0) = \frac{s}{k}P_0.$$

D'où le volume final

$$V_F = V_0 + \frac{s^2 P_0}{k}$$

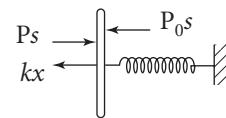
Et une température finale T_F telle que, loi des gaz parfaits :

$$(2P_0)V_F = RT_F \Rightarrow T_F = \frac{2P_0}{R} \left(V_0 + \frac{s^2 P_0}{k} \right),$$

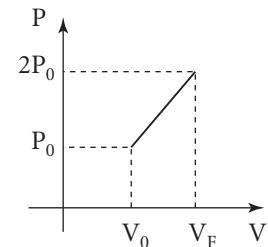
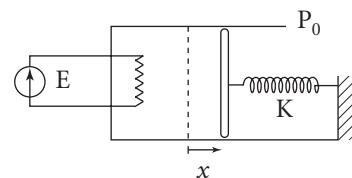
or $P_0 V_0 = RT_0$, d'où :

$$T_F = 2T_0 + \frac{2s^2 P_0^2}{Rk}$$

Application numérique : $x_F = 0,2 \text{ m}$; $V_F = 34,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ et $T_F = 821 \text{ K}$.



ressort contracté
de $x > 0$



2. b. Le travail mécanique W_1 , algébriquement reçu par le gaz au cours du chauffage (transformation quasi statique) est donné par :

$$W_1 = - \int_{V_0}^{V_F} P dV$$

$$W_1 = - \int_0^{x_F} \left(P_0 + \frac{k}{s} x \right) s dx$$

$$W_1 = - \int_0^{x_F} P_0 s dx - \int_0^{x_F} k x dx$$

soit

$$W_1 = - P_0 s x_F - k \frac{x_F^2}{2}$$

Le premier terme correspond au travail dépensé contre l'air atmosphérique, et le second au travail de compression du ressort.

En remplaçant x_F par sa valeur $x_F = \frac{sP_0}{k}$

$$W_1 = - \frac{s^2 P_0^2}{k} - \frac{s^2 P_0^2}{2k}$$

$$W_1 = - \frac{3}{2} \cdot \frac{s^2 P_0^2}{k}$$

et l'énergie absorbée par le ressort :

$$W_{\text{ressort}} = \frac{s^2 P_0^2}{2k}$$

$$W_{\text{ressort}} = 500 \text{ J.}$$

Le premier principe appliqué au gaz donne alors :

$$Q_1 = \Delta U_{\text{gaz}} - W_1$$

soit $Q_1 = \frac{1}{\gamma-1} (PV - P_0 V_0) - W_1$

$$Q_1 = \frac{1}{\gamma-1} \left[2P_0 \left(V_0 + \frac{s^2 P_0}{k} \right) - P_0 V_0 \right] + \frac{3}{2} \cdot \frac{s^2 P_0^2}{k}$$

et finalement

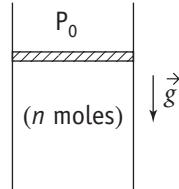
$$Q_1 = \frac{RT_0}{\gamma-1} + \frac{s^2 P_0^2}{k} \left(\frac{2}{\gamma-1} + \frac{3}{2} \right)$$

$$Q_1 = 12,5 \text{ kJ.}$$

C. Bilans d'énergie et d'entropie

621 Compression d'un gaz parfait

Un cylindre vertical à parois diathermiques est fermé par un piston de masse m et de surface s (section du cylindre). Il renferme n moles d'un gaz parfait diatomique dont on donne le coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ (γ est une constante).



Initialement, le piston est bloqué et le gaz est en équilibre dans l'état (P_0 , V_0 , T_0). Le système est thermostaté à T_0 .

Pour les applications numériques, on prendra : $n = 0,5$ mol ; $T_0 = 290$ K ; $P_0 = 10^5$ Pa ; $\gamma = \frac{7}{5}$; $R = 8,31 \cdot J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ (constante des gaz parfaits) ; $\frac{mg}{s} = xP_0$ avec $x = 0,5$.

1. On libère brutalement le piston qui devient mobile sans aucun frottement, déterminer :
 - a. l'état final ;
 - b. les échanges énergétiques ;
 - c. la création d'entropie.
2. On libère le piston tout en assurant une descente infiniment lente.
 - a. Reprendre les questions précédentes.
 - b. Quelle relation existe-t-il entre les travaux reçus par le gaz dans les deux cas et la création d'entropie calculée au 1.a. ?

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe – second principe.
- Réversibilité – irréversibilité.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Cette première transformation est irréversible. Le système va tendre vers un état d'équilibre (on peut supposer par exemple que des phénomènes tels que la viscosité du gaz sont à l'origine de l'amortissement nécessaire pour atteindre cet équilibre). Cet équilibre thermodynamique se traduira par un équilibre thermique (système en relation avec un thermostat) et un équilibre mécanique.

La création d'entropie s'obtient à l'aide du second principe appliqué au gaz : il faudra vérifier que la quantité obtenue est bien positive.

2. Cette fois-ci, à chaque instant, la pression du gaz est égale à la « pression extérieure » et sa température reste égale à T_0 (la transformation devient réversible). L'état final est évidemment le même (l'opérateur n'exerce aucune action dans l'état final).

De plus, la transformation étant réversible il n'y a pas de création d'entropie.

3. Solution

1. a. Supposons que le système ait atteint sa position d'équilibre. Dans cet état, la température est imposée par le thermostat ; elle vaut donc T_0 .

La condition d'équilibre mécanique (absence de frottements solides au niveau du piston) implique :

$$P_F = P_0 + \frac{mg}{s} \text{ soit } \boxed{P_F = P_0(1+x)}$$

Soit un volume V_F tel que (loi des gaz parfaits) :

$$P_F V_F = nRT_F \Rightarrow V_F = \frac{nRT_0}{P_F} \quad (T_F = T_0).$$

D'où : $\boxed{V_F = \frac{nRT_0}{P_0(1+x)}} \text{ (ou encore } V_F = \frac{V_0}{1+x} \text{).}$

Application numérique : $P_F = 10^5(1+0,5)$ soit : $P_F = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$

$$V_F = \frac{0,5 \times 8,31 \times 290}{10^5 \times 1,5} \text{ soit : } V_F = 8,0 \text{ dm}^3.$$

1. b. Dans une transformation irréversible, le travail élémentaire fourni par l'extérieur s'exprime sous la forme : $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$.

Soit au total : $W = - \int_{V_0}^{V_F} P_{\text{ext}} \cdot dV.$

Ici, $P_{\text{ext}} = P_0 + \frac{mg}{s}$.

Le travail reçu par le gaz seul est tel que :

$$W = - \left(P_0 + \frac{mg}{s} \right) (V_F - V_0) = -P_0(1+x) \left[\frac{V_0}{1+x} - V_0 \right]$$

$$\boxed{W = +P_0 V_0 x \Rightarrow W = nRT_0 x}$$

Application numérique : $W = 602 \text{ J.}$

Le thermostat lui fournit une énergie thermique Q . Le premier principe appliqué au gaz s'écrit : $\Delta U = W + Q$.

Le gaz étant parfait, son énergie interne ne dépend que de sa température ce qui implique ici $\Delta U = 0$ ($T_F = T_I = T_0$).

D'où : $Q = -W$ et $\boxed{Q = -nRT_0 x} \quad Q = -601 \text{ J.}$

1. c. Pour déterminer la création d'entropie, on est amené à faire un bilan d'entropie.

$$\Delta S_{\text{gaz}} = S_e + \sigma,$$

avec S_e l'entropie échangée avec le thermostat à la température T_0 .

Or $\Delta S_{\text{gaz}} = nC_v \ln \left(\frac{P_F V_F^\gamma}{P_I V_I^\gamma} \right)$. Soit ici : $\Delta S_{\text{gaz}} = nC_v \ln \left[(1+x) \left(\frac{1}{1+x} \right)^\gamma \right]$.

D'où $\Delta S_{\text{gaz}} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln((1+x)^{1-\gamma}) \Rightarrow \Delta S_{\text{gaz}} = -nR \ln(1+x).$

$$\text{et } S_e = \frac{Q}{T_0} = -nRx.$$

On en déduit la création d'entropie :

$$\sigma = -nR\ln(1+x) + nRx \Rightarrow \boxed{\sigma = nR[x - \ln(1+x)]}$$

Application numérique : $\sigma = 0,39 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Il reste à vérifier que cette quantité $\Delta_{\text{création}}S = \sigma(x)$ est bien – dans tous les cas – positive.

$$\sigma(x) = nR[x - \ln(1+x)].$$

$$\text{Or } \sigma(0) = 0 \text{ et } \frac{d\sigma}{dx} = nR\left[1 - \frac{1}{1+x}\right] = nR\frac{x}{1+x} > 0 \quad (x > 0).$$

On a bien $\sigma(x > 0) > 0$.

2. a. Le piston descendant très lentement, et sans frottements, on considérera que le gaz subit une transformation réversible dans laquelle sa pression est donnée, à chaque instant, par la relation :

$$P = \frac{nRT_0}{V} \quad (T = T_0).$$

$$\text{Le gaz reçoit donc le travail } W' = -\int PdV, \text{ soit : } W' = -nRT_0 \int \frac{dV}{V}.$$

Remarquons alors que l'état final est identique à celui décrit au 1. (l'équilibre thermique $\Rightarrow T_F = T_0$; l'équilibre mécanique donne $P_F = P_0(1+x)$, d'où un même volume final V_F).

$$\text{Soit } W' = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_F}{V_0}\right) \Rightarrow \boxed{W' = +nRT_0 \ln(1+x)}$$

Le gaz reçoit également une énergie thermique Q' du thermostat telle que (application du 1^{er} principe au gaz) : $\Delta U = W' + Q' = 0$ (gaz parfait et $T_F = T_I = T_0$ d'où $\Delta U = 0$)

$$\text{et } \boxed{Q' = -nRT_0 \ln(1+x)}$$

Application numérique : $W' = -Q' = 489 \text{ J}$.

Bilan entropique

$$\text{Nous avons maintenant : } \Delta S_{\text{gaz}} = -nR\ln(1+x).$$

Ce résultat est évidemment identique à celui obtenu au 1. : mêmes états initial et final et S_{gaz} est une fonction d'état.

$$\text{De plus } S_e = \frac{Q'}{T_0} = -nR\ln(1+x).$$

On a donc $\sigma = 0$ (transformation supposée réversible : pas de création d'entropie).

2. b. Nous avons obtenu au 1. b. et 2. a. :

$$\begin{cases} W = nRT_0x \quad \text{et} \quad W' = nRT_0\ln(1+x) \\ \sigma = nR[x - \ln(1+x)] \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{W - W' = T_0\sigma} \quad (1)$$

On passe du même état initial (P_0, V_0, T_0) au même état final $\left[P_0(1+x), \frac{V_0}{1+x}, T_0\right]$ par deux transformations différentes :

– la première est irréversible et monotherme : il faut fournir un travail irréversible $W = W_{\text{irr}}$;

– la seconde est réversible et isotherme, le travail nécessaire est $W' = W_{\text{rev}}$.

La relation (1) se réécrit :

$$W_{\text{irr}}(I \rightarrow F) - W_{\text{rev}}(I \rightarrow F) = T_0\sigma(I \rightarrow F/\text{irr}) \quad T_I = T_F = T_0.$$

Commentaires

Pour la transformation du 1. on a :

$\Delta U = 0$ (transformation monotherme + gaz parfait)

$$\text{d'où } W_{\text{irr}} + Q_{\text{irr}} = 0 \text{ avec } \Delta S_{\text{gaz}} = \frac{Q_{\text{irr}}}{T_0} + \sigma \text{ soit } W_{\text{irr}} = -T_0\Delta S_{\text{gaz}} + T_0\sigma \quad (2)$$

Pour la transformation du 2. :

$$\Delta U = 0 \text{ et } W_{\text{rev}} + Q_{\text{rev}} = 0 \text{ avec } \Delta S'_{\text{gaz}} = \frac{Q_{\text{rev}}}{T_0} + 0$$

$$\text{d'où } W_{\text{rev}} = -T_0\Delta S'_{\text{gaz}} \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) donnent alors : $W_{\text{irr}} - W_{\text{rev}} = T_0[\Delta S'_{\text{gaz}} - \Delta S_{\text{gaz}}] + T_0\sigma$.

Dans les deux cas, les états initial et final sont identiques donc le gaz subit la même variation d'entropie : $\Delta S'_{\text{gaz}} = \Delta S_{\text{gaz}}$. Ce qui conduit à la relation cherchée :

$$W_{\text{irr}} - W_{\text{rev}} = T_0\sigma$$

622 Solides en contact thermique

1. Deux corps C_1 et C_2 , de températures initiales T_{1_0} et T_{2_0} et de capacités thermiques constantes C_1 et C_2 , sont mis en contact.

Ils forment un système isolé et leurs volumes sont invariables.

$$\text{On note } T_0 = \frac{C_1 T_{1_0} + C_2 T_{2_0}}{C_1 + C_2} \text{ (prendre } T_{2_0} > T_{1_0}).$$

Déterminer la température finale T_f du système et sa variation d'entropie ΔS . Commenter ce dernier résultat.

2. Partant du même état initial, on suppose désormais que les échanges thermiques s'effectuent par l'intermédiaire d'un solide de capacité thermique négligeable et de conductivité thermique suffisamment faible.

a. Les résultats précédents sont-ils modifiés ? Commenter.

Déterminer l'évolution des températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$ dans l'hypothèse où la puissance thermique échangée de C_2 vers C_1 est donnée par l'expression :

$P_{th}(2 \rightarrow 1) = h(T_2 - T_1)$. On mettra en évidence une constante de temps τ que l'on exprimera en fonction de h , C_1 et C_2 .

b. Déterminer, en fonction de h , T_1 , T_2 le taux de création d'entropie $\frac{\delta\sigma}{dt}$. Commenter.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Second principe ; création d'entropie.
- Transformation quasi statique ; transformation réversible.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'ensemble $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ étant isolé, les échanges thermiques sont internes à ce système. Les températures vont évoluer jusqu'à l'équilibre thermique ($T_{1F} = T_{2F} = T_F$) à énergie interne constante. D'autre part, la variation d'entropie est la somme de celles des deux corps (extensivité) : elle doit être positive (transformation irréversible d'un système thermiquement isolé).

2. L'état final ne sera pas modifié (on a toujours $\Delta U = 0$) pas plus que ΔS (S fonction d'état : même état initial et même état final). La transformation « infiniment » lente est devenue quasi statique tout en restant irréversible.

■ 3. Solution

1. Le système des deux corps \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 est isolé thermiquement et n'échange aucun travail avec l'extérieur (volumes supposés invariables).

Son énergie interne est donc invariable : $U_F = U_I$.

Soit encore $\Delta U(\mathcal{C}_1) + \Delta U(\mathcal{C}_2) = 0$.

Or l'équilibre thermique final est assuré dès que les températures de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont égales (T_F). D'où : $\Delta U(\mathcal{C}_1) = C_1(T_F - T_{1_0})$ et $\Delta U(\mathcal{C}_2) = C_2(T_F - T_{2_0})$

$$\text{et } C_1(T_F - T_{1_0}) + C_2(T_F - T_{2_0}) = 0 \Rightarrow T_F = \frac{C_1 T_{1_0} + C_2 T_{2_0}}{C_1 + C_2} = T_0$$

La variation d'entropie du système est la somme des variations d'entropie des deux corps : $\Delta S = \Delta S(\mathcal{C}_1) + \Delta S(\mathcal{C}_2) = \Delta S_1 + \Delta S_2$

$$\text{or } dS_1 = C_1 \frac{dT_1}{T_1} \Rightarrow \Delta S_1 = C_1 \ln\left(\frac{T_F}{T_{1_0}}\right) \text{ et } dS_2 = C_2 \frac{dT_2}{T_2} \Rightarrow \Delta S_2 = C_2 \ln\left(\frac{T_F}{T_{2_0}}\right).$$

D'où au total :

$$\Delta S = \ln\left[\frac{T_F^{(C_1 + C_2)}}{T_{1_0}^{C_1} \cdot T_{2_0}^{C_2}}\right]$$

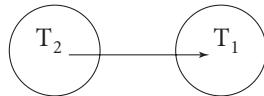
Cette quantité est bien positive conformément à l'expression du second principe :

$$\Delta S = S_e + \sigma > S_e \quad (\sigma > 0).$$

Le système étant thermiquement isolé, on a : $S_e = 0$, d'où $\Delta S > 0$. Cette valeur positive de ΔS traduit l'irréversibilité des échanges thermiques entre les deux corps.

2. a. Les conditions imposées réalisent une transformation quasi statique.

Le système des deux corps – toujours isolé de l'extérieur – garde une énergie interne constante de sorte que la température finale demeure T_0 . La variation d'entropie du système est inchangée.



La transformation bien que quasi statique n'en est pas pour autant réversible.

L'irréversibilité trouve ici sa source au sein du matériau où s'effectue le transport de l'énergie thermique (phénomène de diffusion).

Par ailleurs, on peut remarquer que pour des températures $T_2(t)$ et $T_1(t)$ à l'instant t (avec $T_2(t) > T_1(t)$), une infime diminution de la température du corps chaud \mathcal{C}_2 ne modifie en rien le sens des échanges thermiques, ce qui traduit bien l'irréversibilité.

Pour un processus d'échange suffisamment lent, les températures des deux corps sont bien définies à chaque instant et évoluent selon les lois (volumes invariables) :

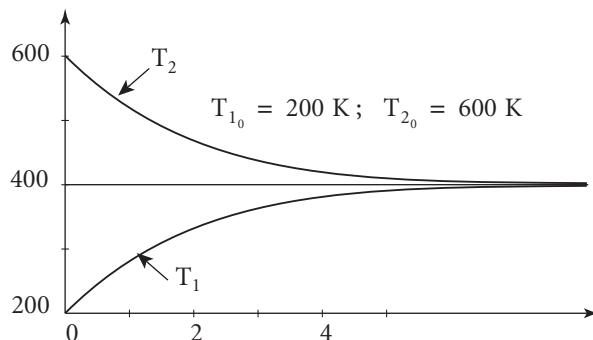
$$\begin{aligned} dU_1 &= C_1 dT_1 = \delta Q_{2 \rightarrow 1} = -h(T_1 - T_2) dt \\ dU_2 &= C_2 dT_2 = \delta Q_{1 \rightarrow 2} = h(T_1 - T_2) dt. \end{aligned}$$

D'où le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \frac{dT_1}{dt} = -h(T_1 - T_2) \\ C_2 \frac{dT_2}{dt} = -h(T_2 - T_1) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(T_2 - T_1) + h\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)(T_2 - T_1) = 0 \\ C_1 \frac{dT_1}{dt} + C_2 \frac{dT_2}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (1) \quad (2)$$

(2) redonne bien évidemment $C_1 T_1 + C_2 T_2 = \text{constante} = (C_1 + C_2)T_F$.

(1) s'intègre aisément en : $T_2 - T_1 = (T_{2_0} - T_{1_0})e^{-\frac{t}{\tau}}$ où $\tau = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)h}$.



2. b. Appliquons le second principe à l'ensemble du système :

$$\frac{dS}{dt} = 0 + \frac{\delta\sigma}{dt} \quad (\delta\sigma = \text{création d'entropie pendant } dt)$$

$$\text{or } S = S_1 + S_2 \Rightarrow \frac{\delta\sigma}{dt} = \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt}.$$

L'évolution thermodynamique de chaque corps est réversible, c'est au niveau du transfert thermique que se situe l'irréversibilité.

On a ainsi : $\frac{dS_1}{dt} = \frac{\delta Q_{2 \rightarrow 1}}{T_1 dt} = \frac{P_{\text{th}(2 \rightarrow 1)}}{T_1} = h \frac{(T_2 - T_1)}{T_1}$
 et $\frac{dS_2}{dt} = -\frac{\delta Q_{2 \rightarrow 1}}{T_2 dt} = -\frac{P_{\text{th}(2 \rightarrow 1)}}{T_2} = -h \frac{(T_2 - T_1)}{T_2}.$

D'où : $\frac{d\sigma}{dt} = h(T_2 - T_1) \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{dt} = \frac{h(T_2 - T_1)^2}{T_1 T_2} > 0}$

La création totale d'entropie s'obtient en intégrant l'expression précédente :

$$\sigma = \int_0^\infty d\sigma = h \int_0^\infty \frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1 T_2} dt.$$

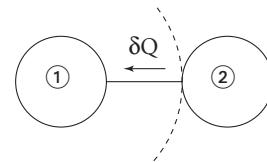
On a plus simplement :

$$\sigma = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \Delta S = \ln \left[\frac{T_F^{C_1 + C_2}}{T_{1_0}^{C_1} \cdot T_{2_0}^{C_2}} \right] \quad (\text{cf. 1.})$$

Commentaires

Le second principe appliqué au corps \mathcal{C}_1 et prenant en compte ses échanges thermiques avec la « source » \mathcal{C}_2 à $T_2(t)$ s'écrit entre t et $t + dt$:

$$dS_1 = \frac{\delta Q_{2 \rightarrow 1}}{T_2} + \delta\sigma' \quad \text{avec} \quad dS_1 = \frac{\delta Q_{2 \rightarrow 1}}{T_1}$$



d'où : $\delta\sigma' = \delta Q_{2 \rightarrow 1} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$

On a bien $\delta\sigma' = \delta\sigma$, et l'irréversibilité prend ici naissance dans le solide qui assure le transfert thermique.

623

Variations d'entropie d'un gaz

1. Un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1,4$) est enfermé dans un cylindre aux parois diathermanes. L'état initial – qui sera commun à **toutes** les transformations envisagées – est le suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} P_1 = 10^6 \text{ Pa} \\ V_1 = 1 \text{ litre} \\ T_1 = 300 \text{ K} \end{cases} \quad \text{L'atmosphère est à la pression } P_0 = 10^5 \text{ Pa et à la température } T_0 = 300 \text{ K.}$$

a. On fait subir au gaz une détente isotherme réversible qui l'amène à l'état (2) :

$$P_2 = P_0 = 10^5 \text{ Pa} ; \quad T_2 = T_1 = 300 \text{ K.}$$

- Quelle est la variation d'entropie ΔS_1 du système ?
- Quelles sont :
 - la variation d'entropie de l'atmosphère ?
 - la création d'entropie σ_1 ?
- b.** On fait subir au gaz une détente monotherme irréversible à pression extérieure constante, égale à la pression atmosphérique (la pression finale est P_0).
 - Quelle est la variation d'entropie ΔS_2 du système ?
 - Quelles sont :
 - la variation d'entropie de l'atmosphère ?
 - la création d'entropie σ_2 ?
- 2.** On considère maintenant les parois du cylindre et le piston comme adiabatiques.
- a.** Le gaz subit depuis l'état (1) une détente adiabatique réversible jusqu'à la pression $P_2 = P_0 = 10^5$ Pa.
 - Quelle est la variation d'entropie ΔS_3 du système ?
 - Quelles sont :
 - la variation d'entropie de l'atmosphère ?
 - la création d'entropie σ_3 ?
- b.** Le gaz subit une détente adiabatique irréversible à pression extérieure constante P_0 ($P_2 = P_0 = 10^5$ Pa) jusqu'à P_2 .
 - Quelle est la variation d'entropie ΔS_4 du système ?
 - Quelles sont :
 - la variation d'entropie de l'atmosphère ?
 - la création d'entropie σ_4 ?

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Second principe.

■ 2. Solution

1. a.



POINT COURS

D'après le second principe, $\Delta S = S_e + \sigma$, σ étant la création d'entropie qui accompagne un processus irréversible, ($\sigma > 0$).

Si la transformation est réversible, $\sigma = 0$.

Pour une transformation d'un gaz en contact avec un thermostat à la température T_0 , le thermostat fournissant au gaz la quantité d'énergie thermique Q :

$$S_e = \frac{Q}{T_0}$$

On a donc ici (transformation réversible) : $\Delta S_1 = S_{1 \text{ échangée}} = \frac{Q_1}{T_0}$.

D'après le 1^{er} principe : $\Delta U_1 = W_1 + Q_1$

or puisque $T_1 = T_2$, on a $\Delta U_1 = 0$ (gaz parfait) et donc $Q_1 = -W_1$

$$\text{or } W_1 = -\int_1^2 P dV = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\text{D'où } Q_1 = P_1 V_1 \ln \frac{P_1}{P_2} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_1 = \frac{P_1 V_1}{T_0} \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)}; \quad \Delta S_1 = \frac{P_1 V_1}{T_0} \ln \left(\frac{P_1}{P_0} \right)$$

$$\text{Application numérique : } \Delta S_1 = \frac{10^6 \times 10^{-3}}{300} \ln 10 = 7,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\boxed{\Delta S_{1 \text{ atm}} = \frac{-Q_1}{T_0} = -\Delta S_1}$$

On a bien évidemment $\boxed{\sigma_1 = 0}$ la transformation étant réversible.

1. b.

POINT COURS

L'entropie est une fonction d'état : la variation d'entropie entre deux états est donc indépendante du chemin suivi (c'est-à-dire de la transformation).

L'état final du 1. b. est identique à l'état final précédent ($P_2 = P_0$) ;

$$\text{on a donc } \boxed{\Delta S_2 = \Delta S_1}$$

Par contre, la transformation étant irréversible, la quantité d'énergie thermique fournie par le thermostat n'est plus la même.

Soit Q_2 cette quantité de chaleur. $T_F = T_I = 300 \text{ K}$ d'où : $\Delta U_2 = 0$ avec toujours $\Delta U_2 = W_2 + Q_2$.

D'où $Q_2 = -W_2$.

La transformation ayant lieu à pression extérieure constante,

$$W_2 = -P_e(V_2 - V_1) = -P_0(V_2 - V_1).$$

$$\text{D'où } Q_2 = P_0(V_2 - V_1) \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_{2 \text{ atm}} = -\frac{Q_2}{T_0} = -\frac{P_0(V_2 - V_1)}{T_0}}.$$

En utilisant la loi des gaz parfaits, on obtient $\Delta S_{2 \text{ atm}}$ en fonction des données ($P_2 V_2 = P_1 V_1$) :

$$\boxed{\Delta S_{2 \text{ atm}} = -\frac{P_1 V_1}{T_0} \left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right)} \quad \text{où } P_2 = P_0.$$

$$\text{Application numérique : } \Delta S_{2 \text{ atm}} = -3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1};$$

$$S_{2 \text{ échangée}} = -\Delta S_{2 \text{ atm}}$$

et $\Delta S_2 = S_2 \text{ échangée} + \sigma_2$.

D'où $\sigma_2 = \Delta S_2 - S_2 \text{ échangée} = \Delta S_2 + \Delta S_{2\text{atm}}$:

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{P_1 V_1}{T_0} \ln \frac{P_1}{P_2} - \frac{P_1 V_1}{T_0} \left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)} \quad \text{où } P_2 = P_0.$$

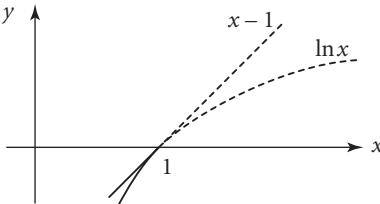
Application numérique : $\sigma_2 = 10,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

On vérifie bien sûr que : $\sigma_2 > 0$.

Commentaire

Faisons varier P_1 et posons $x = \frac{P_2}{P_1}$ en supposant $P_1 \geq P_2$

$\sigma_2 = \frac{P_1 V_1}{T_0} [x - 1 - \ln x]$. Traçons les courbes $x - 1$ et $\ln x$



σ_2 diminue lorsque $x \rightarrow 1$ ($P_1 \rightarrow P_2$). On se rapproche alors de la réversibilité.

2. a. La transformation est maintenant adiabatique réversible.

$$\boxed{\Delta S_3 = 0} \quad (\text{pas d'entropie d'échange et pas de création d'entropie})$$

$$\boxed{\Delta S_{3\text{atm}} = -S_3 \text{ échangée} = 0}$$

$$\boxed{\sigma_3 = 0}$$

2. b.

POINT COURS

Si un système passe de l'état E_1 à l'état E_2 par une transformation adiabatique réversible $\Delta S = S(E_2) - S(E_1) = 0$.

Il est alors impossible de faire passer le système de l'état E_1 à l'état E_2 par une transformation adiabatique irréversible pour laquelle on aurait $\Delta S > 0$.

Pour ne pas violer le second principe, il faut que l'état final obtenu au 2. b. soit différent de l'état final obtenu au 2. a. Déterminons cet état final : $Q_4 = 0$.

La transformation a lieu à pression extérieure constante

$$W_4 = -P_e(V'_2 - V_1) = \Delta U = nC_v(T'_2 - T_1).$$

En utilisant la loi des gaz parfaits avec $P_e = P_2 = P_0$

$$P_e V'_2 = P_2 V'_2 = nRT'_2 \quad \text{et} \quad P_1 V_1 = nRT_1$$

$$\text{d'où } -P_2(V'_2 - V_1) = \frac{1}{\gamma - 1}(P_2V'_2 - P_1V_1)$$

$$\text{et } P_2V'_2 [\gamma - 1 + 1] = (\gamma - 1)P_2V_1 + P_1V_1$$

soit

$$V'_2 = V_1 \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{P_1}{\gamma P_2} \right] \quad (1)$$

$$\text{et une température } T'_2 \text{ telle que : } \frac{T'_2}{T_1} = \frac{P_2V'_2}{P_1V_1}$$

d'où

$$T'_2 = T_1 \cdot \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{P_2}{P_1} \right].$$

On peut alors calculer ΔS_4 en imaginant une transformation réversible passant de l'état E_1 à l'état E'_2 pour laquelle $dS = nC_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$.

$$\text{Ainsi } \Delta S_4 = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T'_2}{T_1} + nR \ln \frac{V'_2}{V_1}.$$

$$\text{Soit } \Delta S_4 = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{P_2V'_2}{P_1V_1} \right) + nR \ln \left(\frac{V'_2}{V_1} \right)$$

$$\text{d'où } \Delta S_4 = \frac{P_1V_1}{(\gamma - 1)T_1} \left\{ \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + \gamma \ln \left(\frac{V'_2}{V_1} \right) \right\}.$$

$$\boxed{\text{Et avec (1)} \quad \Delta S_4 = \frac{P_1V_1}{(\gamma - 1)T_1} \left\{ \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + \gamma \ln \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{P_1}{\gamma P_2} \right] \right\} \quad \left(\frac{P_1}{P_2} = \frac{P_1}{P_0} \right)}$$

La transformation étant adiabatique, on a : $S_{\text{échangée}} = 0$ et donc $\Delta S_4|_{\text{atm}} = 0$
soit $\sigma_4 = \Delta S_4$. On vérifie à nouveau que : $\sigma_4 > 0$.

Application numérique : $\sigma_4 = \Delta S_4 = 4,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

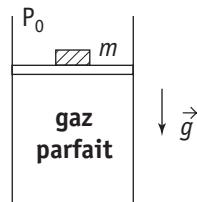


624 Évolutions adiabatiques d'un gaz parfait

Un gaz parfait est contenu dans un récipient cylindrique vertical limité par un piston de masse négligeable. Les parois du récipient et le piston sont athermanes (c'est-à-dire adiabatiques).

Dans l'état d'équilibre initial E_1 , on a placé une masse m sur le piston. La pression du milieu extérieur reste constante et égale à P_0 . L'état E_1 est caractérisé pour le gaz par les grandeurs V_0 ,

T_0 et $P_1 = P_0 + \frac{mg}{s}$ (s : surface du piston).



On supposera $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \text{constante}$, et pour les applications numériques, on prendra :

$$\gamma = \frac{7}{5}; T_0 = 290 \text{ K}; R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ et } n \text{ (nombre de mole de gaz)} = 1.$$

1. On supprime brusquement la masse m . On considérera que le piston peut se déplacer sans frottements, et que le nouvel état d'équilibre $E_2 (P_F, V_F, T_F)$ est atteint grâce à des phénomènes dissipatifs internes au gaz.

a. Déterminer les caractéristiques de ce nouvel état d'équilibre E_2 . On posera $X = \frac{P_1}{P_0}$.

Application numérique :

Calculer les valeurs des rapports $\frac{V_F}{V_0}$ et $\frac{T_F}{T_0}$. On a $X = 1,5$.

b. En déduire le travail reçu W_{irr} ainsi que la variation d'entropie ΔS_{irr} . Commenter.

Application numérique.

2. On revient au même état initial et on diminue la masse m très progressivement jusqu'à l'annuler. Reprendre les questions **1. a.** et **1. b.**

3. La masse m ayant été enlevée brusquement et le système ayant atteint son état d'équilibre E_2 , on repose la masse m sur le piston.

a. Est-il possible que l'état d'équilibre final E'_1 puisse se confondre avec l'état E_1 ?

b. Déterminer les caractéristiques de cet état E'_1 .

Solution

1. a. L'état d'équilibre final E_2 doit se traduire (équilibre mécanique) par l'égalité des pressions du gaz et du milieu extérieur $P_F = P_0$ (piston sans masse). D'autre part, appliquons le premier principe au gaz contenu dans le cylindre :

$$U_2 - U_1 = W_{\text{ext}} + Q \quad \text{avec} \quad E_1(P_1, V_0, T_0) \Rightarrow E_2(P_0, V_F, T_F).$$

Il n'y a pas d'échange d'énergie thermique avec l'extérieur (parois et piston adiabatiques) $\Rightarrow Q = 0$; et le travail fourni au système s'exprime simplement à partir de la pression extérieure P_0 et de la variation du volume du gaz :

$$W_{\text{ext}} = -P_0(V_F - V_0).$$

$$\text{On a donc :} \quad U_2 - U_1 = -P_0(V_F - V_0) \quad (1)$$

Avec $U_2 - U_1 = nC_v(T_F - T_0)$, le gaz étant supposé parfait et de coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ indépendant de la température (on a alors $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $C_p = \gamma C_v = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$).

$$\text{La relation (1) devient :} \quad \frac{nR}{\gamma - 1}(T_F - T_0) = -P_0(V_F - V_0).$$

Soit encore : $\frac{nRT_0}{\gamma - 1} \left(\frac{T_F}{T_0} - 1 \right) = -P_0 V_0 \left(\frac{V_F}{V_0} - 1 \right)$ (2)

La loi des gaz parfaits s'écrit : $\frac{P_0 V_F}{T_F} = \frac{P_1 V_0}{T_0} = nR$ (3)

D'où en remplaçant – dans (2) – nRT_0 par $P_1 V_0$:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{P_1}{P_0} \left(\frac{T_F}{T_0} - 1 \right) = 1 - \frac{V_F}{V_0}.$$

Enfin, en remarquant, d'après (3), que $\frac{T_F}{T_0} = \frac{P_0 V_F}{P_1 V_0} = \frac{V_F}{V_0} \cdot \frac{1}{X}$ (où $X = \frac{P_1}{P_0}$) :

$$\frac{X}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{X} \frac{V_F}{V_0} - 1 \right) = 1 - \frac{V_F}{V_0}.$$

En regroupant les termes, il vient alors :

$$\frac{V_F}{V_0} (\gamma - 1 + 1) = (\gamma - 1) + X \Rightarrow \boxed{\frac{V_F}{V_0} = \frac{\gamma - 1 + X}{\gamma}} \quad (1)$$

D'où

$$\boxed{\frac{T_F}{T_0} = \frac{\gamma - 1 + X}{\gamma X}} \quad (2)$$

Application numérique :

$$\frac{V_F}{V_0} = 1,36 \text{ et } \frac{T_F}{T_0} = 0,90 \text{ (soit } T_F = 262 \text{ K).}$$

1. b. L'expression du travail reçu par le gaz s'identifie à W_{ext} .

$$W_{\text{irr}} = W_{\text{ext}} = -P_0(V_F - V_0) = -P_0 V_0 \left[\frac{V_F}{V_0} - 1 \right].$$

$$\text{Soit } W_{\text{irr}} = -\frac{P_0}{P_1} \cdot (P_1 V_0) \left[\frac{V_F}{V_0} - 1 \right].$$

En remplaçant $\frac{P_1}{P_0}$ par X et $\frac{V_F}{V_0}$ par le résultat établi au 1. a., il vient :

$$W_{\text{irr}} = -\frac{P_1 V_0}{X} \cdot \left[\frac{\gamma - 1 + X}{\gamma} - 1 \right] \Rightarrow \boxed{W_{\text{irr}} = -nRT_0 \left(\frac{X - 1}{\gamma X} \right)} \quad (3)$$

Application numérique :

$$W_{\text{irr}} = -1 \cdot 8,31 \cdot 290 \left(\frac{\frac{1,5 - 1}{7}}{\frac{5}{5} \times 1,5} \right) \text{ suit } W_{\text{irr}} = -574 \text{ J.}$$

• La variation d'entropie du gaz est obtenue par application de la formule classique (gaz parfait, $\gamma = \text{constante}$) :

$$\Delta S(1 \rightarrow 2) = nC_v \ln \left[\frac{P_2 V_2^\gamma}{P_1 V_1^\gamma} \right] = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{P_2 V_2^\gamma}{P_1 V_1^\gamma} \right].$$

Soit en fonction de $X = \frac{P_1}{P_0}$ et de γ :

$$\Delta S(1 \rightarrow 2) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left[\frac{1}{X} \left\{ \frac{\gamma-1+X}{\gamma} \right\}^{\gamma} \right] \quad (4)$$

Commentaire

Conformément au second principe, cette expression de ΔS doit être positive puisque l'on a :

$\Delta S = 0 + \sigma > 0$

↑ ↓

transformation adiabatique création d'entropie (positive)

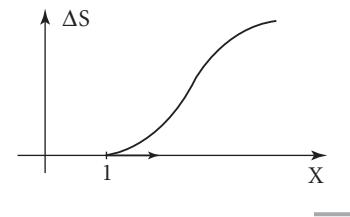
ce qui traduit l'irréversibilité de cette transformation, ce que confirme une étude rapide de $\Delta S(X)$.

On a en effet $\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} [-\ln X + \gamma \ln [\gamma - 1 + X] - \gamma \ln \gamma]$

avec $\Delta S(X=1) = 0$ et

$$\frac{d\Delta S}{dX} = \frac{nR}{\gamma-1} \left[-\frac{1}{X} + \frac{\gamma}{\gamma-1+X} \right]$$

soit $\frac{d\Delta S}{dX} = \frac{nR(\gamma-1)(X-1)}{\gamma-1 X(\gamma-1+X)} > 0$ pour $X > 1$.



Application numérique :

$X = 1,5$; $\gamma = \frac{7}{5}$ (gaz diatomique) et $R = 8,31$ donnent :

$$\Delta S(1 \rightarrow 2) = \frac{8,31}{\frac{7}{5}-1} \ln \left[\frac{1}{1,5} \left\{ \frac{\frac{7}{5}-1+1,5}{\frac{7}{5}} \right\}^{\frac{7}{5}} \right] \Rightarrow \Delta S(1, 2) = 0,46 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

2. La transformation envisagée est désormais **adiabatique et réversible**, c'est-à-dire **isentropique**. Le système atteint un état d'équilibre E'_2 (P'_F, V'_F, T'_F) défini par :

- $P'_F = P_0$ (équilibre mécanique);
- $\Delta S(1 \rightarrow 2') = 0$, soit encore $P'_F V'^{\gamma}_F = P_1 V^{\gamma}_0$ (loi de Laplace);
- $\frac{P'_F V'_F}{T'_F} = \frac{P_1 V_0}{T_0} = nR$ (loi des gaz parfaits).

D'où $\frac{V'_F}{V_0} = \left(\frac{P_1}{P'_F} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{V'_F}{V_0} = X^{\frac{1}{\gamma}}$ (5)

Soit $\frac{T'_F}{T_0} = \left(\frac{P'_F}{P_1} \right) \left(\frac{V'_F}{V_0} \right) = \frac{1}{X} \frac{V'_F}{V_0} \Rightarrow \frac{T'_F}{T_0} = X^{\frac{1}{\gamma}-1}$ (6)

Application numérique :

$$\frac{V'_F}{V_0} = (1,5)^{\frac{7}{5}} \text{ et } \frac{T'_F}{T_0} = (1,5)^{-\frac{2}{7}} \Rightarrow \frac{V'_F}{V_0} = 1,34 \text{ et } \frac{T'_F}{T_0} = 0,89 \\ (T'_F = 258 \text{ K}).$$

• Le travail reçu s'écrit : $W_{\text{rev}} = \Delta U = nC_V(T'_F - T_0)$

$$\text{or } C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \text{ et } \frac{T'_F}{T_0} = X^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow W_{\text{rev}} = \frac{nRT_0}{\gamma - 1} \left[X^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$W_{\text{rev}} = \frac{nRT_0}{\gamma - 1} \cdot \left[X^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right] \quad \text{avec } P_1 V_0 = nRT_0 \quad (7)$$

$$\text{Application numérique : } W_{\text{rev}} = \frac{1 \times 8,31 \times 290}{(1,4 - 1)} [(1,5)^{-2/7} - 1] \Rightarrow W_{\text{rev}} = -659 \text{ J.}$$

On a, bien entendu, $\Delta S(1 \rightarrow 2') = 0$.

3. a. Le passage $E_1 \rightarrow E_2$ correspond à une transformation adiabatique irréversible s'accompagnant d'une variation positive de l'entropie du gaz $\Delta S(1 \rightarrow 2) > 0$.

Quand on repose la masse m sur le piston, le système tend vers un nouvel état d'équilibre E'_1 par une transformation également adiabatique et irréversible. On a alors $\Delta S(2 \rightarrow 1') > 0$. Ainsi, à la transformation globale $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E'_1$, est associée une variation d'entropie strictement positive $\Delta S(E_1 \rightarrow E'_1) = \Delta S(1 \rightarrow 2) + \Delta S(2 \rightarrow 1')$.

Il est donc impossible que les états E_1 et E'_1 , puissent se confondre (dans ce cas, on aurait $\Delta S(E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1) = 0$).

3. b. Pour déterminer l'état d'équilibre E'_1 , il suffit de remarquer que le passage $E_2(P_0, V_F, T_F) \rightarrow E'_1(P_1, V''_F, T''_F)$ s'obtient de la même façon que celui $E_1(P_1, V_0, T_0) \rightarrow E_2(P_0, V_F, T_F)$. Il suffit en fait de faire :

$$P_0 \rightarrow P_1 \text{ soit } X \rightarrow \frac{1}{X}$$

$$(V_0, V_F) \rightarrow (V_F, V''_F) \text{ et } (T_0, T_F) \rightarrow (T_F, T''_F).$$

D'où d'après les résultats du 1. a. et 1. b. :

$$\frac{V''_F}{V_F} = \frac{\gamma - 1 + \frac{1}{X}}{\gamma} \Rightarrow \boxed{\frac{V''_F}{V_F} = \frac{(\gamma - 1)X + 1}{\gamma X}} \quad (8)$$

$$\frac{T''_F}{T_F} = \frac{\gamma - 1 + \frac{1}{X}}{\gamma \frac{1}{X}} \Rightarrow \boxed{\frac{T''_F}{T_F} = \frac{(\gamma - 1)X + 1}{\gamma}} \quad (9)$$

$$\text{De plus } W_{\text{irr}}(2 \rightarrow 1') = -P_1 V_F \left(\frac{V''_F}{V_F} - 1 \right)$$

$$\text{avec } P_1 V_F = \frac{P_1}{P_0} P_0 V_F = X n R T_F \Rightarrow W_{\text{irr}}(2 \rightarrow 1') = -X n R T_F \left(\frac{V''_F}{V_F} - 1 \right).$$

Ce qui donne en utilisant (2) et (8) : $W_{\text{irr}} = -XnRT_0 \frac{(1-X)}{\gamma^2 X} (\gamma - 1 + X)$.

Application numérique :

$$\frac{V''_F}{V_F} = 0,76 ; \quad \frac{T''_F}{T_F} = 1,14 \quad (\text{soit } T''_F = 300 \text{ K})$$

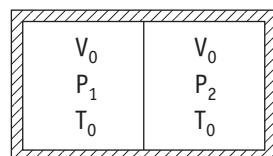
et $W_{\text{irr}} = (2 \rightarrow 1') = 779 \text{ J}$.

625

Évolution irréversible – Évolution réversible

Un cylindre fermé, à parois adiabatiques, est divisé en deux parties d'égal volume V_0 par un piston diathermane, de capacité calorifique négligeable, initialement bloqué. Les deux compartiments contiennent le même gaz parfait (caractérisé par $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \text{constante}$),

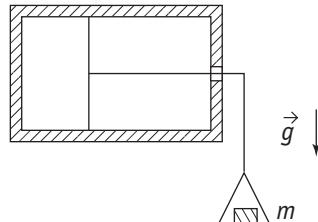
à la température T_0 et aux pressions respectives P_1 et $P_2 = 3P_1$. Pour les applications numériques, on prend : $\gamma = 1,4$; $T_0 = 290 \text{ K}$; $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$; $V_0 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.



1. On libère le piston, qui devient parfaitement mobile, et on laisse l'équilibre se réaliser. Déterminer l'état final et la variation totale d'entropie.

2. On repart du même état initial, mais le piston est maintenu à chaque instant, en équilibre par la masse m , que l'on diminue progressivement jusqu'à $m = 0$.

Déterminer l'état final, ainsi que le travail W_{ext} de déplacement de « la » masse m .



Solution

1. Appliquons le premier principe au système constitué par l'ensemble des deux masses de gaz contenues dans le cylindre :

$$\Delta U_{\text{syst}} = W_{\text{ext}} + Q$$

ici, $Q = 0$ (enceinte adiabatique).

$$W_{\text{ext}} = 0 \quad \text{d'où} \quad \Delta U_{\text{syst}} = 0.$$

Soit T_f la température finale du gaz (c'est évidemment la même pour les deux compartiments : piston diathermane).

$$\Delta U_{\text{syst}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = n_1 C_v (T_f - T_0) + n_2 C_v (T_f - T_0)$$

où $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ est la capacité thermique molaire à volume constant du gaz parfait, n_1 et n_2 les nombres de moles de gaz dans chaque compartiment.

On en déduit : $(n_1 C_v + n_2 C_v)(T_f - T_0) = 0 \Rightarrow T_f = T_0$

soient V'_1 et V'_2 les volumes à l'équilibre, et P_f la pression. D'après la loi des gaz parfaits :

$$\begin{aligned} \frac{P_1 V_0}{T_0} &= n_1 R = \frac{P_f V'_1}{T_f} \\ \frac{P_2 V_0}{T_0} &= n_2 R = \frac{P_f V'_2}{T_f} \end{aligned}$$

par addition (et en tenant compte de $T_f = T_0$) : $P_1 V_0 + P_2 V_0 = P_f V'_1 + P_f V'_2$
et, comme $V'_1 + V'_2 = 2V_0$:

$$P_f \cdot (2V_0) = (P_1 + P_2)V_0 \Rightarrow P_f = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

on en déduit les volumes :

$$\begin{aligned} V'_1 &= V_0 \cdot \frac{P_1}{P_f} \cdot \frac{T_f}{T_0} \Rightarrow V'_1 = V_0 \cdot \frac{2P_1}{P_1 + P_2} \\ V'_2 &= V_0 \cdot \frac{P_2}{P_f} \cdot \frac{T_f}{T_0} \Rightarrow V'_2 = V_0 \cdot \frac{2P_2}{P_1 + P_2} \end{aligned} \quad (1)$$

Application numérique :

$$P_f = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}; \quad V'_1 = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \text{et} \quad V'_2 = 37,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Commentaire

On n'a pas fait intervenir le piston comme faisant partie du système : le prendre en compte ne modifie pas les calculs, puisqu'il n'échange pas d'énergie avec ce qui l'entoure :

- sa capacité calorifique est supposée négligeable ;
- sa masse n'intervient pas : le poids ne travaille pas, le mouvement du piston étant implicitement supposé s'effectuer horizontalement (*cf.* les figures...).

Variation totale d'entropie :

L'entropie étant une fonction extensive, on en déduit : $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$.

Or pour un gaz parfait et $\gamma = \text{constante}$: $S(T, V) = S(T_0, V_0) + nC_v \ln\left(\frac{TV^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}}\right)$.

D'où $\Delta S = n_1 C_v \ln\left(\frac{V'_1}{V_0}\right)^{\gamma-1} + n_2 C_v \ln\left(\frac{V'_2}{V_0}\right)^{\gamma-1}$

et avec $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$: $\Delta S = n_1 R \ln \frac{V'_1}{V_0} + n_2 R \ln \frac{V'_2}{V_0}$.

Soit encore puisque $n_1 R = \frac{P_1 V_0}{T_0}$ et $n_2 R = \frac{P_2 V_0}{T_0}$:

$$\boxed{\Delta S = \frac{V_0}{T_0} \left\{ P_1 \ln \left(\frac{2P_1}{P_1 + P_2} \right) + P_2 \ln \left(\frac{2P_2}{P_1 + P_2} \right) \right\}}$$

Application numérique : $\Delta S = 4,51 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Commentaire

Cette variation d'entropie est positive, comme il se doit, car il s'agit de l'évolution spontanée d'un système thermiquement isolé. On a alors :

$$\Delta S = S_e + \sigma = \sigma > 0.$$

||
0 ici

2. Du fait du déplacement de la masse (variable) m , le système des deux gaz fournit du travail à l'extérieur (quand on diminue m , la masse remonte). Son énergie interne va donc diminuer et la nouvelle température finale T'_f sera inférieure à T_0 .

$$\Delta U = n_1 C_v (T'_f - T_0) + n_2 C_v (T'_f - T_0) < 0 \Rightarrow T'_f < T_0.$$

D'autre part, l'évolution étant très progressive et adiabatique, on peut la considérer comme isentropique ce qui revient à admettre sa réversibilité.

L'état final est alors caractérisé par :

- une température finale $T'_f < T_0$;
- une pression finale $P'_1 = P'_2 = P'_f$ (puisque $m = 0$ en fin d'opération) ;
- des volumes finaux V''_1 et V''_2 , avec :

$$\frac{P'_f V''_1}{T'_f} = n_1 R = \frac{P_f V'_1}{T_0} \quad \text{et} \quad \frac{P'_f V''_2}{T'_f} = n_2 R = \frac{P_f V'_2}{T_0}$$

$$\text{soit en faisant le rapport } \frac{V''_1}{V''_2} = \frac{V'_1}{V'_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\text{ou encore puisque } V''_1 + V''_2 = V'_1 + V'_2$$

$$\boxed{V''_1 = V'_1 \quad \text{et} \quad V''_2 = V'_2}$$

Exprimons la variation d'entropie (nulle) du gaz contenu dans les deux compartiments :

$$\Delta S = n_1 C_v \ln \left(\frac{T'_f V''_1^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}} \right) + n_2 C_v \ln \left(\frac{T'_f V''_2^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}} \right) = 0$$

$$\text{d'où puisque } \frac{n_1}{n_2} = \frac{V'_1}{V'_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{3} \text{ (cf. (1)) :}$$

$$\ln \left(\frac{T'_f V''_1^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}} \right) + 3 \ln \left(\frac{T'_f V''_2^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}} \right) = 0$$

$$\boxed{\text{et} \quad 4 \ln \left(\frac{T'_f}{T_0} \right) = -(\gamma - 1) \left[\ln \frac{V'_1}{V_0} + 3 \ln \frac{V'_2}{V_0} \right]}$$

Application numérique :

$$\text{D'après (1), on a } \frac{V'_1}{V_0} = \frac{2P_1}{P_1 + P_2} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{V'_2}{V_0} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{D'où } 4 \ln\left(\frac{T'_f}{T_0}\right) = -(\gamma - 1) \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 3 \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right]$$

$$4 \ln\left(\frac{T'_f}{T_0}\right) = -(\gamma - 1) \ln\left(\frac{27}{16}\right).$$

$$\text{Finalement } T'_f = T_0 \left(\frac{16}{27}\right)^{\frac{\gamma-1}{4}} = 0,949 T_0 \Rightarrow T'_f \approx 275 \text{ K.}$$

$$\text{On déduit la pression finale } P'_f : \quad \frac{P'_f}{T'_f} = \frac{P_f}{T_0} \Rightarrow P'_f = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

Le travail W_{ext} fourni, au système, par « la » masse variable m est :

$$W_{\text{ext}} = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = (n_1 + n_2)C_v(T'_f - T_0).$$

$$\text{Or } n_1 = \frac{P_1 V_0}{R T_0}, \quad n_2 = \frac{P_2 V_0}{R T_0} \quad \text{et} \quad C_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \text{ d'où :}$$

$$W_{\text{ext}} = \frac{(P_1 + P_2)V_0}{\gamma - 1} \left(\frac{T'_f}{T_0} - 1 \right)$$

Application numérique : $W_{\text{ext}} = -1,27 \text{ kJ.}$

626 Optimisation d'un compresseur

On veut réaliser une installation de production d'air comprimé répondant au « cahier des charges » suivant :

– état initial de l'air : pression : $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$, température $T_1 = 290 \text{ K}$ (T_1 : température ambiante) ;

– état final de l'air : pression : $P_2 = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, température T_1 . L'air sera assimilé à un gaz parfait ($R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), de rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,40$.

Les échanges thermiques éventuels se font uniquement avec l'extérieur à la température uniforme T_1 .

1. Déterminer – pour une mole de gaz – le travail minimal W_m nécessaire à cette transformation.

À quel type de transformation correspond cette valeur W_m ? Le vérifier.

2. La transformation précédente étant irréalisable en pratique, on propose les opérations suivantes :

– compression adiabatique réversible de l'état initial jusqu'à la pression P_2 ;

– refroidissement isobare jusqu'à l'état final.

Calculer le travail total W_1 nécessaire pour une mole de gaz, et le comparer à W_m .

3. Calculer à nouveau le travail W pour un compresseur à deux étages :

- compression adiabatique réversible ($P_1, T_1 \rightarrow P$) ;
- refroidissement isobare jusqu'au retour à T_1 ;
- compression adiabatique réversible ($P, T_1 \rightarrow P_2$) ;
- refroidissement isobare jusqu'au retour à T_1 .

Comment faut-il choisir la pression P pour que W soit minimal ?

Calculer la valeur W_2 de ce minimum de W .

Représenter ces différents travaux W sur un diagramme (P en fonction de V). Comment peut-on généraliser le résultat obtenu ici ?

Solution

1. Pour toute transformation subie par un gaz parfait, le bilan d'énergie – pour une mole de gaz – s'écrit :

$$\Delta U = C_v \Delta T = W + Q$$

ici, les états extrêmes sont à la même température T_1 . D'où :

$$W + Q = 0 \quad (1)$$

De même, le bilan d'entropie s'écrit (second principe) :

$$\Delta S = S_e + \sigma \quad (2) \quad (\sigma : \text{création d'entropie})$$

la fonction entropie d'un gaz parfait peut s'écrire sous la forme :

$$S = S_0 + nC_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nR \ln\left(\frac{P}{P_0}\right), \text{ où } S_0 = S(T_0, P_0); \text{ ce qui donne ici (pour une mole)} :$$

$$\Delta S = -R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right).$$

D'autre part, les échanges thermiques n'ont lieu qu'avec l'extérieur, considéré comme un thermostat à la température T_1 , ce qui donne :

$$S_e = \frac{Q}{T_1}$$

d'où, en reportant dans (2) :

$$-R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \frac{Q}{T_1} + \sigma$$

et, en remplaçant Q d'après (1) :

$$-R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -\frac{W}{T_1} + \sigma, \quad \text{soit} \quad W = RT_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + T_1 \sigma.$$

La création d'entropie σ ne peut être que positive ou nulle. Le cas le plus avantageux (travail minimal fourni) correspond donc à $\sigma = 0$ valeur caractéristique d'une transformation idéale réversible.

Dans ce cas ($\sigma = 0$) :
$$W = W_m = RT_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Pour obtenir cette valeur de W , il faudrait donc une transformation réversible : la réversibilité des échanges thermiques avec l'extérieur, à T_1 impose une transformation isotherme (à la température T_1). Vérifions-le en calculant le travail reçu par le gaz dans une telle transformation :

$$W = - \int P_{\text{ext}} dV$$

avec $P_{\text{ext}} = P = \frac{RT_1}{V}$ ($P_{\text{ext}} = P$ du fait de la réversibilité mécanique...)

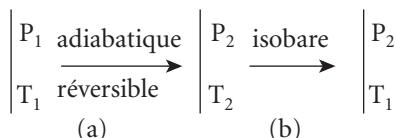
soit $W = - \int \frac{RT_1}{V} dV \Rightarrow W = -RT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

et puisque $P_1 V_1 = P_2 V_2 = RT_1$ alors

$$W = -RT_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \Rightarrow W = RT_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

on retrouve bien $W = W_m$.

2. On peut schématiser la suite des transformations subies par le gaz, et les représenter en diagramme $P(V)$:



Pour la transformation isobare (b), on a $Q = \Delta H_b$ et pour l'adiabatique (a), $Q = 0$,

soit, pour l'ensemble des deux transformations $\{a + b\}$:

$$\Delta U = W_1 + Q = W_1 + \Delta H_b$$

avec $\Delta U = C_v \Delta T = 0$ (puisque le gaz revient à la température T_1).

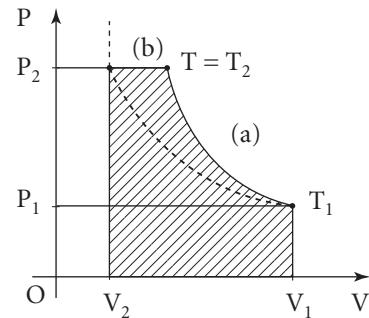
D'où : $W_1 = -\Delta H_b = -C_p(T_1 - T_2) = C_p(T_2 - T_1)$.

Pour calculer T_2 , utilisons le fait que la transformation (a) est isentropique (puisque adiabatique et réversible) ce qui, pour un gaz parfait, justifie l'application de la loi de Laplace, que l'on peut écrire :

$$P_1^{1-\gamma} \cdot T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} \cdot T_2^\gamma \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

et

$$W_1 = C_p T_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$



Application numérique :

$$T_2 = 459 \text{ K}, \text{ et avec } C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R,$$

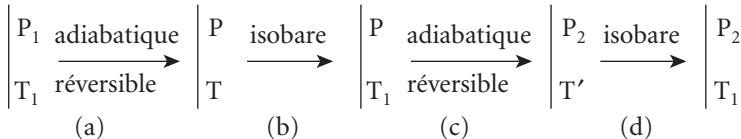
$$W_1 = 4,92 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1};$$

$$W_m = 8,31 \cdot 290 \cdot \ln(5) \Rightarrow W_m = 3,88 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

$$\text{D'où un rapport } \frac{W_1}{W_m} = 1,27 > 1.$$

Le travail à fournir dans le cas envisagé ici correspond donc à 27 % de plus que le minimum thermodynamiquement possible.

3. Le schéma des transformations subies par le gaz est maintenant le suivant :



d'où la représentation en diagramme P(V) :

On a toujours, pour l'ensemble des transformations :

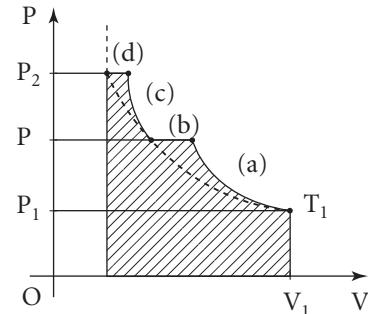
$$\Delta U = 0 = W + Q$$

$$\text{avec } Q = \Delta H_b + \Delta H_d.$$

$$\text{D'où } W = -C_p[(T_1 - T) + (T_1 - T')]$$

$$\text{soit } W = C_p[T + T' - 2T_1].$$

Utilisant à nouveau la loi de Laplace pour les transformations adiabatiques réversibles (a) et (c) :



$$T = T_1 \left(\frac{P}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad T' = T_1 \left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

on obtient l'expression du travail W en fonction de P :

$$W = C_p T_1 \left[\left(\frac{P}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right].$$

Pour trouver la valeur de P qui rend W minimal, on peut chercher à annuler la dérivée $\frac{dW}{dP}$. En posant $\frac{\gamma-1}{\gamma} = \alpha$, il vient :

$$\frac{dW}{dP} = C_p T_1 \frac{d}{dP} \left[\left(\frac{P}{P_1} \right)^\alpha + \left(\frac{P_2}{P} \right)^\alpha \right] = C_p T_1 \alpha \left[\frac{P^{\alpha-1}}{P_1^\alpha} - \frac{P_2^\alpha}{P^{\alpha+1}} \right].$$

Cette dérivée s'annule pour : $P^{\alpha-1} P^{\alpha+1} = P_1^\alpha P_2^\alpha$, soit :

$$P = \sqrt{P_1 P_2}$$

Cette valeur de P est bien comprise entre P_1 et P_2 (moyenne géométrique), et on peut aisément vérifier qu'elle correspond à un minimum. On a en effet :

$$\frac{dW}{dP} = C_p T_1 \alpha \frac{1}{P_1^\alpha P_2^{\alpha+1}} [P^{2\alpha} - P_1^\alpha P_2^\alpha]$$

expression négative pour $P = P_1$ et positive pour $P = P_2$ ($\alpha > 0$).

Pour cette valeur $\sqrt{P_1 P_2}$ de P , on a alors :

$$W = W_2 = C_p T_1 \left[\left(\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right)^\alpha + \left(\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right)^{\alpha-2} - 2 \right]$$

$$\text{soit } W_2 = 2C_p T_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\alpha/2} - 1 \right].$$

Finalement

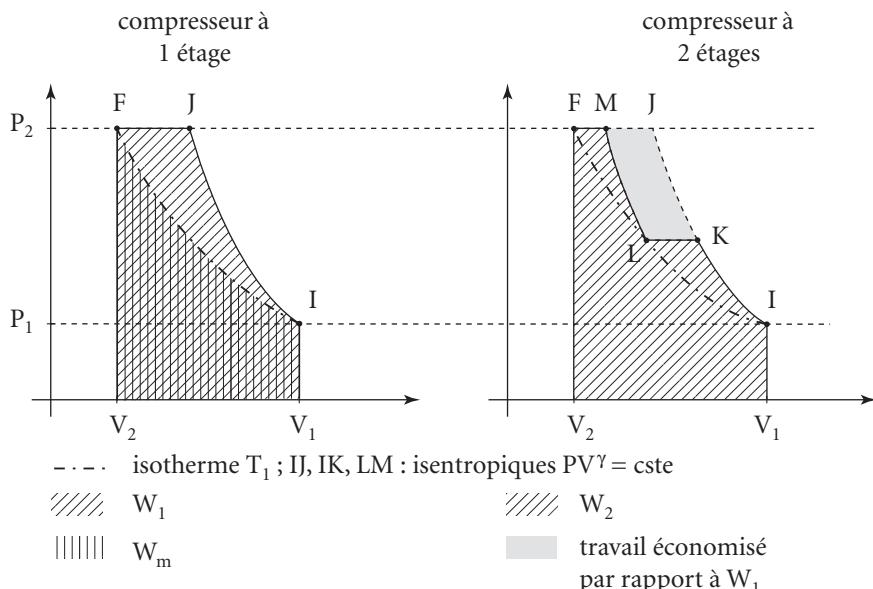
$$W_2 = 2C_p T_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right]$$

Application numérique :

$$W_2 = 4,36 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}, \text{ soit } \frac{W_2}{W_m} = 1,12 > 1.$$

Le compresseur à deux étages est donc, en terme de travail à fournir, plus performant.

■ **Représentation de ces différents travaux en diagramme de Clapeyron $P = P(V)$:**



Le travail W_m correspond à la surface sous la courbe isotherme $T = T_1$, tandis que les travaux W sont augmentés des portions de surface entre la courbe isotherme et la (ou les) courbe(s) isentropique(s), et le (ou les) palier(s) isobare(s).

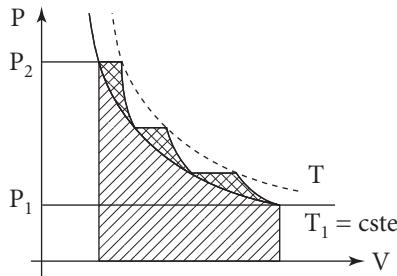
Commentaires

La compression en deux étapes conduit à la valeur optimale $P = \sqrt{P_1 P_2}$; remarquons que cette valeur correspond à :

$$T = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = T'$$

On limite l'irréversibilité en limitant l'échauffement du gaz, et le meilleur résultat est obtenu avec des températures maximales égales lors de chaque compression.

Si l'on veut diminuer encore W_1 et se rapprocher davantage du cas optimal ($W = W_m$), on peut augmenter le nombre d'étages, c'est-à-dire le nombre « d'étages » du dispositif compresseur, chaque « étage » correspondant à une compression isentropique, suivie d'un retour isobare à la température ambiante. Graphiquement, cela correspond à :



En augmentant les étages de compression, on diminue l'échauffement à chaque étape, donc l'écart de température avec l'extérieur. On réduit de ce fait l'irréversibilité des échanges thermiques avec l'extérieur à T_1 , ce qui rapproche du cas réversible (cas optimal $W = W_m$).

Commentaires

On pourrait confirmer, par le calcul, la généralisation au cas d'un compresseur à n étages.

Notons maintenant P_0 et P_n les pressions extrêmes, T_0 la température extérieure et (P_i, T_i) l'état atteint à la fin de la $i^{\text{ème}}$ compression.

Le lecteur vérifiera que l'on a :

- $W_m = C_p [T_1 + T_2 + \dots + T_i + \dots + T_n - nT_0] = T_0 C_p \left[\sum_1^n \left(\frac{P_i}{P_{i-1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - n \right];$

- W_m est minimale pour $\frac{P_{i+1}}{P_i} = \text{cste} = \left(\frac{P_n}{P_0} \right)^{1/n}$, ce qui correspond à prendre les P_i en progression géométrique entre les valeurs extrêmes P_0 et P_n ;

- alors $W_m = n C_p T_0 \left[\left(\frac{P_n}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{n\gamma}} - 1 \right];$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} W_m = RT_0 \ln \left(\frac{P_n}{P_0} \right)$: on retrouve bien, à la limite, le résultat de la transformation isotherme réversible.

D. Corps pur diphasé

631 Vaporisation dans le vide

Dans un réservoir initialement vide, de volume invariable $V_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, on introduit deux grammes d'eau liquide, pris à la pression atmosphérique $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ et à la température $T_0 = 290 \text{ K}$.

1. Le réservoir et son contenu sont portés à la température $T_1 = 350 \text{ K}$ (par l'intermédiaire d'un thermostat).

a. Déterminer l'état d'équilibre de l'eau (la pression d'équilibre eau liquide-vapeur d'eau à la température T_1 vaut $P_s(T_1) = 0,46 \cdot 10^5 \text{ Pa}$).

Quelle est l'énergie thermique absorbée par les 2 g d'eau ?

La vapeur d'eau sera assimilée à un gaz parfait de masse molaire $M = 18 \text{ g}$.

On donne : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (constante des gaz parfaits) ;

$C_L = 4,19 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ (capacité calorifique massique de l'eau liquide) ;

$l_{\text{vap}}(T_1) = 2\ 300 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (chaleur latente de vaporisation de l'eau à T_1).

b. Faire le bilan entropique.

2. À partir de l'état d'équilibre précédent, on chauffe le réservoir et son contenu jusqu'à $T_2 = 373 \text{ K}$ ($P_s(T_2) = 10^5 \text{ Pa}$). Calculer l'énergie thermique absorbée par l'eau.

On donne $l_{\text{vap}}(T_2) = 2\ 240 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;

capacité calorifique molaire à volume constant de la vapeur d'eau :

$C_V = 21 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe ; second principe.
- Changement d'état : vaporisation de l'eau.
- Chaleur latente.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'eau introduite subit un chauffage et une vaporisation, partielle ou totale : il faut d'abord déterminer dans lequel de ces deux cas on se trouve.

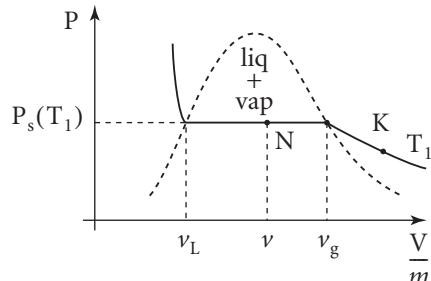
La quantité d'énergie thermique absorbée par l'eau se déduira de la variation de son énergie interne.

On déterminera ensuite ΔU (et ΔS) en choisissant une suite de transformations réversibles menant à l'état final précédemment déterminé.

3. Solution

1. L'état d'équilibre final est déterminé par $T = T_1$ et :

- $P < P_s(T_1)$ si toute l'eau est vaporisée (point K sur l'isotherme T_1).
- $P = P_s(T_1)$ s'il reste de l'eau liquide (équilibre diphasé) (point N).



Le volume massique de l'eau dans le réservoir est $\nu = \frac{V_0}{m} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

$$\text{or } \nu_g = \frac{RT_1}{MP_s(T_1)} = 3,51 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Il en résulte ($\nu < \nu_g$) que l'on est en présence d'un système diphasé (point N).

On a donc : $m = m_g + m_L$ et $V_0 = \nu_g m_g + m_L \nu_L$.

$$\text{D'où } m_g \nu_g + (m - m_g) \nu_L = V_0 \Rightarrow m_g = \frac{V_0 - m \nu_L}{\nu_g - \nu_L} \quad (1)$$

or $\nu_L \ll \nu_g$ et certainement, étant données la valeur de V_0 et celle de m , $V_0 \gg m \nu_L$

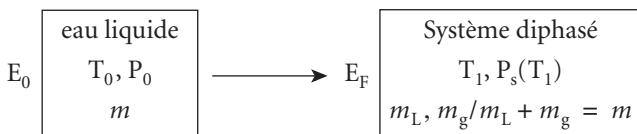
$$\text{soit : } m_g \approx \frac{V_0}{\nu_g} \quad (2) \Rightarrow \boxed{m_g = 1,42 \text{ g} \text{ et } m_L = 0,58 \text{ g}}$$

- La transformation subie par l'eau s'est effectuée sans apport de travail extérieur, soit : $W = 0$.

L'application du premier principe donne alors $\Delta U = Q$.

Q est l'énergie thermique fournie par le thermostat.

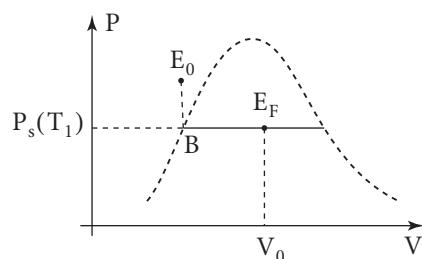
Pour calculer ΔU , on va imaginer une suite de transformations réversibles amenant l'eau de son état initial E_0 à son état final E_F :



$$E_0 \xrightarrow{(a)} B \xrightarrow{(b)} E_F$$

(a) : chauffage de l'eau liquide de T_0 à T_1 pour laquelle on néglige toute variation de volume.

(b) : vaporisation partielle de l'eau à T_1 et $P_s(T_1)$ constantes.



$$\bullet \Delta U = W + Q$$

Sur la transformation (a), $W_a \sim 0$

$$\text{et } \Delta U_a = Q_a = mC_L(T_1 - T_0).$$

Sur la transformation (b), $W_b = -P_s(T_1)(V_0 - m\nu_L) \approx -P_s(T_1)V_0$

$$(\text{et } V_0 \approx m_g v_g)$$

$$\text{et } Q_b = m_g l_{\text{vap}}(T_1)$$

$$\text{d'où : } \Delta U_b \approx m_g l_{\text{vap}}(T_1) - P_s(T_1)V_0.$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{Q = mC_L(T_1 - T_0) + m_g l_{\text{vap}}(T_1) - P_s(T_1)V_0}$$

Application numérique : $Q = 3,54 \text{ kJ}$.

1. b. Bilan entropique

D'après le second principe : $\Delta S = S_e + \sigma$ ($\sigma \equiv \text{création d'entropie}$)

où $S_e = \frac{Q}{T_1}$ puisque le système reçoit l'énergie thermique Q du thermostat de température T_1 .

Calculons $\Delta S(E_0 \rightarrow E_F)$. Pour se faire, on utilisera le même chemin réversible que celui envisagé pour déterminer la valeur de ΔU , d'où : $\Delta S(E_0 \rightarrow E_F) = \Delta S_a + \Delta S_b$.

$$\text{Avec } \Delta S_a = \int \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} dT = \int_{T_0}^{T_1} \frac{mC_L dT}{T} = mC_L \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$$

(l'état du liquide ne dépendant ici que de la température).

$$\text{D'autre part (cf. point de cours) : } \Delta S_b = \frac{Q_{\text{rév}}}{T_1} = \frac{m_g l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1}$$

$$\text{D'où } \Delta S(E_0 \rightarrow E_F) = mC_L \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + \frac{m_g l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1}$$

$$\text{et } \sigma = \Delta S(E_0 \rightarrow E_F) - \frac{Q}{T_1}$$

$$\text{D'où } \sigma = mC_L \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + \frac{m_g l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} - \frac{mC_L(T_1 - T_0) + m_g l_{\text{vap}}(T_1) - P_s(T_1)V_0}{T_1}$$

$$\boxed{\sigma = \left\{ mC_L \left[\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \frac{T_1 - T_0}{T_1} \right] \right\} + \frac{P_s(T_1)V_0}{T_1}}$$

Application numérique : $\sigma = 0,139 + 0,657 = 0,80 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Si on compare à la transformation réelle, on peut remarquer que le premier terme correspond au chauffage irréversible de l'eau liquide, et le second à l'irréversibilité de la

vaporisation : $\frac{P_s(T_1) \cdot V_0}{T_1} = m_g \frac{R}{M}$ ne concerne que la masse d'eau vaporisée...

2. Déterminons d'abord l'état d'équilibre atteint : la température augmente peu, et la pression maximale de vapeur est plus que doublée : la masse de vapeur d'eau peut augmenter très notablement, et il est probable que l'eau va se vaporiser totalement.

Vérifions-le en calculant la pression atteinte dans l'hypothèse d'une vaporisation totale de l'eau :

$$P = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT_2}{V_0} = 0,69 \cdot 10^5 \text{ Pa} < P_s(T_2).$$

L'eau est donc totalement vaporisée à la pression $P_2 = P$.

De même que précédemment, le volume reste invariable, donc $W = 0$, et $Q = \Delta U$. Calculons ΔU pour la suite de transformations suivantes :

(a') : Vaporisation progressive de l'eau liquide restante à T_1 et $P_s(T_1)$ constantes, par augmentation du volume : transformation $N \rightarrow B'$.

(b') : Chauffage de la vapeur de $(T_1, P_s(T_1))$ à (T_2, V_0) : transformation $B' \rightarrow E_F$.

$$Q = \Delta U = \Delta U_{a'} + \Delta U_{b'}$$

$$\text{avec } \Delta U_{a'} = \Delta(H - PV) = \Delta H_{a'} - P_s(T_1) \cdot \Delta V$$

$$\text{où } \Delta H_{a'} = (m - m_g)l_{\text{vap}}(T_1)$$

(vaporisation du liquide restant) m_g masse de vapeur dans l'état d'équilibre précédent ($m_g = 1,42 \text{ g}$)

$$\Delta V = V' - V_0$$

et (la vapeur est un gaz parfait) :

$$P_s(T_1)V' = \frac{m}{M}RT_1; P_s(T_1)V_0 = \frac{m_g}{M}RT_1$$

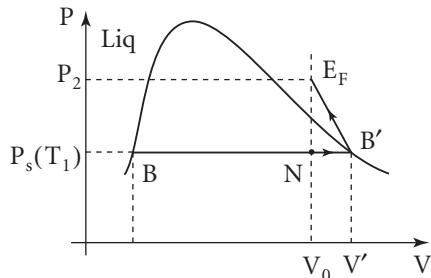
$$\text{soit finalement : } P_s(T_1) \cdot \Delta V = \frac{m - m_g}{M}RT_1.$$

$$\text{D'autre part } \Delta U_{b'} = m \frac{C_V}{M}(T_2 - T_1) \quad (C_V \text{ rapporté à 1 mole}).$$

Ce qui donne

$$Q = \Delta U = (m - m_g) \left(l_{\text{vap}}(T_1) - \frac{RT_1}{M} \right) + m \frac{C_V}{M}(T_2 - T_1)$$

Application numérique : $Q = 1233 + 53,7 \Leftrightarrow Q \approx 1,29 \text{ kJ}$.



632 Détendeur

On fait subir à du fréon une détente de Joule-Thomson à partir d'un état correspondant au liquide de saturation (température $T_1 = 303 \text{ K}$) et qui l'amène à un état de température $T_2 = 237 \text{ K}$.

1. Déterminer cet état final. On donne pour l'équilibre liquide-vapeur – et pour les températures T_1 et T_2 – les pressions d'équilibre ainsi que les enthalpies et entropies massiques h et s .

	P(atm)	h_L	h_v	s_L	s_v
T_2	$8 \cdot 10^4$ Pa	387	556	4,061	4,776
T_1	$7,7 \cdot 10^5$ Pa	448	586	4,286	4,743

(h en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et s en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.)

Quelle est la variation d'entropie massique du fluide lors de la détente ?

2. Reprendre la question précédente avec les données suivantes :

- capacité thermique massique du liquide $C_L = 0,92 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- chaleur latente massique de vaporisation $l_{\text{vap}}(T_2) = 168 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

3. Commenter la convergence des résultats obtenus aux questions **1.** et **2.**

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Détente isenthalpique de Joule-Thomson.
- Changement d'état liquide → vapeur : chaleur latente.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Partant du liquide de saturation, la détente va avoir pour effet de vaporiser en partie le fluide. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer l'enthalpie massique h_2 dans l'état final (qui est identique à celle de l'état initial h_1 puisque la détente est par définition isenthalpique) aux enthalpies massiques du liquide de saturation ($h_L(T_2)$) et de la vapeur saturante ($h_v(T_2)$).

2. On donne maintenant les valeurs de la capacité thermique du liquide de saturation et de la chaleur latente de vaporisation (à la température T_2). Les calculs de Δh et Δs s'effectueront donc en choisissant un chemin réversible menant de l'état initial (T_1 , $x = 0$) à l'état final (T_2 , $0 < x < 1$).

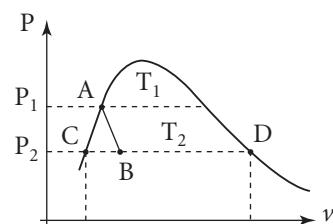
■ 3. Solution

1. Dans l'état initial, le fluide se trouve dans l'état associé au point A (liquide de saturation à la température $T_1 = 303 \text{ K}$ et à la pression $P_1 = 7,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$).

Son enthalpie massique est :

$$h_1 = h_L(T_1) = 448 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

- Dans l'état final, l'enthalpie massique du fluide reste le même (la détente de Joule-Thomson est, par définition, isenthalpique). On a donc : $h_f = h_1 = 448 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.



D'autre part, dans cet état final, $T = T_2 = 237 \text{ K}$; or $h_C = h_L(T_2) = 387 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $h_D = h_v(T_2) = 556 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, soit :

$$h_C < h_f < h_D.$$

Le point figuratif B se situe donc entre C et D sur le palier de vaporisation. L'état final sera celui d'un mélange liquide-vapeur à la température T_2 et à la pression $P_2 = 8 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. On a donc :

$$h_f = H_{\text{vap}} + H_{\text{liq}}$$

avec $H_{\text{vap}} = m_{\text{vap}} h_v(T_2)$ et $H_{\text{liq}} = (m - m_{\text{vap}}) h_L(T_2)$.

Soit en introduisant le titre x en vapeur :

$$m_{\text{vap}} = xm = x \cdot 1 \quad (m = 1 \text{ kg}), \text{ d'où: } h_f = xh_v(T_2) + (1-x)h_L(T_2)$$

et
$$x = \frac{h_f - h_L(T_2)}{h_v(T_2) - h_L(T_2)}$$

$$\text{Application numérique : } x = \frac{448 - 387}{556 - 387} = \frac{61}{169}; \quad x = 0,36.$$

■ Variation d'entropie massique :

Il s'agit de calculer $\Delta s = s_f - s_i$ ($s_f \equiv$ entropie massique dans l'état final).

On a $s_i = s_L(T_1)$ et $s_f = xs_v(T_2) + (1-x)s_L(T_2)$.

Application numérique :

$$\Delta s = [0,36 \times 4,776 + (1 - 0,36) \times 4,061] - 4,286 \Rightarrow \Delta s = 33 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Ce résultat traduit l'irréversibilité de la détente (cf. second principe).

2. La détente se caractérisant par $\Delta h = 0$ ($h_B = h_A$), calculons Δh en suivant le chemin réversible A → C → B : $\Delta h = (h_C - h_A) + (h_B - h_C)$.

- Pour le liquide de saturation (A → C) : $\Delta h(A \rightarrow C) = C'_L(T_2 - T_1)$ où C'_L est la capacité thermique du liquide juste saturant que l'on confondra avec C_L donné dans l'énoncé.

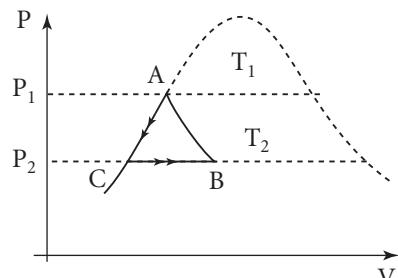
- La transformation C → B s'effectue sur le palier de changement d'état. Elle correspond à une vaporisation partielle et réversible d'une masse $x \text{ kg}$ de fluide pour une masse initiale de 1 kg de Fréon liquide, d'où :

$$\Delta h(C \rightarrow B) = xl_{\text{vap}}(T_2).$$

Au total, $\Delta h = 0 = C_L(T_2 - T_1) + xl_{\text{vap}}(T_2)$

soit
$$x = \frac{C_L(T_2 - T_1)}{l_{\text{vap}}(T_2)}$$

$$\text{Application numérique : } x = \frac{0,92 \cdot (303 - 237)}{168} \Leftrightarrow x = 0,36.$$



■ Pour calculer la variation d'entropie massique, reprenons le chemin réversible $A \rightarrow C \rightarrow B$: $\Delta s = \Delta s(A \rightarrow C) + \Delta s(C \rightarrow B)$, avec :

$$\Delta s(A \rightarrow C) = \int_A^C \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C'_L \, dt}{T} = C_L \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\Delta s(B \rightarrow C) = \frac{x l_{\text{vap}}(T_2)}{T_2} \quad (\text{changement d'état réversible}).$$

D'où
$$\boxed{\Delta s = C_L \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{x l_{\text{vap}}(T_2)}{T_2}}$$

Application numérique : $\Delta s = 0,92 \ln\left(\frac{237}{303}\right) + \frac{0,36 \times 168}{237} \Leftrightarrow \Delta s = 30 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

3. On constate que les résultats obtenus en 1. et 2. concernant le titre x en vapeur et la variation Δs d'entropie sont très proches. Ceci n'est guère étonnant puisqu'il est possible d'évaluer les grandeurs C_L et $l_{\text{vap}}(T_2)$ fournie au 2. à partir du tableau de valeurs thermodynamiques proposé au 1.

Ainsi on a : $l_{\text{vap}}(T_2) = h_v(T_2) - h_L(T_2) = 556 - 387 \Rightarrow l_{\text{vap}}(T_2) = 169 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

ou encore $l_{\text{vap}}(T_2) = T_2[s_v(T_2) - s_L(T_2)] = 237 \times [4,776 - 4,061]$

soit $l_{\text{vap}}(T_2) = 169,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

De même, on peut considérer que l'on a, en première approximation, pour le liquide de saturation : $h_L(T_2) - h_L(T_1) \approx C_L(T_2 - T_1)$.

On a donc : $C_L \sim \frac{h_L(T_1) - h_L(T_2)}{T_1 - T_2} = \frac{448 - 387}{303 - 237} ; \quad C_L \sim 0,92 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Ces valeurs sont bien en accord avec celles données à la question 2.

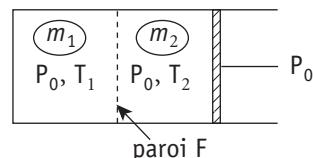
Soulignons enfin que l'on rencontre des détendeurs de ce type dans des machines frigorifiques.

633

Évolution isenthalpique

Un récipient cylindrique horizontal est fermé par un piston pouvant coulisser sans frottements. La pression extérieure est maintenue constante et égale à $P_0 = 1 \text{ atm}$.

Le récipient est initialement séparé en deux compartiments par une paroi adiabatique escamotable. Le compartiment de gauche contient de l'eau liquide saturée ($m_1 = 1 \text{ kg}$; $P_0 = 1 \text{ atm}$; $T_1 = 373 \text{ K}$), celui de droite est rempli de vapeur d'eau ($m_2 = 2 \text{ kg}$; $P_0 = 1 \text{ atm}$; $T_2 = 478 \text{ K}$). Le piston et les parois du récipient sont adiabatiques.



On supprime la paroi F (sans apport de travail).

On donne les valeurs numériques des enthalpies massiques (h) et entropies massiques (s) :

$$P_0 = 1 \text{ atm} \quad \text{et} \quad T = 373 \text{ K} \quad \begin{cases} h_L = 419 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} & ; \quad s_L = 1,306 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ h_v = 2\,675 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} & ; \quad s_v = 7,354 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \end{cases}$$

$$P_0 = 1 \text{ atm} \quad \text{et} \quad T = 478 \text{ K}; \quad h_v = 2\,884 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad s_v = 7,847 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

1. Déterminer l'état d'équilibre final du système.

2. Calculer la variation d'entropie ΔS .

3. Exprimer également cette variation d'entropie ΔS en fonction notamment de $l_{\text{vap}}(T_1)$ et de C_p , capacité thermique à pression constante de la vapeur (on considérera que C_p est constante sur l'intervalle $[T_1, T_2]$).

Évaluer $l_{\text{vap}}(T_1)$, C_p , puis ΔS . Conclure.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Changement d'état liquide → vapeur : fonctions massiques $h(T, x)$ et $s(T, x)$.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le système va évoluer vers son état d'équilibre en échangeant uniquement du travail avec l'extérieur (pression P_0). Il suffira donc de traduire le bilan énergétique à l'aide du premier principe, lequel doit se réduire ici à la conservation de l'enthalpie (P_0 étant également la pression dans les deux compartiments avant la suppression de la paroi). Pour l'état final, il faudra faire une hypothèse : on pourra, par exemple, considérer qu'il correspond à un équilibre liquide-vapeur ($P_0 = 1 \text{ atm}$ et $T = 373 \text{ K}$).

2. Les états initial et final étant connus, leurs entropies se calculent aisément (l'entropie est une grandeur extensive). On doit trouver une variation ΔS positive (*cf.* second principe en l'absence d'échanges thermiques).

3. On prendra un état de référence associé au liquide de saturation (P_0, T_1). On lui attribuera une entropie massique s_0 . On calculera les entropies des états initial et final à partir de cet état de référence.

■ 3. Solution

1. Le système est thermiquement isolé de l'extérieur (parois adiabatiques) et ne reçoit donc aucune énergie thermique ($Q = 0$).

D'autre part, les forces de pression extérieures (P_0) lui fournissent le travail mécanique W tel que : $W = -P_0 \Delta V = -P_0(V_2 - V_1)$

(V_1 volume total initial, V_2 volume final).

Le bilan d'énergie (premier principe) s'écrit ici :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -P_0(V_2 - V_1) \quad (Q = 0).$$

Soit encore : $(U_2 + P_0V_2) = (U_1 + P_0V_1)$.

Or la pression d'équilibre en fin de transformation est nécessairement P_0 (équilibre mécanique) ; mais P_0 est aussi la pression dans chaque compartiment avant la suppression de la paroi. Les quantités $(U_1 + P_0V_1)$ et $(U_2 + P_0V_2)$ représentent donc les enthalpies dans les états initial et final. La transformation se caractérise alors par l'invariance de l'enthalpie du système.

$$\Delta H = 0$$

L'enthalpie initiale est donnée par :

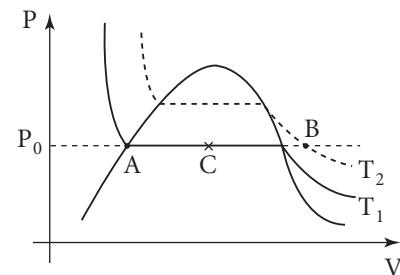
$$H_1 = H_1(\text{eau liquide saturée}) + H_1(\text{vapeur d'eau})$$

Soit

$$H_1 = m_1 h_L(373) + m_2 h_v(478).$$

L'état du fluide dans les deux compartiments est représenté sur le diagramme (P, V) par les points A et B. Imaginons que l'état final puisse être associé au point C (titre x en vapeur), ce qui impose une température $T = T_1$ (et $P = P_0$). Dès lors, l'enthalpie finale correspond à celle d'un mélange liquide-vapeur, de masse totale $m_1 + m_2$, soit :

$$H_2 = [xh_v(373) + (1-x)h_L(373)](m_1 + m_2).$$



La transformation étant isenthalpique, il vient ($H_1 = H_2$) :

$$xh_v(373) + (1-x)h_L(373) = \frac{m_1 h_L(373) + m_2 h_v(478)}{m_1 + m_2}.$$

D'où :

$$x[h_v(373) - h_L(373)] = \frac{[m_1 h_L(373) + m_2 h_v(478)] - [(m_1 + m_2)h_L(373)]}{m_1 + m_2}$$

Finalement

$$x = \frac{m_2[h_v(478) - h_L(373)]}{(m_1 + m_2)[h_v(373) - h_L(373)]} \quad (1)$$

Application numérique :

$$x = \frac{2[2\ 884 - 419]}{3 \times [2\ 675 - 419]} \Rightarrow x = 0,73 \quad (\text{on a bien } 0 \leq x \leq 1).$$

L'état final est donc celui d'un mélange liquide-vapeur :

$$P_0 = 1 \text{ atm}; \quad T = 373 \text{ K};$$

$$x = 0,73 \Rightarrow m_v = 2,19 \text{ kg}; \quad m_L = 0,81 \text{ kg}.$$

2. La variation d'entropie du système est $\Delta S = S_2 - S_1$ avec :

$$S_1 = S_1(\text{eau liquide saturée}) + S_1(\text{vapeur d'eau})$$

soit

$$S_1 = m_1 s_L(373) + m_2 s_v(478),$$

et

$$S_2 = (m_1 + m_2)[xs_v(373) + (1-x)s_L(373)].$$

D'où $\Delta S = (m_1 + m_2)[xs_v(373) + (1 - x)s_L(373)] - m_1s_L(373) - m_2s_v(478)$

Application numérique :

En utilisant l'expression (1) définissant la valeur de x , nous obtenons :

$$\Delta S = 0,135 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$$

La transformation envisagée s'accompagne d'un accroissement de l'entropie du système conformément à l'expression du second principe :

$$\Delta S = S_e + \sigma \quad (\sigma = \text{création d'entropie : } \sigma > 0)$$

avec ici $S_e = 0$ (transformation adiabatique).

On doit bien avoir $\Delta S = \sigma > 0$.

3. Appelons s_0 l'entropie massique du liquide de saturation dans l'état (T_1, P_0) : point A.

Dans l'état initial, nous avons :

$$S_i = m_1s_0 + m_2s_B$$

$$\text{où } s_B = (s_B - s_{A'}) + (s_{A'} - s_A) + s_A$$

avec $s_A = s_0$ et $s_{A'} - s_A = \frac{l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1}$ par définition de la chaleur latente de vaporisation.

$$\text{Soit } S_i = m_1s_0 + m_2 \left\{ s_0 + \frac{l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} + (s_B - s_{A'}) \right\}$$

Or $s_B - s_{A'} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$ (B et A' correspondent à la même pression P_0 et à des températures différentes T_1 et T_2 ; de plus on suppose $C_p = \text{cste}$).

D'où : $S_i = (m_1 + m_2)s_0 + m_2 \left\{ \frac{l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} + C_p \ln \frac{T_2}{T_1} \right\}$

• L'état final est associé au point C, et à un titre x en vapeur et à une masse totale $m = m_1 + m_2$:

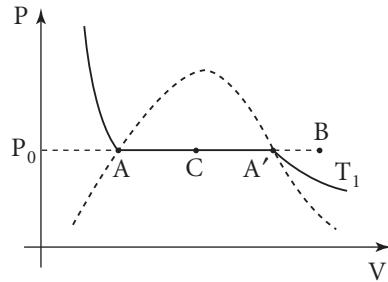
$$S_f = (m_1 + m_2) \left\{ s_0 + x \frac{l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} \right\}.$$

Et $\Delta S = S_f - S_i = (m_1 + m_2)x \frac{l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} - m_2 \left\{ \frac{l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} + C_p \ln \frac{T_2}{T_1} \right\}$ (1)

• Évaluons $l_{\text{vap}}(T_1)$ et C_p :

on a :

$$l_{\text{vap}}(T_1) = h_v(T_1) - h_L(T_1) = h_v(373) - h_L(373) \Rightarrow l_{\text{vap}}(T_1) = 2256 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$



on aurait pu également écrire :

$$l_{\text{vap}}(T_1) = T_1(s_v(T_1) - s_L(T_1)) = 373(7,354 - 1,306) = 2\,256 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

De plus, avec les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$h_v(478) - h_v(373) \approx C_p(478 - 373) \Rightarrow C_p \approx 1,99 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

- Ce qui donne (*cf. (1)*) : $\Delta S = 0,133 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Cette valeur est en accord, aux approximations faites, avec le résultat établi à la question 2.

634 Point triple

Un récipient à parois adiabatiques de volume $V_0 = 1 \text{ L}$ contient un mélange de glace, d'eau liquide et de vapeur d'eau à la température T_3 et la pression P_3 du point triple ($T_3 = 273,16 \text{ K}$, $P_3 \approx 600 \text{ Pa}$). La masse initiale d'eau liquide est $m_0 = 50 \text{ g}$. Une pompe aspire la vapeur d'eau avec un débit $D = 0,1 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$, on suppose l'évolution quasi statique, et la vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait.

1. Préciser l'évolution de l'eau contenue dans le récipient.
 2. Au bout de combien de temps la température de l'eau commencera-t-elle à varier ? Quel sera le contenu du récipient à ce moment ?
- On donne : chaleur latente de fusion de la glace à la température T_3 : $l_f = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; chaleur latente de vaporisation de l'eau à T_3 : $l_{\text{vap}} = 2,54 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Point triple : équilibre vapeur-liquide-solide.
- Chaleurs latentes de vaporisation et de fusion.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le point triple d'un corps pur correspond à un état où le corps existe sous trois phases (états physiques) différentes. La température et la pression d'équilibre ne peuvent varier qu'à condition qu'une des trois phases disparaisse... L'évolution au début ne peut donc être qu'isobare et isotherme (hypothèse quasi statique).
2. Pour déterminer le sens de cette évolution, il faut faire un bilan d'énergie (ou d'enthalpie...) sur un système défini de façon précise.

3. Solution

1. À l'équilibre du point triple de l'eau, les trois états physiques (solide, liquide et gaz) coexistent : d'après le diagramme d'état $P(T)$, toute variation de la température ou de la pression exige – si l'équilibre est maintenu – la disparition de l'une au moins des trois phases.

Dans le cas présent, la pompe tend à diminuer la pression du gaz : l'équilibre ne peut se maintenir que par formation d'une quantité supplémentaire de vapeur (à partir du liquide ou du solide...).

L'énergie thermique nécessaire à la vaporisation ne peut provenir que de la solidification simultanée d'une partie de l'eau liquide (récepteur adiabatique).

Ainsi entre t et $t + dt$, il se forme une masse $\delta m'$ de vapeur et une masse $\delta m''$ de glace ce qui correspond à la disparition d'une masse δm de liquide.

Tant qu'il reste du liquide, la pression se maintient à P_3 et la température à T_3 .

2. La température de l'eau commencera à varier à partir d'une date t_1 où toute l'eau liquide aura disparu.

Au-delà de cette date t_1 , il ne reste plus que de la glace et de la vapeur d'eau, qui restent en équilibre ; température et pression évoluent alors en suivant la courbe de sublimation : l'énergie nécessaire à la formation de vapeur provenant du refroidissement de la glace... C'est donc à la date t_1 que la température de l'eau commencera à varier.

Étudions donc la première phase où coexistent vapeur-liquide-solide à P_3 et T_3 .

Prenons comme système l'eau contenue dans le récepteur à la date t : dans l'intervalle de temps dt qui suit, le volume occupé par ce système augmente (la pompe qui aspire la vapeur « fournit » un travail $W = -P_3 \delta V \dots$), mais on peut considérer que la vapeur aspirée ne reçoit aucune énergie thermique ($Q = 0$, évolution adiabatique).

Donc (évolution isobare) $\Delta H = Q$ et $Q = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta H = 0}$ l'eau du récepteur évolue à enthalpie constante.

Faisons un bilan entre les instants t et $t + dt$. La conservation de la masse impose :

$$\delta m = \delta m' + \delta m''$$

et la variation d'enthalpie de l'eau entre t et $t + dt$ est donnée par :

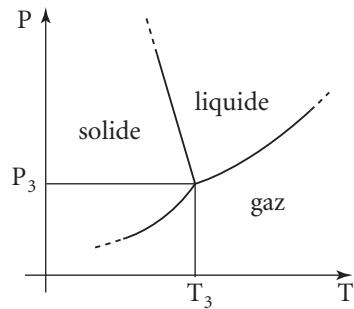
$$\delta H = \delta m' h_v + \delta m'' h_g - \delta m h_L$$

où h_v , h_g et h_L sont les enthalpies massiques de la vapeur, de la glace et du liquide à la température du point triple.

$dH = 0$ implique alors : $\delta m'(h_v - h_L) + \delta m''(h_g - h_L) = 0$.

Or, par définition $l_{\text{vap}} = h_v - h_L$ et $l_f = h_L - h_g$ d'où :

$$\delta m' l_{\text{vap}} - \delta m'' l_f = 0 \Rightarrow \delta m'' = \frac{l_{\text{vap}}}{l_f} \delta m'.$$



Il reste à calculer la masse de vapeur formée. Celle-ci est assimilée à un gaz parfait, d'où :

$$PV = nRT = \frac{m'}{M}RT \Rightarrow m' = \frac{MP_3}{RT_3} \cdot V.$$

La masse de vapeur $\delta m'$ correspond alors à un volume δV tel que : $\delta m' = \frac{MP_3}{RT_3}\delta V$.

Or la pompe aspire pendant dt un volume $\delta V = Ddt$ (D = débit volumique) soit encore une masse de vapeur :

$$\delta m' = \frac{MP_3}{RT_3}Ddt \text{ et } \delta m = \delta m' + \delta m'' = \delta m'\left(1 + \frac{l_{\text{vap}}}{l_f}\right) = \left(1 + \frac{l_{\text{vap}}}{l_f}\right) \cdot \frac{MP_3}{RT_3}D \cdot \delta t$$

d'où la loi d'évolution de la masse m d'eau liquide : $m = m_0 - \left(\frac{\delta m}{\delta t}\right) \cdot t$.

L'eau liquide aura donc complètement disparu au bout d'un temps t_1 :

$$m = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{m_0}{\left(\frac{\delta m}{\delta t}\right)} \quad \boxed{t_1 = \frac{m_0 RT_3}{MP_3 \cdot D \left(1 + \frac{l_{\text{vap}}}{l_f}\right)}}$$

$$\text{Application numérique : } t_1 = \frac{50 \times 8,31 \times 273}{18 \times 600 \times 10^{-4}} \cdot \frac{335}{335 + 2540} = 3 \text{ h } 24 \text{ min.}$$

635

Eau liquide en équilibre avec sa vapeur

On considère de l'eau liquide en équilibre avec sa vapeur à la température $T_0 = 394$ K et à la pression $P_0 = 2$ atm. La masse d'eau est $m = 9$ g, et le volume total occupé par l'eau est $V_0 = 4,7$ L.

1. Déterminer le titre en vapeur du mélange.

2. On place le système dans un thermostat à la température $T_F = 478$ K. Déterminer l'énergie thermique Q fournie par le thermostat dans les deux cas suivants :

a. si l'on maintient la pression constante (égale à P_0) ;

b. si le volume est invariable.

3. Commenter les résultats du **2. a.** et **2. b.**

On donne, pour l'eau, les valeurs des volumes massiques de la vapeur saturante (v_v) et du liquide de saturation (v_L), ainsi que les enthalpies massiques correspondantes (h_v et h_L) :

- $T = 394$ K $\begin{cases} v_v = 858 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}; & h_v = 2710 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \\ v_L = 1,06 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}; & h_L = 509 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \end{cases}$

- $T = 412 \text{ K}$ $\nu_v = 522 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$;
- $T = 478 \text{ K}$ et pour un volume massique de $522 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, on a :

$$h = h' = 2870 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$
 et $P = P' = 4,1 \text{ atm}$;
- $T = 478 \text{ K}$ et pour une pression $P = 2 \text{ atm}$, on a :

$$h = h'' = 2890 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$
.

Solution

- 1.** Par définition, le titre en vapeur est donné par la relation :

$$x = \frac{m_v}{m}$$

D'autre part, en désignant par m_L la masse d'eau liquide, nous avons :

$$m = m_L + m_v$$

$$V_0 = \nu_L m_L + \nu_v m_v.$$

Soit encore : $\nu_0 = \frac{V_0}{m} = \nu_L(1-x) + \nu_v x$

(où ν_0 représente le volume massique « global »).

D'où

$$x = \frac{\nu_0 - \nu_L}{\nu_v - \nu_L}$$

Application numérique :

$$\nu_L = 1,06 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}; \quad \nu_v = 858 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}; \quad \nu_0 = \frac{4,7}{9 \cdot 10^{-3}} = 522 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}.$$

D'où $x = \frac{522 - 1,06}{858 - 1,06} \Rightarrow x = 0,61$.

- 2. a.** La pression est maintenue constante $P = P_0$, et la température finale $T_F = 478 \text{ K}$ est supérieure à la température T_0 de l'équilibre liquide-vapeur (pour une pression P_0). L'état du système (ramené à l'unité de masse) passe d'un mélange liquide-vapeur (point A) à celui de la vapeur (point B).

Appliquons alors le premier principe au fluide :

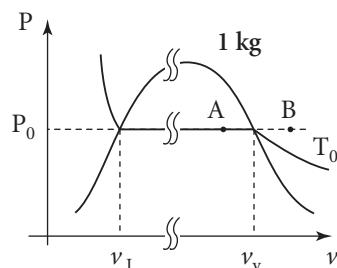
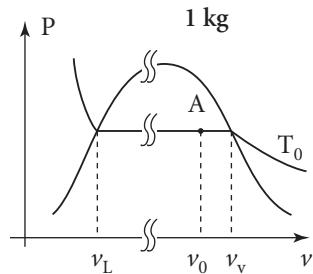
$$\Delta U = W_{\text{ext}} + Q.$$

Le travail extérieur s'exprime simplement par $W_{\text{ext}} = -P_0 \Delta V$, d'où :

$$W_{\text{ext}} = -P_0(V_F - V_0).$$

Soit une énergie thermique Q fournie par le thermostat :

$$Q = U_F - U_I + P_0(V_F - V_0) = (U_F + P_0 V_F) - (U_I + P_0 V_0).$$



$$\text{Or } P_I = P_F = P_0 \quad \begin{cases} H_F = U_F + P_F V_F = U_F + P_0 V_F \\ H_I = U_I + P_I V_I = U_I + P_0 V_I \end{cases}$$

Finalement $Q = H_F - H_I$ (transformation isobare), et en désignant par h les enthalpies massiques :

$$Q = m(h_F - h_I)$$

h_I se calcule à partir des valeurs h_v et h_L des enthalpies massiques de la vapeur saturante et du liquide saturé, et du titre x en vapeur :

$$h_I = x h_v + (1-x) h_L.$$

Quant à h_F il s'identifie à la quantité h'' , d'où :

$$Q = m[h'' - x h_v - (1-x) h_L]$$

Application numérique :

$$Q = 9 \cdot 10^{-3} [2\,890 - 0,61 \times 2\,710 - 0,39 \times 5\,09] \Rightarrow Q = 9,38 \text{ kJ.}$$

2. b. Cette fois-ci, le volume reste égal à V_0 et le premier principe s'écrit :

$$\Delta U = Q \Rightarrow Q = m(u_F - u_I)$$

où u_F et u_I désignent les énergies internes massiques dans les états final et initial.

L'état initial est toujours associé au point A.

Pour l'état final, on a un volume massique v_0 et une température $T_F = 478 \text{ K}$ supérieure à celle du point A' ($T_{A'} = 412 \text{ K}$ d'après les données) : cet état correspond à un point tel que B' pour lequel l'enthalpie massique vaut h' et la pression $P' = 4,1 \text{ atm}$.

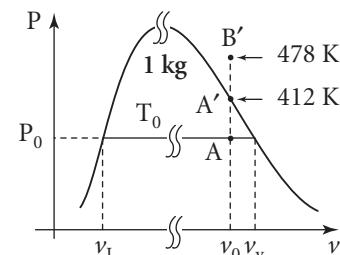
Or $u_F = h_F - P_F v_F$ avec $h_F = h'$, $P_F = P'$ et $v_F = v_0$, soit : $u_F = h' - P' v_0$.

De même $u_I = h_I - P_I v_I$ avec $h_I = h_v x + h_L (1-x)$, $P_I = P_0$ et $v_I = v_0$.

D'où

$$Q = m[(h' - P' v_0) - (h_v x + h_L (1-x) - P_0 v_0)].$$

Application numérique : $Q = 8,2 \text{ kJ.}$



3. Les résultats des questions 2. a. et 2. b. nous montrent que l'énergie thermique fournie par le thermostat est plus grande pour la transformation à pression constante que pour la transformation à volume constant :

– dans le deuxième cas, l'énergie thermique reçue s'identifie à la variation d'énergie interne (volume constant), soit $Q_2 = U'_F - U_I$;

– dans le premier cas ($P = P_0$), on a :

$$Q_1 + W_{\text{ext}} = U''_F - U_I \Rightarrow Q_1 = (U''_F - U_I) - W_{\text{ext}}.$$

La différence entre Q_1 et Q_2 provient donc pour l'essentiel de la quantité W_{ext} (en effet, pour la vapeur assimilable à un gaz parfait, on aurait $U''_F = U'_F$, puisque

$T''_F = T'_F = 478 \text{ K}$). Or dans cette dernière transformation, le volume augmente et W_{ext} est défini négatif, de sorte que $Q_1 > Q_2$, comme il se doit.

On a $W_{\text{ext}} = -P_0[m(v_F - v_0)]$.

Les tables donnent $v_F = 1,19 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ (pour $P = P_0 = 2 \text{ atm}$ et $T = T_F$).

D'où $W_{\text{ext}} \approx -2 \cdot 10^5 \times 9 \cdot 10^{-3} (1,19 - 0,522) \Rightarrow W_{\text{ext}} \approx -1,20 \text{ kJ}$.

Or $Q_1 - Q_2 = 9,35 - 8,18 = 1,17 \text{ kJ}$.

Il y a bien accord ($Q_1 - Q_2 \sim -W_{\text{ext}}$).

636

Détente isentropique de vapeur saturante

1. On donne pour l'eau les valeurs des enthalpies massiques, associées aux états liquide et vapeur, à des températures différentes.

$$T_1 = 418 \text{ K}; \quad h_L = 610 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad h_v = 2739 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1};$$

$$T_2 = 373 \text{ K}; \quad h_L = 419 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad h_v = 2675 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

On admet que pour les températures considérées ($T \leq 470 \text{ K}$), la chaleur latente de vaporisation de l'eau l_{vap} varie linéairement avec la température T . En déduire l'expression numérique donnant $l_{\text{vap}}(T)$ exprimée en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

2. On considère de la vapeur d'eau saturante (température $T < 470 \text{ K}$). On lui fait subir une détente isentropique. Montrer que cette détente s'accompagne d'une liquéfaction partielle : on notera y le titre en liquide du mélange.

Donner la valeur de y pour des températures finale et initiale égales à T_2 et T_1 .

On supposera que la capacité thermique du liquide de saturation est une constante C . Pour les applications numériques, on prendra $C = 4,186 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

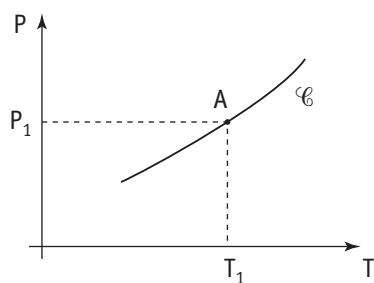
3. Sur le diagramme (P, T), l'état initial est associé au point A(P_1, T_1). La pente $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{éq}}$ de la courbe d'équilibre \mathcal{C} est liée à la chaleur latente de vaporisation l_{vap} par l'expression dite formule de Clapeyron :

$$l_{\text{vap}} = T(v_v - v_L) \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{éq}}, \text{ où } v_v \text{ et } v_L = \text{volumes massiques de la vapeur saturante et du liquide de saturation.}$$

Déterminer la grandeur $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{vap}}$ caractérisant la pente en A de l'isentropique située

dans le domaine de la vapeur et aboutissant en A.

Établir une condition sur ces pentes pour que la détente envisagée s'accompagne effectivement d'une liquéfaction partielle. Conclure.



Solution

1. À la température d'équilibre T , la chaleur latente de vaporisation, rapportée à l'unité de masse, est donnée par l'expression :

$$l_{\text{vap}}(T) = h_v(T) - h_L(T).$$

On admet des variations linéaires : $l_{\text{vap}} = \alpha - \beta T$ ($\Delta h = h_v - h_L$ doit diminuer quand la température augmente ; Δh tend vers une valeur nulle pour $T \rightarrow T_C^-$). On a donc :

$$h_v(T) - h_L(T) = \alpha - \beta T.$$

Appliquons cette relation aux deux températures T_1 et T_2 :

$$\begin{cases} \alpha - \beta T_1 = 2739 - 610 \Rightarrow \alpha - 418\beta = 2129 = l_{\text{vap}}(T_1) \\ \alpha - \beta T_2 = 2675 - 419 \Rightarrow \alpha - 373\beta = 2256 = l_{\text{vap}}(T_2) \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à :

$$\beta = \frac{2256 - 2129}{418 - 373} \Rightarrow \beta = 2,82 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad \alpha = 3309 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

D'où

$$l_{\text{vap}}(T) \approx (3309 - 2,82T) \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

2. La détente va s'accompagner d'une augmentation du volume et d'une diminution de la pression et de la température.

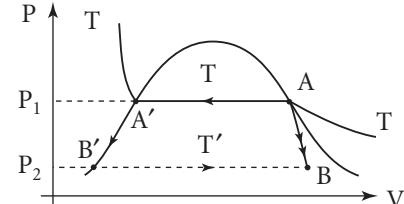
Supposons qu'elle s'accompagne effectivement d'une liquéfaction partielle ($A \rightarrow B$) et écrivons que l'entropie dans les états « A » et « B » est la même (températures respectives T et T').

Or la variation d'entropie sur le chemin $A \rightarrow B$ associé à la détente est la même que sur le chemin $A \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow B$ (S est une fonction d'état). On a donc :

$$\Delta S(A \rightarrow B) = \Delta S(A \rightarrow A') + \Delta S(A' \rightarrow B') + \Delta S(B' \rightarrow B).$$

Et d'après la définition de la chaleur latente :

$$\begin{cases} \Delta S(A' \rightarrow A) = \frac{l_{\text{vap}}(T)}{T} & (\text{pour l'unité de masse}) \\ \Delta S(B' \rightarrow B) = \frac{l_{\text{vap}}(T')}{T'}(1-y). \end{cases}$$



D'autre part, l'état du liquide de saturation ne dépend que de la température d'équilibre T . La variation d'entropie sur le chemin $A' \rightarrow B'$ est alors donnée par (toujours pour l'unité de masse) :

$$\Delta S(A' \rightarrow B') = C \ln\left(\frac{T'}{T}\right) \quad (C \text{ considéré comme constant}).$$

Soit au total :

$$\Delta S(A \rightarrow B) = -\frac{l_{\text{vap}}(T)}{T} + (1-y)\frac{l_{\text{vap}}(T')}{T'} + C \ln\left(\frac{T'}{T}\right).$$

La valeur de γ (si elle existe) est donc définie par la relation :

$$\boxed{\gamma = \frac{C \ln\left(\frac{T'}{T}\right) + \frac{l_{\text{vap}}(T')}{T'} - \frac{l_{\text{vap}}(T)}{T}}{\frac{l_{\text{vap}}(T')}{T'}}}$$

Supposons alors T' infiniment voisin de T : $T' = T - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \ll T$).

La détente, à partir de l'état caractérisé par T , amorcera une liquéfaction partielle pour $\gamma(\varepsilon) > 0$, soit pour :

$$C \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{T}\right) + \frac{l_{\text{vap}}(T - \varepsilon)}{T - \varepsilon} - \frac{l_{\text{vap}}(T)}{T} > 0 \quad (1)$$

Or $\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{T}\right) \sim -\frac{\varepsilon}{T}$ et :

$$\frac{l_{\text{vap}}(T - \varepsilon)}{T - \varepsilon} - \frac{l_{\text{vap}}(T)}{T} = \alpha\left(\frac{1}{T - \varepsilon} - \frac{1}{T}\right) \sim \frac{\alpha\varepsilon}{T^2}.$$

La condition (1) s'écrit alors : $\frac{\varepsilon}{T} \left(-C + \frac{\alpha}{T}\right) > 0$

c'est-à-dire

$$\boxed{T < \frac{\alpha}{C}}$$

Application numérique : $T < \frac{3309}{4,186} \Rightarrow T < 790 \text{ K}$.

L'hypothèse faite (de l'eau liquide apparaît) est donc vérifiée. Il faut également noter que la température critique de l'eau est déjà inférieure à cette température limite ($T_C \approx 650 \text{ K}$) !

Cependant, l'expression donnant l_{vap} n'est évidemment plus valable à ces températures, on aurait en effet :

$$l_{\text{vap}}(650 \text{ K}) = 3309 - 2,82 \times 650 = 1480 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

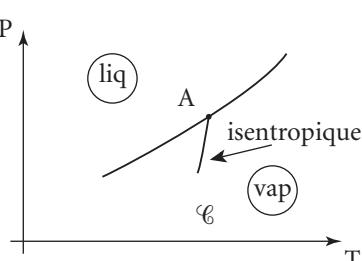
alors qu'elle devrait être nulle !

Faisons maintenant $T = T_1 = 418 \text{ K}$ et $T' = T_2 = 373 \text{ K}$.

$$\gamma = \frac{4,186 \ln\left(\frac{373}{418}\right) + \frac{2256}{373} - \frac{2129}{418}}{\frac{2256}{373}} \Rightarrow \gamma = 7,9 \cdot 10^{-2}.$$

3. Pour calculer la pente $\left.\frac{dP}{dT}\right|_{\text{vap}}$ de l'isentropique

que associée au gaz, on assimilera ce dernier à un gaz parfait de masse molaire M (il est alors nécessaire que la température T_1 soit suffisamment



faible devant la température critique T_c). Dès lors, l'isentropicité se traduit par la loi de Laplace :

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cste} \Rightarrow (1-\gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0.$$

D'où

$$\left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{vap}} (A) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{T_1}.$$

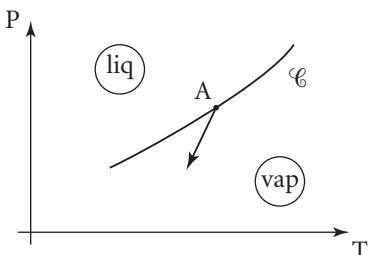
Lors de la détente isentropique, la température et la pression doivent diminuer. Partant donc de l'état A(P_1, T_1) où le fluide est sous forme de vapeur saturante, cette détente fera passer le fluide à l'état de vapeur sèche dans le cas où :

$$\left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{vap}} (A) > \left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{éq}} (A)$$

(cf. graphe ci-contre).

La condition de liquéfaction partielle s'écrit donc :

$$\boxed{\left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{vap}} (A) < \left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{éq}} (A)} \quad (1)$$



L'évaluation de $\left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{éq}} (A)$ peut se faire à partir de la formule de Clapeyron dans

laquelle on fera $\nu_v \gg \nu_L$ (T_1 « faible » devant T_c) :

$$\left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{éq}} \# \frac{l_{\text{vap}}(T)}{T \nu_v}$$

avec $P \nu_v = \frac{RT}{M}$ (hypothèse du gaz parfait)

$$\text{d'où} \quad \left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{éq}} \# \frac{l_{\text{vap}}(T)}{RT^2} MP \Rightarrow \left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{éq}} (A) = \frac{l_{\text{vap}}(T_1)MP_1}{RT_1^2}.$$

La condition (1) s'écrit alors :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{T_1} < \frac{l_{\text{vap}}(T_1)MP_1}{RT_1^2} \Rightarrow \boxed{\frac{l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} > \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}}$$

Soit avec l'approximation supplémentaire $l_{\text{vap}} = \alpha - \beta T$

$$\frac{\alpha - \beta T_1}{T_1} > \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M} \Rightarrow T_1 < \frac{\alpha}{\beta + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}}.$$

Pour l'eau, $M = 18 \text{ g}$, $\gamma \approx 1,3$ l'application numérique donne :

$$T < 686 \text{ K.}$$

La différence des valeurs numériques (790 K et 686 K) est liée à la nature des approximations faites. Cependant, le résultat reste le même puisque ces deux températures limites demeurent supérieures à la température critique T_c .

637 Condensation – Surfusion

1. Un cylindre à parois diathermanes contient une masse $m = 0,50 \text{ kg}$ d'eau à l'état de vapeur saturante : $T = T_1 = 373 \text{ K}$ et $P = P_0 = 1 \text{ atm}$. Il est fermé par un piston sans masse pouvant coulisser sans frottements, la pression extérieure au niveau du piston étant maintenue égale à P_0 . Le système est placé dans un thermostat de température $T_0 = 290 \text{ K}$.

a. Préciser les échanges énergétiques. Les calculer avec :

- chaleur latente massique de vaporisation : $l_{\text{vap}}(T_1) = 2\,260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_L = 4,18 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- volume massique de la vapeur : $v_1(373 \text{ K}, 1 \text{ atm}) = 1,670 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$;
- volume massique du liquide : $v_0(290 \text{ K}, 1 \text{ atm}) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

b. Proposer un bilan entropique et donner la valeur de la création d'entropie.

2. Le cylindre contient maintenant, dans l'état initial, une masse $m = 0,5 \text{ kg}$ d'eau liquide dans les conditions $T_1 = 260 \text{ K}$ et $P = P_0 = 1 \text{ atm}$. Ses parois et le piston sont désormais adiabatiques et la pression extérieure reste maintenue à $P_0 = 1 \text{ atm}$.

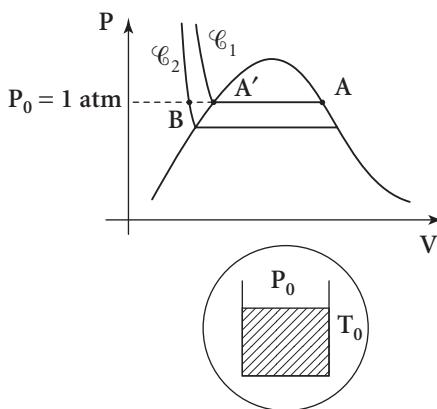
a. Donner complètement l'état final du système.

Faire l'application numérique avec : chaleur latente massique de fusion : $l_F(T_0 = 273 \text{ K}) = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

b. Proposer un bilan entropique et donner la valeur de la création d'entropie.

Solution

1. a. L'état initial de l'eau se situe sur l'isotherme $T_1 = 373 \text{ K}$ (point A de la courbe \mathcal{C}_1), l'état final sur l'isotherme $T_0 = 290 \text{ K}$ (point B de la courbe \mathcal{C}_2 : l'eau est donc à l'état liquide). La transformation est monobare et monotherme. Le fluide passe de l'état de vapeur saturante à celui de liquide, et le volume qu'il occupe va donc diminuer. Il reçoit une énergie thermique Q du thermostat et un travail W de l'atmosphère extérieure.



On a (premier principe) :

$$\Delta U = Q + W \quad \text{avec} \quad W = -P_0 \Delta V.$$

$$\text{Soit} \quad \Delta U + P_0 \Delta V = Q \Rightarrow \Delta(U + P_0 V) = Q.$$

Dans l'état initial et dans l'état final, la pression du fluide est P_0 , et la quantité $U + P_0 V$ représente l'enthalpie H de l'eau, soit :

$$\Delta H = Q.$$

Pour évaluer ΔH , considérons la transformation réversible $A \rightarrow A' \rightarrow B$:

$$\Delta H = \Delta H(A \rightarrow A') + \Delta H(A' \rightarrow B).$$

$$\text{Or} \quad \begin{cases} \Delta H(A, A') = -m l_{\text{vap}}(T_1) & \text{par définition de } l_{\text{vap}}(T_1) \\ \Delta H(A' \rightarrow B) = m C_L(T_0 - T_1). \end{cases}$$

D'où

$$Q = m C_L(T_0 - T_1) - m l_{\text{vap}}(T_1)$$

$$W = -P_0(v_0 - v_1)m \quad \text{en fait } W = P_0 v_1 m$$

où v_1 et v_0 représentent les volumes massiques dans les états A [vapeur d'eau, $T_1 = 373 \text{ K}$, $P = P_0 = 1 \text{ atm}$] et B [eau liquide, $T_0 = 290 \text{ K}$, $P = P_0 = 1 \text{ atm}$].

Application numérique :

$$Q = 0,5[4,18(290 - 373) - 2260] \Rightarrow Q = -1300 \text{ kJ}$$

$$W = +0,5 \times 1,67 \times 1,013 \cdot 10^5 \Rightarrow W = 84,6 \text{ kJ.}$$

1. b. Faisons maintenant un bilan entropique en prenant comme système le fluide.

Désignons par S son entropie. Le second principe s'écrit :

$$\Delta S = S_e + \sigma \quad (\sigma = \text{création d'entropie}).$$

Le système « reçoit » l'énergie thermique Q du thermostat de température T_0 , d'où :

$$S_e = \frac{Q}{T_0} = -\frac{m[l_{\text{vap}}(T_1) + C_L(T_1 - T_0)]}{T_0}.$$

D'autre part, le calcul de ΔS peut s'effectuer en reprenant le chemin réversible $A \rightarrow A' \rightarrow B : \Delta S = \Delta S(A \rightarrow A') + \Delta S(A' \rightarrow B)$, avec :

$$\Delta S(A \rightarrow A') = \frac{(-m l_{\text{vap}}(T_1))}{T_1} \quad \begin{array}{l} \text{(changement d'état vapeur} \rightarrow \text{liquide} \\ \text{à température } T_1 \end{array}$$

$$\Delta S(A' \rightarrow B) = \int_{T_1}^{T_0} \frac{m C_L dT}{T_1} \quad \begin{array}{l} \text{(transformation isobare et } dH = \delta Q \\ \text{avec } dH = m C_L dT \end{array}$$

$$\text{D'où : } \Delta S = \frac{-m l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} + m C_L \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right).$$

Soit l'équation de bilan :

$$\frac{-m l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} + m C_L \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) = -\frac{m[l_{\text{vap}}(T_1) + C_L(T_1 - T_0)]}{T_0} + \sigma$$

et :

$$\sigma = m l_{\text{vap}}(T_1) \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) + m C_L \left[\left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) - \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \right]$$

Ce qui peut s'écrire $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ avec :

$$\sigma_1 = ml_{\text{vap}}(T_1) \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) > 0 \text{ puisque } T_0 < T_1 \text{ et } l_{\text{vap}} > 0.$$

Cette création correspondrait au seul changement d'état de l'eau.

$$\sigma_2 = mC_L \left[\left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) - \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) \right] > 0$$

(celle-ci est associée au passage de l'eau liquide de la température T_1 à la température T_0).

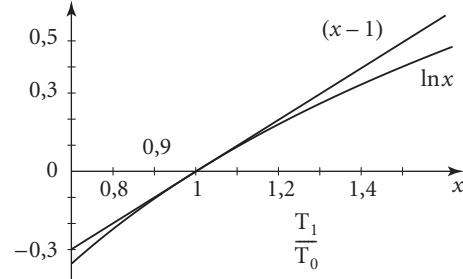
Dans les deux cas, l'énergie thermique est fournie par le thermostat (T_0).

Application numérique :

$$\sigma_1 = 0,5 \times 2260 \left(\frac{1}{290} - \frac{1}{373} \right) \Rightarrow \sigma_1 = 0,867 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\sigma_2 = 0,5 \times 4,18 \left[\left(\frac{373}{290} - 1 \right) - \ln \left(\frac{373}{290} \right) \right] \Rightarrow \sigma_2 = 0,072 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Soit au total $\sigma = 0,939 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \Rightarrow \sigma = 0,94 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$.



2. a. Là aussi, la transformation est monobare mais contrairement au cas précédent, elle est adiabatique (et irréversible). Elle se caractérise donc par la relation $\Delta H = 0$.

Imaginons que l'état final soit associé à un équilibre liquide/solide à la pression imposée d'une atmosphère et à la température $T_0 = 273 \text{ K}$ comprenant une masse mx de glace et une masse $(1-x)m$ d'eau liquide. Pour déterminer ΔH , on peut prendre le chemin réversible suivant : chauffage du liquide jusqu'à T_0 puis solidification partielle :

$\Delta H = \Delta H(\text{eau liquide : } T_1 \rightarrow T_0) + \Delta H(\text{solidification partielle à } T_0)$.

$$\Delta H(\text{liq : } T_1 \rightarrow T_0) = mC_L(T_0 - T_1).$$

$$\Delta H(\text{solidification partielle à } T_0) = mx \cdot (-l_F(T_0)).$$

Soit au total : $\Delta H = m[C_L(T_0 - T_1) - x l_F(T_0)]$.

Cette équation détermine x :

$$x = \frac{C_L(T_0 - T_1)}{l_F(T_0)} \quad (1)$$

Application numérique : $x = \frac{4,18 \times (273 - 260)}{335}; x = 0,16$ et on est bien en présence d'un équilibre eau liquide-eau solide.

2. b. Faisons maintenant un bilan entropique, le système considéré étant la masse m d'eau.

Appliquons-lui le second principe : $\Delta S = S_e + \sigma$.

Le système est thermiquement isolé de telle sorte que $S_e = 0$.

Pour déterminer ΔS , on peut utiliser le même chemin que celui emprunté pour le calcul de ΔH :

$$\Delta S = \Delta S(\text{eau liquide : } T_1 \rightarrow T_0) + \Delta S(\text{solidification partielle à } T_0)$$

$$\Delta S(\text{eau liquide : } T_1 \rightarrow T_0) = \int_{T_1}^{T_0} \frac{mC_L dT}{T} \quad (dH = \delta Q \text{ avec } dH = mC_L dT)$$

$$\Delta S(\text{solidification partielle à } T_0) = \frac{mx \cdot [-l_F(T_0)]}{T_0}.$$

$$\text{D'où : } \sigma = -\frac{mx l_F(T_0)}{T_0} + mC_L \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right).$$

Soit en reportant dans cette expression la valeur de x (relation (1)) :

$$\boxed{\sigma = +mC_L \left[\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) - \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) \right]}$$

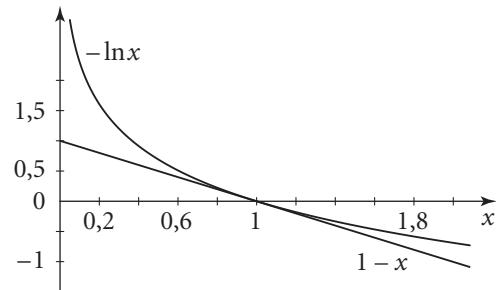
ou encore :

$$\sigma = mC_L \left[-\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) \right].$$

On a donc $\sigma > 0$ comme il se doit (création d'entropie).

Application numérique :

$$\sigma = 2,44 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$



Commentaires

- L'état initial envisagé à la deuxième question correspond à un état métastable, l'état stable dans les conditions $T = 260 \text{ K}$ et $P = 1 \text{ atm}$ étant l'état solide.

On parle de phénomène de retard aux transitions de phase. Il s'agit ici d'un retard à la solidification encore appelé phénomène de surfusion (on l'observe également pour le phosphore qui peut rester liquide à des températures inférieures à la température de fusion, $t_F = 44^\circ\text{C}$). Il suffit d'une faible perturbation (vibration, germe cristallin...) pour que la transition s'effectue spontanément. Dans ce cas, et pour un système thermiquement isolé, l'énergie thermique libérée par la solidification conduit à une élévation de température qui permet d'atteindre (pour une température initiale pas trop basse) un état d'équilibre liquide-solide à la température de fusion.

- On peut également observer un fluide à l'état de vapeur à la température T sous une pression supérieure à la pression d'équilibre à cette même température ($P_s(T)$) : il s'agit de vapeur sursaturante.

- Citons également des retards à la vaporisation d'un liquide (liquide surchauffé).

Ces phénomènes physiques ont trouvé une application dans certains détecteurs de particules chargées :

- chambre de Wilson (air saturé en vapeur d'eau et détendu brusquement de façon adiabatique \rightarrow vapeur d'eau sursaturante) ;
- chambre à bulles (hydrogène liquide brusquement détendu reste à l'état liquide \rightarrow liquide surchauffé).

Dans les deux cas, une particule chargée arrivant dans la chambre permet de faire cesser localement le retard au changement de phase : formation de gouttelettes (dans le cas de la chambre Wilson encore appelée chambre à brouillard), formation de bulles (pour la chambre à bulles) → matérialisation des trajectoires de ces particules chargées...

638 Vaporisation à T et P variables

Un cylindre (hauteur $h = 0,5 \text{ m}$, section $s = 0,02 \text{ m}^2$) est séparé en deux parties par un piston de masse négligeable, mobile sans frottement. Le compartiment supérieur contient $n = 0,3$ mole d'air, et le compartiment inférieur une mole d'eau.

L'air et la vapeur d'eau seront considérés comme des gaz parfaits. La pression d'équilibre eau liquide-vapeur d'eau est donnée approximativement par $P_{\text{éq}}(T) = P_0 \cdot \left(\frac{T - 273}{100}\right)^4$, avec $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Le cylindre et son contenu sont initialement à la température $T_1 = 300 \text{ K}$, et on chauffe l'ensemble de manière progressive (quasi statique).

1. Décrire qualitativement l'évolution du système.
2. Tracer la courbe d'évolution de la pression de l'air dans le cylindre pour T variant de 300 K à 450 K .

On donnera les valeurs numériques des températures particulières permettant de décrire cette courbe.

Commenter.

Solution

1. Tant que l'eau demeure liquide, le piston mobile reste dans le « bas » du cylindre (volume de l'eau liquide négligeable devant le volume $V = sh$ du cylindre).

Ceci suppose que la pression de l'air est supérieure à la pression d'équilibre eau liquide-eau vapeur pour la température T . Montrons que c'est bien le cas pour $T = T_1$ ($P_{\text{air}}(T_1) > P_{\text{éq}}(T_1)$) :

- 1 mole d'eau liquide occupe un volume d'environ 18 cm^3 .

Or $V = hs = 0,5 \times 0,02 = 10^{-2} \text{ m}^3 = 10 \text{ L}$. On a bien $V \gg V_{\text{eau liq}}$, d'où :

$$\bullet P_{\text{air}}(T_1) \approx \frac{nRT_1}{V} \quad (V_{\text{air}} = V - V_{\text{eau liq}} \approx V).$$

$$\text{Soit } P_{\text{air}}(T_1) = \frac{0,3 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,5 \cdot 0,02} = 74,8 \text{ kPa} \approx 0,75 P_0$$

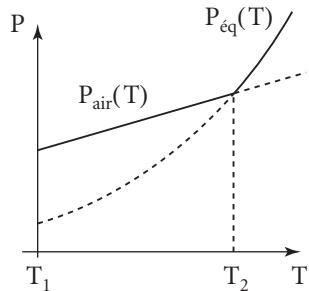
$$\text{or } P_{\text{éq}}(T_1) = P_0 \cdot \left(\frac{300 - 273}{100}\right)^4 \approx 0,005 P_0.$$

On a bien $P_{\text{air}}(T_1) \gg P_{\text{éq}}(T_1)$, et donc l'eau est à l'état liquide à cette température.

Le chauffage de l'ensemble va avoir pour effet d'augmenter les pressions P_{air} et $P_{\text{éq}}(T)$ qui sont des fonctions croissantes. Mais $P_{\text{éq}}(T)$ croît plus vite que P_{air} (cf. figure), et les deux pressions deviendront égales à une certaine température T_2 , telle que :

$$P_{\text{éq}}(T_2) = P_{\text{air}} = \frac{nRT_2}{hs}.$$

À partir de ce moment, le piston pourra se soulever et l'eau commencera à se vaporiser.



Il y aura alors constamment équilibre des pressions de l'air et de la vapeur d'eau de chaque côté du piston (de masse négligeable...). La pression de l'air vaudra alors $P_{\text{éq}}(T)$. Cette situation durera jusqu'à la disparition totale de l'eau liquide.

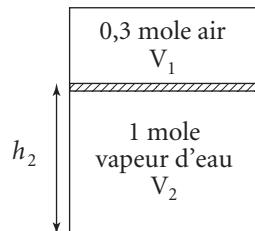
Après cette disparition, on aura 0,3 mole d'air dans la partie supérieure, et 1 mole de vapeur d'eau dans la partie inférieure : le piston ne bougera plus, la pression des gaz considérés comme gaz parfaits évoluant de la même façon de chaque côté :

$$P_{\text{air}}V_1 = nRT$$

$$P_{\text{eau}}V_2 = 1 \cdot RT, \text{ soit avec } P_{\text{eau}} = P_{\text{air}} = P, \text{ et } V_1 + V_2 = V$$

$$P(V_1 + V_2) = PV = (n + 1)RT$$

$$\text{et } \frac{V_2}{V} = \frac{1}{n+1} \text{ soit } h_2 = \frac{h}{n+1} \approx 0,38 \text{ m.}$$



2. Tant que le piston reste immobile au bas du cylindre, la pression de l'air a (approximativement) pour expression : $P_{\text{air}} = \frac{nRT}{hs}$.

Cette expression reste valable tant que $T < T_2$, T_2 étant définie par :

$$P_{\text{éq}}(T_2) = P_0 \cdot \left(\frac{T_2 - 273}{100} \right)^4 = \frac{nRT_2}{hs} \quad (1)$$

d'où
$$P_{\text{air}}(T) = \frac{nRT}{hs} \quad \text{pour} \quad T < T_2 \quad (2)$$

Au-delà de T_2 , et tant que l'eau n'est pas complètement vaporisée, on a $P_{\text{air}}(T) = P_{\text{éq}}(T)$. Cela suppose que la température T est inférieure à une valeur limite T_3 définie selon :

$$P_{\text{air}}(T_3) = P_{\text{eau}}(T_3) \text{ avec } \begin{cases} P_{\text{air}}(T_3)V_{\text{air}} = nRT_3 \\ P_{\text{eau}}(T_3)V_{\text{eau}} = 1 \cdot RT_3 \text{ (toute l'eau est à l'état de vapeur).} \end{cases}$$

$$\text{D'où } P_{\text{air}}(T_3)(V_{\text{air}} + V_{\text{eau}}) = (n + 1)RT_3 = P_{\text{air}}(T_3)V$$

$$\text{soit } P_{\text{air}}(T_3) = P_{\text{eau}}(T_3) = \frac{(n + 1)RT_3}{hs} \quad (3)$$

$$\text{or à la limite } P_{\text{eau}}(T_3) = P_{\text{éq}}(T_3) = P_0 \cdot \left(\frac{T_3 - 273}{100} \right)^4.$$

La température T_3 est alors fixée par la relation :

$$P_0 \cdot \left(\frac{T_3 - 273}{100} \right)^4 = \frac{(n+1)RT_3}{hs} \quad (4)$$

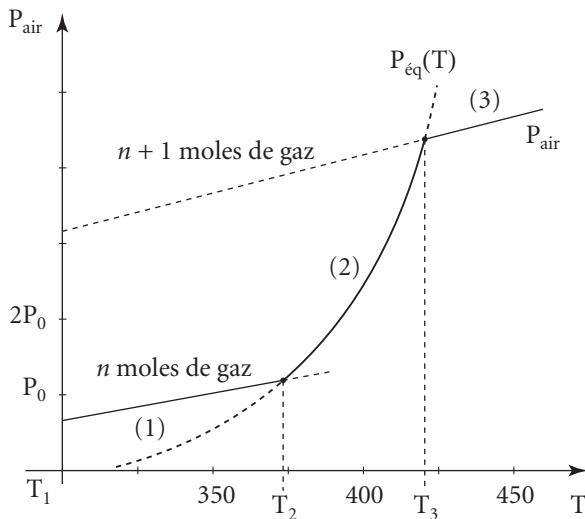
d'où (5)

$$P_{\text{air}}(T) = P_{\text{éq}}(T) = P_0 \cdot \left(\frac{T - 273}{100} \right)^4 \quad \text{pour } T_2 \leq T \leq T_3$$

Pour $T > T_3$, toute l'eau est à l'état vapeur et l'on a (cf. (3)) :

$$P_{\text{air}}(T) = \frac{(n+1)RT}{hs} \quad T > T_3 \quad (6)$$

D'où la courbe $T \rightarrow P_{\text{air}}(T)$ associée aux équations (2), (5) et (6) :



$$(1) : T \rightarrow \frac{nRT}{hs} \cdot T; \quad (2) : T \rightarrow P_0 \left(\frac{T - 273}{100} \right)^4; \quad (3) : T \rightarrow \frac{(n+1)R}{hs} \cdot T$$

• Les valeurs des températures caractéristiques T_2 et T_3 se déduisent de l'équation :

$$\left(\frac{T - T_0}{100} \right)^4 = kT \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = \frac{nR}{P_0 hs} & \text{pour } T_2 \\ k = \frac{(n+1)R}{P_0 hs} & \text{pour } T_3 \end{cases}$$

ou encore $T = T_0 + \alpha \cdot T^{1/4}$ avec $\alpha = 100k^{1/4}$

soit $\alpha(T_2) = 100 \left(\frac{nR}{P_0 hs} \right)^{1/4} \approx 22,345$

$$\alpha(T_3) = 100 \left(\frac{(n+1)R}{P_0 hs} \right)^{1/4} \approx 32,239.$$

Le calcul donne alors : $T_2 \approx 371 \text{ K}$ et $T_3 \approx 419 \text{ K}$.

E. Machines thermiques

641 Machines dithermes : les trois cas intéressants

1. Peut-on réaliser un moteur thermique, une machine frigorifique, ou une pompe thermique à partir d'un fluide décrivant des cycles en échangeant de l'énergie thermique avec une seule source thermique de température T_s ?

2. On dispose désormais de deux réservoirs d'énergie thermique (thermostats de température T_F et T_C avec $T_C > T_F$). Reprendre la question précédente et définir dans chaque cas le rendement (ou l'efficacité) de la machine en fonction notamment de T_C , T_F et de la création d'entropie pour un cycle σ . Commenter.

Application numérique : pompe thermique réversible pour laquelle $T_F = 273\text{ K}$ et $T_C = 292\text{ K}$. Donner la valeur du coefficient d'efficacité.

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe – second principe.
- Définition d'un rendement ou d'une efficacité.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le fluide décrivant un cycle, ses fonctions d'état sont invariantes après chaque cycle. On a en particulier $\Delta U_{\text{fluide}}(\text{cycle}) = 0$ et $\Delta S_{\text{fluide}}(\text{cycle}) = 0$. D'autre part, la machine échange un travail W avec l'extérieur et une énergie thermique Q avec la seule source (de température T_s). Il suffit alors d'appliquer les deux principes de la thermodynamique, puis de prendre en compte les caractéristiques de chaque machine ($W < 0$ pour un moteur thermique, $W > 0$ dans les autres cas...).

2. Le principe d'étude est le même que celui décrit dans le cas précédent (mais il faut tenir compte des deux sources thermiques). Le rendement (ou l'efficacité) sera défini par le rapport de la grandeur énergétique utile – celle que l'on cherche à obtenir (en valeur absolue) – sur l'énergie prélevée (source non « gratuite » : énergie coûteuse à fournir).

3. Solution

1. Prenons comme système le fluide décrivant un cycle. Il est caractérisé par :

$$\Delta U_{\text{fluide}}(\text{cycle}) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_{\text{fluide}}(\text{cycle}) = 0.$$

Le fluide reçoit un travail W et une énergie thermique Q (de la source à la température T_s), ce qui implique : $\Delta U_{\text{fluide}}(\text{cycle}) = W + Q$ (1^{er} principe)

$$\Delta S_{\text{fluide}}(\text{cycle}) = \frac{Q}{T_s} + \sigma \quad (2^{\text{e}} \text{ principe})$$

D'où les équations

$$W + Q = 0 \quad \text{et} \quad Q = -T_s \sigma$$

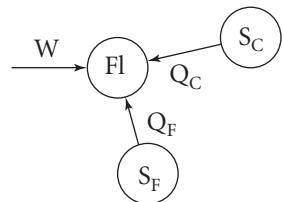
D'autre part, la création d'entropie σ est évidemment positive : $\sigma > 0$.

La transformation cyclique du fluide conduit alors à : $Q < 0$ et $W > 0$.

Ainsi, un moteur thermique fonctionnant sur ce type est impossible (on doit avoir $W < 0$ pour que du travail soit fourni à l'extérieur). Il en est de même d'une machine frigorifique, l'énergie thermique Q devant être prise à l'espace que l'on veut maintenir à basse température (ce qui imposerait $Q > 0$).

Par contre, une pompe thermique est envisageable ($W > 0$ et $Q < 0$: de l'énergie thermique est fournie à l'espace à « réchauffer »). Cependant, une telle machine aurait une efficacité égale à l'unité $e = \frac{|Q|}{W} = +1$ et ne présenterait guère d'intérêt du point de vue de notre étude : c'est en fait le cas du radiateur électrique.

2. Considérons maintenant une machine échangeant du travail W avec l'extérieur et de l'énergie thermique avec deux sources (source froide S_F et source chaude S_C).



POINT MÉTHODE

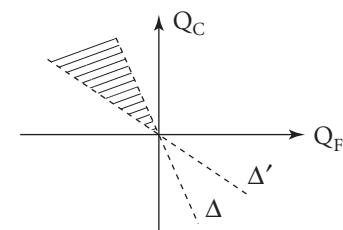
Les transferts énergétiques W, Q_C, Q_F sont des **grandes algébriques** « reçues » par le système fluide. Si elles sont positives, c'est qu'elles sont effectivement reçues par le système ; lorsqu'elles sont négatives, c'est que le transfert correspondant s'effectue dans le sens système fluide → extérieur. Ainsi, $W > 0$ implique que l'on doit fournir de l'énergie mécanique à la machine (c'est le cas d'une machine frigorifique), et $W < 0$ permet de concevoir des machines fournissant du travail à l'extérieur.

Le fluide décrivant toujours des cycles, il vient ici (pour un cycle) :

$$\begin{cases} \Delta U_{\text{fluide}}(\text{cycle}) = 0 = W + Q_C + Q_F \\ \Delta S_{\text{fluide}}(\text{cycle}) = 0 = S_e + \sigma = S_{e(\text{source froide})} + S_{e(\text{source chaude})} + \sigma \\ \quad = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + \sigma \quad \text{avec } \sigma > 0. \end{cases}$$

• **Moteur thermique** : dans ce cas, il faut que $W < 0$ ce qui impose $Q_C + Q_F > 0$ avec $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = -\sigma < 0$ le domaine de points figuratifs dans l'espace (Q_F, Q_C) correspond à la zone hachurée (cf. figure ci-contre).

Une telle machine fonctionnera donc avec $Q_C > 0$ et $Q_F < 0$, c'est-à-dire en prélevant de l'énergie thermique à la source chaude et en la restituant à la source froide.



$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \text{droite d'équation : } Q_C + \frac{T_C}{T_F} Q_F = 0 \\ \Delta' &\equiv \text{droite d'équation : } Q_C + Q_F = 0 \end{aligned}$$

Le rendement du moteur est défini par :

$$\eta = \frac{\text{grandeur énergétique utile}}{\text{grandeur énergétique non « gratuite »}}.$$

Le rendement de ce moteur est donc fourni par : $\eta = \frac{(-W)}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$

avec

$$\frac{Q_F}{Q_C} = -\frac{T_F}{T_C} - \sigma \frac{T_F}{Q_C}.$$

D'où

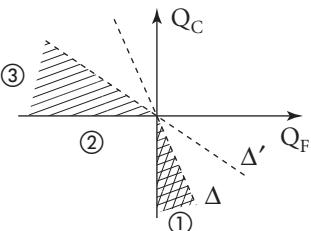
$$\boxed{\eta = \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) - \sigma \frac{T_F}{Q_C}}$$

La qualité $\frac{\sigma T_F}{Q_C}$ est définie positive ($T_F > 0$, $\sigma > 0$ et $Q_C > 0$) ce qui montre bien que le rendement du moteur est maximal dans le cas de la réversibilité :

$$\boxed{\eta \leq \eta_{\text{rév}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

- Envisageons maintenant les machines pour lesquelles $W > 0$:

On a donc dans ce cas : $Q_F + Q_C < 0$ et $\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} < 0$. ③



– 1^{er} cas $Q_C < 0$ et $Q_F > 0$ (zone ①) : la machine donne de l'énergie thermique à la source chaude et en prélève à la source froide ; c'est le cas des machines frigorifiques et des pompes thermiques.

– 2^e cas $Q_C < 0$ et $Q_F < 0$ (zone ②) : la machine fournit alors de l'énergie thermique aux deux sources (pas d'intérêt ; par ailleurs $e = \frac{|Q_C| + |Q_F|}{W} = 1$).

– 3^e cas $Q_C > 0$ et donc $Q_F < 0$ (zone ③) : une telle machine est inintéressante. De plus, la transformation réversible est impossible dans ce cas puisque l'on doit avoir

$$Q_F = -\frac{T_F}{T_C}Q_C \text{ avec } Q_F < -Q_C \quad \left(\frac{T_F}{T_C} < 1\right).$$

Définissons pour finir les efficacités d'une machine frigorifique (MF) et d'une pompe thermique (PT) :

$$e_{\text{MF}} = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_F}{-Q_F - Q_C} = \frac{1}{\frac{(-Q_C)}{Q_F} - 1}$$

Or

$$\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = -\sigma \Rightarrow \left(\frac{Q_C}{Q_F}\right) = \frac{T_C}{T_F} + \frac{T_C \sigma}{Q_F}.$$

Finalement

$$\boxed{e_{\text{MF}} = \frac{1}{\left(\frac{T_C}{T_F} - 1\right) + \frac{T_C \sigma}{Q_F}}}$$

l'efficacité est maximale lorsque le cycle est décrit de façon réversible ($\sigma = 0$).

$$e_{MF} \leq (e_{MF})_{rev} = \frac{1}{\left(\frac{T_C}{T_F} - 1\right)}$$

la valeur de $(e_{MF})_{rev}$ est d'autant plus grande que T_F est voisine de T_C (avec $T_F < T_C$). Pour la pompe thermique, ce qui nous intéresse c'est l'énergie thermique fournie à la source chaude, d'où :

$$e_{PT} = \frac{-Q_C}{W} = \frac{Q_C}{Q_C + Q_F} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}}$$

or $\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = -\sigma \Rightarrow \frac{Q_F}{Q_C} = -\frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F\sigma}{Q_C}$.

Finalement

$$e_{PT} = \frac{1}{\left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) + \frac{T_F\sigma}{(-Q_C)}}$$

la grandeur $\frac{T_F\sigma}{(-Q_C)}$ est positive, et l'efficacité est encore maximale dans le cadre de la réversibilité ($\sigma = 0$).

$$e_{PT} \leq (e_{PT})_{rev} = \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

De même, $(e_{PT})_{rev}$ est d'autant plus grand que T_F est proche de T_C .

Application numérique : $(e_{PT})_{rev} = \frac{1}{1 - \frac{273}{292}}$, soit $(e_{PT})_{rev} = 15,4$. Pour un même travail utilisé, l'énergie thermique est à peu près quinze fois plus importante que celle obtenue par conversion directe de travail en énergie thermique (radiateur électrique).

642 Cycle réversible – Cycle irréversible

Un gramme d'air, considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g}$, décrit le cycle constitué de l'adiabatique CA, de l'isotherme AB et de l'isochore BC.

On prendra : $\gamma = 1,4$; $T_A = T_B = T_1 = 300 \text{ K}$; $T_C = T_0 = 155 \text{ K}$; $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

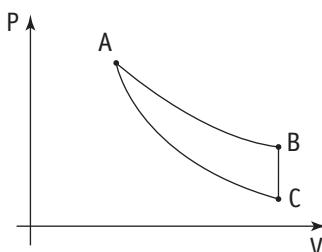
1. Le cycle est décrit dans le sens moteur et de façon réversible. Déterminer les échanges énergétiques avec l'extérieur pour chacune des transformations, ainsi que le travail W_T et l'énergie thermique Q_T reçus au cours d'un cycle.

Application numérique : donner la valeur de W_T .

2. Le cycle est maintenant décrit en sens inverse, les transformations BA et AC demeurant réversibles. Pendant l'isochore CB, l'air est en contact permanent avec la source à la température T_1 .

a. Quelles sont les nouveaux échanges d'énergie ? Application numérique.

b. Déterminer la création d'entropie σ lorsque le fluide décrit un cycle de transformations. Application numérique.



1. Ce qu'il faut savoir

- Cycle moteur – cycle résistant.
- Loi de Laplace des gaz parfaits.
- Premier et second principes.

2. Ce qu'il faut comprendre

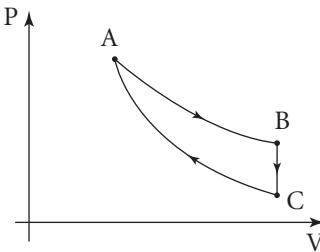
1. Un cycle moteur sera décrit dans le sens des aiguilles d'une montre ($W_T < 0$). Les échanges énergétiques se calculeront en prenant en compte les caractéristiques de chacune des transformations (adiabatique $\rightarrow Q = 0$; isochore $\rightarrow W = 0$; isotherme $\rightarrow \Delta U = 0$) et en utilisant le premier principe, la variation d'énergie interne s'exprimant simplement en fonction de la variation de température (pour un gaz parfait, $\Delta U = nC_v\Delta T$). Pour l'isotherme, la détermination de W s'effectuera par un calcul direct.

2. Le cycle est maintenant décrit en sens inverse, ce qui implique $W'_T = -W_T$ et $Q'_T = -Q_T$. Les échanges énergétiques pour les trois transformations sont simplement changés de signe (AB et AC transformations réversibles décrites en sens opposé). La création d'entropie (irréversibilité) est en fait associée à la transformation CB.

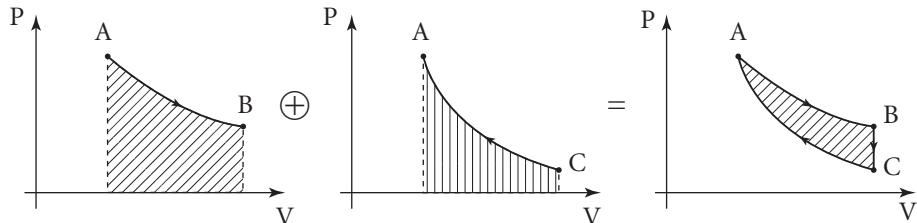
3. Solution

1. Le cycle proposé devant être moteur, il est décrit dans le sens rétrograde :

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A.$$



On a bien :



$$W(A \rightarrow B) = - \int_A^B P dV < 0 = W_1 \quad W(C \rightarrow A) = - \int_A^C P dV > 0 = W_2 \quad W_{\text{cycle}} = W_1 + W_2 < 0$$

Échanges énergétiques associés à chaque transformation

a) Isotherme A → B :

On a $\Delta U = 0$ (gaz parfait), et $\Delta U = Q_{AB} + W_{AB}$ (premier principe).

$$\text{Or } \delta W_{AB} = -PdV \text{ avec } P = \frac{nRT_1}{V} \Rightarrow \delta W_{AB} = -nRT_1 \frac{dV}{V}$$

$$\text{d'où : } W_{AB} = -nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (V_B = V_2 \text{ et } V_A = V_1).$$

Exprimons les volumes V_1 et V_2 en fonction des températures T_0 et T_1 des points C et A. À cet effet, il suffit de traduire que la transformation CA est isentropique, soit :

$$\left. \begin{array}{l} PV^\gamma = \text{constante} \\ \frac{PV}{T} = \text{constante} \end{array} \right\} \Rightarrow V^{\gamma-1} \cdot T = \text{constante.}$$

$$\text{D'où } T_0 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \text{ et } \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

L'expression du travail W_{AB} devient :

$$W_{AB} = -nRT_1 \ln\left[\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] \Rightarrow W_{AB} = -\frac{nR}{\gamma-1} T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) < 0.$$

$$\text{D'où : } Q_{AB} = \frac{nR}{\gamma-1} T_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right).$$

β) Isochore $B \rightarrow C$:

Le volume est invariable, et aucun travail n'est échangé : $W_{BC} = 0$.

D'où, d'après le premier principe : $\Delta U = nC_v(T_0 - T_1) = Q_{BC} + 0$;

$$\text{soit } Q_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_0 - T_1) \text{ (avec } C_v = \frac{R}{\gamma-1} \text{).}$$

γ) Isentropique $C \rightarrow A$:

Il n'y a pas d'échange thermique ce qui implique $Q_{CA} = 0$, le système reçoit alors le travail W défini par (premier principe) :

$$W_{CA} = \Delta U = nC_v(T_1 - T_0) \text{ puisque } T_C = T_0 \text{ et } T_A = T_1.$$

$$\text{Finalement } Q_{CA} = 0 \text{ et } W_{CA} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) > 0.$$

Au total, l'énergie thermique Q_T et le travail W_T « reçus » s'expriment par :

$$Q_T = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} \Rightarrow Q_T = \frac{nR}{\gamma-1} \left[(T_0 - T_1) + T_1 \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) \right]$$

$$W_T = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} \Rightarrow W_T = \frac{nR}{\gamma-1} \left[(T_1 - T_0) - T_1 \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) \right]$$

On a bien $W_T + Q_T = 0$ (puisque sur un cycle, $\Delta U = 0 = W_T + Q_T$).

D'autre part, le cycle est effectivement moteur, W_T est négatif :

$$W_T = \frac{nRT_1}{\gamma-1} \left[- \left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right) + \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) \right] < 0.$$

Application numérique :

$$n = \frac{1}{M} = \frac{1}{29};$$

$$W_T = \frac{8,31}{29 \times 0,4} \left[(300 - 155) - 300 \ln \left(\frac{300}{155} \right) \right] : W_T = -38 \text{ J.}$$

Commentaires

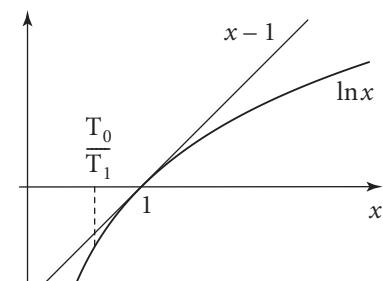
L'étude précédente doit être en accord avec le second principe. Le cycle étant décrit de façon réversible, nous avons : $\Delta S_{\text{cycle}}(\text{fluide}) = 0 = S_e + 0$ ($\sigma = 0$: réversibilité).

Les échanges thermiques ont lieu lors des transformations AB et BC.

La transformation AB étant isotherme :

$$(S_{\text{échange}})_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_1} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right).$$

La transformation BC est isochore réversible, la température de l'air évoluant continûment des valeurs T_1 à T_0 . Il suffit alors d'imaginer que cette évolution s'effectue en mettant le système en contact avec un nombre infini de sources dont les températures s'échelonnent entre T_1 et T_0 . Ainsi :



$$(\delta S_{\text{échange}}) = \frac{\delta Q}{T}, \text{ avec } \delta Q = dU = nC_v dT \ (\delta W = 0).$$

$$\text{D'où : } (\delta S_{\text{échange}}) = nC_v \frac{dT}{T} \text{ et } (S_{\text{échange}})_{BC} = \frac{nR}{\gamma - 1} \int_{T_1}^{T_0} \frac{dT}{T} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right).$$

$$\text{On a bien : } (S_{\text{échange}})_{AB} + (S_{\text{échange}})_{BC} = 0.$$

2. a. Les échanges énergétiques s'effectuent maintenant en sens inverse. Les transformations AC et BA étant réversibles il vient :

$$Q'_{AC} = -Q_{CA} = 0, \text{ et } W'_{AC} = -W_{CA}$$

$$Q'_{BA} = -Q_{AB} \quad \text{et} \quad W'_{BA} = -W_{AB}$$

Pour la transformation isochore CB le travail reste nul puisque le volume est invariable, et les états C et B demeurant les mêmes nous avons :

$$W'_{CB} = 0 \text{ et } Q'_{CB} = \Delta U' = nC_v(T_1 - T_0) = -Q_{BC}.$$

Pour le travail total et l'énergie thermique totale :

$$W'_T = W'_{AC} + W'_{BA} + W'_{CB} = -W_T \text{ (même cycle décrit en sens inverse).}$$

$$Q'_T = Q'_{AC} + Q'_{BA} + Q'_{CB} = -Q_T \text{ (pour un cycle } W'_T + Q'_T = 0 \text{).}$$

$$\text{Application numérique : } W_T = 38 \text{ J et } Q_T = -38 \text{ J.}$$

2. b. Considérons un cycle. La variation d'entropie de l'air correspondant à un cycle est nulle (même état initial et même état final) :

$$\Delta S = 0.$$

Or d'après le second principe :

$$\Delta S = S_{\text{échange}} + \sigma \quad (\sigma : \text{création d'entropie}).$$

Les échanges thermiques se font avec la source thermique à la température T_1 (transformations CB et BA). D'où :

$$(\Delta S)_{\text{échange}} = \frac{Q'}{T_1} = \frac{Q'_{CB} + Q'_{BA}}{T_1} = \frac{Q'_T}{T_1} = \frac{-W'_T}{T_1} = \frac{W_T}{T_1}.$$

$$\text{Dès lors : } \sigma = -\frac{W_T}{T_1}.$$

Finalement

$$\boxed{\sigma = \frac{nR}{\gamma - 1} \left[-\left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \right]}$$

(Cette quantité est bien positive conformément à l'étude faite pour W_T à la question 1.).

$$\text{Application numérique : } \sigma = \frac{(-W_T)}{T_1} = \frac{38}{300} \Rightarrow \sigma = 0,13 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

L'irréversibilité se situe dans la transformation CB pour laquelle il y a un transfert thermique entre le système fluide dont la température n'est pas constamment égale à celle de la source thermique avec laquelle elle est en relation.

Or pour cette transformation, le second principe s'écrit :

$$\Delta S_{CB} = (S_{échange})_{CB} + \sigma_{CB}$$

avec $(S_{échange})_{CB} = \frac{Q'_{CB}}{T_1}$ (l'échange thermique se produit avec la source de température T_1). D'autre part d'après la formule donnant ΔS pour un gaz parfait :

$$\Delta S_{CB} = nC_v \ln\left(\frac{P_B V_B^\gamma}{P_C V_C^\gamma}\right) = nC_v \ln\left(\frac{P_B}{P_C}\right); (V_B = V_C)$$

$$\text{et } \frac{P_B}{P_C} = \frac{T_B}{T_C} = \frac{T_1}{T_0} \text{ (gaz parfait avec } V_B = V_C).$$

$$\text{D'où : } \Delta S_{CB} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right).$$

Soit une création d'entropie :

$$\sigma_{CB} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \frac{Q'_{CB}}{T_1} \quad \text{avec} \quad Q'_{CB} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_0).$$

$$\text{Nous obtenons donc comme il se doit : } \sigma_{cycle} = \frac{nR}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right) + \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \right].$$

643 Cycle de Joule

Un kilogramme d'air décrit le cycle thermodynamique suivant :

état A : $T_0 = 300 \text{ K}$, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$; état B : T_1 , $P_1 = kP_0$

état C : $T_2 = 1\,000 \text{ K}$, P_1 ; état D : T_3 , P_0

transformations AB et CD : adiabatiques réversibles ;

transformations BC et DA : isobares.

L'air est assimilé à un gaz parfait, de capacité calorifique massique à pression constante C_p et de rapport $\gamma = 1,40$.

1. Calculer les valeurs des températures T_1 et T_3 pour $k = 10$.

Donner l'allure du cycle en diagramme de Clapeyron (P en fonction de V).

2. Faire le bilan énergétique du cycle :

– quantités d'énergie thermique échangées ;

– travail total : est-il reçu ou fourni ?

De quel type de machine s'agit-il ? Définir et calculer son rendement (ou efficacité).

3. Les échanges thermiques du fluide ont lieu uniquement avec deux sources :

– une source chaude à T_2 ;

– une source froide à T_0 .

Le cycle étudié est-il réversible ? Expliquer pourquoi il l'est ou ne l'est pas.

Que peut-on calculer pour le vérifier numériquement ?

4. Calculer les variations d'entropie de l'air et des sources pour les différentes transformations.

Quelles relations doivent vérifier ces différentes quantités ?

Donner l'allure du diagramme entropique du cycle.

5. Le cycle étant décrit dans le sens correspondant à un moteur, et les températures des sources restant inchangées,

– exprimer le travail total récupéré en fonction des constantes du gaz et des températures dans les différents états A, B, C et D ;

– puis exprimer ce même travail en fonction de C_p , T_0 , T_2 , k et γ :

– quelle valeur devrait-on donner à k pour obtenir le travail maximal ?

Cette valeur de k correspond-elle à un maximum du rendement de ce moteur ? Commenter.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de Laplace
- Diagramme de Clapeyron.
- Premier et second principes.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Les transformations AB et CD sont adiabatiques réversibles...
2. Utiliser le diagramme de Clapeyron pour déterminer le type de fonctionnement de la machine.
3. Utiliser le second principe.
4. Le diagramme entropique représente $T(S)$.

■ 3. Solution

1. Pour une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, on vérifie la loi de Laplace :

$$P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{constante.}$$

La transformation AB étant adiabatique réversible, $P_0^{1-\gamma}T_0^\gamma = P_1^{1-\gamma}T_1^\gamma$

d'où en introduisant $k = \frac{P_1}{P_0}$:

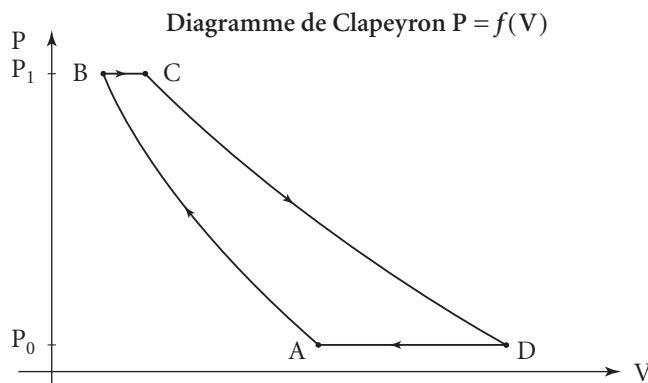
$$T_1 = T_0 k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Application numérique : $T_1 = 579$ K.

De même pour la transformation CD : $P_1^{1-\gamma}T_2^\gamma = P_0^{1-\gamma}T_3^\gamma$

d'où

$$T_3 = T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Application numérique : $T_3 = 518 \text{ K}$.**2.** Pour les transformations adiabatiques, $Q_{A \rightarrow B} = Q_{C \rightarrow D} = 0$.Pour les transformations isobares $Q = \Delta H$

$$Q_{B \rightarrow C} = nC_p(T_2 - T_1) \quad \text{et} \quad Q_{D \rightarrow A} = nC_p(T_0 - T_3)$$

avec $n = \frac{m}{M}$ et $C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$.

Déterminons le travail total ; le gaz décrit un cycle :

$$\Delta U = 0.$$

D'après le premier principe, $\Delta U = W + Q$.

$$\text{On a donc : } W = -Q = -Q_{B \rightarrow C} - Q_{D \rightarrow A} = nC_p(T_1 + T_3 - T_2 - T_0).$$

POINT COURS

Le cycle est décrit dans le sens rétrograde dans le diagramme de Clapeyron. Le travail total est donc fourni à l'extérieur ($W < 0$). D'autre part, l'aire du cycle correspond à $|W|$.

Il s'agit donc d'un moteur dont le rendement ρ est défini par :

$$\rho = \frac{\text{quantité utile obtenue}}{\text{quantité « onéreuse » fournie}}$$

$$\rho = -\frac{W_{\text{total}}}{Q_{B \rightarrow C}}.$$

D'où

$$\rho = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}$$

Application numérique : $\rho = \rho_0 = 0,48$.**3.** Le cycle étudié n'est pas réversible, les échanges d'énergie thermique avec les sources ne l'étant pas ($T_{\text{syst}} \neq T_{\text{sources}}$).

Commentaire

Seules des transformations isothermes permettraient d'avoir des échanges d'énergie thermique réversibles avec les sources (cas du cycle de Carnot).

Il y a donc création d'entropie σ .

D'après le second principe $\Delta S = S_{\text{échangée}} + \sigma$.

Pour un cycle, $\Delta S = 0$. On a donc $\sigma = -S_{\text{échangée}} = \Delta S_{\text{sources}}$

$$\text{soit } \sigma = -\frac{Q_{BC}}{T_2} - \frac{Q_{DA}}{T_0}$$

$$\sigma = nC_p \left[\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_0} - 2 \right] = \frac{m}{M\gamma - 1} \left[\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_0} - 2 \right].$$

On doit vérifier que σ est positif.

Application numérique : $\sigma = 307 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

4. Sur les adiabatiques réversibles $\Delta S = 0$

Sur les transformations, isobares, on peut imaginer des transformations réversibles allant de l'état initial à l'état final et pour lesquelles $dS = nC_p \frac{dT}{T}$.

On a donc

$$\Delta S_{B \rightarrow C} = nC_p \ln \frac{T_2}{T_1} \quad \text{et} \quad \Delta S_{D \rightarrow A} = nC_p \ln \frac{T_0}{T_3}$$

Pour les sources, on a déjà vu au 3. :

$$\Delta S_{\text{sources}} = nC_p \left[\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_0} - 2 \right]$$

Puisqu'on a un cycle pour l'air, on doit vérifier que $\Sigma \Delta S = 0$.

$$\text{Soit } nC_p \ln \frac{T_2}{T_1} + nC_p \ln \frac{T_0}{T_3} = 0$$

$$\text{ou encore } \frac{T_2 T_0}{T_1 T_3} = 1 \quad \text{ce qui est bien vérifié.}$$

Diagramme entropique (T, S)

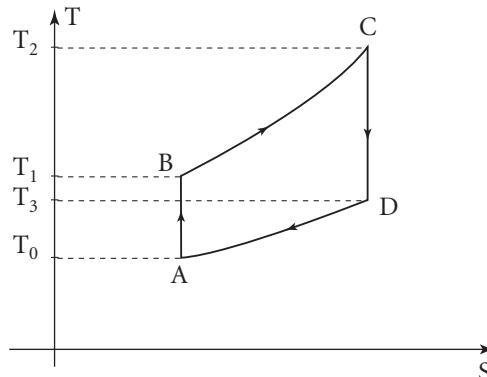
Pour une isobare, $dS = nC_p \frac{dT}{T}$.

$$\text{Soit } S - S_0 = nC_p \ln \frac{T}{T_0} \quad (\text{avec } C_p = \text{cste}) \text{ ou encore } T = T_0 e^{\frac{S - S_0}{nC_p}}$$

d'où l'allure des isobares dans le diagramme (T, S).

Pour une adiabatique réversible, $S = \text{cste}$.

L'adiabatique est donc un segment vertical dans le diagramme (T, S).



5. D'après le 2. :

$$W = nC_p(T_1 + T_3 - T_2 - T_0)$$

$$W = \frac{m}{M} C_p \left[T_0 \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + T_2 \left(k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \right].$$

On veut $|W|$ maximal. Ce maximum sera obtenu pour $\frac{dW}{dk} = 0$.

$$|W| = -W = \frac{mC_p}{M} \left[\text{cste} - T_0 k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]$$

$$\text{et } \frac{d|W|}{dk} = \frac{mC_p}{M} \frac{\gamma-1}{\gamma} \left[-T_0 k^{-\frac{1}{\gamma}} + T_2 k^{\frac{1}{\gamma}-2} \right]$$

$$= \frac{mC_p}{M} \frac{\gamma-1}{\gamma} T_0 k^{\frac{1}{\gamma}-2} \left[\left(\frac{T_2}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - k^{\frac{1}{\gamma}-2} \right]$$

soit

$$k_m = \left(\frac{T_2}{T_0} \right)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}$$

(et on a bien $\frac{d|W|}{dk} > 0$ pour $k < k_m$ et $\frac{d|W|}{dk} < 0$ pour $k > k_m$).

Application numérique : $k_m \approx 8,2$.

Commentaire

Alors $T'_1 = T'_3 = 547$ K.
 $|W_t|$ est peu augmenté mais la pression P'_1 est plus faible.

Reprendons l'expression de ρ :

$$\rho = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}$$

$$\text{or } T_2 T_0 = T_1 T_3 \text{ d'où } \rho = 1 - \frac{T_0}{T_1}$$

pour $k = k_m$ $T'_1 = 547$ K et $\rho' = 0,45 < \rho_0$.

Commentaire

Cette valeur ne correspond pas à un maximum de rendement du moteur qui serait obtenu pour la valeur maximale de T_1 soit T_2 , température de la source chaude.

On aurait alors $\rho \approx 0,7$ mais $W_t = 0$!

644 Climatiseur

Un climatiseur est une machine thermique ditherme. Elle décrit des cycles à partir de deux « sources » thermiques constituées d'une part par l'air extérieur de température invariable $T_{ex} = 298$ K et d'autre part par une pièce de température initiale T_i ($T_i = T_{ex}$) que l'on désire porter à la température $T_f = 293$ K.

1. Déterminer le travail électrique W_r nécessaire à la machine dans le cas où son fonctionnement est réversible. On supposera que la pièce, dont on évalue la capacité thermique à $C = 5 \cdot 10^3$ kJ · K⁻¹, n'échange de l'énergie thermique qu'avec la machine.

Quel est le temps nécessaire à la mise en température de cette pièce pour une puissance électrique de 250 W ?

2. Dans le cas où la machine est irréversible, établir une relation entre la création d'entropie σ et la différence $W_{irr} - W_r$ où W_{irr} est la nouvelle valeur du travail fourni à la machine.

3. La machine fonctionne à nouveau de façon réversible. Il existe maintenant un flux thermique entre la pièce et l'air extérieur caractérisé par une puissance thermique :

$$\mathcal{P}_{th} = h(T_{ex} - T) = \frac{\delta Q_1}{dt} \text{ (air extérieur} \rightarrow \text{pièce).}$$

Comment évolue la température de la pièce à puissance électrique d'alimentation constante ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier, second principes.
- Machines thermiques.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La machine thermique va échanger de l'énergie thermique avec la pièce (pour la refroidir) et avec l'air extérieur (machine ditherme). Son fonctionnement nécessite également qu'elle absorbe du travail électrique. On écrira alors que les variations d'énergie interne et d'entropie du fluide décrivant chaque cycle sont nulles ($\delta U = 0$ et $\delta S = 0$). Il restera à faire un bilan d'énergie appliqué au système « pièce ».

2. Le fonctionnement irréversible de la machine doit nécessiter un apport de travail électrique plus important pour faire passer la température de la pièce de $T_i = T_{ex}$ à T_F ($W_{irr} > W_r$).

3. Il faut, par rapport au **1.**, modifier le bilan d'énergie relatif à la pièce et tenir compte des échanges thermiques directs entre l'air extérieur et la pièce.

3. Solution

1. La température de la pièce va évoluer de la température initiale T_{ex} à la température finale T_F . Au cours d'un cycle donné, la machine reçoit le travail δW , l'énergie thermique δQ de la source chaude (air extérieur) et l'énergie thermique $\delta Q'$ de la source « froide » (la pièce à refroidir). Son fonctionnement est du type « **machine frigorifique** » de telle sorte que : $\delta W > 0$ $\delta Q' > 0$ et $\delta Q < 0$.

Sur un cycle, le premier principe s'écrit ($\Delta U = 0$)

$$\delta W + \delta Q + \delta Q' = 0 \quad (1)$$

En supposant de plus que la variation de température (sur un cycle) est suffisamment faible, le deuxième principe prend la forme (cas de la réversibilité) :

$$0 = \underbrace{\left(\frac{\delta Q}{T_{ex}} + \frac{\delta Q'}{T} \right)}_{\delta S_{échange}} + 0 \quad (2)$$

$\delta S_{fluidé}$ $\delta S_{échange}$ $\delta \sigma = 0$

Il reste à traduire que la pièce se refroidit sous l'effet du prélèvement d'énergie thermique $\delta Q'$. Appliquons-lui le premier principe.

$$dU(\text{pièce}) = CdT = -\delta Q' \quad (3)$$

Intégrons ces équations de l'état initial ($T = T_{ex}$) à l'état final $T = T_F$.

(1) donne : $W + Q + Q' = 0$

(3) devient : $Q' = -C(T_F - T_{ex})$

$$(2) \text{ se transforme en : } \delta Q = \frac{T_{ex}}{T} CdT \Rightarrow Q = CT_{ex} \int_{T_{ex}}^{T_F} \frac{dT}{T}$$

$$\text{d'où : } Q = -CT_{ex} \ln\left(\frac{T_{ex}}{T_F}\right).$$

Le travail électrique total à fournir à la machine a pour valeur :

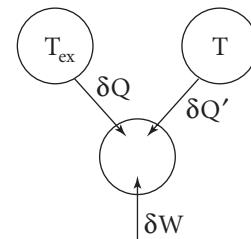
$$W_r = C(T_F - T_{ex}) + CT_{ex} \ln\left(\frac{T_{ex}}{T_F}\right).$$

Soit encore

$$W_r = CT_{ex} \left[\ln\left(\frac{T_{ex}}{T_F}\right) - \left(1 - \frac{T_F}{T_{ex}}\right) \right]$$

Application numérique :

$$W_r = 5 \cdot 10^3 \times 298 \left[\ln\left(\frac{298}{293}\right) - \left(1 - \frac{293}{298}\right) \right] \Rightarrow W = 212 \text{ kJ.}$$



- Le temps τ nécessaire pour faire passer la pièce de la température T_{ex} à la température T_F est alors :

$$\tau = \frac{W_r}{P} \Rightarrow \tau = 848 \text{ s} = 14 \text{ min.}$$

- 2.** La machine fonctionne maintenant de façon irréversible. Reprenons le second principe appliqué au fluide décrivant un cycle :

$$\delta S(\text{fluide}) = 0 = \delta S_e + \delta \sigma$$

↑
cycle ↘
 création d'entropie positive

$$\text{Or } \delta S_e = \frac{\delta Q_{ex}}{T_{ex}} + \frac{\delta Q'}{T}. \text{ Soit } 0 = \frac{\delta Q_{ex}}{T_{ex}} + \frac{\delta Q'}{T} + \delta \sigma.$$

$$\text{Or } \delta Q' = -CdT \text{ (cf. (3))} \Rightarrow Q' = -\int_{T_{ex}}^{T_F} CdT = C(T_{ex} - T_F)$$

$$\text{et } \delta Q_{ex} = T_{ex}C\frac{dT}{T} - T_{ex}\delta \sigma.$$

$$\text{D'où } Q_{ex} = CT_{ex}\ln\left(\frac{T_F}{T_{ex}}\right) - \sigma T_{ex}.$$

σ est la création d'entropie totale traduisant l'irréversibilité de la machine. Il en résulte un travail électrique W_{irr} tel que :

$$W_{irr} = -Q - Q' = -C(T_{ex} - T_F) + CT_{ex}\ln\left(\frac{T_{ex}}{T_F}\right) + \sigma T_{ex}.$$

Finalement

$$W_{irr} - W_r = T_{ex}\sigma$$

Le travail à fournir est bien minimal ($W_r > 0$, $W_{irr} > 0$ et $\sigma > 0$) dans le cas d'une machine réversible : $W_{irr} > W_r$. Et pour une puissance d'alimentation constante ($P = \text{constante}$), il faudra plus de temps pour amener la pièce à température...

- 3.** Le premier principe appliquée à la pièce s'écrit :

$$dU = CdT = -\delta Q' + \delta Q_1.$$

Ainsi, la nouvelle expression de $\delta Q'$ est :

$$\delta Q' = -CdT + h(T_{ex} - T)dt.$$

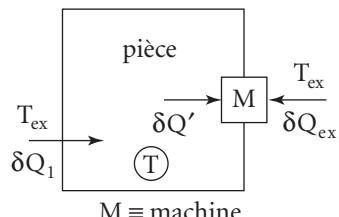
Soit, dans le cas d'un fonctionnement réversible de la machine :

$$0 = \frac{\delta Q_{ex}}{T_{ex}} + \frac{\delta Q'}{T} + 0 \quad \text{soit} \quad \delta Q_{ex} = -\frac{T_{ex}}{T}\delta Q'.$$

De plus (premier principe) : $\delta W + \delta Q_{ex} + \delta Q' = 0$ pour un cycle.

$$\text{D'où } \mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = -\frac{\delta Q_{ex}}{dt} - \frac{\delta Q'}{dt} = -\frac{\delta Q'}{dt} \cdot \left(1 - \frac{T_{ex}}{T}\right)$$

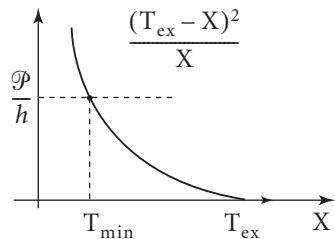
$$\text{et } \mathcal{P} = \left(1 - \frac{T_{ex}}{T}\right) \cdot \left\{ C\frac{dT}{dt} - h(T_{ex} - T) \right\}.$$



Ainsi, à puissance d'alimentation constante, la température va diminuer jusqu'à une valeur théorique T_{\min} telle que $\left(\frac{dT}{dt} = 0\right)$:

$$\mathcal{P} = \frac{h(T_{\text{ex}} - T_{\min})^2}{T_{\min}}.$$

Cette valeur de T_{\min} est d'autant plus faible que \mathcal{P} est grande et h petite comme il se doit.



Commentaire

En régime permanent, l'énergie thermique liée aux apports extérieurs doit s'identifier à l'énergie thermique enlevée à la pièce par le climatiseur, soit :

$$h(T_{\text{ex}} - T_{\min})dt = \left| \frac{\delta Q'}{\delta t} \right| dt$$

or $\left| \frac{\delta Q'}{\delta W} \right| = \frac{\delta Q'}{\delta W} = \eta$ où η doit représenter l'efficacité d'une machine frigorifique fonctionnant entre les sources T_{\min} et T_{ex} , d'où :

$$\eta = \frac{T_{\min}}{T_{\text{ex}} - T_{\min}} \Rightarrow h(T_{\text{ex}} - T_{\min}) = \eta \frac{\delta W}{\delta t} = \eta \mathcal{P}.$$

Finalement

$$\mathcal{P} = \frac{h(T_{\text{ex}} - T_{\min})^2}{T_{\min}}.$$

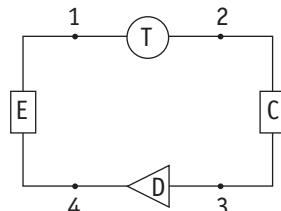
645 Pompe à chaleur

Pour chauffer une maison, on utilise une pompe à chaleur prélevant de l'énergie thermique à l'atmosphère extérieure dont la température est $T = 283$ K.

La machine est constituée d'un détendeur (D), d'un évaporateur (E), d'un compresseur (T) et d'un condenseur (C). Le fluide caloporteur est du fréon.

1. Le fonctionnement de la machine correspond au cycle suivant :

- compression adiabatique réversible $1 \rightarrow 2$, le fluide passant de l'état de vapeur saturante ($t = t_1 = 5^\circ\text{C}$; $P = P_1 = 3,6$ bars) à celui de vapeur sèche sous la pression $P_2 = 15,2$ bars;
- transformation isobare $2 \rightarrow 3$, le fluide sortant du condenseur sous forme de liquide de saturation ($t = 60^\circ\text{C}$, $P = 15,2$ bars) ;
- détente isenthalpique $3 \rightarrow 4$ dans le détendeur, amenant le fluide dans les conditions ($t_1 = 5^\circ\text{C}$, $P_1 = 3,6$ bars) ;
- transformation isobare $4 \rightarrow 1$, le fluide sortant de l'évaporateur sous forme de vapeur saturante ($t_1 = 5^\circ\text{C}$, $P_1 = 3,6$ bars).



a. Déterminer l'efficacité η de la pompe à chaleur : on utilisera les valeurs numériques fournies dans le tableau de données présenté ci-après.

b. Faire un bilan d'énergie.

2. Afin d'améliorer l'efficacité de la machine, on modifie l'état final de la transformation $2 \rightarrow 3$. En 3, le fluide est désormais dans l'état liquide à la température $t' = 40^\circ\text{C}$ et sous la pression $P = 15,2$ bars.

Donner la nouvelle valeur du coefficient η .

Tableau de valeurs :

$t (\text{ }^\circ\text{C})$	$P(\text{bars})$	h_L	h_v	s_v
5 °C	3,6	4,7	157	0,565
60 °C	15,2	61	178	0,552
40 °C	15,2	39	-	-

h_L et h_v (enthalpies massiques du liquide de saturation et de la vapeur saturante) en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;

s_v (entropie massique de la vapeur saturante) en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;

capacité thermique à pression constante du gaz fréon (au voisinage de $t = 60^\circ\text{C}$) $C_p = 0,879 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; 1 bar = 10^5 Pa .

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Machines thermiques.
- Détente isenthalpique.
- Transformation isobare.
- Premier principe et écoulements.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. La pompe à chaleur préleve une énergie thermique Q à la source froide (ici l'air extérieur), fournit l'énergie thermique Q' à la source chaude (la maison) et absorbe un travail W au niveau du compresseur. L'efficacité de la machine est définie par $\eta = \frac{|Q'|}{W}$. La détermination des grandeurs énergétiques Q' et W peut s'effectuer par la connaissance des enthalpies massiques h_1 , h_2 et h_3 . Les valeurs de h_1 et h_3 se lisent directement sur le tableau, il reste donc à calculer h_2 et par là-même la température t'_2 du fluide dans cet état. L'évaluation de t'_2 se fera en déterminant la variation d'entropie entre les états (t'_2, P_2) et (t_2, P_2) et en se rappelant que la compression est isentropique.

2. Dans la deuxième question, le passage dans le condenseur s'effectue avec un refroidissement supplémentaire ($t_2 = 60^\circ\text{C} \rightarrow t' = 40^\circ\text{C}$) ce qui augmente la valeur de l'énergie thermique transférée à la maison. Le travail nécessaire restant inchangé (les états 1 et 2 sont les mêmes), l'efficacité de la machine s'en trouvera améliorée.

3. Solution

1. a. Nous avons représenté ci-contre sur un diagramme (P, V) le cycle décrit par le fluide (cycle rapporté par exemple à l'unité de masse de fréon).

- $1 \rightarrow 2$ correspond à la compression adiabatique réversible, le compresseur recevant un travail extérieur W (par kg de fréon).
- $2 \rightarrow 3$ est une transformation isobare s'effectuant dans le condenseur qui吸orbe l'énergie thermique Q' prise au fluide (par kg de fréon).
- $3 \rightarrow 4$ est une détente isenthalpique où le fréon se vaporise en partie ; le titre en masse de fréon liquide passe de la valeur $x = 1$ à une valeur $0 < x < 1$. Cette transformation s'effectue sans échanges d'énergie thermique et de travail avec l'extérieur.
- $4 \rightarrow 1$ est une transformation isobare s'effectuant dans l'évaporateur. Un kg de fréon préleve une énergie thermique $Q > 0$ à l'air extérieur (source froide).

L'efficacité est définie par :

$$\eta = \frac{\text{énergie utile fournie}}{\text{énergie dépensée}}$$

$$\text{Soit encore } \eta = \frac{Q'}{W} = \frac{Q'(2 \rightarrow 3)}{W(1 \rightarrow 2)} \quad (1)$$

■ Travail W fourni à la machine (pour 1 kg de fréon) :

Le premier principe appliqué au compresseur et dans le cadre des écoulements s'écrit :

$$\Delta H = W.$$

$$\text{D'où } W = h_2 - h_1 = h_v(t'_2, P_2) - h_v(t_1, P_1) \quad (2)$$

où $h_v(t, P)$ représente l'enthalpie massique de la vapeur dans l'état t (température en degré Celsius) et P (pression en bar).

On a $h_v(5; 3,6) = 157 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (cf. tableau). La détermination de $h_v = (t'_2, 15,2)$ passe par celle de t'_2 ; à cet effet, il faut traduire que la compression est adiabatique et reversible, et donc isentropique :

$$s(t'_2, P_2) = s(t_1, P_1) \quad (3)$$

les données nous permettent de connaître $s(t_1, P_1) = 0,565 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

et $s(t_2, P_2) = 0,552 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ avec $t_2 = 60^\circ\text{C}$.

Faisons alors l'hypothèse que t'_2 est suffisamment proche de t_2 pour que l'on puisse considérer que la capacité thermique C_p du gaz est constante (et égale à $C_p = 0,879 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) sur l'intervalle de températures $[t_2, t'_2]$. Dès lors, en assimilant la vapeur à un gaz parfait :

$$\Delta s = C_p \ln\left(\frac{T'_2}{T_2}\right) = s(t'_2, P_2) - s(t_2, P_2).$$

$$\text{D'où d'après (3) : } T'_2 = T_2 \exp\left\{\frac{s(t_1, P_1) - s(t_2, P_2)}{C_p}\right\}.$$

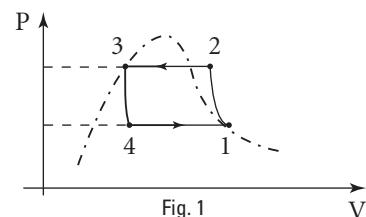


Fig. 1

Nous pouvons maintenant évaluer l'enthalpie massique $h_v(t'_2, P_2)$ à partir de $h_v(t_2, P_2)$. Avec le même type d'approximations, nous avons :

$$h_v(t'_2, P_2) - h_v(t_2, P_2) = C_p(t'_2 - t_2).$$

Le travail fourni au compresseur est alors défini par les relations :

$$W = \{h_v(t_2, P_2) + C_p(t'_2 - t_2)\} - h_v(t_1, P_1)$$

$$T'_2 = T_2 \exp[(s(t_1, P_1) - s(t_2, P_2))/C_p]; \quad T = t + 273,15.$$

Application numérique :

$$T_2 = 273,15 + 60 = 333,(15) \Rightarrow T'_2 = 388,(11) \rightarrow t'_2 = 65^\circ\text{C}.$$

$$W = (178 + 0,879 \times 5) - 157 \Rightarrow W = 25,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

■ **Énergie thermique fournie à la maison (pour 1 kg de fréon) :**

La transformation étant isobare, $\Delta H = -Q'$, Q' étant l'énergie absorbée par le condenseur

Soit

$$Q' = -(h_3 - h_2) = h_v(t'_2, P_2) - h_L(t_2, P_2)$$

Les grandeurs $h_2(t_2, P_2)$ et $h_v(t'_2, P_2)$ sont connues :

$$h_v(t'_2, P_2) = h_v(t_2, P_2) + C_p(T'_2 - T_2) = 178 + 0,879 \times 5 = 182,(4) \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$h_L(t_2, P_2) = 61 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad \text{d'où: } Q' = 182 - 61 \Rightarrow Q' = 121 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

■ **Efficacité de la machine :**

$$\eta = \frac{Q'}{W}, \text{ soit: } \eta = \frac{121}{25,4} \Rightarrow \eta = 4,8.$$

1. b. Il reste à déterminer l'énergie thermique Q absorbée par le fluide pour assurer la vaporisation $4 \rightarrow 1$. Si x désigne le titre en masse du liquide dans l'état 4, l'application du premier principe donne :

$$\Delta H(4 \rightarrow 1) = Q \quad \text{avec} \quad \Delta H(4, 1) = xL(T_1)$$

où $L(T_1)$ est la chaleur latente massique de vaporisation à la température T_1 , c'est-à-dire $L(T_1) = h_v(t_1, P_1) - h_L(t_1, P_1)$. On a donc :

$$Q = x[h_v(t_1, P_1) - h_L(t_1, P_1)].$$

Pour définir le titre x , il suffit de traduire le caractère isenthalpique de la détente $3 \rightarrow 4$:

$$\Delta H(3 \rightarrow 4) = 0.$$

Or $\Delta H(3 \rightarrow 4) = h_4 - h_3$ où $h_3 = h_L(t_2, P_2)$.

De plus : $h_4 = xh_L(t_1, P_1) + (1-x)h_v(t_1, P_1)$.

Soit : $x[h_L(t_1, P_1) - h_v(t_1, P_1)] + h_v(t_1, P_1) = h_L(t_2, P_2)$.

et

$$x = \frac{h_v(t_1, P_1) - h_L(t_2, P_2)}{h_v(t_1, P_1) - h_L(t_1, P_1)}$$

D'où : $Q = h_v(t_1, P_1) - h_L(t_2, P_2)$

Ce qui était évident puisque $\Delta H(3 \rightarrow 4 \rightarrow 1) = \underbrace{\Delta H(3 \rightarrow 4)}_0 + \Delta H(4 ; 1)$.

Application numérique :

$$Q = 157 - 61 = 96 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad x = 0,63.$$

On a $W + Q + (-Q') = 0$ ce qui est bien entendu conforme à $\Delta H(\text{cycle}) = 0$.

2. Pour ce nouveau cycle, seuls les états 3 et 4 sont modifiés. Il en résulte que W garde la même valeur.

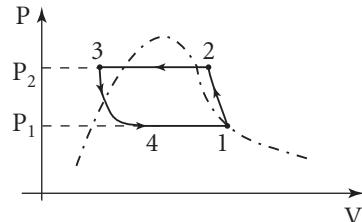
Quant à Q' , il vaut désormais :

$$Q' = -(h'_3 - h'_2) = h_v(t'_2, P_2) - h_L(t', P_2).$$

D'où : $W = 25,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$$Q' = 182 - 39 \Rightarrow Q' = 143 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

$$\text{Soit une efficacité } \eta = \frac{Q'}{W} = \frac{143}{25,4} \Rightarrow \eta = 5,6.$$



646 Moteur Diesel

Un moteur à combustion interne du type Diesel fonctionne selon le principe idéalisé suivant :

– 1^{er} temps : soupape d’admission ouverte, soupape d’échappement fermée, de l’air est admis dans le cylindre dans les conditions de température et de pression T_1 et P_1 . Le volume maximal du cylindre est V_1 .

– 2^e temps : soupapes fermées, l’air est comprimé isentropiquement de l’état (T_1, P_1, V_1) à l’état (T_2, P_2, V_2) .

– 3^e temps : soupapes fermées, le combustible est introduit, ce qui produit une combustion isobare jusqu’à un volume V'_2 (état T'_2, V'_2, P_2) suivie d’une détente isentropique jusqu’à l’état (T_3, V_1, P_3) .

– 4^e temps : soupape d’admission fermée, la soupape d’échappement s’ouvre, ce qui provoque une brusque chute de pression $(T_3, P_3) \rightarrow (T_1, P_1)$, le piston restant immobile.

Puis les gaz sont évacués.

Pour plus de simplicité, on considérera un seul cylindre dont le volume offert varie entre les valeurs V_1 et V_2 . On donne :

- la cylindrée : $V_1 - V_2 = 1\ 769 \text{ cm}^3$;

- le rapport volumétrique : $\alpha = \frac{V_1}{V_2} = 23$;

- la consommation $c = 5,2$ litres aux 100 km à vitesse stabilisée $V_{st} = 120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (correspondant à 4 600 tours par minute) ;

- le carburant est du gazole de masse volumique $\mu = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de pouvoir thermique $K = 45 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$;
- on prendra $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$, et on négligera les variations de composition chimique du fluide que l'on assimile à un gaz parfait avec $\gamma = 1,4$.

1. On note $\beta = \frac{V_1}{V'_2}$ le rapport de détente. Exprimer le rendement théorique η du moteur Diesel en fonction des températures T_1 , T_2 , T'_2 et T_3 , puis en fonction des coefficients α , β et γ .

2. Donner l'expression définissant le rapport de détente β en fonction du rapport volumétrique α , du coefficient γ et de la quantité $\frac{Q}{P_1 V_1}$, Q représentant l'énergie thermique dégagée par la combustion pour un cycle. En déduire les valeurs numériques de Q , β et η .

Déterminer la puissance du moteur dans les conditions précisées par cette étude.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Premier principe.
- Machines thermiques.
- Loi de Laplace.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

Le rendement η du moteur est défini par le rapport du travail W produit à l'énergie thermique Q résultant de la combustion (W et Q sont calculés pour un cycle).

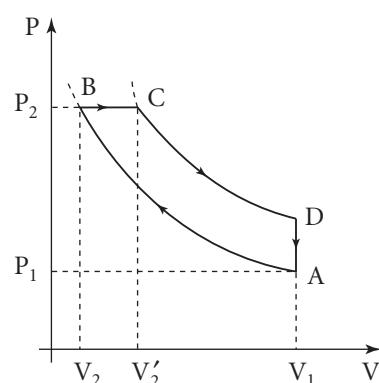
Q est associé à une transformation isobare et s'identifie donc à ΔH .

Pour déterminer β , il faut connaître V'_2 .

■ 3. Solution

1. Considérons le système formé par la masse de fluide décrivant le cycle ABCD :

- compression isentropique AB ;
- combustion isobare BC qui fournit l'énergie thermique Q (cette phase constitue l'équivalent de la source chaude) ;
- détente isentropique CD ;
- transformation isochore DA, le fluide libérant l'énergie thermique Q' (pendant cette phase, le piston reste immobile et ne développe donc aucun travail).



Le cycle est décrit dans le sens rétrograde (cycle moteur)

Soit W le travail produit lors d'un cycle. Le rendement du moteur est défini par le rapport du travail W à l'énergie thermique Q dégagée par la combustion

$$\eta = \frac{W}{Q}.$$

Les grandeurs W , Q et Q' sont liées par le premier principe :

$$Q + (-W) + (-Q') = 0, \text{ soit } W = Q - Q',$$

et $\eta = \frac{Q - Q'}{Q} = 1 - \frac{Q'}{Q}.$

La transformation BC est isobare.

$$\Delta H = Q = nC_p(T_C - T_B) = nC_p(T'_2 - T_2).$$

La transformation DA est isochore, d'où :

$$\Delta U = -Q' = nC_v(T_A - T_D) = nC_v(T_1 - T_3).$$

Soit :

$$\eta = 1 + \frac{C_v(T_1 - T_3)}{C_p(T'_2 - T_2)} \Rightarrow \eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{(T_1 - T_3)}{(T'_2 - T_2)}.$$

Exprimons les températures en fonction du rapport volumétrique $\alpha = \frac{V_1}{V_2}$ et du coefficient $\beta = \frac{V_1}{V'_2}$:

• A → B isentropique : $TV^{\gamma-1} = \text{constante} \Rightarrow T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$. (Loi de Laplace)

Soit $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \alpha^{\gamma-1}$.

• De même pour C → D : $\frac{T'_2}{T_3} = \left(\frac{V_1}{V'_2}\right)^{\gamma-1} = \beta^{\gamma-1}$.

• Isobare B → C : $\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_2 V'_2}{T'_2} \Rightarrow \frac{T'_2}{T_2} = \frac{V'_2}{V_2} = \frac{V'_2}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \frac{T'_2}{T_2} = \frac{\alpha}{\beta}$.

D'où $\frac{T_1 - T_3}{T'_2 - T_2} = \frac{\left(\frac{T_1}{T_2}\right) - \left(\frac{T_3}{T'_2}\right)\left(\frac{T'_2}{T_2}\right)}{\left(\frac{T'_2}{T_2}\right) - 1} = \frac{\alpha^{1-\gamma} - \beta^{1-\gamma} \alpha \cdot \beta^{-1}}{\frac{\alpha}{\beta} - 1}$

et $\frac{T_1 - T_3}{T'_2 - T_2} = \frac{\alpha^{-\gamma} - \beta^{-\gamma}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{\alpha^{-\gamma} - \beta^{-\gamma}}{\gamma(\alpha^{-1} - \beta^{-1})}}$

Commentaire

On peut également exprimer ce rendement en fonction des coefficients α , γ et du rapport de combustion (variable) $r = \frac{V'_2}{V_2}$.

Nous avons $r = \frac{V'_2}{V_2} = \frac{V'_2}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{\alpha}{\beta}$ soit :

$$\eta = 1 - \frac{\alpha^{-\gamma}(1-r^\gamma)}{\gamma\alpha^{-1}(1-r)} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{(r^\gamma - 1)}{\gamma\alpha^{\gamma-1}(r-1)}}$$

2. $Q = nC_p(T'_2 - T_2)$ avec $\frac{P_2 V'_2}{T'_2} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ soit $V'_2 = V_2 \cdot \left(\frac{T'_2}{T_2}\right)$.

D'autre part, le nombre de moles de fluide (essentiellement de l'air...) est donné par la relation des gaz parfaits : $n = \frac{P_2 V_2}{R T_2} = \frac{P_1 V_1}{R T_1}$.

D'où $\frac{V'_2}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \left(\frac{T'_2}{T_2}\right) = \frac{V_2}{V_1} \cdot \left\{1 + \frac{Q}{n C_p T_2}\right\}$.

Or $n C_p T_1 = n \cdot \left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1}\right) T_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} n R T_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1 V_1$.

Soit $\beta = \frac{\alpha}{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T_1}{T_2} \frac{Q}{P_1 V_1}} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\alpha}{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \alpha^{1-\gamma} \frac{Q}{P_1 V_1}}}$

Calculons alors l'énergie thermique produite par la combustion. Une consommation de c litres d'essence pour 100 km associée à une vitesse stabilisée de V_{st} km par heure correspond à l'utilisation d'une masse m d'essence par seconde définie par :

$$m = \mu \times \underbrace{\left[\left(c \times \frac{V_{st}}{100} \right) \times \frac{10^{-3}}{3600} \right]}_{\text{masse volumique}}; \quad (10^{-3} \text{ car } 1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3).$$

Le moteur effectuant N' tours par seconde (soit $N = 60N'$ tours par minute), la durée d'un cycle est de $\Delta t = \frac{2}{N'}$ (2 tours par cycle).

Soit une masse m_c d'essence pour un cycle telle que :

$$m_c = m \cdot \Delta t = \mu \frac{2}{N'} c \frac{V_{st}}{100} \cdot \frac{10^{-3}}{3600}.$$

L'énergie thermique dégagée par la combustion devient (K représentant le pouvoir thermique du carburant) : $Q = K m_c \Rightarrow Q = K \frac{2 \times 60}{N} \mu c V_{st} \frac{10^{-3}}{3600}$.

Application numérique : $K = 45 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

$$Q_{kJ} = 45 \cdot 10^3 \times \frac{2 \times 60}{4600} \times 800 \times 5,2 \times \frac{120}{100} \times \frac{10^{-3}}{3600} \Rightarrow Q = 1,63 \text{ kJ.}$$

• $P_1 V_1 = 10^5 V_1$ avec $\begin{cases} V_1 - V_2 = 1769 \text{ cm}^3 \\ \frac{V_1}{V_2} = 23 \end{cases} \Rightarrow V_1 = 1849 \text{ cm}^3$

d'où

$$P_1 V_1 = 185 \text{ J.}$$

$$\bullet \beta = 23 \left[1 + 23^{-0,4} \times \frac{0,4 \times 1\,630}{1,4 \times 185} \right]^{-1} \Rightarrow \beta = 13,4.$$

$$\bullet \text{Rendement théorique : } \eta = 1 - \frac{(23)^{-1,4} - (13,4)^{-1,4}}{1,4((23)^{-1} - (13,4)^{-1})} \Rightarrow \eta = 0,68.$$

- La puissance théorique est reliée à la consommation thermique par seconde ($\frac{\delta Q}{\delta t}$) par la relation $\mathcal{P} = \eta \frac{\delta Q}{\delta t}$.

Or $\frac{\delta Q}{\delta t} = Km = K\mu C \frac{V_{\text{sat}}}{100} \cdot \frac{10^{-3}}{3\,600}$. Soit $\mathcal{P} = \eta Km$

$$\mathcal{P}(\text{kW}) = 0,68 \times 45 \cdot 10^3 \times 800 \times 5,2 \times 1,2 \times \frac{10^{-3}}{3\,600} \Rightarrow \mathcal{P} = 42 \text{ kW.}$$

Commentaires

- Comme le moteur à explosion du type « Beau de Rochas », le moteur Diesel est un moteur à combustion interne. Mais l'allumage est réalisé par une compression élevée de l'air seul. L'injection du carburant dans le cylindre débute donc à la fin de cette phase de compression et assure une combustion (température élevée de l'air) qui s'effectue à peu près à pression constante. Il permet l'utilisation de sous produits du raffinage du pétrole et le taux de compression $\alpha = \frac{V_1}{V_2}$ peut être plus élevé que dans un moteur à explosion (il n'y a pas de risque de pré-allumage...).

- Le rendement théorique associé au cycle diesel peut encore s'écrire :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma \alpha^{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{r^\gamma - 1}{r - 1} \right) \quad \text{où} \quad r = \frac{V'_2}{V_2} > 1.$$

Le rendement – à γ donné et rapport volumétrique α fixé – augmente lorsque r diminue.

De plus, pour comparer ce rendement à celui $\eta' = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$ d'un moteur à explosion, on pourrait remarquer que $\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} F(r, \gamma)$, où $F(r, \gamma) = \frac{r^\gamma - 1}{\gamma(r - 1)} > 1$. Ceci laisserait à penser que $\eta < \eta'$; cependant il faut noter que le rapport volumétrique pour un moteur Diesel est supérieur à celui du moteur à explosion (typiquement de l'ordre de 22 au lieu de 9), ce qui implique un rendement en général supérieur à celui du moteur à allumage commandé.

647

Moteur avec sources à températures variables

Un moteur thermique fonctionne à partir de deux « sources » d'énergie thermique, de même capacité thermique C et dont les températures initiales sont T_{10} et T_{20} (avec $T_{20} > T_{10}$). On notera W_f le travail fourni à l'extérieur.

1. Déterminer les valeurs minimale et maximale de W_f .

2. Donner l'expression reliant le travail fourni à la création totale d'entropie Σ . Quelle est la valeur maximale de Σ ?

3. a. Définir le rendement η d'un tel moteur. Montrer que l'on a $\eta_{\min} \leq \eta \leq \eta_{\max}$, et préciser les valeurs extrémales de η en fonction de T_{10} et T_{20} .

Calculer ses valeurs pour $T_{10} = 300$ K et $T_{20} = 400$ K.

b. On suppose que sur un cycle élémentaire, les variations des températures T_1 et T_2 des deux « sources » restent très faibles. On note $\eta_c(T_1, T_2)$ le rendement d'un cycle de Carnot moteur travaillant sur des sources thermiques de températures constantes égales à T_1 et T_2 . Quel lien peut-on faire entre η_{\max} et $\eta_c(T_2)$?

Solution

1. La machine doit fournir du travail à l'extérieur. On a donc $W_f \geq 0$, et la valeur la plus petite de W_f est évidemment zéro.

• La valeur maximale doit correspondre au cas de la réversibilité (pas de création d'entropie). Dans ces conditions, le premier et le second principe donnent (pour un cycle élémentaire) :

$$(-\delta W_f) + \delta Q_2 + \delta Q_1 = \delta U = 0 \quad (1)$$

$$\delta S = 0 = \frac{\delta Q_2}{T_2} + \frac{\delta Q_1}{T_1} + 0 \quad (2)$$

\uparrow
 $\delta \sigma = 0$

$\delta U = 0$ et $\delta S = 0$ car le fluide décrit un cycle au sein de la machine ; d'autre part, la réversibilité implique $\delta \sigma = 0$.

Appliquons le premier principe aux deux corps dont l'état ne dépend que de la température :

$$dU_1 = -\delta Q_1 = CdT_1 \quad \text{et} \quad dU_2 = CdT_2 = -\delta Q_2.$$

La machine fonctionnant en moteur thermique, on doit avoir $\delta Q_2 > 0$ (de l'énergie thermique est prélevée à la « source » chaude) et $\delta Q_1 < 0$ (de l'énergie thermique est restituée à la « source » froide). \mathcal{C}_2 voit donc sa température diminuer ($\delta Q_2 > 0 \Rightarrow dT_2 < 0$) et \mathcal{C}_1 augmenter ($\delta Q_1 < 0 \Rightarrow dT_1 > 0$). Les processus d'échange énergétique cesseront dès que les températures de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 seront égales (soit T_f cette température). Dès lors :

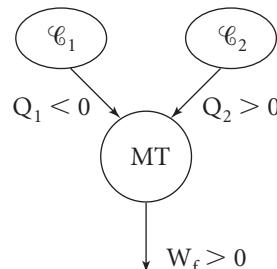
$$Q_1 = -C(T_f - T_{10}) \quad \text{et} \quad Q_2 = -C(T_f - T_{20}).$$

Soit en intégrant la relation (1) :

$$W_f = Q_1 + Q_2 \Rightarrow W_f = C(T_{10} + T_{20}) - 2CT_f \quad (3)$$

Il reste à déterminer T_f ce qui peut se faire à l'aide de (2) qui s'écrit :

$$-C\frac{dT_2}{T_2} - C\frac{dT_1}{T_1} = 0 \Rightarrow \frac{dT_2}{T_2} + \frac{dT_1}{T_1} = 0 \quad (4)$$



Soit encore $\int_{T_{10}}^{T_f} \frac{dT_1}{T_1} + \int_{T_{20}}^{T_f} \frac{dT_2}{T_2} = 0$.

$$\text{D'où } \ln\left(\frac{T_f}{T_{10}}\right) + \ln\left(\frac{T_f}{T_{20}}\right) = 0 \Rightarrow T_f = \sqrt{T_{10}T_{20}}.$$

Reportant cette expression de la température finale dans l'expression (3) du travail, nous obtenons :

$$(W_f)_{\max} = 2C\left[\left(\frac{T_{10} + T_{20}}{2}\right) - \sqrt{T_{10}T_{20}}\right].$$

D'où :

$$(W_f)_{\max} = C\left[(\sqrt{T_{10}})^2 + (\sqrt{T_{20}})^2 - 2\sqrt{T_{10}}\sqrt{T_{20}}\right] \Rightarrow (W_f)_{\max} = C(\sqrt{T_{20}} - \sqrt{T_{10}})^2.$$

L'intervalle des valeurs possibles du travail fourni est alors :

$$0 \leq W_f \leq C\left[\sqrt{T_{20}} - \sqrt{T_{10}}\right]^2$$

2. On se place maintenant dans un cas où la machine ne fonctionne pas de façon réversible. L'expression du second principe prend alors la forme :

$$0 = \frac{\delta Q_2}{T_2} + \frac{\delta Q_1}{T_1} + \delta\sigma \quad (\delta\sigma > 0 : \text{création d'entropie pour un cycle}).$$

Soit, avec $\delta Q_1 = -CdT_1$ et $\delta Q_2 = -CdT_2$:

$$C\frac{dT_1}{T_1} + C\frac{dT_2}{T_2} = \delta\sigma.$$

Intégrons cette équation entre l'état initial (T_{10}, T_{20}) et l'état final (T'_f, T_f) :

$$C \int_{T_{10}}^{T'_f} \frac{dT_1}{T_1} + C \int_{T_{20}}^{T_f} \frac{dT_2}{T_2} = \int \delta\sigma = \Sigma \quad (\text{par définition}).$$

$$\text{D'où } \ln\left(\frac{T'_f}{T_{10}}\right) + \ln\left(\frac{T_f}{T_{20}}\right) = \frac{\Sigma}{C} \Rightarrow T'_f = \sqrt{T_{10}T_{20}} \exp\left(\frac{\Sigma}{2C}\right)$$

Le travail fourni par le moteur thermique devient :

$$W_f = C[(T_{10} + T_{20}) - 2T'_f] \quad (\text{expression équivalente à (3)}).$$

$$\text{Soit } W_f = C\left[(T_{10} + T_{20}) - 2\sqrt{T_{10}T_{20}} \exp\left(\frac{\Sigma}{2C}\right)\right]$$

La valeur maximale de la création d'entropie Σ doit correspondre au cas limite où aucun travail n'est fourni à l'extérieur ($W_f = 0$).

$$\text{Soit } \Sigma_{\max} = 2C \ln\left[\frac{T_{10} + T_{20}}{2\sqrt{T_{10}T_{20}}}\right]$$

on retrouve bien que W_f est maximal pour $\Sigma = 0$ (puisque $\Sigma \geq 0$) ce qui correspond au cas de la réversibilité.

Commentaires

La température finale des deux sources thermiques a une valeur comprise dans l'intervalle

$$\left[\sqrt{T_{10}T_{20}}, \frac{T_{10} + T_{20}}{2} \right] :$$

- pour $T'_f = \sqrt{T_{10}T_{20}}$, on obtient un travail fourni maximal, et T'_f prend la valeur la plus faible possible ;

- pour $T'_f = \frac{T_{10} + T_{20}}{2}$, la machine ne fournit plus de travail, et la température T'_f atteint sa valeur maximale : cette valeur est celle que l'on obtiendrait en mettant directement en contact les deux sources. En effet, dans ce cas, on aurait (premier principe) $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$,

$$\text{d'où } C(T'_f - T_{10}) + C(T'_f - T_{20}) = 0 \dots$$

3. a. On définira le rendement η du moteur comme le rapport du travail fourni W_f sur l'énergie thermique Q_2 prélevée à la « source » chaude. Soit :

$$\eta = \frac{W_f}{Q_2} \text{ or } W_f = C[T_{10} + T_{20} - 2T'_f] \text{ et } Q_2 = C(T_{20} - T'_f), \text{ d'où :}$$

$$\eta = \frac{T_{10} + T_{20} - 2T'_f}{T_{20} - T'_f}$$

$$\text{avec } \sqrt{T_{10}T_{20}} \leq T'_f \leq \frac{T_{10} + T_{20}}{2}.$$

On a donc :

$$\eta\left(\frac{T_{10} + T_{20}}{2}\right) \leq \eta \leq \eta(T'_f = \sqrt{T_{10}T_{20}}).$$

Pour $T'_f = \frac{T_{10} + T_{20}}{2}$, aucun travail

n'est fourni et $\eta = \eta_{\min} = 0$.

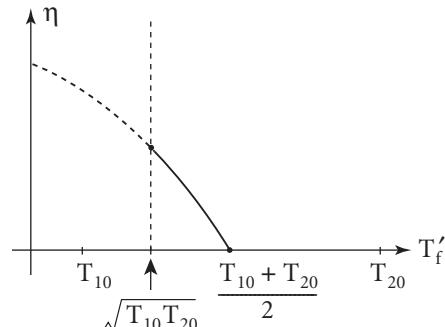
Pour $T'_f = \sqrt{T_{10}T_{20}}$, la machine fonctionne de façon réversible ($\Sigma = 0$), d'où :

$$\eta = \eta_{\max} = \frac{T_{10} + T_{20} - 2\sqrt{T_{10}T_{20}}}{T_{20} - \sqrt{T_{10}T_{20}}}$$

$$\text{et } \eta_{\max} = 1 + \frac{T_{10} - \sqrt{T_{10}T_{20}}}{T_{20} - \sqrt{T_{10}T_{20}}} = 1 + \sqrt{\frac{T_{10}}{T_{20}}} \cdot \frac{(\sqrt{T_{10}} - \sqrt{T_{20}})}{(\sqrt{T_{20}} - \sqrt{T_{10}})}.$$

D'où finalement

$$\boxed{\eta_{\max} = 1 - \sqrt{\frac{T_{10}}{T_{20}}}}$$



Application numérique :

$$\eta_{\max} = 1 - \sqrt{\frac{300}{400}} = 0,13 \Rightarrow 0 \leq \eta \leq 0,13.$$

3. b. Revenons au cas d'une évolution réversible ($\eta = \eta_{\max}$). Les températures des deux « sources » évoluent selon :

$T_1 T_2 = T_{10} T_{20}$ (cf. équation (4), intégrée entre les états $[T_{10}, T_{20}]$ et $[T_1, T_2]$). On suppose que sur un cycle élémentaire, les variations des températures T_1 et T_2 sont suffisamment faibles pour que l'on puisse assimiler le rendement du moteur thermique à celui d'une machine de Carnot. On a donc :

$$\boxed{\frac{\delta W_f}{\delta Q_2} = \eta_c(T_2) = 1 - \frac{T_1}{T_2}} = 1 - \frac{T_{10} T_{20}}{T_2^2}.$$

Pour définir le rendement global, nous écrivons :

$$W_f = \int \delta W_f = \int \eta_c(T_2) \delta Q_2, \text{ avec } \delta Q_2 = -CdT_2.$$

$$\text{D'où } W_f = -C \int_{T_{20}}^{T_f} \eta_c(T_2) dT_2 \text{ et } Q_2 = -C \int_{T_{20}}^{T_f} dT_2 \text{ où } T_f = \sqrt{T_{10} T_{20}}.$$

$$\text{Finalement } \eta_{\max} = \frac{W_f}{Q_f} = \frac{\int_{T_{20}}^{T_f} \eta_c(T_2) dT_2}{\int_{T_{20}}^{T_f} dT_2}.$$

Le rendement global s'identifie à la valeur moyenne du rendement de Carnot $\eta_c(T_2)$

$$\text{sur l'intervalle } [T_{20}, T_f = \sqrt{T_{10} T_{20}}] : \boxed{\eta = \langle \eta_c(T_2) \rangle}$$

$$\text{Il est donc « bien » inférieur à } \eta_c(T_{20}) = 1 - \frac{T_{10}}{T_{20}} = 0,25.$$

648 Réfrigérateur et pompe à chaleur imparfaits

1. L'efficacité e d'un réfrigérateur non parfait prend la forme $e = \frac{T_1}{kT_2 - T_1}$ (source chaude T_2 , source froide T_1).

- Donner, à l'aide d'arguments simples, le domaine des valeurs possibles du coefficient k . On pourra comparer cette efficacité à l'efficacité théorique d'un réfrigérateur parfait fonctionnant entre ces mêmes températures.

- Calculer en fonction de k , T_1 et T_2 la valeur de la création d'entropie pour une unité de travail électrique fourni.

- Redonner une signification physique simple au coefficient k en étudiant les quantités d'entropie échangées avec les deux sources. Commenter.

2. a. Reprendre l'étude précédente pour une pompe à chaleur. On cherchera les valeurs limites de l'efficacité e , et on proposera une définition d'un coefficient k' , analogue au coefficient du **1.** : donner l'expression de e en fonction de T_1 , T_2 et k' .

Commenter.

b. Application numérique : on veut maintenir une température de 292 K dans une maison alors que la température extérieure est de 275 K. Les pertes de chaleur à travers les murs correspondent à une puissance thermique de 10 kW. Quelles devraient être :

- la puissance totale d'un système de chauffage par radiateurs électriques ?
- la puissance électrique d'une pompe à chaleur non parfaite telle que $k' = 0,8$?

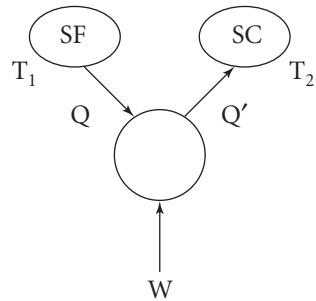
Solution

1. Le réfrigérateur prélève l'énergie thermique Q à la source froide et fournit l'énergie thermique Q' à la source chaude pour une énergie électrique d'alimentation W .

• L'efficacité sera la meilleure (e ayant la valeur la plus élevée) pour un fonctionnement réversible de la machine frigorifique. Dans ce cas, nous avons d'après les premier et second principes :

$$\left. \begin{array}{l} W + Q - Q' = 0 \\ 0 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q'}{T_2} + 0 \\ \Delta S_{\text{machine}} = 0 \end{array} \right\} e = \frac{Q}{W} = \frac{Q}{Q' - Q} = \frac{1}{\frac{Q'}{Q} - 1}$$

$$\text{Soit } e = \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} \Rightarrow e = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad \text{et} \quad k = 1.$$



• La machine est totalement inefficace lorsqu'aucune énergie thermique n'est prélevée à la source froide ($Q = 0$ et donc $e = 0$). Le fonctionnement est alors irréversible :

$$e = 0 \text{ implique } k \text{ infini. On a ainsi} \quad 1 \leq k < +\infty$$

• Relions maintenant le coefficient k à la création d'entropie σ (pour une énergie élec-

$$\left. \begin{array}{l} W + Q - Q' = 0 \\ 0 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q'}{T_2} + \sigma, \end{array} \right. \text{avec bien évidemment } \sigma > 0.$$

$$\text{Éliminons } Q \text{ et } Q' \text{ sachant de plus que } e = \frac{Q}{W} = \frac{T_1}{kT_2 - T_1}.$$

$$\text{D'où } Q' = W + Q = W + \frac{T_1}{kT_2 - T_1} W = \frac{kT_2}{kT_2 - T_1} W$$

$$\text{et } \sigma = \frac{Q'}{T_2} - \frac{Q}{T_1} = \frac{k}{kT_2 - T_1} W - \frac{1}{kT_2 - T_1} W \quad \text{ce qui donne}$$

$$\frac{\sigma}{W} = \frac{k - 1}{kT_2 - T_1}$$

Remarquons que W , Q et e sont définis positifs de telle sorte que $kT_2 > T_1$. Ceci implique par ailleurs $k \geq 1$, la création d'entropie σ étant elle-même positive.

La création d'entropie varie donc entre la valeur minimale $\sigma_{\min} = 0$ (cas de la réversibilité) et la valeur maximale $\sigma_{\max} = \frac{W}{T_2}$ ($Q = 0$).

• Comparons enfin les variations d'entropie des sources :

- l'entropie « enlevée » à la source froide est $\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1}$ ($\Delta S_1 > 0$);
- l'entropie « restituée » à la source chaude est $\Delta S_2 = \frac{Q'}{T_2}$ ($\Delta S_2 > 0$).

$$\text{Or } e = \frac{Q}{W} = \frac{Q}{Q' - Q} = \frac{1}{\frac{Q'}{Q} - 1} = \frac{1}{k \frac{T_2}{T_1} - 1}.$$

$$\text{On a donc : } \frac{Q'}{Q} = k \frac{T_2}{T_1}, \text{ soit encore } \frac{Q'}{T_2} = k \frac{Q}{T_1}$$

le coefficient k représente le rapport entre l'entropie fournie à la source chaude et l'entropie prélevée à la source froide

$$k = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$$

Dans le cas de la réversibilité, il vient $\Delta S_1 = \Delta S_2$ $\left(\frac{Q}{T_1} - \frac{Q'}{T_2} = 0 \right)$ et $k = 1$. Pour une transformation irréversible, nous aurions : $\Delta S_1 - \Delta S_2 + \sigma = 0$.

Soit $\Delta S_2 > \Delta S_1$ ($\sigma > 0$), et $k > 1$.

Dans la configuration limite où $\Delta S_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$ et $\sigma \rightarrow \Delta S_2$ avec $\Delta S_2 = \frac{Q'}{T_2} = \frac{W}{T_2}$ (puisque $Q = 0$ et $W + Q - Q' = 0$).

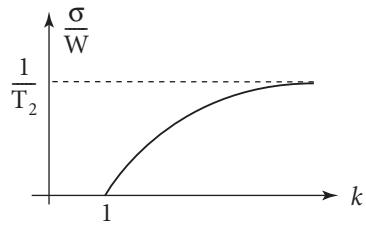
Commentaires

• Pour le réfrigérateur non parfait, l'expression $e = \frac{T_1}{kT_2 - T_1}$ peut s'interpréter comme l'efficacité d'une machine frigorifique parfaite qui fonctionnerait avec la même source froide (T_1) et une source chaude de température $T'_2 = kT_2$ plus élevée ($k > 1$), ce qui implique automatiquement une moins bonne efficacité.

• D'une autre manière, on peut s'intéresser, dans le cas de la machine frigorifique, aux énergies thermiques prises à la source froide – pour un travail électrique donné W – dans le cas de la réversibilité et de l'irréversibilité :

$$Q_{\text{rév}} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} W \quad \text{et} \quad Q_{\text{irr}} = \frac{T_1}{kT_2 - T_1} W.$$

$$\text{Soit } \frac{Q_{\text{irr}}}{Q_{\text{rév}}} = \frac{T_2 - T_1}{kT_2 - T_1} = 1 - \frac{(k-1)T_2}{kT_2 - T_1} = 1 - \frac{\sigma T_2}{W}.$$



D'où

$$Q_{\text{irr}} = Q_{\text{rév}} \left(1 - \frac{\sigma T_2}{W} \right)$$

(L'efficacité minimale est bien associée à $Q_{\text{irr}} = 0$ soit à $\sigma = \sigma_{\max} = \frac{W}{T_2}$ (à W fixé).)

2. La pompe à chaleur fonctionne sur le même principe que la machine frigorifique, la grandeur intéressante étant maintenant l'énergie thermique Q' fournie à la source chaude. L'efficacité sera définie par $e = \frac{Q'}{W}$.

Elle sera maximale pour un fonctionnement réversible. Quant à la valeur minimale de e , elle doit correspondre à une conversion directe de l'énergie électrique W en énergie thermique Q' ($Q = 0$; la pompe à chaleur devient un simple radiateur électrique !). Nous aurons donc :

- $e_{\min} = 1$ ($W = Q'$ et $Q = 0$).
- e_{\max} pour $W + Q - Q' = 0$ (1^{er} principe)

$$0 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q'}{T_2} + 0 \quad (2^{\text{e}} \text{ principe et réversibilité } \sigma = 0).$$

$$\text{Soit } e_{\max} = \frac{Q'}{W} = \frac{Q'}{Q' - Q} = \frac{1}{1 - \frac{Q}{Q'}} = \frac{1}{1 - \frac{T_1}{T_2}} \Rightarrow e_{\max} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

ce qui donne

$$1 \leq e \leq \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

D'une manière analogue à ce qui a été fait pour la machine frigorifique, on définira un coefficient k' tel que :

$$k' = \frac{\text{entropie prélevée à la source froide}}{\text{entropie fournie à la source chaude}} = \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2}.$$

$$\text{De telle sorte que } k' = \left(\frac{Q}{T_1} \right) \cdot \left(\frac{T_2}{Q'} \right) = \frac{Q}{Q'} \frac{T_2}{T_1} \quad \left(\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1} \text{ et } \Delta S_2 = \frac{Q'}{T_2} \right).$$

D'où l'expression de l'efficacité $e = \frac{1}{1 - \frac{Q}{Q'}} \quad \text{puisque } e = \frac{1}{1 - \frac{Q}{Q'}}$:

$$e = \frac{1}{1 - k' \frac{T_1}{T_2}} \Rightarrow e = \frac{T_2}{T_2 - k' T_1}$$

Dans le cas de la réversibilité, $\Delta S_1 = \Delta S_2$ et $k' = 1$ $\left(e = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \right)$.

Et pour une transformation irréversible :

$$\Delta S_1 - \Delta S_2 + \sigma = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta S_2 > \Delta S_1 \text{ et } k' < 1.$$

À la limite où $\Delta S_1 \rightarrow 0$ ($W = Q'$), $k' \rightarrow 0$ et $\sigma \rightarrow \frac{W}{T_2}$ ce qui donne ici :

$$0 \leq k' \leq 1$$

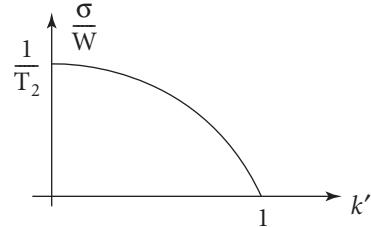
- Le lien entre la création d'entropie σ (pour une énergie électrique donnée W) k' , T_1 et T_2 s'obtient de la même façon que pour la machine frigorifique.

$$\sigma = \Delta S_2 - \Delta S_1 = \Delta S_2(1 - k') = \frac{Q'}{T_2}(1 - k').$$

$$\text{Or } e = \frac{Q'}{W} \text{ d'où : } \sigma = (1 - k')e\frac{W}{T_2}.$$

Soit en remplaçant e par sa valeur :

$$\frac{\sigma}{W} = \frac{1 - k'}{T_2 - k'T_1}.$$



Commentaire

On peut également noter $e = \frac{T_2}{T_2 - T'_1}$ avec $T'_1 = k'T_1$, ce qui correspondrait à l'efficacité d'une pompe à chaleur parfaite fonctionnant avec une source froide de température $T'_1 < T_1$ occasionnant une efficacité plus faible $\left(e = \frac{T_2}{T_2 - T'_1} < \frac{T_2}{T_2 - T_1}\right)$.

- 2. b.** • Pour un chauffage à l'aide des radiateurs électriques, la puissance électrique est convertie directement en puissance thermique laquelle doit compenser exactement les pertes. On a donc :

$$\mathcal{P}_{\text{radiateurs électriques}} = 10 \text{ kW.}$$

- Pour la pompe à chaleur :

$$e = \frac{Q'}{W} = \frac{\mathcal{P}'_{\text{th}}}{\mathcal{P}}, \text{ où } \mathcal{P} \text{ désigne la puissance électrique de la pompe et } \mathcal{P}'_{\text{th}} = 10 \text{ kW} \\ (\text{même raison que ci-dessus}). \text{ D'où :}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}'_{\text{th}}}{e} = \mathcal{P}'_{\text{th}} \cdot \frac{T_2 - k'T_1}{T_2}.$$

Nous avons $T_2 = 292 \text{ K}$ (la maison est la source chaude) et $T_1 = 275 \text{ K}$ (l'air extérieur constitue la source froide). De plus, l'imperfection de la pompe (irréversibilité partielle) impose $k' = 0,8$ (k' différent de 1), d'où :

$$\mathcal{P}_{\text{kW}} = 10 \cdot \frac{292 - 0,8 \times 275}{292} \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{Pompe}} = 2,5 \text{ kW}$$

(ce qui correspond à une efficacité de 4,1 – l'efficacité maximale pour les mêmes températures T_1 et T_2 étant égale à 17,2...).

649

Moteur à explosion

Un moteur à explosion fonctionne selon le « cycle de Beau de Rochas », cycle idéalisé défini de la façon suivante :

- 1^{er} temps : soupape d’admission ouverte, soupape d’échappement fermée, le mélange (air + essence) est admis dans le cylindre de volume maximal V_1 (conditions T_1 et P_1) ;
- 2^e temps : soupapes fermées, le mélange est comprimé isentropiquement jusqu’à l’état (P_2 , V_2 , T_2) pour lequel se produit l’explosion (augmentation brusque de la pression jusqu’à P'_2 à volume constant, le fluide passant dans l’état (P'_2 , V_2 , T'_2) ;
- 3^e temps : soupapes fermées, les produits de combustion se détendent de façon isentropique, le volume du cylindre redevenant V_1 (état P_3 , V_1 , T_3) ;
- 4^e temps : ouverture de la soupape d’échappement ce qui conduit à une variation brusque de la pression sans déplacement de piston (P_3 , $T_3 \rightarrow P_1$, T_1) suivie de l’évacuation des gaz brûlés.

Pour simplifier, on prendra un seul cylindre dont le volume offert varie entre les valeurs extrêmales V_1 et V_2 . Le mélange sera considéré de composition « invariable » avec des capacités thermiques molaires C_p et C_v constantes (indépendantes de T et P). On donne :

- la cylindrée : $V_1 - V_2 = 1\ 124 \text{ cm}^3$;
- le rapport volumétrique : $\alpha = \frac{V_1}{V_2} = 9,4$;
- le carburant a une masse volumique $\mu = 720 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et son pouvoir thermique est $K = 48 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$;
- consommation $c = 5,9$ litres aux 100 km à vitesse stabilisée $V_{st} = 120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (correspondant à $N = 5\ 600$ tours par minute).

On prendra $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$ et $\gamma = 1,35$. Les gaz seront considérés comme parfaits.

1. a. Exprimer le rendement théorique η du moteur à explosion en fonction notamment des températures T_1 , T_2 , T'_2 et T_3 , puis en fonction des coefficients α et γ . Donner la valeur numérique de η .

b. Commenter l’expression de η en fonction des valeurs de γ et du rapport volumétrique α . Que pensez-vous de la modélisation adoptée pour le cycle ?

2. Déterminer la puissance théorique \mathcal{P} délivrée par le moteur. On exprimera cette puissance en fonction de c , V_{st} , K , μ et η .

Application numérique.

3. Définir complètement l’état du fluide en chaque point caractéristique du cycle en précisant les valeurs des températures T_2 , T'_2 et T_3 et des pressions P_2 , P'_2 et P_3 sachant que $T_1 = 350 \text{ K}$.

Solution

1. a. Une masse de fluide déterminée (mélange vapeur d'essence + air) décrit le cycle ABCD.

- AB : compression adiabatique.
- BC : explosion instantanée à volume constant (l'explosion est commandée par l'étincelle produite par une bougie) qui correspond à l'absorption d'une énergie thermique Q (libération de l'énergie chimique de réaction de combustion).
- CD : détente des gaz brûlés qui repoussent le piston.
- DA : transformation isochore associée à la libération d'une énergie thermique Q' (on ne change rien à remplacer la détente brutale (piston immobile, pas de travail récupéré) par une isochore...).

On a d'après le premier principe et en notant W le travail produit lorsque le mélange décrit un cycle :

$$Q + (-W) + (-Q') = 0 \quad (\text{les grandeurs } Q, W \text{ et } Q' \text{ sont ici définies positives}).$$

Le rendement η du moteur est le rapport du travail W produit à l'énergie thermique Q dépensée (combustion).

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{Q - Q'}{Q} = 1 - \frac{Q'}{Q}.$$

L'énergie thermique Q correspond à une transformation isochore, d'où :

$Q = nC_v(T'_2 - T_2)$, nC_v représentant la capacité thermique à volume constant du mélange. De même $(-Q') = nC_v(T_1 - T_3)$.

(Nous avons négligé dans ces expressions la variation de composition chimique des gaz.)

Soit

$$\eta = 1 + \frac{nC_v(T_1 - T_3)}{nC_v(T'_2 - T_2)} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 + \frac{T_1 - T_3}{T'_2 - T_2}}$$

Déterminons maintenant les relations liant les températures T_1 , T_2 , T'_2 et T_3 :

- A → B isentropique d'un gaz parfait (loi de Laplace) :

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \Rightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \alpha^{\gamma-1}.$$

- De même, pour C → D : $T_3 V_1^{\gamma-1} = T'_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T'_2}{T_3} = \alpha^{\gamma-1}$.

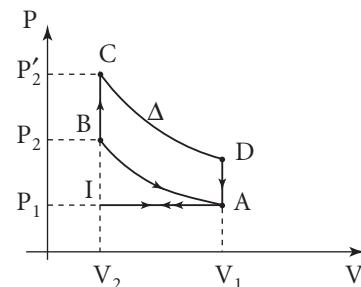
$$\text{On a donc } \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_3}{T'_2} = \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T'_2} = \alpha^{-(\gamma-1)}.$$

Soit finalement

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}}$$

Application numérique :

$$\eta = 1 - \frac{1}{(9,4)^{0,35}} \Rightarrow \eta = 0,54.$$



1.b.

Commentaire

Le moteur à explosion est un moteur à combustion interne (comme le moteur Diesel) pour lequel l'allumage (provoqué par une étincelle : bougie électrique) engendre un fort accroissement de pression : dans le cycle théorique, la combustion est considérée comme instantanée s'effectuant à volume fixé (dans le moteur Diesel, le combustible s'enflamme à pression constante, la réaction étant provoquée par l'échauffement de l'air accompagnant une forte compression).

- Le rendement théorique du cycle associé ne dépend que de γ et du rapport volumétrique $\alpha = \frac{V_1}{V_2}$.

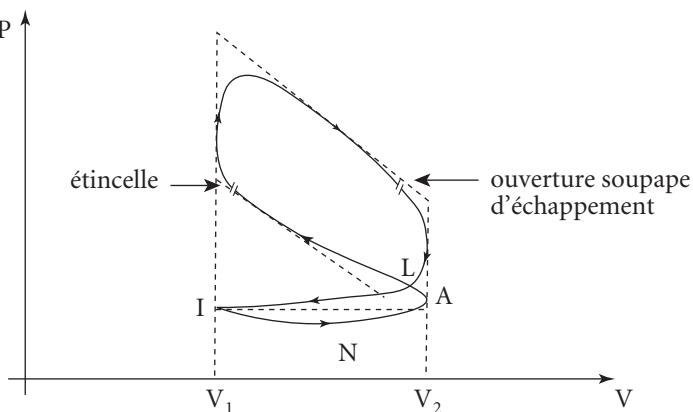
On peut considérer que pour le mélange, γ est compris entre les valeurs 1,3 et 1,4 (la valeur $\gamma = 1,40$ n'est valable que pour les gaz parfaits diatomiques). Donnons quelques valeurs de ce rendement (thermique) théorique pour différentes valeurs de α :

$\gamma \backslash \alpha$	8	9	10
1,3	0,46	0,48	0,50
1,4	0,56	0,58	0,60

$$\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$$

On constate qu'une valeur plus faible de γ abaisse celle du rendement thermique. D'autre part, ce rendement est une fonction croissante du rapport volumétrique α (à γ fixé). Cependant, un taux de compression trop élevé du mélange pourrait provoquer une détonation (phénomène de cliquetis associé à la désintégration de certains hydrocarbures), voire un allumage prématué. On mesure la résistance à la détonation d'un carburant par son indice d'octane... On atteint les valeurs de α de l'ordre de 9 à 10 dans les moteurs actuels d'automobile avec un carburant d'indice d'octane 98.

- Soulignons que le diagramme proposé ne représente qu'une idéalisation du cycle du moteur à quatre temps.



- Les compression et détente ne sont pas isentropiques (les parois du cylindre cèdent de l'énergie thermique au mélange pendant la phase de compression et en reçoivent de la part des gaz de combustion pendant la phase de détente : ceci a pour effet de diminuer les performances du moteur).
- La combustion n'est pas instantanée et ne se fait pas exactement à volume constant (on réalise une avance à l'allumage, c'est-à-dire que l'étincelle est produite avant que le piston n'atteigne son point haut, afin d'obtenir une combustion complète et une élévation de pression aussi élevée que possible).
- Le fonctionnement théorique des soupapes impliquerait un travail récupéré pendant la phase d'admission compensant exactement celui utilisé pour évacuer les gaz brûlés (trajets I → A et A → I). En réalité, l'ouverture et la fermeture des soupapes n'ont pas lieu exactement lorsque le piston atteint ses niveaux haut et bas. De plus, il s'établit une dépression pendant l'admission et une suppression pendant l'échappement, la boucle correspondante [INALI] représentant alors une perte de travail utile.

2. La puissance théorique développée par le moteur, dans les conditions de l'énoncé, peut être calculée à partir du travail ΔW pendant une durée Δt . Il lui correspond une énergie thermique ΔQ produite par la combustion.

$$\text{Nous avons : } \mathcal{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \text{ avec } \eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q}.$$

$$\text{Soit } \mathcal{P} = \eta \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Or, pendant Δt , le moteur absorbe une masse Δm de carburant telle que :

$$\Delta m = \mu \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta t \quad (\mu : \text{masse volumique} ; \Delta v : \text{volume}).$$

Le moteur consomme $c \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ tous les 100 km à vitesse stabilisée V_{st} ($\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$). Pendant le temps Δt (en heures), le véhicule parcourt la distance $d = V_{st} \cdot \Delta t$ (d en km) et consomme donc un volume Δv (en m^3) de carburant tel que :

$$\Delta v (\text{m}^3) = c \cdot 10^{-3} \times \frac{V_{st} \cdot \Delta t}{100}.$$

$$\text{D'où } \frac{\Delta v}{\Delta t} (\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}) = c(L) \cdot 10^{-3} \frac{V_{st} (\text{km} \cdot \text{h}^{-1})}{100}.$$

$$\text{Soit encore } \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{c V_{st} 10^{-5}}{3600} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{et } \Delta m = \frac{10^{-5}}{3600} c \cdot V_{st} \cdot \mu \cdot \Delta t.$$

K désignant le pouvoir thermique du carburant, il vient : $\Delta Q = K \Delta m$.

$$\text{D'où } \mathcal{P} = \eta K \frac{\Delta m}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P} = \frac{10^{-5}}{3600} c \cdot V_{st} \cdot \mu \cdot K \cdot \eta}$$

Dans cette relation, c est en litres/100 km, V_{st} en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, μ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et K en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$: \mathcal{P} s'exprime alors en kW.

Application numérique :

$$\mathcal{P} = \frac{10^{-3}}{3600} \times 5,9 \times 1,2 \left(1 - \frac{1}{(9,4)^{0,35}} \right) \times 48 \times 720 \times 10^3$$

où $K\mu = 48 \times 720 \times 10^3 \text{ kJ} \Rightarrow \mathcal{P} = 37 \text{ kW}$.

3. • Pour l'isentropique A → B, nous avons $T_2 = T_1 \alpha^{\gamma-1}$.

$$\text{D'où } T_2 = 350 \times (9,4)^{+0,35} \Rightarrow T_2 = 767 \text{ K.}$$

$$\text{D'autre part, } P_2 V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma \text{ et } P_2 = P_1 \alpha^\gamma \Rightarrow P_2 = 20,6 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

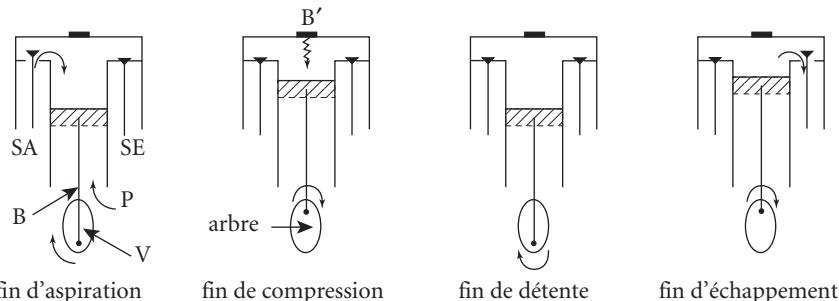
• Pour l'isochore B → C :

$$Q = nC_v(T'_2 - T_2) \text{ avec } Q = \frac{\mathcal{P}}{\eta} (\Delta t)_{\text{cycle}} \text{ où } (\Delta t)_{\text{cycle}} = 2 \cdot \frac{60}{N}.$$

Un cycle correspond en effet à deux tours de l'arbre du moteur qui effectue N tours par minute.

Commentaire

Chaque tour du vilebrequin est associé à deux courses du piston (une dans chaque sens). Ainsi, pour un moteur à quatre temps, le cycle thermodynamique est décrit pendant deux tours du vilebrequin (et donc de l'arbre du moteur), ce qui correspond à quatre courses du piston (*cf. figure ci-dessous*) :



B : bielle ; V : vilebrequin ;

SA : soupape d'admission ; SE : soupape d'échappement ;

P : piston ;

B' : bougie.

Le travail n'est produit que pendant un quart de cycle, il est donc nécessaire d'assurer un mouvement régulier du piston ce qui est réalisé plus facilement en associant plusieurs cylindres (4, 6, 8...) sur un même vilebrequin de forme appropriée...

$$\text{D'où } T'_2 = T_2 + \frac{Q}{nC_v} = T_2 + \frac{Q}{nR}(\gamma - 1) \quad \text{avec} \quad C_v = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

$$\text{D'autre part } n = \frac{P_1 V_1}{R T_1} \text{ soit : } T'_2 = T_2 + (\gamma - 1) T_1 \frac{\mathcal{P} \cdot 60 \cdot 2}{\eta \cdot N P_1 V_1} \Rightarrow T'_2 = 2185 \text{ K.}$$

V_1 se détermine à l'aide du rapport volumétrique α et de la cylindrée :

$$V_1 - V_2 = 1124 \text{ cm}^3 \text{ et } \frac{V_1}{V_2} = 9,4 \Rightarrow V_1 = 1258 \text{ cm}^3.$$

Il lui correspond une pression P'_2 telle que $\frac{P'_2}{T'_2} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow P'_2 = 58,7 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$

- Pour l'isentropique $C \rightarrow D$, il vient (*cf. A → B*) :

$$T'_2 = T_3 \alpha^{\gamma-1}, \text{ soit } T_3 = T'_2 \alpha^{1-\gamma} \text{ et } T_3 = 997 \text{ K.}$$

$$P_3 V_1^\gamma = P'_2 V_2^\gamma, \text{ soit } P_3 = P'_2 \alpha^{-\gamma} \text{ et } P_3 = 2,85 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

650

Réfrigérateur à absorption

On sait réaliser des réfrigérateurs – dits « à absorption » – qui ne nécessitent pas de moteur (comme source de travail mécanique...). Ils extraient une énergie thermique Q_1 de la source froide à la température T_1 (effet frigorifique) et reçoivent une énergie thermique Q_3 d'une source auxiliaire à T_3 . Ils échangent également de l'énergie thermique avec l'air ambiant à T_2 ($T_3 > T_2 > T_1$).

1. Montrer qu'un tel appareil est thermodynamiquement possible si une condition sur Q_1 , Q_3 et les températures est réalisée.
2. Définir l'efficacité de ce type de réfrigérateur, et montrer que celle-ci reste inférieure à une valeur que l'on exprimera en fonction des seules températures.

Application numérique : $T_1 = 265 \text{ K}$; $T_2 = 300 \text{ K}$; $T_3 = 400 \text{ K}$.

3. Comparer avec l'efficacité d'un réfrigérateur classique fonctionnant avec deux sources thermiques (T_1 et T_2).

Solution

1. Notons – pour un temps de fonctionnement donné :

Q_3 la quantité d'énergie thermique reçue de la source auxiliaire à la température T_3 (Q_3 est une quantité positive) ;

Q_1 la quantité d'énergie thermique reçue de la source froide à la température T_1 (Q_1 quantité positive) ;

Q_2 la quantité d'énergie thermique « prélevée » à l'air ambiant à T_2 (Q_2 de signe inconnu au départ...).

La machine ayant par hypothèse un fonctionnement cyclique, le premier principe impose :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 \Rightarrow Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \text{ car } W = 0.$$

Q_1 et Q_3 étant positives, il vient :

$$Q_2 = -Q_1 - Q_3 < 0.$$

D'où le schéma ci-contre des échanges d'énergie du fluide évoluant dans la machine.

D'après le second principe appliqué au système { machine + sources } :

$$\Delta S_{\text{machine}} + \sum \Delta S_{\text{sources}} \geq 0.$$

L'égalité correspond au cas des évolutions réversibles.

Ici $\Delta S_{\text{machine}} = 0$ (cycle) et donc $\frac{(-Q_1)}{T_1} + \frac{(-Q_3)}{T_3} + \frac{|Q_2|}{T_2} \geq 0$

soit, en éliminant $|Q_2| = -Q_2$:

$$\frac{(-Q_1)}{T_1} + \frac{(-Q_3)}{T_3} + \frac{Q_1 + Q_3}{T_2} \geq 0$$

$$Q_1 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) + Q_3 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3} \right) \geq 0$$

le second terme de cette somme est positif ($T_3 > T_2$ entraîne $\frac{1}{T_3} < \frac{1}{T_2}$), mais le premier terme est négatif ($T_1 < T_2 \dots$) : pour que le résultat soit effectivement positif, il suffit que la quantité d'énergie thermique apportée au fluide depuis la source auxiliaire soit suffisamment grande.

Exprimé autrement, il faut, pour enlever une quantité d'énergie thermique Q_1 à la source froide, fournir depuis la source auxiliaire une énergie thermique supérieure à une valeur minimale :

$$Q_3 \geq Q_1 \cdot \frac{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}} \quad (1)$$

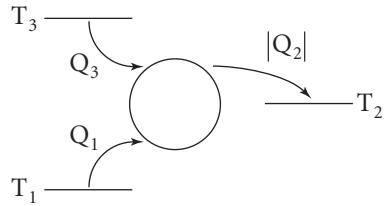
2. À partir de ce qui précède, l'efficacité de ce type d'appareil se définit de façon naturelle par :

$$\eta = \frac{Q_1}{Q_3}$$

ce qui correspond bien à la notion générale d'efficacité

$$\eta = \frac{\text{quantité utile obtenue}}{\text{quantité « onéreuse » fournie}}$$

les échanges avec l'air ambiant étant considérés comme totalement gratuits...



En utilisant la condition (1), on obtient pour η :

$$\eta = \frac{Q_1}{Q_3} \leq \frac{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}$$

soit

$$\boxed{\eta \leq \frac{T_1(T_3 - T_2)}{T_3(T_2 - T_1)}}$$

On vérifie naturellement que l'efficacité maximale correspond au fonctionnement réversible.

Application numérique :

Avec les valeurs données, $\boxed{\eta \leq 1,9}$

3. Comparons cette efficacité à celle d'un réfrigérateur classique fonctionnant entre une source froide à la température T_1 et une source chaude à la température T_2

$$\eta' \leq \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad \text{soit ici} \quad \boxed{\eta' \leq 7,57}$$

Dans le cas de transformations réversibles, $\eta = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right) = \eta' \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right)$.

Donc à T_1 et T_2 fixés, $\boxed{\eta < \eta'}$ pour toute valeur de T_3 (que l'on a intérêt à prendre la plus élevée possible).

Commentaire

L'emploi d'un tel réfrigérateur se justifie quand on ne dispose pas de source de travail W (pas d'alimentation électrique) ou lorsqu'on recherche un fonctionnement parfaitement silencieux (pas besoin de moteur).

651

Centrale électrique nucléaire

Une centrale nucléaire produit de l'électricité par l'intermédiaire d'un alternateur couplé aux turbines à vapeur T_1 et T_2 . Le fluide caloporteur est de l'eau. À la sortie des turbines, l'eau se refroidit dans le condenseur (l'échange d'énergie thermique peut se faire avec l'eau pompée dans une rivière).

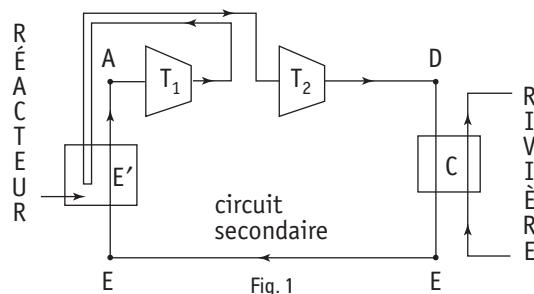


Fig. 1

Dans l'évaporateur E', les échanges thermiques peuvent s'effectuer avec un circuit primaire d'eau qui récupère l'énergie thermique libérée au cœur du réacteur par la fission de l'uranium enrichi.

L'eau du circuit secondaire décrit le cycle représenté sur la figure 2.

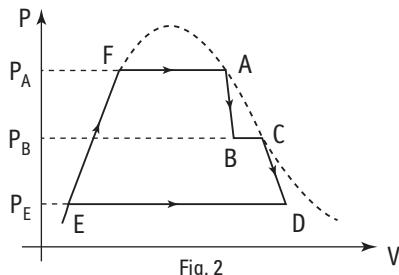


Fig. 2

- Les transformations $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$ sont supposées adiabatiques réversibles et correspondent au passage dans les turbines haute pression (T_1) et basse pression (T_2).
- Entre les deux turbines, l'eau subit une surchauffe $B \rightarrow C$ en repassant dans l'échangeur E'.

On note T , P , x , température, pression et titre en vapeur (soit $x = \frac{m_{\text{vap}}}{m_{\text{totale}}}$). On désigne de plus par h et s les enthalpie et entropie massiques du fluide.

On prendra $h = 0$ et $s = 0$ pour le liquide dans l'état $P_0 = 1 \text{ atm}$ et $T_0 = 273 \text{ K}$ (0 degré celsius). On négligera les variations de volume de l'eau liquide avec la température et la pression. On donne :

$$\theta_A = 287 \text{ }^{\circ}\text{C} \text{ et } P_A = 70 \text{ atm} \quad (\theta : \text{température Celsius}) ;$$

$$P_B = 10 \text{ atm} ; \quad \theta_c = 270 \text{ }^{\circ}\text{C} ; \quad P_D = 0,05 \text{ atm} ;$$

$$C_l = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ (capacité thermique de l'eau liquide, supposée constante).}$$

1. Déterminer les expressions de h_E , h_F , s_E et s_F en fonction de C_l , T_E , T_F et T_0 . Donner les valeurs numériques de h_F et s_F .

2. Dresser un tableau où figurent les valeurs de h , s , θ , P (atm) et x pour les différents points A, B, C, D, E, F. À cet effet on s'aidera du diagramme de Mollier présenté en fin d'énoncé (h est exprimé en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et s en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

3. Comment lire, sur le diagramme de Mollier, les énergies thermiques Q_{FA} , Q_{BC} et Q_{DE} « reçues » par le fluide ?

Donner les valeurs numériques de Q_{FA} , Q_{BC} , Q_{DE} ainsi que celle de Q_{EF} .

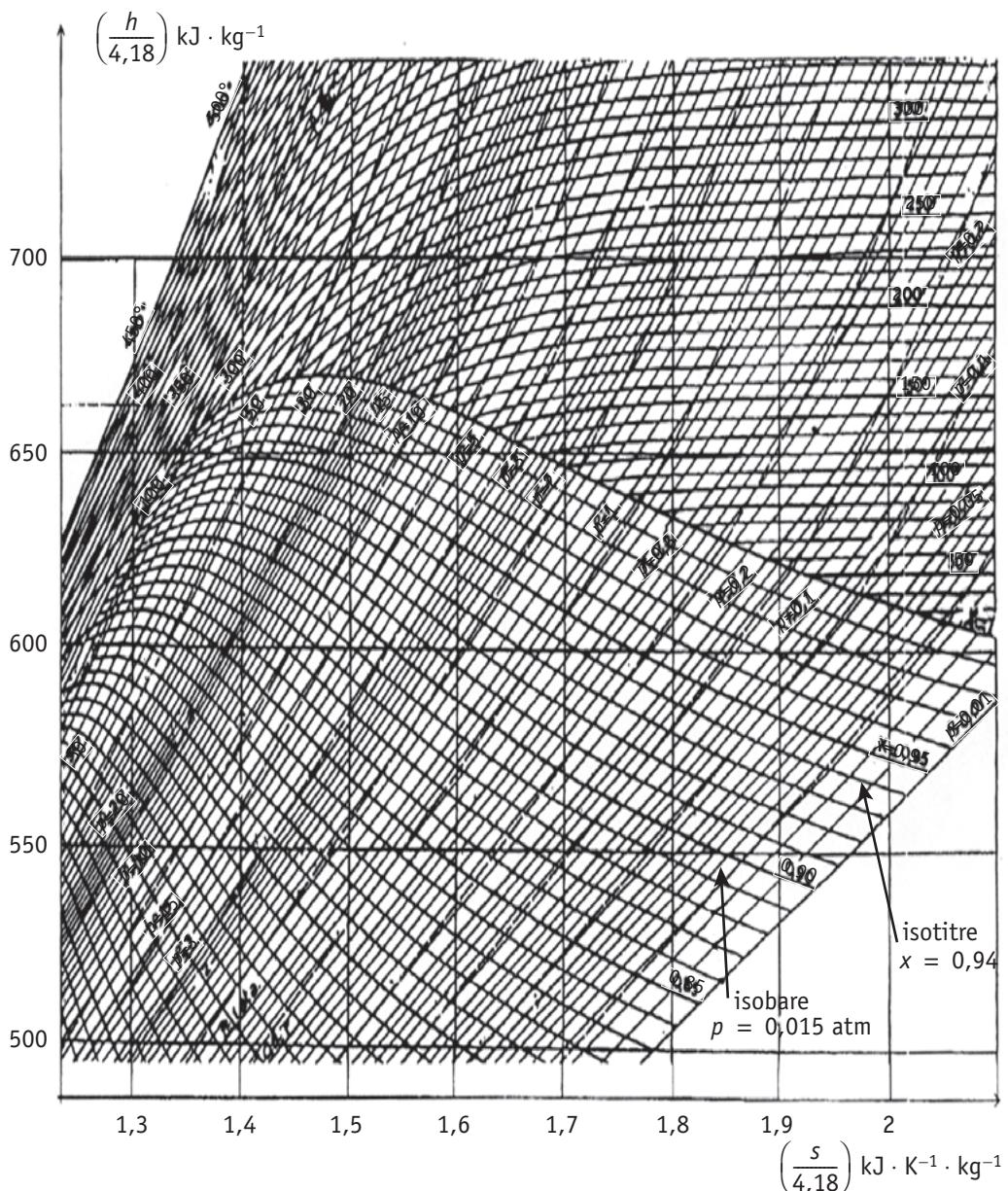
En déduire :

- le travail W_1 par unité de masse fourni par la centrale au cours d'un cycle ;
- l'énergie thermique Q_1 fournie par la source chaude pour 1 kg de fluide.

Calculer le rendement thermique $\eta = \frac{W_1}{Q_1}$.

4. Exprimer le travail utile W_u produit par les turbines lorsqu'elles sont traversées par 1 kg de fluide. Comparer W_u et W_1 .

5. La puissance électrique de la centrale est $\mathcal{P} = 1\ 300 \text{ MW}$. Quel doit être la valeur du débit massique de fluide dans le circuit secondaire ?



Solution

1. La capacité thermique étant prise constante, on aura :

$$h_E - 0 = C_l(T_E - T_0); \quad h_F - 0 = C_l(T_F - T_0)$$

$$s_E - 0 = C_l \ln\left(\frac{T_E}{T_0}\right) \text{ et } s_F - 0 = C_l \ln\left(\frac{T_F}{T_0}\right).$$

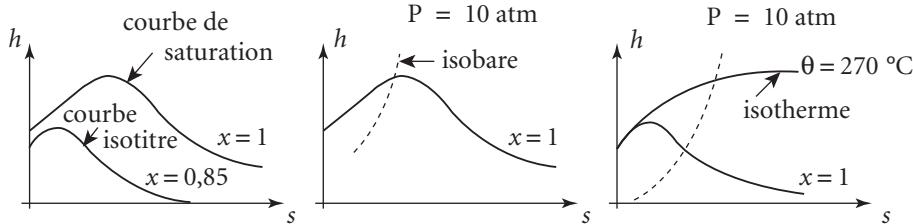
Soit $h_F = 1\,200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $s_F = 3,0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

2.

POINT MÉTHODE

Avant de répondre aux questions, étudier en détail le diagramme de Mollier.

Il fait apparaître la courbe de saturation ($x = 1$), des courbes isotrites (x fixé), des courbes isobares (P fixée), des courbes isothermes (θ fixée).



Partons du point A pour lequel $\theta_A = 287^\circ\text{C}$, $P_A = 70 \text{ atm}$ et $x = 1$ (vapeur saturante). La lecture du diagramme de Mollier donne :

$$h_A = 2766 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \\ s_A = 5,81 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

- La transformation A → B est supposée isentropique ce qui implique immédiatement que $s_B = s_A$.

D'autre part, $P_B = 10 \text{ atm}$. Le point B s'obtient sur le diagramme de Mollier en prenant l'intersection de l'isobare $P = 10 \text{ atm}$ avec la droite $s = s_A$. La température correspondante est celle de la vapeur saturante ($x = 1$) à la même pression ($P = 10 \text{ atm}$) : propriété de l'équilibre liquide-vapeur. Ce qui détermine le point B' et l'isotherme $\theta = 180^\circ\text{C}$ aboutissant en ce point.

On a donc :

$$P_B = 10 \text{ atm}; \quad \theta_B = 180^\circ\text{C}; \quad x_B = 0,83, \text{ et par lecture directe :}$$

$$h_B = 2430 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad s_B = 5,81 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

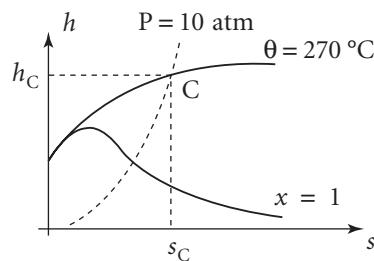
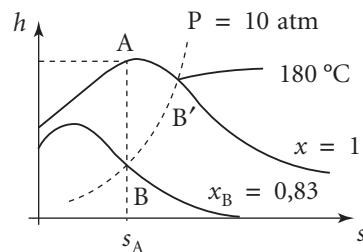
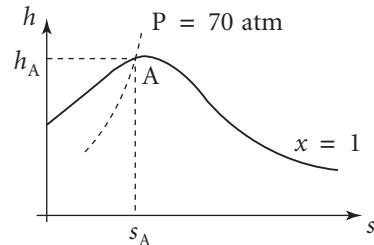
- La transformation B → C est isobare, et en C, le fluide est à l'état de vapeur sèche. On a :

$$P_C = P_B = 10 \text{ atm}; \quad \theta_C = 270^\circ\text{C};$$

$$h_C = 2980 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1};$$

$$s_C = 6,99 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1};$$

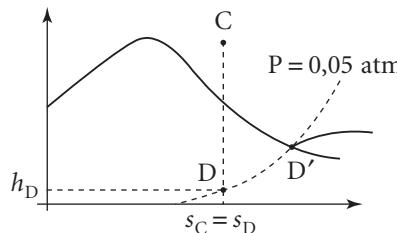
$$s_C = 7,0 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$



- La transformation $C \rightarrow D$ est isentropique ($s_D = s_C$) avec $P_D = 0,05 \text{ atm}$. La température correspondante est celle du mélange liquide-vapeur à la même pression. Elle est donc fournie par l'isotherme $\theta = 35^\circ\text{C}$ qui arrive au point D' intersection de l'isobare $P = 0,05 \text{ atm}$ et de l'isotitre $x = 1$ (imprécision sur θ_D). D'où :

$$P_D = 0,05 \text{ atm}; \quad \theta_D = 35^\circ\text{C}; \quad x_D = 0,825.$$

$$h_D = 2\,137 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad \text{et } s_D = 6,99 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$



- L'état E est caractérisé par (transformation $D \rightarrow E$ isobare et isotherme) :

$$P_E = P_D = 0,05 \text{ atm}; \quad \theta_E = \theta_D = 35^\circ\text{C}; \quad x_E = 0, \text{ et}$$

$$h_E = 9,18 \cdot (35 - 0) \text{ (cf. 1.)} \Rightarrow h_E = 146 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

$$s_E = 4,18 \ln\left(\frac{273 + 35}{273}\right) \text{ (cf. 1.)} \Rightarrow s_E = 0,50 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

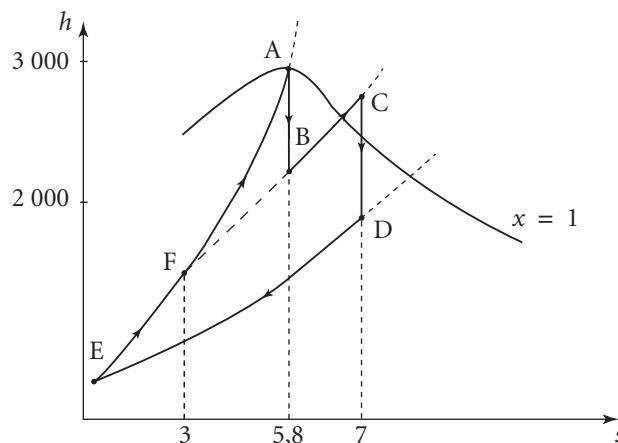
- Le cycle reboucle sur l'état F caractérisé par :

$$P_F = P_A = 70 \text{ atm}; \quad \theta_F = \theta_A = 287^\circ\text{C}; \quad x_F = 0 \text{ et}$$

$$h_F = 4,18 \cdot (287 - 0) \text{ (cf. 1.)} \Rightarrow h_F = 1\,200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$s_F = 4,18 \ln\left(\frac{287 + 273}{273}\right) \text{ (cf. 1.)} \Rightarrow s_F = 3,0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Représentons ce cycle dans le diagramme de Mollier :



- Tableau des valeurs P, T, x, h et s (arrondies) :

	P (atm)	θ (°C)	x	h (kJ · kg⁻¹)	s (kJ · K⁻¹ · kg⁻¹)
A	70	287	1	2 770	5,8
B	10	180	0,83	2 430	5,8
C	10	270	1	2 980	7,0
D	0,05	35	0,825	2 140	7,0
E	0,05	35	0	146	0,5
F	70	287	0	1 200	3,0

3. La transformation F → A est associée à une vaporisation totale du liquide à P et T constantes, d'où : $Q_{FA} = h_A - h_F$ (segment AF' du diagramme de Mollier).

De même $Q_{DE} = h_E - h_D$ et $Q_{BC} = h_C - h_B$.

L'application numérique donne :

$$Q_{FA} = (2 766 - 1 200) \Rightarrow Q_{FA} \approx 1 570 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$Q_{BC} = (2 980 - 2 430) \Rightarrow Q_{BC} \approx 550 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$Q_{DE} = (146 - 2 137) \Rightarrow Q_{DE} \approx -1 990 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

$$\text{De plus, } Q_{EF} = C_L(\theta_F - \theta_E) = 4,18(287 - 35) \Rightarrow Q_{EF} = 1 053 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

• Le travail W_1 fourni par la centrale, et rapporté à l'unité de masse du fluide, s'obtient par application du premier principe. Soit pour un cycle :

$$(-W_1) + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DE} + Q_{EF} + Q_{FA} = 0$$

et avec $Q_{AB} = Q_{CD} = 0$ (transformations adiabatiques) :

$$W_1 = Q_{BC} + Q_{DE} + Q_{EF} + Q_{FA}.$$

Application numérique :

$$W_1 = 1 178 \Rightarrow W_1 = 1 180 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

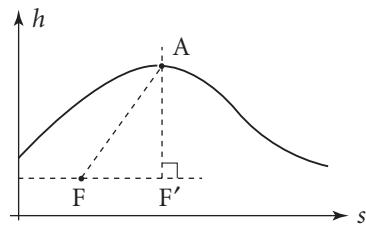
• L'énergie thermique Q_l fournie par la source chaude (circuit d'eau primaire passant dans le cœur du réacteur de la centrale) permet de réaliser la transformation E → F → A et assure la surchauffe de la vapeur entre les turbines haute et basse pression.

$$Q_l = Q_{EF} + Q_{FA} + Q_{BC} \Rightarrow Q_l = 3 170 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

(somme de toutes les énergies thermiques effectivement reçues de la source chaude).

• Le rendement thermique de la centrale est égal au rapport de l'énergie utile produite (soit W_1) sur l'énergie « non gratuite » (ici Q_l). Soit :

$$\eta = \frac{W_1}{Q_l} \Rightarrow \eta = 37 \text{ \%}.$$



- 4.** Considérons une turbine et la masse δm la « traversant » entre les instants t et $t + dt$ (le régime étant stationnaire, la même masse δm entre et sort entre ces deux instants).

Considérons alors le système fermé constitué, à t , par le fluide contenu dans la turbine (énergie interne U_T) et la masse δm qui va y pénétrer entre t et $t + dt$ (conditions h_e, u_e, s_e ...).

À $t + dt$, ce système correspond au fluide contenu dans la turbine (énergie interne U_T : régime stationnaire) et à la masse δm sortant de la machine (conditions h_s, u_s et s_s ...).

Désignons par δW_{amont} le travail fourni par le reste du fluide en amont et δW_{aval} le travail correspondant en aval.

Le premier principe appliqué au système considéré (et en négligeant les énergies cinétiques ou leurs variations) donne :

$$dU = (U_T + u_s \delta m) - (U_T + u_e \delta m) = (-\delta W_u) + \delta W_{\text{amont}} + \delta W_{\text{aval}} + \delta Q.$$

La turbine est adiabatique et donc $\delta Q = 0$, d'où :

$$\delta m(u_s - u_e) = (-\delta W_u) + \delta W_{\text{amont}} + \delta W_{\text{aval}}.$$

Or $\delta W_{\text{amont}} = P_e \delta V_e$ avec $\delta V_e = (\nu_m)_e \delta m$ (ν_m = volume massique).

De même $\delta W_{\text{aval}} = -P_s \delta V_s$ avec $\delta V_s = (\nu_m)_s \delta m$.

Soit en regroupant les termes :

$$\delta m[(u_s + P_s(\nu_m)_s) - (u_e + P_e(\nu_m)_e)] = (-\delta W_u)$$

$$\text{et} \quad h_s - h_e = -\left(\frac{\delta W_u}{\delta m}\right)$$

Pour un intervalle de temps dt , nous aurons :

$$\frac{\delta m}{dt}(h_s - h_e) = -\frac{\delta W_u}{dt} = -P_u.$$

$\frac{\delta m}{dt} = D_m$ est le débit massique de fluide et P_u représente la puissance utile effectivement transmise à l'alternateur.

Au total, on aura ici (turbines haute et basse pression) :

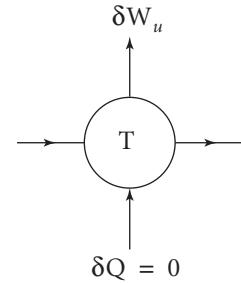
$$(P_u)_{\text{totale}} = (-D_m)[(h_B - h_A) + h_D - h_C]$$

Application numérique :

$$D_m = \frac{-1\ 300 \times 10^6}{[(2\ 430 - 2\ 766) + (2\ 137 - 2\ 980)] \cdot 10^3} \Rightarrow D_m = 1\ 100 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Commentaire

Cette démonstration, inspirée de la démonstration de la détente de Joule-Kelvin, doit être parfaitement assimilée car elle apparaît chaque fois que l'on étudie un écoulement.



Chapitre

7

Électromagnétisme

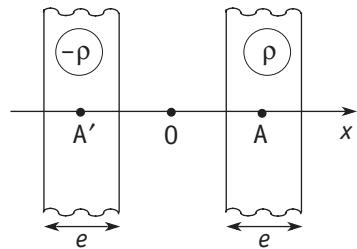
- A . Électrostatique
- B . Magnétostatique

A. Électrostatique

701 Deux lames de charges opposées

La distribution de charges représentée ci-contre comprend deux lames infinies dans les directions y et z , de largeur e , centrées en A et A' d'abscisses $+a$ et $-a$ ($a > \frac{e}{2}$), et de charges volumiques uniformes ρ et $-\rho$.

Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace. En donner les représentations graphiques.



1. Ce qu'il faut savoir

- Théorème de superposition.
- Lois de symétrie concernant les champs électrostatiques.
- Théorème de Gauss.

2. Ce qu'il faut comprendre

Le théorème de superposition permet de n'étudier que le champ créé par une seule lame chargée.

La symétrie de la distribution de charges – pour ce problème simplifié – permet de déterminer la direction du champ en tout point.

Il est alors facile de trouver une surface fermée simple à laquelle on appliquera le théorème de Gauss.

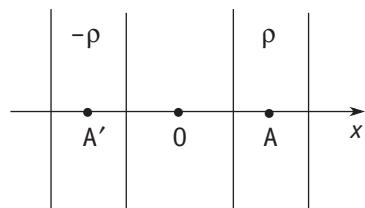
3. Solution

Le champ total d'une distribution de charges est la somme vectorielle des champs élémentaires créés par chacune des charges de la distribution (« théorème de superposition »).

- Désignons par I (resp. par II) la distribution de charges associée à la densité ρ (respect. $-\rho$).

D'après le théorème de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_I(M) + \vec{E}_{II}(M).$$



De plus, la distribution I étant centrée en $x = a$ et la distribution II en $x = -a$, les deux champs \vec{E}_I et \vec{E}_{II} se déduisent l'un de l'autre par un changement de signe ($\rho \rightarrow -\rho$) et une translation de $-2a$ selon \vec{u}_x :

$$\vec{E}_{II}(x, y, z) = -\vec{E}_I(x + 2a, y, z).$$

Remarquons également que tout plan passant par le point $M(x, y, z)$ et contenant la direction \vec{u}_x est un plan de symétrie, ce qui implique que \vec{E} est porté par \vec{u}_x : $\vec{E} = E \cdot \vec{u}_x$ (symétrie de révolution autour de l'axe $[M, \vec{u}_x]$).

L'invariance de la distribution de charges dans toute translation selon \vec{u}_y ou \vec{u}_z implique la même invariance pour le champ \vec{E} : $\vec{E}(x, y, z) = E(x) \cdot \vec{u}_x$.

Enfin, le plan $x = 0$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges (distribution inchangée si l'on effectue cette symétrie et le changement de signe $\rho \rightarrow -\rho$).

Si on prend deux points $M(x, y, z)$

et $M'(-x, y, z)$, le champ $\vec{E}(M')$ est l'opposé du symétrique du champ $\vec{E}(M)$, soit ici $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$ et la fonction $E(x)$ est une fonction paire.

• Déterminons maintenant le champ $\vec{E}_I = E_I(x) \vec{u}_x$.

Prenons une nouvelle origine (des abscisses X) en A, soit :

$$\vec{E}_I = E_I(X) \vec{u}_x.$$

Le plan yAz est plan de symétrie par la distribution I de telle sorte que :

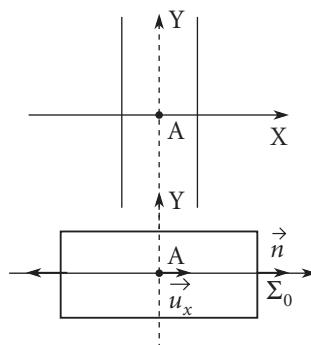
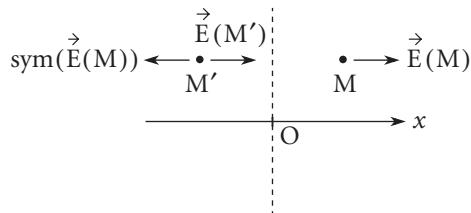
$$E_I(-X) = -E_I(X).$$

Il reste à appliquer le théorème de Gauss à un cylindre de génératrices parallèles à AX et dont les faces d'aire Σ_0 se trouvent dans les plans X ($X > 0$) et $-X$:

$$\oint \vec{E}_I \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \oint \vec{E}_I \cdot d\vec{\Sigma} &= E(X)\Sigma_0 - E(-X)\Sigma_0 \\ &= 2E(X)\Sigma_0, \text{ d'où :} \end{aligned}$$

$$E_I(X) = \frac{Q^{\text{int}}}{2\epsilon_0\Sigma_0}.$$



POINT MÉTHODE

Pour utiliser le théorème de Gauss dans le calcul d'un champ, il faut d'abord choisir une surface pour laquelle on est capable de calculer le flux qui la traverse en fonction de la valeur du champ en un point donné.

Deux cas sont alors possibles :

$$- 1^{\text{er}} \text{ cas : } X > \frac{e}{2} \Rightarrow Q^{\text{int}} = \rho \Sigma_0 e \text{ et } E_I(X > 0) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0};$$

$$- 2^{\text{e}} \text{ cas : } 0 < X < \frac{e}{2} \Rightarrow Q^{\text{int}} = \rho \Sigma_0 2X \text{ et } E_I(X > 0) = \frac{\rho X}{\epsilon_0}.$$

On remarque que le champ est uniforme d'une part pour $X > \frac{e}{2}$ et d'autre part pour $X < -\frac{e}{2}$ et qu'il y a bien entendu continuité de \vec{E}_I (charge volumique de valeur bornée).

• Revenons alors à la distribution proposée dans l'énoncé et intéressons-nous tout d'abord aux domaines extérieurs aux distributions de charges :

a. $x \geq a + \frac{e}{2}$: $\vec{E}_I = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$ et $\vec{E}_{II} = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

b. $x \leq -a - \frac{e}{2}$: la conclusion est la même et $\vec{E} = \vec{0}$.

c. $-a + \frac{e}{2} \leq x \leq a - \frac{e}{2}$: $\vec{E}_I = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$ et $\vec{E}_{II} = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$

d'où $\vec{E} = -\frac{\rho e}{\epsilon_0} \vec{u}_x$.

Plaçons-nous maintenant à l'intérieur des distributions :

d. $a - \frac{e}{2} \leq x \leq a + \frac{e}{2}$: $\vec{E}_I = \frac{\rho}{\epsilon_0} X \vec{u}_x = \frac{\rho}{\epsilon_0} (x - a) \vec{u}_x$
 $\vec{E}_{II} = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \left(x - a - \frac{e}{2} \right) \vec{u}_x$.

On a bien $\vec{E}\left(x = a + \frac{e}{2}\right) = \vec{0}$ et $\vec{E}\left(x = a - \frac{e}{2}\right) = -\frac{\rho e}{\epsilon_0} \vec{u}_x$.

e. $-a - \frac{e}{2} \leq x \leq -a + \frac{e}{2}$: $\vec{E}_I = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$ et $\vec{E}_{II} = -\frac{\rho X'}{\epsilon_0} \vec{u}_x$

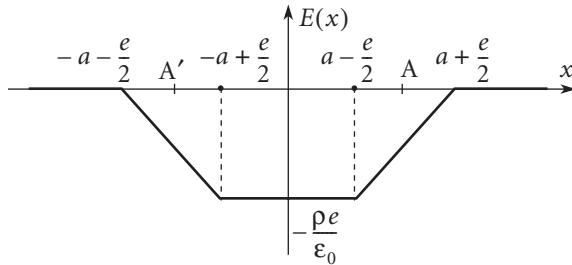
avec ici $X' = x + a$, soit $\vec{E}_{II} = -\left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot (x + a) \vec{u}_x\right)$

d'où $\vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \left(x + a + \frac{e}{2} \right) \vec{u}_x$.

Là aussi les relations de passage sont bien vérifiées puisque l'on a :

$$\vec{E}\left(x = -a - \frac{e}{2}\right) = \vec{0} \text{ et } \vec{E}\left(x = -a + \frac{e}{2}\right) = -\frac{\rho e}{\epsilon_0} \vec{u}_x.$$

D'où le graphe donnant $E(x)$ ($\vec{E} = E(x) \vec{u}_x$) :



- La fonction potentiel s'en déduit aisément à partir de la relation $\frac{dV}{dx} = -E(x)$.
($\vec{E} = -\nabla V$, avec $\vec{E} = E(x) \cdot \vec{u}_x$ implique que $V = V(x)$ est fonction de la seule variable x .)

Commentaires

Notons qu'il ne faut pas espérer déterminer une fonction $V(x)$ telle que $V \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$: ici la distribution de charges s'étend jusqu'à l'infini (avec une densité $\pm\rho$ qui ne tend pas vers zéro).

Par contre, la fonction $E(x)$ étant paire, la fonction $V(x)$ sera impaire, si on fait le choix de $V(0) = 0$...

Il vient alors :

$$-a + \frac{e}{2} \leq x \leq a - \frac{e}{2} : V(x) = \frac{\rho e}{\epsilon_0} x \quad (\text{choix de } V(0) = 0);$$

$$a - \frac{e}{2} \leq x \leq a + \frac{e}{2} : V(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \left(x - a - \frac{e}{2}\right)^2 + k : \text{la constante } k \text{ sera déterminée par la continuité du potentiel en } x = a - \frac{e}{2}; \text{ soit :}$$

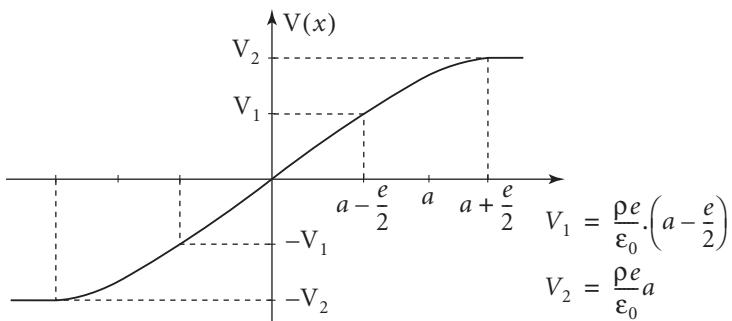
$$\frac{\rho e}{\epsilon_0} \left(a - \frac{e}{2}\right) = k - \frac{\rho}{2\epsilon_0} e^2 \Rightarrow k = \frac{\rho e a}{\epsilon_0}$$

$$\text{d'où} \quad V(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \left(x - a - \frac{e}{2}\right)^2 + \frac{\rho e a}{\epsilon_0};$$

$x \geq a + \frac{e}{2}$: $E(x) = 0$ et $V(x) = \text{constante} = V\left(a + \frac{e}{2}\right)$, soit par continuité :

$$V(x) = +\frac{\rho e}{\epsilon_0} a \quad \text{et le potentiel reste borné à l'infini.}$$

D'où le graphe :



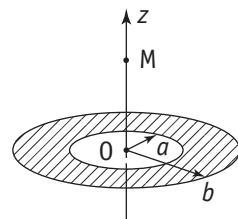
702 Couronne plane chargée

Sur le plan Oxy , on considère une distribution de charges de surface, à répartition uniforme (densité σ), comprise entre les cercles de centre O et de rayons a et b ($b > a$).

Soit M un point de l'axe Oz perpendiculaire au plan de charges.

1. a. On désigne par $V(z)$ la fonction potentiel donnant le potentiel $V(M)$ en tout point M de l'axe Oz . Montrer que l'on a :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2}].$$



En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ sur cet axe. On notera que l'on a $\vec{E}(z) = E(z)\vec{u}_z$.

b. Représenter le graphe $z \rightarrow E(z)$ à b fixé et pour différentes valeurs de a . (On pourra prendre $a = \eta b$ avec $\eta = \{0 ; 0,02 ; 0,1 ; 0,2\}$.)

Commenter les résultats obtenus.

2. Retrouver l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ par un calcul direct.

1. Ce qu'il faut savoir

- Potentiel et champ associés à une charge ponctuelle.
- Relation entre potentiel et champ : $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$.
- Règles de symétrie.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. La distribution de charges étant d'extension finie, le calcul intégral du potentiel $V(M)$ ne pose pas de problèmes particuliers. Il reste à noter que tous les éléments du plan xOy situés à la même distance de O contribuent de la même façon à $V(M)$. On va donc décomposer le système de charges en couronnes élémentaires de rayon moyen r et de largeur dr : une simple intégration suffira. Le calcul de $\vec{E}(M)$ sur l'axe Oz est immédiat en remarquant que l'on a de façon générale $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V(M)$ avec ici, pour des raisons de symétrie évidentes, $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$, soit $\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z$.

1. b. On pourra envisager les cas limites :

- $|z| \gg b \dots$
- $a = 0$ (disque uniformément chargé de rayon b) et $|z| \rightarrow 0 \dots$

2. Le champ résultant devant être porté par l'axe Oz , il suffit de projeter chaque contribution élémentaire sur cet axe.

3. Solution

1. a. Considérons les charges situées sur la surface élémentaire délimitée par les cercles de rayon r et $r + dr$:

$$a < r < r + dr < b.$$

Toutes ces charges contribuent de la même façon au potentiel $V(M)$:

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q}{PM} \quad \text{avec } PM = \sqrt{r^2 + z^2}$$

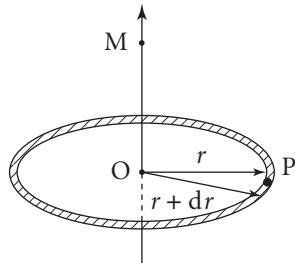
$$\text{et } \delta q = \sigma \delta \Sigma = \sigma \delta \Sigma = \sigma 2\pi r dr.$$

$$\text{D'où } dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\text{et } V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_a^b d[\sqrt{r^2 + z^2}].$$

Soit

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2}] \quad (1)$$



Pour le calcul du champ électrostatique en M , il suffit de remarquer que l'axe OM étant un axe de symétrie de révolution, le champ $\vec{E}(M)$ est porté par cet axe. On peut écrire en effet :

$$\vec{E}(M) = E_z \vec{u}_z + \vec{E}_\perp \quad (\perp \equiv \text{perpendiculaire à l'axe})$$

et l'invariance du système par rotation (d'un angle arbitraire) par rapport à l'axe Oz implique nécessairement que $\vec{E}_\perp = \vec{0}$.

D'où

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z.$$

Or

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}V, \text{ soit ici : } \vec{E}(M) = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z$$

et

$$E(z) = -\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right].$$

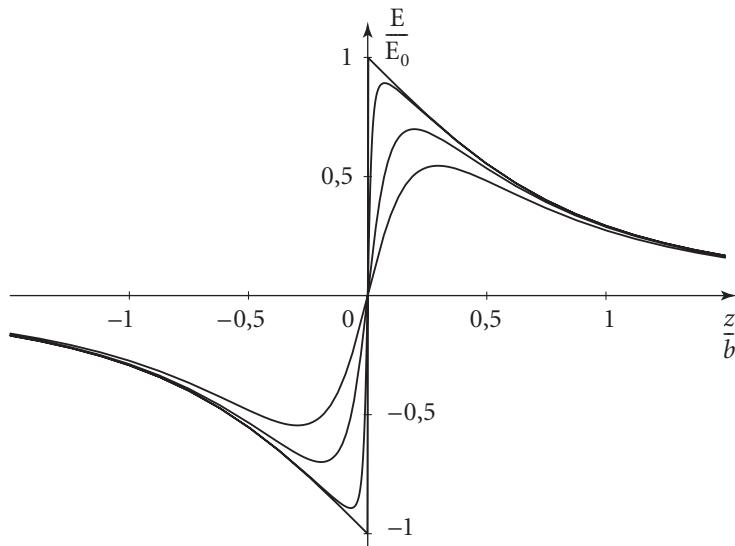
Soit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] \vec{u}_z \quad (2)$$

1. b. On a ainsi $\vec{E}(z) = E(z) \vec{u}_z$ avec $E(-z) = -E(z)$.

$$\text{Posons } E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow E(z) = E_0 \left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right].$$

On a représenté ci-dessous les graphes de $\frac{z}{b} \rightarrow E(z)$ pour une valeur de b fixée et pour différentes valeurs du rapport $\frac{a}{b}$ $\{0 ; 0,02 ; 0,1 ; 0,2\}$.



Commentaires

- Quand $z \rightarrow \infty$ ($z \gg b$), le système doit se comporter asymptotiquement comme une charge ponctuelle $Q = \pi(b^2 - a^2)\sigma$. Ainsi, les fonctions $V(z)$ et $E(z)$ doivent être équivalentes à :

$$V(z) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|z|} = \frac{(b^2 - a^2)\sigma}{4\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|z|}$$

$$E(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^3} |z|.$$

Vérifions-le :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[|z| \left(1 + \frac{b^2}{z^2} \right)^{1/2} - |z| \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{1/2} \right]$$

d'où

$$V(z) \# \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| \frac{1}{2z^2} (b^2 - a^2)$$

soit

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi(b^2 - a^2)}{|z|}.$$

De même

$$E(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0|z|} \left[\left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{b^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right]$$

et

$$E(z) \# \frac{\sigma z}{2\epsilon_0|z|} \left[\frac{1}{2z^2} (b^2 - a^2) \right].$$

Soit encore

$$\vec{E}(z) \# \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi(b^2 - a^2)|z|}{z^2} \vec{u}_z$$

On retrouve bien les résultats attendus.

- Une discontinuité du champ \vec{E} apparaît pour $a = 0$. Le système se réduit alors à un disque uniformément chargé de rayon b . La relation (2) donne alors :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] \vec{u}_z$$

soit $\vec{E}(0^+) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$ et $\vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad (3)$

Ces résultats sont satisfaisants car ils se confondent avec ceux d'un plan infini, uniformément chargé avec une densité σ . En effet, pour $a = 0$, fixer z et faire tendre b vers l'infini revient au même que de fixer b et faire tendre z vers 0 :

Vérifions-le en étudiant rapidement le champ électrostatique créé par le plan infini (σ uniforme).

– Le plan xOy est plan de symétrie d'où :

$$\vec{E}(M') = \text{sym}[\vec{E}(M)] \quad (\text{symétrie prise par rapport à } xOy)$$

– Tout plan contenant la droite $[M, \vec{u}_z]$ est plan de symétrie ; \vec{E} vecteur polaire appartient à ces plans et donc à leur intersection. Il est ainsi porté par $\vec{u}_z \Rightarrow \vec{E}(M) = E(M) \vec{u}_z$.

– Les deux résultats précédents conduisent à :

$$\vec{E}(z > 0) = E_0 \vec{u}_z \text{ et } \vec{E}(z < 0) = -E_0 \vec{u}_z.$$

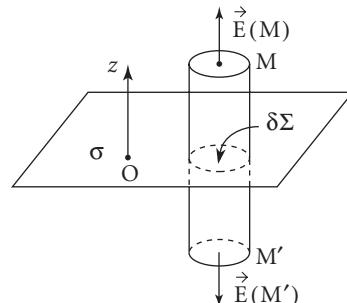
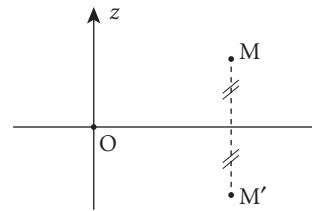
– Enfin appliquons le théorème de Gauss :

$$E_0 \delta\Sigma + E_0 \delta\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \delta\Sigma$$

soit $E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

d'où $\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$ et $\vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$.

Ces résultats sont bien identiques à (3).



POINT MÉTHODE

Problème des distributions infinies de charges :

On pourrait s'étonner que le passage à la limite ($a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow +\infty$) puisse se faire sur l'expression (2) et pas sur (1), c'est-à-dire sur le champ $\vec{E}(M)$ et pas sur le potentiel $V(M)$.

En effet, pour $a = 0$ et z fini, on obtient à partir de (1) et (2) :

$$\begin{cases} \lim_{b \rightarrow +\infty} V(z) = +\infty & (\text{pour } \sigma > 0) \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 |z|} \vec{u}_z \end{cases}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler qu'une expression du type $V(M) = \iiint_D \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q(P)}{|PM|}$ n'a de sens que si le domaine de charges D est d'extension finie, ce qui permet notamment d'imposer le choix du potentiel nul à l'infini.

Il est donc utile de se rappeler qu'appliquer un tel résultat à des distributions infinies de charges est en général erroné : les intégrales considérées divergent.

Illustration :

Fil droit infini uniformément chargé avec une densité linéique λ :

- L'intégrale $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}$ n'est pas définie ;

- Par contre, le champ \vec{E} peut être obtenu aisément à l'aide du théorème de Gauss :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad (\text{résultat classique}) ;$$

- Or $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$, avec ici $V = V(r)$ du fait de la symétrie de révolution par rapport à Oz, soit $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$ ce qui donne : $\frac{dV}{dr} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ et $V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$ en prenant une origine arbitraire à la distance $r = a$ du fil.

On retrouve bien que le potentiel diverge à l'infini, et la condition $V \rightarrow 0$ à l'infini est ici inapplicable. Il diverge également en $r = 0$ ce qui est dû à la modélisation (fil sans dimension transversale).

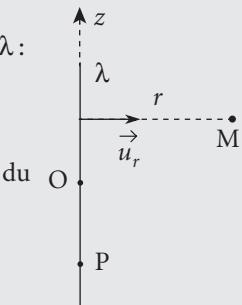
- On peut vérifier que l'expression intégrale $\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{PM}}{PM^3} dz$ redonne l'expression correcte du champ électrostatique.

$$\text{On a } \vec{E} = \frac{\lambda \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{PM} \cdot \vec{u}_r}{PM^3} dz \quad (\text{car } \vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r).$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{rdz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\vec{PM} \cdot \vec{u}_r = r)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} \quad \left(\text{avec } u = \frac{z}{r} \right)$$

$$\text{et } \vec{E} = \frac{\lambda \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{u}{(1 + u^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$



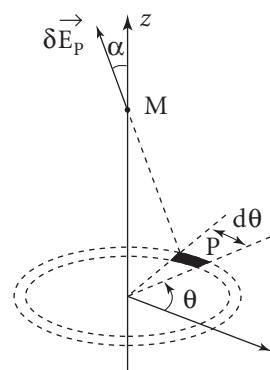
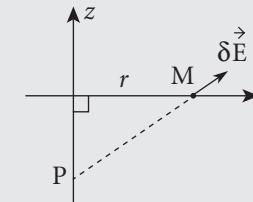
2. Calcul direct du champ $\vec{E}(M)$: considérons à cet effet la charge δq comprise entre les cercles de rayon r et $r + dr$ et associée à un secteur angulaire de mesure $d\theta$:

$$\delta q = \sigma \delta \Sigma = \sigma (rd\theta)(dr)$$

$$\delta q = \sigma r dr d\theta.$$

Cette charge crée en M un champ élémentaire $\vec{\delta E}_P$ tel que :

$$\vec{\delta E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q \vec{PM}}{PM^3}.$$



Comme il a déjà été signalé, le champ résultant doit être porté par l'axe Oz. On a donc $\vec{E}(M) = E\vec{u}_z$ et :

$$\delta E = \delta \vec{E}_p \cdot \vec{u}_z = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u}_z}{PM^3} = \frac{\delta q \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 PM^2}.$$

D'où $\delta E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\alpha r dr d\theta}{(r^2 + z^2)}$ car $PM^2 = r^2 + z^2$.

Soit après une intégration immédiate selon $\theta \left(\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \right)$:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{\cos\alpha r dr}{(r^2 + z^2)}.$$

Or $\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Rightarrow E = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$

Posons $u = r^2$, il vient : $E = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_{a^2}^{b^2} \frac{du}{(u + z^2)^{3/2}}$

soit $E = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \cdot \left[-2(u + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_{a^2}^{b^2}.$

Finalement $\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] \vec{u}_z$, comme il se doit.



703

Demi-espace chargé

1. On considère un plan infini xOy possédant une charge de surface uniformément répartie avec une densité σ .

Déterminer le champ électrostatique créé de part et d'autre du plan.

En déduire la fonction potentiel associée vérifiant $V = 0$ sur le plan.

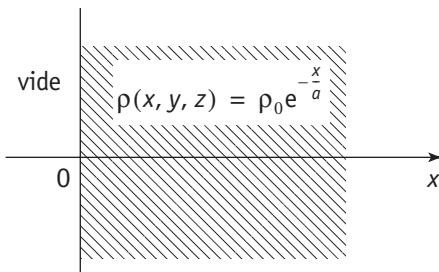
Donner les graphes représentant $E(x)$ et $V(x)$.

2. Le demi-espace $x > 0$ est caractérisé par une distribution volumique de charges de densité $\rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-\frac{x}{a}}$.

La région $x < 0$ est vide de charges.

Déterminer le potentiel et le champ en tout point de l'espace et tracer les graphes associés. Commenter.

On prendra $V(0) = 0$.



■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Utilisation des symétries et des invariances de la distribution de charges.
- Théorème de Gauss.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Avant tout, il faut déterminer la direction de \vec{E} en utilisant les symétries de la distribution de charges.

Les propriétés d'invariance du système lors de certaines transformations géométriques permettent de déterminer les variables dont dépend \vec{E} .

On peut alors utiliser le théorème de Gauss.

2. On utilisera les résultats précédents en décomposant la distribution volumique de charges en tranches très minces d'épaisseur dx . \vec{E} s'obtient en sommant les contributions des différentes tranches et en visualisant bien la position de ces tranches par rapport au point où l'on calcule \vec{E} .

■ 3. Solution

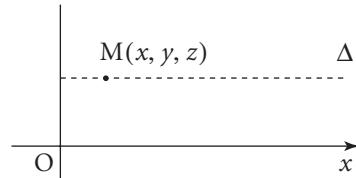
1. • Considérons le champ électrostatique au point $M(x, y, z)$. Tout plan contenant l'axe Δ (axe parallèle à Ox et passant par M) est plan de symétrie pour la distribution de charges. $\vec{E}(M)$, vecteur polaire, appartient donc à ces plans et par là même à leur intersection, c'est-à-dire à Δ .

D'où $\vec{E}(x, y, z) = E(x, y, z)\vec{u}_z$.

Ici, le système est invariant par translation selon \vec{u}_y et \vec{u}_z donc \vec{E} et V ne dépendent ni de y ni de z .

$$\vec{E} = E(x)\vec{u}_z \quad \text{et} \quad V = V(x)$$

$$\text{avec } E(x) = -\frac{dV}{dx} \text{ puisque } \vec{E} = -\vec{\text{grad}}V.$$



• De plus, le plan yOz est plan de symétrie (on peut éventuellement lui donner une petite épaisseur e avec une charge volumique ρ telle que $\rho e = \sigma$, quitte à faire tendre $e \rightarrow 0$ et $\rho \rightarrow +\infty \dots$).

Ainsi : $E(-x) = -E(x)$

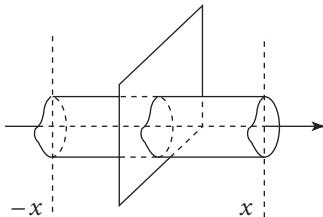
• Le système possède suffisamment de symétries pour envisager l'application du théorème de Gauss.



POINT MÉTHODE

Le théorème de Gauss ne peut s'appliquer (efficacement) que lorsque le système possède des symétries et des invariances suffisamment fortes.

- Considérons alors une surface de Gauss cylindrique dont les génératrices sont perpendiculaires au plan yOz (le cylindre est symétrique par rapport à ce plan).



Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{\delta\Sigma} = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

Or $\Sigma = \Sigma_L \cup \Sigma_x \cup \Sigma_{-x}$; Σ_x et Σ_{-x} ont la même aire, notée Σ_0 ;

et $\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{\delta\Sigma} = \iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot \vec{\delta\Sigma} + \iint_{\Sigma_x} \vec{E} \cdot \vec{\delta\Sigma} + \iint_{\Sigma_{-x}} \vec{E} \cdot \vec{\delta\Sigma}$.

La première intégrale est nulle puisqu'en tout point, le champ \vec{E} est porté par la surface ($\vec{E} \cdot \vec{\delta\Sigma} = 0$). Le champ \vec{E} non défini en $x = 0$ reste cependant borné et ne pose pas de problèmes particuliers à l'application du théorème de Gauss (par ailleurs, on pourrait toujours revenir à la modélisation $[\rho, e]$ évoquée précédemment...).

Sur Σ_x , le champ est uniforme et vaut $E(x)\vec{u}_x$ d'où :

$$\iint_{\Sigma_x} \vec{E} \cdot \vec{\delta\Sigma} = E(x)\Sigma_0 \quad (\text{normale de même sens que } \vec{u}_x).$$

De même $\iint_{\Sigma_{-x}} \vec{E} \cdot \vec{\delta\Sigma} = -E(-x)\Sigma_0 \quad (\text{normale de sens opposé à } \vec{u}_x).$

D'où $\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{\delta\Sigma} = [E(x) - E(-x)]\Sigma_0 = 2E(x)\Sigma_0$ (d'après (2)).

POINT MÉTHODE

C'est parce que l'on a montré que E , ne dépendant que de x , est le même en tout point de Σ que l'on peut sortir $E(x)$ de l'intégrale ; c'est une constante vis-à-vis de cette intégration.

Or $Q^{\text{int}} = \sigma\Sigma_0$ et le théorème de Gauss s'écrit ici :

$$2E(x)\Sigma_0 = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma\Sigma_0 \Rightarrow E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Soit $\vec{E}(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_x$

- Quant au potentiel $V(x)$, il s'obtient facilement à partir de la relation $\frac{dV}{dx} = -E(x)$

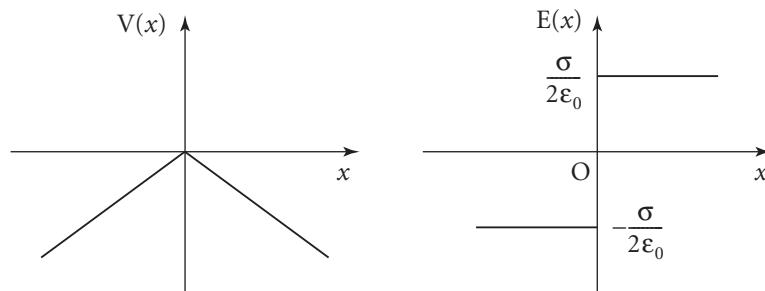
d'où avec $V(0) = 0$:

$$V(x > 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x \quad \text{et} \quad V(x < 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x.$$

Soit en regroupant ces résultats

$$V(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|$$

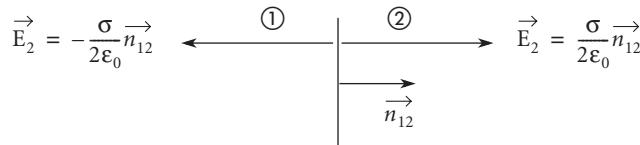
Donnons une représentation graphique de $E(x)$ et $V(x)$:



Commentaires

La traversée de la nappe surfacique de charges s'accompagne d'une discontinuité du champ :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}.$$



Cette discontinuité n'est en fait qu'une limitation liée au modèle surfacique.

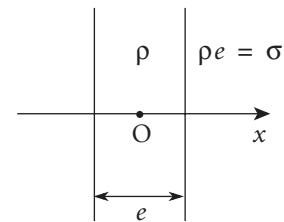
On peut concevoir ce système comme la limite d'une plaque d'épaisseur e et présentant une charge volumique ρ .

Pour les mêmes raisons de symétrie, on a $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$, avec $E(-x) = -E(x)$.

Et avec le théorème de Gauss :

$$x > \frac{e}{2} : \Sigma_0(E(x) - E(-x)) = \frac{1}{\varepsilon_0} \Sigma_0 \rho e \Rightarrow E(x) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0};$$

$$0 < x < \frac{e}{2} : \Sigma_0(E(x) - E(-x)) = \frac{1}{\varepsilon_0} \Sigma_0 \rho 2x \Rightarrow E(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}.$$



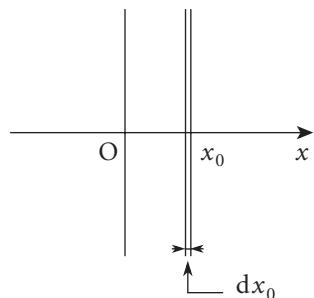
2. Remarquons tout d'abord que la distribution de charges ne dépendant que de x , les plans passant par $M(x, y, z)$ et contenant Δ parallèle à \vec{u}_x (cf. 1.) restent des plans de symétrie. Il en résulte que l'on a toujours : $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$ le système restant invariant par translation selon Oy et Oz .

Cependant, nous n'avons plus ici l'invariance du système par symétrie par rapport au plan yOz .

- Soit une tranche centrée en $x_0 > 0$ d'épaisseur dx_0 infiniment faible : on peut la considérer comme étant équivalente à une nappe surfacique de densité $\delta\sigma = \rho(x_0)dx_0$. Elle crée alors les champs élémentaires (se reporter à la première question) :

$$x > x_0 : \vec{\delta E} = \frac{\delta\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = \frac{\rho(x_0)dx_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \quad (1)$$

$$x < x_0 : \vec{\delta E} = -\frac{\delta\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = -\frac{\rho(x_0)dx_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \quad (2)$$



Nous pouvons en déduire le champ total en décomposant le système en tranches d'épaisseur dx_0 . Il faut alors distinguer deux cas.

POINT MÉTHODE

Il est important maintenant de visualiser la position du point où l'on cherche le champ par rapport aux tranches afin de sommer convenablement les contributions envisagées.

a. $x < 0$: toutes les tranches donnent des contributions de même sens (x_0 positif est bien supérieur à x), d'où :

$$E(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{\rho(x_0)dx_0}{2\epsilon_0} dx \quad (\text{avec } \vec{E}(x) = E(x)\vec{u}_x).$$

$$\text{Soit encore : } E(x) = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x_0}{a}} dx = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[-ae^{-\frac{x_0}{a}} \right]_0^{\infty}$$

$$\boxed{\vec{E}(x < 0) = -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{u}_x}$$

b. $x > 0$: il faut distinguer les tranches situées en $x_0 < x$ qui contribuent à $\vec{E}(x)$ selon l'expression (1) des tranches situées en $x_0 > x$ pour lesquelles la contribution est donnée par (2). Soit :

$$E(x) = \int_0^x \frac{\rho(x_0)dx_0}{2\epsilon_0} - \int_x^{+\infty} \frac{\rho(x_0)dx_0}{2\epsilon_0}$$

$$\text{et } E(x) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[-ae^{-\frac{x_0}{a}} \right]_0^x - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[-ae^{-\frac{x_0}{a}} \right]_x^{+\infty}$$

$$\text{d'où } E(x) = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \left[\left(1 - e^{-\frac{x}{a}} \right) - \left(0 + e^{-\frac{x}{a}} \right) \right]$$

$$\boxed{\vec{E}(x > 0) = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \left(1 - 2e^{-\frac{x}{a}} \right) \vec{u}_x}$$

- Le calcul du potentiel s'effectue selon $\frac{dV}{dx} = -E(x)$:

– Pour $x < 0$, le champ est uniforme et $V(x)$ est une fonction affine de x , c'est-à-dire :

$$V(x < 0) = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} x$$

en prenant $V(0) = 0$:

$$\text{– Pour } x > 0: \frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \left(1 - 2e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

$$\text{Soit } V(x) = -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \left[x + 2ae^{-\frac{x}{a}} + C\right].$$

POINT MÉTHODE

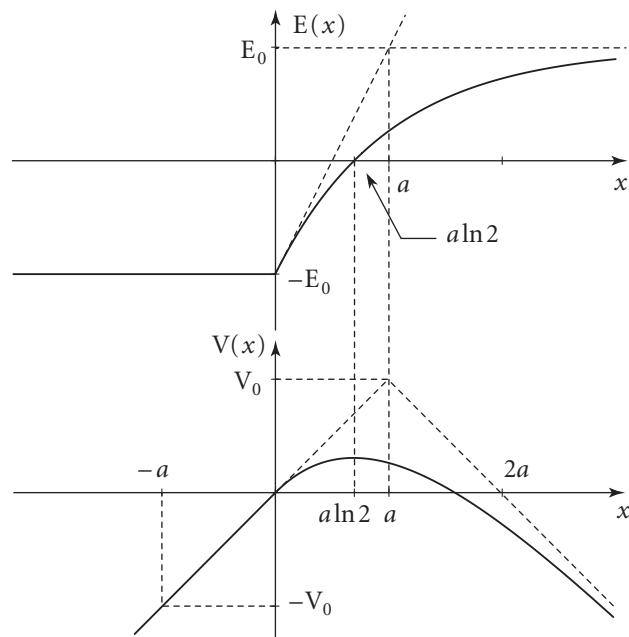
La constante C se détermine en assurant la continuité du potentiel en $x = 0$, la distribution de charges étant volumique.

D'où $V(0) = 0 = -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} [2a + C]$ et $C = -2a$.

Finalement :

$$V(x > 0) = -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \left[x - 2a \left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]$$

D'où les graphes donnant $E(x)$ et $V(x)$ avec $E_0 = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}$ et $V_0 = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0}$:



Commentaires

- Dans cet exercice, la distribution de charges tend bien vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Ce n'est évidemment pas une raison pour conclure qu'il en est de même du champ électrostatique ($\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}$). Il serait également erroné de considérer que le champ tend vers zéro quand $x \rightarrow -\infty$ sous prétexte que toutes les distances (des charges au point où l'on calcule \vec{E}) tendent vers l'infini : le système de charges est lui-même infini.
- On a établi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}$ et $E(x) = -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}$. En fait, ces résultats étaient prévisibles puisque $\rho_0 a$ représente la charge totale contenue dans un cylindre d'axe parallèle à Ox et de section de base de surface unité.

$$Q = \int_0^\infty \rho(x) dx \cdot 1 = \rho_0 \int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}} dx = \rho_0 a.$$

Pour ce qui est des points à l'infini, du côté des x positifs, et des points situés en $x < 0$, le système de charges se comporte comme une simple plaque perpendiculaire à Ox et possédant une charge surfacique $\sigma = \rho_0 a$ (on peut regrouper les tranches d'épaisseur dx_0).

- Dans le cas où le système proposé représenterait ce qui se passe « localement » à la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique, il nous faudrait imposer :

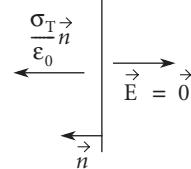
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = 0 \text{ (le champ est nul à l'intérieur du conducteur).}$$

Il suffit alors de décaler les expressions des champs établies au 2. de la quantité $\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}$.

Ainsi, on aurait :

$$\vec{E}(x < 0) = \left(-\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \right) \vec{u}_x = -\frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} \vec{u}_x.$$

$$\text{Soit en notant } \sigma_T = \rho_0 a \Rightarrow \boxed{\vec{E}(x < 0) = \frac{\sigma_T}{\epsilon_0} \vec{n}} \quad (\vec{n} = -\vec{u}_x).$$

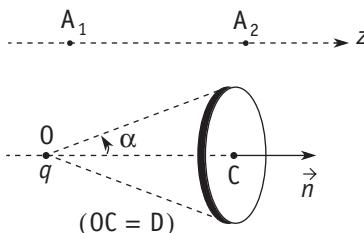


Résultat classique connu sous le nom de loi de Coulomb (cours de deuxième année).

704

Lignes de champ

Sur un axe Oz sont placées deux charges ponctuelles q_1 en A_1 et q_2 en A_2 .



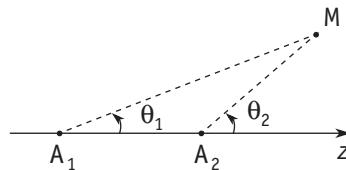
1. Questions préliminaires :

a. Soit une charge q placée au point O de l'axe OC d'un disque \mathcal{D} . Le point O et le bord du disque définissent un cône de demi-angle au sommet α . Calculer le flux ϕ , à travers le disque, du champ électrostatique \vec{E} créé par la charge q .

On exprimera ϕ en fonction des grandeurs q , α et ϵ_0 (permittivité du vide).

b. On revient au système (q_1, q_2) et on se place dans le cas où $q_1 + q_2 \neq 0$. Montrer qu'à des distances « grandes » de A_1 et A_2 , ce système se comporte – à la limite – comme une charge unique $Q = q_1 + q_2$ placée au barycentre G des points A_1 et A_2 , affectés des coefficients q_1 et q_2 .

2. On cherche à déterminer le réseau des lignes de champ. À cet effet, on repère tout point M du plan de figure par les angles $\theta_1 = (\overrightarrow{A_1z}, \overrightarrow{A_1M})$ et $\theta_2 = (\overrightarrow{A_2z}, \overrightarrow{A_2M})$. On se limitera au demi-plan supérieur, θ_1 et θ_2 pouvant varier sur l'intervalle $(0 ; \pi)$.



Déterminer l'équation d'une ligne de champ de \vec{E} en fonction de q_1 , q_2 , θ_1 et θ_2 .

On pourra envisager séparément les domaines du plan $z > z_{A_2}$, $z_{A_1} < z < z_{A_2}$ et $z < z_{A_1}$.

3. On suppose dans cette question que l'on a $q_1 q_2 > 0$.

a. Est-il possible qu'une ligne de champ joigne les points A_2 et A_1 ? Définir un point particulier I du segment $[A_1 A_2]$.

b. Donner une caractéristique des lignes de champ à l'infini.

Représenter le réseau de lignes de champ pour $q_2 = 4q_1$ et $q_2 > 0$.

4. On prend maintenant $q_1 q_2 < 0$ et $q_2 > 0$. Montrer que les lignes de champ partant de A_2 soit vont à l'infini, soit rejoignent A_1 . Déterminer la valeur limite α_{2l} de l'angle α_2 .

Donner, pour $q_2 = -2q_1$, la valeur de α_{2l} et tracer le réseau de lignes de champ.

Commenter : on isolera notamment le cas où $q_1 + q_2 = 0$.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Flux du champ électrostatique.
- Ligne de champ – Tube de champ.

Outil mathématique

- Notion d'angle solide.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. Un calcul intégral est envisageable si l'on veut éviter la notion d'angle solide. Cette dernière conduit cependant beaucoup plus rapidement au résultat demandé.

Étudier un système de charges en des points très éloignés du domaine dans lequel elles sont confinées revient à faire un **développement multipolaire**. Le premier terme correspond à la charge totale $Q = q_1 + q_2$, et le deuxième est du type moment dipolaire : le choix du point G barycentre des points $A_1(q_1)$ et $A_2(q_2)$ s'impose naturellement car le moment dipolaire, défini selon $\vec{P} = q_1 \overrightarrow{GA}_1 + q_2 \overrightarrow{GA}_2$, prend alors une valeur nulle ($q_1 \overrightarrow{GA}_1 + q_2 \overrightarrow{GA}_2 = \vec{0}$ est une propriété du barycentre).

2. Caractériser une ligne de champ revient ici à caractériser le tube de champ obtenu par rotation de cette courbe autour de l'axe A_1A_2 . On écrira alors que le flux à travers toute section du tube est une constante dans chaque domaine vide de charges. Cette constante s'exprimera simplement à l'aide de q_1, q_2, θ_1 et θ_2 (utiliser à cet effet l'expression établie au 1.)

3. et 4. Dans les cas particuliers envisagés par la suite, on aura à examiner deux possibilités :

- lignes de champ joignant A_1 et A_2 , ce qui doit être compatible avec l'équation établie précédemment ;
- lignes de champ de type $A_2 \rightarrow \infty$, alors on doit avoir θ_1 et θ_2 qui tendent vers une valeur commune θ_L (d'après le 1. b.) : il reste à discuter l'existence de θ_L .

Solution

1. a. Le flux élémentaire à travers l'élément de surface $\delta\Sigma$ est donné par :

$$\delta\phi = \vec{E} \cdot \vec{\delta\Sigma} = \vec{E} \cdot \vec{n} \delta\Sigma = E_z \delta\Sigma.$$

$$\text{Or } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}, \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{OM} \text{ et } r = OM.$$

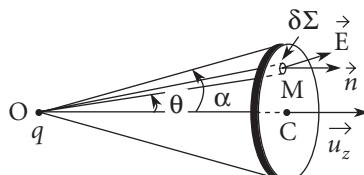
$$\text{D'où : } E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r \cdot \vec{u}_z}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} D.$$

$$\text{De plus : } \cos\theta = \frac{D}{r} \Rightarrow E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D^3} \cos^3\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \cos^3\theta.$$

$$\text{Et } \delta\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \cos^3\theta \delta\Sigma.$$

Prenons en compte la contribution des éléments de surface situés sur la couronne comprise entre $\rho = CM$ et $\rho + d\rho$ (c'est-à-dire pour des angles de l'intervalle $[\theta ; \theta + d\theta]$).

Dès lors : $\delta\Sigma = 2\pi\rho d\rho$, avec $\rho = D \tan\theta$.



$$\text{D'où : } \delta\Sigma = 2\pi D^2 \tan\theta d(\tan\theta) = 2\pi D^2 \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

$$\text{Finalement : } \delta\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \cos^3\theta \cdot 2\pi D^2 \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta$$

$$\delta\phi = \frac{q}{2\epsilon_0} \sin\theta d\theta = \frac{q}{2\epsilon_0} d(-\cos\theta).$$

Et en intégrant de $\theta = 0$ à $\theta = \alpha$, il vient :

$$\boxed{\phi = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha)} \quad (1)$$

Commentaire

Il aurait été plus simple de faire intervenir la notion d'angle solide. On avait :

$$\delta\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \delta\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} \delta\Sigma.$$

Or $\frac{\vec{u} \cdot \vec{n} \delta\Sigma}{r^2}$ représente l'angle solide élémentaire défini par le point O et la surface $\delta\Sigma$.

$$\text{D'où } \delta\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \delta\Omega.$$

$$\text{Et pour le disque : } \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega.$$

$$\text{Soit avec } \Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha) \Rightarrow \phi = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha).$$

POINT MÉTHODE

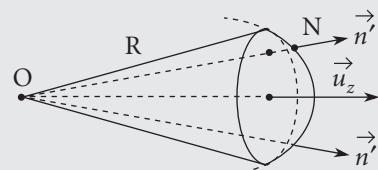
Le flux à travers le disque orienté par \vec{u}_z est le même qu'à travers la calotte sphérique de centre O s'appuyant sur le bord du disque, calotte orientée localement selon \vec{n}' (absence de charges contenues dans le volume délimité par ces deux surfaces).

Ainsi $\phi(\mathcal{D}) = \phi(\text{calotte})$.

$$\text{Or } \phi(\text{calotte}) = \iint \vec{E}(N) \cdot \vec{n}' \delta\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Sigma_{\text{calotte}}$$

$$\text{avec } \Sigma_{\text{calotte}} = \Sigma_{\text{sphère}} \cdot \frac{\Omega}{4\pi} = 4\pi R^2 \cdot \frac{2\pi(1 - \cos\alpha)}{4\pi} = 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha).$$

$$\text{On obtient bien : } \phi(\mathcal{D}) = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha).$$



1. b. Le champ électrostatique au point M est donné par l'expression :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[q_1 \frac{\vec{A}_1 M}{A_1 M^3} + q_2 \frac{\vec{A}_2 M}{A_2 M^3} \right].$$

Faisons intervenir le point G barycentre des points A_1 et A_2 affectés des coefficients q_1 et q_2 (cela suppose donc $q_1 + q_2 \neq 0$). G est défini selon :

$$q_1 \vec{GA}_1 + q_2 \vec{GA}_2 = \vec{0} \text{ ou } \vec{A}_2 G = \frac{q_1 \vec{A}_2 A_1 + q_2 \vec{0}}{q_1 + q_2}$$

G appartient au segment $[A_1 A_2]$ pour q_1 et q_2 de même signe.

$$\text{Dès lors } A_1 M^2 = (\vec{A}_1 G + \vec{GM})^2 = GM^2 + 2\vec{GM} \cdot \vec{A}_1 G + A_1 G^2$$

$$\text{et } A_1 M = GM \left[1 + 2 \frac{\vec{A}_1 G}{GM} \cdot \vec{u} + \left(\frac{A_1 G}{GM} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{GM}}{GM}.$$

D'où :

$$\frac{1}{AM^3} = \frac{1}{GM^3} \left[1 + 2\vec{u} \cdot \frac{\vec{A}_1 G}{GM} + \left(\frac{A_1 G}{GM} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Supposons maintenant le point M suffisamment éloigné de A_1 et A_2 avec :

$$GM \gg GA_1 \text{ et } GM \gg GA_2.$$

$$\text{Soit : } \frac{1}{A_1 M^3} \approx \frac{1}{GM^3} \left[1 - 3\vec{u} \cdot \frac{\vec{A}_1 G}{GM} + o\left(\frac{A_1 G}{GM}\right) \right]$$

$$\text{de même } \frac{1}{A_2 M^3} \approx \frac{1}{GM^3} \left[1 - 3\vec{u} \cdot \frac{\vec{A}_2 G}{GM} + o\left(\frac{A_2 G}{GM}\right) \right]$$

$$\text{et } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 GM^3} \left\{ q_1 (\vec{A}_1 G + \vec{GM}) \left[1 - 3\vec{u} \cdot \frac{\vec{A}_1 G}{GM} + o\left(\frac{A_1 G}{GM}\right) \right] \right. \\ \left. + q_2 (\vec{A}_2 G + \vec{GM}) \left[1 - 3\vec{u} \cdot \frac{\vec{A}_2 G}{GM} + o\left(\frac{A_2 G}{GM}\right) \right] \right\}.$$

$$\text{Soit } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 GM^3} \underbrace{[(q_1 \vec{A}_1 G + q_2 \vec{A}_2 G) + (q_1 + q_2) \vec{GM}]}_{\vec{0}} + \dots.$$

termes qui tendent vers 0 quand $GM \rightarrow \infty$

D'où

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_1 + q_2) \vec{GM}}{GM^3} \quad (2)$$

Très loin des points A_1 et A_2 ($GM \gg A_1 A_2$), le système devient équivalent – à la limite – à une charge unique égale à $Q = q_1 + q_2$ placée au point G barycentre de $A_1(q_1)$ et $A_2(q_2)$. Les lignes de champ vont donc tendre asymptotiquement vers des droites dont les prolongements passent par G .

2. Considérons séparément les espaces $z > z_{A_2}$, $z \in]z_{A_1}; z_{A_2}[$, puis $z < z_{A_1}$.

Dans chacune de ces régions, une portion MN de ligne de champ engendre par rotation autour de Oz une partie du tube de champ ne contenant aucune charge et pour laquelle le flux traversant une section est constant.

• $z > z_{A_2}$:

Le tube de champ, et par là même la courbe NM définissant la ligne de champ, est caractérisé par un flux constant à travers chaque section du tube.

Ainsi, pour tout disque tel que D_p , on aura :

$$\phi_{D_p} = \text{cste} = \phi_{D_p}(q_1) + \phi_{D_p}(q_2).$$

Et d'après ce qui précède (cf. 1. a.) :

$$\phi_{D_p}(q_1) = \frac{q_1}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta_1)$$

$$\phi_{D_p}(q_2) = \frac{q_2}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta_2).$$

$$\text{Soit : } \phi_{D_p} = \frac{q_1}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta_1) + \frac{q_2}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta_2) = \text{constante.}$$

La ligne de champ [MN] a donc pour équation en coordonnées biangulaires θ_1 et θ_2 :

$$q_1 \cos \theta_1 + q_2 \cos \theta_2 = \text{constante}$$

(3)

• $z_{A_1} < z < z_{A_2}$:

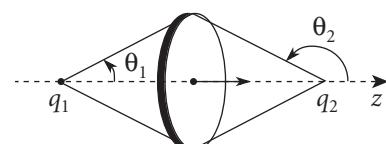
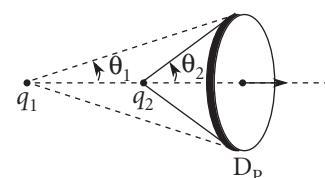
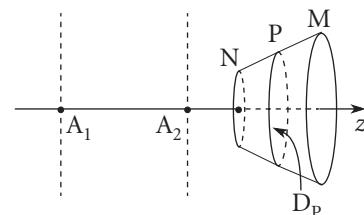
Pour le domaine compris entre les plans perpendiculaires à Gz et passant par A_1 et A_2 , on a de même :

$$\phi_{D_p} = \frac{q_1}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta_1) - \frac{q_2}{2\epsilon_0} (1 - \cos(\pi - \theta_2)).$$

$$\text{Soit : } \phi_{D_p} = \frac{q_1}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta_1) - \frac{q_2}{2\epsilon_0} (1 + \cos \theta_2).$$

Et l'équation d'une ligne de champ est donnée par $\phi_{D_p} = \text{constante}$, soit encore :

$$q_1 \cos \theta_1 + q_2 \cos \theta_2 = \text{constante.}$$

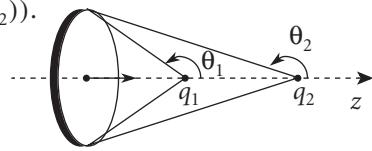


• $z < z_{A_1}$:

$$\phi_{D_p} = -\frac{q_1}{2\epsilon_0}(1 - \cos(\pi - \theta_1)) - \frac{q_2}{2\epsilon_0}(1 - \cos(\pi - \theta_2)).$$

$$\phi_{D_p} = -\frac{q_1}{2\epsilon_0}(1 + \cos\theta_1) - \frac{q_2}{2\epsilon_0}(1 + \cos\theta_2).$$

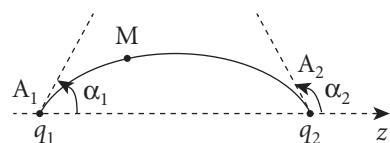
$q_1 \cos\theta_1 + q_2 \cos\theta_2 = \text{constante}$, équation caractérisant finalement une ligne de champ.



3. a. Supposons qu'une ligne de champ joigne les points A_1 et A_2 . Notons α_1 et α_2 les angles entre l'axe A_1z et les tangentes en A_1 et A_2 .

D'après 2. b., l'équation de cette ligne de champ est :

$$q_1 \cos\theta_1 + q_2 \cos\theta_2 = \text{cste.}$$



Exprimons cette constante en A_1 , où $\theta_1 = \alpha_1$ et $\theta_2 = \pi$, et en A_2 où $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \alpha_2$:

$$\text{cste} = q_1 \cos\alpha_1 + q_2 \cdot (-1) = q_1 \cdot (1) + q_2 \cos\alpha_2$$

$$\text{d'où : } q_1(1 - \cos\alpha_1) = -q_2(1 + \cos\alpha_2).$$

Les deux quantités entre parenthèses sont positives (voire nulles). En dehors de la solution $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$, cette égalité est impossible pour q_1 et q_2 de même signe.

Aucune ligne de champ ne rejoint donc les points A_1 et A_2 pour $q_1 q_2 > 0$.

• Pour $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$ et $q_1 q_2 > 0$, il existe un point I où le champ \vec{E} s'annule (cf. figure).



Ce point est défini par :

$$q_1 \frac{\overrightarrow{A_1 I}}{A_1 I^3} + q_2 \frac{\overrightarrow{A_2 I}}{A_2 I^3} = \vec{0} \Rightarrow \frac{A_2 I}{A_1 I} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}.$$

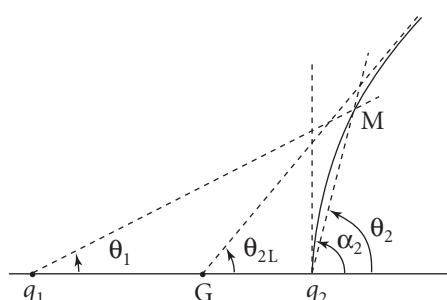
3. b. Une ligne de champ partant de q_2 ira donc à l'infini où elle tendra asymptotiquement vers une droite passant par G et faisant un angle θ_{2L} tel que :

$$q_2 \cos\alpha_2 + q_1 = (q_1 + q_2) \cos\theta_{2L}$$

$$\text{soit : } \cos\theta_{2L} = \frac{q_2 \cos\alpha_2 + q_1}{q_1 + q_2}.$$

On remarque alors que θ_{2L} variera entre les valeurs 0 (pour $\alpha_2 = 0$) et θ'_{2L} (pour $\alpha_2 \rightarrow \pi$) tel que :

$$\cos\theta'_{2L} = \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}.$$



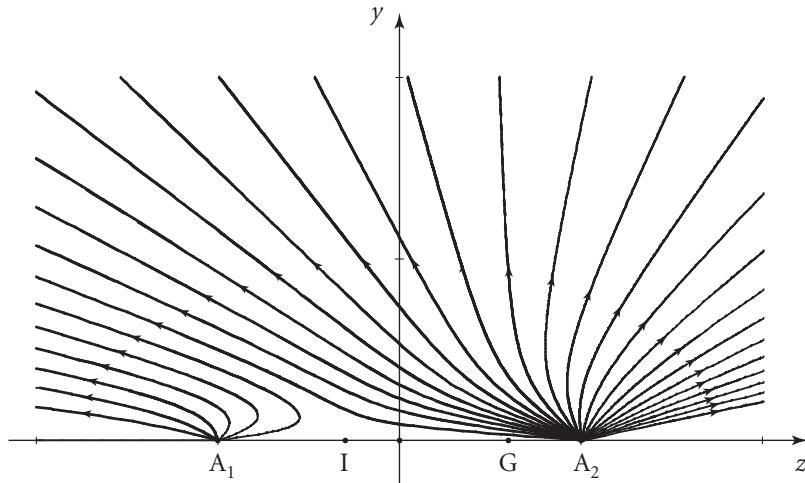
- De même, pour une ligne de champ partant de q_1 , on aura :

$$q_1 \cos \alpha_1 - q_2 = (q_1 + q_2) \cos \theta_{1L} \Rightarrow \cos \theta_{1L} = \frac{q_1 \cos \alpha_1 - q_2}{q_1 + q_2}.$$

L'angle θ_{1L} varie entre les valeurs π (pour $\alpha_1 = \pi$) et θ'_{1L} (pour $\alpha_1 \rightarrow 0$) avec

$$\cos \theta'_{1L} = \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}. \text{ On a donc } \theta'_{1L} = \theta'_{2L} = \theta_L.$$

La figure ci-dessous représente un réseau de lignes de champ pour $q_2 = 4q_1 > 0$:



$$\text{On a } \frac{A_2 I}{A_1 I} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{G A_2}{G A_1} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{4}.$$

Avec de plus, $\cos \theta_L = -0,6 \Rightarrow \theta_L \approx 127^\circ$, ce que l'on vérifiera sur la figure.

Les lignes de champ partent bien de A_1 ou de A_2 pour tendre asymptotiquement, à l'infini, vers un faisceau de droites dont les prolongements convergent en G .

4. Cette fois-ci, on suppose $q_1 q_2 < 0$, certaines lignes de champ partiront donc du point A_2 (en prenant $q_2 > 0$) pour aboutir au point A_1 (avec $q_1 < 0$), alors que d'autres partant de A_2 iront à l'infini.

- **Lignes de champ $A_2 \rightarrow \infty$** : elles tendront asymptotiquement vers une droite passant par G (barycentre de $A_2(q_2)$ et $A_1(q_1)$) : il faut alors supposer $q_1 + q_2 \neq 0$ et faisant l'angle limite θ_{2L} avec l'axe $A_1 z$ tel que :

$$(q_1 + q_2) \cos \theta_{2L} = q_1 + q_2 \cos \alpha_2.$$

Ceci suppose donc que $-1 \leq \cos \theta_{2L} \leq 1$, et en prenant $q_1 + q_2 > 0$ (ce qui ne limite pas la généralité de l'étude), il vient :

$$-q_1 - q_2 \leq q_1 + q_2 \cos \alpha_2 \leq q_1 + q_2$$

soit
$$-1 - \frac{2q_1}{q_2} \leq \cos \alpha_2 \leq 1.$$

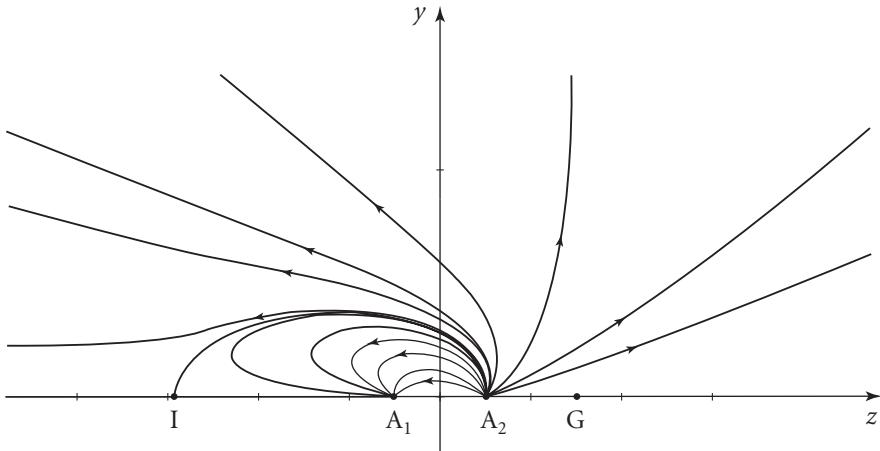
Une telle situation ne sera possible que pour :

$$0 \leq \alpha_2 \leq \text{Arcos} \left[-1 - \frac{2q_1}{q_2} \right] = \alpha_{2L}.$$

Pour $q_2 = -2q_1$, on a $\alpha_{2L} = \frac{\pi}{2}$.

■ **Lignes de champs $A_2 \rightarrow A_1$** : elles correspondront alors à $\alpha_{2L} \leq \alpha_2 \leq \pi$.

D'où le tracé des lignes de champs effectué par ordinateur ($q_2 > 0$, $q_1 < 0$ et $q_2 = -2q_1$).



On a : $\frac{\overline{A_2 I}}{\overline{A_1 I}} = \sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}} = \sqrt{2}$ et I à gauche de A_1 et A_2 ($q_2 > 0$ et $q_1 < 0$) ;

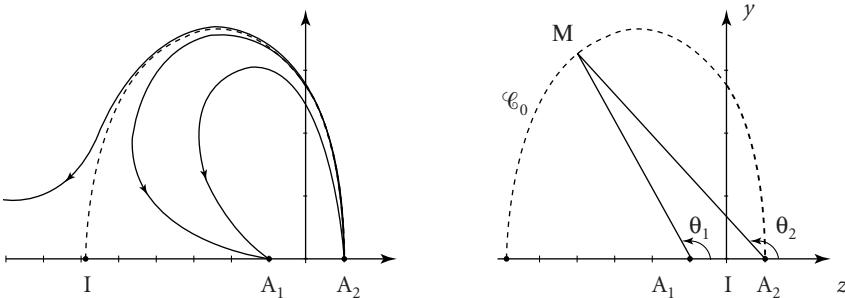
$$\frac{\overline{A_1 G}}{\overline{A_2 G}} = -\frac{q_2}{q_1} = 2 \quad (\text{A}_2 \text{ milieu du segment } [A_1 G]).$$

Commentaires

• Pour $q_2 = -2q_1$, il existe une ligne particulière correspondant à

$$\alpha_2 = \alpha_{2L} = \text{Arcos} \left(-1 - \frac{2q_1}{q_2} \right) = \text{Arcos}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Cette ligne recoupe l'axe Oz au point I.



Le point M($y_0 ; z_0$) de \mathcal{C}_0 est défini par : $\begin{cases} y_0 = z_0 \tan \theta_2 \text{ (nouvelle origine en } A_2\text{)} \\ y_0 = (z_0 + 1) \tan \theta_1 \text{ (on a pris } A_1 A_2 = 1\text{)} \end{cases}$

$$\text{d'où } \frac{z_0 + 1}{z_0} = \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} \quad (4)$$

$$\text{avec : } q_1 \cos \theta_1 + q_2 \cos \theta_2 = q_1 + q_2 \cos \alpha_{2L} \Rightarrow \cos \theta_1 - 2 \cos \theta_2 = 1 \quad (5)$$

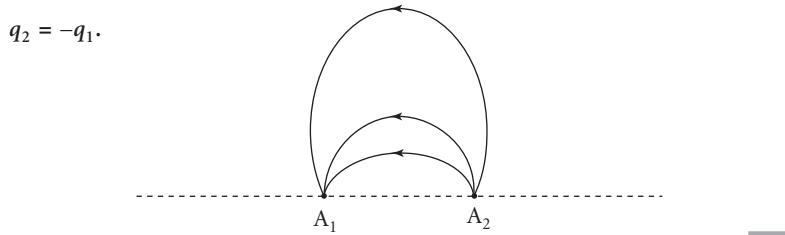
Au voisinage de I, on a $\theta_1 = \pi - \eta$ et $\theta_2 = \pi - \varepsilon$ avec ε et $\eta \ll 1$ d'où d'après (5) :

$$-\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) + 2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = 1 \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{\eta^2}{2} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\eta}{\sqrt{2}}.$$

Et avec (4) :

$\frac{z_0 + 1}{z_0} = \frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit encore $\frac{\overline{IA}_1}{\overline{IA}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui définit bien le point I où le champ \vec{E} est nul.

• Cas particulier $q_1 + q_2 = 0$. Alors toutes les lignes de champ partant de q_2 (choisie positive) arriveront en q_1 ($q_1 < 0$). Très loin des deux charges, le système est équivalent à un dipôle. On obtient donc le système de lignes de champ dessiné ci-dessous :



705

Interaction entre charges identiques

1. Deux particules identiques (masse m , charge q) sont abandonnées dans le vide, sans vitesses initiales, à une distance r_0 l'une de l'autre.

Déterminer, de deux façons différentes, les vitesses de ces deux particules lorsqu'elles seront infiniment éloignées l'une de l'autre.

2. Répondre à la même question dans le cas de trois particules identiques abandonnées sans vitesses initiales, leurs positions initiales correspondant aux sommets d'un triangle équilatéral de côté r_0 .

On ne tiendra pas compte de l'interaction gravitationnelle.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Force de Coulomb.
- Énergie potentielle d'interaction de deux charges ponctuelles.
- Énergie potentielle d'une charge soumise à un champ électrostatique extérieur.
- Loi fondamentale de la dynamique.
- Théorème de l'énergie mécanique.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. La force agissant sur chaque particule est la force d'interaction coulombienne : la relation fondamentale de la dynamique doit permettre de relier la vitesse d'une particule à sa position.

On peut aussi utiliser la conservation de l'énergie mécanique, la force coulombienne étant conservative : il faudra, au préalable, déterminer l'énergie potentielle intérieure E_p^{int} associée à l'interaction coulombienne entre les deux particules.

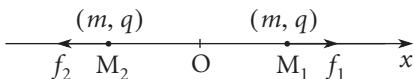
2. Le problème est analogue dans le cas de trois particules. Il sera nécessaire de généraliser l'expression de E_p^{int} .

■ 3. Solution

1. Une première méthode consiste à appliquer le principe de la dynamique à l'une des deux particules.

Prenons comme axe Ox la droite passant par les positions initiales des deux particules, l'origine O étant prise au milieu du segment de longueur r_0 .

Le point matériel M_1 (particule $[m, q]$, abscisse initiale $x_0 = \frac{r_0}{2}$) est soumis à la force $\vec{f}_1 = f_1 \cdot \vec{u}_x$ avec $f_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(M_1 M_2)^2}$.



Du fait de la symétrie, on a à chaque instant.

$$\overline{OM_1} = x(t) \text{ et } \overline{OM_2} = -x(t) \Rightarrow \overline{M_2 M_1} = 2x(t).$$

$$\text{Soit : } \vec{f}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4x^2} \vec{u}_x \quad (1)$$

L'équation du mouvement de la particule M_1 s'écrit alors :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} = \vec{f}_1 = f_1 \vec{u}_x.$$

Le mouvement s'effectue donc selon l'axe Ox et :

$$m \ddot{x} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \quad (2)$$

Multiplions l'égalité (2) par \dot{x} , puis intégrons entre l'instant initial $t=0$ où $x = x_0 = \frac{r_0}{2}$ et $\dot{x} = 0$, et un instant t quelconque :

$$\int_0^t m\ddot{x}\dot{x} dt = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_0^t \frac{\dot{x}}{x^2} dt.$$

Soit encore :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - 0 = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_{\frac{r_0}{2}}^{x(t)} \frac{dx'}{x'^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x'}\right)_{\frac{r_0}{2}}^{x(t)}.$$

Finalement :

$$\dot{x}^2(t) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 m} \left[\frac{2}{r_0} - \frac{1}{x(t)} \right] \quad (3)$$

\dot{x}^2 est une fonction monotone qui tend vers une limite V_∞^2 pour $x \rightarrow +\infty$ telle que :

$$\lim_{\infty} \dot{x}^2(t) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{r_0} \Rightarrow V_\infty = \frac{|q|}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r_0}} \quad (4)$$

- Une deuxième méthode consiste en une approche énergétique : chaque particule est soumise à la force de Coulomb exercée par l'autre particule, et on peut définir pour l'ensemble du système une énergie potentielle intérieure $E_p^{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}}$.

Commentaires

On a arbitrairement fixé la valeur de cette énergie à 0 pour des particules infiniment éloignées l'une de l'autre (donc hors interaction).

Cette énergie potentielle d'interaction est une énergie propre au système constitué par ces deux particules ; on ne peut pas l'attribuer à une seule de ces particules...

Les forces intervenant étant conservatives, on peut appliquer le théorème de l'énergie mécanique qui prend ici la forme :

$$E_m = E_c + E_p^{\text{int}} = \text{cte.}$$

On a donc avec $E_m = 2 \times \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) \right)$ et $E_p^{\text{int}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2x)}$

$$m\dot{x}^2(t) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2x)} = 0 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

À l'infini, $\dot{x}^2 \rightarrow V_\infty^2$, d'où :

$$mV_\infty^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \Rightarrow V_\infty = \frac{|q|}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r_0 m}} \quad (6)$$

Ce qui correspond bien au résultat précédent (4).

POINT MÉTHODE

Lorsqu'il est possible d'associer une énergie potentielle aux forces qui travaillent, il est plus souvent efficace d'utiliser la conservation de l'énergie totale du système.

2. • Première méthode :

On utilise les mêmes modes de raisonnement qu'à la question précédente : par raison de symétrie, les trois particules occupent à chaque instant des positions correspondant aux sommets d'un triangle équilatéral dont le centre O reste fixe dans un référentiel galiléen. Considérons la particule M_1 , sur l'axe Ox : elle est soumise aux forces d'interaction \vec{f}_2 et \vec{f}_3 de la part des particules M_2 et M_3 ,

$$\text{avec } \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = f \cdot \vec{u}_x \text{ et } f = f_2 \cos \alpha + f_3 \cos \alpha = 2f_2 \cos \alpha$$

$$\text{ici } \cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ d'où : } f = \sqrt{3} \cdot f_2 = \sqrt{3} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{avec } r \cos \alpha = HM_1 = \frac{3}{2}x \text{ (O est - aussi - le point de concours des médianes).}$$

Finalement :

$$f = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2}x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{q^2 \sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3x^2}.$$

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à la particule M_1 donne :

$$m\ddot{x} = f \Rightarrow \ddot{x} = \frac{q^2 \sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 m \cdot 3x^2}.$$

Multiplions par \dot{x} et intégrons entre les instants 0 et t ($\dot{x}(0) = 0$ et

$$x(0) = \frac{2}{3}r_0 \cos \alpha = \frac{r_0}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - 0 = \frac{q^2 \sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 \times 3} \int_0^t \frac{\dot{x}' dt}{x'^2} = \frac{q^2 \sqrt{3}}{12\pi\epsilon_0} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx'}{x'^2}$$

d'où :

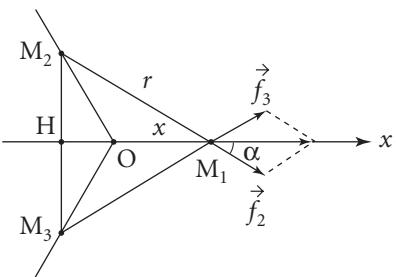
$$\dot{x}^2(t) = \frac{q^2 \sqrt{3}}{6\pi\epsilon_0 m} \left[-\frac{1}{x(t)} + \frac{\sqrt{3}}{r_0} \right].$$

Les particules s'éloignent indéfiniment l'une de l'autre pour atteindre une vitesse limite V_∞ telle que :

$$V_\infty = \frac{|q|}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 m r_0}} \quad (7)$$

• Seconde méthode :

Comme dans la première question, on peut définir, pour le système des trois particules, une énergie potentielle intérieure E_p^{int} associée aux forces de Coulomb.



On détermine E_p^{int} en reprenant un raisonnement identique à celui développé dans le point cours du 1. La formule (5) devient alors :

$$E_p^{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

soit d'une manière plus générale :

$$E_p^{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Initialement, cette énergie potentielle prend la valeur :

$$E_p^{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q^2}{r_0} \quad (r_{ij} = r_0).$$

La conservation de l'énergie mécanique du système proposé entre l'instant initial et le moment où les particules sont infiniment éloignées, donne alors :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p = \text{constante} \\ 0 + \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} &= 3 \cdot \left(\frac{1}{2} m V_\infty^2 \right) + 0. \end{aligned}$$

Soit

$$V_\infty^2 = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 m r_0} \quad \text{et} \quad V_\infty = \frac{|q|}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 m r_0}}$$

ce qui est bien le résultat déjà obtenu.

706

Potentiel de Yukawa

On se propose de déterminer la distribution de charges qui crée en tout point M de l'espace ($\vec{OM} = r \cdot \vec{u}$, $r = \|\vec{OM}\|$) un potentiel électrostatique de la forme :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \cdot e^{-\frac{r}{a}}$$

q étant la charge élémentaire ($q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) et a une distance ($a = 10^{-10}$ m).

1. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M (différent de l'origine O).

2. Calculer le flux de ce champ à travers la surface d'une boule de centre O et de rayon r , et en déduire la charge $Q(r)$ contenue dans cette boule.

Étudier les cas limites $r \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow 0$: quelles conclusions peut-on en tirer ?

3. Déterminer la densité de charge volumique $\rho(r)$ répartie dans l'espace autour de O. La distribution de charges étudiée peut être prise comme modèle électrostatique d'un atome. Qu'en pensez-vous ?

Solution

1. Les équipotentielles $V = \text{constante}$ sont des sphères de centre O, ce qui implique que le champ \vec{E} , qui leur est orthogonal est radial. Son expression en coordonnées sphériques se réduira donc à une seule composante : $\vec{E} = E \cdot \vec{u}$.

Or $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ avec ici $V = V(r)$ où r, θ, φ sont les coordonnées sphériques.

$$\text{Soit } \vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{u} \quad \text{et} \quad E = E(r) = -\frac{dV}{dr}$$

$$\text{d'où} \quad E(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ar} \right] \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$\text{et} \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \left[1 + \frac{r}{a} \right] \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (1)$$

Remarquons que \vec{E} est défini et continu dans tout l'espace sauf en $r = 0$ où il n'est pas défini. Les charges responsables de ce champ se réduisent donc à :

- une distribution volumique $\rho(r)$ pour $r > 0$ (une distribution surfacique de charges provoquerait une discontinuité du champ...);
- « éventuellement » une charge ponctuelle en $r = 0$.

2. Le flux du champ électrostatique \vec{E} à travers la sphère $\mathcal{S}(O, r)$ a pour expression :

$$\phi = \oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{n} d\mathcal{S}$$

$$\text{avec ici } \vec{E} \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = E(r) \vec{u} \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = E(r) d\mathcal{S}$$

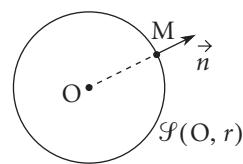
$$(\vec{n} = \vec{u} \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{u} = 1),$$

$$\text{soit} \quad \phi = \oint_{\mathcal{S}} E(r) d\mathcal{S}$$

$$\text{et} \quad \phi = E(r) \oint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \quad (E(r) = \text{constante sur la surface } \mathcal{S}).$$

$$\text{D'où} \quad \phi = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

et en remplaçant $E(r)$ par son expression (cf. (1)).



$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a} \right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Or, d'après le théorème de Gauss, le flux ϕ du champ électrostatique est égal au quotient par ϵ_0 de la charge contenue à l'intérieur de la surface fermée à travers laquelle on a calculé le flux :

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} Q(r)$$

d'où

$$Q(r) = q \left(1 + \frac{r}{a} \right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Si $r \rightarrow \infty$: $\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = 0$

ce qui indique que la charge totale répartie dans tout l'espace est de valeur globale nulle.

Et si $r \rightarrow 0$: $\lim_{r \rightarrow 0} Q(r) = q$.

Une sphère de centre O de rayon tendant vers zéro contient la charge q : c'est la définition d'une charge ponctuelle située en O...

La distribution de charges responsable du potentiel électrostatique V étudié est donc constituée :

- d'une charge ponctuelle q placée en O ;
- et d'une distribution de charges volumiques négatives dans l'espace autour de O, pour assurer la neutralité électrique globale du système.

3. La symétrie sphérique de la distribution indique que la densité volumique ρ cherchée ne dépend que de $r = OM$. Pour déterminer $\rho(r)$, évaluons de deux façons différentes la charge δQ contenue dans l'espace entre deux sphères concentriques de rayons r et $r + dr$:

$$\delta Q = Q(r + dr) - Q(r)$$

$$\delta Q = \rho \cdot \delta v = \rho \cdot 4\pi r^2 dr \quad (\delta v = 4\pi r^2 dr)$$

d'où $\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{Q(r + dr) - Q(r)}{dr}$

ρ désignant la densité moyenne de charge entre les distances r et $r + dr$.

Par passage à la limite ($dr \rightarrow 0$):

$$\rho \rightarrow \rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{dQ}{dr}$$

Or : $\frac{dQ}{dr} = q \cdot \frac{1}{a} e^{-\frac{r}{a}} - q \left(1 + \frac{r}{a}\right) \frac{1}{a} e^{-\frac{r}{a}} = -\frac{qr}{a^2} e^{-\frac{r}{a}}$

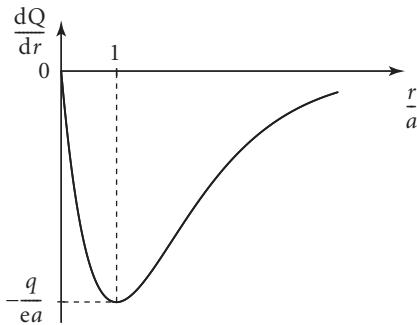
et

$$\boxed{\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r} \cdot \exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$$

Cette distribution est donc finalement constituée d'une charge ponctuelle en O, qui peut correspondre à la charge (positive) d'un noyau atomique, entourée d'un « nuage » négatif de valeur totale opposée. Ce nuage peut être assimilé à l'effet moyen des électrons entourant le noyau, dont la répartition n'est définie que par la probabilité de présence en chaque point.

Commentaires

La distribution de charges $\rho(r)$ tend très vite vers zéro lorsque l'on s'éloigne de O. Pour visualiser la répartition de charges négatives, il est plus intéressant de tracer la courbe représentative de $\frac{dQ}{dr}$ donnant l'évolution de la « quantité de charges » $4\pi r^2 \rho(r)$ présente à la distance $r = 0$ (quelle que soit la direction...).



707 Point de champ nul

Sur un axe Ox , on place deux charges égales q ($q > 0$) en deux points d'abscisses respectives a et $-a$ ($a > 0$).

1. Décrire qualitativement les propriétés du potentiel et du champ électrostatique, en particulier au voisinage de l'origine 0. L'équilibre stable d'une particule chargée est-il possible en 0 ?

2. Étude plus précise :

a. On cherche à déterminer l'expression du potentiel $V(x, y)$ au voisinage du point 0 et dans un plan méridien xOy . Montrer, en faisant un développement limité à l'ordre 2 par rapport à $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{a}$, que l'on a :

$$V(x, y) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[1 + \frac{2x^2 - y^2}{2a^2} \right].$$

On rappelle que : $(1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$.

En déduire l'allure des équipotentielles et des lignes de champ au voisinage de l'origine.

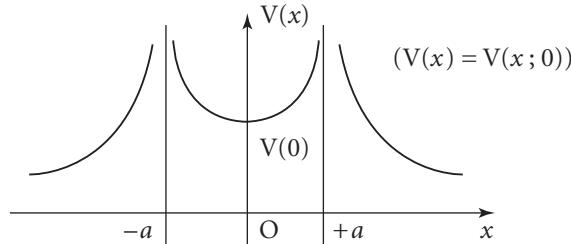
Solution

1. Le point O est un centre de symétrie de la distribution de charges. Le champ en ce point y est donc nul.

D'autre part, le système est invariant par rotation autour de l'axe Ox . Il est alors possible de se limiter à l'étude du potentiel $V(x, y)$ et du champ $\vec{E}(x, y)$ dans un plan Oxy contenant cet axe.

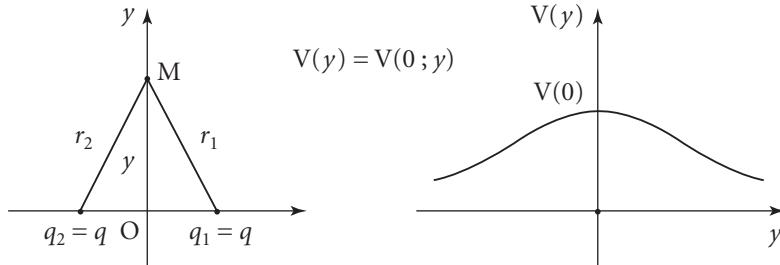
Enfin, une symétrie par rapport à ce plan laissant le système invariant, le champ \vec{E} est contenu dans xOy .

- Le potentiel $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i}$ (r_i : distance de M à la i^{e} charge q_i) est toujours positif si toutes les charges sont positives, et tend vers l'infini au voisinage d'une charge ponctuelle. On en déduit immédiatement l'allure de $V(x)$ pour un point M sur l'axe Ox.



La symétrie de la distribution de charges implique que $V(x)$ est une fonction paire, et la valeur $V(0)$ du potentiel en O est ainsi un minimum local.

- L'axe Oy est un axe de symétrie, et $V(x ; y)$ est également une fonction paire de y . Sur l'axe Oy ($x = 0$), le champ \vec{E} est porté par Oy, et la fonction $V(0 ; y)$ diminue lorsque l'on s'éloigne du point O puisque les distances aux charges augmentent alors. $V(0 ; y)$, continue et dérivable, admet donc en O un maximum.



La valeur $V(0) = V(0 ; 0)$ du potentiel en O est :

- un minimum de $V(x ; 0)$,
- un maximum de $V(0 ; y)$.

Le champ \vec{E} est nul en O, et ce point est bien une position d'équilibre pour une particule de charge q_0 quelconque. Cependant, cette position correspond toujours à un équilibre instable quel que soit le signe de q_0 .

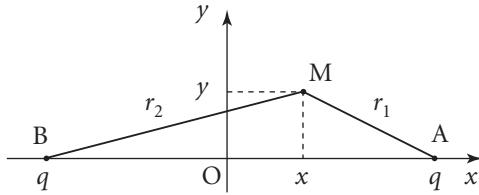
En effet, si q_0 est positif, il suffit de déplacer légèrement la charge q_0 le long de l'axe Oy pour que l'équilibre soit rompu. La particule est alors soumise à la force :

$$\vec{f} = q_0 \vec{E} = -q_0 \cdot \frac{dV(0 ; y)}{dy} \vec{u}_y.$$

La force \vec{f} tend à éloigner q_0 du point O (maximum de $q_0 V$).

Si q_0 est négatif, la situation est la même cette fois-ci sur l'axe Ox (maximum de $q_0 V(x ; 0)$ en O...).

2. On a vu au 1. qu'il suffisait d'étudier la fonction $V(M)$ dans un plan quelconque xOy . Donc, pour $M(x ; y)$ dans ce plan :



$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right); r_1 = AM \text{ et } r_2 = BM$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1)$$

$$\text{avec : } r_1^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x+a)^2 + y^2.$$

$$\text{Soit } r_1 = a \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a} \left[1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Expression de la forme } \frac{1}{r_1} = \frac{1}{a} (1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \text{ avec } \varepsilon = -\frac{2x}{a} + \frac{x^2 + y^2}{a^2}.$$

Développons le crochet (en utilisant la formule de l'énoncé) jusqu'au second ordre par rapport aux quantités $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{a}$:

$$\frac{1}{r_1} \# \frac{1}{a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2x}{a} + \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{4x^2}{a^2} \right) \right]$$

$$\frac{1}{r_1} \# \frac{1}{a} \left[1 + \frac{x}{a} + \frac{2x^2 - y^2}{2a^2} \right] \quad (2)$$

De même, en changeant x en $-x$, nous obtenons :

$$\frac{1}{r_2} \# \frac{1}{a} \left[1 - \frac{x}{a} + \frac{2x^2 - y^2}{2a^2} \right] \quad (3)$$

Soit au total d'après (1), (2) et (3) :

$$V(x ; y) \# \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[2 + 2 \left(\frac{2x^2 - y^2}{2a^2} \right) \right].$$

Finalement

$$V(x ; y) \# \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[1 + \frac{2x^2 - y^2}{2a^2} \right]$$

Soit encore avec

$$V_0 = V(0 ; 0) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a} :$$

$$V(M) = V_0 + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left(x^2 - \frac{y^2}{2} \right).$$

■ Lignes équipotentielles :

Elles correspondent à $V(M) = \text{cste}$ soit $x^2 - \frac{y^2}{2} = \text{cste.}$

Ce sont des hyperboles de centre O, d'axe Ox ou Oy et d'asymptotes $y = \pm\sqrt{2}x.$

■ Lignes de champ :

Pour déterminer les lignes de champ au voisinage de O, calculons le champ \vec{E} associé à l'expression approchée du potentiel :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{q}{\pi\epsilon_0 a^3} \cdot x$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = +\frac{q}{\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \frac{y}{2}$$

d'où l'équation différentielle des lignes de champ (courbes tangentes en chaque point au champ \vec{E}) :

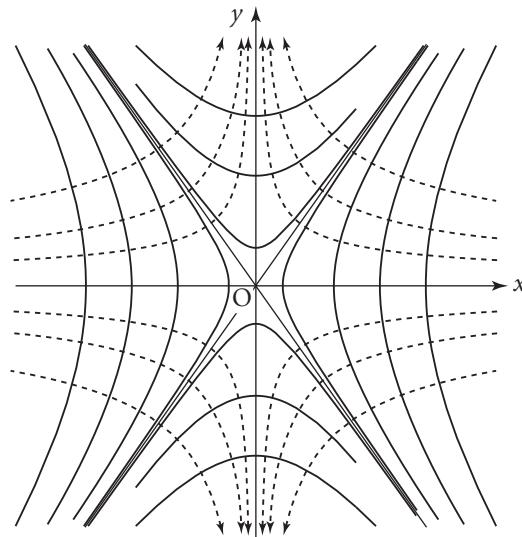
$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y}$$

$$\frac{2dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow 2\ln y + \ln x = \text{constante}$$

soit, pour les lignes de champ, $xy^2 = \text{constante}$

■ Représentation graphique :

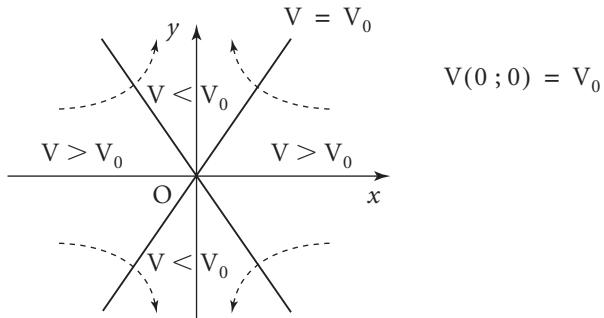
Donnons l'allure de ces courbes (équipotentielles et lignes de champ) dans le plan xOy et au voisinage de O (en tenant compte du fait que ce sont des courbes orthogonales) :



(équipotentielles en trait plein – lignes de champ en pointillé).

• Lignes de champ :

Remarquons que les asymptotes des hyperboles sont des équipotentielles particulières ($V = V(0 ; 0)$) ce qui permet de préciser les valeurs du potentiel, et par là même l'orientation des lignes de champ :

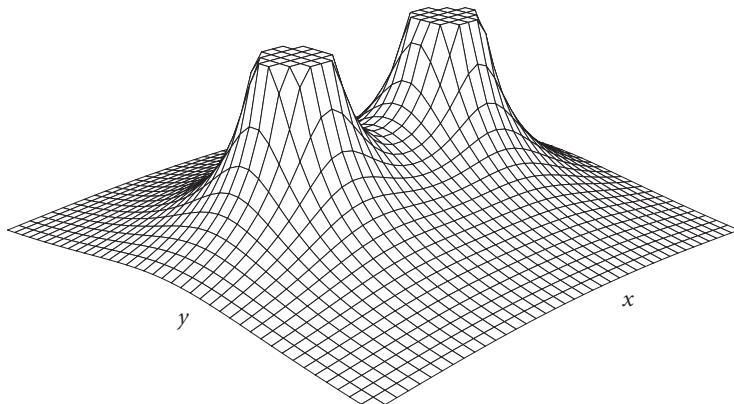


Ce qui confirme – bien sûr – les résultats obtenus à la première question.

Commentaires

On a représenté ci-dessous en perspective la surface $(x ; y) \rightarrow Z = V(x ; y.)$

Il apparaît clairement au centre de la figure, point O , un col traduisant une position d'équilibre instable en ce point.



B. Magnétostatique

711 Spire circulaire

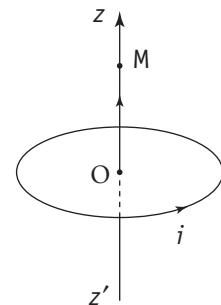
Une spire circulaire de centre O et de rayon a est parcourue par un courant i .

1. Rappeler l'expression du champ magnétique $B(z)$ en un point M situé sur l'axe $z'z$ de la spire. Que peut-on dire de $B(z)$ pour z suffisamment grand devant a ?

2. a. En déduire la valeur de la circulation du champ magnétique sur l'axe de la spire.

b. Retrouver le résultat précédent par application du théorème d'Ampère.

c. Obtiendrait-on un résultat différent pour un axe $z'z$ décentré ($z'z$ reste parallèle à l'axe de la spire et coupe le disque délimité par la spire) ?



1. Ce qu'il faut savoir

- Règles de symétrie relatives aux champs de la magnétostatique.
- Loi de Biot et Savart.
- Champ magnétique créé par une spire circulaire.
- Dipôle magnétique et champ créé par ce dipôle.
- Théorème d'Ampère.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Pour des points éloignés ($r \gg a$), la spire doit être équivalente à un moment magnétique $\vec{M} = i\pi a^2 \vec{u}_z$.

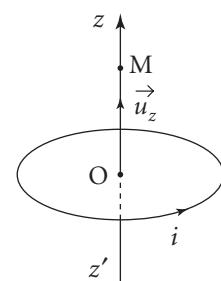
2. b. On reliera le résultat obtenu au théorème d'Ampère en considérant que la « droite » ($z'z$) fait partie d'un contour fermé se rebouclant suffisamment loin de la spire.

3. Solution

1. ■ Direction du champ \vec{B} au point M situé sur l'axe de la spire :

Tous les plans contenant l'axe sont des plans d'antisymétrie pour la distribution de courant. Le champ \vec{B} , vecteur axial, appartient à ces plans et donc à leur intersection. Il en résulte que $\vec{B}(M)$ est porté par l'axe $z'z$, soit :

$$\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_z.$$



■ Propriété de la fonction $B(z)$:

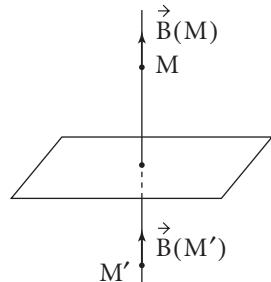
Le plan xOy de la spire peut être considéré comme plan de symétrie. On doit donc avoir :

$$\vec{B}(M') = -\text{Sym}[\vec{B}(M)] \quad \text{avec} \quad M' = \text{Sym}(M)$$

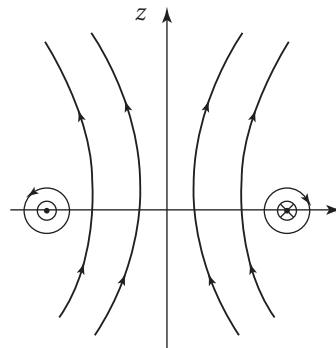
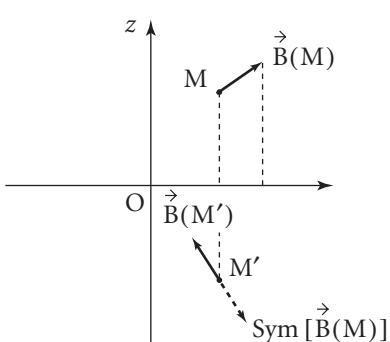
Sym désigne l'opération de symétrie par rapport à ce plan.

Soit pour les points de l'axe :

$$B(-z) = B(z).$$



Et en dehors de l'axe :



■ Déterminons le champ $B(z)$:

D'après l'expression de Biot et Savart,

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \vec{\delta l} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}.$$

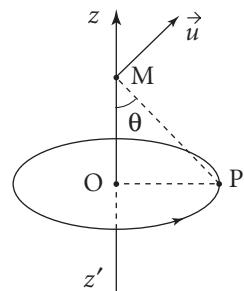
$$\text{Or } \vec{\delta l} \wedge \vec{PM} = PM \vec{\delta l} \vec{u}.$$

Soit en projection sur l'axe $z'z$ (puisque le champ \vec{B} est porté par cet axe) :

$$(\vec{\delta l} \wedge \vec{PM}) \cdot \vec{u}_z = PM \vec{\delta l} \vec{u} \cdot \vec{u}_z = PM \sin \theta \delta l$$

$$\text{et } B(z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{PM \sin \theta}{PM^3} \delta l = \frac{\mu_0 i \sin \theta}{4\pi PM^2} \oint \delta l.$$

$$\oint \delta l = 2\pi a \text{ soit finalement avec } \sin \theta = \frac{a}{PM}$$



$$B(z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin^3 \theta}{a^2} 2\pi a \Rightarrow \boxed{B(z) = \frac{\mu_0 i}{2a} \sin^3 \theta(z)} \quad (1)$$

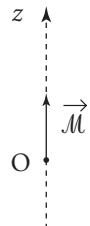
■ Comportement asymptotique de $B(z)$ (pour $z \gg a$)

On peut alors faire l'approximation $\sin \theta \sim \frac{a}{z}$ (pour $z > 0$)

$$\text{et } B(z) \approx \frac{\mu_0 i}{2a} \left(\frac{a}{z} \right)^3 = \frac{\mu_0 i a^2}{2z^3} = \frac{2\mu_0 (i\pi a^2)}{4\pi z^3}.$$

Cette expression n'est rien d'autre que celle du champ associé au moment magnétique $\vec{M} = i\pi a^2 \vec{u}_z$ placé en O.

Ainsi pour des distances OM suffisamment grandes devant le rayon a de la spire cette dernière se comporte, pour le champ magnétique qu'elle crée, comme un moment magnétique $\vec{M} = iS\vec{n}$ (ici $S = \pi a^2$ et $\vec{n} = \vec{u}_z$).



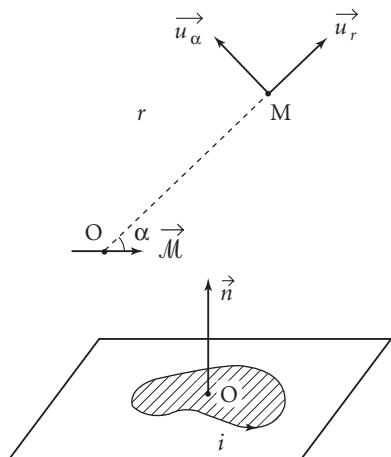
Commentaires

- Une spire parcourue par un courant i est « assimilable » à un dipôle magnétique pour des points suffisamment éloignés ; ceci est d'autant mieux réalisé que la distance d'observation r ($r = OM$) est grande devant les dimensions caractérisant l'extension du système (rayon a pour une spire circulaire).

Pour une spire plane, on démontre que l'on a :

$$\vec{M} = iS\vec{n} \quad (\text{S surface hachurée}).$$

- Il ne faut pas confondre ce point de vue qui s'intéresse au seul champ créé à « grandes distances » avec celui qui consiste à étudier le comportement d'une telle spire placée dans un champ magnétique extérieur indépendant du temps.



– Dans le cas où $\|\vec{M}\|$ est fixé (spire de forme invariable parcourue par un courant constant), l'interaction avec un champ \vec{B}_0 uniforme se traduit par une énergie potentielle d'interaction $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$. Ainsi, la force résultante s'exerçant sur le dipôle est nulle (U invariant par translation de \vec{M}). \vec{M} n'est alors soumis qu'à un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0$.

– Dans le cas où le champ extérieur $\vec{B}_0(x, y, z)$ n'est plus uniforme, le circuit reste réductible à un dipôle \vec{M} à condition que \vec{B}_0 varie spatialement sur des distances caractéristiques très supérieures à a ... Pour un circuit indéformable parcouru par un courant constant, la valeur de $\|\vec{M}\|$ reste invariable et l'expression $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$ garde son sens avec \vec{B}_0 variant avec le point. Le dipôle \vec{M} est soumis au couple $\vec{M} \wedge \vec{B}_0$ mais également à une force \vec{f} (U n'est plus invariant par translation)...

2. a. La circulation \mathcal{C} sur l'axe $z'z$ du champ magnétique est définie par la relation :

$$\mathcal{C} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^{+K} B(z) dz \quad (\vec{B} \text{ est porté par l'axe}).$$

Soit encore puisque $B(-z) = B(z)$:

$$\mathcal{C} = 2 \int_0^{+\infty} B(z) dz$$

$$\tan \theta = \frac{a}{z} \text{ d'où } dz = -\frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta \text{ et } \mathcal{C} = -2a \int_{\frac{\pi}{2}}^0 B[z(\theta)] \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}.$$

(Pour $z = 0$, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$ et pour $z \rightarrow +\infty$, $\theta \rightarrow 0$).

Reportant l'expression (1) de $B(z)$, il vient :

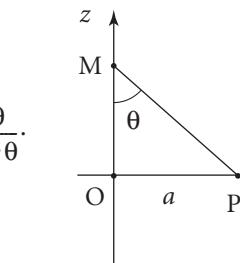
$$\mathcal{C} = \mu_0 i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \mu_0 i [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $\mathcal{C} = \mu_0 i$ (2)

2. b. Ce résultat doit pouvoir s'obtenir par application du théorème d'Ampère. À cet effet, considérons la courbe fermée Γ_0 constituée du segment $A'A$ (longueur $2D$) et du demi-cercle de centre O et de rayon D (O est le milieu du segment AA').

Le théorème d'Ampère s'écrit alors :

$$\oint_{\Gamma_0} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i_T,$$



i_T est le courant total (compté algébriquement) traversant toute surface Σ s'appuyant sur le contour Γ_0 . Une surface envisageable est le demi-disque hachuré sur la figure ci-contre. La normale \vec{n} à cette surface est liée au sens de parcours de Γ_0 . On a donc ici :

$i_T = i$ (le courant i traverse Σ dans le sens défini par \vec{n}).

$$\text{D'où } \int_{A'}^A \vec{B} \cdot \vec{dl} + \int_{\text{demi-cercle}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i,$$

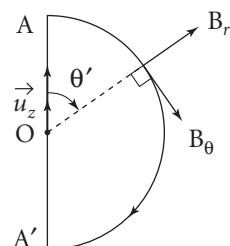
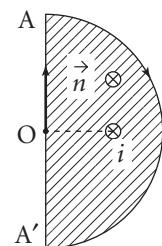
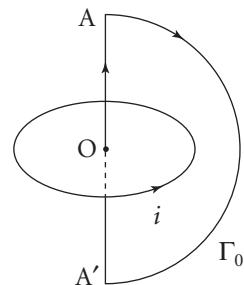
Faisons tendre D vers l'infini ($D \gg a$).

La première intégrale redonne \mathcal{C} par définition.

Il reste à démontrer que la contribution de la seconde tend bien vers zéro.

$$\text{Or } \int_{\text{demi-cercle}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_{\text{demi-cercle}} B_\theta D d\theta'$$

Mais pour $D \gg a$, la spire devient équivalente au moment magnétique $\vec{M} = i\pi a^2 \vec{u}_z$.



Le champ magnétique associé à $\vec{M} = i\pi a^2 \vec{u}_z$ admet pour composantes :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos\theta'}{D^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0 M \sin\theta'}{4\pi D^3}.$$

De sorte que :

$$\int_{\text{demi-cercle}} B_\theta D d\theta' \approx \frac{\mu_0 M}{4\pi D^2} \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \approx \mu_0 i \cdot \frac{a^2}{2D^2}$$

quantité qui tend vers zéro quand D tend vers l'infini ($D \gg a$).

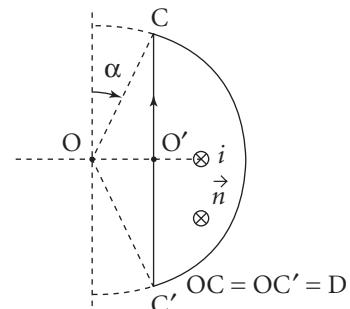
On retrouve bien le résultat (2).

3. On aurait obtenu le même résultat pour un axe $z'z$ décentré (c'est-à-dire ne passant plus par le centre O de la spire : cf. figure).

Le calcul précédent donnerait en appliquant le théorème d'Ampère sur le contour fermé constitué du segment $C'C$ fermé par l'arc de cercle $\widehat{CC'}$ centré en O :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i \quad (i \text{ traverse dans le même sens que } \vec{n}).$$

$$\text{D'où } \int_{C'}^C \vec{B} \cdot \vec{dl} + \int_{\widehat{CC'}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i.$$



Or la circulation cherchée \mathcal{C} est la limite de la première intégrale lorsque les points C et C' sont rejetés à l'infini ($D \rightarrow \infty$), d'où :

$$\mathcal{C} + \lim_{D \rightarrow \infty} \int_{\widehat{CC'}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i.$$

$$\text{Or } \int_{\widehat{CC'}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int B_\theta D d\theta' \approx \frac{\mu_0 i a^2}{4D^2} \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sin\theta' d\theta' = \mu_0 i \frac{a'}{2D^2} \cos\alpha.$$

On a donc : $\lim_{D \rightarrow +\infty} \int_{\widehat{CC'}} \vec{B} \cdot \vec{dl} \rightarrow 0$ ($D \gg a$ et $\cos\alpha \rightarrow 1$). Il reste $\mathcal{C} = \mu_0 i$.

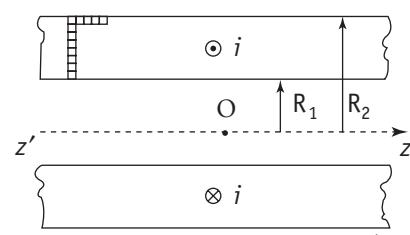
Le résultat est inchangé.

712

Solénoïde épais

On enroule des spires jointives très fines sur un cylindre de rayon R_1 , sur une épaisseur $e = R_2 - R_1$. Chaque spire est parcourue par un courant i .

Sur une « rangée », on a p spires par unité de longueur, et on a empilé les spires sur m rangées.



1. Déterminer, en tout point de l'espace, l'expression du champ magnétique \vec{B} dans le cadre de l'hypothèse du solénoïde infiniment long. On posera $n = pm$ et $B_0 = \mu_0 ni$.

2. Retrouver le résultat précédent par application du théorème d'Ampère.

■ 1. Ce qu'il faut savoir

- Règles de symétries.
- Champ magnétique créé par un solénoïde (modélisation du solénoïde droit « infini »).
- Théorème d'Ampère.

■ 2. Ce qu'il faut comprendre

1. On décomposera le système en un ensemble de solénoïdes « emboités » d'épaisseur infinitésimale dr_0 .

■ 3. Solution

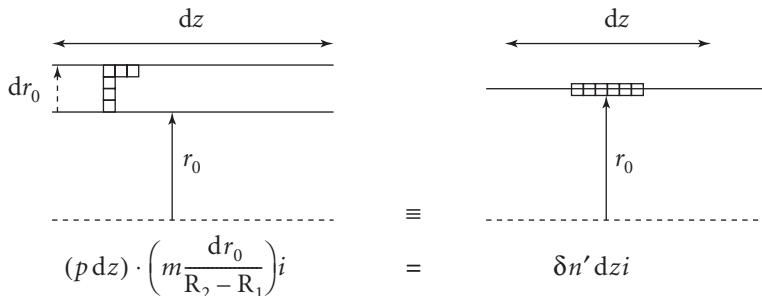
1. Pour le système proposé, les symétries restent les mêmes que celles du solénoïde droit infini. On a donc :

$$\vec{B} = B(M) \vec{u}_z.$$

De plus, les invariances selon z et selon θ (coordonnées cylindriques d'axe $z'z$) impliquent :

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_z.$$

On peut alors décomposer le système en solénoïdes d'épaisseur dr_0 que l'on va assimiler à des solénoïdes droits infinis comportant un nombre $\delta n'$ de spires par unité de longueur avec :



D'où $\delta n' = mp \frac{dr_0}{R_2 - R_1} = n \frac{dr_0}{R_2 - R_1}$ (1)

Le champ magnétique associé vaut (cf. champ créé par un solénoïde droit « infini ») :

$$\left| \begin{array}{ll} \overrightarrow{\delta B'} = \vec{0} & \text{pour } r > R_0 \\ \overrightarrow{\delta B'} = \mu_0 \delta n' i \vec{u}_z & \text{pour } r < R_0 \Rightarrow \overrightarrow{\delta B'} = \mu_0 n i \frac{dr_0}{R_2 - R_1} \vec{u}_z \end{array} \right.$$

Il suffit maintenant de sommer les contributions de chaque solénoïde élémentaire.

- À l'extérieur de tous les solénoïdes, on aura donc $\vec{B} = \vec{0}$.

$$\boxed{\vec{B} = \vec{0} \text{ pour } r > R_2}$$

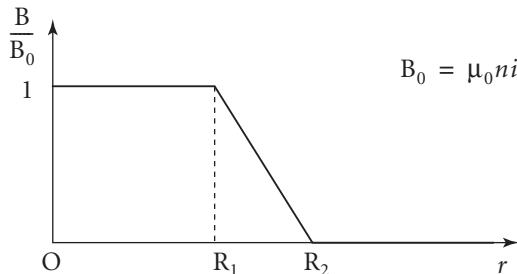
- Pour $r < R_1$, les champs créés par tous les solénoïdes s'ajoutent et :

$$\vec{B}(r < R_1) = \mu_0 n i \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr_0}{R_2 - R_1} \vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{B}(r < R_1) = \mu_0 n i \vec{u}_z}$$

- Pour $R_1 < r < R_2$, seuls les solénoïdes de rayon supérieur à r contribuent à \vec{B} . Ainsi :

$$\vec{B} = \mu_0 n i \int_r^{R_2} \frac{dr_0}{R_2 - R_1} \vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 n i \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \vec{u}_z}$$

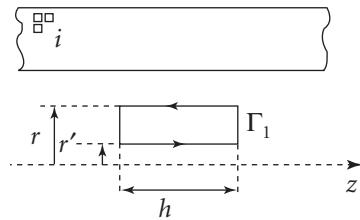
D'où le graphe donnant $B(r)$:



Commentaire

Pour $r < R_1$, le système se réduit bien évidemment à un solénoïde droit infini comportant $n = mp$ spires par unité de longueur parcourues par le courant i .

2. Ayant démontré que $\vec{B} = B(r) \vec{u}_z$ (cf. 1.), on se propose d'utiliser le théorème d'Ampère.

- Considérons le contour Γ_1 du plan de figure situé dans le domaine $r < R_1$. Le théorème d'Ampère 

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\vec{B}) &= \mu_0 i_T \\ \mathcal{C}(\vec{B}) &\equiv \text{circulation de } \vec{B} \text{ sur un contour } \Gamma ; \\ i_T &\equiv \text{courant traversant toute surface orientée} \end{aligned}$$

s'appuyant sur Γ . Ici $i_T = 0$ et $\mathcal{C}(\vec{B}) = B(r')h - B(r)h$.

D'où $B(r) = B(r')$.

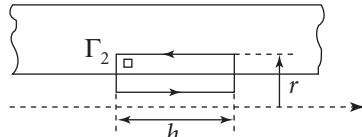
On a bien un champ uniforme, noté B_0 , pour $r < R_1$.

- On démontre de la même façon que B est uniforme pour $r > R_2$. Notons-le B_2 .
- Considérons maintenant le contour Γ_2 . On a :

$$hB_0 - hB(r) = \mu_0 i_T$$

où $i_T = i \cdot (ph) \cdot \left(m \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right)$

soit : $B(r) = B_0 - \mu_0 n i \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$.



• Le champ doit être continu en $r = R_1$ et $r = R_2$. On a bien $B(R_1) = B_0$.

Il faut donc que :

$$B_2 = B_0 - \mu_0 n i.$$

Il reste à utiliser l'argument que le champ B_2 est nul puisqu'il peut être considéré comme la résultante des champs extérieurs associés à des « solénoïdes emboîtés » d'axes $z'z$.

Dès lors $B_2 = 0$ et $B_0 = \mu_0 n i$.

D'où

$$\begin{aligned} \vec{B}(r \geq R_2) &= \vec{0} \\ \vec{B}(R_1 < r < R_2) &= \mu_0 n i \left[1 - \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right] \vec{u}_z = \mu_0 n i \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \vec{u}_z \\ \vec{B}(r \leq R_1) &= \mu_0 n i \vec{u}_z \end{aligned}$$

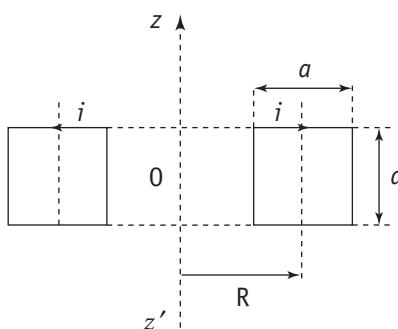
Comme il se doit.

7.3

Solénoïde en forme de tore

N spires sont enroulées sur un tore de section carrée (côté de longueur a) et de rayon moyen R .

Elles sont parcourues par un même courant i , et on note Φ le flux total les traversant. On supposera que le système est invariant dans toute rotation d'axe $z'z$ (N grand ...).



1. Donner l'expression du champ magnétique \vec{B} en tout point de l'espace.
2. En déduire l'expression du coefficient L liant le flux Φ à travers l'ensemble des N spires et le courant i : $\Phi = Li$.
3. Que deviennent les résultats précédents lorsque R est très grand devant a ? On rappelle que $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$. Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Règles de symétrie.
- Théorème d'Ampère.
- Notion de flux du champ \vec{B} .

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Les règles de symétries imposent la direction du champ \vec{B} . Le théorème d'Ampère permet de le déterminer complètement.
2. Pour R très grand devant a , on pourra considérer que \vec{B} est quasi uniforme sur toute section droite du tore. Le système constitue un solénoïde refermé sur lui-même, système pour lequel les effets de bord sont ainsi supprimés.

3. Solution

1.



POINT COURS

En magnétostatique, le champ \vec{B} est défini à partir de la distribution des courants.

- Si le plan Π est un plan de symétrie de cette distribution, on a, \vec{B} étant un vecteur axial :
 - en tout point $N \in \Pi$: $\vec{B}(N) \perp \Pi$;
 - en deux points N et N' symétriques par rapport à Π :

$$\vec{B}(N') = -\text{Sym}[\vec{B}(N)].$$

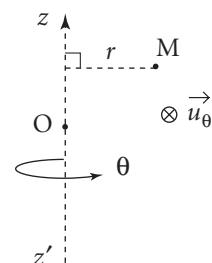
- Si le plan Π est un plan d'antisymétrie (symétrie \oplus changement de signe), alors :

- en tout point N de Π : $\vec{B}(N)$ est contenu dans Π ;
- en deux points N et N' symétriques par rapport à Π :

$$\vec{B}(N') = +\text{Sym}[\vec{B}(N)].$$

■ Direction du champ magnétique :

Considérons le point M . Dans l'approximation précisée dans l'énoncé (N grand, système invariant par rotation autour de l'axe $z'z$), on peut admettre que le plan passant par M et contenant l'axe Oz est plan de symétrie pour la distribution de courants. Le champ magnétique $\vec{B}(M)$, vecteur axial, est perpendiculaire à ce plan, ce qui donne : $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_\theta$ (coordonnées cylindriques). Finalement $\vec{B}(M) = B(r; z)\vec{u}_\theta$.



■ Détermination de $B(r ; z)$:

Le champ \vec{B} est orthoradial, et $B(r ; z)$ est constant à r et z fixés. Nous pouvons donc lui appliquer le théorème d'Ampère en choisissant, pour le contour fermé Γ , un cercle d'axe Oz et de rayon r contenu dans le plan $z = \text{constante}$.

● POINT MÉTHODE

Le théorème d'Ampère nous indique que la circulation du champ \vec{B} sur un contour Γ fermé est égale au produit de μ_0 (perméabilité du vide) par le courant algébrique total i_T traversant toute surface orientée s'appuyant sur Γ .

L'efficacité de ce théorème repose sur la possibilité de choisir un contour Γ sur lequel le calcul de la circulation reste simple. C'est le cas lorsque les symétries sont suffisantes, ce qui correspond à notre étude et justifie le choix, pour Γ , d'un cercle d'axe Oz.

On a donc :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{\delta l} = \mu_0 i_T \Rightarrow B(r ; z) 2\pi r = \mu_0 i_T \quad (1)$$

Plusieurs cas peuvent se produire :

– Contour Γ_1 tel que $|z| > \frac{a}{2}$.

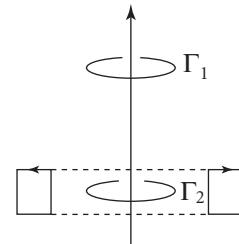
Il vient $i_T = 0$, aucun courant n'étant enlacé par Γ_1 , et donc $B = 0$.

– Contour Γ_2 tel que $|z| < \frac{a}{2}$ et $r < R - \frac{a}{2}$.

On a également pour la même raison $i_T = 0$ et $B = 0$.

– Contour Γ_2 tel que $|z| < \frac{a}{2}$ et $r > R + \frac{a}{2}$.

Cette fois-ci, $i_T = 0$ parce que les différents courants se compensent, d'où $B = 0$.



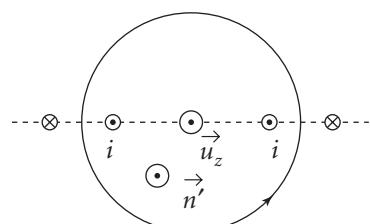
On en déduit que le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est nul à l'extérieur du tore.

– Contour Γ circulaire intérieur au tore.

Il est traversé, dans le sens de l'axe Oz, par un courant total $i_T = Ni$, d'où :

$$B(r ; z) 2\pi r = \mu_0 Ni.$$

Soit un champ magnétique à l'intérieur du tore défini par la relation :

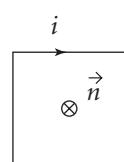


$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (2) \quad R - \frac{a}{2} < r < R + \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad |z| < \frac{a}{2}.$$

2. Une spire est traversée par un flux $\varphi = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} \delta \Sigma$.

Or ici $\vec{n} = \vec{u}_\theta$ et \vec{B} ne dépend que de r , d'où :

$$\varphi = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi} \iint \frac{dr dz}{r} = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} dr.$$



Finalement $\varphi = \frac{\mu_0 N i a}{2\pi} \ln \left[\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \right]$.

Et pour le flux total $\Phi = N\varphi = \frac{\mu_0 N^2 i a}{2\pi} \ln \left[\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \right]$ (chaque spire est traversée par le même flux φ).

Le coefficient L défini par $\Phi = L i$ a donc pour valeur :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left[\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \right]$$

3. Pour R suffisamment grand devant a , on peut confondre dans l'expression (1) r et R .

En effet, on a $R - \frac{a}{2} < r < R + \frac{a}{2}$ et $1 - \frac{a}{2R} < \frac{r}{R} < 1 + \frac{a}{2R}$ avec $\frac{a}{R} \ll 1$.

Soit $\vec{B}_{\text{int}} \approx \mu_0 \frac{N}{2\pi R} \vec{i} u_\theta$ et $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

Or $2\pi R$ représente la « longueur l du tore » et $\frac{N}{l}$ le nombre n de spires par unité de longueur. Nous obtenons donc, dans l'approximation $\frac{a}{R} \ll 1$:

$$\vec{B}_{\text{int}} \approx \mu_0 n i \vec{u}_\theta$$

Il s'agit bien entendu du résultat classique obtenu pour le solénoïde droit dit « infiniment long ».

• Pour obtenir une expression approchée du coefficient L , développons le logarithme :

$$\ln \left[\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \right] = \ln \left[\frac{1 + \frac{a}{2R}}{1 - \frac{a}{2R}} \right] \sim \frac{a}{R} \quad \text{et} \quad L \approx \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \cdot \frac{a}{R} = \mu_0 \frac{N^2}{(2\pi R)^2} \cdot (2\pi R \cdot a^2)$$

Soit avec $n = \frac{N}{2\pi R}$ et $V = 2\pi R a^2$ le volume du tore (pour $R \gg a$) : $L \approx \mu_0 n^2 V$

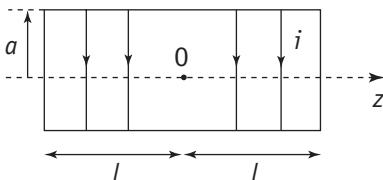
Commentaires

- Cette grandeur L représente en fait le coefficient d'auto-inductance du bobinage torique. Il est proportionnel au carré du nombre de spires par unité de longueur et au volume du tore.
- On peut considérer qu'un solénoïde torique dont le rayon moyen R est grand devant les dimensions caractérisant sa section constitue un modèle réaliste du « solénoïde infini ». Les effets de bord (selon \vec{u}_θ) y sont inexistant puisqu'il se referme sur lui-même.

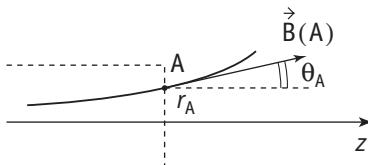
7.14

Ligne de champ

Un solénoïde droit présente une section circulaire de rayon a . Sa longueur $2l$ est très grande devant a et il possède n spires jointives par unité de longueur. Il est parcouru par un courant i . On s'intéresse à la ligne de champ qui coupe le plan $z = 0$ à une distance r_0 de l'axe. Elle ressort en traversant la face avant du solénoïde en un point A.



1. Quelle relation simple relie r_A et r_0 ?
2. Dans le cas où r_0 est petit devant a , déterminer l'expression donnant l'angle θ_A défini par $\theta_A = (\vec{u}_z, \vec{B}(A))$.



1. Ce qu'il faut savoir

- Notion de tube de champ.
- \vec{B} est à flux conservatif.
- Champ créé par un solénoïde « infini » ; champ créé sur son axe par un solénoïde droit de longueur finie.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Pour déterminer une relation entre r_0 et r_A , on utilisera le fait que le champ magnétique est à flux conservatif. La longueur du solénoïde étant très grande devant son rayon, on pourra assimiler le champ autour de O à celui du solénoïde « infini ». Il restera à évaluer la composante B_z du champ créé sur le disque de rayon r_A : le résultat peut s'obtenir en juxtaposant deux solénoïdes identiques au précédent.

2. L'expression de l'angle θ_A nécessite la connaissance des composantes B_z et B_r du champ magnétique en A. $B_z(A)$ a été déterminé à la question précédente.

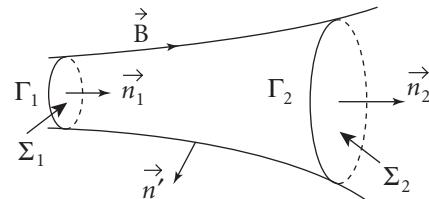
On calculera $B_r(A)$ au voisinage de l'axe ($r_A \ll a$) en considérant un petit cylindre centré sur l'axe et en lui appliquant la propriété « \vec{B} est à flux conservatif ».

3. Solution

1.

POINT COURS

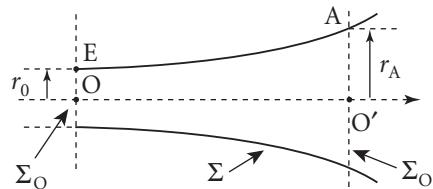
- Un tube de champ est la surface engendrée par les lignes de champ s'appuyant sur une même courbe fermée Γ_1 (cf. figure).
- Or le champ magnétique possède la propriété d'être à flux conservatif ce qui implique :



$$\iint_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 \delta\Sigma = \iint_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 \delta\Sigma$$

soit $\Phi(\Sigma_1) = \Phi(\Sigma_2)$, Σ_1 et Σ_2 étant orientées de la même manière.

- Considérons donc la portion de tube de champ délimitée par les disques D_O (centre O, rayon r_0), $D_{O'}$ (centre O' , rayon r_A) et par la surface latérale obtenue en faisant tourner la ligne de champ EA autour de l'axe OO' .



D'après ce qui précède, nous avons :

$$\Phi(\Sigma_O) = \Phi(\Sigma_{O'}) \quad (1)$$

Or la section $z = 0$ est très éloignée des bords du solénoïde (en comparaison à la dimension transversale a : $l \gg a$). Il est ainsi légitime de faire l'approximation $\vec{B}(z = 0; r) \approx \mu_0 ni \hat{u}_z$ (champ du solénoïde dit « infini »).

Commentaires

Sur l'axe, on a :

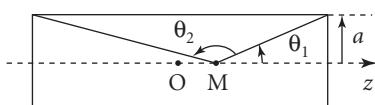
$$B(z; 0) = \frac{\mu_0 ni}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

$$\text{Or } \cos \theta_1 = \frac{l-z}{\sqrt{a^2 + (l-z)^2}}$$

$$\text{et } \cos \theta_2 = -\frac{l+z}{\sqrt{a^2 + (l+z)^2}}.$$

$$\text{Pour } z = 0, \text{ il vient : } B(0; 0) = \frac{2\mu_0 ni}{2} \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}} = \mu_0 ni \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{On a bien } B(0; 0) = \mu_0 ni \left[1 + o\left(\frac{a}{l}\right)\right] \approx \mu_0 ni \text{ pour } a \ll l.$$



$$\text{Soit } \Phi(\Sigma_O) \approx (\mu_0 n i) \cdot \pi r_0^2 \quad (2)$$

quant à $\Phi(\Sigma_{O'})$, il s'exprime selon :

$$\Phi(\Sigma_{O'}) = \iint_{\Sigma_{O'}} \vec{B} \cdot \vec{n}_{O'} \delta\Sigma.$$

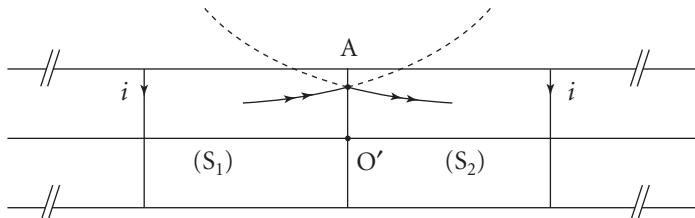
$$\text{Or } \vec{n}_{O'} = \vec{u}_z \text{ et } \vec{B} \cdot \vec{n}_{O'} = B_z(z_{O'}; r)$$

$$\text{d'où : } \Phi(\Sigma_{O'}) = \iint_{\Sigma_{O'}} B_z(z_{O'}; r) \delta\Sigma.$$

soit encore :

$$\Phi(\Sigma_{O'}) = \int_0^{r_A} B_z(z_{O'}; r) 2\pi r dr. \quad (3)$$

Pour évaluer $B_z(z_{O'}; r)$, on peut faire la remarque suivante : associons deux solénoïdes identiques au précédent en les plaçant bout à bout (cf. figure ci-dessous).



Le solénoïde S_1 crée en A le champ \vec{B}'_1 , le solénoïde S_2 le champ \vec{B}'_2 . Ces champs sont contenus dans le plan défini par $O'z$ et $O'A$, et ils sont symétriques par rapport à $A'z$. De plus, on a $B'_{1z} = B'_{2z} = B_z(r)$ grandeur que l'on cherche à déterminer.

Or l'association de S_1 et S_2 constitue un solénoïde de rayon a et de longueur $4l$ dont O' est le centre. On peut donc admettre avec une excellente approximation ($l \gg a$) que :

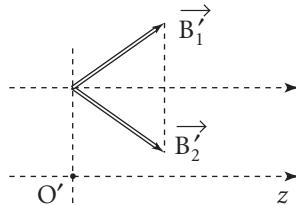
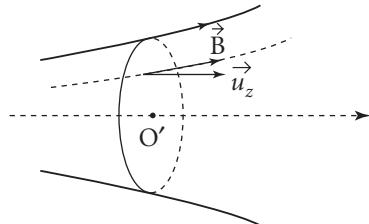
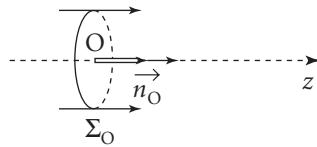
$$\vec{B}'_{S_1 \cup S_2}(A) = \mu_0 n i \vec{u}_z.$$

$$\text{Soit puisque } \vec{B}_{S_1 \cup S_2}(A) = \vec{B}'_1 + \vec{B}'_2 = 2B_z(z_{O'}; r) \vec{u}_z.$$

$$\text{Et } B_z(z_{O'}; r) = \frac{\mu_0 n i}{2} \quad (4)$$

$$\text{L'équation (1) devient, avec (2), (3) et (4) : } \mu_0 n i \pi r_0^2 = \frac{\mu_0 n i}{2} \int_0^{r_A} 2\pi r dr$$

$$\text{et } \mu_0 n i \pi r_0^2 = \frac{\mu_0 n i}{2} \pi r_A^2 \Rightarrow \boxed{r_A = \sqrt{2} r_0} \quad (5) \text{ pour } l \gg a.$$



2. Si l'on note $B_z(A)$ et $B_r(A)$ les composantes axiale et radiale du champ magnétique en A, nous avons :

$$\tan \theta_A = \frac{B_r(A)}{B_z(A)} \text{ avec } B_z(A) = \frac{1}{2} \mu_0 n i.$$

Il reste à déterminer $B_r(A)$. À cet effet, considérons un petit cylindre centré sur le point P de l'axe Oz, de longueur dz et de rayon r .

Nous supposerons r suffisamment petit (devant a) pour que l'on puisse confondre $B_z(r; z)$ avec

$$B_z(0; z) = B_1(z) \quad (B_1(z) \text{ est le champ sur l'axe}$$

z'z). À cette approximation, nous avons (\vec{B} à flux conservatif) : $\Phi_{\Sigma_z} + \Phi_{\Sigma_{z+dz}} + \Phi_{\Sigma_L} = 0$

$$\text{avec } \Phi_{\Sigma_L} = B_r \cdot \Sigma_L = 2\pi r dz B_r$$

$$\Phi_{\Sigma_{z+dz}} = B_1(z+dz) \cdot \pi r^2 \text{ et } \Phi_{\Sigma_z} = -B_1(z) \pi r^2.$$

$$\text{D'où } 2\pi r B_r dz + \pi r^2 [B_1(z+dz) - B_1(z)] = 0.$$

$$\text{Soit } B_r \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_1}{dz}.$$

Prenons une nouvelle origine en O' .

On a donc $z = l + Z$

$$\text{et } B_1(Z) = \frac{\mu_0 n i}{2} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2] \text{ avec } \cos \theta_2 \approx -1$$

$$(\theta_2 \sim \pi \text{ car } l \gg a) \text{ et } \cos \theta_1 = \frac{-Z}{\sqrt{Z^2 + a^2}}.$$

$$\text{Soit } B_1(Z) = \frac{1}{2} \mu_0 n i \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + a^2}} \right).$$

$$\text{Or } \frac{dB_1}{dz} \Big|_{z=l} = \frac{dB_1}{dZ} \Big|_{Z=0} = -\frac{1}{2} \mu_0 n i \frac{1}{a}.$$

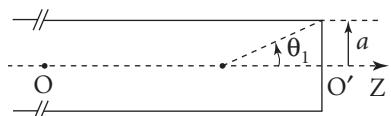
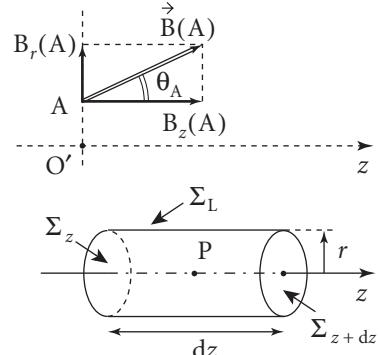
$$\text{D'où } B_r(A) \# -\frac{r_A}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \mu_0 n i \frac{1}{a} \right) \Rightarrow B_r(A) \# \frac{r_A}{2a} \cdot \left(\frac{\mu_0 n i}{2} \right).$$

Ainsi si r_0 est petit devant a , il en sera de même de r_A (cf. (5)) et l'angle θ_A sera donné par :

$$\tan \theta_A \# \theta_A \# \frac{B_r(A)}{B_z(A)} \# \frac{\frac{r_A}{2a} \cdot \left(\frac{\mu_0 n i}{2} \right)}{\left(\frac{\mu_0 n i}{2} \right)} \Rightarrow \theta_A \# \frac{r_A}{2a}.$$

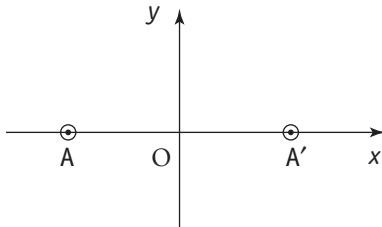
En définitive, nous obtenons ($r_0 \ll a$) :

$$\boxed{\theta_A \# \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r_0}{a}}$$



715 Cartes de lignes de champ

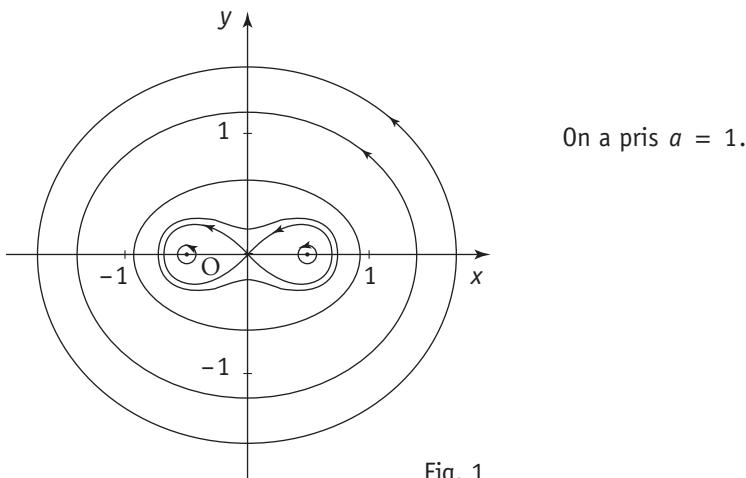
- A. Deux fils droits « infinis » parallèles à \vec{u}_z coupent le plan xOy aux points $A\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$ et $A'\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$.



Ils sont parcourus par des courants I_1 (fil A) et I_2 (fil A') positifs dont le sens est celui de \vec{u}_z .

1. Étude qualitative :

On donne ci-dessous la carte, dans le plan xOy et pour $I_1 = I_2 > 0$, des lignes de champ de $\vec{B}(M)$:



a. Pouvez-vous justifier les différentes caractéristiques de cette figure ?

b. Comment cette « carte » est-elle modifiée pour $I_1 \neq I_2$ ($I_1 > 0$ et $I_2 > 0$) ?

2. Étude quantitative :

a. On suppose : $I_1 \neq I_2$. Montrer que l'on peut définir une fonction $\Phi(M)$ telle que :

$$\vec{B}(M) = \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M).$$

On rappelle que S étant un point fixe, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} [\ln(SM)] = \frac{\overrightarrow{SM}}{SM^2}.$$

On exprimera Φ en fonction de μ_0 , I_1 , I_2 et des distances AM et $A'M$.

On pourra prendre $\Phi = 0$ pour $AM = A'M = 1$.

b. Comment peut-on définir simplement les lignes de champ à partir de la fonction Φ ?

Montrer qu'il est possible de relier le problème étudié à un problème d'électrostatique que l'on précisera.

c. On se propose d'étudier le champ \vec{B} en des points du plan xOy très éloignés de A et A'. On suppose donc que MA et $MA' \gg AA'$. Faire un développement du potentiel Φ . En déduire que l'on a :

$$\vec{B}(M) \approx \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0}{2\pi} (I_1 + I_2) \frac{\overrightarrow{O'M}}{O'M^2} \quad (O' \text{ point du segment } AA').$$

Comment faut-il choisir O' pour que cette approximation soit la meilleure possible ?

Que devient ce point pour $I_1 = I_2$?

B. On revient au cas où $I_1 = I_2 = I > 0$ et on superpose au système précédent un champ uniforme \vec{B}_0 perpendiculaire à \vec{u}_z . On obtient le réseau de lignes de champ représenté sur les figures ci-dessous :

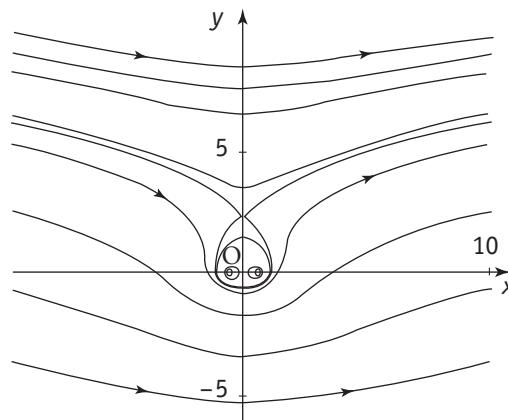


Fig. 2

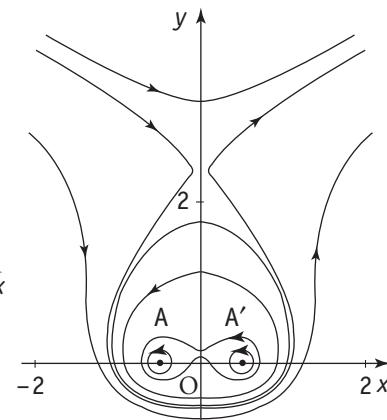


Fig. 3

La figure 3 est un « zoom » de la figure 2.

Les figures 2 et 3 correspondent à $B_0 = 0,8 \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$.

1. a. Commenter ces « cartes » de lignes de champ. On précisera la direction et le sens de \vec{B}_0 .

b. Donner l'expression du nouveau potentiel $\Phi'(M)$.

2. Mettre qualitativement en évidence deux lignes particulières L_c et L'_c et étudier leur existence : on cherchera à déterminer les ordonnées des points d'intersection de L_c et L'_c avec l'axe Oy . En déduire une valeur critique B_c de B_0 .

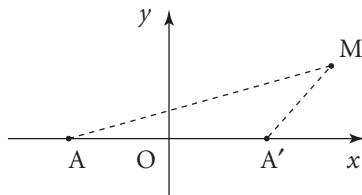
3. On suppose : $B_0 > B_c$. Étudier rapidement les variations de $B(y)$ pour $y > 0$. Donner l'allure des lignes de champ.

Solution

A. 1. a. ■ Propriétés de symétries :

- Le plan xOy est plan d'antisymétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique au point M de ce plan y est donc contenu :

$$\vec{B}(M) = B_x(x; y)\vec{u}_x + B_y(x; y)\vec{u}_y.$$



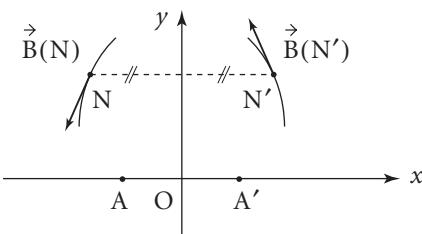
Le champ ne dépend pas de z puisque le système est invariant par translation selon \vec{u}_z .

- D'autre part, dans le cas où $I_1 = I_2$, le plan yOz est plan de symétrie. Il en résulte que :
- le champ sur l'axe $y'y$ est perpendiculaire à cet axe :

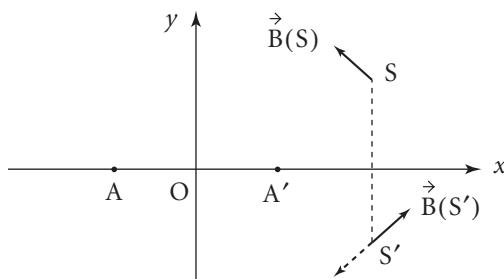
$$\vec{B}(0; y) = f(y)\vec{u}_x;$$

- En deux points symétriques N et N' du plan xOy , on a :

$$\vec{B}(N') = -\text{Sym}[\vec{B}(N)].$$



- Enfin, on peut considérer que le plan xOz est également plan de symétrie. Le champ \vec{B} est donc, sur l'axe $x'x$, perpendiculaire à cet axe, et en deux points S et S' du plan xOy symétriques par rapport à Ox , on a :



On peut donc conclure – dans le cas où $I_1 = I_2$ – que le réseau des lignes de champ est symétrique par rapport à $x'x$ et $y'y$, ce que l'on observe bien sur la figure proposée dans l'énoncé.

■ Champ proche d'un des deux fils :

Pour $AM \ll A'M$, l'influence du fil passant par A est prépondérante : au voisinage du point A, les lignes de champ diffèrent d'autant moins de cercles centrés en A que l'inégalité précédente est stricte.

On observe donc des lignes de champ fermées entourant respectivement A et A' aux voisinages de ces deux points, traces des fils dans le plan xOy .

■ Champ à grande distance :

Pour $OM \gg AA'$, on peut réduire l'ensemble des deux fils, en première approximation, à un seul fil confondu avec l'axe $z'z$ et parcouru par le courant total $2I$. Les lignes de champ deviennent, dans le plan xOy , des cercles de centre O.

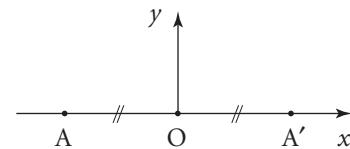
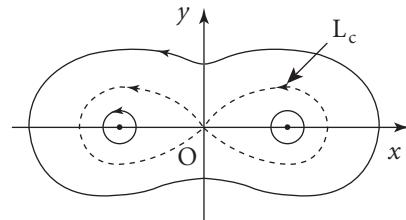
■ Ligne critique :

Une ligne critique L_c constitue la ligne de séparation entre les lignes de champ qui entourent les deux points A et A' et celles qui n'entourent que A ou que A'.

Elle est constituée de deux lobes qui se rejoignent en O où le champ est ici nul. En effet :

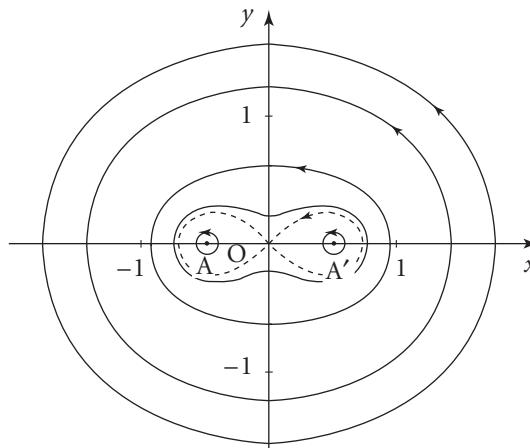
$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi AO} \vec{u}_y + \frac{\mu_0 I}{2\pi A'O} (-\vec{u}_y)$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{AO} - \frac{1}{A'O} \right) \vec{u}_y = \vec{0}$$



puisque $OA = OA'$ (O milieu du segment AA').

On retrouve bien toutes ces caractéristiques sur le réseau de lignes de champ représentées ci-dessous. Elles sont orientées dans le sens trigonométrique ($I > 0$).



On a pris :

- $OA = OA' = \frac{1}{2}$;
- $I_1 = I_2 > 0$.

A. 1. b. • Au voisinage de A (respectivement de A'), l'influence du fil traversant le plan xOy en A (respectivement en A') est prépondérante et on aura des lignes de champ entourant A (respectivement A').

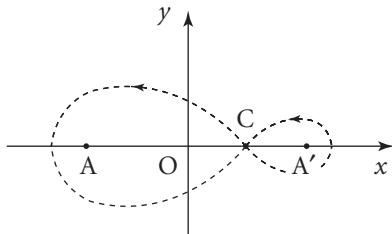
- Loin de A et A' (pour $MO \gg AA'$), on doit retrouver des lignes de champ quasi circulaires centrées en un point G du segment AA' (pour $I_1 \neq I_2$, on n'a plus la symétrie précédente et le point G ne se confond plus avec le point O... On verra dans la partie 2 qu'il s'agit en fait du barycentre de $A(I_1)$ et $A'(I_2)$...).
- Il existe donc, une ligne critique constituée de deux lobes dissymétriques se rejoignant en un point C de champ nul. On a :

$$\vec{B}(C) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{I_1}{AC} - \frac{I_2}{A'C} \right) \vec{u}_y.$$

C est défini selon ($C \in [AA']$) :

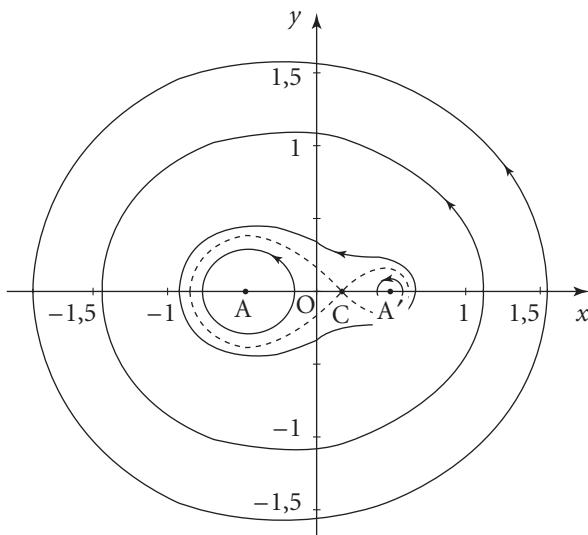
$$\frac{CA'}{CA} = \frac{I_2}{I_1}.$$

Pour $I_1 = 2I_2$, cas correspondant à la figure ci-dessous, il vient :



$$CA = 2CA' \Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{CA'} \Rightarrow \overline{OC} - \overline{OA} = 2(\overline{OA'} - \overline{OC})$$

$$\text{d'où : } 3\overline{OC} = \overline{OA} + 2\overline{OA'} \Rightarrow \overline{OC} = \frac{1}{3}(-0,5 + 2 \times 0,5) = \frac{1}{6} \text{ pour } \overline{OA'} = \overline{AO} = 0,5.$$



On a pris :

- $AO = OA' = 0,5$.
- $I_1 = 2I_2 > 0$.

Le point G est ici symétrique de C par rapport à O.

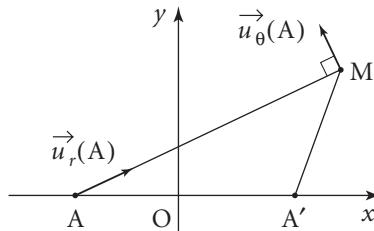
Commentaire

Les lignes de champ restent symétriques par rapport à Ox, mais la symétrie par rapport à Oy est perdue ($I_1 \neq I_2$).

A. 2. a. Le champ \vec{B} créé dans le plan xOy par les deux fils droits est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{\vec{u}_\theta(A)}{AM} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \frac{\vec{u}_\theta(A')}{A'M}.$$

$\vec{u}_\theta(A)$ vecteur unitaire directement perpendiculaire au vecteur \overrightarrow{AM} .



$$\text{Or } \vec{u}_\theta(A) = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r(A)$$

$$\text{Soit } \frac{\vec{u}_\theta(A)}{AM} = \vec{u}_z \wedge \frac{\overrightarrow{AM} \vec{u}_r(A)}{AM^2} = \vec{u}_z \wedge \frac{\overrightarrow{AM}}{AM^2}.$$

Finalement, nous obtenons :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \vec{u}_z \wedge \left[I_1 \frac{\overrightarrow{AM}}{AM^2} + I_2 \frac{\overrightarrow{A'M}}{A'M^2} \right].$$

Et d'après le texte, A et A' étant des points fixes du plan xOy , $\frac{\overrightarrow{AM}}{AM^2} = \overrightarrow{\text{grad}}[\ln(AM)]$

$$\text{et } \frac{\overrightarrow{A'M}}{A'M^2} = \overrightarrow{\text{grad}}[\ln(A'M)].$$

$$\text{D'où : } \vec{B}(M) = \vec{u}_z \wedge \left\{ \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \overrightarrow{\text{grad}}(\ln(AM)) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \overrightarrow{\text{grad}}(\ln(A'M)) \right\}.$$

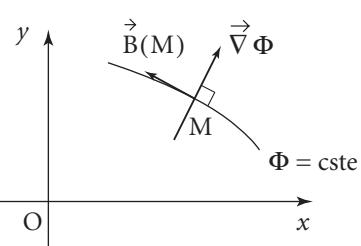
Soit : $\vec{B}(M) = \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)$ avec :

$$\boxed{\Phi(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 \ln(AM) + \frac{\mu_0}{2\pi} I_2 \ln(A'M)}$$

A. 2. b. Considérons dans le plan xOy une ligne équi- Φ .

$$\text{On a } \vec{B}(M) = \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M).$$

Le vecteur $\vec{E}' = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)$ est normal en M à la ligne équi- Φ . Le vecteur $\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)$ est donc tangent à cette ligne.



Il en résulte que les lignes de champ (de \vec{B}) se confondent avec les « équipotentielle » $\Phi = \text{cste}$.

Commentaire

C'est ainsi qu'on a pu tracer, sur ordinateur, les faisceaux de lignes de champ...

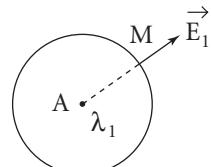
On peut également remarquer que ce potentiel est « analogue » à celui obtenu dans un problème d'électrostatique pour un système de deux fils uniformément chargés (densités linéiques λ_1 et λ_2). Les fils sont parallèles à \vec{u}_z et passent par A et A'.

D'après le théorème de Gauss appliqué à chaque fil, pris séparément, on aurait :

$$\mathbf{E}_1 \cdot 2\pi AMh = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda_1 h \Rightarrow \vec{\mathbf{E}}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 AM^2} \vec{AM}.$$

D'où au total :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\lambda_1 \frac{\vec{AM}}{AM^2} + \lambda_2 \frac{\vec{A'M}}{AM^2} \right) \quad (\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2).$$



Au champ $\vec{\mathbf{E}}_1$, on associe le potentiel électrostatique $V_1(M)$ tel que (symétrie cylindrique) :

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = - \frac{dV_1}{dr_1} \vec{u}_{r_1} \quad \left(\vec{u}_{r_1} = \frac{\vec{AM}}{AM} \right).$$

Soit $- \frac{dV_1}{dr_1} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r_1}$ ($r_1 = AM$)

et $V_1 = - \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1$ (+cste).

Les équipotentielles, pour le problème des deux fils chargés, sont définies, dans le plan xOy , par :

$$\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln(AM) + \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \ln(A'M) = \text{cste.}$$

Quant aux équipotentielles du problème réel ($\Phi = \text{cste}$), elles correspondent à :

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln(AM) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \ln(A'M) = \text{cste.}$$

D'où

	\Leftrightarrow	
A		A'
fil chargé		fil chargé
λ_1		λ_2
équipotentielles	\Leftrightarrow	lignes de champ de $\vec{\mathbf{B}}$
$\frac{\lambda_i}{\epsilon_0}$	\Leftrightarrow	$\mu_0 I_i$

A. 2. c. On suppose maintenant que $O'M \gg AA'$, O' étant un point du segment AA' .

Faisons alors un développement limité du potentiel Φ :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln(AM) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \ln(A'M)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \ln(\overrightarrow{AM})^2 + \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \ln(\overrightarrow{A'M})^2 = \Phi_1 + \Phi_2.$$

$$\text{Or } (\overrightarrow{AM})^2 = (\overrightarrow{O'M} - \overrightarrow{O'A})^2 = \overrightarrow{O'M}^2 - 2\overrightarrow{O'A} \cdot \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{O'A}^2$$

$$= O'M^2 \left[1 - \frac{2\overrightarrow{O'A} \cdot \overrightarrow{O'M}}{O'M^2} + \frac{\overrightarrow{O'A}^2}{O'M^2} \right].$$

$$\text{D'où } \Phi_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \left[\ln(O'M^2) + \ln \left\{ 1 - \frac{2\overrightarrow{O'A} \cdot \overrightarrow{O'M}}{O'M^2} + \frac{\overrightarrow{O'A}^2}{O'M^2} \right\} \right]$$

$$\text{et } \Phi_1 \approx \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln(O'M) + \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \left(-2 \frac{\overrightarrow{O'M} \cdot \overrightarrow{O'A}}{O'M^2} \right)$$

$$\text{soit : } \Phi \approx \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} (I_1 + I_2) \ln(O'M)}_{\varphi_a} - \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi O'M^2} \overrightarrow{O'M} \cdot (\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'A'})}_{\varphi_b} + \dots$$

φ_a correspondrait, pour le problème d'électrostatique, à un fil droit de trace O' dans le plan xOy . Pour le problème réel, il s'agit d'un fil droit parcouru par le courant $I_1 + I_2$; φ_b serait associé à un terme dipolaire linéaire... ;

Φ se réduit d'autant plus vite à φ_a que φ_b est nul, c'est-à-dire que le point O' est choisi de telle sorte que :

$$I_1 \overrightarrow{O'A} + I_2 \overrightarrow{O'A'} = \vec{0}.$$

Introduisons le barycentre G des points $A(I_1)$ et $A'(I_2)$:

$$(I_1 + I_2) \overrightarrow{O'G} = I_1 \overrightarrow{O'A} + I_2 \overrightarrow{O'A'} \quad (I_1 + I_2 \neq 0 \text{ ici donc } G \text{ existe bien}).$$

d'où $\overrightarrow{O'G} = \vec{0}$ et O' se confond avec G .

Il en résulte que, suffisamment loin de A et A' , les lignes de champ se « confondent » avec des cercles de centre G .

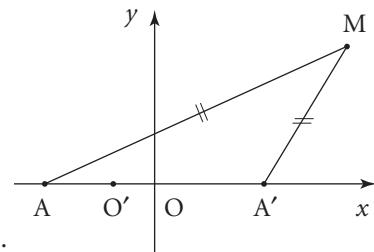
$$\boxed{\vec{B}(M) \approx \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0}{2\pi} (I_1 + I_2) \frac{\overrightarrow{GM}}{GM^2}}$$

– dans le cas où $I_1 = I_2$, G s'identifie au point O ce qui est normal (symétrie) ;

– pour $I_1 = 2I_2$, on a :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'} = 0 \Rightarrow 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OG}) = 0 \text{ et } 3\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}$$

et pour $\overrightarrow{OA'} = 0,5 = -\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{6}$ (le point G est symétrique de C ...).



B. 1. a. Suffisamment loin des points A et A', les champs créés par les fils droits vont devenir négligeables devant \vec{B}_0 ; les lignes de champ doivent alors quasiment se confondre avec des droites parallèles à la direction de \vec{B}_0 .

La figure 2 nous indique alors que le champ \vec{B}_0 est parallèle à l'axe Ox.

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x.$$

D'autre part, pour $I_1 = I_2$ et $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x$, le plan yOz reste un plan symétrie :

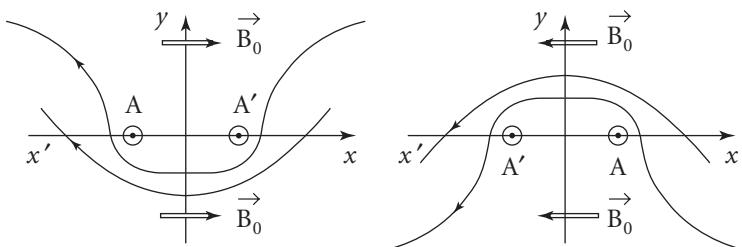
- les lignes de champ coupent l'axe $y'y$ à angle droit ;
- les lignes de champ sont symétriques par rapport à $y'y$.

Ce que l'on observe bien sur la figure 2.

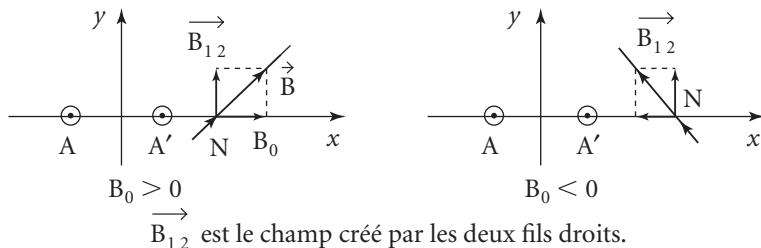
Évidemment l'existence du champ $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x$ détruit la symétrie par rapport à $x'x$.

Mais changer B_0 en $-B_0$ reviendrait à faire, pour ce qui est du tracé des lignes de champ, une symétrie par rapport à $x'x$.

On passe d'une figure à l'autre par une simple rotation de π autour de Oz :



Enfin, il est à noter que pour $I_1 = I_2 = I_0 > 0$, on a ici $B_0 > 0$. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre en compte la ligne de champ qui coupe l'axe Ox en un point N tel que $ON > OA'$.



B. 1. b. On a : $\vec{B}' = \vec{B}_{12}(M) + B_0 \vec{u}_x$

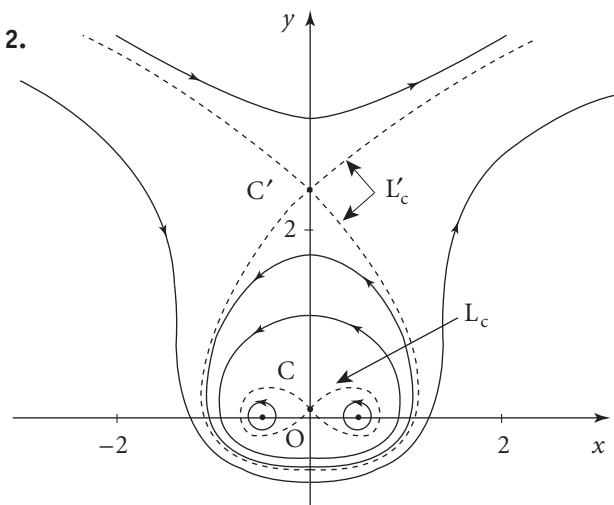
$$\text{où } \vec{B}_{12}(M) = \vec{u}_z \wedge \vec{\text{grad}}\Phi \text{ avec } \Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \{I_1 \ln(AM) + I_2 \ln(A'M)\}.$$

$$\text{De plus : } \vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x = \vec{u}_z \wedge (-B_0 \vec{u}_y) = \vec{u}_z \wedge \vec{\text{grad}}(-B_0 y).$$

Le nouveau potentiel $\Phi'(M)$ peut alors s'écrire :

$$\boxed{\Phi'(M) = \Phi(M) - B_0 y}$$

B. 2.



$$I_1 = I_2 > 0$$

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x$$

avec $B_0 > 0$.

- Il y a deux lignes particulières L_c et L'_c :

– L_c sépare les lignes de champ qui entourent A seul (ou A' seul) de celles qui entourent A et A' ;

– L'_c constitue une frontière entre les lignes de champ fermées (les précédentes) et celles qui ne le sont pas et qui vont à l'infini.

- Il apparaît donc deux points singuliers C et C' où le champ \vec{B} doit être nul. Calculons le champ total en un point M de l'axe Oy .

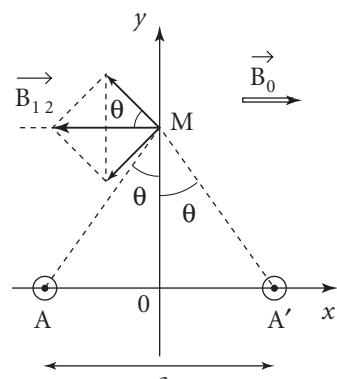
$$\text{On a : } \vec{B}(y) = \vec{B}_{12}(y) + B_0 \vec{u}_x.$$

$$\text{Or } \vec{B}_{12}(y) = -2 \frac{\mu_0 I}{2\pi AM} \cos \theta \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_{12}(y) = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{AM}{AM^2} \cos \theta \vec{u}_x \text{ avec } AM \cos \theta = y \text{ et}$$

$$AM^2 = y^2 + \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Soit : } \vec{B}(y) = \left(B_0 - \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{y}{y^2 + \frac{a^2}{4}} \right) \vec{u}_x.$$



Posons $k = \frac{B_0}{\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a}\right)}$, alors :

$$\vec{B}(y) = \left[B_0 - 2 \frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{\frac{y}{(a/2)}}{1 + \left(\frac{y}{a/2}\right)^2} \right] \vec{u}_x$$

$$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left[k - 2 \frac{Y}{1 + Y^2} \right] \vec{u}_x \quad \text{où } Y = \frac{y}{(a/2)}.$$

Les points de l'axe Oy où \vec{B} s'annule, s'ils existent, sont solution de l'équation :

$$1 + Y^2 - \frac{2}{k} Y = 0.$$

Le discriminant réduit associé vaut : $\Delta' = \frac{1}{k^2} - 1$.

Il faut donc que $k^2 < 1$, soit ici

$$B_0 < B_c = \frac{\mu_0 I}{\pi a}$$

La valeur critique B_c correspond au module du champ créé par un fil en l'emplacement du second.

On a alors : $Y = \frac{1}{k} \pm \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1} \Rightarrow$ points C et C'.

Commentaire

Pour $B_0 = B_c$, les points C et C' se confondent et l'on a ($k = 1$) :

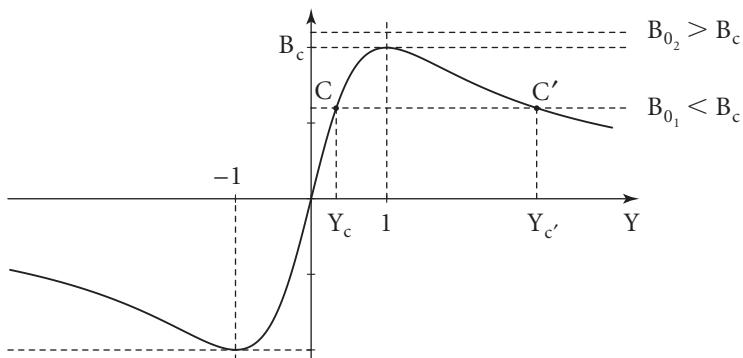
$$Y_c = Y_{c'} = 1 \quad \text{soit } y_c = \frac{a}{2}$$

ou encore $OC = OC' = OA = OA'$.

B. 3. Le champ sur l'axe Oy vaut $\vec{B} = B(Y) \vec{u}_x$ avec :

$$B(Y) = B_0 - 2 \frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{Y}{1 + Y^2} \quad \text{où } Y = \frac{y}{(a/2)}.$$

Traçons sur un même graphe les courbes $Y \rightarrow B_0$ et $Y \rightarrow 2 \frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{Y}{1 + Y^2}$.



- Pour la valeur B_{0_1} de B_0 inférieur à B_c , on retrouve les points singuliers C et C' d'ordonnées réduites Y_c et $Y_{c'}$ (pour lesquels $B(Y) = 0$).
- Pour $B_{0_2} > B_c$, ces points n'existent plus. Pour $Y > 0$, $B(Y)$ passe par un minimum pour $Y = 1$ (soit $y = \frac{a}{2}$).

Il doit alors apparaître une ligne critique correspondant à la ligne de champ passant par ce point C'' (\vec{B}_y est parallèle à \vec{u}_x).

On a représenté ci-dessous quelques lignes de champ pour $B_0 = 2B_c$:

