

*f'intégrer*

Jean-Marie Monier

# LES MÉTHODES ET EXERCICES DE MATHÉMATIQUES MPSI

- Les méthodes à retenir
- Plus de 500 énoncés d'exercices
- Indications pour bien démarrer
- Corrigés détaillés

DUNOD

**LES MÉTHODES ET EXERCICES DE**

**MATHÉMATIQUES**

**MPSI**

# Consultez nos parutions sur dunod.com

The screenshot shows a computer browser window displaying the website [dunod.com](http://www.dunod.com/). The page features a header with the Dunod logo and links to Éduscience, ETSF, InterEditions, and Microsoft Press. A search bar is at the top right, along with links for Collections and Index thématique. On the left, there's a sidebar with sections for Interviews, Club Enseignants, Inscrivez-vous!, Evénements, Découvrez le vidéoblog Profession dirigeant, and En librairie ce mois-ci. The main content area highlights several books: "Bacchus 2008" by Jean-Pierre Couderc, Hervé Hannin, François d'Hauteville, Etienne Montaigne; "Python" by Tarek Ziadé; and "150 petites expériences de psychologie du sport" by Yvan Paquet, Pascal Legrain, Elisabeth Rosnet, Stéphane Rusinek. To the right, there are sections for LES BIBLIOTHÈQUES DES MÉTIERS (with links to Bibliothèque du DSI, Gestion industrielle, Métiers de la vigne et du vin, Marketing et Communication, Directeur d'établissement social et médico-social, and Toutes les bibliothèques) and LES NEWSLETTERS (with links to Action sociale, Psychologie, Développement personnel et Bien-être, Entreprise, Expertise comptable, Informatique et NTIC, Industrie, and Toutes les newsletters). At the bottom, there are links for bibliothèques des métiers, newsletters, MicrosoftPress, ediscience.net, expert-sup.com, Notice légale, and a link to the footer.

# **LES MÉTHODES ET EXERCICES DE**

# **MATHÉMATIQUES**

# **MPSI**

**Jean-Marie Monier**

*Professeur en classes de Spéciales  
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon*

DUNOD

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

© Dunod, Paris, 2008  
ISBN 978-2-10-053973-4

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocollage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements



d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

# Table des matières

## ■ 1. Les nombres réels

- Les méthodes à retenir
- Énoncés des exercices
- Du mal à démarrer ?
- Corrigés des exercices

## ■ 2. Les nombres complexes

- Les méthodes à retenir
- Énoncés des exercices
- Du mal à démarrer ?
- Corrigés des exercices

## ■ 3. Suites numériques

- Les méthodes à retenir
- Énoncés des exercices
- Du mal à démarrer ?
- Corrigés des exercices

## ■ 4. Fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle

- Les méthodes à retenir
- Énoncés des exercices
- Du mal à démarrer ?
- Corrigés des exercices

## ■ 5. Dérisation

- 1 Les méthodes à retenir
- 3 Énoncés des exercices
- 5 Du mal à démarrer ?
- 6 Corrigés des exercices

## ■ 6. Intégration

- 11 Les méthodes à retenir
- 14 Énoncés des exercices
- 18 Du mal à démarrer ?
- 19 Corrigés des exercices

## ■ 7. Fonctions usuelles

- 29 Les méthodes à retenir
- 30 Énoncés des exercices
- 32 Du mal à démarrer ?
- 37 Corrigés des exercices

## ■ 8. Comparaison locale des fonctions

- 47 Les méthodes à retenir
- 49 Énoncés des exercices
- 52 Du mal à démarrer ?
- 53 Corrigés des exercices

**9. Calculs de primitives**

- Les méthodes à retenir  
 Énoncés des exercices  
 Du mal à démarrer ?  
 Corrigés des exercices

**10. Équations différentielles**

- Les méthodes à retenir  
 Énoncés des exercices  
 Du mal à démarrer ?  
 Corrigés des exercices

**11. Notions sur les fonctions de deux variables réelles**

- Les méthodes à retenir  
 Énoncés des exercices  
 Du mal à démarrer ?  
 Corrigés des exercices

**12. Compléments de calcul intégral**

- Les méthodes à retenir  
 Énoncés des exercices  
 Du mal à démarrer ?  
 Corrigés des exercices

**13. Vocabulaire de la théorie des ensembles** 195

- Les méthodes à retenir  
 Énoncés des exercices  
 Du mal à démarrer ?  
 Corrigés des exercices

**14. Structures algébriques**

- Les méthodes à retenir  
 Énoncés des exercices  
 Du mal à démarrer ?  
 Corrigés des exercices

**15. Nombres entiers, nombres rationnels** 219

- 133 Les méthodes à retenir 219  
 136 Énoncés des exercices 221  
 138 Du mal à démarrer ? 223  
 139 Corrigés des exercices 225

**149****16. Arithmétique dans  $\mathbb{Z}$**  231

- 149 Les méthodes à retenir 231  
 152 Énoncés des exercices 233  
 155 Du mal à démarrer ? 236  
 157 Corrigés des exercices 238

**169****17. Polynômes, fractions rationnelles** 247

- 169 Les méthodes à retenir 247  
 172 Énoncés des exercices 251  
 174 Du mal à démarrer ? 257  
 176 Corrigés des exercices 258

**183****18. Espaces vectoriels** 271

- 183 Les méthodes à retenir 271  
 185 Énoncés des exercices 273  
 187 Du mal à démarrer ? 275  
 188 Corrigés des exercices 276

**195****19. Applications linéaires** 281

- 195 Les méthodes à retenir 281  
 196 Énoncés des exercices 283  
 198 Du mal à démarrer ? 286  
 199 Corrigés des exercices 288

**203****20. Matrices** 295

- 203 Les méthodes à retenir 295  
 205 Énoncés des exercices 298  
 209 Du mal à démarrer ? 304  
 211 Corrigés des exercices 307

<b>21. Déterminants, systèmes linéaires</b>			
Les méthodes à retenir	319	Du mal à démarrer ?	359
Énoncés des exercices		Corrigés des exercices	361
Du mal à démarrer ?	319		
Corrigés des exercices	321		
<b>22. Espaces vectoriels euclidiens</b>		<b>24. Géométrie dans l'espace</b>	<b>371</b>
Les méthodes à retenir		Les méthodes à retenir	371
Énoncés des exercices		Énoncés des exercices	374
Du mal à démarrer ?		Du mal à démarrer ?	376
Corrigés des exercices		Corrigés des exercices	378
<b>23. Géométrie plane</b>		<b>25. Courbes du plan</b>	<b>385</b>
Les méthodes à retenir	333	Les méthodes à retenir	385
Énoncés des exercices	336	Énoncés des exercices	388
Du mal à démarrer ?	341	Du mal à démarrer ?	390
Corrigés des exercices	343	Corrigés des exercices	392
	353	<b>Index alphabétique</b>	<b>405</b>
	355		

# Pour bien utiliser cet ouvrage



## La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.

This page is titled 'Les méthodes à retenir' and contains several boxes with instructions and associated exercises. The boxes include:

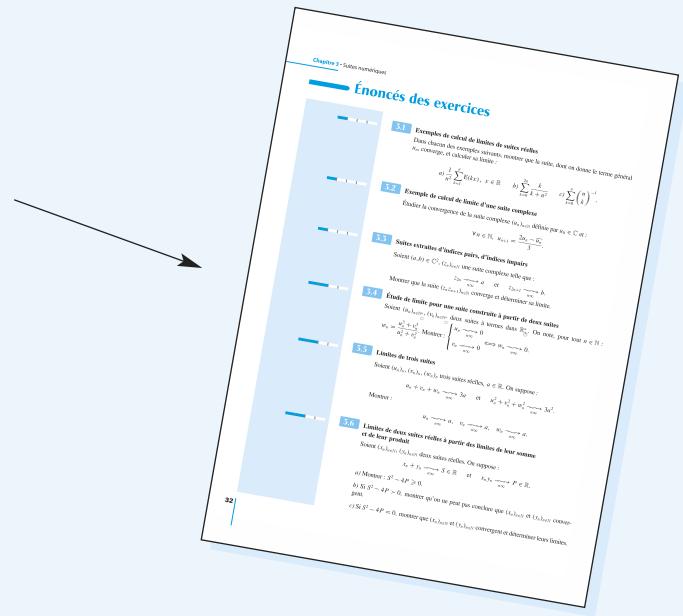
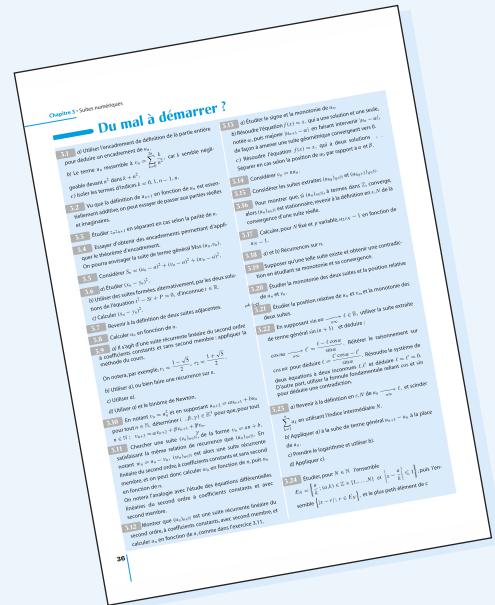
- 'Pour montrer qu'une suite converge et trouver sa limite':
  - Exposer l'expression du terme général  $a_n$ , de façon à pouvoir appliquer les théorèmes portant nécessairement sur les suites convergentes.
  - Exercices 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.6
- 'Pour étudier la convergence d'une suite':
  - De manière générale, privilégier l'application des éléments du théorème de Cauchy.
  - Exercice 3.4
- 'Pour étudier la convergence d'une suite dans l'espace rapporté à une distance entre les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs':
  - Ne pas avoir « épouillée » que dans les cas où les éléments des théorèmes de Cauchy ne s'appliquent pas directement.
  - Exercices 3.16, 3.22.
- 'Pour montrer qu'une suite diverge':
  - Examiner le comportement des deux suites extraites, indices pairs, indices impairs.
  - Exercice 3.3.
- 'Pour étudier une suite extraite d'une suite convergente':
  - Étudier de :
    - trouver deux suites extraites et ayant des limites différentes
    - montrer que le terme général tend vers  $+\infty$  ou tend vers  $-\infty$
    - montrer par l'absurde : supposer que la suite converge et montrer une contradiction.
  - Exercice 3.22.
- 'Pour montrer que deux suites réelles ( $a_n$ ,  $b_n$ ) sont adjacentes':
  - Établir que :
    - 1) l'une est croissante
    - 2) l'autre est décroissante
    - 3) la différence  $a_n - b_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.
  - Exercice 3.15.
- 'Pour calculer le terme général d'une suite réelle convergente':
  - Former l'équation caractéristique et appliquer les éléments de cours.
  - Exercices 3.8, 3.9, 3.18, 3.19.

## Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.

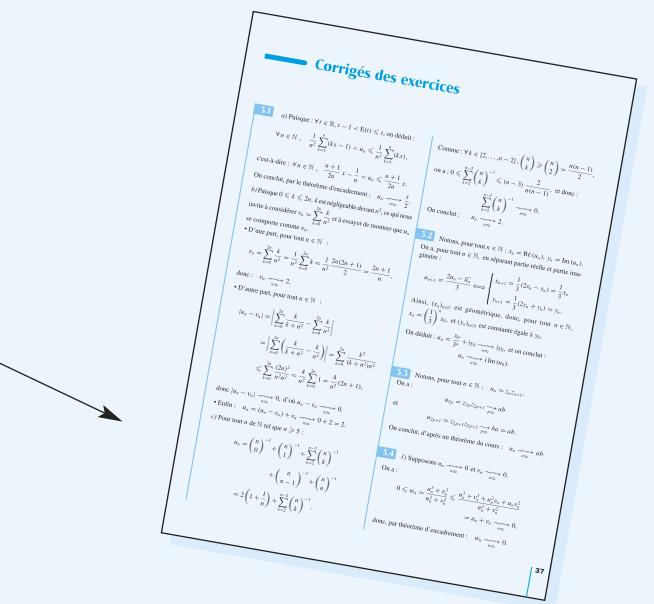
## Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



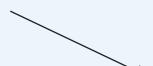
## Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.



# Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.





# Remerciements

Je tiens ici à exprimer ma gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

Bruno Arsac, Jean-Philippe Berne, Jacques Blanc, Gérard Bourgin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, Guillaume Haberer, André Laffont, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

Jean-Marie Monier

## Plan

Les méthodes à retenir	1
Énoncés des exercices	3
Du mal à démarrer ?	5
Corrigés	6

## Thèmes abordés dans les exercices

- Équations, inéquations, systèmes d'équations
- Racine carrée, racines  $n$ -èmes
- Manipulation du symbole  $\sum$  de sommation d'un nombre fini de termes et du symbole  $\prod$  de produit d'un nombre fini de facteurs
- Utilisation de la fonction partie entière.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Résolution des équations et inéquations du premier et du second degré dans  $\mathbb{R}$
- Raisonnement par récurrence
- Définition de la fonction partie entière
- Notions de borne supérieure et borne inférieure dans  $\mathbb{R}$  et le théorème : toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure dans  $\mathbb{R}$ .

## Les méthodes à retenir

Pour résoudre une équation ou une inéquation à une inconnue dans les réels

- On sait résoudre les équations et les inéquations du premier degré ou du second degré (voir cours).
- Toujours tenir compte des particularités de l'équation ou de l'inéquation proposée : à ce niveau, s'il y a une question, c'est qu'il y a une réponse exprimable.
- Effectuer un changement d'inconnue (ou un changement de variable) pouvant ramener l'équation ou l'inéquation à une autre plus simple. On prendra souvent comme nouvelle inconnue un regroupement intervenant plusieurs fois dans l'équation ou l'inéquation.

→ Exercices 1.3, 1.8, 1.9

- Reconnaître un développement remarquable, par exemple celui du binôme de Newton.

→ Exercice 1.1

- Montrer que l'équation se ramène à  $f(x) = 0$ , où  $f$  est strictement monotone, ce qui établira que l'équation admet au plus une solution.

→ Exercice 1.4

- S'il y a des radicaux, essayer de les chasser par élévation(s) au carré, ou faire intervenir la notion de quantité conjuguée.

→ Exercice 1.2.

### Pour résoudre un système d'équations symétrique (ou presque symétrique) à deux inconnues $x,y$

Essayer de faire intervenir la somme et le produit de  $x$  et  $y$ , en notant  $S = x + y$  et  $P = xy$ , et en considérant  $S$  et  $P$  comme les nouvelles inconnues.

→ Exercice 1.5.

Voir aussi chapitre 17.

- Effectuer un changement de variable pouvant ramener l'inégalité voulue à une autre plus simple.

→ Exercice 1.10

- Tenir compte éventuellement des rôles symétriques des réels qui interviennent.

→ Exercice 1.6 b)

### Pour établir une inégalité portant sur plusieurs réels

- Faire tout passer dans un membre, puis faire apparaître une somme de nombres tous positifs ou nuls (souvent des carrés de réels), pour conclure à une positivité.

→ Exercices 1.6, 1.11

- Appliquer convenablement l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou l'inégalité de Minkowski.

→ Exercice 1.12.

Voir aussi chapitre 6.

### Pour établir une propriété faisant intervenir une entier $n$ quelconque

Essayer de faire une récurrence sur  $n$ . Pour y arriver, il faut que la propriété à l'ordre  $n + 1$  s'exprime simplement en faisant intervenir la propriété à l'ordre  $n$ .

→ Exercice 1.13.

### Pour résoudre une question portant sur une ou des parties entières

Utiliser essentiellement la définition de la partie entière  $E(x)$  d'un réel  $x$  :

$$E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad E(x) \leqslant x < E(x) + 1,$$

ou encore :

$$E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x - 1 < E(x) \leqslant x.$$

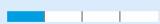
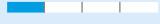
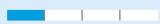
→ Exercices 1.7, 1.15.

Pour montrer qu'un nombre réel  $\alpha$  est irrationnel

Raisonner par l'absurde : supposer  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et déduire une contradiction.

→ Exercices 1.17, 1.18, 1.19.

## Énoncés des exercices



### 1.1 Exemple de résolution d'une équation polynomiale à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :  $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$ .

### 1.2 Exemple de résolution d'une équation avec racines carrées dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x}.$$

### 1.3 Exemple de résolution d'une équation avec racine carrée dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :  $3x^2 - 3x - 4\sqrt{x^2 - x + 3} = 6$ .

### 1.4 Exemple de résolution d'une équation avec racines $n$ -èmes dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :  $4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[4]{x} = 9$ .

### 1.5 Exemple de résolution d'un système d'équations algébriques dans les réels

Résoudre le système d'équations d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  : (S)

$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 3 \\ y^2 + yx + x = -1. \end{cases}$$

### 1.6 Des inégalités sur des réels

a) Montrer :  $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $\frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{3a-b}{4}$ .

b) En déduire :  $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ ,  $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$ .

### 1.7 Une partie entière calculable

Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $E((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2) = 4n + 1$ .

### 1.8 Exemple de résolution d'une équation polynomiale à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :  $(x-7)(x-5)(x+4)(x+6) = 608$ .

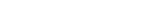
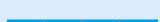
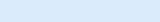
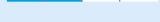
### 1.9 Exemple de résolution d'une équation avec racines $n$ -èmes dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sqrt[4]{(19-x)(x-2)} + \sqrt{19-x} + \sqrt{x-2} = 7.$$

### 1.10 Exemple de résolution d'une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :  $2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[3]{x} \geqslant \sqrt{x}$ .

**1.11****Une inégalité du second degré sur des réels**

Montrer :  $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a+b+c)^2 \leqslant 4a^2 + 4b^2 + 2c^2$ .

**1.12****Une inégalité sur des réels**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ . Montrer :

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n b_k \right)^2 \leqslant \left( \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right)^2.$$

**1.13****Une inégalité sur des réels**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n \in [1, +\infty[$ . Montrer :  $\prod_{i=1}^n (1+a_i) \leqslant 2^{n-1} \left( 1 + \prod_{i=1}^n a_i \right)$ .

**1.14****Une inégalité portant sur une sommation**

Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1$ .

**1.15****Somme de parties entières**

Montrer :  $\forall n \in \mathbb{Z}, E\left(\frac{n-1}{2}\right) + E\left(\frac{n+2}{4}\right) + E\left(\frac{n+4}{4}\right) = n$ .

**1.16****Un entier caché sous des radicaux**

Montrer que le réel  $A = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} + 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$  est un entier et le calculer.

**1.17****Étude d'irrationnalité pour une somme de deux racines carrées**

Soient  $x, y \in \mathbb{Q}_+$  tels que  $\sqrt{x}$  et  $\sqrt{y}$  soient irrationnels. Montrer que  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  est irrationnel.

**1.18**

a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n$  ne soit le carré d'aucun entier. Montrer :  $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ .

b) Établir :  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .

**1.19****Un exemple surprenant de rationnel issu d'irrationnels par exponentiation**

Montrer qu'il existe  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{Q})^2$  tel que  $a^b \in \mathbb{Q}$ .

**1.20****Étude des sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$** 

Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ , tel que  $G \neq \{0\}$ .

1) Montrer que  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  admet une borne inférieure  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , et que  $\alpha \geqslant 0$ .

2) a) On suppose ici  $\alpha > 0$ . Démontrer :  $G = \alpha\mathbb{Z}$ .

b) On suppose ici  $\alpha = 0$ . Démontrer que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

On a donc établi le résultat suivant :

Tout sous-groupe additif  $G$  de  $\mathbb{R}$  est soit discret (c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $G = \alpha\mathbb{Z}$ ), soit dense dans  $\mathbb{R}$ .

3) Soient  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $G_\omega = \{a + b\omega; (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ .

a) Vérifier que  $G_\omega$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$ .

b) On suppose ici  $\omega \in \mathbb{Q}$ . On note  $(p,q)$  le couple de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\omega = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(p,q) = 1.$$

Démontrer :  $G_\omega = \frac{1}{q} \mathbb{Z}$ .

c) On suppose ici  $\omega \notin \mathbb{Q}$ . Démontrer que  $G_\omega$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

## Du mal à démarrer ?

**1.1** Faire apparaître le développement d'un cube.

**1.2** Essayer de faire disparaître les  $\sqrt[n]{\cdot}$ , par élévation(s) au carré.

**1.3** Remarquer la présence, deux fois, de  $x^2 - x$ .

**1.4** Utiliser un argument de stricte monotonie d'une fonction.

**1.5** Puisque les deux équations du système se ressemblent, on peut essayer de les additionner, par exemple.

**1.6** a) Faire tout passer dans le premier membre, et étudier le signe de cette différence.

b) Utiliser a) trois fois.

**1.7** Revenir à la définition de la partie entière d'un réel.

**1.8** Essayer de grouper les quatre facteurs du premier membre deux par deux, de manière à faire apparaître une même expression.

**1.9** Remarquer la présence, en plusieurs endroits, des expressions  $\sqrt[4]{19-x}$  et  $\sqrt[4]{x-2}$ .

**1.10** Effectuer un changement de variable, en exploitant la présence de  $x^{1/4}, x^{1/3}, x^{1/2}$ .

**1.11** Faire tout passer dans le deuxième membre, et étudier le signe de cette différence.

**1.12** La présence de carrés et de sommes fait penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**1.13** Récurrence sur  $n$ .

**1.14** Récurrence sur  $n$ .

**1.15** Chacune des trois fractions intervenant dans l'énoncé se simplifie si l'on connaît la forme de  $n$  modulo 4.

**1.16** En notant  $u$  et  $v$  les deux fractions de l'énoncé, étudier  $u + v, u^3 + v^3, u^3v^3$ , pour obtenir une équation satisfaite par  $A$ .

**1.17** Raisonner par l'absurde.

**1.18** a) Raisonner par l'absurde et utiliser un argument d'arithmétique.

b) Raisonner par l'absurde et utiliser le résultat de a).

**1.19** Considérer  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ .

La notation  $\mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}$  désigne  $\mathbb{R}_+$  privé de  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire :  $\mathbb{R}_+ - \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}_+ ; x \notin \mathbb{Q}\}$ .

**1.20** 1) Montrer que  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  est une partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$ .

2) a) • Montrer  $\alpha \in G$ , en raisonnant par l'absurde.

• Pour montrer que tout élément  $g$  de  $G$  est dans  $\alpha\mathbb{Z}$ , considérer  $E\left(\frac{g}{\alpha}\right)$ , ce qui revient à diviser  $g$  par  $\alpha$ .

b) Montrer que  $G$  admet des éléments  $> 0$  aussi petits que l'on veut.

3) a) Revenir à la définition ou à la caractérisation d'un sous-groupe.

b) Utiliser le théorème de Bezout.

c) Raisonner par l'absurde.

# Corrigés des exercices

**1.1** On a successivement, par des calculs dans  $\mathbb{R}$ , en faisant apparaître le développement de  $(x+1)^3$  par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3} &\iff 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \\ \iff 2x^3 + (x+1)^3 = 0 &\iff (\sqrt[3]{2}x)^3 = (-x-1)^3 \\ \iff \sqrt[3]{2}x = -(x+1) &\iff (1+\sqrt[3]{2})x = -1 \\ \iff x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}. & \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est  $\left\{-\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}\right\}$ .

**1.2** D'abord, les racines carrées qui interviennent dans l'équation de l'énoncé, notée (1), existent si et seulement si  $6-x, 3-x, x+5, 4-3x$  sont tous  $\geq 0$ , ce qui revient à :  $-5 \leq x \leq \frac{4}{3}$ .

On a alors, en élévant au carré, les deux membres étant  $\geq 0$  :

$$\begin{aligned} (1) &\iff (\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x})^2 = (\sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x})^2 \\ &\iff 9 - 2x + 2\sqrt{6-x}\sqrt{3-x} \\ &\quad = 9 - 2x + 2\sqrt{x+5}\sqrt{4-3x} \\ &\iff (6-x)(3-x) = (x+5)(4-3x) \\ &\iff x^2 - 9x + 18 = -3x^2 - 11x + 20 \\ &\iff 4x^2 + 2x - 2 = 0 \\ &\iff 2x^2 + x - 1 = 0 \\ &\iff (x+1)(2x-1) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, les deux réels trouvés sont dans l'intervalle de définition dégagé plus haut.

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est  $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ .

On peut d'ailleurs contrôler ces deux résultats en reportant chacune de ces valeurs dans (1).

**1.3** On remarque que  $x$  n'intervient que par le groupement  $x^2 - x$ , donc on effectue le changement d'inconnue  $y = x^2 - x$ . En notant (1) l'équation proposée, on a alors, pour  $y+3 \geq 0$  :

$$\begin{aligned} (1) &\iff 3y - 4\sqrt{y+3} = 6 \\ &\iff 3y - 6 = 4\sqrt{y+3} \\ &\iff \begin{cases} 3y - 6 \geq 0 \\ (3y - 6)^2 = 16(y+3) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y \geq 2 \\ 9y^2 - 52y - 12 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y \geq 2 \\ y = 6 \text{ ou } y = -\frac{2}{9} \end{cases} \iff y = 6, \end{aligned}$$

et la valeur 6 trouvée pour  $y$  vérifie  $y+3 \geq 0$ .

Ensuite :

$$\begin{aligned} y = 6 &\iff x^2 - x = 6 \\ &\iff x^2 - x - 6 = 0 \\ &\iff (x-3)(x+2) = 0. \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est  $\{-2, 3\}$ .

On peut d'ailleurs contrôler ces deux résultats en reportant chacune de ces valeurs dans (1).

**1.4** D'abord, les deux membres de l'équation proposée sont définis si et seulement si :  $x \geq 0$ .

L'application  $[0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[4]{x} - 9$  est strictement croissante, donc l'équation proposée admet au plus une solution.

D'autre part, le réel 1 est solution évidente.

On conclut que l'équation proposée admet une solution et une seule,  $x = 1$ .

**1.5**

On a, par addition :

$$\begin{aligned} (S) &\implies x^2 + y^2 + 2xy + x + y = 2 \\ &\iff (x+y)^2 + (x+y) - 2 = 0. \end{aligned}$$

Notons  $s = x + y$ . On a alors :

$$\begin{aligned} (S) &\implies s^2 + s - 2 = 0 \iff (s-1)(s+2) = 0 \\ &\iff s = 1 \text{ ou } s = -2. \end{aligned}$$

- Pour  $s = 1$ , en remplaçant  $y$  par  $1 - x$ , on obtient :

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y = 3 &\iff x^2 + (x+1)(1-x) = 3 \\ &\iff 2 = 0, \end{aligned}$$

qui n'a pas de solution.

- Pour  $s = -2$ , on a  $y = -2 - x$  et :

$$\begin{aligned} (S) &\iff x^2 + (x+1)(-2-x) = 3 \iff -3x = 5 \\ &\iff x = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

On déduit :  $y = -2 - x = -2 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$ .

On conclut que l'équation proposée admet une solution et une seule, qui est :  $x = -\frac{5}{3}$ ,  $y = -\frac{1}{3}$ .

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat en reportant ces valeurs dans (S).

**1.6**

a) On a, pour tout  $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} - \frac{3a-b}{4} &= \frac{4a^2 - (a+b)(3a-b)}{4(a+b)} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geqslant 0, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue.

b) On applique le résultat de a) à  $(a,b)$ ,  $(b,c)$ ,  $(c,a)$ , puis on additionne :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} &\geqslant \frac{3a-b}{4} + \frac{3b-c}{4} + \frac{3c-a}{4} \\ &= \frac{a+b+c}{2}. \end{aligned}$$

**1.7**

Par définition de la partie entière, puisque  $4n+1 \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\begin{aligned} E((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2) &= 4n+1 \\ &\iff 4n+1 \leqslant (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff 4n+1 \leqslant 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2 \\ &\iff \begin{cases} 2n \leqslant 2\sqrt{n(n+1)} \\ 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} n^2 \leqslant n^2+n \\ 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

et ces deux dernières inégalités sont vraies, ce qui prouve, par équivalences logiques successives, le résultat voulu.

**1.8**

On remarque que :  $(x-7)(x+6) = x^2 - x - 42$  et  $(x-5)(x+4) = x^2 - x - 20$ .

Ainsi,  $x$  n'intervient que par le regroupement  $x^2 - x$ . On effectue donc le changement d'inconnue  $y = x^2 - x$ . En notant (1) l'équation proposée, on a alors :

$$\begin{aligned} (1) &\iff (y-42)(y-20) = 608 \\ &\iff y^2 - 62y + 232 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant  $\Delta$  de cette équation du second degré est :  $\Delta = 62^2 - 4 \cdot 232 = 2916 = 54^2$ ,

d'où les solutions en  $y$  :

$$(1) \iff y = \frac{62 \pm 54}{2} \iff y = 4 \text{ ou } y = 58.$$

On revient à  $x$ , en résolvant deux équations du second degré :

$$\begin{aligned} \bullet y = 4 &\iff x^2 - x - 4 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ \bullet y = 58 &\iff x^2 - x - 58 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{233}}{2}. \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est :

$$\left\{ \frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{233}}{2}, \frac{1 + \sqrt{233}}{2} \right\}.$$

**1.9**

D'abord, les deux membres de l'équation sont définis si et seulement si  $19-x$  et  $x-2$  sont  $\geqslant 0$ , ce qui revient à :  $2 \leqslant x \leqslant 19$ .

On remarque les groupements  $\sqrt[4]{19-x}$  et  $\sqrt[4]{x-2}$  et leurs carrés. On effectue donc un changement de notation, en posant :

$$u = \sqrt[4]{19-x}, \quad v = \sqrt[4]{x-2}.$$

On a alors :  $u^4 + v^4 = (19-x) + (x-2) = 17$   
et, en notant (1) l'équation de l'énoncé :

$$(1) \iff uv + u^2 + v^2 = 7.$$

Puisque  $u$  et  $v$  interviennent de manière symétrique, posons  $S = u+v$  et  $P = uv$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 &= (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 \\ &= (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2. \end{aligned}$$

On déduit : (1)  $\iff \begin{cases} S^2 - P = 7 \\ S^4 - 4S^2P + 2P^2 = 17 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} P = S^2 - 7 \\ (2), \end{cases}$$

où : (2)  $\iff S^4 - 4S^2(S^2 - 7) + 2(S^2 - 7)^2 = 17$   
 $\iff -S^4 + 81 = 0 \iff S = 3,$

car  $S = u + v \geqslant 0$ .

Ainsi : (1)  $\iff (S = 3, P = 2)$ , donc  $u, v$  sont les solutions de  $t^2 - 3t + 2 = 0$ , d'où, à l'ordre près :  $u = 1, v = 2$ .

$$\begin{aligned} \bullet \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \sqrt[4]{19-x} = 1 \\ \sqrt[4]{x-2} = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 19-x = 1 \\ x-2 = 16 \end{cases} \iff x = 18 \\ \bullet \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \sqrt[4]{19-x} = 2 \\ \sqrt[4]{x-2} = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 19-x = 16 \\ x-2 = 1 \end{cases} \iff x = 3. \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est  $\{3, 18\}$ .

On peut d'ailleurs contrôler ces résultats en reportant chacune de ces valeurs dans (1).

**1.10** D'abord, les termes de l'inéquation existent si et seulement si  $x \geqslant 0$ .

Puisque  $\sqrt[4]{x}$  et  $\sqrt[3]{x}$  interviennent, notons  $t = x^{\frac{1}{12}}$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x} &= (t^{12})^{\frac{1}{4}} = t^3, \quad \sqrt[3]{x} = (t^{12})^{\frac{1}{3}} = t^4, \\ \sqrt{x} &= (t^{12})^{\frac{1}{2}} = t^6. \end{aligned}$$

On a alors, en notant (1) l'inéquation de l'énoncé :

$$\begin{aligned} (1) &\iff 2t^3 + 3t^4 \geqslant t^6 \iff t^3(t^3 - 3t - 2) \leqslant 0 \\ &\iff t^3(t+1)(t^2-t-2) \leqslant 0 \\ &\iff t^3(t+1)(t+1)(t-2) \leqslant 0 \\ &\iff t^3(t+1)^2(t-2) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Puisque  $t = x^{\frac{1}{12}} \geqslant 0$ , on a  $t+1 > 0$ , donc :

$$\begin{aligned} (1) &\iff t^3(t-2) \leqslant 0 \iff 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ &\iff 0 \leqslant x \leqslant 2^{12} = 4096. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est donc l'intervalle  $[0 ; 4096]$ .

**1.11** On a, pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , en considérant qu'il s'agit d'un trinôme en  $c$ , que l'on met sous forme canonique :

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4b^2 + 2c^2 - (a+b+c)^2 &= 3a^2 + 3b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \\ &= c^2 - 2(a+b)c + 3a^2 + 3b^2 - 2ab \\ &= (c - (a+b))^2 - (a+b)^2 + 3a^2 + 3b^2 - 2ab \\ &= (c - a - b)^2 + 2a^2 + 2b^2 - 4ab \\ &= (c - a - b)^2 + 2(a - b)^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue.

**1.12** On a, en développant les carrés comme produits de deux facteurs :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right)^2 - \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 - \left( \sum_{k=1}^n b_k \right)^2 &= \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \sqrt{a_j^2 + b_j^2} - \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_i a_j - \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} b_i b_j \\ &= \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} d_{ij}, \end{aligned}$$

où on a noté :  $d_{ij} = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \sqrt{a_j^2 + b_j^2} - a_i a_j - b_i b_j$ .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  :

$$a_i a_j + b_i b_j \leqslant \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \sqrt{a_j^2 + b_j^2},$$

donc  $d_{ij} \geqslant 0$ , puis, en additionnant  $\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} d_{ij} \geqslant 0$ , ce qui montre le résultat voulu.

**1.13** Récurrence sur  $n$ .

• L'inégalité est évidente pour  $n = 1$  (il y a même égalité).

• Supposons l'inégalité vérifiée pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $a_1, \dots, a_{n+1} \in [1, +\infty[$ . On a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i) &= \left( \prod_{i=1}^n (1 + a_i) \right) (1 + a_{n+1}) \\ &\stackrel{\text{hyp. réc.}}{\leqslant} 2^{n-1} \left( 1 + \prod_{i=1}^n a_i \right) (1 + a_{n+1}) \\ &= 2^{n-1} \left( 1 + a_{n+1} + \prod_{i=1}^n a_i + \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) a_{n+1} \right). \end{aligned}$$

Remarquons :  $\forall (x,y) \in [1 + \infty[^2$ ,  $x + y \leqslant 1 + xy$ .  
En effet, pour tout  $(x,y) \in [1; +\infty[^2$  :

$$(1 + xy) - (x + y) = (x - 1)(y - 1) \geqslant 0.$$

D'où, ici :  $a_{n+1} + \prod_{i=1}^n a_i \leqslant 1 + \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) a_{n+1}$ .

On déduit :  $\prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i) \leqslant 2^{n-1} \cdot 2 \left( 1 + \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) a_{n+1} \right)$   
 $= 2^n \left( 1 + \prod_{i=1}^{n+1} a_i \right)$ ,

ce qui montre l'inégalité à l'ordre  $n + 1$ .

On a établi l'inégalité voulue, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par récurrence sur  $n$ .

#### 1.14 Récurrence sur $n$ .

- L'inégalité est évidente pour  $n = 1$ .
- Supposons l'inégalité vraie pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\stackrel{\text{hyp. rec.}}{<} \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Il suffit donc de montrer :

$$\begin{aligned} \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 1 \end{aligned} \quad (1).$$

On a :

$$\begin{aligned} (1) &\iff \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\ &\iff \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1} \\ &\iff (\sqrt{n+2} + \sqrt{n})^2 \leqslant 4(n+1) \\ &\iff 2n+2 + 2\sqrt{n(n+2)} \leqslant 4n+4 \\ &\iff \sqrt{n(n+2)} \leqslant n+1 \\ &\iff n(n+2) \leqslant (n+1)^2 \iff 0 \leqslant 1. \end{aligned}$$

Ceci montre, par équivalences logiques successives, que l'inégalité (1) est vraie, ce qui entraîne l'inégalité voulue pour  $n + 1$ .  
On a démontré l'inégalité demandée, par récurrence sur  $n$ .

**1.15** Séparons en cas, selon le reste de la division euclidienne de  $n$  par 4, et présentons les résultats dans un tableau :

$n$	$E\left(\frac{n-1}{2}\right)$	$E\left(\frac{n+2}{4}\right)$	$E\left(\frac{n+4}{4}\right)$	Somme
$4k$	$2k-1$	$k$	$k+1$	$4k$
$4k+1$	$2k$	$k$	$k+1$	$4k+1$
$4k+2$	$2k$	$k+1$	$k+1$	$4k+2$
$4k+3$	$2k+1$	$k+1$	$k+1$	$4k+3$

Ceci établit le résultat voulu, par examen de tous les cas modulo 4.

**1.16** Notons  $u = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} + 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ ,  $v = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ .

On a alors  $A = u + v$  et :

$$\begin{aligned} \bullet u^3 + v^3 &= \frac{54\sqrt{3} + 41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} + \frac{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} = 36 \\ \bullet u^3 v^3 &= \frac{54\sqrt{3} + 41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{54^2 \cdot 3 - 41^2 \cdot 5}{3^3} = \frac{343}{27} \\ &= \frac{7^3}{3^3} = \left(\frac{7}{3}\right)^3, \end{aligned}$$

donc, comme  $uv \in \mathbb{R}$  :  $uv = \frac{7}{3}$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où : } A^3 &= (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= (u^3 + v^3) + 3uv(u+v) = 36 + 7A. \end{aligned}$$

Ainsi,  $A$  vérifie :  $A^3 - 7A - 36 = 0$  (1).

Une solution évidente est 4, donc :

$$(1) \iff (A-4)(A^2+4A+9)=0.$$

Le discriminant  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 9 = -20$  est  $< 0$ , donc, comme  $A$  est réel,  $A^2 + 4A + 9$  n'est pas nul, et on conclut :  $A = 4$ .

**1.17** Raisonnons par l'absurde : supposons  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ .

Comme  $\sqrt{x}$  et  $\sqrt{y}$  sont des irrationnels, ils ne sont pas nuls, donc  $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$ , puis :

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

Comme  $x - y \in \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}_+^*$ , et que  $\mathbb{Q}$  est un corps, on déduit, du résultat précédent :  $\sqrt{x} - \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ .

Ensuite, comme  $\mathbb{Q}$  est un corps :

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2} \left( (\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \right) \in \mathbb{Q}, \text{ contradiction.}$$

Ce raisonnement par l'absurde établit que  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  est un irrationnel.

Par exemple, comme  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$  sont irrationnels (*cf. exercice 1.18 a)*), on déduit :  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .

**1.18** Raisonnons par l'absurde ; supposons qu'il existe  $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(p,q) = 1.$$

On a alors  $nq^2 = p^2$ .

Par unicité de la décomposition d'un entier ( $\geq 1$ ) en produit de nombres premiers, il en résulte que les exposants des facteurs premiers figurant dans la décomposition de  $n$  sont tous pairs, et donc  $n$  est le carré d'un entier, contradiction.

On conclut :  $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ .

Exemples :  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ .

b) Raisonnement par l'absurde. Notons  $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ , et supposons  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

On a alors :  $\alpha^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ ,

d'où  $\sqrt{6} = \frac{\alpha^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$ , contradiction, d'après a).

Finalement :  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .

**1.19** Notons  $u = \sqrt{2}$ ,  $v = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ .

On sait (*cf. exercice 1.18 a)* :  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}$ .

Séparons en deux cas, selon que  $v$  est rationnel ou irrationnel.

• Si  $v \in \mathbb{Q}$ , alors le couple  $(a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2})$  convient.

• Si  $v \notin \mathbb{Q}$ , alors, comme :  $v^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$ , le couple  $(a = v = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2})$  convient.

Ceci montre qu'il existe  $(a,b) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{Q})^2$  tel que  $a^b \in \mathbb{Q}$  : en effet, l'un des deux couples  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$  convient.

Mais on ne sait pas décider lequel (au moins) convient !

**1.20** 1) Puisque  $G \neq \{0\}$ , il existe  $x \in G$  tel que  $x \neq 0$ .

Si  $x > 0$ , alors  $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ . Si  $x < 0$ , alors  $-x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ .

Ainsi,  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  est une partie non vide et minorée (par 0) de  $\mathbb{R}$ , donc (théorème de la borne inférieure dans  $\mathbb{R}$ )  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  admet une borne inférieure  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ . Puisque 0 est un minorant de  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :  $0 \leqslant \alpha$ .

2) a) 1) Raisonnons par l'absurde : supposons  $\alpha \notin G$ . Puisque  $2\alpha > \alpha$ ,  $2\alpha$  n'est pas un minorant de  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  ; il existe donc  $\beta \in G$  tel que  $\alpha < \beta < 2\alpha$ .

De même, puisque  $\beta > \alpha$ ,  $\beta$  n'est pas un minorant de  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  ; il existe donc  $\gamma \in G$  tel que  $\alpha < \gamma < \beta$ .

On a alors :  $\beta - \gamma \in G \cap \mathbb{R}_+^*$  et  $\beta - \gamma < \alpha$ , ce qui contredit la définition de  $\alpha$ .

Ceci prouve :  $\alpha \in G$ .

Comme  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ , il en résulte :  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $n\alpha \in G$ , c'est-à-dire :  $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ .

2) Soit  $g \in G$ . En notant  $n = E\left(\frac{g}{\alpha}\right)$ , on a  $n\alpha \leqslant g < (n+1)\alpha$  et  $g - n\alpha \in G$  (car  $g \in G$ ,  $\alpha \in G$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ).

Si  $g \neq n\alpha$ , alors  $g - n\alpha \in G \cap \mathbb{R}_+^*$  et  $g - n\alpha < \alpha$ , contradiction avec la définition de  $\alpha$ .

Donc  $g = n\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$ .

Ceci montre  $G \subset \alpha\mathbb{Z}$ .

Finalement :  $G = \alpha\mathbb{Z}$ .

b) Soit  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x < y$ . Puisque  $\alpha = 0$ , il existe  $g \in G$  tel que  $0 < g < y - x$  ; notons  $n = E\left(\frac{x}{g}\right) + 1$ . On a alors  $n - 1 \leqslant \frac{x}{g} < n$ , d'où :

$$x < ng = (n-1)g + g \leqslant x + g < y \quad \text{et} \quad ng \in G.$$

Ceci montre que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

3) a)  $\bullet 0 = 0 + 0\omega \in G_\omega$

• Soient  $x, y \in G_\omega$ . Il existe  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  tels que  $x = a + b\omega$  et  $y = c + d\omega$ . On a :

$$x - y = (a - c) + (b - d)\omega \quad \text{et} \quad (a - c, b - d) \in \mathbb{Z}^2,$$

donc :  $x - y \in G_\omega$ .

On conclut :  $G_\omega$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .

b) 1) Soit  $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ . On a :  $a + b\omega = \frac{aq + bp}{q} \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ .

2) Puisque  $\text{pgcd}(p,q) = 1$ , d'après le théorème de Bezout, il existe  $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :  $up + vq = 1$ .

Alors :  $\frac{1}{q} = \frac{up + vq}{q} = v + u\omega \in G_\omega$ ,

puis :  $\frac{1}{q}\mathbb{Z} \subset G_\omega$ .

On conclut :  $G_\omega = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ .

c) Raisonnons par l'absurde : supposons que  $G_\omega$  ne soit pas dense dans  $\mathbb{R}$ . D'après 2),  $G_\omega$  est alors discret, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $G_\omega = \alpha\mathbb{Z}$ .

Comme  $1 = 1 + 0\omega \in G_\omega$  et  $\omega = 0 + 1\omega \in G_\omega$ , il existe  $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :  $1 = \alpha p$  et  $\omega = \alpha q$ .

Il est clair que  $\alpha \neq 0$  et  $p \neq 0$ , et on a :  $\omega = \frac{\alpha q}{\alpha p} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ , contradiction.

Ceci montre que  $G_\omega$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Par exemple, en admettant que  $\pi$  est irrationnel (*cf. exercice 6.29*), la partie  $\{a + b\pi; (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

# Les nombres complexes

CHAPITRE **2**

## Plan

Les méthodes à retenir	11
Énoncés des exercices	14
Du mal à démarrer ?	18
Corrigés	19

## Thèmes abordés dans les exercices

- Calcul algébrique sur les nombres complexes : sommes, produits, quotients, puissances, conjugués, modules, forme algébrique et forme trigonométrique
- Équations algébriques simples, systèmes d'équations algébriques
- Inégalités portant sur des modules, souvent en liaison avec une interprétation géométrique
- Utilisation des nombres complexes pour la trigonométrie, formule d'Euler, formule de Moivre
- Utilisation des nombres complexes pour la géométrie plane, utilisation des rotations et des similitudes directes
- Manipulation des racines  $n$ -èmes de 1 dans  $\mathbb{C}$ .

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Calcul dans  $\mathbb{C}$ , en particulier les propriétés algébriques de la conjugaison et du module
- Résolution des équations du premier et du second degré dans  $\mathbb{C}$
- Propriétés de la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul
- Définition et propriétés des racines  $n$ -èmes de 1 dans  $\mathbb{C}$
- Formule d'Euler et formule de Moivre
- Traduction sur les affixes d'une translation, d'une rotation, d'une similitude directe.

## Les méthodes à retenir

Pour calculer la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe présenté comme puissance d'un nombre complexe

Utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes.

→ Exercice 2.1.

De manière générale, l'écriture algébrique  $x + iy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , est conseillée pour des calculs additifs, et l'écriture trigonométrique  $\rho e^{i\theta}$ ,  $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , est conseillée pour des calculs multiplicatifs.

Pour résoudre une équation à une inconnue dans les complexes

- On sait résoudre les équations du premier degré ou du second degré (voir cours).
- Toujours tenir compte des particularités de l'équation proposée : à ce niveau, s'il y a une question, c'est qu'il y a une réponse exprimable.

→ Exercices 2.2, 2.3, 2.5.

**Pour traduire  
qu'un nombre complexe est réel,  
qu'un nombre complexe  
est imaginaire pur**

**Pour établir une inégalité  
portant sur des modules  
de nombres complexes**

**Pour résoudre un système  
d'équations symétrique  
à deux inconnues  $x, y$**

**Pour traduire, en géométrie plane,  
qu'un point est sur un cercle**

- Effectuer un changement d'inconnue (ou un changement de variable) pour ramener l'équation à une autre équation plus simple. On prendra souvent comme nouvelle inconnue un groupement intervenant plusieurs fois dans l'équation.

→ **Exercice 2.8.**

Utiliser les formules, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\text{Ré}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Ainsi :

$$\begin{cases} z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z \\ z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z. \end{cases}$$

→ **Exercice 2.4.**

- Essayer d'utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

ou l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z - z'| \geq |z| - |z'|.$$

De manière générale, il est conseillé de partir du membre le plus compliqué.

→ **Exercices 2.6, 2.21, 2.22, 2.23**

- Essayer de faire intervenir des carrés de module (au lieu des modules eux-mêmes), de façon à pouvoir utiliser la formule :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z|^2 = \bar{z}z.$$

→ **Exercice 2.11**

- Si des modules de produits ou des modules de carrés interviennent, essayer d'appliquer l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

→ **Exercice 2.19**

- On peut être amené à séparer en cas et à traiter les différents cas par des méthodes différentes.

→ **Exercice 2.20.**

Essayer de faire intervenir la somme et le produit de  $x$  et  $y$ , en notant  $S = x + y$  et  $P = xy$ , et en considérant  $S$  et  $P$  comme de nouvelles inconnues.

→ **Exercice 2.7.**

Par les nombres complexes, si les points  $A, M$  ont pour affixes respectives  $a, z$ , alors :  $M$  est sur le cercle de centre  $A$  et de rayon  $R$  si et seulement si  $|z - a| = R$ .

→ **Exercice 2.9.**

### Pour faire des calculs sur des nombres complexes de module 1

Essayer d'utiliser, pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  :

$$|z| = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z},$$

ce qui permet, lorsque  $|z| = 1$ , de remplacer  $\bar{z}$  par  $\frac{1}{z}$ , ou inversement.

→ Exercices 2.10, 2.13, 2.16.

### Pour résoudre une question portant sur des cosinus et des sinus

Essayer de faire intervenir les nombres complexes, en utilisant la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x + i \sin x = e^{ix}.$$

Pour transformer  $1 + e^{i\theta}$  ou  $1 - e^{i\theta}$ , ( $\theta \in \mathbb{R}$ ), mettre  $e^{\frac{i\theta}{2}}$  en facteur :

$$1 + e^{i\theta} = 2e^{\frac{i\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad 1 - e^{i\theta} = -2i e^{\frac{i\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

→ Exercice 2.15.

### Pour déterminer l'image dans $\mathbb{C}$ , par une application $f$ , d'une partie $P$ de $\mathbb{C}$

Essayer, si possible, en notant  $Z = f(z)$ , d'exprimer  $z$  en fonction de  $Z$ , puis remplacer  $z$  en fonction de  $Z$  dans les conditions définissant  $P$ .

→ Exercice 2.17.

### Pour calculer une expression faisant intervenir des coefficients binomiaux

Essayer d'appliquer la formule du binôme de Newton. Si les coefficients binomiaux sont régulièrement espacés (de trois en trois, par exemple), faire intervenir des racines (par exemple cubiques) de 1 dans  $\mathbb{C}$ .

→ Exercice 2.18.

### Pour établir une propriété faisant intervenir un entier $n$ quelconque

Essayer de faire une récurrence sur  $n$ . Pour y arriver, il faut que la propriété à l'ordre  $n+1$  s'exprime simplement en faisant intervenir la propriété à l'ordre  $n$ .

→ Exercice 2.24.

### Pour calculer une somme faisant intervenir une ou des racines $n$ -èmes de 1 dans $\mathbb{C}$

Essayer d'appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a, b \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

ou la formule sur la sommation d'une progression géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} - \{1\}, \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

→ Exercices 2.25, 2.30.

Pour traduire une configuration de géométrie plane par les nombres complexes

Essayer de faire apparaître des rotations ou, plus généralement, des similitudes directes.

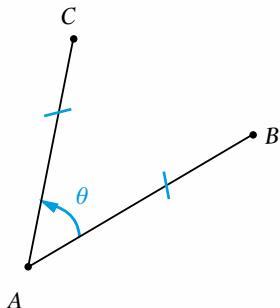


Figure 2.1

Rappelons que, si  $A, B, C$  sont trois points du plan, d'affixes respectives  $a, b, c$ , et si  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors :

$$C = \text{Rot}_{(A, \theta)}(B) \iff \overrightarrow{AC} = \text{Rot}_\theta(\overrightarrow{AB}) \iff c - a = e^{i\theta}(b - a).$$

➡ Exercices 2.27, 2.28.

## — Énoncés des exercices



### 2.1 Exemple de calcul de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un nombre complexe donné par une puissance

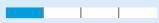
Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe  $A = \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^{125}$ .



### 2.2 Exemple de résolution d'une équation particulière du 3<sup>e</sup> degré dans $\mathbb{C}$

a) Résoudre l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

$$(1) \quad z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i = 0.$$



b) Quelle particularité présente le triangle formé par les trois points dont les affixes sont les solutions de (1) ?



### 2.3 Exemple de résolution d'une équation particulière du 4<sup>e</sup> degré dans $\mathbb{C}$

Résoudre l'équation, d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  : (E)  $(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = 0$ .



### 2.4 Étude de conjugaison et de module

Soit  $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ . Montrer :  $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$ .

**2.5 Résolution d'une équation dans  $\mathbb{C}$  faisant intervenir un conjugué**

Résoudre l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  : (1)  $\bar{z} = z^3$ .

**2.6 Étude d'inégalités sur des modules de nombres complexes**

a) Montrer, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$|z - (1 + i)| \leqslant 1 \implies \sqrt{10} - 1 \leqslant |z - 4| \leqslant \sqrt{10} + 1.$$

b) Traduire géométriquement le résultat de a).

**2.7 Exemple de résolution d'un système de deux équations à deux inconnues dans  $\mathbb{C}$** 

Résoudre le système d'équations, d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  : (S)  $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$

**2.8 Exemple de résolution d'une équation particulière du 4<sup>e</sup> degré dans  $\mathbb{C}$** 

Résoudre l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

$$(1) \quad z(2z + 1)(z - 2)(2z - 3) = 63.$$

**2.9 Étude de cocyclicité pour quatre points du plan**

Est-ce que les points  $A, B, C, D$  d'affixes respectives  $9 + 3i, 6 + 10i, -4 + 14i, -11 + 11i$  sont cocycliques ?

Si oui, déterminer le centre et le rayon du cercle qui les contient.

**2.10 Étude de conjugaison et de modules de nombres complexes**

Montrer :  $\forall u \in \mathbb{U}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \left| u - \frac{1}{\bar{z}} \right| = \frac{|u - z|}{|z|}$ .

**2.11 Inégalités sur des modules de nombres complexes**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $|a| < 1$  et  $|b| < 1$ . Montrer :  $\left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| < 1$ .

**2.12 Un exemple d'involution d'un disque**

Montrer que l'application  $f : z \mapsto \frac{1 - \bar{z}}{1 - z}$  est une involution de  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ .

**2.13 Propriétés des fonctions symétriques élémentaires de quatre nombres complexes de modules égaux à 1**

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{U}$ . On note  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  les fonctions symétriques élémentaires de  $a, b, c, d$ .

a) Montrer :  $\overline{\sigma_1} = \frac{\sigma_3}{\sigma_4}$  et  $\overline{\sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_4}$ .

b) En déduire :  $\frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_4} \in \mathbb{R}_+$  et  $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_4} \in \mathbb{R}_+$ .

**2.14 Exemple d'intervention de la géométrie dans la résolution d'une équation faisant intervenir des nombres complexes**

Résoudre l'équation (1)  $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$ , d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .



**2.15** Un calcul important et utile : somme des cosinus et somme des sinus de réels en progression arithmétique

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ , calculer  $C = \sum_{k=0}^n \cos(a + kb)$  et  $S = \sum_{k=0}^n \sin(a + kb)$ .



**2.16** Utilisation de la conjugaison pour des nombres complexes de module 1

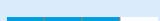
Soient  $a, b, c \in \mathbb{U}$  tels que  $b \neq c$ . On note  $A = \frac{b(c-a)}{a(c-b)^2}$ . Montrer :  $A \in \mathbb{R}_+$ .



**2.17** Un exemple d'image d'un quart de plan par une fonction homographique

Déterminer l'image par l'application  $f : z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$  du quart de plan

$$P = \left\{ z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) > 0 \right\}.$$



**2.18** Calcul de sommes de coefficients binomiaux de trois en trois

Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$ , les sommes :

$$\begin{aligned} A &= \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots, & B &= \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots, \\ C &= \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots \end{aligned}$$



**2.19** Exemple d'obtention d'inégalités portant sur des modules de nombres complexes

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ ,  $M \in \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\sum_{k=1}^n z_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \leq M.$$

Montrer :  $\forall k \in \{1, \dots, n\}, |z_k| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}} M$ .



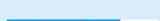
**2.20** Exemple d'inégalité portant sur des modules de nombres complexes

Montrer, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $|z| \leq |z|^2 + |z - 1|$ .



**2.21** Calcul d'une borne supérieure faisant intervenir des nombres complexes

Déterminer  $\sup_{|z| \leq 1} |z^3 + 2iz|$ .



**2.22** Étude d'inégalité sur des sommes de modules de nombres complexes

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$ . On suppose  $\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{|z_k|} = 0$ .

a) Montrer :  $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{k=1}^n (z_k - z) \frac{\overline{z_k}}{|z_k|}$ .

b) En déduire :  $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - z|$ .

**2.23 Obtention d'inégalités portant sur des modules de nombres complexes**

a) Montrer, pour tout  $(u, v) \in \mathbb{C}^2$  :  $|u| + |v| \leq |u + v| + |u - v|$ .

b) En déduire, pour tout  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$  :

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$$

$$\leq |z_1 + z_2| + |z_1 + z_3| + |z_1 + z_4| + |z_2 + z_3| + |z_2 + z_4| + |z_3 + z_4|.$$

**2.24 Exemple d'utilisation du raisonnement par récurrence pour l'obtention d'une inégalité portant sur les modules de plusieurs nombres complexes**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ ,  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in D$ . Montrer :

$$\left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|.$$

**2.25 Exemple de calcul d'une somme faisant intervenir des racines  $n$ -èmes de 1**

Soient  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . On note  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  et  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (z + \omega^k)^n$ . Calculer  $S_n$ .

**2.26 Étude de cocyclicité ou alignement de quatre points du plan**

Soient  $A, B, C, D$  quatre points du plan deux à deux distincts,  $a, b, c, d$  leurs affixes respectives. On suppose :  $(a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$ .

Montrer que  $A, B, C, D$  sont cocycliques ou alignés.

**2.27 Triangle équilatéral dans le plan**

Soient  $A, B, C$  trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives  $a, b, c$ .

a) Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si :  $a + jb + j^2c = 0$ .

b) En déduire que le triangle  $ABC$  est équilatéral si et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0.$$

**2.28 Exemple d'utilisation des nombres complexes pour la résolution d'une question de géométrie plane**

Dans le plan affine euclidien orienté, on construit, extérieurement à un parallélogramme  $ABCD$ , les triangles équilatéraux  $BCE$  et  $CDF$ . Montrer que le triangle  $AEF$  est équilatéral.

**2.29 Exemple de traduction d'une configuration géométrique par une condition sur des nombres complexes**

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . On note  $u, v$  les racines carrées complexes de  $z$ . Déterminer l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}^*$  tels que les points d'affixes  $z, u, v$  forment un triangle rectangle de sommet le point d'affixe  $z$ .

**2.30 Exemple de calcul d'une somme double faisant intervenir des racines  $n$ -èmes de 1 dans  $\mathbb{C}$** 

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  et  $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=p}^{n-1} \binom{q}{p} \omega^{p+q}$ . Calculer  $S_n$ .

# Du mal à démarrer ?

**2.1** Utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes.

**2.2** a) Grouper les deux termes contenant 16 et les deux termes contenant 89.

**2.3** Remarquer que, pour tout  $(a,b) \in \mathbb{C}^2$  :

$$a^2 + b^2 = (a + i b)(a - i b).$$

**2.4** Utiliser :  $\forall A \in \mathbb{C}, A \in i\mathbb{R} \iff \bar{A} = -A$ .

**2.5** Passer par la forme trigonométrique de  $z$ .

**2.6** Faire apparaître  $z - (1 + i)$  dans  $z - 4$ , et utiliser l'inégalité triangulaire et l'inégalité triangulaire renversée.

**2.7** Exploiter les rôles symétriques de  $x$  et  $y$ , en prenant comme nouvelles inconnues la somme et le produit de  $x$  et  $y$ .

**2.8** En groupant les facteurs  $z$  et  $2z - 3$  d'une part,  $2z + 1$  et  $z - 2$  d'autre part, faire apparaître la même expression  $2z^2 - 3z$  et utiliser alors un changement d'inconnue.

**2.9** Résoudre  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ , d'inconnue  $\Omega$  d'affixe  $z = x + iy$ ,  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ .

**2.10** Remarquer que, puisque  $u \in \mathbb{U}$  ensemble des nombres complexes de module 1, on peut remplacer  $u$  par  $\frac{1}{\bar{u}}$ .

**2.11** Après avoir vérifié l'existence de l'expression proposée, mettre des modules au carré.

**2.12** Se rappeler qu'une involution d'un ensemble  $D$  est, par définition, une application  $f : D \rightarrow D$  telle que  $f \circ f = \text{Id}_D$ .

**2.13** Par définition, les fonctions symétriques élémentaires de  $a,b,c,d$  sont :

$$\sigma_1 = a + b + c + d, \quad \sigma_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

$$\sigma_3 = abc + abd + acd + bcd, \quad \sigma_4 = abcd.$$

Exploiter :  $\forall z \in \mathbb{U}, \bar{z} = \frac{1}{z}$ .

**2.14** Traduire (1) par une configuration géométrique.

**2.15** Passer par les nombres complexes, en formant  $C + iS$ , puis faire apparaître une progression géométrique.

**2.16** • Utiliser l'égalité  $\bar{u} = \frac{1}{u}$ , pour tout  $u \in \mathbb{U}$ , ensemble des nombres complexes de module 1.

• Pour établir  $A \in \mathbb{R}_+$ , on peut essayer de faire apparaître  $A$  comme carré du module d'un nombre complexe.

**2.17** Pour traduire  $z \in P$  par une condition portant sur  $f(z)$ , exprimer  $z$  en fonction de  $Z = f(z)$ , puis passer à la partie réelle et à la partie imaginaire de  $z$ .

**2.18** Puisque les coefficients vont de trois en trois, on peut penser aux racines cubiques de 1 dans  $\mathbb{C}$ , d'où l'idée de former  $A + B + C, A + jB + j^2C, A + j^2B + jC$ .

**2.19** Puisque des carrés de modules interviennent, essayer d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**2.20** Appliquer judicieusement l'inégalité triangulaire et séparer en cas selon la position de  $|z|$  par rapport à 1, à cause de la présence de  $|z|$  et de  $|z|^2$ .

**2.21** Obtenir une majoration convenable, par l'inégalité triangulaire, puis choisir  $z$  pour réaliser l'égalité dans l'inégalité obtenue.

**2.22** a) Partir du membre le plus compliqué, le second.

b) Utiliser l'inégalité triangulaire.

**2.23** a) Utiliser convenablement l'inégalité triangulaire.

b) Appliquer le résultat de a) à  $(z_1, z_2)$ , à  $(z_3, z_4)$ , puis à  $(z_1 - z_2, z_3 - z_4)$ .

**2.24** Récurrence sur  $n$ .

**2.25** Utiliser le binôme de Newton, une propriété de permutation de deux symboles  $\Sigma$  et enfin la sommation d'une progression géométrique.

**2.26** Utiliser la caractérisation de quatre points (deux à deux distincts) cocycliques ou alignés :  $\frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b} \in \mathbb{R}$ .

**2.27** a) Traduire la configuration à l'aide d'une rotation, par exemple de centre  $B$ .

b) Un triangle est équilatéral si et seulement s'il est équilatéral direct ou équilatéral indirect

**2.28** Passer par les nombres complexes. Traduire la configuration à l'aide de rotations.

**2.29** Se rappeler que le produit scalaire de deux vecteurs d'affixes complexes  $a, b$  est donné par  $\text{Ré}(\bar{a}b)$ .

**2.30** Utiliser une propriété de permutation de deux symboles de sommation, le binôme de Newton, et enfin la sommation d'une progression géométrique.

# Corrigés des exercices

**2.1** Mettons  $1 + i\sqrt{3}$  et  $1 + i$  sous forme trigonométrique :

$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\text{donc : } 1 + i\sqrt{3} = 2 \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$|1 + i| = \sqrt{2}, \text{ donc } 1 + i = \sqrt{2} \frac{1 + i}{2} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

D'où :

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2 e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Puis :

$$A = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{125} = \sqrt{2}^{125} e^{i\frac{125\pi}{12}}.$$

On calcule cette dernière exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{125\pi}{12}} &= e^{i\frac{5\pi}{12}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)} \\ &= i e^{-i\frac{\pi}{12}} = i e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = i e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= i \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} i \left((1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i\right). \end{aligned}$$

On obtient :

$$A = 2^{61}(\sqrt{3}-1) + 2^{61}(\sqrt{3}+1)i$$

et on conclut que la partie réelle de  $A$  est  $2^{61}(\sqrt{3}-1)$  et que la partie imaginaire de  $A$  est  $2^{61}(\sqrt{3}+1)$ .

**2.2** a) On a :

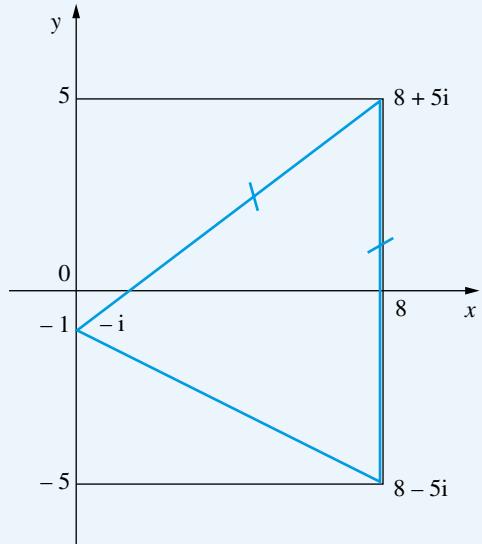
$$\begin{aligned} (1) \iff z^3 + iz^2 - 16(z^2 + iz) + 89(z + i) &= 0 \\ \iff z^2(z + i) - 16z(z + i) + 89(z + i) &= 0 \\ \iff (z^2 - 16z + 89)(z + i) &= 0 \\ \iff z^2 - 16z + 89 = 0 \quad (2) \quad \text{ou} \quad z = -i. \end{aligned}$$

Le discriminant  $\Delta$  de l'équation du second degré (2) est :  $\Delta = 16^2 - 4 \cdot 89 = 256 - 356 = -100 = (10i)^2$ . Les solutions de (2) dans  $\mathbb{C}$  sont donc :

$$\frac{16 - 10i}{2} = 8 - 5i \quad \text{et} \quad \frac{16 + 10i}{2} = 8 + 5i.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (1) est  $\{-i, 8-5i, 8+5i\}$ .

b) On peut éventuellement commencer par faire un schéma situant les trois points en question, pour deviner quelle réponse apporter à cette question.



Puisque

$$\begin{cases} |(8+5i) - (-i)| = |8+6i| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \\ |(8+5i) - (8-5i)| = |10i| = 10, \end{cases}$$

le triangle formé par les trois points dont les affixes sont les solutions de (1) est isocèle, de sommet d'affixe  $8+5i$ .

**2.3** On a :

$$(E) \iff (z^2 + 4z + 1) + i(3z + 5) = 0$$

$$\text{ou} \quad (z^2 + 4z + 1) - i(3z + 5) = 0$$

$$\iff z^2 + (4 + 3i)z + (1 + 5i) = 0 \quad (1)$$

$$\text{ou} \quad z^2 + (4 - 3i)z + (1 - 5i) = 0 \quad (2).$$

L'équation (1) est du second degré. Son discriminant  $\Delta$  est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (4 + 3i)^2 - 4(1 + 5i) \\ &= 16 - 9 + 24i - 4 - 20i = 3 + 4i.\end{aligned}$$

On remarque que  $3 + 4i = (2 + i)^2$ , ou bien on calcule les racines carrées complexes de  $3 + 4i$  par la méthode habituelle. On en déduit les solutions de (1) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(-4 + 3i - (2 + i)) &= \frac{1}{2}(-6 - 4i) = -3 - 2i \\ \frac{1}{2}(-4 + 3i + (2 + i)) &= \frac{1}{2}(-2 - 2i) = -1 - i.\end{aligned}$$

D'autre part, un nombre complexe  $z$  est solution de (2) si et seulement si son conjugué  $\bar{z}$  est solution de (1), donc les solutions de (2) sont les conjuguées des solutions de (1).

Finalement, l'ensemble des solutions de (1) est :

$$\{-3 - 2i, -1 - i, -3 + 2i, -1 + i\}.$$

**2.4** Notons  $A = \frac{1+z}{1-z}$ . On a :

$$\begin{aligned}A \in i\mathbb{R} &\iff \overline{A} = -A \iff \overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = -\frac{1+z}{1-z} \\ &\iff \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} = -\frac{1+z}{1-z} \\ &\iff (1+\bar{z})(1-z) = -(1-\bar{z})(1+z) \\ &\iff 2 - 2z\bar{z} = 0 \iff z\bar{z} = 1 \\ &\iff |z|^2 = 1 \iff |z| = 1.\end{aligned}$$

**2.5** Remarquer que le nombre 0 est solution.

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . Notons  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned}(1) &\iff \rho e^{-i\theta} = \rho^3 e^{3i\theta} \iff \begin{cases} \rho^2 = 1 \\ -\theta \equiv 3\theta \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ 4\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}} \end{cases}.\end{aligned}$$

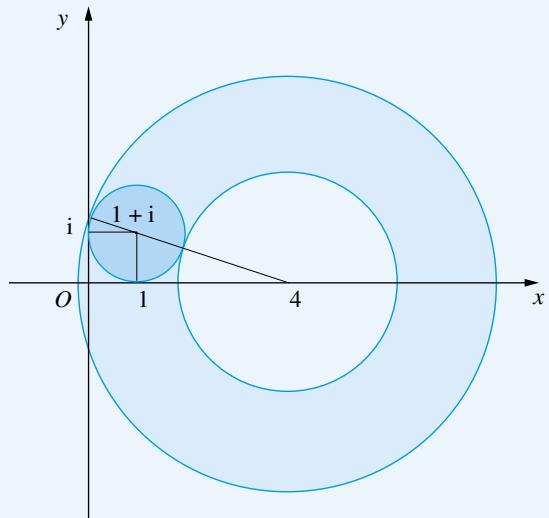
On conclut que l'ensemble des solutions de (1) est  $\{0, 1, i, -1, -i\}$ .

**2.6** Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z - (1+i)| \leq 1$ . On a :

$$\begin{aligned}\bullet |z - 4| &= |z - (1+i) + (-3+i)| \\ &\leq |z - (1+i)| + |-3+i| \leq 1 + \sqrt{10} \\ \bullet |z - 4| &= |z - (1+i) - (3-i)| \\ &\geq -|z - (1+i)| + |3-i| \geq -1 + \sqrt{10}.\end{aligned}$$

On conclut :  $\sqrt{10} - 1 \leq |z - 4| \leq \sqrt{10} + 1$ .

b) Le résultat de a) se traduit géométriquement par : le disque fermé de centre  $1+i$  et de rayon 1 est inclus dans la couronne fermée de centre 4 et de rayons  $\sqrt{10}-1$  et  $\sqrt{10}+1$  (qui est d'ailleurs tangente au disque précédent en deux points).



**2.7** Puisque  $x$  et  $y$  jouent des rôles symétriques, notons  $S = x + y$  et  $P = xy$ . On a :

$$\begin{aligned}(S) &\iff \begin{cases} PS = 6 \\ S^3 - 3PS = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} PS = 6 \\ S^3 = 9 + 18 = 27 \end{cases} \\ &\iff \left( \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} S = 3j \\ P = 2j^2 \end{cases} \right) \text{ ou } \left( \begin{cases} S = 3j^2 \\ P = 2j \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} S = 3 \\ P = 2j^2 \end{cases} \right).\end{aligned}$$

Connaissant  $S$  et  $P$ , d'après le Cours,  $x$  et  $y$  sont les solutions de l'équation du second degré  $t^2 - St + P = 0$ , d'inconnue  $t \in \mathbb{C}$ .

$S, P$	Équation en $t$	Solutions en $t$
$S = 3, P = 2$	$t^2 - 3t + 2 = 0$	$t = 1, t = 2$
$S = 3j, P = 2j^2$	$t^2 - 3jt + 2j^2 = 0$	$t = j, t = 2j$
$S = 3j^2, P = 2j$	$t^2 - 3j^2t + 2j = 0$	$t = j^2, t = 2j^2$

Finalement, l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{(1,2), (j,2j), (j^2,2j^2), (2,1), (2j,j), (2j^2,j^2)\}.$$

## 2.8

On a :

$$\begin{aligned} (1) &\iff (z(2z-3))(2z+1)(z-2) = 63 \\ &\iff (2z^2 - 3z)(2z^2 - 3z - 2) = 63. \end{aligned}$$

En notant  $Z = 2z^2 - 3z$ , on a donc :

$$(1) \iff Z(Z-2) = 63 \iff Z^2 - 2Z - 63 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré. Le discriminant  $\Delta$  est :  $\Delta = 2^2 + 4 \cdot 63 = 256 = 16^2$ . Les solutions en  $Z$  sont donc :

$$\frac{2-16}{2} = -7 \quad \text{et} \quad \frac{2+16}{2} = 9.$$

D'où :

$$(1) \iff 2z^2 - 3z = -7 \quad \text{ou} \quad 2z^2 - 3z = 9$$

$$\iff 2z^2 - 3z + 7 = 0 \quad (2) \quad \text{ou} \quad 2z^2 - 3z - 9 = 0 \quad (3).$$

Il s'agit maintenant de deux équations du second degré.

Le discriminant  $\Delta_2$  de (2) est  $\Delta_2 = 9 - 56 = -47$ , donc les solutions de (2) sont  $\frac{3-i\sqrt{47}}{4}$  et  $\frac{3+i\sqrt{47}}{4}$ .

Le discriminant  $\Delta_3$  de (3) est  $\Delta_3 = 9 + 72 = 81 = 9^2$ , donc les solutions de (3) sont  $\frac{3-9}{4} = -\frac{3}{2}$  et  $\frac{3+9}{4} = 3$ .

Finalement, l'ensemble des solutions de (1) est

$$\left\{ 3, -\frac{3}{2}, \frac{3-i\sqrt{47}}{4}, \frac{3+i\sqrt{47}}{4} \right\}.$$

## 2.9

I) Soient  $\Omega$  un point du plan,  $z$  son affixe,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $z = x + iy$ .

On a :

$$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$$

$$\begin{aligned} &\iff (x-9)^2 + (y-3)^2 = (x-6)^2 + (y-10)^2 \\ &= (x+4)^2 + (y-14)^2 = (x+11)^2 + (y-11)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff x^2 + y^2 - 18x - 6y + 90 \\ &= x^2 + y^2 - 12x - 20y + 136 \\ &= x^2 + y^2 + 8x - 28y + 212 \\ &= x^2 + y^2 + 22x - 22y + 242 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} -6x - 14y + 46 = 0 \\ 20x - 8y + 76 = 0 \\ 14x + 6y + 30 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 3x - 7y + 23 = 0 \\ 5x - 2y + 19 = 0 \\ 7x + 3y + 15 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 3x - 7y + 23 = 0 \\ 2x + 5y - 4 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 5 \\ 7 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{c} -2 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 29x + 87 = 0 \\ 29y - 58 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 2. \end{array} \right.$$

Ceci montre qu'il existe un point  $\Omega$  du plan (et un seul), celui d'affixe  $-3 + 2i$ , tel que  $\Omega$  soit équidistant de  $A, B, C, D$ . Autrement dit,  $A, B, C, D$  sont cocycliques, sur un cercle de centre  $\Omega$ .

2) Le rayon de ce cercle est  $\Omega A$  (ou  $\Omega B$ , ou  $\Omega C$ , ou  $\Omega D$ ). On a :

$$\Omega A^2 = (-3-9)^2 + (2-3)^2 = (-12)^2 + (-1)^2 = 145,$$

donc le rayon du cercle est  $\sqrt{145}$ .

On peut d'ailleurs contrôler :

$$\begin{aligned} \Omega B^2 &= (-3-6)^2 + (2-10)^2 \\ &= 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega C^2 &= (-3+4)^2 + (2-14)^2 \\ &= 1^2 + 12^2 = 1 + 144 = 145, \\ \Omega D^2 &= (-3+11)^2 + (2-11)^2 \\ &= 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la notion de nombre complexe n'intervient pas de manière essentielle dans cet exercice.

## 2.10

Puisque  $u \in \mathbb{U}$ , on a  $\bar{u} = \frac{1}{u}$ , donc  $u = \frac{1}{\bar{u}}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \left| u - \frac{1}{\bar{z}} \right| &= \left| \frac{1}{\bar{u}} - \frac{1}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{\bar{z} - \bar{u}}{\bar{u}\bar{z}} \right| \\ &= \frac{|\bar{z} - \bar{u}|}{|\bar{u}| |\bar{z}|} = \frac{|u - z|}{|z|}. \end{aligned}$$

## 2.11

• Montrons d'abord que l'expression proposée existe.

On a, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $|a| < 1$  et  $|b| < 1$  :

$$1 - \bar{a}b = 0 \iff \bar{a}b = 1 \implies |a||b| = |\bar{a}b| = 1,$$

exclu, car  $|a||b| < 1$ , ce qui montre que  $1 - \bar{a}b \neq 0$ , donc  $\frac{a-b}{1-\bar{a}b}$  existe.

• On a, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $|a| < 1$  et  $|b| < 1$  :

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1 \iff |a-b| < |1-\bar{a}b|$$

$$\iff |a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2$$

$$\iff (\bar{a}-\bar{b})(a-b) < (1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})$$

$$\iff \bar{a}a - \bar{a}b - \bar{b}a + \bar{b}b < 1 - \bar{a}b - a\bar{b} + \bar{a}b\bar{a}$$

$$\iff 1 + |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 > 0$$

$$\iff (1-|a|^2)(1-|b|^2) > 0,$$

et cette dernière inégalité est vraie, car  $|a| < 1$  et  $|b| < 1$ .

On conclut :  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$ .

**Remarque :** Le même calcul permet, plus généralement, d'obtenir la position stricte de  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right|$  par rapport à 1 en fonction des positions strictes de  $|a|$  et de  $|b|$  par rapport à 1.

**2.12** 1) Soit  $z \in D$ . On a alors  $z \neq 1$ , donc  $f(z) = -z \frac{1-\bar{z}}{1-z}$  existe, et :

$$|f(z)| = \left| -z \frac{1-\bar{z}}{1-z} \right| = |z| \frac{|1-\bar{z}|}{|1-z|} = |z| \frac{\sqrt{1-z}}{|1-z|} = |z| < 1,$$

donc  $f(z) \in D$ .

Ceci montre que  $f$  est une application de  $D$  dans  $D$ .

2) Pour montrer  $f \circ f = \text{Id}_D$ , on va calculer  $f \circ f(z)$  pour tout  $z \in D$ .

On a, pour tout  $z \in D$  :

$$\begin{aligned} (f \circ f)(z) &= f(f(z)) \\ &= -f(z) \frac{1-\bar{f(z)}}{1-f(z)} = z \frac{1-\bar{z}}{1-z} \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \frac{1-z}{1+z} \\ &= z \frac{1-\bar{z}}{1-z} \frac{1-\bar{z}+\bar{z}-\bar{z}z}{1-z+z-z\bar{z}} \frac{1-z}{1-\bar{z}} = z. \end{aligned}$$

On obtient  $f \circ f = \text{Id}_D$  et on conclut que  $f$  est une involution de  $D$ .

**2.13** a) I)

$$\overline{\sigma_1} = \overline{a+b+c+d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = \frac{\sigma_3}{\sigma_4}.$$

2)

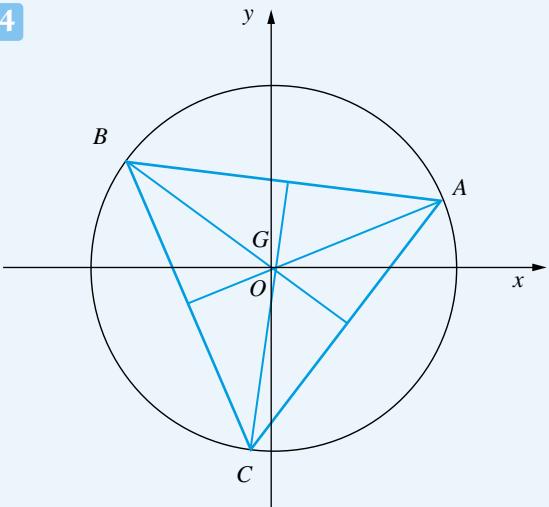
$$\begin{aligned} \overline{\sigma_2} &= \overline{ab+ac+ad+bc+bd+cd} \\ &= \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c} + \overline{a}\overline{d} + \overline{b}\overline{c} + \overline{b}\overline{d} + \overline{c}\overline{d} \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd} \\ &= \frac{cd+bd+bc+ad+ac+ab}{abcd} = \frac{\sigma_2}{\sigma_4}. \end{aligned}$$

b) Il s'ensuit :

$$1) \quad \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_4} = \sigma_1 \frac{\sigma_3}{\sigma_4} = \sigma_1 \overline{\sigma_1} = |\sigma_1|^2 \in \mathbb{R}_+$$

$$2) \quad \frac{\sigma_2^2}{\sigma_4} = \sigma_2 \frac{\sigma_2}{\sigma_4} = \sigma_2 \overline{\sigma_2} = |\sigma_2|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

**2.14**



Notons  $A, B, C$  les points d'affixes respectives  $e^{ix}, e^{iy}, e^{iz}$ .

Ainsi,  $A, B, C$  sont sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

L'affixe du centre de gravité  $G$  du triangle  $ABC$  est  $\frac{1}{3}(e^{ix} + e^{iy} + e^{iz})$ . Ainsi,  $(x, y, z)$  est solution de (1) si et seulement si  $G = O$ .

Si  $G = O$ , c'est-à-dire si le centre de gravité  $G$  de  $ABC$  est confondu avec le centre  $O$  du cercle circonscrit à  $ABC$ , alors les médiatrices et les médianes du triangle  $ABC$  sont confondues, donc  $ABC$  est équilatéral. La réciproque est évidente.

On conclut que  $(x, y, z)$  est solution de (1) si et seulement si le triangle dont les sommets ont pour affixes  $e^{ix}, e^{iy}, e^{iz}$  est équilatéral.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (1) est :

$$\left\{ \left( x, x + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x + \frac{4\pi}{3} + 2\ell\pi \right); (x, k, \ell) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cup \left\{ \left( x, x + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, x + \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi \right); (x, k, \ell) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \right\}.$$

**2.15** On a :  $C + iS = \sum_{k=0}^n e^{i(a+kb)} = e^{ia} \sum_{k=0}^n (e^{ib})^k$ .

Si  $b \notin 2\pi\mathbb{Z}$ , alors  $e^{ib} \neq 1$ , donc :

$$C + iS = e^{ia} \frac{e^{i(n+1)b} - 1}{e^{ib} - 1}$$

$$= e^{ia} \frac{e^{\frac{i(n+1)b}{2}} \left( e^{\frac{i(n+1)b}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)b}{2}} \right)}{e^{\frac{ib}{2}} \left( e^{\frac{ib}{2}} - e^{-\frac{ib}{2}} \right)}$$

$$= e^{i(a+\frac{nb}{2})} \frac{2i \sin \frac{(n+1)b}{2}}{2i \sin \frac{b}{2}}.$$

On déduit  $C$  et  $S$  en prenant la partie réelle et la partie imaginaire.

Si  $b \in 2\pi\mathbb{Z}$ , l'étude est immédiate.

On conclut :

$$C = \begin{cases} \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right) \frac{\sin \frac{(n+1)b}{2}}{\sin \frac{b}{2}} & \text{si } b \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ (n+1) \cos a & \text{si } b \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} \sin\left(a + \frac{nb}{2}\right) \frac{\sin \frac{(n+1)b}{2}}{\sin \frac{b}{2}} & \text{si } b \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ (n+1) \sin a & \text{si } b \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

**2.16** Remarquer d'abord que l'expression proposée existe, puisque  $a \neq 0$  et  $c \neq b$ .

Notons  $z = \frac{c-a}{c-b}$ . On a, puisque  $a, b, c \in \mathbb{U}$  :

$$\bar{z} = \frac{\overline{c} - \overline{a}}{\overline{c} - \overline{b}} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} = \frac{a-c}{ca} \frac{bc}{b-c} = \frac{b}{a} z.$$

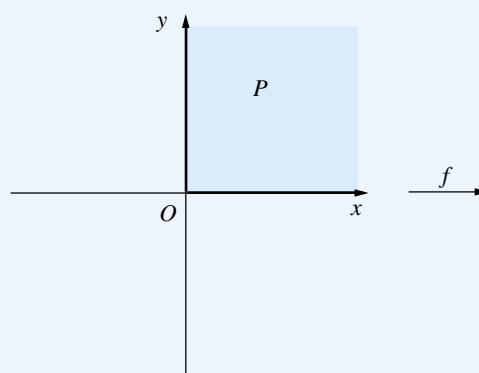
D'où :

$$\begin{aligned} \frac{b(c-a)^2}{a(c-b)^2} &= \frac{b}{a} \left( \frac{c-a}{c-b} \right)^2 = \frac{b}{a} z^2 \\ &= \left( \frac{b}{a} z \right) z = \bar{z} z = |z|^2 \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

**2.17** Exprimons, pour tout  $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ ,  $z$  en fonction de  $Z = f(z)$ . On a :

$$\begin{aligned} Z = \frac{z+1}{z-1} &\iff Zz - Z = z + 1 \\ &\iff Zz - z = Z + 1 \iff z = \frac{Z+1}{Z-1}, \end{aligned}$$

en remarquant que  $Z \neq 1$ .



Notons  $z = x + i y$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $Z = X + i Y$ ,  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ .

Calculons  $x, y$  en fonction de  $X, Y$  :

$$\begin{aligned} x + i y &= \frac{X + i Y + 1}{X + i Y - 1} \\ &= \frac{(X+1)+iY}{(X-1)+iY} \cdot \frac{(X-1)-iY}{(X-1)-iY} \\ &= \frac{(X^2 - 1 + Y^2) - 2iY}{(X-1)^2 + Y^2}, \end{aligned}$$

d'où :

$$x = \frac{X^2 + Y^2 - 1}{(X-1)^2 + Y^2}, \quad y = \frac{-2Y}{(X-1)^2 + Y^2}.$$

On a alors :

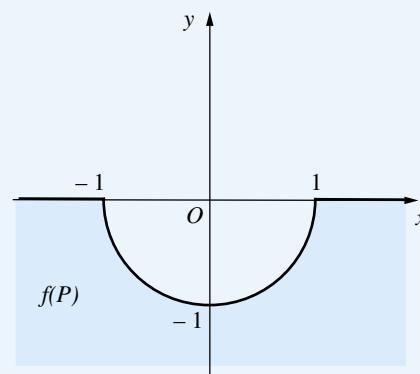
$$\begin{aligned} z \in P &\iff \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \\ &\iff \frac{X^2 + Y^2 - 1}{(X-1)^2 + Y^2} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{-2Y}{(X-1)^2 + Y^2} > 0 \\ &\iff \begin{cases} X^2 + Y^2 - 1 > 0 \\ -2Y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 + Y^2 > 1 \\ Y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On conclut :

$$f(P) = \left\{ Z = X + i Y ; (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} X^2 + Y^2 > 1 \\ Y < 0 \end{cases} \right\}.$$

Ainsi,  $f(P)$  est la partie du plan extérieure au cercle de centre  $O$  et de rayon 1, et située au-dessous de l'axe des abscisses.

(Voir schémas ci-dessous)



**2.18** En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$A + B + C = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$A + j^B + j^2 C = \binom{n}{0} + j \binom{n}{1} + j^2 \binom{n}{2} + j^3 \binom{n}{3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^n j^k \binom{n}{k} = (1+j)^n = (-j^2)^n = (-1)^n j^{2n}$$

$$A + j^2 B + j C = (1+j^2)^n = (-j)^n = (-1)^n j^n.$$

On résout ensuite un système d'équations, en utilisant les coefficients indiqués :

$$\begin{cases} A + B + C = 2^n \\ A + jB + j^2 C = (-1)^n j^{2n} \\ A + j^2 B + j C = (-1)^n j^n \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c|c|c|c} & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & j^2 & j \\ & 1 & j & j^2 \end{array} \right.$$

d'où les valeurs de  $A, B, C$  :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \left( 2^n + (-1)^n j^{2n} + (-1)^n j^n \right) \\ B = \frac{1}{3} \left( 2^n + (-1)^n j^{2n+2} + (-1)^n j^{n+1} \right) \\ C = \frac{1}{3} \left( 2^n + (-1)^n j^{2n+1} + (-1)^n j^{n+2} \right) \end{cases}$$

**2.19** Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Puisque  $\sum_{p=1}^n z_p = 0$ , on a :

$$|z_k|^2 = \left| - \sum_{1 \leq p \leq n, p \neq k} z_p \right|^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée à  $(z_p)_{1 \leq p \leq n, p \neq k}$  et  $(1)_{1 \leq p \leq n, p \neq k}$ , on a :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{1 \leq p \leq n, p \neq k} z_p \right|^2 \\ & \leq \left( \sum_{1 \leq p \leq n, p \neq k} 1^2 \right) \left( \sum_{1 \leq p \leq n, p \neq k} |z_p|^2 \right) \\ & = (n-1) \sum_{1 \leq p \leq n, p \neq k} |z_p|^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) |z_k|^2 = |z_k|^2 + \frac{1}{n-1} \left| \sum_{1 \leq p \leq n, p \neq k} z_p \right|^2 \\ & \leq |z_k|^2 + \sum_{1 \leq p \leq n, p \neq k} |z_p|^2 = \sum_{p=1}^n |z_p|^2 \leq M, \\ & \text{donc : } |z_k|^2 \leq \frac{M}{1 + \frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n} M, \\ & \text{et finalement : } |z_k| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n} M}. \end{aligned}$$

**2.20** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a, par l'inégalité triangulaire :

$$|z| = |z - z^2 + z^2| \leq |z - z^2| + |z^2| = |z||z-1| + |z|^2.$$

- Si  $|z| \leq 1$ , on déduit le résultat voulu :  $|z| \leq |z-1| + |z|^2$ .
- Si  $|z| \geq 1$ , alors  $|z| \leq |z|^2$ , donc *a fortiori* :  $|z| \leq |z|^2 + |z-1|$ .

**2.21** I) On a, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \leq 1$ , en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|z^3 + 2iz| \leq |z^3| + |2iz| = |z|^3 + 2|z| \leq 3.$$

2) Voyons si on peut choisir  $z$  de façon qu'il y ait égalité dans chacune des deux inégalités précédentes. On sait qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ici si et seulement si  $z^3$  et  $2iz$  sont positivement liés, c'est-à-dire :  $z^3 = 2i\lambda z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Pour  $|z| = 1$ , on déduit, en passant aux modules,  $1 = 2\lambda$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Puis :  $z^3 = 2i\lambda z \iff z^3 = iz \iff z^2 = i$ , car  $z \neq 0$ . Une racine carrée complexe de  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  est  $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ .

En prenant  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ , on a :  $|z| = 1$ ,  $z^2 = i$ ,  $z^3 = iz$ ,  $|z^3 + 2iz| = |3iz| = 3|z| = 3$ .

On conclut :  $\sup_{|z| \leq 1} |z^3 + 2iz| = 3$ .

**2.22** a) On a, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (z_k - z) \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} &= \sum_{k=1}^n \frac{z_k \overline{z_k}}{|z_k|} - \sum_{k=1}^n \frac{z \overline{z_k}}{|z_k|} \\ &= \sum_{k=1}^n |z_k| - z \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{|z_k|} = \sum_{k=1}^n |z_k|. \end{aligned}$$

b) D'après a),  $\sum_{k=1}^n (z_k - z) \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} = \sum_{k=1}^n |z_k| \in \mathbb{R}_+$ ,

et, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |z_k| &= \sum_{k=1}^n (z_k - z) \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} = \left| \sum_{k=1}^n (z_k - z) \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n |z_k - z| \frac{|z_k|}{|z_k|} = \sum_{k=1}^n |z_k - z|. \end{aligned}$$

### 2.23 a) En utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{cases} |2u| = |(u+v) + (u-v)| \leqslant |u+v| + |u-v| \\ |2v| = |(u+v) - (u-v)| \leqslant |u+v| + |u-v|, \end{cases}$$

d'où, en additionnant puis en simplifiant par 2 :

$$|u| + |v| \leqslant |u+v| + |u-v|.$$

b) • D'après a) appliqué à  $(z_1, z_2)$  et à  $(z_3, z_4)$  à la place de  $(u, v)$ , on a :

$$|z_1| + |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$$

et

$$|z_3| + |z_4| \leqslant |z_3 + z_4| + |z_3 - z_4|,$$

puis en additionnant :

$$\begin{aligned} |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| \\ \leqslant |z_1 + z_2| + |z_3 + z_4| + |z_1 - z_2| + |z_3 - z_4|. \end{aligned}$$

• D'après a) appliqué à  $(z_1 - z_2, z_3 - z_4)$  à la place de  $(u, v)$ , on a :

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| + |z_3 - z_4| \\ \leqslant |z_1 - z_2 + z_3 - z_4| + |z_1 - z_2 - z_3 + z_4| \\ = |(z_1 + z_3) - (z_2 + z_4)| + |(z_1 + z_4) - (z_2 + z_3)| \\ \leqslant |z_1 + z_3| + |z_2 + z_4| + |z_1 + z_4| + |z_2 + z_3|, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu :

$$\begin{aligned} |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| \\ \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 + z_3| + |z_1 + z_4| + |z_2 + z_3| \\ + |z_2 + z_4| + |z_3 + z_4|. \end{aligned}$$

### 2.24 Raisonnons par récurrence sur $n$ .

La propriété est triviale pour  $n = 1$ .

Supposons la propriété vraie pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ , et soient  $a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_{n+1} \in D$ .

On a, en notant  $A_n = \prod_{k=1}^n a_k$ ,  $B_n = \prod_{k=1}^n b_k$  :

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{n+1} a_k - \prod_{k=1}^{n+1} b_k \right| &= |A_n a_{n+1} - B_n b_{n+1}| \\ &= |A_n(a_{n+1} - b_{n+1}) + (A_n - B_n)b_{n+1}| \\ &\leqslant |A_n| |a_{n+1} - b_{n+1}| + |A_n - B_n| |b_{n+1}|. \end{aligned}$$

D'une part,  $|A_n| \leqslant 1$ , car :  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|a_k| \leqslant 1$ .

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$|A_n - B_n| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|.$$

Enfin :  $|b_{n+1}| \leqslant 1$ .

$$\begin{aligned} \text{On déduit : } \left| \prod_{k=1}^{n+1} a_k - \prod_{k=1}^{n+1} b_k \right| &\leqslant |a_{n+1} - b_{n+1}| + \sum_{k=1}^n |a_k - b_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} |a_k - b_k|, \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété pour  $n + 1$ .

On a établi la propriété voulue, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par récurrence sur  $n$ .

### 2.25 On a, en utilisant le binôme de Newton, puis une permutation de deux symboles de sommation :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (z + \omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (\omega^k)^\ell z^{n-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} \omega^{\ell k} z^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} z^{n-\ell} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^\ell)^k. \end{aligned}$$

On calcule cette dernière somme (portant sur l'indice  $k$ ), en séparant en cas selon que  $\omega^\ell$  est égal à 1 ou non :

• si  $\ell = 0$  ou  $\ell = n$ , alors  $\omega^\ell = 1$ , donc  $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^\ell)^k = n$

• si  $\ell \neq 0$  ou  $\ell \neq n$ , alors, comme  $0 < \ell < n$ , on a  $\omega^\ell \neq 1$ , d'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^\ell = \frac{1 - (\omega^\ell)^n}{1 - \omega^\ell} = \frac{1 - (\omega^n)^\ell}{1 - \omega^\ell} = 0.$$

Ainsi, dans  $S_n$ , il ne reste que les termes d'indices  $\ell = 0$ ,  $\ell = n$ , d'où :  $S_n = \binom{n}{0} z^n n + \binom{n}{n} z^0 n = n(z^n + 1)$ .

**2.26**

On a :

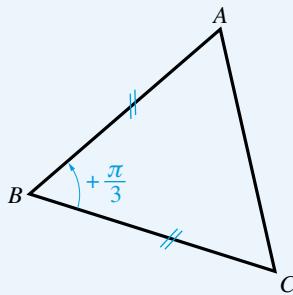
$$\begin{aligned}
 & (a+b)(c+d) = 2(ab+cd) \\
 \iff & ac + ad + bc + bd = 2ab + 2cd \\
 \iff & ac + bd - ab - cd = ab + cd - ad - bc \\
 \iff & (a-d)(c-b) = (a-c)(b-d) \\
 \iff & \frac{a-d}{a-c} = -\frac{b-d}{b-c} \\
 \iff & \frac{a-d}{a-c} : \frac{b-d}{b-c} = -1 \implies \frac{a-d}{a-c} : \frac{b-d}{b-c} \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

ce qui montre que les quatre points  $A, B, C, D$  sont cocycliques ou alignés.

**2.27**

a)  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $A$  se déduit de  $C$  par la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , c'est-à-dire :

$$(1) \quad a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b).$$



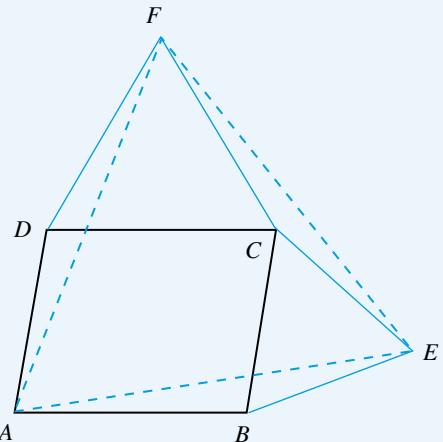
Mais  $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$ , donc :

$$(1) \iff a - b + j^2(c - b) = 0 \iff a + jb + j^2c = 0.$$

$$\begin{aligned}
 b) (ABC \text{ est équilatéral}) &\iff \begin{cases} ABC \text{ équilatéral direct} \\ \text{ou} \\ ABC \text{ équilatéral indirect} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a + jb + j^2c = 0 \\ \text{ou} \\ a + jc + j^2b = 0 \end{cases} \\
 &\iff (a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc) = 0 \\
 &\iff a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0.
 \end{aligned}$$

**2.28**

Notons  $a, b, c, d$  les affixes complexes de  $A, B, C, D$  respectivement. Puisque  $ABCD$  est un parallélogramme, on a :  $a + c = b + d$ .



On a :

$BCE$  équilatéral (indirect)

$$\iff \overrightarrow{BE} = \text{Rot}_{-\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{BC})$$

$$\iff e - b = e^{-i\frac{\pi}{3}}(c - b) = -j(c - b)$$

$$\iff e = b - j(c - b) = (1 + j)b - jc = -j^2b - jc,$$

cf. aussi l'exercice 2.27.

De même, puisque  $CDF$  est équilatéral (indirect), on a :

$$f = -j^2c - jd.$$

Pour montrer que  $AEF$  est équilatéral (direct), on calcule :

$$\begin{aligned}
 f + ja + j^2e &= (-j^2c - jd) + ja + j^2(-j^2b - jc) \\
 &= -j^2c - jd + ja - jb - c \\
 &= ja - jb - (1 + j^2)c - jd \\
 &= ja - jb + jc - jd = j(a - b + c - d) = 0.
 \end{aligned}$$

On conclut que  $AEF$  est équilatéral (direct).

**2.29** Première méthode (algébrique)

Puisque  $u, v$  sont les racines carrées complexes de  $z$ , on a :  $v = -u$  et  $z = u^2$ .

On a :

$(z, u, v)$  rectangle en  $z$

$$\iff \text{Ré}((\overline{u-z})(v-z)) = 0 \iff \text{Ré}((\overline{u}-\overline{u^2})(-u-u^2)) = 0$$

$$\iff (\overline{u}-\overline{u^2})(-u-u^2) + (u-u^2)(-\overline{u}-\overline{u^2}) = 0$$

$$\iff -\overline{uu} + \overline{u^2u} - \overline{uu^2} + \overline{u^2u^2} - u\overline{u} - u\overline{u^2} + u^2\overline{u} + u^2\overline{u^2} = 0$$

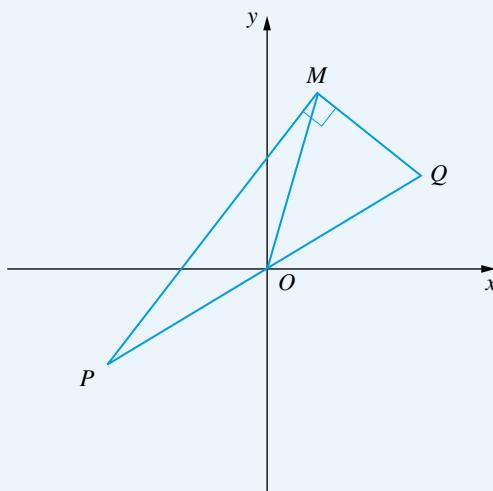
$$\iff -2|u|^2 + 2|u|^4 = 0$$

$$\iff |u|^2 = 0 \text{ (exclu)} \text{ ou } |u|^2 = 1$$

$$\iff |u|^2 = 1 \iff |z| = 1.$$

On conclut que l'ensemble cherché est  $\mathbb{U}$ , ensemble des nombres complexes de module 1.

*Deuxième méthode (géométrique)*



Notons  $M, P, Q$  les points d'affixes respectives  $z, u, v$ . Pour que le triangle  $MPQ$  soit rectangle en  $M$ , il faut et il suffit que  $M$  soit sur le cercle de diamètre  $PQ$ , ce qui équivaut à  $OM = OP$ .

Et :

$$\begin{aligned} OM = OP &\iff |z| = |u| \iff |u|^2 = |u| \\ &\iff (|u| = 0 \text{ (exclu)} \quad \text{ou} \quad |u| = 1) \\ &\iff |z| = 1. \end{aligned}$$

**2.30** On a, en utilisant une permutation de deux symboles  $\Sigma$  et la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=p}^{n-1} \binom{q}{p} \omega^{p+q} = \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^q \binom{q}{p} \omega^{p+q} \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} \left( \sum_{p=0}^q \binom{q}{p} \omega^p \right) \omega^q = \sum_{q=0}^{n-1} (1 + \omega)^q \omega^q \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} ((1 + \omega)\omega)^q. \end{aligned}$$

Pour calculer cette sommation de progression géométrique, voyons si  $(1 + \omega)\omega$  peut être égal à 1 ou non. On a :

$$(1 + \omega)\omega = 1 \iff \omega^2 + \omega - 1 = 0 \iff \omega = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Mais  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  ne sont pas des racines  $n$ -èmes de 1 dans  $\mathbb{C}$  (car de modules différents de 1), donc  $(1 + \omega)\omega \neq 1$ .

On a alors, par sommation d'une progression géométrique et puisque  $\omega^n = 1$  :

$$S_n = \frac{1 - ((1 + \omega)\omega)^n}{1 - (1 + \omega)\omega} = \frac{1 - (1 + \omega)^n}{1 - \omega - \omega^2}.$$



## Plan

Les méthodes à retenir	29
Énoncés des exercices	32
Du mal à démarrer ?	36
Corrigés	37

## Thèmes abordés dans les exercices

- Convergence, divergence d'une suite, détermination de son éventuelle limite
- Séparation d'une suite en termes d'indices pairs, d'indices impairs, et, plus généralement, étude de suites extraites
- Montrer que deux suites réelles sont adjacentes
- Calcul du terme général pour une suite usuelle, en particulier le cas des suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants et sans second membre
- Étude d'une suite du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Propriétés des suites convergentes et des suites de limite infinie, pour les opérations algébriques et l'ordre usuel, en particulier le théorème d'encadrement
- Calcul du terme général pour les suites usuelles : suites arithmétiques, suites géométriques, suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants et sans second membre
- Définition et propriétés des suites extraites, en particulier le cas des suites formées par les termes d'indices pairs, d'indices impairs
- Définition et propriétés des suites réelles monotones, des suites adjacentes
- Plans d'étude des suites du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

# Les méthodes à retenir

## Pour montrer qu'une suite converge et trouver sa limite

Essayer d'exprimer le terme général  $u_n$  de façon à pouvoir appliquer les théorèmes généraux (théorème d'encadrement, opérations sur les suites convergentes).

→ Exercices 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.6

## Pour étudier la convergence d'une suite

De manière générale, privilégier l'application des énoncés des théorèmes du cours.

→ Exercice 3.4

## Pour étudier la convergence d'une suite dans laquelle apparaît une distinction entre les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs

Examiner le comportement des deux suites extraites, indices pairs, indices impairs.

→ Exercice 3.3.

## Pour montrer qu'une suite diverge

Essayer de :

– trouver deux suites extraites et ayant des limites différentes

→ Exercice 3.6 b)

– montrer que le terme général tend vers  $+\infty$  ou tend vers  $-\infty$

– raisonner par l'absurde : supposer que la suite converge et amener une contradiction.

→ Exercice 3.22.

## Pour étudier une suite extraite d'une suite convergente

Appliquer le résultat du cours : la suite extraite considérée converge et a la même limite que la suite donnée.

→ Exercice 3.15.

## Pour montrer que deux suites réelles $(u_n)_n$ , $(v_n)_n$ sont adjacentes

Établir que :

1) l'une est croissante

2) l'autre est décroissante

3) la différence  $v_n - u_n$  tend vers 0 lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini.

→ Exercice 3.7.

## Pour calculer le terme général d'une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre

Former l'équation caractéristique et appliquer les formules du cours.

→ Exercices 3.8, 3.9, 3.18 a).

**Pour calculer le terme général  $u_n$  d'une suite récurrente linéaire du premier ordre ou du second ordre, à coefficients constants et avec second membre**

Chercher une suite particulière  $(v_n)_n$  satisfaisant la même relation de récurrence que  $(u_n)_n$  et de la même forme (à peu près) que le second membre. Former  $w_n = u_n - v_n$ , qui est le terme général d'une suite récurrente linéaire du premier ordre ou du second ordre à coefficients constants et sans second membre, calculer  $w_n$  et en déduire  $u_n$  par  $u_n = v_n + w_n$ .

→ Exercices 3.11, 3.12.

**Pour étudier une suite récurrente du type  $u_{n+1} = f(u_n)$**

S'inspirer des exemples traités dans le cours.

Souvent, on pourra trouver la ou les valeurs nécessaires de l'éventuelle limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)_n$ . En effet, si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$  et si  $f$  est continue en  $\ell$ , alors  $f(\ell) = \ell$ .

→ Exercices 3.13 a), b), c)

Il se peut que  $(u_n)_n$  soit croissante et majorée, ou décroissante et minorée, donc convergente. En particulier, si  $f$  est croissante et si l'intervalle d'étude est stable par  $f$ , alors  $(u_n)_n$  est monotone.

→ Exercices 3.13 a), c)

Un dessin permet souvent de prévoir le comportement de la suite  $(u_n)_n$  et guide la marche à suivre.

→ Exercice 3.13 c)

Une séparation en cas, selon la position du premier terme  $u_0$  de la suite par rapport aux points fixes de  $f$ , peut être nécessaire, suivie de l'étude de la monotonie de la suite  $(u_n)_n$ .

→ Exercice 3.13 c)

On peut essayer d'utiliser une majoration de type géométrique.

→ Exercice 3.13 b).

**Pour étudier une suite ressemblant aux types usuels de suites**

Essayer de se ramener aux types usuels de suites, souvent par changement d'inconnue, en ramenant l'étude de  $u_n$  à celle, par exemple, de  $nu_n$ , de  $\ln u_n$ , ...

→ Exercice 3.14.

**Pour étudier deux suites  $(u_n)_n$ ,  $(v_n)_n$  définies simultanément par des relations de récurrence les combinant**

Essayer de :

– calculer les termes généraux  $u_n$  et  $v_n$

→ Exercice 3.12

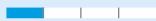
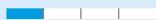
– étudier la monotonie éventuelle des suites  $(u_n)_n$ ,  $(v_n)_n$

→ Exercices 3.20, 3.21

– raisonner sur les valeurs nécessaires des limites éventuelles

→ Exercices 3.20, 3.21.

# Énoncés des exercices



## 3.1

### Exemples de calcul de limites de suites réelles

Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite, dont on donne le terme général  $u_n$ , converge, et calculer sa limite :

$$a) \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx), \quad x \in \mathbb{R} \quad b) \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k+n^2} \quad c) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}.$$

## 3.2

### Exemple de calcul de limite d'une suite complexe

Étudier la convergence de la suite complexe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in \mathbb{C}$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n - \overline{u_n}}{3}.$$

## 3.3

### Suites extraites d'indices pairs, d'indices impairs

Soient  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe telle que :

$$z_{2n} \xrightarrow[n \infty]{} a \quad \text{et} \quad z_{2n+1} \xrightarrow[n \infty]{} b.$$

Montrer que la suite  $(z_n z_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

## 3.4

### Étude de limite pour une suite construite à partir de deux suites

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites à termes dans  $\mathbb{R}_+^*$ . On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$w_n = \frac{u_n^3 + v_n^3}{u_n^2 + v_n^2}. \quad \text{Montrer : } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0 \\ v_n \xrightarrow[n \infty]{} 0 \end{cases} \iff w_n \xrightarrow[n \infty]{} 0.$$

## 3.5

### Limites de trois suites

Soient  $(u_n)_n$ ,  $(v_n)_n$ ,  $(w_n)_n$  trois suites réelles,  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose :

$$u_n + v_n + w_n \xrightarrow[n \infty]{} 3a \quad \text{et} \quad u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 \xrightarrow[n \infty]{} 3a^2.$$

Montrer :

$$u_n \xrightarrow[n \infty]{} a, \quad v_n \xrightarrow[n \in \infty]{} a, \quad w_n \xrightarrow[n \in \infty]{} a.$$

## 3.6

### Limites de deux suites réelles à partir des limites de leur somme et de leur produit

Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. On suppose :

$$x_n + y_n \xrightarrow[n \in \infty]{} S \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_n y_n \xrightarrow[n \in \infty]{} P \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer :  $S^2 - 4P \geqslant 0$ .

b) Si  $S^2 - 4P > 0$ , montrer qu'on ne peut pas conclure que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent.

c) Si  $S^2 - 4P = 0$ , montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent et déterminer leurs limites.

**3.7****Exemple de deux suites adjacentes**

Montrer que les suites définies, pour  $n \geq 1$ , par :

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k k!}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n n!}\right) u_n,$$

sont adjacentes.

**3.8****Exemple de condition sur une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre**

Déterminer l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \lambda$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n,$$

vérifie :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant 1$ .

**3.9****Suite de Fibonacci et coefficients binomiaux**

Soit  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par : 
$$\begin{cases} \phi_0 = 0, & \phi_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n. \end{cases}$$

a) Calculer  $\phi_n$  en fonction de  $n$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

b) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1}^2 - \phi_n \phi_{n+2} = (-1)^n$ .

c) Etablir que  $\left(\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n}\right)_{n \geq 1}$  converge et trouver sa limite.

d) Montrer :

$$1) \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k = \phi_{2n}$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \phi_k = -\phi_n.$$

**3.10****Relation de récurrence vérifiée par le carré du terme général d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre**

Montrer que, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants dans  $\mathbb{K}$ , sans second membre, alors la suite  $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire du troisième ordre à coefficients constants et sans second membre, que l'on précisera.

**3.11****Exemple de calcul du terme général d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre**

Calculer  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , sachant  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n.$$

**3.12****Exemple de calcul des termes généraux de deux suites récurrentes linéaires du premier ordre à coefficients constants et avec second membre**

On considère les deux suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $u_0 = v_0 = 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n + 2^n. \end{cases}$$

Calculer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**3.13****Trois exemples de suites du type  $u_{n+1} = f(u_n)$** 

Étudier les suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$a) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_0 \in \left[ \frac{1}{3}, +\infty \right[ \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{2}{9}} \end{cases}$$

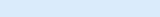
**3.14****Exemple de suite réelle pour laquelle  $u_{n+1}$  est donné en fonction de  $u_n$  et de  $n$** 

Étudier la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_1 > 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{\sqrt{n u_n}}{n+1}.$$

**3.15****Utilisation de plusieurs suites extraites**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe telle que les suites extraites  $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{3p})_{p \in \mathbb{N}}$  convergent. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**3.16****Caractérisation de la convergence des suites à termes dans  $\mathbb{Z}$** 

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes dans  $\mathbb{Z}$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si elle est stationnaire (c'est-à-dire : il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $(u_n)_{n \geq N}$  soit constante).

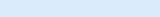
**3.17****Un exemple de suite dans lequel  $u_{2n}$  est donné en fonction de  $u_n$** 

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe bornée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} = 2u_n - 1.$$



Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à 1.

**3.18****Exemple de suite récurrente non linéaire**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $u_0 = u_1 = u_2 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = \frac{u_{n+2}u_{n+1} + 1}{u_n}.$$

a) Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+4} = 4u_{n+2} - u_n$ .

b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{N}^*$ .

**3.19****Étude d'une relation de récurrence non linéaire d'ordre 2**

Existe-t-il une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in ]0, +\infty[ \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} \end{cases} ?$$

**3.20****Exemple de deux suites récurrentes simultanées**

Soit  $(a, b) \in ]0, 1[^2$  tel que  $a \leq b$ . On considère les deux suites réelles  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $(v_n)_{n \geq 0}$  définies par  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^{v_n}, \quad v_{n+1} = v_n^{u_n}.$$

Montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge et que  $(v_n)_{n \geq 0}$  converge vers 1.

**3.21****Exemple de deux suites récurrentes simultanées}**

On considère les deux suites réelles  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $(v_n)_{n \geq 0}$  définies par  $u_0 > 0$ ,  $v_0 > 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{u_n v_n} + v_n}{3}.$$

Montrer qu'elles convergent, ont la même limite et que cette limite  $\ell$  vérifie :  $v_1 \leq \ell \leq u_1$ .

**3.22****Suites de termes généraux  $\sin n\alpha$ ,  $\cos n\alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$  fixé.**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ . Montrer que l'existence d'une des deux limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\alpha$  entraîne celle de l'autre, et que l'existence des deux entraîne une contradiction. Conclure.

**3.23****Moyenne de Césaro, lemme de l'escalier, applications****a) Moyenne de Césaro**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite dans  $\mathbb{C}$ , et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

Montrer que, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{C}$ , alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge aussi vers  $\ell$ .

**b) Lemme de l'escalier**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathbb{C}$  telle que  $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{C}$ . Montrer :  $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ .

c) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite à termes dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Montrer que, si  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un réel  $\ell > 0$ , alors  $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge aussi vers  $\ell$ .

d) Déterminer les limites, quand  $n$  tend vers l'infini de :

$$\left(\frac{2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)\dots(n+n)}, \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}, \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

**3.24****Étude du dénominateur dans une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel**

Soient  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de rationnels convergeant vers  $x$  ; pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ , avec  $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ .

Démontrer :  $q_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$  et  $|p_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ .

# Du mal à démarrer ?

**3.1** a) Utiliser l'encadrement de définition de la partie entière pour déduire un encadrement de  $u_n$ .

b) Le terme  $u_n$  ressemble à  $v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{n^2}$ , car  $k$  semble négligeable devant  $n^2$  dans  $k + n^2$ .

c) Isoler les termes d'indices  $k = 0, 1, n - 1, n$ .

**3.2** Vu que la définition de  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  est essentiellement additive, on peut essayer de passer aux parties réelles et imaginaires.

**3.3** Étudier  $z_n z_{n+1}$  en séparant en cas selon la parité de  $n$ .

**3.4** Essayer d'obtenir des encadrements permettant d'appliquer le théorème d'encadrement.

On pourra envisager la suite de terme général  $\text{Max}(u_n, v_n)$ .

**3.5** Considérer  $S_n = (u_n - a)^2 + (v_n - a)^2 + (w_n - a)^2$ .

**3.6** a) Étudier  $(x_n - y_n)^2$ .

b) Utiliser des suites formées, alternativement, par les deux solutions de l'équation  $t^2 - St + P = 0$ , d'inconnue  $t \in \mathbb{R}$ .

c) Calculer  $(x_n - y_n)^2$ .

**3.7** Revenir à la définition de deux suites adjacentes.

**3.8** Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**3.9** a) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre : appliquer la méthode du cours.

On notera, par exemple,  $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

b) Utiliser a), ou bien faire une récurrence sur  $n$ .

c) Utiliser a).

d) Utiliser a) et le binôme de Newton.

**3.10** En notant  $v_n = u_n^2$  et en supposant  $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$  pour que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_{n+3} = \alpha v_{n+2} + \beta v_{n+1} + \gamma v_n$ .

**3.11** Chercher une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , de la forme  $v_n = an + b$ , satisfaisant la même relation de récurrence que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En notant  $w_n = u_n - v_n$ ,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre, et on peut donc calculer  $w_n$  en fonction de  $n$ , puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

On notera l'analogie avec l'étude des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et avec second membre.

**3.12** Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec second membre, et calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ , comme dans l'exercice 3.11.

**3.13** a) Étudier le signe et la monotonie de  $u_n$ .

b) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ , qui a une solution et une seule, notée  $\alpha$ , puis majorer  $|u_{n+1} - \alpha|$  en faisant intervenir  $|u_n - \alpha|$ , de façon à amener une suite géométrique convergeant vers 0.

c) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ , qui a deux solutions  $\alpha, \beta$ . Séparer en cas selon la position de  $u_0$  par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ .

**3.14** Considérer  $v_n = nu_n$ .

**3.15** Considérer les suites extraites  $(u_{6q})_{q \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{6q+3})_{q \in \mathbb{N}}$ .

**3.16** Pour montrer que, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , à termes dans  $\mathbb{Z}$ , converge, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire, revenir à la définition en  $\varepsilon, N$  de la convergence d'une suite réelle.

**3.17** Calculer, pour  $N$  fixé et  $p$  variable,  $u_{2pN} - 1$  en fonction de  $u_N - 1$ .

**3.18** a) et b) Réurrences sur  $n$ .

**3.19** Supposer qu'une telle suite existe et obtenir une contradiction en étudiant sa monotonie et sa convergence.

**3.20** Étudier la monotonie des deux suites et la position relative de  $u_n$  et  $v_n$ .

**3.21** Étudier la position relative de  $u_n$  et  $v_n$ , et la monotonie des deux suites.

**3.22** En supposant  $\sin n\alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ , utiliser la suite extrait de terme général  $\sin(n+1)\alpha$  et déduire :

$\cos n\alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell' = \frac{\ell - \ell \cos \alpha}{\sin \alpha}$ . Réitérer le raisonnement sur  $\cos n\alpha$  pour déduire  $\ell = \frac{\ell' \cos \alpha - \ell'}{\sin \alpha}$ . Résoudre le système de deux équations à deux inconnues  $\ell, \ell'$  et déduire  $\ell = \ell' = 0$ . D'autre part, utiliser la formule fondamentale reliant cos et sin pour déduire une contradiction.

**3.23** a) Revenir à la définition en  $\varepsilon, N$  de  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ , et scinder

$\sum_{k=1}^n u_k$  en utilisant l'indice intermédiaire  $N$ .

b) Appliquer a) à la suite de terme général  $u_{n+1} - u_n$  à la place de  $u_n$ .

c) Prendre le logarithme et utiliser b).

d) Appliquer c).

**3.24** Étudier, pour  $N \in \mathbb{N}^*$  l'ensemble

$E_N = \left\{ \frac{a}{k} ; (a, k) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, N\} \right. \text{ et } \left. \left| x - \frac{a}{k} \right| \leqslant 1 \right\}$ , puis l'ensemble  $\{|x - r| ; r \in E_N\}$ , et le plus petit élément de celui-ci.

# Corrigés des exercices

## 3.1

a) Puisque :  $\forall t \in \mathbb{R}, t - 1 < E(t) \leq t$ , on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx - 1) < u_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx),$$

c'est-à-dire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n+1}{2n} x - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{n+1}{2n} x$ .

On conclut, par le théorème d'encadrement :  $u_n \xrightarrow[n \infty]{} \frac{x}{2}$ .

b) Puisque  $0 \leq k \leq 2n$ ,  $k$  est négligeable devant  $n^2$ , ce qui nous invite à considérer  $v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{n^2}$  et à essayer de montrer que  $u_n$  se comporte comme  $v_n$ .

- D'une part, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{2n} k = \frac{1}{n^2} \frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{2n+1}{n},$$

donc :  $v_n \xrightarrow[n \infty]{} 2$ .

- D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} |u_n - v_n| &= \left| \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k+n^2} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{n^2} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{2n} \left( \frac{k}{k+n^2} - \frac{k}{n^2} \right) \right| = \sum_{k=0}^{2n} \frac{k^2}{(k+n^2)n^2} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)^2}{n^2 n^2} = \frac{4}{n^2} \sum_{k=0}^{2n} 1 = \frac{4}{n^2} (2n+1), \end{aligned}$$

donc  $|u_n - v_n| \xrightarrow[n \infty]{} 0$ , d'où  $u_n - v_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$ .

- Enfin :  $u_n = (u_n - v_n) + v_n \xrightarrow[n \infty]{} 0 + 2 = 2$ .

c) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  tel que  $n \geq 5$  :

$$\begin{aligned} u_n &= \binom{n}{0}^{-1} + \binom{n}{1}^{-1} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \\ &\quad + \binom{n}{n-1}^{-1} + \binom{n}{n}^{-1} \\ &= 2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1}. \end{aligned}$$

Comme :  $\forall k \in \{2, \dots, n-2\}, \binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ,

on a :  $0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \leq (n-3) \frac{2}{n(n-1)}$ , et donc :

$$\sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \xrightarrow[n \infty]{} 0.$$

On conclut :  $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 2$ .

## 3.2

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $x_n = \text{Ré}(u_n)$ ,  $y_n = \text{Im}(u_n)$ .

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n - \overline{u_n}}{3} \iff \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n - x_n) = \frac{1}{3}x_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}(2y_n + y_n) = y_n. \end{cases}$$

Ainsi,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique, donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0$ , et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $y_0$ .

On déduit :  $u_n = \frac{x_0}{3^n} + iy_0 \xrightarrow[n \infty]{} iy_0$ , et on conclut :  $u_n \xrightarrow[n \infty]{} i \text{Im}(u_0)$ .

## 3.3

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = z_n z_{n+1}$ .

On a :

$$u_{2p} = z_{2p} z_{2p+1} \xrightarrow[p \infty]{} ab$$

et

$$u_{2p+1} = z_{2p+1} z_{2p+2} \xrightarrow[p \infty]{} ba = ab.$$

On conclut, d'après un théorème du cours :  $u_n \xrightarrow[n \infty]{} ab$ .

## 3.4

I) Supposons  $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$  et  $v_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$ .

On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq w_n &= \frac{u_n^3 + v_n^3}{u_n^2 + v_n^2} \leq \frac{u_n^3 + v_n^3 + u_n^2 v_n + u_n v_n^2}{u_n^2 + v_n^2} \\ &= u_n + v_n \xrightarrow[n \infty]{} 0, \end{aligned}$$

donc, par théorème d'encadrement :  $w_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$ .

2) Réciproquement, supposons  $w_n \xrightarrow{n\infty} 0$ .

Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $M_n = \max(u_n, v_n)$ .

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{u_n^3 + v_n^3}{u_n^2 + v_n^2} \geq \frac{M_n^3}{2M_n^2} = \frac{M_n}{2} \geq 0,$$

car :  $u_n^3 + v_n^3 \geq M_n^3$  et  $u_n^2 + v_n^2 \leq 2M_n^2$ .

D'après le théorème d'encadrement, on déduit :  $M_n \xrightarrow{n\infty} 0$ .

Puis, comme  $0 \leq u_n \leq M_n$  et  $0 \leq v_n \leq M_n$ , on déduit, encore par le théorème d'encadrement :  $u_n \xrightarrow{n\infty} 0$  et  $v_n \xrightarrow{n\infty} 0$ .

**3.5** Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S_n = (u_n - a)^2 + (v_n - a)^2 + (w_n - a)^2.$$

On a :

$$S_n = u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 - 2a(u_n + v_n + w_n) + 3a^2 \xrightarrow{n\infty} 3a^2 - 2a \cdot 3a + 3a^2 = 0.$$

Comme :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq (u_n - a)^2 \leq S_n$ , il en résulte, par le théorème d'encadrement :  $(u_n - a)^2 \xrightarrow{n\infty} 0$ ,

puis  $u_n - a \xrightarrow{n\infty} 0$ ,  $u_n \xrightarrow{n\infty} a$ .

De même :  $v_n \xrightarrow{n\infty} a$ ,  $w_n \xrightarrow{n\infty} a$ .

**3.6** a) On a :

$$(x_n - y_n)^2 = (x_n + y_n)^2 - 4x_n y_n \xrightarrow{n\infty} S^2 - 4P.$$

Comme, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x_n - y_n)^2 \geq 0$ , on déduit, par passage à la limite :  $S^2 - 4P \geq 0$ .

b) Puisque  $S^2 - 4P > 0$ , l'équation  $t^2 - St + P = 0$ , d'inconnue  $t \in \mathbb{R}$ , admet deux solutions notées  $t_1, t_2$  et on a :  $t_1 \neq t_2$ .

Considérons les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$x_n = \begin{cases} t_1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ t_2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \quad y_n = \begin{cases} t_2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ t_1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n + y_n = S$  et  $x_n y_n = P$ ,

donc :  $x_n + y_n \xrightarrow{n\infty} S$  et  $x_n y_n \xrightarrow{n\infty} P$ .

Cependant, les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui alternent deux éléments distincts, divergent.

c) On a :

$$(x_n - y_n)^2 = (x_n + y_n)^2 - 4x_n y_n \xrightarrow{n\infty} S^2 - 4P = 0,$$

donc  $x_n - y_n \xrightarrow{n\infty} 0$ .

Puis :

$$x_n = \frac{1}{2}((x_n + y_n) + (x_n - y_n)) \xrightarrow{n\infty} \frac{S}{2},$$

$$y_n = \frac{1}{2}((x_n + y_n) - (x_n - y_n)) \xrightarrow{n\infty} \frac{S}{2}.$$

On conclut que les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent et ont pour limite  $\frac{S}{2}$ .

**3.7** 1) On a, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}\right)u_n - u_n \\ &= \frac{u_n}{(n+1)(n+1)!} \geq 0, \end{aligned}$$

donc  $(u_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

2) On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(1 + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}\right)u_{n+1} - \left(1 + \frac{1}{nn!}\right)u_n \\ &= \left(1 + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}\right)^2 u_n - \left(1 + \frac{1}{nn!}\right)u_n \\ &= \left(\frac{2}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)^2(n+1)!} - \frac{1}{nn!}\right)u_n \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n+1)!} \left(2n + \frac{n}{(n+1)(n+1)!} - (n+1)^2\right)u_n. \end{aligned}$$

Comme :

$\forall n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} 2n + \frac{n}{(n+1)(n+1)!} - (n+1)^2 &\leq 2n + 1 - (n+1)^2 \\ &= -n^2 \leq 0, \end{aligned}$$

on déduit :  $\forall n \geq 1, v_{n+1} - v_n \leq 0$ ,

donc  $(v_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.

3) On a, pour tout  $n \geq 1$  :  $v_n - u_n = \frac{u_n}{nn!} \geq 0$ .

Il s'ensuit, puisque  $(v_n)_{n \geq 1}$  est décroissante :

$$\forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq v_n \leq v_1,$$

$$\text{puis : } 0 \leq v_n - u_n = \frac{u_n}{nn!} \leq \frac{v_1}{nn!}.$$

On déduit, par le théorème d'encadrement :  $v_n - u_n \xrightarrow{n\infty} 0$ .

On conclut, d'après la définition de deux suites adjacentes, que les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes.

**3.8** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants, sans second membre. L'équation caractéristique  $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$ , admet une solution

double égale  $\frac{1}{2}$ . D'après le cours, il existe donc  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\alpha n + \beta) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

De plus :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ (\alpha + \beta) \frac{1}{2} = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 2\lambda. \end{cases}$$

On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\lambda n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\lambda n}{2^{n-1}}.$$

Calculons les premières valeurs de  $\frac{n}{2^{n-1}}$  :

$n$	0	1	2	3	4	...
$\frac{n}{2^{n-1}}$	0	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	...

La suite  $\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)_{n \geq 1}$  est décroissante, car, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\frac{\frac{n+1}{2^n}}{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{n+1}{2n} \leq 1.$$

Il en résulte que la suite  $(|u_n|)_{n \geq 1}$  est décroissante.

On a donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq 1) \iff |u_1| \leq 1 \iff |\lambda| \leq 1$$

et on conclut que l'ensemble cherché est  $\{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| \leq 1\}$ .

**3.9** a) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants.

L'équation caractéristique  $r^2 - r - 1 = 0$  admet deux solutions réelles  $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Il existe donc  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

De plus :

$$\begin{cases} \phi_0 = 0 \\ \phi_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{r_1 - r_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

D'où :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$ .

b) 1<sup>re</sup> méthode (utilisant a)) :

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}^2 - \phi_n \phi_{n+2} &= \frac{1}{5} ((r_2^{n+1} - r_1^{n+1})^2 - (r_2^n - r_1^n)(r_2^{n+2} - r_1^{n+2})) \\ &= \frac{1}{5} (r_1 r_2)^n (r_2 - r_1)^2 = (-1)^n, \end{aligned}$$

puisque  $r_1 r_2 = -1$ .

2<sup>eme</sup> méthode (n'utilisant pas a)) :

Récurrence sur  $n$ . La propriété est immédiate pour  $n = 0$ . Si elle est vraie pour un  $n$  de  $\mathbb{N}$ , alors :

$$\begin{aligned} \phi_{n+2}^2 - \phi_{n+1} \phi_{n+3} &= \phi_{n+2}^2 - \phi_{n+1} (\phi_{n+2} + \phi_{n+1}) \\ &= \phi_{n+2} (\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\ &= \phi_{n+2} \phi_n - \phi_{n+1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \\ \text{c)} \quad \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} &= \frac{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}{r_2^n - r_1^n} \xrightarrow[n \infty]{} r_2, \text{ car } |r_1| < 1 < r_2. \text{ Ainsi :} \\ \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} &\xrightarrow[n \infty]{} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

d) I) On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{\sqrt{5}} (r_2^k - r_1^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_2^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_1^k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( (1 + r_2)^n - (1 + r_1)^n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( (r_2^2)^n - (r_1^2)^n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (r_2^{2n} - r_1^{2n}) = \phi_{2n}, \end{aligned}$$

en utilisant  $1 + r_2 = r_2^2$  et  $1 + r_1 = r_1^2$ , car  $r_1$  et  $r_2$  sont les solutions de l'équation caractéristique  $r^2 - r - 1 = 0$ .

2) De même, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \phi_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{\sqrt{5}} (r_2^k - r_1^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-r_2)^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-r_1)^k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( (1 - r_2)^n - (1 - r_1)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (r_1^n - r_2^n) = -\phi_n, \end{aligned}$$

en utilisant  $r_1 + r_2 = 1$ , car  $r_1$  et  $r_2$  sont les solutions de l'équation caractéristique  $r^2 - r - 1 = 0$ .

**3.10** Par hypothèse, il existe  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ . On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} v_n &= u_n^2, \quad v_{n+1} = u_{n+1}^2, \quad v_{n+2} = u_{n+2}^2 = (au_{n+1} + bu_n)^2, \\ v_{n+3} &= u_{n+3}^2 = (au_{n+2} + bu_{n+1})^2 \\ &= (a(au_{n+1} + bu_n) + bu_{n+1})^2 \\ &= ((a^2 + b)u_{n+1} + abu_n)^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} &= \alpha v_{n+2} + \beta v_{n+1} + \gamma v_n \\ \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad ((a^2 + b)u_{n+1} + abu_n)^2 &= \alpha(au_{n+1} + bu_n)^2 + \beta u_{n+1}^2 + \gamma u_n^2 \\ \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a^2 + b)^2 u_{n+1}^2 + 2(a^2 + b)abu_{n+1}u_n + a^2b^2u_n^2 &= (\alpha a^2 + \beta)u_{n+1}^2 + 2\alpha abu_{n+1}u_n + (\alpha b^2 + \gamma)u_n^2 \\ \iff \begin{cases} (a^2 + b)^2 = \alpha a^2 + \beta \\ 2(a^2 + b)ab = 2\alpha ab \\ a^2b^2 = \alpha b^2 + \gamma \end{cases} & \\ \iff \begin{cases} \alpha = a^2 + b \\ \beta = (a^2 + b)^2 - (a^2 + b)a^2 = b(a^2 + b) \\ \gamma = a^2b^2 - (a^2 + b)b^2 = -b^3. \end{cases} & \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} = (a^2 + b)v_{n+2} + b(a^2 + b)v_{n+1} - b^3v_n,$$

ce qui montre que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire du troisième ordre, à coefficients constants, sans second membre.

**3.11** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec second membre.

1) Cherchons une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la forme  $v_n = an + b$ , satisfaisant la même relation de récurrence que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 10v_{n+1} - 21v_n + 12n$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N},$$

$$a(n+2) + b = 10(a(n+1) + b) - 21(an + b) + 12n$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad (12a - 12)n + (12b - 8a) = 0$$

$$\iff \begin{cases} 12a - 12 = 0 \\ 12b - 8a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ainsi, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = n + \frac{2}{3}$ , satisfait la même relation de récurrence que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

2) Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = u_n - v_n$ . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 10w_{n+1} - 21w_n,$$

donc  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre.

L'équation caractéristique  $r^2 - 10r + 21 = 0$  est de discriminant  $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 21 = 16 > 0$ , donc elle admet deux solutions qui sont  $\frac{10 - 4}{2} = 3$  et  $\frac{10 + 4}{2} = 7$ . D'après le cours, il existe donc  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \lambda 3^n + \mu 7^n,$$

et on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = w_n + v_n = \lambda 3^n + \mu 7^n + n + \frac{2}{3}.$$

3) Enfin, en utilisant les coefficients indiqués :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu + \frac{2}{3} = 0 \\ 3\lambda + 7\mu + \frac{5}{3} = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 7 \\ -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} -3 \\ 1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} 4\lambda + 3 = -1 \\ 4\mu - \frac{1}{3} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = \frac{1}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -3^n + \frac{1}{3}7^n + n + \frac{2}{3}.$$

On peut contrôler les valeurs de  $u_0$  et de  $u_1$ , par exemple.

**3.12** • On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= -u_{n+1} + 2v_{n+1} + 1 \\ &= -u_{n+1} - 8u_n + 10v_n + 2^{n+1} + 1 \\ &= -u_{n+1} - 8u_n + 5(u_{n+1} + u_n - 1) + 2^{n+1} + 1 \\ &= 4u_{n+1} - 3u_n + 2^{n+1} - 4. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec second membre.

• Cherchons une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la forme  $a_n = \alpha 2^n + \beta n + \gamma$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ , satisfaisant la même relation de récurrence que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} &= 4a_{n+1} - 3a_n + 2^{n+1} - 4 \\ \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha 2^{n+2} + \beta(n+2) + \gamma &= 4\alpha 2^{n+1} + 4\beta(n+1) + 4\gamma - 3\alpha 2^n - 3\beta n - 3\gamma + 2^{n+1} - 4 \\ \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad (-\alpha - 2)2^n + (-2\beta + 4) &= 0 \\ \iff \begin{cases} -\alpha - 2 = 0 \\ -2\beta + 4 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = -2^{n+1} + 2n$ , satisfait la même relation de récurrence que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (on peut choisir, par exemple,  $\gamma = 0$ ).

- Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $w_n = u_n - a_n$ . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 4w_{n+1} - 3w_n,$$

donc  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants, sans second membre. L'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 3 = 0$  admet pour solutions 1 et 3. D'après le cours, il existe donc  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda + \mu 3^n$$

et on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_n + a_n = \lambda + \mu 3^n - 2^{n+1} + 2n.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = -u_0 + 2v_0 + 1 = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu - 2 = 0 \\ \lambda + 3\mu - 4 + 2 = 1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda + 3\mu = 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2} \\ \mu = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} 3^n - 2^{n+1} + 2n.$$

- Enfin, on calcule  $v_n$  :

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n - 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2} 3^{n+1} - 2^{n+2} + 2(n+1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} 3^n - 2^{n+1} + 2n - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 4 + 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^{n+1} + 4n \right) = 2 + 3^n - 3 \cdot 2^n + 2n. \end{aligned}$$

**3.13** a) D'abord, il est clair que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n > 0$ .

Comme  $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n)$ ,  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.

Puisque  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et minorée (par 0), elle converge ; notons  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

On a, en passant aux limites dans l'égalité de définition de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  :  $l = \frac{l}{l^2 + 1}$ , d'où  $l = 0$ .

Finalement :  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

b) D'abord, il est clair que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n > 1$ .

Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers un réel  $l$ , alors, en passant aux limites dans l'égalité de définition de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $l = \sqrt{1+l}$ , d'où  $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Notons  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . On a, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\alpha}|$$

$$= \frac{|u_n - \alpha|}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\alpha}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} |u_n - \alpha|,$$

d'où :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\right)^n |u_0 - \alpha|$ .

Comme  $0 < \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} < 1$ , il en résulte :  $u_n - \alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Finalement :  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

c) Considérons l'application  $f : I = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x - \frac{2}{9}}.$$

•  $f$  est dérivable sur  $I$  et :  $\forall x \in I, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - \frac{2}{9}}} > 0$ ,

donc  $f$  est strictement croissante sur  $I$ . En particulier :

$\forall x \in I, f(x) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \geq \frac{2}{9}$ , donc  $I$  est stable par  $f$ .

Puisque  $I$  est stable par  $f$  et que  $f$  est croissante sur  $I$ , on déduit, par une récurrence immédiate, en séparant en deux cas selon la position relative de  $u_0$  et de  $u_1$ , que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.

• On cherche les points fixes de  $f$  ; on a, pour tout  $x \in I$  :

$$f(x) = x \iff \sqrt{x - \frac{2}{9}} = x$$

$$\iff x - \frac{2}{9} = x^2 \iff x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$$

$$\iff x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3}.$$

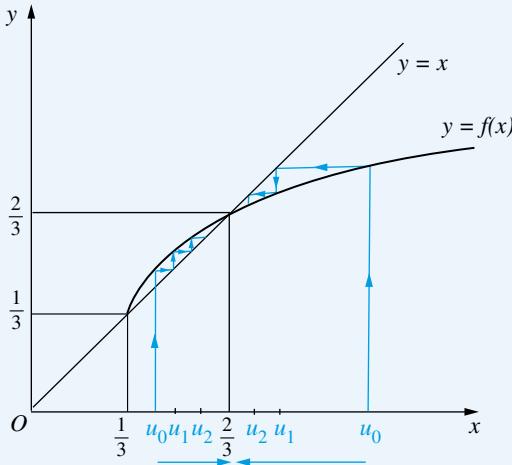
Comme  $f$  est continue sur  $I$ , si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, sa limite  $\ell$  est nécessairement  $\frac{1}{3}$  ou  $\frac{2}{3}$ .

Comme  $f$  est croissante sur  $I$ , les intervalles  $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$  et

$\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$  sont stables par  $f$ .

De plus, en reprenant ces calculs avec des inégalités, on en déduit le signe de  $f(x) - x$  selon la position de  $x$  par rapport à  $\frac{2}{3}$  :

$x$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x) - x$	0	+	0 -



• Si  $u_0 = \frac{1}{3}$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $\frac{1}{3}$ , donc converge vers  $\frac{1}{3}$ .

• Si  $\frac{1}{3} < u_0 \leq \frac{2}{3}$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par  $\frac{2}{3}$ , donc converge. Sa limite  $\ell$  vérifie  $\frac{1}{3} < u_0 \leq \ell \leq \frac{2}{3}$  et  $\ell \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$ , donc  $\ell = \frac{2}{3}$ .

• Si  $u_0 \geq \frac{2}{3}$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par  $\frac{2}{3}$ , donc converge. Sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell \geq \frac{2}{3}$  et  $\ell \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$ , donc  $\ell = \frac{2}{3}$ .

On conclut que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{1}{3}$  si  $u_0 = \frac{1}{3}$ , et vers  $\frac{2}{3}$  si  $u_0 > \frac{1}{3}$ .

**3.14** D'abord, par une récurrence immédiate sur  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  existe et  $u_n > 0$ .

Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $v_n = nu_n$ .

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} = \sqrt{nu_n} = \sqrt{v_n} = v_n^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_n = v_{n-1}^{\frac{1}{2}} = v_{n-2}^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dots = v_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = u_1^{\frac{1}{2^{n-1}}},$$

$$\text{d'où : } u_n = \frac{1}{n}u_1^{\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

On déduit :

$$\ln u_n = -\ln n + \frac{1}{2^{n-1}}\ln u_1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty,$$

et donc, par limite de l'exponentielle en  $-\infty$ , on conclut :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

**3.15** Notons  $l_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} u_{2p}$ ,  $l_2 = \lim_{p \rightarrow \infty} u_{2p+1}$ ,  $l_3 = \lim_{p \rightarrow \infty} u_{3p}$ .

La suite  $(u_{6q})_{q \in \mathbb{N}}$ , qui est extraite de  $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$  et de  $(u_{3p})_{p \in \mathbb{N}}$ , converge vers  $l_1$  et  $l_3$ , d'où  $l_1 = l_3$ .

La suite  $(u_{6q+3})_{q \in \mathbb{N}}$ , qui est extraite de  $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$  et de  $(u_{3p})_{p \in \mathbb{N}}$ , converge vers  $l_2$  et  $l_3$ , d'où  $l_2 = l_3$ .

On en déduit  $l_1 = l_2$  et donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**3.16** 1) Il est clair que, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire, alors elle converge (vers l'élément sur lequel elle stationne).

2) Réciproquement, supposons  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \in \mathbb{R}$ .

Il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left( n \geq N \implies |u_n - l| \leq \frac{1}{3} \right).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N$  ; on a :

$$|u_n - u_N| \leq |u_n - l| + |l - u_N| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1.$$

Comme  $(u_n, u_N) \in \mathbb{Z}^2$ , il en résulte  $u_n = u_N$ .

Ceci montre que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire.

**3.17** On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} - 1 = 2(u_n - 1)$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$  fixé. On a alors, par une récurrence immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_{2pN} - 1 = 2^p(u_N - 1).$$

Si  $u_N \neq 1$ , alors  $|2^p(u_N - 1)| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} +\infty$ , donc  $|u_{2pN}| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} +\infty$ , en contradiction, si  $N \neq 0$ , avec  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée.

Il s'ensuit  $u_N = 1$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ .

D'autre part, en remplaçant  $n$  par 0 dans l'énoncé, on obtient  $u_0 = 1$ .

Finalement  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à 1.

**3.18** D'abord, une récurrence immédiate montre que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n > 0$ .

a) Récurrence sur  $n$ .

- Pour  $n = 0$ , on a :

$$u_3 = \frac{u_2 u_1 + 1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2, \quad u_4 = \frac{u_3 u_2 + 1}{u_1} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$4u_2 - u_0 = 4 - 1 = 3,$$

donc  $u_4 = 4u_2 - u_0$ , la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

- Supposons la propriété vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$ .

On a, en raisonnant par équivalences logiques successives et puisque  $u_{n+2} \neq 0$  :

$$\begin{aligned} u_{n+5} &= 4u_{n+3} - u_{n+1} \\ \iff u_{n+5}u_{n+2} &= 4u_{n+3}u_{n+2} - u_{n+1}u_{n+2} \\ \iff u_{n+4}u_{n+3} + 1 &= 4u_{n+3}u_{n+2} - u_{n+1}u_{n+2} \\ \iff (4u_{n+2} - u_n)u_{n+3} + 1 &= 4u_{n+3}u_{n+2} - u_{n+1}u_{n+2} \\ \iff u_{n+2}u_{n+1} + 1 &= u_nu_{n+3}, \end{aligned}$$

et cette dernière formule est vraie, ce qui montre la propriété pour  $n + 1$ .

On conclut, par récurrence sur  $n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+4} = 4u_{n+2} - u_n.$$

b) D'une part, comme  $u_0 = u_1 = u_2 \in \mathbb{Z}$  et  $u_3 = 2 \in \mathbb{Z}$ , une récurrence immédiate, utilisant le résultat de a) et quatre termes successifs, montre :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Z}$ .

D'autre part, comme on l'a vu au début :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$ .

On conclut :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{N}^*$ .

**3.19** Supposons qu'une telle suite existe.

- On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = u_{n+2} > 0$ , donc  $\sqrt{u_{n+1}} > \sqrt{u_n}$ , puis  $u_{n+1} > u_n$ , ce qui montre que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
- Supposons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel noté  $\ell$ . On a alors  $\ell \in \mathbb{R}_+$  et, en passant à la limite dans l'égalité de définition de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :  $\ell = \sqrt{\ell} - \sqrt{\ell} = 0$ .

D'autre part, comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et  $u_0 > 0$ , on a  $\ell \geq u_0 > 0$ , contradiction.

Ceci montre que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

- Puisque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et divergente,  $u_n \xrightarrow{n \infty} +\infty$ .

En particulier, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :  $u_{N+1} \geq 1$ . On a alors :  $u_{N+2} = \sqrt{u_{N+1}} - \sqrt{u_N} \leq \sqrt{u_{N+1}} \leq u_{N+1}$ , en contradiction avec la stricte croissance de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Finalement, on conclut qu'il n'existe pas de suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convenant.

**3.20** 1) Par récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  et  $v_n$  existent et  $(u_n, v_n) \in ]0 ; 1[^2$ , en remarquant que :

$$\forall (a, b) \in ]0 ; 1[^2, \quad a^b = e^{b \ln a} \in ]0 ; 1[.$$

Il en résulte, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$0 < u_n < u_{n+1} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < v_n < v_{n+1} < 1.$$

2) Montrons, par récurrence sur  $n$  :  $\forall n \geq 0, \quad u_n \leq v_n$ .

- La propriété est vraie pour  $n = 0$ , par hypothèse.

- Supposons la propriété vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} 0 < u_n \leq v_n < 1 &\implies \begin{cases} 0 < u_n \leq v_n \\ \ln u_n \leq \ln v_n < 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 0 < u_n \leq v_n \\ 0 < -\ln v_n \leq -\ln u_n \end{cases} \\ &\implies -u_n \ln v_n \leq -v_n \ln u_n \iff v_n^{u_n} \geq u_n^{v_n} \\ &\iff u_{n+1} \leq v_{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui établit la propriété pour  $n + 1$ .

On a donc montré, par récurrence sur  $n$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$ .

3) Puisque  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante et majorée par 1,  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge et sa limite  $\lambda$  vérifie :  $0 < u_0 \leq \lambda \leq 1$ .

De même,  $(v_n)_{n \geq 0}$  converge et sa limite  $\mu$  vérifie :  $0 < v_0 \leq \mu \leq 1$ .

Comme  $u_n \xrightarrow{n \infty} \lambda, v_n \xrightarrow{n \infty} \mu$ , et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n \leq 1$ , on déduit, par passage à la limite :  $\lambda \leq \mu \leq 1$ .

D'autre part :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{cases} \ln u_{n+1} = v_n \ln u_n \\ \ln v_{n+1} = u_n \ln v_n, \end{cases}$  d'où, en passant à la limite, par continuité de  $\ln$  : (1)  $\begin{cases} \ln \lambda = \mu \ln \lambda \\ \ln \mu = \lambda \ln \mu. \end{cases}$

Et :

$$(1) \iff \begin{cases} (\mu - 1) \ln \lambda = 0 \\ (\lambda - 1) \ln \mu = 0 \end{cases} \iff (\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \mu = 1).$$

Puisque  $\begin{cases} \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \mu = 1 \\ 0 < \lambda \leq \mu \leq 1 \end{cases}$  on a :  $\mu = 1$ .

On conclut que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge et que  $(v_n)_{n \geq 0}$  converge vers 1.

**3.21** • Une récurrence immédiate montre que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  et  $v_n$  existent et sont  $> 0$ .

- On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + \sqrt{u_n v_n} + v_n}{3} \\ &= \frac{u_n - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n}{6} \\ &= \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{6} \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre, par décalage d'indices :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq v_n$ .

- On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leqslant 0,$$

donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

De même, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{3} \left( u_n + \sqrt{u_n v_n} + v_n \right) - v_n \\ &= \frac{1}{3} \left( u_n + \sqrt{u_n v_n} - 2v_n \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} \right) \left( \sqrt{u_n} + 2\sqrt{v_n} \right) \geqslant 0, \end{aligned}$$

donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

- On obtient, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_1 \leqslant v_2 \leqslant \dots \leqslant v_{n-1} \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant u_{n-1} \leqslant \dots \leqslant u_2 \leqslant u_1.$$

Ainsi,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et majorée (par  $u_1$ ), donc converge vers un réel  $\mu$  et  $v_1 \leqslant \mu \leqslant u_1$ , et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée (par  $v_1$ ), donc converge vers un réel  $\lambda$ , et  $\lambda \geqslant v_1 > 0$ .

- En passant à la limite dans la première égalité de définition des suites, on obtient :  $\lambda = \frac{\lambda + \mu}{2}$ , donc  $\lambda = \mu$ .

On conclut :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent, ont la même limite et cette limite  $\ell (= \lambda = \mu)$  vérifie :  $v_1 \leqslant \ell \leqslant u_1$ .

### 3.22 1) • Supposons $\sin n\alpha \xrightarrow[n \infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ .

On a :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos n\alpha$ , d'où, puisque  $\sin \alpha \neq 0$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos n\alpha = \frac{\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Comme  $\sin n\alpha \xrightarrow[n \infty]{} \ell$  et  $\sin(n+1)\alpha \xrightarrow[n \infty]{} \ell$  (car extraite de la précédente), il s'ensuit :

$$\cos n\alpha \xrightarrow[n \infty]{} \frac{\ell - \ell \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

- De même, si  $\cos n\alpha \xrightarrow[n \infty]{} \ell' \in \mathbb{R}$ , alors

$$\sin n\alpha = \frac{\cos n\alpha \cos \alpha - \cos(n+1)\alpha}{\sin \alpha} \xrightarrow[n \infty]{} \frac{\ell'(\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha}.$$

2) Supposons  $\sin n\alpha \xrightarrow[n \infty]{} \ell$  et  $\cos n\alpha \xrightarrow[n \infty]{} \ell'$ . D'après 1), on a donc :  $\ell' = \ell \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$  et  $\ell = -\ell' \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ . On déduit  $\left(1 + \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2\right)\ell' = 0$ , d'où  $\ell' = 0$ ,  $\ell = 0$ .

Mais :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha = 1$ , d'où, en passant à la limite :  $\ell^2 + \ell'^2 = 1$ , contradiction.

On conclut : pour tout  $\alpha$  de  $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ , les deux suites  $(\sin n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\cos n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent.

*Remarque :*

Le résultat de cet exercice est utile dans la résolution d'exercices sur les séries entières en 2<sup>e</sup> année, souvent sous la forme affaiblie :  $\sin n\alpha$  et  $\cos n\alpha$  ne tendent pas vers 0 lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini.

Par exemple, on peut montrer que  $\sin n\alpha$  ne tend pas vers 0 lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini par un raisonnement analogue, simplifié. Raisonnons par l'absurde : supposons  $\sin n\alpha \xrightarrow[n \infty]{} 0$ . Alors, par suite extraite :  $\sin(n+1)\alpha \xrightarrow[n \infty]{} 0$ . D'où :

$$\cos n\alpha = \frac{\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \xrightarrow[n \infty]{} 0,$$

puis :  $\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha \xrightarrow[n \infty]{} 0$ , contradiction.

**3.23** a) Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $u_n \xrightarrow[n \infty]{} \ell$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left( n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geqslant N_1 + 1$ . On a :

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - \ell| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n |u_k - \ell|. \end{aligned}$$

D'autre part, comme  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \xrightarrow[n \infty]{} 0$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left( n \geqslant N_2 \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

En notant  $N = \text{Max}(N_1, N_2)$ , on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left( n \geqslant N \implies |v_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \right),$$

et donc :  $v_n \xrightarrow[n \infty]{} \ell$ .

b) Notons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n = u_{n+1} - u_n$  ; donc :  $\alpha_n \xrightarrow[n \infty]{} \ell$ .

D'après a) :  $\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}}{n-1} \xrightarrow[n \infty]{} \ell$ .

Mais, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N} - \{0, 1\}$  :

$$\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}}{n-1} = \frac{u_n - u_1}{n-1} = \frac{u_n}{n-1} - \frac{u_1}{n-1}.$$

Comme  $\frac{u_1}{n-1} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ , on déduit  $\frac{u_n}{n-1} \xrightarrow[n\infty]{} \ell$ , puis :

$$\frac{u_n}{n} = \frac{u_n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} \ell.$$

c) On a :  $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\infty]{} \ln \ell$ ,

d'où, d'après b) :  $\frac{\ln u_n}{n} \xrightarrow[n\infty]{} \ln \ell$ ,

et donc :  $\sqrt[n]{u_n} = \exp\left(\frac{\ln u_n}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \ell$ .

d) 1)  $u_n = \binom{2n}{n}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 4$ , donc

$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 4.$$

$$2) u_n = \frac{n^n}{n!}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(1 + o(1)) \xrightarrow[n\infty]{} e,$$

$$\text{donc } \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow[n\infty]{} e.$$

$$3) u_n = \frac{n(n+1)\dots(n+n)}{n^n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n+1)}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{4}{e},$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)\dots(n+n)} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{4}{e}.$$

$$4) u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n^n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{2}{e},$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{2}{e}.$$

$$5) u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n}(n!)},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{27}{e^2},$$

$$\text{donc } \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{27}{e^2}.$$

### 3.24 Soit $N \in \mathbb{N}^*$ .

Pour chaque  $k$  de  $\{1, \dots, N\}$ , l'ensemble des rationnels de la forme  $\frac{a}{k}$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ) tels que  $|x - \frac{a}{k}| \leq 1$  est fini, puisque  $a$  ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs :

$$\left|x - \frac{a}{k}\right| \leq 1 \iff k(x-1) \leq a \leq k(x+1).$$

Il en résulte que l'ensemble

$$E_N = \left\{ \frac{a}{k}; (a, k) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, N\} \text{ et } \left|x - \frac{a}{k}\right| \leq 1 \right\}$$

est fini.

Comme  $x \notin \mathbb{Q}$ , nécessairement  $x \notin E_N$ . L'ensemble  $\{|x - r|; r \in E_N\}$  est une partie finie non vide de  $\mathbb{R}_+^*$ , donc admet un plus petit élément  $\alpha$ .

On a donc :  $\forall r \in E_N, |x - r| \geq \alpha > 0$ .

Comme  $u_n \xrightarrow[n\infty]{} x$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n - x| \leq \frac{\alpha}{2} < \alpha).$$

On a alors :  $\forall n \geq n_0, u_n \notin E_N$ , d'où :  $\forall n \geq n_0, q_n > N$ .

On a ainsi prouvé :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies q_n \geq N),$$

c'est-à-dire :  $q_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ .

Enfin, puisque :  $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = xq_n$ , et que  $x \in \mathbb{R}^*$ , on obtient :

$$|p_n| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty.$$



# Fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle

CHAPITRE **4**

## Plan

Les méthodes à retenir	47
Énoncés des exercices	49
Du mal à démarrer ?	52
Corrigés	53

## Thèmes abordés dans les exercices

- Résolution d'équations, de systèmes d'équations à inconnues réelles
- Résolution de certaines équations fonctionnelles
- Manipulation des fonctions remarquables : paires, impaires, majorées, minorées, bornées, périodiques, croissantes, décroissantes
- Étude de la continuité d'une fonction, de l'existence et de la valeur éventuelle d'une limite
- Existence de solutions d'équations, de majorants de minorants pour une fonction.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Propriétés des fonctions ayant des limites finies ou des limites infinies, pour les opérations algébriques et pour l'ordre usuel
- Propriétés générales des fonctions continues
- Propriétés de limite des fonctions monotones
- Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection monotone, théorème de continuité sur un segment
- Tout intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  rencontre  $\mathbb{Q}$  et rencontre  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- Définition de la continuité uniforme, de la lipschitzianité.

## Les méthodes à retenir

### Pour résoudre une équation fonctionnelle

Raisonner clairement par implication puis réciproque, ou exceptionnellement par équivalences logiques.

Essayer d'appliquer l'équation à des valeurs ou des formes particulières de la (des) variable(s), ou passer à une limite.

Par exemple, si l'équation fait apparaître  $x$  et  $\frac{1}{x}$ , essayer de l'appliquer à  $x$  et à  $\frac{1}{x}$ .

Voir aussi les méthodes du chapitre 5.

→ Exercices 4.1, 4.7, 4.8, 4.17.

**Pour résoudre une équation à une inconnue réelle**

Essayer d'étudier les variations d'une fonction associée à l'équation, par exemple celle obtenue en faisant tout passer dans le premier membre.

→ Exercice 4.2.

**Pour montrer qu'une fonction est périodique**

Revenir à la définition.

→ Exercice 4.3.

**Pour montrer qu'une fonction  $f$  n'a pas de limite (ni finie ni infinie) en un point  $a$**

Chercher deux suites  $(u_n)_n, (v_n)_n$  dans l'ensemble de départ de  $f$ , de limite  $a$ , de façon que les suites  $(f(u_n))_n, (f(v_n))_n$  aient des limites différentes.

Cf. aussi les méthodes du chapitre 3.

→ Exercice 4.5.

**Pour manipuler la fonction partie entière**

Se rapporter à la définition de la partie entière d'un réel :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} E(x) \leqslant x < E(x) + 1 \\ E(x) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ou encore :  $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - 1 < E(x) \leqslant x \\ E(x) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

→ Exercice 4.6.

**Pour montrer qu'une fonction  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en un point  $a$**

Essayer de :

- appliquer les théorèmes généraux sur les limites
- montrer que  $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0$ .

→ Exercice 4.9.

**Pour obtenir une propriété d'une fonction d'une variable réelle, faisant intervenir l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des rationnels**

Utiliser le fait que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \implies (\exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y)),$$

ou, ce qui est équivalent : tout réel est limite d'au moins une suite de rationnels.

→ Exercices 4.10, 4.16.

**Pour montrer l'existence d'une solution d'une équation  $f(x) = 0$ , où  $f$  est à variable réelle et à valeurs réelles**

Essayer de :

- étudier les variations de  $f$ , si  $f(x)$  est donnée par une formule explicite
- appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, si  $f$  est continue sur un intervalle et prend des valeurs  $\geqslant 0$  et des valeurs  $\leqslant 0$ .

→ Exercices 4.11, 4.19, 4.21.

**Pour étudier les points fixes d'une fonction  $f$**

Essayer d'étudier la fonction auxiliaire  $g : x \mapsto f(x) - x$ .

→ Exercices 4.11, 4.12, 4.13.

**Pour montrer qu'une fonction  
 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée**

Essayer de :

- revenir à la définition, c'est-à-dire montrer qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall x \in X, |f(x)| \leq M$$

- appliquer le théorème du Cours, si  $f$  est continue et si  $X$  est un segment de  $\mathbb{R}$ .

→ **Exercice 4.14.**

## Énoncés des exercices

### 4.1 Exemple d'équation fonctionnelle résolue par simple remplacement

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2.$$

### 4.2 Exemple de résolution d'une équation ayant une solution évidente, par utilisation de la stricte monotonie

Résoudre dans  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation :  $x^{\frac{2}{5}} + 2x^{\frac{3}{4}} = 3$ .

### 4.3 Obtention d'une périodicité à partir d'une équation fonctionnelle

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 3 \text{ et } f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Montrer que  $f$  est 4-périodique.

### 4.4 Étude d'applications données par séparation de cas

On note  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

a) Tracer la représentation graphique de  $f$ .

On note  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto g(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > y\}$ .

b) I) Montrer que  $g$  est correctement définie et calculer  $g(y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .

2) Tracer la représentation graphique de  $g$ .

c) Préciser  $g \circ f$  et  $f \circ g$  et tracer leurs représentations graphiques.

### 4.5 Exemple de fonction n'ayant pas de limite en $+\infty$

Montrer que la fonction  $\cos$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

**4.6 Étude de composition pour une application donnée par séparation de cas**

$$\text{On note } f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} x \ln\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démontrer :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(f(x)) = f(x).$$

**4.7 Exemple d'équation fonctionnelle à plusieurs inconnues, résolue par simple remplacement**

Trouver tous les triplets  $(f, g, h)$  d'applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy + 1) = xg(y) + h(x + y).$$

**4.8 Exemple d'inéquation fonctionnelle avec utilisation d'une limite**

Trouver toutes les applications  $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall (x, y) \in ]0; +\infty[^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{x+y}.$$

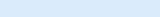
**4.9 Obtention d'une limite par une condition sur la fonction**

Soit  $f : ]0; 1] \rightarrow ]0; +\infty[$  une application telle que :  $f(x) + \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$ .

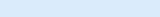
Montrer :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .

**4.10 Continuité et densité**

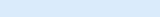
Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\mathbb{R}$  et s'annulant en tout point de  $\mathbb{Q}$ . Montrer :  $f = 0$ .

**4.11 Étude de point fixe pour une application continue de  $[0; 1]$  dans lui-même**

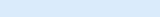
Soit  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  continue. Montrer qu'il existe  $x_0 \in [0; 1]$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

**4.12 Un lien entre les points fixes de  $f$  et ceux de  $f \circ f$** 

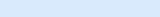
Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose que  $f$  n'a pas de point fixe. Montrer que  $f \circ f$  n'a pas de point fixe.

**4.13 Étude de point fixe pour une application continue et décroissante**

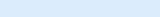
Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et décroissante. Montrer que  $f$  admet un point fixe et un seul.

**4.14 Une propriété des fonctions continues et périodiques**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continue et périodique. Montrer que  $f$  est bornée.

**4.15 Étude de points fixes pour une application telle que  $f \circ f = f$** 

Soit  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  une application continue telle que  $f \circ f = f$ . Montrer que l'ensemble des points fixes de  $f$  est un segment non vide de  $[0; 1]$ .

**4.16 Obtention de la croissance d'une fonction par utilisation de la densité et de la continuité**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On suppose que  $f$  est continue sur  $I$  et que  $f|_{\mathbb{Q} \cap I}$  est croissante. Montrer que  $f$  est croissante.

**4.17****Exemple d'équation fonctionnelle avec utilisation d'une itération et de la continuité en un point**

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues en 0 et telles que :

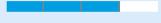
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

**4.18****Exemple d'équation fonctionnelle avec utilisation de la continuité sur un segment**

Soit  $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue telle que :

$$\forall x \in [0 ; 1], \quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3f(x).$$

Montrer :  $f = 0$ .

**4.19****Exemple d'utilisation d'une fonction auxiliaire**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et 1-périodique. Montrer :

$$\forall a \in ]0 ; +\infty[, \exists c \in \mathbb{R}, \quad f(c+a) = f(c).$$

**4.20****Utilisation de l'injectivité dans l'étude de composées de fonctions**

Existe-t-il  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = x^3 ?$$

**4.21****Une propriété de deux fonctions atteignant la même borne supérieure**

Soient  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ ,  $f, g : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que :

$$\sup_{x \in [a;b]} f(x) = \sup_{x \in [a;b]} g(x).$$

Montrer qu'il existe  $c \in [a ; b]$  tel que :  $f(c) = g(c)$ .

**4.22****Une équation fonctionnelle classique : applications continues conservant l'addition**

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

**4.23****Exemple d'application uniformément continue, par utilisation de la définition**

Montrer que l'application  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

# Du mal à démarrer ?

- 4.1** Appliquer l'hypothèse à  $x$  et à  $\frac{1}{x}$ .
- 4.2** Remarquer une solution évidente et utiliser une stricte monotonie.
- 4.3** Calculer  $f(x+2)$ , puis  $f(x+4)$ .
- 4.4** Séparer convenablement en cas, vu la définition de  $f$ .
- 4.5** Raisonner par l'absurde et utiliser des suites.
- 4.6** Remarquer :  $\forall x \in [0; 1], f(x) > \frac{1}{2}$ .
- 4.7** Appliquer l'hypothèse à  $(x, y), (y, x), (0, y), (1, y), \dots$
- 4.8** Pour  $x$  fixé, faire tendre  $y$  vers  $+\infty$ .
- 4.9** Considérer  $\left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right)^2$  et relier cette expression avec  $\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right)^2$ .
- 4.10** Utiliser l'expression séquentielle de la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- 4.11** Considérer l'application auxiliaire  $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto g(x) = f(x) - x$  et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
- 4.12** Considérer l'application auxiliaire  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) - x$ .
- 4.13** Considérer l'application auxiliaire  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) - x$ .
- 4.14** Se ramener à un segment et utiliser un théorème du cours.
- 4.15** Montrer que l'ensemble des points fixes de  $f$  est l'image du segment  $[0; 1]$  par l'application continue  $f$ .
- 4.16** Pour  $(a, b) \in I^2$  fixé tel que  $a < b$ , approcher respectivement  $a$  et  $b$  par des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{Q} \cap I$  telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n$ .
- 4.17** Considérer l'application  $g : x \mapsto f(x) - f(0)$  et obtenir  $g(t) = g\left(\frac{2}{3}t\right)$ , puis réitérer.
- 4.18** Considérer des points en lesquels  $f$  atteint ses bornes.
- 4.19** Considérer, pour  $a \in ]0; +\infty[$  fixé, l'application auxiliaire  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x+a) - f(x)$ .
- 4.20** Montrer que, si  $(f, g)$  existe, alors  $f$  est injective, puis étudier  $f(x)$  pour  $x \in \{-1, 0, 1\}$ .
- 4.21** Considérer des points en lesquels  $f$  et  $g$  atteignent leur borne supérieure, puis étudier  $f - g$ .
- 4.22** Pour  $f$  convenant, montrer  $f(x) = xf(1)$ , successivement pour  $x \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ .
- 4.23** Montrer :  $\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2, |\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \leqslant \sqrt{|x_2 - x_1|}$ , puis revenir à la définition de l'uniforme continuité.

# Corrigés des exercices

**4.1**

I) Soit  $f$  convenant.

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . En appliquant l'hypothèse à  $x$  et à  $\frac{1}{x}$  à la place de  $x$ , on a :

$$\begin{cases} f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 & | -1 \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} & | 3 \end{cases}$$

d'où, en combinant avec les coefficients indiqués, pour faire disparaître  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  :  $8f(x) = \frac{3}{x^2} - x^2$ .

On obtient :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{8} \left( \frac{3}{x^2} - x^2 \right) = \frac{3 - x^4}{8x^2}$ .

2) Réciproquement, considérons l'application

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{3 - x^4}{8x^2}.$$

On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$\begin{aligned} f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{3 - x^4}{8x^2} + 3 \frac{\frac{3}{x^4} - 1}{8} \\ &= \frac{3 - x^4}{8x^2} + 3 \frac{3x^4 - 1}{8x^2} = x^2, \end{aligned}$$

donc  $f$  convient.

On conclut qu'il y a une application et une seule convenant,

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{3 - x^4}{8x^2}.$$

**4.2**

• On remarque que 1 est solution.

• L'application  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^{\frac{2}{5}} + 2x^{\frac{3}{4}}$  est strictement croissante, donc injective. Il en résulte que l'équation proposée admet au plus une solution.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est {1}.

**4.3**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Notons  $y = f(x)$ . On a :

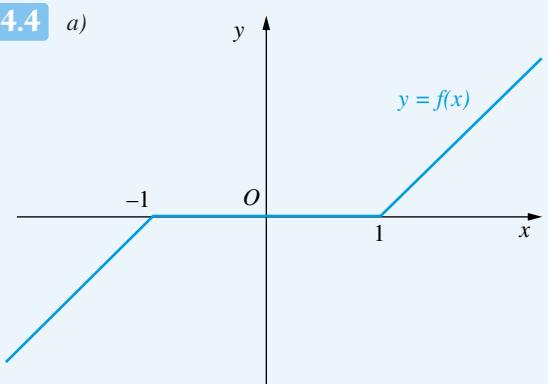
$$\begin{aligned} f(x+2) &= f((x+1)+1) = \frac{f(x+1)-5}{f(x+1)-3} \\ &= \frac{\frac{y-5}{y-3}-5}{\frac{y-5}{y-3}-3} = \frac{-4y+10}{-2y+4} \\ &= \frac{2y-5}{y-2}, \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} f(x+4) &= f((x+2)+2) \\ &= \frac{2f(x+2)-5}{f(x+2)-2} = \frac{2\frac{2y-5}{y-2}-5}{\frac{2y-5}{y-2}-2} \\ &= \frac{-y}{-1} = y = f(x). \end{aligned}$$

On conclut que  $f$  est 4-périodique.

**4.4** a)



b) I) • Soit  $y \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > y\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , non vide car elle contient  $y+2$ , et minorée, par exemple par  $y-2$ . D'après un théorème du cours, il en résulte

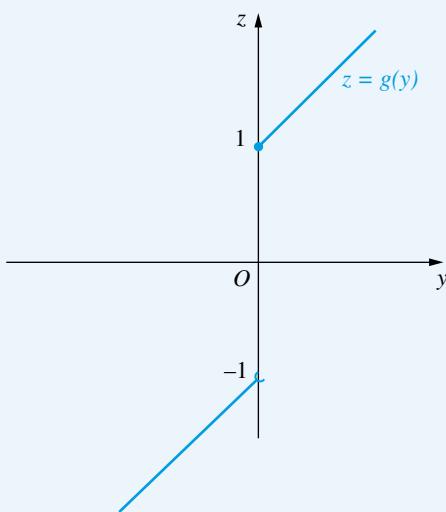
que cet ensemble admet une borne inférieure dans  $\mathbb{R}$ , d'où l'existence de  $g(y)$ .

- Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Pour calculer  $g(y)$ , on sépare en cas selon la position de  $y$  par rapport à 0. On peut, à cet effet, s'aider du schéma du a), en coupant la représentation graphique de  $f$  par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Hypothèse sur $y$	$\{x \in \mathbb{R}; f(x) > y\}$	$g(y)$
$y < 0$	$]y - 1; +\infty[$	$y - 1$
$y = 0$	$]1; +\infty[$	1
$y > 0$	$]y + 1; +\infty[$	$y + 1$

On conclut :  $\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = \begin{cases} y - 1 & \text{si } y < 0 \\ y + 1 & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$

2)



- c) • On calcule, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g \circ f(x)$  en séparant en cas selon la position de  $x$  par rapport à  $-1$  et à  $1$ .

$x$	$f(x)$	$g(f(x))$
$x < -1$	$f(x) = x + 1 < 0$	$g(f(x)) = (x + 1) - 1 = x$
$-1 \leq x \leq 1$	$f(x) = 0$	$g(f(x)) = g(0) = 1$
$1 < x$	$f(x) = x - 1 > 0$	$g(f(x)) = (x - 1) + 1 = x$

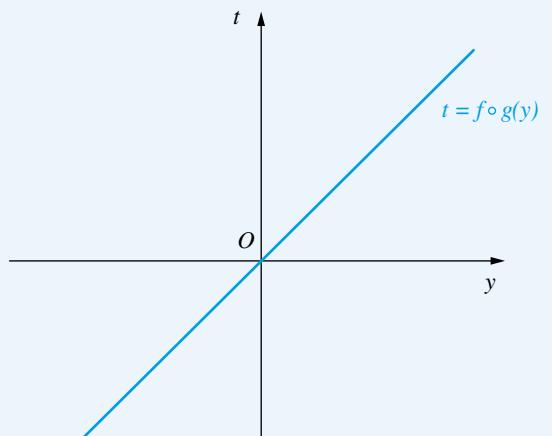
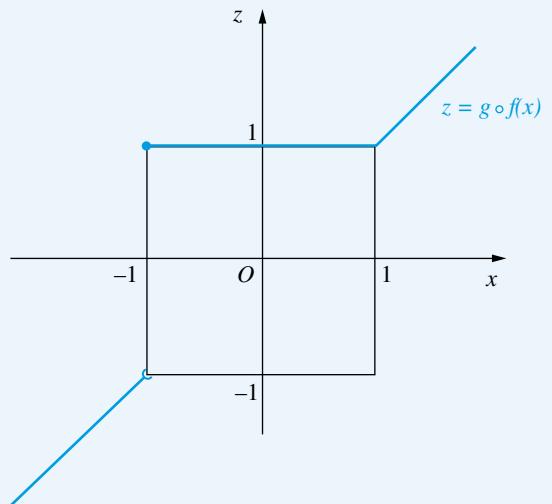
On conclut :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

- On calcule, pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f \circ g(y)$  en séparant en cas selon la position de  $y$  par rapport à 0.

$y$	$g(y)$	$f(g(y))$
$y < 0$	$g(y) = y - 1 < -1$	$f(g(y)) = (y - 1) + 1 = y$
$y = 0$	$g(y) = 1$	$f(g(y)) = 0$
$y > 0$	$g(y) = y + 1 > 1$	$f(g(y)) = (y + 1) - 1 = y$

On conclut :  $\forall y \in \mathbb{R}, f \circ g(y) = y$ , ou encore :  $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .



4.5 Raisonnons par l'absurde. Supposons que la fonction cos admette une limite  $\ell$  en  $+\infty$ . Alors, pour toute suite réelle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ , on aurait :  $\cos x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ .

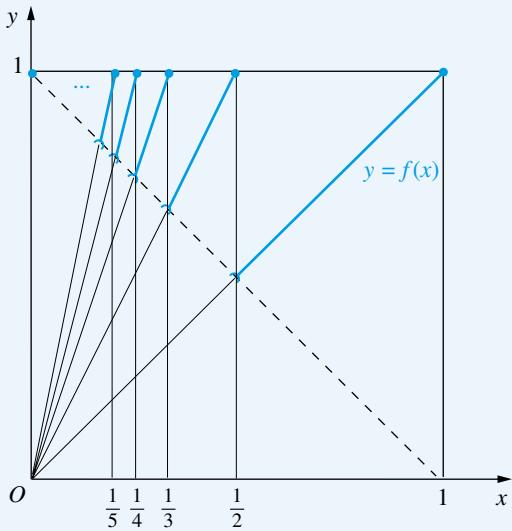
Mais :  $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(2n\pi) = 1$  et  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$ , d'où  $\ell = 0$  et  $\ell = 1$ , contradiction.

On conclut que la fonction cos n'a pas de limite en  $+\infty$ .

Remarque : De la même façon, la fonction sin n'a pas de limite en  $+\infty$ .

4.6 On peut commencer par tracer la représentation graphique de  $f$ .

Soit  $x \in [0; 1]$ . Séparons en cas selon la position de  $x$  par rapport 0 et à  $\frac{1}{2}$ .



- Si  $x = 0$ , alors  $f(x) = f(0) = 1$ ,  
 $f(f(x)) = f(1) = 1 = f(x)$ .
- Si  $\frac{1}{2} < x \leq 1$ , alors :  $1 \leq \frac{1}{x} < 2$ ,  $E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ ,  
 $f(x) = x E\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ,  $f(f(x)) = f(x)$ .
- Si  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ , alors :

$$\begin{cases} f(x) = x E\left(\frac{1}{x}\right) > x\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 1 - x \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ f(x) = x E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \frac{1}{x} = 1, \end{cases}$$

donc  $\frac{1}{2} < f(x) \leq 1$ , puis, d'après ce que l'on a vu dans l'étude du cas  $\frac{1}{2} < x \leq 1$  en remplaçant  $x$  par  $f(x)$ , on a :  
 $f(f(x)) = f(x)$ .

On conclut :  $\forall x \in [0; 1]$ ,  $f(f(x)) = f(x)$ .

#### 4.7 1) Soit $(f, g, h)$ convenant.

- On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , en appliquant l'hypothèse à  $(x, y)$  et à  $(y, x)$  :

$$f(xy + 1) = xg(y) + h(x + y)$$

et

$$(yx + 1) = yg(x) + h(y + x),$$

d'où :  $xg(y) = yg(x)$ .

En particulier, en remplaçant  $x$  par 1 :  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  $g(y) = yg(1)$ .

- On a, en appliquant l'hypothèse à  $(0, y)$  :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(1) = h(y).$$

- On a, en appliquant l'hypothèse à  $(1, y)$  :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(y + 1) = g(y) + h(1 + y) = yg(1) + f(1),$$

et donc, en appliquant cette formule à  $y - 1$  à la place de  $y$  :  
 $\forall y \in \mathbb{R}$ ,

$$f(y) = (y - 1)g(1) + f(1) = yg(1) + f(1) - g(1).$$

En notant  $a = f(1)$  et  $b = g(1)$ , on a donc, pour tout  $y \in \mathbb{R}$  :

$$f(y) = by + a - b, \quad g(y) = by, \quad h(y) = a.$$

2) Réciproquement, soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  les applications définies par les formules ci-dessus. On a alors, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f(xy + 1) &= b(xy + 1) + a - b = bxy + a \\ &= xg(y) + h(x + y), \end{aligned}$$

donc  $(f, g, h)$  convient.

Finalement, l'ensemble des triplets convenants est :

$$\left\{ \left( \begin{array}{l} f : x \in \mathbb{R} \mapsto bx + a - b \in \mathbb{R}, g : x \in \mathbb{R} \mapsto bx \in \mathbb{R}, \\ h : x \in \mathbb{R} \mapsto a \in \mathbb{R} \end{array} \right); (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

#### 4.8 1) Soit $f$ convenant.

Soit  $x \in ]0; +\infty[$  fixé. On a :  $0 \leq |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{x+y}$  et  
 $\frac{1}{x+y} \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc, par théorème d'encadrement :  
 $|f(x) - f(y)| \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} 0$ , et donc  $f(y) \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} f(x)$ .

Ceci montre que  $f$  admet une limite en  $+\infty$  et que cette limite est  $f(x)$ . Par unicité de la limite de  $f$  en  $+\infty$ , il s'ensuit que  $f(x)$  ne dépend pas de  $x$ , et donc  $f$  est constante.

#### 2) Réciproque évidente.

On conclut : les applications convenantes sont les applications constantes.

#### 4.9 On a :

$$\begin{aligned} \left( f(x) - \frac{1}{f(x)} \right)^2 &= \left( f(x) \right)^2 - 2 + \frac{1}{\left( f(x) \right)^2} \\ &= \left( f(x) + \frac{1}{f(x)} \right)^2 - 4 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 2^2 - 4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc :  $f(x) - \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Ensuite :  $f(x) = \frac{1}{2} \left( \left( f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) + \left( f(x) - \frac{1}{f(x)} \right) \right)$   
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(2 + 0) = 1$ .

Ceci montre :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .

Comparer avec l'exercice 3.6 c).

**4.10** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , il existe  $r_n \in \mathbb{Q}$  tel que  $x - \frac{1}{n} < r_n < x + \frac{1}{n}$ . On a donc :  $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ . Comme  $f$  est continue en  $x$ , il en résulte  $f(r_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ . Mais :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(r_n) = 0$ , d'où :  $f(x) = 0$ .

**4.11** Considérons  $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $g$  est continue sur  $x \mapsto f(x) - x$  l'intervalle  $[0; 1]$  et  $g(0) = f(0) \geqslant 0$ ,  $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ , donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $x_0 \in [0; 1]$  tel que  $g(x_0) = 0$ , c'est-à-dire  $f(x_0) = x_0$ .

**4.12** Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = f(x) - x.$$

Par hypothèse :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) \neq 0$ . Comme  $g$  est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  (car  $f$  l'est), il en résulte, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :  $g > 0$  ou  $g < 0$ , c'est-à-dire :

$$\left( \forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0 \right) \quad \text{ou} \quad \left( \forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0 \right).$$

1) Si  $g > 0$ , alors :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) > x$ , donc, en appliquant ceci à  $f(x)$  et à  $x$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = f(f(x)) > f(x) > x,$$

et donc  $f \circ f$  n'a pas de point fixe.

2) Si  $g < 0$ , alors :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) < x$ , donc, en appliquant ceci à  $f(x)$  et à  $x$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = f(f(x)) < f(x) < x,$$

et donc  $f \circ f$  n'a pas de point fixe.

On conclut finalement que  $f \circ f$  n'a pas de point fixe.

**4.13** Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = f(x) - x.$$

- $g$  est strictement décroissante, puisque  $f$  est décroissante et que  $-\text{Id}_{\mathbb{R}}$  est strictement décroissante.

- $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , car  $f$  et  $\text{Id}_{\mathbb{R}}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- Puisque  $f$  est décroissante,  $f$  admet en  $-\infty$  une limite finie ou la limite  $+\infty$ , donc  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ .
- Puisque  $f$  est décroissante,  $f$  admet en  $+\infty$  une limite finie ou la limite  $-\infty$ , donc  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ .

D'après un théorème du cours (théorème de la bijection monotone), on déduit que  $g$  admet un zéro et un seul, donc  $f$  admet un point fixe et un seul.

**4.14** Notons  $T \in \mathbb{R}_+^*$  une période de  $f$ .

Puisque  $f$  est continue sur le segment  $[0; T]$ ,  $f$  est bornée sur ce segment : il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall x \in [0; T], |f(x)| \leqslant M.$$

Puis, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $x - nT \in [0; T]$ , et on a :

$$|f(x)| = |f(x - nT)| \leqslant M.$$

Finalement,  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**4.15** Notons  $F = \{x \in [0; 1]; f(x) = x\}$  l'ensemble des points fixes de  $f$ . Montrons  $F = f([0; 1])$ .

- Soit  $x \in F$ . On a alors  $x = f(x) \in f([0; 1])$ .

Ceci montre :  $F \subset f([0; 1])$ .

• Réciproquement, soit  $x \in f([0; 1])$ . Il existe  $t \in [0; 1]$  tel que  $x = f(t)$ , et on a :  $f(x) = f(f(t)) = f \circ f(t) = f(t) = x$ , donc  $x \in F$ .

Ceci montre :  $f([0; 1]) \subset F$ .

On obtient ainsi :  $F = f([0; 1])$ .

L'ensemble  $F$  est donc l'image du segment  $[0; 1]$  par l'application continue  $f$ , donc (théorème du cours),  $F$  est un segment non vide de  $[0; 1]$ .

**4.16** Soit  $(a, b) \in I^2$  tel que  $a < b$ .

Puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe alors des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{Q} \cap I$  telles que :

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b, \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n.$$

Comme  $f|_{\mathbb{Q} \cap I}$  est croissante, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) \leqslant f(b_n)$ .

Puisque  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ ,  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$  et que  $f$  est continue en  $a$  et en  $b$ , on déduit, par passage à la limite dans une inégalité :

$$f(a) \leqslant f(b).$$

On conclut que  $f$  est croissante.

**4.17** 1) Soit  $f$  convenant.

Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = f(x) - f(0).$$

- On a alors  $g(0) = 0$  et, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{3}\right) &= f\left(\frac{x+y}{3}\right) - f(0) \\ &= \frac{f(x) + f(y)}{2} - f(0) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(f(x) - f(0)\right) + \left(f(y) - f(0)\right)\right) \\ &= \frac{g(x) + g(y)}{2}. \end{aligned}$$

- En remplaçant  $y$  par  $x$ , on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g\left(\frac{2x}{3}\right) = g(x).$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Par récurrence immédiate, on a alors :

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$g(x) = g\left(\frac{2}{3}x\right) = g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 x\right) = \dots = g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right).$$

Comme  $\left(\frac{2}{3}\right)^n x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  et que  $g$  est continue en 0 (puisque  $f$  l'est), on déduit, par passage à la limite lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini :  $g(x) = g(0)$ .

Ceci montre que  $g$  est constante, et donc  $f$  est constante.

2) Réciproquement, il est évident que toute application constante convient.

Finalement, les applications cherchées sont les applications constantes.

**4.18** Puisque  $f$  est continue sur le segment  $[0 ; 1]$ , d'après un théorème du cours,  $f$  est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc  $x_1, x_2 \in [0 ; 1]$  tels que :

$$f(x_1) = \inf_{x \in [0;1]} f(x), \quad f(x_2) = \sup_{x \in [0;1]} f(x).$$

On a :

•  $3f(x_1) = f\left(\frac{x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+1}{2}\right) \geqslant 2 \inf_{x \in [0;1]} f(x) = 2f(x_1)$ ,  
donc :  $f(x_1) \geqslant 0$

•  $3f(x_2) = f\left(\frac{x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+1}{2}\right) \leqslant 2 \sup_{x \in [0;1]} f(x) = 2f(x_2)$ ,  
donc :  $f(x_2) \leqslant 0$ .

On obtient :  $0 \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant 0$ ,

d'où  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  et donc  $f = 0$ .

**4.19** Soit  $a \in ]0 ; +\infty[$  fixé. Considérons l'application  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto g(x) = f(x+a) - f(x)$ .

Puisque  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sur le segment  $[0 ; 1]$ , d'après un théorème du cours, la restriction de  $f$  à  $[0 ; 1]$  est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc  $x_1, x_2 \in [0 ; 1]$  tels que :

$$f(x_1) = \inf_{x \in [0;1]} f(x), \quad f(x_2) = \sup_{x \in [0;1]} f(x).$$

Comme  $f$  est 1-périodique, on a alors (cf. aussi l'exercice 4.12) :

$$f(x_1) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x), \quad f(x_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

On a :  $g(x_1) = f(x_1 + a) - f(x_1) \geqslant 0$ , par définition de  $x_1$ , et  $g(x_2) = f(x_2 + a) - f(x_2) \leqslant 0$ , par définition de  $x_2$ .

Ainsi,  $g$  est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  et  $g(x_1) \geqslant 0, g(x_2) \leqslant 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $g(c) = 0$ , c'est-à-dire :  $f(c+a) = f(c)$ .

#### 4.20 Soit $(f,g)$ convenant.

• Puisque l'application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^3$  est injective,  $g \circ f$  est injective, donc (propriété connue)  $f$  est injective.

• On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(x^3) &= f((g \circ f)(x)) = f \circ g \circ f(x) \\ &= (f \circ g)(f(x)) = (f(x))^2. \end{aligned}$$

On remarque :  $\forall x \in \{-1, 0, 1\}, x^3 = x$ , d'où :

$$\forall x \in \{-1, 0, 1\}, f(x) = f(x^3) = (f(x))^2,$$

et donc :  $\forall x \in \{-1, 0, 1\}, f(x) \in \{0, 1\}$ .

Ceci montre :  $f(\{-1, 0, 1\}) \subset \{0, 1\}$ , ce qui contredit l'injectivité de  $f$ .

Finalement, on conclut qu'il n'existe pas de couple  $(f,g)$  convenant.

**4.21** Puisque  $f$  et  $g$  sont continues sur le segment  $[a ; b]$ , d'après un théorème du cours,  $f$  et  $g$  sont bornées et atteignent leurs bornes. Il existe donc  $x_1, x_2 \in (a ; b]$  tels que, en notant  $M = \sup_{x \in [a;b]} f(x) = \sup_{x \in [a;b]} g(x)$ , on ait :  $f(x_1) = M$  et  $g(x_2) = M$ .

On a alors :

$$\begin{cases} (f-g)(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = M - g(x_1) \geqslant 0 \\ (f-g)(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - M \leqslant 0. \end{cases}$$

Comme  $f - g$  est continue sur l'intervalle  $[a ; b]$ , il en résulte, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe  $c \in [a ; b]$  tel que  $(f-g)(c) = 0$ , donc  $f(c) = g(c)$ .

## 4.22 1) Soit $f$ convenant.

- Une récurrence immédiate montre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x).$$

En particulier :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$ .

- En appliquant l'hypothèse à  $(x, -x)$ , on déduit que  $f$  est impaire.

Il en résulte :  $\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = xf(1)$ .

- Soit  $r \in \mathbb{Q}$ . Il existe  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que :  $r = \frac{p}{q}$ .

On a :  $qf(r) = f(qr) = f(p) = pf(1)$ ,

$$\text{d'où : } f(r) = \frac{p}{q}f(1) = rf(1).$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de rationnels convergeant vers  $x$ . Alors :  $f(r_n) = r_n f(1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} xf(1)$ . D'autre part, puisque  $f$  est continue en  $x$  :  $f(r_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ .

On en déduit :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$ .

- 2) Réciproquement, pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{R}$ , l'application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convient.

$$x \mapsto \lambda x$$

Finalement, les applications cherchées sont les  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**4.23** On a :  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ , comme on le voit en élevant les deux membres au carré.

Soit  $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2$  tel que, par exemple,  $x_1 \leq x_2$ .

On a :  $\sqrt{x_2} = \sqrt{(x_2 - x_1) + x_1} \leq \sqrt{x_2 - x_1} + \sqrt{x_1}$ ,

d'où :  $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2 - x_1}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

On a alors, pour tout  $(x_1, x_2)$  de  $(\mathbb{R}_+)^2$  tel que  $x_1 \leq x_2$  :

$$|x_2 - x_1| \leq \varepsilon^2 \implies$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2 - x_1} \leq \varepsilon.$$

On a ainsi montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2, \\ (\eta = \varepsilon^2)$$

$$\left( |x_2 - x_1| \leq \eta \implies |f(x_2) - f(x_1)| \leq \varepsilon \right),$$

c'est-à-dire :  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

## Plan

Les méthodes à retenir	59
Énoncés des exercices	62
Du mal à démarrer ?	66
Corrigés	68

## Thèmes abordés dans les exercices

- Existence et calcul éventuel d'une dérivée première, d'une dérivée  $n$ -ème
- Existence de zéros d'une équation, par emploi du théorème de Rolle ou du théorème des accroissements finis
- Étude des variations d'une fonction, représentation graphique
- Séparation des zéros d'une fonction, résolution d'équations et d'inéquations
- Résolution de certaines équations fonctionnelles
- Obtention d'inégalité à une ou plusieurs variables
- Convexité.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés algébriques de la dérivable, de la dérivée, de la dérivée  $n$ -ème
- Formule de Leibniz pour la dérivée  $n$ -ème d'un produit
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis
- Lien entre dérivée et sens de variation
- Convexité pour une fonction réelle définie sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  : définition, inégalité de Jensen, lien avec la croissance de  $f'$  si  $f$  est dérivable, lien avec le signe de  $f''$  si  $f$  est deux fois dérivable.

## Les méthodes à retenir

Pour étudier la dérivable d'une fonction en un point, et éventuellement calculer la dérivée en ce point

Essayer d'appliquer les théorèmes sur les opérations sur les fonctions dérivables (théorèmes généraux).

→ Exercices 5.1, 5.2, 5.12

En un point en lequel les théorèmes généraux ne s'appliquent pas :  
– déterminer la limite d'un taux d'accroissement (définition de la dérivée)

→ Exercices 5.3 à 5.5, 5.13, 5.22 b), c)

- ou déterminer la limite de la dérivée à côté (théorème limite de la dérivée). Voir aussi l'exercice 7.24.

→ Exercice 5.5

**Pour décider si une fonction  $f$  est monotone sur un intervalle  $I$ , ou pour étudier les variations de  $f$**

Calculer  $f'$  (si  $f$  est dérivable) et étudier le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in I$ .

→ Exercices 5.1, 5.2, 5.5, 5.16 a)

On pourra être amené à étudier le signe de  $f''(x)$  ou celui d'autres fonctions liées à  $f$ .

→ Exercice 5.12.

**Pour déterminer le nombre et la situation des zéros d'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$**

Étudier les variations de  $f$ , en étudiant le signe de  $f'(x)$ , pour  $x \in I$ , si  $f$  est dérivable sur  $I$ .

→ Exercices 5.2, 5.16 b).

**Pour calculer une dérivée  $n$ -ème**

Essayer de :

- appliquer la formule de Leibniz si  $f$  s'exprime comme produit de deux fonctions du type polynôme de bas degré et exponentielle simple

→ Exercice 5.3 a)

- utiliser une décomposition en éléments simples si  $f(x)$  est une fonction rationnelle de  $x$

→ Exercice 5.3 b)

- linéariser si  $f$  est un produit de cos et sin, ou de ch et sh

→ Exercice 5.3 c).

- conjecturer une formule pour  $f^{(n)}(x)$  et l'établir par une récurrence sur  $n$ .

**Pour montrer qu'une fonction  $f$  est constante sur un intervalle**

Montrer que  $f$  est dérivable et que  $f' = 0$ .

→ Exercice 5.6.

**Pour montrer que la dérivée d'une fonction s'annule en au moins un point**

Essayer de :

- appliquer le théorème de Rolle à  $f$

→ Exercices 5.7, 5.8, 5.26

- appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire

→ Exercices 5.9, 5.23

- appliquer le théorème des accroissements finis à  $f$  ou à une fonction auxiliaire

→ Exercice 5.24.

**Pour montrer  
qu'une dérivée successive  
s'annule en au moins un point**

Appliquer le théorème de Rolle de façon répétée, à la fonction donnée ou à une fonction auxiliaire.

→ Exercices 5.10, 5.11.

**Pour résoudre  
une équation fonctionnelle  
dans laquelle la fonction inconnue  
est supposée dérivable**

Dériver une ou plusieurs fois par rapport à une des variables du contexte

→ Exercices 5.12, 5.14.

**Pour déterminer  
la borne inférieure  
ou la borne supérieure  
(si elles existent)  
d'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$**

Étudier les variations de  $f$ , en étudiant le signe de  $f'(x)$ , pour  $x \in I$ , si  $f$  est dérivable sur  $I$ .

→ Exercices 5.13, 5.15.

**Pour résoudre une équation  
à une inconnue réelle**

Faire tout passer dans le premier membre et étudier les variations de la fonction définie par ce premier membre

→ Exercice 5.17.

Voir aussi les méthodes du chapitre 4.

**Pour établir une inégalité  
à une variable réelle**

Faire tout passer dans le premier membre et étudier les variations de la fonction définie par ce premier membre

→ Exercices 5.18, 5.25, 5.27.

Voir aussi les méthodes du chapitre 4.

**Pour établir une inégalité  
à plusieurs variables réelles**

– Fixer toutes les variables sauf une, et étudier les variations d'une fonction de cette variable

→ Exercice 5.19

– Essayer de montrer qu'il s'agit d'une inégalité de convexité, par exemple l'inégalité de Jensen appliquée à une fonction convexe bien choisie et à certains points et coefficients.

→ Exercices 5.21, 5.29, 5.31.

**Pour montrer q'une fonction  
 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe  
sur un intervalle  $I$**

– Montrer  $f'' \geqslant 0$ , si  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$

→ Exercice 5.21 a).

– Montrer que  $f'$  est croissante, si  $f$  est dérivable sur  $I$

– Revenir à la définition de la convexité.

# Énoncés des exercices

## 5.1 Étude des variations d'une fonction

Soit  $(a,b) \in ]0; +\infty[^2$  tel que  $a < b$ . Montrer que l'application

$$f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$$

est strictement croissante.

## 5.2 Nombre et situations des zéros d'une fonction par étude des variations de cette fonction

Combien le polynôme  $P = X^5 - 80X + 7$  a-t-il de zéros réels ?

## 5.3 Exemples de calculs de dérivées $n$ -èmes

Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $n$ -ème des fonctions suivantes :

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$

b)  $f : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \cos^2 x \sin x.$

## 5.4 Exemple d'étude de dérivableité

Étudier la continuité, la dérivableité, et la continuité de la dérivée pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

## 5.5 Étude et représentation graphique d'une fonction explicitée

Étude et représentation graphique de la fonction  $f$  d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}}.$$

On pourra remarquer :  $(x - \sqrt{1 - x^2})^2 = 1 - 2x\sqrt{1 - x^2}$ .

## 5.6 Utilisation de la dérivation pour déduire qu'une fonction est constante

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que, pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x \neq y$  :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\frac{3}{2}} |\ln|x - y||.$$

Montrer que  $f$  est constante.

## 5.7 Exemple d'utilisation du théorème de Rolle

Soit  $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , s'annulant en  $-1, 0, 1$ . On note :

$$g : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = 2x^4 + x + f(x).$$

Montrer qu'il existe  $c \in ]-1; 1[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

**5.8****Exemple d'utilisation du théorème de Rolle appliqué à une fonction auxiliaire**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ . Montrer que l'équation  $\sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = 0$  admet au moins une solution  $x \in ]0 ; 1[$ .

**5.9****Exemple d'utilisation du théorème de Rolle appliqué à une fonction auxiliaire**

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 < a < b$ ,  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a ; b]$ , dérivable sur  $]a ; b[$ , telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a ; b[$  tel que :

$$f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}.$$

**5.10****Exemple d'utilisation répétée du théorème de Rolle**

Soit  $f : [-1 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $[-1 ; 1]$ , deux fois dérivable sur  $]-1 ; 1[$ , telle que :  $f(-1) = -1$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .

Montrer :  $\exists c \in ]-1 ; 1[, f''(c) = 0$ .

**5.11****Exemple d'utilisation répétée du théorème de Rolle**

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ ,  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $[a ; b]$ , deux fois dérivable sur  $]a ; b[$ , telle que :  $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$ .

Montrer :  $\exists c \in ]a ; b[, f''(c) = 0$ .

**5.12****Exemple de résolution d'une équation fonctionnelle par dérivation**

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

**5.13****Calcul d'une borne inférieure par étude des variations d'une fonction**

Calculer  $\inf_{x \in \mathbb{R}} \left( \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 16} \right)$ .

**5.14****Exemple d'équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue est supposée dérivable**

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y)).$$

**5.15****Meilleur endroit pour transformer un essai au rugby**

Au rugby, où placer le ballon, sur une ligne perpendiculaire à la ligne d'essai et à gauche des deux poteaux ou à droite des deux poteaux, pour avoir un angle maximal (dans le plan) ?

**5.16****Exemple de résolution d'une équation à une inconnue réelle, par étude des variations d'une fonction**

a) Montrer que, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 < a < b$ , l'application  $f : x \mapsto b^x - a^x$  est strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

b) Application : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sqrt{8 + \sqrt{50}}^x + \sqrt{8 - \sqrt{50}}^x = 4^x$ .

**5.17**

**Exemple de résolution d'une équation à une inconnue réelle, par étude des variations d'une fonction**

Résoudre dans  $\mathbb{R}_+$  :  $17 + 2^x = (x + 2)^2$ .

**5.18**

**Exemple d'inégalité à une variable réelle**

Montrer :  $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + (x - 1)^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + x^2} \geqslant 2$ .

**5.19**

**Exemple d'inégalité à plusieurs variables réelles**

Soient  $a, b, \alpha, \beta \in ]0; +\infty[$ . Montrer :  $\alpha a^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b^{\frac{1}{\beta}} \geqslant (\alpha + \beta)(ab)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ , et étudier le cas d'égalité.

Par exemple :  $\forall (a,b) \in ]0; +\infty[^2, 2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$ .

**5.20**

**Exemple d'utilisation de la convexité sans intervention de la dérivation**

Soit  $f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  convexe. Montrer que, s'il existe  $(a,b) \in ]0; +\infty[^2$  tel que  $a < b$  et  $f(a) < f(b)$ , alors :  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

**5.21**

**Comparaison de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique de  $n$  réels  $> 0$**

a) Vérifier que l'application  $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = -\ln x$  est convexe.

b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Autrement dit, la moyenne géométrique  $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$  est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique  $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ .

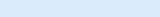
**5.22**

**Étude de la dérivabilité de  $|f|$**

Soient  $a \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $a$ .

a) Montrer que, si  $f(a) \neq 0$ , alors  $|f|$  est dérivable en  $a$  et :  $|f'(a)| = \operatorname{sgn}(f(a))f'(a)$ , où la fonction signe  $\operatorname{sgn}$  est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$



b) Montrer que, si  $f(a) = 0$  et  $f'(a) \neq 0$ , alors  $|f|$  est dérivable à gauche en  $a$ , dérivable à droite en  $a$ , et non dérivable en  $a$ .

c) Montrer que, si  $f(a) = 0$  et  $f'(a) = 0$ , alors  $|f|$  est dérivable en  $a$  et  $|f|'(a) = 0$ .

**5.23**

**Exemple d'utilisation du théorème de Rolle**

Soient  $n \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  deux à deux distincts.

On note :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{b_k x}.$$

Montrer que  $f$  s'annule en au plus  $n$  réels.

**5.24****Exemple d'utilisation du théorème des accroissements finis**

Soient  $a \in ]0; +\infty[$ ,  $f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $f(0) = 0$ . Montrer :

$$\exists c \in ]0; a], \quad f'(c) = \frac{2f(a) + af'(a)}{3a}.$$

**5.25****Un encadrement de  $\sin x$  et de  $\cos x$  entre des polynômes**

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n, S_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  les applications définies, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , par :

$$\begin{cases} C_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{cases}$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (-1)^{n+1}(\cos x - C_n(x)) \geqslant 0 \text{ et } (-1)^{n+1}(\sin x - S_n(x)) \geqslant 0.$$

Par exemple, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{3} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

**5.26****Si un polynôme  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , alors  $P'$  l'est aussi**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\deg(P) \geqslant 2$ .

- a) Montrer que, si les zéros de  $P$  sont tous réels et simples, alors il en est de même pour  $P'$ .
- b) Montrer que, si  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , alors  $P'$  est aussi scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**5.27****Exemple d'inégalité à une variable réelle**

Montrer :  $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$ .

**5.28****Exemple d'inégalité à plusieurs variables réelles**

Montrer, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 < x < y \leqslant \frac{\pi}{2}$  :  $\frac{x}{y} < \frac{\sin x}{\sin y} < \frac{\pi}{2} \frac{x}{y}$ .

**5.29****Obtention d'une inégalité à une variable réelle par utilisation d'une convexité**

Montrer :  $\forall x \in ]0; +\infty[, \quad 2^x + 2^{x^3} \geqslant 2^{x^2+1}$ .

**5.30****Exemple d'utilisation de la convexité avec intervention de la dérivation**

Soit  $f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et convexe. Montrer que l'application

$g : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto g(x) = f(x) - xf'(x)$  est décroissante.

**5.31****Exemple d'inégalité de convexité**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n \in ]0; +\infty[$  tels que  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ . Montrer :

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2 + 1)^2}{n}.$$



### 5.32 Théorème de Darboux

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$ . Montrer que  $f'(I)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

À cet effet, pour  $(a,b) \in I^2$  tel que  $a < b$  et  $f'(a) < f'(b)$  et pour  $c \in ]f'(a); f'(b)[$ , on pourra considérer l'application  $g : x \mapsto f(x) - cx$ .

## Du mal à démarrer ?

**5.1** Calculer  $f'(x)$  et étudier le signe de  $f'(x)$ .

**5.2** Étudier les variations de  $P$ .

**5.3** a) Utiliser la formule de Leibniz.

b) Décomposer en éléments simples.

c) Linéariser.

**5.4** Montrer que  $f$  est dérivable en 0 par étude du taux d'accroissement, et montrer que  $f'$  n'est pas continue en 0.

**5.5** À l'aide de l'indication fournie dans l'énoncé, obtenir  $\text{Déf}(f) = [-1; 1]$  et  $f(x) = |x - \sqrt{1-x^2}|$ . Étudier le signe de  $x - \sqrt{1-x^2}$ .

**5.6** Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, étudier, lorsque  $y$  variable tend vers  $x$ , le taux d'accroissement de  $f$  entre  $x$  et  $y$ .

**5.7** Calculer  $g(-1), g(0), g(1)$  et utiliser le théorème de Rolle.

**5.8** Appliquer le théorème de Rolle à la fonction  $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x^k$ .

**5.9** Utiliser le théorème de Rolle appliqué à la fonction auxiliaire  $g : x \mapsto x^\lambda f(x)$ .

**5.10** Considérer l'application auxiliaire  $g : x \mapsto f(x) - x$  et utiliser le théorème de Rolle de manière répétée.

**5.11** Utiliser le théorème de Rolle de manière répétée.

**5.12** Pour  $y$  fixé, dériver par rapport à  $x$ .

**5.13** Étudier les variations de la fonction intervenant dans l'énoncé.

**5.14** Soit  $f$  convenant. Déduire :  $\forall y \in \mathbb{R}, f(f(y)) = f(y)$ , puis une équation fonctionnelle plus simple que celle de l'énoncé et dériver par rapport à  $y$ , pour  $x$  fixé.

**5.15** Choisir un repère orthonormé adapté à la question, choisir un paramètre pour situer le ballon, et étudier les variations d'une fonction d'une variable réelle.

**5.16** a) Mettre  $a^x$  en facteur dans  $f(x)$ .

b) Étudier la monotonie stricte de  $x \mapsto 4^x - \sqrt{8 + \sqrt{50}}^x$  et de  $x \mapsto -\sqrt{8 - \sqrt{50}}^x$ .

**5.17** Étudier les variations de  $f : x \mapsto 17 + 2^x - (x+2)^2$ .

**5.18** Étudier les variations de la fonction donnée par le premier membre de l'inégalité de l'énoncé.

**5.19** Simplifier un peu l'étude en notant  $u = \ln a, v = \ln b$ . Pour  $u \in \mathbb{R}$  fixé, étudier les variations d'une fonction de la variable  $v$ .

**5.20** Comparer les taux d'accroissement de  $f$  entre  $a$  et  $b$  et entre  $a$  et  $x$ , pour  $x \in ]b; +\infty[$  variable.

**5.21** Appliquer l'inégalité de Jensen.

**5.22** a) Remarquer que, si  $f(a) \neq 0$ ,  $f$  est de signe fixe au voisinage de  $a$ .

b) et c) Étudier le taux d'accroissement de  $|f|$  entre  $a$  et  $x$ , pour  $x$  variable tendant vers  $a$ .

**5.23** Récurrence sur  $n$ .

**5.24** À l'aide du théorème des accroissements finis, remplacer  $f(a)$  par  $af'(b)$  dans la fraction intervenant dans l'énoncé.

**5.25** Récurrence sur  $n$ , avec étude de variations de fonctions.

**5.26** a) Utiliser le théorème de Rolle.

b) Reprendre l'étude du a) en tenant compte des ordres de multiplicité des racines.

**5.27** Étudier les variations de  $x \mapsto \frac{\sin^3 x}{\cos x} - x^3$ .

**5.28** Étudier les variations de  $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ .

**5.29** Pour  $x \in ]0; +\infty[$ , fixé, montrer que l'application  $f : t \in ]0; +\infty[ \mapsto 2^{xt}$  est convexe.

**5.30** Pour  $(x_1, x_2) \in [0; +\infty[^2$  tel que  $x_1 < x_2$ , comparer  $f'(x_1), f'(x_2)$  et le taux d'accroissement de  $f$  entre  $x_1$  et  $x_2$ .

**5.31** Utiliser la convexité de la fonction  $x \mapsto \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$  sur  $]0; +\infty[$  et l'inégalité de Jensen.

**5.32** Utiliser un point en lequel  $g$  atteint sa borne inférieure.

# Corrigés des exercices

**5.1**

L'application  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax} \ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx} \ln(1+ax)}{\left(\ln(1+bx)\right)^2} \\ &= \frac{N(x)}{(1+ax)(1+bx)\left(\ln(1+bx)\right)^2}, \end{aligned}$$

en notant

$$N : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto N(x) = a(1+bx) \ln(1+bx) - b(1+ax) \ln(1+ax),$$

et l'étude du signe de  $f'(x)$  se ramène à l'étude du signe de  $N(x)$ .

L'application  $N$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} N'(x) &= (ab \ln(1+bx) + ab) - (ba \ln(1+ax) + ba) \\ &= ab(\ln(1+bx) - \ln(1+ax)) > 0, \end{aligned}$$

donc  $N$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

De plus :  $N(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 0$ .

Il en résulte :  $\forall x \in ]0; +\infty[, N(x) > 0$ .

On a donc :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) > 0,$$

et on conclut que  $f$  est strictement croissante.

**5.2**

L'application polynomiale  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$x \mapsto P(x) = x^5 - 80x + 7$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} P'(x) &= 5x^4 - 80 = 5(x^4 - 16) \\ &= 5(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 5(x-2)(x+2)(x^2 + 4), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit le signe de  $P'(x)$  selon la position de  $x$  par rapport à  $-2$  et à  $2$ .

De plus :

$$P(-2) = -32 + 160 + 7 > 0 \text{ et } P(2) = 32 - 160 + 7 < 0.$$

On dresse le tableau des variations de  $P$  :

$x$	- $\infty$	- 2	- 2	+ $\infty$
$P'(x)$	+	0	-	0
$P(x)$	- $\infty$	↗ > 0	↘ < 0	↗ + $\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de  $P$  par intervalles, on conclut que  $P$  admet exactement trois zéros réels.

De plus, ces zéros  $a, b, c$  vérifient :  $a < -2 < b < 2 < c$ .

**5.3**

a) En notant  $u : x \mapsto x^2 - x + 2$  et  $v : x \mapsto e^x$ , on a  $f = uv$ . Ainsi, par produit, l'application  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et, d'après la formule de Leibniz, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x).$$

Mais, comme  $u$  est un polynôme de degré 2, on a  $u^{(k)} = 0$  pour tout  $k \geq 3$ , d'où, si  $n \geq 2$  :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x).$$

De plus,  $v : x \mapsto e^x$  a pour dérivée elle-même, d'où, si  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} u(x)e^x + \binom{n}{1} u'(x)e^x + \binom{n}{2} u''(x)e^x \\ &= \left( (x^2 - x + 2) + n(2x - 1) + \frac{n(n-1)}{2} 2 \right) e^x \\ &= \left( x^2 + (2n-1)x + (n^2 - 2n + 2) \right) e^x. \end{aligned}$$

Enfin, il est immédiat que cette dernière formule est aussi vraie pour  $n = 0$  et pour  $n = 1$ .

b) On factorise le dénominateur de  $f(x)$  :

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= x^2(x-1) - (x-1) \\ &= (x^2 - 1)(x-1) = (x-1)^2(x+1). \end{aligned}$$

Par décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ , il existe  $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$  tel que :

$$\frac{1}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}.$$

En multipliant par  $(X-1)^2$  puis en remplaçant X par 1, on obtient :  $a = \frac{1}{2}$ .

En multipliant par  $X+1$  puis en remplaçant X par  $-1$ , on obtient :  $c = \frac{1}{4}$ .

En multipliant par  $X$  puis en faisant tendre X vers l'infini, on a :  $b+c=0$ , d'où  $b=-c=-\frac{1}{4}$ .

Ainsi, on obtient la décomposition en éléments simples de  $f(x)$  :

$$\forall x \in ]-1; 1[, f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+1},$$

que l'on peut d'ailleurs contrôler par réduction au même dénominateur.

Notons  $u, v, w : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  les applications définies, pour tout  $x \in ]-1; 1[$ , par :

$$u(x) = \frac{1}{x+1}, \quad v(x) = \frac{1}{x-1}, \quad w(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Ces applications  $u, v, w$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $] -1; 1[$  et  $w = -v'$ .

On a, par une récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in ]-1; 1[$  :

$$u^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}, \quad v^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},$$

$$w^{(n)}(x) = -v^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-1)^{n+2}}.$$

On conclut :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2} w^{(n)}(x) - \frac{1}{4} v^{(n)}(x) + \frac{1}{4} u^{(n)}(x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-1)^{n+2}} - \frac{1}{4} \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{4} \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

c) Par linéarisation, on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x \sin x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \sin x \\ &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \sin x \\ &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{4} (\sin 3x - \sin x) \\ &= \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin 3x. \end{aligned}$$

Il en résulte, par addition, que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4} \sin \left( x + n \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} 3^n \sin \left( 3x + n \frac{\pi}{2} \right),$$

Ou encore, en séparant en cas selon la parité de  $n$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} f^{(2p)}(x) = \frac{1}{4} (-1)^p \sin x + \frac{1}{4} (-1)^p 3^{2p} \sin 3x \\ f^{(2p+1)}(x) = \frac{1}{4} (-1)^p \cos x + \frac{1}{4} (-1)^p 3^{2p+1} \cos 3x. \end{cases}$$

**5.4** 1) D'une part,  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}^*$  par les théorèmes généraux.

D'autre part :  $|f(x)| \leq x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0)$ ,

donc  $f$  est continue en 0.

Ainsi,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2) D'après les théorèmes généraux,  $f$  est dérivable en tout point de  $\mathbb{R}^*$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

$$\text{D'autre part : } \frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

donc  $f$  est dérivable en 0, et  $f'(0) = 0$ .

Ainsi,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3) D'après les théorèmes généraux et le résultat précédent,  $f'$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}^*$ . D'autre part, puisque  $2x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et que  $\cos \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en 0,  $f'$  n'a pas de limite en 0, et donc  $f'$  n'est pas continue en 0.

Ainsi,  $f'$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}^*$ , et discontinue en 0.

**5.5** 1) Existence et expression de  $f$

• On a, pour tout  $x \in [-1; 1]$  :

$$\begin{aligned} (x - \sqrt{1-x^2})^2 &= x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + (1-x^2) \\ &= 1 - 2x\sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

donc :

$$f(x) = |x - \sqrt{1-x^2}|.$$

D'autre part, si  $x \in \mathbb{R} - [-1; 1]$ , alors  $\sqrt{1-x^2}$  n'existe pas, donc  $f(x)$  n'existe pas.

Ainsi :  $\text{Déf}(f) = [-1; 1]$  et :

$$\forall x \in [-1; 1], f(x) = |x - \sqrt{1-x^2}|.$$

- Pour supprimer l'intervention de la valeur absolue, étudions le signe de  $x - \sqrt{1-x^2}$ .

Soit  $x \in [-1; 1]$ .

\* Si  $x \in [-1; 0]$ , alors  $x - \sqrt{1-x^2} \leq 0$ , donc  $f(x) = \sqrt{1-x^2} - x$ .

\* Si  $x \in [0; 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} x - \sqrt{1-x^2} \geq 0 &\iff x \geq \sqrt{1-x^2} \iff x^2 \geq 1-x^2 \\ &\iff 2x^2 \geq 1 \iff x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

On conclut à l'expression de  $f$ , par séparation en cas :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} - x & \text{si } -1 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x - \sqrt{1-x^2} & \text{si } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

## 2) Continuité

D'après la formule donnant  $f$  dans l'énoncé, et par théorèmes généraux,  $f$  est continue sur  $[-1; 1]$ .

## 3) Dérivabilité, dérivée

D'après les formules obtenues ci-dessus,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[-1; \frac{1}{\sqrt{2}}]$  et sur  $[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1]$  et :

$$\begin{cases} \forall x \in [-1; \frac{1}{\sqrt{2}}], f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \\ \forall x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1], f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 > 0. \end{cases}$$

On détermine le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in [-1; \frac{1}{\sqrt{2}}]$  :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 > 0 \iff x + \sqrt{1-x^2} < 0 \\ &\iff \sqrt{1-x^2} < -x \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ 1-x^2 < x^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 > \frac{1}{2} \end{cases} \iff x \in [-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}]. \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1]$  :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{x - \sqrt{1-x^2} - 1}{x-1} = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty, \end{aligned}$$

donc  $f$  n'est pas dérivable en 1, mais la représentation graphique  $C$  de  $f$  admet en  $(1, 1)$  une demi-tangente parallèle à  $y'$ .

De même,  $f$  n'est pas dérivable en  $-1$  et  $C$  admet en  $(-1, 1)$  une demi-tangente parallèle à  $y'$ .

On a :

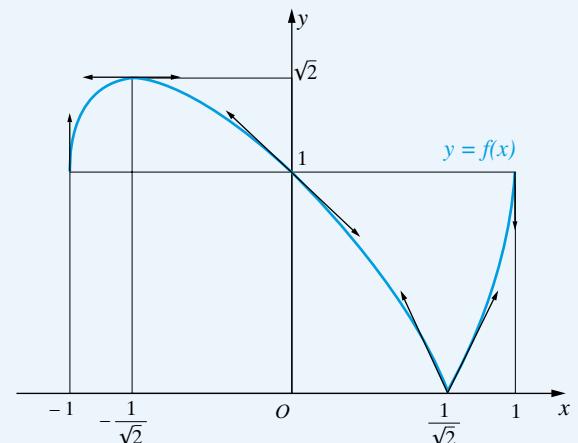
$$f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow (-\frac{1}{\sqrt{2}})^-]{} -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} - 1 = -2,$$

$$f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}})^+]{} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} + 1 = 2,$$

donc, d'après le théorème limite de la dérivée,  $f$  admet en  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  une dérivée à gauche égale à  $-2$  et une dérivée à droite égale à  $2$ , donc  $f$  n'est pas dérivable en  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . La représentation graphique  $C$  de  $f$  admet en ce point deux demi-tangentes.

On dresse le tableau des variations de  $f$  :

$x$	$-1$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$-1$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$	1	$\sqrt{2}$	1	0	1



Remarque :

$C$  est formée de morceaux d'ellipses. En effet :

$$\begin{aligned} y &= |x - \sqrt{1-x^2}| \\ &\implies (y = x - \sqrt{1-x^2} \text{ ou } y = -x + \sqrt{1-x^2}) \\ &\iff (x - y = \sqrt{1-x^2} \text{ ou } x + y = \sqrt{1-x^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow ((x-y)^2 = 1-x^2 \text{ ou } (x+y)^2 = 1-x^2) \\ &\iff (2x^2 - 2xy + y^2 = 1 \text{ ou } 2x^2 + 2xy + y^2 = 1). \end{aligned}$$

**5.6** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a, pour tout  $y \in \mathbb{R} - \{x\}$  :

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq |x - y|^{\frac{1}{2}} \left| \ln|x - y| \right| \xrightarrow[y \rightarrow x]{} 0,$$

par prépondérance de la puissance sur le logarithme.

Ceci montre que  $f$  est dérivable en  $x$  et que  $f'(x) = 0$ .

Puisque  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  et que  $f' = 0$ , on conclut que  $f$  est constante.

**5.7** On a :

$$\begin{aligned} g(-1) &= 1 + f(-1) = 1, \quad g(0) = f(0) = 0, \\ g(1) &= 3 + f(1) = 3. \end{aligned}$$

Puisque  $g$  est continue sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  et que  $g(0) = 0$  et  $g(1) = 3$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $a \in ]0 ; 1[$  tel que  $g(a) = 1$ .

Comme  $g$  est continue sur  $[-1 ; a]$ , dérivable sur  $]-1 ; a[$  et que  $g(-1) = g(a) (= 1)$ , d'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]-1 ; a[ \subset ]-1 ; 1[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

**5.8** L'application  $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$  est continue sur  $[0 ; 1]$ , dérivable sur  $]0 ; 1[$  et  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = \sum_{k=1}^n a_k = 0$ . D'après le théorème de Rolle, il existe donc  $c \in ]0 ; 1[$  tel que  $f'(c) = 0$ , c'est-à-dire que l'équation  $\sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = 0$  admet au moins une solution dans  $]0 ; 1[$ .

**5.9** Considérons l'application  $g : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto g(x) = x^\lambda f(x)$ .

L'application  $g$  est continue sur  $[a ; b]$ , dérivable sur  $]a ; b[$  et  $g(a) = g(b) = 0$ . D'après le théorème de Rolle, il existe donc  $c \in ]a ; b[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

On a, pour tout  $x \in ]a ; b[$  :

$$g'(x) = \lambda x^{\lambda-1} f(x) + x^\lambda f'(x) = x^{\lambda-1} (\lambda f(x) + x f'(x)).$$

D'où :  $\lambda f(c) + c f'(c) = 0$ , c'est-à-dire :  $f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}$ .

**5.10** Considérons l'application

$$g : [-1 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = f(x) - x.$$

On a :  $g(-1) = g(0) = g(1) = 0$ .

Puisque  $g$  est continue sur  $[-1 ; 0]$  et sur  $[0 ; 1]$ , dérivable sur  $]-1 ; 0[$  et sur  $]0 ; 1[$  et que  $g(-1) = g(0)$  et  $g(0) = g(1)$ , d'après le théorème de Rolle, il existe  $u \in ]-1 ; 0[$  et  $v \in ]0 ; 1[$  tels que :  $g'(u) = 0$  et  $g'(v) = 0$ .

Puisque  $g'$  est continue sur  $[u ; v]$ , dérivable sur  $]u ; v[$  et que  $g'(u) = g'(v)$ , d'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]u ; v[ \subset ]0 ; 1[$  tel que  $g''(c) = 0$ .

Mais, pour tout  $x \in ]-1 ; 1[$  :

$$g(x) = f(x) - x, \quad g'(x) = f'(x) - 1, \quad g''(x) = f''(x).$$

On conclut :  $\exists c \in ]-1 ; 1[, \quad f''(c) = 0$ .

**5.11** Puisque  $f$  est continue sur  $[a ; b]$ , dérivable sur  $]a ; b[$  et que  $f(a) = f(b) (= 0)$ , d'après le théorème de Rolle, il existe  $d \in ]a ; b[$  tel que  $f'(d) = 0$ .

Puisque  $f'$  est continue sur  $[a ; d]$ , dérivable sur  $]a ; d[$  et que  $f'(a) = f'(d) (= 0)$ , d'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a ; d[ \subset ]a ; b[$  tel que  $f''(c) = 0$ .

**5.12** 1) Soit  $f$  convenant. En dérivant par rapport à  $x$ , on déduit :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(x + y) = f'(x)$ , et donc  $f'$  est constante. Il existe donc  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ .

2) Réciproquement, pour tout  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable et satisfait

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$$

si et seulement si  $b = 0$ .

Finalement, l'ensemble des solutions est  $\{\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto ax} \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}\}$ .

**5.13** 1<sup>ère</sup> méthode : utilisation des variations d'une fonction

Notons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 16}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2x + 10} + \sqrt{x^2 - 16x + 80}.$$

L'application  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} + \frac{2x-16}{2\sqrt{x^2-16x+80}} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}} + \frac{x-8}{\sqrt{x^2-16x+80}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} \\
&\quad + (x-1)\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 10)^{-\frac{3}{2}}(2x-2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16x + 80}} \\
&\quad + (x-8)\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 - 16x + 80)^{-\frac{3}{2}}(2x-16) \\
&= \frac{x^2 - 2x + 10 - (x-1)^2}{(x^2 - 2x + 10)^{3/2}} \\
&\quad + \frac{x^2 - 16x + 80 - (x-8)^2}{(x^2 - 16x + 80)^{3/2}} \\
&= \frac{9}{(x^2 - 2x + 10)^{3/2}} + \frac{16}{(x^2 - 16x + 80)^{3/2}} > 0.
\end{aligned}$$

Il en résulte que  $f'$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,  $f'$  est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  et :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\longrightarrow} -2 < 0 \text{ et } f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 2 > 0.$$

D'après le théorème de la bijection monotone,  $f'$  s'annule en un réel et un seul.

On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{8-x}{\sqrt{x^2 - 16x + 80}} \\
&\implies (x-1)^2(x^2 - 16x + 80) = (8-x)^2(x^2 - 2x + 10) \\
&\iff (x-1)^2((x-8)^2 + 16) = (x-8)^2((x-1)^2 + 9) \\
&\iff 16(x-1)^2 = 9(x-8)^2 \\
&\iff 4(x-1) = 3(x-8) \text{ ou } 4(x-1) = -3(x-8) \\
&\iff x = -20 \text{ ou } x = 4.
\end{aligned}$$

Pour  $x = -20$ , les deux membres de l'équation du départ de ce calcul sont de signes stricts contraires, donc  $f'(-20) \neq 0$ . Et :

$$f'(4) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 9}} + \frac{-4}{\sqrt{4^2 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

On en déduit le tableau des variations de  $f$  :

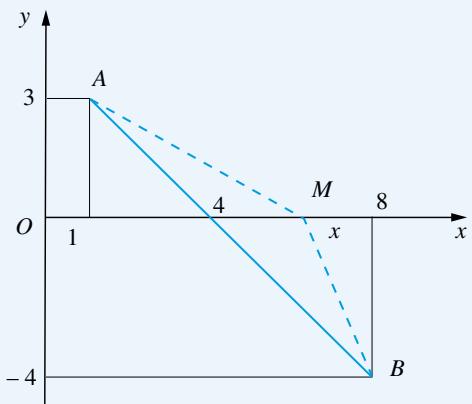
$x$	$-\infty$	4	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

On conclut :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(4) = \sqrt{3^2 + 9} + \sqrt{4^2 + 16} = 7\sqrt{2}.$$

2<sup>eme</sup> méthode : intervention de la géométrie

La question revient, dans  $\mathbb{R}^2$  usuel, à la recherche de  $\inf_{x \in \mathbb{R}} (AM + BM)$ , où  $A(1, 3)$ ,  $B(8, -4)$ ,  $M(x, 0)$ .



Il est alors clair, par l'inégalité triangulaire, que la borne inférieure cherchée existe et qu'elle est égale à  $AB$ , lorsque  $M \in [AB]$ , c'est-à-dire pour  $x = 4$ . Et :  $AB = 7\sqrt{2}$ .

#### 5.14 I) Soit $f$ convenant.

• En remplaçant  $x$  par 0, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = f(f(y)),$$

puis, en reportant dans l'énoncé :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(y).$$

• Puisque  $f$  est dérivable, on a alors, en dérivant par rapport à  $y$ , pour  $x$  fixé :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x^4 + y) = f'(y).$$

Déduisons-en que  $f'$  est constante.

En remplaçant  $y$  par 0, on a :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x^4) = f'(0)$ , donc :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t) = f'(0)$ , et, en remplaçant  $y$  par  $-x^4$ , on obtient :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(0) = f'(-x^4)$ , donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_-, f'(0) = f'(t).$$

Il en résulte que  $f'$  est constante.

• Il existe donc  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ .

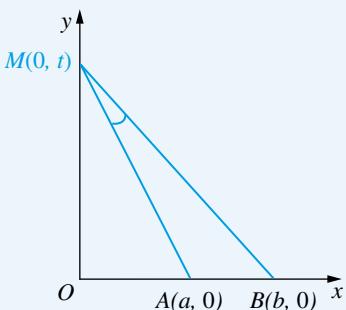
2) Réciproquement, soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = ax + b$ .

On a :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x^4 + y) &= x^3 f(x) + f(f(y)) \\ \iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a(x^4 + y) + b &= x^3(ax + b) + a(ay + b) + b \\ \iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a - a^2)y - bx^3 - ab &= 0 \\ \iff \begin{cases} a - a^2 = 0 \\ b = 0 \\ ab = 0 \end{cases} &\iff \left( \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \right). \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est  $\{0, \text{Id}_{\mathbb{R}}\}$ , c'est-à-dire qu'il y a deux solutions et deux seulement, qui sont l'application nulle et l'identité.

5.15



On peut choisir un repère orthonormé  $(O ; i, j)$  de façon que les poteaux correspondent aux points  $A(a, 0)$ ,  $B(b, 0)$ , où  $0 < a < b$ , et le point cherché  $M$  est sur l'axe  $Oy$ ,  $M(0, t)$ ,  $t > 0$ .

On a :

$$\begin{aligned} \left( \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \right)^2 &= \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM})^2}{\|\overrightarrow{AM}\|^2 \|\overrightarrow{BM}\|^2} \\ &= \frac{\left( \begin{pmatrix} -a \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ t \end{pmatrix} \right)^2}{\left\| \begin{pmatrix} -a \\ t \end{pmatrix} \right\|^2 \left\| \begin{pmatrix} -b \\ t \end{pmatrix} \right\|^2} \\ &= \frac{(ab + t^2)^2}{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}. \end{aligned}$$

Notons :

$$f : [0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto f(u) = \frac{(ab + u)^2}{(a^2 + u)(b^2 + u)}.$$

L'application  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout  $u \in [0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{2(ab+u)(a^2+u)(b^2+u) - (ab+u)^2(b^2+u+a^2+u)}{(a^2+u)^2(b^2+u)^2} \\ &= \frac{ab+u}{(a^2+u)^2(b^2+u)^2} P(u), \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} P(u) &= 2(a^2+u)(b^2+u) - (ab+u)(a^2+b^2+2u) \\ &= (a^2+b^2-2ab)u + ab(2ab-a^2-b^2) \\ &= (a-b)^2(u-ab). \end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations de  $f$ :

$u$	0	$ab$	$+\infty$
$f(u)$	-	0	+
$f(u)$			

Ainsi,  $f$  atteint sa borne inférieure en  $u = ab$ , donc  $\left( \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \right)^2$  atteint sa borne inférieure en  $t = \sqrt{ab}$ . Comme l'application  $\cos^2$  est décroissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ , on conclut que l'angle  $AMB$  est maximal pour  $t = \sqrt{ab}$ .

5.16 a) Le calcul du signe de  $f'(x)$  ne semble pas commode.

$$\text{On a : } \forall x \in [0; +\infty[, \quad f(x) = a^x \left( \left( \frac{b}{a} \right)^x - 1 \right).$$

Comme  $a > 1$ , l'application  $x \mapsto a^x$  est strictement croissante et  $> 0$ . Comme  $\frac{b}{a} > 1$ , l'application  $x \mapsto \left( \frac{b}{a} \right)^x - 1$  est strictement croissante et  $> 0$ . D'après le cours, par produit,  $f$  est donc strictement croissante.

b) On a, pour tout  $x < 0$  :

$$\sqrt{8 + \sqrt{50}}^x > 0, \quad \sqrt{8 - \sqrt{50}}^x > 1, \quad 4^x < 1,$$

car  $0 < 8 - \sqrt{50} < 1$  et donc  $x$  n'est pas solution de l'équation proposée.

On peut donc supposer  $x \geqslant 0$ .

Notons  $u, v : [0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$  les applications définies, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , par :

$$u(x) = 4^x - \sqrt{8 + \sqrt{50}}^x \quad \text{et} \quad v(x) = -\sqrt{8 - \sqrt{50}}^x.$$

On a :  $\sqrt{8 + \sqrt{50}} \simeq 3,882\dots$  donc  $1 < \sqrt{8 + \sqrt{50}} < 4$ . D'après a), il en résulte que  $u$  est strictement croissante.

D'autre part, comme  $0 < \sqrt{8 - \sqrt{50}} < 1$ ,  $v$  est strictement croissante.

Donc  $\varphi = u + v : x \mapsto 4^x - \left( \sqrt{8 + \sqrt{50}}^x + \sqrt{8 - \sqrt{50}}^x \right)$  est strictement croissante.

Il en résulte que l'équation proposée, équivalente à  $\varphi(x) = 0$ , admet au plus une solution.

D'autre part, on remarque :

$$\varphi(2) = 4^2 - (8 + \sqrt{50}) + 8 - \sqrt{50} = 0.$$

On conclut que l'équation proposée admet une solution et une seule, qui est  $x = 2$ .

### 5.17 L'application $f : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto f(x) = 17 + 2^x - (x+2)^2 = 2^x - x^2 - 4x + 13$$

est de classe  $C^\infty$  sur  $[0 ; +\infty[$  et, pour tout  $x \in [0 ; +\infty[$  :

$$f'(x) = (\ln 2)2^x - 2x - 4, \quad f''(x) = (\ln 2)^2 2^x - 2.$$

On a :

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 2^x = \frac{2}{(\ln 2)^2} \iff x \ln 2 = \ln\left(\frac{2}{(\ln 2)^2}\right) \\ &\iff x = \frac{\ln 2 - 2 \ln \ln 2}{\ln 2}. \end{aligned}$$

$$\text{Notons } \alpha = \frac{\ln 2 - 2 \ln \ln 2}{\ln 2} \simeq 2,057\dots$$

$$\text{On a : } f'(0) = \ln 2 - 4 < 0 \text{ et } f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Dressons le tableau des variations de  $f$  :

$x$	0	$\alpha$	$\rho$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	
$f'(x)$	<0	-	-	$+\infty$
$f(x)$				

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie sur  $[\alpha ; +\infty[$ , il existe  $\beta \in ]\alpha ; +\infty[$  unique tel que  $f'(\beta) = 0$ .

On en déduit que  $f$  admet au plus deux zéros réels.

$$\text{On remarque : } f(3) = 2^3 - 3^2 - 4 \cdot 3 + 13 = 0$$

$$\text{et } f(5) = 2^5 - 5^2 - 4 \cdot 5 + 13 = 0,$$

et on conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est  $\{3, 5\}$ .

### 5.18 Notons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + x^2}.$$

L'application  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x + 2(x-1)}{2\sqrt{x^2 + (x-1)^2}} + \frac{2(x+1) + 2x}{2\sqrt{(x+1)^2 + x^2}} \\ &= \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + (x-1)^2}} + \frac{2x + 1}{\sqrt{(x+1)^2 + x^2}}. \end{aligned}$$

Si  $x \geqslant \frac{1}{2}$ , alors  $2x - 1 \geqslant 0$  et  $2x + 1 \geqslant 0$ , donc  $f'(x) \geqslant 0$ .

Supposons  $x \leqslant \frac{1}{2}$ . Alors :

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff \frac{2x + 1}{\sqrt{(x+1)^2 + x^2}} \geqslant \frac{1 - 2x}{\sqrt{x^2 + (x-1)^2}} \\ &\iff_{1-2x \geqslant 0} (2x+1)^2(x^2 + (x-1)^2) \\ &\geqslant (1-2x)^2((x+1)^2 + x^2) \\ &\iff (4x^2 + 4x + 1)(2x^2 - 2x + 1) \\ &\geqslant (4x^2 - 4x + 1)(2x^2 + 2x + 1) \\ &\iff ((4x^2 + 1) + 4x)((2x^2 + 1) - 2x) \\ &\geqslant ((4x^2 + 1) - 4x)((2x^2 + 1) + 2x) \\ &\iff -2 \cdot 2x(4x^2 + 1) + 2 \cdot 4x(2x^2 + 1) \geqslant 0 \\ &\iff x(2(2x^2 + 1) - (4x^2 + 1)) \geqslant 0 \\ &\iff x \geqslant 0. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$			2	

Comme  $f(0) = 2$ , on conclut :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 2$ , ce qui est l'inégalité voulue.

### 5.19 I) Inégalité

En notant  $u = \ln a, v = \ln b$ , l'inégalité, notée (1), de l'énoncé se re-écrit :

$$(1) \iff \alpha e^{\frac{u}{\alpha}} + \beta e^{\frac{v}{\beta}} \geqslant (\alpha + \beta) e^{\frac{u+v}{\alpha+\beta}}.$$

Soit  $u \in \mathbb{R}$  fixé. Considérons l'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto f(v) = \alpha e^{\frac{u}{\alpha}} + \beta e^{\frac{v}{\beta}} - (\alpha + \beta) e^{\frac{u+v}{\alpha+\beta}}.$$

L'application  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $v \in \mathbb{R}$  :

$$f'(v) = e^{\frac{v}{\beta}} - e^{\frac{u+v}{\alpha+\beta}}.$$

$$\text{On a donc : } f'(v) > 0 \iff \frac{v}{\beta} > \frac{u+v}{\alpha+\beta} \iff \alpha v > \beta u.$$

On en déduit le tableau des variations de  $f$  :

$v$	$-\infty$	$\frac{\beta u}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(v)$	-	0	+
$f(v)$			

De plus :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\beta u}{\alpha}\right) &= \alpha e^{\frac{u}{\alpha}} + \beta e^{\frac{u}{\alpha}} - (\alpha + \beta)e^{\frac{u+\beta u}{\alpha+\beta}} \\ &= \alpha e^{\frac{u}{\alpha}} + \beta e^{\frac{u}{\alpha}} - (\alpha + \beta)e^{\frac{u}{\alpha}} = 0. \end{aligned}$$

On conclut :  $\forall v \in \mathbb{R}, f(v) \geq 0$ , d'où l'inégalité demandée.

### 2) Étude du cas d'égalité

D'après le tableau précédent, il y a égalité dans l'inégalité (1) si et seulement si  $v = \frac{\beta u}{\alpha}$ . Et :

$$\begin{aligned} v = \frac{\beta u}{\alpha} &\iff \ln b = \frac{\beta}{\alpha} \ln a \\ &\iff \alpha \ln b = \beta \ln a \\ &\iff b^\alpha = a^\beta. \end{aligned}$$

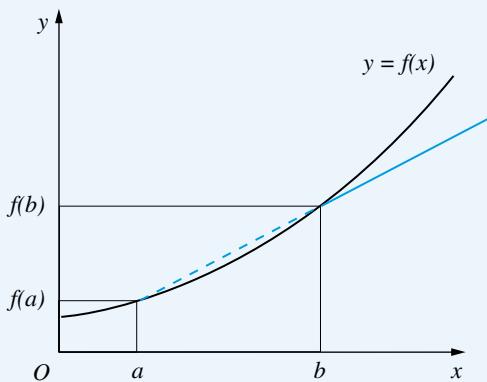
Ainsi, il y a égalité dans (1) si et seulement si  $b^\alpha = a^\beta$ .

### 3) Exemple

En prenant  $\alpha = 2, \beta = 3$ , on obtient :

$$\forall (a, b) \in ]0; +\infty[^2, 2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{3}} \geq 5(ab)^{\frac{1}{2}}.$$

**5.20**



Soit  $x \in ]b; +\infty[$ .

Puisque  $f$  est convexe, par croissance des pentes, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$\text{d'où : } f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

$$\text{Comme } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0, \text{ on a :}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

et donc, par minoration :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**5.21**

a) L'application  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$  et :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ , donc  $f$  est convexe.

b) Puisque  $f$  est convexe, on a, d'après l'inégalité de Jensen appliquée aux coefficients  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ , qui sont tous  $\geq 0$  et de somme 1 :

$$(1) \quad f\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(x_k).$$

Et :

$$\begin{aligned} (1) &\iff -\ln\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x_k\right) \leq -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln x_k \\ &\iff \ln\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x_k\right) \geq \ln\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\implies \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

par croissance de l'exponentielle, et on conclut à l'inégalité demandée.

**5.22**

a) • Si  $f(a) > 0$ , alors, comme  $f$  est continue en  $a$  (car  $f$  est dérivable en  $a$ ), il existe  $\eta > 0$  tel que :  $\forall x \in [a - \eta; a + \eta], f(x) \geq 0$ . On a alors :  $\forall x \in [a - \eta; a + \eta], |f|(x) = f(x)$ , c'est-à-dire que  $|f|$  coïncide avec  $f$  au voisinage de  $a$ . Puisque  $f$  est dérivable en  $a$ ,  $|f'|$  l'est alors aussi, et  $|f'|'(a) = f'(a)$ .

• Si  $f(a) < 0$ , de même, comme  $|f|$  coïncide avec  $-f$  au voisinage de  $a$ , on conclut que  $|f|$  est dérivable en  $a$  et que  $|f'|'(a) = -f'(a)$ .

On peut regrouper ces deux résultats en utilisant la fonction signe :

$$|f'|'(a) = \operatorname{sgn}(f(a))f'(a).$$

b) Supposons  $f'(a) > 0$ , le cas  $f'(a) < 0$  étant analogue, ou si l'on préfère, s'y ramenant en remplaçant  $f$  par  $-f$ .

Comme  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in [a - \eta; a + \eta], \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0,$$

d'où, puisque  $f(a) = 0$  :  $\begin{cases} \forall x \in [a - \eta; a], f(x) \leq 0 \\ \forall x \in [a; a + \eta], f(x) \geq 0. \end{cases}$

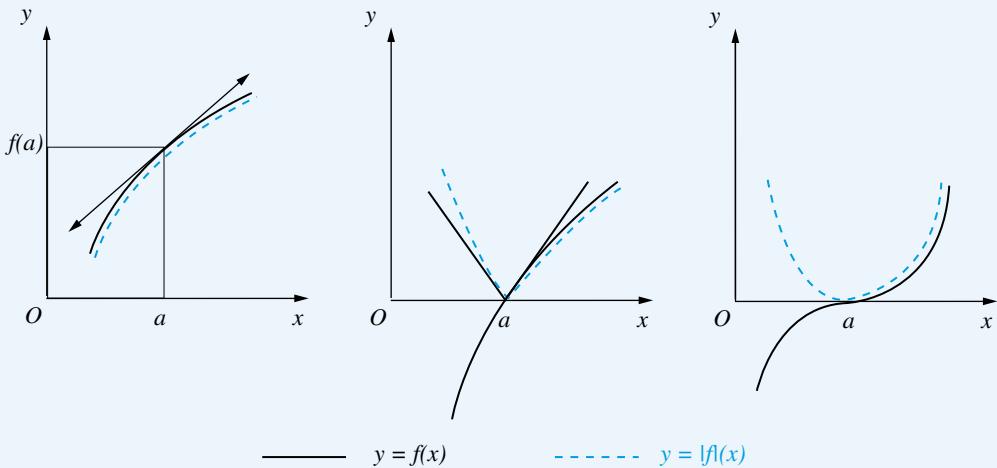
Autrement dit,  $|f|$  coïncide avec  $-f$  au voisinage à gauche de  $a$  et  $|f|$  coïncide avec  $f$  au voisinage à droite de  $a$ .

On a alors :

$$\frac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^-} -f'(a)$$

et

$$\frac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f'(a),$$



donc  $|f|$  est dérivable à gauche en  $a$ , dérivable à droite en  $a$ , et non dérivable en  $a$  car  $f'(a) \neq -f'(a)$ , puisque  $f'(a) \neq 0$ .

c) On a, pour  $x \in \mathbb{R} - \{a\}$ , en utilisant l'inégalité triangulaire renversée :

$$\begin{aligned} \left| \frac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} \right| &= \frac{| |f(x)| - |f(a)| |}{|x - a|} \\ &\leqslant \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} = \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \xrightarrow{x \rightarrow a} |f'(a)| = 0, \end{aligned}$$

donc  $\frac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ , et on conclut que  $|f|$  est dérivable en  $a$  et que  $|f'|(a) = 0$ .

### 5.23 Effectuons une récurrence sur $n$ .

• Pour  $n = 0$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto a_0 e^{b_0 x}$  ne s'annule en aucun point, car  $a_0 \neq 0$ , donc la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

• Supposons la propriété vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$ .

Soient  $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} - \{(0, \dots, 0)\}$ ,  $b_0, \dots, b_{n+1} \in \mathbb{R}$  deux à deux distincts.

Notons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k e^{b_k x}$ .

Considérons l'application  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto g(x) = e^{-b_{n+1} x} f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k e^{(b_k - b_{n+1})x}.$$

On a, en isolant le terme d'indice  $n+1$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{(b_k - b_{n+1})x} + a_{n+1}.$$

L'application  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \sum_{k=0}^n a_k (b_k - b_{n+1}) e^{(b_k - b_{n+1})x}.$$

Si  $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$ , alors  $a_{n+1} \neq 0$  et

$f : x \mapsto a_{n+1} e^{b_{n+1} x}$  ne s'annule en aucun point, donc s'annule en au plus  $n+1$  points.

Supposons donc  $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ .

Alors, comme  $b_0, \dots, b_{n+1}$  sont deux à deux distincts, les réels  $a_k(b_k - b_{n+1})$ , pour  $0 \leq k \leq n$ , sont non tous nuls, et les réels  $b_k - b_{n+1}$ , pour  $0 \leq k \leq n$ , sont deux à deux distincts. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux familles  $(a_k(b_k - b_{n+1}))_{0 \leq k \leq n}$  et  $(b_k - b_{n+1})_{0 \leq k \leq n}$  à la place de  $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$  et  $(b_k)_{0 \leq k \leq n}$  respectivement, ce qui montre que  $g'$  admet au plus  $n$  zéros dans  $\mathbb{R}$ .

D'après le théorème de Rolle, appliqué à  $g$ , il en résulte que  $g$  admet au plus  $n+1$  zéros dans  $\mathbb{R}$ , et finalement,  $f$  admet au plus  $n+1$  zéros dans  $\mathbb{R}$ .

On a ainsi établi le résultat demandé, par récurrence sur  $n$ .

**5.24** Puisque  $f$  est continue sur  $[0 ; a]$  et dérivable sur  $]0 ; a[$ , d'après le théorème des accroissements finis, il existe  $b \in ]0 ; a[$  tel que :  $f(a) - f(0) = af'(b)$ , c'est-à-dire, puisque  $f(0) = 0$  :  $f(a) = af'(b)$ .

On a alors :

$$\frac{2f(a) + af'(a)}{3a} = \frac{2af'(b) + af'(a)}{3a} = \frac{2}{3}f'(b) + \frac{1}{3}f'(a).$$

Comme  $\frac{1}{3} \in [0 ; 1]$  et que  $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ , le réel  $\frac{2}{3}f'(b) + \frac{1}{3}f'(a)$  est entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$ . Enfin, puisque  $f'$  est continue sur l'intervalle  $[b ; a]$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f'$  atteint toute valeur entre  $f'(b)$  et  $f'(a)$ , donc en particulier,  $f'$  atteint  $\frac{2}{3}f'(b) + \frac{1}{3}f'(a)$ .

Ainsi, il existe  $c \in [b ; a] \subset ]0 ; a[$  tel que :

$$f'(c) = \frac{2}{3}f'(b) + \frac{1}{3}f'(a) = \frac{2f(a) + af'(a)}{3a}.$$

**5.25** Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_n, \psi_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  les applications définies, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , par :

$$\varphi_n(x) = (-1)^{n+1}(\cos x - C_n(x))$$

et

$$\psi_n(x) = (-1)^{n+1}(\sin x - S_n(x)).$$

Montrons, par récurrence sur  $n$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n \geq 0$  et  $\psi_n \geq 0$ .

• Pour  $n = 0$ , on tombe sur des inégalités connues :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} \varphi_0(x) = -(\cos x - 1) = 1 - \cos x \geq 0 \\ \psi_0(x) = -(\sin x - x) = x - \sin x \geq 0. \end{cases}$$

• Supposons, pour un  $n \in \mathbb{N}$  :  $\varphi_n \geq 0$  et  $\psi_n \geq 0$ .

On remarque :

$$C'_{n+1} = -S_n \quad \text{et} \quad S'_{n+1} = C_{n+1}.$$

En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned} C'_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k 2kx^{2k-1}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &\stackrel{p=k-1}{=} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{p+1} x^{2p+1}}{(2p+1)!} = -S_n(x) \\ S'_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = C_{n+1}(x). \end{aligned}$$

On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned} \varphi'_{n+1}(x) &= (-1)^{n+2}(-\sin x - C'_{n+1}(x)) \\ &= (-1)^n(-\sin x + S_n(x)) \\ &= (-1)^{n+1}(\sin x - S_n(x)) = \psi_n(x) \\ \psi'_{n+1}(x) &= (-1)^{n+2}(\cos x - S'_{n+1}(x)) \\ &= (-1)^{n+2}(\cos x - C_{n+1}(x)) \\ &= \varphi_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Comme  $\varphi'_{n+1} = \psi_n \geq 0$ ,  $\varphi_{n+1}$  est croissante. De plus,  $\varphi_{n+1}(0) = 0$ , donc  $\varphi_{n+1} \geq 0$ .

Alors,  $\psi'_{n+1} = \varphi_{n+1} \geq 0$ , donc  $\psi_{n+1}$  est croissante. De plus,  $\psi_{n+1}(0) = 0$ , donc  $\psi_{n+1} \geq 0$ .

Ceci montre que la propriété est vraie pour  $n+1$ .

Finalement, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par récurrence sur  $n$ .

**5.26** a) Par hypothèse, il existe  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que :

$$x_1 < \dots < x_n \quad \text{et} \quad P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k).$$

Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n-1\}$ ,  $P$  est continu sur  $[x_k; x_{k+1}]$ , dérivable sur  $]x_k; x_{k+1}[$ , et  $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$ , donc (théorème de Rolle) il existe  $y_k \in ]x_k; x_{k+1}[$  tel que  $P'(y_k) = 0$ .

Puisque  $x_1 < y_1 < x_2 < \dots < y_{n-1} < x_n$ ,  $y_1, \dots, y_{n-1}$  sont deux à deux distincts. Comme  $P'$  est de degré  $n-1$ , il en résulte que les zéros de  $P'$  sont tous réels et simples (ce sont  $y_1, \dots, y_{n-1}$ ).

b) Par hypothèse, il existe  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ ,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{N}^*)^N$  tels que :

$$x_1 < \dots < x_N \quad \text{et} \quad P = \lambda \prod_{k=1}^N (X - x_k)^{\alpha_k}.$$

Comme en a), il existe  $y_1, \dots, y_{N-1} \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall k \in \{1, \dots, N-1\}, \quad (y_k \in ]x_k; x_{k+1}[ \quad \text{et} \quad P'(y_k) = 0).$$

D'autre part, pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, N\}$  tel que  $\alpha_k \geq 2$ ,  $x_k$  est zéro de  $P'$  d'ordre  $\alpha_k - 1$ .

On met ainsi en évidence des zéros de  $P'$ , deux à deux distincts :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1, \dots, y_{N-1} \\ x_1 \text{ (d'ordre } \alpha_1 - 1), \dots, x_N \text{ (d'ordre } \alpha_N - 1) \end{array} \right|,$$

avec une convention évidente si  $\alpha_k = 1$ .

Comme

$$\begin{aligned} (N-1) + \sum_{k=1}^N (\alpha_k - 1) &= \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \right) - 1 \\ &= \deg(P) - 1 = \deg(P'), \end{aligned}$$

on conclut que  $P'$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ .

Plus précisément, en notant  $n = \sum_{k=1}^N \alpha_k$  :

$$P' = n \lambda \prod_{k=1}^{N-1} (X - y_k) \prod_{k=1}^N (X - x_k)^{\alpha_k - 1}.$$

**5.27** Considérons l'application  $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^3 x}{\cos x} - x^3 = \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{\cos x} - x^3 \\ &= \tan x - \sin x \cos x - x^3 = \tan x - \frac{1}{2} \sin 2x - x^3. \end{aligned}$$

L'application  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et, pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$f'(x) = (1 + \tan^2 x) - \cos 2x - 3x^2,$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \tan x (1 + \tan^2 x) + 2 \sin 2x - 6x \\ &= 2 \tan x + 2 \tan^3 x + 2 \sin 2x - 6x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (2 + 6 \tan^2 x)(1 + \tan^2 x) + 4 \cos 2x - 6 \\ &= 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x + 4 \cos 2x - 4 \\ &= 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x - 8 \sin^2 x \\ &= 8(\tan^2 x - \sin^2 x) + 6 \tan^4 x. \end{aligned}$$

On sait :  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 < \sin x < x < \tan x$ ,

d'où :  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f'''(x) > 0$ .

On remonte alors les tableaux de variations :

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'''(x)$	0	+
$f''(x)$	0	+
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	+

On obtient :  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f(x) > 0$ , et on conclut :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x.$$

## 5.28 Considérons l'application

$$f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} < \frac{\sin x}{\sin y} < \frac{\pi}{2} \frac{x}{y} \iff & \begin{cases} \frac{\sin y}{y} < \frac{\sin x}{x} \\ \frac{\sin y}{y} > \frac{2}{\pi} \frac{\sin x}{x} \end{cases} \\ \iff & \frac{2}{\pi} f(x) < f(y) < f(x). \end{aligned}$$

Étudions les variations de  $f$ .

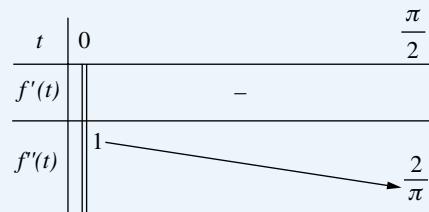
L'application  $f$  est dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}.$$

L'application  $A : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t \cos t - \sin t$

est dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et, pour tout  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $A'(t) = -t \sin t \leqslant 0$  (et  $< 0$  si  $t \neq 0$ ), donc  $A$  est strictement décroissante. Comme  $A(0) = 0$ , il en résulte  $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], A(t) < 0$ , puis :  $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f(t) < 0$ , et donc  $f$  est strictement décroissante.

De plus,  $f(t) = \frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 1$  et  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ .



Puisque  $f$  est strictement décroissante, on a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 < x < y \leqslant \frac{\pi}{2}$  :

$$1 > f(x) > f(y) \geqslant \frac{2}{\pi}.$$

D'une part, on obtient :  $f(y) < f(x)$ .

D'autre part :  $\frac{f(y)}{f(x)} > f(y)$  car  $0 < f(x) < 1$ ,

$$\text{donc } \frac{f(y)}{f(x)} > \frac{2}{\pi}.$$

D'où les inégalités demandées.

## 5.29 Pour $x \in ]0; +\infty[$ fixé, considérons l'application

$$f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = 2^{x^t} = e^{x^t \ln 2} = e^{e^{t \ln x} \ln 2}.$$

L'application  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$  et, pour tout  $t \in ]0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2^{x^t} \ln 2 \ln x e^{t \ln x}, \\ f''(t) &= 2^{x^t} \ln 2 \ln x \left( \ln 2 \ln x (e^{t \ln x})^2 + \ln x e^{t \ln x} \right) \\ &= 2^{x^t} \ln 2 (\ln x)^2 e^{t \ln x} ((\ln 2) e^{t \ln x} + 1) > 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $f$  est convexe.

On a donc, par définition de la convexité de  $f$  :

$$\forall a, b \in ]0; +\infty[, \forall \lambda \in [0; 1],$$

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

En particulier, pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$ , on a :

$$\lambda a + (1 - \lambda)b = \frac{a+b}{2} = 2,$$

$$\text{donc : } 2^{x^2} \leq \frac{1}{2}(2^x + 2^{x^3}), \text{ c'est-à-dire : } 2^x + 2^{x^3} \geq 2^{x^2+1}.$$

**5.30** Soit  $(x_1, x_2) \in [0; +\infty[^2$  fixé tel que  $x_1 < x_2$ .

Puisque  $f$  est convexe et dérivable, on a :

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

D'où, en particulier, par l'inégalité de droite :

$$f(x_2) - f(x_1) \leq (x_2 - x_1)f'(x_2),$$

$$\text{donc : } f(x_2) - x_2f'(x_2) \leq f(x_1) - x_1f'(x_2).$$

De plus, comme  $f'(x_1) \leq f'(x_2)$  et  $-x_1 \leq 0$ , on a :

$$-x_1f'(x_2) \leq -x_1f'(x_1).$$

$$\text{On obtient : } f(x_2) - x_2f'(x_2) \leq f(x_1) - x_1f'(x_1),$$

c'est-à-dire  $g(x_2) \leq g(x_1)$ .

On conclut que  $g$  est décroissante.

*Remarque :* Si on suppose de plus  $f$  deux fois dérivable sur  $[0; +\infty[$ , on peut donner une résolution plus courte. En effet,  $g$  est alors dérivable sur  $[0; +\infty[$  et :

$$\forall x \in [0; +\infty[,$$

$$g'(x) = f'(x) - f'(x) - xf''(x) = -xf''(x) \leq 0,$$

donc  $g$  est décroissante.

**5.31** L'application  $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

est deux fois dérivable et, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}, \quad f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} > 0,$$

donc  $f$  est convexe.

On a alors, d'après l'inégalité de Jensen :

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i),$$

c'est-à-dire, puisque  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$  :

$$\left(\frac{1}{n} + n\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2,$$

$$\text{et on conclut : } \sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geq n \left(\frac{1}{n} + n\right)^2 = \frac{(n^2 + 1)^2}{n}.$$

**5.32** Soit  $(a, b) \in I^2$  tel que, par exemple  $a < b$  et  $f'(a) < f'(b)$ .

Soit  $c \in ]f'(a); f'(b)[$ .

Considérons l'application

$$g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = f(x) - cx.$$

L'application  $g$  est dérivable sur  $[a; b]$  (car  $f$  est dérivable sur  $I$ ), donc  $g$  est continue sur le segment  $[a; b]$ . D'après un théorème du cours,  $g$  admet donc une borne inférieure et atteint celle-ci : il existe  $d \in [a; b]$  tel que  $g(d) = \inf_{x \in [a; b]} g(x)$ .

Comme  $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{} g'(a) = f'(a) - c < 0$ , on a,  
au voisinage de  $a^+$  :  $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$ , donc  $g(x) < g(a)$ .

Ceci montre que  $g$  n'atteint pas sa borne inférieure en  $a$ , donc  $d \neq a$ .

Comme  $\frac{g(x) - g(b)}{x - b} \xrightarrow[x \rightarrow b^-]{} g'(b) = f'(b) - c > 0$ , on a,  
au voisinage de  $b^-$  :  $\frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0$ , donc  $g(x) < g(b)$ .

Ceci montre que  $g$  n'atteint pas sa borne inférieure en  $b$ , donc  $d \neq b$ .

On a donc :  $d \in ]a; b[$ .

Puisque  $g$  atteint sa borne inférieure en  $d$ , que  $d \in ]a; b[$  et que  $g$  est dérivable en  $d$ , on a :  $g'(d) = 0$ , c'est-à-dire  $f'(d) = c$ .

Ceci montre :

$$\forall c \in ]f'(a); f'(b)[, \exists d \in ]a; b[ \subset I, f'(d) = c,$$

donc  $]f'(a); f'(b)[ \subset f'(I)$ .

Autrement dit, dès que  $f'(I)$  contient deux points, il contient le segment qui les joint, et on conclut que  $f'(I)$  est un intervalle.

## Plan

Les méthodes à retenir	79
Énoncés des exercices	81
Du mal à démarrer ?	85
Corrigés	87

## Thèmes abordés dans les exercices

- Obtention d'inégalités portant sur des intégrales
- Calcul simples d'intégrales
- Détermination de certaines limites liées à des intégrales
- Recherche de limites d'intégrales
- Étude et représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale, le paramètre aux bornes
- Résolution de certaines équations fonctionnelles.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Propriétés algébriques et propriétés relatives à l'ordre usuel, pour les intégrales, en particulier l'étude du cas où une intégrale est nulle, et l'inégalité de Cauchy et Schwarz
- Les méthodes usuelles pour transformer l'écriture d'une intégrale : intégration par parties, changement de variable, relation de Chasles
- Les propriétés de l'application  $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor et Lagrange.

## Les méthodes à retenir

Pour obtenir une inégalité portant sur une ou des intégrales

Essayer d'appliquer les théorèmes du Cours portant sur les inégalités sur des intégrales.

En particulier, si des intégrales de carrés ou de produits interviennent, essayer d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

→ Exercices 6.1, 6.9, 6.10, 6.25, 6.28.

**Pour conclure qu'une fonction est nulle, ayant un renseignement sur une intégrale**

Essayer d'appliquer un théorème du Cours :  
si  $a < b$  et si  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, positive ou nulle, telle que  $\int_a^b f = 0$ , alors  $f = 0$ .

On peut aussi essayer d'utiliser une contraposée.

→ Exercices 6.2, 6.11, 6.22.

**Pour trouver une limite d'intégrale**

On peut conjecturer la limite, qui est souvent dans les exemples simples l'intégrale de la limite, et montrer que la différence entre l'intégrale de l'énoncé et la limite présumée tend vers 0.

→ Exercices 6.6, 6.7, 6.13, 6.20.

**Pour changer la forme de l'écriture d'une intégrale, ou pour calculer ou évaluer une intégrale dans des cas simples**

Appliquer les méthodes de calcul d'intégrales et de primitives :

- primitives usuelles
- linéarité de l'intégration
- relation de Chasles
- changement de variable
- intégration par parties.

On se ramène alors à la formule fondamentale de l'analyse :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

où  $f$  est continue sur  $[a ; b]$  et  $F$  est une primitive de  $f$ .

→ Exercices 6.3, 6.4, 6.14, 6.18, 6.19, 6.21, 6.22, 6.29

On peut quelquefois exploiter un changement de variable qui échange les bornes.

→ Exercice 6.8.

**Pour amener une intégrale ayant des bornes différentes de celles qui interviennent dans l'énoncé**

Essayer d'appliquer la relation de Chasles ou d'effectuer un changement de variable.

→ Exercice 6.18.

**Pour étudier ou dériver une intégrale dépendant d'un paramètre aux bornes**

Appliquer le théorème du Cours sur les dérivées de  $x \mapsto \int_a^x f$  et  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f$ .

→ Exercice 6.16.

**Pour chercher la limite d'une suite dont le terme général  $u_n$  est une somme indexée par  $k$  et dont les termes dépendant de  $k$  et  $n$**

Essayer de faire apparaître une somme de Riemann.

- Dans des cas simples, il s'agit exactement d'une somme de Riemann.
- Mais souvent,  $u_n$  n'est pas exactement une somme de Riemann. Essayer alors de construire  $v_n$  qui soit une somme de Riemann et qui ressemble à  $u_n$ , de façon que  $u_n - v_n \xrightarrow{n \infty} 0$  et que l'on puisse trouver la limite de  $v_n$ , d'où l'on déduira la limite de  $u_n$ .

Si le terme général  $u_n$  proposé contient un symbole de produit, on peut essayer de se ramener à une somme en utilisant un logarithme.

→ Exercices 6.5, 6.12.

**Pour obtenir une inégalité portant sur une fonction ou une intégrale**

Essayer d'utiliser une fonction auxiliaire, dont on étudiera les variations, ou l'inégalité des accroissements finis, ou l'inégalité de Taylor-Lagrange.

→ Exercices 6.15, 6.24, 6.26.

**Pour obtenir un résultat portant sur une intégrale**

On peut quelquefois essayer d'obtenir un résultat analogue portant sur des sommes de Riemann, puis passer à une limite.

→ Exercices 6.17, 6.27.

**Pour résoudre une équation fonctionnelle faisant intervenir une intégrale à borne variable**

On peut essayer de dériver et faire apparaître une équation différentielle.

→ Exercice 6.23.

## — Énoncés des exercices



### 6.1 Inégalité sur une intégrale

Soit  $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On note  $M = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ . Montrer :

$$\left| \int_0^1 (f(x) + xf(1-x)) dx \right| \leq \frac{3}{2} M.$$

### 6.2 Changement de signe pour une fonction continue d'intégrale nulle

Soient  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ , et  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle qu'il existe  $x_1 \in [a ; b]$  tel que  $f(x_1) > 0$ , et  $\int_a^b f = 0$ . Montrer qu'il existe  $x_2 \in [a ; b]$  tel que  $f(x_2) < 0$ .

### 6.3 Exemple de calcul simple d'une intégrale

Calculer  $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} dx$ .

### 6.4 Exemple de calcul simple d'une intégrale puis d'une borne inférieure

Déterminer  $\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax)^2 dx$ .

**6.5****Limites de sommes de Riemann**

Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite, dont on donne le terme général  $u_n$ , converge, et calculer sa limite :

$$a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \quad b) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}.$$

**6.6****Exemples simples de détermination de limites d'intégrales**

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n} dx \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx.$$

**6.7****Exemple simple de détermination de la limite d'une intégrale**

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx$ .

**6.8****Exemple de calcul d'une intégrale à l'aide d'un changement de variable**

$$\text{Calculer } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx.$$

**6.9****Exemple d'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient  $f, g : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues, telles que :  $f \geq 0$ ,  $g \geq 0$ ,  $fg \geq 1$ . Montrer :

$$\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geq 1.$$

**6.10****Obtention d'une majoration à l'aide d'une intégrale**

$$a) \text{Montrer : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

$$b) \text{En déduire : } \sum_{d|n} d \leq n(1 + \ln n).$$

**6.11****Déductions sur une fonction à partir de renseignements sur des intégrales**

Soit  $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que :  $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$ , où  $f^2$  désigne  $f \cdot f$ . Montrer :  $f = 0$  ou  $f = 1$ .

**6.12****Limites de suites ressemblant à des sommes de Riemann**

Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite, dont on donne le terme général  $u_n$ , converge, et calculer sa limite :

$$a) \sum_{k=0}^n (n+k)^{-\alpha} (n+k+1)^{-\beta}, (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \alpha + \beta = 1 \quad b) \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} \sin \frac{k}{n}.$$

**6.13****Exemples assez simples de détermination de limites d'intégrales**

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin x} dx \quad b) \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} dx.$$

**6.14** Obtention d'une inégalité sur une intégrale par changement de l'écriture de l'intégrale

Soit  $f : [0 ; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  et convexe. Montrer :  $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx \geqslant 0$ .

**6.15** Détermination des fonctions satisfaisant une inégalité faisant intervenir une intégrale, par utilisation d'une fonction auxiliaire

Déterminer l'ensemble des applications  $f : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continues, telles que  $f \geqslant 0$  et que :

$$\forall x \in [0 ; +\infty[, \quad f(x) \leqslant \int_0^x f(t) \, dt.$$

**6.16** Exemple d'étude de fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre aux bornes

Étude et représentation graphique de la fonction  $f$  d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} \, dt.$$

**6.17** Obtention d'une inégalité sur des intégrales par passage à la limite à partir d'une inégalité sur des sommes de Riemann

Soient  $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe. Montrer :

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f.$$

**6.18** Inégalité sur des intégrales par transformation de l'écriture

Soient  $k \in \mathbb{R}$  et  $f : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $k$ -lipschitzienne. On considère l'application

$$F : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que  $F$  est  $\frac{k}{2}$ -lipschitzienne.

**6.19** Inégalité sur une intégrale par transformation de l'écriture

Soit  $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que :  $\forall (x, y) \in [0 ; 1]^2, \quad xf(y) + yf(x) \leqslant 1$ .

Montrer :  $\int_0^1 f(x) \, dx \leqslant \frac{\pi}{4}$ .

**6.20** Exemples de détermination de limites d'intégrales

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-u \sin x} \, dx \quad b) \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-u^2} \int_0^u e^{x^2} \, dx.$$

**6.21** Résolution d'une équation fonctionnelle par intervention d'intégrales

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$ .

Montrer :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xf(1)$ .

**6.22 Résolution d'une équation fonctionnelle faisant intervenir des intégrales**

Trouver toutes les applications  $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 (f(x^2))^2 dx.$$

**6.23 Résolution d'une équation fonctionnelle faisant intervenir une intégrale**

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = \int_0^x ((f(t))^2 + (f'(t))^2) dt - x + 1.$$

**6.24 Obtention d'une inégalité portant sur des intégrales par utilisation d'une fonction auxiliaire**

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ ,  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $f(a) = 0$  et :

$$\forall x \in [a ; b], 0 \leq f'(x) \leq 1.$$

$$\text{Montrer : } \int_a^b f^3 \leq \left( \int_a^b f \right)^2.$$

**6.25 Inégalités sur des intégrales**

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ ,  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $f(a) = 0$ .

$$a) \text{ On note : } F : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto F(x) = \int_a^x |f'(t)| dt.$$

Montrer :  $\forall x \in [a ; b], |f(x)| \leq F(x)$ .

$$b) \text{ En déduire : } \int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

**6.26 Inégalités sur les bornes de  $f, f', f''$** 

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et telle que  $f$  et  $f''$  soient bornées sur  $\mathbb{R}$  ; on note  $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$  et  $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$ .

$$a) \text{ Démontrer : } \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2} M_2 a.$$

b) En déduire que  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , et que, en notant  $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ , on a :

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}.$$

**6.27 Calcul de l'intégrale de Poisson, par utilisation de sommes de Riemann**

Pour  $x \in ]1 ; +\infty[$ , calculer  $\int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt$ .

**6.28 Étude d'une limite de suite d'intégrales nécessitant le retour à la définition d'une limite**

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ ,  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\geq 0$ . Montrer :

$$\left( \int_a^b (f(x))^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a ; b]} f(x).$$

**6.29 Irrationnalité de  $\pi$** 

- a) Pour  $(a,b,n) \in (\mathbb{N}^*)^3$ , on note  $P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$  et  $I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x dx$ .
- a) Montrer que, pour tout  $(a,b,n)$  de  $(\mathbb{N}^*)^3$ ,  $P_n$  et ses dérivées successives prennent en 0 et  $\frac{a}{b}$  des valeurs entières (dans  $\mathbb{Z}$ ).
- $\beta)$  Montrer que, pour  $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  fixé :  $I_n \xrightarrow{n \infty} 0$ .
- b) On suppose qu'il existe  $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $\pi = \frac{a}{b}$ .
- $\alpha)$  Avec les notations de a), montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \in \mathbb{Z}$ .
- $\beta)$  En utilisant l'exercice 3.16, déduire une contradiction.
- On a ainsi démontré que  $\pi$  est irrationnel ( $\pi \notin \mathbb{Q}$ ).

**Du mal à démarrer ?****6.1** Utiliser les théorèmes sur les inégalités sur les intégrales.**6.2** Raisonner par l'absurde.**6.3** Remarquer que  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ , pour transformer l'expression dans l'intégrale.**6.4** Calculer, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'intégrale envisagée, puis chercher la borne inférieure lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}$ .**6.5** a) Reconnaître une somme de Riemann.

b) Après avoir pris le logarithme, reconnaître une somme de Riemann.

**6.6** Conjecturer la limite et montrer que la différence entre l'intégrale proposée et la limite conjecturée tend vers 0.**6.7** On peut conjecturer que la limite de l'intégrale  $I_n = \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx$  est l'intégrale de la limite, c'est-à-dire $I = \int_0^1 1 dx$ . Pour montrer  $I_n \xrightarrow{n \infty} I$ , on essaie de montrer :  $|I_n - I| \xrightarrow{n \infty} 0$ .**6.8** Après s'être assuré de l'existence de  $I$ , essayer d'utiliser un changement de variable qui échange les bornes.**6.9** Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**6.10** a) Comparer une somme et une intégrale de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .b) Remarquer que tout diviseur de  $n$  est de la forme  $E\left(\frac{n}{k}\right)$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ .**6.11** Développer  $\int_0^1 (f - f^2)^2 dx$  et déduire  $f(1-f) = 0$ .

Attention : si le produit de deux fonctions continues est la fonction nulle, on ne peut pas déduire directement que l'une des deux fonctions est la fonction nulle. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

**6.12** Faire intervenir une somme de Riemann  $v_n$  ressemblant à  $u_n$ .**6.13** Conjecturer la limite et montrer que la différence entre l'intégrale proposée et sa limite conjecturée tend vers 0, en transformant l'écriture de cette différence ou en majorant convenablement sa valeur absolue.**6.14** Puisque  $f$  est supposée de classe  $C^2$ , pour faire intervenir  $f''$  dans l'intégrale, intégrer par parties deux fois.**6.15** Étudier les variations de la fonction auxiliaire  $x \mapsto e^{-x} \int_0^x f(t) dt$ .**6.16** Étudier successivement : ensemble de définition, dérivée, limites aux bornes. L'outil essentiel est le théorème du Cours sur l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre aux bornes,  $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ .**6.17** Montrer l'inégalité analogue sur des sommes de Riemann, puis passer à la limite.**6.18** Transformer l'écriture de  $F(x)$  sous forme d'une intégrale à bornes fixes 0 et 1 puis revenir à la définition d'une application lipschitzienne.**6.19** Effectuer, dans  $\int_0^1 f(x) dx$ , chacun des deux changements de variable  $x = \sin u$ ,  $x = \cos v$ , de façon à pouvoir utiliser l'hypothèse.

**6.20** a) Se ramener sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  et utiliser l'inégalité classique :  
 $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right], \sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$ .

b) Essayer de faire intervenir  $e^{xu}$  au lieu de  $e^{u^2}$ .

**6.21** Considérer  $F : x \mapsto \int_0^x f$  et obtenir des relations simples sur  $f$  et  $F$ .

**6.22** Effectuer dans l'intégrale  $\int_0^1 f(x) dx$  le changement de variable  $t = \sqrt{x}$ ,  $x = t^2$ , de façon à la rapprocher de la deuxième intégrale de l'énoncé.

**6.23** Dériver pour faire apparaître une équation différentielle.

**6.24** Remplacer  $b$  par une variable, pour considérer une fonction, et étudier les variations de cette fonction.

**6.25** a) Utiliser la formule exprimant  $f$  à l'aide d'une intégrale portant sur  $f'$  :  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ .

b) Comme un produit et un carré interviennent à l'intérieur d'intégrales, penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**6.26** a) Pour faire intervenir  $f, f', f''$ , appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à  $f$  sur  $[x - a ; x]$  et sur  $[x ; x + a]$ .

b) Étudier les variations de  $a \mapsto \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2} M_2 a$ .

**6.27** On peut calculer des sommes de Riemann associées à l'intégrale de l'énoncé, et obtenir cette intégrale par limite d'une suite de sommes de Riemann.

**6.28** L'application  $f$ , continue sur le segment  $[a ; b]$ , est bornée et atteint sa borne supérieure  $M$  en au moins un point  $x_0$ , et  $f(x)$  est proche de  $M$  lorsque  $x$  est proche de  $x_0$ .

**6.29** a) Utiliser la formule de Leibniz pour calculer les dérivées successives de  $P_n$ .

b) Majorer convenablement  $I_n$ .

b) α) Intégrer par parties, de façon itérée.

β) Montrer que  $I_n = 0$  à partir d'un certain rang, et amener une contradiction en considérant  $P_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

# Corrigés des exercices

**6.1** D'abord, d'une part,  $f$  est continue sur le segment  $[0 ; 1]$ , d'où l'existence de  $M$ , et, d'autre part, l'application  $x \mapsto f(x) + xf(1-x)$  est continue sur le segment  $[0 ; 1]$ , d'où l'existence de l'intégrale envisagée.

On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (f(x) + xf(1-x)) dx \right| &\leqslant \int_0^1 |f(x) + xf(1-x)| dx \\ &\leqslant \int_0^1 (|f(x)| + x|f(1-x)|) dx \\ &\leqslant \int_0^1 (M + xM) dx \\ &= M \int_0^1 (1+x) dx = M \left[ x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}M. \end{aligned}$$

**6.2** Raisonnons par l'absurde : supposons :

$$\forall x \in [a ; b], f(x) \geqslant 0.$$

Puisque  $\int_a^b f = 0$  et que  $f$  est continue et positive ou nulle sur  $[a ; b]$ , on a alors  $f = 0$ , en contradiction avec l'hypothèse d'existence de  $x_1 \in [a ; b]$  tel que  $f(x_1) > 0$ .

On conclut qu'il existe  $x_2 \in [a ; b]$  tel que  $f(x_2) < 0$ .

**6.3** D'abord, l'intégrale envisagée existe, car l'application  $x \mapsto \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$  est continue sur  $[0 ; 2\pi]$ .

$$\text{On a : } I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} dx = \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx.$$

Puisque l'application  $x \mapsto \left| \cos \frac{x}{2} \right|$  est  $2\pi$ -périodique et paire, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx = 2 \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = \left[ 4 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\pi} = 4. \end{aligned}$$

On conclut :  $I = 4$ .

**6.4** On calcule, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 (x^2 - ax)^2 dx = \int_0^1 (x^4 - 2ax^3 + a^2x^2) dx \\ &= \left[ \frac{x^5}{5} - 2a \frac{x^4}{4} + a^2 \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $I(a)$  est un trinôme en  $a$ .

Pour chercher la borne inférieure de  $I(a)$  lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}$ , on met  $I(a)$  sous forme canonique (on pourrait aussi étudier les variations de la fonction  $a \mapsto I(a)$ ) :

$$\begin{aligned} I(a) &= \frac{1}{3} \left( a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{3} \left( \left( a - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( a - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{1}{80}. \end{aligned}$$

Il en résulte  $\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax)^2 dx = \frac{1}{80}$ , obtenu pour  $a = \frac{3}{4}$ .

**6.5** a) On a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{k}{n}}}$ .

On reconnaît une somme de Riemann.

L'application  $[0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

est continue sur  $[0 ; 1]$ , donc :

$$u_n \xrightarrow{n \infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}} dx = \left[ \sqrt{1+2x} \right]_0^1 = \sqrt{3} - 1.$$

b) On a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$  et  $\ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k^2}{n^2} \right)$ .

On reconnaît une somme de Riemann.

L'application  $[0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x^2)$  est continue sur  $[0 ; 1]$ , donc :

$$\ln u_n \xrightarrow{n \infty} \int_0^1 \ln(1+x^2) dx.$$

Il reste à calculer cette intégrale.

Utilisons une intégration par parties, pour faire disparaître le logarithme :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x^2) dx &= \left[ x \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \ln 2 - 2 \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \ln 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \ln 2 - 2 + 2 [\operatorname{Arctan} x]_0^1 \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, comme l'exponentielle est continue sur  $\mathbb{R}$ , on conclut :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \exp\left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}.$$

**6.6** a) Puisque, pour tout  $x \in [0 ; 1]$ ,  $\frac{x^n}{1+x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,

on conjecture que la limite est 0.

On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx &\leq \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

donc :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$ .

b) Puisque, pour tout  $x \in [0 ; \pi]$ ,  $\frac{\sin x}{x+n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,

on conjecture que la limite est 0.

On a :  $0 \leq \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n} dx \leq \int_0^\pi \frac{1}{n} dx = \frac{\pi}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,

donc :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n} dx = 0$ .

c) Puisque, pour tout  $x \in [0 ; \pi]$ ,  $\frac{n \sin x}{x+n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sin x$ ,

on conjecture que la limite est  $\int_0^\pi \sin x dx$ .

On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx - \int_0^\pi \sin x dx \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{-x \sin x}{x+n} dx \right| \\ &= \int_0^\pi \frac{x \sin x}{x+n} dx \leq \int_0^\pi \frac{\pi}{n} dx = \frac{\pi^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

donc :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$ .

**6.7** On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par utilisation d'une expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx - \int_0^1 1 dx \right| &= \left| \int_0^1 (\sqrt{1+x^n} - 1) dx \right| \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n} + 1} dx \\ &\leq \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Il en résulte :  $\int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx - 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,

et donc :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx = 1$ .

**6.8** D'abord, l'intégrale envisagée existe, car l'application  $x \mapsto \ln(1+\tan x)$  est continue sur le segment  $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ .

On a, par le changement de variable  $y = \frac{\pi}{4} - x$ , qui échange les bornes :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right)\right) (-dy) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan y}{1 + \tan y}\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan y}\right) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1 + \tan y)) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dy - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan y) dy \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - I. \end{aligned}$$

Il en résulte :  $2I = \frac{\pi}{4} \ln 2$ , et finalement :  $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$ .

**6.9** Les applications  $\sqrt{f}$ ,  $\sqrt{g}$ ,  $\sqrt{fg}$  sont continues sur  $[0 ; 1]$ , d'après les théorèmes généraux.

On a, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $\sqrt{f}$  et  $\sqrt{g}$  :

$$\left( \int_0^1 f \right) \left( \int_0^1 g \right) \geq \left( \int_0^1 \sqrt{f} \sqrt{g} \right)^2 = \left( \int_0^1 \sqrt{fg} \right)^2.$$

Comme  $fg \geq 1$ , on a  $\sqrt{fg} \geq 1$ , puis  $\int_0^1 \sqrt{fg} \geq \int_0^1 1 = 1$ , d'où le résultat voulu.

**6.10** a) Comme l'application  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue et décroissante sur  $[1; +\infty[$ , on a, pour tout  $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$  :  $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$ , d'où, pour tout  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ , par sommation :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \\ &= 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + [\ln x]_1^n = 1 + \ln n.\end{aligned}$$

De plus, l'inégalité obtenue est aussi vraie pour  $n = 1$ .

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque les diviseurs (entiers  $\geqslant 1$ ) de  $n$  sont parmi les nombres de la forme  $E\left(\frac{n}{k}\right)$  lorsque  $k$  décrit  $\{1, \dots, n\}$ , on a :

$$\sum_{d|n} d \leqslant \sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leqslant n(1 + \ln n).$$

Remarque :

L'inégalité semble assez fine lorsque  $n$  admet beaucoup de diviseurs, et semble assez grossière lorsque  $n$  admet peu de diviseurs, en particulier lorsque  $n$  est premier.

Exemples :

$$\text{pour } n = 12 : \sum_{d|n} d = 28 \text{ et } n(1 + \ln n) \simeq 41,8\dots$$

$$\text{pour } n = 13 : \sum_{d|n} d = 14 \text{ et } n(1 + \ln n) \simeq 46,3\dots$$

**6.11** On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f - f^2)^2 dx &= \int_0^1 (f^2 - 2f^3 + f^4) dx \\ &= \int_0^1 f^2 dx - 2 \int_0^1 f^3 dx + \int_0^1 f^4 dx = 0.\end{aligned}$$

Comme  $(f - f^2)^2$  est continue et  $\geqslant 0$ , on déduit  $(f - f^2)^2 = 0$ , puis  $f - f^2 = 0$ , c'est-à-dire  $f(1 - f) = 0$ .

Ceci montre :  $\forall x \in [0; 1], (f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 1)$ .

Pour montrer  $f = 0$  ou  $f = 1$ , raisonnons par l'absurde : supposons  $f \neq 0$  et  $f \neq 1$ .

Il existe donc  $a \in [0; 1]$  tel que  $f(a) \neq 0$  et il existe  $b \in [0; 1]$  tel que  $f(b) \neq 1$ . On a alors  $f(a) = 1$  et  $f(b) = 0$ . Comme  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0; 1]$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  prend, par exemple la valeur  $\frac{1}{2}$ , contradiction.

On conclut :  $f = 0$  ou  $f = 1$ .

**6.12** a) Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_n = \sum_{k=0}^n (n+k)^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}},$$

qui est une somme de Riemann et ressemble à  $u_n$ .

• Puisque l'application  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  est continue sur  $[0; 1]$ , on a, d'après l'étude des sommes de Riemann :

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

• On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n \leqslant \sum_{k=0}^n (n+k)^{-\alpha} (n+k)^{-\beta} = \sum_{k=0}^n (n+k)^{-1} = v_n$$

et

$$\begin{aligned}u_n &\geqslant \sum_{k=0}^n (n+k+1)^{-\alpha} (n+k+1)^{-\beta} \\ &= \sum_{k=0}^n (n+k+1)^{-1} = \sum_{p=k+1}^{n+1} (n+p)^{-1} \\ &= v_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} \leqslant u_n \leqslant v_n$ .

Comme  $v_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln 2$  et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln 2$ , on en déduit, par le théorème d'encadrement :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln 2$ .

b) Pour  $1 \leqslant k \leqslant n$ , et  $n$  assez grand, on a  $\frac{k}{n^2}$  petit, donc  $\sin \frac{k}{n^2}$  ressemble à  $\frac{k}{n^2}$ .

D'où l'idée de considérer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n}.$$

• Puisque l'application  $x \mapsto x \sin x$  est continue sur  $[0; 1]$ , d'après l'étude des sommes de Riemann :

$$\begin{aligned}v_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 x \sin x dx \\ &\stackrel{\text{ipp}}{=} \left[ -x \cos x \right]_0^1 + \int_0^1 \cos x dx = \sin 1 - \cos 1.\end{aligned}$$

• Pour comparer  $u_n$  et  $v_n$ , on va comparer, pour  $x \in [0; +\infty[$ ,  $\sin x$  et  $x$ . Plus précisément, on va montrer :

$$\forall x \in [0; +\infty[, x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

1) L'application  $\varphi : x \mapsto \sin x - x$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  :  $\varphi'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$ ,

d'où le tableau des variations de  $\varphi$ , et donc :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \varphi(x) \leqslant 0.$$

$x$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	—	
$\varphi(x)$	0	—

2) L'application  $\psi : x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$  est de classe  $C^2$  sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$\begin{cases} \psi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \\ \psi''(x) = -\sin x + x = -\varphi(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

d'où le tableau des variations de  $\psi$ , et donc :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \psi(x) \geqslant 0.$$

$x$	0	$+\infty$
$y''(x)$	+	
$y'(x)$	0	+
$y(x)$	0	+

On a donc l'encadrement conjecturé.

On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en appliquant le résultat précédent à  $\frac{k}{n^2}$  à la place de  $x$ , puis en multipliant par  $\sin \frac{k}{n}$  qui est  $\geqslant 0$ , et enfin en sommant de  $k=1$  à  $k=n$  :

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \right) \sin \frac{k}{n} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin \frac{k}{n}.$$

Comme :

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{6n^6} \sin \frac{k}{n} \leqslant \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \leqslant \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n n^3 = \frac{n^4}{6n^6} = \frac{1}{6n^2},$$

on déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - \frac{1}{6n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n$ .

Comme

$$v_n - \frac{1}{6n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sin 1 - \cos 1 \text{ et } v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sin 1 - \cos 1,$$

on en déduit, par le théorème d'encadrement :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sin 1 - \cos 1.$$

- 6.13** a) Puisque, pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $e^{-u \sin x} \xrightarrow[u \rightarrow 0^+]{} 1$ , on conjecture que la limite est  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$ .

On a, pour tout  $u \in [0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-u \sin x} - 1) dx \right| \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-u \sin x}) dx. \end{aligned}$$

On dispose de l'encadrement :

$$\forall t \in [0; +\infty[, 0 \leqslant 1 - e^{-t} \leqslant t.$$

En effet, la première inégalité est évidente, et la deuxième résulte simplement, par exemple, de l'étude des variations de la fonction  $t \mapsto e^{-t} - 1 + t$ .

D'où :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin x} dx - \frac{\pi}{2} \right| &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin x dx \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} u dx = \frac{\pi}{2} u \xrightarrow[u \rightarrow 0^+]{} 0. \end{aligned}$$

On conclut :  $\lim_{u \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

b) Puisque  $\cos x \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$ , on conjecture que la limite cherchée est aussi celle de  $\int_u^{3u} \frac{1}{x} dx$ .

$$\text{On a : } \int_u^{3u} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_u^{3u} = \ln(3u) - \ln u = \ln 3.$$

On a, pour  $u \in ]0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} dx - \int_u^{3u} \frac{1}{x} dx \right| &= \int_u^{3u} \frac{1 - \cos x}{x} dx \\ &= \int_u^{3u} \frac{1}{x} 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx \leqslant \int_u^{3u} \frac{2}{x} \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_u^{3u} \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_u^{3u} = \frac{(3u)^2 - u^2}{4} = 2u^2 \xrightarrow[u \rightarrow 0^+]{} 0. \end{aligned}$$

On conclut :  $\int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} dx \xrightarrow[u \rightarrow 0^+]{} \ln 3$ .

- 6.14** On a, à l'aide d'une intégration par parties pour des fonctions de classe  $C^1$ , avec  $\begin{cases} u = f(x) \\ u' = f'(x) \\ v' = \cos x \\ v = \sin x \end{cases}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx &= \left[ f(x) \sin x \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)(-\sin x) dx. \end{aligned}$$

On effectue une deuxième intégration par parties pour des fonctions de classe  $C^1$ , mais en choisissant  $v$  à partir de  $v'$ , de façon

que le crochet soit nul,  $\begin{cases} u = f'(x) \\ v' = -\sin x \end{cases}, \begin{cases} u' = f''(x) \\ v = \cos x - 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f'(x)(-\sin x) dx \\ &= \left[ f'(x)(\cos x - 1) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(x)(\cos x - 1) dx \\ &= \int_0^{2\pi} f''(x) \underbrace{(1 - \cos x)}_{\geq 0} dx. \end{aligned}$$

Comme  $f$  est de classe  $C^2$  et convexe, on a  $f'' \geq 0$ , et on conclut :  $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx \geq 0$ .

### 6.15 1) Soit $f$ convenant. Considérons l'application

$$g : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = e^{-x} \int_0^x f(t) dt.$$

Puisque  $f$  est continue sur  $[0 ; +\infty[$ ,  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $[0 ; +\infty[$  et, pour tout  $x \in [0 ; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-x} \int_0^x f(t) dt + e^{-x} f(x) \\ &= e^{-x} \left( f(x) - \int_0^x f(t) dt \right) \leq 0, \end{aligned}$$

donc  $g$  est décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

Comme  $g(0) = 0$ , il en résulte :  $g \leq 0$ .

Mais, d'autre part, par hypothèse,  $f \geq 0$ , donc  $g \geq 0$ .

On déduit  $g = 0$ , d'où :  $\forall x \in [0 ; +\infty[, \int_0^x f(t) dt = 0$ , puis, en dérivant :  $\forall x \in [0 ; +\infty[, f(x) = 0$ .

2) Réciproquement, il est clair que l'application nulle convient. On conclut que l'ensemble cherché est  $\{0\}$ , où 0 est l'application nulle de  $[0 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 6.16 • L'application $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ , donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ , $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ existe. Ainsi : $\text{Déf}(f) = \mathbb{R}$ .

On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2} dt \\ &\stackrel{[u=-t]}{=} - \int_x^{2x} e^{-u^2} du = -f(x), \end{aligned}$$

donc  $f$  est impaire.

• D'après le Cours, puisque  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue et que  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto 2x$  sont de classe  $C^1$ , l'application  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2} \left( 2e^{-3x^2} - 1 \right).$$

On a, pour tout  $x \geq 0$  :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff e^{-3x^2} = \frac{1}{2} \\ &\iff 3x^2 = \ln 2 \\ &\iff x = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{Notons } \alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \simeq 0,481.$$

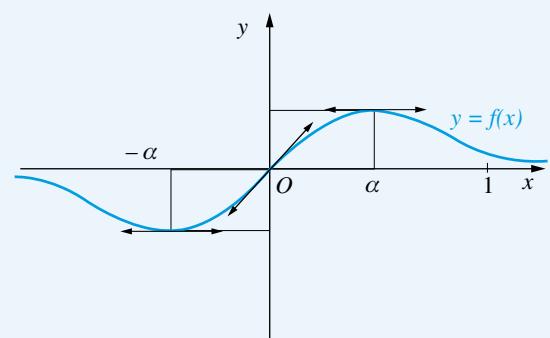
• On a, pour tout  $x \geq 0$  :

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) &= \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \\ &\leq (2x-x)e^{-x^2} = x e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

donc :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

• Des valeurs particulières sont :  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  et, en utilisant la calculatrice :  $f(\alpha) \simeq 0,286$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0



### 6.17 Puisque $\varphi$ est convexe sur $\mathbb{R}$ , d'après l'inégalité de Jensen, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f \left( \frac{k}{n} \right) \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \varphi \left( f \left( \frac{k}{n} \right) \right).$$

D'après l'étude des sommes de Riemann, puisque  $f$  est continue sur  $[0 ; 1]$  :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f \left( \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f.$$

Puisque  $\varphi$  est convexe sur l'intervalle ouvert  $\mathbb{R}$ , d'après le Cours,  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc :

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \infty} \varphi\left(\int_0^1 f\right).$$

Puisque  $f$  est continue sur  $[0; 1]$  et que  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi \circ f$  est continue sur  $[0; 1]$ , donc, d'après l'étude des sommes de Riemann :  $\frac{1}{n} \varphi\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \infty} \int_0^1 \varphi \circ f$ .

On obtient donc, par passage à la limite dans une inégalité :

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f.$$

### 6.18

• On a, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , par le changement de variable  $u = \frac{t}{x}$ ,  $t = ux$  :

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^1 f(xu)x du = \int_0^1 f(xu) du.$$

D'autre part :  $F(0) = f(0) = \int_0^1 f(0) du$ .

Ainsi :  $\forall x \in [0; +\infty[, F(x) = \int_0^1 f(xu) du$ .

• On a, pour tout  $(x, y) \in [0; +\infty[^2$  :

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_0^1 f(xu) du - \int_0^1 f(yu) du \right| \\ &= \left| \int_0^1 (f(xu) - f(yu)) du \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(xu) - f(yu)| du \\ &\leq \int_0^1 k|xu - yu| du = k|x - y| \int_0^1 u du \\ &= k|x - y| \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{k}{2}|x - y|, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $F$  est  $\frac{k}{2}$ -lipschitzienne.

### 6.19

Notons  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

On a, par les changements de variable  $u = \text{Arcsin } x$  et  $v = \text{Arccos } x$  :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u) \cos u du$$

et

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos v)(-\sin v) dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \sin v dv,$$

d'où, en additionnant et en utilisant l'hypothèse :

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\sin u) \cos u + f(\cos u) \sin u) du \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 du = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On conclut :  $I \leq \frac{\pi}{4}$ .

### 6.20

a) • Le changement de variable  $y = \pi - x$  montre :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-u \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin x} dx,$$

d'où :  $\int_0^{\pi} e^{-u \sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin x} dx$ .

• Montrons :  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ .

L'application  $\varphi : x \mapsto \sin x - \frac{2x}{\pi}$  est de classe  $C^1$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , et, pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$\varphi'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}, \quad \varphi''(x) = -\sin x.$$

$x$	0	$\alpha$	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi''(x)$	—	—	
$\varphi'(x)$	$> 0$	$+ 0$	$< 0$
$\varphi(x)$	0		0

Comme  $\varphi'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$  et  $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$ , il existe  $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  unique tel que  $\varphi'$  change de signe en  $\alpha$ , d'où les variations de  $\varphi$ .

Comme  $\varphi(0) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , on conclut  $\varphi \geq 0$ , ce qui montre l'inégalité proposée.

- On a alors, pour tout  $u \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_0^\pi e^{-u \sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin x} dx \\ &\leqslant 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2ux}{\pi}} dx = 2 \left[ -\frac{\pi}{2u} e^{-\frac{2ux}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{u} (1 - e^{-u}) \\ &\leqslant \frac{\pi}{u}. \end{aligned}$$

Finalement :  $\int_0^\pi e^{-u \sin x} dx \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0$ .

- b) On a, pour tout  $u \in ]0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant e^{-u^2} \int_0^u e^{t^2} dt \leqslant e^{-u^2} \int_0^u e^{tu} dt \\ &= e^{-u^2} \left[ \frac{e^{tu}}{u} \right]_0^u = e^{-u^2} \frac{e^{u^2} - 1}{u} = \frac{1 - e^{-u^2}}{u} \leqslant \frac{1}{u}, \end{aligned}$$

d'où :  $e^{-u^2} \int_0^u e^{t^2} dt \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**6.21** Considérons  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ,

qui est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et vérifie :  $F = f$ .

On a :  $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(t+x) = f(t) + f(x)$ ,

d'où, en intégrant entre 0 et  $y$  :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_0^y f(t+x) dt = \int_0^y f(t) dt + yf(x).$$

Mais, par le changement de variable  $u = t+x$ , pour  $x$  fixé :

$$\int_0^y f(t+x) dt = \int_x^{x+y} f(u) du = F(x+y) - F(x).$$

On obtient ainsi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x+y) = F(x) + F(y) + yf(x).$$

En échangeant  $x$  et  $y$ , on a aussi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x+y) = F(y) + F(x) + xf(y),$$

d'où :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $yf(x) = xf(y)$ .

En particulier, on conclut, en remplaçant  $y$  par 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xf(1).$$

**6.22** Soit  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

On a, par le changement de variable  $t = \sqrt{x}$ ,  $x = t^2$ ,

$$dx = 2t dt : \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(t^2) 2t dt.$$

D'autre part, on remarque :  $\frac{1}{3} = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \int_0^1 x^2 dx$ . D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \int_0^1 (f(x^2))^2 dx - \int_0^1 f(x) dx &= \\ \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (f(x^2))^2 dx - \int_0^1 2xf(x^2) dx &= \\ \int_0^1 (x - f(x^2))^2 dx. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque  $x \mapsto (x - f(x^2))^2$  est continue et positive sur  $[0; 1]$  :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{3} + \int_0^1 (f(x^2))^2 dx \\ &\iff \int_0^1 (x - f(x^2))^2 dx = 0 \\ &\iff \forall x \in [0; 1], \quad x - f(x^2) = 0 \\ &\iff \forall x \in [0; 1], \quad f(x^2) = x \\ &\iff \forall t \in [0; 1], \quad f(t) = \sqrt{t}. \end{aligned}$$

On conclut qu'il existe une application  $f$  et une seule convenant :

$$f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

**6.23** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

On a, en dérivant et en prenant la valeur en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$(f(x))^2 = \int_0^x \left( (f(t))^2 + (f'(t))^2 \right) dt - x + 1$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x)f'(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2 - 1 \\ (f(0))^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f'(x) - f(x))^2 = 1 \\ (f(0))^2 = 1. \end{cases}$$

Puisque l'application  $f' - f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on a, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires :

$$(f' - f)^2 = 1 \iff (f' - f = -1 \text{ ou } f' - f = 1).$$

Soit  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ .

On résout l'équation différentielle (E)  $y' - y = \varepsilon$ .

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

La solution générale de l'équation différentielle linéaire sans second membre associée  $y' - y = 0$  est  $y : x \mapsto \lambda e^x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Une solution particulière de (E) est  $y = -\varepsilon$ .

La solution générale de (E) est donc  $y : x \mapsto \lambda e^x - \varepsilon$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Alors :

$$\begin{aligned} (f(0))^2 &= 1 \iff (\lambda - \varepsilon)^2 = 1 \iff \lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + \varepsilon^2 = 1 \\ &\iff \lambda(\lambda - 2\varepsilon) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On conclut qu'il y a exactement quatre applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convenantes, correspondant à  $\varepsilon = -1$  ou  $1$ , et à  $\lambda = 0$  ou  $2\varepsilon$  :

$$x \mapsto -1, \quad x \mapsto 1, \quad x \mapsto 2e^x - 1, \quad x \mapsto -2e^x + 1.$$

### 6.24 Considérons $\varphi : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a ; b], \quad \varphi(x) = \left( \int_a^x f \right)^2 - \int_a^x f^3.$$

L'application  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $[a ; b]$  et :  $\forall x \in [a ; b]$ ,

$$\varphi'(x) = 2 \left( \int_a^x f \right) f(x) - (f(x))^3 = f(x)\psi(x),$$

où on a noté

$$\psi : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \psi(x) = 2 \int_a^x f - (f(x))^2.$$

L'application  $\psi$  est de classe  $C^1$  sur  $[a ; b]$  et :  $\forall x \in [a ; b]$ ,

$$\psi'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x) \underbrace{(1 - f'(x))}_{\geq 0}.$$

Puisque  $f' \geq 0$ ,  $f$  est croissante ; comme de plus  $f(a) = 0$ , on a  $f \geq 0$ , puis  $\psi' \geq 0$ , donc  $\psi$  est croissante. Comme  $\psi(a) = 0$ , on déduit  $\psi \geq 0$ ,  $\varphi' \geq 0$ ,  $\varphi$  est croissante. Enfin, comme  $\varphi(a) = 0$ , on conclut  $\varphi \geq 0$ . En particulier,  $\varphi(b) \geq 0$ , ce qui est l'inégalité voulue.

### 6.25 a) On a, pour tout $x \in [a ; b]$ :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(a) + \int_a^x f'(t) dt \right| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \\ &\leqslant \int_a^x |f'(t)| dt = F(x). \end{aligned}$$

b) On déduit :

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)f'(x)| dx &= \int_a^b |f(x)| |f'(x)| dx \\ &\leqslant \int_a^b F(x) |f'(x)| dx \\ &= \int_a^b F(x) F'(x) dx = \left[ \frac{1}{2} (F(x))^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2} ((F(b))^2 - (F(a))^2) \\ &= \frac{1}{2} (F(b))^2. \end{aligned}$$

Enfin, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à 1 et  $|f'|$  :

$$\begin{aligned} (F(b))^2 &= \left( \int_a^b |f'(x)| dx \right)^2 = \left( \int_a^b 1 \cdot |f'(x)| dx \right)^2 \\ &\leqslant \left( \int_a^b 1^2 dx \right) \left( \int_a^b (f'(x))^2 dx \right) \\ &= (b-a) \int_a^b (f'(x))^2 dx, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu :

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leqslant \frac{b-a}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

### 6.26 a) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ , $x \in \mathbb{R}$ .

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à  $f$  sur  $[x-a ; x]$  et sur  $[x ; x+a]$  :

$$\begin{cases} |f(x-a) - f(x) + af'(x)| \leqslant \frac{a^2}{2} M_2 \\ |f(x+a) - f(x) - af'(x)| \leqslant \frac{a^2}{2} M_2. \end{cases}$$

D'où, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} &|f(x+a) - f(x-a) - 2af'(x)| = \\ &|(f(x+a) - f(x) - af'(x)) - (f(x-a) - f(x) + af'(x))| \\ &\leqslant |f(x+a) - f(x) - af'(x)| + |f(x-a) - f(x) + af'(x)| \\ &\leqslant a^2 M_2, \end{aligned}$$

puis, encore par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} 2a|f'(x)| &= \left| (f(x+a) - f(x-a)) \right. \\ &\quad \left. - (f(x+a) - f(x-a) - 2af'(x)) \right| \\ &\leqslant |f(x+a) - f(x-a)| + a^2 M_2 \leqslant 2M_0 + a^2 M_2 \end{aligned}$$

et donc :  $|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2}M_2a$ .

b) L'application

$$\varphi : ]0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto \varphi(a) = \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2}M_2a$$

est de classe  $C^1$  et, pour tout  $a \in ]0; +\infty[$  :

$$\varphi'(a) = -\frac{M_0}{a^2} + \frac{1}{2}M_2,$$

d'où le tableau des variations de  $\varphi$ .

$a$	0	$\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$	$+\infty$
$\varphi'(a)$	-	0	+
$\varphi(a)$			

On déduit :  $\inf_{a \in ]0; +\infty[} \varphi(a) = \varphi\left(\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\right) = \sqrt{2M_0 M_2}$

et donc, d'après a) :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}$ .

Ainsi,  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et :  $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}$ .

**6.27** Soit  $x \in ]1; +\infty[$ .

Remarquer d'abord, par une mise sous forme canonique :

$$\forall t \in [0; \pi], \quad 1 - 2x \cos t + x^2 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t > 0,$$

donc l'application  $f : t \mapsto \ln(1 - 2x \cos t + x^2)$  est continue sur  $[0; \pi]$ , d'où l'existence de l'intégrale envisagée.

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ , qui est une somme de Riemann, de sorte que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^\pi f(t) dt = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt.$$

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , par factorisation d'un trinôme dans  $\mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + x^2\right) &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)\right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2(2n-k)i\pi}{2n}}\right)\right) \\ &\stackrel{p=2n-k}{=} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)\right) \left(\prod_{p=n+1}^{2n} \left(x - e^{\frac{2ip\pi}{2n}}\right)\right) \\ &= \frac{x-1}{x+1} \prod_{k=0}^{2n-1} \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right) = \frac{x-1}{x+1} (x^{2n} - 1), \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n &= \frac{\pi}{n} \ln \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + x^2\right) \\ &= \frac{\pi}{n} \ln \frac{(x^{2n} - 1)(x - 1)}{x + 1} \\ &= \frac{\pi}{n} \left(2n \ln x + \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \left(1 - \frac{1}{x^{2n}}\right)\right)\right), \end{aligned}$$

d'où :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2\pi \ln x$ .

Finalement :

$$\forall x \in ]1; +\infty[, \quad \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt = 2\pi \ln x.$$

**6.28** D'abord, puisque  $f$  est continue sur le segment  $[a; b]$ , d'après un théorème du Cours,  $f$  est bornée. Notons  $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \left( \int_a^b \left(f(x)\right)^n dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

• On a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \left( \int_a^b M^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M(b-a)^{\frac{1}{n}}$ .

• Soit  $\varepsilon > 0$  fixé.

Puisque  $f$  est continue sur le segment  $[a; b]$ , d'après un théorème du Cours,  $f$  atteint sa borne supérieure  $M$ . Il existe donc  $x_0 \in [a; b]$  tel que  $f(x_0) = M$ . Puis, comme  $f$  est continue en  $x_0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \cap [a; b], \quad f(x) \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En notant  $S$  le segment  $[x_0 - \eta; x_0 + \eta] \cap [a; b]$  et  $\lambda$  la longueur de  $S$  (donc  $\lambda > 0$ ), on a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n &\geqslant \left( \int_S \left(f(x)\right)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\geqslant \left( \int_S \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) \lambda^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

• Comme

$$M(b-a)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M \quad \text{et} \quad \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) \lambda^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M - \frac{\varepsilon}{2},$$

il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad \begin{cases} M(b-a)^{\frac{1}{n}} \leqslant M + \varepsilon \\ \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) \lambda^{\frac{1}{n}} \geqslant M - \varepsilon. \end{cases}$$

On a alors :  $\forall n \geq N$ ,  $M - \varepsilon \leq u_n \leq M$ ,  
et on conclut :  $u_n \xrightarrow[n \infty]{} M$ .

**6.29** a) Soient  $(a, b, n) \in (\mathbb{N}^*)^3$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . D'après la formule de Leibniz :

$$P_n^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (X^n)^{(i)} \left( (bX - a)^n \right)^{(k-i)}.$$

On a, pour tout  $i$  de  $\mathbb{N}$  :

$$(X^n)^{(i)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ n! & \text{si } i = n \end{cases}$$

et

$$\left( (bX - a)^n \right)^{(k-i)} \left( \frac{a}{b} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k-n \\ b^n n! & \text{si } i = k-n \end{cases}.$$

- Si  $k < n$ , alors, pour tout  $i$  de  $\{0, \dots, k\}$ ,  $(X^n)^{(i)}(0) = 0$  et  $\left( (bX - a)^n \right)^{(k-i)} \left( \frac{a}{b} \right) = 0$ ,

d'où :  $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)} \left( \frac{a}{b} \right) = 0 \in \mathbb{Z}$ .

- Si  $k \geq n$ , alors :

$$\begin{cases} P_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n! \left( (bX - a)^n \right)^{(k-n)}(0) \in \mathbb{Z} \\ P_n^{(k)} \left( \frac{a}{b} \right) = \frac{1}{n!} \binom{k}{k-n} (X^n)^{(k-n)} \left( \frac{a}{b} \right) b^n n! \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

d'où :  $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ ,  $P_n^{(k)} \left( \frac{a}{b} \right) \in \mathbb{Z}$ .

β) Notons  $M = \sup_{x \in [0; \pi]} |bx - a|$ . On a, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$|I_n| \leq \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (bx - a)^n dx \leq \frac{1}{n!} \pi^{n+1} M^n.$$

Comme la factorielle l'emporte sur l'exponentielle,  $\frac{\pi^{n+1} M^n}{n!} \xrightarrow[n \infty]{} 0$ , et on déduit :  $I_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$ .

b) α) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Intégrons  $I_n$  par parties, de façon itérée :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[ -P_n(x) \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi P'_n(x) \cos x dx \\ &= \left[ -P_n(x) \cos x \right]_0^\pi + \left[ P'_n(x) \sin x \right]_0^\pi \\ &\quad - \int_0^\pi P''_n(x) \sin x dx \\ &= \dots \\ &= \left[ -P_n(x) \cos x \right]_0^\pi + \left[ P'_n(x) \sin x \right]_0^\pi \\ &\quad + \left[ P''_n(x) \cos x \right]_0^\pi + \left[ -P'''_n(x) \sin x \right]_0^\pi + \dots \\ &\quad + \left[ (-1)^{n+1} P_n^{(2n)}(x) \cos x \right]_0^\pi, \end{aligned}$$

puisque  $P_n$  est de degré  $2n$ , et donc  $P_n^{(2n+1)} = 0$ .

Comme  $P_n, P'_n, \dots, P_n^{(2n)}$  prennent en 0 et  $\frac{a}{b}$  des valeurs entières (cf. a) α)) et que  $\cos x$  et  $\sin x$  prennent aussi en 0 et  $\frac{a}{b}$  ( $= \pi$ ) des valeurs entières, on conclut :  $I_n \in \mathbb{Z}$ .

β) Puisque  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  et converge vers 0, d'après l'exercice 3.16, il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $\forall n \geq N$ ,  $I_n = 0$ . En particulier :  $I_{2N} = 0$ . Mais l'application  $x \mapsto P_{2N}(x) \sin x$  est continue sur  $[0; \pi]$  et à valeurs  $\geq 0$  (car  $\frac{a}{b} = \pi$  et  $2N$  est pair). Il en résulte :  $\forall x \in [0; \pi]$ ,  $P_{2N}(x) \sin x = 0$ .

En particulier  $P_{2N} \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0$ , en contradiction avec :

$$P_{2N} \left( \frac{\pi}{2} \right) = P_{2N} \left( \frac{a}{2b} \right) = \frac{1}{(2N)!} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{4N} > 0.$$

## Plan

Les méthodes à retenir	97
Énoncés des exercices	99
Du mal à démarrer ?	102
Corrigés	103

## Thèmes abordés dans les exercices

- Résolution d'équations ou d'inéquations à une ou plusieurs inconnues réelles
- Calculs de certaines sommes  $\sum$  et de certains produits  $\prod$
- Obtention d'égalités ou inégalités à une ou plusieurs variables réelles
- Étude et représentation graphique de fonctions faisant intervenir les fonctions usuelles.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des fonctions usuelles :  $\ln$ ,  $\exp$ ,  $\ln_a$ ,  $\exp_a$ , puissances, fonctions hyperboliques directes ou réciproques, fonctions circulaires directes ou réciproques
- Étude et représentation graphique de chaque fonction usuelle
- Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles
- Formulaire de trigonométrie circulaire, à savoir par cœur
- Déduction du formulaire de trigonométrie hyperbolique à partir du formulaire de trigonométrie circulaire, en remplaçant  $\cos$  par  $\operatorname{ch}$  et  $\sin$  par  $i \operatorname{sh}$ .

## Les méthodes à retenir

### Pour manipuler des logarithmes de base quelconque

On peut se ramener à des logarithmes népériens par la formule :  
$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

→ Exercice 7.1.

### Pour manipuler des fonctions hyperboliques directes, $\operatorname{ch}$ , $\operatorname{sh}$ , $\operatorname{th}$ , $\operatorname{coth}$

On peut quelquefois essayer de se ramener à des exponentielles (mais ce n'est pas toujours nécessaire ni utile).

→ Exercice 7.2.

**Pour manipuler des fonctions hyperboliques réciproques, Argsh , Argch , Argth , Argcoth**

**Pour manipuler les fonctions circulaires directes sin , cos**

**Pour résoudre une équation (ou un système d'équations) dans laquelle interviennent des fonctions usuelles**

**Pour l'étude et la représentation graphique d'une fonction  $f$  faisant intervenir des fonctions circulaires réciproques**

**Pour montrer que deux fonctions sont égales sur un intervalle**

**Pour résoudre une équation dans laquelle interviennent des fonctions circulaires réciproques**

**Pour établir une inégalité à une variable réelle**

Essayer de :

- se ramener à des logarithmes, en utilisant les expressions logarithmiques de ces fonctions
- composer par des fonctions hyperboliques directes.

→ Exercice 7.3.

- Se rappeler que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad |\sin x| \leqslant 1, \quad |\cos x| \leqslant 1, \quad |\sin x| \leqslant |x|.$$

→ Exercices 7.4, 7.5, 7.6, 7.15

- Penser à utiliser le formulaire de trigonométrie circulaire.

→ Exercices 7.7, 7.8, 7.9.

Faire tout passer dans le premier membre et étudier les variations d'une fonction, avec souplesse, c'est-à-dire en remplaçant éventuellement l'équation par une équation équivalente.

→ Exercices 7.10, 7.11.

- Essayer un changement de variable qui pourrait permettre de simplifier la fonction circulaire réciproque avec une fonction circulaire directe.

→ Exercices 7.12, 7.13, 7.21.

- Calculer la dérivée de  $f$  et essayer, dans certains cas, de reconnaître la dérivée d'une fonction plus simple.

Montrer que les dérivées sont égales (si les fonctions sont dérивables sur un intervalle) et que les fonctions prennent la même valeur en au moins un point.

→ Exercice 7.13.

Essayer de composer par une fonction circulaire directe, de façon à faire disparaître les fonctions circulaires réciproques. On essaiera de maintenir des équivalences logiques, ou bien on raisonnera par implication et réciproque (lorsque la ou les valeurs obtenues sont assez simples).

→ Exercice 7.14.

Voir les méthodes du chapitre 4.

La présence d'une racine carrée peut inciter à essayer d'appliquer l'inégalité de Cauchy et Schwarz pour des intégrales.

→ Exercices 7.17, 7.19.

# Énoncés des exercices

**7.1**

**Exemple d'équation à une inconnue réelle, faisant intervenir des logarithmes dans diverses bases**

Résoudre dans  $]0; +\infty[$  :  $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{2}$ .

**7.2**

**Exemple de système de deux équations à deux inconnues réelles, faisant intervenir ch et sh**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  : (S)  $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 4 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 1. \end{cases}$

**7.3**

**Exemple d'équation à une inconnue réelle, faisant intervenir des fonctions hyperboliques réciproques**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\operatorname{Argth} x = \operatorname{Argch} \frac{1}{x}$ .

**7.4**

**Exemple de résolution d'une équation à une inconnue réelle, faisant intervenir cos et sin**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\cos^{11} x - \sin^{11} x = 1$ .

**7.5**

**Exemple de résolution d'un système de deux d'équations à deux inconnues réelles, faisant intervenir des sinus**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  :  $\begin{cases} \sin(x+y) = 2x \\ \sin(x-y) = 2y. \end{cases}$

**7.6**

**Calcul d'une limite faisant intervenir des cosinus en produit**

Déterminer, pour  $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  fixé,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n}$ .

**7.7**

**Calcul d'un produit de cosinus**

Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2^k \pi}{2^n - 1}$ .

**7.8**

**Un calcul de  $\cos \frac{\pi}{5}$**

a) On considère l'application

$$f : ]-\pi; \pi[ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin x}.$$

Montrer que  $f$  admet un prolongement continu  $g$  à  $]-\pi; \pi[$  et exprimer  $g$  (sans fraction).

b) En déduire la valeur de  $\cos \frac{\pi}{5}$ .

**7.9****Exemple d'utilisation des formules de trigonométrie circulaire**

Soient  $a, b \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $x, y \in ]0; +\infty[$ . Montrer :

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{x}{y} \iff \frac{\tan \frac{a-b}{2}}{\tan \frac{a+b}{2}} = \frac{x-y}{x+y}.$$

**7.10****Exemple d'équation portant sur des exponentielles**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $3^x + 4^x = 5^x$ .

**7.11****Exemple de résolution d'un système de deux équations à deux inconnues réelles, faisant intervenir des exponentielles**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  :  $\begin{cases} x + e^x = y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 = 27. \end{cases}$

**7.12****Exemple d'étude de fonction faisant intervenir Arccos**

Étude et représentation graphique de la fonction  $f$  d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \text{Arccos}(2x^2 - 1).$$

**7.13****Exemple d'étude de fonction faisant intervenir Arcsin**

Étude et représentation graphique de  $f : x \mapsto \text{Arctan} \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ .

**7.14****Une égalité entre fonctions composées de fonctions circulaires et hyperboliques, directes et réciproques**

Montrer :  $\forall x \in [0; +\infty[, \text{Arctan}(\text{sh}x) = \text{Arccos} \left( \frac{1}{\text{ch}x} \right)$ .

**7.15****Exemple de résolution d'une équation à une inconnue réelle, faisant intervenir des Arcsin**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  : (1)  $\text{Arcsin } x + \text{Arcsin } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$ .

**7.16****Exemple d'inégalité sur des sinus et des cosinus**

a) Soient  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ,  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in [0; +\infty[$ . Montrer :

$$\left( \prod_{i=1}^n a_i + \prod_{i=1}^n b_i \right)^2 \leq \prod_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2).$$

b) En déduire, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$|\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z| \leq 1.$$

**7.17****Lien entre  $\tan \theta$  et  $\frac{1}{\cos \theta}$** 

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)  $P$  est pair

(ii)  $\exists Q \in \mathbb{R}[X], \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, P(\tan \theta) = Q\left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right)$ .

**7.18 Exemple d'inégalité sur  $\sin x$** 

a) Montrer :  $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right], \sin x \leqslant \frac{1}{2} \sqrt{\pi x}$ .

b) En déduire :  $\forall t \in [0 ; \pi], \sin t \leqslant \frac{\pi}{4} \sqrt{t(\pi - t)}$ .

**7.19 Exemple d'inégalités faisant intervenir des logarithmes**

a) Montrer, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 < x < y$  :  $\frac{y-x}{\ln y - \ln x} < \frac{x+y}{2}$ .

b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$ .

**7.20 Exemple d'inégalité à une variable réelle, faisant intervenir un logarithme**

Montrer :  $\forall x \in ]0 ; +\infty[, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ .

**7.21 Exemple d'équation à une inconnue réelle, faisant intervenir des puissances**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $x^{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$ .

**7.22 Une fonction de deux variables réelles qui se simplifie**

Simplifier, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  $f(x, y) = \arccos \frac{1 - xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$ .

**7.23 Sommes d'Arctan**

a) Montrer, pour tout  $(a, b) \in [0 ; 1[^2$  :  $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$ .

b) En déduire la valeur de :  $S = 5 \arctan \frac{1}{8} + 2 \arctan \frac{1}{18} + 3 \arctan \frac{1}{57}$ .

**7.24 Équivalence logique entre des égalités faisant intervenir des intégrales**

Montrer, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  :

$$y = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t} \iff x = \int_0^y \frac{dt}{\cos t}.$$

**7.25 Un exemple de fonction de classe  $C^\infty$ , autre que la fonction nulle, qui s'annule, ainsi que toutes ses dérivées successives, en 0**

Montrer que l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$

**7.26 Exemple de famille libre de trois fonctions, faisant intervenir des exponentielles et sin**

On note  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = e^{\sin x}$ . Montrer que la famille  $(f, f^2, f \circ f)$  est libre.



## 7.27

**La fonction sin n'est pas une fonction rationnelle**

Montrer que la restriction de sin à tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , non vide ni réduit à un point, n'est pas une fonction rationnelle, c'est-à-dire n'est pas le quotient de deux polynômes à coefficients réels.

## Du mal à démarrer ?

**7.1** Utiliser la formule :  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ .

**7.2** Se ramener à des exponentielles et faire le changement d'inconnues  $X = e^x$ ,  $Y = e^y$ .

**7.3** Composer, par exemple, par th pour se ramener à une équation algébrique.

**7.4** Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude, et comparer avec  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

**7.5** Élever au carré et utiliser l'inégalité classique :  $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leq |t|$ , ou encore :  $\sin^2 t \leq t^2$ .

**7.6** Remarquer que tous les facteurs sont dans  $[0 ; 1]$  et que (si  $a \neq 0$ ) la deuxième moitié d'entre eux sont assez loin de 1.

**7.7** Remarquer, pour tout  $a \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$  :  $\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}$  et effectuer un télescopage multiplicatif.

**7.8** a) Développer  $\sin 3x$  et  $\sin 2x$ , puis simplifier la fraction obtenue.

**7.9** Raisonner par équivalences logiques successives, en utilisant des formules de trigonométrie circulaire.

On pourra noter, pour la commodité :  $u = \frac{a-b}{2}$ ,  $v = \frac{a+b}{2}$ .

**7.10** Remarquer une solution particulière.

En divisant par  $5^x$ , amener la stricte monotonie d'une fonction.

**7.11** Remarquer que  $t \mapsto t + e^t$  est injective, d'où  $x = y$ .

**7.12** Transformer l'écriture de  $f(x)$  en utilisant :

$$2 \cos^2 t - 1 = \cos 2t.$$

**7.13** Remarquer  $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  et transformer l'écriture de  $f(x)$ .

**7.14** Montrer que les deux membres sont dérivable, ont la même dérivée, et prennent la même valeur en au moins un point.

**7.15** Faire passer un terme de l'autre côté, situer les deux membres dans certains intervalles, et composer par sin .

**7.16** a) Récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 2$  résulte de l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

**7.17** Séparer clairement les deux sens de l'équivalence logique.

Pour (i)  $\implies$  (ii), exprimer la forme d'un polynôme pair et exprimer  $\tan^2 \theta$  à l'aide de  $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ .

**7.18** a) La présence d'une racine carrée peut inciter à essayer d'appliquer l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

b) Appliquer a) à  $\frac{t}{2}$  et à  $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ .

**7.19** a) En posant  $t = \frac{y}{x}$ , se ramener à l'étude des variations d'une fonction.

b) Remarquer :  $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$ .

**7.20** La présence d'une racine carrée peut inciter à essayer d'appliquer l'inégalité de Cauchy et Schwarz. Si on n'y pense pas, on peut étudier les variations d'une fonction, après divers changements de variable éventuellement.

**7.21** Montrer  $x > 0$ , puis poser  $t = x^{\frac{1}{2}}$  pour se ramener à une équation plus simple, pour la résolution de laquelle on pourra étudier les variations d'une fonction.

**7.22** La présence de  $1 + x^2$  fait penser à une formule de trigonométrie contenant  $1 + \tan^2 t$ . En notant  $t = \text{Arctan } x$ ,  $u = \text{Arctan } y$ , exprimer  $\frac{1 - xy}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}}$  en fonction de  $t$  et  $u$ . Séparer ensuite en cas selon la situation de  $t + u$ .

**7.23** a) Montrer que les deux membres sont dans  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  et ont la même tan.

b) Grouper les termes de façon à appliquer a) plusieurs fois.

**7.24** Calculer les deux intégrales de l'énoncé.

**7.25** Calculer, pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f'(x)$  et  $f''(x)$ , et en déduire la forme de  $f^{(n)}(x)$ , par un raisonnement par récurrence. Exploiter le théorème limite de la dérivée.

**7.26** Écrire une combinaison linéaire nulle, dériver, simplifier, dériver à nouveau.

**7.27** Raisonner par l'absurde et considérer les degrés.

# Corrigés des exercices

**7.1** On a, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} & \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{2} \\ \iff & \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 4} + \frac{\ln x}{\ln 8} = \frac{11}{2} \\ \iff & \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{2 \ln 2} + \frac{\ln x}{3 \ln 2} = \frac{11}{2} \\ \iff & \frac{\ln x}{\ln 2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2} \iff \frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{11}{2} \cdot \frac{6}{11} = 3 \\ \iff & \ln x = 3 \ln 2 = \ln 8 \iff x = 8. \end{aligned}$$

On conclut que l'équation proposée admet une solution et une seule, qui est 8.

**7.2** On a, par addition et par soustraction :

$$(S) \iff \begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{-x} + e^{-y} = 3. \end{cases}$$

Notons  $X = e^x$ ,  $Y = e^y$ . On a :

$$\begin{aligned} (S) \iff & \begin{cases} X + Y = 5 \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} X + Y = 5 \\ X + Y = 3XY \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = \frac{5}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation du second degré  $t^2 - 5t + \frac{5}{3} = 0$  a pour discriminant  $\Delta = 25 - 4 \cdot \frac{5}{3} = \frac{55}{3}$ , donc admet pour solutions

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{\frac{55}{3}}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{165}}{6}, \text{ qui sont tous les deux } > 0.$$

On obtient  $X$  et  $Y$ , à l'ordre près, puis  $x$  et  $y$  par  $x = \ln X$ ,  $y = \ln Y$ .

On conclut que le système proposé a deux solutions exactement, le couple  $\left(\ln \frac{15 - \sqrt{165}}{6}, \ln \frac{15 + \sqrt{165}}{6}\right)$  et le couple renversé de celui-ci.

**7.3** Les termes de l'équation sont définis si et seulement si :

$$x \in ]-1; 1[, x \neq 0, \frac{1}{x} \in [1; +\infty[, \text{ ce qui revient à : } x \in ]0; 1[.$$

On a, pour tout  $x \in ]0; 1[$ , puisque  $\operatorname{th}$  est injective, en notant (1) l'équation proposée :

$$\begin{aligned} (1) \iff & \operatorname{th}(\operatorname{Argth} x) = \operatorname{th}\left(\operatorname{Argch} \frac{1}{x}\right) \\ \iff & \operatorname{sh}\left(\operatorname{Argch} \frac{1}{x}\right) \\ \iff & x = \frac{\operatorname{sh}\left(\operatorname{Argch} \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{Argch} \frac{1}{x}\right)} \\ \iff & x = \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}{\frac{1}{x}} \iff 1 = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \\ \iff & 1 = \frac{1}{x^2} - 1 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

car  $x \in ]0; 1[$ .

On conclut que l'équation proposée admet une solution et une seule,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

On contrôle, pour  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{Argth} x &= \operatorname{Argth} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{2} \ln ((\sqrt{2} + 1)^2) \\ &= \ln (\sqrt{2} + 1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Argch} \frac{1}{x} &= \operatorname{Argch} \sqrt{2} = \ln \left( \sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} \right) \\ &= \ln (\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

#### 7.4

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$  une solution. Notons  $t = -x$ . On a alors :  $\cos^{11}t + \sin^{11}t = 1$ . Comme  $\cos^2t + \sin^2t = 1$ , on déduit :

$$\underbrace{(\cos^2t - \cos^{11}t)}_{\geq 0} + \underbrace{(\sin^2t - \sin^{11}t)}_{\geq 0} = 0,$$

d'où  $\begin{cases} \cos^2t - \cos^{11}t = 0 \\ \sin^2t - \sin^{11}t = 0 \end{cases}$ , puis  $\begin{cases} \cos t \in \{0,1\} \\ \sin t \in \{0,1\} \end{cases}$ , donc  $t \equiv 0 \pmod{2\pi}$  ou  $t \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ ,

puis  $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$  ou  $x \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ .

2) La réciproque est immédiate.

On conclut que l'ensemble  $S$  des solutions de l'équation proposée est :  $S = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$ .

#### 7.5

1) Soit  $(x,y)$  une solution. On a alors :

$$\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) = 4x^2 + 4y^2.$$

Mais, d'autre part, on sait :  $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leq |t|$ , d'où :

$$\begin{aligned} \sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) &\leq (x+y)^2 + (x-y)^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2. \end{aligned}$$

On déduit :  $4(x^2 + y^2) \leq 2(x^2 + y^2)$ , d'où  $x^2 + y^2 = 0$ , puis  $x = y = 0$ .

2) Réciproque évidente.

On conclut que le système proposé admet une solution et une seule :  $(0,0)$ .

#### 7.6

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n}$ .

1) Si  $a = 0$ , alors  $u_n = 1 \xrightarrow{n \infty} 1$ .

2) Supposons  $a \neq 0$ .

Scindons (pour  $n \geq 4$ ) le produit définissant  $u_n$  en deux parties :  $u_n = v_n w_n$ , où :

$$v_n = \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cos \frac{ka}{n}, \quad w_n = \prod_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}^n \cos \frac{ka}{n}.$$

D'une part :  $0 \leq v_n \leq 1$ , car chaque facteur de  $v_n$  est dans  $[0; 1]$ .

D'autre part, pour tout  $k \in \left\{E\left(\frac{n}{2}\right), \dots, n\right\}$  :

$$\frac{n}{2} \leq E\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \leq k \leq n \implies 0 \leq \frac{a}{2} \leq \frac{ka}{n} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\implies 0 \leq \cos \frac{ka}{n} \leq \cos \frac{a}{2} < 1,$$

puisque la fonction  $\cos$  est décroissante sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

On a donc, par produit :  $0 \leq w_n \leq \left(\cos \frac{a}{2}\right)^{n-E\left(\frac{n}{2}\right)}$ .

Comme  $0 \leq \cos \frac{a}{2} < 1$ ,

$$\text{et que } n - E\left(\frac{n}{2}\right) \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \xrightarrow{n \infty} +\infty,$$

on déduit :  $w_n \xrightarrow{n \infty} 0$ .

D'où :  $u_n = v_n w_n \xrightarrow{n \infty} 0$ .

On conclut :  $\lim_{n \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n} = 0$ .

7.7 On a, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ , donc, pour tout  $a \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$  :  $\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ .

On a :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \frac{2^k \pi}{2^n - 1} \in ]0; \pi[ \subset \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}.$$

D'où, par télescopage :

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2^k \pi}{2^n - 1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2^{k+1} \pi}{2^n - 1}}{2 \sin \frac{2^k \pi}{2^n - 1}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2^{k+1} \pi}{2^n - 1}}{\sin \frac{2^k \pi}{2^n - 1}} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \frac{2^n \pi}{2^n - 1}}{\sin \frac{\pi}{2^n - 1}}.$$

Comme  $\frac{2^n \pi}{2^n - 1} = \pi + \frac{\pi}{2^n - 1}$ ,

on a :  $\sin \frac{2^n \pi}{2^n - 1} = -\sin \frac{\pi}{2^n - 1}$ ,

et donc :  $A_n = -\frac{1}{2^n}$ .

D'autre part :  $A_1 = \cos \pi = -1$ .

On conclut :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ -\frac{1}{2^n} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$

**7.8**

a) On dispose des formules de trigonométrie :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x(2 \cos^2 x - 1) \\ &= \sin x(4 \cos^2 x - 1). \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout  $x \in ]-\pi; \pi[-\{0\}$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin x(4 \cos^2 x - 1) - 2 \sin x \cos x}{\sin x} \\ &= 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1. \end{aligned}$$

L'application

$g : ]-\pi; \pi[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1$  est continue et prolonge  $f$  à  $]-\pi; \pi[$ , ce qui montre le résultat demandé.

b) Notons  $a = \frac{\pi}{5}$ . On a :  $a \in ]-\pi; \pi[-\{0\}$

$$\text{et } f(a) = \frac{\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = 0,$$

$$\text{car } \sin \frac{3\pi}{5} = \sin \left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin \frac{2\pi}{5}.$$

D'où, d'après  $a$  :  $g(a) = f(a) = 0$ ,

$$\text{donc : } 4 \cos^2 a - 2 \cos a - 1 = 0.$$

On résout cette équation du second degré. Le discriminant  $\Delta$

$$\text{est : } \Delta = 4 + 16 = 20, \text{ donc } \cos a = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Mais } \cos a \geqslant 0, \text{ et on conclut : } \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \simeq 0,809\dots$$

**7.9**

$$\text{Notons } u = \frac{a-b}{2}, v = \frac{a+b}{2}.$$

On a alors  $a = u + v$ ,  $b = v - u$  et  $\cos u \cos v \neq 0$ . D'où :

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{x}{y} \iff y \sin(u+v) = x \sin(v-u)$$

$$\iff y(\sin u \cos v + \sin v \cos u)$$

$$= x(\sin v \cos u - \sin u \cos v)$$

$$\iff y \frac{\sin u \cos v + \sin v \cos u}{\cos u \cos v}$$

$$= x \frac{\sin v \cos u - \sin u \cos v}{\cos u \cos v}$$

$$\iff y(\tan u + \tan v) = x(\tan v - \tan u)$$

$$\iff (x+y)\tan u = (x-y)\tan v \iff \frac{\tan u}{\tan v} = \frac{x-y}{x+y},$$

d'où le résultat demandé.

**7.10**

• On remarque que 2 est solution :

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

• On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$3^x + 4^x = 5^x \iff \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Considérons l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = e^{x \ln \frac{3}{5}} + e^{x \ln \frac{4}{5}} - 1.$$

L'application  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \underbrace{\left(\ln \frac{3}{5}\right)}_{<0} e^{x \ln \frac{3}{5}} + \underbrace{\left(\ln \frac{4}{5}\right)}_{<0} e^{x \ln \frac{4}{5}} < 0.$$

Il en résulte que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ , donc injective, et donc l'équation proposée admet au plus une solution.

Finalement, l'équation proposée admet une solution et une seule, 2.

**7.11**

L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto t + e^t$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t) = 1 + e^t > 0$ , donc  $f$  est strictement croissante, donc injective. D'où :

$$x + e^x = y + e^y \iff x = y.$$

Puis :

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 27 \iff 3x^2 = 27 \iff x^2 = 9 \\ &\iff x = \pm 3. \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions du système proposé est  $\{(-3, -3), (3, 3)\}$ .

**7.12** 1) Ensemble de définition

On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1 \iff 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2$$

$$\iff x^2 \leqslant 1 \iff x \in [-1; 1],$$

donc  $\text{Déf}(f) = [-1; 1]$ .

On remarque que  $f$  est paire, et on peut donc restreindre l'étude à  $x \in [0; 1]$ .

2) Transformation de l'écriture de  $f(x)$ 

Soit  $x \in [0; 1]$ . Notons  $t = \text{Arccos } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . On a :

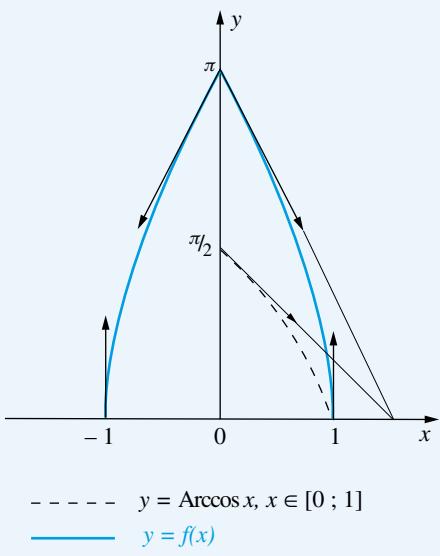
$$f(x) = \text{Arccos}(2x^2 - 1)$$

$$= \text{Arccos}(2 \cos^2 t - 1) = \text{Arccos}(\cos 2t).$$

Comme  $2t \in [0; \pi]$ , on obtient :  $f(x) = 2 \text{Arccos } x$ .

### 3) Tracé de la représentation graphique de $f$

Pour  $x \in [0 ; 1]$ , on trace la représentation graphique de Arccos, puis on multiplie les ordonnées par 2 (affinité d'axe  $x'$ , de direction  $y'y$ , de rapport 2), puis on effectue la symétrie par rapport à  $y'y$ .



- 7.13** 1) Il est clair que  $\text{Def}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ , et que  $f$  est  $2\pi$ -périodique. On peut donc restreindre l'étude à  $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$ .

De plus :  $\forall x \in \text{Def}(f)$ ,  $f(\pi - x) = f(x)$ .

On fera donc varier  $x$  dans  $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ , puis on effectuera la symétrie par rapport à la droite d'équation  $x = \frac{\pi}{2}$ .

2) Soit  $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ . On a :

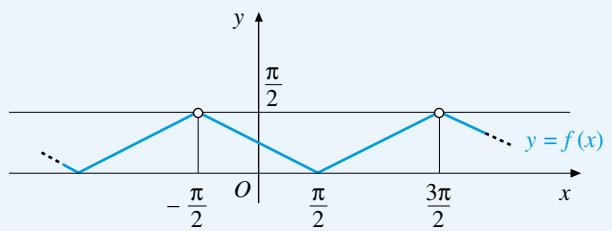
$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} &= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\ &= \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

et donc :  $f(x) = \text{Arctan}\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|$ .

Comme  $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ , on déduit :  $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ .

3) On a alors, pour tout  $x$  de  $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$ ,  $\pi - x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ , et donc :

$$f(x) = f(\pi - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\pi - x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}.$$



- 7.14** Notons  $f, g : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  les applications définies, pour tout  $x \in [0 ; +\infty[$ , par :

$$f(x) = \text{Arctan}(\text{sh } x), \quad g(x) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch } x}\right).$$

Par composition,  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[0 ; +\infty[$ , dérivables sur  $]0 ; +\infty[$ , et, pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$  :

$$f'(x) = \frac{\text{ch } x}{1 + \text{sh}^2 x} = \frac{\text{ch } x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch } x},$$

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2 x}}} \cdot \frac{-\text{sh } x}{\text{ch}^2 x} = \frac{\text{ch } x}{\sqrt{\text{ch}^2 x - 1}} \cdot \frac{\text{sh } x}{\text{ch}^2 x} \\ &= \frac{1}{\text{ch } x}, \end{aligned}$$

donc  $f' = g'$ .

Il existe donc  $C \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in [0 ; +\infty[, f(x) = g(x) + C.$$

En remplaçant  $x$  par 0, comme  $f(0) = 0$  et  $g(0) = \text{Arccos } 1 = 0$ , on déduit  $C = 0$  et on conclut :  $f = g$ .

- 7.15** On a, pour tout  $x \in [-1 ; 1]$  :

$$(1) \iff \text{Arcsin} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x.$$

Comme le premier membre de cette équation est dans  $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$  et que le second est dans  $[0 ; \pi]$ , on a :

$$(1) \iff \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin\left(\text{Arcsin} \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x\right) \end{cases} \quad (2)$$

On a :

$$(3) \iff \frac{x}{2} = \cos(\text{Arcsin } x) \iff \frac{x}{2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 4(1 - x^2) \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 5x^2 = 4 \end{cases} \iff x = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ainsi, l'équation (3) a une solution et une seule,  $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ , et on a alors, pour cette valeur de  $x$  :

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

donc  $x$  est aussi solution de (2).

Finalement, l'équation proposée a une solution et une seule, qui est  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ .

### 7.16 a) Récurrence sur $n$ .

- Pour  $n = 2$ , on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$\begin{aligned} (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 &= \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right)^2 \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right\|^2 \left\| \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2). \end{aligned}$$

- Supposons la propriété vraie pour un  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ .

Soient  $a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_{n+1} \in [0; +\infty[$ . On a :

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=1}^{n+1} a_i + \prod_{i=1}^{n+1} b_i \right)^2 &= \left( \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) a_{n+1} + \left( \prod_{i=1}^n b_i \right) b_{n+1} \right)^2 \\ &\stackrel{\text{cas } n=2}{\leq} \left( \left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^2 + \left( \prod_{i=1}^n b_i \right)^2 \right) (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2). \end{aligned}$$

Il est clair que :  $\forall (\alpha, \beta) \in [0; +\infty[^2, \alpha^2 + \beta^2 \leq (\alpha + \beta)^2$ , comme on le voit en développant le carré au second membre. D'où :

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=1}^{n+1} a_i + \prod_{i=1}^{n+1} b_i \right)^2 &\leq \left( \prod_{i=1}^n a_i + \prod_{i=1}^n b_i \right)^2 (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2) \\ &\stackrel{\text{hyp. réc. } n}{\leq} \left( \prod_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) \right) (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2) = \prod_{i=1}^{n+1} (a_i^2 + b_i^2). \end{aligned}$$

Ceci établit la propriété voulue, par récurrence sur  $n$ .

b) On applique a) à  $n = 3$ ,  $a_1 = |\sin x|$ ,  $a_2 = |\sin y|$ ,  $a_3 = |\sin z|$ ,  $b_1 = |\cos x|$ ,  $b_2 = |\cos y|$ ,  $b_3 = |\cos z|$ , d'où :

$$\begin{aligned} &(\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z)^2 \\ &\leq \left( |\sin x| |\sin y| |\sin z| + |\cos x| |\cos y| |\cos z| \right)^2 \\ &\leq (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 y + \cos^2 y)(\sin^2 z + \cos^2 z) = 1, \end{aligned}$$

et on conclut, en prenant les racines carrées, à l'inégalité demandée.

### 7.17 (i) $\Rightarrow$ (ii) :

On suppose  $P$  pair. Il existe  $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^{2k}$ .

On a, pour tout  $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$\begin{aligned} P(\tan \theta) &= \sum_{k=0}^n a_k \tan^{2k} \theta = \sum_{k=0}^n a_k (\tan^2 \theta)^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left( \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)^k = \sum_{k=0}^n a_k \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right)^k. \end{aligned}$$

Pour chaque  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\left( \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right)^k$  se développe en  $Q_k \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} \right)$ , où  $Q_k$  est un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ .

On a alors, en notant  $Q = \sum_{k=0}^n a_k Q_k$  :

$$P(\tan \theta) = \sum_{k=0}^n a_k Q_k \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) = Q \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} \right).$$

### (ii) $\Rightarrow$ (i) :

On suppose qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], P(\tan \theta) &= Q \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \\ P(-x) &= P(-\tan \theta) = P(\tan(-\theta)) \\ &= Q \left( \frac{1}{\cos^2(-\theta)} \right) = Q \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \\ &= P(\tan \theta) = P(x), \end{aligned}$$

donc  $P$  est pair.

### 7.18 a) L'application $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sin x$

est de classe  $C^1$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , donc, pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$\sin x = f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \cos t dt.$$

On applique l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left( \int_0^x \cos t dt \right)^2 \leq \left( \int_0^x 1^2 dt \right) \left( \int_0^x \cos^2 t dt \right) \\ &= x \int_0^x \cos^2 t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leqslant x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt \\ &= x \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi x}{4}. \end{aligned}$$

D'autre part,  $\sin x \geqslant 0$ , car  $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ .

On conclut :  $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\sin x \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\pi x}$ .

b) Soit  $t \in [0 ; \pi]$ . Notons  $x = \frac{t}{2}$ . En appliquant a) à  $x$  et à  $\frac{\pi}{2} - x$ , qui sont dans  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ , on obtient :

$$0 \leqslant \sin x \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\pi x}$$

et

$$0 \leqslant \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\pi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)},$$

d'où, par produit :  $\sin x \cos x \leqslant \frac{\pi}{4}\sqrt{x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ ,

et donc :  $\sin t = \sin 2x \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{t}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)} = \frac{\pi}{4}\sqrt{t(\pi - t)}$ .

**7.19** a) On a, avec les notations de l'énoncé, et en notant (1) l'inégalité voulue :

$$(1) \iff 2(y - x) < (x + y)(\ln y - \ln x)$$

$$\iff 2\left(\frac{y}{x} - 1\right) < \left(1 + \frac{y}{x}\right)\ln\frac{y}{x}.$$

En notant  $t = \frac{y}{x} \in ]1 ; +\infty[$ , on a :

$$(1) \iff 2(t - 1) < (t + 1)\ln t \iff \ln t > 2\frac{t - 1}{t + 1}.$$

Considérons

$$f : [1 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = \ln t - 2\frac{t - 1}{t + 1}.$$

L'application  $f$  est dérivable sur  $[1 ; +\infty[$  et, pour tout  $t \in [1 ; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{t} - 2\frac{(t + 1) - (t - 1)}{(t + 1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t + 1)^2} \\ &= \frac{(t + 1)^2 - 4t}{t(t + 1)^2} = \frac{(t - 1)^2}{t(t + 1)^2} \\ &\geqslant 0 \text{ et } > 0 \text{ si } t \neq 1. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $f$  est strictement croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

De plus,  $f(1) = 0$ , d'où :  $\forall t \in ]1 ; +\infty[, f(t) > 0$ , ce qui montre l'inégalité voulue.

b) On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en utilisant a) appliquée à  $(k, k + 1)$  à la place de  $(x, y)$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} &= \sum_{k=1}^n k \frac{(k + 1) - k}{\ln(k + 1) - \ln k} \\ &< \sum_{k=1}^n k \frac{k + (k + 1)}{2} = \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n + 1)}{2} \\ &= \frac{n(n + 1)}{12} (2(2n + 1) + 3) \\ &= \frac{n(n + 1)(4n + 5)}{12}. \end{aligned}$$

**7.20** Première méthode : utilisation de l'inégalité de Cauchy et Schwarz

On a, pour tout  $y \in [0 ; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} (\ln(1 + y))^2 &= \left(\int_1^{1+y} \frac{1}{t} \, dt\right)^2 \\ &\leqslant \left(\int_1^{1+y} 1^2 \, dt\right) \left(\int_1^{1+y} \frac{1}{t^2} \, dt\right) \\ &= ((1 + y) - 1) \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{1+y} \\ &= y \left(1 - \frac{1}{1 + y}\right) = \frac{y^2}{1 + y}. \end{aligned}$$

D'où, pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ , en remplaçant  $y$  par  $\frac{1}{x}$  :

$$\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^2 \leqslant \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{x(x + 1)},$$

et donc, puisque  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \geqslant 0$  :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x(x + 1)}}.$$

Seconde méthode : utilisation des variations d'une fonction

Par le changement de variable  $t = 1 + \frac{1}{x} > 1$ ,  $x = \frac{1}{t - 1}$ , on a, en notant (1) l'inégalité demandée :

$$(1) \iff \ln t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t-1} \cdot \frac{t}{t-1}}} \iff \ln t \leqslant \frac{t-1}{\sqrt{t}}.$$

Puis, en posant  $u = \sqrt{t} > 1$ ,  $t = u^2$  :

$$(1) \iff \ln(u^2) \leq \frac{u^2 - 1}{u} \iff 2\ln u \leq u - \frac{1}{u}.$$

L'application

$$f : [1 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto f(u) = u - \frac{1}{u} - 2\ln u$$

est dérivable sur  $[1 ; +\infty[$  et, pour tout  $u \in [1 ; +\infty[$  :

$$f'(u) = 1 + \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} = \frac{u^2 + 1 - 2u}{u^2} = \frac{(u-1)^2}{u^2} \geq 0.$$

Il en résulte que  $f$  est croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

De plus,  $f(1) = 0$ . On a donc  $f \geq 0$ , d'où le résultat demandé

**7.21** Si  $x \in \mathbb{R}$  est solution, alors  $x^{\frac{1}{2}}$  existe, donc  $x \geq 0$ .

De plus, 0 n'est pas solution, car :  $0^{0^{\frac{1}{2}}} = 0^0 = 1 \neq \frac{1}{2}$ .

D'autre part, si  $x \geq 1$ , alors  $x^{\frac{1}{2}} \geq 1$ , puis  $x^{x^{\frac{1}{2}}} \geq 1$ , donc  $x$  n'est pas solution.

On peut donc supposer :  $x \in ]0 ; 1[$ .

Notons  $t = x^{\frac{1}{2}} > 0$ . On a :

$$\begin{aligned} x^{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} &\iff x^{\frac{1}{2}} \ln x = \ln \frac{1}{2} \iff t \ln(t^2) = -\ln 2 \\ &\iff t \ln t + \frac{\ln 2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Considérons  $f : ]0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(t) = t \ln t + \frac{\ln 2}{2}$ .

L'application  $f$  est dérivable sur  $]0 ; 1]$  et :

$$\forall t \in ]0 ; 1], f'(t) = 1 + \ln t,$$

d'où le tableau des variations de  $f$ :

$t$	0	$e^{-1}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{\ln 2}{2}$	$< 0$	$\frac{\ln 2}{2}$

Et :  $f(e^{-1}) = -e^{-1} + \frac{\ln 2}{2} \simeq -0,021 < 0$ .

Il en résulte que  $f$  s'annule en deux points exactement.

De plus, on remarque :  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} = 0$ ,

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2} = 0.$$

Ainsi :  $f(t) = 0 \iff t \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$ .

Enfin, comme  $x = t^2$ , on conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est  $\left\{\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right\}$ .

On peut contrôler :

$$\bullet \text{ pour } x = \frac{1}{16}, \text{ on a : } x^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4},$$

$$x^{x^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ pour } x = \frac{1}{4}, \text{ on a : } x^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, x^{x^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

**7.22** Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Notons  $t = \arctan x, u = \arctan y$ .

On a donc :

$$x = \tan t, \quad y = \tan u, \quad (t, u) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{1 - xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} &= \frac{1 - \tan t \tan u}{\sqrt{1+\tan^2 t}\sqrt{1+\tan^2 u}} \\ &= \frac{1 - \tan t \tan u}{|\cos t| |\cos u|} = \frac{1 - \tan t \tan u}{\cos t \cos u} \\ &= \cos t \cos u - \sin t \sin u = \cos(t+u). \end{aligned}$$

Il en résulte, puisque  $\cos(t+u) \in [-1 ; 1]$  et que  $\arccos$  est définie sur  $[-1 ; 1]$ , que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

De plus :  $t+u \in ]-\pi; \pi[$ . Séparons en deux cas :

• *Premier cas* :  $t+u \in [0 ; \pi[$

Alors :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \arccos(\cos(t+u)) = t+u \\ &= \arctan x + \arctan y. \end{aligned}$$

• *Second cas* :  $t+u \in ]-\pi ; 0]$

Alors,  $-(t+u) \in [0 ; \pi[, donc :$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \arccos(\cos(t+u)) \\ &= \arccos(\cos(-(t+u))) = -(t+u) \\ &= -(\arctan x + \arctan y). \end{aligned}$$

Enfin :

$$t+u \geq 0 \iff \arctan x \geq -\arctan y$$

$$\iff \arctan x \geq \arctan(-y)$$

$$\iff x \geq -y \iff x+y \geq 0.$$

On conclut :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \operatorname{sgn}(x+y)(\arctan x + \arctan y),$$

où  $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction signe, définie par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} -1 & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

**7.23** a) Soit  $(a,b) \in [0; 1[^2$ .

Notons  $u = \operatorname{Arctan} a$      $v = \operatorname{Arctan} b$ .

On a alors, par une formule de trigonométrie sur  $\tan$  :

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Comme  $(u,v) \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]^2$ , on a  $u+v \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et on déduit :  
 $u+v = \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}$ , d'où le résultat voulu.

b) On applique a) de façon répétée :

$$\begin{aligned} S &= 2\left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{8} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{18}\right) \\ &\quad + 3\left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{8} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{57}\right) \\ &= 2\operatorname{Arctan} \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{18}}{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{18}} + 3\operatorname{Arctan} \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{57}}{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{57}} \\ &= 2\operatorname{Arctan} \frac{2}{11} + 3\operatorname{Arctan} \frac{1}{7} \\ &= 2\left(\operatorname{Arctan} \frac{2}{11} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7}\right) + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} \\ &= 2\operatorname{Arctan} \frac{\frac{2}{11} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{7}} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} \\ &= 2\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} \\ &= \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7}\right) + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} \\ &= \operatorname{Arctan} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} \\ &= \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} \\ &= \operatorname{Arctan} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**7.24** On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t} &= \int_0^x \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^2 t} dt \underset{u=\operatorname{sh} t}{=} \int_0^{\operatorname{sh} x} \frac{du}{1+u^2} \\ &= [\operatorname{Arctan} u]_0^{\operatorname{sh} x} = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) \end{aligned}$$

et, pour tout  $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{dt}{\cos t} &= \int_0^y \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt \underset{v=\sin t}{=} \int_0^{\sin y} \frac{dv}{1-v^2} \\ &= [\operatorname{Argth} v]_0^{\sin y} = \operatorname{Argth}(\sin y). \end{aligned}$$

Soit  $(x,y) \in \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . On a :

•  $y = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) \implies \tan y = \operatorname{sh} x$

$$\begin{aligned} \implies \sin y &= \tan y \cos y = \frac{\tan y}{\sqrt{1+\tan^2 y}} \\ &= \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x \\ \implies x &= \operatorname{Argth}(\sin y) \end{aligned}$$

•  $x = \operatorname{Argth}(\sin y) \implies \operatorname{th} x = \sin y$

$$\begin{aligned} \implies \tan y &= \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} \\ &= \frac{\operatorname{th} x}{\frac{1}{\operatorname{ch} x}} = \operatorname{sh} x \\ \implies y &= \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x). \end{aligned}$$

On conclut à l'équivalence logique demandée.

**7.25** Montrons, par récurrence, que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$  et qu'il existe un polynôme  $P_n$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\begin{cases} f^{(n)}(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{cases}$$

La propriété est immédiate pour  $n = 0$ , en posant  $P_0 = 1$ , puisque  $e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Supposons-la vraie pour un  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

D'après les théorèmes généraux,  $f$  est de classe  $C^{n+1}$  sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ , et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{P'_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}} - 3n \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

En notant  $P_{n+1}$  le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par :

$P_{n+1} = X^3 P'_n - 3nX^2 P_n + 2P_n$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Comme  $f^{(n)}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable en tout point de  $\mathbb{R}^*$ , et que  $(f^{(n)})'(x) = f^{(n+1)}(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$  par prépondérance de l'exponentielle sur les polynômes, on déduit (théorème limite de la dérivée) que  $f^{(n)}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $f^{(n+1)}(0) = 0$ . Finalement,  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ .  
Remarque : Nous verrons dans le Cours d'Analyse de 2<sup>e</sup> année que cette application  $f$ , bien qu'étant de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , n'est pas développable en série entière autour de 0.

**7.26** Soit  $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$  tel que :  $af + bf^2 + cf \circ f = 0$ .

Comme  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , par opérations,  $f, f^2, f \circ f$  sont  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et on a, par dérivation :

$$af' + 2bff' + c(f' \circ f)f' = 0.$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{\sin x} \cos x.$$

On déduit, en simplifiant par  $f'(x)$  lorsque  $f'(x) \neq 0$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \quad a + 2bf(x) + c(f' \circ f)(x) = 0.$$

Comme l'application figurant dans le premier membre est continue sur  $\mathbb{R}$ , on déduit, par prolongement par continuité, que ce premier membre est nul sur tous les réels :

$$a + 2bf + c(f' \circ f) = 0.$$

À nouveau par dérivation :  $2bf' + c(f'' \circ f)f' = 0$ , puis, par le même raisonnement que ci-dessus :

$$2b + c(f'' \circ f) = 0.$$

À nouveau, par dérivation :  $c(f''' \circ f)f' = 0$ , et donc, par le même raisonnement que plus haut :  $c(f''' \circ f) = 0$ .

On calcule, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'''(x)$  en passant par  $f''(x)$  :

$$f''(x) = e^{\sin x} \cos^2 x - e^{\sin x} \sin x = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x),$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= e^{\sin x} \cos x (\cos^2 x - \sin x) \\ &\quad + e^{\sin x} (-2 \sin x \cos x - \cos x) \\ &= e^{\sin x} (\cos^3 x - 3 \sin x \cos x - \cos x) \\ &= e^{\sin x} \cos x (\cos^2 x - 3 \sin x - 1). \end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} (f''' \circ f)(0) &= f'''(f(0)) = f'''(1) \\ &= e^{\sin 1} \cos 1 (\cos^2 1 - 3 \sin 1 - 1) \neq 0, \end{aligned}$$

donc  $f''' \circ f \neq 0$ .

On déduit  $c = 0$ , puis, comme  $2bf' = 0$  et que  $f'$  n'est pas la fonction nulle, on déduit  $b = 0$ , puis, comme  $af = 0$  et que  $f$  n'est pas la fonction nulle, on déduit  $a = 0$ .

Ceci montre que la famille  $(f, f^2, f \circ f)$  est libre.

**7.27** Raisonnons par l'absurde ; supposons qu'il existe une fonction rationnelle  $f$ , définie sur  $I$ , telle que :

$$\forall x \in I, \quad \sin x = F(x).$$

Il existe  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times (\mathbb{R}(X) - \{0\})$  tel que :  $F = \frac{P}{Q}$ .

De plus, comme  $\sin$  n'est la fonction nulle sur aucun intervalle de longueur  $> 0$ , on a nécessairement  $P \neq 0$ .

Remarquons que la fonction  $\sin$  est deux fois dérivable sur  $I$  et que  $\sin'' = -\sin$ .

On a donc :  $\forall x \in I, \quad F''(x) = -F(x)$ .

On a :  $F = \frac{P}{Q}$ , donc  $F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$ , d'où, sur les degrés :

$$\deg(F') = \deg(P'Q - PQ') - \deg(Q^2)$$

$$\leqslant (\deg(P) + \deg(Q) - 1) - 2\deg(Q)$$

$$= \deg(P) - \deg(Q) - 1 = \deg(F) - 1,$$

puis, de même,  $\deg(F'') \leqslant \deg(F') - 1$ ,

d'où  $\deg(F'') \leqslant \deg(F) - 2$ .

On aboutit à une contradiction, puisque  $F'' = -F$  et que  $\deg(F) \in \mathbb{Z}$ .

Finalement, on conclut que la restriction de la fonction  $\sin$  à  $I$  n'est pas une fonction rationnelle.

*Remarque* : La même méthode montre que la restriction de la fonction  $\cos$  à  $I$  n'est pas une fonction rationnelle.

Ou bien encore, comme  $\cos' = -\sin$ , si  $\cos$  était une fonction rationnelle, par dérivation,  $\sin$  le serait, ce qui contredit le résultat obtenu plus haut.



# Comparaison locale des fonctions

CHAPITRE **8**

## Plan

Les méthodes à retenir	113
Énoncés des exercices	116
Du mal à démarrer ?	119
Corrigés	121

## Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de limites, équivalents, développements limités, développements asymptotiques
- Développement limité, développement asymptotique d'une fonction réciproque
- Limite, équivalent, développement asymptotique d'une intégrale dépendant d'un paramètre
- Limite, équivalent, développement asymptotique des solutions d'une équation à paramètre.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Propriétés des fonctions ou des suites ayant une limite finie ou une limite infinie, pour les opérations algébriques et l'ordre usuel
- Définition et propriétés de l'équivalence, de la négligeabilité
- Liens entre régularité d'une fonction et existence de développements limités
- Théorème de Taylor-Young
- Équivalents et développements limités usuels, à savoir par cœur
- Notion de développement asymptotique, dans les cas simples usuels, et leur manipulation.

## Les méthodes à retenir

Pour calculer une limite se présentant sous une forme indéterminée

Essayer de :

- transformer l'écriture de la fonction

→ Exercice 8.1

- utiliser les prépondérances classiques des puissances sur les logarithmes, et des exponentielles sur les puissances, c'est-à-dire plus précisément les limites suivantes du Cours :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \text{ pour } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \text{ fixé}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0, \text{ pour } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \text{ fixé}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \text{ pour } (a, \alpha) \in ]1; +\infty[ \times \mathbb{R} \text{ fixé}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x |x|^\alpha = 0, \text{ pour } (a, \alpha) \in ]1; +\infty[ \times \mathbb{R} \text{ fixé.}$$

→ Exercice 8.4

– utiliser des équivalents, surtout pour les formes indéterminées

$$0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}.$$

→ Exercice 8.8 a)

– utiliser des développements limités, surtout pour la forme indéterminée  $\infty - \infty$ .

→ Exercices 8.8 b) à g).

### Pour lever une indétermination de la forme $1^\infty$

Prendre le logarithme, ou encore écrire  $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$ .

→ Exercices 8.3 a), b).

### Pour former un $DL(0)$ d'une fonction

Utiliser les  $DL(0)$  usuels et les opérations sur ces  $DL(0)$  : troncature, dérivation, primitive, addition, loi externe, multiplication, composition, inverse. Se ramener, si nécessaire, au voisinage de 0 par transformation de l'écriture.

→ Exercices 8.2 a), b), c), 8.9, 8.12 b)

Essayer d'anticiper l'ordre auquel développer certaines parties de l'écriture, afin d'arriver au bon ordre pour le développement limité demandé.

→ Exercices 8.7 b), c), d).

### Pour former un $DL(a)$ d'une fonction $f : x \mapsto f(x)$ , pour $a \neq 0$

Faire un changement de variable pour se ramener à des  $DL(0)$ .

Si  $a \in \mathbb{R}^*$ , noter  $t = x - a$ .

Si  $a = \pm\infty$ , noter  $t = \frac{1}{x}$ .

Le résultat final,  $DL_n(a)$ , sera donné à l'aide d'un polynôme en  $t$ , ordonné selon les puissances croissantes de  $t$ .

En aucun cas on ne développera les puissances de  $x - a$ .

→ Exercice 8.2 d).

### Pour calculer un équivalent simple d'une fonction en un point

Essayer de :

– utiliser des équivalents si la fonction se présente comme un produit

→ Exercices 8.5, 8.8

– utiliser des développements limités si la fonction se présente comme une différence.

→ Exercice 8.8.

**Pour étudier limite, équivalent, développement limité pour une fonction du type :**

$$f : x \longmapsto u(x)^{v(x)}$$

**Pour obtenir le développement limité à un ordre numériquement fixé d'une fonction réciproque, ou d'une fonction implicite, ou d'une fonction satisfaisant une équation différentielle**

**Pour obtenir un développement asymptotique d'une fonction**

**Pour obtenir des renseignements locaux sur les racines d'une équation dépendant d'un paramètre  $n \in \mathbb{N}$  (par exemple)**

**Pour trouver la limite d'une intégrale  $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$  dépendant d'un paramètre  $n \in \mathbb{N}$  (par exemple)**

**Pour trouver un équivalent simple d'une intégrale  $I_n$  dépendant d'un paramètre  $n \in \mathbb{N}$  (par exemple)**

Étudier d'abord  $\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$ , puis reprendre l'exponentielle pour étudier  $f(x) = e^{v(x) \ln u(x)}$ .

→ Exercices 8.3 a), b), 8.4, 8.5, 8.8 b), d), f), g).

Montrer d'abord que la fonction en question est de classe  $C^\infty$ , donc admet un développement limité à tout ordre, d'après le théorème de Taylor-Young, puis, pour calculer le *DL*, procéder par coefficients indéterminés.

→ Exercices 8.13, 8.16.

Essayer de se ramener à un développement limité par transformation de l'écriture, mise en facteur, changement de variable.

→ Exercice 8.10.

Montrer d'abord l'existence de ces racines et les situer, à l'aide de l'étude des variations d'une fonction.

Les renseignements seront obtenus successivement : limite, équivalent simple, développement limité ou développement asymptotique, etc.

→ Exercices 8.17 à 8.19.

Essayer de deviner la limite  $\ell$  de  $I_n$ , qui est souvent  $\int_a^b f(x) dx$ , si, pour tout  $x \in [a ; b]$ ,  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ , puis montrer  $|I_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , par une majoration appropriée.

→ Exercices 8.14 a), 8.15 b).

La question sera reprise et approfondie en deuxième année, à l'aide, en particulier, du théorème de convergence dominée.

Essayer de transformer l'écriture de  $I_n$  (changement de variable, intégration par parties, relation de Chasles), de façon à ramener la recherche d'un équivalent à la recherche d'une limite d'une autre intégrale.

→ Exercices 8.14 b), 8.15 b).

# Énoncés des exercices

## 8.1 Exemples de calculs de limites sans emploi de développement limité

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{2}{x^2 - 4x + 3} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{(x-2)(x+1)} - \sqrt{(x-1)(x+2)} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)}.$$

## 8.2 Exemples de calculs de développements limités

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction  $f$  définie par la formule suivante (variable  $x$ ) :

$$a) \text{ordre } 2, \text{ voisinage de } 0, \ln(e^{2x} + 2e^x + 3)$$

$$b) \text{ordre } 2, \text{ voisinage de } 0, \sqrt{8 + \sqrt{1 + 6x}}$$

$$c) \text{ordre } 6, \text{ voisinage de } 0, \operatorname{ch}(\ln(\operatorname{ch} x)).$$

$$d) \text{ordre } 2, \text{ voisinage de } 1, \ln(1 + x^2).$$

## 8.3 Exemples de calculs de limites sans emploi de développement limité

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^{\operatorname{e}^{2x} \ln x} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} x \right)^{\operatorname{ch}(\ln x)} \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4} \cos n + \frac{4}{3} \sin \frac{1}{n} \right)^n.$$

## 8.4 Exemple de calcul de limites de fonctions d'écritures proches

Déterminer les limites, lorsque  $x$  tend vers  $0^+$  de :

$$f(x) = x^{x^x} - 1, \quad g(x) = x^{x^x-1}, \quad h(x) = x^{x^{x-1}}.$$

## 8.5 Exemple de fonctions équivalentes

Montrer que les quatre fonctions données par

$$(\operatorname{sh} x)^{\operatorname{sh} x}, \quad (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} x}, \quad (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}, \quad (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{ch} x},$$

sont équivalentes entre elles lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

## 8.6 Exemples d'équivalents de sommes

Montrer :

$$a) \sum_{k=n+1}^{2n} k! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (2n)! \quad b) \sum_{k=0}^n 2^k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2^{n+1} \quad c) \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{3} n \sqrt{n}.$$

**8.7****Exemples de calculs de développements limités**

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction  $f$  définie par la formule suivante (variable  $x$ ) :

a) ordre 3, voisinage de 0,  $\text{Arctan} \frac{1+x}{1+2x}$

b) ordre 2, voisinage de 0,  $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\text{sh}^2 x}$

c) ordre 8, voisinage de 0,  $((\cos x)^{x^2} - 1)\tan^3 x$

d) ordre 17, voisinage de 0,  $\sqrt{\cos(x^3) + \text{ch}(x^3) - 2}$ .

**8.8****Exemples de calculs de limites par emploi de développements limités**

Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\text{th}^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2 \sin x - \tan x}{3x - 2 \text{sh} x - \text{th} x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2^x + 3^x - 4^x)^{\frac{1}{x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^4 + 3x^3} - 2\sqrt{x^4 + 2x^3} + \sqrt{x^4 + x^3} \right)$

f)  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} (\tan x)^{\tan 2x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3^x + 4^x - 6^x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$ .

**8.9****Exemple de développement limité d'une fonction composée**

a) Former le  $DL_2(0)$  de  $\varphi : t \mapsto \text{Arctan}(1+t)$ .

b) En déduire le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto \text{Arctan} \sqrt{\frac{\sin x}{x}}$ .

**8.10****Exemple de recherche de paramètre de façon à obtenir un certain comportement local pour une fonction**

Déterminer  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixé pour que la fonction  $f$ , donnée par

$$f(x) = \cotan^2 x + \cotan^2 2x - \lambda \cotan^2 3x,$$

admette une limite finie lorsque  $x$  tend vers 0, et déterminer alors cette limite.

**8.11****Calcul des dérivées successives en un point, par intervention d'un développement limité**

On note  $f : ]0; 2[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{2-x}$ . Calculer  $f^{(k)}(1)$  pour  $k \in \{0, \dots, 4\}$ .

**8.12****Exemples de calculs de développements limités**

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction  $f$  définie par la formule suivante (variable  $x$ ) :

a) ordre 22, voisinage de 0,  $\exp \left( \sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right)$

b) ordre 3, voisinage de 0,  $\int_x^{2x} \ln(1+t) \ln(1-t) dt$ .

**8.13 Exemple de développement limité d'une fonction réciproque**

On note  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = \ln(1+x^2) - x$ .

a) Montrer que  $f$  est bijective.

b) Former le  $DL_4(0)$  de  $f^{-1}$ .

**8.14 Exemple de recherche de limite et d'équivalent d'une intégrale**

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$ .

a) Calculer  $I_n + I_{n+2}$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

b) 1) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \tan^n x \, dx = \frac{1}{2} - nI_n.$$

2) En déduire un équivalent simple de  $I_n$  lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini.

**8.15 Exemple de recherche de limite et d'équivalent d'une intégrale**

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n} \, dx$ .

a) Trouver  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

b) On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n} \, dx$ .

1) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |I_n - J_n| \leq \frac{1}{2n(n+1)}$ .

2) Calculer  $J_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3) En déduire un équivalent simple de  $I_n$  lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini.

**8.16 Exemple de développement limité d'une fonction donnée indirectement**

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé  $(O; i, j)$ , on considère l'arc paramétré  $C$  :

$$x = t + \sin t, \quad y = 1 + \cos t, \quad t \in ]-\pi; \pi[.$$

a) Montrer que  $C$  est la courbe représentative d'une fonction  $\varphi : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ .

b) Former le  $DL_4(0)$  de  $\varphi$ .

**8.17 Étude locale des zéros d'un polynôme de degré 3 dont les coefficients dépendent d'un paramètre**

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$P_n = X^3 - (n+2)X^2 + (2n+1)X - 1 \in \mathbb{R}[X].$$

a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand,  $P_n$  admet trois zéros, notés  $a_n, b_n, c_n$ , tels que :  $0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n$ .

b) Montrer successivement :

$$c_n \lim_{n \rightarrow \infty} +\infty, \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad c_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n, \quad b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2, \quad a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

### 8.18 Exemple d'étude locale d'une fonction réciproque au voisinage de $+\infty$

On note  $f : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ .

a) Montrer que  $f$  est une bijection et que  $f^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Former un développement asymptotique de  $f^{-1}(y)$  à la précision  $o\left(\frac{1}{y^2}\right)$  lorsque  $y$  tend vers  $+\infty$ .

### 8.19 Exemple d'études asymptotiques de suites définies indirectement

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f_n(x) = e^x + x^2 - nx$ .

a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  admet un minimum  $\mu_n$  atteint en un point et un seul noté  $x_n$ .

b) Déterminer des équivalents simples de  $x_n$  et  $\mu_n$  lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini.

## Du mal à démarrer ?

- 8.1** Repérer d'abord s'il s'agit d'une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on transformera l'écriture de  $f(x)$  :
- calcul élémentaire, pour a)
  - utilisation d'une expression conjuguée lorsqu'intervient la différence de deux racines carrées, pour b), c)
  - expression des fonctions hyperboliques directes, pour d).

- 8.2** Composer les développements limités usuels, en se rattachant au voisinage de 0 par transformation de l'écriture.

- 8.3** Repérer d'abord s'il s'agit d'une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on transforme l'écriture de  $f(x)$ , par composition par le logarithme lorsque l'expression proposée contient la variable aux deux étages.

- 8.4** Transformer l'écriture des fonctions de façon que la variable n'intervienne plus sur plusieurs étages, en utilisant le logarithme et l'exponentielle.

- 8.5** Prendre une notation permettant de grouper les quatre fonctions en une seule. Puisque la variable  $x$  intervient aux deux étages, passer par le logarithme.

- 8.6** Notons, dans chaque exemple,  $S_n$  la sommation proposée.
- a) Former  $S_n - (2n)!$  et isoler le dernier terme.
  - b) Calculer la sommation géométrique.
  - c) Amener une somme de Riemann.

- 8.7** a) On ne peut pas composer directement les  $DL$ , car  $\frac{1+x}{1+2x}$  ne tend pas vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0. Dériver, développer, puis primitiver.  
b), c), d) Déterminer d'abord l'ordre auquel il faudra développer certaines parties de l'écriture de  $f(x)$ .

- 8.8** a) Réduire au même dénominateur et factoriser  $\tan^2 x - \operatorname{th}^2 x$ .  
b), d), f), g) Prendre le logarithme.  
c) Chercher un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.  
e) Se ramener à utiliser le  $DL(0)$  de  $u \mapsto (1+u)^{\frac{1}{2}}$ , par factorisation des  $x^4$ .

- 8.9** a) Former d'abord le  $DL_1(0)$  de  $\varphi'$ , puis primitiver.  
b) Composer les  $DL$  de  $x \mapsto \sqrt{\frac{\sin x}{x}} - 1$  et de  $\varphi$ .

**8.10** Former un développement asymptotique de  $\cotan^2 t$  à la précision  $o(1)$ , appliquer à  $t = x, t = 2x, t = 3x$ , pour déduire un développement asymptotique de  $f(x)$  à la précision  $o(1)$ .

**8.11** Il serait trop long de calculer formellement les  $f^{(k)}(x)$  puis de remplacer  $x$  par 1. Passer par la notion de développement limité et utiliser le théorème de Taylor-Young.

**8.12** a) Reconnaître dans la sommation la partie régulière d'un  $DL(0)$  usuel. L'exemple est assez artificiel.

b) Former un  $DL(0)$  de la dérivée, puis primitiver.

**8.13** a) Montrer qu'on peut appliquer le théorème de la bijection monotone.

b) Montrer que  $f^{-1}$  est de classe  $C^\infty$ , d'où l'existence du  $DL_4(0)$  d'après le théorème de Taylor-Young. Pour calculer le  $DL_4(0)$  de  $f^{-1}$ , procéder par coefficients indéterminés, en utilisant  $x = f^{-1}(f(x))$ , de préférence à  $y = f(f^{-1}(y))$ .

**8.14** a) Remarquer que les  $I_n$  sont toutes  $\geqslant 0$ .

b) 2) Montrer  $\frac{1}{2} - nI_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ .

**8.15** a) Encadrer convenablement  $I_n$ .

b) 2) Remarquer la présence simultanée des expressions  $x^n$  et  $x^{n-1}$ , cette dernière étant presque la dérivée de  $x^n$  par rapport à  $x$ .

**8.16** a) Montrer que  $x : t \mapsto t + \sin t$  est une bijection de  $]-\pi ; \pi[$  sur lui-même, puis considérer  $\varphi = y \circ x^{-1}$ .

b) Montrer que  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0, d'où, par le théorème de Taylor-Young, l'existence d'un  $DL(0)$  de  $\varphi$  à tout ordre. Procéder par coefficients indéterminés.

**8.17** a) Étudier les variations de  $P_n$ . Calculer  $P_n(0), P_n(1), P_n(3)$ ,  $P_n\left(\frac{2n+1}{3}\right)$  et étudier leurs signes.

b) Utiliser les relations entre coefficients et racines d'une équation, afin d'avoir des liens entre  $a_n, b_n, c_n$ .

**8.18** a) Étudier les variations de  $f$ .

b) Noter  $x = f^{-1}(y)$  et  $t = x + 1$ , de sorte que  $y = f(x)$ ,  $x = -1 + t$ ,  $t \rightarrow 0$ . Utiliser l'égalité de définition de  $f$ .

**8.19** a) Étudier les variations de  $f_n$ , en calculant  $f'_n$  et  $f''_n$ .

b) • Comparer, pour  $x \in [0; +\infty[$ ,  $e^x$  et  $x$ , pour déduire ensuite  $x_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ .

• En utilisant la relation  $f''_n(x_n) = 0$ , qui définit  $x_n$ , déduire  $x_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$ .

• Le minimum  $\mu_n$  est donné par  $\mu_n = f_n(x_n)$ .

# Corrigés des exercices

**8.1** On note, dans chaque exemple,  $f(x)$  l'expression proposée.

a) Il s'agit de la forme indéterminée  $\infty - \infty$ .

On transforme l'écriture de  $f(x)$ , en factorisant d'abord les dénominateurs :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-2)(x-3)} - \frac{2}{(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{1}{x-3} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-1} \right) \\ &= \frac{1}{x-3} \frac{-x+3}{(x-2)(x-1)} \\ &= -\frac{1}{(x-2)(x-1)} \xrightarrow{x \rightarrow 3} -\frac{1}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Il s'agit d'une forme indéterminée  $\infty - \infty$ .

Utilisons une expression conjuguée pour transformer l'écriture de  $f(x)$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x-2)(x+1)} - \sqrt{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(x-2)(x+1) - (x-1)(x+2)}{\sqrt{(x-2)(x+1)} + \sqrt{(x-1)(x+2)}} \\ &= \frac{-2x}{\sqrt{(x-2)(x+1)} + \sqrt{(x-1)(x+2)}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1. \end{aligned}$$

c) Il s'agit d'une forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ .

Utilisons une expression conjuguée, pour transformer l'écriture de  $f(x)$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+3} &= \frac{(2x^2+1) - (x^2+x+3)}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+x+3}} \\ &= \frac{x^2-x-2}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+x+3}} \\ &= \frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+x+3}} \end{aligned}$$

et :  $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ , d'où :

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+x+3})} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{1}{2}.$$

d) Il s'agit d'une forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Transformons l'écriture de  $f(x)$  :

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{ch}x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}x)} = \frac{e^{\operatorname{ch}x} - e^{-\operatorname{ch}x}}{2} \cdot \frac{2}{e^{\operatorname{sh}x} + e^{-\operatorname{sh}x}}.$$

Comme  $e^{\operatorname{ch}x}$  et  $e^{\operatorname{sh}x}$  tendent vers  $+\infty$  et que  $e^{-\operatorname{ch}x}$  et  $e^{-\operatorname{sh}x}$  tendent vers 0, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\operatorname{ch}x}}{e^{\operatorname{sh}x}} = e^{\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x} = e^{e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

**8.2** a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(e^{2x} + 2e^x + 3) \\ &= \ln \left[ \left( 1 + 2x + \frac{1}{2!}(2x)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \right) + 3 + o(x^2) \right] \\ &= \ln(6 + 4x + 3x^2 + o(x^2)) \\ &= \ln 6 + \ln \left( 1 + \underbrace{\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2}_{\rightarrow 0} + o(x^2) \right) \\ &= \ln 6 + \left( \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2 \right)^2 + o(x^2) \\ &= \ln 6 + \left( \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{4}{9}x^2 + o(x^2) \\ &= \ln 6 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{18}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

b) On a, pour  $x$  tendant vers 0 :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+6x} &= (1+6x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}6x - \frac{1}{8}(6x)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{8 + \sqrt{1 + 6x}} = \sqrt{9 + 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} \\
 &= 3 \left( 1 + \underbrace{\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}_{\rightarrow 0} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= 3 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 \right) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9}x^2 + o(x^2) \right] \\
 &= 3 \left( 1 + \frac{1}{6}x - \frac{19}{72}x^2 + o(x^2) \right) \\
 &= 3 + \frac{1}{2}x - \frac{19}{24}x^2 + o(x^2).
 \end{aligned}$$

c) On a :

$$\begin{aligned}
 \ln(\operatorname{ch} x) &= \ln \left( 1 + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}_{\rightarrow 0} \right) \\
 &= \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4) \\
 &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4),
 \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \operatorname{ch}(\ln(\operatorname{ch} x)) = \operatorname{ch} \left( \underbrace{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}_{\rightarrow 0} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \right)^2 + o(x^6) \\
 &= 1 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6).
 \end{aligned}$$

d) Puisque  $x \rightarrow 1 \neq 0$ , on effectue le changement de variable  $t = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ ,  $x = 1 + t$ . On a :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(1 + x^2) = \ln(1 + (1 + t)^2) \\
 &= \ln(2 + 2t + t^2) = \ln 2 + \ln \left( 1 + \underbrace{t + \frac{t^2}{2}}_{\rightarrow 0} \right) \\
 &= \ln 2 + \left( t + \frac{t^2}{2} \right) - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \\
 &= \ln 2 + t + o(t^2), \quad t = x - 1.
 \end{aligned}$$

**8.3** a) Il s'agit d'une forme indéterminée  $1^\infty$ .

On a :  $\ln(f(x)) = e^{2x} \ln x \ln(\operatorname{th} x)$ .

Comme  $\operatorname{th} x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 1$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \ln(\operatorname{th} x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \operatorname{th} x - 1 = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - 1 \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1 = \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -2e^{-2x}.
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{2x} \ln x (-2e^{-2x}) = -2 \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

et on conclut :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ .

b) Il s'agit d'une forme indéterminée  $1^\infty$ . On a :

$$\ln(f(x)) = \operatorname{ch}(\ln x) \ln \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} x \right).$$

D'une part :

$$\operatorname{ch}(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2} = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2}.$$

D'autre part, comme  $\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$  :

$$\begin{aligned}
 \ln \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} x \right) &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} x - 1 = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( \operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi x}.
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \ln(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2} \left( -\frac{2}{\pi x} \right) = -\frac{1}{\pi},$$

donc  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{\pi}$ , puis :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{\pi}}$ .

c) L'expression proposée ressemble à une suite géométrique dont la raison serait, en valeur absolue, proche de  $\frac{3}{4}$ . On a :

$$\frac{4}{3} \sin \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ donc, pour } n \text{ assez grand : } \left| \frac{4}{3} \sin \frac{1}{n} \right| \leqslant \frac{1}{8}.$$

On a alors, pour  $n$  assez grand :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{3}{4} \cos n + \frac{4}{3} \sin \frac{1}{n} \right| &\leqslant \frac{3}{4} |\cos n| + \left| \frac{4}{3} \sin \frac{1}{n} \right| \\
 &\leqslant \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},
 \end{aligned}$$

donc :

$$\left| \left( \frac{3}{4} \cos n + \frac{4}{3} \sin \frac{1}{n} \right)^n \right| \leqslant \left( \frac{7}{8} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

et on conclut que la limite cherchée existe et est égale à 0.

**8.4** 1) On a :  $f(x) = e^{x \ln x} - 1 = e^{e^{x \ln x} \ln x} - 1$ .

Comme  $x \ln x \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } 0$ , on a  $e^{x \ln x} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } 1$ ,

donc  $e^{x \ln x} \ln x \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } -\infty$ , puis :  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } -1$ .

2) On a :  $g(x) = e^{(x-1) \ln x} = e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x}$ .

Comme  $x \ln x \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } 0$ , on a  $e^{x \ln x} - 1 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x \ln x$ ,

puis  $(e^{x \ln x} - 1) \ln x \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x(\ln x)^2$ .

Par prépondérance classique,  $x(\ln x)^2 \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } 0$ ,

donc  $(e^{x \ln x} - 1) \ln x \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } 0$ , puis :  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } 1$ .

3) On a :  $h(x) = e^{x-1 \ln x} = e^{e^{(x-1) \ln x} \ln x}$ .

Comme  $x-1 \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } -1$ , on a  $(x-1) \ln x \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } +\infty$ ,

puis  $e^{(x-1) \ln x} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } +\infty$ ,  $e^{(x-1) \ln x} \ln x \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } -\infty$ ,

et enfin :  $h(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } 0$ .

**8.5** Notons  $f(x)$  l'une quelconque des quatre expressions proposées. Au voisinage de  $+\infty$ , on a  $\sinh x > 0$  et  $\cosh x > 0$ , donc  $f(x)$  existe et  $f(x) > 0$ . Notons  $\alpha = \pm 1$ ,  $\beta = \pm 1$  afin de grouper les quatre fonctions en une seule écriture. On a ainsi :

$$\ln(f(x)) = \frac{e^x + \alpha e^{-x}}{2} \ln\left(\frac{e^x + \beta e^{-x}}{2}\right).$$

Comme l'expression dans le logarithme tend vers  $+\infty$ , on factorise, à l'intérieur du logarithme, par  $\frac{e^x}{2}$  :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e^x + \beta e^{-x}}{2}\right) &= \ln\left(\frac{e^x}{2}(1 + \beta e^{-2x})\right) \\ &= x - \ln 2 + \ln(1 + \underbrace{\beta e^{-2x}}_{\rightarrow 0}) \\ &= x - \ln 2 + \beta e^{-2x} + o(e^{-2x}), \end{aligned}$$

que l'on peut affaiblir en :

$$\ln\left(\frac{e^x + \beta e^{-x}}{2}\right) = x - \ln 2 + o(e^{-x}).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \ln(f(x)) &= \frac{e^x + \alpha e^{-x}}{2}(x - \ln 2 + o(e^{-x})) \\ &= \frac{1}{2}(xe^x - e^x \ln 2 + o(1)). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{1}{2}(xe^x - e^x \ln 2 + o(1))} \\ &= e^{\frac{1}{2}(xe^x - e^x \ln 2)} e^{o(1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\frac{1}{2}(xe^x - e^x \ln 2)}. \end{aligned}$$

Ceci montre que les quatre fonctions de l'énoncé sont équivalentes, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , à une même fonction (indé-

pendante des signes  $\pm$  notés par  $\alpha$  et  $\beta$ ), et donc sont équivalentes entre elles.

**8.6** a) Puisque  $k!$  croît très rapidement lorsque  $k$  croît, on peut conjecturer que le dernier terme de la somme est essentiel. On isole alors les deux derniers termes et on a, par majoration d'une somme de réels, pour tout  $n \geq 2$  :

$$0 \leq S_n - ((2n-1)! + (2n)!)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n-2} k! \leq (n-2)(2n-2)! \leq (2n-1)!,$$

Puis :

$$0 \leq S_n - (2n)! = \left( \sum_{k=n+1}^{2n-2} k! \right) + (2n-1)! \leq 2(2n-1)!,$$

$$\text{donc : } 0 \leq \frac{S_n - (2n)!}{(2n)!} \leq \frac{2}{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ } 0.$$

Par théorème d'encadrement, on déduit que le terme encadré tend vers 0 et finalement :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (2n)!$$

b) On calcule la sommation géométrique :

$$S_n = \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2^{n+1}.$$

c) On a :  $\frac{1}{n\sqrt{n}} S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$ , et on reconnaît une somme de Riemann. Comme l'application  $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur le segment  $[0 ; 1]$ , d'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

et on conclut :  $S_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{3} n \sqrt{n}$ .

**8.7** a) L'application  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I = \left] -\frac{1}{2} ; +\infty \right[$ , et, pour tout  $x \in I$  :

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left( \frac{1+x}{1+2x} \right)^2} \cdot \frac{(1+2x) - 2(1+x)}{(1+2x)^2}$$

$$= \frac{-1}{(1+2x)^2 + (1+x)^2} = -\frac{1}{2+6x+5x^2}.$$

On en déduit le  $DL_2(0)$  de  $f'$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2+6x+5x^2} = -\frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{1+\left(3x+\frac{5}{2}x^2\right)}}_{\rightarrow 0} \\ &= -\frac{1}{2}\left[1-\left(3x+\frac{5}{2}x^2\right)+(3x)^2+o(x^2)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(1-3x+\frac{13}{2}x^2+o(x^2)\right) \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}x^2+o(x^2). \end{aligned}$$

D'après le cours, puisque  $f$  est de classe  $C^1$  et que  $f'$  admet un  $DL_2(0)$ ,  $f$  admet alors un  $DL_3(0)$  obtenu par primitivation :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}-\frac{13}{4}\frac{x^3}{3}+o(x^3) \\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x^2-\frac{13}{12}x^3+o(x^3). \end{aligned}$$

b) Comme  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \operatorname{sh}^2 x}$

et que le  $DL_2(0)$  de  $\sin^2 x \operatorname{sh}^2 x$  (au dénominateur) commence par  $x^4$ , il nous faut, pour  $\sin^2 x - \operatorname{sh}^2 x$  au numérateur, un  $DL_6(0)$ , afin d'obtenir un  $DL_2(0)$  de  $f$ .

On a, par linéarisation :

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+o(x^6)\right)\right] \\ &= x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^6), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^6)} \\ &= \frac{1}{x^2} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{45}x^4+o(x^4)}}_{\rightarrow 0} \\ &= \frac{1}{x^2}\left[1+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{45}x^4\right)+\frac{1}{9}x^4+o(x^4)\right] \\ &= \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{15}x^4+o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}x^2+o(x^2). \end{aligned}$$

De même, en changeant certains signes :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + o(x^2).$$

On conclut :

$$f(x) = \frac{2}{3} + o(x^2).$$

c) On a :  $(\cos x)^{x^2} - 1 = e^{x^2 \ln \cos x} - 1$ .

Comme  $\cos x \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$ , on déduit  $\ln \cos x \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ , puis  $x^2 \ln \cos x \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} (\cos x)^{x^2} - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \ln \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2(\cos x - 1) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^4}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part :  $\tan^3 x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$ .

Par produit, on a donc :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^7}{2}$ .

D'autre part,  $f$  est impaire, donc, sous réserve d'existence, la partie régulière du  $DL_8(0)$  de  $f$  est la même que celle du  $DL_7(0)$ .

Enfin,  $f$  admet un  $DL$  à tout ordre car, par opérations,  $f$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0.

On conclut :  $f(x) = -\frac{x^7}{2} + o(x^8)$ .

d) La fonction  $x \mapsto \cos(x^3) + \operatorname{ch}(x^3) - 2$  admet un  $DL(0)$  à tout ordre, commençant par un terme en  $(x^3)^4$ , car les termes constants s'éliminent et les termes en  $(x^3)^2$ s'éliminent aussi. On a donc un  $DL_n(0)$  de la forme :

$$\cos(x^3) + \operatorname{ch}(x^3) - 2 = \alpha x^{12} + \cdots + \lambda x^n + o(x^n),$$

où  $\alpha$  (à montrer  $> 0$ ) et  $\lambda$  sont des constantes.

Puis :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\cos(x^3) + \operatorname{ch}(x^3) - 2} \\ &= \sqrt{\alpha x^{12} + \cdots + \lambda x^n + o(x^n)} \\ &= \sqrt{\alpha} x^6 \left(1 + \cdots + \frac{\lambda}{\alpha} x^{n-12} + o(x^{n-12})\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\alpha} x^6 \left(1 + \cdots + o(x^{n-12})\right) \\ &= \sqrt{\alpha} x^6 + \cdots + o(x^{n-6}). \end{aligned}$$

On choisit donc  $n$  de façon que  $n-6=17$ , c'est-à-dire  $n=23$ .

On reprend le  $DL(0)$  de  $\cos(x^3) + \operatorname{ch}(x^3) - 2$ , dans lequel, à cause des  $DL(0)$  de  $\cos$  et  $\operatorname{ch}$ , les termes en  $(x^3)^6$  s'éliminent :

$$\cos(x^3) + \operatorname{ch}(x^3) - 2 =$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2!}(x^3)^2 + \frac{1}{4!}(x^3)^4 - \frac{1}{6!}(x^3)^6 + o(x^{23})\right) \\ & + \left(1 + \frac{1}{2!}(x^3)^2 + \frac{1}{4!}(x^3)^4 + \frac{1}{6!}(x^3)^6 + o(x^{23})\right) \\ & = \frac{1}{12}x^{12} + o(x^{23}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{1}{12}x^{12} + o(x^{23})} = \frac{1}{\sqrt{12}}x^6\sqrt{1 + o(x^{11})} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}x^6(1 + o(x^{11})) = \frac{\sqrt{3}}{6}x^6 + o(x^{17}). \end{aligned}$$

**8.8** Notons, dans chaque exemple,  $f(x)$  l'expression proposée.

a) On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\operatorname{th}^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\tan^2 x - \operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th}^2 x \tan^2 x} \\ &= \frac{(\tan x - \operatorname{th} x)(\tan x + \operatorname{th} x)}{\operatorname{th}^2 x \tan^2 x}. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \bullet \tan x - \operatorname{th} x &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{3}x^3, \\ \bullet \tan x + \operatorname{th} x &= (x + o(x)) + (x + o(x)) \\ &= 2x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x, \\ \bullet \tan^2 x &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2, \quad \operatorname{th}^2 x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{2}{3}x^3 \cdot 2x}{x^2 x^2} = \frac{4}{3}, \text{ et on conclut : } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{4}{3}.$$

b) On a :

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x^2} \ln\left[\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\right] \\ &= \frac{1}{x^2} \ln\left(1 - \underbrace{\frac{x^2}{6} + o(x^2)}_{\rightarrow 0}\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \ln(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}, \text{ et on conclut : } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{6}}.$$

c) On va chercher des équivalents pour les deux termes de la fraction donnant  $f(x)$ . Dans la recherche d'un équivalent de  $3x - 2 \sin x - \tan x$ , par addition de  $DL(0)$ , on constate que les termes en  $x$  s'éliminent et que les termes en  $x^3$  s'éliminent aussi.

On forme donc des  $DL_5(0)$  :

$$\begin{aligned} 3x - 2 \sin x - \tan x &= 3x - 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) \\ &\quad - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right) \\ &= \left(-\frac{2}{5!} - \frac{2}{15}\right)x^5 + o(x^5) \\ &= -\frac{3}{20}x^5 + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{3}{20}x^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2\operatorname{sh} x - \operatorname{th} x &= 3x - 2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) \\ &\quad - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right) \\ &= \left(-\frac{2}{5!} - \frac{2}{15}\right)x^5 + o(x^5) \\ &= -\frac{3}{20}x^5 + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{3}{20}x^5. \end{aligned}$$

On conclut :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1$ .

d) On a :

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \frac{1}{x} \ln(2^x + 3^x - 4^x) \\ &= \frac{1}{x} \ln(e^{x \ln 2} + e^{x \ln 3} - e^{x \ln 4}) \\ &= \frac{1}{x} \ln((1 + x \ln 2 + o(x)) \\ &\quad + (1 + x \ln 3 + o(x)) - (1 + x \ln 4 + o(x))) \\ &= \frac{1}{x} \ln\left(1 + x \underbrace{\ln \frac{3}{2}}_{\rightarrow 0} + o(x)\right) \\ &= \frac{1}{x} \left(x \ln \frac{3}{2} + o(x)\right) = \ln \frac{3}{2} + o(1), \end{aligned}$$

donc  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \ln \frac{3}{2}$ , puis, par continuité de l'exponentielle :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$ .

e) On a, en mettant  $x^4$  en facteur dans chaque racine carrée :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left[ \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - 2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= x^2 \left[ \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{x} - \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{x^2}\right) - 2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x} - \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{x^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= x^2 \left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = -\frac{1}{4} + o(1), \end{aligned}$$

et on conclut :  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} -\frac{1}{4}$ .

f) Puisque  $x \xrightarrow{} \frac{\pi}{4}^- \neq 0$ , faisons le changement de variable

$$t = x - \frac{\pi}{4} \xrightarrow[x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-]{} 0^+, \quad x = \frac{\pi}{4} + t. \quad \text{On a :}$$

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \tan 2x \ln(\tan x) \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right) \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\right) = -\frac{1}{\tan 2t} \ln \frac{1 + \tan t}{1 - \tan t} \\ &= -\frac{1}{\tan 2t} (\ln(1 + \tan t) - \ln(1 - \tan t)) \\ &= -\frac{1}{\tan 2t} ([\tan t + o(\tan t)] - [-\tan t + o(\tan t)]) \\ &= -\frac{1}{\tan 2t} (2 \tan t + o(\tan t)) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2 \tan t}{\tan 2t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2t}{2t} = -1, \end{aligned}$$

d'où :  $\ln(f(x)) \xrightarrow[x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-]{} -1$ , puis :  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-]{} e^{-1}$ .

g) Puisque  $x \xrightarrow{} 1 \neq 0$ , faisons le changement de variable  $t = x - 1 \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} 0$ ,  $x = 1 + t$ . On a :

$$\begin{aligned} \bullet \tan \frac{\pi x}{2} &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \frac{\pi t}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\frac{\pi t}{2}} = -\frac{2}{\pi t} \\ \bullet \ln(3^x + 4^x - 6^x) &= \ln(3 \cdot 3^t + 4 \cdot 4^t - 6 \cdot 6^t) \\ &= \ln(3 e^{t \ln 3} + 4 e^{t \ln 4} - 6 e^{t \ln 6}) \\ &= \ln(3(1 + t \ln 3 + o(t)) + 4(1 + t \ln 4 + o(t)) \\ &\quad - 6(1 + t \ln 6 + o(t))) \\ &= \ln\left(1 + \underbrace{(3 \ln 3 + 4 \ln 4 - 6 \ln 6)}_{\text{noté } \alpha} t + o(t)\right) = \alpha t + o(t). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \tan \frac{\pi x}{2} \ln(3^x + 4^x - 6^x) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2}{\pi t} \alpha t = -\frac{2\alpha}{\pi}, \\ \text{donc : } \ln(f(x)) &\xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{2\alpha}{\pi}, \text{ puis :} \\ f(x) &\xrightarrow[x \rightarrow 1]{} e^{-\frac{2\alpha}{\pi}} = (e^\alpha)^{-\frac{2}{\pi}} \\ &= \left(\frac{3^3 \cdot 4^4}{6^6}\right)^{-\frac{2}{\pi}} = \left(\frac{4}{27}\right)^{-\frac{2}{\pi}} = \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

**8.9** a) On ne peut pas composer les  $DL(0)$  directement, car  $1 + t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$ .

L'application  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{1 + (1+t)^2} = \frac{1}{2 + 2t + t^2}.$$

On forme le  $DL_1(0)$  de  $\varphi'$  :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{2} \left(1 + \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{\rightarrow 0}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(1 - t + o(t)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + o(t). \end{aligned}$$

D'après le Cours,  $\varphi$  admet un  $DL_2(0)$  obtenu en primitivant :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \frac{t^2}{2} + o(t^2) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + o(t^2).$$

b) D'abord, au voisinage de 0,  $\frac{\sin x}{x} \geqslant 0$ , donc  $f(x)$  existe.

L'énoncé sous-entend que  $f$  admet une limite finie en 0 ; on a :

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

On va utiliser le résultat de a), en remplaçant  $t$  par  $\sqrt{\frac{\sin x}{x}} - 1$ .

Formons le  $DL_4(0)$  de cette expression, en partant d'un  $DL_5(0)$  de  $\sin x$  :

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} - 1 &= \left(1 - \underbrace{\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4}_{\rightarrow 0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right) - \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2 - 1 + o(x^4) \\ &= -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{1440}x^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \varphi\left(\sqrt{\frac{\sin x}{x}} - 1\right) = \varphi\left(-\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{1440}x^4 + o(x^4)\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{1440}x^4\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{12}x^2\right)^2 + o(x^4) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

**8.10** Formons un développement asymptotique de  $\cotan t$  lorsque  $t$  tend vers 0 :

$$\begin{aligned}
\cotan t &= \frac{1}{\tan t} = \frac{1}{t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)} \\
&= \frac{1}{t} \left(1 + \underbrace{\frac{t^2}{3} + o(t^2)}_{\rightarrow 0}\right)^{-1} = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right).
\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\cotan^2 t &= \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right)^2 = \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{2t^2}{3} + o(t^2)\right) \\
&= \frac{1}{t^2} - \frac{2}{3} + o(1).
\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant  $t$  successivement par  $x, 2x, 3x$  :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{(2x)^2} - \frac{2}{3}\right) - \lambda\left(\frac{1}{(3x)^2} - \frac{2}{3}\right) + o(1) \\
&= \left(\frac{5}{4} - \frac{\lambda}{9}\right) \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}(\lambda - 2) + o(1).
\end{aligned}$$

$$\text{On a : } \frac{5}{4} - \frac{\lambda}{9} = 0 \iff \lambda = \frac{45}{4}.$$

Si  $\lambda \neq \frac{45}{4}$ , alors  $\frac{5}{4} - \frac{\lambda}{9} \neq 0$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \pm\infty$ ,  $f$  n'a pas de limite finie en 0.

$$\text{Si } \lambda = \frac{45}{4}, \text{ alors}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3}(\lambda - 2) = \frac{2}{3}\left(\frac{45}{4} - 2\right) = \frac{37}{6}.$$

Finalement  $f$  admet une limite finie en 0 si et seulement si  $\lambda = \frac{45}{4}$ , et cette limite est alors  $\frac{37}{6}$ .

**8.11** L'application  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0; 2[$ , donc, d'après le théorème de Taylor-Young,  $f$  admet un  $DL(1)$  à tout ordre, en particulier à l'ordre 4, et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^4 a_k(x-1)^k + \underset{x \rightarrow 1}{o}\left((x-1)^4\right),$$

$$\text{où } a_k = \frac{f^{(k)}(1)}{k!} \text{ pour } k \in \{0, \dots, 4\}.$$

Notons  $h = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ ,  $x = 1 + h$ . On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln x}{2-x} = \frac{\ln(1+h)}{1-h} = (\ln(1+h)) \frac{1}{1-h} \\
&= \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4)\right) \\
&\quad \left(1 + h + h^2 + h^3 + h^4 + o(h^4)\right) \\
&= h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{5}{6}h^3 + \frac{7}{12}h^4 + o(h^4).
\end{aligned}$$

On a donc, par unicité du  $DL_4(1)$  de  $f$ , par identification avec la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(1) &= 0!a_0 = 0, f^{(1)}(1) = 1!a_1 = 1, f^{(2)}(1) = 2!a_2 = 1, \\
f^{(3)}(1) &= 3!a_3 = 5, f^{(4)}(1) = 4!a_4 = 14.
\end{aligned}$$

**8.12** a) On reconnaît en la somme proposée la partie régulière du  $DL_{20}(0)$  de  $\ln(1+x)$ . On a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \frac{x^{21}}{21} - \frac{x^{22}}{22} + o(x^{22}).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right) \\
&= \exp\left(\ln(1+x) - \frac{x^{21}}{21} + \frac{x^{22}}{22} + o(x^{22})\right) \\
&= (1+x) \exp\left(-\frac{x^{21}}{21} + \frac{x^{22}}{22} + o(x^{22})\right) \\
&= (1+x)\left(1 - \frac{x^{21}}{21} + \frac{x^{22}}{22} + o(x^{22})\right) \\
&= 1+x - \frac{x^{21}}{21} + \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{21}\right)x^{22} + o(x^{22}) \\
&= 1+x - \frac{1}{21}x^{21} - \frac{1}{462}x^{22} + o(x^{22}).
\end{aligned}$$

b) L'application

$g : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto g(t) = \ln(1+t) \ln(1-t)$  est continue sur  $] -1; 1 [$ , donc l'application  $f : x \mapsto \int_x^{2x} f(t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $I = \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[$  et :

$$f'(x) = 2g(2x) - g(x)$$

$$= 2\ln(1+2x)\ln(1-2x) - \ln(1+x)\ln(1-x).$$

Pour obtenir un  $DL_3(0)$  de  $f$ , on forme un  $DL_2(0)$  de  $f'$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(2x + o(x))(-2x + o(x)) \\ &\quad + (x + o(x))(x + o(x)) \\ &= -7x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Par primitivation d'un  $DL(0)$ , on en déduit que  $f$  admet un  $DL_3(0)$  et que :

$$f(x) = f(0) + \left( -7 \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = -\frac{7}{3}x^3 + o(x^3).$$

- 8.13** a) D'après les théorèmes généraux,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x - 1 - x^2}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leqslant 0,$$

et  $f'$  ne s'annule que pour  $x = 1$ .

De plus :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ .

Il en résulte, d'après le théorème de la bijection monotone, que  $f$  est bijective.

b) D'après a), on peut former le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$\ln 2 - 1$	$-\infty$

Puisque  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I = ]-\infty; 1[$  et que  $f'$  ne s'annule en aucun point de  $I$ ,  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = ]\ln 2 - 1; +\infty[$ , et la bijection réciproque, notée  $f^{-1}$  encore, est de classe  $C^\infty$  sur  $J$ . Il en résulte, d'après le théorème de Taylor-Young, que  $f^{-1}$  admet un  $DL(0)$  à tout ordre, en particulier à l'ordre 4. Il existe donc  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que :

$$f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + o(y^4).$$

En notant  $x = f^{-1}(y)$ , on a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \ln(1+x^2) - x = \left( x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \right) - x \\ &= -x + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(f(x)) \\ &= a\left(-x + x^2 - \frac{1}{2}x^4\right) + b(-x + x^2)^2 \\ &\quad + c(-x + x^2)^3 + d(-x)^4 + o(x^4) \\ &= a\left(-x + x^2 - \frac{1}{2}x^4\right) + b(x^2 - 2x^3 + x^4) \\ &\quad + c(-x^3 + 3x^4) + dx^4 + o(x^4) \\ &= -ax + (a+b)x^2 + (-2b-c)x^3 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}a + b + 3c + d\right)x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Par unicité du  $DL_4(0)$  de la fonction  $x \mapsto x$ , on déduit :

$$\begin{aligned} -a &= 1, \quad a+b = 0, \quad -2b-c = 0, \\ -\frac{1}{2}a + b + 3c + d &= 0. \end{aligned}$$

On résout ce système linéaire par cascade :

$$\begin{aligned} a &= -1, \quad b = -a = 1, \quad c = -2b = -2, \\ d &= \frac{1}{2}a - b - 3c = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

On conclut au  $DL_4(0)$  de  $f^{-1}$  :

$$f^{-1}(y) = -y + y^2 - 2y^3 + \frac{9}{2}y^4 + o(y^4).$$

- 8.14** Remarquer d'abord que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$  existe car l'application  $x \mapsto \tan^n x$  est continue sur le segment  $[0; \frac{\pi}{4}]$ .

a) • On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx \\ &= \left[ \frac{\tan^{n+1} x}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

• Comme, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n \geqslant 0$ , on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1},$$

d'où, par théorème d'encadrement :  $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

b) I) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a, par une intégration par parties pour des fonctions de classe  $C^1$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \tan^n x dx &= \left[ \frac{\sin 2x}{2} \tan^n x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{2} n \tan^{n-1} x \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \frac{1}{2} - n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \tan^{n-1} x dx = \frac{1}{2} - n I_n. \end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} - nI_n \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \tan^n x \, dx \right| \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2x| \tan^n x \, dx \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx = I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

donc  $\frac{1}{2} - nI_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,  $2nI_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ , et on conclut :

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

**8.15** a) On a :

$$0 \leqslant I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n} \, dx \leqslant \int_0^1 x^{2n} \, dx = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc :  $I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

b) I) On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} |I_n - J_n| &= \left| \int_0^1 \frac{x^{2n} - x^{2n-1}}{1+x^n} \, dx \right| \leqslant \int_0^1 \frac{|x^{2n} - x^{2n-1}|}{1+x^n} \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2n-1} - x^{2n}}{1+x^n} \, dx \leqslant \int_0^1 (x^{2n-1} - x^{2n}) \, dx \\ &= \left[ \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n(2n+1)}. \end{aligned}$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour calculer  $J_n$ , faisons le changement de variable  $t = x^n$ ,  $dt = nx^{n-1} \, dx$  :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{n} \frac{t \, dt}{1+t} = \frac{1}{n} \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+t} \right) \, dt \\ &= \frac{1}{n} \left[ t - \ln(1+t) \right]_0^1 = \frac{1}{n} (1 - \ln 2). \end{aligned}$$

3) On a vu en I) :  $|I_n - J_n| \leqslant \frac{1}{2n(2n+1)}$ , donc :

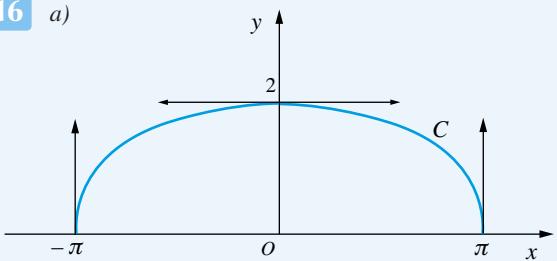
$$I_n - J_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'autre part, d'après 2) :  $J_n = \frac{1 - \ln 2}{n}$ .

D'où :  $I_n - J_n = o\left(\frac{1}{n}\right) = o(J_n)$ , donc :

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} J_n = \frac{1 - \ln 2}{n}.$$

**8.16** a)



L'application  $x : ]-\pi; \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto x(t) = t + \sin t$  est dérivable et :

$$\forall t \in ]-\pi; \pi[, x(t) = 1 + \cos t > 0.$$

Donc  $x$  réalise une bijection de  $]-\pi; \pi[$  sur  $x(]-\pi; \pi[) = ]-\pi; \pi[$ .

En notant  $\varphi = y \circ x^{-1}$ ,  $C$  est la courbe représentative de  $\varphi$ .

De plus, comme  $x$  est de classe  $C^\infty$  et que  $x'$  ne s'annule en aucun point, d'après le Cours,  $x^{-1}$  est de classe  $C^\infty$ . Puisque  $y$  est de classe  $C^\infty$ , par composition, on conclut que  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$ .

b) Puisque  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]-\pi; \pi[$ , d'après le théorème de Taylor-Young,  $\varphi$  admet un  $DL(0)$  à tout ordre. En particulier,  $\varphi$  admet un  $DL_4(0)$ .

Comme  $\varphi(0) = 2$  et que  $\varphi$  est paire, ce  $DL_4(0)$  est de la forme :

$$\varphi(t) = 2 + ax^2 + bx^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4),$$

où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  est à calculer.

En notant  $y = \varphi(x)$  et  $t \in ]-\pi; \pi[$  tel que  $y = 1 + \cos t$ , on a :  $t \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$  et :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= y = 1 + \cos t = 1 + \left( 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \right) \\ &= 2 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$x = t + \sin t = t + \left( t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4) \right) = 2t - \frac{t^3}{6} + o(t^4).$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 2 + ax^2 + bx^4 + o(x^4) \\ &= 2 + a \left( 2t - \frac{t^3}{6} \right)^2 + b(2t)^4 + o(t^4) \\ &= 2 + 4at^2 + \left( -\frac{2}{3}a + 16b \right)t^4 + o(t^4). \end{aligned}$$

Par unicité du  $DL_4(0)$  de  $y$ , on obtient :

$$4a = -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{3}a + 16b = \frac{1}{24},$$

$$\text{d'où : } a = -\frac{1}{8}, \quad b = \frac{1}{16} \left( \frac{1}{24} + \frac{2}{3}a \right) = -\frac{1}{384}.$$

On conclut :

$$\varphi(x) = 2 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{384}x^4 + o(x^4).$$

### 8.17 a) Le polynôme $P_n$ est dérivable et :

$$\begin{aligned} P'_n &= 3X^2 - 2(n+2)X + (2n+1) \\ &= (X-1)(3X-(2n+1)). \end{aligned}$$

On a  $\frac{2n+1}{3} > 1$  pour  $n \geq 2$ . Supposons donc  $n \geq 2$ .

On forme le tableau des variations de  $P_n$  :

$x$	$-\infty$	1	$\frac{2n+1}{3}$	$+\infty$
$P'_n(x)$	+	0	-	0
$P_n(x)$	$-\infty$			$+\infty$

On calcule :

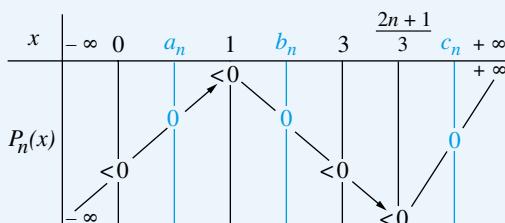
$$P_n(0) = -1 < 0, \quad P_n(1) = n-1 > 0,$$

$$P_n(3) = -3n+11 < 0 \text{ pour } n \geq 4.$$

Pour  $n \geq 4$ , on a  $\frac{2n+1}{3} \geq 3$ , donc, comme  $P_n$  décroît sur  $[1; \frac{2n+1}{3}]$ , il en résulte :  $P\left(\frac{2n+1}{3}\right) < 0$ .

D'après le théorème de la bijection monotone par intervalles, on en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand,  $P_n$  admet exactement trois zéros réels, notés  $a_n, b_n, c_n$  tels que :

$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n.$$



b) D'après les relations entre coefficients et racines, on a :

$$\begin{aligned} a_n + b_n + c_n &= n+2, \quad a_n b_n + a_n c_n + b_n c_n = 2n+1, \\ a_n b_n c_n &= 1. \end{aligned}$$

I) Puisque  $c_n > \frac{2n+1}{3}$ , on a :  $c_n \xrightarrow{n \infty} +\infty$ .

2) Comme :  $0 < a_n = \frac{1}{b_n c_n} < \frac{1}{c_n} \xrightarrow{n \infty} 0$ , on déduit  $a_n \xrightarrow{n \infty} 0$ .

3) On a :  $c_n = (n+2) - b_n - a_n$ , et  $0 < a_n < 1 < b_n < 3$ , donc :  $c_n = n+2 + O(1)$ , et donc :  $c_n \underset{n \infty}{\sim} n$ .

4) On a :  $b_n = \frac{2n+1-a_n b_n - a_n c_n}{c_n}$ . Comme  $a_n \xrightarrow{n \infty} 0$ ,

$1 < b_n < 3$  et  $0 < a_n c_n = \frac{1}{b_n} < 1$ , on a :

$2n+1-a_n b_n - a_n c_n \underset{n \infty}{\sim} 2n$ , et donc  $b_n \underset{n \infty}{\sim} \frac{2n}{c_n} \xrightarrow{n \infty} 2$ .

5) Enfin :  $a_n = \frac{1}{b_n c_n} \underset{n \infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ .

### 8.18 a) L'application $f$ est de classe $C^\infty$ sur $] -1 ; 1[$ et :

$\forall x \in ] -1 ; 1[$ ,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0.$$

De plus :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty$ .

D'après le Cours, il en résulte que  $f$  est bijective et que  $f^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Notons  $x = f^{-1}(y)$  pour  $y \in \mathbb{R}$ , de sorte que  $y = f(x)$ .

D'après a) :  $x = f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} -1^+$ .

Notons  $t = x - (-1) = x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} 0^+$ ,  $x = -1 + t$ .

I) On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{-2+t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}, \end{aligned}$$

donc  $t \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{y}$ , d'où  $t = \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right)$ , puis :

$$x = -1 + t = -1 + \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right).$$

2) Notons  $u = x + 1 - \frac{1}{y}$ .

D'après I), on a  $u = o\left(\frac{1}{y}\right)$ , donc  $uy \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$ .

On a  $t = x + 1 = \frac{1}{y} + u$ , d'où :

$$\begin{aligned}
y = f(x) &= \frac{1}{-2+t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t} \\
&= \frac{1}{-2 + \frac{1}{y} + u} + \frac{1}{\frac{1}{y} + u} + \frac{1}{1 + \frac{1}{y} + u} \\
&= \left( -\frac{1}{2} + o(1) \right) + y(1+yu)^{-1} + (1+o(1)) \\
&= \frac{1}{2} + o(1) + y(1-yu+o(yu)) \\
&= \frac{1}{2} + o(1) + y - y^2u + o(y^2u).
\end{aligned}$$

On a donc, par simplification d'un  $y$  par soustraction :

$$\frac{1}{2} + o(1) = y^2u + o(y^2u),$$

$$\text{d'où : } y^2u \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}, \quad u \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2y^2}, \quad u = \frac{1}{2y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

On conclut au développement asymptotique suivant :

$$f^{-1}(y) = -1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + o_{y \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

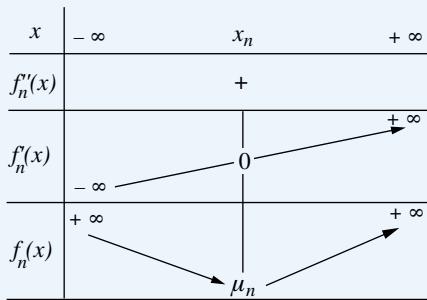
### 8.19

a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

L'application  $f_n$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'_n(x) = e^x + 2x - n, \quad f''_n(x) = e^x + 2 > 0.$$

On en déduit les variations de  $f_n$  :



Il en résulte que  $f_n$  admet un minimum  $\mu_n$  atteint en un point et un seul noté  $x_n$ . Ainsi :  $f'_n(x_n) = 0$  et  $\mu_n = f_n(x_n)$ .

b) I) • On a :  $f'_n(0) = 1 - n \leqslant 0$ , donc  $0 \leqslant x_n$ .

• D'après une inégalité classique, pour tout  $t \in ]-1; +\infty[$ ,  $\ln(1+t) \leqslant t$ , on a  $1+t \leqslant e^t$ ,  $t \leqslant e^t - 1 \leqslant e^t$ ,

donc  $n = e^{x_n} + 2x_n \leqslant 3e^{x_n}$ , d'où  $e^{x_n} \geqslant \frac{n}{3}$ ,

$$x_n \geqslant \ln \frac{n}{3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty,$$

et donc :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

• On a :  $n = e^{x_n} + 2x_n = e^{x_n}(1 + 2x_n e^{-x_n})$ .

Comme  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ , par prépondérance classique,

$$x_n e^{-x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{d'où } n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{x_n}.$$

Ainsi :  $e^{x_n} = n + o(n)$ , d'où :

$$x_n = \ln(n + o(n)) = \ln n + \ln(1 + o(1)) = \ln n + o(1),$$

et on conclut :

$$x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n.$$

2) On a :  $\mu_n = f_n(x_n) = e^{x_n} + x_n^2 - nx_n$

et  $e^{x_n} + 2x_n - n = 0$ , donc  $e^{x_n} = -2x_n + n$ , d'où :

$$\mu_n = (-2x_n + n) + x_n^2 - nx_n = x_n(-n + x_n - 2) + n.$$

Comme  $x_n \sim \ln n$ , on a  $-n + x_n - 2 \sim -n$ ,

puis  $x_n(-n + x_n - 2) \sim -n \ln n$ ,

et on conclut :

$$\mu_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -n \ln n.$$



# Calculs de primitives

CHAPITRE 9

## Plan

Les méthodes à retenir	133
Énoncés des exercices	136
Du mal à démarrer ?	138
Corrigés	139

## Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de primitives
- Calculs d'intégrales.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Liste des primitives usuelles, à savoir par coeur
- Linéarité, primitivation par parties, changement de variable dans une primitive
- Méthodes du cours pour calculer les primitives de certains types de fonctions.

## Les méthodes à retenir

Pour calculer une primitive du type  $I(x) = \int f(x)g(x) dx$ , où  $f$  a une primitive simple et  $g$  a une dérivée simple

Pour calculer une primitive du produit d'un polynôme par une exponentielle :

$I(x) = \int P(x) e^{\alpha x} dx$ , où  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}^*$

Essayer de primitiver par parties :

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx.$$

→ Exercices 9.1 a), 9.7.

D'après le Cours, il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , de même degré que  $P$ , tel que :  $I(x) = Q(x) e^{\alpha x} + \text{Cte}$ . Chercher  $Q$  par coefficients indéterminés. On est alors ramené à la résolution d'un système linéaire en cascade.

→ Exercice 9.1 b).

**Pour calculer une primitive du produit d'un polynôme par un cosinus ou un sinus :**

$$I(x) = \int P(x) \cos \beta x \, dx,$$

$$J(x) = \int P(x) \sin \beta x \, dx,$$

où  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^*$

**Pour calculer une primitive du produit d'un polynôme, d'une exponentielle, et d'un cosinus ou sinus (trois facteurs) :**

$$I(x) = \int P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx,$$

$$J(x) = \int P(x) e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx,$$

où  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^*$

**Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle**

**Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle en  $\cos x$  et  $\sin x$  :**

$$I(x) = \int R(\cos x, \sin x) \, dx$$

Considérer  $I(x) + iJ(x) = \int P(x)e^{ix} \, dx$ , Calculer cette primitive par coefficients indéterminés (complexes), puis prendre partie réelle et partie imaginaire.

→ Exercice 9.1 b).

Passer par une écriture en nombres complexes :

$$I(x) + iJ(x) = \int P(x) e^{(\alpha+i\beta)x} \, dx,$$

calculer cette primitive par coefficients indéterminés, puis prendre partie réelle et partie imaginaire.

→ Exercice 9.5.

La méthode générale consiste à utiliser une décomposition en éléments simples.

→ Exercices 9.2 a), b)

On peut quelquefois faire d'abord un changement de variable qui simplifiera les calculs.

→ Exercice 9.2 c).

Si  $R$  est un polynôme, linéariser.

→ Exercices 9.3 a), b), 9.14

Sinon, appliquer les règles de Bioche, suivantes.

On forme  $\omega(x) = R(\cos x, \sin x) \, dx$ . Ne pas oublier le  $dx$  dans  $\omega(x)$ .

- Si, pour tout  $x$ ,  $\omega(-x) = \omega(x)$ , on peut faire le changement de variable  $t = \cos x$ .

→ Exercice 9.3 c)

- Si, pour tout  $x$ ,  $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ , on peut faire le changement de variable  $t = \sin x$ .

→ Exercice 9.3 d)

- Si, pour tout  $x$ ,  $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ , on peut faire le changement de variable  $t = \tan x$ .

→ Exercice 9.3 f)

- Sinon, faire le changement de variable  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

→ Exercice 9.8.

Si  $R$  est un polynôme, linéariser.

→ Exercices 9.4 a), b)

Sinon, appliquer les règles de Bioche, adaptées aux fonctions hyperboliques, suivantes.

Considérer  $\omega(x) = R(\cos x, \sin x) dx$ , obtenu en remplaçant  $\operatorname{ch} x$  par  $\cos x$ , et  $\operatorname{sh} x$  par  $\sin x$  dans l'énoncé. Ne pas oublier le  $dx$  dans  $\omega(x)$ .

- Si, pour tout  $x$ ,  $\omega(-x) = \omega(x)$ , on peut faire le changement de variable  $t = \operatorname{ch} x$ .

→ Exercice 9.4 c)

- Si, pour tout  $x$ ,  $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ , on peut faire le changement de variable  $t = \operatorname{sh} x$ .

- Si, pour tout  $x$ ,  $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ , on peut faire le changement de variable  $t = \operatorname{th} x$ .

- Sinon, faire le changement de variable  $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$ , ou plutôt, ce qui est souvent plus commode, faire le changement de variable  $u = e^x$ .

→ Exercice 9.9.

**Pour calculer une primitive**

$$I(x) = \int f(x) dx,$$

un même groupement  $\varphi(x)$  apparaissant plusieurs fois dans  $f(x)$

Essayer le changement de variable  $t = \varphi(x)$ , surtout si  $\varphi'(x)$  apparaît en facteur dans  $f(x)$ .

→ Exercices 9.6, 9.7.

Lors d'un changement de variable dans un calcul de primitive, ne pas oublier de traiter le  $dx$ .

Lors d'un changement de variable dans un calcul d'intégrale, ne pas oublier aussi de modifier les bornes.

**Pour calculer une primitive d'une fonction rationnelle**

en  $x$  et en  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  :

$$I(x) = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Faire le changement de variable  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ , qui permet de se ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en  $t$ .

→ Exercice 9.10 a).

**Pour calculer une primitive d'une fonction rationnelle**

en  $x$  et en  $\sqrt{ax^2+bx+c}$  :

$$I(x) = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

Mettre le trinôme sous forme canonique, pour se ramener, sous le radical, par un changement de variable affine, à l'une des trois formes :

$$1+t^2, \quad 1-t^2, \quad t^2-1.$$

- Pour calculer  $\int S(t, \sqrt{1+t^2}) dt$ , faire le changement de variable  $\varphi = \operatorname{Argsh} t$ , qui permet de se ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en  $\operatorname{ch} \varphi$  et  $\operatorname{sh} \varphi$ .

→ Exercices 9.10 b), 9.12

- Pour calculer  $\int S(t, \sqrt{1-t^2}) dt$ , faire le changement de variable  $\theta = \text{Arcsin } t$ , qui permet de se ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

→ Exercice 9.12.

- Pour calculer  $\int S(t, \sqrt{t^2 - 1}) dt$ , faire le changement de variable  $\varphi = \text{Argch}(\varepsilon t)$ , où  $\varepsilon = \text{sgn}(t)$ , qui permet de se ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en  $\text{ch } \varphi$  et  $\text{sh } \varphi$ .

### Pour calculer une intégrale avec bornes particulières

Essayer de faire un changement de variable qui échange les bornes.

→ Exercice 9.13.

## Énoncés des exercices

### 9.1 Exemples de calcul de primitives par primitivation par parties, ou par connaissance de la forme du résultat

Calculer les primitives suivantes (variable  $x$ ), en indiquant l'ensemble de validité

$$a) \int x^2 \ln x \, dx, \quad b) \int x^2 \cos x \, dx \text{ et } \int x^2 \sin x \, dx, \quad c) \int (-x^3 + x^2 - 2x + 3) e^{-x} \, dx.$$

### 9.2 Exemples de calculs de primitives de fractions rationnelles

Calculer les primitives suivantes (variable  $x$ ), en indiquant l'ensemble de validité

$$a) \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \, dx \quad b) \int \frac{x^5 + x^3 - x + 1}{x^2(x^2+1)} \, dx \quad c) \int \frac{x^4}{x^{10}+1} \, dx.$$

### 9.3 Exemples de calculs de primitives ou d'intégrales de fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Calculer les primitives suivantes (variable  $x$ ), en indiquant l'ensemble de validité (questions  $a$ ) à  $e$ ), et l'intégrale suivante (question  $f$ ) :

$$a) \int \cos^4 x \, dx \quad b) \int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx \quad c) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} \, dx \\ d) \int \frac{\cos^3 x}{(2+\sin x)^2} \, dx \quad e) \int \frac{\sin x - \cos x}{4+\sin x + \cos x} \, dx \quad f) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, dx.$$

### 9.4 Exemples de calculs de primitives de fractions rationnelles en $\text{sh } x$ et $\text{ch } x$

Calculer les primitives suivantes (variable  $x$ ), en indiquant l'ensemble de validité :

$$a) \int \text{sh}^4 x \, dx \quad b) \int \text{ch } x \text{ ch } 3x \, dx \quad c) \int \frac{1}{\text{sh } x \text{ ch }^3 x} \, dx.$$

**9.5**

**Exemple de calcul d'une primitive du produit d'un polynôme, d'une exponentielle et d'une fonction circulaire directe**

Calculer  $\int x e^x \cos x \, dx.$

**9.6**

**Exemples de calculs de primitives par changements de variable**

Calculer les primitives suivantes (variable  $x$ ), en indiquant l'ensemble de validité :

a)  $\int \frac{3 + \ln x}{(4 + \ln x)^2} \, dx$       b)  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} \, dx$       c)  $\int \sqrt{x^2 \sqrt{x} + x} \, dx.$

**9.7**

**Exemples de calculs de primitives par primitivation par parties et changement de variable**

Calculer les primitives suivantes (variable  $x$ ), en indiquant l'ensemble de validité :

a)  $\int \frac{\operatorname{Arcsin} \sqrt{x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \, dx$       b)  $\int \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2} \, dx.$

**9.8**

**Exemple de calcul d'une intégrale de fraction rationnelle en  $\sin x$  et  $\cos x$**

Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \cos x}.$

**9.9**

**Exemple de calcul de primitive de fraction rationnelle en  $\operatorname{sh} x$  et  $\operatorname{ch} x$**

Calculer la primitive  $\int \frac{1}{3 + \operatorname{ch} x} \, dx$ , en indiquant l'ensemble de validité

**9.10**

**Exemples de primitives de fonctions faisant intervenir  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$**

ou  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Calculer les primitives suivantes (variable  $x$ ), en indiquant l'ensemble de validité

a)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$       b)  $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$       c)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$

**9.11**

**Exemples de primitive de fonction faisant intervenir  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$**

Calculer la primitive  $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}}$  en indiquant l'ensemble de validité.

**9.12**

**Exemple de calcul de primitive par changements de variable**

Calculer la primitive  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}} \, dx$ , en indiquant l'ensemble de validité.

**9.13**

**Exemple de calculs d'intégrales avec bornes particulières**

Calculer :

a)  $I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \, dx$ ,       $a \in [1; +\infty[$  fixé

b)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) \, dx$ , puis  $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \, dx$  et  $K = \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x} \, dx.$



### 9.14 Exemple de calcul d'une intégrale avec bornes particulières

Calculer, pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  :  $I_{n,p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \cos 2px \, dx$ .

## Du mal à démarrer ?

**9.1** a) Primitiver par parties pour faire disparaître le logarithme.

b) Grouper les deux intégrales pour faire intervenir  $e^{ix}$ .

c) On connaît, d'après le Cours, la forme du résultat.

**9.2** a), b) Décomposer en éléments simples.

c) Effectuer le changement de variable  $t = x^5$ , puisque l'expression sous l'intégrale contient  $(x^5)^2$  et  $x^4 \, dx$ .

**9.3** a), b) Linéariser.

c) Les règles de Bioche indiquent le changement de variable  $t = \cos x$ .

d) Les règles de Bioche indiquent le changement de variable  $t = \sin x$ .

e) Remarquer que le numérateur est presque la dérivée du dénominateur.

f) Les règles de Bioche indiquent le changement de variable  $t = \tan x$ .

**9.4** a), b) Linéariser.

c) Les règles de Bioche, adaptées aux fonctions hyperboliques, indiquent le changement de variable  $t = \operatorname{ch} x$ .

**9.5** Faire intervenir une exponentielle complexe. Ensuite, faire une primitivation par parties.

**9.6** a) Effectuer le changement de variable  $t = \ln x$ , puis reconnaître une dérivée.

b) Effectuer le changement de variable  $t = \sqrt{e^x + 1}$ .

c) Effectuer le changement de variable  $t = \sqrt{x}$ , puis le changement de variable  $u = t^3 + 1$ .

**9.7** a) Primitiver par parties pour faire disparaître  $\operatorname{Arcsin} \sqrt{x}$ , puis utiliser le changement de variable  $t = \sqrt{x}$ .

b) Primitiver par parties pour faire disparaître  $\operatorname{Arctan}$ , puis utiliser le changement de variable  $t = x^2$ .

**9.8** Les règles de Bioche indiquent le changement de variable  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

**9.9** Les règles de Bioche, adaptées aux fonctions hyperboliques, indiquent de faire le changement de variable  $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$ , ou bien le changement de variable  $u = e^x$ , ce dernier étant en général plus simple à mettre en oeuvre.

**9.10** a) Effectuer le changement de variable  $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ .

b) Effectuer le changement de variable  $t = \operatorname{Argsh} x$ , de sorte que  $x = \operatorname{sh} t$ .

c) Mettre le trinôme sous forme canonique, puis utiliser un changement de variable.

**9.11** Commencer par le changement de variable  $y = \frac{1}{x}$ , puis mettre un trinôme sous forme canonique pour effectuer un deuxième changement de variable.

**9.12** Utiliser une expression conjuguée pour séparer en deux primitives, puis effectuer deux changements de variable différents, un dans chaque primitive.

**9.13** a) Effectuer un changement de variable qui échange les bornes :  $y = \frac{1}{x}$ .

b) Effectuer un changement de variable qui échange les bornes :  $t = \frac{\pi}{4} - x$ . Pour calculer  $J$ , faire le changement de variable  $t = \tan x$ . Pour calculer  $K$ , intégrer par parties.

**9.14** Linéariser  $\cos^{2p} x$  et calculer les intégrales  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x \cos 2qx \cos 2px \, dx$ , pour  $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ .

# Corrigés des exercices

**9.1**

a) La fonction  $f : x \mapsto x^2 \ln x$  a pour ensemble de définition  $D = ]0; +\infty[$  et  $f$  est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

On a, par une primitivation par parties, pour des fonctions de classe  $C^1$  :

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = \ln x \end{cases} \quad \begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v'(x) = \frac{1}{x}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat par dérivation.

b) Les fonctions  $f : x \mapsto x^2 \cos x$  et  $g : x \mapsto x^2 \sin x$  ont pour ensemble de définition  $D = \mathbb{R}$  et sont continues sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  et  $J(x) = \int g(x) dx$  sont définis pour tout  $x \in D$ .

On a, en faisant intervenir l'exponentielle complexe :

$$I(x) + iJ(x) = \int x^2 e^{ix} dx.$$

D'après le Cours, on connaît la forme de cette primitive : il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  tel que :

$$\int x^2 e^{ix} dx = (ax^2 + bx + c) e^{ix}.$$

On a alors, par dérivation, pour tout  $x \in D$  :

$$\begin{aligned} x^2 e^{ix} &= \frac{d}{dx} \left( (ax^2 + bx + c) e^{ix} \right) \\ &= (ax^2 + bx + c)i e^{ix} + (2ax + b) e^{ix} \\ &= (iax^2 + (ib + 2a)x + (ic + b)) e^{ix}. \end{aligned}$$

Il suffit donc que :  $ia = 1$ ,  $ib + 2a = 0$ ,  $ic + b = 0$ .

On résout ce système en cascade, et on obtient :

$$a = \frac{1}{i} = -i, \quad b = -\frac{2a}{i} = 2, \quad c = -\frac{b}{i} = 2i.$$

$$\text{Ainsi : } \int x^2 e^{ix} dx = (-ix^2 + 2x + 2i) e^{ix} + C,$$

où  $C$  est une constante (complexe).

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat par dérivation.

On développe de façon à pouvoir ensuite séparer la partie réelle et la partie imaginaire :

$$\begin{aligned} I(x) + iJ(x) &= (-ix^2 + 2x + 2i)(\cos x + i \sin x) + C \\ &= (x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x) \\ &\quad + i(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x) + C, \end{aligned}$$

et on conclut :

$$\begin{cases} I(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C_1 \\ J(x) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C_2, \end{cases}$$

où  $C_1, C_2$  sont des constantes (réelles).

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat par dérivation.

c) La fonction  $f : x \mapsto (-x^3 + x^2 - 2x + 3)e^{-x}$  a pour ensemble de définition  $D = \mathbb{R}$  et est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  existe pour tout  $x \in D$ .

On connaît la forme du résultat : il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que, pour tout  $x \in D$  :

$$I(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x} + C,$$

où  $C$  est une constante (réelle).

On a, en dérivant, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} I'(x) &= (3ax^2 + 2bx + c)e^{-x} - (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x} \\ &= (-ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x + (c - d))e^{-x}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver  $(a, b, c, d)$  solution du système :

$$-a = -1, \quad 3a - b = 1, \quad 2b - c = -2, \quad c - d = 3.$$

On résout ce système en cascade, et on obtient :

$$a = 1, \quad b = 3a - 1 = 2, \quad c = 2b + 2 = 6, \quad d = c - 3 = 3.$$

On conclut :  $I(x) = (x^3 + 2x^2 + 6x + 3)e^{-x} + C$ , où  $C$  est une constante (réelle).

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat par dérivation.

- 9.2** a) La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$  a pour ensemble de définition  $D = \mathbb{R} - \{-2, -1, 0\}$  et  $f$  est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2},$$

où  $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$  est à calculer.

On multiplie par  $X$  puis on remplace  $X$  par 0, et on obtient :  $a = \frac{1}{2}$ .

On multiplie par  $X+1$  puis on remplace  $X$  par  $-1$ , et on obtient :  $b = -1$ .

On multiplie par  $X+2$  puis on remplace  $X$  par  $-2$ , et on obtient :  $c = \frac{1}{2}$ .

On a donc :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{X+2},$$

ce que l'on peut d'ailleurs contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

On a donc :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left( \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x+2| + C(x), \end{aligned}$$

où  $C : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une application constante sur chaque intervalle de  $D$ , c'est-à-dire :

$C : D = \mathbb{R} - \{-2, -1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } x < -2 \\ C_2 & \text{si } -2 < x < -1 \\ C_3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ C_4 & \text{si } 0 < x, \end{cases}$$

où  $(C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4$ .

On peut aussi écrire :  $I(x) = \ln \sqrt{\frac{|x(x+2)|}{(x+1)^2}} + C(x)$ .

b) La fonction  $f : x \mapsto \frac{x^5 + x^3 - x + 1}{x^2(x^2 + 1)}$  a pour ensemble de définition  $D = \mathbb{R}^*$  et est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{x^5 + x^3 - x + 1}{X^2(X^2 + 1)} = E + \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{cX + d}{X^2 + 1},$$

où  $E \in \mathbb{R}[X]$ ,  $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$  sont à calculer.

On calcule  $E$  comme quotient de la division euclidienne de  $X^5 + X^3 - X + 1$  par  $X^2(X^2 + 1)$ , et on obtient :  $E = X$ .

On multiplie par  $X^2$  puis on remplace  $X$  par 0, et on obtient :  $a = 1$ .

On multiplie par  $X^2 + 1$  puis on remplace  $X$  par  $i$ , et on obtient :  $ci + d = \frac{i^5 + i^3 - i + 1}{i^2} = -1 + i$ , d'où  $c = 1$ ,  $d = -1$ .

On calcule enfin  $d$  en remplaçant  $X$  par 1, par exemple :  $1 = 1 + 1 + b$ , d'où  $b = -1$ .

Ainsi :

$$\frac{x^5 + x^3 - x + 1}{X^2(X^2 + 1)} = X + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{X - 1}{X^2 + 1}.$$

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat par réduction au même dénominateur dans le second membre.

D'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left( x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \operatorname{Arctan} x + C(x), \end{aligned}$$

où  $C$  est une application constante sur chaque intervalle de  $\mathbb{R}^*$ , c'est-à-dire :

$C : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } x < 0 \\ C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

c) La fonction  $f : x \mapsto \frac{x^4}{x^{10} + 1}$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On a, par le changement de variable  $t = x^5$  :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^4 dx}{x^{10} + 1} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{Arctan} t + C = \frac{1}{5} \operatorname{Arctan}(x^5) + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

- 9.3** a) La fonction  $f : x \mapsto \cos^4 x$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Linéarisons :

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 = \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8}(1 + \cos 4x) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

- b) La fonction  $f : x \mapsto \sin x \sin 2x \sin 3x$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Linéarisons :

$$\begin{aligned} \sin x \sin 2x \sin 3x &= \sin 2x(\sin x \sin 3x) \\ &= \sin 2x \left( \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \cos 4x \\ &= \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4}(\sin 6x - \sin 2x) \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left( \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x \right) dx \\ &= -\frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

c) La fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}$  a pour ensemble de définition  $D = \mathbb{R} - \left( \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right)$  et est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

En notant  $\omega(x) = f(x) dx = \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx$ , on a  $\omega(-x) = \omega(x)$ , donc, d'après les règles de Bioche, on peut effectuer le changement de variable  $t = \cos x$  :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} \sin x dx \\ &= - \int \frac{1-t^2}{t^8} dt = \int (-t^{-8} + t^{-6}) dt \\ &= \frac{t^{-7}}{7} - \frac{t^{-5}}{5} + C_1(t) = \frac{1}{7 \cos^7 x} - \frac{1}{5 \cos^5 x} + C(x), \end{aligned}$$

où  $C : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une application constante sur chaque intervalle de  $D$ , c'est-à-dire

$$C(x) = C_n \text{ si } x \in \left[ -\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi \right], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad C_n \in \mathbb{R}.$$

d) La fonction  $f : x \mapsto \frac{\cos^3 x}{(2 + \sin x)^2}$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

En notant  $\omega(x) = f(x) dx = \frac{\cos^3 x}{(2 + \sin x)^2} dx$ ,

on a  $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ , donc, d'après les règles de Bioche, on peut effectuer le changement de variable  $t = \sin x$  :

$$I(x) = \int \frac{\cos^2 x}{(2 + \sin x)^2} \cos x dx = \int \frac{1-t^2}{(2+t)^2} dt.$$

Effectuons ensuite le changement de variable  $u = 2 + t$ ,  $t = u - 2$  :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1-(u-2)^2}{u^2} du = \int \frac{-u^2 + 4u - 3}{u^2} du \\ &= \int \left( -1 + \frac{4}{u} - \frac{3}{u^2} \right) du = -u + 4 \ln|u| + \frac{3}{u} + C_1 \\ &= -(2+t) + 4 \ln|2+t| + \frac{3}{2+t} + C_1 \\ &= -\sin x + 4 \ln(2 + \sin x) + \frac{3}{2 + \sin x} + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

e) La fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin x - \cos x}{4 + \sin x + \cos x}$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$ , et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On remarque que le numérateur est l'opposé de la dérivée du dénominateur, donc :

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{4 + \sin x + \cos x} dx = -\ln(4 + \sin x + \cos x) + C,$$

où  $C$  est une constante.

f) L'application  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$  est continue sur le segment  $[0; \frac{\pi}{4}]$ , car le dénominateur est alors  $> 0$ , donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$$

existe.

Première méthode : utilisation des règles de Bioche :

En notant  $\omega(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ , on a  $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ , donc, d'après les règles de Bioche, on peut effectuer le changement de variable  $t = \tan x$ ,  $x = \operatorname{Arctan} t$ ,  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\tan x + 1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{t}{(t+1)(t^2+1)} dt. \end{aligned}$$

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{X}{(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+1},$$

où  $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$  est à calculer.

On multiplie par  $X+1$  puis on remplace  $X$  par  $-1$ , et on obtient :  $a = -\frac{1}{2}$ .

On multiplie par  $X^2+1$  puis on remplace  $X$  par  $i$ , d'où :  $b i + c = \frac{i}{i+1} = \frac{1+i}{2}$ ,

$$\text{donc } b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{X}{(X+1)(X^2+1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2} \frac{X+1}{X^2+1},$$

ce que l'on peut contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

D'où :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( -\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + \operatorname{Arctan} t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left( -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 = \frac{\pi - 2 \ln 2}{8}. \end{aligned}$$

Seconde méthode : utilisation d'une autre intégrale associée à  $I$  :

$$\text{Considérons } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

On a :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$$

et :

$$\begin{aligned} J - I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \left[ \ln |\sin x + \cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} ((I+J) - (J-I)) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \\ &= \frac{\pi - 2 \ln 2}{8}. \end{aligned}$$

#### 9.4

a) La fonction  $f : x \mapsto \operatorname{sh}^4 x$  admet pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Linéarisons :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^4 x &= (\operatorname{sh}^2 x)^2 = \left( \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch}^2 2x - 2 \operatorname{ch} 2x + 1) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\operatorname{ch} 4x + 1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{ch} 4x - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \operatorname{sh}^4 x dx = \int \left( \frac{1}{8} \operatorname{ch} 4x - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{3}{8} \right) dx \\ &= \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x - \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{3x}{8} + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

b) La fonction  $f : x \mapsto \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Linéarisons. À cet effet, rappelons d'abord la formule analogue en trigonométrie circulaire :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

On remplace  $\cos$  par  $\operatorname{ch}$  et  $\sin$  par  $i \operatorname{sh}$  :

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)).$$

D'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 4x + \operatorname{ch} 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

c) La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x}$  admet pour ensemble de définition  $\mathbb{R}^*$  et est continue sur  $\mathbb{R}^*$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

En notant  $\omega(x) = \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx$ , on a  $\omega(-x) = \omega(x)$ , donc, d'après les règles de Bioche adaptées aux fonctions hyperboliques, on peut effectuer le changement de variable  $t = \operatorname{ch} x$  :

$$I(x) = \int \frac{1}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x} dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x} dx = \int \frac{dt}{(t^2 - 1)t^3}.$$

On effectue ensuite le changement de variable  $u = t^2$  :

$$I(x) = \int \frac{t dt}{(t^2 - 1)t^4} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u-1)u^2}.$$

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(X-1)X^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X},$$

où  $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$  est à calculer.

On multiplie par  $X-1$  puis on remplace  $X$  par 1, et on obtient :  $a = 1$ .

On multiplie par  $X^2$  puis on remplace  $X$  par 0, et on obtient :  $b = -1$ .

On multiplie par  $X$  puis on fait tendre  $X$  vers l'infini, et on obtient :  $a+c = 0$ , donc  $c = -a = -1$ .

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{(X-1)X^2} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X},$$

ce que l'on peut contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

D'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln|u-1| + \frac{1}{u} - \ln|u| \right) + C_1(u) \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln|t^2-1| - \ln|t^2| + \frac{1}{t^2} \right) + C_2(t) \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln|\operatorname{ch}^2 x - 1| - \ln(\operatorname{ch}^2 x) + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \right) + C(x) \\ &= \ln|\operatorname{th} x| + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x} + C(x), \end{aligned}$$

où  $C : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est constante sur chaque intervalle de  $\mathbb{R}^*$ , c'est-à-dire :

$$C : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } x < 0 \\ C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

**9.5** La fonction  $f : x \mapsto x e^x \cos x$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Une primitivation par parties ne semble pas commode, car  $f(x)$  est le produit de trois facteurs.

Considérons aussi  $J(x) = \int x e^x \sin x dx$  et passons par l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} I(x) + iJ(x) &= \int x e^x (\cos x + i \sin x) dx = \int x e^x e^{ix} dx \\ &= \int x e^{(1+i)x} dx. \end{aligned}$$

On peut maintenant faire une primitivation par parties, pour des applications de classe  $C^1$  (ou utiliser la méthode des coefficients indéterminés) :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{(1+i)x} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} \end{cases}$$

$$I(x) + iJ(x) = x \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \int \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} dx$$

$$= x \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2} + C,$$

où  $C$  est une constante (complexe).

On a :

$$\begin{aligned} I(x) + iJ(x) &= x \frac{1-i}{2} e^{(1+i)x} - \frac{(1-i)^2}{4} e^{(1+i)x} + C \\ &= \frac{x}{2}(1-i)e^x(\cos x + i \sin x) + \frac{i}{2}e^x(\cos x + i \sin x) + C \\ &= \frac{x}{2}e^x((\cos x + \sin x) + i(\sin x - \cos x)) \\ &\quad + \frac{1}{2}e^x(-\sin x + i \cos x) + C. \end{aligned}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on conclut :

$$\begin{cases} I(x) = \frac{x}{2}e^x(\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}e^x \sin x + C_1 \\ J(x) = \frac{x}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}e^x \cos x + C_2, \end{cases}$$

où  $C_1, C_2$  sont des constantes (réelles).

On peut contrôler ces deux résultats par dérivation.

- 9.6** a) La fonction  $f : x \mapsto \frac{3 + \ln x}{(4 + \ln x)^2}$  a pour ensemble de définition  $D = ]0; +\infty[ - \{-e^{-4}\} = ]0; e^{-4}[ \cup ]e^{-4}; +\infty[$  et est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

On effectue le changement de variable  $t = \ln x$ ,  $x = e^t$ ,  $dx = e^t dt$  :  $I(x) = \int \frac{3+t}{(4+t)^2} e^t dt$ .

On remarque que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{e^t}{4+t} \right) = \left( \frac{1}{4+t} - \frac{1}{(4+t)^2} \right) e^t = \frac{3+t}{(4+t)^2} e^t.$$

On a donc :  $I(x) = \frac{e^t}{4+t} + C_1(t) = \frac{x}{4 + \ln x} + C(x)$ ,

où  $C : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une application constante sur tout intervalle de  $D$ , c'est-à-dire :

$$C : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } x \in ]0; e^{-4}[ \\ C_2 & \text{si } x \in ]e^{-4}; +\infty[. \end{cases}$$

- b) La fonction  $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On effectue le changement de variable  $t = \sqrt{e^x + 1}$ ,  $e^x = t^2 - 1$ ,  $x = \ln(t^2 - 1)$ ,  $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$  :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{(t^2 - 1)^2}{t} \frac{2t}{t^2 - 1} dt = 2 \int (t^2 - 1) dt \\ &= 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + C = \frac{2}{3}t(t^2 - 3) + C \\ &= \frac{2}{3}(e^x - 2)\sqrt{e^x + 1} + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

c) La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 \sqrt{x} + x}$  a pour ensemble de définition  $D = [0; +\infty[$  et est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

Effectuons, pour  $x \in ]0; +\infty[$ , le changement de variable  $t = \sqrt{x}$ ,  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$  :

$$I(x) = \int \sqrt{t^5 + t^2} 2t dt = 2 \int t^2 \sqrt{t^3 + 1} dt.$$

Effectuons ensuite le changement de variable  $u = t^3 + 1$ ,  $3t^2 dt = du$  :

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{2}{3} \int \sqrt{u} du = \frac{4}{9} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{9} (t^3 + 1)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{4}{9} (x^{\frac{3}{2}} + 1)^{\frac{3}{2}} + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

Ce résultat est encore valable pour  $x = 0$ , par continuité de  $I$  en 0.

- 9.7** La fonction  $f : x \mapsto \frac{\arcsin \sqrt{x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$  a pour ensemble de définition  $D = [0; 1[$  et est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

Effectuons une primitivation par parties pour faire disparaître  $\arcsin \sqrt{x}$  :

$$\begin{cases} u(x) = \arcsin \sqrt{x} \\ v'(x) = \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = (1-x)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\ v(x) = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}} \end{cases}$$

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}} \arcsin \sqrt{x} - \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx}_{\text{notée } J(x)}.$$

On a, par le changement de variable  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = y^2$ ,  
 $dx = 2y dy$  :

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{1}{y(1-y^2)} 2y dy = 2 \int \frac{1}{1-y^2} dy \\ &= \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| + C_1 = \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + C_1, \end{aligned}$$

où  $C_1$  est constante.

On conclut :

$$I(x) = \frac{2 \arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + C,$$

où  $C$  est une constante sur  $[0; 1[$ .

b) La fonction  $f : x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2}$  a pour ensemble de définition  $D = \mathbb{R}^*$  et est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

Effectuons une primitivation par parties pour faire disparaître  $\arctan x$  :

$$\begin{cases} u(x) = \arctan x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$I(x) = -\frac{\arctan x}{x} + \underbrace{\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx}_{\text{notée } J(x)}$$

On a, par le changement de variable  $y = x^2$  :

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{x dx}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y(1+y)} \\ &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} (\ln |y| - \ln |1+y|) + C_1(y) \\ &= \frac{1}{2} (\ln (x^2) - \ln (1+x^2)) + C(x), \end{aligned}$$

et on conclut :

$$I(x) = -\frac{\arctan x}{x} + \ln |x| - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C(x),$$

où  $C$  est une application constante sur chaque intervalle de  $D$ , c'est-à-dire :

$$C : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } x < 0 \\ C_2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

**9.8** L'application  $f : x \mapsto \frac{1}{3+\cos x}$  est continue sur le segment  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $I$  existe.

En notant  $\omega(x) = \frac{1}{3+\cos x} dx$ , on n'a pas, pour tout  $x$ ,  $\omega(-x) = \omega(x)$ , ni  $\omega(\pi-x) = \omega(x)$ , ni  $\omega(\pi+x) = \omega(x)$ . Les règles de Bioche nous indiquent donc de faire le changement de variable  $t = \tan \frac{x}{2}$ ,  $x = 2 \arctan t$ ,  $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x} = \int_0^1 \frac{1+t^2}{3+1-t^2} = \int_0^1 \frac{2 dt}{4+2t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

**9.9** La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{3+\cosh x}$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On a, par le changement de variable  $t = e^x$ ,  $x = \ln t$ ,  $dx = \frac{dt}{t}$  :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1}{3+\frac{t+\frac{1}{t}}{2}} \frac{dt}{t} = \int \frac{2}{\left(6+t+\frac{1}{t}\right)t} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2+6t+1} dt. \end{aligned}$$

Le trinôme  $t^2+6t+1$  est de discriminant  $\Delta = 36-4=32>0$ , donc ce trinôme admet deux zéros réels  $t_1 = \frac{-6-\sqrt{32}}{2} = -3-2\sqrt{2}$ ,  $t_2 = -3+2\sqrt{2}$ .

Par décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ , il existe  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\frac{2}{X^2+6X+1} = \frac{2}{(X-t_1)(X-t_2)} = \frac{a}{X-t_1} + \frac{b}{X-t_2}.$$

On multiplie par  $X-t_1$  puis on remplace  $X$  par  $t_1$ , et on obtient :  $a = \frac{2}{t_1-t_2} = \frac{2}{-4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

De même :  $b = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

$$\text{Ainsi : } \frac{2}{X^2+6X+1} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{X-t_1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{X-t_2},$$

ce que l'on peut contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

D'où :

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1}{t-t_1} dt + \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1}{t-t_2} dt \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \ln|t-t_1| + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln|t-t_2| + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{e^x + 3 - 2\sqrt{2}}{e^x + 3 + 2\sqrt{2}} + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

- 9.10** a) La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  a pour ensemble de définition  $D = ]-1; 0[ \cup ]0; 1]$  et est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

Effectuons le changement de variable  $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ,  $(1+x)t^2 = 1-x$ ,  $(1+t^2)x = 1-t^2$ ,

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} t \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{-4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt \\ &= \int \left( \frac{-2}{1-t^2} + \frac{2}{1+t^2} \right) dt \\ &= -2 \operatorname{Argsh} t + 2 \operatorname{Arctan} t + C_1(t) \\ &= -2 \operatorname{Argsh} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C(x), \end{aligned}$$

où  $C$  est constante sur chaque intervalle de  $D$ , c'est-à-dire :  $C : ]-1; 0[ \cup ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ C_2 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

- b) La fonction  $f : x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Effectuons le changement de variable  $t = \operatorname{Argsh} x$ ,  $x = \operatorname{sh} t$ ,  $dx = \operatorname{ch} t dt$  :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\operatorname{sh} t - 1}{\operatorname{ch} t} \operatorname{ch} t dt = \int (\operatorname{sh} t - 1) dt \\ &= \operatorname{ch} t - t + C = \sqrt{x^2 + 1} - \operatorname{Argsh} x + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

c) La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$  admet pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$  et est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On a, par mise sous forme canonique :

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 = 2 \left( 1 + \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right).$$

On effectue donc le changement de variable  $t = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$ ,  $x = t\sqrt{2} - 1$ ,  $dx = \sqrt{2} dt$  :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sqrt{2} dt}{\sqrt{2}(1+t^2)} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{Argsh} t + C \\ &= \operatorname{Argsh} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

- 9.11** La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}$  admet pour ensemble de définition  $D = \mathbb{R}^*$  et est continue sur  $D$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

Effectuons d'abord le changement de variable  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = \frac{1}{y}$ ,  $dx = -\frac{dy}{y^2}$  :

$$I(x) = \int \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1}} \left( -\frac{dy}{y^2} \right) = -\varepsilon \int \frac{dy}{\sqrt{1+y+y^2}},$$

où  $\varepsilon = \operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(x)$ .

On met ensuite le trinôme sous forme canonique :

$$y^2 + y + 1 = \left( y + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[ 1 + \left( \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right],$$

et on effectue le changement de variable  $t = \frac{2y+1}{\sqrt{3}}$  :

$$\begin{aligned} I(x) &= -\varepsilon \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dt}{\sqrt{\frac{3}{4}(1+t^2)}} = -\varepsilon \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= -\varepsilon \operatorname{Argsh} t + C_1(t) = -\varepsilon \operatorname{Argsh} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + C_2(y) \\ &= -\varepsilon \operatorname{Argsh} \frac{2+x}{x\sqrt{3}} + C(x), \end{aligned}$$

où  $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$  est le signe de  $x$ , et  $C : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est constante sur chaque intervalle de  $\mathbb{R}^*$ .

**9.12** La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}$  a pour ensemble de définition  $D = [-1; 1]$  et est continue sur  $[-1; 1]$ , donc  $I(x) = \int f(x) dx$  est défini pour tout  $x \in D$ .

Utilisons une expression conjuguée, en supposant de plus  $x \neq 0$  :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}}{(1-x^2) - (1+x^2)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx}_{\text{notée } J(x)} + \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx}_{\text{notée } K(x)}. \end{aligned}$$

• Pour calculer  $J(x)$ , on utilise le changement de variable  $t = \text{Arcsin } x$ ,  $x = \sin t$ ,  $dx = \cos t dt$  :

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} \cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt \\ &= \int \left( \frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\cotan t - t + C_1(t) \\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \text{Arcsin } x + C(x), \end{aligned}$$

où  $C$  est constante sur chaque intervalle de  $[-1; 1] - \{0\}$ .

• Pour calculer  $K(x)$ , on utilise le changement de variable  $u = \text{Argsh } x$ ,  $x = \text{sh } u$ ,  $dx = \text{ch } u du$  :

$$\begin{aligned} K(x) &= \int \frac{\text{ch } u}{\text{sh}^2 u} \text{ch } u du = \int \frac{\text{ch}^2 u}{\text{sh}^2 u} du \\ &= \int \left( \frac{1}{\text{sh}^2 u} + 1 \right) du = -\coth u + u + D_1(u) \\ &= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \text{Argsh } x + D(x), \end{aligned}$$

où  $D$  est constante sur chaque intervalle de  $[-1; 1] - \{0\}$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \text{Arcsin } x \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \text{Argsh } x \right) + E(x) \\ &= \frac{1}{2x} \left( \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2} \right) + \frac{1}{2} \text{Arcsin } x \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Argsh } x + E(x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \text{Arcsin } x \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Argsh } x + E(x), \end{aligned}$$

où  $E$  est, a priori, constante sur  $[-1; 0[$  et constante sur  $]0; 1]$ . Comme la fonction qui est dans le dernier membre

(sans  $E(x)$ ) est continue sur  $[-1; 1]$ , l'égalité est aussi vraie pour  $x = 0$ , et on conclut :

$$I(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \text{Arcsin } x + \frac{1}{2} \text{Argsh } x + E,$$

où  $E$  est une constante.

**9.13** a) L'application  $f : x \mapsto \frac{\text{Arctan } x}{x}$  est continue sur le segment  $\left[ \frac{1}{a}; a \right]$ , donc  $I$  existe.

Effectuons un changement de variable qui échange les bornes,  $t = \frac{1}{x}$ ,  $x = \frac{1}{t}$ ,  $dx = -\frac{dt}{t^2}$  :

$$I = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\text{Arctan } \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} \left( -\frac{dt}{t^2} \right) = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{t} \text{Arctan } \frac{1}{t} dt.$$

d'où, par addition :

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x} \left( \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} \right) dx = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\pi}{2x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} [\ln x]_{\frac{1}{a}}^a = \frac{\pi}{2} \left( \ln a - \ln \frac{1}{a} \right) = \pi \ln a. \end{aligned}$$

On conclut :  $I = \frac{\pi}{2} \ln a$ .

b) 1) L'application  $f : x \mapsto \ln(1+\tan x)$  est continue sur le segment  $\left[ 0; \frac{\pi}{4} \right]$ , donc  $I$  existe.

Effectuons un changement de variable qui échange les bornes,  $t = \frac{\pi}{4} - x$ ,  $x = \frac{\pi}{4} - t$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \left( 1 + \tan \left( \frac{\pi}{4} - t \right) \right) (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( 1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \frac{2}{1 + \tan t} \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1 + \tan t)) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I. \end{aligned}$$

Ainsi,  $2I = \frac{\pi}{4} \ln 2$ , et on conclut :  $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .

2) Par le changement de variable (dans  $I$ )  $u = \tan x$ ,  $x = \text{Arctan } u$ ,  $dx = \frac{du}{1+u^2}$ , on obtient :

$$I = \int_0^1 \ln(1+u) \frac{du}{1+u^2} = J, \text{ et on conclut : } J = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

3) Par une intégration par parties, pour des fonctions de classe  $C^1$  :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \operatorname{Arctan} x \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[ \operatorname{Arctan} x \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ln(1+x) dx \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - J = \frac{\pi}{8} \ln 2. \end{aligned}$$

**9.14** Linéarisons  $\cos^{2n} x$ , en utilisant les nombres complexes :

$$\begin{aligned} \cos^{2n} x &= \left( \frac{1}{2} (\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}) \right)^{2n} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\mathrm{e}^{ix})^k (\mathrm{e}^{-ix})^{2n-k} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mathrm{e}^{2(k-n)ix} \\ &\stackrel{q=k-n}{=} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{q=-n}^n \binom{2n}{n+q} \mathrm{e}^{2iqx} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left( \binom{2n}{n} + \sum_{q=1}^n \left( \binom{2n}{n+q} \mathrm{e}^{2iqx} + \binom{2n}{n-q} \mathrm{e}^{-2iqx} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left( \binom{2n}{n} + \sum_{q=1}^n 2 \binom{2n}{n+q} \cos 2qx \right), \end{aligned}$$

en ayant remarqué que  $\binom{2n}{n+q} = \binom{2n}{n-q}$  et en ayant regroupé les termes d'indices deux à deux opposés.

On a donc :  $I_{n,p} = \frac{1}{2^{2n}} \left( \binom{2n}{n} J_p + 2 \sum_{q=1}^n 2 \binom{2n}{n+q} K_{p,q} \right)$ ,

où on a noté, pour tout  $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$  :

$$J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2px dx, \quad K_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2px \cos 2qx dx.$$

On a, si  $p \neq 0$ ,  $J_p = \left[ \frac{\sin 2px}{2p} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ , et  $J_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Et, par linéarisation :

$$\begin{aligned} K_{p,q} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2p+2q)x + \cos(2p-2q)x) dx \\ &= \frac{1}{2} (J_{p+q} + J_{p-q}). \end{aligned}$$

D'où :

$$K_{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } p = q \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } p = q = 0. \end{cases}$$

Si  $p \neq 0$ , avec la convention  $\binom{2n}{n+p} = 0$  si  $p > n$ , on a donc :

$$I_{n,p} = \frac{1}{2^{2n}} 2 \binom{2n}{n+p} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n+p}.$$

Et, si  $p = 0$  :  $I_{n,p} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}$ .

Finalement, on conclut :

$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n+p} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{(2n)!}{(n+p)!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases} \end{aligned}$$

*Remarque* : En particulier, pour  $p = 0$ , on retrouve les intégrales de Wallis d'exposant pair :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

## Plan

Les méthodes à retenir	149
Énoncés des exercices	152
Du mal à démarrer ?	155
Corrigés	157

## Thèmes abordés dans les exercices

- Résolution d'EDL1, avec ou sans second membre
- Étude des raccords éventuels
- Résolution d'EDL2 à coefficients constants
- Résolution de certaines équations fonctionnelles.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Résolution des EDL1 normalisées, sans second membre (formule du cours), puis avec second membre (solution évidente ou méthode de variation de la constante)
- Définition d'une dérivée, théorème limite de la dérivée, pour l'étude de raccords
- Résolution d'EDL2 à coefficients constants, sans second membre (formule du cours, plusieurs cas), puis avec second membre du type exponentielle-polynôme.

## Les méthodes à retenir

Par commodité, on utilise les abréviations suivantes :

ED pour : équation différentielle

EDL pour : équation différentielle linéaire

EDL1 pour : équation différentielle linéaire du premier ordre

EDL2 pour : équation différentielle linéaire du deuxième ordre.

Pour résoudre une EDL1 normalisée, sans second membre, sur un intervalle :

$$(E_0) \quad y' + ay = 0$$

Appliquer la formule du cours donnant la solution générale :

$$y : x \mapsto \lambda \exp \left( - \int a(x) dx \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

→ Exercice 10.1 a).

**Pour résoudre une EDL1 normalisée, avec second membre, sur un intervalle :**

$$(E) \quad y' + ay = b$$

**Pour résoudre une EDL1 non normalisée, avec ou sans second membre :**

$$(e) \quad \alpha y' + \beta y = \gamma$$

**Pour résoudre une EDL2 à coefficients constants et sans second membre :**

$$(E_0) \quad y'' + ay' + by = 0$$

**Pour résoudre une EDL2 à coefficients constants et avec second membre :**

$$(E) \quad y'' + ay' + by = g,$$

où  $g$  est une exponentielle-polynôme

Résoudre d'abord l'EDL1 sans second membre associée  $(E_0)$   $y' + ay = 0$ .

Chercher une solution particulière de  $(E)$  par l'une des méthodes suivantes :

- solution évidente
- principe de superposition des solutions
- méthode de variation de la constante.

Enfin, la solution générale de  $(E)$  est la somme d'une solution particulière de  $(E)$  et de la solution générale de  $(E_0)$ .

→ Exercices 10.1 b), 10.4.

Résoudre l'équation  $\alpha(x) = 0$ , d'inconnue  $x$ .

Résoudre  $(e)$  sur chaque intervalle sur lequel  $\alpha$  ne s'annule pas, en la normalisant, puis étudier le raccord des solutions en chaque point en lequel  $\alpha$  s'annule, par continuité, par dérivabilité.

→ Exercices 10.5, 10.6, 10.7.

Former l'équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$ , d'inconnue  $r \in \mathbb{K}$ , et calculer son discriminant  $\Delta = a^2 - 4b$ .

*Premier cas* : si l'équation caractéristique admet dans  $\mathbb{K}$  deux solutions  $r_1, r_2$  distinctes, c'est-à-dire si :

$$(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ et } \Delta > 0) \quad \text{ou} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ et } \Delta \neq 0),$$

alors la solution générale de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$  est :

$$y : x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

*Deuxième cas* : si l'équation caractéristique admet dans  $\mathbb{K}$  une solution double,  $r_0 = -\frac{a}{2}$ , c'est-à-dire si  $\Delta = 0$ , alors la solution générale de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$  est :

$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-\frac{a}{2}x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

*Troisième cas* : si l'équation caractéristique n'admet pas de solution dans  $\mathbb{K}$ , c'est-à-dire si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $\Delta < 0$ , alors la solution générale de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$  est :

$$y : x \mapsto e^{-\frac{a}{2}x} \left( A \cos \left( \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x \right) + B \sin \left( \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x \right) \right), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

→ Exercice 10.2.

Résoudre l'EDL2 sans second membre associée

$$(E_0) \quad y'' = ay' + by = 0.$$

Chercher une solution particulière de  $(E)$  du même type que le second membre  $g$  de  $(E)$ .

Plus précisément, si  $g : x \mapsto \sum_{k=1}^n e^{m_k x} P_k(x)$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{K}$ ,  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ , chercher une solution particulière de (E)

de la forme  $y : x \mapsto \sum_{k=1}^n e^{m_k x} Q_k(x)$ , où  $Q_1, \dots, Q_n \in \mathbb{K}[X]$  sont inconnus et où  $Q_k$  est de degré :

$\deg(P_k)$  si  $m_k$  n'est pas solution de l'équation caractéristique

$\deg(P_k) + 1$  si  $m_k$  est solution simple de l'équation caractéristique  
 $\deg(P_k) + 2$  si  $m_k$  est solution double de l'équation caractéristique.

Enfin, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E<sub>0</sub>).

### → Exercice 10.3.

#### Pour résoudre une ED non linéaire

Essayer de se ramener à une ED à variables séparables (dont la résolution reviendra à un calcul de primitives) ou à une EDL1 par changement de variable et/ou changement de fonction inconnue, ou par regroupement de termes dans l'écriture de l'ED.

### → Exercices 10.8, 10.21, 10.22, 10.23.

#### Pour résoudre une ED de Bernoulli

$$x^2y'' + axy' + by = k$$

Faire le changement de variable  $t = \ln|x|$ , et donc faire aussi un changement de fonction inconnue.

### → Exercice 10.11.

#### Pour résoudre une EDL avec conditions supplémentaires, par exemple conditions aux bords

Résoudre l'EDL puis traduire, sur la solution générale de l'EDL, les conditions imposées.

### → Exercice 10.13.

#### Pour obtenir des renseignements qualitatifs sur les solutions d'une ED, sans pouvoir, *a priori*, résoudre cette ED

Utiliser l'ED elle-même.

Souvent, à partir de l'ED, on pourra déduire le sens de variation(s) de la solution considérée.

### → Exercice 10.14.

#### Pour résoudre une équation fonctionnelle ou une équation intégrale

Essayer de se ramener à une ED, par dérivation.

### → Exercices 10.9, 10.12, 10.20

On pourra être amené à appliquer l'hypothèse, par exemple, à  $x$  et à  $-x$ , à  $x$  et à  $\frac{1}{x}$ , ou à d'autres expressions.

### → Exercices 10.10, 10.17, 10.19.

On raisonnera souvent par condition nécessaire, et on n'oubliera donc pas de traiter la réciproque.

**Pour résoudre certaines questions portant sur des dérivées**

**Pour étudier les solutions polynomiales d'une EDL1 ou une EDL2 à coefficients constants et avec second membre polynomial**

$$y'' + Ay' + By = C$$

On peut essayer de faire intervenir une ED.

En particulier, pour  $a \in \mathbb{R}$ , l'expression  $f' + af$  peut être reliée à la dérivée de  $x \mapsto e^{ax} f(x)$ .

→ Exercice 10.15.

On peut essayer de faire intervenir l'application linéaire

$$y \in \mathbb{R}[X] \mapsto y'' + Ay' + By \in \mathbb{R}[X].$$

→ Exercice 10.16.

## Énoncés des exercices

### 10.1

#### Exemples d'EDL1 normalisées

Résoudre les ED suivantes, d'inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  supposée dérivable :

- a)  $y' - xy = x, \quad I = \mathbb{R}$
- b)  $y' + 2y = 4e^x + \sin x + \cos x, \quad I = \mathbb{R}$ .

### 10.2

#### Exemples d'EDL2 à coefficients constants et sans second membre

Résoudre les ED suivantes, d'inconnue  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  supposée deux fois dérivable :

- a)  $y'' - 4y' + 3y = 0,$
- b)  $y'' - 6y' + 9y = 0,$
- c)  $y'' + y' + y = 0.$

### 10.3

#### Exemples d'EDL2 à coefficients constants et avec second membre

Résoudre les ED suivantes, d'inconnue  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  supposée deux fois dérivable :

- a)  $y'' + y = e^x$
- b)  $y'' - 5y' + 6y = (2x^2 - 4x + 1)e^x$
- c)  $y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x$
- d)  $y'' - 3y' + 2y = x(e^x + e^{-2x}).$

### 10.4

#### Exemples d'EDL1 normalisées

Résoudre les ED suivantes, d'inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  supposée dérivable :

- a)  $y' = y \tan x + \sin x, \quad I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$
- b)  $xy' - 2y = -\ln x, \quad I = ]0; +\infty[.$

### 10.5

#### Exemple d'EDL1 avec étude de raccord

Résoudre l'ED  $(x^3 - x)y' - (x^2 - x + 1)y = 0$ , d'inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , sur tout intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

**10.6 Exemple d'EDL1 avec étude de raccord**

Résoudre l'ED  $xy' + (1-x)y = e^{2x}$ , d'inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , sur tout intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

**10.7 Exemple d'EDL1 avec étude de raccord**

Montrer que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des applications  $f : ]-\infty ; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$\forall x \in ]-\infty ; 1[, x(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0$$

est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et en donner une base et la dimension.

**10.8 Exemple d'ED de Bernoulli**

Trouver toutes les applications  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , à valeurs  $> 0$  sur  $\mathbb{R}$ , dérivables, telles que  $y(0) = \frac{1}{3}$  et solutions de l'ED :  $y' + y - x^2y^2 = 0$ . On pourra effectuer le changement de fonction inconnue  $z = \frac{1}{y}$ .

**10.9 Exemple d'équation intégrale se ramenant à une EDL1**

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues sur  $\mathbb{R}$  et telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, 2 \int_0^1 f(tx) dt = f(x) \\ f(-1) = 0, f(1) = 1. \end{cases}$$

**10.10 Exemple d'équation fonctionnelle se ramenant à une EDL2**

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables sur  $\mathbb{R}$ , telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)).$$

**10.11 Équation différentielle d'Euler**

a) Soient  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  tel que  $I \subset \mathbb{R}_+^*$  ou  $I \subset \mathbb{R}_-^*$ ,  $k : I \rightarrow \mathbb{K}$  une application continue. Montrer que l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2y'' + axy' + by = k$$

se ramène, par le changement de variable  $t = \ln|x|$ , à une EDL2 à coefficients constants.

b) Exemple : Résoudre l'ED (E)  $x^2y'' + xy' + y = x^2 + x + 1$ , d'inconnue  $y : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , supposée deux fois dérivable.

**10.12 Exemple d'équation fonctionnelle se ramenant à une EDL2 à coefficients constants et sans second membre**

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) dt = f'(x) + 1.$$

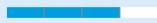
**10.13 Exemple de résolution d'une EDL4 à coefficients constants, sans second membre, et avec conditions au bord**

Résoudre :  $y^{(4)} + y = 0$ ,  $y(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , d'inconnue  $y : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  supposée quatre fois dérivable.

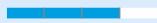
**10.14****Exemple d'étude locale d'une solution d'une ED non linéaire**

Soit  $y : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , telle que :  $y' = e^{-y} - e^{-3y} + e^{-5y}$ .

Déterminer les limites de  $y$  et  $y'$  en  $+\infty$ .

**10.15****Intervention d'une EDL1**

Soient  $a \in ]0 ; +\infty[$ ,  $f : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f' + af$  soit bornée.  
Montrer que  $f$  est bornée.

**10.16****Étude d'une EDL2 à coefficients constants et à second membre polynôme : intervention de l'algèbre linéaire**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que l'ED  $y'' + y = P$ , d'inconnue  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , admet une solution polynôme et une seule.

**10.17****Exemple d'équation fonctionnelle se ramenant à une EDL2 d'Euler**

Trouver toutes les applications  $f : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in ]0 ; +\infty[, f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right).$$

**10.18****Exemple d'équation fonctionnelle se ramenant à une EDL4 à coefficients constants**

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f'(-x) + 2f(x) = x^2.$$

**10.19****Exemple d'équation intégrale se ramenant à une EDL1**

Trouver toutes les applications  $f : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que :

$$\forall x \in [0 ; +\infty[, \int_0^x (x - 3t) f(t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

**10.20****Exemple d'EDL2 à coefficients constants et avec second membre non exponentielle-polynôme**

Résoudre l'ED  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$ , d'inconnue  $y : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

**10.21****Exemple d'ED dans laquelle  $|y|$  intervient**

Montrer que l'ED  $2xy' - |y| = x$ , d'inconnue  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto y(x)$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , n'a pas de solution.

**10.22****Exemple d'équation différentielle non linéaire du second ordre**

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$ff'' - f'^2 = 1.$$

# Du mal à démarrer ?

## 10.1 Il s'agit d'EDL1 normalisées, avec second membre.

Notons (E) l'ED proposée et (E<sub>0</sub>) l'EDL1 sans second membre associée.

D'après le Cours, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E<sub>0</sub>).

Commencer par résoudre (E<sub>0</sub>) par la formule du Cours :

la solution générale de (E<sub>0</sub>)  $y' + ay = 0$  est

$$y : x \mapsto \lambda \exp\left(-\int a(x) dx\right), \lambda \in \mathbb{K}.$$

Ensuite, chercher une solution particulière de (E) :

- il se peut qu'il y ait une solution évidente (a))

- si le second membre de (E) est de la forme exponentielle-polynôme, chercher une solution particulière du même genre (b))

- sinon, la méthode de variation de la constante s'applique toujours (voir exercice 10.4).

## 10.2 Il s'agit d'EDL2 à coefficients constants et sans second membre, donc on dispose d'une méthode et de formules de résolution dans le Cours, faisant intervenir l'équation caractéristique.

## 10.3 Il s'agit d'EDL2 à coefficients constants, avec second membre du type exponentielle-polynôme.

Notons (E) l'ED proposée et (E<sub>0</sub>) l'EDL2 sans second membre associée.

Former l'équation caractéristique de (E<sub>0</sub>), résoudre cette équation caractéristique, et en déduire la solution générale de (E<sub>0</sub>).

Chercher ensuite une solution particulière de (E), du même genre que le second membre, avec une condition sur les degrés.

La solution générale de (E) est alors la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E<sub>0</sub>).

## 10.4 Il s'agit d'EDL1 normalisées, avec second membre.

Notons (E) l'ED proposée et (E<sub>0</sub>) l'EDL1 sans second membre associée.

D'après le Cours, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E<sub>0</sub>).

Commencer par résoudre (E<sub>0</sub>) par la formule du Cours :

la solution générale de (E<sub>0</sub>)  $y' + ay = 0$  est

$$y : x \mapsto \lambda \exp\left(-\int a(x) dx\right), \lambda \in \mathbb{K}.$$

Ensuite, chercher une solution particulière de (E) :

- il se peut qu'il y ait une solution évidente (voir exercice 10.1 a))

- si le second membre de (E) est de la forme exponentielle-polynôme, chercher une solution particulière du même genre (voir exercice 10.1 b))

- sinon, la méthode de variation de la constante s'applique toujours (a), b)).

## 10.5 Il s'agit d'une EDL1 non normalisée.

En notant (e) l'ED proposée, considérer l'ED (E) normalisée associée, obtenue en divisant par le coefficient  $x^3 - x$  de  $y'$  dans (e).

Résoudre (E) sur tout intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  ne contenant pas un point d'annulation  $-1, 0, 1$  de ce coefficient, puis étudier les raccords des solutions de (e) en ces points.

## 10.6 Il s'agit d'une EDL1 non normalisée.

En notant (e) l'ED proposée, considérer l'ED (E) normalisée associée, obtenue en divisant par le coefficient  $x$  de  $y'$  dans (e).

Résoudre (E) sur tout intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  ne contenant pas le point d'annulation 0 de ce coefficient, puis étudier les raccords des solutions de (e) en ce point.

## 10.7 L'ED (e<sub>0</sub>) $x(x-1)y' - (x-2)y = 0$ est une EDL1 non normalisée.

Résoudre (e<sub>0</sub>) sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; 1[$ , puis étudier le raccord en 0.

## 10.8 En notant $z = \frac{1}{y}$ , montrer que l'ED de l'énoncé (qui est non linéaire) se ramène à une EDL1 portant sur $z$ . Résoudre celle-ci, puis revenir à $y$ , et traduire les conditions $y > 0$ et $y(0) = \frac{1}{3}$ .

## 10.9 1) Soit $f$ convenant. Montrer, en utilisant les hypothèses de l'énoncé, que $f$ est alors de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $f$ vérifie une EDL1. Résoudre celle-ci et en déduire $f$ .

2) Étudier la réciproque.

## 10.10 1) Soit $f$ convenant. Montrer qu'alors $f$ est deux fois dérivable et que $f'' = 0$ . En déduire la forme de $f$ .

2) Étudier la réciproque.

## 10.11 a) Noter $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x)$ , $t = \ln|x| = \ln(ex)$ , $z(t) = y(x)$ . Montrer que l'ED d'Euler (E) (portant sur $y$ ) se ramène à une EDL2 à coefficients constants (portant sur $z$ ), en calculant la dérivée première et la dérivée seconde de $y$ , par composition.

**10.12** Montrer que, si  $f$  convient, alors  $f$  est de classe  $C^2$ . Traduire (E) par l'égalité des dérivées et l'égalité des fonctions en un point. Résoudre l'EDL2 ainsi apparue.

**10.13** Résoudre l'EDL4. On admettra que le résultat du cours sur la résolution des EDL2 à coefficients constants et sans second membre s'étend au cas des EDL d'ordre supérieur (à coefficients constants et sans second membre). Traduire ensuite les conditions au bord.

**10.14** Montrer  $y' > 0$  et déduire que  $y$  est croissante. Établir que  $y$  ne peut pas avoir une limite finie en  $+\infty$ . Conclure :  $y \xrightarrow{+\infty} +\infty$ , puis  $y' \xrightarrow{+\infty} 0$ .

**10.15** Noter  $g = f' + af$  et considérer cette égalité comme une EDL1 d'inconnue  $f$ . Calculer  $f$  en fonction de  $g$ , en utilisant la méthode de variation de la constante. On obtiendra :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{at} g(t) dt + e^{-ax} f(0).$$

Exploiter alors le fait que  $g$  est bornée pour déduire que  $f$  est bornée.

**10.16** Montrer que l'application  $T : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ ,  $Q \mapsto Q'' + Q$  est linéaire et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $T$ . Montrer ensuite que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'endomorphisme  $T_n$  induit par  $T$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$  est bijectif, en examinant sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Conclure que  $T$  est bijectif.

**10.17** 1) Soit  $f$  convenant. Montrer qu'alors  $f$  est deux fois dérivable et vérifie une EDL2 d'Euler, sans second membre (cf. exercice 10.11). Noter  $t = \ln x$ ,  $g(t) = f(x)$  et se ramener à une EDL2 à coefficients constants (portant sur  $g$ ). En déduire la forme de  $f(x)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$ .

2) Étudier la réciproque.

**10.18** 1) Soit  $f$  convenant. Montrer que  $f$  est quatre fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et satisfait une EDL4 à coefficients constants. Résoudre celle-ci et en déduire la forme de  $f$ .

2) Étudier la réciproque.

**10.19** 1) Soit  $f$  convenant. En utilisant les hypothèses de l'énoncé, montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0; +\infty[$  et que  $f$  satisfait une EDL1. Résoudre cette EDL1 et en déduire  $f = -1$ .

2) Vérifier la réciproque.

**10.20** Il s'agit d'une EDL2 à coefficients constants, mais avec second membre qui n'est pas de la forme exponentielle-poly-nôme.

Remarquer que  $\frac{d}{dx}(e^x(y' + y)) = e^x(y'' + 2y' + y)$  et que  $\frac{d}{dx}(e^x y) = e^x(y' + y)$ .

**10.21** Puisqu'il s'agit d'établir un résultat exprimé par une négation, raisonner par l'absurde.

Étudier l'ED proposée d'abord sur  $]0; +\infty[$ , et en déduire la forme de  $y(x)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$ . En particulier, montrer  $y(0) > 0$ . En déduire le comportement de  $y(x)$  lorsque  $x$  est près de 0 et  $x < 0$ .

Aboutir à une contradiction.

**10.22** 1) Soit  $f$  convenant. Montrer que  $f$  et  $f''$  ne s'annulent en aucun point. En déduire que  $f$  est trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\frac{f'''}{f''} = \frac{f'}{f}$ . Intégrer et en déduire que  $f$  satisfait une EDL2 à coefficients constants et sans second membre. Résoudre cette EDL2 et en déduire la forme de  $f$ .

2) Étudier la réciproque.

# Corrigés des exercices

**10.1**

a) La solution générale de  $(E_0)$   $y' - xy = 0$  sur  $\mathbb{R}$  est

$$y_0 : x \mapsto \lambda \exp\left(\int x \, dx\right) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ , évidente, est  $y : x \mapsto -1$ .

On conclut que la solution générale de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  est :

$$y : x \mapsto -1 + \lambda e^{\frac{x^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) La solution générale de  $(E_0)$   $y' + 2y = 0$  sur  $\mathbb{R}$  est

$$y_0 : x \mapsto \lambda \exp\left(-\int 2 \, dx\right) = \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vu la forme du second membre, on cherche une solution particulière de  $(E)$  de la forme :

$$y : x \mapsto a e^x + b \cos x + c \sin x, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} y' + 2y &= (a e^x - b \sin x + c \cos x) + 2(a e^x + b \cos x + c \sin x) \\ &= 3a e^x + (2c - b) \sin x + (c + 2b) \cos x. \end{aligned}$$

Ainsi,  $y$  est solution de  $(E)$  si :

$$3a = 4, \quad 2c - b = 1, \quad c + 2b = 1,$$

$$\text{c'est-à-dire : } a = \frac{4}{3}, \quad b = \frac{1}{5}, \quad c = \frac{3}{5}.$$

Une solution particulière de  $(E)$  est donc :

$$y : x \mapsto \frac{4}{3} e^x + \frac{1}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x.$$

On conclut que la solution générale de  $(E)$  est :

$$y : x \mapsto \frac{4}{3} e^x + \frac{1}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x + \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

**10.2**

a) L'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 3 = 0$  admet deux solutions réelles  $r_1 = 1$  et  $r_2 = 3$ , donc la solution générale de l'ED est :

$$y : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

b) L'équation caractéristique  $r^2 - 6r + 9 = 0$  admet une solution réelle double  $r_0 = 3$ , donc la solution générale de  $(E)$  est :

$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

c) L'équation caractéristique  $r^2 + r + 1 = 0$  admet deux solutions complexes non réelles  $r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ,

$$r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$
, donc la solution générale de  $(E)$  est :

$$y : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right),$$

$$(A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

**10.3**

a) L'équation caractéristique  $r^2 + 1 = 0$  admet deux solutions complexes non réelles,  $r_1 = -i$ ,  $r_2 = i$ , donc la solution générale de  $(E_0)$  est  $y : x \mapsto A \cos x + B \sin x$ ,  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

• Une solution particulière de  $(E)$ , évidente, est  $y : x \mapsto \frac{1}{2} e^x$ .

On conclut que la solution générale de  $(E)$  est :

$$y : x \mapsto \frac{1}{2} e^x + A \cos x + B \sin x, (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

b) L'équation caractéristique  $r^2 - 5r + 6 = 0$  admet deux solutions réelles distinctes  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$ . La solution générale de  $(E_0)$  est donc :  $y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

• Puisque le second membre de  $(E)$  est de la forme  $P(x) e^{mx}$  où  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $m = 1$  (donc  $m \neq 2$  et  $m \neq 3$ ), une solution particulière de  $(E)$  est de la forme  $y : x \mapsto Q(x) e^x$ , où  $Q \in \mathbb{R}[X]$  et  $\deg(Q) = \deg(P)$ . Notons  $Q = ax^2 + bx + c$ , où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  est à trouver. On a :

$$y(x) = (ax^2 + bx + c) e^x,$$

$$y'(x) = ((ax^2 + bx + c) + (2ax + b)) e^x$$

$$= (ax^2 + (b + 2a)x + (c + b)) e^x,$$

$$y''(x) =$$

$$((ax^2 + (b + 2a)x + (c + b)) + (2ax + (b + 2a))) e^x$$

$$= (ax^2 + (b + 4a)x + (c + 2b + 2a)) e^x,$$

$$\text{d'où : } y''(x) - 5y'(x) + 6y(x)$$

$$= (2ax^2 + (2b - 6a)x + (2c - 3b + 2a)) e^x.$$

Pour que  $y$  soit solution de  $(E)$ , il suffit que :

$$2a = 2, \quad 2b - 6a = -4, \quad 2c - 3b + 2a = 1.$$

On résout ce système en cascade, et on obtient :

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1.$$

Ainsi,  $y : x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$  est une solution particulière de (E).

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On peut contrôler ce résultat par report dans l'énoncé.

c) • L'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 4 = 0$  admet une solution réelle double  $r_0 = 2$ . La solution générale de (E<sub>0</sub>) est donc  $y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

• Vu le second membre, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$y : x \mapsto a \sin x + b \cos x$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  à calculer. On a alors :

$$y'' - 4y' + 4y = (3a + 4b) \sin x + (3b - 4a) \cos x.$$

Pour que  $y$  soit solution de (E), il suffit que :  $\begin{cases} 3a + 4b = 7 \\ 3b - 4a = -1 \end{cases}$ ,

$$\text{c'est-à-dire } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Ainsi, une solution particulière de (E) est :

$$y : x \mapsto \sin x + \cos x.$$

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : x \mapsto \sin x + \cos x + (\lambda x + \mu)e^{2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On peut contrôler ce résultat par report dans l'énoncé.

d) • L'équation caractéristique  $r^2 - 3r + 2 = 0$  admet deux solutions réelles distinctes,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ . La solution générale de (E<sub>0</sub>) est donc :  $y : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

• Puisque le second membre est  $x \mapsto x e^x + x e^{-2x}$ , somme d'exponentielles-polynômes, que 1 (coefficients de  $x$  dans  $e^x$ ) est solution simple de l'équation caractéristique et que 2 (coefficients de  $x$  dans  $e^{-2x}$ ) n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de (E) de la forme

$$y : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x + (ux + v)e^{-2x},$$

où  $(a, b, c, u, v) \in \mathbb{R}^5$  est à calculer.

On a, par un calcul immédiat :

$$\begin{aligned} y'(x) &= (ax^2 + (b+2a)x + (c+b))e^x \\ &\quad + (-2ux + (u-2v))e^{-2x}, \\ y''(x) &= (ax^2 + (b+4a)x + (c+2b+2a))e^x \\ &\quad + (4ux + (4v-4u))e^{-2x}, \end{aligned}$$

d'où, après report :

$$\begin{aligned} y'' - 3y'' + 2y &= (-2ax + (2a-b))e^x \\ &\quad + (12ux + (12v-7u))e^{-2x}. \end{aligned}$$

Pour que  $y$  soit solution de (E), il suffit que :

$$-2a = 1, \quad 2a - b = 0 \quad 12u = 1 \quad 12v - 7u = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire : } a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad u = \frac{1}{12}, \quad v = \frac{7}{144}.$$

Ainsi, une solution particulière de (E) est :

$$y : x \mapsto \left( -\frac{1}{2}x^2 - x \right) e^x + \left( \frac{1}{12}x + \frac{7}{144} \right) e^{-2x}.$$

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$\begin{aligned} y : x \mapsto & \left( -\frac{1}{2}x^2 - x \right) e^x + \left( \frac{1}{12}x + \frac{7}{144} \right) e^{-2x} \\ & + \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**10.4** a) La solution générale de (E<sub>0</sub>)  $y' - y \tan x = 0$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  est :

$$\begin{aligned} y : x \mapsto & \lambda \exp \left( - \int -\tan x \, dx \right) = \lambda e^{-\ln |\cos x|} \\ & = \lambda e^{-\ln \cos x} \\ & = \frac{\lambda}{\cos x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour trouver une solution particulière de (E), on applique la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (E) de la forme  $y : x \mapsto \lambda(x) \frac{1}{\cos x}$ , où  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction inconnue, supposée dérivable.

On a alors :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) = y(x) \tan x + \sin x$$

$$\iff \forall x \in I, \quad \frac{\lambda'(x)}{\cos x} = \sin x$$

$$\iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = \sin x \cos x$$

$$\iff \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x.$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\cos x} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : x \mapsto \frac{\sin^2 x}{2 \cos x} + \frac{\lambda}{\cos x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) La solution générale de (E<sub>0</sub>)  $y' - \frac{2}{x}y = 0$  sur  $]0; +\infty[$  est :

$$y : x \mapsto \lambda \exp \left( \int \frac{2}{x} dx \right) = \lambda e^{2 \ln|x|} = \lambda x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de (E), on applique la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (E) de la forme  $y : x \mapsto \lambda(x)x^2$ , où  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction inconnue, supposée dérivable. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad xy' - 2y &= -\ln x \iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x)x^3 = -\ln x \\ \iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x) &= -\frac{\ln x}{x^3} \\ \iff \forall x \in I, \quad \lambda(x) &= \int -\frac{\ln x}{x^3} dx = \int -x^{-3} \ln x dx. \end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int -x^{-3} \ln x dx &= \frac{x^{-2}}{2} \ln x - \int \frac{x^{-2}}{2} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^{-2}}{2} \\ &= \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \text{Cte}. \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de (E) est :

$$y : x \mapsto \lambda(x)x^2 = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4},$$

ce que l'on peut d'ailleurs contrôler.

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : x \mapsto \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4} + \lambda x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**10.5** On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0 \iff x \in \{-1, 0, 1\}$ .

1) *Résolution de (e) sur un intervalle ouvert ne contenant ni  $-1$ , ni  $0$ , ni  $1$*

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  ne contenant ni  $-1$ , ni  $0$ , ni  $1$ , c'est-à-dire :

$$I \subset ]-\infty; -1[ \quad \text{ou} \quad I \subset ]-1; 0[ \quad \text{ou} \quad I \subset ]0; +\infty[.$$

Sur cet intervalle : (e)  $\iff$  (E)  $y' - \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x}y = 0$ .

L'ED (E) est une EDL1 normalisée et sans second membre.

La solution générale de (E) sur  $I$  est donc :

$$y : x \mapsto \lambda \exp \left( \int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On effectue un calcul de primitive, en utilisant une décomposition en éléments simples :

$$\frac{X^2 - X + 1}{X^3 - X} = \frac{X^2 - X + 1}{(X+1)X(X-1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X-1},$$

où  $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$  est à calculer.

En multipliant par  $X+1$  puis en remplaçant  $X$  par  $-1$ , on obtient :  $a = \frac{3}{2}$ .

En multipliant par  $X$  puis en remplaçant  $X$  par  $0$ , on obtient :  $b = -1$ .

En multipliant par  $X-1$  puis en remplaçant  $X$  par  $1$ , on obtient :  $c = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Ainsi : } \frac{X^2 - X + 1}{X^3 - X} = \frac{3}{2} \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X} + \frac{1}{2} \frac{1}{X-1},$$

ce que l'on peut contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

On a donc, pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda \exp \left( \frac{3}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx \right) \\ &= \lambda \exp \left( \frac{3}{2} \ln|x+1| - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| \right) \\ &= \lambda \frac{|x+1|^{\frac{3}{2}} |x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|}. \end{aligned}$$

## 2) • Raccord en $-1$

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $-1$  et ne contenant ni  $0$  ni  $1$ .

La solution générale de (e) sur  $I - \{-1\}$  est :

$$y : I - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 \frac{|x+1|^{\frac{3}{2}} |x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|} & \text{si } x < -1 \\ \lambda_2 \frac{|x+1|^{\frac{3}{2}} |x-1|^{\frac{1}{2}}}{|x|} & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On a, pour tout  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  :  $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow -1^-]{} 0$  et  $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow -1^+]{} 0$ .

On prolonge donc  $y$  par continuité en  $-1$  en posant  $y(-1) = 0$ .

À cause de l'exposant  $\frac{3}{2}$  sur  $|x+1|$  dans l'écriture de  $y(x)$ ,

on a :  $\frac{y(x) - y(-1)}{x - (-1)} \xrightarrow[x \rightarrow -1^\pm]{} 0$ , donc  $y$  est dérivable en  $-1$  et  $y'(-1) = 0$ .

De plus, (e) est alors clairement satisfaite en  $x = -1$ .



On étudie la dérivabilité de  $y$  en 0, en formant, par exemple, un taux d'accroissement :

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = \frac{1}{x} \left( \frac{e^{2x} - e^x}{x} - 1 \right) = \frac{e^{2x} - e^x - x}{x^2}.$$

Pour trouver la limite (si elle existe) de ce taux d'accroissement, lorsque  $x \rightarrow 0$ , utilisons des développements limités :

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x} - e^x - x}{x^2} &= \frac{1}{x^2} \left[ \left( 1 + 2x + \frac{1}{2!}(2x)^2 + o(x^2) \right) - \left( 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2) \right) - x \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left( \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \right) = \frac{3}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ceci montre que  $y$  est dérivable en 0 et que  $y'(0) = \frac{3}{2}$ .

Enfin, il est alors clair que l'ED de l'énoncé est satisfaite par  $y$  au point 0.

Finalement, l'ensemble  $\mathcal{S}_I$  des solutions de l'ED proposée sur tout intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  est :

$$\begin{cases} \left\{ y : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{2x} + \lambda e^x}{x}; \lambda \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } 0 \notin I \\ \left\{ y : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \right\} & \text{si } 0 \in I. \end{cases}$$

**10.7** L'ensemble  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des solutions, sur  $]-\infty; 1[$ , de l'EDL1 sans second membre (non normalisée)

$$(e_0) \quad x(x-1)y' - (x-2)y = 0,$$

donc, d'après le Cours,  $\mathcal{S}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1) Notons  $I = ]-\infty; 0[$  ou  $I = ]0; 1[$ .

L'ED  $(e_0)$  est normalisable sur  $I$ , équivalente sur  $I$  à :

$$(E_0) \quad y' - \frac{x-2}{x(x-1)}y = 0.$$

La solution générale de  $(E_0)$  sur  $I$  est :

$$y : x \mapsto \lambda \exp \left( \int \frac{x-2}{x(x-1)} dx \right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{X-2}{X(X-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

En multipliant par X puis en remplaçant X par 0, on obtient :  $a = 2$ .

En multipliant par  $X-1$  puis en remplaçant X par 1, on obtient :  $b = -1$ .

$$\text{Ainsi : } \frac{X-2}{X(X-1)} = \frac{2}{X} - \frac{1}{X-1},$$

ce que l'on peut contrôler par réduction au même dénominateur dans le second membre.

D'où :

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda \exp \left( \int \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} \right) dx \right) \\ &= \lambda \exp (2 \ln|x| - \ln|x-1|) = \lambda \frac{x^2}{|x-1|} \\ &= \lambda \frac{x^2}{1-x}. \end{aligned}$$

Quitte à remplacer  $\lambda$  par  $-\lambda$ , la solution générale de  $(E_0)$  sur  $I$  est :  $y : x \mapsto \lambda \frac{x^2}{x-1}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## 2) Étude du raccord en 0

La solution générale de  $(e_0)$  sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[$  est :

$$y : x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Il est clair que, pour tout  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

On prolonge donc  $y$  par continuité en 0 en posant  $y(0) = 0$ .

On a alors :  $\frac{y(x) - y(0)}{x} = \lambda_{1,2} \frac{x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} 0$ , donc  $y$  est dérivable en 0 et  $y'(0) = 0$ .

Enfin, l'ED  $(e)$  est alors satisfaite par  $y$  en 0.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ y : ]-\infty; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \right. \\ &\quad \left. x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

En notant :

$$f_1 : ]-\infty; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_2 : ]-\infty; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

il est clair que :

$$\mathcal{S} = \left\{ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 ; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(f_1, f_2).$$

Enfin, la famille  $(f_1, f_2)$  est libre, car, pour tout  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned}\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 &\implies \begin{cases} \forall x \in ]-\infty; 0[, \lambda_1 \frac{x^2}{x-1} = 0 \\ \forall x \in ]0; 1[, \lambda_2 \frac{x^2}{x-1} = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Finalement,  $\mathcal{S}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, une base de  $\mathcal{S}$  est  $(f_1, f_2)$ , et  $\dim(\mathcal{S}) = 2$ .

**10.8** Pour  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs  $> 0$ , considérons  $z = \frac{1}{y}$ , qui est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned}(\text{E}) \quad y' + y - x^2 y^2 = 0 &\iff \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} - x^2 = 0 \\ &\iff -z' + z - x^2 = 0 \\ &\iff (\text{F}) \quad z' - z = -x^2.\end{aligned}$$

L'ED (F) est une EDL1 avec second membre.

La solution générale de l'EDL1 associée sans second membre  $z' - z = 0$  est  $z : x \mapsto \lambda e^x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Vu le second membre de (F), on cherche une solution particulière de (F) de la forme

$$z : x \mapsto ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) - z(x) &= -x^2 \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2ax + b) - (ax^2 + bx + c) &= -x^2 \\ \iff \begin{cases} -a = -1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2a \\ c = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de (F) est

$$z : x \mapsto x^2 + 2x + 2,$$

ce que l'on peut contrôler.

On en déduit la solution générale de (F) sur  $\mathbb{R}$  :

$$z : x \mapsto x^2 + 2x + 2 + \lambda e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ensuite :

$$y(0) = \frac{1}{3} \iff z(0) = 3 \iff 2 + \lambda = 3 \iff \lambda = 1.$$

Enfin, l'application

$$y : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 2 + e^x} = \frac{1}{(x+1)^2 + 1 + e^x}$$

est bien à valeurs  $> 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

On conclut qu'il y a une application et une seule convenant, l'application :

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 2 + e^x}.$$

### 10.9 1) Soit $f$ convenant.

On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  fixé, par le changement de variable

$$u = tx : \int_0^1 f(tx) dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du,$$

$$\text{donc : } f(x) = \frac{2}{x} \int_0^x f(u) du.$$

Comme  $f$  est  $C^0$  sur  $\mathbb{R}$ , l'application  $x \mapsto \int_0^x f(u) du$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , puis, par produit par  $x \mapsto \frac{2}{x}$ , il en résulte que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Comme :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, xf(x) = 2 \int_0^x f(u) du$ , on déduit alors, en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad xf'(x) + f(x) = 2f(x).$$

Ainsi,  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}^*$  de l'ED :  $xy' - y = 0$ .

Par résolution de cette EDL1 sans second membre, il en résulte qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; 0[, \quad f(x) = \lambda x \\ \forall x \in ]0; +\infty[, \quad f(x) = \mu x. \end{cases}$$

De plus, comme  $f$  est continue en 0, on a, en prenant la limite lorsque  $x$  tend vers 0 :  $f(0) = 0$ .

$$\text{Ensuite : } \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1. \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

2) Réciproquement, considérons l'application  $f$  obtenue ci-dessus.

Il est clair que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $f(-1) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , en séparant en deux cas selon le signe de  $x$  :

$$2 \int_0^1 f(tx) dt \begin{cases} = 2 \int_0^1 0 dt = 0 = f(x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ = 2 \int_0^1 tx dt = 2x \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = x = f(x). & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On conclut que  $f$  convient.

Finalement, il y a une application,  $f$  et une seule convenant, l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

### 10.10

I) Soit  $f$  convenant.

On a alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , en appliquant l'hypothèse à  $x$  et à  $-x$  :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$$

et

$$f'(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)),$$

donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = f'(x)$ .

D'autre part, puisque  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , par opérations,  $f' : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On obtient alors, en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{2}(f'(x) - f'(-x)) = 0.$$

Il existe donc  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ .

2) Réciproquement, soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ &\iff a = \frac{1}{2}((ax + b) + (-ax + b)) \\ &\iff a = b. \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des applications  $f$  cherché est :

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a(x + 1); a \in \mathbb{R}\}.$$

### 10.11

a) On va effectuer le changement de variable  $t = \ln|x|$  dans l'ED d'Euler (E) de l'énoncé.

On note donc  $t = \ln|x|$ ,  $J = \{\ln|x|; x \in I\}$ ,  $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x)$ ,  $z(t) = y(x)$ .

On a alors  $x = \varepsilon e^t$ ,  $z$  est deux fois dérivable sur  $J$ , et, pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(t), \quad y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = z'(t) \frac{1}{x}, \\ y''(x) &= \frac{d}{dx}(y'(x)) = \frac{d}{dx}\left(z'(t) \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{d}{dx}(z'(t)) \frac{1}{x} + z'(t) \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}(z'(t)) \frac{dt}{dx}\right) \frac{1}{x} + z'(t)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= z''(t) \frac{1}{x^2} - z'(t) \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (E) &\iff x^2 \left( \frac{z''(t)}{x^2} - \frac{z'(t)}{x^2} \right) + ax \frac{z'(t)}{x} + bz(t) = k(x) \\ &\iff z''(t) + (a - 1)z'(t) + bz(t) = k(\varepsilon e^t). \end{aligned}$$

Ainsi, (E) se ramène à une EDL2 à coefficients constants.

b) On applique la méthode de  $a$ .

Faisons le changement de variable  $t = \ln x$ ,  $x = e^t$ ,  $z(t) = y(x)$ . On a :

$$y(x) = z(t), \quad y'(x) = z'(t) \frac{1}{x}, \quad y''(x) = z''(t) \frac{1}{x^2} - z'(t) \frac{1}{x^2},$$

donc :

$$\begin{aligned} (E) \quad x^2 y'' + xy' + y &= x^2 + x + 1 \\ &\iff (z'' - z') + z' + z = e^{2t} + e^t + 1 \\ &\iff z'' + z = e^{2t} + e^t + 1 \quad (F). \end{aligned}$$

La solution générale de l'EDL2 sans second membre associée  $(F_0)$   $z'' + z = 0$  est  $x \mapsto A \cos t + B \sin t$ ,  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

Puisque 1, 0 ne sont pas solutions de l'équation caractéristique  $r^2 + 1 = 0$ , on cherche une solution particulière de (F) sous la forme  $z : t \mapsto a e^{2t} + b e^t + c$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  à calculer. On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + z(t) &= e^{2t} + e^t + 1 \\ \iff \forall t \in \mathbb{R}, (4a e^{2t} + b e^t) + (a e^{2t} + b e^t + c) &= e^{2t} + e^t + 1 \\ \iff \forall t \in \mathbb{R}, (5a - 1)e^{2t} + (2b - 1)e^t + (c - 1) &= 0 \\ \iff (5a - 1 = 0, 2b - 1 = 0, c - 1 = 0) & \\ \iff \left( a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{2}, c = 1 \right). & \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de (F) est :

$$t \mapsto \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t + 1.$$

La solution générale de (F) est donc :

$z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$t \mapsto \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t + 1 + A \cos t + B \sin t, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit la solution générale de (E) :

$y : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} x \mapsto \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + A \cos(\ln x) + B \sin(\ln x), \\ (A, B) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**10.12** Si  $f$  convient, alors  $f$  est dérivable, donc continue, donc  $x \mapsto \int_0^x f$  est de classe  $C^1$ , donc comme  $f'(x) = -1 + \int_0^x f(t) dt$ ,  $f'$  est  $C^1$ , donc  $f$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit donc  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . On a, par dérivation et prise de valeur en un point :

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t) dt = f'(x) + 1$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f''(x) \\ 0 = f'(0) + 1. \end{cases}$$

Par résolution de cette EDL2 à coefficients constants et sans second membre,  $f$  est de la forme :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

on a alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = A \operatorname{sh} x + B \operatorname{ch} x$ ,  
donc :  $f'(0) + 1 = 0 \iff B + 1 = 0 \iff B = -1$ .

On conclut que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto A \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x; \quad A \in \mathbb{R}\}.$$

**10.13** L'ED  $y^{(4)} + y = 0$  est une EDL4 à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique  $r^4 + 1 = 0$  admet quatre solutions complexes deux à deux distinctes, qui sont  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$ . La solution générale de  $y^{(4)} + y = 0$  est donc :

$$y : x \mapsto \underbrace{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( A \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + B \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)}_{\text{notée } u(x)} + \underbrace{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( C \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + D \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)}_{\text{notée } v(x)}, \quad (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4.$$

On a, pour tout  $(C, D) \in \mathbb{R}^2$  :  $v(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Si  $A \neq 0$ , alors  $u(2n\pi\sqrt{2}) = e^{2n\pi} A$ , qui ne tend pas vers 0 lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini. Et, si  $B \neq 0$ ,  $u\left(\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{2}\right) = e^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} B$ , qui ne tend pas vers 0 lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini.

Ceci montre que :  $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0 \iff A = B = 0$ .

Supposons  $A = B = 0$ , donc :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad y(x) = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( C \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + D \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

On a alors :  $y(0) = 0 \iff C = 0$ .

Supposons donc  $C = 0$ , d'où :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad y(x) = D e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

On a alors :  $\forall x \in [0; +\infty[,$

$$y'(x) = D e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\text{d'où : } y'(0) = 1 \iff \frac{D}{\sqrt{2}} = 1 \iff D = \sqrt{2}.$$

Finalement, il y a une application et une seule  $y$  convenant, l'application :

$$y : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{2} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

**10.14** I) On a :

$$\begin{aligned} y' &= e^{-y} - e^{-3y} + e^{-5y} = e^{-y} \left( 1 - e^{-2y} + e^{-4y} \right) \\ &= e^{-y} \left( \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-2y} \right)^2 + \frac{3}{4} e^{-4y} \right) > 0, \end{aligned}$$

donc  $y$  est (strictement) croissante sur  $[0; +\infty[$ .

Supposons que  $y$  admette une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ .

Alors :

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-y(x)} - e^{-3y(x)} + e^{-5y(x)} \\ &\xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \underbrace{e^{-\ell} - e^{-3\ell} + e^{-5\ell}}_{\text{noté } L} > 0. \end{aligned}$$

Il existe donc  $a \in [0; +\infty[$  tel que :

$$\forall t \in [a; +\infty[, \quad y'(t) \geqslant \frac{L}{2}.$$

On a alors :

$\forall x \in [a; +\infty[,$

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(t) dt \geqslant y(a) + (x - a) \frac{L}{2} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

en contradiction avec  $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

Ainsi,  $y$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  et n'a pas de limite finie en  $+\infty$ , donc :  $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

2) On a alors :  $y'(x) = e^{-y(x)} - e^{-3y(x)} + e^{-5y(x)} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**10.15** I) La solution générale de l'EDL1 sans second membre  $y' + ay = 0$  est  $x \mapsto \lambda e^{-ax}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Pour trouver une solution particulière de l'EDL1 avec second membre (E)  $y' + ay = g$ , on applique la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de

(E) de la forme  $y : x \mapsto \lambda(x) e^{-ax}$ , où  $\lambda : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est l'inconnue, supposée dérivable. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; +\infty[, & y'(x) + ay(x) = g(x) \\ \iff \forall x \in [0; +\infty[, & \lambda'(x) e^{-ax} = g(x) \\ \iff \forall x \in [0; +\infty[, & \lambda'(x) = e^{ax} g(x) \\ \iff \forall x \in [0; +\infty[, & \lambda(x) = \int_0^x e^{at} g(t) dt. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$x \mapsto e^{-ax} \int_0^x e^{at} g(t) dt.$$

La solution générale de (E) est donc :

$$x \mapsto e^{-ax} \int_0^x e^{at} g(t) dt + \lambda e^{-ax}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comme  $f$  est solution de (E), il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{at} g(t) dt + \lambda e^{-ax}.$$

De plus, en prenant la valeur en 0, on a :  $\lambda = f(0)$ .

On obtient :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{at} g(t) dt + e^{-ax} f(0).$$

On a ainsi exprimé  $f$  en fonction de  $g$  (et de  $f(0)$ ).

2) Par hypothèse,  $g$  est bornée ; il existe donc  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall t \in [0; +\infty[, |g(t)| \leq M.$$

On a alors, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| e^{-ax} \left( f(0) + \int_0^x e^{at} g(t) dt \right) \right| \\ &\leq e^{-ax} \left( |f(0)| + \int_0^x e^{at} |g(t)| dt \right) \\ &\leq e^{-ax} \left( |f(0)| + M \int_0^x e^{at} dt \right) \\ &= e^{-ax} \left( |f(0)| + M \left[ \frac{e^{at}}{a} \right]_0^x \right) \\ &= e^{-ax} \left( |f(0)| + M \frac{e^{ax} - 1}{a} \right) \\ &= e^{-ax} |f(0)| + M \frac{e^{ax} - 1}{a} \leq |f(0)| + \frac{M}{a}. \end{aligned}$$

Ceci montre que  $f$  est bornée.

De plus, en utilisant la notation  $\|\cdot\|_\infty$ , on a obtenu :

$$\|f\|_\infty \leq |f(0)| + \frac{1}{a} \|g\|_\infty.$$

## 10.16 Considérons l'application

$$T : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], Q \mapsto T(Q) = Q'' + Q.$$

Il est clair que  $T$  est linéaire et que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \deg(T(Q)) = \deg(Q).$$

On va en déduire que  $T$  est bijective.

- Soit  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $T(Q) = 0$ . On a :  $\deg(Q) = \deg(T(Q)) = -\infty$ , donc  $Q = 0$ .

Ceci montre que  $T$  est injectif.

- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

Si  $P = 0$ , alors  $T(0) = 0 = P$ , donc  $P$  admet au moins un antécédent par  $T$ .

Supposons  $P \neq 0$  et notons  $n = \deg(P)$ .

On a :  $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], T(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ , donc  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $T$ . On peut donc considérer l'endomorphisme  $T_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  induit par  $T$ .

Puisque :  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg(T_n(P)) = \deg(P)$ ,

la matrice de  $T_n$  dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  est triangulaire supérieure à termes diagonaux tous non nuls. Il en résulte que  $T_n$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Il existe donc  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $P = T_n(Q) = T(Q)$ .

Ceci montre que  $T$  est surjective.

Ainsi,  $T$  est bijectif, donc, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , l'ED  $y'' + y = P$ , d'inconnue  $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , admet une solution polynôme et une seule.

## 10.17 I) Soit $f$ convenant.

Comme  $f$  est dérivable, par composition,  $x \mapsto f\left(\frac{1}{4x}\right)$  est dérivable, donc  $f'$  est dérivable, et, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^2} f'\left(\frac{1}{4x}\right) = -\frac{1}{4x^2} f\left(\frac{1}{4x}\right) = -\frac{1}{4x^2} f(x).$$

Ainsi,  $f$  est solution de l'EDL2 d'Euler : (E)  $4x^2 y'' + y = 0$ .

On effectue le changement de variable  $t = \ln x$ , et donc aussi le changement de fonction inconnue,  $g(t) = f(x)$ . On a alors :

$$f(x) = g(t), f'(x) = g'(t) \frac{1}{x}, f''(x) = g''(t) \frac{1}{x^2} - g'(t) \frac{1}{x^2}.$$

Alors : (E)  $\iff \forall t \in \mathbb{R}, 4(g''(t) - g'(t)) + g(t) = 0$ .

Il s'agit maintenant d'une EDL2 à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique  $4r^2 - 4r + 1 = 0$  admet une solution double  $r_0 = \frac{1}{2}$ . Il existe donc  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que :  $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = (\lambda t + \mu) e^{\frac{1}{2}t}$ .

On obtient :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = g(t) = (\lambda \ln x + \mu) \sqrt{x}$ .

2) Réciproquement, soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et

$$f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\lambda \ln x + \mu) \sqrt{x}.$$

L'application  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on a, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= f\left(\frac{1}{4x}\right) \\ \iff \frac{\lambda}{x} \sqrt{x} + (\lambda \ln x + \mu) \frac{1}{2\sqrt{x}} &= \left(\lambda \ln \frac{1}{4x} + \mu\right) \sqrt{\frac{1}{4x}} \\ \iff \lambda + \lambda \ln x + \lambda \ln 2 &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi :  $\left(\forall x \in ]0; +\infty[, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)\right) \iff \lambda = 0.$

On conclut que l'ensemble des applications  $f$  demandé est :

$$\{f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mu \sqrt{x}; \quad \mu \in \mathbb{R}\},$$

et on peut contrôler que les applications obtenues conviennent.

### 10.18 1) Soit $f$ convenant.

Alors,  $f$  est deux fois dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f'(-x) - 2f(x) + x^2 \quad (1),$$

puis  $f$  est trois fois dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(3)}(x) = -f''(-x) - 2f'(x) + 2x \quad (2),$$

donc  $f$  est quatre fois dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(4)}(x) = f(3)(-x) - 2f''(x) + 2 \quad (3).$$

En appliquant (2) à  $-x$  à la place de  $x$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(3)}(-x) = -f''(x) - 2f'(-x) - 2x.$$

Et on peut exprimer  $f'(-x)$  à l'aide de (1), en fonction de  $f''(x)$  et  $f(x)$  (et  $x^2$ ). On obtient ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= -3f''(x) - 2f'(-x) - 2x + 2 \\ &= -3f''(x) - 2(f''(x) + 2f(x) - x^2) - 2x + 2 \\ &= -5f''(x) - 4f(x) + 2x^2 - 2x + 2. \end{aligned}$$

Ceci montre que  $f$  est solution de l'ED :

$$(E) \quad y^{(4)} + 5y'' + 4y = 2x^2 - 2x + 2.$$

Il s'agit d'une EDL4 à coefficients constants et avec second membre polynôme.

Considérons l'EDL4 sans second membre associée

$$(E_0) \quad y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0.$$

L'équation caractéristique  $r^4 + 5r^2 + 4 = 0$  admet quatre solutions, dans  $\mathbb{C}$ , qui sont :  $i, -i, 2i, -2i$ . La solution générale de  $(E_0)$  est donc :

$$y : x \mapsto A \cos x + B \sin x + C \cos 2x + D \sin 2x, \quad (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4.$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme  $y : x \mapsto ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  à calculer.

$$\text{On a alors : } y^{(4)} + 5y'' + 4y = 5(2a) + 4(ax^2 + bx + c) = 4ax^2 + 4bx + (10a + 4c).$$

Pour que  $y$  soit solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ , il suffit que :

$$4a = 2, \quad 4b = -2, \quad 10a + 4c = 2,$$

c'est-à-dire :

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{2 - 10a}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Ainsi, une solution particulière de (E) est :

$$y : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4},$$

ce que l'on peut contrôler.

On conclut que qu'il existe  $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$  tel que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \\ &\quad + A \cos x + B \sin x + C \cos 2x + D \sin 2x. \end{aligned}$$

2) Réciproquement, considérons l'application  $f$  définie par la formule ci-dessus.

Il est clair que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = x - \frac{1}{2} - A \sin x + B \cos x - 2C \sin 2x + 2D \cos 2x,$$

d'où :

$$f'(-x)$$

$$= -x - \frac{1}{2} + A \sin x + B \cos x + 2C \sin 2x + 2D \cos 2x,$$

et on a :

$$f''(x) = 1 - A \cos x - B \sin x - 4C \cos 2x - 4D \sin 2x.$$

D'où :

$$f''(x) - f'(-x) + 2f(x) = x^2 + (A - B) \cos x$$

$$+ (B - A) \sin x + (-2C - 2D) \cos 2x + (-2C - 2D) \sin 2x.$$

Il en résulte que  $f$  convient si et seulement si :

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ C + D = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} B = A \\ D = -C. \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des applications  $f$  convenant est :

$$\left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + A(\cos x + \sin x) + C(\cos 2x - \sin 2x); (A, C) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

### 10.19 I) Soit $f$ convenant.

On a donc :

$$\forall x \in [0; +\infty[, x \int_0^x f(t) dt - 3 \int_0^x t f(t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

Puisque  $f$  est continue, les applications  $f$  et  $t \mapsto t f(t)$  sont continues, donc les applications  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  et  $t \mapsto \int_0^x t f(t) dt$  sont de classe  $C^1$ , d'où, en dérivant :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \int_0^x f(t) dt + x f(x) - 3 x f(x) = x,$$

c'est-à-dire :  $\forall x \in [0; +\infty[, -2 x f(x) + \int_0^x f(t) dt = x$ .

$$\text{Il en résulte : } \forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \frac{1}{2x} \int_0^x f(t) dt - \frac{1}{2}.$$

Comme le second membre de cette dernière égalité est de classe  $C^1$  sur  $[0; +\infty[$ , on déduit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; +\infty[$ .

On peut alors à nouveau dériver, d'où :

$$\forall x \in [0; +\infty[, -2x f'(x) - 2f(x) + f(x) = 1,$$

c'est-à-dire :  $\forall x \in [0; +\infty[, 2x f(x) + f(x) = -1$ .

Ainsi,  $f$  est solution, sur  $[0; +\infty[$ , d'une EDL1 avec second membre.

La solution générale de l'EDL1 sans second membre associée,  $2xy' + y = 0$ , est :

$$x \mapsto \lambda \exp\left(\int -\frac{1}{2x} dx\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière évidente de l'EDL1 avec second membre est  $x \mapsto -1$ .

La solution générale de l'EDL1 avec second membre est donc :

$$y : x \mapsto -1 + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = -1 + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}.$$

Comme  $f$  est continue en 0, on a nécessairement  $\lambda = 0$  et donc  $f = -1$ .

2) Réciproquement, pour  $f = -1$  (fonction constante égale à  $-1$ ), on a, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \int_0^x (x - 3t) f(t) dt &= \int_0^x (-x + 3t) dt \\ &= \left[ -xt + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^x = -x^2 + \frac{3}{2}x^2 = \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

donc  $f$  convient.

Finalement, il y a une application  $f$  et une seule convenant, l'application constante égale à  $-1$ .

### 10.20 On a :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$\iff \forall x \in ]0; +\infty[, e^x(y'' + 2y' + y) = \frac{1}{x}$$

$$\iff \forall x \in ]0; +\infty[, \frac{d}{dx}(e^x(y + y)) = \frac{1}{x}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in ]0; +\infty[, e^x(y' + y) = \ln x + \lambda$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in ]0; +\infty[, \frac{d}{dx}(e^x y) = \ln x + \lambda$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R},$$

$$e^x y = \int (\ln x + \lambda) dx = x \ln x - x + \lambda x + \mu.$$

En notant  $\alpha = \lambda - 1$ ,  $\beta = \mu$ , on conclut que l'ensemble des solutions de l'ED proposée est :

$$\{ y : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R};$$

$$x \mapsto (x \ln x + \alpha x + \beta) e^{-x}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

**10.21** Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $2xy' - |y| = x$ .

I) Étude sur  $]0; +\infty[$

On a :  $\forall x \in ]0; +\infty[, 2xy(x) = |y(x)| + x > 0$ ,

donc :  $\forall x \in ]0; +\infty[, y(x) > 0$ ,

ce qui montre que  $y$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ . Comme de plus  $y$  est continue en 0 (car  $y$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ), il en résulte que  $y$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

D'autre part, en remplaçant  $x$  par 0 dans l'ED, on a :  $y(0) = 0$ .

On déduit :  $\forall x \in ]0; +\infty[, y(x) > 0$ , et donc, en revenant à l'équation,  $y$  satisfait, sur  $]0; +\infty[$ , une EDL1 avec second membre :  $\forall x \in ]0; +\infty[, 2xy(x) - y(x) = x$ .

L'EDL associée sans second membre  $2xy' - y = 0$  admet pour solution générale :

$$x \mapsto \lambda \exp\left(\int \frac{1}{2x} dx\right) = \lambda \exp\left(\frac{1}{2} \ln x\right) = \lambda \sqrt{x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière, évidente, de l'EDL1 avec second membre est  $x \mapsto x$ .

Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad y(x) = x + \lambda\sqrt{x},$$

puis, comme  $y$  est continue en 0 :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad y(x) = x + \lambda\sqrt{x}.$$

Mais  $y$  est dérivable en 0, donc nécessairement,  $\lambda = 0$ , car  $x \mapsto \sqrt{x}$  n'est pas dérivable en 0 et que  $x \mapsto x$  est dérivable en 0.

On a montré :  $\forall x \in [0; +\infty[, \quad y(x) = x$ .

Puisque  $y$  est dérivable en 0, on a donc :  $y'(0) = 1$ .

## 2) Étude de $y$ au voisinage de 0 à gauche

Comme  $\frac{y(x)}{x} = \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} y'(0) = 1$ , il existe  $\alpha > 0$

tel que :  $\forall x \in [-\alpha; 0], \quad \frac{y(x)}{x} \geqslant \frac{1}{2}$ ,

et donc (ici  $x < 0$ ) :  $\forall x \in [-\alpha; 0], \quad y(x) \leqslant \frac{x}{2}$ ,

d'où, en particulier :  $\forall x \in [-\alpha; 0[, \quad y(x) < 0$ .

En revenant à l'ED de l'énoncé, on a donc :

$$\forall x \in [-\alpha; 0[, \quad 2xy'(x) + y(x) = x.$$

Il s'agit d'une EDL1 avec second membre, normalisable sur  $[-\alpha; 0[$ .

La solution générale de l'EDL sans second membre associée,  $2xy' + y = 0$ , est :

$$x \mapsto \mu \exp\left(-\int \frac{1}{2x} dx\right) = \frac{\mu}{\sqrt{-x}}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière, presqu'évidente, de l'EDL1 avec second membre est  $y : x \mapsto \frac{x}{3}$ .

Il existe donc  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in [-\alpha; 0[, \quad y(x) = \frac{x}{3} + \frac{\mu}{\sqrt{-x}}.$$

Si  $\mu \neq 0$ , alors  $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^-]{} \pm\infty$ , contradiction.

Donc  $\mu = 0$ , puis :  $\forall x \in [-\alpha; 0[, \quad y(x) = \frac{x}{3}$ .

Comme  $y$  est continue en 0, on a donc :

$$\forall x \in [-\alpha; 0], \quad y(x) = \frac{x}{3}.$$

Il en résulte, puisque  $y$  est dérivable en 0 :  $y'(0) = \frac{1}{3}$ , contradiction avec  $y'(0) = 1$  obtenu plus haut.

On conclut que l'équation différentielle proposée n'a pas de solution sur  $\mathbb{R}$ .

## 10.22 I) Soit $f$ convenant.

On a :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f''(x) = 1 + (f'(x))^2 \geqslant 1$ ,

donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f''(x) \neq 0$ ,

et donc  $f$  et  $f''$  ne s'annulent en aucun point. On peut donc diviser par  $f$ , d'où :  $f'' = \frac{1 + f'^2}{f}$ . Comme  $f$  est deux fois dérivable, il en résulte, par opérations, que  $\frac{1 + f'^2}{f}$  est dérivable, donc  $f''$  est dérivable,  $f$  est trois fois dérivable.

On dérive alors les deux membres de l'égalité de l'énoncé :

$$ff'' - f'^2 = 1 \implies (ff'' - f'^2)' = 0$$

$$\iff ff''' - f'f'' = 0 \iff \frac{f'''}{f''} = \frac{f'}{f}.$$

Par primitivation, il existe donc  $C \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\ln \circ |f''| = \ln \circ |f| + C,$$

d'où, en notant  $\lambda = e^C$  :  $|f''| = \lambda |f|$ .

D'autre part,  $f$  et  $f''$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , puisque  $f$  est trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et ne s'annulent en aucun point de l'intervalle  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, chacune des deux applications  $f$  et  $f''$  est donc de signe strict fixe.

Il en résulte qu'il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  ( $\mu = \lambda$  ou  $\mu = -\lambda$ ) tel que :  $f'' = \mu f$ .

De plus,  $\mu f^2 = f(\mu f) = ff'' = 1 + f'^2 > 0$ , donc  $\mu > 0$ .

On résout alors l'EDL2 à coefficients constants et sans second membre  $y'' - \mu y = 0$ . L'équation caractéristique  $r^2 - \mu = 0$  admet deux solutions réelles distinctes  $r_1 = \sqrt{\mu}$ ,  $r_2 = -\sqrt{\mu}$ .

Il existe donc  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a e^{\sqrt{\mu}x} + b e^{-\sqrt{\mu}x}.$$

2) Réciproquement, soit  $(a, b, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .

L'application  $f : x \mapsto a e^{\omega x} + b e^{-\omega x}$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= a e^{\omega x} + b e^{-\omega x}, & f'(x) &= a\omega e^{\omega x} - b\omega e^{-\omega x}, \\ f''(x) &= a\omega^2 e^{\omega x} + b\omega^2 e^{-\omega x}, \end{aligned}$$

donc :

$$ff'' - f'^2 = 1 \iff$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \omega^2(a e^{\omega x} + b e^{-\omega x})^2 - (a\omega e^{\omega x} - b\omega e^{-\omega x})^2 &= 1 \\ \iff 4ab\omega^2 &= 1. \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des applications  $f$  convenant est :

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = a e^{\omega x} + b e^{-\omega x};$$

$$(a, b, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad 4ab\omega^2 = 1\}.$$

*Remarque :* On peut aussi exprimer le résultat à l'aide de fonctions hyperboliques directes.

# Notions sur les fonctions de deux variables réelles

## Plan

Les méthodes à retenir	169
Énoncés des exercices	172
Du mal à démarrer ?	174
Corrigés	176

## Thèmes abordés dans les exercices

- Étude de limite ou de continuité pour une fonction de deux variables réelles
- Existence et calcul éventuel des dérivées partielles premières, des dérivées partielles successives
- Détermination de la classe d'une fonction de deux variables réelles
- Recherche d'extrêums locaux ou globaux pour une fonction réelle de deux variables réelles
- Résolution d'EDP1, d'EDP2.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de la continuité d'une fonction  $f$  de deux variables réelles, lien entre continuité de  $f$  et continuité des fonctions partielles de  $f$
- Définition et propriétés algébriques des dérivées partielles premières, des dérivées partielles successives, en particulier le théorème de composition de deux fonctions de classe  $C^1$
- Définition de la notion d'extrémum local, lien avec la notion de point critique
- Résolution de l'EDP  $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ ,  $f$  inconnue,  $g$  donnée.

## Les méthodes à retenir

Pour étudier l'existence et la valeur de la limite en un point, ou pour étudier la continuité en un point, d'une fonction de deux variables réelles

- Essayer d'abord d'appliquer les théorèmes généraux.

### → Exercice 11.3

- S'il s'agit d'une forme indéterminée, se ramener d'abord, par changement de variables par translation, à une étude en  $(0,0)$ .  
Former les fonctions partielles  $f(\cdot, 0)$  et  $f(0, \cdot)$ .  
Si l'une de ces deux fonctions partielles n'a pas de limite en 0, ou si elles ont des limites en 0 différentes, alors  $f$  n'a pas de limite en  $(0,0)$ .

Si  $f(\cdot, 0)$  et  $f(0, \cdot)$  admettent une même limite finie  $\ell$  en 0, envisager des fonctions composées du type  $x \mapsto f(x, x)$ ,  $x \mapsto f(x, \lambda x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ou plus compliquées en tenant compte de l'exemple proposé. Si ces diverses fonctions (d'une variable) ont la même limite  $\ell$  en 0, on peut essayer d'établir que  $f$  admet  $\ell$  pour limite en  $(0, 0)$ , en formant  $|f(x, y) - \ell|$  et en essayant de majorer cette expression par une expression plus simple et de limite 0 quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ . À cet effet, il peut être intéressant de faire un changement de variables, par exemple en coordonnées polaires.

→ **Exercice 11.2**

- Si  $f(x, y)$  est donné par séparation de cas, étudier, aux points litigieux, les limites « des différents côtés ».

→ **Exercice 11.3.**

- Essayer d'abord d'appliquer les théorèmes généraux, en particulier le théorème de composition des applications de classe  $C^1$ .

→ **Exercices 11.1, 11.8**

- En un point litigieux (c'est-à-dire en lequel les théorèmes généraux ne s'appliquent pas)  $(x_0, y_0)$ , pour étudier l'existence et la valeur de  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , former la fonction partielle  $f(\cdot, y_0)$  et étudier la dérivation de  $f(\cdot, y_0)$  en  $x_0$ . On a ainsi, sous réserve d'existence :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (f(\cdot, y_0))'(x_0).$$

De même, sous réserve d'existence :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (f(x_0, \cdot))'(y_0).$$

→ **Exercice 11.5.**

- Essayer d'abord d'appliquer les théorèmes généraux, en particulier le théorème de composition des applications de classe  $C^2$  (ou  $C^n$ , ou  $C^\infty$ ), et calculer successivement les dérivées partielles premières puis secondes.

→ **Exercices 11.6, 11.14**

- En un point litigieux, étudier successivement les dérivées partielles premières puis les dérivées partielles secondes, comme indiqué plus haut.

→ **Exercices 11.11, 11.14.**

### Pour étudier l'existence et la valeur des dérivées partielles premières d'une fonction de deux variables réelles

### Pour étudier l'existence et la valeur des dérivées partielles secondes (ou successives) d'une fonction de deux variables réelles

**Pour déterminer les extréums locaux d'une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ .**

Commencer par déterminer les points critiques de  $f$ , c'est-à-dire les points en lesquels les deux dérivées partielles premières de  $f$  s'annulent simultanément. Puis, au voisinage d'un point critique  $(a,b)$  de  $f$ , effectuer le changement de variables défini par  $x = a + h$ ,  $y = b + k$ , exprimer  $f(x,y) - f(a,b)$  en fonction de  $h$  et  $k$ , et voir si cette expression reste de signe fixe au voisinage de  $(0,0)$ .

→ Exercice 11.7.

**Pour résoudre une équation aux dérivées partielles du premier ordre (EDP1) d'inconnue  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur un ouvert (convexe)  $U$  de  $\mathbb{R}^2$**

On sait résoudre les deux EDP1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = h,$$

où  $g,h : U \rightarrow \mathbb{R}$  sont données (continues), par primitivation.

Par exemple, la solution générale de l'EDP1  $\frac{\partial f}{\partial x} = g$  est

$f : (x,y) \mapsto \int g(x,y) dx + \varphi(y)$ , où  $\varphi$  est une fonction quelconque de classe  $C^1$  (sur un intervalle à préciser).

On essaiera de se ramener à cette EDP1 simple par un changement de variables (et donc un changement de fonction inconnue) donné (ou suggéré) par l'énoncé.

→ Exercice 11.10.

**Pour résoudre une EDP2 d'inconnue  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur un ouvert (convexe)  $U$  de  $\mathbb{R}^2$**

On sait résoudre les trois EDP2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = h, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k,$$

où  $g,h,k : U \rightarrow \mathbb{R}$  sont données (continues) par deux primitives successives.

On essaiera de se ramener à l'une de ces EDP2 par un changement de variables (et donc un changement de fonction inconnue) donné (ou suggéré) par l'énoncé.

→ Exercice 11.12

Si l'on cherche les solutions d'une forme particulière d'une EDP, on peut essayer de se ramener à une ED.

→ Exercice 11.13.

**Pour étudier une fonction de deux variables réelles  $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$**

On peut essayer de se ramener à ne faire intervenir qu'une seule variable, par exemple :

- en fixant une des deux variables et en faisant varier l'autre

→ Exercice 11.15

- en faisant intervenir une nouvelle variable qui regroupe  $x$  et  $y$ , par exemple  $x^2 + y^2$

→ Exercice 11.4.

# Énoncés des exercices

## 11.1 Exemples de calculs de dérivées partielles premières par application des théorèmes généraux

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . On note :

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t,u) \mapsto f(2t-u, 4t+3u), \\ h &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t,u) \mapsto f(t^2+2u^2, e^{tu}), \\ k &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t^2, t^3). \end{aligned}$$

Calculer les dérivées partielles premières de  $g, h$  et la dérivée première de  $k$  en fonction de celles de  $f$ .

## 11.2 Exemples d'étude de limite pour des fonctions de deux variables réelles

Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en  $(0,0)$  pour les fonctions  $f$  de deux variables réelles définies par les formules suivantes :

$$a) \frac{xy}{x^2+y^2} \quad b) \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad c) \frac{\sin x \operatorname{sh} y}{xy} \quad d) \frac{\sin x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \sin y}.$$

## 11.3 Étude de continuité pour une fonction de deux variables réelles définie par cas

Étudier, en tout point de  $\mathbb{R}^2$ , la continuité de :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} y^2 & \text{si } y \leqslant |x| \\ x^4 & \text{si } y > |x|. \end{cases}$$

## 11.4 Un exemple de fonction de deux variables réelles bornée

Montrer que l'application  $f : (x,y) \mapsto \frac{xy}{1+e^{x^2+2y^2}}$  est bornée sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 11.5 Exemples d'étude de dérivées partielles premières pour une fonction de deux variables réelles

Étudier la continuité de  $f$ , l'existence des dérivées partielles premières de  $f$ , la continuité des dérivées partielles premières de  $f$ , pour les fonctions  $f$  de deux variables réelles suivantes :

$$a) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$b) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x|y|$$

$$c) f : ]0; 1[^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} x(1-y) & \text{si } y \leqslant x \\ (1-x)y & \text{si } y > x. \end{cases}$$

## 11.6 Fonctions harmoniques

Une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , est dite **harmonique** si et seulement si  $\Delta f = 0$ , où  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  est le laplacien de  $f$ .

a) Vérifier que  $f : (x, y) \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ .

b) Montrer que, si  $f$  est de classe  $C^3$  et harmonique, alors  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}$  sont harmoniques.

c) Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , soient  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  et  $f(x, y) = \ln|e^{ze^{-z}}|$ ; montrer que  $f$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^2$ .

### 11.7

#### Exemples de recherche d'extréums locaux de fonctions numériques de deux variables réelles

Déterminer les extréums locaux des applications  $f$  suivantes, pour lesquelles on donne l'ensemble de départ et l'image  $f(x, y)$  de  $(x, y)$ :

a)  $\mathbb{R}^2, x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$     b)  $\mathbb{R}^2, x^3 + y^3$     c)  $\mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + x^3$ .

### 11.8

#### Étude de négligeabilité pour une fonction de deux variables réelles

On note  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto xy^2 + y^3 - x^4y$ . Déterminer l'ensemble  $E$  des  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  tels que  $f(x, y) = \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{o} (||(x, y)||^\alpha)$ , où  $||.||$  est, par exemple, la norme sur  $\mathbb{R}^2$  définie par  $||(x, y)|| = |x| + |y|$ .

### 11.9

#### Nullité d'un polynôme à deux variables

Soit  $P$  un polynôme à deux variables réelles et à coefficients réels. On suppose qu'il existe un ouvert non vide  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que :  $\forall (x, y) \in U, P(x, y) = 0$ .

Montrer :  $P = 0$ .

### 11.10

#### Exemple d'équation aux dérivées partielles d'ordre 1

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xy,$$

en utilisant le changement de variables défini par :

$$u = x, \quad v = 3x - 2y.$$

### 11.11

#### Calcul de dérivées partielles secondes croisées en un point particulier

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .

Comparer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

### 11.12

#### Exemple de résolution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre 2

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0,$$

où  $c > 0$  est fixé, en utilisant le changement de variables défini par :

$$X = x + ct, Y = x - ct.$$

**11.13 Recherche de solutions particulières d'une EDP2**

Trouver toutes les applications  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telles que l'application  $f : U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , vérifie :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{y}{x^3}.$$

**11.14 Exemple de détermination de la classe exacte d'une fonction de deux variables réelles définie par cas**

Déterminer la classe exacte de l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^3} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**11.15 Exemple de recherche de minimum et de maximum pour une fonction numérique de deux variables réelles**

Déterminer le minimum et le maximum de :

$$f : [0 ; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 3y.$$

## Du mal à démarrer ?

**11.1** Il s'agit de calculer des dérivées partielles premières de fonctions composées : appliquer les formules du Cours.

**11.2** a) Examiner  $f(x, 0)$  et  $f(x, x)$ .

b) Étudier d'abord les fonctions partielles de  $f$  en  $(0, 0)$  pour déduire la seule limite possible. Majorer convenablement  $|f(x, y)|$ .

c) Grouper :  $\frac{\sin x}{x}, \frac{\operatorname{sh} y}{y}$ .

d) Examiner  $f(x, 0)$  et  $f(x, x)$ .

**11.3** Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixé.

• Si  $y_0 \neq |x_0|$ , appliquer les théorèmes généraux.

• Si  $y_0 = |x_0|$ , déterminer les limites de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  de part et d'autre de  $y = |x|$ .

**11.4** Noter  $t = x^2 + y^2 \in [0 ; +\infty[$  et majorer  $|f(x, y)|$  par une expression  $g(t)$  assez simple et ne dépendant que de  $t$ , puis étudier les variations de  $g$ .

**11.5** a) 1) Appliquer les théorèmes généraux sur l'ensemble  $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

2) Étudier la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ , par exemple par une majoration convenable de  $|f(x, y)|$ .

3) Former les fonctions partielles de  $f$  en  $(0, 0)$ , pour déduire l'existence et la valeur des dérivées partielles premières de  $f$  en  $(0, 0)$ .

4) Étudier la continuité de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(0, 0)$ , par exemple en formant  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x)$ .

b) 1) Appliquer les théorèmes généraux sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .

2) Pour la continuité, appliquer les théorèmes généraux sur  $\mathbb{R}^2$ .

3) Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  existe et la calculer.

• Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, former  $f(x, \cdot)$  et étudier sa dérivation en 0.

4) Exprimer  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et en déduire leur continuité.

c) 1) Appliquer les théorèmes généraux sur l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in ]0 ; 1[^2 ; x \neq y\}.$$

2) Pour  $(x_0, y_0) \in ]0 ; 1[^2$  tel que  $x_0 = y_0$ , étudier les limites de  $f(x, y)$  lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(x_0, y_0)$  avec  $y \leqslant x$ , avec  $y > x$ .

3) Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixé tel que  $x_0 = y_0$ . Former  $f(\cdot, y_0)$  et étudier sa dérivation en  $x_0$ .

**11.6** a) Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , puis  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ , d'où  $\Delta f$ .

b) Calculer les dérivées partielles premières de  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}$ , puis leurs dérivées partielles secondes non croisées, et enfin leurs laplaciens, et constater que ces laplaciens sont nuls.

c) Exprimer  $f(x,y)$  en fonction de  $x$  et  $y$ , puis calculer les dérivées partielles premières puis secondes non croisées de  $f$ , et enfin son laplacien.

**11.7** Dans chaque exemple,  $f$  est de classe  $C^1$  sur un ouvert. Déterminer les points critiques de  $f$ .

En un point critique  $(a,b)$  de  $f$ , former  $f(x,y) - f(a,b)$  et étudier le signe de cette expression lorsque  $(x,y)$  est voisin de  $(a,b)$ . Si  $(a,b) \neq (0,0)$ , on fera le changement de variable  $h = x - a, k = y - b$ .

a) Montrer que  $f$  admet un point critique et un seul,  $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ . Effectuer le changement de variables  $h = x + \frac{1}{3}, k = y + \frac{4}{3}$ , calculer  $f(x,y) - f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$  en fonction de  $h,k$  puis chercher le signe de cette différence.

b) Montrer que  $f$  admet un point critique et un seul,  $(0,0)$ . Calculer  $f(x,y) - f(0,0)$  et montrer que cette différence peut être  $> 0$  et peut être  $< 0$  au voisinage de  $(0,0)$ .

c) Montrer que  $f$  admet exactement deux points critiques,  $(0,0), \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ .

- Former  $f(x,y) - f(0,0)$  et étudier le signe de cette différence.
- Effectuer le changement de variables  $h = x + \frac{2}{3}, k = y$ , puis étudier le signe de la différence  $f(x,y) - f\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$  exprimée en fonction de  $h$  et  $k$ .

**11.8** En notant  $t = ||(x,y)|| = |x| + |y|$ , par exemple, majorer  $|f(x,y)|$  par une expression ne dépendant que de  $t$ , puis étudier le comportement de cette expression lorsque  $t$  tend vers 0.

**11.9** Un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$  contient au moins un pavé fermé borné du type  $[a ; b] \times [c ; d]$ ,  $a < b, c < d$ . Fixer  $x \in [a ; b]$  et étudier  $P(x, \cdot)$  qui est un polynôme à une variable.

**11.10** Noter  $f(x,y) = g(u,v)$  et calculer les dérivées partielles premières de  $f$  en fonction de celles de  $g$ . En déduire que l'EDP1 proposée (portant sur l'inconnue  $f$  et les variables  $x, y$ ) est équivalente à une EDP1 portant sur l'inconnue  $g$  et les variables  $u, v$ . Résoudre cette EDP1 et revenir ensuite à l'écriture de  $f(x,y)$ .

**11.11** Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$  pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ .

En déduire les expressions des fonctions partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\cdot)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,0)$ , puis montrer que ces deux fonctions partielles sont dérivable en 0, mais ont des dérivées différentes.

**11.12** Noter  $g(X,Y) = f(x,t)$  et calculer les dérivées partielles premières puis secondes non croisées de  $f$  en fonction des dérivées partielles premières et secondes de  $g$ . Montrer que l'EDP2 de l'énoncé équivaut à  $\frac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y} = 0$ . Résoudre cette EDP2, puis revenir à  $f(x,t)$ .

**11.13** Calculer les dérivées partielles premières et secondes non croisées de  $f$  en fonction de  $\varphi$ , par composition. Se ramener à une équation différentielle linéaire sur  $\varphi$ . Résoudre cette ED.

**11.14** 1) Montrer, en passant par les polaires par exemple, que  $f(x,y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0$ , et conclure que  $f$  est de classe  $C^0$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

2) Calculer les dérivées partielles premières de  $f$  en tout point de  $\mathbb{R}^2$ , en séparant les cas  $(x,y) \neq (0,0)$  et  $(x,y) = (0,0)$ , puis montrer, en passant en polaires par exemple, que les dérivées partielles premières de  $f$  sont continues en  $(0,0)$ . Conclure que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

3) Calculer  $f''_{x^2}$  en tout point de  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  et montrer que  $f''_{x^2}$  n'a pas de limite en  $(0,0)$ . Conclure que  $f$  n'est pas de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

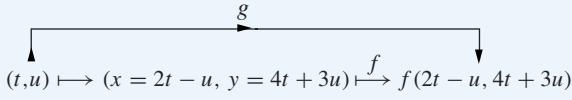
**11.15** Le théorème du Cours reliant point critique et extrémum ne s'applique pas directement ici, car, d'une part,  $[0 ; 1]^2$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et, d'autre part, on cherche des extréums globaux et non des extréums locaux.

Fixer une des deux variables, par exemple fixer  $y \in [0 ; 1]$ , étudier les variations de  $f(\cdot, y)$ , puis étudier les variations des bornes de  $f(\cdot, y)$ , si elles existent.

# Corrigés des exercices

**11.1**

1) Par composition

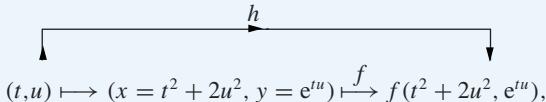


$g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et, pour tout  $(t, u) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}(t, u) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(2t - u, 4t + 3u)2 + \frac{\partial f}{\partial y}(2t - u, 4t + 3u)4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(t, u) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(2t - u, 4t + 3u)(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t - u, 4t + 3u)3.\end{aligned}$$

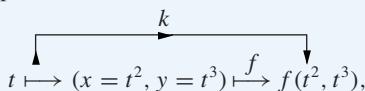
2) Par composition



$h$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et, pour tout  $(t, u) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}(t, u) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 + 2u^2, e^{tu})2t + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2 + 2u^2, e^{tu})u e^{tu}, \\ \frac{\partial h}{\partial u}(t, u) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 + 2u^2, e^{tu})4u + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2 + 2u^2, e^{tu})t e^{tu}.\end{aligned}$$

3) Par composition



$k$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)2t + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3)3t^2.$$

**11.2**

a) Ici :  $\text{Déf}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ .

On a :  $f(x, 0) = 0 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$

$$\text{et } f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \frac{1}{2} \neq 0,$$

donc  $f$  n'a pas de limite en  $(0,0)$ .

En effet, si  $f$  admettait une limite  $\ell$  en  $(0,0)$  alors, par composition, les fonctions  $x \mapsto f(x, 0)$  et  $x \mapsto f(x, x)$  admettraient  $\ell$  pour limite en 0, d'où  $\ell = 0$  et  $\ell = \frac{1}{2}$ , contradiction.

b) Ici :  $\text{Déf}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ .

On a :  $f(x, 0) = 0 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$  et  $f(0, y) = 0 \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} 0$ ,

donc, si  $f$  admet une limite en  $(0,0)$ , cette limite est nécessairement égale à 0.

On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  :

$$0 \leq |f(x, y)| = |x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0,0)]{} 0,$$

d'où, par théorème d'encadrement :  $f(x, y) \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0,0)]{} 0$ .

c) Ici :  $\text{Déf}(f) = (\mathbb{R}^*)^2$ .

On a :

$$f(x, y) = \frac{\sin x \operatorname{sh} y}{xy} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sh} y}{y} \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0,0)]{} 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\text{car } \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0,0)]{} 1 \text{ et } \frac{\operatorname{sh} y}{y} \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0,0)]{} 1.$$

d) Ici :  $\text{Déf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \operatorname{sh} x - \sin y \neq 0\}$ .

On a, pour  $x \neq 0$  :  $f(x, 0) = \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$  et

$$f(x, x) = \frac{\sin x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x - \sin x} = -1 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} -1 \neq 1,$$

donc  $f$  n'a pas de limite en  $(0,0)$ .

**11.3** Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixé.

1) Si  $y_0 < |x_0|$ , alors, au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , on a  $y < |x|$ , donc  $f(x, y) = y^2$ , et donc, d'après les théorèmes généraux,  $f$  est continue en  $(x_0, y_0)$ .

2) Si  $y_0 > |x_0|$ , alors, au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , on a  $y > |x|$ , donc  $f(x, y) = x^4$ , et donc, d'après les théorèmes généraux,  $f$  est continue en  $(x_0, y_0)$ .

3) Supposons  $y_0 = |x_0|$ .

On a :  $f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)]{} y_0^2$

et  $f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)]{} x_0^4$ .

Il en résulte que  $f$  est continue en  $(x_0, y_0)$  si et seulement si  $y_0^2 = x_0^4$ .

D'autre part, comme  $y_0 = |x_0|$ , on a  $y_0^2 = x_0^2$ . De plus :

$$x_0^2 = x_0^4 \iff x_0^2(1 - x_0^2) = 0 \iff x_0 \in \{-1, 0, 1\}.$$

On conclut que l'ensemble  $C$  des points  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  en lesquels  $f$  est continue est :

$$C = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 ;$$

$$y_0 \neq |x_0| \text{ ou } (y_0 = |x_0| \text{ et } x_0 \in \{-1, 0, 1\})\}.$$

#### 11.4 Notons, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$t = x^2 + y^2 \in [0; +\infty[.$$

On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  $|xy| \leqslant x^2 + y^2 = t$  et

$$1 + e^{x^2+2y^2} \geqslant 1 + e^{x^2+y^2} = 1 + e^t,$$

d'où :

$$|f(x, y)| = \frac{|xy|}{1 + e^{x^2+2y^2}} \leqslant \frac{t}{1 + e^t} \leqslant t e^{-t}.$$

Considérons  $g : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto g(t) = t e^{-t}$ . L'application  $g$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout  $t \in [0; +\infty[$  :  $g'(t) = (1 - t)e^{-t}$ . On forme le tableau de variation de  $g$  :

$t$	0	1	$+\infty$
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	0	$e^{-1}$	0

On a donc :  $\forall t \in [0; +\infty[, 0 \leqslant g(t) \leqslant e^{-1}$ ,

d'où :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y)| \leqslant e^{-1}$ ,

ce qui montre que  $f$  est bornée.

**11.5 a) I)** D'après les théorèmes généraux,  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

**2) Continuité :**

On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$|f(x, y)| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leqslant |y| \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0,$$

$$\text{donc } f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0 = f(0, 0),$$

et donc  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

**3) Existence des dérivées partielles premières :**

On a :  $f(\cdot, 0) = 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe et est égal à 0.

On a :  $f(0, \cdot) = 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existe et est égal à 0.

**4) Continuité des dérivées partielles premières :**

• On a, pour tout  $(x, y) \in D$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - (x^2y)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\text{donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0 \text{ et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \frac{2x^4}{(2x^2)^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \frac{1}{2} \neq 0,$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ , donc n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

• De même, pour tout  $(x, y) \in D$  :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(x^2 + y^2) - x^2y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\text{donc } \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{x^4}{(x^2)^2} = 1 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0 \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} 0 \neq 1,$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial y}$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ , donc n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

Finalement :

•  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$

• Les deux dérivées partielles premières de  $f$  sont définies sur  $\mathbb{R}^2$

• Les deux dérivées partielles premières de  $f$  sont continues en tout point de  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  et ne sont pas continues en  $(0, 0)$ .

**b) I)** D'après les théorèmes généraux,  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .

**2) Continuité :** D'après les théorèmes généraux,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

3) Existence des dérivées partielles premières :

- Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  existe et est égal à  $|y|$ .
- Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  existe et est égal à  $\varepsilon x$ , où  $\varepsilon$  est le signe de  $y$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , comme  $f(x, \cdot) : y \mapsto x|y|$  n'est pas dérivable en 0,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$  n'existe pas.
- Comme  $f(0, \cdot) = 0$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$  existe et est égal à 0.

4) Continuité des dérivées partielles premières :

- D'après les théorèmes généraux,  $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto |y|$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- L'application  $\frac{\partial f}{\partial y} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } y < 0 \\ -x & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
 est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

par les théorèmes généraux, et continue en  $(0, 0)$ , car  $x \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0)]{} 0$  et  $-x \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0)]{} 0$ .

Finalement :

- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f}{\partial x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $\text{Déf}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0, 0)\}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues sur leurs ensembles de définition.

c) I) D'après les théorèmes généraux,  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $\{(x, y) \in ]0; 1[^2 ; x \neq y\}$ .

2) Continuité :

Soit  $(x_0, y_0) \in ]0; 1[^2$  tel que  $x_0 = y_0$ .

On a :

$$f(x, y) = x(1-y) \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), y \leq x]{} x_0(1-y_0) = x_0(1-x_0),$$

$$f(x, y) = y(1-x) \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), y > x]{} y_0(1-x_0) = x_0(1-(x_0)),$$

donc  $f$  est continue en  $(x_0, y_0)$ .

3) Existence des dérivées partielles premières :

- Soit  $(x_0, y_0) \in ]0; 1[^2$  tel que  $x_0 = y_0$ .

L'application  $f(\cdot, y_0) : x \mapsto \begin{cases} x(1-x_0) & \text{si } x \geq y_0 = x_0 \\ (1-x)y_0 & \text{si } x < y_0 = x_0 \end{cases}$  est dérivable à droite et à gauche en  $x_0$  et :  $(f(\cdot, y_0))'_d(x_0) = 1-x_0$ ,  $(f(\cdot, y_0))'_g(x_0) = -y_0 = -x_0$ .

Puisque ces deux dérivées à droite et à gauche sont différentes,  $f(\cdot, y_0)$  n'est pas dérivable en  $x_0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  n'existe pas.

- De même,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  n'existe pas.

Finalement :

- $f$  est continue sur  $]0; 1[^2$
- Les deux dérivées partielles premières de  $f$  sont définies sur  $\{(x, y) \in ]0; 1[^2 ; x \neq y\}$
- Les deux dérivées partielles premières de  $f$  sont continues sur leur ensemble de définition.

11.6 a) D'abord,  $f$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . Pour tout  $(x, y)$  de  $U$ , on a :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{array} \right\}, \\ & \text{puis} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

d'où  $\Delta f = 0$ ,  $f$  est harmonique sur  $U$ .

b) D'abord,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $g = y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}$  sont de classe  $C^2$ .

On obtient, en utilisant le théorème de Schwarz :

$$\bullet \Delta \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta f) = 0,$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est harmonique, et de même pour  $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x} = y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial y} - x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

$$\text{puis } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} - x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \end{array} \right.$$

$$\text{d'où : } \Delta g = y \frac{\partial}{\partial x}(\Delta f) - x \frac{\partial}{\partial y}(\Delta f) = 0,$$

et donc  $g$  est harmonique.

c) On a :

$$ze^{-z} = e^{-x}(x + iy)(\cos y - i \sin y)$$

$$= e^{-x}((x \cos y + y \sin y) + i(y \cos y - x \sin y)),$$

$$\text{d'où : } f(x, y) = \ln |e^{ze^{-z}}| = e^{-x}(x \cos y + y \sin y).$$

Il est clair que  $f$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ .

On calcule, pour tout  $(x,y)$  de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x}(-x \cos y - y \sin y + \cos y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-x}(-x \sin y + y \cos y + \sin y) \end{cases}$$

puis  $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{-x}(x \cos y + y \sin y - 2 \cos y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{-x}(-x \cos y - y \sin y + 2 \cos y) \end{cases}$ ,

d'où  $\Delta f = 0$ ,  $f$  est harmonique sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ .

### 11.7

Dans chaque exemple,  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ .

a) Pour tout  $(x,y)$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x + y + 2 \\ f'_y(x,y) = x + 2y + 3, \end{cases}$

donc  $f$  admet un point critique et un seul,  $A = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ .

Plaçons-nous au voisinage de  $A$  et notons  $h = x + \frac{1}{3}$ ,  $k = y + \frac{4}{3}$  : on a :

$$f(x,y) - f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = h^2 + hk + k^2 \geqslant 0$$

(car de discriminant  $< 0$ ).

Finalement,  $f$  admet un extremum local et un seul, en  $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$  : c'est un minimum local et

$$f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}.$$

b) Pour tout  $(x,y)$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 \\ f'_y(x,y) = 3y^2, \end{cases}$

donc  $f$  admet un point critique et un seul  $(0,0)$ .

On a, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f(x,0) = x^3$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :  $f\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) > 0$  et  $f\left(-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) < 0$ .

Ceci montre :  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\left| \begin{array}{l} \exists (x_1, y_1) \in B((0,0) : \varepsilon), \quad f(x_1, y_1) > f(0,0) \\ \exists (x_2, y_2) \in B((0,0) : \varepsilon), \quad f(x_2, y_2) < f(0,0) \end{array} \right|,$$

donc  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $(0,0)$ .

Finalement,  $f$  n'admet aucun extremum local.

c) Pour tout  $(x,y)$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x + 3x^2 \\ f'_y(x,y) = 2y, \end{cases}$ ,

donc  $f$  admet deux points critiques exactement :

$$O = (0,0) \text{ et } A = \left(-\frac{2}{3}, 0\right).$$

c) • On a, pour tout  $(x,y)$  de  $[-1 : +\infty[ \times \mathbb{R}$  :

$$f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 + x^3 = x^2(x+1) + y^2 \geqslant 0,$$

donc  $f$  admet en  $(0,0)$  un minimum local.

c) • Au voisinage de  $A$ , notons  $h = x + \frac{2}{3}$ ,  $k = y$  ; on a :

$$f(x,y) - f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = k^2 - h^2 + h^3.$$

En particulier, pour tout  $h$  de  $\mathbb{R}$  :

$$f\left(-\frac{2}{3} + h, h\right) - f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = h^3,$$

qui n'est pas de signe fixe au voisinage de 0.

Donc  $f$  n'est pas d'extremum local en  $A$ .

Finalement,  $f$  admet un extremum local et un seul, en  $(0,0)$  ; c'est un minimum local, et  $f(0,0) = 0$ .

### 11.8

Notons, pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$t = \|(x,y)\| = |x| + |y|.$$

On a, pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= |xy^2 + y^3 - x^4y| \leqslant |x|y^2 + |y|^3 + x^4|y| \\ &\leqslant t^3 + t^3 + t^5 = 2t^3 + t^5. \end{aligned}$$

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .

• Si  $\alpha < 3$ , alors  $2t^3 + t^5 = \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^\alpha)$ , donc

$$f(x,y) = \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{o} (\|(x,y)\|^\alpha), \text{ d'où } \alpha \in E.$$

• Si  $\alpha \geqslant 3$ , on a :  $\frac{f(x,x)}{|x|^\alpha} = \frac{2x^3 - x^5}{|x|^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ ,

donc  $f(x,y)$  n'est pas négligeable devant  $\|(x,y)\|^\alpha$ , et donc  $\alpha \notin E$ .

On conclut :  $E = ]-\infty; 3[$ .

**11.9** Puisque  $U$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ , il existe  $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$  tel que :

$$a < b, \quad c < d, \quad [a ; b] \times [c ; d] \subset U.$$

D'autre part, puisque  $P$  est un polynôme à deux variables réelles et à coefficients réels, il existe  $N \in \mathbb{N}$ ,  $P_0, \dots, P_N \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$  tels que  $P = \sum_{k=0}^N P_k(\mathbf{X})\mathbf{Y}^k$ , en ordonnant  $P$  suivant les puissances de  $\mathbf{Y}$ .

Soit  $x \in [a ; b]$  fixé.

$$\text{On a : } \forall y \in [c ; d], \sum_{k=0}^N P_k(x)y^k = P(x, y) = 0.$$

Ainsi, le polynôme  $\sum_{k=0}^N P_k(x)\mathbf{Y}^k$  de  $\mathbb{R}[\mathbf{Y}]$  s'annule en une infinité de points (les points de  $[c ; d]$ ), donc est le polynôme nul. Ceci montre :  $\forall x \in [a ; b], \forall k \in \{0, \dots, N\}, P_k(x) = 0$ , ou encore, en permutant les quantificateurs universels :

$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, \forall x \in [a ; b], P_k(x) = 0.$$

Soit  $k \in \{0, \dots, N\}$ . Le polynôme  $P_k$  de  $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$  s'annule en une infinité de points (les points de  $[a ; b]$ ), donc  $P_k = 0$ .

$$\text{Alors : } P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{k=0}^N P_k(\mathbf{X})\mathbf{Y}^k = \sum_{k=0}^N 0\mathbf{Y}^k = 0.$$

**11.10** On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} u = x \\ v = 3x - 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = \frac{3u - v}{2}. \end{cases}$$

Considérons l'application  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, g(u, v) = f\left(u, \frac{3u - v}{2}\right).$$

L'application  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x, 3x - 2y).$$

On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , d'après le cours :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x, 3x - 2y) + 3 \frac{\partial g}{\partial v}(x, 3x - 2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2 \frac{\partial g}{\partial v}(x, 3x - 2y). \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xy \\ \iff & \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, 2 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = u \frac{3u - v}{2} \\ \iff & \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{3}{4}u^2 - \frac{1}{4}uv. \end{aligned}$$

La solution générale de cette dernière équation aux dérivées partielles est obtenue en primitivant par rapport à  $u$  :

$$g : (u, v) \mapsto \frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{8}u^2v + C(v),$$

où  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est n'importe quelle application de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Finalement, les applications cherchées sont les  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}x^2(3x - 2y) + C(3x - 2y) \\ &= -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2y + C(3x - 2y), \end{aligned}$$

où  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est n'importe quelle application de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**11.11** D'après les théorèmes généraux,  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  et, pour tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

D'autre part,  $f(\cdot, 0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  est dérivable en 0 et  $(f(\cdot, 0))' = 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe et est égal à 0.

De même,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existe et est égal à 0.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \frac{\partial f}{\partial x}(0, \cdot) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ y &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)(0, 0) = -1. \end{aligned}$$

De même,  $\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, 0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = -y$ , d'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)(0, 0) = 1.$$

En conclusion :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

*Remarque :* D'après le théorème de Schwarz, par contreposition, il en résulte que  $f$  n'est pas de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**11.12** L'application  $\partial\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est de  $(x, t) \mapsto (x + ct, x - ct)$  classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , est bijective, et sa réciproque :

$$\begin{aligned} \partial\psi &= \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) &\mapsto (\frac{1}{2}(X + Y), \frac{1}{2c}(X - Y)) \end{aligned}$$

est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Notons  $g = f \circ \varphi$ . D'après le cours,  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , et même de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Comme  $f = g \circ \psi$ , on a, avec des notations abusives :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial X} + \frac{\partial g}{\partial Y} \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} = c \frac{\partial g}{\partial X} - c \frac{\partial g}{\partial Y} \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial g}{\partial X} + \frac{\partial g}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial g}{\partial X} + \frac{\partial g}{\partial Y} \right) \\ \quad = \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c \frac{\partial}{\partial X} \left( c \frac{\partial g}{\partial X} - c \frac{\partial g}{\partial Y} \right) - c \frac{\partial}{\partial Y} \left( c \frac{\partial g}{\partial X} - c \frac{\partial g}{\partial Y} \right) \\ \quad = c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y} + c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial Y^2}. \end{cases}$$

Ainsi,  $f$  est solution de l'équation aux dérivées partielles proposée si et seulement si  $g$  est solution de  $\frac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y} = 0$  sur  $\mathbb{R}^2$ . La solution générale en  $g$  est :

$$g : (X, Y) \mapsto g(X, Y) = A(X) + B(Y),$$

où  $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont quelconques de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Finalement, la solution générale de l'équation proposée est :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto f(x, t) = A(x + ct) + B(x - ct),$$

où  $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont quelconques de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

**11.13** Il est clair que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ . On a, pour tout  $(x, y)$  de  $U$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \varphi' \left( \frac{y}{x} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \varphi' \left( \frac{y}{x} \right) \end{cases},$$

puis

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y}{x^3} \varphi' \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{y^2}{x^4} \varphi'' \left( \frac{y}{x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{x^2} \varphi'' \left( \frac{y}{x} \right) \end{cases},$$

d'où

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{y}{x^3}$$

$$\iff \forall (x, y) \in U, 2 \frac{y}{x} \varphi' \left( \frac{y}{x} \right) + \left( \left( \frac{y}{x} \right)^2 - 1 \right) \varphi'' \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{y}{x}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad (t^2 - 1) \varphi''(t) + 2t \varphi'(t) = t.$$

La solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre  $(t^2 - 1)z'(t) + 2tz(t) = t$  est, sur chacun des in-

tervalles  $] - \infty : -1[, ] - 1 : 1[, ] 1 : +\infty[$ , donnée (après calculs) par :

$$z(t) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{t^2 - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte que cette équation admet une solution sur  $\mathbb{R}$  et une seule,  $z : t \mapsto \frac{1}{2}$ .

Finalement, les applications  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convenant sont les  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$ .

**11.14** On peut d'abord remarquer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , d'après les théorèmes généraux.

### 1) Classe $C^0$

- D'après les théorèmes généraux,  $f$  est continue sur  $D$ .
- En passant en coordonnées polaires,  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  :

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\rho^8 \sin^4 \theta \cos^4 \theta}{\rho^6} \\ &= \rho^2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donc  $f(x, y) \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{\longrightarrow} 0 = f(0, 0)$ , ce qui montre que  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

On conclut que  $f$  est de classe  $C^0$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### 2) Classe $C^1$

- D'après les théorèmes généraux,  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $D$  et on a, pour tout  $(x, y) \in D$  :

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 4x^3 y^4 (x^2 + y^2)^{-3} + x^4 y^4 (-3)(x^2 + y^2)^{-4} 2x \\ &= x^3 y^4 (x^2 + y^2)^{-4} (4(x^2 + y^2) - 6x^2) \\ &= \frac{x^3 y^4 (-2x^2 + 4y^2)}{(x^2 + y^2)^4}. \end{aligned}$$

• D'autre part, l'application  $f(\cdot, 0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  est dérivable en 0 et  $(f(\cdot, 0))'(0) = 0$ , donc  $f'_x(0, 0)$  existe et est égal à 0.

- On a, en passant en polaires :

$$\begin{aligned} |f'_x(x, y)| &= \left| \frac{\rho^9 (-2 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta)}{\rho^8} \right| \\ &= \rho |-2 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta| \leqslant 6\rho \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donc  $f'_x(x, y) \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{\longrightarrow} 0 = f'_x(0, 0)$ , et donc  $f'_x$  est continue en  $(0, 0)$  puis sur  $\mathbb{R}^2$ .

Comme  $f$  est symétrique, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(y, x) = f(x, y),$$

on en déduit que  $f'_y$  est aussi définie et continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Ainsi,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### 3) Classe $C^2$

On a vu plus haut, pour tout  $(x, y) \in D$  :

$$f'_x(x, y) = x^3 y^4 (-2x^2 + 4y^2)(x^2 + y^2)^{-4}.$$

Il en résulte que  $f''_{x^2}$  existe sur  $D$  et que, pour tout  $(x, y) \in D$  :

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(x, y) &= 3x^2 y^4 (-2x^2 + 4y^2)(x^2 + y^2)^{-4} \\ &\quad + x^3 y^4 (-4x)(x^2 + y^2)^{-4} \\ &\quad + x^3 y^4 (-2x^2 + 4y^2)(-4)(x^2 + y^2)^{-5} 2x \\ &= x^2 y^4 (x^2 + y^2)^{-5} (3(-2x^2 + 4y^2)(x^2 + y^2) \\ &\quad - 4x^2(x^2 + y^2) + (-2x^2 + 4y^2)(-8x^2)) \\ &= x^2 y^4 (x^2 + y^2)^{-5} (6x^4 - 30x^2y^2 + 12y^4). \end{aligned}$$

En particulier,  $f''_{x^2}(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et :

$$f''_{x^2}(x, x) = x^6 (2x^2)^{-5} (-12x^4) = -\frac{3}{8} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{3}{8} \neq 0,$$

donc  $f''_{x^2}$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

Il en résulte que  $f$  n'est pas de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Finalement,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , et  $f$  n'est pas de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### 11.15 • Soit $y \in [0 ; 1]$ fixé.

Considérons  $g : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto g(x) = f(x, y) = x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 3y.$$

L'application  $g$  est dérivable sur  $[0 ; 1]$  et, pour tout  $x \in [0 ; 1]$  :  $g'(x) = 2x + 2y + 1 > 0$ , donc  $g$  est strictement croissante. On forme le tableau de variation de  $g$  :

$x$	0		1
$g'(x)$		+	
$g(x)$			$-2y^2 + 5y + 2$

- Considérons  $A, B : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définies, pour tout  $y \in [0 ; 1]$ , par :

$$A(y) = -2y^2 + 3y, \quad B(y) = -2y^2 + 5y + 2.$$

Les applications  $A, B$  sont dérivables sur  $[0 ; 1]$  et, pour tout  $y \in [0 ; 1]$  :

$$A'(y) = -4y + 3, \quad B'(y) = -4y + 5.$$

On en déduit les tableaux de variations de  $A$  et de  $B$  :

$y$	0	$\frac{3}{4}$	1
$A'(y)$	+	0	-
$A(y)$	0		1

$y$	0	1
$B'(y)$	+	
$B(y)$		5

Il en résulte que  $A$  admet un minimum, égal à 0, et que  $B$  admet un maximum, égal à 5.

On conclut que  $f$  admet un minimum et un maximum, qui sont respectivement égaux à 0 et 5.

# Compléments de calcul intégral

CHAPITRE **12**

## Plan

Les méthodes à retenir	183
Énoncés des exercices	185
Du mal à démarrer ?	187
Corrigés	188

## Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs d'intégrales curvilignes, d'aires planes, d'intégrales doubles, d'intégrales triples
- Calculs de certaines intégrales simples en passant par des intégrales doubles.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés algébriques des intégrales curvilignes
- Formules donnant une aire plane à l'aide d'une intégrale curviligne ou d'une intégrale double
- Définition et propriétés algébriques des intégrales doubles, en particulier le théorème de Fubini, l'étude du cas particulier où une intégrale double est égale au produit de deux intégrales simples, et le changement de variables en polaires
- Définition et propriétés algébriques des intégrales triples, en particulier le théorème de Fubini, l'étude du cas particulier où une intégrale triple est égale au produit de trois intégrales simples, et les changements de variables en cylindriques, en sphériques.

## Les méthodes à retenir

Pour calculer une intégrale curviligne  $\int_{(C)} \omega$  où  $(C)$  est une courbe orientée du plan et  $\omega$  une forme différentielle

$$\omega(x,y) = P(x,y) \, dx + Q(x,y) \, dy$$

Paramétriser  $(C)$  :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [a ; b]$ , puis remplacer  $x$  par  $x(t)$  et  $y$  par  $y(t)$  dans  $\omega(x,y)$ , y compris dans  $dx$  et  $dy$  :

$$\int_{(C)} \omega = \int_a^b \left( P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) \right) dt.$$

On est ainsi ramené au calcul d'une intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment.

Méthode analogue en dimension trois.

→ Exercices 12.1, 12.5.

**Pour calculer  
l'aire d'une partie de  $\mathbb{R}^2$**

Utiliser les formules du Cours, s'il s'agit d'une partie simple de  $\mathbb{R}^2$ , limitée par une courbe ( $C$ ) :

$$\mathcal{A} = \int_{(C)} x \, dy = - \int_{(C)} y \, dx = \frac{1}{2} \int_{(C)} (x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{2} \int_{(C)} \rho^2 \, d\theta.$$

Une fois le résultat obtenu, vérifier que l'aire est positive et, si possible, à l'aide d'un schéma, que l'ordre de grandeur du résultat est cohérent.

→ Exercice 12.2.

**Pour calculer une intégrale double**

$$I = \iint_D f(x,y) \, dx \, dy$$

- Découper  $D$  en tranches ou en piles, si  $D$  est une partie simple de  $\mathbb{R}^2$ , et emboîter les intégrales simples :

$$I = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) \, dy \right) dx$$

ou

$$I = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) \, dx \right) dy.$$

→ Exercices 12.3, 12.7, 12.10 a), b)

- Essayer un changement de variables permettant de se ramener à une intégrale double plus simple. En particulier, si le domaine  $D$  (et la fonction  $f$ ) s'y prête, passer en polaires.

→ Exercices 12.6, 12.10 c).

- Décrire  $D$  par inégalités convenables et emboîter les intégrales simples.

→ Exercice 12.4

- Essayer un changement de variables permettant de se ramener à une intégrale triple plus simple. En particulier, si le domaine  $D$  (et le fonction  $f$ ) s'y prête, passer en cylindriques ou en sphériques.

→ Exercice 12.9.

**Pour calculer une intégrale triple**

$$I = \iiint_D f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

**Pour calculer ou étudier  
une intégrale simple particulière**

On peut quelquefois passer par une intégrale double, en utilisant le théorème de Fubini.

→ Exercices 12.11, 12.12, 12.13.

# Énoncés des exercices



## 12.1 Exemples de calcul d'intégrales curvilignes

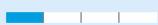
Calculer les intégrales curvilignes  $I = \int_{(C)} \omega$  dans les exemples suivants :

a)  $\omega(x,y) = dy + y dx$

(C) est le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ , parcouru une fois dans le sens trigonométrique

b)  $\omega(x,y) = x^2 dy + y^2 dx$

(C) est le segment de droite [AB], de A(-1,0) vers B(1,1).



## 12.2 Exemples de calculs d'aires planes

a) Calculer l'aire de la boucle de l'arc paramétré  $x = t^3 - 3t$ ,  $y = t^4 - 8t^2$ .

b) Calculer l'aire intérieure à la lemniscate d'équation polaire  $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ .



## 12.3 Exemples de calculs d'intégrales doubles

Calculer les intégrales doubles  $\iint_D f(x,y) dx dy$  dans les exemples suivants :

a)  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ ,  $f(x,y) = x^2 e^{xy}$

b)  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ ,  $f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$ .



## 12.4 Exemples de calculs d'intégrales triples

Calculer les intégrales triples  $\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz$  dans les exemples suivants :

a)  $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x + y + z \leq 1\}$ ,  $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$

b)  $D = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]^3$ ,  $f(x,y,z) = \sin(x + y + z)$ .



## 12.5 Exemple de calcul d'intégrale curviligne

Calculer l'intégrale curviligne  $I = \int_{(C)} \omega$  où :  $\omega(x,y,z) = z dx + x dy + y dz$ ,

(C) est l'arc paramétré  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = \operatorname{sh} t$ ,  $t$  allant de -1 à 1.



## 12.6 Exemple de calcul d'intégrale double

Calculer l'intégrale double  $\iint_D f(x,y) dx dy$ , où :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad f(x,y) = x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

**12.7****Un calcul d'intégrale double amenant des factorielles**

a) Calculer, pour tout  $\lambda \in [0; +\infty[$  et tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , l'intégrale

$$I_\lambda(p, q) = \int_0^\lambda t^p (\lambda - t)^q dt.$$

b) En déduire, pour tout  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ , la valeur de l'intégrale double  $J(p, q, r) = \iint_D f$ , où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}$ ,  $f(x, y) = x^p y^q (1 - x - y)^r$ .

**12.8****Exemple de calcul d'intégrales emboîtées**

Calculer  $I = \int_0^1 \left( \int_0^{\arccos y} \frac{1}{\sqrt{4 + \sin x}} dx \right) dy$ .

**12.9****Exemples de calculs d'intégrales triples**

Calculer les intégrales triples  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$  dans les exemples suivants :

a)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq 1\}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$

b)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ .

**12.10****Exemples de calculs d'intégrales doubles**

Calculer les intégrales doubles  $\iint_D f(x, y) dx dy$  dans les exemples suivants :

a)  $D = [0; 3] \times [0; 2]$ ,  $f(x, y) = \frac{1}{1 + (\max(3x, 2y))^2}$

b)  $D = [-a; a] \times \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $a > 0$  fixé,  $f(x, y) = \frac{1}{e^x \cos^2 y + e^{-x} \sin^2 y}$

c)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y, x^2 + y^2 - x \leq 0, x^2 + y^2 - y \geq 0\}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy.$$

**12.11****Exemple de calcul d'une intégrale simple via une intégrale double**

a) Montrer :  $\forall x \in [0; 1], \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy$ .

b) En déduire la valeur de  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ , puis celle de  $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$ .

**12.12****Calcul de l'intégrale de Gauss**

Pour  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , on note :

$$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad \Delta_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq a, |y| \leq a\},$$

$$f : (x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}, \quad I_a = \iint_{D_a} f, \quad J_a = \iint_{\Delta_a} f.$$

a) Calculer  $I_a$ , pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}_+^*$ .

b) Montrer, pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}_+^*$  :  $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$ .

$$c) \text{ En déduire : } \int_0^a e^{-x^2} dx \xrightarrow[a \rightarrow +\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

### 12.13 Une inégalité de Tchébychev portant sur des intégrales

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ ,  $f, g : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues et croissantes. Montrer :

$$\left( \int_a^b f \right) \left( \int_a^b g \right) \leq (b - a) \int_a^b fg.$$

## Du mal à démarrer ?

**12.1** Paramétriser  $(C)$  et appliquer la définition d'une intégrale curviligne, permettant de se ramener à une intégrale simple.

**12.2** a) Appliquer une des formules donnant l'aire plane limitée par une courbe en coordonnées cartésiennes, par exemple  $\mathcal{A} = \int_{(C)} x \, dy$ .

b) Appliquer la formule donnant l'aire plane limitée par une courbe en coordonnées polaires,  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{(C)} \rho^2 \, d\theta$ .

**12.3** Commencer par tracer  $D$ .

Emboîter les intégrales simples, dans l'ordre suggéré par la définition de  $D$ .

**12.4** a) Emboîter les intégrales simples.

b) Développer  $\sin(x + y + z)$  pour se ramener à des sommes de produits d'intégrales simples.

**12.5** Paramétriser  $(C)$  et appliquer la définition d'une intégrale curviligne, permettant de se ramener à une intégrale simple.

**12.6** Vu le domaine, passer en polaires.

**12.7** a) Utiliser une intégration par parties, pour obtenir une relation de récurrence entre les intégrales  $I_\lambda(p, q)$  et  $I_\lambda(p + 1, q - 1)$ , puis réitérer. Exprimer le résultat final à l'aide de factorielles.

b) Utiliser a) deux fois.

**12.8** Remplacer l'emboîtement d'intégrales simples définissant  $I$  par une intégrale double et utiliser le théorème de Fubini.

**12.9** a) Vu le domaine, passer en cylindriques.

b) Vu le domaine, passer en sphériques.

**12.10** a) Comme l'expression de  $f(x, y)$  dépend de la position relative de  $3x$  et  $2y$ , séparer le domaine  $D$  en deux domaines et appliquer la relation de Chasles.

b) S'assurer d'abord que le dénominateur de  $f(x, y)$  ne s'annule pas. Emboîter les intégrales simples.

c) Vu le domaine, passer en polaires.

**12.11** a) Calculer l'intégrale.

b) En utilisant a), écrire l'intégrale proposée  $I$  sous la forme d'une intégrale double. Exprimer aussi  $I$  à l'aide du changement de variables  $X = y$ ,  $Y = x$ . En déduire une expression de  $I$  permettant de séparer  $I$  en produit de deux intégrales simples.

**12.12** a) Passer en polaires.

b) Faire un schéma.

c) Exprimer  $J_a$  comme produit de deux intégrales simples.

**12.13** Calculer l'intégrale double

$$\iint_{[a;b]^2} (f(x) - f(y)) (g(x) - g(y)) \, dx \, dy$$

et exploiter les croissances de  $f$  et  $g$ .

# Corrigés des exercices

**12.1** a) Le cercle  $(C)$ , parcouru une fois dans le sens trigonométrique, est paramétré par :

$$x = \cos t, y = \sin t, t \text{ allant de } -\pi \text{ à } \pi \text{ par exemple.}$$

On a donc :

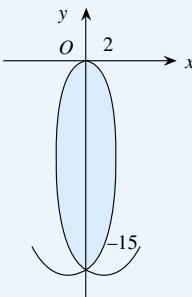
$$\begin{aligned} I &= \int_{(C)} \omega = \int_{(C)} (dy + y dx) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t dt + \sin t (-\sin t) dt) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - \sin^2 t) dt \\ &\stackrel{\text{parité}}{=} 2 \left( \int_0^{\pi} \cos t dt - \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \right) \\ &= 2 \left( [\sin t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \right) \\ &= - \left[ t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} = -\pi. \end{aligned}$$

b) Le segment  $[AB]$  est paramétré par  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ,  $x$  allant de  $-1$  à  $1$ . On a donc :

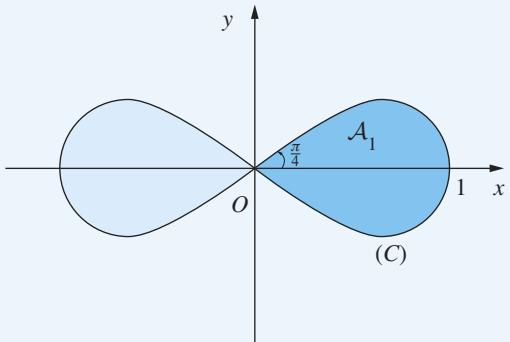
$$\begin{aligned} I &= \int_{(C)} \omega = \int_{(C)} (x^2 dy + y^2 dx) \\ &= \int_{-1}^1 \left( x^2 \frac{1}{2} dx + \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right)^2 dx \right) \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) dx = \left[ \frac{3}{4} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x \right]_{-1}^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

**12.2** a) La boucle est obtenue pour  $t$  variant de  $-\sqrt{3}$  à  $\sqrt{3}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{(C)} x dy \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^3 - 3t)(4t^3 - 16t) dt \\ &= \frac{912}{35} \sqrt{3} \simeq 45,13. \end{aligned}$$



b) Commencer par tracer la courbe  $(C)$  d'équation polaire  $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ , qui est une lemniscate.



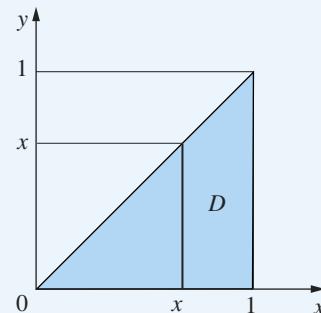
Par symétrie,  $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1$ , où  $\mathcal{A}_1$  est l'aire limitée par la partie  $(C_1)$  de  $(C)$  située dans le demi-plan correspondant à  $x \geq 0$ .

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{2} \int_{(C_1)} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On conclut :  $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 = 1$ .

**12.3** a)



On emboîte les intégrales simples, comme l'indique le domaine  $D$  :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 e^{xy} dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^x x^2 e^{xy} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[ x e^{xy} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 (x e^{x^2} - x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left( \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}. \end{aligned}$$

b) On emboîte les intégrales simples, comme l'indique le domaine  $D$  :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \left( \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \left[ \arctan y \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \arctan x dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

#### 12.4 a) Le domaine $D$ peut être défini par :

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x, \quad 0 \leq z \leq 1-x-y.$$

On emboîte les intégrales simples :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D e^{x+y+z} dx dy dz \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} e^{x+y+z} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left[ e^{x+y+z} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (e - e^{x+y}) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 [ey - e^{x+y}]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 (e(1-x) - e + e^x) dx = \int_0^1 (e^x - ex) dx \\ &= \left[ e^x - e \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left( e - e \frac{1}{2} \right) - 1 = \frac{e}{2} - 1. \end{aligned}$$

b) En développant le sinus d'une somme de trois termes, on a :

$$\begin{aligned} \sin(x+y+z) &= \sin((x+y)+z) \\ &= \sin(x+y) \cos z + \cos(x+y) \sin z \\ &= \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z \\ &\quad + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \sin(x+y+z) dx dy dz \\ &= \iiint_D \left( \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z \right. \\ &\quad \left. + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z \right) dx dy dz \\ &= 3C^2 S - S^3, \end{aligned}$$

où on a noté :  $C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ ,  $S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$ .

$$\text{Et : } C = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad S = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} I &= S(3C^2 - S^2) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{3}{2} - \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

#### 12.5 On a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{(C)} (z dx + x dy + y dz) \\ &= \int_{-1}^1 (\operatorname{sh} t (-\sin t dt) + \cos t (\cos t dt) + \sin t (\operatorname{ch} t dt)) \\ &= \int_{-1}^1 (-\operatorname{sh} t \sin t + \cos^2 t + \sin t \operatorname{ch} t) dt \\ &\stackrel{\text{parité, imparité}}{=} 2 \int_0^1 (-\operatorname{sh} t \sin t + \cos^2 t) dt \\ &= -2 \underbrace{\int_0^1 \operatorname{sh} t \sin t dt}_{\text{notée } J} + 2 \underbrace{\int_0^1 \cos^2 t dt}_{\text{notée } K}. \end{aligned}$$

À l'aide de deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \operatorname{sh} t \sin t dt \\ &= [\operatorname{ch} t \sin t]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{ch} t \cos t dt \\ &= \operatorname{ch} 1 \sin 1 - \left( [\operatorname{sh} t \cos t]_0^1 + \int_0^1 \operatorname{sh} t \sin t dt \right) \\ &= \operatorname{ch} 1 \sin 1 - \operatorname{sh} 1 \cos 1 - J, \end{aligned}$$

d'où :  $J = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 1 \sin 1 - \operatorname{sh} 1 \cos 1)$ .

Et :

$$K = \int_0^1 \cos^2 t \, dt = \int_0^1 \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 1 \cos 1.$$

On conclut :

$$I = -\operatorname{ch} 1 \sin 1 + \operatorname{sh} 1 \cos 1 + \sin 1 \cos 1 + 1.$$

## 12.6

Vu la forme du domaine, on passe en polaires :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x,y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{[0;\frac{\pi}{2}] \times [0;1]} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \iint_{[0;\frac{\pi}{2}] \times [0;1]} \rho^2 \cos^2 \theta \sqrt{1 - \rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \underbrace{\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta \right)}_{\text{notée } A} \underbrace{\left( \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1 - \rho^2} \, d\rho \right)}_{\text{notée } B}. \end{aligned}$$

On a :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Pour calculer  $B$ , faisons le changement de variable  $u = \rho^2$  :

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 u \sqrt{1-u} \frac{1}{2} \, du, \text{ puis le changement de variable} \\ v &= \sqrt{1-u}, u = 1 - v^2, \, du = -2v \, dv : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \int_1^0 (1 - v^2)v(-2v \, dv) = \int_0^1 v^2(1 - v^2) \, dv \\ &= \int_0^1 (v^2 - v^4) \, dv = \left[ \frac{v^3}{3} - \frac{v^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } I = \frac{\pi}{4} \frac{2}{15} = \frac{\pi}{30}.$$

## 12.7

a) On a, si  $q \geq 1$ , par intégration par parties pour des fonctions de classe  $C^1$  :

$$\begin{aligned} I_\lambda(p,q) &= \int_0^\lambda t^p (\lambda - t)^q \, dt \\ &= \left[ \frac{t^{p+1}}{p+1} (\lambda - t)^q \right]_0^\lambda + \int_0^\lambda \frac{t^{p+1}}{p+1} q(\lambda - t)^{q-1} \, dt \\ &= \frac{q}{p+1} I_\lambda(p+1, q-1). \end{aligned}$$

Il en résulte, en réitérant :

$$\begin{aligned} I_\lambda(p,q) &= \frac{q}{p+1} I_\lambda(p+1, q-1) \\ &= \frac{q}{p+1} \frac{q-1}{p+2} I_\lambda(p+2, q-2) \\ &= \cdots = \frac{q}{p+1} \frac{q-1}{p+2} \cdots \frac{1}{p+q} I_\lambda(p+q, 0). \end{aligned}$$

Et :

$$I_\lambda(p+q, 0) = \int_0^\lambda t^{p+q} \, dt = \left[ \frac{t^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^\lambda = \frac{\lambda^{p+q+1}}{p+q+1}.$$

On conclut :

$$\begin{aligned} I_\lambda(p,q) &= \frac{q}{p+1} \frac{q-1}{p+2} \cdots \frac{1}{p+q} \frac{\lambda^{p+q+1}}{p+q+1} \\ &= \frac{p! q!}{(p+q+1)!} \lambda^{p+q+1}. \end{aligned}$$

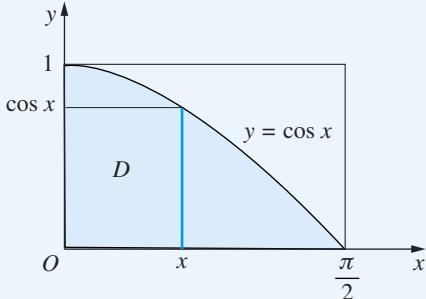
b) On a, en emboîtant les intégrales simples :

$$\begin{aligned} J(p,q,r) &= \iint_D f(x,y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} x^p y^q (1-x-y)^r \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x^p \left( \int_0^{1-x} y^q (1-x-y)^r \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x^p I_{1-x}(q, r) \, dx \\ &= \int_0^1 x^p \frac{q! r!}{(q+r+1)!} (1-x)^{q+r+1} \, dx \\ &= \frac{q! r!}{(q+r+1)!} I_1(p, q+r+1) \\ &= \frac{q! r!}{(q+r+1)!} \frac{p! (q+r+1)!}{(p+q+r+2)!} \\ &= \frac{p! q! r!}{(p+q+r+2)!}. \end{aligned}$$

## 12.8

En notant

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \operatorname{Arccos} y\}, \text{ on a} \\ \text{aussi : } D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos x\}. \end{aligned}$$



En utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\cos x} \frac{1}{\sqrt{4 + \sin x}} dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{4 + \sin x}} dx = \left[ 2\sqrt{4 + \sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{5} - 4. \end{aligned}$$

**12.9** a) Vu le domaine, on passe en coordonnées cylindriques :  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z$ . Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in D &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2z \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ \rho^2 \leq 2z \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases} \\ &\iff \Delta \begin{cases} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2z}. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Delta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz \\ &= \iiint_{\Delta} \rho^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta z^2 d\rho d\theta dz \\ &= \underbrace{\left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \right)}_{\text{notée } A} \underbrace{\left( \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^5 d\rho \right) z^2 dz \right)}_{\text{notée } B}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet A &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\ &= \left[ \frac{1}{8} \left( \theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{4}. \\ \bullet B &= \int_0^1 \left[ \frac{\rho^6}{6} \right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2z}} z^2 dz = \frac{1}{6} \int_0^1 8z^5 dz = \frac{4}{3} \left[ \frac{z^6}{6} \right]_0^1 = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } I = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{\pi}{18}.$$

b) Vu le domaine, on passe en coordonnées sphériques :

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

Alors :

$$(x, y, z) \in D \iff$$

$$\Delta (-\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 1).$$

D'où :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Delta} f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \rho^2 |\sin \varphi| d\rho d\theta d\varphi \\ &= \iiint_{\Delta} (\rho^6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi \\ &= \underbrace{\left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \right)}_{\text{notée } A} \underbrace{\left( \int_0^{\pi} \sin^5 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \right)}_{\text{notée } B} \underbrace{\left( \int_0^1 \rho^8 d\rho \right)}_{\text{notée } C}. \end{aligned}$$

On a :

$$\bullet A = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos 4\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \left[ \theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{4},$$

$$\bullet B = \int_0^{\pi} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \underset{t=\cos \varphi}{=} - \int_1^{-1} (1-t^2)^2 t^2 dt$$

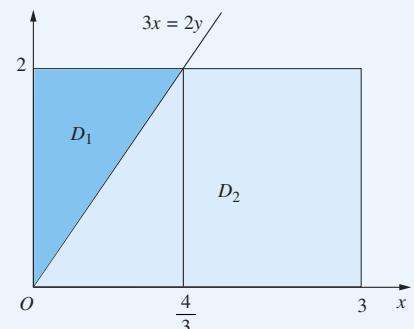
$$= \int_{-1}^1 (t^2 - 2t^4 + t^6) dt \underset{\text{parité}}{=} 2 \int_0^1 (t^2 - 2t^4 + t^6) dt$$

$$= 2 \left[ \frac{t^3}{3} - 2 \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right]_0^1 = 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{16}{105}$$

$$\bullet C = \int_0^1 \rho^8 d\rho = \left[ \frac{\rho^9}{9} \right]_0^1 = \frac{1}{9}.$$

$$\text{On conclut : } I = ABC = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{16}{105} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4\pi}{945}.$$

**12.10** a)



La droite d'équation  $3x = 2y$  partage  $D$  en deux domaines  $D_1$  (correspondant à  $3x \leq 2y$ ) et  $D_2$  (correspondant à  $3x \geq 2y$ ). On a donc, par la relation de Chasles pour des intégrales doubles :

$$I = \iint_D f = I_1 + I_2, \quad \text{où } I_1 = \iint_{D_1} f, \quad I_2 = \iint_{D_2} f.$$

• Calcul de  $I_1$  :

En emboîtant les intégrales simples :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 \left( \int_0^{\frac{2y}{3}} \frac{1}{1+(2y)^2} dx \right) dy = \int_0^2 \frac{2y}{3} \frac{1}{1+(2y)^2} dy \\ &\stackrel{z=2y}{=} \int_0^4 \frac{z}{3} \frac{1}{1+z^2} \frac{1}{2} dz = \frac{1}{12} \int_0^4 \frac{2z}{1+z^2} dz \\ &= \frac{1}{12} \left[ \ln(1+z^2) \right]_0^4 = \frac{1}{12} \ln 17. \end{aligned}$$

• Calcul de  $I_2$  :

On découpe  $D_2$  en deux domaines de façon à pouvoir encore appliquer la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{4}{3}} \left( \int_0^{\frac{3y}{2}} \frac{1}{1+(3x)^2} dy \right) dx \\ &\quad + \int_{\frac{4}{3}}^3 \left( \int_0^2 \frac{1}{1+(3x)^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{3x}{2} \frac{1}{1+(3x)^2} dx + \int_{\frac{4}{3}}^3 \frac{2}{1+(3x)^2} dx \\ &= \frac{1}{12} \left[ \ln(1+(3x)^2) \right]_0^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3} \left[ \operatorname{Arctan}(3x) \right]_{\frac{4}{3}}^3 \\ &= \frac{1}{12} \ln 17 + \frac{2}{3} (\operatorname{Arctan} 9 - \operatorname{Arctan} 4). \end{aligned}$$

On conclut :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{6} \ln 17 + \frac{2}{3} (\operatorname{Arctan} 9 - \operatorname{Arctan} 4).$$

En notant  $a = \operatorname{Arctan} 9 - \operatorname{Arctan} 4$ , on a  $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  et, en utilisant la formule de trigonométrie sur la tangente d'une différence :  $\tan a = \frac{9-4}{1+9 \cdot 4} = \frac{5}{37}$ .

On a donc  $a = \operatorname{Arctan} \frac{5}{37}$ , et on peut exprimer  $I$  sous la forme :

$$I = \frac{1}{6} \ln 17 + \frac{2}{3} \operatorname{Arctan} \frac{5}{37}.$$

b) • Montrons d'abord que  $f$  est continue sur  $D$ .

On a, pour tout  $(x, y) \in D$  :

$$\begin{aligned} \underbrace{e^x \cos^2 y}_{\geq 0} + \underbrace{e^{-x} \sin^2 y}_{\geq 0} &= 0 \iff \begin{cases} e^x \cos^2 y = 0 \\ e^{-x} \sin^2 y = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \cos^2 y = 0 \\ \sin^2 y = 0 \end{cases} \\ &\implies \cos^2 y + \sin^2 y = 0, \end{aligned}$$

contradiction.

Ainsi, le dénominateur de  $f(x, y)$  ne s'annule pas, et, par opérations,  $f$  est continue sur  $D$ .

• On a, par emboîtement d'intégrales simples :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-a}^a \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x \cos^2 y + e^{-x} \sin^2 y} dy \right) dx. \end{aligned}$$

notée  $J(x)$

Pour calculer  $J(x)$ , les règles de Bioche indiquent le changement de variable  $t = \tan y$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \cos^2 y &= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+t^2}, \\ \sin^2 y &= 1 - \cos^2 y = \frac{t^2}{1+t^2}, \\ y &= \operatorname{Arctan} t, \quad dy = \frac{dt}{1+t^2}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^1 \frac{1}{e^x \frac{1}{1+t^2} + e^{-x} \frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{e^x + t^2 e^{-x}} dt = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+(t e^{-x})^2} dt \\ &= \left[ \operatorname{Arctan}(t e^{-x}) \right]_{t=0}^{t=1} = \operatorname{Arctan}(e^{-x}). \end{aligned}$$

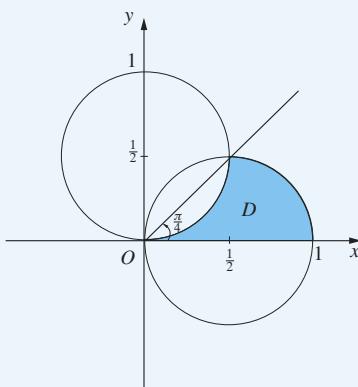
On reporte dans  $I$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a \operatorname{Arctan}(e^{-x}) dx \\ &\stackrel{\text{Chasles}}{=} \int_{-a}^0 \operatorname{Arctan}(e^{-x}) dx + \int_0^a \operatorname{Arctan}(e^{-x}) dx \\ &\stackrel{y=-x}{=} \int_0^a \operatorname{Arctan}(e^y) dy + \int_0^a \operatorname{Arctan}(e^{-x}) dx \\ &= \int_0^a \left( \operatorname{Actan}(e^x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{e^x}\right) \right) dx \\ &= \int_0^a \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi a}{2}. \end{aligned}$$

c) On a :  $x^2 + y^2 - x = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ,  
équation cartésienne du cercle de centre  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

De même,  $x^2 + y^2 - y = 0$  est une équation cartésienne du cercle de centre  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

On en déduit le tracé de  $D$  :



Passons en coordonnées polaires :

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho.$$

On a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in D &\iff \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 - x \leq 0 \\ x^2 + y^2 - y \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ \rho^2 - \rho \cos \theta \leq 0 \\ \rho^2 - \rho \sin \theta \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \Delta \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin \theta \leq \rho \leq \cos \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} (\rho^2 - 2\rho^2 \cos \theta \sin \theta) \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2\theta) \left( \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} \rho^3 d\rho \right) d\theta. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} \rho^3 d\rho &= \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=\sin \theta}^{\rho=\cos \theta} = \frac{1}{4} (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta) \\ &= \frac{1}{4} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{4} \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2\theta) \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \cos 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

**12.11** a) Pour  $x \in [0; 1]$ , on a  $\frac{d}{dy} \ln(1+xy) = \frac{x}{1+xy}$ ,

d'où :  $\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy = [\ln(1+xy)]_{y=0}^{y=1} = \ln(1+x)$ .

b) D'après a), en notant  $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ , on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy \right) \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \iint_D \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} dx dy, \end{aligned}$$

où  $D = [0; 1]^2$ .

En échangeant  $x$  et  $y$  (c'est-à-dire : en effectuant le changement de variables affine  $X = y$ ,  $Y = x$ , qui conserve  $D$ ), on a aussi :

$$I = \iint_D \frac{y}{(1+xy)(1+y^2)} dx dy.$$

On obtient, par addition :

$$\begin{aligned} 2I &= \iint_D \left( \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} + \frac{y}{(1+xy)(1+y^2)} \right) dx dy \\ &= \iint_D \frac{x(1+y^2) + y(1+x^2)}{(1+xy)(1+x^2)(1+y^2)} dx dy \\ &= \iint_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Mais en « échangeant »  $x$  et  $y$  :

$$\iint_D \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = \iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy.$$

D'où :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy \\ &= \left( \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \right) \left( \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \right) = \frac{\pi}{8} \ln 2. \end{aligned}$$

Enfin, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x} dx &= \left[ \operatorname{Arctan} x \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - \frac{\pi}{8} \ln 2 = \frac{\pi}{8} \ln 2. \end{aligned}$$

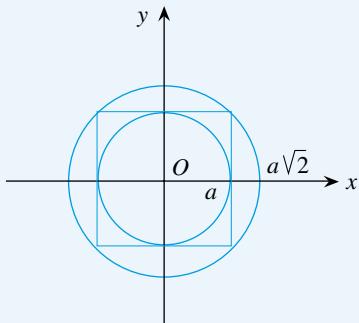
### 12.12 a) En passant en polaires :

$$\begin{aligned} I_a &= \iint_{[-\pi; \pi] \times [0; a]} e^{-\rho^2} \rho d\theta d\rho = \left( \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left( \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) \\ &= 2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^a = \pi(1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

b) Puisque  $D_a \subset \Delta_a \subset D_a \sqrt{2}$  et  $f \geq 0$ , on a :

$$\iint_{D_a} f \leq \iint_{\Delta_a} f \leq \iint_{D_{a\sqrt{2}}} f,$$

c'est-à-dire :  $I_a \leq J_a \leq I_a \sqrt{2}$ .



c) D'après a) et b) :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \pi(1 - e^{-a^2}) \leq J_a \leq \pi(1 - e^{-2a^2}),$$

d'où, par le théorème d'encadrement :  $J_a \xrightarrow[a \rightarrow +\infty]{} \pi$ .

D'autre part, pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$J_a = \iint_{[-a; a]^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \left( \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right),$$

donc :  $\left( \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2 \xrightarrow[a \rightarrow +\infty]{} \pi$ .

Comme  $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \geq 0$ , on déduit :  $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \xrightarrow[a \rightarrow +\infty]{} \sqrt{\pi}$ , et donc (par parité) :

$$\int_0^a e^{-x^2} dx \xrightarrow[a \rightarrow +\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*Remarque :* Avec le vocabulaire de 2<sup>e</sup> année,  $x \mapsto e^{-x^2}$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$ , et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

### 12.13

Puisque  $f$  et  $g$  sont croissantes, on a, pour tout  $(x, y) \in [a ; b]^2$  :

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0.$$

D'où, en intégrant sur le pavé  $[a ; b]^2$  :

$$\iint_{[a; b]^2} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \geq 0.$$

Notons  $I$  cette intégrale double et calculons  $I$  :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{[a; b]^2} (f(x)g(x) - f(x)g(y) \\ &\quad - f(y)g(x) + f(y)g(y)) dx dy \\ &= \int_a^b f(x)g(x) dx dy - \int_a^b f(x)g(y) dx dy \\ &\quad - \int_a^b f(y)g(x) dx dy + \int_a^b f(y)g(y) dx dy \\ &= \int_a^b f(x)g(x) dx \int_a^b dy - \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(y) dy \\ &\quad - \int_a^b f(y) dy \int_a^b g(x) dx + \int_a^b dx \int_a^b f(y)g(y) dy \\ &= 2(b-a) \int_a^b fg - 2 \left( \int_a^b f \right) \left( \int_a^b g \right). \end{aligned}$$

On conclut :

$$\left( \int_a^b f \right) \left( \int_a^b g \right) \leq (b-a) \int_a^b fg.$$

# Vocabulaire de la théorie des ensembles

## Plan

Les méthodes à retenir	195
Énoncés des exercices	196
Du mal à démarrer ?	198
Corrigés	199

## Thèmes abordés dans les exercices

- Égalités et inclusions d'ensembles obtenus par opérations sur des parties d'un ensemble
- Injectivité, surjectivité, bijectivité
- Image directe, image réciproque d'une partie par une application.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des opérations  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\complement_E$
- Définition du produit cartésien de deux ensembles
- Définition et propriétés de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour les applications
- Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie par une application.

## Les méthodes à retenir

### Pour travailler de manière générale sur des ensembles

Essayer de passer par les éléments des ensembles, ou de calculer globalement sur les ensembles. La deuxième voie est en général plus courte et plus claire (si elle est praticable).

→ Exercices 13.1, 13.2.

### Pour établir une égalité d'ensembles

On peut :

- soit montrer directement l'égalité
- soit montrer deux inclusions :  $A \subset B$  et  $B \subset A$ .

Dans chacune de ces deux options, on essaie de passer par les éléments ou de calculer globalement sur les ensembles.

→ Exercices 13.1, 13.2, 13.6.

**Pour résoudre une question portant sur injectivité, surjectivité, bijectivité d'applications dans un cadre général**

**Pour manipuler, dans un cadre général, des images directes ou des images réciproques de parties par des applications**

**Pour manipuler, dans un cadre général, des réunions ou des intersections de familles d'ensembles**

- Utiliser les définitions et les propositions du Cours sur la composée de deux applications injectives (resp. surjectives)

→ Exercices 13.4, 13.7

- Utiliser le résultat de l'exercice classique 13.4 (en le redémontrant).

→ Exercice 13.5.

Appliquer les définitions.

Pour  $f : E \rightarrow F$ ,  $A \in \mathfrak{P}(E)$ ,  $A' \in \mathfrak{P}(F)$ , on a :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists a \in A, y = f(a)\},$$

$$f^{-1}(A') = \{x \in E \mid f(x) \in A'\}.$$

Autrement dit, pour tout  $y \in F$  :

$$y \in f(A) \iff (\exists a \in A, y = f(a)),$$

et, pour tout  $x \in E$  :

$$x \in f^{-1}(A') \iff f(x) \in A'.$$

→ Exercice 13.7.

Passer par les éléments en utilisant les définitions :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists i \in I, x \in A_i)$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall i \in I, x \in A_i).$$

→ Exercice 13.6.

## Énoncés des exercices



### 13.1

#### Exemple de calcul ensembliste

Soient  $E$  un ensemble,  $A, B, C \in \mathfrak{P}(E)$ . Montrer :

$$A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C},$$

où on a noté  $\overline{B}$  (resp.  $\overline{C}$ ) le complémentaire de  $B$  (resp.  $C$ ) dans  $E$ .



### 13.2

#### Exemple de calcul ensembliste

Soient  $E$  un ensemble,  $A, B, C \in \mathfrak{P}(E)$ . On note

$$X = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A), \quad Y = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A).$$

Montrer :  $X = Y$ .

**13.3**

**Exemple d'application injective non surjective, exemple d'application surjective non injective, étude de leurs composées**

Soient  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x &\longmapsto x + 1 \\ y &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y - 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- a) Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelles de  $f$  et de  $g$ .  
 b) Préciser  $g \circ f$  et  $f \circ g$ .

**13.4**

**Composée injective, composée surjective**

Soient  $E, F, G$  des ensembles,  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  des applications. Montrer :

- a) si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective  
 b) si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective  
 c) si  $g \circ f$  est bijective, alors  $f$  est injective et  $g$  est surjective.

**13.5**

**Étude d'injectivité et de surjectivité pour des composées**

Soient  $E, F, G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$ ,  $h : G \rightarrow E$  trois applications. Montrer :

- a) si  $h \circ g \circ f$  et  $g \circ f \circ h$  sont surjectives et  $f \circ h \circ g$  injective, alors  $f, g, h$  sont bijectives.  
 b) si  $h \circ g \circ f$  et  $g \circ f \circ h$  sont injectives et  $f \circ h \circ g$  surjective, alors  $f, g, h$  sont bijectives.

**13.6**

**Produit cartésien et famille d'ensembles**

Soient  $E, F$  des ensembles,  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$ ,  $(B_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $F$ , indexée par le même ensemble  $I$ ,  $A$  une partie de  $E$ ,  $B$  une partie de  $F$ . Montrer :

$$\begin{aligned} a) \bigcup_{i \in I} (A_i \times B) &= \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \times B \\ b) \bigcup_{i \in I} (A \times B_i) &= A \times \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \\ c) \bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i) &= \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right). \end{aligned}$$

**13.7**

**Images directes, images réciproques de parties par une application, en liaison avec l'injectivité, la surjectivité**

Soient  $E, F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application ; on considère les applications  $\tilde{f} : \mathfrak{P}(E) \rightarrow \mathfrak{P}(F)$  et  $\hat{f} : \mathfrak{P}(F) \rightarrow \mathfrak{P}(E)$  définies par :

$$\begin{cases} \forall A \in \mathfrak{P}(E), \tilde{f}(A) = f(A) = \{y \in F; \exists a \in A, y = f(a)\} \\ \forall A' \in \mathfrak{P}(F), \hat{f}(A') = f^{-1}(A') = \{x \in E; f(x) \in A'\} \end{cases}$$

Démontrer :

- a)  $f$  injective  $\iff \tilde{f}$  injective  $\iff \hat{f}$  surjective  
 b)  $f$  surjective  $\iff \tilde{f}$  surjective  $\iff \hat{f}$  injective  
 c)  $f$  bijective  $\iff \tilde{f}$  bijective  $\iff \hat{f}$  bijective.

**13.8****Existence d'un point fixe pour une application croissante de  $\mathfrak{P}(E)$  dans  $\mathfrak{P}(E)$** 

Soient  $E$  un ensemble,  $f : \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(E)$  une application croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire telle que :

$$\forall A, B \in \mathfrak{P}(E), \quad (A \subset B \implies f(A) \subset f(B)).$$

Montrer que  $f$  admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe  $X \in \mathfrak{P}(E)$  tel que :  $f(X) = X$ .

## Du mal à démarrer ?

**13.1** Séparer d'abord l'équivalence logique demandée en deux implications, la seconde revenant à appliquer la première à  $\overline{B}$  et  $\overline{C}$  à la place de  $B$  et  $C$  respectivement.

Raisonnez sur les ensembles, partant de  $A \cup B = A \cup C$ , pour déduire  $A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$ , à l'aide des opérations sur les parties de  $E$ .

On peut aussi raisonner sur les éléments : supposer  $A \cup B = A \cup C$ , considérer  $x \in A \cup \overline{B}$  quelconque, et établir  $x \in A \cup \overline{C}$ , en séparant en cas selon la situation de  $x$ .

**13.2** Partir de  $X$  (par exemple), transformer l'écriture de  $X$  en utilisant des propriétés de  $\cap$  et  $\cup$ , pour arriver à  $Y$  par égalités successives.

**13.3** On peut représenter  $f$  et  $g$  par des schémas qui aident à la compréhension des propriétés d'injectivité et de surjectivité.

**13.4** a) Supposer  $g \circ f$  injective, et montrer que  $f$  est alors injective en revenant à la définition de l'injectivité.

b) Supposer  $g \circ f$  surjective, et montrer que  $g$  est alors surjective en revenant à la définition de la surjectivité.

**13.5** Appliquer le résultat de l'exercice 13.4, en groupant par associativité :  $(h \circ g) \circ f, h \circ (g \circ f)$ .

**13.6** Montrer ces égalités en passant par les éléments, par équivalences logiques.

**13.7** Pour la commodité, on abrège injective en inj, surjective en surj.

a) Montrer les deux équivalences logiques  $f \text{ inj} \iff \tilde{f} \text{ inj}$ ,  $f \text{ inj} \iff \widehat{f} \text{ surj}$ , en séparant chaque équivalence logique en deux implications.

Pour  $\tilde{f} \text{ inj} \implies f \text{ inj}$  et pour  $\widehat{f} \text{ surj} \implies f \text{ inj}$ , penser à utiliser des singletons.

Pour  $f \text{ inj} \implies \widehat{f} \text{ surj}$ , montrer que, si  $f$  est injective, alors :

$$\forall A \in \mathfrak{P}(E), \quad A = f^{-1}(f(A)).$$

b) Pour  $f \text{ surj} \implies \tilde{f} \text{ surj}$  et pour  $f \text{ surj} \implies \widehat{f} \text{ inj}$ , montrer que, si  $f$  est surjective, alors :  $\forall A' \in \mathfrak{P}(F), \quad A' = f(f^{-1}(A'))$ .

Pour  $\tilde{f} \text{ surj} \implies f \text{ surj}$  et pour  $\widehat{f} \text{ inj} \implies f \text{ surj}$ , penser à utiliser des singletons.

**13.8** Considérer  $\mathcal{A} = \{X \in \mathfrak{P}(E) ; X \subset f(X)\}$  et  $F = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ .

# Corrigés des exercices

## 13.1 Première méthode :

1) On a successivement :

$$\begin{aligned} A \cup B = A \cup C &\iff \overline{A \cup B} = \overline{A \cup C} \\ &\iff \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{C} \\ &\implies A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = A \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \\ &\iff (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) \\ &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{C}) \\ &\iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}. \end{aligned}$$

Ceci montre l'implication :

$$A \cup B = A \cup C \implies A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$

2) En appliquant le résultat précédent à  $(\overline{B}, \overline{C})$  à la place de  $(B, C)$ , on obtient l'implication réciproque :

$$A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C} \implies A \cup B = A \cup C$$

et on conclut à l'équivalence logique demandée.

## Deuxième méthode :

1) Supposons  $A \cup B = A \cup C$ .

- Soit  $x \in A \cup \overline{B}$ , donc  $x \in A$  ou  $x \in \overline{B}$ .
- Si  $x \in A$ , alors  $x \in A \cup \overline{C}$ .
- Si  $x \notin A$ , alors, comme  $x \in A$  ou  $x \in \overline{B}$ , on a :  $x \in \overline{B}$ , c'est-à-dire  $x \notin B$ . Ainsi,  $x \notin A$  et  $x \notin B$ , donc  $x \notin A \cup B$ , d'où, par l'hypothèse,  $x \notin A \cup C$  et, a fortiori,  $x \notin C$ , c'est-à-dire  $x \in \overline{C}$ , donc  $x \in A \cup \overline{C}$ .

On a montré :  $x \in A \cup \overline{C}$ .

Ceci prouve :  $A \cup \overline{B} \subset A \cup \overline{C}$ .

- Comme  $B$  et  $C$  ont des rôles symétriques dans l'hypothèse  $A \cup B = A \cup C$ , on a aussi :  $A \cup \overline{C} \subset A \cup \overline{B}$ .

On conclut :  $A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$ .

2) Pour la réciproque, on termine comme dans la première méthode.

## 13.2 On a, par opérations dans $\mathfrak{P}(E)$ :

$$\begin{aligned} X &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \\ &= ((A \cap B) \cup (B \cap C)) \cup (C \cap A) \text{ associativité de } \cup \end{aligned}$$

$$= ((A \cup C) \cap B) \cup (C \cap A) \text{ mise en facteur de } B$$

$$= ((A \cup C) \cup (C \cap A)) \cap (B \cup (C \cap A))$$

distributivité de  $\cup$  sur  $\cap$

$$= (A \cup C) \cap ((B \cup C) \cap (B \cup A))$$

distributivité de  $\cup$  sur  $\cap$

$$= (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = Y.$$

## 13.3 a) 1)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & x & \dots \\ f \curvearrowright & 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 & \dots \end{array}$$

$f$  est injective (évident) et non surjective (car 0 n'a pas d'antécédent par  $f$ ), donc non bijective.

2)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & y & \dots \\ g \curvearrowright & 0 & 0 & 1 & \dots & y-1 & \dots \end{array}$$

$g$  est non injective (car  $g(0) = g(1) = 0$ ) et est surjective (car, pour tout  $x$  de  $\mathbb{N}$ ,  $x = g(x+1)$ ), donc non bijective.

b) 1)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & x & \dots \\ g \circ f \curvearrowright & 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & x & \dots \end{array}$$

On a :  $\forall x \in \mathbb{N}$ ,  $(g \circ f)(x) = g(x+1) = (x+1)-1 = x$ , donc :  $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ .

2)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & y & \dots \\ f \circ g \curvearrowright & 0 & 0 & 1 & \dots & y-1 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & y & \dots \end{array}$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \circ g(0) = f(0) = 1 \\ \forall y \in \mathbb{N}^*, (f \circ g)(y) = f(y-1) = (y-1)+1 = y \end{array} \right\},$$

donc  $f \circ g \neq \text{Id}_{\mathbb{N}}$ .

### 13.4

a) Supposons  $g \circ f$  injective.

On a, pour tout  $(x_1, x_2) \in E^2$  :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\iff (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\stackrel{g \circ f \text{ injective}}{\implies} x_1 = x_2, \end{aligned}$$

donc  $f$  est injective.

b) Supposons  $g \circ f$  surjective.

Soit  $z \in G$ . Puisque  $g \circ f$  est surjective, il existe  $x \in E$  tel que  $z = (g \circ f)(x)$ . On a alors, en notant  $y = f(x)$  :  $y \in F$  et  $z = g(f(x)) = g(y)$ . Ceci montre que  $g$  est surjective.

c) Supposons  $g \circ f$  bijective. Alors,  $g \circ f$  est injective et surjective, donc, d'après a) et b),  $f$  est injective et  $g$  est surjective.

### 13.5

a) Puisque  $h \circ (g \circ f)$  et  $g \circ (f \circ h)$  sont surjectives,  $h$  et  $g$  sont surjectives ; puisque  $(f \circ h) \circ g$  est injective,  $g$  est injective. Il en résulte que  $g$  est bijective.

En utilisant  $g^{-1}$ ,  $f \circ h = (f \circ h \circ g) \circ g^{-1}$  est injective (composée d'applications injectives), donc  $h$  est injective.

Ainsi,  $h$  est bijective, et enfin,  $f = (g^{-1} \circ h^{-1}) \circ (h \circ g \circ f)$  et  $f = (f \circ h \circ g) \circ (g^{-1} \circ h^{-1})$ , donc  $f$  est surjective et injective (comme composée de telles applications), donc bijective.

b) De même, schématiquement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} h \circ g \circ f & \text{inj.} \\ g \circ f \circ h & \text{inj.} \\ f \circ h \circ g & \text{surj.} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{ll} f & \text{inj.} \\ h & \text{inj.} \\ f & \text{surj.} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{ll} f & \text{bij.} \\ h & \text{inj.} \end{array} \right\},$$

$h \circ g = f^{-1} \circ (f \circ h \circ g)$  surj.  $\implies h$  surj.,  $h$  bij.,

$g = (g \circ f \circ h) \circ (h^{-1} \circ f^{-1})$  inj.,

$g = h^{-1} \circ f^{-1} \circ (f \circ h \circ g)$  surj.

### 13.6

a) Soit  $(x, y) \in E \times F$ . On a successivement :

$$(x, y) \in \bigcup_{i \in I} (A_i \times B)$$

$$\iff \exists i \in I, (x, y) \in A_i \times B$$

$$\iff \exists i \in I, (x \in A_i \text{ et } y \in B)$$

$$\iff (\exists i \in I, x \in A_i) \text{ et } y \in B$$

$$\iff x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ et } y \in B$$

$$\iff (x, y) \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \times B,$$

d'où l'égalité d'ensembles :  $\bigcup_{i \in I} (A_i \times B) = \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \times B$ .

b) Comme en a), en permutant les rôles des ensembles.

c) Soit  $(x, y) \in E \times F$ . On a successivement :

$$(x, y) \in \bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i)$$

$$\iff \forall i \in I, (x, y) \in A_i \times B_i$$

$$\iff \forall i \in I, (x \in A_i \text{ et } y \in B_i)$$

$$\iff (\forall i \in I, x \in A_i) \text{ et } (\forall i \in I, y \in B_i)$$

$$\iff x \in \bigcap_{i \in I} A_i \text{ et } y \in \bigcap_{i \in I} B_i$$

$$\iff x \in \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right),$$

d'où l'égalité d'ensembles :

$$\bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i) = \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right).$$

### 13.7

a) Supposons  $f$  injective. Soit  $(A, B) \in (\mathfrak{P}(E))^2$  tel que  $\tilde{f}(A) = \tilde{f}(B)$ . Soit  $a \in A$  ; puisque  $f(a) \in f(A) = f(B)$ , il existe  $b \in B$  tel que  $f(a) = f(b)$ . Comme  $f$  est injective, on déduit  $a = b \in B$ . Ceci montre  $A \subset B$ , et de même  $B \subset A$ , d'où  $A = B$ , et finalement  $\tilde{f}$  est injective.

b) Supposons  $\tilde{f}$  injective. Soit  $(a, b) \in E^2$  tel que  $f(a) = f(b)$ . On a :

$$f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{f(b)\} = f(\{b\}),$$

d'où, puisque  $\tilde{f}$  est injective,  $\{a\} = \{b\}$ , donc  $a = b$ .

Ceci montre que  $f$  est injective.

c) Supposons  $f$  injective.

Soit  $A \in \mathfrak{P}(E)$ . Montrons  $A = f^{-1}(f(A))$ .

L'inclusion  $A \subset f^{-1}(f(A))$  est connue.

Soit  $x \in f^{-1}(f(A))$  ; alors  $f(x) \in f(A)$ , donc il existe  $a \in A$  tel que  $f(x) = f(a)$ , puis, comme  $f$  est injective,  $x = a \in A$ .

Ainsi :  $A = f^{-1}(f(A)) = \widehat{f}(f(A))$ , ce qui montre que  $\widehat{f}$  est surjective.

d) Supposons  $\widehat{f}$  surjective. Soit  $(a, b) \in E^2$  tel que  $f(a) = f(b)$ . Il existe  $(A', B') \in (\mathfrak{P}(F))^2$  tel que  $\{a\} = \widehat{f}(A')$  et  $\{b\} = \widehat{f}(B')$ , et on a :  $f(b) = f(a) \in A'$ , donc  $b \in f^{-1}(A') = \{a\}$ ,  $b = a$ . Ceci montre que  $f$  est injective.

e) Supposons  $f$  surjective. Soit  $A' \in \mathfrak{P}(F)$ . Montrons :  $A' = \widehat{f}(f^{-1}(A'))$ .

L'inclusion  $f(f^{-1}(A')) \subset A'$  est connue.

Soit  $y \in A'$ . Puisque  $f$  est surjective, il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ , et on a alors  $x \in f^{-1}(A')$ ,

donc  $y = f(x) \in f(f^{-1}(A'))$ .

Ainsi :  $A' = f(f^{-1}(A')) = \tilde{f}(f^{-1}(A'))$ , ce qui montre que  $\tilde{f}$  est surjective.

$\beta)$  Supposons  $\tilde{f}$  surjective. Soit  $y \in F$ . Il existe  $A \in \mathfrak{P}(E)$  telle que  $\tilde{f}(A) = \{y\}$ . Comme  $\tilde{f}(\emptyset) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{y\}$ , on a nécessairement  $A \neq \emptyset$ .

Il existe donc  $a \in A$ , et on a alors  $y = f(a)$ , ce qui montre que  $f$  est surjective.

$\gamma)$  Supposons  $f$  surjective. Soit  $(A', B') \in (\mathfrak{P}(F))^2$  tel que  $\widehat{f}(A') = \widehat{f}(B')$ . Comme on l'a vu en b)  $\alpha)$ , on a alors :  $A' = f(f^{-1}(A')) = f(f^{-1}(B')) = B'$ , ce qui montre que  $\widehat{f}$  est injective.

$\delta)$  Supposons  $\widehat{f}$  injective. Soit  $y \in F$ . Comme  $\{y\} \neq \emptyset$ , on a  $f^{-1}(\{y\}) = \widehat{f}(\{y\}) \neq \widehat{f}(\emptyset) = \emptyset$ .

Il existe donc  $x \in E$  tel que  $f(x) \in \{y\}$ , c'est-à-dire tel que  $y = f(x)$ . Ceci montre que  $f$  est surjective.

c) Se déduit trivialement de a) et b).

**13.8** Considérons  $\mathcal{A} = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid X \subset f(X)\}$  et notons

$$F = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X.$$

- On a, par définition de  $f$  :  $\forall X \in \mathcal{A}, X \subset F$ , d'où, puisque  $f$  est croissante :  $\forall X \in \mathcal{A}, f(X) \subset f(F)$ .

Ainsi :  $\forall X \in \mathcal{A}, X \subset f(X) \subset f(F)$ ,

donc :  $\forall X \in \mathcal{A}, X \subset f(F)$ .

Il s'ensuit, par définition de  $F$ , que :  $F = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \subset f(F)$ .

On a montré :  $F \subset f(F)$ .

- Puisque  $f$  est croissante, on a alors :  $f(F) \subset f(f(F))$ , ce qui montre :  $f(F) \in \mathcal{A}$ .

Par définition de  $F$ , comme  $f(F) \in \mathcal{A}$ , on a alors :  $f(F) \subset F$ .

On conclut :  $f(F) = F$ ,

donc  $f$  admet au moins un point fixe,  $F$ .

*Remarque :*

Au lieu de considérer  $\mathcal{A}$  et  $F$  définis plus haut, on pouvait aussi considérer  $\mathcal{B} = \{Y \in \mathfrak{P}(E) \mid f(Y) \subset Y\}$  et  $G = \bigcap_{Y \in \mathcal{B}} Y$ , et montrer, comme ci-dessus, que  $G$  est un point fixe de  $f$ .



## Plan

Les méthodes à retenir	203
Énoncés des exercices	205
Du mal à démarrer ?	209
Corrigés	211

## Thèmes abordés dans les exercices

- Étude d'une loi interne
- Montrer qu'un ensemble muni d'une loi interne est un groupe ou un sous-groupe d'un groupe
- Montrer qu'un ensemble muni de deux lois internes est un anneau ou un sous-anneau d'un anneau
- Calculs dans un ensemble muni d'une loi interne, dans un groupe, dans un anneau, dans un corps
- Étude d'images directes, d'images réciproques de parties par un morphisme.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions de : loi interne, commutativité, associativité, neutre, élément symétrisable, symétrique, distributivité
- Définitions de : groupe, sous-groupe, morphisme de groupes, endomorphisme d'un groupe, isomorphisme de groupes, automorphisme d'un groupe
- Définitions de : anneau, sous-anneau, anneau intègre, corps, sous-corps
- Définitions de : image directe, image réciproque d'une partie par une application
- Les exemples usuels : anneau  $\mathbb{Z}$ , corps  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , pour les lois usuelles.

## Les méthodes à retenir

Pour effectuer des calculs portant sur une loi interne qui n'est pas une loi usuelle

Bien détailler chaque étape de raisonnement ou de calcul, car les automatismes de calcul acquis dans les classes antérieures sur les opérations usuelles sur les nombres ne sont pas, a priori, valables pour des lois internes quelconques.

→ Exercices 14.1, 14.2, 14.5, 14.8, 14.12 à 14.14, 14.16, 14.17, 14.19 à 14.22.

**Pour montrer qu'une loi interne est commutative, ou est associative, ou admet un neutre, ou que certains éléments admettent un symétrique**

Revenir aux définitions.

→ Exercices 14.1, 14.2, 14.10, 14.11.

**Pour montrer qu'une loi interne  $*$  dans un ensemble  $E$  n'est pas commutative**

Trouver  $(a,b) \in E^2$  tel que  $a * b \neq b * a$ .

→ Exercice 14.2.

**Pour montrer qu'une loi interne  $*$  dans un ensemble  $E$  n'est pas associative**

Trouver  $(a,b,c) \in E^3$  tel que  $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ .

→ Exercice 14.1.

**Pour simplifier par un élément dans un calcul, par exemple, pour passer de  $a * x = a * y$  à  $x = y$**

Essayer de :

- montrer que  $a$  admet un symétrique  $a^{-1}$  et composer par  $a^{-1}$  à gauche

→ Exercices 14.5, 14.13

- montrer que l'application  $\gamma_a : E \longrightarrow E$ ,  $x \longmapsto a * x$  est injective

→ Exercices 14.20, 14.21.

**Pour montrer qu'un ensemble  $E$  muni d'une loi  $*$  est un groupe**

Ne pas oublier de montrer que  $*$  est interne dans  $E$ .

- Si la loi  $*$  n'est pas une loi usuelle, revenir à la définition d'un groupe : montrer que  $*$  est associative, que  $E$  admet un neutre pour  $*$ , et que tout élément de  $E$  admet un symétrique pour  $*$ .

→ Exercices 14.2, 14.10, 14.17, 14.21

- Si la loi  $*$  est une loi usuelle, essayer de montrer que  $(E,*)$  est un sous-groupe d'un groupe usuel  $(G,*)$  : montrer que  $E \subset G$ , que le neutre de  $(G,*)$  est dans  $E$ , que, pour tout  $(x,y) \in E^2$ ,  $x * y \in E$ , et que, pour tout  $x \in E$ , le symétrique  $x^{-1}$  de  $x$  dans  $G$  est dans  $E$ .
- Essayer de trouver un isomorphisme de  $(E,*)$  sur un groupe connu, ou un morphisme d'un groupe connu sur  $(E,*)$ .

→ Exercice 14.10.

**Pour montrer qu'une partie  $H$  d'un groupe  $(G, \cdot)$  est un sous-groupe de  $G$**

Essayer de :

- revenir à la définition de sous-groupe : montrer que  $H \subset G$ , que le neutre de  $G$  est dans  $H$ , que, pour tout  $(x,y) \in H^2$ ,  $xy \in H$ , et que, pour tout  $x \in H$ , le symétrique  $x^{-1}$  de  $x$  dans  $G$  est dans  $H$

→ Exercices 14.7, 14.9, 14.11.

- montrer que  $H$  est le sous-groupe de  $G$  engendré par une certaine partie de  $G$ .

**Pour manipuler des sous-groupes d'un groupe**

Utiliser la définition de sous-groupe d'un groupe.

→ Exercices 14.6, 14.7, 14.22.

**Pour montrer q'une application  
 $f : (G, *) \longrightarrow (G', \top)$   
est un morphisme de groupes**

Revenir à la définition : montrer que :

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x) \top f(y).$$

→ Exercice 14.3.

**Pour montrer que  
deux groupes sont isomorphes**

Trouver un isomorphisme de l'un des deux groupes sur l'autre.

→ Exercice 14.10.

**Pour montrer que  
deux groupes  $(G, *)$ ,  $(G', \top)$   
ne sont pas isomorphes**

Raisonner par l'absurde : supposer qu'il existe un isomorphisme de groupes  $f : (G, *) \longrightarrow (G', \top)$  et amener une contradiction.

→ Exercice 14.18.

**Lorsqu'une hypothèse est faite  
pour tout élément d'un anneau**

Penser à appliquer cette hypothèse à  $x$ , à  $y$ , à  $x + y$ , à  $1 + x$ , ...

→ Exercice 14.12.

**Pour montrer  
qu'une partie  $B$  d'un anneau  $A$   
est un sous-anneau de  $A$**

Revenir à la définition de sous-anneau d'un anneau : montrer que  $B$  est un sous-groupe de  $(A, +)$ , que, pour tout  $(x, y) \in B^2$ ,  $xy \in B$ , et que  $1_A \in B$ .

→ Exercices 14.4, 14.15.

**Pour étudier une loi interne  $*$   
sur un ensemble fini  $E$**

Il peut être utile de considérer, pour  $a \in E$  fixé, les applications

$$\gamma_a : E \longrightarrow E, x \longmapsto a * x$$

$$\delta_a : E \longrightarrow E, x \longmapsto x * a.$$

En particulier, si  $\gamma_a$  est injective, alors  $\gamma_a$  est surjective (car  $E$  est supposé fini).

→ Exercices 14.20, 14.21.

**Pour étudier  
des propriétés d'un groupe fini**

Penser à utiliser des arguments de dénombrement, de comptage.

→ Exercice 14.22.

## Énoncés des exercices

14.1

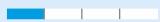
### Exemple d'étude de loi interne

Soit  $*$  la loi interne définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = x + y + x^2 y^2.$$

- a) Vérifier que  $*$  est commutative.
- b) La loi  $*$  est-elle associative ?
- c) Montrer que  $\mathbb{R}$  admet un neutre pour  $*$  et calculer ce neutre.
- d) Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

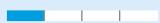
$$1) 1 * x = 0 \quad 2) 1 * x = 1.$$

**14.2****Exemple de groupe**

On note  $*$  la loi interne dans  $G = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  définie, pour tous  $(z,t), (z',t') \in G$  par :

$$(z,t) * (z',t') = (z + z', t + t' + \operatorname{Im}(zz')).$$

Montrer que  $(G,*)$  est un groupe. Est-il commutatif ?

**14.3****Automorphismes intérieurs d'un groupe**

Soit  $(G,\cdot)$  un groupe ; pour tout  $a \in G$ , on note  $\tau_a : G \longrightarrow G$  l'application définie par :

$$\tau_a(x) = axa^{-1}.$$

a) Vérifier que  $\tau_a$  est un automorphisme de  $G$  (appelé **automorphisme intérieur** associé à  $a$ ).

b) Vérifier :  $\forall (a,b) \in G^2, \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$ .

**14.4****Centre d'un anneau**

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau. On définit le centre  $C$  de  $A$  par :

$$C = \{x \in A ; \forall a \in A, ax = xa\}.$$

Montrer que  $C$  est un sous-anneau de  $A$ .

**14.5****Calculs dans un groupe**

Soient  $(G,\cdot)$  un groupe,  $e$  son neutre,  $a,b \in G$  tels que :  $ba = ab^2$  et  $ab = ba^2$ .

Montrer :  $a = b = e$ .

**14.6****La réunion de deux sous-groupes n'est qu'exceptionnellement un sous-groupe**

Soient  $(G,\cdot)$  un groupe,  $H,K$  deux sous-groupes de  $G$ . Montrer que  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si :  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .

**14.7****Opération sur deux sous-groupes d'un groupe**

Soit  $(G,\cdot)$  un groupe. Pour tous sous-groupes  $H,K$  de  $G$ , on note :

$$HK = \{hk ; (h,k) \in H \times K\}.$$

Soient  $H,K$  deux sous-groupes de  $G$ . Montrer que les quatre propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

- (i)  $HK$  est un sous-groupe de  $G$
- (ii)  $KH$  est un sous-groupe de  $G$
- (iii)  $HK \subset KH$
- (iv)  $KH \subset HK$ .

**14.8****Éléments d'ordre fini d'un groupe**

Un élément  $x$  d'un groupe  $(G,\cdot)$ , de neutre  $e$ , est dit **d'ordre fini** si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x^n = e$  ; si  $x$  est d'ordre fini, le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x^n = e$  est appelé **l'ordre** de  $x$ .

Soient  $(G,\cdot)$  un groupe,  $(a,b) \in G^2$ . Montrer :

a) si  $a,b,ab$  sont d'ordre 2, alors  $ab = ba$

b) si  $a$  est d'ordre fini, alors  $a^{-1}$  aussi, et  $a$  et  $a^{-1}$  ont le même ordre

- c) si  $a$  est d'ordre fini, alors  $bab^{-1}$  aussi, et  $a$  et  $bab^{-1}$  ont le même ordre  
d) si  $ab$  est d'ordre fini, alors  $ba$  aussi, et  $ab$  et  $ba$  ont le même ordre.

### 14.9 Image directe, image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes

Soient  $(G, \cdot)$ ,  $(G', \cdot')$  deux groupes,  $f : G \longrightarrow G'$  un morphisme de groupes.

- a) Montrer que, pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ ,  $f(H)$  est un sous-groupe de  $G'$ .  
b) Montrer que, pour tout sous-groupe  $H'$  de  $G'$ ,  $f^{-1}(H')$  est un sous-groupe de  $G$ .

### 14.10 Transfert de la structure de groupe

- a) Soient  $(G, \cdot)$  un groupe,  $E$  un ensemble,  $f : E \longrightarrow G$  une application bijective.

On note  $*$  la loi interne dans  $E$  définie par :

$$\forall x, y \in E, \quad x * y = f^{-1}(f(x)f(y)),$$

où  $f^{-1}$  désigne la bijection réciproque de  $f$ .

Démontrer que  $(E, *)$  est un groupe et que  $f$  est un isomorphisme de groupes de  $(E, *)$  dans  $(G, \cdot)$ .

On dit qu'il y a transfert de la structure de groupe, du groupe  $(G, \cdot)$  sur  $(E, *)$ .

- b) Exemple : On note  $*$  la loi interne dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Montrer que  $(\mathbb{R}, *)$  est un groupe, isomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$ .

### 14.11 Exemple de groupe et de sous-groupe

On note  $G$  l'ensemble des applications  $f : [0 + \infty[ \longrightarrow [0 + \infty[,$  de classe  $C^1$ , telles que :  $f > 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

- a) Montrer que  $(G, \circ)$  est un groupe. Est-il commutatif ?  
b) On note  $H$  l'ensemble des  $f \in G$  telles que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ . Montrer que  $H$  est un sous-groupe de  $G$  et que  $H \neq G$ .

### 14.12 Anneaux booléiens

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau. On suppose :  $\forall x \in A, \quad x^2 = x$ .

- a) Montrer :  $\forall x \in A, \quad 2x = 0$ .  
b) Établir que  $A$  est commutatif.

### 14.13 Étude d'inversibilité dans un anneau

Soient  $A$  un anneau,  $(a, b) \in A^2$ . On suppose que  $ab$  est inversible à droite, c'est-à-dire qu'il existe  $x \in A$  tel que  $(ab)x = 1$ , et on suppose que  $ba$  n'est pas diviseur de zéro à gauche, c'est-à-dire que, pour tout  $y \in A$  :  $(ba)y = 0 \implies y = 0$ .

Démontrer que  $a$  est inversible dans  $A$ .

**14.14 Étude d'inverses dans un anneau**

Soient  $A$  un anneau,  $(a,b) \in A^2$ . On note  $1$  le neutre de la deuxième loi de  $A$ . On suppose que  $a, b, ab - 1$  sont inversibles dans  $A$ .

- On note  $c = ab - 1$ . Montrer que  $a - b^{-1}$  est inversible dans  $A$  et que  $(a - b^{-1})^{-1} = bc^{-1}$ .
- On note  $d = a^{-1} - (a - b^{-1})^{-1}$ . Montrer que  $d$  est inversible dans  $A$  et que  $d^{-1} = -ca$ .

**14.15 Exemples de sous-anneaux du corps  $\mathbb{Q}$** 

Soit  $p$  un nombre premier ( $p \geq 2$ ). On considère :

$$A_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}; \exists (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{a}{b} \text{ et } p \nmid b \right\}.$$

- Démontrer que  $A_p$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$  (pour les lois usuelles).
- Est-ce que  $A_p$  est un sous-corps de  $\mathbb{Q}$  (pour les lois usuelles) ?

**14.16 Loi interne vérifiant une condition**

Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi interne notée multiplicativement, associative et telle qu'il existe  $a \in E$  tel que :

$$\forall y \in E, \exists x \in E, y = axa.$$

- Démontrer que  $(E, \cdot)$  admet un neutre, noté  $e$ .
- Établir que  $a$  est symétrisable et exprimer le symétrique  $a^{-1}$  de  $a$ .

**14.17 Axiomes faibles de la structure de groupe**

Soient  $E$  un ensemble muni d'une loi interne  $\cdot$  associative, et  $e \in E$  tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in E, xe = x \\ \forall x \in E, \exists x' \in E, xx' = e. \end{cases}$$

Montrer que  $(E, \cdot)$  est un groupe.

**14.18 Les groupes additifs  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}^2$  ne sont pas isomorphes**

Montrer que les groupes  $(\mathbb{Z}, +)$  et  $(\mathbb{Z}^2, +)$  ne sont pas isomorphes.

**14.19 Éléments nilpotents d'un anneau**

Soit  $A$  un anneau. Un élément  $a$  de  $A$  est dit **nilpotent** si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = 0$ .

- Soit  $(a,b) \in A^2$ . Montrer que, si  $a$  est nilpotent et si  $ab = ba$ , alors  $ab$  est nilpotent.
- Soit  $a \in A$  nilpotent. Montrer que  $1 - a$  est inversible dans  $A$  et exprimer  $(1 - a)^{-1}$ .
- Soit  $(a,b) \in A^2$ . Montrer que, si  $a$  et  $b$  sont nilpotents et  $ab = ba$ , alors  $a + b$  est nilpotent.

**14.20 Anneaux intègres finis**

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

**14.21 Conditions suffisantes pour la structure de groupe sur un ensemble fini**

Soit  $E$  un ensemble fini muni d'une loi de composition interne  $*$  associative pour laquelle tous les éléments de  $E$  sont réguliers. Établir que  $(E, *)$  est un groupe.

## 14.22 Théorème de Lagrange sur les groupes

Soient  $(G, \cdot)$  un groupe fini,  $H$  un sous-groupe de  $G$ ,  $\mathcal{R}$  la relation définie dans  $G$  par :

$$x \mathcal{R} y \iff xy^{-1} \in H.$$

- a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $G$ .
- b) Montrer que les classes d'équivalence modulo  $\mathcal{R}$  ont toutes le même cardinal.
- c) En déduire  $\text{Card}(G) = \text{Card}(H) \times \text{Card}(G/\mathcal{R})$ .

On a ainsi prouvé le **théorème de Lagrange** : dans un groupe fini, l'ordre de tout sous-groupe divise l'ordre du groupe.

# Du mal à démarrer ?

**14.1** b) Montrer que  $*$  n'est pas associative en calculant  $(x * y) * z$  et  $x * (y * z)$  pour un choix de  $(x, y, z)$  assez simple, et en obtenant deux résultats différents.

**14.2** Puisque  $G$  n'apparaît pas comme sous-groupe d'un groupe connu, pour montrer que  $G$  est un groupe, revenir à la définition, en étudiant successivement l'associativité, l'existence d'un neutre, l'existence d'un symétrique pour tout élément de  $G$ .

Pour montrer que  $*$  n'est pas commutative, calculer  $(z, t) * (z', t')$  et  $(z', t') * (z, t)$  pour un choix assez simple, et en obtenant deux résultats différents.

**14.3** a) Revenir à la définition d'un automorphisme.

b) Pour  $(a, b) \in G^2$  fixé, calculer, pour tout  $x \in G$ ,  $(\tau_a \circ \tau_b)(x)$ .

**14.4** Revenir à la définition de sous-anneau.

**14.5** Montrer, par exemple,  $ba = (ba)(ab)$  et utiliser le fait que, dans un groupe, tout élément est simplifiable.

**14.6** Un sens est évident.

Pour l'autre sens, raisonner par l'absurde.

**14.7** Faire un cycle d'implications, par exemple :

$$(i) \implies (iii) \implies (ii) \implies (iv) \implies (i).$$

Utiliser la notion de sous-groupe, par sa définition.

**14.8** a) Montrer  $(ab)(ab) = (ba)(ab)$  puis composer à droite dans chaque membre par l'inverse de  $ab$ .

b) Montrer que, si  $a^n = e$ , alors  $(a^{-1})^n = e$ . Utiliser les rôles symétriques de  $a$  et  $a^{-1}$  pour montrer que  $a$  et  $a^{-1}$  sont de même ordre.

c) Si  $a^n = e$ , calculer  $(bab^{-1})^n$ .

d) Utiliser c).

**14.9** Remarquer d'abord que les deux lois, dans  $G$  et dans  $G'$ , sont notées de la même façon par commodité, mais qu'il ne s'agit pas, *a priori*, de la même loi.

Appliquer à chaque étape les définitions (sous-groupe, morphisme de groupes, image directe, image réciproque).

**14.10** a) Pour montrer que  $(E, *)$  est un groupe, revenir à la définition de groupe, en se ramenant, grâce à  $f$ , aux conditions sur  $G$ .

b) Utiliser  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ .

**14.11** a) Revenir à la définition de groupe, ou bien montrer que  $G$  est un sous-groupe du groupe des bijections de  $[0 + \infty[$  sur  $[0 + \infty[$ .

Se rappeler que, par définition, une application d'une partie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est de classe  $C^1$  si et seulement si elle est dérivable et à dérivée continue. Pour l'associativité, utiliser l'associativité de la loi  $\circ$  dans l'ensemble des applications de  $[0 + \infty[$  dans  $[0 + \infty[$ .

b) Utiliser la définition d'un sous-groupe (ou une caractérisation). Se rappeler que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$  signifie :  $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$ .

**14.12** a) Appliquer l'hypothèse à  $x$  et à  $1+x$ , où  $1$  désigne le neutre de la deuxième loi (notée multiplicativement) de  $A$ .

b) Appliquer l'hypothèse à  $x$ , à  $y$ , à  $x+y$ .

**14.13** Calculer  $ba(bxa - 1)$ .

**14.14** a) Montrer :  $a - b^{-1} = cb^{-1}$ , puis calculer  $(a - b^{-1})^{-1}$  à partir de cette égalité. En effet, l'inverse d'une somme ou d'une différence (quand cet inverse existe) ne paraît pas simple tandis que l'inverse d'un produit (d'éléments inversibles) s'exprime simplement.

b) Calculer  $d$  et obtenir  $d = -a^{-1}c^{-1}$ , puis finir de façon analogue à la solution de la question a).

**14.15** a) Les lois usuelles de  $\mathbb{Q}$  sont respectivement l'addition et la multiplication.

On se rappellera que, puisque  $p$  est premier, si  $p$  divise un produit d'entiers, alors  $p$  divise l'un des facteurs de ce produit.

b) Considérer l'élément  $p$  de  $A$ .

**14.16** a) Obtenir l'existence de  $b \in E$  tel que :  $a = aba$ . Pour  $y \in E$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = axa$ ; calculer  $(ab)y$  et  $y(ba)$ .

b) Faire intervenir  $b \in E$  tel que  $a = aba$ , comme en a).

**14.17** Appliquer l'hypothèse à  $x \in E$ , d'où l'existence de  $x' \in E$  tel que  $xx' = e$ , puis penser à appliquer l'hypothèse à  $x'$ , d'où l'existence de  $x'' \in E$  tel que  $x'x'' = e$ . Combiner ensuite les renseignements obtenus.

**14.18** Raisonner par l'absurde. Supposer qu'il existe un isomorphisme de groupes  $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}^2, +)$ .

Considérer  $(a, b) = f(1)$  et des antécédents par  $f$  de  $(1, 0)$  et de  $(0, 1)$ .

**14.19** a) Soit  $(a, b) \in A^2$  tel que  $ab = ba$ .

- Montrer, par récurrence sur  $k$  :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, ab^k = b^k a$ .
- En déduire, par récurrence sur  $k$  :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, (ab)^k = a^k b^k$ .

b) Se rappeler la formule sur une sommation géométrique.

c) Utiliser la formule du binôme de Newton.

**14.20** Soient  $A$  un anneau intègre fini,  $a \in A - \{0\}$ . Il s'agit de montrer que  $a$  est inversible dans  $A$ . Considérer les applications  $x \mapsto ax$  et  $x \mapsto xa$  de  $A$  dans  $A$  et utiliser le fait que  $A$  est fini.

**14.21** 1) Pour  $x \in E$ , montrer que les applications  $y \mapsto x * y$  et  $z \mapsto z * x$  de  $E$  dans  $E$  sont bijectives, d'où l'existence de  $e_x \in E$  tel que  $x * e_x = x$  et l'existence de  $\varepsilon_x \in E$  tel que  $\varepsilon_x * x = x$ . En déduire  $e_x = \varepsilon_x$ .

Montrer que  $e_x$  ne dépend pas de  $x$ , et, en notant  $e = e_x$ , déduire que  $e$  est neutre pour  $*$ .

2) Montrer que, pour tout  $x \in E$ , il existe  $x' \in e$  tel que  $x * x' = e$  et il existe  $x'' \in E$  tel que  $x'' * x = e$ , et déduire  $x' = x''$ .

**14.22** a) Revenir à la définition d'une relation d'équivalence : montrer que  $\mathcal{R}$  est réflexive, symétrique, transitive.

b) En notant, pour  $x \in G$ ,  $\widehat{x} = \{z \in G \mid x \mathcal{R} z\}$  la classe d'équivalence de  $x$  modulo  $\mathcal{R}$ , montrer que, pour tout  $(x, y) \in G^2$ , les applications

$$\alpha : \widehat{x} \longrightarrow \widehat{y}, \quad t \mapsto tx^{-1}y \quad \text{et} \quad \beta : \widehat{y} \longrightarrow \widehat{x}, \quad s \mapsto sy^{-1}x$$

sont correctement définies et sont réciproques l'une de l'autre, donc sont bijectives.

c) Compter le nombre total d'éléments de  $G$ , en les regroupant par classes modulo  $\mathcal{R}$ ; les classes ont toutes le même cardinal.

# Corrigés des exercices

## 14.1

a) On a, pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$y * x = y + x + y^2 x^2 = x + y + x^2 y^2 = x * y,$$

donc  $*$  est commutative.

b) On a, par exemple :

$$\begin{aligned} (1 * 1) * (-1) &= (1 + 1 + 1^2 1^2) * (-1) = 3 * (-1) \\ &= 3 + (-1) + 3^2 (-1)^2 = 11, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 * (1 * (-1)) &= 1 * (1 + (-1) + 1^2 (-1)^2) = 1 * 1 \\ &= 1 + 1 + 1^2 1^2 = 3 \neq 11, \end{aligned}$$

donc  $*$  n'est pas associative.

c) On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $0 * x = x * 0 = 0$ , donc  $\mathbb{R}$  admet un neutre pour  $*$  et ce neutre est 0.

d) 1) On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$1 * x = 0 \iff 1 + x + x^2 = 0,$$

et cette équation du second degré n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$  puisque son discriminant  $\Delta = 1 - 4 = -3$  est  $< 0$ .

On conclut que l'équation  $1 * x = 0$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

2) On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} 1 * x = 1 &\iff 1 + x + x^2 = 1 \iff x^2 + x = 0 \\ &\iff (x = -1 \text{ ou } x = 0). \end{aligned}$$

On conclut que l'équation  $1 * x = 1$  admet exactement deux solutions dans  $\mathbb{R}$ , les réels  $-1$  et  $0$ .

## 14.2

Remarquer d'abord que  $*$  est bien une loi interne dans  $G = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ .

1) *Associativité* :

On a, pour tous  $(z,t), (z',t'), (z'',t'') \in G$  :

$$\begin{aligned} &((z,t) * (z',t')) * (z'',t'') \\ &= (z + z', t + t' + \operatorname{Im}(\bar{z}z')) * (z'',t'') \\ &= ((z + z') + z'', (t + t' + \operatorname{Im}(\bar{z}z')) + t'' + \operatorname{Im}((\bar{z} + \bar{z}')z'')) \\ &= (z + z' + z'', t + t' + t'' + \operatorname{Im}(\bar{z}z') + \operatorname{Im}(\bar{z}z'') + \operatorname{Im}(\bar{z}'z'')) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &(z,t) * ((z',t') * (z'',t'')) \\ &= (z,t) * (z' + z'', t' + t'' + \operatorname{Im}(\bar{z}'z'')) \\ &= (z + (z' + z''), t + (t' + t'' + \operatorname{Im}(\bar{z}'z'')) + \operatorname{Im}(\bar{z}(z' + z''))) \\ &= (z + z' + z'', t + t' + t'' + \operatorname{Im}(\bar{z}'z'') + \operatorname{Im}(\bar{z}z') + \operatorname{Im}(\bar{z}z'')). \end{aligned}$$

On a donc :

$$((z,t) * (z',t')) * (z'',t'') = (z,t) * ((z',t') * (z'',t''))$$

et on conclut que  $*$  est associative.

2) *Neutre* :

On a, pour tout  $(z,t) \in G$  :

$$(z,t) * (0,0) = (z,t) \quad \text{et} \quad (0,0) * (z,t) = (z,t),$$

donc  $(0,0)$  est neutre pour  $*$ .

3) *Symétriques* :

Soit  $(z,t) \in G$ . On a, pour tout  $(z',t') \in G$  :

$$\begin{cases} (z,t) * (z',t') = (0,0) \\ (z',t') * (z,t) = (0,0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (z + z', t + t' + \operatorname{Im}(\bar{z}z')) = (0,0) \\ (z' + z, t' + t + \operatorname{Im}(\bar{z}'z)) = (0,0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z + z' = 0 \\ t + t' + \operatorname{Im}(\bar{z}z') = 0 \\ t' + t + \operatorname{Im}(\bar{z}'z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z' = -z \\ t + t' + \operatorname{Im}(-|z|^2) = 0 \\ t' + t + \operatorname{Im}(-|z|^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z' = -z \\ t + t' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z' = -z \\ t' = -t. \end{cases}$$

Ceci montre que  $(z,t)$  admet un symétrique (et un seul) et que ce symétrique est  $(-z, -t)$ .

On conclut que  $(G, *)$  est un groupe.

4) Commutativité :

On a :

$$\begin{cases} (1,0) * (i,0) = (1+i, 0+0+i(\bar{i}i)) \\ \quad = (1+i,1) \\ (i,0) * (1,0) = (i+1, 0+0+i(\bar{i}1)) \\ \quad = (1+i,-1), \end{cases}$$

donc  $(1,0) * (Im,0) \neq (Im,0) * (1,0)$ ,

et on conclut que  $(G, *)$  n'est pas commutatif.

**14.3** a)  $\forall (x,y) \in G^2$ ,

$$\tau_a(xy) = a(xy)a^{-1} = (ax)a^{-1}(ay)a^{-1} = \tau_a(x)\tau_a(y),$$

donc  $\tau_a$  est un endomorphisme de  $G$ .

•  $\forall x \in G$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tau_a \circ \tau_{a^{-1}})(x) = \tau_a(a^{-1}xa) = a(a^{-1}xa)a^{-1} = x \\ (\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a)(x) = \tau_{a^{-1}}(axa^{-1}) = a^{-1}(axa^{-1})a = x \end{array} \right|,$$

donc :  $\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \tau_{a^{-1}} \circ \tau_a = \text{Id}_G$ , ce qui montre que  $\tau_a$  est bijective, de réciproque  $\tau_{a^{-1}}$ .

Ainsi,  $\tau_a$  est un automorphisme du groupe  $G$ .

b) Soit  $(a,b) \in G^2$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in G, \quad (\tau_a \circ \tau_b)(x) &= \tau_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} \\ &= (ab)x(b^{-1}a^{-1}) = (ab)x(ab)^{-1} \\ &= \tau_{ab}(x), \end{aligned}$$

d'où :  $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$ .

Ainsi, l'application  $a \mapsto \tau_a$  est un morphisme du groupe  $G$  dans le groupe des automorphismes de  $G$  (muni de  $\circ$ ).

**14.4** Rappelons que, par définition,  $C$  est un sous-anneau de  $A$  si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) (C, +) \text{ est un sous-groupe de } (A, +) \\ 2) \forall x, y \in C, xy \in C \\ 3) 1 \in C. \end{array} \right.$$

I) •  $C \subset A$ , évident.

•  $C \neq \emptyset$  car  $0 \in C$ , puisque :  $\forall a \in A, a0 = 0a (= 0)$ .

• Soit  $(x,y) \in C^2$ . On a :

$$\forall a \in A, a(x-y) = ax - ay = xa - ya = (x-y)a,$$

donc  $x-y \in C$ .

Ceci montre que  $(C, +)$  est un sous-groupe de  $(A, +)$ .

2) Soit  $(x,y) \in C^2$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall a \in A, (xy)a &= x(ya) = x(ay) = (xa)y \\ &= (ax)y = a(xy), \end{aligned}$$

donc  $xy \in C$ .

3) On a :  $\forall a \in A, 1a = a1 (= a)$ , donc  $1 \in C$ .

On conclut que  $C$  est un sous-anneau de  $A$ .

**14.5** On a :

$$ba = ab^2 = (ab)b = (ba^2)b = (ba)(ab).$$

Comme  $ba$  est inversible dans  $G$ , il s'ensuit, en multipliant les deux membres par  $(ba)^{-1}$  à gauche :  $e = ab$ . On a alors  $b = a^{-1}$ , donc  $ba = e$ .

Ensuite :

$$e = ab = ba^2 = (ba)a = ea = a,$$

et on a ainsi  $a = e$  puis  $b = a^{-1} = e$ .

**14.6** 1) Si  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ , alors  $H \cup K = K$  ou  $H \cup K = H$ , donc  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$ .

2) Réciproquement, supposons que  $H \cup K$  soit un sous-groupe de  $G$ . Raisonnons par l'absurde : supposons  $H \not\subset K$  et  $K \not\subset H$ . Il existe alors  $a \in H$  tel que  $a \notin K$ , et il existe  $b \in K$  tel que  $b \notin H$ .

Puisque  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$  et que  $a$  et  $b$  sont dans  $H \cup K$ , on a  $ab \in H \cup K$ , c'est-à-dire :  $ab \in H$  ou  $ab \in K$ .

• Supposons  $ab \in H$ . Comme  $b = a^{-1}(ab)$ , que  $a \in H$  et  $ab \in H$  et que  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , on déduit  $b \in H$ , contradiction.

• Supposons  $ab \in K$ . Comme  $a = (ab)b^{-1}$ , que  $b \in K$  et  $ab \in K$  et que  $K$  est un sous-groupe de  $G$ , on déduit  $a \in K$ , contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde, montre :  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .

**14.7** (i)  $\Rightarrow$  (iii) :

Supposons que  $HK$  soit un sous-groupe de  $G$ .

Soit  $x \in HK$ . Comme  $x^{-1} \in HK$ , il existe  $(h,k) \in H \times K$  tel que  $x^{-1} = hk$ . On a alors :

$$x = (x^{-1})^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH.$$

Ceci prouve :  $HK \subset KH$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (ii)

Supposons  $HK \subset KH$ .

• Il est clair que, en notant  $e$  le neutre de  $G$ ,  $e = ee \in KH$ .

- Soit  $x \in KH$ . Il existe  $(h,k) \in H \times K$  tel que  $x = kh$ . On a alors :

$$x^{-1} = (kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK \subset KH.$$

- Soient  $x,y \in KH$ . Il existe  $(h,k) \in H \times K, (h',k') \in H \times K$  tels que  $x = kh$  et  $y = k'h'$ .

On a alors :

$$xy = (kh)(k'h') = k(hk')h'.$$

Comme  $hk' \in HK \subset KH$ , il existe  $(h'',k'') \in H \times K$  tel que  $hk' = k''h''$ , d'où :

$$xy = k(k''h'')h' = (kk'')(h''h') \in KH.$$

Ceci montre que  $KH$  est un sous-groupe de  $G$ .

**(ii)**  $\implies$  **(iv)** : Se déduit de **(i)**  $\implies$  **(iii)** en échangeant  $H$  et  $K$ .

**(iv)**  $\implies$  **(i)** : Se déduit de **(iii)**  $\implies$  **(ii)** en échangeant  $H$  et  $K$ .

Finalement, les quatre propriétés envisagées sont deux à deux équivalentes.

$$\begin{array}{ccc} (i) & \implies & (ii) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (iv) & \iff & (iii) \end{array}$$

#### 14.8 a) On a :

$(ab)(ab) = (ab)^2 = e = b^2 = beb = ba^2b = (ba)(ab)$ , d'où, puisque  $ab$  est régulier à droite :  $ab = ba$ .

b) Supposons  $a$  d'ordre fini, et notons  $n$  son ordre.

On a :  $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = e^{-1} = e$ ,

donc  $a^{-1}$  est d'ordre fini et, en notant  $p$  son ordre, on a :  $p \leq n$ .

En échangeant les rôles de  $a$  et  $a^{-1}$  (puisque  $(a^{-1})^{-1} = a$ ), on obtient aussi  $n \leq p$ .

Finalement  $a^{-1}$  est d'ordre fini, et de même ordre que  $a$ .

c) Supposons  $a$  d'ordre fini, et notons  $n$  son ordre.

On a :  $(bab^{-1})^n = ba^n b^{-1} = bab^{-1} = e$ ,

donc  $bab^{-1}$  est d'ordre fini et, en notant  $q$  son ordre, on a :  $q \leq n$ .

En échangeant les rôles de  $b$  et  $b^{-1}$ , on obtient aussi  $n \leq q$ .

Finalement,  $bab^{-1}$  est d'ordre fini, et de même ordre que  $a$ .

d) Remarquer :  $ba = b(ab)b^{-1}$  et appliquer c).

#### 14.9 Notons $e$ le neutre de $G$ , $e'$ le neutre de $G'$ .

a) Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ .

• On a :  $e' = f(e) \in f(H)$ , car  $f$  est un morphisme de groupes et  $e \in H$ .

- Soit  $(x',y') \in (f(H))^2$ . Il existe  $(x,y) \in H^2$  tel que  $x' = f(x)$  et  $y' = f(y)$ . On a alors :

$$x'y' = f(x)f(y) = f(xy) \in f(H),$$

car  $f$  est un morphisme de groupes et  $xy \in H$ .

- Soit  $x' \in f(H)$ . Il existe  $x \in H$  tel que  $x' = f(x)$ . On a alors :

$$x'^{-1} = (f(x))^{-1} = f(x^{-1}) \in f(H),$$

car  $f$  est morphisme de groupes et  $x^{-1} \in H$ .

On conclut :  $f(H)$  est un sous-groupe de  $G'$ .

b) Soit  $H'$  un sous-groupe de  $G'$ .

• On a  $f(e) = e' \in H'$ , car  $f$  est un morphisme de groupes et  $e' \in H'$ , donc  $e \in f^{-1}(H')$ .

- Soit  $(x,y) \in (f^{-1}(H'))^2$ . On a alors  $f(x) \in H'$  et  $f(y) \in H'$ , d'où :

$$f(xy) = f(x)f(y) \in H',$$

car  $f$  est un morphisme de groupes et  $H'$  est un sous-groupe de  $G'$ . D'où :  $xy \in f^{-1}(H')$ .

- Soit  $x \in f^{-1}(H')$ . On a alors  $f(x) \in H'$ , d'où :

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \in H',$$

car  $f$  est un morphisme de groupes et  $H'$  est un sous-groupe de  $G'$ . D'où :  $x^{-1} \in f^{-1}(H')$ .

On conclut :  $f^{-1}(H')$  est un sous-groupe de  $G$ .

- #### 14.10 a) Remarquer, pour alléger les calculs, que, pour tout $(x,y) \in E^2$ : $f(x * y) = f(x)f(y)$ , et que, $f$ étant bijective, on a, pour tout $(a,b) \in E^2$ , $f(a) = f(b) \implies a = b$ , ce qui permettra, dans certaines conditions, de simplifier par $f$ .

1) *Neutre* :

En notant  $e$  le neutre de  $(G,\cdot)$  et  $\varepsilon = f^{-1}(e)$ , on a  $e = f(\varepsilon)$  et, pour tout  $x \in E$  :

$$\begin{cases} f(x * \varepsilon) = f(x)f(\varepsilon) = f(x)e = f(x) \\ f(\varepsilon * x) = f(\varepsilon)f(x) = ef(x) = f(x), \end{cases}$$

d'où, puisque  $f$  est injective :  $x * \varepsilon = x$  et  $\varepsilon * x = x$ ,

ce qui montre que  $\varepsilon$  est neutre pour  $*$  dans  $E$ .

2) *Associativité* :

On a, pour tout  $(x,y,z) \in E^3$  :

$$\begin{aligned} f((x * y) * z) &= f(x * y)f(z) = (f(x)f(y))f(z) \\ &= f(x)(f(y)f(z)) = f(x)f(y * z) \\ &= f(x * (y * z)), \end{aligned}$$

d'où, puisque  $f$  est injective,  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , ce qui montre que  $*$  est associative dans  $E$ .

### 3) Symétriques :

Soit  $x \in E$ . En notant  $t = f(x) \in G$ ,  $t^{-1}$  le symétrique de  $t$  dans le groupe  $(G, \cdot)$  et  $x' = f^{-1}(t^{-1})$ , on a :

$$\begin{cases} f(x * x') = f(x)f(x) = tt^{-1} = e = f(\varepsilon) \\ f(x' * x) = f(x)f(x) = t^{-1}t = e = f(\varepsilon), \end{cases}$$

d'où, puisque  $f$  est injective,  $x * x' = \varepsilon$  et  $x' * x = \varepsilon$ , ce qui montre que  $x$  admet un symétrique pour  $*$  dans  $E$ .

Finalement,  $(E, *)$  est un groupe.

### 4) Isomorphisme :

L'application  $f : E \rightarrow G$  est un morphisme de groupes et  $f$  est bijective, donc  $f$  est un isomorphisme de groupes de  $(E, *)$  dans  $(G, \cdot)$ .

b) D'après le cours,  $(\mathbb{R}, +)$  est un groupe.

L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^3$  est bijective et son application réciproque est  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ . On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = f^{-1}(f(x) + f(y)).$$

D'après a),  $(\mathbb{R}, *)$  est donc un groupe et  $f$  est un isomorphisme de groupes, de  $(\mathbb{R}, *)$  dans  $(\mathbb{R}, +)$ .

On conclut que  $(\mathbb{R}, *)$  est un groupe isomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$ .

## 14.11 a) 1) Loi interne :

Soit  $(f, g) \in G^2$ . Alors,  $g \circ f : [0; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[$  existe,  $g \circ f$  est de classe  $C^1$  par composition,

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f' > 0 \text{ car } f' > 0 \text{ et } g' > 0,$$

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 0,$$

et  $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , par composition de limites, puisque  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Il en résulte  $g \circ f \in G$  et donc  $\circ$  est interne dans  $G$ .

### 2) Associativité :

La loi  $\circ$  est associative dans l'ensemble des applications de  $[0; +\infty[$  dans  $[0; +\infty[$ , donc  $\circ$  est associative dans  $G$ .

### 3) Neutre :

En notant  $\varepsilon = \text{Id}_{[0; +\infty[}$ ,  $\varepsilon$  est une application de  $[0; +\infty[$  dans  $[0; +\infty[$ , de classe  $C^1$ ,  $\varepsilon' = 1 > 0$ ,  $\varepsilon(0) = 0$ ,  $\varepsilon(x) = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc  $\varepsilon \in G$ .

On a :

$$\forall f \in G, f \circ \varepsilon = \varepsilon \circ f = f,$$

donc  $\varepsilon$  est neutre pour  $\circ$  dans  $G$ .

### 4) Symétriques :

Soit  $f \in G$ . Comme  $f' > 0$ ,  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Puisque  $f$  est continue, strictement croissante, que  $f(0) = 0$  et que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , d'après le théorème de la bijection monotone,  $f$  est bijective,  $f^{-1}$  est continue,  $f^{-1}(0) = 0$  et  $f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . De plus, puisque  $f$  est de classe  $C^1$  et que  $f'$  ne s'annule pas (car  $f' > 0$ ),  $f^{-1}$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; +\infty[$  et  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} > 0$ . On déduit :  $f^{-1} \in G$ .

Ainsi :  $f^{-1} \in G$  et  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \varepsilon$ .

On conclut que tout élément de  $G$  admet un symétrique pour la loi  $*$  dans  $G$ .

D'après 1), 2), 3), 4),  $G$  est un groupe pour la loi  $\circ$ .

### 5) Commutativité :

Il est clair que les applications

$$f : [0; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[, x \mapsto 2x$$

$$\text{et } \varphi : [0; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[, x \mapsto e^x - 1$$

sont éléments de  $G$ .

On a, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$\begin{cases} (\varphi \circ f)(x) = \varphi(2x) = e^{2x} - 1 \\ (f \circ \varphi)(x) = f(e^x - 1) = 2(e^x - 1) = 2e^x - 2. \end{cases}$$

En particulier :  $(\varphi \circ f)(1) = e^2 - 1$  et  $(f \circ \varphi)(1) = 2e - 2$ , donc  $(\varphi \circ f)(1) \neq (f \circ \varphi)(1)$ , d'où  $\varphi \circ f \neq f \circ \varphi$ .

Ceci montre que  $G$  n'est pas commutatif.

b) 1) Il est clair que  $H \subset G$ , par définition de  $H$ .

2) Le neutre  $\varepsilon$  de  $G$  est dans  $H$  car  $\varepsilon(x) = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} x$ .

3) Soient  $f, g \in H$ . Remarquons que, puisque  $g$  est strictement croissante (car  $g' > 0$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ ) et que  $g(0) = 0$ , on a  $g(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ . On a alors, pour  $x > 0$  :

$$\frac{(g \circ f)(x)}{x} = \frac{g(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \cdot 1 = 1,$$

donc  $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} x$ , d'où  $g \circ f \in H$ .

4) Soit  $f \in H$ . Comme  $f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $y \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} f(y)$ , on a, par composition de limites :

$$f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(f^{-1}(x)) = x, \text{ d'où } f^{-1} \in H.$$

On conclut :  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .

5) L'application  $f : [0; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[, x \mapsto 2x$  est élément de  $G$  (cf. a) 5)), mais n'est pas élément de  $H$ , car  $f(x) \not\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} x$ . Ceci montre :  $H \neq G$ .

**14.12**

a) Soit  $x \in A$ . En appliquant l'hypothèse à  $x$  et à  $1 + x$ , on a :  $x^2 = x$  et  $(1 + x)^2 = 1 + x$ . Alors :

$$\begin{aligned}(1 + x)^2 &= 1 + x \iff 1 + 2x + x^2 = 1 + x \\ &\iff x + x^2 = 0 \iff x + x = 0 \\ &\iff 2x = 0.\end{aligned}$$

On conclut :  $\forall x \in A, 2x = 0$ .

b) Soit  $(x, y) \in A^2$ .

On applique l'hypothèse à  $x$ , à  $y$ , à  $x + y$ , d'où :

$$\begin{aligned}x + y &= (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 \\ &= x + y + (xy + yx),\end{aligned}$$

et donc :  $xy + yx = 0$ .

Mais, d'après a) :  $xy + yx = 2xy = 0$ .

On déduit, par soustraction :  $xy = yx$ , et on conclut que l'anneau  $A$  est commutatif.

**14.13**

Puisque  $ab$  est inversible à droite, il existe  $x \in A$  tel que :  $(ab)x = 1$ .

On a :

$$\begin{aligned}ba(bxa - 1) &= ba(bxa) - ba = b(abx)a - ba \\ &= b1a - ba = 0.\end{aligned}$$

Comme  $ba$  n'est pas diviseur de zéro à gauche, il en résulte :  $bxa - 1 = 0$ , donc  $bxa = 1$ .

Ainsi,  $a(bx) = 1$  et  $(bx)a = 1$ , donc  $a$  est inversible dans  $A$  et  $a^{-1} = bx$ .

**14.14**

a) On a :  $a - b^{-1} = (ab - 1)b^{-1} = cb^{-1}$ .

Comme  $c$  et  $b^{-1}$  sont inversibles dans  $A$ , par produit,  $cb^{-1}$  est inversible dans  $A$ , donc  $a - b^{-1}$  est inversible dans  $A$  et :

$$(a - b^{-1})^{-1} = (cb^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}c^{-1} = bc^{-1}.$$

b) On a :

$$\begin{aligned}d &= a^{-1} - (a - b^{-1})^{-1} = a^{-1} - bc^{-1} = (a^{-1}c - b)c^{-1} \\ &= a^{-1}(c - ab)c^{-1} = a^{-1}((ab - 1) - ab)c^{-1} \\ &= a^{-1}(-1)c^{-1} = -a^{-1}c^{-1}.\end{aligned}$$

Comme  $a^{-1}$  et  $c^{-1}$  sont inversibles dans  $A$ , par produit,  $a^{-1}c^{-1}$  est inversible dans  $A$ , donc  $d$  est inversible dans  $A$  et :

$$\begin{aligned}d^{-1} &= (-a^{-1}c^{-1})^{-1} = -(a^{-1}c^{-1})^{-1} \\ &= -(c^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1} = -ca.\end{aligned}$$

**14.15**

a) Puisque  $A_p \subset \mathbb{Q}$  et que  $\mathbb{Q}$  est un corps (donc un anneau), on va montrer que  $A_p$  est un sous-anneau de l'anneau  $\mathbb{Q}$ .

1) On a  $1 = \frac{1}{1}$  et  $p \nmid 1$  (le 1 du dénominateur), donc  $1 \in A_p$ .

2) Soient  $x, y \in A_p$ . Il existe  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ,  $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tels que :

$$x = \frac{a}{b} \text{ et } p \nmid b, \quad y = \frac{c}{d} \text{ et } p \nmid d.$$

On a alors :

$$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

et  $(ad - bc, bd) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  et  $p \nmid (bd)$ , car  $p$  est premier.

Il en résulte :  $x - y \in A_p$ .

3) Avec les mêmes notations qu'en 2), on a :

$$xy = \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad (ac, bd) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad p \nmid (bd),$$

donc :  $xy \in A_p$ .

On conclut que  $A_p$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ , pour les lois usuelles.

b) On a  $p = \frac{p}{1}$  et  $p \nmid 1$ , donc  $p \in A_p$ .

De plus, il est clair que  $p \neq 0$ . Mais  $\frac{1}{p} \notin A_p$ , car  $p \mid p$ .

Ainsi,  $p$  n'a pas d'inverse dans  $A_p$ .

On conclut que  $A_p$  n'est pas un sous-corps de  $\mathbb{Q}$ .

**14.16**

a) • En appliquant l'hypothèse à  $a$  (à la place de  $y$ ), il existe  $b \in E$  tel que :  $a = aba$ .

Montrons que  $ab$  est neutre à gauche et que  $ba$  est neutre à droite.

• Soit  $y \in E$ . Par hypothèse, il existe  $x \in E$  tel que  $y = axa$ . On a :

$$\begin{cases} (ab)y = (ab)(axa) = (aba)(xa) = a(xa) = y \\ y(ba) = (axa)(ba) = (ax)(aba) = (ax)a = y. \end{cases}$$

Ceci montre que  $ab$  est neutre à gauche et que  $ba$  est neutre à droite.

• On a alors :  $(ab)(ba) = ba$  car  $ab$  est neutre à gauche, et  $(ab)(ba) = ab$  car  $ba$  est neutre à droite, d'où  $ab = ba$ .

En notant  $e = ab = ba$ , on conclut que  $e$  est neutre pour la loi de  $E$ .

b) On a :

$$\begin{cases} a(bab) = (ab)(ab) = ee = e \\ (bab)a = (ba)(ba) = ee = e, \end{cases}$$

donc  $a$  est symétrisable et  $a^{-1} = bab$ .

**14.17** Soit  $x \in E$ . Par hypothèse, il existe  $x' \in E$  tel que  $xx' = e$ , puis il existe  $x'' \in E$  tel que  $x'x'' = e$ . On a :

$$\begin{aligned} ex &= e(xe) = (ex)e = (ex)(x'x'') = ((ex)x')x'' \\ &= (exx')x'' = (ee)x'' = ex'', \end{aligned}$$

d'où :

$$x'x = (x'e)x = x'(ex) = x'(ex'') = (x'e)x'' = x'x'' = e,$$

et enfin :  $ex = (xx')x = x(x'x) = xe = x$ .

Ainsi,  $e$  est neutre et tout élément de  $E$  admet un symétrique.

Finalement,  $(E, \cdot)$  est un groupe.

**14.18** Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un isomorphisme de groupes  $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}^2, +)$ . Notons  $(a, b) = f(1)$ .

- Puisque  $(1, 0) \in \mathbb{Z}^2$  et que  $f$  est bijectif, il existe  $\lambda \in \mathbb{Z}$  tel que :  $f(\lambda) = (1, 0)$ . On a alors, puisque  $f$  est un morphisme de groupes :

$$(1, 0) = f(\lambda) = \lambda f(1) = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

D'où :  $\lambda a = 1$  et  $\lambda b = 0$ , et donc  $\lambda \neq 0$  et  $b = 0$ .

- Puisque  $(0, 1) \in \mathbb{Z}^2$  et que  $f$  est bijective, il existe  $\mu \in \mathbb{Z}$  tel que :  $f(\mu) = (0, 1)$ . On a alors, puisque  $f$  est un morphisme de groupes :

$$(0, 1) = f(\mu) = \mu f(1) = \mu(a, b) = (\mu a, \mu b).$$

D'où :  $\mu a = 0$  et  $\mu b = 1$ , et donc  $\mu \neq 0$  et  $a = 0$ .

On a alors :  $f(1) = (a, b) = (0, 0) = f(0)$ , ce qui contredit l'injectivité de  $f$ .

Ce raisonnement par l'absurde montre qu'il n'existe pas d'isomorphisme du groupe  $(\mathbb{Z}, +)$  dans le groupe  $(\mathbb{Z}^2, +)$ , c'est-à-dire que les groupes  $(\mathbb{Z}, +)$  et  $(\mathbb{Z}^2, +)$  ne sont pas isomorphes.

**14.19** a) Soit  $a \in A$  nilpotent et  $b \in A$  tel que  $ab = ba$ .

Montrons, par récurrence sur  $k$  :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, ab^k = b^k a$ .

- Pour  $k = 1$ , on a  $ab = ba$  par hypothèse.

- Si  $ab^k = b^k a$  pour un  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors :

$$\begin{aligned} ab^{k+1} &= a(b^k b) = (ab^k)b = (b^k a)b = b^k(ab) = b^k(ba) \\ &= (b^k b)a = b^{k+1}a. \end{aligned}$$

Ceci montre, par récurrence sur  $k$  :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, ab^k = b^k a$ .

- Montrons, par récurrence sur  $k$  :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, (ab)^k = a^k b^k$ .

- Pour  $k = 1$ , on a trivialement  $ab = ab$ .

\* Si  $(ab)^k = a^k b^k$  pour un  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors :

$$\begin{aligned} (ab)^{k+1} &= (ab)^k(ab) = (a^k b^k)(ab) = a^k(b^k a)b = a^k(ab^k)b \\ &= (a^k a)(b^k b) = a^{k+1}b^{k+1}. \end{aligned}$$

Ceci montre, par récurrence sur  $k$  :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, (ab)^k = a^k b^k$ .

- Puisque  $a$  est nilpotent, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = 0$ . Puisque  $ab = ba$ , on a :  $(ab)^n = a^n b^n = 0 b^n = 0$ , donc  $ab$  est nilpotent.

- Puisque  $a$  est nilpotent, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = 0$ . On a alors :

$$\begin{cases} (1 - a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) = 1 - a^n = 1 - 0 = 1 \\ (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})(1 - a) = 1 - a^n = 1 - 0 = 1, \end{cases}$$

donc  $1 - a$  est inversible et

$$(1 - a)^{-1} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

c) Soient  $a, b \in A$  nilpotents et tels que  $ab = ba$ .

Puisque  $a$  est nilpotent, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = 0$ .

Puisque  $b$  est nilpotent, il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $b^p = 0$ .

Calculons  $(a + b)^{n+p-1}$  en utilisant la formule du binôme de Newton, ce qui est licite puisque  $ab = ba$  :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+p-1} &= \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{n+p-1}{k} a^k b^{n+p-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+p-1}{k} a^k \underbrace{b^{n+p-1-k}}_{=0} \\ &\quad + \sum_{k=n}^{n+p-1} \binom{n+p-1}{k} \underbrace{a^k}_{=0} b^{n+p-1-k} = 0, \end{aligned}$$

car  $n + p - 1 - k \geqslant p$   
car  $k \geqslant n$

donc  $a + b$  est nilpotent.

**14.20** Soient  $A$  un anneau intègre fini,  $a \in A - \{0\}$ .

Puisque  $A$  est intègre, les applications  $\gamma_a : A \xrightarrow{x \mapsto ax}$

$\delta_a : A \xrightarrow{x \mapsto ya}$  sont injectives, car :

$$\forall (x, y) \in A^2, (\gamma_a(x) = \gamma_a(y) \iff ax = ay)$$

$$\iff a(x - y) = 0$$

$$\implies x - y = 0 \iff x = y,$$

et de même pour  $\delta_a$ .

Comme  $A$  est fini, il en résulte que  $\gamma_a$  et  $\delta_a$  sont bijectives. En particulier, il existe  $(b,c) \in A^2$  tel que  $\gamma_a(b) = 1$  et  $\delta_a(c) = 1$ , c'est-à-dire tel que  $ab = 1$  et  $ca = 1$ .

On a :  $c = c(ab) = (ca)b = b$ .

Ainsi :  $\forall a \in A - \{0\}, \exists b \in A, ab = ba = 1$ .

Tout élément de  $A - \{0\}$  admet un inverse, et finalement  $A$  est un corps.

**14.21** 1) Soit  $x \in E$ . Puisque  $x$  est régulier à gauche pour  $*$ , l'application  $\gamma_x : \begin{array}{c} E \\ y \longmapsto x * y \end{array}$  est injective. Comme de plus  $E$  est fini,  $\gamma_x$  est surjective. Il existe donc  $e_x \in E$  tel que  $\gamma_x(e_x) = x$ , c'est-à-dire  $x * e_x = x$ .

De même en utilisant  $\delta_x : \begin{array}{c} E \\ z \longmapsto z * x \end{array}$ , qui est bijective, il existe  $\varepsilon_x \in E$  tel que  $\varepsilon_x * x = x$ .

On a  $x * x = x * (\varepsilon_x * x) = (x * \varepsilon_x) * x$ ,

d'où, par régularité de  $x$  à droite :  $x = x * \varepsilon_x$ .

Alors :  $x * e_x = x * \varepsilon_x (= x)$ ,

d'où, par régularité de  $x$  à gauche :  $e_x = \varepsilon_x$ .

Comme :  $x * (e_x * e_x) = (x * e_x) * e_x = x * e_x$ ,

on déduit, par régularité de  $x$  à gauche :  $e_x * e_x = e_x$ .

Soit alors  $(x,y) \in E^2$ . On a :

$$(e_x * e_x) * e_y = e_x * e_y = e_x * (e_y * e_y) = (e_x * e_y) * e_y,$$

d'où, par régularité de  $e_y$  à droite :  $e_x * e_x = e_x * e_y$ ,

puis, par régularité de  $e_x$  à gauche :  $e_x = e_y$ .

Ceci prouve que  $e_x$  ne dépend pas de  $x$ .

On a ainsi montré l'existence d'un élément  $e$  de  $E$  neutre à droite pour  $*$  :  $\forall x \in E, x * e = x$ .

De plus :  $\forall x \in E, e * x = e_x * x = \varepsilon_x * x = x$ , et donc  $e$  est neutre pour  $*$ .

2) Puisque  $\gamma_x : \begin{array}{c} E \\ y \longmapsto x * y \end{array}$  et  $\delta_x : \begin{array}{c} E \\ z \longmapsto z * x \end{array}$  sont bijectives, il existe  $x', x'' \in E$  tels que :

$$x * x' = e \quad \text{et} \quad x'' * x = e.$$

Alors :

$$x'' = x'' * e = x'' * (x * x') = (x'' * x) * x' = e * x' = x'.$$

Ceci montre que  $x$  admet un symétrique (qui est  $x'$ ) pour  $*$ .

Finalement,  $(E, *)$  est un groupe.

### 14.22 a) • Réflexivité :

$$\forall x \in G, xx^{-1} = e \in H.$$

• Symétrie : Soit  $(x,y) \in G^2$ . On a :

$$x \mathcal{R} y \iff xy^{-1} \in H \implies yx^{-1} = (xy^{-1})^{-1} \in H$$

$$\iff y \mathcal{R} x.$$

• Transfinitivité : Soit  $(x,y,z) \in G^3$ . On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{array} \right| \iff \left\{ \begin{array}{l} xy^{-1} \in H \\ yz^{-1} \in H \end{array} \right|$$

$$\implies xz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in H \iff x \mathcal{R} z.$$

On conclut :  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $G$ .

Notons  $\hat{x}$  la classe de  $x$  modulo  $\mathcal{R}$ , pour  $x \in G$ .

b) Soit  $(x,y) \in G^2$ . Pour tout  $t$  de  $\hat{x}$ , on a  $tx^{-1}y \in \hat{y}$ , car  $(tx^{-1}y)y^{-1} = tx^{-1} \in H$ .

On peut donc considérer l'application  $\alpha : \hat{x} \longmapsto \hat{y}$ , et de même,  $t \longmapsto tx^{-1}y$

$$\beta : \hat{y} \longmapsto \hat{x} .$$

$$s \longmapsto sy^{-1}x$$

$$\text{On a : } \forall t \in \hat{x}, (\beta \circ \alpha)(t) = (tx^{-1}y)y^{-1}x = t,$$

donc  $\beta \circ \alpha = \text{Id}_{\hat{x}}$ , et de même,  $\alpha \circ \beta = \text{Id}_{\hat{y}}$ .

Ceci montre que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Comme  $G$  est fini,  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  sont alors finis et de même cardinal.

c) Puisque les classes modulo  $\mathcal{R}$  sont deux à deux disjointes et ont le même cardinal, on a :

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(\hat{e}) \times \text{Card}(G/\mathcal{R}).$$

De plus, comme  $\hat{e} = H$ , on conclut :

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(H) \times \text{Card}(G/\mathcal{R}).$$

En particulier :  $\text{Card}(H) | \text{Card}(G)$ .



# Nombres entiers, nombres rationnels

## Plan

Les méthodes à retenir	219
Énoncés des exercices	221
Du mal à démarrer ?	223
Corrigés	225

## Thèmes abordés dans les exercices

- Résolutions d'équations et d'inéquations dans  $\mathbb{N}, \mathbb{N}^2 \dots$
- Calculs de sommes simples ou multiples
- Obtention de formules portant sur des coefficients binomiaux
- Décomposition d'une permutation, manipulation des permutations
- Dénombrements.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de  $\mathbb{N}$ , principe de récurrence
- Les formules de sommation classique : sommation arithmétique, sommation géométrique, formule du binôme de Newton
- Définition et propriétés des coefficients binomiaux
- Définition et propriétés des permutations et du groupe symétrique  $S_n$ .

## Les méthodes à retenir

**Pour résoudre une équation simple  
dont les inconnues sont des entiers  
naturels**

Essayer d'utiliser des inégalités, des encadrements, des arguments de divisibilité et le fait qu'un entier naturel est  $\geq 0$ , ce qui peut permettre de limiter les valeurs des inconnues.

→ Exercices 15.1, 15.7.

**Pour établir une propriété  
pour tout entier naturel**

Essayer de raisonner par récurrence.

→ Exercices 15.2, 15.4.

**Pour améliorer une inégalité  
portant sur des entiers**

Se rappeler que, pour tout  $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$  :

$$a < b \iff a + 1 \leq b.$$

→ Exercices 15.1, 15.7.

**Pour calculer certaines sommes indexées par un entier**

Essayer de se ramener aux sommes classiques :

- la sommation géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{C} - \{1\}, \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

– les sommes d'entiers, de carrés d'entiers, de cubes d'entiers

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

– la formule du binôme de Newton

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

→ Exercices 15.5, 15.6, 15.8, 15.9, 15.11, 15.12.

**Pour calculer des sommes doubles ou des sommes triples**

Essayer de :

- emboîter les sommes simples
- utiliser une permutation de symboles  $\sum$

→ Exercices 15.5, 15.6, 15.11, 15.16.

**Pour dénombrer un ensemble fini**

Essayer de :

- appliquer les théorèmes généraux de dénombrement, par exemple :  $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \cdot \text{Card}(F)$
- mettre l'ensemble en bijection avec un ensemble fini de cardinal connu

→ Exercices 15.3, 15.14, 15.15.

**Pour calculer une sommation faisant intervenir des coefficients binomiaux**

Essayer de :

- remplacer les coefficients binomiaux par leur expression à l'aide de factorielles

→ Exercices 15.10, 15.11 a), 15.12, 15.16 a)

- utiliser la formule du binôme de Newton, directement, ou après dérivation, ou après intégration.

→ Exercices 15.8, 15.9, 15.11, 15.12, 15.16.

**Pour calculer la signature  $\varepsilon(\sigma)$  d'une permutation de  $\{1 \dots, n\}$**

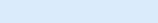
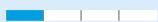
Essayer de :

- calculer le nombre  $I(\sigma)$  d'inversions de  $\sigma$ , et on a alors  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$

→ Exercice 15.13.

- décomposer  $\sigma$  en un produit de  $N$  transpositions, et on a alors  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$ .

# Énoncés des exercices



## 15.1 Exemple de résolution d'équation dans $\mathbb{N}^3$

Résoudre dans  $\mathbb{N}^3$  : (1)  $3x + 2y^2 + z^3 = 18$ .

## 15.2 Calcul d'une somme de coefficients binomiaux

Montrer, pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $p \leq n$  :  $\sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ .

## 15.3 Exemple de dénombrement géométrique

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On donne, dans le plan,  $n$  droites  $D_1, \dots, D_n$  parallèles entre elles et deux à deux distinctes. Soit  $A$  un point du plan, n'appartenant à aucune des droites  $D_1, \dots, D_n$ , et soient  $\Delta, \Delta'$  deux droites du plan, passant par  $A$ , distinctes, et non parallèles à  $D_1$ .

En combien de « régions » le plan est-il partagé par les  $n+2$  droites  $D_1, \dots, D_n, \Delta, \Delta'$  ?

## 15.4 Exemple d'obtention d'inégalités faisant intervenir des entiers, par raisonnement par récurrence

Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ .

## 15.5 Calcul d'une somme double

Calculer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{Min}(i, j)$ .

## 15.6 Calcul d'une somme triple

Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $S_n = \sum_{q=0}^n \sum_{p=0}^q \sum_{k=0}^p 2^k$ .

## 15.7 Exemple de résolution d'une équation dans $\mathbb{N}^2$

Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  : (E)  $y^3 = x^3 + 8x^2 + 7x + 10$ .

## 15.8 Calcul d'une somme de produits de coefficients binomiaux

Montrer :  $\forall (n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$ .

En particulier :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .

## 15.9 Calcul d'une somme d'expressions contenant des coefficients binomiaux

Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$  et  $\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$ .

## 15.10 Calcul d'une somme faisant intervenir des coefficients binomiaux

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}}$ .

a) Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $n!(n+2)S_n = (1 + (-1)^n)(n+1)!$ .

b) En déduire l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ , selon la parité de  $n$ .

### 15.11 Calcul d'une somme double de produits de coefficients binomiaux

a) Montrer, pour tout  $(n,k,i) \in \mathbb{N}^3$  :  $\binom{n}{i} \binom{i}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-i}$ .

b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la valeur de  $S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k}$ .

### 15.12 Calcul d'une somme faisant intervenir des coefficients binomiaux

Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}$ .

### 15.13 Exemple de détermination de la signature d'une permutation

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , quelle est la signature de la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix} ?$$

### 15.14 Dénombrements de relations

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments. Dénombrer dans  $E$  :

- a) les relations,
- b) les relations réflexives,
- c) les relations symétriques,
- d) les relations antisymétriques,
- e) les relations réflexives et symétriques,
- f) les relations réflexives et antisymétriques.

### 15.15 Dénombrement en base dix

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , combien y a-t-il de nombres entiers naturels dont l'écriture en base dix comporte exactement  $n$  chiffres dont un chiffre 1 et un seul ?

### 15.16 Formule d'inversion de Pascal

a) Montrer, pour tout  $(n,p,k) \in \mathbb{N}^3$  tel que  $p \leq k \leq n$  :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{p} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{k-p}.$$

b) Établir, pour tout  $(n,p) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $p \leq n$  :

$$\sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ 1 & \text{si } p = n. \end{cases}$$

c) Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes dans  $\mathbb{C}$ . On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$ .

Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$ .



### 15.17 Parité d'un nombre associé à une permutation

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  impair,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Montrer que  $\prod_{k=1}^n (\sigma(k) - k)$  est un entier pair.

### 15.18 Centre de $\mathfrak{S}_n$

a) Soient  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $n \geq 2$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  tel que  $i \neq j$ , et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ .

Montrer que  $\sigma$  et  $\tau_{i,j}$  commutent si et seulement si  $\{i, j\}$  est stable par  $\sigma$ .

b) Soient  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $n \geq 3$ , et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que :  $\forall \rho \in \mathfrak{S}_n, \sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$ .

Démontrer :  $\sigma = \text{Id}$ .

Autrement dit, le *centre* de  $\mathfrak{S}_n$  est  $\{\text{Id}\}$ .

## Du mal à démarrer ?

**15.1** Remarquer que, si  $(x, y, z)$  convient, alors  $z^3 \leq 18$ , ce qui limite les valeurs possibles de  $z$ . Raisonner ensuite de façon analogue pour  $y$ .

**15.2** Réurrence sur  $n$ , pour  $p$  fixé.

**15.3** Faire un schéma illustrant la situation.

**15.4** Raisonner par récurrence sur  $n$ .

Pour le passage de  $n$  à  $n + 1$ , en utilisant l'hypothèse de récurrence à l'ordre  $n$ , se ramener à une condition suffisante.

**15.5** Décomposer la somme double demandée en deux sommes emboîtées.

Pour  $i$  fixé, la valeur de  $\min(i, j)$  dépend de la position de  $j$  par rapport à  $i$  : utiliser la relation de Chasles pour les sommes.

Se rappeler les formules :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**15.6** Pour  $q, p$  fixés, calculer  $\sum_{k=0}^p 2^k$ . Puis, pour  $q$  fixé, calculer  $\sum_{p=0}^q \left( \sum_{k=0}^p 2^k \right)$  et terminer par le calcul de  $S_n$ .

Se rappeler, pour  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , les formules :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**15.7** Comparer  $x^3 + 8x^2 + 7x + 10$  avec  $x^3$  et avec  $(x + 3)^3$ .

Se rappeler que, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , on a :

$$a > b \iff a \geq b + 1.$$

Autrement dit, une inégalité stricte entre entiers équivaut à une inégalité large en gagnant une unité.

**15.8** Dans l'égalité de polynômes

$$(1 + X)^p (1 + X)^q = (1 + X)^{p+q}, \text{ considérer les termes en } X^n.$$

**15.9** • Développer  $(1 + X)^n$  par la formule du binôme de Newton, puis dériver.

• Développer  $(1 + x)^n$  par la formule du binôme de Newton, puis intégrer de 0 à 1.

**15.10** a) Remplacer le coefficient binomial par son expression à l'aide de factorielles.

Remarquer que :  $n + 2 = (n - k + 1) + (k + 1)$ .

**15.11** a) Remplacer les coefficients binomiaux par leur expression à l'aide de factorielles.

b) Utiliser a) puis la formule du binôme de Newton.

**15.12** Remplacer les coefficients binomiaux par leur expression à l'aide de factorielles, puis utiliser la formule du binôme de Newton.

**15.13** Compter le nombre d'inversions.

**15.14** Mettre en bijection les relations dans  $E$  et les tableaux à double entrée dans  $E$  et à valeurs dans  $\{0, 1\}$ .

**15.15** Remarquer d'abord que l'écriture décimale d'un nombre entier (non nul) ne commence pas par 0.

Compter les nombres entiers de  $n$  chiffres commençant par 1 et n'ayant qu'un seul chiffre 1, et compter les nombres entiers de  $n$  chiffres commençant par un chiffre autre que 0 et 1, et ne comportant qu'un seul chiffre 1.

**15.16** a) Remplacer les coefficients binomiaux par leur expression à l'aide de factorielles.

b) Utiliser a) et la formule du binôme de Newton.

c) Calculer la somme demandée en remplaçant  $b_k$  par son expression, puis permutez les deux symboles de sommation et utiliser b).

**15.17** Raisonner par l'absurde. Si un produit d'entiers est impair, alors chacun de ses facteurs est impair. D'autre part, étudier la somme  $\sum_{k=1}^n (\sigma(k) - k)$ .

**15.18** a) Séparer l'équivalence logique demandée en deux implications. La condition  $\{i, j\}$  stable par  $\sigma$  signifie, par définition,  $\sigma(\{i, j\}) \subset \{i, j\}$ , c'est-à-dire, puisque  $\sigma$  est bijective :  $\sigma(\{i, j\}) = \{i, j\}$ , ou encore :  $\begin{cases} \sigma(i) = j \\ \sigma(j) = i \end{cases}$  ou  $\begin{cases} \sigma(i) = j \\ \sigma(j) = i. \end{cases}$

b) Utiliser les deux transpositions  $\tau_{ij}$  et  $\tau_{ik}$ .

# Corrigés des exercices

## 15.1

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ .

Si  $(x, y, z)$  convient, alors  $z^3 \leq 18$ , donc  $z \leq 2$ .

1) Pour  $z = 0$  :  $(1) \iff 3x + 2y^2 = 18$ .

Si  $(x, y)$  convient, alors  $2y^2 \leq 18$ ,  $y^2 \leq 9$ ,  $y \leq 3$ , et, d'autre part,  $3 \mid 2y^2$ , donc  $3 \mid y$ . On a donc  $y \in \{0, 3\}$ .

- Pour  $y = 0$  :  $(1) \iff 3x = 18 \iff x = 6$ .

- Pour  $y = 3$  :  $(1) \iff 3x = 0 \iff x = 0$ .

2) Pour  $z = 1$  :  $(1) \iff 3x + 2y^2 = 17$ .

Si  $(x, y)$  convient, alors  $2y^2 \leq 17$ ,  $y^2 \leq 8,5 < 9$ , donc  $y < 3$  c'est-à-dire  $y \leq 2$ .

- Pour  $y = 0$  :  $(1) \iff 3x = 17$ ,  $x \notin \mathbb{N}$ .

- Pour  $y = 1$  :  $(1) \iff 3x = 15 \iff x = 5$ .

- Pour  $y = 2$  :  $(1) \iff 3x = 9 \iff x = 3$ .

3) Pour  $z = 2$  :  $(1) \iff 3x + 2y^2 = 10$ .

Si  $(x, y)$  convient, alors  $2y^2 \leq 10$ ,  $y^2 \leq 5 < 9$ , donc  $y < 3$  c'est-à-dire  $y \leq 2$ .

- Pour  $y = 0$  :  $(1) \iff 3x = 10$ ,  $x \notin \mathbb{N}$ .

- Pour  $y = 1$  :  $(1) \iff 3x = 8$ ,  $x \notin \mathbb{N}$ .

- Pour  $y = 2$  :  $(1) \iff 3x = 2$ ,  $x \notin \mathbb{N}$ .

On conclut que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (1) est :

$$\mathcal{S} = \{(6, 0, 0), (0, 3, 0), (5, 1, 1), (3, 2, 1)\}.$$

## 15.2

Récurrence sur  $n$ , pour  $p$  fixé.

La propriété est évidente pour  $n = p$ .

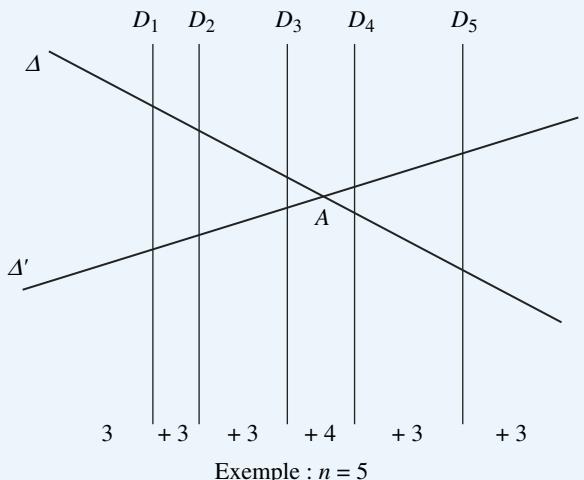
Si elle est vraie pour un  $n$  (tel que  $n \geq p$ ), alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} &= \left( \sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} \right) + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}. \end{aligned}$$

## 15.3

Les droites  $D_1, \dots, D_n$  partagent le plan en  $n+1$  « parties ». Le point  $A$  se trouve dans l'une de ces parties et une seule.

Chacune de ces parties, ne contenant pas  $A$ , est partagée en trois « régions » par  $\Delta$  et  $\Delta'$ . La partie contenant  $A$  est partagée en quatre régions.



Exemple :  $n = 5$

On conclut que les  $n+2$  droites  $D_1, \dots, D_n, \Delta, \Delta'$  partagent le plan en  $3n+4$  régions.

## 15.4

Procédons à une récurrence sur  $n$ .

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$ .

• Pour  $n = 1$  :  $u_1 = \frac{1}{2}$ , et on a bien :  $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

• Supposons, pour un  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé :  $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ .

On a :  $u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)} = u_n \frac{2n+1}{2n+2}$ .

\* On a, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}.$$

Raisonnons alors par condition suffisante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3} &\iff \frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3} \\ &\iff 2n+3 > 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \\ &\iff (2n+3)^2 > 4(n+1)(n+2) \\ &\iff 4n^2 + 12n + 9 > 4n^2 + 12n + 8 \text{ vrai} \end{aligned}$$

Ceci montre :  $u_{n+1} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$ .

\* On a, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}.$$

Puis :

$$\begin{aligned} u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}} &\iff \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \\ &\iff \sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} < 2n+2 \\ &\iff (2n+1)(2n+3) < (2n+2)^2 \\ &\iff 4n^2 + 8n + 3 < 4n^2 + 8n + 4 \text{ vrai.} \end{aligned}$$

Ceci montre :  $u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ .

On a donc établi l'encadrement voulu, à l'ordre  $n+1$ .

On conclut, par récurrence sur  $n$ , à l'encadrement demandé.

**15.5** En notant  $S_n$  la somme demandée, on a :

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \text{Min}(i, j) \right).$$

Comme  $\text{Min}(i, j)$  dépend de la position de  $j$  par rapport à  $i$ , on scinde la somme relative à l'indice  $j$  en deux sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \text{Min}(i, j) \right) &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i \right) \\ &= \left( n + \frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

**15.6** On a, par sommation géométrique, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^p 2^k = \frac{2^{p+1} - 1}{2 - 1} = 2^{p+1} - 1.$$

Puis, pour tout  $q \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^q \left( \sum_{k=0}^p 2^k \right) &= \sum_{p=0}^q (2^{p+1} - 1) = 2 \left( \sum_{p=0}^q 2^p \right) - (q+1) \\ &= 2(2^{q+1} - 1) - (q+1) = 2^{q+2} - q - 3. \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{q=0}^n (2^{q+2} - q - 3) = 2^2 \sum_{q=0}^n 2^q - \sum_{q=0}^n q - 3(n+1) \\ &= 4(2^{n+1} - 1) - \frac{n(n+1)}{2} - 3(n+1) \\ &= 2^{n+3} - \frac{1}{2}(n^2 + 7n + 14). \end{aligned}$$

**15.7** 1) Soit  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  une solution de (E).

• On a :  $y^3 = x^3 + 8x^2 + 7x + 10 > x^3$ , donc :  $y > x$ , d'où, puisque  $x$  et  $y$  sont des entiers :  $y \geqslant x+1$ .

• On a :

$$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

$$> x^3 + 8x^2 + 7x + 10 = y^3,$$

donc  $x+3 > y$ , puis :  $x+2 \geqslant y$ .

Ainsi :  $x+1 \leqslant y \leqslant x+2$ . Comme  $x$  et  $y$  sont des entiers, on a donc :  $y \in \{x+1, x+2\}$ .

2) • Pour  $y = x+1$ , on a :

$$\begin{aligned} (E) &\iff x^3 + 8x^2 + 7x + 10 = (x+1)^3 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &\iff \underbrace{5x^2 + 4x + 9}_{>0} = 0, \end{aligned}$$

qui n'a pas de solution dans  $\mathbb{N}$ .

• Pour  $y = x+2$ , on a :

$$\begin{aligned} (E) &\iff x^3 + 8x^2 + 7x + 10 = (x+2)^3 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \\ &\iff 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2} (\notin \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(E) \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = x+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$$

Finalement, l'équation proposée admet une solution et une seule :  $(2, 4)$ .

On peut contrôler que  $(2, 4)$  est bien solution de (E).

**15.8** Considérons l'égalité de polynômes :

$$(1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q}.$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on voit que le coefficient de  $X^n$  dans  $(1+X)^p(1+X)^q$  est

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{q}{n-k}$ , et celui de  $X^n$  dans  $(1+X)^{p+q}$  est  $\binom{p+q}{n}$ , d'où l'égalité voulue.

En particulier, si  $p = q = n$  :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

- 15.9** • D'après la formule du binôme de Newton, on a l'égalité de polynôme :  $(1+X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$ , d'où par dérivation :  $n(1+X)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} X^{k-1}$ , puis, en remplaçant  $X$  par 1 :  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ .

• En utilisant des intégrales et la formule du binôme de Newton :

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1},$$

et d'autre part :  $\int_0^1 (1+x)^n dx = \left[ \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ , d'où :  $\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ .

- 15.10** a) On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} n!(n+2)S_n &= n!(n+2) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n! k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (n+2)k!(n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k ((n-k+1)+(k+1))k!(n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k k!(n-k+1)! \\ &\quad + \sum_{k=0}^n (-1)^k (k+1)!(n-k)! \\ &\stackrel{[p=k+1]}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k k!(n-k+1)! \\ &\quad + \sum_{p=1}^{n+1} (-1)^{p-1} p!(n-p+1)! \\ &\stackrel{\text{télescopage}}{=} (n+1)! + (-1)^n (n+1)! \\ &= (1+(-1)^n)(n+1)!. \end{aligned}$$

b) D'après a), pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S_n = \frac{(1+(-1)^n)(n+1)!}{n!(n+2)} = (1+(-1)^n) \frac{n+1}{n+2}.$$

En séparant en deux cas selon la parité de  $n$ , on conclut :

$$S_n = \begin{cases} 2 \frac{n+1}{n+2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

- 15.11** a) On a :

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} \binom{i}{k} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-i)!k!(i-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} \\ &= \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-i}, \end{aligned}$$

car  $i - k = (n - k) - (n - i)$ .

b) En utilisant a), on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-i} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{n-i} \right) \\ &\stackrel{[j=n-i]}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \right) \\ &\stackrel{\text{Newton}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \stackrel{\text{Newton}}{=} (1+2)^n = 3^n. \end{aligned}$$

- 15.12** Remplaçons les coefficients binomiaux par leur expression à l'aide de factorielles, dans la somme  $S_n$  du premier membre :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)(n-k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{(n+2)!}{(k+1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k+1} \\ &\stackrel{[p=k+1]}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n+2}{p} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( \sum_{p=0}^{n+2} \binom{n+2}{p} - \binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{n+2} \right). \end{aligned}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on conclut :

$$S_n = \frac{2^{n+2} - 2}{(n+1)(n+2)}.$$

**15.13** On compte le nombre d'inversions de  $\sigma$ , à l'aide de la 2<sup>ème</sup> ligne de  $\sigma$  :

2	est inversé vis-à-vis de	3, 5, ..., 2n - 1
4	...	5, ..., 2n - 1
⋮	...	⋮
2n - 2	...	2n - 1.

Le nombre  $I(\sigma)$  d'inversions de  $\sigma$  est donc :

$$I(\sigma) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{(n-1)n}{2},$$

d'où la signature  $\varepsilon(\sigma)$  de  $\sigma$  :  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$ , ou encore :  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)}$ , car pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{(n-1)n}{2}$  et  $E\left(\frac{n}{2}\right)$  sont de même parité.

**15.14** Notons  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

L'ensemble des relations dans  $E$  est en bijection avec l'ensemble des tableaux à  $n$  lignes,  $n$  colonnes (indiquées par les éléments de  $E$ ), et contenant à la ligne  $i$ , colonne  $j$ , l'élément 0 si  $x_i \not\sim x_j$ , l'élément 1 si  $x_i \sim x_j$ .

a) Le nombre de relations dans  $E$ , qui est aussi le cardinal de  $\mathfrak{P}(E \times E)$ , est  $2^{n^2}$ .

b) Le nombre de relations réflexives dans  $E$  est le nombre de tableaux comportant un 1 à chaque place diagonale ; c'est donc  $2^{n^2-n}$ , puisqu'il y a  $n^2 - n$  places « libres ».

c) Le nombre de relations symétriques dans  $E$  est le nombre de demi-tableaux limités par la diagonale, et diagonale comprise ; c'est donc  $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ .

d) Soit  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  tel que  $i < j$ . La condition d'antisymétrie pour une relation  $\mathcal{R}$  se traduit, sur  $x_i$  et  $x_j$  par les trois possibilités suivantes :

$$\begin{cases} x_i \sim x_j & \text{et} & x_j \not\sim x_i \\ x_i \not\sim x_j & \text{et} & x_j \sim x_i \\ x_i \not\sim x_j & \text{et} & x_j \not\sim x_i. \end{cases}$$

On en déduit que le nombre de relations antisymétriques dans  $E$  est  $2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ , car il y a  $2^n$  façons de remplir la diagonale, et il y a  $\frac{n^2-n}{2}$  paires de cases symétriques par rapport à la diagonale.

e) Le nombre de relations réflexives et symétriques dans  $E$  est le nombre de demi-tableaux limités par la diagonale, et diagonale exclue ; c'est donc  $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ .

f) En utilisant la méthode de  $d$ ), le nombre de relations réflexives et antisymétriques dans  $E$  est  $3^{\frac{n^2-n}{2}}$ .

**15.15** Considérons un nombre entier naturel non nul, dont l'écriture décimale comporte exactement  $n$  chiffres (donc le premier chiffre, à gauche, est différent de 0) et comportant un chiffre 1 et un seul.

- Le chiffre 1 peut être en premier à gauche, les autres chiffres étant quelconques, différents de 1. Il y a  $9^{n-1}$  possibilités.

- Si le chiffre 1 n'est pas en premier à gauche, il y a  $n-1$  façons de placer ce chiffre 1. Le premier chiffre à gauche est quelconque, différent de 0 et de 1, ce qui donne 8 possibilités pour ce premier chiffre à gauche. Les chiffres autres que le premier à gauche et différents de 1 sont parmi 0, 2, ..., 9, ce qui donne  $9^{n-2}$  possibilités de les placer.

On conclut que le nombre demandé est :

$$\begin{aligned} 9^{n-1} + (n-1)8 \cdot 9^{n-2} &= 9^{n-2}(9 + 8(n-1)) \\ &= (8n+1)9^{n-2}. \end{aligned}$$

**15.16** a) Remplaçons les coefficients binomiaux par leur expression à l'aide de factorielles :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{p} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{p!(k-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!p!(k-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{(n-p)!}{(n-k)!(k-p)!} \\ &= \binom{n}{p} \binom{n-p}{k-p}, \end{aligned}$$

car  $n - k = (n - p) - (k - p)$ .

b) On a, en utilisant a) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{p} \binom{n-p}{k-p} \\ &= (-1)^n \binom{n}{p} \sum_{k=p}^n (-1)^{-k} \binom{n-p}{k-p} \\ &\stackrel{[j=k-p]}{=} (-1)^n \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^{-j-p} \binom{n-p}{j} \\ &= (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \binom{n-p}{j} \\ &\stackrel{\text{Newton}}{=} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} (1 + (-1))^{n-p} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 1 & \text{si } n = p. \end{cases} \end{aligned}$$

c) On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en utilisant une permutation de deux sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a_j \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a_j \\ &= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} \right) a_j \\ &\stackrel{b)}{=} a_n. \end{aligned}$$

**15.17** Remarquons d'abord que  $\prod_{k=1}^n (\sigma(k) - k)$  est un entier relatif.

Raisonnons par l'absurde : supposons que  $\prod_{k=1}^n (\sigma(k) - k)$  est impair. Alors, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sigma(k) - k$  est impair. D'autre part, comme  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, \dots, n\}$ , on a :  $\sum_{k=1}^n \sigma(k) = \sum_{k=1}^n k$ , puisque ces deux sommes comportent les mêmes termes. D'où :

$$\sum_{k=1}^n (\sigma(k) - k) = \sum_{k=1}^n \sigma(k) - \sum_{k=1}^n k = 0.$$

Mais  $n$  est impair et les  $\sigma(k) - k$  sont tous impairs, donc  $\sum_{k=1}^n (\sigma(k) - k)$  est impair, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre que  $\prod_{k=1}^n (\sigma(k) - k)$  est pair.

**15.18** a) I) Si  $\sigma$  et  $\tau_{i,j}$  commutent, alors :

$$\begin{cases} \sigma(i) = \sigma(\tau_{i,j}(j)) = \sigma \circ \tau_{i,j}(j) \\ \quad = \tau_{i,j} \circ \sigma(j) = \tau_{i,j}(\sigma(j)) \\ \sigma(j) = \sigma(\tau_{i,j}(i)) = \sigma \circ \tau_{i,j}(i) \\ \quad = \tau_{i,j} \circ \sigma(i) = \tau_{i,j}(\sigma(i)). \end{cases}$$

Comme  $\sigma(i) \neq \sigma(j)$  et que  $\tau_{i,j}$  laisse fixes tous les éléments de  $\{1, \dots, n\} - \{i, j\}$ , on a alors  $(\sigma(i) = i \text{ et } \sigma(j) = j)$  ou  $(\sigma(i) = j \text{ et } \sigma(j) = i)$ , donc  $\{i, j\}$  est stable par  $\sigma$ .

2) Réciproquement, supposons  $\{i, j\}$  stable par  $\sigma$ .

On a donc  $(\sigma(i) = i \text{ et } \sigma(j) = j)$  ou  $(\sigma(i) = j \text{ et } \sigma(j) = i)$

d'où facilement :  $\begin{cases} \tau_{i,j} \circ \sigma(i) = \sigma \circ \tau_{i,j}(i) \\ \tau_{i,j} \circ \sigma(j) = \sigma \circ \tau_{i,j}(j). \end{cases}$

D'autre part,  $\{1, \dots, n\} - \{i, j\}$  est stable par  $\sigma$  (car  $\sigma$  est bijectif), et on a, pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\} - \{i, j\}$  :

$$\left| \begin{cases} \tau_{i,j} \circ \sigma(k) = \tau_{i,j}(k) = \sigma(k) \\ \sigma \circ \tau_{i,j}(k) = \sigma(k). \end{cases} \right.,$$

donc  $\tau_{i,j} \circ \sigma(k) = \sigma \circ \tau_{i,j}(k)$

Finalement :  $\tau_{i,j} \circ \sigma = \sigma \circ \tau_{i,j}$ .

b) Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Puisque  $n \geq 3$ , il existe  $(j, k) \in \{1, \dots, n\}^2$  tel que  $i, j, k$  soient deux à deux distincts. Comme  $\sigma$  commute avec  $\tau_{i,j}$  et  $\tau_{i,k}$ , d'après a),  $\{i, j\}$  et  $\{i, k\}$  sont stables par  $\sigma$ , donc  $\sigma(i) = i$ .

Ceci montre :  $\sigma = \text{Id}$ .

La réciproque est évidente:  $\text{Id}$  commute avec toute permutation.



## Plan

Les méthodes à retenir	231
Énoncés des exercices	233
Du mal à démarrer ?	236
Corrigés	238

## Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer une divisibilité
- Montrer qu'un entier est composé, c'est-à-dire n'est pas premier
- Résolution d'équations diophantiennes, c'est-à-dire d'équations dont la ou les inconnues sont dans  $\mathbb{Z}$
- Résolution de congruences ou de systèmes de congruences, à inconnues dans  $\mathbb{Z}$
- Petit théorème de Fermat, théorème de Wilson, et leurs utilisations.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de la divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ , théorème de division euclidienne dans  $\mathbb{Z}$ , définition et propriétés des congruences
- Définitions et propriétés des pgcd et ppcm
- Définition et propriétés des nombres premiers entre eux, théorème de Bezout, théorème de Gauss
- Définition d'un nombre premier, existence et unicité de la décomposition primaire d'un entier  $\geq 2$ .

## Les méthodes à retenir

Pour montrer qu'un entier  $A$  (supérieur ou égal à 2) est composé, c'est-à-dire n'est pas premier

Montrer l'existence de  $(a,b) \in \mathbb{N}^2$  tel que :

$$A = ab, \quad a \geq 2, \quad b \geq 2.$$

À cet effet, on peut essayer de transformer l'écriture de  $A$ , par exemple en utilisant :

- une identité remarquable permettant d'amener une factorisation de  $A$

→ Exercice 16.1

– une mise sous forme canonique d'un trinôme ou d'un trinôme bicarré

→ Exercice 16.2.

**Pour montrer  
qu'un entier  $a$  divise un entier  $b$**

Essayer de :

- mettre  $a$  en facteur dans  $b$ , c'est-à-dire trouver un entier  $c$  tel que  $b = ac$
- utiliser les congruences modulo  $a$

→ Exercices 16.3, 16.4, 16.7

- utiliser une récurrence

→ Exercices 16.3, 16.8, 16.24

- montrer que, dans  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ , on a  $\widehat{b} = \widehat{0}$
- utiliser la décomposition primaire de  $a$

→ Exercice 16.30.

**Pour résoudre  
une équation diophantienne**

Essayer de :

- ramener l'équation proposée, par équivalence logique ou par implication, à une équation plus simple

→ Exercices 16.12, 16.14

- faire intervenir des limitations (par inégalité ou par divisibilité) sur les inconnues

→ Exercices 16.10, 16.11

- montrer qu'il n'y a aucune solution, en raisonnant par l'absurde et en utilisant des congruences bien choisies

→ Exercices 16.13, 16.16 b).

**Pour résoudre une équation  
faisant intervenir pgcd et/ou ppcm  
de deux nombres entiers  $x, y$**

Essayer d'utiliser les entiers  $X, Y$  tels que, en notant  $d = x \wedge y$ , on ait :

$$x = dX, \quad y = dY, \quad X \wedge Y = 1.$$

→ Exercices 16.20, 16.21.

**Pour montrer qu'un entier  $a$   
(donné numériquement)  
divise un entier  $N$**

Essayer de décomposer  $a$  en un produit de facteurs premiers entre eux deux à deux, montrer que chacun de ces facteurs divise  $N$ , et en déduire que  $a$  divise  $N$ .

→ Exercice 16.30.

**Pour obtenir  
des congruences modulo 2, 4, 8**

Essayer de séparer en cas selon la parité des nombres qui interviennent

→ Exercice 16.6.

**Pour déterminer le dernier chiffre  
de l'écriture décimale  
d'un entier naturel  $a$**

Réduire  $a$  modulo 10.

→ Exercice 16.9.

Pour résoudre un système de congruences simultanées à une inconnue

Résoudre la première congruence, reporter dans la deuxième, etc.

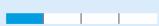
→ Exercices 16.17 à 16.19.

Pour obtenir des résultats portant sur les diviseurs d'un entier  $n \in \mathbb{N}^*$

Essayer d'utiliser la décomposition primaire de  $n$ .

→ Exercices 16.22, 16.28.

## Énoncés des exercices



### 16.1 Exemple de nombre composé

Montrer que le nombre entier  $A = 5^{45} + 4^{30}$  est composé, c'est-à-dire non premier.

### 16.2 Exemple de nombre composé

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le nombre entier  $n^4 - 20n^2 + 4$  est composé, c'est-à-dire n'est pas premier.

### 16.3 Exemple de divisibilité

Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, 14 \mid 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ .

### 16.4 Exemple de divisibilité, utilisation de congruences

Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, 11 \mid 3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2}$ .

### 16.5 Exemple de nombre premier satisfaisant une condition simple

Trouver tous les nombres premiers  $p$  tels que  $p^2 + 2$  soit aussi premier.

### 16.6 Reste de la division euclidienne du carré d'un entier par 8

a) Soit  $a \in \mathbb{Z}$ . Montrer que le reste de la division euclidienne de  $a^2$  par 8 est égal à 0, 1, ou 4.

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que, si 8 divise  $n - 7$  (autrement dit :  $n \equiv 7 \pmod{8}$ ), alors  $n$  ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.

### 16.7 Exemple d'utilisation de congruences

Montrer, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  :

$$13 \mid 7x + 3y \iff 13 \mid 5x + 4y.$$

### 16.8 Exemple de divisibilité, méthode de récurrence

Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, 16 \mid 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$ .

### 16.9 Réduction d'un nombre par congruence

Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de  $a = 7^{3^{8^4}}$  ?

### 16.10 Exemple de divisibilité

Déterminer l'ensemble  $E$  des  $n \in \mathbb{Z}$  tels que :  $n^2 + 7 \mid n^3 + 5$ .

**16.11 Condition pour qu'une racine carrée d'une certaine fraction soit un entier**

Trouver tous les  $n \in \mathbb{Z}$  tels que  $\sqrt{\frac{11n-5}{n+4}} \in \mathbb{N}$ .

**16.12 Exemple d'équation diophantienne du second degré, avec factorisation**

Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  :  $x^2 = 9y^2 - 39y + 40$ .

**16.13 Exemples d'équations diophantiennes n'ayant aucune solution, par passage aux congruences modulo un entier bien choisi**

a) Montrer que l'équation  $x^2 - 3y^2 = 17$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

b) Montrer que l'équation  $x^3 + y^3 = 3$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

**16.14 Exemple d'équation diophantienne**

Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation : (1)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ .

**16.15 Condition de divisibilité par calculs modulo 5**

Montrer, pour tout  $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$  :  $24a^2 + 1 = b^2 \implies 5 \mid ab$ .

**16.16 Cubes modulo 7**

a) Montrer, pour tout  $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$  :  $7 \mid x^3 + y^3 + z^3 \implies 7 \mid xyz$ .

b) En déduire que le système d'équations

$$(S) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 7 \\ xyz = 7(x^2 + y^2 + z^2) + 1 \end{cases}$$

n'a pas de solution dans  $\mathbb{Z}^3$ .

**16.17 Exemple de résolution d'un système de trois congruences simultanées à une inconnue**

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système de congruences :

$$(S) \quad \begin{cases} 5x \equiv 7 \pmod{11} & (1) \\ 7x \equiv 11 \pmod{5} & (2) \\ 11x \equiv 5 \pmod{7} & (3). \end{cases}$$

**16.18 Exemple de résolution d'un système de trois congruences simultanées à une inconnue**

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système de congruences :

$$(S) \quad \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{6} & (1) \\ x \equiv 3 \pmod{10} & (2) \\ x \equiv 7 \pmod{15} & (3). \end{cases}$$

**16.19 Exemple de recherche d'une solution d'un système non linéaire de deux congruences simultanées à une inconnue**

Déterminer le plus petit entier naturel  $x$  tel que :

$$x \equiv 6 \pmod{23} \quad \text{et} \quad x^2 \equiv 13 \pmod{23^2}.$$

**16.20 Résolution d'un système d'équations sur le pgcd et le ppcm de deux entiers**

a) Pour  $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  fixé, résoudre dans  $(\mathbb{N}^*)^2$  le système d'équations :

$$(S) \quad \begin{cases} x \wedge y = a \\ x \vee y = b. \end{cases}$$

b) Exemples : Résoudre (S) dans chacun des deux exemples suivants :

1)  $a = 10, b = 22$       2)  $a = 8, b = 80$ .

**16.21 Exemple d'équation faisant intervenir le pgcd et le ppcm de deux nombres entiers**

Résoudre dans  $(\mathbb{N}^*)^2$  : (1)  $11(x \wedge y) + (x \vee y) = 203$ .

**16.22 Utilisation de décompositions primaires**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose :  $(\exists a \in \mathbb{N}^*, n = a^2)$  et  $(\exists b \in \mathbb{N}^*, n = b^3)$ .

Montrer :  $\exists c \in \mathbb{N}^*, n = c^6$ .

**16.23 Nombres de Fermat**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $F_n = 2^{2^n} + 1$ . Montrer que les  $F_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont premiers entre eux deux à deux.

**16.24 Exemple de divisibilité avec double exposant**

Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, 13 \mid 2^{2^{8n+6}} + 10$ .

**16.25 Exemple d'équation fonctionnelle**

Démontrer qu'il n'existe pas d'application  $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, f \circ f(x) = x + 1.$$

**16.26 Étude de sommes de fonctions arithmétiques**

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $d(n)$  le nombre de diviseurs de  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $\sigma(n)$  la somme des diviseurs de  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$a) \sum_{k=1}^n d(k) = \sum_{i=1}^n E\left(\frac{n}{i}\right) \quad b) \sum_{k=1}^n \sigma(k) = \sum_{i=1}^n i E\left(\frac{n}{i}\right),$$

où  $E(.)$  désigne la partie entière.

**16.27 Étude de produit de facteurs dans une factorielle**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  non premier et tel que  $n \geqslant 6$ . Montrer :  $n \mid (n-2)!$ .

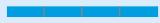
**16.28 Utilisation de décompositions primaires**

Soit  $(a,b,c,n) \in (\mathbb{N}^*)^4$ , tel que  $a \wedge b = 1$  et  $ab = c^n$ . Montrer qu'il existe  $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :  $a = \alpha^n$  et  $b = \beta^n$ .

**16.29 Petit théorème de Fermat**

Soi  $p$  un nombre premier ( $p \geqslant 2$ ).

$$a) \text{Montrer : } \forall k \in \{1, \dots, p-1\}, \quad p \mid \binom{p}{k}.$$



b) En déduire le **petit théorème de Fermat** :  $\forall n \in \mathbb{Z}, n^p \equiv n \ [p]$ .  
En particulier :  $\forall n \in \mathbb{Z}, (p \nmid n \implies n^{p-1} \equiv 1 \ [p])$ .

### 16.30

#### Exemple de divisibilité : utilisation du petit théorème de Fermat

Démontrer, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 56\ 786\ 730 \mid x^{61}y - xy^{61}$ .

On pourra utiliser le petit théorème de Fermat (cf. exercice 16.29) qui dit que, pour tout nombre premier  $p$  et tout  $a \in \mathbb{Z}$  non multiple de  $p$ , on a :  $a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$ .

### 16.31

#### Théorème de Wilson

Soit  $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Démontrer que  $p$  est premier si et seulement si :

$$(p-1)! \equiv -1 \ [p].$$

### 16.32

#### Exemple de résolution d'un système de divisibilités

Trouver tous les  $(a, b, c) \in (\mathbb{N} - \{0, 1\})^3$  tels que :

$$a \mid bc + 1 \quad \text{et} \quad b \mid ca + 1 \quad \text{et} \quad c \mid ab + 1.$$

## Du mal à démarrer ?

**16.1** Factoriser  $A$  en utilisant une identité remarquable.

**16.2** Factoriser le trinôme bicarré.

**16.3** 1<sup>re</sup> méthode : utilisation de congruences modulo 14

Réduire  $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$  modulo 14, par calculs.

2<sup>è</sup> méthode : récurrence sur  $n$

En notant  $u_n = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ , montrer, par récurrence sur  $n$ , que  $14 \mid u_n$ . Pour passer de  $14 \mid u_n$  à  $14 \mid u_{n+1}$ , exprimer  $u_{n+1}$  en faisant intervenir  $u_n$ .

3<sup>è</sup> méthode : reconnaître une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre.

**16.4** Calculer  $3^5, 4^5, 5^5$  modulo 11, puis reporter dans l'expression de l'énoncé.

**16.5** Examiner le cas  $p = 2$ .

Si  $p$  est impair, passer modulo 3.

**16.6** a) Séparer en cas :  $a$  pair,  $a$  impair.

b) Calculer tous les restes possibles de la division euclidienne de  $a^2 + b^2 + c^2$  par 8, en utilisant le résultat de a).

**16.7** Utiliser des congruences modulo 13.

**16.8** Récurrence sur  $n$ . En notant  $u_n = 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$ , exprimer  $u_{n+1}$  en faisant intervenir  $u_n$ .

**16.9** Réduire  $a$  modulo 10. À cet effet, remarquer  $7^4 \equiv 1 \ [10]$ , et réduire  $3^{84}$  modulo 4.

**16.10** De la divisibilité de l'énoncé, déduire que  $n^2 + 7$  divise une expression du premier degré en  $n$ , puis utiliser :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \ (a \mid b \implies |a| \leq |b|).$$

**16.11** Si  $n$  convient, déduire  $n+4 \mid 11n-5$ , puis  $n+4 \mid 49$ .

**16.12** Transformer l'équation proposée de façon à factoriser.

**16.13** a) Passer modulo 3.

b) Passer modulo 7.

**16.14** Transformer l'équation proposée pour se ramener à une somme de carrés.

**16.15** Remarquer que, si  $24a^2 + 1 = b^2$ , alors, modulo 5 :  $a^2 + b^2 \equiv 1$ .

Calculer tous les  $x^2$  modulo 5, pour  $x \in \mathbb{Z}$ , puis tous les  $a^2 + b^2$  modulo 5 pour  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .

**16.16** a) Calculer tous les  $t^3$  modulo 7, puis tous les  $x^3 + y^3 + z^3$ .

**16.17** Résoudre (1), puis reporter le résultat dans (2), et, enfin, reporter dans (3).

**16.18** Résoudre (1), puis reporter le résultat dans (2), et, enfin, reporter dans (3).

**16.19** Résoudre la première congruence dans  $\mathbb{Z}$  et reporter le résultat dans la deuxième congruence. On obtient ainsi l'ensemble des solutions du système de deux congruences. Déterminer enfin dans cet ensemble le plus petit entier positif ou nul.

**16.20** a) Si  $a \nmid b$ , montrer que (S) n'a pas de solution.

Si  $a \mid b$ , noter  $c \in \mathbb{N}^*$  tel que  $b = ac$ . Pour  $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , considérer  $d = x \wedge y$ , et  $(X,Y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :

$$x = dX, \quad y = dY, \quad X \wedge Y = 1.$$

Exprimer le résultat demandé, à l'aide de  $X, Y$ .

**16.21** Pour  $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , noter  $d = x \wedge y$ ,  $(X,Y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :  $x = dX$ ,  $y = dY$ ,  $X \wedge Y = 1$  et reporter dans l'équation.

**16.22** Considérer la décomposition primaire de  $n$ .

**16.23** Pour  $(m,n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m < n$ , en notant  $k = n - m$ , exprimer  $F_n$  en faisant intervenir  $F_m$ .

**16.24** Récurrence sur  $n$ . En notant  $u_n = 2^{2^{8n+6}} + 10$ , exprimer  $u_{n+1}$  en faisant intervenir  $u_n$ .

**16.25** Si  $f$  convient, considérer  $f \circ f \circ f$  et déduire qu'il existe  $a \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = x + a$ . Reporter dans l'équation de l'énoncé et obtenir une contradiction.

**16.26** Exprimer, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $d(k)$  et  $\sigma(k)$  comme sommes indexées par  $i$  tel que  $i \mid k$ , puis permuter deux symboles de sommation.

**16.27** Il existe  $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :

$$n = ab, \quad 1 < a < n, \quad 1 < b < n.$$

Séparer les cas  $a \neq b$ ,  $a = b$ .

**16.28** Utiliser les décompositions primaires de  $a, b, c$ .

**16.29** a) Par définition,  $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ , donc  $k!(p-k)! \binom{p}{k} = p!$ . Utiliser le théorème de Gauss.

b) 1) Traiter le cas  $p = 2$ .

2) Pour  $p \geq 3$ , montrer, par récurrence sur  $n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p},$$

puis traiter le cas  $n \in \mathbb{Z}$ .

**16.30** Former la décomposition primaire de 56 786 730 et remarquer que c'est un produit de nombres premiers deux à deux distincts, tels que, si  $p$  est l'un de ces nombres premiers, alors  $p - 1$  divise 60. Utiliser le petit théorème de Fermat.

**16.31** Séparer les deux sens de l'équivalence logique.

1) On suppose  $p$  premier.

Traiter le cas  $p = 2$ .

Pour  $p \geq 3$ , considérer l'équation  $x^2 = \widehat{1}$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\widehat{0}\}$ . Montrer que  $\widehat{2}, \widehat{3}, \dots, \widehat{p-2}$  peuvent se grouper deux par deux de produit  $\widehat{1}$ .

2) Réciproquement, on suppose  $p$  non premier. Utiliser un diviseur  $d$  de  $p$  tel que  $2 \leq d \leq p - 1$ .

**16.32** 1) Soit  $(a, b, c)$  convenant.

On peut se ramener au cas où :  $2 \leq a \leq b \leq c$ .

Montrer que  $a, b, c$  sont premiers entre eux deux à deux.

Considérer  $S = ab + bc + ca + 1$ , montrer  $abc \mid S$ .

Déduire (par exemple)  $abc \leq 20$ , puis  $a = 2, b = 3, c = 7$ .

2) Étudier la réciproque.

# Corrigés des exercices

**16.1** On a, en utilisant une identité remarquable sur la somme de deux cubes :

$$\begin{aligned} A &= 5^{45} + 4^{30} = (5^{15})^3 + (4^{10})^3 \\ &= \underbrace{(5^{15} + 4^{10})}_{\text{noté } u} \underbrace{((5^{15})^2 - 5^{15} \cdot 4^{10} + (4^{10})^2)}_{\text{noté } v}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $u \in \mathbb{N}$  et  $u \geq 2$ .

D'autre part,  $v \in \mathbb{N}$  et :

$$v = 5^{15}(5^{15} - 4^{10}) + (4^{10})^2 \geq (4^{10})^2 \geq 2.$$

On conclut que  $A$  est composé.

**16.2** Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . On a, par factorisation d'un trinôme bicarré :

$$\begin{aligned} n^4 - 20n^2 + 4 &= (n^2 - 2)^2 - 16n^2 \\ &= (n^2 - 2 - 4n)(n^2 - 2 + 4n) \\ &= ((n-2)^2 - 6)((n+2)^2 - 6). \end{aligned}$$

De plus :  $(n-2)^2 - 6 \neq \pm 1$  et  $(n+2)^2 - 6 \neq \pm 1$ , car ni 5 ni 7 ne sont des carrés d'entiers.

On conclut que  $n^4 - 20n^2 + 4$  est composé.

**16.3** 1<sup>re</sup> méthode : utilisation de congruences modulo 14

On a, modulo 14, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} 3^{4n+2} + 5^{2n+1} &= 9 \cdot (3^4)^n + 5 \cdot (25)^n = 9 \cdot 81^n + 5 \cdot 25^n \\ &\stackrel{[14]}{\equiv} 9 \cdot (-3)^n + 5 \cdot (-3)^n \\ &= 14 \cdot (-3)^n \equiv 0, \end{aligned}$$

donc :  $14 \mid 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ .

2<sup>e</sup> méthode : récurrence sur  $n$

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ .

- On a :  $u_0 = 3^2 + 5 = 14$ , donc  $14 \mid u_0$ .
- Supposons pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé :  $14 \mid u_n$ . Exprimons  $u_{n+1}$  en faisant intervenir  $u_n$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{4(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1} = 3^{4n+6} + 5^{2n+3} \\ &= 3^4 \cdot 3^{4n+2} + 5^{2n+3} = 3^4(u_n - 5^{2n+1}) + 5^{2n+3} \\ &= 3^4u_n + 5^{2n+1}(5^2 - 3^4) = 3^4u_n - 56 \cdot 5^{2n+1} \\ &= 3^4u_n - 4 \cdot 14 \cdot 5^{2n+1}. \end{aligned}$$

Comme  $14 \mid u_n$ , on déduit  $14 \mid u_{n+1}$ , ce qui prouve le résultat demandé, par récurrence sur  $n$ .

3<sup>e</sup> méthode : reconnaître une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = 3^{4n+1} + 5^{2n+1} = 9 \cdot (3^4)^n + 5 \cdot (5^2)^n.$$

On reconnaît le terme général d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique a pour solutions  $3^4$  et  $5^2$ , donc c'est, avec une inconnue notée  $r$ , l'équation  $r^2 - (3^4 + 5^2)r + 3^4 \cdot 5^2 = 0$ . On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (3^4 + 5^2)u_{n+1} - 3^4 \cdot 5^2 u_n.$$

Montrons, par récurrence à deux pas sur  $n$ , que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$14 \mid u_n.$$

- La propriété est vraie pour  $n = 0$ , car  $u_0 = 3^2 + 5 = 14$ .
- La propriété est vraie pour  $n = 1$ , car :

$$u_1 = 3^6 + 5^3 = 729 + 125 = 854 = 14 \cdot 61.$$

- Si  $14 \mid u_n$  et  $14 \mid u_{n+1}$ , alors, d'après l'expression de  $u_{n+2}$  en fonction de  $u_n$  et  $u_{n+1}$ , on a :  $14 \mid u_{n+2}$ .

Ceci montre le résultat demandé, par récurrence sur  $n$ , à deux pas.

**16.4** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons

$$u_n = 3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2} = (3^5)^n + 5 \cdot (5^5)^n + 4^2 \cdot (4^5)^n.$$

On a, modulo 11 :  $3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11}$ ,  $5^5 = 3125 \equiv 1 \pmod{11}$ ,  $4^5 = 1024 \equiv 1 \pmod{11}$ .

d'où :  $u_n \equiv 1^n + 5 \cdot 1^n + 4^2 \cdot 1^n = 22 \equiv 0 \pmod{11}$ .

On conclut :  $11 \mid u_n$ .

**16.5** 1) Si  $p$  est pair, alors, comme  $p$  est premier,  $p = 2$ , donc  $p^2 + 2 = 6$ , qui n'est pas premier.

2) Supposons  $p$  impair. Passons modulo 3.

- Si  $p \equiv 0 \pmod{3}$ , alors, comme  $p$  est premier,  $p = 3$ , donc  $p^2 + 2 = 11$ , qui est premier.

• Si  $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$ , alors, modulo 3,  $p^2 + 2 \equiv 1 + 2 = 3 \equiv 0$ , donc, comme  $p^2 + 2$  est premier,  $p^2 + 2 = 3$ ,  $p = 1$ , exclu.

On conclut qu'il y a un nombre premier  $p$  et un seul convenant, c'est  $p = 3$ .

**16.6** a) Si  $a$  est pair, alors  $4 \mid a^2$ , donc le reste de la division euclidienne de  $a^2$  par 8 est 0 ou 4.

• Si  $a$  est impair, il existe  $b \in \mathbb{Z}$  tel que  $a = 2b + 1$ , et on a  $a^2 = 4b^2 + 4b + 1 = 4b(b + 1) + 1$ . Comme  $b(b + 1)$  est pair (car  $b$  ou  $b + 1$  est pair), on en déduit que le reste de la division euclidienne de  $a^2$  par 8 est 1.

b) Supposons qu'il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  tel que  $n = a^2 + b^2 + c^2$ . Le reste  $r$  de la division euclidienne de  $n$  par 8 est donc parmi les sommes de trois nombres puis parmi 0, 1, 4 (réduites modulo 8), donc  $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $r \neq 7$ .

**16.7** On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , en utilisant des congruences modulo 13 :

$$\begin{aligned} 13 \mid 7x + 3y &\iff 7x + 3y \equiv 0 \underset{2 \wedge 13=1}{\iff} 2(7x + 3y) \equiv 0 \\ &\iff 14x + 6y \equiv 0 \iff x + 6y \equiv 0 \underset{5 \wedge 13=1}{\iff} 5(x + 6y) \equiv 0 \\ &\iff 5x + 30y \equiv 0 \iff 5x + 4y \equiv 0 \iff 13 \mid 5x + 4y. \end{aligned}$$

**16.8** Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$ .

Montrons, par récurrence sur  $n$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, 16 \mid u_n$ .

- Pour  $n = 0$ , on a :  $u_0 = 3^6 - 5^2 = 729 - 25 = 704 = 16 \cdot 44$ , donc  $16 \mid u_0$ .
- Supposons, pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé :  $16 \mid u_n$ . Exprimons  $u_{n+1}$  en faisant intervenir  $u_n$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{2(n+1)+6} - 5^{n+3} - 4(n+1) \\ &= 9(u_n + 5^{n+2} + 4n) - 5^{n+3} - 4n - 4 \\ &= 9u_n + (9 - 5)5^{n+2} + 32n - 4 \\ &= 9u_n + 32n + 4(5^{n+2} - 1). \end{aligned}$$

Comme  $5 \equiv 1 \pmod{4}$ , on a :  $5^{n+2} - 1 \equiv 1 - 1 = 0$ , donc  $4 \mid 5^{n+2} - 1$ . Il en résulte :  $16 \mid 4(5^{n+2} - 1)$ , et donc, comme  $16 \mid u_n$  et  $16 \mid 32$ , on déduit, par addition :  $16 \mid u_{n+1}$ . On a montré, par récurrence sur  $n$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, 16 \mid u_n$ .

**16.9** Il s'agit de trouver la classe de  $a$  modulo 10.

On a, modulo 10 :  $7^2 = 49 \equiv -1$ ,

donc  $7^4 = (7^2)^2 \equiv (-1)^2 = 1$ .

On va donc chercher la classe de  $3^{8^4}$  modulo 4.

On a, modulo 4 :  $3^2 = 9 \equiv 1$ , donc, modulo 4 :

$$3^{8^4} = 3^{8^3 \cdot 8} = (3^2)^{8^3 \cdot 4} \equiv 1^{8^3 \cdot 4} = 1.$$

Il existe donc  $k \in \mathbb{N}$  tel que :  $3^{8^4} = 4k + 1$ , d'où :

$$a = 7^{8^4} = 7^{4k+1} = (7^4)^k \cdot 7 \underset{[10]}{\equiv} 1^k \cdot 7 = 7.$$

On conclut : le dernier chiffre de l'écriture décimale de  $a$  est 7.

**16.10** I) Soit  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n^2 + 7 \mid n^3 + 5$ .

Comme  $n^3 + 5 = n(n^2 + 7) - 7n + 5$ ,

on déduit :  $n^2 + 7 \mid -7n + 5$ .

Puisque  $n^2 + 7 \neq 0$ , il en résulte :  $|n^2 + 7| \leq | -7n + 5 |$ .

En notant  $k = |n| \in \mathbb{N}$ , on a alors :

$$k^2 + 7 \leq | -7n + 5 | \leq 7k + 5,$$

donc :  $k^2 - 7k + 2 \leq 0$ .

On résout cette inéquation du second degré. Le discriminant est  $\Delta = (-7)^2 - 8 = 41 > 0$ , donc le trinôme admet deux zéros  $\frac{7 - \sqrt{41}}{2}$  et  $\frac{7 + \sqrt{41}}{2}$ .

On déduit :  $\frac{7 - \sqrt{41}}{2} \leq k \leq \frac{7 + \sqrt{41}}{2}$ , et donc, puisque  $k$  est entier et que  $\frac{7 - \sqrt{41}}{2} \simeq 0,298$  et  $\frac{7 + \sqrt{41}}{2} \simeq 6,701$ , on a :  $1 \leq k \leq 6$ . Ceci montre :  $-6 \leq n \leq 6$ .

2) On teste tous les cas, pour  $-6 \leq n \leq 6$ , par exemple sous la forme d'un tableau :

$n$	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$n^2 + 7$	43	32	23	16	11	8
$n^3 + 5$	-211	-120	-59	-22	-3	4

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 + 7$	7	8	11	16	23	32	43
$n^3 + 5$	5	6	13	32	69	130	221

Il en résulte :  $n^2 + 7 \mid n^3 + 5 \iff (n = 3 \text{ ou } n = 4)$

et on conclut :  $E = \{3, 4\}$ .

**16.11** Soit  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $\sqrt{\frac{11n-5}{n+4}} \in \mathbb{N}$ . On a alors :  $n+4 \mid 11n-5$ . Mais :  $11n-5 = 11(n+4)-49$ , d'où :  $n+4 \mid 49$  et donc :

$$n+4 \in \text{Div}_{\mathbb{Z}}(49) = \{-49, -7, -1, 1, 7, 49\},$$

puis :  $n \in \{-53, -11, -5, -3, 3, 45\}$ .

On teste tous les cas, par exemple sous la forme d'un tableau :

$n$	-53	-11	-5	-3	3	45
$\frac{11n-5}{n+4}$	12	18	60	-38	4	10

On conclut, que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :  $\sqrt{\frac{11n-5}{n+4}} \in \mathbb{N} \iff n = 3$ .

Ainsi, il existe un  $n \in \mathbb{N}$  et un seul convenant, c'est  $n = 3$ .

**16.12**

Utilisons la mise sous forme canonique d'un trinôme :

$$9y^2 - 39y + 40 = \left(3y - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

d'où :

$$x^2 = 9y^2 - 39y + 40$$

$$\iff x^2 = \left(3y - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$\iff 4x^2 = (6y - 13)^2 - 9$$

$$\iff (6y - 13)^2 - 4x^2 = 9$$

$$\iff (6y - 13 - 2x)(6y - 13 + 2x) = 9$$

$$\iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} 6y - 13 - 2x = u \\ 6y - 13 + 2x = v \\ uv = 9 \end{cases}$$

$$\iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} 2(6y - 13) = u + v \\ 4x = v - u \\ uv = 9 \end{cases}$$

$$\iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} x = \frac{v-u}{4} \\ y = \frac{1}{6}\left(\frac{u+v}{2} + 13\right) = \frac{u+v+26}{12} \\ uv = 9 \end{cases}$$

De plus :  $\text{Div}_{\mathbb{Z}}(9) = \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$

On consigne les résultats dans un tableau, en ne gardant que les cas pour lesquels  $x$  et  $y$  sont entiers :

$u$	-9	-3	-1	1	3	9
$v$	-1	-3	-9	9	3	1
$x$	/	/	/	2	/	-2
$y$	/	/	/	3	/	3

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est donc  $\{(2, 3), (-2, 3)\}$ .

On peut contrôler ces résultats en reportant dans l'équation de l'énoncé.

**16.13**

a) Utilisons des congruences modulo 3.

Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  une solution. On a alors, modulo 3 :

$$x^2 \equiv 3y^2 + 17 \equiv 17 \equiv -1.$$

$$\text{Mais : } \begin{cases} x \equiv 0 \implies x^2 \equiv 0 \\ x \equiv \pm 1 \implies x^2 \equiv 1. \end{cases}$$

Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \equiv 0$  ou  $1$ , d'où une contradiction.

Ceci montre que l'équation  $x^2 - 3y^2 = 17$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

b) Utilisons des congruences modulo 7.

Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  une solution.

Formons le tableau des cubes modulo 7 :

$t$	0	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 3$
$t^3$	0	$\pm 1$	$\pm 1$	$\mp 1$

Ainsi :  $\forall t \in \mathbb{Z}, t^3 \equiv -1$  ou  $0$  ou  $1$ .

Il s'ensuit, par addition de deux termes parmi  $-1, 0, 1$ , que  $x^3 + y^3$  est congru, modulo 7 à l'un des nombres :  $-2, -1, 0, 1, 2$ , et donc :  $x^3 + y^3 \not\equiv 3$  [7], contradiction.

Ceci montre que l'équation  $x^3 + y^3 = 3$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

**16.14**

Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .

Utilisons une mise sous forme canonique de trinômes :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$$

$$\iff (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) - 5 = 0$$

$$\iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10.$$

En notant  $X = x - 1$ ,  $Y = y + 2$ , on a  $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$  et :

$$(1) \iff X^2 + Y^2 = 10.$$

La liste des carrés d'entiers  $0, 1, 4, 9, \dots$  montre alors :

$$\begin{aligned} (1) &\iff \left( \begin{array}{l} X^2 = 1 \text{ ou } X^2 = 9 \\ Y^2 = 9 \end{array} \right) \\ &\iff \left( \begin{array}{l} X = \pm 1 \text{ ou } X = \pm 3 \\ Y = \pm 3 \end{array} \right) \\ &\iff \left( \begin{array}{l} (x = 2 \text{ ou } x = 0) \\ (y = 1 \text{ ou } y = -5) \end{array} \right) \\ &\quad \text{ou } \left( \begin{array}{l} (x = 4 \text{ ou } x = -2) \\ (y = -1 \text{ ou } y = -3) \end{array} \right) \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (1) est :

$$\mathcal{S} = \{(2, 1), (2, -5), (0, 1), (0, -5), (4, -1), (4, -3), (-2, -1), (-2, -3)\},$$

ou encore, en ordonnant les couples selon l'ordre lexicographique (comparaison du premier élément du couple, puis, si le

premier élément est le même, comparaison du second élément du couple) :

$$\mathcal{S} = \{(-2, -3), (-2, -1), (0, -5), (0, 1), (2, -5), (2, 1), (4, -3), (4, -1)\}.$$

On peut contrôler chacun de ces couples en reportant dans (1).

**16.15** Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $24a^2 + 1 = b^2$ .

Calculons les carrés d'entiers modulo 5, par exemple sous forme d'un tableau :

$x$	0	$\pm 1$	$\pm 2$
$x^2$	0	1	-1

Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \equiv_{[5]} -1$  ou 0 ou 1.

D'autre part, modulo 5 :  $b^2 = 24a^2 + 1 \equiv -a^2 + 1$ , donc  $a^2 + b^2 \equiv 1$ .

Calculons les sommes de deux carrés modulo 5, par exemple sous forme d'un tableau, donnant  $a^2 + b^2$  modulo 5 à partir de  $a^2$  modulo 5 et de  $b^2$  modulo 5 :

$\diagdown$	$b^2$	-1	0	1
$a^2$	-1	0	1	
-1	-2	-1	0	
0	-1	0	1	
1	0	1	2	

On a donc, modulo 5 :

$$a^2 + b^2 \equiv 1 \implies \left( \begin{array}{l} a^2 \equiv 0 \text{ ou } \\ b^2 \equiv 1 \end{array} \right) \text{ ou } \left( \begin{array}{l} a^2 \equiv 1 \\ b^2 \equiv 0 \end{array} \right).$$

Enfin, d'après le tableau des carrés modulo 5, on a :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (x^2 \equiv 0 \implies x \equiv 0).$$

d'où :  $a \equiv 0$  ou  $b \equiv 0$ , donc  $ab \equiv 0$ , c'est-à-dire :  $5 \mid ab$ .

**16.16** a) Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$  tel que  $7 \mid x^3 + y^3 + z^3$ .

Calculons les cubes modulo 7, par exemple sous forme d'un tableau :

$t$	0	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 3$
$t^3$	0	$\pm 1$	$\pm 1$	$\pm 1$

Raisonnons par l'absurde : supposons  $7 \nmid x, 7 \nmid y, 7 \nmid z$ .

Alors, modulo 7 :  $x^3 \equiv \pm 1, y^3 \equiv \pm 1, z^3 \equiv \pm 1$ .

On en déduit, par addition, en examinant toutes les (huit) possibilités, que :  $x^3 + y^3 + z^3 \not\equiv 0$ , contradiction.

Ceci montre, modulo 7 :

$$x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0 \implies (x^3 \equiv 0 \text{ ou } y^3 \equiv 0 \text{ ou } z^3 \equiv 0).$$

De plus, d'après le tableau des cubes modulo 7 ci-dessus :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, (t^3 \equiv 0 [7] \implies t \equiv 0 [7]).$$

On a donc, modulo 7 :

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0 &\implies (x \equiv 0 \text{ ou } y \equiv 0 \text{ ou } z \equiv 0) \\ &\implies (7 \mid x \text{ ou } 7 \mid y \text{ ou } 7 \mid z) \\ &\implies 7 \mid xyz. \end{aligned}$$

b) Si le système (S) admet (au moins) une solution  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ , alors, d'après la première équation,  $7 \mid x^3 + y^3 + z^3$ , donc, d'après a),  $7 \mid xyz$ , ce qui contredit la deuxième équation.

On conclut que (S) n'a pas de solution dans  $\mathbb{Z}^3$ .

**16.17** 1) Résolvons la première équation (1) de (S).

Soit  $x \in \mathbb{Z}$ . On cherche l'inverse de 5 modulo 11. Cet inverse existe car  $5 \wedge 11 = 1$ .

On remarque :  $(-2) \cdot 5 = -10 \equiv 1 [11]$ , donc l'inverse de 5 modulo 11 est -2. D'où :

$$(1) \quad 5x \equiv 7 [11] \iff (-2)5x \equiv (-2)7 [11]$$

$$\iff x \equiv -3 [11] \iff \exists a \in \mathbb{Z}, x = -3 + 11a.$$

2) On reporte ce résultat dans la deuxième équation (2) de (S), et on raisonne comme ci-dessus (en commençant par simplifier les nombres modulo 5) :

$$(2) \quad 7x \equiv 11 [5] \iff 2x \equiv 1 [5]$$

$$\iff 2(-3 + 11a) \equiv 1 [5] \iff 22a \equiv 7 [5]$$

$$\iff 2a \equiv 2 [5] \stackrel{3 \wedge 5 = 1}{\iff} 3(2a) \equiv 3 \cdot 2 [5]$$

$$\iff a \equiv 1 [5] \iff \exists b \in \mathbb{Z}, a = 1 + 5b.$$

On obtient :

$$x = -3 + 11a = -3 + 11(1 + 5b) = 8 + 55b.$$

3) De même, on reporte dans l'équation (3) de (S) :

$$(3) \quad 11x \equiv 5 [7] \iff 4x \equiv 5 [7]$$

$$\iff 4(8 + 55b) \equiv 5 [7] \iff 220b \equiv -27 [7]$$

$$\iff 3b \equiv 1 [7] \stackrel{5 \wedge 7 = 1}{\iff} 5(3b) \equiv 5 \cdot 1 [7]$$

$$\iff b \equiv 5 [7] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, b = 5 + 7k.$$

On obtient :

$$x = 8 + 55b = 8 + 55(5 + 7k) = 283 + 385k.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{283 + 385k ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

### 16.18

1) Résolvons la première équation (1) de (S). On a :

$$(1) \quad x \equiv 1 \pmod{6} \iff \exists a \in \mathbb{Z}, \quad x = 1 + 6a.$$

2) Reportons dans la deuxième équation (2) de (S) :

$$(2) \quad x \equiv 3 \pmod{10} \iff 1 + 6a \equiv 3 \pmod{10} \iff 6a \equiv 2 \pmod{10}$$

$$\iff 3a \equiv 1 \pmod{5}.$$

Comme  $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$ , 3 est inversible modulo 5 et son inverse est 2, d'où :

$$3a \equiv 1 \pmod{5} \iff 2(3a) \equiv 2 \cdot 1 \pmod{5} \iff a \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\iff \exists b \in \mathbb{Z}, \quad a = 2 + 5b.$$

On obtient :

$$x = 1 + 6a = 1 + 6(2 + 5b) = 13 + 30b.$$

3) Reportons dans la troisième équation (3) de (S) :

$$(3) \quad x \equiv 7 \pmod{15} \iff 13 + 30b \equiv 7 \pmod{15}$$

$$\iff 30b \equiv -6 \pmod{15}$$

$$\iff 0 \equiv -6 \pmod{15}, \text{ impossible.}$$

On conclut que (S) n'a pas de solution dans  $\mathbb{Z}$ .

### 16.19

Soit  $x \in \mathbb{Z}$ . On a :

$$x \equiv 6 \pmod{23} \iff \exists y \in \mathbb{Z}, \quad x = 6 + 23y.$$

Reportons dans la deuxième congruence :

$$x^2 \equiv 13 \pmod{23^2} \iff (6 + 23y)^2 \equiv 13 \pmod{23^2}$$

$$\iff 36 + 12 \cdot 23y + 23^2 y^2 \equiv 13 \pmod{23^2}$$

$$\iff 12 \cdot 23y \equiv -23 \pmod{23^2}$$

$$\iff 12y \equiv -1 \pmod{23}.$$

On cherche l'inverse de 12 modulo 23. Cet inverse existe car  $12 \wedge 23 = 1$ .

On a :  $2 \cdot 12 = 24 \equiv 1 \pmod{23}$ , donc l'inverse de 12 modulo 23 est 2. D'où :

$$12y \equiv -1 \pmod{23} \iff 2 \cdot 12y \equiv 2(-1) \pmod{23}$$

$$\iff y \equiv -2 \pmod{23}$$

$$\iff \exists z \in \mathbb{Z}, \quad y = -2 + 23z.$$

Ainsi,  $x \in \mathbb{Z}$  est solution du système de deux congruences si et seulement s'il existe  $z \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$x = 6 + 23(-2 + 23z) = -40 + 23^2 z.$$

Il est alors clair que le plus petit entier naturel  $x$  convenant correspond à  $z = 1$ , et on a :  $x = -40 + 23^2 = 489$ .

On conclut que l'entier cherché est égal à 489.

On peut contrôler que 489 satisfait les congruences de l'énoncé.

### 16.20

a) • Si  $a \nmid b$ , alors, comme, pour tout  $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $x \wedge y \mid x \vee y$ , (S) n'a pas de solution.

• Supposons  $a \mid b$ . Il existe  $c \in \mathbb{N}^*$  tel que  $b = ac$ .

Soit  $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Notons  $d = x \wedge y$ ,  $(X,Y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :  $x = dX$ ,  $y = dY$ ,  $X \wedge Y = 1$ . On a :

$$(S) \quad \begin{cases} x \wedge y = a \\ x \vee y = b \end{cases} \iff \begin{cases} d = a \\ dXY = b \end{cases} \iff \begin{cases} d = a \\ XY = c \end{cases}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\mathcal{S} = \left\{ (aX, aY) ; X \mid c, Y = \frac{c}{X}, X \wedge Y = 1 \right\}.$$

b) 1)  $a = 10$ ,  $b = 22$  :

Comme  $a \nmid b$ , on a :  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

2)  $a = 8$ ,  $b = 80$  :

On a :  $8 \mid 80$ ,  $80 = 8 \cdot 10$ ,  $c = 10$ . D'où :

$$\mathcal{S} = \left\{ (8X, 8Y) ; X \mid 10, Y = \frac{10}{X}, X \wedge Y = 1 \right\}$$

$$= \left\{ (8X, 8Y) ; \right.$$

$$\left. \begin{array}{ll} X = 1 & \left\{ \begin{array}{ll} X = 2 & \text{ou} \\ Y = 5 & \end{array} \right. \\ Y = 10 & \left\{ \begin{array}{ll} X = 5 & \text{ou} \\ Y = 2 & \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{ll} X = 10 & \\ Y = 1 & \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

$$= \{(8, 80), (16, 40), (40, 16), (80, 8)\}.$$

### 16.21

Soit  $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .

Notons  $d = x \wedge y$ ,  $(X,Y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :

$$x = dX, \quad y = dY, \quad X \wedge Y = 1.$$

On sait, d'après le Cours, que l'on a alors :  $x \vee y = dXY$ . D'où :

$$(1) \iff 11d + dXY = 203 \iff d(11 + XY) = 203 \quad (2).$$

On forme la décomposition primaire de 203 :  $203 = 7 \cdot 29$ .

De plus, comme  $(X,Y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  :

$$(2) \implies d \leq \frac{203}{11+1} = 16,91\dots \implies d \leq 16.$$

• Pour  $d = 1$  :

$$(2) \iff 11 + XY = 203 \iff XY = 192 = 2^6 \cdot 3.$$

On a donc, à l'ordre près et puisque  $X \wedge Y = 1$  :

$$\begin{aligned} (2) &\iff \left( \begin{array}{l} X = 1 \\ Y = 192 \end{array} \text{ ou } \begin{array}{l} X = 3 \\ Y = 2^6 = 64 \end{array} \right) \\ &\iff \left( \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 192 \end{array} \text{ ou } \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 64 \end{array} \right). \end{aligned}$$

• Pour  $d = 7$  :

$$(2) \iff 11 + XY = 29 \iff XY = 18 = 2 \cdot 3^2.$$

On a donc, à l'ordre près et puisque  $X \wedge Y = 1$  :

$$\begin{aligned} (2) &\iff \left( \begin{array}{l} X = 1 \\ Y = 18 \end{array} \text{ ou } \begin{array}{l} X = 2 \\ Y = 9 \end{array} \right) \\ &\iff \left( \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 126 \end{array} \text{ ou } \begin{array}{l} x = 14 \\ y = 63 \end{array} \right). \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (1) est formé de  $(1, 192)$ ,  $(3, 64)$ ,  $(7, 126)$ ,  $(14, 63)$  et de leurs permétués, ce qui donne en tout exactement huit solutions.

**16.22** Notons  $n = \prod_{k=1}^N p_k^{\alpha_k}$  la décomposition primaire de  $n$ .

Puisqu'il existe  $a \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = a^2$ , on a :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad 2 \mid \alpha_k.$$

Puisqu'il existe  $b \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = b^3$ , on a :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad 3 \mid \alpha_k.$$

Comme  $2 \wedge 3 = 1$ , il en résulte :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad 6 \mid \alpha_k.$$

Ainsi, pour tout  $k \in \{1, \dots, N\}$ , il existe  $\beta_k \in \mathbb{N}$  tel que  $\alpha_k = 6\beta_k$ .

On a alors, en notant  $c = \prod_{k=1}^N p_k^{\beta_k}$  :

$$n = \prod_{k=1}^N p_k^{\alpha_k} = \prod_{k=1}^N p_k^{6\beta_k} = \left( \prod_{k=1}^N p_k^{\beta_k} \right)^6 = c^6.$$

**16.23** Soient  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que  $m < n$ , et  $d \in \mathbb{N}^*$  un diviseur commun à  $F_m$  et  $F_n$  ; notons  $k = n - m$ .

$$\text{On a : } F_n = (2^m)^{2^k} + 1 = (F_m - 1)^{2^k} + 1.$$

En développant par la formule du binôme de Newton, il en résulte :  $F_m \mid F_n - 2$ .

On déduit :  $d \mid 2$ .

Mais, d'autre part,  $F_m$  et  $F_n$  sont impairs, d'où  $d = 1$ , et finalement :  $F_m \wedge F_n = 1$ .

**16.24** Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = 2^{2^{8n+6}} + 10$ .

Montrons, par récurrence sur  $n$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 13 \mid u_n$ .

• Pour  $n = 0$ , on a :  $u_0 = 2^{2^6} + 10 = 2^{64} + 10$ .

On a, modulo 13 :

$$\begin{aligned} 2^{64} &= (2^4)^{16} = 16^{16} \equiv 3^{16} = (3^3)^5 \cdot 3 \\ &= 27^5 \cdot 3 \equiv 1^5 \cdot 3 = 3. \end{aligned}$$

D'où :  $u_0 \equiv 3 + 10 = 13 \equiv 0$ , et donc :  $13 \mid u_0$ .

• Supposons pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé :  $13 \mid u_n$ .

Exprimons  $u_{n+1}$  en faisant intervenir  $u_n$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2^{2^{8(n+1)+6}} + 10 = 2^{2^{8n+6}+8} + 10 = 2^{2^{8n+6} \cdot 2^8} + 10 \\ &= (2^{2^{8n+6}})^{2^8} + 10 = (u_n - 10)^{2^8} + 10 \\ &\stackrel{[13]}{\equiv} (-10)^{2^8} + 10 \equiv 3^{2^8} + 10. \end{aligned}$$

On a, modulo 13 :

$$3^{2^8} = 3^{256} = (3^3)^{85} \cdot 3 = (27)^{85} \cdot 3 \stackrel{[13]}{\equiv} 1^{85} \cdot 3 = 3.$$

D'où :  $u_{n+1} \stackrel{[13]}{\equiv} 3 + 10 = 13 \equiv 0$ , et donc :  $13 \mid u_{n+1}$ .

On a montré, par récurrence sur  $n$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 13 \mid u_n$ .

**16.25** Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe  $f$  convenant.

On a alors, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{cases} ((f \circ f) \circ f)(x) = (f \circ f)(f(x)) = f(x) + 1 \\ (f \circ (f \circ f))(x) = f((f \circ f)(x)) = f(x + 1), \end{cases}$$

d'où, puisque la loi  $\circ$  est associative :  $f(x + 1) = f(x) + 1$ .

Un récurrence immédiate (récurrence montante et récurrence descendante) permet de déduire :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = x + f(0).$$

Notons, pour la commodité,  $f(0) = a \in \mathbb{Z}$ . Ainsi :

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto f(x) = x + a.$$

On a alors, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  :

$$x + 1 = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x + a)$$

$$= (x + a) + a = x + 2a,$$

d'où  $2a = 1$ , contradiction avec  $a \in \mathbb{Z}$ .

On conclut qu'il n'existe pas d'application  $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  satisfaisant les conditions de l'énoncé.

**16.26** a) Remarquons que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , par définition de  $d(k)$  :  $d(k) = \sum_{i|k} 1$ .

On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par manipulation de symboles de sommation :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n d(k) &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i|k} 1 \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\substack{k=i, 2i, \dots \\ i|k}} 1 \right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\frac{n}{i}\right).\end{aligned}$$

b) De même, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , par définition de  $\sigma(k)$  :  $\sigma(k) = \sum_{i|k} i$ .

On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \sigma(k) &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i|k} i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\substack{k=i, 2i, \dots \\ i|k}} i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\substack{k=i, 2i, \dots \\ 1 \leq k \leq n}} i \right) = \sum_{i=1}^n i \left( \sum_{\substack{k=i, 2i, \dots \\ 1 \leq k \leq n}} 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n i \mathbb{E}\left(\frac{n}{i}\right).\end{aligned}$$

**16.27** Puisque  $n$  n'est pas premier, il existe  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :

$$n = ab, \quad 1 < a < n, \quad 1 < b < n.$$

On a alors :  $a \geq 2$  et  $b \geq 2$ , donc  $b = \frac{n}{a} \leq \frac{n}{2}$  et  $a = \frac{n}{b} \leq \frac{n}{2}$ .

De plus :  $\frac{n}{2} \leq n - 2 \iff n \geq 4$ .

Comme  $n \geq 6$ , on a donc :  $a \leq n - 2$  et  $b \leq n - 2$ .

1<sup>er</sup> cas :  $a \neq b$

Dans ce cas, comme  $a$  et  $b$  sont distincts et  $\leq n - 2$ , le produit  $ab$  divise  $(n - 2)!$  et donc  $n \mid (n - 2)!$ .

2<sup>è</sup> cas :  $a = b$

On a alors  $a^2 = n \geq 6$ , donc  $a \geq 3$ .

Les entiers  $a$  et  $2a$  sont distincts et  $1 \leq a \leq n - 2$ .

Montrons :  $1 \leq 2a \leq n - 2$ . On a :

$$\begin{aligned}2a \leq n - 2 &\iff 2a \leq a^2 - 2 \iff a^2 - 2a - 2 \geq 0 \\ &\iff (a - 1)^2 - 3 \geq 0 \iff (a - 1)^2 \geq 3 \\ &\iff_{a-1 \in \mathbb{N}} (a - 1)^2 \geq 4 \iff a - 1 \geq 2 \iff a \geq 3.\end{aligned}$$

Ainsi,  $a$  et  $2a$  sont distincts et  $\leq n - 2$ , donc leur produit  $a(2a)$  divise  $(n - 2)!$ .

Mais  $a(2a) = 2a^2 = 2n$  et  $n \mid 2n$ . On conclut :  $n \mid (n - 2)!$ .

**16.28** Considérons les décompositions primaires de  $a, b, c$  :  $a = \prod_{i=1}^N p_i^{r_i}$ ,  $b = \prod_{i=1}^N p_i^{s_i}$ ,  $c = \prod_{i=1}^N p_i^{t_i}$ , où  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_1, \dots, p_N$

sont premiers et deux à deux distincts, et les exposants sont dans  $\mathbb{N}$ .

D'une part, comme  $a \wedge b = 1$ , on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (r_i = 0 \text{ ou } s_i = 0).$$

D'autre part :  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, r_i + s_i = nt_i$ .

Il en résulte :  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, (n \mid r_i \text{ et } n \mid s_i)$ .

Il existe donc  $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N$  dans  $\mathbb{N}$  tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, (r_i = n\alpha_i, s_i = n\beta_i).$$

En notant  $\alpha = \prod_{i=1}^N p_i^{\alpha_i}$  et  $\beta = \prod_{i=1}^N p_i^{\beta_i}$ , on a :

$$(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad a = \alpha^n, \quad b = \beta^n.$$

**16.29** a) Soit  $k \in \{1, \dots, p - 1\}$ . On a :

$$k!(p - k)! \binom{p}{k} = p!, \text{ donc } p \text{ divise } k!(p - k)! \binom{p}{k}.$$

Comme  $1 \leq k \leq p - 1$  et que  $p$  est premier, on a :  $p \wedge (k!) = 1$ . De même :  $p \wedge ((p - k)!) = 1$ .

D'après le théorème de Gauss, on déduit :  $p \mid \binom{p}{k}$ .

b) 1) Traitons le cas  $p = 2$ .

Il est clair que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $n^2$  et  $n$  ont la même parité, donc  $n^2 \equiv n [2]$ .

2) Supposons  $p \geq 3$ .

• Montrons, par récurrence sur  $n$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n [p]$ .

La propriété est évidente pour  $n = 0$ .

Si elle est vraie pour un  $n$  de  $\mathbb{N}$ , alors, en utilisant  $a$ ) :

$$(n + 1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + 1 \underset{[p]}{\equiv} n^p + 1 \underset{[p]}{\equiv} n + 1.$$

• Enfin, comme  $p$  est impair, et en utilisant le résultat précédent :

$$\forall n \in \mathbb{Z}_-, \quad n^p = -(-n)^p \underset{[p]}{\equiv} -(-n) = n.$$

**16.30** On forme d'abord la décomposition primaire du nombre de gauche dans l'énoncé :

$$56\,786\,730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61.$$

Soit  $p$  l'un de ces facteurs premiers.

Alors :  $p - 1 \in \{1, 2, 4, 6, 10, 12, 30, 60\}$ , donc  $p - 1 \mid 60$ .

D'après le petit théorème de Fermat, on a, puisque  $p$  est premier, pour tout  $a \in \mathbb{Z}$  tel que  $p$  ne divise pas  $a$  :  $a^{p-1} \equiv 1 [p]$ .

Comme  $p - 1 \mid 60$ , il en résulte :  $a^{60} \equiv 1 [p]$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .

- Si  $p \mid x$  ou  $p \mid y$ , alors  $p \mid x^{61}y - xy^{61}$ .
- Supposons  $p \nmid x$  et  $p \nmid y$ . Alors, comme on l'a vu plus haut :  $x^{60} \equiv 1 \pmod{p}$  et  $y^{60} \equiv 1 \pmod{p}$ , d'où :

$$x^{61}y - xy^{61} = xy(x^{60} - y^{60}) \equiv xy(1 - 1) = 0 \pmod{p}.$$

Ceci montre :  $p \mid x^{61}y - xy^{61}$ .

Ainsi, les facteurs premiers  $p$  considérés divisent  $x^{61}y - xy^{61}$ , donc leur produit le divise aussi et on conclut :

$$56\,786\,730 \mid xy^{61} - xy^{61}.$$

### 16.31 1) Supposons $p$ premier.

Si  $p = 2$ , alors  $(p - 1)! = 1 \equiv -1 \pmod{2}$ .

Supposons donc  $p \geq 3$ .

Dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\hat{0}\}$ , l'équation  $x^2 = \hat{1}$  admet exactement deux solutions (qui sont  $\hat{1}$  et  $-\hat{1}$ ), puisque  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps.

Il en résulte :  $\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{-\hat{1}, \hat{0}, \hat{1}\}, x^{-1} \neq x$ .

Dans le produit  $\prod_{k=2}^{p-2} \hat{k}$ , on peut donc grouper les facteurs deux

à deux, de produits égaux à 1, d'où :  $\prod_{k=2}^{p-2} \hat{k} = \hat{1}$ . On a alors

$\prod_{k=1}^{p-1} \hat{k} = p \widehat{-1} = -\hat{1}$ , et ainsi :  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

2) Réciproquement, supposons  $p$  non premier (et  $p \geq 2$ ). Il existe alors un diviseur  $d$  de  $p$  tel que  $2 \leq d \leq p - 1$ . Comme  $d \mid (p - 1)!$  et  $d \mid p$ , on ne peut avoir  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$  (sinon :  $d \mid -1$ ).

### 16.32 1) Soit $(a, b, c)$ convenant.

Par rôles symétriques de  $a, b, c$ , on peut supposer, par exemple :

$$2 \leq a \leq b \leq c.$$

- Soit  $\delta \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $\delta \mid a$  et  $\delta \mid b$ . Alors :  $\delta \mid a \mid bc + 1$  et  $\delta \mid b \mid bc$ , donc, par différence,  $\delta \mid 1$ , donc  $\delta = 1$ .

Ceci montre que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

Par rôles symétriques de  $a, b, c$ , on déduit que  $a$  et  $c$  sont premiers entre eux, et que  $b$  et  $c$  sont premiers entre eux.

Ceci montre que  $a, b, c$  sont premiers entre eux deux à deux.

En particulier, comme  $a, b, c$  sont tous  $\geq 2$ , il en résulte qu'ils sont deux à deux différents, et donc :  $2 \leq a < b < c$ .

- Notons  $S = ab + bc + ca + 1 \in \mathbb{N}^*$ .

Comme  $a \mid bc + 1$  et  $a \mid ab + ca$ , par addition :  $a \mid S$ .

Par rôles symétriques de  $a, b, c$ , on déduit :  $a \mid S, b \mid S, c \mid S$ . Comme  $a, b, c$  sont premiers entre eux deux à deux, d'après un théorème du cours, il en résulte :  $abc \mid S$  et donc, comme  $abc$  et  $S$  sont des entiers naturels non nuls :  $abc \leq S$ .

- Supposons  $b \geq 4$ . Alors,  $c \geq 5$  puis :

$$abc \leq S = ab + bc + ca + 1 = \frac{abc}{c} + \frac{abc}{a} + \frac{abc}{b} + 1$$

$$\leq \frac{abc}{5} + \frac{abc}{2} + \frac{abc}{4} + 1 = \frac{19}{20}abc + 1,$$

d'où :  $abc \leq 20$ . Mais :  $abc \geq 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ , contradiction.

- On a donc nécessairement  $b = 3$ , d'où  $a = 2$ .

Enfin :  $c \geq 4$  et  $c \mid ab + 1 = 7$ , donc  $c = 7$ .

Ceci montre :  $a = 2, b = 3, c = 7$ .

- 2) Réciproquement :

$$2 \mid 3 \cdot 7 + 1 = 22, 3 \mid 7 \cdot 2 + 1 = 15, 7 \mid 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$

donc  $(2, 3, 7)$  convient.

Finalement, il existe exactement six triplets  $(a, b, c)$  convenants, déduits du triplet  $(2, 3, 7)$  par permutations.



# Polynômes, fractions rationnelles

CHAPITRE **17**

## Plan

Les méthodes à retenir	248
Énoncés des exercices	251
Du mal à démarrer ?	256
Corrigés	258

## Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs dans  $K[X]$
- Interventions de l'algèbre linéaire dans un contexte de polynômes
- Calcul du quotient, du reste d'une division euclidienne dans  $K[X]$
- Calculs de pgcd et ppcm dans  $K[X]$
- Étude des zéros d'un polynôme et de leurs ordres de multiplicité
- Factorisation de polynômes (assez simples) dans  $\mathbb{C}[X]$ , dans  $\mathbb{R}[X]$
- Localisation des zéros d'un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , de  $\mathbb{R}[X]$
- Calcul de fonctions symétriques de  $n$  complexes
- Résolution de systèmes algébriques symétriques
- Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de  $K[X]$
- Division euclidienne dans  $K[X]$ , divisibilité
- Définition et propriétés des pgcd et ppcm dans  $K[X]$
- Polynômes premiers entre eux, théorème de Bezout, théorème de Gauss
- Définition des zéros d'un polynôme, de l'ordre de multiplicité, lien avec les dérivées successives
- Caractérisations des polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$ , de  $\mathbb{R}[X]$ , factorisation d'un trinôme, d'un trinôme bicarré réel
- Définition des fonctions symétriques élémentaires de  $n$  complexes, relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé
- Définition et propriétés de  $K(X)$ , technique de la décomposition en éléments simples, formule portant sur  $\frac{P'}{P}$  où  $P$  est scindé.

# Les méthodes à retenir

**Pour montrer une propriété portant sur des polynômes indexés par un entier naturel  $n$**

**Pour trouver tous les polynômes satisfaisant une formule donnée**

**Pour déterminer le reste de la division euclidienne d'un polynôme  $A$  par un polynôme  $B$  non nul**

**Pour montrer que  $a \in \mathbb{K}$  est zéro d'ordre  $\alpha$  au moins d'un polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$**

**Pour montrer que  $a \in \mathbb{K}$  est zéro d'ordre  $\alpha$  exactement d'un polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$**

**Pour calculer certaines sommes faisant intervenir les coefficients binomiaux**

**Pour exprimer un polynôme comme combinaison linéaire d'autres polynômes**

On note  $K$  un corps commutatif, et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Essayer d'utiliser un raisonnement par récurrence.

→ Exercice 17.1.

Essayer de :

- étudier le degré

→ Exercices 17.2, 17.23

• utiliser un argument de divisibilité.

→ Exercice 17.10.

Revenir à la définition :

$$A = BQ + R, \quad \deg(R) < \deg(B),$$

et, si  $B$  est de bas degré, prendre la valeur en un ou des points annulant  $B$ .

Éventuellement, passer par les nombres complexes.

→ Exercices 17.3, 17.6.

Essayer de :

- mettre  $(X - a)^\alpha$  en facteur dans  $P(X)$
- utiliser la caractérisation du cours :

$$P(a) = 0, \quad P'(a) = 0, \dots, \quad P^{(\alpha-1)}(a) = 0.$$

Essayer de :

- mettre  $(X - a)^\alpha$  en facteur dans  $P(X)$  et montrer que l'autre facteur n'est pas multiple de  $X - a$
- utiliser la caractérisation du cours :

$$P(a) = 0, \quad P'(a) = 0, \dots, \quad P^{(\alpha-1)}(a) = 0, \quad P^{(\alpha)}(a) \neq 0.$$

→ Exercice 17.4.

Essayer d'écrire une égalité polynomiale venant de la formule du binôme de Newton, puis prendre la valeur en certains points, après avoir éventuellement dérivé une ou plusieurs fois, ou primitivé.

→ Exercice 17.5.

Essayer de faire intervenir l'algèbre linéaire : espace vectoriel, bases, dimension, application linéaire.

→ Exercice 17.19 c).

**Pour montrer que deux polynômes  $A, B$  de  $K[X]$  sont premiers entre eux**

Essayer de :

- montrer que, pour tout  $D \in K[X]$ , si  $D \mid A$  et  $D \mid B$ , alors  $D$  est une constante
- montrer que, si  $D \in K[X]$  est irréductible et si  $D \mid A$  et  $D \mid B$ , alors il y a une contradiction
- montrer l'existence de  $U, V \in K[X]$  tels que  $UA + VB = 1$  et utiliser le théorème de Bezout.

**Pour montrer qu'un polynôme  $B$  divise un polynôme  $A$**

Essayer de :

- mettre  $B$  en facteur dans  $A$ , par calculs élémentaires, par utilisation d'identités remarquables

→ Exercices 17.11, 17.21

**Pour calculer le pgcd de deux polynômes  $A, B$  de  $K[X]$**

Essayer de :

- utiliser la méthode des divisions euclidiennes successives

→ Exercice 17.22

**Pour calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un polynôme  $A$  par un polynôme  $B$**

Calculer d'abord le reste  $R$ , puis mettre  $B$  en facteur dans  $A - R$ , pour obtenir le quotient  $Q$  tel que  $A = BQ + R$ .

→ Exercice 17.9.

**Pour déterminer les éventuels zéros rationnels d'un polynôme  $P$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ,  $P = a_nX^n + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ . Si  $x \in \mathbb{Q}$  est zéro de  $P$ , alors il existe  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $x = \frac{p}{q}$  et  $p \wedge q = 1$ , et on a :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0,$$

donc  $p \mid a_0 q^n$  et  $q \mid a_n p^n$ . Comme  $p \wedge q = 1$ , il s'ensuit, d'après le théorème de Gauss :  $p \mid a_0$  et  $q \mid a_n$ .

On essaie alors ces possibilités, qui sont en nombre fini.

→ Exercice 17.13.

**Pour factoriser un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  en produit de facteurs irréductibles**

Se rappeler que, d'après le cours, les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant  $< 0$ .

- On sait factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes de degré 2 à discriminant  $\geq 0$ , donc aussi ceux qui s'y ramènent simplement.

→ Exercice 17.12 a)

- On sait factoriser les trinômes bicarrés  $X^4 + pX^2 + q$ ,  $(p,q) \in \mathbb{R}^2$  :
  - \* si  $p^2 - 4q \geqslant 0$ , mettre sous forme canonique :

$$\left(X^2 + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4},$$

puis terminer la factorisation à l'aide de l'identité remarquable sur  $A^2 - B^2$

- \* si  $p^2 - 4q < 0$ , donc  $q > 0$ , grouper  $X^4$  et  $q$  pour débouter un carré :

$$(X^2 + \sqrt{q})^2 - (2\sqrt{q} - p)X^2,$$

puis terminer la factorisation à l'aide de l'identité remarquable sur  $A^2 - B^2$ .

→ Exercices 17.12 b), c), f)

- Dans le cas d'un polynôme réciproque, faire intervenir  $Y = X + \frac{1}{X}$ , et donc passer par les fractions rationnelles.

→ Exercice 17.12 e)

- Essayer d'utiliser les identités remarquables : formule du binôme de Newton, sommation géométrique.

→ Exercice 17.12 f)

- Éventuellement, en dernier recours, passer par les nombres complexes, puis regrouper deux par deux les facteurs conjugués.

→ Exercice 17.12 d).

**Pour traduire que deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  ont au moins deux zéros communs**

Écrire que :  $\deg(\text{pgcd}(A, B)) \geqslant 2$ .

→ Exercice 17.14.

**Pour étudier le nombre et la situation des zéros d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  (qui n'a pas de zéro évident)**

Étudier les variations de la fonction polynomiale  $P$  sur  $\mathbb{R}$ , ou les variations d'une fonction associée à  $P$  et s'annulant en les mêmes points que  $P$ .

→ Exercices 17.24 a), 17.25 a).

**Pour obtenir une localisation des zéros d'un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$**

Essayer d'appliquer judicieusement l'inégalité triangulaire.

→ Exercice 17.25 b).

**Pour calculer une fonction symétrique  $S$  des zéros d'un polynôme  $P$  scindé**

- Exprimer  $S$  en fonction des fonctions symétriques élémentaires des zéros de  $P$ .

→ Exercices 17.17, 17.28 b), 17.29

- Dans le cas des sommes de puissances des zéros de  $P$ , écrire que chaque zéro de  $P$  annule  $P$ , puis multiplier par une puissance convenable de ce zéro, et enfin sommer.

→ Exercice 17.26.

**Pour déterminer une CNS portant sur les coefficients d'une équation algébrique sur  $\mathbb{C}$  pour que les zéros vérifient une relation donnée**

Traduire cette relation sur les fonctions symétriques élémentaires de certains zéros de l'équation et procéder à une élimination.

→ Exercice 17.29.

**Pour décomposer une fraction rationnelle  $F$  de  $\mathbb{K}(X)$  en éléments simples**

Commencer par éventuellement simplifier  $F$ , et obtenir  $F = \frac{P}{Q}$  où  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $Q \in \mathbb{K}[X] - \{0\}$ , et où  $Q$  est factorisé en produit de facteurs irréductibles sur  $\mathbb{K}$ .

Écrire la forme de la décomposition en éléments simples de  $F$  dans  $\mathbb{K}(X)$ , avec des coefficients indéterminés.

Calculer les coefficients de cette décomposition en éléments simples :

- la partie entière est le quotient de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$
- remarquer une éventuelle parité ou imparité
- utiliser la méthode de multiplication puis remplacement
- pour calculer les éventuels coefficients restants, prendre la valeur en certains points, ou une limite en l'infini (après avoir multiplié par une puissance convenable de  $X$ ), ou bien faire passer les termes connus de l'autre côté de l'égalité de décomposition en éléments simples.

→ Exercice 17.18.

**Dans une étude faisant intervenir  $P$  et  $P'$ , où  $P$  est scindé sur  $\mathbb{K}$**

Penser à utiliser éventuellement la formule du cours relative à la fraction rationnelle  $\frac{P'}{P}$ .

→ Exercice 17.30.

## Énoncés des exercices



### 17.1 Exemple d'égalité de polynômes

On note  $P_0(X) = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $P_n(X) = \frac{(-1)^n}{n!} X(X-1)\cdots(X-n+1)$ .

Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n P_k(X) = P_n(X-1)$ .

### 17.2 Exemple d'équations dont l'inconnue est un polynôme

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $P \in \mathbb{R}[X]$  :

$$a) X^2 P'' + 2XP' - 2P = 0 \quad b) X^2 P'' + 2XP' - P = 0.$$

### 17.3 Exemple de calcul du reste d'une division euclidienne de polynômes

Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  fixé, le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - X - 2$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .



## 17.4

## Exemple de zéro multiple d'un polynôme

Soit  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . On note :

$$P_n = (n-1)X^{2n} - 2(2n-1)X^n + 2n^2X - (2n^2 - 3n + 1) \in \mathbb{R}[X].$$

Montrer que 1 est zéro d'ordre trois exactement de  $P_n$ .



## 17.5

## Calcul de sommes issues de la formule du binôme de Newton

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. On note :

$$P_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}, \quad P_1 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k},$$

$$P_2 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Calculer  $P_0, P_1, P_2$ .



## 17.6

## Exemple de calcul du reste d'une division euclidienne de polynômes

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $P = \prod_{k=1}^n (X \sin ka + \cos ka)$ . Calculer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .



## 17.7

## Étude de polynômes premiers entre eux

Soit  $(A, B) \in (K[X] - \{0\})^2$ . Montrer :

$$A \wedge B = 1 \iff (A+B) \wedge (AB) = 1.$$



## 17.8

## Exemple d'étude de divisibilité en liaison avec les zéros d'un polynôme

Déterminer l'ensemble des  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $X^2 + X + 1$  divise  $(X^4 + 1)^n - X^n$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .



## 17.9

## Exemple de calcul du quotient et du reste d'une division euclidienne de polynômes

Soit  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $P = X^n + (X-1)^n + 1$  par  $X^2 - X$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .



## 17.10

## Exemple d'équation dont les inconnues sont des polynômes, utilisation de la divisibilité

Résoudre l'équation d'inconnue  $(P, Q) \in (K[X])^2$  :

$$(1) \quad (X^2 - 5X + 7)P + (X - 2)Q = 2X - 3.$$



## 17.11

## Exemple de divisibilité pour des polynômes formant une suite de polynômes

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $P_n = X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1 \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer, pour tout  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$  :

$$n \leq m \implies P_n \mid P_m.$$

**17.12****Exemples de factorisations de polynômes dans  $\mathbb{R}[X]$** 

Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :

- a)  $X^6 + 9X^3 + 8$     b)  $X^4 - 2X^2 + 9$     c)  $X^4 + X^2 - 6$   
 d)  $(X^2 - 4X + 1)^2 + (3X - 5)^2$     e)  $X^5 + 1$     f)  $X^6 - 1$ .

**17.13****Exemple de factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$ , intervention de zéros rationnels**

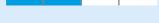
Factoriser  $P = 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 13X + 6$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , sachant que  $P$  admet deux zéros rationnels.

**17.14****Exemple d'étude de deux polynômes ayant deux zéros communs**

Déterminer une CNS sur  $(a,b) \in \mathbb{C}^2$  pour que les deux polynômes

$$A = X^3 + X + a, \quad B = X^4 + 2X^2 + b$$

de  $\mathbb{C}[X]$  aient au moins deux zéros communs.

**17.15****Exemple de calcul d'un polynôme connaissant ses valeurs et les valeurs de son polynôme dérivé en certains points**

Trouver tous les polynômes de degré 3 de  $\mathbb{C}[X]$  tels que :

$$P(j) = j^2, \quad P(j^2) = j, \quad P'(j) = j, \quad P'(j^2) = j^2.$$

**17.16****Condition pour qu'un polynôme particulier de degré 4 soit le carré d'un polynôme de degré 2**

a) Déterminer une CNS sur  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  pour que le polynôme

$$P = X^4 + aX^3 + bX^2 + 12X + 9$$

soit le carré d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ .

b) Dans ce cas, factoriser  $P$  et  $P - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**17.17****Exemple de calcul d'une fonction symétrique des zéros d'un polynôme**

Soient  $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^3$ ,  $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$ ,  $z_1, z_2, z_3, z_4$  les zéros de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ . Calculer  $S = \sum z_1^2 z_2$ , somme comportant 12 termes, obtenus en multipliant le carré d'un zéro de  $P$  par un autre zéro de  $P$ .

**17.18****Exemples de décompositions en éléments simples**

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles  $F$  suivantes :

- a)  $\frac{X^3}{(X-1)(X-2)}$     b)  $\frac{X}{(X-1)^2(X+2)}$   
 c)  $\frac{X^5+1}{X^2(X-1)^2}$     d)  $\frac{X^4+X+1}{X(X^2+1)^3}$ .

**17.19****Exemple d'intervention de l'algèbre linéaire dans une étude de polynômes**

a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  unique tel que :  $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$ , et montrer  $\deg(P_n) = n$ .

À cet effet, on pourra considérer l'application

$$f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], \quad P \longmapsto f(P) = P(X) + P(X+1).$$

b) Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P'_n = nP_{n-1}$ .

c) Exprimer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n(X+1)$  en fonction de  $P_0(X), \dots, P_n(X)$  et en déduire une relation de récurrence donnant  $P_n$  en fonction de  $P_0, \dots, P_{n-1}$ .

**17.20****Exemple de divisibilité de polynômes, utilisation du théorème de Gauss**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P = \sum_{k=0}^n X^k$ ,  $Q = \sum_{k=0}^n X^{kn} \in K[X]$ . Montrer :  $P \mid Q$ .

**17.21****Exemple de divisibilité faisant intervenir une composition de polynômes**

Montrer, pour tout  $P$  de  $K[X]$  :  $P(X) - X \mid P(P(X)) - X$ .

**17.22****Pgcd de  $X^a - 1$  et  $X^b - 1$** 

Soient  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $\delta = \text{pgcd}(a, b)$ .

Montrer :  $\text{pgcd}(X^a - 1, X^b - 1) = X^\delta - 1$ , dans  $K[X]$ .

**17.23****Exemple d'équation dont les inconnues sont deux polynômes**

Soient  $(a, b) \in (\mathbb{N} - \{0, 1\})^2$ ,  $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$  tels que  $P^a - Q^b = 1$ .

Montrer que  $P$  et  $Q$  sont constants.

**17.24****Exemple de calcul de fonction symétrique, non algébrique, des zéros d'un polynôme**

a) Montrer que le polynôme  $P = X^3 - 11X + 12$  de  $\mathbb{R}[X]$  admet exactement trois zéros réels, notés  $a, b, c$  et que :

$$-4 < a < -3, \quad 1 < b < 2 < c < 3.$$

b) Calculer  $S = \text{Arctan } a + \text{Arctan } b + \text{Arctan } c$ .

**17.25****Localisation des zéros d'un polynôme**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_0 \in \mathbb{C}^*$ ,  $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ . On note

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0, \quad Q = X^n - |a_{n-1}|X^{n-1} - \dots - |a_0|.$$

a) Montrer que, dans  $[0; +\infty[$ ,  $Q$  admet un zéro et un seul, noté  $\rho$ .

b) Établir que, pour tout zéro  $z$  de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ , on a :  $|z| \leqslant \rho$ .

**17.26****Calcul des sommes des mêmes puissances des zéros d'un polynôme**

Soient  $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ ,  $P = X^3 + pX + q$ ,  $z_1, z_2, z_3$  les zéros de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ .

a) On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n$ .

1) Calculer  $S_0, S_1, S_2$ .

2) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $S_{n+3} + pS_{n+1} + qS_n = 0$ .

3) En déduire  $S_3, S_4, S_5, S_6$ .

b) On suppose de plus  $q \neq 0$ , et on note, pour tout  $n \in \mathbb{Z}_-$ ,  $S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n$ .

Calculer  $S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, S_{-4}$ .

**17.27 Exemple de résolution d'un système algébrique à trois inconnues**

Résoudre le système d'équations d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -5. \end{cases}$$

**17.28 Calcul du discriminant d'une équation du troisième degré**

Soient  $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ ,  $P = X^3 + pX + q$ ,  $z_1, z_2, z_3$  les zéros de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ . On note  $D = ((z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3))^2$ .

a) Montrer :  $D = -P'(z_1)P'(z_2)P'(z_3)$ .

b) En déduire :  $D = -(4p^3 + 27q^2)$ .

c) Conclure que  $P$  admet au moins un zéro au moins double si et seulement si  $4p^3 + 27q^2 = 0$ .

**17.29 CNS pour que les coefficients d'une équation algébrique vérifient une condition donnée**

Déterminer une CNS sur  $\lambda \in \mathbb{C}$  pour que deux des solutions de l'équation

$$z^4 - 4z^3 + \lambda z^2 - 12z + 3 = 0 \quad (1)$$

soient de produit égal à 1, et résoudre l'équation dans ce cas.

**17.30 Exemple d'utilisation de la formule portant sur  $\frac{P'}{P}$** 

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\deg(P) \geq 1$ .

a) Montrer que, si  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P'^2 - PP'')(x) \geq 0.$$

b) Ce résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  ?

**17.31 Polynômes réels positifs**

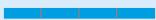
Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  ; montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0 \quad (ii) \exists (A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2, P = A^2 + B^2.$$

**17.32 Calcul d'une somme en liaison avec une décomposition en éléments simples**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  deux à deux distincts,  $P = \prod_{i=1}^n (X - z_i)$ .

Calculer, pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $A_k = \sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)}$ .



### 17.35 Exemple de calcul de la valeur d'un polynôme en un point connaissant sa valeur en d'autres points

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  tel que :  $\forall k \in \{1, \dots, n+1\}$ ,  $P(k) = \frac{1}{k^2}$ .

a) Montrer qu'il existe  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  unique tel que :

$$X^2 P - 1 = (aX + b) \prod_{k=1}^{n+1} (X - k)$$

et calculer  $(a, b)$ .

On fera intervenir le nombre harmonique  $H_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ .

b) Exprimer  $P(n+2)$ .

## Du mal à démarrer ?

**17.1** Récurrence sur  $n$ . Partir du côté le plus compliqué.

**17.2** Raisonner sur les degrés.

a) Montrer que, si  $P$  convient, alors  $\deg(P) = 1$ .

b) Obtenir une contradiction sur le degré de  $P$ , qui doit être un entier.

**17.3** Le reste  $R$  est de degré inférieur ou égal à 1, donc s'écrit  $R = aX + b$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Factoriser  $X^2 - X - 2$ , puis évaluer  $R$  en les zéros de  $X^2 - X - 2$ .

**17.4** Montrer :  $P_n(1) = 0$ ,  $P'_n(1) = 0$ ,  $P''_n(1) = 0$ ,  $P_n^{(3)}(1) \neq 0$ .

**17.5** Citer la formule du binôme de Newton, appliquée, par exemple, à  $X$  et  $Y$ , dériver par rapport à  $X$  pour  $Y$  fixé, puis remplacer  $Y$  par  $1 - X$ , et réitérer.

**17.6** Le reste  $R$  est de degré inférieur ou égal à 1, donc de la forme  $R = \alpha X + \beta$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Calculer  $\alpha$  et  $\beta$  en évaluant  $R$  en  $i$  et en  $-i$ .

**17.7** Séparer l'équivalence logique demandée en deux implications.

**17.8** Utiliser les zéros complexes  $j$  et  $j^2$  de  $X^2 + X + 1$ .

**17.9** • Le reste  $R$  est de degré inférieur ou égal à 1, donc est de la forme  $aX + b$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Évaluer en 0 et en 1 pour obtenir les valeurs de  $a$  et  $b$ .

• En notant  $Q$  le quotient, on a  $(X^2 - X)Q = P - R$ . Factoriser, dans  $P - R$ , par  $X$  et par  $X - 1$ .

**17.10** Si  $(P, Q)$  convient, déduire  $X - 2 \mid P - 1$ .

Exprimer la réponse en donnant  $P$  et  $Q$  en fonction d'un polynôme qui sert de paramètre.

**17.11** Montrer d'abord que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n \mid P_{n+1}$ .

**17.12** a) Remarquer qu'il s'agit d'un trinôme en  $X^3$ .

b), c) Il s'agit de trinômes bicarrés. On peut donc appliquer la méthode du cours, qui consiste à grouper deux des trois termes pour faire apparaître un début de carré parfait.

d) Passer par les nombres complexes, en remarquant que, pour tout  $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$  :

$$P^2 + Q^2 = (P + iQ)(P - iQ).$$

e) Factoriser d'abord par  $X + 1$ . L'autre facteur est un polynôme réciproque. Utiliser la notation  $Y = X + \frac{1}{X}$ .

f) Factoriser d'abord par  $X^2 - 1$ . L'autre facteur est un trinôme bicarré.

Dans chaque exemple, on contrôlera le résultat obtenu, en développant le produit.

**17.13** Noter  $x = \frac{p}{q}$  un zéro rationnel de  $P$ , où  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  et  $p \wedge q = 1$ . Déduire  $p \mid 6$  et  $q \mid 2$ , en utilisant le théorème de Gauss. On obtiendra 2 et  $\frac{1}{2}$  comme zéros rationnels de  $P$ .

**17.14** Envisager le pgcd de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**17.15** Travailler d'abord sur  $P'$  (qui est de degré 2) et pour lequel on connaît la valeur en deux points, puis sur  $P$  par primitivation.

**17.16** a) Si  $P$  est le carré d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ , alors celui-ci est de la forme  $X^2 + \frac{a}{2}X + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

b) Utiliser les résultats obtenus dans la résolution de a).

**17.17** Remarquer, par exemple, que  $S$  ressemble à  $\left(\sum z_1 z_2\right)\left(\sum z_1\right)$ .

**17.18** a) Ne pas oublier la partie entière, que l'on calculera, par exemple, par division euclidienne.

b) Une fois obtenus deux des trois coefficients, on pourra calculer le troisième en faisant tendre  $X$  vers l'infini, après avoir multiplié par  $X$ .

c) Ne pas oublier la partie entière, que l'on calculera, par exemple, par division euclidienne. Une fois obtenus deux des quatre coefficients, on pourra calculer les deux autres en faisant passer les termes connus de l'autre côté de l'égalité.

d) Calculer d'abord le coefficient relatif au pôle 0, puis faire passer ce terme de l'autre côté de l'égalité, et enfin utiliser des divisions euclidiennes successives.

**17.19** a) Montrer que  $f$  est linéaire et que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \deg(f(P)) = \deg(P).$$

En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $f$  et que l'endomorphisme  $f_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  induit par  $f$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$  est bijectif.

b) Démontrer que  $f(P'_n - nP_{n-1}) = 0$ .

c) Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.

**17.20** Remarquer que :

$$(X-1)P = X^{n+1} - 1 \quad \text{et} \quad (X^n - 1)Q = (X^n)^{n+1} - 1.$$

**17.21** Intercaler  $P(X)$  entre  $P(P(X))$  et  $X$ , et utiliser l'écriture additive d'un polynôme,  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .

**17.22** En supposant, par exemple,  $a \geq b$ , effectuer la division euclidienne de  $a$  par  $b$  (dans  $\mathbb{N}^*$ ) et la division euclidienne de  $X^a - 1$  par  $X^b - 1$  (dans  $K[X]$ ) en parallèle.

**17.23** Montrer d'abord  $P \wedge Q = 1$ .

En dérivant dans l'égalité de l'énoncé, déduire  $P \mid Q'$  et  $Q \mid P'$ , puis raisonner sur les degrés.

**17.24** a) Étudier les variations de  $P$ , ou bien évaluer  $P$  en  $-4, -3, 1, 2, 3$ .

b) En notant  $\alpha = \operatorname{Arctan} a, \dots$ , et en utilisant une formule de trigonométrie sur la tangente d'une somme de trois réels, calculer  $\tan S$ .

**17.25** a) Étudier les variations de la fonction

$$\varphi : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x) = \frac{Q(x)}{x^n}.$$

b) Utiliser l'inégalité triangulaire et a).

**17.26** a)2) Écrire que  $z_1, z_2, z_3$  sont zéros de  $P$ , multiplier par une puissance de  $z_1, z_2, z_3$ , puis sommer.

b) Montrer que la formule obtenue en a)2) est aussi valable lorsque  $n$  est négatif.

**17.27** Considérer le polynôme  $(X-x)(X-y)(X-z)$ . En notant  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  les fonctions symétriques élémentaires de  $x, y, z$ , et  $S_k = x^k + y^k + z^k$  pour  $k \in \{1, 2, 3\}$ , exprimer  $S_1, S_2, S_3$ .

**17.28** a) On a  $P = (X-z_1)Q_1$ , où  $Q_1 = (X-z_2)(X-z_3)$ .

Démontrer.

b) Exprimer  $D$  en fonction des fonctions symétriques élémentaires  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  de  $x^2, y^2, z^2$ , et calculer celles-ci en fonction des fonctions symétriques élémentaires  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  de  $x, y, z$ .

**17.29** • En notant  $z_1, z_2, z_3, z_4$  les solutions de (1) dans  $\mathbb{C}$  et en envisageant la condition  $z_1 z_2 = 1$ , considérer les fonctions symétriques élémentaires  $s, p$  de  $z_1, z_2$ , et les fonctions symétriques élémentaires  $s', p'$  de  $z_3, z_4$ .

• Ayant obtenu la CNS cherchée,  $\lambda = 4$ , en utilisant les calculs précédents, déduire  $s, p, s', p'$ , puis  $z_1, z_2, z_3, z_4$ .

**17.30** a) Utiliser la formule du cours portant sur  $\frac{P'}{P}$  puis démontrer.

b) Trouver un contre-exemple.

**17.31** Séparer l'équivalence logique en deux implications.

Pour l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii), utiliser la décomposition primaire de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et montrer, en notant

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X]; \exists (A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2, P = A^2 + B^2\},$$

que  $F$  est stable par multiplication.

**17.32** Utiliser la décomposition en éléments simples de  $\frac{X^k}{P}$ .

**17.33** a) Remarquer que  $Q = X^2 P - 1$  est de degré  $\leq n+2$  et s'annule en  $1, \dots, n+1$ .

Calculer  $b$  à l'aide du remplacement de  $X$  par 0.

Pour calculer  $a$ , envisager  $\frac{Q'}{Q}$ .

# Corrigés des exercices

## 17.1

Récurrence sur  $n$ .

- La propriété est vraie pour  $n = 0$ , car

$$\sum_{k=0}^0 P_k(X) = P_0(X) = 1 \text{ et } P_0(X-1) = 1.$$

- La propriété est vraie pour  $n = 1$ , car

$$\sum_{k=0}^1 P_k(X) = P_0(X) + P_1(X) = 1 - X$$

et  $P_1(X-1) = -(X-1) = 1 - X$ .

- Supposons la propriété vraie pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} P_k(X) &= \left( \sum_{k=0}^n P_k(X) \right) + P_{n+1}(X) \\ &= P_n(X-1) + P_{n+1}(X) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} (X-1) \dots (X-n) \\ &\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} X(X-1) \dots (X-n) \\ &= \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (X-1) \dots (X-n) ((n+1)-X) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} (X-1) \dots (X-n) (X-(n+1)) \\ &= P_{n+1}(X-1) \end{aligned}$$

Ceci montre que la propriété est vraie pour  $n+1$ .

On conclut, par récurrence sur  $n$ , que la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 17.2

a) Il est clair que le polynôme nul convient.

- 1) Soit  $P$  convenant tel que  $P \neq 0$ . Notons  $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$ . Le polynôme  $P$  s'écrit :  $P = a_n X^n + \dots + a_0$ , où  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  et  $a_n \neq 0$ .

Puisque  $X^2 P'' + 2XP' - 2P = 0$ , le terme de degré  $n$  de ce polynôme est nul, donc  $n(n-1)a_n + 2na_n - 2a_n = 0$ , c'est-à-dire  $(n^2 + n - 2)a_n = 0$ , d'où, puisque  $a_n \neq 0$  :  $n^2 + n - 2 = 0$ .

On résout cette équation du second degré :

$$n^2 + n - 2 = 0 \iff (n = 1 \text{ ou } n = -2).$$

Comme  $n \in \mathbb{N}$ , on a nécessairement  $n = 1$ .

Ceci montre que  $P$  est de degré 1.

- 2) En notant  $P = aX + b$ ,  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ , on a alors :

$$X^2 P'' + 2XP' - P = 2aX - 2(aX + b) = -2b,$$

donc :

$$X^2 P'' + 2XP' - 2P = 0 \iff b = 0 \iff P = aX.$$

On peut contrôler que ces polynômes conviennent bien.

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est  $\{aX ; a \in \mathbb{R}\}$ .

b) Le même raisonnement qu'en a), portant sur le degré de  $P$ , montre que, si  $P \neq 0$  et si  $P$  convient, alors, en notant  $n = \deg(P)$ , on a :  $n^2 + n - 1 = 0$ . Mais les solutions de cette équation du second degré sont  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ , qui ne sont pas des entiers.

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est  $\{0\}$ .

- 17.3 Par division euclidienne, il existe  $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$  unique tel que :

$$X^n = (X^2 - X - 2)Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < 2.$$

Il existe donc  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  unique tel que  $R = aX + b$ .

Comme  $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ , on déduit, en remplaçant  $X$  par  $-1$ , par  $2$  :

$$\begin{cases} (-1)^n = -a + b & -1 \\ 2^n = 2a + b & 1 \end{cases}$$

On résout ce système linéaire de deux équations à deux inconnues, par exemple en utilisant les coefficients indiqués, et on obtient :

$$3a = 2^n - (-1)^n, \quad 3b = 2^n + 2(-1)^n.$$

On conclut : le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - X - 2$  est :

$$R = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)X + \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n).$$

### 17.4

On calcule :

- $P_n(1) = (n-1) - 2(2n-1) + 2n^2 - (2n^2 - 3n + 1) = 0$
- $P'_n = 2n(n-1)X^{2n-1} - 2n(2n-1)X^{n-1} + 2n^2,$

donc  $P'_n(1) = 2n(n-1) - 2n(2n-1) + 2n^2 = 0$

- $P''_n = 2n(n-1)(2n-1)X^{2n-2} - 2n(2n-1)(n-1)X^{n-2}$   
 $= 2n(2n-1)(n-1)(X^{2n-2} - X^{n-2}),$

donc  $P''_n(1) = 0$

- $P_n^{(3)} = 2n(2n-1)(n-1)((2n-2)X^{2n-3} - (n-2)X^{n-3}),$   
 donc  $P_n^{(3)}(1) = 2n(2n-1)(n-1)n \neq 0.$

Ainsi :  $P_n(1) = 0, P'_n(1) = 0, P''_n(1) = 0, P_n^{(3)}(1) \neq 0.$

On conclut, d'après un théorème du cours, que 1 est zéro d'ordre trois exactement de  $P_n.$

### 17.5

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k Y^{n-k} = (X+Y)^n.$$

1) En remplaçant Y par  $1-X$ , on obtient :

$$P_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X+(1-X))^n = 1.$$

2) Dérivons par rapport à X, pour Y fixé :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} X^{k-1} Y^{n-k} = n(X+Y)^{n-1},$$

puis multiplions par X :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} X^k Y^{n-k} = nX(X+Y)^{n-1}.$$

En remplaçant Y par  $1-X$ , on obtient :

$$P_1 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

$$= nX(X+(1-X))^{n-1} = nX.$$

3) Dérivons par rapport à X, pour Y fixé, dans l'égalité obtenue plus haut :

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} X^{k-1} Y^{n-k} =$$

$$n(X+Y)^{n-1} + n(n-1)X(X+Y)^{n-2},$$

puis multiplions par X :

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} X^k Y^{n-k} =$$

$$nX(X+Y)^{n-1} + n(n-1)X^2(X+Y)^{n-2}.$$

Enfin, en remplaçant Y par  $1-X$ , on obtient :

$$P_2 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = nX + n(n-1)X^2.$$

17.6 Par division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 1$ , il existe  $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$  unique tel que :

$$P = (X^2 + 1)Q + R, \quad \deg(R) < 2.$$

Il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  unique tel que :  $R = \alpha X + \beta.$

On a alors, en prenant la valeur en i, qui est un zéro complexe de  $X^2 + 1$  :

$$\alpha i + \beta = R(i) = P(i)$$

$$= \prod_{k=1}^n (i \sin ka + \cos ka) = \prod_{k=1}^n e^{ika}$$

$$= \exp \left( \sum_{k=1}^n i ka \right) = \exp \left( i \frac{n(n+1)}{2} a \right)$$

$$= \cos \frac{n(n+1)}{2} a + i \sin \frac{n(n+1)}{2} a.$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\alpha = \sin \frac{n(n+1)}{2} a, \quad \beta = \cos \frac{n(n+1)}{2} a.$$

On conclut que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 1$  est :

$$X \sin \frac{n(n+1)}{2} a + \cos \frac{n(n+1)}{2} a.$$

17.7  $\implies$  :

Puisque  $A \wedge B = 1$ , on a  $\begin{cases} (A+B) \wedge A = 1 \\ (A+B) \wedge B = 1 \end{cases}$ , donc  $(A+B) \wedge (AB) = 1.$

$\Leftarrow$  :

Puisque  $A \wedge B$  divise  $A$  et  $B$ ,  $A \wedge B$  divise  $A+B$  et  $AB$ , donc  $A \wedge B = 1.$

17.8 Notons  $A = X^2 + X + 1$  et  $P_n = (X^4 + 1)^n - X^n.$

Comme  $A = (X-j)(X-j^2)$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , A est scindé simple sur  $\mathbb{C}$ , donc :

$$A \mid P_n \iff (P_n(j) = 0 \text{ et } P_n(j^2) = 0).$$

De plus, comme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$ , on a :  $P_n(j^2) = P_n(j) = \overline{P_n(j)}$ , donc :

$$A \mid P_n \iff P_n(j) = 0.$$

Et :

$$\begin{aligned}
 P_n(j) = 0 &\iff (j^4 + 1)^n - j^n = 0 \\
 &\iff (j+1)^n = j^n \iff (-j^2)^n = j^n \\
 &\iff \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^n = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^n \\
 &\iff \frac{n\pi}{3} \equiv \frac{2n\pi}{3} \pmod{2\pi} \\
 &\iff \frac{n\pi}{3} \equiv 0 \pmod{2\pi} \iff n \equiv 0 \pmod{6}.
 \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des  $n$  convenant est l'ensemble des multiples de 6 dans  $\mathbb{N}^*$ .

**17.9** Par division euclidienne de  $P$  par  $X^2 - X$ , il existe  $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$  unique tel que :

$$P = (X^2 - X)Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < 2.$$

1) Il existe donc  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  unique tel que  $R = aX + b$ . Comme  $X^2 - X = X(X - 1)$ , prenons les valeurs en 0 et en 1 :

$$\begin{cases} P(0) = R(0) = b \\ P(1) = R(1) = a + b. \end{cases}$$

D'autre part :  $P(0) = 1 + (-1)^n$  et  $P(1) = 2$ . On déduit :

$$b = 1 + (-1)^n, \quad a = P(1) - b = 1 - (-1)^n.$$

Ainsi, le reste  $R$  est :

$$R = (1 - (-1)^n)X + (1 + (-1)^n).$$

2) Ensuite, connaissant le reste, on va calculer le quotient par factorisation :

$$\begin{aligned}
 (X^2 - X)Q &= P - R \\
 &= X^n + (X - 1)^n + 1 - (1 - (-1)^n)X - (1 + (-1)^n) \\
 &= X^n + (X - 1)^n - (1 - (-1)^n)X - (-1)^n \\
 &= (X^n - X) + ((X - 1)^n + (-1)^n X - (-1)^n) \\
 &= X(X^{n-1} - 1) + (X - 1)((X - 1)^{n-1} - (-1)^{n-1}) \\
 &= X(X - 1) \sum_{k=0}^{n-2} X^k + (X - 1)X \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k} (X - 1)^k.
 \end{aligned}$$

On conclut que le quotient  $Q$  est :

$$Q = \sum_{k=0}^{n-2} X^k + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k (X - 1)^k.$$

**17.10** Soit  $(P, Q) \in (K[X])^2$ .

1) Si  $(P, Q)$  convient, alors :

$$\begin{aligned}
 X - 2 \mid (X - 2)Q &= -(X^2 - 5X + 7)P + (2X - 3) \\
 &= -(X - 2)(X - 3) + 1)P + 2(X - 2) + 1 \\
 &= (X - 2)(-(X - 3)P + 2) - (P - 1),
 \end{aligned}$$

donc  $X - 2 \mid P - 1$ .

On pouvait aussi remarquer que, si l'on remplace  $X$  par 2 dans (1), on obtient  $P(2) = 1$ , donc  $X - 2 \mid P - 1$ .

Il existe donc  $A \in K[X]$  tel que :  $P - 1 = (X - 2)A$ .

2) On a, pour tout  $A \in K[X]$ , en notant  $P = (X - 2)A + 1$  :

$$\begin{aligned}
 (1) &\iff (X^2 - 5X + 7)((X - 2)A + 1) + (X - 2)Q \\
 &= 2X - 3 \\
 &\iff (X - 2)(X^2 - 5X + 7)A + Q \\
 &= -X^2 + 7X - 10 \\
 &\iff (X - 2)(X^2 - 5X + 7)A + Q \\
 &= (X - 2)(-X + 5) \\
 &\iff (X^2 - 5X + 7)A + Q = -X + 5 \\
 &\iff Q = -(X^2 - 5X + 7)A + (-X + 5).
 \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des couples  $(P, Q)$  cherchés est :

$$\left\{ \begin{array}{l} (P = (X - 2)A + 1, \\ Q = -(X^2 - 5X + 7)A + (-X + 5)); A \in K[X] \end{array} \right\}.$$

On peut contrôler que les couples obtenus conviennent.

**17.11** 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\begin{aligned}
 P_{n+1} &= X^{2^{n+1}} + X^{2^n} + 1 = (X^{2^n})^2 + X^{2^n} + 1 \\
 &= (X^{2^n} + 1)^2 - X^{2^n} = (X^{2^n} + 1)^2 - (X^{2^{n-1}})^2 \\
 &= (X^{2^n} + 1 - X^{2^{n-1}})(X^{2^n} + 1 + X^{2^{n-1}}) \\
 &= (X^{2^n} - X^{2^{n-1}} + 1)P_n,
 \end{aligned}$$

ce qui montre :  $P_n \mid P_{n+1}$ .

2) Soit  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $n \leq m$ . On a successivement, d'après 1) :  $P_n \mid P_{n+1} \mid P_{n+2} \mid \dots \mid P_{m-1} \mid P_m$ , donc, par transitivité de la divisibilité :  $P_n \mid P_m$ .

17.12

a) Il s'agit d'un trinôme en  $X^3$  :

$$\begin{aligned} X^6 + 9X^3 + 8 &= (X^3 + 1)(X^3 + 8) \\ &= (X + 1)(X^2 - X + 1)(X + 2)(X^2 - 2X + 4). \end{aligned}$$

Les deux trinômes du second degré apparus sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , car de discriminants  $< 0$ .

b) Il s'agit d'un trinôme bicarré :

$$\begin{aligned} X^4 - 2X^2 + 9 &= (X^2 + 3)^2 - 8X^2 \\ &= (X^2 + 3 - 2\sqrt{2}X)(X^2 + 3 + 2\sqrt{2}X) \\ &= (X^2 - 2\sqrt{2}X + 3)(X^2 + 2\sqrt{2}X + 3). \end{aligned}$$

Les deux trinômes du second degré apparus sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , car de discriminants  $< 0$ .

c) Il s'agit d'un trinôme bicarré :

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 - 6 &= (X^2 - 2)(X^2 + 3) \\ &= (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + 3). \end{aligned}$$

d) Passons par les nombres complexes :

$$\begin{aligned} (X^2 - 4X + 1)^2 + (3X - 5)^2 &= \\ ((X^2 - 4X + 1) + i(3X - 5))((X^2 - 4X + 1) - i(3X - 5)) &= \\ = (\underbrace{X^2 - (4 - 3i)X + (1 - 5i)}_{\text{noté } Q}) & \\ (\underbrace{X^2 - (4 + 3i)X + (1 + 5i)}_{\text{c'est } \bar{Q}}). & \end{aligned}$$

Le polynôme  $Q$  est du second degré. Son discriminant est :

$$\Delta = (4 - 3i)^2 - 4(1 - 5i) = 3 - 4i = (2 - i)^2.$$

Les zéros de  $Q$  dans  $\mathbb{C}$  sont donc :

$$\frac{4 - 3i - (2 - i)}{2} = 1 - i$$

et

$$\frac{4 - 3i + (2 - i)}{2} = 3 - 2i.$$

D'où :

$$Q = (X - (1 - i))(X - (3 - 2i)),$$

puis :

$$\begin{aligned} P &= Q \bar{Q} \\ &= [(X - (1 - i))(X - (3 - 2i))] \\ &\quad [(X - (1 + i))(X - (3 + 2i))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [(X - (1 - i))(X - (1 + i))] \\ &\quad [(X - (3 - 2i))(X - (3 + 2i))] \\ &= [(X - 1 + i)(X - 1 - i)] \\ &\quad [(X - 3 + 2i)(X - 3 - 2i)] \\ &= ((X - 1)^2 + 1)((X - 3)^2 + 4) \\ &= (X^2 - 2X + 2)(X^2 - 6X + 13). \end{aligned}$$

Les deux trinômes du second degré apparus sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , car de discriminants  $< 0$ .

e) On a :

$$X^5 + 1 = (X + 1)\underbrace{(X^4 - X^3 + X^2 - X + 1)}_{\text{noté } P}.$$

Le polynôme  $P$  est réciproque. On a, en passant par les fractions rationnelles :

$$\begin{aligned} P &= X^2 \left( X^2 - X + 1 - \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} \right) \\ &= X^2 \left( \left( X^2 + \frac{1}{X^2} \right) - \left( X + \frac{1}{X} \right) + 1 \right). \end{aligned}$$

En notant  $Y = X + \frac{1}{X}$ , on obtient :

$$P = X^2((Y^2 - 2) - Y + 1) = X^2(Y^2 - Y - 1).$$

On factorise, dans  $\mathbb{R}[Y]$ , le trinôme du second degré apparu, et on revient à la notation  $X$  :

$$\begin{aligned} P &= X^2 \left( Y - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left( Y - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= X^2 \left( X + \frac{1}{X} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( X + \frac{1}{X} + \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \left( X^2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} X + 1 \right) \left( X^2 - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} X + 1 \right). \end{aligned}$$

On conclut :

$$X^5 + 1 = (X + 1)$$

$$\left( X^2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} X + 1 \right) \left( X^2 - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} X + 1 \right).$$

Les deux trinômes du second degré apparus sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , car de discriminants  $< 0$ .

f) 1<sup>re</sup> méthode :

On a :

$$\begin{aligned} X^6 - 1 &= (X^2 - 1)(X^4 + X^2 + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^4 + X^2 + 1). \end{aligned}$$

On factorise le trinôme bicarré obtenu :

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= (X^2 + 1)^2 - X^2 \\ &= ((X^2 + 1) - X)((X^2 + 1) + X) \\ &= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1). \end{aligned}$$

On conclut :

$$X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Les deux trinômes du second degré apparus sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , car de discriminants < 0.

2<sup>re</sup> méthode :

Les zéros de  $X^6 - 1$  dans  $\mathbb{C}$  sont les racines sixièmes de 1, qui sont  $1, -1, j, -j, j^2, -j^2$ , donc :

$$\begin{aligned} X^6 - 1 &= (X - 1)(X + 1)((X - j)(X - j^2))((X + j)(X + j^2)) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1). \end{aligned}$$

**17.13** Soit  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $x = \frac{p}{q}$ ,  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ,  $p \wedge q = 1$ .

• On a :

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff 2p^4 - 3p^3q + 3p^2q^2 - 13pq^3 + 6q^4 = 0 \\ &\implies \begin{cases} p \mid 6q^4 \\ q \mid 2p^4 \end{cases} \implies \begin{cases} p \mid 6 \\ q \mid 2, \end{cases} \end{aligned}$$

d'après le théorème de Gauss, puisque  $p \wedge q = 1$ .

Ceci montre que les éventuels zéros rationnels de  $P$  sont nécessairement de la forme  $\frac{p}{q}$  où :

$$p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}, \quad q \in \{1, 2\}.$$

On essaie toutes les possibilités, ou on remarque que  $P(2) = 0$  et  $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .

• On peut donc factoriser  $P$  par  $X - 2$  et par  $X - \frac{1}{2}$ , ou encore par  $2X - 1$  :

$$\begin{aligned} P &= (X - 2)(2X^3 + X^2 + 5X - 3) \\ &= (X - 2)(2X - 1)(X^2 + X + 3). \end{aligned}$$

Le trinôme qui apparaît est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  car son discriminant est < 0.

**17.14** • Calculons le pgcd de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , par divisions euclidiennes successives :

	X	X + a
$X^4 + 2X^2 + b$	$X^3 + X + a$	$X^2 - aX + b$
$X^2 - aX + b$	$aX^2 + (1 - b)X + a$	
		$(1 - b + a^2)X + (a - ab)$

Si  $A$  et  $B$  ont au moins deux zéros communs, alors  $\deg(A \wedge B) \geq 2$ , donc :

$$(1 - b + a^2)X + (a - ab) = 0,$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} 1 - b + a^2 = 0 \\ a - ab = 0 \end{cases} \text{ et donc } a = 0 \text{ et } b = 1.$$

• Réciproquement, pour  $a = 0$  et  $b = 1$ , on a :

$$A = X^3 + X = X(X^2 + 1)$$

et

$$B = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2,$$

donc  $A$  et  $B$  ont deux zéros communs dans  $\mathbb{C}$ , les nombres complexes  $i$  et  $-i$ .

On conclut que  $A$  et  $B$  ont au moins deux zéros communs dans  $\mathbb{C}$  si et seulement si :  $(a, b) = (0, 1)$ .

**17.15** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , de degré 3.

I) On a :

$$\begin{cases} P'(j) = j \\ P'(j^2) = j^2 \end{cases} \iff \begin{cases} (P' - X)(j) = 0 \\ (P' - X)(j^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X - j \mid P' - X \\ X - j^2 \mid P' - X \end{cases}$$

$$\underset{j \neq j^2}{\iff} (X - j)(X - j^2) \mid P' - X$$

$$\iff X^2 + X + 1 \mid P' - X.$$

Comme de plus  $P' - X$  est de degré 2, si  $P$  convient, alors il existe  $a \in \mathbb{C}$  tel que :  $P' - X = a(X^2 + X + 1)$ , d'où :

$$P' = a(X^2 + X + 1) + X.$$

En primitivant, si  $P$  convient, alors il existe  $b \in \mathbb{C}$  tel que :

$$P = \frac{a}{3}X^3 + \frac{a+1}{2}X^2 + aX + b.$$

2) On a alors, pour un tel polynôme  $P$  :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} P(j) = j^2 \\ P(j^2) = j \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l|l} \frac{a}{3} + \frac{a+1}{2}j^2 + aj + b = j^2 & 1 \\ \frac{a}{3} + \frac{a+1}{2}j + aj^2 + b = j & 1 \end{array} \right| -1 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{2a}{3} - \frac{a+1}{2} - a + 2b = -1 \\ \left(\frac{a+1}{2} - a\right)(j^2 - j) = j^2 - j \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} -\frac{5a}{6} + 2b = -\frac{1}{2} \\ 1 - a = 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -\frac{2}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

On conclut qu'il y a un polynôme  $P$  et un seul convenant :

$$P = -\frac{1}{3}X^3 - X - \frac{2}{3}.$$

On peut contrôler que  $P$  convient bien.

**17.16** a) Pour que  $P$  soit le carré d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ , puisque  $P$  est de degré 4, il faut et il suffit qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que :

$$P = \left(X^2 + \frac{a}{2}X + c\right)^2 \quad (1).$$

Et :

$$\begin{aligned} (1) &\iff P = X^4 + aX^3 + \left(\frac{a^2}{4} + 2c\right)X^2 + acX + c^2 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2}{4} + 2c = b \\ ac = 12 \\ c^2 = 9 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} c = 3 & c = -3 \\ a = 4 & a = -4 \\ b = 10 & b = -2. \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{ll} c = 3 & c = -3 \\ a = -4 & a = 4 \\ b = -10 & b = 2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

On conclut que  $P$  est le carré d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  si et seulement si :

$$(a, b) = (4, 10) \quad \text{ou} \quad (a, b) = (-4, -2).$$

b) 1) Cas  $(a, b) = (4, 10)$  :

On a alors  $c = 3$ , donc  $P = (X^2 + 2X + 3)^2$  et :

$$\begin{aligned} P - 1 &= (X^2 + 2X + 3)^2 - 1 \\ &= (X^2 + 2X + 2)(X^2 + 2X + 4) \end{aligned}$$

et les trois trinômes du second degré qui apparaissent sont irréductibles puisque leurs discriminants sont  $< 0$ .

2) Cas  $(a, b) = (-4, -2)$  :

On a alors  $c = -3$  et :

$$\begin{aligned} P &= (X^2 - 2X - 3)^2 = ((X+1)(X-3))^2 \\ &= (X+1)^2(X-3)^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P - 1 &= (X^2 - 2X - 3)^2 - 1 \\ &= (X^2 - 2X - 4)(X^2 - 2X - 2) \\ &= ((X-1)^2 - 5)((X-1)^2 - 3) \\ &= (X-1-\sqrt{5})(X-1+\sqrt{5}) \\ &\quad (X-1-\sqrt{3})(X-1+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

**17.17** En notant sous le symbole  $\sum$  le nombre de termes de la sommation concernée, on remarque :

$$S = \left( \sum_6 z_1 z_2 \right) \left( \sum_4 z_1 \right) - 3 \sum_4 z_1 z_2 z_3.$$

En notant  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  les fonctions symétriques élémentaires de  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , on a donc :  $S = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3$ .

De plus, d'après les relations entre coefficients et zéros d'un polynôme scindé, on a :

$$\sigma_1 = -a, \quad \sigma_2 = b, \quad \sigma_3 = -c.$$

On conclut :  $S = -ab + 3c$ .

**17.18** a) La décomposition en éléments simples de  $F$  est de la forme :

$$F = E + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2},$$

où  $E \in \mathbb{R}[X]$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  sont à calculer.

- On calcule  $E$  par division euclidienne de  $X^3$  par  $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$  :

$$\begin{array}{r|l} & X^2 - 3X + 2 \\ X^3 & \left. \right. \\ -3X^2 + 2X & \left. \right. \\ \hline & X + 3 \\ & -7X + 6 \\ \hline & 7X - 6 \end{array}$$

On a donc :  $E = X + 3$ .

- On calcule  $a$  par multiplication par  $X-1$  puis remplacement de  $X$  par 1. On obtient :  $a = -1$ .

- On calcule  $b$  par multiplication par  $X-2$  puis remplacement de  $X$  par 2. On obtient :  $b = 8$ .

On conclut à la décomposition en éléments simples :

$$\frac{X^3}{(X-1)(X-2)} = X + 3 - \frac{1}{X-1} + \frac{8}{X-2}.$$

b) La décomposition de  $F$  est de la forme :

$$F = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2},$$

où  $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$  est à calculer.

On calcule  $a$  par multiplication par  $(X-1)^2$  puis remplacement de  $X$  par 1. On obtient :  $a = \frac{1}{3}$ .

• On calcule  $c$  par multiplication par  $X+2$  puis remplacement de  $X$  par  $-2$ . On obtient :  $c = -\frac{2}{9}$ .

• Pour calculer ensuite  $b$ , on multiplie par  $X$  puis on fait tendre  $X$  vers l'infini. On obtient  $0 = b+c$ , donc  $b = -c = \frac{2}{9}$ .

On conclut à la décomposition en éléments simples :

$$\frac{X}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{X-1} - \frac{2}{9} \frac{1}{X+2}.$$

c) La partie entière est le quotient de la division euclidienne de  $X^5 + 1$  par  $X^2(X-1)^2$ .

$$\begin{array}{r} X^5 \\ \hline 2X^4 - X^3 & +1 \\ 3X^3 - 2X^2 + 1 & \end{array} \left| \begin{array}{r} X^4 - 2X^3 + X^2 \\ \hline X+2 \end{array} \right.$$

La DES de la fraction rationnelle  $F$  proposée est de la forme :

$$F = X+2 + \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{X-1},$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

On calcule  $a$  par multiplication par  $X^2$  puis remplacement de  $X$  par 0 :  $a = 1$ .

De même, par multiplication par  $(X-1)^2$  puis remplacement de  $X$  par 1 :  $c = 2$ .

$$\begin{aligned} \text{Puis : } \frac{b}{X} + \frac{d}{X-1} &= (F - (X+2)) - \frac{1}{X^2} - \frac{2}{(X-1)^2} \\ &= \frac{3X^3 - 2X^2 + 1}{X^2(X-1)^2} - \frac{1}{X^2} - \frac{2}{(X-1)^2} \\ &= \frac{3X^3 - 5X^2 + 2X}{X^2(X-1)^2} = \frac{3X-2}{X(X-1)}. \end{aligned}$$

On calcule  $b$  par multiplication par  $X$  puis remplacement de  $X$  par 0 :  $b = 2$ .

De même, par multiplication par  $X-1$  puis remplacement de  $X$  par 1 :  $d = 1$ .

$$\text{Finalement : } F = X+2 + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1}.$$

d) La partie entière de la fraction rationnelle  $F$  proposée est nulle, et la DES est de la forme :

$$F = \frac{\lambda}{X} + \frac{aX+b}{(X^2+1)^3} + \frac{cX+d}{(X^2+1)^2} + \frac{eX+f}{X^2+1},$$

où  $\lambda, a, \dots, f \in \mathbb{R}$ .

On calcule  $\lambda$  par multiplication par  $X$  et remplacement de  $X$  par 0 :  $\lambda = 1$ .

Puis :

$$\begin{aligned} F - \frac{1}{X} &= \frac{X^4 + X + 1 - (X^2 + 1)^3}{X(X^2 + 1)^3} \\ &= \frac{-X^6 - 2X^4 - 3X^2 + X}{X(X^2 + 1)^3} \\ &= \frac{-X^5 - 2X^3 - 3X + 1}{(X^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

Par divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{r} -X^5 - 2X^3 - 3X + 1 \\ \hline -X^3 - 3X + 1 \\ \hline -2X + 1 \end{array} \left| \begin{array}{r} X^2 + 1 \\ \hline -X^3 - X \\ \hline 0 \end{array} \right| \begin{array}{r} X^2 + 1 \\ \hline -X \end{array}$$

D'où :  $a = -2, b = 1, c = 0, d = 0, e = -1, f = 0$ .

$$\text{Finalement : } F = \frac{1}{X} + \frac{-2X+1}{(X^2+1)^3} - \frac{X}{X^2+1}.$$

### 17.19 a) Il est immédiat que l'application

$$f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], P \longmapsto f(P) = P(X) + P(X+1)$$

est linéaire, et, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\deg(f(P)) = \deg(P)$ , car, si  $P = a_nX^n + \dots + a_0$ , où  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  et  $a_n \neq 0$ , alors, d'après la formule du binôme de Newton,  $f(P)$  est de degré  $\leq n$  et le terme de degré  $n$  de  $f(P)$  est  $2a_nX^n$  où  $2a_n \neq 0$ .

Il en résulte que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $f$  et que l'endomorphisme  $f_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , induit par  $f$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$ , est bijectif, car sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est triangulaire supérieure à termes diagonaux tous non nuls.

• On conclut que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $2X^n$  admet un antécédent et un seul par  $f$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , donc il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  unique tel que  $f(P) = 2X^n$ , et on a :  $\deg(P_n) = n$ .

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a, par dérivation :

$$\begin{aligned} P'_n(X) + P'_n(X+1) &= (2X^n)' = 2nX^{n-1} = n(2X^{n-1}) \\ &= n(P_{n-1}(X) + P_{n-1}(X+1)), \end{aligned}$$

d'où :

$$(P'_n(X) - nP_{n-1}(X)) + (P'_n(X+1) - nP_{n-1}(X+1)) = 0.$$

Notons  $Q_n = P'_n - nP_{n-1}$ . On a donc :

$$Q_n(X) + Q_n(X+1) = 0,$$

c'est-à-dire  $f(Q_n) = 0$ . Comme  $f$  est bijective (donc injective), il en résulte  $Q_n = 0$ , et donc :  $P'_n - nP_{n-1} = 0$ , d'où  $P'_n = nP_{n-1}$ .

c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

• D'après la formule de Taylor, puisque  $\deg(P_n) = n$ , on a :

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(X).$$

Et, d'après b), en réitérant :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\},$$

$$\begin{aligned} P_n^{(k)}(X) &= n(n-1) \dots (n-k+1) P_{n-k}(X) \\ &= \frac{n!}{k!} P_{n-k}(X). \end{aligned}$$

D'où :

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X).$$

• En isolant le terme d'indice 0 de cette sommation, on a :

$$P_n(X+1) = P_n(X) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X),$$

et on conclut, en remplaçant  $P_n(X+1)$  par  $2X^n - P_n(X)$ , que :

$$P_n(X) = X^n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X),$$

ou encore, en réordonnant la sommation par un changement d'indice :

$$P_n(X) = X^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} P_k(X).$$

## 17.20 I) On a :

$$\begin{aligned} (X^n - 1)Q &= (X^n - 1) \sum_{k=0}^n (X^n)^k \\ &= (X^n)^{n+1} - 1 = (X^{n+1})^n - 1 \\ &= (X^{n+1} - 1)S, \end{aligned}$$

en notant  $S = \sum_{k=0}^{n-1} (X^{n+1})^k \in K[X]$ .

Ceci montre :  $X^{n+1} - 1 \mid (X^n - 1)Q$ .

2) Montrons :  $(X^n - 1) \wedge (X^{n+1} - 1) = X - 1$ .

• On sait  $X - 1 \mid X^n - 1$  et  $X - 1 \mid X^{n+1} - 1$ ,

donc  $X - 1 \mid (X^n - 1) \wedge (X^{n+1} - 1)$ .

• D'autre part :  $X^{n+1} - 1 = X(X^n - 1) + (X - 1)$ , donc, si un polynôme  $D$  de  $K[X]$  divise  $X^n - 1$  et divise  $X^{n+1} - 1$ , alors  $D$  divise  $X - 1$ .

Ceci montre :  $(X^n - 1) \wedge (X^{n+1} - 1) = X - 1$ .

3) En notant  $T = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ , on a donc :

$$X^{n+1} - 1 = (X - 1)P, \quad X^n - 1 = (X - 1)T,$$

$$\text{et } ((X - 1)P) \wedge ((X - 1)T) = X - 1, \text{ donc } P \wedge T = 1.$$

On a :  $(X - 1)P \mid (X - 1)TQ$ , c'est-à-dire :  $P \mid TQ$ .

Comme  $P \wedge T = 1$ , il en résulte, d'après le théorème de Gauss :  $P \mid Q$ .

**17.21** En notant  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ,  $(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}$ , on a :

$$\begin{aligned} P(P(X)) - X &= (P(P(X)) - P(X)) + (P(X) - X) \\ &= \left( \sum_{k=0}^n a_k (P(X))^k - \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) + (P(X) - X) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k ((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X). \end{aligned}$$

Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $P(X) - X \mid (P(X))^k - X^k$ , puisque :

$$(P(X))^k - X^k = (P(X) - X) \sum_{i=0}^{k-1} (P(X))^i X^{k-1-i}.$$

On conclut :  $P(X) - X \mid P(P(X)) - X$ .

**17.22** Il est clair qu'on peut supposer  $a \geq b$ .

Effectuons la division euclidienne de  $a$  par  $b$  dans  $\mathbb{N}^*$  :  $a = bq + r$ ,  $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ ,  $0 \leq r < b$ , puis celle de  $X^a - 1$  par  $X^b - 1$  dans  $K[X]$  :

$$\begin{array}{r|rr} X^a & -1 & X^b - 1 \\ X^{a-b} & -1 & \hline \\ \ddots & \vdots & X^{a-b} + \dots + X^{a-qb} \\ X^{a-qb} & -1 & \end{array}$$

Ceci montre que le reste de la division euclidienne de  $X^a - 1$  par  $X^b - 1$  dans  $K[X]$  est  $X^r - 1$ .

Ainsi, les algorithmes d'Euclide pour  $(a, b)$  dans  $\mathbb{Z}$  et pour  $(X^a - 1, X^b - 1)$  dans  $K[X]$  sont menés simultanément.

Le dernier reste non nul, dans la suite des divisions euclidiennes donnant le pgcd de  $X^a - 1$  et  $X^b - 1$ , est donc  $X^\delta - 1$ , d'où :

$$\text{pgcd}(X^a - 1, X^b - 1) = X^\delta - 1.$$

### 17.23

- Puisque  $PP^{a-1} + Q(-Q^{b-1}) = 1$ , d'après le théorème de Bezout :  $P \wedge Q = 1$ .
- D'autre part, puisque  $P^a - Q^b = 1$ , en dérivant, on déduit :

$$aP^{a-1}P' = bQ^{b-1}Q'.$$

Comme  $a - 1 \in \mathbb{N}^*$ , on a  $P \mid P^{a-1}$ , donc  $P \mid bQ^{b-1}Q'$ .

Comme  $P \wedge Q = 1$ , on a  $P \wedge (bQ^{b-1}) = 1$ , puis, d'après le théorème de Gauss :  $P \mid Q'$ .

De même, par rôles symétriques de  $(P,a)$  et  $(Q,b)$ , on obtient :  $Q \mid P'$ .

- Si  $P$  et  $Q$  ne sont pas constants, alors  $\deg(P') = \deg(P) - 1$  et  $\deg(Q') = \deg(Q) - 1$ , d'où, d'après le résultat précédent :

$$\deg(P) \leq \deg(Q) - 1 \quad \text{et} \quad \deg(Q) \leq \deg(P) - 1,$$

contradiction.

Ceci montre que  $P$  ou  $Q$  est constant.

- Si, par exemple,  $P$  est constant, alors  $Q^b = P^a - 1$  est constant,  $\deg(Q^b) = 0$ , puis  $b \deg(Q) = 0$  donc  $\deg(Q) = 0$ , et on déduit que  $Q$  est constant.

Finalement,  $P$  et  $Q$  sont constants.

### 17.24

- a) On calcule les valeurs de  $P$  aux points envisagés :

$$P(-4) = -8 < 0, \quad P(-3) = 18 > 0, \quad P(1) = 2 > 0,$$

$$P(2) = -2 < 0, \quad P(3) = 6 > 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque  $P$  est continu sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ , on déduit que  $P$  admet au moins trois zéros réels  $a, b, c$  tels que :

$$-4 < a < -3, \quad 1 < b < 2 < c < 3.$$

D'autre part, comme  $P$  est de degré 3,  $P$  admet au plus trois zéros réels, et on conclut que  $P$  admet exactement trois zéros réels,  $a, b, c$ .

b) Notons  $\alpha = \operatorname{Arctan} a$ ,  $\beta = \operatorname{Arctan} b$ ,  $\gamma = \operatorname{Arctan} c$ .

On a, si le dénominateur n'est pas nul, par une formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned} \tan S &= \tan(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - (\tan \alpha \tan \beta + \tan \alpha \tan \gamma + \tan \beta \tan \gamma)} \\ &= \frac{a+b+c-abc}{1-(ab+ac+bc)} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{1-\sigma_2}, \end{aligned}$$

où  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  désignent les fonctions symétriques élémentaires de  $a, b, c$ .

D'autre part, d'après les relations entre coefficients et zéros d'un polynôme scindé, on a :

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -11, \quad \sigma_3 = -12.$$

$$\text{D'où : } \tan S = \frac{12}{1+11} = 1.$$

Enfin, d'après les encadrements obtenus sur  $a, b, c$ , on a :

$$\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \right[ , \quad \beta \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[ , \quad \gamma \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[ ,$$

d'où, par addition :  $\alpha + \beta + \gamma \in \left] 0; \frac{3\pi}{4} \right[$ , et on conclut :

$$S = \frac{\pi}{4}.$$

### 17.25

- a) Comme  $Q(0) = -|a_0| < 0$ , le nombre 0 n'est pas zéro de  $Q$ .

Considérons l'application

$$\varphi : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \varphi(x) = \frac{Q(x)}{x^n} = 1 - \frac{|a_{n-1}|}{x} - \dots - \frac{|a_0|}{x^n}.$$

L'application  $\varphi$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \varphi'(x) = \frac{|a_{n-1}|}{x^2} + \dots + \frac{n|a_0|}{x^{n+1}} > 0,$$

donc  $\varphi$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

De plus :  $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{|a_0|}{x^n} \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty$  et  $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$ .

On dresse le tableau de variations de  $\varphi$  :

$x$	0	$\rho$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1

D'après le théorème de la bijection monotone,  $\varphi$  admet un zéro et un seul.

On en conclut que  $Q$  admet, dans  $[0; +\infty[$ , un zéro et un seul, noté  $\rho$ .

b) Soit  $z$  un zéro de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ .

Comme  $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = P(z) = 0$ , on a, en isolant le terme de degré  $n$ , puis en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|z|^n = |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \leq |a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_0|,$$

d'où :  $|Q(|z|)| \leq 0$ .

En utilisant l'application  $\varphi$  introduite en a), on a donc  $\varphi(|z|) \leq 0$ , et on conclut, d'après le tableau de variations de  $\varphi$  :

$$|z| \leq \rho.$$

### 17.26

- Notons  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  les fonctions symétriques élémentaires de  $z_1, z_2, z_3$ .

D'après les relations entre coefficients et zéros d'un polynôme scindé, on a :

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = p, \quad \sigma_3 = -q.$$

a) I) On a :  $S_0 = 3$ ,  $S_1 = \sigma_1 = 0$  et :

$$\begin{aligned} S_2 &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \\ &= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) \\ &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2p. \end{aligned}$$

2) On a, pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$  :  $z_k^3 + pz_k + q = 0$ , d'où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en multipliant par  $z_k^n$  :  $z_k^{n+3} + pz_k^{n+1} + qz_k^n = 0$ , puis en sommant pour  $k = 1, 2, 3$  :

$$S_{n+3} + pS_{n+1} + qS_n = 0.$$

3) La formule obtenue en 2) permet de calculer les  $S_n$  de proche en proche :

$$S_3 = -pS_1 - qS_0 = -3q,$$

$$S_4 = -pS_2 - qS_1 = 2p^2,$$

$$S_5 = -pS_3 - qS_2 = -p(-3q) - q(-2p) = 5pq,$$

$$S_6 = -pS_4 - qS_3 = -p(2p^2) - q(-3q) = -2p^3 + 3q^2.$$

b) • On peut calculer  $S_{-1}$  de plusieurs façons, par exemple :

$$S_{-1} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z_2 z_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = -\frac{p}{q}.$$

• Il est clair que la formule obtenue en a) 2) pour  $n \in \mathbb{N}$  est aussi valable lorsque  $q \neq 0$ , (c'est-à-dire lorsque  $z_1, z_2, z_3$  sont tous trois  $\neq 0$ ) de manière générale pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :  $S_{n+3} + pS_{n+1} + qS_n = 0$ , donc :

$$S_n = -\frac{1}{q}(pS_{n+1} + S_{n+3}).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} S_{-2} &= -\frac{1}{q}(pS_{-1} + S_1) = \frac{p^2}{q^2}, \\ S_{-3} &= -\frac{1}{q}(pS_{-2} + S_0) = -\frac{1}{q}\left(\frac{p^3}{q^2} + 3\right) \\ &= -\frac{p^3 + 3q^2}{q^3}, \\ S_{-4} &= -\frac{1}{q}(pS_{-3} + S_{-1}) = -\frac{1}{q}\left(-p\frac{p^3 + 3q^2}{q^3} - \frac{p}{q}\right) \\ &= \frac{p^4 + 4pq^2}{q^4}. \end{aligned}$$

### 17.27

Considérons le polynôme

$$P = (X - x)(X - y)(X - z),$$

qui se développe en  $P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$ , où  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les fonctions symétriques élémentaires de  $x, y, z$ .

Pour la commodité, notons  $p = -\sigma_1$ ,  $q = \sigma_2$ ,  $r = -\sigma_3$ , de sorte que  $x, y, z$  sont les zéros de  $P = X^3 + pX^2 + qX + r$ .

Notons, pour  $k \in \{1, 2, 3\}$  :  $S_k = x^k + y^k + z^k$ .

On a :  $S_1 = \sigma_1 = -p$ ,  $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = p^2 - 2q$ , et d'autre part, en additionnant les trois équations satisfaites par  $x, y, z$  :  $S_3 + pS_2 + qS_1 + 3r = 0$ , d'où :

$$S_3 = -pS_2 - qS_1 - 3r$$

$$= -p(p^2 - 2q) + qp - 3r = -p^3 + 3pq - 3r.$$

Donc :

$$(S) \iff \begin{cases} -p = 1 \\ p^2 - 2q = 1 \\ -p^3 + 3pq - 3r = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} p = -1 \\ q = 0 \\ r = 2. \end{cases}$$

Ainsi,  $(x, y, z)$  est solution de (S) si et seulement si  $x, y, z$  sont les zéros de  $P = X^3 - X^2 + 2$ .

Le nombre  $-1$  est solution évidente :

$$X^3 - X^2 + 2 = (X + 1)(X^2 - 2X + 2).$$

Les solutions de cette équation sont  $-1, 1 - i, 1 + i$ .

On conclut que les solutions de (S) sont  $(-1, 1 - i, 1 + i)$  et ses permuatés (six solutions en tout).

On peut contrôler que ce triplet convient bien.

### 17.28

a) On a  $P = (X - z_1)\underbrace{(X - z_2)(X - z_3)}$ , d'où, en noté  $Q_1$

dérivant :  $P' = (X - z_1)Q'_1 + Q_1$ , puis, en prenant la valeur en  $z_1$  :  $P'(z_1) = Q_1(z_1) = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)$ .

De même :

$$P'(z_2) = (z_2 - z_1)(z_2 - z_3), \quad P'(z_3) = (z_3 - z_1)(z_3 - z_2).$$

On déduit, par produit :

$$\begin{aligned} D &= ((z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3))^2 \\ &= -((z_1 - z_2)(z_1 - z_3))((z_2 - z_1)(z_2 - z_3)) \\ &\quad ((z_3 - z_1)(z_3 - z_2)) \\ &= -P'(z_1)P'(z_2)P'(z_3). \end{aligned}$$

b) D'après a), comme  $P' = 3X^2 + p$ , on a :

$$-D = (3z_1^2 + p)(3z_2^2 + p)(3z_3^2 + p).$$

En développant, on obtient :

$$-D = 27z_1^2 z_2^2 z_3^2 + 9p(z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2)$$

$$+ 3p^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) + p^3.$$

En notant  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  les fonctions symétriques élémentaires de  $z_1, z_2, z_3$  et  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  celles de  $z_1^2, z_2^2, z_3^2$ , on a :

$$\Sigma_1 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad \Sigma_2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3, \quad \Sigma_3 = \sigma_3^2.$$

D'autre part, d'après les relations entre coefficients et zéros d'un polynôme scindé, on a :

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = p, \quad \sigma_3 = -q.$$

D'où :

$$\Sigma_1 = -2p, \quad \Sigma_2 = p^2, \quad \Sigma_3 = q^2,$$

donc :

$$-D = 27q^2 + 9p^3 - 6p^3 + p^3 = 4p^3 + 27q^2.$$

On conclut :  $D = -(4p^3 + 27q^2)$ .

c) Le polynôme  $P$  admet au moins un zéro au moins double si et seulement si  $P'$  s'annule en  $z_1$  ou en  $z_2$  ou en  $z_3$ , c'est-à-dire si et seulement si  $D = 0$ , ce qui équivaut à :

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

**17.29** • Notons  $z_1, z_2, z_3, z_4$  les solutions de (1) dans  $\mathbb{C}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  les fonctions symétriques élémentaires de  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . En notant (C) la condition proposée, on a, d'après les relations entre coefficients et solutions d'une équation :

$$(C) \iff (\sigma_1 = 4, \sigma_2 = \lambda, \sigma_3 = 12, \sigma_4 = 3, z_1 z_2 = 1).$$

Notons  $s, p$  les fonctions symétriques élémentaires de  $z_1, z_2$ , et  $s', p'$  celles de  $z_3, z_4$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} s = z_1 + z_2 \\ p = z_1 z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} s' = z_3 + z_4 \\ p' = z_3 z_4. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} (C) &\iff \begin{cases} s + s' = 4 \\ ss' + p + p' = \lambda \\ sp' + s'p = 12 \\ pp' = 3 \\ p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 1 \\ p' = 3 \\ s + s' = 4 \\ 3s + s' = 12 \\ ss' = \lambda - 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} p = 1 \\ p' = 3 \\ s = 4 \\ s' = 0 \\ \lambda = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

La CNS cherchée est donc :  $\lambda = 4$ .

• Supposons dorénavant  $\lambda = 4$ .

En reprenant les calculs précédents, comme  $s = 4$  et  $p = 1$ ,  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de  $z^2 - 4z + 1 = 0$ , donc, à l'ordre

près,  $z_1 = 2 - \sqrt{3}$ ,  $z_2 = 2 + \sqrt{3}$  et, comme  $s' = 0$  et  $p' = 3$ ,  $z_3$  et  $z_4$  sont les solutions de  $z^2 + 3 = 0$ , donc, à l'ordre près,  $z_3 = -i\sqrt{3}$ ,  $z_4 = i\sqrt{3}$ .

Finalement, dans le cas  $\lambda = 4$ , les solutions de (1) sont :

$$2 - \sqrt{3}, \quad 2 + \sqrt{3}, \quad -i\sqrt{3}, \quad i\sqrt{3}.$$

On peut contrôler ce dernier résultat.

**17.30** a) Puisque  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , en notant  $n = \deg(P)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tels que :  $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k)$ .

On a alors, d'après le cours, dans  $\mathbb{R}[X]$  :  $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - x_k}$ .

En dérivant, on déduit :  $\left(\frac{P'}{P}\right)' = \sum_{k=1}^n -\frac{1}{(X - x_k)^2}$ ,

c'est-à-dire :  $\frac{P''P - P'^2}{P^2} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{(X - x_k)^2}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

• Si  $x$  n'est pas un zéro de  $P$ , c'est-à-dire si, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x \neq x_k$ , alors on peut remplacer  $X$  par  $x_k$  dans le résultat précédent, d'où :

$$(P'^2 - PP'')(x) = (P(x))^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x - x_k)^2} > 0.$$

• Si  $x$  est zéro de  $P$ , alors :  $(P'^2 - PP'')(x) = (P'(x))^2 \geqslant 0$ .

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P'^2 - PP'')(x) \geqslant 0.$$

b) Le résultat précédent ne s'étend pas à tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  (non constants).

Par exemple, pour  $P = X^2 + 1$ , qui n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , on a :  $P' = 2X$ ,  $P'' = 2$ , donc

$$P'^2 - PP'' = 4X^2 - 2(X^2 + 1) = 2X^2 - 2 = 2(X^2 - 1),$$

et, en particulier :  $(P'^2 - PP'')\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ , ce qui montre qu'on n'a pas :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P'^2 - PP'')(x) \geqslant 0$ .

**17.31** Notons  $E = \{P \in \mathbb{R}[X] ; \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0\}$

et  $F = \{P \in \mathbb{R}[X] ; \exists (A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2, P = A^2 + B^2\}$ .

Il est clair que  $F \subset E$  ; autrement dit : (ii)  $\implies$  (i).

Réciproquement, soit  $P \in E$ .

Remarquons d'abord que  $F$  contient tous les polynômes de la forme  $M^2$  ( $M \in \mathbb{R}[X]$ ), et est stable par multiplication car, pour tous  $A, B, C, D$  de  $\mathbb{R}[X]$  :

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2.$$

Le cas où  $P$  est une constante étant d'étude immédiate, supposons  $\deg(P) \geq 1$ .

Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$  deux à deux distincts,  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N}^*$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $(p_1, q_1), \dots, (p_M, q_M) \in \mathbb{R}^2$  tels que :  $(\forall j \in \{1, \dots, M\}, p_j^2 - 4q_j < 0)$

$$\text{et } P = \lambda \prod_{i=1}^N (X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^M (X^2 + p_j X + q_j).$$

Puisque  $P \in E$ , on déduit, en faisant tendre la variable vers  $+\infty$  :  $\lambda > 0$ .

D'autre part, chaque  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) est pair, car sinon  $P$  changerait strictement de signe au voisinage de  $x_i$ . Pour chaque  $i$  de  $\{1, \dots, N\}$  il existe donc  $\beta_i \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\alpha_i = 2\beta_i$ .

En notant  $Q = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^N (X - x_i)^{\beta_i}$  et

$$S = \prod_{j=1}^M (X^2 + p_j X + q_j), \text{ on a donc : } P = Q^2 S.$$

D'autre part, par mise sous forme canonique d'un trinôme, pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, M\}$  :

$$X^2 + p_j X + q_j = \left(X + \frac{p_j}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{4q_j - p_j^2}\right)^2 \in F.$$

Comme  $F$  est stable par multiplication, on déduit  $S \in F$  ; puis  $P = Q^2 S \in F$ .

### 17.32 Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Considérons la fraction rationnelle

$$\frac{X^k}{P} = \frac{X^k}{(X - z_1) \dots (X - z_n)}.$$

Par décomposition en éléments simples, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  tels que :

$$\frac{X^k}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - z_i},$$

la partie entière étant nulle car  $k \leq n-1$  et  $\deg(P) = n$ .

D'après le cours, on a, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\lambda_i = \left(\frac{X^k}{P'}\right)(z_i) = \frac{z_i^k}{P'(z_i)}, \text{ et donc : } A_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

D'autre part, en multipliant par  $X$  puis en faisant tendre  $X$  vers l'infini, on a :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{k+1}}{P(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k+1 \neq n \\ 1 & \text{si } k+1 = n. \end{cases}$$

On conclut :

$$A_k = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k < n-1 \\ 1 & \text{si } k = n-1. \end{cases}$$

### 17.33 a) • Notons $Q = X^2 P - 1$ . On a :

$$\forall k \in \{1, \dots, n+1\}, \quad Q(k) = k^2 P(k) - 1 = 0,$$

donc il existe  $U \in \mathbb{C}[X]$  unique tel que :  $Q = U \prod_{k=1}^{n+1} (X - k)$ .

De plus, comme  $\deg(P) \leq n$ , on a  $\deg(Q) \leq n+2$ , donc  $\deg(U) \leq 1$ . Il existe donc  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  unique tel que

$$U = aX + b.$$

On obtient :  $Q = (aX + b) \prod_{k=1}^{n+1} (X - k)$ .

• Pour calculer  $b$ , prenons la valeur en 0 dans l'égalité précédente, ce qui fait disparaître  $a$  :

$$Q(0) = b \prod_{k=1}^{n+1} (-k) = b(-1)^{n+1}(n+1)!.$$

Et d'autre part :  $Q(0) = 0^2 P(0) - 1 = -1$ .

$$\text{On a donc : } b = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}.$$

• Pour calculer  $a$ , remarquons que, puisque  $Q = X^2 P - 1$ , on a, en dérivant :  $Q' = X^2 P' + 2XP$ , et donc  $Q'(0) = 0$ . Mais, d'autre part, d'après le cours :

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{a}{aX + b} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{X - k},$$

donc :

$$\frac{Q'(0)}{Q(0)} = \frac{a}{b} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{-k} = \frac{a}{b} - H_{n+1},$$

donc  $a = b H_{n+1}$ .

$$\text{On conclut : } a = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} H_{n+1}, \quad b = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}.$$

b) On a :

$$\begin{aligned} Q(n+2) &= (a(n+2) + b) \prod_{k=1}^{n+1} (n+2-k) \\ &= \left(\frac{(-1)^n}{(n+1)!} H_{n+1}(n+2) + \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\right)(n+1)! \\ &= (-1)^n (n+2) H_{n+1} + (-1)^n \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} P(n+2) &= \frac{1 + Q(n+2)}{(n+2)^2} \\ &= \frac{1}{(n+2)^2} (1 + (-1)^n ((n+2) H_{n+1} + 1)). \end{aligned}$$



## Plan

Les méthodes à retenir	271
Énoncés des exercices	273
Du mal à démarrer ?	275
Corrigés	276

## Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer qu'un ensemble est un ev (espace vectoriel), un sev (sous-espace vectoriel)
- Étude d'intersections, de sommes, de sommes directes de deux sev ; montrer que deux sev sont supplémentaires dans un ev
- Montrer qu'une famille est libre, qu'une famille est liée, qu'une famille est génératrice
- Calcul de la dimension d'un ev, d'un sev, du rang d'une famille de vecteurs.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions et propriétés de : ev, sev
- Définition et propriétés des combinaisons linéaires finies de vecteurs, des familles libres, familles liées, familles génératrices
- Définition et propriétés de l'intersection et de la somme de deux sev ; définition et caractérisation d'une somme directe de deux sev, de deux sev supplémentaires dans un ev
- Si deux sev ont la même dimension et si l'un des deux est inclus dans l'autre, alors ils sont égaux
- Formule de Grassmann
- Définition du rang d'une famille (finie) de vecteurs.

## Les méthodes à retenir

$K$  désigne un corps commutatif.

On abrège espace vectoriel en ev, et sous-espace vectoriel en sev

**Pour montrer qu'un ensemble  $E$  muni de lois usuelles est un ev**

Montrer que  $E$  est un sev d'un ev connu.

→ Exercice 18.5.

**Pour montrer qu'une partie  $F$  d'un ev  $E$  est un sev de  $E$**

Essayer de :

• revenir à la définition d'un sev, c'est-à-dire montrer que  $F$  n'est pas vide et que  $F$  est stable par addition et stable par loi externe

→ Exercices 18.7 a), 18.8

- montrer que  $F$  est une intersection de sev, ou est une somme de sev de  $E$
- montrer que  $F$  est le sev de  $E$  engendré par une certaine famille, comme étant l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de cette famille
- montrer que  $F$  est le noyau ou l'image d'une certaine application linéaire (voir chapitre 19).

**Pour établir des relations (souvent des inclusions) entre sev d'un ev**

Essayer de :

- passer par les éléments

→ Exercices 18.3, 18.10

- utiliser les propriétés des opérations sur les sev.

**Pour montrer que deux sev  $F, G$  d'un ev  $E$  sont supplémentaires dans  $E$**

Essayer de :

- montrer  $F \cap G = \{0\}$  et  $F + G = E$

→ Exercices 18.2, 18.7 b), 18.8

- montrer que tout élément de  $E$  se décompose de façon unique en somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$
- si  $E$  est de dimension finie, montrer l'une des deux égalités  $F \cap G = \{0\}$  ou  $F + G = E$ , et montrer :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

- si  $E$  est de dimension finie, montrer qu'il existe une base  $\mathcal{F}$  de  $F$  et une base  $\mathcal{G}$  de  $G$  telles que  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ , obtenue en juxtaposant  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , soit une base de  $E$ .

**Pour montrer qu'une famille finie de vecteurs d'un ev  $E$  est libre**

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que, si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle, alors nécessairement tous les coefficients sont nuls

→ Exercice 18.11 b)

On verra d'autres méthodes dans les chapitres 19 et 20.

**Pour montrer qu'une famille de fonctions est libre pour les lois usuelles**

Revenir à la définition de famille libre, et, suivant les exemples, essayer de :

- remplacer la variable par des valeurs particulières
- utiliser des passages à la limite

→ Exercices 18.6 b), d)

- dériver une ou plusieurs fois, ou primitiver
- utiliser des développements limités.

→ Exercice 18.6 a)

**Pour montrer qu'une famille finie de vecteurs est liée**

Revenir à la définition, c'est-à-dire trouver une combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle et dont les coefficients ne soient pas tous nuls

→ Exercice 18.6 c)

**Pour montrer qu'un vecteur  $x$  d'un ev est dans le sev engendré par une famille  $\mathcal{F}$**

Montrer que  $x$  s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{F}$ .

→ **Exercice 18.1.**

**Pour trouver une base d'un sev engendré par une famille  $\mathcal{F}$**

Extraire de  $\mathcal{F}$  une famille libre ayant le plus grand cardinal.

**Pour montrer qu'un sev  $F$ , ou un ev, est de dimension finie**

Essayer de :

- montrer que  $F$  admet une famille génératrice finie
- montrer que  $F$  est inclus dans un sev de dimension finie
- montrer que  $F$  est somme d'un nombre fini de sev de dimensions finies.

**Pour déterminer la dimension d'un sev de dimension finie d'un ev**

Essayer de :

- trouver une base  $\mathcal{B}$  de  $F$ , et on aura alors :  $\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{B})$
- utiliser la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

**Pour montrer que deux sev  $F, G$  d'un ev  $E$  de dimension finie sont égaux**

Il suffit de montrer, par exemple :

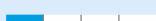
$$F \subset G \text{ et } \dim(F) = \dim(G).$$

**Pour déterminer le rang d'une famille finie  $\mathcal{F}$  de vecteurs d'un ev**

Extraire de  $\mathcal{F}$  une sous-famille libre de plus grand cardinal. Le rang de  $\mathcal{F}$  est alors le cardinal de cette sous-famille.

→ **Exercice 18.9.**

## Énoncés des exercices



### 18.1

#### Exemple de deux familles de deux vecteurs engendrant le même sev

Montrer que, dans  $\mathbb{R}^3$ , les deux vecteurs  $\vec{x} = (1, 1, 0)$  et  $\vec{y} = (1, 0, 1)$  engendrent le même sev que les deux vecteurs  $\vec{u} = (1, 3, -2)$  et  $\vec{v} = (1, 4, -3)$ .

### 18.2

#### Supplémentaires et intersection

Soient  $E$  un  $K$ -ev,  $A, B$  des sev de  $E$ ,  $C$  un supplémentaire de  $A \cap B$  dans  $B$ , c'est-à-dire un sev de  $E$  tel que :  $(A \cap B) \oplus C = B$ . Montrer que  $A$  et  $C$  sont supplémentaires dans  $A + B$ .

### 18.3

#### Intersection et somme de sev

Soient  $E$  un  $K$ -ev,  $F, G, H$  des sev de  $E$ . On suppose :

$$F \cap G \subset F \cap H, \quad F + G \subset F + H, \quad H \subset G.$$

Montrer :  $H = G$ .

**18.4****Exemple de recherche d'un supplémentaire d'un sev dans un ev**

On note  $E = \mathbb{R}^4$  et on considère :

$$\vec{x} = (1, -1, 1, -1), \quad \vec{y} = (1, 2, 3, 4), \quad F = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y}).$$

a) Former un système d'équations cartésiennes de  $F$ .

b) Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ , par une base, et par un système d'équations cartésiennes.

**18.5****Étude d'une partie de  $\mathbb{K}^3$  définie par une équation homogène de degré 2**

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on note :

$$E_{\mathbb{K}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 ; x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = 0\}.$$

Est-ce que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev ?

**18.6****Exemples d'études de liberté de familles finies de fonctions**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $a_1 < \dots < a_n$ . La famille d'applications  $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq n}$  est-elle libre ou est-elle liée, dans les exemples suivants :

a)  $f_{a_i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |x - a_i|$

b)  $f_{a_i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^{a_i x}$

c)  $f_{a_i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \cos(x + a_i)$ , pour  $n \geq 3$

d)  $f_{a_i} : \mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x - a_i}$ .

**18.7****Exemple de deux sev supplémentaires dans un ev de dimension infinie**

On note  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  le  $\mathbb{R}$ -ev de toutes les applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et :

$$F = \{f \in E ; f(0) = 0\}, \quad A = \mathcal{C}_E(F) = \{g \in E ; g(0) \neq 0\}.$$

a) Vérifier que  $F$  est un sev de  $E$ . Est-ce que  $A$  est un sev de  $E$  ?

b) Montrer que, pour toute  $g \in A$ , la droite vectorielle  $\mathbb{R}g$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

**18.8****Exemple de deux sev supplémentaires dans un ev, dans le contexte de l'analyse**

On note  $E = C^1([0 ; 1], \mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -ev des applications de classe  $C^1$  sur  $[0 ; 1]$  et à valeurs réelles,  $F = \left\{ f \in E ; \int_0^1 f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(1) = 0 \right\}$ ,

$$e_k : [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^k \text{ pour } k \in \{0, 1, 2\},$$

$$G = \{a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 ; (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\}.$$

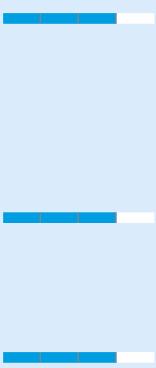
Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sev de  $E$  supplémentaires dans  $E$ .

**18.9****Exemple de calcul du rang d'une famille de fonctions**

On note  $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$ . Quel est le rang de la famille

$$\begin{array}{l} x \longmapsto x + 1 \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$$

$$\mathcal{A} = (f, g, f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g) ?$$



### 18.10 Étude du cas où la réunion de deux sev est un sev

Soient  $E$  un  $K$ -ev,  $A, B$  deux sev de  $E$ . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A \cup B$  est un sev de  $E$
- (ii)  $A \subset B$  ou  $B \subset A$ .

### 18.11 Racine carrée d'un entier non carré parfait

Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N$  ne soit le carré d'aucun entier. Montrer :

$$a) \sqrt{N} \notin \mathbb{Q} \quad b) (1, \sqrt{N}) \text{ est } \mathbb{Q}\text{-libre.}$$

### 18.12 Une inégalité sur des carrés de dimensions de sev

Soient  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie,  $F, G$  deux sev de  $E$ . Montrer :

$$(\dim(F + G))^2 + (\dim(F \cap G))^2 \geq (\dim(F))^2 + (\dim(G))^2$$

et étudier le cas d'égalité.

## Du mal à démarrer ?

**18.1** Montrer que  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  se décomposent linéairement sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , et que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  se décomposent linéairement sur  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

**18.2** Revenir à la définition de deux sev supplémentaires dans un ev, en montrant :  $A \cap C = \{0\}$  et  $A + C = A + B$ .

**18.3** Partir d'un élément quelconque  $x$  de  $G$  et exploiter les hypothèses.

Pour exploiter  $x \in F + H$ , décomposer  $x$  en somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $H$  : avoir l'initiative de prendre des notations.

**18.4** a) En notant  $\vec{w} = (x, y, z, t)$  un élément quelconque de  $E$ , éliminer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  dans  $\vec{w} = a\vec{x} + b\vec{y}$ .

b) Considérer, par exemple,  $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$  et  $\vec{v} = (0, 1, 0, 0)$ .

**18.5** Remarquer que la condition proposée revient à :

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 = 0.$$

Utiliser, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  :

$$a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$a^2 + b^2 = 0 \iff (a + ib = 0 \text{ ou } a - ib = 0) \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

**18.6** Pour a), b), d), Montrer que, pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0$ , alors :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0$ .

a) Remarquer que  $f_{a_n}$  n'est pas dérivable en  $a_n$ , tandis que  $f_{a_1}, \dots, f_{a_{n-1}}$  sont dérivables en  $a_n$ .

b) Multiplier par  $e^{-a_n x}$  puis faire tendre  $x$  vers  $+\infty$ .

c) Remarquer que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f_{a_i}$  se décompose linéairement sur deux fonctions fixes.

d) Isoler  $f_{a_n}$  et étudier la limite lorsque  $x$  tend vers  $a_n$ .

**18.7** a) Remarquer que  $A$  ne contient pas 0.

b) Pour  $g \in A$  fixée, montrer que  $\mathbb{R}g$  et  $F$  sont supplémentaires dans  $E$  en revenant à la définition de deux sev supplémentaires dans un ev.

Pour décomposer un élément quelconque de  $E$  sur  $\mathbb{R}g$  et  $F$ , on pourra raisonner par analyse et synthèse.

**18.8** 1) Remarquer que  $G$  est donné comme sev engendré par une certaine famille de  $E$ .

2) Pour montrer que  $F$  est un sev de  $E$ , revenir à la définition d'un sev.

3) Montrer :  $F \cap G = \{0\}$ .

4) Pour  $u \in E$  donnée, chercher  $(f, g) \in F \times G$  tel que  $u = f + g$ , en cherchant d'abord  $g$ .

**18.9** Exprimer les éléments de  $\mathcal{A}$ .

**18.10** L'implication (ii)  $\implies$  (i) est immédiate.

Pour (i)  $\implies$  (ii), raisonner par l'absurde.

**18.11** a) Raisonner par l'absurde et utiliser (par exemple) le théorème de Gauss.

b) Utiliser a).

**18.12** Calculer la différence entre les deux membres de l'inégalité voulue et utiliser la formule de Grassmann.

# Corrigés des exercices

**18.1**

1) Il est clair, par exemple, que  $\vec{u} = 3\vec{x} - 2\vec{y}$  et  $\vec{v} = 4\vec{x} - 3\vec{y}$ . Ceci montre que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  se décomposent linéairement sur  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , donc :

$$\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \subset \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y}).$$

2) De même, on déduit  $\vec{x} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$  et

$\vec{y} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$ , donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  se décomposent linéairement sur  $\vec{x}$ , et  $\vec{y}$ , donc :  $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) \subset \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ .

On peut aussi remarquer que  $(\vec{x}, \vec{y})$  est libre et que  $(\vec{u}, \vec{v})$  est libre, donc  $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$  et  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  sont deux sev de même dimension finie égale à 2.

Finalement,  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$ , donc  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  engendrent le même sev que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

**18.2**

On a :

$$\begin{aligned} A + B &= A + ((A \cap B) + C) \\ &= (A + (A \cap B)) + C \\ &\stackrel{+ \text{associative}}{=} A + C \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A \cap C &\stackrel{C \subset B}{=} A \cap (C \cap B) \\ &\stackrel{\cap \text{ commutative et associative}}{=} (A \cap B) \cap C \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

On conclut que  $A$  et  $C$  sont deux sev supplémentaires dans  $A + B$ .

**18.3**

Soit  $x \in G$ .

Puisque  $x \in G \subset F + G \subset F + H$ , il existe  $f \in F, h \in H$  tels que :  $x = f + h$ .

On a alors :  $x \in G, h \in H \subset G$ , donc, puisque  $G$  est un sev de  $E$  :  $f = x - h \in G$ .

On a donc :  $f \in F$  et  $f \in G$ , donc  $f \in F \cap G \subset F \cap H$ , d'où  $f \in H$ .

Ainsi,  $f \in H$  et  $h \in H$ , donc, puisque  $H$  est un sev de  $E$  :  $x = f + h \in H$ .

Ceci montre :  $G \subset H$ .

Comme, de plus, par hypothèse,  $H \subset G$ , on conclut :  $H = G$ .

**18.4**

a) Soit  $\vec{w} = (x, y, z, t) \in E$ . On a :

$$\vec{w} \in F \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \vec{w} = a\vec{x} + b\vec{y}$$

$$\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = a + b \\ y = -a + 2b \\ z = a + 3b \\ t = -a + 4b \end{cases}$$

$$\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 2x - y = 3a \\ x + y = 3b \\ 4z - 3t = 7a \\ z + t = 7b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{2x - y}{3} = \frac{4z - 3t}{7} \\ \frac{x + y}{3} = \frac{z + t}{7} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 14x - 7y - 12z + 9t = 0 \\ 7x + 7y - 3z - 3t = 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi un système d'équations cartésiennes de  $F$ , et il n'y a pas unicité d'un système d'équations cartésiennes de  $F$ .

b) • Considérons, par exemple :  $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 0, 0)$ ,  $G = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ . Pour montrer que  $G$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ , il suffit de montrer que la famille  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v})$  est libre.

1<sup>re</sup> méthode : utilisation d'un déterminant

D'après le cours sur les déterminants, puisque  $E$  est de dimension 4 et que la famille considérée contient 4 vecteurs, il suffit de montrer que le déterminant  $D$  de cette famille dans la base

canonique de  $\mathbb{R}^4$  n'est pas nul. On a, en développant par rapport à la dernière colonne, deux fois de suite :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0,$$

et on conclut que  $G$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

2<sup>e</sup> méthode :

Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . On a :

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{u} + d\vec{v} = \vec{0}$$

$$\iff a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+2b+d=0 \\ a+3b=0 \\ -a+4b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0. \end{cases}$$

Ceci montre que  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v})$  est libre, et on conclut que  $G$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  et qu'une base de  $G$  est  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

- Il est clair qu'un système d'équations cartésiennes de  $G$  est :  $\begin{cases} z=0 \\ t=0. \end{cases}$

### 18.5

On a, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$  :

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz \\ = (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 2yz + z^2) \\ = (x+y)^2 + (y+z)^2; \end{aligned}$$

1) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{R}} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \underbrace{(x+y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y+z)^2}_{\geq 0} = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y=0 \text{ et } y+z=0\}, \end{aligned}$$

donc  $E_{\mathbb{R}}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev, c'est la droite vectorielle engendrée par  $(1, -1, 1)$ .

2) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{C}} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x+y)^2 + (y+z)^2 = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 ; (x+y) + i(y+z) = 0\} \\ &\quad \text{ou } (x+y) - i(y+z) = 0\} = P \cup Q, \end{aligned}$$

où  $P$  est le plan vectoriel d'équation  $x + (1+i)y + z = 0$ , et  $Q$  est le plan vectoriel d'équation  $x + (1-i)y + z = 0$ .

On peut constater que  $E_{\mathbb{C}}$  est la réunion de deux plans vectoriels de  $\mathbb{C}^3$ , distincts entre eux.

On peut trouver deux éléments de  $E_{\mathbb{C}}$  donc la somme n'est pas dans  $E_{\mathbb{C}}$ . Par exemple,  $u = (i, -1, 1) \in E_{\mathbb{C}}$

et  $v = (-i, -1, 1) \in E_{\mathbb{C}}$ , mais  $u+v = (0, -2, 2) \notin E_{\mathbb{C}}$ .

Ceci montre que  $E_{\mathbb{C}}$  n'est pas un sev de  $\mathbb{C}^3$ .

### 18.6

a) Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0$ .

Supposons  $\lambda_n \neq 0$ .

Alors, en isolant le terme  $\lambda_n f_{a_n}$  et en divisant par  $\lambda_n$ , on a :

$$f_{a_n} = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} f_{a_i}.$$

Mais  $f_{a_n}$  n'est pas dérivable en  $a_n$  et  $\sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} f_{a_i}$  est dérivable en  $a_n$ , car chaque  $f_{a_i}$ , pour  $1 \leq i \leq n-1$ , est dérivable en  $a_n$ .

Ceci amène une contradiction et montre :  $\lambda_n = 0$ .

Puis, de proche en proche :  $\lambda_{n-1} = 0, \dots, \lambda_1 = 0$ .

On conclut que  $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq n}$  est libre.

b) Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{a_i x} = 0.$$

Remarquons que, pour tout  $\alpha \in ]-\infty, 0]$  fixé, on a :  $e^{\alpha x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Multiplions par  $e^{-a_n x}$  et isolons le terme d'indice  $n$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e^{(a_i - a_n)x} + \lambda_n = 0.$$

On a, pour chaque  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  :  $e^{(a_i - a_n)x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ , puisque  $a_i - a_n < 0$ .

On déduit  $\lambda_n = 0$ , puis, en réitérant :  $\lambda_{n-1} = 0, \dots, \lambda_1 = 0$ .

On conclut que  $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq n}$  est libre.

c) Remarquons que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) :

$$f_{a_i}(x) = \cos(x + a_i) = \cos a_i \cos x - \sin a_i \sin x.$$

En notant

$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \cos x$  et  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sin x$ , on a donc :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f_{a_i} = (\cos a_i)c - (\sin a_i)s.$$

Ceci montre que les  $f_{a_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , se décomposent linéairement sur les deux fonctions fixes  $c$  et  $s$  (indépendantes de  $i$ ). Il en résulte, comme  $n \geq 3$ , que la famille  $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq n}$  est liée.

d) Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0$ . On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\}, \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{x - a_i} = 0.$$

Isolons, par exemple, le terme d'indice  $n$ , et exprimons  $\lambda_n$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\}, \lambda_n = -(x - a_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{x - a_i}.$$

Comme  $a_1, \dots, a_{n-1}$  sont tous différents de  $a_n$ , pour chaque  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $\frac{\lambda_i}{x - a_i}$  admet une limite finie lorsque  $x$  tend

vers  $a_n$ , donc, par opérations,  $-(x - a_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{x - a_i} \xrightarrow{x \rightarrow a_n} 0$ ,

d'où  $\lambda_n = 0$ .

En réitérant, on déduit  $\lambda_{n-1} = 0, \dots, \lambda_1 = 0$ .

On conclut que  $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq n}$  est libre.

**18.7** a) I) • Il est clair que  $F \subset E$  et que  $0 \in F$  (où on a noté  $0$  l'application constante nulle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ).

• On a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et toutes  $f, h \in F$  :

$$(\alpha f + h)(0) = \alpha f(0) + h(0) = \alpha 0 + 0 = 0,$$

donc  $\alpha f + h \in F$ .

On conclut que  $F$  est un sev de  $E$ .

2) Il est immédiat que  $A$  n'est pas un sev de  $E$ , car, par exemple,  $0 \notin A$ .

b) Soit  $g \in A$  fixée.

1) Soit  $f \in (\mathbb{R}g) \cap F$ . Il existe alors  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f = \alpha g$ , et on a  $f(0) = 0$ . D'où :  $\alpha g(0) = f(0) = 0$ .

Comme  $g(0) \neq 0$ , il en résulte  $\alpha = 0$ , donc  $f = \alpha g = 0$ .

Ceci montre :  $(\mathbb{R}g) \cap F = \{0\}$ .

2) Soit  $\varphi \in E$ . On veut montrer que  $\varphi$  se décompose linéairement sur  $\mathbb{R}g$  et  $F$ , c'est-à-dire montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f \in F$  telles que :  $\varphi = \alpha g + f$ .

Raisonnons par analyse et synthèse.

• S'il existe  $(\alpha, f)$  convenant,

alors  $\varphi(0) = \alpha g(0) + f(0) = \alpha g(0)$ , donc  $\alpha = \frac{\varphi(0)}{g(0)}$ , puis

$$f = \varphi - \alpha g = \varphi - \frac{\varphi(0)}{g(0)}g.$$

• Réciproquement, montrons que le couple  $(\alpha, f)$  précédemment trouvé convient.

$$\text{Notons donc } \alpha = \frac{\varphi(0)}{g(0)} \text{ et } f = \varphi - \frac{\varphi(0)}{g(0)}g.$$

$$\text{Alors, } \alpha f + g = \varphi \text{ et } f(0) = \varphi(0) - \frac{\varphi(0)}{g(0)}g(0) = 0, \text{ donc } f \in F.$$

Ceci montre que le couple  $(\alpha, f)$  convient.

On a donc montré :  $(\mathbb{R}g) + F = E$ .

Finalement :  $\mathbb{R}g$  et  $F$  sont deux sev de  $E$  supplémentaires dans  $E$ , ou encore :  $\mathbb{R}g$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

*Remarque* : Il est alors clair, puisque  $A$  est un ensemble infini, que  $F$  admet une infinité de supplémentaires dans  $E$ .

**18.8** I) • On a :  $F \subset E$  et  $0 \in F$ .

• On a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et toutes  $f, g \in F$  :

$$\int_0^1 (\alpha f + g) = \alpha \int_0^1 f + \int_0^1 g = \alpha 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha f + g)(0) = \alpha f(0) + g(0) = \alpha 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha f + g)'(1) = \alpha f'(1) + g'(1) = \alpha 0 + 0 = 0,$$

donc  $\alpha f + g \in F$ .

Ceci montre que  $F$  est un sev de  $E$ .

2) Il est clair que  $G = \text{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ , donc  $G$  est un sev de  $E$ .

3) Soit  $f \in F \cap G$ .

D'une part,  $\int_0^1 f = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(1) = 0$ , et, d'autre part, il existe  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2$ , c'est-à-dire tel que :

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

On a alors :

$$\begin{cases} \int_0^1 f = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0, \end{cases}$$

d'où  $f = 0$ .

Ceci montre :  $F \cap G = \{0\}$ .

4) Soit  $u \in E$ . Cherchons  $f \in F$ ,  $g \in G$  telles que  $u = f + g$ .

Soient  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ ,  $g = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2$ ,  $f = u - g$ .  
On a donc déjà  $u = f + g$  et  $g \in G$ . On a :

$$\begin{aligned} f \in F \iff u - g \in F &\iff \begin{cases} \int_0^1 (u - g) = 0 \\ (u - g)(0) = 0 \\ (u - g)'(1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = \int_0^1 u \\ a_0 = u(0) \\ a_1 + 2a_2 = u'(1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_0 = u(0) \\ \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = \int_0^1 u - u(0) \\ a_1 + 2a_2 = u'(1). \end{cases} \end{aligned}$$

Il est clair que ce dernier système d'équations, d'inconnue  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ , admet une solution (et une seule). Il existe donc  $(f, g) \in F \times G$  (unique) tel que  $u = f + g$ , ce qui montre  $E = F + G$ .

On conclut que  $F$  et  $G$  sont deux sev de  $E$  supplémentaires dans  $E$ .

Le point ci-dessus numéro 4), traité avec l'unicité, rend alors inutile le point numéro 3).

On peut enfin remarquer que  $G$  est de dimension trois et que  $F$  n'est pas de dimension finie (on dit aussi que  $F$  est de dimension infinie).

### 18.9

Exprimons les (six) éléments de  $\mathcal{A}$  :

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2,$$

$$(f \circ f)(x) = (x + 1) + 1 = x + 2, \quad (f \circ g)(x) = x^2 + 1,$$

$$(g \circ f)(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad (g \circ g)(x) = x^4.$$

- On remarque que les cinq premiers éléments de  $\mathcal{A}$  sont des fonctions polynomiales de degré  $\leq 2$ , donc se décomposent sur  $u : x \mapsto 1$ ,  $v : x \mapsto x$ ,  $w : x \mapsto x^2$ .

D'autre part :

$$u = f \circ f - f, \quad v = 2f - f \circ f, \quad w = g.$$

Ainsi, le sev engendré par les cinq premières fonctions de  $\mathcal{A}$  est le même que celui engendré par  $(u, v, w)$ , donc le rang de cette famille de cinq éléments est égal à 3.

- Comme  $g \circ g$  est une fonction polynomiale de degré 4,  $g \circ g$  n'est pas dans le sev engendré par  $(u, v, w)$ .

On conclut :  $\text{rg } (\mathcal{A}) = 4$ .

### 18.10

**(i)  $\implies$  (ii)** : Supposons que  $A \cup B$  soit un sev de  $E$ .

Raisonnons par l'absurde : supposons  $A \not\subset B$  et  $B \not\subset A$ .

Il existe alors  $a \in A$  tel que  $a \notin B$ , et  $b \in B$  tel que  $b \notin A$ .

Comme  $a \in A \subset A \cup B$  et  $b \in B \subset A \cup B$ ,

on a par hypothèse :  $a + b \in A \cup B$ ,

c'est-à-dire :  $a + b \in A$  ou  $a + b \in B$ .

Si  $a + b \in A$ , comme  $b = (a + b) - a$  et que  $A$  est un sev de  $E$ , on déduit  $b \in A$ , contradiction.

De même, si  $a + b \in B$ , comme  $a = (a + b) - b$ , on déduit  $a \in B$ , contradiction.

Finalement :  $A \subset B$  ou  $B \subset A$ .

**(ii)  $\implies$  (i)** : Si, par exemple,  $A \subset B$ , alors  $A \cup B = B$ , donc  $A \cup B$  est une sev de  $E$ .

### 18.11

a) Raisonnons par l'absurde : supposons  $\sqrt{N} \in \mathbb{Q}$ .

Il existe alors  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :

$$\sqrt{N} = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(p, q) = 1.$$

On a donc :  $Nq^2 = p^2$ . Alors  $q$  divise  $p^2$  ; comme  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , on déduit, par le théorème de Gauss :  $q = 1$ . Mais alors  $N = p^2$ , contradiction.

Ceci montre :  $\sqrt{N} \notin \mathbb{Q}$ .

b) Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$  tel que  $\alpha + \beta\sqrt{N} = 0$ .

Si  $\beta \neq 0$ , alors  $\sqrt{N} = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ , contradiction.

Donc  $\beta = 0$ , puis  $\alpha = -\beta\sqrt{N} = 0$ .

Ceci montre que  $(1, \sqrt{N})$  est  $\mathbb{Q}$ -libre.

### 18.12

Pour la commodité, notons  $d$  à la place de  $\dim$ , et notons  $P$  le premier membre de l'inégalité voulue et  $S$  son second membre.

• On a :

$$\begin{aligned} P - S &= (d(F + G))^2 + (d(F \cap G))^2 - (d(F))^2 - (d(G))^2 \\ &= \left( (d(F+G))^2 - (d(F))^2 \right) - \left( (d(G))^2 - (d(F \cap G))^2 \right) \\ &= (d(F + G) - d(F))(d(F + G) + d(F)) \\ &\quad - (d(G) - d(F \cap G))(d(G) + d(F \cap G)). \end{aligned}$$

D'après la formule de Grassmann :

$$d(F + G) + d(F \cap G) = d(F) + d(G),$$

donc :

$$d(F + G) - d(F) = d(G) - d(F \cap G),$$

ce qui permet de mettre  $d(G) - d(F \cap G)$  en facteur, puis de réutiliser la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned} P - S &= (d(G) - d(F \cap G)) \\ &\quad (d(F + G) + d(F) - d(G) - d(F \cap G)) \\ &= (d(G) - d(F \cap G))(2d(F) - 2d(F \cap G)) \geq 0, \end{aligned}$$

car  $F \cap G \subset G$  et  $F \cap G \subset F$ , donc  $d(F \cap G) \leq d(G)$  et  $d(F \cap G) \leq d(F)$ .

- Il y a égalité dans l'inégalité voulue si et seulement si  $P = S$ , c'est-à-dire  $d(G) = d(F \cap G)$  ou  $d(F) = d(F \cap G)$ . Comme  $F \cap G$  est inclus dans  $F$  et est inclus dans  $G$ , on conclut qu'il y a égalité si et seulement si  $G = F \cap G$  ou  $F = F \cap G$ , c'est-à-dire si et seulement si  $G \subset F$  ou  $F \subset G$ .

## Plan

Les méthodes à retenir	281
Énoncés des exercices	283
Du mal à démarrer ?	286
Corrigés	288

## Thèmes abordés dans les exercices

- Détermination du noyau, de l'image d'une application linéaire, obtention d'inclusions ou d'égalités faisant intervenir noyaux et images d'applications linéaires
- Montrer qu'une certaine application linéaire est injective, est surjective, est bijective
- Manipulation de projecteurs
- Détermination du rang d'une application linéaire, obtention de résultats sur le rang d'une application linéaire.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des applications linéaires, opérations sur les applications linéaires et les endomorphismes, définition et propriétés du noyau et de l'image d'une application linéaire
- Définition et caractérisation des projecteurs d'un ev
- Théorème du rang et conséquences pour les applications linéaires et les endomorphismes en dimension finie.

## Les méthodes à retenir

$K$  désigne un corps commutatif.

On abrège espace vectoriel en ev, et sous-espace vectoriel en sev.

**Pour montrer qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est linéaire, où  $E$  et  $F$  sont des  $K$ -ev**

Essayer de :

- revenir à la définition d'une application linéaire, c'est-à-dire montrer :

$$\forall \lambda \in K, \forall x, y \in E, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

→ Exercice 19.14

- montrer que  $f$  s'obtient, par certaines opérations, à partir d'applications linéaires.

**Pour manipuler noyau, image, somme, loi externe, composition d'applications linéaires**

**Pour déterminer le noyau d'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , sans considération de dimension**

**Pour montrer qu'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  est injective**

**Pour déterminer l'image d'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , sans considération de dimension**

**Pour montrer qu'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  est surjective**

**Pour montrer qu'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  est bijective, sans considération de dimension**

Revenir aux définitions, avec les notations usuelles :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E ; f(x) = 0\},$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in F ; \exists x \in E, y = f(x)\},$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

→ Exercices 19.1 à 19.4, 19.10.

Revenir à la définition :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E ; f(x) = 0\}.$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation  $f(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in E$ .

Montrer  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ , c'est-à-dire montrer :

$$\forall x \in E, (f(x) = 0 \implies x = 0).$$

→ Exercice 19.10.

Essayer de :

- revenir à la définition :

$$\text{Im}(f) = \{y \in F ; \exists x \in E, y = f(x)\}$$

- chercher l'image par  $f$  d'une famille génératrice de  $E$ .

Montrer  $\text{Im}(f) = F$ , c'est-à-dire montrer :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$

→ Exercice 19.10.

Essayer de :

- montrer :  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  et  $\text{Im}(f) = F$

→ Exercice 19.10

- trouver une application  $g : F \rightarrow E$  telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

L'application  $g$  est alors la réciproque de  $f$ , et  $g$  est linéaire.

→ Exercices 19.5, 19.12.

**Pour manipuler un projecteur  $p$  d'un ev  $E$**

Essayer de :

- utiliser l'égalité  $p \circ p = p$

→ Exercices 19.5, 19.7, 19.11

- utiliser la décomposition de tout élément  $x$  de  $E$  sous la forme :

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in \text{Ker}(p)}.$$

→ Exercice 19.7.

**Pour montrer qu'un endomorphisme  $f$  d'un ev  $E$  de dimension finie est bijectif**

Il suffit de montrer  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  ou  $\text{Im}(f) = E$ .

**Pour relier entre elles les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont des ev de dimensions finies**

Utiliser le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E).$$

→ Exercice 19.6.

**Pour manipuler le rang d'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont des ev de dimensions finies**

Utiliser :

- la définition du rang d'une application linéaire :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

→ Exercices 19.8, 19.9, 19.13, 19.15

- le théorème du rang :

$$\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)).$$

→ Exercices 19.6, 19.9, 19.13, 19.15.

## Énoncés des exercices

### 19.1

#### Étude de noyau et image d'une composée d'applications linéaires

Soient  $E, F, G$  des  $K$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer :

- $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$
- $g^{-1}(\text{Im}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$ .

**19.2****Noyau et image de la composée de deux applications linéaires**

Soient  $E, F, G$  trois  $K$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer :

- a)  $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))$
- b)  $\text{Ker}(g \circ f) \supset \text{Ker}(f)$
- c)  $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f))$
- d)  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$

**19.3****Étude du noyau et de l'image de deux applications linéaires vérifiant des équations**

Soient  $E, F, G$  des  $K$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ ,  $h \in \mathcal{L}(G, F)$ ,  $k \in \mathcal{L}(F, E)$ .

On suppose :

$$f = h \circ g \circ f \quad \text{et} \quad g = g \circ f \circ k.$$

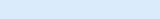
Démontrer que  $\text{Ker}(g)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires dans  $F$ .

**19.4****Étude d'applications linéaires  $f, g$  telles que  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$** 

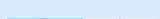
Soient  $E, F, G$  trois  $K$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer :

- a)  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \iff \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$
- b)  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g) \iff \text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = F$ .

(On pourra utiliser l'exercice 19.2).

**19.5****Étude de  $e - ap$ , où  $a \in K$  et  $p$  est un projecteur**

Soient  $E$  un  $K$ -ev,  $e = \text{Id}_E$ ,  $p$  un projecteur de  $E$  tel que  $p \neq 0$ ,  $a \in K - \{1\}$ ,  $f = e - ap$ . Montrer que  $f \in \mathcal{GL}(E)$  et exprimer  $f^{-1}$ .

**19.6****Caractérisation des endomorphismes  $f$  tels que  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$  en dimension finie**

Soient  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie,  $n = \dim(E)$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer :

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \iff (f^2 = 0 \text{ et } n = 2 \text{rg}(f)).$$

**19.7****Endomorphismes vérifiant une condition de rang**

Soient  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie,  $n = \dim(E)$ ,  $e = \text{Id}_E$ ,  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  tels que :

$$f + g = e \quad \text{et} \quad \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leqslant n.$$

a) Établir que  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Im}(g)$  sont supplémentaires dans  $E$  et que :  $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$ .

b) En déduire que  $f$  et  $g$  sont des projecteurs.

**19.8****Inégalités sur le rang de la somme de deux applications linéaires**

Soient  $E, F$  deux  $K$ -ev de dimension finie,  $(f, f') \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ . Montrer :

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(f')| \leqslant \text{rg}(f + f') \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(f').$$

**19.9****Étude des endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $f^3 = 0$  et  $f^2 \neq 0$** 

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  nilpotent d'ordre trois, c'est-à-dire tel que  $f^3 = 0$  et  $f^2 \neq 0$ . Montrer :

$$\text{Ker}(f^2) = \text{Im}(f), \quad \text{Im}(f^2) = \text{Ker}(f), \quad \text{rg}(f) = 2, \quad \text{rg}(f^2) = 1.$$

**19.10 Caractérisation de deux applications linéaires dont la composée est un isomorphisme**

Soient  $E, F, G$  des  $K$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $g \circ f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $G$
- (ii)  $f$  est injective,  $g$  est surjective et  $F = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f)$ .

**19.11 CNS pour que la somme de deux projecteurs soit un projecteur**

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev,  $p, q$  deux projecteurs de  $E$ . Démontrer que  $p + q$  est un projecteur si et seulement si :  $p \circ q = q \circ p = 0$ .

**19.12 Montrer que deux endomorphismes vérifiant une certaine équation commutent entre eux**

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie,  $e = \text{Id}_E$ ,  $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$  tel que :

$$f^2 - f \circ g + 2f - e = 0.$$

Montrer :  $g \circ f = f \circ g$ .

**19.13 Suites des noyaux et des images des itérés d'un endomorphisme**

Soient  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie  $n$ , et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $p$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $I_p = \text{Im}(f^p)$  et  $K_p = \text{Ker}(f^p)$ , avec, par convention,  $f^0 = \text{Id}_E$ .

a) Montrer que  $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est décroissante et que  $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est croissante, c'est-à-dire :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} I_{p+1} \subset I_p \\ K_{p+1} \supset K_p \end{cases}.$$

b) Montrer qu'il existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p < p_0 \implies I_p \neq I_{p_0} \\ p \geq p_0 \implies I_p = I_{p_0} \end{cases}.$$

Autrement dit, la suite  $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$  stationne, exactement à partir de l'indice  $p_0$ .

c) Établir :  $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p < p_0 \implies K_p \neq K_{p_0} \\ p \geq p_0 \implies K_p = K_{p_0} \end{cases}$

Ainsi, la suite  $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$  stationne aussi exactement à partir de l'indice  $p_0$ .

d) Montrer :  $p_0 \leq n$ .

e) Démontrer que  $I_{p_0}$  et  $K_{p_0}$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**19.14 Exemple d'espace vectoriel et d'application linéaire dans le contexte de l'analyse**

On note  $E_0 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(0) = 0\}$ , et, pour toute  $f \in E_0$ , on considère l'application  $\phi(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(f)(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt.$$

a) Montrer que  $E_0$  est un  $\mathbb{R}$ -ev et que  $\phi$  est un endomorphisme de  $E_0$ , injectif et non surjectif.

b) Est-ce que  $E_0$  est de dimension finie ?

**19.15 Inégalité sur le rang de la composée de deux applications linéaires**

Soient  $E, F, G$  trois  $K$ -ev de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

a) Montrer :  $\text{Ker}(g|_{\text{Im}(f)}) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ .

b) En déduire :  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) - \dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f))$ .

c) Montrer :  $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(F)$ .

**19.16 Endomorphismes transformant tout vecteur en un vecteur qui lui est colinéaire**

Soient  $E$  un  $K$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que, pour tout  $x$  de  $E$ , la famille  $(x, f(x))$  est liée. Démontrer que  $f$  est une homothétie.

## Du mal à démarrer ?

**19.1** On peut raisonner par équivalences logiques successives, en utilisant la définition d'image directe, d'image réciproque, de noyau, d'image d'une application linéaire.

**19.2** Utiliser la définition d'une image directe, d'une image réciproque, du noyau et de l'image d'une application linéaire. On pourra raisonner par équivalences logiques successives

**19.3** 1) Montrer  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ , en passant par les éléments et en utilisant  $f = h \circ g \circ f$ .

2) Pour  $y \in F$  fixé, obtenir une décomposition de  $y$  en somme d'un élément de  $\text{Ker}(g)$  et d'un élément de  $\text{Im}(f)$ , en utilisant  $g = g \circ f \circ k$ .

**19.4** Séparer chaque équivalence logique demandée en deux implications. Pour chaque implication, passer par les éléments et utiliser la définition de l'intersection de deux sev, de la somme de deux sev, du noyau et de l'image d'une application linéaire.

**19.5** Exprimer  $p$  en fonction de  $f$  (si  $a \neq 0$ ) et remplacer dans  $p^2 = p$ . Obtenir ainsi une équation satisfaite par  $f$ . Isoler  $e$  additionnellement dans cette équation.

**19.6**  $\implies$  : Montrer  $f^2 = 0$  et utiliser le théorème du rang.

$\impliedby$  : Montrer  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ , puis comparer les dimensions en utilisant le théorème du rang.

**19.7** a) Obtenir d'abord  $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = E$ , puis utiliser la formule de Grassmann pour déduire  $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ .

b) Montrer que, pour tout  $x \in E$  :

$$f(x - f(x)) \in \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g).$$

On peut aussi montrer que  $f$  et  $g$  commutent.

**19.8** 1) Montrer  $\text{Im}(f + f') \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(f')$  puis passer aux dimensions.

2) Appliquer le résultat précédent à  $(f + f', -f')$  au lieu de  $(f, f')$ .

**19.9** • Remarquer  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

et montrer  $\text{Im}(f^2) \neq \text{Im}(f)$  en raisonnant par l'absurde.

Obtenir ainsi :

$$\{0\} \subsetneq \text{Im}(f^2) \subsetneq \text{Im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3,$$

puis passer aux dimensions.

• Remarquer  $\text{Ker}(f^2) \supset \text{Ker}(f)$  et utiliser le théorème du rang.

**19.10** (i)  $\implies$  (ii) :

• Se rappeler que, pour des applications, on a :

$g \circ f$  injective  $\implies f$  injective,  $g \circ f$  surjective  $\implies g$  surjective,

• Montrer :  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .

Pour montrer  $\text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = F$ , pour  $y \in F$  donné, amener  $x \in E$  tel que  $g(y) = g(f(x))$ , puis considérer  $y - f(x)$ .

(ii)  $\implies$  (i) :

• Montrer :  $\text{Ker}(g \circ f) = \{0\}$ .

• Pour  $z \in G$ , amener  $y \in F$  tel que  $z = g(y)$ , puis décomposer linéairement  $y$  sur  $\text{Ker}(g)$  et  $\text{Im}(f)$ .

**19.11** Développer :

$$(p + q)^2 = (p + q) \circ (p + q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2.$$

Attention : a priori,  $p$  et  $q$  ne commutent pas ; on ne peut donc pas remplacer  $p \circ q$  par  $q \circ p$ .

Une implication est évidente.

Pour la réciproque, ayant obtenu  $p \circ q + q \circ p = 0$ , penser à composer par  $p$  ou par  $q$  à gauche ou à droite, pour déduire de nouvelles égalités.

**19.12** Obtenir  $(f - g + 2e) \circ f = e$ .

Se rappeler que, d'après le cours, si  $E$  est de dimension finie et si  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  vérifient  $u \circ v = e$ , alors  $v \circ u = e$ .

**19.13** a) Revenir à la définition d'une image ou d'un noyau.

b) Considérer la suite  $(\dim(I_p))_{p \in \mathbb{N}}$  qui est une suite décroissante d'entiers naturels.

c) Utiliser b) et le théorème du rang, pour relier dimension d'une image et dimension d'un noyau.

d) Montrer, pour tout  $p < p_0$  :  $I_{p+1} \subsetneq I_p$ ,

donc  $\dim(I_{p+1}) \leq \dim(I_p) - 1$ .

e) • Montrer :  $I_{p_0} \cap K_{p_0} = \{0\}$ , en utilisant la définition de  $p_0$ .

• Utiliser ensuite, par exemple, le théorème du rang.

**19.14** a) Vérifier que  $E_0$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.

2) • D'abord, ne pas confondre  $\phi(f)(x)$ , qui est un réel, et  $\phi(f)$ , qui est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et ne pas confondre  $\phi(f)$  et  $\phi$ , qui est une application de  $E_0$  dans  $E_0$ .

Montrer que, pour toute  $f \in E_0$ , on a :  $\phi(f) \in E_0$ , et montrer que  $\phi$  est linéaire.

• Remarquer que, pour toute  $f \in E_0$ ,  $\phi(f)$  est de classe  $C^\infty$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\phi(f))'(x) = x^2 f(x).$$

En déduire que  $\phi$  est injectif.

• Pour montrer que  $\phi$  n'est pas surjectif, trouver au moins un élément de  $E_0$  n'ayant pas d'antécédent par  $\phi$ . À cet effet, remarquer que, pour toute  $f \in E_0$ ,  $(\phi(f))'(0) = 0$ .

**19.15** Se rappeler d'abord que la notation  $g|_{\text{Im}(f)}$  désigne la restriction de  $g$  à  $\text{Im}(f)$  au départ :

$$g|_{\text{Im}(f)} : \text{Im}(f) \longrightarrow G, y \longmapsto g(y).$$

a) Revenir à la définition du noyau d'une application linéaire.

b) Appliquer le théorème du rang à  $g|_{\text{Im}(f)}$ .

c) Utiliser le théorème du rang.

**19.16** Pour tout  $x \in E - \{0\}$ , il existe  $\lambda_x \in K$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$ , mais, a priori,  $\lambda_x$  dépend de  $x$ . Il faut montrer que  $\lambda_x$  ne dépend pas de  $x$ . À cet effet, pour  $(x, y) \in (E - \{0\})^2$ , considérer  $f(x), f(y), f(x+y)$ , et séparer l'étude en deux cas selon que la famille  $(x, y)$  est libre ou est liée.

# Corrigés des exercices

**19.1**

a) On a, pour tout  $y \in F$  :

$$\begin{aligned} y &\in f(\text{Ker}(g \circ f)) \\ \iff \exists x &\in \text{Ker}(g \circ f), y = f(x) \\ \iff \exists x &\in E, (g \circ f(x) = 0 \text{ et } y = f(x)) \\ \iff \exists x &\in E, (g(y) = 0 \text{ et } y = f(x)) \\ \iff g(y) &= 0 \text{ et } (\exists x \in E, y = f(x)) \\ \iff y &\in \text{Ker}(g) \text{ et } y \in \text{Im}(f) \\ \iff y &\in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f). \end{aligned}$$

On conclut :  $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ .

b) On a, pour tout  $y \in F$  :

$$\begin{aligned} y &\in g^{-1}(\text{Im}(g \circ f)) \\ \iff g(y) &\in \text{Im}(g \circ f) \\ \iff \exists x &\in E, g(y) = (g \circ f)(x) \\ \iff \exists x &\in E, g(y - f(x)) = 0 \\ \iff \exists x &\in E, y - f(x) \in \text{Ker}(g) \\ \iff \exists z &\in \text{Im}(f), y - z \in \text{Ker}(g) \\ \iff y &\in \text{Ker}(g) + \text{Im}(f). \end{aligned}$$

On conclut :  $g^{-1}(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$ .

**19.2**

a) On a, pour tout  $x$  de  $E$  :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(g \circ f) &\iff (g \circ f)(x) = 0 \iff g(f(x)) = 0 \\ &\iff f(x) \in \text{Ker}(g) \\ &\iff x \in f^{-1}(\text{Ker}(g)), \end{aligned}$$

d'où :  $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))$ .

b) Comme  $\text{Ker}(g) \supset \{0\}$ , on déduit de a) :

$$\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g)) \supset f^{-1}(\{0\}) = \text{Ker}(f).$$

c) On a :  $\text{Im}(g \circ f) = (g \circ f)(E) = g(f(E)) = g(\text{Im}(f))$ .

d) Comme  $\text{Im}(f) \subset F$ , on déduit de c) :

$$\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f)) \subset g(F) = \text{Im}(g).$$

**19.3** 1) Soit  $y \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ .

Alors,  $g(y) = 0$  et il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . On a :

$$\begin{aligned} y &= f(x) = (h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) \\ &= (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(0) = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre :  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .

2) Soit  $y \in F$ . On a :

$$g(y) = (g \circ f \circ k)(y) = g((f \circ k)(y)),$$

puis :  $g(y - (f \circ k)(y)) = 0$ . On a alors :

$$y = \underbrace{(y - (f \circ k)(y))}_{\in \text{Ker}(g)} + \underbrace{f(k(y))}_{\in \text{Im}(f)},$$

ce qui montre :  $\text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = F$ .

On conclut que  $\text{Ker}(g)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires dans  $F$ .

**19.4** a) 1) Supposons  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$ .

Soit  $y \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$  ; il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ , et  $g(y) = 0$ .

D'où :  $(g \circ f)(x) = g(y) = 0$ ,

donc  $x \in \text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$ , puis  $y = f(x) = 0$ .

Ceci montre :  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .

2) Réciproquement, supposons  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .

D'après l'exercice 19.2, on a déjà :  $\text{Ker}(g \circ f) \supset \text{Ker}(f)$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(g \circ f)$ . Alors  $f(x) \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ , donc  $f(x) = 0$ ,  $x \in \text{Ker}(f)$ .

Ceci montre  $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}(f)$ , et finalement :

$$\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f).$$

b) 1) Supposons  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$ .

Soit  $y \in F$ . Comme  $g(y) \in \text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $g(y) = (g \circ f)(x)$ . On déduit  $g(y - f(x)) = 0$ , c'est-à-dire  $y - f(x) \in \text{Ker}(g)$ .

On a alors  $y = (y - f(x)) + f(x) \in \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$ .

Ceci montre :  $\text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = F$ .

2) Réciproquement, supposons  $\text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = F$ .

D'après l'exercice 19.2, on a déjà :  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ .

Soit  $z \in \text{Im}(g)$  ; il existe  $y \in F$  tel que  $z = g(y)$ . Il existe ensuite  $u \in \text{Ker}(g)$  et  $x \in E$  tels que  $y = u + f(x)$ . On a alors :

$$z = g(y) = g(u + f(x)) = (g \circ f)(x) \in \text{Im}(g \circ f).$$

Ceci montre  $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(g \circ f)$ , et finalement :

$$\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g).$$

### 19.5 Exprimons $p$ en fonction de $f$ , si c'est possible.

Si  $a = 0$ , alors  $f = e$ , donc  $f \in \mathcal{GL}(E)$  et  $f^{-1} = e$ .

Supposons  $a \neq 0$ . Alors,  $p = \frac{1}{a}(e - f)$ , d'où :

$$\begin{aligned} p^2 = p &\iff \frac{1}{a^2}(e - f)^2 = \frac{1}{a}(e - f) \\ &\iff e - 2f + f^2 = ae - af \\ &\iff f^2 + (a - 2)f = (a - 1)e \\ &\iff \begin{cases} f \circ \left( \frac{1}{a-1}(f + (a-2)e) \right) = e \\ \left( \frac{1}{a-1}(f + (a-2)e) \right) \circ f = e. \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci montre que  $f \in \mathcal{GL}(E)$  et que

$$f^{-1} = \frac{1}{a-1}(f + (a-2)e).$$

On peut remarquer que le résultat du cas  $a = 0$  rentre dans ce dernier résultat.

Finalement,  $f \in \mathcal{GL}(E)$  et  $f^{-1} = \frac{1}{a-1}(f + (a-2)e)$ .

### 19.6 $\implies$ :

Supposons  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ .

- On a, pour tout  $x \in E$  :  $f(x) \in \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ ,

donc  $f(f(x)) = 0$ , ce qui montre :  $f^2 = 0$ .

- En utilisant le théorème du rang et l'hypothèse, on a :

$$\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim \text{Ker}(f) = n - \text{rg}(f),$$

donc  $n = 2\text{rg}(f)$ .

$\iff$

Supposons  $f^2 = 0$  et  $n = 2\text{rg}(f)$ .

- On a, pour tout  $x \in E$  :  $f(f(x)) = 0$ , donc  $f(x) \in \text{Ker}(f)$ , ce qui montre :  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ .

- En utilisant le théorème du rang :

$$\dim \text{Ker}(f) = n - \text{rg}(f) = 2\text{rg}(f) - \text{rg}(f)$$

$$= \text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f).$$

Il en résulte :  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$ .

### 19.7 a) I) • On a :

$$\forall x \in E, \quad x = e(x) = f(x) + g(x) \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g),$$

donc  $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = E$ .

- Ensuite, pour étudier  $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$ , appliquons la formule de Grassmann :

$$\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g))$$

$$= \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) - \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g))$$

$$= \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(E)$$

$$\leq n - n = 0,$$

donc :  $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ .

On conclut que  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Im}(g)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

2) On a :

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g))$$

$$= \dim(\text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)) = \dim(E) = n.$$

b) De  $f + g = e$ , on déduit, en composant par  $f$  à droite :  $f^2 + g \circ f = f$ . On a donc, pour tout  $x \in E$  :

$$f(x - f(x)) = (f - f^2)(x) = g(f(x)).$$

On obtient :  $f(x - f(x)) \in \text{Im}(f)$

et  $f(x - f(x)) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$ .

Comme  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Im}(g)$  sont supplémentaires dans  $E$ , il en résulte  $f(x - f(x)) = 0$ , d'où  $f(x) = f^2(x)$ .

Ceci montre  $f^2 = f$ , donc  $f$  est un projecteur.

Par rôles symétriques de  $f$  et  $g$ ,  $g$  est aussi un projecteur.

Ou encore, comme  $f$  est un projecteur et que  $g = e - f$ ,  $g$  est un projecteur, le projecteur associé à  $f$ .

### 19.8 I) On a : $\text{Im}(f + f') \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(f')$ , car :

$$\forall x \in E, \quad (f + f')(x) = f(x) + f'(x) \in \text{Im}(f) + \text{Im}(f').$$

En passant aux dimensions :

$$\begin{aligned} \text{rg}(f + f') &= \dim(\text{Im}(f + f')) \leq \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(f')) \\ &\leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(f')) \\ &= \text{rg}(f) + \text{rg}(f'). \end{aligned}$$

2) En appliquant le résultat précédent à  $(f + f', -f')$  au lieu de  $(f, f')$ , on obtient :

$$\text{rg}(f) \leq \text{rg}(f + f') + \text{rg}(-f') = \text{rg}(f + f') + \text{rg}(f'),$$

$$\text{donc : } \text{rg}(f) - \text{rg}(f') \leq \text{rg}(f + f').$$

En échangeant  $f$  et  $f'$  :  $\text{rg}(f') - \text{rg}(f) \leq \text{rg}(f + f')$ , d'où finalement :

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(f')| \leq \text{rg}(f + f').$$

Remarquer l'analogie avec l'inégalité triangulaire et l'inégalité triangulaire renversée, par exemple pour la valeur absolue dans  $\mathbb{R}$  :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, \quad | |x| - |x'| | \leq |x + x'| \leq |x| + |x'|.$$

### 19.9 • Puisque $f^2 = f \circ f$ , on a : $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ .

Montrons :  $\text{Im}(f^2) \neq \text{Im}(f)$ . À cet effet, raisonnons par l'absurde : supposons  $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ .

Soit  $x \in E$  quelconque. On a :  $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ , donc il existe  $t \in E$  tel que  $f(x) = f(f(t)) = f^2(t)$ .

D'où, en composant par  $f$  :  $f^2(x) = f^3(t) = 0$ .

Ceci montre  $f^2 = 0$ , contradiction avec l'hypothèse  $f^2 \neq 0$ .

On a donc établi :  $\text{Im}(f^2) \subsetneq \text{Im}(f)$ .

D'autre part,  $\{0\} \subsetneq \text{Im}(f^2)$  car  $f^2 \neq 0$ , et  $\text{Im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3$  car sinon  $f$  serait surjective, donc bijective (puisque  $E$  est de dimension finie), contradiction avec  $f^3 = 0$ .

Ainsi :

$$\{0\} \subsetneq \text{Im}(f^2) \subsetneq \text{Im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3,$$

il en résulte, en passant aux dimensions :

$$0 < \text{rg}(f^2) < \text{rg}(f) < 3,$$

et donc, comme il s'agit de nombres entiers :

$$\text{rg}(f^2) = 1 \quad \text{et} \quad \text{rg}(f) = 2.$$

• On a :

$$f^3 = 0 \iff \begin{cases} f \circ f^2 = 0 \\ f^2 \circ f = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f) \\ \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f^2). \end{cases}$$

D'autre part, d'après le théorème du rang :

$$\begin{cases} \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - \text{rg}(f) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(\text{Ker}(f^2)) = 3 - \text{rg}(f^2) = \dim(\text{Im}(f^2)) \\ \dim(\text{Ker}(f^2)) = 3 - \text{rg}(f^2) = 3 - 1 = 2 \\ \dim(\text{Ker}(f^2)) = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)). \end{cases}$$

On conclut :  $\text{Im}(f^2) = \text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .

*Remarque :*

Un exemple d'endomorphisme  $f$  convenant est, en notant  $B = (i, j, k)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$f(i) = j, \quad f(j) = k, \quad f(k) = 0.$$

### 19.10 (i) $\implies$ (ii) :

Supposons que  $g \circ f$  soit un isomorphisme de  $E$  sur  $G$ .

• D'après un résultat classique sur les applications (exercice 13.4) :

$$g \circ f \text{ bijective} \iff \begin{cases} g \circ f \text{ injective} \\ g \circ f \text{ surjective} \end{cases} \implies \begin{cases} f \text{ injective} \\ g \text{ surjective}. \end{cases}$$

• Soit  $y \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ . Alors,  $g(y) = 0$  et il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . D'où :

$$0 = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Comme  $g \circ f$  est bijective (donc injective), on déduit  $x = 0$ , puis  $y = f(x) = 0$ .

Ceci montre :  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .

• Soit  $y \in F$ . Alors,  $g(y) \in G$ . Comme  $g \circ f$  est bijective (donc surjective), il existe  $x \in E$  tel que  $g(y) = g(f(x))$ . On a :

$$g(y - f(x)) = g(y) - g(f(x)) = 0,$$

donc  $y - f(x) \in \text{Ker}(g)$ .

Ainsi :

$$y = \underbrace{(y - f(x))}_{\in \text{Ker}(g)} + \underbrace{f(x)}_{\in \text{Im}(f)}.$$

Ceci montre :  $\text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = F$ .

On conclut :  $F = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f)$ .

(ii)  $\implies$  (i) :

On suppose  $f$  injective,  $g$  surjective et  $F = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f)$ .

- Soit  $x \in \text{Ker}(g \circ f)$ .

Alors,  $g(f(x)) = 0$ , donc  $f(x) \in \text{Ker}(g)$ .

Ainsi,  $f(x) \in \text{Ker} \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ , donc  $f(x) = 0$ , puis, comme  $f$  est injective,  $x = 0$ .

Ceci montre que  $g \circ f$  est injective.

- Soit  $z \in G$ .

Puisque  $g$  est surjective, il existe  $y \in F$  tel que  $z = g(y)$ .

Comme  $F = \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$ , il existe  $u \in \text{Ker}(g)$ ,  $v \in \text{Im}(f)$  tels que  $y = u + v$ . On a alors :

$$z = g(y) = g(u + v) = \underbrace{g(u)}_{=0} + g(v) = g(v).$$

Comme  $v \in \text{Im}(f)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $v = f(x)$ .

On a donc :

$$z = g(v) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Ceci montre que  $g \circ f$  est surjective.

On conclut que  $g \circ f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $G$ .

**19.11** 1) Il est clair que, si  $p \circ q = q \circ p = 0$ , alors  $p + q$  est un projecteur, puisque :

$$\begin{aligned} (p + q)^2 &= (p + q) \circ (p + q) \\ &= p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q. \end{aligned}$$

2) Réciproquement, supposons que  $p + q$  soit un projecteur de  $E$ . On a alors :

$$\begin{aligned} p + q &= (p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 \\ &= p + p \circ q + q \circ p + q, \end{aligned}$$

d'où :  $p \circ q + q \circ p = 0$ .

En composant par  $p$  à gauche et à droite, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} p \circ q + p \circ q \circ p = 0 \\ p \circ q \circ p + q \circ p = 0 \end{array} \right|,$$

d'où, en soustrayant :  $p \circ q - q \circ p = 0$ .

$$\text{Comme } \left\{ \begin{array}{l} p \circ q + q \circ p = 0 \\ p \circ q - q \circ p = 0 \end{array} \right|,$$

on déduit  $2p \circ q = 2q \circ p = 0$ , donc :  $p \circ q = q \circ p = 0$ .

**19.12** D'après l'hypothèse,  $f \circ (f - g + 2e) = e$ , donc  $f$  admet un symétrique à droite pour la loi  $\circ$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Comme  $E$  est de dimension finie, il en résulte  $(f - g + 2e) \circ f = e$ , c'est-à-dire :  $f^2 - g \circ f + 2f - e = 0$ . Par soustraction, on déduit :  $g \circ f = f \circ g$ .

**19.13** a) Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

- Soit  $y \in I_{p+1}$ .

Il existe  $x \in E$  tel que  $y = f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$ , d'où  $y \in I_p$ .

Ceci montre :  $I_{p+1} \subset I_p$ .

- Soit  $x \in K_p$ .

On a :  $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0) = 0$ , donc  $x \in K_{p+1}$ .

Ceci montre :  $K_p \subset K_{p+1}$ .

b) La suite d'entiers naturels  $(\dim(I_p))_{p \in \mathbb{N}}$  est décroissante, donc stationne sur un entier, noté  $r_0$ .

Il existe un plus petit entier  $p_0$  de  $\mathbb{N}$  tel que  $\dim(I_{p_0}) = r_0$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

- Si  $p < p_0$ , alors  $\dim(I_p) > r_0$ , donc :  $I_p \neq I_{p_0}$ .

- Si  $p \geq p_0$ , alors  $I_p \subset I_{p_0}$  et  $\dim(I_p) = \dim(I_{p_0})$ , donc  $I_p = I_{p_0}$ .

Ainsi (si  $p_0 \geq 1$ ) :

$$E = I_0 \supset \dots \supset I_{p_0-1} \supsetneqq I_{p_0} = I_{p_0+1} = \dots$$

c) Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

- Si  $p < p_0$ , alors (cf. b)),  $\dim(I_p) > \dim(I_{p_0})$ , d'où, en utilisant le théorème du rang :

$$\dim(K_p) = n - \dim(I_p) < n - \dim(I_{p_0}) = \dim(K_{p_0}),$$

et donc, nécessairement,  $K_p \neq K_{p_0}$ .

- Si  $p \geq p_0$ , alors (cf. a)),  $K_p \supset K_{p_0}$ , et, en utilisant le théorème du rang :

$$\dim(K_p) = n - \dim(I_p) = n - \dim(I_{p_0}) = \dim(K_{p_0}),$$

d'où :  $K_p = K_{p_0}$ .

Ainsi (si  $p_0 \geq 1$ ) :

$$\{0\} = K_0 \subset \dots \subset K_{p_0-1} \supsetneqq K_{p_0} = K_{p_0+1} = \dots$$

d) • Montrons :  $\forall p < p_0, I_p \neq I_{p+1}$ .

À cet effet, raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe  $p < p_0$  tel que  $I_p = I_{p+1}$  (on a donc, nécessairement,  $p_0 \geq 1$ ).

Soit  $y \in I_{p_0-1}$  ; il existe  $x \in E$  tel que  $y = f^{p_0-1}(x)$ . Comme  $f^p(x) \in I_p = I_{p+1}$ , il existe  $t \in E$  tel que  $f^p(x) = f^{p+1}(t)$ , d'où :

$$y = f^{p_0-1}(x) = f^{p_0-p-1}(f^p(x))$$

$$= f^{p_0-p-1}(f^{p+1}(t)) = f^{p_0}(t) \in I_{p_0}.$$

On obtient ainsi  $I_{p_0-1} = I_{p_0}$ , contradiction.

- On a donc :  $\forall p < p_0, I_{p+1} \supsetneqq I_p$ , d'où :

$$\forall p < p_0, \dim(I_{p+1}) + 1 \leq \dim(I_p).$$

En sommant pour  $p$ , de 0 à  $p_0 - 1$ , on obtient, après simplifications :

$$\dim(I_{p_0}) + p_0 \leq \dim(I_0) = \dim(E) = n,$$

d'où :  $p_0 \leq n$ .

e) • Soit  $x \in I_{p_0} \cap K_{p_0}$ . Il existe  $t \in E$  tel que  $x = f^{p_0}(t)$ , et  $f^{p_0}(x) = 0$ , d'où  $f^{2p_0}(t) = 0$ .

Ainsi,  $t \in K_{2p_0} = K_{p_0}$  (car  $2p_0 \geq p_0$ ),

et donc  $x = f^{p_0}(t) = 0$ .

Ceci montre :  $I_{p_0} \cap K_{p_0} = \{0\}$ .

#### • 1<sup>ère</sup> méthode

Soit  $x \in E$ . Puisque  $f^{p_0}(x) \in I_{p_0} = I_{2p_0}$  (car  $2p_0 \geq p_0$ ), il existe  $t \in E$  tel que  $f^{p_0}(x) = f^{2p_0}(t)$ . On a alors

$$x = f^{p_0}(t) + (x - f^{p_0}(t)),$$

avec  $f^{p_0}(t) \in I_{p_0}$  et  $x - f^{p_0}(t) \in K_{p_0}$ ,

puisque  $f^{p_0}(x - f^{p_0}(t)) = f^{p_0}(x) - f^{2p_0}(t) = 0$ .

Ceci montre :  $I_{p_0} + K_{p_0} = E$ .

#### • 2<sup>ème</sup> méthode

En utilisant le théorème du rang :

$$\dim(I_{p_0} \oplus K_{p_0}) = \dim(I_{p_0}) + \dim(K_{p_0}) = n,$$

donc  $I_{p_0} \oplus K_{p_0} = E$ .

Finalement,  $I_{p_0}$  et  $K_{p_0}$  sont supplémentaires dans  $E$ .

### 19.14

a) 1) On a  $E_0 \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $0 \in E_0$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et tout  $(f, g) \in E_0^2$  :

$$(\alpha f + g)(0) = \alpha f(0) + g(0) = \alpha 0 + 0 = 0,$$

donc  $\alpha f + g \in E_0$ .

Ainsi,  $E_0$  est un  $\mathbb{R}$ -ev, sev de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

2) • Soit  $f \in E_0$ . Puisque l'application  $t \mapsto t^2 f(t)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , d'après le cours sur les primitives, l'application  $\phi(f)$ , qui en est une primitive, est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $\phi(f)$  s'annule en 0, donc  $\phi(f) \in E_0$ .

• On a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et tout  $(f, g) \in E_0^2$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (\phi(\alpha f + g))(x) &= \int_0^x t^2(\alpha f + g)(t) dt \\ &= \alpha \int_0^x t^2 f(t) dt + \int_0^x g(t) dt \\ &= \alpha \phi(f)(x) + \phi(g)(x) \\ &= (\alpha \phi(f) + \phi(g))(x), \end{aligned}$$

d'où :

$$\phi(\alpha f + g) = \alpha \phi(f) + \phi(g),$$

ce qui montre que  $\phi$  est linéaire.

On conclut que  $\phi$  est un endomorphisme de  $E_0$ .

• Soit  $f \in \text{Ker}(\phi)$ . On a alors  $\phi(f) = 0$ , donc  $(\phi(f))' = 0$ , d'où :  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 f(x) = 0$ . Il en résulte, en simplifiant par  $x^2$  :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 0$ . Ainsi,  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}^*$ . Mais, comme  $f$  est continue en 0 (car  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ), il s'ensuit  $f(0) = 0$  et finalement  $f = 0$ .

Ceci montre  $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ , donc l'application linéaire  $\phi$  est injective.

• Montrons, par exemple, que l'application

$$e_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x,$$

qui est élément de  $E_0$ , n'est pas atteinte par  $\phi$ .

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe  $f \in E_0$  telle que  $e_1 = \phi(f)$ .

On a alors, en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e_1'(x) = x^2 f(x),$$

d'où en particulier :  $e_1'(0) = 0$ , contradiction, car  $e_1'(0) = 1$ .

Ceci montre que  $e_1$ , par exemple, n'est pas atteint par  $\phi$ , et on conclut que  $\phi$  n'est pas surjective.

b) Si  $E_0$  était de dimension finie, comme  $\phi$  est un endomorphisme injectif de  $E_0$ ,  $\phi$  serait surjectif, contradiction. Ceci montre, par l'absurde, que  $E_0$  n'est pas de dimension finie.

### 19.15

a) On a, pour tout  $y$  de  $F$  :

$$y \in \text{Ker}(g|_{\text{Im}(f)}) \iff \left\{ \begin{array}{l} y \in \text{Im}(f) \\ g(y) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff y \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f).$$

b) Puisque :

$$\text{rg}(g \circ f) = \dim(\text{Im}(g \circ f))$$

$$= \dim(\text{Im}(g|_{\text{Im}(f)})) = \text{rg}(g|_{\text{Im}(f)}),$$

on a, d'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(g|_{\text{Im}(f)}) = \dim(\text{Im}(f)) - \dim(\text{Ker}(g|_{\text{Im}(f)})),$$

d'où, en utilisant a) :

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) - \dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)).$$

c) Comme :  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ , on a :

$$\dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(g)),$$

d'où, d'après b) et le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \text{rg}(g \circ f) &\geq \text{rg}(f) - \dim(\text{Ker}(g)) \\ &= \text{rg}(f) - (\dim(F) - \text{rg}(g)) \\ &= \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(F). \end{aligned}$$

**19.16**

Par hypothèse, pour tout  $x$  de  $E - \{0\}$ , il existe  $\lambda_x \in K$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$ . Il est clair que, pour  $x \in E - \{0\}$  fixé,  $\lambda_x$  est unique et, *a priori*, dépend de  $x$ . Nous allons montrer que  $\lambda_x$  ne dépend pas de  $x$ .

Soit  $(x, y) \in (E - \{0\})^2$ .

1) Supposons  $(x, y)$  libre.

On a :  $f(x) = \lambda_x x$ ,  $f(y) = \lambda_y y$ ,  $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ , d'où, par linéarité de  $f$  :  $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x + y)$ , c'est-à-dire :  $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$ .

Comme  $(x, y)$  est libre,

on déduit  $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$ , et donc  $\lambda_x = \lambda_y$ .

2) Supposons  $(x, y)$  lié.

Il existe  $\alpha \in K - \{0\}$  tel que  $y = \alpha x$ . On a :

$$f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x$$

et

$$f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \alpha x,$$

d'où  $(\lambda_x - \lambda_y)\alpha x = 0$ , et donc  $\lambda_x = \lambda_y$ .

On a ainsi prouvé que  $\lambda_x$  ne dépend pas de  $x$ .

Donc, il existe  $\lambda \in K$  tel que :  $\forall x \in E - \{0\}, f(x) = \lambda x$ .

De plus, trivialement :  $f(0) = \lambda 0$ .

Finalement,  $f = \lambda \text{ Id}_E$ , c'est-à-dire que  $f$  est une homothétie.



## Plan

Les méthodes à retenir	295
Énoncés des exercices	298
Du mal à démarrer ?	304
Corrigés	307

## Thèmes abordés dans les exercices

- Calcul des puissances d'une matrice carrée assez simple
- Étude de l'inversibilité et, éventuellement, calcul de l'inverse d'une matrice carrée
- Étude d'ensembles structurés de matrices : groupes, anneaux, corps de matrices
- Obtention de résultats portant sur des applications linéaires en dimension finie, en passant par des matrices, et, inversement, obtention de résultats portant sur des matrices en passant par des applications linéaires
- Détermination du rang d'une matrice
- Étude de matrices carrées semblables, non semblables.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions et structures des ensembles usuels de matrices :  
 $M_{n,p}(K)$ ,  $M_n(K)$ ,  $GL_n(K)$ ,  $T_{n,s}(K)$ ,  $T_{n,i}(K)$ ,  $D_n(K)$ ,  $S_n(K)$ ,  $A_n(K)$
- Matrices élémentaires
- Interprétation matricielle d'une application linéaire
- Définition et propriétés du rang d'une matrice
- Théorème du cours sur  $A = PJ_{n,p,r}Q$
- Définition et propriétés de la similitude des matrices carrées
- Définition d'une matrice carrée nilpotente.

## Les méthodes à retenir

$K$  désigne un corps commutatif.

On abrège espace vectoriel en ev, et sous-espace vectoriel en sev.

Pour effectuer un calcul sur des matrices

Essayer, autant que possible, de garder une notation globale (une lettre pour une matrice), ne faisant pas intervenir les termes des matrices.

→ Exercices 20.2, 20.10, 20.12, 20.18, 20.20, 20.24, 20.26

**Pour effectuer un calcul sur des matrices avec paramètres**

Lorsqu'intervient une matrice diagonale, ou une matrice trigonale, passer aux termes des matrices.

→ Exercices 20.1, 20.23, 20.25.

**Pour calculer les puissances  $A^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$ ) d'une matrice carrée  $A$**

Essayer de décomposer linéairement ces matrices sur des matrices plus simples, sans paramètre, si c'est possible.

→ Exercices 20.7, 20.12, 20.14.

- Essayer de décomposer  $A$  en combinaison linéaire d'une matrice  $\alpha I_n$ ,  $\alpha \in K$ , et d'une matrice simple, souvent une matrice nilpotente, et utiliser la formule du binôme de Newton.

→ Exercices 20.7, 20.14 e)

- Dans certains exemples simples, calculer  $A^2, A^3$  et essayer de conjecturer une formule pour  $A^k$ , que l'on montrera alors par récurrence sur  $k$ .
- La formule obtenue pour  $A^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  sera souvent aussi valable pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

→ Exercice 20.7

- D'autres méthodes, liées à la réduction des matrices carrées, seront vues en deuxième année.

- Noter  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $M_{n,1}(K)$ ,  $(C_1, \dots, C_n)$  la famille des colonnes de  $A$ . Exprimer  $C_1, \dots, C_n$  en fonction de  $E_1, \dots, E_n$  par la donnée de  $A$ , résoudre ce système en considérant que les inconnues sont  $E_1, \dots, E_n$ , et en déduire l'inversibilité de  $A$  et l'expression de l'inverse  $A^{-1}$  de  $A$ .

→ Exercice 20.4

**Pour montrer qu'une matrice carrée  $A \in M_n(K)$  est inversible, et éventuellement calculer son inverse**

- Associer à la matrice carrée  $A$  un système linéaire  $AX = Y$ , où  $X, Y$  sont des matrices-colonnes, et résoudre ce système en considérant que l'inconnue est  $X$ .

- Conjecturer la forme  $B$  de la matrice inverse de  $A$ , et vérifier que celle-ci convient, en calculant le produit  $AB$  (ou  $BA$ ).

→ Exercices 20.3, 20.11 c)

- Résoudre l'équation  $AB = I_n$  (ou  $BA = I_n$ ) où  $B$  est une matrice carrée inconnue, d'une forme particulière.

→ Exercice 20.14 c)

- Former une équation simple sur  $A$ , puis isoler le terme en  $I_n$ .

→ Exercices 20.12, 20.20

- Se rappeler que toute matrice triangulaire à termes diagonaux tous non nuls est inversible.

→ Exercice 20.2

- Interpréter  $A$  comme matrice d'un certain endomorphisme  $f$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie égale à  $n$ , montrer que  $f$  est bijectif, exprimer  $f^{-1}$ , et en déduire  $A^{-1}$ .

→ Exercice 20.13.

- Déterminer la dimension du sev engendré par les colonnes de  $A$  (ou la dimension du sev engendré par les lignes de  $A$ ), qui est égale au rang de  $A$ .

→ Exercices 20.6, 20.15, 20.17, 20.22

#### Pour calculer le rang d'une matrice $A$

- Faire apparaître  $A$  sous la forme  $P\mathbf{J}_{n,p,r}Q$ , où  $P$  et  $Q$  sont inversibles.

→ Exercice 20.26 a)

- Appliquer le théorème du rang, pour  $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$  :

$$\text{rg}(A) = p - \dim(\text{Ker}(A)),$$

lorsqu'on peut déterminer  $\text{Ker}(A)$ .

- Utiliser la définition du rang d'une matrice comme dimension du sev engendré par les colonnes de  $A$  (ou par les lignes de  $A$ ).

→ Exercice 20.16 a)

#### Pour faire intervenir le rang d'une matrice $A$

- Utiliser le théorème du rang, qui permet de se ramener à l'étude de la dimension du noyau.

- Utiliser le théorème du cours :  $\text{rg}(A) = r$  si et seulement s'il existe  $P, Q$  inversibles telles que  $A = P\mathbf{J}_{n,p,r}Q$ , où  $\mathbf{J}_{n,p,r} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ .

→ Exercices 20.16 a), 20.22, 20.26.

#### Pour montrer que deux matrices carrées sont semblables

Trouver une matrice carrée inversible  $P$  telle que :  $B = PAP^{-1}$ .

→ Exercices 20.18, 20.21 c), f).

Essayer de :

- montrer  $\text{tr}(A) \neq \text{tr}(B)$ , ou  $\det(A) \neq \det(B)$ , ou  $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B)$ .

→ Exercices 20.21 a), b)

#### Pour montrer que deux matrices carrées $A, B$ ne sont pas semblables

- montrer que l'une des deux matrices carrées  $A, B$  vérifie une équation polynomiale que ne vérifie pas l'autre.

→ Exercice 20.21 d).

- montrer qu'il existe  $\lambda \in K$  tel que  $\text{rg}(A - \lambda\mathbf{I}_n) \neq \text{rg}(B - \lambda\mathbf{I}_n)$ .

→ Exercice 20.21 e).

### Pour manipuler des matrices triangulaires

Utiliser les propriétés du cours sur les matrices triangulaires, en particulier :

- la somme et le produit de deux matrices triangulaires supérieures sont triangulaires supérieures
- une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses termes diagonaux sont tous non nuls. De plus, dans ce cas, on connaît les termes diagonaux de la matrice inverse.

### → Exercice 20.2.

### Pour manipuler des transposées de matrices, ou des traces de matrices carrées

Privilégier la notation globale des matrices, en utilisant les propriétés de la transposition et de la trace :

$${}^t(\alpha A + B) = \alpha {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

$$\text{tr}(\alpha A + B) = \alpha \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad \text{tr}({}^tA) = \text{tr}(A).$$

### Pour manipuler des matrices symétriques et des matrices antisymétriques

- Utiliser la définition, pour  $A \in \mathbf{M}_n(K)$  :

$$A \in \mathbf{S}_n(K) \iff {}^tA = A,$$

$$A \in \mathbf{A}_n(K) \iff {}^tA = -A.$$

- Utiliser  $\mathbf{S}_n(K) \oplus \mathbf{A}_n(K) = \mathbf{M}_n(K)$  et la décomposition :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \quad A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + {}^tA)}_{\in \mathbf{S}_n(K)} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - {}^tA)}_{\in \mathbf{A}_n(K)}.$$

- Utiliser :

$$\dim(\mathbf{S}_n(K)) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim(\mathbf{A}_n(K)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

## Énoncés des exercices

### 20.1 Étude du produit d'une matrice carrée par une matrice diagonale, de chaque côté

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in K - \{0\}$ ,  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$ .

On note  $B = (\lambda_i \mu_j a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$ .

a) Montrer que, en notant  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $E = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ , on a :

$$B = DAE.$$

b) En déduire que  $B$  est inversible si et seulement si  $A$  est inversible, et que, dans ce cas, en notant  $A^{-1} = (\alpha_{ij})_{ij}$ , on a :  $B^{-1} = (\mu_i^{-1} \lambda_j^{-1} \alpha_{ij})_{ij}$ .

### 20.2 Groupe multiplicatif des matrices triangulaires à termes diagonaux tous égaux à 1

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  l'ensemble des matrices  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathbf{M}_n(K)$  telles que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad \begin{cases} i > j \implies a_{ij} = 0 \\ i = j \implies a_{ij} = 1. \end{cases}$$

Montrer que  $E$  est un groupe multiplicatif.

**20.3**

**Exemple de groupe multiplicatif de matrices carrées d'ordre deux, qui est un sous-groupe de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$**

On note, pour tout  $(a, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  :  $M(a, t) = \begin{pmatrix} a \cosh t & -a \sinh t \\ -a \sinh t & a \cosh t \end{pmatrix}$ ,

et  $G = \{M(a, t); (a, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\}$ .

Montrer que  $G$  est un groupe pour la multiplication.

**20.4**

**Exemple de calcul d'inverse d'une matrice carrée**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

**20.5**

**Exemple d'isomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ . On considère l'application

$$f : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}, \quad P \longmapsto f(P) = (P(a_0), P'(a_1), \dots, P^{(n)}(a_n)).$$

Montrer que  $f$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**20.6**

**Exemple de calcul du rang d'une matrice carrée d'ordre  $n$**

Quel est le rang de  $A = (\sin(i + j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  ?

**20.7**

**Exemple de calcul des puissances d'une matrice carrée triangulaire d'ordre trois**

Calculer  $A^n$  pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

**20.8**

**Matrices carrées inversibles dont les lignes ont toutes la même somme**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A = (a_{ij})_{ij} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . On suppose qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = \lambda.$$

On note  $A^{-1} = (b_{ij})_{ij}$ . Montrer  $\lambda \neq 0$  et :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n b_{ij} = \frac{1}{\lambda}.$$

**20.9**

**Endomorphismes nilpotents d'ordre trois dans un espace vectoriel de dimension trois**

Soient  $E$  un  $K$ -ev de dimension trois,  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que :  $f^3 = 0$  et  $f^2 \neq 0$ .

a) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer le commutant  $C_N$  de  $N$  dans  $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire l'ensemble  $C_N = \{A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}); AN = NA\}$ .

c) En déduire, en notant  $e = \text{Id}_E$  :

$$\{g \in \mathcal{L}(E); g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}(e, f, f^2).$$

### 20.10 Matrices à termes > 0

On dit ici qu'une matrice à termes réels est **positive** si et seulement si tous ses termes sont  $> 0$ .

a) Montrer que la somme de deux matrices positives est positive et que le produit de deux matrices positives est positive.

b) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  positive. On suppose qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  positive telle que  $A^k X = X$ . Montrer qu'il existe  $Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  positive telle que  $AY = Y$ .

### 20.11 Exemple de groupe de matrices carrées d'ordre trois, sous-groupe de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$

On note, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :  $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 + \frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ -a & -\frac{a^2}{2} & 1 - \frac{a^2}{2} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ ,

et  $G = \{M(a); a \in \mathbb{R}\}$ .

a) En notant  $I = I_3$  et  $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , montrer :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad M(a) = I + aU + \frac{a^2}{2}U^2.$$

b) Montrer que l'application  $M : \mathbb{R} \longrightarrow G$ ,  $a \longmapsto M(a)$  est bijective et que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a+b) = M(a)M(b).$$

c) En déduire que  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$  pour la multiplication.

d) Exprimer  $(M(a))^k$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 20.12 Étude des matrices combinaisons linéaires de l'identité et de la matrice de seuil, dont tous les termes sont égaux à 1

Soient  $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ ,  $(a,b) \in K^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$ .

Étudier l'inversibilité de  $A$ , et calculer  $A^{-1}$  quand cet inverse existe.



**20.13 Exemple de calcul de l'inverse d'une matrice triangulaire dont les termes sont certains coefficients binomiaux**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $A$  la matrice carrée réelle d'ordre  $n + 1$  dont le terme situé à la ligne  $i$ , colonne  $j$  est le coefficient binomial  $\binom{j}{i}$ , où, par convention, ce coefficient est nul si  $i > j$ .

a) Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) \longmapsto P(X + 1)$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$ , et préciser la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

b) En déduire que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$ .



**20.14 Exemple de sous-anneau de  $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$**

Soient  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ ,

$$E = \{M(x,y) = xI + yJ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

a) Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -ev ; en donner une base et la dimension.

b) Montrer que  $(E, +, \cdot)$  est un anneau commutatif.

c) Quels sont les éléments de  $E$  inversibles (pour  $\cdot$  dans  $E$ )?

d) Résoudre les équations, d'inconnue  $X \in E$  :

$$(i) X^2 = I \quad (ii) X^2 = 0 \quad (iii) X^2 = X.$$

e) Pour  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $(M(x,y))^n$ .



**20.15 Calcul du rang d'une matrice dont les termes sont issus de la suite de Fibonacci**

On note  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de Fibonacci, définie par  $\phi_0 = 0$ ,  $\phi_1 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Soit  $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ . Déterminer le rang de la matrice  $A_n = (\phi_{i+j})_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ .



**20.16 Décomposition des matrices de rang  $\leq 1$  en produit d'une colonne par une ligne**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H \in \mathbf{M}_n(K)$  telle que  $\text{rg}(H) \leq 1$ .

a) Montrer qu'il existe  $(U, V) \in (\mathbf{M}_{n,1}(K))^2$  tel que :  $H = U^t V$  et  $\text{tr}(H) = {}^t V U$ .

b) Montrer :  $\forall A \in \mathbf{M}_n(K)$ ,  $HAH = \text{tr}(AH)H$ .



**20.17 Exemple de calcul du rang d'une matrice carrée d'ordre  $n$**

Soient  $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ ,  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & (0) & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ .

Déterminer le rang de  $A_n$ .

**20.18** Trois matrices deux à deux semblables, dont l'une au moins est supposée inversible

Soient  $A, B, C \in \mathbf{M}_n(K)$  telles que  $A$  soit inversible. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)  $A, B, C$  sont deux à deux semblables

(ii)  $\exists (X, Y, Z) \in (\mathbf{M}_n(K))^3, XYZ = A, YZX = B, ZXY = C.$

**20.19** Exemple de groupe multiplicatif de matrices carrées d'ordre trois, qui n'est pas un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$

On note, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* : M(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$

a) Montrer que  $G$  est un groupe pour la multiplication des matrices carrées. Préciser l'élément neutre.

b) Est-ce que  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$  ?

**20.20** Exemple de calcul de l'inverse d'un polynôme de matrice carrée satisfaisant une équation polynomiale

Soient  $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :  $A^5 + A = I_n$ . Montrer que  $A^2 + A + I_n$  est inversible et calculer son inverse.

**20.21** Exemples de matrices carrées d'ordre trois, semblables, non semblables

Les matrices carrées d'ordre trois  $A$  et  $B$  sont-elles semblables, dans les exemples suivants :

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**20.22 Exemple de calcul d'un couple  $(P, Q)$  de matrices inversibles tel que  $A = P\mathbf{J}_{n,p}Q$** 

On note :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $(P, Q) \in (\mathbf{GL}_3(\mathbb{R}))^2$  tel que  $A = P\mathbf{J}Q$ , et calculer un tel couple  $(P, Q)$ .

**20.23 Étude d'un endomorphisme de  $\mathbf{M}_n(K)$** 

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n \in K$  deux à deux distincts.

On note  $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{M}_n(K)$  et on considère l'application

$$f : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathbf{M}_n(K), \quad M \longmapsto f(M) = DM - MD.$$

a) Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbf{M}_n(K)$ .

b) Déterminer  $\text{Ker}(f)$ .

c) Montrer que  $\text{Im}(f)$  est l'ensemble  $F$  des matrices de  $\mathbf{M}_n(K)$  dont tous les termes diagonaux sont nuls.

**20.24 Endomorphisme nilpotent sur un espace vectoriel de matrices carrées**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ . On considère l'application

$$f : \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad M \longmapsto f(M) = AM - MB.$$

a) Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ .

b) Établir :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad f^p(M) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} A^k M B^k.$$

c) En déduire que, si  $A$  et  $B$  sont nilpotentes, alors  $f$  est nilpotent.

**20.25 Centre de  $\mathbf{M}_n(K)$** 

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le centre de  $\mathbf{M}_n(K)$ , c'est-à-dire

$$\{A \in \mathbf{M}_n(K); \forall M \in \mathbf{M}_n(K), AM = MA\}.$$

**20.26 Rangs de  $A$ ,  $\text{Re}(A)$ ,  $\text{Im}(A)$ , pour  $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$** 

Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . On note, pour toute  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  :

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{ij}, \quad \text{Re}(A) = (\text{Re}(a_{ij}))_{ij}, \quad \text{Im}(A) = (\text{Im}(a_{ij}))_{ij},$$

qui sont dans  $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ .

a) Montrer, pour toute  $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  :  $\text{rg}(\overline{A}) = \text{rg}(A)$ .

b) En déduire, pour toute  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$  :

$$\text{rg}(\text{Re}(A)) \leqslant 2 \text{rg}(A) \quad \text{et} \quad \text{rg}(\text{Im}(A)) \leqslant 2 \text{rg}(A).$$

c) 1) Donner un exemple de  $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$  telle que :

$$\operatorname{rg}(A) = 1, \quad \operatorname{rg}(\operatorname{Re}(A)) = 2, \quad \operatorname{rg}(\operatorname{Im}(A)) = 2.$$

2) Donner un exemple de  $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$  telle que :

$$\operatorname{rg}(A) = 2, \quad \operatorname{rg}(\operatorname{Re}(A)) = 1, \quad \operatorname{rg}(\operatorname{Im}(A)) = 1.$$

## 20.27

### Matrices bistrochastiques, matrices colonnes à termes $\geq 0$

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice bistrochastique, c'est-à-dire telle que :

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad a_{ij} \geq 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1. \end{cases}$$

Soit  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telle que :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i \geq 0$ .

On note  $Y = AX = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$\text{Démontrer : } \prod_{i=1}^n y_i \geq \prod_{i=1}^n x_i.$$

## Du mal à démarrer ?

**20.1** a) Effectuer le produit  $DAE$ , ou bien calculer le terme général de ce produit.

b) Puisque  $D$  et  $E$  sont inversibles,  $B$  est inversible si et seulement si  $A$  l'est, et dans ce cas  $B^{-1} = E^{-1}A^{-1}D^{-1}$ .

**20.2** Montrer que  $E$  est un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_n(K)$ .

**20.3** Montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  pour la multiplication.

**20.4** En notant  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , et  $(C_1, \dots, C_n)$  les colonnes de  $A$ , exprimer  $C_1, \dots, C_n$  en fonction de  $e_1, \dots, e_n$ , puis inverser le système d'équations, en calculant  $e_1, \dots, e_n$  en fonction de  $C_1, \dots, C_n$ , ce qui fournira  $A^{-1}$ .

**20.5** • Vérifier que  $f$  est linéaire.

- Considérer la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}_n[X]$  pour le départ et la base canonique de  $\mathbb{C}^{n+1}$  pour l'arrivée.

**20.6** Montrer que les colonnes de  $A$  se décomposent linéairement sur deux colonnes simples et fixes (qui ne sont pas, a priori, des colonnes de  $A$ ).

**20.7** Décomposer  $A$  en  $A = I + J$ , calculer  $J^2, J^3$ , et utiliser la formule du binôme de Newton, dans le cas  $n \geq 0$ .

Montrer ensuite que la formule obtenue pour  $n \geq 0$  est aussi valable pour  $n \leq 0$ .

**20.8** Considérer  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  et traduire l'hypothèse par  $AV = \lambda V$ .

Montrer  $\lambda \neq 0$  et déduire  $A^{-1}V = \frac{1}{\lambda}V$ .

**20.9** a) Considérer  $e_1 \in E$  tel que  $f^2(e_1) \neq 0$ , puis  $e_2 = f(e_1)$ ,  $e_3 = f(e_2)$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ .

b) Passer, par exemple, par les (neuf) éléments de  $N$ .

c) Traduire le résultat de b) en termes d'endomorphismes.

**20.10** a) Revenir aux éléments des matrices.

b) Considérer  $Y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i X = X + AX + \dots + A^{k-1}X$ .

**20.11** b) Calculer  $M(a)M(b)$  en utilisant a).

c) Utiliser les résultats de b) pour montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ .

d) Montrer  $(M(a))^k = M(ka)$ , par récurrence sur  $k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , puis, pour  $k < 0$ , considérer l'inverse de  $M(a)$ , qui est  $M(-a)$ .

**20.12** Décomposer linéairement  $A$  sur  $I_n$  et sur la matrice  $U$  dont tous les termes sont égaux à 1.

Remarquer que  $U^2 = nU$ . En déduire une équation du second degré satisfaite par  $A$ .

**20.13** a) Pour obtenir la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , développer  $(X+1)^j$  par la formule du binôme de Newton.

b) Considérer l'application

$$g : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) \longmapsto P(X-1).$$

**20.14** b) Décomposer linéairement  $J^2$  sur  $I$  et  $J$ . En déduire la décomposition linéaire de  $M(x,y)M(x',y')$  sur  $I$  et  $J$ .

c) Pour  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  donné, résoudre l'équation

$$M(x,y)M(x',y') = I, \text{ d'inconnue } (x',y') \in \mathbb{R}^2.$$

d) En notant  $X = M(x,y)$ , calculer  $X^2$ .

e) Décomposer linéairement  $M(x,y)$  sur  $I$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , puis utiliser la formule du binôme de Newton.

**20.15** Remarquer que, pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ , la colonne numéro  $j+2$  de  $A_n$  est la somme des colonnes numéros  $j+1$  et  $j$  de  $A_n$ .

**20.16** a) Remarquer que, puisque  $\text{rg}(H) = 1$ , les colonnes de  $H$  sont colinéaires à une colonne fixe, qui n'est pas a priori une colonne de  $H$ .

b) Montrer, avec les notations de a) :  $HAH = (\mathbf{V}AU)U\mathbf{V}$ . Appliquer le résultat de a) à  $AH$  à la place de  $H$ .

**20.17** Opérer  $C_n \leftarrow C_n - C_1 + C_2 + \dots + (-1)^{n-1}C_{n-1}$ , pour amener une  $n$ -ème colonne plus simple.

**20.18** D'abord, se rappeler que, par définition, deux matrices carrees  $A, B$  de même format sont dites semblables si et seulement s'il existe  $P \in \mathbf{GL}_n(K)$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .

(i)  $\implies$  (ii) :

S'il existe  $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$  telles que  $B = P^{-1}AP$

et  $C = Q^{-1}BQ$ , chercher  $X, Y, Z$  convenant, en les choisissant de façon que les produits se simplifient.

(ii)  $\implies$  (i) :

Montrer que  $X, Y, Z$  sont alors inversibles et que  $B = X^{-1}AX$ , puis un résultat analogue pour  $C$ .

**20.19** a) Montrer que  $G$  est stable pour la multiplication, que  $J = M(0, 1/2)$  est neutre dans  $G$ , et que tout  $M(a,b)$  admet un symétrique pour la multiplication dans  $G$ , en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} M(a,b)M(c,d) = J \\ M(c,d)M(a,b) = J, \end{cases}$$

d'inconnue  $(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .

b) Remarquer que  $G$  n'est pas inclus dans  $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ , ou encore, remarquer que  $I_3$  n'est pas dans  $G$ .

**20.20** Effectuer la division euclidienne de  $X^5 + X - 1$  par  $X^2 + X + 1$ .

**20.21** Rappels de cours :

- Par définition, deux matrices carrées (réelles d'ordre trois ici)  $A, B$  sont dites semblables si et seulement s'il existe  $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .

- Si deux matrices carrées  $A, B$  sont semblables, alors :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B), \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(B), \quad \det(A) = \det(B),$$

mais les réciproques sont fausses.

a) Remarquer les traces.

b) Remarquer les déterminants.

c) Puisque  $A$  et  $B$  se ressemblent en permutant les termes, chercher une matrice  $P$  représentant une permutation de la base canonique pour que  $B = P^{-1}AP$ , ou encore  $PB = AP$ .

d) Remarquer  $A^2$  et  $B^2$ .

e) Remarquer les rangs de  $A - 2I_3$  et  $B - 2I_3$ .

f) Chercher une matrice  $P$  inversible, diagonale à termes diagonaux égaux à 1 ou  $-1$ , de façon que  $B = P^{-1}AP$ .

**20.22** Revenir à la preuve, dans le cours, de l'existence de  $(P, Q)$ , en considérant une application linéaire  $f : E \longrightarrow F$  représentée par  $A$  : chercher une base de  $\text{Ker}(f)$ , compléter celle-ci en une base de  $E$ , calculer les images par  $f$  de ces vecteurs, et compléter cette base de  $\text{Im}(f)$  en une base de  $F$ .

On contrôlera le couple  $(P, Q)$  obtenu, en calculant le produit  $PQ$ .

**20.23** b) Traduire  $f(M) = 0$  par équivalences logiques, en passant par les termes des matrices. Obtenir :  $\text{Ker}(f) = \mathbf{D}_n(K)$ .

c) Montrer  $\text{Im}(f) \subset F$ , de manière analogue à la solution de b), en passant par les termes des matrices, puis comparer les dimensions.

**20.24** b) Récurrence sur  $p$ . Utiliser la formule fondamentale sur les coefficients binomiaux :

$$\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k}.$$

c) Si  $A^p = 0$  et  $B^q = 0$ , calculer  $f^{p+q}(M)$ .

**20.25** Utiliser les matrices élémentaires  $E_{ij}$ .

**20.26** Se rappeler les propriétés de la conjugaison pour les matrices à termes complexes (qui se redémontrent simplement en revenant aux éléments des matrices) :

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{\alpha A} = \overline{\alpha} \overline{A}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \overline{B}.$$

a) Utiliser le théorème du cours qui donne  $A = P\mathbf{J}_{n,p,r}Q$ , avec les notations usuelles.

b) Utiliser le résultat de l'exercice 19.8, traduit en termes de matrices, ou redémontrer que le rang est sous-additif, c'est-à-dire la formule :

$$\operatorname{rg}(A + B) \leqslant \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B),$$

pour toutes  $A, B \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ .

### 20.27 • Montrer d'abord que $Y$ est à termes tous $\geqslant 0$ .

Examiner le cas où l'un des  $x_i$  est nul, et se ramener au cas où tous les  $x_i$  sont  $> 0$ .

- Montrer que l'application  $f : x \mapsto -\ln x$  est convexe, et en déduire que, pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0; +\infty[^2$  tel que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ , on a :  $f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$ .

Appliquer à  $\lambda_j = a_{ij}$ .

# Corrigés des exercices

20.1

a) On calcule  $DAE$  :

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\left( \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right)}^A \\
 \left( \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \overset{(0)}{\dots} & \lambda_n \\ \ddots & & \\ (0) & & \lambda_n \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} \lambda_1 a_{11} & \dots & \lambda_1 a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \dots & \lambda_n a_{nn} \end{array} \right) \quad \underbrace{\text{DA}}_{D A} \\
 \overbrace{\left( \begin{array}{ccc} \mu_1 & \overset{(0)}{\dots} & \mu_n \\ \ddots & & \\ (0) & & \mu_n \end{array} \right)}^E \\
 \left( \begin{array}{ccc} \lambda_1 a_{11} & \dots & \lambda_1 a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \dots & \lambda_n a_{nn} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} \lambda_1 a_{11} \mu_1 & \dots & \lambda_1 a_{1n} \mu_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} \mu_1 & \dots & \lambda_n a_{nn} \mu_n \end{array} \right) \quad \underbrace{\text{DAF}=B}_{D A F = B}
 \end{array}$$

b) Puisque les  $\lambda_i$  et les  $\mu_j$  sont tous  $\neq 0$ , les matrices diagonales  $D$  et  $E$  sont inversibles, et  $D^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ ,  $E^{-1} = \text{diag}(\mu_1^{-1}, \dots, \mu_n^{-1})$ . Comme  $B = DAE$ , il en résulte que  $B$  est inversible si et seulement si  $A$  est inversible et que, dans ces conditions :

$$B = (DAE)^{-1} = E^{-1}A^{-1}D^{-1} = (\mu_i^{-1}\alpha_{ii}\lambda_i^{-1})_{ii},$$

en appliquant  $a$ ) à  $(E^{-1}, A^{-1}, D^{-1})$  à la place de  $(D, A, E)$ .

20.2

- 0.2** • Soient  $A, B \in E$ . Comme  $A$  et  $B$  sont triangulaires supérieures à termes diagonaux égaux à 1,  $AB$  l'est aussi, donc  $AB \in E$ .

- $I_n \in E$ .

- Si  $A \in E$ , alors  $A$  est inversible et  $A^{-1}$  est triangulaire supérieure à termes diagonaux égaux à 1, donc  $A^{-1} \in E$ .

Ainsi,  $E$  est un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_n(K)$ , donc est un groupe (pour  $\cdot$ ).

203

**0.3** Montrons que  $G$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  pour la multiplication.

1) On a, pour tout  $(a,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  :

$$\det(M(a,t)) = \begin{vmatrix} a \cosh t & -a \sinh t \\ -a \sinh t & a \cosh t \end{vmatrix} = a^2(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = a^2 \neq 0,$$

donc  $M(a,t) \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ .

2) On a :  $I_2 = M(1,0) \in G$ , donc  $G \neq \emptyset$ .

3) Soient  $(a,t)$ ,  $(a',t') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned}
& M(a,t)M(a',t') \\
&= \begin{pmatrix} a \ccht & -a \sh t \\ -a \sh t & a \ccht \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \ccht' & -a' \sh t' \\ -a' \sh t' & a' \ccht' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aa'(\ccht \ccht' + \sh t \sh t') & -aa'(\ccht \sh t' + \sh t \ccht') \\ -aa'(\sh t \ccht' + \ccht \sh t') & aa'(\sh t \sh t' + \ccht \ccht') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aa' \ch(t+t') & -aa' \sh(t+t') \\ -aa' \sh(t+t') & aa' \ch(t+t') \end{pmatrix} \\
&= M(aa', t+t') \in G,
\end{aligned}$$

$$\text{car}(aa', t+t') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

4) Soit  $(a, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ .

D'après 3) et 2), on a  $(q^{-1}, -t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  et :

$$\begin{cases} M(a,t)M(a^{-1},-t) = M(aa^{-1}, t-t) = M(1,0) = I_2 \\ M(a^{-1},-t)M(a,t) = M(a^{-1}a, -t+t) = M(1,0) = I_2 \end{cases}$$

Ceci montre :  $(M(q,t))^{-1} \equiv M(q^{-1},-t) \in G$ .

On conclut que  $G$  est un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ , donc  $G$  est un groupe pour la multiplication.

204

**20.4** Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ . On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n \\ C_2 = e_1 + 2e_2 + \dots + 2e_n \\ \vdots \\ C_{n-1} = e_1 + 2e_2 + \dots + (n-1)e_{n-1} + (n-1)e_n \\ C_n = e_1 + 2e_2 + \dots + (n-1)e_{n-1} + ne_n \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} e_1 + e_2 + \dots + e_n = C_1 \\ e_2 + \dots + e_n = C_2 - C_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} + e_n = C_{n-1} - C_{n-2} \\ e_n = C_n - C_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_1 = C_1 - (C_2 - C_1) = 2C_1 - C_2 \\ e_2 = (C_2 - C_1) - (C_3 - C_2) = -C_1 + 2C_2 - C_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} = (C_{n-1} - C_{n-2}) - (C_n - C_{n-1}) \\ \quad = -C_{n-2} + 2C_{n-1} - C_n \\ e_n = -C_{n-1} + C_n. \end{cases}$$

Ceci montre que  $A$  est inversible et que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut contrôler le résultat, par exemple pour  $n = 3$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**20.5** • La linéarité de  $f$  est immédiate. En effet, on a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$  et tous  $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$  :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= ((\alpha P + Q)(a_0), \dots, (\alpha P + Q)^{(n)}(a_n)) \\ &= (\alpha P(a_0) + Q(a_0), \dots, \\ &\quad \alpha P^{(n)}(a_n) + Q^{(n)}(a_n)) \\ &= \alpha f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

• On a, pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$  :

$$f(X^j) = (a_0^j, ja_1^{j-1}, j(j-1)a_2^{j-2}, \dots, j!, 0, \dots, 0).$$

La matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}_n[X]$  pour le départ et la base canonique de  $\mathbb{C}^{n+1}$  pour l'arrivée est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0! & & & & \dots \\ 0 & 1! & & & \\ \vdots & \ddots & 2! & & \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n! \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure à termes diagonaux tous non nuls, donc cette matrice est inversible.

On conclut que  $f$  est un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels, de  $\mathbb{C}_n[X]$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

**20.6** Puisque  $\sin(i+j) = \cos j \sin i + \sin j \cos i$ , pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ , la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  est :

$$\cos j \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \vdots \\ \sin n \end{pmatrix} + \sin j \begin{pmatrix} \cos 1 \\ \vdots \\ \cos n \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que les colonnes de  $A$  se décomposent linéairement sur deux colonnes fixes, donc  $\text{rg}(A) \leq 2$ .

Il est clair que, si  $n = 1$ , alors  $\text{rg}(A) = 1$ .

Si  $n \geq 2$ , les deux premières colonnes de  $A$  forment une famille libre, puisque  $\begin{vmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{vmatrix} \neq 0$ , et on conclut :  $\text{rg}(A) = 2$ .

Finalement :  $\text{rg}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$

**20.7** En notant  $I = I_3$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I$  et  $J$  commutent et  $A = I + J$ .

De plus,  $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J^3 = 0$ .

On en déduit, par la formule du binôme de Newton, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N} - \{0, 1\}$  :

$$A^n = (I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k = I + \binom{n}{1} J + \binom{n}{2} J^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce dernier résultat étant à l'évidence aussi valable pour  $n \in \{0, 1\}$ .

Notons, pour  $n \in \mathbb{Z}_-$ ,  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On a, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}_-$  :

$$\begin{aligned} A_n A^{-n} &= \left( \begin{array}{ccc} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc} 1 & -n & \frac{-n(-n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = I_3. \end{aligned}$$

Ceci montre (en prenant  $n = -1$ ) que  $A$  est inversible, et que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}_-$ ,  $A^n = A_n$ .

$$\text{Finalement, pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z} : A^n = \left( \begin{array}{ccc} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

**20.8** Considérons  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . On a :

$$\begin{aligned} AV &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda V. \end{aligned}$$

Puisque  $A$  est inversible, on déduit :

$$V = (A^{-1}A)V = A^{-1}(AV) = A^{-1}(\lambda V) = \lambda A^{-1}V.$$

Si  $\lambda = 0$ , alors  $V = 0$ , contradiction.

Donc  $\lambda \neq 0$ , puis :  $A^{-1}V = \lambda^{-1}V$ .

Ainsi :

$$\lambda^{-1}V = A^{-1}V = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj} \end{pmatrix}.$$

On conclut :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n b_{ij} = \frac{1}{\lambda}$ .

**20.9** a) Puisque  $f^2 \neq 0$ , il existe  $e_1 \in E$  tel que  $f^2(e_1) \neq 0$ .  
Notons  $e_2 = f(e_1), e_3 = f(e_2) = f^2(e_1)$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ .

Soit  $(a_1, a_2, a_3) \in K^3$  tel que  $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = 0$ ,

c'est-à-dire :  $a_1e_1 + a_2f(e_1) + a_3f^2(e_1) = 0$ .

On déduit, en appliquant  $f^2$  et puisque  $f^3 = 0 : a_1f^2(e_1) = 0$ . Comme  $f^2(e_1) \neq 0$ , on obtient  $a_1 = 0$ , puis, en reportant :  $a_2f(e_1) + a_3f^2(e_1) = 0$ . En appliquant  $f$ , on déduit de même  $a_2 = 0$ , puis  $a_3f^2(e_1) = 0$ , donc  $a_3 = 0$ .

Ceci montre que  $\mathcal{B}$  est libre.

Comme  $\dim(E) = 3$  et que  $\mathcal{B}$  est libre et de cardinal 3, il en résulte que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

La matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  est :  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

b) Soit  $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(K)$ , quelconque. On a :

$$AN = NA \iff$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} d & g & 0 \\ e & h & 0 \\ f & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & d & g \\ b & e & h \end{pmatrix}$$

$$\iff d = 0, g = 0, e = a, h = d, g = 0,$$

$$f = b, i = e, h = 0$$

$$\iff d = g = h = 0, a = e = i, f = h.$$

On conclut :

$$C_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in K^3 \right\}.$$

c) D'après b) :

$$\begin{aligned} C_N &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in K^3 \right\} \\ &= \{aI_3 + bN + cN^2 ; (a,b,c) \in K^3\}. \end{aligned}$$

Il en résulte, en termes d'endomorphismes :

$$\{g \in \mathcal{L}(E) ; g \circ f = f \circ g\}$$

$$= \{ae + bf + cf^2 ; (a,b,c) \in K^3\}$$

$$= \text{Vect}(e, f, f^2).$$

**20.10**

a) Soient  $A = (a_{ij})_{ij}$ ,  $B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  positives. On a alors  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$  et, pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $a_{ij} > 0$  et  $b_{ij} > 0$ , d'où  $a_{ij} + b_{ij} > 0$ , et donc  $A + B$  est positive.

b) Soient  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $B = (b_{jk})_{jk} \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  positives. On a alors  $AB = (c_{ik})_{ik}$ ,

où, pour tout  $(i, k) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\}$  :

$c_{ik} = \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk} > 0$ , comme somme de produits de nombres tous > 0, et donc  $AB$  est positive.

b) Considérons  $Y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i X$ .

D'après a), comme  $A$  et  $X$  sont positives, par produit, pour tout  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $A^i X$  est positive, puis, par addition  $Y$  est positive.

On a :

$$\begin{aligned}AY &= A(X + AX + \dots + A^{k-1}X) \\&= AX + A^2X + \dots + A^{k-1}X + A^kX \\&= (AX + \dots + A^{k-1}X) + X = Y.\end{aligned}$$

Ainsi,  $Y$  convient.

**20.11**

a) En notant  $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on a :

$$\begin{aligned}U^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donc, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}M(a) &= \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 + \frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ -a & -\frac{a^2}{2} & 1 - \frac{a^2}{2} \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{a^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\&= \mathbf{I}_3 + aU + \frac{a^2}{2}U^2.\end{aligned}$$

b) • D'abord, il est clair que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a  $M(a) \in G$  et que, pour tout  $(a, a') \in \mathbb{R}^2$  :

$$M(a) = M(a') \implies a = a',$$

donc  $M$  est injective, et il est clair, par définition de  $G$ , que  $M$  est surjective.

Ainsi,  $M$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $G$ .

• On a, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned}M(a)M(b) &= \left( \mathbf{I}_3 + aU + \frac{a^2}{2}U^2 \right) \left( \mathbf{I}_3 + bU + \frac{b^2}{2}U^2 \right) \\&= \mathbf{I}_3 + (a+b)U + \left( \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} \right) U^2 \\&\quad + \left( \frac{a^2b}{2} + \frac{ab^2}{2} \right) U^3 + \frac{a^2b^2}{4}U^4.\end{aligned}$$

Mais :

$$U^3 = U^2U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

puis  $U^4 = U^3U = 0$ , donc :

$$M(a)M(b) = \mathbf{I}_3 + (a+b)U + \frac{1}{2}(a+b)^2U^2 = M(a+b).$$

c) • La multiplication est interne dans  $G$  et est commutative, d'après b).

• La matrice  $M(0) = \mathbf{I}_3$  est neutre pour la multiplication dans  $G$ .

• On a, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$M(a)M(-a) = M(a-a) = M(0) = \mathbf{I}_3$ , donc  $M(a)$  est inversible dans  $G$  et son inverse est  $M(-a)$ .

En particulier :  $G \subset \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ .

Finalement,  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ .

d) Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

I) Montrons, par récurrence sur  $k$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (M(a))^k = M(ka).$$

La propriété est évidente pour  $k = 0$ .

Si la propriété est vraie pour un  $k \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\begin{aligned}(M(a))^{k+1} &= (M(a))^k M(a) = M(ka)M(a) \\&= M(ka+a) = M((k+1)a),\end{aligned}$$

donc la propriété est vraie pour  $k + 1$ .

Ceci montre, par récurrence sur  $k$ , que la propriété est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

2) On a, pour tout  $k \in \mathbb{Z}_-$ ,  $-k \in \mathbb{N}$ , et, d'après c) et le résultat précédent relatif à un exposant entier naturel, appliqué à  $(-a, -k)$  :

$$\begin{aligned}(M(a))^k &= \left((M(a))^{-1}\right)^{-k} = (M(-a))^{-k} \\ &= M((-k)(-a)) = M(ka).\end{aligned}$$

On conclut :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, (M(a))^k = M(ka).$$

**20.12** En notant  $I = I_n$  et  $U = (1) \in \mathbf{M}_n(K)$ , on a :  $A = (a - b)I + bU$ .

Comme  $U^2 = nU$ , on déduit :

$$\begin{aligned}A^2 &= (a - b)^2 I + (2(a - b)b + nb^2)U \\ &= (a - b)^2 I + (2(a - b) + nb)(A - (a - b)I) \\ &= (2(a - b) + nb)A - ((a - b)^2 + nb(a - b))I,\end{aligned}$$

donc :

$$A(A - (2(a - b) + nb)I) = -(a - b)(a + (n - 1)b)I.$$

Si  $a \neq b$  et  $a + (n - 1)b \neq 0$ , alors, en notant

$$B = -\left((a - b)(a + (n - 1)b)\right)^{-1}\left(A - (2(a - b) + nb)I\right),$$

on a  $AB = I$ , donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B$ .

Si  $a = b$ , alors  $A = aU$ ,  $A$  n'est pas inversible.

Si  $a + (n - 1)b = 0$ , alors la somme des colonnes de  $A$  est nulle, donc  $A$  n'est pas inversible.

a) Il est clair que, pour tout  $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

**20.13**)  $= P(X + 1) \in \mathbb{R}_n[X]$ .

La linéarité de  $f$  est immédiate : on a, pour tous  $a \in \mathbb{R}$ ,  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  :

$$\begin{aligned}f(aP + Q) &= (aP + Q)(X + 1) \\ &= aP(X + 1) + Q(X + 1) = af(P) + f(Q).\end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$ .

• On a, pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ , en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$f(X^j) = (X + 1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i.$$

La matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  est donc  $A$ , définie dans l'énoncé.

b) Considérons l'application

$$g : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \longmapsto P(X - 1),$$

qui est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ , comme ci-dessus pour  $f$ .

On a, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  :

$$\begin{cases} (g \circ f)(P(X)) &= g(P(X + 1)) \\ &= P((X + 1) - 1) = P(X) \\ (f \circ g)(P(X)) &= f(P(X - 1)) \\ &= P((X - 1) + 1) = P(X), \end{cases}$$

donc :

$$g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} \text{ et } f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

Il en résulte que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ .

Mais, comme plus haut pour  $f$ , à l'aide de la formule du binôme de Newton, on a, pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$  :

$$g(X^j) = (X - 1)^j = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i.$$

$$\text{On a donc : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \left( (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

$$\text{On conclut : } A^{-1} = \left( (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

Par exemple, pour  $n = 3$  :

$$A = \left( \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \left( (-1)^i \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Par sa définition,  $E$  est le sev de  $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$  engendré

**20.14**)  $(I, J)$ , donc  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -ev. Comme de plus  $(I, J)$  est à l'évidence libre,  $(I, J)$  est une base de  $E$ , et donc  $\dim(E) = 2$ .

b) En remarquant que  $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I$ , on a, pour tout  $(x, y, x', y')$  de  $\mathbb{R}^4$  :

$$\begin{aligned}M(x, y)M(x', y') &= xx'I + (xy' + yx')J + yy'(2J - I) \\ &= (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J.\end{aligned}$$

Ceci montre que la multiplication est interne dans  $E$ .

Comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{+ est interne dans } E \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, -M(x, y) = M(-x, -y) \in E \\ \cdot \text{ est interne dans } E \\ \cdot \text{ est commutative dans } E \end{array} \right|,$$

$E$  est un sous-anneau commutatif de  $(\mathbf{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ , donc  $E$  est un anneau commutatif.

c) Soient  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$M(x, y)M(x', y') = I \iff \begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + (x + 2y)y' = 0. \end{cases}$$

Le déterminant  $\delta$  de ce système linéaire, d'inconnue  $(x', y')$ , est :  $\delta = x(x + 2y) + y^2 = (x + y)^2$ .

Si  $x + y \neq 0$ , alors le système admet une solution (et une seule)  $(x', y')$  dans  $\mathbb{R}^2$ , donc  $M(x, y)$  est inversible dans  $E$ .

Si  $x + y = 0$ , alors le système, qui est équivalent à  $\begin{cases} x(x' + y') = 1 \\ x(x' + y') = 0 \end{cases}$ , n'a pas de solution, donc  $M(x, y)$  n'est pas inversible dans  $E$ .

Finalement, les éléments inversibles de  $E$  sont les  $M(x, y)$  tels que  $x + y \neq 0$ .

d) Notons  $X = M(x, y)$ , d'où  $X^2 = M(x^2 - y^2, 2(x + y)y)$ .

$$(i) X^2 = I \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2(x + y)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases},$$

donc  $\mathcal{S}_{(i)} = \{-I, I\}$ .

$$(ii) X^2 = 0 \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2(x + y)y = 0 \end{cases} \iff x + y = 0,$$

donc  $\mathcal{S}_{(ii)} = \{M(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$ .

$$\begin{aligned} (iii) X^2 = X &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2(x + y)y = y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = x \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = x \\ x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{S}_{(iii)} = \{0, I\}$ .

$$e) \text{ On a : } M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} = (x+y)I + yN,$$

$$\text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $I$  et  $N$  commutent et que  $N^2 = 0$ , on a, par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (M(x, y))^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x+y)^{n-k} y^k N^k \\ &= (x+y)^n I + n(x+y)^{n-1} y N \\ &= \begin{pmatrix} (x+y)^n & n(x+y)^{n-1} y \\ 0 & (x+y)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

20.15 Notons  $C_0, \dots, C_n$  les colonnes de  $A_n$ .

On a, pour tout  $j \in \{0, \dots, n-2\}$  :

$$\begin{aligned} C_j + C_{j+1} &= \begin{pmatrix} \phi_j \\ \vdots \\ \phi_{j+n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{j+1} \\ \vdots \\ \phi_{j+n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_j + \phi_{j+1} \\ \vdots \\ \phi_{j+n} + \phi_{j+n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{j+2} \\ \vdots \\ \phi_{j+n+2} \end{pmatrix} = C_{j+2}. \end{aligned}$$

Ainsi, chaque colonne de  $A_n$ , sauf  $C_1$  et  $C_2$ , est la somme des deux colonnes précédentes.

Il en résulte que toutes les colonnes de  $A_n$  se décomposent linéairement sur  $C_1$  et  $C_2$ , donc  $\text{rg}(A_n) \leq 2$ .

• D'autre part :  $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ ,  $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ , donc  $(C_1, C_2)$  est libre, d'où :  $\text{rg}(A_n) \geq 2$ .

On conclut :  $\text{rg}(A_n) = 2$ .

20.16 a) 1<sup>re</sup> méthode : Puisque  $\text{rg}(H) = 1$ , il existe une

colonne  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$  de  $\mathbf{M}_{n,1}(K)$  telle que les colonnes de  $H$  soient colinéaires à  $U$  ; il existe donc  $v_1, \dots, v_n \in K$  tels que :

$$H = (v_1 U \dots v_n U) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \dots & u_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix} = U^t V.$$

2<sup>ème</sup> méthode :

Si  $\text{rg}(H) = 0$ , alors  $H = 0$ , donc  $(U, V) = (0, 0)$  convient.

Supposons  $\text{rg}(H) = 1$ . D'après un théorème du cours, il existe  $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$  telles que  $H = PJQ$ , où on a noté

$$J = E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K).$$

En notant  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$ , on a  $C^t C = J$ , donc :

$$A = PJQ = P(C^t C)Q = (PC)(^t C Q).$$

En notant  $U = PC \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$  et  $V = {}^t QC \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$ , on a bien  $H = U^t V$ .

On a de plus, avec les notations précédentes :

$$\text{tr}(H) = \sum_{k=1}^n u_k v_k = {}^t V U.$$

b) Soit  $A \in \mathbf{M}_n(K)$ . On a :

$$HAH = (U^t V)A(U^t V) = U(^t V A U)^t V = (^t V A U)U^t V,$$

car  $^t V A U \in K$ .

D'après a) appliqué à  $AH = (AU)^t V$  au lieu de  $H$  ; on a bien  $\text{rg}(AH) \leqslant 1$ , on a :

$$\text{tr}(AH) = ^t V A U.$$

Ainsi :  $HAH = \text{tr}(AH)H$ .

**20.17** Notons  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A_n$ . D'après le cours, par  $C_n \leftarrow C_n - C_1 + C_2 + \dots + (-1)^{n-1}C_{n-1}$ , on a :

$$\text{rg}(A_n) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & (0) & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 + (-1)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Si  $n$  est pair, alors la dernière colonne de  $A_n$  est nulle, et comme les  $(n-1)$  premières colonnes de  $A_n$  forment une famille libre (d'après la méthode de Gauss), on conclut :  $\text{rg}(A_n) = n-1$ .

- Si  $n$  est impair, alors les  $n$  colonnes de  $A_n$  forment une famille libre (d'après la méthode de Gauss), donc :  $\text{rg}(A_n) = n$ .

On conclut :

$$\text{rg}(A_n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On peut regrouper ces deux résultats en un seul :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad \text{rg}(A_n) = 2 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1,$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière.

**20.18** (i)  $\implies$  (ii) :

Supposons  $A, B, C$  deux à deux semblables. Il existe donc  $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$  telles que  $B = P^{-1}AP$  et  $C = Q^{-1}BQ$ .

Notons  $X = P \in \mathbf{GL}_n(K)$ ,  $Y = Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ ,

$Z = Q^{-1}BP^{-1}$ . Puisque  $A$  et  $P$  sont inversibles, par inverse et produit,  $B = P^{-1}AP \in \mathbf{GL}_n(K)$ ,

puis  $Z = Q^{-1}BP^{-1} \in \mathbf{GL}_n(K)$ .

On a :

$$XYZ = PQQ^{-1}BP^{-1} = PB P^{-1} = A,$$

$$YZX = QQ^{-1}BP^{-1}P = B,$$

$$ZXY = Q^{-1}BP^{-1}PQ = Q^{-1}BQ = C.$$

(ii)  $\implies$  (i) :

Supposons qu'il existe  $X, Y, Z \in \mathbf{M}_n(K)$  telles que :

$$XYZ = A, \quad YZX = B, \quad ZXY = C.$$

Puisque  $A$  est inversible et que  $XYZ = A$ , d'après le cours sur les matrices, ou celui sur les déterminants,  $X, Y, Z$  sont inversibles.

On a :

$$B = YZX = (X^{-1}X)YZX = X^{-1}(XYZ)X = X^{-1}AX,$$

$$C = ZXY = ZXY(ZZ^{-1}) = Z(XYZ)Z^{-1} = ZAZ^{-1},$$

donc  $A, B, C$  sont deux à deux semblables.

**20.19** a) I)  $G$  est stable pour la multiplication car, pour tous  $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  :

$$\begin{aligned} M(a,b)M(c,d) &= \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ 0 & d & d \\ 0 & d & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & c+2ad & c+2ad \\ 0 & 2bd & 2bd \\ 0 & 2bd & 2bd \end{pmatrix} \\ &= M(c+2ad, 2bd) \in G. \end{aligned}$$

2) On a, pour tout  $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  :

$$M(a,b)M(0,1/2) = M(a,b)$$

et

$$M(0,1/2)M(a,b) = M(a,b),$$

donc  $M(0,1/2)$  est neutre pour la multiplication dans  $G$ .

• Soit  $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ . Montrons que  $M(a,b)$  admet un symétrique pour la multiplication dans  $G$  et calculons ce symétrique. On a, pour tout  $(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  :

$$\begin{cases} M(a,b)M(c,d) = M(0,1/2) \\ M(c,d)M(a,b) = M(0,1/2) \end{cases} \iff \begin{cases} M(c+2ad, 2bd) = M(0,1/2) \\ M(a+2cb, 2db) = M(0,1/2) \end{cases} \iff \begin{cases} c+2ad = 0, 2bd = 1/2, a+2cb = 0, 2db = 1/2 \\ c = -\frac{a}{2b}, d = \frac{1}{4b} \neq 0. \end{cases}$$

Ceci montre que  $M(a,b)$  admet un symétrique pour la multiplication dans  $G$  et que ce symétrique est  $M\left(-\frac{a}{2b}, \frac{1}{4b}\right)$ .

4) La multiplication est associative dans  $G$  car elle l'est dans  $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ .

b)  $G$  n'est pas un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ , car  $G$  n'est pas inclus dans  $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ , puisque, par exemple  $M(0,1)$  n'est pas inversible dans  $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ .

On peut aussi remarquer que le neutre  $I_3$  de  $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$  n'est pas dans  $G$ .

**20.20** Cherchons l'éventuel inverse de  $A^2 + A + I_n$  sous forme d'un polynôme en  $A$ .

À cet effet, pour utiliser l'hypothèse  $A^5 + A - I_n = 0$ , effectuons la division euclidienne de  $X^5 + X - 1$  par  $X^2 + X + 1$  :

$$\begin{array}{rcl} X^5 & + X - 1 & \left| \begin{array}{c} X^2 + X + 1 \\ \hline X^3 - X^2 + 1 \end{array} \right. \\ - X^4 - X^3 & + X - 1 & \\ X^2 + X - 1 & & \\ - 2 & & \end{array}$$

On a donc :  $X^5 + X - 1 = (X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 + 1) - 2$ .

D'où, en remplaçant  $X$  par  $A$  :

$$0 = A^5 + A - I_n = (A^2 + A + I_n)(A^3 - A^2 + I_n) - 2I_n.$$

On déduit :  $(A^2 + A + I_n)\left(\frac{1}{2}(A^3 - A^2 + I_n)\right) = I_n$ ,

et aussi l'autre égalité en permutant les deux facteurs, qui commutent.

On conclut que  $A^2 + A + I_n$  est inversible et que son inverse est  $\frac{1}{2}\left(A^3 - A^2 + I_n\right)$ .

**20.21** a) On a :  $\text{tr}(A) = 3$  et  $\text{tr}(B) = 2$ ,

donc  $\text{tr}(A) \neq \text{tr}(B)$ , et donc  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

b) On a :  $\det(A) = 4$  et  $\det(B) = 3$ , donc  $\det(A) \neq \det(B)$ , et donc  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

c) Notons  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , qui est la matrice, dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ , de l'endomorphisme  $f$  défini par :

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1.$$

Il est alors clair que  $P$  est inversible

et que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On calcule  $PAP^{-1}$  :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{PA} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{PAP^{-1}=B}$$

On conclut que  $A$  et  $B$  sont semblables.

d) On remarque  $A^2 = 0$  et  $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ , donc  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables. En effet, si  $A$  et  $B$  étaient semblables, il existerait  $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ , et on aurait :

$$B^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P = P^{-1}0P = 0,$$

contradiction.

e) On remarque que :

$$\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{rg}(B - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Montrons que  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables, en raisonnant par l'absurde.

Supposons  $A$  et  $B$  semblables. Il existe alors  $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ . On a :

$$B - 2I_3 = P^{-1}AP - 2I_3 = P^{-1}(A - 2I_3)P,$$

donc nécessairement :  $\text{rg}(B - 2I_3) = \text{rg}(A - 2I_3)$ , contradiction.

On conclut que  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

f) Notons  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ . On a  $P^{-1} = P$

et on calcule  $PAP^{-1}$  :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{PA} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{PAP^{-1}=B}.$$

On conclut que  $A$  et  $B$  sont semblables.

**20.22** En notant  $C_1, C_2, C_3$  les colonnes de  $A$ , on remarque que  $C_3 = C_1 + C_2$  et que  $(C_1, C_2)$  est libre, donc  $\text{rg}(A) = 2$ . D'après le cours, il existe donc  $(P, Q) \in (\mathbf{GL}_3(\mathbb{R}))^2$  tel que  $A = PJ_{3,3,2}Q$ . Le but de l'exercice est de calculer un tel couple  $(P, Q)$ . À cet effet, on va suivre la preuve de ce théorème du cours.

Notons  $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, E_3)$  la base canonique de  $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $f$  l'application linéaire de  $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  dans lui-même représentée par la matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}_0$  au départ et à l'arrivée.

- Déterminons  $\text{Ker}(f)$ .

On a, pour tout  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  :

$$X \in \text{Ker}(f) \iff f(X) = 0 \iff AX = 0$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = x_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Une base de  $\text{Ker}(f)$  est donc  $(U_3)$ , où  $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- On complète  $(U_3)$  en une base  $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$  de  $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , par exemple en choisissant :

$$U_1 = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons  $V_1 = f(U_1) = AU_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$V_2 = f(U_2) = AU_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui sont les deux premières colonnes de  $A$ .

On complète  $(V_1, V_2)$  en une base  $\mathcal{C} = (V_1, V_2, V_3)$  de  $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ,

$$\text{par exemple par } V_3 = E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0}(f) = A \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J.$$

D'après la formule de changement de bases pour une application linéaire, on a :  $J_{3,3,2} = S^{-1}AR$ , où on a noté :

$$R = \text{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$S = \text{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Notons  $P = S$  et  $Q = R^{-1}$ . On a alors  $(P, Q) \in (\mathbf{GL}_3(\mathbb{R}))^2$  et  $A = PJQ$ . On calcule facilement l'inverse de  $R$  et on conclut qu'on peut choisir le couple  $(P, Q)$  défini par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on peut contrôler ce résultat en effectuant le produit  $PJQ$  et en obtenant  $A$ .

- 20.23** a) La linéarité de  $f$  est immédiate. En effet, pour tout  $a \in K$  et toutes  $M, N \in \mathbf{M}_n(K)$  :

$$\begin{aligned} f(aM + N) &= D(aM + N) - (aM + N)D \\ &= a(DM - MD) + (DN - ND) \\ &= af(M) + f(N). \end{aligned}$$

On conclut que  $f$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbf{M}_n(K)$ .

- b) Soit  $M \in \mathbf{M}_n(K)$ . On a :

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(f) &\iff f(M) = 0 \iff DM - MD = 0 \\ &\iff DM = MD. \end{aligned}$$

Passons aux éléments des matrices ; notons  $M = (m_{ij})_{ij}$ . Alors :

$$\begin{aligned} DM &= MD \\ \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (DM)_{ij} &= (MD)_{ij} \\ \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad a_i m_{ij} &= m_{ij} a_j \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n (D)_{ik} (M)_{kj} = \sum_{k=1}^n (M)_{ik} (D)_{kj}$$

$$\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad a_i m_{ij} = m_{ij} a_j$$

$$\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (a_i - a_j) m_{ij} = 0$$

$$\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (i \neq j \implies m_{ij} = 0),$$

car  $a_1, \dots, a_n$  sont deux à deux distincts.

Ainsi,  $\text{Ker}(f)$  est l'ensemble  $\mathbf{D}_n(K)$  des matrices diagonales de  $\mathbf{M}_n(K)$ .

c) Il est clair que  $F$ , ensemble des matrices de  $\mathbf{M}_n(K)$  à termes diagonaux tous nuls, est un sev de  $\mathbf{M}_n(K)$ .

I) Montrons  $\text{Im}(f) \subset F$ .

Soit  $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$ , quelconque. On a, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$(f(M))_{ii} = (DM - MD)_{ii}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n (D)_{ik} (M)_{ki} - \sum_{k=1}^n (M)_{ik} (D)_{ki} \\ &= a_{ii} m_{ii} - m_{ii} a_{ii} = 0, \end{aligned}$$

donc  $f(M) \in F$ .

Ceci montre :  $\text{Im}(f) \subset F$ .

2) D'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim(\text{Im}(f)) &= \dim(\mathbf{M}_n(K)) - \dim(\text{Ker}(f)) \\ &= \dim(\mathbf{M}_n(K)) - \dim(\mathbf{D}_n(K)) = n^2 - n.\end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que  $\dim(F) = n^2 - n$ .

En effet, une base de  $F$  est la famille de matrices élémentaires  $E_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $i \neq j$ .

On conclut :  $\text{Im}(f) = F$ .

## 20.24 a) • On a bien :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad f(M) = AM - MB \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

• On a, pour tout  $a \in \mathbb{C}$  et toutes  $M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$  :

$$\begin{aligned}f(aM + N) &= A(aM + N) - (aM + N)B \\ &= a(AM - MB) + (AN - NB) \\ &= af(M) + f(N),\end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire.

On conclut que  $f$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ .

b) Récurrence sur  $p$ .

Pour  $p = 0$ , la propriété est évidente.

Supposons la propriété vraie pour un  $p \in \mathbb{N}$  fixé :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad f^p(M) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} MB^k.$$

On a alors, pour toute  $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$  :

$$\begin{aligned}f^{p+1}(M) &= f(f^p(M)) = f\left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} MB^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k f(A^{p-k} MB^k) \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k (A(A^{p-k} MB^k) - (A^{p-k} MB^k)B) \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k (A^{p-k+1} MB^k - A^{p-k} MB^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k+1} MB^k \\ &\quad - \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} MB^{k+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\stackrel{j=k+1}{=} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p+1-k} MB^k \\ &\quad - \sum_{j=1}^{p+1} \binom{p}{j-1} (-1)^{j-1} A^{p-j+1} MB^j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p}{k} (-1)^k A^{p+1-k} MB^k \\ &\quad - \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p}{k-1} (-1)^{k-1} A^{p-k+1} MB^k \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \left( \binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} \right) (-1)^k A^{(p+1)-k} MB^k, \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k A^{(p+1)-k} MB^k,\end{aligned}$$

ce qui montre la propriété pour  $p + 1$ .

Ainsi, par récurrence sur  $p$ , la formule voulue est établie.

c) Supposons  $A$  et  $B$  nilpotentes. Il existe  $p, q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $A^p = 0$  et  $B^q = 0$ . On alors, pour toute  $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$  :

$$\begin{aligned}f^{p+q}(M) &= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} (-1)^k A^k MB^{p+q-k} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p+q}{k} (-1)^k A^k MB^{p+q-k} \\ &\quad + \sum_{k=p+1}^q \binom{p+q}{k} (-1)^k A^k MB^{p+q-k} \\ &= \left( \sum_{k=0}^p \binom{p+q}{k} (-1)^k A^k MB^{p-k} \right) B^q \\ &\quad + A^p \left( \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k} (-1)^k A^{k-p} MB^{p+q-k} \right) = 0.\end{aligned}$$

Ceci montre  $f^{p+q} = 0$  et on conclut que  $f$  est nilpotent.

## 20.25 I) Soit $A$ une matrice du centre de $\mathbf{M}_n(K)$ .

On a, en particulier, pour tout  $(i, j)$  de  $\{1, \dots, n\}^2$  :

$$AE_{ij} = E_{ij}A.$$

$$\text{Comme } AE_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1i} & & \\ (0) & \ddots & (0) \\ & a_{ni} & \end{pmatrix}$$

$j^{\text{ème}}$  colonne

$$\text{et } E_{ij}A = \begin{pmatrix} (0) & & \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ (0) & & \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne},$$

$$\text{on déduit : } \begin{cases} \forall k \neq i, \quad a_{ki} = 0 \\ \forall l \neq j, \quad a_{lj} = 0 \\ a_{ii} = a_{jj}. \end{cases}$$

Ceci montre que, pour tout  $(i, j)$  de  $\{1, \dots, n\}^2$  tel que  $i \neq j$ , on a  $a_{ij} = 0$  et  $a_{ii} = a_{jj}$ .

$$\text{Ainsi, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & (0) & & \\ (0) & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}I_n.$$

2) Réciproquement, il est clair que, pour tout  $\alpha$  de  $K$ ,  $\alpha I_n$  est dans le centre de  $\mathbf{M}_n(K)$ .

Finalement, le centre de  $\mathbf{M}_n(K)$  est  $\{\alpha I_n; \alpha \in K\}$ .

**20.26** Rappelons d'abord les propriétés de la conjugaison pour les matrices à termes complexes, qui se démontrent simplement en passant par les éléments des matrices. On a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$  et toutes matrices  $A, B$  à termes complexes, dès lors que les opérations sont possibles, les formules suivantes :

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{\alpha A} = \overline{\alpha} \overline{A}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \overline{B}.$$

a) Soit  $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ . D'après un théorème du cours, il existe  $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ ,  $Q \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{C})$  telles que  $A = P \mathbf{J}_{n,p,r} Q$ , où

$$\mathbf{J}_{n,p,r} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}.$$

On déduit :  $\overline{A} = \overline{P} \mathbf{J}_{n,p,r} \overline{Q} = \overline{P} \mathbf{J}_{n,p,r} \overline{Q}$ .

Mais :  $PP^{-1} = P^{-1}P = \mathbf{I}_n$ , donc  $\overline{P} \overline{P^{-1}} = \overline{P^{-1}} \overline{P} = \mathbf{I}_n$ , ce qui montre que  $\overline{P}$  est inversible. De même,  $\overline{Q}$  est inversible. D'après le même théorème du cours, en réciproque, on a donc :  $\text{rg}(\overline{A}) = r = \text{rg}(A)$ .

b) Rappelons, cf. exercice 19.8 :

$$\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))^2, \quad \text{rg}(A + B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B).$$

Ici :

$$\begin{aligned} \text{rg}(\text{Re}(A)) &= \text{rg}\left(\frac{1}{2}(A + \overline{A})\right) = \text{rg}(A + \overline{A}) \\ &\leq \text{rg}(A) + \text{rg}(\overline{A}) = 2\text{rg}(A), \\ \text{rg}(\text{Im}(A)) &= \text{rg}\left(\frac{1}{2i}(A - \overline{A})\right) \\ &= \text{rg}(A - \overline{A}) = \text{rg}(A + (-\overline{A})) \\ &\leq \text{rg}(A) + \text{rg}(-\overline{A}) = \text{rg}(A) + \text{rg}(\overline{A}) \\ &= 2\text{rg}(A). \end{aligned}$$

c) 1) Pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ ,

$$\text{on a } \text{Re}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Im}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et  $\text{rg}(A) = 1$ ,  $\text{rg}(\text{Re}(A)) = 2$ ,  $\text{rg}(\text{Im}(A)) = 2$ .

2) Pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ ,

$$\text{on a } \text{Re}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Im}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et  $\text{rg}(A) = 2$ ,  $\text{rg}(\text{Re}(A)) = 1$ ,  $\text{rg}(\text{Im}(A)) = 1$ .

**20.27** • Remarquons que, puisque les matrices  $A$  et  $X$  sont à termes tous  $\geq 0$ , par produit de matrices, la matrice  $Y = AX$  est à termes tous  $\geq 0$ , donc :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i \geq 0$ .

S'il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $x_i = 0$ , alors :

$$\prod_{i=1}^n y_i \geq 0 = \prod_{i=1}^n x_i,$$

d'où l'inégalité voulue, dans ce cas.

Supposons donc :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i > 0$ .

• L'application

$$f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = -\ln x$$

est deux fois dérivable et :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0,$$

donc  $f$  est convexe.

Il en résulte, d'après l'inégalité de Jensen, que, pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in ]0; +\infty[^n$  tel que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ , on a :

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) \quad (1).$$

Mais :

$$\begin{aligned} (1) \iff & -\ln\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j (-\ln x_j) \\ \iff & \ln\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \geq \ln\left(\prod_{j=1}^n x_j^{\lambda_j}\right) \\ \iff & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \geq \prod_{j=1}^n x_j^{\lambda_j}. \end{aligned}$$

Appliquons ceci à  $\lambda_j = a_{ij} \geq 0$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  fixé :

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq \prod_{j=1}^n x_j^{a_{ij}}.$$

On déduit, par produit de nombres tous  $\geq 0$  :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n y_i &\geq \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n x_j^{a_{ij}}\right) = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^n x_j^{a_{ij}}\right) \\ &= \prod_{j=1}^n x_j^{\sum_{i=1}^n a_{ij}} = \prod_{j=1}^n x_j. \end{aligned}$$



## Plan

Les méthodes à retenir	319
Énoncés des exercices	321
Du mal à démarrer ?	324
Corrigés	326

## Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de déterminants
- Étude de l'inversibilité d'une matrice carrée, par l'étude de son déterminant
- Étude de comatrice
- Résolution de systèmes linéaires.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de : déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension  $n$ , déterminant d'un endomorphisme, déterminant d'une matrice carrée
- Calcul pratique des déterminants : opérations licites sur les colonnes, sur les lignes, développement par rapport à une rangée
- Définition de la comatrice d'une matrice carrée  $A \in \mathbf{M}_n(K)$  et formule :

$$A^t \operatorname{com}(A) = {}^t \operatorname{com}(A) A = \det(A) I_n.$$

## Les méthodes à retenir

$K$  désigne un corps commutatif.

### Pour calculer un déterminant d'ordre trois ou quatre

- Essayer de faire apparaître des 0 par des opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée ne contenant qu'un terme non nul, si possible.

→ Exercices 21.1, 21.2

- Factoriser le plus possible au fur et à mesure des calculs.

→ Exercices 21.1, 21.2.

- Essayer de faire apparaître des 0 par des opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée ne contenant qu'un terme non nul, si possible, ou pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

→ Exercices 21.5 a), b), c), d), f), 21.11

- Factoriser le plus possible au fur et à mesure des calculs.

→ Exercice 21.5

- Essayer, dans certains cas, de voir si une colonne est combinaison linéaire des autres colonnes, ou si une ligne est combinaison linéaire des autres lignes, auquel cas le déterminant est nul.

→ Exercices 21.2 c), 21.5 e)

- Essayer de faire apparaître des 0 par opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour ensuite, en développant, faire apparaître une relation de récurrence, souvent d'ordre un ou d'ordre deux, et enfin calculer le terme général de la suite ainsi considérée.

→ Exercices 21.5 f), g), 21.11

- Le cas particulier des matrices tridiagonales à coefficients constants est important.

→ Exercice 21.5 f)

- Utiliser la multilinearité et l'alternance du déterminant, lorsque les colonnes (ou les lignes) se décomposent linéairement sur des colonnes (ou des lignes) particulières.

→ Exercice 21.8.

#### Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée $A$ non donnée par ses éléments

Essayer d'amener une équation polynomiale satisfaite par  $A$ .

→ Exercices 21.6, 21.10.

#### Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie

Se ramener au déterminant d'une matrice carrée, en considérant la matrice de  $f$  dans une base convenable de  $E$ .

→ Exercice 21.4.

#### Pour résoudre un système affine avec paramètre(s)

Utiliser des combinaisons linéaires d'équations pour se ramener à un système équivalent plus simple.

→ Exercices 21.3, 21.7.

#### Pour manipuler la comatrice d'une matrice carrée $A$ d'ordre $n$

Essayer d'utiliser :

- la définition de  $\text{com}(A)$  : les termes de  $\text{com}(A)$  sont les cofacteurs des termes de  $A$

- la formule du cours :

$$A^t \operatorname{com}(A) = {}^t \operatorname{com}(A) A = \det(A) I_n,$$

qui, dans le cas particulier où  $A$  est inversible, permet de relier  $\operatorname{com}(A)$  et  $A^{-1}$  par la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \operatorname{com}(A).$$

➡ Exercices 21.12, 21.13, 21.15.

## — Énoncés des exercices

### 21.1

#### Exemples de calculs de déterminants d'ordre trois

Calculer les déterminants d'ordre trois suivants, en exprimant le résultat sous forme factorisée, pour  $(a,b,c) \in K^3$  :

$$\begin{array}{lll} a) \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix} & b) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} & c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \\ d) \begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}. \end{array}$$

### 21.2

#### Exemples de calculs de déterminants d'ordre quatre

Calculer les déterminants d'ordre quatre suivants, en exprimant le résultat sous forme factorisée, pour  $a,b,c,d,x \in K$  :

$$\begin{array}{ll} a) \begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix} & b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & b+c+d \\ 1 & b & b^3 & c+d+a \\ 1 & c & c^4 & d+a+b \\ 1 & d & d^5 & a+b+c \end{vmatrix} \\ c) \begin{vmatrix} (1+x)^2 & (2+x)^2 & (3+x)^2 & (4+x)^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}. \end{array}$$

### 21.3

#### Exemple de résolution d'un système affine à trois équations et trois inconnues, avec paramètre

Pour  $m \in \mathbb{R}$  fixé, résoudre le système d'équations, d'inconnue  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$(S) \quad \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2. \end{cases}$$

## 21.4

Déterminant de l'endomorphisme de transposition sur  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note :  $f : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), M \longmapsto f(M) = {}^t M$ .

a) Vérifier :  $f \in \mathcal{L}(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))$ .

b) Calculer  $\text{rg}(f)$ ,  $\text{tr}(f)$ ,  $\det(f)$ .

## 21.5

Exemples de calculs de déterminants d'ordre  $n$ 

Calculer les déterminants suivants, pour  $n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n, x, a, b \in K$  :

$$a) \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$b) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2 + a_3 - x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$c) \det(a^{\max(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n} \quad d) \begin{vmatrix} x + a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & x + a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & x + a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & x + a_n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$e) \det((ij + i + j)_{1 \leq i, j \leq n}) \quad f) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & \ddots & (0) & \vdots \\ a^2 & ab & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & b & -1 \\ a^n & a^{n-1}b & \dots & ab & b \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

$$g) \begin{vmatrix} 1 + a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 + a^2 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 + a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 + a^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

## 21.6

Déterminant de la matrice obtenue en multipliant le terme général d'une matrice carrée par  $(-1)^{i+j}$ 

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$ . On note  $B = ((-1)^{i+j} a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$ .

Montrer :  $\det(B) = \det(A)$ .

**21.7****Exemple de résolution d'un système affine à  $n$  équations et  $n$  inconnues**

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_2 = ax_1 + b \\ x_3 = ax_2 + b \\ \vdots \\ x_n = ax_{n-1} + b \\ x_1 = ax_n + b \end{cases}, \text{ d'inconnue } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \text{ de paramètre } (a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

**21.8****Exemple de calcul d'un déterminant d'ordre  $n$** 

Calculer le déterminant d'ordre  $n$  suivant, pour  $a_1, \dots, a_n, x \in K$  fixés :

$$D = \begin{vmatrix} a_1^2 + x & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 + x & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 + x \end{vmatrix}_{[n]}.$$

**21.9****Déterminant d'une matrice à termes entiers, pairs sur la diagonale, impairs en dehors de la diagonale**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{ii} \in 2\mathbb{Z} \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (i \neq j \implies a_{ij} \in 2\mathbb{Z} + 1). \end{cases}$$

a) Montrer :  $n + \det(A) \in 2\mathbb{Z} + 1$ .

b) En déduire que, si  $n$  est pair, alors  $A$  est inversible.

**21.10****Signe du déterminant d'un polynôme particulier de matrices carrées**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ ,  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $p^2 - 4q \leqslant 0$ . Montrer :

$$\det(A^2 + pAB + qB^2) \geqslant 0.$$

**21.11****Déterminant de Vandermonde**

a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ . On appelle **déterminant de Vandermonde**, et on note ici  $V(x_1, \dots, x_n)$ , l'élément de  $K$  défini par :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]} = \det((x_i^{j-1})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}).$$

Montrer :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j).$$

b) Calculer, pour  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$  et  $x_1, \dots, x_n \in K$  le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 \dots x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1 \dots x_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}.$$

**21.12****Matrice semblable à une comatrice et réciproquement**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B \in \mathbf{GL}_n(K)$  telles que  $\det(A) = \det(B)$ . Montrer :

$$A \sim \text{com}(B) \iff B \sim \text{com}(A),$$

où  $\text{com}$  désigne la comatrice, et  $\sim$  désigne la similitude des matrices carrées.

**21.13****Exemple de calcul de la comatrice d'une matrice carrée inversible**

Soient  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1+n & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1+n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Montrer que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  à l'aide de  $A$ .
- Calculer  $\det(A)$ .
- Déterminer  $\text{com}(A)$ .

**21.14****Exemple de résolution d'un système de  $n + 1$  équations à  $n + 1$  inconnues**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

Résoudre le système d'équations (S) d'inconnue  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 + x_1 = a \\ x_0 + 2x_1 + x_2 = a^2 \\ \vdots \\ x_0 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} x_n = a^n. \end{cases}$$

**21.15****Rang de la comatrice d'une matrice carrée**

Soient  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ,  $A \in \mathbf{M}_n(K)$ . Établir :  $\begin{cases} \text{rg}(A) = n \implies \text{rg}(\text{com}(A)) = n \\ \text{rg}(A) = n - 1 \implies \text{rg}(\text{com}(A)) = 1 \\ \text{rg}(A) \leq n - 2 \implies \text{rg}(\text{com}(A)) = 0. \end{cases}$

## Du mal à démarrer ?

**21.1** Essayer de faire apparaître des 0 par opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée contenant deux 0, ou pour combiner avec la règle de Sarrus, valable pour les déterminants d'ordre 2 ou 3.

**21.2** a) Essayer de faire apparaître des 0 par opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée contenant trois 0.

b) Remarquer que, en notant  $s = a + b + c + d$ , la quatrième colonne est combinaison linéaire des deux premières colonnes.  
c) Par opérations licites sur les colonnes, se ramener à des déterminants plus simples.

**21.3** Par exemple, commencer par remplacer (S) par un système équivalent plus simple. Ceci fera apparaître  $m - 1$  en facteur et incitera à séparer en cas :  $m \neq 1$ ,  $m = 1$ .

**21.4** b) Former la matrice de  $f$  dans une base de  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  formée d'une base de  $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$  suivie d'une base de  $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ .

**21.5** a) Opérer  $C_j \leftarrow C_j - C_n$  pour  $j = 1, \dots, n-1$ , et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

b) Opérer  $L_i \leftarrow L_i - L_1$  pour  $i = 2, \dots, n$ , et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

c) Opérer  $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ , et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

d) Opérer  $C_j \leftarrow C_j - C_1$  pour  $j = 2, \dots, n$ , pour faire apparaître des 0, des  $x$ , des  $-x$ , puis opérer  $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^n L_i$ , et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

e) Remarquer que les colonnes du déterminant proposé se décomposent linéairement sur deux colonnes fixes.

f) Développer le déterminant  $D_{n+1}$  proposé par rapport à la dernière colonne et obtenir une relation de récurrence donnant  $D_{n+1}$  en fonction de  $D_n$ .

g) Développer le déterminant  $D_n$  proposé par rapport à sa première ligne (par exemple), puis développer le déterminant d'ordre  $n-1$  obtenu par rapport à sa première colonne. Montrer ainsi que la suite  $(D_n)_n$  est une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre, d'où le calcul de son terme général.

**21.6** Première méthode : revenir à la définition du déterminant d'une matrice carrée comme sommation de produits, indexée par le groupe symétrique.

Seconde méthode : remarquer que  $B = DAD$ , où  $D$  est la matrice diagonale  $\text{diag}((-1)^i)_{1 \leq i \leq n}$ .

**21.7** Remplacer (S) par un système équivalent, obtenu en exprimant  $x_2, \dots, x_n$  en fonction de  $x_1$ , et avec une dernière équation portant sur  $x_1$ .

Séparer en cas :  $a^n \neq 1$ ,  $a^n = 1$ .

**21.8** En notant  $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ , le déterminant proposé est celui d'une famille de colonnes décomposées linéairement sur  $E_1, \dots, E_n$ . Utiliser la multilinéarité et l'alternance de  $\det_{\mathcal{B}}$ .

**21.9** a) Passer modulo 2.

b) Remarquer qu'un entier impair n'est pas nul.

**21.10** Utiliser la factorisation de  $X^2 + pX + q$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**21.11** a) Commencer par calculer le déterminant de Vandermonde pour  $n = 1, n = 2, n = 3$ .

Montrer le résultat voulu, par récurrence sur  $n$ , en utilisant des opérations licites sur les colonnes, permettant, dans le calcul du déterminant à l'ordre  $n$ , de faire apparaître le déterminant à l'ordre  $n-1$ .

b) En multipliant, pour chaque  $i$ , la ligne numéro  $i$  par  $x_i$ , se ramener à un déterminant de Vandermonde.

**21.12** • Se rappeler que deux matrices carrées de même ordre  $A, C$  sont dites semblables si et seulement s'il existe une matrice carrée inversible  $P$  telle que  $A = P C P^{-1}$ .

• Puisque  $A$  et  $B$  sont inversibles, on peut exprimer les comatrices de  $A$  et  $B$  à l'aide des inverses de  $A$  et  $B$ .

**21.13** a) Décomposer linéairement  $A$  sur  $I_n$  et la matrice  $U \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les termes sont égaux à 1. Remarquer que  $U^2 = nU$ , d'où l'on déduit une équation du second degré satisfait par  $A$ , puis l'inversibilité de  $A$  et le calcul de  $A^{-1}$ .

b) Opérer  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$ , puis  $C_j \leftarrow C_j - C_1$  pour  $j = 2, \dots, n$ , pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

c) Puisque  $A$  est inversible, on peut exprimer  $\text{com}(A)$  à l'aide de  $A^{-1}$  et utiliser le résultat obtenu en a).

**21.14** Remarquer que le système est triangulaire. Calculer  $x_0, x_1, x_2$  et conjecturer une formule pour  $x_k, 1 \leq k \leq n+1$ , que l'on montrera par récurrence forte sur  $k$ .

**21.15** Séparer l'étude en trois cas :  $\text{rg}(A) = n$ ,  $\text{rg}(A) = n-1$ ,  $\text{rg}(A) \leq n-2$ .

1) Dans le cas  $\text{rg}(A) = n$ , faire intervenir l'inversibilité de  $A$ .

2) Dans le cas  $\text{rg}(A) = n-1$ , montrer  $\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$  en utilisant la formule du cours  $A^t \text{com}(A) = \det(A) I_n$  et en remarquant qu'alors  $\text{Im}({}^t \text{com}(A)) \subset \text{Ker}(A)$ .

3) Dans le cas  $\text{rg}(A) \leq n-2$ , montrer  $\text{com}(A) = 0$ .

# Corrigés des exercices

**21.1**

a)

$$\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{=} \begin{vmatrix} a & b & ab \\ 0 & c-b & a(c-b) \\ b-a & 0 & (b-a)c \end{vmatrix}$$

$$= (c-b)(b-a) \begin{vmatrix} a & b & ab \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$= \text{Sarrus } ac(c-b)(b-a).$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \\ a^3 & b^3 - a^3 & c^3 - a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & c+a \\ a^3 & b^2 + ba + a^2 & c^2 + ca + a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & c+a \\ b^2 + ba + a^2 & c^2 + ca + a^2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1}{=} (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & c+a \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & c-b \\ b^2 & c^2 - b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} b+a & 1 \\ b^2 & c+b \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(ab+ac+bc).$$

d)

$$\begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 2a & -(a+b+c) & 0 \\ b-c-a & a+b+c & a+b+c \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2a & -1 & 0 \\ b-c-a & 1 & 1 \\ 2c & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ b+c-a & 1 & 0 \\ 2c & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} -(a+b+c)^3.$$

**21.2** a)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c-a & 0 \\ b & a & 0 & c-a \\ c & b & a-c & 0 \\ b & c & 0 & a-c \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} a+c & 2b & 0 & 0 \\ 2b & a+c & 0 & 0 \\ c & b & a-c & 0 \\ b & c & 0 & a-c \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_4}{=} (a-c)^2 \begin{vmatrix} a+c & 2b \\ 2b & a+c \end{vmatrix}$$

$$= (a-c)^2 ((a+c)^2 - (2b)^2)$$

$$= (a-c)^2 (a+c-2b)(a+c+2b).$$

b) En notant  $s = a+b+c+d$  et  $C_1, C_2, C_3, C_4$  les colonnes du déterminant proposé, on a :

$$S = \begin{pmatrix} b+c+d \\ c+d+a \\ d+a+b \\ a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-a \\ s-b \\ s-c \\ s-d \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= sC_1 - C_2.$$

Ainsi, les colonnes du déterminant proposé forment une famille liée, donc ce déterminant est nul.

c)

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} (1+x)^2 & (2+x)^2 & (3+x)^2 & (4+x)^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{array} \right| \\
 &= \underset{j=2, 3, 4}{C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}} \left| \begin{array}{ccccc} (1+x)^2 & 2x+3 & 2x+5 & 2x+7 \\ 2^2 & 5 & 7 & 9 \\ 3^2 & 7 & 9 & 11 \\ 6^2 & 9 & 11 & 13 \end{array} \right| \\
 &= \underset{j=3, 4}{C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}} \left| \begin{array}{cccc} (1+x)^2 & 2x+3 & 2 & 2 \\ 2^2 & 5 & 2 & 2 \\ 3^2 & 7 & 2 & 2 \\ 4^2 & 9 & 2 & 2 \end{array} \right| = 0.
 \end{aligned}$$

**21.3** En notant  $L_1, L_2, L_3$  les lignes successives (S), en effectuant  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ , on a :

$$\begin{aligned}
 (S) & \left\{ \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ (1-m)x + (m-1)y = m-1 \\ (1-m)y + (m-1)z = m^2 - m \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ (1-m)(x-y+1) = 0 \\ (1-m)(y-z+m) = 0. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Séparons en deux cas :

1<sup>er</sup> cas :  $m \neq 1$  :

Alors :

$$\begin{aligned}
 (S) & \iff \left\{ \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x - y + 1 = 0 \\ y - z + m = 0 \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} y = z - m \\ x = z - 1 - m \\ m(z-1-m) + (z-m) + z = 1 \end{array} \right. \quad (\text{E}).
 \end{aligned}$$

Et :

$$(\text{E}) \iff (m+2)z - (m^2 + 2m + 1) = 0.$$

• Si  $m \neq -2$ , alors : (E)  $\iff z = \frac{(m+1)^2}{m+2}$ , puis on obtient :

$$y = z - m = \frac{(m+1)^2}{m+2} - m = \frac{1}{m+2},$$

$$x = z - 1 - m = \frac{(m+1)^2}{m+2} - (m+1) = -\frac{m+1}{m+2}.$$

• Si  $m = -2$ , alors : (E)  $\iff 0z - 1 = 0$ , qui n'a pas de solution.

2<sup>de</sup> cas :  $m = 1$  :

Alors : (S)  $\iff x + y + z = 1$ .

On conclut que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (S) est :

$$S = \begin{cases} \left\{ \left( -\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2} \right) \right\} & \text{si } m \neq 1 \text{ et } m \neq -2 \\ \emptyset & \text{si } m = -2 \\ \left\{ (x, y, 1-x-y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

**21.4** a) On a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et toutes  $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned}
 f(\alpha A + B) &= {}^t(\alpha A + B) = \alpha {}^t A + {}^t B \\
 &= \alpha f(A) + f(B),
 \end{aligned}$$

donc  $f \in \mathcal{L}(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))$ .

b) D'après le cours, les sev  $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ , formés respectivement des matrices symétriques et des matrices antisymétriques, sont supplémentaires dans  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  et :

$$\dim(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim(\mathbf{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il existe donc une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  formée successivement par une base de  $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$  et une base de  $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ .

La matrice de  $f$  dans cette base est la matrice diagonale  $D = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$  formée de  $\frac{n(n+1)}{2}$  termes égaux à 1, suivis de  $\frac{n(n-1)}{2}$  termes égaux à -1.

Il est clair alors que :

$$\text{rg}(f) = n^2, \quad \text{tr}(f) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n,$$

$$\det(f) = 1^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

21.5

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\stackrel{C_j \leftarrow C_j - C_n,}{\stackrel{j=1, \dots, n-1}{=}} \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (1-n)(2-n) \dots (-1)n = (-1)^{n-1} n!.$$

b)

$$\stackrel{L_i \leftarrow L_i - L_1,}{\stackrel{i=2, \dots, n}{=}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2 + a_3 - x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

$$= a_1(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_{n-1} - x).$$

$$c) \quad \det(a^{\max(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ a^2 & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ a^3 & a^3 & a^3 & \dots & a^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & a^n & a^n & \dots & a^n \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_i \leftarrow L_i - L_{i+1},}{\stackrel{i=1, \dots, n-1}{=}} \begin{vmatrix} a - a^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 - a^3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a^{n-1} - a^n & 0 & 0 & a^n \end{vmatrix}$$

$$= (a - a^2)(a^2 - a^3) \dots (a^{n-1} - a^n)a^n$$

$$= (a(1-a))(a^2(1-a)) \dots (a^{n-1}(1-a))a^n$$

$$= a^{1+2+\dots+n}(1-a)^{n-1} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-a)^{n-1}.$$

d)

$$\begin{vmatrix} x + a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & x + a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & x + a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{C_j \leftarrow C_j - C_1,}{\stackrel{j=2, \dots, n}{=}} \begin{vmatrix} x + a_1 & -x & -x & \dots & -x \\ a_2 & x & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + (L_2 + \dots + L_n)}{=} \begin{vmatrix} x + a_1 + \dots + a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & x & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1} \left( x + \sum_{i=1}^n a_i \right).$$

e) Notons, pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $C_j$  la colonne numéro  $j$  du déterminant proposé. On a, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  :

$$C_j = (ij + i + j)_{1 \leq i \leq n} = (i(j+1) + j)_{1 \leq i \leq n}$$

$$= (j+1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $C_j$  se décompose linéairement sur deux colonnes fixes (c'est-à-dire indépendantes de  $j$ ).

Si  $n \geq 3$ , alors la famille des colonnes est liée, donc le déterminant proposé est nul.

Si  $n = 1$ , alors le déterminant est égal à 3.

$$\text{Si } n = 2, \text{ alors le déterminant est } \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -1.$$

f) En notant  $D_{n+1}$  le déterminant d'ordre  $n+1$  proposé, on a, par développement par rapport à la dernière colonne :

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & \ddots & (0) & \vdots \\ a^2 & ab & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & b & -1 \\ a^n & a^{n-1}b & \dots & ab & b \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

$$= bD_n + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a^{n-2} & a^{n-3}b & \dots & b & -1 \\ a^n & a^{n-1}b & \dots & \dots & ab \end{vmatrix}_{[n]}$$

En mettant  $a$  en facteur dans la dernière ligne de ce dernier déterminant, on fait apparaître encore  $D_n$ , d'où :

$$D_{n+1} = bD_n + aD_n = (a+b)D_n.$$

Il en résulte, par suite géométrique :

$$D_{n+1} = (a+b)^n D_1 = (a+b)^n.$$

g) Notons  $D_n$  le déterminant proposé.

On a, pour  $n \geq 3$ , en développant par rapport à la 1<sup>ère</sup> ligne :

$$\begin{aligned} D_n &= \left| \begin{array}{cccccc} 1+a^2 & a & 0 & & & \\ a & \diagdown & \diagup & a & & \\ 0 & a & 1+a^2 & & & \\ & \diagdown & \diagup & a & & \\ & 0 & a & 1+a^2 & & \\ & & & a & 1+a^2 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1+a^2 \end{array} \right|_{[n]} \\ &= (1+a^2) \left| \begin{array}{cccccc} 1+a^2 & a & 0 & & & \\ a & \diagdown & \diagup & a & & \\ 0 & a & 1+a^2 & & & \\ & \diagdown & \diagup & a & & \\ & 0 & a & 1+a^2 & & \\ & & & a & 1+a^2 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1+a^2 \end{array} \right|_{[n-1]} - a \left| \begin{array}{cccccc} a & a & 0 & 0 & & \\ 0 & 1+a^2 & a & 0 & & \\ 0 & a & 1+a^2 & a & 0 & \\ & \diagdown & \diagup & a & \diagdown & \\ & 0 & a & 1+a^2 & a & \\ & & & a & 1+a^2 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1+a^2 \end{array} \right|_{[n-1]} \\ &= (1+a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2}. \end{aligned}$$

En notant  $D_0 = 1$ ,

comme  $D_1 = 1 + a^2$  et  $D_2 = (1 + a^2)^2 - a^2$ ,

la formule  $D_n = (1 + a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$  est valable pour tout  $n \geq 3$ .

On déduit :  $D_n - D_{n-1} = a^2(D_{n-1} - D_{n-2})$ ,

d'où, par remplacements successifs :

$$D_n - D_{n-1} = (a^2)^{n-1}(D_1 - D_0) = a^{2n},$$

puis, en sommant :

$$D_n = a^{2n} + a^{2n-2} + \dots + a^2 + D_0 = a^{2n} + \dots + a^2 + 1.$$

$$\text{Si } a^2 \neq 1, \text{ on peut écrire : } D_n = \frac{1 - a^{2n+2}}{1 - a^2}.$$

Et, si  $a^2 = 1$ , alors  $D_n = n + 1$ .

## 21.6 Première méthode :

En notant  $B = (b_{ij})_{ij}$ , on obtient par la définition du déterminant :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sigma(1)+1} a_{\sigma(1),1} \dots (-1)^{\sigma(n)+n} a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\binom{\sigma(1)+\dots+\sigma(n)}{2} + (1+\dots+n)} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{2(1+\dots+n)} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = \det(A). \end{aligned}$$

Seconde méthode :

On remarque :  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $b_{ij} = (-1)^i a_{ij} (-1)^j$ .

Ainsi,  $B$  est le produit  $B = DAD$ , où  $D$  est la matrice diagonale  $D = \text{diag}((-1)^i)_{1 \leq i, j \leq n}$ . On a alors :

$$\det(B) = \det(DAD) = \det(D) \det(A) \det(D)$$

$$= (\det(D))^2 \det(A) = \left( \prod_{i=1}^n (-1)^i \right)^2 \det(A) = \det(A).$$

$$21.7 \quad (S) \iff \begin{cases} x_2 = ax_1 + b \\ x_3 = ax_2 + b = a(ax_1 + b) + b \\ \vdots \\ x_n = a^{n-1}x_1 + (a^{n-2} + \dots + 1)b \\ x_1 = a^n x_1 + (a^{n-1} + \dots + 1)b. \end{cases}$$

### 1) Cas $a^n \neq 1$

On obtient  $x_1 = \frac{(a^{n-1} + \dots + 1)b}{1 - a^n} = \frac{b}{1 - a}$ , puis en reportant :

$$x_2 = ax_1 + b = \frac{b}{1 - a}, \dots, x_n = \frac{b}{1 - a}.$$

### 2) Cas $a^n = 1$

α) Si  $a \neq 1$ , alors  $a^{n-1} + \dots + 1 = \frac{a^n - 1}{a - 1} = 0$ , et donc :

$$(S) \iff \begin{cases} x_2 = ax_1 + b \\ x_3 = a^2 x_1 + (a+1)b \\ \vdots \\ x_n = a^{n-1} x_1 + (a^{n-2} + \dots + 1)b. \end{cases}$$

β) Si  $a = 1$  et  $b \neq 0$ , comme  $x_1 = x_1 + nb$ , (S) n'a pas de solution.

γ) Si  $a = 1$  et  $b = 0$ , alors  $(S) \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Finalement :

$$S = \begin{cases} \left\{ \left( \frac{b}{1-a}, \dots, \frac{b}{1-a} \right) \right\} & \text{si } a^n \neq 1 \\ \left\{ (x_1, ax_1 + b, a^2 x_1 + (a+1)b, \dots, \right. \\ \left. a^{n-1} x_1 + (a^{n-2} + \dots + 1)b) ; x_1 \in \mathbb{C} \right\} & \text{si } (a^n = 1 \text{ et } a \neq 1) \\ \emptyset & \text{si } (a = 1 \text{ et } b \neq 0) \\ \{(x_1, \dots, x_1) ; x_1 \in \mathbb{C}\} & \text{si } (a = 1 \text{ et } b = 0). \end{cases}$$

21.8 Notons  $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $C_j$  la colonne numéro  $j$  du déterminant  $D$  proposé,

pour  $j = 1, \dots, n$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ . On a alors :

$$D = \begin{vmatrix} a_1^2 + x & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 + x & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 + x \end{vmatrix}$$

$$= \det_B(a_1 A + x E_1, \dots, a_n A + x E_n).$$

En développant par multilinéarité et alternance, il ne reste que  $n+1$  déterminants :

$$D = \det_B(x E_1, \dots, x E_n) + \sum_{j=1}^n \det_B(x E_1, \dots, a_j A, \dots, x E_n)$$

$$= x^n + x^{n-1} \sum_{j=1}^n a_j \det_B(E_1, \dots, A, \dots, E_n).$$

On a, pour  $j \in \{1, \dots, n\}$  fixé, en développant successivement par rapport à la dernière colonne, depuis la colonne  $n$  jusqu'à la colonne  $j$  :

$$\det_B(E_1, \dots, A, \dots, E_n) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & (0) & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & (0) & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & (0) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & (0) & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_j \end{vmatrix}_{[j]} = a_j.$$

$$\text{Finalement : } D = x^n + x^{n-1} \sum_{j=1}^n a_j^2.$$

### 21.9 a) Utilisons les congruences modulo 2.

Notons  $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  la matrice carrée d'ordre  $n$ , à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , où  $m_{ij}$  est la classe de  $a_{ij}$  modulo 2. Puisque le déterminant d'une matrice carrée s'obtient par somme de produits de termes de la matrice, il est clair, avec les hypothèses de l'énoncé, que, modulo 2 :

$$\det(A) \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n \equiv \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & (1) & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (1) & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & (1) & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (1) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$c_j \leftarrow c_j - c_1, \quad j=2, \dots, n \equiv (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & -1 & 0 & (0) & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (0) & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (n-1)(-1)^{n-1}.$$

D'où :

$$n + \det(A) \equiv n + (n-1)(-1)^{n-1}$$

$$\equiv n + (n-1) = 2n-1 \equiv 1. \quad [2]$$

Finalement,  $n + \det(A)$  est impair.

b) Si  $n$  est pair, alors, comme  $n + \det(A)$  est impair, par différence,  $\det(A)$  est impair, donc non nul, et on conclut que  $A$  est inversible.

**21.10** Puisque  $p^2 - 4q \leqslant 0$ , le trinôme réel  $X^2 + pX + q$  admet deux zéros complexes conjugués (égaux si  $p^2 - 4q = 0$ , distincts si  $p^2 - 4q < 0$ ). Il existe donc  $z \in \mathbb{C}$  tel que :

$$X^2 + pX + q = (X - z)(X - \bar{z}).$$

Ainsi :  $z + \bar{z} = -p$  et  $z\bar{z} = q$ . On a alors :

$$(A - zB)(A - \bar{z}B) = A^2 - zBA - \bar{z}AB + z\bar{z}B^2$$

$$= A^2 - (z + \bar{z})AB + z\bar{z}B^2$$

$$= A^2 + pAB + qB^2,$$

d'où :

$$\det(A^2 + pAB + qB^2) = \det((A - zB)(A - \bar{z}B))$$

$$= \det(A - zB) \det(A - \bar{z}B)$$

$$= \det(A - zB) \overline{\det(A - zB)}$$

$$= |\det(A - zB)|^2 \geqslant 0.$$

**21.11** a) Si  $n = 1$  :  $V(x_1) = x_1$ .

$$\bullet \text{ Si } n = 2 : V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

• Si  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - x_1 C_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

• On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_j \leftarrow C_j - x_1 C_{j-1}, \\ j=2, \dots, n}}{=} \\ &\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &= (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) V(x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

On conclut, par récurrence sur  $n$ , ou encore, de proche en proche :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n-1} \left( \prod_{i=j+1}^n (x_i - x_j) \right) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

b) Pour faire apparaître  $\sigma_n = x_1 \dots x_n$ , comme la dernière colonne contient ce produit en omettant un facteur, multiplions, pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la ligne numéro  $i$  du déterminant  $D$  proposé par  $x_i$  :

$$\begin{aligned} x_1 \dots x_n D &= x_1 \dots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 \dots x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1 \dots x_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & \sigma_n \end{vmatrix}_{[n]} \end{aligned}$$

$$= \sigma_n \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & 1 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

On reconnaît alors un déterminant de Vandermonde, à l'ordre près des colonnes.

La permutation circulaire  $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$  est composée de  $n-1$  transpositions échangeant deux éléments consécutivement, donc  $\varepsilon(c) = (-1)^{n-1}$ , d'où, d'après l'alternance du déterminant :

$$\sigma_n D = x_1 \dots x_n D = \sigma_n (-1)^{n-1} V(x_1, \dots, x_n).$$

Si  $x_1, \dots, x_n$  sont tous non nuls, on conclut :

$$D = (-1)^{n-1} V(x_1, \dots, x_n).$$

Supposons, par exemple  $x_1 = 0$ . Alors, en revenant à la définition de  $D$  :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_2 \dots x_n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= (-1)^{n+1} x_2 \dots x_n V(x_2, \dots, x_n) \\ &= (-1)^{n-1} (x_2 - 0) \dots (x_n - 0) V(x_2, \dots, x_n) \\ &= (-1)^{n-1} V(0, x_2, \dots, x_n) = (-1)^{n-1} V(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Finalement, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  :

$$D = (-1)^{n-1} V(x_1, \dots, x_n).$$

**21.12** Puisque  $A, B \in \mathbf{GL}_n(K)$ , d'après une formule du cours :

$$\text{com}(A) = \det(A) {}^t A^{-1}, \quad \text{com}(B) = \det(B) {}^t B^{-1}.$$

1) Supposons  $A \sim \text{com}(B)$ .

Il existe  $P \in \mathbf{GL}_n(K)$  telle que :  $A = P \text{com}(B) P^{-1}$ .

On a alors :  $A = P \det(B) {}^t B^{-1} P^{-1}$ ,

donc :  ${}^t B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} P^{-1} A P$ , puis :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\det(B)} {}^t (P^{-1} A P)^{-1} = \frac{1}{\det(B)} {}^t P^{-1} {}^t A^{-1} {}^t P \\ &= \frac{1}{\det(A)} {}^t P^{-1} {}^t A^{-1} {}^t P = ({}^t P)^{-1} \text{com}(A) {}^t P. \end{aligned}$$

Ceci montre :  $B \sim \text{com}(A)$ .

2) Comme  $A$  et  $B$  ont des rôles symétriques, la réciproque s'obtient en échangeant  $A$  et  $B$ , d'où le résultat voulu.

**21.13** a) En notant  $U$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont tous les termes sont égaux à 1, on remarque que  $A = nI_n + U$ . Comme  $U^2 = nU$ , on obtient  $(A - nI_n)^2 = n(A - nI_n)$ , d'où  $A^2 - 3nA + 2n^2I_n = 0$ , puis :

$$A \left( -\frac{1}{2n^2}(A - 3nI_n) \right) = I_n$$

et

$$\left( -\frac{1}{2n^2}(A - 3nI_n) \right) A = I_n.$$

Ceci montre que  $A$  est inversible et que

$$A^{-1} = -\frac{1}{2n^2}(A - 3nI_n).$$

b) On a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1+n & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1+n \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\leftarrow C_1 - C_1 + C_2 + \dots + C_n}{=} \begin{vmatrix} 2n & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 2n & 1+n & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (1) & \ddots & 1 \\ 2n & 1 & \dots & 1 & 1+n \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= 2n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1+n & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (1) & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+n \end{vmatrix}_{[n]} \\ &\stackrel{\leftarrow C_j - C_j - C_1, j=2,\dots,n}{=} 2n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & n & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}_{[n]} = 2nn^{n-1} = 2n^n. \end{aligned}$$

c) Puisque  $A$  est inversible, on a, d'après une formule du cours :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A), \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \text{com}(A) &= \det(A) {}^t A^{-1} = 2n^{n-1} \left( -\frac{1}{2n^2}(A - 3nI_n) \right) \\ &= -n^{n-2}(A - 3nI_n). \end{aligned}$$

**21.14** Il s'agit d'un système linéaire en cascade, c'est-à-dire d'un système linéaire dont la matrice  $A$  est triangulaire. De plus, les termes diagonaux de cette matrice triangulaire  $A$  sont tous

égaux à 1, donc non nuls, donc  $A$  est inversible. Ceci montre que le système proposé (S) admet une solution et une seule. Calculons les valeurs des premières inconnues :

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, x_1 = a - x_0 = a - 1, \\ x_2 &= a^2 - (x_0 + 2x_1) = a^2 - 1 - 2(a - 1) = (a - 1)^2. \end{aligned}$$

Montrons, par récurrence forte (bornée) sur  $k$  que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, x_k = (a - 1)^k.$$

La propriété est vraie pour  $k = 0$ .

Supposons-la vraie de 0 jusqu'à  $k$ . On a alors :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a^{k+1} - \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} x_i \\ &= a^{k+1} - \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} (a - 1)^i \\ &= a^{k+1} - \left( \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (a - 1)^i - (a - 1)^{k+1} \right) \\ &= a^{k+1} - ((a - 1) + 1)^{k+1} + (a - 1)^{k+1} \\ &= (a - 1)^{k+1}, \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat pour  $k + 1$ .

On obtient ainsi :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, x_k = (a - 1)^k.$$

Finalement, l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (S) est :

$$\mathcal{S} = \{(1, a - 1, (a - 1)^2, \dots, (a - 1)^n)\}.$$

**21.15** 1) Si  $\text{rg}(A) = n$ , alors  $\det(A) \neq 0$  et, comme  $\left(\frac{1}{\det(A)} {}^t A\right) \text{com}(A) = I_n$ ,  $\text{com}(A)$  est inversible, donc  $\text{rg}(\text{com}(A)) = n$ .

2) Supposons  $\text{rg}(A) = n - 1$ .

Comme  $A {}^t \text{com}(A) = \det(A)I_n = 0$ , on a  $\text{Im}({}^t \text{com}(A)) \subset \text{Ker}(A)$ , et donc :

$$\text{rg}(\text{com}(A)) = \text{rg}({}^t \text{com}(A)) \leqslant \dim(\text{Ker}(A)).$$

Mais, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rg}(A) = 1.$$

D'autre part, comme  $\text{rg}(A) = n - 1$ , il existe une matrice carrée d'ordre  $n - 1$  extraite de  $A$  et inversible, et donc au moins un des cofacteurs de  $A$  est  $\neq 0$ , d'où  $\text{com}(A) \neq 0$ .

Finalement :  $\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$ .

3) Si  $\text{rg}(A) \leqslant n - 2$ , alors tous les cofacteurs de  $A$  sont nuls, puisque ce sont des déterminants de matrices carrées d'ordre  $n - 1$  extraites de  $A$ , et on a donc  $\text{com}(A) = 0$ ,  $\text{rg}(\text{com}(A)) = 0$ .

## Plan

Les méthodes à retenir	333
Énoncés des exercices	336
Du mal à démarrer ?	341
Corrigés	343

## Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer qu'une certaine application est un produit scalaire
- Trouver une base orthogonale (orthonormale) d'un ev euclidien
- Former la matrice, dans une base orthonormale, d'un projecteur orthogonal, d'une symétrie orthogonale
- Obtention d'inégalités par utilisation de l'inégalité de Cauchy et Schwarz et de l'inégalité triangulaire
- Matrice et déterminant de Gram
- Calculs, dans  $E_3$ , de produits scalaires, de produits vectoriels, de produits mixtes, d'angles
- Détermination de la nature et des éléments caractéristiques d'un endomorphisme orthogonal de  $E_3$ , à partir de sa matrice dans une base orthonormale directe.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions de : produit scalaire, famille orthogonale, famille orthonormale, orthogonal d'une partie
- Inégalité de Cauchy et Schwarz, inégalité de Minkowski
- Toute famille orthogonale à vecteurs tous non nuls est libre
- Définition et propriétés de  $\mathcal{O}(E)$ ,  $\mathcal{SO}(E)$ ,  $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$
- Définition d'un projecteur orthogonal, d'une symétrie orthogonale, d'une réflexion
- Définition et propriétés, dans  $E_3$ , du produit scalaire, du produit vectoriel, du produit mixte
- Classification des endomorphismes orthogonaux de  $E_3$ .

## Les méthodes à retenir

On abrège espace vectoriel en ev, sous-espace vectoriel en sev, base orthonormale en b.o.n., base orthonormale directe en b.o.n.d.  $E_2$  (resp.  $E_3$ ) désigne un ev euclidien orienté de dimension 2 (resp. 3).

**Pour montrer qu'une application  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est un produit scalaire**

Revenir à la définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel.

→ Exercices 22.4, 22.5.

**Pour calculer la norme euclidienne d'un vecteur  $x$**

Faire intervenir le produit scalaire et remplacer  $\|x\|^2$  par  $(x | x)$ .

→ Exercice 22.16.

**Dans la manipulation d'une combinaison linéaire de vecteurs, pour faire disparaître tous les termes sauf l'un d'eux**

Essayer de faire le produit scalaire avec un vecteur orthogonal à presque tous les termes de la combinaison linéaire.

→ Exercice 22.15.

**Pour manipuler des orthogonaux de sev d'un ev  $E$  muni d'un produit scalaire**

- Utiliser la définition de l'orthogonal  $F^\perp$  d'un sev  $F$  de  $E$  :

$$F^\perp = \{y \in E ; \forall f \in F, (f | y) = 0\}.$$

- Utiliser les propriétés du cours sur l'orthogonalité, en particulier :

$$F \subset F^{\perp\perp}, \quad F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp.$$

→ Exercice 22.14.

**Pour montrer qu'un vecteur  $x$ , d'un ev  $E$  muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  et de la norme euclidienne associée  $\|\cdot\|$ , est nul**

- Essayer de montrer :  $\|x\|^2 = 0$ .
- Essayer de montrer :  $\forall y \in E, (x | y) = 0$ .

→ Exercices 22.16, 22.20.

**Pour obtenir une inégalité, en algèbre, en analyse, en géométrie, faisant intervenir des carrés ou des racines carrées**

Essayer d'utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz

→ Exercices 22.8, 22.9, 22.24.

**Pour manipuler une matrice ou un déterminant de Gram (exercice classique)**

Par définition, la matrice de Gram d'une famille finie  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs d'un ev  $E$  muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  est :

$$G = ((x_i | x_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})).$$

Penser à décomposer linéairement  $x_1, \dots, x_n$  sur une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ . En notant  $M$  la matrice des coordonnées de  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $(e_1, \dots, e_p)$ , on a alors :  $G = {}^t M M$ . Attention :  $M$  n'est pas, a priori, carrée.

→ Exercice 22.12.

**Pour traduire qu'une matrice carrée  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  est orthogonale**

Utiliser l'une des caractérisations du cours :

- les colonnes de  $A$  forment une b.o.n. de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  usuel
- les lignes de  $A$  forment une b.o.n. de  $\mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  usuel
- ${}^t A A = I_n$
- $A {}^t A = I_n$
- $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  et  ${}^t A = A^{-1}$
- $A$  représente un endomorphisme orthogonal dans une b.o.n.

→ Exercices 22.3, 22.9, 22.10, 22.19.

**Pour former la matrice d'un projecteur orthogonal sur un sev  $F$  de  $E$**

- Si l'on connaît  $F^\perp$ , décomposer un vecteur quelconque de  $E$  sur  $F$  et  $F^\perp$ .

- Déterminer une b.o.n.  $(v_1, \dots, v_p)$  de  $F$ , puis appliquer la formule du cours donnant le projeté orthogonal  $p_F(x)$  d'un vecteur quelconque  $x$  de  $E$  sur  $F$  :

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^p (e_k | x) e_k.$$

→ Exercice 22.7.

**Pour traduire une symétrie orthogonale  $s$  par rapport à un sev  $F$  de  $E$**

Utiliser, pour tout  $u \in E$  :

$$s(u) + u \in F \quad \text{et} \quad s(u) - u \in F^\perp.$$

→ Exercice 22.13.

**Pour manipuler, dans  $E_3$ , le produit scalaire, le produit vectoriel, le produit mixte**

Utiliser les propriétés du cours sur ces produits.

En particulier, la formule du double produit vectoriel est utile :

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c.$$

→ Exercices 22.12, 22.26.

**Pour calculer l'angle de deux vecteurs non nuls  $x, y$  de  $E_2$  ou de  $E_3$**

Calculer le produit scalaire  $x \cdot y$ , ce qui permet d'obtenir  $\cos(\widehat{x, y})$ , et éventuellement, calculer  $x \wedge y$ , pour décider de l'orientation.

→ Exercice 22.1.

**Pour déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme  $f$  de  $E_3$  représenté par une matrice orthogonale  $\Omega$  dans une b.o.n.d.  $\mathcal{B}$  de  $E_3$**

- Vérifier que  $\Omega$  est orthogonale, par exemple par :  ${}^t \Omega \Omega = I_3$ .

- Calculer  $\det(\Omega)$ . D'après le cours :  $\det(\Omega) = \pm 1$ .

- 1) Si  $\det(\Omega) = 1$ , alors  $f$  est une rotation.

Le cas  $f = \text{Id}_{E_3}$  est d'étude immédiate.

La droite supportant l'axe de  $f$  est l'ensemble des invariants de  $f$ , obtenu en résolvant  $\Omega X = X$ , d'inconnue  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On détermine l'angle  $\theta$  de  $f$  par :  $\text{tr}(\Omega) = 1 + 2\cos\theta$  et  $\sin\theta$  est du signe du produit mixte  $[x, f(x), I]$  pour n'importe quel vecteur  $x$  de  $E_3$  non colinéaire à  $I$ , où  $I$  est le vecteur dirigeant et orientant l'axe de  $f$ .

2) Dans le cas  $\det(\Omega) = -1$ , le programme officiel ne comporte que l'étude du cas où  $\Omega$  est symétrique. Alors  $f$  est une réflexion, et le plan de la réflexion  $f$  est l'ensemble des invariants de  $f$ .

→ Exercice 22.3.

**Pour traduire qu'une matrice carrée réelle  $A$  d'ordre trois est orthogonale droite**

En plus de la caractérisation du cours :

$$A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R}) \iff ({}^t A A = I_3 \text{ et } \det(A) = 1),$$

on peut remarquer que ceci est équivalent à ce que les trois colonnes successives  $C_1, C_2, C_3$  de  $A$  vérifient :

$$\|C_1\| = 1, \|C_2\| = 1, C_1 \cdot C_2 = 0, C_3 = C_1 \wedge C_2.$$

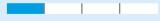
→ Exercice 22.2.

Pour manipuler un (seul) endomorphisme orthogonal  $f$  de  $E_3$

Essayer d'envisager la matrice de  $f$  dans une b.o.n.d. particulière, commençant par un vecteur normé  $\vec{u}$  tel que  $f(\vec{u}) = \vec{u}$ , si un tel  $\vec{u}$  existe.

→ Exercice 22.18.

## Énoncés des exercices



### 22.1 Un vecteur de $E_3$ faisant un même angle avec trois vecteurs donnés

Soient  $a, b, c \in E_3 - \{0\}$ . On note :

$$a' = b \wedge c, \quad b' = c \wedge a, \quad c' = a \wedge b, \quad v = \|a\| |a'| + \|b\| |b'| + \|c\| |c'|$$

et on suppose  $v \neq 0$ .

Montrer que  $v$  fait avec  $a, b, c$  des angles égaux, c'est-à-dire montrer que :

$$\cos(\widehat{v,a}) = \cos(\widehat{v,b}) = \cos(\widehat{v,c}).$$

### 22.2 Calcul de termes d'une matrice carrée pour que celle-ci soit orthogonale droite

Trouver une CNS sur  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  pour que la matrice  $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ -2 & -6 & c \\ 6 & a & d \end{pmatrix}$  soit orthogonale droite.

### 22.3 Détermination de la nature et des éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $E_3$ représenté par une matrice orthogonale dans une base orthonormale directe

Déterminer la nature de l'endomorphisme  $f$  de  $E_3$ , dont la matrice  $\Omega$  relativement à une base orthonormée directe  $(i, j, k)$  de  $E_3$  est donnée, et préciser les éléments caractéristiques de  $f$  :

$$a) \Omega = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \Omega = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

### 22.4 Exemple de produit scalaire sur un espace vectoriel de fonctions, exemple d'endomorphisme antisymétrique dans le contexte de l'analyse

On note  $E$  l'ensemble des applications  $f : [-1 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(-1) = f^{(n)}(1) = 0.$$

a) Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que l'application

$$(f, g) \mapsto (f | g) = \int_{-1}^1 fg \text{ est un produit scalaire sur } E.$$

b) Vérifier que l'application  $T : f \mapsto f'$  est un endomorphisme antisymétrique de  $E$ , c'est-à-dire que :

$$\forall (f,g) \in E^2, (T(f) | g) = -(f | T(g)).$$

## 22.5

### Exemple de produit scalaire sur un espace vectoriel de polynômes, mise en évidence d'une base orthonormale

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$

a) Vérifier que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

b) 1) Calculer, pour tout  $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $\varphi(X^i, X^j)$ .

2) En déduire une base orthonormale de  $(E, \varphi)$ .

## 22.6

### Exemple de famille orthogonale pour un produit scalaire sur un espace de fonctions

a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $x \tan x = 1$ ,

d'inconnue  $x \in \left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ , admet une solution et une seule, notée  $x_n$ .

b) On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{2+x_n^2}{1+x_n^2}$  et :

$$f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\cos(x_n t)}{\sqrt{a_n}}.$$

Montrer que la famille  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthonormale pour le produit scalaire sur  $E = C([-1; 1], \mathbb{R})$  défini par :  $(f, g) \mapsto (f | g) = \int_{-1}^1 fg$ .

## 22.7

### Former la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormale

Former la matrice, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  usuel, du projecteur orthogonal  $p$  sur le sous-espace vectoriel  $F$  défini par :

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

## 22.8

### Exemple d'obtention d'inégalité par utilisation de l'inégalité de Cauchy et Schwarz

Montrer que, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  à coefficients tous  $\geq 0$ , et pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , on a :

$$(P(\sqrt{xy}))^2 \leq P(x)P(y).$$

## 22.9

### Inégalité sur la somme des valeurs absolues des termes d'une matrice orthogonale

Soit  $\Omega = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ . Montrer :  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ .

**22.10 Matrices simultanément orthogonales et triangulaires**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ .

**22.11 Étude d'une combinaison linéaire à coefficients  $\pm 1$  de trois vecteurs unitaires**

Soient  $(E, (\cdot, \cdot))$  un espace vectoriel euclidien,  $u_1, u_2, u_3 \in E$  unitaires.

On note, pour  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$  :  $V_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} = \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3$ .

Calculer  $\sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \|V_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}\|^2$  et en déduire qu'il existe  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$  tel que :  $\|V_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}\| \geq \sqrt{3}$ .

**22.12 Étude de l'endomorphisme  $x \mapsto x + a \wedge x$  de  $E_3$** 

Soit  $a \in E_3$ . On note :  $f : E_3 \longrightarrow E_3$ ,  $x \mapsto f(x) = x + a \wedge x$ .

Montrer :  $f \in \mathcal{GL}(E_3)$  et exprimer  $f^{-1}(y)$  en fonction de  $y$ , pour tout  $y \in E_3$ .

**22.13 Former la matrice d'une réflexion dans une base orthonormale de  $E_3$** 

Pour  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , former la matrice, relativement à une base orthonormée  $(i, j, k)$  de  $E_3$ , de la réflexion par rapport au plan  $P$  d'équation  $ax + by + cz = 0$ .

**22.14 Étude d'orthogonaux de sous-espaces vectoriels**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $(\cdot, \cdot)$  un produit scalaire sur  $E$ , et  $F, G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que :

$$F \subset G^\perp \quad \text{et} \quad F + G = E.$$

Démontrer :  $G^\perp = F$  et  $F^\perp = G$ .

**22.15 Étude de l'application  $x \mapsto \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i$** 

Soit  $(E, (\cdot, \cdot))$  un espace vectoriel euclidien,  $n = \dim(E)$ .

a) Soit  $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ . On considère l'application

$$f : E \longrightarrow E, \quad x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i.$$

1) Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$ .

2) Montrer :  $\text{Ker}(f) = \mathcal{F}^\perp$  et  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(\mathcal{F})$ .

3) En déduire que  $f$  est bijective si et seulement si  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ .

b) En déduire que, si  $E$  est de dimension finie, en notant  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , on a :

$$\forall (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \exists ! v \in E, \forall i \in \{1, \dots, n\}, (e_i | v) = c_i.$$



### 22.16 Condition suffisante pour une base orthonormale

Soient  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ . On suppose :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \|e_i\| \geq 1 \\ \forall x \in E, \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2 = \|x\|^2. \end{cases}$$

Démontrer que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $E$ .

### 22.17 Former la matrice d'une rotation dans une base orthonormale directe de $E_3$

Soient  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormale directe de  $E_3$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ,  $\vec{u} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$ . Former la matrice, dans  $\mathcal{B}$ , de la rotation vectorielle d'axe dirigé et orienté par  $u$ , et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

### 22.18 Expression de l'image d'un vecteur par une rotation vectorielle de $E_3$

Soient  $u \in E_3$ , tel que  $\|u\| = 1$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $f$  la rotation d'angle  $\theta$ , d'axe dirigé et orienté par  $u$ . Montrer :  $\forall x \in E_3$ ,  $f(x) = (1 - \cos \theta)(u \cdot x)u + \cos \theta x + \sin \theta u \wedge x$ .

### 22.19 Rang de la différence de deux matrices orthogonales droites d'ordre trois

a) Soit  $R \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$  telle que  $R \neq I_3$ . Montrer :  $\text{rg}(I_3 - R) = 2$ .

b) En déduire que, pour tout  $(\Omega_1, \Omega_2) \in (\mathbf{SO}_3(\mathbb{R}))^2$  tel que  $\Omega_1 \neq \Omega_2$ , on a :

$$\text{rg}(\Omega_1 - \Omega_2) = 2.$$

### 22.20 Toute application conservant le vecteur nul et la norme euclidienne est linéaire

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels dont chacun est muni d'un produit scalaire,  $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F$  les normes associées,  $f : E \longrightarrow F$  une application telle que  $f(0) = 0$  et :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E.$$

Démontrer que  $f$  est linéaire.

### 22.21 Caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer :

$$\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p) \iff (\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|).$$

### 22.22 Étude de projecteurs orthogonaux

Soient  $(E, (\cdot | \cdot))$  un espace vectoriel euclidien,  $\|\cdot\|$  la norme associée,  $p, q$  deux projecteurs orthogonaux tels que :  $\forall x \in E$ ,  $\|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ .

Montrer que  $p \circ q = q \circ p = 0$  et que  $p + q$  est un projecteur orthogonal.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 22.21.

### 22.23 Matrice et déterminant de Gram

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , on note :

$$\begin{cases} G(x_1, \dots, x_n) = ((x_i | x_j)_{1 \leq i, j \leq n}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \\ \gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n)). \end{cases}$$

a) Établir :  $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ .

b) Montrer :  $\begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \text{ lié} \iff \gamma(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ (x_1, \dots, x_n) \text{ libre} \iff \gamma(x_1, \dots, x_n) > 0 \end{cases}$ .

c) On suppose ici  $(x_1, \dots, x_n)$  libre. Soient  $X = \text{Vect}(\{x_1, \dots, x_n\})$ ,  $x \in E$ ,  $p_X(x)$  le projeté orthogonal de  $x$  sur  $X$ ,  $d = \|x - p_X(x)\|$  la distance de  $x$  à  $X$ . Montrer :

$$d = \left( \frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 22.24 Exemple d'intervention du produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B, C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  telles que :

$${}^t A A = A {}^t A, \quad {}^t B B = B {}^t B, \quad A C = C B.$$

Démontrer :  ${}^t A C = C {}^t B$ .

À cet effet, on munira  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire canonique et de la norme  $\|\cdot\|$  associée, et on calculera  $\|{}^t A C - C {}^t B\|^2$ .

### 22.25 Exemple d'intervention de l'inégalité de Cauchy et Schwarz

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  tels que :  $\sum_{i,j; i \neq j} a_i b_j = 0$ . Montrer :

$$\sum_{i,j; i \neq j} b_i b_j \leqslant 0.$$

### 22.26 Étude de la composée $s \circ r \circ s$ , où $r$ est une rotation et $s$ une réflexion de $E_3$

Soient  $r$  une rotation et  $s$  une réflexion de  $E_3$ . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $\rho = s \circ r \circ s$  en fonction des éléments caractéristiques de  $r$  et  $s$ .

### 22.27 Caractérisation des endomorphismes de $E_3$ conservant le produit vectoriel

Soit  $f \in \mathcal{L}(E_3)$ . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) :  $f$  est une rotation (ou l'identité)

(ii) :  $f \neq 0$  et :  $\forall (x, y) \in E_3^2$ ,  $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ .

# Du mal à démarrer ?

**22.1** Pour évaluer  $\widehat{\cos(v,a)}$ , calculer  $v \cdot a$  et obtenir :  
 $v \cdot a = \|v\| \|a\| [b,c,a]$ , d'où :

$$\widehat{\cos(v,a)} = \frac{v \cdot a}{\|v\| \|a\|} = \frac{[b,c,a]}{\|v\|}$$

**22.2** D'après le cours,  $A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$  si et seulement si les colonnes  $(C_1, C_2, C_3)$  de  $A$  forment une base orthonormale directe de  $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , ce qui revient à :

$$\|C_1\| = 1, \quad \|C_2\| = 1, \quad C_1 \cdot C_2 = 0, \quad C_3 = C_1 \wedge C_2.$$

**22.3** • Vérifier  $\Omega \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$ .

• Calculer  $\det(\Omega)$ . On obtient  $\det(\Omega) = 1$  ou  $-1$ .

1) Cas  $\det(\Omega) = 1$  :

D'après le cours,  $f$  est une rotation (le cas  $f = \text{Id}_{E_3}$  est d'étude immédiate).

La droite supportant l'axe de  $f$  est l'ensemble des invariants de  $f$ , obtenu en résolvant  $\Omega X = X$ , d'inconnue  $X \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

On détermine l'angle  $\theta$  de  $f$  par :  $\text{tr}(\Omega) = 1 + 2\cos\theta$ , et  $\sin\theta$  est du signe du produit mixte  $[x, f(x), I]$  pour n'importe quel vecteur  $x$  de  $E_3$  non colinéaire à  $I$ , où  $I$  est le vecteur unitaire dirigeant et orientant l'axe de  $f$ .

2) Cas  $\det(\Omega) = -1$  :

Le programme ne comporte ici que l'étude du cas où  $\Omega$  est symétrique. Alors  $f$  est une réflexion et le plan de la réflexion  $f$  est l'ensemble des invariants de  $f$ .

**22.4** b) Utiliser une intégration par parties.

**22.5** b) 1) Calculer  $(X^i)^{(k)}$  en séparant en cas  $k < i, k = i, k > i$ , puis calculer  $(X^i)^{(k)}(0)$  en séparant en cas  $k \neq i, k = i$ .

2) Montrer que  $\binom{X^i}{i!}_{0 \leq i \leq n}$  convient.

**22.6** a) Étudier, pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé, les variations de la fonction :

$$\varphi : \left]n\pi ; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x) = \tan x - \frac{1}{x}.$$

b) Calculer, pour  $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ ,  $(f_p | f_q)$ , en utilisant des formules de trigonométrie et la définition de  $x_p, x_q$ , qui permet, par exemple, de remplacer  $\tan x_p$  par  $\frac{1}{x_p}$ .

**22.7** • Former un système d'équations de  $F$ , plus simple que celui de l'énoncé, par exemple en exprimant  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de  $x_3$  et  $x_4$ .

• En déduire un vecteur  $V_1$ , non nul, de  $F$ , puis un vecteur  $V_2$ , non nul, de  $F$ , orthogonal à  $V_1$ .

• En déduire une base orthonormale  $(v_1, v_2)$  de  $F$ .

• Appliquer la formule du cours donnant le projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel de dimension finie dont on connaît une base orthonormale.

• En déduire la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

**22.8** Écrire  $P$  additivement et appliquer l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

**22.9** Appliquer l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans  $\mathbb{R}^{n^2}$  usuel aux vecteurs (1) et  $(|a_{ij}|)_{ij}$ .

**22.10** 1) Si  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ , considérer la première colonne et la première ligne de  $A$ , pour déduire  $a_{11}^2 = 0$  et  $a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$ . Réitérer.

2) Traiter la réciproque.

**22.11** Développer la somme proposée et remarquer, par exemple, que  $\sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$ .

$$\text{On obtient : } \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \|V_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}\|^2 = 24.$$

**22.12** • La linéarité de  $f$  est immédiate.

• Montrer  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ .

• Pour  $y \in E_3$ , résoudre l'équation  $y = f(x)$ , d'inconnue  $x \in E_3$ . À cet effet, évaluer  $a \cdot y$  et  $a \wedge y$ .

$$\text{On obtient : } f^{-1}(y) = \frac{1}{1 + \|a\|^2} (y - a \wedge y + (a \cdot y) a).$$

**22.13** Utiliser, pour  $u \in E_3$  et  $u' = \text{Ref}_P(u)$  :  $u' + u \in P$  et  $u' - u \in P^\perp$ , en passant par les coordonnées dans la base orthonormale  $(i, j, k)$  de  $E_3$ .

**22.14** 1) Montrer  $G^\perp \subset F$ , en passant par les éléments et en utilisant  $E = F + G$ .

2) À partir de  $F \subset G^\perp$ , déduire  $G \subset F^\perp$  et remarquer que  $F$  et  $G$  ont des rôles symétriques dans les hypothèses.

**22.15** a) 2) • L'inclusion  $\mathcal{F}^\perp \subset \text{Ker}(f)$  est immédiate.

Pour l'autre inclusion, si  $x \in \text{Ker}(f)$ , calculer le produit scalaire de  $f(x)$  et  $x$ .

• L'inclusion  $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(\mathcal{F})$  est immédiate.

Pour l'autre inclusion, faire intervenir les dimensions.

**22.16** 1) Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$  fixé, appliquer l'hypothèse à  $e_j$  à la place de  $x$ , et déduire  $(e_i | e_j) = 0$  pour  $i \neq j$  et  $\|e_j\|^2 = \|e_j\|^4$ , puis  $\|e_j\| = 1$ .

2) En vue de montrer que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $E$ , calculer  $\left\|x - \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i\right\|^2$ , par développement.

**22.17** Soit  $\vec{x} \in E_3$ . Calculer le projeté orthogonal  $q(\vec{x})$  de  $\vec{x}$  sur  $\mathbb{R}\vec{u}$ , puis, par différence, le projeté orthogonal  $p(\vec{x})$  de  $\vec{x}$  sur  $\vec{u}^\perp$ . Calculer  $f(p(\vec{x}))$  à l'aide d'un produit vectoriel, puis  $f(\vec{x})$  par  $f(\vec{x}) = q(\vec{x}) + f(p(\vec{x}))$ .

Passer ensuite aux coordonnées dans  $\mathcal{B}$ .

**22.18** Utiliser une base adaptée à la rotation  $f$ .

**22.19** a) À l'aide d'un changement de base orthonormale directe, se ramener à  $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

b) Remarquer :

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \Omega_1(I_3 - \Omega_1^{-1}\Omega_2) \text{ et } \Omega_1^{-1}\Omega_2 \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R}).$$

**22.20** 1) Montrer :  $\forall x \in E, \|f(x)\|_F = \|x\|_E$ .

2) Déduire :  $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E$ .

3) Pour  $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in E^2$ ,

$$\text{développer } \|f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y)\|^2$$

et déduire  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ .

**22.21** 1) Supposons  $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$ .

Pour  $x \in E$ , remarquer  $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$  et  $p(x) \in \text{Im}(p)$ , et utiliser le théorème de Pythagore.

2) Réciproquement, supposons :  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ .

Soient  $x \in \text{Ker}(p), y \in \text{Im}(p)$ , donc  $p(x) = 0$  et  $y = p(y)$ .

Appliquer l'inégalité d'hypothèse à  $\lambda x + y$  à la place de  $x$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Déduire  $(x | y) = 0$ .

**22.22** 1) Pour  $x \in E$ , appliquer l'inégalité de l'énoncé à  $p(x)$  à la place de  $x$ . Déduire  $p \circ q = 0$ , et  $q \circ p = 0$ .

2) Calculer  $(p + q)^2$  en développant. Déduire que  $p + q$  est un projecteur de  $E$ .

3) Montrer, pour tout  $x \in E, p(x) \perp q(x)$ , puis

$$\|(p + q)(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2, \text{ et conclure, en utilisant l'exercice 22.21.}$$

**22.23** a) Considérer  $X = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $p = \dim(X)$ ,

$(e_1, \dots, e_p)$  une base ortho-normale de  $X$ ,

$x_i = \sum_{k=1}^p \xi_{ki} e_k$  la décomposition linéaire de  $x_i$  sur  $(e_1, \dots, e_p)$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Exprimer  $(x_i | x_j)$  et en déduire que, en notant  $M = (\xi_{ki})_{ki} \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ , on a :

$$G(x_1, \dots, x_n) = {}^t MM.$$

• Montrer :  $\text{rg}({}^t MM) = \text{rg}(M)$ .

b) Garder les notations de la solution de a).

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre, alors  $p = n$  et  $M$  est carrée.

c) Noter  $y = x - p_X(x)$ , donc  $x = y + p_X(x)$ .

Calculer  $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$  en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne.

**22.24** Se rappeler que le produit scalaire canonique sur  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  est défini par :

$$\forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, (M | N) = \text{tr}({}^t MN)$$

et se rappeler les propriétés de la trace pour les matrices carrées, en particulier la formule :

$$\forall (X, Y) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \text{tr}(XY) = \text{tr}(YX).$$

**22.25** Montrer :  $\sum_{j=1}^n b_j = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)$ , puis obtenir :

$$\sum_{i,j; i \neq j} b_i b_j = \left( \left( \sum_i a_i b_i \right)^2 - \left( \sum_i a_i^2 \right) \left( \sum_i b_i^2 \right) \right) / \left( \sum_i a_i^2 \right).$$

Appliquer alors l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$  usuel.

**22.26** 1) Montrer que  $\rho$  est une rotation, en utilisant la propriété de structure de  $\mathcal{O}(E_3)$  et le déterminant.

2) Calculer  $\rho(s(\vec{u}))$ , où le  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dirigeant et orientant l'axe de  $r$ , et en déduire que l'axe de  $\rho$  est dirigé et orienté par  $s(\vec{u})$ .

3) Calculer l'angle entre  $\vec{w}$  et  $\rho(\vec{w})$ , pour  $\vec{w} \in (s(\vec{u}))^\perp$ .

**22.27** (i)  $\implies$  (ii) :

Soit  $f$  une rotation de  $E_3$ .

• Déjà,  $f$  conserve le produit scalaire.

• Montrer que  $f$  conserve le produit mixte, comme déterminant.

• Pour  $x, y \in E_3$ , montrer :

$$\forall u \in E_3, (f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y)) \cdot u = 0$$

et déduire  $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ .

(ii)  $\implies$  (i) :

Soit  $f \neq 0$  conservant le produit vectoriel.

• Montrer que  $f$  est injective. À cet effet, raisonner par l'absurde : supposer qu'il existe  $x \in E_3 - \{0\}$  tel que  $f(x) = 0$ . Déduire que  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}x$  et que  $f$  est nulle sur  $x^\perp$ , en remarquant que tout vecteur de  $x^\perp$  est de la forme  $x \wedge y$  pour un  $y \in E_3$ .

• Soit  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  une base orthonormale directe de  $E_3$ . Noter  $I = f(i), J = f(j), K = f(k)$ . Montrer  $K = I \wedge J, \dots$  puis  $I \cdot J = 0, \dots$  puis  $I = [I, J, K]I$ , d'où  $[I, J, K] = 1$ , et enfin  $\|I\|^2 = 1, \dots$

Déduire que  $f(\mathcal{B})$  est une base orthonormale directe de  $E_3$  et conclure que  $f$  est une rotation vectorielle.

# Corrigés des exercices

## 22.1

On a :

$$\begin{aligned} v \cdot a &= ||a|| a' \cdot a + ||b|| b' \cdot a + ||c|| c' \cdot a \\ &= ||a|| (b \wedge c) \cdot a + ||b|| (c \wedge a) \cdot a + ||c|| (a \wedge b) \cdot a \\ &= ||a|| [b,c,a] + ||b|| [c,a,a] + ||c|| [a,b,a] \\ &= ||a|| [b,c,a], \end{aligned}$$

d'où :

$$\cos(\widehat{v,a}) = \frac{v \cdot a}{||v|| ||a||} = \frac{[b,c,a]}{||v||}.$$

De même :

$$\cos(\widehat{v,b}) = \frac{[c,a,b]}{||v||}, \quad \cos(\widehat{v,c}) = \frac{[a,b,c]}{||v||}.$$

Comme  $[a,b,c] = [b,c,a] = [c,a,b]$ , on conclut :

$$\cos(\widehat{v,a}) = \cos(\widehat{v,b}) = \cos(\widehat{v,c}).$$

## 22.2

Notons  $C_1, C_2, C_3$  les colonnes de  $A$ . On a :

$$A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$$

$$\iff ||C_1|| = 1, \quad ||C_2|| = 1, \quad C_1 \cdot C_2 = 0, \quad C_3 = C_1 \wedge C_2.$$

On calcule :

$$\bullet ||C_1||^2 = \frac{1}{7^2}(3^2 + (-2)^2 + 6^2) = 1, \text{ donc } ||C_1|| = 1.$$

$$\bullet ||C_2||^2 = 1 \iff \frac{1}{7^2}(2^2 + (-6)^2 + a^2) = 1$$

$$\iff a^2 + 40 = 49 \iff a \in \{-3, 3\}.$$

$$\bullet C_1 \cdot C_2 = 0 \iff 6 + 12 + 6a = 0 \iff a = -3.$$

• Supposons  $a = -3$ . On a alors :

$$\begin{aligned} C_1 \wedge C_2 &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7^2} \begin{pmatrix} 42 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On conclut que  $A$  est orthogonale droite si et seulement si :

$$a = -3, \quad b = 6, \quad c = 3, \quad d = -2.$$

## 22.3

a) • On calcule  ${}^t \Omega \Omega = I_3$ , donc  $\Omega$  est orthogonale.

• Comme, de plus,  $\det(\Omega) = 1$ ,  $f$  est une rotation.

• Le support de l'axe de  $f$  est l'ensemble des invariants par  $f$ .

Pour tout  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de  $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$\Omega X = X \iff \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y = 2z \end{cases}.$$

En notant  $I = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$ ,  $I$  est normé, et l'axe  $\overrightarrow{A}$  de  $f$  est dirigé et orienté (par exemple) par  $I$ .

• L'angle  $\theta$  de  $f$  vérifie :  $1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(\Omega) = 2$ , d'où :

$$\cos \theta = \frac{1}{2}.$$

De plus,  $\sin \theta$  est du signe de

$$[i, f(i), I] = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} > 0.$$

$$\text{On déduit : } \theta = \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Finalement,  $f$  est la rotation d'axe dirigé et orienté par  $i + j$  et d'angle  $\frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

b) • On calcule  ${}^t \Omega \Omega = I_3$ , donc  $\Omega$  est orthogonale.

• Comme, de plus,  $\det(\Omega) = -1$  et que  $\Omega$  est symétrique,  $f$  est une réflexion.

• Pour tout  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$\Omega X = X \iff \begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 4x + 16y + 4z = 0 \\ x + 4y + z = 0. \end{cases}$$

Finalement,  $f$  est la réflexion par rapport au plan d'équation par  $x + 4y + z = 0$ .

## 22.4 a) I) • $E \subset C^\infty([-1; 1], \mathbb{R})$ et $0 \in E$ .

- On a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et toutes  $f_1, f_2 \in E$  :

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$(\alpha f_1 + f_2)^{(n)}(-1) = \alpha f_1^{(n)}(-1) + f_2^{(n)}(-1) = \alpha 0 + 0 = 0,$$

et de même en 1, donc  $\alpha f_1 + f_2 \in E$ .

On conclut que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de  $C^\infty([-1; 1], \mathbb{R})$ , donc  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2) • Pour tout  $(f, g) \in E^2$ ,  $\int_{-1}^1 fg$  existe, car  $fg$  est continue sur le segment  $[-1; 1]$ .

- On a, pour tout  $(f, g) \in E^2$  :

$$(g | f) = \int_{-1}^1 gf = \int_{-1}^1 fg = (f | g),$$

donc  $(\cdot | \cdot)$  est symétrique.

- On a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et toutes  $f, g_1, g_2 \in E$  :

$$\begin{aligned} (f | \alpha g_1 + g_2) &= \int_{-1}^1 f(\alpha g_1 + g_2) = \alpha \int_{-1}^1 fg_1 + \int_{-1}^1 fg_2 \\ &= \alpha(f | g_1) + (f | g_2), \end{aligned}$$

donc  $(\cdot | \cdot)$  est linéaire par rapport à la deuxième place.

- On a :  $\forall f \in E$ ,  $(f | f) = \int_{-1}^1 f^2 \geq 0$ .

• Soit  $f \in E$ . Si  $(f | f) = 0$ , alors  $\int_{-1}^1 f^2 = 0$ , donc, puisque  $f$  est continue sur  $[-1; 1]$  et que  $f^2 \geq 0$ , on déduit, d'après un théorème du cours,  $f = 0$ .

On conclut que  $(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

- b) I) • Pour toute  $f \in E$ ,  $T(f) = f'$  existe et  $T(f) \in E$ .

- On a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et toutes  $f_1, f_2 \in E$  :

$$\begin{aligned} T(\alpha f_1 + f_2) &= (\alpha f_1 + f_2)' = \alpha f_1' + f_2' \\ &= \alpha T(f_1) + T(f_2), \end{aligned}$$

donc  $T$  est linéaire.

On conclut que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

2) Soit  $(f, g) \in E^2$ . On a, par une intégration par parties pour des applications de classe  $C^1$  sur un segment :

$$\begin{aligned} (T(f) | g) &= \int_{-1}^1 f'g = [fg]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 fg' \\ &= - \int_{-1}^1 g'f = -(f | T(g)). \end{aligned}$$

On conclut que  $T$  est un endomorphisme antisymétrique de  $E$ .

## 22.5 a) • On a, pour tout $(P, Q) \in E \times E$ :

$$\begin{aligned} \varphi(Q, P) &= \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(0)P^{(k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) = \varphi(P, Q), \end{aligned}$$

donc  $\varphi$  est symétrique.

- On a, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et tous  $P, Q, R \in E$  :

$$\begin{aligned} \varphi(P, \alpha Q + R) &= \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)(\alpha Q + R)^{(k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)(\alpha Q^{(k)}(0) + R^{(k)}(0)) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)R^{(k)}(0) \\ &= \alpha \varphi(P, Q) + \varphi(P, R), \end{aligned}$$

donc  $\varphi$  est linéaire par rapport à la deuxième place.

- On a, pour tout  $P \in E$  :  $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^n (P^{(k)}(0))^2 \geq 0$ .

- Soit  $P \in E$  tel que  $\varphi(P, P) = 0$ .

On a alors  $\underbrace{\sum_{k=0}^n (P^{(k)}(0))^2}_{\geq 0} = 0$ , donc :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, P^{(k)}(0) = 0.$$

D'après la formule de Taylor pour les polynômes, puisque  $\deg(P) \leq n$ , on a alors :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = 0.$$

On conclut que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

- b) I) Soit  $(i, j) \in \{0, \dots, n\}^2$ . On a :

$$(X^i)^{(k)} = \begin{cases} i(i-1)\dots(i-k+1)X^{i-k} & \text{si } k < i \\ i! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$$

donc :

$$(X^i)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ i! & \text{si } k = i. \end{cases}$$

Il en résulte :

$$\varphi(X^i, X^j) = \sum_{k=0}^n (X^i)^{(k)}(0)(X^j)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ i!j! & \text{si } i = j. \end{cases}$$

2) D'après I),  $(X^i)_{0 \leq i \leq n}$  est une famille orthogonale pour  $\varphi$ , formée de vecteurs tous non nuls. Comme  $\dim(E) = n+1$ , cette famille de  $n+1$  éléments est une base de  $E$ .

De plus :  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\varphi(\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^i) = (i!)^2$ .

On conclut que  $\left(\frac{\mathbf{X}^i}{i!}\right)_{0 \leq i \leq n}$  est une base orthonormale de  $(E, \varphi)$ .

## 22.6 a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. L'application

$$\varphi : \left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x) = \tan x - \frac{1}{x}$$

est dérivable (donc continue) et :

$$\forall x \in \left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[, \quad \varphi'(x) = (1 + \tan^2 x) + \frac{1}{x^2} > 0,$$

donc  $\varphi$  est strictement croissante.

$$\text{De plus : } \varphi(x) \xrightarrow[x \rightarrow (n\pi)^+]{-\frac{1}{n\pi}} 0 \text{ et } \varphi(x) \xrightarrow[x \rightarrow (n\pi + \frac{\pi}{2})^-]{} +\infty.$$

D'après le théorème de la bijection monotone, il existe donc  $x_n \in \left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$  unique tel que  $\varphi(x_n) = 0$ , c'est-à-dire tel que :  $x_n \tan x_n = 1$ .

b) I) Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $p \neq q$ . On a :

$$\begin{aligned} (f_p | f_q) &= \int_{-1}^1 f_p f_q = \int_{-1}^1 \frac{\cos(x_p t)}{\sqrt{a_p}} \frac{\cos(x_q t)}{\sqrt{a_q}} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a_p}\sqrt{a_q}} \int_{-1}^1 (\cos((x_p + x_q)t) + \cos((x_p - x_q)t)) dt. \end{aligned}$$

Comme  $x_p + x_q \neq 0$  (car  $x_p > 0$  et  $x_q > 0$ ) et  $x_p - x_q \neq 0$  (car  $x_p \neq x_q$ ), on a :

$$\begin{aligned} (f_p | f_q) &= \frac{1}{2\sqrt{a_p}\sqrt{a_q}} \left[ \frac{\sin((x_p + x_q)t)}{x_p + x_q} + \frac{\sin((x_p - x_q)t)}{x_p - x_q} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_p}\sqrt{a_q}} \left( \frac{\sin(x_p + x_q)}{x_p + x_q} - \frac{\sin(x_p - x_q)}{x_p - x_q} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_p}\sqrt{a_q}} \left( \frac{\sin x_p \cos x_q + \sin x_q \cos x_p}{x_p + x_q} - \frac{\sin x_p \cos x_q - \sin x_q \cos x_p}{x_p - x_q} \right) \\ &= \frac{\cos x_p \cos x_q}{\sqrt{a_p}\sqrt{a_q}} \left( \frac{\tan x_p + \tan x_q}{x_p + x_q} - \frac{\tan x_p - \tan x_q}{x_p - x_q} \right) \\ &= \frac{\cos x_p \cos x_q}{\sqrt{a_p}\sqrt{a_q}} \left( \frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_q} \right) \\ &= \frac{\cos x_p \cos x_q}{\sqrt{a_p}\sqrt{a_q}} \left( \frac{1}{x_p x_q} - \frac{1}{x_p x_q} \right) = 0. \end{aligned}$$

2) On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \|f_n\|^2 &= \int_{-1}^1 f_n^2 = \int_{-1}^1 \frac{\cos^2(x_n t)}{a_n} dt \\ &= \frac{1}{2a_n} \int_{-1}^1 (1 + \cos(2x_n t)) dt \\ &= \frac{1}{2a_n} \left[ t + \frac{\sin(2x_n t)}{2x_n} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{a_n} \left( 1 + \frac{\sin(2x_n)}{2x_n} \right) = \frac{1}{a_n} \left( 1 + \frac{1}{2x_n} \frac{2 \tan x_n}{1 + \tan^2 x_n} \right) \\ &= \frac{1}{a_n} \left( 1 + \frac{1}{x_n^2 + 1} \right) = \frac{1}{a_n} \frac{2 + x_n^2}{1 + x_n^2} = 1. \end{aligned}$$

On conclut que la famille  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthonormale pour le produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ .

## 22.7 • Cherchons un système d'équations de $F$ , plus simple que celui de l'énoncé :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 & | 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 & | -2 \end{cases} \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4. \end{cases} \end{aligned}$$

• Un vecteur (non nul) de  $F$  est donc, par exemple,  $V_1 = (1, -2, 1, 0)$ , obtenu en choisissant  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 0$  et en calculant alors  $x_1$  et  $x_2$ .

• Un vecteur (non nul)  $V_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $F$ , orthogonal à  $V_1$ , est caractérisé par le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

En reportant les valeurs de  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de  $x_3$  et  $x_4$ , ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \\ 6x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Choisissons  $x_3 = 4$ ,  $x_4 = -3$ , par exemple.

Un vecteur  $V_2$  de  $F$ , non nul et orthogonal à  $V_1$  est donc, par exemple :  $V_2 = (-2, 1, 4, -3)$ .

$$\bullet \text{ Notons } v_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} V_1, v_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} V_2.$$

Ainsi,  $(v_1, v_2)$  est une base orthonormale de  $F$ .

D'après le cours, le projeté orthogonal  $p(X)$  d'un vecteur  $X$  de  $\mathbb{R}^4$  sur  $F$  est donné par la formule :

$$\begin{aligned} p(X) &= (v_1 \mid X)v_1 + (v_2 \mid X)v_2 \\ &= \frac{1}{6}(V_1 \mid X)V_1 + \frac{1}{30}(V_2 \mid X)V_2. \end{aligned}$$

En notant  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , on a, sous forme de colonnes pour la lisibilité des écritures :

$$\begin{aligned} p(X) &= \frac{1}{6}(x_1 - 2x_2 + x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{30}(-2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 6x_4 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\ -8x_1 + 4x_2 + 16x_3 - 12x_4 \\ 6x_1 - 3x_2 - 12x_3 + 9x_4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 9x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 6x_4 \\ -12x_1 + 21x_2 - 6x_3 - 3x_4 \\ -3x_1 - 6x_2 + 21x_3 - 12x_4 \\ 6x_1 - 3x_2 - 12x_3 + 9x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On conclut que la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  est :

$$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

**22.8** Par hypothèse, il existe  $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$  tels que :  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .

On a, pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$  :

$$\begin{aligned} (P(\sqrt{xy}))^2 &= \left( \sum_{k=0}^n a_k (\sqrt{xy})^k \right)^2 \\ &= \left( \sum_{k=0}^n (\sqrt{a_k} \sqrt{x^k})(\sqrt{a_k} \sqrt{y^k}) \right)^2. \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy et Schwarz, dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  usuel, à  $(\sqrt{a_k} \sqrt{x^k})_{0 \leq k \leq n}$ ,  $(\sqrt{a_k} \sqrt{y^k})_{0 \leq k \leq n}$  :

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{k=0}^n (\sqrt{a_k} \sqrt{x^k})(\sqrt{a_k} \sqrt{y^k}) \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{k=0}^n (\sqrt{a_k} \sqrt{x^k})^2 \right) \left( \sum_{k=0}^n (\sqrt{a_k} \sqrt{y^k})^2 \right) \\ &= \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^n a_k y^k \right) = P(x)P(y), \end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue.

**22.9** Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$  usuel aux vecteurs  $u = (1)$  (toutes coordonnées égales à 1) et  $a = (|a_{ij}|)_{1 \leq i,j \leq n}$  ; on obtient :

$$\left( \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}| \right)^2 = (u \mid a)^2 \leq \|u\|^2 \|a\|^2 = n^2 \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2.$$

Comme  $A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ , on a :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 1$ ,

d'où :  $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 = n$ , et finalement :  $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}| \leq n^{\frac{3}{2}}$ .

**22.10** I) Soit  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ .

La première colonne et la première ligne de  $A$  sont normées, donc :

$$a_{11}^2 = 1 \text{ et } a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 = 1,$$

d'où  $a_{11} \in \{-1, 1\}$  et  $a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$ .

Ensuite, la deuxième colonne et la deuxième ligne de  $A$  sont normées, donc, compte tenu du résultat précédent :

$$a_{22}^2 = 1 \text{ et } a_{22}^2 + \dots + a_{2n}^2 = 1,$$

d'où  $a_{22} \in \{-1, 1\}$  et  $a_{23} = \dots = a_{2n} = 0$ .

De proche en proche, on obtient :  $A = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$  et  $(a_{11}, \dots, a_{nn}) \in \{-1, 1\}^n$ .

2) Réciproquement, pour tout  $(d_1, \dots, d_n) \in \{-1, 1\}^n$ , il est clair que la matrice  $A = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  est orthogonale et triangulaire supérieure, donc  $A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ .

On conclut :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R}) &= \\ &\left\{ \text{diag}(d_1, \dots, d_n); (d_1, \dots, d_n) \in \{-1, 1\}^n \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$  est un ensemble fini à  $2^n$  éléments.

**22.11** 1) On calcule la somme proposée, en développant :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \|V_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}\|^2 = \\
 & \quad \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \|\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3\|^2 \\
 = & \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \\
 & \quad (3 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 u_1 \cdot u_2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 u_1 \cdot u_3 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_3 u_2 \cdot u_3) \\
 = & 8 \times 3 + 2 \left( \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) u_1 \cdot u_2 \\
 & + 2 \left( \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \varepsilon_1 \varepsilon_3 \right) u_1 \cdot u_3 \\
 & + 2 \left( \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \right) u_2 \cdot u_3.
 \end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
 \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 &= 2 \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\
 &= 2(1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)) = 0,
 \end{aligned}$$

et de même pour les deux autres sommes.

On a donc :

$$\sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \|V_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}\|^2 = 24.$$

2) Cette dernière somme comporte huit termes.

Il existe donc  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$  tel que :

$$\|V_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}\|^2 \geq \frac{24}{8} = 3, \text{ d'où : } \|V_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}\| \geq \sqrt{3}.$$

**22.12** I) L'application  $f$  est linéaire, puisque, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tous  $x, x' \in E_3$  :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x + x') &= \lambda x + x' + a \wedge (\lambda x + x') \\
 &= \lambda(x + a \wedge x) + (x' + a \wedge x') \\
 &= \lambda f(x) + f(x').
 \end{aligned}$$

• On a, pour tout  $x \in E_3$  :

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Ker}(f) &\iff f(x) = 0 \\
 &\iff x + a \wedge x = 0 \\
 &\iff x \cdot (x + a \wedge x) = 0 \\
 &\iff x \cdot x + x \cdot (a \wedge x) = 0 \\
 &\iff \|x\|^2 + [x, a, x] = 0 \iff \|x\|^2 = 0 \\
 &\iff x = 0.
 \end{aligned}$$

Ceci montre  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ , donc l'endomorphisme  $f$  est injectif.

• Puisque  $f$  est un endomorphisme injectif et que  $E_3$  est de dimension finie, on conclut que  $f$  est bijectif, c'est-à-dire :

$$f \in \mathcal{GL}(E).$$

2) Soit  $y \in E_3$ . Notons  $x = f^{-1}(y)$  ; on a donc :  $y = f(x) = x + a \wedge x$ , d'où :

$$\begin{cases} a \cdot y = a \cdot (x + a \wedge x) = a \cdot x + a \cdot (a \wedge x) = a \cdot x \\ a \wedge y = a \wedge (x + a \wedge x) = a \wedge x + a \wedge (a \wedge x) \\ \quad = a \wedge x + (a \cdot x) a - (a \cdot a) x, \end{cases}$$

en utilisant la formule du double produit vectoriel :

$$\forall (a, b, c) \in E_3^3, \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c.$$

On déduit :

$$\begin{aligned}
 x = y - a \wedge x &= y - (a \wedge y - (a \cdot x) a + \|a\|^2 x) \\
 &= y - a \wedge y + (a \cdot x) a - \|a\|^2 x \\
 &= y - a \wedge y + (a \cdot y) a - \|a\|^2 x,
 \end{aligned}$$

puis :

$$(1 + \|a\|^2)x = y - a \wedge y + (a \cdot y) a.$$

On conclut :

$$\forall y \in E_3, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{1 + \|a\|^2}(y - a \wedge y + (a \cdot y) a).$$

**22.13** Soient  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $u = xi + yj + zk$ ,  $u' = \text{Ref}_P(u)$ ,  $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u' = x'i + y'j + z'k$ . On a alors :  $u' + u \in P$  et  $u' - u \in P^\perp$ .

Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :  $x' - x = \lambda a$ ,  $y' - y = \lambda b$ ,  $z' - z = \lambda c$  ; d'où :

$$\begin{aligned}
 0 &= a(x' + x) + b(y' + y) + c(z' + z) \\
 &= 2ax + 2by + 2cz + \lambda,
 \end{aligned}$$

donc :  $\lambda = -2(ax + by + cz)$ , puis :

$$\begin{cases} x' = x + \lambda a = (1 - 2a^2)x - 2aby - 2acz \\ y' = y + \lambda b = -2abx + (1 - 2b^2)y - 2bcz \\ z' = z + \lambda c = -2acx - 2bcy + (1 - 2c^2)z. \end{cases}$$

Finalement, la matrice cherchée est :

$$\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}.$$

## 22.14

1) • Par hypothèse, on a déjà :  $F \subset G^\perp$ .

• Soit  $f \in G^\perp$ .

Puisque  $f \in G^\perp \subset E = F + G$ , il existe  $u \in F, v \in G$  tels que :  $f = u + v$ .

On a alors :  $v = f - u, f \in G^\perp, u \in F \subset G^\perp$ .

Comme  $G^\perp$  est un sev de  $E$ , il en résulte :  $v \in G^\perp$ .

Ainsi :  $v \in G$  et  $v \in G^\perp$ , donc  $v = 0$ , puis  $f = u \in F$ .

Ceci montre :  $G^\perp \subset F$ .

On conclut :  $G^\perp = F$ .

2) On a :  $F \subset G^\perp$ , d'où, en passant aux orthogonaux :

$F^\perp \supset G^{\perp\perp}$ . Mais on sait, d'après le cours :  $G \subset G^{\perp\perp}$ , d'où :  $G \subset F^\perp$ .

Ainsi, le couple  $(G, F)$  vérifie les mêmes hypothèses que le couple  $(F, G) : G \subset F^\perp$  et  $G + F = E$ . D'après 1), appliqué à  $(G, F)$  à la place de  $(F, G)$ , on a donc :  $F^\perp = G$ .

## 22.15

a) I) Soient  $\alpha \in \mathbb{R}, x, y \in E$ . On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha x + y) &= \sum_{i=1}^n (e_i | \alpha x + y) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha (e_i | x) e_i + (e_i | y) e_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i + \sum_{i=1}^n (e_i | y) e_i \\ &= \alpha f(x) + f(y), \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire.

On conclut que  $f$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$ .

2) • (i) : Soit  $x \in \mathcal{F}^\perp$ .

On a alors :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, (e_i | x) = 0$ ,

donc :  $f(x) = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i = \sum_{i=1}^n 0 e_i = 0$ , d'où  $x \in \text{Ker}(f)$ .

Ceci montre :  $\mathcal{F}^\perp \subset \text{Ker}(f)$ .

(ii) : Soit  $x \in \text{Ker}(f)$ . On a donc  $f(x) = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i = 0$ , d'où, en faisant le produit scalaire par  $x$  :

$$\begin{aligned} 0 &= (0 | x) = \left( \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i \middle| x \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i | x) (e_i | x) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(e_i | x)^2}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Il en résulte :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, (e_i | x) = 0$ , et donc :  $x \in \mathcal{F}^\perp$ .

Ceci montre :  $\text{Ker}(f) \subset \mathcal{F}^\perp$ .

On conclut :  $\text{Ker}(f) = \mathcal{F}^\perp$ .

• (i) : On a :  $\forall x \in E, f(x) = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ ,

donc :  $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(\mathcal{F})$ .

(ii) : D'après le théorème du rang et le résultat précédent :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(f)) &= \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = n - \dim(\mathcal{F}^\perp) \\ &= n - \dim((\text{Vect}(\mathcal{F}))^\perp) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})). \end{aligned}$$

Comme  $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(\mathcal{F})$  et que ces deux sev ont la même dimension, on conclut :  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(\mathcal{F})$ .

3) Puisque  $f$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$  de dimension finie, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ bijective} &\iff f \text{ surjective} \iff \text{Im}(f) = E \\ &\iff \text{Vect}(\mathcal{F}) = E. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $\mathcal{F}$  a  $n$  éléments et que  $\dim(E) = n$ ,  $\mathcal{F}$  engendre  $E$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ .

Finalement,  $f$  est bijective si et seulement si  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ .

b) Considérons l'application  $f$  associée à  $\mathcal{B}$ . Soit  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ . D'après a) 3), puisque  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ ,  $f$  est bijective, donc :  $\exists !v \in E, f(v) = \sum_{i=1}^n c_i e_i$  (1).

Et, puisque  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  :

$$\begin{aligned} (1) &\iff \sum_{i=1}^n (e_i | v) e_i = \sum_{i=1}^n c_i e_i \\ &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, (e_i | v) = c_i. \end{aligned}$$

On conclut :

$$\forall (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \exists !v \in E, \forall i \in \{1, \dots, n\}, (e_i | v) = c_i.$$

## 22.16

I) On a, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | e_j)^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i, i \neq j} (e_i | e_j)^2,$$

donc :

$$\sum_{i, i \neq j} (e_i | e_j)^2 = \|e_j\|^2 - \|e_j\|^4 = \|e_j\|^2 (1 - \|e_j\|^2) \leq 0.$$

Il en résulte :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, (i \neq j \implies (e_i | e_j) = 0),$$

ce qui montre que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille orthogonale.

De plus, on a alors, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\|e_j\|^2 (1 - \|e_j\|^2) = 0.$$

Comme  $e_j \neq 0$ , car  $\|e_j\| \geq 1$ , on déduit  $\|e_j\| = 1$ .

Ainsi,  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille orthonormale de  $E$ .

2) Soit  $x \in E$ . On a :

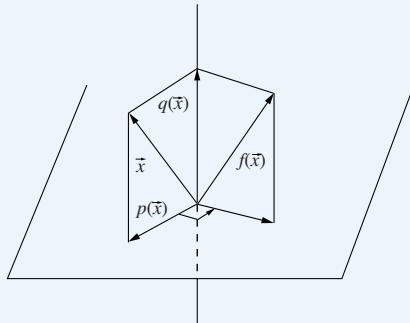
$$\begin{aligned} & \left\| x - \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i \right\|^2 \\ &= \left( x - \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i \mid x - \sum_{j=1}^n (e_j | x) e_j \right) \\ &= (x | x) - \sum_{i=1}^n (e_i | x)(e_i | x) \\ &\quad - \sum_{j=1}^n (e_j | x)(x | e_j) + \sum_{i,j} (e_i | x)(e_j | x)(e_i | e_j) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2 \\ &\quad - \sum_{j=1}^n (e_j | x)^2 + \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2 = 0, \end{aligned}$$

d'où  $x - \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i = 0$ , et donc  $x = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i$ .

Ceci montre que  $(e_1, \dots, e_n)$  engendre  $E$ .

Finalement,  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $E$ .

## 22.17



Soit  $\vec{x} \in E_3$ . Notons  $p(\vec{x})$  le projeté orthogonal de  $\vec{x}$  sur  $\vec{u}^\perp$ , et  $q(\vec{x})$  le projeté orthogonal de  $\vec{x}$  sur  $\mathbb{R}\vec{u}$ . D'après le cours, puisque  $\|\vec{u}\| = 1$ , on a :  $q(\vec{x}) = (\vec{u} | \vec{x}) \vec{u}$ , puis, par différence :  $p(\vec{x}) = \vec{x} - q(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{u} | \vec{x}) \vec{u}$ . On a alors, en notant  $r(\vec{x}) = f(p(\vec{x}))$  :

$$f(\vec{x}) = q(\vec{x}) + r(\vec{x}).$$

Comme il s'agit d'une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , on a :

$$\begin{aligned} r(\vec{x}) &= \vec{u} \wedge p(\vec{x}) = \vec{u} \wedge (\vec{x} - (\vec{u} | \vec{x}) \vec{u}) \\ &= \vec{u} \wedge \vec{x}. \end{aligned}$$

On obtient (cf. aussi l'exercice 22.18, plus général) :

$$f(\vec{x}) = (\vec{u} | \vec{x}) \vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{x}.$$

En passant aux coordonnées dans la base orthonormale directe  $\mathcal{B}$ , on a, en notant  $(x, y, z)$  les coordonnées de  $\vec{x}$  dans  $\mathcal{B}$ , et  $(X, Y, Z)$  celles de  $f(\vec{x})$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &= \left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ax + by + cz)a + bz - cy \\ (ax + by + cz)b + cx - az \\ (ax + by + cz)c + ay - bx \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On conclut que la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  est :

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}.$$

**22.18** Puisque  $u$  est normé, il existe  $v, w \in E_3$  tels que  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  soit une b.o.n.d. de  $E_3$ .

$$\text{On a : } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

donc :  $f(v) = \cos \theta v + \sin \theta w, f(w) = -\sin \theta v + \cos \theta w$ .

Soient  $x \in E_3$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$ .

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha f(u) + \beta f(v) + \gamma f(w) \\ &= \alpha u + \beta(\cos \theta v + \sin \theta w) + \gamma(-\sin \theta v + \cos \theta w) \\ &= \alpha u + \cos \theta(\beta v + \gamma w) \sin \theta(-\gamma v + \beta w). \end{aligned}$$

De plus :  $\alpha = x \cdot u, \beta v + \gamma w = x - \alpha u = x - (x \cdot u)u$ ,

$$u \wedge x = u \wedge (\alpha u + \beta v + \gamma w) = \beta w - \gamma v.$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \cdot u)u + \cos \theta(x - (x \cdot u)u) + \sin \theta u \wedge x \\ &= (1 - \cos \theta)(u \cdot x)u + \cos \theta x + \sin \theta u \wedge x. \end{aligned}$$

**22.19** a) D'après le cours, puisque  $R \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$ ,  $R$  est une matrice de rotation. Il existe donc  $P \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$  telle que

$$R = PR_1P^{-1}, \text{ où } R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

De plus, comme  $R \neq I_3$ , on a :  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ .

On a alors  $I_3 - R = I_3 - PR_1P^{-1} = P(I_3 - R_1)P^{-1}$  et :

$$I_3 - R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{pmatrix}.$$

Comme :

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - 1 & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{vmatrix} = (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta \\ = 2 - 2\cos \theta = 2(1 - \cos \theta) \neq 0,$$

on a :  $\text{rg}(\mathbf{I}_3 - R_1) = 2$ , puis, par matrices carrées semblables :

$$\text{rg}(\mathbf{I}_3 - R) = 2.$$

b) Soient  $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$  telles que  $\Omega_1 \neq \Omega_2$ .

On a :  $\Omega_1 - \Omega_2 = \Omega_1(\mathbf{I}_3 - \Omega_1^{-1}\Omega_2)$ ,

donc :  $\text{rg}(\Omega_1 - \Omega_2) = \text{rg}(\mathbf{I}_3 - \Omega_1^{-1}\Omega_2)$ .

Puisque  $\mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$  est un groupe pour la multiplication,

on a  $\Omega_1^{-1}\Omega_2 \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$

De plus, comme  $\Omega_1 \neq \Omega_2$ , on a  $\Omega_1^{-1}\Omega_2 \neq \mathbf{I}_3$ .

D'après a), on a alors :  $\text{rg}(\mathbf{I}_3 - \Omega_1^{-1}\Omega_2) = 2$ ,

et on conclut :  $\text{rg}(\Omega_1 - \Omega_2) = 2$ .

**22.20** 1) En remplaçant  $y$  par  $0$  :  $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ .

2) Puis, pour tout  $(x, y)$  de  $E^2$  :

$$\begin{aligned} < f(x), f(y) > \\ &= -\frac{1}{2} (\|f(x) - f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= -\frac{1}{2} (\|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = < x, y >. \end{aligned}$$

3) On a, pour tout  $(\lambda, x, y)$  de  $\mathbb{R} \times E \times E$  :

$$\begin{aligned} &\|f(\lambda x + y) - (\lambda f(x) + f(y))\|^2 \\ &= \|f(\lambda x + y)\|^2 + \lambda^2 \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 \\ &\quad - 2\lambda < f(\lambda x + y), f(x) > - 2 < f(\lambda x + y), f(y) > \\ &\quad + 2\lambda < f(x), f(y) > \\ &= \|\lambda x + y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\lambda < \lambda x + y, x > \\ &\quad - 2 < \lambda x + y, y > + 2\lambda < x, y > \\ &= \|(\lambda x + y) - \lambda x - y\|^2 = 0, \end{aligned}$$

d'où :  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ , et donc  $f$  est linéaire.

**22.21** 1) Supposons :  $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$ .

Soit  $x \in E$ . Comme  $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$  et  $p(x) \in \text{Im}(p)$ , on a, par l'hypothèse :  $(x - p(x) \mid p(x)) = 0$ , et donc, d'après le théorème de Pythagore :  $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$ , d'où :  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ .

2) Réciproquement, supposons :  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

Soient  $x \in \text{Ker}(p)$ ,  $y \in \text{Im}(p)$  ; donc  $p(x) = 0$  et  $p(y) = y$ .

On a, pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{R}$  :  $\|p(\lambda x + y)\| \leq \|\lambda x + y\|$ ,

c'est-à-dire :  $\lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(x \mid y) \geq 0$ .

Comme le trinôme réel  $\lambda \mapsto \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(x \mid y)$  est à valeurs  $\geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ , son discriminant est  $\leq 0$ , d'où  $(x \mid y)^2 \leq 0$ , et donc  $(x \mid y) = 0$ .

Ainsi :  $\forall x \in \text{Ker}(p), \forall y \in \text{Im}(p), (x \mid y) = 0$ .

On conclut :  $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$ .

**22.22** 1) Soit  $x \in E$ . En appliquant l'inégalité d'hypothèse à  $p(x)$  à la place de  $x$ , on a :

$$\|p(p(x))\|^2 + \|q(p(x))\|^2 \leq \|p(x)\|^2.$$

Comme  $p \circ p = p$ , il s'ensuit  $\|q(p(x))\|^2 = 0$ ,

puis  $(q \circ p)(x) = 0$ .

Ceci montre :  $q \circ p = 0$ .

Comme  $p$  et  $q$  ont des rôles symétriques, on a aussi :  $p \circ q = 0$ .

2) • On déduit :

$$(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p^2 + q^2 = p + q,$$

donc  $p + q$  est un projecteur.

• Soit  $x \in E$ . Comme  $q \circ p = 0$ ,

on a  $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q) = (\text{Im}(q))^{\perp}$ .

Comme  $p(x) \in \text{Im}(p)$  et  $q(x) \in \text{Im}(q)$ , il en résulte

$p(x) \perp q(x)$ , c'est-à-dire :  $(p(x) \mid q(x)) = 0$ .

• On a alors, pour tout  $x \in E$  :

$$\begin{aligned} \|(p + q)(x)\|^2 &= \|p(x)\|^2 + 2(p(x) \mid q(x)) + \|q(x)\|^2 \\ &= \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2 \leq \|x\|^2. \end{aligned}$$

D'après l'exercice 22.21, on conclut que  $p + q$  est un projecteur orthogonal.

**22.23** a) Notons  $X = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $p = \dim(X)$ , et soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une b.o.n. de  $X$ .

Chaque  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) se décompose linéairement sur  $(e_1, \dots, e_p)$  ;

il existe donc  $M = (\xi_{ki})_{1 \leq k \leq p, 1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i = \sum_{k=1}^p \xi_{ki} e_k.$$

On a alors, pour tout  $(i, j)$  de  $\{1, \dots, n\}^2$  :

$$(x_i \mid x_j) = \sum_{k=1}^p \xi_{ki} \xi_{kj}.$$

On reconnaît ici le terme général du produit de deux matrices ; en notant  $G$  pour  $G(x_1, \dots, x_n)$ , on obtient :  $G = {}^t M M$ .

Montrons enfin :  $\text{rg}({}^t M M) = \text{rg}(M)$ .

- On a :  $\text{Im}({}^t MM) \subset \text{Im}({}^t M)$ ,

donc :  $\text{rg}(G) \leq \text{rg}({}^t M) = \text{rg}(M)$ .

- Soit  $U \in \text{Ker}(G)$ , c'est-à-dire tel que  $GU = 0$ . On a alors :

$$\|MU\|_2^2 = {}^t(MU)(MU) = {}^tU {}^tMMU = {}^tUGU = 0,$$

donc  $MU = 0$ ,  $U \in \text{Ker}(M)$ .

Ainsi,  $\text{Ker}(G) \subset \text{Ker}(M)$ , d'où, par le théorème du rang :

$$\text{rg}(G) = n - \dim(\text{Ker}(G)) \geq n - \dim(\text{Ker}(M)) = \text{rg}(M).$$

Finalement :  $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(M) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ .

b) 1) En utilisant a) :

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \text{ lié} &\iff \text{rg}(x_1, \dots, x_n) < n \\ &\iff \text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) < n \\ &\iff \det(G(x_1, \dots, x_n)) = 0 \\ &\iff \gamma(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{aligned}$$

- 2) • Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre, alors, avec les notations de a),  $p = n$ ,  $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ , donc :

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, \dots, x_n) &= \det({}^t MM) = \det({}^t M)\det(M) \\ &= (\det(M))^2 > 0. \end{aligned}$$

- Réciproquement, si  $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$ , alors, d'après 1),  $(x_1, \dots, x_n)$  n'est pas lié, c'est-à-dire est libre.

c) Notons  $y = x - p_X(x)$ . Puisque  $y \in X^\perp$ , on a :

$$\begin{aligned} \gamma(x, x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \left| \begin{array}{cccc} \|y\|^2 + \|p_X(x)\|^2 & (p_X(x)|x_1) & \dots & (p_X(x)|x_n) \\ (x_1|p_X(x)) & (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n|p_X(x)) & (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) \end{array} \right| \\ &= \|y\|^2 \gamma(x_1, \dots, x_n) + \gamma(p_X(x), x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Comme  $p_X(x) \in X$ ,  $(p_X(x), x_1, \dots, x_n)$  est lié, donc (cf. a)) :

$$\gamma(p_X(x), x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Ainsi,  $\gamma(x, x_1, \dots, x_n) = d^2 \gamma(x_1, \dots, x_n)$ , et finalement :

$$d = \left( \frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- 22.24 On a :

$$\begin{aligned} \|{}^t AC - C {}^t B\|^2 &= \text{tr}({}^t({}^t AC - C {}^t B)({}^t AC - C {}^t B)) \\ &= \text{tr}(({}^t CA - B {}^t C)({}^t AC - C {}^t B)) \\ &= \text{tr}({}^t CA {}^t AC - {}^t CAC {}^t B - B {}^t C {}^t AC + B {}^t CC {}^t B) \\ &= \text{tr}({}^t C(A {}^t A)C) - \text{tr}({}^t C(AC) {}^t B) \\ &\quad - \text{tr}(B({}^t C {}^t AC)) + \text{tr}(B({}^t CC {}^t B)) \\ &= \text{tr}({}^t C {}^t AAC) - \text{tr}({}^t CCB {}^t B) \\ &\quad - \text{tr}({}^t C {}^t A(CB)) + \text{tr}({}^t CC({}^t BB)) \\ &= \text{tr}({}^t C {}^t AAC) - \text{tr}({}^t CCB {}^t B) \\ &\quad - \text{tr}({}^t C {}^t AAC) + \text{tr}({}^t CCB {}^t B) = 0. \end{aligned}$$

On conclut  ${}^t AC - C {}^t B = 0$ , c'est-à-dire  ${}^t AC = C {}^t B$ .

- 22.25 On a :

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i,j} a_i b_j = \underbrace{\sum_{i,j; i \neq j} a_i b_j}_{=0} + \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

d'où, puisque les  $a_i$  sont tous  $> 0$  :

$$\sum_{j=1}^n b_j = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n a_i \right).$$

On déduit :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j; i \neq j} b_i b_j &= \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \right)^2 - \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \right) / \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \\ &\leq \left( \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \right) / \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2. \end{aligned}$$

Mais, d'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$  usuel :

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

On conclut :  $\sum_{i,j; i \neq j} b_i b_j \leq 0$ .

- 22.26 1) Puisque  $(r,s) \in (\mathcal{O}(E_3))^2$  et que  $\mathcal{O}(E_3)$  est un groupe pour la composition, on a :  $\rho = s \circ r \circ s \in \mathcal{O}(E_3)$ . De plus :

$$\begin{aligned} \det(\rho) &= \det(s \circ r \circ s) = \det(s) \det(r) \det(s) \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1. \end{aligned}$$

On déduit  $\rho \in \mathcal{SO}(E_3)$ , donc  $\rho$  est une rotation.

2) Notons  $\overrightarrow{\Delta}$  l'axe de la rotation  $r$ ,  $\overrightarrow{u}$  un vecteur unitaire dirigeant et orientant  $\overrightarrow{\Delta}$ ,  $\theta$  l'angle de  $r$ ,  $\overrightarrow{P}$  le plan vectoriel le la réflexion  $s$ .

• On a :

$$\begin{aligned}\rho(s(\overrightarrow{u})) &= (s \circ r \circ s)(s(\overrightarrow{u})) = (s \circ r)(\overrightarrow{u}) \\ &= s(r(\overrightarrow{u})) = s(\overrightarrow{u}).\end{aligned}$$

Ceci montre que  $s(\overrightarrow{u})$  dirige et oriente l'axe de la rotation  $\rho$ .

• Considérons le plan vectoriel  $\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{u}^\perp$ , orienté par le vecteur normal unitaire  $\overrightarrow{u}$ , et le plan vectoriel  $R = (s(\overrightarrow{u}))^\perp$ , orienté par le vecteur normal unitaire  $s(\overrightarrow{u})$ .

Soit  $\overrightarrow{w} \in R$ . On a, puisque  $s$  est une réflexion :

$$s(\overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \cdot s(\overrightarrow{u}) = 0, \text{ donc : } s(\overrightarrow{w}) \in Q.$$

De plus, modulo  $2\pi$  :

$$\begin{aligned}\Re(\overrightarrow{w}, \rho(\overrightarrow{w})) &= -\Re(s(\overrightarrow{w}), (\rho(\overrightarrow{w}))) \\ &= -\Re(s(\overrightarrow{w}), r \circ s(\overrightarrow{w})) = -\Re(s(\overrightarrow{w}), r(s(\overrightarrow{w}))) = -\theta,\end{aligned}$$

car  $s(\overrightarrow{w}) \in Q$ .

On conclut que  $\rho$  est la rotation d'axe dirigé et orienté par  $s(\overrightarrow{u})$  et d'angle  $-\theta$ , où  $\overrightarrow{u}$  est un vecteur dirigeant et orientant l'axe de  $r$  et  $\theta$  est l'angle de  $r$ .

## 22.27 (i) $\implies$ (ii) :

Supposons que  $f$  est une rotation de  $E_3$ . Il est clair que  $f \neq 0$ .

• Par définition, puisque  $f \in \mathcal{O}(E_3)$ ,  $f$  conserve le produit scalaire.

• On a  $\det(f) = 1$ , donc, pour tout  $(x, y, z) \in E_3^3$  :

$$[f(x), f(y), f(z)] = \det(f) [x, y, z] = [x, y, z].$$

Ainsi,  $f$  conserve le produit mixte.

• Soit  $(x, y) \in E_3^2$ .

Soit  $u \in E_3$ . Comme  $f$  est une rotation,  $f$  est bijective, donc il existe  $z \in E_3$  tel que  $u = f(z)$ . On a :

$$\begin{aligned}&(f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y)) \cdot u \\ &= (f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y)) \cdot f(z) \\ &\quad = f(x \wedge y) \cdot f(z) - (f(x) \wedge f(y)) \cdot f(z) \\ &= f(x \wedge y) \cdot f(z) - [f(x), f(y), f(z)] \\ &= (x \wedge y) \cdot z - [x, y, z] = 0.\end{aligned}$$

Ceci montre que le vecteur fixé  $f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y)$  est orthogonal à tout vecteur de  $E_3$ , donc est nul.

On conclut :

$$\forall (x, y) \in E_3^2, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

(ii)  $\implies$  (i) :

Supposons  $f \neq 0$  et :

$$\forall (x, y) \in E_3^2, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

• Montrons que  $f$  est injective.

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe  $x \in E_3 - \{0\}$  tel que  $f(x) = 0$ .

On a alors :

$$\forall y \in E_3, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = 0 \wedge y = 0.$$

Comme, pour tout  $u \in x^\perp$ , il existe  $y \in E_3$  tel que  $u = x \wedge y$ , on a alors :  $f(u) = f(x \wedge y) = 0$ .

Ainsi,  $f$  est nulle sur la droite vectorielle  $\mathbb{R}u$  et sur le plan vectoriel  $u^\perp$ . Comme  $E_3 = \mathbb{R}u \oplus u^\perp$  et que  $f$  est linéaire, il en résulte  $f = 0$ , contradiction.

Ceci montre  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ , et on conclut que  $f$  est injective.

2) Soit  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  une base orthonormale directe de  $E_3$  (il en existe au moins une).

Notons  $I = f(i)$ ,  $J = f(j)$ ,  $K = f(k)$ .

On va montrer que  $(I, J, K)$  est une base orthonormale de  $E_3$ .

• On a :  $K = f(k) = f(i \wedge j) = f(i) \wedge f(j) = I \wedge J$ , et de même :  $I = J \wedge K$ ,  $J = K \wedge I$ .

• On déduit :  $I \cdot J = I \cdot (K \wedge I) = [I, K, I] = 0$ , et de même :  $J \cdot K = 0$ ,  $K \cdot I = 0$ .

Ainsi,  $(I, J, K)$  est une famille orthogonale.

• On a, en utilisant la formule du double produit vectoriel :

$$\begin{aligned}I = J \wedge K &= (K \wedge I) \wedge (I \wedge J) \\ &= ((K \wedge I) \cdot J) I - ((K \wedge I) \cdot I) J \\ &= [K, I, J] I - [K, I, I] J = [I, J, K] I,\end{aligned}$$

d'où, puisque  $I \neq 0$  :  $[I, J, K] = 1$ .

• Enfin :  $\|I\|^2 = I \cdot I = I \cdot (J \wedge K) = [I, J, K] = 1$ ,

et de même :  $\|J\|^2 = 1$ ,  $\|K\|^2 = 1$ .

On déduit que  $(I, J, K)$  est une base orthonormale directe de  $E_3$ .

Ainsi,  $f$  envoie une base orthonormale directe  $(i, j, k)$  en une base orthonormale directe  $(I, J, K)$ , donc, d'après le cours,  $f \in \mathcal{SO}(E_3)$ , c'est-à-dire que  $f$  est une rotation (ou l'identité).

## Plan

Les méthodes à retenir	353
Énoncés des exercices	356
Du mal à démarrer ?	359
Corrigés	361

## Thèmes abordés dans les exercices

- Manipulation de barycentres, de parties convexes
- Configuration de points alignés, de droites concourantes
- Calculs de distances, d'angles, de projetés orthogonaux, de bissectrices
- Calculs dans la géométrie du triangle
- Études de coniques, en particulier questions portant sur les tangentes
- Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Résolution de questions élémentaires en géométrie plane, portant sur les points et les droites
- Définition du barycentre d'une famille finie de points pondérés, associativité de la notion de barycentre
- Définition de la convexité
- Interprétation géométrique des nombres complexes, en particulier en liaison avec les rotations et les similitudes directes
- Définitions et propriétés des coniques.

## Les méthodes à retenir

On abrège représentation paramétrique en RP, équation cartésienne en EC.

$\mathcal{A}_2$  désigne le plan affine.

$\mathcal{E}_2$  désigne le plan affine euclidien orienté.

La notation  $[\mathcal{E}_2, \mathcal{R}]$  par exemple, signifie que l'étude se situe dans  $\mathcal{E}_2$ , muni d'un repère orthonormé (direct)  $\mathcal{R} = (O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

**De manière générale, pour étudier une question de géométrie plane, dans le plan affine  $\mathcal{A}_2$  ou dans le plan affine euclidien orienté  $\mathcal{E}_2$**

- Si l'énoncé ne fait pas intervenir un repère, on pourra étudier la question :

\* ou bien sans faire intervenir de repère, de façon synthétique

→ Exercices 23.2, 23.5, 23.7, 23.13, 23.15

\* ou bien en faisant intervenir un repère adapté à la question (repère affine pour  $\mathcal{A}_2$ , repère orthonormé direct pour  $\mathcal{E}_2$ )

→ Exercices 23.4, 23.6, 23.8, 23.12, 23.14, 23.16.

- Si possible, faire un schéma illustrant la question.

Appliquer les formules du cours :

- RP de la droite passant par le point  $A(a,b)$  et dirigée par le vecteur (non nul)  $\vec{u}(u,v)$  :

$$\begin{cases} x = a + \lambda u \\ y = b + \lambda v \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- EC de la droite passant par le point  $M(x_0,y_0)$  et dirigée par le vecteur (non nul)  $\vec{u}(u,v)$  :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u \\ y - y_0 & v \end{vmatrix} = 0$$

- EC de la droite passant par les deux points  $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$  :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

- EC de la droite passant par les points  $A(a,0)$  et  $B(0,b)$  situés sur les axes de coordonnées ( $ab \neq 0$ ) :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

- EC de la droite passant par l'origine  $O(0,0)$  et le point  $A(\alpha,\beta)$  (autre que  $O$ ) :

$$\beta x - \alpha y = 0$$

- Un vecteur directeur de la droite d'EC  $ax + by + c = 0$  est  $\vec{u}(b,-a)$

- Deux droites  $D \mid ax + by + c = 0$ ,  $D' \mid a'x + b'y + c' = 0$  sont parallèles si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

- Trois points  $M_i(x_i,y_i)$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

→ Exercices 23.4, 23.6.

**Pour montrer que trois droites  $D_1, D_2, D_3$  (deux à deux distinctes) de  $\mathcal{A}_2$  sont concourantes ou parallèles**

- Trouver un point situé sur ces trois droites, ou bien montrer que ces trois droites sont toutes parallèles entre elles
- Si  $D_i$  est donnée par une EC  $a_i x + b_i y + c_i = 0, i \in \{1, 2, 3\}$ , montrer :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

→ Exercices 23.4, 23.14.

**Pour manipuler le barycentre  $G$  d'une famille finie  $(A_i, \alpha_i), i \in \{1, \dots, n\}$**

Utiliser :

- la définition du barycentre :  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ ,

ou, pour tout point  $M \in \mathcal{A}_2$  :  $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

→ Exercices 23.5, 23.7

- l'associativité de la notion de barycentre

→ Exercices 23.5, 23.7.

**Pour étudier une hyperbole  $H$  dans  $\mathcal{A}_2$  (et non dans  $\mathcal{E}_2$ )**

Utiliser un repère affine dans lequel  $H$  admet une EC du type  $xy = a^2, a > 0$  fixé.

→ Exercice 23.8.

**Pour former une EC de la tangente  $T(t_0)$  en un point  $M(t_0)$  d'une conique  $C$  dont on connaît une RP  $t \mapsto M(t)$**

La droite  $T(t_0)$  passe par  $M(t_0)$  et est dirigée par  $\frac{dM}{dt}(t_0)$

→ Exercices 23.8, 23.12, 23.16, 23.17.

**Pour résoudre les questions élémentaires sur points et droites dans le plan affine euclidien orienté  $\mathcal{E}_2$  rapporté à un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$**

Appliquer les formules du cours :

- Distance de deux points  $M_1(x_1, y_1)$  :

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

→ Exercices 23.1, 23.10

- Distance du point  $M_0(x_0, y_0)$  à la droite  $D \mid ax + by + c = 0$  :

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

→ Exercice 23.1

- Angle  $\alpha$  (modulo  $2\pi$ ) de deux vecteurs (non nuls)  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{||\vec{v}_1|| ||\vec{v}_2||}$$

et  $\sin \alpha$  est du signe de  $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

→ Exercice 23.1.

**Pour déterminer le projeté orthogonal  $H$  d'un point  $M_0$  sur une droite  $D$**

Caractériser  $H$  par :  $H \in D$  et  $\overrightarrow{M_0H} \perp D$ .

→ Exercice 23.1.

**Pour calculer la distance de deux points (sans repère explicite)**

On a :  $M_1M_2^2 = ||\overrightarrow{M_1M_2}||^2 = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$  et on peut essayer d'utiliser les propriétés du produit scalaire.

→ Exercice 23.2.

**Pour relier entre elles les longueurs des côtés d'un triangle rectangle  $ABC$ , rectangle en  $A$**

- Utiliser le théorème de Pythagore :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- Faire intervenir les angles  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{ACB}$  par leurs sinus ou leur cosinus, par exemple :  $AB = AC \cos \widehat{ABC}$ .

→ Exercice 23.2.

**Pour obtenir des EC des deux bissectrices  $\Delta, \Delta'$  de deux droites données  $D_1, D_2$  de  $\mathcal{E}_2$**

Se rappeler que  $\Delta \cup \Delta'$  est l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}_2$  équidistants de  $D_1$  et  $D_2$ .

→ Exercice 23.3.

**Pour étudier une configuration plane faisant intervenir des rotations ou des similitudes directes**

Essayer d'utiliser les nombres complexes

→ Exercice 23.9.

**Pour étudier les coniques de  $\mathcal{E}_2$**

On se référera, suivant le contexte, à la définition monofocale, à la définition bifocale pour les coniques à centre, à une représentation paramétrique, à une équation cartésienne, à l'équation polaire si  $O$  est un foyer. Lorsqu'une seule conique intervient, souvent on pourra choisir un repère orthonormé direct de  $\mathcal{E}_2$  de façon que, dans ce repère, la conique admette une RP ou une EC très simple.

→ Exercices 23.12, 23.16, 23.17, 23.18.

## Énoncés des exercices

### 23.1

**Exemples de calculs de coordonnées de points, d'équations de droites, de distances, d'angles**

[ $\mathcal{E}_2, \mathcal{R}$ ] On considère les trois droites

$$D_1 \mid y = 1 - x, \quad D_2 \mid y = 2x + 2, \quad D_3 \mid y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

a) Calculer les coordonnées des points d'intersection respectifs  $A, B, C$  de  $D_1$  et  $D_3$ ,  $D_1$  et  $D_2$ ,  $D_2$  et  $D_3$ .

b) Calculer  $BC$ .

c) Calculer l'angle  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ .

*d)* Former une équation cartésienne de la droite  $\Delta$  passant par  $C$  et orthogonale à  $D_1$ , calculer les coordonnées du point d'intersection  $E$  de  $\Delta$  et de la droite  $x'x$  des abscisses, puis calculer les coordonnées du projeté orthogonal  $F$  de  $E$  sur  $D_2$ .

*e)* Calculer la distance de  $F$  à  $D_1$ .

## 23.2

### Formule de Héron, donnant l'aire d'un triangle en fonction des longueurs des côtés

[ $\mathcal{E}_2$ ] Soient  $ABC$  un triangle,  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

*a)* Montrer :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .

*b)* En déduire  $\sin A$  en fonction de  $a, b, c$ .

*c)* Établir :  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .

*d)* Montrer la formule de Héron, donnant l'aire  $S$  de  $ABC$  :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

## 23.3

### Former les équations cartésiennes des bissectrices de deux droites

[ $\mathcal{E}_2, \mathcal{R}$ ] Former les équations cartésiennes (dans le plan euclidien  $\mathcal{E}_2$  rapporté à un repère orthonormé) des bissectrices des deux droites

$$D_1 \mid 3x + 4y + 3 = 0, \quad D_2 \mid 12x - 5y + 4 = 0$$

## 23.4

### Théorème de Ménélaüs, théorème de Céva

[ $\mathcal{A}_2$ ] Soient  $ABC$  un triangle,  $A' \in (BC)$ ,  $B' \in (CA)$ ,  $C' \in (AB)$ , distincts des sommets.

*a) Théorème de Ménélaüs*

Montrer que  $A', B', C'$  sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{CB}} = 1.$$

*b) Théorème de Céva*

Montrer que  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{CB}} = -1.$$

## 23.5

### Barycentres de sous-familles

[ $\mathcal{A}_2$ ] Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(A_1, \dots, A_n) \in E^n$ ,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ ,

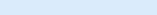
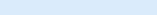
$\{I, J\}$  une partition de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$ ,  $G_1 = \text{bary} \begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{i \in I}$ ,

$G_2 = \text{bary} \begin{bmatrix} A_j \\ \alpha_j \end{bmatrix}_{j \in J}$ . Montrer que, si  $G_1 \neq G_2$ , la direction de la droite  $(G_1 G_2)$  ne dépend pas du choix de  $\{I, J\}$ .

## 23.6

### Alignement de points

[ $\mathcal{A}_2$ ] Soit  $ABC$  un triangle. Deux droites  $\Delta, \Delta'$ , parallèles à  $(BC)$ , coupent  $(AB)$  et  $(AC)$  en  $D$  et  $E$ ,  $D'$  et  $E'$  respectivement. Les droites  $(CD)$  et  $(BE)$  se coupent en un point  $M$ . Les droites  $(CD')$  et  $(BE')$  se coupent en un point  $M'$ . Montrer que les trois points  $A, M, M'$  sont alignés.

**23.7****Ensemble convexe construit à partir de deux ensembles convexes**

[A<sub>2</sub>] Soient  $C_1, C_2$  deux parties convexes de  $\mathcal{A}_2$ . On note  $C$  l'ensemble des milieux des segments  $[M_1 M_2]$  lorsque  $M_1$  décrit  $C_1$  et  $M_2$  décrit  $C_2$ . Démontrer que  $C$  est convexe.

**23.8****Tangentes à une hyperbole**

[A<sub>2</sub>] Soient  $H$  une hyperbole,  $D$  une asymptote de  $H$ ,  $P, Q \in H$  tels que  $P \neq Q$ . La tangente en  $P$  (resp.  $Q$ ) à  $H$  coupe  $D$  en un point noté  $R$  (resp.  $S$ ). Montrer que la droite  $(PQ)$  passe par le milieu  $I$  de  $(R, S)$ .

**23.9****Utilisation des nombres complexes pour l'étude d'une configuration plane faisant intervenir des carrés**

[E<sub>2</sub>] Soit  $ABC$  un triangle de  $\mathcal{E}_2$ . On construit le carré indirect  $ABDE$  et le carré direct  $ACFG$ . On note  $M$  le milieu de  $(B, C)$ . Montrer :  $(AM) \perp (EG)$ .

**23.10****Longueur minimale d'un segment passant par un point donné et s'appuyant sur les axes de coordonnées**

[E<sub>2</sub>, R] Soient  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  et  $A(a, b)$ . Trouver la longueur minimale d'un segment de droite passant par  $A$  et s'appuyant sur les deux demi-droites  $Ox, Oy$ .

**23.11****Caractérisation des hyperboles équilatères**

[E<sub>2</sub>, R] Soient  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $H$  l'hyperbole d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $F(c, 0)$  un foyer de  $H$ ,  $M_1, M_2$  les deux points de  $H$  d'abscisses égales à  $c$ . Montrer que  $H$  est équilatère si et seulement si :  $M_1 M_2 = \sqrt{2} c$ .

**23.12****Tangente à une ellipse**

[E<sub>2</sub>] Soient  $E$  une ellipse,  $F, F'$  les foyers de  $E$ ,  $A, A'$  les sommets principaux de  $E$ ,  $T$  (resp.  $T'$ ) la tangente en  $A$  (resp.  $A'$ ) à  $E$ . Un point  $M$  décrit  $E$ . La tangente en  $M$  à  $E$  coupe  $T$  (resp.  $T'$ ) en un point  $P$  (resp.  $P'$ ). Montrer que le cercle de diamètre  $[PP']$  passe par  $F$  et  $F'$ .

**23.13****Existence d'un point fixe pour un groupe fini d'applications affines**

[A<sub>2</sub>] a) Soit  $G$  un groupe fini d'applications affines de  $E$  dans  $E$ .

Montrer qu'il existe  $A \in E$  tel que :  $\forall g \in G, g(A) = A$ .

b) Soit  $f \in \text{Aff}(E, E)$  telle qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^n = \text{Id}_E$ .

Montrer :  $\exists A \in E, f(A) = A$ .

**23.14****Trois droites concourantes ou parallèles**

[A<sub>2</sub>] Soit  $ABC$  un triangle. Soient  $D, E \in (AB)$  tels que le milieu de  $(D, E)$  soit le milieu de  $(A, B)$ ,  $F, G \in (BC)$  tels que le milieu de  $(F, G)$  soit le milieu de  $(B, C)$ ,  $H, K \in (CA)$  tels que le milieu de  $(H, K)$  soit le milieu de  $(C, A)$ . On note  $A'$  (resp.  $B'$ , resp.  $C'$ ) le milieu de  $(D, K)$  (resp.  $(E, F)$ , resp.  $(G, H)$ ). Montrer que les droites  $(AA'), (BB'), (CC')$  sont concourantes ou parallèles.

**23.15****Rayon du cercle inscrit dans un triangle**

[E<sub>2</sub>] Soient  $ABC$  un triangle acutangle (c'est-à-dire dont les trois angles sont aigus),  $I$  (resp.  $r$ ) le centre (resp. rayon) du cercle inscrit dans  $ABC$ ,  $r_A$  le rayon du cercle centré sur  $[BC]$  et tangent à  $(AB)$  et à  $(AC)$ ,  $r_B, r_C$  de même. Montrer :

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{2}{r}.$$



### 23.16 Tangente à une hyperbole

[E<sub>2</sub>] Soient  $H$  une hyperbole,  $A, A'$  ses sommets,  $T, T'$  les tangentes à  $H$  en  $A, A'$  respectivement. Un point  $M$  décrit la demi-hyperbole de  $H$  de sommet  $A'$ . La tangente en  $M$  à  $H$  coupe  $T$  et  $T'$  en deux points notés respectivement  $P, P'$ . Montrer :  $(FP) \perp (FP')$ .



### 23.17 Normales à une parabole

[E<sub>2</sub>, R] Soient  $p > 0, P$  la parabole d'équation  $y^2 = 2px$ ,  $M$  un point du plan tel qu'il existe trois normales à  $P$  passant par  $M$ . Montrer que l'isobarycentre des trois pieds de ces trois normales est sur  $x'x$ .



### 23.18 Hyperboles équilatères passant par trois points donnés

[E<sub>2</sub>, R] a) Former l'équation générale des hyperboles équilatères passant par les trois points

$$A(2,1), \quad B(1,0), \quad C(-1,0).$$

b) Montrer que ces hyperboles passent par un quatrième point fixe que l'on déterminera.

## Du mal à démarrer ?

**23.1** c) Calculer le cosinus de l'angle à l'aide d'un produit scalaire, puis le signe du sinus à l'aide d'un déterminant.

**23.2** a) Calculer  $\overrightarrow{BC}^2$  en intercalant  $A$  par la relation de Chasles.

b) Exprimer  $\cos \widehat{A}$  d'après a), puis  $\sin \widehat{A} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{A}}$ .

c) Se déduit simplement de b).

d) Considérer le projeté orthogonal  $H$  de  $A$  sur  $(BC)$ .

**23.3** Un point  $M(x,y)$  appartient à la réunion des deux bissectrices de  $D_1$  et  $D_2$  si et seulement si :  $d(M, D_1) = d(M, D_2)$ .

**23.4** Considérer le repère affine  $\mathcal{R} = (A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

Préciser les coordonnées de  $A, B, C, A', B', C'$ .

En déduire les rapports  $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}, \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}, \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ .

**23.5** Combiner les égalités de définition de  $G_1$  et  $G_2$  pour faire apparaître  $\overrightarrow{G_1 G_2}$ .

**23.6** Considérer le repère affine  $\mathcal{R} = (A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ . Former une équation cartésienne de  $(BC)$ , puis de  $\Delta$ , de  $\Delta'$ . En déduire les coordonnées de  $D, D', E, E'$ . Former des équations cartésiennes de  $(CD)$  et  $(BE)$ , de  $(CD')$  et  $(BE')$ , puis calculer les coordonnées de  $M, M'$ , et montrer que  $A, M, M'$  sont alignés.

**23.7** Soient  $(M, N) \in C^2, \lambda \in [0 ; 1], P = \text{bary} \begin{bmatrix} M & N \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix}$ .

Ex-primer  $M, N$  comme barycentres de points de  $C_1, C_2$ , et utiliser l'associativité de la notion de barycentre.

**23.8** Utiliser un repère affine  $\mathcal{R} = (O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ , dans lequel  $H$  admet une équation cartésienne  $xy = a^2$ ,  $a > 0$  fixé, et  $D$  est l'axe des abscisses. Former une équation cartésienne de la tangente en  $P$  (resp.  $Q$ ) à  $H$ , puis calculer les abscisses de  $R, S, I$  et enfin montrer que  $(\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{QI})$  est liée.

**23.9** Passer par les nombres complexes, en faisant intervenir des rotations d'angle  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

**23.10** Noter  $P(x,0), Q(0,y)$  les extrémités du segment, calculer  $PQ^2$  en fonction, par exemple, de  $x$ , et étudier les variations de la fonction ainsi obtenue.

**23.11** Calculer les ordonnées de  $M_1, M_2$  et en déduire que :

$$M_1 M_2 = \sqrt{2}c \iff a = b.$$

**23.12** Paramétriser  $E$  par :  $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in \mathbb{R}$ .

Former une équation cartésienne de la tangente en  $M$  à  $E$ .

En déduire les coordonnées de  $P$ , de  $P'$  et du milieu  $I$  de  $(P, P')$ .

Montrer enfin :  $IP = IP' = IF = IF'$ .

**23.13** a) Noter  $f_1, \dots, f_n$  les éléments de  $G$ . Considérer l'isobarycentre  $A$  de  $(f_1(O), \dots, f_n(O))$ , où  $O \in \mathcal{A}_2$  est fixé.

b) Considérer le sous-groupe engendré par  $f$  pour la loi  $\circ$ .

**23.14** Considérer le repère affine  $\mathcal{R} = (A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ . Déterminer les coordonnées de  $A, \dots, K, A', B', C'$ . Former des équations cartésiennes de  $(AA'), (BB'), (CC')$ . Montrer que ces trois équations cartésiennes sont liées.

**23.15** Noter  $D$  le centre du cercle centré sur  $[BC]$  et tangent à  $(AB)$  et à  $(AC)$ ,  $B'$ ,  $B''$  les projetés orthogonaux respectifs de  $I$  et  $D$  sur  $(AC)$ ,  $C'$ ,  $C''$  les projetés orthogonaux respectifs de  $I$  et  $D$  sur  $(AB)$ . Exprimer les aires des triangles  $ABD$ ,  $ACD$ ,  $ABC$ ,  $IAB$ ,  $IBC$ ,  $ICA$ .

**23.16** Paramétriser  $H$  par des fonctions hyperboliques.

Pour  $M(-a \cosh t, b \sinh t)$  sur la demi-hyperbole de  $H$  contenant  $A'$ , former une équation cartésienne de la tangente en  $M$  à  $H$ , puis calculer les coordonnées des points  $P, P'$  et enfin calculer  $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FP'}$ .

**23.17** Paramétriser  $P : x = \frac{t^2}{2p}$ ,  $y = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Former une équation cartésienne de la normale en un point  $N(t)$  de  $P$ , puis tra-

duire que cette normale passe par  $M$ . Faire apparaître ainsi une équation du troisième degré, ayant pour solutions les ordonnées des trois pieds des normales et calculer la somme des racines de cette équation, en utilisant la formule reliant les coefficients et les racines d'une équation algébrique.

**23.18** a) Dans l'équation générale des coniques, traduire qu'il s'agit d'une hyperbole et que les deux directions asymptotiques sont orthogonales.

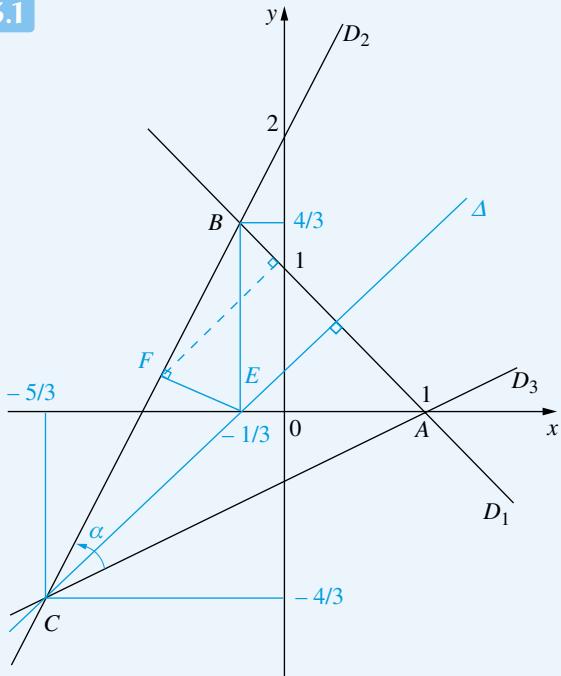
On obtiendra :

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2(1 + 2\lambda)y - 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Traduire qu'un point  $M(x, y)$  fixé satisfait l'équation précédente pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

# Corrigés des exercices

23.1



a)

$$A(x, y) \in D_1 \cap D_3 \iff \begin{cases} y = 1 - x \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$B(x, y) \in D_1 \cap D_2 \iff \begin{cases} y = 1 - x \\ y = 2x + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$C(x, y) \in D_2 \cap D_3 \iff \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

b)

$$\begin{aligned} BC &= \|\overrightarrow{BC}\| = \left( \left( -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} \right)^2 + \left( -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \frac{16}{9} + \frac{64}{9} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{80}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{3} \simeq 2,98\dots \end{aligned}$$

c) Notons  $\alpha = (\widehat{CA}, \widehat{CB})$  [2π]. On a :

$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 8/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$  colinéaire et de même sens que  $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

et  $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 4/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$  colinéaire et de même sens que  $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,

donc :

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\|} = \frac{4}{5},$$

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

donc, d'après le cours :  $\sin \alpha > 0$ .

On conclut :  $\alpha = \arccos \frac{4}{5} \simeq 0.64\dots$

d) • Un vecteur directeur de  $D_1$  est  $(1, -1)$ , donc une équation cartésienne de la droite  $\Delta$  passant par  $C(-5/3, -4/3)$  et orthogonale à  $D_1$  est :

$$1\left(x - \left(-\frac{5}{3}\right)\right) + (-1)\left(y - \left(-\frac{4}{3}\right)\right) = 0,$$

c'est-à-dire :  $x - y + \frac{1}{3} = 0$ , ou encore :  $y = x + \frac{1}{3}$ .

•

$$E(x, y) \in \Delta \cap x'x \iff \begin{cases} y = x + \frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 0. \end{cases}$$

• En notant  $F(x, y)$  le projeté orthogonal de  $E$  sur  $D_2$ , on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} F \in D_2 \\ (EF) \perp D_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} F \in D_2 \\ \overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{D_2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2x + 2 \\ \left(x + \frac{1}{3}, y\right) \perp (1, 2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2x + 2 \\ x + \frac{1}{3} + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{13}{15} \\ y = \frac{4}{15}. \end{cases} \end{aligned}$$

e) D'après la formule du cours donnant la distance d'un point à une droite dont on connaît une équation cartésienne, on a, pour  $F\left(-\frac{13}{15}, \frac{4}{15}\right)$  et  $D_1 : x + y - 1 = 0$  :

$$d(F, D_1) = \frac{\left| -\frac{13}{15} + \frac{4}{15} - 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{8}{5\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \simeq 1,13\dots$$

### 23.2 a) On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}. \end{aligned}$$

b) On déduit  $\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ , puis :

$$\begin{aligned} \sin^2 \widehat{A} &= 1 - \cos^2 \widehat{A} = 1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4b^2c^2} (4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2) \\ &= \frac{1}{4b^2c^2} (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{4b^2c^2} (a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{4b^2c^2} (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a) \\ &\quad (b + c + a) \\ &= \frac{1}{4b^2c^2} 16(p - b)(p - c)(p - a)p. \end{aligned}$$

Comme  $\widehat{A} \in ]0 ; \pi[$ , on a  $\sin \widehat{A} > 0$ , donc :

$$\sin \widehat{A} = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

c) D'après b) :  $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ ,

donc, comme le deuxième membre de cette égalité est symétrique en  $a, b, c$ , on conclut :

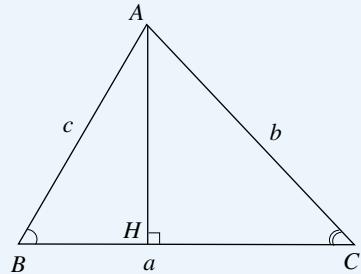
$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}.$$

*Remarque :* on peut obtenir ces égalités par une autre méthode. En effet, en notant  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ , on a :  $CH = AC \sin \widehat{CAH} = b \sin \widehat{A}$

et  $CH = BC \sin \widehat{CBH} = a \sin \widehat{B}$ , d'où :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}}.$$

d)



En notant  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ , on a :

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} cb \sin \widehat{A}.$$

On conclut, d'après b) :  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

23.3 En notant  $\Delta, \Delta'$  les deux bissectrices de  $D_1$  et  $D_2$ , on a, pour tout point  $M(x, y)$  :

$$M \in \Delta \cup \Delta' \iff d(M, D_1) = d(M, D_2)$$

$$\iff \frac{|3x + 4y + 3|}{5} = \frac{|12x - 5y + 4|}{13}$$

$$\iff \begin{cases} 13(3x + 4y + 3) - 5(12x - 5y + 4) = 0 \\ \text{ou} \\ 13(3x + 4y + 3) + 5(12x - 5y + 4) = 0. \end{cases}$$

Les bissectrices sont donc les droites d'équations :

$$-21x + 77y + 19 = 0, \quad 99x + 27y + 59 = 0.$$

23.4 Dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ , on dispose des coordonnées :

$$A(0,0), B(1,0), C(0,1), B'(0,b), C'(c,0), A'(a,1-a),$$

où  $(a, b, c) \in (\mathbb{R} - \{0, 1\})^3$ .

•  $\overrightarrow{A'B} (1-a, -(1-a))$  et  $\overrightarrow{A'C} (-a, a)$ , donc

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} = -\frac{1-a}{a}$$

•  $\overrightarrow{B'C} (0, 1-b)$  et  $\overrightarrow{B'A}(0, -b)$ , donc  $\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = -\frac{1-b}{b}$

•  $\overrightarrow{C'A} (-c, 0)$  et  $\overrightarrow{C'B}(1-c, 0)$ , donc  $\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -\frac{c}{1-c}$ .

a) On a :  $(A', B', C' \text{ alignés}) \iff \begin{vmatrix} -a & c \\ b-1+a & -b \end{vmatrix} = 0$   
 $\iff c + ab - bc - ac = 0.$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 &\iff \frac{1-a}{-a} \cdot \frac{1-b}{-b} \cdot \frac{-c}{1-c} = 1 \\ &\iff (1-a)(1-b)c + ab(1-c) = 0 \\ &\iff c + ab - ac - bc = 0. \end{aligned}$$

b) On forme les EC des droites  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  :

$$(AA') : (1-a)x - ay = 0$$

$$(BB') : bx + y - b = 0$$

$$(CC') : x + cy - c = 0.$$

Ces trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement

$$\text{si : } \begin{vmatrix} 1-a & -a & 0 \\ b & 1 & -b \\ 1 & c & -c \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :  $-c + ab + ac + bc - 2abc = 0$ .

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 &\iff \frac{1-a}{-a} \cdot \frac{1-b}{-b} \cdot \frac{-c}{1-c} = -1 \\ &\iff -c + ab + ac + bc - 2abc = 0. \end{aligned}$$

### 23.5

Par définition de  $G_1$  et  $G_2$  :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{G_1 A_i} = \sum_{j \in J} \alpha_j \overrightarrow{G_2 A_j} = \vec{0}.$$

On déduit :

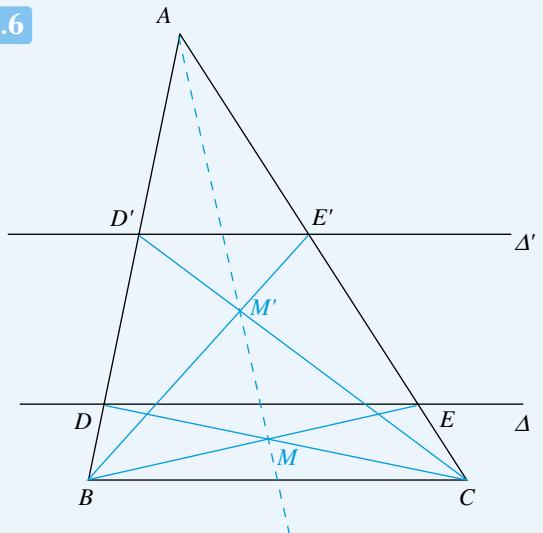
$$\begin{aligned} \vec{0} &= \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{G_1 A_i} + \sum_{j \in J} \alpha_j \overrightarrow{G_2 A_j} \\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i (\overrightarrow{G_1 G_2} + \overrightarrow{G_2 A_i}) + \sum_{j \in J} \alpha_j \overrightarrow{G_2 A_j} \\ &= \left( \sum_{i \in I} \alpha_i \right) \overrightarrow{G_1 G_2} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{G_2 A_j}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i \in I} \alpha_i \right) \overrightarrow{G_1 G_2} &= - \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{G_2 A_j} \\ &= - \sum_{j=1}^n \alpha_j (\overrightarrow{G_2 A_1} + \overrightarrow{A_1 A_j}) \\ &= - \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \right) \overrightarrow{G_2 A_1} - \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_1 A_j} \\ &= - \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_1 A_j}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\overrightarrow{G_1 G_2} = - \frac{1}{\sum_{i \in I} \alpha_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_1 A_j}$ , donc  $(G_1 G_2)$  est dirigée par  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_1 A_j}$ , qui ne dépend pas du choix de  $\{I, J\}$ .

### 23.6



Considérons le repère affine  $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

On a, dans  $\mathcal{R}$  :  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(0,1)$ .

Une équation cartésienne de  $(BC)$  est :  $x + y = 1$ .

Puisque  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont parallèles à  $(BC)$ ,  $\Delta$  et  $\Delta'$  ont des équations cartésiennes :  $\Delta | x + y = \lambda$ ,  $\Delta' | x + y = \lambda'$ ,  $(\lambda, \lambda') \in (\mathbb{R}^*)^2$ .

On déduit les coordonnées de  $D, D', E, E'$ , qui sont les points d'intersection de  $\Delta$  et  $\Delta'$  avec les axes de coordonnées :

$$D(\lambda, 0), D'(\lambda', 0), E(0, \lambda), E'(0, \lambda').$$

D'où des équations cartésiennes de  $(CD)$  et  $(EF)$  :

$$(CD) | \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{1} = 1, (BE) | \frac{x}{1} + \frac{y}{\lambda} = 1,$$

puis les coordonnées  $(x, y)$  du point d'intersection  $M$  de  $(CD)$  et  $(BE)$  :

$$M(x, y) \in (CD) \cap (BE)$$

$$\begin{aligned} \iff \begin{cases} \frac{x}{\lambda} + y = 1 \\ x + \frac{y}{\lambda} = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)x = 1 - \frac{1}{\lambda} \\ \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)y = 1 - \frac{1}{\lambda} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \\ y = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \end{cases} \end{aligned}$$

L'énoncé sous-entend  $\lambda \neq -1$  pour l'existence de  $M$ .

De même, on obtient :  $M'\left(\frac{\lambda'}{\lambda'+1}, \frac{\lambda'}{\lambda'+1}\right)$ .

On déduit que  $M$  et  $M'$  sont sur la droite d'équation  $y = x$ , et on conclut que  $A, M, M'$  sont alignés.

**23.7** Soient  $(M, N) \in C^2$ ,  $\lambda \in [0; 1]$ ,

$$P = \text{bary} \begin{bmatrix} M & N \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Puisque  $(M, N) \in C^2$ , il existe  $M_1, N_1 \in C_1$ ,  $M_2, N_2 \in C_2$  tels que  $M$  (resp.  $N$ ) soit le milieu de  $[M_1 M_2]$  (resp.  $[N_1 N_2]$ ).

On a alors, par associativité de la notion de barycentre :

$$\begin{aligned} P &= \text{bary} \begin{bmatrix} M & N \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \text{bary} \left[ \text{bary} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bary} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \text{bary} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & N_1 & N_2 \\ \lambda & \lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \text{bary} \left[ \text{bary} \begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix} \quad \text{bary} \begin{bmatrix} M_2 & N_2 \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix} \right]. \end{aligned}$$

En notant

$$P_1 = \text{bary} \begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix}, \quad P_2 = \text{bary} \begin{bmatrix} M_2 & N_2 \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix},$$

on a donc :  $P = \text{bary} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,

c'est-à-dire que  $P$  est le milieu de  $[P_1 P_2]$ .

De plus, puisque  $(M_1, N_1) \in C_1^2$  et que  $C_1$  est convexe, on a  $P_1 \in C_1$ . De même :  $P_2 \in C_2$ .

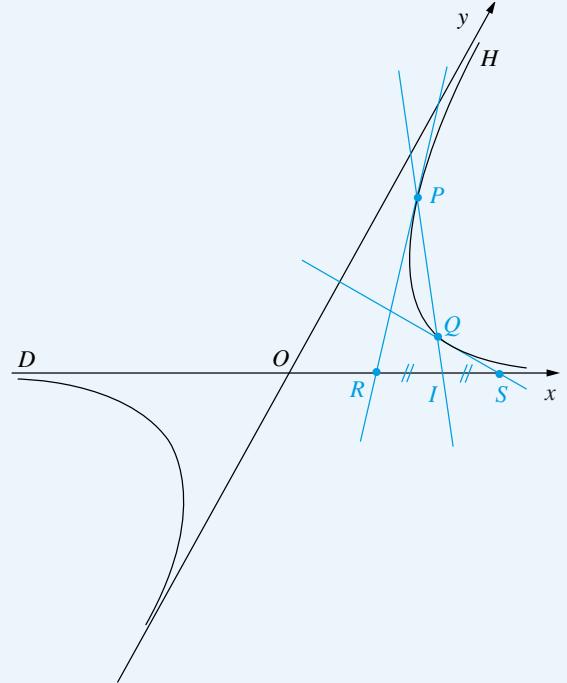
On déduit  $P \in C$  et on conclut que  $C$  est convexe.

**23.8** Notons  $O$  le centre de  $H$ . Il existe un repère affine  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$  de  $\mathcal{A}_2$  tel que  $\vec{i}$  dirige  $D$  et  $\vec{j}$  dirige l'autre asymptote de  $H$ . L'hyperbole  $H$  admet, dans  $\mathcal{R}$ , une équation cartésienne  $xy = a^2$  où  $a > 0$  est fixé. Autrement dit,  $H$  admet la représentation paramétrique :

$$x = t, \quad y = \frac{a^2}{t}, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

Puisque  $P, Q \in H$ , il existe  $(u, v) \in (\mathbb{R}^*)^2$  tel que :

$$P\left(a, \frac{a^2}{u}\right), \quad Q\left(v, \frac{a^2}{v}\right).$$



La tangente en  $P$  à  $H$  est dirigée par le vecteur dérivé (non nul), donc par  $\left(1, -\frac{a^2}{u^2}\right)$ , ou encore par  $(u^2, -a^2)$ . Une équation cartésienne de la tangente en  $P$  à  $H$  est :

$$\begin{vmatrix} X-u & u^2 \\ Y-\frac{a^2}{u} & -a^2 \end{vmatrix} = 0 \iff a^2(X-u) + u^2\left(Y - \frac{a^2}{u}\right) = 0.$$

Le point d'intersection  $R$  de cette tangente avec  $D$  est donné par :

$$\begin{cases} Y = 0 \\ a^2(X-u) + u^2\left(Y - \frac{a^2}{u}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = 2u \\ Y = 0 \end{cases}$$

Ainsi :  $R(2u, 0)$ . De même :  $S(2v, 0)$ .

On déduit le milieu  $I$  de  $(R, S)$  :  $I(u+v, 0)$ .

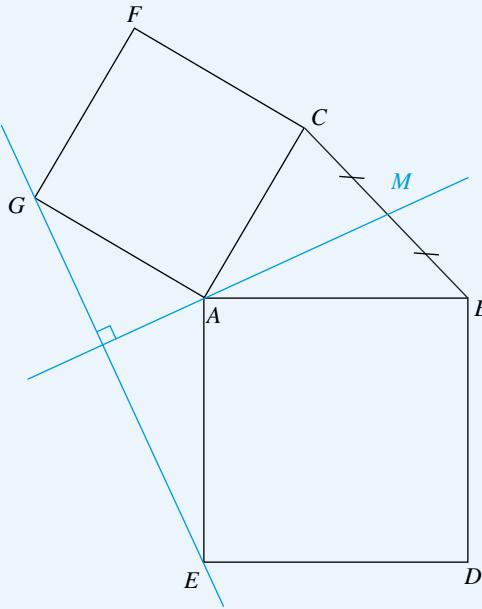
Montrons que  $I \in (PQ)$ , c'est-à-dire que  $(\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{QI})$  est liée. On a :

$$\begin{aligned} \det_{(\vec{i}, \vec{j})} (\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{QI}) &= \begin{vmatrix} (u+v)-u & (u+v)-v \\ -\frac{a^2}{u} & -\frac{a^2}{v} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} v & u \\ -\frac{a^2}{u} & -\frac{a^2}{v} \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

donc  $(\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{QI})$  est liée.

On conclut que la droite  $(PQ)$  passe par le milieu  $I$  de  $(R, S)$ .

23.9



Passons par les nombres complexes. Notons par une minuscule l'affixe du point correspondant :  $A(a), B(b), \dots$

On a, puisque  $M$  est le milieu de  $(B, C)$  :  $m = \frac{b+c}{2}$ .

Puisque  $ABDE$  est un carré indirect,

on a :  $\vec{AE} = \text{Rot}_{-\pi/2}(\vec{AB})$ ,

d'où :  $e - a = -i(b - a)$ ,

et donc :  $e = a - i(b - a)$ .

Puisque  $ACFG$  est un carré direct, on a :  $\vec{AG} = \text{Rot}_{\pi/2}(\vec{AC})$ ,

d'où :  $g - a = i(c - a)$ , et donc :  $g = a + i(c - a)$ .

On déduit :

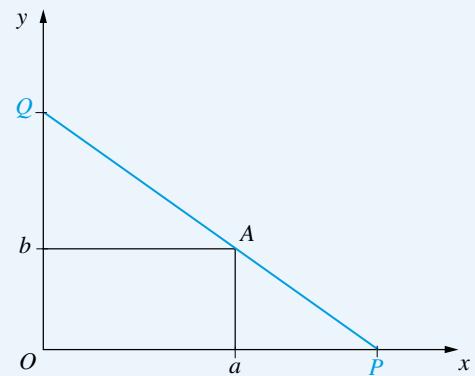
$$\begin{aligned} g - e &= (a + i(c - a)) - (a - i(b - a)) \\ &= i(c + b - 2a) = 2i\left(\frac{b+c}{2} - a\right) \\ &= 2i(m - a). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\vec{EG}$  se déduit de  $\vec{AM}$  par la similitude directe de rapport 2 et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

En particulier :  $(AM) \perp (EG)$ .

23.10 Soient  $x, y \in \mathbb{R}^2$  tels que  $x > a, y > b$ , et  $P(x, 0), Q(0, y)$ . On a :

$$\begin{aligned} A \in (PQ) &\iff \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1 \iff ay + bx - xy = 0 \\ &\iff y = \frac{bx}{x-a}. \end{aligned}$$



D'où :

$$PQ^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{bx}{x-a}\right)^2.$$

Considérons l'application

$$f : ]a; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2 + \left(\frac{bx}{x-a}\right)^2.$$

L'application  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]a; +\infty[$  et, pour tout  $x \in ]a; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2\frac{bx}{x-a} \cdot \frac{b(x-a) - bx}{(x-a)^2} = 2x - \frac{2ab^2x}{(x-a)^3} \\ &= \frac{2x}{(x-a)^3}((x-a)^3 - ab^2). \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations de  $f$ , en notant  $x_0 = (ab^2)^{1/3} + a = a^{1/3}(a^{2/3} + b^{2/3})$  :

$x$	$a$	$x_0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↗	↗	

Le minimum de  $f$ , donc aussi de  $\sqrt{f}$ , est obtenu en  $x_0$ , et :

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^2 + \left(\frac{bx_0}{x_0-a}\right)^2 = x_0^2 + \frac{b^2x_0^2}{(ab^2)^{2/3}} \\ &= \frac{(a^{2/3}b^{4/3} + b^2)x_0^2}{a^{2/3}b^{4/3}} = (a^{2/3} + b^{2/3})^3. \end{aligned}$$

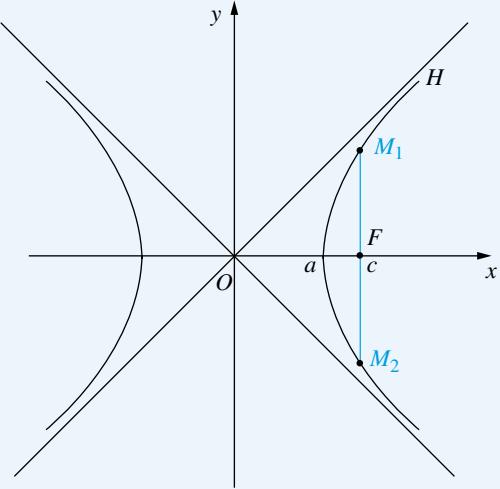
On conclut que la longueur minimale cherchée est :

$$(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$

23.11 Notons  $t$  et  $-t$  les ordonnées de  $M_1$  et  $M_2$  respectivement avec (par exemple)  $t > 0$ .

On a, en rappelant que  $c^2 = a^2 + b^2$  :

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1, \quad \text{d'où} \quad t^2 = b^2 \left( \frac{c^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{b^4}{a^2}.$$



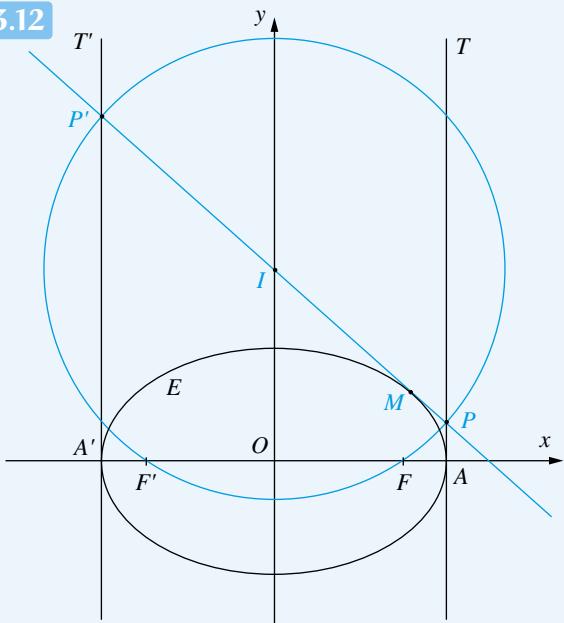
On a donc :

$$\begin{aligned}
 M_1 M_2 &= \sqrt{2}c \iff 2t = \sqrt{2}c \iff 2t^2 = c^2 \\
 &\iff 2\frac{b^4}{a^2} = a^2 + b^2 \\
 &\iff a^4 + a^2b^2 - 2b^4 = 0 \\
 &\iff (a^2 - b^2)(a^2 + 2b^2) \stackrel{>0}{=} 0 \\
 &\iff a^2 = b^2 \iff a = b.
 \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le cours,  $H$  est équilatérale si et seulement si  $a = b$ .

Finalement,  $H$  est équilatérale si et seulement si :  $M_1 M_2 = \sqrt{2}c$ .

**23.12**



D'après le cours, il existe un repère orthonormé (direct)  $\mathcal{R} = (O ; \vec{i}, \vec{j})$  tel que, dans  $\mathcal{R}$ ,  $E$  admette la représentation paramétrique :

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On a alors :  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$ .

La tangente en  $M$  à  $E$  est dirigée par  $\frac{d\vec{M}}{dt}$ , d'où une équation cartésienne de la tangente en  $M$  à  $E$  :

$$\begin{vmatrix} x - a \cos t & -a \sin t \\ y - b \sin t & b \cos t \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff b \cos t x + a \sin t y - ab = 0.$$

Notons  $I$  le milieu de  $(P, P')$ , qui est aussi le point d'intersection de  $(PP')$  et de  $y'y$ .

Les coordonnées  $(x, y)$  de  $P$  sont données par :

$$\begin{cases} x = a \\ b \cos t x + a \sin t y - ab = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = b \frac{1 - \cos t}{\sin t} \end{cases}.$$

De même :  $P'\left(-a, b \frac{1 + \cos t}{\sin t}\right)$ .

On en déduit les coordonnées du milieu  $I$  de  $(P, P')$  :

$$I\left(0, \frac{b}{\sin t}\right).$$

D'où :

$$IP^2 = a^2 + \left(\frac{b \cos t}{\sin t}\right)^2 = IP'^2$$

et

$$\begin{aligned}
 IF^2 &= c^2 + \left(\frac{b}{\sin t}\right)^2 = \frac{c^2 \sin^2 t + b^2}{\sin^2 t} \\
 &= \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2}{\sin^2 t} = a^2 + b^2 \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} \\
 &= a^2 + b^2 \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = IP^2.
 \end{aligned}$$

De même :  $IF'^2 = IP'^2$ .

On obtient :  $IP = IP' = IF = IF'$ , donc  $P, P', F, F'$  sont sur un même cercle de centre  $I$ , le cercle de diamètre  $[PP']$ .

**23.13**

a) Notons  $f_1, \dots, f_n$  les éléments de  $G$ .

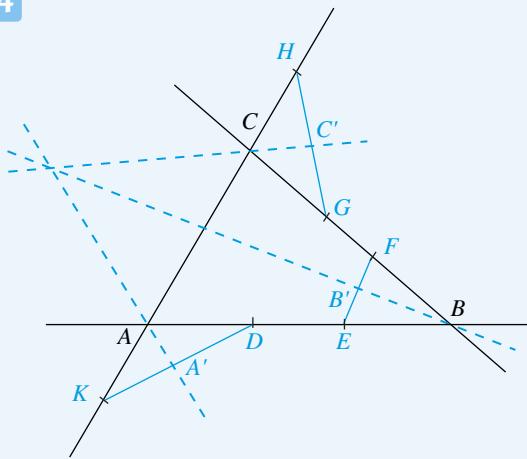
Soit  $O$  un point quelconque de  $E$  (il en existe au moins un) ; notons  $A$  l'isobarycentre de  $f_1(O), \dots, f_n(O)$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Puisque  $f_i$  est affine,  $f_i(A)$  est l'isobarycentre de  $f_i(f_1(O)), \dots, f_i(f_n(O))$ . Mais, d'autre part, puisque  $G = \{f_1, \dots, f_n\}$  est un groupe, les éléments

$f_i \circ f_1, \dots, f_i \circ f_n$  sont deux à deux distincts et constituent  $G$ , et on a donc :  $f_i(A) = A$ .

b) Puisque  $f^n = \text{Id}_E$ , le groupe engendré par  $f$ , formé par les  $f^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) est fini. D'après a), il existe donc  $A \in E$  tel que :  $\forall k \in \mathbb{Z}, f^k(A) = A$ . En particulier :  $f(A) = A$ .

### 23.14



Considérons le repère affine  $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

On a, dans  $\mathcal{R}$ , les coordonnées :

$$A(0,0), \quad B(1,0), \quad C(0,1).$$

Puisque  $D, E \in (AB)$  et que  $(D, E)$  a le même milieu que  $(AB)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$D(1-\lambda, 0), \quad E(\lambda, 0).$$

De même, il existe  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  tels que :

$$F(\mu, 1-\mu), \quad G(1-\mu, \mu), \quad H(0, \nu), \quad K(0, 1-\nu).$$

On déduit les coordonnées de  $A', B', C'$  :

$$\begin{aligned} A' &\left( \frac{1-\lambda}{2}, \frac{1-\nu}{2} \right), \quad B' \left( \frac{\lambda+\mu}{2}, \frac{1-\mu}{2} \right), \\ C' &\left( \frac{1-\mu}{2}, \frac{\mu+\nu}{2} \right). \end{aligned}$$

On forme des équations cartésiennes des droites  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  :

$$M(x, y) \in (AA') \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AA'}) \text{ liée}$$

$$\iff \begin{vmatrix} x & \frac{1-\lambda}{2} \\ y & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (1-\nu)x - (1-\lambda)y = 0,$$

$$M(x, y) \in (BB') \iff (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BB'}) \text{ liée}$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-1 & \frac{\lambda+\mu}{2}-1 \\ y & \frac{1-\mu}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (1-\mu)(x-1) - (\lambda+\mu-2)y = 0$$

$$\iff (1-\mu)x - (\lambda+\mu-2)y - (1-\mu) = 0,$$

$$M(x, y) \in (CC') \iff (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CC'}) \text{ liée}$$

$$\iff \begin{vmatrix} x & \frac{1-\mu}{2} \\ y-1 & \frac{\mu+\nu}{2}-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (\mu+\nu-2)x - (1-\mu)(y-1) = 0.$$

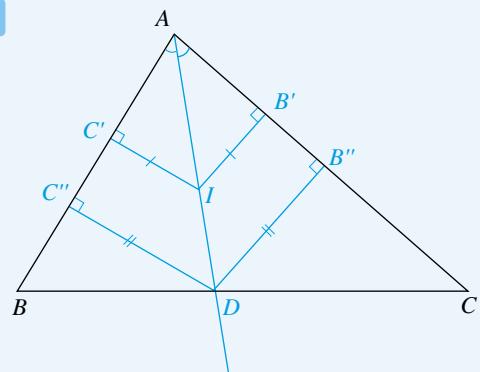
On remarque, par exemple, que la somme des trois premiers membres de ces trois équations de droites est nulle.

- Si  $(AA')$  et  $(BB')$  sont sécantes en un point noté  $M$ , alors, puisque la troisième équation est l'opposée de la somme des deux premières équations, le point  $M$  est sur  $(CC')$ , ce qui montre que les trois droites sont concourantes.

- Si  $(AA')$  et  $(BB')$  sont parallèles, alors, comme la troisième équation est l'opposée de la somme des deux premières, la droite  $(CC')$  est parallèle à  $(BB')$  et à  $(CC')$ .

On conclut que les trois droites  $(AA'), (BB'), (CC')$  sont concourantes ou parallèles.

### 23.15



Il y a un cercle et un seul, centré sur  $[BC]$  et tangent à  $(AB)$  et à  $(AC)$ , et le centre  $D$  de ce cercle est le point d'intersection de  $[BC]$  et de la bissectrice intérieure de  $\widehat{A}$ .

Notons  $B', B''$  les projetés orthogonaux respectifs de  $I$  et  $D$  sur  $(AC)$ ,  $C', C''$  les projetés orthogonaux respectifs de  $I$  et  $D$  sur  $(AB)$ .

En notant  $\mathcal{A}(.)$  l'aire d'un triangle, on a :

$$\begin{cases} 2\mathcal{A}(ABD) = AB \cdot DC'' = c r_A \\ 2\mathcal{A}(ACD) = AC \cdot DB'' = b r_A. \end{cases}$$

Comme  $D \in [BC]$ , on obtient :

$$2\mathcal{A}(ABC) = 2\mathcal{A}(ABD) + 2\mathcal{A}(ACD) = (b+c)r_A.$$

Par rôles symétriques, on a aussi, en permutant les lettres :

$$2\mathcal{A}(ABC) = (b+c)r_A = (c+a)r_B = (a+b)r_C.$$

De même :

$$\begin{cases} 2\mathcal{A}(IAB) = AB \cdot IC' = cr \\ 2\mathcal{A}(IBC) = BC \cdot IA' = ar \\ 2\mathcal{A}(ICA) = CA \cdot IB' = br. \end{cases}$$

Comme  $I$  est intérieur au triangle  $ABC$ , on a, par addition d'aires :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A}(ABC) &= 2\mathcal{A}(IAB) + 2\mathcal{A}(IBC) + 2\mathcal{A}(ICA) \\ &= (a+b+c)r. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} (a+b+c)r &= 2\mathcal{A}(ABC) = (b+c)r_A = (c+a)r_B \\ &= (a+b)r_C, \end{aligned}$$

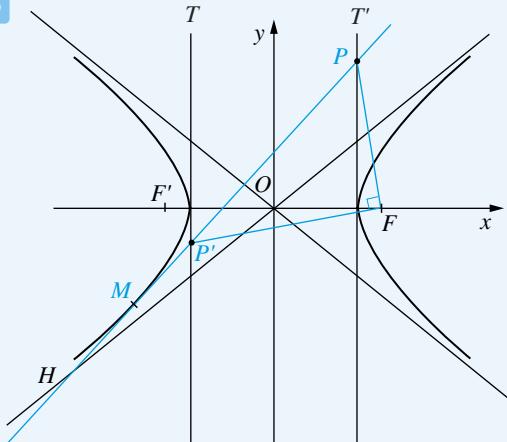
d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_A} &= \frac{b+c}{(a+b+c)r}, \quad \frac{1}{r_B} = \frac{c+a}{(a+b+c)r}, \\ \frac{1}{r_C} &= \frac{a+b}{(a+b+c)r}, \end{aligned}$$

puis :

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{(b+c) + (c+a) + (a+b)}{(a+b+c)r} = \frac{2}{r}.$$

**23.16**



Il existe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $H$  ait pour équation dans  $\mathcal{R}$  :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  fixés.

Une représentation paramétrique de  $H$  est alors

$$x = \varepsilon a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Puisque  $M$  est sur la demi-hyperbole de  $H$  contenant  $A'$ ,  $M$  a des coordonnées :  $(-a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Un vecteur tangent en  $M$  à  $H$  est obtenu par dérivation :  $(-a \operatorname{sht}, b \operatorname{cht})$ .

On en déduit une équation cartésienne de la tangente  $\tau$  en  $M$  à  $H$  :

$$\begin{aligned} \tau \mid \begin{vmatrix} x + a \operatorname{ch} t & -a \operatorname{sh} t \\ y - b \operatorname{sh} t & b \operatorname{cht} \end{vmatrix} &= 0 \\ \iff b \operatorname{cht} x + a \operatorname{sh} y + ab &= 0. \end{aligned}$$

On détermine les points d'intersection de  $\tau$  avec  $T$  et avec  $T'$  :

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \tau \cap T &\iff \begin{cases} x = a \\ b \operatorname{cht} x + a \operatorname{sh} y + ab = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = a \\ y = -b \frac{1 + \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \tau \cap T' &\iff \begin{cases} x = -a \\ b \operatorname{cht} x + a \operatorname{sh} y + ab = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -a \\ y = b \frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{sh} t}. \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient ainsi les coordonnées suivantes :

$$F(c, 0), \quad P\left(a, -b \frac{1 + \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\right), \quad P'\left(-a, b \frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{sh} t}\right),$$

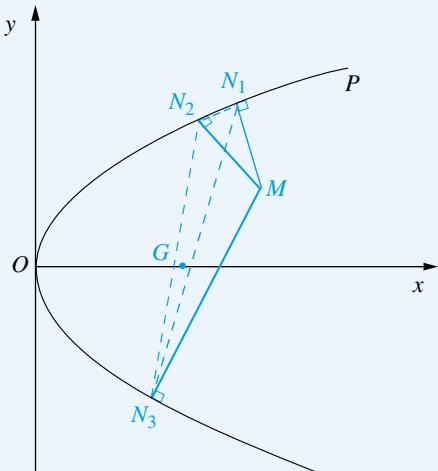
$$\text{d'où } \overrightarrow{FP}\left(a - c, -b \frac{1 + \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\right),$$

$$\overrightarrow{FP'}\left(-a - c, b \frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{sh} t}\right), \quad \text{puis :}$$

$$\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FP'} = (a - c)(-a - c) - b^2 = -a^2 + c^2 - b^2 = 0.$$

On conclut :  $(FP) \perp (FP')$ .

**23.17**



Notons  $M(x,y)$  un point du plan.

Le point courant  $N$  de  $P$  est paramétré par :  $N\left(\frac{t^2}{2p} t, 1\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Un vecteur tangent en  $N$  à  $P$  est  $\frac{d\vec{N}}{dt}\left(\frac{t}{p}, 1\right)$ , ou encore  $\vec{r}(t, p)$ . La normale en  $N$  à  $P$  passe par  $M$  si et seulement si :

$$t\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) + p(y - t) = 0,$$

ou encore :

$$t^3 + (2p^2 - 2px)t - 2p^2y = 0 \quad (1).$$

Cette équation (1) du troisième degré, d'inconnue  $t$ , admet au plus trois solutions réelles notées  $t_1, t_2, t_3$ . Notons  $N_1, N_2, N_3$  les points de  $P$  de paramètres  $t_1, t_2, t_3$ , et  $G$  l'isobarycentre de  $(N_1, N_2, N_3)$ . On calcule l'ordonnée de  $G$  :

$$y_G = \frac{1}{3}(y_{N_1} + y_{N_2} + y_{N_3}) = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) = 0,$$

car le coefficient de  $t^2$  dans l'équation (1) est nul.

On conclut :  $G \in x'x$ .

### 23.18

a) L'équation générale d'une conique  $\Gamma$  est :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

où  $a, \dots, f \in \mathbb{R}$ ,  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

La conique  $\Gamma$  est une hyperbole si et seulement si :  $b^2 - ac > 0$ . Dans ce cas, les directions des deux asymptotes sont données par  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ . Ces deux directions sont orthogonales entre elles si et seulement si :  $c = -a$ . De plus, on a alors  $b^2 - ac = b^2 + a^2 > 0$ .

Ainsi, l'équation générale d'une hyperbole équilatère est :

$$\Gamma \mid ax^2 + 2bxy - ay^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

où  $a, b, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

On a :

$$\begin{cases} A \in \Gamma \\ B \in \Gamma \\ C \in \Gamma \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + 4b + 4d + 2e + f = 0 \\ a + 2d + f = 0 \\ a - 2d + f = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d = 0 \\ f = -a \\ e = -a - 2b. \end{cases}$$

Ainsi, l'équation générale des hyperboles équilatères passant par  $A, B, C$  est :

$$ax^2 + 2bxy - ay^2 - 2(a + 2b)y - a = 0,$$

où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a \neq 0$ .

En divisant par  $a$  et en notant  $\lambda = \frac{d}{a}$ , l'équation générale des hyperboles équilatères passant par  $A, B, C$  est :

$$\Gamma_\lambda \mid x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2(1 + 2\lambda)y - 1 = 0,$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

b) Soit  $M(x, y)$  un point du plan. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, M \in \Gamma_\lambda$$

$$\iff \forall \lambda \in \mathbb{R}, (2xy - 4y)\lambda + (x^2 - y^2 - 2y - 1) = 0$$

$$\iff \begin{cases} 2xy - 4y = 0 \\ x^2 - y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y(x - 2) = 0 \\ x^2 - y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \left( \begin{cases} x = 2 \\ y^2 + 2y - 3 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \right)$$

$$\iff \left( \underbrace{\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}}_A \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \text{ ou } \underbrace{\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}}_B \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \underbrace{\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}}_C \right).$$

On conclut que les hyperboles considérées passent toutes par un quatrième point fixe, le point  $D(2, -3)$ .



## Plan

Les méthodes à retenir	371
Énoncés des exercices	374
Du mal à démarrer ?	376
Corrigés	378

## Thèmes abordés dans les exercices

- Détermination des droites satisfaisant des conditions données
- Calculs de distances, d'angles, de plans bissecteurs, de droites bissectrices, d'aires de triangles, de volumes de tétraèdres
- Obtention d'un SEC de la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires
- Calcul de la distance de deux droites
- Étude de sphères.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Résolution de questions élémentaires de géométrie dans l'espace, sur les points, les droites, les plans
- Détermination de la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires
- Définition et propriétés des sphères.

## Les méthodes à retenir

On abrège représentation paramétrique en RP, équation cartésienne en EC, système d'équations cartésiennes en SEC.

$\mathcal{A}_3$  désigne l'espace affine de dimension trois.

$\mathcal{E}_3$  désigne l'espace affine euclidien orienté de dimension trois.

La notation  $[\mathcal{E}_3, \mathcal{R}]$  par exemple, signifie que l'étude se situe dans  $\mathcal{E}_3$ , muni d'un repère orthonormé (direct)  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Appliquer les formules du cours :

- RP du plan passant par le point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  et dirigé par une famille libre  $(\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3))$  :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

**Pour résoudre les questions élémentaires sur points, droites et plans dans l'espace affine  $\mathcal{A}_3$  muni d'un repère affine  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$**

- EC du plan passant par le point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  et dirigé par une famille libre  $(\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3))$  :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

- EC du plan passant par trois points non alignés  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- EC du plan passant par les points  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$  situés sur les axes de coordonnées ( $abc \neq 0$ ) :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- Deux plans  $P|ax + by + cz + d = 0$ ,  $P'|a'x + b'y + c'z + d' = 0$  sont parallèles si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{R}^*, (a' = ka, b' = kb, c' = kc).$$

- Deux plans  $P|ax + by + cz + d = 0$ ,  $P'|a'x + b'y + c'z + d' = 0$  sont confondus si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{R}^*, (a' = ka, b' = kb, c' = kc, d' = kd).$$

- RP de la droite passant par le point  $A(a, b, c)$  et dirigée par le vecteur (non nul)  $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$  :

$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- Un vecteur directeur de la droite donnée par un SEC

$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$  a pour coordonnées  $(x, y, z)$  obtenues en résolvant le système associé sans second membre

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0. \end{cases}$$

Définir  $D$  (si  $D$  n'est pas horizontale) par un SEC du type

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}, (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

Éventuellement, échanger les rôles des lettres  $x, y, z$  dans un tel système.

→ Exercices 24.10, 24.11, 24.14.

Si l'inconnue de la question est une droite  $D$  de  $\mathcal{A}_3$  ou de  $\mathcal{E}_3$

**Pour résoudre les questions élémentaires sur points, droites et plans dans l'espace affine euclidien orienté  $\mathcal{E}_3$  rapporté à un repère orthonormé direct**

$$\mathcal{R} = (\mathcal{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

Appliquer les formules du cours :

- Distance de deux points  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  :

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Distance du point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  au plan  $P | ax + by + cz + d = 0$  :

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

### → Exercice 24.2

- Distance du point  $M_0$  à la droite  $D$  passant par le point  $A$  et dirigée par le vecteur (non nul)  $\vec{u}$  :

$$d(M_0, D) = \frac{||\overrightarrow{AM_0} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

### → Exercice 24.5

- Un vecteur normal au plan  $P | ax + by + cz + d = 0$  est  $\vec{u}(a, b, c)$
- EC du plan passant par le point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  et orthogonal au vecteur (non nul)  $\vec{u}(a, b, c)$  :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

### → Exercice 24.3

- Un vecteur directeur de la droite  $D$  de SEC

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \text{ est } \vec{u} \wedge \vec{u}',$$

où  $\vec{u}(a, b, c)$  et  $\vec{u}'(a', b', c')$

- L'angle  $\alpha \in [0; \pi]$  de deux vecteurs (non nuls)  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  est donné par :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{||\vec{v}_1|| ||\vec{v}_2||}$$

- L'aire du triangle  $ABC$  est donnée par :

$$A(ABC) = \frac{1}{2} ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$$

### → Exercice 24.1

- Le volume du tétraèdre  $ABCD$  est donné par :

$$V(ABCD) = \frac{1}{6} | [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] |$$

### → Exercice 24.1.

**Pour déterminer le projeté orthogonal  $H$  d'un point  $M$  sur un plan  $P$  (ou sur une droite  $D$ )**

Caractériser  $H$  par :  $H \in P$  et  $\overrightarrow{MH} \perp P$ .

**Pour obtenir les équations cartésiennes des deux plans bissecteurs  $\Pi, \Pi'$  de deux plans donnés  $P_1, P_2$  de  $\mathcal{E}_3$**

Se rappeler que  $\Pi \cup \Pi'$  est l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}_3$  équidistants de  $P_1$  et  $P_2$ .

→ Exercice 24.2.

**Pour déterminer la perpendiculaire commune  $\Delta$  à deux droites  $D, D'$  (non coplanaires)**

- Un vecteur directeur  $\vec{v}$  de  $\Delta$  est  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$ , où  $\vec{u}$  dirige  $D$  et  $\vec{u}'$  dirige  $D'$
- $\Delta = P \cap P'$ , où  $P$  est le plan contenant  $D$  et parallèle à  $\vec{w}$  et  $P'$  est le plan contenant  $D'$  et parallèle à  $\vec{w}$ .

→ Exercice 24.6.

**Pour calculer la distance de deux droites  $D, D'$  de  $\mathcal{E}_3$**

- Montrer la formule

$$d(D, D') = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}', \vec{AA'}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

où  $A$  (resp.  $A'$ ) est un point de  $D$  (resp.  $D'$ ) et  $\vec{u}$  (resp.  $\vec{u}'$ ) dirige  $D$  (resp.  $D'$ ).

→ Exercice 24.7.

**Pour former un SEC des bissectrices  $\Delta, \Delta'$  de deux droites concourantes  $D_1, D_2$  de  $\mathcal{E}_3$**

- Déterminer le point d'intersection  $A$  de  $D_1$  et  $D_2$
- $\Delta$  et  $\Delta'$  sont les droites passant par  $A$  et dirigées par  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$  et  $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ , où  $\vec{u}_1$  est un vecteur directeur de  $D_1$  et  $\vec{u}_2$  est un vecteur directeur de  $D_2$  tels que  $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\|$ .

→ Exercice 24.8.

## Énoncés des exercices

### 24.1 Calcul de l'aire d'un triangle, du volume d'un tétraèdre

[ $\mathcal{E}_3, \mathcal{R}$ ] a) Calculer l'aire du triangle défini par :

$$A(1, 2, -1), \quad B(-1, 1, 0), \quad C(0, 1, 2).$$

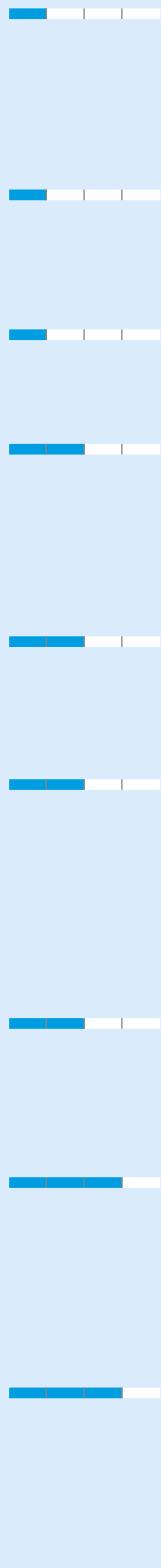
b) Calculer le volume du tétraèdre défini par :

$$A(1, 2, 3), \quad B(3, -1, -1), \quad C(2, 0, 1), \quad D(1, 1, 2).$$

### 24.2 Calcul de la distance d'un point à un plan

[ $\mathcal{E}_3, \mathcal{R}$ ] a) Calculer la distance du point  $A(1, 2, 3)$  au plan  $P \mid 2x - y - z - 4 = 0$ .

b) Calculer la distance du point  $A(1, 1, 1)$  au plan  $P$  passant par le point  $B(2, 3, 1)$  et dirigé par les vecteurs  $\vec{u}(1, -1, 2)$  et  $\vec{v}(-1, 2, 1)$ .



### 24.3 Système d'équations cartésiennes de la droite projetée orthogonale d'une droite sur un plan

[E<sub>3</sub>, R] Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite  $D'$  projetée orthogonale de la droite  $D$   $\begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$  sur le plan  $P \mid x + 2y - 3z - 1 = 0$ .

### 24.4 Équations cartésiennes des plans bissecteurs de deux plans

[E<sub>3</sub>, R] Soient  $P_1 \mid 4x + 4y - 7z - 1 = 0$ ,  $P_2 \mid 8x - 4y + z - 7 = 0$ .

Former les équations cartésiennes des plans  $\Pi, \Pi'$  bissecteurs de  $P_1, P_2$ .

### 24.5 Calculer la distance d'un point à une droite

[E<sub>3</sub>, R] Calculer la distance du point  $A(1, 2, 3)$  à la droite  $D \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$

### 24.6 Former un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à deux droites

[E<sub>3</sub>, R] Former un SEC de la perpendiculaire commune aux deux droites :

$$D \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}, \quad D' \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

### 24.7 Distance de deux droites

[E<sub>3</sub>, R] Calculer la distance entre la droite  $D$  passant par  $A(1, 2, 3)$  et dirigée par  $\vec{u}'(-2, -1, 1)$  et la droite  $D'$  passant par  $A'(-1, 0, 1)$  et dirigée par  $\vec{u}'(-3, 2, -1)$ .

### 24.8 Former un système d'équations cartésiennes des bissectrices de deux droites concourantes

[E<sub>3</sub>, R] On note :  $D_1 \begin{cases} x = 5z + 1 \\ y = 3z - 4 \end{cases}$ ,  $D_2 \begin{cases} x = 3z + 1 \\ y = 5z - 4 \end{cases}$ .

a) Vérifier que  $D_1$  et  $D_2$  sont concourantes.

b) Former un système d'équations cartésiennes des bissectrices  $\Delta, \Delta'$  de  $D_1$  et  $D_2$ .

### 24.9 Sphère circonscrite à un tétraèdre

[E<sub>3</sub>, R] Déterminer le centre  $\Omega$  et le rayon  $R$  de la sphère  $S$  circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations cartésiennes :

$$x + y + z = 0, \quad x + y - z = 2, \quad x - y + z = 4, \quad -x + y + z = 6.$$

### 24.10 Droite rencontrant deux droites données et passant par un point donné

[A<sub>3</sub>, R] Soient  $A(1, 3, 2)$ ,  $D_1 \begin{cases} y = 2x \\ z = 1 \end{cases}$ ,  $D_2 \begin{cases} y = -2x \\ z = -1 \end{cases}$ .

Montrer qu'il existe une droite  $D$  et une seule passant par  $A$  et rencontrant  $D_1$  et  $D_2$  et former un SEC de  $D$ .

### 24.11 Droites rencontrant trois droites données et orthogonales à un vecteur donné

[E<sub>3</sub>, R] Déterminer toutes les droites  $D$  rencontrant les trois droites

$$D_1 \begin{cases} z = 1 \\ y = x - 2 \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} z = 0 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \quad D_3 \begin{cases} z = -1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

et orthogonales à  $\vec{u}'(2, 4, -3)$ .

**24.12****Reconnaitre une application affine remarquable**

[ $\mathcal{A}_3, \mathcal{R}$ ] Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application affine  $f$  définie par la formule suivante, où  $M(x, y, z)$  décrit  $\mathcal{A}_3$  et  $f(M)$  a pour coordonnées  $(x', y', z')$  :

$$\begin{cases} x' = -y - z + 1 \\ y' = -2x - y - 2z + 2 \\ z' = x + y + 2z - 1. \end{cases}$$

**24.13****Équations cartésiennes des sphères contenant un cercle donné et tangentes à une droite donnée**

[ $\mathcal{E}_3, \mathcal{R}$ ] Former les équations cartésiennes des sphères contenant le cercle

$$C \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases} \text{ et tangentes à la droite } D \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 3. \end{cases}$$

**24.14****Droites rencontrant quatre droites données**

[ $\mathcal{A}_3, \mathcal{R}$ ] Trouver toutes les droites  $D$  de l'espace rencontrant les quatre droites

$$D_1 \begin{cases} x = 1 \\ y = 0, \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} y = 1 \\ z = 0, \end{cases} \quad D_3 \begin{cases} z = 1 \\ x = 0, \end{cases} \quad D_4 \mid x = y = -6z.$$

**24.15****Équation cartésienne d'une sphère tangente à deux droites données en deux points donnés**

[ $\mathcal{E}_3, \mathcal{R}$ ] Former une équation cartésienne de la sphère tangente en  $A(1, 2, 1)$  à

$$D \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y - 3z = -3 \end{cases} \text{ et tangente en } A'(1, -1, -2) \text{ à } D' \begin{cases} 2x + y + 2z = -3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}.$$

## Du mal à démarrer ?

**24.1** Appliquer les formules du cours :

$$a) \mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \quad b) \mathcal{V} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|.$$

**24.2** a) Appliquer la formule du cours :

$$d(A, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \text{ avec les notations habituelles.}$$

b) Déterminer une équation cartésienne de  $P$ , puis appliquer la formule du cours comme en a).

**24.3** Remarquer que  $D'$  est l'intersection de  $P$  et du plan  $P'$  contenant  $D$  et orthogonal à  $P$ .

**24.4** Un point  $M$  est dans  $\Pi \cup \Pi'$  si et seulement si :

$$d(M, P_1) = d(M, P_2).$$

**24.5** Appliquer la formule du cours :  $d(A, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$ , où  $M \in D$  et  $\overrightarrow{u} \in \vec{D}$ .

**24.6** D'après le cours, en notant  $\overrightarrow{u}$  (resp.  $\overrightarrow{u}'$ ) un vecteur directeur de  $D$  (resp.  $D'$ ), la perpendiculaire commune  $\Delta$  à  $D$  et  $D'$  est l'intersection du plan  $P$  contenant  $D$  et parallèle à  $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$  et du plan  $P'$  contenant  $D'$  et parallèle à  $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$ .

**24.7** En notant  $H, H'$  les points d'intersection de  $D$  et  $D'$  avec leur perpendiculaire commune, montrer :

$$d(D, D') = HH' = \frac{\|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{AA'}]\|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'\|}.$$

**24.8** b) En notant  $A$  le point d'intersection de  $D_1$  et  $D_2$ , et  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  des vecteurs directeurs de  $D_1, D_2$  respectivement tels que  $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\|$ , les bissectrices  $\Delta, \Delta'$  de  $D_1$  et  $D_2$  sont les droites passant par  $A$  et dirigées par  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ .

**24.9** Déterminer les coordonnées des quatre sommets  $A, B, C, D$  du tétraèdre, en résolvant quatre systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues.

Déterminer le centre  $\Omega$  de  $S$  par :  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ , puis le rayon  $R$  de  $S$  par  $R = \Omega A$ , par exemple.

**24.10** Montrer que  $D$  n'est pas horizontale, donc admet un système d'équations cartésiennes du type

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}, \quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

Traduire les conditions de l'énoncé, ce qui donne un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues.

**24.11** Montrer que, si une droite  $D$  convient, alors  $D$  n'est pas horizontale, donc  $D$  admet un système d'équations cartésiennes du type  $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}, (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4$ . Traduire les conditions de l'énoncé, ce qui donne un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues.

**24.12** Remarquer que la matrice  $A$  associée à  $f$  vérifie  $A^2 = I_3$ .

Déterminer l'ensemble des points invariants par  $f$  et l'ensemble des vecteurs anti-invariants par  $f$ .

**24.13** Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'axe de  $C$ , d'où les coordonnées du centre  $\Omega$  de  $S$ , avec un paramètre. Écrire une équation cartésienne de la sphère  $S$  de centre  $\Omega$  et contenant  $C$ , puis traduire que  $D$  est tangente à  $S$ , par solution double d'une équation du second degré.

**24.14** Montrer que, si  $D$  convient, alors  $D$  n'est pas horizontale, donc  $D$  admet un système d'équations cartésiennes du type

$$D \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}, \quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

Traduire les quatre conditions de l'énoncé, ce qui donne un système de quatre équations à quatre inconnues.

**24.15** Le centre  $\Omega$  de la sphère  $S$  considérée est le point d'intersection de trois plans : le plan  $P$  contenant  $A$  et perpendiculaire à  $D$ , le plan  $P'$  contenant  $A'$  et perpendiculaire à  $D'$ , le plan  $\Pi$  médiateur de  $(A, A')$ . Former une équation cartésienne de chacun de ces trois plans et en déduire les coordonnées de  $\Omega$ . Le rayon  $R$  est ensuite donné par  $R = \Omega A$ .

# Corrigés des exercices

**24.1** a) L'aire  $\mathcal{A}$  du triangle  $ABC$  est donnée par :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

Ici :  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30}.$$

On conclut :  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sqrt{30}$ .

b) Le volume  $\mathcal{V}$  du tétraèdre  $ABCD$  est donné par :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|.$$

Ici :  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , d'où :

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

On conclut :  $\mathcal{V} = \frac{1}{6}$ .

**24.2** a) On applique la formule du cours donnant la distance d'un point à un plan défini par une équation cartésienne :

$$d(A, P) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 - 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

b) Déterminons une équation cartésienne de  $P$  :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \iff [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ y-3 & -1 & 2 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -5(x-2) - 3(y-2) + (z-1) = 0$$

$$\iff -5x - 3y + z + 15 = 0.$$

On applique alors la formule du cours donnant la distance d'un point à un plan défini par une équation cartésienne :

$$d(A, P) = \frac{|-5 - 3 + 1 + 15|}{\sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{35}}.$$

**24.3** On a  $D' = P \cap P'$ , où  $P'$  est le plan contenant  $D$  et orthogonal à  $P$ .

Un point de  $D$  est  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Un vecteur directeur de  $D$  est  $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Un vecteur (non nul) orthogonal à  $P$  est  $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

On forme une équation cartésienne de  $P'$ :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P' \iff [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+1 & 1 & 2 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -5(x-1) + 4(y+1) + z = 0$$

$$\iff -5x + 4y + z + 9 = 0.$$

Finalement, un système d'équations cartésiennes de  $D'$  est :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ -5x + 4y + z + 9 = 0. \end{cases}$$

**24.4** On a, pour tout  $M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3$  :

$$M \in \Pi \cup \Pi' \iff d(M, P_1) = d(M, P_2)$$

$$\iff \frac{|4x + 4y - 7z - 1|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-7)^2}} = \frac{|8x - 4y + z - 7|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}}$$

$$\iff \frac{|4x + 4y - 7z - 1|}{9} = \frac{|8x - 4y + z - 7|}{9}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + 4y - 7z - 1 = 8x - 4y + z - 7 \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$\iff 4x + 4y - 7z - 1 = -8x + 4y - z + 7$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 4y + 4z - 3 = 0 \\ \text{ou} \\ 6x - 3z - 4 = 0. \end{cases}$$

**24.5** Appliquons la formule du cours donnant la distance d'un point  $A$  à une droite définie par un point  $M$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$  :  $d(A, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ .

Un point  $M$  de  $D$  est obtenu par exemple, pour  $z = 0$  :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1, \end{cases}$$

d'où  $M(1, 1, 0)$ .

Un vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $D$  est :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{0^2 + (-12)^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10},$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26},$$

et enfin :

$$d(A, D) = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{26}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{65}}{13}.$$

**24.6** Puisque  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ , un vecteur

directeur  $\vec{u}$  de  $D$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Et un vecteur directeur  $\vec{u}'$

de  $D'$  est  $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . D'où  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  qui dirige

la perpendiculaire commune à  $D$  et  $D'$ . Notons  $P$  (resp.  $P'$ ) le plan contenant  $D$  (resp.  $D'$ ) et parallèle à  $\vec{w}$ .

Comme  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un point de  $D$ , une EC de  $P$  est

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y+1 & 5 & 1 \\ z-1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :  $11x - 5y + 7z - 12 = 0$ .

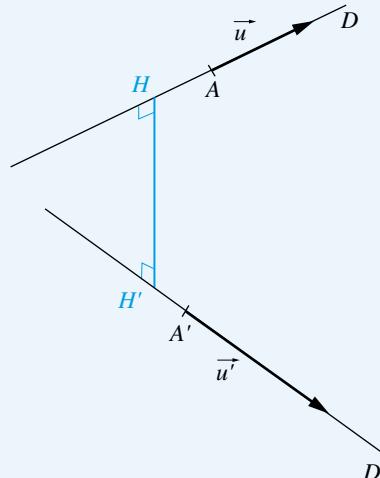
Comme  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un point de  $D'$ , une EC de  $P'$  est

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :  $5x - 7y + 2z - 2 = 0$ .

Finalement, un SEC de la perpendiculaire commune à  $D$  et  $D'$  est :  $\begin{cases} 11x - 5y + 7z - 12 = 0 \\ 5x - 7y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ .

**24.7**



Il existe  $H \in D$ ,  $H' \in D'$  tels que  $(HH')$  soit orthogonale à  $D$  et à  $D'$ , et on a :  $d(D, D') = HH'$ .

On a :

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'}] &= [\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A}] \\ &= [\underbrace{\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AH}}_{=0} + [\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{HH'}] + [\underbrace{\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{H'A}}_{=0}] \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{u}') \cdot \overrightarrow{HH'}. \end{aligned}$$

Puisque  $\vec{u} \wedge \vec{u}'$  et  $\overrightarrow{HH'}$  sont colinéaires, il en résulte :

$$|[\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'}]| = \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\| \|\overrightarrow{HH'}\|$$

et donc :

$$d(D, D') = \|\overrightarrow{HH'}\| = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}.$$

Ici :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}' = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$[\vec{u}, \vec{u}', \vec{AA'}] = (\vec{u} \wedge \vec{u}') \cdot \vec{AA'} = 2 + 10 + 14 = 26,$$

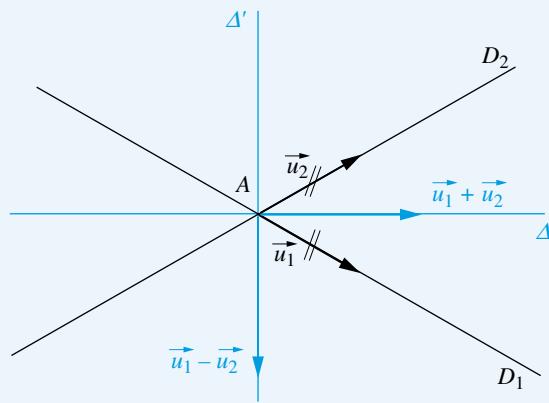
$$\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

On conclut :  $d(D, D') = \frac{26}{5\sqrt{3}}.$

**24.8** a) Il est clair que le point  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$  est sur  $D_1$  et sur  $D_2$ , donc  $D_1$  et  $D_2$  sont concourantes.

b) Un vecteur directeur  $\vec{u}_1$  de  $D_1$  est  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et un vecteur directeur de  $D_2$  est  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a :

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \|\vec{u}_2\|.$$



Les bissectrices  $\Delta$ ,  $\Delta'$  de  $D_1$  et  $D_2$  sont les droites passant par  $A$  et dirigées par  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ .

On a :

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En notant  $\Delta$  (resp.  $\Delta'$ ) la droite passant par  $A$  (resp.  $A'$ ) et dirigée par  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$  (resp.  $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ ), on a, pour tout point  $M(x, y, z)$  de  $\mathcal{E}_3$  :

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)) \\ &\iff \left( \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - 1 = 8\lambda \\ y + 4 = 8\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \right) \iff \begin{cases} x - 1 = 4z \\ y + 4 = 4z \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \in \Delta' &\iff (\exists \mu \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \mu(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)) \\ &\iff \left( \exists \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - 1 = 2\mu \\ y + 4 = -2\mu \\ z = 0 \end{cases} \right) \iff \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, les deux bissectrices de  $D_1$  et  $D_2$  ont pour équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x = 4z + 1 \\ y = 4z - 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

**24.9** Calculons les coordonnées des quatre sommets  $A, B, C, D$  du tétraèdre :

$$\begin{aligned} \bullet A \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ x - y + z = 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 3 \\ y + z = -3 \\ y - z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases} \\ \bullet B \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ -x + y + z = 6 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 4 \\ x + z = -4 \\ x - z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4 \\ x = 4 \\ z = -1 \end{cases} \\ \bullet C \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ -x + y + z = 6 \end{cases} &\iff \begin{cases} z = 5 \\ x + y = -5 \\ x - y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = 5 \end{cases} \\ \bullet D \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ -x + y + z = 6 \end{cases} &\iff \begin{cases} z = 5 \\ x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Le centre  $\Omega$  et le rayon  $R$  de la sphère  $S$  sont définis par :

$$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = R.$$

On a, en notant  $\Omega(x, y, z)$  :

$$\begin{aligned} \bullet \Omega A^2 = \Omega B^2 &\iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 \\ &= (x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 \\ &\iff -6x + 4y + 13 = 6x - 8y + 25 \\ &\iff 12x - 12y + 12 = 0 \iff x - y + 1 = 0 \\ \bullet \Omega A^2 = \Omega C^2 &\iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 \\ &= (x + 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 \\ &\iff -6x + 2z + 10 = 6x - 10y + 34 \\ &\iff 12x - 12y + 24 = 0 \iff x - z + 2 = 0 \\ \bullet \Omega A^2 = \Omega D^2 &\iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 \\ &= (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 \\ &\iff 4y + 2z + 5 = -8y - 10z + 41 \\ &\iff 12x + 12y - 36 = 0 \iff y + z - 3 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\Omega \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2. \end{cases}$$

Enfin :

$$R = \Omega A = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

## 24.10 Première méthode :

Une droite  $D$  convient si et seulement si  $D = P_1 \cap P_2$ , où  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) est le plan passant par  $A$  et contenant  $D_1$  (resp.  $D_2$ ).

- Un point de  $D_1$  est  $B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et un vecteur directeur de

$D_1$  est  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Une EC de  $P_1$  est donc :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P_1 \iff [\overrightarrow{B_1 M}, \overrightarrow{AB_1}, \vec{u}_1] = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 3 & 2 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -2x + y - (z-1) = 0$$

$$\iff 2x - y + z - 1 = 0.$$

- Un point de  $D_2$  est  $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et un vecteur directeur de  $D_2$

est  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Une EC de  $P_2$  est donc :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P_2 \iff [\overrightarrow{B_2 M}, \overrightarrow{AB_2}, \vec{u}_2] = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 3 & -2 \\ z+1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 6x + 3y - 5(z+1) = 0$$

$$\iff 6x + 3y - 5z - 5 = 0.$$

On conclut qu'il y a une droite et une seule convenant, la droite

$$D \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 6x + 3y - 5z - 5 = 0. \end{cases}$$

## Deuxième méthode :

La droite  $D$  cherchée n'est pas horizontale, puisque  $D$  rencontre  $D_1$  et  $D_2$  qui sont deux droites horizontales situées dans deux plans horizontaux distincts. Donc  $D$  admet un système d'équations cartésiennes du type :

$$D \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}, \quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

On a :

$$\bullet A \in D \iff \begin{cases} 2a + p = 1 \\ 2b + q = 3 \end{cases}$$

- $D \cap D_1 \neq \emptyset \iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = 1 \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \iff b + q = 2(a + p)$$

- $D \cap D_2 \neq \emptyset \iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} y = -2x \\ z = -1 \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \iff -b + q = -2(-a + p).$$

Ainsi :

$$D \text{ convient} \iff \begin{cases} 2a + p = 1 \\ 2b + q = 3 \\ b + q = 2a + 2p \\ -b + q = 2a - 2p \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + p = 1 \\ 2b + q = 3 \\ q = 2a \\ b = 2p \end{cases} \iff \begin{cases} q = 2a \\ b = 2p \\ 2a + p = 1 \\ 4p + 2a = 3 \end{cases}$$

$$\iff a = \frac{1}{6}, \quad p = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{4}{3}, \quad q = \frac{1}{3}.$$

Finalement, il y a une droite et une seule convenant :

$$D \begin{cases} x = \frac{1}{6}z + \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}. \end{cases}$$

**24.11** La droite cherchée  $D$  n'est pas horizontale, puisque  $D$  doit rencontrer  $D_1$  et  $D_2$  qui sont deux droites horizontales situées dans deux plans horizontaux distincts. La droite  $D$  admet donc un système d'équations cartésiennes du type

$$D \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}, \quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

On a :

- $D \cap D_1 \neq \emptyset \iff$

$$\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} z = 1 \\ y = x - 2 \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \iff b + q = a + p - 2$$

•  $D \cap D_2 \neq \emptyset \iff$

$$\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} z = 0 \\ y = 2x + 3 \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \iff q = 2p + 3$$

•  $D \cap D_3 \neq \emptyset \iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$

$$\begin{cases} z = -1 \\ y = -x + 1 \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \iff -b + q = -(-a + p) + 1$$

•  $\vec{u} \perp D \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \iff 2a + 4b - 3 = 0.$

Ainsi :

$$D \text{ convient} \iff \begin{cases} b + q = a + p - 2 \\ q = 2p + 3 \\ -b + q = a - p + 1 \\ 2a + 4b - 3 = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire de quatre équations à quatre inconnues donne :

$$a = 4, \quad p = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{5}{4}, \quad q = \frac{7}{2}.$$

On conclut qu'il y a une droite et une seule convenant :

$$D \begin{cases} x = 4z + \frac{1}{4} \\ y = -\frac{5}{4}z + \frac{7}{2}. \end{cases}$$

**24.12** En notant  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , on a  $A^2 = I_2$ .

Pour tout  $M(x,y,z)$  de  $\mathcal{A}_3$ , on a :

$$f(M) = M \iff x + y + z = 1,$$

donc l'ensemble des invariants de  $f$  est le plan  $P \mid x + y + z = 1$ .

D'autre part, pour tout  $\vec{u}(x,y,z)$  de  $\mathbb{R}^3$  :

$$f(\vec{u}) = -\vec{u} \iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -x. \end{cases}$$

Finalement,  $f$  est la symétrie par rapport au plan

$$P \mid x + y + z = 1, \text{ parallèlement à } \vec{D}' \begin{cases} y = 2x \\ z = -x. \end{cases}$$

**24.13**

Le centre  $\omega$  du cercle  $C \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 2 \end{cases}$  est  $\omega(0, 1, 0)$ , et l'axe de  $C$  est la droite d'équations cartésiennes  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

Le centre  $\Omega$  de la sphère  $S$  est sur la normale en  $\omega$

au plan de  $C$ , donc  $\Omega$  a des coordonnées  $\Omega(0, 1, \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On en déduit une équation cartésienne de  $S$  :

$$M(x,y,z) \in S \iff \Omega M^2 = \Omega A^2$$

$$\iff x^2 + (y - 1)^2 + (z - \lambda)^2 = 1^2 + 1^2 + \lambda^2.$$

La droite  $D$  est tangente à  $S$  si et seulement si l'équation aux  $z$  de  $D \cap S$  admet une racine double. Cette équation est :

$$(z + 4)^2 + (2z + 2)^2 + (z - \lambda)^2 = 2 + \lambda^2$$

$$\iff 6z^2 + (16 - 2\lambda)z + 18 = 0$$

$$\iff 3z^2 + (8 - \lambda)z + 9 = 0.$$

On a, en notant  $\Delta$  le discriminant de cette équation du second degré d'inconnue  $z$  :

$$\Delta = 0 \iff (8 - \lambda)^2 - 108 = 0 \iff 8 - \lambda = \pm\sqrt{108}$$

$$\iff \lambda = 8 \pm 6\sqrt{3}.$$

On conclut qu'il y a deux sphères et deux seulement convenant. Ces sphères ont pour équations cartésiennes :

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 2(8 + 6\varepsilon\sqrt{3}) - 2 = 0, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\},$$

ou encore :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 17 - 12\varepsilon\sqrt{3} = 0, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

**24.14**

Si  $D$  convient, puisque  $D$  rencontre  $D_2$  et  $D_3$  qui sont dans des plans horizontaux distincts, il est clair que  $D$  n'est pas horizontale (c'est-à-dire : non parallèle à  $xOy$ ), donc admet un SEC  $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}, (a,b,p,q) \in \mathbb{R}^4$ .

1)  $D \cap D_2 \neq \emptyset$

$$\iff \left( \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \right) \iff q = 1.$$

2)  $D \cap D_1 \neq \emptyset$

$$\iff \left( \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \right)$$

$$\iff \left( \exists z \in \mathbb{R}, \begin{cases} 1 = az + p \\ 0 = bz + q \end{cases} \right)$$

$$\iff \left( b \neq 0 \quad \text{et} \quad 1 = -\frac{a}{b} + p \right), \quad \text{car } q = 1$$

3)  $D \cap D_3 \neq \emptyset$

$$\iff \left( \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} z = 1 \\ x = 0 \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \right) \iff a + p = 0.$$

$$4) D \cap D_4 \neq \emptyset \iff \left( \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = -6z \\ y = -6z \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \right)$$

$$\iff \left( \exists z \in \mathbb{R}, \begin{cases} -6z = az + p \\ -6z = bz + q \end{cases} \right)$$

$$\iff (b + 6 \neq 0 \text{ et } a + 6 = p(b + 6)).$$

Il reste à résoudre le système d'équations  $q = 1$ ,  $b \neq 0$ ,  $p = 1 + \frac{a}{b}$ ,  $a + p = 0$ ,  $b \neq -6$ ,  $a + 6 = p(b + 6)$ . On obtient  $b^2 + b - 6 = 0$ ,  $b = 2$  ou  $-3$ , puis on déduit  $a$  et  $p$ . Finalement, il y a deux droites et deux seulement convenantes, celles ayant pour SEC :

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \\ y = 2z + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2} \\ y = -3z + 1. \end{cases}$$

**24.15** Notons  $P$  (resp.  $P'$ ) le plan contenant  $A$  (resp.  $A'$ ) et perpendiculaire à  $D$  (resp.  $D'$ ), et  $\Pi$  le plan médiateur de  $(A, A')$ . Pour qu'une sphère  $S$  soit tangente en  $A$  à  $D$  et tangente en  $A'$  à  $D'$ , il faut et il suffit que son centre  $\Omega$  soit le point d'intersection de  $P, P', \Pi$ , et que son rayon soit  $\Omega A$ .

Comme  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ , un vecteur directeur de  $D$  est  $\vec{u}(5, 1, 3)$ . De même, un vecteur directeur de  $D'$  est  $\vec{u}'(1, 4, -3)$ . On en déduit les EC de  $P$  et  $P'$  :

$$P \mid 5(x - 1) + (y - 2) + 3(z - 1) = 0,$$

$$P' \mid (x - 1) + 4(y + 1) - 3(z + 2) = 0.$$

Enfin :  $M(x, y, z) \in \Pi \iff AM = A'M$

$$\iff (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2$$

$$= (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2$$

$$\iff y + z = 0.$$

On en déduit  $\Omega$  par résolution de  $\begin{cases} 5x + y + 3z = 10 \\ x + 4y - 3z = 3 \\ y + z = 0 \end{cases}$  ;

$$\text{on obtient } \Omega\left(\frac{76}{37}, \frac{5}{37}, -\frac{5}{37}\right).$$

$$\text{On calcule : } \Omega A^2 = \frac{8046}{37^2}.$$

Finalement, une EC de la sphère cherchée est :

$$\left(x - \frac{76}{37}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{37}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{37}\right)^2 = \frac{8046}{37^2},$$

ou encore :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{152}{37}x - \frac{10}{37}y + \frac{10}{37}z - \frac{2220}{37^2} = 0.$$



## Plan

Les méthodes à retenir	385
Énoncés des exercices	388
Du mal à démarrer ?	390
Corrigés	392

## Thèmes abordés dans les exercices

- Tracé de la courbe représentative d'une fonction
- Tracé d'une courbe donnée par une représentation paramétrique
- Tracé d'une courbe donnée en polaires
- Reconnaître une courbe
- Calcul de l'abscisse curviligne, de la longueur, du rayon de courbure.

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Plan d'étude et méthodes pour le tracé d'une courbe d'équation  $y = f(x)$
- Plan d'étude et méthodes pour le tracé d'une courbe donnée par une représentation paramétrique  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$
- Plan d'étude et méthodes pour le tracé d'une courbe donnée en polaires par  $\rho = \rho(\theta)$
- Formule donnant l'abscisse curviligne
- Méthode ou formule donnant le rayon de courbure.

## Les méthodes à retenir

On abrège représentation paramétrique en RP, équation cartésienne en EC.

**Pour tracer une courbe  $\Gamma$  d'EC  
 $y = f(x)$**

Suivre le plan classique :

a) *Étude de  $f$*  :

- 1) Détermination de l'ensemble de définition de  $f$ , qui est souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles
- 2) Recherche d'éventuelles symétries ou propriétés géométriques de  $\Gamma$  :  $f$  est-elle paire, impaire, périodique ?
- 3) Étude aux bornes des intervalles
- 4) Étude de la dérivation de  $f$ , détermination des zéros de  $f'$  et du signe de  $f'(x)$
- 5) Tableau de variations à trois lignes  $x, f'(x), f(x)$  consignant les résultats précédents

**Pour tracer une courbe  $\Gamma$  définie par une RP**  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$

**Pour tracer une courbe donnée en polaires par  $\rho = \rho(\theta)$**

b) *Étude de  $\Gamma$  :*

- 1) Détermination des éventuelles branches infinies et de leur nature
- 2) Étude des points remarquables : points en lesquels  $f'$  n'est pas définie, point d'arrêt, demi-tangentes en un point anguleux...
- 3) Étude des points d'inflexion et de la concavité, si le contexte le permet
- 4) Tracé de  $\Gamma$ .

→ Exercices 25.1, 25.5.

Suivre le plan classique :

a) *Étude de  $x, y$  :*

- 1) Détermination des ensembles de définition de  $x, y$ , qui sont souvent des intervalles ou des réunions d'intervalles
- 2) Recherche d'éventuelles symétries ou propriétés géométriques de  $\Gamma$ , par la considération de changements de paramètre du genre  $t \mapsto -t$ ,  $t \mapsto \frac{1}{t}, \dots$  ce qui permet de déterminer un (ou des) intervalle(s) d'étude pour  $x, y$
- 3) Étude aux bornes des intervalles
- 4) Étude de la dérivation de  $x, y$ , détermination des zéros de  $x', y'$ , et des signes de  $x'(t), y'(t)$  en fonction de  $t$
- 5) Tableau de variations à cinq lignes  $t, x'(t), x(t), y(t), y'(t)$  consignant les résultats précédents

b) *Étude de  $\Gamma$  :*

- 1) Détermination des éventuelles branches infinies et de leur nature
- 2) Détermination des points stationnaires, de leur nature, et de l'allure de  $\Gamma$  au voisinage de ces points
- 3) Détermination des points multiples et de leurs tangentes
- 4) Étude des points remarquables : points en lesquels  $x'$  ou  $y'$  n'est pas défini, point d'arrêt, ...
- 5) Étude des points d'inflexion et de la concavité, si le contexte le permet
- 6) Tracé de  $\Gamma$ .

→ Exercices 25.2, 25.3, 25.10, 25.12, 25.13, 25.18 a).

Suivre le plan classique :

a) *Étude de  $\rho$  :*

- 1) Détermination de l'ensemble de définition de  $\rho$
- 2) Recherche d'éventuelles symétries ou propriétés géométriques de  $\Gamma$ , par la recherche de périodes, antipériodes, formules faisant intervenir  $\rho(\theta)$  et  $\rho(\alpha - \theta)$ , pour  $\alpha$  fixé à trouver
- 3) Valeurs de  $\theta$  annulant  $\rho$ , signe de  $\rho(\theta)$ , limites de  $\rho$  aux bornes des intervalles
- 4) Étude ( facultative ) des variations de  $\rho$
- 5) Tableau consignant les résultats précédents

b) Étude de  $\Gamma$  :

- 1) Est-ce que  $O \in \Gamma$ , et, si oui, détermination de la ou des tangentes en  $O$  à  $\Gamma$
- 2) Étude des éventuelles branches infinies (asymptotes, branches paraboliques, spirales, points asymptotes...)
- 3) Détermination des points multiples
- 4) Étude ( facultative ) de la concavité et des points d'inflexion
- 5) Tracé de  $\Gamma$ .

→ Exercices 25.8, 25.9, 25.14, 25.15.

### Pour reconnaître une courbe sur une représentation paramétrique

Les courbes que l'on doit savoir reconnaître sont les droites et les coniques.

Éliminer le paramètre pour obtenir une EC, puis reconnaître la courbe sur cette EC.

→ Exercice 25.6.

### Pour traduire que deux courbes $C, \Gamma$ sont tangentées

Écrire qu'il existe un point  $M \in C \cap \Gamma$  tel que les tangentes en  $M$  à  $C$  et à  $\Gamma$  soient confondues.

→ Exercice 25.7.

### Pour calculer l'abscisse curviligne $s$ en tout point $M$ d'une courbe $\Gamma$

- Si  $\Gamma$  est donnée par une RP  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , appliquer la formule du cours :

$$s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Calculer ensuite  $s$  par une primitivation.

→ Exercice 25.4

- Si  $\Gamma$  est donnée en polaires par  $\rho = \rho(\theta)$ , montrer :

$$s'(\theta) = \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}.$$

Calculer ensuite  $s$  par une primitivation.

→ Exercice 25.16.

### Pour calculer la longueur $\ell(\Gamma)$ d'une courbe

- Si  $\Gamma$  est donnée par une RP  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [a ; b]$ , appliquer la formule du cours :

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b s'(t) dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

→ Exercice 25.4

- Si  $\Gamma$  est donnée en polaires par  $\rho = \rho(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta_1 ; \theta_2]$ , montrer :

$$\ell(\Gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} s'(\theta) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta.$$

→ Exercice 25.17.

**Pour calculer  
le rayon de courbure  $R$   
en un point d'une courbe  $\Gamma$  donnée  
par une RP  $x = x(t), y = y(t)$**

Tenir compte d'éventuelles symétries.  
Vérifier que le résultat obtenu est  $\geq 0$  et que son ordre de grandeur est cohérent avec le tracé de  $\Gamma$ .

**Pour calculer  
le rayon de courbure  $R$   
en un point d'une courbe  $\Gamma$   
donnée en polaires par  $\rho = \rho(\theta)$**

On peut :

- ou bien calculer successivement

$$x', y', s'^2 = x'^2 + y'^2, s'(\geq 0), \tan \varphi = \frac{y'}{x'}, \varphi', R = \frac{s'}{\varphi'}$$

- ou bien appliquer directement la formule :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$$

- ou bien utiliser une formule de Frénet.

### → Exercice 25.11.

On peut :

- ou bien calculer successivement

$$\rho', s'^2 = \rho^2 + \rho'^2, s'(\geq 0), \tan V = \frac{\rho}{\rho'}, V', \varphi' = 1 + V', R = \frac{s'}{\varphi'}$$

- ou bien appliquer directement la formule :

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

## — Énoncés des exercices



### 25.1

#### Exemple de tracé de courbe d'équation $y = f(x)$

Tracer la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y = f(x)$ , où  $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$ .



### 25.2

#### Exemple de tracé d'une courbe donnée par une représentation paramétrique

Tracer la courbe  $\Gamma$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t^3 + 3t^2 - 1. \end{cases}$



### 25.3

#### Exemple de tracé d'une courbe donnée par une représentation paramétrique

Tracer la courbe  $\Gamma$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = \frac{\ln t}{t}. \end{cases}$



### 25.4

#### Exemple de calcul de l'abscisse curviligne en tout point d'un arc paramétré

a) Calculer l'abscisse curviligne en tout point  $M(t)$  de l'arc paramétré  $\Gamma$  défini par :

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = \frac{2}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}},$$

en prenant pour origine des abscisses curvilignes le point de  $\Gamma$  correspondant à  $t = 0$ .

b) En déduire la longueur  $L$  de la partie de  $\Gamma$  correspondant à  $t \in [2; 4]$ .

**25.5 Exemple de tracé de courbe d'équation  $y = f(x)$** 

Tracer la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y = f(x)$ , où :  $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ .

**25.6 Reconnaître une courbe sur une représentation paramétrique**

Reconnaître et tracer la courbe  $\Gamma$  de représentation paramétrique :

$$x = \frac{t}{1 - t^2}, \quad y = \frac{t^2}{1 - t^2}, \quad t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

**25.7 Deux courbes tangentes entre elles**

Déterminer une CNS sur  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour que les courbes représentatives  $C_\lambda$  de  $f_\lambda : x \mapsto e^x + \lambda$  et  $\Gamma$  de  $g : x \mapsto \ln x$  soient tangentes. On exprimera le résultat en faisant intervenir le réel  $\alpha$  tel que  $\alpha e^\alpha = 1$ .

**25.8 Exemple de tracé d'une courbe en polaires**

Tracer la courbe  $\Gamma$  définie en polaires par :  $\rho = \tan \theta$ .

**25.9 Exemple de tracé d'une courbe en polaires**

Tracer la courbe  $\Gamma$  définie en polaires par :  $\rho = \tan \frac{2\theta}{3}$ .

**25.10 Exemple d'étude d'un arc paramétré au voisinage d'un point stationnaire**

Étudier et tracer au voisinage de  $t = 1$  la courbe  $\Gamma$  de représentation paramétrique :

$$x(t) = \int_1^t \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du, \quad y(t) = \int_1^t \frac{u^2 - 1}{u^3 + 1} du.$$

**25.11 Exemple de calcul de rayon de courbure**

Calculer le rayon de courbure en tout point  $M(t)$  de l'arc paramétré  $\Gamma$  défini par :

$$x = \cos^2 t + \ln \sin t, \quad y = \sin t \cos t, \quad t \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

**25.12 Exemple de tracé d'une courbe donnée par une représentation paramétrique**

Tracer la courbe  $\Gamma$  de représentation paramétrique :

$$x(t) = 2t + t^2, \quad y(t) = 2t - \frac{1}{t^2}.$$

**25.13 Exemple de tracé d'une courbe donnée par une représentation paramétrique, points doubles**

Tracer la courbe  $\Gamma$  de représentation paramétrique :

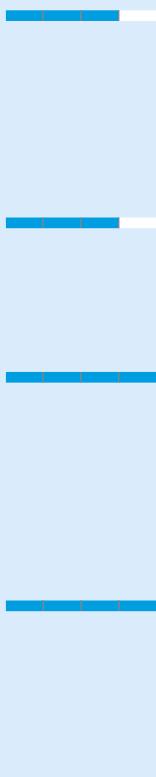
$$x(t) = \cos 3t, \quad y(t) = \sin 2t.$$

**25.14 Exemple de tracé d'une courbe en polaires**

Tracer la courbe  $\Gamma$  définie en polaires par :  $\rho = \frac{2 \cos^2 \theta}{2 \cos \theta - \sin \theta}$ .

**25.15 Exemple de tracé d'une courbe en polaires**

Tracer la courbe  $\Gamma$  définie en polaires par :  $\rho = \frac{1}{\cos \theta - \cos 2\theta}$ .



### 25.16 Exemple de calcul de l'abscisse curviligne en tout point d'une courbe donnée en coordonnées polaires

Calculer l'abscisse curviligne en tout point  $M(\theta)$  de la courbe  $\Gamma$  définie en coordonnées polaires par  $\rho = \text{th} \frac{\theta}{2}$ , en prenant comme origine des abscisses curvilignes le point de  $\Gamma$  correspondant à  $\theta = 0$ .

### 25.17 Deux courbes de même longueur

Montrer que l'ellipse  $E$  d'équation  $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  et la courbe  $\Gamma$  d'équation polaire  $\rho = a \sin 2\theta$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ) ont la même longueur.

### 25.18 Courbe orthoptique de l'astroïde

a) Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Tracer la courbe  $C$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ , appelée **astroïde**.

b) Déterminer et tracer la courbe  $\Gamma$  **orthoptique de  $C$** , c'est-à-dire l'ensemble des points d'où l'on peut mener (au moins) deux tangentes à  $C$  orthogonales.

### 25.19 Alignement de points sur une cubique

a) Tracer la courbe paramétrée  $C : \left( x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$ , appelée *strophoïde droite*

b)  $\alpha)$  Former une CNS portant sur les fonctions symétriques élémentaires de  $t_1, t_2, t_3$  pour que les points  $M(t_i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) de  $C$  soient alignés.

$\beta)$  On appelle *tangential* d'un point  $M(t)$  de  $C$  le point  $M(t')$  de  $C$  en lequel la tangente en  $M(t)$  à  $C$  recoupe  $C$ . Calculer  $t'$  en fonction de  $t$ . Montrer que les tangentiels de trois points alignés de  $C$  sont aussi alignés.

## Du mal à démarrer ?

25.1 Pour l'étude de la branche infinie lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ , former un développement asymptotique de  $f(x)$ .

25.2 Pour l'étude du point stationnaire, correspondant à  $t = 0$ , déterminer les vecteurs dérivés successifs  $\vec{V}_2, \vec{V}_3$ , par utilisation de développements limités en 0, déjà fournis par des polynômes.

25.3 Remarquer que le changement de  $t$  en  $\frac{1}{t}$  permet de faire apparaître une symétrie.

25.4 a) Calculer  $x'(t), y'(t), s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ , puis  $s(t)$  par un calcul de primitive.

b)  $L = s(4) - s(2)$ .

25.5 • Calculer  $f'(x)$  et étudier le signe de

$$\varphi(x) = 1 + e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}, \text{ par étude des variations de } \varphi.$$

• Pour étudier les branches infinies lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ , former un développement asymptotique de  $f(x)$ .

25.6 Éliminer  $t$  entre  $x$  et  $y$ , pour obtenir une équation cartésienne de  $\Gamma$  et reconnaître alors  $\Gamma$ .

25.7 Les courbes  $C_\lambda$  et  $\Gamma$  sont tangentées en un point d'abscisse  $x$  si et seulement si :  $\begin{cases} f_\lambda(x) = g(x) \\ f'_\lambda(x) = g'(x). \end{cases}$

Éliminer  $\lambda$  entre les deux équations.

**25.8** Remarquer que  $\rho$  est  $\pi$ -périodique et impaire.

Pour l'étude de la branche infinie lorsque  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , former l'ordonnée  $Y(\theta)$  du point courant de  $\Gamma$  dans le repère orthonormé direct  $(O; OX, OY)$  où  $(\widehat{OX}) = \frac{\pi}{2}$  [2π] :

$$Y(\theta) = \rho(\theta) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

**25.9** Remarquer que  $\rho$  est  $\frac{3\pi}{2}$ -périodique et impaire.

Pour l'étude de la branche infinie lorsque  $\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}$ , former l'ordonnée  $Y(\theta)$  du point courant de  $\Gamma$  dans le repère orthonormé direct  $(O; OX, OY)$  où  $(\widehat{OX}) = \frac{3\pi}{4}$  [2π] :

$Y(\theta) = \rho(\theta) \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)$ , et étudier la limite de  $Y(\theta)$ , en utilisant le changement de variable  $\alpha = \theta - \frac{3\pi}{4}$ .

**25.10** Calculer  $x'(t), y'(t)$ , puis former les  $DL_2(0)$  de  $x', y'$ , et en déduire les  $DL_3(0)$  de  $x, y$ .**25.11** Calculer  $x'(t), y'(t)$ , puis  $s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ .

D'autre part, calculer  $\tan(\varphi(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ , d'où  $\varphi(t)$  puis  $\varphi'(t)$ . Enfin :  $R(t) = \frac{s'(t)}{\varphi'(t)}$ .

**25.12** • Pour l'étude du point stationnaire, correspondant à  $t = -1$ , former des  $DL_3(-1)$  de  $x(t)$  et  $y(t)$ , en utilisant le changement de variable  $h = t + 1$ .

• Pour l'étude du point double, résoudre le système :

$$x(t) = x(u), \quad y(t) = y(u), \quad t \neq u,$$

en faisant intervenir la somme  $S = t + u$  et le produit  $P = tu$ .

• Pour l'étude de la branche infinie, lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ , déterminer  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$ . On peut préciser le tracé de  $\Gamma$  en cherchant une parabole asymptote  $\Pi$ , c'est-à-dire une parabole d'équation  $x = ay^2 + by + c$  où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  est à trouver tel que  $x(t) - (a(y(t))^2 + by(t) + c) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$ .

**25.13** Pour l'étude des points doubles, résoudre le système d'équations :  $x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2)$  d'inconnue  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ , avec, par exemple, à l'aide du graphique :  $t_1 \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right]$  et  $t_2 \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .**25.14** Pour l'étude de la branche infinie, lorsque  $\theta \rightarrow \theta_0$  où  $\theta_0 = \text{Arctan } 2$ , former l'ordonnée  $Y(\theta)$  du point courant de  $\Gamma$  dans le repère orthonormé direct  $(O; OX, OY)$  où  $(\widehat{OX}) = \theta_0$  [2π] :  $Y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$ , et utiliser le changement de variable  $\alpha = \theta - \theta_0$ , pour chercher la limite de  $Y(\theta)$  lorsque  $\theta \rightarrow \theta_0$ .**25.15** • Pour l'étude de la branche infinie, lorsque  $\theta \rightarrow \frac{2\pi}{3}$ , former l'ordonnée  $Y(\theta)$  du point courant de  $\Gamma$  dans le repère orthonormé direct  $(O; OX, OY)$  où  $(\widehat{OX}) = \frac{2\pi}{3}$  [2π] :

$$Y(\theta) = \rho(\theta) \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right),$$

et utiliser le changement de variable  $\alpha = \theta - \frac{2\pi}{3}$

pour chercher la limite de  $Y(\theta)$  lorsque  $\theta \rightarrow \frac{2\pi}{3}$ .

• Pour l'étude des points doubles, résoudre :

$$\rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta) \text{ ou } \rho(\theta + 2k\pi + \pi) = -\rho(\theta),$$

d'inconnue  $(k, \theta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ .

**25.16** Montrer qu'en polaires :  $s'(\theta) = \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}$ .

Ensuite, on peut primitiver pour déduire  $s(\theta)$ .

**25.17** Utiliser une représentation paramétrique de  $E$  pour exprimer la longueur  $L_1$  de  $E$  par une intégrale. D'autre part, en polaires,  $s'(\theta) = \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}$ , et exprimer la longueur  $L_2$  de  $\Gamma$  par une intégrale. Enfin, montrer que ces deux intégrales sont égales.**25.18** b) Former une équation cartésienne de la tangente  $T(t)$  en un point quelconque  $P(t)$  de  $C$ . Pour un point quelconque  $M(x, y)$  du plan, former l'équation d'inconnue  $t$  traduisant  $M \in T(t)$ . Cette équation admet deux solutions  $t, u$  d'où deux tangentes  $T(t)$  et  $T(u)$  à  $C$  et passant par  $M$ . Traduire  $T(t) \perp T(u)$ .**25.19** b) α) L'intersection de  $C$  et d'une droite d'équation  $ux + vy + h = 0$  se traduit par une équation du troisième degré en  $t$ . Faire intervenir les fonctions symétriques élémentaires  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  des trois solutions de cette équation.

On obtiendra la CNS :  $\sigma_2 = -1$ .

β) Calculer  $t'$  en fonction de  $t$  en appliquant la CNS précédente au triplet  $(t, t, t')$ , puis calculer la fonction symétrique élémentaire  $\sigma'_2$  de  $t'_1, t'_2, t'_3$ , et appliquer  $\alpha$  en réciproque.

# Corrigés des exercices

**25.1**

$f$  est définie, continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R} - \{0, 6\}$ ,

et :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 6\}, \quad f'(x) = \frac{x(x-4)}{\left(\sqrt[3]{x^2(x-6)}\right)^2},$$

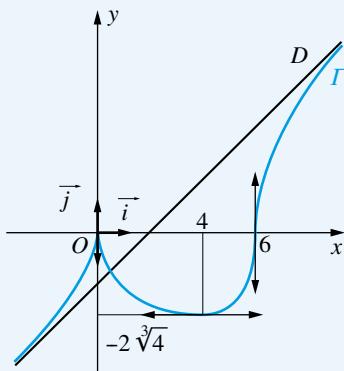
d'où le tableau de variations de  $f$ :

$x$	$-\infty$	0	4	6	$+\infty$
$f'(x)$	+	$+\infty$	-	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	0	$+\infty$

Au voisinage de  $\pm\infty$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= x \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}} \\ &= x \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{x} - \frac{1}{9} \left(\frac{6}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x - 2 - \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

donc  $\Gamma$  admet pour asymptote la droite  $D \mid y = x - 2$ , et, au voisinage de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ),  $\Gamma$  est au-dessous (resp. dessus) de  $D$ .



**25.2**

•  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$x'(t) = 2t, \quad y'(t) = 6t^2 + 6t = 6t(t+1).$$

Les limites de  $x$  et  $y$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , et les valeurs de  $x$  et  $y$  en  $-1$  et  $0$ , sont immédiates, d'où le tableau de variations :

$t$	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x'$	-	-	0	+
$x$	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\searrow$ -1	$\nearrow$ $+\infty$
$y$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\searrow$ -1	$\nearrow$ $+\infty$
$y'$	+	0	-	0

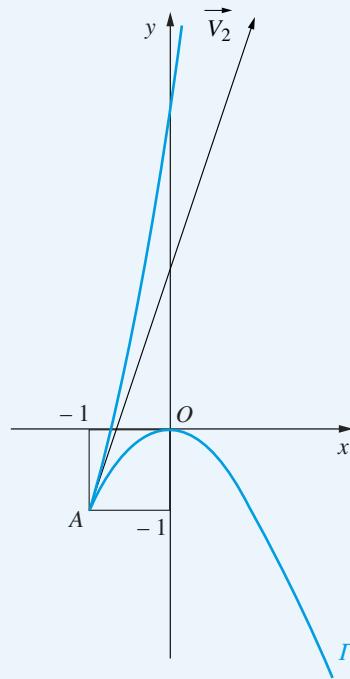
• Étude du point stationnaire

Le système d'équations  $\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$ , d'inconnue  $t \in \mathbb{R}$ , admet une solution et une seule,  $t = 0$ , donc  $\Gamma$  admet un point stationnaire et un seul  $A$ , correspondant à  $t = 0$ .

On a :  $x(0) = -1$ ,  $y(0) = -1$ .

Pour étudier l'allure de  $\Gamma$  au voisinage de  $t = 0$ , on effectue des développements limités en 0, qui sont ici immédiats, puisque  $x$  et  $y$  sont des polynômes :

$$\begin{cases} x(t) = -1 + t^2 \\ y(t) = -1 + 3t^2 + 2t^3. \end{cases}$$



Avec les notations du cours,  $\overrightarrow{V_k} = \frac{d^k M}{dt^k}(0)$ , on a donc  $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{0}$ ,  $\overrightarrow{V_2} = 2! \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{V_3} = 3! \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Ainsi, le plus petit entier  $p \geq 2$  tel que  $\overrightarrow{V_p} \neq \overrightarrow{0}$  est  $p = 2$ , et le plus petit entier  $q > p$  tel que  $(\overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$  est libre est  $q = 3$ .

On conclut que  $A$  est un point de rebroussement de première espèce et que la tangente en  $A$  à  $\Gamma$  est dirigée par  $\overrightarrow{V_2}$ .

#### • Étude des branches infinies

La courbe  $\Gamma$  admet deux branches infinies, lorsque  $t \rightarrow -\infty$  et lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

On a :  $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{2t^3}{t^2} = 2t \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ , donc  $\Gamma$  admet une branche parabolique de direction asymptotique  $y' = y$ .

### 25.3 • $\text{Def}(x) = \text{Def}(y) = ]0; +\infty[$ .

On remarque :

$$\forall t \in ]0; +\infty[, \left( x\left(\frac{1}{t}\right) = -y(t), y\left(\frac{1}{t}\right) = -x(t) \right),$$

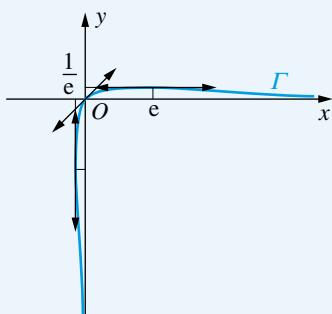
donc  $\Gamma$  admet la 2<sup>ème</sup> bissectrice pour axe de symétrie, et on peut restreindre l'étude à  $t \in [1; +\infty[$ .

• Les applications  $x, y$  sont dérivables sur  $[1; +\infty[$ , et :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \begin{cases} x'(t) = 1 + \ln t \\ y'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}, \end{cases}$$

d'où le tableau de variations :

$t$	1	$e$	$+\infty$
$x'$	+	+	
$x$	0	$e$	$+\infty$
$y$	0	$\frac{1}{e}$	0
$y'$	+	0	-



25.4 a) Les applications  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^1$  sur

$$\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[ \text{ et, pour tout } t \in \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[ :$$

$$x'(t) = 2t, \quad y'(t) = 2(2t+1)^{\frac{1}{2}}.$$

d'où, en notant  $s(t)$  l'abscisse curviligne en tout point de paramètre  $t$  de  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} (s'(t))^2 &= (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (2t)^2 + 4(2t+1)^2 \\ &= 4t^2 + 8t + 4 = 4(t+1)^2, \end{aligned}$$

puis, comme  $s'(t) \geq 0$  :  $s'(t) = 2(t+1)$ .

On en déduit  $s$  par primitivation, avec  $s(0) = 0$  par hypothèse de l'énoncé :  $\forall t \in \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ ,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t s'(u) du = \int_0^t 2(u+1) du = \left[ (u+1)^2 \right]_0^t \\ &= (t+1)^2 - 1 = t^2 + 2t. \end{aligned}$$

b) On a :  $L = s(4) - s(2) = 24 - 8 = 16$ .

### 25.5 $\text{Def}(f) = \mathbb{R}^*$ , $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2},$$

$$\text{où } \varphi(x) = 1 + e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}.$$

L'application  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi'(x) = -\frac{1+2x}{x^3} e^{\frac{1}{x}},$$

d'où le tableau de variations de  $\varphi$ , puis celui de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+	-
$\varphi(x)$	2	$1 - e^{-2}$	1	$+\infty$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	1	0
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Au voisinage de 0 :

- Comme  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ , on peut compléter  $f$  par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ .

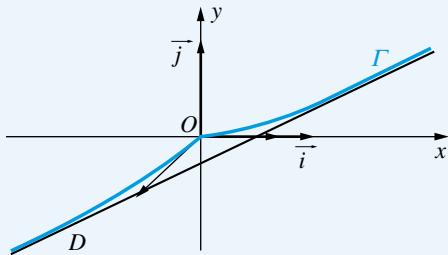
•  $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^-]{} 1$  et  $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(e^{\frac{1}{x}})^2} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 0$ ,

donc  $\Gamma$  admet  $O$  pour point anguleux.

**Au voisinage de  $\pm\infty$  :**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = x \left( 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right)^{-1} \\ &= \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{12x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right)^{-1} \\ &= \frac{x}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{12x^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x^3} \right) - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \end{aligned}$$

donc  $\Gamma$  admet pour asymptote  $D \mid y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$  et, aux voisinages de  $+\infty$  et de  $-\infty$ ,  $\Gamma$  est au-dessus de  $D$ .



**25.6** Les courbes que l'on doit savoir reconnaître sont les droites et les coniques. Essayons d'obtenir une équation cartésienne de  $\Gamma$

Soit  $M(x, y)$  un point du plan.

I) Supposons  $M \in \Gamma$ . Il existe alors  $t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$  tel que :

$$x = \frac{t}{1-t^2}, \quad y = \frac{t^2}{1-t^2}.$$

On a donc :  $y = tx$ .

• Si  $x \neq 0$ , alors  $t = \frac{y}{x}$ , puis :

$$x = \frac{t}{1-t^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}} = \frac{xy}{x^2-y^2},$$

d'où  $x(x^2 - y^2) = xy$ , puis, en simplifiant par  $x$  :  $x^2 - y^2 = y$ .

• Si  $x = 0$ , alors  $t = 0$ , puis  $y = 0$ , donc l'égalité  $x^2 - y^2 - y = 0$  est vérifiée.

2) Réciproquement, supposons  $x^2 - y^2 - y = 0$ .

• Si  $x \neq 0$ , notons  $t = \frac{y}{x}$ . On a alors :

$$x^2 - y^2 - y = 0 \iff x^2 - t^2x^2 = tx \iff (1-t^2)x = t.$$

$$* \text{ Si } t^2 \neq 1, \text{ alors } x = \frac{t}{1-t^2}, \text{ puis } y = tx = \frac{t^2}{1-t^2}.$$

\* Si  $t^2 = 1$ , alors  $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1$ ,  $y = x^2 - y^2 = 0$ , puis  $x^2 = 0$ ,  $x = 0$ . Le point  $(x = 0, y = 0)$  est par ailleurs obtenu pour  $t = 0$  dans la représentation paramétrique.

• Si  $x = 0$ , alors  $y^2 + y = 0$ ,  $y \in \{-1, 0\}$ .

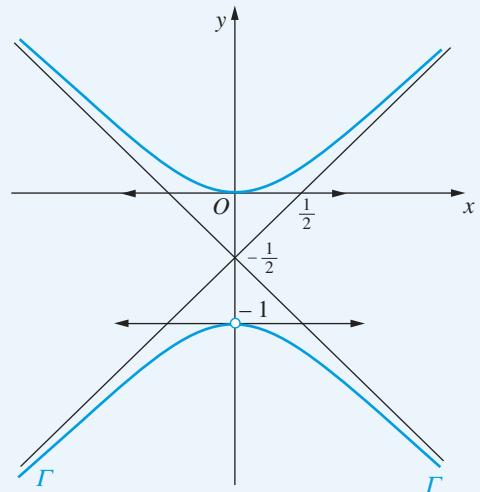
Le couple  $(x = 0, y = 0)$  est obtenu pour  $t = 0$ . Mais pour le couple  $(x = 0, y = -1)$ , il n'existe pas  $t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$  tel que  $x = \frac{t}{1-t^2}$ ,  $y = \frac{t^2}{1-t^2}$ . On peut cependant considérer que le couple  $(x = 0, y = -1)$  est obtenu pour  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Finalement,  $\Gamma$  est la courbe d'équation cartésienne  $x^2 - y^2 - y = 0$ , privée (éventuellement) du point  $(0, -1)$ .

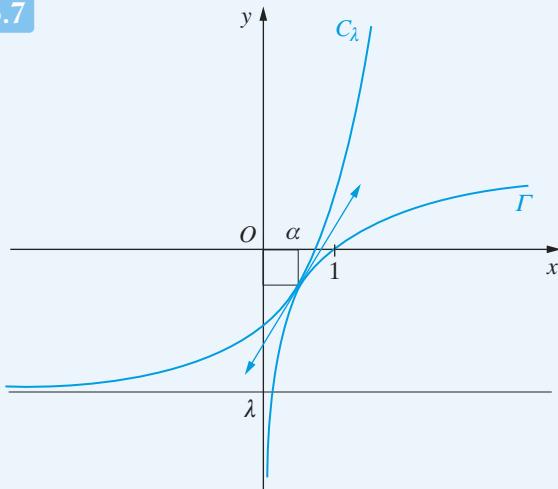
On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , en utilisant une mise sous forme canonique d'un trinôme :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - y = 0 &\iff x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0 \\ &\iff \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1. \end{aligned}$$

On conclut que  $\Gamma$  est une hyperbole équilatère, de centre  $O\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ , d'asymptotes d'équations  $y = -\frac{1}{2} \pm x$ , et passant, par exemple, par le point  $O$ .



25.7



L'équation aux  $x$  des points d'intersection de  $C_\lambda$  et  $\Gamma$  est :

$$e^x + \lambda = \ln x.$$

Les courbes  $C_\lambda$  et  $\Gamma$  sont tangentes si et seulement si cette équation admet (au moins) une solution double, c'est-à-dire si et seulement s'il existe  $x \in ]0; +\infty[$  tel que :

$$\begin{cases} e^x + \lambda = \ln x \\ e^x = \frac{1}{x}, \end{cases}$$

où la deuxième équation a été obtenue à partir de la première par dérivation.

On a, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :  $e^x = \frac{1}{x} \iff x e^x = 1$ .

L'application  $\varphi : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x e^x - 1$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  :  $\varphi'(x) = (x+1)e^x > 0$ , donc  $\varphi$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

De plus :  $\varphi(0) = -1 < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty > 0$ .

D'après le théorème de la bijection monotone, l'équation  $x e^x - 1 = 0$  admet une solution et une seule, notée  $\alpha$ .

On conclut que  $C_\lambda$  et  $\Gamma$  sont tangentes si et seulement si  $\lambda = -\alpha - \frac{1}{\alpha}$ , où  $\alpha \in ]0; +\infty[$  est le réel tel que  $\alpha e^\alpha = 1$ .

La calculatrice fournit des valeurs approchées de  $\alpha$  et  $\lambda$  :

$$\alpha \simeq 0,567, \lambda \simeq -2,330.$$

25.8 a) •  $\rho$  est  $\pi$ -périodique ; on fera donc varier  $\theta$  dans un intervalle de longueur  $\pi$ , puis on effectuera la symétrie par rapport à  $O$ . De plus,  $\rho$  est impaire ; on fera donc varier  $\theta$  dans  $[0; \frac{\pi}{2}]$ , puis on effectuera la symétrie par rapport à  $y'$ .

•  $\rho$  est dérivable sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  et :

$$\forall \theta \in [0; \frac{\pi}{2}], \quad \rho'(\theta) = 1 + \tan^2 \theta > 0.$$

$\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\rho'(\theta)$	+	
$\rho(\theta)$	0	$+\infty$

• Puisque  $\rho(0) = 0$  et que  $\rho$  est continue en 0,  $C$  passe par  $O$  et la tangente en  $O$  à  $C$  est  $x'x$ .

• **Branche infinie**  $\left( \theta \rightarrow \left( \frac{\pi}{2} \right)^- \right)$  :

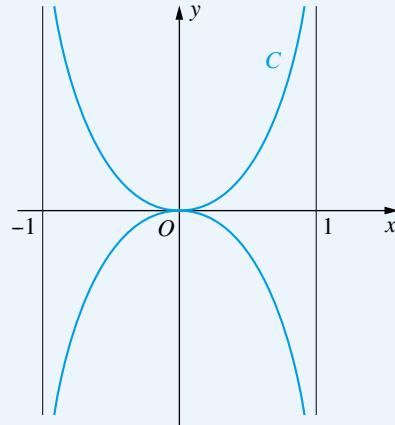
On calcule l'ordonnée  $Y(\theta)$  d'un point de  $C$ , dans le repère orthonormé direct  $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$  défini par

$$\Rightarrow \left( \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] :$$

$$Y(\theta) = \rho(\theta) \sin \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) = -\rho(\theta) \cos \theta = -\sin \theta.$$

Comme  $Y(\theta) \xrightarrow[\theta \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-]{} (-1)^+$ ,  $C$  admet pour asymptote la droite

d'équation  $Y = -1$  dans le repère  $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ .



25.9 •  $\rho$  est  $\frac{3\pi}{2}$ -périodique et impaire ; on fera donc varier  $\theta$  dans  $[0; \frac{3\pi}{4}]$ , puis on effectuera la symétrie par rapport à  $y'y$ , puis des rotations (trois) de centre  $O$  et d'angle  $\frac{3\pi}{2}$   $[2\pi]$ .

•  $\rho$  est dérivable sur  $[0; \frac{3\pi}{4}]$  et :

$$\rho'(\theta) = \frac{2}{3} \left( 1 + \tan^2 \frac{2\theta}{3} \right) > 0.$$

$\theta$	0	$3\pi/4$
$\rho'(\theta)$	+	
$\rho(\theta)$	0	$+ \infty$

• Étude en  $\frac{3\pi}{4}$  :

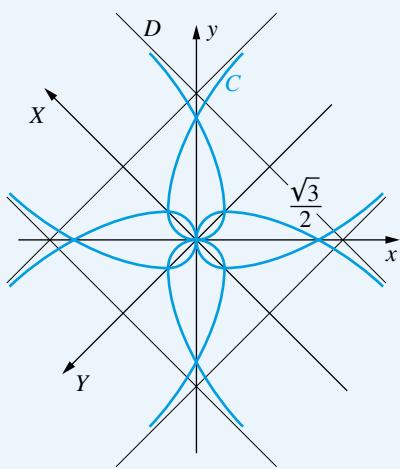
L'ordonnée  $Y(\theta)$  d'un point de  $C$  dans le repère orthonormé direct  $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ , défini par  $(\widehat{\overrightarrow{OX}}, \widehat{\overrightarrow{OY}}) = \frac{3\pi}{4}$  [2π], est donnée par :

$$Y(\theta) = \rho(\theta) \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right).$$

À l'aide du changement de variable  $\alpha = \theta - \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} 0$ , on a :

$$\begin{aligned} Y(\theta) &= \tan\left(\frac{2}{3}\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)\right) \sin \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\tan \frac{2\alpha}{3}} \\ &= -\frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + o(\alpha^3)}{\frac{2\alpha}{3} + \frac{27\alpha^3}{81} + o(\alpha^3)} = -\frac{3}{2} + \frac{17}{36}\alpha^2 + o(\alpha^2). \end{aligned}$$

Donc  $C$  admet pour asymptote la droite  $D$  d'équation  $Y = -\frac{3}{2}$  dans  $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$  et, quand  $\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-$ ,  $C$  est au-dessus de  $D$ .



**25.10** Les applications  $x, y$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $] -1 ; +\infty[$ , et, pour tout  $t \in ] -1 ; +\infty[$  :

$$x'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3 + 1}.$$

Comme  $x'(1) = 0$  et  $y'(1) = 0$ , le point de paramètre  $t = 1$  est un point stationnaire de  $\Gamma$ . De plus :  $x(1) = 0, y(1) = 0$ .

Pour étudier l'allure de  $\Gamma$  au voisinage de 1, on cherche, avec les notations du cours, le plus petit entier  $p \geq 2$  tel que  $\overrightarrow{V_p} \neq \overrightarrow{0}$  et le plus petit entier  $q > p$  tel que  $(\overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$  soit

libre, où on a noté  $\overrightarrow{V_k} = \frac{d^k M}{dt^k}(1)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , et où  $M(x(t), y(t))$  est le point courant de  $\Gamma$ .

À cet effet, on forme des  $DL(1)$  de  $x$  et  $y$ . Notons  $h = t - 1$ , de sorte que  $t = 1 + h$  et  $h \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 0$ .

Commençons par former les  $DL_2(1)$  de  $x'$  et  $y'$  :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h)^2 + 1} = \frac{2h + h^2}{2 + 2h + h^2} \\ &= \left(h + \frac{h^2}{2}\right)\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{-1} \\ &= \left(h + \frac{h^2}{2}\right)\left(1 + h + o(h)\right)^{-1} \\ &= \left(h + \frac{h^2}{2}\right)\left(1 - h + o(h)\right) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2), \end{aligned}$$

d'où, par primitivation d'un  $DL$  pour une fonction de classe  $C^\infty$  et puisque  $x(0) = 0$  :

$$x(t) = \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3).$$

De même :

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{t^2 - 1}{t^3 + 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h)^3 + 1} = \frac{2h + h^2}{2 + 3h + 3h^2 + h^3} \\ &= \left(h + \frac{h^2}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{2}h + \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3\right)^{-1} \\ &= \left(h + \frac{h^2}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{2}h + o(h)\right)^{-1} \\ &= \left(h + \frac{h^2}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}h + o(h)\right) = h - h^2 + o(h^2), \end{aligned}$$

puis :

$$y(t) = \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} + o(h^3).$$

Ainsi :

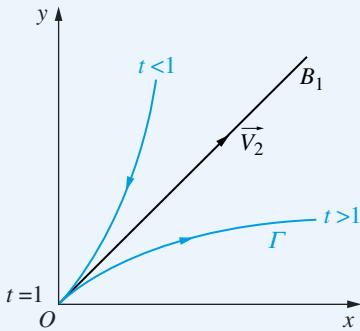
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}h^3 + o(h^3) \\ y(t) = \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{3}h^3 + o(h^3), \end{cases}$$

d'où :  $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$ , donc  $p = 2$ ,

puis  $\overrightarrow{V_3} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix}$  non colinéaire à  $\overrightarrow{V_2}$ , donc  $q = 3$ .

Puisque  $p$  est pair et que  $q$  est impair, le point  $O$  de  $\Gamma$  est un point de rebroussement de première espèce. De plus, la tangente en  $O$  à  $\Gamma$  est dirigée par  $\vec{V}_2$ , donc est la première bissectrice  $B_1$  du repère.

Enfin :  $y(t) - x(t) = -\frac{1}{6}h^3 + o(h^3)$ , donc, si  $h < 0$  (resp.  $h > 0$ ), on a  $y(t) - x(t) > 0$  (resp.  $< 0$ ), donc la partie de  $\Gamma$  correspondant à  $t < 1$  (resp.  $t > 1$ ) est au-dessus (resp. dessous) de  $B_1$ .



**25.11** Les applications  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^1$  sur  $I = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$ , et, pour tout  $t \in I$  :

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2 \cos t \sin t + \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\cos t(1 - 2\sin^2 t)}{\sin t} \\ &= \frac{\cos t \cos 2t}{\sin t}, \\ y'(t) &= \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} (s'(t))^2 &= (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \frac{\cos^2 t \cos^2 2t}{\sin^2 t} + \cos^2 2t \\ &= \frac{\cos^2 2t}{\sin^2 t}. \end{aligned}$$

Comme  $t \in I = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$ , on a  $2t \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ , donc  $\cos 2t < 0$ , et d'autre part,  $\sin t > 0$ , d'où :

$$s'(t) = \sqrt{\frac{\cos^2 2t}{\sin^2 t}} = -\frac{\cos 2t}{\sin t}.$$

D'autre part :

$$\tan(\varphi(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t,$$

donc  $\varphi(t) \equiv t$   $[\pi]$ , puis  $\varphi'(t) = 1$ .

On conclut :

$$R(t) = \frac{s'(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{\cos 2t}{\sin t}.$$

### 25.12

- $x$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :  $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = 2 + 2t$
- $y$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  et :  $\forall t \in \mathbb{R}^*, y'(t) = 2 + \frac{2}{t^3}$ .

$t$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$x'$	-	0	+	
$x$	$+\infty$			$+\infty$
$y$		$-1$	$0$	
$y'$	$+\infty$		$+\infty$	

- $\Gamma$  admet un point non régulier et un seul, correspondant à  $t = -1$ , et qui est  $A(-1, -3)$ .

En notant  $h = t + 1 \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} 0$ , on obtient des  $DL_3(-1)$  de  $x$  et  $y$  :

$$\begin{aligned} x(t) &= -1 + h^2, \\ y(t) &= -2 + 2h - (1 - h)^{-2} \\ &= -2 + 2h - (1 + 2h + 3h^2 + 4h^3 + o(h^3)) \\ &= -3 - 3h^2 - 4h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Taylor-Young, on en déduit, en notant  $\vec{V}_k = \frac{d^k \vec{M}}{dt^k}(-1)$  :

$$\vec{V}_1 = (0, 0), \quad \vec{V}_2 = 2!(1, -3), \quad \vec{V}_3 = 3!(0, -4).$$

Avec les notations du cours,  $p = 2$ ,  $q = 3$ , donc  $A$  est un point de rebroussement de 1<sup>ère</sup> espèce, et la tangente en  $A$  est dirigée par  $\vec{V}_2$ .

#### • Point double :

Considérons le système d'équations (S)  $\begin{cases} x(t) = x(u) \\ y(t) = y(u), \\ t \neq u \end{cases}$

d'inconnue  $(t, u) \in (\mathbb{R}^*)^2$ .

En notant  $S = t + u$ ,  $P = tu$ , on a :

$$(S) \iff \begin{cases} 2(t - u) + (t^2 - u^2) = 0 \\ 2(t - u) + \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{t^2}\right) = 0 \\ t \neq u \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2 + t + u = 0 \\ 2 + \frac{t + u}{t^2 u^2} = 0 \\ t \neq u \end{cases} \iff \begin{cases} S = -2 \\ P^2 = 1 \\ t \neq u \end{cases}$$

•  $\begin{cases} S = -2 \\ P = 1 \end{cases}$  :  $t, u$  sont solutions de  $X^2 + 2X + 1 = 0$ , donc  $t = u = -1$ , exclu (on retrouve ici le point de rebroussement de  $\Gamma$ ).

•  $\begin{cases} S = -2 \\ P = -1 \end{cases}$  :  $t, u$  sont solutions de  $X^2 + 2X - 1 = 0$ , donc  $t = -1 - \sqrt{2}$ ,  $u = -1 + \sqrt{2}$  (à l'ordre près).

Pour calculer les coordonnées de ce point double, on peut remarquer :

$$x(t) = x(u) = \frac{1}{2}(x(t) + x(u)) = \frac{1}{2}(2(t+u) + (t^2 + u^2))$$

$$= S + \frac{1}{2}(S^2 - 2P) = 1,$$

$$\begin{aligned} y(t) = y(u) &= \frac{1}{2}(y(t) + y(u)) = (t+u) - \frac{1}{2} \frac{t^2 + u^2}{t^2 u^2} \\ &= S - \frac{S^2 - 2P}{2P^2} = -5. \end{aligned}$$

**Étude au voisinage de  $\pm\infty$  :**

$$\text{On a : } \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2t - \frac{1}{t^2}}{2t + t^2} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{2}{t} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc  $\Gamma$  admet  $(x'x)$  comme direction asymptotique, mais sans asymptote.

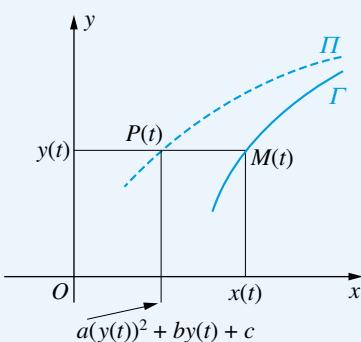
Cherchons une éventuelle parabole asymptote à  $\Gamma$ , c'est-à-dire une parabole  $\Pi$  d'équation  $x = ay^2 + by + c$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , telle que, lorsqu'on coupe  $\Gamma$  et  $\Pi$  par une droite parallèle à  $(x'x)$ , la distance entre les deux points d'intersection tende vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $\pm\infty$ .

À cet effet, pour  $t$  fixé, considérons le point  $M(t)$  de  $\Gamma$  de coordonnées  $(x(t), y(t))$  et le point  $P(t)$  de  $\Pi$  situé sur la même horizontale que  $M(t)$ ,

c'est-à-dire  $P(t) \left( a(y(t))^2 + by(t) + c, y(t) \right)$ ,

et notons  $\delta(t) = \overline{PM} = x(t) - (a(y(t))^2 + by(t) + c)$ .

On a :



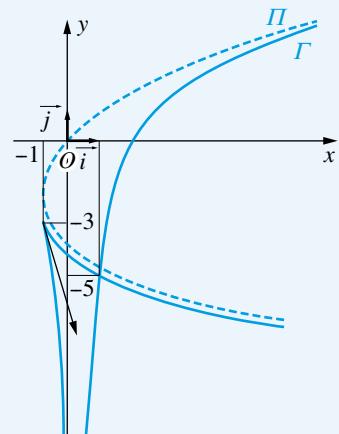
$$\begin{aligned} \delta(t) &= 2t + t^2 - \left( a \left( 2t - \frac{1}{t^2} \right)^2 + b \left( 2t - \frac{1}{t^2} \right) + c \right) \\ &= 2t + t^2 - \left( 4at^2 + 2bt + c - \frac{4a}{t} - \frac{b}{t^2} + \frac{a}{t^4} \right) \\ &= (1 - 4a)t^2 + (2 - 2b)t - c + \frac{4a}{t} + \frac{b}{t^2} - \frac{a}{t^4}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\delta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0 \iff \begin{cases} 1 - 4a = 0 \\ 2 - 2b = 0 \\ -c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}.$$

La parabole  $\Pi$  d'équation  $x = \frac{1}{4}y^2 + y$  est donc asymptote à  $\Gamma$ .

De plus,  $\delta(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{4t^4} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ , donc, lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (resp.  $-\infty$ ),  $\Gamma$  est à droite (resp. à gauche) de  $\Pi$ .



### 25.13 • Def $(x) = \text{Def } (y) = \mathbb{R}$ .

•  $x$  est  $\frac{2\pi}{3}$ -périodique,  $y$  est  $\pi$ -périodique ; une période commune à  $x$  et  $y$  est  $2\pi$ , d'où une étude sur un intervalle de longueur  $2\pi$  pour obtenir toute la courbe.

•  $x$  est paire et  $y$  est impaire ; on fera donc varier  $t$  dans  $[0; \pi]$ , puis on effectuera la symétrie par rapport à  $x'x$ .

•  $\forall t \in [0; \pi]$ ,  $(x(\pi - t) = -x(t) \text{ et } y(\pi - t) = -y(t))$ .

On fera donc varier  $t$  dans  $[0; \frac{\pi}{2}]$ , puis on effectuera la symétrie par rapport à  $O$ .

•  $x$  et  $y$  sont dérивables sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  et :

$$\forall t \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right], \quad (x'(t) = -3 \sin 3t, \quad y'(t) = 2 \cos 2t).$$

$t$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'$	0	-	-	0
$x$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0
$y$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$y'$	+	0	-	-

### Points doubles

Pour  $(t_1, t_2) \in ]-\pi; \pi]^2$  tel que  $t_1 < t_2$ , on a :

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 3t_2 = 3t_1 [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3t_2 = -3t_1 [2\pi] \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2t_2 = 2t_1 [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2t_2 = \pi - 2t_1 [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t_2 = t_1 \left[ \frac{2\pi}{3} \right] \\ \text{ou} \\ t_2 = -t_1 \left[ \frac{2\pi}{3} \right] \end{cases} \text{ et } \begin{cases} t_2 = t_1 [\pi] \\ \text{ou} \\ t_2 = \frac{\pi}{2} - t_1 [\pi] \end{cases}.$$

L'obtention de certains points doubles (ceux correspondants aux points d'intersection avec  $x'x$  et  $y'y$ ) est immédiate, par exemple pour :  $t_1 = -\frac{5\pi}{6}$ ,  $t_2 = \frac{\pi}{6}$ .

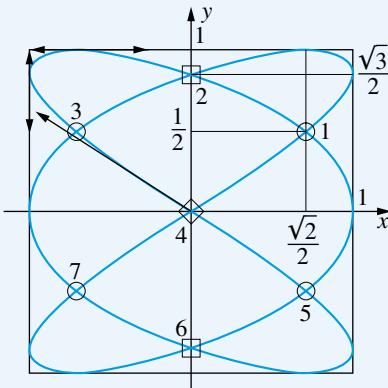
Graphiquement, il y a un point double unique dans le 1<sup>er</sup> quadrant ouvert, correspondant à un couple  $(t_1, t_2)$  tel que :  $-\frac{5\pi}{6} < t_1 < -\frac{\pi}{2}$  et  $0 < t_2 < \frac{\pi}{4}$ . On résout alors le système de congruences avec ces inégalités supplémentaires :

$$\begin{cases} t_2 = t_1 \left[ \frac{2\pi}{3} \right] \\ \text{ou} \\ t_2 = -t_1 \left[ \frac{2\pi}{3} \right] \end{cases} \text{ et } \begin{cases} t_2 = t_1 [\pi] \\ \text{ou} \\ t_2 = \frac{\pi}{2} - t_1 [\pi] \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} -\frac{5\pi}{6} < t_1 < -\frac{\pi}{2} \\ 0 < t_2 < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{5\pi}{6} < t_1 < -\frac{\pi}{2} \\ 0 < t_2 < \frac{\pi}{4} \\ t_2 = -t_1 - \frac{2\pi}{3} \\ t_2 = t_1 + \pi \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = -\frac{7\pi}{12} \\ t_2 = \frac{\pi}{12} \end{cases},$$

d'où les coordonnées de ce point double :  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ .



**25.14** •  $\rho$  est  $2\pi$ -périodique et, pour tout  $\theta$ ,  $\rho(\pi + \theta) = -\rho(\theta)$  ; on fera donc varier  $\theta$  dans  $[0; \pi]$  pour obtenir la courbe.

• Le dénominateur de  $\rho(\theta)$  s'annule (dans  $[0; \pi]$ ) pour  $\theta = \theta_0$ , où  $\theta_0 = \arctan 2$ .

•  $\rho$  est dérivable et :

$$\rho'(\theta) = \frac{-4 \cos \theta \sin \theta (2 \cos \theta - \sin \theta) + 2 \cos^2 \theta (2 \sin \theta + \cos \theta)}{(2 \cos \theta - \sin \theta)^2}$$

$$= \frac{\cos \theta (3 - \cos 2\theta - 2 \sin 2\theta)}{(2 \cos \theta - \sin \theta)^2},$$

qui est du signe de  $\cos \theta$ , puisque  $3 - \cos 2\theta - 2 \sin 2\theta > 0$ .

$\theta$	0	$\theta_0$	$\pi/2$	$\pi$
$\rho'(\theta)$	+		+	0 -
$\rho(\theta)$	1 ↗	$+\infty$	-∞ ↗	-1 ↘

• **Branche infinie,  $\theta \rightarrow \theta_0$  :**

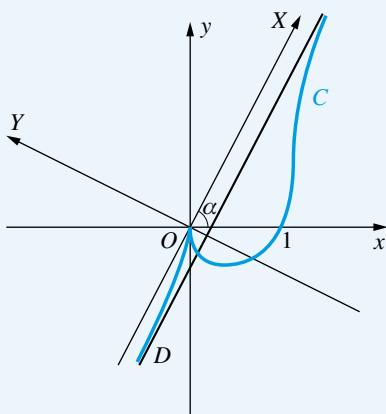
L'ordonnée  $Y(\theta)$  d'un point de  $C$  dans le repère orthonormé direct  $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ , défini par  $\varphi(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}) = \theta_0 [2\pi]$ , est donnée par :

$$Y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \frac{2 \cos \theta}{2 - \tan \theta} \sin(\theta - \theta_0).$$

En notant  $\alpha = \theta - \theta_0 \xrightarrow[\theta \rightarrow \theta_0]{} 0$ , on a :

$$\begin{aligned} Y(\theta) &= \frac{2 \cos(\theta_0 + \alpha)}{2 - \tan(\theta_0 + \alpha)} \sin \alpha \\ &= \frac{2(\cos \theta_0 \cos \alpha - \sin \theta_0 \sin \alpha) \sin \alpha}{2 - \frac{2 + \tan \alpha}{1 - 2 \tan \alpha}} \\ &= -\frac{2}{5} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \alpha - \frac{2}{\sqrt{5}} \sin \alpha \right) (1 - 2 \tan \alpha) \cos \alpha \\ &= -\frac{2}{5} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \alpha + o(\alpha) \right) (1 - 2\alpha + o(\alpha)) \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{25} + \frac{8\sqrt{5}}{25} \alpha + o(\alpha) \xrightarrow[\theta \rightarrow \theta_0]{} -\frac{2\sqrt{5}}{25}. \end{aligned}$$

Donc  $C$  admet pour asymptote la droite  $D$  d'équation  $Y = -\frac{2\sqrt{3}}{25}$  dans le repère  $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ , et, quand  $\theta \rightarrow \theta_0^+$  (resp.  $\theta_0^-$ ),  $C$  se trouve au-dessus (resp. dessous) de  $D$ , dans le repère  $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ .



- 25.15**
- $\rho$  est  $2\pi$ -périodique et paire ; on fera donc varier  $\theta$  dans  $[0; \pi]$ , puis on effectuera la symétrie par rapport à  $x'x$ .
  - Pour tout  $\theta$  de  $[0; \pi]$  :

$$\cos \theta - \cos 2\theta = 0 \iff \begin{cases} 2\theta = \theta [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2\theta = -\theta [2\pi] \end{cases} \iff \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

- $\rho$  est dérivable sur  $[0; \pi] - \left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$  et :

$$\rho'(\theta) = \frac{\sin \theta(1 - 4 \cos \theta)}{(\cos \theta - \cos 2\theta)^2}.$$

$\theta$	0	Arccos 1/4	$2\pi/3$	$\pi$
$\rho'(\theta)$	-	0	+	
$\rho(\theta)$	$+\infty$	$8/9$	$+\infty$	$-1/2$

#### Étude en 0 :

On a :

$$\begin{aligned} y(\theta) &= \rho(\theta) \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cos 2\theta} \\ &= \frac{\theta + o(\theta)}{\frac{3}{2}\theta^2 + o(\theta^2)} \underset{\theta \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{3\theta} \underset{\theta \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty, \end{aligned}$$

donc  $C$  admet une branche parabolique de direction asymptotique  $(x'x)$ .

#### Étude en $\frac{2\pi}{3}$ :

Dans le repère orthonormé direct  $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$  défini par  $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ , l'ordonnée  $Y(\theta)$  d'un point de  $C$  est donnée par :  $Y(\theta) = \rho(\theta) \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$ .

En notant  $\alpha = \theta - \frac{2\pi}{3} \xrightarrow[\theta \rightarrow \frac{2\pi}{3}]{ } 0$ , on a :

$$\begin{aligned} Y(\theta) &= \frac{\sin \alpha}{\cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) - \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2\alpha\right)} \\ &= \frac{\sin \alpha}{-\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha} \\ &= \frac{\alpha + o(\alpha^2)}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{3}{4}\alpha^2 + o(\alpha^2)} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{9}\alpha + o(\alpha). \end{aligned}$$

Donc  $C$  admet pour asymptote la droite  $D$  d'équation  $Y = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$  dans le repère  $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ , et, quand  $\theta \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+$  (resp.  $\frac{2\pi}{3}^-$ ),  $C$  est au-dessus (resp. dessous) de  $D$ , dans le repère  $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ .

#### Points doubles :

Les éventuels points doubles sont obtenus en résolvant les deux équations :

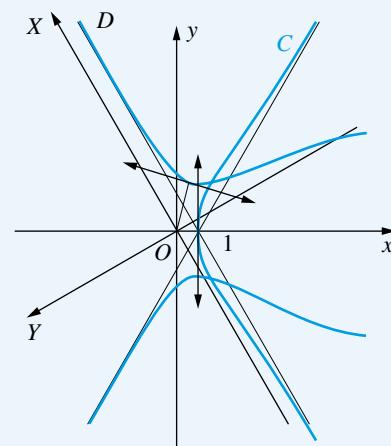
$$\rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta) \text{ ou } \rho(\theta + 2k\pi + \pi) = -\rho(\theta),$$

d'inconnue  $(\theta, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ .

Pour  $\theta \in [-\pi; 0]$ , on a :

$$\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$$

$$\iff \cos 2\theta = 0 \iff \left(\theta = -\frac{3\pi}{4} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{4}\right).$$



Donc  $C$  admet deux points doubles, symétriques par rapport à  $x'x$  ; celui qui est situé dans le premier quadrant correspond à  $\theta = -\frac{3\pi}{4}$  et à  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

**25.16** Soit  $C$  une courbe d'équation polaire  $\rho = \rho(\theta)$ . Alors  $C$  admet la représentation paramétrique  $\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases}$ , d'où, avec des hypothèses de régularité :

$$\begin{cases} x'(\theta) = -\rho(\theta) \sin \theta + \rho'(\theta) \cos \theta \\ y'(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta + \rho'(\theta) \sin \theta \end{cases},$$

et donc :

$$s'(\theta) = (x'^2(\theta) + y'^2(\theta))^{\frac{1}{2}} = (\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta))^{\frac{1}{2}}.$$

On peut ainsi retenir que, pour une courbe en coordonnées polaires, l'abscisse curviligne est donnée par la formule :

$$s'(\theta) = (\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta))^{\frac{1}{2}}.$$

Dans notre exemple :

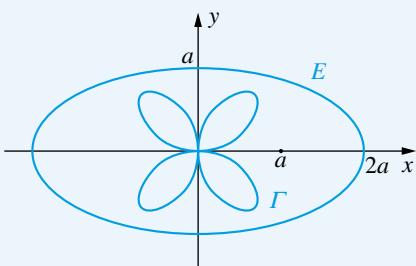
$$s'(\theta) = \left( \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} + \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

d'où, en choisissant  $O$  (correspondant à  $\theta = 0$ ) comme origine des abscisses curvilignes :

$$\begin{aligned} s(\theta) &= \int_0^\theta \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{th}^2 \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi \\ &= \int_0^\theta \left( 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{th}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right) d\varphi \\ &= \left[ \varphi - \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \right]_0^\theta = \theta - \operatorname{th} \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

**25.17** 1) Une représentation paramétrique de  $E$  est  $\begin{cases} x = 2a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$ , d'où la longueur  $L_1$  de  $E$  :

$$\begin{aligned} L_1 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$



2) La longueur  $L_2$  de  $\Gamma$  est, puisque  $\Gamma$  est symétrique par rapport à  $x'x$ , à  $y'y$  et à la première bissectrice :

$$\begin{aligned} L_2 &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta \\ &= 8a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2 2\theta + 4 \cos^2 2\theta} d\theta \\ &\stackrel{[u=2\theta]}{=} 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 u + 4 \cos^2 u} du \\ &\stackrel[t=\frac{\pi}{2}-u]{=} 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t + 4 \sin^2 t} dt \\ &= L_1. \end{aligned}$$

**25.18** a) •  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques ; on obtient donc toute la courbe  $C$  en faisant varier  $t$  dans un intervalle de longueur  $2\pi$ .

•  $x$  est paire et  $y$  est impaire ; on fera donc varier  $t$  dans  $[0; \pi]$ , puis on effectuera la symétrie par rapport à  $x'x$ .

• Comme :

$$\forall t \in [0; \pi], (x(\pi - t) = -x(t), y(\pi - t) = y(t)),$$

on fera varier  $t$  dans  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , puis on effectuera la symétrie par rapport à  $y'y$ .

• Enfin, puisque :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], (x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t), y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)),$$

on fera varier  $t$  dans  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ , puis on effectuera la symétrie par rapport à la 1<sup>ère</sup> bissectrice.

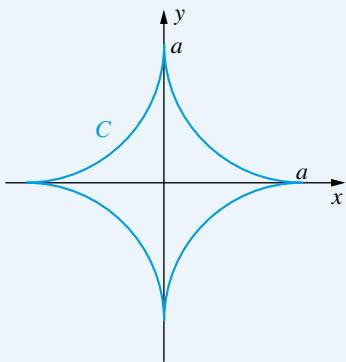
•  $x$  et  $y$  sont dérивables et :  $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right],$

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t.$$

$t$	0		$\pi/4$
$x'$	0	-	$-\frac{3a}{2\sqrt{2}}$
$x$	$a$		$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
$y$	0		$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
$y'$	0	+	$\frac{3a}{2\sqrt{2}}$

• Étude en 0 :  $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ ,

donc  $C$  admet  $x'x$  pour tangente en  $(a, 0)$ .



b) • Soit  $P(t) \in C$ ; un vecteur tangent en  $P(t)$  à  $C$  est  $\frac{d\vec{P}}{dt}(-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t)$ , si  $\sin t \cos t \neq 0$ , donc l'équation cartésienne de la tangente en  $P(t)$  à  $C$  est :  $(y - a \sin^3 t) \cos t + (x - a \cos^3 t) \sin t = 0$ , c'est-à-dire :

$$x \sin t + y \cos t - a \sin t \cos t = 0.$$

• Soit  $M(x, y)$  un point du plan. L'équation aux  $t$  des points de contact des tangentes menées de  $M$  à  $C$  est, d'après le résultat précédent :

$$x \sin t + y \cos t - a \sin t \cos t = 0.$$

Soient  $t, u$  deux solutions de cette équation.

La tangente  $T(t)$  (resp.  $T(u)$ ) en  $P(t)$  (resp.  $P(u)$ ) à  $C$  est dirigée par  $(-\cos t, \sin t)$  (resp.  $(-\cos u, \sin u)$ ). On a :

$$T(t) \perp T(u) \iff \cos t \cos u + \sin t \sin u = 0$$

$$\iff \cos(u - t) = 0 \iff u \equiv \frac{\pi}{2} + t [\pi]$$

$$\iff \left( \begin{array}{l} \cos u = -\sin t \\ \sin u = \cos t \end{array} \right) \text{ ou } \left( \begin{array}{l} \cos u = \sin t \\ \sin u = -\cos t \end{array} \right)$$

Ainsi :

$$M \in \Gamma \iff \left( \begin{array}{l} \exists (\varepsilon, t) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}, \\ \left\{ \begin{array}{l} x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t \\ \varepsilon x \cos t - \varepsilon y \sin t = a \sin t \cos t \end{array} \right. \end{array} \right)$$

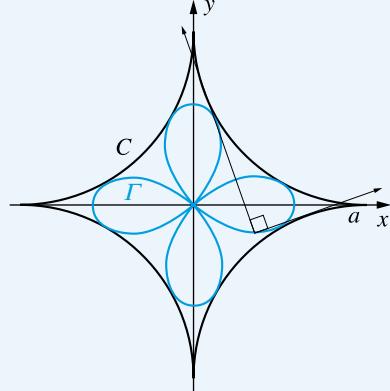
$$\iff \left( \begin{array}{l} \exists (\varepsilon, t) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}, \\ \left\{ \begin{array}{l} x = a(\sin t + \varepsilon \cos t) \sin t \cos t \\ y = a(\cos t - \varepsilon \sin t) \sin t \cos t \end{array} \right. \end{array} \right).$$

On peut remarquer que la courbe correspondant à  $\varepsilon = -1$  est la même que celle correspondant à  $\varepsilon = 1$ , grâce au changement de paramètre  $t \mapsto t - \frac{\pi}{2}$ .

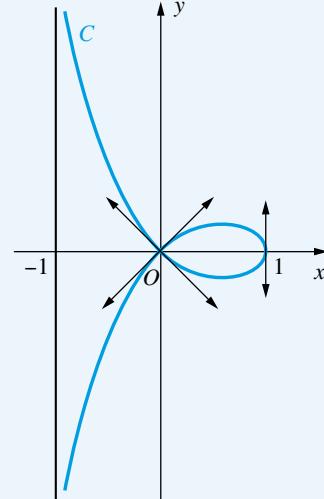
Enfin, pour tracer  $\Gamma$ , remarquer qu'en notant  $v = \frac{\pi}{4} - t$ , on a :

$$M \in \Gamma \iff \left( \exists v \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos v \cos 2v \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin v \cos 2v \end{array} \right. \right),$$

et donc  $\Gamma$  admet l'équation polaire :  $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos 2\theta$ .



25.19 a)



b) a) Les trois points  $M(t_i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) de  $C$  sont alignés si et seulement s'il existe  $(u, v, h) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}$  tels que  $t_1, t_2, t_3$  soient les solutions de l'équation (d'inconnue  $t \in \mathbb{R}$ ) :

$$u \frac{1-t^2}{1+t^2} + vt \frac{1-t^2}{1+t^2} + h = 0,$$

c'est-à-dire :  $-vt^3 + (h-u)t^2 + vt + (u+h) = 0$ .

En notant

$$\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3, \sigma_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3, \sigma_3 = t_1 t_2 t_3,$$

(fonctions symétriques élémentaires de  $t_1, t_2, t_3$ ), la condition précédente revient à :

$$\exists (u, v, h) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \times \mathbb{R},$$

$$(v\sigma_1 = h - u, \sigma_2 = -1, v\sigma_3 = u + h),$$

c'est-à-dire finalement :  $\sigma_2 = -1$ .

$\beta)$  • Le calcul de  $t'$  en fonction de  $t$  s'obtient en exprimant la condition du b)  $\alpha)$  pour le triplet  $(t, t, t')$  :  $t^2 + tt' + tt' = -1$ ,

$$\text{ou encore : } t' = -\frac{1+t^2}{2t} = -\frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right).$$

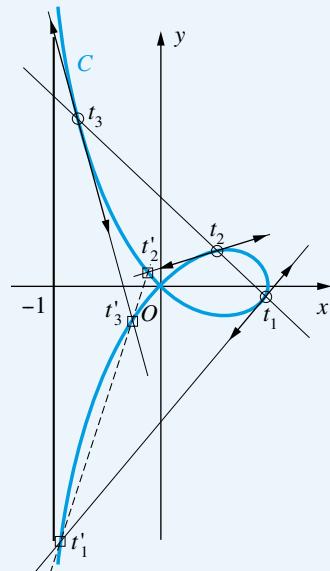
• Si les points  $M(t_i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) de  $C$  sont alignés, alors  $\sigma_2 = -1$ , et, en notant  $\sigma'_2 = t'_1 t'_2 + t'_1 t'_3 + t'_2 t'_3$  :

$$\begin{aligned}\sigma'_2 &= \frac{1}{4} \sum_{(3)} \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right) \left( t_2 + \frac{1}{t_2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \sum_{(3)} t_1 t_2 + \sum_{(6)} t_2 + \sum_{(3)} \frac{1}{t_1 t_2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \sigma_2 + \frac{1}{\sigma_3} \sum_{(6)} t_1^2 t_2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right).\end{aligned}$$

Comme  $\sum_{(6)} t_1^2 t_2 = (t_1 + t_2 + t_3)(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) - 3t_1 t_2 t_3$ , on obtient :

$$\sigma'_2 = \frac{1}{4} \left( \sigma_2 + \frac{\sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3}{\sigma_3} + \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right) = -1,$$

donc les points  $M(t'_i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) sont alignés.





# Index alphabétique

## A

abscisse (— curviligne), 387  
addition, 114  
aire, 184, 373  
aire (— d'une partie de  $\mathbb{R}^2$ ), 184  
aire (— du tétraèdre), 373  
aire (— du triangle), 373  
alternance, 320  
angle, 335, 355, 373  
anneau, 205  
antipériode, 386  
application linéaire, 248, 272, 281, 282, 283  
argument (— de divisibilité), 219  
associativité (— de la notion de barycentre), 355  
axe 335

## B

barycentre, 355  
base, 248, 272, 273  
base orthonormale, 334  
bijectif, 283  
bijection, 220  
bijective, 282  
bijectivité, 196  
binôme de Newton, 2, 250  
bissectrice, 356, 374  
borne, 375, 385  
borne (— inférieure), 61  
borne (— supérieure), 61  
bornée (fonction —), 49  
branche (— infinie), 386, 387

## C

cardinal, 220, 273  
 cercle, 12  
 changement (— de fonction inconnue), 151, 171  
 changement (— d'inconnue), 1, 12  
 changement (— de paramètre), 386  
 changement (— de variable) 1, 2, 12, 80, 98, 114, 115, 134, 135, 136, 151, 170, 171, 184  
 changement (— de variables par translation), 169

coefficient (— binomial), 13, 220, 248  
coefficients (— indéterminés), 115, 133, 134  
colonne, 297, 319, 320  
comatrice, 320  
combinaison linéaire, 248, 272, 273, 334  
composé (nombre —), 231  
composition, 114, 282  
concavité, 386, 387  
condition aux bords, 151  
congruence, 232  
conique, 355, 356, 387  
conjugué, 250  
constante, 60  
continuité, 169  
convergence (— d'une suite), 30  
convexe, 61  
convexité, 61  
coordonnées polaires, 170  
cosinus, 13  
courbe (— orientée du plan), 183  
cylindrique, 184

## D

$DL(0)$  (opération sur —), 114  
 $DL(0)$  (— usuel), 114  
décomposition (— en éléments simples), 60, 134, 251  
décomposition (— primaire), 232, 233  
définition (— bifocale), 356  
définition (— monofocale), 356  
degré, 248  
demi-tangente, 386  
dénombrément, 205  
dénombrer, 220  
dérivabilité, 59  
dérivation, 114, 385  
dérivée, 59,  
dérivée (—  $n$ -ème), 60  
dérivées (— partielles premières), 170  
dérivées (— partielles secondes), 170  
déterminant (— d'un endomorphisme), 320  
déterminant (— d'ordre  $n$ ), 320  
déterminant (— d'ordre trois ou quatre), 319

## Index alphabétique

déterminant (— d'une matrice carrée), 320  
déterminant (— d'une matrice triangulaire), 320  
développement (— asymptotique), 115  
développement (— d'une fonction), 115  
développement (— limité), 114, 115  
développement (— remarquable), 2  
développer, 319, 320  
dimension 248, 273, 283  
dimension (— finie), 272, 273, 283  
dimension (— du noyau), 297  
distance, 372, 373, 374  
distance (— de deux points), 355, 356  
distance (— d'un point à une droite), 355  
divise, 232, 249  
diviseur, 233  
divisibilité, 232, 248  
division (— euclidienne), 248, 249, 251  
droite, 371, 373, 387  
droites (— concourantes), 354, 374  
droites (— horizontales), 372  
droites (— parallèles), 354

### E

EC, 354, 371, 372, 375, 377  
écriture (— algébrique), 11  
écriture (— décimale), 232  
écriture (— trigonométrique), 11  
ED, 149  
ED (— de Bernoulli), 151  
ED (— non linéaire), 151  
ED (— à variables séparables), 151  
EDL, 149, 151  
EDL1 (— normalisée, avec second membre, sur un intervalle), 150  
EDL1 (— normalisée, sans second membre, sur un intervalle), 149  
EDL1 (— non normalisée, avec ou sans second membre), 150  
EDL1 (— sans second membre associée), 150  
EDL2, 149  
EDL2 (— à coefficients constants et avec second membre), 150  
EDL2 (— à coefficients constants et sans second membre), 150  
EDL2 (— sans second membre associée), 150  
EDP1, 171  
EDP2, 171  
égalité (— d'ensembles), 195  
élément, 272  
éléments (— caractéristiques), 335  
élément (— simple), 251  
élévation au carré, 2  
emboîter (— les intégrales simples), 184  
emboîter (— les sommes simples), 220  
encadrement, 219

endomorphisme, 297  
endomorphisme (— orthogonal), 334, 336  
engendré, 272  
engendré (— par une partie), 204  
ensemble, 195  
ensemble (— de définition), 385, 386  
ensemble (— fini), 220  
entier, 219  
entier (— naturel), 219  
entier (— premier), 231  
équation, 219, 296  
équation (— caractéristique), 30, 150  
équation (— cartésienne), 356  
équation (— aux dérivées partielles du premier ordre (EDP1)), 171  
équation (— différentielle), 115, 149  
équation (— diophantienne), 232  
équation (— fonctionnelle), 47, 61, 81, 151  
équation (— à une inconnue réelle), 48, 61  
équation (— intégrale), 151  
équation (— linéaire), 149  
équation (— linéaire du premier ordre), 149  
équation (— linéaire du deuxième ordre), 149  
équation (— polaire), 356  
équation (— polynomiale), 297, 320  
équation (— du premier degré), 1, 11  
équation (— du second degré), 1, 11  
équivalent (— simple d'une fonction en un point), 114  
équivalent (— simple d'une intégrale), 115  
espace (— vectoriel), 248  
ev, 271  
existence (— d'une solution d'une équation  $f(x) = 0$ ), 48  
exponentielle, 97  
expression logarithmique (— d'une fonction hyperbolique réciproque), 98  
extrémum (— local), 170

### F

facteur (— irréductible), 249  
facteur (mettre en —), 232, 248, 249  
factorielle, 220  
factoriser, 249  
famille (— génératrice), 282  
famille (— génératrice finie), 273  
famille (— libre), 272, 273, 371  
fini, 205  
fonction (— admettant une limite finie), 48  
fonction (— circulaire), 98  
fonction (— circulaire réciproque), 98  
fonction (— directe, cos, sin, tan, cotan), 98  
fonction (— directe, ch, sh, th, coth), 97  
fonction (deux — égales sur un intervalle), 98  
fonction (— hyperbolique), 97, 98  
fonction (— implicite), 115

fonction (— nulle), 80  
 fonction (— partielle), 169, 170  
 fonction (— rationnelle), 135  
 fonction (— rationnelle en ch et sh), 135, 136  
 fonction (— rationnelle en cos et sin), 136  
 fonction (— réciproque), 115  
 fonction (— réciproque, Argch, Argsh, Argth, Argcoth), 98  
 fonction (— sans limite (ni finie ni infinie)), 48  
 fonction (— symétrique), 250  
 fonction (— symétrique élémentaire), 251  
 fonction (— de deux variables réelles), 169, 171  
 forme (— canonique), 135, 250  
 forme (mise sous — canonique d'un trinôme), 231  
 forme (— différentielle), 183  
 forme (— indéterminée), 113, 114, 169  
 forme (— algébrique des nombres complexes), 11  
 forme (— trigonométrique des nombres complexes), 11  
 forme ( $-\infty \times \infty, \frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{0}$ ), 114  
 forme ( $-\infty - \infty$ ), 114  
 formulaire (— de trigonométrie circulaire), 98  
 formule, 250  
 formule (— fondamentale de l'analyse), 80  
 formule (— du binôme de Newton), 13, 220, 248, 296  
 formule (— du double produit vectoriel), 335  
 formule (— de Grassmann), 273  
 formule (— de Leibniz), 60  
 fraction (— rationnelle), 250, 251

**G**

Gram (matrice de —), 334  
 groupe, 204  
 groupe (— fini), 205  
 groupes (— isomorphes), 205  
 groupes (— non isomorphes), 205

**H**

hyperbole, 355

**I**

identité (— remarquable), 231, 249, 250  
 image, 272, 282, 283  
 image (— directe), 196  
 image (— réciproque), 196  
 imaginaire (— pur), 12  
 impaire, 385  
 imparité, 251  
 inclusion (— de sev), 272  
 indice (— impair), 30  
 indice (— pair), 30  
 inégalité, 219, 232  
 inégalité (— de Cauchy-Schwarz), 2, 12, 79, 334

inégalité (— de Cauchy-Schwarz pour des intégrales), 98  
 inégalité (— de convexité), 61  
 inégalité (— de Jensen), 61  
 inégalité (— de Minkowski), 2  
 inégalité (— portant sur une fonction ou une intégrale), 81  
 inégalité (— portant sur une ou des intégrales), 79  
 inégalité (— de Taylor-Lagrange), 81  
 inégalité (— triangulaire), 12, 250  
 inégalité (— triangulaire renversée), 12  
 inégalité (— à une variable réelle), 61, 98  
 inégalité (— à plusieurs variables réelles), 61  
 inéquation (— du premier degré), 1  
 inéquation (— du second degré), 1  
 injective, 204, 205, 282  
 injectivité, 196  
 intégrale (— avec bornes particulières), 136  
 intégrale (— curviligne), 183  
 intégrale (— dépendant d'un paramètre aux bornes), 80  
 intégrale (— double), 184  
 intégrale (— simple), 184  
 intégrale (— triple), 184  
 intégration (— par parties), 80, 115  
 interne, 204  
 intersection (— d'une famille d'ensemble), 196  
 intersection (— de sev), 272  
 inverse (— d'une fonction), 114  
 inverse (— d'une matrice carrée inversible), 296, 298  
 inversibilité, 296  
 inversible (matrice carrée —), 296, 297, 298, 321  
 inversion (— d'une permutation), 220  
 irrationnel, 3  
 irréductible, 249  
 isomorphisme (— de groupes), 205

**L**

libre (famille —), 272  
 liée (famille —), 272  
 ligne, 319, 320  
 limite 30, 169  
 limite (— d'intégrale), 80, 115  
 limite (— de la dérivée à côté), 60  
 limiter (— les valeurs des inconnues), 219  
 linéaire, 281, 282  
 linéariser, 60, 135  
 linéarité (— de l'intégration), 80  
 logarithme, 98  
 logarithme (— de base quelconque), 97  
 logarithme (— népérien), 97  
 loi (— externe), 114, 282  
 loi (— interne), 203  
 loi (— interne associative), 204  
 loi (— interne non associative), 204  
 loi (— interne commutative), 204  
 loi (— interne non commutative), 204

## Index alphabétique

lois (— usuelles), 204  
longueur, 356, 387

### M

majoration (— de type géométrique), 31  
matrice (— antisymétrique), 298  
matrices (— carrées semblables), 296, 297  
matrice (— -colonne), 296  
matrice (— diagonale), 296  
matrice (— de Gram), 334  
matrice (— nilpotente), 296  
matrice (— orthogonale), 335  
matrice (— symétrique), 298  
matrice (— triangulaire), 296, 298  
matrice (— triangulaire supérieure), 298  
matrice (— trigonale), 296  
méthode (— de multiplication puis remplacement), 251  
méthode (— de variation de la constante), 150  
méthode (— des divisions euclidiennes successives), 249  
monotone, 60  
morphisme (— de groupes), 205  
multilinéarité, 320  
multiplication, 114

### N

nature, 335  
neutre, 204  
nombre complexe, 13, 248, 250, 356  
nombre complexe (— de module 1), 13  
norme euclidienne, 332  
noyau, 272, 282, 283

### O

opérations, 281  
opérations (— sur les sev), 272  
opérations (— sur les suites convergentes), 29  
ordre (— de multiplicité), 249  
orthogonal, 334, 373  
orthogonal (— droit), 335  
orthogonalité, 334

### P

paire, 385  
parité, 232, 251  
partie (— imaginaire), 11  
partie (— réelle), 11  
partie (— entière), 2, 48, 251  
période, 386  
périodique, 48, 385  
permutation (— de symboles  $\sum$ ), 220  
perpendiculaire (— commune), 374  
pgcd, 232, 249  
piles (découper en —), 184

plan, 371  
plans (— bissecteurs), 373  
plans (— parallèles), 372, 374  
point, 355, 371, 373  
points (— alignés), 354  
points (— non alignés), 372  
point (— anguleux), 386  
point (— d'arrêt), 386  
point (— critique), 170  
point (— équidistant), 356, 373  
point (— d'inflexion), 386, 387  
point (— multiple), 386  
point (— remarquable), 386  
point (— stationnaire), 386  
point (— fixe), 31, 48  
polaires, 184, 386, 387, 388  
polynôme, 248  
polynôme (— irréductible), 249  
polynômes (— premiers entre eux), 249  
polynôme (— réciproque), 250  
ppcm, 232  
prépondérance (— classique), 113  
primitivation, 114  
primitive (— d'une fonction rationnelle en  $\operatorname{ch} x$  et en  $\operatorname{sh} x$ ), 135  
primitive (— d'une fraction rationnelle), 134  
primitive (— d'une fraction rationnelle  $x$  et en  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ), 135  
primitive (— du produit d'un polynôme par un cosinus ou un sinus), 134  
primitive (— du produit d'un polynôme par une exponentielle), 133  
primitive (— du produit d'un polynôme, d'une exponentielle, et d'un cosinus ou sinus), 134  
primitiver (— par parties), 133  
primitives (— usuelles), 80  
principe (— de superposition des solutions), 150  
produit, 2, 12  
produit (— de facteurs irréductibles), 249, 251  
produit (— de facteurs premiers entre eux deux à deux), 233  
produit (— mixte), 335  
produit (— scalaire), 334, 335, 356  
produit (— vectoriel), 335  
projecteur, 282  
projecteur (— orthogonal), 335  
projété (— orthogonal), 335, 355, 373  
puissance, 296

### Q

$\mathbb{Q}$  (— dense dans  $\mathbb{R}$ ), 48  
quantité (— conjuguée), 2  
quotient, 249

**R**

racine (— d'une équation dépendant d'un paramètre  $n \in \mathbb{N}$ ), 115  
 racine (—  $n$ -ème de 1 dans  $\mathbb{C}$ ), 13  
 radical, 2  
 raisonner (— par l'absurde), 3, 232  
 rang (— d'une application linéaire), 80, 283  
 rang (— d'une matrice), 297  
 rangée, 319, 320  
 rationnel, 48  
 rayon (— de courbure), 388  
 récurrence, 2, 13, 60, 219, 232, 248  
 réel, 12  
 réflexion, 335  
 relation (— de Chasles), 80, 115  
 relation (— de récurrence), 320  
 repère (— affine), 353  
 repère (— orthonormé direct), 353  
 représentation (— paramétrique), 356, 387  
 reste, 248, 249  
 réunion, 196  
 rôles (— symétriques), 2  
 rotation, 335  
 RP, 354, 371, 372, 386, 387, 388

**S**

SEC, 372  
 séparation (— de cas), 170  
 sev, 271  
 sev (— de dimension finie), 273  
 sev (— engendré par les colonnes), 297  
 sev (— engendré par une famille), 273  
 signature, 220  
 simplifier, 251  
 sinus, 13  
 solution (— évidente), 150  
 solution (— générale), 150  
 solution (— particulière), 150  
 solution (raccord des —), 150  
 sommation, 248  
 sommation (— classique), 220  
 sommation (— d'entiers), 220  
 sommation (— d'une progression géométrique), 13  
 sommation (— double), 220  
 sommation (— géométrique), 220, 250  
 sommation (— triple), 220  
 somme, 12  
 somme (— de nombres tous positifs ou nuls), 2  
 somme (— de Riemann), 80, 81  
 somme (— de sev), 272  
 sous-anneau, 205  
 sous-groupe, 204  
 sphérique, 184

stable (— par addition), 271  
 stable (— par loi externe), 271  
 suite (— adjacente), 30  
 suite (— convergente), 30  
 suite (— croissante), 30  
 suite (— croissante et majorée), 31  
 suite (— décroissante), 30  
 suite (— décroissante et minorée), 31  
 suite (— divergente), 30  
 suite (— extraite), 30  
 suite (— récurrente du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ ), 31  
 suite (— récurrente linéaire du premier ordre ou du second ordre, à coefficients constants et avec second membre), 30  
 suite (— récurrente linéaire du second ordre), 30  
 suites (— usuelles), 31  
 supplémentaire, 272  
 surjective, 205, 282  
 surjectivité, 196  
 symétrie, 385, 386, 388  
 symétrie (— orthogonale), 335  
 symétrique, 204  
 système (— affine), 320  
 système (— d'équations), 98  
 système (— d'équations symétrique), 2, 12  
 système (— de congruences simultanées à une inconnue), 233

**T**

tableau (— de variation), 385, 386  
 tangente, 355, 386, 387  
 taux (— d'accroissement), 59  
 terme (— diagonal), 296  
 terme (— d'une matrice), 296  
 théorème (— d'encadrement), 29  
 théorème (— de Bezout), 249  
 théorème (— de composition des applications de classe  $C^2$  (ou  $C^n$ , ou  $C^\infty$ )), 170  
 théorème (— de Fubini), 184  
 théorème (— de Gauss), 249  
 théorème (— de Pythagore), 356  
 théorème (— de Rolle), 60, 61  
 théorème (— de Taylor-Young), 115  
 théorème (— des accroissements finis), 60  
 théorème (— des valeurs intermédiaires), 48  
 théorème (— du rang), 283, 297  
 théorème (— général), 30, 59, 169, 170  
 théorème (— général de dénombrement), 220  
 théorème (— général sur les limites), 48  
 théorème (— limite de la dérivée), 60  
 théorème (— sur les opérations sur les fonctions dérivables), 59  
 trace (— de matrices carrées), 298  
 tranches (découper en —), 184  
 transposée (— d'une matrice), 298

## Index alphabétique

transposition, 220, 298

triangle, 356

triangle (— rectangle), 356

triadiagonale (matrice —), 320

trinôme, 231

trinôme (— bicarré), 231, 250

troncature, 114

### V

variation, 60, 61, 81, 98, 115, 250, 386

variation (— d'une fonction), 48

vecteur, 355

vecteur (— directeur), 354, 372, 373, 374

vecteur (— normal), 373

volume, 373

### Z

zéro (— d'une fonction), 60

zéro (— d'ordre  $\alpha$  exactement), 248

zéro (— d'ordre  $\alpha$  au moins), 248

zéro (— d'un polynôme), 250

zéro (— d'un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ ), 250

zéro (— d'un polynôme scindé), 249, 250

zéro (— rationnel), 249

Jean-Marie Monier

# LES MÉTHODES ET EXERCICES DE MATHÉMATIQUES MPSI

Cet ouvrage de méthodes et d'exercices propose un **entraînement progressif et complet** qui vous aidera, tout au long de l'année, à passer du cours aux exercices et à assimiler le programme de mathématiques de 1<sup>re</sup> année MPSI.

JEAN-MARIE MONIER  
est professeur en classe  
de Spéciales au lycée  
La Martinière-Monplaisir  
à Lyon.

- **Toutes les méthodes à retenir** présentées de façon synthétique étape par étape.
- **Plus de 500 énoncés** d'exercices, avec indice de difficulté, couvrant l'intégralité du programme de MPSI.
- **Des indications pour bien démarrer** la résolution des exercices.
- **Des corrigés complets** pour tous les exercices.

Dans la série Monier, sont également disponibles  
des ouvrages de cours complets :

