



LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Physique

Mécanique
MPSI

Cours

Méthodes

Exercices résolus

C. CLERC • P. CLERC

Nouveau programme





LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Mécanique

MPSI

C. CLERC • P. CLERC

Professeur agrégé à l'École Nationale d'Ingénieur de Saint-Étienne

Professeur agrégé en classes préparatoires scientifiques à l'IUT1 de Grenoble

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex



Copyrighted material

LES NOUVEAUX

Précis

B R É A L

Mathématiques 1^{re} année

- Algèbre-Géométrie / MPSI
- Algèbre-Géométrie / PCSI
- Analyse / MPSI
- Analyse / PCSI

Physique 1^{re} année

- Mécanique / MPSI - PTSI
- Mécanique / PCSI
- Électromagnétisme / MPSI - PCSI - PTSI
- Électrocinétique / MPSI - PCSI - PTSI
- Optique / MPSI - PCSI - PTSI
- Thermodynamique / MPSI - PCSI

Chimie 1^{re} année

- Architecture moléculaire – Chimie organique / PCSI
- Thermodynamique et cinétique chimiques -
Équilibres chimiques en solution aqueuse / PCSI
- Chimie / MPSI

Maquette : Insolencr

Couverture : Sophie Martinet

Suivi éditorial : Agnès Nicol

© Bréal 2003

Toute reproduction même partielle interdite.

ISBN 2 7495 0222 5

Les **Nouveaux Précis Bréal** sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires une aide efficace dans leur travail. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de première année de la filière MPSI. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.
- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.
- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos ou). Certains exercices sont accompagnés de courtes indications, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer !

Il nous est apparu nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Ainsi, les étudiants de MPSI disposeront, en mécanique, d'un outil de travail complet, adapté au rythme soutenu de cette première année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce nouveau Précis les aidera à accéder avec confiance en deuxième année et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse infos@editions-breal.fr.

L'éditeur et les auteurs.

This One



GK7L-15N-90KB

Sommaire

Chapitre 1 ■ Cinématique du point	7
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	22
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	29
Chapitre 2 ■ Dynamique du point en référentiel galiléen	45
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	60
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	63
Chapitre 3 ■ Puissance et énergie en référentiel galiléen	83
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	100
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	108
Chapitre 4 ■ Oscillateur harmonique à un degré de liberté	133
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	145
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	150
Chapitre 5 ■ Oscillations forcées dans les problèmes à un degré de liberté	165
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	178
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	181
Chapitre 6 ■ Théorème du moment cinétique	193
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	204
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	209
Chapitre 7 ■ Forces centrales conservatives	225
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	237
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	243
Chapitre 8 ■ Changements de référentiel – Référentiel non galiléen	257
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	271
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	275

Chapitre 9 ■ Systèmes formés de deux points matériels	299
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	315
<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	324
Chapitre 10 ■ Quelques problèmes	339
Index	367

CHAPITRE

1

Cinématique du point

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons au mouvement d'un point, sans nous occuper ni des effets, ni des causes de ce mouvement. Ainsi nous étudierons le mouvement, c'est-à-dire l'évolution d'un point dans l'espace et au cours du temps, à l'aide des notions de vecteur position, de vitesse ou d'accélération, toutes relatives à un observateur ou un référentiel.

Plan du chapitre 1

A. Description du mouvement	8
1. Exemple : l'hélicoptère	8
2. Système étudié, observateur	8
3. Repérage d'un point	9
4. Vitesse d'un point	12
5. Accélération	15
6. Bilan	17
7. Bases de projection utiles	18
B. Étude de mouvements usuels	19
1. Mouvement rectiligne	19
2. Mouvement circulaire	21

Méthodes

L'essentiel ; mise en œuvre	22
Énoncés des exercices	29
Indications	31
Solution des exercices	32

A. Description du mouvement

A.1. Exemple : l'hélicoptère

Considérons un hélicoptère se déplaçant horizontalement en ligne droite (fig. 1).

Repérons deux points particuliers : le point A, *axe des pales* et le point M extrémité d'une pale. Le point O est un point fixe par rapport au sol. Le point A est un point fixe par rapport au cockpit de l'hélicoptère.

Afin de décrire le mouvement de l'hélicoptère, il est nécessaire de choisir un **observateur** (qui regarde la scène) et un **observé** (point qui est observé par l'observateur).

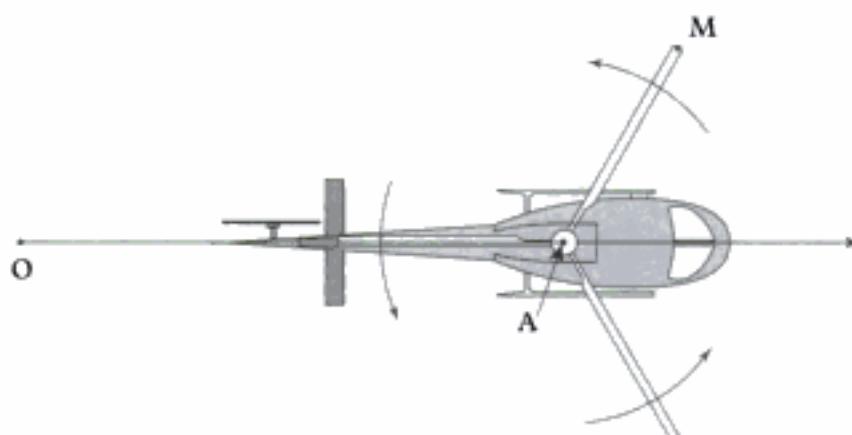


Fig. 1 - Déplacement rectiligne horizontal de l'hélicoptère.

Par exemple, le point M observé depuis le cockpit va tourner alors qu'observé depuis le sol, il va « tourner et avancer ».

De même, le point A, observé depuis le cockpit, sera immobile alors qu'observé depuis le sol, il avancera.

Ainsi, il est indispensable de préciser ce qu'on observe (le point observé) et d'où on l'observe (observateur).

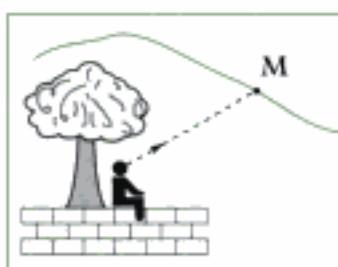


Fig. 2 - Observateur et point observé.

1. On dit que le mouvement n'a pas un caractère absolu, mais est relatif (à l'observateur).

A.2. Système étudié, observateur

A.2.1 - Définir le système étudié

- La première étape consiste à définir le système étudié (l'observé) ; en cinématique du point, il s'agira forcément d'un point : le **point observé**.

Par exemple, sur la fig. 2, le point M est l'observé.

- La seconde étape consiste à définir l'**observateur** ; c'est par rapport à lui que le mouvement sera décrit (le mouvement du point observé dépend de l'observateur)¹.

Par exemple, sur la fig. 2, l'observateur qui observe M est lié au sol.

Or définir précisément un observateur, c'est définir un référentiel.

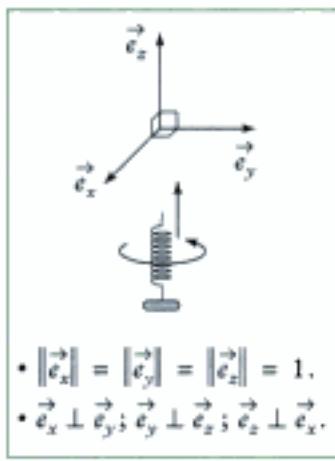


Fig. 3 - Base orthonormée directe
en vissant le tire-bouchon :
• de \vec{e}_x vers \vec{e}_y , il s'enfonce vers \vec{e}_z ;
• de \vec{e}_y vers \vec{e}_z , il s'enfonce vers \vec{e}_x ;
• de \vec{e}_z vers \vec{e}_x , il s'enfonce vers \vec{e}_y .

1. Ce référentiel correspond à tout ce qui est fixe par rapport à l'observateur ; on le représente souvent par un solide auquel est lié l'observateur.

A.2.2 - Notion de référentiel

• Base orthonormée directe

Pour définir un référentiel (observateur), il faut d'abord définir une base orthonormée directe (voir fig. 3), composée de trois vecteurs :

- perpendiculaires entre eux (ortho) ;
- de norme 1 (normée) ;
- respectant la règle du tire-bouchon (directe).

Cette base définit en fait trois directions.

• Repère

L'adjonction d'un point O (origine du repère) à une base orthonormée directe ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) définit un repère orthonormé direct : $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Référentiel

Comme le point M se déplace au cours du temps, il faut que l'observateur soit capable de préciser la position du point M à chaque instant ; il faut donc qu'il soit capable de mesurer le temps (à l'aide d'une horloge).

L'adjonction du temps à un repère définit un référentiel \mathcal{R} : $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Celui-ci définit précisément la notion d'observateur¹.

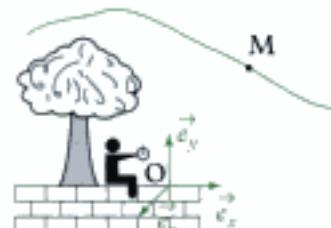


Fig. 4 - Référentiel $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ lié à l'observateur.

Ainsi sur la fig. 4, \mathcal{R} : $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est un référentiel lié à l'observateur.

Le temps s'écoulant de la même manière dans tout référentiel, il sera inutile de préciser le temps dans l'écriture du référentiel ; ainsi, on pourra écrire : $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

A.3. Repérage d'un point

A.3.1 - Vecteur position et trajectoire

- La position du point M observé (fig. 5), depuis l'observateur (référentiel \mathcal{R}) est définie à l'aide du **vecteur position** \overrightarrow{OM} composé :
 - d'un point origine O fixe par rapport à l'observateur, c'est-à-dire au référentiel \mathcal{R} ($O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) ;
 - du point M observé.

Rappel : un vecteur est défini par :

- sa direction ;
- son sens ;
- sa norme (ou valeur).

- La trajectoire du point M dans le référentiel \mathcal{R} est l'ensemble des points par lesquels M passe au cours du temps ; la trajectoire dépend du choix de l'observateur, c'est-à-dire du référentiel \mathcal{R} .

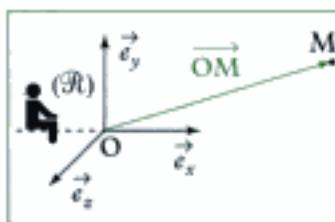


Fig. 5 - Vecteur position du point M dans le référentiel \mathcal{R} .

- Exemple de l'hélicoptère (fig. 6).

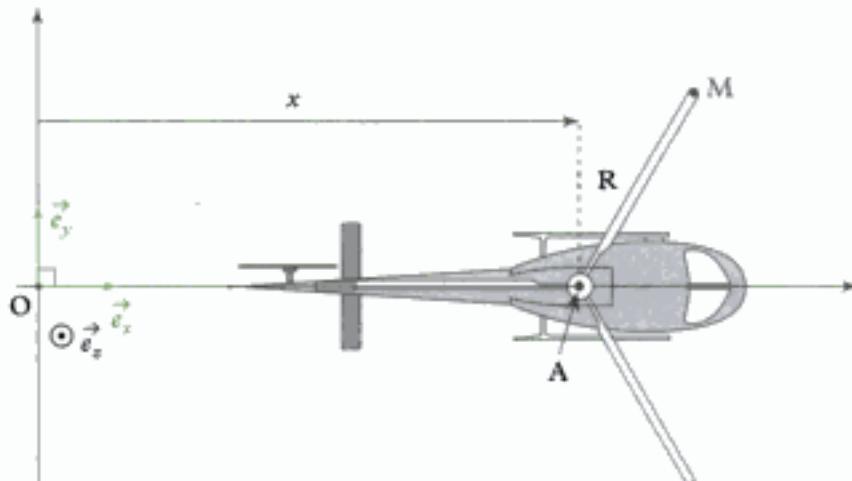


Fig. 6 - Position du point M dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' .

La position du point M dans le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), c'est-à-dire par rapport à l'observateur lié au sol, est définie à l'aide du vecteur position \overrightarrow{OM} .

La position du point M dans un référentiel \mathcal{R}' ($A ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), c'est-à-dire par rapport à l'observateur lié au cockpit de l'hélicoptère, est définie à l'aide du vecteur position \overrightarrow{AM} .

Dans ce référentiel \mathcal{R}' , le point M décrit une trajectoire circulaire de centre A et de rayon $R = AM$.

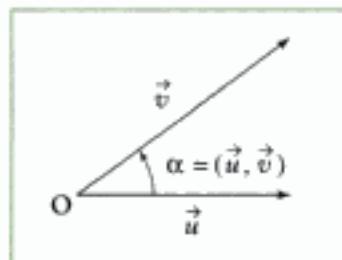


Fig. 7 - Produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A.3.2 - Produit scalaire

Définition 1

Le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} (fig. 7) est un scalaire (un nombre), noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, qui vaut :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

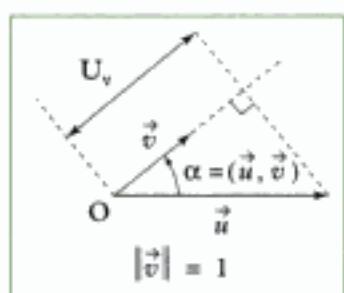


Fig. 8 - Projection de \vec{u} sur \vec{v} .

Propriétés

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$, soit $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ représente la projection du vecteur \vec{u} dans la direction du vecteur \vec{v} si $\|\vec{v}\| = 1$ (fig. 8) ; en effet, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = U_v$.
- Produit scalaire entre vecteurs d'une base orthonormée directe (fig. 9) :
 - $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$; $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$;
 - $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$; $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$;
 - $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$; $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$.

Fig. 9 - Base orthonormée directe ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

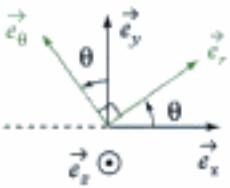


Fig. 10 - Bases orthonormées directes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$.

1. Comme nous entendu ici, la ou les bases utilisées n'ont pas forcément de lien avec le référentiel de l'observateur.

- Produit scalaire entre vecteurs de deux bases orthonormées directes :
- $$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r = \cos \theta;$$
- $$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta;$$
- $$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = \cos\left(-\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin \theta;$$
- $$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\theta = \cos \theta.$$

A.3.3 - Différentes expressions d'un vecteur

On exprime un vecteur à l'aide des vecteurs d'une ou plusieurs bases, appelées bases de projection¹.

Un vecteur aura des expressions différentes selon la base de projection choisie. En revanche, il s'agira du même vecteur (même direction, même sens et même norme).

Dans un soucis de clarté, on peut utiliser les vecteurs de plusieurs bases de projection pour exprimer un vecteur.

Exemple

Dans le cas de l'hélicoptère vu précédemment, on peut exprimer le vecteur position du point M dans \mathbb{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) en écrivant :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = x\vec{e}_x + R\vec{e}_r,$$

(utilisation des vecteurs de plusieurs bases).

Néanmoins, on aurait pu exprimer la position du point M en écrivant :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + R\cos\theta\vec{e}_x + R\sin\theta\vec{e}_y = (x + R\cos\theta)\vec{e}_x + R\sin\theta\vec{e}_y.$$

La première expression est plus simple, donc plus facile à manipuler, tandis que la deuxième est plus longue. Il s'agit cependant du même vecteur : \overrightarrow{OM} .

Calcul de la norme :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{OM}\| &= \sqrt{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}} = \sqrt{(x\vec{e}_x + R\vec{e}_r) \cdot (x\vec{e}_x + R\vec{e}_r)} \\ &= \sqrt{x^2\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + xR\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r + Rx\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x + R^2\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r} \\ &= \sqrt{x^2 + R^2 + 2xR\cos\theta}. \end{aligned}$$

2. Attention : $\|\overrightarrow{OM}\| \neq \sqrt{x^2 + R^2}$ car

\vec{e}_x n'est pas perpendiculaire à \vec{e}_r .

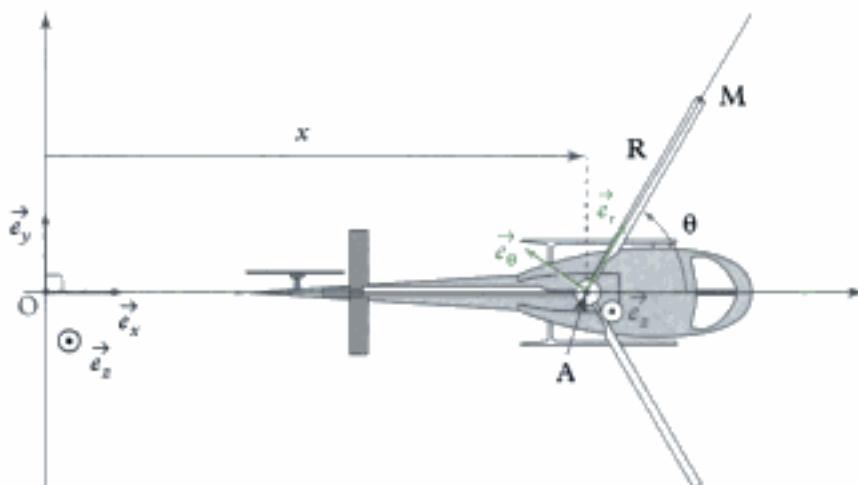


Fig. 11 - L'hélicoptère et les deux bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$.

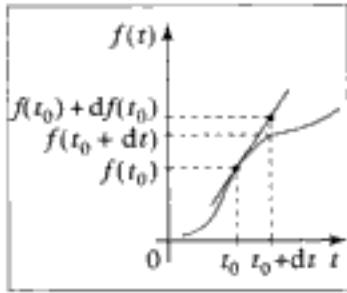


Fig. 12 - Dérivée de $f(t)$ en t_0 .

1. Lorsqu'on écrit la dérivée par rapport au temps, on peut la noter : $\dot{f}(t_0)$ au lieu de $\frac{df}{dt}(t_0)$.

A.4. Vitesse d'un point

A.4.1 - Dérivée scalaire

La dérivée temporelle de la fonction $f(t)$ en t_0 représente la pente de la tangente à la courbe $f(t)$ en t_0 (fig. 12) ; on la note¹ : $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Si t passe de t_0 à $t_0 + dt$, on se déplace de $f(t_0)$ à $f(t_0 + dt)$ sur la courbe $f(t)$ et de $f(t_0)$ à $f(t_0) + df(t_0)$ sur la tangente ; comme dt est infiniment petit, on peut confondre les deux valeurs précédentes :

$$f(t_0) + df(t_0) = f(t_0 + dt),$$

$$\text{soit } \mathbf{df}(t_0) = f(t_0 + dt) - f(t_0) \text{ ou } \frac{df(t_0)}{dt} = \frac{f(t_0 + dt) - f(t_0)}{dt}.$$

Propriétés

- Somme : $\frac{d}{dt}(f + g) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt} = \dot{f} + \dot{g}$.
- Produit : $\frac{d}{dt}(f \times g) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt} = \dot{f}g + fg$.
- Composition : $\frac{d}{dt}(f(g)) = \frac{df}{dg} \times \frac{dg}{dt} = \frac{df}{dg} \cdot \dot{g}$.

A.4.2 - Dérivée vectorielle

Soit \vec{U} un vecteur d'expression dans la base $(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$:

$$\vec{U} = x\vec{e}_{x_0} + y\vec{e}_{y_0} + z\vec{e}_{z_0}.$$

2. On dit aussi par rapport au ...

La dérivée vectorielle de \vec{U} dans² le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) est :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_{x_0} + y\vec{e}_{y_0} + z\vec{e}_{z_0}) \right)_{/\mathcal{R}}$$

soit :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_{x_0} + x \left(\frac{d\vec{e}_{x_0}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \frac{dy}{dt}\vec{e}_{y_0} + y \left(\frac{d\vec{e}_{y_0}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_{z_0} + z \left(\frac{d\vec{e}_{z_0}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}.$$

Remarque :

Ce calcul permet de savoir comment varie \vec{U} observé depuis \mathcal{R} .

Si l'on veut savoir comment varie \vec{U} observé depuis \mathcal{R}_0 ($O ; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}$), on calculera :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_{x_0} + y\vec{e}_{y_0} + z\vec{e}_{z_0}) \right)_{/\mathcal{R}_0} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_{x_0} + \frac{dy}{dt}\vec{e}_{y_0} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_{z_0}.$$

En effet \vec{e}_{x_0} , \vec{e}_{y_0} et \vec{e}_{z_0} sont fixes dans \mathcal{R}_0 donc :

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x_0}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{e}_{y_0}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{e}_{z_0}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{0}.$$

Ainsi, contrairement à la dérivée d'une fonction scalaire, la dérivée d'une fonction vectorielle dépend du référentiel de dérivation, c'est-à-dire que la variation d'un vecteur dépend de « l'endroit » depuis lequel on l'observe.

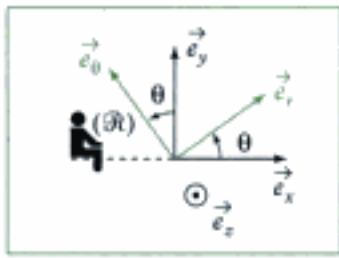


Fig. 13 - Bases de projection
 $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$.

• Dérivée des vecteurs de base de projection

Considérons deux bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$; cherchons la dérivée de chacun des vecteurs dans le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) (voir fig. 13).

Comme \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z sont des vecteurs constants dans \mathcal{R} :

$$\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_z}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

\vec{e}_r et \vec{e}_θ * tournant * par rapport à \mathcal{R} (on a $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$), on a ainsi :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \neq \vec{0}.$$

Remarquons que $\vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y$.

Ainsi $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\cos\theta)}{dt} \vec{e}_x + \cos\theta \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \frac{d(\sin\theta)}{dt} \vec{e}_y + \sin\theta \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$.

Comme θ peut dépendre du temps t , $\frac{d(\cos\theta)}{dt}$ est la dérivée d'une fonction composée :

$$\frac{d(\cos\theta)}{dt} = \frac{d(\cos\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\sin(\theta) \dot{\theta}.$$

De même, $\frac{d(\sin\theta)}{dt} = \cos(\theta) \dot{\theta}$, et donc :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \sin\theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_y,$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_x + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y \right],$$

soit¹ :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

De la même manière, on montre que²⁻³ :

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \vec{e}_r.$$

Propriétés :

- $\left(\frac{d}{dt} (\vec{u} + \vec{v}) \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$.

- $\left(\frac{d}{dt} (\lambda \vec{u}) \right)_{/\mathcal{R}} = \lambda \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$.

- $\left(\frac{d}{dt} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$.

1. On montre par là-même que

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta \text{ car}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \right)_{/\mathcal{R}} \times \frac{d\theta}{dt}.$$

2. On constate que la dérivée d'un vecteur de norme constante (comme par exemple $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta \dots$) est un vecteur ayant subi une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ rad.

En effet, si \vec{u} est un vecteur de norme constante, alors :

$$\frac{d\|\vec{u}\|^2}{dt} = \frac{d(\vec{u}^2)}{dt} = 0$$

or $\frac{d(\vec{u}^2)}{dt} = \frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt}$

$$= \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

donc $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$ et donc :

$$\vec{u} \perp \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

3. On montre par là-même que :

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{e}_r.$$

$$1. \vec{d\Omega M} = \vec{\Omega M}(t+dt) - \vec{\Omega M}(t).$$

A.4.3 - Vecteur vitesse

Définition 2

Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} (par rapport à l'observateur), est la dérivée temporelle du vecteur position du point M dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{\Omega M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

\vec{v} vecteur vitesse ($m \cdot s^{-1}$)

$\vec{\Omega M}$ vecteur position (m)

t temps (s)

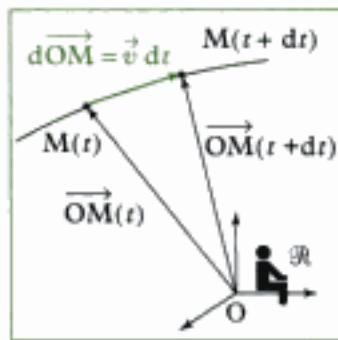


Fig. 14 - Vecteur vitesse.

(Comme nous l'avons déjà signalé, O est un point fixe du référentiel \mathcal{R}).

Rappel : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ est un vecteur tangent à la trajectoire en chacun de ses points : il correspond à la variation $d\vec{\Omega M}$ du vecteur $\vec{\Omega M}$ pendant l'intervalle de temps dt (fig. 14) :

$$\vec{v} dt = \vec{\Omega M}(t+dt) - \vec{\Omega M}(t).$$

Remarques :

1) On est souvent amené à travailler avec la mesure algébrique v de la vitesse \vec{v} : $\vec{v} = v \vec{e}_T$ (\vec{e}_T vecteur unitaire tangent à la trajectoire). v est la composante du vecteur \vec{v} selon \vec{e}_T , c'est une grandeur qui a un signe (plus ou moins).

La démarche du physicien consiste à se placer dans un cas particulier où les signes des grandeurs algébriques utilisées sont connus (abscisse, vitesse, force, élongation...) et à établir une relation entre ces grandeurs dans ce cas particulier ; l'équation obtenue restera alors valable pour les autres positions du système.

2) Le calcul de $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ permet de savoir comment varie la position du point M observé depuis le référentiel \mathcal{R} (l'observateur).

Application 1 Vitesse d'avancement de l'hélicoptère

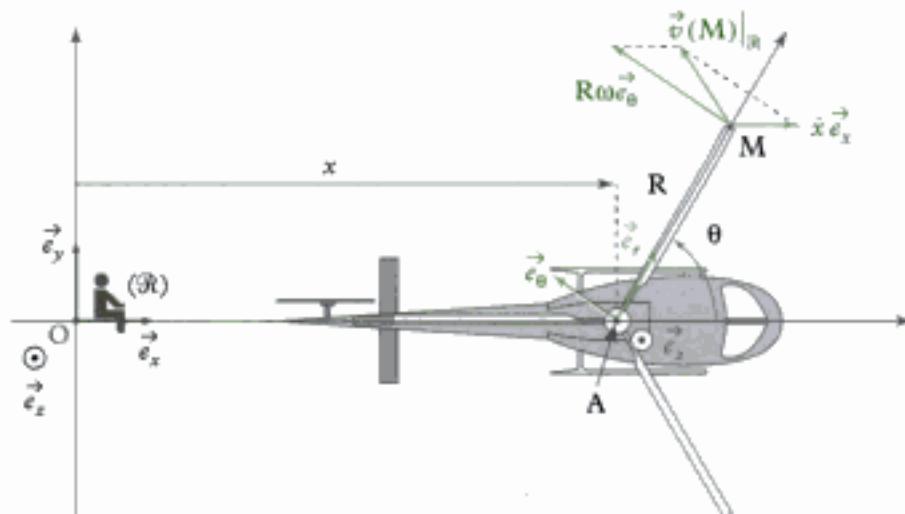
Exprimer le vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), dans le cas de l'hélicoptère vu précédemment.

Déterminer la vitesse limite d'avancement de l'hélicoptère selon l'axe ($O ; \vec{e}_x$) sachant que la vitesse du point M doit être inférieure à la vitesse du son ($v_{son} = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) à chaque instant.

Données : les pales ont un rayon $R = 5,3 \text{ m}$ et tournent avec une vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = 450 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$

Solution



Le vecteur position du point M est : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + R\vec{e}_r$.

Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) est donc :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + x \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \dot{R}\vec{e}_r + R \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}.$$

Comme $R = \text{cte}$, $\dot{R} = 0$ et comme $\vec{e}_x = \vec{e}_x$ dans \mathcal{R} , $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$. En revanche $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Ainsi : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Comme $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$, on obtient :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\omega\vec{e}_\theta.$$

Remarque : on pourrait écrire $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\omega(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y)$ soit :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = (\dot{x} - R\omega\sin\theta)\vec{e}_x + (R\omega\cos\theta)\vec{e}_y.$$

La vitesse maximale du point M est obtenue lorsque les vecteurs $\dot{x}\vec{e}_x$ et $R\omega\vec{e}_\theta$ ont même direction et même sens, c'est-à-dire lorsque $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad.

Alors $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\omega\vec{e}_x = (\dot{x} + R\omega)\vec{e}_x$.

Comme on veut, $\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}\| \leq v_{\text{son}}$, il faut avoir :

$$\dot{x} + R\omega \leq v_{\text{son}}, \text{ soit } \dot{x} \leq v_{\text{son}} - R\omega.$$

$$\text{A.N. } \dot{x} \leq 330 - 5,3 \times 450 \times \frac{2\pi}{60}$$

$$\dot{x} \leq 80,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 289 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

La vitesse maximale d'avancement de l'hélicoptère est de $289 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

A.5. Accélération

A.5.1 - Expression de l'accélération

Définition 3

Le vecteur accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} est la dérivée seconde du vecteur position de M par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

\vec{a}	vecteur accélération ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)
\vec{v}	vecteur vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
\vec{OM}	vecteur position (m)
t	temps (s)

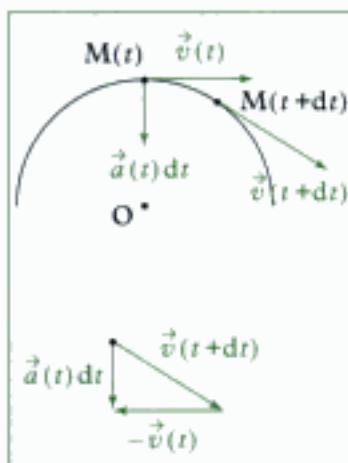


Fig. 16 - Vecteur accélération.

Le vecteur accélération (fig. 16) représente la variation du vecteur vitesse entre les instants t et $t + dt$ divisée par l'intervalle de temps dt :

$$\vec{a}(t)|_{\mathcal{R}} dt = \vec{v}(t+dt)|_{\mathcal{R}} - \vec{v}(t)|_{\mathcal{R}}.$$

Remarque : l'accélération représente donc la variation de :

- la norme du vecteur vitesse ;
- la direction (et du sens) du vecteur vitesse.

A.5.2 - Types de mouvement

Le mouvement d'un point matériel M est **accéléré** dans le référentiel \mathcal{R} si $\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}\|$ croît au cours du temps, c'est-à-dire si $\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}\|^2$ croît ; on peut alors écrire :

$$\frac{d\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}\|^2}{dt} > 0 \text{ soit } \frac{d(\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}})}{dt} > 0,$$

$$\text{ou encore : } \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} + \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} > 0$$

ainsi : $2\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} > 0$, ce qui donne :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} > 0.$$

Le mouvement est **décéléré** (ou ralenti) si $\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}\|$ décroît au cours du temps ; on montre de la même façon que cette définition correspond à :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} < 0.$$

Le mouvement du point matériel M est **uniforme** dans le référentiel \mathcal{R} si $\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}\| = \text{cte}$ au cours du temps, ce qui correspond à :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = 0.$$

Application 2 | Accélération de l'hélicoptère

Exprimer l'accélération du point A dans le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) puis l'accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R}' ($A ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) et dans le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

On suppose que la vitesse d'avancement de l'hélicoptère est constante : $\vec{v} = v\vec{e}_x$ ($v = \text{cte}$) et que la vitesse de rotation des pales est constante $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 450 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$. Le rayon des pales est $R = 5,3 \text{ m}$.

Remarque : il ne faut pas confondre « exprimer l'accélération dans le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) » avec « projeter le vecteur accélération dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ » !

Solution

• $\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_x$ donc $\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$.

Comme $\vec{e}_x = \text{cte}$ dans \mathcal{R} , $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$; ainsi :

$$\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x = v\vec{e}_x \quad (v = \dot{x}).$$

L'accélération de A dans \mathcal{R} est alors :

$$\vec{a}(A)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \ddot{v}\vec{e}_x + v\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}, \text{ soit } \vec{a}(A)|_{\mathcal{R}} = \vec{0}.$$

- La position de M dans \mathcal{R}' est repérée par : $\overrightarrow{AM} = Re_r$.

Sa vitesse dans \mathcal{R}' est donc : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'} = \dot{R}\vec{e}_r + R\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'}$.

Comme $R = \text{cte}$, $\dot{R} = 0$ et $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta = \omega\vec{e}_\theta$, on a :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'} = R\omega\vec{e}_\theta.$$

L'accélération de M dans \mathcal{R}' est donc :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \dot{R}\omega\vec{e}_\theta + R\dot{\omega}\vec{e}_\theta + R\omega\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'},$$

Remarque : $\frac{d}{dt}(uvw) = \frac{du}{dt}vw + u\frac{dv}{dt}w + uv\frac{dw}{dt}$.

Comme $R = \text{cte}$ et $\omega = \text{cte}$, $\dot{R} = 0$ et $\dot{\omega} = 0$; de plus $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = -\dot{\theta}\vec{e}_r = -\omega\vec{e}_r$.

On a donc :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'} = -R\omega^2\vec{e}_r.$$

- La position de M dans \mathcal{R} est repérée par : $\overrightarrow{OM} = xe_x + Re_r$.

Sa vitesse dans \mathcal{R} est donc : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\omega\vec{e}_\theta$.

Son accélération dans \mathcal{R} est :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + R\omega\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}, \text{ soit } \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = -R\omega^2\vec{e}_r.$$

Cette accélération est constamment dirigée vers A !

A.N. $\|\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}}\| = 5,3 \times \left(\frac{450 \times 2\pi}{60}\right)^2 \approx 11\ 769,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

A.6. Bilan

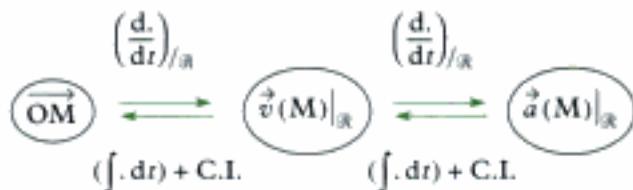


Fig. 17 - Bilan cinématique.

La figure 17 permet d'établir un bilan cinématique des principes utilisés. La cinématique a pour objet d'étudier les mouvements à travers les grandeurs cinématiques : vecteur position (et trajectoire), vecteur vitesse et vecteur accélération. À partir d'une ces quantités, on peut passer aux autres soit en dérivant $\left(\frac{d}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel d'étude, soit en intégrant $(\int dt)$ en tenant compte des conditions initiales (C.I.).

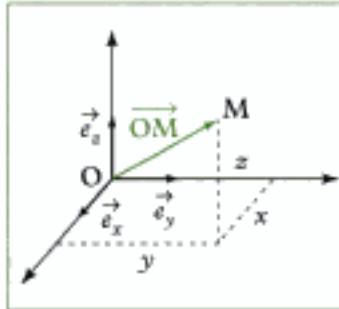


Fig. 18 - Base cartésienne.

A.7. Bases de projection utiles

A.7.1 - Base cartésienne

La base cartésienne est constituée des trois vecteurs (\vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z) (fig. 18). Un vecteur \overrightarrow{OM} y est défini à l'aide de trois paramètres x , y et z tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

Cette base est la même pour tous les points de l'espace.

Remarque :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}} = \sqrt{(\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

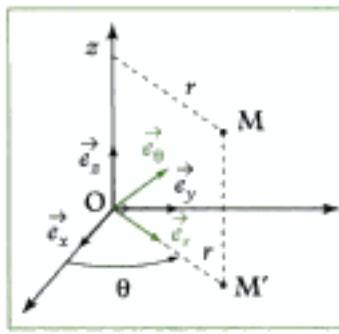


Fig. 19 - Base cylindrique.

1. Attention de ne pas écrire :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z.$$

2. Attention, θ n'apparaît pas explicitement mais \vec{e}_r et \vec{e}_θ dépendent de θ .

A.7.2 - Base cylindrique

La base cylindrique est constituée des trois vecteurs (\vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_z) (fig. 19).

L'angle (\vec{e}_x , \vec{e}_r) = θ s'appelle **angle polaire** et on a $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.

Un vecteur \overrightarrow{OM} y est défini à l'aide des trois paramètres r , θ et z tels que^{1,2} :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.$$

Remarque : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Cette base est mobile et bouge avec le point M : elle est utile dans les problèmes à symétrie cylindrique.

Rappel : $\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta$ et $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{e}_r$ avec $\mathcal{R} = (O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Très souvent, on travaille dans le plan ; dans ce cas on n'utilise pas le vecteur \vec{e}_z : on parle alors de **base polaire** (fig. 20).

La base polaire est constituée des deux vecteurs (\vec{e}_r , \vec{e}_θ) et le vecteur \overrightarrow{OM} est alors donné par la relation³ : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

Remarque : on a toujours $\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta$ et $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{e}_r$.

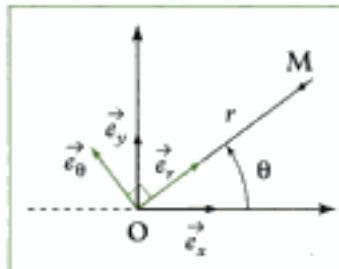


Fig. 20 - Base polaire.

3. Attention, θ n'apparaît pas explicitement mais \vec{e}_r et \vec{e}_θ dépendent de θ .

A.7.3 - Expressions de la vitesse et de l'accélération à l'aide des bases cartésienne et cylindrique

Soit un point M en mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

Si on utilise comme base de projection la base cartésienne ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), on a :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

4. En effet $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$;

$\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$; $\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$.

1. Afin d'obtenir ces vecteurs en coordonnées polaires, il suffit de supprimer les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération selon \vec{e}_z .

Si maintenant, on utilise comme base de projection la base cylindrique ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$), on a¹ :

- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

- $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \dot{z}\vec{e}_z + z\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$ soit :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z.$$

- $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$

soit : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z$

soit encore :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Remarque : la composante selon \vec{e}_r d'un vecteur est appelée composante radiale, la composante selon \vec{e}_θ est appelée composante orthoradiale.

B. Étude de mouvements usuels

B.1. Mouvement rectiligne

La trajectoire du point M dans le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) est une droite, par exemple ($O ; \vec{e}_x$) ; les vecteurs position, vitesse et accélération s'écrivent donc sous la forme :

- $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$;
- $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x$;
- $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x$.

B.1.1 - Mouvement rectiligne uniforme et uniformément varié

– Le mouvement est **rectiligne uniforme** si $v = \dot{x} = \text{cte}$ (on retrouve alors $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ puisque $\vec{a} = \vec{0}$).

– Le mouvement est **rectiligne uniformément varié** si $\vec{a} = \text{cte} = a\vec{e}_x$ et si la trajectoire est une droite :

- si $va > 0$, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré, en effet : $\vec{v} \cdot \vec{a} = va > 0$;

- si $va < 0$, le mouvement est rectiligne uniformément ralenti (ou décéléré, ou retardé, en effet : $\vec{v} \cdot \vec{a} = va < 0$.)



Le signe de \vec{a} ne suffit pas.

À partir de $\vec{a} = a\vec{e}_x = \text{cte}$, on peut trouver la vitesse en intégrant vectoriellement l'équation :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a\vec{e}_x, \text{ d'où } \vec{v}(t) = at\vec{e}_x + \vec{v}(t=0) = (at + v_0)\vec{e}_x.$$

Le vecteur position s'obtient en intégrant vectoriellement l'équation :

$$\frac{d\overrightarrow{\text{OM}}}{dt} = at\vec{e}_x + v_0\vec{e}_x \text{ soit } \overrightarrow{\text{OM}}(t) = \frac{at^2}{2}\vec{e}_x + v_0t\vec{e}_x + \overrightarrow{\text{OM}}(t=0),$$

$$\text{ou encore : } x\vec{e}_x = \left(\frac{at^2}{2} + v_0t + x_0\right)\vec{e}_x.$$

En projetant selon \vec{e}_x , on obtient :

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}.$$

Application 3 Déterminer une durée et une distance

Un véhicule se déplaçant sur une ligne droite horizontale a une accélération constante $a = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Déterminer le temps mis pour passer de 0 à $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ainsi que la distance parcourue.

Solution

Dans le référentiel $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à la route $(O; \vec{e}_x)$, le vecteur accélération du véhicule M s'écrit :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = a\vec{e}_x = \text{cte}.$$

À $t = 0$ (au départ), M se trouve en O ($x_0 = 0$) avec une vitesse nulle ($v_0 = 0$) ; ainsi en intégrant (à l'aide des conditions initiales précédentes) :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = at\vec{e}_x \text{ et } \overrightarrow{\text{OM}} = \frac{at^2}{2}\vec{e}_x.$$

Le temps mis pour atteindre $v_f = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ est : $t_0 = \frac{v_f}{a}$.

La distance parcourue est : $D = x(t_0) = \frac{at_0^2}{2}$.

$$\text{A.N. } t_0 = \frac{\left(\frac{100}{3,6}\right)}{6} \approx 4,6 \text{ s} \quad \text{et} \quad D = \frac{6 \times 4,6^2}{2} \approx 64,3 \text{ m.}$$

B.1.2 - Mouvement rectiligne sinusoïdal

Le mouvement est rectiligne **sinusoïdal** si le vecteur position dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OM}} &= \mathbf{x}(t)\vec{e}_x \\ &= X_m \cos(\omega t + \varphi)\vec{e}_x \end{aligned}$$

X_m	l'amplitude du mouvement (m)
ω	pulsation ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
φ	phase à l'origine (rad)

Ainsi :

$$\vec{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{\text{OM}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi)\vec{e}_x \text{ et } \vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)\vec{e}_x.$$

On constate que : $\vec{a} = -\omega^2 \vec{OM}$.

Comme $\vec{a} = \left(\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathbb{R}}$, un mouvement rectiligne sinusoïdal est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \omega^2 \vec{OM} = \vec{0}.$$

Projetée selon \vec{e}_x , cette équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

B.2. Mouvement circulaire

La trajectoire du point M dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un cercle de centre O et de rayon R. En utilisant la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ (ou polaire puisque le mouvement se fait dans le plan $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$) (fig. 21), les vecteurs position, vitesse et accélération s'écrivent :

- $\vec{OM} = R \vec{e}_r$;

- $\vec{v}(M)|_{\mathbb{R}} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$;

- $\vec{a}(M)|_{\mathbb{R}} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$.

– Le mouvement est **circulaire uniforme** si $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cte}$, en effet dans ce cas :

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = R \omega \vec{e}_\theta \cdot (-R \omega^2 \vec{e}_r) = 0,$$

on a alors :

- $\vec{OM} = R \vec{e}_r$;

- $\vec{v}(M)|_{\mathbb{R}} = R \omega \vec{e}_\theta$ (la vitesse est orthoradiale) ;

- $\vec{a}(M)|_{\mathbb{R}} = -R \omega^2 \vec{e}_r$ (l'accélération est radiale et centripète)².

Remarque : dans ce cas, même si $v = R\omega = \text{cte}$, l'accélération n'est pas nulle car la direction du vecteur vitesse varie.

– Le mouvement est **circulaire uniformément accéléré** si $\dot{\theta} \ddot{\theta} = \text{cte} > 0$. En effet, dans ce cas :

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \cdot (R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r) = R^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} > 0.$$

– Le mouvement est circulaire uniformément décéléré si $\dot{\theta} \ddot{\theta} < 0$.

Application 4 Vitesse d'un avion

Un avion M se déplace à vitesse constante v en virage circulaire horizontal de centre O et de rayon $R = 600$ m.

Déterminer la vitesse v de l'avion afin que son accélération soit $a = 6g$ (avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Solution

Le mouvement est circulaire uniforme dans le référentiel lié au centre O de la trajectoire ; ainsi :

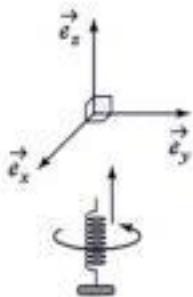
$$a = \frac{v^2}{R} \text{ soit } v = \sqrt{aR}.$$

A.N. $v = \sqrt{6 \times 9,81 \times 600} = 187,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 676 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

L'essentiel

✓ Référentiel /observateur :

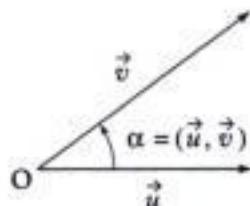
- base orthonormée directe : 3 vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tels que :
- $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$, $\vec{e}_y \perp \vec{e}_z$ et $\vec{e}_z \perp \vec{e}_x$;
- $\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$;
- règle du tire-bouchon.
- repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- référentiel (\equiv observateur) $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$.



✓ Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

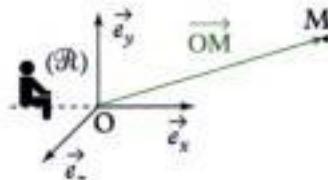
Propriétés : si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



✓ Vecteur position

La position du point M observé depuis l'observateur (référentiel \mathcal{R}) est définie par le vecteur position \overrightarrow{OM} composé :

- d'un point fixe O dans \mathcal{R} ;
- du point observé M.



Remarque : la trajectoire du point M dans le référentiel \mathcal{R} est l'ensemble des points par lesquels M passe au cours du temps.

✓ Vecteur vitesse

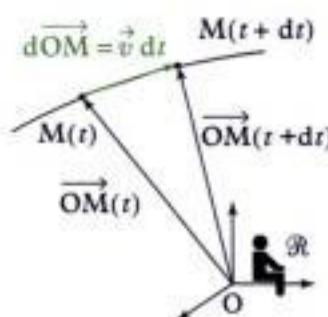
Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} (par rapport à l'observateur) est la dérivée temporelle du vecteur position du point M dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

\vec{v} vecteur vitesse ($m \cdot s^{-1}$)

\overrightarrow{OM} vecteur position (m)

t temps (s)



Remarque : le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

✓ Vecteur accélération

Le vecteur accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} est la dérivée seconde du vecteur position de M par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} :

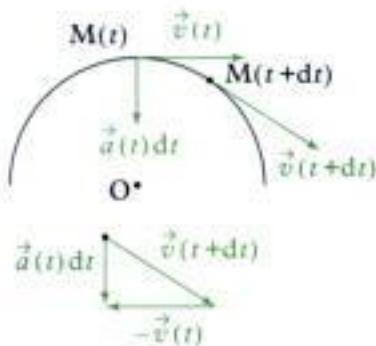
$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

\vec{a} vecteur accélération ($m \cdot s^{-2}$)

\vec{v} vecteur vitesse ($m \cdot s^{-1}$)

\vec{OM} vecteur position (m)

t temps (s)



✓ Bilan

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{\text{O}} \vec{OM} & \xleftrightarrow{\left(\frac{d}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}} & \textcircled{\text{O}} \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \\ (\int dt) + \text{C.I.} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \textcircled{\text{O}} \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} & \xleftrightarrow{\left(\frac{d}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}} & \textcircled{\text{O}} \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} \\ (\int dt) + \text{C.I.} & & \end{array}$$

✓ Caractérisation du mouvement

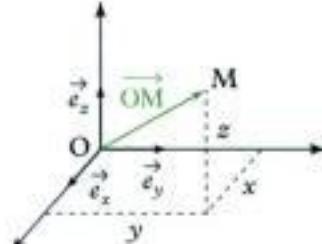
- Mouvement accéléré : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} > 0$
- Mouvement décéléré : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} < 0$
- Mouvement uniforme : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = 0$.

✓ Bases de projection

• Base Cartésienne

La base cartésienne est constituée de trois vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Un vecteur \vec{OM} y est défini à l'aide de trois paramètres x, y et z tels que : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.



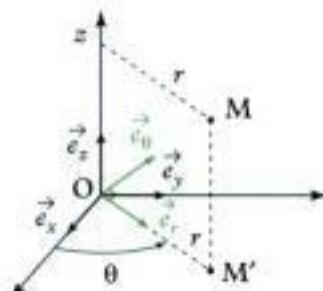
Remarque : savoir retrouver vitesse et accélération.

• Base cylindrique

La base cartésienne est constituée de trois vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta}, \vec{e}_z)$.

L'angle θ s'appelle angle polaire et on a $r = \|\vec{OM}'\|$. Un vecteur \vec{OM} y est défini à l'aide de trois paramètres r, θ et z tels que : $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

Avec $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_r, \vec{e}_{\theta}, \vec{e}_z)$, on a : $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_{\theta}$ et $\left(\frac{d\vec{e}_{\theta}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{r}\vec{e}_r$

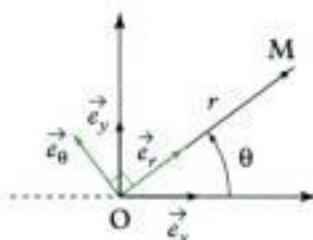


Remarques :

1) Savoir retrouver vitesse et accélération.

2) Ne pas écrire $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \cancel{\theta\vec{e}_{\theta}} + z\vec{e}_z$.

3) Dans le plan, on parle de base polaire $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.



Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer la vitesse puis l'accélération d'un point connaissant sa position ?

On considère un point M dont la position est connue à l'instant t et repéré à l'aide de paramètres $(x, y, r, \theta \dots)$. On cherche à déterminer son vecteur vitesse puis son vecteur accélération.

→ Savoir faire

- ➊ Bien préciser le référentiel \mathcal{R} (l'observateur) par rapport auquel on cherche à déterminer le vecteur vitesse puis le vecteur accélération du point M.
- ➋ Exprimer le vecteur position \vec{OM} .



O est un point fixe du référentiel \mathcal{R} .

- ➌ Dériver le vecteur position par rapport au référentiel \mathcal{R} afin d'obtenir le vecteur vitesse.
Vérifier les unités

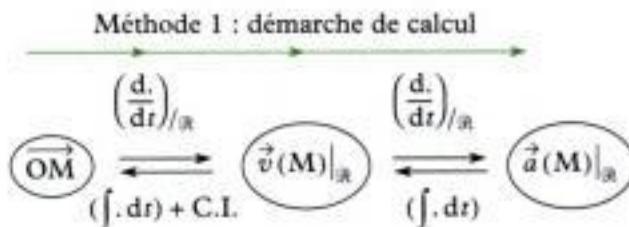


Comme la position du point M est connue à tout instant, le vecteur vitesse est lui-même connu à tout instant.

- ➍ Dériver le vecteur vitesse par rapport au même référentiel \mathcal{R} afin d'obtenir le vecteur accélération.
Vérifier les unités.



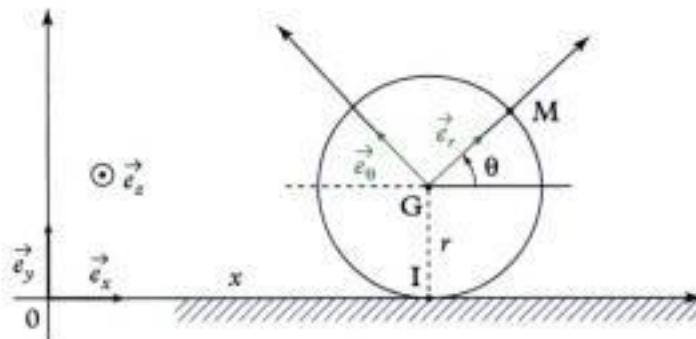
La démarche de calcul est basée sur la dérivation de vecteurs soit un déplacement sur le schéma ci-dessous de la gauche vers la droite (uniquement).



→ Application

Soit M un point correspondant à la valve d'une roue de voiture, de centre G et de rayon $r = 0,3 \text{ m}$. Pour repérer le point, on utilise deux paramètres (voir figure) :

- $x(t) = 3t^2$ ($x = OI$);
 x (m), t (s);
- $\theta(t) = -10t^2$ $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$;
 θ (rad), t (s).



Déterminer le vecteur vitesse de M par rapport au sol, puis le vecteur accélération de M par rapport au sol.

Solution

- ❶ On cherche la vitesse du point M par rapport au sol donc le référentiel \mathcal{R} est ici $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



Cela signifie que l'observateur qui regarde bouger M est fixe par rapport au sol.

- ❷ On exprime le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GM} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + r\vec{e}_y + r\vec{e}_r.$$



O doit être fixe par rapport au référentiel \mathcal{R} (ici le sol).



À tout instant :

- $x(t)$ est connu ;
- r est une constante égale à 0,3 m ;
- \vec{e}_r est parfaitement déterminé puisque $\theta(t) = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$ est connu à tout instant ;
donc \overrightarrow{OM} est connu à tout instant.

- ❸ Pour déterminer le vecteur vitesse de M par rapport au sol, on va dériver le vecteur position par rapport à \mathcal{R} :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}},$$

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_x + r\vec{e}_y + r\vec{e}_r) \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_x) \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d}{dt}(r\vec{e}_y) \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) \right)_{/\mathcal{R}},$$



En effet $(u+v)' = u'+v'$

$$\text{soit } \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \frac{dr}{dt}\vec{e}_y + r\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}.$$



En effet $(uv)' = u'v + uv'$.



On voit que la dérivation de vecteurs s'effectue de la même manière que la dérivation scalaire en mathématiques. La seule différence réside dans le fait qu'il faut préciser **par rapport à quel référentiel** on dérive un vecteur.



Pour dériver un vecteur par rapport à \mathcal{R} , il n'y a pas obligatoirement nécessité d'exprimer ce vecteur dans \mathcal{R} avant de le dériver : ici \overrightarrow{OM} est exprimé à l'aide de \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_r et on va le dériver par rapport à $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

En reprenant le calcul :

- $r = \text{cte}$, donc $\frac{dr}{dt} = \dot{r} = 0$;

- \vec{e}_x est fixe dans \mathcal{R} , donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$;

- \vec{e}_y est fixe dans \mathcal{R} , donc $\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$;

- \vec{e}_r bouge dans \mathcal{R} , et on sait (d'après le cours) que $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$;

on a :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + x \times \vec{0} + 0 \times \vec{e}_y + r \times \vec{0} + 0 \times \vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

soit

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Unités : comme \dot{x} est en $m \cdot s^{-1}$, r en m et $\dot{\theta}$ en $rad \cdot s^{-1}$ et que $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ est en $m \cdot s^{-1}$, cette expression est homogène.

Par ailleurs, on connaît :

$$x(t) = 3t^2 \quad \text{et} \quad \theta(t) = -10t^2;$$

donc $\dot{x}(t) = \dot{x} = 6t$ et $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta} = -20t$, donc :

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = 6t\vec{e}_x + 0,3 \times (-20t)\vec{e}_\theta \quad \text{soit} \quad \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = 6t\vec{e}_x - 6t\vec{e}_\theta = 6t(\vec{e}_x - \vec{e}_\theta).$$

À tout instant, on connaît \vec{e}_x et \vec{e}_θ , donc $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$.

- ④ Pour déterminer le vecteur accélération de M par rapport au sol, on va dériver le vecteur vitesse toujours par rapport à \mathcal{R} :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt} (\dot{x}\vec{e}_x + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \right)_{/\mathcal{R}}$$

$$\text{soit} \quad \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt} (\dot{x}\vec{e}_x) \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d}{dt} (r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \right)_{/\mathcal{R}}$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} &= \ddot{x}\vec{e}_x + \dot{x}\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \\ &= \ddot{x}\vec{e}_x + \dot{x} \times \vec{0} + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r). \end{aligned}$$



On sait que $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}|_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$.

Ainsi :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

Unités : comme \ddot{x} est en $m \cdot s^{-2}$, r en m, $\dot{\theta}$ en $rad \cdot s^{-1}$ et $\ddot{\theta}$ en $rad \cdot s^{-2}$, cette expression est homogène.



Encore une fois, il n'y a pas besoin d'exprimer le vecteur vitesse dans \mathcal{R} (expression en fonction de \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z uniquement), pour pouvoir dériver ce vecteur vitesse par rapport à \mathcal{R} , (mais on peut le faire, c'est souvent plus long au niveau des calculs).

Ici comme $\dot{x}(t) = 6t$ et $\dot{\theta}(t) = -20t$, alors :

$$\ddot{x}(t) = 6 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta}(t) = -20;$$

et $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}}$ s'écrit :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = 6\vec{e}_x + 0,3 \times (-20)\vec{e}_\theta - 0,3 \times (-20t)^2\vec{e}_r = 6(\vec{e}_x - \vec{e}_\theta) - 120t^2\vec{e}_r.$$

À tout instant on connaît \vec{e}_x , \vec{e}_θ et \vec{e}_r , donc $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}}$.

Méthode 2

Comment déterminer la position d'un point connaissant son accélération ?

On considère un point M repéré à l'aide de paramètres ($x, y, r, \theta \dots$). Connaissant son accélération (à tout instant), on cherche à déterminer sa position (à tout instant).

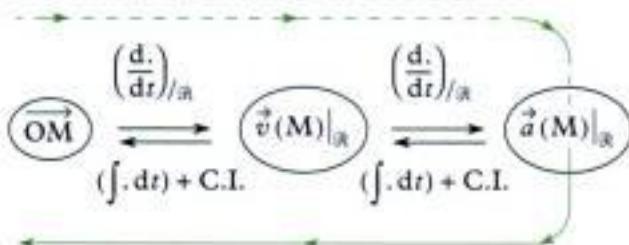
→ Savoir faire

- ① Reprendre la démarche de la méthode 1. Exprimer le vecteur position, le vecteur vitesse puis le vecteur accélération du point M en fonction des paramètres (et de leurs dérivées) qui repèrent le point M.
- ② Utiliser l'information sur l'accélération afin de trouver des relations entre ces paramètres (et leurs dérivées).
- ③ Intégrer ces relations par rapport au temps (en utilisant les C.I.) afin de déterminer la variation en fonction du temps des paramètres repérant le point M donc afin de déterminer le vecteur position.



La démarche commence donc par la dérivation des vecteurs (identique à la méthode 1 : déplacement de la gauche vers la droite sur le schéma) puis se poursuit par l'intégration de relations (déplacement de la droite vers la gauche sur le schéma) afin de déterminer exactement le vecteur position (après avoir utilisé les informations disponibles au niveau de l'accélération).

Méthode 2 : démarche de calcul



→ Application

Soit un point M repéré par deux paramètres x et y (voir figure). À tout instant l'accélération du point M par rapport au sol \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) est égale à \vec{g} , vecteur vertical vers le bas et de norme $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

À $t = 0$, le point M se trouve en I ($OI = h = 200 \text{ m}$) et possède une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Déterminer la position du point M pour tout instant $t \geq 0$.

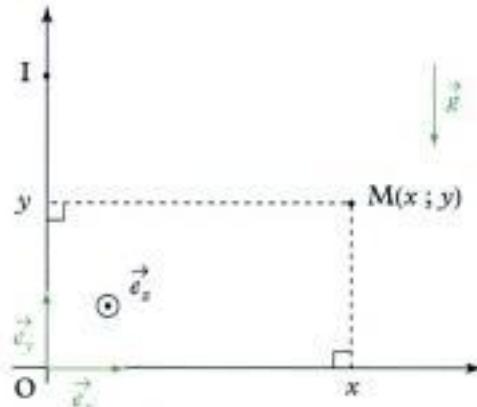
Solution

- ① Le référentiel qui nous intéresse est bien évidemment \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) c'est-à-dire le sol puisqu'on sait que l'accélération de M vaut \vec{g} par rapport au sol.

• Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.



Comme $x(t)$ et $y(t)$ ne sont pas connues, ce vecteur position n'est pour l'instant pas connu.



$$\bullet \text{ Vecteur vitesse : } \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\text{OM}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y.$$

 En effet, \vec{e}_x et \vec{e}_y sont fixes dans \mathcal{R} , donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$.

$$\bullet \text{ Vecteur accélération : } \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y) \right)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y.$$

② Or l'énoncé nous dit qu'à tout instant l'accélération de M par rapport au sol est :

$$\vec{g} = -g\vec{e}_y, \text{ avec } g = \|\vec{g}\| = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

En comparant les deux expressions de l'accélération, on en déduit :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y = -g\vec{e}_y \text{ donc } \begin{cases} \ddot{x} = 0 & (\text{projection sur } \vec{e}_x) \\ \ddot{y} = -g & (\text{projection sur } \vec{e}_y). \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g. \end{cases}$$

③ Il ne reste plus qu'à intégrer ces deux relations par rapport au temps (en utilisant les C.I. c'est-à-dire informations valables uniquement à un instant donné (ici $t = 0$)) afin d'obtenir $x(t)$ et $y(t)$.

$$\text{Ainsi : } \dot{x}(t) = k_1$$

$$\text{Or : } \dot{x}(t=0) = k_1 = \vec{v}_0 \cdot \vec{e}_x = v_0 \text{ donc } k_1 = v_0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{De même : } \dot{y}(t) = -gt + k_2$$

$$\text{Or : } \dot{y}(t=0) = k_2 = \vec{v}_0 \cdot \vec{e}_y = 0 \text{ donc } k_2 = 0.$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = -gt. \end{cases}$$

On obtient en intégrant une nouvelle fois par rapport au temps :

$$x(t) = v_0 t + k_3.$$

$$\text{Or : } x(t=0) = \overrightarrow{\text{OM}}(t=0) \cdot \vec{e}_x = \overrightarrow{\text{OI}} \cdot \vec{e}_x = 0 \text{ avec } k_3 = 0.$$

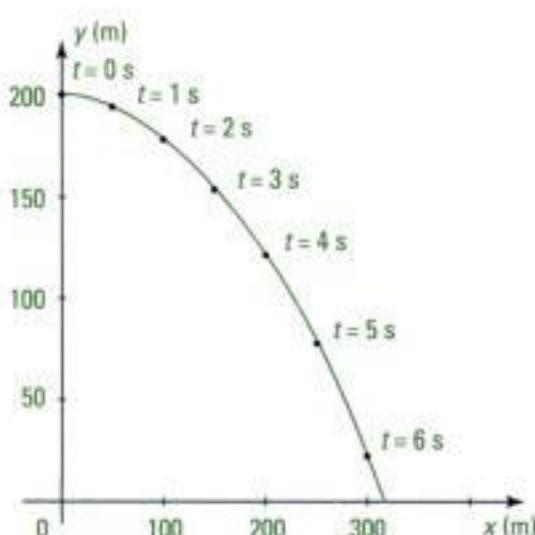
$$\text{De même : } y(t) = -g\frac{t^2}{2} + k_4.$$

$$\text{Or : } y(t=0) = k_4 = \overrightarrow{\text{OM}}(t=0) \cdot \vec{e}_y \\ = \overrightarrow{\text{OI}} \cdot \vec{e}_y = h = 200 \text{ m}$$

$$\text{donc } k_4 = h.$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -g\frac{t^2}{2} + h. \end{cases}$$

 Comme $x(t)$ et $y(t)$ sont déterminées à tout instant, $\overrightarrow{\text{OM}}(t)$ est déterminé à tout instant ; on connaît donc parfaitement la position de M à tout instant $t \geq 0$. On peut ainsi positionner le point M au cours du temps sur un graphique, c'est-à-dire tracer sa trajectoire.



Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Homogénéité d'une formule

Vérifier l'homogénéité de la formule ci-dessous :

$$y = 5at^2 + vt + h,$$

où a est une accélération, t le temps, v une vitesse et y et h sont deux longueurs.

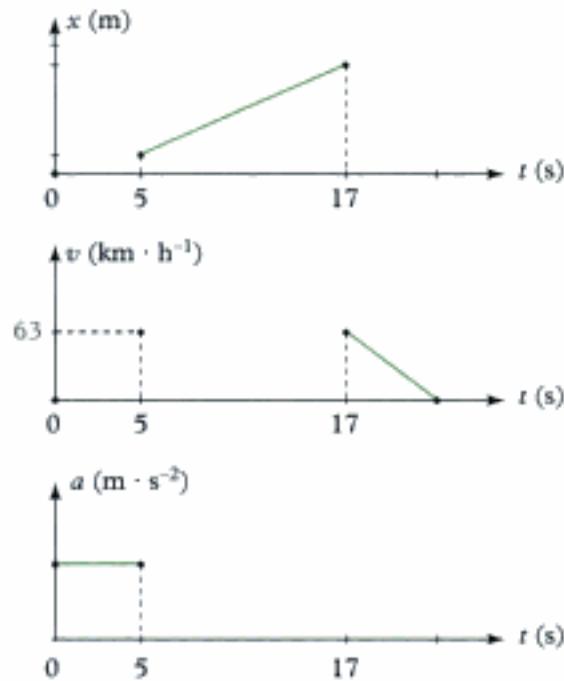
Ex. 2 Vitesses rectiligne et angulaire

a) Une voiture avance à la vitesse $\dot{x} = 70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Donner sa vitesse \dot{x} en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) Un moteur tourne à la vitesse $\dot{\theta} = 3\,500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Donner sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ex. 3 Analyse de graphiques

Une voiture roulant sur une route horizontale rectiligne, se déplace d'un point A vers un point B distants de 300 m. On donne les informations partielles sur la position x , la vitesse v et l'accélération a de la voiture pendant ce trajet.



Compléter les graphiques en indiquant les valeurs et le type de courbe.

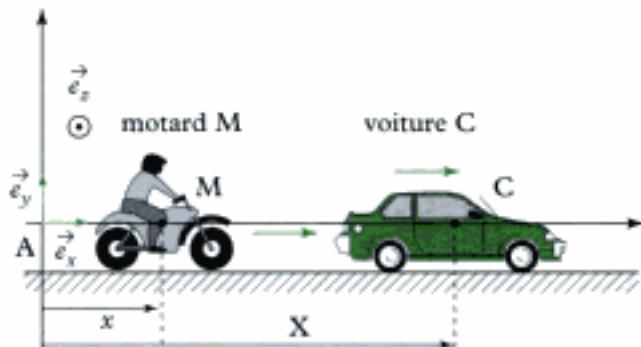
Calculer le temps T mis pour aller de A à B.

Niveau 2

Ex. 4 Course poursuite

Une voiture C roule à la vitesse constante $v_0 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une route horizontale et droite ;

un motard M, qui démarre à $t = 0$ au moment où la voiture passe à sa hauteur (au point A), accélère uniformément ; il atteint $v = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ au bout de $t = 10 \text{ s}$. Soit \mathcal{R}_0 le référentiel (A ; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

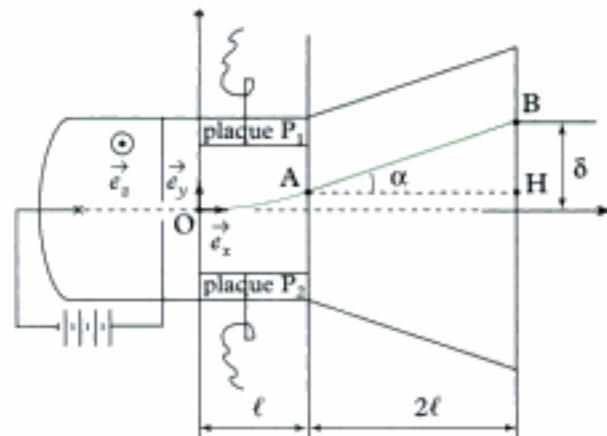


- Quel temps T faudra-t-il au motard pour rattraper la voiture ?
- Quelle sera alors la distance d parcourue ?
- Quelle sera la vitesse v_1 acquise par le motard ?

Ex. 5 Écran d'oscilloscope

On étudie le mouvement des électrons formant le faisceau qui laisse une trace fluorescente sur l'écran de l'oscilloscope.

Ces électrons arrivent en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. Ils traversent alors un jeu de plaques (P_1 et P_2) de longueur ℓ qui créent, à l'aide d'un champ électrostatique, une accélération constante $\vec{a}_0 = a_0 \vec{e}_y$. Les électrons sont déviés et sortent du jeu de plaques en A avec une vitesse \vec{v}_A inclinée d'un angle α par rapport à \vec{e}_x . Ils poursuivent alors leur trajet jusqu'à l'écran (au point B) avec une accélération nulle.



Données :

$$v_0 = 3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; a_0 = 1 \cdot 10^{15} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; \ell = 5 \text{ cm}.$$

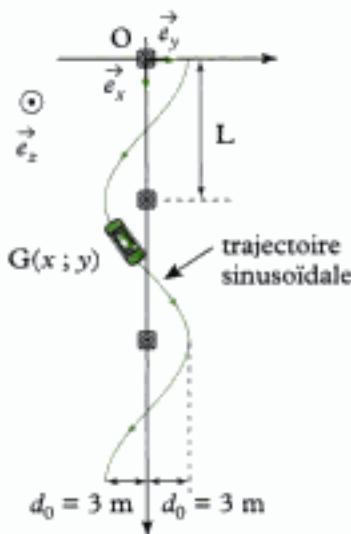
- Déterminer la trajectoire des électrons entre O et A.

- 2) Déterminer puis calculer α .
- 3) Déterminer la trajectoire des électrons entre A et B.
- 4) Calculer δ .

Ex. 6 Test de stabilité d'une automobile

Lors d'un test de stabilité, une voiture repérée par le point G de coordonnées $(x; y)$ dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est astreinte à suivre une trajectoire sinusoïdale horizontale de slalom entre des plots espacés d'une distance L de manière à conserver à tout moment une vitesse $\dot{x} = v_0 = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Si on veut conserver à tout moment une accélération inférieure à $0,7g$, à quelle distance minimum L doit-on placer les plots ?



Ex. 7 Sauvetage dans l'eau

Un nageur secouriste (A) qui se trouve au départ (sur la plage (en S)) veut rejoindre le plus vite possible un enfant (E) qui semble en difficulté dans l'eau. Indiquer quel doit être son chemin pour arriver jusqu'à lui le plus vite possible, sachant que sur la plage il se déplace avec une vitesse constante v_1 et que dans l'eau il nage à une vitesse constante v_2 ($v_2 < v_1$). Montrer en particulier qu'il doit entrer dans l'eau en un point particulier B que l'on caractérisera à l'aide d'une relation faisant intervenir des angles et les vitesses v_1 et v_2 .

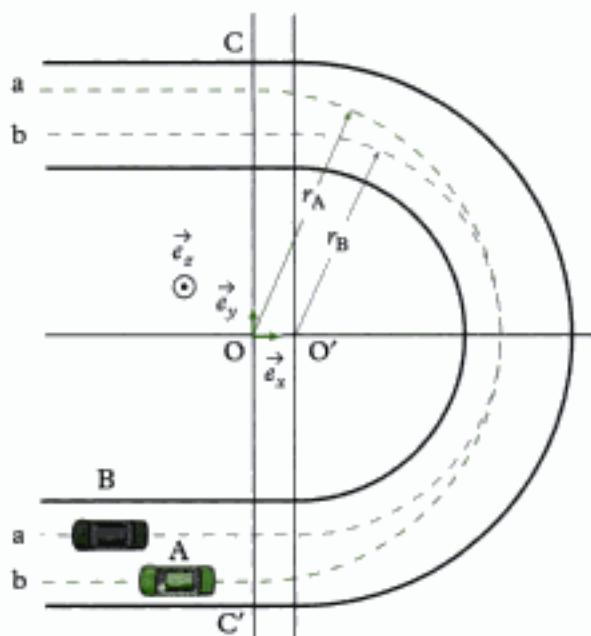


Niveau 3

Ex. 8 Course de voiture

Lors d'une course de voiture, 2 voitures (A et B) arrivent en ligne droite et prennent le virage de manière différente :

- la voiture A prend le virage sur une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $r_A = 90 \text{ m}$;
- la voiture B négocie le même virage sur une trajectoire circulaire de centre O' et de rayon $r_B = 75 \text{ m}$.



On appelle \mathcal{R} le référentiel $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le but de l'exercice est de comparer l'avancement des 2 voitures, sachant que la **référence de comparaison est liée à l'axe (CC')**.

- 1) Déterminer puis calculer les longueurs L_A et L_B des trajectoires des 2 voitures A et B. Conclusion.
- 2) On suppose que les 2 voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant tout le virage. Déterminer ces vitesses pour que dans le virage, les accélérations des 2 voitures restent inférieures à $0,8g$.
- 3) En déduire les temps t_A et t_B nécessaires aux 2 voitures pour négocier le virage. Conclure.

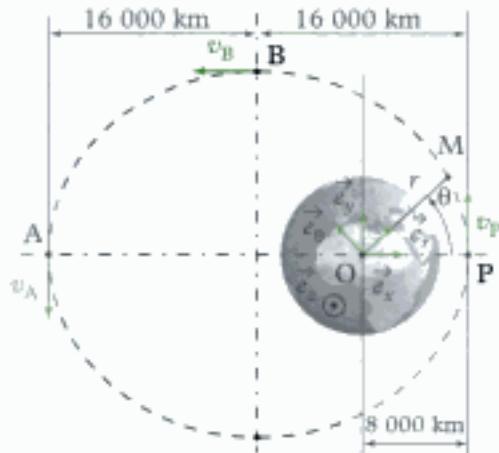
Ex. 9 Satellite artificiel

Un satellite artificiel M tournant autour de la Terre est repéré par ses coordonnées polaires.

Sa trajectoire est une ellipse d'équation :

$$OM = r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

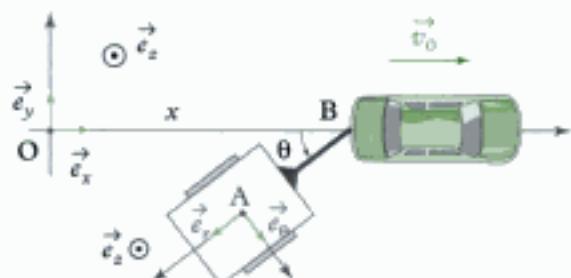
dans le référentiel $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



- 1) Déterminer puis calculer p et ϵ .
 - 2) Dans ce type de mouvement l'accélération est radiale. Montrer qu'alors $r^2 \dot{\theta} = C = \text{cte}$.
Donner la valeur de C .
 - 3) Déterminer puis calculer v_A , la vitesse de M au point A.
 - 4) Sachant qu'au point B, \vec{v}_B est parallèle à \vec{e}_x , montrer que $r_B = \frac{r_A + r_p}{2}$.
- Données : $v_p = 8\,640 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ex. 10 Mouvement d'une remorque

On étudie le mouvement d'une remorque (par l'intermédiaire de mouvement du point A) accrochée à l'arrière d'une voiture (en B). La voiture roule à vitesse constante \vec{v}_0 et à tout instant le point A se déplace en direction de B. Le sol est représenté par le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



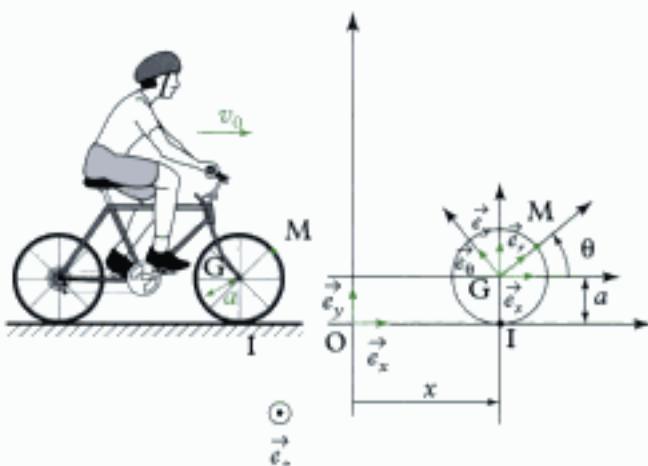
- 1) Sachant qu'au départ $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, on demande de déterminer l'évolution de θ en fonction du temps.
- 2) Conclusion quant au réalignement de la remorque avec la voiture.

Données :

- $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right|$;
- $BA = \ell = \text{cte}$;
- $OB = x$.

Ex. 11 Roue de vélo

On étudie la roue avant d'un vélo (de centre G et de rayon a) qui se déplace sur un sol horizontal à la vitesse constante $v_0 = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ par rapport au sol (référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$). On repère un point M de la roue (de centre G et de rayon $a = 350 \text{ mm}$).



- 1) Déterminer l'expression de la vitesse du point M par rapport au sol.
- 2) Pour que la roue ne dérape pas, il faut que la vitesse de tout point M de la roue soit nulle lorsqu'il passe au niveau du sol (en I). Donner la relation qui existe dans ce cas entre v_0 et $\dot{\theta}$.
- 3) Dans les conditions du 2), tracer l'allure de la trajectoire de M en le positionnant à plusieurs instants.

Indications

Ex. 7 Pour la caractérisation de la position de B, faire intervenir :

$$i_1 = \frac{\pi}{2} - \widehat{SBH} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{\pi}{2} - \widehat{EBH'}$$

Ex. 8 1) Ne pas oublier les 2 segments de droite pour la voiture B.

2) Utiliser les coordonnées polaires pour exprimer vitesse et accélération.

Ex. 11 3) On pourra exprimer le vecteur position dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) en choisissant $x(t=0)=0$ et $\theta(t=0)=0$.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

- Accélération : a est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Vitesse : v est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Temps : t est en s.

Longueurs : h et y sont en m.

Ainsi :

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{s}^2 = \text{m} \quad [5at^2]$$

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \text{s} = \text{m} \quad [vt]$$

$$\text{m} \quad [h]$$

L'ensemble de l'expression est homogène à une longueur en m. Ceci est de plus cohérent avec y .

Exercice 2

a) $\dot{x} = 70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Or $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ et $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$.

$$\text{Donc } \dot{x} = \frac{70 \times 1000}{3600} = \frac{70}{3,6} \approx 19,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Pour passer des $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, on divise par 3,6.

b) $\dot{\theta} = 3500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Or $1 \text{ tr} = 2\pi \text{ rad}$ et $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$.

$$\text{Donc } \dot{\theta} = \frac{3500 \times 2\pi}{60} = \frac{3500}{\frac{60}{2\pi}} = \frac{3500}{9,55} = 366,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Pour passer des $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, on divise quasiment par 10.

Exercice 3

1) À tout instant, on a entre les différentes grandeurs les relations suivantes :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Pour $0 < t < 5 \text{ s}$

$a(t) = a_0 = \text{cte}$ donc $v(t)$ est linéaire (par rapport au temps).

En effet :

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \quad \text{donc} \quad v(t) = a_0 t + \text{cte}$$

$$v(t=0) = 0 + \text{cte} = 0$$

$$v(t=5 \text{ s}) = 63 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \quad \text{donc} \quad a_0 = \frac{\frac{63}{3,6}}{5} = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$x(t)$ est parabolique :

- elle admet une tangente horizontale en $t = 0$ car $v(t = 0) = 0$;
- il y a continuité de la tangente à la courbe $x(t)$ à gauche et à droite de $t = 5$ s car $v(t = 5^-) = v(t = 5^+) = 63 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

 La vitesse est la pente de la courbe $x(t)$ donnant la position en fonction du temps.

En effet :

$$\frac{dx}{dt} = v = a_0 t \text{ donc } x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + \text{cte.}$$

Or $x(t = 0) = 0$ donc cte = 0, d'où $x(t) = a_0 \frac{t^2}{2}$.

Pour $t = 5$ s : $x(t = 5 \text{ s}) = 3,5 \times \frac{5^2}{2} = 43,75 \text{ m}$.

Pour $5 < t < 17$ s

Comme $x(t)$ est linéaire, $v(t)$ est constante et $a(t)$ est nulle.

$$a = 0$$

$v = \text{cte} = v_0 = 63 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, donc $x = v_0 t + \text{cte}$.

Or $t = 5$ s, $x = 43,75 \text{ m}$ donc cte = $43,75 - \frac{63}{3,6} \times 5$ soit cte = $-43,75 \text{ m}$.

Donc $x(t) = v_0 t - 43,75$.

Alors pour $t = 17$ s : $x(t = 17 \text{ s}) = \frac{63}{3,6} \times 17 - 43,75 = 253,75 \text{ m}$.

Pour $17 \text{ s} < t < T$

La vitesse est linéaire par rapport au temps donc l'accélération est constante et le déplacement est parabolique :

$$a(t) = a_1 = \text{cte} \text{ donc } v(t) = a_1 t + \text{cte.}$$

Or à $t = 17$ s, $v = v_0$ et à $t = T$, $v = 0$ donc :

$$v(t) = -\frac{v_0}{T-17}(t-17) + v_0 \text{ donc } x(t) = -\frac{v_0}{T-17} \frac{(t-17)^2}{2} + v_0 t + \text{cte.}$$

Or à $t = 17$ s, $x = 253,75 \text{ m}$, donc :

$$x(t) = -\frac{v_0}{T-17} \frac{(t-17)^2}{2} + v_0(t-17) + 253,75.$$

On sait par ailleurs que $x(t = T) = 300 \text{ m}$, donc :

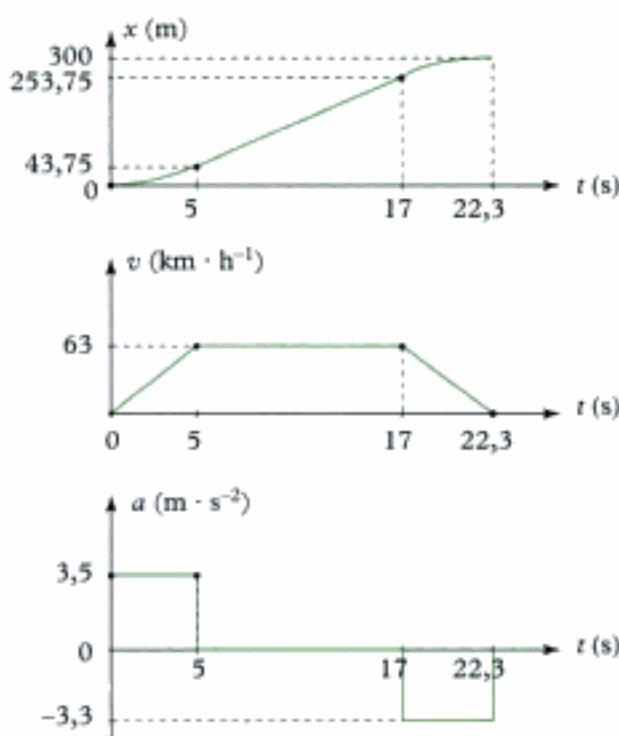
$$-\frac{v_0}{T-17} \frac{(T-17)^2}{2} + v_0(T-17) + 253,75 = 300$$

$$\frac{v_0}{2}(T-17) = 46,25$$

$$T = \frac{46,25}{\left(\frac{63}{3,6}\right)} + 17.$$

Ainsi le temps pour aller de A à B est $T = 22,3 \text{ s}$

$$\text{et } a_1 = -\frac{v_0}{T-17} \approx \frac{\frac{63}{3,6}}{22,3 - 17} \approx -3,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$



Exercices de niveau 2

Exercice 4

1) Pour trouver le temps que le motard va mettre pour rattraper la voiture, il va falloir trouver l'expression des vecteurs positions de la moto et de la voiture.

Pour la voiture

Exprimons le vecteur vitesse afin d'utiliser l'information v_0 .

• Vecteur position : $\vec{AC} = \vec{Xe}_x$.

• Vecteur vitesse : $\vec{v}(C)|_{R_0} = \dot{\vec{X}}e_x + \vec{X}\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{R_0} = \dot{\vec{X}}e_x$.

 \vec{e}_x est fixe dans R_0 donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$.

Ici $\dot{\vec{X}}(t) = v_0$.

On peut alors, en intégrant une fois par rapport au temps, obtenir l'expression de $\vec{X}(t)$:

$$\vec{X}(t) = v_0 t + \text{cte.}$$

À $t = 0$ $\vec{X}(t = 0) = 0$ donc $\text{cte} = 0$ et ainsi :

$$\vec{X}(t) = v_0 t.$$

Pour la moto

• Vecteur position : $\vec{AM} = \vec{xe}_x$.

• Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{R_0} = \dot{\vec{x}}e_x$.

• Vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{R_0} = \ddot{\vec{x}}e_x$.

Ici $\ddot{\vec{x}} = a_0 = \text{cte.}$

On peut alors intégrer 2 fois par rapport au temps afin d'obtenir $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = a_0 t + \text{cte.}$$

• À $t = 0$: $\dot{x}(t = 0) = 0$ donc $\text{cte} = 0$.

• À $t = t_0$: $\dot{x}(t = t_0) = v_0$ donc $a_0 t_0 = v_0$ ($t_0 = 10$ s et $v_0 = 90$ km · h⁻¹), d'où :

$$a_0 = \frac{v_0}{t_0}.$$

Ainsi $\dot{x}(t) = \frac{v_0}{t_0} t$ donc $x(t) = \frac{v_0}{t_0} \frac{t^2}{2} + \text{cte.}$

À $t = 0$: $x(t = 0) = 0$ donc $\text{cte} = 0$; ainsi, on a :

$$x(t) = \frac{v_0}{t_0} \frac{t^2}{2}.$$

 Comme x est en m, v_0 en m · s⁻¹, t_0 et t en s, cette expression est homogène : $\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{s}} \times \text{s}^2 = \text{m}$.

On cherche l'instant T où les véhicules se rejoignent, c'est-à-dire l'instant où :

$$\vec{X}(t = T) = \vec{x}(t = T) \text{ soit } v_0 T = \frac{v_0}{t_0} \frac{T^2}{2} \text{ soit } T = 2t_0.$$

A.N. $T = 2 \times 10$ s = 20 s.

2) Les positions des deux véhicules sont parfaitement déterminées donc :

$$d = \mathbf{X}(t = T), \text{ soit } d = v_0 T = v_0 \times 2t_0, \text{ soit encore } d = 2v_0 t_0.$$

 d est en m, v_0 en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et t_0 en s donc cette expression est homogène : $\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \text{s} = \text{m}$.

A.N. $d = 2 \times \frac{90}{3,6} \times 10 = 500 \text{ m.}$

 Pour calculer d , on aurait pu utiliser :

$$d = x(t = T) = \frac{v_0}{t_0} \times \frac{(2t_0)^2}{2} = 2v_0 t_0,$$

ce qui peut aussi constituer un moyen de vérification.

3) La vitesse acquise par le motard sera :

$$v_1 = \dot{x}(t = T) = \frac{v_0}{t_0} \times T = \frac{v_0}{t_0} \times 2t_0 = 2v_0, \text{ soit } v_1 = \dot{x}(t = T) = 2v_0.$$

A.N. $v_1 = \dot{x}(t = T) = 2 \times 90 = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$

Exercice 5

1) Entre O et A, les électrons subissent une accélération : $\vec{a} = a_0 \vec{e}_y$.

Leur vitesse est : $\vec{v} = a_0 t \vec{e}_y + \text{cte.}$

Or à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x = \vec{\text{cte}}$ donc $\vec{v} = a_0 t \vec{e}_y + v_0 \vec{e}_x$.

Leur position est donc : $\overrightarrow{OA} = a_0 \frac{t^2}{2} \vec{e}_y + v_0 t \vec{e}_x + \vec{\text{cte.}}$

Or à $t = 0$, $\overrightarrow{OA} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{OA} = a_0 \frac{t^2}{2} \vec{e}_y + v_0 t \vec{e}_x$.

Si on note $\overrightarrow{OA} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$ alors $\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = a_0 \frac{t^2}{2} \end{cases}$

Donc l'équation de la trajectoire est, en éliminant le temps entre les deux relations :

$$y = a_0 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{x}{v_0} \right)^2, \text{ soit } y = \frac{a_0}{2v_0^2} x^2.$$

Il s'agit d'une parabole.

2) En dérivant l'expression précédente, on obtient : $\frac{dy}{dx} = \frac{a_0}{v_0^2} x$.

Or $\tan \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=\ell}$, donc :

$$\tan \alpha = \frac{a_0}{v_0^2} \ell.$$

A.N. $\tan \alpha = \frac{1 \cdot 10^{15}}{(3 \cdot 10^7)^2} \times 0,05 = 0,055 \quad \text{d'où} \quad \alpha = 3,2^\circ.$

3) Entre A et B, les électrons subissent une accélération nulle :

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{v} = \vec{\text{cte}}$$

or à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_A$ donc $\vec{v}(t) = \vec{v}_A$.

Comme la vitesse est constante (vectoriellement), la trajectoire est une droite.

4) Dans le triangle ABH, on a : $\tan \alpha = \frac{\delta - y_A}{2\ell}$ donc $\delta = \tan \alpha \times 2\ell + y_A$.

À l'aide de la question 1), on a :

$$y_A = y(x = \ell) = \frac{a_0}{2v_0^2} \times \ell^2.$$

$$\text{Donc } \delta = \frac{a_0}{v_0^2} \times \ell \times 2\ell + \frac{a_0}{2v_0^2} \ell^2, \text{ soit } \delta = \frac{5}{2} \frac{a_0}{v_0^2} \ell^2.$$

$$\text{A.N. } \delta = \frac{5}{2} \times \frac{10^{15} \times 0,05^2}{(3 \cdot 10^7)^2} = 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ m ; donc } \delta = 6,9 \text{ mm.}$$

Exercice 6

On peut tout d'abord écrire l'équation de la trajectoire :

$$y(x) = A \cos(Bx).$$

- $y(x = 0) = d_0 = A$;
- $y(x = L) = -d_0 = A \cos(BL) = d_0 \cos(BL)$ donc $\cos(BL) = -1$.

D'où : $BL = \pi$ soit $B = \frac{\pi}{L}$ et ainsi :

$$y(x) = d_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

On va ensuite déterminer l'expression de l'accélération afin d'utiliser la condition d'accélération latérale inférieure à $0,7g$.

- Vecteur position : $\vec{OG} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$.
- Vecteur vitesse : $\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y$.

\vec{e}_x et \vec{e}_y sont fixes dans \mathcal{R} .

Or $\dot{x} = v_0 = \text{cte}$ et $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} v_0$; donc $\dot{y} = -\frac{\pi}{L} d_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) v_0 = -\frac{\pi}{L} d_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) v_0$.

Donc : $\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}} = v_0 \vec{e}_x - \frac{\pi}{L} d_0 v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \vec{e}_y$.

• Vecteur accélération : $\vec{a}(G)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = -\frac{\pi}{L} d_0 v_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \times \frac{\pi}{L} \ddot{x} \vec{e}_y$.

\vec{e}_x et \vec{e}_y fixes dans \mathcal{R} donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$.

$v_0 = \text{cte}$ donc $\dot{v}_0 = 0$.

Donc : $\vec{a}(G)|_{\mathcal{R}} = -\frac{\pi^2 d_0 v_0^2}{L^2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \vec{e}_y$.

L'accélération maximale est obtenue pour : $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \pm 1$.

On veut : $|a_{\max}| \leq 0,7g$, soit $\frac{\pi^2 d_0}{L^2} v_0^2 \leq 0,7g$, d'où :

$$L \geq \pi v_0 \sqrt{\frac{d_0}{0,7g}}.$$

 Comme L est en m, v_0 en $m \cdot s^{-1}$, d_0 en m et g en $m \cdot s^{-2}$, cette expression est homogène.

En effet :

$$m \cdot s^{-1} \times \sqrt{\frac{m}{m \cdot s^{-2}}} = m \cdot s^{-1} \times \sqrt{\frac{1}{s^{-2}}} = m \cdot s^{-1} \times s = m.$$

A.N. $L \geq \pi \times \frac{50}{3,6} \times \sqrt{\frac{3}{0,7 \times 9,81}} \approx 28,8 \text{ m.}$

Exercice 7

Sachant que dans chaque milieu (plage ou mer), le nageur secouriste se déplace à vitesse constante (v_1 et v_2).

Pour aller le plus vite possible, il doit se déplacer selon une trajectoire constituée de deux morceaux de droite (SB et BE).

Calculons maintenant le temps total T mis pour aller de S à B ($v_1 = \text{cte}$) et de B à E ($v_2 = \text{cte}$) :

$$T = \frac{SB}{v_1} + \frac{BE}{v_2}.$$

Comme la position de B n'est pas connue et que c'est elle qui conditionne le temps T , on va la paramétriser à l'aide de l'inconnue $x = HB$ (voir figure).

Donc $SB^2 = \ell^2 + x^2$ soit $SB = \sqrt{\ell^2 + x^2}$;

et $BE^2 = (D-x)^2 + d^2$ soit $BE = \sqrt{(D-x)^2 + d^2}$.

L'expression de T devient (en fonction de x) :

$$T(x) = \frac{\sqrt{\ell^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(D-x)^2 + d^2}}{v_2}.$$

On cherche $x = x_0$ tel que $T(x)$ soit minimum donc on cherche le point où la dérivée de $T(x)$ s'annule.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} \times 2x + \frac{1}{v_2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{(D-x)^2 + d^2}} \times 2 \times (D-x) \times (-1).$$

 $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}} u'$ qui est un cas particulier de $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$ avec $n = \frac{1}{2}$

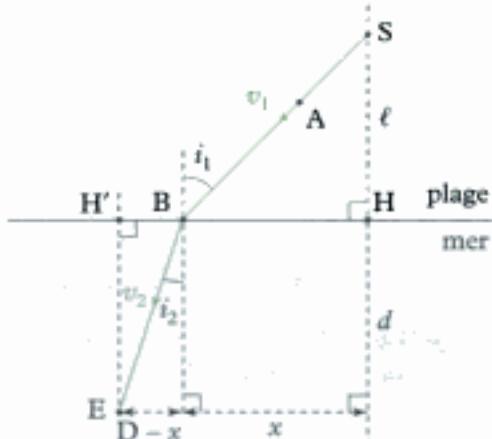
$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{v_1 \sqrt{\ell^2 + x^2}} = \frac{D-x}{\sqrt{(D-x)^2 + d^2}} \times \frac{1}{v_2} \quad (1)$$

Expression compliquée où il est difficile de calculer x .

Néanmoins, en faisant apparaître les angles $i_1 = \frac{\pi}{2} - \widehat{SBH}$ et $i_2 = \frac{\pi}{2} - \widehat{EBH}'$ (voir dessin), on a :

- dans le triangle rectangle BHS :

$$\frac{x}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) = \sin i_1;$$



- dans le triangle rectangle BH'E :

$$\frac{D-x}{\sqrt{(D-x)^2+d^2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = \sin i_2.$$

L'expression (1) définissant la position de B peut donc s'écrire :

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}.$$



Cette relation est tout à fait semblable à la loi de Snell-Descartes vue en optique $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, qui s'applique au trajet de la lumière dans deux milieux distincts d'indices optiques n_1 et n_2 , traduisant la minimisation du temps de parcours de la lumière.

Exercices de niveau 3

Exercice 8

- 1) La trajectoire de la voiture A est un demi-cercle de centre O et de rayon r_A donc :

$$L_A = \pi r_A.$$

A.N. $L_A = \pi \times 90 \approx 282,7 \text{ m.}$

La trajectoire de la voiture B est constituée par deux segments de droite de longueur, OO' (au début et à la fin de la trajectoire) et d'un demi-cercle de centre O' et de rayon r_B donc :

$$L_B = 2 \times OO' + \pi r_B$$

$$L_B = 2 \times (r_A - r_B) + \pi r_B$$

$$L_B = 2r_A + (\pi - 2)r_B.$$

A.N. $L_B = 2 \times 90 + (\pi - 2) \times 75 \approx 265,6 \text{ m.}$

Conclusion : la trajectoire semble la meilleure puisque plus courte plus de 17 m (= 6 %).

- 2) Pour calculer la vitesse et l'accélération de chaque véhicule en virage, on va utiliser les coordonnées polaires.

Pour la voiture A

- Vecteur position : $\vec{OA} = r_A \vec{e}_r$.

- Vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{v}(A)|_{\mathbb{R}} &= \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{/\mathbb{R}} = \left(\frac{d}{dt} (r_A \vec{e}_r) \right)_{/\mathbb{R}} = \frac{dr_A}{dt} \vec{e}_r + r_A \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathbb{R}} \\ &= 0 \vec{e}_r + r_A \dot{\theta} \vec{e}_\theta = r_A \dot{\theta} \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

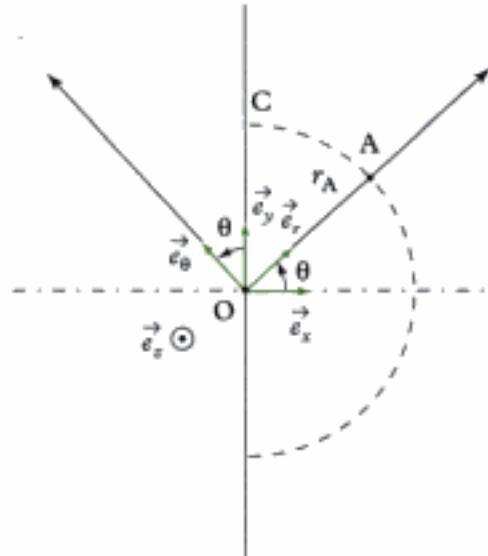


$$(uv)' = u'v + uv'.$$

$$r_A = \text{cte} \text{ donc } \dot{r}_A = \frac{dr_A}{dt} = 0$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathbb{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \right)_{/\mathbb{R}} \times \frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \dot{\theta}.$$

Soit en posant $v_A = r_A \dot{\theta}$: $\vec{v}(A)|_{\mathbb{R}} = v_A \vec{e}_\theta$.



• Vecteur accélération :

$$\vec{a}(A)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{dr_A \dot{\theta} \vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}_A \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r_A \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r_A \dot{\theta} \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}.$$

Or : $\dot{r}_A = 0$ ($r_A = \text{cte}$) ; $\ddot{\theta} = 0$ car $v_A = r\dot{\theta} = \text{cte}$;

$$\text{et } \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \right)_{/\mathcal{R}} \times \frac{d\theta}{dt} = -\vec{e}_r \dot{\theta}.$$

Donc :

$$\vec{a}(A)|_{\mathcal{R}} = r_A \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r) = -r_A \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v_A^2}{r_A} \vec{e}_r.$$

On veut que l'accélération ne dépasse pas $0,8g$.

Plaçons-nous dans le cas limite.

$$\|\vec{a}(A)|_{\mathcal{R}}\| = 0,8g, \text{ soit } \frac{v_A^2}{r_A} = 0,8g, \text{ d'où } v_A = \sqrt{0,8g r_A}.$$

 Comme v_A est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et r_A en m .

Cette expression est homogène : $\sqrt{\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

A.N. $v_A = \sqrt{0,8 \times 9,81 \times 90} \approx 26,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $v_A \approx 95,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

On peut procéder de la même manière pour la voiture B dans son virage de centre O' et de rayon r_B ; on obtient :

$$\|\vec{a}(B)|_{\mathcal{R}}\| = \frac{v_B^2}{r_B}.$$

Cette accélération est limitée à $0,8g$; donc $\frac{v_B^2}{r_B} = 0,8g$, et l'on a :

$$v_B = \sqrt{0,8g r_B}.$$

A.N. $v_B = \sqrt{0,8 \times 9,81 \times 75} = 24,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 87,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

3) Comme les vitesses sont constantes sur les 2 trajectoires, on en déduit :

$$t_A = \frac{L_A}{v_A} = \frac{\pi r_A}{\sqrt{0,8g r_A}} = \pi \sqrt{\frac{r_A}{0,8g}}.$$

A.N. $t_A = \pi \times \sqrt{\frac{90}{0,8 \times 9,81}} \approx 10,64 \text{ s}$.

De même :

$$t_B = \frac{L_B}{v_B} = \frac{2r_A + (\pi - 2)r_B}{\sqrt{0,8g r_B}}.$$

A.N. $t_B = \frac{2 \times 90 + (\pi - 2) \times 75}{\sqrt{0,8 \times 9,81 \times 75}} \approx 10,95 \text{ s}$.

Ainsi même si la trajectoire de B est plus courte, la voiture B met plus de temps.

C'est donc la trajectoire de la voiture A qui est la meilleure (dans le cadre d'une course de voitures).

Exercice 9

1) Le vecteur position est donc : $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \vec{e}_r$.

On cherche à déterminer p et e .

$$\text{En P : } \theta = 0 \quad \text{et} \quad r_p = 8000 \text{ km} = \frac{p}{1+e \times \cos 0} = \frac{p}{1+e} \quad (1)$$

$$\text{En A : } \theta = \pi \text{ rad} \quad \text{et} \quad r_A = 24000 \text{ km} = \frac{p}{1+e\cos\pi} = \frac{p}{1-e} \quad (2)$$

On a donc deux équations ((1) et (2)) à deux inconnues (p et e).

Il suffit de résoudre le système constitué par ces deux équations pour répondre à la question.

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \frac{\frac{p}{1+e}}{(2)} &= \frac{1-e}{1+e} = \frac{r_p}{r_A} \text{ soit } (1-e)r_A = (1+e)r_p; \text{ donc :} \\ &\frac{p}{1-e} \end{aligned}$$

$$e = \frac{r_A - r_p}{r_A + r_p}.$$

$$\text{A.N. } e = \frac{24000 - 8000}{24000 + 8000} = \frac{1}{2}.$$

En reportant ce résultat dans l'équation (1) :

$$r_p = \frac{p}{1+e}, \text{ d'où } p = r_p \left(1 + \frac{r_A - r_p}{r_A + r_p}\right), \text{ soit } p = r_p \frac{2r_A}{r_A + r_p}.$$

$$\text{A.N. } p = 8000 \times \frac{2 \times 24000}{8000 \times 24000} = 12000 \text{ km.}$$

2) Il nous faut déterminer l'expression de l'accélération afin d'utiliser le fait qu'elle n'existe que selon \vec{e}_r :

• Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$.

• Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{R_0};$

$$\text{donc } \vec{v}(M)|_{R_0} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

• Vecteur accélération :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M)|_{R_0} &= \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{R_0}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d}{dt} \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta\right)_{R_0} \\ &= \frac{d\dot{r}}{dt} \vec{e}_r + \dot{r} \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{R_0} + \frac{dr}{dt} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{R_0}. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{R_0} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\theta} \vec{e}_r.$$

$$\vec{a}(M)|_{R_0} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r, \text{ soit } \vec{a}(M)|_{R_0} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta.$$

On veut $2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} = 0$ (composante de \vec{a} sur $\vec{e}_\theta = 0$)

c'est-à-dire $\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0$, soit $r^2 \dot{\theta} = \text{cte} = C$.

Pour calculer C, on nous donne la vitesse au point P (v_P).

Or en ce point, $\theta = 0$, donc :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{-p}{(1+e\cos\theta)^2}(-e\sin\theta)\dot{\theta} = 0.$$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$.

Donc en ce point, r est extremum (ici minimum). Aussi au point P :

$$\vec{v}(M)|_{\theta_0} = 0\vec{e}_r + r_P \dot{\theta}_P \vec{e}_\theta \quad \text{donc} \quad r_P \dot{\theta}_P = v_P.$$

Or $C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$; donc $C = r_P^2 \dot{\theta}_P = r_P v_P$, d'où $\mathbf{C} = r_P v_P$.

A.N. $\mathbf{C} = 8\,000 \times 10^3 \times 8\,640 \times 10^3 \approx 6,9 \times 10^{13} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

3) On veut calculer la vitesse de M en A ($\theta = \pi$).

En ce point, comme en P, $\dot{r} = 0$; donc en A :

$$\vec{v}(M)|_{\theta_0} = 0\vec{e}_r + r_A \dot{\theta}_A \vec{e}_\theta \quad \text{donc} \quad r_A \dot{\theta}_A = v_A.$$

Or $C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte} = r_P v_P = r_A v_A$ donc :

$$v_A = \frac{\mathbf{C}}{r_A} = \frac{r_P v_P}{r_A}.$$

A.N. $v_A = \frac{8\,000}{24\,000} \times 8\,640 = 2\,880 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

4) Exprimons tout d'abord la vitesse de M : $\vec{v}(M)|_{\theta_0} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Au point B, on sait que $\vec{v}(M)|_{\theta_0}$ a comme direction \vec{e}_x donc :

$$\vec{e}_y \cdot \vec{v}(M)|_{\theta_0} = 0, \text{ soit } \vec{e}_y \cdot (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = 0 \text{ et } \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = 0.$$

Or $\dot{r} = \frac{p}{(1+e\cos\theta)^2}(+e\sin\theta\dot{\theta})$, donc :

$$\frac{p e \sin^2\theta \dot{\theta}}{(1+e\cos\theta)^2} + \dot{\theta} \frac{p}{1+e\cos\theta} \cos\theta = 0 \text{ soit } \frac{e \sin^2\theta}{1+e\cos\theta} + \cos\theta = 0.$$

$e \sin^2\theta + \cos\theta(1+e\cos\theta) = 0$, donc $e(1-\cos^2\theta) + \cos\theta + e\cos^2\theta = 0$ soit :

$$\cos\theta_B = -e.$$

Il faut donc que $|e| < 1$ pour que θ_B existe, ce qui est le cas ici.

Aussi : $r_B = \frac{p}{1+e\cos\theta_B} = \frac{p}{1-e^2} = \frac{r_P \times \frac{2r_A}{r_A+r_P}}{1 - \left(\frac{r_A-r_P}{r_A+r_P}\right)^2} = \frac{2r_A r_P}{r_A+r_P} \times \frac{1}{\frac{(r_A+r_P)^2 - (r_A-r_P)^2}{(r_A+r_P)^2}}$

$$r_B = \frac{2r_A r_P}{r_A+r_P} \times \frac{(r_A+r_P)^2}{4r_A r_P}, \text{ d'où } r_B = \frac{r_A+r_P}{2}.$$

A.N. $r_B = \frac{24\,000 + 8\,000}{2} = 16\,000 \text{ km}$.

Exercice 10

1) Dans cet exercice la seule information que l'on ait, est que le point A se déplace à tout instant dans la direction de B, c'est-à-dire :

$$\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}} \parallel \vec{e}_r \text{ ou mieux } \vec{v}(A)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_\theta = 0.$$

Aussi, on va déterminer l'expression de $\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}}$:

$$\begin{aligned} \vec{v}(A)|_{\mathcal{R}} &= \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OA})|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA})|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OB})|_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt}(\overrightarrow{BA})|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{d}{dt}(x\vec{e}_x) + \frac{d}{dt}(\ell\vec{e}_r)|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \frac{d\ell}{dt}\vec{e}_r + \ell\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \\ \text{or } \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} &= \vec{0} \text{ car } \vec{e}_x \text{ est fixe sur } \mathcal{R}, \text{ et } \frac{d\ell}{dt} = 0 \text{ car } \ell = \text{cte}. \end{aligned}$$

⚠ Même si \vec{e}_r n'est pas défini de manière habituelle, l'angle entre \vec{e}_r et \vec{e}_θ est bien $+\frac{\pi}{2}$ rad (avec le sens + défini par \vec{e}_x valable aussi pour θ) donc on a quand même $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

$$\text{Donc } \vec{v}(A)|_{\mathcal{R}} = v_0\vec{e}_x + \vec{0} + \vec{0} + \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v_0\vec{e}_x + \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

On sait que $\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_\theta = 0$ soit :

$$(v_0\vec{e}_x + \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_\theta = 0, \text{ d'où } v_0\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta + \ell\dot{\theta} = 0, \text{ donc } v_0\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \ell\dot{\theta} = 0.$$

⚠ La définition de \vec{e}_r et \vec{e}_θ n'est pas la définition habituelle : l'angle entre \vec{e}_x et \vec{e}_θ est ici $-\frac{\pi}{2} + \theta$ ou $\frac{3\pi}{2} + \theta$.

$$\text{Ainsi : } d\theta = -\frac{v_0}{\ell}\sin\theta dt, \text{ car } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta, \text{ soit } \frac{d\theta}{\sin\theta} = -\frac{v_0}{\ell}dt.$$

Pour trouver l'évolution de $\theta(t)$, il suffit d'intégrer depuis $t = 0$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$ rad) jusqu'à $t(0)$:

$$\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int_0^t -\frac{v_0}{\ell} dt.$$

$$\text{Or } v_0 = \text{cte} \text{ et } \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|; \text{ donc : } \left[\ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} = -\frac{v_0}{\ell}[t]_0^t,$$

$$\text{d'où } \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right| - \ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right| = -\frac{v_0}{\ell}t, \text{ donc } \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right| - 0 = -\frac{v_0}{\ell}t, \text{ soit } \left|\tan\frac{\theta}{2}\right| = e^{-\frac{v_0}{\ell}t}$$

$$\text{Si } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ rad, } \tan\frac{\theta}{2} > 0, \text{ donc on a : } \tan\frac{\theta}{2} = e^{-\frac{v_0}{\ell}t} \text{ soit } \theta(t) = 2\arctan\left(e^{-\frac{v_0}{\ell}t}\right).$$

💡 On vérifie alors que $\theta(t)$ est bien compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ rad donc que l'on pouvait bien enlever la valeur absolue.

2) On voit qu'il faut un temps infini pour que θ s'annule c'est-à-dire pour que la remorque soit parfaitement alignée avec la voiture.

Exercice 11

1) On veut déterminer la vitesse de M par rapport au sol (c'est-à-dire à \mathcal{R}) :

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} &= \left(\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_x + a\vec{e}_y + a\vec{e}_r) \right)_{/\mathcal{R}} \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \frac{da}{dt}\vec{e}_y + a\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \frac{da}{dt}\vec{e}_r + a\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

• Le rayon de la roue $a = \text{cte}$ donc $\frac{da}{dt} = 0$.

• \vec{e}_r est fixe dans \mathcal{R} , donc $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ (de même $\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$) et $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Donc : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = v_0\vec{e}_x + a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

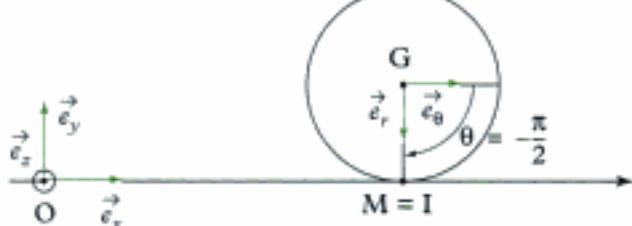
2) Quand M passe au niveau du sol, on a :

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

c'est-à-dire $\vec{e}_r = -\vec{e}_y$ et $\vec{e}_\theta = \vec{e}_x$.

Donc dans cette position :

$$\vec{v}(M) = v_0\vec{e}_x + a\dot{\theta}\vec{e}_x.$$



Cette vitesse doit être nulle pour que la roue ne dérape pas, donc :

$$(v_0 + a\dot{\theta})\vec{e}_x = \vec{0} \text{ soit } v_0 + a\dot{\theta} = 0 \text{ donc :}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{v_0}{a}.$$

Comme $\dot{\theta}$ est en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (rad unité sans dimension), v est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et a en m , cette expression est homogène :

$$\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}} = \text{s}^{-1}.$$

Comme ceci doit être vrai pour tout point M de la roue, on doit avoir à tout instant :

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{v_0}{a} = \text{cte}.$$

3) Pour tracer la trajectoire de M, il faut exprimer les coordonnées du point M en fonction du temps :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + a\vec{e}_y + a\vec{e}_r = x\vec{e}_x + a\vec{e}_y + a(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) = (x + a\cos\theta)\vec{e}_x + a\vec{e}_y + a\sin\theta\vec{e}_y.$$

Or $\dot{x} = v_0 = \text{cte}_1$ donc $x = v_0 t + \text{cte}_2$.

À $t = 0$ on peut prendre $x(t = 0) = 0$ (G à la verticale de O) donc $\text{cte}_2 = 0$.

Par ailleurs $\dot{\theta} = -\frac{v_0}{a}$ donc $\theta = -\frac{v_0}{a}t + \text{cte}_3$.

À $t = 0$ on peut prendre $\theta(t = 0) = 0$ c'est-à-dire $\text{cte}_3 = 0$ (M est sur l'horizontale passant par G).

Ainsi \overrightarrow{OM} s'exprime sous la forme suivante :

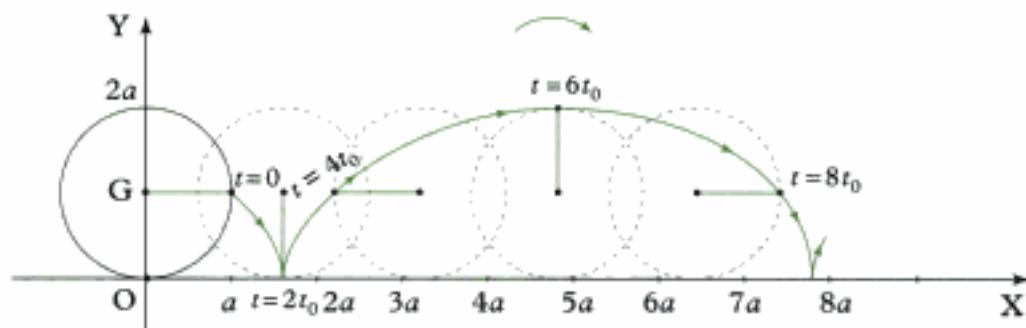
$$\overrightarrow{OM} = \left[v_0 t + a\cos\left(-\frac{v_0}{a}t\right) \right] \vec{e}_x + a\vec{e}_y + a\sin\left(-\frac{v_0}{a}t\right) \vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{OM} = \left[v_0 t + a\cos\left(\frac{v_0}{a}t\right) \right] \vec{e}_x + \left[a - a\sin\left(\frac{v_0}{a}t\right) \right] \vec{e}_y.$$

Pour tracer l'allure de la trajectoire, prenons des valeurs de t (bien choisies pour rendre les calculs simples) :

t	$\overrightarrow{\text{OM}} = \mathbf{X}\vec{e_x} + \mathbf{Y}\vec{e_y}$	
0	$\mathbf{X} = a$	$\mathbf{Y} = a$
$t_0 = \frac{\pi a}{4v_0} \approx 0,05 \text{ s}$	$\mathbf{X} = \frac{\pi}{4}a + \frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\mathbf{Y} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$
$2t_0 = \frac{\pi a}{2v_0}$	$\mathbf{X} = \frac{\pi}{2}a$	$\mathbf{Y} = 0$
$3t_0 = \frac{3\pi a}{4v_0}$	$\mathbf{X} = \frac{3\pi}{4}a - \frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\mathbf{Y} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$
$4t_0 = \frac{\pi a}{v_0}$	$\mathbf{X} = \pi a - a$	$\mathbf{Y} = a$
$5t_0 = \frac{5\pi a}{4v_0}$	$\mathbf{X} = \frac{5\pi}{4}a - \frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\mathbf{Y} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$
$6t_0 = \frac{3\pi a}{2v_0}$	$\mathbf{X} = \frac{3\pi}{2}a$	$\mathbf{Y} = 2a$
$7t_0 = \frac{7\pi a}{4v_0}$	$\mathbf{X} = \frac{7\pi}{4}a + \frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\mathbf{Y} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$
$8t_0 = 2\pi a / v_0$	$\mathbf{X} = 2\pi a + a$	$\mathbf{Y} = a$

Remarque : il s'agit d'une cycloïde.



Dynamique du point en référentiel galiléen

Introduction

La cinématique du point a permis de décrire le mouvement d'un point, mais sans s'occuper de ses causes : c'est la dynamique qui permet de relier le mouvement à ses causes c'est-à-dire aux efforts. On pourrait ainsi écrire « dynamique = cinématique + force ». Newton a établi les lois fondamentales de la dynamique (dite « dynamique newtonienne »), notamment une loi reliant forces et accélération, c'est-à-dire reliant des grandeurs dynamiques (forces) à une grandeur cinématique (accélération) ; dans cette relation une caractéristique du point matériel intervient aussi : sa masse.

Plan du chapitre 2

A. Le point matériel et les forces	46
1. Système étudié : le point matériel	46
2. Actions mécaniques : les forces	46
3. Différents types de forces	46
B. Les lois de Newton	48
1. Première loi de Newton : principe d'inertie	48
2. Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique	49
3. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques	49
C. Bilan et exemples d'applications	50
1. Bilan	50
2. Exemples d'application	50
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	60
Énoncés des exercices	63
Indications	66
Solution des exercices	67

A. Le point matériel et les forces

A.1. Système étudié : le point matériel

Définition 1

1. Un point matériel peut représenter des objets de petite taille (ex. particule) ou de grande taille (ex. terre, voiture).

Un point matériel¹ M représente un système (un ou plusieurs objets physiques) dont la position peut être décrite à l'aide de 3 coordonnées seulement (celles du point M) et caractérisé par sa masse m ; on le notera M(m).

Remarque : Le point matériel associe un point géométrique M, caractérisé par sa position à un instant donné (3 coordonnées dans l'espace) et un scalaire (sa masse m).

A.2. Actions mécaniques : les forces

2. Plus exactement, l'action mécanique permet de modifier le vecteur vitesse.

Les actions mécaniques (appelées aussi efforts mécaniques) sont les causes du mouvement² ; elles admettent une représentation vectorielle :

le **vecteur force**, caractérisé par sa direction, son sens, sa norme (ou valeur ou intensité) et son point d'application (le point matériel étudié).

L'unité de la force est le newton (N) : $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

A.3. Différents types de forces

A.3.1 - Poids d'un point matériel

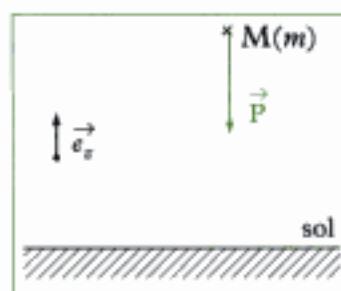


Fig. 1 - Poids d'un point matériel M.

Un point matériel M, de masse m, se trouvant à proximité du sol terrestre est soumis à son poids \vec{P} , force verticale et dirigée vers le bas, de norme $\|\vec{P}\| = mg$ (fig. 1).

Dans ces conditions, on a :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

\vec{P} poids en (N) m masse (kg)

\vec{g} champ de pesanteur ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)

Remarque : \vec{g} est le champ de pesanteur terrestre, supposé uniforme ($\vec{g} = \text{cte}$ en tout point M) ; le poids s'identifie quasiment à la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre (voir chapitre 7), qui à sa surface est :

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{e}_z.$$

Application 1 Cas du champ de pesanteur

Calculer la valeur de \vec{g} , à la surface de la Terre, sachant que :

- la constante de gravitation universelle est $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$;
- le rayon de la Terre est $R_T \approx 6370 \text{ km}$;
- la masse de la Terre est $M_T \approx 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Solution

$$\|\vec{g}\| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

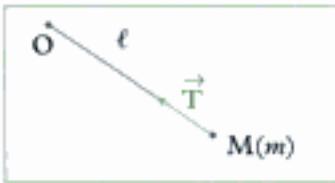


Fig. 2 - Tension d'un fil.

1. La tension est la même en tout point du fil.

2. Ici la longueur de repos du ressort est sa longueur à vide ℓ_0 .

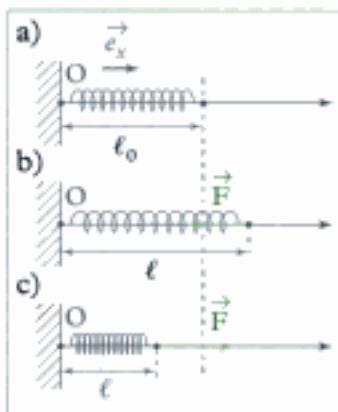


Fig. 3 - Force de rappel élastique du ressort : a) à vide ; b) étiré ; c) comprimé.

3. Pour simplifier le calcul de la force de rappel, il est préférable de faire un dessin dans le cas où le ressort est étiré.

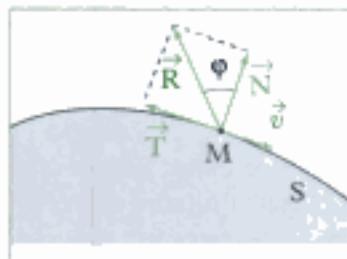


Fig. 4 - Force de frottement solide.

4. Le coefficient f dépend des matériaux en contact mais pas de la surface de contact. ex $f = 0,6$ pour le contact caoutchouc/bitume.

A.3.2 - Tension d'un fil

Soit un point matériel M de masse m , accroché à l'extrémité d'un fil souple, de masse négligeable et de longueur constante ℓ (fil inextensible). Le fil exerce une **tension** \vec{T} sur le point matériel M, force dirigée selon le fil (fig. 2), de norme dépendant des autres forces appliquées¹ au point M.

Remarque : en posant $\vec{T} = T\vec{u}$ (avec \vec{u} vecteur unitaire dirigé de M vers O), le fil reste tendu si $T > 0$.

A.3.3 - Force de rappel élastique

Soit un ressort horizontal (axe ($O ; \vec{e}_x$)), de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_0 , de raideur k (en $N \cdot m^{-1}$) (fig. 3).²

Si le ressort est étiré (sa longueur est ℓ) ; il exerce une force de rappel ayant tendance à le ramener à sa longueur de repos, proportionnelle à son allongement $\ell - \ell_0$ (> 0) et à k :

$$\vec{F} = k(\ell - \ell_0)(-\vec{e}_x) = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x.$$

Si le ressort est comprimé (sa longueur est ℓ), il exerce encore une force de rappel ayant tendance à le ramener à sa longueur de repos, proportionnelle à son allongement $\ell_0 - \ell$ (> 0) et à k :³

$$\vec{F} = k(\ell_0 - \ell)\vec{e}_x = -k(\ell_0 - \ell)\vec{e}_x.$$

Ainsi, dans tous les cas, avec \vec{e}_x un vecteur unitaire dirigé dans le sens d'un allongement du ressort, on a :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$$

\vec{F} force de rappel élastique³ (N)
 k raideur ($N \cdot m^{-1}$)
 $\ell - \ell_0$ allongement (m)

A.3.4 - Force de frottement solide, réaction du support

Lors du contact entre deux solides, donc lors du contact entre un point matériel M(m) et un solide S, ce dernier exerce sur le point M une force \vec{R} appelée réaction, composée d'une réaction normale (à la surface de contact) \vec{N} , et d'une réaction tangentielle \vec{T} (dite force de frottement) vérifiant les **lois de Coulomb** (fig. 4) :

- s'il y a glissement de M sur S : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ où f est le coefficient de frottement⁴ ; \vec{T} est opposée à la vitesse \vec{v} du point M par rapport à S (c'est-à-dire par rapport à un référentiel lié au solide S) ;
- s'il n'y a de glissement de M sur S ($\vec{v} = \vec{0}$) : $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$.

Remarques :

- En posant $\vec{N} = N\vec{u}$ (\vec{u} vecteur unitaire dirigé de S vers M, perpendiculaire à la surface de contact) :
 - le contact se maintient si $N > 0$;
 - le contact cesse si $N = 0$.
- En l'absence de frottement ($f = 0$), la réaction du solide S est normale, c'est-à-dire $\vec{R} = \vec{N}$; elle reste donc à chaque instant perpendiculaire au support.

1. Ceci est vrai dans l'air ou l'eau.

2. Pour les déplacements de tous les jours (vélo, voiture, ...) les forces qui interviennent sont celles proportionnelles au carré de la vitesse $\vec{F} = -K\|\vec{v}\|\vec{v}$ mais la résolution mathématique des problèmes est alors délicate ; on considère donc souvent que les forces sont proportionnelles à la vitesse : $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$.

3. Pour plus de renseignements, on se reportera au cours de mécanique des fluides (2^e année).

4. La poussée d'Archimède est presque toujours négligeable dans l'air devant le poids (si l'objet en mouvement est plein) ; en revanche, elle n'est plus négligeable dans les liquides.

5. La résultante \vec{F} de plusieurs forces \vec{F}_i est : $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$.

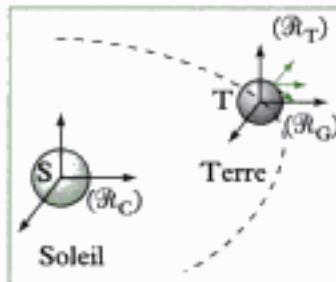


Fig. 5 - Référentiels usuels.

A.3.5 - Force de frottement fluide

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz ou liquide)¹, donc lorsqu'un point matériel se déplace dans un fluide, il est soumis à une force de frottement fluide \vec{F} , s'opposant au mouvement :

$$\bullet \vec{F} = -\lambda\vec{v},$$

si $\|\vec{v}\|$ est faible (λ est une caractéristique du fluide et des dimensions de l'objet se déplaçant dans le fluide) ;

$$\bullet \vec{F} = -K\|\vec{v}\|\vec{v},$$

si $\|\vec{v}\|$ est plus élevée (K est aussi une caractéristique du fluide et des dimensions de l'objet se déplaçant dans le fluide).^{2, 3}

A.3.6 - Autres forces

Il existe d'autres types de forces comme les forces électromagnétiques ou la poussée d'Archimède⁴ qui seront étudiées dans les autres cours (électromagnétisme, thermodynamique).

B. Les lois de Newton

B.1. Première loi de Newton : principe d'inertie

Loi 1

Principe d'inertie

Il existe des référentiels galiléens R_g dans lesquels tout point matériel isolé, est en mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v}(M)|_{R_g} = \text{cte}$) (ou au repos si $\vec{v}(M)|_{R_g} = \vec{0}$).

Un point matériel isolé est un point isolé de toute influence dans l'espace qui ne subit aucune force ; comme ceci est impossible à réaliser (un point matériel n'est jamais seul dans l'espace), on utilisera comme modèle du point matériel isolé, le point matériel pseudo-isolé soumis à des forces dont la résultante⁵ est nulle (par exemple, un mobile sur coussin d'air).

Cette loi postule l'existence de référentiels galiléens. Selon le cas et le degré de finesse souhaité, on pourra considérer comme galiléen l'un des référentiels suivants (fig. 5).

- Référentiel de Copernic R_C

- origine : le centre de gravité du système solaire (quasiment centre S du Soleil) ;
- trois axes : trois étoiles « fixes » très éloignées.

- Référentiel géocentrique R_G

- origine centre de la Terre T ;
- trois axes identiques aux axes du référentiel de Copernic.

- Référentiel terrestre \mathcal{R}_T , lié à la surface de la Terre (appelé référentiel du laboratoire).

Ces trois référentiels sont, dans l'ordre suivant : \mathcal{R}_C , \mathcal{R}_G , \mathcal{R}_T « de moins en moins galiléen ».

B.2. Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

Loi 2

1. Le PFD permet de prévoir l'évolution du mouvement (trajectoire) du point matériel si \vec{F} est connue à chaque instant, ou permet de connaître la résultante des forces \vec{F} à chaque instant si la trajectoire est connue.

2. La masse m du point matériel M est supposée constante à chaque instant.

3. Si le point matériel est isolé (ou pseudo-isolé) alors $\vec{F} = \vec{0}$ et donc $\left(\frac{d\vec{p}(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{0}$.

c'est-à-dire $\vec{p}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \text{cte}$; la quantité de mouvement du point matériel $\vec{p}(M)|_{\mathcal{R}_g}$ se conserve au cours du temps ainsi que sa vitesse $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}$; on retrouve le principe d'inertie (1^{re} loi de Newton).

4. Il faut faire le bilan de toutes les forces appliquées au point matériel sans oublier la réaction

PFD

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , un point matériel M de masse m , soumis à un ensemble de forces dont la somme est \vec{F} vérifie^{1 2} :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}$$

m masse (kg)

$\vec{a}(M)$ accélération ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)

\vec{F} force (N)

En définissant la quantité de mouvement (ou résultante cinétique) $\vec{p}(M)|_{\mathcal{R}_g} = m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}$ du point matériel M(m), on peut écrire le PFD sous la forme^{3 4} :

$$\left(\frac{d\vec{p}(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}.$$

Principe fondamental de la statique (PFS)

Si un point matériel est en équilibre dans \mathcal{R}_g , c'est-à-dire $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{0}$, alors $\vec{F} = \vec{0}$.



La réciproque n'est pas vraie : si $\vec{F} = \vec{0}$, le point matériel peut avoir un mouvement rectiligne uniforme dans \mathcal{R}_g (principe d'inertie) et n'est en équilibre que si sa vitesse est nulle à un instant quelconque (donc à tout instant).

B.3. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

Loi 3

Principe des actions réciproques

Si le point matériel A exerce sur le point matériel B une force $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$, alors B exerce sur A une force $\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}} = -\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$; ces deux forces sont portées par la droite (AB) (fig. 6).

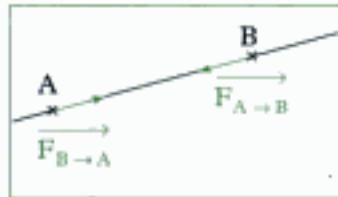


Fig. 6 - Principe des actions réciproques.

C. Bilan et exemples d'applications

C.1. Bilan

Le synoptique de la fig. 7 permet de comprendre où interviennent les forces sur le schéma cinématique (voir chapitre 1).

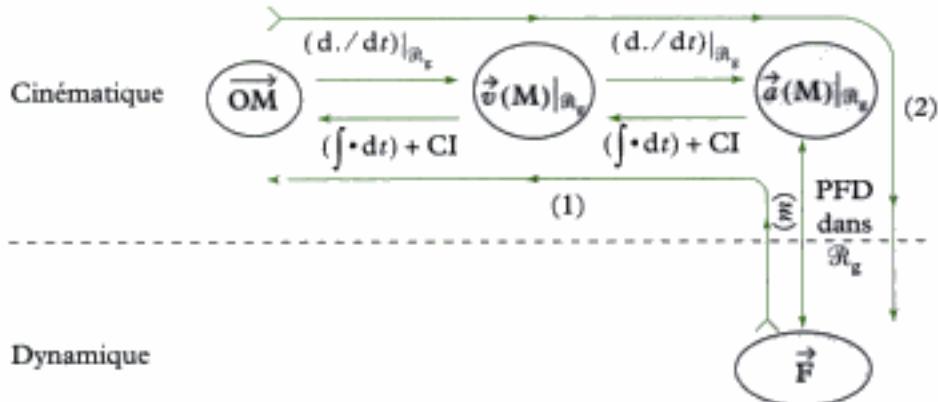


Fig. 7 - Synoptique bilan.

Par exemple, si les forces appliquées au point matériel $M(m)$ sont connues, la résultante \vec{F} est connue, donc (si la masse m est connue) l'accélération $\vec{a}(M)|_{R_g}$ du point M est connue ; on peut remonter – trajet (1) – à vitesse $\vec{v}(M)|_{R_g}$ (si une condition initiale sur la vitesse est connue) et à la position \overrightarrow{OM} à chaque instant donc à la trajectoire (si une condition initiale sur la position est connue).

Si le mouvement ($\overrightarrow{OM}(t)$, $\vec{v}(M)|_{R_g}$ ou $\vec{a}(M)|_{R_g}$) est connu, on peut déterminer les forces appliquées au point M – trajet (2) –.

C.2. Exemples d'application

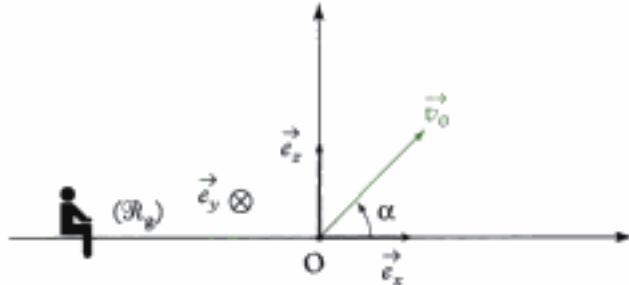
Application 2 Tir balistique sans frottement

Un obus sphérique de masse m assimilé à un point matériel M , est lancé dans l'air avec une vitesse \vec{v}_0 depuis le point O , origine du repère $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel terrestre \mathcal{R}_g supposé galiléen. La vitesse \vec{v}_0 fait un angle α avec l'horizontale $(O ; \vec{e}_x)$ dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_z) . Le champ de pesanteur \vec{g} est supposé uniforme. $(O ; \vec{e}_z)$ est la verticale ascendante du lieu.

On néglige tout frottement.

- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire.
- 2) Déterminer la flèche de la trajectoire (altitude maximale atteinte).
- 3) Déterminer la portée D (distance entre O et le point de chute sur le plan horizontal $z = 0$). Pour quel angle α la portée D est-elle maximale ? Calculer pour cet angle la portée et la flèche de la trajectoire.

Données : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $m = 1 \text{ kg}$.



Solution

1) • Système étudié : obus sphérique assimilé à un point matériel M(m).

• Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Bilan des forces appliquées au point M :

$$\text{poids } \vec{P} = m\vec{g} = -mge_z.$$

• Application du PFD au point M dans \mathcal{R}_g :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P}.$$

Or $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g}$, on a donc $m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = m\vec{g}$.

En simplifiant par m et en intégrant vectoriellement, on obtient :

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{A}.$$

\vec{A} est une constante vectorielle qui s'obtient à $t = 0$: $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = \vec{A}$.

Ainsi :

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v}_0.$$

Comme $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, l'équation précédente devient :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{g}t,$$

soit (en intégrant) :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{B}.$$

\vec{B} est une constante vectorielle qui s'obtient à l'aide des conditions initiales ($t = 0$) :

$$\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{B}.$$

ainsi :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t.$$



La méthode d'intégration vectorielle ne fonctionne pas tout le temps ! Lorsqu'elle ne fonctionne pas, il faut d'abord projeter sur les axes du repère avant d'intégrer.

• En projetant sur \vec{e}_x , on obtient :

$$x = v_0 \cos \alpha t.$$

• En projetant sur \vec{e}_z , on obtient :

$$z = -\vec{g}\frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha t.$$



En projetant sur \vec{e}_y , on obtient : $y = 0$.

• L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps :

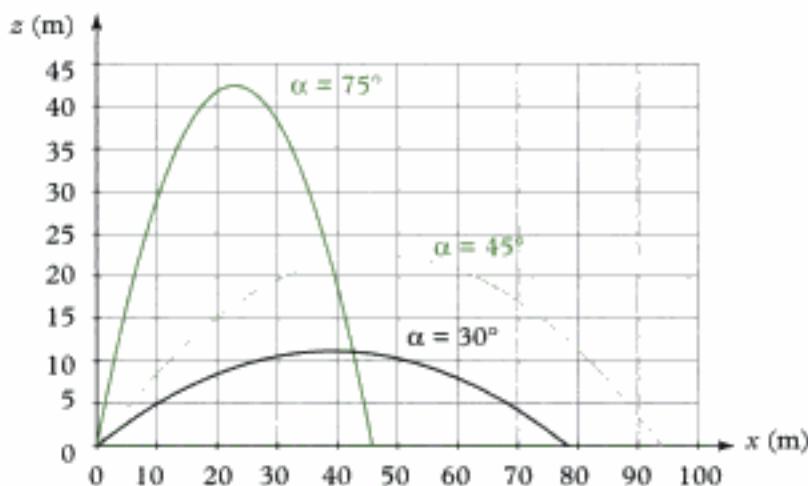
$$z = -\frac{\vec{g}}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

soit :

$$z = -\frac{\vec{g}}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

La trajectoire est un arc de parabole.

La figure suivante présente différentes trajectoires obtenues pour différents angles α .



- 2) La flèche est atteinte lorsque la vitesse verticale s'annule. En projetant l'équation $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0$ sur \vec{e}_z , on obtient : $v_z = -gt + v_0 \sin \alpha$ qui s'annule pour $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$.

L'unité de $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ est : $\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{s}$ homogène à t_1 .

Ainsi :

$$x_{\text{flèche}} = x(t_1) = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}$$

$$\text{et } z_{\text{flèche}} = z(t_1) = -\frac{g}{2} \times \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \text{ soit } z_{\text{flèche}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

L'unité de $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ est : $\frac{(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m}$ homogène à $z_{\text{flèche}}$.

- 3) La portée est atteinte lorsque $z = 0$; on obtient cette portée D en résolvant l'équation :

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0 \text{ soit } x \left(-\frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \right) = 0.$$

La solution $x = 0$ correspond au point origine, ce n'est donc pas celle cherchée.

L'autre solution est la bonne :

$$D = x = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = 2x_{\text{flèche}}$$

D est extremum si $\frac{dD}{d\alpha} = 0$ soit $\cos(2\alpha) = 0$, donc $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, soit :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$\text{A.N. } D = \frac{v_0^2}{g} = 91,7 \text{ m} ; \quad z_{\text{flèche}} = 22,9 \text{ m} \quad \text{et} \quad x_{\text{flèche}} = 45,9 \text{ m.}$$

Application 3 Tir balistique avec force de frottement proportionnelle à la vitesse

On reprend le problème de l'application 2 en supposant que l'obus est soumis à une force de frottement (résistance de l'air) du type : $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ en plus de son poids.

- 1) Déterminer les composantes ($v_x(t)$; $v_z(t)$) du vecteur vitesse \vec{v} à chaque instant.
- 2) Déterminer les composantes ($x(t)$; $z(t)$) du vecteur position \overrightarrow{OM} à chaque instant.
- 3) Déterminer et calculer la flèche de la trajectoire.
- 4) Montrer que la trajectoire tend vers une asymptote verticale dont on précisera la position.
- 5) Montrer que la vitesse de l'obus tend vers une limite que l'on déterminera.
- 6) Tracer l'allure de la trajectoire.

Données : $\alpha = 45^\circ$; $m = 1 \text{ kg}$; $\lambda = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Solution

- 1) On applique le PFD dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g à ce point matériel M(m) représentant l'obus :

$$m\vec{a}(M)\Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F} \text{ soit } m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{g} - \lambda\vec{v}, \text{ donc } \frac{m}{\lambda}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + \vec{v} = \frac{m}{\lambda}\vec{g}.$$

on appelant $\tau = \frac{m}{\lambda}$ et en intégrant, on obtient : $\vec{v}(t) = \vec{A} e^{-t/\tau} + \tau \vec{g}$.



τ est une constante de temps qui se mesure en s.

\vec{A} est une constante vectorielle que l'on détermine à $t = 0$: $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = \vec{A} + \tau \vec{g}$; ainsi :

$$\vec{v}(t) = (\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) e^{-t/\tau} + \tau \vec{g};$$

- en projection sur \vec{e}_x : $v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau}$;
- en projection sur \vec{e}_z : $v_z(t) = (v_0 \sin \alpha + \tau g) e^{-t/\tau} - \tau g$.

- 2) En intégrant l'expression vectorielle de \vec{v} , on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(t) = -\tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) e^{-t/\tau} + \tau \vec{g} t + \vec{B} \text{ avec } \overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0} = -\tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) + \vec{B};$$

ainsi : $\overrightarrow{OM}(t) = -\tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g})(e^{-t/\tau} - 1) + \tau \vec{g} t;$

- en projection sur \vec{e}_x : $x(t) = -\tau v_0 \cos \alpha (e^{-t/\tau} - 1)$;
- en projection sur \vec{e}_z : $z(t) = -\tau(v_0 \sin \alpha + \tau g)(e^{-t/\tau} - 1) - \tau g t$.

- 3) La flèche de la trajectoire est obtenue au moment t_1 où $v_z(t_1) = 0$, soit :

$$(v_0 \sin \alpha + \tau g) e^{-t_1/\tau} = \tau g, \text{ ce qui donne } e^{-t_1/\tau} = \frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha}.$$

Alors $t_1 = \tau \ln\left(\frac{\tau g + v_0 \sin \alpha}{\tau g}\right)$; en reportant dans $z(t)$:

$$\begin{aligned} z_{\text{flèche}} &= z(t_1) = -\tau(v_0 \sin \alpha + \tau g)\left(\frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha} - 1\right) - \tau^2 g \ln\left(\frac{\tau g + v_0 \sin \alpha}{\tau g}\right) \\ &= \tau v_0 \sin \alpha - \tau^2 g \ln\left(\frac{\tau g + v_0 \sin \alpha}{\tau g}\right). \end{aligned}$$

A.N. $z_{\text{flèche}} \approx 20,1 \text{ m}$.

La position de la flèche est : $x_{\text{flèche}} = x(t) = -\tau v_0 \cos \alpha \left(\frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha} - 1 \right)$.

A.N. $x_{\text{flèche}} = 37,7 \text{ m}$.



On constate que l'abscisse de la flèche est plus petite que dans le cas où il n'y a pas de frottement, ce qui est normal ; de la même façon, l'altitude maximale atteinte est plus faible.

4) Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $x(t) \rightarrow \tau v_0 \cos \alpha$ qui correspond à une asymptote verticale.

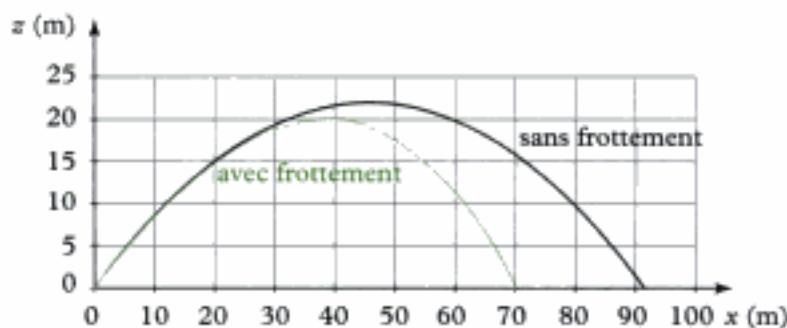
A.N. $x_{\lim} = x(t \rightarrow +\infty) = 212,1 \text{ m}$.

5) Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $\begin{cases} v_x(t) \rightarrow 0 \\ v_z(t) \rightarrow -\tau g \end{cases}$

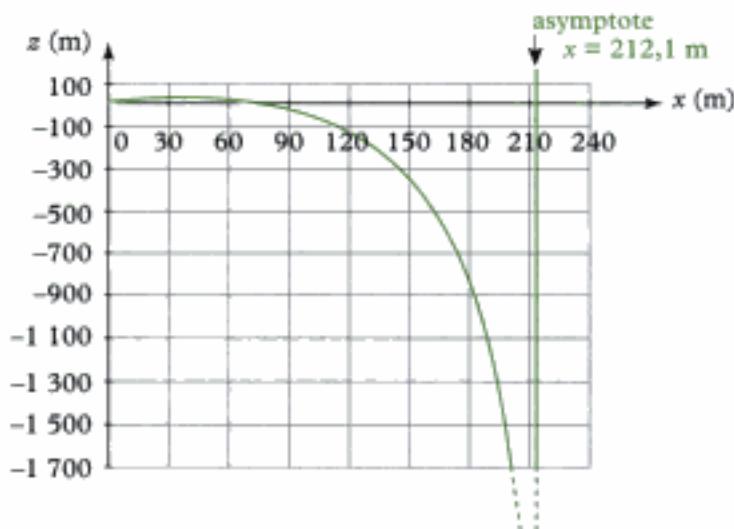
La vitesse tend vers une limite verticale de norme τg : $\vec{v}_{\lim} = -\tau g \vec{e}_z$.

A.N. $v_{\lim} \approx 98,1 \text{ ms}^{-1}$.

6) La trajectoire est tracée ci-dessous. On retrouve une flèche inférieure au cas du tir sans frottement, mais on ne voit pas l'asymptote verticale qui est atteinte pour une position $x = 212,1 \text{ m}$, ce qui est très supérieur à la portée : $D \approx 70 \text{ m}$.



Si on prolongeait les courbes, on verrait apparaître l'asymptote $x = 212,1 \text{ m}$ (fig. 10).



Application 4 Tir balistique avec force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse

On reprend le problème de l'application 2 en supposant que l'obus est soumis à une force de frottement (résistance de l'air) du type : $\vec{F} = -k\|\vec{v}\|\vec{v}$ en plus de son poids.

- 1) Écrire l'équation différentielle du mouvement et la projeter sur les axes ($O ; \vec{e}_x$) et ($O ; \vec{e}_z$).
- 2) Résoudre numériquement cette équation différentielle et tracer l'allure de la trajectoire du point M.
- 3) Déterminer la portée et la flèche de cette trajectoire.
- 4) Existe-t-il une asymptote à cette trajectoire ? une vitesse limite ?

Données :

$$m = 1 \text{ kg} ; \quad v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; \quad \alpha = 45^\circ ; \quad k = 645 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Solution

- 1) Le PFD appliqué dans \mathcal{R}_g au point matériel M(m) donne :

$$m\vec{a}(M)\Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - k\|\vec{v}\|\vec{v}, \text{ soit } \frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{g} - \frac{k}{m}\|\vec{v}\|\vec{v}.$$

- En projection sur \vec{e}_x : $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_z^2}v_x$.
- En projection sur \vec{e}_z : $\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_z^2}v_z$.

- 2) En utilisant une calculatrice programmable, un tableur (Excel) ou tout autre langage de programmation, on peut programmer rapidement une résolution numérique de cette équation par la méthode d'Euler, qui consiste à approcher la dérivée $\frac{dv_x}{dt}$ par $\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$; ainsi le système formé des deux équations différentielles $\frac{dv_x}{dt}$ et $\frac{dv_z}{dt}$ permet de calculer $v_x(t + \Delta t)$ et $v_z(t + \Delta t)$ à partir de $v_x(t)$ et $v_z(t)$:

$$\begin{cases} v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - \frac{k}{m}\sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)}v_x(t)\Delta t \\ v_z(t + \Delta t) = v_z(t) - \frac{k}{m}\sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)}v_z(t)\Delta t \end{cases}$$

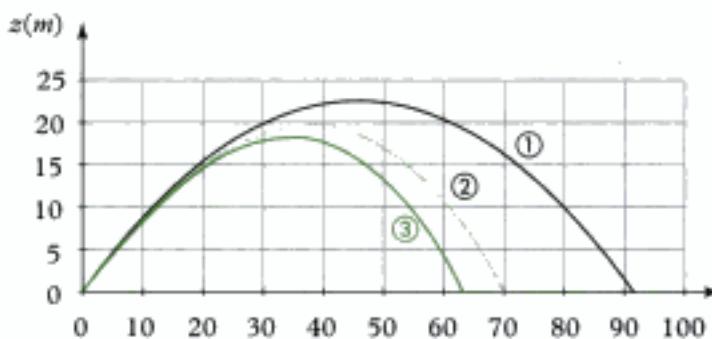
À partir des conditions initiales sur la vitesse ($v_x(t=0) = v_0 \cos \alpha$ et $v_z(t=0) = v_0 \sin \alpha$), on obtient, de proche en proche (pas d'avancement dans le temps : Δt), les valeurs approchées de v_x et v_z au cours du temps.

On peut de la même manière, connaissant à chaque instant (plus précisément à chaque instant multiple du pas de calcul Δt) la vitesse, déterminer la position de M :

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t)\Delta t \\ z(t + \Delta t) = z(t) + v_z(t)\Delta t \end{cases}$$

équations obtenues à partir de $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$.

La trajectoire obtenue est donnée ci-après : ① sans frottement ; ② avec force de frottement proportionnelle à v ; ③ avec force de frottement proportionnelle à v^2 .



- 3) Par lecture graphique, on lit la portée $D \approx 62$ m et la flèche : $x_{\text{flèche}} \approx 34,5$ m et $z_{\text{flèche}} \approx 18,7$ m.
 4) Si une vitesse limite existe, elle vérifie :

$$mg = k\|\vec{v}\|\vec{v} \quad \text{soit} \quad v_{\lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

L'unité de $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ est : $\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{ms}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ce qui est homogène à v_{\lim} .

A.N. $v_{\lim} = 38,99 \text{ ms}^{-1} = 39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



- Cette force de frottement est la plus proche de la réalité.
- La vitesse horizontale finit par s'annuler ($v_x(t \rightarrow \infty) = 0$) ce qui indique la présence d'une asymptote verticale à la trajectoire.
- On ne voit pas l'asymptote verticale qui se trouve en $x = 125,4$ m.

Application 5 Ressort horizontal

Un petit anneau de masse m , lié à un ressort élastique de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 se déplace sans frottements sur un axe horizontal ($O ; \vec{e}_x$).

Le référentiel $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

L'origine O de l'axe ($O ; \vec{e}_x$) étant confondue avec la position d'équilibre du système, la force élastique de rappel s'écrit $F = kx = k(\ell - \ell_0)$.

1) Écrire l'équation différentielle du mouvement de l'anneau.

2) L'anneau est abandonné sans vitesse initiale d'une abscisse $x = a$. Déterminer son mouvement ultérieur.

Solution

1) Appliquons le PFD au point matériel M afin de trouver l'équation différentielle du mouvement.

• Système étudié : l'anneau M de masse m .

• Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

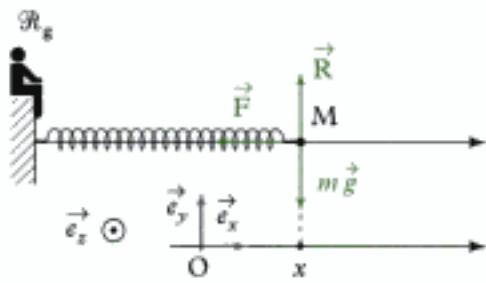
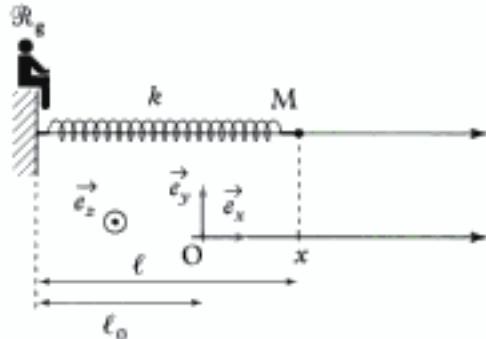
• Forces appliquées au système :

– poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$;

– réaction de l'axe $\vec{R} = R\vec{e}_y$;

(perpendiculaire à l'axe car pas de frottement);

– force de rappel élastique $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$.





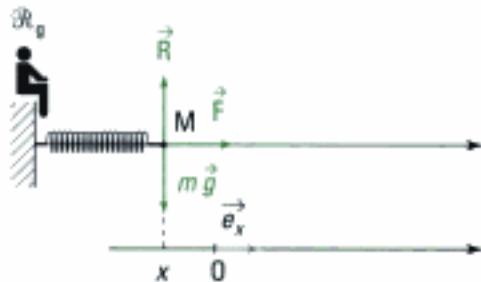
Il s'agit d'une force de rappel. Sur la figure, on a $x > 0$ (ressort tendu). Or cette force tend à ramener la masse vers la longueur à vide du ressort ($\ell = \ell_0$ soit $x = 0$), elle est donc dirigée selon $-\vec{e}_x$ d'où le signe « - » dans l'expression de \vec{F} ($kx > 0$).



Si on avait fait le dessin avec $x < 0$ (ressort comprimé), la force de rappel aurait eu tendance à ramener la masse vers la longueur à vide du ressort ($\ell = \ell_0$ soit $x = 0$), elle aurait été dirigée vers $+\vec{e}_x$ mais l'expression serait restée : $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$ car $kx < 0$ et $-kx > 0$.



Dans ce cas, la position d'équilibre était évidente (longueur à vide du ressort). Elle n'a pas nécessité de calculs supplémentaires.



- Le PFD s'écrit : $m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_t} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$.

Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_t} = \dot{x}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{\mathcal{R}_t} = \dot{x}\vec{e}_x$.



Vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_t} = \ddot{x}\vec{e}_x$.

$$\text{D'où : } m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\vec{e}_y + R\vec{e}_y - kx\vec{e}_x.$$

- On projette cette relation vectorielle sur \vec{e}_x

$$\vec{e}_x \cdot (m\ddot{x}\vec{e}_x) = \vec{e}_x \cdot (-mg\vec{e}_y + R\vec{e}_y - kx\vec{e}_x), \text{ soit } m\ddot{x} = -kx.$$

L'équation différentielle s'écrit donc :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$



En projetant sur \vec{e}_x , on fait disparaître $R = R\vec{e}_y$ qui était une force inconnue.

2) Pour trouver le mouvement de l'anneau, il faut résoudre l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \text{ d'où } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Les solutions de cette équation différentielle s'écrivent sous la forme : $x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$.

Pour trouver la solution à notre problème, on va utiliser les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(t=0) = a \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases}$$

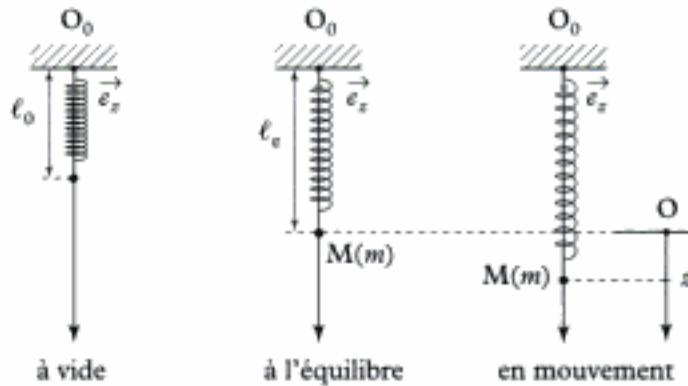
Or $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ et $x(t=0) = A = a$.

De plus $\dot{x}(t) = -A \cdot \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$ et $\dot{x}(t=0) = B \omega_0 = 0$ donc $B = 0$.

La solution est donc : $x(t) = a \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Application 6 Ressort vertical

On accroche une masse m à l'extrémité d'un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et de masse négligeable. Le référentiel $\mathcal{R}_g(O_0; \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

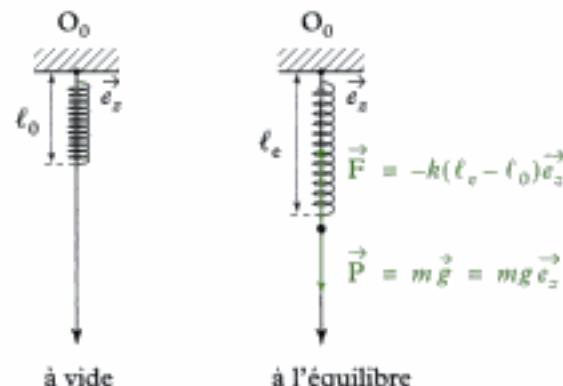


- 1) Déterminer la position d'équilibre (c'est-à-dire la longueur ℓ_e du ressort à l'équilibre).
- 2) On écarte maintenant la masse d'une distance a par rapport à la position d'équilibre précédente et on l'abandonne sans vitesse initiale :
 - a) écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse ;
 - b) déterminer son mouvement ultérieur.

Solution

1) Pour déterminer la position d'équilibre (masse arrêtée), on utilise le PFS.

- Système étudié : M de masse m .
- Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O_0; \vec{e}_z)$.
- Forces appliquées :
- poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$;
- force de rappel élastique $\vec{F} = -k(\ell_e - \ell_0)\vec{e}_z$.



Sur le dessin $\ell_e > \ell_0$ donc $\ell_e - \ell_0 > 0$ et la force de rappel élastique a tendance à ramener la masse vers la longueur à vide, c'est-à-dire que \vec{F} est dirigée vers $-\vec{e}_z$ d'où le signe « - » de l'expression de \vec{F} ; en effet $k(\ell_e - \ell_0) > 0$ donc $-k(\ell_e - \ell_0) < 0$.

- Le PFS donne : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}$.

En projection sur \vec{e}_z : $0 = mg\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z - k(\ell_e - \ell_0)\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z$ et donc :

$$0 = mg - k(\ell_e - \ell_0) \text{ soit } \ell_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

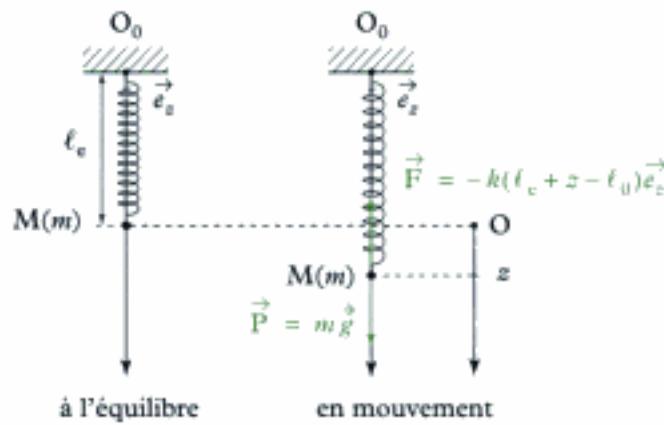
- 2) a) On utilise le PFD pour écrire l'équation différentielle.

- Système étudié : masse m ;

- Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O_0; \vec{e}_z)$;

- Forces appliquées au système :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$;
- force de rappel élastique $\vec{F} = -k(\ell_e + z - \ell_0)\vec{e}_z$.



Sur le dessin $\ell_0 + z > \ell_0$ (ressort tendu) ; la force de rappel a tendance à ramener la masse vers la longueur à vide c'est-à-dire que \vec{F} est dirigée vers $-\vec{e}_z$ d'où le signe « - » dans l'expression de \vec{F} , en effet $k(\ell_0 + z - \ell_0) > 0$ donc $-k(\ell_0 + z - \ell_0) < 0$.



On voit que l'on fait le même raisonnement pour trouver la position d'équilibre (PFS) et pour trouver l'équation différentielle du mouvement (PFD).



On repère la masse M par rapport à la position d'équilibre. L'intérêt de ce paramétrage est de simplifier l'équation différentielle du mouvement (voir ci-après).

- Le PFD donne : $m\vec{a}(M)|_{R_g} = \vec{P} + \vec{F}$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$ (O est fixe dans R_g).

Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{R_g} = \dot{z}\vec{e}_z$.

Vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{R_g} = \ddot{z}\vec{e}_z$.

Le PFD s'écrit donc :

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z - k(\ell_0 + z - \ell_0)\vec{e}_z,$$

soit en projection sur \vec{e}_z :

$$m\ddot{z} = mg - k(\ell_0 + z - \ell_0), \text{ soit } m\ddot{z} + kz = mg - k(\ell_0 - \ell_0).$$

En utilisant la valeur de ℓ_0 (position d'équilibre), on en déduit l'équation différentielle (simple, sans second membre) :

$$m\ddot{z} + kz = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

b) On résoud l'équation différentielle à l'aide des conditions initiales :

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{donc} \quad \dot{z}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t).$$

$$\begin{cases} z(t=0) = a & z(t=0) = A = a \\ \dot{z}(t=0) = 0 & \dot{z}(t=0) = B\omega_0 = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0 \end{cases}$$

donc

$$z(t) = a \cos(\omega_0 t).$$

L'essentiel

✓ Lois de Newton

• Loi 1 : principe d'inertie

Il existe des référentiels galiléens \mathcal{R}_g dans lesquels tout point matériel isolé, est en mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \text{cte}$) (ou au repos si $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{0}$).

• Loi 2 : principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , un point matériel M de masse m , soumis à un ensemble de forces dont la somme est \vec{F} vérifie :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}$$

m masse (kg)		masse (kg)
$\vec{a}(M)$ accélération ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)		
\vec{F} force (N)		

• Principe fondamental de la statique (PFS)

Si un point matériel est en équilibre dans \mathcal{R}_g , c'est-à-dire $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{0}$, alors $\vec{F} = \vec{0}$.

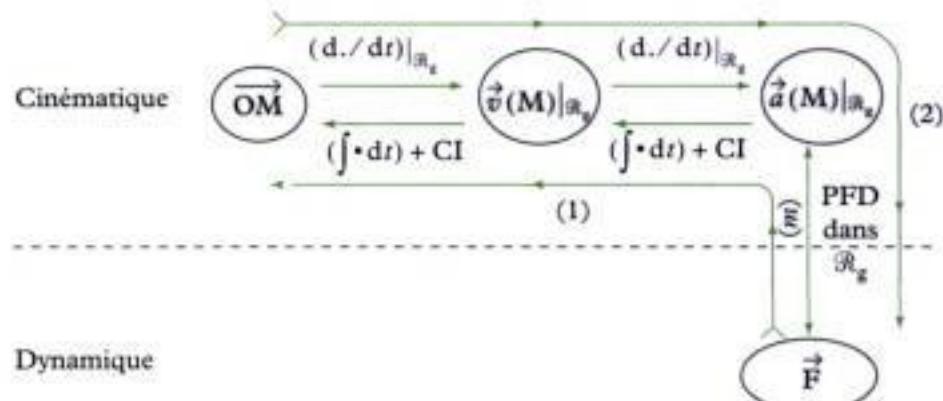


La réciproque n'est pas vraie : si $\vec{F} = \vec{0}$, le point matériel peut avoir un mouvement rectiligne uniforme dans \mathcal{R}_g (principe d'inertie) et n'est en équilibre que si sa vitesse est nulle à un instant quelconque (donc à tout instant).

• Loi 3 : principe des actions réciproques

Si le point matériel A exerce sur le point matériel B une force $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$, alors B exerce sur A une force $\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}} = -\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$; ces deux forces sont portées par la droite (AB).

✓ Bilan



Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer l'équation différentielle du mouvement (respectivement une force inconnue) à l'aide du PFD ?

Soit M un point matériel de masse m et \mathcal{R}_g un référentiel galiléen. On souhaite déterminer l'équation différentielle du mouvement du point M dans \mathcal{R}_g (respectivement une force inconnue) à l'aide du PFD.

→ Savoir faire

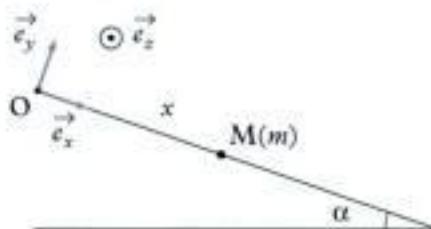
- ① Définir le système étudié.
- ② Définir le référentiel galiléen d'étude.
- ③ Faire le bilan des forces appliquées au système.
Définir leur direction. Réaliser éventuellement un dessin.
- ④ Écrire le PFD : pour cela exprimer le vecteur accélération à l'aide du vecteur position puis du vecteur vitesse.
- ⑤ Projeter la relation vectorielle : sur une direction faisant disparaître la force inconnue afin de trouver l'équation différentielle (respectivement sur la direction de la force inconnue afin de trouver cette force).



Pour faire disparaître une force par la projection, il suffit de projeter sur une direction perpendiculaire à cette force.

→ Application

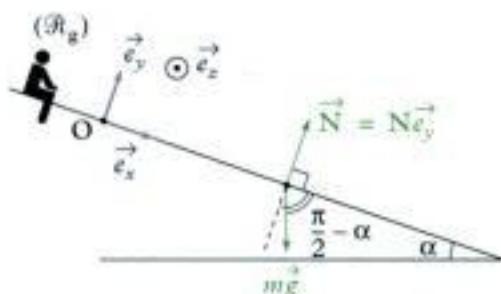
Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur un plan incliné. Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



Déterminer l'équation différentielle du mouvement (respectivement la réaction du plan incliné).

Solution

- ① Système étudié : le point matériel $M(m)$.
- ② Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- ③ Forces appliquées au système :
 - poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (vertical vers le bas) ;
 - réaction du support $\vec{N} = N\vec{e}_y$ (perpendiculaire au support car pas de frottement).



④ Le PFD donne : $\vec{m}\ddot{\vec{a}}(M)|_{\mathbb{R}_x} = \vec{P} + \vec{N}$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = xe_x$.

Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{\mathbb{R}_x} = \dot{x}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathbb{R}_x} = \dot{x}\vec{e}_x + \vec{0}$.

 \vec{e}_x est fixe dans \mathbb{R}_g .

Vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{\mathbb{R}_x} = \ddot{x}\vec{e}_x$.

Le PFD s'écrit donc : $m\ddot{x}\vec{e}_x = m\vec{g} + N\vec{e}_y$.

- ⑤ • Pour trouver l'équation différentielle, comme \vec{N} est inconnue, on projette sur \vec{e}_x pour faire disparaître $\vec{N} = N\vec{e}_y$; on a :

$$\vec{e}_x \cdot (m\ddot{x}\vec{e}_x) = \vec{e}_x \cdot (m\vec{g} + N\vec{e}_y), \text{ soit } m\ddot{x} = m\vec{g} \cdot \vec{e}_x + 0$$

 $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$, car les axes du repère sont orthogonaux.

$$m\ddot{x} = mg \times 1 \times \cos(\vec{g}, \vec{e}_x) = mg \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} = g \sin \alpha.$$

 Comme \ddot{x} est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, l'expression est homogène.

- Pour trouver \vec{N} , on projette l'équation vectorielle issue du PFD sur la direction de \vec{N} , c'est-à-dire \vec{e}_y :

$$\vec{e}_y \cdot (m\ddot{x}\vec{e}_x) = \vec{e}_y \cdot (m\vec{g} + N\vec{e}_y), \text{ soit } 0 = m\vec{g} \cdot \vec{e}_y + N.$$

Ainsi : $0 = mg \cos(\vec{g}, \vec{e}_y) + N$, soit $0 = mg \cos(\pi - \alpha) + N$, soit encore $0 = -mg \cos \alpha + N$.

La réaction du sol inconnue s'écrit :

$$N = mg \cos \alpha.$$

 Comme la réaction N est en $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, m en kg , g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, cette expression est homogène.

 Vérification : quand $\alpha = 0$ (plan horizontal) $N = mg$, et quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (plan vertical) $N = 0$, ce qui est logique.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Unité d'une grandeur

1) Déterminer l'unité de C_x dans l'équation :

$$F = \frac{1}{2} \rho S C_x v^2.$$

F est une force, ρ une masse volumique, S une surface et v une vitesse.

2) Déterminer l'unité de η dans l'équation :

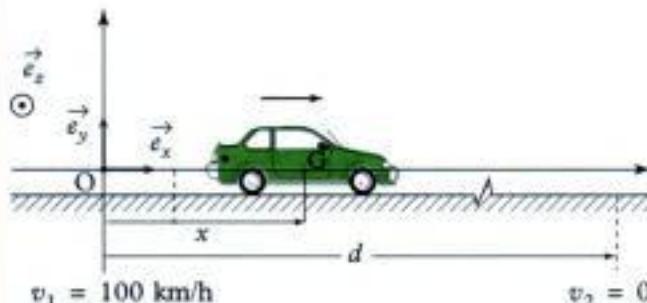
$$F = 6\pi\eta rv.$$

F est une force, r une distance et v une vitesse.

Ex. 2 Test de freinage

Lors d'un test de freinage, une voiture, assimilée à un point matériel G de masse $m = 1300 \text{ kg}$, roule sur une route horizontale et freine alors que sa vitesse est $v_1 = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Le temps nécessaire à l'arrêt complet du véhicule est $T = 7 \text{ s}$. On suppose que la décélération est constante et que le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.



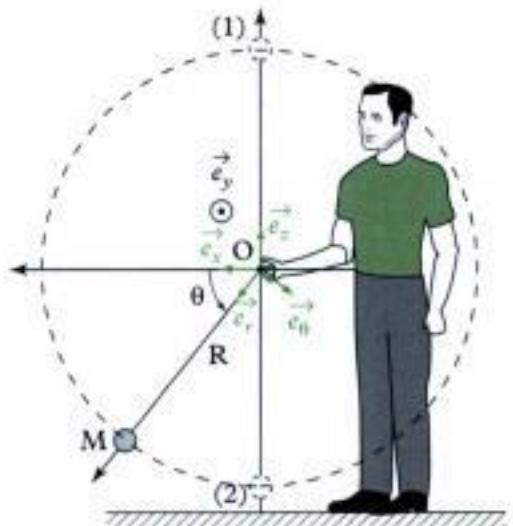
1) Déterminer la force de freinage F_0 et la distance d'arrêt d .

2) On suppose que la force de freinage reste la même (F_0) mais on teste plusieurs vitesses de départ : $0 < v_1 \leq 130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Tracer la courbe $d = f(v_1)$. Que peut-on en conclure quant au respect des limitations de vitesses sur route ?

La trajectoire de la balle est un cercle de centre O et de rayon R qui se fait dans le plan vertical (\vec{e}_x, \vec{e}_z). \vec{e}_z est vertical vers le haut. On néglige les éventuels petits mouvements de la main de l'homme, ainsi :

$\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

On néglige tous les frottements.



1) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la balle.

2) Déterminer l'expression de la tension du fil.

3) Déterminer la vitesse minimum v_{\min} que doit avoir la balle dans la position (1).

4) On suppose que la balle passe dans la position (1) avec la vitesse v_{\min} . Indiquer dans quelle position la tension du fil est maximum.

Ex. 4 Choc frontal

On cherche à modéliser le comportement d'un véhicule de tourisme, lors d'un choc frontal. Pour cela, on assimile la voiture à un point matériel G de masse $m = 1300 \text{ kg}$.

L'avant du véhicule (qui va se déformer) est modélisé par un ressort de masse négligeable de longueur à vide $\ell_0 = 2 \text{ m}$ (longueur au début du choc) et de raideur k . Au début du choc, la voiture arrive avec une vitesse $v_0 = 36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

La vitesse du véhicule s'annule lorsque le ressort s'est comprimé de $\frac{\ell_0}{2}$.

Pendant le choc, on repère le point G par son abscisse x depuis le début du choc.

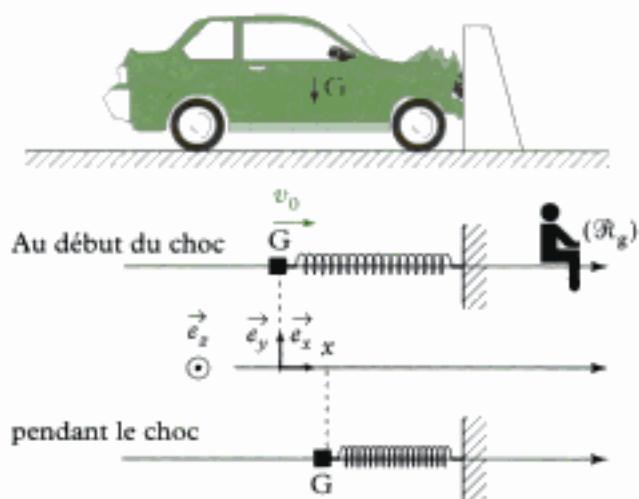
On suppose $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ galiléen.

On néglige tous les frottements.

Niveau 2

Ex. 3 Trajectoire circulaire

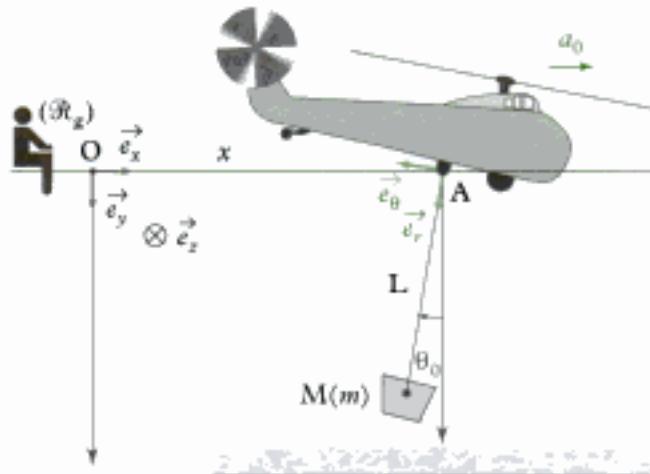
Un homme fait tourner une balle (assimilée à un point matériel M de masse $m = 100 \text{ g}$), attachée à un fil de longueur $R = OM = 1 \text{ m}$ et de masse négligeable.



- 1) Écrire l'équation différentielle du mouvement.
 - 2) Donner l'expression puis la valeur numérique de k .
 - 3) Donner les expressions puis les valeurs numériques de :
 - a) la durée du choc ;
 - b) l'accélération maximum subie par le véhicule.
- Conclure sur les effets de ce choc sur le conducteur.

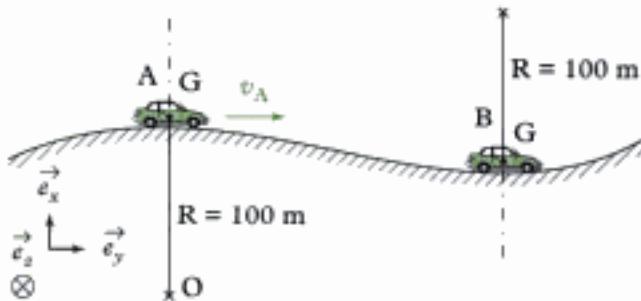
Ex. 5 Héliportage

Un hélicoptère de lutte contre les incendies transporte un réservoir d'eau modélisable par une masse ponctuelle $m = 1$ tonne au point M. Ce réservoir est attaché à l'hélicoptère par un câble de masse négligeable de longueur $L = AM = 8$ m incliné d'un angle constant θ_0 . L'hélicoptère se déplace à l'horizontal (selon \vec{e}_x) avec une accélération constante $a_0 > 0$. Le référentiel $(R_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z))$ est supposé galiléen.



- 1) Déterminer l'angle θ_0 en fonction de a_0 . Que se passe-t-il quand a_0 augmente ?
- 2) Déterminer la tension du câble en fonction de a_0 . Que se passe-t-il quand a_0 augmente ? Commentaire.

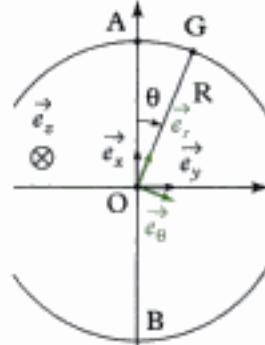
Ex. 6 Route bosselée



Une voiture, assimilée à un point matériel G de masse $m = 1500$ kg, roule sur une route bosselée, modélisée par une succession de demi-cercles de rayon OG = R = 100 m. On suppose que le référentiel $(R_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z))$ est galiléen et on néglige tous les frottements.

Sachant que la voiture passe au sommet de la bosse avec une vitesse $v_A = 50$ km · h⁻¹, déterminer la vitesse v_B de la voiture au fond du creux, qui correspond à un doublement de la réaction du sol.

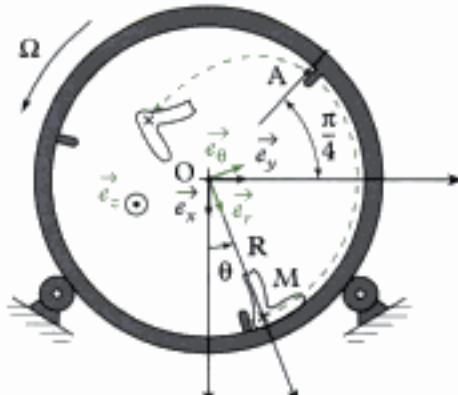
Quelle vitesse maximum faut-il en A pour que cela soit réalisable ?



Ex. 7 Dans un sèche-linge

On étudie le mouvement d'un vêtement à l'intérieur d'un tambour de sèche-linge tournant à la vitesse angulaire constante $\Omega = \dot{\theta}$. Ce vêtement est modélisable par un point matériel M de masse m qui se déplace sur un cercle de rayon R = 300 mm (tant qu'il reste en contact avec le tambour). On néglige tous les frottements.

Les trois petites butées évitent le glissement du vêtement jusqu'à la perte du contact entre le vêtement et le tambour (en A). Le référentiel $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



Déterminer la vitesse Ω du tambour qui permet une perte de contact (en A) par un angle $\theta = \theta_0 = \frac{3\pi}{4}$ rad. Faire l'application numérique.

Niveau 3

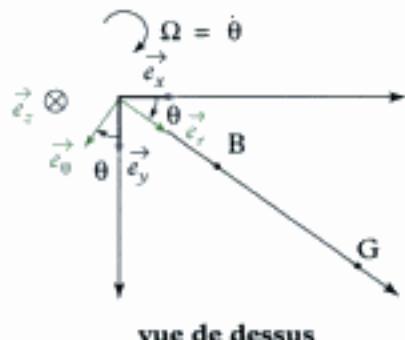
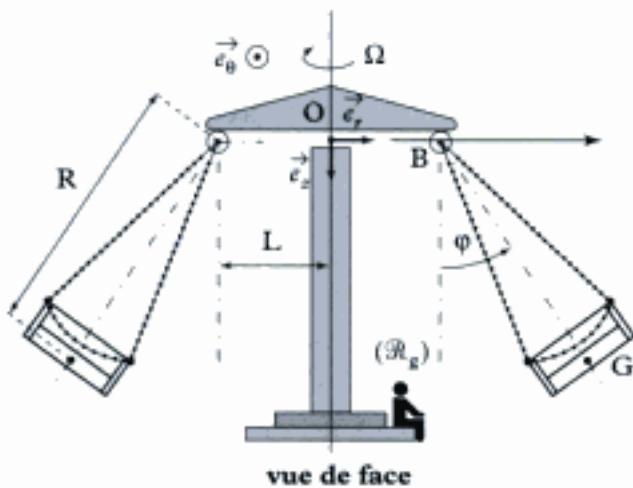
Ex. 8 La balancelle

On étudie le mouvement d'une balancelle assimilée à un point matériel G de masse m reliée au manège (qui tourne autour de l'axe vertical ($O ; \vec{e}_z$) à la vitesse angulaire constante $\Omega = \dot{\theta} = \text{cte}$) par l'intermédiaire d'un câble de masse négligeable, dont l'action est modélisée par une tension \vec{T} de G vers B, appliquée en G. L'angle d'inclinaison φ est constant.

On suppose que $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.

Données :

$L = 3 \text{ m}$ et $R = 7 \text{ m}$.



vue de dessus

- 1) Établir une relation entre φ , Ω , L et R .
- 2) Tracer Ω en fonction de φ . Faire un commentaire quant à l'utilisation du manège.

Ex. 9 Saut à l'élastique

Un sauteur à l'élastique, modélisé par un point matériel M, de masse $m = 70 \text{ kg}$, tombe depuis un pont (en A) avec un élastique accroché aux pieds.

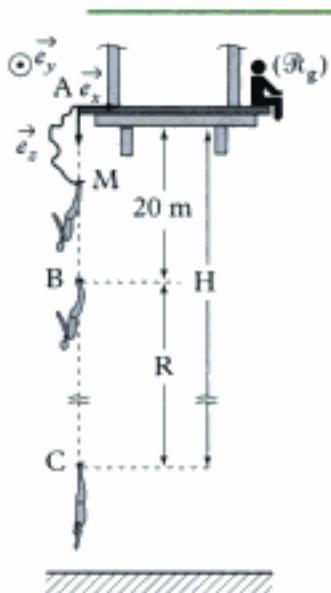
Pendant les 20 premiers mètres de chute (jusqu'en B), l'élastique n'est d'aucune utilité et le sauteur est donc en chute libre.

À partir du point B, l'action de l'élastique est modélisable par un ressort, de masse négligeable, de longueur à vide $\ell_0 = 20 \text{ m}$ et de raideur $k = 120 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

On suppose que le référentiel

$\mathcal{R}_g(A ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen et on néglige tous les frottements.

- 1) Déterminer la vitesse du sauteur en B (après 20 m de chute libre).
- 2) Déterminer la hauteur totale de chute.
- 3) Déterminer l'accélération maximale pendant le saut.

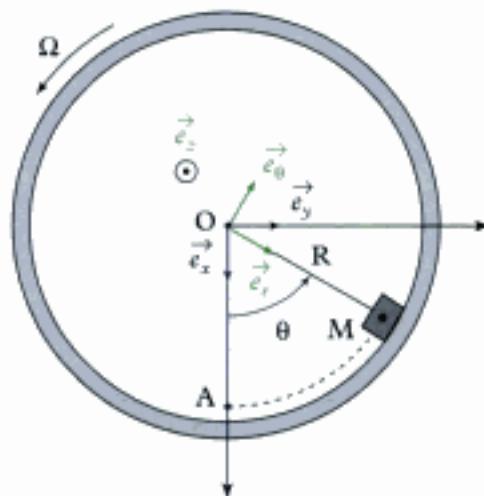


Ex. 10 Dans un tambour

Un palet, modélisable par un point matériel M de masse m , est inséré en A dans un tambour de rayon $R = OM = 0,35 \text{ m}$ tournant à vitesse constante $\Omega = \dot{\theta} = 70 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. En A, le palet possède une vitesse $R\Omega$ (à ce moment-là, il ne glisse pas, car il a la même vitesse que le tambour). Par la suite, il commence à glisser dès qu'il ne possède plus cette vitesse $R\Omega$.

Le coefficient de frottement entre le palet et le tambour est f .

Le référentiel $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



- 1) Déterminer le coefficient de frottement f_0 qui correspond à une stabilisation du palet M dans une position $\theta = \theta_0$. Tracer f_0 en fonction de θ_0 pour $0 \leq \theta_0 < \pi \text{ rad}$.
- 2) Déterminer le coefficient de frottement f_1 qui correspond à un début de glissement quand $\theta = \theta_1$ (quand M s'éloigne de A). Tracer cette fonction pour $0 \leq \theta_1 < \pi \text{ rad}$.
- 3) En déduire le coefficient de frottement minimum $f = f_{\min}$ qui permet au palet de faire un tour sans qu'il y ait de glissement.

Indications

Ex. 4 2) On intègre l'équation différentielle du mouvement en utilisant :

- à $t = 0$, $v = v_0$;
- le choc comprime le ressort de $\frac{\ell_0}{2}$.

Ex. 5 1) Utiliser le PFD projeté sur \vec{e}_0 .

2) Utiliser le PFD projeté sur \vec{e}_r .

Ex. 6 Ne pas oublier la force motrice.

Ex. 7 Calculer la réaction du tambour à l'aide du PFD et écrire la condition qui annule cette réaction.

Ex. 9 2) Étudier le mouvement entre B et C, afin de déterminer la distance BC.

Ex. 10 1) Appliquer le PFS. Calculer T et N à l'équilibre.

2) Appliquer le PFD. Calculer T et N lors du mouvement tant qu'il n'y a pas de glissement.

Utiliser la condition correspondant au début du glissement.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

- 1) L'unité de C_x est :

$$\begin{aligned}\frac{\text{N}}{(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})(\text{m}^2)(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2} &= \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \times \text{m}^{-2} \times \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \\ &= \text{kg}^0 \times \text{m}^0 \times \text{s}^0\end{aligned}$$

C_x est un coefficient sans unité.

- 2) L'unité de η est :

$$\begin{aligned}\frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} &= \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s} \\ &= \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.\end{aligned}$$

Exercice 2

- 1) Pour trouver la force de freinage, on va appliquer le PFD.

Système étudié : la voiture de masse m assimilée au point matériel G.

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Forces appliquées au système :

- poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$;
- réaction du sol $\vec{N} = N\vec{e}_y$;
- la force de freinage $\vec{F} = -F\vec{e}_x$.

Le PFD donne : $m\vec{a}(G)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$; vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$; vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x$.

L'équation vectorielle issue du PFD s'écrit donc :

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\vec{e}_y + N\vec{e}_y - F\vec{e}_x.$$

- Comme on veut calculer F et que l'on ne connaît pas N, on va projeter cette relation sur \vec{e}_x :

$$\vec{e}_x \cdot [m\ddot{x}\vec{e}_x] = \vec{e}_x \cdot [-mg\vec{e}_y + N\vec{e}_y - F\vec{e}_x], \text{ d'où } m\ddot{x} = 0 + 0 - F \\ m\ddot{x} = -F.$$

 Comme m est en kg, \ddot{x} en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et F en N, cette expression est homogène.

- Comme \ddot{x} est une constante, F l'est aussi ; on peut donc intégrer une fois l'équation différentielle précédente :

$$\ddot{x} = -\frac{F}{m}, \text{ puis } \dot{x} = -\frac{F}{m}t + \text{cte}.$$

• $t = 0$, $\dot{x}(t=0) = v_1$, donc cte = v_1 , donc $\dot{x} = -\frac{F}{m}t + v_1$.

• $t = T$, $\dot{x}(t=T) = 0$, donc $0 = -\frac{F}{m}T + v_1$, soit :

$$F_0 = \frac{mv_1}{T}.$$



Comme F est en N, m en kg, v_1 en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et T en s cette relation est homogène : $\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{s}} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{N}$.

$$\text{A.N. } F = \frac{1300 \times \frac{100}{3,6}}{7} = 5159 \text{ N.}$$

Pour déterminer la distance d'arrêt, il faut intégrer une deuxième fois par rapport au temps l'équation différentielle du mouvement :

$$x = -\frac{F_0}{m} \frac{t^2}{2} + v_1 t + \text{cte.}$$

• $t = 0$, $x(t=0) = 0$ donc cte = 0, d'où $x = -\frac{F_0}{m} \frac{t^2}{2} + v_1 t$.

• $t = T$, $x = d$ donc $d = -\frac{F_0}{m} \frac{T^2}{2} + v_1 T$

$$d = v_1 \times \frac{mv_1}{F_0} - \frac{F_0}{m} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{mv_1}{F_0} \right)^2$$

$$= \frac{mv_1^2}{F_0} - \frac{1}{2} \frac{mv_1^2}{F_0}$$

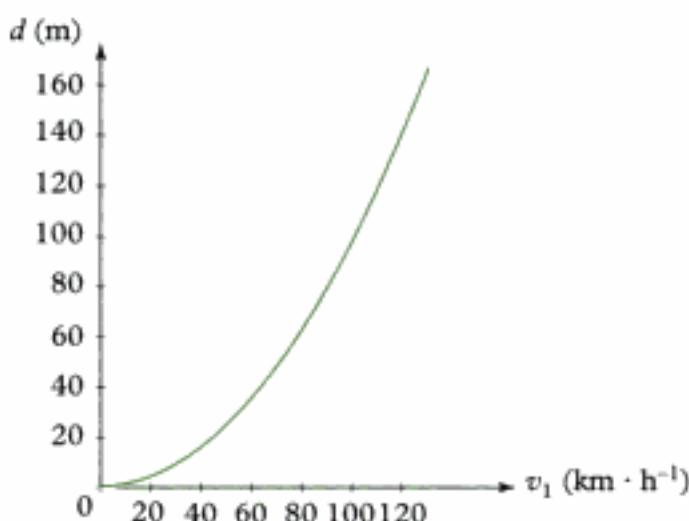
$$d = \frac{1}{2} \frac{mv_1^2}{F_0}.$$



Comme d est en m, m est en kg, v_1 en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et F_0 en N, cette expression est homogène :

$$\frac{\text{kg} \times (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{\text{N}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m.}$$

2) Courbe $d = f(v_1)$



La distance varie avec le carré de la vitesse d'où l'importance des limitations de vitesse (en ville comme sur autoroute).

Exercices de niveau 2

Exercice 3

1) On cherche à écrire l'équation différentielle du mouvement ; on va donc appliquer le PFD (voir méthode).

Système étudié : la balle M de masse m .

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Forces appliquées au système :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;

- tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$.

Le PFD donne : $m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{T}$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$; vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = +R\dot{\theta}\vec{e}_{\theta}$.

$R = \text{cte}$ et $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{\theta}\vec{e}_{\theta}$.

Vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_{\theta}$.

L'équation vectorielle issue du PFD est : $m(-R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_{\theta}) = -mg\vec{e}_z - T\vec{e}_r$.

- Comme \vec{T} est inconnue et que l'on cherche l'équation différentielle du mouvement, on va projeter la relation vectorielle précédente sur \vec{e}_{θ} :

$$\vec{e}_{\theta} \cdot [-mR\dot{\theta}^2\vec{e}_r + mR\ddot{\theta}\vec{e}_{\theta}] = \vec{e}_{\theta} \cdot [-mg\vec{e}_z - T\vec{e}_r], \text{ d'où } mR\ddot{\theta} = -mg(-\cos\theta) + 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \cos\theta.$$

Comme $\ddot{\theta}$ est en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$, g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et R en m , cette expression est homogène (rad est une unité sans dimension).

2) Pour déterminer l'expression de la tension du fil, on reprend l'équation vectorielle du PFD que l'on projette sur \vec{e}_r :

$$\vec{e}_r \cdot [-mR\dot{\theta}^2\vec{e}_r + mR\ddot{\theta}\vec{e}_{\theta}] = \vec{e}_r \cdot [-mg\vec{e}_z - T\vec{e}_r], \text{ soit } -mR\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta - T$$

$$T = mg\sin\theta + mR\dot{\theta}^2.$$

Comme T est en N , m en kg , g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, R en m et $\dot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, cette expression est homogène :

$$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} + \text{kg} \cdot \text{m} \cdot (\text{s}^{-1})^2 = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{N}.$$

3) Pour que la balle puisse passer dans la position (1) en restant sur le cercle de rayon R , il faut que le fil ne se détende pas, c'est-à-dire qu'il faut que $T \geq 0$ soit $mg\sin\theta + mR\dot{\theta}^2 \geq 0$, avec $\theta = -\frac{\pi}{2}$ rad.

Or $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = R\dot{\theta}\vec{e}_{\theta} = v\vec{e}_{\theta}$. Aussi :

$$mg(-1) + m\frac{v^2}{R} \geq 0, \text{ donc } v^2 \geq Rg \text{ d'où } v \geq \sqrt{Rg}$$

$$v_{\min} = \sqrt{Rg}.$$

Comme v est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, R en m et g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ cette formule est homogène : $\sqrt{\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4) En reprenant l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \cos \theta,$$

on voit que comme $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ rad, $0 \leq \cos \theta \leq 1$, donc $\ddot{\theta} \geq 0$.

En outre, la balle possède la vitesse v_{\min} dans la position (1), aussi la balle accélère quand θ passe de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ ((1) → (2)).

Inversement elle décélère quand θ passe de $\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ ((2) → (1)).

Aussi $\dot{\theta}$ est maximum quand $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad (position (2)).

De plus $\sin \theta = 1$ quand $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad.

Et comme $T = mg \sin \theta + mR \dot{\theta}^2$, alors T est maximal en position (2).

Exercice 4

1) On applique le PFD pour trouver l'équation différentielle.

• **Système étudié** : le point matériel G de masse m .

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Forces appliquées au système** :

– poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$;

– réaction du sol $\vec{N} = N\vec{e}_y$ (pas de frottement) ;

– force de rappel élastique $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$.



Sur le dessin $x > 0$ quand on comprime le ressort.

Dans cette configuration, \vec{F} est orienté vers $-\vec{e}_x$ d'où le signe « - » et l'expression de \vec{F} :
($kx > 0$) donc ($-kx < 0$).

• Le PFD donne : $m\vec{a}(G)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$.

Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$.



\vec{e}_x est fixe dans \mathcal{R}_g .

Vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x$.

Le PFD s'écrit (sous forme vectorielle).

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\vec{e}_y + N\vec{e}_y - kx\vec{e}_x.$$

– Pour trouver l'équation différentielle du mouvement, il faut projeter sur une direction qui fait disparaître $\vec{N} = N\vec{e}_y$: la direction \vec{e}_x .

en projection sur \vec{e}_x :

$$m\ddot{x}\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = -mg\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + N\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x - kx\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \\ m\ddot{x} + kx = 0.$$

2) On va résoudre l'équation différentielle en utilisant les conditions initiales et les caractéristiques du mouvement.

La solution générale s'écrit : $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ avec $\omega_0 = \frac{k}{M}$.

Donc $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t$.

• À $t = 0$ (au début de choc) : $x(t = 0) = 0 = A$, d'où $A = 0$;

$$\dot{x}(t = 0) = B\omega_0 = v_0, \text{ d'où } B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

• À $t = T$ (T durée du choc) : $x(t = T) = \frac{\ell_0}{2}$;

$$\dot{x}(t = T) = 0.$$

• $\dot{x}(t) = B\omega_0 \cos \omega_0 t$

$\dot{x}(t = T) = 0$ donc $\omega_0 T = \frac{\pi}{2}$, soit : $T = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$

• $x(t = T) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) = \frac{\ell_0}{2}$

$$\frac{v_0}{\omega_0} = \frac{\ell_0}{2} \text{ d'où } v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\ell_0}{2} \text{ soit : } k = \frac{4mv_0^2}{\ell_0^2}.$$

 Comme k est en $N \cdot m^{-1}$, m en kg, v_0 en $m \cdot s^{-1}$ et ℓ_0 en m, cette expression est homogène :

$$\frac{kg \cdot (m \cdot s^{-1})^2}{m^2} = \frac{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}{m^2} = kg \cdot s^{-2}, \text{ et } N \cdot m^{-1} = kg \cdot m \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} = kg \cdot s^{-2}$$

$$\text{A.N. } k = \frac{4 \times 1\ 300 \times \left(\frac{36}{3,6}\right)^2}{2^2} = 130\ 000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$\Delta 1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{1 \times 1\ 000}{3\ 600} = \frac{1}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3) a) La durée du choc T vérifie $\omega_0 T = \frac{\pi}{2}$, soit $\sqrt{\frac{k}{m}} T = \frac{\pi}{2}$;

en reportant l'expression de k trouvée à la question précédente :

$$T = \frac{\pi}{2} \frac{\ell_0}{2v_0}, \text{ soit } T = \frac{\pi \ell_0}{4v_0}.$$

 Comme T est en s, ℓ_0 en m et v_0 en $m \cdot s^{-1}$, cette expression est homogène : $\frac{m}{m \cdot s^{-1}} = s$.

$$\text{A.N. } \text{On a } T = \frac{\pi \times 2}{4 \times \frac{36}{3,6}} = 0,16 \text{ s.}$$

b) L'accélération est obtenue en dérivant l'expression de la vitesse :

$$\dot{x} = v_0 \cos \omega_0 t, \text{ donc } \ddot{x} = -v_0 \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

$$\text{Alors : } \ddot{x}_{\max} = -v_0 \omega_0 = -v_0 \frac{2v_0}{\ell_0} \text{ soit } \ddot{x}_{\max} = -2 \times \frac{v_0^2}{\ell_0}.$$



Comme \ddot{x}_{\max} est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, v_0 en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et t_0 en s cette expression est homogène :

$$\frac{(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{\text{s}} = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{s}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$$\text{A.N. } \ddot{x}_{\max} = -2 \times \frac{\left(\frac{36}{3,6}\right)^2}{2} = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Commentaire : le temps de choc est très court. L'accélération maximum dépasse 10 fois l'accélération de la pesanteur ($g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). On imagine très bien les effets nocifs d'un tel choc sur un conducteur.

Exercice 5

- 1) On va appliquer le PFD pour trouver θ_0 en fonction de a_0 .



Voir méthode.

- **Système étudié** : le réservoir d'eau assimilé à un point matériel M de masse m .

- **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- **Forces appliquées au système** :

– poids $\vec{P} = mg\vec{e}_y$;

– tension du mobile $\vec{T} = -T\vec{e}_r$.

- Le PFD donne : $\vec{ma}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{T}$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = x\vec{e}_x + L\vec{e}_r$.

Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + \dot{L}\vec{e}_r + L\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$.

\vec{e}_x est constant dans \mathcal{R}_g ; $L = \text{cte}$ donc $\dot{L} = 0$.

\vec{e}_r est ici constant dans \mathcal{R}_g car $\theta_0 = \text{cte}$ ($\dot{\theta}_0 = 0$); en effet $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{\theta}\vec{e}_0 = \vec{0}$.

Vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x = a_0\vec{e}_x$.

Le PFD s'écrit : $ma_0\vec{e}_x = mg\vec{e}_y - T\vec{e}_r$.

- On cherche une relation entre θ_0 et a_0 . Il faut faire disparaître $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ dans la projection.

On projette donc sur \vec{e}_0 (car $\vec{e}_0 \perp \vec{e}_r$).

$$\vec{e}_0 \cdot (ma_0\vec{e}_x) = \vec{e}_0 \cdot (mg\vec{e}_y - T\vec{e}_r)$$

$$ma_0 \cos(\vec{e}_0, \vec{e}_x) = mg \cos(\vec{e}_0, \vec{e}_y) - 0.$$



$\vec{e}_r \perp \vec{e}_0$ donc $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_0 = 0$

Soit $ma_0 \cos(\pi - \theta_0) = mg \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \theta_0\right)\right)$

$-ma_0 \cdot \cos(\theta_0) = -mg \sin \theta_0$

$$\tan \theta_0 = \frac{a_0}{g}$$

Quand a_0 augmente, θ_0 augmente.

Comme a_0 est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, cette expression est homogène.

Vérification : quand $a_0 = 0$ (à vitesse constante ou à l'arrêt), on a $\tan \theta_0 = 0$ soit $\theta_0 = 0$, ce qui est exact.

2) On cherche désormais la tension du câble, on reprend l'équation vectorielle issue du PFD :

$$ma_0 \vec{e}_x = mg \vec{e}_y - T \vec{e}_r.$$

Il suffit de projeter cette relation sur \vec{e}_r :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r \cdot (ma_0 \vec{e}_x) &= \vec{e}_r \cdot (mg \vec{e}_y - T \vec{e}_r) \\ ma_0 \cos(\vec{e}_r, \vec{e}_x) &= mg \cos(\vec{e}_r, \vec{e}_y) - T \\ ma_0 \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \theta_0\right)\right) &= mg \cos(-\theta_0) - T\end{aligned}$$

$$ma_0 (-\sin \theta_0) = mg \cos \theta_0 - T$$

$$T = mg \cos \theta_0 + ma_0 \sin \theta_0$$

Soit en remplaçant a_0 par son expression :

$$T = mg \left(\cos \theta_0 + \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right) \text{ et donc } T = \frac{mg}{\cos \theta_0}.$$

$\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0 = 1$.

De plus $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$, pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; donc : $T = mg \sqrt{1 + \left(\frac{a_0}{g}\right)^2}$.

Comme T est en $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, m en kg , g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et a_0 en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, cette expression est homogène.

On sait que $T = mg$ quand $a_0 = 0$.

Quand a_0 augmente, T augmente. Une trop grande accélération pourrait entraîner une rupture de câble.

Exercice 6

1) Il va falloir déterminer la réaction du sol en A (puis en B). On va appliquer le PFD.

• **Système étudié** : point matériel G de masse m .

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Forces appliquées au système** :

– poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_x$;

– réaction du sol $\vec{N} = N \vec{e}_r$;

- force motrice $\vec{F} = F \vec{e}_\theta$.

• Le PFD donne : $m\vec{a}(G)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$.

Vecteur position : $\vec{OG} = R \vec{e}_r$.

Vecteur vitesse : $\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = v \vec{e}_\theta$.

Vecteur accélération : $\vec{a}(G)|_{\mathcal{R}_g} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$.

L'équation vectorielle issue du PFD est donc :

$$m(R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r) = -mg \vec{e}_x + N \vec{e}_r + F \vec{e}_\theta.$$

• On cherche à déterminer N donc on projette sur \vec{e}_r :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r \cdot [m(R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r)] &= [-mg \vec{e}_x + N \vec{e}_r + F \vec{e}_\theta] \cdot \vec{e}_r \\ -mR \dot{\theta}^2 &= -mg \cos \theta + N\end{aligned}$$

$$N = mg \cos \theta - mR \dot{\theta}^2, \text{ soit } N = mg \cos \theta - m \frac{v^2}{R}.$$



On voit que F n'intervient pas dans l'expression de N, du moins directement. En fait F permet d'augmenter v (par l'intermédiaire de $\dot{\theta}$), pour s'en rendre compte, il suffit de projeter sur \vec{e}_θ :

$$mR \ddot{\theta} = +mg \sin \theta + F.$$



Comme la réaction N est en newton, m en kg, g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, v en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et R en m, cette expression est homogène.

La réaction en A correspond à $\theta = 0$, donc :

$$N_A = mg - m \frac{v_A^2}{R} \geq 0.$$

Pour trouver la réaction en B, il suffit de prendre $\theta = \pi$ rad et l'on a :

$$N_B = -mg - m \frac{v_A^2}{R} = -\left(mg + m \frac{v_A^2}{R} \right) \leq 0.$$



N_B est négatif car le sens positif défini par \vec{N} est $N \vec{e}_r$.

Or quand $\theta = \pi$ rad, \vec{e}_r est vertical vers le bas alors que la réaction du sol est bien évidemment dirigée vers le haut, d'où le signe « - ».

On veut v_B telle que $|N_B| = 2|N_A|$. C'est équivalent à :

$$\begin{aligned}mg + m \frac{v_B^2}{R} &= 2 \left(mg - m \frac{v_A^2}{R} \right), \text{ soit } v_B^2 = gR - 2v_A^2 \\ v_B &= \sqrt{gR - 2v_A^2}.\end{aligned}$$



Comme v_B est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, R en m et v_A en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, cette expression est homogène.

$$\text{A.N. } v_B = \sqrt{9,8 \times 100 - 2 \times \left(\frac{50}{3,6} \right)^2} = 24,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 87,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

$|N_B| = 2|N_A|$ n'est réalisable que si v_B existe, c'est-à-dire si $gR - 2v_A^2 \geq 0$ soit $v_A \leq \sqrt{\frac{gR}{2}}$:

$$v_{A\max} = \sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

A.N. $v_{A\max} = \sqrt{\frac{9,8 \times 100}{2}} = 22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 79,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Exercice 7

On va calculer la réaction du tambour sur le vêtement à l'aide du PFD.

• **Système étudié** : le vêtement assimilé à un point matériel M de masse m .

• **Référentiel galiléen** : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Forces appliquées au système** :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$;

- réaction du tambour $\vec{R}_1 = -R_1\vec{e}_r$ (perpendiculaire au tambour car pas de frottement) ;

- réaction de la butée $\vec{R}_2 = R_2\vec{e}_\theta$ (perpendiculaire à la butée car pas de frottement).

• Le PFD donne : $\vec{m}\dot{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$.

Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

$R = \text{cte}$ donc $\dot{R} = 0$.

Vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -R\Omega^2\vec{e}_r$.

$\Omega = \text{cte}$ donc $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$.

Le PFD s'écrit : $m(-R\Omega^2)\vec{e}_r = mg\vec{e}_x - R_1\vec{e}_r + R_2\vec{e}_\theta$.

• On veut déterminer R_1 sachant que R_2 est inconnue : deux bonnes raisons pour projeter sur \vec{e}_r .

$\vec{e}_r \cdot (-mR\Omega^2\vec{e}_r) = \vec{e}_r \cdot (mg\vec{e}_x - R_1\vec{e}_r + R_2\vec{e}_\theta)$, soit $-mR\Omega^2 = mg\cos(\theta) - R_1 + 0$;

$$R_1 = mg\cos\theta + mR\Omega^2$$

On cherche Ω tel que R_1 s'annule quand $\theta = \theta_0 = \frac{3\pi}{4}$; la relation précédente s'écrit :

$0 = mg\cos\theta_0 + mR\Omega^2$ soit :

$$\Omega = \sqrt{\frac{-g}{R}\cos\theta_0}$$

$x \mapsto \sqrt{x}$ n'existe que si $x > 0$. Ici $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$, $\cos\theta_0 < 0$ donc $-\frac{g}{R}\cos\theta_0 > 0$.

Ω est en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (le radian est une unité sans dimension), g est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et R en m , donc l'expression est homogène.

A.N. $\Omega = \sqrt{-\frac{9,8}{0,3}\cos\frac{3\pi}{4}} = 4,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $\Omega = 45,9 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Exercices de niveau 3

Exercice 8

1) Appliquons le PFD à la balancelle.

• **Système étudié** : la balancelle assimilée à un point matériel G de masse m .

• **Référentiel galiléen** : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Forces appliquées** :

– poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$;

– action du câble $\vec{T} = -T \frac{\vec{BG}}{\|\vec{BG}\|}$.



La direction de BG n'est pas repérée par un vecteur unitaire.

$\hat{u} = \frac{\vec{BG}}{\|\vec{BG}\|}$ définit un vecteur unitaire de (BG) qui s'exprime en fonction de \vec{e}_r et \vec{e}_z :

$$\vec{T} = -T(\cos\varphi\vec{e}_z + \sin\varphi\vec{e}_r)$$

• Le PFD s'écrit : $m\vec{a}(G)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{T}$.

Vecteur position : $\vec{OG} = \vec{OB} + \vec{BG} = L\vec{e}_r + R(\cos\varphi\vec{e}_z + \sin\varphi\vec{e}_r)$.

Vecteur vitesse : $\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g} = L\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + R\cos\varphi\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + R\sin\varphi\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g}$.



L, R et φ sont des constantes.

Comme $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$, on a : $\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g} = (L + R\sin\varphi)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.



$L + R\sin\varphi$ représente le rayon de la trajectoire (cercle) décrite par G.

Vecteur accélération : $\vec{a}(G)|_{\mathcal{R}_g} = -(L + R\sin\varphi)\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta$.



$\Omega = \dot{\theta} = \text{cte}$ donc $\ddot{\Omega} = \ddot{\theta} = 0$.

L'équation vectorielle du PFD s'écrit :

$$-m(L + R\sin\varphi)\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta = mge_z - T(\cos\varphi\vec{e}_z + \sin\varphi\vec{e}_r)$$

• On projette cette relation sur \vec{e}_r et \vec{e}_z :

$$-m(L + R\sin\varphi)\Omega^2 = 0 - 0 - T\sin\varphi, \text{ soit } T\sin\varphi = m(L + R\sin\varphi)\Omega^2 \quad (1)$$

$$0 = mg - T\cos\varphi + 0, \text{ soit } T\cos\varphi = mg \quad (2)$$

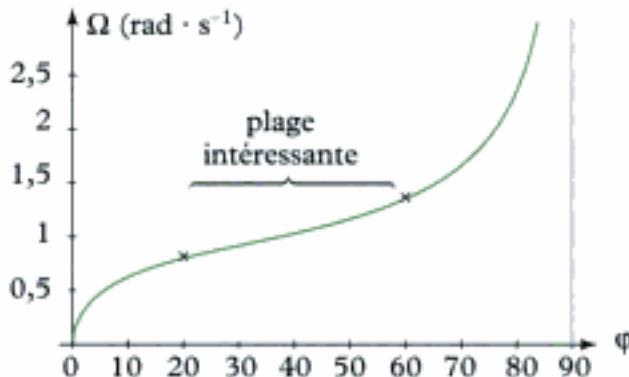
On élimine T (force inconnue) en divisant membre à membre les deux équations (1) et (2) :

$$\frac{T\sin\varphi}{T\cos\varphi} = \frac{m(L + R\sin\varphi)\Omega^2}{mg} \text{ pour } \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{L + R\sin\varphi}{g}\Omega^2.$$

- On aurait pu trouver cette relation plus rapidement en projetant la relation vectorielle de PFD sur une direction perpendiculaire à \vec{T} donc à \vec{v} si celle-ci avait été définie.
- Comme L , R sont en m, g en $m \cdot s^{-2}$ et Ω en $\text{rad} \cdot s^{-1}$ (radian : unité sans dimension), l'expression est homogène.
Vérification : si $\Omega = 0$, $\tan \varphi = 0$, donc $\varphi = 0$: le résultat est correct.

2) La courbe est la suivante.



On voit que sur la plage allant de $\Omega = 0,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ à $\Omega = 1,25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ de Ω , φ varie beaucoup. Cette zone de sensibilité de φ à Ω permet de donner de grandes sensations à l'utilisateur sans pour autant avoir besoin d'une variation de vitesse importante.

Exercice 9

1) On étudie la phase de chute libre.

• **Système étudié** : le sauteur assimilé au point matériel M de masse m .

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Forces appliquées au système** : poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$.

• Le PFD donne : $m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} = mg\vec{e}_z$.

Vecteur position : $\overrightarrow{AM} = z\vec{e}_z$.

Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \dot{z}\vec{e}_z$.

Vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \ddot{z}\vec{e}_z$.

Le PFD s'écrit : $m\ddot{z}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z$.

• En projection sur \vec{e}_z : $\ddot{z} = g$.

• Pour trouver la vitesse de M, il faut intégrer une fois l'équation différentielle par rapport au temps en utilisant une condition initiale :

$$\dot{z} = gt + \text{cte}_1.$$

Or, à $t = 0$ (en A), $\dot{z}(t = 0) = 0 = \text{cte}_1 = 0$, donc on a :

$$\dot{z} = gt.$$

Pour exploiter l'information sur la hauteur de chute $h = 20 \text{ m}$, il faut intégrer une autre fois par rapport au temps :

$$z = g\frac{t^2}{2} + \text{cte}_2.$$

Or, à $t = 0$ (en A), $z(t = 0) = 0$, d'où $\text{cte}_2 = 0$ et il vient :

$$z = \frac{1}{2}gt^2.$$

Le temps de chute libre est donc $t = t_0$ obtenu lorsque $z = h$:

$$h = \frac{1}{2}gt_0^2, \text{ soit } t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

La vitesse en fin de chute libre est donc :

$$\dot{z}(t=t_0) = gt_0 = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}, \text{ d'où } v_B = \sqrt{2gh}.$$



Comme v_B est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et h en m cette expression est homogène :

$$\sqrt{\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}} = \sqrt{\text{m}^2 \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

A.N. $v_B = \sqrt{2 \times 9,8 \times 20} = 19,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 71,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

2) On s'intéresse au mouvement entre B et C ; on applique le PFD.

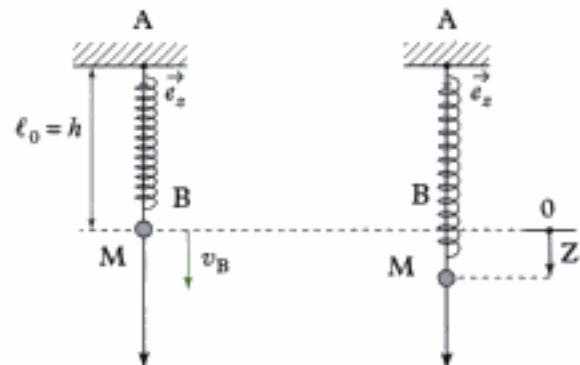
- Système étudié : le point matériel M de masse m .

- Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- Forces appliquées au système :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$;

- force de rappel élastique $\vec{F} = -kZ\vec{e}_z$.



Sur le dessin $Z > 0$, le ressort est tendu, la force de rappel élastique est donc orientée selon $-\vec{e}_z$, d'où le « - » dans l'expression de \vec{F} ; en effet $kZ > 0$ et $-kZ < 0$.

- Le PFD s'écrit : $m\ddot{Z}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F}$, soit $m\ddot{Z}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z - kZ\vec{e}_z$.

En projection sur \vec{e}_z : $m\ddot{Z} = mg - kZ$, soit $m\ddot{Z} + kZ = mg$.

- Solution particulière : $Z_0 = \frac{mg}{k}$.

- Solution de l'équation sans second membre :

$$Z_1 = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Au total : $Z = Z_0 + Z_1$, soit $Z = \frac{mg}{k} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

Donc : $\dot{Z} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$.

à $t = 0$ $Z(t=0) = 0 = \frac{mg}{k} + A$, donc $A = -\frac{mg}{k}$.

$$\dot{Z}(t=0) = v_B = B\omega_0, \text{ donc } B = \frac{v_B}{\omega_0}.$$

$$Z = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} \cos(\omega_0 t) + \frac{v_B}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad \text{soit} \quad Z(t) = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_B}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \varphi).$$



$a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\text{En effet : } a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t) \right].$$

$$\text{On pose } \sin \varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En vérifiant que $|\sin \varphi| \leq 1$, $|\cos \varphi| \leq 1$ et que $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$, on obtient :

$$a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t + \varphi).$$

On cherche la distance $BC = R$ que l'on obtient quand Z est maximum, c'est-à-dire quand :

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = 1.$$

$$\text{Ainsi } Z_{\max} = R = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_B}{\omega_0}\right)^2}, \text{ soit } R = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{v_B^2}{\frac{k}{m}} \times \frac{k^2}{m^2 g^2}}, \text{ donc :}$$

$$R = \frac{mg}{k} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{kv_B^2}{mg^2}} \right].$$

$$\text{A. N. } R = BC = \frac{70 \times 9,8}{120} \times \left[1 + \sqrt{1 + \frac{120 \times 19,8^2}{70 \times 9,8^2}} \right] \approx 21,9 \text{ m.}$$

La hauteur totale du chute est donc : $H = 20 + 21,9 = 41,9 \text{ m.}$

3) • Pendant la chute libre AB, $\ddot{Z}_{\max} = g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

• Entre B et C : en reprenant l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{Z} = g - \frac{k}{m} Z.$$

On obtient en dérivant :

$$\ddot{Z} = -\frac{k}{m} \dot{Z},$$

donc \ddot{Z} est maximum quand $\ddot{Z} = 0$, c'est-à-dire quand $\dot{Z} = 0$ c'est-à-dire quand $Z = Z_{\max} = R$.

L'accélération maximum dans cette 2^e phase est donc :

$$\ddot{Z}_{\max} = g - \frac{k}{m} Z_{\max}, \text{ soit } \ddot{Z}_{\max} = g - \frac{k}{m} R.$$

$$\text{A. N. : } \ddot{Z}_{\max} = 9,8 - \frac{120}{70} \times 21,9 \approx -23,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Cette accélération maximum correspond à 2,35 fois l'accélération de pesanteur. Elle est atteinte en fin de saut (au point C).

Exercice 10

1) On cherche le coefficient de frottement f_0 qui permet au palet de se stabiliser (équilibre) à $\theta = \theta_0$.

On applique le PFS.

• **Système étudié** : le palet matérialisé par un point matériel M de masse m .

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Forces appliquées au système** :

- poids $\vec{P} = mg = mge_x$;

- réaction du tambour $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = -N \vec{e}_r + T \vec{e}_\theta$

 \vec{N} est la réaction normale (qui existe avec ou sans frottements) ; \vec{T} est la réaction tangentielle qui existe car il y a frottement.

- le PFS s'écrit :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{R}, \text{ soit } \vec{0} = mg\vec{e}_x + \vec{N} + \vec{T} \text{ ou encore } \vec{0} = mg\vec{e}_x - N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta.$$

- On projette sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ pour déterminer N et T :

En projection sur \vec{e}_r :

$$0 = mg\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r - N\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r + T\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = mg\cos\theta - N + 0, \text{ soit } N = mg\cos\theta.$$

En projection sur \vec{e}_θ :

$$0 = mg\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta - N\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta + T\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = mg\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - 0 + T, \text{ soit } T = mg\sin\theta.$$

- Comme le palet est stabilisé il glisse sur le tambour, donc :

$$\|\vec{T}\| = f_0\|\vec{N}\|, \text{ soit } \|T\vec{e}_\theta\| = f_0\|-N\vec{e}_r\|, \text{ et donc } |T| = f_0|N|.$$

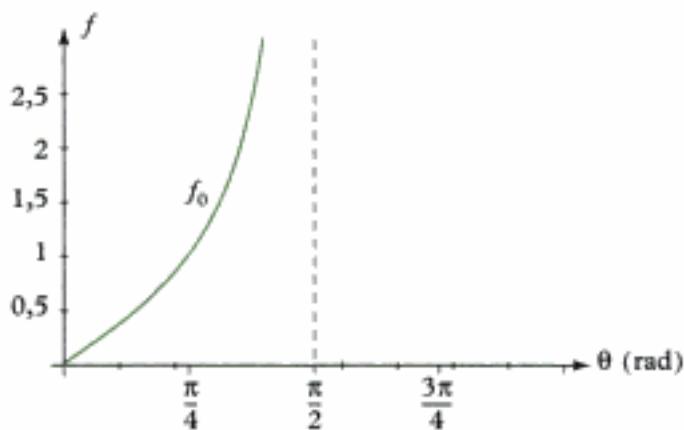
$$T = mg\sin\theta_0 \geq 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

$$N = mg\cos\theta_0 > 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Donc on a : $mg\sin\theta_0 = f_0 mg\cos\theta_0$ et quand $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$:

$$f_0 = \tan\theta_0.$$

Si $\theta_0 \geq \frac{\pi}{2}$, $N \leq 0$! Il n'y a plus de contact, donc plus de stabilisation possible.



- 2) On étudie cette fois-ci le palet en mouvement avant que le glissement commence : il possède donc une vitesse constante $R\Omega$. Appliquons le PFD.

 Voir méthode.

- Système étudié : le palet ;
- Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_g ;
- Forces appliquées au système : \vec{P} et $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$;

• Le PFD donne : $m \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_r} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r$.

Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_r} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = R \Omega \vec{e}_r$.

Vecteur accélération : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_r} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -R \Omega^2 \vec{e}_r$.

$\Omega = \text{cte}$ donc $\dot{\Omega} = \ddot{\theta} = 0$.

Le PFD s'écrit donc :

$$-mR \Omega^2 \vec{e}_r = mg \vec{e}_x - N \vec{e}_r + T \vec{e}_\theta.$$

• On projette respectivement sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ pour trouver N et T :

$$-mR \Omega^2 = mg \cos \theta - N, \text{ soit } N = mg \cos \theta + mR \Omega^2$$

$$0 = -mg \sin \theta + 0 + T, \text{ soit } T = mg \sin \theta.$$

Quand le palet commence à glisser :

$$\|\vec{T}\| = f_1 \|\vec{N}\|$$

$$\|\vec{T} \vec{e}_\theta\| = f_1 \|\vec{N} \vec{e}_r\|$$

$$|T| = f_1 |N|$$

$$T = mg \sin \theta_1 \geq 0 \text{ pour } 0 \leq \theta_1 < \pi \text{ rad} ;$$

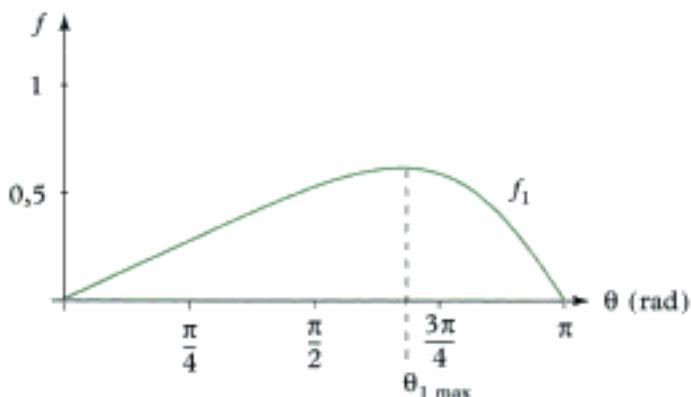
$$N = mg \cos \theta_1 + mR \Omega^2 > 0 \text{ pour } 0 \leq \theta_1 < \pi \text{ rad}.$$

Pour $\theta_1 = \pi$ rad, $N = m \left(9,8 \cos(\pi) + 0,35 \times \left(\frac{70 \times 2\pi}{60} \right)^2 \right) = m \times 9,0 > 0$.

$1 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} = 1 \times \frac{60}{2\pi} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Donc $mg \sin \theta_1 = f_1(mg \cos \theta_1 + mR \Omega^2)$ et par suite :

$$f_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1 + \frac{R \Omega^2}{g}}.$$



3) $f = f_{\min}$ correspond au coefficient de frottement nécessaire pour qu'il n'y ait jamais glissement pour θ_1 compris entre 0 et 180° . Il s'agit donc du maximum de la courbe tracée à la question 2).

$$\frac{df_1}{d\theta_1} = \frac{\left(\cos\theta_1 + R\frac{\Omega^2}{g}\right)\cos\theta_1 - \sin\theta_1(-\sin\theta_1)}{\left(\cos\theta_1 + R\frac{\Omega^2}{g}\right)^2} = \frac{1 + R\frac{\Omega^2}{g}\cos\theta_1}{\left(\cos\theta_1 + R\frac{\Omega^2}{g}\right)^2}.$$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

$$\frac{df_1}{d\theta_1} = 0 \text{ conduit à : } \cos(\theta_{1\max}) = -\frac{g}{R\Omega^2}.$$

$$f_{\min} = f_1(\theta_{\max}) = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{g}{R\Omega^2}\right)^2}}{-\frac{g}{R\Omega^2} + \frac{R\Omega^2}{g}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R\Omega^2}{g}\right)^2 - 1}}.$$

$0 \leq \theta < \pi \text{ rad}, \text{ donc } \sin\theta > 0 \text{ et } \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}.$

A.N. $f_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{0,35 \times \left(\frac{70}{60} \times 2\pi\right)^2}{9,8}\right)^2 - 1}} = 0,61.$

On aurait pu vérifier, avec les valeurs de l'énoncé, que $N > 0$ pour $0 \leq \theta \leq \pi$ si il n'y a pas de glissement (la vitesse du palet est égale à $R\Omega$).

Puissance et énergie en référentiel galiléen

Introduction

L'énergie est une grandeur fondamentale de la physique. Aboutissant à une équation scalaire, elle permet de résoudre certains problèmes de la mécanique du point, que l'on peut trouver à l'aide de l'équation vectorielle obtenue à partir de la deuxième loi de Newton. Elle permet aussi de mettre en relation plusieurs domaines de la physique (notamment la thermodynamique), puisque l'énergie perdue par un système mécanique doit se retrouver sous une forme différente.

Plan du chapitre 3

A. Puissance et travail d'une force – Énergie cinétique d'un point matériel	84
1. Puissance d'une force dans un référentiel	84
2. Travail d'une force dans un référentiel	85
3. Énergie cinétique d'un point matériel dans un référentiel	87
B. Théorèmes énergétiques	88
1. Théorème de la puissance cinétique (TPC)	88
2. Théorème de l'énergie cinétique (TEC)	88
C. Une application des théorèmes énergétiques	89
1. Présentation du problème	89
2. Équation du mouvement	89
3. Vitesse au passage de la verticale	90
D. Mouvement à un degré de liberté	90
1. Énergie potentielle, force conservative	91
2. Exemples de forces conservatives	91
3. Forces non conservatives	92
4. Énergie mécanique d'un point matériel et théorème de l'énergie mécanique (TEM)	93
5. Utilisations des courbes d'énergie potentielle	94
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	100
Énoncés des exercices	108
Indications	112
Solution des exercices	113

A. Puissance et travail d'une force – Énergie cinétique d'un point matériel

1. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il n'est pas nécessaire de conserver l'écriture $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ (ou $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}}$) tout au long des calculs : on écrit alors simplement \vec{v} (ou $\mathcal{P}(\vec{F})$).

2. $1 \text{ W} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$

Définition 1

La puissance $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}}$ d'une force \vec{F} , appliquée en un point M possédant une vitesse $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel \mathcal{R} , est¹ :

$$\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$$

$\mathcal{P}(\vec{F})$ puissance en watts² (W)

\vec{F} force (N)

$\vec{v}(M)$ vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

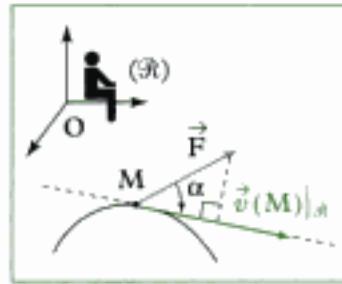


Fig. 1 - Puissance d'une force.

Propriétés

- Seule la composante de \vec{F} parallèle à la vitesse (projection de \vec{F} sur \vec{v}) intervient dans la puissance $\mathcal{P}(\vec{F})$ (fig. 1).
- En notant α l'angle (\vec{F}, \vec{v}) , on a l'égalité :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

$\mathcal{P}(\vec{F})$ puissance (W)

$\|\vec{F}\|$ norme de \vec{F} (N)

$\|\vec{v}\|$ norme de \vec{v} ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

α angle orienté



Si $\vec{F} \perp \vec{v}$, alors $\mathcal{P}(\vec{F}) = 0$; c'est le cas pour la puissance de la réaction du support en l'absence de frottement et pour la puissance du poids (\vec{g} étant constant) lors d'un déplacement horizontal.

- Si $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} > 0$, on dit que \vec{F} est une force motrice ;
 - si $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} < 0$, on dit que \vec{F} est une force résistante ;
 - si $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = 0$, on dit que \vec{F} ne travaille pas.
- Si plusieurs forces \vec{F}_i de résultante $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ s'appliquent au point M, alors :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v} = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \vec{v}) = \sum_i \mathcal{P}_i.$$

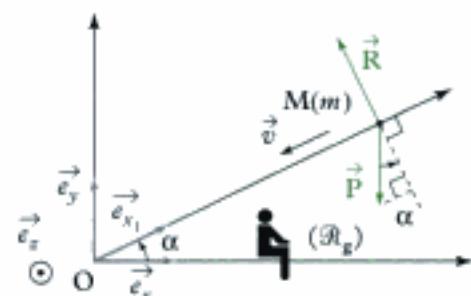
- $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}}$ dépend du référentiel car $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ en dépend (mais \vec{F} n'en dépend pas).

Application 1 Déplacement d'un point matériel sur un plan incliné

Un point matériel $M(m)$ se déplace sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On suppose que le champ de pesanteur \vec{g} est uniforme ($\vec{g} = \text{cte}$ en tout point). On se place dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

La vitesse de M dans \mathcal{R}_g est $\vec{v} = -v\vec{e}_{x_1}$ ($v > 0$).

Déterminer les puissances des forces appliquées au point M .



Solution

$$\mathcal{P}(\vec{R})|_{\mathcal{R}_g} = \vec{R} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \|\vec{R}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{R}, \vec{v}) = \|\vec{R}\| \cdot v \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ W}$$

$$\mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \|m\vec{g}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = mgv \sin(\alpha) > 0 \text{ W}.$$

On constate que $\mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_g}$ est positive, ce qui est normal car \vec{P} entraîne M dans le sens du mouvement : \vec{P} est une force motrice.

A.2. Travail d'une force dans un référentiel

On considère que le point matériel $M(m)$ décrit une trajectoire \mathcal{C} dans le référentiel \mathcal{R} , qu'il passe en A à l'instant t_1 et en B à l'instant t_2 . Il est soumis à plusieurs forces dont \vec{F} (fig. 2).

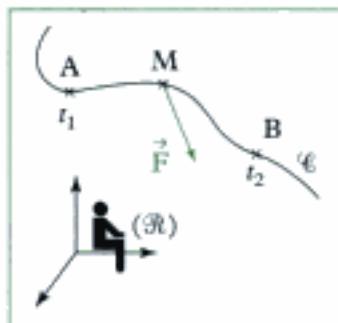


Fig. 2 - Travail d'une force.

1. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra simplifier l'écriture du travail : $\mathcal{W}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{W}(\vec{F})$.

2. $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

Définition 2

Dans le référentiel \mathcal{R} , le travail de la force \vec{F} appliquée au point M le long d'un trajet allant du point A au point B entre les instants t_1 et t_2 , en suivant la courbe \mathcal{C} est :

$$\mathcal{W}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} dt = \int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

$\mathcal{W}(\vec{F})$ travail en joule (J)

$\mathcal{P}(\vec{F})$ puissance (W)

\vec{F} force (N)

$d\vec{OM}$ déplacement élémentaire (m)

$$\text{En effet : } \mathcal{W}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} dt.$$

$$\text{Or } \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ donc } \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} dt = d\vec{OM}. \text{ On a alors :}$$

$$\mathcal{W}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = \int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}.$$

On lit : « intégrale ou somme de A à B en suivant \mathcal{C} des $\vec{F} \cdot d\vec{OM}$ ».

Remarque : Le vecteur $d\vec{OM}$ correspond au vecteur déplacement élémentaire du point M entre les instants t et $t+dt$, si on note $\vec{OM} = \vec{OM}(t)$ et $\vec{OM}' = \vec{OM}(t+dt)$ les deux vecteurs position aux deux instants t et $t+dt$, alors on peut écrire : $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{\vec{OM}' - \vec{OM}}{dt} = \frac{\vec{MM}'}{dt}$,

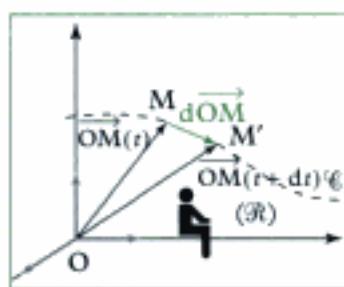


Fig. 3 - Déplacement élémentaire $d\vec{OM}$.

soit : $d\vec{\overrightarrow{OM}} = \vec{\overrightarrow{OM'}} - \vec{\overrightarrow{OM}} = \vec{\overrightarrow{MM'}}$. On le note parfois $d\vec{\ell}$.

Ce vecteur $d\vec{\overrightarrow{OM}}$ est colinéaire au vecteur vitesse en chaque point de la trajectoire du point M (donc tangent à la trajectoire).

• Propriétés

- L'intégrale $\int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot d\vec{\overrightarrow{OM}}$ correspond à la somme des travaux élémentaires de la force \vec{F} pour chaque déplacement élémentaire permettant d'aller de A vers B en suivant la courbe \mathcal{C} ; le travail élémentaire est noté : $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\overrightarrow{OM}}$.
- Le travail dépend *a priori* du chemin suivi (courbe \mathcal{C}) pour aller de A vers B.
- Si la force \vec{F} est constamment perpendiculaire à la trajectoire (au vecteur $d\vec{\overrightarrow{OM}}$, ou au vecteur vitesse), alors $\vec{F} \cdot d\vec{\overrightarrow{OM}} = 0$ en chaque point et donc :

$$W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = \int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot d\vec{\overrightarrow{OM}} = 0$$

1. C'est le cas de la réaction du support lors d'un mouvement sans frottement.

(exemples identiques¹ du cas de la puissance $P(\vec{F}) = 0$).

- Si $W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} > 0$, on dit que la force \vec{F} est **motrice**; si $W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} < 0$, on dit que la force \vec{F} est **résistante**; si $W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = 0$, on dit que la force \vec{F} ne travaille pas.

- Si la force \vec{F} est constante, alors on peut écrire :

$$W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = \int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot d\vec{\overrightarrow{OM}} = \vec{F} \cdot \int_{A(\mathcal{C})}^B d\vec{\overrightarrow{OM}} = \vec{F} \cdot (\vec{\overrightarrow{OB}} - \vec{\overrightarrow{OA}}) = \vec{F} \cdot \vec{\overrightarrow{AB}}.$$

On constate que ce travail ne dépend pas du chemin suivi pour aller du point initial A au point final B.

- On a comme pour la puissance : $W\left(\sum_i \vec{F}_i\right) = \sum_i W(\vec{F}_i)$.
- Le travail dépend du référentiel.

Application 2 Travail du poids

Considérons un point matériel M(m) se déplaçant sur une courbe \mathcal{C} allant de A vers B et soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (\vec{g} champ de pesanteur supposé uniforme). M est en mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R} dont l'axe ($O ; \vec{e}_z$) est la verticale ascendante.

Déterminer l'expression du travail du poids \vec{P} entre les points A($x_A ; y_A ; z_A$) et B($x_B ; y_B ; z_B$).

Solution

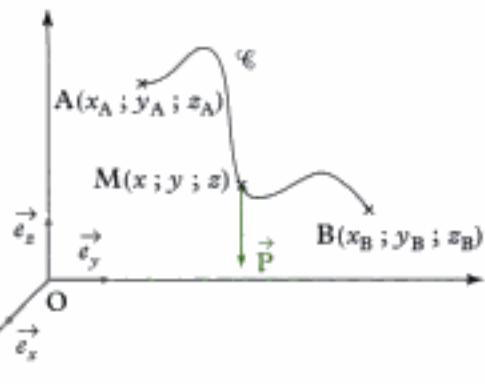
\vec{g} étant supposé uniforme, on se trouve dans le cas d'une force constante ($\vec{P} = m\vec{g}$), donc $W(\vec{P})|_{\mathcal{R}} = \vec{P} \cdot \vec{\overrightarrow{AB}}$.

$$W(\vec{P})|_{\mathcal{R}} = -m\vec{g} \cdot ((x_B - x_A)\vec{e}_x + (y_B - y_A)\vec{e}_y + (z_B - z_A)\vec{e}_z) = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B)$$

si $z_A > z_B$ (cas de la figure), alors $W(\vec{P})|_{\mathcal{R}} > 0$.



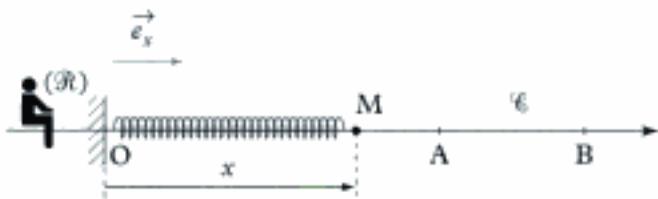
Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi dans le référentiel \mathcal{R} (verticale ascendante). On a considéré ici que le champ de pesanteur était uniforme !



Application 3 Travail de la force de rappel élastique d'un ressort

Un point matériel $M(m)$ peut se déplacer sans frottement le long d'un axe (O, \vec{e}_x) horizontal lié au référentiel \mathcal{R} .

Il est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 , dont l'autre extrémité est fixe (point O).



Déterminer l'expression du travail de la force de rappel élastique \vec{F} exercée par le ressort lors d'un déplacement allant de $A(x_A)$ vers $B(x_B)$ le long de \mathcal{C} .

Solution

La force de rappel élastique exercée par le ressort est :

$$\vec{F} = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x.$$

Le travail de cette force pour le trajet allant de A vers B s'écrit :

$$W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = \int_{A(\mathcal{C})}^{B(\mathcal{C})} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}.$$

Sachant que $d\overrightarrow{OM} = dx \cdot \vec{e}_x$, on a :

$$\begin{aligned} W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} &= \int_{A(\mathcal{C})}^{B(\mathcal{C})} -k(x - \ell_0)\vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = -k \int_{A(\mathcal{C})}^{B(\mathcal{C})} (x - \ell_0)dx \\ &= -k \left[\frac{(x - \ell_0)^2}{2} \right]_{x_A}^{x_B} = -k \left[\frac{(x_B - \ell_0)^2}{2} - \frac{(x_A - \ell_0)^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

On remarque que le travail ne dépend que des positions initiale $A(x_A)$ et finale $B(x_B)$.

A.3. Énergie cinétique d'un point matériel dans un référentiel

Définition 3

L'énergie cinétique du point matériel $M(m)$ en mouvement à la vitesse $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel \mathcal{R} est :

$$\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v^2(M)|_{\mathcal{R}}$$

\mathcal{E}_c énergie cinétique¹ (J)
 m masse (kg)
 $\vec{v}(M)$ vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

1. Pour calculer une énergie cinétique, on utilise la relation :
 $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.



\mathcal{E}_c étant une fonction du point M et/ou du temps t, on notera indifféremment : $\mathcal{E}_c(t)|_{\mathcal{R}}$ ou $\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}}$.

B. Théorèmes énergétiques

B.1. Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Théorème 1

TPC

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des puissances des forces appliquées au point matériel $M(m)$ se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}$ est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce point M^1 :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g}.$$

1. Ce théorème permet notamment d'écrire des équations de mouvement ou de calculer des puissances.

Démonstration

Le PFD appliqué au point M dans \mathcal{R}_g s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = m\left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g}.$$

En multipliant scalairement cette relation par $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}$, on obtient :

$$\vec{F} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = m\left(\left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}\right) \text{ soit } \mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2(M)\right)_{/\mathcal{R}_g}$$

d'où le résultat :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g}.$$

Cas particuliers

- si $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g} > 0$, alors $\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g}$ (et donc $\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}\|$) augmente au cours du temps ;
- si $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g} < 0$, alors $\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g}$ (et donc $\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}\|$) diminue au cours du temps ;
- si $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g} = 0$ alors $\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g}$ (et donc $\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}\|$) reste constant au cours du temps.

B.2. Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Théorème 2

TEC

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation d'énergie cinétique d'un point matériel $M(m)$ entre deux instants t_1 et t_2 (ou deux positions M_1 et M_2) est égale à la somme des travaux des forces appliquées à M entre ces deux instants (ou ces deux positions)².

3. $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

$$\Delta\mathcal{E}_c|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(t_2)|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(t_1)|_{\mathcal{R}_g} = \mathbf{W}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g}$$

\mathcal{E}_c énergie cinétique en joule³ (J)
 $\mathbf{W}(\vec{F})$ travail (J)

Démonstration

On intègre le TPC entre t_1 et t_2 après avoir multiplié l'expression par dt :

$$\int_{t_1}^{t_2} d\mathcal{E}_c(M) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{P}}(\vec{F}) \Big|_{\mathcal{R}_g} dt,$$

1. Un point matériel possède de l'énergie cinétique s'il peut fournir du travail par modification de sa vitesse.

$$\text{soit}^1 \mathcal{E}_c(t_2) \Big|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(t_1) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{P}}(\vec{F}) \Big|_{\mathcal{R}_g} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}(M) \Big|_{\mathcal{R}_g} dt.$$

Or $\vec{v}(M) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{R}_g}$, donc :

$$\mathcal{E}_c(t_2) \Big|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(t_1) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = W(\vec{F}) \Big|_{\mathcal{R}_g}.$$

C. Une application des théorèmes énergétiques

C.1. Présentation du problème

On considère un pendule simple composé d'un fil inextensible sans masse de longueur $\ell = OM$, suspendu en O, point fixe du référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen et d'une masse m assimilée à un point matériel $M(m)$. On repère la position du point M à l'aide des coordonnées polaires (d'axe $(O; \vec{e}_z)$) (fig. 4).

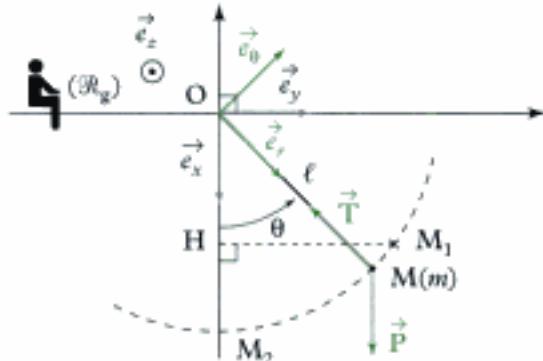


Fig. 4 - Le pendule simple

On écarte la masse m d'un angle θ_0 et on la lâche, sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. On cherche à déterminer l'équation différentielle du mouvement, ainsi que la vitesse au passage à la verticale.

On néglige tout frottement ; \vec{g} est supposé constant.

C.2. Équation du mouvement

Afin de déterminer l'équation différentielle du mouvement, nous allons appliquer le TPC, dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , au point M(m).

1) Bilan des forces appliquées au point M :

- poids $\vec{P} = mg\vec{e}_x$;
- tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$.

2) Puissances des forces appliquées au point M :

$$\bullet \vec{\mathcal{P}}(\vec{P}) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} \cdot \vec{v}(M) \Big|_{\mathcal{R}_g}$$

$$\text{or } \vec{v}(M) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta \text{ et ainsi } \vec{\mathcal{P}}(\vec{P}) \Big|_{\mathcal{R}_g} = mg\vec{e}_x \cdot \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\mathcal{P}(\vec{P})\Big|_{\mathcal{R}_t} = mg\ell \dot{\theta} \cos(\vec{e}_x, \vec{e}_\theta) = mg\ell \dot{\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -mg\ell \dot{\theta} \sin\theta.$$

- $\mathcal{P}(\vec{T})\Big|_{\mathcal{R}_t} = \vec{T} \cdot \vec{v}(M)\Big|_{\mathcal{R}_t} = 0 \text{ car } \vec{T} \perp \vec{v}(M)\Big|_{\mathcal{R}_t}.$

3) Énergie cinétique du point M(m) :

$$\mathcal{E}_c(M)\Big|_{\mathcal{R}_t} = \frac{1}{2}mv^2(M)\Big|_{\mathcal{R}_t} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Appliquons alors le TPC :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(M)}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_t} = \mathcal{P}(\vec{F})\Big|_{\mathcal{R}_t} \text{ soit } \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2\right) = -mg\ell \dot{\theta} \sin\theta,$$

ce qui donne : $m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mg\ell \dot{\theta} \sin\theta$, et en simplifiant par $\dot{\theta}$ ($\dot{\theta} = 0$ étant la solution pour laquelle le pendule est immobile vertical vers le bas et qui ne nous intéresse pas) :

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \sin\theta = 0 \text{ soit } \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0.$$

C.3. Vitesse au passage de la verticale

1. On aurait pu utiliser le TPC !

Afin de déterminer la vitesse du point M au passage à la verticale, on va appliquer le TEC¹ entre l'instant initial $t = t_1 = 0$ (position M_1 , $\theta = \theta_0$) et l'instant final $t = t_2$ (position M_2 , $\theta = 0$ rad).

Travail des forces appliquées en M pour aller de M_1 (instant t_1) vers M_2 (instant t_2).

- $\mathbf{W}(\vec{P})\Big|_{\mathcal{R}_t} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \text{ (car } \vec{P} = \text{cte})$
 $= mge_x \cdot (\overrightarrow{M_1 H} + \overrightarrow{H M_2}) = mge_x \cdot (-\ell \sin\theta_0 \vec{e}_y + (\ell - \ell \cos\theta_0) \vec{e}_x)$
 $= mg\ell(1 - \cos\theta_0)$

- $\mathbf{W}(\vec{T})\Big|_{\mathcal{R}_t} = 0 \text{ car } \vec{T} \perp d\overrightarrow{OM} \text{ à chaque instant.}$

Énergies cinétiques initiale et finale du point M(m)

$$\mathcal{E}_c(t_1)\Big|_{\mathcal{R}_t} = \frac{1}{2}mv^2(M)(t_1)\Big|_{\mathcal{R}_t} = 0 \text{ car } v(M_1)\Big|_{\mathcal{R}_t} = 0$$

$$\mathcal{E}_c(t_2)\Big|_{\mathcal{R}_t} = \frac{1}{2}mv^2(M)(t_2)\Big|_{\mathcal{R}_t} = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Appliquons alors le TEC :

$$\mathcal{E}_c(t_2)\Big|_{\mathcal{R}_t} - \mathcal{E}_c(t_1)\Big|_{\mathcal{R}_t} = \mathbf{W}(\vec{P})\Big|_{\mathcal{R}_t} + \mathbf{W}(\vec{T})\Big|_{\mathcal{R}_t} \text{ soit } \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = mg\ell(1 - \cos\theta_0).$$

On obtient ainsi directement la vitesse au passage à la verticale :

$$v_2 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}.$$

2. L'unité de $\sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}$ est $(m \cdot s^{-2} \cdot m)^{1/2} = m \cdot s^{-1}$, ce qui est homogène à la vitesse v_2 .

D. Mouvement à un degré de liberté

Dans tout ce paragraphe, seuls les mouvements de points matériels déterminés à l'aide d'un **unique** paramètre (degré de liberté) seront étudiés, ce paramètre peut être une position x pour un point matériel en mouvement sur un axe (Ox), un angle θ repérant la position angulaire d'un point M se déplaçant sur une trajectoire connue, une distance r à un point O, etc.

D.1. Énergie potentielle, force conservative

Définition 4

Une force appliquée en un point M est保守的 si son travail, dans un référentiel \mathcal{R} , entre deux positions quelconques M_1 et M_2 ne dépend que de ces deux positions et pas du chemin suivi pour aller de M_1 vers M_2 .

En particulier, dans le cas d'un trajet fermé allant de M_1 vers M_1 , ce travail est nul.

Définition 5

Si la force \vec{F} est保守的, alors il existe une fonction $\mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}$ du point M appelée énergie potentielle dont la variation est égale à l'opposé du travail de la force \vec{F} entre M_1 et M_2 :

$$\Delta \mathcal{E}_p|_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}_p(M_2)|_{\mathcal{R}} - \mathcal{E}_p(M_1)|_{\mathcal{R}} = -W(\vec{F})|_{\mathcal{R}}$$

$\mathcal{E}_p(M)$ énergie potentielle en joule (J)
 $W(\vec{F})$ travail en joule (J)

1. $\mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}$ est une fonction indépendante du temps.

2. On dit que \vec{F} dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p .

3. Un système possède de l'énergie potentielle s'il peut fournir du travail par variation de sa position.

4. Dans le cas où le paramètre est un angle θ , on a :

$$F = -\frac{1}{r} \frac{d\mathcal{E}_p|_{\mathcal{R}}}{d\theta}.$$

$\mathcal{E}_p(M)$ n'est fonction que des coordonnées de position du point M, c'est-à-dire ne dépend que de la position de M¹.

Comme le mouvement du point M est repéré uniquement à l'aide du paramètre x (paramètre de position en mètre), on peut écrire 2, 3, 4 :

$$\mathbf{F}(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)|_{\mathcal{R}}}{dx}$$

En effet $\int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot dx = \int_{M_1}^{M_2} -d\mathcal{E}_p|_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}_p(M_1)|_{\mathcal{R}} - \mathcal{E}_p(M_2)|_{\mathcal{R}}$

ainsi on retrouve : $\mathcal{E}_p(M_2)|_{\mathcal{R}} - \mathcal{E}_p(M_1)|_{\mathcal{R}} = -\int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -W(\vec{F})|_{\mathcal{R}}$.

D.2. Exemples de forces conservatives

D.2.1 - Poids dans un champ de pesanteur uniforme

Nous avons montré que le travail du poids entre deux positions ne dépendait pas du chemin suivi, mais seulement des positions initiales et finales. Le poids (fig. 5) est donc une force保守的 et il dérive d'une énergie potentielle, dite énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p_p}(M)$ définie par $-mg = -\frac{d\mathcal{E}_{p_p}(M)}{dz}$ soit :

\mathcal{E}_{p_p} énergie potentielle de pesanteur (J)

m masse (kg)

g intensité de pesanteur ($m \cdot s^{-2}$)

z altitude (m)

$$\mathcal{E}_{p_p} = mgz + \text{cte}$$

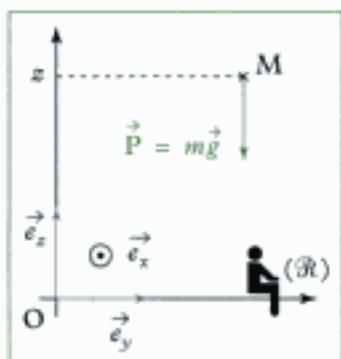


Fig. 5 - Énergie potentielle de pesanteur.

Le poids a comme composante $-mg e_z$ dans le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel \mathcal{R} .



Si l'axe vertical était dirigé vers le bas, alors l'énergie potentielle s'écrirait :

$$\mathcal{E}_{p_v} = -mgz + \text{cte.}$$

1. Pour trouver le signe $\pm mgz$, on peut vérifier que \mathcal{E}_{p_v} doit être positive au-dessus (au sens habituel du terme) de la référence d'énergie potentielle choisie, et négative au-dessous.

Il apparaît une constante qui est définie arbitrairement en choisissant une position d'origine des énergies potentielles, c'est-à-dire un point M_0 pour lequel $\mathcal{E}_{p_v}(M_0) = 0$; par exemple, si on choisit cette référence à l'altitude $z = 0$, alors $\mathcal{E}_{p_v} = mgz$. Le choix de cette constante n'a aucune importance car c'est la différence d'énergie potentielle qui est utile (la constante disparaît alors)¹.

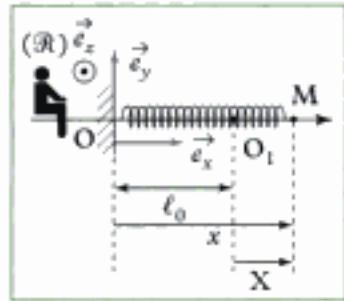


Fig. 6 - Énergie potentielle élastique.

D.2.2 - Force de rappel élastique d'un ressort

Nous avons montré que le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , ne dépendait pas du chemin suivi, mais seulement des positions initiales et finales; c'est donc une force conservative qui dérive donc d'une énergie potentielle, dite énergie potentielle élastique \mathcal{E}_{p_e} définie par (fig. 6) :

$$-\frac{d\mathcal{E}_{p_e}}{dx} = -k(x - \ell_0) \text{ soit } \mathcal{E}_{p_e} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{cte.}$$

La force de rappel élastique a comme composante $-k(x - \ell_0)\vec{e}_x$ dans le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel \mathcal{R} .

En posant $\mathcal{E}_{p_e}(x = \ell_0) = 0$, on a : $\mathcal{E}_{p_e} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$.

Si on appelle $X = x - \ell_0$ (l'origine de l'axe est choisie en O_1 , extrémité du ressort à vide), on a :

$\mathcal{E}_{p_e} = \frac{1}{2}kX^2$	\mathcal{E}_{p_e} énergie potentielle élastique (J) X allongement du ressort (m) k raideur du ressort ($N \cdot m^{-1}$)
---------------------------------------	--

D.3. Forces non conservatives

Toutes les forces ne dérivent pas d'une énergie potentielle. C'est le cas des forces de frottements qui sont des forces **dissipatives**.

• Interprétation de l'énergie potentielle

Considérons un point matériel M soumis uniquement à des forces dérivant d'une énergie potentielle. La résultante \vec{F} de ces forces dérive donc d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p .

Cette énergie potentielle \mathcal{E}_p représente le travail $W(\text{op})|_{\mathcal{R}_t}$ que doit fournir un opérateur extérieur pour amener le point matériel depuis la position de référence d'énergie potentielle ($\mathcal{E}_p = 0$) jusqu'au point considéré (on considère que dans le référentiel d'étude (supposé galiléen), le point matériel, **immobile** au départ est encore immobile après son déplacement).

En effet, on peut appliquer le TEC entre les deux positions initiales (instant t_i) et finales (instant t_f) au point matériel M dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_f)|_{\mathcal{R}_t} - \mathcal{E}_c(t_i)|_{\mathcal{R}_t} = 0 = W(\vec{F})|_{\mathcal{R}_t} + W(\text{op})|_{\mathcal{R}_t}.$$

Ainsi : $W(\text{op})|_{\mathcal{R}_t} = -W(\vec{F})|_{\mathcal{R}_t} = \Delta\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p_f} - \mathcal{E}_{p_i}$.

Or $\mathcal{E}_{p_i} = 0$, donc :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p_f} = W(\text{op})|_{\mathcal{R}_t}.$$

D.4. Énergie mécanique d'un point matériel et théorème de l'énergie mécanique (TEM)

Définition 6

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(M)|_{\mathcal{R}}$ d'un point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R} est, à chaque instant, la somme de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)|_{\mathcal{R}}$ du point M et de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}$ des forces conservatives appliquées au point M :

$$\mathcal{E}_m(M, t)|_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c(t)|_{\mathcal{R}} + \mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}.$$

L'énergie mécanique dépend, tout comme $\mathcal{E}_c(t)|_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}$ du référentiel d'étude. $\Delta \mathcal{E}_m|_{\mathcal{R}_t} = \mathcal{E}_m(M_2, t_2)|_{\mathcal{R}_t} - \mathcal{E}_m(M_1, t_1)|_{\mathcal{R}_t}$

Théorème 3

TEM

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation d'énergie mécanique d'un point matériel M(m) entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au point M.

$$\Delta \mathcal{E}_m|_{\mathcal{R}_t} = \mathcal{E}_m(M_2, t_2)|_{\mathcal{R}_t} - \mathcal{E}_m(M_1, t_1)|_{\mathcal{R}_t}$$

$$= W(\vec{F}_{nc})|_{\mathcal{R}_t}$$

$\mathcal{E}_m(M_2, t_2)$ énergie mécanique finale (J)
 $\mathcal{E}_m(M_1, t_1)$ énergie mécanique initiale (J)
 $W(\vec{F}_{nc})$ travail des forces non conservatives (J)

On peut aussi énoncer le théorème de la puissance mécanique (TPM) :

$$\frac{d\mathcal{E}_m(M)|_{\mathcal{R}_t}}{dt} = P(\vec{F}_{nc})|_{\mathcal{R}_t}$$

Démonstration :

1. Le TEM n'est qu'une réécriture du TEC.

En appliquant le TEC¹, on a :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_2)|_{\mathcal{R}_t} - \mathcal{E}_c(t_1)|_{\mathcal{R}_t} = W(\vec{F}_{cons})|_{\mathcal{R}_t} + W(\vec{F}_{nc})|_{\mathcal{R}_t}.$$

$$\text{Or } W(\vec{F}_{cons})|_{\mathcal{R}_t} = \mathcal{E}_p(M_1)|_{\mathcal{R}_t} - \mathcal{E}_p(M_2)|_{\mathcal{R}_t};$$

d'où le résultat :

$$(\mathcal{E}_c(t_2)|_{\mathcal{R}_t} + \mathcal{E}_p(M_2)|_{\mathcal{R}_t}) - (\mathcal{E}_c(t_1)|_{\mathcal{R}_t} + \mathcal{E}_p(M_1)|_{\mathcal{R}_t}) = W(\vec{F}_{nc})|_{\mathcal{R}_t}.$$

• Si le point matériel M(m) n'est soumis qu'à des forces conservatives², alors :

$$\mathcal{E}_m(M, t)|_{\mathcal{R}_t} = \text{cte}^3,$$

2. ... ou à des forces non conservatives qui ne travaillent pas.

3. L'équation $\mathcal{E}_m|_{\mathcal{R}_t} = \text{cte}$ est une intégrale première du mouvement : elle relie x et \dot{x} .

et l'énergie mécanique du point matériel M(m) se conserve au cours du temps. Les forces conservatives conservent l'énergie sous forme mécanique. On dit que le système étudié (le point matériel) est un **système conservatif**.

- Si le point matériel $M(m)$ est soumis à des forces non conservatives **dissipatives** alors l'énergie mécanique ne se conserve pas : elle diminue au cours du temps. L'énergie ne reste pas sous forme mécanique ; elle est perdue et se retrouve par exemple sous forme d'énergie thermique (échauffement).

Il existe des forces non conservatives non dissipatives dont le travail est positif : dans ce cas l'énergie mécanique augmente au cours du temps. Ce travail peut être utilisé pour entretenir les oscillations d'un système mécanique en compensant les frottements.

D.5. Utilisations des courbes d'énergie potentielle d'un système conservatif à un degré de liberté

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au mouvement d'un point matériel $M(m)$ décrit par un paramètre x unique dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g ; il est soumis à un ensemble de forces conservatives dont la résultante $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$ (on a la relation : $F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx}$).

Le système étudié étant conservatif (le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives), son énergie mécanique \mathcal{E}_m se conserve au cours du temps. Nous ferons l'étude à partir du tracé de la courbe : $x \rightarrow \mathcal{E}_p(x)$.

D.5.1 - Détermination des positions d'équilibre ; étude de leur stabilité

Définition 7

Le point matériel $M(m)$ est à l'équilibre en x_0 si déposé en ce point sans vitesse, il reste en ce point.

1. Dans le cas où le paramètre est un angle θ , on a :

$$F(\theta_0) = -\frac{1}{r} \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}(\theta_0) = 0$$

$$\text{soit } \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}(\theta_0) = 0.$$

Sa vitesse doit être nulle à tout instant, son accélération aussi, et, d'après le PFD : $F(x_0) = 0$. Ainsi la condition d'équilibre en x_0 est¹ :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0) = 0$$

Définition 8

Une position d'équilibre x_0 est stable si le point matériel a tendance à revenir vers la position d'équilibre x_0 s'il en est écarté.

À proximité de x_0 , il doit être soumis à une force de rappel :

$$\begin{cases} F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} > 0 & \text{si } x < x_0; \\ F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} < 0 & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$

Ainsi la position d'équilibre x_0 est stable si :

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) > 0.$$

x_0 est une position d'équilibre stable si la courbe $x \rightarrow \mathcal{E}_p(x)$ présente un minimum en x_0 .

Voici les différents profils de courbe d'énergie potentielle que l'on peut renconter (fig. 7).

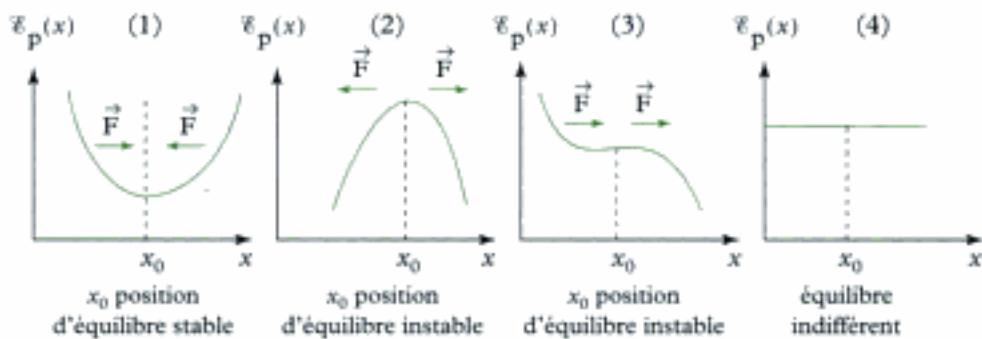


Fig. 7 - Profils des courbes d'énergie potentielle.



La courbe (4) de la figure 7 correspond à un équilibre indifférent (toutes les positions peuvent être des positions d'équilibre).

Conseil

Pour retenir ces notions, il suffit d'imaginer une bille se déplaçant, sous l'action de son poids (\vec{g} uniforme), dans une cuvette ayant le profil $\mathcal{E}_p(x)$:

- si la bille est déposée au fond de la cuvette, sans frottement (courbe (1)), elle y reste et si elle est écartée du fond, elle tend à y revenir ;
- si la bille est déposée sur une bosse, elle y reste mais si elle est écartée du sommet, elle s'éloigne de ce sommet (courbe (2)).

D.5.2 - Étude du mouvement autour d'une position d'équilibre stable (petites variations)

Posons $x = x_0 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll |x_0|$) ; écrivons la conservation de l'énergie mécanique (\mathcal{E} représente l'écart entre la position x du point M et sa position d'équilibre x_0) :

$$\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_\varepsilon} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2.$$

1. Si $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) = 0$, il faut poursuivre le développement limité à un ordre plus élevé.

Effectuons un développement limité de la fonction $x \rightarrow \mathcal{E}_p(x)$ autour de x_0 ¹ :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_0) + (x - x_0) \frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) + \dots$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0) = 0 & & \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) = k > 0 \\ \text{car } x_0 \text{ est une} & & \text{car la position d'équilibre} \\ \text{position d'équilibre} & & \text{est stable} \end{array}$$

ainsi :
$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \times k;$$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_p(x_0) + \frac{k}{2}\varepsilon^2 = \text{cte};$$

en dérivant par rapport au temps cette relation, on a :

$$m\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} + k\dot{\varepsilon}\varepsilon = 0;$$

en éliminant la solution $\dot{\varepsilon} = 0$, on obtient :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon = 0;$$

en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m} \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0)$, on trouve l'équation d'un oscillateur harmonique (voir chapitre 4) :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0;$$

dont la solution est sinusoïdale de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

D.5.3 - Caractérisation du mouvement

- Comme $\mathcal{E}_c(x) > 0$ ($\dot{x}^2 > 0$), les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels :

$$\mathcal{E}_p(x) \leq \mathcal{E}_m(x) = \mathcal{E}_0$$

1. x_1 et x_2 sont des points d'arrêt.

2. Il repartira forcément car la force en x_1 n'est pas nulle en effet

$$F(x_1) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_1) < 0.$$

3. Le mouvement périodique n'est pas forcément harmonique : il l'est seulement pour les oscillations de faibles amplitudes (les oscillations ne sont donc pas forcément sinusoïdales).

• Ainsi dans le cas de la (fig. 8) le point matériel ne peut jamais atteindre l'intervalle $[x_1 ; x_2]$; s'il se trouve à une position $x \leq x_1$, il ne peut pas passer à une position $x \geq x_2$: il y a une **barrière de potentiel**. De plus le mouvement n'est pas borné : le point matériel (s'il se trouve à une position $x \leq x_1$) peut aller jusqu'à x_1 (où il a une vitesse nulle) mais repartira vers les $x \rightarrow -\infty$ ².

• Dans le cas de la (fig. 9), le point matériel ne peut pas sortir de l'intervalle $[x_1, x_2]$: il se trouve dans un **puits de potentiel**.

De plus, le mouvement est borné et périodique³ entre les positions x_1 et x_2 .

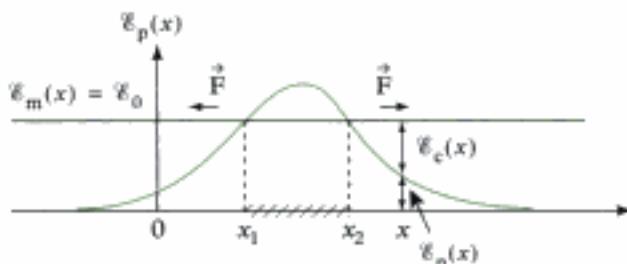


Fig. 8 - Barrière de potentiel.

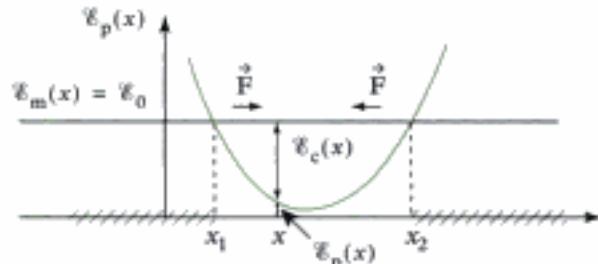


Fig. 9 - Puits de potentiel.

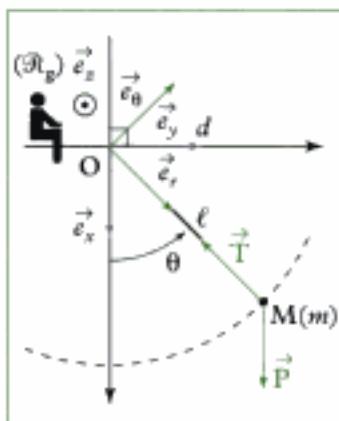


Fig. 10 - Le pendule simple.

• Exemple : le pendule simple

Reprendons l'exemple précédent de ce chapitre.

L'énergie potentielle du point $M(m)$ (suspendu au bout du pendule) est (fig. 10) :

$$\mathcal{E}_{P_p}(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$$

(référence en $\theta = 0$), en effet, il n'y a que le poids qui travaille et il s'agit d'une force conservative dérivant d'une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_{P_p}(x) = -mgx + \text{cte},$$

(ici $x = l \cos\theta$).

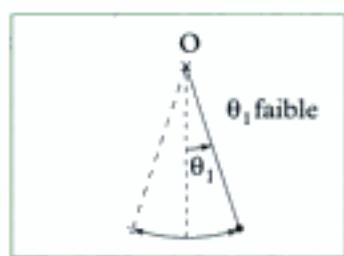
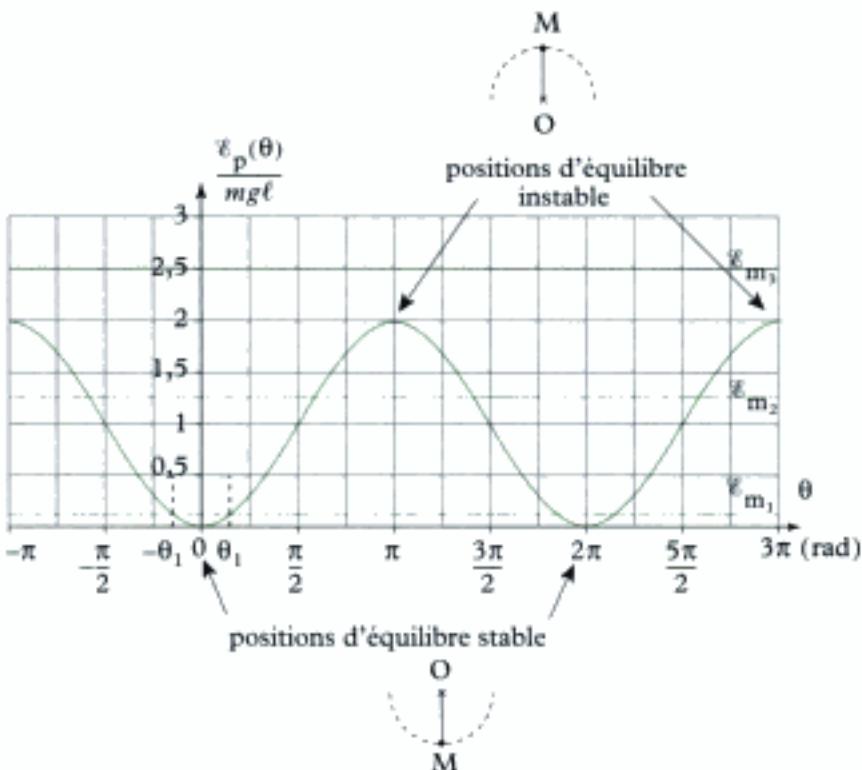


Fig. 12 - Mouvement de petites amplitudes du pendule simple.

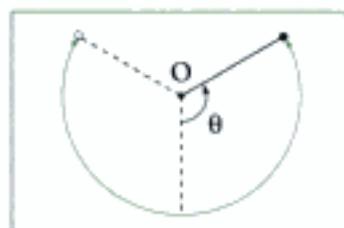


Fig. 13 - Mouvement de grandes amplitudes du pendule simple.

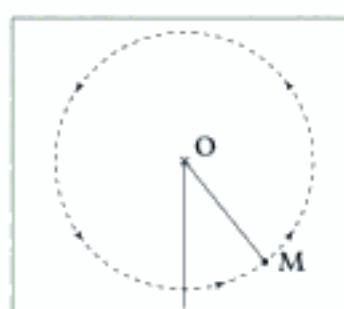


Fig. 14 - Mouvement de révolution du pendule simple.

1. Les conditions initiales doivent être réalisables.

L'analyse de la courbe d'énergie potentielle (fig. 11) permet de repérer les positions d'équilibre stable (minimum d' \mathcal{E}_p) en $\theta = \dots, 0 \text{ rad}, 2\pi \text{ rad}, \dots$ les positions d'équilibre instable $\theta = \dots, -\pi \text{ rad}, +\pi \text{ rad}, +3\pi \text{ rad}, \dots$

Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_1}$ et si $\theta(t=0) \in [-\pi ; \pi] \text{ rad}$, alors le pendule va osciller autour de la position $\theta = 0 \text{ rad}$ de façon quasi-sinusoïdale, avec une période $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$; il faut remarquer que les mouvements sont d'amplitudes faibles autour de $\theta = 0$ (fig. 12).

Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_2}$ et si $\theta(t=0) \in [-\pi ; +\pi] \text{ rad}$, alors le pendule va osciller autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0 \text{ rad}$ de façon non sinusoïdale (fig. 13).

Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_3}$, la vitesse ne s'annule jamais et le mouvement est révolutionnaire de type fronde (fig. 14).

D.5.4 - Portrait de phase

Le point matériel $M(m)$ dont la position est décrite à l'aide du paramètre x , possède une vitesse \dot{x} ; ces deux informations x et \dot{x} sont suffisantes pour connaître l'état du point matériel M à chaque instant.

On utilise une représentation graphique dans le **plan de phase** ($x ; \dot{x}$) d'un point $P(x ; \dot{x})$ représentant l'état du point M à un instant donné. Ce point P appartient à une courbe appelée **trajectoire de phase** dépendant des conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ et représentant l'évolution du point P au cours du temps. L'ensemble des trajectoires de phase pour diverses conditions initiales constitue le **portrait de phase**.

La fig. 15 regroupe les courbes d'énergie potentielle et de portrait de phase du pendule simple (en l'absence de frottement).

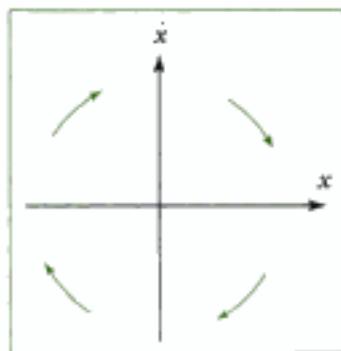


Fig. 16 - Sens parcouru dans le plan de phase.

1. Les positions d'équilibre stable sont : $\theta = -2\pi; 0; 2\pi; \dots$ rad.

2. Dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$ cette trajectoire serait une ellipse.

3. $0 < \mathcal{E}_{m_1} \ll 2mg\ell$.

4. $0 < \mathcal{E}_{m_1} < 2mg\ell$.

5. $\mathcal{E}_{m_1} > 2mg\ell$.

6. $\mathcal{E}_{m_1} = 2mg\ell$.

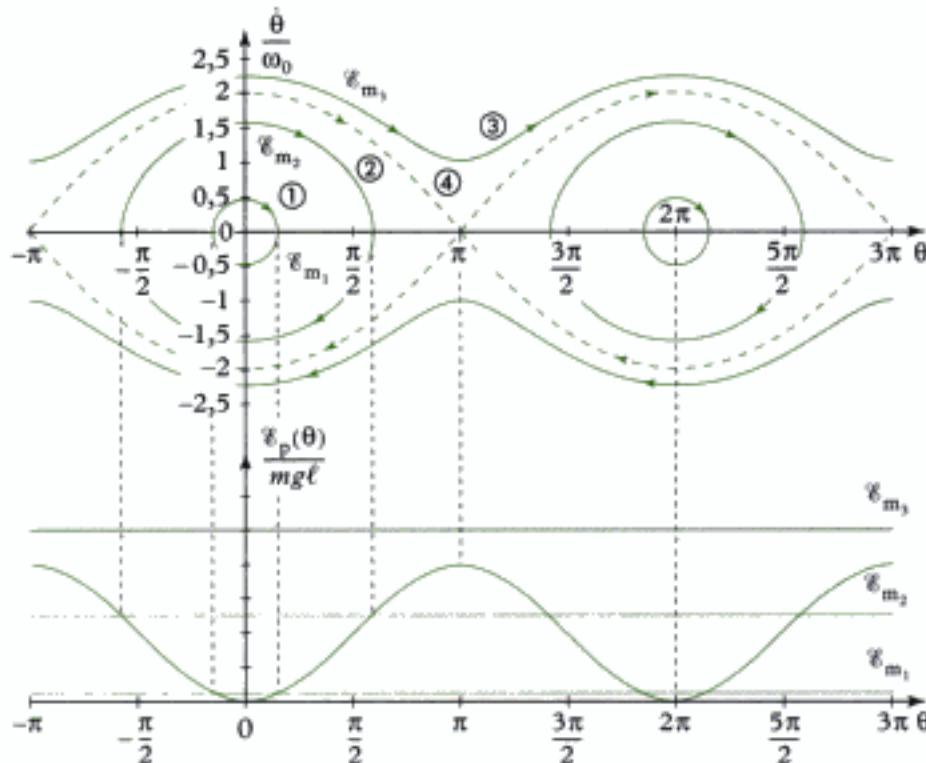


Fig. 15 - Portrait de phase et courbe d'énergie potentielle du pendule simple.

- Les trajectoires de phase sont toutes parcourues dans le même sens, en effet lorsque $\dot{x} > 0$, x augmente et lorsque $\dot{x} < 0$, x diminue (fig. 16).
- Les trajectoires de phase fermées correspondent à des mouvements périodiques : c'est le cas des trajectoires ① et ②. Ces deux mouvements sont périodiques autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$ ¹.

La trajectoire ①, dans le plan $(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0})$, est un cercle² caractéristique d'un oscillateur harmonique (θ varie sinusoïdalement au cours du temps).

En effet, on peut remarquer que pour un point $P(\theta; \frac{\dot{\theta}}{\omega_0})$ appartenant à cette trajectoire ①, on a :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} + mg\ell(1 - \cos\theta) = \mathcal{E}_{m_1} = \text{cte.}$$

Or sur cette trajectoire θ est petit donc $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$, ainsi :

$$\frac{m\ell g}{2} \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 + \theta^2 \right] = \mathcal{E}_{m_1}.$$

On a : $\mathcal{E}_{m_1} = k \cdot OP^2$ ($OP = \text{cte}$, donc P décrit un cercle).

La trajectoire de phase ② correspond à un mouvement d'énergie \mathcal{E}_{m_2} (amplitude supérieure à celle de ①) ; la courbe n'est plus un cercle ce qui atteste du caractère non sinusoïdal des oscillations.

- La trajectoire ③ correspond à une énergie mécanique \mathcal{E}_{m_3} ; $\dot{\theta}$ conserve un signe constant (mouvement de fronde, révolutif du pendule).
- La trajectoire ④ est une limite entre les deux types de mouvements précédents : c'est une **séparatrice**⁶. Elle relie les **points d'équilibre instable** et correspond à des mouvements d'amplitude π rad.

Remarque : en l'absence de frottement ($\mathcal{E}_m = \text{cte}$), les trajectoires sont fermées :

- si $\mathcal{E}_m \gg 2mg\ell$, alors $\mathcal{E}_c \gg \mathcal{E}_p$ et on a alors un mouvement à vitesse angulaire quasi constante :

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \approx \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_m,$$

soit :

$$\frac{1}{2}m\ell g \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 = \mathcal{E}_m$$

$$\dot{\theta} = \pm \omega_0 \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{mg\ell}} = \text{cte.}$$

1. Les positions d'équilibre (stables ou non) font parties de l'ensemble des points singuliers pour lesquels $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$ (ils sont donc sur l'axe horizontal).

- les positions d'équilibre stable sont repérables : les trajectoires de phase tournent autour d'elles¹.

Remarque : en présence de frottements, l'énergie mécanique diminue et les trajectoires de phase se terminent en des points d'équilibre stable (sur l'axe horizontal) ; ces points sont des **attracteurs** (voir (fig. 17)).

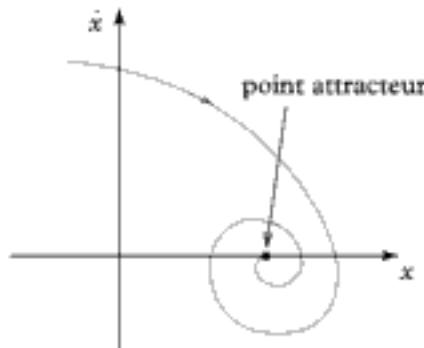


Fig. 17 - Attracteur dans le plan de phase.

L'essentiel

✓ Puissance d'une force $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}}$

La puissance $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}}$ d'une force \vec{F} , appliquée en un point M possédant une vitesse $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel \mathcal{R} , est :

$$\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$$

$\mathcal{P}(\vec{F})$	puissance en watts (W)
\vec{F}	force (N)
$\vec{v}(M)$	vitesse ($m \cdot s^{-1}$)

Propriétés

- Si $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = 0$ (par exemple si $\vec{F} \perp \vec{v}$), la force \vec{F} ne travaille pas.
- Si $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} > 0$, la force \vec{F} est motrice ; si $\mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} < 0$, la force \vec{F} est résistante.

✓ Travail d'une force $W(\vec{F})|_{\mathcal{R}}$

Dans le référentiel \mathcal{R} , le travail de la force \vec{F} appliquée au point M le long d'un trajet allant du point A au point B entre les instants t_1 et t_2 , en suivant la courbe \mathcal{C} est :

$$W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} dt$$
$$= \int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

$W(\vec{F})$	travail en joule (J)
$\mathcal{P}(\vec{F})$	puissance (W)
\vec{F}	force (N)
$d\vec{OM}$	déplacement élémentaire (m)

Propriétés

- Si $W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} = 0$ (par exemple, si $\vec{F} \perp \vec{v}$), la force ne travaille pas.
- Si $W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} > 0$, la force \vec{F} est motrice ; si $W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} < 0$, la force \vec{F} est résistante.

✓ Énergie cinétique d'un point matériel

L'énergie cinétique du point matériel M(m) en mouvement à la vitesse $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel \mathcal{R} est :

$$\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v^2(M)|_{\mathcal{R}}$$

\mathcal{E}_c	énergie cinétique en joule (J)
m	masse (kg)
$\vec{v}(M)$	vitesse ($m \cdot s^{-1}$)

✓ Force conservatives et énergie potentielle d'un point matériel

Une force appliquée en un point M est conservative si son travail, dans un référentiel \mathcal{R} , entre deux positions quelconques M_1 et M_2 ne dépend que de ces deux positions et pas du chemin suivi pour aller de M_1 vers M_2 .

Si la force \vec{F} est conservative, alors il existe une fonction $\mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}$ appelée énergie potentielle dont la variation est égale à l'opposé du travail de la force \vec{F} entre M_1 et M_2 :

$$\Delta \mathcal{E}_p|_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}_p(M_2)|_{\mathcal{R}} - \mathcal{E}_p(M_1)|_{\mathcal{R}} = -W(\vec{F})|_{\mathcal{R}}$$

$\mathcal{E}_p(M)$	énergie potentielle en joule (J)
$W(\vec{F})$	travail (J)

Propriétés

- $\mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}$ n'est fonction que des coordonnées de M.
- Soit x le paramètre de position de M, on a :

$$F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}}{dx}.$$

- L'énergie potentielle de pesanteur d'un point M s'écrit :

$$\mathcal{E}_{p_p}(M) = mgz + \text{cte},$$

si l'axe vertical ($O ; \vec{e}_z$) est dirigé vers le haut.

- L'énergie potentielle élastique dans le cas d'un ressort s'écrit :

$$\mathcal{E}_{p_e}(M) = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{cte}.$$

✓ Énergie mécanique d'un point matériel

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(M)|_{\mathcal{R}}$ d'un point matériel M(m) dans le référentiel est \mathcal{R} est, à chaque instant, la somme de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)|_{\mathcal{R}}$ du point M et de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}$ des forces conservatives appliquées au point M :

$$\mathcal{E}_m(M, t)|_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c(t)|_{\mathcal{R}} + \mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}.$$

✓ Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des puissances des forces appliquées au point matériel M(m) se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}$ est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce point M :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} = \vec{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g}.$$

✓ Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation d'énergie cinétique d'un point matériel M(m) entre deux instants t_1 et t_2 (en deux positions M₁ et M₂) est égale à la somme des travaux des forces appliquées à M entre ces deux instants (en ces deux positions).

$$\Delta\mathcal{E}_c|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(t_2)|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(t_1)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{W}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g}$$

\mathcal{E}_c énergie cinétique (J)

$\vec{W}(\vec{F})$ travail des forces (J)

✓ Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation d'énergie mécanique d'un point matériel M(m) entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au point M.

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_m|_{\mathcal{R}_g} &= \mathcal{E}_m(M_2, t_2)|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_m(M_1, t_1)|_{\mathcal{R}_g} \\ &= \vec{W}(\vec{F}_{nc})|_{\mathcal{R}_g}\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_m(M_2, t_2)$ énergie mécanique finale (J)

$\mathcal{E}_m(M_1, t_1)$ énergie mécanique initiale (J)

$\vec{W}(\vec{F}_{nc})$ travail des forces non conservatives (J)

✓ Théorème de la puissance mécanique (TPM)

$$\frac{d\mathcal{E}_m(M)|_{\beta_s}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})|_{\beta_s}$$

$\mathcal{E}_m(M)$ énergie mécanique (J)

$\mathcal{P}(\vec{F}_{nc})$ puissance des forces non conservatives (W)

Propriétés

- Si le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives et/ou à des forces qui ne traillent pas alors :

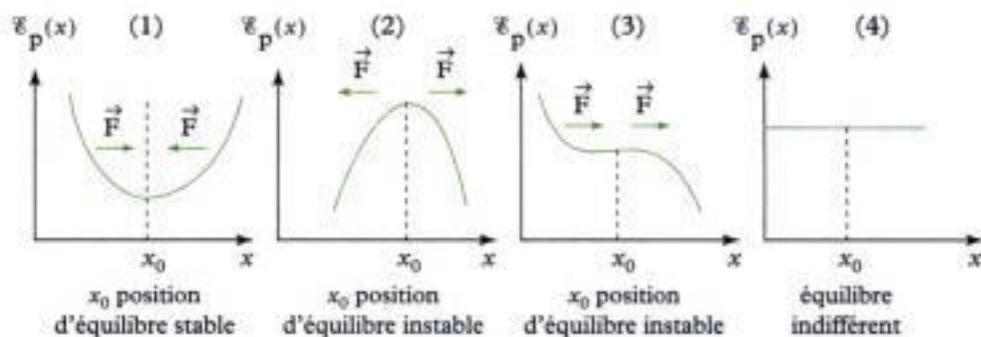
$$\mathcal{E}_m(M, t)|_{\beta_s} = \text{cte.}$$

L'énergie mécanique du point M se conserve au cours du temps (le système étudié est conservatif).

- Si le point matériel est soumis à des forces dissipatives (frottement), l'énergie mécanique diminue au cours du temps.

✓ Mouvement conservatif à un degré de liberté

- Le point matériel M(m) est à l'équilibre en x_0 si, déposé en ce point sans vitesse, il reste en ce point.
- Une position d'équilibre x_0 est stable si le point matériel a tendance à revenir vers la position d'équilibre x_0 s'il en est écarté.
- x_0 est une position d'équilibre stable si la courbe $x \mapsto \mathcal{E}_p(x)$ présente un minimum en x_0 . Les maxima de \mathcal{E}_p correspondent aux positions d'équilibre instables et les minima aux positions d'équilibre stable.



Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TPC ?

Soit M un point matériel de masse m en mouvement à un degré de liberté dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . On souhaite déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TPC.

→ Savoir faire

- ① Faire le bilan des forces appliquées au système étudié (point matériel M).
- ② Exprimer les puissances des forces connues.
- ③ Appliquer le TPC afin de déterminer une équation différentielle du mouvement. Si des forces inconnues (forces de liaison, réaction, tension, ...) sont perpendiculaires au mouvement, elles n'apparaissent pas dans l'équation.

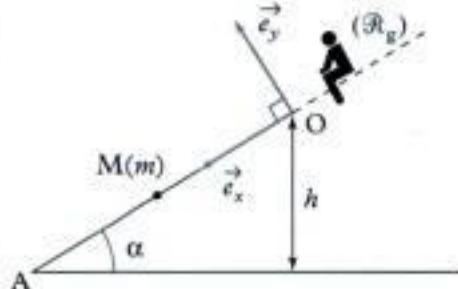
→ Application

Un point matériel M(m) glisse sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Il démarre du point O sans vitesse initiale. On travaille dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ supposé galiléen.

La position du point M est repérée par la variable x :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x.$$

Déterminer, en utilisant le TPC, l'équation différentielle du mouvement.



Solution

Système étudié : point matériel M(m).

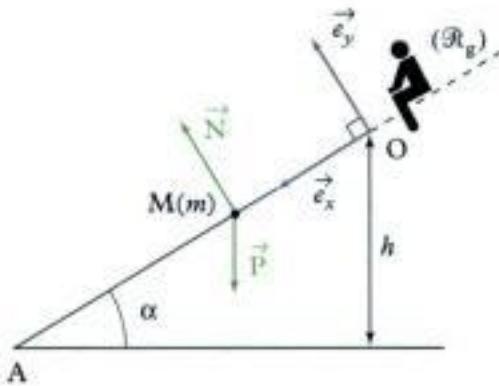
Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

- ① Les forces appliquées au système sont :

- le poids $\vec{P} = mg$ vertical et vers le bas ;
- la réaction du plan incliné, normale au support en l'absence de frottement, $\vec{N} = N\vec{e}_y$.

- ② La vitesse de M est $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$. Ainsi :

- puissance du poids :
$$\mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = mg\dot{x} \sin \alpha$$
;
- puissance de la réaction : $\mathcal{P}(\vec{N}) = 0$.



💡 \vec{N} étant normale au support, elle ne travaille pas.

- ③ On applique le TPC au point matériel M(m) dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{N})|_{\mathcal{R}_g} \quad (\text{TPC}) ;$$

ce qui donne : $m\ddot{x}\dot{x} = mg\dot{x} \sin \alpha$.

En éliminant la solution parasite $\dot{x} = 0$ et en simplifiant par m , on obtient :

$$\ddot{x} = g \sin \alpha.$$

Méthode 2

Comment déterminer la vitesse en un point de la trajectoire à l'aide du TEC/TEM ?

Soit M un point matériel de masse m en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . À partir de la connaissance de la vitesse en un point de la trajectoire, on souhaite déterminer la vitesse en un autre point de cette trajectoire.

→ Savoir faire

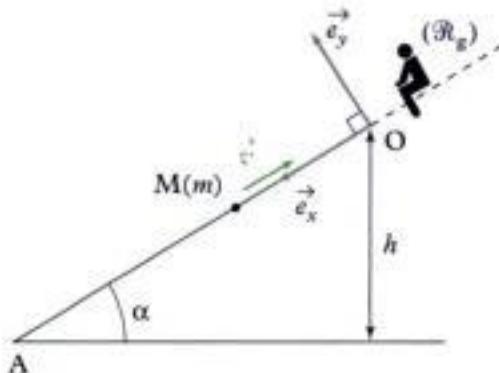
- 1 Faire le bilan des forces appliquées au système (point matériel M) étudié.
 - 2 Exprimer les énergies potentielles des forces dérivant d'une énergie potentielle et les travaux des autres forces.
 - 3 Appliquer le TEC/TEM afin de déterminer la vitesse inconnue.
-  Le TEM n'est qu'une réécriture du TEC dans laquelle les travaux des forces conservatives apparaissent sous la forme d'une variation d'énergie potentielle.

→ Application

On lance depuis le point A un point matériel M(m) avec une vitesse initiale v_0 selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Il glisse sans frottement sur ce plan. On travaille dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. On repère la position du point M à l'aide de :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x.$$

Déterminer en utilisant le TEM la vitesse du point matériel M(m) en un point quelconque de sa trajectoire.



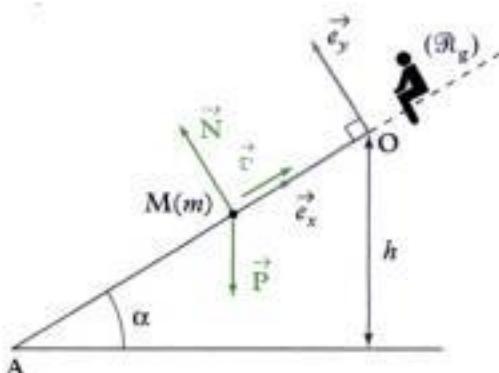
Solution

Système étudié : le point matériel M(m).

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

1 Bilan des forces appliquées au système :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ vertical et dirigé vers le bas ;
- la réaction du plan incliné, normale au support en l'absence de frottement $\vec{N} = N\vec{e}_y$.



- ##### 2 • Énergie potentielle des forces : le poids dérive d'une énergie potentielle $E_{p_g} = mgH = mg(h - x\sin\alpha)$, en notant H l'altitude de M au-dessus de A.

- Travaux des autres forces : la réaction \vec{N} étant perpendiculaire au support, elle ne travaille pas lors du mouvement.

③ On applique le TEM au point matériel M(m) dans \mathcal{R}_g , d'où :

$$\Delta \mathcal{E}_m = W(\vec{F}_{nc}) = 0, \text{ donc } \mathcal{E}_m(t) = \text{cte.}$$

$$\mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t) = \mathcal{E}_c(t=0) + \mathcal{E}_p(t=0) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mg(h - x\sin\alpha) = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0.$$



$\mathcal{E}_p(t=0) = 0$ car la référence d'énergie potentielle a été choisie au niveau du point A de départ.



À l'aide du TEC, on aurait écrit : $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(h - x\sin\alpha)$.

On a donc : $v = \sqrt{v_0^2 - 2g(h - x\sin\alpha)}$.

Méthode 3

Comment étudier les positions d'équilibre d'un système conservatif à l'aide de la fonction énergie potentielle ?

Soit un point matériel M de masse m soumis uniquement à des forces conservatives (ou ne travaillant pas) dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Le mouvement est décrit à l'aide d'un unique paramètre. On souhaite étudier les positions d'équilibre du système.

→ Savoir faire

- ① Si l'expression de l'énergie potentielle n'est pas donnée, faire le bilan des forces appliquées au système étudié (point matériel M).
- ② Déterminer les énergies potentielles de toutes les forces travaillant lors du mouvement et en déduire l'expression de la fonction énergie potentielle.
- ③ Déterminer les minima de la fonction énergie potentielle (position d'équilibre stable).



On peut aussi déterminer les positions d'équilibre à l'aide du PFS.

→ Application

Soit un point matériel M(m) en mouvement à un degré de liberté (r) dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Ce point M est soumis à des forces conservatives dérivant de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p(r) = \frac{A}{r^7} - \frac{K}{r} \quad (r > 0), \text{ avec } K = 7A > 0.$$

Déterminer les positions d'équilibre stable du point matériel M(m).

Solution

① et ② Inutile ici.

③ Afin de déterminer les positions d'équilibre du système, il faut trouver les extrema de la fonction $r \mapsto \mathcal{E}_p(r)$. Pour cela, on cherche les solutions de :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = 0.$$

Ici $\frac{d\mathcal{E}_P}{dr} = -7Ar^{-8} + Kr^{-2}$.

Pour $r > 0$, cette dérivée s'annule pour :

$$7Ar^{-6} = K, \text{ soit } r = \left(\frac{7A}{K}\right)^{1/6} = 1 \text{ (car } K = 7A).$$

La position d'équilibre $r_0 = 1$ est stable si elle correspond à un minima d'énergie potentielle, c'est-à-dire si $\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dr^2}(r_0) > 0$.

Or : $\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dr^2} = 56Ar^{-9} - 2Kr^{-3}$ et $\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dr^2}(r_0) = 56A - 14A = 42A > 0$.

La position d'équilibre ($r_0 = 1$) est stable.

Méthode 4

Comment écrire l'équation différentielle des mouvements de faible amplitude autour d'une position d'équilibre (stable) ?

Soit M un point matériel de masse m soumis à des forces conservatives, en mouvement à un degré de liberté dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Ce mouvement se fait autour d'une position d'équilibre stable avec de faibles amplitudes. On cherche à déterminer l'équation différentielle de ce mouvement à partir de la fonction énergie potentielle.

→ Savoir faire

- 1 Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction énergie potentielle.
- 2 Écrire le TEM (conservation de l'énergie mécanique).
- 3 Dériver l'expression précédente par rapport au temps.



Généralement, on utilise cette technique autour d'une position d'équilibre stable, mais on peut aussi l'utiliser autour d'une position d'équilibre instable.

→ Application

Soit un point matériel M(m) en mouvement à un degré de liberté (r) dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Il est soumis à des forces conservatives dérivant de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_P(r) = \frac{A}{r^7} - \frac{K}{r} \quad (r > 0), \text{ avec } K = 7A > 0.$$

Déterminer l'équation différentielle des mouvements de faible amplitude autour de la position d'équilibre stable $r_0 = \left(\frac{7A}{K}\right)^{1/6} = 1$.

Donnée : $\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dr^2}(r_0) = 42A$.

Solution

- ① On effectue le développement limité d'ordre 2 de la fonction énergie potentielle, autour de la position d'équilibre stable $r = r_0$:

$$\mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}_p(r_0) + (r - r_0) \frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r_0) + \frac{(r - r_0)^2}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_0).$$

On a : $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r_0) = 0$ (car r_0 position d'équilibre) et $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_0) = 42A$.

En posant $\varepsilon = r - r_0$, on obtient :

$$\mathcal{E}_p(r) \approx \mathcal{E}_p(r_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \times 42A = \mathcal{E}_p(r_0) + 21A\varepsilon^2.$$

- ② Le système étant conservatif, le TEM s'écrit : $\mathcal{E}_m|_{\mathcal{R}_s} = \text{cte}$, soit $\mathcal{E}_c|_{\mathcal{R}_s} + \mathcal{E}_p|_{\mathcal{R}_s} = \text{cte}$.

D'où :

$$\frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_p(r_0) + 21A\varepsilon^2 = 0.$$

- ③ En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient : $m\ddot{\varepsilon}\dot{\varepsilon} + 42A\dot{\varepsilon}\varepsilon = 0$.

En éliminant la solution parasite $\dot{\varepsilon} = 0$, on a :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0, \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{42A}{m}.$$

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Unités

Déterminer les unités des expressions suivantes :

- $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$; • $mgv\cos\theta$;
- $mgt\sin\theta$; • $\frac{1}{2}k(x-\ell)^2$;
- $\frac{dE}{dt}$.

m est une masse ; r , x et ℓ sont des distances ; g est le champ de pesanteur terrestre ; θ est un angle ; ω est une vitesse angulaire ; k est la raideur d'un ressort ; E est une énergie ; v est une vitesse.

Ex. 2 Travail d'une force (cas 1)

On considère un point matériel M de masse m pouvant se déplacer le long de l'axe $(O ; \vec{e}_x)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x)$; il est soumis à une force $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$, x étant la position du point M .

- 1) Déterminer le travail de la force \vec{F} pour aller du point $A(x_A)$ au point $B(x_B)$ directement, en suivant l'axe $(O ; \vec{e}_x)$.
- 2) Déterminer le travail de la force \vec{F} pour aller du point $A(x_A)$ au point $B(x_B)$ en passant par le point $C(x_C)$ (en restant sur l'axe $(O ; \vec{e}_x)$).
- 3) \vec{F} est-elle conservative ? si oui, déterminer l'énergie potentielle associée.

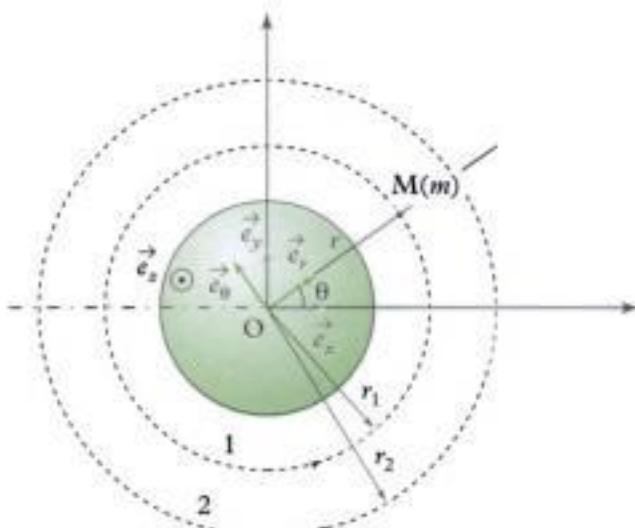
Ex. 3 Travail d'une force (cas 2)

On considère un point matériel $M(m)$ pouvant se déplacer le long de l'axe $(O ; \vec{e}_x)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x)$; il est soumis à une force $-F_0\vec{e}_x$ (constante) s'il se déplace dans le sens des x croissants et à une force $F_0\vec{e}_x$ s'il se déplace dans le sens des x décroissants.

- 1) Déterminer le travail de la force \vec{F} pour aller directement du point $A(x=1)$ au point $B(x=3)$ en suivant l'axe $(O ; \vec{e}_x)$.
- 2) Déterminer le travail de la force \vec{F} pour aller du point $A(x=1)$ au point $B(x=3)$ en passant par le point $C(x=4)$ tout en restant sur l'axe $(O ; \vec{e}_x)$.
- 3) La force \vec{F} est-elle conservative ? si oui, déterminer l'énergie potentielle associée.

Ex. 4 Un satellite

Un satellite assimilé à un point matériel M de masse $m = 1\ 000\text{ kg}$ est en orbite circulaire de rayon r_1 autour de la Terre. On rappelle qu'à une distance r du centre de la Terre, un satellite subit une force d'interaction gravitationnelle $F = \frac{GM_T m}{r^2}$ constamment dirigée vers O . On suppose que le référentiel $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.



- 1) À l'aide du PFD, calculer la vitesse v_1 (respectivement v_2) que doit posséder le satellite pour être sur l'orbite de rayon r_1 (respectivement r_2).
- 2) Donner l'expression de l'énergie potentielle dont dérive la force d'interaction gravitationnelle F (on prendra la référence d'énergie potentielle à l'infini).
- 3) Calculer la valeur de l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite de rayon r_1 puis sur celle de rayon r_2 .
- 4) Calculer la variation d'énergie mécanique entre les 2 orbites de rayon r_1 et r_2 . Que devra-t-on faire si on veut transférer le satellite sur l'orbite plus haute ($r = r_2$) ? Quel théorème nous permet de l'affirmer ?

Données :

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}; \quad r_1 = 6\ 500 \text{ km}; \\ M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}; \quad r_2 = 42\ 000 \text{ km}.$$

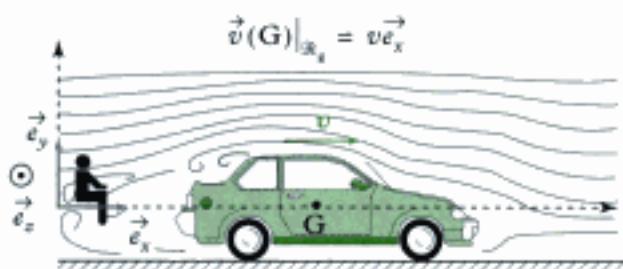
Niveau 2

Ex. 5 Accélération d'une voiture

Une voiture assimilée à un point matériel G de masse $m = 1\ 300\text{ kg}$ accélère depuis l'arrêt sur une route horizontale. Cette voiture est propulsée par un moteur qui

développe une puissance $\mathcal{P} = 2(60 - v)v^2$ (\mathcal{P} en W, vitesse v de la voiture en $m \cdot s^{-1}$). Elle est aussi soumise à une force de frottement horizontale $F = 450 + 0,4v^2$ (F en N, v en $m \cdot s^{-1}$).

Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



1) Calculer la puissance maximum du moteur.

Indiquer (en $km \cdot h^{-1}$) la vitesse associée.

2) À l'aide du TPC, calculer (en $km \cdot h^{-1}$) la vitesse maximum atteinte par ce véhicule sur route horizontale.

3) À l'aide de TPC, calculer (en $m \cdot s^{-2}$) l'accélération maximum du véhicule.

Indiquer la vitesse (en $km \cdot h^{-1}$) à laquelle cela se produit.

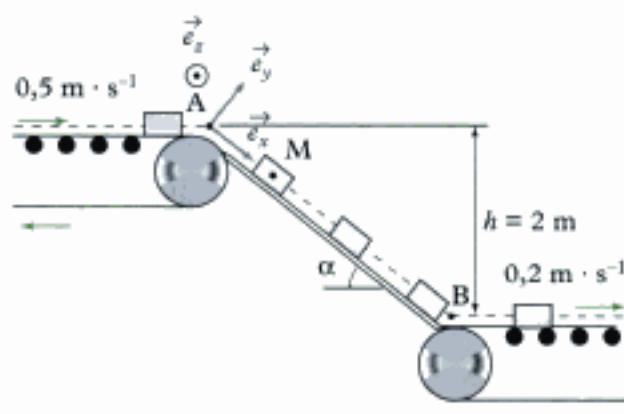
Ex. 6 Au tri postal

On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal. Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse $v_A = 0,5 m \cdot s^{-1}$.

Les colis glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale.

Le coefficient de frottement solide entre les colis et le plan incliné est $f = 0,4$. Les colis sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant. Ce tapis roulant avance à la vitesse $v_B = 0,2 m \cdot s^{-1}$. Le convoyeur fonctionne correctement si les colis arrivent au point B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.

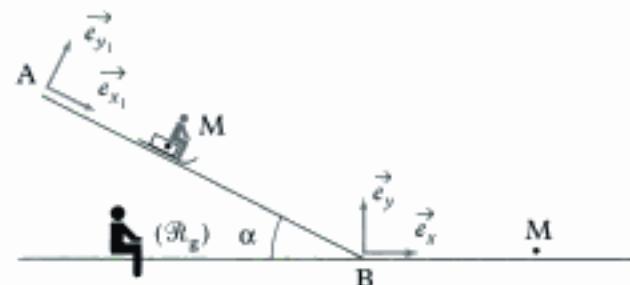
On suppose que le référentiel $(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.



Donner l'expression puis la valeur numérique de l'angle α qui permet un bon fonctionnement du convoyeur.

Ex. 7 L'enfant et sa luge

Un enfant et sa luge, système assimilé à un point matériel M de masse m , glissent sans frottement sur une piste (plan incliné de longueur L faisant un angle α avec l'horizontale). Arrivés en bas, ils continuent leur trajet sur un plan horizontal où ils sont freinés par une force de frottement solide (coefficients f).



L'enfant démarre avec une vitesse nulle en A.

On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}_g(B; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ supposé galiléen. La position de M est repérée lors de la première phase, par la variable x_1 :

$$\overrightarrow{AM} = x_1 \vec{e}_{x_1}$$

et lors de la seconde phase, par la variable x :

$$\overrightarrow{BM} = x \vec{e}_x$$

1) Déterminer, en utilisant le TPC, l'équation différentielle du mouvement de la phase de glissement sur le plan incliné (phase 1). Déterminer la vitesse en B ainsi que la durée de cette phase.

2) Déterminer, en utilisant le TPC, l'équation différentielle du mouvement de la phase de freinage sur le plan horizontal (phase 2).

Déterminer la distance d'arrêt D.

3) Déterminer la durée totale du mouvement.

Ex. 8 Un pendule

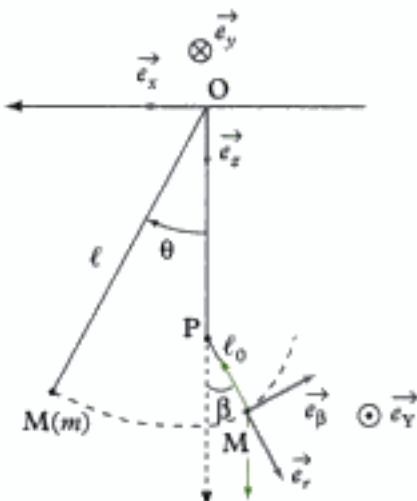
On considère un pendule simple (masse m , longueur ℓ) suspendu au point O fixe dans le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen. On l'écarte à $t = 0$ d'un angle θ_0 du côté gauche (à gauche de OP) et on le lâche sans vitesse initiale (le fil est inextensible, sans masse et est tendu). Arrivé à la verticale, un clou planté au niveau du point P modifie la longueur du pendule, elle devient ℓ_0 .

- Exprimer la vitesse v_0 de passage à la verticale.
- Exprimer l'angle maximum β_{\max} atteint par le pendule du côté droit (à droite de OP) ; l'exprimer en fonction de θ_0 et $r = \frac{\ell}{\ell_0}$.

3) Tracer la courbe représentative $r \mapsto \beta_{\max}(r)$ en tenant compte des valeurs numériques.

Commenter.

4) Déterminer l'expression de la tension du fil pour la position extrême de la masse m du côté droit (à droite de OP). Préciser pour quel angle β_{\max} elle s'annule. Comment choisir ℓ_0 pour que ceci ne se produise jamais ?



Données :

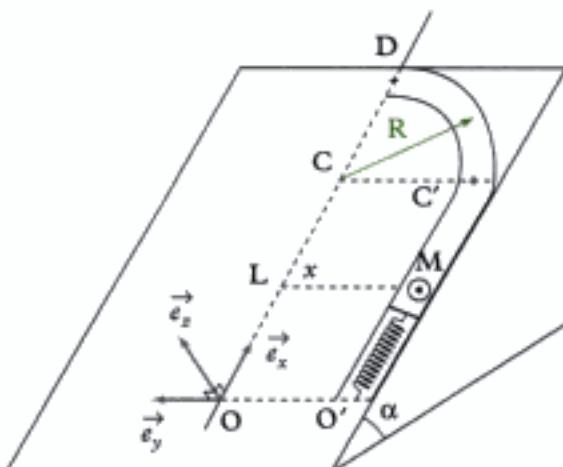
$$\ell = 1 \text{ m} ;$$

$$m = 0,1 \text{ kg} ;$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ.$$

Ex. 9 La bille du flipper

Une bille de flipper de masse m , assimilée à un point matériel M est lancée par un ressort et se déplace sans frottement à l'intérieur d'un guide rectiligne se terminant en arc de cercle. Le référentiel $R_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen ; le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) fait un angle α avec l'horizontale.



Le ressort possède une raideur k et une longueur à vide ℓ_0 ; la position O' , origine des x , correspond à l'extrémité fixe du ressort. La bille repose sur l'extrémité du ressort et à $t = 0$, on comprime le ressort jusqu'à ce que sa longueur soit x_0 , puis on le laisse évoluer (sans vitesse initiale), il se détend alors et met en mouvement la bille (on suppose qu'elle quitte le ressort lorsque la longueur du ressort est ℓ_0).

1) En utilisant le TEM exprimer la position x_1 de la bille M au moment où sa vitesse s'annule.

2) Tracer la courbe $x_0 \mapsto x_1(x_0)$. Donner la longueur de compression minimum nécessaire pour que la bille sorte du guide en D .

Données : $m = 100 \text{ g}$; $k = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $L = 80 \text{ cm}$; $R = 20 \text{ cm}$; $\alpha = 10^\circ$; $\ell_0 = 12 \text{ cm}$.

Ex. 10 Portrait de phase

On considère un pendule simple se déplaçant en présence de frottement ; son mouvement vérifie l'équation différentielle $\ddot{\theta} + h \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$.

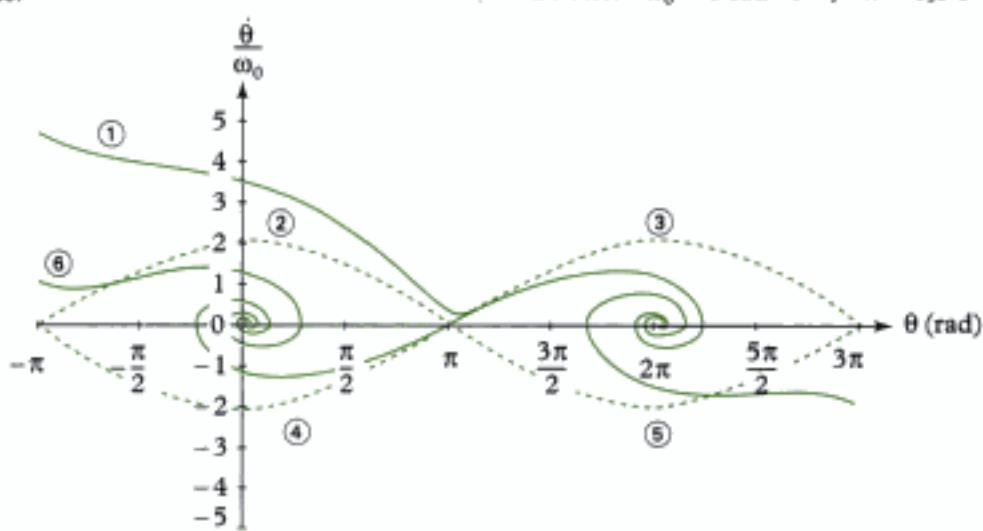
Son portrait de phase est représenté sur la figure ci-dessous.

1) À quoi voit-on qu'il y a du frottement ?

2) Indiquer les positions d'équilibres stables, instables.

3) Commenter l'allure des différentes courbes.

Données : $\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $h = 0,5 \text{ s}^{-1}$.



Ex. 11 Mouvement des atomes

Une molécule HCl est modélisée par deux atomes H et Cl, séparés par une distance r sur un axe fixe dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g ; l'atome de Cl est supposé fixe et pris comme origine du référentiel. L'atome H, assimilé à un point matériel de masse m est en mouvement dans \mathcal{R}_g , sous l'action de forces dérivant d'une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p(r) = \frac{C}{r^{12}} - \frac{K}{r}.$$

- 1) Déterminer graphiquement, puis par le calcul la position d'équilibre r_0 . Discuter la stabilité de la position d'équilibre r_0 .
- 2) Déterminer et calculer l'énergie de dissociation de la molécule HCl.
- 3) Déterminer la fréquence des petites oscillations de la molécule.

Données :

$$\begin{aligned}m &= 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg;} \\C &= 1,06 \times 10^{-138} \text{ J} \cdot \text{m}^{12}; \\K &= 92,16 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m.}\end{aligned}$$

a) donner l'expression de la vitesse de la balle au niveau du point C ;

b) exprimer la distance horizontale ℓ parcourue par la balle dans sa chute d'une hauteur $2R$ en fonction de v_C ;

c) en déduire la vitesse v_{A_0} requise.

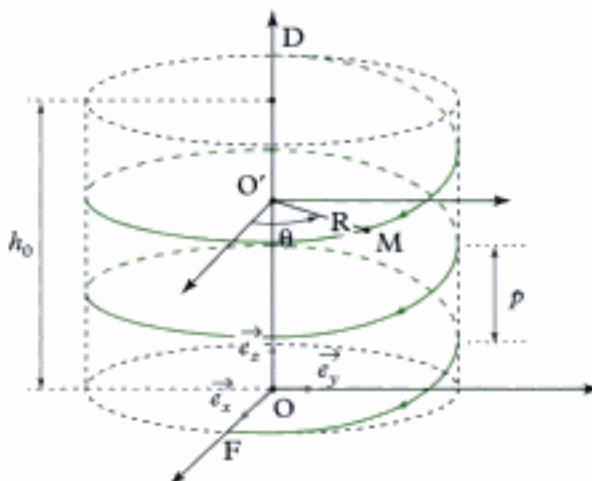
2) Donner la valeur minimum d_{\min} de d au-dessous de laquelle le jeu ne peut être réussi.

Ex. 13 Le toboggan aquatique

On étudie le mouvement d'un baigneur dans un toboggan aquatique hélicoïdal. Ce baigneur est modélisé par un point matériel M de masse m glissant sans frottement sur une hélice droite de rayon $R = 2 \text{ m}$ de pas constant p . Il s'élance du départ (point D) avec une vitesse nulle et quitte le toboggan au point F après un dénivelé $h_0 = 5 \text{ m}$ et $n = 2,5$ tours effectués. Le point M est repéré grâce à ses coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases}x = R \cos \theta \\y = R \sin \theta \\z = \frac{p}{2\pi} \theta\end{cases}$$

Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



1) On appelle α l'angle de la pente du toboggan. Exprimer p en fonction de α et R , puis α en fonction de h_0 et n . Faire l'application numérique pour α .

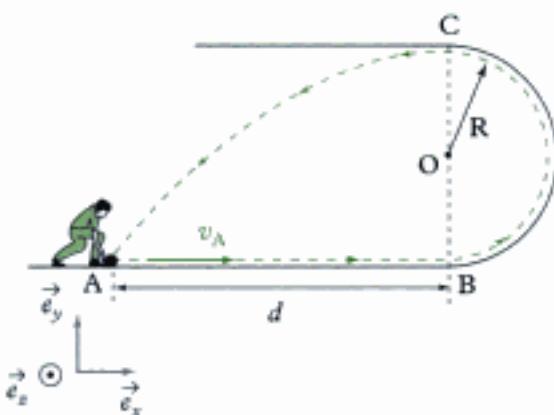
2) À l'aide du TPC, écrire l'équation différentielle du mouvement du baigneur.

3) Déterminer le temps de glissade (de D à F).

4) Déterminer la vitesse du baigneur au point F à l'aide de 2 méthodes.

Ex. 14 La porte du garage

Une porte de garage P_1P_2 de longueur $2L$ peut se mettre en mouvement (P_2 se déplace sur l'axe $(C; \vec{e}_y)$ sans frottement, P_1 à un mouvement circu-



- 1) On suppose que $d = 3R$; on cherche à trouver la vitesse v_{A_0} requise au départ pour que la balle retombe exactement en A et que le jeu soit remis. Pour cela :

laire de rayon L autour de $(O ; \vec{e}_z)$. On modélise cette porte en s'intéressant uniquement au triangle OAM (une masse m étant placée en M). La tige OM est rigide, de masse négligeable et de rayon R. Un ressort de longueur à vide ℓ_0 , le raideur k exerce une force de rappel élastique sur le point M (elle est constamment dirigée vers le point A).

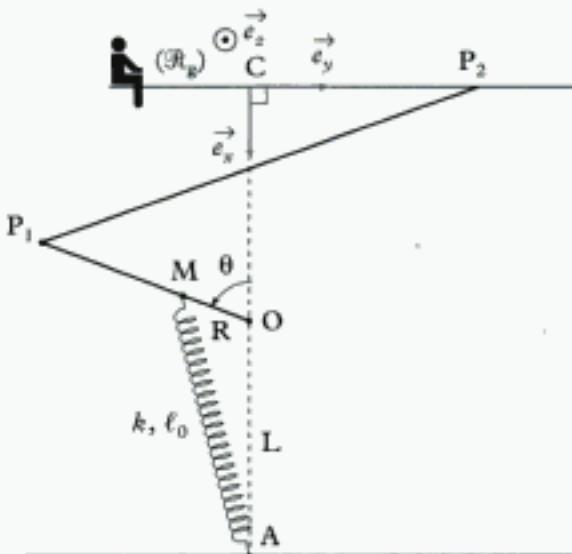
Le référentiel $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

1) Exprimer l'énergie potentielle du point matériel M(m) en fonction de l'angle θ .

2) Déterminer les positions d'équilibre du point matériel M(m) et discuter leur stabilité. Conclure.

Données :

$m = 30 \text{ kg}$; $R = 10 \text{ cm}$; $L = 10R = 1 \text{ m}$;
 $\ell_0 = 12R = 1,2 \text{ m}$; $k = 50\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.



Indications

Ex. 6 Appliquer le TEC entre A et B sachant que $T = fN$. Utiliser le PFD pour déterminer N.

Ex. 8 1) Utiliser le TEM / TEC.

4) Utiliser le PFD.

Ex. 9 1) On peut décomposer le mouvement en plusieurs phases : la première lorsque la bille est en contact avec le ressort et la deuxième lorsqu'elle ne l'est plus.

Ex. 11 1) Suivre les méthodes 3 et 4.

Ex. 12 1) a) Appliquer le TEC entre A et C

b) Appliquer le PFD et intégrer les deux équations différentielles afin de trouver le temps de chute, puis ℓ .

2) Calculer la vitesse minimum en C pour que le contact soit possible (avec le PFD).

Ex. 13 1) La pente représente le rapport de la distance parcourue sur la dénivellation correspondante.

3) Intégrer deux fois l'équation différentielle de la question 2) avec les conditions initiales.

4) Suivre la méthode 1, à partir du 2).

Suivre la méthode 2, à l'aide du TEC appliqué entre D et F.

Ex. 14 Pour déterminer la longueur AM dans le triangle AOM, on peut utiliser la relation :

$$\overrightarrow{AM}^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

- Unité de $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$: $\text{kg} \times \text{m}^2 \times \text{s}^{-2} = \text{J}$.
- Unité de $mgv\cos\theta$: $\text{kg} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} = \text{W}$.
- Unité de $mg\ell \sin\theta$: $\text{kg} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{J}$.
- Unité de $\frac{1}{2}k(x - \ell)^2$: $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \times \text{m}^2 = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}^{-1} \times \text{m}^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{J}$.
- Unité de $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$: $\text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} = \text{W}$.

Exercice 2

- 1) Pour aller directement du point A au point B en suivant l'axe ($O ; \vec{e}_x$), le point M décrit une courbe \mathcal{C}_1 et le travail de \vec{F} s'écrit :

$$W(\vec{F}) \Big|_{\mathcal{R}_1} = \int_{A(\mathcal{C}_1)}^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{A(\mathcal{C}_1)}^B -kx\vec{e}_x \cdot dx\vec{e}_x = -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2).$$

 $d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x$ pour ce trajet.

- 2) Le travail de \vec{F} pour aller de A à B en passant par C en restant sur l'axe ($O ; \vec{e}_x$) s'écrit :

$$W(\vec{F}) \Big|_{\mathcal{R}_2} = \int_{A(\mathcal{C}_2)}^C \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} + \int_{C(\mathcal{C}_2)}^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}.$$

 Le point M décrit la courbe \mathcal{C}_2 .

$$W(\vec{F}) \Big|_{\mathcal{R}_2} = -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_A}^{x_C} - k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_C}^{x_B} = -\frac{k}{2}(x_C^2 - x_A^2) - \frac{k}{2}(x_B^2 - x_C^2) = -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2).$$

- 3) Le travail de cette force semble ne pas dépendre du chemin suivi ; la démonstration complète en a été faite dans la question 1 de cet exercice. \vec{F} dérive donc d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p et le travail de \vec{F} pour aller de A à B est égal à la diminution d'énergie potentielle entre A et B :

$$W(\vec{F}) \Big|_{\mathcal{R}_3} = \frac{k}{2}(x_A^2 - x_B^2) = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B).$$

Ainsi l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(M)$ de la force \vec{F} se met sous la forme : $\frac{1}{2}kx^2 + \text{cte}$.

 On peut aussi utiliser la définition $F = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$ soit : $-kx = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$
soit $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte}$.

Exercice 3

1) Le travail de \vec{F} pour aller de A à B en suivant l'axe ($O ; \vec{e}_x$) (courbe \mathcal{C}_1) est :

$$W(\vec{F}) = \int_{A(\mathcal{C}_1)}^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_A^B -F_0 dx = -F_0 [x]_{x=1}^{x=3} = -F_0 \times 2 = -2F_0.$$

2) En passant par C (courbe \mathcal{C}_2) :

$$\begin{aligned} W(\vec{F}) &= \int_{A(\mathcal{C}_2)}^C \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} + \int_{C(\mathcal{C}_2)}^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_A^C -F_0 dx + \int_C^B F_0 dx \\ &= -F_0 [x]_{x=1}^{x=4} + F_0 [x]_{x=4}^{x=3} = -F_0 \times 3 + F_0 \times (-1) = -4F_0. \end{aligned}$$

3) \vec{F} n'est donc pas保守的 puisque son travail pour aller de A à B dépend du chemin suivi ; elle ne dérive donc pas d'une énergie potentielle.

Exercice 4

1) Appliquons le PFD.

• **Système étudié** : le satellite $M(m)$.

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Force(s) appliquée(s)** : force d'interaction gravitationnelle $\vec{F} = -F\vec{e}_r$ avec $F = \frac{GM_T m}{r^2}$.

• Le PFD s'obtient avec :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r;$$

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta \quad (r = \text{cte car trajectoire circulaire});$$

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r.$$

Le PFD s'écrit donc : $m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}$, soit $m\left(-\frac{v^2}{r}\right)\vec{e}_r = -F\vec{e}_r$.

En projection sur \vec{e}_r : $-m\frac{v^2}{r} = -F$ soit $m\frac{v^2}{r} = \frac{GM_T m}{r^2}$, d'où :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}.$$

 Unités : sachant que v est en $m \cdot s^{-1}$, G en $m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}$, M_T en kg et r en m , l'expression est homogène ; en effet :

$$\sqrt{\frac{m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot kg}{m}} = \sqrt{m^2 \cdot s^{-2}} = m \cdot s^{-1}.$$

$$\text{A.N. } v_1 = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6 \ 500 \times 10^3}} \approx 7,83 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{42 \ 000 \times 10^3}} \approx 3,08 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2) Si \vec{F} dérive d'une énergie potentielle, on a :

$$\begin{aligned} \vec{F}(r) &= -\frac{dE_p}{dr}\vec{e}_r \\ -\frac{GM_T m}{r^2} &= -\frac{dE_p}{dr} \\ E_p &= -\frac{GM_T m}{r} + \text{cte.} \end{aligned}$$

Or $\mathcal{E}_p \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$, donc cte = 0.

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{\mathbf{GM_T}m}{r}.$$

3) $\mathcal{E}_m(M) = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$

$$\mathcal{E}_m(M) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathbf{GM_T}m}{r} = \frac{1}{2}m\frac{\mathbf{GM_T}}{r} - \frac{\mathbf{GM_T}m}{r} = -\frac{\mathbf{GM_T}m}{2r};$$

• sur l'orbite circulaire de rayon r_1 :

$$\mathcal{E}_{m_1} = -\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times 1\,000}{2 \times 6\,500 \times 10^3}$$

$$\mathcal{E}_{m_1} = -3,06 \cdot 10^{10} \text{ J};$$

• sur l'orbite circulaire de rayon r_2 :

$$\mathcal{E}_{m_2} = -4,74 \cdot 10^9 \text{ J};$$

4) En passant d'une orbite à l'autre, la variation d'énergie mécanique vaut :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_2} - \mathcal{E}_{m_1} = 2,59 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

D'après le TEM, il va donc falloir fournir de l'énergie au satellite si on veut le transférer sur une orbite ($r = r_2$) plus haute.

Exercices de niveau 2

Exercice 5

1) La puissance motrice s'écrit donc :

$$\mathcal{P} = 2(60 - v)v^2.$$

On cherche la puissance maximum et la vitesse associée ; on calcule donc :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dv} = 0 \Rightarrow 2[-v^2 + (60 - v) \times 2v] = 0$$

$$\Rightarrow 2[-3v + 120]v = 0$$

ce qui donne $v = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ soit : $v \approx 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,

à cette vitesse la puissance (maximum) du véhicule est :

$$\mathcal{P}_{\max} = 2(60 - 40) \times 40^2, \text{ soit } \mathcal{P}_{\max} = 64\,000 \text{ W}$$
$$\mathcal{P}_{\max} = 64 \text{ kW}.$$

Remarque : cette puissance correspond en ch à :

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{64}{0,737} = 86,8 \text{ ch}.$$

2) Appliquons le TPC.

• **Système étudié** : point matériel G(m) se déplaçant à la vitesse $v(G)|_{\mathcal{R}_g} = v\vec{e}_x$.

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Forces appliquées** :

- poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$;

- réaction du sol $\vec{N} = N\vec{e}_y$;

- force motrice $\vec{T} = T\vec{e}_x$;

- force de frottement $\vec{F} = -F\vec{e}_x$.

- Expression des puissances :

$$\mathcal{P}(\vec{P})\Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} \cdot \vec{v}(G)\Big|_{\mathcal{R}_g} = 0 \quad (\vec{P} \perp \vec{v})$$

$$\mathcal{P}(\vec{N})\Big|_{\mathcal{R}_g} = 0 \quad (\vec{N} \perp \vec{v})$$

$$\mathcal{P}(\vec{T})\Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{T} \cdot \vec{v}(G)\Big|_{\mathcal{R}_g} = 2 \times (60 - v)v^2$$

$$\mathcal{P}(\vec{F})\Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F} \cdot \vec{v}(G)\Big|_{\mathcal{R}_g} = -(450 + 0,4v^2)v.$$

- Le TPC s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 2(60 - v)v^2 - (450 + 0,4v^2)v.$$

On cherche la vitesse maximum c'est-à-dire quand $\frac{dv}{dt} = 0$.

L'équation du TPC s'écrit :

$$0 = \frac{1}{2}m2v \frac{dv}{dt} = [2(60 - v)v - 450 - 0,4v^2]v \quad \text{soit} \quad 120v - 2v^2 - 450 = 0,4v^2.$$

$$2,4v^2 - 120v + 450 = 0 \quad \text{soit} \quad v = 45,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(en ne conservant que la plus grande des deux valeurs possibles)

ou encore : $v \approx 165,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

3) On cherche désormais l'accélération maximum, on a alors : $\frac{da}{dt} = 0$, soit $\frac{d^2v}{dt^2} = 0$.

Or d'après l'équation du TPC ; on a :

$$mv \frac{dv}{dt} = (-2,4v^2 + 120v - 450)v \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(-2,4v^2 + 120v - 450)$$

$$\text{en dérivant } \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{m}\left(-4,8v \frac{dv}{dt} + 120 \frac{dv}{dt}\right) = \frac{1}{m} \frac{dv}{dt}(-4,8v + 120) = 0,$$

$$\text{soit} \quad -4,8v + 120 = 0, \quad \text{d'où} \quad v = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$v \approx 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

On en déduit alors l'accélération maximum :

$$a_{\max} = \frac{1}{m}(-2,4v^2 + 120v - 450) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ m = 1300 \text{ kg} \end{cases}$$

$$a_{\max} = 0,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Exercice 6

On va appliquer le TEC entre les points A et B à un colis afin d'évaluer le travail de la force de frottement nécessaire au bon fonctionnement du système.

- **Système étudié** : un colis M (masse m).

- **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- **Forces appliquées** :

- poids $\vec{P} = mg$;

- réaction du plan incliné $\vec{R} = N\vec{e}_y - T\vec{e}_x$

comme il y a glissement du colis sur le plan incliné, $T = fN$;

- calcul des travaux des forces entre A et B :

$$\mathbb{W}(\vec{P})\Big|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B) = mgh \quad (> 0)$$

$$W(\vec{R}) \Big|_{\mathcal{R}_g} = -T \times \frac{h}{\sin \alpha} = -f N \frac{h}{\sin \alpha} \quad (< 0).$$

⚠️ N ne travaille pas car N est toujours ⊥ au déplacement.

• Le TEC s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(B) \Big|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(A) \Big|_{\mathcal{R}_g} &= W(\vec{P}) \Big|_{\mathcal{R}_g} + W(\vec{R}) \Big|_{\mathcal{R}_g} \\ \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 &= mgh - fN \frac{h}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

On a encore une inconnue (N) dans cette équation. On va appliquer le PFD afin de la calculer.

• Le PFD projeté sur \vec{e}_y donne :

$$\begin{aligned} m\vec{a}(M) \Big|_{\mathcal{R}_g} \cdot \vec{e}_y &= (\vec{P} + \vec{R}) \cdot \vec{e}_y \\ \text{pas de mvt. } \xrightarrow[\text{selon } \vec{e}_y]{\longrightarrow} 0 &= mg \cdot \vec{e}_y + N \end{aligned}$$

soit $0 = mg \cos(\pi - \alpha) + N$ ou encore $0 = -mg \cos \alpha + N$

$$N = mg \cos \alpha.$$

À l'aide des deux dernières relations et en remplaçant N :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh - fm \frac{h \cos \alpha}{\sin \alpha} = mgh \left(1 - \frac{f}{\tan \alpha} \right)$$

soit :

$$\tan \alpha = \frac{f}{1 - \frac{v_B^2 - v_A^2}{2gh}}.$$

💡 L'unité de $\frac{f}{1 - \frac{v_B^2 - v_A^2}{2gh}}$ est $\frac{1}{(m \cdot s^{-1})^2} = \frac{1}{m \cdot s^{-2} \times m}$; le résultat est sans dimension, ce qui est homogène à $\tan \alpha$.

$$\text{A.N. } \tan \alpha = \frac{0,4}{1 - \frac{0,2^2 - 0,5^2}{2 \times 9,81 \times 1,5}} \approx 0,398, \quad \alpha \approx 21,7^\circ.$$

Exercice 7

1) Phase 1 : plan incliné

On va appliquer le TPC au point M dans le référentiel \mathcal{R}_g .

• **Système étudié** : l'enfant et sa luge assimilés au point matériel M(m).

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(B; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

• **Bilan des forces appliquées au point M** :

- poids $\vec{P} = mg$;

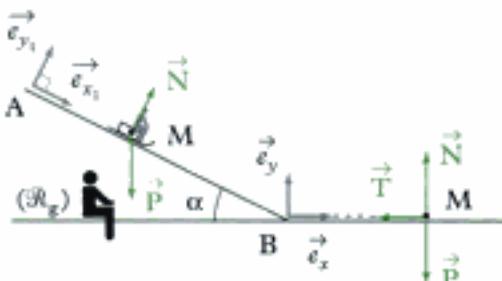
- réaction de la piste $\vec{N} = N \vec{e}_{y_1}$

($\vec{N} \perp$ piste car il n'y a aucun frottement).

• **Puissances de forces**

Comme on a posé : $\vec{AM} = x_1 \vec{e}_{x_1}$, on obtient la vitesse de M pendant cette phase :

$$\vec{v}(M) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \dot{x}_1 \vec{e}_{x_1}.$$



Ainsi :

- puissance du poids : $\mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = mg \dot{x}_1 \sin \alpha$;

- puissance de la réaction : $\mathcal{P}(\vec{N})|_{\mathcal{R}_g} = \vec{N} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = 0$.

Appliquons le TPC au point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R}_g .

L'énergie cinétique de M est : $\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2$.

Le TPC donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c|_{\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{N})|_{\mathcal{R}_g} \text{ soit } m \ddot{x}_1 \dot{x}_1 = mg \dot{x}_1 \sin \alpha,$$

en éliminant la solution parasite $\dot{x}_1 = 0$ et en simplifiant par m , on obtient :

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha.$$

Afin de déterminer la vitesse en B et la durée de cette phase, il est nécessaire d'intégrer deux fois l'équation différentielle précédente : $\dot{x}_1 = g \sin \alpha t + \dot{x}_1(0)$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + x_1(0) \\ &\quad \parallel \\ &\quad 0 \end{aligned}$$

La durée t_1 de cette phase est donc obtenue en résolvant l'équation :

$$L = \frac{1}{2} g \sin \alpha t_1^2 \text{ soit } t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \alpha}}.$$

La vitesse en B est : $v = \dot{x}_1(t_1) = g \sin \alpha t_1$

$$v = g \sin \alpha \sqrt{\frac{2L}{g \sin \alpha}} = \sqrt{2L g \sin \alpha}.$$

 Unité de $\sqrt{\frac{2L}{g \sin \alpha}}$: $(m \times m^{-1} \cdot s^{-2})^{1/2} = s$ (homogène à un temps) ;

unité de $\sqrt{2L g \sin \alpha}$: $(m \times m \cdot s^{-2})^{1/2} = m \cdot s^{-1}$ (homogène à une vitesse).

2) Phase 2 : partie horizontale

On va encore appliquer le TPC au point M dans le référentiel \mathcal{R}_g .

• **Système étudié** : point matériel M(m).

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(B; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

• **Bilan des forces appliquées au point M** :

- poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_y$;

- réaction normale de la piste $\vec{N} = N \vec{e}_y$;

- réaction tangentielle de la piste (force de frottement) $\vec{T} = -T \vec{e}_x$ ($T > 0$ car la vitesse de M est dirigée selon \vec{e}_x) :

avec $\begin{cases} T = fN & \text{s'il y a glissement} \\ T < fN & \text{sinon.} \end{cases}$

Comme il n'y a pas de mouvement selon \vec{e}_y , le PFD projeté sur \vec{e}_y donne :

$$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0} \text{ soit } N = mg.$$

Ainsi $\vec{T} = -fmg \vec{e}_x$ pendant toute la phase de freinage ;

• Puissance des forces

La vitesse de M s'écrit $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$, ainsi :

- la puissance du poids est $\mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_g} = 0$;
- la puissance de la réaction normale est $\mathcal{P}(\vec{N})|_{\mathcal{R}_g} = 0$;
- la puissance de la réaction tangentielle est :

$$\mathcal{P}(\vec{T})|_{\mathcal{R}_g} = \vec{T} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = -fmg\dot{x}.$$

L'énergie cinétique du point M pendant cette phase est : $\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$;

- le TPC appliquée au point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R}_g donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c|_{\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{N})|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{T})|_{\mathcal{R}_g}$$

ainsi : $m\dot{x}\ddot{x} = -fmg\dot{x}$;

en éliminant la solution parasite $\dot{x} = 0$ et en simplifiant par m , on obtient : $\ddot{x} = -fg$.

Ainsi, si on suppose que cette 2^e phase a débuté à $t = 0$ (changement d'origine des temps),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -fgt + \dot{x}(0) \\ &\quad \parallel \\ &= v \end{aligned}$$

et

$$x = -fg\frac{t^2}{2} + vt + x(0)$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$0$$

La vitesse $\dot{x}(t)$ s'annule au bout d'un temps t_2 vérifiant : $0 = -fgt_2 + v$

$$t_2 = \frac{v}{fg} = \frac{\sqrt{2Lg\sin\alpha}}{fg} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{2L\sin\alpha}{g}}$$

 Unité de $\frac{v}{fg}$: $(m \cdot s^{-1}) \times (m \cdot s^{-2})^{-1} = s$ (homogène à t_2).

La distance d'arrêt est :

$$\begin{aligned} D &= x(t_2) = -\frac{fg}{2} \times \frac{2L\sin\alpha}{f^2g} + \sqrt{2Lg\sin\alpha} \times \frac{1}{f} \times \sqrt{\frac{2L\sin\alpha}{g}} \\ &= \frac{L\sin\alpha}{f}. \end{aligned}$$

3) La durée totale (des 2 phases) est :

$$T = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha}} + \frac{1}{f}\sqrt{\frac{2L\sin\alpha}{g}}.$$

Exercice 8

1) Pour déterminer la vitesse au passage à la verticale, nous allons utiliser le théorème de l'énergie mécanique (TEM).

• **Système étudié** : bille assimilée à un point matériel M de masse m .

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Bilan des forces appliquées au point matériel M(m)** :

- poids $\vec{P} = m\vec{g}$;

- tension du fil \vec{T} .

Travaux et énergie potentielle des forces appliquées :

- $\mathcal{E}_{p_p} = mg\ell(1 - \cos\theta)$ pour le poids ;
 - la tension du fil \vec{T} ne travaille pas puisqu'elle est toujours perpendiculaire au déplacement.
 - TEM : $\mathcal{E}_m = \text{cte}$ (il n'y a que des forces conservatives ou qui ne travaillent pas)
- donc $\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(t=0)$, d'où $\mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_{p_p}(t) = \mathcal{E}_c(t=0) + \mathcal{E}_{p_p}(t=0)$ et :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\ell(1 - \cos\theta) = 0 + mg\ell(1 - \cos\theta_0),$$

au passage à la verticale : $\theta = 0$; ainsi :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\ell(1 - \cos\theta_0) \quad \text{soit} \quad v_0 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}.$$

2) Dans cette seconde phase, le pendule se trouve du côté droit ; nous allons appliquer à nouveau le TEM au même système, dans le même référentiel.

Le système est toujours conservatif (les forces sont toujours les mêmes), ainsi :

$$\mathcal{E}_m(t) = \text{cte}$$

$$\mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_{p_p}(t) = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mg\ell_0(1 - \cos\beta) = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

L'angle β_{\max} est atteint lorsque $v = 0$:

$$mg\ell_0(1 - \cos\beta_{\max}) = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{soit} \quad \cos\beta_{\max} = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell_0},$$

soit en remplaçant v_0 par son expression :

$$\cos\beta_{\max} = 1 - \frac{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}{2g\ell_0} = 1 - \frac{\ell}{\ell_0}(1 - \cos\theta_0)$$

ou encore :

$$\beta_{\max} = \arccos[1 - r(1 - \cos\theta_0)].$$

3) La courbe représentative de $r \mapsto \beta_{\max}(r)$ a l'allure suivante :



On peut remarquer que l'équation précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\ell_0(1 - \cos\beta_{\max}) = \ell(1 - \cos\theta_0).$$

Ce qui montre que la bille remonte à la même hauteur que sa hauteur initiale.

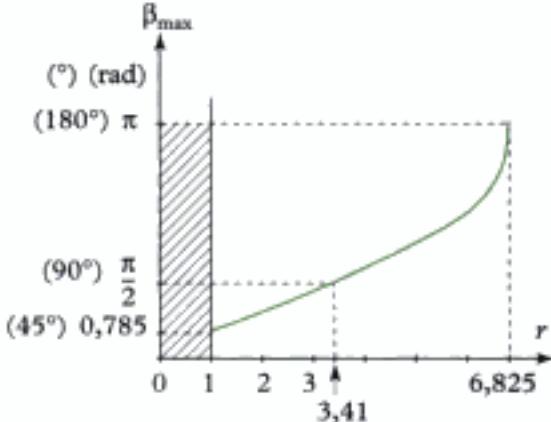
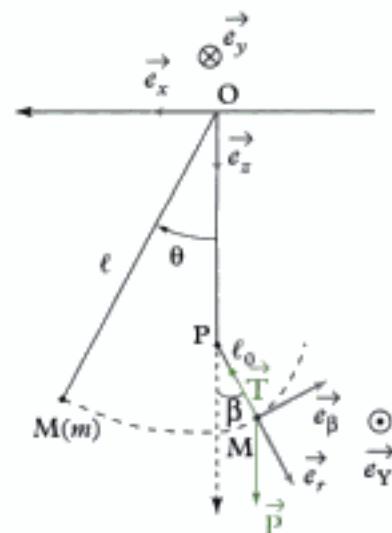
Par exemple, lorsque $r = 1$, c'est-à-dire lorsque $\ell = \ell_0$, le pendule remonte à une position angulaire 45° , exactement à la même altitude que celle initiale. On ne peut pas dépasser $r = 6,828$ car sinon, il n'y a plus assez de fil pour réaliser la condition précédente (ℓ_0 trop petit). La valeur limite vérifie l'équation : $2\ell_0 = \ell(1 - \cos\theta_0)$.

4) Afin de déterminer la tension du fil, appliquons le PFD au point matériel $M(m)$ dans le référentiel \mathcal{R}_g .

$$m \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{T}.$$

Or dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\beta, \vec{e}_Y)$, on a :

$$\vec{PM} = \ell_0 \vec{e}_r, \quad \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \ell_0 \dot{\beta} \vec{e}_\beta \quad \text{et} \quad \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \ell_0 \ddot{\beta} \vec{e}_\beta - \ell_0 \dot{\beta}^2 \vec{e}_r.$$



Ainsi le PFD s'écrit :

$$m(\ell_0 \ddot{\beta} \vec{e}_\beta - \ell_0 \dot{\beta}^2 \vec{e}_r) = mg \cos \beta \vec{e}_r - mg \sin \beta \vec{e}_\beta - T \vec{e}_r,$$

en projection sur \vec{e}_r :

$$-m\ell_0 \dot{\beta}^2 = mg \cos \beta - T.$$

Au passage à la position extrême, la vitesse de M est nulle soit $\ell_0 \dot{\beta} = 0$ c'est-à-dire $\dot{\beta} = 0$

et $T = mg \cos \beta$.

T s'annule donc si $\beta_{\max} = \frac{\pi}{2}$ rad ; de plus $T < 0$ si $\beta_{\max} > \frac{\pi}{2}$ rad.

Ainsi les seules positions pour lesquelles le fil reste tendu sont celles pour lesquelles $x < 3,41$

soit $\frac{\ell}{\ell_0} < 3,41$ soit encore :

$$\ell_0 > 29,3 \text{ cm}.$$

Exercice 9

1) Le mouvement se décompose en deux phases : la première pendant laquelle la bille est en contact avec le ressort (qui l'accélère), la seconde pendant laquelle la bille suit le guide (sans frottement), sous l'action de son poids seul.

Déterminons dans un premier temps, la vitesse de la bille au moment où le contact se rompt avec le ressort (lorsque la longueur du ressort est ℓ_0).

• **Système étudié** : bille assimilée à un point matériel M(m).

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Bilan des forces appliquées** :

– poids $\vec{P} = mg$;

– réaction du support \vec{N} (\perp support) ;

– force de rappel élastique du ressort \vec{F}_ℓ .

La réaction du support ne travaille pas car on a négligé les frottements. Le poids dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{P_g} = mgh = mgx \sin \alpha$ (h altitude de M au-dessus de O). La force de rappel élastique \vec{F}_ℓ

dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{P_\ell} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$ (x est la longueur du ressort).

• **TEM** :

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{P_g} + \mathcal{E}_{P_\ell} = \text{cte} = \mathcal{E}_m(t=0)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx \sin \alpha + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 = 0 + mgx_0 \sin \alpha + \frac{1}{2}k(x_0 - \ell_0)^2,$$

lorsque $x = \ell_0$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg\ell_0 \sin \alpha = +mgx_0 \sin \alpha + \frac{1}{2}k(x_0 - \ell_0)^2$$

soit

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0 - \ell_0)^2 + 2g(x_0 - \ell_0) \sin \alpha}.$$

 $\sqrt{\frac{k}{m}(x_0 - \ell_0)^2 + 2g(x_0 - \ell_0) \sin \alpha}$ a comme unité $\sqrt{\frac{\text{N} \cdot \text{m}^{-1}}{\text{kg}} \times \text{m}^2 + \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ homogène à v_0 .

Exprimons alors la position x_1 de la bille au moment où sa vitesse s'annule : identique à la phase précédente.

• **Forces appliquées :**

- poids \vec{P} ;
- réaction du support \vec{N} .
- $W(\vec{N}) = 0$ et $E_{P_p} = mgx \sin \alpha$.

$$\bullet \text{TEM : } E_c + E_{P_p} = \text{cte}, \text{ d'où } \frac{1}{2}mv^2 + mgx \sin \alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\ell_0 \sin \alpha.$$

$$\bullet \text{Lorsque } v = 0, x = x_1 \text{ donc : } x_1 g \sin \alpha = \frac{v_0^2}{2} + g\ell_0 \sin \alpha$$

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} + \ell_0.$$

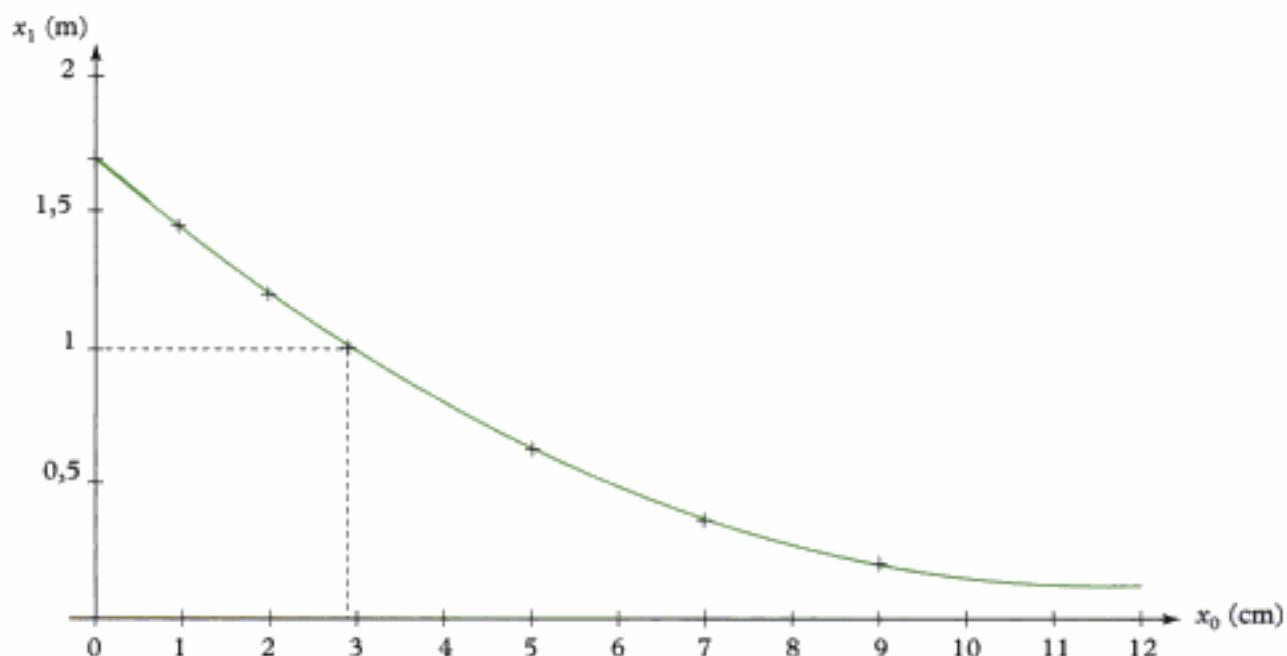
soit en tenant compte de l'expression de v_0 :

$$x_1 = \frac{2g(x_0 - \ell_0) \sin \alpha + \frac{k}{m}(x_0 - \ell_0)^2}{2g \sin \alpha} + \ell_0 = x_0 - \ell_0 + \frac{k(x_0 - \ell_0)^2}{2mg \sin \alpha} + \ell_0,$$

$$\text{soit : } x_1 = x_0 + \frac{k(x_0 - \ell_0)^2}{2mg \sin \alpha}$$

 $\frac{k(x_0 - \ell_0)^2}{2mg \sin \alpha}$ a comme unité $\frac{\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \times \text{m}^2}{\text{kg} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{\text{N}}{\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m}$ ce qui est homogène à x_0 et x_1 .

2) La courbe représentative est :



Par lecture graphique, on lit que pour avoir $x_1 = 1$ m (sommet du guide), il faut $x_0 = 2,9$ cm.

 On aurait pu résoudre l'équation du second degré donnant x_0 .

Exercice 10

- 1) Les différentes trajectoires de phase se rapprochent de l'axe horizontal (sauf pour les séparatrices) : la vitesse angulaire finit par s'annuler ; il y a donc des frottements qui entraînent une diminution de l'énergie mécanique du système au cours du temps.



Le sens de parcours est :

- de gauche à droite pour $\dot{\theta} > 0$;
- de droite à gauche pour $\dot{\theta} < 0$.

- 2) Les trajectoires de phase (exceptées les séparatrices) se terminent toutes sur une position d'équilibre stable : $\theta = \dots, 0, 2\pi, \dots$ rad sont les positions d'équilibre stable ; les points ..., (0, 0), (2 π , 0), ... sont des points **attracteurs**.

Les points $(-\pi, 0)$; $(\pi, 0)$; ... sont les points d'équilibre instable.

- 3) La trajectoire ① montre la présence d'une révolution complète du pendule, avant d'osciller et de se stabiliser (θ part de $-\pi$ rad et se stabilise à $\theta = 2\pi$ rad).

La trajectoire ⑥ ne montre aucune révolution.

Les séparatrices sont les courbes ②, ③, ④ et ⑤ : une fois une trajectoire de phase entrée dans « l'œil » limité par les séparatrices ② et ④, elle n'en sort plus et se stabilise sur la seule position d'équilibre stable se trouvant à l'intérieur ($\theta = 0$ rad).



Ces séparatrices ont été tracées dans le cas où il n'y a pas de frottement ; c'est pour cela que des trajectoires de phase semblent se couper, ce qui est contraire au principe d'évolution unique d'un système (à CI fixées).

Exercice 11

- 1) Position d'équilibre

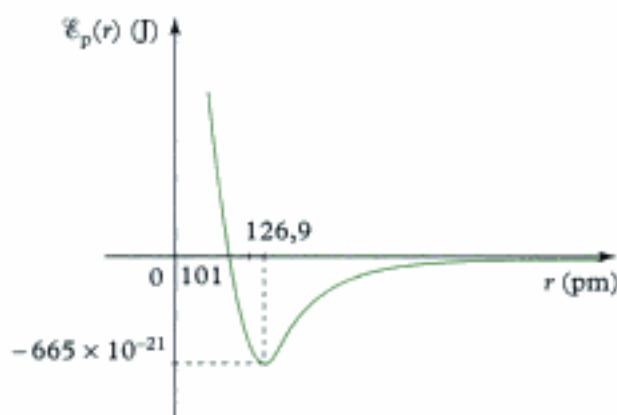
• **Système étudié** : atome M assimilé à un point matériel de masse m .

• **Référentiel galiléen d'étude** : \mathcal{R}_g .

• **Forces dérivant d'une énergie potentielle** :

$$\mathcal{E}_p = \frac{C}{r^{12}} - \frac{K}{r}$$

Pour déterminer les positions d'équilibre, on trace la courbe $r \mapsto \mathcal{E}_p(r)$.



La courbe présente un minimum en $r_0 = 126,9 \times 10^{12}$ m.

Il s'agit d'une position d'équilibre stable.

Par le calcul, on cherche les extrema d'énergie potentielle en résolvant l'équation : $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r_0) = 0$.

Or $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -\frac{12C}{r^{13}} + \frac{K}{r^2}$ donc $-\frac{12C}{r_0^{13}} = -\frac{K}{r_0^2} \Rightarrow r_0^{11} = \frac{12C}{K}$, soit :

$$r_0 = \left(\frac{12C}{K}\right)^{\frac{1}{11}}.$$

 Unité de $\left(\frac{12C}{K}\right)^{\frac{1}{11}} : \left(\frac{J \cdot m^{12}}{J \cdot m}\right)^{\frac{1}{11}} = m$ homogène à r_0 .

A.N. $r_0 \approx 126,9 \times 10^{-12} \text{ m}$.

Pour savoir si cette position d'équilibre est stable, on cherche $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}\right)(r_0)$:

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2} = \frac{12 \times 13C}{r^{14}} - \frac{2K}{r^3} \quad \text{donc} \quad \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_0) = 495,5 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} > 0.$$

Comme $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_0)$ est positif, la position d'équilibre est stable.

2) L'énergie de dissociation est l'énergie qu'il faut fournir à la molécule HCl pour que l'atome H part à l'infini, soit :

$$\mathcal{E}_d = -\mathcal{E}_p(r_0) = 665 \times 10^{-21} \text{ J}$$

soit encore :

$$\mathcal{E}_d = 4,16 \text{ eV.}$$

3) En posant $r = r_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll r_0$), on effectue un développement limité de la fonction $\mathcal{E}_p(r)$ autour de r_0 afin de ne considérer que les mouvements de faible amplitude (ε) autour de r_0 :

$$\mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}_p(r_0) + (r - r_0) \frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r_0) + \frac{(r - r_0)^2}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_0) = \mathcal{E}_p(r_0) + \frac{k}{2}\varepsilon^2.$$

En effet : $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r_0) = 0$ (on pose : $k = \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_0)$).

On a :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_p(r_0) + \frac{k}{2}\varepsilon^2.$$

On a : $v = \dot{r} = \dot{\varepsilon}$.

Or $\mathcal{E}_m = \text{cte}$ donc $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$, soit $m\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} + k\dot{\varepsilon}\varepsilon = 0$.

En éliminant la solution parasite $\dot{\varepsilon} = 0$ et en divisant par m , on obtient : $\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon = 0$.

On obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (oscillation sinusoïdale) dont la pulsation est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f_0.$$

La fréquence des oscillations est donc :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

A.N. $f_0 = 87 \times 10^{12} \text{ Hz}$.

 Cette fréquence correspond à une longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 3,45 \mu\text{m}$ ce qui correspond au domaine de l'infrarouge.

Exercices de niveau 3

Exercice 12



- 1) a) On cherche à calculer la vitesse en un point donné (le point C) connaissant la vitesse en un autre point (A) : v_A .
→ Voir méthode 2.

On applique donc le TEC au point matériel M par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g entre les positions A et C.

• Forces appliquées au système :

- poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$;
- réaction du support \vec{N} (\perp support car pas de frottements).

• Travaux des forces :

$$W(\vec{P})|_{\mathcal{R}_g} = -(\mathcal{E}_{p_g}(C) - \mathcal{E}_{p_g}(A)) = -(mg \times 2R) = -2Rmg.$$



Le travail du poids est négatif, ce qui est logique car le poids est résistant dans le déplacement de A vers C (de B vers C).

$$W(\vec{N})|_{\mathcal{R}_g} = 0.$$



\vec{N} est à tout instant \perp au support. Le déplacement est à tout instant // au support. \vec{N} est donc à tout instant \perp au déplacement.



On voit ici tout l'intérêt des méthodes énergétiques puisque entre A et C, même si la direction de \vec{N} évolue beaucoup, les calculs restent simples car \vec{N} reste toujours \perp au déplacement.

• TEC entre A et C :

$$\mathcal{E}_c(C)|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(A)|_{\mathcal{R}_g} = W(\vec{P})|_{\mathcal{R}_g} + W(\vec{N})|_{\mathcal{R}_g}, \text{ soit } \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -2Rmg + 0 \text{ soit } v_C^2 = v_A^2 - 4gR.$$

Si on suppose $v_A > 2\sqrt{gR}$, on a :

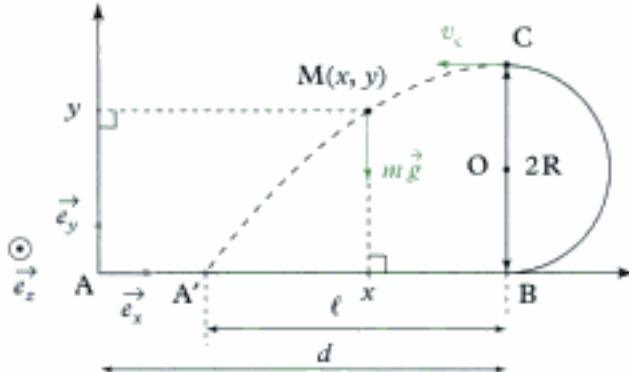
$$v_C = \sqrt{v_A^2 - 4gR} \quad (1)$$



Comme v_C et v_A sont en $m \cdot s^{-1}$, g en $m \cdot s^{-2}$ et R en m, cette expression est homogène.

b) Une fois le point C franchi, la balle décolle et retombe sur le sol horizontal.

Il s'agit d'un problème de chute libre (voir chapitre 2). On applique le PFD :



- Système étudié : balle assimilée à un point matériel M de masse m ; point M(x, y).
- Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(A ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Force(s) appliquée(s) au système :

– poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mge_y$.

• Le PFD s'écrit : $m\vec{a}(M)|_{R_g} = \vec{P}$.

– Vecteur position $\overrightarrow{AM} = xe_x + ye_y$;

– vecteur vitesse $\vec{v}(A)|_{R_g} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$;

 \vec{e}_x, \vec{e}_y fixe dans R_g , donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{R_g} = \vec{0}$ et $\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{R_g} = \vec{0}$.

– vecteur accélération $\vec{a}(M)|_{R_g} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$;

le PFD donne donc :

$$m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y) = -mge_y.$$

 Le PFD donne une relation vectorielle.

On va projeter cette relation sur \vec{e}_x et \vec{e}_y :

$$\bullet \vec{e}_x \cdot [m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y)] = \vec{e}_x \cdot [-mge_y] \text{ soit } m\ddot{x} = 0 \text{ ou :} \\ \ddot{x} = 0 \quad (2)$$

 $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1.$

$$\bullet \vec{e}_y \cdot [m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y)] = \vec{e}_y \cdot [-mge_y] \text{ soit } m\ddot{y} = -mg, \\ \ddot{y} = -g \quad (3)$$

On connaît la hauteur de chute ($2R$), on intègre donc deux fois l'équation (3) :

$$\dot{y} = -gt + \text{cte}_1.$$

À $t = 0$ (au point C), $\dot{y}(t = 0) = 0$ donc $\text{cte}_1 = 0$ et :

$$y = -g\frac{t^2}{2} + \text{cte}_2.$$

À $t = 0$ (au point C), $y(t = 0) = 2R$ donc $\text{cte}_2 = 2R$ et :

$$y = -g\frac{t^2}{2} + 2R.$$

 Ne pas oublier les conditions initiales.

On en déduit donc la durée de chute T pour arriver jusqu'au sol ($y = 0$) :

$$0 = -\frac{gT^2}{2} + 2R$$

$$T = \sqrt{4\frac{R}{g}} \quad (4)$$

 Comme T est en s, R en m et g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, cette expression est homogène.

On veut déterminer la distance horizontale parcourue ℓ , on va donc intégrer deux fois l'équation (2) :

$$\ddot{x} = 0, \text{ donc } \dot{x} = \text{cte}_3.$$

À $t = 0$ (au point C), $\dot{x}(t = 0) = -v_C$ donc $\text{cte}_3 = -v_C$ et l'on a : $x = -v_C t + \text{cte}_4$

À $t = 0$, $x(t = 0) = d$ donc $\text{cte}_4 = d$, d'où $x = -v_C t + d$, soit :

$$d - x = v_C t.$$

 $d - x$ représente la distance horizontale parcourue à tout instant (depuis le point C).

La longueur ℓ cherchée correspond à cette distance horizontale parcourue à l'instant où la balle touche le sol (en A') quand $t = T$:

$$\ell = v_C T, \text{ soit } \ell = v_C \times \sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

 Comme v_C est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, R en m et g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, ℓ en m, cette expression est homogène.

c) La vitesse v_{A_0} requise correspond à : $\ell = d = 3R$ (la balle retombe en A).

D'après 1) a) et 1) b) :

$$v_C \sqrt{\frac{4R}{g}} = d = 3R, \text{ d'où } \sqrt{v_{A_0}^2 - 4gR} \sqrt{\frac{4R}{g}} = 3R.$$

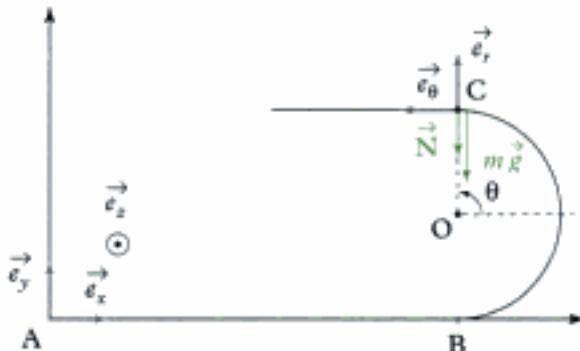
En élévant au carré : $(v_{A_0}^2 - 4gR) \frac{4R}{g} = 9R^2$ soit $v_{A_0}^2 = \frac{25}{4}gR$, donc :

$$v_{A_0} = \frac{5}{2} \sqrt{gR}.$$

 Comme v_{A_0} est $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et R en m cette expression est homogène.

2) La balle doit rester en contact jusqu'au point C ; on va donc calculer la vitesse minimum nécessaire en C pour que cela soit possible.

 Le contact existe si la réaction du support n'est pas nulle.



Appliquons le PFD dans la position C.

- **Système étudié** : la balle.
- **Référentiel galiléen d'étude** : \mathcal{R}_g .
- **Forces appliquées** :
 - poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_y$;
 - réaction $\vec{N} = -N \vec{e}_y$;

- Le PFD s'écrit : $m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{N}$.
- vecteur position $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$;
- vecteur vitesse $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$;
- vecteur accélération $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$
(au point C) $= R\ddot{\theta}(-\vec{e}_x) - R\dot{\theta}^2(\vec{e}_y)$

 Au point C, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad donc $\vec{e}_r = -\vec{e}_y$ et $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_x$.

le PFD donne donc en C :

$$m\left(R\ddot{\theta}(-\vec{e}_x) - R\dot{\theta}^2(\vec{e}_y)\right) = -mg\vec{e}_y - N\vec{e}_y.$$

En projection sur \vec{e}_y :

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg - N, \text{ soit } N = mR\dot{\theta}^2 - mg.$$

$$N = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\right).$$

 En C : $v_C = R\dot{\theta}$ donc $\dot{\theta} = \frac{v_C}{R}$.

Pour que le contact soit possible, il faut $N > 0$:

$$v_C > \sqrt{gR}.$$

On peut, pour cette valeur minimum de v_C , calculer la distance horizontale parcourue ℓ pendant la chute libre : (question 1) b)) :

$$\ell = v_C \sqrt{\frac{4R}{g}}, \text{ soit } \ell = \sqrt{Rg} \sqrt{\frac{4R}{g}} = 2R.$$

Ainsi pour que le jeu puisse être réussi, il faut que $d > d_{\min} = 2R$, soit :

$$d_{\min} = 2R.$$

Exercice 13

1) p est le pas de l'hélice : c'est la distance verticale parcourue par le baigneur en 1 tour de toboggan.

Pour 1 tour, le baigneur parcourt :

- une distance horizontale égale à $2\pi R$;
- une distance verticale égale à p donc :

$$\tan \alpha = \frac{p}{2\pi R} \Rightarrow p = 2\pi R \tan \alpha.$$

Par ailleurs $h_0 = np$, donc :

$$\tan \alpha = \frac{h_0}{2\pi n R}.$$

$$\text{A.N. } \tan \alpha = \frac{5}{2\pi \times 2,5 \times 2} \quad \alpha \approx 9^\circ.$$

2) Appliquons le TPC au baigneur M(m) par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

 Voir méthode 1.

• Forces appliquées au système :

- poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$;
- réaction du toboggan \vec{N} (\perp au toboggan à tout instant car pas de frottement).

• Puissances des forces :

$$\mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_t} = \vec{P} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_t}.$$

Or le vecteur position est : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = R\cos\theta\vec{e}_x + R\sin\theta\vec{e}_y + \frac{p}{2\pi}\theta\vec{e}_z$

donc $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_t} = -R\sin\theta\dot{\theta}\vec{e}_x + R\cos\theta\dot{\theta}\vec{e}_y + \frac{p}{2\pi}\dot{\theta}\vec{e}_z$.

\vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z sont alignés par rapport à \mathcal{R}_t .

Ainsi : $\mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_t} = -mg\vec{e}_z \cdot \left(-R\sin\theta\dot{\theta}\vec{e}_x + R\cos\theta\dot{\theta}\vec{e}_y + \frac{p}{2\pi}\dot{\theta}\vec{e}_z \right) = -mg\frac{p}{2\pi}\dot{\theta}$.

$\dot{\theta} < 0$ donc $\mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_t} > 0$: \vec{P} est motrice ce qui est normal.

$\mathcal{P}(\vec{N})|_{\mathcal{R}_t} = 0$ car à tout instant $\vec{N} \perp \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_t}$.

• Le TPC s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2(M)|_{\mathcal{R}_t} \right) = \mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_t} + \mathcal{P}(\vec{N})|_{\mathcal{R}_t}.$$

Or $v^2(M)|_{\mathcal{R}_t} = \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_t} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_t} = \left[R^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + R^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\dot{\theta}^2 \right] = \left[R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2} \right]\dot{\theta}^2$

soit : $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m \left(R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2} \right) \dot{\theta}^2 \right) = -mg\frac{p}{2\pi}\dot{\theta}$, d'où $\frac{1}{2}m \left(R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2} \right) \ddot{\theta} = -mg\frac{p}{2\pi}\dot{\theta}$; donc :

$$\ddot{\theta} = -g \frac{\frac{p}{2\pi}}{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}.$$

Or $p = 2\pi R \tan \alpha$, donc :

$$\ddot{\theta} = -g \frac{R \tan \alpha}{R^2 + R^2 \tan^2 \alpha} = -\frac{g}{R} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

Comme $\ddot{\theta}$ est en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$ (rad : unité sans dimension) g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et R en m , cette expression est homogène.

3) Pour trouver le temps de glissade, il faut intégrer deux fois l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g}{R} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} t + \text{cte}_1.$$

À $t = 0$ (au point D), le baigneur n'a pas de vitesse donc $\dot{\theta}(t = 0) = 0$ donc $\text{cte}_1 = 0$.

$$\theta = -\frac{g}{R} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \frac{t^2}{2} + \text{cte}_2.$$

À $t = 0$ (au point D), $z(t = 0) = h_0 = np = \frac{\theta(t = 0)}{2\pi} \times 2\pi R \tan \alpha$, soit :

$$\theta(t = 0) = \frac{h_0}{R \tan \alpha} = \text{cte}_2$$

donc : $\theta(t) = -\frac{g}{R} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \frac{t^2}{2} + \frac{h_0}{R \tan \alpha}$.

Le baigneur arrive en F quand $\theta(t = T) = 0$ soit :

$$0 = -\frac{g}{R} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \frac{T^2}{2} + \frac{h_0}{R \tan \alpha}$$

$$\frac{T^2}{2} = \frac{h_0}{g} \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha}$$

$$T^2 = \frac{2h_0}{g} \frac{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2h_0}{g} \times \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

on a donc :

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g \sin^2 \alpha}}.$$

$$\text{A.N. } T = \sqrt{\frac{2 \times 5}{9,8 \times \sin^2(9^\circ)}} = 6,5 \text{ s.}$$



La valeur est faible car les frottements n'ont pas été pris en compte.

4) Méthode 1 : on utilise l'expression de $\dot{\theta}$ pour $t = T$:

$$\dot{\theta} = -\frac{g}{R} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} t \quad \text{avec } t = T = \sqrt{\frac{2h_0}{g \sin^2 \alpha}}.$$

$$\text{Ainsi : } \dot{\theta} = -\frac{g}{R} \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} \times \sqrt{\frac{2h_0}{g \sin^2 \alpha}} \quad \text{soit } \dot{\theta} = -\frac{1}{R} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \sqrt{2h_0 g}.$$

$$\text{Donc : } \dot{\theta} = -\frac{\sqrt{2h_0 g}}{R} \cos \alpha.$$

$$\text{Or } \|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_0}\|^2 = \left[R^2 + \frac{P^2}{4\pi^2} \right] \dot{\theta}^2 = [R^2 + R^2 \tan^2 \alpha] \dot{\theta}^2.$$

$$\text{En F : } v_F^2 = R^2(1 + \tan^2 \alpha) \times \frac{2h_0 g}{R^2} \cos^2 \alpha = 2h_0 g \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \cos^2 \alpha = 2gh_0.$$

Ainsi :

$$v_F = \sqrt{2gh_0}.$$

$$\text{A.N. } v_F = \sqrt{2 \times 9,8 \times 5} = 29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 35,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Méthode 2 : on utilise directement le TEC entre D et F :

$$\mathcal{E}_c(F)|_{\mathcal{R}_0} - \mathcal{E}_c(D)|_{\mathcal{R}_0} = W(\vec{P})|_{\mathcal{R}_0} + W(\vec{N})|_{\mathcal{R}_0}$$

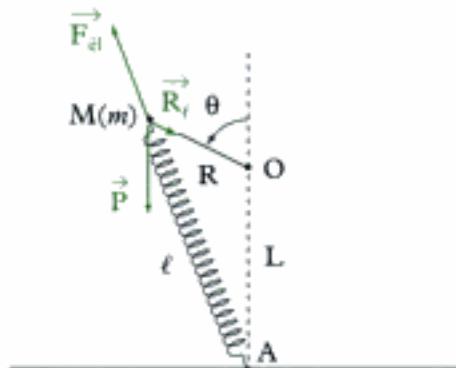
$$\text{soit : } \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_D^2 = mgh_0 + 0 \quad \text{ou encore } \frac{1}{2}mv_F^2 = mgh_0; \text{ et donc :}$$

$$v_F = \sqrt{2gh_0}.$$

A.N. $v_F \approx 35,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (valeur élevée car les frottements n'ont pas été pris en compte).

Exercice 14

- 1) Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , le point matériel $M(m)$ est soumis à des forces conservatives (poids \vec{P} , force de rappel élastique du ressort force \vec{F}_{el}) et à une force qui ne travaille pas (réaction de la tige OM : \vec{R}_t). Ainsi le système étudié (point matériel $M(m)$) est conservatif.



L'énergie potentielle de pesanteur est : $\mathcal{E}_{p_g} = mgR\cos\theta + \text{cte.}$

L'énergie potentielle élastique est : $\mathcal{E}_{p_{el}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte,}$
avec ℓ la longueur du ressort.

Géométriquement, on trouve : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM},$

$$\text{soit : } AM^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = AO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} = AO^2 + OM^2 + 2AO \cdot OM \cdot \cos\theta.$$

$$\text{Ainsi : } \ell^2 = L^2 + R^2 + 2LR\cos\theta, \text{ soit } \ell = (L^2 + R^2 + 2LR\cos\theta)^{1/2};$$

$$\text{et donc : } \mathcal{E}_{p_{el}} = \frac{1}{2}k((L^2 + R^2 + 2LR\cos\theta)^{1/2} - \ell_0)^2 + \text{cte.}$$

L'énergie potentielle du point M est :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p_g} + \mathcal{E}_{p_{el}} = mgR\cos\theta + \frac{k}{2}[(L^2 + R^2 + 2LR\cos\theta)^{1/2} - \ell_0]^2;$$

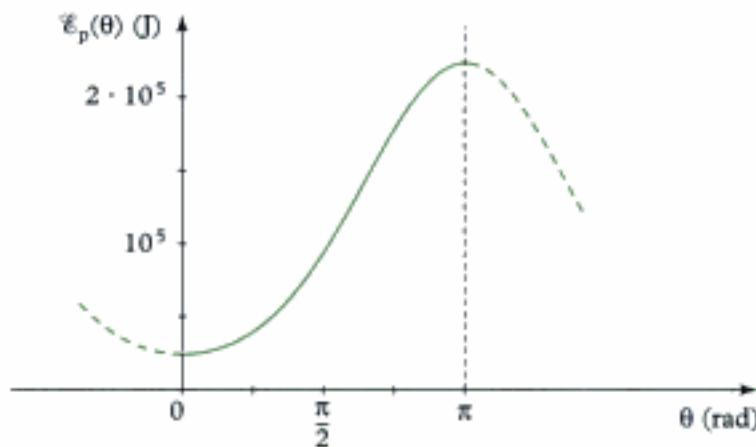
en choisissant la constante nulle.

En tenant compte de $L = 10R$ et $\ell_0 = 12R$, on a :

$$\mathcal{E}_p = mgR\cos\theta + \frac{k}{2}[(101R^2 + 20R^2\cos\theta)^{1/2} - 12R]^2 = mgR\cos\theta + \frac{kR^2}{2}[(101 + 20\cos\theta)^{1/2} - 12]^2.$$

- 2) Afin de déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité, on décide de tracer la fonction $\theta \mapsto \mathcal{E}_p(\theta)$. Numériquement, on a :

$$\mathcal{E}_p(\theta) = 294,3\cos\theta + 25\,000((101 + 20\cos\theta)^{1/2} - 12)^2.$$





On constate qu'il y a deux positions d'équilibre :

- $\theta = 0$, position d'équilibre stable (minimum d'énergie potentielle) ;
- $\theta = \pi$ rad, position d'équilibre instable (maximum d'énergie potentielle).

La porte de garage est donc dans une position stable en position haute (porte ouverte) et instable en position basse (porte fermée) ; de cette manière, il est facile d'ouvrir la porte.

Pour retrouver ces résultats, on peut chercher les valeurs de θ annulant $\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta}$:

$$\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta} = -mgR\sin\theta + kR^2\left[\frac{1}{2}(-20\sin\theta)(101+20\cos\theta)^{-1/2}\times((101+20\cos\theta)^{1/2}-12)\right];$$

$$\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta} = -R\sin\theta \underbrace{\left[mg + 10kR(1 - 12(101 + 20\cos\theta)^{-1/2})\right]}_{\text{signe constant}};$$

ainsi les solutions de l'équation $\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta} = 0$ sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ rad.

Pour étudier la stabilité de ces deux positions d'équilibre, il faut calculer $\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}(\theta = 0)$ et $\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}(\theta = \pi)$.

$$\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2} = -R\cos\theta[mg + 10kR(1 - 12(101 + 20\cos\theta)^{-1/2})] + R\sin^2\theta[1200(101 + 20\cos\theta)^{-3/2}];$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}(\theta = 0) = -R\left(mg + 10kR - \frac{120kR}{11}\right) = -\frac{R}{11}[11mg - 10kR].$$

$$\text{A.N. } \frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}(\theta = 0) = 45\ 160 > 0.$$

Donc la position d'équilibre haute (porte ouverte) est stable.

$$\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}(\theta = \pi) = R\left[mg + 10kR - \frac{120kR}{9}\right] = \frac{R}{3}[3mg - 10kR].$$

$$\text{A.N. } \frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}(\theta = \pi) = -166\ 372 < 0.$$

Donc la position d'équilibre basse (porte fermée) est instable.

Oscillateur harmonique à un degré de liberté

Introduction

L'oscillateur harmonique est un concept permettant de modéliser le comportement de nombreux systèmes physiques, notamment leurs oscillations sinusoïdales de faibles amplitudes autour d'une position d'équilibre stable : circuit électrique oscillant (oscillateur à quartz pour les montres), phénomène vibratoire mécanique (bâtiment vibrant sous l'action du vent, amortisseur de voiture, atomes d'une molécule, etc.). Ce chapitre ne fait appel qu'à des méthodes générales déjà étudiées ; les résultats seront très proches de ceux obtenus lors de l'étude du circuit RLC série vu en électrocinétique.

Plan du chapitre 4

A. Oscillateur harmonique non amorti	134
1. Réponse de l'oscillateur harmonique	134
2. Étude énergétique	134
3. Portrait de phase de l'oscillateur harmonique non amorti	135
4. Exemples d'oscillateurs harmoniques	136
B. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide	138
1. Résolution mathématique de l'équation différentielle	139
2. Étude énergétique, interprétation du facteur de qualité	142
3. Portrait de phase	142
4. Exemples d'oscillateurs amortis	143

Méthodes

L'essentiel ; mise en œuvre	145
Énoncés des exercices	150
Indications	152
Solution des exercices	153

A. Oscillateur harmonique non amorti

Nous nous intéressons ici à des systèmes physiques à un degré de liberté, conservatifs (on néglige les frottements), en régime libre, c'est-à-dire non soumis à des excitations permanentes, évoluant donc **librement** dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g à partir de conditions initiales.

Définition 1

1. Le régime est **libre**; en effet, l'excitation est nulle ce qui se voit car l'équation différentielle a un second membre nul.

2. x représente l'écart entre « la position X » du système et sa position d'équilibre X_0 :

$$x = X - X_0.$$

3. On pourrait écrire la solution sous la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

Un oscillateur harmonique à un degré de liberté x est un système physique vérifiant l'équation différentielle¹⁻²:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

ω_0 pulsation propre de l'oscillateur ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

x est un paramètre décrivant l'oscillateur.

A.1. Réponse de l'oscillateur harmonique

La solution de l'équation différentielle (1) est³:

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

L'amplitude X_m de l'oscillation et la phase à l'origine φ sont deux constantes dépendant des conditions initiales ($t = 0$), par exemple :

$$x(t=0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = v_0.$$

Définition 2

L'oscillation d'un oscillateur harmonique est purement sinusoïdale. La période des oscillations est⁴:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

T_0 période (s)

ω_0 pulsation propre ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

Remarque : en tenant compte des conditions initiales x_0 et v_0 , on peut écrire :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

A.2. Étude énergétique

L'oscillateur harmonique évolue au fond d'un puits d'énergie potentielle parabolique, autour d'une position d'équilibre stable X_0 ; son énergie potentielle s'écrit donc⁵:

$$\mathcal{E}_p(X) = \mathcal{E}_p(X_0) + (X - X_0) \frac{d\mathcal{E}_p}{dX}(X_0) + \frac{(X - X_0)^2}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dX^2}(X_0).$$

Comme X_0 est une position d'équilibre stable :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dX}(X_0) = 0.$$

En posant :

$$k = \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dX^2}(X_0) (> 0),$$

on obtient :

$$\mathcal{E}_p(X) = \mathcal{E}_p(X_0) + \frac{1}{2} k(X - X_0)^2.$$

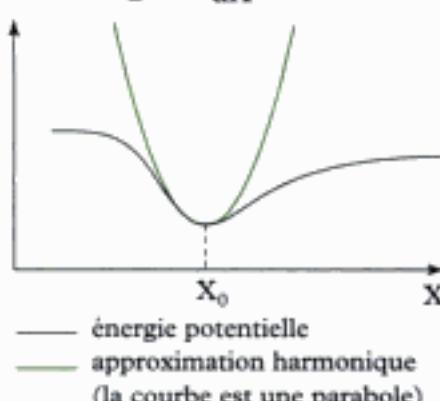


Fig. 1 - Approximation harmonique de l'énergie potentielle.

1. m est la masse du système étudié.

2. Au voisinage de $X = X_0$ (position d'équilibre stable), le système étudié se comporte comme un oscillateur harmonique s'il est soumis à une force de rappel élastique :

$$F = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dX} = -k(X - X_0)$$

ou $F = -kx$ avec $x = X - X_0$

3. Lorsque \mathcal{E}_c est maximal, le système a sa vitesse maximale et \mathcal{E}_p est minimal : le système passe par une position d'équilibre stable. Lorsque \mathcal{E}_p est maximal, le système est le plus éloigné de sa position d'équilibre stable et \mathcal{E}_c est nul : la vitesse du système est nulle.

En écrivant la conservation de l'énergie mécanique, on obtient¹ :

$$\mathcal{E}_m|_{\mathcal{R}_s} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \mathcal{E}_p(X_0) + \frac{k}{2}(X - X_0)^2 = \text{cte},$$

puis en posant $x = X - X_0$, on a $\dot{x} = \dot{X}$ et :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(X_0) + \frac{k}{2}x^2 = \text{cte. } ^2$$

En dérivant par rapport au temps, on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

En tenant compte de la solution $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et en supposant que $\mathcal{E}_p(X_0) = 0$ (choix de la référence d'énergie potentielle en $X = X_0$), on a :

$$\mathcal{E}_p(x) = \frac{k}{2}x^2 = \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{et} \quad \mathcal{E}_c(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 \times X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kX_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{on obtient donc : } \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2.$$

La fig. 2 montre les évolutions temporelles des grandeurs : \mathcal{E}_c , \mathcal{E}_p et \mathcal{E}_m ³.

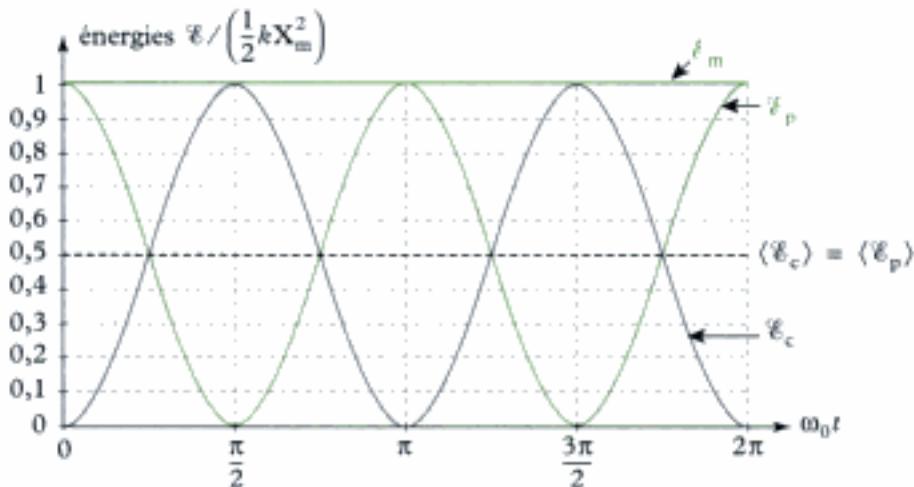


Fig. 2 - Énergies cinétique, potentielle et mécanique de l'oscillateur harmonique ($\varphi = 0$).

4. La valeur moyenne de la fonction $f(t)$ sur une durée T est :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt.$$

On constate que les valeurs moyennes des fonctions \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_p sont égales⁴ :

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{1}{2}kX_m^2 \langle \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle = \frac{1}{4}kX_m^2 = \frac{\mathcal{E}_m}{2}$$

$$\langle \mathcal{E}_p \rangle = \frac{1}{2}kX_m^2 \langle \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle = \frac{1}{4}kX_m^2 = \frac{\mathcal{E}_m}{2}.$$

A.3. Portrait de phase de l'oscillateur harmonique non amorti

L'équation de la trajectoire de phase de l'oscillateur harmonique est obtenue à partir du TEM (fig. 3) :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathcal{E}_m = \text{cte};$$

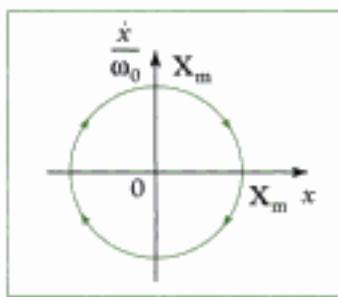


Fig. 3 - Portrait de phase de l'oscillateur harmonique non amorti.

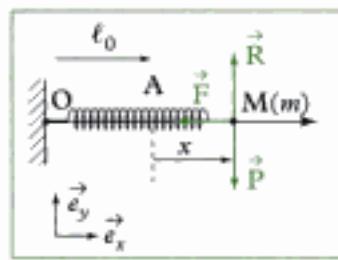


Fig. 4 - Ressort horizontal.

1. La réaction a deux composantes en réalité, une selon \vec{e}_y et une perpendiculaire au plan (\vec{e}_x , \vec{e}_y), non représentée sur la figure 4.

avec $k = \omega_0^2 m$, on a :

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \mathcal{E}_m \text{ soit } \left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 + x^2 = \frac{2\mathcal{E}_m}{k} = \text{cte.}$$

Dans le plan de phase $(x ; \frac{\dot{x}}{\omega_0})$, la trajectoire de phase est un cercle de centre

$$O(0 ; 0) \text{ est de rayon } R = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{k}}.$$

Pour chaque condition initiale $(x_0 ; v_0)$, \mathcal{E}_m est fixée et le rayon du cercle est fixé.

A.4. Exemples d'oscillateurs harmoniques

A.4.1 - Ressort horizontal

• Problème à résoudre

On considère un point matériel $M(m)$ fixé au bout d'un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Ce point matériel peut se déplacer sans frottement sur l'axe $(O ; \vec{e}_x)$, O étant l'extrémité du ressort fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ (fig. 4). On notera A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \ell_0 \vec{e}_x$.

On se propose de déterminer l'équation différentielle du mouvement lorsque le point matériel M est écarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale à $t = 0$.

• Résolution

Au repos, on peut appliquer le PFD (PFS) au point matériel $M(m)$ dans le référentiel \mathcal{R}_g :

$$\vec{m}\ddot{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0},$$

en projetant sur \vec{e}_x et en notant ℓ_{eq} la longueur du ressort, on obtient :

$$-k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0 \text{ soit } \ell_{eq} = \ell_0.$$

Le point M se trouve en A au repos, la longueur du ressort est alors ℓ_0 , sa longueur à vide.

On écarte alors à $t = 0$, le point M d'une distance x_0 et on le lâche ; à un instant t , on note $\overrightarrow{AM} = x \vec{e}_x$. En appliquant le PFD dans \mathcal{R}_g au point matériel $M(m)$:

$$\vec{m}\ddot{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F},$$

soit en projetant sur \vec{e}_x : $m\ddot{x} = -k((\ell_0 + x) - \ell_0) = -kx$.

En effet $\ell_0 + x$ est la longueur du ressort à un instant t .

L'équation différentielle du mouvement harmonique est donc celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

A.4.2 - Ressort vertical

• Problème à résoudre

On considère un point matériel $M(m)$ fixé au sommet d'un ressort vertical de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k . Ce point matériel est une perle enfilée sur une tige verticale $(O ; \vec{e}_y)$, le long de laquelle il coulisse sans frottement ; O est l'extrémité du ressort fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ (fig. 5).

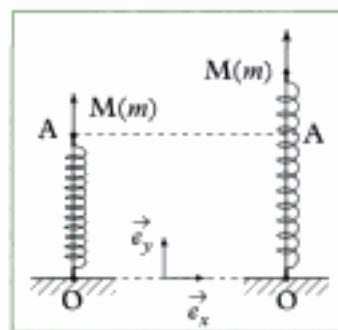


Fig. 5 - Ressort vertical.

1. Afin de déterminer l'expression de la force de rappel \vec{F} , on peut supposer que $\ell_{\text{eq}} > \ell_0$. L'allongement du ressort est alors $\ell_{\text{eq}} - \ell_0 > 0$, la force est donc dirigée selon $(-\vec{e}_y)$:

$$\vec{F} = k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)(-\vec{e}_y);$$

on peut aussi supposer que $\ell_{\text{eq}} < \ell_0$, l'allongement du ressort est alors $\ell_0 - \ell_{\text{eq}} > 0$; la force est donc dirigée selon $(+\vec{e}_y)$:

$$\vec{F} = k(\ell_0 - \ell_{\text{eq}})\vec{e}_y.$$

Il n'est pas nécessaire de savoir qu'elle est la longueur réelle du ressort, même si ici, il était prévisible que $\ell_{\text{eq}} < \ell_0$.

2. Comme il n'y a pas de frottement, \vec{R} est perpendiculaire au déplacement donc dirigé selon \vec{e}_x et selon le plan perpendiculaire à (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .

On se propose de déterminer l'équation différentielle du mouvement lorsque le point matériel M est écarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale à $t = 0$.

• Résolution

Au repos (à l'équilibre), on a, d'après le PFD (PFS) :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}.$$

En projection sur \vec{e}_y et en appelant ℓ_{eq} la longueur à l'équilibre du ressort, on a¹ :

$$-mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad \ell_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}.$$

On notera A le point : $\overrightarrow{OA} = \ell_{\text{eq}}\vec{e}_y$ et $\overrightarrow{AM} = y\vec{e}_y$.

On écarte le point matériel M(m) d'une distance y_0 de sa position d'équilibre et à $t = 0$, on le lâche.

M se met alors en mouvement.

L'équation différentielle du mouvement est obtenue en utilisant le PFD² :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}.$$

En projection sur \vec{e}_y :

$$m\ddot{y} = -mg - k(\ell_{\text{eq}} + y - \ell_0).$$

On obtient alors l'équation d'un oscillateur harmonique (en tenant compte de $\ell_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$) :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

A.4.3 - Pendule simple

• Problème à résoudre

La figure 6 présente un pendule simple composé d'une masse m assimilée à un point matériel M et d'un fil sans masse inextensible de longueur ℓ . On se propose de déterminer, dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, l'équation différentielle du mouvement lorsque le point matériel M est écarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale à $t = 0$. L'écrire dans le cas particulier des mouvements de faible amplitude.

• Résolution

Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le PFD appliqué au point matériel M(m) donne :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{T}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \ell\vec{e}_r; \quad \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta; \quad \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r; \\ \vec{T} &= -\vec{T}\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{P} = mg\vec{e}_z. \end{aligned}$$

En projection sur \vec{e}_θ , et en remarquant que $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta = \cos\frac{\pi}{2} + \theta = -\sin\theta$, on a :

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta.$$

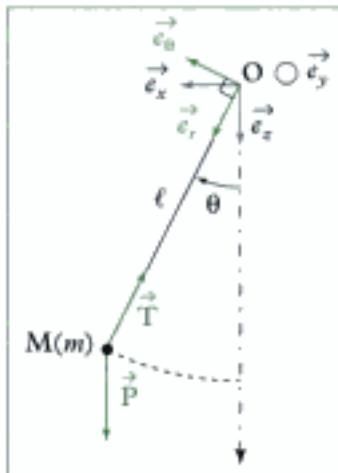


Fig. 6 - Le pendule simple.

Dans le cas des oscillations de petites amplitudes ($\sin\theta = \theta$), la pendule simple vérifie l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}.$$

A.4.4 - Oscillateur électrique LC

• Problème à résoudre

On considère le circuit LC (fig. 7), composé d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C (charge q). On se propose de déterminer l'équation différentielle vérifiée par q .

• Résolution

La loi des mailles donne :

$$u_L + u_C = 0 \text{ avec } u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}; i = \frac{dq}{dt}, q = Cu_c,$$

$$\text{soit } L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

En comparant les deux équations :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \text{ et } L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0,$$

1. Pour résumer :

Mécanique	Électricité
x	q
m	L
k	$\frac{1}{C}$

on peut substituer à l'étude du problème mécanique, l'étude d'un problème électrique (circuit LC), en utilisant les transformations suivantes¹ :

$$x \rightarrow q \quad v \rightarrow i$$

$$m \rightarrow L \quad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \rightarrow \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$$

$$k \rightarrow \frac{1}{C} \quad \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

B. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide

2. λ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Nous nous intéressons maintenant à des systèmes physiques à un degré de liberté, soumis à une force de frottement fluide $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ (responsable de l'amortissement)², en régime libre, évoluant dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . L'équation différentielle du mouvement (origine prise au niveau de la position d'équilibre) est donc :

$$m\ddot{x} = -\lambda \dot{x} - kx \text{ ou encore } \ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0,$$

qui peut s'écrire sous forme normalisée :

$$\ddot{x} + 2z\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ω_0 pulsation propre ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
 z coefficient d'amortissement de l'oscillateur (sans unité).

$$\text{avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } 2z\omega_0 = \frac{\lambda}{m}.$$

1. Le cas $Q \rightarrow \infty$ ($\zeta = 0$)
correspond au cas d'un amortissement nul : on retrouve le cas de l'oscillateur harmonique non amorti.

Ou encore¹ :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

$$\text{avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}.$$

ω_0 pulsation propre ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
 Q facteur de qualité (sans unité)

$$\text{On a : } \frac{\omega_0}{Q} = 2\zeta\omega_0, \text{ soit } Q = \frac{1}{2\zeta}.$$

B.1. Résolution mathématique de l'équation différentielle

Les solutions recherchées étant de la forme $x = Ke^{rt}$ (K, r étant des constantes complexes), on obtient, en reportant x dans (2), l'**équation caractéristique** :

$$r^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2} r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right).$$

Le signal de Δ permet de distinguer le type de solution.

B.1.1 - Régime pseudo-périodique

2. $\zeta < 1$ (amortissement faible).

Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si $Q > \frac{1}{2\zeta}$ la solution (et le régime) est pseudo-périodique.

Les deux solutions de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées :

$$r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_a,$$

et la solution de l'équation différentielle (2) est :

$$x(t) = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t},$$

3. On aurait aussi pu écrire :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \phi) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}},$$

qu'il est préférable d'écrire sous la forme³ :

$$x(t) = (A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}},$$

car $x(t)$ est une fonction réelle.

$\omega_a = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ est la **pseudo-pulsation** ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ; on ne parle pas de pulsation car $x(t)$ est composée d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω_a amortie par une fonction exponentielle.

A et B sont constantes qui dépendent des conditions initiales ; par exemple, si le système est lâché sans vitesse initiale depuis x_0 , on obtient :

$$A = x_0 \text{ et } B\omega_a - \frac{\omega_0}{2Q} A = 0 \text{ soit } x(t) = x_0 \left(\cos \omega_a t + \frac{\omega_0}{2Q\omega_a} \sin \omega_a t \right) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$$

(fig. 8).

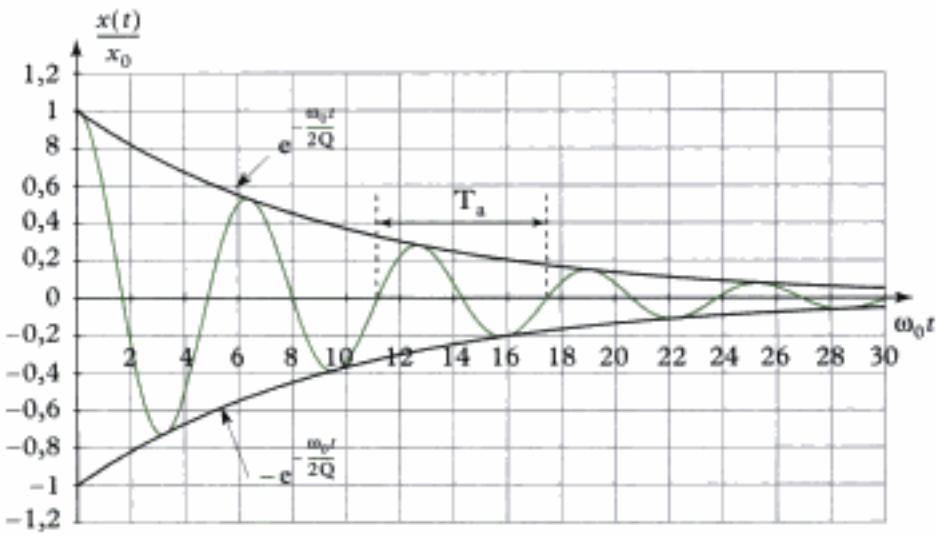


Fig. 8 - Régime pseudo-périodique ($Q = 5$).

Remarques :

- L'exponentielle en facteur dans $x(t)$ peut s'écrire $e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ la constante de temps du système, qui chiffre la **durée caractéristique** de l'évolution du système (on parle aussi de temps de relaxation).
- La **pseudo-période** est :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \text{ soit } T_a = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \text{ (voir fig. 8).}$$

- Le facteur de qualité Q donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations (de pseudo-périodes) visibles²; en effet, au bout d'un temps $t_n = QT_a$, on a :

$$e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T_a} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}QT_a} \text{ soit } e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T_a} = e^{-\frac{\omega_0 \times 2\pi}{2\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}} = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}.$$

Si Q est grand (faible amortissement), $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}} = e^{-\pi} = 0,043$.

L'amplitude des oscillations sera alors effectivement très faible.

- La décroissance des oscillations est souvent caractérisée par le **décrément logarithmique δ** :

$$x(t + T_a) = e^{-\delta} x(t)$$

soit :

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t + T_a)}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} e^{-\frac{\omega_0 T_a}{2Q}}}\right) = \frac{\omega_0 T_a}{2Q} = \frac{\omega_0}{2Q} \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

Si l'amortissement est fort $Q \gg \frac{1}{2}$:

$$\delta \approx \frac{\pi}{Q},$$

où δ est le décrément logarithmique⁴ et Q est le facteur de qualité.

- On définit la pseudo-période $(T_a = \frac{2\pi}{\omega_a})$ comme l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs, dans le même sens, par la position d'équilibre.

- Voir par exemple la figure 8 pour laquelle $Q = 5$.

- Le nombre δ permet en pratique de déterminer le facteur de qualité du système.

- Sur la figure 8, on trouve pour les deux premières amplitudes :

$$\delta = \ln\left(\frac{1}{0,53}\right) = 0,635 \text{ (en théorie)}$$

$$\delta = \frac{\pi}{Q} = 0,628.$$

B.1.2 - Régime apériodique

1. $\zeta > 1$ (amortissement important).

Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $Q < \frac{1}{2}$, la solution (et le régime) est **apériodique**.

Les deux solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont réelles et négatives : $r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$ ($r_1 > r_2$) et la solution de l'équation différentielle (2) est :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

L'amplitude décroît sans oscillation (fig. 9).

A et B sont deux constantes qui dépendent des conditions initiales ; par exemple, si le système est lâché sans vitesse initiale depuis x_0 , on obtient :

$$A + B = x_0 \text{ et } Ar_1 + Br_2 = 0,$$

soit :

$$x(t) = \frac{x_0}{r_2 - r_1} (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}).$$

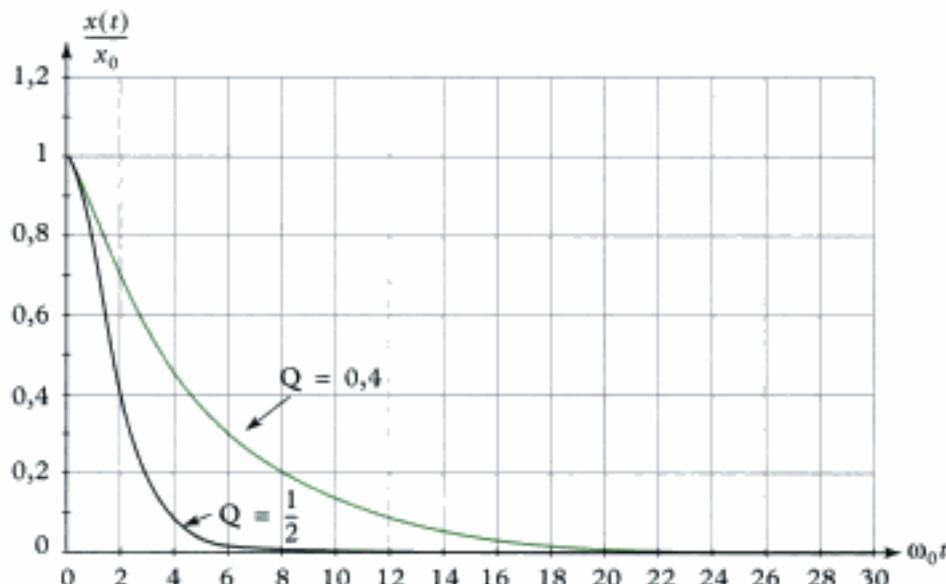


Fig. 9 - Régimes apériodique $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$ et critique $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$.

Remarque : la **durée caractéristique** (temps de relaxation) de ce régime est : $\tau = -\frac{1}{r_1}$.

B.1.3 - Régime critique

2. $\zeta = 1$ (ce cas est peu intéressant en pratique car illusoire à observer pendant un temps long).

Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $Q = \frac{1}{2}$, la solution (et le régime) est **critique**.

La solution double de l'équation caractéristique est : $r_1 = r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q}$ et la solution de l'équation différentielle (2) est :

$$x(t) = (At + B)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}.$$

L'évolution est une limite du cas du régime apériodique.

La stabilisation à $x = 0$ est la plus rapide des trois régimes (critique, apériodique et pseudo-périodique).

A et B sont deux constantes qui dépendent des conditions initiales ; par exemple, si le système est lâché sans vitesse initiale depuis x_0 , on obtient :

$$B = x_0 \quad \text{et} \quad A - \frac{\omega_0}{2Q} B = 0,$$

soit :
$$x(t) = x_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{2Q} t \right) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}.$$

(Voir fig. 9)

Remarque : la durée caractéristique (temps de relaxation) est $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

B.2. Étude énergétique, interprétation du facteur de qualité

L'énergie mécanique du système est :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2.$$

Mais ici $\mathcal{E}_m \neq \text{cte}$, en effet d'après le TPM :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}) = -\lambda \dot{x}^2 < 0.$$

Ainsi, $\mathcal{E}_m(t)$ diminue au cours du temps.

Dans le cas du régime pseudo-périodique, exprimons la variation relative d'énergie mécanique sur une pseudo-période avec $Q \gg \frac{1}{2}$ (faible amortissement), entre deux positions d'elongation extrême (où la vitesse est nulle).

$$\mathcal{E}_m(t_0) = \mathcal{E}_c(t_0) + \mathcal{E}_p(t_0) = 0 + \frac{1}{2} k x^2(t_0)$$

$$\mathcal{E}_m(t_0 + T_s) = \mathcal{E}_c(t_0 + T_s) + \mathcal{E}_p(t_0 + T_s) = 0 + \frac{1}{2} k x^2(t_0 + T_s)$$

ainsi :

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m} = \frac{\mathcal{E}_m(t_0) - \mathcal{E}_m(t_0 + T_s)}{\mathcal{E}_m(t_0)} = 1 - \left(\frac{x(t_0 + T_s)}{x(t_0)} \right)^2 = 1 - e^{-2\delta} \approx 2\delta \quad (\text{car } \delta \ll 1).$$

$$1. \frac{\Delta \mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m} = 4\pi z.$$

$$\text{Donc } \frac{\Delta \mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m} = \frac{2\pi}{Q}.$$

Q chiffre donc la diminution d'énergie mécanique du système par pseudo-période : plus Q est grand, plus l'amortissement est faible, moins il y a de pertes d'énergie par pseudo-période :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie mécanique de l'oscillateur}}{\text{énergie perdue pendant 1 pseudo-période}}.$$

(Régime pseudo-périodique, avec $Q \gg \frac{1}{2}$)

B.3. Portrait de phase

La figure 10 montre différents portraits de phase d'un système partant des mêmes conditions initiales (x_0 ; $v_0 = 0$), ayant un facteur de qualité variant.

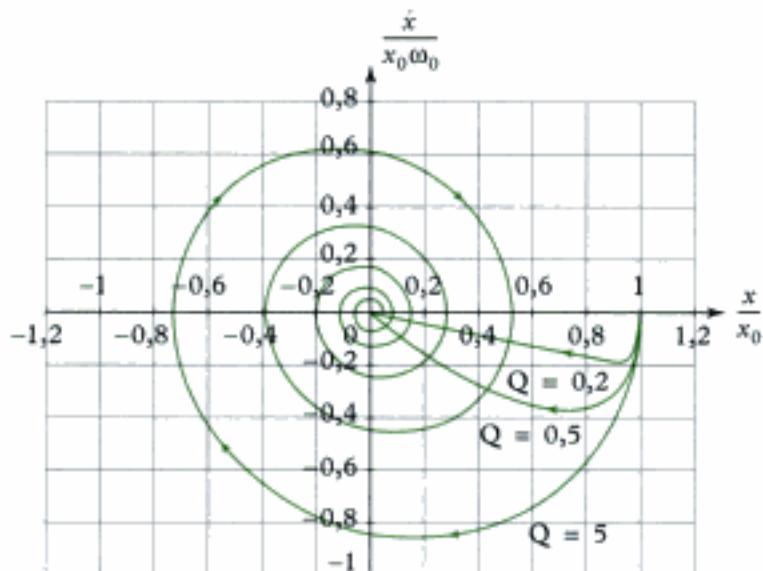


Fig. 10 - Portraits de phase de l'oscillateur harmonique amorti

(régime apériodique $Q < \frac{1}{2}$, critique $Q = \frac{1}{2}$, pseudo-périodique $Q > \frac{1}{2}$).

Le fait que le système évolue petit à petit vers la position d'équilibre stable prouve la présence de frottement ($\mathcal{E}_m \neq \text{cte}$) ; le point $O(0 ; 0)$ (position d'équilibre stable) est un **point attracteur**.

Si $Q > \frac{1}{2}$, l'allure de la trajectoire est une spirale (oscillations).

Si $Q \leq \frac{1}{2}$, la trajectoire rejoint le point attracteur sans « tourner » autour de ce point (pas d'oscillation).

B.4. Exemples d'oscillateurs amortis

B.4.1 - Amortisseur fluide

• Problème à résoudre

Considérons le dispositif mécanique de la fig. 11 composé d'un point matériel $M(m)$ pouvant se déplacer sur l'axe $(O ; \vec{e}_x)$ sans frottement, d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k , et d'un amortisseur fluide (visqueux) de coefficient de frottement λ^1 . Le référentiel d'étude $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est supposé galiléen. On notera A le point tel que : $\overrightarrow{OA} = \ell_0 \vec{e}_x$.

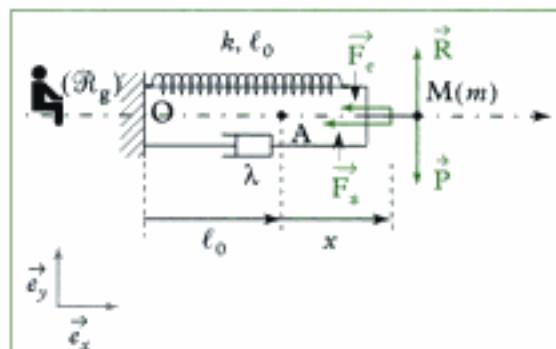


Fig. 11 - Oscillateur amorti par amortisseur fluide.

1. Cet amortisseur exerce une force proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de sa longueur.

On se propose de déterminer l'équation différentielle du mouvement lorsque le point matériel M est écarté de sa position d'équilibre et lâché à $t = 0$ sans vitesse initiale.

• Résolution

Position de repos du point matériel M(m).

Les forces appliquées au système sont :

- $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$ poids du point matériel M(m) ;
- $\vec{R} = R\vec{e}_y$ réaction du support, perpendiculaire au support car il n'y a pas de frottement ;
- $\vec{F}_e = -k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{e}_x$ force de rappel du ressort ℓ_{eq} longueur à l'équilibre du ressort ;
- $\vec{F}_a = \vec{0}$ force exercée par l'amortisseur (nulle car pas de mouvement).

Le PFS appliqué au point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R}_g donne :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e + \vec{F}_a,$$

en projection sur \vec{e}_x : $0 = -k(\ell_{eq} - \ell_0)$, d'où $\ell_{eq} = \ell_0$.

On écarte d'une distance x_0 le système de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale à $t = 0$ (on note $\overrightarrow{AM} = x\vec{e}_x$).

En appliquant le PFD au point M(m) dans \mathcal{R}_g :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e + \vec{F}_a$$

en projetant sur \vec{e}_x :

$$m\ddot{x} = -k(\ell_{eq} + x - \ell_0) - \lambda \frac{d}{dt}(\ell_{eq} + x - \ell_0) \quad \text{soit} \quad m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = 0,$$

ou encore¹ :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

B.4.2 - Oscillateur électrique amorti

• Problème à résoudre

On considère le circuit RLC série (fig. 12), composé d'une bobine d'inductance L, d'un condensateur de capacité C (charge q) et d'un résistor de résistance R. On se propose de déterminer l'équation différentielle vérifiée par q .

• Résolution

La loi des mailles donne : $u_R + u_C + u_L = 0$.

Avec $u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$ ($i = \frac{dq}{dt}$), $u_R = Ri = R \frac{dq}{dt}$ et $q = Cu_C$, on obtient :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0,$$

ce qui donne² :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

En comparant les équations : $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$ et $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$,

on peut poursuivre les analogies électro/mécanique :

$$\lambda \rightarrow R.$$

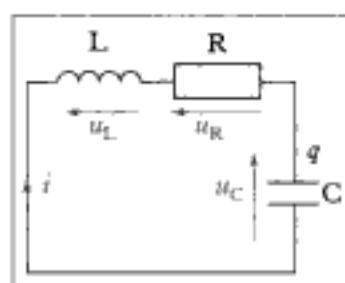


Fig. 12 - Oscillateur amorti RLC.

2. La résistance crée l'amortissement du système électrique.

L'essentiel

✓ Oscillateur harmonique non amorti

Un oscillateur harmonique à un degré de liberté x est un système physique vérifiant l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1) \quad | \quad \omega_0 \text{ pulsation propre de l'oscillateur (rad} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

x est un paramètre décrivant l'oscillateur.

L'oscillation d'un oscillateur harmonique est purement sinusoïdale. La période des oscillations est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad | \quad T_0 \text{ période (s)} \\ \omega_0 \text{ pulsation propre (rad} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique est parabolique :

$$\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \text{cte.}$$

✓ Oscillateur harmonique amorti frottement fluide

Son équation différentielle est :

$$\ddot{x} + 2z\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad | \quad \omega_0 \text{ pulsation propre (rad} \cdot \text{s}^{-1}\text{)} \\ z \text{ coefficient d'amortissement (sans unité)}$$

ou $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad | \quad \omega_0 \text{ pulsation propre (rad} \cdot \text{s}^{-1}\text{)} \\ Q \text{ facteur de qualité (sans unité) (} Q = \frac{1}{2z} \text{).}$

Si :

- $Q > \frac{1}{2}$ ($z < 1$) régime pseudo-périodique (oscillations) de pseudo-période :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} ;$$

Q représente l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations visibles ($Q \gg \frac{1}{2}$).

Remarque : le régime pseudo-périodique est caractérisé par le déclin logarithmique égal au logarithme népérien du rapport de deux amplitudes successives de la réponse :

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T_a)} \right).$$

- $Q < \frac{1}{2}$ ($z > 1$) régime apériodique (pas d'oscillation) ;
- $Q = \frac{1}{2}$ ($z = 1$) régime critique (pas d'oscillation).

Le régime critique correspond à la stabilisation, à $x = 0$, la plus rapide des trois régimes.

Mise en œuvre

Méthode 1

Comment résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (amorti ou non) ?

On s'intéresse à un système physique en régime libre dont on a obtenu l'équation différentielle sans second membre. À $t = 0$, il est lâché, écarté de sa position de repos avec une vitesse initiale. On cherche l'évolution temporelle du système physique.

→ Savoir faire

- ➊ Mettre l'équation différentielle sous forme canonique (normalisée) :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

en identifiant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q (x est l'écart à la position d'équilibre).

- ➋ Obtenir l'équation caractéristique en injectant une solution du type Ce^{rt} (C et r complexes) :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

- ➌ La résoudre (solutions r_1 et r_2).

- ➍ Écrire la solution de l'équation différentielle en faisant apparaître deux constantes A et B.

- ➎ Déterminer A et B à l'aide des conditions initiales.

→ Application

Soit un système physique régi par l'équation différentielle :

$$m\ddot{\ell} + \lambda\dot{\ell} + k\ell = +k\ell_0 + mg.$$

Données : $m = 500 \text{ g}$, $\lambda = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$, $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $\ell_0 = 1 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Déterminer la loi horaire $\ell(t)$ en résolvant cette équation différentielle en supposant que le système est lâché depuis une position $\ell(t=0) = 2 \text{ m}$ et avec une vitesse initiale $\dot{\ell}(t=0) = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Solution

- ➊ Afin que l'équation différentielle soit homogène (sans second membre), il faut que l'équation différentielle soit celle de l'écart x entre le paramètre initial (ℓ) et sa valeur d'équilibre ℓ_{eq} définie par $\ell = \text{cte}$ ($\dot{\ell} = 0$ et $\ddot{\ell} = 0$).

En reportant dans l'équation différentielle, on a :

$$\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

En posant $x = \ell - \ell_{\text{eq}}$, l'écart à la position d'équilibre, on a, comme $\dot{x} = \dot{\ell}$ et $\ddot{x} = \ddot{\ell}$:

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

En normalisant à l'aide de Q et ω_0 :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}.$$

A.N. $\omega_0 \approx 4,47 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $Q \approx 2,24$.

② Cherchons une solution de la forme : $x = Ce^{rt}$. Ainsi on a :

$$\dot{x} = Cre^{rt} \text{ et } \ddot{x} = Cr^2e^{rt},$$

soit en reportant dans l'équation différentielle :

$$Cr^2e^{rt} + \frac{\omega_0}{Q}Cre^{rt} + \omega_0^2Ce^{rt} = 0 \quad \text{soit} \quad Ce^{rt} \left[r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 \right] = 0.$$

On obtient ainsi, puisque la solution $x(t) = Ce^{rt} = 0$ n'est pas celle recherchée, l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

③ Le discriminant de cette équation du second degré est : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left[\frac{1}{Q^2} - 4\right]$.

$$\text{A.N. } \Delta = 4,47^2 \left[\frac{1}{2,24^2} - 4\right] \approx -75,94 = (8,71j)^2.$$

$$\text{Ainsi : } r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_a j.$$

$$\text{A.N. } r_{1/2} = -1 \pm 4,36j \quad (\omega_a = 4,36 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}).$$

④ La solution de l'équation différentielle est :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ ou encore } x(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} [A\cos(\omega_a t) + B\sin(\omega_a t)].$$

$$\text{A.N. } x(t) = e^{-t} [A\cos(4,36t) + B\sin(4,36t)] \text{ et donc : } \ell(t) = x(t) + \ell_{\text{eq}}$$

$$\text{Ainsi : } \ell(t) = \frac{mg}{k} + \ell_0 + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} [A\cos(\omega_a t) + B\sin(\omega_a t)].$$

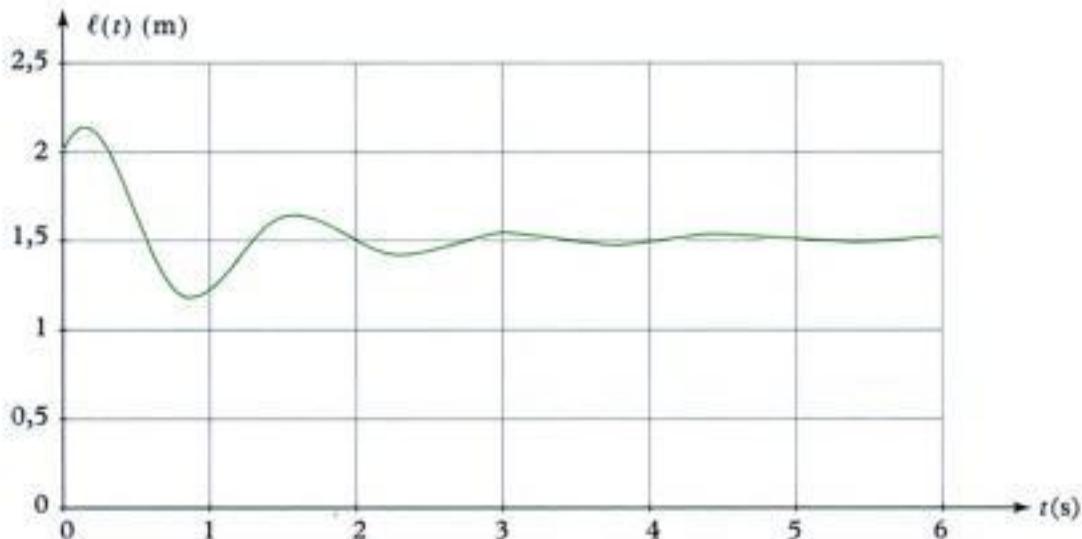
$$\text{A.N. } \ell(t) = 1,49 + e^{-t} [A\cos(4,36t) + B\sin(4,36t)].$$

⑤ Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \ell(t=0) = \ell(0) = \ell_{\text{eq}} + A \\ \dot{\ell}(t=0) = -\frac{\omega_0}{2Q}A + B\omega_a \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} A = \ell(0) - \ell_{\text{eq}} \\ B = \frac{\dot{\ell}(0)}{\omega_a} + \frac{\omega_0}{2Q\omega_a}(\ell(0) - \ell_{\text{eq}}) \end{cases}.$$

$$\text{A.N. } A = 0,51 \text{ m} \quad \text{et} \quad B = 0,57 \text{ m}.$$

$$\text{Ainsi : } \ell(t) = 1,49 + e^{-t} [0,51\cos(4,36t) + 0,57\sin(4,36t)].$$



Méthode 2

Comment déterminer l'expression et le signe d'une force de rappel ?

Une masse ponctuelle m est accrochée à trois ressorts horizontaux.

On veut déterminer l'expression des forces exercées par les trois ressorts.

→ Savoir faire

- ① Paramétriser les positions des points du système.
- ② Écrire chaque force de rappel élastique sous la forme :

$$\vec{F} = \pm k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x,$$

avec k la raideur du ressort, ℓ la longueur du ressort et ℓ_0 la longueur à vide du ressort.

Se placer dans un cas particulier, par exemple $\ell > \ell_0$, et regarder si la force \vec{F} est dirigée selon $+\vec{e}_x$ ou $-\vec{e}_x$ (pour le système étudié) ; en déduire l'expression de chaque force.

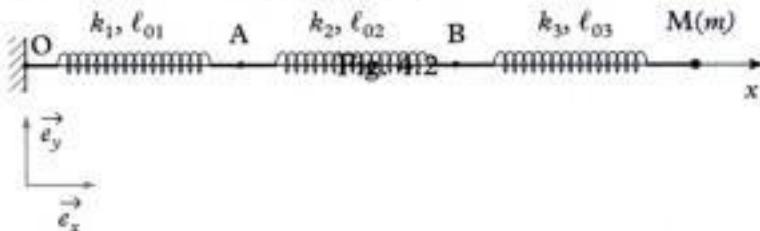
Remarque : on obtient de la même manière le signe de la force de rappel exercée par l'amortisseur :

$$\vec{F} = \pm \lambda \dot{x} \vec{e}_x.$$

On suppose que \dot{x} est > 0 (ou < 0) et on détermine, pour le système étudié, si la force de rappel (de frottement) est dirigée selon $\pm \vec{e}_x$.

→ Application

On considère le dispositif composé de trois ressorts horizontaux (de raideurs respectives k_1 , k_2 et k_3 et de longueurs à vide respectives ℓ_{01} , ℓ_{02} et ℓ_{03}).



L'extrémité du ressort 1 est fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x)$.

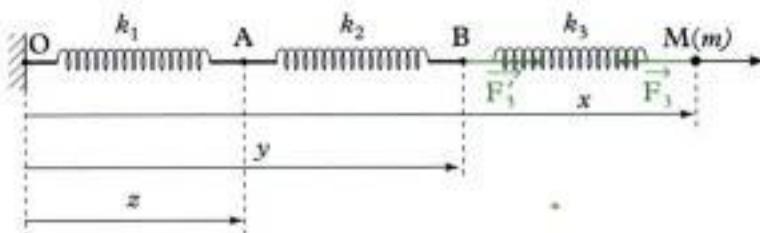
À l'extrémité du ressort 3 est accrochée une masse m pouvant se déplacer sans frottement le long de l'axe horizontal.

Déterminer les forces appliquées aux points A, B et M dans une position quelconque du système.

Solution

- ① Afin de repérer la position des trois points A, B et M, on posera :

$$\overrightarrow{OA} = z \vec{e}_x; \quad \overrightarrow{OB} = y \vec{e}_x; \quad \overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x.$$



② Force de rappel élastique exercée par le ressort 3 sur le point matériel M :

$$\vec{F}_3 = \pm k_3(x - y - \ell_{03}) \vec{e}_x.$$

$x - y$ est la longueur du ressort 3 à un instant quelconque, donc $x - y - \ell_{03}$ est son allongement.

Afin de déterminer le signe + ou -, supposons que $x - y > \ell_{03}$, c'est-à-dire $x - y - \ell_{03} > 0$ (ressort étendu), la force doit alors être dirigée selon $-\vec{e}_x$ et donc :

$$\vec{F}_3 = -k_3(x - y - \ell_{03}) \vec{e}_x.$$

• Force de rappel élastique exercée par le ressort 3 sur le point B :

$$\vec{F}'_3 = \pm k_3(x - y - \ell_{03}) \vec{e}_x.$$

Si $x - y - \ell_{03} > 0$ la force doit être dirigée selon $+\vec{e}_x$ et donc :

$$\vec{F}'_3 = k_3(x - y - \ell_{03}) \vec{e}_x.$$

• Force de rappel élastique exercée par le ressort 2 sur le point B :

$$\vec{F}_2 = \pm k_2(y - z - \ell_{02}) \vec{e}_x.$$

En supposant que $y - z - \ell_{02} < 0$, la force \vec{F}_2 doit être dirigée selon $+\vec{e}_x$ car le ressort 2 est comprimé et donc on a :

$$\vec{F}_2 = -k(y - z - \ell_{02}) \vec{e}_x.$$



Comme $y - z - \ell_{02} < 0$, il faut un signe « - » pour que \vec{F}_2 soit dirigée selon $+\vec{e}_x$!

• Force de rappel élastique exercée par le ressort 2 sur le point A :

$$\vec{F}'_2 = k(y - z - \ell_{02}) \vec{e}_x.$$

• Force de rappel élastique exercée par le ressort 1 sur le point A :

$$\vec{F}_1 = -k(z - \ell_{01}) \vec{e}_x.$$

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Unités

Déterminer les unités des expressions :

- $\sqrt{\frac{k}{m}}$;
- $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$;
- $\frac{1}{2}k\ell^2$;
- $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$;

dans lesquelles k est une raideur, m une masse, ℓ une longueur, g une accélération, L une inductance et C une capacité.

Préciser à quelle grandeur ces expressions sont homogènes.

Ex. 2 Oscillateur amorti

On considère un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre $\omega_0 = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et de facteur de qualité $Q = 10$; la masse $m = 100 \text{ g}$ de cet oscillateur est lâchée avec un écart à la position d'équilibre de $x_0 = 10 \text{ cm}$ sans vitesse initiale.

1) Calculer :

- a) la pseudo-période ;
- b) le décrément logarithmique ;
- c) l'amplitude des oscillations au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes ;
- d) l'énergie mécanique initiale ;
- e) l'énergie mécanique au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes.

2) Déterminer le nombre de pseudo-périodes au bout desquelles l'amplitude des oscillations est divisée par 17.

Ex. 3 Portrait de phase

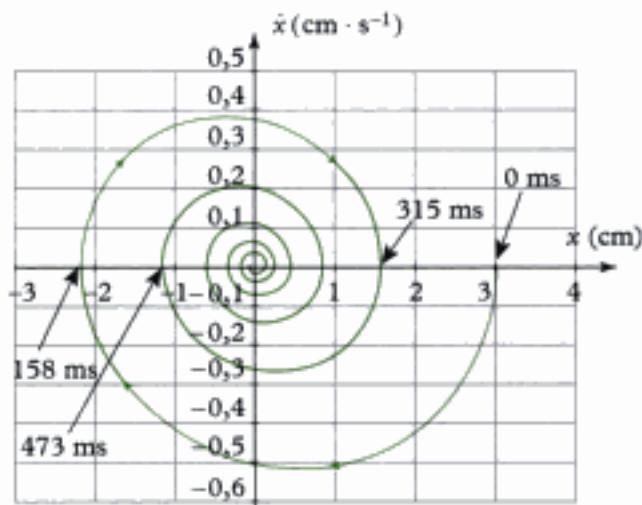
On considère le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse $m = 500 \text{ g}$ soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur k) et à une force de frottement fluide $-\lambda\vec{v}$ (\vec{v} étant la vitesse de la masse m et x est l'écart à la position d'équilibre).

L'étude est réalisée dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

- 1) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.
- 2) Déterminer par lecture graphique :

- la valeur initiale de la position x_0 ;
- la valeur finale de la position x_f ;
- la pseudo-période T_s ;
- le décrément logarithmique.

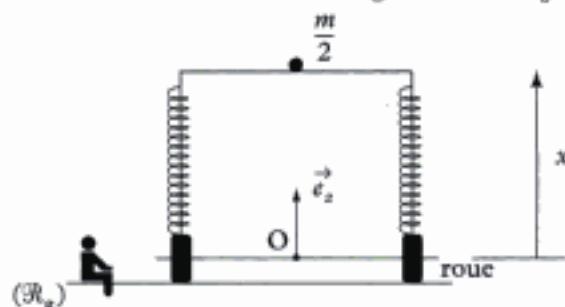
3) En déduire la pulsation propre ω_0 , le facteur de qualité Q de l'oscillateur, la raideur k du ressort et le coefficient de frottement fluide λ .



Niveau 2

Ex. 4 Essieu avant d'un véhicule

On modélise l'essieu avant d'un véhicule à l'aide de deux ressorts de raideur k et longueur à vide ℓ_0 .



Une masse $\frac{m}{2}$ égale à la moitié de la masse du véhicule est posée dessus.

On travaille dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_z)$ supposé galiléen (\vec{e}_z vertical vers le haut).

Le seul mouvement étudié est le mouvement vertical selon l'axe $(O; \vec{e}_z)$.

Données :

$$m = 1 \text{ tonne} ; \quad k = 19\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} ; \quad \ell_0 = 40 \text{ cm}.$$

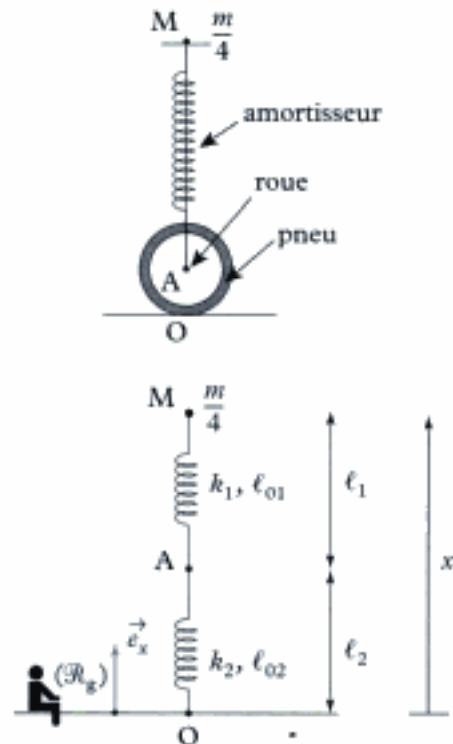
On suppose les roues indéformables (de rayons constants).

- 1) Montrer que ce dispositif est équivalent à un unique ressort dont on déterminera les caractéristiques.
- 2) Le véhicule étant à l'arrêt, on enfonce la masse $\frac{m}{2}$ de 5 cm (à cet instant $x = x_0$) et on la lâche à $t = 0$.
 - Écrire l'équation différentielle du mouvement.
 - Déterminer la solution.
 - Déterminer l'accélération maximale.

Ex. 5 Association pneu + amortisseur

On modélise l'amortisseur et le pneu d'un véhicule à l'aide de deux ressorts en série de raideurs respectives k_1 , k_2 et longueurs à vide respectives ℓ_{01} et ℓ_{02} .

Au-dessus est posée une masse $\frac{m}{4}$ (quart de la masse du véhicule).



Le mouvement de la masse $\frac{m}{4}$, supposée ponctuelle n'est que vertical (selon l'axe ($O ; \vec{e}_x$)), lié au référentiel terrestre \mathcal{R}_g supposé galiléen.

Données :

$$k_1 = 20\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}; \quad \ell_{01} = 50 \text{ cm};$$

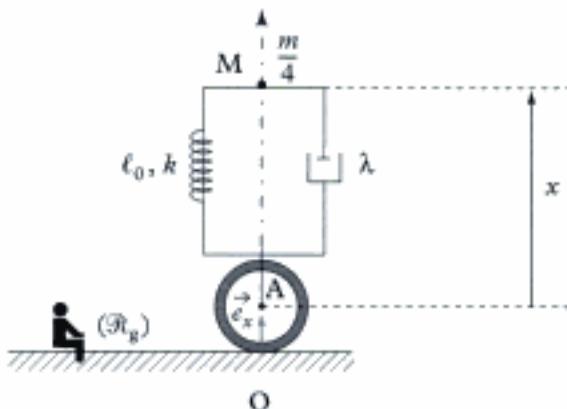
$$m = 1\,000 \text{ kg};$$

$$k_2 = 300\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}; \quad \ell_{02} = 10 \text{ cm}.$$

- 1) Montrer que les deux ressorts en série sont équivalents à un ressort unique dont on déterminera les caractéristiques.
- 2) Déterminer la fréquence des oscillations de l'oscillateur créé.

Ex. 6 Amortisseur de voiture

On modélise l'amortisseur d'une roue de voiture à l'aide d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement λ . Une masse $\frac{m}{4}$ est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement le long de l'axe ($O ; \vec{e}_x$) lié au référentiel terrestre \mathcal{R}_g , supposé galiléen.



Donnée : $m = 1\,200 \text{ kg}$.

- 1) Lors du changement d'une roue on soulève d'une hauteur $h = 25 \text{ cm}$ la masse $\frac{m}{4}$, ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol : la longueur AM vaut alors 40 cm.

Déterminer les caractéristiques du ressort.

- 2) Déterminer et calculer λ afin que le dispositif fonctionne en régime critique (roue sur le sol à l'arrêt et masse $\frac{m}{4}$ en mouvement vertical).

- 3) On enfonce la masse $\frac{m}{4}$ d'une hauteur $d = 5 \text{ cm}$ et on lâche le système à $t = 0$ sans vitesse initiale.

Déterminer l'évolution de l'altitude x de la masse $\frac{m}{4}$.

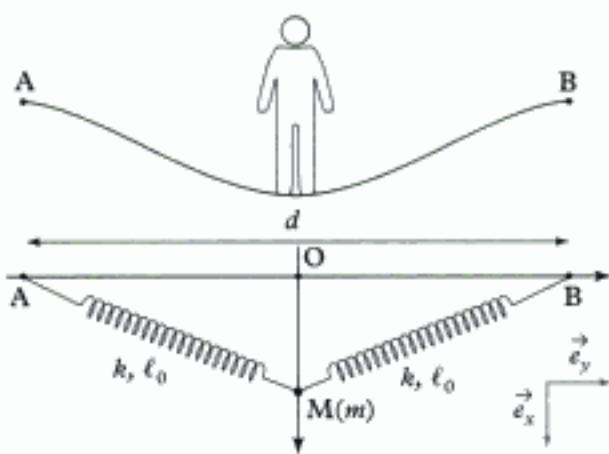
- 4) On charge maintenant l'amortisseur au maximum : la masse totale du véhicule vaut $m = 2\,200 \text{ kg}$.

Déterminer les paramètres de l'amortisseur Q et ω_0 . Tracer l'allure de la réponse lorsqu'on enfonce de $x_0 = 5 \text{ cm}$ la masse $\frac{m}{4}$ et qu'on la lâche sans vitesse initiale à $t = 0$.

Conclure.

Ex. 7 Trampoline

On considère la modélisation d'un trampoline à l'aide de deux ressorts de longueur à vide ℓ_0 et raideur k . Un homme, assimilé à un point matériel M de masse m monte sur le trampoline qui s'enfonce ; son mouvement est vertical le long de l'axe ($O ; \vec{e}_x$).



On travaille dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ supposé galiléen.

Données :

$$k = 3\,300 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1};$$

$$\ell_0 = 1 \text{ m};$$

$$m = 80 \text{ kg};$$

$$d = 5 \text{ m}.$$

Dans les deux premières questions, on suppose que l'homme reste en contact avec le trampoline : il est solidaire du trampoline.

1) Déterminer la distance d'enfoncement x_{eq} à l'équilibre lorsque l'homme monte sur le trampoline ; en déduire l'allongement des ressorts.

2) Déterminer si l'oscillateur obtenu est harmonique.

3) Déterminer la position à laquelle l'homme peut quitter le trampoline.

Déterminer de quelle distance il doit enfonce le trampoline pour pouvoir décoller.

Indications

Ex. 7 3) On déterminera la réaction du trampoline sur l'homme et on utilisera le théorème de l'énergie mécanique.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

L'unité de $\sqrt{\frac{k}{m}}$ est : $\sqrt{\frac{N \cdot m^{-1}}{kg}} = \sqrt{N \cdot kg^{-1} \cdot m^{-1}} = \sqrt{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot m^{-1}} = s^{-1}$ qui est homogène à l'inverse d'une durée.

L'unité de $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ est $\sqrt{\frac{m}{m \cdot s^{-2}}} = s$ qui est homogène à une durée.

L'unité de $\frac{1}{2}k\ell^2$ est $N \cdot m^{-1} \cdot m^2 = N \cdot m$ qui est homogène à une énergie (J).

L'unité de $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ est $\frac{1}{\sqrt{FH}} = \frac{1}{\sqrt{A \cdot V^{-1} \cdot s \cdot V \cdot A^{-1} \cdot s}} = s^{-1}$ qui est homogène à l'inverse d'une durée.

Le farad (F) est homogène à : $A \cdot V^{-1} \cdot s$; en effet on a : $q = Cu \Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \cdot A = F \frac{V}{s}$.

Le henri (H) est homogène à : $A^{-1} \cdot V \cdot s$; en effet, on a : $v = L \frac{di}{dt}$ soit $V = H \frac{A}{s}$.

Exercice 2

1) L'oscillateur étudié est en régime pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$).

a) Pseudo-période : $T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$.

En effet l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

On cherche une solution sous la forme $x = Ce^{rt}$ ce qui nous donne l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0^2}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0 \quad \text{si} \quad Q > \frac{1}{2}; \quad \text{d'où} \quad r_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\omega_0^2 \left(4 - \frac{1}{Q^2} \right)}}{2}.$$

Ainsi la pseudo-période est : $T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 \left(4 - \frac{1}{Q^2} \right)}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

A.N. $T_a = \frac{2\pi}{100 \times \sqrt{1 - \frac{1}{4 \times 10^2}}} = 62,9 \text{ ms.}$

b) Décrément logarithmique : $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$.



Le décrément logarithmique vaut : $\delta = \ln \frac{x_0}{x_1}$.

x_0 est la position de départ ($t = 0$).

x_1 est la position au bout d'une pseudo-période ($t = T_a$).

$$\delta = \ln \frac{e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} \times 0\right)}}{e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} T_a\right)}} = \ln e^{\frac{\omega_0 T_a}{2Q}} = \frac{\omega_0}{2Q} T_a = \frac{\omega_0}{2Q} \times \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

$$\text{A.N. } \delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4 \times 10^2 - 1}} \approx 0,314.$$

c) Amplitude des oscillations au bout de :

- 2 pseudo-périodes : $2\delta = \ln\left(\frac{x_0}{x_2}\right)$ en appelant x_2 l'amplitude au bout de 2 pseudo-périodes ; en effet :

$$\ln\left(\frac{x_0}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{x_0}{x_1} \times \frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right) + \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \delta + \delta = 2\delta.$$

Ainsi : $x_2 = x_0 e^{-2\delta}$.

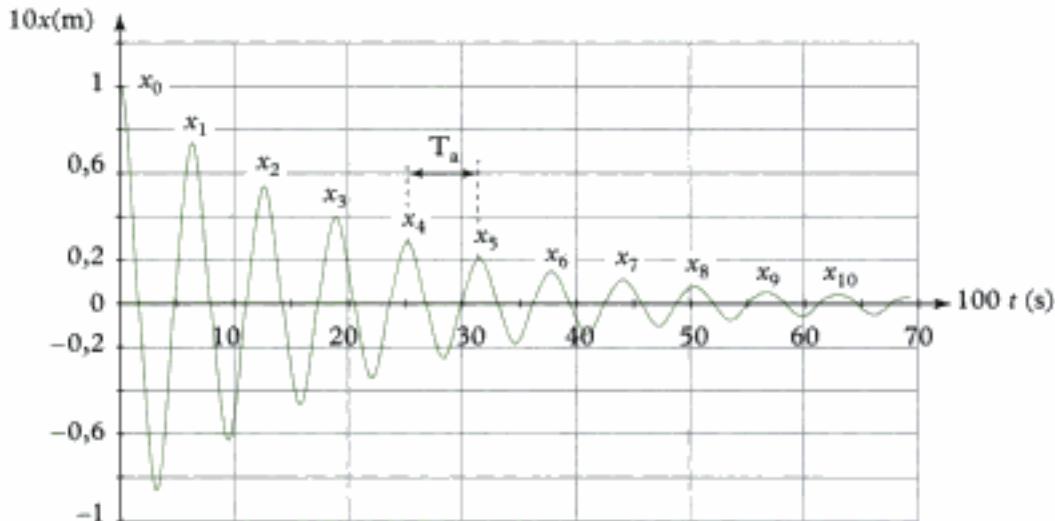
$$\text{A.N. } x_2 = 10 \times 10^{-2} \times e^{-2 \times 0,314} \approx 5,34 \text{ cm.}$$

- 5 pseudo-périodes $x_5 = x_0 e^{-5\delta}$.

$$\text{A.N. } x_5 = 10 \times 10^{-2} \times e^{-5 \times 0,314} = 2,08 \text{ cm.}$$

- 10 pseudo-périodes $x_{10} = x_0 e^{-10\delta}$.

$$\text{A.N. } x_{10} = 10 \times 10^{-2} \times e^{-10 \times 0,314} \approx 0,43 \text{ cm.}$$



d) Énergie mécanique initiale :

$$\mathcal{E}_{m_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = 0 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2.$$

$$\text{A.N. } \mathcal{E}_{m_0} = \frac{1}{2} \times 0,1 \times 100^2 \times (10 \times 10^{-2})^2 \approx 5 \text{ J.}$$

e) Énergie mécanique au bout de 2 pseudo-périodes

$$\text{Au bout d'une pseudo-période : } \mathcal{E}_{m_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}ke^{-2\delta}x_0^2 = e^{-2\delta}\mathcal{E}_{m_0}.$$

De même : $\mathcal{E}_{m_2} = e^{-2\delta}\mathcal{E}_{m_1}$; ainsi : $\mathcal{E}_{m_2} = (e^{-2\delta})^2\mathcal{E}_{m_0}$.

$$\text{A.N. } \mathcal{E}_{m_2} = (e^{-2 \times 0,314})^2 \times 5 = 1,42 \text{ J.}$$

- Énergie mécanique au bout de 5 pseudo-périodes :

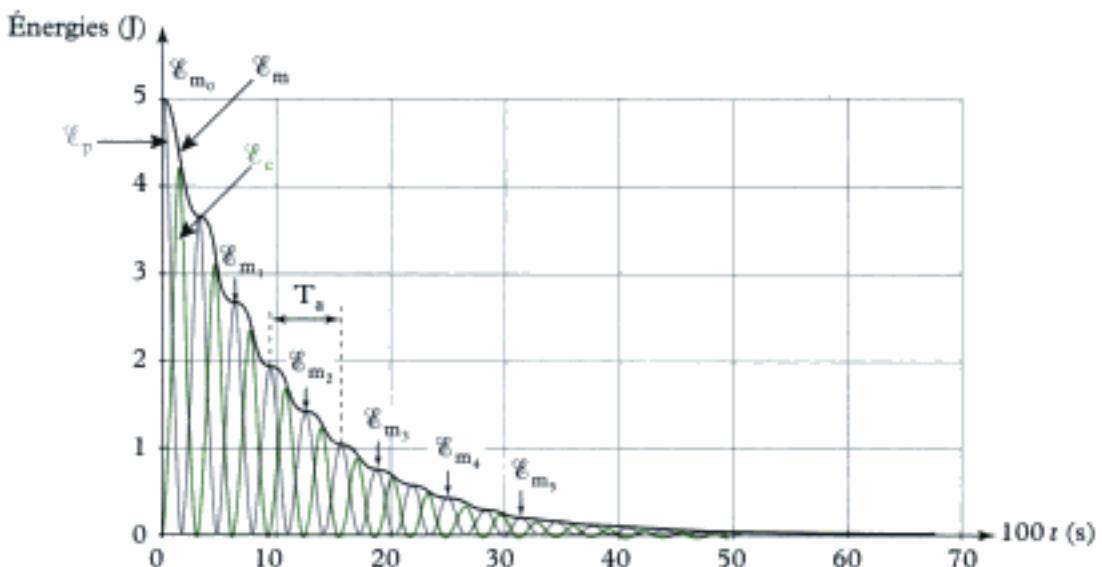
$$\mathcal{E}_{m_5} = (e^{-2\delta})^5 \mathcal{E}_{m_0}.$$

A.N. $\mathcal{E}_{m_5} = (e^{-2 \times 0,314})^5 \times 5 \approx 0,22 \text{ J}.$

- Énergie mécanique au bout de 10 pseudo-périodes :

$$\mathcal{E}_{m_{10}} = (e^{-2\delta})^{10} \mathcal{E}_{m_0}.$$

A.N. $\mathcal{E}_{m_{10}} = (e^{-2 \times 0,314})^{10} \times 5 \approx 0,009 \text{ J}.$



- 2) Au bout de n pseudo-périodes, l'amplitude des oscillations doit vérifier l'équation :

$$\ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) = n\delta \text{ soit } \ln(17) = n\delta, \text{ soit encore } n = \frac{1}{\delta} \ln 17.$$

A.N. $n = \frac{1}{0,314} \ln 17 \approx 9$ pseudo-périodes.

Exercice 3

- 1) La courbe indique que l'on est en présence d'un régime pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$).

- 2) Par lecture graphique, on trouve :

- $x_0 = 3 \text{ cm}$;
- $x_f = 0 \text{ cm}$ (position d'équilibre) ;
- $T_a = 315 \text{ ms}$;

$$\bullet \delta = \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = \ln\left(\frac{3 \times 10^{-2}}{1,6 \times 10^{-2}}\right) = 0,628.$$

- 3) À partir de la relation $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$, on trouve :

$$Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}}.$$



Le décrément logarithmique vaut : $\delta = \ln \frac{x_0}{x_1}$.

x_1 est la position au bout d'une pseudo-période ($t = T_s$).

$$\delta = \ln \frac{e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} \times t\right)}}{e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} T_s\right)}} = \ln e^{\left(\frac{\omega_0}{2Q} T_s\right)} = \frac{\omega_0}{2Q} T_s = \frac{\omega_0}{2Q} \times \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

A.N. $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{0,628^2} + \frac{1}{4}} = 5.$

On a de plus la relation $T_s = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$, on en déduit :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_s \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$



En effet l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

On cherche une solution sous la forme $x = Ce^{rt}$ ce qui nous donne l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0 \quad \text{si} \quad Q > \frac{1}{2}; \quad \text{d'où} \quad r_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm i\sqrt{\omega_0^2 \left(4 - \frac{1}{Q^2} \right)}}{2}.$$

Ainsi la pseudo-période est : $T_s = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 \left(4 - \frac{1}{Q^2} \right)}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$

A.N. $\omega_0 = \frac{2\pi}{315 \times 10^{-6} \sqrt{1 - \frac{1}{4 \times 5^2}}} \approx 20,05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$

Comme $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on trouve :

$$k = m\omega_0^2.$$

A.N. $k = 0,5 \times 20,05^2 = 201 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1},$

La relation $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$ donne :

$$\lambda = m \frac{\omega_0}{Q}.$$

A.N. $\lambda = 0,5 \times \frac{20,05}{5} \approx 2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}.$

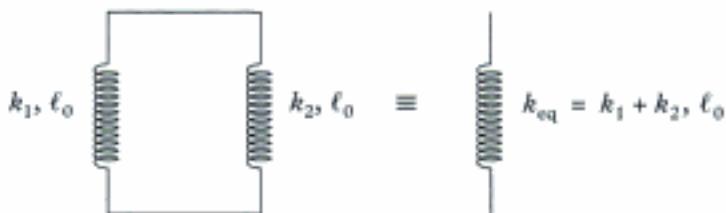
Exercices de niveau 2

Exercice 4

- 1) Les deux ressorts sont en parallèle ; exprimons, dans le cas général, la force totale exercée sur la masse $\frac{m}{2}$ par les deux ressorts de raideur k_1 et k_2 , et de même longueur à vide ℓ_0 :

$$\vec{F} = \vec{F}_{e_1} + \vec{F}_{e_2} = -k_1(x - \ell_0)\vec{e}_z - k_2(x - \ell_0)\vec{e}_z = -(k_1 + k_2)(x - \ell_0)\vec{e}_z.$$

Ainsi deux ressorts de longueur à vide ℓ_0 et de raideurs k_1 et k_2 sont équivalents à un unique ressort de raideur $k_{\text{eq}} = k_1 + k_2$ et longueur à vide ℓ_0 .



Ici $k_1 = k_2 = k$ donc $k_{\text{eq}} = 2k$.

- 2) a) Appliquons le PFD à la masse $\frac{m}{2}$ dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Système étudié : la masse $\frac{m}{2}$ assimilée à un point matériel M.

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_z)$.

Bilan des forces appliquées à M($\frac{m}{2}$) :

- poids $\vec{P} = -\frac{m}{2}g\vec{e}_z$;
- force de rappel élastique $\vec{F} = -k_{\text{eq}}(x - \ell_0)\vec{e}_z$.

Le PFD s'écrit :

$$\frac{m}{2}\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F}$$

et en projection sur \vec{e}_z , on obtient :

$$\frac{m}{2}\ddot{x} = -\frac{m}{2}g - k_{\text{eq}}(x - \ell_0).$$

À l'équilibre, on a $\ddot{x} = 0$, soit :

$$0 = -\frac{m}{2}g - k_{\text{eq}}(x_{\text{eq}} - \ell_0).$$

En effectuant la soustraction des deux équations précédentes, on obtient :

$$\frac{m}{2}\ddot{x} = -k_{\text{eq}}(x - x_{\text{eq}}).$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation différentielle du mouvement, en posant $\varepsilon = x - x_{\text{eq}}$:

$$\frac{m}{2}\ddot{\varepsilon} + k_{\text{eq}}\varepsilon = 0,$$

ou encore en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_{\text{eq}}}{m}} = \sqrt{\frac{4k}{m}}$:

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0.$$

b) La solution s'écrit sous la forme :

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

En tenant compte des conditions initiales, on détermine les constantes A et B :

$$x(0) = x_0 - x_{\text{eq}} = A$$

et

$$\dot{x}(0) = 0 = B\omega_0, \text{ donc } B = 0.$$

La solution s'écrit donc :

$$x(t) = (x_0 - x_{\text{eq}}) \cos(\omega_0 t)$$

soit :

$$x(t) = x_{\text{eq}} + (x_0 - x_{\text{eq}}) \cos(\omega_0 t).$$

c) L'accélération de la masse $\frac{m}{2}$ est :

$$\ddot{x} = -\omega_0^2(x_0 - x_{\text{eq}}) \cos(\omega_0 t).$$

L'accélération maximale est donc :

$$\ddot{x}_{\text{max}} = -\omega_0^2(x_0 - x_{\text{eq}}).$$

A.N. $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_{\text{eq}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 19\,000}{1\,000}} \approx 8,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\ddot{x}_{\text{max}} = -8,7^2 \times (-0,05) \approx 3,8 \text{ ms}^{-2} \approx 0,4 \text{ g.}$$



Le modèle semble assez réaliste quant à l'accélération maximale ; par contre une fois lancées, les oscillations ne s'amortissent plus, ce qui n'est plus réaliste : il manque du frottement !

Exercice 5

1) Exprimons la force exercée sur le point M par le ressort 1 :

$$\vec{F}_1 = -k_1(\ell_1 - \ell_{01})\vec{e}_x.$$

Exprimons les forces exercées sur le point A de masse nulle :

$$\vec{F}'_1 = k_1(\ell_1 - \ell_{01})\vec{e}_x$$

$$\vec{F}'_2 = -k_2(\ell_2 - \ell_{02})\vec{e}_x$$

Appliquons le PFD (PFS) à A (de masse nulle) dans \mathcal{R}_g

$$\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 = m_A \vec{a}(A)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{0},$$

soit, en projection sur \vec{e}_x :

$$k_1(\ell_1 - \ell_{01}) = k_2(\ell_2 - \ell_{02}).$$

Appelons $\Delta\ell$ l'allongement total des deux ressorts :

$$\Delta\ell = (\ell_1 - \ell_{01}) + (\ell_2 - \ell_{02}) = (\ell_1 + \ell_2) - (\ell_{01} + \ell_{02}).$$

Afin d'obtenir le résultat, on cherche à exprimer \vec{F}'_1 en fonction de $\Delta\ell$ qui est l'allongement du ressort équivalent :

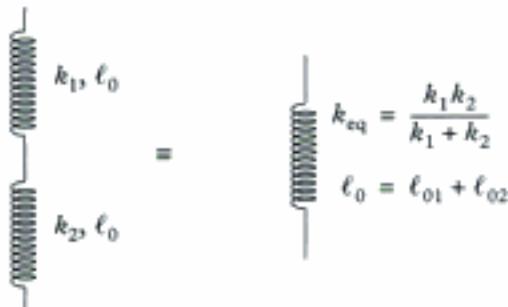
$$\Delta\ell = \ell_1 - \ell_{01} + \frac{k_1}{k_2}(\ell_1 - \ell_{01}) = (\ell_1 - \ell_{01})\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right).$$

En reportant dans \vec{F}'_1 on obtient la force appliquée sur M :

$$\vec{F}_1 = -k_1 \frac{\Delta\ell}{1 + \frac{k_1}{k_2}} \vec{e}_x = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Delta\ell \vec{e}_x.$$

Soit $\vec{F}_1 = -k_{\text{eq}}(x - \ell_0)\vec{e}_x$, avec $x = \ell_1 + \ell_2$ et $\ell_0 = \ell_{01} + \ell_{02}$.

Ainsi deux ressorts en série de raideurs respectives k_1 et k_2 et longueurs à vide respectives ℓ_{01} et ℓ_{02} sont équivalents à un ressort unique de raideur $k_{\text{eq}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ et longueur à vide $\ell_0 = \ell_{01} + \ell_{02}$.



$k_{\text{eq}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ est équivalent à $\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

Ainsi 2 ressorts ($k_1 k_2$) en série équivalent à un ressort de raideur équivalente $\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ et 2 ressorts en parallèle (voir exercice 4) équivalent à un ressort de raideur équivalente $k_{\text{eq}} = k_1 + k_2$.

C'est l'inverse des résistances en électricité :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{et} \quad R_{\text{series}} = R_1 + R_2.$$

A.N. $k_{\text{eq}} = 18\,750 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le pneu intervient peu dans la raideur totale de l'amortisseur.

2) La pulsation propre s'obtient aisément :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k_{\text{eq}}}{m}}.$$

La fréquence des oscillations est donc :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k_{\text{eq}}}{m}}.$$

A.N. $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4 \times 18\,750}{1\,000}} = 1,4 \text{ Hz}$.

Exercice 6

1) Lorsque la masse $\frac{m}{4}$ est posée sur l'amortisseur, on peut écrire l'équation d'équilibre (PFS) :

$$\vec{P} + \vec{F}_c = \vec{0}.$$

En projection sur \vec{e}_x : $-\frac{m}{4}g - k(x_{\text{eq}} - \ell_0) = 0$.

Lorsque la roue quitte le sol, le ressort prend alors sa longueur à vide $\ell_0 = 40 \text{ cm}$.

Ainsi $x_{\text{eq}} + 25 \text{ cm} = \ell_0$, soit $x_{\text{eq}} = 15 \text{ cm}$.

Et donc $k = -\frac{\frac{m}{4}g}{x_{\text{eq}} - \ell_0} = -\frac{300 \times 9,81}{15 \times 10^{-2} - 40 \times 10^{-2}}$, soit $k = 11\,772 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le ressort a donc une raideur $k = 11\,772 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et une longueur à vide $\ell_0 = 40 \text{ cm}$.

2) L'équation différentielle du mouvement est obtenue à l'aide du PFD appliqué au point matériel $M\left(\frac{m}{4}\right)$ dans le référentiel \mathcal{R}_g .

Système étudié : la masse $\frac{m}{4}$ assimilée à un point matériel M ;

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x)$;

Bilan des forces appliquées à M :

- poids $\vec{P} = -\frac{m}{4}g\vec{e}_z$;
- force de rappel du ressort : $\vec{F}_c = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x$;
- force de frottement de l'amortisseur : $\vec{F}_f = -\lambda\dot{x}\vec{e}_x$.

Le PFD donne donc :

$$\frac{m}{4}\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F}_c + \vec{F}_f.$$

En projection sur \vec{e}_x :

$$\frac{m}{4}\ddot{x} = -\frac{m}{4}g - k(x - \ell_0) - \lambda\dot{x} \quad \text{soit} \quad \frac{m}{4}\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = k\ell_0 - \frac{m}{4}g,$$

ou encore en faisant apparaître le facteur de qualité Q du dispositif et sa pulsation propre ω_0 :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{4k\ell_0}{m} - g,$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{4\lambda}{m}$.

Le régime critique est obtenu lorsque $Q = \frac{1}{2}$; on doit donc avoir :

$$\lambda = \frac{2m\omega_0}{4} = \frac{\omega_0 m}{2} \quad \text{soit} \quad \lambda = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{mk}.$$

A.N. $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{\frac{4 \times 11\ 772}{1\ 200}} = 6,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\lambda = \sqrt{mk} = \sqrt{1\ 200 \times 11\ 772} = 3\ 758 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3) Appelons $\varepsilon = x - x_{eq}$ avec $x_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{4k} = 15 \text{ cm}$.

 On obtient x_{eq} en reportant $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$ dans l'équation différentielle du mouvement.

L'équation différentielle du mouvement est :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0.$$

On cherche une solution de la forme : $\varepsilon(t) = Ae^{rt}$; en injectant dans l'équation différentielle précédente, on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

Comme $Q = \frac{1}{2}$, l'équation caractéristique s'écrit :

$$(r + \omega_0)^2 = 0,$$

dont la solution est $r_{1/2} = -\omega_0$.

La solution de l'équation différentielle est $\varepsilon(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$.

Avec les conditions initiales :

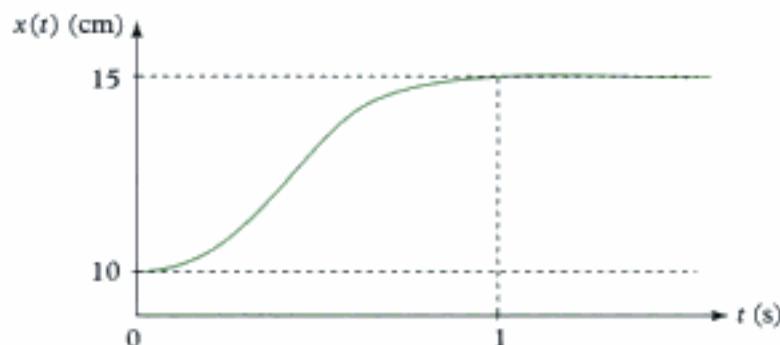
$$\varepsilon(0) = x_0 - x_{eq} = B = \varepsilon_0 (= -5 \text{ cm})$$

et $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{x}(0) - \dot{x}_{eq} = 0 = A - B\omega_0$ soit $A = +B\omega_0 = +\varepsilon_0\omega_0$.

Ainsi $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$, soit :

$$x(t) = x_{eq} + (x_0 - x_{eq})(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}.$$

A.N. $x(t) = 15 - 5(1 + 6,3t)e^{-6,3t}$ (en cm)



4) On calcule à nouveau Q et ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{\frac{4 \times 11\ 772}{2\ 200}} = 4,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Q = \frac{m\omega_0}{4\lambda} = \frac{m}{4\lambda}\sqrt{\frac{4k}{m}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{mk}{4}} = \frac{1}{3\ 758}\sqrt{\frac{2\ 200 \times 11\ 772}{4}} \approx 0,67.$$

Le régime est maintenant pseudo-périodique.

L'équation caractéristique est ici :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{soit} \quad r^2 + 6,89r + 21,34 = 0.$$

Le discriminant $\Delta = 6,89^2 - 4 \times 21,34 = -37,83 = (6,15 \text{ j})^2$ donne :

$$r_{1/2} = -3,44 \pm 3,07 \text{ j}.$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc sous la forme :

$$\varepsilon(t) = e^{-3,44t}(A \cos 3,07t + B \sin 3,07t).$$

A et B sont déterminées à l'aide des conditions initiales :

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = -5 \text{ cm}$$

$$\dot{\varepsilon}(0) = 0,$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} A = \varepsilon_0 \\ -3,44A + 3,07B = 0 \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} A = \varepsilon_0 = -5 \text{ cm} \\ B = \frac{3,44A}{3,07} = 1,12\varepsilon_0. \end{cases}$$

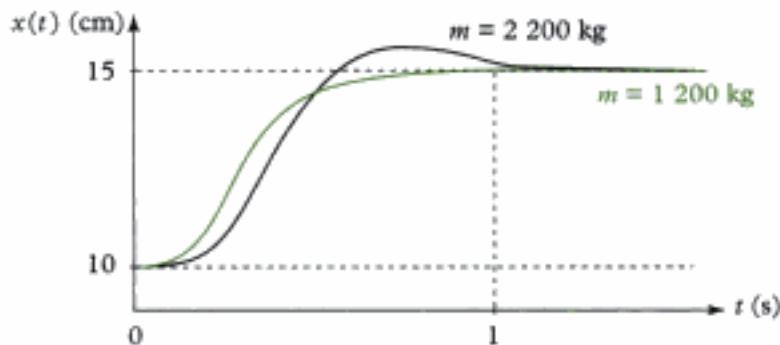
Ainsi : $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-3,44t}(\cos 3,07t + 1,12 \sin 3,07t)$

ou encore ($x(t)$ en cm) :

$$x(t) = 15 - 5e^{-3,44t}(\cos 3,07t + 1,12 \sin 3,07t).$$



La solution est pseudo-périodique de pseudo-pulsation $3,07 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; mais il y a peu de dépassement dans la réponse, ce qui ne modifiera pas trop les sensations. On comprend par contre qu'avec un tel dispositif, on obtiendrait des oscillations de fortes amplitudes si la masse pouvait varier beaucoup (ex. camion), ce qui entraînerait une gêne pour un homme subissant ces oscillations.



Exercice 7

1) Afin de déterminer la position d'équilibre écrivons le PFS appliqué au point M.

Système étudié : point matériel M(m).

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Bilan des forces appliquées :

- poids de M $\vec{P} = +mge_x$;
- force de rappel élastique du ressort droit :

$$\vec{F}_d = k(\ell - \ell_0)\vec{u}, \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{MB}}{\|\overrightarrow{MB}\|},$$

$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{MB}}{\|\overrightarrow{MB}\|}$ est un vecteur de même direction et de même sens que \overrightarrow{MB} , de norme 1.

$$\ell = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MB} = -x\vec{e}_x + \frac{d}{2}\vec{e}_y, \quad \text{d'où} \quad \|\overrightarrow{MB}\| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}, \quad \text{on obtient :}$$

$$\vec{F}_d = k\left(\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} - \ell_0\right) \left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{e}_x + \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{e}_y \right];$$

- force de rappel élastique du ressort gauche :

$$\vec{F}_g = k(\ell - \ell_0)\vec{u}', \quad \vec{u}' = \frac{\overrightarrow{MA}}{\|\overrightarrow{MA}\|}$$

$$\text{avec } \ell = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} = -x\vec{e}_x - \frac{d}{2}\vec{e}_y,$$

$$\text{d'où} \quad \|\overrightarrow{MA}\| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}, \quad \text{on obtient :}$$

$$\vec{F}_g = k\left(\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} - \ell_0\right) \left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{e}_x - \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{e}_y \right].$$

Le PFS donne :

$$\vec{P} + \vec{F}_g + \vec{F}_d = \vec{0} \text{ avec } x = x_{\text{eq}}.$$

En projection sur \vec{e}_x , cela donne :

$$mg - 2kx_{\text{eq}} \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x_{\text{eq}}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \right) = 0.$$

A.N. $x_{\text{eq}} = 19,8 \text{ cm}$ obtenu par résolution numérique ;

allongement des ressorts $\sqrt{x_{\text{eq}}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \ell_0 = 1,5 \text{ m}$.

2) En mouvement, on applique le PFD au point matériel M(m) dans \mathcal{R}_g donne sur \vec{e}_x :

$$m\ddot{x} = -2kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \right) + mg. \quad (1)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre non linéaire : l'oscillateur n'est pas harmonique.

3) Appliquons le PFD au point matériel M(m) :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{R}.$$

Soit en projection sur \vec{e}_x :

$$m\ddot{x} = mg - R \text{ soit } R = m(g - \ddot{x}).$$

L'homme peut quitter le trampoline si $R = 0$ soit si $\ddot{x} = g$. Ceci se produit lorsque $x = 0$ (voir équation (1)).

Cherchons maintenant la position initiale pour qu'il atteigne la position $x = 0$ avec une vitesse limite nulle.

$$\mathcal{E}_m|_{\mathcal{R}_g} = \text{cte} \text{ soit } \mathcal{E}_c|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_p|_{\mathcal{R}_g} = \text{cte}.$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + 2 \times \frac{1}{2}k \left(\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}} - \ell_0 \right)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 - mgx_0 + 2 \times \frac{1}{2}k \left(\sqrt{x_0^2 + \frac{d^2}{4}} - \ell_0 \right)^2.$$

Comme on veut qu'en $x = 0$, $\dot{x} = 0$ avec $\dot{x}_0 \neq 0$, on doit avoir :

$$k \left(\frac{d}{2} - \ell_0 \right)^2 = -mgx_0 + k \left(\sqrt{x_0^2 + \frac{d^2}{4}} - \ell_0 \right)^2.$$

A.N. On résout numériquement cette équation et on obtient $x \approx 39,4 \text{ cm}$.

 En réalité, il faudra enfourcer le trampoline d'au moins 39,4 cm, pour décoller au passage en $x = 0$, car il faudra alors une vitesse différente de 0.

Oscillations forcées dans les problèmes mécaniques à un degré de liberté

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la réponse d'un oscillateur à une excitation sinusoïdale. Pour cela on étudie le régime forcé sinusoïdal de l'oscillateur, dont l'intérêt est de pouvoir traiter, via l'analyse de Fourier, n'importe quel régime périodique forcé.

La notion de filtrage, c'est-à-dire de dépendance entre l'amplitude de la réponse de l'oscillateur (en élongation, en vitesse ou en puissance) et la pulsation de l'excitateur, mise ici en évidence, permet de rapprocher cette étude de celle des régimes forcés du circuit électrique RLC série.

Plan du chapitre 5

A. Régime transitoire et régime forcé	166
B. Excitation constante	167
C. Excitation sinusoïdale – Méthode complexe	167
1. Réponse en élongation	168
2. Réponse en vitesse	172
3. Réponse en puissance	175
D. Similitudes électricité/mécanique	176
E. Régime périodique	177
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre	178
Énoncés des exercices	181
Indications	182
Solution des exercices	183

A. Régime transitoire et régime forcé

On considère un oscillateur harmonique amorti à un degré de liberté (x) évoluant dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , soumis à une force excitatrice $F(t)$; l'équation différentielle du mouvement est :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t),$$

si l'oscillateur est composé d'une masse m et d'un ressort de raideur k et s'il est soumis à une force de frottement fluide $-\lambda\dot{x}$.

En utilisant les paramètres normalisation $Q = \omega_0 \frac{m}{\lambda}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (1)$$

x écart à la position d'équilibre
 ω_0 pulsation propre ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
 Q facteur de qualité
 F force excitatrice (N)
 m masse (kg)

1. C'est aussi la solution du régime libre étudié dans le chapitre 4 :

$$x_f(t) = x_{\text{libre}}(t).$$

2. Si l'amortissement est non nul : $Q \neq \infty$.

3. Le temps de réponse t_r est de l'ordre de grandeur du temps de relaxation (durée caractéristique) τ (voir chapitre 4).

4. On qualifie aussi ce régime de régime forcé permanent.

Supposons que la force excitatrice apparaisse à $t = 0$ ($F(t) = 0$ pour $t < 0$) et que l'oscillateur démarre à partir des **conditions initiales** $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$. La solution de l'équation différentielle est la somme de :

- la solution $x_f(t)$ de l'équation sans second membre, qui dépend des conditions initiales¹ (qui s'annule au bout d'un temps t_r , appelé **temps de réponse**²)³ ;
- et une solution particulière, qui a souvent la même forme que le second membre $\frac{F(t)}{m}$ (qui est la solution forcée $x_f(t)$).

On fait ainsi apparaître (fig. 1) un régime transitoire (de $t = 0$ à $t = t_r$) qui correspond à la solution $x(t) = x_f(t) + x_f(t)$, puis un régime forcé⁴ qui correspond à la solution $x(t) = x_f(t) + x_f(t) \approx x_f(t)$ (car pour $t > t_r$, on a $x_f(t) \approx 0$).

Excitation	0	$F(t)$	t_r	$F(t)$	t
Solution	$x_f(t) + x_f(t)$ libre forcée			$x_f(t)$ forcée	
Régime	transitoire forcé				

Fig. 1 - Régime de fonctionnement et solution de l'équation différentielle.

Un exemple d'évolution est donné sur la (fig. 2) pour une excitation sinusoïdale.

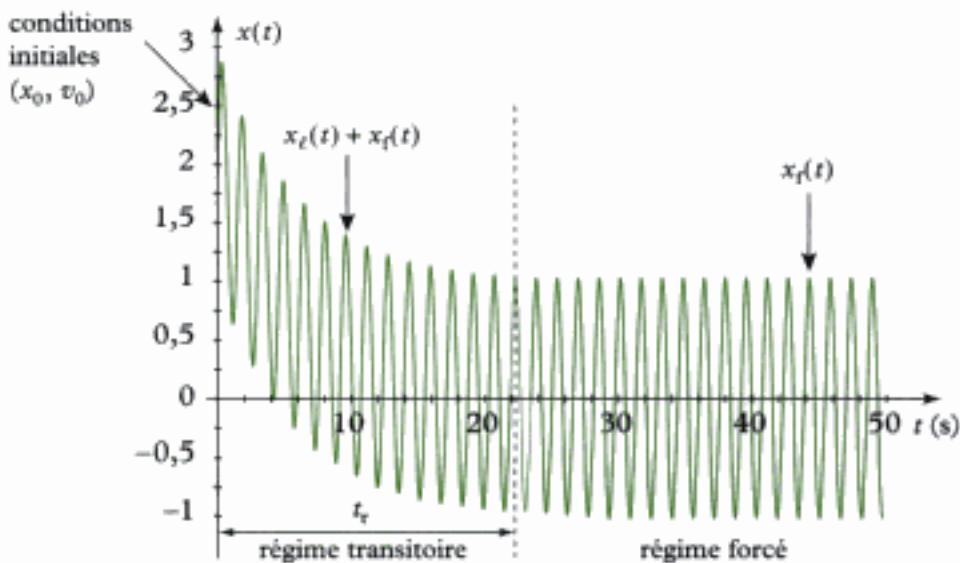


Fig. 2 - Régimes de fonctionnement.

B. Excitation constante

Si $F(t) = F_0 = \text{cte}$, la solution particulière de l'équation différentielle (1) est constante :

$$x_f(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \text{cte.}$$

$x_f(t)$ est la nouvelle position d'équilibre transitoire ; en effet, après le régime transitoire, il ne reste plus que cette solution, le système s'est stabilisé à la valeur :

$$x(t \rightarrow \infty) = x_f(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

Remarque : en effectuant le changement de variable :

$$X(t) = x(t) - x_f(t) = x(t) - \frac{F_0}{m\omega_0^2},$$

l'équation différentielle devient :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0^2}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

Elle permet d'étudier le régime transitoire du système (l'équation différentielle est identique à celle des régimes libres du chapitre 4).

C. Excitation sinusoïdale – Méthode complexe

Si $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, la solution particulière de l'équation différentielle (1) est de la forme :

$$x_f(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \quad (X_m > 0),$$

ceci est une propriété des systèmes linéaires, c'est-à-dire des systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants (ici ω_0 et Q).

Afin de déterminer la solution particulière² ($x(t) = x_f(t)$), c'est-à-dire afin de déterminer X_m et ϕ , nous allons utiliser la méthode complexe, consistant à remplacer chaque grandeur sinusoïdale par une grandeur complexe équivalente :

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \xrightarrow{3} \underline{F} = F_0 e^{j\omega t} = \underline{F}_0 e^{j\omega t} \quad (F_0 > 0)$$

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{} \underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t} \quad (X_m > 0)$$

Avec :

- $\underline{F}_0 = F_0$ est l'amplitude complexe de $F(t)$ (ici \underline{F}_0 est réelle) ;
- $\underline{X}_m = X_m e^{j\phi}$ est l'amplitude complexe de $x(t)$;
- ϕ est la phase à l'origine de $x(t)$ (ici aussi déphasage de $x(t)$ par rapport à $F(t)$) ;
- $X_m = |\underline{X}_m|$ est l'amplitude de $x(t)$;
- $F_0 = |\underline{F}_0|$ est l'amplitude de $F(t)$.

1. ϕ représente la phase à l'origine de $x_f(t)$ mais aussi le déphasage de $x_f(t)$ par rapport à $F(t)$.

2. On ne s'intéresse ici qu'à la solution particulière, c'est-à-dire qu'au régime forcé sinusoïdal (cette étude ne permet pas l'étude du régime transitoire).

3. L'opération inverse permettant de passer de la grandeur complexe à la grandeur réelle consiste ici à prendre la partie réelle du nombre complexe :

$$x(t) = \operatorname{Re}(\underline{x})$$

Si la grandeur réelle était :

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \phi)$$

on l'aurait associée à

$$\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

avec $x(t) = \operatorname{Im}(\underline{x})$.

Sachant que :

$$1. \dot{x} = \frac{dx}{dt} = j\omega X_m e^{j\omega t} = j\omega x,$$

$$\ddot{x} = j\omega \dot{x} \text{ et } \ddot{x} = -\omega^2 x,$$

L'équation différentielle devient une équation complexe :

$$-\omega^2 x + j\omega \frac{\omega_0}{Q} x + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m},$$

$$\text{soit : } -\omega^2 X_m e^{j\omega t} + j\frac{\omega \omega_0}{Q} X_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 X_m e^{j\omega t} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{m}$$

en simplifiant par $e^{j\omega t}$, on obtient l'équation aux amplitudes complexes :

$$X_m \left(-\omega^2 + j\frac{\omega \omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) = \frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{m} \quad (2)$$

C.1. Réponse en élongation

L'équation (2) permet d'écrire l'amplitude complexe de l'élargissement $x(t)$:

$$X_m = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega \omega_0}{Q}} = \frac{\frac{F_0}{m \omega_0^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

$$\text{soit } X_m e^{j\varphi} = \frac{\frac{F_0}{m \omega_0^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}},$$

On obtient alors l'amplitude X_m de $x_f(t)$ et la phase à l'origine φ de $x_f(t)$:

$$X_m = \frac{\frac{F_0}{m \omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}$$

$$\text{et } \varphi = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 > 0 \quad (\omega < \omega_0); \\ -\pi - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 < 0 \quad (\omega > \omega_0). \end{cases}$$

2. argument $(x + jy) =$

$$\begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La solution particulière $x_f(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est ainsi parfaitement déterminée ; on constate que son amplitude X_m et sa phase à l'origine φ dépendent de la pulsation de l'excitation : **l'oscillateur harmonique amorti se comporte comme un filtre.**

C.1.1 - Comportement en fonction de la pulsation

- Aux basses pulsations, $\omega \rightarrow 0$ ($\omega \ll \omega_0$) :

$$\underline{X}_m = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow \begin{cases} X_m \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} \\ \varphi = 0 \text{ rad.} \end{cases}$$

- Aux hautes pulsations, $\omega \rightarrow \infty$ ($\omega \gg \omega_0$) :

$$\underline{X}_m \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} \times \left(-\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} X_m \approx \frac{F_0}{m\omega^2} \rightarrow 0 \\ \varphi \approx -\pi \text{ rad.} \end{cases}$$

- Aux pulsations intermédiaires ($\omega = \omega_0$) :

$$\underline{X}_m = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{j\frac{1}{Q}} = -j \frac{F_0 Q}{m\omega_0^2} \Rightarrow \begin{cases} X_m = \frac{F_0 Q}{m\omega_0^2} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad.} \end{cases}$$

• À la pulsation de résonance (lorsqu'elle existe) : X_m peut passer par un maximum (il s'agit d'un **phénomène de résonance**) ; déterminons la pulsation de résonance en cherchant le maximum de la fonction X_m , ou encore le minimum de son dénominateur (ou du carré de son dénominateur) :

$$\frac{d}{d\omega} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q} \right)^2 \right] = 0, \text{ soit } 2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \left(-2 \frac{\omega}{\omega_0^2} \right) + 2 \frac{\omega}{\omega_0 Q} \frac{1}{\omega_0 Q} = 0.$$

Il vient : $4 \frac{\omega}{\omega_0^4} \left[\frac{\omega_0^2}{2Q^2} + \omega^2 - \omega_0^2 \right] = 0$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \text{ou} \\ \omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\omega < \omega_0) \end{cases}$$

La solution $\omega = 0$ correspond à la tangente horizontale à la courbe à pulsation nulle ; la seconde solution est la **pulsation de résonance** qui n'existe que si $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$; le maximum de l'amplitude est :

$$X_{m_r} = X_m(\omega = \omega_r) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

Si $Q \gg \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\omega_r = \omega_0$ et $X_{m_r} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \times \Omega$.

1. L'analyse du comportement en fonction de la pulsation (ω) ou de la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$) s'appelle l'analyse fréquentielle.

L'allure des courbes réponse¹ est donnée sur la fig. 3.

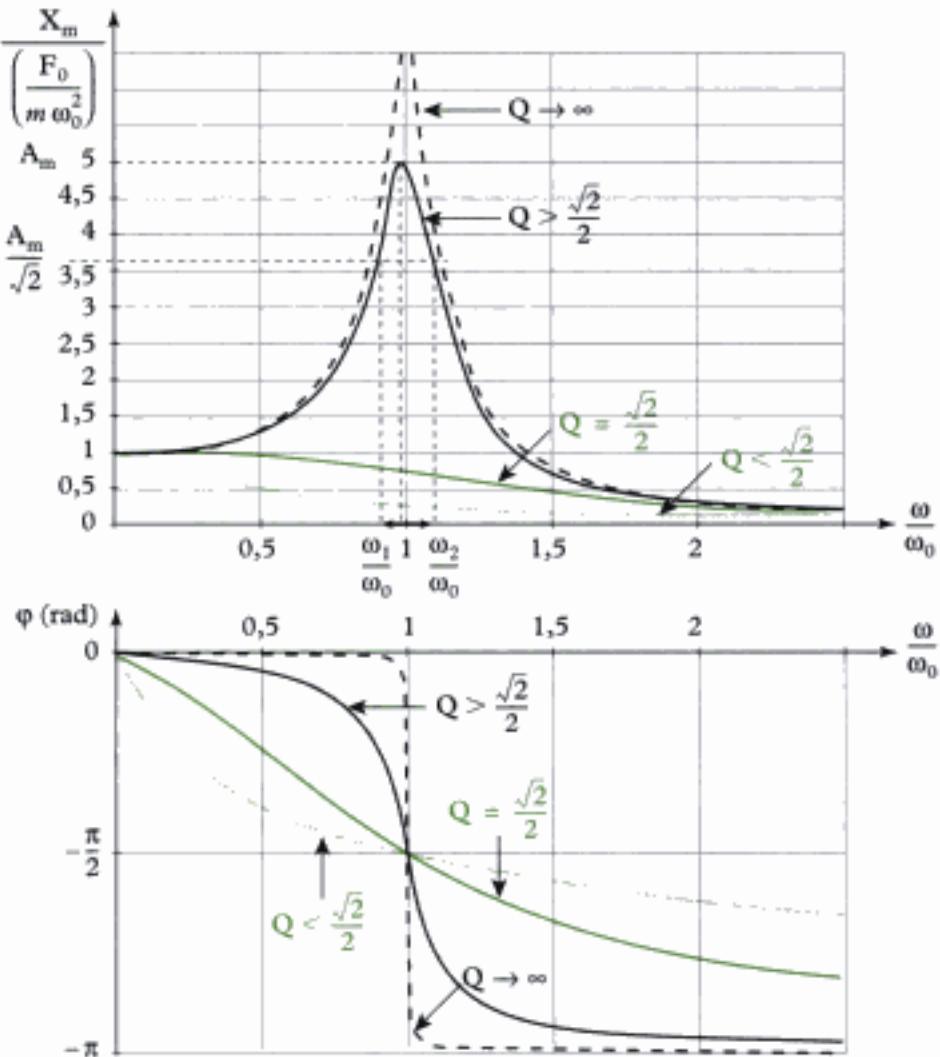


Fig. 3 - Comportement fréquentiel de l'elongation.

1. On peut représenter l'oscillateur comme un système d'entrée $F(t)$ et sortie $x(t)$:

$$F(t) \rightarrow \boxed{\text{filtre}} \rightarrow x(t).$$

2. La bande passante est donnée par :

$$X_m(\omega) = \frac{X_{m_{\max}}}{\sqrt{2}}.$$

3. Comme en électricité, les limites de la bande passante sont les valeurs pour lesquelles l'amplitude est l'amplitude maximum divisée par $\sqrt{2}$. Voir le paragraphe C. 2.

La courbe $\omega \rightarrow X_m(\omega)$ montre que l'oscillateur se comporte comme un **filtre passe-bas**¹, mais très localement, lorsque $Q \gg \frac{\sqrt{2}}{2}$, il a un comportement passe-bande (la bande passante est alors $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ²).

L'**acuité** de la résonance est alors chiffrée par la largeur de cette bande passante : plus Q est grand, plus $\Delta\omega$ est petit ; dans le cas $Q \gg 1$, on pouvait démontrer que³ :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$	Q facteur de qualité ($Q \gg 1$) ω_0 pulsation propre ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) $\Delta\omega$ bande passante ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
-------------------------------------	--

Ainsi, si la pulsation de l'exciteur est faible ($\omega \ll \omega_0$), l'oscillateur arrive à suivre le rythme imposé ; si la pulsation de l'exciteur est grande ($\omega \gg \omega_0$), l'oscillateur n'arrive pas à suivre le rythme imposé : l'amplitude de l'elongation est alors très faible.

Pour des pulsations d'excitation voisines de la **pulsation propre** de l'oscillateur (plus précisément proches de la pulsation de résonance, pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$), l'amplitude de l'elongation est grande : il y a résonance (plus Q est grand, plus la résonance est aiguë).

Dans le cas particulier où il n'y a pas d'amortissement ($Q \rightarrow \infty$), l'amplitude à la résonance est infinie.

Application 1 Expression de l'amplitude complexe de l'élongation

Soit un oscillateur harmonique pour lequel ($Q = 10$ et $\omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$), de masse $m = 1 \text{ kg}$, soumis à une force excitatrice :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \psi).$$

Données : $F_0 = 1 \text{ N}$; $\Omega = 8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $\psi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$.

Déterminer la réponse forcée de l'oscillateur (on suppose que l'on travaille dans un référentiel galiléen).

Solution

L'équation différentielle de l'oscillateur est :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t + \psi).$$

En utilisant la rotation complexe, on obtient une équation reliant les amplitudes complexes :

$$\underline{X}_m \left[-\omega^2 + \omega_0^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right] = \frac{F_0}{m} e^{j\psi},$$

ce qui permet de calculer l'amplitude complexe \underline{X}_m de l'élongation $x(t)$:

$$\underline{X}_m = \frac{\frac{F_0}{m} e^{j\psi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}.$$

$$\text{A.N. } \underline{X}_m = \frac{1 e^{j\frac{\pi}{4}}}{10^2 - 8^2 + \frac{8 \times 10}{10} j} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j}{36 + 8j} \text{ soit } \underline{X}_m = 0,027 e^{0,57 j}.$$

Ainsi la solution particulière (réponse forcée) est :

$$x(t) = 0,027 \cos(8t + 0,57).$$

C.1.2 - Quelques exemples d'oscillateurs

• Exemple 1

Considérons la masse m suspendue au bout B d'un ressort, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , dont l'autre extrémité est en A (fig. 4). Elle baigne dans un récipient rempli d'eau lui imposant la poussée d'Archimède $\vec{\pi} = -Mg$.

Le mouvement se fait dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

1) Le système est au repos ($x_A = 0$). Déterminer la position d'équilibre B_0 du point B.

2) On impose alors à A un mouvement vertical sinusoïdal :

$$x_A(t) = X_{Am} \sin(\omega t).$$

Écrire l'équation différentielle vérifiée par la position X ($\overrightarrow{B_0 B} = X \vec{e}_x$) de la masse m .

On suppose que l'eau exerce une force de frottement fluide opposée à la vitesse de B : $-\lambda \vec{v}$.

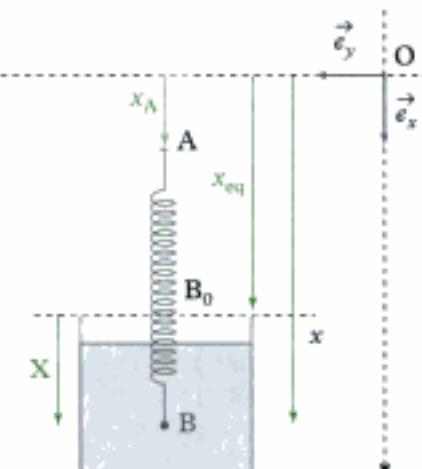


Fig. 4 - Oscillations dans un liquide.

• Résolution

1) Au repos, dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la masse m assimilée à un point matériel $B(m)$ est soumise à :

- son poids $\vec{P} = mge_x$;
- la poussée d'Archimède $\vec{\pi} = -Mge_x$;
- la force de rappel élastique du ressort $\vec{F}_e = -k(x_{eq} - \ell_0)\vec{e}_x$;
- la force de frottement fluide $\vec{F} = \vec{0}$ (car $\vec{v} = \vec{0}$).

Ainsi le PFD (PFS) donne, en projection sur \vec{e}_x :

$$(m - M)g = k(x_{eq} - \ell_0).$$

La position de B_0 est : $x_{eq} = \frac{(m - M)g}{k} + \ell_0$.

2) En mouvement, le PFD donne :

$$m\vec{a}(B)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{F} + \vec{\pi}$$

$$\text{soit } m\ddot{x}\vec{e}_x = mge_x - k(x - x_A - \ell_0)\vec{e}_x - \lambda\dot{x}\vec{e}_x - Mge_x.$$

En projetant sur \vec{e}_x et en faisant apparaître $X = x - x_{eq}$, on a :

$$m\ddot{X} = (m - M)g - k(X - x_A + x_{eq} - \ell_0) - \lambda\dot{X},$$

$$\text{soit } m\ddot{X} + \lambda\dot{X} + kX = kx_A = kX_{Am} \sin(\omega t).$$

En utilisant les paramètres $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \omega_0 \frac{m}{\lambda}$, on obtient :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{Am} \sin(\omega t).$$

• Exemple 2

Considérons le circuit électrique RLC série soumis un générateur basse fréquence délivrant une tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ (fig. 5).

Écrire l'équation différentielle vérifiée par la charge portée par le condensateur.

• Résolution

La loi des mailles donne : $u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = e(t)$.

Avec $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = Cu_C$, on a :

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2} = L\ddot{q} \quad \text{et} \quad u_R = Ri = R \frac{dq}{dt} = R\dot{q}.$$

On obtient¹ ainsi : $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E_m \cos(\omega t)$.

En utilisant les paramètres $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \omega_0 \frac{L}{R}$, on trouve :

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L} \cos(\omega t) \quad \text{soit} \quad \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 C E_m \cos(\omega t).$$

C.2. Réponse en vitesse

La vitesse de l'oscillateur est aussi sinusoïdale :

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v);$$

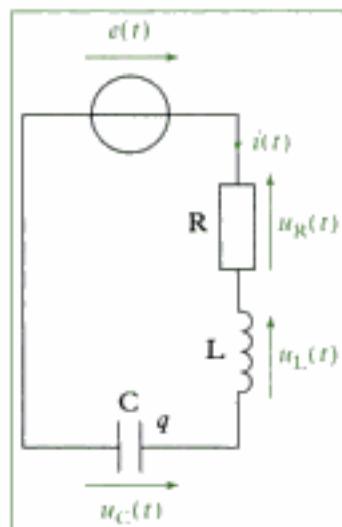


Fig. 5 - Circuit RLC série.

1. L'analogie électricité / mécanique peut se poursuivre :

$e(t) \rightarrow F(t)$
tension force
(voir chapitre 4)

on peut donc utiliser la méthode complexe :

$$\underline{v} = V_m e^{j(\omega t + \phi_v)} = V_m e^{j\omega t} \text{ avec } V_m = V_m e^{\phi_v}.$$

Comme $v(t) = \frac{dx}{dt}$, on a : $V_m = j\omega X_m$.

$$V_m = \frac{j\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} \text{ soit } V_m e^{j\phi_v} = \frac{j\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}.$$

On obtient alors l'amplitude V_m de la vitesse $v(t)$ et la phase à l'origine ϕ_v de $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$:

$$V_m = \frac{\frac{F_0 \omega}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} \quad \text{et}$$

$$\phi_v = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } \omega < \omega_0 ; \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } \omega > \omega_0 . \end{cases}$$

Comportement en fonction de la pulsation

- Aux basses pulsations $\omega \rightarrow 0$ ($\omega \ll \omega_0$) :

$$V_m = j \frac{\omega F_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow \begin{cases} V_m = \frac{\omega F_0}{m\omega_0^2} \rightarrow 0 \\ \phi_v = \frac{\pi}{2} \text{ rad.} \end{cases}$$

- Aux hautes pulsations $\omega \rightarrow \infty$ ($\omega \gg \omega_0$) :

$$V_m = -j \frac{\omega F_0}{m\omega_0^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = -j \frac{F_0}{m\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} V_m = \frac{F_0}{m\omega^2} \rightarrow 0 \\ \phi_v = -\frac{\pi}{2} \text{ rad.} \end{cases}$$

- Aux pulsations intermédiaires ($\omega = \omega_0$) :

$$V_m = \frac{j \frac{F_0}{m\omega_0}}{j \frac{1}{Q}} = \frac{F_0 Q}{m\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} V_m = \frac{F_0}{m\omega_0} Q \\ \phi_v = 0. \end{cases}$$

1. Pour l'élongation, la pulsation de résonance est

$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ qui n'existe que pour $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- À la pulsation de résonance : on pourrait démontrer que cette fois-ci, la courbe $\omega \rightarrow V_m(\omega)$ passe par un maximum en $\omega = \omega_0$, et qu'il y a résonance pour toutes les valeurs de Q (fig. 6).¹

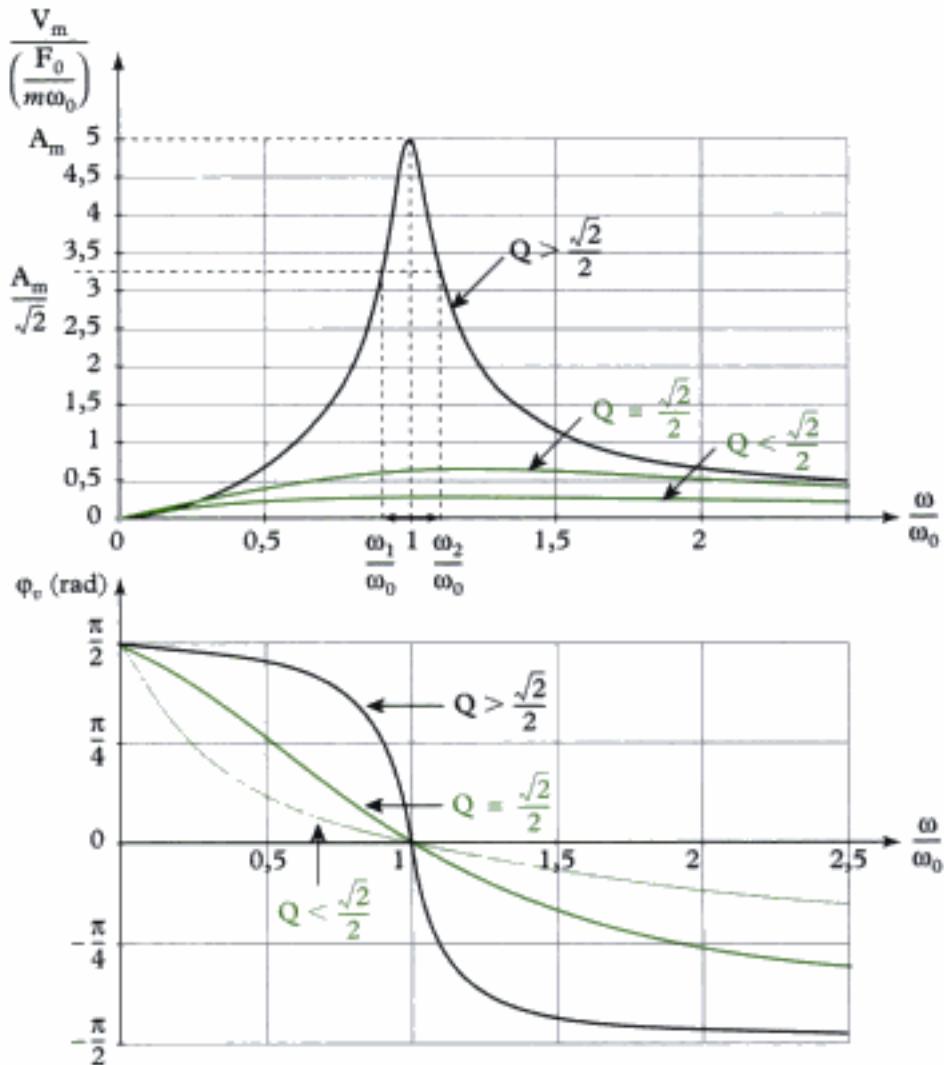


Fig. 6 - Comportement fréquentiel de la vitesse.

Les pulsations de coupure délimitant la bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ vérifient :

$$V_m(\omega) = \frac{V_{m_{\max}}}{\sqrt{2}}, \text{ soit } \frac{\frac{F_0\omega}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} = \frac{F_0 Q}{\sqrt{2} m \omega_0}.$$

$$\text{Il vient } \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et en éllevant au carré :}$$

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2} = \frac{2}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \text{ soit } \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 - \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2} = 0.$$

$$\text{Soit : } \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega}{Q \omega_0}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega}{Q \omega_0}\right) = 0 \text{ ou } \omega^2 \pm \frac{\omega_0}{Q} \omega - \omega_0^2 = 0.$$

Ces deux solutions admettent quatre racines dont deux seulement sont positives :

$$\omega_{2/1} = \pm \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}.$$

Ainsi la largeur de la bande passante est :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}.$$

1. Pour l'elongation, cette relation n'était qu'approchée et n'était valable que pour $Q \gg 1$.

On retrouve ainsi la relation :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Q facteur de qualité
 ω_0 pulsation propre ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
 $\Delta\omega$ bande passante ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

C.3. Réponse en puissance

La puissance de la force excitatrice est :

$$\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = F(t)v(t) = F(t)\dot{x}(t)$$

soit : $\mathcal{P}(t) = -F_0 \cos(\omega t)X_m \omega \sin(\omega t + \phi) = -F_0 X_m \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t + \phi)$
 $= -\frac{F_0 X_m \omega}{2} [\sin(\phi) + \sin(2\omega t + \phi)].$

La puissance est une fonction sinusoïdale de pulsation (2ω) variant autour de la valeur moyenne :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = -\frac{F_0 X_m \omega}{2} \sin \phi.$$

Avec l'aide du paragraphe C. 1., on a :

$$X_m = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}.$$

Or $X_m = X_m e^{j\phi} = X_m \cos \phi + jX_m \sin \phi$.

On trouve donc : $X_m \sin \phi = -\frac{\frac{F_0 \omega}{m\omega_0^3 Q}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}$.

D'où : $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{F_0}{2} \omega \frac{\frac{F_0 \omega}{m\omega_0^3 Q}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}$, soit $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{F_0^2 Q}{2m\omega_0} \frac{\frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}$.

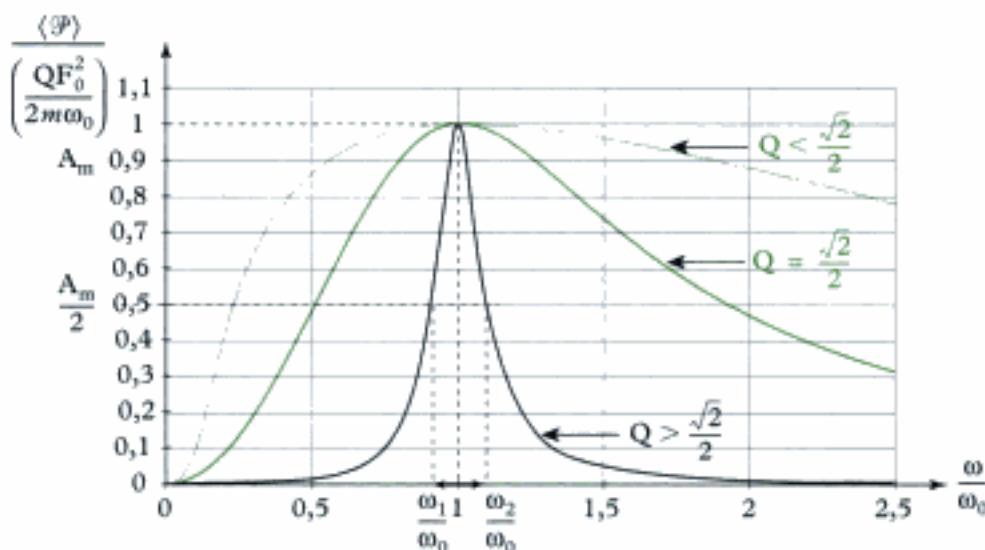


Fig. 7 - Comportement fréquentiel de la puissance moyenne.

1. La bande passante à -3 dB est donnée sur la courbe de puissance par $\langle \mathcal{P} \rangle(\omega) = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle_{\max}}{2}$.

La courbe représentative de $\omega \rightarrow \langle \mathcal{P} \rangle(\omega)$ (fig. 7) montre un comportement passe-bande¹, faisant apparaître une résonance à la pulsation $\omega = \omega_0$.

Cette puissance est dissipée sous forme de chaleur par les frottements fluides ; en effet la puissance de la force de frottement est :

$$\mathcal{P}_f(t) = -\lambda \ddot{x}^2 = -\lambda v^2 = -\lambda V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi_v)$$

en valeur moyenne :

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = -\frac{\lambda}{2} V_m^2;$$

à l'aide du paragraphe C. 2., on a :

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = -\frac{m\omega_0}{2Q} \cdot \frac{F_0^2 \omega^2}{m^2 \omega_0^4} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}} = -\frac{F_0^2 Q}{2m\omega_0} \cdot \frac{\frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}$$

ainsi par période d'excitation ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) : $\langle \mathcal{P} \rangle + \langle \mathcal{P}_f \rangle = 0$.

D. Similitudes électricité/mécanique

2. Comme l'analogie a montré :

$$i \rightarrow v$$

$$u \rightarrow F$$

$$\text{On a : } Z = \frac{U}{I} = \frac{F}{v},$$

En poursuivant l'analogie développée dans le chapitre 4 entre grandeurs mécaniques et grandeurs électriques, il est possible de définir l'impédance mécanique de l'oscillateur² :

$$Z = \frac{F}{v} = \frac{F_0}{V_m}.$$

En remarquant que l'équation : $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$m\ddot{v} + \lambda v + k \int v dt = F(t),$$

on obtient, en complexe :

$$V_m \left(jm\omega + \lambda + \frac{k}{j\omega} \right) = F_0.$$

Ce qui donne comme expression de l'impédance complexe :

$$Z = \lambda + jm\omega + \frac{1}{j\left(\frac{1}{k}\right)\omega}.$$

On peut ainsi associer une impédance complexe à chaque partie de l'oscillateur :

- frottement fluide : $Z_f = \lambda$ (résistance) ;

- masse m : $Z_m = jm\omega$ (bobine) ;

- ressort : $Z_r = \frac{1}{j\left(\frac{1}{k}\right)\omega}$ (condensateur).

On peut ainsi représenter l'oscillateur sous la forme d'un circuit électrique équivalent (fig. 8).

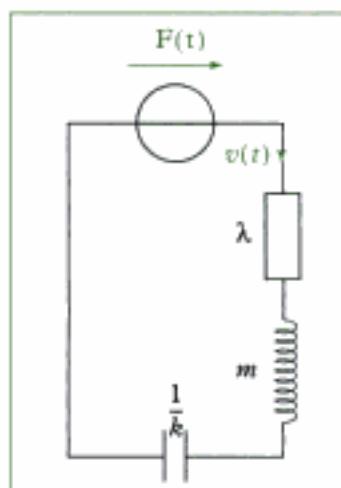


Fig. 8 - Circuit « mécanique ».

E. Régime périodique

Le régime sinusoïdal permet d'étudier, via l'analyse de Fourier, le régime périodique. En effet tout signal périodique (de période T) peut se décomposer en **série de Fourier** :

$$F(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + A_4 \cos(4\omega t + \varphi_4) + \dots$$

Par exemple, en additionnant :

$$s_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin(t), \quad s_2(t) = \frac{4}{3\pi} \sin(3t), \quad s_3(t) = \frac{4}{5\pi} \sin(5t) \text{ et } s_4(t) = \frac{4}{7\pi} \sin(7t)$$

on reconstitue le signal en crêteau (fig. 9) allant de -1 à $+1$, de période $T = 2\pi$.

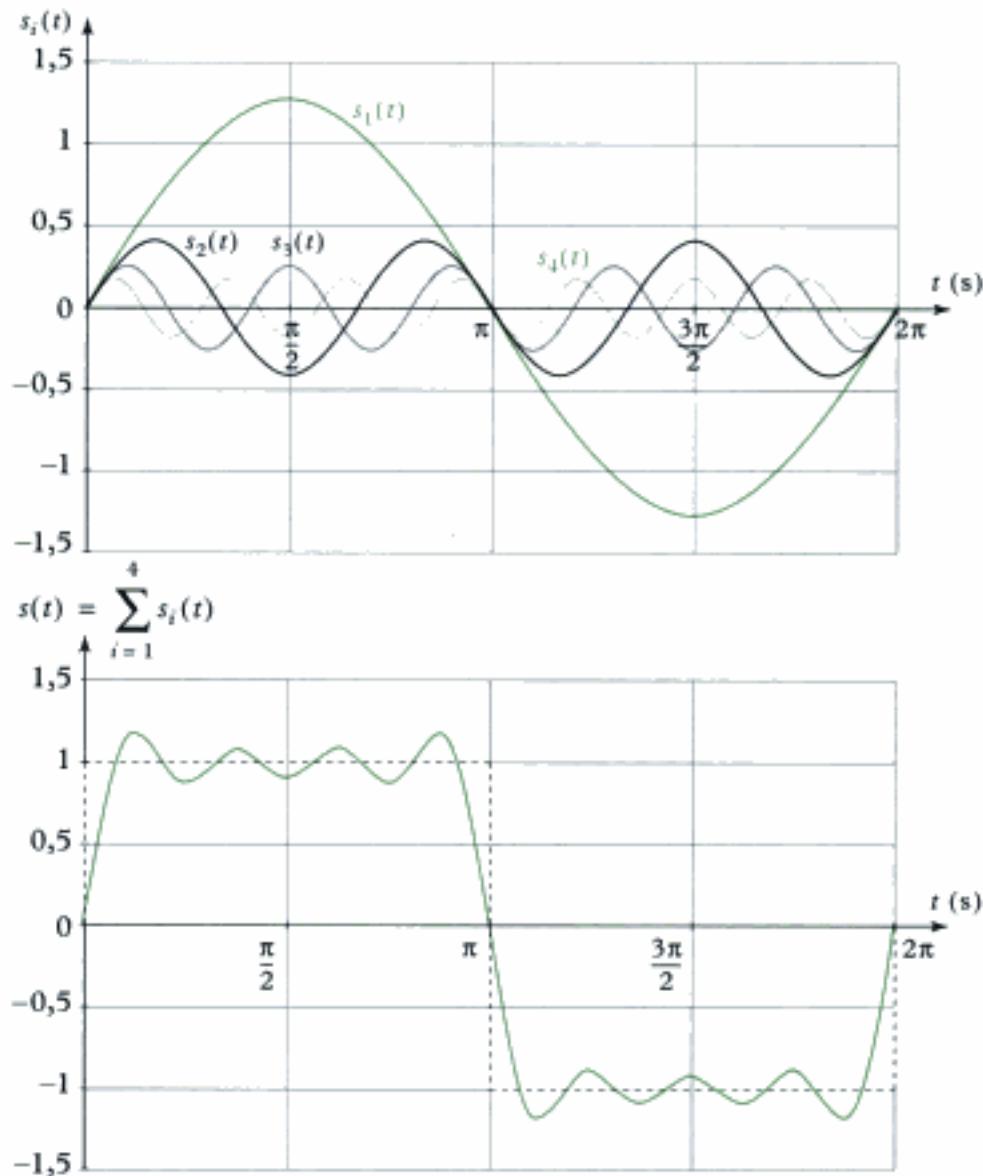


Fig. 9 - Reconstitution du signal périodique $s(t)$ à l'aide des fonctions sinusoïdales $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ et $s_4(t)$.

Plus on ajoute des composantes sinusoïdales de fréquences élevées, plus le signal somme se rapproche du signal en crêteau idéal : front raide, peu d'ondulation.

Ainsi, pour étudier la réponse forcée de l'oscillateur à une excitation périodique (ex. force périodique) c'est-à-dire à une somme de fonctions sinusoïdales, on cherche la solution particulière, somme des réponses forcées à chaque composante sinusoïdale (on applique pour cela le théorème de superposition).

L'essentiel

✓ Régime transitoire et régime forcé

Excitation	0	$F(t)$	t_r	$F(t)$
Solution		$x_\ell(t) + x_f(t)$ libre forcé		$x_f(t)$ forcé
Régime	transitoire		forcé	

✓ Comportement des oscillateurs harmoniques (réponse en élévation) :

Q	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Régime libre		régime aperiodique	régime critique	régime pseudo-périodique pseudo-pulsation : $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
Régime forcé	pas de résonance		<ul style="list-style-type: none"> • pulsation de résonance : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ <ul style="list-style-type: none"> • si $Q \gg \frac{\sqrt{2}}{2}$, pulsation de résonance : $\omega_r \approx \omega_0$ <p>bande passante $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$.</p>	

Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer la réponse d'un oscillateur harmonique à une excitation sinusoïdale ?

On considère un système physique régi par une équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t + \psi).$$

On cherche la réponse forcée du système, c'est-à-dire la solution particulière de l'équation différentielle du système.

→ Savoir faire

On utilise la méthode complexe :

- ① On cherche une solution sinusoïdale, de même pulsation ω que l'excitation ; on pose :
 $x = \underline{X}_m e^{i\omega t}$ avec $\underline{X}_m = X_m e^{i\psi}$ et $F = \underline{F}_0 e^{i\omega t}$ avec $\underline{F}_0 = F_0 e^{i\psi}$.
En remarquant, qu'avec l'écriture complexe, dériver par rapport au temps revient à multiplier par $i\omega$, écrire l'équation complexe reliant les amplitudes complexes X_m et F_0 .
- ② En déduire X_m puis $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\psi = \text{Arg}(\underline{X}_m)$.
- ③ Écrire la solution : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \psi)$.

→ Application

Soit un système physique régi par l'équation différentielle :

$$m\ddot{\ell} + h\dot{\ell} + k\ell = k\ell_0 + mg + F_0 \cos(\omega t + \psi).$$

Données :

$$m = 500 \text{ g} ; \quad h = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} ; \quad k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} ; \quad \ell_0 = 1 \text{ m} ;$$

$$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} ; \quad F_0 = 2 \text{ N} ; \quad \omega = 3\sqrt{2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} ; \quad \psi = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Déterminer le régime forcé de ce système physique en déterminant une solution particulière de l'équation différentielle.

Solution

L'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{\ell} + \frac{h}{m} \dot{\ell} + \frac{k}{m} \ell = \frac{k\ell_0}{m} + g + \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \psi).$$

On pose $x = \ell - \ell_{\text{eq}} = \ell - \ell_0 - \frac{mg}{k}$ (ℓ_{eq} obtenu en faisant $\dot{\ell} = 0$, $\ddot{\ell} = 0$ et $F_0 = 0$ dans l'équation précédente) et on obtient une équation différentielle reliant les écarts à la position d'équilibre :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \psi).$$

Soit en normalisant avec $Q = \frac{m}{h} \omega_0$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \psi).$$

$$\text{A.N. } Q = 2,24 ; \quad \omega_0 = 4,47 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} ; \quad \frac{F_0}{m} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

1 En complexe :

$$x(t) \rightarrow \underline{x} = \underline{X}_m e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{X}_m = \underline{X}_m e^{j\psi}$$

$$\dot{x}(t) \rightarrow j\omega \underline{x} = j\omega \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

$$\ddot{x}(t) \rightarrow (j\omega)^2 \underline{x} = -\omega^2 \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

$$\frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \psi) \rightarrow \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \text{ avec } F_0 = F_0 e^{j\psi}.$$

L'équation différentielle s'écrit donc :

$$-\omega^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} + \frac{j\omega_0 \omega}{Q} \underline{X}_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t},$$

ce qui donne, en simplifiant par $e^{j\omega t}$:

$$\underline{X}_m \left[\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right] = \frac{F_0}{m}.$$

2 On a donc :

$$\underline{X}_m = \frac{\frac{F_0}{m} e^{j\psi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} = \frac{\frac{F_0}{m \omega_0^2} e^{j\psi}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}.$$

$$\text{A.N. } \underline{X}_m = \frac{0,2 e^{j\frac{\pi}{4}}}{0,1 + 0,424 j} = \frac{0,2 e^{0,785 j}}{0,436 e^{1,34 j}} = 0,46 e^{-0,55 j}.$$

Ainsi : $X_m = |\underline{X}_m| = 0,46 \text{ m}$

$$\varphi = \text{Arg}(\underline{X}_m) = -0,55 \text{ rad.}$$

3 La réponse forcée est : $x(t) = 0,46 \cos(3\sqrt{2}t - 0,55)$.

soit $\ell(t) = x(t) + \ell_0 + \frac{mg}{k}$; d'où :

$$\ell(t) = 0,46 \cos(3\sqrt{2}t - 0,55) + 1,49.$$

Exercices

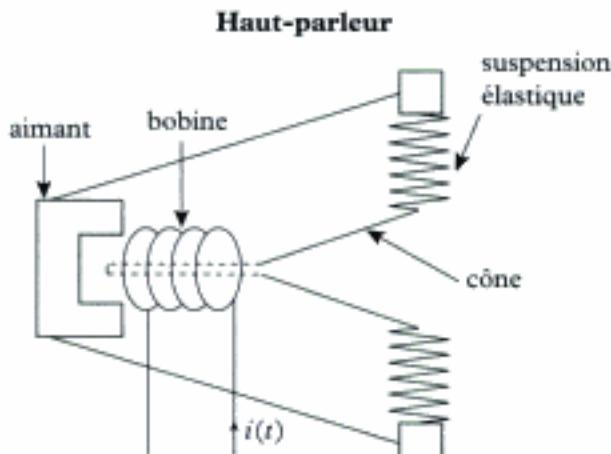
Niveau 1

Ex. 1 Unités

Déterminer les unités des grandeurs :

$$\frac{F_0 Q}{m \omega_0^2} \text{ et } \frac{F_0^2 Q}{2m \omega_0},$$

dans lesquelles F_0 est une force, Q un facteur de qualité, m une masse et ω_0 une pulsation.



Niveau 2

Ex. 2 Amortisseur de voiture

Un conducteur de masse $m = 80 \text{ kg}$ monte dans sa voiture vide ; les ressorts (amortisseurs) s'enfoncent alors de 4 cm. La masse de tout ce qui se trouve sur les ressorts est alors de 1 000 kg.

Calculer la raideur du ressort équivalent ainsi que la fréquence propre de l'oscillateur (dans l'approximation harmonique).

Ex. 3 Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m , se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe ($O ; \vec{e}_x$) ; cette masse m , assimilée à un point matériel $M(m)$ est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et raideur k et à un amortisseur fluide de constante f ; elle est soumise à une force $\vec{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut parleur ; on a :

$$\vec{F}(t) = K i(t) \vec{e}_x, \text{ avec } K \text{ une constante.}$$

On travaille dans le référentiel galiléen terrestre $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. On suppose que le courant $i(t)$ est sinusoïdal :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t).$$

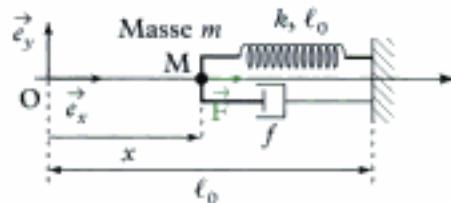
Données : $m = 10 \text{ g}$; $k = 15 000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$;

$K = 200 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1}$; $I_m = 1 \text{ A}$.

1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse m .

2) La normaliser. On veut $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

calculer la valeur du coefficient f .



3) Déterminer l'expression de la réponse forcée $x(t)$; la mettre sous la forme $X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

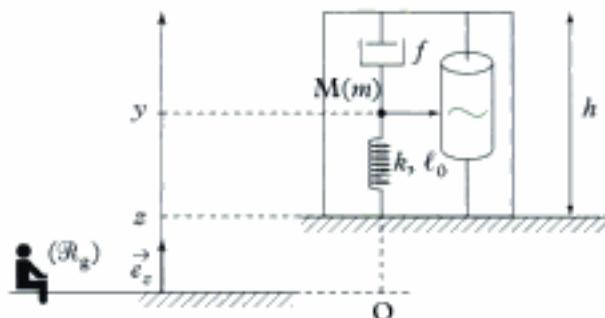
Donnée : $\omega = 6280 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

4) Tracer l'allure de la courbe donnant $\omega \mapsto X_m(\omega)$. En déduire la bande passante du système.

Niveau 3

Ex. 4 Un sismographe

Un sismographe est constitué d'un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 , d'un amortisseur de coefficient de frottement f et d'une masse m ponctuelle.



Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre rigide ; un stylo reproduisant les déplacements verticaux de la masse m par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse m .

Le cadre est mis en mouvement vertical sinusoïdal :

$$z(t) = Z_m \cos(\omega_0 t) + z_{\text{eq}} \quad (\text{avec } z_{\text{eq}} = 0).$$

Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

- 1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la grandeur x , écart entre la longueur ℓ du ressort à un instant t et sa longueur ℓ_{eq} à l'équilibre (obtenu lorsque $z = z_{\text{eq}} = 0$). On fera apparaître le facteur de qualité Q du système ainsi que sa pulsation propre ω_0 .
- 2) Déterminer, en régime forcé, l'amplitude X_m de l'oscillation de la masse ainsi que sa phase à l'origine.
- 3) Comment choisir Q pour que la bande de pulsation reproduite soit la plus grande possible et que l'écart entre X_m et Z_m soit au maximum de 5 % ?

Ex. 5 Molécule diatomique

On modélise une molécule diatomique par un oscillateur harmonique non amorti de fréquence propre $f_0 = 8,67 \times 10^{13}$ Hz. La distance séparant les deux atomes à l'équilibre est $r_0 = 1,27 \times 10^{-10}$ m. Un des deux atomes est supposé fixe dans le référentiel galiléen d'étude ; le second possède une masse $m = 1,66 \times 10^{-27}$ kg et porte une charge électrique $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

- 1) On soumet cette molécule à un champ électrique $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$.

Chercher une solution de la forme :

$$[A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)]t.$$

Conclure sur la valeur de E_0 nécessaire à la rupture de liaison.

- 2) En réalité cet oscillateur possède un facteur de qualité $Q = 5,45 \times 10^5$. Chercher la nouvelle solution. Conclure sur la valeur de E_0 nécessaire à la rupture de liaison.

Remarque : on admet que pour rompre la liaison entre les deux atomes, il suffit que la distance les séparant soit supérieure ou égale à $2r_0$.

Ex. 6 Couleur de ciel

Thomson a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) (il est soumis à une force de rappel passant par le centre de l'atome ; $\vec{F}_e = -k\vec{OM}$).

Nous supposerons que cet électron est freiné par une force de frottement proportionnelle à sa vitesse $\vec{F}_f = -h\vec{v}$ et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Nous cherchons à étudier l'action d'une onde lumineuse caractérisée par un champ électrique $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$ de pulsation ω (provenant du Soleil) sur un électron d'un atome de l'atmosphère, représenté à l'aide du modèle de Thomson.

Données : $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg ; $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C ; $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $h = 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

- 1) Écrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement de l'électron, puis la normaliser.
- 2) Déterminer le régime forcé (solution particulière de l'équation différentielle).
- 3) Simplifier l'expression précédente sachant que le rayonnement visible provenant du Soleil possède des longueurs d'onde s'étendant de $\lambda_b = 400$ nm (bleu) à $\lambda_r = 800$ nm (rouge), longueurs d'onde du champ $\vec{E}(t)$.
- 4) Sachant que l'électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération, expliquer pourquoi le ciel est bleu.

Indications

Ex. 4 1) $x = \ell - \ell_{\text{eq}} = (y - z) - (y_{\text{eq}} - z_{\text{eq}})$

avec ℓ longueur du ressort et ℓ_{eq} la longueur du ressort à l'équilibre.

Ex. 5 1) L'atome portant une charge q est soumis à la force : $\vec{F} = q\vec{E}$.

Ex. 6 1) L'électron portant une charge $-e$ est soumis à la force :

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

3) Rappel : $\lambda = \frac{c}{f}$, où λ est la longueur d'onde, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et f est la fréquence en Hz.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

L'unité de $\frac{F_0 Q}{m \omega_0^2}$ est : $\frac{N}{kg(s^{-1})^2} = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2}}{kg \cdot s^{-2}} = m$ (homogène à une distance).

L'unité de $\frac{F_0^2 Q}{2m \omega_0}$ est : $\frac{N^2}{kg \cdot s^{-1}} = \frac{kg^2 \cdot m^2 \cdot s^{-4}}{kg \cdot s^{-1}} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} = W$ (homogène à une puissance).

Exercices de niveau 2

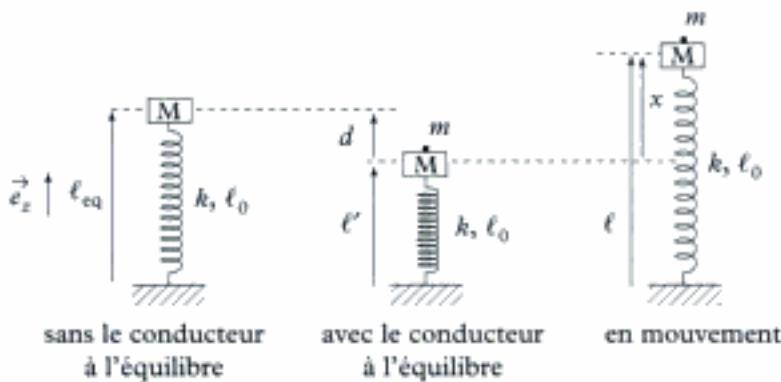
Exercice 2

Sans le conducteur, en appelant ℓ_{eq} la longueur à l'équilibre du ressort, on a, d'après le PFD appliqué dans le référentiel terrestre, supposé galiléen : $\vec{0} = \vec{F}_e + \vec{P}$.

En projetant sur \vec{e}_z :

$$0 = -k(\ell_{eq} - \ell_0) - Mg, \text{ soit } k(\ell_0 - \ell_{eq}) = Mg$$

(la masse du véhicule est M).



Avec le conducteur, le ressort passe à une longueur ℓ' (l'écart est $d = \ell_{eq} - \ell' = 4 \text{ cm}$) :

$$\vec{0} = \vec{F}_e + \vec{P}.$$

En projetant sur \vec{e}_z :

$$0 = -k(\ell' - \ell_0) - (M+m)g \quad \text{soit} \quad Mg + mg = k(\ell_0 - (\ell_{eq} - d))$$
$$mg = k d \Rightarrow k = \frac{mg}{d}.$$

A.N. $k = \frac{80 \times 9,81}{4 \times 10^{-2}} = 19\,620 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

En mouvement (petites oscillations), l'équation différentielle du mouvement est, si ℓ est la longueur du ressort en mouvement :

$$(M+m)\ddot{\ell} = -k(\ell - \ell_0) - (M+m)g.$$

En posant $x = \ell - \ell'$, on obtient :

$$(M+m)\ddot{x} = -k(\ell' + x - \ell_0) - (M+m)g \quad \text{soit} \quad (M+m)\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{M+m}x = 0.$$

La pulsation propre de cet oscillateur est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}.$$

A.N. $\omega_0 = \sqrt{\frac{19\,620}{1\,000}} = 4,43 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

La fréquence des oscillations est donc : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

A.N. $f_0 \approx 0,7 \text{ Hz}$.

Exercice 3

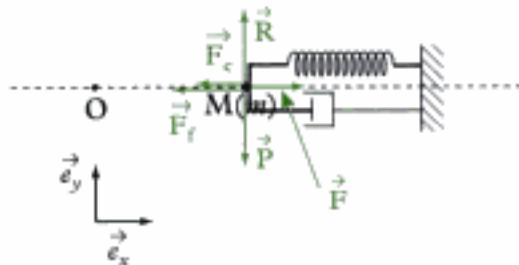
1) Le PFD donne :

$$m\vec{a}(M)|_{g_y} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_f,$$

avec :

- \vec{P} est le poids $-mg\vec{e}_y$;
- \vec{R} est la réaction $\vec{R}\vec{e}_y$;
- $\vec{F} = Ki\vec{e}_x$;

 i n'est pas une dérivée.



- $\vec{F}_e = -kx\vec{e}_x$;

- $\vec{F}_f = -f\dot{x}\vec{e}_x$.

En projection sur \vec{e}_x :

$$m\ddot{x} = -kx - f\dot{x} + Ki, \quad \text{d'où} \quad \ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{K}{m}I_m \cos(\omega t).$$

2) En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{f}{m}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{KI_m}{m} \cos(\omega t).$$

On a donc : $Q = \omega_0 \frac{m}{f} = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{m}{f} = \frac{1}{f} \sqrt{km}$.

A.N. pour avoir $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, il faut :

$$f = \sqrt{2km} \quad \text{soit} \quad f = \sqrt{2 \times 15\,000 \times 10 \times 10^{-3}} \approx 17,3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3) En utilisant les complexes, l'équation différentielle devient :

$$\underline{X}_m \left(-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) = \frac{KI_m}{m}$$

$$\text{soit } \underline{X}_m = \frac{\frac{KI_m}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} = \frac{\frac{KI_m}{m \omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}.$$

Ce qui donne :

$$X_m = |\underline{X}_m| = \frac{\frac{KI_m}{m \omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } \omega < \omega_0 ; \\ -\pi - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } \omega > \omega_0 . \end{cases}$$

Ainsi : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

$$\text{A.N. Avec } \omega = 6280 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15000}{10 \cdot 10^{-3}}} \approx 1224,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$X_m = 0,5 \text{ mm}$$

$$\varphi \approx -2,86 \text{ rad } (\omega > \omega_0)$$

$$\text{soit : } x(t) = 0,5 \times 10^{-3} \cos(6280t - 2,86), \quad (x(t) \text{ en m}).$$

4) La courbe est tracée ci-contre.

$$\text{Dès que } 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow X_m = \frac{\frac{KI_m}{m \omega_0^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

La limite de la bande passante est définie par :

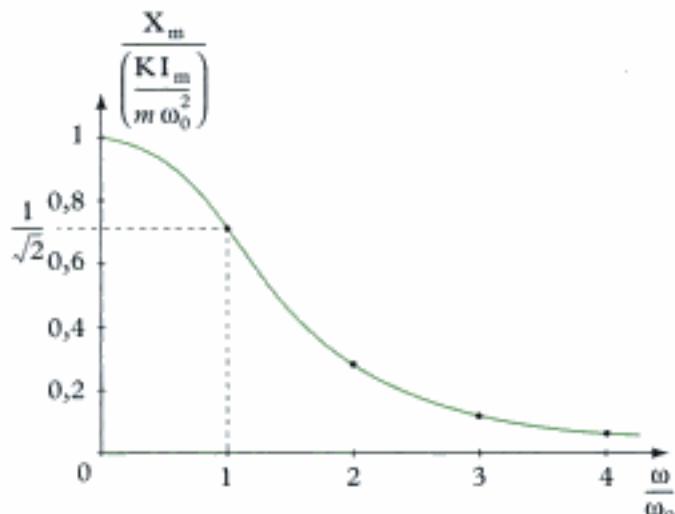
$$X_m(\omega_c) = \frac{X_{m \max}}{\sqrt{2}} \text{ soit } \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ce qui donne :

$$1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = 2 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = 1.$$

La solution intéressante est : $\omega_c = \omega_0$.

$$\text{A.N. } \omega_c = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1224,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Exercices de niveau 3

Exercice 4

1) Cherchons tout d'abord la position d'équilibre y_{eq} de la masse m assimilée à un point matériel M.

Système étudié : point matériel M(m).

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_g .

Bilan des forces :

- force de rappel élastique du ressort :

$$\vec{F}_e = -k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{e}_z = -k(y_{\text{eq}} - z_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{e}_z = -k(y_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{e}_z$$

ℓ_{eq} longueur du ressort à l'équilibre, $\ell_{\text{eq}} = y_{\text{eq}} - z_{\text{eq}} = y_{\text{eq}}$ ($z_{\text{eq}} = 0$) ;

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;

- force de frottement de l'amortisseur $\vec{F}_f = \vec{0}$ (à l'équilibre donc pas de mouvement).

Appliquons le PFS au système dans \mathcal{R}_g :

$$\vec{F}_e + \vec{P} = \vec{0}.$$

En projection sur \vec{e}_z : $-k(y_{\text{eq}} - \ell_0) - mg = 0 \Rightarrow y_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$.

En mouvement par rapport à cette position d'équilibre, le PFD appliqué à M(m) dans \mathcal{R}_g donne :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{F}_f$$

soit :

$$m\ddot{y}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - k(y - z - \ell_0)\vec{e}_z - f(\dot{y} - \dot{z})\vec{e}_z$$



$y - z$ est la longueur ℓ du ressort à un instant donné ; $y_{\text{eq}} - z_{\text{eq}} = y_{\text{eq}} - \ell_{\text{eq}}$ est la longueur à l'équilibre du ressort.



La longueur de l'amortisseur est $h - (y - z) = h + z - y$; la force exercée par l'amortisseur est donc :
 $+f(h + z - y)\vec{e}_z = +f(z - y)\vec{e}_z = -f(y - z)\vec{e}_z$.

En projection sur \vec{e}_z et en tenant compte de la relation :

$$x = y - z - y_{\text{eq}}$$

(x est l'allongement du ressort par rapport à l'équilibre), on obtient :

$$m(\ddot{x} + \ddot{z}) = -mg - k(y_{\text{eq}} + x - \ell_0) - f\dot{x},$$

ce qui donne, en tenant compte de l'équation d'équilibre :

$$mg = -k(y_{\text{eq}} - \ell_0)$$

l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\ddot{z}.$$

En utilisant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{f}{m}$; on a :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{z} = -\omega^2 Z_m \cos \omega t.$$

Hidden page

Hidden page

Ainsi la plage de pulsation à l'intérieur de laquelle $0,95 \leq \frac{X_m}{Z_m} \leq 1,05$ est obtenue par :

$$\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} = 0,95$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1,15.$$

La plage utile est donc : $\omega \in [1,15\omega_0 ; +\infty[$.

Exercice 5

1) En appelant r l'écart entre la distance entre les deux atomes et cette même distance à l'équilibre, l'atome en mouvement vérifie l'équation différentielle :

$$m \ddot{r} = -k r + q E \quad \text{soit} \quad \ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{q}{m} E_0 \cos(\omega_0 t).$$



On est en présence d'un oscillateur harmonique non amorti excité à sa pulsation propre, cas non traité dans le cours.

Si $r = t(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$, alors :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + t \omega_0 (-A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t) \\ &= \cos(\omega_0 t)(A + B\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)(B - A\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \ddot{r} &= -\omega_0 \sin(\omega_0 t)(A + B\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)(B\omega_0) + \omega_0 \cos(\omega_0 t)(B - A\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)(-A\omega_0) \\ &= \sin(\omega_0 t)[-2\omega_0 A - B\omega_0^2 t] + \cos(\omega_0 t)[2\omega_0 B - A\omega_0^2 t]. \end{aligned}$$

En remplaçant ces deux expressions dans l'équation différentielle précédente :

$$\cos(\omega_0 t) \times 2\omega_0 B + \sin(\omega_0 t) \times (-2\omega_0 A) = \frac{q E_0}{m} \cos(\omega_0 t),$$

ce qui donne :

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = \frac{q E_0}{2m\omega_0}.$$

La solution est donc :

$$r(t) = \frac{q E_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

L'amplitude des oscillations croît au cours du temps sans s'arrêter ; ceci ne représente que la réponse forcée à laquelle il faut ajouter la solution de l'équation sans second membre (réponse libre) qui est de la forme : $A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$. La liaison entre les deux atomes se rompt quelle que soit l'amplitude E_0 du champ électrique appliqué.

2) La nouvelle équation différentielle de l'oscillateur harmonique (maintenant amorti) est :

$$\ddot{r} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{q E_0}{m} \cos(\omega_0 t).$$

Afin d'obtenir la solution particulière, nous pouvons utiliser la notation complexe, puisque la solution cherchée est de la forme :

$$r(t) = R_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow r = R_m e^{j\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad R_m = R_m e^{j\varphi}.$$

Ainsi, en complexe :

$$-\omega_0^2 \underline{R}_m e^{j\omega_0 t} + \frac{\omega_0}{Q} (j\omega_0) \underline{R}_m e^{j\omega_0 t} + \omega_0^2 \underline{R}_m e^{j\omega_0 t} = \frac{qE_0}{m} e^{j\omega_0 t}$$

$$\text{soit : } \underline{R}_m = \frac{\frac{qE_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega_0^2 + j\frac{\omega_0 \omega_0}{Q}} = \frac{\frac{qE_0}{m \omega_0^2}}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} + \left(j\frac{\omega_0}{\omega_0 Q}\right)} = -j \frac{qE_0 Q}{m \omega_0^2} = \frac{qE_0 Q}{m \omega_0^2} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Ainsi $r(t) = \frac{qE_0 Q}{m \omega_0^2} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$, soit :

$$r(t) = \frac{qE_0 Q}{m \omega_0^2} \sin(\omega_0 t).$$

La liaison se rompt si $r_{\max} > r_0$, (soit $d_{\max} > 2r_0$) soit :

$$\frac{qE_0 Q}{m \omega_0^2} > r_0, \text{ donc } E_0 > \frac{m r_0 \omega_0^2}{q Q}.$$

$$\text{A.N. } E_0 \text{ min} = \frac{1,66 \times 10^{-27} \times 1,27 \times 10^{-10} \times (2\pi \times 8,67 \times 10^{13})^2}{1,6 \times 10^{-19} \times 5,45 \times 10^5}$$

$$E_0 \approx 717\,453 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \approx 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Cette hypothèse semble réaliste mais le calcul précédent a été effectué dans l'approximation harmonique, qui n'est valable que si l'amplitude des oscillations est faible ce qui n'est pas le cas ici !

Exercice 6

1) Le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g d'étude donne :

$$m \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{F}_f - e \vec{E}(t).$$

Le poids \vec{P} est négligeable devant les autres forces.

On a donc :

$$m \vec{OM} = -k \vec{OM} - h \vec{OM} - e \vec{E}(t)$$

$$\vec{OM} + \frac{h}{m} \vec{OM} + \frac{k}{m} \vec{OM} = -\frac{e}{m} \vec{E}(t)$$

$$\text{soit : } \vec{OM} + \frac{\omega_0}{Q} \vec{OM} + \omega_0^2 \vec{OM} = -\frac{e}{m} \vec{E}(t)$$

$$\text{avec } Q = \omega_0 \frac{m}{h} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

$$\text{A.N. } \omega_0 \approx \sqrt{\frac{100}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 10,5 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } Q \approx 21 \cdot 10^6.$$

Cet électron a sa fréquence propre f_0 dans le domaine des UV ; en effet, sa longueur d'onde est :

$$\lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 180 \text{ nm}$$

(les longueurs d'onde du visible vont de 400 à 800 nm).

2) La solution particulière est de la forme :

$$\overrightarrow{\text{OM}} = x(t) \vec{e}_x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x.$$

Seule la solution dans la direction \vec{e}_x nous intéresse ; on résout donc l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e E_0}{m} \cos(\omega t).$$

En utilisant la notation complexe, on obtient :

$$-\omega^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \underline{X}_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} = -\frac{e E_0}{m} e^{j\omega t}$$

soit :

$$\underline{X}_m = -\frac{\frac{e E_0}{m \omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}} = X_m e^{j\varphi}.$$

3) Les valeurs de pulsations ω du champ électrique $\vec{E}(t)$ s'étendent donc de $\omega_r = 2,3 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (rouge) à $\omega_b = 4,7 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (bleu) et sont donc très inférieures à ω_0 .

Ainsi, comme $\omega \ll \omega_0$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\text{OM}} = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2}, \quad X_m = \frac{e E_0}{m \omega_0^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \pi.$$

La vibration s'écrit donc :

$$\overrightarrow{\text{OM}}(t) = +\frac{e \vec{E}_0}{m \omega_0^2} \cos(\omega t + \pi), \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{\text{OM}}(t) = -\frac{e \vec{E}_0}{m \omega_0^2} \cos(\omega t).$$

 Cette vibration (oscillation) se fait dans la direction du champ électrique $\vec{E}(t)$.

4) L'accélération de l'électron est :

$$\overrightarrow{\text{OM}} = -\frac{e \omega^2 \vec{E}_0}{m \omega_0^2} \cos(\omega t).$$

La puissance moyenne diffusée dans le bleu est :

$$\langle \mathcal{P}_b \rangle = K \left(\frac{e \omega_b^2 E_0}{m \omega_0^2} \right)^2 = \frac{K e^2 E_0^2}{m^2 \omega_0^4} \omega_b^4 = \frac{K e^2 E_0^2}{m^2 \omega_0^4} \times \frac{16 \pi^4 c^4}{\lambda_b^4}.$$

La puissance moyenne diffusée dans le rouge est :

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{K e^2 E_0^2}{m^2 \omega_0^4} \times \frac{16 \pi^4 c^4}{\lambda_r^4}.$$

Ainsi : $\frac{\langle \mathcal{P}_b \rangle}{\langle \mathcal{P}_r \rangle} = \frac{\lambda_r^4}{\lambda_b^4} = \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_b} \right)^4 = 2^4 = 16$.

Il y a donc 16 fois plus de bleu que de rouge diffusé par les électrons des atomes de l'atmosphère : le ciel est bleu.

 Cette énergie diffusée est prélevée à l'électron, d'où le frottement présent dans le modèle choisi.

Théorème du moment cinétique

Introduction

Le moment cinétique, tout comme la quantité de mouvement et l'énergie, sont trois grandeurs fondamentales de la mécanique. Le moment cinétique joue, pour la rotation, un rôle équivalent à la quantité de mouvement pour la translation ; de plus sa conservation fonde les lois de Kepler, bases de l'étude du mouvement des planètes.

Plan du chapitre 6

A. Rappel : le produit vectoriel.....	194
1. Définition	194
2. Quelques propriétés	194
3. Calculs de produits vectoriels utiles	195
4. Expression du produit vectoriel en coordonnées cartésiennes	196
B. Moment d'une force.....	196
1. Moment d'une force en un point.....	196
2. Moment d'une force par rapport à un axe orienté.....	197
C. Moment cinétique d'un point matériel.....	199
1. Moment cinétique en O d'un point matériel M(m)	199
2. Moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un axe orienté.....	200
D. Théorème du moment cinétique (TMC).....	200
1. Théorème du moment cinétique en un point fixe	200
2. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe	202
E. Cas particulier de conservation du moment cinétique.....	203
1. Mouvement à force centrale	203
2. Conservation du moment cinétique	203
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	204
Énoncés des exercices.....	209
Indications	211
Solution des exercices.....	212

A. Rappel : le produit vectoriel

A.1. Définition

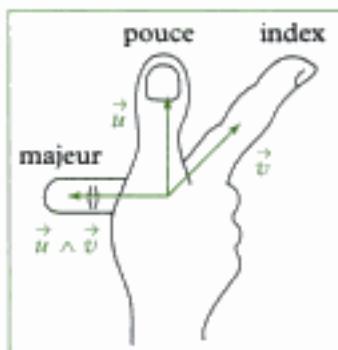


Fig. 1 - Règle des trois doigts de la main droite.

Définition 1

Le produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est un vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dont :

- la norme est $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$;
- la direction est perpendiculaire à \vec{u} et à \vec{v} ;
- le sens est donné par la règle des 3 doigts de la main droite (fig. 1).

Remarques

- 1) On déterminera donc un produit vectoriel en trois étapes : norme, direction et sens.
- 2) L'angle (\vec{u}, \vec{v}) est orienté (signes > 0 ou < 0 , fig. 2).

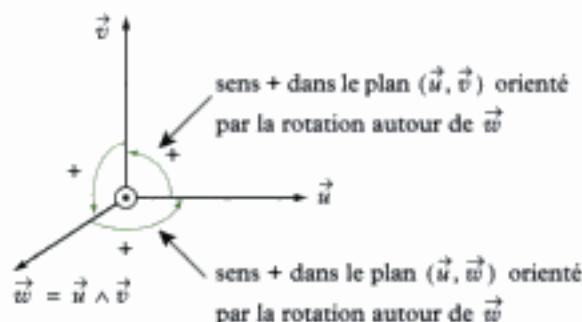
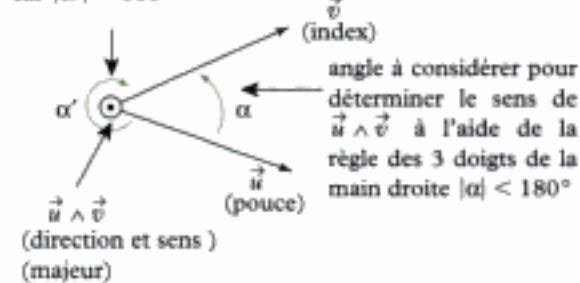


Fig. 2 - Orientation de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) .

- 3) Pour utiliser la règle des trois doigts de la main droite, il faut choisir la position des doigts pour laquelle $|(\vec{u}, \vec{v})|$ est inférieure à 180° (fig. 3).

angle à ne pas considérer
car $|\alpha'| > 180^\circ$



$\vec{u} \wedge \vec{v}$ (direction et sens) (majeur)

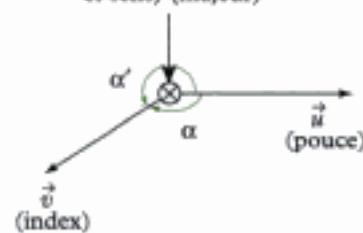


Fig. 3 - Utilisation correcte de la règle des trois doigts de la main droite.

A.2. Quelques propriétés

- Le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{u}$ est un vecteur de même norme que $\vec{u} \wedge \vec{v}$, de même direction que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ mais de sens opposé à $\vec{u} \wedge \vec{v}$, ainsi :

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

- Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

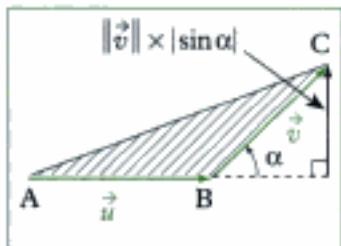


Fig. 4 - Aire d'un triangle et produit vectoriel.

Notamment : $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

- Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs, on a (distributivité) :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

- L'aire \mathcal{S} du triangle ABC s'écrit : $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\|$

en effet $\mathcal{S} = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times |\sin \alpha|$ (fig. 4)

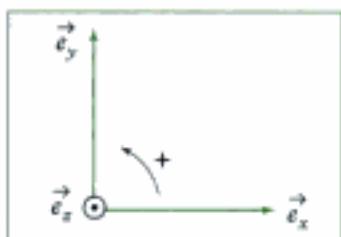


Fig. 5 - Dans une base orthonormée directe cartésienne,

A.3. Calculs de produits vectoriels utiles

- Produits vectoriels entre deux vecteurs d'une base orthonormée directe cartésienne

De même (fig. 5) : $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$

En revanche $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = -\vec{e}_x$

- Dans une base orthonormée cylindrique :

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = + \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| \vec{e}_z = +1 \vec{e}_z = \vec{e}_z$$

↑ ↓ ↓
sens norme direction

De même (fig. 6) : $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_r$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$; $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -\vec{e}_z$;

$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r; \quad \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -\vec{e}_\theta.$$

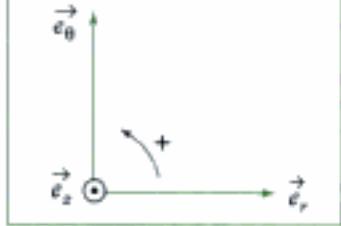


Fig. 6 - Dans une base orthonormée cylindrique.

- Produits vectoriels entre vecteurs des bases orthonormées directes cartesiennes et cylindriques (fig. 7) :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_r = +|\sin \theta| \vec{e}_z = \sin \theta \vec{e}_z.$$

↑

sens (règle des 3 doigts de la main droite) norme direction

$(\vec{e}_x^*, \vec{e}_r^*) = \theta$ $\perp \vec{e}_x^*$ et $\perp \vec{e}_r^*$

$|\sin \theta| = \sin \theta$
car $0 < \theta < \pi/2$
sur le dessin

$$\text{De même : } \vec{e}_x \wedge \vec{e}_\theta = + \left| \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right| \vec{e}_z = + |\cos\theta| \vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_z$$

$$|\cos \theta| = \cos \theta \text{ car } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ sur le dessin)$$

$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_r = -\left| \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right| \vec{e}_z = -\cos\theta \vec{e}_z$$

(car $\cos \theta > 0$ puisque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sur le dessin).

$$\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_y = -|\sin(-\theta)| \vec{e}_z = -\sin \theta \vec{e}_z$$

(car $\sin \theta > 0$ puisque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sur le dessin).

Remarque : il est préférable de faire un schéma pour lequel on a :

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ainsi $\sin\theta > 0$ et $\cos\theta > 0$.

Les calculs faits dans ces conditions restent valables dans les autres positions.

A.4. Expression du produit vectoriel en coordonnées cartésiennes

Si $\vec{u} = ae_x + be_y + ce_z$ et $\vec{v} = a'e_x + b'e_y + c'e_z$,

alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = (ae_x + be_y + ce_z) \wedge (a'e_x + b'e_y + c'e_z)$

soit $\vec{u} \wedge \vec{v} = aa'e_x \wedge e_x + ab'e_x \wedge e_y + ac'e_x \wedge e_z$

$$+ ba'e_y \wedge e_x + bb'e_y \wedge e_y + bc'e_y \wedge e_z$$

$$+ ca'e_z \wedge e_x + cb'e_z \wedge e_y + cc'e_z \wedge e_z$$

D'où :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - b'c)e_x + (ca' - c'a)e_y + (ab' - a'b)e_z$$

B. Moment d'une force

B.1. Moment d'une force en un point

Définition 2

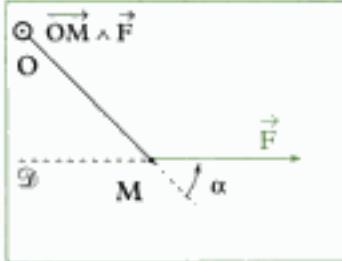


Fig. 8 - Moment d'une force \vec{F} en un point O.

Le moment $\vec{M}_O(\vec{F})$ en un point O d'une force \vec{F} appliquée au point M est défini par le vecteur (fig. 8) :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

$\vec{M}_O(\vec{F})$ moment en O (N·m)
 \vec{F} force (N)

Propriétés :

- La norme (ou valeur) du moment $\vec{M}_O(\vec{F})$ est :

$$\|\vec{M}_O(\vec{F})\| = \|\vec{OM}\| \times \|\vec{F}\| \times |\sin(\vec{OM}, \vec{F})| = OM \times \|\vec{F}\| \times |\sin \alpha|;$$

- si O appartient à la droite d'action \mathcal{D} de \vec{F} (c'est-à-dire si \vec{OM} est colinéaire à \vec{F}), alors $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$;

- si plusieurs forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 sont appliquées au point M, alors, si on appelle $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ la résultante de ces forces, on a :

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) &= \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{OM} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) \\ &= \vec{OM} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OM} \wedge \vec{F}_2 + \vec{OM} \wedge \vec{F}_3 \\ &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_3). \end{aligned}$$

Remarque : dans les exercices, \vec{OM} et \vec{F} se décomposeront en fonction de vecteurs de bases. Le calcul du moment en O de \vec{F} reviendra donc à un calcul de produit vectoriel entre vecteurs de bases.

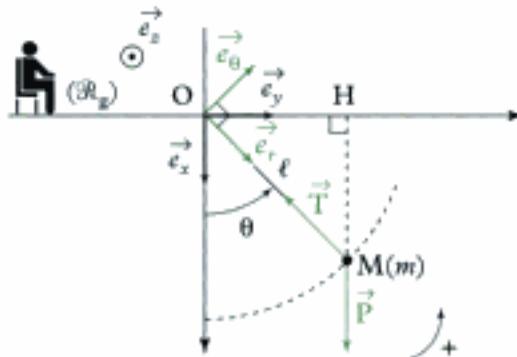
Application 1 Cas du pendule simple

Considérons le pendule simple composé d'un fil inextensible sans masse de longueur $\ell = OM$, suspendu en O , point fixe du référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen et d'une masse m assimilée à un point matériel M repéré à l'aide des coordonnées polaires d'axe \vec{e}_z .

Exprimer le moment en O des forces appliquées au point matériel M .

Solution

- Le point M est soumis à son poids \vec{P} vertical et dirigé vers le bas, de valeur $P = mg$, et à la tension \vec{T} du fil, colinéaire au fil et orientée vers O .



- Le moment en O du poids $\vec{P} = mge_x$ appliqué en M est :

$$\begin{aligned}\vec{M}_O(\vec{P}) &= \vec{OM} \wedge \vec{P} = \ell \vec{e}_r \wedge mge_x \\ &= mg\ell \vec{e}_r \wedge \vec{e}_x \\ &= mg\ell \times \|\vec{e}_r\| \times \|\vec{e}_x\| \times |\sin(\vec{e}_r, \vec{e}_x)| (-\vec{e}_z) \\ &= -mg\ell \sin\theta \vec{e}_z.\end{aligned}$$

Remarque : $(-\vec{e}_z)$ est obtenu à l'aide de la règle des trois doigts de la main droite et $|\sin(-\theta)| = \sin\theta$ car $\theta > 0$ sur le schéma.

- Le moment en O de la tension $\vec{T} = -Te_r$ appliquée en M est :

$$\vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \ell \vec{e}_r \wedge (-Te_r) = -\ell T \vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}.$$

Remarque : on aurait pu conclure directement car \vec{OM} est colinéaire à \vec{T} .

B.2. Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Soit Δ un axe passant par O de vecteur unitaire \vec{u} .

Remarque : si $O' \in \Delta$, alors Δ peut être défini indifféremment par O' et \vec{u} .

Définition 3

Le moment de la force \vec{F} appliquée au point M par rapport à l'axe Δ est donné par le nombre scalaire :

$$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$M_\Delta(\vec{F})$ moment par rapport à Δ ($N \cdot m$)

$\vec{M}_O(\vec{F})$ moment en O ($N \cdot m$)

\vec{u} vecteur unitaire de Δ .

$M_\Delta(\vec{F})$ correspond donc juste à la projection de $\vec{M}_O(\vec{F})$ sur Δ et c'est une grandeur algébrique.

En appelant H le projeté orthogonal de O sur la droite d'action de la force \vec{F} , on obtient :

$$M_\Delta(\vec{F}) = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} = ((\vec{OH} + \vec{HM}) \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} = (\vec{OH} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

(car $\vec{HM} \parallel \vec{F}$)

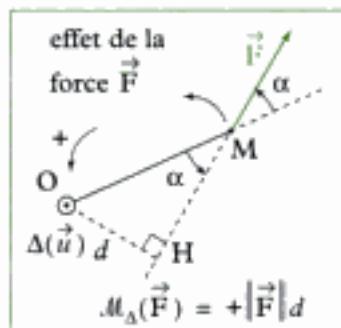


Fig. 9 - Moment d'une force \vec{F} ayant tendance à faire tourner le point matériel M dans le sens direct autour de Δ .

Le moment $M_\Delta(\vec{F})$ est défini par l'expression :

$$M_\Delta(\vec{F}) = \pm d \times \|\vec{F}\|$$

$M_\Delta(\vec{F})$ moment par rapport à Δ ($N \cdot m$)

d bras de levier (m)

$\|\vec{F}\|$ norme de la force (N).

- Le signe « + » est obtenu si la force \vec{F} a tendance à faire tourner le point matériel M dans le sens direct autour de l'axe Δ (vecteur \vec{u}) (fig. 9) ;
- le signe « - » est obtenu si la force \vec{F} a tendance à faire tourner le point matériel (fig. 10) M dans le sens indirect autour de l'axe Δ .

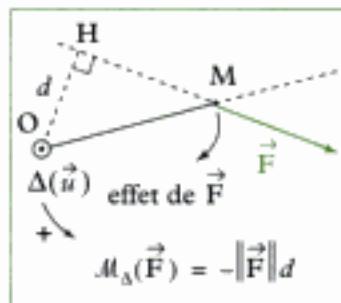


Fig. 10 - Moment d'une force \vec{F} ayant tendance à faire tourner le point matériel M dans le sens indirect autour de Δ .

Propriétés :

- Si \vec{F} est colinéaire à Δ , alors $M_\Delta(\vec{F}) = 0$;
- si la droite d'action de la force \vec{F} coupe l'axe Δ , alors $M_\Delta(\vec{F}) = 0$;
- si plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ sont appliquées au point M , si on appelle $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, on a :

$$M_\Delta(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}_1) + M_\Delta(\vec{F}_2) + M_\Delta(\vec{F}_3).$$

Remarque : le bras de levier est un moyen pratique pour calculer le moment d'une force dans un exercice (si la géométrie n'est pas trop compliquée).

Application 2 Cas du pendule simple (suite)

Calculer les moments des différentes forces appliquées au point M par rapport à l'axe $\Delta = (O ; \vec{e}_z)$

Solution

Le bras de levier du poids \vec{P} par rapport à Δ est :

$$d = OH = \ell \times |\sin \theta| = \ell \sin \theta$$

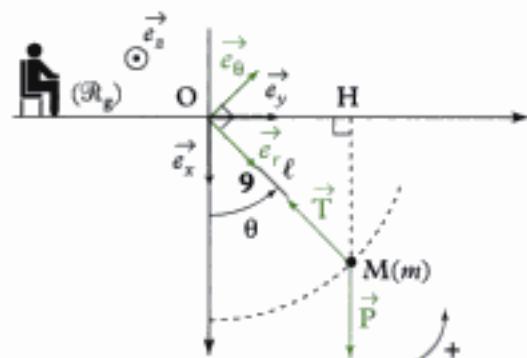
($\theta > 0$ sur le dessin).

Le poids \vec{P} a tendance à faire tourner M dans le sens indirect autour de Δ (orienté par \vec{e}_z).

Ainsi : $M_\Delta(\vec{P}) = -1 \times d \times \|\vec{P}\| = -mg\ell \sin \theta$.

On multiplie par -1 , car \vec{P} fait tourner M dans le sens indirect autour de Δ .

Le bras de levier de la tension \vec{T} est nul donc : $M_\Delta(\vec{T}) = 0$.



C. Moment cinétique d'un point matériel

C.1. Moment cinétique en O d'un point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R}

Définition 4

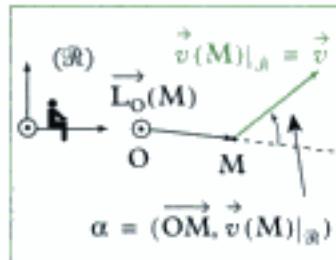


Fig. 11 - Moment cinétique.

Le moment cinétique en O du point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R} est le moment en O de la quantité de mouvement $\vec{p}(M)|_{\mathcal{R}} = m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ du point M dans le référentiel \mathcal{R} (fig. 11).

$$\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$$

$\vec{L}_O(M)$	moment cinétique
	(kg · m ² · s ⁻¹)
m	masse (kg)
$\vec{v}(M)$	vitesse (m · s ⁻¹)

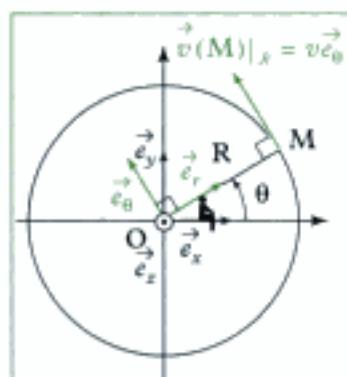


Fig. 12 - Moment cinétique en O d'un point M en mouvement circulaire $\dot{\theta} = \omega$ dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Remarque : lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur le référentiel, il n'est pas nécessaire de conserver l'indication $|_{\mathcal{R}}$ tout au long des calculs.

Propriétés :

- La norme du moment cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}\|\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}}\| &= \|\vec{OM} \times m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}\| |\sin(\vec{OM}, \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}})| \\ &= mOM \times \|\vec{v}\| |\sin(\alpha)|.\end{aligned}$$

- Expression en coordonnées polaires :

$$\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = r\vec{e}_r \wedge m(r\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

Si M est en mouvement circulaire, de centre O et de rayon R, à la vitesse angulaire ω (fig. 12), le moment cinétique de M dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est :

$$\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}} = mR^2\omega\vec{e}_z = mRv\vec{e}_z \quad (\text{avec } v = R\omega).$$

Application 3 Cas du pendule simple (suite)

Calculer l'expression du moment cinétique en O du point M(m) dans le référentiel \mathcal{R}_g .

Solution

$$\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \ell\vec{e}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{e}_{\theta} = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

$$\text{En effet } \vec{OM} = \ell\vec{e}_r \text{ et } \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \ell \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_{\theta}.$$

Remarque : ℓ est constant donc $\dot{\ell} = 0$, il n'est donc pas nécessaire de faire apparaître le terme $\dot{\ell}\vec{e}_r$ dans l'expression du vecteur $\left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g}$.

C.2. Moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un axe orienté dans le référentiel \mathcal{R}

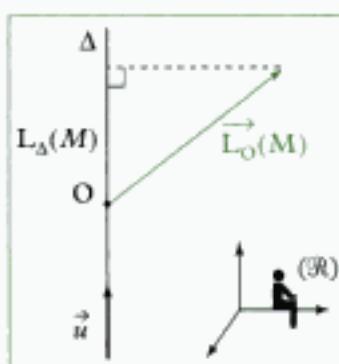


Fig. 13 - Moment cinétique du point matériel M(m) par rapport à l'axe Δ dans le référentiel \mathcal{R} .

Définition 5

Le moment cinétique du point matériel M(m) par rapport à l'axe Δ (orienté par le vecteur unitaire \vec{u}) passant par O dans le référentiel \mathcal{R} , est le scalaire $L_{\Delta}(M)|_{\mathcal{R}}$ (fig. 13) :

$$\begin{aligned} L_{\Delta}(M)|_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{L}_O(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{u} \\ &= (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{mv}(M))|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

Remarque :

$L_{\Delta}(M)|_{\mathcal{R}}$ représente simplement la projection de $\overrightarrow{L}_O(M)|_{\mathcal{R}}$ sur Δ et c'est une grandeur algébrique.

Application 4 Cas du pendule simple (suite)

Exprimer le moment cinétique du point M(m) par rapport à l'axe ($O ; \vec{e}_z$) dans le référentiel \mathcal{R}_g .

Solution

$$L_{(O; \vec{e}_z)}(M)|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g} \cdot \vec{e}_z = m\ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = m\ell^2 \dot{\theta}.$$

D. Théorème du moment cinétique (TMC)

D.1. Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g

Théorème 1

TMC(O)

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\overrightarrow{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g}$ du point matériel M(m) en un point fixe O dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g est égale au moment en O des forces appliquées au point M :

$$\left(\frac{d(\overrightarrow{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{M_O(F)}$$

$\overrightarrow{L}_O(M)$ moment cinétique $(\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$
$\overrightarrow{M_O(F)}$ moment ($\text{N} \cdot \text{m}$)

Démonstration

Le moment cinétique en O du point M dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g s'écrit :

$$\overrightarrow{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{mv}(M)|_{\mathcal{R}_g}.$$

On dérive cette expression par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R}_g :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} + \vec{OM} \wedge m \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g}.$$

Comme O est fixe dans \mathcal{R}_g , $\left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}$.

En outre : $\left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g}$.

Comme \mathcal{R}_g est galiléen, on a, d'après le PFD :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F},$$

donc :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F}).$$

On notera TMC(O) ce théorème appliqué au point O **fixe** dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Remarques :

- Le TMC(O) fournit une relation vectorielle.
- Le point O peut être remplacé par n'importe quel point fixe dans \mathcal{R}_g .
- Ce théorème n'apporte, pour un point matériel, aucune information supplémentaire par rapport au PFD ; en effet, toutes les forces s'appliquent en un même point. Il permet seulement de résoudre plus facilement certains exercices (en faisant disparaître certaines forces inconnues).

Application 5 | Cas du pendule simple (suite)

Appliquer, au pendule simple de l'application 1, le théorème du moment cinétique en O, par rapport à \mathcal{R}_g , afin de déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Solution

D'après les applications 1 et 3, on a trouvé :

$$\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g} = m\ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z;$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = -mg\ell \sin\theta \vec{e}_z;$$

$$\vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{0}.$$

En appliquant le TMC dans le référentiel \mathcal{R}_g galiléen au point O fixe dans le référentiel \mathcal{R}_g , on a :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T}),$$

soit

$$m\ell^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z = -mg\ell \sin\theta \vec{e}_z,$$

ce qui donne en projetant sur \vec{e}_z l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0.$$

Hidden page

E. Cas particulier de conservation du moment cinétique

E.1. Mouvement à force centrale

Définition 6

Le mouvement d'un point matériel M est à force centrale \vec{F} si le point M est soumis à une force \vec{F} dont la droite d'action passe constamment par un point fixe O (fig. 14), appelé centre de force.

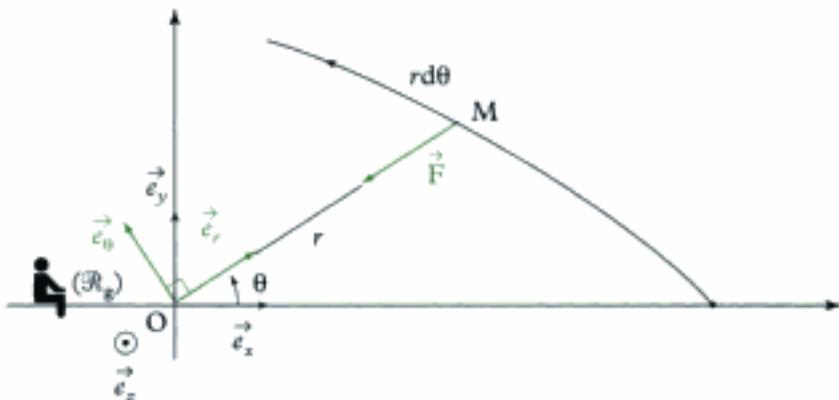


Fig. 14 - Mouvement à force centrale.

Remarque : \overrightarrow{OM} et \vec{F} sont donc colinéaires.

E.2. Conservation du moment cinétique

Appliquons au point M, ayant un mouvement à force centrale \vec{F} , le TMC(O) :

$$\left(\frac{d \overrightarrow{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}, \text{ ainsi } \overrightarrow{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g} = \text{cte.}$$

Le moment cinétique $\overrightarrow{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g}$ du point M se conserve au cours du mouvement de M.

Hidden page

✓ Moment d'une force par rapport à un axe

Le moment de la force \vec{F} appliquée au point M par rapport à l'axe Δ (orienté par le vecteur unitaire \vec{u}) est donné par le scalaire :

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \pm d \|\vec{F}\|$$

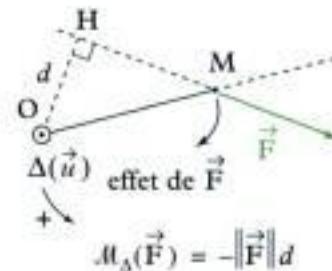
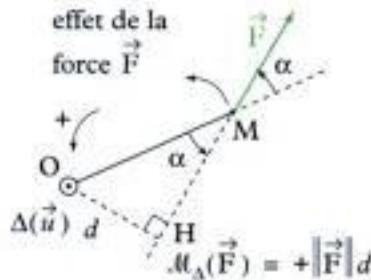
$M_{\Delta}(\vec{F})$ moment par rapport à Δ ($N \cdot m$)

$\vec{M}_O(\vec{F})$ moment en O ($N \cdot m$)

\vec{u} vecteur unitaire de Δ

d bras de levier (m)

$\|\vec{F}\|$ norme de la force \vec{F} (N)



✓ Moment cinétique en un point

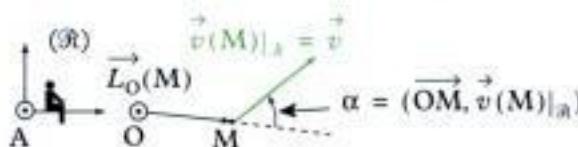
Le moment cinétique en O du point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R} est le moment en O de la quantité de mouvement $\vec{p}(M)|_{\mathcal{R}} = m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ du point M dans le référentiel \mathcal{R} .

$$\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$$

$\vec{L}_O(M)$ moment cinétique ($kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$)

m masse (kg)

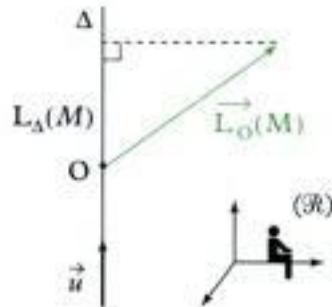
$\vec{v}(M)$ vitesse ($m \cdot s^{-1}$)



✓ Moment cinétique par rapport à un axe

Le moment cinétique du point matériel M(m) par rapport à l'axe Δ (orienté par le vecteur unitaire \vec{u}) passant par O dans le référentiel \mathcal{R} , est le scalaire :

$$L_{\Delta}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{u} = (\vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}$$



✓ Théorème de moment cinétique en un point (TMC(O))

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}}$ du point matériel M(m) en un point fixe O dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g est égale au moment en O des forces appliquées au point M.

$$\left(\frac{d(\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g})}{dt} \right)_{/O} = \vec{M}_O(\vec{F})$$

$\vec{L}_O(M)$ moment cinétique ($kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$)

$\vec{M}_O(\vec{F})$ moment ($N \cdot m$)

✓ Théorème du moment cinétique par rapport à un axe (TMC(Δ))

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $L_\Delta(M)|_{\mathcal{R}_g}$ du point matériel $M(m)$ par rapport à l'axe Δ , fixe dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , est égale au moment des forces appliquées au point M par rapport à Δ :

$$\frac{dL_\Delta(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} = M_\Delta(\vec{F}) \quad \begin{array}{l} L_\Delta(M) \text{ moment cinétique (kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}\text{)} \\ M_\Delta(\vec{F}) \text{ moment (N} \cdot \text{m)} \end{array}$$

Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TMC ?

Soit S un système ponctuel de masse m et \mathcal{R}_g un référentiel galiléen. On souhaite déterminer l'équation différentielle du mouvement de S dans \mathcal{R}_g à l'aide du TMC(O) (respectivement TMC(Δ)).

→ Savoir faire

- ➊ Définir précisément le système étudié et le référentiel galiléen d'étude.
 - ➋ Faire le bilan des forces qui s'appliquent au système S .
 - ➌ Définir judicieusement le point O (respectivement l'axe Δ) pour le calcul des moments :
 - le point O (respectivement l'axe Δ) doit être fixe par rapport au référentiel galiléen d'étude \mathcal{R}_g ;
 - le point O (respectivement l'axe Δ) doit être choisi de manière à faciliter les calculs des moments ;
 - le point O (respectivement l'axe Δ) doit être choisi de manière à « éliminer » les forces inconnues ou inintéressantes (par l'intermédiaire de la nullité de leur moment).
 - ➍ Calculer les moments en O des forces $\vec{M}_O(\vec{F})$ (respectivement $M_\Delta(\vec{F})$) moments des forces par rapport à l'axe Δ).
 - ➎ Calculer le moment cinétique $L_O(S)|_{\mathcal{R}_g}$ en O dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g (respectivement $L_\Delta(S)|_{\mathcal{R}_g}$ par rapport à l'axe Δ).
 - ➏ Écrire le TMC au point O dans le référentiel galiléen (respectivement le TMC par rapport à l'axe Δ).
 - ➐ Pour le TMC au point O , projeter la relation vectorielle afin d'obtenir l'équation différentielle du mouvement. Vérifier alors la cohérence et l'homogénéité des résultats.
-  Appliquer le TMC en un point O puis projeter sur la direction \vec{u} , ou appliquer le TMC par rapport à un axe $\Delta = (O; \vec{u})$ fournit la même équation différentielle du mouvement.
-  Si l'axe Δ est mal choisi, le TMC(Δ) peut conduire à « $0 = 0$ » qui n'apporte pas beaucoup d'informations !

Hidden page

On a donc :

$$\vec{L}_O(G)|_{\mathcal{R}_g} = r\vec{e}_r \wedge mr\dot{\theta}\vec{e}_\theta = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = mr^2\dot{\theta}\left(+\sin\frac{\pi}{2}\vec{e}_z\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

❶ Application du TMC en O dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_O(G)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} &= \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{N}) \\ \left(\frac{d(mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} &= mg r \cos\theta \vec{e}_z \quad (\text{car } \vec{M}_O(\vec{N}) = \vec{0}) \\ mr^2\ddot{\theta}\vec{e}_z &= mg r \cos\theta \vec{e}_z \quad (\text{car } r = \text{cte et } \vec{e}_z \text{ est fixe dans } \mathcal{R}_g). \end{aligned}$$

❷ Projection de la relation vectorielle du TMC(O) sur la direction \vec{e}_z :

$$mr^2\ddot{\theta} = mg r \cos\theta,$$

soit l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{r} \cos\theta = 0.$$



Comme $\ddot{\theta}$ est en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$, g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et r en m l'expression trouvée est bien homogène.

En appliquant le TMC par rapport à un axe

❸ Définition de l'axe de calcul

- il doit être fixe par rapport à \mathcal{R}_g (or l'axe $(O ; \vec{e}_z)$ est fixe dans \mathcal{R}_g) ;
- il doit permettre « d'éliminer » la réaction \vec{N} inconnue (or, la droite d'action de la force \vec{N} coupe à chaque instant l'axe $(O ; \vec{e}_z)$).

On choisit donc l'axe $\Delta = (O ; \vec{e}_z)$.

❹ Calculs des moments des forces par rapport à l'axe Δ

- pour le poids \vec{P} : $M_\Delta(\vec{P}) = +mg r \cos\theta$;



Dans cette expression, mg est la force (le poids), $r \cos\theta$ le bras de levier ($r \cos\theta > 0$ car $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ sur le dessin), et « + » le sens (le poids \vec{P} a bien tendance à faire tourner G dans le sens positif défini par \vec{e}_z sur le dessin).

- pour la réaction \vec{N} : $M_\Delta(\vec{N}) = 0$ (bras de levier nul).

❺ Calcul du moment cinétique $L_\Delta(G)|_{\mathcal{R}_g}$ par rapport à l'axe Δ dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\begin{aligned} L_\Delta(G)|_{\mathcal{R}_g} &= (\vec{OG} \wedge m\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g}) \cdot \vec{e}_z = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = mr^2\dot{\theta} \\ &\quad (\text{voir calcul de } \vec{L}_O(G)|_{\mathcal{R}_g}). \end{aligned}$$

❻ Application du TMC par rapport à l'axe Δ dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\frac{dL_\Delta(G)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} = M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{N}).$$

D'où $\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = mg r \cos\theta$, soit $mr^2\ddot{\theta} = mg r \cos\theta$.

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{r} \cos\theta = 0.$$

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Homogénéités, unités

ℓ et a sont des longueurs, α est un angle, F est une force, m est une masse, v est une vitesse et L_A est un moment cinétique.

Déterminer les unités des expressions suivantes :

- $\ell F \sin(\alpha)$;
- $mv a \cos(\alpha)$;
- $\frac{dL_A}{dt}$

À quelles grandeurs ces expressions sont-elles homogènes ?

Ex. 2 Ordre de grandeur

On suppose qu'un électron a une trajectoire circulaire de rayon $r = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ autour du noyau qu'il parcourt à vitesse constante à la fréquence :

$$f = 6,6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

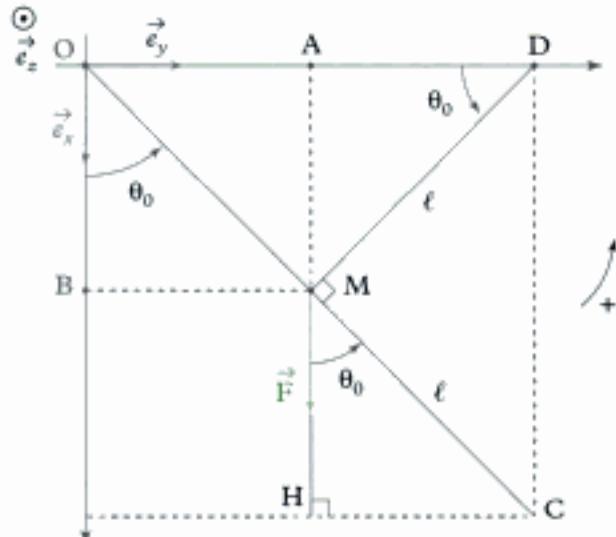
La masse de l'électron est $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

On suppose aussi que la Lune a un mouvement circulaire uniforme de rayon $d = 3,8 \cdot 10^5 \text{ km}$ autour de la Terre, de période de révolution $T = 27,3$ jours. La masse de la Lune est $m_L = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$.

Calculer la valeur du moment cinétique \vec{L}_e de l'électron par rapport au centre du noyau, puis la valeur du moment cinétique \vec{L}_L de la Lune (assimilée à son centre d'inertie par rapport au centre de la Terre).

Ex. 3 Calcul de moments

On considère un point matériel $M(m)$ soumis à une force $\vec{F} = F\vec{e}_x$ constante.



Exprimer et calculer les moments de la force \vec{F} suivants :

- 1) $\vec{M}_O(\vec{F})$; $\vec{M}_B(\vec{F})$; $\vec{M}_A(\vec{F})$; $\vec{M}_C(\vec{F})$.
- 2) $\vec{M}_{(O; \vec{e}_z)}(\vec{F})$; $\vec{M}_{(C; \vec{e}_z)}(\vec{F})$; $\vec{M}_{(D; \vec{e}_z)}(\vec{F})$.

Données :

$$F = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N}; \quad \ell = 1,0 \text{ m}; \quad \theta_0 = 45^\circ.$$

Niveau 2

Ex. 4 Balancier d'une horloge

On s'intéresse au balancier d'une « horloge à poids ». Le balancier est composé d'une tige de longueur ℓ de masse négligeable fixée en O et portant à son autre extrémité un disque modélisable par un point matériel M de masse m .

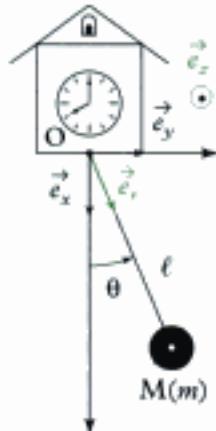
Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

1) Écrire l'équation différentielle du mouvement du balancier.

2) Le mouvement du balancier est considéré de faible amplitude. Déterminer les expressions de la période et de la fréquence des petites oscillations.

3) Le balancier possède un réglage qui permet d'ajuster la longueur ℓ afin que l'horloge donne l'heure exacte. Faut-il augmenter ou diminuer ℓ si :

- l'horloge avance ?
- l'horloge retarde ?



Ex. 5 Un satellite

Un satellite, assimilé à son centre d'inertie, de masse $m = 1$ tonne, décrit une trajectoire elliptique autour de la Terre. Ce satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle \vec{F} dirigée vers le centre O de la Terre. Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen. À l'instant représenté, la vitesse du satellite dans ce référentiel est :

$$v = 14\,650 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Donnée : rayon de la Terre $R_T = 6\,400 \text{ km}$.

1) Calculer la valeur du moment cinétique du satellite en O dans \mathcal{R}_g à l'instant considéré.

Hidden page

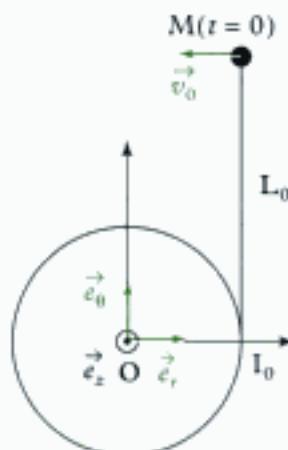
- Déterminer une relation entre r , v , m , n , h .
 - Sachant que l'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction électrostatique $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r$, déterminer une nouvelle relation entre r et v .
 - En déduire que r se met sous la forme $n^2 r_0$; on calculera alors r_0 .
 - Montrer que l'énergie mécanique de l'électron se met sous la forme : $E_m = -\frac{\epsilon_0}{n^2}$.
 - En supposant que l'électron est dans son état fondamental ($n = 1$), calculer la vitesse de l'électron ainsi que l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV).
Données :
- $h = 6,64 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
 $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$;
 $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Ex. 9 Au bout du fil

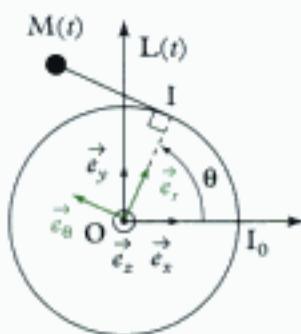
Un cylindre, d'axe de révolution matériel ($O ; \vec{e}_z$) et de rayon R , repose sur un plan horizontal et est fixe par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On attache une extrémité d'un fil supposé idéal (inextensible et de masse négligeable) à la base du cylindre (en I_0). L'autre extrémité du fil est fixée à une particule matérielle M de masse m , astreinte à glisser sans frottement sur le plan horizontal ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y$). La longueur de fil non enroulée sur le cylindre à un instant t est $L(t)$.

À l'instant $t = 0$, on communique à la particule M une vitesse \vec{v}_0 horizontale, perpendiculaire à $I_0M = L_0$.

a) Vue de dessus
à l'instant $t = 0$



b) Vue de dessus
à instant $t > 0$



On suppose que le fil reste tendu au cours du mouvement.

- Donner la relation entre L_0 , L , R et θ .
- Montrer que : $\dot{\vec{v}}(M)|_{\mathcal{R}_g} = -(L_0 - R\theta)\dot{\theta}\hat{e}_r$.
- À l'aide du TPC, montrer que la valeur (norme) de la vitesse de M reste constante au cours du temps.
- À l'aide des questions 2) et 3), montrer que θ vérifie l'équation $\frac{R\theta^2}{2} - L_0\theta + v_0t = 0$.

Montrer que la seule solution physique s'écrit :

$$\theta(t) = \frac{L_0}{R} - \frac{\sqrt{L_0^2 - 2Rv_0t}}{R}$$

- À l'aide du TMC, déterminer la norme de la tension du fil en fonction de t , m , L_0 , R et v_0 .
- Expliquer pourquoi le fil cassera avant de s'enrouler complètement sur le cylindre.

Indications

Ex. 5 2) Le TMC (O) permet de montrer que le moment cinétique en O du satellite est une constante.
• À l'apogée et au périgée, la vitesse $\dot{\vec{v}}(S)|_{\mathcal{R}_g}$ du satellite est perpendiculaire au vecteur \overrightarrow{OS} (rayon).

Ex. 7 2) Intégrer l'équation différentielle de 1) en multipliant par $\dot{\theta}$.

3) Utiliser le PFD projeté sur \hat{e}_r .

Ex. 8 2) Utiliser le PFD projeté sur \hat{e}_r .

4) Calculer l'énergie potentielle E_p dont dérive la force F .

Ex. 9 1) La longueur d'un axe de cercle d'ouverture α et de rayon R est égale à $R\alpha$.

4) Intégrer l'équation différentielle obtenue à l'aide des questions 2) et 3).

6) Calculer le temps correspondant à l'enroulement total du fil sur le cylindre.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

- L'unité de l'expression $\ell F \sin \alpha$ est : $m \times N = N \cdot m$ (homogène à un **moment**).

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ sont sans dimension.

- L'unité de l'expression $mva \cos \alpha$ est :

$$kg \times m \cdot s^{-1} \times m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} \quad (\text{homogène à un moment cinétique}).$$

- L'unité de l'expression $\frac{dL_A}{dt}$ est :

$$kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} \times s^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = N \cdot m \quad (\text{car } 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot m \cdot s^{-2})$$

(homogène à un **moment**).

Exercice 2

- Le moment cinétique \vec{L}_e de l'électron par rapport au centre O du noyau dans un référentiel lié à celui-ci est :

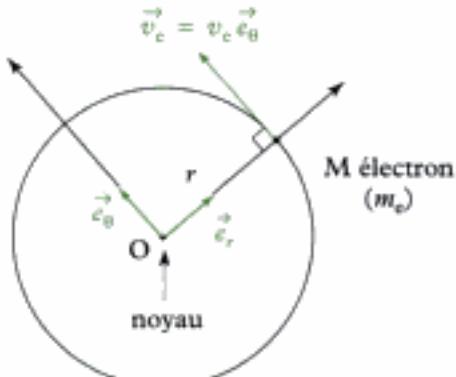
$$\vec{L}_e = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v}_e, \text{ soit } L_e = r \times m_e v_e \times |\sin(\vec{OM}, \vec{v}_e)|.$$

Comme le mouvement est circulaire, la vitesse \vec{v}_e de l'électron (tangente à la trajectoire) est perpendiculaire à chaque instant au rayon vecteur \vec{OM} , d'où :

$$|\sin(\vec{OM}, \vec{v}_e)| = \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = 1.$$

Comme le mouvement est uniforme, l'électron parcourt la distance $2\pi r$ (1 tour complet) à la vitesse constante v_e en une période T_e (inverse de la fréquence f), d'où :

$$v_e = \frac{2\pi r}{T_e} = 2\pi r f.$$



Pour un mouvement circulaire uniforme, on a toujours : $v = \omega R$, avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

On en déduit donc :

$$L_e = 2\pi m_e r^2 f.$$

A.N. $L_e = 2\pi \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times (5,3 \cdot 10^{-11})^2 \times 6,6 \cdot 10^{15} = 1,1 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

On aurait pu écrire : $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ et $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_\theta$ et calculer le produit vectoriel $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$ des vecteurs de base.

- De même, la valeur du moment cinétique L_L de la Lune par rapport au centre de la Terre est :

$$L_L = 2\pi m_L d^2 f_L = \frac{2\pi m_L d^2}{T}.$$

$$\text{A.N. } L_L = \frac{2\pi \times 7,3 \cdot 10^{22} \times (3,8 \cdot 10^8)^2}{27,3 \times 2^4 \times 3600} \approx 2,8 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

 Dans l'application numérique, ne pas oublier d'exprimer d en m et T en s.

Exercice 3

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{M}_O(\vec{F}) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = (\ell \cos \theta_0 \vec{e}_x + \ell \sin \theta_0 \vec{e}_y) \wedge \vec{Fe}_x \\ &= \ell F \sin \theta_0 \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x \quad (\text{car } \vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{0}) \\ &= -\ell F \sin \theta_0 \vec{e}_z \quad (\text{car } \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z). \end{aligned}$$

 Le moment $\vec{M}_O(\vec{F})$ d'une force en un point est un vecteur.

$$\text{A.N. } \|\vec{M}_O(\vec{F})\| = 1,0 \times 1,0 \cdot 10^3 \times \sin 45^\circ = 7,1 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$\bullet \quad \vec{M}_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{F} = \ell \sin \theta_0 \vec{e}_y \wedge \vec{Fe}_x = -\ell F \sin \theta_0 \vec{e}_z \quad (\text{car } \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z)$$

$$\text{A.N. } \|\vec{M}_B(\vec{F})\| = \|\vec{M}_O(\vec{F})\| = 7,1 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{M}_C(\vec{F}) &= \overrightarrow{CM} \wedge \vec{F} = (-\ell \cos \theta_0 \vec{e}_x - \ell \sin \theta_0 \vec{e}_y) \wedge \vec{Fe}_x \\ &= -\ell F \sin \theta_0 \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x \quad (\text{car } \vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{0}) \\ &= \ell F \sin \theta_0 \vec{e}_z \quad (\text{car } \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\text{A.N. } \|\vec{M}_C(\vec{F})\| = \|\vec{M}_O(\vec{F})\| \approx 7,1 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

2) On applique la formule : $M_\Delta(\vec{F}) = \pm \text{bras de levier} \times F$.

 Le moment $M_\Delta(\vec{F})$ d'une force par rapport à un axe est un scalaire (nombre) positif ou négatif.

$$\bullet \quad M_{(O; \vec{e}_z)}(\vec{F}) = -OA \times F = -\ell F \sin \theta_0.$$

 La force \vec{F} a tendance à faire tourner M dans le sens indirect autour de $(O; \vec{e}_z)$, donc il faut un signe $-$.

$$\text{A.N. } M_{(O; \vec{e}_z)}(\vec{F}) = -7,1 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$\bullet \quad M_{(C; \vec{e}_z)}(\vec{F}) = +CH \times F = \ell F \sin \theta_0.$$

 La force \vec{F} a tendance à faire tourner M dans le sens direct autour de $(C; \vec{e}_z)$, donc le signe est $+$.

$$\text{A.N. } M_{(C; \vec{e}_z)}(\vec{F}) \approx 7,1 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$\bullet \quad M_{(D; \vec{e}_z)}(\vec{F}) = +AD \times F = \ell F \cos \theta_0.$$

 La force \vec{F} a tendance à faire tourner M dans le sens direct autour de $(D; \vec{e}_z)$, donc le signe est $+$.

$$\text{A.N. } M_{(D; \vec{e}_z)}(\vec{F}) = 1,0 \times 1,0 = 10^3 \times \cos 45^\circ = 7,1 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Exercices de niveau 2

Exercice 4



Voir méthode 1.



Cet exercice est à savoir refaire par cœur.

1) • **Système étudié :** le disque est modélisé par un point matériel M de masse m .

• **Référentiel galiléen d'étude :** $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Bilan des forces appliquées au système :**

– le poids $\vec{P} = mge_x$;

– la réaction de la tige $\vec{T} = -Te_r$.

• Axe de calcul des moments : $\Delta = (O; \vec{e}_z)$ fixe dans \mathcal{R}_g .



On choisit cet axe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$ car la droite d'action de \vec{T} coupe à chaque instant cet axe.

• Calculs des moments par rapport à l'axe Δ :

– pour le poids : $M_\Delta(\vec{P}) = -mg\ell \sin\theta$.



mg est une force, $\ell \sin\theta$ est le bras de levier ($\ell \sin\theta > 0$ car $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) et « – » car le poids a tendance à faire tourner M dans le sens négatif (sens positif défini par \vec{e}_z);

– pour la réaction $M_\Delta(\vec{T}) = 0$ (bras de levier nul).

• Calcul du moment cinétique $L_\Delta(M)|_{\mathcal{R}_g}$.

$$\begin{aligned} L_\Delta(M)|_{\mathcal{R}_g} &= \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= (\ell\vec{e}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z \\ &= m\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = m\ell^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

• Application du TMC (Δ) :

$$\frac{dL_\Delta(M)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} = M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{T}).$$

$$\frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) = -mg\ell \sin\theta + 0$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta.$$

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0.$$

2) Le mouvement étant considéré de faible amplitude, on peut utiliser $\sin\theta \approx \theta$ (développement limité à l'ordre 1).

En posant $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$, on obtient l'équation : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

Cette équation admet une solution de la forme :

$$\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

qui varie sinusoïdalement.



A et B sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

La période des oscillations de faibles amplitudes est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

La fréquence est $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\ell}}\sqrt{g}$.

3) La période d'oscillation du balancier dépend uniquement de ℓ .

- Si l'horloge avance, cela veut dire que la période est trop faible et que la fréquence est trop grande. Il faudra donc augmenter T_0 ou diminuer f_0 , c'est-à-dire **augmenter** ℓ .
- Si l'horloge tarde, il faudra à l'inverse **diminuer** ℓ .

Exercice 5

1) Le moment cinétique en O du satellite dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g s'écrit :

$$\vec{L}_O(S)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{OS} \wedge m \vec{v}(S)|_{\mathcal{R}_g}, \text{ d'où } \|\vec{L}_O(S)|_{\mathcal{R}_g}\| = OS \times mv \times |\sin \alpha|$$

avec $\alpha = \text{angle entre } \vec{OS} \text{ et } \vec{v}(S)|_{\mathcal{R}_g}$.

En remarquant que $OS|\sin \alpha| = CS$, on obtient directement :

$$\|\vec{L}_O(S)|_{\mathcal{R}_g}\| = mvCS.$$

A.N. $\|\vec{L}_O(S)|_{\mathcal{R}_g}\| = 1 \times 10^3 \times \frac{14\,650}{3,6} \times 16\,715 \cdot 10^3 = 6,8 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.



On aurait pu calculer OS et α dans le triangle rectangle OCS. Il aurait fallu donc d'abord déterminer OC.

Le grand axe de l'ellipse mesure :

$$2a = CA + CP = AA' + 2R_T + P'P = 48\,150 \text{ km},$$

d'où : $OC = a - PP' - R_T = 17\,325 \text{ km}$.

À l'instant du schéma, on a donc dans le triangle rectangle OCS :

• d'après le théorème de Pythagore : $OS = \sqrt{OC^2 + CS^2} = 24\,074 \text{ km}$;

• d'après les relations trigonométriques : $\tan \alpha = \frac{CS}{OC}$, soit $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{CS}{OC}\right) = 44^\circ$.

On en déduit finalement :

$$\|\vec{L}_O(S)|_{\mathcal{R}_g}\| = 24\,074 \cdot 10^3 \times 1,0 \cdot 10^3 \times \frac{14\,650}{3,6} \times \sin 44^\circ = 6,8 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$



Dans l'application numérique, il faut convertir v en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ($1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$).

2) Voir la méthode n° 1 : TMC (O).

• **Système étudié** : le satellite S assimilé à son centre d'inertie.

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g = (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Bilan des forces appliquées au système** : force d'interaction gravitationnelle $\vec{F} = -F \vec{e}_r$.

• **Point de calcul** : le point fixe O dans \mathcal{R}_g .



Le point O est commode, car la droite d'action (OS) de la force \vec{F} coupe constamment cet axe, donc $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$.

- Théorème du moment cinétique en O dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(S)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}, \text{ d'où } \vec{L}_O(S)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{\text{cte}} \text{ et } \|\vec{L}_O(S)|_{\mathcal{R}_g}\| = \text{cte}.$$

La valeur du moment cinétique en O du satellite est constante (valeur calculée à la question 1)). On peut donc utiliser cette valeur à l'apogée A et au périgée P.

En outre, on a à chaque instant :

$$\vec{OS} = r\vec{e}_r, \text{ d'où } \vec{v}(S)|_{\mathcal{R}_g} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_{\theta}.$$

Or, r est extrémal à l'apogée et au périgée (maximal en A et minimal en P) ; en ces points, $\dot{r} = 0$ et :

$$\vec{OS} = r\vec{e}_r \perp \vec{v}(S)|_{\mathcal{R}_g} = r\dot{\theta}\vec{e}_{\theta}.$$

On en déduit donc :

- à l'apogée A :

$$\|\vec{L}_O(S)|_{\mathcal{R}_g}\| = OA \times mv_A \times \left| \sin \frac{\pi}{2} \right|,$$

$$\text{soit } v_A = \frac{\|\vec{L}_O(S)|_{\mathcal{R}_g}\|}{(AA' + R_T)m} = \frac{6,8 \cdot 10^{13}}{41\,400 \cdot 10^3 \times 1,0 \cdot 10^3} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5,9 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1};$$

- au périgée P :

$$v_P = \frac{\|\vec{L}_O(S)|_{\mathcal{R}_g}\|}{(R_T + P'P)m} = \frac{6,8 \cdot 10^{13}}{6\,750 \cdot 10^3 \times 1,0 \cdot 10^3} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3,6 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Exercice 6

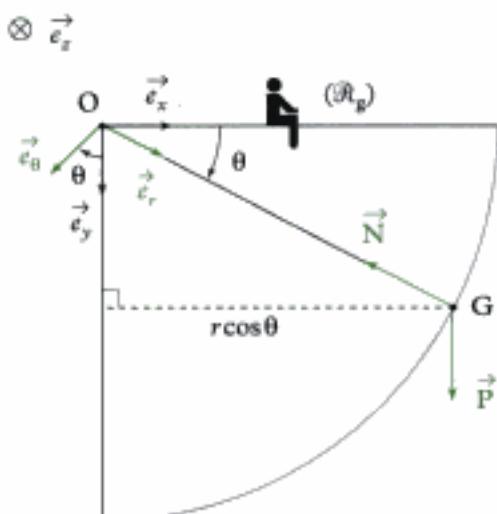
- Système étudié : l'enfant assimilé à un point matériel G (m).

- Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_g (O ; \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z).

- Bilan des forces appliquées au système :

- le poids \vec{P} , vertical vers le bas $\vec{P} = mg\vec{e}_y$;
- la réaction \vec{N} du toboggan, normale au support en l'absence de frottements $\vec{N} = -N\vec{e}_z$.
- Choix de l'axe de calcul $\Delta = (O; \vec{e}_z)$: cet axe permet (via les moments) d'éliminer * la réaction \vec{N} inconnue puisqu'à tout instant, la droite d'action de \vec{N} passe par O (le bras de levier de \vec{N} par rapport à Δ étant nul).
- Calculs des moments des forces par rapport à l'axe Δ :

- pour le poids $M_\Delta(\vec{P}) = +mgrcos\theta$;
- pour la réaction $M_\Delta(\vec{N}) = 0$.



mg est la force, $rcos\theta$ est le bras de levier ($rcos\theta > 0$ car $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ dans la position du dessin) et « + » car le poids a tendance (dans la position du dessin) à faire tourner G dans le sens positif (définie par \vec{e}_z).

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Pour trouver N, on projette cette relation sur \vec{e}_r :

$$(mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r = (-mg\vec{e}_x + N\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r ;$$

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N, \text{ soit } N = m(g\cos\theta - R\dot{\theta}^2).$$

$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = 0$, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$ et $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r = \cos\theta$.

Comme m est en kg, g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, R en m et $\dot{\theta}^2$ en $\text{rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, l'expression est bien homogène à une force (1 kg · m · s⁻² = 1 N).

4) • La luge quitte le sol quand $N = 0$, soit :

$$m(g\cos\theta - R\dot{\theta}^2) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\theta = \frac{R\dot{\theta}^2}{g} \quad (2)$$

Cette relation caractérise le décollage. Pour déterminer θ_d en fonction de v_0 , il faut utiliser l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de θ et v_0 (question 2).

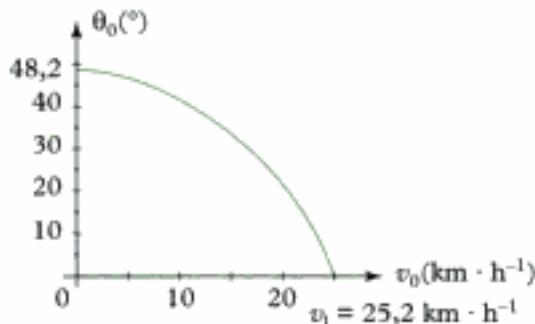
• À l'instant du décollage, les relations (1) et (2) donnent :

$$\cos\theta_d = \frac{R}{g} \left[\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R} (1 - \cos\theta_d) \right], \text{ soit } 3\cos\theta_d = \frac{v_0^2}{Rg} + 2 ;$$

$$\theta_d = \cos^{-1} \left[\frac{1}{3} \frac{v_0^2}{Rg} + \frac{2}{3} \right].$$

Comme v_0^2 est en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, R en m et g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, l'expression trouvée est bien homogène (nombre sans dimension).

5) La courbe demandée est la suivante :



La vitesse limite v_l correspond à $\theta_d = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{3} \frac{v_l^2}{Rg} + \frac{2}{3} = 1, \text{ soit } v_l = \sqrt{gR}.$$

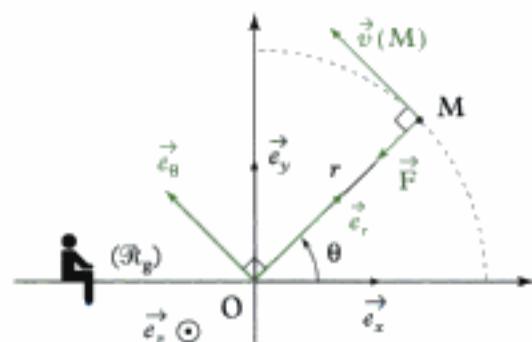
A.N. $v_l = \sqrt{9.8 \times 5.0} \approx 7.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Pour $v \geq v_l$, la luge ne suit à aucun moment le profil circulaire, car elle « décolle » pour $\theta_d = 0$.

Exercice 8

1) Le mouvement de l'électron étant circulaire uniforme à la vitesse v , on a :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}_g} &= \vec{OM} \wedge m_e \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} \\ &= r \vec{e}_r \wedge m_e v \vec{e}_\theta \\ &= m_e r v \vec{e}_z. \end{aligned}$$



 Avec l'habitude, on peut gagner du temps en retenant que pour un mouvement circulaire de centre O et de rayon R, on a :

$$\vec{L}_0(M) \Big|_{R_0} = mR^2\omega \vec{e}_r = mRv\vec{e}_r.$$

D'après l'énoncé, on obtient donc :

$$\vec{e}_z \cdot \vec{L}_0(M) \Big|_{R_0} = rm_e v = n \frac{\hbar}{2\pi}, \text{ soit}$$

$$v = \frac{n\hbar}{2\pi m_e r} \quad (1)$$

2) Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , on applique la deuxième loi de Newton (PFD) à l'électron :

$$m_e \vec{a}(M) \Big|_{R_0} = \vec{F}.$$

Or, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, $\vec{v}(M) \Big|_{R_0} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$ et $\vec{a}(M) \Big|_{R_0} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$.

 La dérivation donne : $\vec{a}(M) \Big|_{R_0} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$ avec $\ddot{\theta} = 0$ (mouvement uniforme).

On a donc :

$$-m_e \frac{v^2}{r}\vec{e}_r = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r,$$

soit :

$$v^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \quad (2)$$

3) En utilisant les expressions (1) et (2), on obtient :

$$r = n^2 \times \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} = r_0 n^2, \text{ avec } r_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}.$$

$$\text{A.N. } r_0 = \frac{(6,64 \cdot 10^{-34})^2 \times 8,84 \cdot 10^{-12}}{\pi \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

 L'unité de $\frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}$ est : $\frac{\text{J}^2 \cdot \text{s}^2 \times \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}}{\text{kg} \times \text{C}^2} = \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{s}^2 \times \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}}{\text{kg}} = \text{m}$.
(car $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ et $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

4) • L'énergie cinétique \mathcal{E}_e de l'électron est :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0 n^2}.$$

• La force \vec{F} d'interaction électrostatique dérive d'une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p(r) = - \int \vec{F} dr + \text{cte} = \int \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \text{cte} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 n^2} + \text{cte}.$$

On choisit $\text{cte} = 0$ (référence de l'énergie potentielle à l'infini : $\mathcal{E}_p = 0$ pour $r \rightarrow \infty$).

• L'énergie mécanique de l'électron est donc :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_p = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0 n^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 n^2} = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0 n^2}$$

$$\mathcal{E}_m = - \frac{\mathcal{E}_0}{n^2}, \text{ avec } \mathcal{E}_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}.$$

5) L'énergie d'ionisation est l'énergie à fournir à l'électron pour le faire passer de son état fondamental à un état infiniment éloigné de O ($n \rightarrow \infty$), c'est-à-dire dans un état d'énergie nulle.

 Comme $r = nr_0$, $r \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$,

L'énergie d'ionisation vaut donc : $\mathcal{E}_{\text{ion}} = \Delta \mathcal{E}_m = 0 - \frac{-\mathcal{E}_0}{1^2} = \mathcal{E}_0$.

$$\text{A.N. } \mathcal{E}_0 = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8\pi \times 8,84 \cdot 10^{-12} \times 5,3 \cdot 10^{-11}} = 2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV.}$$

 Par définition : $1 \text{ eV} = e \times 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Exercice 9

1) La longueur L du fil non enroulée à l'instant t est égale à la longueur initiale L_0 , moins la longueur $R\theta$ enroulée sur le cylindre :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 - \mathbf{R}\theta.$$

2) Le vecteur position $\overrightarrow{\text{OM}}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{OM}} = \overrightarrow{\text{OI}} + \overrightarrow{\text{IM}} = \mathbf{R}\vec{e}_r + \mathbf{L}\vec{e}_\theta.$$

On dérive le vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v}(\mathbf{M})|_{\mathcal{R}_t} = \left(\frac{d\overrightarrow{\text{OM}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_t} = \left(\frac{d(R\vec{e}_r + L\vec{e}_\theta)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_t} = R \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}_t} + L \vec{e}_\theta + L \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{\mathcal{R}_t}.$$

$$\text{Or, } \dot{\mathbf{L}} = -R\dot{\theta} \text{ (voir question 1)), } \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}_t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ et } \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{\mathcal{R}_t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r.$$

On en déduit donc :

$$\vec{v}(\mathbf{M})|_{\mathcal{R}_t} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - L\dot{\theta}\vec{e}_r = -L\dot{\theta}\vec{e}_r,$$

soit :

$$\vec{v}(\mathbf{M})|_{\mathcal{R}_t} = -(L_0 - R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r.$$

3) • **Système étudié** : la particule matérielle M de masse m .

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Bilan des forces appliquées au système** :

– le poids \vec{P} , vertical et vers le bas : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$;

– la réaction \vec{N} du plan, verticale et vers le haut (absence de frottement) : $\vec{N} = N\vec{e}_x$;

– la tension \vec{T} du fil, selon le fil et orientée vers I : $\vec{T} = -T\vec{e}_\theta$.

• **Calcul des puissances des forces** :

– pour le poids \vec{P} : $\mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathcal{R}_t} = -mg\vec{e}_z \cdot \vec{v}(\mathbf{M})|_{\mathcal{R}_t} = 0$;

– pour la réaction \vec{N} : $\mathcal{P}(\vec{N})|_{\mathcal{R}_t} = N\vec{e}_x \cdot \vec{v}(\mathbf{M})|_{\mathcal{R}_t} = 0$;

 Le poids \vec{P} et la réaction \vec{N} , perpendiculaires au plan du déplacement ont une puissance nulle (ils ne travaillent pas).

– pour la tension \vec{T} : $\mathcal{P}(\vec{T})|_{\mathcal{R}_t} = -T\vec{e}_\theta \cdot \vec{v}(\mathbf{M})|_{\mathcal{R}_t} = -T\vec{e}_\theta \cdot [-(L_0 - R\theta)\dot{\theta}] \vec{e}_r = 0$.

- Théorème de la puissance cinétique dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\frac{d(\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g})}{dt} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{F})|_{\mathcal{R}_g} = 0, \text{ d'où : } \mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}mv^2(M)|_{\mathcal{R}_g} = \text{cte.}$$

On en déduit donc que :

$$\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}\| = \text{cte} = v_0 \quad (\text{valeur à } t = 0);$$

- 4) D'après les questions 2) et 3), on a :

$$\|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}\| = (L_0 - R\theta)\dot{\theta} = v_0, \text{ d'où : } L_0\dot{\theta} - R\theta\dot{\theta} = v_0.$$

 $|\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}| = |(L_0 - R\theta)\dot{\theta}| = (L_0 - R\theta)\dot{\theta}$, car le fil s'enroule dans le sens positif (θ augmente, donc $\dot{\theta} > 0$).

On intègre une fois cette équation différentielle par rapport au temps :

$$L_0\theta - R\frac{\theta^2}{2} = v_0t + \text{cte.}$$

À $t = 0$, on a : $\theta(t = 0) = 0$, donc la constante d'intégration est nulle. Finalement :

$$\frac{R\theta^2}{2} - L_0\theta + v_0t = 0.$$

 La constante d'intégration est toujours donnée par les conditions initiales à $t = 0$.

Les deux solutions de cette équation du second degré en θ sont :

$$\theta(t) = \frac{L_0 \pm \sqrt{L_0^2 - 4\frac{R}{2} \times v_0t}}{2 \times \frac{R}{2}} = \frac{L_0 \pm \sqrt{L_0^2 - 2Rv_0t}}{R}.$$

 Les racines de l'équation du second degré en x : $ax^2 + bx + c = 0$ s'écrivent : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

Comme $\theta(t = 0) = 0$, on ne conserve que la solution avec le signe + :

$$\theta(t) = \frac{L_0 - \sqrt{L_0^2 - 2Rv_0t}}{R}.$$

 Comme θ est en rad, L_0 en m, R en m, v_0 en $m \cdot s^{-1}$ et t en s, l'expression trouvée est bien homogène (θ sans dimension).

- 5) • **Système étudié** : la particule matérielle M.

- **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- **Bilan des forces appliquées au système** :

$$\vec{P} = -mg\vec{e}_z; \quad \vec{N} = N\vec{e}_z; \quad \vec{T} = -T\vec{e}_\theta.$$

- Axe de calcul : l'axe fixe $\Delta = (O ; \vec{e}_z)$ dans \mathcal{R}_g .

 Ici, aucun point ne permet de simplifier les calculs. En revanche, les moments du poids \vec{P} et de la réaction \vec{N} par rapport à un axe vertical sont nuls. On choisit donc comme axe de calcul l'axe fixe $\Delta = (O ; \vec{e}_z)$ dans \mathcal{R}_g .

- Calculs des moments des forces par rapport à l'axe Δ :

- pour le poids \vec{P} : $M_\Delta(\vec{P}) = 0$;
- pour la réaction \vec{N} : $M_\Delta(\vec{N}) = 0$;
- pour la tension \vec{T} : $M_\Delta(\vec{T}) = -R \cdot T$.

Hidden page

Forces centrales conservatives

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons les mouvements d'un point matériel soumis à une force centrale conservative, en montrant notamment qu'un certain nombre de grandeurs se conservent tout au long de ces mouvements. Les résultats trouvés (lois de Kepler) permettront l'étude du mouvement des planètes et des satellites artificiels.

Plan du chapitre 7

A. Forces centrales conservatives	226
1. Force d'interaction gravitationnelle.....	226
2. Force d'interaction électrostatique	227
B. Lois générales de conservation	228
1. Conservation du moment cinétique, loi des aires	228
2. Conservation de l'énergie mécanique.....	229
3. Étude graphique du type de trajectoires.....	229
C. Mouvement dans un champ de forces centrales attractives en $\frac{1}{r^2}$	231
1. Nature des trajectoires	231
2. Expression de l'énergie mécanique	232
3. Étude de la trajectoire parabolique, vitesse de libération	232
4. Étude de la trajectoire circulaire	233
5. Étude de la trajectoire elliptique	234
6. Loi de Kepler	236
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	237
Énoncés des exercices	243
Indications	244
Solution des exercices	245

A. Forces centrales conservatives

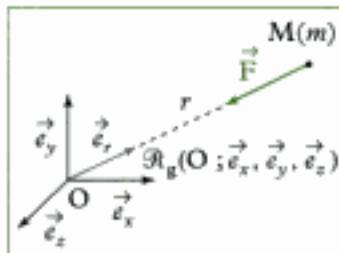


Fig. 1 - Force centrale conservative.

1. Le travail élémentaire de la force s'écrit :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} \\ = F(r) \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r).$$

Comme $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$, et $\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$ (car \vec{e}_r est un vecteur de norme constante), on a :

$$\delta W = F(r) dr = -dE_p.$$

2. On parle aussi d'interaction newtonienne.

3. En faisant apparaître le champ de gravitation créé par O(m_0) en M

$$\vec{g}(M) = -\frac{G m_0}{r^2} \vec{e}_r$$

\vec{F}_g s'écrit : $\vec{F}_g = m \vec{g}(M)$.

La masse m apparaissant ici s'appelle masse gravitationnelle du point matériel M : c'est la caractéristique du point matériel M vis-à-vis de la gravitation.

4. Il est remarquable que la masse gravitationnelle se confond avec la masse inerte, caractéristique du point matériel M vis-à-vis de l'inertie, c'est-à-dire de la facilité avec laquelle la vitesse de M peut varier (la masse inerte apparaît dans l'expression

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Définition 1

Considérons un point matériel M de masse m soumis à une force centrale $\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$ constamment dirigée vers un point O, appelé centre de force, fixe dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g (fig. 1) ; cette force ne dépend que de la distance $r = \|OM\|$ entre le centre de force O et le point M.

Cette force est保守的和 dérive donc d'une énergie potentielle $E_p(r)$ qui ne dépend que de r , ainsi :

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr}$$

F force (N)
 E_p énergie potentielle (J)
 r distance en (m)

La force \vec{F} est attractive si $F(r) < 0$, c'est-à-dire si $\frac{dE_p}{dr} > 0$.

La force \vec{F} est répulsive si $F(r) > 0$, c'est-à-dire si $\frac{dE_p}{dr} < 0$.

A.1. Force d'interaction gravitationnelle

Supposons que se trouve en O un point matériel de masse m_0 et en M un point matériel de masse m .

M est soumis à la **force d'interaction gravitationnelle**² :

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$$

F_g force (N)
G constante de gravitation universelle ($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)
 m_0 et m ^{3,4} masses (kg)
 r distance OM (m)

Cette force est centrale car constamment dirigée vers O (elle est attractive). Elle est de plus保守的：

L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle est :

$$E_p(r) = -G \frac{m_0 m}{r}$$

E_p énergie potentielle (J)
 m et m_0 masses (kg)
 r distance (m)
G constante de gravitation universelle ($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)

si on choisit la référence d'énergie potentielle à l'infini : $E_p(r \rightarrow \infty) = 0$; en effet :

$$\frac{dE_p}{dr} = -F(r) = G \frac{m_0 m}{r^2} \quad \text{soit} \quad E_p(r) = -G \frac{m_0 m}{r} + \text{cte.}$$

Comme on souhaite avoir $E_p(r \rightarrow \infty) = 0$; il faut choisir $\text{cte} = 0$.

A.2. Force d'interaction électrostatique

Supposons que se trouve en O une charge électrique ponctuelle q_0 et en M une charge électrique q .

1. Cette relation porte le nom de loi de Coulomb ; on parle aussi d'interaction coulombienne.

2. En faisant apparaître le champ électrostatique créé par O(q_0) en M :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \hat{e}_r$$

\vec{F}_e s'écrit :

$$\vec{F}_e = q \vec{E}(M).$$

M est soumis à la **force d'interaction électrostatique**¹ :

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \hat{e}_r$$

F_e force (N)

ϵ_0 permittivité du vide

$$(\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1})$$

q_0 et q charges² électriques (C)

r distance (m)

Cette force est centrale car constamment dirigée vers O (elle est attractive si q et q_0 sont de signe opposé : $qq_0 < 0$ et elle est répulsive si q et q_0 sont de même signe : $qq_0 > 0$).

Elle est de plus conservative.

L'énergie potentielle d'interaction électrostatique est :

$$\mathcal{E}_p(r) = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}$$

\mathcal{E}_p énergie potentielle (J)

ϵ_0 constante ($\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$)

q_0 et q charges électriques (C)

r distance (m)

Si on choisit la référence d'énergie potentielle à l'infini : $\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = 0$; en effet :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -F(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_p(r) = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r} + \text{cte.}$$

Comme on souhaite avoir $\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = 0$, il faut choisir cte = 0.

Remarques :

- 1) On constate une analogie entre les deux forces précédentes, toutes deux variant en $\frac{1}{r^2}$; on peut écrire, pour ces deux forces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \frac{K}{r^2} \hat{e}_r \\ \text{et} \quad \text{avec } K = -G m_0 m \text{ ou } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q. \\ \mathcal{E}_p(r) = \frac{K}{r} \end{array} \right.$$

- 2) Comparons l'ordre de grandeur de la norme de ces deux forces dans le cas de deux particules élémentaires de masse $m = 10^{-30} \text{ kg}$, de charge $|e| = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ et distantes de $r = 10^{-10} \text{ m}$:

$$F_g = G \frac{m^2}{r^2} = 6,7 \times 10^{-51} \text{ N} \quad \text{et} \quad F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 23 \times 10^{-9} \text{ N.}$$

$$\text{Soit} \quad \frac{F_e}{F_g} = 3 \times 10^{42}.$$

À l'échelle atomique, l'interaction électrostatique est prépondérante : il n'est pas nécessaire de prendre en compte l'interaction gravitationnelle.

À l'échelle des planètes, les masses mises en jeu étant considérables et les charges électriques quasi nulles, l'interaction gravitationnelle est dans ce cas la seule à prendre en compte.

B. Lois générales de conservation

Dans un mouvement à force centrale conservative, le moment cinétique et l'énergie mécanique du point matériel M se conservent, entraînant un certain nombre de conséquences.

B.1. Conservation du moment cinétique, loi des aires

Le TMC appliquée dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ au point matériel M de masse m donne :

1. Le moment cinétique peut être calculé à partir de la position initiale \vec{OM}_0 et de la vitesse initiale \vec{v}_0 de M :
- $$\vec{L}_0(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M) = \vec{cte} \\ = \vec{OM}_0 \wedge m\vec{v}_0.$$

2. Ce plan passe par le centre de force O et est perpendiculaire au vecteur $\vec{L}_0(M)$.

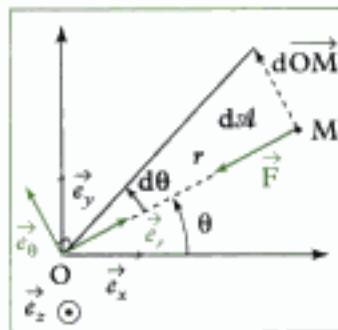


Fig. 2 - Aire dA balayée par \vec{OM} durant dt .

3. C peut être déterminée à l'aide des conditions initiales :

$$C = |\vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0| \\ = \vec{OM}_0 \times \vec{v}_0 \cdot |\sin(\vec{OM}_0, \vec{v}_0)|.$$

4. Cette relation est une intégrale première du mouvement.

5. Lorsque r est grand, $\dot{\theta}$ est petit et lorsque r est petit, $\dot{\theta}$ est grand.

6. Le cas particulier $C = 0$ correspond à une vitesse angulaire $\dot{\theta} = 0$: le mouvement est rectiligne.

7. $\frac{1}{2}|\vec{OM} \wedge d\vec{OM}|$ représente la surface du triangle dont deux côtés sont $d\vec{OM}$ et \vec{OM} .

8. $\frac{dA}{dt}$ s'appelle la vitesse aréolaire.

$$\left(\frac{d(\vec{L}_0(M)|_{\mathcal{R}_g})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge F(r)\vec{e}_r = \vec{0}.$$

Ainsi : $\vec{L}_0(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{cte}$.

Le moment cinétique en O du point matériel M se conserve au cours du mouvement.¹

Comme $\vec{L}_0(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{cte}$, \vec{OM} reste à tout instant perpendiculaire à un vecteur constant $\vec{L}_0(M)|_{\mathcal{R}_g}$: **le mouvement est plan**².

On peut donc utiliser les coordonnées polaires pour repérer le point M (fig. 2) :

$$\vec{L}_0(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = r\vec{e}_r \wedge m(r\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

On pose souvent :

$$r^2\dot{\theta} = \vec{cte} = \mathbf{C},$$

C étant une constante (> 0) appelée **constante des aires**.^{3, 4, 5, 6}

Cette dernière relation peut être interprétée en adoptant un point de vue cinématique : l'aire balayée dA par le vecteur \vec{OM} pendant le temps dt (fig. 2) est :

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{OM} \wedge d\vec{OM}|^2 = \frac{1}{2}|\vec{OM} \wedge \vec{v} dt| = \frac{1}{2}r \times r\dot{\theta} \times dt = \frac{dt}{2}r^2\dot{\theta};$$

$$\text{ainsi : } \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{C}}{2} \text{ soit } A(t) = \frac{\mathbf{C}}{2}t + A(0).$$

Cette relation constitue la loi des aires.

Loi 1

Loi des aires

En présence d'une force centrale passant par le point O, l'aire balayée par le vecteur \vec{OM} est proportionnelle au temps.

Remarques :

- 1) Autrement dit, l'aire balayée à chaque instant par le vecteur position est constante.
- 2) Autrement dit, la vitesse aréolaire $v_A = \frac{dA}{dt}$ est constante pendant le mouvement.

B.2. Conservation de l'énergie mécanique

La force appliquée au point M étant conservative, l'énergie mécanique du point matériel M se conserve au cours du temps :

$$\mathcal{E}_m(M)|_{\mathcal{R}_t} = \text{cte} = \mathcal{E}.$$

Donc : $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cte} = \mathcal{E}$ soit $\frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p(r) = \text{cte} = \mathcal{E}$.

La constante \mathcal{E} peut être déterminée à $t=0$, à l'aide de $r_0 = |\overrightarrow{OM_0}|$ et $v_0 = \|\vec{v}_0\|$:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \mathcal{E}_p(r_0) = \mathcal{E}.$$

En coordonnées polaires : $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, ainsi :

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}.^1$$

D'après la relation $C = r^2\dot{\theta}$ on obtient :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}.$$

En appelant $\mathcal{E}_{p\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)$ l'énergie potentielle effective (ou efficace) du point matériel M et $\mathcal{E}_{cr} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ l'énergie cinétique radiale du point M, on se ramène à l'étude du mouvement d'un point matériel à un degré de liberté (r), connaissant son énergie potentielle effective :

$$\mathcal{E}_{cr} + \mathcal{E}_{p\text{eff}}(r) = \mathcal{E}.$$

La notion d'énergie potentielle effective permet de démontrer les résultats de cours mais est délicate à manipuler car elle intègre une partie seulement de l'énergie cinétique du point matériel M.

B.3. Étude graphique du type de trajectoires

Supposons que le point matériel soit soumis à une force centrale conservative :

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r.$$

($K > 0$ force répulsive, $K < 0$ force attractive).

Son énergie potentielle effective est² :

$$\mathcal{E}_{p\text{eff}}(r) = \frac{K}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}.$$

L'analyse des courbes d'énergie potentielle effective (fig. 3) montre la présence d'un minimum^{3,4} (r_0) si $K < 0$ et d'aucun minimum si $K > 0$.

1. Cette relation constitue une deuxième intégrale première du mouvement.

2. Dans ce §, on considère que K, m et C sont fixées par des conditions initiales.

3. La résolution de l'équation

$\frac{d\mathcal{E}_{p\text{eff}}}{dr} = 0$ donne $r = r_0 = -\frac{mC^2}{K}$

et $\mathcal{E}_{p\text{eff}}(r_0) = -\frac{K^2}{2mC^2}$.

4. On remarque que la solution de

$\mathcal{E}_{p\text{eff}} = 0$ est $r = \frac{r_0}{2} = -\frac{mC^2}{2K}$.

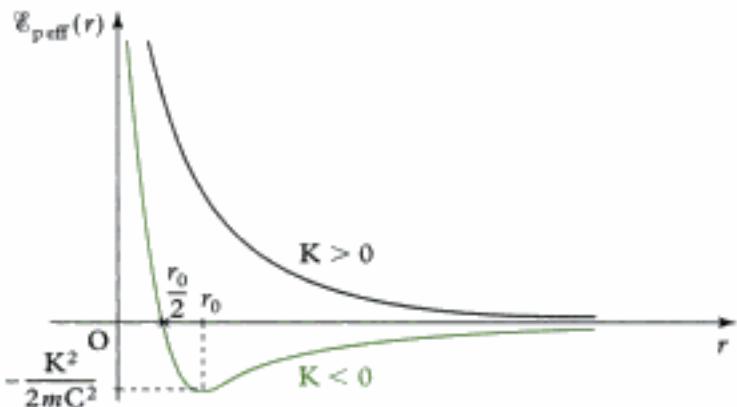


Fig. 3 - Courbes d'énergie potentielle effective.

1. Dans le cas de mouvement de particules chargées dans un atome, l'énergie mécanique ne peut pas prendre n'importe quelle valeur : l'énergie est quantifiée.

2. Les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels l'énergie cinétique radiale est positive : $\mathcal{E}_{cr} \geq 0$ soit $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{eff}$.

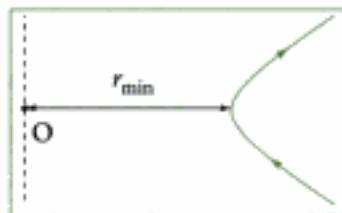


Fig. 5 - État de diffusion dans le cas d'une force répulsive ($K > 0$).

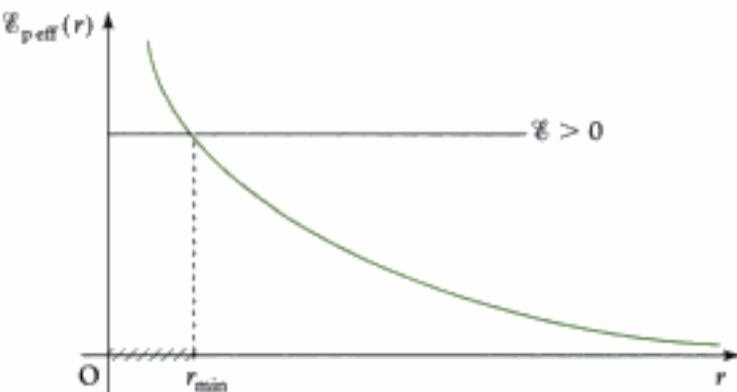


Fig. 4 - Force répulsive ($K > 0$).

Quelles que soient les conditions initiales, c'est-à-dire quelle que soit l'énergie mécanique¹ du point matériel, le mouvement est non borné² : on parle d'**état de diffusion** (fig. 5).

Le mouvement radial peut se faire entre r_{min} et l'infini. r_{min} constitue la distance minimale d'approche (du point O) et est déterminée par la résolution de l'équation :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r}, \text{ lorsque } \dot{r} = 0.$$

$$\text{Ainsi : } \mathcal{E}r^2 - Kr - \frac{mC^2}{2} = 0, \text{ soit } r_{min} = \frac{1}{2\mathcal{E}}(K + \sqrt{K^2 + 2mC^2})$$

(on ne conserve que la solution positive).

B.3.2 - Cas d'une force attractive ($K < 0$)

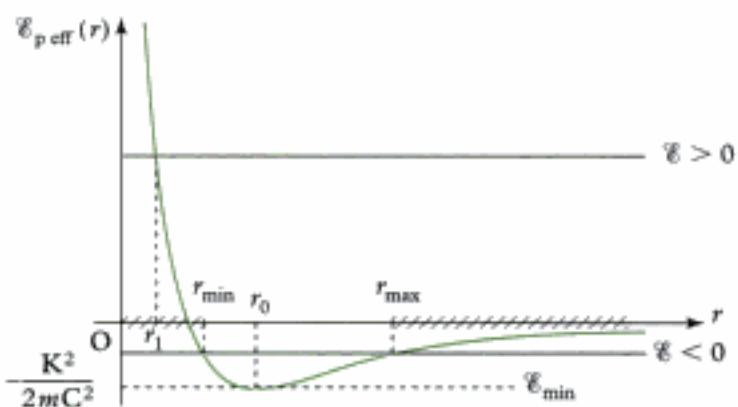


Fig. 6 - Force attractive ($K < 0$).

Hidden page

On peut obtenir $\theta_0 = 0$ en choisissant correctement l'origine des angles ; en posant $p = \left| \frac{mC^2}{K} \right|$ et $e = \left| \frac{AmC^2}{K} \right|$, on obtient l'équation de la trajectoire, caractéristique d'une **conique** de foyer O, de paramètre p et d'excentricité e :

- Si $e = 0$, la trajectoire est un **cercle** de rayon $r = p$ et de centre O.
 - Si $0 < e < 1$, la trajectoire est une **ellipse** de foyer O, de paramètre p et d'excentricité e .
 - Si $e = 1$, la trajectoire est une **parabole** de foyer O, paramètre p et d'excentricité e .
 - Si $e > 1$, la trajectoire est une **hyperbole** de foyer O : dans le cas d'une force attractive, c'est la branche de l'hyperbole pour laquelle O se trouve à l'intérieur de sa concavité ; dans le cas d'une force répulsive, c'est la branche de l'hyperbole pour laquelle O se trouve à l'extérieur de sa concavité.

C.2. Expression de l'énergie mécanique

En remplaçant $u(\theta)$ par son expression dans l'énergie mécanique, on obtient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{mC^2}{2} \left[A^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + \left(A \cos(\theta - \theta_0) - \frac{K}{mC^2} \right)^2 \right] + K \left[A \cos(\theta - \theta_0) - \frac{K}{mC^2} \right]$$

$$\text{soit : } \mathcal{E}_m = \frac{mC^2A^2}{2} + \frac{K^2}{2mC^2} - \frac{K^2}{mC^2} = -\frac{K^2}{2mC^2} \left[1 - \frac{m^2C^4A^2}{K^2} \right].$$

$\mathcal{E}_m = -\frac{ \mathbf{K} }{2p} [1 - e^2]$	\mathcal{E}_m énergie mécanique (J) p paramètre (m) e excentricité $\mathbf{K} = \left\{ \begin{array}{l} -Gm_0m \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_0q \end{array} \right. (N \cdot m^2) < 0$
--	--

C.3. Étude de la trajectoire parabolique ($K < 0$), vitesse de libération

La trajectoire du point matériel M est parabolique lorsque $e = 1$; son énergie mécanique est alors nulle :

$$\mathcal{E}_m = 0 \text{ soit } \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r} = 0,$$

ou encore :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r} = 0.$$

La distance de plus courte approche est obtenue lorsque $i = 0$:

$$r = r_{\min} = -\frac{mC^2}{2K} = \frac{p}{2}$$

Une vitesse importante dans les exercices est la **vitesse de libération**, c'est-à-dire la vitesse minimum à donner au point matériel M lorsqu'il se trouve à une distance r_0 du centre de force O pour qu'il se libère de l'attraction du point matériel O :

pour cela, il suffit que son énergie mécanique soit nulle :

$$\mathcal{E}_m = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2}mv_\ell^2 = -\frac{K}{r_0} (>0)$$

$$v_\ell = \sqrt{-\frac{2K}{mr_0}} = \sqrt{2 \frac{Gm_0}{r_0}} \quad \text{si } K = -Gm_0m.$$

Application 1 Vitesse de libération

Calculer la vitesse de libération, appelée seconde vitesse cosmique, d'un satellite terrestre se trouvant à la surface de la Terre.

Données : $R_T = 6\,370 \text{ km}$; $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^{-2}$; $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$.

Solution

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}.$$

$$\text{A.N. } v_\ell = \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6\,370 \times 10^3}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

C.4. Étude de la trajectoire circulaire ($K < 0$)

1. Comme $\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{E}_p}{2}$, La trajectoire du point matériel M est circulaire de rayon r_0 lorsque $e = 0$; son énergie mécanique est¹ :

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{E}_p}{2} \text{ donc } \mathcal{E}_c = -\frac{\mathcal{E}_p}{2}.$$

$$\mathcal{E}_m = -\frac{|K|}{2p} = \frac{K}{2p} = \frac{K}{2r_0} = \frac{\mathcal{E}_p}{2}.$$

(En effet l'équation de la trajectoire est : $\mathbf{r} = \mathbf{p} = \text{cte} = \mathbf{r}_0$.)

La vitesse sur cette trajectoire est constante :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r_0} = \text{cte} = \frac{K}{2r_0} \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{-\frac{K}{mr_0}} = \text{cte}.$$

$$\text{Si } K = -Gm_0m : \quad v = \sqrt{\frac{Gm_0}{r_0}}.$$

La période de révolution T de M autour de O est le temps mis par M pour faire un tour, soit³ :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{-\frac{K}{mr_0}}}.$$

En élevant au carré cette relation, on a :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 mr_0^3}{-K} \quad \text{soit} \quad \frac{T^2}{r_0^3} = -\frac{4\pi^2 m}{K} = \text{cte}.$$

Si $K = -Gm_0m$:

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$$

T période (s)

r_0 rayon (m)

G constante de gravitation universelle
($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)

m_0 masse (kg)

Application 2 Satellite en orbite basse

Calculer la vitesse d'un satellite artificiel en orbite basse ($r = R_T$) – première vitesse cosmique –, ainsi que sa période de révolution.

Données : $R_T = 6\ 370 \text{ km}$; $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$.

Solution

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \quad \text{et} \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_T^3}{GM_T}}.$$

$$\text{A.N. } v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6\ 370 \times 10^3}} \approx 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{et } T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (6\ 370 \times 10^3)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}} = 5\ 062 \text{ s} = 1 \text{ h } 24 \text{ min.}$$

Application 3 Satellite géostationnaire

Déterminer la période de révolution, le rayon de la trajectoire et la vitesse d'un satellite se trouvant sur une orbite géostationnaire autour de la Terre (de masse $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$).

Solution

Comme la terre tourne sur elle-même en $T = 24 \text{ h} = 24 \times 3\ 600 = 86\ 400 \text{ s}$ autour de son axe S/N, le satellite ne peut que tourner sur une trajectoire se trouvant à la verticale de l'équateur avec une période de révolution égale à T . À partir de la relation : $\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$, on obtient le rayon de la trajectoire :

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}.$$

$$\text{A.N. } r_0 \approx 42\ 227 \text{ km.}$$

$$\text{La vitesse du satellite sur cette orbite s'écrit : } v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}.$$

$$\text{A.N. } v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{42\ 227 \times 10^3}} = 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$



L'altitude de ce satellite est :

$$h = r_0 - R_T = 42\ 227 \times 10^3 - 6\ 370 \times 10^3 = 36\ 000 \text{ km.}$$

C.5. Étude de la trajectoire elliptique ($K < 0$)

La trajectoire du point matériel M est une ellipse lorsque $0 < e < 1$; son énergie mécanique est :

- Si le mouvement se fait autour de la Terre, on parle de périgée ; si c'est autour du Soleil, on parle du périhélie.

- Si le mouvement se fait autour de la Terre, on parle d'apogée ; si c'est autour du Soleil on parle d'aphélie.

$$\mathcal{E}_m = -\frac{|K|}{2p}(1 - e^2) < 0.$$

Comme $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, le point le plus proche du centre de force O (péricentre¹) se trouve à la distance $r_{\min} = r_p = \frac{p}{1 + e}$ ($\cos \theta = 1$) le point le plus éloigné (apocentre²) se trouve à la distance $r_{\max} = r_a = \frac{p}{1 - e}$ ($\cos \theta = -1$).

Comme $r_p + r_s = 2a$ (a étant le demi grand axe de la trajectoire, on a :

$$2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} \text{ soit } p = a(1-e^2).$$

Ainsi l'énergie mécanique s'écrit simplement :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{|\mathbf{K}|}{2a} = \frac{\mathbf{K}}{2a} \quad (\mathbf{K} < 0)$$

On remarque sur la figure 9 que la distance $OB = a$ et donc que :

$$\begin{aligned} * c &= a - r_p = a - \frac{p}{1+e} \\ &= a - \frac{a(1-e^2)}{1+e} = ea; \\ * b^2 &= a^2 - c^2 = a^2(1-e^2) \\ &= ap. \end{aligned}$$

1. L'équation de l'ellipse en coordonnées cartésiennes est dans le repère $(C; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La vitesse v sur un point de la trajectoire est :

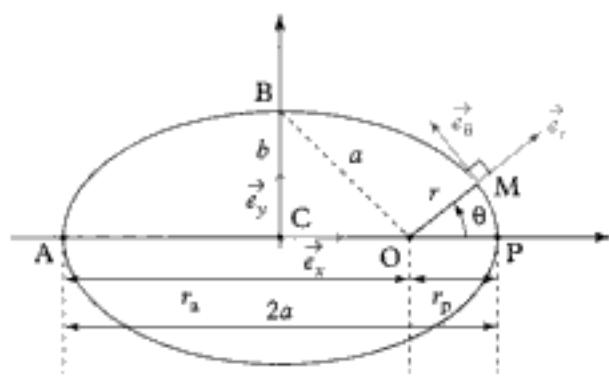


Fig. 9 - Trajectoire elliptique.

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{\mathbf{K}}{r} = \frac{\mathbf{K}}{2a}$$

$$\text{soit } v^2 = \frac{\mathbf{K}}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r} \right) \quad (\mathbf{K} < 0).$$

La période de révolution T sur l'ellipse est obtenue à l'aide de la vitesse aréolaire :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cte} = \frac{s}{T}.$$

L'aire de l'ellipse est $s = \pi ab$, ainsi :

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{C}{2} \text{ soit } \frac{T^2}{a^2 b^2} = \frac{4\pi^2}{C^2}.$$

Comme $b^2 = pa$ et $p = \frac{mC^2}{|\mathbf{K}|}$, on a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{|\mathbf{K}|} = -\frac{4\pi^2 m}{\mathbf{K}} = \text{cte}.$$

Si $\mathbf{K} = -Gm_0 m$:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$$

T période (s)

a demi grand axe de l'ellipse (m)

G constante de gravitation universelle

$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

m_0 masse (kg)

Remarque : les relations $\mathcal{E}_m = \frac{\mathbf{K}}{2a}$ et $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$ sont identiques à celles obtenues dans le cas de la trajectoire circulaire en remplaçant r_0 par a .

Application 4 Trajectoire de la Terre

Calculer les paramètres p , a , b , e et r_A de la trajectoire de la Terre autour du Soleil.

Données : $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; $T = 1 \text{ an}$; $r_p = 147,2 \times 10^6 \text{ km}$.

Solution

De l'expression $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$, on trouve :

$$a = \left(\frac{T^2 GM_S}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{(365 \times 24 \times 3600)^2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,498 \times 10^{11} \text{ m} (= 1 \text{ u.a.})$$

(u.a. : unité astronomique).

Ainsi, comme $r_p = a(1 - e)$, on trouve :

- $e = 1 - \frac{r_p}{a} = 0,017$;
- $p = a(1 - e^2) = 149,76 \times 10^9 \text{ m}$;
- $b = a\sqrt{1 - e^2} = 149,78 \times 10^9 \text{ m}$;
- $r_a = a(1 + e) = 152,3 \times 10^9 \text{ m}$.

La trajectoire est quasiment un cercle ; en effet : $e \approx 0$ et $a \approx b \approx p$.

C.6. Loi de Kepler

Dans le cas du mouvement d'un point matériel $M(m)$ à force centrale attractive $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ ($K < 0$), nous avons montré que :

- les trajectoires étaient des coniques donc le centre de force O était un des **foyers** ;
- la vitesse aréolaire était constante : $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$;
- dans le cas des trajectoires elliptiques (ou circulaires), le rapport du carré de la période sur le cube du demi grand axe (ou du rayon) était constant et indépendant de la masse du point matériel M :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte.}$$

Ces lois s'appliquent aux **mouvements des planètes et des satellites artificiels** en remarquant que la force créée (et le champ de gravitation créé) par une sphère de centre O et de masse m_0 est la même que celle créée par un point matériel placé en O de masse m_0 (voir théorème de Gauss et électromagnétisme¹) ; il est aussi nécessaire de négliger l'action des autres astres sur le point matériel M, afin que la force soit uniquement centrale et afin de pouvoir considérer que le référentiel d'étude (d'origine O) est galiléen. Kepler (1571-1630) a énoncé les lois régissant le mouvement des corps du système solaire autour du Soleil.

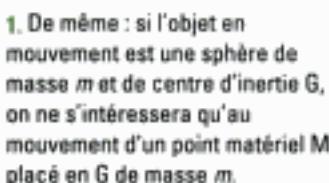


Fig. 10 - Deuxième loi de Kepler.

Loi 2

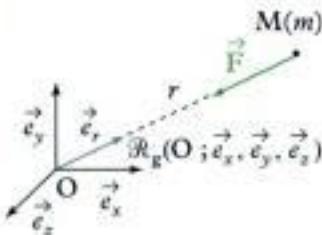
Lois de Kepler

- Chaque planète se déplace sur une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers.
- Le rayon vecteur allant du Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des temps égaux (fig. 10).
- Le carré des périodes de révolution est proportionnel aux cubes des longueurs des demi-grands axes des ellipses ($\frac{T^2}{a^3} = \text{cte.}$).

L'essentiel

✓ Forces centrales conservatives

- Considérons un point matériel M de masse m soumis à une force centrale $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$, constamment dirigée vers un point O, appelé centre de force, fixe dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g ; cette force ne dépend que de la distance $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ entre le centre de force O et le point M.



Cette force est conservative et dérive donc d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ qui ne dépend que de r , ainsi :

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}$$

\mathbf{F} force (N)
\mathcal{E}_p énergie potentielle (J)
r distance en (m)

- Force newtonienne :

$$\vec{F}_g = -\frac{\mathbf{G} m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$$

\vec{F}_g force (N)
\mathbf{G} constante de gravitation universelle ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)
m_0 et m masses (kg)
r distance OM (m)

$$\left(\mathcal{E}_p(r) = -\mathbf{G} \frac{m_0 m}{r} \right)$$

- Force coulombienne :

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$$

\vec{F}_e force (N)
ϵ_0 permittivité du vide ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$)
q_0 et q charges (C)
r distance OM (m)

$$\left(\mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r} \right)$$

- Conservation du moment cinétique : $\vec{L}_O(M) = \text{cte}$
⇒ le mouvement est plan.

$C = r^2 \dot{\theta}^2 = \text{cte}$ est la constante des aires

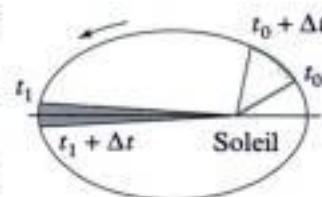
$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$ (**loi des aires**) : en présence d'une force centrale passant par le point O, l'aire balayée par le vecteur \overrightarrow{OM} est proportionnelle au temps.

- Conservation de l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{K}{r} = \text{cte}, \text{ avec } K = -\mathbf{G} m_0 m \text{ ou } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q.$$

✓ Lois de Kepler

- Chaque planète se déplace sur une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers.
- Le vecteur rayon allant du Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des temps égaux.
- Le carré des périodes de révolution est proportionnel aux cubes des longueurs des demi-grands axes des ellipses :



$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}$$

T période de révolution
a demi-grand axe de l'ellipse

✓ Étude des trajectoires

- Dans le cas d'une trajectoire circulaire, savoir retrouver rapidement :

$$v = \sqrt{\frac{G m_0}{r}} \quad (\text{à l'aide du PFD}) ;$$

$$\mathcal{E}_m = -\frac{G m_0 m}{2r} \quad (\text{à partir de } \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{G m_0 m}{r}) ;$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G m_0} \quad (\text{à partir de } T = \frac{2\pi r}{v}).$$

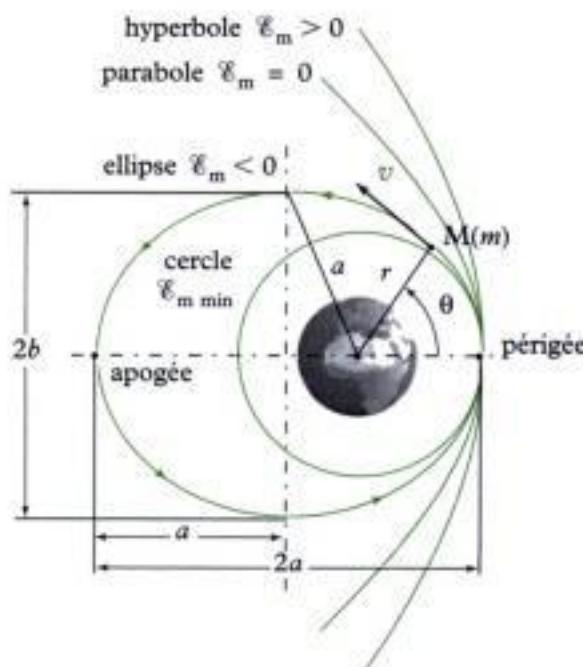
- Pour retrouver les formules d'une trajectoire elliptique, on remplace r par a , où a est le demi-grand axe de l'ellipse :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{G m_0 m}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G m_0}.$$

- Afin de caractériser une trajectoire, on utilise le signe de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m (voire la valeur de l'excentricité e).

Énergie mécanique \mathcal{E}_m	Excentricité e	Trajectoire
$\mathcal{E}_m < 0$	$e = 0$	cercle*
	$0 < e < 1$	ellipse
$\mathcal{E}_m = 0$	$e = 1$	parabole
$\mathcal{E}_m > 0$	$e > 1$	hyperbole

* Pour que la trajectoire soit un cercle, il faut que la vitesse en un point soit $v = \sqrt{\frac{G m_0}{r}}$ et que, en ce point, le vecteur vitesse \vec{v} soit orthogonal au rayon $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$.



Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer les paramètres (vitesse, énergie, période) d'une orbite circulaire ?

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sur une orbite circulaire sous l'action d'une force centrale newtonienne exercée par un objet O de masse m_0 . On donne le rayon r_0 . On souhaite déterminer la vitesse, l'énergie mécanique et la période de révolution du satellite constitué par ce point M.

→ Savoir faire

- 1 ① Exprimer la vitesse du point matériel M à l'aide du PFD.
- 2 ② En déduire l'énergie mécanique du point matériel M(m).
- 3 ③ Calculer la période de révolution.

→ Application

On considère un satellite artificiel de masse m assimilé à un point matériel M en mouvement sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre O de la Terre.

Déterminer la vitesse v_0 du satellite sur son orbite, puis son énergie mécanique \mathcal{E}_m et enfin sa période de révolution T.

Données : $r_0 = 10\,000 \text{ km}$; $m = 800 \text{ kg}$; $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Solution

- 1 Dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g (supposé galiléen), le PFD appliqué au satellite M s'écrit sous la forme :

$$\vec{m a}(M)\Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}.$$

Comme la trajectoire est un cercle de rayon r_0 , on a :

$$\vec{a}(M)\Big|_{\mathcal{R}_g} = -\frac{v_0^2}{r_0} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta.$$

La force exercée est : $\vec{F} = -\frac{GM_T m}{r_0^2} \vec{e}_r$.

Ainsi : $m \frac{dv_0}{dt} \vec{e}_\theta - \frac{mv_0^2}{r_0} \vec{e}_r = -\frac{GM_T m}{r_0^2} \vec{e}_r$

Ce qui donne en projection sur \vec{e}_θ :

$$\frac{dv_0}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad v_0 = \text{cte},$$

et en projection sur \vec{e}_r :

$$\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GM_T}{r_0^2}, \quad \text{soit} \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}.$$

A.N. $v_0 = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{10\,000 \times 10^3}} \approx 6,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

❷ L'énergie mécanique du satellite s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} = \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{r_0} - \frac{GM_T m}{r_0} = -\frac{GM_T m}{2r_0}.$$

A.N. $\mathcal{E}_m = \frac{-6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times 800}{2 \times 10000 \times 10^3} = -1,6 \times 10^{10} \text{ J}.$

❸ La période de révolution T du satellite autour de la Terre est donnée par :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0}.$$

A.N. $T = \frac{2\pi \times 10000 \times 10^3}{6,3 \times 10^3} = 9973 \text{ s} \approx 2 \text{ h } 46'.$

Méthode 2

Comment déterminer la nature de la trajectoire ?

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sous l'action d'une force centrale conservative newtonienne exercée par un objet O de masse m_0 . On donne la vitesse v_0 et la distance r_0 au centre de force O en un point de la trajectoire. On souhaite déterminer la nature de la trajectoire du point M.

→ Savoir faire

- ❶ Exprimer puis calculer l'énergie mécanique \mathcal{E}_m au point matériel M(m).
- ❷ Conclure selon le signe de \mathcal{E}_m .

→ Application

On considère un satellite artificiel de masse $m = 1 \text{ t}$ assimilé à un point matériel M se trouvant à $t = 0$ à la distance $r_0 = 12000 \text{ km}$ du centre O de la Terre ($M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$) ; sa vitesse est à $t = 0$, $v_0 = 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Déterminer la nature de la trajectoire du satellite par rapport à la Terre.

Solution

❶ L'énergie mécanique du satellite s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r}.$$

Elle se conserve au cours du temps ; on peut la calculer à $t = 0$:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0}.$$

A.N. $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \times 1000 \times (8000)^2 - \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times 1000}{12000 \times 10^3} = -1,2 \times 10^9 \text{ J}.$

❷ Comme $\mathcal{E}_m < 0$, la trajectoire est une ellipse ou un cercle ; pour que cette trajectoire soit un cercle, il faut que $\overrightarrow{OM_0} \perp \vec{v}$ et $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$.

Calculons la vitesse qu'aurait le satellite sur une trajectoire circulaire de rayon r_0 :

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{12000 \times 10^3}} = 5,76 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Conclusion : la trajectoire du satellite est une **ellipse**.

 Si v_0 avait été égale à $5,76 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, la trajectoire n'aurait été un cercle que si, en plus, $\overrightarrow{OM_0} \perp \vec{v}_0$.

Méthode 3

Comment déterminer la position et la vitesse aux points caractéristiques d'une trajectoire ?

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sous l'action d'une force centrale conservative newtonienne exercée par un objet O de masse m_0 . On donne le vecteur position \overrightarrow{OM}_0 et le vecteur vitesse \vec{v}_0 en un point M_0 de la trajectoire. On souhaite déterminer les positions et vitesses aux points caractéristiques :

- à l'apocentre et au péricentre (P) pour une ellipse ;
- au point d'approche minimal (P) pour les parabole et hyperbole.

→ Savoir faire

- ❶ Écrire la conservation de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m à l'aide des conditions initiales (en M_0).
- ❷ Écrire la conservation du moment cinétique (ou de la constante des aires C) à l'aide des conditions initiales (en M_0),
(pour les points caractéristiques considérés, $\dot{r} = 0$ donc $\overrightarrow{OM} \perp \vec{v}$).
- ❸ Résoudre le système de deux équations à deux inconnues (r ; v) obtenu.

→ Application

On considère un satellite artificiel de masse m assimilé à un point matériel M se trouvant à $t = 0$ à la distance $r_0 = \|\overrightarrow{OM}_0\|$; sa vitesse est alors $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ et on a $\alpha = (\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0)$.

Déterminer les positions et vitesses aux périphérie et à l'apogée de la trajectoire.

Données : $m = 1\ 000 \text{ kg}$; $r_0 = 24\ 075 \text{ km}$ du centre O de la Terre ;

$$M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} ; \quad v_0 = 14\ 650 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} ; \quad \alpha = 44^\circ.$$

Solution

- ❶ L'énergie mécanique du satellite est :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{m_0} \\ \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r} &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0}.\end{aligned}$$

- ❷ La conservation de la constante des aires donne :

$$C = \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\| = \|\overrightarrow{OM}_0 \wedge \vec{v}_0\| \quad \text{soit} \quad C = r v = r_0 v_0 \sin \alpha.$$

- ❸ L'équation donnant C permet d'obtenir :

$$r = \frac{r_0 v_0 \sin \alpha}{v} = \frac{C}{v}.$$

En remplaçant v dans \mathcal{E}_m , on a :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{C}v = \mathcal{E}_{m_0}.$$

soit :

$$(mC)v^2 - (2GM_T m)v - 2C\mathcal{E}_{m_0} = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = 4G^2M_T^2m^2 + 8C^2\epsilon_{m_0}m$ et les solutions sont :

$$v_{p/a} = \frac{2GM_Tm \pm \sqrt{4G^2M_T^2m^2 + 8mC^2\epsilon_{m_0}}}{2mC}.$$

La vitesse maximale est celle du point le plus proche (périgée) et la vitesse minimale est celle du point le plus éloigné (apogée).

A.N. $\epsilon_{m_0} = -8,26 \cdot 10^9 \text{ J}$ et $C = 6,8 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$;

$$v_p \approx 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}; \quad v_a \approx 1,64 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les distances r_a et r_p à l'apogée et au périgée sont :

$$r_p = \frac{C}{v_p} \quad \text{et} \quad r_a = \frac{C}{v_a}.$$

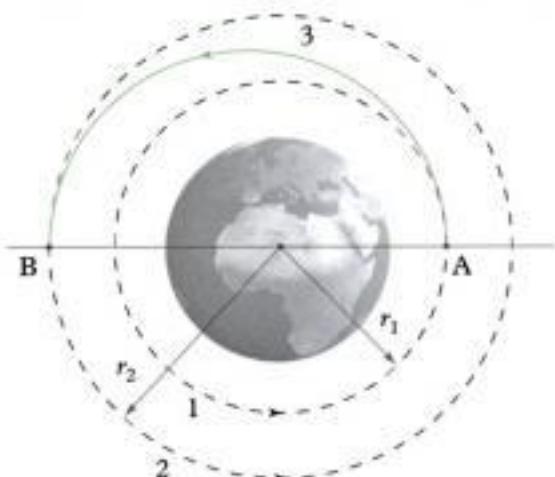
A.N. $r_p = 6765 \text{ km}$ et $r_a = 41444 \text{ km}$.

Hidden page

Ex. 6 Transfert d'orbite

On veut transférer un satellite S de masse m initialement sur une orbite circulaire basse de rayon $r_1 = 6\,400 + 500$ km (autour de la Terre de masse M_T) à une orbite circulaire haute de rayon $r_2 = 6\,400 + 36\,000$ km.

Pour cela, on utilise une ellipse de transfert (de A à B) dite ellipse de Hohmann dont la Terre est un foyer.



- 1) Exprimer et calculer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite basse.
- 2) Exprimer l'énergie mécanique du satellite E_1 sur sa trajectoire basse.
- 3) Exprimer l'énergie mécanique du satellite E_3 sur l'ellipse de transfert.
- 4) Que faut-il apporter au satellite au point A pour qu'il passe sur l'ellipse de Hohmann ?
Exprimer et calculer l'écart de vitesse Δv_A nécessaire.
- 5) Quelle action faut-il avoir sur le satellite en B pour qu'il passe sur l'orbite circulaire haute ?
Exprimer et calculer l'écart de vitesse Δv_B nécessaire.
- 6) Exprimer et calculer la durée du transfert (entre A et B).

Données :

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}; M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

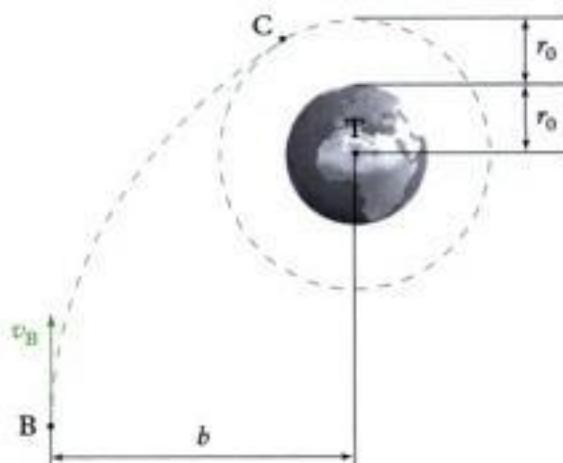
Niveau 3

Ex. 7 Retour de mission spatiale

On étudie un véhicule spatial S de masse m qui rentre sur Terre (masse M_T) après une longue mission.

Ce véhicule arrive au point B avec une vitesse \vec{v}_B et présente un « paramètre d'impact » b (voir figure).

On considérera le point B suffisamment éloigné de la Terre pour que l'on puisse y négliger l'énergie potentielle gravitationnelle de S avec la Terre.



- 1) Donner la nature de la trajectoire de S.
 - 2) On veut que le véhicule spatial arrive au point C avec une vitesse tangente à l'orbite circulaire passant par C (de rayon $2r_0$). Déterminer puis calculer la distance b nécessaire.
 - 3) Donner la distance minimale b_{\min} pour que le véhicule spatial évite la Terre.
 - 4) Au point C, on veut que le véhicule spatial passe sur l'orbite circulaire de rayon $2r_0$. Que faut-il faire ? Déterminer puis calculer Δv_C .
 - 5) Si rien n'est fait au point C, tracer l'allure de la trajectoire et calculer la déviation totale du véhicule sur sa trajectoire.
- Données :* $r_0 = 6\,400 \text{ km}$; $v_B = 2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$.
- Pour une hyperbole $\frac{v}{r} = \frac{GM_T m}{2a}$ où a est la distance entre le point d'intersection des asymptotes de l'hyperbole et le sommet de l'hyperbole (point C).

Ex. 8 Loi de force centrale

Déterminer la loi de force centrale pour une trajectoire d'équation polaire :

$$1) r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}; \quad 2) r = a \cos \theta.$$

Indications

Ex. 7 1) Calculer l'énergie totale.

- 2) Utiliser la conservation de l'énergie et du moment cinétique entre B et C.
- 3) Même démarche qu'en 2) mais appliquée entre B et A, où A est le point de la Terre tangent à la trajectoire de S (distance d'approche minimale).

Ex. 8 1) Utiliser la constante des aires C , afin de déterminer l'expression de l'accélération (et de la force) en fonction de $u = \frac{1}{r}$, C et θ (on utilisera la méthode de Binet vue en cours).

Rappel : $\frac{dr}{dt} = \frac{dr(u(\theta(t)))}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) Sachant que : $G = \frac{Fr^2}{M_T m}$, son unité est :

$$\frac{\text{N} \times \text{m}^2}{\text{kg} \times \text{kg}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}^2}{\text{kg} \times \text{kg}} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2},$$

2) a) L'unité de $K = GM_T m$ est :

$$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \times \text{kg} \times \text{kg} = \text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2},$$

b) L'unité de $\mathcal{E}_p = \frac{K}{r}$ est :

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$



\mathcal{E}_p : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{J}$ car $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

\mathcal{E}_p est donc homogène à une énergie.

Exercices de niveau 2

Exercice 2

1) Le satellite est sur une orbite circulaire de rayon r_0 . On va appliquer le PFD au satellite par rapport au référentiel géocentrique \mathcal{R}_g (supposé galiléen) et le projeter sur la direction radiale :

$$\vec{e}_r \cdot \vec{m}\vec{a}(S)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{e}_r \cdot \vec{F}, \text{ puis } -m \frac{v_0^2}{r_0} = -\frac{GM_T m}{r_0^2}, \text{ d'où } v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}.$$

L'énergie totale du satellite est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{T_0} &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} \text{ soit } \mathcal{E}_{T_0} = \frac{1}{2}m \frac{GM_T}{r_0} - \frac{GM_T m}{r_0} \\ \mathcal{E}_{T_0} &= -\frac{GM_T m}{2r_0}. \end{aligned}$$

2) L'énergie totale diminue : $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{T_0}(1 + \alpha t)$.

L'expression de l'énergie peut être obtenue par analogie avec la question 1).

$$\mathcal{E}_T = -\frac{GM_T m}{2r}.$$

Sachant que $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{T_0}(1 + \alpha t)$

$$\text{on a alors : } -\frac{GM_T m}{2r} = -\frac{GM_T m}{2r_0}(1 + \alpha t)$$

$$r = \frac{r_0}{1 + \alpha t}.$$

Hidden page

2) a) L'équation de la trajectoire d'une ellipse est donnée par :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

$$\text{En } \theta = 0, \quad r = r_p = \frac{p}{1 + e}.$$

$$\text{En } \theta = \pi, \quad r = r_a = \frac{p}{1 - e}.$$

Donc en divisant membre à membre les 2 relations ci-dessus, on trouve :

$$\frac{r_a}{r_p} = \frac{\frac{p}{1-e}}{\frac{p}{1+e}} = \frac{1+e}{1-e} = \frac{1+1-x}{1-(1-x)} = \frac{2-x}{x} \quad \text{soit} \quad \frac{r_a}{r_p} = \frac{2}{x} - 1.$$

$$\text{Or } x \ll 1 \text{ donc } \frac{1}{x} \gg 1, \text{ donc } r_a = r_p \frac{2}{x}.$$

$$\text{A.N. } r_a = 5 \cdot 10^{-3} \times 1,5 \cdot 10^8 \times \frac{2}{10^{-4}} = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ km.}$$

Pour calculer la vitesse v_a de la comète à cette distance, on peut utiliser la conservation du moment cinétique :

$$\begin{array}{c} L = r_p \times m \times v_p = r_a \times m \times v_a. \\ (\text{en P}) \qquad \qquad \qquad (\text{en A}) \end{array}$$

$$\text{Donc : } v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p = \frac{x}{2} v_p.$$

$$\text{A.N. } v_a = \frac{10^{-4}}{2} \times 600 = 0,030 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) On veut calculer la période de révolution de la comète. Pour cela on utilise la 3^e loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte} = \frac{T_0^2}{r_0^3},$$

où T_0 est la période de révolution de la Terre autour du Soleil ($T_0 = 1$ an).

 La constante est la même pour la comète et la Terre car ces deux astres « tournent » autour du Soleil.

$$\text{Donc : } T^2 = \frac{T_0^2}{r_0^3} \times a^3.$$

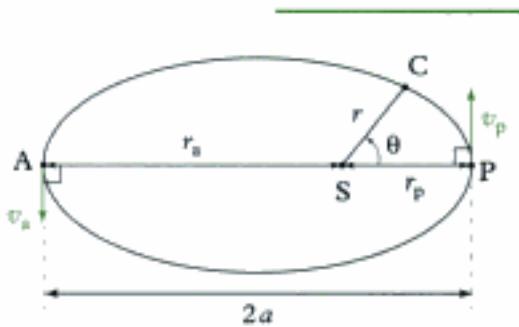
$$\text{Or } 2a = r_a + r_p = r_p \left(1 + \frac{2}{x}\right) = r_p \frac{2}{x} \quad \left(\frac{1}{x} \gg 1\right); \text{ donc il vient :}$$

$$T^2 = T_0^2 \times \left(\frac{\alpha r_0 \times \frac{2}{x}}{2r_0}\right)^3, \quad \text{d'où} \quad T = T_0 \times \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{A.N. } T = T_0 \times \left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}}\right)^{\frac{3}{2}} = 354 T_0 = 354 \text{ ans.}$$

c) Dans l'hypothèse d'une parabole, on a :

$$\mathcal{E}_m = 0 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 - \frac{K_m}{r_p} \quad \text{soit} \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2K}{r_p}}.$$



On considère une trajectoire elliptique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{-Km}{2a} = \frac{1}{2}mv'^2_{\max} - \frac{Km}{r_p}$$

$$2a = r_p + r_a = r_p + \frac{2}{x}r_p = \frac{2}{x}r_p \quad (x \ll 1).$$

L'expression ci-dessus devient :

$$-\frac{Km}{\frac{2}{x}r_p} = -\frac{Km}{2r_p}x = \frac{1}{2}mv'^2_{\max} - \frac{Km}{r_p} \text{ soit } v'^2_{\max} = \sqrt{\frac{2K}{r_p}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{2}} = v_{\max} \times \left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{2}\right)$$



$$(1+x)^n \approx 1+nx \quad (x \ll 1)$$

$$\text{donc } \sqrt{1+x} \approx (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x \quad (x \ll 1).$$

On trouve finalement :

$$\frac{v_{\max} - v'^2_{\max}}{v_{\max}} \approx \frac{x}{4}.$$

$$\text{A.N. } \frac{v_{\max} - v'^2_{\max}}{v_{\max}} = \frac{10^{-4}}{4} = 2,5 \cdot 10^{-5}.$$

L'approximation faite en 2) a) pour calculer v_a en utilisant v_{\max} pour v , est justifiée.

Exercice 4

1) Pour connaître la nature de la trajectoire, on peut calculer l'énergie totale du satellite, c'est-à-dire son énergie mécanique.

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0}.$$

$$\text{Or } v_0^2 = \alpha \frac{GM_T}{r_0} \text{ donc } \mathcal{E}_T = \frac{\alpha}{2} \frac{GM_T m}{r_0} - \frac{GM_T m}{r_0} = \frac{GM_T m}{r_0} \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right).$$

• Si $\mathcal{E}_T > 0$, la trajectoire est une hyperbole :

$$\text{ici quand } \frac{\alpha}{2} - 1 > 0, \text{ c'est-à-dire } \alpha > 2.$$

• Si $\mathcal{E}_T = 0$, la trajectoire est une parabole :

$$\text{ici quand } \frac{\alpha}{2} - 1 = 0, \text{ c'est-à-dire } \alpha = 2.$$

• Si $\mathcal{E}_T < 0$, la trajectoire est une ellipse (ou un cercle) :

$$\text{ici quand } \frac{\alpha}{2} - 1 < 0, \text{ c'est-à-dire } \alpha < 2.$$

Reste à étudier le cas particulier du cercle (ellipse particulière).

Pour calculer la vitesse v_0 nécessaire pour être sur une trajectoire circulaire, on applique le PFD au satellite dans le référentiel galiléen géocentrique et on projette la relation vectorielle obtenue sur la direction radiale.

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot m\vec{a}(S)|_{R_0} &= \vec{e}_r \cdot \vec{F} \\ -m \frac{v_0^2}{r_0} &= -\frac{GM_T m}{r_0^2} \\ v_0^2 &= \frac{GM_T}{r_0}. \end{aligned}$$

$$\vec{F} = -\frac{GM_T m}{r_0^2} \vec{e}_r$$



Or $v_0^2 = \alpha \times \frac{GM_T}{r_0}$ et $\vec{v}_0 \perp \vec{TS}$;

donc le cas du cercle correspond à $\alpha = 1$.

2) Les trajectoires ont donc l'allure suivante.

- $\alpha \ll 1$: ellipse ①.
- $\alpha = 1$: cercle ②.
- $1 < \alpha < 2$: ellipse ③.
- $\alpha = 2$: parabole ④.
- $\alpha > 2$: hyperbole ⑤.

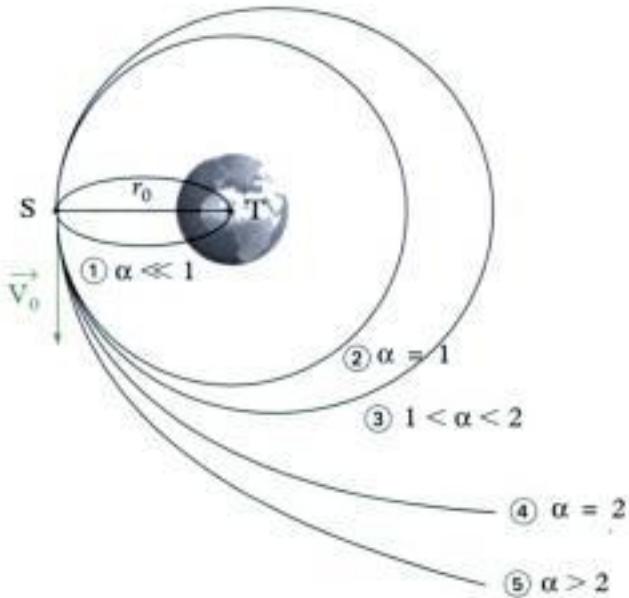
3) Le devenir du satellite dépend donc de α (i.e. la vitesse initiale) :

- $\alpha < 2$: le satellite tourne autour de la Terre (voire retombe sur Terre) ;
- $\alpha \geq 2$: le satellite s'éloigne irrémédiablement de la Terre.



Le premier cas ($\alpha < 2$) correspond à des états liés ($\ell_T < 0$).

Le deuxième cas ($\alpha \geq 2$) correspond à un état de diffusion ($\ell_T \geq 0$).



Exercice 5

1) Pour connaître la vitesse v_0 du satellite sur sa trajectoire circulaire, on va appliquer le PFD au satellite dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g géocentrique et projeté sur la direction radiale.

$$\vec{e}_r \cdot m\vec{a}(S)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{e}_r \cdot \left(-\frac{GM_T m}{r_0^2} \vec{e}_r \right)$$

$$-m \frac{v_0^2}{r_0} = -\frac{GM_T m}{r_0^2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}.$$

L'énergie (mécanique) du satellite est :

$$\ell_T = \ell_c + \ell_p = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} = \frac{1}{2}m \frac{GM_T}{r_0} - \frac{GM_T m}{r_0}$$

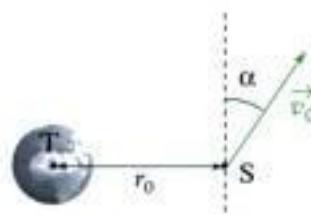
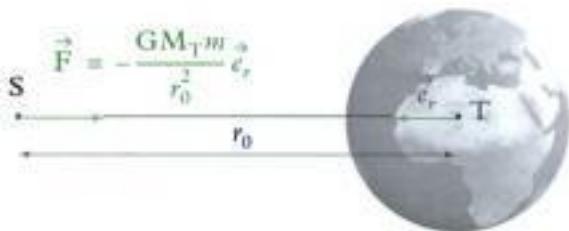
$$\text{soit : } \ell_T = -\frac{GM_T m}{2r_0}.$$

De plus, pour que la trajectoire soit un cercle, il faut que la vitesse soit orthoradiale (tangente à la trajectoire), donc :

$$\vec{v}_0 \perp \vec{TS}.$$

2) a) La vitesse \vec{v}_0 fait en réalité un angle α avec la perpendiculaire à \vec{TS} (la trajectoire n'est donc pas un cercle).

Il faut déterminer la nature puis les caractéristiques de la trajectoire réelle du satellite.



- Calculer d'abord l'énergie totale :

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} = -\frac{GM_T m}{2r_0} < 0.$$

Donc il s'agit d'un état lié. La trajectoire est une ellipse (dont un des foyers est le centre de la Terre).

- Déterminons le demi-grand axe de l'ellipse.

Sur une ellipse l'énergie du satellite est :

$$\mathcal{E}_T = -\frac{GM_T m}{2a}.$$

Or ici au départ le satellite possède l'énergie :

$$\mathcal{E}_T = -\frac{GM_T m}{2r_0}.$$

En identifiant on trouve : $a = r_0$.

b) Cette information ($a = r_0$) permet de conclure que la position de lancement correspond à un des sommets du petit axe ; par suite, on en déduit aussi que le grand axe (dont on connaît la longueur) est parallèle à \vec{v}_0 :

- on trace d'abord le grand axe (parallèle à \vec{v}_0 passant sur T) ;
- on trace ensuite le petit axe (perpendiculaire au grand axe) passant par S ;
- on reporte la demi-longueur du grand axe (r_0) à partir de O (point d'intersection du grand axe et du petit axe) : on obtient les points P et A ;
- on reporte la demi-longueur du petit axe ;
- on trace enfin l'allure de l'ellipse qui est la trajectoire réelle du satellite.

c) On veut calculer r_p et r_a :

$$r_p = r_0 - OT \quad \text{et} \quad r_a = r_0 + OT.$$

Il reste à calculer la distance OT.

Or dans le triangle rectangle TOS :

$$\sin \alpha = \frac{OT}{TS} = \frac{OT}{r_0} \quad \text{donc} \quad OT = r_0 \sin \alpha.$$

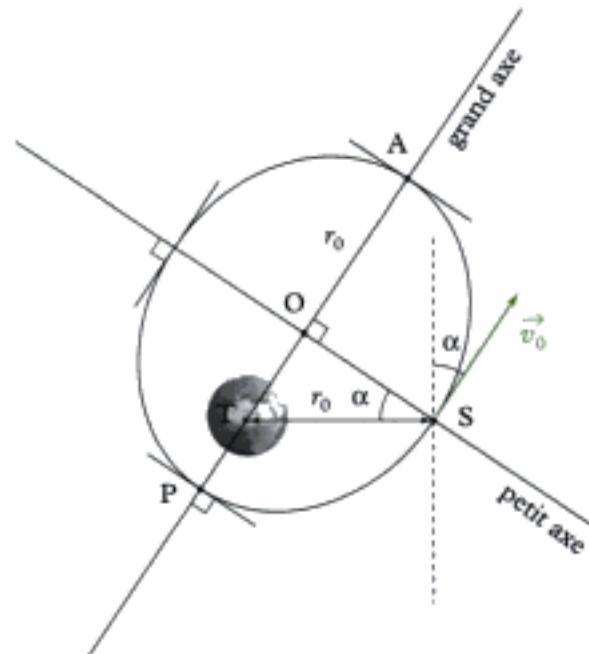
Donc : $r_p = r_0(1 - \sin \alpha)$ et $r_a = r_0(1 + \sin \alpha)$.

Pour calculer v_a et v_p , on peut utiliser la conservation de la constante des aires (ou du moment cinétique).

$$\begin{aligned} C &= r_0 v_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = r_0 v_0 \cos \alpha \quad (\text{en S}) \\ &= r_a v_a \quad (\text{en A}) \\ &= r_p v_p \quad (\text{en P}). \end{aligned}$$

Donc : $v_a = \frac{r_0}{r_a} \cos \alpha v_0 = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} v_0$.

De même : $v_p = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} v_0$.



Hidden page

Hidden page

2) On utilise tout d'abord la conservation de l'énergie totale entre B et C.

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{GM_T m}{2r_0} \quad (1)$$

Cette équation ne suffit pas puisque v_C n'est pas connue et b n'apparaît pas.

On utilise donc aussi la conservation du moment cinétique (i.e. la constante des aires) :

$$L = mbv_B = m \times 2r_0v_C \quad (2)$$

En reportant dans (1) la valeur de v_C tirée de (2) :

$$b = 2r_0 \sqrt{1 + \frac{\text{GM}_T}{r_0 v_B^2}}.$$

$$\text{A.N. } b = 2 \times 6\ 400 \times \sqrt{1 + \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6\ 400 \times 10^3 \times (2\ 000)^2}} = 52\ 080 \text{ km.}$$

3) On veut calculer b_{\min} qui correspond à la distance minimale de b qui permette au véhicule de « tangenter » la Terre au point A.

On reprend la même démarche qu'en 2).

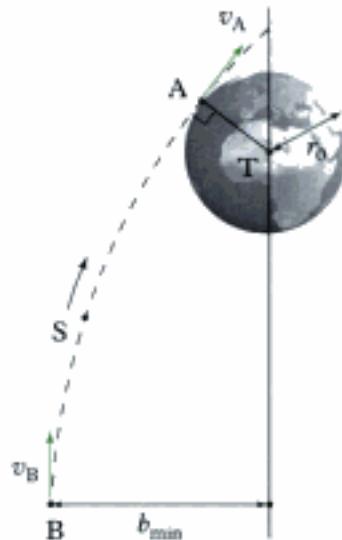
On utilise tout d'abord la conservation de l'énergie entre B et A :

$$\mathcal{E}_T = \text{cte} = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GM_T m}{r_0} \quad (1)$$

Cette équation fait apparaître v_A qu'on ne connaît pas. Par contre b n'apparaît pas : 2 bonnes raisons pour utiliser une 2^e équation : la conservation du moment cinétique.

Pour appliquer le moment cinétique, il faut caractériser ce qui se passe en A (position, vitesse).

Le point A se trouve à la distance r_0 du centre de la Terre. Par ailleurs, la vitesse du véhicule au passage en A est perpendiculaire à TA car r (distance TS) est minimum.



 En effet, en coordonnées polaires, l'expression de la vitesse d'un point M est $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Quand r est minimum ($\hat{r} = 0$), on a $\vec{v}(M) = r\hat{\theta}\vec{e}_z$.

Comme $\vec{OM} = r\vec{e}_r$, on a $\vec{OM} \perp \vec{v}(M)$.

Connaissant bien les points A et B, on peut appliquer la conservation du moment cinétique entre ces deux points :

 Cela revient à utiliser la constante des aires $C = b_{\min} v_B = r_0 v_A$.

En reportant dans (1) la valeur de v_A tirée de (2) :

$$b_{\min} = r_0 \sqrt{1 + \frac{2GM_T}{r_0 v_B^2}}.$$

$$\text{A.N. } b_{\min} = 6\,400 \times \sqrt{1 + \frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6\,400 \times 10^3 \times (2\,000)^2}} \approx 36\,266 \text{ km.}$$

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

A. Cinématique dans deux référentiels

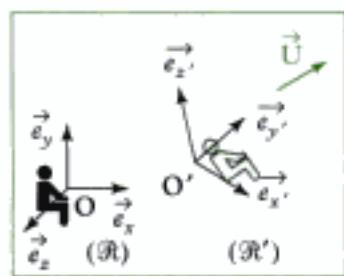


Fig. 1 - Deux référentiels.

1. Repérer le mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R}

- à repérer le mouvement de O' par rapport à \mathcal{R} (à l'aide de $\vec{v}(O')|_{\mathcal{R}}$) : mouvement de translation ;
- à repérer le mouvement de la base $(\vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z')$ (à l'aide du vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}$) : mouvement de rotation.

Considérons deux référentiels (liés à deux observateurs), $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $\mathcal{R}'(O'; \vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z')$: \mathcal{R}' est en mouvement par rapport à \mathcal{R} . Ce mouvement peut être décomposé en un mouvement de **translation** de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} caractérisé par la vitesse $\vec{v}(O')|_{\mathcal{R}}$ de l'origine O' par rapport à \mathcal{R} et un mouvement de **rotation** de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} caractérisé par un vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}$ (cette décomposition est celle utilisée en cours SI pour décrire le mouvement d'un solide par rapport à un autre)¹. Le référentiel joue ici le rôle de solide en SI.

A.1. Formule de Varignon

Soit \vec{U} un vecteur quelconque que l'on projette dans la base $(\vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z')$ liée à \mathcal{R}' :

$$\vec{U} = U_{x'} \vec{e}_{x'} + U_{y'} \vec{e}_{y'} + U_{z'} \vec{e}_{z'}.$$

Dérivons dans \mathcal{R} le vecteur \vec{U} afin de connaître la variation de ce vecteur \vec{U} observé par un observateur lié à \mathcal{R} :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{U}_{x'} \vec{e}_{x'} + \dot{U}_{y'} \vec{e}_{y'} + \dot{U}_{z'} \vec{e}_{z'} + U_{x'} \left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + U_{y'} \left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + U_{z'} \left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}.$$

On remarque que : $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \dot{U}_{x'} \vec{e}_{x'} + \dot{U}_{y'} \vec{e}_{y'} + \dot{U}_{z'} \vec{e}_{z'}$

et on montre que : $\left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{x'}$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{y'}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{z'}.$$

On obtient ainsi la formule de Varignon :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \vec{U}$$

qui permet de faire le lien entre la variation de \vec{U} observé depuis \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

Cas particuliers :

- si \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} = \vec{0}$ (voir paragraphe A. 4) ;
- si \mathcal{R}' est en rotation autour de l'axe ($O; \vec{e}_z$) lié au référentiel \mathcal{R} , à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ alors $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_z$ (voir paragraphe A. 5).

La rotation est uniforme si $\dot{\theta} = \omega = \text{cte.}$

Rappel : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}'}$

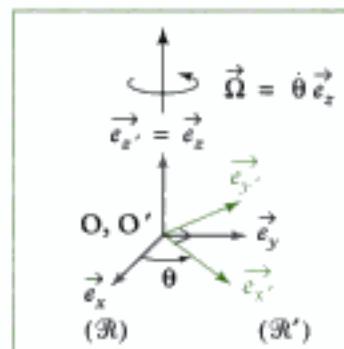


Fig. 2 - Référentiel \mathcal{R}' en rotation par rapport au référentiel \mathcal{R} .

A.2. Loi de composition des vitesses

Soit M un point quelconque ; le vecteur position du point dans le référentiel \mathcal{R} est \overrightarrow{OM} ; le vecteur position de ce même point dans le référentiel \mathcal{R}' est $\overrightarrow{O'M}$. Cherchons un lien entre la vitesse $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ et $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}$; partons de la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

dérivons cette relation dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

$$\text{soit : } \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(O')|_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

(utilisation de la formule de Varignon)

$$\text{ainsi : } \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(O')|_{\mathcal{R}} + \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\text{soit : } \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(O')|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}.$$

On peut alors écrire la relation suivante :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

• $\vec{v}_a = \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ est la **vitesse absolue**, c'est-à-dire la vitesse de M dans le référentiel \mathcal{R} .

• $\vec{v}_e = \vec{v}(O')|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$ est la **vitesse d'entraînement**, c'est-à-dire la vitesse qu'aurait M s'il était fixe dans \mathcal{R}' : on parle de **point coïncidant** ; ainsi, on note : $\vec{v}_e = \vec{v}(M \in \mathcal{R}')|_{\mathcal{R}}$

• $\vec{v}_r = \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}$ est la **vitesse relative**, c'est-à-dire la vitesse de M dans le référentiel \mathcal{R}' .

Ainsi la loi de composition des vitesses, s'écrit sous la forme :

Loi 1

Loi de composition des vitesses

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \underset{\text{absolue}}{\vec{v}(M \in \mathcal{R}')|_{\mathcal{R}}} + \underset{\text{entraînement}}{\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}} + \underset{\text{relative}}{\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}}$$

$$\text{avec } \vec{v}(M \in \mathcal{R}')|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(O')|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}.$$

Application 1 Considérons l'hélicoptère de la figure ; nous nous intéressons au mouvement du point M dans deux référentiels : $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $\mathcal{R}'(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Exprimer la vitesse d'entraînement de M par rapport à \mathcal{R} , la vitesse relative du point M puis la vitesse absolue du point M.

$$\text{Données : } R = \|\overrightarrow{AM}\| = 5,3 \text{ m}$$

$$\omega = \dot{\theta} = 450 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}} = v \vec{e}_x = \text{cte.}$$

Hidden page

Hidden page

L'accélération d'entraînement \vec{a}_e est :

$$\vec{a}_e = \vec{a}(M \in \mathcal{R}')|_{\mathcal{R}} = \vec{a}(A)|_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AM})$$

$$\vec{a}_e = \vec{0} + \vec{0} \wedge R\vec{e}_r + \vec{0} \wedge (\vec{0} \wedge R\vec{e}_r)$$

$$\vec{a}_e = \vec{0}.$$

Ainsi l'accélération absolue est :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_C + \vec{a}_e$$

$$\vec{a}_a = -R\omega^2\vec{e}_r.$$

A.4. Cas d'une translation pure de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R}

Définition 1

Deux référentiels $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $\mathcal{R}'(O'; \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$ sont en translation l'un par rapport à l'autre si les directions des vecteurs des deux bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$ restent fixes les unes par rapport aux autres.

En général, on choisit les vecteurs tels que :

$$\vec{e}'_x = \vec{e}_x, \quad \vec{e}'_y = \vec{e}_y, \quad \vec{e}'_z = \vec{e}_z.$$

Le mouvement de O' par rapport à \mathcal{R} est lui quelconque : on peut avoir par exemple un référentiel en translation circulaire par rapport à un autre.

On a dans ce cas : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} = \vec{0}$.

On a donc : $\vec{v}_e = \vec{v}(M \in \mathcal{R}')|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(O')|_{\mathcal{R}}$
 $\vec{a}_C = \vec{0}$
 $\vec{a}_e = \vec{a}(O')|_{\mathcal{R}}$.

Si la translation est rectiligne uniforme, $\vec{v}(O')|_{\mathcal{R}} = \text{cté}$ et $\vec{a}(O')|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ ce qui donne : $\vec{a}_e = \vec{0}$.

A.5. Cas d'une rotation uniforme de \mathcal{R}' autour d'un axe fixe de \mathcal{R}

Définition 2

Le référentiel $\mathcal{R}'(O'; \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$ est en rotation autour de l'axe $(O; \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ s'il suffit d'un paramètre $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_x')$ pour repérer à chaque instant la position de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

Le vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} s'écrit :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_z.$$

Fig. 4 - Référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport au référentiel \mathcal{R} .

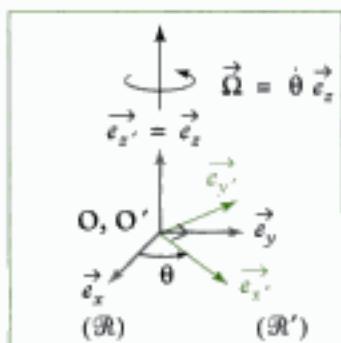


Fig. 5 - Référentiel \mathcal{R}' en rotation autour de l'axe $(O; \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel \mathcal{R} .

La rotation est uniforme si, en plus :

$$\dot{\theta} = \omega = \text{cte.}$$

On a donc :

$$\vec{v}_c = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

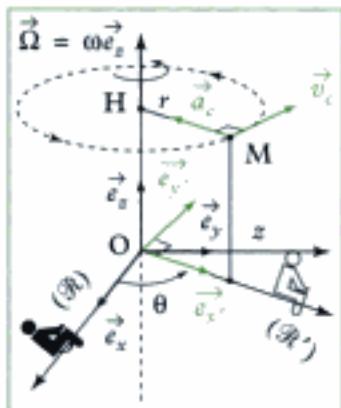


Fig. 6 - \mathcal{R}' est en rotation uniforme autour de l'axe $(O ; \vec{e}_z)$ fixe de \mathcal{R} .

1. On retrouve l'expression de l'accélération d'un point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon r à vitesse angulaire ω constante.

En posant : $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_{x'} + z \vec{e}_z$, on a :

$$\vec{v}_c = \omega \vec{e}_z \wedge (r \vec{e}_{x'} + z \vec{e}_z) \text{ soit } \vec{v}_c = r \omega \vec{e}_y$$

$$\vec{a}_c = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_c$$

$$\vec{a}_c = \omega \vec{e}_z \wedge r \omega \vec{e}_y;$$

$$\text{on a donc : } \vec{a}_c = -r \omega^2 \vec{e}_{x'}.$$

L'accélération d'entrainement est centripète.

En appelant H le projeté de M sur $(O ; \vec{e}_z)$ on a :

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{HM}.$$

B. Dynamique en référentiel non galiléen

Nous allons dans ce paragraphe déterminer les lois de la dynamique dans un référentiel quelconque, pas forcément galiléen.

Nous considérerons donc deux référentiels $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ galiléen et $\mathcal{R}'(O'; \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$ en mouvement par rapport à \mathcal{R}_g .

B.1. Référentiels galiléens

Le principe d'inertie (1^{re} loi de Newton) postule l'existence de référentiels galiléens dans lesquels un point matériel isolé a une accélération nulle.

Nous cherchons à établir une relation entre tous les référentiels galiléens.

Supposons que le point matériel M soit isolé, dans deux référentiels galiléens \mathcal{R}_g et \mathcal{R}'_g ; on a alors : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'_g} = \vec{0}$,

comme $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'_g} = \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_g} + \vec{a}_c(M)|_{\mathcal{R}_g} + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'_g|\mathcal{R}_g} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g}$

on a : $\vec{a}_c(M) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'_g|\mathcal{R}_g} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{0}$.

Afin que l'égalité précédente soit vraie, il faut que : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'_g|\mathcal{R}_g} = \vec{0}$, ce qui signifie que \mathcal{R}_g et \mathcal{R}'_g sont en translation l'un par rapport à l'autre ; de plus, il faut que $\vec{a}_c(M) = \vec{0}$, c'est-à-dire que cette translation doit être rectiligne uniforme.

Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Hidden page

2) les forces d'inertie se ressentent lorsqu'on se trouve dans un référentiel non galiléen.

Ainsi le PFD en référentiel non galiléen \mathcal{R} s'écrit :

Loi 3

PFD en référentiel non galiléen

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

avec :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\left[\vec{a}(O')|_{\mathcal{R}_g} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_g}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_g} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{O'M})\right]$$

la force d'inertie d'entraînement,

et $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_C = -2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_g} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ la force d'inertie de Coriolis.

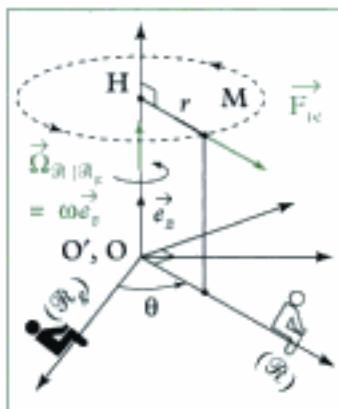


Fig. 7 - \mathcal{R} est en rotation uniforme autour de l'axe ($O ; \vec{e}_z$) fixe par rapport à \mathcal{R}_g .

Cas particulier : équilibre dynamique

Le point matériel M est en équilibre dans \mathcal{R} si : $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$; on a donc : $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$; ainsi on doit avoir :

$$\vec{F} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}.$$

Si \mathcal{R} est en translation par rapport à \mathcal{R}_g , la relation précédente devient :

$$\vec{F} = m\vec{a}(O')|_{\mathcal{R}_g}$$

(cette relation correspond au PFD écrit dans le référentiel galiléen \mathcal{R}).

Si \mathcal{R} est en rotation uniforme autour de l'axe ($O ; \vec{e}_z$) fixe par rapport à \mathcal{R}_g ($O' = O$), la relation précédente s'écrit :

$$\vec{F} = -m\omega^2 \overrightarrow{HM} \text{ (fig. 7).}$$

B.3. Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen

Théorème 1

TMC en référentiel non galiléen

Dans le référentiel \mathcal{R} quelconque le TMC appliqué en O' (point fixe de \mathcal{R}), à un point matériel M de masse m , s'écrit :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O'}(M)}|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{M_{O'}}(\vec{F}) + \overrightarrow{M_{O'}}(\vec{F}_{ie}) + \overrightarrow{M_{O'}}(\vec{F}_{ic}).$$

En effet : $\overrightarrow{L_{O'}(M)}|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$.

En dérivant dans \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overrightarrow{L_{O'}(M)}|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{O'M} \wedge m \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \\ &= \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \wedge m\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} \\ &= \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

en tenant compte du PFD en référentiel non galiléen :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}, \text{ on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} &= \vec{O}'M \wedge (\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}) \\ &= \vec{O}'M \wedge \vec{F} + \vec{O}'M \wedge \vec{F}_{ie} + \vec{O}'M \wedge \vec{F}_{iC} \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \left(\frac{d\vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{M}_{O'}(\vec{F}) + \vec{M}_{O'}(\vec{F}_{ie}) + \vec{M}_{O'}(\vec{F}_{iC}).$$

B.4. Théorèmes énergétiques en référentiel non galiléen

Multiplions par $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ l'expression du PFD en référentiel non galiléen (\mathcal{R}) .

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot m \left(\frac{d\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} \cdot (\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC})$$

$$\text{soit : } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2(M)|_{\mathcal{R}} \right) = \mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} + \mathcal{P}(\vec{F}_{ie})|_{\mathcal{R}}$$

en effet $\vec{F}_{iC} \perp \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ donc $\vec{F}_{iC} \cdot \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = 0$ ¹.

Théorème 2

TPC en référentiel non galiléen

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}}) = \mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} + \mathcal{P}(\vec{F}_{ie})|_{\mathcal{R}}$$

En intégrant entre deux instants t_1 et t_2 dans \mathcal{R} , on obtient le TEC en référentiel non galiléen :

Théorème 3

TEC en référentiel non galiléen

$$\Delta \mathcal{E}_c|_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c(t_2)|_{\mathcal{R}} - \mathcal{E}_c(t_1)|_{\mathcal{R}} = W(\vec{F})|_{\mathcal{R}} + W(\vec{F}_{ie})|_{\mathcal{R}}.$$

Certaines forces peuvent dériver d'une énergie potentielle dans \mathcal{R}^3 ; en appelant : \mathcal{E}_p la somme de toutes ces énergies potentielles et $\mathcal{E}_m(M, t)|_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c(t)|_{\mathcal{R}} + \mathcal{E}_p(M)|_{\mathcal{R}}$ l'énergie mécanique de M dans \mathcal{R} , on obtient les théorèmes TEM et TPM en référentiel non galiléen \mathcal{R} .

Théorème 4

TEM en référentiel non galiléen

$$\Delta \mathcal{E}_m|_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}_m(t_2, M_2)|_{\mathcal{R}} - \mathcal{E}_m(t_1, M_1)|_{\mathcal{R}} = W(\vec{F}_{nc})|_{\mathcal{R}} \text{ avec } \vec{F}_{nc} \text{ la somme des forces non conservatives.}$$

Théorème 5

TPM en référentiel non galiléen

$$\frac{d \mathcal{E}_m(t, M)|_{\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})|_{\mathcal{R}} \text{ avec } \vec{F}_{nc} \text{ la somme des forces non conservatives.}$$

Remarque : • la force d'inertie de Coriolis n'apparaît pas car elle ne travaille pas dans \mathcal{R} .

• La force d'inertie d'entrainement est en général une force non conservative ; dans le cas particulier où \mathcal{R} est en rotation uniforme autour d'un axe ($O ; \vec{e}_z$) fixe par rapport à \mathcal{R} (fig. 8), on a $\vec{F}_{ie} = -m\omega^2 \vec{HM}$ le travail élémentaire de \vec{F}_{ie} s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta W_{ie} &= \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{OM} = -m\omega^2 \vec{HM} \cdot (d\vec{OH} + d\vec{HM}) \\ &= -m\omega^2 d\left(\frac{\vec{HM}^2}{2}\right) \\ &= -dE_{pe}\end{aligned}$$

on peut ainsi définir l'énergie potentielle d'entrainement centrifuge (ou énergie potentielle centrifuge).

Théorème 6

$$E_{pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2.$$

(La constante a été choisie nulle lorsque M est sur l'axe de rotation ($O ; \vec{e}_z$). Si on appelle $r = HM$ alors :

$$E_{pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

C. Caractère galiléen approché de quelques référentiels courants

La première loi de Newton stipule l'existence de référentiels galiléens : les référentiels que nous utilisons ne sont pourtant qu'approximativement galiléens.

C.1. Référentiel de Copernic

Le référentiel « le plus galiléen » connu est le référentiel de **Copernic** \mathcal{R}_C :

- origine : centre de gravité du système solaire,
- 3 axes : 3 étoiles éloignées « fixes ».

Le référentiel de **Képler** (référentiel héliocentrique) est lui aussi un bon référentiel galiléen¹ :

- origine : centre S du Soleil,
- 3 axes : identiques à ceux de \mathcal{R}_C .

1. Ce référentiel est utilisé pour décrire le mouvement des planètes autour du Soleil.

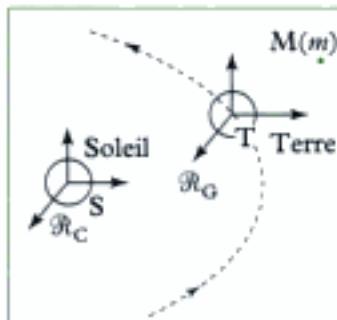


Fig. 9 - Référentiels classiques.

C.2. Référentiel géocentrique

Nous travaillons habituellement, par exemple pour l'étude des satellites artificiels de la Terre, dans le référentiel **géocentrique** \mathcal{R}_G :

- origine : centre T de la Terre,
- 3 axes : identiques à ceux de \mathcal{R}_C .

La Terre décrivant une trajectoire quasiment circulaire de rayon $R = 150 \times 10^6$ km et de période de révolution $T = 365$ J, le référentiel \mathcal{R}_G n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_C .

Écrivons le PFD dans le référentiel non galiléen \mathcal{R}_G (en supposant que \mathcal{R}_C est galiléen) appliqué à un point matériel M de masse m en interaction gravitationnelle avec la Terre, le Soleil et la Lune¹ :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_G} = \vec{F}_{gT}(M) + \vec{F}_{gS}(M) + \vec{F}_{gL}(M) + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}.$$

• $\vec{F}_{gT}(M) = -\frac{GM_T m}{TM^3} \vec{TM}$ est la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre.

• $\vec{F}_{gS}(M) = -\frac{GM_S m}{SM^3} \vec{SM}$ est la force d'interaction gravitationnelle exercée par le Soleil.

• $\vec{F}_{gL}(M) = -\frac{GM_L m}{LM^3} \vec{LM}$ est la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Lune.

• $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M) = -m\vec{a}(T)|_{\mathcal{R}_C}$ ² est la force d'inertie d'entrainement de M. Afin de déterminer l'accélération du centre d'inertie T de la Terre, écrivons le PFD dans le référentiel \mathcal{R}_C (galiléen) à la Terre.

$$\begin{aligned} M_T \vec{a}(T)|_{\mathcal{R}_C} &= \vec{F}_{gS}(T) + \vec{F}_{gL}(T) \quad (\text{on néglige l'action de M sur la Terre}) \\ &= -\frac{GM_S M_T}{ST^3} \vec{ST} - \frac{GM_L M_T}{LT^3} \vec{LT} \end{aligned}$$

soit :

$$\vec{a}(T)|_{\mathcal{R}_C} = -\frac{GM_S}{ST^3} \vec{ST} - \frac{GM_L}{LT^3} \vec{LT}.$$

• $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C(M) = -2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G|\mathcal{R}_C} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_G} = \vec{0}$ est la force d'inertie de Coriolis, nulle car $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G|\mathcal{R}_C} = \vec{0}$.

Ainsi :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_G} = -\frac{GM_T}{TM^3} \vec{TM} - GM_S \left(\frac{\vec{SM}}{SM^3} - \frac{\vec{ST}}{ST^3} \right) - GM_L \left(\frac{\vec{LM}}{LM^3} - \frac{\vec{LT}}{LT^3} \right) \quad (\text{éq 1})$$

Évaluons l'ordre de grandeur de ces trois termes en imaginant que tous les vecteurs ont même direction dans le cas où $TM = r = R_T$, $TM = r = 10R_T$ et $TM = r = 50R_T$.

A.N. $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$; $M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$.

$M_L = 7 \times 10^{22} \text{ kg}$; $ST = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$; $LT = 4 \times 10^2 \text{ m}$;

$R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$.

r	$\frac{GM_T}{r^3}$	$-\left GM_S \left(\frac{1}{(ST+r)^3} - \frac{1}{ST^3} \right) \right $	$-\left GM_L \left(\frac{1}{(LT+r)^3} - \frac{1}{LT^3} \right) \right $
R_T	$9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$5 \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$9,1 \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
$10R_T$	$9,8 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$5 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$7,5 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
$50R_T$	$3,9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$25 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$20 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Les deux derniers termes (éq 1) appelés termes **differentiels** ou termes de **marées**³ sont du même ordre de grandeur et sont négligeables par rapport au champ de pesanteur⁴. La Lune a néanmoins l'effet le plus important au voisinage de la surface de la Terre.

1. Nous négligeons les interactions gravitationnelles des autres astres (ces forces décroissant en $\frac{1}{r^2}$).

2. \mathcal{R}_G est en translation par rapport à \mathcal{R}_C donc $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G|\mathcal{R}_C} = \vec{0}$.

3. Ils sont responsables des phénomènes de marées.

4. L'influence des différents astres aurait été beaucoup plus importante si on avait travaillé dans \mathcal{R}_C ; dans \mathcal{R}_G , seul un terme différentiel apparaît.

1. Ceci ne signifie pas qu'aucun effet lié au caractère non galiléen de \mathcal{R}_G ne soit observable : les marées océaniques en sont une preuve (elles sont liées aux termes de marées).

2. Ceci est donc valable pour tous les satellites artificiels de la Terre pour lesquels $r < 50R_T$.

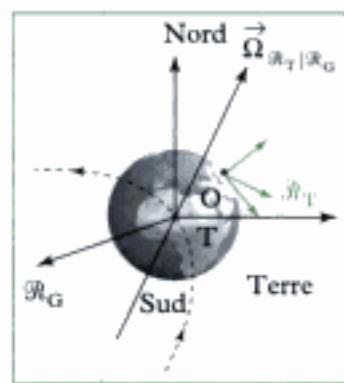


Fig. 10 - Référentiel terrestre.

3. Les termes différentiels (de marées) ont été négligés, de manière à ce que \mathcal{R}_G soit galiléen.

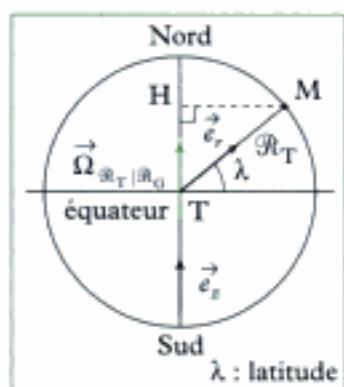


Fig. 11 - Référentiel terrestre \mathcal{R}_T en rotation uniforme autour de l'axe (SN) fixe dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G .

$$4. \frac{\omega^2 HM}{GM_T} = 0,2\%.$$

$$\frac{R_T^2}{r^2}$$

$$5. \text{ On a alors : } \frac{2\omega v}{GM_T} \approx 1\%.$$

$$\frac{R_T^2}{r^2}$$

6. Ceci ne signifie pas qu'aucun effet lié au caractère non galiléen de \mathcal{R}_T ne soit observable : la rotation du plan d'oscillation d'un pendule (expérience du pendule de Foucault) en est un exemple, la déviation vers l'Est lors d'une chute libre, le sens d'enroulement des dépressions sont d'autres exemples.

Conclusion : à l'intérieur d'une sphère dont le rayon est quelques dizaines de rayon terrestre de centre T (le centre de la Terre), le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G peut être considéré galiléen¹ (il faut alors tenir compte uniquement du champ de gravitation de la Terre)².

Cette remarque justifie l'utilisation du référentiel géocentrique pour l'étude des satellites artificiels de la Terre.

C.3. Référentiel terrestre

Intéressons-nous maintenant au référentiel **terrestre** \mathcal{R}_T lié à un point de la surface de la Terre : ce référentiel n'est évidemment pas galiléen puisque \mathcal{R}_T est en rotation uniforme de période de révolution 24 h, autour de l'axe S/N de la Terre, fixe dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G .

Écrivons le PFD dans le référentiel non galiléen \mathcal{R}_T (en supposant que \mathcal{R}_G est galiléen), appliqué à un point matériel M de masse m soumis uniquement à l'interaction gravitationnelle de la Terre³ (fig. 11).

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_T} = \vec{F}_{gT}(M) + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}. \quad (\text{éq 2})$$

- $\vec{F}_{gT}(M) = -\frac{GM_T m}{TM^3}\vec{TM}$ est la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre.

- $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M)$ est la force d'inertie d'entrainement.

- $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C(M)$ est la force d'inertie de Coriolis.

Comme \mathcal{R}_T est en rotation uniforme autour de l'axe S/N de la Terre fixe dans le référentiel \mathcal{R}_G , on a :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T|\mathcal{R}_G} = \omega \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 72,7 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On peut ainsi écrire :

$$\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \vec{HM} \quad \text{et} \quad \vec{a}_C(M) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T|\mathcal{R}_G} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_T}.$$

(éq 2) s'écrit donc :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_T} = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{e}_r + \omega^2 \vec{HM} - 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T|\mathcal{R}_G} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_T}.$$

Évaluons l'ordre de grandeur des 3 termes de $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_T}$:

- $\frac{GM_T}{r^2} \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (si $r = R_T$)

- $\omega^2 HM = \omega^2 R_T \cos \lambda = (72,7 \times 10^{-6})^2 \times 6370 \times 10^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\lambda = 45^\circ$)
 $\approx 23,8 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

- $2\omega v = 2 \times 72,7 \times 10^{-6} \times \frac{100}{3,6}$ (on a choisi $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$)
 $\approx 4 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On voit ainsi clairement que les deux termes d'entrainement ($\omega^2 \vec{HM}$) et de Coriolis (jusqu'à $v = 700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)⁴ sont négligeables devant l'interaction gravitationnelle. Ainsi pour beaucoup de cas pratiques, le référentiel terrestre \mathcal{R}_T peut être considéré comme galiléen⁵.

C.4. Poids d'un corps

Définition 3

Le poids d'un corps est défini comme étant la somme de la force d'interaction gravitationnelle et de la force d'inertie d'entrainement (liée au caractère non galiléen du référentiel terrestre).

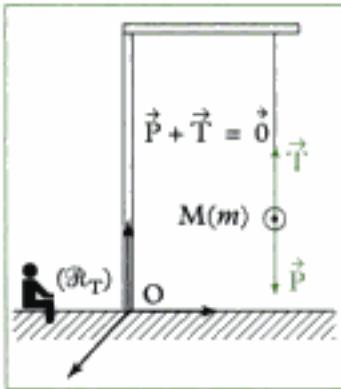


Fig. 12 - Poids d'un corps.

De cette manière, au voisinage de la Terre, si on suspend une masse m fixe dans \mathcal{R}_T au bout d'une corde, alors on peut écrire, dans \mathcal{R}_T , à l'aide du PFD en référentiel non galiléen :

$$\vec{O} = -\frac{GM_T m}{R_T^2} \vec{e}_r - ma_e + \vec{T}$$

$$\vec{O} = m \times \left[-\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{e}_r + \omega^2 \vec{HM} \right] + \vec{T}$$

en appelant $\vec{g} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{e}_r + \omega^2 \vec{HM}$, le champ de pesanteur terrestre (différent du champ de gravitation), on a :

$$m\vec{g} + \vec{T} = \vec{O}.$$

Ainsi le poids du corps est :

$$1. \frac{\omega^2 HM}{GM_T} = 0,2 \%$$

$$\vec{P} = m\vec{g} = m \left(-\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{e}_r + \omega^2 \vec{HM} \right). \quad 1$$

Hidden page

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}}) = \mathcal{P}(\vec{F})|_{\mathcal{R}} + \mathcal{P}(\vec{F}_{ie})|_{\mathcal{R}} \quad \text{avec } \mathcal{P}(\vec{F}_{iC})|_{\mathcal{R}} = 0.$$

- TEM-TPM en référentiel non galiléen :

$$\Delta \mathcal{E}_m|_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}_m(t_2, M_2)|_{\mathcal{R}} - \mathcal{E}_m(t_1, M_1)|_{\mathcal{R}} = \mathbb{W}(\vec{F}_{nc})|_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_m(t, M)|_{\mathcal{R}}) = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})|_{\mathcal{R}}.$$

✓ Quelques référentiels courants

- Référentiel de Copernic :

Origine : centre de gravité du système solaire.

3 axes : 3 étoiles éloignées « fixes ».

- Référentiel géocentrique :

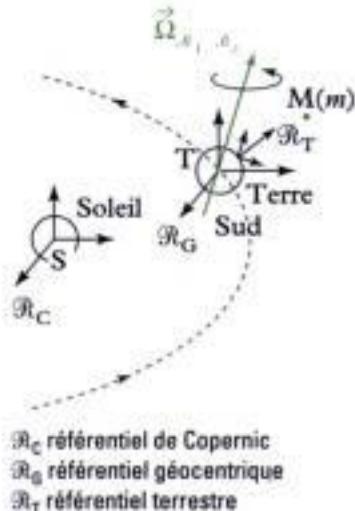
Origine : centre T de la Terre.

3 axes : identiques au précédent.

- Référentiel terrestre :

Origine : un point de la Terre.

3 axes fixes par rapport à la terre
(verticale, Est et Nord).



Mise en œuvre

Méthode 1

Comment déterminer les forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis.

Problème à résoudre

Soit : – S un système ponctuel de masse m ,

– \mathcal{R} un référentiel non galiléen,

– \mathcal{R}_g un référentiel galiléen,

on souhaite déterminer les forces d'inertie (d'entrainement et de Coriolis) s'appliquant à S dans le référentiel non galiléen \mathcal{R} .

→ Savoir faire

- 1 Bien préciser les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}_g qui vont être utilisés. S'assurer que \mathcal{R}_g est galiléen.
- 2 Calculer l'accélération d'entrainement et l'accélération de Coriolis.
- 3 En déduire \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{iC} . Vérifier les unités.

→ Application

Une circonference (C) de centre O' et de rayon a , située dans le plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales ($O ; \vec{e}_z$) d'un mouvement de rotation uniforme défini par le vecteur rotation $\vec{\omega}$ (voir figure). Le référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est lié à la Terre.

Hidden page

$$\text{et } \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}) = \omega \vec{e}_z \wedge (\omega \sin \theta \vec{e}_y) = \omega^2 \sin \theta (-\vec{e}_x).$$

ainsi au total :

$$\vec{a}_e = -\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{e}_x.$$

- Accélération de Coriolis

$$\vec{a}_C = 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'} &= \left(\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) \right) \Big|_{\mathcal{R}'} = \left[\frac{d}{dt}(a \vec{e}_r) \right] \Big|_{\mathcal{R}'} \\ &= a \dot{\theta} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\text{donc } \vec{a}_C = 2\omega \vec{e}_z \wedge a \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} &= 2\omega a \dot{\theta} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{e}_y \\ &= 2\omega a \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\vec{a}_C = 2\omega a \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y$$

❸ Calcul des forces d'inertie :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ic} &= -m \vec{a}_e \text{ forces d'inertie d'entraînement} \\ &= -m(-\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{e}_x) \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{ic} = m \omega^2(1 + \sin \theta) \vec{e}_x.$$



Comme m est en kg, a en m et ω en rad · s⁻¹, cette formule est homogène :
 $kg \times m \times \{s^{-1}\}^2 = kg \cdot m \cdot s^{-2} = N$.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ic} &= -m \vec{a}_C \\ &= -m(2\omega a \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y) \\ \vec{F}_{ic} &= -2m\omega a \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y. \end{aligned}$$



Comme m est en kg, ω et $\dot{\theta}$ en rad · s⁻¹ et a en m, cette formule est homogène :
 $kg \times s^{-1} \times m \times s^{-1} = kg \cdot m \cdot s^{-2} = N$.



Si on devait utiliser le TEC en référentiel non galiléen, il n'y aurait pas besoin d'exprimer \vec{F}_{ic} car on sait que

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{ic})|_{\mathcal{R}} = 0.$$

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Homogénéité

Vérifier l'homogénéité des formules suivantes :

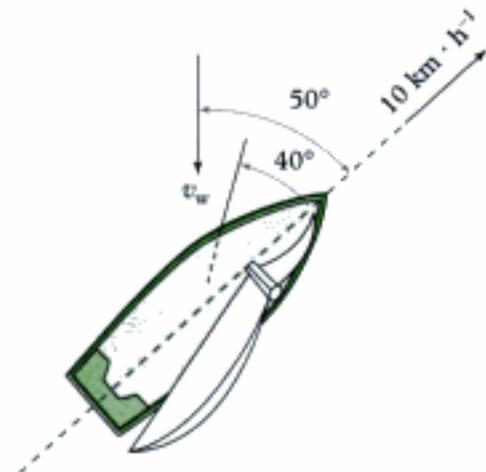
$$1) F_1 = m\omega^2 r$$

$$2) F_2 = mv\omega$$

où F_1 et F_2 sont des forces, m une masse, r une longueur, v une vitesse et ω une vitesse angulaire.

Ex. 2 Bateau à voile

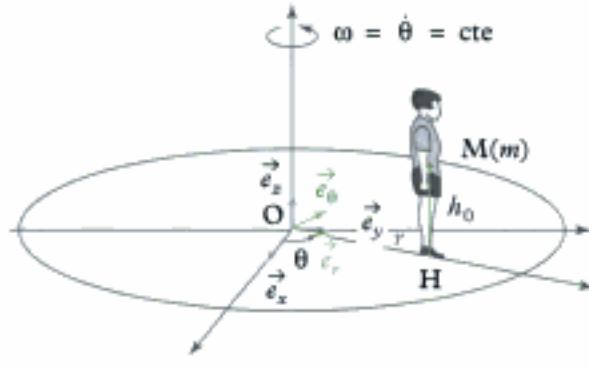
Un bateau à voile se déplace dans la direction indiquée sur la figure suivante à la vitesse de $10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ par rapport à la mer que l'on suppose immobile grâce à un vent du nord qui souffle à la vitesse v_w . Un appareil présent sur le bateau indique que le vent relatif (vent mesuré depuis le bateau) fait un angle de 40° avec la direction d'avancée du bateau.



Quelle est la « vraie » vitesse du vent du nord v_w ?

Ex. 3 Sensation en référentiel non galiléen

Afin de « ressentir » les effets des forces d'inertie, un enfant assimilé à un point matériel M de masse m monte sur une plate-forme tournant à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$ autour d'un axe vertical (voir dessin).



On suppose que le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.

En calculant les différentes forces d'inertie dans le référentiel \mathcal{R} lié à la plate-forme, expliquer dans quel sens l'enfant a tendance à basculer si :

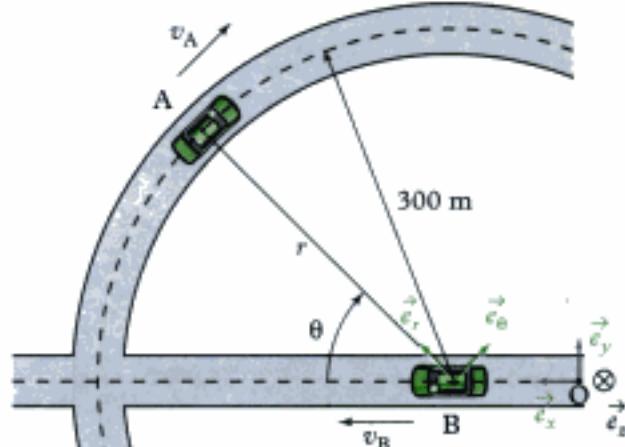
- 1) Il est immobile par rapport à la plate-forme ($r = \text{cte}$).
- 2) Il avance pour s'éloigner du centre de la plate-forme ($\dot{r} > 0 ; \dot{\theta} = \text{cte}$).
- 3) Il recule pour se rapprocher du centre de la plate-forme ($\dot{r} < 0 ; \dot{\theta} = \text{cte}$).

Niveau 2

Ex. 4 Poursuite automobile

Une voiture A roule à une vitesse constante $v_A = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une route circulaire horizontale de rayon 300 m.

Une voiture B roule sur une route droite horizontale à la vitesse constante $v_B = 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. La voiture A est repérée par rapport à la voiture B à l'aide de coordonnées polaires (r, θ) .



À l'instant représenté, la voiture B passe au centre de la trajectoire circulaire de la voiture A et $\theta = 45^\circ$.

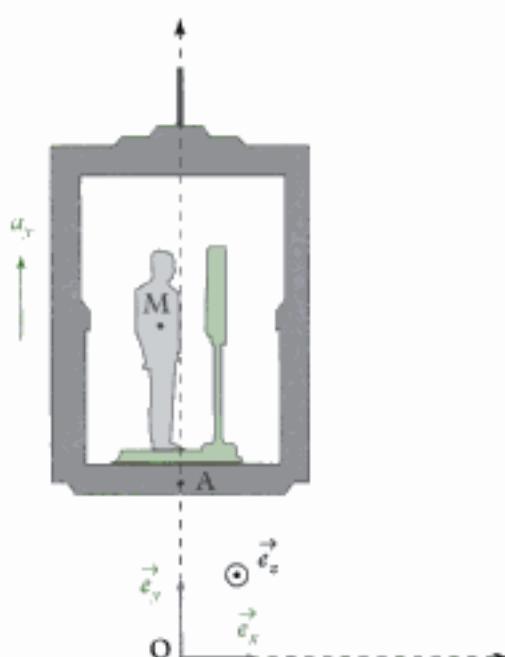
- Déterminer la vitesse de la voiture A perçue par le conducteur de la voiture B à cet instant.
- Déterminer \dot{r} et $\dot{\theta}$ à cet instant.

Ex. 5 Petit poids dans un ascenseur

On étudie l'indication donnée par un pèse-personne lorsqu'un homme M de masse $m = 80 \text{ kg}$, se tient sur ce pèse-personne, dans un ascenseur. Le mouvement de l'ascenseur entre 2 étages se fait en 3 phases :

- une phase d'accélération constante : $a_y = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;

- une phase à vitesse constante $v_y = \text{cte}$;
- une phase de décélération constante : $a_y = -3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

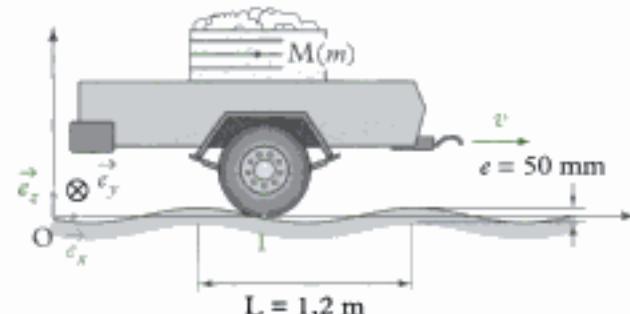


On suppose que le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.

- Déterminer la réaction du pèse-personne sur l'homme en fonction de m , g et a_y .
- En déduire les valeurs indiquées par le pèse-personne au cours des différentes phases.

Ex. 6 Route bosselée

On étudie un objet de masse m posé sur le plateau d'une remorque. La remorque se déplace à une vitesse horizontale $v = \text{cte}$ sur une route de profil sinusoïdal. On suppose les amortisseurs et les pneus de la remorque infiniment rigides.



Déterminer la vitesse v à partir de laquelle l'objet ne reste plus tout le temps en contact avec le plateau de la remorque.

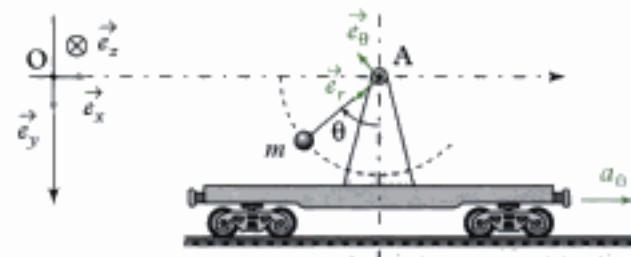
On suppose que le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.

Ex. 7 Pendule composé

On étudie un pendule constitué d'une masse m repérée par l'angle θ supposé constant et d'un fil inextensible,

de masse négligeable et de longueur ℓ (le fil restant tendu). On suppose que le référentiel d'étude $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.

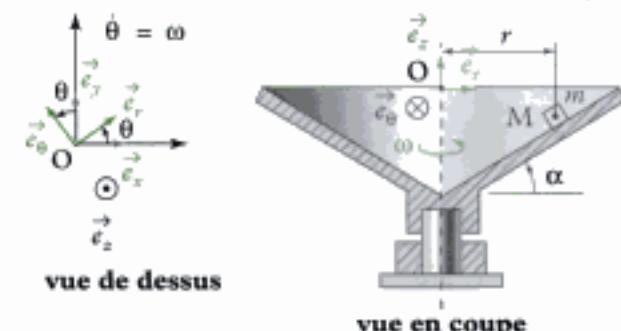
Le pendule est fixé sur un wagon de train possédant une accélération horizontale $a_0 = \text{cte}$.



- Déterminer la relation entre a_0 et θ (rappel : $\theta = \text{cte}$).
- Discuter le signe de θ suivant celui de a_0 .

Ex. 8 Eau en rotation

Une petite masse m est placée à l'intérieur d'un cône d'angle sur l'horizontale α . Le cône est en rotation autour de son axe vertical à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$. On néglige tous les frottements. Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



- Déterminer l'angle α nécessaire au maintien de la masse à la distance r de l'axe de rotation.
- En déduire la forme de la surface de l'eau dans le cas d'un récipient cylindrique rempli d'eau tournant autour de son axe.

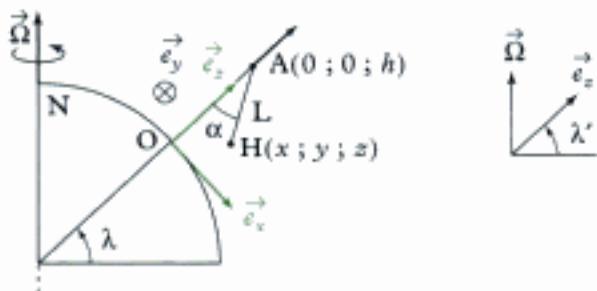
Niveau 3

Ex. 9 Pendule de Foucault

On considère un pendule composé d'une masse m assimilée à un point matériel M suspendue au bout d'un fil de masse négligeable, inextensible de longueur L . Ce fil est suspendu en A (altitude h), point fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dirigé vers le Sud, horizontal, \vec{e}_y dirigé vers l'Est horizontal et \vec{e}_z vertical vers le haut.

On néglige tout frottement. On supposera que le mouvement de M est quasiment uniquement hori-

horizontal car de faible amplitude angulaire. La latitude du point A est λ :



1) Écrire les équations différentielles du mouvement en appelant ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même.

2) À $t = 0$, on lâche le point M depuis la position $(x_0; 0; z_0)$ avec une vitesse initiale nulle.

Ex. 10 Déviation vers l'Est

On lâche sans vitesse initiale depuis une altitude $h = 268$ m un point matériel M de masse m ; l'étude est réalisée dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ à une latitude $\lambda = 45^\circ$.

On choisit :

- \vec{e}_z : vertical dirigé vers le haut ;
- \vec{e}_y : horizontal dirigé vers le Nord ;
- \vec{e}_x : horizontal dirigé vers l'Est ;
- $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$ période de rotation de la Terre sur elle-même.

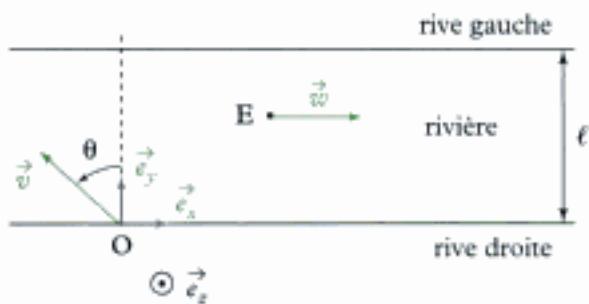
1) Établir les équations de la trajectoire.

2) En déduire les déviations horizontales lorsque M touche le sol.

Ex. 11 Traversée d'une rivière

On étudie la traversée d'une rivière par un bateau à moteur (M). On fait les hypothèses suivantes :

- la rivière a une largeur ℓ ,
- la vitesse \vec{w} du courant est supposée uniforme $\vec{w} = w \vec{e}_x$,
- le moteur du bateau maintient une vitesse \vec{v} constante par rapport au courant faisant un angle θ avec la direction \vec{e}_y ,
- M se trouve en O à $t = 0$.

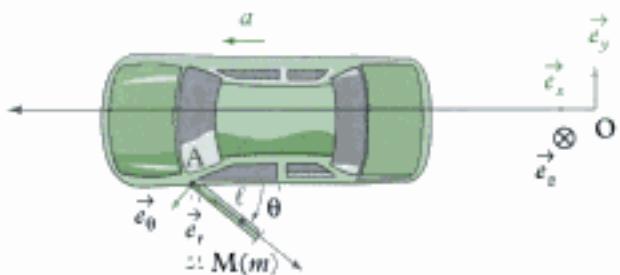


a) Établir l'équation de la trajectoire de M dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en fonction de θ , v et w .

b) Déterminer l'angle θ_m rendant minimum le chemin parcouru pendant la traversée. On supposera pour cela $v > w$.

Ex. 12 Portière de voiture

La portière d'une voiture est restée entrouverte par inadvertance au moment où la voiture se met à freiner créant une décélération constante a ($a < 0$). On veut étudier le mouvement de la porte pendant ce freinage. Pour cela on la modélise par une tige rigide de masse négligeable de longueur ℓ et une masse m placée au point M. On suppose que $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.



a) Écrire l'équation différentielle du mouvement de la portière (en θ).

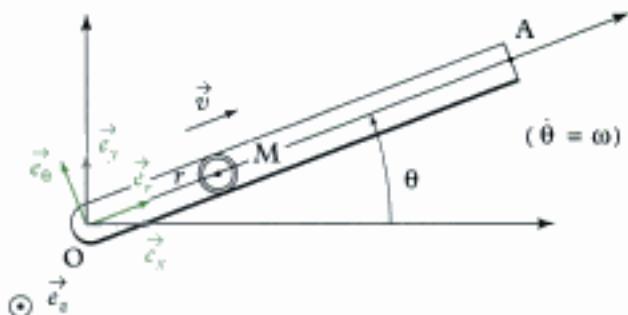
b) Déterminer la vitesse de la porte quand $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad.

c) On étudie désormais une phase d'accélération constante ($a > 0$). Au début du mouvement, la porte est ouverte d'un angle θ_0 ($\dot{\theta}_0 = 0$). Pour que la porte se referme seule il faut que $\dot{\theta}(\theta = 0) = \dot{\theta}_{\min}$. Déterminer la relation entre θ_0 et a pour que cela soit possible.

Ex. 13 Ball-trap

On étudie le mécanisme de lancement des pigeons d'argile dans un ball-trap. Le pigeon d'argile assimilé à un point matériel M de masse m peut se déplacer sans frottement le long d'un bras horizontal (de longueur $OA = \ell$) qui lui tourne à la vitesse ω (supposée constante) autour de l'axe ($O; \vec{e}_z$) supposé vertical ascendant.

Au départ du mouvement, le pigeon d'argile est posé sans vitesse initiale par rapport au bras en $OA(t=0) = \frac{\ell}{4}$.



On suppose que le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.

On repère la position de M par : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

a) Déterminer la variation de r en fonction du temps : $r(t)$.

b) Indiquer au bout de combien de temps, le pigeon d'argile quitte le bras.

c) Déterminer l'allure de la trajectoire de M dans \mathcal{R}_g .

Données :

$$\omega = 6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}; \quad \ell = 1 \text{ m.}$$

Indications

Ex. 6 Le contact se rompt lorsque la réaction du plateau s'annule.

Ex. 11 a) On posera $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ et on cherchera $\begin{cases} x(t) \\ y(t). \end{cases}$

Ex. 12 a) On supposera que la réaction de la tige est perpendiculaire au déplacement relatif qui se fait selon \vec{e}_θ .

Ex. 13 a) Comme il y a mouvement relatif, on peut appliquer un théorème énergétique.

Hidden page

$$\begin{cases} \vec{v}_w \cdot \vec{e}_x = \vec{v}_r \cdot \vec{e}_x + \vec{v}_e \cdot \vec{e}_x \\ \vec{v}_w \cdot \vec{e}_y = \vec{v}_r \cdot \vec{e}_y + \vec{v}_e \cdot \vec{e}_y \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} v_w \cos(180^\circ - 50^\circ) = v_r \cos(180^\circ - 40^\circ) + v_e \\ -v_w \sin(180^\circ - 50^\circ) = -v_r \sin(180^\circ - 40^\circ) + 0. \end{cases}$$

On veut déterminer v_w ; on connaît v_e mais pas v_r ; il faut donc éliminer v_r entre les deux dernières équations.

$$v_w \cos(180^\circ - 50^\circ) = v_w \frac{\sin(180^\circ - 50^\circ)}{\sin(180^\circ - 40^\circ)} \cos(180^\circ - 40^\circ) + v_e$$

$$\text{soit } v_w \left[\cos(180^\circ - 50^\circ) - \frac{\sin(180^\circ - 50^\circ)}{\sin(180^\circ - 40^\circ)} \cos(180^\circ - 40^\circ) \right] = v_e$$

$$v_w \left[-\cos 50^\circ - \frac{\sin 50^\circ}{\sin 40^\circ} \times (-\cos 40^\circ) \right] = v_e$$

$$v_w \left[\cos 40^\circ \times \frac{\sin 50^\circ}{\sin 40^\circ} - \cos 50^\circ \right] = v_e$$

$$v_w = \frac{v_e}{\cos 40^\circ \times \frac{\sin 50^\circ}{\sin 40^\circ} - \cos 50^\circ}$$

$$\text{A.N. } v_w = \frac{10}{0,27} = 37 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Exercice 3

Si on applique le PFD à l'enfant dans le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) lié à la plate-forme (non galiléen), on voit apparaître les forces d'inertie suivantes :

– force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e \quad \text{où} \quad \vec{a}_e = \vec{a}(M \in \mathcal{R})|_{\mathcal{R}},$$

cela revient à fixer M dans \mathcal{R} et à calculer son accélération par rapport à \mathcal{R}_g ici :

$$\vec{a}(M \in \mathcal{R})|_{\mathcal{R}_g} = -r\omega^2\vec{e}_r$$

$$\text{donc } \vec{F}_{ie} = mr\omega^2\vec{e}_r;$$

– force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_C \quad \text{où} \quad \vec{a}_C = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_g} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}},$$

$$\text{Ici} \quad \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_g} = \dot{\theta}\vec{e}_z = \omega\vec{e}_z$$

$$\text{et} \quad \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r + h_0\vec{e}_z)|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r$$

 \vec{e}_r, \vec{e}_z sont fixes par rapport à \mathcal{R} et $h_0 = \text{cte.}$

$$\text{donc } \vec{a}_C = 2\omega\vec{e}_z \wedge \dot{r}\vec{e}_r = 2\omega\dot{r}\vec{e}_\theta$$

$$\text{soit } \vec{F}_{ic} = -2m\omega\dot{r}\vec{e}_\theta.$$

1) *Enfant immobile* $\dot{r} = 0$:

$$\vec{F}_{ie} = mr\omega^2\vec{e}_r \quad \vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_r > 0$$
$$\vec{F}_{iC} = \vec{0}.$$

Ainsi l'enfant a tendance à basculer vers l'avant (selon \vec{e}_r) sous l'effet de la force d'inertie d'entraînement (c'est-à-dire du mouvement d'entraînement du plateau).

2) *Enfant qui avance* : $\dot{r} > 0$, $\dot{r} = \text{cte}$:

$$\vec{F}_{ie} = mr\omega^2\vec{e}_r \quad \vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_r > 0$$
$$\vec{F}_{iC} = -2m\omega\dot{r}\vec{e}_\theta \quad \vec{F}_{iC} \cdot \vec{e}_\theta < 0.$$

L'enfant a donc toujours tendance à basculer vers l'avant (du fait de la rotation de la plate-forme donc du \vec{F}_{ie}).

Mais son mouvement relatif va entraîner un **déséquilibre supplémentaire** sur sa droite (selon $-\vec{e}_\theta$) sous l'effet de la force d'inertie de Coriolis.

3) *Enfant qui recule* : $\dot{r} < 0$; $\dot{r} = \text{cte}$:

$$\vec{F}_{ie} = mr\omega^2\vec{e}_r \quad \vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_r > 0$$
$$\vec{F}_{iC} = -2m\omega\dot{r}\vec{e}_\theta \quad \vec{F}_{iC} \cdot \vec{e}_\theta > 0.$$

Quand l'enfant recule, il est donc déséquilibré vers l'avant (selon \vec{e}_r) et vers la gauche (selon \vec{e}_θ).



En résumé : – la force d'inertie d'entraînement (due au mouvement de la plate-forme) a tendance à déséquilibrer l'enfant vers l'avant ;
– la force d'inertie de Coriolis (due au mouvement de la plate-forme et au déplacement de l'enfant sur la plate-forme) a tendance à déséquilibrer l'enfant latéralement (à gauche ou à droite suivant le cas).

Exercices de niveau 2

Exercice 4

a) On cherche la vitesse relative de la voiture A par rapport à B.

Les deux référentiels importants sont :

$\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à la Terre ;

$\mathcal{R}_B(B; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à la voiture B.

Par composition des vitesses :

$$v(A)|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B} + \vec{v}(A \in \mathcal{R}_B)|_{\mathcal{R}}$$

$$v_A \vec{e}_\theta = \vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B} + v_B \vec{e}_x.$$



$\vec{v}(A \in \mathcal{R}_B)|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(B \in \mathcal{R}_B)|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_B|\mathcal{R}} \wedge \vec{BA} = \vec{v}_B$ car $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_B|\mathcal{R}} = \vec{0}$.

On a donc

$$\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B} = v_A \vec{e}_\theta - v_B \vec{e}_x \quad (1)$$

On cherche $\|\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B}\|$.

$$\text{Or } \|\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B}\|^2 = \vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B} \cdot \vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B} = (v_A \vec{e}_\theta - v_B \vec{e}_x) \cdot (v_A \vec{e}_\theta - v_B \vec{e}_x) = v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta$$

$$\|\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B}\|^2 = v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

donc

$$\|\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B}\| = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 + 2v_A v_B \sin \theta}.$$

$$\text{A.N. } \|\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B}\| = \sqrt{60^2 + 80^2 + 2 \times 60 \times 80 \times \sin 45^\circ}$$

$$\|\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B}\| = 130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

b) Par ailleurs,

$$\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_B} = \frac{d}{dt}(\vec{BA})|_{\mathcal{R}_B} = \frac{d}{dt}(r \vec{e}_r)|_{\mathcal{R}_B} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

En reprenant la relation vectorielle (1), on obtient :

$$\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = v_A \vec{e}_\theta - v_B \vec{e}_x.$$

On projette cette relation vectorielle sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ :

$$\bullet (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_r = (v_A \vec{e}_\theta - v_B \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_r$$

$$\dot{r} = -v_B \cos \theta.$$

$$\text{A.N. } \dot{r} = -\frac{80}{3,6} \cos(45^\circ) \approx -15,71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$\bullet (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_\theta = (v_A \vec{e}_\theta - v_B \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_\theta$$

$$r \dot{\theta} = v_A - v_B \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right), \text{ soit } \dot{\theta} = \frac{v_A + v_B \sin \theta}{r}.$$

$$\text{A.N. } \dot{\theta} = \frac{\frac{60}{3,6} + \frac{80}{3,6} \times \sin 45}{300} = 0,108 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Exercice 5

a) Pour trouver la réaction, on va appliquer le PFD par rapport au référentiel lié à l'ascenseur $\mathcal{R}(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ qui est non galiléen.

Système étudié : l'homme M de masse m .

Référentiel d'étude : \mathcal{R} non galiléen.

Forces appliquées :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$,

- réaction $\vec{R} = R\vec{e}_y$,

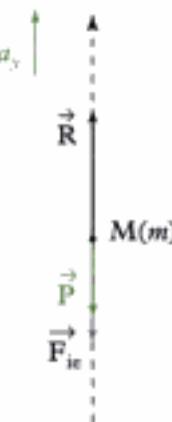
- forces d'inertie :

• $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ (d'entrainement) avec $\vec{a}_e = \vec{a}(M \in \mathcal{R})|_{\mathcal{R}_B} = a_y \vec{e}_y$,

• $\vec{F}_{iC} = \vec{0}$ (de Coriolis) car $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_B} = \vec{0}$;

Le PFD appliqué dans le référentiel \mathcal{R} non galiléen s'écrit :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}.$$



Hidden page

– Le PFD s'écrit donc :

$$\vec{m}\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}.$$

Or $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ donc $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$, le PFD s'écrit donc :

$$\vec{0} = -mg\vec{e}_z + R\vec{e}_z - m\ddot{z}\vec{e}_z.$$

En projection sur \vec{e}_z , cela donne :

$$0 = -mg + R - m\ddot{z}$$

$$R = m(g + \ddot{z}).$$

On veut $R = 0$ c'est-à-dire $\ddot{z} = -g$.

• Il reste à exprimer \ddot{z} en fonction de v afin de répondre à la question posée. Or le point I est astreint à rester sur un profil de route sinusoïdale donc :

$$z = \frac{e}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right).$$

 On aurait pu prendre un sinus cela n'aurait rien changé à la suite du raisonnement.

De plus la route est parcourue à vitesse constante donc $\dot{x} = v$.

Exprimons donc \dot{z} puis \ddot{z} :

$$\dot{z} = \frac{e}{2} \times \frac{2\pi}{L} \left(-\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \dot{x}$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{2} \times \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \dot{x}^2$$

$$\ddot{z} = -\frac{e}{2} \times \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) v^2$$

\ddot{z} est minimum (maximum en valeur absolue) quand $\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = 1$, c'est-à-dire quand $x = +\frac{e}{2}$, c'est-à-dire au sommet des bosses :

$$\ddot{z}_{\min} = -\frac{e}{2} \frac{4\pi^2}{L^2} v^2.$$

On veut que :

$$\ddot{z}_{\min} = -\frac{e}{2} \frac{4\pi^2}{L^2} v^2 = -g$$

c'est-à-dire

$$v = \sqrt{\frac{g}{2e}} \times \frac{L}{\pi}.$$

 Comme v est en $m \cdot s^{-1}$, g en $m \cdot s^{-2}$, e et L sont en m , cette expression est homogène :

$$\sqrt{\frac{m \cdot s^{-2}}{m}} \times m = \sqrt{s^{-2}} \times m = m \cdot s^{-1}.$$

A.N. $v = \sqrt{\frac{9,81}{50 \times 10^{-3}}} \times \frac{1,2}{\pi} = 5,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 19,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Exercice 7

a) Pour obtenir la relation demandée, on va appliquer le PFD à la masse m dans le référentiel lié au wagon $\mathcal{R}(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, non galiléen :

système étudié : masse m ;

référentiel d'étude : \mathcal{R} non galiléen ;

Hidden page

Hidden page

Le point M peut être repéré par rapport à l'axe de rotation et au fond du récipient par les coordonnées r et z .

En ce point on doit donc avoir :

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g},$$

soit $dz = \frac{\omega^2}{g} r dr$, soit en intégrant :

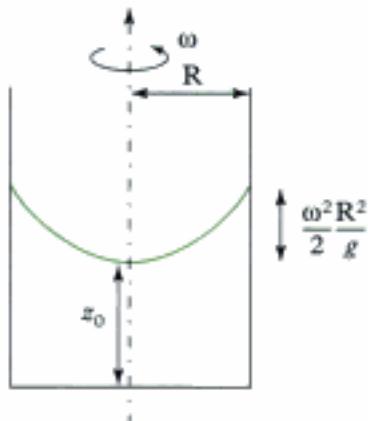
$$\int_{z_0}^z dz = \frac{\omega^2}{g} \int_0^r r dr.$$

 Quand $r = 0$, $z = z_0$.

$$z - z_0 = \frac{\omega^2}{g} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^r$$

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{g} \frac{r^2}{2}.$$

La surface de l'eau a donc un profil parabolique.



Exercices de niveau 3

Exercice 9

1) Appliquons le PFD dans le référentiel \mathcal{R}_T non galiléen.

Système étudié : point matériel M de masse m .

Référentiel d'étude : \mathcal{R}_T non galiléen.

Bilan des forces appliquées :

$$\bullet \vec{T} = T \vec{u} = T \frac{\overrightarrow{MA}}{\| \overrightarrow{MA} \|} = T \frac{\overrightarrow{MA}}{L} = \frac{T}{L} [-x \vec{e}_x - y \vec{e}_z + (h-z) \vec{e}_z];$$

$$\bullet \vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{e}_z \text{ poids de M ;}$$

$$\bullet \vec{F}_{iC} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_T} \text{ force d'inertie de Coriolis.}$$

Si $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$ ($z = \text{cte}$ car le mouvement est horizontal), alors $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}_T} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y$ et

$$\vec{F}_{iC} = -2m(-\omega \cos \lambda \vec{e}_x + \omega \sin \lambda \vec{e}_z) \wedge (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y) = -2m[-\omega \cos \lambda \dot{y} \vec{e}_z + \omega \sin \lambda \dot{x} \vec{e}_y - \omega \sin \lambda \dot{y} \vec{e}_x];$$

• \vec{F}_{ie} est incluse dans le poids \vec{P} , par définition.

Appliquons le PFD dans \mathcal{R}_T au point M(m) : $m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}_T} = \vec{P} + \vec{F}_{IC} + \vec{T}$.

En projection sur $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on obtient :

$$m\ddot{x} = 2m\omega y \sin\lambda - \frac{\vec{T} \cdot \vec{x}}{L} \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega x \sin\lambda - \frac{\vec{T} \cdot \vec{y}}{L} \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = 0 = -mg + 2m\omega y \cos\lambda + T \frac{h-z}{L} \quad (3)$$

Comme $|2m\omega y \cos\lambda| \ll |mg|$ et $h-z \approx L$, alors l'équation (3) devient $T \approx mg$.

Ainsi : $\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega \sin\lambda \dot{y} + g \frac{x}{L} = 0 & (4) \\ \ddot{y} + 2\omega \sin\lambda \dot{x} + g \frac{y}{L} = 0 & (5) \end{cases}$

2) En posant : $\underline{u} = x + jy$; $\dot{\underline{u}} = \dot{x} + j\dot{y}$ et $\ddot{\underline{u}} = \ddot{x} + j\ddot{y}$; (4) + j(5) donne :

$$\ddot{\underline{u}} + 2j\omega \sin\lambda \dot{\underline{u}} + \frac{g}{L} \underline{u} = 0.$$

$-2\omega \sin\lambda \dot{y} + j \times 2\omega \sin\lambda \dot{x} = 2j\omega \sin\lambda(j\dot{y} + \dot{x}) = 2j\omega \sin\lambda \dot{\underline{u}}$.

$\omega \sin\lambda$ est la projection de $\vec{\omega}$ selon \vec{e}_z ; c'est la composante utile de $\vec{\omega}$ pour le mouvement étudié.

L'équation caractéristique est : $r^2 + 2j\Omega r + \omega_0^2 = 0$.

$$\begin{cases} \Omega = \omega \sin\lambda \\ \omega_0^2 = \frac{g}{L} \end{cases}$$

A.N. $\Omega \approx 54 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \ll \omega_0 \approx 0,38 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$\Delta = -4\Omega^2 - 4\omega_0^2 \approx -4\omega_0^2 = (2j\omega_0)^2$, ce qui donne comme solutions :

$$r_{1/2} = \frac{-2j\Omega \pm 2j\omega_0}{2} = -j[\Omega \pm \omega_0].$$

Donc $\underline{u} = Ae^{-j(\Omega + \omega_0)t} + Be^{-j(\Omega - \omega_0)t} = e^{-j\Omega t}[Be^{j\omega_0 t} + Ae^{-j\omega_0 t}]$.

À $t = 0$, $\underline{u}(0) = x_0 = A + B$ et $\dot{\underline{u}}(0) = 0 = -j(\Omega + \omega_0)A - j(\Omega - \omega_0)B$

soit en négligeant Ω devant ω_0 : $\begin{cases} A + B = x_0 \\ -A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{x_0}{2}$.

On a donc : $\underline{u} = \frac{x_0}{2}e^{-j\Omega t} \times 2\cos(\omega_0 t) = x_0 \cos(\omega_0 t)e^{-j\Omega t} = x_0 \cos(\omega_0 t)(\cos(\Omega t) - j\sin(\Omega t))$

Ainsi :

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\Omega t) \\ y = -x_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\Omega t) \\ z = z_0 = h - L \end{cases}$$

et :

$$\overrightarrow{OM} = x_0 \cos(\omega_0 t)[\cos(\Omega t)\vec{e}_x - \sin(\Omega t)\vec{e}_y].$$

Hidden page

Hidden page

A.N. $T = \sqrt{\frac{2 \times 268}{9,81}} = 7,4 \text{ s.}$

La déviation dans la direction \vec{e}_y est :

$$y(T) = -\frac{1}{12}\omega^2 \sin(2\lambda)gT^4 = -\frac{1}{12}\omega^2 \sin(2\lambda)g\left(\frac{2h}{g}\right)^2 = -\frac{1}{3}g\omega^2 h^2 \sin(2\lambda).$$

A.N. $y(T) = -\frac{1}{3 \times 9,81} \times (7,3 \times 10^{-5})^2 \times 268^2 \times \sin(2 \times 45^\circ) \approx -13 \mu\text{m}.$

 Il y a donc une petite déviation vers le Sud.

La déviation dans la direction \vec{e}_x est :

$$x(T) = \frac{1}{3}\omega \cos \lambda g \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

A.N. $x(T) = \frac{1}{3} \times 7,3 \times 10^{-5} \times \cos(45^\circ) \times 9,81 \times \left(\frac{2 \times 268}{9,81}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 6,8 \text{ cm}.$

 La déviation la plus importante se fait vers l'Est.

Exercice 11

a) L'énoncé mentionne la vitesse du bateau \vec{v} par rapport au courant et on indique la vitesse \vec{w} du courant, par ailleurs, on précise que l'on cherche l'équation de la trajectoire dans le référentiel lié à la rive. Tout ceci doit faire penser à l'utilisation de la loi de **composition** des vitesses.

Démarche : on va donc exprimer la vitesse du bateau à l'aide de la loi de composition des vitesses puis intégrer par rapport au temps afin de trouver le vecteur position donc la trajectoire.

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'} + \vec{v}(M \in \mathcal{R}')|_{\mathcal{R}}$$

où \mathcal{R}' est un référentiel lié à un observateur fixe par rapport au courant : $(E; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. E est un point de la rivière qui possède la vitesse \vec{w} par rapport à la rive.

Cette formule peut aussi s'écrire :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

absolue relative entraînement

\vec{v}_r = vitesse relative du bateau (par rapport à \mathcal{R}')

$$= \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'} = \vec{v};$$

\vec{v}_e = vitesse du M considéré comme lié au courant par rapport à la rive

$$= \vec{v}(M \in \mathcal{R}')|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(E)|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{EM}$$

$$= \vec{w} + \vec{0} = w\vec{e}_x.$$

 Il n'y a pas de rotation entre \mathcal{R}' et \mathcal{R} .

donc

$$\vec{v}_a = \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{v} + w\vec{e}_x \quad (1)$$

Si on appelle x et y les coordonnées de \overrightarrow{OM} dans \mathcal{R} :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

Hidden page

Ainsi :

$$\sin \theta_m = \frac{w}{v}.$$

 On aurait pu chercher θ_m en effectuant $\frac{dD}{d\theta} = 0$ mais le calcul de la dérivée aurait été beaucoup plus long.
 θ_m n'existe que si $w \leq v$.

Exercice 12

a) Pour écrire l'équation différentielle du mouvement de la porte (en θ), nous allons appliquer le TMC(Δ) dans le référentiel lié à la voiture $\mathcal{R}(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ non galiléen, $\Delta = (A; \vec{e}_z)$. \vec{e}_z vertical vers le bas.

Système étudié : point matériel M de masse m .

Référentiel d'étude : \mathcal{R} non galiléen.

Forces appliquées :

- poids $\vec{P} = mge_z$,
- réaction de la tige $\vec{R} = R_r \vec{e}_r + R_z \vec{e}_z$ ($\perp \vec{e}_\theta$),
- forces d'inertie :
 - $\vec{F}_{ie} = -ma \vec{e}_x = -ma \vec{e}_x$ (d'entraînement) car $\vec{a}_e = \vec{a}(M \in \mathcal{R})|_{\mathcal{R}} = a \vec{e}_x$ (accélération de la voiture)
 - $\vec{F}_{iC} = -ma \vec{a}_C = \vec{0}$ (de Coriolis) où $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}} = \vec{0}$.

Axe $\Delta = (A; \vec{e}_z)$: c'est l'axe physique de rotation de la portière. Par ailleurs, le choix cet axe permet à un certain nombre de moments d'être nuls (en particulier celui de \vec{R}). De plus A est fixe dans \mathcal{R} .

Moment des forces par rapport à Δ :

$$M_\Delta(\vec{P}) = 0;$$

$$M_\Delta(\vec{R}) = 0;$$

$$M_\Delta(\vec{F}_{ie}) = +\ell \sin \theta (-ma) \quad (+\text{bras de levier} \times \text{force})$$

$$M_\Delta(\vec{F}_{iC}) = 0.$$

Le TMC(Δ) appliqué dans le référentiel non galiléen \mathcal{R} s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(L_\Delta(M)|_{\mathcal{R}}) = M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{F}_{ie}) + M_\Delta(\vec{F}_{iC}).$$

$$\text{Or } L_\Delta(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{e}_z \cdot \vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}}$$

$$\text{et } \vec{L}_O(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{mv}(M)|_{\mathcal{R}} = \ell \vec{e}_r \wedge m(\ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m\ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

Donc le TMC donne :

$$\frac{d}{dt}(m\ell^2 \dot{\theta}) = 0 + 0 + \ell \sin \theta (-ma) + 0$$

$$m\ell^2 \ddot{\theta} = -m\ell \sin \theta a$$

soit

$$\ddot{\theta} = -\frac{a}{\ell} \sin \theta.$$

b) On veut $\dot{\theta}$ quand $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad ; il faut pour cela intégrer une fois par rapport au temps, l'équation différentielle précédente ; pour cela, on peut commencer par multiplier par $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} = -\frac{a}{\ell} \sin \theta \dot{\theta}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = \frac{a}{\ell} \frac{d}{dt} (\cos \theta) \text{ soit } \int_0^\theta d \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = \frac{a}{\ell} \int_0^\theta d(\cos \theta).$$



En effet $\dot{\theta} = 0$ quand $\theta = 0$.

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - 0 = \frac{a}{\ell} (\cos \theta - \cos 0)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2a}{\ell} (\cos \theta - 1).$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, $\dot{\theta}^2 = \frac{-2a}{\ell}$ avec $a < 0$

$$\dot{\theta} \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{-2a}{\ell}}.$$

c) Si la voiture accélère, l'équation différentielle reste valable, c'est juste a qui change de signe (devient positive) :

$$\ddot{\theta} = -\frac{a}{\ell} \sin \theta, \text{ soit } \ddot{\theta} \dot{\theta} = -\frac{a}{\ell} \sin \theta \dot{\theta}$$



on intègre puisqu'on nous donne une information sur la vitesse sachant que $\dot{\theta} = 0$ quand $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{\min}$ quand $\theta = 0$:

$$\left[\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right]_0^{\theta_{\min}} = \frac{a}{\ell} [\cos \theta]_0^{\theta_{\min}}$$

$$\frac{\dot{\theta}_{\min}^2}{2} = \frac{a}{\ell} (1 - \cos \theta_0)$$

$$\cos \theta_0 = 1 - \frac{a}{\ell} \frac{\dot{\theta}_{\min}^2}{2}$$



Comme ℓ est en m, a en $m \cdot s^{-2}$ et $\dot{\theta}_{\min}$ en $\text{rad} \cdot s^{-1}$, cette expression est homogène :

$$\frac{m}{m \cdot s^2} \times (s^{-1})^2 = \frac{m \cdot s^{-2}}{m \cdot s^2} = 1.$$

Exercice 13

a) Pour trouver la fonction $r(t)$, on va appliquer (par exemple) le TPC en référentiel non galiléen (en effet il y a un mouvement relatif).

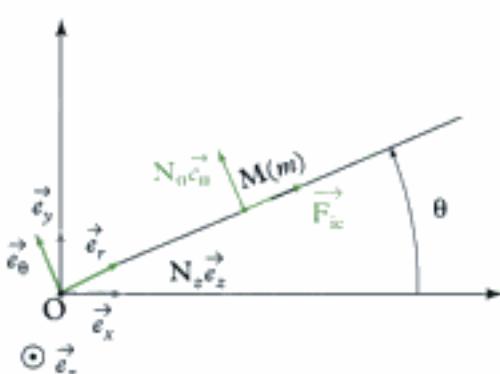
- **Système étudié** : le pigeon d'argile M de masse m .

- **Référentiel d'étude** : $\mathcal{R}(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ lié au bras du lanceur (non galiléen).

- **Forces appliquées au système** :

- poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$;

- réaction du bras $\vec{R} = N_0 \vec{e}_0 + N_z \vec{e}_z$ (perpendiculaire au support car pas de frottement) ;
- forces d'inertie :
 - $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ (d'entrainement) $= -m(-\omega^2 r \vec{e}_r) = m\omega^2 r \vec{e}_r$
 - \vec{F}_{iC} qu'on ne cherche pas à calculer puisque $\mathcal{P}(\vec{F}_{iC})|_{\mathbb{R}} = 0$ (de Coriolis) ;



- Puissances des forces appliquées :

- $\mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathbb{R}} = 0$ car $\vec{v}(M)|_{\mathbb{R}} = \dot{r}\vec{e}_r \perp \vec{e}_z$
- $\mathcal{P}(\vec{R})|_{\mathbb{R}} = 0$ car $\vec{v}(M)|_{\mathbb{R}} = \dot{r}\vec{e}_r \perp \vec{e}_0 \perp \vec{e}_z$ (pas de frottement)
- $\mathcal{P}(\vec{F}_{ie})|_{\mathbb{R}} = m\omega^2 r \vec{e}_r \cdot \dot{r}\vec{e}_r = m\omega^2 r \dot{r}$
- $\mathcal{P}(\vec{F}_{iC})|_{\mathbb{R}} = 0$;

Le TPC s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_c(M)|_{\mathbb{R}}) = \mathcal{P}(\vec{P})|_{\mathbb{R}} + \mathcal{P}(\vec{R})|_{\mathbb{R}} + \mathcal{P}(\vec{F}_{ie})|_{\mathbb{R}} + \mathcal{P}(\vec{F}_{iC})|_{\mathbb{R}}.$$

$$\text{Or } \mathcal{E}_c(M)|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2}mv^2(M)|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2}m(\dot{r}\vec{e}_r)^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

donc on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = 0 + 0 + m\omega^2 r \dot{r} + 0 \text{ soit } \frac{1}{2}m2\dot{r}\ddot{r} = m\omega^2 r \dot{r}.$$

Soit :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0.$$

$\dot{r} = 0$ soit $r = \text{cte}$ n'est pas une solution intéressante.

Cette équation différentielle admet comme solution :

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t},$$

$$\text{à } t=0 : \begin{cases} r(t=0) = \frac{\ell}{4} = A+B \\ \dot{r}(t=0) = 0 = A\omega - B\omega \end{cases}$$

$$\text{soit } A = \frac{\ell}{8} \text{ et } B = \frac{\ell}{8}.$$

Ainsi :

$$r(t) = \frac{\ell}{8}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$



On aurait pu utiliser le TEM en référentiel non galiléen en remarquant que seule la force d'inertie d'entrainement travaille et, que dans le cas d'une rotation uniforme du référentiel d'étude autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen, elle dérive de l'énergie potentielle centrifuge : $\mathcal{E}_{p_g} = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2$.

Ainsi le TEM dans \mathcal{R} s'écrit : $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p_g} = \text{cte.}$

Soit : $\frac{1}{2}mr^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \text{cte}$ qui donne, en dérivant par rapport au temps : $\ddot{r} - \omega^2 r = 0$.

b) Le pigeon d'argile quitte le bas quand $r(t = T) = \ell$

$$\text{c'est-à-dire } \frac{\ell}{8}(e^{\omega T} + e^{-\omega T}) = \ell$$

$$\text{soit } e^{\omega T} + e^{-\omega T} = 8$$

$$\text{en posant } X = e^{\omega T} \text{ on obtient :}$$

$$X + \frac{1}{X} = 8$$

$$\text{soit } X^2 - 8X + 1 = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 1 = 60$$

$$X_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{60}}{2} = 4 \pm \frac{\sqrt{60}}{2}$$

comme $X = e^{\omega T}$, on ne conserve que la solution positive, ainsi :

$$X_1 = 4 + \sqrt{15} = e^{\omega T}$$

$$T = \frac{\ln(4 + \sqrt{15})}{\omega}$$

$$\text{A.N. } T = \frac{\ln(4 + \sqrt{15})}{6} = 0,34 \text{ s.}$$

c) Pour déterminer la trajectoire de M dans \mathcal{R}_g , on va exprimer le vecteur \overrightarrow{OM} dans \mathcal{R}_g :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)$$



$\theta = \omega t = \text{cte}$ donc $\theta = \omega t + \text{cte.}$

Si on pose $\theta(t = 0) = 0$, $\theta = \omega t$.

$$\overrightarrow{OM} = r(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y).$$

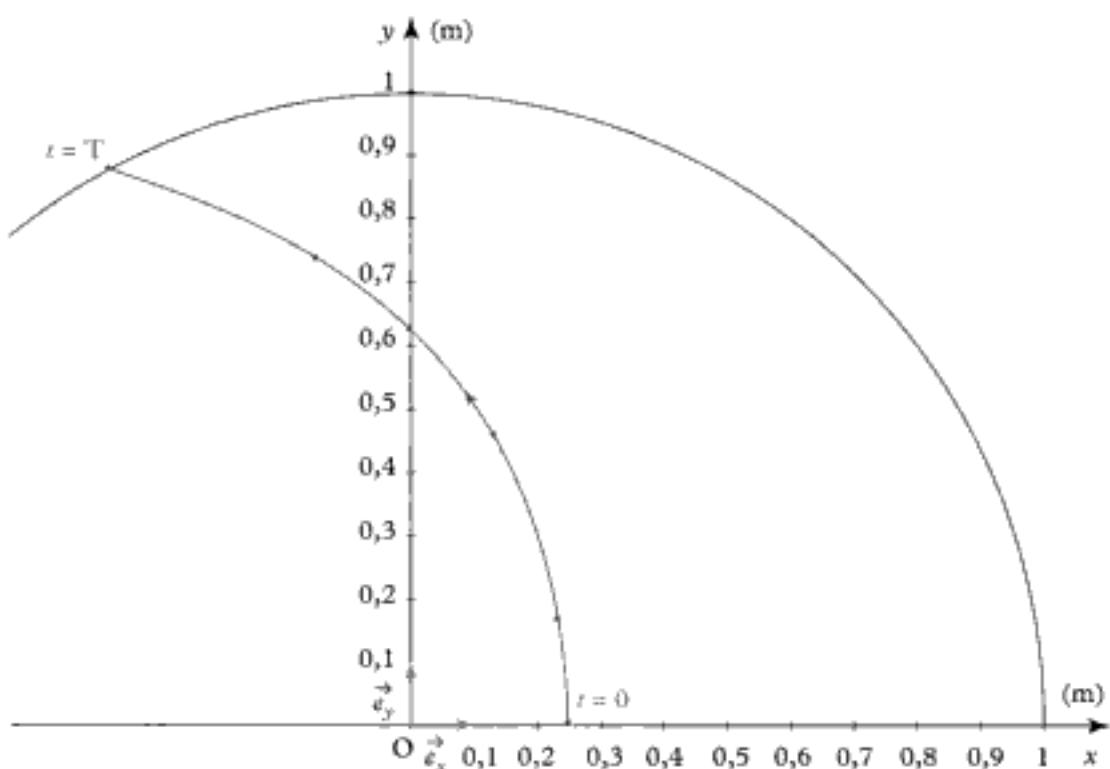
Si on pose $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, on a :

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \omega t \\ y(t) = r \sin \omega t \end{cases}$$

soit en remplaçant r par son expression (trouvée dans la question a) :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\ell}{8}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \cos \omega t \\ y(t) = \frac{\ell}{8}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \sin \omega t \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T.$$

L'allure de la trajectoire de M dans \mathbb{R}_g est donc :



Système formé de deux points matériels

Introduction

Après avoir étudié les lois et théorèmes de la mécanique pour un point matériel, nous allons nous intéresser aux systèmes simples formés de deux points matériels. Cette étude est préalable à celle des systèmes matériels et notamment des solides.

Plan du chapitre 9

A. Éléments cinétiques	300
1. Masse totale, centre d'inertie et référentiel barycentrique	300
2. Quantité de mouvement, moment cinétique et énergie cinétique.....	300
B. Dynamique du système de deux points	303
1. Forces extérieures, forces intérieures	303
2. Théorème du centre de masse ou théorème de la résultante cinétique	303
3. Théorèmes du moment cinétique	304
4. Théorèmes énergétiques	306
C. Système isolé de deux points matériels	311
1. Lois de conservation	311
2. Réduction du problème à deux corps	312
3. Grandeur cinétique du mobile réduit	313
4. Conclusion	313

Méthodes

L'essentiel ; mise en œuvre	315
Énoncés des exercices	324
Indications	326
Solution des exercices	327

A. Éléments cinétiques

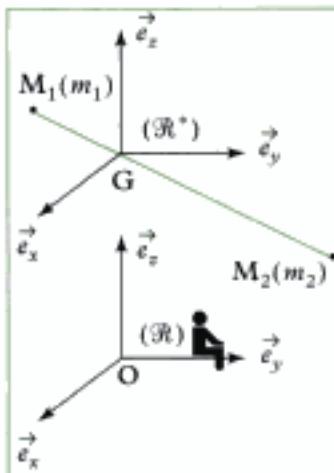


Fig. 1 - Système \mathcal{S} formé des deux points M_1 et M_2 .

1. Les axes de \mathcal{R}^* conservent des directions fixes par rapport à ceux de \mathcal{R} ; souvent, on les prend parallèles.

2. Attention la translation de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} n'est pas forcément rectiligne uniforme !

Soit \mathcal{S} un système formé de deux points matériels M_1 et M_2 (fig. 1) de masses respectives m_1 et m_2 en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

A.1. Masse totale, centre d'inertie et référentiel barycentrique

- La masse totale M du système \mathcal{S} est :

$$M = m_1 + m_2$$

- Le centre d'inertie (ou centre de masse) G du système \mathcal{S} est défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} \text{ ou encore } m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}.$$

• Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est un référentiel dans lequel G est fixe (souvent G est l'origine de \mathcal{R}^*) qui est en translation par rapport au référentiel^{1,2} \mathcal{R} .

Remarque : pour la suite, les grandeurs barycentriques seront notées soit avec un indice soit avec un astérisque : *.

Par exemple la vitesse de G dans \mathcal{R}^* , appelée vitesse barycentrique est notée : $\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}^*} = \vec{v}^*(G)$.

A.2. Quantité de mouvement, moment cinétique et énergie cinétique

A.2.1 - Quantité de mouvement ou résultante cinétique

La quantité de mouvement $\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}}$ du système \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des quantités de mouvement $\vec{p}(M_1)|_{\mathcal{R}}$ et $\vec{p}(M_2)|_{\mathcal{R}}$ des points M_1 et M_2 dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}} = \vec{p}(M_1)|_{\mathcal{R}} + \vec{p}(M_2)|_{\mathcal{R}} = m_1 \vec{v}(M_1)|_{\mathcal{R}} + m_2 \vec{v}(M_2)|_{\mathcal{R}}.$$

En écrivant :

$$\vec{v}(M_1)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d \overrightarrow{OM_1}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_1})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d \overrightarrow{OG}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d \overrightarrow{GM_1}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

$$\text{et } \vec{v}(M_2)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d \overrightarrow{OG}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d \overrightarrow{GM_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

on obtient :

$$\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}} = (m_1 + m_2) \left(\frac{d \overrightarrow{OG}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d}{dt} (m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2}) \right)_{/\mathcal{R}} \text{ qui s'écrit, en}$$

remarquant que $m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$ et $\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}^*} = \left(\frac{d \overrightarrow{OG}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$:

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F}_{2 \rightarrow 1}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{e \rightarrow 1}) = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{e \rightarrow 1}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{e \rightarrow 2}) = \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{e \rightarrow 2}.$$

En sommant, on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{e \rightarrow 1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{e \rightarrow 2}.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1 M_2}) \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ &= \overrightarrow{OM_1} \wedge (\vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2}) + \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ainsi, en un point O fixe dans \mathcal{R}_g :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}).$$

Théorème 3

Théorème du moment cinétique en un point fixe O [TMC(O)]

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des moments en un **point fixe O** de \mathcal{R}_g des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée temporelle dans \mathcal{R}_g du moment cinétique du système :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$$

O point fixe dans \mathcal{R}_g
$\vec{L}_O(\mathcal{S}) _{\mathcal{R}_g}$ moment cinétique du système (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
t temps (en s)
$\vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$ somme des moments des forces extérieures (en $\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)

En remarquant que : $\vec{L}_O(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g} = \vec{L}_G(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{Mv}(G)|_{\mathcal{R}_g}$, on obtient, en dérivant par rapport au temps dans \mathcal{R}_g :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_O(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} &= \left(\frac{d\vec{L}_G(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} + \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{Mv}(G)|_{\mathcal{R}_g} \\ &\quad + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{M} \left(\frac{d\vec{v}(G)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \\ &= \left(\frac{d\vec{L}_G(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} + \vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g} \wedge \vec{Mv}(G)|_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}_{ext} \end{aligned}$$

Hidden page

en appelant \vec{u} le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\| \overrightarrow{M_1 M_2} \|}$ et r le scalaire défini par $\overrightarrow{M_1 M_2} = r \vec{u}$, on obtient :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{u} \cdot \left(\frac{d(r \vec{u})}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{R}} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{u} \cdot \left(\dot{r} \vec{u} + r \left(\frac{d \vec{u}}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{R}} \right).$$

Comme \vec{u} a une norme constante, $\vec{u} \cdot \left(\frac{d \vec{u}}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{R}} = 0$, donc :

1. $\|\vec{v}\| = \text{cte}$ donc

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{cte}$$

d'où :

$$\left(\frac{d \vec{v}}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \left(\frac{d \vec{v}}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{R}} = 0$$

soit : $\vec{v} \cdot \left(\frac{d \vec{v}}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{R}} = 0$.

et :

Puissance des forces intérieures

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{dr}{dt} \quad (\text{où } r = M_1 M_2)$$

Travail des forces intérieures

$$\delta W_{\text{int}} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot dr$$

- La puissance (ou le travail) des forces intérieures est liée aux variations de distance entre les points M_1 et M_2 : elle n'est en général pas **nulle**.

Si la distance $M_1 M_2$ reste constante (cas où le système est un solide) alors $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

- La distance $r = M_1 M_2$ et la force $F_{1 \rightarrow 2}$ étant deux grandeurs ne dépendant pas du référentiel, il en est de même du travail ou de la puissance des forces intérieures.

B.4.2 - Théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

- Appliquons le TPC dans \mathcal{R}_g à chaque point matériel M_1 et M_2 :

$$\frac{d \mathcal{E}_c(M_1)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_{2 \rightarrow 1}) \Big|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{F}_{c \rightarrow 1}) \Big|_{\mathcal{R}_g}$$

$$\text{et } \frac{d \mathcal{E}_c(M_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) \Big|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{F}_{c \rightarrow 2}) \Big|_{\mathcal{R}_g}.$$

$$\text{En sommant, on obtient : } \frac{d \mathcal{E}_c(\mathcal{S})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}} \Big|_{\mathcal{R}_g}$$

avec $\mathcal{P}_{\text{ext}} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_{c \rightarrow 1}) \Big|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{F}_{c \rightarrow 2}) \Big|_{\mathcal{R}_g}$ et $\mathcal{P}_{\text{int}} = F_{1 \rightarrow 2} \frac{dr}{dt}$ indépendant du référentiel.

Théorème 4

Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des puissances des forces intérieures et des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système :

$$\frac{d \mathcal{E}_c(\mathcal{S})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}} \Big|_{\mathcal{R}_g}$$

$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})$	énergie cinétique (en J)
t	temps (en s)
\mathcal{P}_{int}	puissance des forces intérieures (en W)
\mathcal{P}_{ext}	puissance des forces extérieures (en W)

Attention ! Bien que la somme des forces intérieures et que la somme de leurs moments soient nulles, il faut tenir compte de leurs puissances dans le TPC !

- En intégrant entre deux instants t_1 et t_2 la relation précédente, on obtient :

Théorème 5

$$\text{TEC} \quad \Delta \mathcal{E}_c(\mathcal{F})|_{\mathcal{R}_t} = \mathcal{E}_c(\mathcal{F})(t_2)|_{\mathcal{R}_t} - \mathcal{E}_c(\mathcal{F})(t_1)|_{\mathcal{R}_t} = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}|_{\mathcal{R}_t}.$$

Attention ! Il ne faut pas oublier le travail des forces intérieures !

B.4.3 - Énergie potentielle

Une force étant conservative si son travail entre deux instants ne dépend que des positions initiale et finale du point où elle est appliquée, les forces extérieures $\vec{F}_{e \rightarrow 1}$ et/ou $\vec{F}_{e \rightarrow 2}$ peuvent être conservatives ; de la même manière, les forces intérieures peuvent être conservatives ; dans ce cas le travail des forces intérieures s'écrit :

$$\delta W_{\text{int}} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\overrightarrow{OM_2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot d\overrightarrow{OM_1} = F_{1 \rightarrow 2} dr \text{ avec } r = M_1 M_2 \\ = -d\mathcal{E}_{p_{\text{int}}}(r)$$

où $\mathcal{E}_{p_{\text{int}}}$ est l'**énergie potentielle d'interaction** des points M_1 et M_2 : elle ne dépend, tout comme le travail de ces forces, que de la distance séparant les points M_1 et M_2 et donc pas du référentiel d'étude.

Comme cette énergie potentielle ne dépend pas du référentiel, on peut la calculer dans un référentiel dans lequel M_1 (par exemple) est fixe, ainsi :

$$d\mathcal{E}_{p_{\text{int}}} = -\delta W_{\text{int}} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot d(\overrightarrow{M_1 M_2}) - \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot d(\overrightarrow{M_1 M_1}) \\ = -F_{1 \rightarrow 2} \vec{u} \cdot d(r\vec{u}) + 0 \\ = -F_{1 \rightarrow 2} \vec{u} \cdot (dr\vec{u} + rd\vec{u}) = -F_{1 \rightarrow 2} dr \quad (\text{où } r = M_1 M_2).$$

Application 2 Énergies potentielles d'interaction et de pesanteur

Déterminer l'énergie potentielle d'interaction des forces d'interaction électrostatique et gravitationnelle (forces intérieures), puis l'énergie potentielle de pesanteur (force extérieure) dans le cas où $\vec{g} = \text{cste}$.

Solution

$$\text{Si } \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}, \quad \mathcal{E}_{p_{\text{int}}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}$$

$$\text{si } \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{G m_1 m_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}, \quad \mathcal{E}_{p_{\text{int}}} = -\frac{G m_1 m_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}$$

$$\text{si } \vec{F}_{e \rightarrow 2} = m_2 \vec{g} \text{ et } \vec{F}_{e \rightarrow 1} = m_1 \vec{g}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ext}} &= \vec{F}_{e \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(M_2)|_{\mathcal{R}} + \vec{F}_{e \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(M_1)|_{\mathcal{R}} \\ &= \vec{g} \cdot (m_2 \vec{v}(M_2)|_{\mathcal{R}} + m_1 \vec{v}(M_1)|_{\mathcal{R}}) \\ &= \vec{g} \cdot \vec{Mv}(G)|_{\mathcal{R}} \\ &= (-Mg \vec{u}_z) \cdot \vec{v}(G)|_{\mathcal{R}} = -Mg \frac{dz_G}{dt} = \frac{d}{dt}(-Mgz_G) \quad (\text{axe } (O; \vec{u}_z) \text{ dirigé vers le haut}) \end{aligned}$$

(si z_G est l'altitude de G).

Ainsi si $\delta W_{\text{ext}} = \mathcal{P}_{\text{ext}} dt = d(-Mgz_G) = -d\mathcal{E}_{p_g}$ et $\mathcal{E}_{p_g} = Mg z_G + \text{cte}$.

B.4.4 - Théorème de l'énergie mécanique

En séparant les forces conservatives des autres, le TEC s'écrit dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})(t_2) \Big|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(\mathcal{S})(t_1) \Big|_{\mathcal{R}_g} = W_{\text{ext}}(\vec{F}_{\text{nc}}) \Big|_{\mathcal{R}_g} + W_{\text{ext}}(\vec{F}_{\text{cons}}) \Big|_{\mathcal{R}_g} \\ + W_{\text{int}}(\vec{F}_{\text{nc}}) + W_{\text{int}}(\vec{F}_{\text{cons}})$$

En remplaçant :

$$W_{\text{ext}}(\vec{F}_{\text{cons}}) \Big|_{\mathcal{R}_g} = +\mathcal{E}_{p_{\text{ext}}}(M_1) \Big|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_{p_{\text{ext}}}(M_2) \Big|_{\mathcal{R}_g}$$

$$\text{et } W_{\text{int}}(\vec{F}_{\text{cons}}) = +\mathcal{E}_{p_{\text{int}}}(M_1) \Big|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_{p_{\text{int}}}(M_2) \Big|_{\mathcal{R}_g}$$

on obtient, en définissant l'**énergie mécanique du système** dans \mathcal{R}_g :

$$\mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t, M) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(\mathcal{S})(t) \Big|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_{p_{\text{ext}}}(M) \Big|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_{p_{\text{int}}}(M) \Big|_{\mathcal{R}_g}.$$

Théorème 6

Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

$$\Delta \mathcal{E}_m(\mathcal{S}) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t_2, M_2) \Big|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t_1, M_1) \Big|_{\mathcal{R}_g} \\ = W_{\text{ext}}(\vec{F}_{\text{nc}}) \Big|_{\mathcal{R}_g} + W_{\text{int}}(\vec{F}_{\text{nc}}).$$

$\mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t_2, M_2)$ énergie mécanique finale de \mathcal{S} (en J)

$\mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t_1, M_1)$ énergie mécanique initiale de \mathcal{S} (en J)

$W_{\text{ext}}(\vec{F}_{\text{nc}})$ travail des forces extérieures non conservatives (en J)

$W_{\text{int}}(\vec{F}_{\text{nc}})$ travail des forces intérieures non conservatives (en J)

Théorème 7

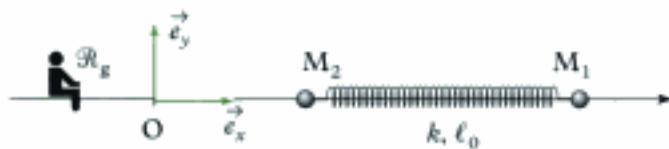
Théorème de la puissance cinétique (TPC)

$\frac{d\mathcal{E}_m(\mathcal{S})}{dt} \Big _{\mathcal{R}_g}$	$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{F}_{\text{nc}}) \Big _{\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{F}_{\text{nc}})$	$\mathcal{E}_m(\mathcal{S})$ énergie mécanique (en J)
		$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{F}_{\text{nc}})$ puissance des forces extérieures non conservatives (en W)
		$\mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{F}_{\text{nc}})$ puissance des forces intérieures non conservatives (en W)

Application 3 Deux masses et un ressort

Deux perles M_1 et M_2 de masses m et $2m$ sont enfilées sur un axe horizontal ($O ; \vec{e}_x$) et peuvent se déplacer sans frottement ; elles sont reliées entre elles par un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 .

Le référentiel d'étude $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est supposé galiléen.



On comprime le ressort : sa longueur est alors d et on le lâche à $t = 0$, le centre de masse du système étant fixe.

- Déterminer le mouvement du centre de masse G du système.
- Exprimer $\overrightarrow{GM}_1(t)$ et $\overrightarrow{GM}_2(t)$ en fonction de la longueur ℓ du ressort à un instant quelconque.
- Appliquer le PFD à M_1 dans \mathcal{R}^* . En déduire l'équation différentielle vérifiée par ℓ .
- La résoudre ; en déduire $\overrightarrow{GM}_1(t)$ et $\overrightarrow{GM}_2(t)$.

Solution

1) En appliquant le théorème du centre de masse au système constitué des points M_1 et M_2 et du ressort, on a :

$$M \left(\frac{d\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{e \rightarrow 1} + \vec{F}_{e \rightarrow 2} = \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R}_2 = \vec{0}.$$

\vec{P}_1 poids de M_1 et \vec{R}_1 réaction du support : $\vec{P}_1 + \vec{R}_1 = \vec{0}$.

\vec{P}_2 poids de M_2 et \vec{R}_2 réaction du support : $\vec{P}_2 + \vec{R}_2 = \vec{0}$.

(En toute rigueur, \vec{R}_1 a une composante selon \vec{e}_y et une selon $\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$, car elle est perpendiculaire au support, mais elle n'est pas utile ici).

$M = m + 2m = 3m$, ainsi $\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{c}\text{te} = \vec{0}$ ($t = 0$) et $\overrightarrow{OG} = \vec{c}\text{te}$.

G est donc fixe dans \mathcal{R}_g .

2) On a : $m\overrightarrow{GM}_1 + 2m\overrightarrow{GM}_2 = \vec{0}$ (par définition de G) et $\overrightarrow{M_2 M_1} = \overrightarrow{M_2 G} + \overrightarrow{GM}_1 = \ell\vec{e}_x$ on résout le système :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GM}_1 + 2\overrightarrow{GM}_2 = \vec{0} \\ \overrightarrow{GM}_1 - \overrightarrow{GM}_2 = \ell\vec{e}_x \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\overrightarrow{GM}_2 = -\frac{\ell}{3}\vec{e}_x \text{ et } \overrightarrow{GM}_1 = +\frac{2\ell}{3}\vec{e}_x.$$

3) G étant fixe dans \mathcal{R}_g , le référentiel \mathcal{R}^* est aussi galiléen ; on peut donc appliquer le PFD à M_1 dans \mathcal{R}^* :

$$m \left(\frac{d^2\overrightarrow{GM}_1}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{e \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1}.$$

En projetant sur \vec{e}_x :

$$m \times \frac{2\ddot{\ell}}{3} = -k(\ell - \ell_0).$$

Ainsi ℓ vérifie :

$$\ddot{\ell} + \frac{3k}{2m}\ell = \frac{3k\ell_0}{2m}.$$

4) La solution s'écrit :

$$\ell(t) = \ell_0 + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \text{ en posant : } \omega_0^2 = \frac{3k}{2m}.$$

À $t = 0$, $\ell(0) = d = \ell_0 + A \Rightarrow A = d - \ell_0$

$$\dot{\ell}(0) = 0 = B\omega_0 \Rightarrow B = 0.$$

Ainsi $\ell(t) = \ell_0 + (d - \ell_0) \cos(\omega_0 t)$

$$\text{et donc : } \overrightarrow{GM}_1 = \frac{2}{3}[\ell_0 + (d - \ell_0) \cos(\omega_0 t)]\vec{e}_x \text{ et } \overrightarrow{GM}_2 = -\frac{1}{3}[\ell_0 + (d - \ell_0) \cos(\omega_0 t)]\vec{e}_x.$$

C. Système isolé de deux points matériels

1. Si le système est isolé, la somme des forces extérieures est nulle et la somme des moments des forces extérieures est nulle.

Dans ce paragraphe, $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ sont deux points matériels en interaction dans le référentiel \mathcal{R}_g galiléen d'origine O ; ils forment un système \mathcal{S} isolé (ou pseudo-isolé) ¹.

Nous cherchons à déterminer les caractéristiques des mouvements de M_1 et M_2 dans \mathcal{R}_g .

C.1. Lois de conservation

C.1.1 - Conservation de la quantité de mouvement

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué dans \mathcal{R}_g au système \mathcal{S} donne :

$$\left(\frac{d\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad (\mathcal{S} \text{ est isolé}).$$

Ainsi $\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g} = M\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g} = m_1\vec{v}(M_1)|_{\mathcal{R}_g} + m_2\vec{v}(M_2)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{\text{cte}}$.

La quantité de mouvement $\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g}$ se conserve au cours du mouvement.

Conséquence :

Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est donc galiléen car il est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_g .

C.1.2 - Conservation du moment cinétique barycentrique

Le théorème du moment cinétique barycentre (TMC^{*}) appliqué au système \mathcal{S} dans \mathcal{R}^* donne :

$$\left(\frac{d\vec{L}^*(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0}.$$

Ainsi :

$$\vec{L}^*(\mathcal{S}) = \vec{\text{cte}}.$$

Le moment cinétique barycentrique se conserve au cours du mouvement.

Conséquence : le mouvement est plan (perpendiculaire à $\vec{L}^*(\mathcal{S})$).

C.1.3 - Conservation de l'énergie mécanique barycentrique

Si les forces intérieures dérivent d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p\text{int}}$ alors le théorème de l'énergie mécanique dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* (galiléen) donne :

$$\mathcal{E}_m^*(\mathcal{S}) = \text{cte},$$

soit

$$\mathcal{E}_c^*(\mathcal{S}) + \mathcal{E}_{p\text{int}} = \text{cte}.$$

Hidden page

C.3. Grandeurs cinétiques du mobile réduit

• Quantité de mouvement

$$\vec{p}^*(M) = \mu \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{/\mathcal{G}^*} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \times \left(-\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) \left(\frac{d\overrightarrow{GM}_1}{dt} \right)_{/\mathcal{G}^*} = -m_1 \vec{v}^*(M_1)$$

de même : $\vec{p}^*(M) = m_2 \vec{v}^*(M_2)$.

Remarque : on retrouve $\vec{p}^*(S) = \vec{0}$ soit $m_1 \vec{v}^*(M_1) + m_2 \vec{v}^*(M_2) = \vec{0}$.

• Moment cinétique

$$\begin{aligned}\vec{L}^*(S) &= \vec{L}^*(M_1) + \vec{L}^*(M_2) \\ &= \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1 \vec{v}^*(M_1) + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2 \vec{v}^*(M_2) \\ &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \wedge m_1 \left(\frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}^*(M) \right) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \wedge m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}^*(M) \right) \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \wedge \vec{v}^*(M) = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^*(M) = \vec{L}^*(M).\end{aligned}$$

Le moment cinétique barycentrique du mobile réduit est le moment cinétique barycentrique du système \mathcal{G} .

• Énergie cinétique

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c^*(S) &= \mathcal{E}_c^*(M_1) + \mathcal{E}_c^*(M_2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 v^{*2}(M_1) + \frac{1}{2} m_2 v^{*2}(M_2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left[\left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v^{*2}(M) \right] + \frac{1}{2} m_2 \left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v^{*2}(M) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^{*2}(M) \\ &= \mathcal{E}_c^*(M).\end{aligned}$$

L'énergie cinétique barycentrique du mobile réduit est l'énergie cinétique barycentrique du système \mathcal{G} .

C.4. Conclusion

L'étude du mobile réduit est celle d'un point matériel M de masse μ soumis à une force centrale \vec{F} passant par le centre de forces G .

On peut appliquer cette méthode aux mouvements des planètes et des satellites artificiels de la Terre (force newtonienne en $\frac{1}{r^2}$) : on se ramène ainsi au chapitre 7 en remarquant que si $m_1 \gg m_2$, le centre de force est confondu avec M_1 et le mobile réduit est confondu avec M_2 (masse m_2).

Par exemple dans l'étude du système Soleil/Terre, le centre de force est confondu avec le centre du Soleil et le mobile réduit est confondu avec le centre de la Terre et possède une masse $\mu = \frac{M_T M_S}{M_T + M_S} \approx M_T$ (car la masse du Soleil M_S est très supérieure à la masse de la Terre M_T : $M_S \gg M_T$).

Le mouvement étant à force centrale et donc plan, il vérifie la loi des aires ($r^2\theta = C$) et on peut définir l'énergie potentielle effective afin d'étudier les types de trajectoires.

Application 4 Deux masses et un ressort (suite)

Reprendre l'application 3 et déterminer, à l'aide du mobile réduit, les positions $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$.

Solution

Le système est pseudo-isolé donc on peut lui appliquer la méthode de réduction du problème à deux corps en un problème à un point matériel M ($\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_2M_1} = \ell \vec{e}_x$) masse $\mu = \frac{m \times 2m}{m + 2m} = \frac{2}{3}m$ soumis à une force centrale : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$ (où ℓ est la longueur du ressort).

Le PFD dans \mathbb{R}^+ appliqué à M(μ) donne :

$$\mu \vec{a}^*(M) = \vec{F} \text{ avec } \vec{a}^*(M) = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{dt^2} \right)_{\mathbb{R}^+}.$$

En projetant sur \vec{e}_x :

$$\frac{2}{3}m\ddot{\ell} = -k(\ell - \ell_0) \text{ soit } \ddot{\ell} + \frac{3k}{2m}\ell = \frac{3k}{2m}\ell_0.$$

En définissant la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$, on retrouve l'équation différentielle de l'application 3 :

$$\ddot{\ell} + \omega_0^2\ell = \omega_0^2\ell_0.$$

On retrouve donc la même solution :

$$\ell(t) = \ell_0 + (d - \ell_0)\cos(\omega_0 t).$$

On retrouve $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$ à l'aide de la définition de G :

$$m\overrightarrow{GM_1} + 2m\overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \text{ soit } \overrightarrow{GM_1} + 2(\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}) = \vec{0},$$

$$\text{soit encore } 3\overrightarrow{GM_1} = -2\overrightarrow{M_1M_2} = +2\ell\vec{e}_x.$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{GM_1} = \frac{2}{3}[\ell_0 + (d - \ell_0)\cos(\omega_0 t)]\vec{e}_x$$

$$\text{et } (\overrightarrow{GM_2} + \overrightarrow{M_2M_1}) + 2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \text{ donne :}$$

$$3\overrightarrow{GM_2} = -\overrightarrow{M_2M_1}, \text{ soit } \overrightarrow{GM_2} = -\frac{1}{3}\ell\vec{e}_x$$

$$\overrightarrow{GM_2} = -\frac{1}{3}[\ell_0 + (d - \ell_0)\cos(\omega_0 t)]\vec{e}_x.$$

L'essentiel

✓ Éléments cinétiques

Soit \mathcal{S} un système de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}(O; (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z))$.

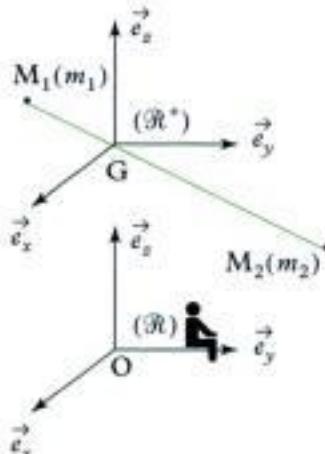
• Masse totale :

$$M = m_1 + m_2.$$

• Centre d'inertie :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\text{ou } m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}.$$



• Référentiel barycentrique

\mathcal{R}^* est un référentiel dans lequel G est fixe qui est en translation par rapport à \mathcal{R} .

• Quantité de mouvement

$$\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}} = \vec{p}(M_1)|_{\mathcal{R}} + \vec{p}(M_2)|_{\mathcal{R}} = M \vec{v}(G)|_{\mathcal{R}}.$$

Remarque : $\vec{p}^*(\mathcal{S}) = \vec{0}$

• Moment cinétique

$$\overrightarrow{L_O}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{L_O}(M_1)|_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{L_O}(M_2)|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{L_{O'}}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}}.$$

Remarque : $\overrightarrow{L_O^*}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L_{O'}}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L}(\mathcal{S})$.

• Énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c(M_1)|_{\mathcal{R}} + \mathcal{E}_c(M_2)|_{\mathcal{R}}.$$

✓ Dynamique du système de deux points

• TCM/TQM :

$$\left(\frac{d\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_t} = M \left(\frac{d\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_t}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_t} = M \vec{a}(G)|_{\mathcal{R}_t} = \vec{F}_{ext}.$$

• TMC :

$$\begin{aligned} &\text{- en } O \text{ fixe dans } \mathcal{R}_g : \left(\frac{d\overrightarrow{L_O}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_t} = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}_{ext}), \\ &\text{- en } G : \left(\frac{d\overrightarrow{L_G}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_t} = \overrightarrow{M_G}(\vec{F}_{ext}). \end{aligned}$$

$$\text{Remarque : } \left(\frac{d\overrightarrow{L_G}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_t} = \left(\frac{d\vec{L}^*(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_t}.$$

$$\bullet \textbf{TPC} : \frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}}|_{\mathcal{R}_t}.$$

Remarque : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ si distance M_1M_2 est constante.

$$\bullet \textbf{TEC} : \Delta\mathcal{E}_c(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t} = \mathcal{E}_c(\mathcal{S})(t_2)|_{\mathcal{R}_t} - \mathcal{E}_c(\mathcal{S})(t_1)|_{\mathcal{R}_t} = \mathbf{W}_{\text{int}} + \mathbf{W}_{\text{ext}}|_{\mathcal{R}_t}.$$

$$\bullet \textbf{TPM} : \frac{d\mathcal{E}_m(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{\mathbf{F}}_{\text{nc}}) + \mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{\mathbf{F}}_{\text{nc}})|_{\mathcal{R}_t} \text{ avec } \mathcal{E}_m(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t} = \mathcal{E}_c(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t} + \mathcal{E}_p(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t}.$$

$$\bullet \textbf{TEM} : \Delta\mathcal{E}_m(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_t} = \mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t_2, M_2)|_{\mathcal{R}_t} - \mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t_1, M_1)|_{\mathcal{R}_t} = \mathbf{W}_{\text{ext}}(\vec{\mathbf{F}}_{\text{nc}})|_{\mathcal{R}_t} + \mathbf{W}_{\text{int}}(\vec{\mathbf{F}}_{\text{nc}}).$$

Mise en œuvre

Méthode 1

Comment utiliser le théorème de la quantité de mouvement (ou du centre de masse) ?

Soit un système \mathcal{S} formé de deux masses. Écrire le TQM appliquée à \mathcal{S} .

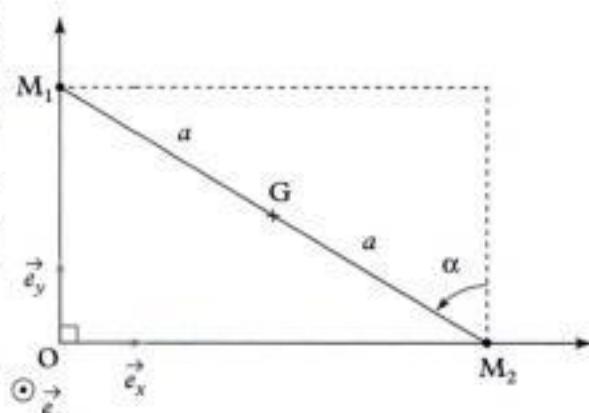
→ Savoir faire

- ① Définir le système étudié.
- ② Définir le référentiel d'étude en précisant s'il est galiléen ou non.
- ③ Etablir un bilan des **forces extérieures** appliquées au système (sans oublier les forces d'inertie si le référentiel n'est pas galiléen).
- ④ Écrire le TQM appliqué au système étudié.

→ Application

On considère un système matériel \mathcal{S} composé d'une tige sans masse de longueur $2a$ au bout de laquelle se trouvent deux masses m aux points M_1 et M_2 . Le point M_1 glisse sans frottement le long de l'axe vertical ($O ; \vec{e}_y$) et le point M_2 glisse sans frottement le long de l'axe horizontal ($O ; \vec{e}_x$). Le point G est le centre de la tige M_1M_2 . On travaille dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen.

Appliquer le théorème de la quantité de mouvement (TQM) dans le référentiel \mathcal{R}_T .



Solution

- ① Système étudié : le système \mathcal{S} composé de la tige sans masse et des deux masses m se trouvant en M_1 et M_2 .
- ② Référentiel d'étude : \mathcal{R}_T galiléen.

③ Bilan des forces extérieures à \mathcal{S} :

- en M_1 :

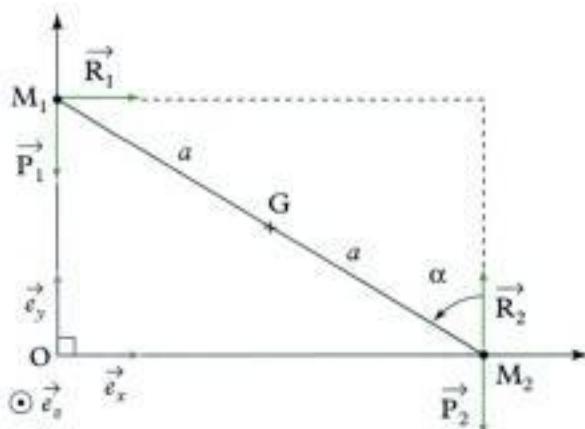
• poids de $M_1(m)$: $\vec{P}_1 = -mg\vec{e}_y$,

• réaction du support : $\vec{R}_1 = R_1\vec{e}_x$ ($\vec{R}_1 \perp$ support car il n'y a pas de frottement lorsque M_1 se déplace).

- en M_2 :

• poids de $M_2(m)$: $\vec{P}_2 = -mg\vec{e}_y$,

• réaction du support : $\vec{R}_2 = R_2\vec{e}_y$ ($\vec{R}_2 \perp$ support car il n'y a pas de frottement lorsque M_2 se déplace).



④ On applique le théorème de la quantité de mouvement (TQM) qui s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{p}(\mathcal{S})}{dt} \right)_{\mathcal{B}_T} = \vec{F}_{\text{ext}}.$$

Il faut tout d'abord déterminer $\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{B}_T}$.

On peut pour cela utiliser la définition :

$$\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{B}_T} = m\vec{v}(M_1)|_{\mathcal{B}_T} + m\vec{v}(M_2)|_{\mathcal{B}_T}.$$

$$\text{Or : } \vec{v}(M_1)|_{\mathcal{B}_T} = \frac{d(\overrightarrow{OM_1})}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_T} = \frac{d}{dt}(2a \cos \alpha \vec{e}_y) = -2a \sin \alpha \dot{\alpha} \vec{e}_y$$

$$\text{et : } \vec{v}(M_2)|_{\mathcal{B}_T} = \frac{d(\overrightarrow{OM_2})}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_T} = \frac{d}{dt}(2a \sin \alpha \vec{e}_x) = 2a \cos \alpha \dot{\alpha} \vec{e}_x.$$

$$\text{Donc : } \vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{B}_T} = 2ma\ddot{\alpha}(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y).$$

On aurait pu utiliser $\vec{p}(\mathcal{I})|_{\mathcal{B}_T} = \vec{p}(G)|_{\mathcal{B}_T}$ qui stipule que la quantité de mouvement du système est la quantité de mouvement de G affecté de la masse totale du système :

$$\vec{p}(\mathcal{I})|_{\mathcal{B}_T} = (m+m)\vec{v}(G)|_{\mathcal{B}_T}$$

$$\text{Or : } \vec{v}(G)|_{\mathcal{B}_T} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_T} \text{ et } \overrightarrow{OG} = a \sin \alpha \vec{e}_x + a \cos \alpha \vec{e}_y.$$

$$\text{Donc } \vec{v}(G)|_{\mathcal{B}_T} = a\dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_x - a\dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_y \text{ et par conséquent :}$$

$$\vec{p}(\mathcal{I})|_{\mathcal{B}_T} = 2ma\dot{\alpha}(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y).$$

$$\text{Et } \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R}_2 = -2mg\vec{e}_y + R_2\vec{e}_y + R_1\vec{e}_x.$$

Ainsi le TQM donne :

$$2ma\ddot{\alpha}(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y) + 2ma\dot{\alpha}(-\dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_x - \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_y) = -2mg\vec{e}_y + R_2\vec{e}_y + R_1\vec{e}_x$$

$$\text{en projection sur } \vec{e}_x : \quad 2ma(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = R_1$$

$$\text{en projection sur } \vec{e}_y : \quad 2ma(-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) = R_2 - 2mg.$$

Hidden page

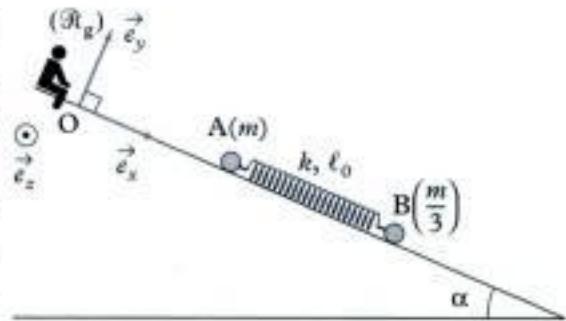
Hidden page

Hidden page

→ Application

Deux masses m et $\frac{m}{3}$ se trouvant aux points A et B sont reliées par un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Ce système peut glisser sans frottement le long d'un axe ($O ; \vec{e}_x$) incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z))$. On abandonne le système sans vitesse initiale, le ressort ayant, à $t = 0$, un allongement x_0 , le point A se trouvant alors en O.

Déterminer dans le référentiel \mathcal{R}_g le mouvement des deux points matériels A et B.



Solution

Afin d'étudier les mouvements de A et B dans le référentiel \mathcal{R}_g , nous allons décomposer le mouvement en deux étapes :

- étude du mouvement du centre de masse G dans \mathcal{R}_g (1) ;
- étude des mouvements de A et B dans \mathcal{R}^* (à partir de l'étude du mouvement du mobile réduit) (2, 3, 4).

1 TCM appliqué au système \mathcal{S}

Système étudié : système \mathcal{S} composé des deux points matériels A(m) et B($\frac{m}{3}$) et du ressort.

Référentiel d'étude : \mathcal{R}_g galiléen.

Bilan de forces extérieures appliquées à \mathcal{S} :

- $\vec{P}_A = -m\vec{g} = mg\sin\alpha\vec{e}_x - mg\cos\alpha\vec{e}_y$ poids de A ;
- $\vec{R}_A = R_A\vec{e}_y$ réaction du support en A (\perp au support) ;
- $\vec{P}_B = -\frac{m}{3}\vec{g} = \frac{m}{3}g\sin\alpha\vec{e}_x - \frac{m}{3}g\cos\alpha\vec{e}_y$ poids de B ;
- $\vec{R}_B = R_B\vec{e}_y$ réaction du support en B (\perp au support).



Les réactions sont perpendiculaires au support car il n'y a pas de frottement pour les objets glissant sur ce support.

Le TCM s'écrit : $(m + \frac{m}{3})\vec{a}(G)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$.

On appelle x_G l'abscisse de G, x_A celle de A et x_B celle de B.

En projection sur \vec{e}_x :

$$\frac{4m}{3}\ddot{x}_G = \frac{4m}{3}g\sin\alpha \quad \text{soit} \quad \ddot{x}_G = g\sin\alpha$$

et en intégrant par rapport au temps : $\dot{x}_G = g\sin\alpha t + \dot{x}_G(t=0)$.

Comme le système est lâché sans vitesse initiale, $\dot{x}_G(t=0) = 0$:

donc $\dot{x}_G = g\sin\alpha t$.

En intégrant une seconde fois par rapport au temps, on obtient :

$$x_G(t) = \frac{g}{2}\sin\alpha t^2 + x_G(t=0).$$

Or comme, par définition de G, on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{mOA} + \frac{m}{3}\overrightarrow{OB}}{m + \frac{m}{3}} = \frac{3\overrightarrow{OA}}{4} + \frac{\overrightarrow{OB}}{4}$$

à $t = 0$: $\overrightarrow{OG}(t = 0) = \vec{0} + \frac{x_0 + \ell_0}{4}\vec{e}_x$, et ainsi :

$$\mathbf{x}_G(t) = g \sin \alpha \frac{t^2}{2} + \frac{x_0 + \ell_0}{4}.$$

② Afin de définir le mobile réduit M, appliquons le PFD dans \mathcal{R}_g à A et B :

PFD appliqué au point A :

$$m\vec{a}(A)\Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{R}_A + \vec{P}_A + \vec{F}_{B \rightarrow A}.$$

PFD appliqué au point B :

$$\frac{m}{3}\vec{a}(B)\Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{R}_B + \vec{P}_B + \vec{F}_{A \rightarrow B}.$$

En projection sur \vec{e}_x :

$$m\ddot{x}_A = mg \sin \alpha + k(x_B - x_A - \ell_0) \quad \text{et} \quad \frac{m}{3}\ddot{x}_B = \frac{m}{3}g \sin \alpha - k(x_B - x_A - \ell_0).$$

 Ne pas oublier les forces $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ et $\vec{F}_{B \rightarrow A}$, forces de rappels élastiques du ressort, qui étaient des forces intérieures pour l'étude du système I, mais qui sont des forces « extérieures » à chaque point matériel A ou B !

Soit

$$\begin{cases} \ddot{x}_A = g \sin \alpha + \frac{k}{m}(x_B - x_A - \ell_0) \\ \ddot{x}_B = g \sin \alpha - \frac{3k}{m}(x_B - x_A - \ell_0). \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient :

$$\frac{d^2(x_B - x_A)}{dt^2} = -\frac{4k}{m}(x_B - x_A - \ell_0).$$

En appelant $r = x_B - x_A$ la longueur du ressort, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{m}{4}\ddot{r} = -k(r - \ell_0),$$

qui est celle du mobile réduit M de masse $\mu = \frac{m}{4}$ se trouvant à la position r du centre de masse G du système : $\overrightarrow{GM} = r\vec{e}_x = \vec{r} = \overrightarrow{AB}$.



$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} = \frac{\frac{m}{3} \times \frac{m}{3}}{\frac{m}{3} + \frac{m}{3}} = \frac{\frac{m^2}{3}}{\frac{4m}{3}} = \frac{m}{4}.$$

③ L'équation différentielle du mobile réduit dans \mathcal{R}^* est :

$$\ddot{r} + \frac{4k}{m}r = \frac{4k}{m}\ell_0 \text{ soit, en posant } \omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}, \quad \ddot{r} + \omega_0^2 r = \omega_0^2 \ell_0.$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$r(t) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t + \ell_0$$

K_1 et K_2 sont déterminées à l'aide des conditions initiales :

$$r(0) = x_B(0) - x_A(0) = \ell_0 + x_0 = K_1 + \ell_0 \Rightarrow K_1 = x_0.$$

Hidden page

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Recul du pistolet

Un pistolet armé est déposé sur le sol, sur lequel il peut se déplacer sans frottement.

À $t = 0$, une balle est tirée. On néglige la force nécessaire pour appuyer sur la gâchette du pistolet.

Le référentiel lié au sol $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Données : masse de la balle $m = 10 \text{ g}$; masse du pistolet $M = 2 \text{ kg}$.

1) Déterminer le mouvement du pistolet après le tir si la vitesse de la balle est $v = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2) Déterminer l'énergie cinétique perdue par le recul du pistolet.

2) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, déterminer les accélérations de M_1 et M_2 , puis les vecteurs position $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.

3) Retrouver ce résultat à l'aide du théorème du moment cinétique en O .

4) Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de l'énergie mécanique (ou de la puissance mécanique).

Ex. 3 Tige tombant sur le sol

On étudie la chute d'un système \mathcal{S} composé d'une tige sans masse et de deux masses m placées aux extrémités de la tige, aux points A et B. Le point A est en contact avec le sol, sur lequel il se déplace sans frottement.

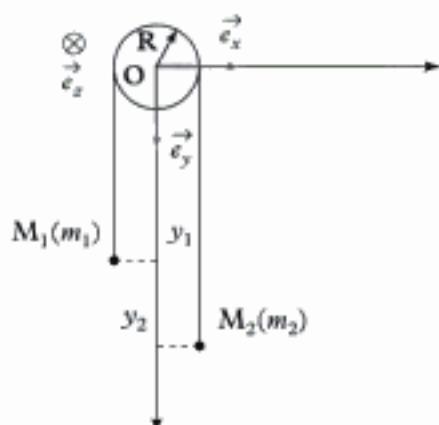
Le point B est lâché avec une vitesse initiale quasi-nulle depuis un angle $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ rad par rapport à l'horizontale $(O; \vec{e}_x)$, liée au référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen. Le point O se trouve, à $t = 0$, à la verticale du centre d'inertie G du système \mathcal{S} .

Niveau 2

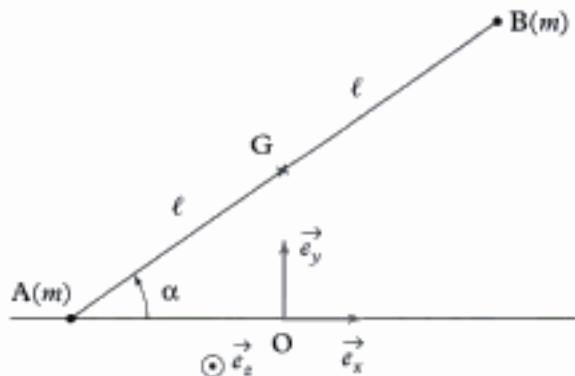
Ex. 2 Systèmes (masses + poulie)

On considère un système composé de deux masses m_1 et m_2 suspendues en M_1 et M_2 , aux extrémités d'un fil sans masse, inextensible, de longueur ℓ . Ce fil passe dans la gorge d'une poulie idéale sans masse de rayon R. Il n'y a aucun frottement (le fil glisse dans la gorge).

Le référentiel d'étude $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen. On suppose que $m_1 > m_2$.



1) Exprimer la longueur ℓ en fonction de y_1 , y_2 et R. En déduire une relation entre y_1 et y_2 puis entre \dot{y}_1 et \ddot{y}_2 .



- 1) Déterminer les caractéristiques du mouvement du centre d'inertie G du système \mathcal{S} .
- 2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement en α . Déterminer l'accélération de G juste au moment où le point B de la tige touche le sol.
- 3) Déterminer la vitesse de G au moment où la tige touche le sol.

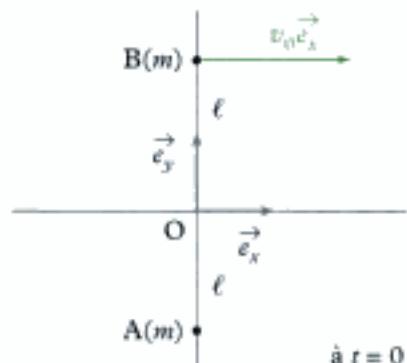
Ex. 4 Deux patineurs

Deux patineurs A et B de masse m se tiennent à bout de bras, à la distance constante 2ℓ : $\overrightarrow{AB} = 2\ell \vec{e}_y$.

(A et B sont initialement sur l'axe $(O; \vec{e}_y)$).

À $t = 0$, on communique au patineur B une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.

On suppose que la liaison entre les deux patineurs est rigide et que le mouvement se fait sans frottement dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen.



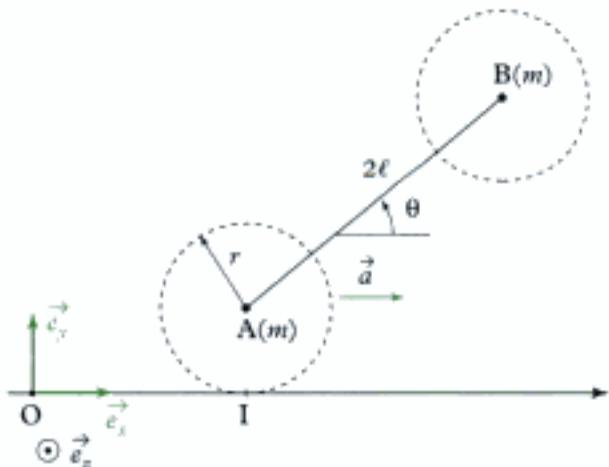
- 1) Déterminer le mouvement du centre d'inertie G du système S formé des deux patineurs.
- 2) Déterminer la vitesse angulaire du point B qui tourne autour de G pour $t \geq 0$.
- 3) Exprimer la tension des bras.
- 4) Que devient la vitesse angulaire si la distance entre les patineurs est, par la suite, divisée par deux ?

Niveau 3

Ex. 5 Wheeling d'une moto

On considère un modèle simplifié de moto, composé d'une tige sans masse de longueur 2ℓ . À chaque extrémité A et B de la tige, se trouve une masse m . Les roues, de masse négligeable, ont un rayon r .

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen. Le motard en accélérant, avec l'accélération $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$, a réussi à lever sa roue avant d'un angle θ , constant dans l'exercice.



Donnée : $\ell = 2r$.

- 1) Déterminer la réaction du sol en I ; conclure sur la présence de frottement.

- 2) Exprimer l'accélération a_0 en fonction de g et de θ .

A.N. $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad.

Ex. 6 Chute d'une tartine

On modélise une tartine par une tige sans masse de longueur $2a$, reliant deux points matériels A et B de masse m .

On étudie la chute de cette tartine depuis le bord d'une table (de hauteur $h \gg a$).

À $t = 0$, le centre d'inertie G de la tartine a comme coordonnées $(d; 0; 0)$ dans le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen, et sa vitesse est nulle.

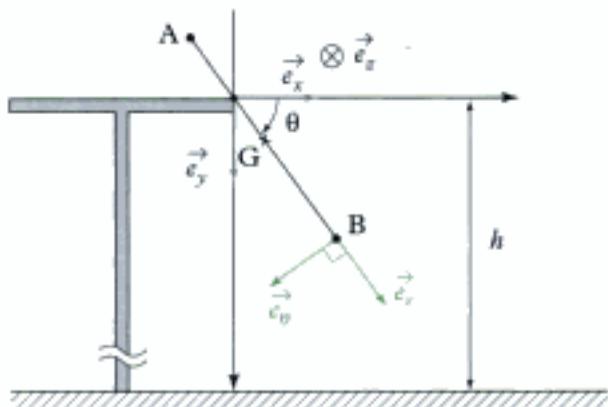
Dans un premier temps la tartine se met à basculer autour de l'arête $(O; \vec{e}_z)$ de la table sans glisser ; dès qu'elle est verticale, elle quitte le contact avec la table et amorce, dans un second temps, une chute libre.

Données :

$a = 2,5 \text{ cm}$;

$d = 0,02a$;

$h = 75 \text{ cm}$.



- 1) Déterminer l'énergie cinétique de la tartine dans \mathcal{R}_g lors de la première phase du mouvement.

- 2) Déterminer l'énergie potentielle de la tartine lors de la première phase du mouvement.

- 3) On suppose que pendant la première phase du mouvement, la tartine est un système conservatif.

Exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de g , d , a et θ .

En déduire la vitesse de G lorsque la tartine quitte la table.

- 4) Déterminer, lors de la seconde phase, la loi horaire $\theta(t)$ (on appellera t_1 l'instant du début de cette phase).

- 5) Déterminer la durée de la chute. En déduire l'angle dont a tourné la tartine.

Conclusion.

Hidden page

Hidden page



La tension se conserve le long du fil et est intégralement transmise par la poulie parfaite.

PDF appliqué à M₁ :

$$m_1 \vec{a}(M_1) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P}_1 + \vec{T}_1 \text{ soit } m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g - T \quad (1)$$

PDF appliqué à M₂ :

$$m_2 \vec{a}(M_2) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P}_2 + \vec{T}_2 \text{ soit } m_2 \ddot{y}_2 = m_2 g - T \quad (2)$$

On élimine T, force inconnue, en faisant (1) - (2)

$$m_1 \ddot{y}_1 - m_2 \ddot{y}_2 = (m_1 - m_2)g, \text{ soit avec } \ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1 : m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2 = (m_1 - m_2)g.$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} g \text{ et } \vec{a}(M_1) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \vec{e}_y$$

$$\text{et } \ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1 \text{ et } \vec{a}(M_2) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \vec{e}_y.$$



Comme $m_1 > m_2$, $\ddot{y}_1 > 0$ et $\ddot{y}_2 < 0$.

• En intégrant :

$$\vec{v}(M_1) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t \vec{e}_y + \vec{v}_0(M_1) \text{ et } \overrightarrow{\mathbf{OM}_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \frac{t^2}{2} \vec{e}_y + \vec{v}_0(M_1)t + \overrightarrow{\mathbf{OM}_1(0)}.$$

De même :

$$\vec{v}(M_2) \Big|_{\mathcal{R}_g} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g t \vec{e}_y + \vec{v}_0(M_2)t \text{ et } \overrightarrow{\mathbf{OM}_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \frac{t^2}{2} \vec{e}_y + \vec{v}_0(M_2)t + \overrightarrow{\mathbf{OM}_2(0)}.$$

3) Appliquons le TMC(O) au système formé de deux points M₁ et M₂, dans le référentiel \mathcal{R}_g .

On exprime le moment des forces extérieures en O (point fixe de \mathcal{R}_g).

- $\overrightarrow{M_O(P_1)} = \overrightarrow{\mathbf{OM}_1} \wedge \vec{P}_1 = \overrightarrow{\mathbf{OM}_1} \wedge m_1 g \vec{e}_y = (-\vec{R} \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y) \wedge m_1 g \vec{e}_y = -m_1 g R \vec{e}_z;$
- $\overrightarrow{M_O(P_2)} = \overrightarrow{\mathbf{OM}_2} \wedge \vec{P}_2 = \overrightarrow{\mathbf{OM}_2} \wedge m_2 g \vec{e}_y = (\vec{R} \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y) \wedge m_2 g \vec{e}_y = m_2 g R \vec{e}_z;$
- $\overrightarrow{M_O(T_1)} = \overrightarrow{\mathbf{OM}_1} \wedge \vec{T}_1 = (-\vec{R} \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y) \wedge (-T \vec{e}_y) = T R \vec{e}_z;$
- $\overrightarrow{M_O(T_2)} = \overrightarrow{\mathbf{OM}_2} \wedge \vec{T}_2 = (\vec{R} \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y) \wedge (-T \vec{e}_y) = -T R \vec{e}_z.$

Le TMC(O) s'écrit : $\left(\frac{d \overrightarrow{L_O(\mathcal{S})} \Big|_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{M_O(F_{ext})}$

$$\text{avec } \overrightarrow{L_O(\mathcal{S})} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{L_O(M_1)} \Big|_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{L_O(M_2)} \Big|_{\mathcal{R}_g}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L_O(\mathcal{S})} \Big|_{\mathcal{R}_g} &= \overrightarrow{\mathbf{OM}_1} \wedge m_1 \vec{v}(M_1) \Big|_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{\mathbf{OM}_2} \wedge m_2 \vec{v}(M_2) \Big|_{\mathcal{R}_g} \\ &= (-\vec{R} \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y) \wedge m_1 \dot{y}_1 \vec{e}_y + (\vec{R} \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y) \wedge m_2 \dot{y}_2 \vec{e}_y \\ &= -m_1 R \dot{y}_1 \vec{e}_z + m_2 R \dot{y}_2 \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Ainsi le TMC(O) s'écrit en projection sur \vec{e}_z :

$$-m_1 R \ddot{y}_1 + m_2 R \ddot{y}_2 = -m_1 g R + m_2 g R + RT - RT.$$

Hidden page

- $\vec{P}_B = -mge_y$ appliquée en B, poids de B ;
- $\vec{R}_A = Re_y$ appliquée en A, réaction du sol (\perp au sol car il n'y a pas de frottement).

Le TCM s'écrit : $3\vec{m}\ddot{a}(G)|_{\mathcal{S}_g} = \vec{F}_{ext} = \vec{P}_A + \vec{P}_B + \vec{R}_A$.

En projection sur \vec{e}_x , avec $G(x_G, y_G)$, il donne :

$$2m\ddot{x}_G = 0 \quad \text{soit} \quad \dot{x}_G(t) = \text{cte.}$$

Comme $\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$, $\vec{v}(G)|_{\mathcal{S}_g} = \frac{\vec{v}(A)|_{\mathcal{S}_g} + \vec{v}(B)|_{\mathcal{S}_g}}{2}$.

Ainsi, à $t = 0$, en projection sur \vec{e}_x :

$$\dot{x}_G(t=0) = \frac{1}{2}[\dot{x}_A(t=0) + \dot{x}_B(t=0)] = 0$$

(la tige est lâchée sans vitesse initiale).

Donc : $\dot{x}_G(t) = 0 \quad \text{soit} \quad x_G(t) = \text{cte} = x_G(t=0) = 0$.

Le mouvement de G se fait uniquement le long de la verticale ($O ; \vec{e}_y$).

En introduisant l'angle α , on a :

$$\vec{OG} = \ell \sin \alpha \vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \vec{v}(G) = \ell \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{a}(G) = \ell(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \vec{e}_y.$$

Le TCM projeté sur \vec{e}_y donne ainsi :

$$2m\ell(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = -2mg + R \quad (1)$$

2) Afin d'obtenir l'équation différentielle du mouvement, il faut une seconde équation reliant α et R. Le TMC* appliqué au système \mathcal{S} permet de l'obtenir.

On exprime d'abord le moment des forces extérieures appliquées à \mathcal{S} :

- $\vec{M}_G(\vec{P}_A) = \vec{GA} \wedge \vec{P}_A = (-\ell \cos \alpha \vec{e}_x - \ell \sin \alpha \vec{e}_y) \wedge (-mge_y) = mg\ell \cos \alpha \vec{e}_z$;
- $\vec{M}_G(\vec{R}_A) = \vec{GA} \wedge \vec{R}_A = (-\ell \cos \alpha \vec{e}_x - \ell \sin \alpha \vec{e}_y) \wedge Re_y = -R\ell \cos \alpha \vec{e}_z$;
- $\vec{M}_G(\vec{P}_B) = \vec{GB} \wedge \vec{P}_B = (\ell \cos \alpha \vec{e}_x + \ell \sin \alpha \vec{e}_y) \wedge (-mge_y) = -mg\ell \cos \alpha \vec{e}_z$.

Le TMC* est : $\frac{d\vec{L}^*(\mathcal{S})}{dt} = \vec{M}_G(\vec{F}_{ext}) = \vec{M}_G(\vec{P}_A) + \vec{M}_G(\vec{P}_B) + \vec{M}_G(\vec{R}_A)$.

Or : $\vec{L}^*(\mathcal{S}) = \vec{GA} \wedge m\vec{v}^*(A) + \vec{GB} \wedge m\vec{v}^*(B)$.

Comme $\vec{GA} = (-\ell \cos \alpha \vec{e}_x - \ell \sin \alpha \vec{e}_y)$, on a : $\vec{v}^*(A) = \ell \dot{\alpha}(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$.

De même : $\vec{v}^*(B) = \ell \dot{\alpha}(-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y)$.

Ainsi : $\vec{L}^*(\mathcal{S}) = m(-\ell \cos \alpha \vec{e}_x - \ell \sin \alpha \vec{e}_y) \wedge \ell \dot{\alpha}(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$
 $+ m(\ell \cos \alpha \vec{e}_x + \ell \sin \alpha \vec{e}_y) \wedge \ell \dot{\alpha}(-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y)$

$$\vec{L}^*(\mathcal{S}) = m\ell^2 \dot{\alpha}(\cos^2 \alpha \vec{e}_z + \sin^2 \alpha \vec{e}_z) + m\ell^2 \dot{\alpha}(\cos^2 \alpha \vec{e}_z + \sin^2 \alpha \vec{e}_z) = 2m\ell^2 \dot{\alpha} \vec{e}_z.$$

Le TMC* donne :

$$2m\ell^2 \ddot{\alpha} \vec{e}_z = -R\ell \cos \alpha \vec{e}_z, \quad \text{soit} \quad 2m\ell \ddot{\alpha} = -R \cos \alpha \quad (2)$$

En reportant R obtenu à partir de (1) dans (2), on obtient :

$$2m\ell\ddot{\alpha} = -\cos\alpha[2mg + 2m\ell(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha)],$$

$$\text{soit } 2\ell\ddot{\alpha}(1 + \cos^2\alpha) + 2g\cos\alpha - 2\ell\cos\alpha\sin\alpha\dot{\alpha}^2 = 0.$$

 On aurait aussi pu utiliser le TMC(G).

Lorsque $\alpha = 0$, on a :

$$2\ell\ddot{\alpha} \times 2 + 2g = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{\alpha} = -\frac{g}{2\ell}.$$

$$\text{Ainsi } \vec{a}(G) = \ell\ddot{\alpha}\vec{e}_y = -\frac{g}{2}\vec{e}_y \text{ (pour } \alpha = 0).$$

 Ce résultat surprenant vient du fait que notre modèle a supposé que seul A était en contact avec le sol : ce résultat n'est plus valable lorsque A et B sont en contact avec le sol, mais juste avant, si.

3) Afin d'obtenir une intégrale première du mouvement, nous allons appliquer le TEM au système \mathcal{S} (comme \mathcal{S} est solide, le travail des forces intérieures est nul).

Pour calculer l'énergie cinétique, on utilise :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(A)|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(B)|_{\mathcal{R}_g},$$

$$\text{or : } \vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OA})|_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(-\ell\cos\alpha\vec{e}_x)|_{\mathcal{R}_g} = \ell\sin\alpha\dot{\alpha}\vec{e}_x.$$

$$\text{Donc : } \mathcal{E}_c(A)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m(\ell\sin\alpha\dot{\alpha})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\sin^2\alpha\dot{\alpha}^2.$$

Par ailleurs :

$$\vec{v}(B)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OB})|_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(\ell\cos\alpha\vec{e}_x + 2\ell\sin\alpha\vec{e}_y)|_{\mathcal{R}_g} = -\ell\sin\alpha\dot{\alpha}\vec{e}_x + 2\ell\cos\alpha\dot{\alpha}\vec{e}_y.$$

$$\text{Donc : } \mathcal{E}_c(B)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m[(\ell\sin\alpha\dot{\alpha})^2 + (2\ell\cos\alpha\dot{\alpha})^2] = \frac{1}{2}m[\ell^2\sin^2\alpha\dot{\alpha}^2 + 4\ell\cos^2\alpha\dot{\alpha}^2].$$

$$\text{D'où : } \mathcal{E}_c(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m[2\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha]\ell^2\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2[2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2\cos^2\alpha].$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{E}_c(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g} = m\ell^2\dot{\alpha}^2(1 + \cos^2\alpha).$$

La seule force qui travaille est la force de pesanteur dérivant d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_p}(\mathcal{S})$.

 \vec{R}_A ne travaille pas car elle est orthogonale au support.

$$\mathcal{E}_{p_p}(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_{p_p}(A) + \mathcal{E}_{p_p}(B) = 0 + mg \times 2, \sin\alpha \text{ si la référence d'énergie potentielle est choisie au niveau de l'axe (O ; } \vec{e}_x).$$

Ainsi le TEM appliqué au système \mathcal{S} dans \mathcal{R}_g donne, en posant $\mathcal{E}_m(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_{p_p}$:

$$\mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t)|_{\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_m(\mathcal{S})(t=0)|_{\mathcal{R}_g} = W(\vec{F}_{nc})|_{\mathcal{R}_g} = 0 \text{ soit } m\ell^2\dot{\alpha}^2(1 + \cos^2\alpha) + 2mg\ell\sin\alpha = 0 + 2mg\ell.$$

On obtient une intégrale première du mouvement :

$$\ell\dot{\alpha}^2(1 + \cos^2\alpha) = 2g(1 - \sin\alpha), \text{ soit } \dot{\alpha}^2 = \frac{2g}{\ell} \frac{1 - \sin\alpha}{1 + \cos^2\alpha}.$$



En dérivant par rapport au temps cette expression on obtient à nouveau le résultat de la question 2.

Pour $\alpha = 0$, $\dot{\alpha}^2 = \frac{g}{\ell}$ donc $\dot{\alpha} = -\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ (car $\alpha < 0$) et par conséquent :

$$\vec{v}(G) = -\ell \sqrt{\frac{g}{\ell}} \vec{e}_y = -\sqrt{\ell g} \vec{e}_y.$$

Exercice 4

1) Le système \mathcal{S} est pseudo-isolé car la somme des forces extérieures appliquées au système \mathcal{S} est nulle (la réaction du sol \vec{R}_A en A compense le poids \vec{P}_A en A, la réaction du sol \vec{R}_B en B compense le poids \vec{P}_B en B).

Ainsi le TQM appliqué dans \mathcal{R}_g donne :

$$\left(\frac{d\vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{ext} = \vec{0} \text{ soit } \vec{p}(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}_g} = \vec{cte}$$

(conservation de la quantité de mouvement).

$$m\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_g} + m\vec{v}(B)|_{\mathcal{R}_g} = 2m\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{cte} = m\vec{v}(A)(t=0)|_{\mathcal{R}_g} + m\vec{v}(B)(t=0)|_{\mathcal{R}_g}.$$

Ainsi :

$$\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{\vec{v}_0}{2} \vec{e}_x.$$



Le référentiel barycentrique est galiléen puisqu'il est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport

$$\text{à } \mathcal{R}_g (\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{cte}).$$

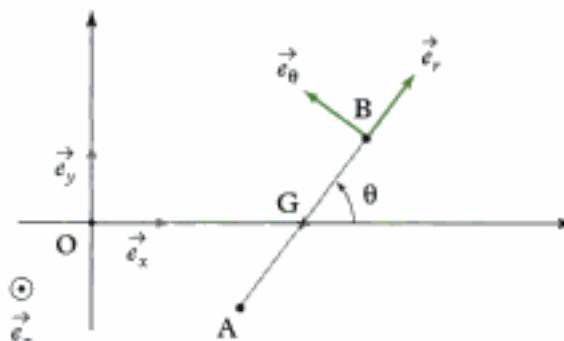
On a donc :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{v}_0 t}{2} \vec{e}_x + \overrightarrow{OG}(0), \text{ soit } \overrightarrow{OG} = \frac{\vec{v}_0 t}{2} \vec{e}_x.$$

2) L'étude peut se faire dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*(G; \vec{e}_x^*, \vec{e}_y^*, \vec{e}_z^*)$; on note θ l'angle $(\vec{e}_x, \overrightarrow{GB})$, $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{GB}}{\|\overrightarrow{GB}\|}$ et \vec{e}_θ tel que : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = +\frac{\pi}{2}$ rad.

Dans \mathcal{R}^* , comme G est fixe dans \mathcal{R}^* , on a :

$$\vec{p}^*(\mathcal{S}) = \vec{cte} = \vec{0} \text{ soit } m\vec{v}^*(A) + m\vec{v}^*(B) = \vec{0}, \text{ d'où } \vec{v}^*(A) = -\vec{v}^*(B).$$



Le TMC^{*} s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}(\mathcal{S})}{dt} = \vec{M}_G(\vec{F}_{ext}).$$

Hidden page

• $\vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y$ réaction de la route appliquée en I.

Le TQM s'écrit :

$$2ma(G) \Big|_{\mathcal{R}_T} = \vec{P}_A + \vec{P}_B + \vec{R} \text{ soit :}$$

$$\vec{R} = 2ma_0 \vec{e}_x + 2mg \vec{e}_y.$$

Ainsi \vec{R} a deux composantes dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) :

$$R_x = 2ma_0 \quad \text{et} \quad R_y = 2mg.$$

Comme \vec{R} n'est pas perpendiculaire à la route, il y a du frottement entre la route et la roue.

2) Appliquons le TMC*(G ; \vec{e}_z) = TMC*(Δ) avec $\Delta = (G ; \vec{e}_z)$.

Moment des forces extérieures par rapport à l'axe (G_z):

$$\bullet M_\Delta(\vec{P}_A) = +\ell \cos \theta \times mg;$$

$$\bullet M_\Delta(\vec{P}_B) = -\ell \cos \theta \times mg;$$

$$\bullet M_\Delta(\vec{R}) = (\ell \sin \theta + r)R_x - r \cos \theta R_y.$$

$$\text{TMC}^*(\Delta): \frac{dL_\Delta(\mathcal{S})}{dt} = M_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}}).$$

$$\text{Or } L_\Delta(\mathcal{S}) = (\vec{GA} \wedge m\vec{v}^*(A)) \cdot \vec{e}_z + (\vec{GB} \wedge m\vec{v}^*(B)) \cdot \vec{e}_z.$$

$$\text{Comme } m\vec{GA} + m\vec{GB} = \vec{0}, \text{ on a : } \vec{v}^*(A) + \vec{v}^*(B) = \vec{0}$$

$$\text{donc } L_\Delta(\mathcal{S}) = 2(\vec{GB} \wedge m\vec{v}^*(B)) \cdot \vec{e}_z = 2(\ell \vec{e}_r \wedge m\ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = 2m\ell^2 \dot{\theta}.$$

$$\text{TMC}^*(\Delta): 2m\ell^2 \ddot{\theta} = (r + \ell \sin \theta)R_x - \ell \cos \theta R_y$$

avec R_x et R_y de la question précédente, on a :

$$2m\ell^2 \ddot{\theta} = (r + \ell \sin \theta) \times 2ma_0 - \ell \cos \theta \times 2mg.$$

Comme $\theta = \text{cte}$ ici :

$$a_0(r + \ell \sin \theta) = \ell g \cos \theta, \quad \text{soit} \quad a_0 = \frac{\ell g \cos \theta}{r + \ell \sin \theta}.$$

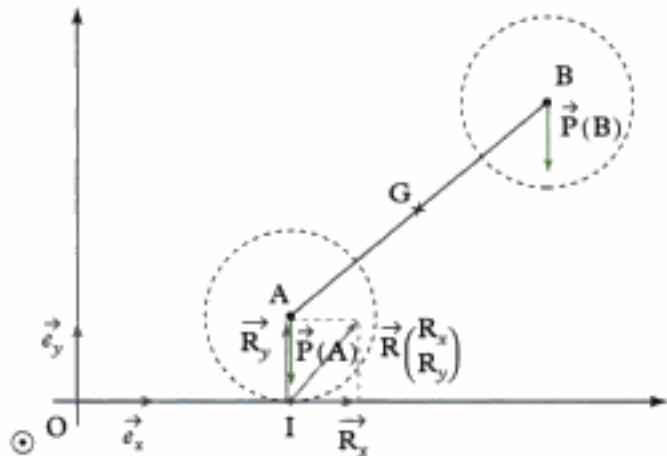
$$\text{Avec } \ell = 2r, \quad a_0 = \frac{2rg \cos \theta}{r + 2rs \sin \theta} = \frac{2g \cos \theta}{1 + 2 \sin \theta}.$$

$$\text{A.N. } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{2 \times 9,81 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \sqrt{2}} \approx 5,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

 On peut dire que l'accélération vaut $0,6 \text{ g}$: le coefficient de frottement entre la roue et route doit être au moins égal à $0,6$!

$$\text{En effet } \frac{\|R_x \vec{e}_x\|}{\|R_y \vec{e}_y\|} = \left| \frac{2ma_0}{2mg} \right| = \left| \frac{a_0}{g} \right| = 0,6 \leq f.$$

 $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$ quand il n'y a pas glissement.



Exercice 6

1) Pour déterminer l'énergie cinétique de la tartine dans \mathcal{R}_g , on peut utiliser la définition :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F})|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(A)|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_c(B)|_{\mathcal{R}_g}.$$

Or $\vec{v}(B)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OB})|_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}((d+a)\vec{e}_r)|_{\mathcal{R}_g} = (d+a)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$;

donc $\mathcal{E}_c(B)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m(d+a)^2\dot{\theta}^2$.

De même : $\vec{v}(A)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OA})|_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}((a-d)(-\vec{e}_r))|_{\mathcal{R}_g} = (a-d)(-\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = (d-a)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Donc $\mathcal{E}_c(A)|_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m(d-a)^2\dot{\theta}^2$.

Au total :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F})|_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m[(d+a)^2 + (d-a)^2]\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(2d^2 + 2a^2)\dot{\theta}^2.$$

Ainsi $\mathcal{E}_c(\mathcal{F})|_{\mathcal{R}_g} = m\dot{\theta}^2(d^2 + a^2)$.

2) La seule force extérieure qui travaille est le poids qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur.

Ainsi : $\mathcal{E}_p(\mathcal{F}) = \mathcal{E}_{p_p}(\mathcal{F}) = -2mgd\sin\theta$. Le travail des forces intérieures est nul car la distance AB = cte.

(La référence d'énergie potentielle est choisie à l'altitude du point O, c'est-à-dire pour $\theta = 0$).

 On a : $\mathcal{E}_{p_p}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}_{p_p}(A) + \mathcal{E}_{p_p}(B) = -mg(d+a)\sin\theta + mg(a-d)\sin\theta = \mathcal{E}_{p_p}(G)$.

3) $\mathcal{E}_m(\mathcal{F})|_{\mathcal{R}_g} = \text{cte}$ équivaut à $\mathcal{E}_c(\mathcal{F})|_{\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_p(\mathcal{F}) = \text{cte}$, soit :

$$m\dot{\theta}^2(d^2 + a^2) - 2mgd\sin\theta = 0 \quad (\text{à } t=0)$$

soit $\dot{\theta}^2 = \frac{2gd\sin\theta}{d^2 + a^2}$.

Lorsque la tartine quitte la table, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad et $\dot{\theta}_f^2 = \frac{2gd}{d^2 + a^2}$

et $\vec{v}(G)|_{\mathcal{R}_g} = -d\dot{\theta}_f\vec{e}_x = -\sqrt{\frac{2gd}{d^2 + a^2}}\vec{e}_x$ (on a alors $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_x$).

4) Posons $\Delta = (G; \vec{e}_z)$ et appliquons le TMC*(Δ) lors de la seconde phase de chute libre.

$$\frac{dL_\Delta^*(\mathcal{F})}{dt} = M_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}}) = (\overrightarrow{GG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{e}_z = 0 \quad \text{donc} \quad L_\Delta^*(\mathcal{F}) = \text{cte}.$$

Or : $L_\Delta^*(\mathcal{F}) = L_\Delta^*(A) + L_\Delta^*(B)$

$$\begin{aligned} &= [\overrightarrow{GA} \wedge \vec{v}^*(A)] \cdot \vec{e}_z + [\overrightarrow{GB} \wedge \vec{v}^*(B)] \cdot \vec{e}_z = 2[\overrightarrow{GB} \wedge \vec{v}^*(B)] \cdot \vec{e}_z \\ &= 2(\ell\vec{e}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = 2m\ell^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

 Comme $m\overrightarrow{GA} + m\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, $\vec{v}^*(A) + \vec{v}^*(B) = \vec{0}$.

Donc $\dot{\theta} = \text{cte} = \dot{\theta}_f$ lors de la seconde phase,

donc $\theta(t) = \sqrt{\frac{2gd}{d^2 + a^2}}(t - t_1) + \frac{\pi}{2}$ (t_1 = durée de la première phase).

5) Appliquons le TQM à la tartine lors de cette seconde phase :

$$2m\vec{a}(G) = \vec{P}_A + \vec{P}_B = 2mg\vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \ddot{y} = g, \quad \text{soit} \quad \dot{y} = g(t - t_1) + \dot{y}(t_1)$$

or $\dot{y}(t_1) = 0$ donc $\dot{y} = g(t - t_1)$ soit $y(t) = g\frac{(t - t_1)^2}{2} + y(t_1)$.

Comme $y(t_1) = d$ on a :

$$y(t) = g\frac{(t - t_1)^2}{2} + d.$$

La durée de la chute T vérifie $h = d + \frac{g}{2}T^2$

soit $T = \sqrt{2\frac{(h-d)}{g}}$ (durée de la seconde phase seulement $T = t_f - t_1$).

La tartine arrive sur le sol avec un angle $\theta(t_f)$ par rapport à l'horizontale :

$$\theta(t_f) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{2gd}{d^2 + a^2}} \sqrt{\frac{2(h-d)}{g}} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{4d(h-d)}{d^2 + a^2}}.$$

Comme $d \ll a \ll h$, on a :

$$\theta(t_f) \approx \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{\frac{dh}{a^2}} \approx \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{\frac{0,02h}{a}}.$$

A.N. $\theta(t_f) \approx \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{\frac{0,02 \times 75 \cdot 10^{-2}}{2,5 \cdot 10^{-2}}} \approx 3,12 \text{ rad} \approx 179^\circ$.



La tartine atterrit donc sur le mauvais côté : celui de la confiture !

Exercice 7

1) $m_1\vec{a}(M_1)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (1) \quad \text{PFD}(M_1)$

$$m_2\vec{a}(M_2)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \quad (2) \quad \text{PFD}(M_2)$$

2) En sommant (1) et (2), on a :

$$m_1\vec{a}(M_1)|_{\mathcal{R}_g} + m_2\vec{a}(M_2)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{0}$$

soit $m_1\left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}_1}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_g} + m_2\left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}_2}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{0}$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}(m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2)\right]_{\mathcal{R}_g} = \vec{0}.$$

Par définition de K, on obtient :

$$(m_1 + m_2)\left(\frac{d^2\overrightarrow{OK}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{d\overrightarrow{OK}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{v}(K)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{cte}.$$

Le mouvement de K dans \mathcal{R}_g est rectiligne uniforme donc \mathcal{R}^* , en translation par rapport à \mathcal{R}_g , est galiléen.

3) En calculant $\frac{(2)}{m_2} - \frac{(1)}{m_1}$, on a :

$$\left(\frac{d^2 \overrightarrow{\text{OM}}_2}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_k} - \left(\frac{d^2 \overrightarrow{\text{OM}}_1}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_k} = \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{m_1}, \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{d^2 \overrightarrow{\text{M}_1 \text{M}_2}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_k} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

 $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ d'après le principe des actions réciproques.

Avec $\vec{r} = \overrightarrow{\text{M}_1 \text{M}_2}$, on a :

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_k} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

En posant $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ la masse réduite, on obtient l'équation différentielle :

$$\mu \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_k \text{ ou } \mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par la particule réduite M située en $\vec{r} = \overrightarrow{\text{KM}}$ de masse μ soumise à la force centrale $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ constamment dirigée vers K dans le référentiel \mathcal{R}^* .

 $\vec{v}^*(M) = \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}^*} = \left(\frac{d \overrightarrow{\text{KM}}}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{R}^*} = \left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right) \Big|_{\mathcal{R}^*}.$

$$4) \quad \mathcal{E}_m(M)|_{\mathcal{R}^*} = \mathcal{E}_c(M)|_{\mathcal{R}^*} + \mathcal{E}_p(M) = \frac{1}{2} \mu v^{*2}(M) - \frac{G m_1 m_2}{r}.$$

$$\text{Et } \mathcal{E}_m(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}^*} = \mathcal{E}_m(M_1)|_{\mathcal{R}^*} + \mathcal{E}_m(M_2)|_{\mathcal{R}^*} = \frac{1}{2} m_1 v^{*2}(M_1) + \frac{1}{2} m_2 v^{*2}(M_2).$$

$$\text{Or : } \overrightarrow{\text{KM}}_1 = \overrightarrow{\text{KO}} + \overrightarrow{\text{OM}}_1 = -\frac{m_1 \overrightarrow{\text{OM}}_1 + m_2 \overrightarrow{\text{OM}}_2}{m_1 + m_2} + \overrightarrow{\text{OM}}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{\text{M}_1 \text{M}_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

$$\text{De même : } \overrightarrow{\text{KM}}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \mathcal{E}_m(\mathcal{S})|_{\mathcal{R}^*} &= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{-m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right)^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2(M) - \frac{G m_1 m_2}{r} = \mathcal{E}_m(M)|_{\mathcal{R}^*}. \end{aligned}$$

L'énergie mécanique de l'étoile double dans \mathcal{R}^* est celle de la particule réduite M dans \mathcal{R}^* .

$$5) \quad \vec{L}^*(K) = \overrightarrow{\text{KM}}_1 \wedge m_1 \vec{v}^*(M_1) + \overrightarrow{\text{KM}}_2 \wedge m_2 \vec{v}^*(M_2).$$

$$\text{Comme } m_1 \overrightarrow{\text{KM}}_1 + m_2 \overrightarrow{\text{KM}}_2 = \vec{0}, \quad m_1 \vec{v}^*(M_1) + m_2 \vec{v}^*(M_2) = \vec{0}:$$

$$\vec{L}^*(K) = (\overrightarrow{\text{KM}}_1 - \overrightarrow{\text{KM}}_2) \wedge m_1 \vec{v}^*(M_1) = \overrightarrow{\text{M}_2 \text{M}_1} \wedge m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \vec{v}^*(M) = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}^*(M).$$

Le moment cinétique de l'étoile double dans \mathcal{R}^* est celui de la particule réduite M dans \mathcal{R}^* .

Hidden page

Hidden page

Problèmes

Problème 1 : Les mouvements cométaires (extinction des dinosaures)

Il y a de cela environ 65 millions d'années, les dinosaures et de nombreuses autres espèces vivantes, terrestres et aquatiques, animales et végétales, ont été victimes d'une extinction massive et brutale (événement K/T, à la limite des périodes crétacée (K) et tertiaire (T)).

Parmi les diverses hypothèses proposées, celle qui recueille à l'heure actuelle le plus de suffrages dans la communauté scientifique est celle de l'impact d'une comète à la surface de la Terre. Ce problème examine quelques-uns des aspects de la description mécanique d'un tel impact.

Les mouvements cométaires

Un ensemble d'astéroïdes de faible dimension se trouve vraisemblablement réparti, dans le système solaire, à grande distance du Soleil (au-delà de l'orbite de Pluton).

La masse totale de ces astéroïdes (nuage de Oort) représente environ le tiers de la masse totale des neuf planètes et de leurs satellites.

Lorsqu'un de ces astéroïdes est suffisamment dévié de sa trajectoire quasi-circulaire par l'effet gravitationnel d'autres astéroïdes et planètes pour s'approcher à très courte distance du Soleil, il prend le nom de comète.

Nous étudions ici les caractéristiques du mouvement d'une comète hypothétique, qui pourrait, à certains égards, ressembler à celle qui fut peut-être responsable de l'événement K/T.

Cette comète C, de masse $m = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ kg}$, est considérée comme sphérique, de rayon $r_c = 10^4 \text{ m}$; sa trajectoire autour du Soleil est une ellipse très allongée.

La comète C est aussi caractérisée par une distance maximale au Soleil : $d_{\max} = 5 \cdot 10^4 a$, où $a = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ est le rayon de la trajectoire terrestre (supposée circulaire) autour du Soleil (a est appelé unité astronomique).

Elle est enfin caractérisée par une période de mouvement notée T . On note T_0 la période du mouvement terrestre autour du Soleil.

1) Déterminer numériquement la vitesse v_0 de la Terre sur son orbite circulaire autour du Soleil.

2) On note G la constante de la gravitation universelle et M_S la masse du Soleil. Exprimer le produit GM_S en fonction de v_0 et a .

3) La distance minimale de C au Soleil est notée d_{\min} .

Exprimer, en fonction de d_{\max} , d_{\min} , a et v_0 , les vitesses maximales v_{\max} et minimale v_{\min} de C sur son orbite.

On pourra utiliser des relations de conservation.

4) Quelle relation doivent vérifier d_{\min} et a pour qu'un impact de C sur la surface de la Terre puisse être envisagé ?

En déduire une évaluation numérique de la plus petite valeur possible pour v_{\max} .

5) On choisira dans la suite $d_{\min} = a$.

Quelles sont les valeurs extrêmes possibles de la vitesse relative de la Terre et de C (vitesse d'impact) au moment du choc de C sur la Terre ?

D'après le concours Mines Ponts 2000.

Hidden page

Hidden page

Or $v_{\max} = v_0 \sqrt{2a \frac{d_{\max}}{d_{\min}(d_{\min} + d_{\max})}}$ donc :

$$v_{\max} > v_0 \sqrt{2a \frac{d_{\max}}{a(a + d_{\max})}}, \text{ soit } v_{\max} > v_0 \sqrt{\frac{2d_{\max}}{(a + d_{\max})}}.$$

De plus, $d_{\max} \gg a$; on peut donc écrire plus simplement :

$$v_{\max} > v_0 \sqrt{\frac{2d_{\max}}{d_{\max}}}, \text{ soit } v_{\max} > \sqrt{2}v_0.$$

A.N. $v_{\max} > \sqrt{2} \times 29,9 = 42,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

5) Si $d_{\min} \approx a$, la collision a lieu au périgée, quand v est maximale :

- si la comète a une vitesse opposée à celle de la Terre alors :

$$v_{\text{impact}} = v_0 + \sqrt{2}v_0;$$

- si la comète a une vitesse de même sens que celle de la Terre :

$$v_{\text{impact}} = \sqrt{2}v_0 - v_0.$$

Ainsi : $(\sqrt{2} - 1)v_0 \leq v_{\text{impact}} \leq (\sqrt{2} + 1)v_0$.

A.N. $12,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \leq v_{\text{impact}} \leq 72,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Problème 2 : Vibrations de molécules

Le problème est consacré à l'étude des vibrations rectilignes, forcées par un rayonnement infrarouge, de molécules de CO ; on s'intéresse en particulier à la valeur des fréquences de vibration et à leurs modifications causées par différents effets. On étudie les vibrations de la molécule isolée.

Données numériques :

- Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- Masse molaire du carbone : $12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- Masse molaire de l'oxygène : $16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Une molécule de CO dont le centre de masse est immobile, est modélisée par deux masses ponctuelles, m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour l'atome d'oxygène. On ne considérera dans tout le problème que les déplacements rectilignes des atomes le long de l'axe x' de la molécule à l'équilibre et on négligera la gravitation.

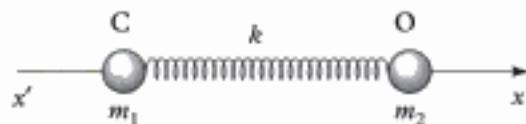
1) Lorsqu'ils sont dans un état lié, l'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique, dite de Morse :

$$V(r) = V_0 [1 - e^{-\beta(r-r_0)}]^2,$$

où r est la distance des noyaux des deux atomes et V_0 , β et r_0 sont des constantes positives avec $\beta r_0 \gg 1$.

a) Tracer un graphe de $V(r)$. Que représentent physiquement les paramètres V_0 et r_0 ? Quelle est la dimension de β ?

b) Montrer qu'il existe un domaine de distances où l'énergie potentielle d'interaction peut être modélisée par celle d'un ressort de constante de raideur k que l'on précisera (figure ci-dessous). On conservera cette approximation dans toute la suite du problème.



2) Soient x_1 et x_2 les écarts aux positions d'équilibre des atomes C et O respectivement.

a) Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour chaque atome.

b) En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement relatif $s = x_2 - x_1$, puis la résoudre. Exprimer la pulsation propre ω_0 et la fréquence v_0 correspondante en fonction de k et de la masse réduite μ définie par $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

c) Exprimer que le centre de masse de la molécule est immobile. En déduire le rapport des amplitudes du mouvement de chaque atome et justifier le terme de vibration d'elongation utilisé pour décrire cette vibration.

d) La fréquence v_0 mesurée pour des molécules de CO isolées est $6,425 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$, et leur énergie de dissociation est $1,77 \cdot 10^{-18} \text{ J}$.

Déterminer les valeurs des constantes k et β .

e) Quelle serait la fréquence v' de vibration pour la molécule ^{13}CO ?

Sachant que la résolution spectrale en spectroscopie infrarouge est de l'ordre de 10^{11} Hz , peut-on séparer les fréquences de vibration.

3) La molécule de CO est une molécule polaire possédant un moment dipolaire permanent $\vec{p}_0 = p_0 \vec{u}_x$, où \vec{u}_x est le vecteur unitaire de l'axe x' . Dans un modèle simple, on considère que l'atome C porte une charge positive $+\delta$ qui lui est rigidement liée et l'atome O une charge $-\delta$ également rigidement liée. On éclaire la molécule au moyen d'un rayonnement infrarouge dont le champ électrique oscillant à la pulsation ω est donné, dans la notation complexe, par :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega x} = E_0 \vec{u}_x e^{i\omega x}.$$

a) Justifier que le champ \vec{E}_0 est vu comme uniforme par la molécule de CO. On prendra cette approximation dans la suite.

b) Écrire les équations du mouvement de chaque atome.

c) En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement relatif $s = x_2 - x_1$. Déterminer sa solution en régime sinusoïdal permanent sous la forme : $s = a e^{i\omega x}$.

Exprimer a en fonction de ω , ω_0 , E_0 , δ et μ .

d) Du fait du déplacement des atomes, le moment dipolaire de la molécule devient $\vec{p}_0 + \vec{p} e^{i\omega x}$, où $\vec{p} e^{i\omega x}$ est le moment dipolaire induit par le champ électrique.

Exprimer \vec{p} en fonction de δ , μ , ω_0 , ω et \vec{E}_0 .

e) On définit la polarisabilité de vibration $\alpha_v(\omega)$ par : $\vec{p} = \alpha_v(\omega) \epsilon_0 \vec{E}_0$.

Exprimer puis tracer schématiquement $\alpha_v(\omega)$ en fonction de ω . À quelle pulsation l'effet du champ électrique sera-t-il le plus grand?

Quelles remarques peut-on faire sur la valeur alors atteinte par la polarisabilité?

Indications

2) e) ^{13}C est un isotope du carbone de masse atomique molaire : $13 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

3) a) Longueur d'onde de l'infrarouge :

$\lambda \geq 800 \text{ nm}$.

d) Dans ce cas : $\vec{p} = \delta(-s\vec{u}_x) = \delta(x_1 - x_2)\vec{u}_x$.

D'après le concours Polytechnique 1998.

Solution du problème 2

1) L'énergie potentielle d'interaction des 2 atomes est donnée dans l'énoncé :

$$V(r) = V_0[1 - e^{-\beta(r-r_0)}]^2.$$

a) Pour tracer la fonction $r \mapsto V(r)$, établissons son tableau de variation :

$$V(r=0) = V_0[1 - e^{\beta r_0}]^2.$$

La condition $\beta r_0 \gg 1$ montre qu'en fait $V(r \rightarrow 0^+) = +\infty$; $V(r \rightarrow +\infty) = V_0$

$$\text{et } \frac{dV}{dr} = V_0 \times 2[1 - e^{-\beta(r-r_0)}] \times (-e^{-\beta(r-r_0)}) \times (-\beta) = V_0 \times 2[1 - e^{-\beta(r-r_0)}] \times \beta \times e^{-\beta(r-r_0)}$$

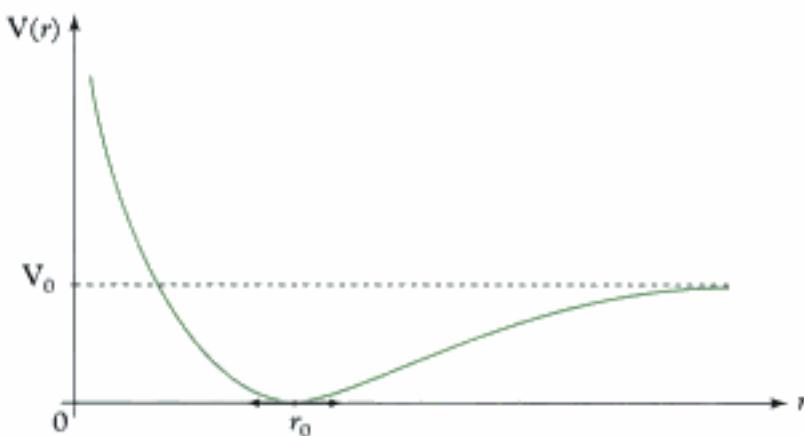
$$\frac{dV}{dr} \geq 0 \text{ d'où } 1 - e^{-\beta(r-r_0)} \geq 0, \text{ donc } 1 \geq e^{-\beta(r-r_0)}, \text{ puis } 0 \geq -\beta(r-r_0), \text{ donc } r \geq r_0.$$

Donc le tableau de variation de $V(r)$ s'écrit :

r	0	r_0	$+\infty$
$\frac{dV}{dr}$	-	0	+
$V(r)$	$+\infty$	0	V_0

$V(r=r_0) = 0$

D'où la représentation graphique de $V(r)$:



Comme βr_0 est sans dimension et que r_0 est en m, on a **β en m^{-1}** .

Pour $r = r_0$, $V(r)$ est minimum donc $r = r_0$ représente une position d'équilibre.

De plus : $\frac{d^2V}{dr^2} = V_0 \times 2[\beta e^{-\beta(r-r_0)}] \times \beta e^{-\beta(r-r_0)} + V_0 \times 2[1 - e^{-\beta(r-r_0)}] \times (-\beta)^2 e^{-\beta(r-r_0)}$.

$(uv)' = u'v + uv'$.

$\frac{d^2V}{dr^2}(r = r_0) = 2V_0\beta^2 > 0$; donc $r = r_0$ représente une position d'équilibre stable de la molécule.

V_0 représente l'énergie nécessaire pour faire passer la molécule de sa position d'équilibre ($V(r = r_0) = 0$) à deux atomes dissociés ($V(r \rightarrow +\infty) = V_0$).

V_0 représente donc l'énergie de dissociation de la molécule.

b) Si on se place au voisinage de la position d'équilibre $r = r_0$, on peut faire un développement limité à l'ordre 2 de $V(r)$:

$$V(r) = V(r_0) + \frac{dV}{dr}(r = r_0) \times (r - r_0) + \frac{d^2V}{dr^2}(r = r_0) \times \frac{(r - r_0)^2}{2}$$

$$V(r) = 0 + 0 \times (r - r_0) + 2V_0\beta^2 \times \frac{(r - r_0)^2}{2} = \frac{1}{2} \times 2V_0\beta^2(r - r_0)^2.$$

Si on modélise l'énergie potentielle d'interaction par celle d'un ressort de raideur k , on a :

$$V(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2.$$

Ainsi en identifiant terme à terme, on a, dans un voisinage de r_0 :

$$k = 2V_0\beta^2.$$

2) a) Comme indiqué, appliquons le PFD à C.

Système : atome C (masse m_1).

Référentiel galiléen : $\mathcal{R}(A ; \vec{e}_x)$ où A est un point fixe quelconque de l'axe ($x'x$) et $\vec{e}_x = \frac{\overrightarrow{CO}}{\|\overrightarrow{CO}\|}$ (avec $\|\overrightarrow{CO}\| = r$).

Forces extérieures appliquées au système :

- poids, négligé ;
- forces d'interaction $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = +k(r - r_0)\vec{e}_x$.

Équation du PFD :

$$m_1 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{AC}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = +k(r - r_0)\vec{e}_x \quad (1)$$

Attention au signe de la force de rappel.

À l'équilibre :

$$m_1 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{AC}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0} \quad (2)$$

$$(1) - (2) \text{ donne : } m_1 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{AC}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = k(r - r_0)\vec{e}_x \quad \text{soit} \quad m_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} (x_1 \vec{e}_x) \right)_{/\mathcal{R}} = k(r - r_0)\vec{e}_x.$$

En projetant sur \vec{e}_x : $m_1 \ddot{x}_1 = k(r - r_0)$.

De plus : $r - r_0 = x_2 - x_1$. Donc l'équation différentielle s'écrit :

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1).$$

On effectue la même démarche sur l'atome O :

$$m_2 \left(\frac{d^2 \vec{AO}}{dr^2} \right)_{/\vec{R}} = -k(r - r_0) \vec{e}_x.$$

Attention au signe de la force de rappel.

Soit avec les informations à l'équilibre :

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1).$$

b) Les deux équations différentielles s'écrivent :

$$\ddot{x}_1 = \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) \quad (4)$$

(4) - (3) donne :

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1), \text{ soit } \ddot{s} = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) s.$$

Si on pose $\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}$, on peut écrire :

$$\ddot{s} = -\frac{k}{\mu} s, \text{ soit } \ddot{s} + \frac{k}{\mu} s = 0.$$

La pulsation propre s'écrit : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$;

et la fréquence propre : $v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$.

c) G est défini par :

$$\vec{AG} = \frac{m_1 \vec{AO} + m_2 \vec{AC}}{m_1 + m_2}, \quad (5)$$

À l'équilibre :

$$\vec{AG}_e = \frac{m_1 \vec{AO}_e + m_2 \vec{AC}_e}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

(5) - (6) donne : $\vec{G}_e \vec{G} = \frac{m_1 \vec{O}_e \vec{O} + m_2 \vec{C}_e \vec{C}}{m_1 + m_2}$.

Comme G est fixe (voir l'énoncé) $\vec{G}_e \vec{G} = \vec{0}$ donc :

$$\vec{0} = \frac{m_1 x_1 \vec{e}_x + m_2 x_2 \vec{e}_x}{m_1 + m_2} \text{ soit } \frac{x_2}{x_1} = -\frac{m_1}{m_2}.$$

De plus, on introduisant $s = x_2 - x_1$, on a :

$$0 = m_1 x_1 + m_2 x_2, \text{ soit } 0 = m_1(x_2 - s) + m_2 x_2, \text{ d'où } 0 = (m_1 + m_2)x_2 - m_1 s.$$

Donc :

$$x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} s.$$

Hidden page

c) Par analogie avec 2) b), $\frac{(7)}{m_1} - \frac{(8)}{m_2}$ donne :

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) + \frac{\delta}{m_1}E_0 e^{i\omega t} + \frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{\delta}{m_2}E_0 e^{i\omega t}$$

$$-\ddot{s} = \frac{k}{\mu}s + \frac{\delta}{\mu}E_0 e^{i\omega t}$$

Donc :

$$\ddot{s} + \frac{k}{\mu}s = -\frac{\delta}{\mu}E_0 e^{i\omega t}.$$

En posant $s = ae^{i\omega t}$, on obtient :

$$-\omega^2ae^{i\omega t} + \frac{k}{\mu}ae^{i\omega t} = -\frac{\delta}{\mu}E_0 e^{i\omega t}, \text{ d'où } a = \frac{-\frac{\delta}{\mu}E_0}{\frac{k}{\mu} - \omega^2}.$$

Or $\omega_0^2 = \frac{k}{\mu}$, donc $a = \frac{\frac{\delta}{\mu}E_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$.

 C'est la procédure classique pour l'étude d'un régime forcé (voir chapitre 5).

d) On a : $\vec{p}_T = \vec{p}_0 - \delta s \vec{u}_x = \vec{p}_0 - \delta a e^{i\omega t} \vec{u}_x$, donc $\vec{p} = -\delta a \vec{u}_x$.

$$\text{Donc : } \vec{p} = -\delta \frac{\frac{\delta}{\mu} E_0 \vec{u}_x}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{\frac{\delta^2}{\mu} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{u}_x.$$

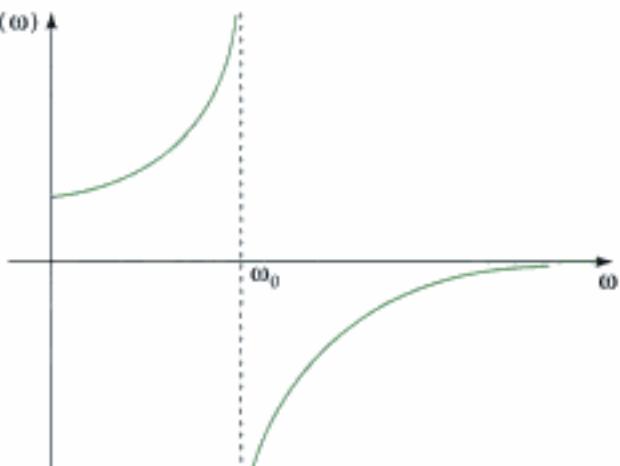
e) Si \vec{p} s'écrit $\vec{p} = \alpha_v \epsilon_0 \vec{E}_0$, on peut identifier $\alpha_v(\omega)$ avec l'expression retrouvée dans la question précédente :

$$\alpha_v \epsilon_0 = \frac{\frac{\delta^2}{\mu}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\alpha_v(\omega) = \frac{\frac{\delta^2}{\mu} \epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

dont la représentation schématique est donnée ci-contre.

L'effet du champ électrique est le plus grand (ici infini) pour $\omega = \omega_0$. Cette valeur infinie n'est évidemment pas physique. Un phénomène dissipatif n'a pas été pris en compte ; ceci aurait permis d'obtenir une valeur de la polarisabilité finie pour toute valeur de ω avec un maximum pour une valeur proche (cette fois) de ω_0 .



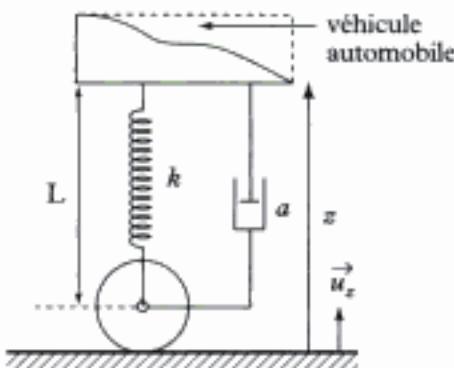
Problème 3 : Comportement routier d'une automobile

On se propose d'étudier quelques problèmes relatifs à la suspension d'un véhicule automobile et au comportement dynamique de ce véhicule sur route déformée.

A) Modèle simplifié de la suspension

La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants, montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, et constitués chacun :

- d'un ressort métallique hélicoïdal de constante de raideur k et de longueur à vide L_0 .
- d'un amortisseur tubulaire à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux de coefficient d'amortissement a .



On suppose que la masse M du châssis est également répartie entre les quatre systèmes. Les pneus de rayon extérieur R sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude. Tous les déplacements verticaux seront comptés algébriquement vers le haut (\vec{u}_z vecteur unitaire vertical).

- 1) Le véhicule étant immobile sans frein sur un sol horizontal, quelle est la longueur L_0 des ressorts au repos et la garde au sol z_0 du véhicule ?
- 2) Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé d'une hauteur h , puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

- a) Établir l'équation différentielle de la position verticale $z(t)$ du châssis par rapport au sol sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \beta z = \delta,$$

α , β , δ étant des constantes que l'on exprimera en fonction de a , k , M et z_0 .

- b) On usine l'amortisseur de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final le plus bref possible. Quelle doit être la valeur de α en fonction β ? En déduire celle de a en fonction de M et k .

c) Déterminer alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de z_0 , h et $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}$?

d) Tracer avec soin le graphe $z(t)$ (on prendra pour échelle $z_0 = 1$, $h = \frac{z_0}{4}$, $\omega_0 = 1$).

3) On effectue de nouveau le même essai en charge nominale, le véhicule contenant quatre masses égales chacune à m également réparties sur les quatre systèmes (ressort-amortisseur), la garde au sol étant z'_0 .

- a) Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et l'écrire sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha' \dot{z} + \beta' z = \delta',$$

en exprimant les nouvelles constantes α' , β' et δ' en fonction de a , k , m et z'_0 .

- b) Montrer que, dans ces conditions, le véhicule oscille.

c) Déterminer l'expression de la période T des oscillations autour de la position d'équilibre finale en fonction de k , M et m .

d) On souhaite obtenir $T = \frac{\pi}{3}$ pour $M = 1\,000\text{ kg}$ et $m = 100\text{ kg}$. En déduire la valeur de k puis de a .

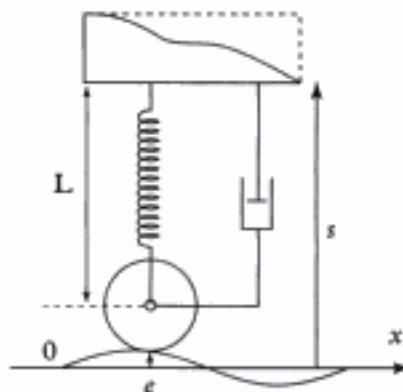
B) Étude de la réponse harmonique

- 1) On étudie maintenant le comportement sur route difficile du véhicule avec ses quatre passagers de masse m chacun.

- a) On modélise la route rectiligne dans la direction x par un sol ondulé sinusoïdalement autour de la côte de référence horizontale 0 suivant la relation :

$$e = e_m \cos(\gamma x).$$

Quelle est la distance λ entre deux bosses exprimée en fonction de γ ? Quelle est la pulsation ω des oscillations verticales imposées aux roues si le véhicule roule sur cette route à une vitesse constante V ?



- b)** On repère maintenant le chassis par sa position $s(t)$ par rapport à la cote de référence 0 liée au référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige le décalage angulaire du point de contact pneu-route par rapport à la verticale. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ du chassis est de la forme :

$$\ddot{s} + \alpha' \dot{s} + \beta' s = f + \delta',$$

où f est une fonction du temps que l'on exprimera en fonction de e et \dot{e} .

- 2)** On étudie le régime forcé permanent.

- a)** Expliquer la signification de cette expression.
b) En utilisant les notations complexes, exprimer l'amplitude complexe S des oscillations du chassis en fonction de e_m , $\bar{\omega}$, α' et β' . L'écrire sous la forme :

$$S = e_m \frac{1 + j \frac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j \frac{\Omega}{Q}},$$

où $\Omega = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0'}$ est la pulsation réduite, ω_0' et Q étant des constantes que l'on exprimera en fonction de α' et β' puis de a , k , M et m .

- c)** En déduire l'amplitude S des oscillations en fonction de Ω et Q . Que vaut-elle si $\Omega = 1$?

- d)** Montrer que S atteint un maximum S_m pour une pulsation réduite Ω_m que l'on déterminera en fonction de Q , et démontrer que :

$$\frac{S_m}{e_m} = \sqrt{\frac{1}{1 - \Omega_m^4}},$$

- e)** Calculer Q , Ω_m et $\frac{S_m}{e_m}$.

- f)** Tracer avec soin le graphe (ou l'allure du graphe si la question précédente n'a pas été faite)

donnant $\frac{S_m}{e_m}$ en fonction de Ω dans la plage $0 \leq \Omega \leq 10$.

- g)** Calculer la pulsation propre ω_0' . En déduire la distance λ_m entre les ondulations du sol provoquant la résonance des oscillations du chassis si le véhicule roule à une vitesse V de 90 km/h. Comment réagit le chassis sur des déformations plus rapprochées passées à la même vitesse ?

D'après le concours EIA 1999.

Solution du problème 3

A) 1) Le véhicule étant immobile, on est donc à l'équilibre. Pour trouver la longueur L_e , on peut appliquer le PFS à $\frac{1}{4}$ de la masse M de la voiture.

Système étudié : point A, un quart de la voiture (masse $\frac{M}{4}$) ;

Référentiel galiléen : $\mathcal{R}_g(O; \vec{u}_z)$;

Forces appliquées :

- poids $\vec{P} = \frac{M}{4} \vec{g} = -\frac{M}{4} g \vec{u}_z$;
- force de rappel élastique $\vec{F}_r = -k(L_e - L_0) \vec{u}_z$;
- frottement visqueux $\vec{F}_f = \vec{0}$ (à l'équilibre).

Le PFS s'écrit :

$$\vec{0} = -\frac{M}{4} g \vec{u}_z - k(L_e - L_0) \vec{u}_z + \vec{0}.$$

En projection sur \vec{u}_z , cela donne :

$$\frac{M}{4} g = k(L_0 - L_e), \text{ soit } L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k}.$$

On en déduit la garde au sol à l'équilibre :

$$z_0 = R + L_e, \text{ soit } z_0 = R + L_0 - \frac{Mg}{4k}.$$

2) a) On reprend la même démarche mais cette fois-ci, on est en mouvement ; on applique le PFD.

Forces appliquées :

- poids $\vec{P} = -\frac{M}{4} g \vec{u}_z$;
- force de rappel élastique $\vec{F}_r = -k(L - L_0) \vec{u}_z$;
- force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -a \dot{L} \vec{u}_z$.

Le PFD s'écrit :

$$\frac{M}{4} \ddot{a}(A)|_{\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{F}_f.$$

Or $\ddot{a}(A)|_{\mathcal{R}_g} = \ddot{L} \vec{u}_z$, donc :

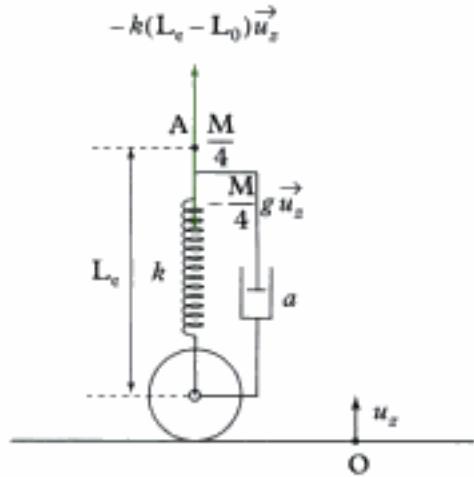
$$\frac{M}{4} \ddot{L} \vec{u}_z = -\frac{M}{4} g \vec{u}_z - k(L - L_0) \vec{u}_z - a \dot{L} \vec{u}_z.$$

En projection sur \vec{u}_z , cela donne :

$$\frac{M}{4} \ddot{L} = -\frac{Mg}{4} - k(L - L_0) - a \dot{L}.$$

Sachant que :

- $z = L + R$ donc $\dot{z} = \dot{L}$ et $\ddot{z} = \ddot{L}$;
- $z_0 = L_0 + R - \frac{Mg}{4k}$;



Hidden page

Hidden page

La période des oscillations (la pseudo-période) est donc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi M + 4m}{4\sqrt{km}}, \text{ soit } T = \frac{\pi(M + 4m)}{2\sqrt{km}}.$$

d) On souhaite $T = \frac{\pi}{3}$ soit $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi(M + 4m)}{2\sqrt{km}}$ soit $k = \frac{9}{4} \frac{(M + 4m)^2}{m}$.

A.N. $k = \frac{9}{4} \times \frac{(1000 + 4 \times 100)^2}{100} = 44\,100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le coefficient d'amortissement est $a = \sqrt{km}$:

$$a = \sqrt{44\,100 \times 1\,000} = 6\,641 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

B) 1) a) L'ondulation de la route est définie par : $e = e_m \cos(\gamma x)$.

Entre deux bosses, on a une distance λ telle que :

$$\gamma\lambda = 2\pi, \text{ soit } \lambda = \frac{2\pi}{\gamma}$$

Si la vitesse du véhicule est V et est constante alors :

$$\dot{x} = V \text{ donc } x = Vt + \text{cte.}$$

En prenant cte = 0, on a alors : $e = e_m \cos(\gamma V t)$.

La pulsation des oscillations verticales est donc :

$$\omega = \gamma V$$

b) En reprenant la démarche du 3) a), on peut appliquer le PFD :

Système : point A de masse $\left(\frac{M}{4} + m\right)$.

Référentiel galiléen : $\mathcal{R}_g(O; \vec{u}_x)$.

Forces appliquées :

• poids $\vec{P} = -\left(\frac{M}{4} + m\right)g\vec{u}_z$;

• force de rappel $\vec{F}_r = -k(L - L_0)\vec{u}_x$;

• force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -a\dot{L}\vec{u}_x$.

Le PFD s'écrit :

$$\left(\frac{M}{4} + m\right)\vec{a}(A)|_{\mathcal{R}_g} = -\left(\frac{M}{4} + m\right)g\vec{u}_z - k(L - L_0)\vec{u}_x - a\dot{L}\vec{u}_x$$

Avec $\vec{a}(A)|_{\mathcal{R}_g} = \ddot{s}\vec{u}_x$ et en projection sur \vec{u}_x :

$$\left(\frac{M}{4} + m\right)\ddot{s} = -\left(\frac{M}{4} + m\right)g - k(L - L_0) - a\dot{L}$$

Sachant que $s = e + R + L$ donc $\ddot{s} = \ddot{e} + \ddot{L}$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{s} + \frac{a}{\frac{M}{4} + m}(\ddot{s} - \ddot{e}) + \frac{k}{\frac{M}{4} + m}(s - e - R - L_0) = -g$$

Hidden page

(2) donne : $\omega'_0{}^2 = \beta'$, soit $\omega'_0 = \sqrt{\beta'}$.

(1) donne : $\omega'_0 Q = \frac{\beta'}{\alpha'}$, soit $Q = \frac{\sqrt{\beta'}}{\alpha'}$.

Sachant que $\alpha' = \frac{4a}{M+4m}$ et $a = \sqrt{kM}$ et $\beta' = \frac{4k}{M+4m}$, on obtient :

$$\omega'_0 = 2 \sqrt{\frac{k}{M+4m}}.$$

et $Q = \frac{\sqrt{\beta'}}{\alpha'} = 2 \times \sqrt{\frac{k}{M+4m}} \times \frac{M+4m}{4a}$ soit $Q = \frac{\sqrt{k(M+4m)}}{2a} = \frac{\sqrt{k(M+4m)}}{2\sqrt{kM}}$ on a alors :

$$Q = \sqrt{\frac{M+4m}{4M}}.$$

c) On a $\underline{S} = e_m \frac{1+j\frac{\Omega}{Q}}{1-\Omega^2+j\frac{\Omega}{Q}}$.

L'amplitude S des oscillations s'écrit donc (module de \underline{S}) :

$$S = |\underline{S}| = e_m \sqrt{\frac{1+\frac{\Omega^2}{Q^2}}{(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}} \quad \text{soit} \quad S(\Omega) = e_m \sqrt{\frac{1+\frac{\Omega^2}{Q^2}}{(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}}.$$

Pour $\Omega = 1$, on a : $S(\Omega = 1) = e_m \sqrt{\frac{1+\frac{1}{Q^2}}{\frac{1}{Q^2}}} = e_m \sqrt{Q^2 + 1}$.

d) Pour trouver le maximum de $S(\Omega)$, on va calculer sa dérivée :

$$\frac{dS(\Omega)}{d\Omega} = e_m \times \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{1+\frac{\Omega^2}{Q^2}}{(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}}} \times \frac{\left[(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2} \right] \frac{2\Omega}{Q^2} - \left[1 + \frac{\Omega^2}{Q^2} \right] \left[2(1-\Omega^2)(-2\Omega) + \frac{2\Omega}{Q^2} \right]}{\left[(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2} \right]^2}.$$

$(\sqrt{u})' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} u' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u' = \frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

On cherche $\frac{dS}{d\Omega} = 0$, ce qui équivaut à :

$$\left[(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2} \right] \frac{2\Omega}{Q^2} - \left[1 + \frac{\Omega^2}{Q^2} \right] \left[2(1-\Omega^2)(-2\Omega) + \frac{2Q}{Q^2} \right] = 0$$

soit en divisant par $\frac{2\Omega}{Q^2}$: $(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2} - \left[1 + \frac{\Omega^2}{Q^2} \right] [2(1-\Omega^2)(-Q^2) + 1] = 0$,

soit en développant : $1 + \Omega^4 - 2\Omega^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2} - 2Q^2(\Omega^2 - 1) - 1 - \Omega^2 \times 2(\Omega^2 - 1) - \frac{\Omega^2}{Q^2} = 0$,

soit en simplifiant : $\Omega^4 - 2\Omega^2 - 2Q^2(\Omega^2 - 1) + 2(1 - \Omega^2)\Omega^2 = 0$
 $- \Omega^4 - 2Q^2\Omega^2 + 2Q^2 = 0$

enfin

$$\frac{\Omega^4}{2Q^2} + \Omega^2 - 1 = 0.$$

En posant $u = \Omega^2$ on obtient l'équation du second degré :

$$\frac{u^2}{2Q^2} + u - 1 = 0,$$

dont le discriminant $\Delta = 1 - 4 \frac{1}{2Q^2} \times (-1) = 1 + \frac{2}{Q^2} > 0$.

Donc la solution est : $u = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{Q^2}}}{2}$ (on ne conserve que la solution positive puisque $u = \Omega^2$), soit :

$$u = -Q^2 + Q^2 \sqrt{1 + \frac{2}{Q^2}}.$$

$$\Omega_m^2 = u = Q^2 \times \left[\sqrt{1 + \frac{2}{Q^2}} - 1 \right] \text{ donc } \Omega_m = Q \sqrt{\sqrt{1 + \frac{2}{Q^2}} - 1}.$$

On cherche aussi S_m :

$$S_m = S(\Omega_m) = e_m \times \sqrt{\frac{1 + \frac{\Omega_m^2}{Q^2}}{(1 - \Omega_m^2)^2 + \frac{\Omega_m^2}{Q^2}}}.$$

Ainsi $\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{1 + \frac{\Omega_m^2}{Q^2}}{1 + \Omega_m^4 - 2\Omega_m^2 + \frac{\Omega_m^2}{Q^2}}$ soit $\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\Omega_m^4 - 2\Omega_m^2}{1 + \frac{\Omega_m^2}{Q^2}}}$ en divisant par $1 + \frac{\Omega_m^2}{Q^2}$.

Or Ω_m vérifie l'équation bicarrée $\frac{\Omega_m^4}{2Q^2} + \Omega_m^2 - 1 = 0$.

Montrons que $\frac{\Omega_m^4 - 2\Omega_m^2}{1 + \frac{\Omega_m^2}{Q^2}} = -\Omega_m^4$.

 En utilisant la formule proposée dans l'énoncé

Ceci équivaut à : $\Omega_m^4 - 2\Omega_m^2 = -\Omega_m^4 - \frac{\Omega_m^6}{Q^2}$; et en divisant tout par Ω_m^2 :

$$\Omega_m^2 - 2 = -\Omega_m^2 - \frac{\Omega_m^4}{Q^2} \text{ soit } \frac{\Omega_m^4}{Q^2} + 2\Omega_m^2 - 2 = 0$$

Hidden page

Problème 4 : Composition de deux rotations

Une circonference (\mathcal{C}) de centre O' et de rayon a , située dans le plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz , d'un mouvement de rotation uniforme défini par le vecteur rotation $\vec{\omega}$ (voir schéma 1 et 2).

Un anneau M de masse m , assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonference. On désigne par θ l'angle que fait $O'M$ avec la verticale descendante passant par O' . θ est compté positivement dans le sens indiqué sur les schémas ci-dessous.

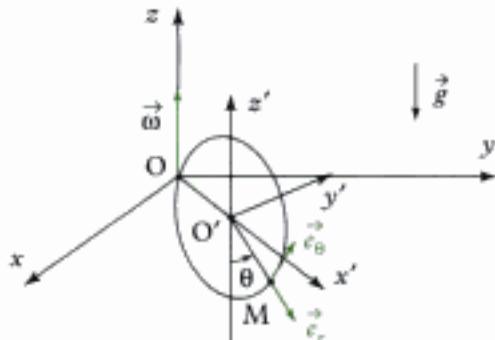


Schéma 1 : cas d'une position quelconque de la circonference (\mathcal{C}).

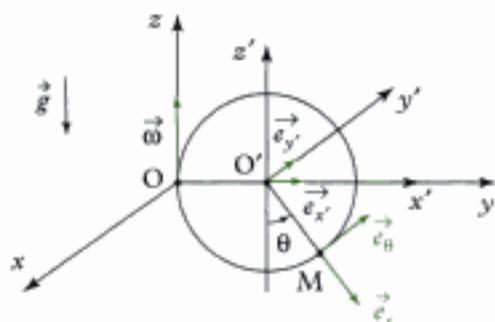


Schéma 2 : cas où le plan de la circonference (\mathcal{C}) est confondu avec le plan (yOz) .

A) Étude du mouvement de M sur (\mathcal{C}) par plusieurs méthodes

1) Utilisation de la relation fondamentale de la dynamique

a) Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}'(Ox'y'z')$ lié au cercle et en rotation dans le repère galiléen $\mathcal{R}(Oxyz)$.

On notera \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{ic} les forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis, et \vec{R} la réaction de (\mathcal{C}) sur M .

b) Montrer que \vec{F}_{ie} est colinéaire à $\vec{e}_{z'}$, et exprimer sa norme en fonction de θ , m , a et ω (norme du vecteur rotation autour de Oz).

Montrer que \vec{F}_{ic} est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$, et exprimer sa norme en fonction de m , θ , ω et v où v est la norme de la vitesse de M dans le référentiel \mathcal{R}' .

c) Projeter la relation obtenue en a) sur le vecteur \vec{e}_θ de la base locale des coordonnées polaires planes dans le plan $(x'O'z')$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ . Montrer que la relation obtenue peut se mettre sous la forme :

$$a \frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta),$$

où la fonction $f(\theta)$ est à déterminer (elle sera utilisée à la question 4) de la partie B).

2) Utilisation du moment cinétique

a) Définir le moment cinétique en O' du point M dans son mouvement dans \mathcal{R}' .

Montrer qu'il est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$, et exprimer sa composante en fonction de a , m et $\dot{\theta}$.

b) Démontrer le théorème du moment cinétique utilisé dans un référentiel non galiléen.

c) L'appliquer pour retrouver l'équation différentielle du mouvement.

3) Utilisation de l'énergie mécanique

a) Calculer la fonction énergie potentielle U_1 dont dérive la force d'inertie d'entrainement. Exprimer U_1 en fonction de x' , abscisse de M sur l'axe $O'x'$, puis en fonction de θ . Déterminer complètement $U_1(\theta)$ en prenant $U_1(0) = 0$.

b) Calculer la fonction énergie potentielle U_2 dont dérive le poids de M . Exprimer U_2 en fonction de z' , abscisse de M sur l'axe vertical ascendant $O'z'$, puis en fonction de θ . Déterminer complètement $U_2(\theta)$ en prenant $U_2(0) = 0$ (on négligera la variation de l'accélération de la pesanteur g avec l'altitude).

c) Montrer que les énergies potentielles dont dérivent la réaction \vec{R} et la force d'inertie de Coriolis \vec{F}_{ic} sont des constantes, que l'on fixera à 0 dans la suite du problème.

d) Écrire, en la justifiant, la conservation de l'énergie et retrouver l'équation différentielle du mouvement.

Hidden page

Solution du problème 4

A) 1) a) On veut étudier le mouvement de M, on nous demande d'appliquer le PFD dans $\mathcal{R}'(O; x', y', z')$ qui est en rotation donc qui n'est pas galiléen.

Système étudié : anneau M de masse m .

Référentiel d'étude : $\mathcal{R}'(O; x', y', z')$ non galiléen.

Forces extérieures appliquées :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;
- réaction du rapport $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y$ (\perp à la circonference car pas de frottement).

Forces d'inertie :

- entraînement \vec{F}_{ie} ;
- de Coriolis \vec{F}_{ic} .

Le PFD s'écrit :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}.$$

b) \vec{F}_{ie} est la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$
où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation $(O; \vec{e}_z)$
donc $\overrightarrow{HM} = (a + a\sin\theta)\vec{e}_{x'}$ et donc :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 a(1 + \sin\theta)\vec{e}_{x'}.$$

Ainsi $\|\vec{F}_{ie}\| = m\omega^2 a|1 + \sin\theta| = m\omega^2 a(1 + \sin\theta)$

• \vec{F}_{ic} est la force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}$.

Or $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} = \omega\vec{e}_z$ et $\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})\right)_{/\mathcal{R}'} = \left(\frac{d}{dt}(a\vec{e}_r)\right)_{/\mathcal{R}'} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Donc $\vec{F}_{ic} = -2m\omega\vec{e}_z \wedge a\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -2m\omega a\dot{\theta} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\vec{e}_{y'}$, et donc :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega a\dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_{y'}.$$

Ainsi $\|\vec{F}_{ic}\| = 2m\omega a|\dot{\theta} \cos\theta|$.

c) Sachant que $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d}{dt}(\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'})\right)_{/\mathcal{R}'} = \left(\frac{d}{dt}(a\dot{\theta}\vec{e}_\theta)\right)_{/\mathcal{R}'} = a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{e}_r$, le PFD s'écrit :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}.$$

On projette sur \vec{e}_θ :

$$m\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'} \cdot \vec{e}_\theta = \vec{P} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{R} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{F}_{ic} \cdot \vec{e}_\theta.$$

On projette sur \vec{e}_θ car $\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = 0$ donc on fait disparaître l'inconnue de liaison \vec{R} .

$$m[a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{e}_r] \cdot \vec{e}_\theta = -mg\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta + (R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y) \cdot \vec{e}_\theta + m\omega^2 a(1 + \sin\theta)\vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_\theta - 2m\omega a\dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_\theta$$

$$ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + 0 + m\omega^2 a(1 + \sin\theta)\cos\theta$$

soit $a\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2 a(1 + \sin\theta)\cos\theta - g\sin\theta$.

Donc par identification : $f(\theta) = \omega^2 a(1 + \sin\theta)\cos\theta - g\sin\theta$.

2) a) Le moment cinétique en O' du point M dans son mouvement dans \mathcal{R}' est :

$$\overrightarrow{L}_{O'}(M)|_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{mv}(M)|_{\mathcal{R}'} \text{ ici } \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ et } \overrightarrow{O'M} = a\vec{e}_r \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{L}_{O'}(M)|_{\mathcal{R}'} = a\vec{e}_r \wedge ma\dot{\theta}\vec{e}_\theta = ma^2\dot{\theta}(-\vec{e}_{y'})$$

Donc

$$\overrightarrow{L}_{O'}(M)|_{\mathcal{R}'} = -ma^2\dot{\theta}\vec{e}_{y'}$$

b) On démontre le TMC en dérivant le moment cinétique :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{L}_{O'}(M)|_{\mathcal{R}'}\right)_{/\mathcal{R}'} &= \left(\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{mv}(M)|_{\mathcal{R}'}\right]\right)_{/\mathcal{R}'} = \left(\frac{d}{dt}(\overrightarrow{O'M})\right)_{/\mathcal{R}'} \wedge \vec{mv}(M)|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{O'M} \wedge m\left(\frac{d}{dt}\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}\right)_{/\mathcal{R}'} \\ &= \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'} \wedge \vec{mv}(M)|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{ma}(M)|_{\mathcal{R}'} . \end{aligned}$$

Or le PFD dans \mathcal{R}' s'écrit :

$$\vec{ma}(M)|_{\mathcal{R}'} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic},$$

donc $\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{L}_{O'}(M)|_{\mathcal{R}'}\right)_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{O'M} \wedge (\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic})$.

 Le 2nd terme de l'égalité représente le moment des forces extérieures et forces d'inertie appliquées à M.

c) On veut retrouver l'équation différentielle du mouvement, il faut pour cela faire disparaître \vec{R} ; or comme il n'y a pas de frottement \vec{R} n'a pas de composante sur \vec{e}_θ donc $\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{R}$ (son moment en O') n'a pas de composante sur $\vec{e}_{y'}$: on va donc projeter la relation vectorielle du TMC sur $\vec{e}_{y'}$.

On a donc : $\vec{e}_{y'} \cdot \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{L}_{O'}(M)|_{\mathcal{R}'}\right)\right]_{/\mathcal{R}'} = \vec{e}_{y'} \cdot [\overrightarrow{O'M} \wedge (\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic})]$.

Or $\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{L}_{O'}(M)|_{\mathcal{R}'}\right)_{/\mathcal{R}'} = \left(\frac{d}{dt}(-ma^2\dot{\theta}\vec{e}_{y'})\right)_{/\mathcal{R}'} = -ma^2\ddot{\theta}\vec{e}_{y'}$.

 $\vec{e}_{y'}$ est fixe dans \mathcal{R}' donc $\left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = 0$.

Par ailleurs :

- $\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{P} = a\vec{e}_r \wedge (-mge_z) = -mg a \sin(\pi - \theta)(-\vec{e}_{y'}) = +mg a \sin\theta \vec{e}_{y'}$;

- $\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}_{ie} = a\vec{e}_r \wedge m\omega^2 a(1 + \sin\theta)\vec{e}_{x'} = m\omega^2 a^2(1 + \sin\theta) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)(-\vec{e}_{y'})$
 $= -m\omega^2 a^2(1 + \sin\theta) \cos\theta \vec{e}_{y'}$;

- $\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}_{ic}$ n'a pas de composante sur $\vec{e}_{y'}$ car le résultat du produit vectoriel est orthogonal à $\overrightarrow{O'M}$ ($\equiv \vec{e}_r$) et orthogonal à \vec{F}_{ic} ($\equiv \vec{e}_{y'}$).

Ainsi la projection sur $\vec{e}_{y'}$ du TMC s'écrit :

$$-ma^2\dot{\theta} = mg \sin \theta - m\omega^2 a^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

soit

$$a \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2 a(1 + \sin \theta) \cos \theta - g \sin \theta.$$

3) a) On sait que le lien entre énergie potentielle et force est :

$$\vec{F}_{ie} = -\frac{dU_1}{dx'} \vec{e}_{x'} \quad \text{où } x' = HM.$$

$$\text{Or } \vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM} = m\omega^2 x' \vec{e}_{x'}.$$

$$\text{Donc } -\frac{dU_1}{dx'} = m\omega^2 x' \text{ soit : } U_1 = -m\omega^2 \frac{x'^2}{2} + \text{cte}_1.$$

 Il s'agit de l'énergie potentielle centrifuge.

Soit en exprimant l'ensemble en fonction de θ :

$$U_1(\theta) = -m\omega^2 \frac{a^2(1 + \sin \theta)^2}{2} + \text{cte}_1.$$

On prenant $U_1(\theta = 0) = 0$, on détermine la constante :

$$U_1(0) = -m\omega^2 \frac{a^2}{2} + \text{cte}_1 = 0.$$

Ainsi :

$$U_1(\theta) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2[1 - (1 + \sin \theta)^2].$$

b) De même $\vec{P} = -\frac{dU_2}{dz'} \vec{e}_{z'}$.

 On a $\vec{e}_z = \vec{e}_{z'}$ et $z = z'$.

Avec $\vec{P} = -mg \vec{e}_{z'}$ on obtient :

$$-\frac{dU_2}{dz'} = -mg \text{ soit } U_2 = mgz' + \text{cte}$$

soit en exprimant l'ensemble en fonction de θ : $U_2(\theta) = mg(-a \cos \theta) + \text{cte}_2$.

En prenant $U_2(\theta = 0) = 0$, on détermine la constante :

$$U_2(0) = -mga + \text{cte}_2 = 0.$$

Ainsi :

$$U_2(\theta) = mga(1 - \cos \theta).$$

c) Comme il n'y a pas de frottement, \vec{R} ne travaille pas. De plus la force d'inertie de Coriolis \vec{F}_{IC} ne travaille jamais.

d) Le TEM nous dit que lorsque toutes les forces qui travaillent sont conservatrices, l'énergie mécanique du système se conserve ; ici cela se traduit par :

$$\left. \mathcal{E}_m(S) \right|_{\mathcal{R}'} = \left. \mathcal{E}_c(S) \right|_{\mathcal{R}'} + \left. \mathcal{E}_p(S) \right|_{\mathcal{R}'} = \text{cte}$$

énergie mécanique énergie cinétique énergie potentielle
(totale)

$$\left. \mathcal{E}_m(S) \right|_{\mathcal{R}'} = \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2(1 - (1 + \sin \theta)^2) + mga(1 - \cos \theta).$$

En dérivant cette égalité par rapport au temps, on obtient :

$$ma^2\ddot{\theta} - m\omega^2a^2(1 + \sin\theta)\cos\theta\dot{\theta} + mg\sin\theta\dot{\theta} = 0.$$

En excluant la solution intérressante $\dot{\theta} = 0$, on obtient :

$$ma^2\ddot{\theta} - m\omega^2a^2(1 + \sin\theta)\cos\theta\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0,$$

soit en divisant par ma :

$$a\ddot{\theta} = a\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta - g\sin\theta.$$

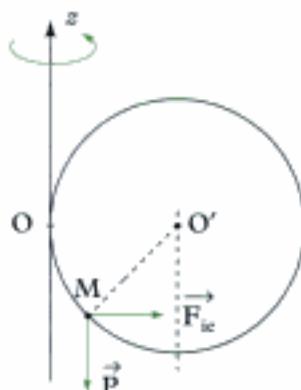
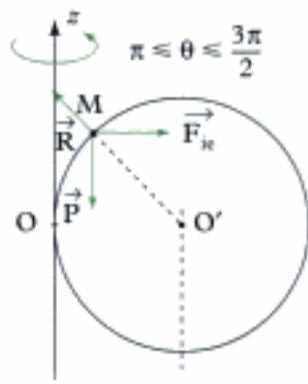
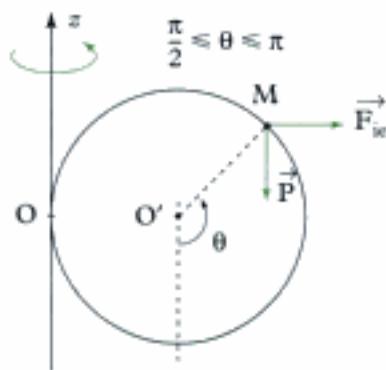
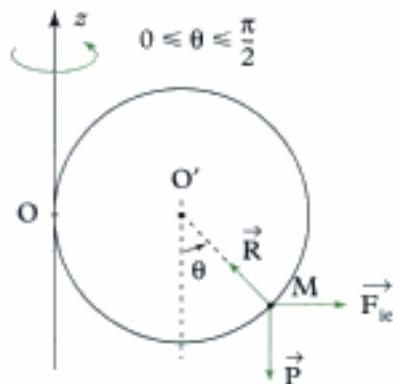
B) 1) L'équilibre s'obtient en prenant $\ddot{\theta} = 0$, soit :

$$a\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta = g\sin\theta$$

soit :

$$a\omega^2(1 + \sin\theta) = g\tan\theta.$$

2) Les 3 forces mises en jeu sont : \vec{P} , \vec{R} et \vec{F}_{ie} .



On voit que dans les cas $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ et $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ quelle que soit la direction de \vec{R} , il ne pourra y avoir équilibre.

Inversement les cas $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ montrent qu'un équilibre relatif est possible.

Les positions d'équilibre se trouvent dans les intervalles :

$$\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right].$$

3) On peut retrouver ce résultat à l'aide de **B.1)** en effet les positions d'équilibre vérifient.

$$a\omega^2(1 + \sin\theta) = g\tan\theta, \text{ soit } a\frac{\omega^2}{g}(1 + \sin\theta) = \tan\theta.$$

Hidden page

Index

A

- Accélération**
 - **absolue**, 261
 - **(composition des)**, 261
 - **de Coriolis**, 261
 - **d'entraînement**, 261
 - **relative**, 261
- Aires**
 - **(constante des)**, 228
 - **(loi des)**, 228
- Amplitude (régime sinusoïdal)**, 20
- Aréolaire (vitesse)**, 228
- Attraction universelle**, 226

D-E

- Décrément logarithmique**, 140
- Déviation vers l'Est**, 277
- Durée caractéristique**, 140
- Dynamique**, 45
- Énergie**
 - **cinétique**, 87
 - **mécanique**, 93
 - **potentielle**, 91
- Équilibre**
 - **stable**, 94
 - **instable**, 94
- Est (déviation vers)**, 277
- Excentricité**, 238

B

- Bandé passante**, 170
- Barycentrique (référentiel)**, 315
- Base**
 - **de projection**, 18
 - **cartésienne**, 18
 - **cylindrique**, 18
 - **polaire**, 18

C

- Cartésiennes (coordonnées)**, 18, 196
- Centre de masse**, 300
- Cinématique du point**, 7
- Cinétique**
 - **(énergie)**, 87
 - **(moment)**, 199
 - **(résultante)**, 304
- Coefficient de frottement**, 47
- Composition**
 - **des accélérations**, 260
 - **des vitesses**, 259
- Conservation de l'énergie**, 229
- Conservatives (forces)**,
- Constante des aires**, 228
- Coordonnées**
 - **cartésiennes**, 18, 196
 - **cylindriques**, 18
 - **polaires**, 18
- Copernic (référentiel de)**, 267

F

- Facteur de qualité**, 140, 170
- Force (s)**, 46
 - **conservatives**, 91
 - **d'inertie de Coriolis**, 264
 - **d'inertie d'entraînement**, 264
 - **d'interaction électrostatique**, 227
 - **d'interaction gravitationnelle**, 226
 - **extérieure**, 303
 - **intérieure**, 303
 - **non conservatives**,
- Foucault (pendule de)**, 276
- Foyer (trajectoire elliptique)**, 236
- Frottement**
 - **fluide**, 48
 - **solide**, 47

G

- Galiléen (référentiel)**, 263
- Géocentrique (référentiel)**, 267

H-I-J-K

- Harmonique (oscillateur)**, 134
- Inertie (principe de l')**, 48
- Joule (unité)**, 85
- Kepler (loi de)**, 236

L-M-N

- Loi des aires, 228
- Mobile réduit, 311
- Moment
 - d'une force, 196
 - cinétique, 199
- Mouvement
 - absolu, 259
 - accéléré, 16
 - à force centrale, 203
 - à un degré de liberté, 90
 - circulaire, 21, 231
 - d'entraînement, 259
 - décéléré, 16
 - rectiligne, 19
 - relatif, 259
 - uniforme, 19
- Newton
 - 1^e loi : principe d'inertie, 48
 - 2^e loi : PFD, 49
 - 3^e loi : principe des actions réciproques, 49
 - (unité), 46

O-P

- Observateur, 8
- Oscillateur
 - harmonique, 134
 - harmonique amorti, 134
 - forcé, 166
- Pendule
 - de Foucault, 276
 - simple, 89, 137, 197
- Période
 - de révolution, 233
 - d'oscillation, 134
- Pesanteur (champ de), 46
- Phase (portrait de), 97, 142
- Poids, 46, 270
- Polaires (coordonnées), 19
- Potentielle
 - (énergie), 91
 - de pesanteur (énergie), 91
- Principe
 - de conservation de la quantité de mouvement, 304
 - des actions réciproques, 49
 - de l'inertie, 48
 - fondamental de la dynamique (PFD), 49, 265
 - fondamental de la statique (PFS), 49
- Produit
 - scalaire, 10
 - vectoriel, 194
- Pseudo-période, 140
- Puissance, 84
- Pulsation
 - propre, 134

- (pseudo), 139
- de résonance, 169

Q-R

- Qualité (facteur de), 140, 170
- Quantité de mouvement, 49, 304
- Réaction, 49
- Réduction du problème à deux corps, 312
- Référentiel
 - barycentrique, 315
 - de Copernic, 267
 - galiléen, 263
 - géocentrique, 267
 - non galiléen, 264
 - terrestre, 269
 - relatif, 315
- Régime
 - apériodique, 141
 - critique, 141
 - forcé, 166
 - périodique, 177
 - pseudo-périodique, 139
 - transitoire, 166
- Repère, 9
- Résonance, 169
- Résultante cinétique, 304

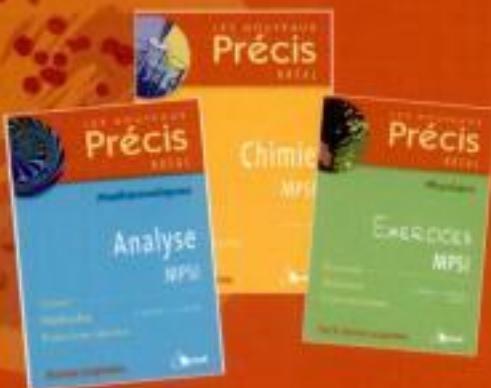
S-T

- Systèmes conservatifs, 91
- Tension, 47
- Théorème
 - de l'énergie cinétique (TEC), 88, 266
 - de l'énergie mécanique (TEM), 93, 266
 - de la quantité de mouvement (TQM), 304
 - du centre de masse (TCM), 304
 - du moment cinétique (TMC), 200, 265
 - de la puissance cinétique (TPC), 88, 266
 - de la puissance mécanique (TPM), 93, 266
- Travail, 85

U-V-W

- Varignon (formule de), 258
- Vecteur
 - accélération, 15
 - position, 9
 - vitesse, 14
- Vitesse(s)
 - absolue, 259
 - (composition des), 259
 - d'entraînement, 259
 - relative, 259
- Watt (unité), 84

Hidden page



Titres disponibles en première année dans la filière MPSI...

En Physique

Optique MPSI-PCSI-PTSI
Mécanique MPSI
Électrocinétique MPSI
Electromagnétisme MPSI
Thermodynamique MPSI

En Chimie

Chimie MPSI

En Mathématiques

Analyse MPSI
Algèbre et géométrie MPSI
Livres d'exercices
Mathématiques MPSI
Physique MPSI

LES NOUVEAUX
Précis
B R É A L

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont la collection de référence pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

