

BIBLIOTHÈQUE ÉLECTRONIQUE DES CLASSES PREPAS



Visiter notre Forum : <http://prepa-book.forummaroc.net/>

Visiter notre page :

<https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa>
<https://www.facebook.com/groups/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa/>

Collection dirigée par Jean-Marie Brébec

Électromagnétisme

2^e année
MP-MP* - PC-PC*
PSI-PSI* - PT-PT*





Électromagnétisme

2^e année
MP-MP*-PC-PC*
PSI-PSI*-PT-PT*

Jean-Marie BRÉBEC

Professeur en classes préparatoires au lycée Saint-Louis à Paris

Thierry DESMARAIS

Professeur en classes préparatoires au lycée Vaugelas à Chambéry

Alain FAVIER

Professeur en classes préparatoires au lycée Champollion à Grenoble

Marc MÉNÉTRIER

Professeur en classes préparatoires au lycée Thiers à Marseille

Bruno NOËL

Professeur en classes préparatoires au lycée Champollion à Grenoble

Régine NOËL

Professeur en classes préparatoires au lycée Champollion à Grenoble

Claude ORSINI

Professeur honoraire en classes préparatoires au lycée Dumont-d'Urville à Toulon

Jean-Marc VANHAECKE

Professeur en classes préparatoires au lycée Malherbe à Caen



HACHETTE
Supérieur

Composition, mise en page et schémas : *Alpha Edit*
Maquette intérieure : *S.G. Crédation et Pascal Plottier*
Maquette de couverture : *Alain Vambacas*

© HACHETTE LIVRE 2004, 43, quai de Grenelle 75905 paris cedex 15
www.hachette-education.com
I.S.B.N. 978-2-01-145639-7

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayant cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.¹¹

Sommaire

<u>1</u>	CHARGES ET CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE	5
<u>2</u>	CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE PERMANENT	37
<u>3</u>	COMPLÉMENTS DE MAGNÉTOSTATIQUE	63
<u>4</u>	CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE ÉLECTROSTATIQUE CONDENSATEURS (<i>MP-PT</i>)	93
<u>5</u>	ÉQUATIONS DE MAXWELL	127
<u>6</u>	INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE	167
<u>7</u>	APPLICATIONS DE L'INDUCTION	198
<u>8</u>	FERROMAGNÉTISME (<i>PSI-PSM*</i>)	243
	ANNEXES	267
	INDEX	270

Préface

Cette collection concerne les nouveaux programmes des classes préparatoires aux Grandes Écoles mis en application à la rentrée de septembre 2004 pour les classes de Deuxième année *MP*, *PC*, *PSI*, et *PT*.

Les auteurs ont choisi d'aborder le programme de physique par matière, et non par filière. Cependant les parties de programme spécifiques à une ou plusieurs filières sont bien signalées. Ces indications n'empêchent pas un élève souhaitant approfondir ses connaissances dans un domaine donné, d'étudier une partie non retenue pour sa filière.

Ce découpage présente l'intérêt d'englober un ensemble cohérent et complet de connaissances et d'applications pour une matière, ce qui est un atout pour aborder les TIPE (travaux d'initiative personnelle encadrés) et ADS (analyse de documents scientifiques), par exemple.

- La physique est une science expérimentale et doit être enseignée en tant que telle. Les auteurs ont particulièrement soigné la description des dispositifs expérimentaux et des protocoles opératoires qu'ils ont illustrés de nombreux schémas. Souhaitons que leurs efforts incitent les professeurs à accorder davantage de place aux activités expérimentales, toujours très formatrices, dans leurs cours et les élèves à s'y intéresser davantage pour mieux appréhender les phénomènes.
- La physique n'est pas une science désincarnée, uniquement préoccupée de spéculations fermées aux réalités technologiques. Chaque fois que le sujet s'y prête, les auteurs donnent une large place aux applications scientifiques ou industrielles propres à motiver les futurs chercheurs et ingénieurs.
- La physique n'est pas une science aseptisée et intemporelle, elle est le produit d'une époque et ne s'exclut pas du champ des activités humaines. Les auteurs ont fait référence à l'histoire des sciences, aussi bien pour décrire l'évolution des modèles théoriques que pour replacer les expériences dans leur contexte.
- La physique étudie des phénomènes naturels et des systèmes dont elle cherche à modéliser les comportements et à prévoir les évolutions. Cette modélisation amène inévitablement à relier des grandeurs physiques entre elles et à opérer des traitements mathématiques. Les auteurs ont donné aux mathématiques leur juste place, en privilégiant la réflexion et le raisonnement physique et en mettant l'accent sur les paramètres significatifs et les relations qui les unissent.
- La maîtrise de la physique nécessite un apprentissage et un entraînement : pour cela les auteurs ont sélectionné des exercices nombreux et variés, extraits des épreuves écrites et orales des concours d'entrée aux Grandes Écoles ; ces exercices s'appuient sur des situations concrètes et conduisent à des applications numériques correspondant à des dispositifs réels ou des phénomènes quotidiens. Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée. Dans les exercices commentés, la solution est discutée, et les erreurs à ne pas commettre signalées.

L'équipe d'auteurs, coordonnée par Jean-Marie BRÉBEC, est composée de professeurs très expérimentés de classes préparatoires ; ils possèdent une longue pratique des concours des Grandes Écoles, et leur compétence scientifique est unanimement reconnue.

Ces ouvrages de seconde année s'inscrivent dans une parfaite continuité avec ceux de première année, tant dans la forme que dans l'esprit, car le noyau de l'équipe d'auteurs est le même.

Gageons que ces ouvrages constitueront de précieux outils pour les étudiants, tant pour une préparation efficace des concours que pour l'acquisition d'une solide culture scientifique.

J.-P. DURANDEAU et M.-B. MAUHOURAT

Charges et champ électromagnétique

1

Introduction

Ce chapitre reprend et complète les notions de Première année afin de poser les bases de l'électromagnétisme classique ; celles-ci nous permettront d'étudier par la suite l'unification, due à J.-C. Maxwell en 1864, des phénomènes électriques et magnétiques que d'autres scientifiques avaient abordés indépendamment avant lui : les français P. Laplace (1749-1827) et A.M. Ampère (1775-1836) ou l'anglais M. Faraday (1791-1867) notamment.

O B J E C T I F S

- Distributions de charges et de courants.
- Conservation de la charge électrique.
- Puissance fournie aux charges par le champ électromagnétique.
- Conduction et loi d'Ohm.
- Actions de Laplace.

P R É R E Q U I S

- Charges et courants électriques (Cours de Première année).
- Electrostatique et magnétostatique (Cours de Première année).

Charges et courants électriques

1.1. Distribution de charges

La densité volumique de charges en un point M d'une distribution est définie comme une *moyenne à l'échelle mésoscopique* :

$$\rho(M, t) = \frac{dq(M, t)}{d\tau},$$

où $dq(M, t)$ est la quantité de charges contenue à l'instant t dans le volume élémentaire mésoscopique, $d\tau$, entourant le point M (*doc. 1a*).

Ce volume doit être :

- grand à l'échelle microscopique (atomique) pour que le milieu puisse être considéré comme continu ;
- faible à l'échelle macroscopique pour que la distribution de charges soit décrite précisément dans tout le domaine étudié.

$\rho(M, t)$ est donc une **grandeur locale** ; elle s'exprime en $C \cdot m^{-3}$.

À l'échelle macroscopique, l'une des dimensions du volume total de la distribution de charges étudiée peut être faible devant les autres : le milieu présente l'aspect d'une nappe (*doc. 1b*).

Écrivons la quantité de charges en M :

$$dq(M, t) = \rho(M, t)d\tau = \rho(M, t)\varepsilon dS = \sigma(M, t)dS;$$

la distribution est alors décrite par une densité surfacique de charges $\sigma(M, t)$, grandeur locale qui s'exprime en $C \cdot m^{-2}$.

De même lorsque deux des dimensions du volume sont faibles devant la troisième, la distribution de charges peut être décrite de manière linéique :

$$dq(M, t) = \lambda(M, t)d\ell \quad (\text{doc. 1c})$$

où $\lambda(M, t)$ est une grandeur locale ($C \cdot m^{-1}$).

La très faible extension spatiale de certaines particules chargées devant les dimensions du problème étudié (ions issus d'un accélérateur, cations et anions d'un réseau cristallin) peut justifier leur modélisation par des charges ponctuelles.

1.2. Distribution de courants

1.2.1. Courants électriques

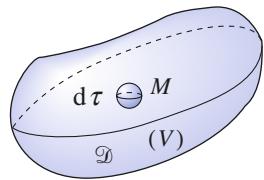
Les mouvements de particules chargées sont à l'origine des courants électriques. Si les charges mobiles d'une distribution, caractérisées par la densité $\rho_m(M, t)$, se déplacent à la vitesse \vec{v} (vitesse d'ensemble, *doc. 2*) dans le référentiel d'étude, le vecteur densité de courant volumique \vec{j} associé à ce mouvement est défini par :

$$\vec{j}(M, t) = \rho_m(M, t)\vec{v}(M, t);$$

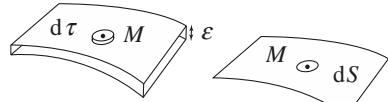
\vec{j} se mesure en $A \cdot m^{-2}$.

Remarques

- La densité volumique de charges ne s'identifie pas nécessairement à la densité volumique de charges mobiles : pour un métal, les charges de conduction sont uniquement les électrons et la densité de charges mobiles est $\rho_m = -Ne$, où N est le nombre d'électrons libres par unité de volume (1 par atome pour le cuivre par exemple) ; si leur vitesse de déplacement est uniforme, la neutralité électrique est aussi assurée localement et $\rho = 0$ (*doc. 3a*).

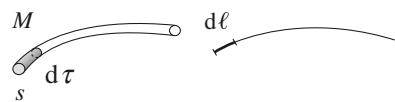


Doc. 1a. Distribution volumique de charge.



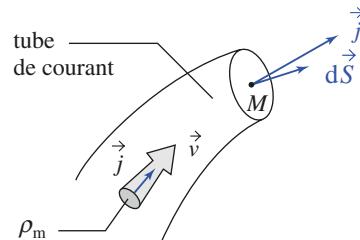
Doc. 1b. Distribution surfacique de charge :

$$d\tau = \varepsilon dS \text{ et } dq = \rho \varepsilon dS = \sigma dS.$$

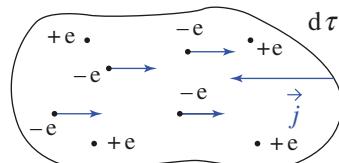


Doc. 1c. $d\tau = s d\ell$ et :

$$dq = \rho s d\ell = \lambda d\ell.$$



Doc. 2. Densité volumique de courant \vec{j} .



Doc. 3a. Dans un métal $\rho_m \neq \rho$; ici $\rho = 0$.

- Dans le cas de plusieurs types de porteurs mobiles, le courant volumique est la somme de leurs contributions : $\vec{j} = \sum_{\text{porteurs}} \vec{j}_{\text{porteurs}}$; ainsi pour un électrolyte contenant des cations et des anions de charges respectivement $+e$ et $-e$: $\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_- = Ne(\vec{v}_+ - \vec{v}_-) = 2Ne\vec{v}_+$ si les mobilités des ions sont comparables ; là encore on aura $\rho = 0$ (doc. 3b).

Comme dans le cas des distributions de charges, lorsque la distribution de courant a l'aspect d'une nappe, nous la décrirons par une densité de courant surfacique \vec{j}_S (doc. 4) qui se mesure en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$.

Des courants filiformes seront simplement représentés par leur intensité I (doc. 5).

1.2.2. Intensité électrique

Si une charge dq traverse une surface S pendant un intervalle de temps élémentaire dt , l'intensité électrique I_S à travers cette surface est telle que $dq = I_S dt$. L'intensité I_S est égale au flux du vecteur \vec{j} à travers cette surface (doc. 2) :

$$I_S(t) = \iint_S \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}.$$

Dans le cas d'une nappe de courant, l'intensité du courant traversant une courbe \mathcal{C} tracée sur la nappe surfacique Σ , et orientée par le vecteur \vec{u} (normal à la courbe et tangent à Σ) est (doc. 4) :

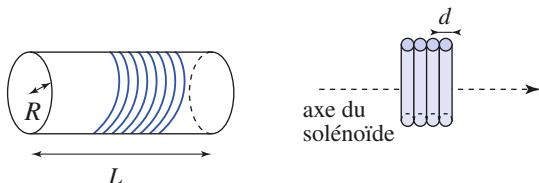
$$I_C(t) = \iint_{\mathcal{C}} \vec{j}_S(M, t) \cdot \vec{u} d\ell.$$

Application 1

Modélisation d'un solénoïde

Un solénoïde cylindrique de longueur $L = 25 \text{ cm}$, de rayon $R = 5 \text{ cm}$, est constitué d'un enroulement de fil de cuivre de diamètre $d = 0,4 \text{ mm}$.

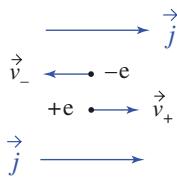
Montrer que l'on peut adopter deux modélisations différentes pour la distribution de courant (supposée uniforme) dans ce solénoïde et les relier l'une à l'autre.



Doc. 6.

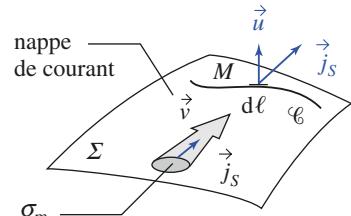
Première modélisation

On peut considérer que les courants sont filiformes, puisque la dimension transversale $d = 0,4 \text{ mm}$ du fil

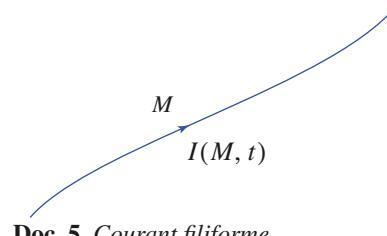


Doc. 3b. $\vec{j} \neq 0$ et $\rho = 0$.

Cas d'un électrolyte d'ions de même mobilité.



Doc. 4. Densité surfacique de courant \vec{j}_S .



Doc. 5. Courant filiforme.

de cuivre est faible devant la longueur d'un enroulement $\ell \approx 30 \text{ cm}$.

On ne s'intéressera qu'à l'intensité I qui circule dans ce solénoïde, qui comprend $\frac{L}{d} = 625$ spires jointives, soit :

$$n = \frac{\ell}{d} = 2\,500 \text{ spires/m.}$$

Deuxième modélisation

On peut aussi adopter une modélisation surfacique puisque $d \ll R$. La distribution est alors une nappe de courant de vecteur $\vec{j}_S = j_S \vec{e}_\theta$, avec $I = \int_0^d \vec{j}_S \cdot \vec{e}_\theta d\ell$, soit puisque le courant est uniforme $I = j_S d$ et $j_S = n I \vec{e}_\theta$.

Remarque : On pourra utiliser indifféremment l'une ou l'autre de ces modélisations suivant le problème posé.

2 Conservation de la charge électrique

2.1. Principe de conservation

Dans le circuit représenté sur le document 7, la charge du condensateur entraîne l'apparition de charges sur ses armatures. Mais lorsqu'une armature du condensateur a acquis une charge $+q$, l'autre armature porte la charge opposée $-q$. La charge du circuit, système fermé, reste nulle au cours du temps.

Généralisons ce résultat :

L'expérience montre que la charge électrique est une grandeur conservative : la charge totale d'un système fermé se conserve au cours du temps.

Ce principe de conservation de la charge est applicable dans toute expérience de physique.

2.2. Loi intégrale de conservation de la charge électrique

Considérons le système contenu dans le volume V de l'espace, fixe dans le référentiel d'étude (doc. 8). Sa charge est, à l'instant t :

$$Q(t) = \iiint_V \rho(M, t) d\tau.$$

Sa variation, par unité de temps, est :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho(M, t) d\tau \right] = \iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau.$$

L'intégrale d'espace et la dérivation temporelle commutent car elles portent sur des variables indépendantes.

D'après le principe de conservation de la charge électrique, si la charge globale de ce système varie au cours du temps, c'est qu'il a échangé des charges avec l'extérieur sous forme de courants.

Cet échange peut être traduit par l'équation-bilan : $\frac{dQ}{dt} = I$ où I est le courant électrique entrant dans le volume V , limité par la surface fermée Σ :

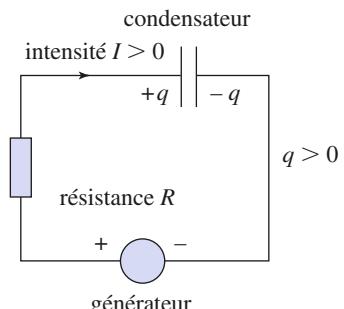
$$I = \oint_{\Sigma} -\vec{j}(P, t) \cdot \vec{n} dS.$$

Le signe moins traduit l'orientation, par convention, de la normale \vec{n} à la surface Σ vers l'extérieur, alors que nous cherchons à exprimer le courant qui entre dans le volume V .

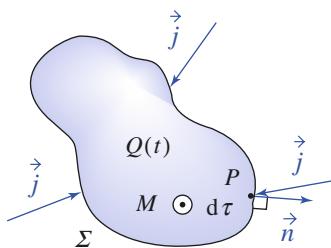
L'équation :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau = \oint_{\Sigma} -\vec{j}(P, t) \cdot \vec{n} dS,$$

est l'équation intégrale traduisant, pour un volume V fixe (délimité par la surface fermée Σ) dans le référentiel d'étude, la conservation de la charge électrique.



Doc. 7. Charge d'un condensateur.

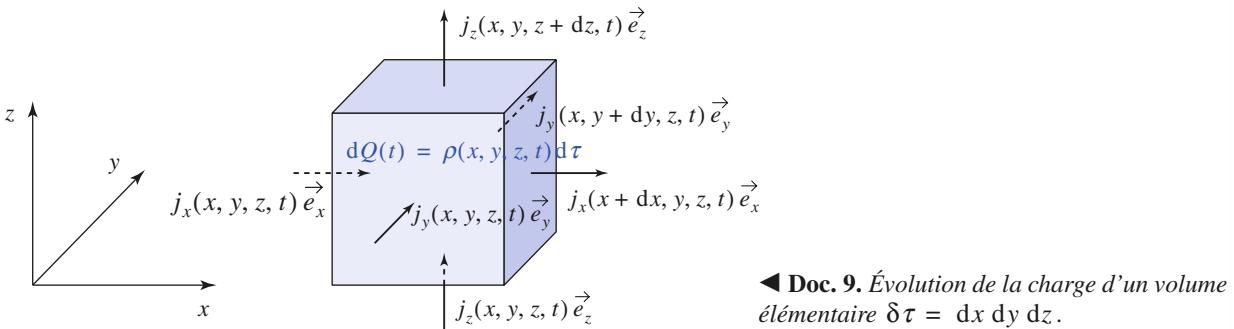


Doc. 8. Évolution de la charge dans un volume V délimité par la surface fermée Σ .

2.3. Loi locale de conservation de la charge électrique

Appliquons ce bilan de charge à un parallélépipède élémentaire (doc. 9). La variation, entre t et $t + dt$, de la charge $\delta q = \rho(M, t) dx dy dz$ contenue dans ce volume élémentaire, est :

$$d(\delta q) = \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} dt dx dy dz.$$



Pour exprimer le courant électrique entrant dans le volume $\delta\tau = dx dy dz$, nous pouvons associer ses six faces par paires.

Les contributions des faces 1 et 2, orthogonales à l'axe (Ox) sont :

- face 1 : $+j_x(x, y, z, t) dy dz$;
- face 2 : $-j_x(x + dx, y, z, t) dy dz$;

soit, au total :

$$j_x(x, y, z, t) dy dz - j_x(x + dx, y, z, t) dy dz = -\frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz.$$

L'association deux à deux des faces restantes nous donne les contributions supplémentaires :

$$\left(-\frac{\partial j_y}{\partial y} dy dx dz\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{\partial j_z}{\partial z} dz dx dy\right).$$

L'intensité entrant dans le parallélépipède élémentaire est donc :

$$\delta I = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) dx dy dz.$$

Nous reconnaissons ici une expression de la divergence (en coordonnées cartésiennes) du champ de vecteur \vec{j} (cf. Annexe) :

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}.$$

Le bilan de charge $d(\delta q) = \delta I dt$, avec $\delta I = -\operatorname{div} \vec{j} \delta\tau$, nous conduit donc à la relation ci-dessous.

L'équation locale traduisant la conservation de la charge électrique, s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Remarques

- Cette expression n'est pas liée au système de coordonnées choisi. Seule la formulation de l'opérateur divergence en dépend.
- Le théorème de Green-Ostrogradski (cf. Annexe) permet d'obtenir le résultat ci-dessus indépendamment du système de coordonnées.

Reprendons l'équation intégrale de conservation :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau = - \oint_{\Sigma} \vec{j}(P, t) \cdot d\vec{S}.$$

Or, $\oint_{\Sigma} \vec{j}(P, t) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j}(M, t) d\tau$, soit :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(M, t) \right] d\tau = 0.$$

Ce résultat étant valable quel que soit le volume V , la quantité intégrée est nulle :

$$\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(M, t) = 0.$$

2.4. Cas des régimes permanents

Un régime est permanent (ou encore stationnaire ou indépendant du temps) si les grandeurs considérées ne dépendent pas explicitement du temps :

$$\rho(M, t) = \rho(M) \quad \text{et} \quad \vec{j}(M, t) = \vec{j}(M).$$

- Reprendons l'équation du § 2.2. et faisons $\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$; nous obtenons $\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$, donc le courant, I_{Σ} , entrant dans le volume V est nul.

Pour des courants filiformes, les fils s'identifient aux tubes de courant ; considérons un nœud de circuit électrique (doc. 10) et entourons-le d'une surface fermée Σ :

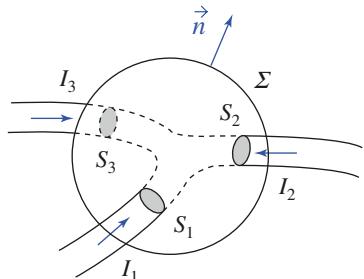
$$I_{\Sigma} = 0 = I_1 + I_2 + I_3, \quad \text{soit} \quad \sum_{k \text{ entrants}} I_k = 0.$$

Ainsi, la loi des nœuds vue en Première année traduit la conservation de la charge en régime permanent.

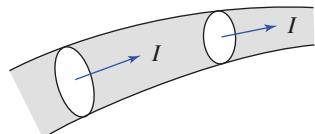
- Le courant électrique a même valeur à travers toutes les sections d'un tube de courant donné : le vecteur densité de courant électrique est à flux conservatif (doc. 11).

La relation locale de conservation de la charge que nous venons d'écrire nous permet de traduire ces propriétés par la forme abrégée suivante.

En régime permanent, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, et la divergence du vecteur densité volumique de courant électrique est nulle : $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.



Doc. 10. Courants en un nœud d'un circuit : $I_{\Sigma} = 0$.



Doc. 11. Le courant électrique est le même à travers toute section d'un tube de courant.

La relation $\Sigma I_k = 0$ ne semble pas correcte en régime variable où $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$. Or, nous l'avons utilisée en électrocinétique, dans le cas d'un régime variable, comme si ce régime était permanent !

Les lois de l'électrocinétique constituent un modèle : ce modèle n'est (comme tout modèle) qu'approximatif, mais suffisamment précis pour étudier le comportement

des circuits électriques que nous avons rencontrés. Rappelons qu'en électrocinétique, les éléments (résistances, inductances, capacités, ...) sont considérés comme des objets « ponctuels », de dimension réduite devant la longueur d'onde du phénomène existant dans le circuit.

Nous appellerons *approximation des régimes quasi permanents* (A.R.Q.P.) l'approximation que nous avons ainsi implicitement utilisée. Comme cette dénomination l'indique, il s'agit d'un type de régime dans lequel la dépendance des grandeurs vis-à-vis du temps reste suffisamment lente pour pouvoir raisonner comme si le régime était permanent.

Nous pouvons quantifier plus précisément cette approximation, en admettant que l'information véhiculée par un signal électromagnétique (le signal « mise en mouvement des charges » dans le fil d'un circuit, par exemple) se propage à une vitesse de l'ordre de la vitesse de la lumière, notée c . Ainsi, le retard lié à la propagation de l'information « le courant vaut I » entre deux points d'un fil, séparés par une distance L , est de l'ordre de $\frac{L}{c}$ (doc. 12).

Ce retard peut être négligeable si le temps T caractéristique de l'évolution du courant dans le circuit (la période, dans le cas d'un régime sinusoïdal par exemple) est beaucoup plus grand que ce nécessaire décalage, soit :

$$T \gg \frac{L}{c}.$$

Dans le cas d'un circuit de dimension de l'ordre du décimètre ($L = 0,1 \text{ m}$), nous obtenons $T \gg 3 \cdot 10^{-10} \text{ s}$. Autant dire qu'à des fréquences d'utilisation n'excédant pas quelques MHz ($T > 10^{-7} \text{ s}$), l'A.R.Q.P. est amplement justifiée.

Dans l'approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.) les dimensions L d'un circuit sont très inférieures devant la quantité cT où T est le temps caractéristique d'évolution $L \ll cT$.

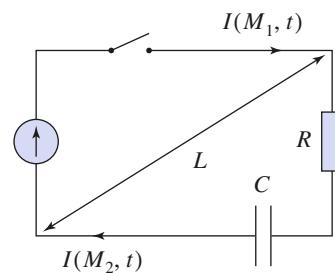
Nous retrouvons ainsi l'hypothèse de l'électrocinétique rappelée précédemment : les dimensions du circuit (donc *a fortiori* de ses constituants) sont très faibles devant la longueur d'onde $\lambda = cT$ du phénomène existant dans le circuit.

Dans l'approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.), la conservation du flux du vecteur \vec{j} , traduite localement par $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, est applicable partout (et, en particulier dans un milieu conducteur).

Remarque

Indiquons plus précisément que l'A.R.Q.P. est applicable en dehors des zones d'accumulation de charges.

L'égalité $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ semble inapplicable en présence d'un condensateur. Or le modèle de l'électrocinétique nous permet d'écrire que le condensateur est un élément « ponctuel » de charge totale nulle ; ce qui permet de lever cette ambiguïté. Nous reviendrons sur la description de l'A.R.Q.P., ainsi que sur cette dernière difficulté au chapitre 5, traitant des équations du champ électromagnétique en régime quelconque.



Doc. 12. Circuit électrique fonctionnant dans l'A.R.Q.P. : $L \ll cT$ (sur ce schéma, $T = RC$).

Application 2

Champ radial de divergence nulle

L'espace entre deux cylindres concentriques, de hauteur h et de rayons a et b , est occupé par un conducteur. Un courant d'intensité électrique $I(t)$ circule entre les deux cylindres.

Déterminer, en négligeant tout effet de bord et dans l'A.R.Q.P., la répartition de courant entre les deux cylindres.

Dans ce système à géométrie cylindrique, le vecteur densité de courant électrique est de la forme (doc. 13) :

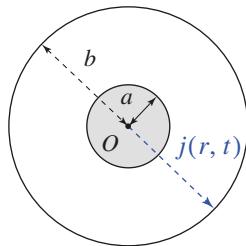
$$\vec{j}(r, t) = j(r, t) \vec{e}_r.$$

Dans l'A.R.Q.P., j est encore à divergence nulle, ce qui revient à écrire la conservation de l'intensité $I(t)$

à travers tout cylindre de hauteur h et de rayon r compris entre a et b .

D'où $I(t) = 2\pi rhj(r, t)$ et :

$$\vec{j}(r, t) = \frac{I(t)}{2\pi hr} \vec{e}_r.$$



Doc. 13. Vecteur densité de courant radial.

► Pour s'entraîner : ex. I.

3 Charges électriques et champ électromagnétique

3.1. Charges sources du champ électromagnétique

Les charges et les courants électriques créent les champs électrique et magnétique.

Nous avons étudié en Première année des exemples de champs permanents :

- champ électrique créé par une distribution statique de charges ;
- champ magnétique créé par une distribution stationnaire de courants.

Nous avons pour cela postulé la **loi de Coulomb** et la **loi de Biot et Savart**.

Ces lois intégrales déterminent le champ électromagnétique permanent créé par la distribution considérée par application du principe de superposition.

Nous pouvons généraliser cette approche aux cas de distributions variables :

\vec{E} et \vec{B} sont deux facettes d'une même entité : le champ électromagnétique.

Les charges et les courants électriques sont les sources du champ électromagnétique. Nous verrons que le lien entre le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) et ses sources peut être traduit à l'aide de lois locales : les équations de Maxwell.

3.2. Charges soumises au champ électromagnétique

Comme nous l'avons vu en Première année, les champs électrique et magnétique se manifestent par leurs effets sur les charges et les courants.

Une particule de charge q et de vitesse \vec{v} , évoluant dans une zone où règne un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

La force exercée par le champ électromagnétique traduit l'interaction électromagnétique entre les charges électriques et le champ (\vec{E}, \vec{B}) .

Nous pourrions dès lors considérer le champ électromagnétique comme un simple intermédiaire de calcul, la force étant le seul objet physique « observable ».

Nous verrons toutefois que le champ électromagnétique contient de l'énergie (énergie véhiculée par un faisceau lumineux, par exemple). Nous pourrons même lui associer une impulsion (et un moment cinétique), comme nous le faisons plus classiquement pour des objets physiques matériels. Le champ électromagnétique est une entité physique réelle, dont nous étudierons, dans les chapitres à venir, les lois de comportement et leurs conséquences.

Application 3

Déviation d'un faisceau de particules

1) Dans les cas d'une distribution à modélisation volumique, caractérisée par les densités de charge $\rho(M, t)$ et de courant $\vec{j}(M, t)$, quelle force volumique peut-on associer à la force de Lorentz exercée sur une charge ?

2) Que peut-on en déduire quant à l'évolution d'un pinceau de particules chargées, assimilé à un tube de courant rectiligne et de section circulaire de rayon a , contenant n charges q par unité de volume se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans la direction de l'axe (Oz) du tube ? (Il s'agit, dans cette modélisation, d'une distribution « infinie » fonctionnant en régime « permanent »).

1) La charge $dq = \rho d\tau$, contenue dans un volume élémentaire $d\tau$, subit la force élémentaire liée au champ électrique : $dq \vec{E} = \rho \vec{E} d\tau$.

La charge élémentaire mobile :

$$d q_m = \rho_m(M, t) d\tau,$$

en mouvement à la vitesse d'ensemble \vec{v} , subit de plus la force élémentaire :

$$(\rho_m \vec{v} d\tau) \wedge \vec{B} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau,$$

liée au champ magnétique.

La force élémentaire totale subie est donc :

$$d\vec{F} = (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau.$$

L'action du champ électromagnétique sur le milieu est donc caractérisée par la force volumique $\vec{F}_{\text{vol}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ appliquée au fluide de charges, dont une partie (charge volumique ρ_m , non nécessairement identifiable à ρ) est en mouvement à la vitesse \vec{v} .

2) Assimilons le tube de charges en mouvement à un cylindre infini, portant la densité volumique de charge $\rho = nq$ et parcouru par la densité volumique de courant :

$$\vec{j} = nq \vec{v}.$$

Le champ électrique créé par cette distribution est radial :

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r,$$

et le champ magnétique est orthoradial :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta,$$

en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

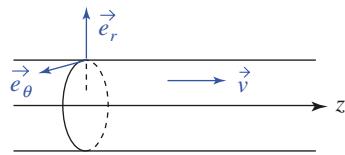
En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe (Oz) et de rayon r , et le théorème d'Ampère à un cercle d'axe (Oz) et rayon r , nous obtenons, dans le tube ($r \leq a$) :

$$\vec{E} = \frac{\left(\frac{\rho \pi r^2}{\epsilon_0}\right)}{2\pi r} \vec{e}_r = \frac{nq}{2\epsilon_0} r \vec{e}_r$$

$$\text{et } \vec{B} = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 n q v}{2} r \vec{e}_\theta.$$

La force volumique subie par le faisceau s'en déduit :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{vol}} &= \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{(nq)^2}{2\epsilon_0} r (1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2) \vec{e}_r \\ &= \frac{(nq)^2}{2\epsilon_0} r \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{e}_r, \text{ car } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1. \end{aligned}$$



La vitesse des particules étant inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide, nous voyons que le jet chargé tend à se dilater.

Dans un accélérateur de particules, où sont produits par exemple des paquets d'électrons, il faut régulièrement concentrer le faisceau pour éviter que ses particules ne s'éparpillent.

Remarquons que la force d'origine magnétique a un effet de striction, car elle tend à focaliser le pinceau. Cet effet pourrait se manifester pour un jet de particules globalement neutres dans lequel circule un courant électrique. Cet effet « *pinch* » permet la stabilisation d'une colonne de plasma (gaz ionisé) qui aurait tendance à s'étendre du fait de la pression cinétique liée à l'agitation désordonnée des particules la composant.

3.3. Puissance cédée par le champ aux charges

La puissance de la force de Lorentz exercée sur une particule de charge q , soumise à l'action des champs \vec{E} et \vec{B} , est :

$$\mathcal{P} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}.$$

La force d'origine magnétique, perpendiculaire au mouvement ne travaille pas.

Pour un milieu contenant n charges mobiles par unité de volume, la puissance des forces électromagnétiques s'écrit, pour un volume élémentaire $d\tau$:

$$d\mathcal{P} = (nqd\tau) \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau,$$

soit, pour la puissance volumique :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

La puissance volumique \mathcal{P}_{vol} , cédée par le champ électromagnétique aux charges, est :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Cette puissance est liée au champ électrique. Ainsi, dans un accélérateur de particules, les particules chargées sont mises en mouvement par un champ électrique. Un champ magnétique pourra les dévier, sans leur fournir d'énergie, pour les confiner dans un anneau de stockage.

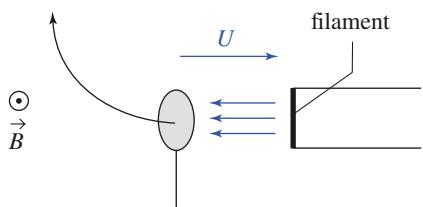
Application 4

Accélération d'un faisceau de particules

Des particules de charge q et de masse m , émises par un filament chauffé avec une vitesse initiale négligeable, sont accélérées par un champ électrique permanent uniforme \vec{E}_0 régnant entre les électrodes accélératrices, distantes de d , représentées sur le document 14.

1) Quelle est la vitesse \vec{v}_0 acquise par ces charges ?

2) Quel sera leur rayon de giration si elles passent dans une zone où un champ magnétique permanent uniforme \vec{B}_0 perpendiculaire à leur vitesse \vec{v}_0 , à la sortie des électrodes accélératrices ?



Doc. 14. Les électrons, après accélération sous la différence de potentiel U , pénètrent dans un champ \vec{B} uniforme.

Données : Les charges utilisées sont des électrons de charge $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; la différence de potentiel accélératrice vaut $1\,000 \text{ V}$ et le champ magnétique est de $0,002 \text{ T}$.

1) Entre les électrodes accélératrices, les charges subissent l'effet de la force $\vec{F} = q\vec{E}_0$; qui leur fournit le travail $W = qE_0d$ lorsqu'elles traversent la zone d'accélération. Si leur vitesse initiale est négligeable devant leur vitesse finale, notée v_0 , le théorème de l'énergie cinétique nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qE_0d.$$

Le champ électrique permanent dérive d'un potentiel scalaire V , et le champ E_0 , uniforme, est lié à la différence de potentiel U entre les électrons par :

$$U = dE_0.$$

Dans le cas d'électrons, la vitesse acquise est :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 18,8 \cdot 10^6 \text{ m . s}^{-1}.$$

Cette vitesse est de l'ordre de $\frac{c}{16}$, et ce résultat est à la limite de validité de la mécanique classique.

2) Lorsque les électrons pénètrent dans la zone où règne le champ magnétique, leur équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

$$\text{soit : } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{v}, \text{ avec } \vec{\omega}_0 = -\frac{q\vec{B}_0}{m}.$$

Décrivons ce mouvement en coordonnées cartésiennes, en choisissant l'axe (Oz) parallèle au champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, et l'axe (Ox) parallèle à la vitesse \vec{v}_0 initiale (à l'instant $t = 0$).

L'équation d'évolution du vecteur vitesse nous montre que le vecteur \vec{v} effectue un mouvement de précession à vitesse angulaire constante ω_0 autour de l'axe (Oz). Nous en déduisons ses composantes à l'instant t :

$$v_x = v_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad v_y = v_0 \sin(\omega_0 t).$$

Prenant pour origine du système de coordonnées la position initiale de la particule, nous en déduisons l'équation horaire de sa trajectoire, contenue dans le plan (xOy) :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

$$\text{et} \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)).$$

Cette trajectoire, d'équation cartésienne :

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0}{\omega_0} \right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2,$$

est un cercle de rayon :

$$R = \left| \frac{v_0}{\omega_0} \right| = \left| \frac{m v_0}{q B_0} \right| \approx 5,3 \text{ cm}.$$

4 Conduction électrique

4.1. Loi d'Ohm locale

4.1.1. Conductivité d'un milieu

Un matériau conducteur contient des **charges libres**, ou **charges de conduction**, susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique appliqué au matériau. C'est le cas :

- des métaux, où les charges de conduction sont des électrons ;
- des solutions ioniques, où la conduction électrique est liée aux déplacements d'ensemble des ions.

Dans de nombreuses situations, le champ appliqué reste suffisamment faible pour que le vecteur densité de courant électrique \vec{j} et le champ électrique \vec{E} soient liés par une relation linéaire, la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Le coefficient γ désigne la conductivité du milieu, qui s'exprime en $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ (S désigne le siemens, ou ohm^{-1}). Le domaine de variation de la conductivité du milieu est extrêmement étendu, allant des isolants et conducteurs médiocres aux très bons conducteurs (doc. 15).

milieu		conductivité ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)	nature du milieu
paraffine		10^{-8}	isolant
terreau		$6 \cdot 10^{-6}$	conducteur médiocre
électrolytes		10^{-2}	la conductivité dépend de la concentration
métaux	Hg	10^6	excellents conducteurs
	Al	$3,7 \cdot 10^7$	
	Au	$4,6 \cdot 10^7$	
	Cu	$5,9 \cdot 10^7$	
	Hg	$6,2 \cdot 10^7$	

Doc. 15. Conductivité de quelques milieux.

4.1.2. Modèle élémentaire de conduction électrique

4.1.2.1. Dérive des charges de conduction

Considérons un milieu conducteur possédant n particules, de charge q et de masse m , par unité de volume, susceptibles d'assurer la conduction du milieu. L'application d'un champ électrique au milieu entraîne un *mouvement de dérive* des charges de conduction du milieu, qui se superpose à leur agitation thermique désordonnée. Nous noterons \vec{v} la vitesse associée à ce mouvement d'ensemble du fluide de charges de conduction de masse volumique $\rho = n m$.

Nous admettrons que l'effet du champ électrique macroscopique \vec{E} appliqué au milieu, peut être représenté par l'intermédiaire d'une force volumique :

$$\vec{F}_{\text{vol}} = n q \vec{E}.$$

4.1.2.2. Modèle de Drude

Pour rendre compte de l'existence d'une vitesse limite de dérivé, nous modéliserons l'effet des interactions entre les charges de conduction et les charges fixes du matériau par une force volumique, opposée à ce mouvement et proportionnelle à la vitesse de dérive :

$$\vec{f}_{\text{vol}} = -\rho \frac{\vec{v}}{\tau},$$

où le facteur τ est homogène à un temps.

Pour ce modèle, dû au physicien allemand Paul Drude (1900), l'équation du mouvement du fluide de charges de conduction est :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = n q \vec{E} - \rho \frac{\vec{v}}{\tau}.$$

Elle s'écrit aussi : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E}$.

Remarque

Cette dernière expression est analogue à l'équation du mouvement d'une charge q de masse m , soumise à l'action du champ électrique \vec{E} et à une force de frottement fluide $\vec{f} = -m \frac{\vec{v}}{\tau}$. Mais la vitesse \vec{v} désigne, dans ce modèle macroscopique de Drude, la vitesse d'ensemble du fluide de charges de conduction, et non la vitesse d'une particule.

Si le champ électrique est appliqué à l'instant $t = 0$ au milieu, l'évolution de la vitesse de dérive est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{q \tau}{m} \vec{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

La constante de temps τ apparaît donc comme le **temps de relaxation du milieu**.

En effet, pour $t \gg \tau$, la vitesse de dérive peut être assimilée à sa limite :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{q \tau}{m} \vec{E} = \mu \vec{E},$$

où μ désigne la mobilité des porteurs de charge considérés.

La densité de courant électrique correspondante est alors :

$$\vec{j} = n q \vec{v}_{\text{lim}} = \frac{n q^2 \tau}{m} \vec{E}.$$

4.1.2.3. Conductivité du milieu

Ce résultat est en accord avec l'expression locale de la loi d'Ohm, la conductivité du milieu valant :

$$\gamma = \frac{n q^2 \tau}{m}.$$

Dans le cas où plusieurs types de porteurs (de charges q_i , de masse m_i et de densité n_i) interviennent (comme dans une solution ionique contenant différents types d'ions, par exemple), leurs interactions mutuelles peuvent en général être

négligées, et nous pouvons les considérer comme des fluides de conduction indépendants, obéissant à l'équation du mouvement précédente. Leurs contributions au courant électrique s'additionnent, la conduction du milieu est alors de la forme $\gamma = \sum_i \gamma_i$.

La conductivité est proportionnelle au nombre n de charges de conduction par unité de volume. Cette caractéristique est mise à profit en chimie : la mesure de la conductivité de la solution permet de suivre l'évolution des concentrations des ions en solution (dosage ou suivi de cinétique).

Dans un milieu métallique, le nombre de particules est relativement peu sensible à la température pour des températures usuelles. **La conductivité d'un métal diminue lorsque la température augmente**, puisque l'agitation thermique des ions du réseau tend à augmenter les collisions, donc la force de frottement qui s'oppose au mouvement des charges de conduction.

Dans un semi-conducteur, la densité de charges de conduction est beaucoup plus sensible à l'influence de la température, et augmente avec celle-ci. L'augmentation de ce nombre de charges de conduction l'emporte alors sur l'augmentation de l'effet des collisions des charges de conduction avec le réseau. *La conductivité du semi-conducteur augmente lorsque la température augmente.*

Remarque

Lorsque l'énergie des porteurs en mouvement devient importante, elle peut parfois permettre la création de porteurs de charges mobiles supplémentaires par ionisation. Du fait de cet effet d'avalanche, la conduction cesse d'être linéaire. Ce phénomène est mis en œuvre dans des diodes Zener, lorsqu'elles sont polarisées en inverse et soumises à une tension supérieure à la tension Zener, au-delà de laquelle cet effet se produit.

Application 5

Conduction électrique d'un métal

1) Évaluer, pour un très bon conducteur comme le cuivre métallique, l'ordre de grandeur de la vitesse de dérive des électrons de conduction, dans un fil de section $S = 1 \text{ mm}^2$, parcouru par un courant $I = 10 \text{ A}$.

La comparer à la vitesse d'agitation thermique d'un électron libre à la température $T = 300 \text{ K}$.

2) Évaluer le temps de relaxation τ du milieu. En assimilant τ à un temps de collision (temps moyen entre deux collisions successives d'une charge de conduction avec le réseau), évaluer le libre parcours moyen ℓ des charges de conduction.

3) Le champ électrique appliqué au milieu est sinusoïdal, de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$

en notation complexe.

Montrer que le modèle précédent nous permet de

définir une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ en régime sinusoïdal établi.

Dans quel domaine de fréquence sera-t-il possible d'assimiler la conductivité du milieu à sa valeur en régime permanent ?

Données :

- masse d'un électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- charge d'un électron : $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

Cuivre :

- conductivité : $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$;
- masse volumique : $\mu = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$;
- masse molaire : $M = 64 \text{ g.mol}^{-1}$.

On considérera que chaque atome de cuivre apporte un électron de conduction.

1) S'il existe un seul électron de conduction par atome de cuivre, la densité volumique des électrons de conduction est :

$$n = \frac{N_A \mu}{M} \approx 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

La densité de courant électrique dans le fil est :

$$j \approx \frac{I}{S} = 10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

La vitesse de dérive s'en déduit :

$$|v| = \left| \frac{j}{ne} \right| \approx 0,74 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Si nous utilisons la relation $\frac{1}{2}mv_T^2 = \frac{3}{2}k_B T$ pour évaluer la vitesse d'agitation des électrons, nous obtenons $v_T \approx 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à la température ambiante. Nous avons donc $|v| \ll v_T$, ce qui justifie le modèle et donc les calculs précédents.

2) Le temps de relaxation τ est :

$$\tau = \frac{m\gamma}{ne^2} \approx 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s.}$$

Le libre parcours est défini comme le produit de la vitesse moyenne d'agitation par le temps de collision. Nous pouvons donc l'évaluer par :

$$\ell = v_T \tau \approx 2,5 \text{ nm.}$$

Notons qu'il est nettement supérieur à la taille de la maille du réseau cristallin, typiquement de l'ordre de quelques dixièmes de nanomètres.

3) En notant $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{j\omega t}$ la vitesse complexe du fluide d'électrons de conduction, lorsque le régime sinusoïdal est établi, l'équation du mouvement d'ensemble :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E},$$

$$\text{nous donne } \vec{v}_0 = -\frac{\frac{e\tau}{m}}{1+j\omega\tau} \vec{E}_0.$$

Le vecteur densité de courant complexe :

$$\vec{j} = \underline{j}_0 e^{j\omega t} = -nev,$$

nous permet de définir la conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1+j\omega\tau}.$$

Nous pourrons confondre cette conductivité complexe avec sa valeur $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$ pour des pulsations

$\omega \ll \frac{1}{\tau}$. Pour l'étude de circuits électriques, où la

fréquence reste toujours très inférieure à 10^{14} Hz , nous pourrons confondre la conductivité complexe avec sa valeur à basse fréquence, car le temps caractéristique d'évolution $T = \frac{2\pi}{\omega}$ reste très grand par rapport au temps de relaxation τ du milieu conducteur.

4.1.2.4. Influence d'un champ magnétique

Lorsque le milieu conducteur est aussi soumis magnétique \vec{B} , nous devons *a priori* tenir compte de la force volumique supplémentaire $\vec{F}_{\text{vol}} = nq\vec{v} \wedge \vec{B}$. Celle-ci n'est pas négligeable si le champ magnétique est de l'ordre de

$E = \frac{j}{\gamma v}$. En reprenant les valeurs numériques de l'application précédente, nous obtenons un champ de l'ordre de 240 teslas, ce qui est énorme !

Dans la pratique, l'effet d'un champ magnétique (y compris le champ créé par le milieu conducteur lui-même) dans la traduction de la loi d'Ohm est en général faible pour un conducteur, mais non négligeable pour un semi-conducteur.

Pour en tenir compte, nous pourrons utiliser l'équation d'évolution :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

qui conduit, en régime permanent (ou variable, caractérisé par un temps caractéristique $T \gg \tau$), à relier le vecteur densité de courant électrique $\vec{j} = n q \vec{v}$ au champ électromagnétique par la relation :

$$\vec{j} = \frac{n q^2 \tau}{m} \left(\vec{E} + \frac{\vec{j}}{n q} \wedge \vec{B} \right) = \gamma (\vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B}),$$

où $R_H = \frac{1}{n q}$ est appelée **constante de Hall** du milieu.

Remarque

- Précisons que cette relation est obtenue avec un conducteur fixe.
- Nous reviendrons sur l'influence du champ magnétique au § 5.

4.1.2.5. Référentiel d'étude

La vitesse \vec{v} , qui nous permet de définir le vecteur densité de courant \vec{j} , désigne la vitesse d'ensemble des porteurs de charge mobiles dans le référentiel lié au milieu conducteur. La loi d'Ohm s'écrit donc dans le référentiel galiléen qui se déplace à l'instant t à la vitesse du conducteur dans le référentiel du laboratoire. Nous reviendrons sur l'influence du mouvement du conducteur, à une vitesse d'entraînement \vec{v}_e lors de l'étude de l'induction électromagnétique.

Le modèle macroscopique de Drude permet de rendre compte de la conduction électrique d'un milieu ohmique.

Dans le référentiel du conducteur, le vecteur densité de courant \vec{j} et le champ électrique \vec{E} sont liés linéairement par la relation :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

où γ est la conductivité du milieu, exprimée en $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$.

► Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.

4.2. Loi d'Ohm intégrale

Considérons, en régime permanent de conduction électrique dans un milieu ohmique de conductivité γ , une portion d'un tube de courant comprise entre deux sections Σ_1 et Σ_2 (doc. 16).

En régime permanent, l'intensité électrique, comptée de Σ_1 vers Σ_2 , est la même à travers toute section (orientée) du tube de courant :

$$I = \iint_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S}_2.$$

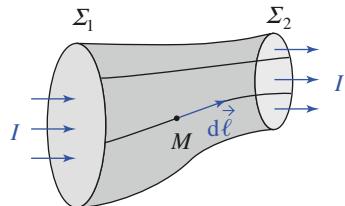
Le champ électrique permanent dérive d'un potentiel scalaire V :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V.$$

Le vecteur \vec{j} est parallèle au champ \vec{E} , et les deux sections Σ_1 et Σ_2 perpendiculaires aux lignes de courant constituent des surfaces équipotentielles.

La différence de potentiel $U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ peut alors être calculée sur tout chemin menant de la section Σ_1 du tube à la section Σ_2 .

Les vecteurs densité de courant \vec{j} et champ électrique \vec{E} sont proportionnels et de même sens.



Doc. 16. Résistance d'une portion de tube de courant.

Nous pouvons donc définir le rapport :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\iint_{\Sigma_1 \text{ ou } \Sigma_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\gamma \iint_{\Sigma_1 \text{ ou } \Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}}.$$

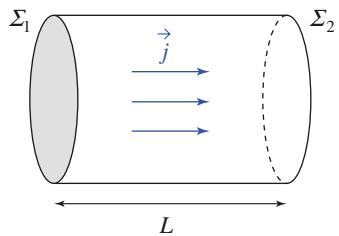
Ce rapport définit la résistance R de cet élément du milieu ohmique : il est positif et ne dépend que de la géométrie de la portion de tube de courant considérée. Cette grandeur, exprimée en ohms (Ω), nous permet d'écrire la relation usuelle $U = RI$.

Dans le cas d'une densité volumique de courant uniforme, la résistance d'un tube conducteur cylindrique de section S et de longueur L est (doc. 17) :

$$R = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\iint_{\Sigma_1 \text{ ou } \Sigma_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}} = \frac{EL}{JS} = \frac{L}{\gamma S} = \frac{\rho_R L}{S}.$$

où $\rho_R = \frac{1}{\gamma}$ est la *résistivité* du milieu, exprimée en $\Omega \cdot \text{m}$.

► Pour s'entraîner : ex. 4, 5 et 6.



Doc. 17. Cas d'un conducteur cylindrique dans lequel \vec{j} est uniforme.

4.3. Effet Joule

4.3.1. Puissance volumique dissipée

La puissance volumique fournie par le champ aux charges mobiles est :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Pour un milieu ohmique, son expression est :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma E^2.$$

Cette puissance, dissipée par les interactions entre les porteurs de charge mobiles et le réseau d'un métal par exemple, est convertie en énergie d'agitation thermique : une résistance parcourue par un courant s'échauffe. Ce phénomène est ainsi mis à profit dans les radiateurs électriques.

Application 6

Puissance de la « force de frottement »

Retrouver les expressions précédentes en utilisant la force volumique de « frottement » introduite dans le cadre du modèle de Drude.

Le fluide de porteurs mobiles de vitesse d'ensemble v est soumis à la force volumique :

$$\vec{f}_{\text{vol}} = -\rho \frac{\vec{v}}{\tau}.$$

La puissance volumique correspondante est :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{vol}} \cdot \vec{v} &= -\rho \frac{v^2}{\tau} = -\frac{n m v^2}{\tau} = -\frac{n m \left(\frac{j}{nq}\right)^2}{\tau} \\ &= -\frac{j^2}{\gamma}. \end{aligned}$$

Cette expression met en évidence la dissipation de la puissance, fournie par le champ aux porteurs mobiles, au profit d'un échauffement du milieu conducteur.

4.3.2. Puissance dissipée dans un tube conducteur

Envisageons à nouveau la portion de tube de courant comprise entre les sections Σ_1 et Σ_2 , perpendiculaires aux lignes de courant et au champ électrique.

Dans un tube filiforme de courant de section d'entrée élémentaire dS_1 , le vecteur densité de courant \vec{j} est colinéaire à un déplacement élémentaire $d\ell$ le long de ce tube, et au vecteur surface élémentaire δS (doc. 18).

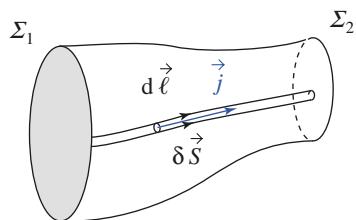
La puissance dissipée par effet Joule dans ce tube élémentaire est :

$$dP = \int_1^2 (\vec{j} \cdot \vec{E})(d\ell \cdot \delta S) = \int_1^2 \delta I (\vec{E} \cdot d\ell) = \delta I U,$$

où δI est le courant élémentaire parcourant le tube de petite section.

En sommant sur tous les tubes élémentaires constituant la portion de tube de courant envisagée, nous retrouvons les expressions classiques de la puissance électrique dissipée par effet Joule dans cette portion de milieu ohmique :

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$



Doc. 18. Effet Joule dans un conducteur.

5 Force magnétique exercée sur les courants

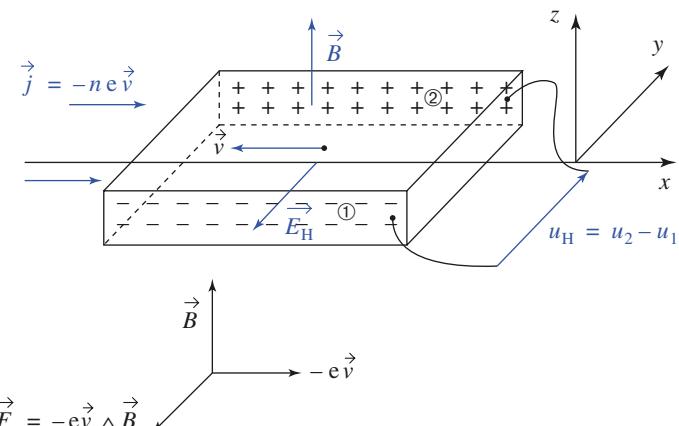
5.1. Effet Hall

5.1.1. Un modèle élémentaire

Considérons un fil conducteur dont nous modélisons la section par un rectangle de côtés de longueurs a et b . Ce fil, soumis à un champ électrique \vec{E}_0 , est le siège d'un courant de conduction dirigé selon (Ox) .

Dans le fil contenant n porteurs de charge mobiles, de vitesse de dérive \vec{v} et charge q (sur le document 19, nous avons supposé que les charges mobiles sont des électrons : $q = -e$), la densité volumique de courant électrique est :

$$\vec{j} = n q \vec{v}.$$



Doc. 19. Effet Hall dans un conducteur métallique.

L'effet d'un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_z$, appliqué au conducteur, se traduit par l'apparition d'une force de Lorentz supplémentaire :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Pour des électrons de charge $q = -e$: $\vec{F} = -e \|\vec{v}\| \|\vec{B}\| \vec{e}_y$.

5.1.1.1. Régime transitoire

Cette force (moyenne, car nous nous intéressons au comportement collectif des porteurs de charge mobiles) tend à dévier le porteur de charge de sa trajectoire dans la direction de l'axe (Oy) (doc. 20a). Si les charges de conduction sont des électrons, de vitesse \vec{v} dirigée à l'opposée du vecteur densité de courant électrique \vec{j} , cette force tend à les déplacer vers la face 1. Celle-ci se charge négativement alors que la face 2 accuse un défaut électronique (doc. 20b).

Les charges surfaciques qui apparaissent créent à leur tour un champ électrique, appelé **champ de Hall**, qui agit à son tour sur les électrons de conduction.

5.1.1.2. Régime permanent

Ce champ de Hall s'oppose à la force de déviation précédente. Le système doit tendre vers un nouveau régime permanent, où la force de déviation et la force créée par le champ de Hall se compensent (doc. 20b), le mouvement des charges de conduction étant le même qu'en l'absence de champ magnétique :

$$q \vec{E}_H + q \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}, \text{ donc } \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = R_H \vec{B} \wedge \vec{j},$$

où $R_H = \frac{1}{nq}$ est la constante de Hall du milieu.

5.1.2. Tension de Hall

Le modèle que nous venons de présenter est trop simpliste pour qu'il soit possible de lui accorder un crédit illimité, mais il permet de rendre compte de l'apparition, entre les faces 1 et 2, d'une **tension de Hall** :

$$U_H = \int_1^2 -\vec{E}_H \cdot d\vec{\ell} = -bE_H = -\frac{jb}{nq} B = -\frac{1}{nqa} IB, \text{ puisque } I = ja.$$

Remarque

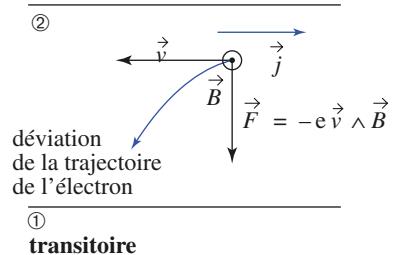
Le signe de la tension de Hall est lié au signe des porteurs de charges mobiles (doc. 21). Pour un même courant I , les tensions de Hall données par :

– un ruban conducteur où les porteurs de charges sont des électrons ($q = -e$) ;

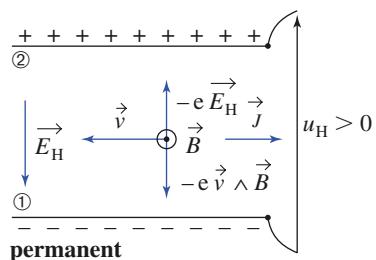
– un ruban semi-conducteur dont les porteurs de charges majoritaires sont des trous (lacunes électroniques, $q = +e$) seront de signes opposés.

Nous pouvons aussi nous en convaincre en observant que l'effet de déviation du champ magnétique est semblable pour un porteur « $+q, +\vec{v}$ » ou un porteur « $-q, -\vec{v}$ », alors que les champs de Hall seront opposés.

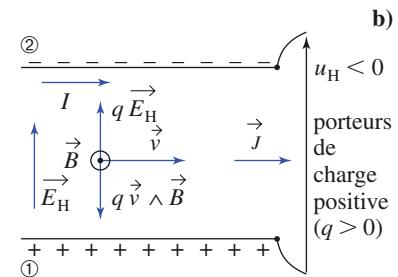
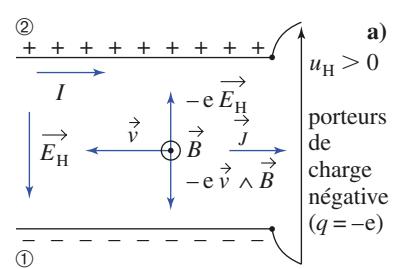
Pour un courant I et un ruban (de facteur $\frac{1}{nqa}$) donnés, la tension de Hall permet une détermination de la valeur du champ magnétique : c'est le principe de fonctionnement d'une **sonde de Hall**.



Doc. 20a. Régime transitoire



Doc. 20b. Régime permanent



Doc. 21. Tension de Hall et signe de la charge des porteurs mobiles.

a. Porteurs de charge négative.

b. Porteurs de charge positive.

Pour un ruban d'argent ($n = 6 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$; $q = -e$; épaisseur $a = 0,1 \text{ mm}$) parcouru par un courant élevé $I = 5 \text{ A}$ dans un champ magnétique intense $B = 1 \text{ T}$, la valeur $U_H = 5,2 \mu\text{V}$ est très faible.

Il faut donc amplifier cet effet pour pouvoir effectuer une mesure précise.

Le phénomène est facilement observable avec des matériaux semi-conducteurs pour lesquels le nombre n de porteurs de charges par unité de volume qui participent à la conduction, est nettement plus faible (10^5 à 10^6 fois plus faible), donc la tension de Hall est 10^5 à 10^6 fois plus grande.

► Pour s'entraîner : ex. 9.

5.2. Modèle de Hall des forces de Laplace

Lorsque le régime permanent est établi, nous pouvons analyser les efforts aux-quels sont soumises, par unité de volume, les charges du fil, supposé immobile dans le référentiel d'étude.

Pour les charges mobiles (de charge q) :

$$\vec{F}_{\text{m vol}} = n q (\vec{E}_0 + \vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) = n q \vec{E}_0.$$

Pour les charges fixes, la densité volumique de charges est $-n q$, donc :

$$\vec{F}_{\text{f vol}} = -n q (\vec{E}_0 + \vec{E}_H).$$

La force volumique subie par le fil vaut au total :

$$\vec{F}_{\text{vol}} = \vec{F}_{\text{f vol}} + \vec{F}_{\text{m vol}} = -n q \vec{E}_H = +n q \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

Remarques

- Nous pouvons aussi dire que ce résultat traduit l'effet, au sein du matériau conducteur, de la déviation des charges de conduction, qui est un effort transmis aux charges fixes du fil par l'intermédiaire des collisions.
- Les charges surfaciques fixes et opposées, qui apparaissaient sur les surfaces du ruban conducteur au § 5.1.1., n'apporteront pas de forces supplémentaires s'appliquant au fil.

Nous admettrons la généralisation de ce résultat lorsque l'élément de conducteur est en translation dans le référentiel galiléen d'étude (doc. 22).

La force de Laplace à laquelle est soumis un élément conducteur, de volume élémentaire $d\tau$, parcouru par un courant de densité volumique \vec{j} et placé dans un champ magnétique \vec{B} , est :

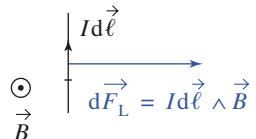
$$d\vec{F}_L = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}.$$

En utilisant les équivalences entre éléments de courants :

$$\vec{j} d\tau \leftrightarrow I d\vec{\ell},$$

nous avons de même :

La force de Laplace : $d\vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ s'exerce sur un élément de longueur $d\vec{\ell}$ d'un circuit filiforme.



Doc. 22. Force de Laplace appliquée à un élément de circuit filiforme.

5.3. Efforts subis par un circuit

Nous pouvons utiliser l'expression de la force de Laplace exercée sur un élément de courant, pour déterminer la résultante et le moment par rapport à un point de ces efforts exercés sur un circuit donné.

Dans le cas d'un circuit filiforme, nous écrirons :

$$\bullet \vec{F}_L = \oint_{\text{circuit}} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \text{ pour la résultante des efforts de Laplace ;}$$

$$\bullet \vec{\Gamma}_{L/O} = \oint_{\text{circuit}} \vec{OM} \wedge (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}), \text{ pour le moment de ces efforts en un point } O.$$

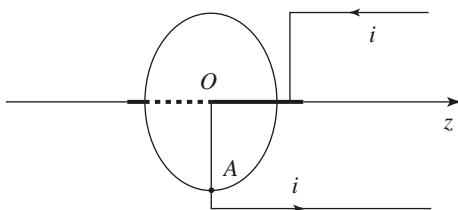
Application 7

Efforts de Laplace exercés sur un disque conducteur

On considère un disque conducteur de rayon a solidaire d'un arbre de rayon négligeable.

Ce disque se trouve dans un champ magnétique uniforme et invariable dans le temps : $\vec{B} = B \vec{e}_z$.

Ce disque est relié électriquement à un circuit extérieur (que nous ne détaillons pas ici) par l'intermédiaire de l'arbre d'une part et de sa périphérie d'autre part et il est parcouru par un courant I (doc. 23)



Doc. 23.

Pour simplifier l'étude on considère que le courant circule à l'intérieur du disque le long du rayon OA .

1) Déterminer la force de Laplace subie par un élément du rayon OA situé à la distance r de O .

En déduire la force de Laplace s'exerçant sur le disque.

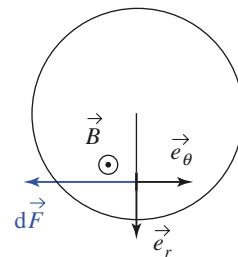
2) Déterminer, par la même méthode, l'expression du moment par rapport à l'axe z des actions magnétiques sur le disque.

3) Montrer que l'on peut retrouver ce dernier résultat en utilisant la force de Laplace calculée en 1), à condition de l'appliquer en un point particulier du rayon. Quelle(s) hypothèse(s) justifie(nt) ce résultat ?

1) L'élément de longueur $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r$ subit une force élémentaire :

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B} = Idr \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z = -I dr B \vec{e}_\theta.$$

Pour le rayon OA et donc pour le disque, la force exercée est $\vec{F} = \int_0^a -IB dr \vec{e}_\theta$; comme I , B et \vec{e}_θ sont indépendants de r , $\vec{F} = -B I a \vec{e}_\theta$.



Doc. 24.

2) Le moment élémentaire par rapport à (Oz) s'écrit :

$$d\Gamma_z = (\vec{OM} \wedge \vec{dF}) \cdot \vec{e}_z = (r \vec{e}_r \wedge (Id\vec{\ell} \wedge \vec{B})) \cdot \vec{e}_z;$$

d'où pour le rayon OA :

$$\Gamma_z = -BI \int_0^a r dr, \quad \text{et} \quad \Gamma_z = -BI \frac{a^2}{2}.$$

3) Pour retrouver le même résultat il faut que le point d'application de la force totale soit au milieu de OA :

$$\frac{a}{2} \vec{e}_r \wedge (-B I a \vec{e}_\theta) = -BI \frac{a^2}{2} \vec{e}_z.$$

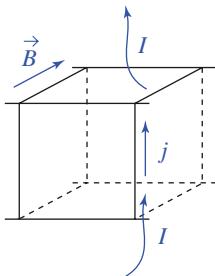
Ce résultat tient au fait que les forces élémentaires sont uniformes sur tout le rayon OA . Ce résultat est intuitif mais il est cependant préférable d'utiliser le raisonnement de la question 2), qui est plus systématique.

Les efforts exercés par un champ magnétique sur les éléments de courants permettent la mise en mouvement de circuits sans intervention mécanique directe. En fournissant de l'énergie électrique, nous pouvons imposer le passage d'un courant électrique dans un circuit. L'existence d'efforts de Laplace entraîne sa mise en mouvement, donc l'acquisition d'énergie mécanique dans le circuit. La présence du champ magnétique permet une conversion de l'énergie, appelée **transduction électromécanique**. Ce principe est la base de fonctionnement des moteurs tournants. Nous l'utiliserons en particulier aux *chapitres 6 et 7*.

Application 8

Pompe électromagnétique

Un fluide conducteur (sodium liquide) peut circuler dans une canalisation. Un générateur fait passer un courant I à travers la canalisation, qui est plongée à cet endroit dans un champ magnétique, dirigé perpendiculairement à la direction moyenne des lignes de courant (doc. 25). Quel peut être l'intérêt d'un tel dispositif ?



Doc. 25. Champ \vec{B} dans un fluide conducteur.

Les forces de Laplace exercées sur le milieu conducteur sont, en moyenne, dirigées parallèlement à la canalisation.

Ce dispositif permet donc de créer un effet de pompage, sans nécessiter la présence d'une pompe mécanique dont le mouvement des pales permettrait de pousser le fluide dans la canalisation.

Nous sommes donc en présence d'une pompe sans partie mobile.

Ce dispositif est particulièrement utile pour déplacer un fluide très corrosif, comme le sodium fondu circulant dans les circuits d'échange thermique de certaines centrales nucléaires...



● CONSERVATION DE LA CHARGE ÉLECTRIQUE

- La charge totale d'un système isolé se conserve au cours du temps. Ce principe se traduit par des équations :

• de conservation intégrale : $\oint_{\Sigma} \vec{j}(P, t) \cdot \vec{n} dS + \iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau = 0$;

• de conservation locale : $\operatorname{div} \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$.

• En régime permanent, le champ de vecteurs \vec{j} est à flux conservatif :

$$\operatorname{div} \vec{j}(M) = 0,$$

et l'intensité électrique est la même à travers toutes les sections d'un même tube de courant ; la loi des nœuds est applicable.

• Dans l'approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.) les dimensions L d'un circuit sont très inférieures devant la quantité cT où T est le temps caractéristique d'évolution $L < cT$.

• Dans l'approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.), l'équation $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ et ses conséquences sont également valables.

● CHARGES ET CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

- Les charges et les courants électriques sont les sources du champ électromagnétique.
- Une particule de charge q et de vitesse \vec{v} , évoluant dans une zone où règne un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

- La puissance volumique \mathcal{P}_{vol} cédée par le champ électromagnétique aux charges et courants, est :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

● CONDUCTION ÉLECTRIQUE ET LOI D'OHM

- Le modèle macroscopique de Drude permet de rendre compte de la conduction électrique d'un milieu ohmique. Dans le référentiel du conducteur, le vecteur densité de courant \vec{j} et le champ électrique \vec{E} sont liés linéairement par la relation :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

où γ est la conductivité du milieu, exprimée en $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$.

● FORCES DE LAPLACE

- La force de Laplace à laquelle est soumis un élément conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique \vec{B} , peut s'écrire :

$$d\vec{F}_L = \vec{j} d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad \text{ou} \quad d\vec{F}_L = I \vec{d} \wedge \vec{B},$$

suivant le modèle de distribution de courants envisagé.

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ À quelle(s) condition(s) peut-on substituer une modélisation surfacique à une modélisation volumique de charges ou de courants ?
- ✓ Comment s'exprime l'intensité pour une densité surfacique ?
- ✓ Dans quelles hypothèses peut-on appliquer la loi des nœuds ?
- ✓ Comment s'exprime la puissance volumique cédée aux charges par le champ électromagnétique ?
- ✓ La loi de conservation de la charge et la loi d'Ohm locale sont-elles des lois phénoménologiques ou des lois générales ?
- ✓ Comment s'exprime la force élémentaire de Laplace pour un tronçon $d\vec{l}$ de conducteur parcouru par un courant I et soumis à un champ \vec{B} ?
- ✓ Décrire en quelques phrases le mécanisme de l'effet Hall.

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Dans un électrolyte :

- a. tous les ions participent à la conduction
- b. les vitesses des différents ions sont égales
- c. les normes des vitesses des différents ions sont égales
- d. le vecteur densité de courant volumique est la somme vectorielle des densités de courant associées à chaque type d'ion.

2. Soit un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) :

- a. l'action de ce champ sur une charge ponctuelle s'exprime toujours par : $q(\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$
- b. les termes $q(\vec{v} \wedge \vec{B})$ et $q\vec{E}$ correspondent chacun à un travail cédé aux charges
- c. si le champ agit sur une distribution de charge surfacique on peut rendre compte de cette action à l'aide d'une force surfacique
- d. cette force s'exprime alors par :
$$dF = -\sigma dS(\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E}).$$

3. Soit un matériau conducteur ohmique :

- a. toutes les charges participent à la conduction
- b. la conductivité γ est une caractéristique du matériau
- c. l'ordre de grandeur de γ pour un métal est $10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

- d. la résistance d'un tronçon de conducteur ohmique est toujours donnée par $R = \frac{L}{\gamma S}$.

4. La conservation de la charge est donnée par :

- a. $\operatorname{div} \vec{j} + \rho = 0$
- b. $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- c. $\operatorname{div} \vec{j} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- d. $\frac{dQ_{V_x}}{dt} + \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$.

5. Lorsque l'approximation des régimes quasi permanents s'applique :

- a. le temps caractéristique d'évolution des grandeurs physiques dans un circuit est faible devant le retard lié à la propagation
- b. $\operatorname{div} \vec{j} = 0$
- c. les conducteurs présents dans le circuit sont ohmiques
- d. les fréquences sont très inférieures à 1 MHz
- e. la propagation est instantanée.

► Solution, page 32.

Exercices

1 Sphère radioactive

Une petite sphère radioactive de rayon a , initialement neutre, émet de façon isotrope par sa surface n charges q par unité de temps, avec une vitesse radiale \vec{v} de norme v constante.

Déterminer, à un instant t , la répartition de charges et de courants correspondante.

2 Temps de relaxation d'un milieu ohmique

Dans cet exercice, tous les champs de vecteurs considérés sont dirigés parallèlement à l'axe (Ox).

1) Un temps de relaxation surprenant

a) Un milieu ohmique de conductivité γ possède une répartition de charge volumique $\rho_0(x) = \rho(x, t=0)$ initiale non identiquement nulle. En utilisant une surface de Gauss adaptée, relier l'évolution spatiale du champ électrique $\vec{E} = E(x, t) \vec{e}_x$ à la charge volumique $\rho(x, t)$ du milieu.

Remarque : Le théorème de Gauss est applicable en régime variable.

b) Quelle loi d'évolution de la charge volumique $\rho(x, t)$ peut-on déduire alors de la conservation de la charge électrique, en utilisant la loi d'Ohm ?

Vers quel état le milieu évolue-t-il ?

Au bout de quel temps caractéristique T peut-on considérer que le milieu a perdu le souvenir de son état initial ?

c) Indiquer l'ordre de grandeur de ce temps caractéristique T associé à cette relaxation.

La loi d'Ohm est-elle effectivement utilisable pour étudier ce régime transitoire ?

2) Modèle de Drude

Pour corriger l'incohérence du résultat précédent, on se propose d'appliquer au milieu conducteur (possédant n porteurs mobiles de charge q et de masse m par unité de volume) le modèle de Drude (cf. § 4.1.2.). On note τ le temps de relaxation associé.

Le nombre n de porteurs mobiles par unité de volume ne peut être constant puisque ρ varie, mais on admet qu'en pratique, sa variation relative est extrêmement faible.

a) En reprenant l'étude précédente, indiquer l'équation d'évolution de la charge $\rho(x, t)$ obtenue en utilisant cette nouvelle approche.

b) Quel temps caractérise ici, compte tenu des ordres de grandeur, la perte de mémoire du conducteur ?

Est-il comparable au temps T obtenu précédemment ?

Données : le milieu ohmique est du cuivre, de conductivité $\gamma \approx 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et de temps de relaxation $\tau = 10^{-14} \text{ s}$.

3* Deux milieux ohmiques en contact

Deux milieux ohmiques, de conductivités γ_1 et γ_2 , occupent respectivement les zones $z < 0$ et $z > 0$.

Ce système est soumis, à l'instant $t = 0$, à un champ électrique uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$.

On supposera que les temps de relaxation τ_1 et τ_2 (définis dans le modèle de Drude) des deux milieux sont ici négligeables.

1) Que valent, à l'instant initial, les densités volumiques de courant \vec{j}_1 et \vec{j}_2 dans les milieux 1 et 2 ?

En déduire, à partir d'un bilan de charges judicieux, qu'il apparaît sur le plan $z = 0$ une charge surfacique σ que l'on reliera à \vec{j}_1 et \vec{j}_2 .

2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par σ et étudier le régime transitoire correspondant.

Indiquer l'état obtenu à la fin du régime transitoire.

Discuter la cohérence des résultats obtenus avec le modèle utilisé.

4 Effet de magnéto-résistance dans une plaque conductrice

Un milieu ohmique de temps de relaxation τ possède n charges de conduction (de charge q et de masse m) par unité de volume. Une différence de potentiel impose un champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point M de ce milieu.

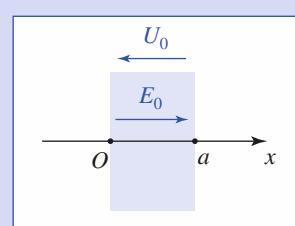
1) Quelle est la conductivité γ_0 du milieu ?

2) Un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ est appliqué au milieu. Montrer que, en régime permanent, le vecteur densité volumique de courant peut être écrit sous la forme $\vec{j} = [\gamma] \vec{E}$, en explicitant la matrice $[\gamma]$ en fonction de la conductivité γ_0 et de la pulsation cyclotron ω_c définie

$$\text{par } \omega_c = \frac{q B_0}{m}.$$

On utilisera les coordonnées cartésiennes.

3) Le milieu occupe l'espace situé entre les plans ($x = 0$) et ($x = a$).



Exercices

Il est soumis à une différence de potentiel :

$$U_0 = U(x=0) - U(x=a).$$

Quelle est la résistance R_0 d'une section S de ce milieu conducteur en l'absence de champ magnétique ?

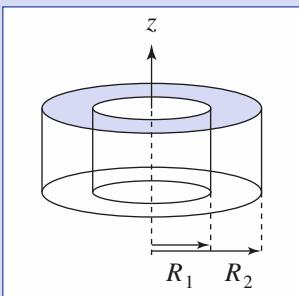
4) Quelle est la nouvelle valeur R de la résistance du conducteur précédent en présence du champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$?

Le comparer à R_0 pour un champ de $B_0 = 1 \text{ T}$, pour un milieu métallique.

A.N. : $q = -e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$.

5 Résistance entre deux conducteurs cylindriques, analogie thermique

Deux cylindres conducteurs coaxiaux, de hauteur h et de rayon R_1 et R_2 respectivement, sont séparés par un milieu conducteur ohmique de conductivité γ . Un courant I circule dans ce système lorsqu'il est soumis à une tension $U = V(R_1) - V(R_2)$.



1) Déterminer la résistance R de ce système de deux manières différentes (on négligera tout effet de bord).

2) Proposer une analogie avec une situation géométriquement semblable correspondant à un phénomène de conduction thermique, en régime permanent, dans un milieu satisfaisant à la loi de Fourier et de conductivité thermique λ .

Quelle est la résistance thermique R_{th} correspondante ?

6 Effet de magnéto-résistance entre deux conducteurs cylindriques

La résistance précédente est plongée dans un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

Le champ électrique est encore radial, mais la répartition des lignes de courant est altérée par la présence du champ magnétique.

1) Déterminer le nouveau vecteur densité volumique de courant \vec{j} .

On pourra noter $\mu = \frac{q\tau}{m}$ la mobilité des porteurs de charge (de charge q et de masse m) du milieu ohmique et

on exprimera \vec{j} par ses composantes dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

2) Quelle est la nouvelle expression de la résistance du système ?

Comparer celle-ci à la valeur de la résistance en l'absence de champ magnétique, en utilisant les ordres de grandeur relatifs à un bon conducteur et pour un champ magnétique de 10 teslas.

A.N. : $q = -e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$.

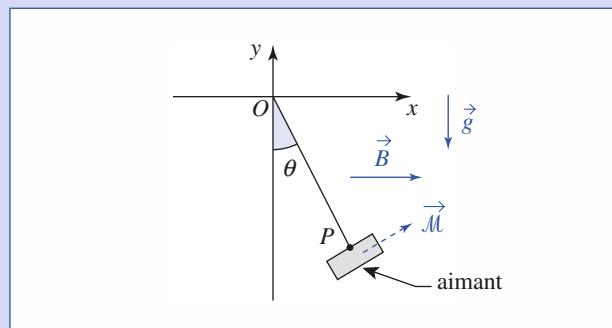
7 Oscillations d'un petit aimant

Un petit aimant de masse m , de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$, est suspendu rigidement à l'extrémité P d'une tige OP de masse négligeable et longueur L . Il peut effectuer des mouvements de rotation dans un plan vertical, autour de l'axe horizontal (Oz) (durant les oscillations du système, $\vec{\mathcal{M}}$ reste constamment perpendiculaire à \overrightarrow{OP}).

Le système est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_x$ uniforme et horizontal. On négligera tout frottement.

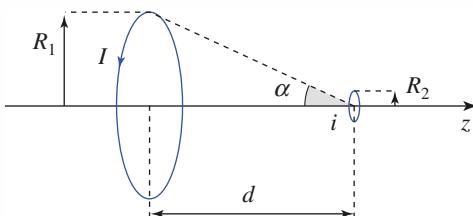
On indique qu'un moment magnétique subit de la part d'un champ \vec{B} uniforme un couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$.

Discuter l'évolution de la période des petites oscillations du système, autour de sa position d'équilibre stable, en fonction de la mesure algébrique B du champ magnétique (B peut être positif ou négatif).



8 Interaction entre deux spires

Deux spires circulaires, de rayons R_1 et R_2 , parcourues par les courants I et i , ont un même axe (Oz). La deuxième spire a un rayon R_2 petit devant R_1 et devant la distance d séparant ces deux circuits ($R_2 \ll R_1$ et $R_2 \ll d$).



Évaluer la force d'interaction exercée par l'une sur l'autre :

- a) en évaluant le champ magnétique créé par la grande spire en un point de la petite spire ;
- b) en utilisant le champ magnétique créé par la petite spire en un point de la grande spire.

9* Effet Hall dans un fil cylindrique

1) Un cylindre, à base circulaire de rayon a et d'axe (Oz), porte la charge surfacique $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

a) Montrer qu'une telle distribution peut être obtenue comme étant la limite, pour b tendant vers 0, de la superposition de deux cylindres d'axes (O_1z) et (O_2z),

portant des charges volumiques respectives ρ et $-\rho$. On suppose les points O_1 et O_2 sur l'axe (Ox), d'abscisses

$$x_1 = \frac{b}{2} \text{ et } x_2 = -\frac{b}{2}.$$

Préciser la relation liant σ_0 , ρ et b .

b) Exprimer le champ électrique engendré par ces deux cylindres, puis en déduire avec a) celui qu'engendre le cylindre portant la charge surfacique $\sigma(\theta)$.

2) Un fil conducteur rectiligne cylindrique de rayon a et d'axe (Oz), ohmique, de conductivité γ (n porteurs mobiles de charge q par unité de volume), est soumis à un champ électrique $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$ ($E_0 > 0$) et à un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ ($B_0 > 0$).

a) Expliquer qualitativement l'apparition de charges surfaciques sur le cylindre, et préciser la valeur du champ de Hall attendu à l'intérieur du cylindre, en régime permanent.

b) Montrer que les résultats établis lors de la résolution de la première question permettent de proposer une description du régime permanent précédent.

Préciser la valeur de la charge surfacique σ_0 caractérisant cet état.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 28.

- | | |
|------------------|----------------|
| 1. Vrai : a, d ; | Faux : b, c |
| 2. Vrai : a, c ; | Faux : b, d |
| 3. Vrai : c ; | Faux : a, b, d |
| 4. Vrai : b, d ; | Faux : a, c |
| 5. Vrai : b, e ; | Faux : a, c, d |

1

• À l'instant t , la sphère a émis la charge $nq t$. Le principe de conservation de la charge implique alors qu'à la date t , la charge de la sphère est $Q(t) = -nq t$.

• Une charge émise à l'instant 0 a parcouru la distance $v t$. La charge émise est donc comprise entre les sphères de rayon a et $a + v t$.

On a donc pour $r > a + v t$, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$.

On considère maintenant les valeurs de r comprises entre a et $a + v t$.

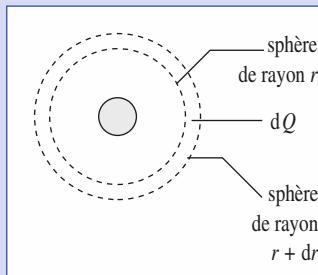
Entre les sphères de rayons r et $r + dr$ existent les charges émises entre les instants :

$$t - \frac{r-a}{v} \quad \text{et} \quad t - \frac{r+dr-a}{v},$$

$$\text{soit en } \delta t = \frac{dr}{v}.$$

Cela correspond à une charge :

$$dQ = n q \frac{dr}{v}.$$



L'émission étant isotrope, la densité de charges est à symétrie sphérique et vaut :

$$\rho(r, t) = \frac{dQ}{4\pi r^2 dr} = \frac{nq}{4\pi r^2 v}.$$

Elle ne dépend pas de t dans la zone d'espace qui a été atteinte par les charges émises depuis l'instant initial : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

On vérifie que $\int_a^{a+v t} \rho(r) 4\pi r^2 dr = nq t$, ce qui représente la charge émise par la sphère entre l'instant initial et la date t .

• La densité volumique de courant s'en déduit :

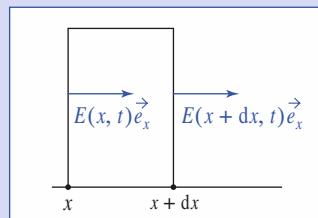
$$\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_r = \rho_m \vec{v} = \rho(r, t) v \vec{e}_r = \frac{nq}{4\pi r^2} \vec{e}_r.$$

Son flux est conservatif dans la zone $a < r < a + v t$, où l'écoulement des charges est permanent. En utilisant l'annexe, on vérifie bien que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j) = 0, \text{ soit } \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

2

1) a) Le champ étant dirigé selon l'axe (Ox), on considère une surface de Gauss, de la forme d'un parallélépipède d'arêtes parallèles aux axes (Ox), (Oy), et (Oz), et possédant deux faces de surface S aux abscisses x et $x + dx$.



Le théorème de Gauss donne ici :

$$-SE(x) + SE(x + dx) = \frac{\rho S dx}{\epsilon_0}, \text{ soit } \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{\rho(x, t)}{\epsilon_0}.$$

b) La loi d'Ohm permet d'écrire $\vec{j} = j(x, t) \vec{e}_x = \gamma E(x, t) \vec{e}_x$ et la conservation de la charge est traduite localement par :

$$\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0.$$

On en déduit l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\gamma \rho(x, t)}{\epsilon_0} = 0,$$

dont la solution décroît exponentiellement vers zéro, avec un temps caractéristique $T = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$.

c) Pour un bon conducteur comme le cuivre, la conductivité est :

$$\gamma \approx 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1},$$

et on obtient $T \approx 10^{-19} \text{ s}$.

On sait cependant que la loi d'Ohm n'est applicable que pour des temps caractéristiques d'évolution grands devant le temps de relaxation τ du modèle de Drude. Ce résultat n'a donc pas de signification sérieuse, puisqu'il se situe dans un domaine où le modèle utilisé pour l'obtenir est clairement inapplicable (puisque $\tau = 10^{-14} \text{ s}$).

2) a) On considère l'équation d'évolution de la vitesse d'ensemble $\vec{v} = v \vec{e}_x$ des charges mobiles, c'est-à-dire ici des électrons de charge $-e$:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -\frac{eE}{m}.$$

Le vecteur densité de courant électrique est $\vec{j} = -ne \vec{v}$, où n , de variation relative négligeable, peut être pris comme un facteur constant.

$$\text{On en déduit : } \frac{\partial j}{\partial t} + \frac{j}{\tau} = \frac{n e^2 E}{m} = \frac{\gamma E}{\tau}.$$

$$\text{D'autre part } \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{\rho(x, t)}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0.$$

L'équation d'évolution de la densité volumique de charge du milieu est donc :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau T} \rho = 0, \quad \text{avec} \quad T = \frac{\epsilon_0}{\gamma}.$$

b) Comme $T \ll \tau$, le régime transitoire correspondant est pseudo-périodique, et le temps caractérisant la décroissance exponentielle des oscillations de la densité de charge est égal à τ .

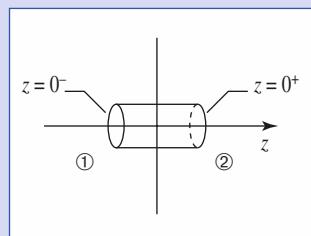
Ce temps caractéristique apparaît bien comme le temps de relaxation du milieu : au bout de quelques τ , le milieu a perdu la mémoire de son état initialement perturbé et il est revenu à la neutralité électrique.

3

1) Si le temps de relaxation de chaque milieu est négligeable, les densités volumiques de courant doivent être initialement égales à :

$$j_1 = \gamma_1 E_0 \vec{e}_z$$

$$\text{et} \quad j_2 = \gamma_2 E_0 \vec{e}_z.$$



Elles ne sont pas égales, et leur flux n'est pas le même, à travers une portion du plan ($z = 0$), en $z = 0^-$ et $z = 0^+$.

Ainsi, à partir d'un bilan de charges appliquée à un petit cylindre, de section S , « compris entre les abscisses $z = 0^-$ et $z = 0^+$ », on déduit l'apparition d'une charge surfacique σ sur le plan ($z = 0$), liée aux densités volumiques de courant \vec{j}_1 et \vec{j}_2 par la relation :

$$\frac{d\sigma}{dt} = (\vec{j}_1 - \vec{j}_2) \cdot \vec{e}_z.$$

2) Le plan ($z = 0$), portant une charge surfacique uniforme σ , engendre le champ $E = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$. On admet la validité de ce résultat obtenu en Première année pour un champ électrique permanent. Comme ce champ se superpose au champ \vec{E}_0 , on en déduit les valeurs des densités volumiques de courant à l'instant t :

$$\vec{j}_1 = \gamma_1 \left(E_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{j}_2 = \gamma_2 \left(E_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \vec{e}_z,$$

et l'équation d'évolution de la charge surfacique σ :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \gamma_1 \left(E_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) - \gamma_2 \left(E_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right).$$

En posant $T = \frac{2\epsilon_0}{\gamma_1 + \gamma_2}$ et $\sigma_1 = \epsilon_0 E_0 \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{(\gamma_1 + \gamma_2)}$, on obtient :

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{(\sigma - \sigma_1)}{T} = 0.$$

À l'instant t , le plan n'est pas chargé, et on en déduit :

$$\sigma(t) = \sigma_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Lorsque le régime limite est établi ($t \gg T$), la charge surfacique du plan est $\sigma = \sigma_1$ et les densités de courant sont identiques dans les deux milieux :

$$\vec{j}_1 = \vec{j}_2 = \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0 \vec{e}_z.$$

Les temps de relaxation τ_1 ou τ_2 (définis dans le modèle de Drude) des milieux ont été supposés négligeables, c'est-à-dire ici très petits devant $T = \frac{2\epsilon_0}{\gamma_1 + \gamma_2}$.

Cette hypothèse n'est pas réalisée compte tenu des résultats de l'exercice précédent où l'on a établi que $\frac{\epsilon_0}{\gamma_i} \ll \tau_i$ ($i = 1$ ou 2).

La forme obtenue pour le régime transitoire est donc très discutable. Un modèle moins naïf conduirait à reconstruire celui-ci, mais le régime limite, défini dans tous les cas par $\vec{j}_1 = \vec{j}_2$, donc $\gamma_1 \left(E_0 - \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \right) = \gamma_2 \left(E_0 + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \right)$, sera le même.

4 1) La conductivité du milieu est $\gamma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}$.

2) En régime permanent, la vitesse d'ensemble des porteurs vérifie l'équation (cf. § 4.1.2.) :

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Le vecteur \vec{j} s'écrit $\vec{j} = n q \vec{v} = \gamma_0 \vec{E} + \frac{q\tau}{m} \vec{j} \wedge \vec{B}$, soit en projection :

$$\begin{cases} j_x - \tau \omega_c j_y = \gamma_0 E_x \\ j_y + \tau \omega_c j_x = \gamma_0 E_y \\ j_z = \gamma_0 E_z \end{cases}$$

On en déduit :

$$\vec{j} = [\gamma] \vec{E} = \gamma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau^2} & \frac{\omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} & 0 \\ \frac{-\omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} & \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{E}$$

3) La résistance du tube considéré, de section S et épaisseur a , vaut :

$$R_0 = \frac{a}{\gamma_0 S}.$$

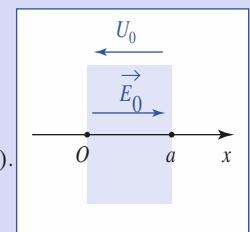
4) La tension U_0 (entre les plans ($x = 0$) et ($x = a$)) impose le champ électrique $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$ dans le conducteur avec $E_0 = \frac{U_0}{a}$. Le courant traversant une section S de ces plans est :

$$I = j_x S = \gamma_0 \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau^2} E_0 S.$$

La nouvelle résistance est donc :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{a(1 + \omega_c^2 \tau^2)}{\gamma_0 S} = R_0(1 + \omega_c^2 \tau^2).$$

Pour un milieu métallique, on trouve :



$$\frac{R - R_0}{R_0} = \omega_c^2 \tau^2 = \left(\frac{q\tau}{m} B \right)^2 \approx 3 \cdot 10^{-6}.$$

La valeur de la résistance est fort peu affectée par le champ magnétique.

5

1) Première méthode : étude de la répartition de courant

Le vecteur densité de courant est radial, $\vec{j} = j(r, \theta, z) \vec{e}_r$, dans la base associée aux coordonnées cylindriques d'axe (Oz). Le système est de révolution, et on suppose que cette distribution ne dépend pas de la coordonnée z , dans l'espace occupé par le conducteur ohmique (effet de bords négligés et donc invariance par translation suivant z). On a alors $\vec{j} = j(r) \vec{e}_r$.

Le flux de ce champ est le même, en régime (quasi) permanent à travers tout cylindre de rayon r ($R_1 < r < R_2$) et de hauteur h . Il est égal à I donc :

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r h}.$$

On en déduit le champ électrique dans ce milieu ohmique :

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\gamma r h} \vec{e}_r,$$

et la différence de potentiel aux bornes de cet élément résistif :

$$U = V_1 - V_2 = \frac{I}{2\pi\gamma h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Corrigés

$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

La résistance est donc $R = \frac{1}{2\pi\gamma h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

• Deuxième méthode : association de tubes de courant élémentaires

On considère une petite portion élémentaire d'un tube de courant, de longueur dr et de section $d^2S = dz r d\theta$ comme indiqué sur le schéma.

Sa résistance est :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dr}{d^2S} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dz r d\theta}.$$

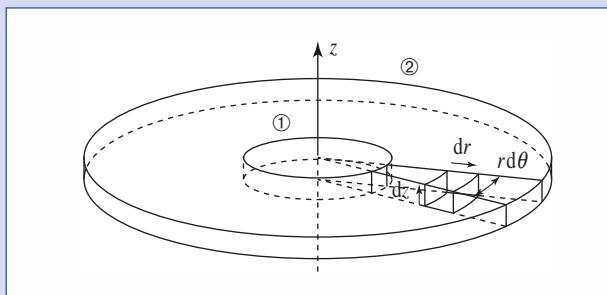
La résistance du tube élémentaire d'angle $d\theta$, compris entre les rayons R_1 et R_2 , s'obtient par association en série de tels éléments. Elle vaut donc :

$$\int_{r=R_1}^{R_2} \frac{1}{\gamma} \frac{d\sigma}{dz r d\theta} = \frac{1}{\gamma dz d\theta} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

La résistance totale s'obtient par association en parallèle de tels tubes élémentaires, soit :

$$\frac{1}{R} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \frac{\gamma dz d\theta}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{\gamma 2\pi h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

ce qui correspond bien au résultat précédent.



2) Dans le cas électrique, on utilise $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \vec{\nabla} V$.

Dans le cas thermique, on écrit $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\nabla} T$ entre les deux cylindres de températures T_1 et T_2 .

On trouve donc un flux thermique $\Phi_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$ du cylindre ① vers le cylindre ② avec $R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda h}$.

6) 1) En présence du champ magnétique, l'équation du mouvement d'ensemble des porteurs est, dans le cadre du modèle de Drude de la forme (cf. § 4.1.2) :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Soit, en régime permanent :

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \mu (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

En l'absence de champ magnétique, la vitesse de dérive est radiale. Le champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ dévie les porteurs dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

On peut alors écrire : $\vec{j} = n q \vec{v} = \gamma \vec{E} + \mu \vec{j} \wedge \vec{B}$, avec $\gamma = \frac{n q^2 \tau}{m}$.

On en déduit, en coordonnées cylindriques (j_z étant évidemment nul) :

$$\begin{cases} j_r = \gamma E + \mu j_\theta B_0 \\ j_\theta = -\mu j_r B_0 \end{cases}.$$

$$\text{Ceci implique : } j_r = \frac{\gamma E}{1 + (\mu B_0)^2},$$

au lieu de $j_r = \gamma E$ en l'absence de champ magnétique.

2) Ainsi, en reprenant le calcul de l'exercice précédent (première méthode), on trouve une valeur de la résistance :

$$R_B = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\gamma h} [1 + (\mu B_0)^2].$$

La résistance du système est donc multipliée par le facteur $[1 + (\mu B_0)^2]$.

A.N. : $\mu \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ C.s.kg}^{-1}$. Il apparaît que même pour un champ magnétique extrêmement fort (10 teslas), la correction apportée à la valeur de la résistance reste faible : $1 + (\mu B_0)^2 \approx 1 + 3 \cdot 10^{-4}$.

On a donc vu l'influence de la magnéto-résistance en présence de la géométrie dite de Corbino.



Pour étudier le mouvement de rotation, on lui applique le théorème du moment cinétique, en projection sur l'axe (Oz) de rotation, en notant θ l'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale.

Le petit aimant subit de la part du champ magnétique le couple :

$$\vec{F} = \vec{M} \wedge \vec{B} = -M B \sin \theta \vec{e}_z.$$

L'équation du mouvement de rotation est donc :

$$I \ddot{\theta} = m L^2 \ddot{\theta} = -m g L \sin \theta - M B \sin \theta.$$

Si $M B > -m g L$ (en particulier lorsque le moment magnétique de l'aimant est dans le même sens que le champ magnétique en $\theta = 0$) la position d'équilibre $\theta = 0$ est stable.

La période des petites oscillations vaut :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m L^2}{m g L + M B}}.$$

Si le champ et le moment magnétique sont de directions opposées en $\theta = 0$, et que $M B < -m g L$, c'est la position $\theta = \pi$ qui est alors position d'équilibre stable.

La période des oscillations au voisinage de cette position d'équilibre est alors :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m L^2}{-(M B + m g L)}} \quad (\text{attention, } M B + m g L < 0).$$



a) Soit M un point de coordonnées cylindriques ($r = R_2$, θ , z) appartenant à la petite spire. Ce point appartient à un plan contenant l'axe (Oz), qui coupe diamétralement la grande spire. C'est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant correspondant à la grande spire. Le champ magnétique \vec{B}_1 au point M appartient à ce plan, donc :

$$\vec{B}_1 = B_{1r}(r, z) \vec{e}_r + B_{1z}(r, z) \vec{e}_z.$$

On veut exprimer le champ \vec{B}_1 au voisinage de l'axe (Oz) ($r \ll R_1$). Pour cela, on considère une surface fermée ayant la forme d'un petit cylindre d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur dz . Le flux du champ \vec{B}_1 à travers cette surface est nul, donc :

$$\pi r^2 [B_{1z(\text{axe})}(z + dz) - B_{1z(\text{axe})}(z)] + 2\pi r dz B_{1r}(r, z) = 0.$$

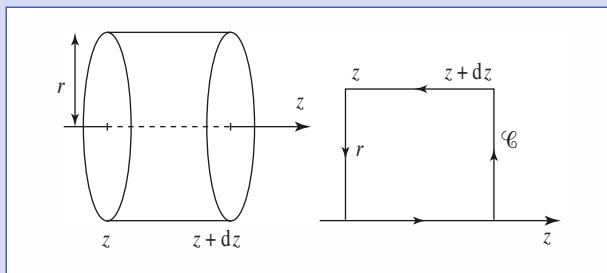
La composante radiale du champ est donc liée à la valeur du champ sur l'axe par :

$$B_{1r}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_{1z(\text{axe})}}{dz}$$

Soit le petit contour rectangulaire \mathcal{C} représenté ci-dessous. On peut écrire que la circulation du champ \vec{B}_1 est nulle sur celui-ci (au niveau de la petite spire, on est en dehors des sources créant le champ \vec{B}_1), soit :

$$-dz B_{1r}(r, z) + dz B_{1z(\text{axe})} = 0,$$

à des termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en r près.



On en déduit finalement :

$$\vec{B}_1 = B_{1z(\text{axe})}(z) \hat{e}_z - \frac{r}{2} \frac{dB_{1z(\text{axe})}}{dz} \hat{e}_r$$

à des termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en r près.

La résultante des forces exercées sur la petite spire s'en déduit :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{L'} &= \oint_{\text{petite spire}} i d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1 = \oint_{\theta=0..2\pi} i R_2 d\theta \hat{e}_\theta \wedge \left(-\frac{R_2}{2} \frac{dB_{1z(\text{axe})}(z)}{dz} \hat{e}_r \right)_{z=d} \\ &= i \pi R_2^2 \left(\frac{dB_{1z(\text{axe})}(z)}{dz} \right)_{z=d} \hat{e}_z. \end{aligned}$$

Remarque : Seule la partie non uniforme de cette expression intervient pour calculer la résultante des forces de Laplace exercées sur la petite spire.

La grande spire crée, en un point de l'axe d'abscisse z , le champ :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2 R_1} \sin^3 \alpha \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I R_2^2}{2(R_1^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_z.$$

On en déduit :

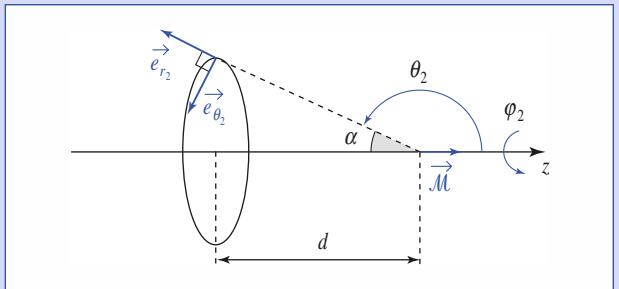
$$\vec{F}_L = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I R_1^2 (\pi R_2^2 i) d}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} \hat{e}_z.$$

C'est une force attractive si les deux spires sont orientées dans le même sens (c'est-à-dire i et I de même signe).

b) En un point P de la grande spire, le champ \vec{B}_2 créé par la petite spire est assimilable à celui d'un dipôle de moment \vec{M} , soit :

$$\begin{aligned} \vec{B}_2(P) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \left(\frac{2 \cos \theta_2 \hat{e}_{r_2} + \sin \theta_2 \hat{e}_{\theta_2}}{r^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \left(\frac{-2 \cos \alpha \hat{e}_{r_2} + \sin \alpha \hat{e}_{\theta_2}}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \end{aligned}$$

en utilisant les coordonnées sphériques r_2 , θ_2 et φ_2 , centrées sur la petite spire.



La force exercée sur la grande spire s'en déduit :

$$\begin{aligned} \vec{F}'_{L'} &= \oint_{\text{grande spire}} d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_2 \\ &\quad \varphi_2 = 0..2\pi \\ &= \frac{\mu_0 M I R_2}{4\pi} \oint_{\varphi_2=0..2\pi} d\varphi_2 \hat{e}_{\varphi_2} \wedge \left(\frac{-2 \cos \alpha \hat{e}_{r_2} + \sin \alpha \hat{e}_{\theta_2}}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \end{aligned}$$

$$\vec{F}'_{L'} = \frac{\mu_0 M I R_2}{4\pi} \oint_{\varphi_2=0..2\pi} d\varphi_2 \left(\frac{-2 \cos \alpha \hat{e}_{\theta_2} - \sin \alpha \hat{e}_{r_2}}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \text{ ou encore :}$$

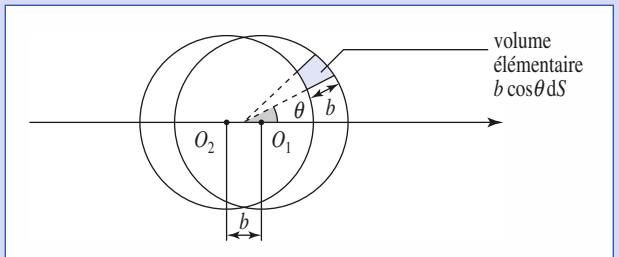
$$\vec{F}'_{L'} = \frac{\mu_0 M I R_2}{4\pi} \left(\frac{+3 \cos \alpha \sin \alpha \hat{e}_r}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} \right) = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 M I R_2^2 d}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} \hat{e}_z.$$

Ce résultat est opposé au précédent.

9

a) La charge portée par une surface $dS = a d\theta dz$ du cylindre est $dq = \sigma_0 \cos \theta dS$.

Lorsque les axes des cylindres, portant des charges volumiques opposées se rapprochent, celles-ci compensent dans leur zone commune, ne laissant subsister qu'une « écorce » chargée, d'épaisseur localement égale à $b |\cos \theta|$.



Corrigés

La charge correspondante est $dq = \rho b \cos \theta dS$ (son signe est bien celui de $\cos \theta$). On en déduit la relation assurant l'équivalence de ces distributions lorsque b tend vers 0 : $\rho b = \sigma_0$.

b) • Un seul cylindre chargé en volume

Pour un cylindre de rayon a et d'axe (Oz), portant la charge volumique ρ , le champ électrique, radial, est de la forme $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$. On peut le déterminer en appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur arbitraire, soit :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} r \vec{e}_r \text{ pour } r < a \text{ et } \vec{E} = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} \frac{a^2}{r} \vec{e}_r \text{ pour } r > a.$$

• Deux cylindres

Dans la zone commune, soit à la limite où b tend vers 0 pour $r < a$, on aura :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} (\vec{H}_1 M - \vec{H}_2 M) = -\frac{\rho}{2 \epsilon_0} b \vec{e}_x,$$

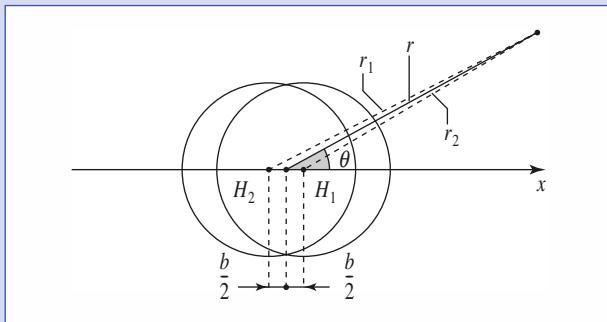
où H_1 et H_2 désignent les projections du point M où on calcule le champ, respectivement sur les axes ($O_1 z$) et ($O_2 z$).

Hors des cylindres ($r > a$), on doit effectuer un développement de l'expression du champ, dans la mesure où $r \gg b$. Il est toutefois délicat de développer directement le champ (car les normes, mais aussi les directions des champs sont différentes pour les deux cylindres). Il est préférable (et recommandé) d'utiliser les expressions des potentiels associés :

$$V_1 = -\frac{\rho a^2}{2 \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{a}\right) \text{ et } V_2 = +\frac{\rho a^2}{2 \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{a}\right) \text{ (à des constantes près).}$$

Le potentiel de l'ensemble est alors $V = V_1 + V_2$, soit :

$$V = \frac{\rho a^2}{2 \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{\rho a^2}{4 \epsilon_0} \ln\left(\frac{r^2 + b r \cos \theta + \frac{b^2}{4}}{r^2 - r \cos \theta + \frac{b^2}{4}}\right) \approx \frac{\rho a^2 b}{2 \epsilon_0 r} \cos \theta.$$



On en déduit le champ extérieur :

$$\vec{E} = \frac{\rho a^2 b}{2 \epsilon_0} \left(\frac{\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^2} \right).$$

• Cylindre chargé en surface

On utilise l'équivalence développée à la question précédente, lorsque b tend vers 0 avec $\rho b = \sigma_0$. On obtient alors :

- pour $r < a$, $\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0} \vec{e}_x$;

- pour $r > a$, $\vec{E} = \frac{\sigma_0 a^2}{2 \epsilon_0} \left(\frac{\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^2} \right)$.

2) a) Les charges de conduction sont mises en mouvement dans la direction de l'axe (Oz) par le champ.

Le champ magnétique les dévie parallèlement à (Ox).

Par exemple, des électrons ($q < 0$) qui se déplacent dans le sens des z décroissants, sont déviés du côté des x décroissants.

On peut prévoir l'apparition de charges surfaciques, positives sur le côté $x > 0$ et négatives sur le côté $x < 0$.

Ces charges créent à leur tour un champ de Hall qui vient compenser l'effet du champ magnétique :

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Sous l'action conjuguée du champ \vec{B} et du champ de Hall \vec{E}_H , les charges de conduction retrouvent en régime permanent un mouvement de dérive dû au champ \vec{E} , parallèlement à l'axe (Oz), soit $\vec{v} = \frac{\vec{j}}{n q} = \frac{\gamma}{n q} E_0 \vec{e}_z$.

Le champ de Hall, uniforme dans le cylindre, vaut :

$$\vec{E}_H = \frac{\gamma}{n q} E_0 B_0 \vec{e}_x.$$

b) D'après les résultats établis à la question 1), on peut proposer pour le cylindre une charge surfacique $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, avec $\sigma_0 = -2 \epsilon_0 \frac{\gamma}{n q} E_0 B_0$, qui créerait un tel champ à l'intérieur du cylindre.

Champ électromagnétique permanent

2

Introduction

En Première année, nous avons décrit le champ électrique permanent créé par une distribution de charges. Ce champ à circulation conservative dérive d'un potentiel scalaire et son flux à travers une surface fermée est donné par le théorème de Gauss.

De façon analogue, le champ magnétique permanent, créé par une distribution de courants, est à flux conservatif, et sa circulation sur un contour est donnée par le théorème d'Ampère.

En restant dans le cadre des régimes permanents, nous formulons ces propriétés du champ électromagnétique permanent en termes de lois locales : ces lois ou équation locales (équations aux dérivées partielles) permettent de décrire les propriétés du champ en chaque point de l'espace.

O B J E C T I F S

- Lois locales du champ électromagnétique en régime permanent.

P R É R E Q U I S

- Électromagnétisme de Première année :
 - loi de Coulomb ;
 - loi de Biot et Savart ;
 - champs électrique et magnétique permanents ;
 - théorèmes de Gauss et Ampère.

Électromagnétisme

Le champ électrique permanent

1.1. Champ électrique d'une distribution de charges

1.1.1. Loi de Coulomb et superposition des effets

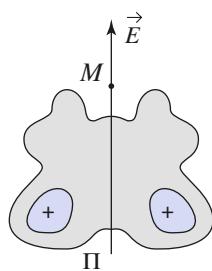
La loi de Coulomb indique la force d'interaction, dans le vide, entre deux charges ponctuelles. Le principe de superposition, qui postule la linéarité des effets de l'interaction coulombienne, nous a permis d'exprimer le champ créé par les modèles usuels de distributions de charges.

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(P)}{\|PM\|^2} \vec{e}_{P \rightarrow M} \quad (\text{doc. 1}) \text{ et } \vec{E}(M) = \iiint_{\mathcal{D}_q} d\vec{E}.$$

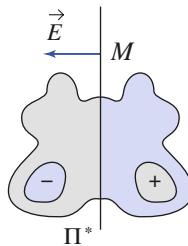
1.1.2. Propriétés du champ

Nous savons que le champ électrique permanent est un champ à *circulation conservative* qui vérifie le théorème de Gauss. L'étude de sa topographie nous a montré que le champ électrique possède les propriétés de *symétrie d'un vecteur « vrai » ou vecteur polaire*. Nous savons en particulier que :

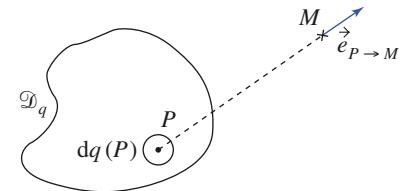
- le champ électrique engendré par une distribution invariante par translation ou de révolution autour d'un axe, possède les mêmes invariances que celle-ci (doc. 2) ;
- lorsqu'une distribution possède un plan de symétrie, le champ électrique appartient à ce plan en chacun de ses points (doc. 3) ;
- lorsqu'une distribution possède un plan d'antisymétrie, le champ électrique est perpendiculaire à ce plan en chacun de ses points (doc. 4).



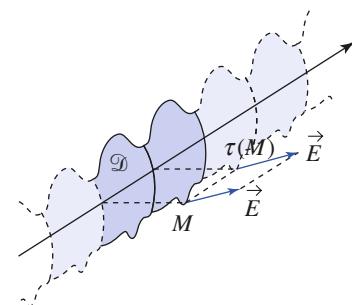
Doc. 3. Distribution possédant un plan de symétrie Π .



Doc. 4. Distribution possédant un plan d'antisymétrie Π^* .



Doc. 1. Champ créé par une distribution de charges.



Doc. 2. Distribution invariante par translation.

Application 1

Symétrie du champ électrique

Rappeler la forme la plus générale du champ électrique engendré par une distribution de charges :

- à symétrie sphérique ;
- à symétrie cylindrique.

a) Une distribution, possédant la symétrie sphérique de centre O vérifie :

$$\rho(M) = \rho(r, \theta, \phi) = \rho(r),$$

en coordonnées sphériques de centre O .

Tout plan passant par le centre O de la sphère est plan de symétrie. Par un point M quelconque passe une infinité de plans de symétrie contenant M et O .

Le champ $\vec{E}(M)$ appartient à tous ces plans et donc à leur intersection : il est radial. L'invariance par rotation autour du point O implique que son module ne dépend que de la distance r au centre. En conclusion, le champ d'une distribution de charges à symétrie sphérique est de la forme $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

b) Une distribution possédant la symétrie cylindrique est invariante par rotation autour de son axe (Oz) et par translation parallèlement à cet axe.

Donc $\rho(M) = \rho(r, \theta, z) = \rho(r)$, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

Tout point M appartient à deux plans de symétrie de la distribution : le plan qui contient M et l'axe (Oz), et celui qui contient M et qui est perpendiculaire à

l'axe (Oz). Donc le champ électrique, au point M , appartient à l'intersection de ces plans :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = E(r, \theta, z) \vec{e}_r.$$

L'invariance par translation dans la direction de l'axe (Oz) et par rotation autour de cet axe, nous permet finalement d'affirmer que le champ d'une distribution de charges à symétrie cylindrique est de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r.$$

Remarque

Il ne faut pas confondre les notations r et \vec{e}_r des coordonnées sphériques et cylindriques.

Nous renvoyons si nécessaire le lecteur au cours de Première année, pour une révision plus détaillée des propriétés de symétrie du champ.

1.2. Flux du champ électrique

1.2.1. Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss indique que le flux du champ électrique à travers une surface fermée Σ est égal à la charge située à l'intérieur de cette surface divisée par ϵ_0 :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int à } \Sigma}}{\epsilon_0}.$$

C'est une propriété intégrale du champ électrique, dont nous avons déjà établi quelques conséquences.

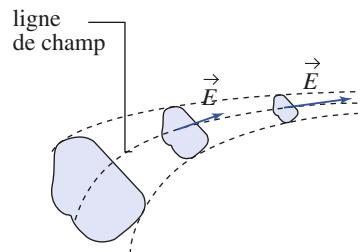
- Dans une zone de l'espace vide de charges, le champ électrique est à flux conservatif (le flux est le même à travers toutes les sections d'un tube de champ donné). Sur un graphique du champ électrique, un resserrement des lignes de champ correspond alors à une augmentation du module du champ (doc. 5).
- L'utilisation du théorème de Gauss, associée à l'utilisation des propriétés de symétrie d'une distribution (à symétrie élevée), permet une détermination rapide du champ créé.
- Lors de la traversée d'une nappe de charge surfacique σ , la composante normale du champ électrique présente une discontinuité (doc. 6) :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{N}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

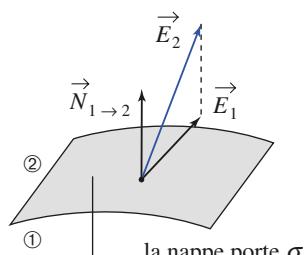
1.2.2. Divergence du champ électrique

Le théorème de Green-Ostrogradski (cf. Annexe) nous permet de relier le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée Σ et l'intégrale de sa divergence sur le volume \mathcal{V} délimité par Σ :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} \vec{E} d\tau.$$



Doc. 5. Évolution de l'amplitude du champ dans un tube vide de charge.



Doc. 6. Discontinuité de la composante normale du champ à la traversée d'une nappe chargée :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{N}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Ainsi, le flux du champ électrique à travers la surface qui délimite le volume élémentaire $\delta\tau$ s'écrit (doc. 7) :

$$\delta\Phi = \operatorname{div}\vec{E} \delta\tau.$$

Ce volume contient la charge $\delta q = \rho \delta\tau$. Le théorème de Gauss nous indique que ce flux vaut aussi $\delta\Phi = \frac{\delta q}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \delta\tau$.

Comparant les deux expressions du flux, nous en déduisons que :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Le champ électrique est lié à ses sources par la loi locale :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Cette équation traduit la première des lois régissant l'évolution locale du champ électromagnétique. Nous en verrons encore trois autres (une pour le champ électrique et deux pour le champ magnétique), l'ensemble constituant le groupe des « quatre équations de Maxwell ».

Par référence au **théorème de Gauss**, nous appellerons *équation de Maxwell-Gauss* celle que nous venons d'obtenir.

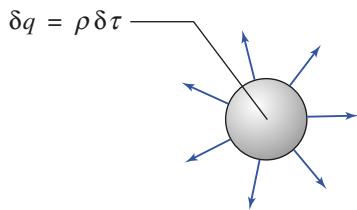
L'équation locale de Maxwell-Gauss permet de retrouver le théorème de Gauss :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V} \operatorname{div}\vec{E} d\tau = \iiint_{V} \frac{\rho(P)}{\epsilon_0} d\tau = \frac{Q_{\text{int à } \Sigma}}{\epsilon_0}.$$

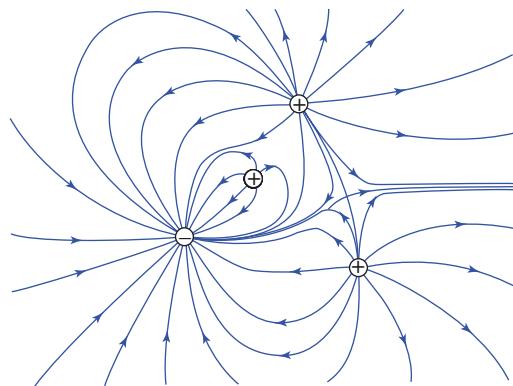
Les lois locale et intégrale sont deux formulations de la même propriété fondamentale du champ électrique.

Remarque

En étudiant les cartes de champ électrique, nous avons observé que le champ créé par des charges fixes diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives (doc. 8). Cette propriété justifie l'appellation « divergence » associée à l'opération de dérivation intervenant dans cette loi locale.



Doc. 7. Volume élémentaire chargé.



Doc. 8. Les lignes du champ électrique convergent ou divergent, vers les charges électriques ou vers l'infini.

1.3. Circulation du champ électrique permanent

1.3.1. Circulation conservative

Nous savons que le champ électrique permanent est à circulation conservative.

- Sa circulation sur une courbe, allant d'un point à un autre, ne dépend pas du trajet suivi entre ces points.
- Sa circulation le long de tout contour (courbe fermée) est nulle :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0, \text{ quel que soit } \Gamma.$$

Ces propriétés impliquent que :

- les lignes du champ d'un champ électrostatique ne peuvent être des courbes fermées ; les lignes de champ, divergeant à partir des charges, vont de celles-ci vers l'infini ou bien vers d'autres charges (*doc. 8*) ;
- la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée d'une surface chargée. Connaissant la discontinuité normale du champ, la discontinuité du champ à la traversée d'une nappe chargée s'en déduit (*doc. 9*) :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}.$$

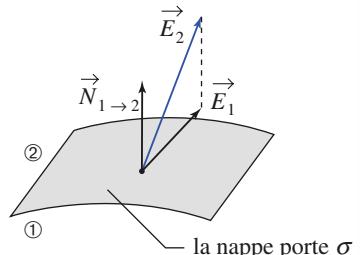
1.3.2. Rotationnel du champ électrique permanent

Le théorème de Stokes (*cf. Annexe*) lie la circulation C_{Γ} d'un champ de vecteur sur un contour Γ , au flux du rotationnel de ce champ à travers toute surface Σ orientée s'appuyant sur Γ (*doc. 10*) :

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

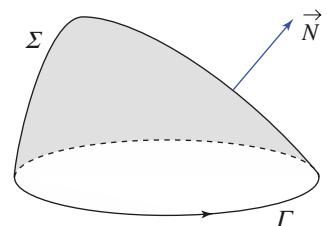
Cette circulation du champ électrique permanent est nulle, car la courbe Γ est fermée. Nous en déduisons que $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$.

L'équation $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$ traduit localement le caractère conservatif de la circulation du champ électrique permanent.



Doc. 9. Discontinuité du champ à la traversée d'une nappe chargée :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}.$$



Doc. 10. Surface orientée Σ s'appuyant sur un contour Γ .

1.4. Potentiel scalaire

1.4.1. Champ de gradient

La circulation du champ électrique permanent est conservative, et l'égalité :

$$V_B = V_A + \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

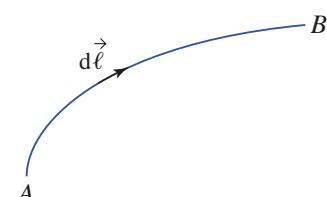
définit la différence de potentiel $V_B - V_A$, sans qu'il soit nécessaire de préciser le chemin (liant les points A et B) sur lequel la circulation du champ est calculée (*doc. 11*). Cette écriture définit le potentiel à une constante près. Le choix de cette constante, appelé **choix de jauge**, n'affecte pas la valeur du champ électrique.

La circulation élémentaire du champ s'identifie, au signe près, à la différentielle (exacte) de la fonction $V(\vec{r})$:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV(\vec{r}).$$

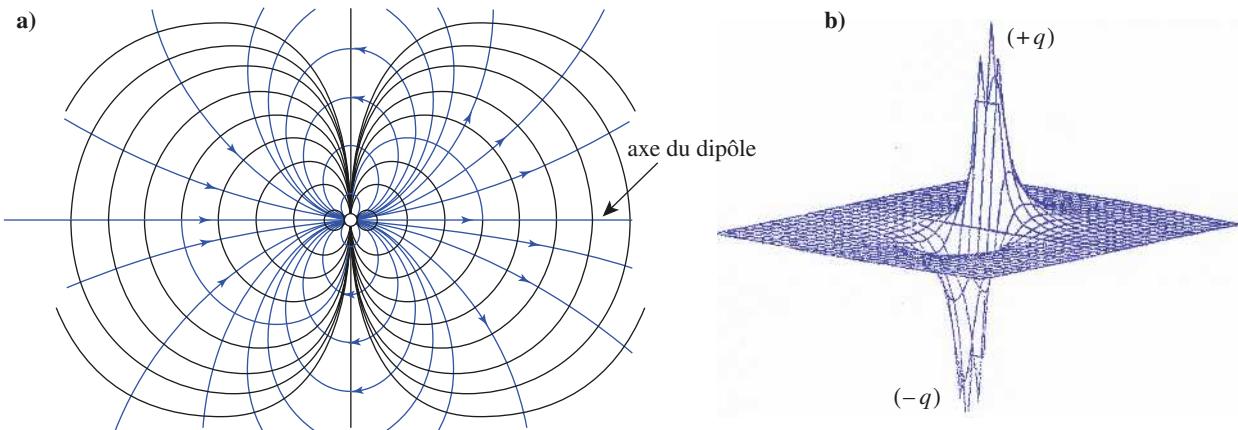
Ainsi le champ électrique permanent, à circulation conservative, dérive du potentiel scalaire V :

$$\vec{E} = -\nabla V(\vec{r}).$$



Doc. 11. Courbe reliant deux points A et B .

Le champ est perpendiculaire aux surfaces équipoientielles et les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants. Les *documents* 12a et 12b illustrent cette propriété dans le cas d'un dipôle.



Le § 1.3 nous a montré d'autre part, qu'un champ à circulation conservative est un champ de rotationnel nul et réciproquement.

Un champ de vecteurs à circulation conservative est un champ de rotationnel nul ; c'est aussi un champ de gradient. Ces propriétés, équivalentes, s'appliquent au champ électrique permanent.

1.4.2. Équation de Poisson

Le champ électrique permanent dérive d'un potentiel V et, en présence d'une densité volumique de charges ρ , satisfait donc l'équation locale de Maxwell-Gauss :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Nous en déduisons :

$$\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}} V) = -\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

où ΔV est le laplacien de la fonction potentiel V (*cf. Annexe*).

En régime permanent, le potentiel scalaire V vérifie l'équation locale appelée *équation de Poisson* :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

Remarque

Dans une région vide de charges, c'est-à-dire en dehors de la distribution de charges créant le champ et le potentiel, ce dernier obéit à l'**équation de Laplace** :

$$\Delta V = 0.$$

Nous pouvons retrouver cette équation dans d'autres domaines de la physique (conductivité thermique, électrique, mécanique des fluides) où des problèmes analogues (équations et conditions aux limites semblables) admettent des solutions similaires.

Doc. 12a. Lignes de champ (en couleur) et lignes équipoientielles (en noir) d'un dipôle électrique, dans un plan contenant le dipôle.

b. Visualisation du potentiel.

Application 2

Conducteur à l'équilibre électrostatique

1) Un matériau conducteur (métallique, par exemple) est en équilibre électrostatique. Cela signifie que la vitesse du mouvement d'ensemble des charges (vitesse mésoscopique) est nulle ; on dit que les charges ne se déplacent pas. Quelle doit être la valeur du champ électrique au sein d'un tel matériau ?

2) Que peut-on en déduire quant au potentiel d'un conducteur en équilibre électrique électrostatique ?

3) Ce conducteur peut être électrisé. Où doit se répartir cette charge lorsque le conducteur est à l'équilibre ? Quelle est la valeur du champ électrostatique juste à l'extérieur de ce conducteur, c'est-à-dire au voisinage immédiat de sa surface ?

1) La situation envisagée est statique : il n'y a pas de mouvement d'ensemble des charges. Le « fluide de charges » de conduction du matériau restant immobile, nous en déduisons la nullité du champ électrique **à l'intérieur** du métal.

2) Si le champ est nul dans le conducteur, le potentiel y est nécessairement uniforme : le conducteur à l'équilibre constitue un volume équipotentiel.

3) Le champ est nul dans le conducteur, sa divergence aussi. Il n'y a donc pas de charge volumique dans le conducteur car $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Si celui-ci est chargé, sa charge est nécessairement répartie en surface, représentée par une densité surfacique de charge σ .

La discontinuité du champ à travers une surface chargée est donnée par la relation :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}.$$

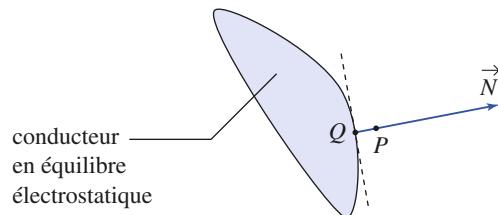
En notant 2 le milieu extérieur (vide), 1 le milieu conducteur où le champ est nul, et \vec{N} la normale à la surface du conducteur, dirigée vers l'extérieur, nous en déduisons la valeur du champ au voisinage immédiat de la surface du conducteur :

$$\vec{E}_{\text{voisinage immédiat}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}.$$

Dans le cas représenté sur le document 13, cette relation s'écrit :

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{N}$$

car le champ n'est pas défini **sur** la surface.



Doc. 13. Le champ électrique \vec{E} , au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur en équilibre, est donné par :

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{N}.$$

Remarque : Lorsque la surface d'un conducteur a, localement, une « forte courbure », on observe une forte densité superficielle de charges et donc un champ important au voisinage de cette surface (cf. chapitre 4, § 1.5.).

Ce champ peut alors ioniser localement l'air et provoquer des phénomènes spectaculaires (feux de Saint-Elme) que l'on peut voir sur les pointes des pioletts en montagne ou au sommet du mât d'un bateau.

1.5. Importance des lois locales

Les lois locales introduites comme postulat de l'électrostatique permettent, par leur résolution, de retrouver la loi de Coulomb ainsi que les lois intégrales. Elles contiennent donc « toute l'électrostatique ». Nous ferons cette même remarque à la fin du paragraphe suivant sur le champ magnétique permanent, puis lors de l'étude générale du champ électromagnétique dans le *chapitre 5*.

Il faut dès maintenant réaliser l'intérêt de ce type de loi qui réside dans leur concision et la puissance de leur contenu.

Application 3

Condensateur plan

Un conducteur plan est constitué de deux armatures métalliques dont les faces en regard sont planes, de section S et parallèles, séparées par la distance h . Le milieu situé entre les armatures est assimilé au vide (doc. 14).

La différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ est imposée entre les deux armatures du condensateur.

Pour décrire ce système, on néglige tout effet de bord : on considère que les bords du condensateur sont rejetés à l'infini.

Le condensateur apparaît alors comme un ensemble de deux plans conducteurs infinis en regard.

1) Quelle est, dans cette approximation, la valeur du champ électrique entre les armatures du condensateur ?

Quelle est la charge portée par les armatures du condensateur ?

En déduire la capacité de ce dernier.

A.N. : $S = 10 \text{ m}^2$; $h = 1 \text{ mm}$. Conclusion ?

2) Si le milieu entre les armatures est de l'air, de permittivité proche de celle du vide, le champ électrique ne peut excéder une valeur de l'ordre de $3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ au-delà de laquelle l'ionisation de l'air crée une étincelle de rupture entre les armatures du condensateur.

Commenter les ordres de grandeur correspondants de la charge et de la différence de potentiel.

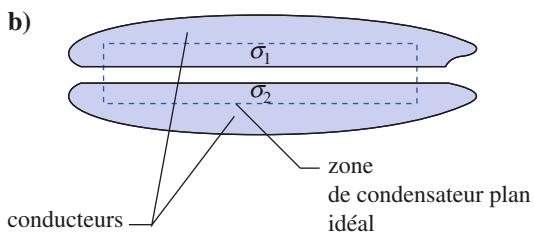
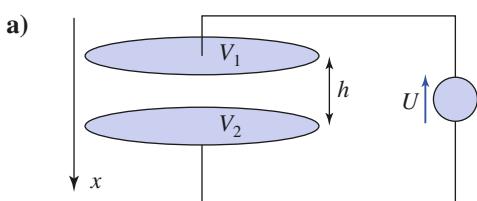
3) Quelle est l'énergie emmagasinée par le condensateur lorsqu'il est chargé, sous la différence de potentiel précédente ?

Commenter son ordre de grandeur.

Montrer que l'énergie emmagasinée par le condensateur peut être retrouvée en associant au champ électrique une énergie volumique :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Données : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.



Doc. 14a. et b. Condensateur plan à armatures circulaires.

1) En négligeant les effets de bord, le problème est invariant par toute translation parallèlement aux armatures du condensateur et, par symétrie, par rapport à tout plan perpendiculaire à celles-ci. Le champ est de la forme $\vec{E} = E(x) \vec{e}_x$.

Sa divergence est nulle entre les armatures, donc $E(x) = \text{cte} = E_0$. La circulation du champ entre les armatures nous donne :

$$E_0 = \frac{V_1 - V_2}{h}.$$

Dans les armatures, le champ est nul (cf. Application 2). La discontinuité du champ à la surface de celles-ci nous donne alors $\sigma_1 = \epsilon_0 E_0 = -\sigma_2$.

La charge des armatures s'écrit :

$$Q_1 = -Q_2 = \epsilon_0 S \frac{V_1 - V_2}{h}.$$

La capacité du condensateur est donc :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{h} \approx 9 \text{ pF}.$$

Nous voyons que cette capacité augmente avec la section des armatures. En pratique, on peut utiliser deux feuilles métalliques, séparées par un isolant et enroulées sur elles-mêmes, pour obtenir un condensateur de faible encombrement tout en gardant une valeur suffisante pour la surface de ses armatures.

De plus, l'isolant peut avoir une permittivité nettement plus importante que le vide (gain d'un facteur 1 000 environ). Les valeurs de l'ordre de μF , couramment rencontrées dans les montages électriques, sont ainsi plus élevées que celle que nous venons d'obtenir.

Remarquons que le farad reste tout de même une « grosse » unité (une capacité de l'ordre du farad n'est rencontrée qu'exceptionnellement).

2) Pour $E_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, nous obtenons :

$$U = 3000 \text{ V} \quad \text{et} \quad Q = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

En électrostatique, les charges sont faibles et les différences de potentiel élevées. Ainsi, par exemple, une tension $U = 1 \text{ V}$ appliquée aux bornes d'une résistance de 10Ω entraîne l'apparition d'un courant de 100 mA , soit $0,1 \text{ coulomb par seconde}$.

3) L'énergie emmagasinée est :

$$\frac{1}{2} C U^2 \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

Elle est extrêmement faible ; par comparaison, une plaque de cuisson nécessite couramment une puissance d'alimentation de l'ordre du kW, soit 10^3 joules par seconde. Ici apparaît un problème technique très important : il n'est pas possible de stocker de l'énergie sous forme électrique.

En pratique, elle est stockée sous forme d'énergie potentielle mécanique (énergie potentielle de pesanteur de l'eau stockée dans un barrage), ou d'énergie libérable par réaction chimique (combustible, pile) ou nucléaire. Une fois libérées, ces énergies sont souvent converties sous forme électrique, et utilisées immédiatement.

Nous pouvons noter que cette énergie peut se mettre sous forme :

$$\frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{h} (E_0 h)^2 = S h \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2},$$

ce qui fait apparaître une énergie volumique :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}.$$

2 Le champ magnétique permanent

2.1. Champ d'une distribution de courants

2.1.1. Loi de Biot et Savart

La loi de Biot et Savart indique que le champ magnétique créé dans le vide, en un point M , par une répartition de courants permanents peut être obtenu comme la superposition des contributions élémentaires (doc. 15) :

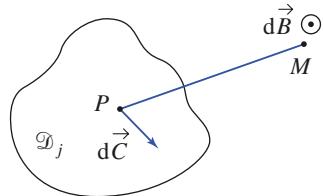
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{\|PM\|^2},$$

de chacun de ses éléments de courant $d\vec{C}$, situé au point P mobile sur la distribution ($d\vec{C} = j d\tau$, $j_S dS$ ou bien $I d\ell$, pour une distribution de courants respectivement volumique, surfacique ou filiforme).

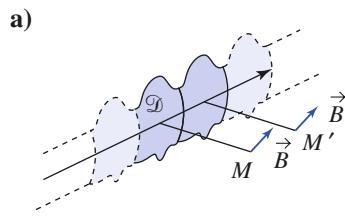
2.1.2. Propriétés du champ

Nous savons que le champ magnétique est un champ à flux conservatif qui vérifie le théorème d'Ampère. L'étude de sa topographie nous a montré que le champ magnétique possède les propriétés de symétrie d'un **pseudovecteur** ou **vecteur axial**. Nous savons en particulier que :

- le champ magnétique engendré par une distribution invariante par translation ou de révolution autour d'un axe possède les mêmes invariances (doc. 16a et b) ;
- lorsqu'une distribution possède un plan de symétrie, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan en chacun de ses points (doc. 17) ;
- lorsqu'une distribution possède un plan d'antisymétrie, le champ magnétique appartient à ce plan en chacun de ses points (doc. 18).

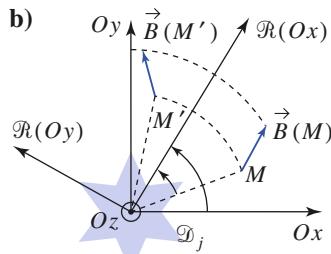
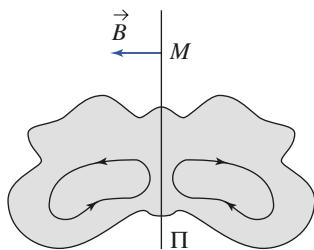


Doc. 15. Champ magnétique d'une distribution de courants.

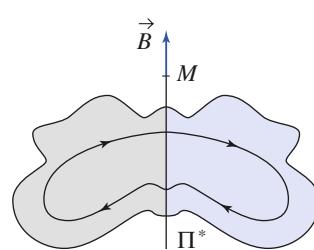


Doc. 16. Invariance.

a. Par translation.



b. Par rotation.



Doc. 17. Champ magnétique sur un plan de symétrie Π .

Doc. 18. Champ magnétique sur un plan d'antisymétrie Π^* .

2.2. Circulation du champ magnétique

2.2.1. Théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère relie la circulation du champ magnétique le long d'un contour au courant enlacé par ce contour (doc. 19) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}.$$

Nous avons observé quelques conséquences de cette propriété intégrale du champ magnétique.

- Dans une zone de l'espace vide de courants, le champ magnétique est à circulation conservative.
- L'utilisation du théorème d'Ampère, associée à l'utilisation des propriétés de symétrie d'une distribution à symétrie « élevée », permet une détermination rapide du champ créé.
- La traversée d'une nappe de courant de vecteur densité de courant surfacique \vec{j}_S s'accompagne d'une discontinuité des composantes tangentielles du champ magnétique (doc. 20) :

$$\vec{N}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_S.$$

2.2.2. Équation de Maxwell-Ampère en régime permanent

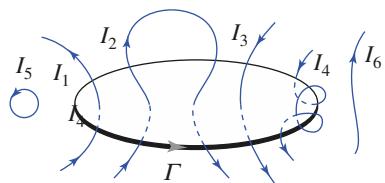
Le théorème de Stokes (*cf. Annexe*) nous permet d'écrire :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Le courant I « enlacé » par le contour Γ est égal au flux du vecteur densité de courant électrique à travers toute surface orientée qui s'appuie sur ce contour

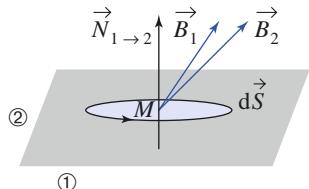
(rappelons que \vec{j} , vecteur densité de courant volumique, est à flux conservatif en régime permanent) :

$$I_{\text{enlacé}} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$



Doc. 19. Soit \vec{B} le champ magnétique créé par les courants I_1, I_2, \dots, I_5 et I_6 . L'application du théorème d'Ampère donne :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_3 - 3I_4).$$



Doc. 20. Traversée d'une nappe de courant de vecteur courant surfacique \vec{j}_S :

$$\vec{N}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_S.$$

En identifiant les expressions précédentes, qui sont valables pour toute surface Σ , nous déduisons que $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

Le champ magnétique permanent est lié à ses sources par la loi locale :

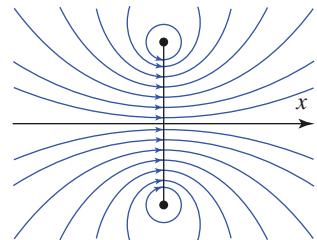
$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Lois locale et intégrale sont, ici encore, deux formulations de la même propriété, puisque l'équation locale nous permet de retrouver le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}.$$

Contrairement au champ électrique permanent, le champ magnétique permanent n'a pas un rotationnel nul : le premier « **diverge** » à partir de ses sources (les charges), le second « **tourbillonne** » autour de ses sources (les courants).

Les lignes du champ magnétique sont bouclées sur elles-mêmes, en contournant des lignes de courant (*doc. 21*). Rappelons que les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées.



Doc. 21. Les lignes du champ magnétique, créé par une spire, « tourbillonnent » autour du fil.

2.3. Flux du champ magnétique

2.3.1. Flux conservatif

En Première année, nous avons constaté le caractère conservatif du flux magnétique :

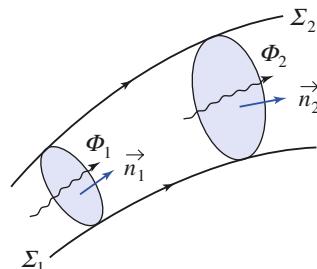
- le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul :

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{0} \text{ quelle que soit } \Sigma;$$

- ce flux est identique à travers toutes les sections d'un même tube de champ (*doc. 22*).

Ces propriétés impliquent que :

- lorsque les lignes du champ magnétique se resserrent, son amplitude augmente ;
- le flux du champ magnétique est identique à travers toutes les surfaces (orientées) s'appuyant sur un même contour fermé ;
- la composante normale du champ magnétique est continue à la traversée d'une nappe de courant.



Doc. 22. Le flux de \vec{B} à travers deux surfaces Σ_1 et Σ_2 s'appuyant sur un même tube de champ, ne dépend pas du choix de ces surfaces : $\Phi_1 = \Phi_2$.

Connaissant la discontinuité tangentielle, nous en déduisons que la discontinuité du champ à la traversée d'une nappe de courant est (*doc. 20*) :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2}.$$

2.3.2. Équation du flux magnétique

Contrairement au champ électrique, le champ magnétique a un flux toujours nul à travers une surface fermée. Le théorème de Green-Ostrogradski nous permet de relier, pour toute surface fermée, le flux du champ à sa divergence.

La divergence du champ magnétique est donc nulle en tout point.

Le caractère conservatif du flux magnétique est traduit par la loi locale :

$$\vec{\text{div}} \vec{B} = 0.$$

Remarque

De même que pour l'électrostatique, les lois introduites comme postulat de la magnétostatique permettent par leur résolution de retrouver la loi de Biot et Savart ainsi que les lois intégrales : elles contiennent donc « toute la magnétostatique ».

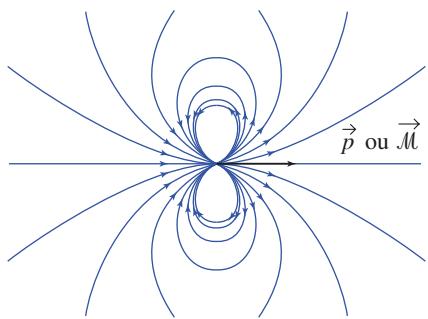
De plus ces lois locales étant toutes linéaires, elles contiennent donc le « principe » de superposition.

Application 4

Lignes de champ électrique et magnétique d'un dipôle

Sur le document 23, sont représentées, dans un plan contenant un dipôle électrique, quelques lignes de champ électrique engendré par celui-ci.

Cette représentation est identique dans le cas magnétique.



Doc. 23. Lignes de champ d'un dipôle électrique ou magnétique.

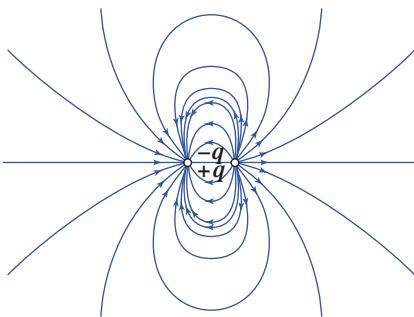
Quelle remarque peut inspirer cette figure ? N'est-ce pas paradoxal, compte tenu de la dissymétrie existant entre les deux jeux d'équations locales :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ et } \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} ; \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ et } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} . \end{cases}$$

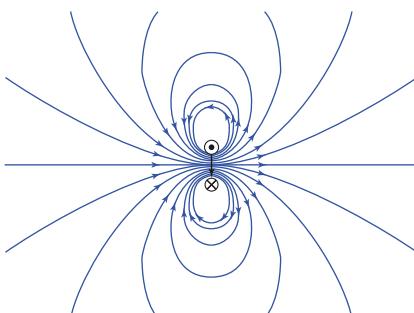
Les cartes de lignes de champ des dipôles électrique et magnétique sont identiques loin du dipôle, comme nous l'avons vu en Première année.

En dehors de leurs sources (donc, ici, hors du point où est placé le dipôle), les champs correspondants satisfont aux mêmes équations locales : divergence et rotationnel sont simultanément nuls. Les cartes de champ électrique et magnétique peuvent donc présenter des similitudes.

Toutefois, si nous observons les cartes de champ électrique d'un doublet de charges et de champ magnétique d'une spire (doc. 24a et 24b) à des distances trop faibles pour justifier l'approximation dipolaire, nous retrouvons les différences fondamentales de comportement des champs électrique et magnétique : le premier diverge à partir de la charge positive pour converger vers la charge négative, le second tourbillonne autour des courants qui le créent.



Doc. 24a. Lignes de champ électrique d'un doublet de charges.



Doc. 24b. Lignes de champ magnétique d'une spire de courant.

2.4. Potentiel vecteur : \vec{B} est un champ de rotationnel

Pour tout champ de vecteur \vec{B} de divergence nulle, il existe un champ \vec{A} , non unique, tel que $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$; on dit que \vec{B} est un champ de rotationnel.

Remarque

La non-unicité de \vec{A} correspond au fait que $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}\phi) = \vec{0}$; quelle que soit la fonction ϕ considérée le champ $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\text{grad}}\phi$ convient aussi.

Comme le champ magnétique permanent est à divergence nulle, il possède cette propriété mathématique :

Le champ magnétique dérive d'un potentiel vecteur, noté \vec{A} : $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$.
Ce champ de vecteur n'est défini qu'à un champ de gradient près.

Remarque : Le choix de ϕ , appelé *choix de jauge*, ne modifie pas le champ.

2.4.1. Circulation du potentiel vecteur

Par application du **théorème de Stokes** et de la relation précédente :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

La circulation du potentiel vecteur le long d'un contour Γ est égale au flux du champ magnétique à travers toute surface orientée s'appuyant sur ce contour.

Application 5

Potentiel vecteur d'un champ uniforme

On considère un champ $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

Montrer que l'on peut associer à ce champ un potentiel vecteur de la forme $\vec{A} = A(r) \vec{e}_{\theta}$ en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

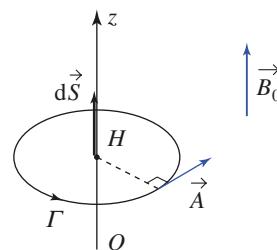
On peut utiliser la circulation du potentiel vecteur en choisissant comme contour Γ un cercle de centre H porté par (Oz) et de rayon r :

$$\oint_{\Gamma} d\vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{cercle}} A(r) \vec{e}_{\theta} r d\theta \vec{e}_{\theta} = A(r) r 2\pi.$$

D'autre part, la surface doit s'appuyer sur le contour et être orienté par lui ; on choisit le disque de centre H orienté :

$$\iint_{\text{disque}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{disque}} B_0 \vec{e}_z r dr d\theta \vec{e}_z = B_0 \pi r^2.$$

Finalement, $A(r) = \frac{rB_0}{2}$ ou $\vec{A} = \frac{1}{2} B_0 \vec{e}_z \wedge \vec{r}$.



Doc. 25.

Ainsi que nous l'avons déjà indiqué, ce potentiel vecteur n'est pas unique : le lecteur pourra vérifier que les champs $\vec{A}_1 = x B_0 \vec{e}_y$ ou $\vec{A}_2 = -y B_0 \vec{e}_x$ conviennent aussi.



● CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE PERMANENT

Nature du champ		Loi locale	Loi intégral
Électrique	flux	Équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Théorème de Gauss : $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho(P)}{\epsilon_0} d\tau = \frac{Q_{\text{int à } \Sigma}}{\epsilon_0}$
	circulation	Le rotationnel du champ électrique permanent est nul : $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \text{ partout}$	La circulation du champ électrique permanent est conservative : $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{ quel que soit } \Gamma$
Magnétique	flux	Équation du flux magnétique : $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ partout}$	Le champ magnétique a un flux conservatif : $\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ quelle que soit } \Sigma \text{ fermée}$
	circulation	Équation de Maxwell-Ampère : $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. <i>Remarque :</i> Dans l'A.R.Q.P., en l'absence d'accumulation de charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ et } \operatorname{div} \vec{j} = 0$	Théorème d'Ampère : $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}$ $= \mu_0 I_{\text{enlacé}}$

● POTENTIEL SCALAIRE V ET POTENTIEL VECTEUR \vec{A} ASSOCIÉ AU CHAMP PERMANENT

Lien avec le champ			Équation locale
	local	intégral	
Potentiel scalaire	<ul style="list-style-type: none"> Un champ de rotationnel nul est un champ de gradient : $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}} V$ Choix de jauge Le potentiel scalaire est défini à une constante près. 	<ul style="list-style-type: none"> La circulation du champ électrique permanent sur une courbe reliant deux points, définit la différence de potentiel scalaire entre ces points : $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$	<ul style="list-style-type: none"> Le potentiel scalaire V vérifie l'équation de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$
Potentiel vecteur	<ul style="list-style-type: none"> Un champ de divergence nulle est un champ de rotationnel : $\operatorname{div} \vec{A} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$. choix de jauge Le potentiel vecteur est défini à un gradient près. 	<ul style="list-style-type: none"> La circulation du potentiel vecteur sur un contour est égale au flux du champ magnétique à travers toute surface orientée s'appuyant sur ce contour : $\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$	

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Pour un point M appartenant à un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges, quelle est la direction du champ en M ?
- ✓ Pour un point M appartenant à un plan de symétrie d'une distribution de courants, quelle est la direction du champ magnétique en M ?
- ✓ Quelle est la loi locale correspondant au théorème d'Ampère en régime permanent ?
- ✓ Comment passe-t-on de la loi locale $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ au théorème de Gauss ?
- ✓ Que peut-t-on dire de la circulation d'un champ électrique permanent ? Quelle grandeur physique scalaire fondamentale en électrocinétique peut-on alors définir et comment ?
- ✓ Écrire les lois locale et intégrale qui lient le champ magnétique et le potentiel vecteur \vec{A} .
- ✓ Le champ \vec{B} est-il à flux conservatif ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Le potentiel scalaire V :

- a. est défini par $\vec{E} = -\nabla V$
- b. est tel que les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ
- c. vérifie l'équation $\Delta V - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$
- d. est tel que le champ « remonte » les potentiels
- e. peut être déterminé de manière unique à partir du champ électrique.

2. Soit un cylindre de révolution de longueur infinie parcouru par un courant volumique uniforme parallèle aux génératrices du cylindre :

- a. le champ magnétique qu'il crée est radial
- b. le champ magnétique est nul à l'intérieur du cylindre
- c. le champ magnétique est continu à la traversée de la surface du cylindre
- d. la norme du champ magnétique n'est fonction que de la distance à l'axe du cylindre

e. pour calculer le champ magnétique on peut choisir un cercle comme contour pour appliquer le théorème d'Ampère

f. on peut toujours appliquer le théorème d'Ampère quel que soit le contour.

3. Soit une sphère uniformément chargée en surface :

- a. le champ électrique qu'elle crée est radial
- b. le champ électrique est continu à la traversée de la sphère chargée
- c. le potentiel est continu à la traversée de la sphère chargée
- d. $\text{div}(\vec{E}) = 0$ pour tout point n'appartenant pas à la sphère
- e. pour un point extérieur à la sphère :

$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

f. à l'extérieur de la sphère, le champ électrique \vec{E} est un vecteur à flux conservatif.

► Solution, page 57.

Exercice commenté

Diode à vide

ÉNONCÉ

Une diode à vide est constituée de deux armatures métalliques cylindriques de même axe (Oz) et de hauteur h . L'armature intérieure est un filament de rayon R_1 négligeable devant le rayon R_2 de la seconde armature. Ce filament, chauffé, est susceptible d'émettre des électrons (de charge $-e$ et de masse m) avec une vitesse initiale négligeable.

Alimentée par un générateur de f.e.m. U_0 ($U_0 > 0$), la diode est traversée par un courant I dont l'orientation est indiquée ci-contre.

L'armature intérieure est au potentiel zéro.

On s'intéresse au régime permanent.

Le mouvement des électrons vers l'armature extérieure de la diode crée une charge d'espace $\rho(r)$ à l'intérieur de la diode et une densité volumique de courant définie par le

vecteur radial $\vec{j}(r) = j(r)\hat{e}_r$, où r désigne la composante radiale du vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ (on néglige donc tout « effet de bord » dû à la valeur finie de la hauteur h des armatures).

- 1) Quelle est l'expression de la densité volumique de courant électrique $j(r)$ en fonction du courant I ?
- 2) Exprimer la valeur $v(r)$ de la vitesse des électrons en fonction du potentiel $V(r)$.
- 3) En déduire l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(r)$ à l'intérieur de la diode.
- 4) Montrer qu'une solution de la forme $V(r) = A r^\alpha$ est compatible avec ce problème. Déterminer les constantes A et α . En désignant par $U = V(R_2) - V(R_1) = V(R_2)$ la différence de potentiel entre les armatures, tracer la caractéristique $I = f(U)$ de ce dipôle.
- 5) Quelle est la puissance volumique fournie par le champ électrique aux charges en mouvement ? En déduire la puissance totale \mathcal{P} absorbée par la diode.
Préciser les valeurs numériques de I et \mathcal{P} pour $U_0 = 200\text{ V}$ et $R = 1\text{ k}\Omega$.
- 6) Le générateur de tension continue est remplacé par un générateur de tension sinusoïdale d'amplitude U_0 . Quelle est l'allure du chronogramme du courant $I(t)$ traversant le circuit ? On admettra que les résultats trouvés précédemment en régime permanent restent valables en régime variable (ce qui est vrai si la fréquence de la tension sinusoïdale n'est pas trop élevée, dans l'A.R.Q.R.P., cf. chapitre 5).

CONSEILS

Dans ce problème, il faut utiliser :
– la définition de l'intensité I qui correspond au flux du vecteur \vec{j} ;

– les lois de la mécanique : le théorème de l'énergie cinétique ou ce qui revient au même la relation fondamentale que l'on intégrerait.

SOLUTION

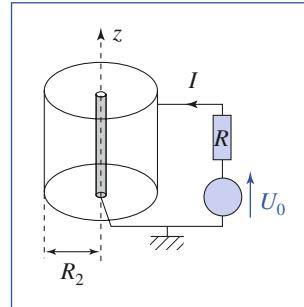
1) En régime permanent, le vecteur \vec{j} est à flux conservatif : son flux est le même à travers tout cylindre d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon r compris entre $R_1 \approx 0$ et R_2 .

Il vaut $-I$ (le signe moins vient de l'orientation du courant I sur le schéma électrique).

Nous en déduisons $j(r) = -\frac{I}{2\pi rh}$.

2) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un électron émis avec une vitesse négligeable par le filament :

$$\frac{1}{2}m v^2(r) + (-e)(V(r) - V(R_1)) = 0, \text{ soit } v(r) = \sqrt{\frac{2eV(r)}{m}}.$$



Les équations de l'électrostatique contiennent :

- le théorème de Gauss (sous forme locale ou intégrée) ;

- la loi ; $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$

- ou l'équation de Poisson.

L'expression du laplacien en coordonnées cylindriques est donnée en annexe.

3) Le potentiel $V(r)$ satisfait l'équation de Poisson, soit :

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}.$$

La densité de charge est ici égale à la densité de charge mobile :

$$j(r) = \rho(r) v(r).$$

Nous en déduisons l'équation différentielle que doit satisfaire $V(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = + \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 h} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right) \frac{1}{\sqrt{V(r)}}.$$

4) La solution proposée $V(r) = Ar$ est compatible avec le problème étudié pour :

$$\alpha = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad A = \left(\frac{9I}{8\pi\epsilon_0 h} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Nous en déduisons que le courant et la tension $U = V(R_2)$ aux bornes du dipôle sont liés par la relation :

$$U = A(R_2)^{\frac{2}{3}}, \text{ soit } I = \left(\frac{8\pi\epsilon_0 h}{9R_2} \sqrt{\frac{2e}{m}} \right) U^{\frac{3}{2}}.$$

Remarque : L'expression ci-dessus n'est plus valable pour de fortes intensités, car un phénomène de saturation (dont nous n'avons pas tenu compte ici) intervient lorsque tous les électrons émis par l'armature intérieure sont captés par l'armature extérieure.

L'expression précédente n'est bien entendu applicable que pour $I > 0$ (les électrons ne peuvent que remonter les potentiels). Lorsque U est négatif, le courant est nul (la diode est bloquée).

5) La puissance volumique fournie par le champ aux charges est :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{AI}{3\pi h r^3}$$

puisque $\vec{j} = \frac{-I}{2\pi h r} \vec{e}_r$ et $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{2A}{3r^{\frac{1}{3}}} \vec{e}_r$.

La puissance totale absorbée par la diode est donc :

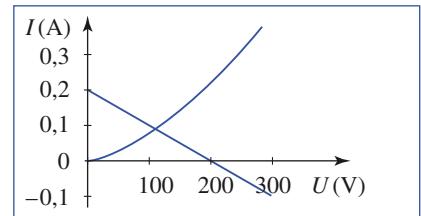
$$\mathcal{P} = \iiint_{0=R_1 < r < R_2} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \int_{r=0}^{R_2} \frac{AI}{3\pi h r^3} 2\pi r h dr = AI(R_2)^{\frac{2}{3}} = UI$$

résultat évidemment attendu.

Le point de fonctionnement du montage est à l'intersection de la caractéristique $I = f(U)$ de la diode et de la droite de la charge $I = \frac{U_0 - U}{R}$, comme indiqué ci-contre.

Une étude graphique (ou numérique) est nécessaire pour déterminer l'intensité I qui traverse le circuit.

Numériquement : $I = 87 \text{ mA}$, $U = 113 \text{ V}$ et $\mathcal{P} = UI = 9,8 \text{ W}$.



Exercice commenté

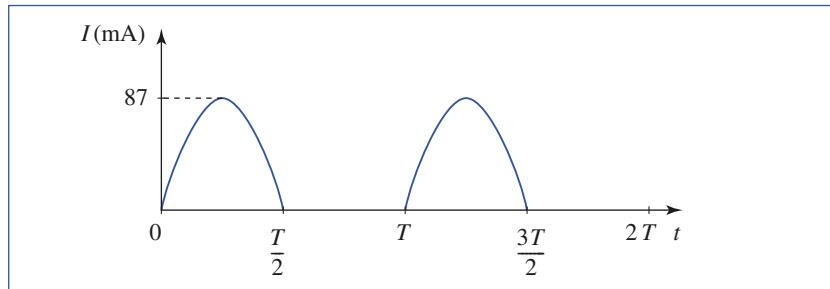
Il faut utiliser le graphe de la question 5) pour une f.e.m. variable :

$$U_{\text{géné}} = U_0 \sin \omega t.$$

6) Lorsque la f.e.m. du générateur $U_{\text{géné}} = U_0 \sin \omega t$ est positive, le courant $I(t)$ est positif. Il est obtenu point par point, en confrontant à tout instant la caractéristique du dipôle à la caractéristique de charge d'équation :

$$I = \frac{U_0 \sin \omega t - U}{R}.$$

Lorsque la f.e.m. du générateur $U_{\text{géné}} = U_0 \sin \omega t$ est négative, le courant $I(t)$ est nul.



Le schéma représente l'allure de $I(t)$ sur une période de la tension d'alimentation : la diode « redresse » le courant : c'est un redressement mono-alternance.

Exercices

Les expressions des opérateurs divergence, rotationnel, ... dans les différents systèmes de coordonnées, sont fournies dans l'annexe.

1 Champ électrique uniforme

Montrer que dans une région vide de charges, où les lignes de champ d'un champ électrostatique sont rectilignes et parallèles, le champ est uniforme.

2 Champ divergent de divergence nulle

- Quelle est la divergence du champ $\frac{a}{r^2} \vec{e}_r$, en coordonnées sphériques de centre O ? Conclure.
- Quel est le flux de ce champ à travers la sphère de centre O et de rayon r ?
- Ces deux résultats ne sont-ils pas en désaccord?

3 Champs tourbillonnants de rotationnel nul

Comme dans l'exercice précédent, montrer, en utilisant l'exemple d'un champ magnétique créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant I , que le calcul de la circulation d'un champ $\frac{a}{r} \vec{e}_\theta$ (en coordonnées cylindriques) peut aboutir à des résultats en désaccord.

Expliquer pourquoi cette contradiction n'est qu'apparente.

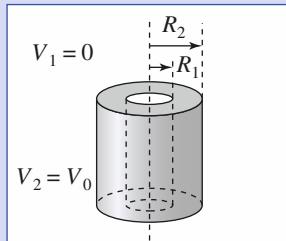
4 Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est constitué par deux cylindres métalliques (appelés armatures du condensateur) coaxiaux, d'axe (Oz), de rayons R_1 et R_2 et de hauteur h .

L'armature interne du condensateur est portée au potentiel $V_1 = 0$ et l'armature externe au potentiel $V_2 = V_0 > 0$ (chaque armature forme une surface équipotentielle). Il n'y a aucune charge entre les armatures.

On négligera les effets de bords (on considère que les bords sont « rejetés à l'infini »).

- Quelles sont les expressions du champ et du potentiel à l'intérieur du condensateur (pour $R_1 < r < R_2$)?
- Quelles sont, à encombrement du condensateur donné, les valeurs du rayon intérieur R_1 qui permettent de maintenir le champ électrique inférieur à $2 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ dans le condensateur?



Est-ce compatible avec les valeurs proposées ?

3) En utilisant les résultats de l'application 2, calculer les charges surfaciques σ_1 et σ_2 de chaque armature et en déduire que les armatures portent deux charges opposées $Q_2 = Q$ et $Q_1 = -Q$ ($Q > 0$).

4) Calculer la capacité C de ce condensateur, définie par $C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{Q}{V_0}$.

Données : $V_0 = 10 \text{ kV}$; $R_1 = 1,5 \text{ cm}$; $R_2 = 3 \text{ cm}$; $h = 10 \text{ cm}$; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

5 Champ magnétique et potentiel vecteur créés par un solénoïde

Soit un solénoïde «infini», de section circulaire de rayon R , constitué de spires jointives, à raison de n spires par unité de longueur, et parcouru par un courant I .

1) Rappeler l'expression du champ magnétique \vec{B} créé par ce solénoïde en tout point.

2) Proposer un potentiel vecteur \vec{A} associé à ce champ, sous la forme $\vec{A} = A(r) \vec{e}_\theta$.

6 Écrantage de Debye

On considère un milieu globalement électriquement neutre, dans un état ionisé (un plasma par exemple), constitué de particules de charges $+q$ et $-q$, de densités moyennes identiques égales à n_0 .

On considère une charge q de ce milieu au point O . La présence de la charge q en O modifie localement la répartition des charges positives et négatives, celle-ci ayant alors les densités $n^+(r)$ et $n^-(r)$ respectivement, à la distance r de O .

Ces densités sont données par la loi de Boltzmann, à l'équilibre thermodynamique (statistique) du système à la température T :

$$n^+(r) = n_0 e^{-\frac{q V}{k_B T}} \quad \text{et} \quad n^-(r) = n_0 e^{+\frac{q V}{k_B T}},$$

puisque l'énergie d'une charge q en un point de potentiel V s'écrit $\mathcal{E}_p = q V$. À grande distance de l'origine O le milieu retrouve sa neutralité globale et les densités de charges positives et négatives tendent vers la même valeur n_0 ; en prenant $V=0$ pour $r \rightarrow \infty$, on a bien $n^+(r) = n^-(r) = n_0$.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(r)$.

2) Linéariser celle-ci pour $qV \ll kT$, puis la résoudre.

Exercices

On introduira une distance caractéristique du phénomène, appelée longueur de Debye, dont on donnera le sens physique.

3) Comparer le potentiel obtenu au potentiel créé pour une charge q placée en O dans le vide.

Interpréter en justifiant le nom « écrantage » donné au phénomène.

7 Étude d'un exemple à symétrie cylindrique

1) Un fil rectiligne infini est modélisé par un tube de courant d'axe (Oz) et de rayon a , parcouru par le courant volumique uniforme :

$$\vec{j} = j \vec{e}_z.$$

a) Rappeler l'expression du champ magnétique engendré par cette distribution de courants.

b) On cherche \vec{A} sous la forme $\vec{A} = A(r) \vec{e}_z$.

Déterminer $A(r)$ pour $r < a$ et $r > a$.

\vec{A} est-il continu en $r = a$?

Achever la détermination de \vec{A} .

2) Le même fil étant supposé porter la charge volumique uniforme ρ , quelles sont les expressions du champ électrique et du potentiel scalaire associés à cette distribution ?

3) Que deviennent les expressions établies dans cette étude dans le cas d'un fil rectiligne infini, mince, parcouru par le courant I ou portant la charge linéique λ ?

8 Effet Meissner

Un modèle microscopique de la conduction électrique dans un matériau supraconducteur conduit à poser l'équation de London. Celle-ci relie le vecteur densité de courant volumique \vec{j} et le champ \vec{B} en un point du milieu :

$$\text{rot } \vec{j} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0 \lambda^2}.$$

où $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n q^2}}$ est la constante de London du matériau (n charges q , de masse m par unité de volume).

Une plaque supraconductrice est plongée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$. Cette plaque occupe la zone $(-d \leq z \leq d)$. Le champ magnétique à l'extérieur de la plaque n'est pas modifié par la présence de celle-ci.

1) Établir l'équation traduisant les variations du champ magnétique au sein du matériau supraconducteur.

Quelle est la dimension de λ ?

Donner sa valeur numérique pour :

$$n = 10^{29} \text{ m}^{-3}; \quad q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \quad m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.$$

2) En déduire la répartition du champ magnétique lorsque la plaque est présente et représenter les variations de son amplitude en fonction de l'abscisse z pour $d = \lambda$ et pour $d = 10 \lambda$.

3) Quelle est la densité volumique de courant électrique \vec{j} dans le matériau ?

Représenter les variations de son amplitude en fonction de z pour $d = \lambda$ et pour $d = 10 \lambda$.

Le résultat obtenu permet-il de comprendre que la plaque ne modifie pas la valeur du champ en dehors de celle-ci.

4) Pour une plaque d'épaisseur $2d = 1$ mm, que peut-on dire de la répartition de champ et de courant au sein du matériau ?

Proposer une modélisation plus simple, à expliciter, de la situation obtenue.

9* Sphère supraconductrice parfaite

Une bille supraconductrice, de rayon a , est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. À l'intérieur du supraconducteur parfait (cf. exercice 8 : la longueur de London est négligeable), le champ magnétique est nul.

1) On se propose de déterminer le champ magnétique autour de la bille.

a) Préciser les équations et conditions aux limites caractérisant le champ à l'extérieur de la bille.

b) Montrer que la superposition au champ \vec{B}_0 du champ créé par un dipôle magnétique, de moment dipolaire \vec{M} à préciser, permet de réaliser des conditions identiques dans la zone ($r > a$).

c) En déduire la répartition du champ magnétique autour de la sphère supraconductrice.

2) Proposer une analogie entre ce problème et le cas d'un écoulement incompressible et irrotationnel de fluide parfait autour d'une bille immobile.

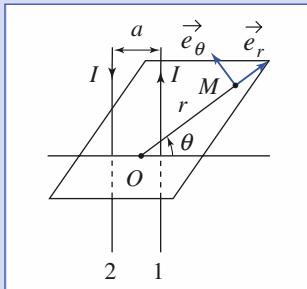
3) a) Quelle est la répartition de courant obtenue sur la sphère supraconductrice ?

b) Établir, à partir de cette répartition, le moment magnétique de la sphère. Le résultat est-il surprenant ?

10 Champ magnétique de deux fils parallèles

Deux fils infinis parallèles, distants de a , sont parcourus par des courants $+I$ et $-I$.

1) Rappeler l'expression du champ créé par un fil parcouru par un courant I .



En déduire le potentiel vecteur associé sous la forme $A(r) \vec{e}_z$.

En déduire \vec{A} pour le système des deux fils.

2) Calculer \vec{B} et donner l'allure des lignes de champ si $a \ll r$.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 51.

- | | |
|---------------------------|----------------|
| 1. Vrai : a, b ; | Faux : c, d, e |
| 2. Vrai : c, d, e, f ; | Faux : a, b |
| 3. Vrai : a, c, d, e, f ; | Faux : b |

1 On a deux méthodes de résolution à notre disposition.

• En utilisant les lois locales : divergence et rotationnel

En prenant l'axe (Ox) colinéaire aux lignes de champ, on note :

$\vec{E} = E(x, y, z) \vec{e}_x$ le champ électrostatique :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial x} \text{ et } \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial y} \vec{e}_z.$$

En écrivant $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (espace vide de charges) et $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ (champ statique), on obtient l'uniformité du champ.

• En utilisant les lois intégrales : flux et circulation

On considère une surface fermée : le cylindre élémentaire de longueur Δx et de section S , ayant ses génératrices parallèles à l'axe (Ox). Le flux du champ \vec{E} à travers cette surface fermée est nul. La surface latérale du cylindre n'intervenant pas dans l'expression du flux, on en déduit que le champ ne peut pas dépendre de la variable x , d'où $E(x, y, z) = E(y, z)$.

La circulation du champ sur un contour rectangulaire élémentaire, pris par exemple dans le plan (Ox, Oy), de côtés dx et dy , est nulle, donc :

$$0 = E(y + dy, z) dx - E(y, z) dx = \frac{\partial E(y, z)}{\partial y} dx dy.$$

Il vient $E(y, z) = E(z)$.

En prenant un cadre de côtés dx et dz dans le plan (Ox, Oy), on obtient de même $E(z) = E_0$, ce qui achève la démonstration.

2 1) La divergence de ce champ radial est :

$$\operatorname{div} \left(\frac{a}{r^2} \vec{e}_r \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{a}{r^2} \right) \right] = 0 \text{ (symétrie sphérique).}$$

Il s'agit donc d'un champ à flux conservatif, partout où il est défini (pour r non nul).

2) Son flux est conservatif. Il est en particulier le même à travers toutes les sphères de rayon r centrées en O et il est égal à $4\pi a$.

3) Il s'agit donc d'un champ de divergence nulle à flux non nul à travers une surface fermée : la sphère de rayon r centrée en O .

Ces résultats ne sont pas contradictoires, car le théorème de Green-Ostrogradski ne saurait s'appliquer ici sans précaution, puisque le champ n'est pas défini dans tout le volume contenu à l'intérieur de cette sphère.

Le champ électrostatique engendré par une charge ponctuelle q (on aurait alors $a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$) est un exemple d'un tel champ. Il ne faut donc pas se méprendre en disant que l'équation locale de Maxwell-Gauss justifie bien que, sur une carte du champ électrique, les lignes du champ \vec{E} divergent à partir des charges. Ceci n'est en principe valable que localement, juste au niveau des charges ($r = 0$). Ailleurs, c'est-à-dire en dehors des charges, ce champ a une divergence nulle, et son flux se conserve.

3 On considère le champ d'un fil rectiligne infini d'axe (Oz), parcouru par le courant I :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \vec{e}_\theta}{2\pi r}.$$

Son rotationnel est nul partout où le champ est défini (pour r non nul) :

Ce champ est orthoradial, donc $\operatorname{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$ (symétrie cylindrique).

Comme $r B_\theta = \text{cte}$, on a $\operatorname{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$.

Or, la circulation de ce champ sur un cercle de rayon r et d'axe (Oz) n'est pas nulle et vaut $\mu_0 I$.

Le théorème de Stokes ne peut s'appliquer ici sans précaution, car une surface s'appuyant sur ce contour intercepte l'axe (Oz) sur lequel le champ n'est pas défini.

L'équation locale indique qu'un champ $\frac{a}{r} \vec{e}_\theta$ (tel que $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, avec $a = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$) ne tourbillonne autour de sa source qu'au voisinage immédiat de celle-ci.

Remarque : La circulation de ce vecteur sur toute courbe n'entourant pas le fil est nulle (cf. H-Prépa, Électromagnétisme, 1^{re} année).

Corrigés

4

1) Les effets de bord sont négligés ; le problème est alors invariant par translation parallèlement à (Oz) et par rotation autour de (Oz). Il faut chercher un champ $\vec{E} = E(r) \hat{e}_r$ auquel est associé le potentiel $V(r)$. Entre les armatures, donc en l'absence de charge, le champ est à flux conservatif : son flux est le même à travers tous les cylindres d'axe (Oz) et de rayon r ($R_1 < r < R_2$), donc $2\pi r h E(r) = \text{cte}$, soit :

$$E(r) = \frac{A}{r} \quad \text{et} \quad V(r) = -A \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

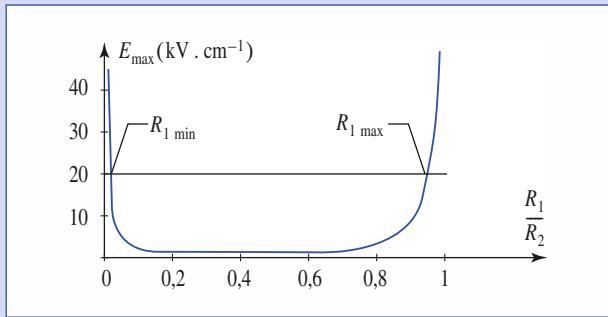
Utilisant les valeurs du potentiel sur les armatures :

$$V(R_1) = 0 \quad \text{et} \quad V(R_2) = V_0,$$

$$\text{on trouve : } V(r) = V_0 \frac{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad \text{et} \quad E(r) = -\frac{V_0}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

2) L'amplitude du champ est maximale en $r = R_1$:

$$E_{\max}(R_1) = \frac{V_0}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$



Limiter cette valeur à $2 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, soit $20 \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1}$, revient à imposer une borne inférieure et une borne supérieure au domaine de variation du rayon R_1 (cf. schéma ci-dessus).

Numériquement, cela donne :

$$R_{1 \min} = 0,085 \text{ cm} \quad \text{et} \quad R_{1 \max} = 2,95 \text{ cm}.$$

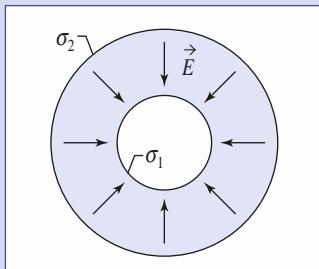
La valeur proposée par l'énoncé vérifie bien :

$$R_{1 \min} < R_1 < R_{1 \max}.$$

3) La discontinuité du champ (cf. Application 2) au niveau des armatures donne :

$$\sigma_1 = \frac{-\epsilon_0 V_0}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\text{et} \quad \sigma_2 = \frac{+\epsilon_0 V_0}{R_2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$



On en déduit :

$$Q_2 = 2\pi R_2 h \sigma_2 = \frac{2\pi \epsilon_0 h V_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = Q \quad \text{et} \quad Q_1 = 2\pi R_1 h \sigma_1 = -Q.$$

$$4) \text{La capacité du condensateur est donc : } C = \frac{Q_2}{V_0} = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

$$\text{A.N. : } C = 8 \text{ pF}.$$

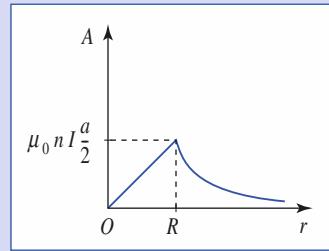
5

1) Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde (d'axe (Oz)) et vaut $\vec{B} = \mu_0 n I \hat{e}_z$. Il est nul à l'extérieur du solénoïde (cf. H-Prépa, Électromagnétique, 1^{re} année).

2) On calcule la circulation de \vec{A} sur un cercle passant par M , d'axe (Oz) et de rayon r (ce cercle est une ligne du champ vectoriel \vec{A}). Cette circulation est égale au flux du vecteur \vec{B} à travers ce cercle, d'où :

- pour $r < R$, $A(r) = \mu_0 n I \frac{r}{2}$;
- pour $r > R$, $A(r) = \mu_0 n I \frac{a^2}{2r}$.

On constate que le potentiel vecteur est continu à la traversée de la surface $r = R$ du solénoïde. La fonction $A(r)$ est représentée ci-contre.



6

1) Le potentiel satisfait l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{(n^+ - n^-)q}{\epsilon_0}.$$

Sachant que $n^+(r) = n_0 e^{-\frac{qV(r)}{k_B T}}$ et $n^-(r) = n_0 e^{+\frac{qV(r)}{k_B T}}$, il vient :

$$\rho(r) = -2q n_0 \operatorname{sh} \frac{qV(r)}{k_B T}.$$

Le problème étant à symétrie sphérique autour de la charge q située à l'origine, on obtient $V(\vec{r}) = V(r)$, donc (cf. Annexe) :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{2n_0 q}{\epsilon_0} \operatorname{sh} \frac{qV(r)}{k_B T}.$$

$$\text{Rappel :} \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r V(r)).$$

$$2) \text{Linéarisée, cette équation devient } \frac{d^2(rV(r))}{dr^2} = \frac{2n_0 q^2}{\epsilon_0 k_B T} (rV(r)).$$

La solution $r V(r)$ de cette équation, qui ne diverge pas lorsque r tend vers ∞ , est de la forme :

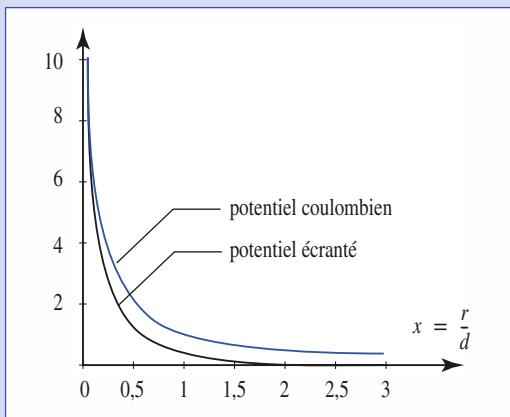
$$r V(r) = Ae^{-\frac{r}{d}},$$

où $d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 q^2}}$ est la longueur caractéristique de l'atténuation du potentiel ou longueur de Debye.

Lorsque r tend vers 0, cette solution doit être équivalente au potentiel créé par la charge q seule, ce qui impose $A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Finalement, le potentiel est $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{d}}$.

3) Le potentiel obtenu décroît beaucoup plus rapidement que le potentiel coulombien $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Au voisinage immédiat de la charge $+q$, ce sont des charges $-q$ qui se placent préférentiellement, atténuant l'effet de la charge « centrale ». Ceci explique le résultat obtenu : au-delà de quelques d , le potentiel de Debye : $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{d}}$ est très inférieur au potentiel coulombien, comme le montre le schéma ci-dessous, sur lequel sont tracées les courbes du potentiel coulombien (en couleur) et du potentiel écranté (en noir) en fonction de $x = \frac{r}{d}$.



7) a) Le plan Π , contenant l'axe (Oz) et le point M , est un plan de symétrie de la distribution de courants :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta.$$

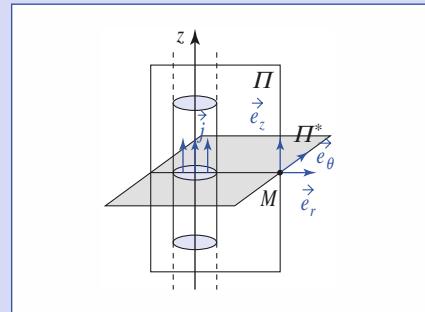
La distribution étant invariante par rotation autour de (Oz) et par translation parallèlement à cet axe, on a :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta.$$

L'application du théorème d'Ampère à un cylindre (doc. 1), d'axe (Oz) et de rayon r , donne enfin :

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_0 j \frac{r}{2} \vec{e}_\theta & \text{si } r < a; \\ \vec{B} = \mu_0 j \frac{a^2}{2r} \vec{e}_\theta & \text{si } r > a. \end{cases}$$

Le champ magnétique de cette distribution *volumique* de courant est continu en $r = a$.



Doc. 1. Symétries du fil parcouru par un courant.

b) Considérons un contour Γ , contenu dans un plan $\theta = \text{cte}$, de surface élémentaire (doc. 2) :

$$\vec{dS} = -h dr \vec{e}_\theta.$$

(Attention à l'orientation !)

L'application de l'égalité :

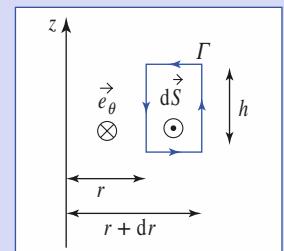
$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

à ce contour nous donne :

$$A(r+dr)h - A(r)h = -B(r)h dr,$$

soit :

$$\frac{dA(r)}{dr} = -B(r).$$



Par intégration, on obtient :

$$\begin{cases} \vec{A} = \mu_0 j \frac{r_1^2 - r^2}{4} \vec{e}_z & \text{si } r < a; \\ \vec{A} = \mu_0 j \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right) \vec{e}_z & \text{si } r > a. \end{cases}$$

où r_1 et r_2 sont des constantes d'intégration.

On sait que le champ magnétique d'une distribution de courants peut au plus présenter une discontinuité finie (cas d'une nappe de courant). Ce champ dérivant d'un potentiel, ce dernier doit nécessairement être continu. On doit donc raccorder par continuité les deux expressions précédentes, soit :

$$\begin{cases} \vec{A} = \mu_0 j \frac{a^2 - r^2}{4} \vec{e}_z & \text{si } r < a; \\ \vec{A} = \mu_0 j \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{a}{r}\right) \vec{e}_z & \text{si } r > a. \end{cases}$$

Remarque : On a choisi, de plus, d'annuler la valeur prise par le potentiel en $r = a$: ce choix est arbitraire.

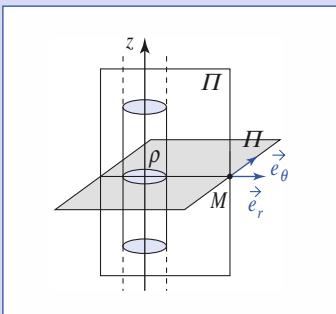
2) Dans le cas d'un fil chargé, les symétries de la distribution indiquent que le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E(r) \vec{e}_r.$$

L'application du théorème de Gauss à un cylindre d'axe (Oz), à base circulaire de rayon r et de hauteur arbitraire, conduit alors à (doc. 3) :

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r}{2} \vec{e}_r & \text{si } r < a; \\ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a^2}{2r} \vec{e}_r & \text{si } r > a. \end{cases}$$

Corrigés



Doc. 3. Symétrie du fil chargé.

On obtient le potentiel $V(r, \theta, z) = V(r)$ par intégration de $\frac{dV(r)}{dr} = -E(r)$, sachant que le potentiel doit être continu en $r = a$. Si on choisit de prendre le potentiel scalaire, défini à une constante près, nul en $r = a$, on obtient :

$$\begin{cases} V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a^2 - r^2}{4} & \text{si } r < a; \\ V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{a}{r}\right) & \text{si } r > a. \end{cases}$$

Les expressions que l'on a obtenues pour les champs et potentiels sont analogues.

Notons qu'il faut cependant surveiller les symétries et antisymétries planes des distributions, qui imposent des directions différentes aux champs \vec{E} , \vec{B} et \vec{A} .

3) Dans le cas d'une distribution filiforme, on peut envisager le cas limite où a tend vers 0 et remplacer dans les expressions précédentes le produit $j\pi a^2$ par I , courant électrique circulant dans le fil, et le produit $\rho\pi a^2$ par λ , charge linéique du fil. On obtient alors, pour $r > 0$:

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \\ \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \vec{e}_z \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_z \\ V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \end{cases}$$

où r_0 est un rayon pour lequel on choisit d'annuler les potentiels.

Ces expressions, analogues, font apparaître en symétrie cylindrique une évolution en $\frac{1}{r}$ des champs, alors que les potentiels présentent une évolution logarithmique.

8

1) Le champ magnétique permanent vérifie l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Sa divergence est nulle, de sorte qu'en prenant membre à membre le rotationnel de cette équation, on obtient avec l'équation de London

$$\Delta \vec{B} + \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}.$$

Pour ce problème invariant par translation parallèlement à (Ox) ou (Oy), où le champ appliqué est dirigé selon (Ox), \vec{B} s'écrit simplement :

$$\vec{B} = B(z) \vec{e}_x, \quad \text{avec} \quad \frac{d^2 B}{dz^2} + \frac{B}{\lambda^2} = 0.$$

L'équation différentielle donne immédiatement la dimension de λ : c'est une longueur. Numériquement $\lambda = 17 \text{ nm}$.

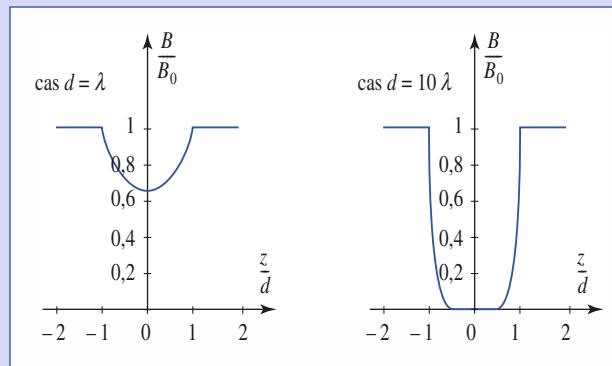
2) Le modèle de description de la répartition de courant est volumique, et le champ magnétique est continu en $z = -d$ et $z = d$, donc :

$$B(-d) = B(d) = B_0.$$

On en déduit que le champ magnétique dans la plaque, est :

$$\vec{B} = B_0 \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{e}_x.$$

Les variations de $\frac{B}{B_0}$ sont représentées ci-dessous pour $d = \lambda$ dans le premier graphe, et pour $d = 10\lambda$ dans le second.

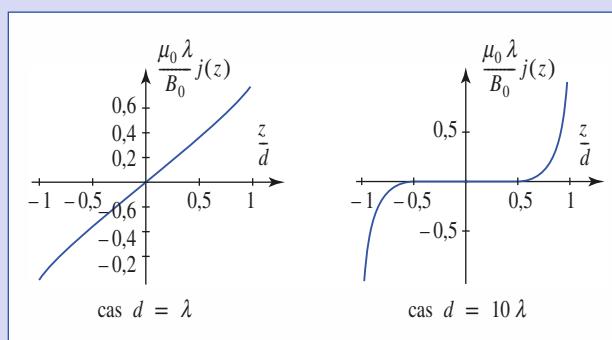


Le champ magnétique ne pénètre dans la plaque que sur une profondeur de l'ordre de la longueur de London λ . Le supraconducteur a la propriété « d'expulser » le champ magnétique : c'est l'effet Meissner.

3) La densité volumique de courant est :

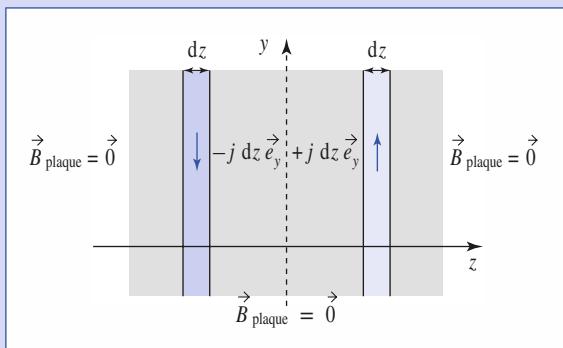
$$\vec{j} = \frac{\operatorname{rot} \vec{B}}{\mu_0} = j(z) \vec{e}_y = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{e}_y.$$

Les variations de $j(z)$ dans la plaque sont représentées ci-dessous.



Pour $d \gg \lambda$, la densité de courant est localisée au voisinage des surfaces de la plaque, où elle prend des valeurs très importantes. Par exemple, pour $B_0 = 1 \text{ T}$, $j \approx 5 \cdot 10^{13} \text{ A.m}^{-2}$.

On sait qu'une nappe plane infinie de courant surfacique \vec{j}_S crée un champ magnétique $\pm \frac{\mu_0 j_s}{2}$ de part et d'autre de la nappe. Pour deux nappes symétriques par rapport au plan ($z = 0$), parcourues par des courants surfaciques opposés, les champs s'additionnent entre les plaques, mais se compensent en dehors. La distribution volumique obtenue pour la plaque supraconductrice s'apparente à une superposition de nappes d'épaisseur dz , symétriques par rapport au plan ($z = 0$), de courants opposés. On voit donc que le champ créé par la plaque supraconductrice est nul en dehors de celle-ci. Donc la plaque ne perturbe pas le champ \vec{B}_0 appliqué, sauf en son sein.



4) Les graphes des 2) et 3) ont montré que, pour $d \gg \lambda$:

- le champ magnétique ne pénètre dans la plaque que sur une très faible épaisseur ;
- la densité volumique de courant est quasiment nulle au sein du matériau, sauf au voisinage de sa surface où elle est très importante.

On peut alors remplacer cette distribution par un modèle surfacique, pour lequel la densité surfacique de courant est prise égale à :

$$\vec{j}_S = \int_{z=0}^d \vec{j} dz = \int_{z=0}^d \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} dz \vec{e}_y = \frac{B_0}{\mu_0} \left[\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{z}{\lambda}\right) - 1}{\operatorname{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \right] \vec{e}_y.$$

Lorsque $d \gg \lambda$, \vec{j}_S tend vers $\frac{B_0}{\mu_0} \vec{e}_y$ sur la face $z = d$, le courant surfacique étant opposé sur la face $z = -d$. À cette distribution surfacique est logiquement associé un champ magnétique discontinu à la traversée des surfaces de la plaque supraconductrice.

9

1) a) Hors de la sphère (et hors des sources du champ \vec{B}_0 , éloignées), le champ magnétique total, c'est-à-dire la superposition du champ \vec{B}_0 appliqué et du champ créé par les courants parcourant la sphère, vérifie :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = 0.$$

et donc aussi l'équation de Laplace $\Delta \vec{B} = 0$.

À grande distance, le champ magnétique s'identifie au champ appliqué \vec{B}_0 .

La composante normale du champ magnétique est continue, donc nulle, en tout point à la surface de la sphère : $\vec{e}_r \cdot \vec{B}(r = a, \theta, \varphi) = 0$, où r , θ et φ désigne les coordonnées sphériques du point considéré.

b) On place un dipôle au point O , dirigé selon l'axe de révolution du problème :

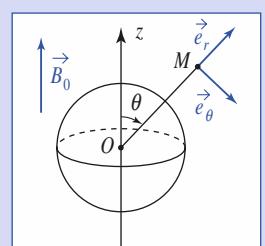
$\vec{M} = M \vec{e}_z$. Il est clair que les deux premières conditions énoncées à la question précédente sont vérifiées, le champ total étant :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{dipôle}} \\ &= B_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) + \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{(2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}{r^3}. \end{aligned}$$

Il faut ajuster la valeur du moment dipolaire de façon à vérifier aussi :

$$\vec{e}_r \cdot \vec{B}(r = a, \theta, \varphi) = 0.$$

$$\text{Cela impose } M = -\frac{2\pi B_0 a^3}{\mu_0}.$$



c) Le champ, identique dans les deux cas de figure dans la zone ($r > a$), est :

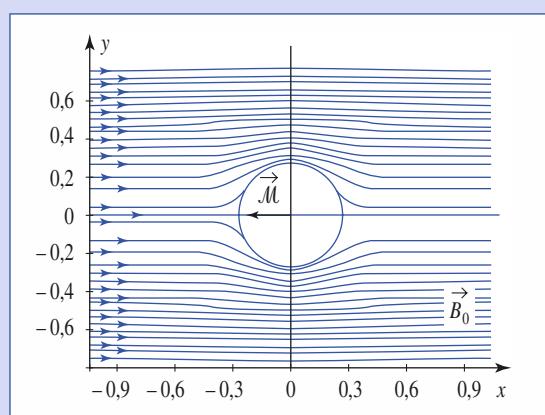
$$\vec{B}(\vec{r}) = B_0 \left[\cos \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \vec{e}_r - \sin \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \vec{e}_\theta \right].$$

2) Un fluide en écoulement incompressible ($\operatorname{div} \vec{v} = 0$) et irrationnel ($\operatorname{rot} \vec{v} = 0$), s'écoulant à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_r$ loin de la sphère, et glissant le long de la surface de la sphère en $r = a$ (fluide parfait), engendre un problème identique de détermination du champ de la vitesse \vec{v} .

Immédiatement l'expression de ce champ s'en déduit :

$$\vec{v}(\vec{r}) = v_0 \left[\cos \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \vec{e}_r - \sin \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \vec{e}_\theta \right].$$

Le schéma ci-dessous représente, dans un plan contenant l'axe (Oz), quelques lignes du champ résultant de la superposition d'un champ uniforme \vec{B}_0 et du champ d'un dipôle, parallèle à \vec{B}_0 et d'orientation opposée. On distingue la trace de la sphère de rayon $a = \left(-\frac{\mu_0 M}{2\pi B_0}\right)^{\frac{1}{3}}$ autour de laquelle « s'écoule » le champ total.

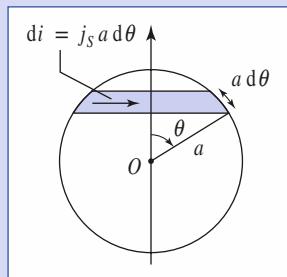


Corrigés

3) a) La répartition de courant est donnée par la discontinuité du champ magnétique à la surface de la sphère :

$$\vec{B}_{(r=a^+, \theta, \varphi)} - \vec{B}_{(r=a^-, \theta, \varphi)} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_r.$$

De ce fait, $\vec{j}_S = \vec{e}_r \wedge \vec{B}_{(r=a^+, \theta, \varphi)} = -\frac{3B_0}{2\mu_0} \sin \theta \vec{e}_\varphi$.



b) À une spire, de rayon R et parcourue par un courant i , est associé un moment dipolaire $M = i\pi a^2$.

On peut ici découper la répartition de courant surfacique sur la sphère, en petites bandes circulaires élémentaires de largeur $a d\theta$ et de rayon $a \sin \theta$, parcourues par le courant $di = j_S a d\theta$, de moment dipolaire :

$$d\vec{M} = di \pi a^2 \vec{e}_z = -\frac{3\pi a^3 B_0}{2\mu_0} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z.$$

Le moment dipolaire total de la sphère est donc :

$$\vec{M} = \int_{\theta=0}^{\pi} -\frac{3\pi a^3 B_0}{2\mu_0} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z = -\frac{3\pi a^3 B_0}{2\mu_0} \frac{4}{3} \vec{e}_z = -\frac{2\pi a^3 B_0}{\mu_0} \vec{e}_z.$$

Naturellement, on retrouve le moment dipolaire du dipôle qui remplaçait la sphère supraconductrice à la première question.

10

1) Le champ magnétique, engendré par un fil rectiligne coïncidant avec l'axe (Oz) et parcouru par le courant I , est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta, \text{ soit pour } \vec{A} : \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \vec{e}_z \quad (\text{cf. exercice 7}).$$

Pour les deux fils associés, on peut donc écrire :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\vec{e}_{\theta_1} - \vec{e}_{\theta_2} \right)$$

et $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \vec{e}_z$

où r_1 et r_2 , désignant les distances entre le point considéré et chacun des fils, s'exprime en fonction des coordonnées cylindriques r et θ du point :

$$r_{2 \text{ ou } 1} = \left(r^2 \pm a \cos \theta + \frac{a^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Dans l'approximation dipolaire $r \gg a$, on écrit :

$$\frac{r_{2 \text{ ou } 1}}{r} \approx 1 \pm \frac{a}{2r} \cos \theta, \text{ soit } \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{a \cos \theta}{r} \right) \vec{e}_z.$$

Le champ dipolaire de la ligne bifilaire s'en déduit :

$$\vec{B} = \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} = \vec{\operatorname{rot}} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{a \cos \theta}{r} \right) \vec{e}_z \right] = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \vec{\operatorname{grad}} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \wedge \vec{e}_z$$

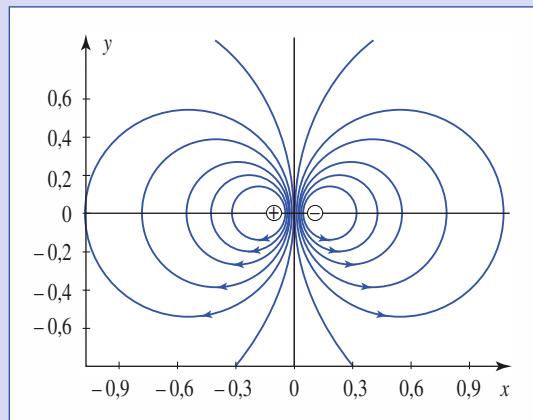
soit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \left(-\frac{\cos \theta}{r^2} \vec{e}_r - \frac{\sin \theta}{r^2} \vec{e}_\theta \right) \wedge \vec{e}_z = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \left(\frac{-\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta}{r^2} \right).$$

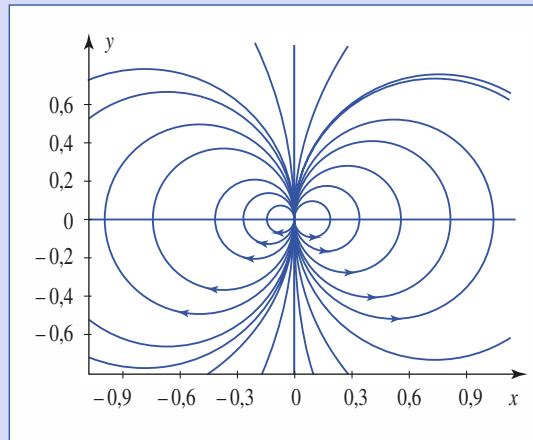
Les lignes de champ sont, dans des plans d'altitude $z = \text{cte}$, données par :

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta}, \text{ soit } \frac{dr}{r} = \frac{-\sin \theta d\theta}{\cos \theta}.$$

Après intégration, on trouve $r = D \cos \theta$ (D désignant la constante d'intégration). Les lignes de champ sont des cercles tangents en O à l'axe (Oy) comme le montrent les simulations ci-dessous.



Sur le schéma ci-dessus apparaissent les lignes de champ des deux fils : le champ tourbillonne autour des fils ; sur le schéma ci-dessous, sont tracées les lignes de champ des deux fils dans l'approximation dipolaire : cercles tangents en O à l'axe (Oy).



Compléments de magnétostatique

3

Introduction

Ce chapitre, bien que spécifique MP/MP, mérite d'être abordé par tous les étudiants, indépendamment des filières.*

Ce chapitre complète et prolonge les notions de magnétostatique abordées en Première année et dans les deux premiers chapitres.

Ainsi que nous l'avons vu, les distributions de courants peuvent être non filiformes : courants volumiques ou courants surfaciques sont alors utilisés pour les modéliser : comment calculer, pour des systèmes de haute symétrie, le champ que créent ces distributions ?

Un électron qui « gravite » autour de son noyau, ou une spire parcourue par un courant peut être modélisé par des dipôles magnétiques ; nous verrons, d'une part, l'expression du potentiel vecteur et du champ magnétique qu'il crée à grande distance et, d'autre part, les actions qu'il subit de la part d'un champ extérieur.

O B J E C T I F S

- Application du théorème d'Ampère à des distributions non filiformes de courant.
- Champ et potentiel vecteur créés par un dipôle magnétostatique.
- Actions subies par un dipôle magnétostatique.

P R É R E Q U I S

- Théorème d'Ampère.
- Densités surfacique et volumique de courant.
- Forces de Laplace.
- Dipôle électrostatique : champ et potentiel scalaire créés et actions subies.

Champs magnétiques créés par des distributions non filiformes

1.1. Circulation du champ magnétostatique

Le champ magnétostatique est caractérisé en un point par les équations locales :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j};$$

cette dernière équation permet par intégration :

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

de trouver le théorème d'Ampère avec le théorème de Stokes :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S};$$

le terme $\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ représente le courant enlacé par le contour Γ .

Cette formulation peut être utilisée quelle que soit la distribution de courant considérée, filiforme ou non.

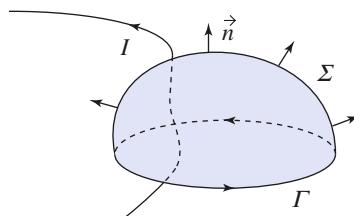
Rappelons que la surface Σ est orientée par le contour Γ et que les courants sont comptés positivement lorsqu'ils traversent la surface dans le sens positif (*doc 1*).

En magnétostatique, le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlacé par } \Gamma}.$$

Remarque

Le théorème d'Ampère n'est, sous cette forme, valable qu'en régime permanent ; nous verrons au chapitre 5 comment il se généralise aux régimes variables et à quelles conditions il peut s'appliquer sous cette forme aux régimes lentement variables.



Doc. 1. Le courant I traverse la surface S s'appuyant sur le contour Γ dans le sens de \vec{n} , il est compté positivement.

1.2. Calcul d'un champ magnétique à l'aide du théorème d'Ampère

1.2.1. Principe de calcul

Le principe de calcul correspondra à la démarche suivante dans le cas de distributions de courants à symétries élevées telles que celles développées ici.

1.2.1.1. Première étape : considérations de symétries

Il faut obtenir, à l'aide des symétries de la distribution, la forme du champ magnétique :

- utilisation de plan de symétrie ou d'antisymétrie pour déterminer sa direction ;
- utilisation d'invariance par rotation ou translation pour réduire la dépendance de ses composantes vis-à-vis des coordonnées... (il faut penser à utiliser un système de coordonnées adapté à la symétrie du problème).

1.2.1.2. Deuxième étape : choix du « contour d'Ampère »

La forme obtenue pour le champ détermine le choix de la courbe Γ de circulation du « contour d'Ampère » pour obtenir sans peine la circulation du champ magnétique.

1.2.1.3. Troisième étape : application du théorème d'Ampère

Elle achève la détermination du champ magnétique.

Le théorème d'Ampère permet une détermination rapide du champ magnétique pour des distributions de courants de symétries élevées.

Après détermination de la forme du champ à l'aide de considérations de symétrie, son application à un contour de géométrie adaptée aux symétries du problème permet de déterminer l'amplitude du champ.

Nous allons appliquer ce principe de calcul à la détermination de champs correspondant à des distributions surfaciques et volumiques.

1.2.2. Distribution à géométrie plane : nappe plane infinie

Nous nous intéressons à la détermination du champ créé par une nappe de courant infinie confondue avec le plan (xOy) , avec $\vec{j}_S = j_S \vec{e}_x$ (doc. 2).

1.2.2.1. Considérations de symétrie

La distribution est invariante par rapport à tout plan parallèle à (xOz) , donc $\vec{B}(x, y, z) = B(x, y, z) \vec{e}_y$. L'invariance du problème par translation parallèlement à (Ox) ou bien (Oy) nous permet la simplification supplémentaire :

$$\vec{B}(x, y, z) = B(z) \vec{e}_y.$$

Notons aussi que le plan (xOy) est un plan de symétrie de la distribution :

Au point M' symétrique du point M par rapport à ce plan, le champ \vec{B}' est l'opposé du symétrique du champ \vec{B} en M : la fonction $B(z)$ est impaire.

$$\vec{B}(z) = -\vec{B}(-z).$$

1.2.2.2. Choix du contour d'Ampère

Un contour permettant un calcul aisément de la circulation doit posséder des côtés parallèles au champ, à $z = \text{cte}$, le caractère impair de $\vec{B}(z)$ nous conduisant naturellement au choix du document 2 :

La circulation du champ sur Γ s'écrit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\ell = \int_A^B \vec{B} \cdot dz \vec{e}_z + \int_B^C \vec{B}(z) \vec{e}_y \cdot dy \vec{e}_y + \int_C^D \vec{B} \cdot dz \vec{e}_z + \int_D^A \vec{B}(-z) \vec{e}_y \cdot dy \vec{e}_y.$$

Or $\vec{B} \perp \vec{e}_z$ donc, les circulations de A à B et de C à D sont nulles ; comme $B(-z) = -B(z)$, en appelant L la longueur on obtient :

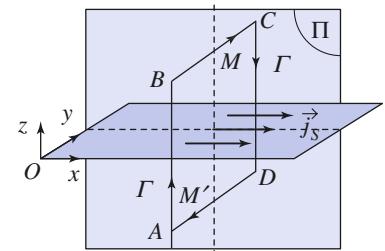
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\ell = B(z)L + (-B(z)(-L)) = 2B(z)L.$$

1.2.2.3. Application du théorème

$$I_{\text{enlacée par } \Gamma} = \int_0^L j_S \vec{e}_x \cdot dx \vec{N} = -j_S L.$$

Le signe $-$ provient du fait que la normale \vec{N} à la surface orientée par Γ est égale à $\vec{N} = -\vec{e}_x$. Il vient finalement $\vec{B}(z) = -\frac{\mu_0 j_S}{2} \vec{e}_y$ pour $z > 0$

et comme $\vec{B}(-z) = -\vec{B}(z)$, $\vec{B}(z) = +\frac{\mu_0 j_S}{2} \vec{e}_y$ pour $z < 0$.



Doc. 2. Nappe plane infinie.

Remarque

Le champ magnétique présente la discontinuité attendue $\mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_z$ à la traversée de la couche plane. Sachant cela et utilisant les opérations de symétrie, il est très simple de retrouver la valeur du champ magnétostatique créé par cette distribution.

► Pour s'entraîner : ex. I.

1.2.3. Distribution à géométrie cylindrique de courants parallèles : cylindre infini de densité de courants uniforme

Dans ce modèle d'extension infinie, un courant d'intensité résultante I circule parallèlement à (Oz) dans un cylindre d'axe (Oz), à la section circulaire de rayon R , avec une densité volumique uniforme $j = j \vec{e}_z$ (doc. 3).

1.2.3.1. Considération de symétrie

Tout plan contenant l'axe (Oz) étant un plan de symétrie, \vec{B} est orthoradial : $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$ (en coordonnées cylindriques d'axe (Oz)).

La distribution de courant présente les symétries de translation selon (Oz) et de rotation autour de (Oz) : la norme de \vec{B} ne dépend donc que de la coordonnée r . Il nous reste $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.

1.2.3.2. Choix du contour d'Ampère

Les lignes de champ sont donc des cercles centrés sur (Oz) et la norme de \vec{B} est la même en tout point d'une ligne de champ. Nous choisirons donc un contour d'Ampère Γ confondu avec une ligne de champ, cercle d'axe (Oz) et de rayon r .

La circulation de \vec{B} s'écrit donc :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\ell = \oint_0^{2\pi} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = B(r) 2\pi r.$$

1.2.3.3. Application du théorème d'Ampère

- $0 < r < R$. Le courant enlacé par Γ_1 vaut :

$$I_{\text{enlacé par } \Gamma_1} = \iint_{\Sigma_{\Gamma_1}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{\Gamma_2}} j \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z = j \pi r^2.$$

D'où $\vec{B} = \mu_0 j \frac{r}{2} \vec{e}_\theta$ pour un point intérieur au cylindre.

- $r > R$. Le courant enlacé par Γ_2 vaut :

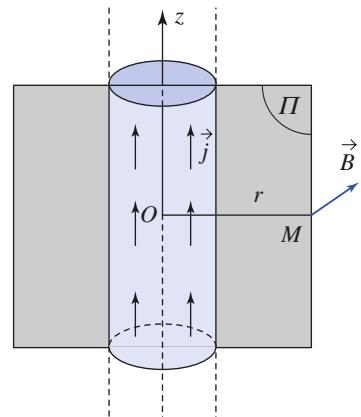
$$I_{\Gamma_2} = \iint_{\Sigma_{\Gamma_2}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} j \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z$$

où Σ est la section droite du cylindre, soit $I_{\Gamma_2} = j \pi R^2$;

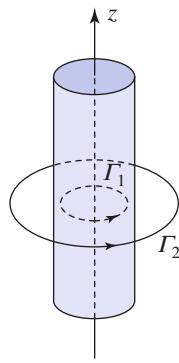
et $\vec{B} = \mu_0 j \frac{R^2}{2r} \vec{e}_\theta$ pour un point extérieur au cylindre.

Le champ est ici continu puisque la distribution est volumique (doc. 5).

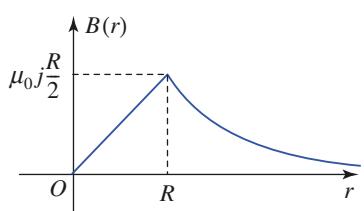
À l'extérieur du cylindre, le champ s'identifie à celui créé par un fil rectiligne, parcouru par un courant $I = j \pi R^2$ et confondu avec l'axe (Oz).



Doc. 3. Cylindre infini.



Doc. 4. Choix du contour d'Ampère.

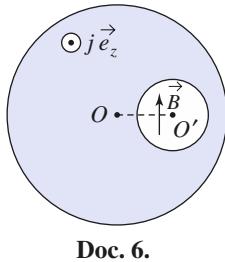


Doc. 5. Évolution de B(r).

Application 1

Cylindre avec cavité cylindrique

Une cavité cylindrique, d'axe ($O'z$) et de section circulaire de rayon R' , a été pratiquée dans un cylindre conducteur d'axe (Oz) et de rayon R (doc. 6). En dehors de la cavité, le conducteur est parcouru par un courant constant de densité uniforme $\vec{j} = j \vec{e}_z$.



Doc. 6.

Déterminer le champ magnétique en tout point de la cavité.

Procémons par superposition. \vec{B} est la résultante du champ \vec{B}_1 d'un cylindre plein d'axe (Oz) et de rayon

R , parcouru par un courant de densité uniforme \vec{j} , et du champ \vec{B}_2 d'un cylindre plein d'axe ($O'z$) et de rayon R' , parcouru par un courant de densité volumique uniforme $-\vec{j}$.

Pour le cylindre plein :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0}{2} j r \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{2} (\vec{j} \wedge \overrightarrow{OM}).$$

$$\text{De même } \vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0}{2} (-j \wedge \overrightarrow{O'M}).$$

Le champ résultant est alors :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} (\vec{j} \wedge \overrightarrow{OO'}).$$

Ce champ est uniforme en tout point de la cavité. Il est perpendiculaire à OO' (doc. 6).

1.2.4. Distribution de courant axisymétrique : le tore

Le contour C est dessiné dans un plan contenant l'axe (Oz). Sa rotation complète autour de l'axe (Oz) engendre un tore (doc. 7). Si C est un cercle, le tore obtenu est à section circulaire ; si C est un rectangle, le tore obtenu est à section rectangulaire.

Nous étudions le champ magnétique engendré par N spires généralement enroulées sur un tore et parcourues par un courant d'intensité I (cette situation s'apparente aux circuits primaire et secondaire de certains transformateurs).

1.2.4.1. Considération de symétrie

Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie des courants et l'amplitude du champ magnétique, orthoradial, ne dépend pas en coordonnées cylindriques r , θ , et z que des variables r et z (doc. 8) :

$$\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta.$$

1.2.4.2. Choix du contour d'Ampère

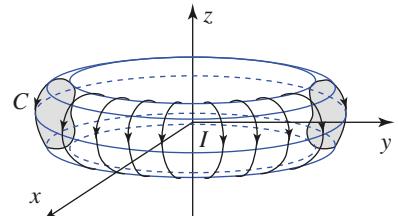
Sur les lignes de champ, cercles d'axe (Oz), la norme du champ reste constante. Sur un contour d'Ampère Γ coïncidant avec une ligne de champ, la circulation du champ vaut $2\pi r B(r, z)$.

1.2.4.3. Champ magnétique

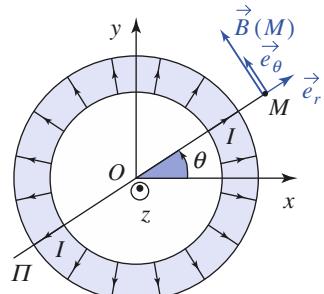
Appliquons maintenant le théorème d'Ampère.

Pour un contour Γ_1 à l'intérieur du tore (doc. 9), la somme des courants enlacés est NI . Le champ en un point à l'intérieur du tore est donc :

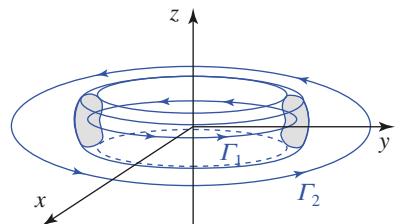
$$\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$



Doc. 7. Tore à section circulaire.



Doc. 8. Mise en évidence d'un plan de symétrie des courants.



Doc. 9. Choix du contour d'Ampère.

Pour un contour Γ_2 à l'extérieur du tore, la somme des courants enlacés est nulle (il est toujours possible de trouver une surface s'appuyant sur Γ_2 sans point commun avec le tore), et le champ extérieur l'est aussi :

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}.$$

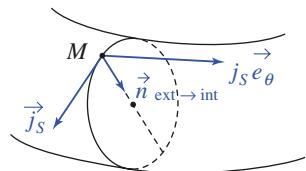
Ces résultats montrent que le tore canalise les lignes de champ magnétique.

Remarque

La dépendance de \vec{B} vis-à-vis de z est masquée mais effective : si z et r sont tels que le point M est intérieur au tore, \vec{B} est non nul ; il est nul si M est extérieur au tore.

Nous retrouvons encore la discontinuité du champ \vec{B} à la traversée d'une répartition surfacique de courants :

$$\vec{B}_{\text{int}} - \vec{B}_{\text{ext}} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{\text{ext} \rightarrow \text{int}} = \mu_0 j_S \vec{e}_\theta \text{ en posant } NI = j_S 2\pi r \text{ (doc. 10).}$$



Doc. 10. En M :

$$\vec{j}_S(M) \wedge \vec{n}_{\text{ext} \rightarrow \text{int}(M)} = j_S \vec{e}_\theta.$$

Application 2

Recherche de la distribution de courant connaissant \vec{B}

Une distribution de courant crée un champ magnétique $\vec{B} = \vec{0}$ pour $r < a$ et $\vec{B} = \frac{k}{r} \vec{e}_\theta$ pour $r > a$ (en coordonnées cylindriques r , θ et z d'axe (Oz), k étant une constante positive).

Caractériser la distribution de courants créant un tel champ.

Remarquons que les lignes de ce champ orthoradial sont des cercles d'axe (Oz) sur lesquels la norme du champ est constante. Le champ proposé est à flux conservatif, il s'agit bien d'un champ de nature magnétique.

Recherchons une distribution \mathcal{D}_j de densité volumique $\vec{j} = j_r \vec{e}_r + j_\theta \vec{e}_\theta + j_z \vec{e}_z$.

Le problème étudié semble adapté à une distribution invariante par rotation autour de (Oz) et par translation parallèlement à cet axe. Montrons donc que j_r et j_θ sont nuls.

• $j_r = 0$

Appliquons le théorème d'Ampère au contour $\Gamma = ABCD$ (doc. 11), comprenant les deux arcs de cercle AB et CD vus de l'axe (Oz) sous l'angle $rd\theta$ et les deux côtés BC et DA de longueur dz , parallèles à l'axe (Oz). La circulation du champ sur ce contour est nulle (les contributions des arcs de cercle sont opposées). Cette circulation $dC = 0$ est encore, d'après le théorème d'Ampère, $\mu_0 j_r r d\theta dz$; donc j_r est nul.

• $j_\theta = 0$

Procédons de même pour le contour rectangulaire $\Gamma = ABCD$, dont les côtés AB et CD de longueur dr sont radiaux, et les côtés BC et DA , de longueur dz , sont parallèles à l'axe (Oz) (doc. 12). Le théorème d'Ampère donne $C_T = 0 = \mu_0 j_\theta dr dz$, donc $j_\theta = 0$.

• *Détermination de j_z*

Pour le contour $\Gamma = ABCD$ (doc. 13) contenu dans un plan perpendiculaire à l'axe (Oz), AB et CD sont radiaux et de longueur dr , DA est un arc de cercle de longueur $rd\theta$ et BC un arc de cercle concentrique de longueur $(r + dr)d\theta$. Appliquons le théorème d'Ampère :

$$B(r + dr)(r + dr)d\theta - B(r)rd\theta = \mu_0 j_z dr . rd\theta,$$

$$\text{soit } \mu_0 j_z = \frac{1}{r dr} (rB(r)) = 0. \text{ Avec } B(r) = \frac{k}{r}$$

pour $r > a$ et $B(r) = 0$ pour $r < a$, j_z est partout nul.

Il n'existe pas de courant à densité volumique !

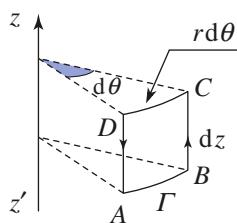
• *Conclusion*

Les courants sont donc nécessairement répartis sur la surface cylindrique de rayon $r = a$. La relation de passage :

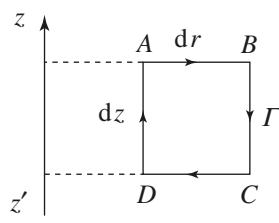
$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

$$\text{conduit à : } \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_S,$$

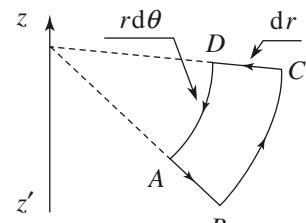
$$\text{soit : } \vec{j}_S = \left[\frac{k}{a \mu_0} \right] \vec{e}_z.$$



Doc. 11.



Doc. 12.



Doc. 13.

2 Moment dipolaire magnétique

2.1. Moment magnétique d'un circuit filiforme

Le moment magnétique d'une boucle de courant, parcourue par un courant I et définie par son contour Γ orienté de surface \vec{S} , est :

$$\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S} .$$

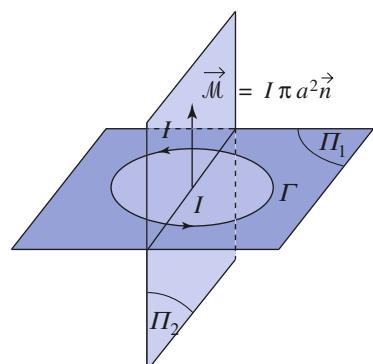
Sa norme s'exprime en $\text{A} \cdot \text{m}^2$.

Dans le cas d'une spire circulaire :

$$\vec{\mathcal{M}} = I \pi a^2 \vec{n} .$$

Sur le document 14, le plan de la spire Π_1 est un plan de symétrie de distribution de courants perpendiculaire au moment. Tout plan Π_2 contenant l'axe de spire est un plan d'antisymétrie qui contient le moment dipolaire magnétique. Nous remarquons donc que :

Le moment magnétique se comporte comme un vecteur axial.



Doc. 14. Moment magnétique et symétries de la distribution.

Application 3

Moment magnétique atomique

Un électron de charge $q = -e$ de masse m_e , décrit, dans une représentation classique, une trajectoire circulaire d'axe (Oz) et de rayon r autour du noyau ponctuel en O , on admet que le moment cinétique de l'électron par rapport à l'axe (Oz) est :

$$L_z = \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

(h est la constante de Planck : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$).

Calculer le moment magnétique associé à ce mouvement orbital de l'électron.

L'électron tournant à vitesse v constante dans le sens positif par rapport à (Oz) sur sa trajectoire circulaire, le moment cinétique par rapport à (Oz) est :

$$L_z = m_e v r, \text{ avec } L_z = \hbar \text{ par hypothèse.}$$

L'électron décrit $N = \frac{v}{2\pi r}$ tours par unité de temps et l'intensité associée à un tel mouvement est :

$$I = qN = -\frac{e v}{2\pi r} = -\frac{e \hbar}{2\pi m_e r^2}.$$

Le moment magnétique correspondant, mesuré algébriquement sur (Oz), est :

$$\vec{M} = \pi r^2 I = -\frac{e \hbar}{2m_e}.$$

Ce calcul élémentaire fait apparaître le magnéton de Bohr :

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m_e} = 9,26 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2,$$

qui sert d'unité de mesure des moments magnétiques en physique atomique. Les électrons des atomes présentent des moments magnétiques orbitaux (associés à leur mouvement autour du noyau) et des moments magnétiques intrinsèques associés à leur « spin ».

Le couplage de ces moments magnétiques, selon les lois quantiques, fournit un moment magnétique atomique éventuellement non nul. Les atomes se comportent alors comme des dipôles magnétiques interagissant avec un champ magnétique extérieur.

La notion de dipôle magnétique est invoquée avec profit à l'échelle atomique pour interpréter les propriétés magnétiques de la matière.

2.2. Moment dipolaire d'une distribution de courants

Dans le cas d'une distribution de courants limités dans l'espace, la définition est généralisée en considérant qu'il s'agit d'une superposition continue de boucles de courant filiformes (tubes de courant élémentaires) :

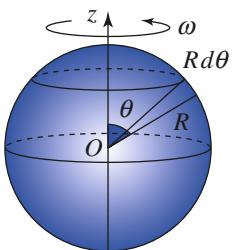
$$\vec{M} = \int d\vec{M}.$$

Application 4

Moment magnétique d'une sphère en rotation, chargée en surface

Une sphère chargée uniformément en surface, de charge totale q et de rayon R , tourne à la vitesse angulaire ω autour de (Oz).

Déterminer le moment magnétique de la distribution de courant associée.



Doc. 15.

Utilisons les coordonnées sphériques d'axe (Oz) et découpons la sphère en spires de largeur $Rd\theta$ (doc. 15).

L'intensité de cette spire, associée au mouvement de rotation, est en comptant la charge traversant une section droite $Rd\theta$ par unité de temps :

$$dI = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\sigma(2\pi R^2 \sin \theta d\theta),$$

$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$ désignant la densité surfacique uniforme de charges. Le moment élémentaire $d\vec{M}$ associé à cette spire est :

$$d\vec{M} = \pi R^2 \sin^2 \theta dI \vec{e}_z,$$

$$\text{soit : } d\vec{M} = \frac{\omega q}{4} R^2 \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z.$$

Comme $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$, le moment résultant est :

$$\vec{M} = \frac{\omega q R^2}{3} \vec{e}_z.$$

3 Champ et potentiel vecteur créés par un dipôle magnétique

3.1. Approximation dipolaire

Une boucle de courant crée, en tout point M de l'espace, un champ magnétostatique donné par la loi de Biot et Savart.

Nous avons calculé ce champ pour un point de l'axe d'une boucle circulaire :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \sin^3 \alpha \vec{e}_z \text{ (doc. 16).}$$

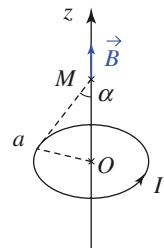
Si M est très éloigné sur l'axe $\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{a}{z}$, $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \vec{e}_z$.

En généralisant, nous admettrons qu'à grande distance de la boucle ($\frac{a}{r} \ll 1$ pour une spire circulaire de rayon a (doc. 17)), la norme du champ magnétique décroît comme $\frac{1}{r^3}$. La boucle se comporte alors comme un **dipôle magnétique**.

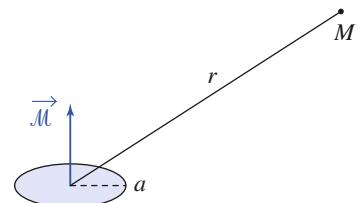
En des points très éloignés de la boucle de courant, son champ magnétique tend vers celui d'un dipôle magnétique de moment \vec{M} .

Le terme en $\frac{1}{r^3}$ du champ magnétique, créé à grande distance, dépend uniquement de $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et du moment magnétique \vec{M} . Il ne fait pas intervenir la géométrie précise de la boucle. Une spire circulaire de rayon a et de même moment magnétique créera le même champ à grande distance, à l'ordre $\left(\frac{a}{r}\right)^3$.

Nous l'utiliserons par la suite comme représentation simplifiée d'un dipôle magnétique.



Doc. 16. Champ sur l'axe d'une boucle circulaire.

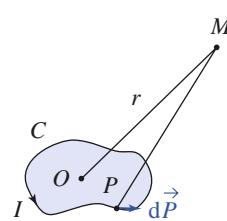


Doc. 17. Boucle de courant.

Application ↴

Absence de terme monopolaire dans le champ magnétique

En un point M très éloigné d'une boucle de courant C , circuit filiforme localisé dans un domaine D de taille caractéristique d ($r = OM \gg d$, O étant un point du domaine D), la norme du champ magnétique créé par cette boucle ne contient pas de terme en $\frac{1}{r^2}$. Pourquoi ?



Doc. 18.

D'après la loi de Biot et Savart, le champ magnétique en un point M est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \left(I \, d\vec{P} \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2} \right).$$

Dans l'hypothèse $r \gg d$, l'approximation la plus forte consiste à remplacer :

$$\frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2} \text{ par } \frac{\vec{e}_{O \rightarrow M}}{OM^2} = \frac{\vec{e}_r}{r^2}, \text{ avec } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Une telle approximation fournirait un champ :

$$\vec{B}_0(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\vec{P} \wedge \frac{\vec{e}_r}{r^2} = \left(\oint_C d\vec{P} \right) \wedge \left(\frac{\mu_0 I \vec{e}_r}{4\pi r^2} \right).$$

Or l'intégrale représente la somme de vecteurs élémentaires tangents au contour : elle est donc nulle.

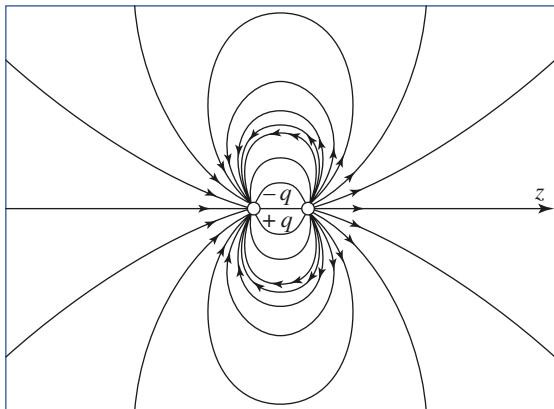
Ainsi $\vec{B}_0 = \vec{0}$ et le premier terme non nul de \vec{B} (terme dipolaire variant en $\frac{1}{r^3}$) est obtenu en faisant une approximation moins forte. Ce résultat traduit l'absence de terme monopolaire magnétique.

Remarque : Un calcul similaire fournit un champ \vec{E}_0 non nul pour le champ électrostatique créé par une distribution localisée de charges si la somme de ces charges est non nulle ; il peut exister un terme monopolaire électrique.

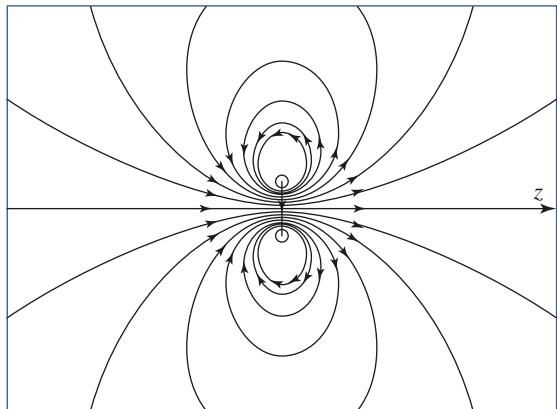
3.2. Analogie avec le dipôle électrostatique

Considérons un doublet de charges $-q$ et $+q$ (distantes de a) centré en O et de moment dipolaire $\vec{p} = qa\vec{e}_z = p\vec{e}_z$. Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie. Les lignes de champ du vecteur \vec{E} , de révolution autour de l'axe (Oz), sont contenues dans de tels plans. Quelques lignes de champ électrostatique sont représentées dans un plan contenant (Oz) sur le document 19a.

Considérons à présent une spire circulaire de rayon a , d'axe (Oz) et de moment dipolaire magnétique $\vec{M} = I\pi a^2\vec{e}_z = M\vec{e}_z$. Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie. Les lignes de champ du vecteur axial \vec{B} , de révolution autour de l'axe (Oz), sont contenues dans de tels plans. Le document 19b représente quelques lignes de champ magnétostatique dans un plan contenant (Oz).



Doc. 19a. Lignes de champ électrostatique d'un doublet $-q$ et $+q$.



Doc. 19b. Lignes de champ magnétostatique.

L'extension de la zone apparaissant sur ces documents est de l'ordre de $(10a)^2$.

Les deux cartes de champ obtenues sont clairement distinctes, car les comportements des champs au voisinage de leurs sources sont très différents : le champ électrostatique diverge à partir de ses sources, les charges, alors que le champ magnétostatique tourbillonne autour des siennes, les courants.

Si nous observons ces cartes de champ à une échelle beaucoup plus grande (zone de l'ordre de $(100a^2)$) nous obtenons dans les deux cas la même configuration des lignes de champ (doc. 20).

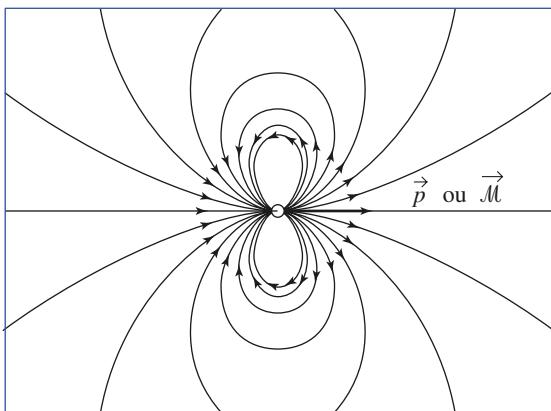
Le champ électrostatique d'un dipôle $\vec{p} = p\vec{e}_z$ et le champ magnétostatique d'un dipôle $\vec{M} = M\vec{e}_z$ ont le même comportement à grande distance $r \gg a$.

3.3. Application au calcul du champ magnétostatique

3.3.1. Champ dipolaire

Le champ électrostatique d'un doublet de charges a pour coordonnées sphériques d'axe (Oz) (doc. 21), dans l'approximation dipolaire :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}, E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \text{ et } E_\varphi = 0.$$



► Doc. 20. Ligne de champ d'un dipôle qu'il soit électrique ou non.

Du fait de l'analogie observée à grande distance des sources, nous supposons que le champ \vec{B} créé au point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) par un dipôle $\vec{M} = M\vec{e}_z$ placé en O est de la forme :

$$B_r = 2B_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = B_0 a^3 \frac{\sin \theta}{r^3} \quad B_\varphi = 0.$$

Le facteur B_0 est une constante homogène à un champ magnétique que nous allons déterminer.

Remarques

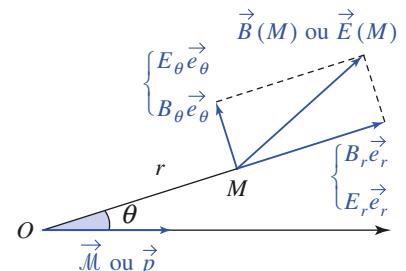
- Il est possible d'obtenir ce résultat par développement du champ \vec{B} créé par une spire en un point éloigné. Un tel calcul est assez fastidieux.
- Il est également envisageable d'exploiter l'identité des équations des lignes de champ des dipôles électrique et magnétique pour parvenir aux expressions proposées ci-dessus.

3.3.2. Détermination du champ par identification

Pour trouver la constante B_0 , nous pouvons comparer le champ dipolaire précédent avec le champ créé par une spire en un point très éloigné sur l'axe de celle-ci (doc. 16).

Sur son axe (Oz), le champ de la spire est (cf. § 3.1) :

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{|z|^3} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3}.$$



Doc. 21. Composantes des champs d'un dipôle.

Identifiant cette valeur à $B_r = 2B_0 \frac{a^3}{r^3}$, nous obtenons $B_0 a^3 = \frac{\mu_0 M}{4\pi}$.

Les composantes B_r , B_θ et B_φ , en coordonnées sphériques, du champ d'un dipôle magnétique placé en O et de moment $\vec{M} = M \vec{e}_z$ sont donc :

$$\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases} .$$

L'expression du champ magnétique du dipôle \vec{M} est en coordonnées sphériques d'axe (O, \vec{M}) :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta \vec{e}_r + M \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3}.$$

Le champ magnétique créé en M par un dipôle magnétique \vec{M} placé en P est donné par son expression intrinsèque :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{PM}) \vec{PM} - \vec{M} \vec{PM}^2}{PM^5}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 4 à 7.

3.3.3. Potentiel vecteur

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre 2, le potentiel vecteur \vec{A} est lié au champ \vec{B} par la relation $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$.

Nous nous bornerons simplement à admettre l'expression de ce potentiel vecteur :

L'expression du potentiel vecteur est, en coordonnées sphériques d'axe (O, \vec{M}) :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\varphi.$$

Le potentiel vecteur créé en M par un dipôle placé en P est donné par son expression intrinsèque :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{PM}}{PM^3}.$$

Nous pouvons vérifier que $\text{rot} \vec{A} = \vec{B}$ en utilisant les coordonnées sphériques du rotationnel (cf. Annexe).

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} & \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta}{r^3} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} & \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^3} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3.3.4. Analogies de formules

Expérimentalement les lignes de champ d'un dipôle électrostatique et d'un dipôle magnétique sont identiques : cela nous a permis de trouver l'expression de \vec{B} , puis celle de \vec{A} pour un dipôle magnétique.

Le tableau suivant permet de bien visualiser les analogies de formules.

dipôle électrostatique	dipôle magnétique
$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{PM}}{PM^3}$	$A(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$
$E(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\vec{p} \cdot \overrightarrow{PM})\overrightarrow{PM} - \vec{p} \cdot PM^2}{PM^5}$	$B(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(3\vec{M} \cdot \overrightarrow{PM})\overrightarrow{PM} - \vec{M} \cdot PM^2}{PM^5}$

Remarquons :

- la substitution de $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $\frac{\mu_0}{4\pi}$;
- le produit scalaire apparaissant dans l'expression de $V(M)$ et le produit vectoriel dans $\vec{A}(M)$;
- les expressions très similaires de $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$.

Application 6

Soit un dipôle magnétique de moment \vec{M} porté par (Oz).

Déterminer en coordonnées polaires (r, θ) les équations des lignes de champ magnétique d'un dipôle magnétique dans un plan contenant l'axe (Oz).

Une ligne de champ étant une courbe (plane ici) en tout point M de laquelle le champ \vec{B} est tangent, les vecteurs $d\vec{M}$ et \vec{B} sont colinéaires :

$$d\vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

En coordonnées sphériques (polaires dans un demi-plan méridien), nous obtenons :

$$\frac{dr}{B_r} = r \frac{d\theta}{B_\theta}, \text{ soit } \frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} d\theta.$$

Par intégration, il vient $r = A \sin^2\theta$, A étant une constante dépendant de la ligne considérée.

Il est évident que les équations des lignes de champ d'un dipôle électrostatique sont identiques.

3.3.5. Différence fondamentale entre doublet et spire

L'analogie entre les comportements des dipôles électrique et magnétique est si troublante qu'historiquement les physiciens ont d'abord cherché à mettre en évidence des causes similaires pour interpréter les champs créés.

Une distribution de charges se comportant comme un dipôle électrique peut être représentée par un doublet de charges $(-q, +q)$ distantes de d tel que le moment soit $\vec{p} = q\vec{d}$.

Une distribution de courants se comportant comme un dipôle magnétique doit-elle son existence, par analogie, à un doublet de « charges magnétiques » ?

L'expérience a tranché et la réponse à cette question est **négative** : c'est le modèle de la boucle de courant qu'il convient d'utiliser pour retrouver les propriétés de telles distributions de courants.

Si les lignes de champ sont semblables en des points éloignés, elles se diffèrent au voisinage du doublet ou de la spire (doc. 19) représentant de tels dipôles.

On retrouve là les différences profondes entre un champ électrostatique dont les lignes de champ partent de la charge positive pour aller vers la charge négative, et un champ magnétostatique pour lequel les lignes de champ se referment sur elles-mêmes.

Cette distinction de comportement apparaît nettement dans l'étude des propriétés diélectriques et magnétiques des milieux.

La polarisation des milieux matériels se traduit par l'existence d'un moment dipolaire électrique volumique à l'échelle macroscopique. Elle est correctement interprétée par le modèle de doublets de charges à l'échelle microscopique.

Leur aimantation se traduit par l'existence d'un moment dipolaire magnétique volumique à l'échelle macroscopique. Elle est correctement interprétée par le modèle de boucles de courant à l'échelle microscopique.

4 Action d'un champ extérieur sur un dipôle

Nous nous intéressons dans cette partie à l'action d'un champ extérieur permanent (donc indépendant du temps), \vec{B} , sur une boucle filiforme caractérisée par sa surface plane orientée, de vecteur \vec{S} , parcourue par un courant I , de moment magnétique $\vec{M} = I\vec{S}$ (doc. 22).

Tout tronçon élémentaire $d\vec{\ell}$ de ce contour, situé en un point M subit des actions de Laplace :

- une force élémentaire, $d\vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$;
- un moment par rapport au point O , $d\vec{\Gamma}_L = \overrightarrow{OM} \wedge (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$.

Nous cherchons à déterminer l'action de ce champ sur l'ensemble de la boucle.

4.1. Action d'un champ uniforme

Supposons que \vec{B} soit uniforme :

$$\vec{F}_L = \oint_{\text{circuit}} (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) = I \left(\oint_{\text{circuit}} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0},$$

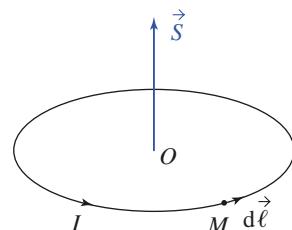
car \vec{B} peut être sorti de l'intégrale et $\oint_{\text{circuit}} d\vec{\ell} = \vec{0}$, le circuit étant fermé.

La résultante est nulle et le torseur des efforts de Laplace est un couple, dont le moment peut être calculé par rapport à n'importe quel point O :

$$\vec{\Gamma}_L = \oint_{\text{circuit}} \overrightarrow{OM} \wedge (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B});$$

soit en développant :

$$\vec{\Gamma}_L = I \left[\left(- \oint_{\text{circuit}} (\overrightarrow{OM} \cdot d\vec{\ell}) \right) \vec{B} + \left(\oint_{\text{circuit}} (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{\ell} \right) \right].$$



Doc. 22. Boucle de courant.

Le premier terme est nul, car :

$$\oint_{\text{circuit}} (\overrightarrow{OM} \cdot d\vec{\ell}) = \oint_{\text{circuit}} d\left(\frac{\overrightarrow{OM}^2}{2}\right) = 0, \text{ puisque } d\vec{\ell} = d(\overrightarrow{OM}).$$

Le deuxième terme peut être exprimé à l'aide d'une intégration par parties, dont le premier terme est nul puisque le circuit est fermé :

$$\vec{\Gamma}_L = I \left(\oint_{\text{circuit}} (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{\ell} \right) = I \left(0 - \oint_{\text{circuit}} (d\vec{\ell} \cdot \vec{B}) \overrightarrow{OM} \right), \text{ car } d(\overrightarrow{OM}) = d\vec{\ell}.$$

Des deux expressions précédentes, nous déduisons :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_L &= \frac{1}{2} I \left(\oint_{\text{circuit}} (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{\ell} - \oint_{\text{circuit}} (d\vec{\ell} \cdot \vec{B}) \overrightarrow{OM} \right) \\ &= \frac{1}{2} I \left(\oint_{\text{circuit}} (\overrightarrow{OM} \wedge d\vec{\ell}) \right) \wedge \vec{B}, \end{aligned}$$

en utilisant la formule du **double produit vectoriel** et en « sortant » \vec{B} de l'intégrale puisqu'il est uniforme.

Remarquons enfin que $\frac{1}{2} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{\ell} = d\vec{S}$ (doc. 23) de sorte que le couple s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_L = I \vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{M} \wedge \vec{B}.$$

Comment agit ce couple ? Pour \vec{M} non colinéaire à \vec{B} , $\vec{\Gamma}_L \neq \vec{0}$ et tend à aligner \vec{M} sur \vec{B} de sorte que $\vec{\Gamma}_L$ soit nul (doc 24 a et b). Le système est à l'équilibre stable.

Remarquons que $\vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ si \vec{M} et \vec{B} sont de même sens ou de sens opposés ; dans ce dernier cas, on a aussi un équilibre mais instable (doc. 25) : une petite perturbation induit un couple qui écarte \vec{M} de sa position d'équilibre.

Lorsqu'un circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme, le torseur des efforts de Laplace se réduit à un couple de moment :

$$\vec{\Gamma}_L = I \vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{M} \wedge \vec{B},$$

où \vec{S} est le vecteur surface associé au contour décrivant le circuit et $\vec{M} = I \vec{S}$ son moment magnétique.

Ce couple tend à aligner le dipôle \vec{M} dans le sens du champ \vec{B} .

► Pour s'entraîner : ex. 8.

4.2. Champ extérieur non uniforme

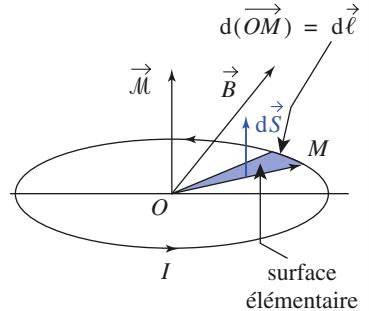
Nous allons montrer sur un exemple que dans ce cas la résultante n'est pas nulle.

Soit un cadre rectangulaire de surface $\vec{S} = a\vec{e}_x \wedge b\vec{e}_y$ soumis aux effets d'un champ $\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z$.

Nous supposerons que ce champ, bien que non uniforme, varie peu à l'échelle du cadre. Ce cadre est parcouru par un courant I (doc. 26).

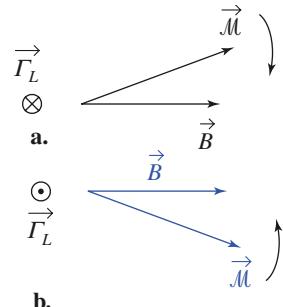
Double produit vectoriel :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}.$$

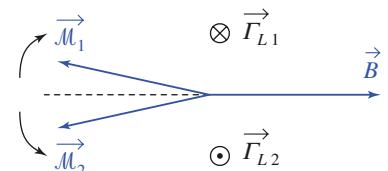


Doc. 23. L'aire du triangle :

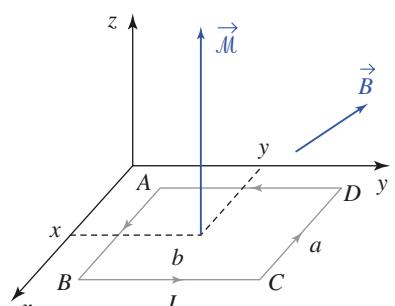
$$d\vec{S} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{\ell}$$



Doc. 24. Le couple « rappelle » \vec{M} vers \vec{B}



Doc. 25.



Doc. 26. Cadre rectangulaire soumis à \vec{B} non uniforme.

4.2.1. Couple

Remarquons tout d'abord qu'à l'ordre le plus bas, puisque \vec{B} varie peu, le terme prépondérant est toujours :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} ;$$

le premier effet du champ extérieur sera donc toujours un effet d'alignement du dipôle sur le champ.

4.2.2. Force résultante

Le cadre rectangulaire de surface $\vec{S} = a\vec{e}_x \wedge b\vec{e}_y = ab\vec{e}_z$, parcouru par un courant I , placé dans un champ $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$ non uniforme est soumis aux forces de Laplace \vec{F}_L suivantes :

$$\vec{F}_L = \oint_{\text{circuit}} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} .$$

La contribution de A à B donne :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{L_{AB}} &= I a \vec{e}_x \wedge \left[B_y \left(x, y - \frac{b}{2}, z \right) \vec{e}_y + B_z \left(x, y - \frac{b}{2}, z \right) \vec{e}_z \right] \\ &= I a B_y \left(x, y - \frac{b}{2}, z \right) \vec{e}_z - I a B_z \left(x, y - \frac{b}{2}, z \right) \vec{e}_y . \end{aligned}$$

On obtient de même :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{L_{BC}} &= -I b B_x \left(x + \frac{a}{2}, y, z \right) \vec{e}_z + I b B_z \left(x + \frac{a}{2}, y, z \right) \vec{e}_x \\ \vec{F}_{L_{CD}} &= -I a B_y \left(x, y + \frac{b}{2}, z \right) \vec{e}_z + I a B_z \left(x, y + \frac{b}{2}, z \right) \vec{e}_y \\ \vec{F}_{L_{DA}} &= I b B_x \left(x - \frac{a}{2}, y, z \right) \vec{e}_z - I b B_z \left(x - \frac{a}{2}, y, z \right) \vec{e}_x . \end{aligned}$$

Ce qui donne (en supposant les variations de \vec{B} lentes à l'échelle du cadre) :

$$\begin{aligned} F_{L_x} &= I b B_z \left(x + \frac{a}{2}, y, z \right) - I b B_z \left(x - \frac{a}{2}, y, z \right) \\ &= I ab \frac{\partial B_z}{\partial x} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{L_y} &= I a B_z \left(x, y + \frac{b}{2}, z \right) - I a B_z \left(x, y - \frac{b}{2}, z \right) \\ &= I ab \frac{\partial B_z}{\partial y} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{L_z} &= -I b B_x \left(x + \frac{a}{2}, y, z \right) + I b B_x \left(x - \frac{a}{2}, y, z \right) \\ &\quad - I a B_y \left(x, y + \frac{b}{2}, z \right) + I a B_y \left(x, y - \frac{b}{2}, z \right) \\ &= -I ab \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) = I ab \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

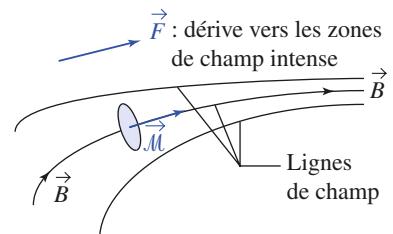
$$\text{car } \operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 .$$

On obtient ainsi :

Un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{M} = M_z \vec{e}_z = I a \vec{e}_z$ placé dans un champ magnétique \vec{B} non uniforme est soumis à une force :

$$\vec{F}_L = \begin{vmatrix} M_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ M_z \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Le dipôle (aligné sur \vec{B}) est attiré par les champs intenses (doc. 27). Ces résultats sont analogues à ceux que nous avons obtenus, en Première année, dans le cas d'un dipôle électrique \vec{p} soumis à l'action d'un champ électrique \vec{E} (cf. H-Prépa, Électromagnétisme, 1^{re} année).



Doc. 27. Lorsque \vec{M} est parallèle à \vec{B} et de même sens, il existe un effet de dérive vers les champs intenses.

4.3. Énergie potentielle d'interaction

Les actions de Laplace évoquées ci-dessus peuvent être étudiées d'un point de vue énergétique. Cette étude sort du cadre de cet ouvrage. Nous admettrons que :

L'équation :

$$\mathcal{E}_P = -\vec{M} \cdot \vec{B},$$

exprime l'énergie potentielle d'interaction entre un dipôle magnétique rigide (ou permanent) de moment \vec{M} ($\|\vec{M}\| = \text{cte}$) et le champ magnétique \vec{B} (permanent) qui lui est appliqué.

Nous retrouvons l'effet d'alignement :

- Si \vec{M} et \vec{B} sont de même sens, $\mathcal{E}_P = -\|\vec{M}\| \cdot \|\vec{B}\|$ est minimale et correspond à une position d'équilibre stable ;
- Si \vec{M} et \vec{B} sont de sens opposés, $\mathcal{E}_P = \|\vec{M}\| \cdot \|\vec{B}\|$ est maximale, la position d'équilibre est instable.

► Pour s'entraîner : ex. 9 et 10.



● THÉORÈME D'AMPÈRE

- En magnétostatique, le théorème d'Ampère s'écrit $\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlacé par } \Gamma}$.
- Le théorème d'Ampère permet une détermination rapide du champ magnétique pour des distributions de courants de symétries élevées.

Après détermination de la forme du champ à l'aide de considérations de symétries, son application à un contour de géométrie adaptée aux symétries du problème permet de déterminer l'amplitude du champ.

● DIPÔLE MAGNÉTIQUE

- Le moment magnétique d'une boule de courant, parcourue par un courant I et définie par son contour Γ de surface \vec{S} , est $\vec{M} = I \vec{S}$.
- Dans le cas d'une spire circulaire, $\vec{M} = I \pi a^2 \vec{n}$.

Le moment magnétique se comporte comme un *vecteur axial*.

● CHAMP ET POTENTIEL

- En des points très éloignés d'une boucle de courant, son champ magnétique tend vers celui d'un dipôle magnétique de moment \vec{M} .
- Le champ électrostatique d'un dipôle $\vec{p} = p \vec{e}_z$ et le champ magnétostatique d'un dipôle $\vec{M} = M \vec{e}_z$ ont le même comportement à grande distance.
- L'expression du champ magnétique du dipôle \vec{M} est en coordonnées sphériques d'axe (O, \vec{M}) :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta \vec{e}_r + M \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3}.$$

- Le champ magnétique créé en M par un dipôle magnétique \vec{M} placé en P est donné par son expression intrinsèque :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{PM}) \vec{PM} - \vec{M} \vec{PM}^2}{PM^5}.$$

- L'expression du potentiel vecteur est, en coordonnées sphériques d'axe (O, \vec{M}) :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\varphi.$$

- Le potentiel vecteur créé en M par un dipôle placé en P est donné par son expression intrinsèque :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{PM}}{PM^3}.$$

● ACTION D'UN CHAMP EXTÉRIEUR PERMANENT

- Lorsqu'un circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme, le torseur des efforts de Laplace se réduit à un couple de moment $\vec{F}_L = I \vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{M} \wedge \vec{B}$, où \vec{S} est le vecteur surface associé au contour décrivant le circuit et $\vec{M} = I \vec{S}$ son moment magnétique.
Ce couple tend à aligner le dipôle \vec{M} dans le sens du champ \vec{B} .

- L'équation $\mathcal{E}_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$, exprime l'énergie potentielle d'interaction entre un dipôle magnétique rigide (ou permanent) de moment \vec{M} ($\|\vec{M}\| = \text{cte}$) et le champ magnétique \vec{B} (permanent) qui lui est appliqué.

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Rappeler l'expression du théorème d'Ampère.
- ✓ À quels types de distributions de courant peut-on appliquer le théorème d'Ampère ? Indiquer les étapes de la méthode de calcul d'un champ magnétique grâce à ce théorème.
- ✓ Comment définit-on un moment magnétique ?
- ✓ Indiquer les analogies et les différences fondamentales existant entre une distribution dipolaire électrique et une distribution dipolaire magnétique.
- ✓ Comment s'expriment les actions de Laplace subies par un dipôle magnétique de la part d'un champ extérieur uniforme ?
- ✓ Comment s'expriment les actions de Laplace subies par un dipôle magnétique de la part d'un champ extérieur non uniforme ?
- ✓ Quels sont, qualitativement, les effets correspondant à l'action d'un champ extérieur sur un dipôle magnétique ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Lors de l'application du théorème d'Ampère :

- a. le contour d'Ampère est déterminé par les lignes de champ du champ magnétique
- b. la surface à travers laquelle on détermine le courant enlacé a une orientation quelconque
- c. la surface à travers laquelle on calcule le courant enlacé est orientée par le contour d'Ampère.

2. Le potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique s'exprime par :

- a. $\frac{\mu_0 \vec{M}}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r$
- b. $\frac{\mu_0 \vec{M}}{4\pi r^3} \wedge \vec{e}_r$
- c. $\frac{\mu_0 \vec{M}}{4\pi r^2} \wedge \vec{e}_r$
- d. $4\pi\mu_0 \frac{\vec{M}}{r^2} \wedge \vec{e}_r$.

3. La résultante des actions de Laplace sur un circuit filiforme fermé :

- a. est nulle
- b. est nulle pour un champ uniforme
- c. est nulle pour un champ non uniforme
- d. tend à rapprocher le dipôle des champs intenses
- e. tend à éloigner le dipôle des champs intenses.

4. L'énergie potentielle d'interaction dipôle-champ extérieur est :

- a. $\vec{M} \wedge \vec{B}$
- b. $\vec{M} \cdot \vec{B}$
- c. $-\vec{M} \cdot \vec{B}$
- d. minimale lorsque le dipôle est aligné sur le champ
- e. maximale lorsque le dipôle est aligné sur le champ.

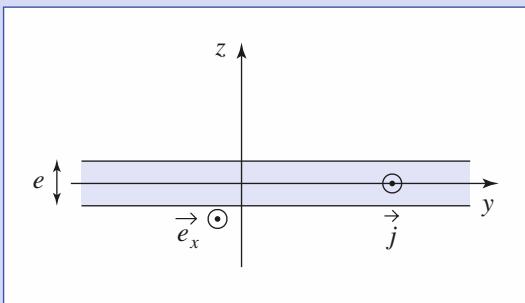
► Solution, page 85.

Exercices

1 Courant uniformément réparti entre deux plans parallèles

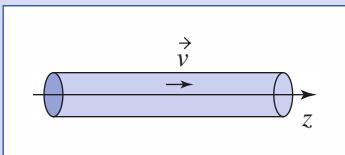
Entre les deux plans $z = -\frac{e}{2}$ et $z = +\frac{e}{2}$, existe un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j \vec{e}_x$.

- 1) Quelles sont les symétries du champ magnétique \vec{B} créé par ces courants ?
- 2) Calculer le champ \vec{B} en tout point de l'espace.
- 3) Étudier le cas limite $e \rightarrow 0$, le produit $j e$ restant constant. Conclure.



2 Champ créé par un faisceau cylindrique d'électrons

Un faisceau électronique a la forme d'un cylindre très long de rayon R et d'axe (Oz). Les électrons ont tous la même vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_z$ et ils sont uniformément répartis avec une densité de n électrons par unité de volume.



- 1) En adoptant un modèle volumique, calculer la densité volumique de charge et le vecteur densité volumique de courant \vec{j} .
- 2) Calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) .
- 3) Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$. Quelle relation relie \vec{E} et \vec{B} ?
- 4) Le faisceau peut-il rester cylindrique ?
On indique que $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

3 Tube cylindrique infini

Un tube cylindrique conducteur creux d'axe (Oz), infiniment long a pour rayon intérieur R et pour rayon extérieur $R + e$. Il est parcouru par un courant permanent I , de densité \vec{j} uniforme (parallèle à (Oz)) dans le conducteur.

- 1) Exprimer le vecteur densité volumique de courant \vec{j} . Si $e \ll R$, on assimile le courant à une nappe cylindrique ; calculer le vecteur densité surfacique de courant \vec{j}_S associé.
- 2) Calculer le champ \vec{B} en tout point. On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) .
- 3) On se place dans l'hypothèse $e \ll R$.
 - a) Exprimer \vec{B} en tout point intérieur du conducteur ; on posera $r = R + u$, et on linéarisera l'expression de $B(u)$.
 - b) Lorsque $e \rightarrow 0$, quelle est la discontinuité du champ magnétique ?
 - c) On cherche à déterminer l'action mécanique de \vec{B} sur le conducteur lui-même.
 - a) Calculer la force de Laplace subie par un élément de volume en la mettant sous la forme :
$$\vec{dF} = f(u)Rd\theta dz du \vec{e}_r$$
; exprimer $f(u)$.
 - b) En déduire l'expression de la force magnétique appliquée à un élément de tube d'aire δS . Préciser son orientation.
 - c) Définir et calculer la pression magnétique P_m en fonction de I et R , puis en fonction de j_S .

4 Validité de l'approximation dipolaire magnétique

Une spire circulaire de centre O et de rayon R , contenue dans le plan (Oxy) est parcourue par un courant permanent I .

- 1) En un point de l'axe (Ox) d'abscisse x , rappeler la valeur $\vec{B}_0(x)$ du champ magnétique dans l'approximation dipolaire.
- 2) Exprimer la valeur exacte du champ électrique sous la forme $\vec{E}(x) = \vec{B}_0(x) f(x)$.

La fonction $f(x)$ a la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer :

$$f(x) = \int_{x=0}^{2\pi} u(x, \alpha) d\alpha.$$

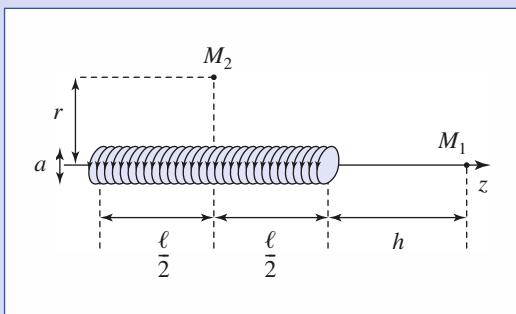
- 3) Calculer numériquement $f(x)$ pour certaines valeurs du rapport $\frac{x}{R}$, et en déduire les valeurs de x pour

lesquelles ces deux expressions du champ sont égales à 1 % près.

4) Reprendre ce calcul pour un point de l'axe (Oz). Conclure.

5 Champ magnétique créé par un solénoïde

5) Un solénoïde est constitué de N spires régulièrement bobinées sur un cylindre de section S (non nécessairement circulaire), de longueur ℓ et dont les génératrices sont parallèles à l'axe (Oz). Il est parcouru par un courant I .



1) Déterminer le moment magnétique \vec{M} associé à une tranche de solénoïde de longueur élémentaire dz .

2) Calculer le champ \vec{B} en un point M_1 situé sur l'axe (Oz), à une distance h de l'extrémité du solénoïde, avec l'approximation $h \gg a$. Dans le cas d'un solénoïde à section circulaire, comparer avec l'expression obtenue sans cette approximation.

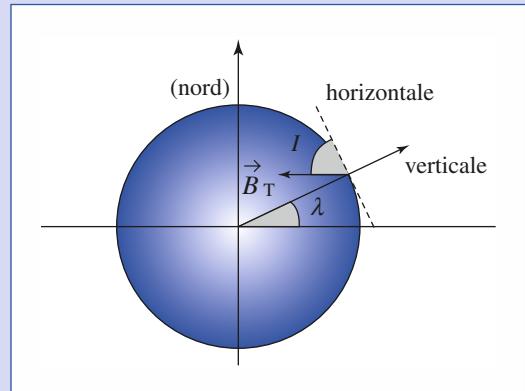
3) Calculer le champ \vec{B} en un point M_2 situé sur le plan de symétrie, à une distance r de l'axe, avec l'approximation $r \gg a$. Étudier le cas limite du solénoïde infiniment long.

6 Modèle simplifié du champ magnétique terrestre

Le champ géomagnétique \vec{B}_T est caractérisé en tout point de la surface terrestre par sa norme, sa déclinaison D (angle entre la composante horizontale de \vec{B}_T et le nord géographique) et son inclinaison I (angle entre \vec{B}_T et le plan horizontal). On suppose que la déclinaison est nulle

en tout point, ce qui revient à confondre le nord magnétique avec le nord géographique.

On admet que ce champ est identique à celui d'un dipôle magnétique de moment \vec{M} placé au centre de la terre.



- 1) D'après le schéma déterminer l'orientation de \vec{M} .
- 2) Calculer avec ce modèle, l'inclinaison en fonction de la latitude λ .
- 3) En France, $\lambda = 45^\circ$ et la composante horizontale du champ géomagnétique est $B_H \approx 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Comparer la valeur mesurée de I (64°) avec celle déduite du modèle.
- 4) Déterminer la norme de \vec{M} . (Le rayon terrestre est $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m.}$)
- 4) Pour expliquer ce moment magnétique, on suppose que des courants volumiques parcourent le noyau terrestre, assimilé à une sphère de rayon $R = 3\,000 \text{ km}$. On suppose également que leur densité volumique s'exprime en coordonnées cylindriques par $\vec{j} = J \vec{e}_\theta$ avec J uniforme et constant. Calculer la valeur de J .

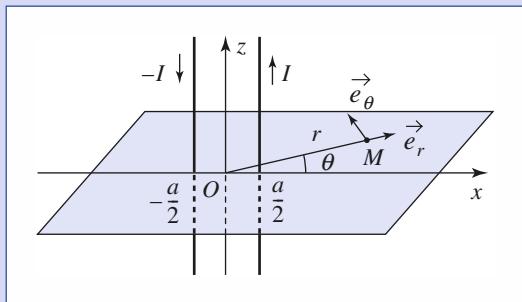
7 Champ magnétique créé par une ligne bifilaire infinie

1) Montrer que le champ magnétique créé par un fil infiniment long, parcouru par un courant permanent I , peut se mettre sous la forme :

$$\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \vec{\text{grad}} f(r)$$

(l'axe (Oz) des coordonnées cylindriques est confondu avec le fil).

Exercices



- 2) Une ligne bifilaire est composée de deux fils parallèles à l'axe (Oz), distants de a , et parcourus par des courants opposés $-I$ et I ; l'axe (Ox) coupe les deux fils aux points d'abscisses $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$.

Déterminer le champ magnétique en tout point suffisamment éloigné des fils ($r \gg a$).

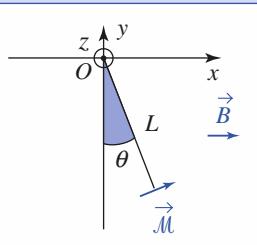
- 3) Quelle est la forme des lignes de champ ?
4) Les deux fils, distants de 5 mm, sont parcourus par un courant de 10 ampères.

Calculer le champ \vec{B} créé à 10 cm.

8 Oscillations d'un petit aimant

Un petit aimant, de masse m et de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$, est suspendu au bout d'une tige rigide de masse négligeable et de longueur L , pouvant effectuer des mouvements de rotation autour de l'axe (Oz).

Discuter l'évolution de la période des oscillations du système en fonction de la valeur du champ magnétique $\vec{B} = Be_x$, uniforme, dans lequel est plongé ce système (attention, B peut être positif ou négatif).

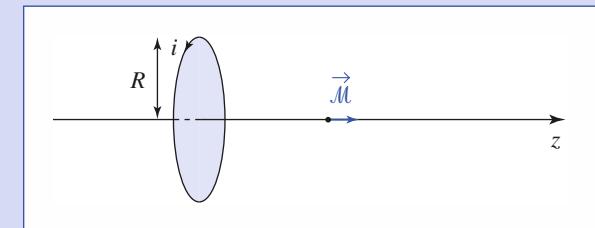


9 Dipôle magnétique glissant sur l'axe d'une spire

Un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}} = M\vec{e}_z$ (constant) est mobile le long de l'axe (Oz) d'une spire de rayon R

parcourue par le courant i constant (on suppose qu'un générateur de courant idéal alimente cette spire).

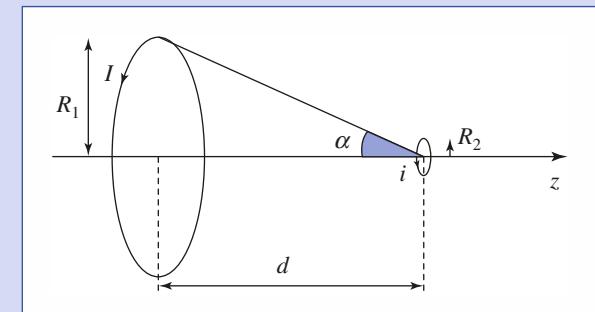
- 1) Étudier les actions mécaniques subies par le dipôle, puis discuter l'existence et la stabilité de positions d'équilibre.
2) S'il existe un équilibre stable, déterminer la période des petites oscillations du dipôle de masse m .



10 Interaction entre deux spires

Deux spires circulaires (de rayons R_1 et R_2), parcourues par les courants I et i , ont même axe (Oz). La seconde spire a un rayon R_2 petit devant R_1 et la distance d séparant ces deux circuits. Évaluer la force d'interaction exercée par une spire sur l'autre en :

- a) évaluant le champ magnétique, puis la force de Laplace, créée par la grande spire sur la petite (un point de la petite spire est au voisinage de l'axe (Oz)) ;
b) considérant la petite spire comme un dipôle magnétique subissant l'action du champ magnétique créé par la grande ;
c) utilisant le champ magnétique créé par la petite spire en un point de la grande.



Corrigés

Solution du tac au tac, page 81.

- | | |
|------------------|----------------|
| 1. Vrai : a, c ; | Faux : b |
| 2. Vrai : c ; | Faux : a, b, d |
| 3. Vrai : b, d ; | Faux : a, c, e |
| 4. Vrai : c, d ; | Faux : a, b, e |

1)

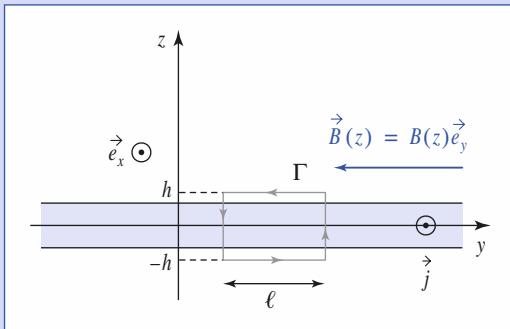
• Tout plan $y = \text{cte}$ est plan de symétrie pour les courants ; on en déduit que $\vec{B} = B(x, y, z)\vec{e}_y$.

• Le système est invariant par toute translation parallèle à (Ox) ou (Oy) . B est donc indépendant de x et y et $\vec{B} = B(z)\vec{e}_y$.

• Le plan $z=0$ est plan de symétrie pour les courants, donc plan d'antisymétrie pour \vec{B} .

Donc $B(z) = -B(-z)$.

2)



Soit le contour rectangulaire Γ représenté sur le schéma. La circulation C de \vec{B} sur les côtés parallèles à (Oz) est nulle, et la circulation sur les côtés parallèles à (Oy) ne fait intervenir qu'une seule valeur de B : $B(h) = -B(-h)$. Il est donc possible de déterminer $B(h)$ au moyen du théorème d'Ampère.

- $C = -\ell B(h) + 0 + \ell B(-h) + 0 = -2\ell B(h)$ (avec $h > 0$).
- Soit I_Γ le courant traversant la surface délimitée par Γ . D'après le théorème d'Ampère : $C = \mu_0 I_\Gamma$. En identifiant les deux expressions de C on obtient :

$$B(h) = -\frac{\mu_0 I_\Gamma}{2\ell}.$$

La valeur de I_Γ dépend de z :

- si $h > \frac{e}{2}$ (cas du schéma), le courant traverse une surface égale à $e\ell$ et

$I_\Gamma = j e \ell$; alors :

$$B(h) = -\frac{\mu_0 j e}{2} ;$$

- si $h < \frac{e}{2}$, le courant traverse une surface égale à $2h\ell$ et $I_\Gamma = 2jh\ell$;

alors $B(h) = -\mu_0 j h$.

Pour conclure :

$$\vec{B}(z) = -\frac{\mu_0 j e}{2}\vec{e}_y \text{ si } z > \frac{e}{2}$$

$$\vec{B}(z) = -\mu_0 j z \vec{e}_y \text{ si } -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$$

et : $\vec{B}(z) = +\frac{\mu_0 j e}{2}\vec{e}_y \text{ si } z < -\frac{e}{2}$.

3) Si $e \rightarrow 0$, le système de courants tend vers une nappe surfacique.

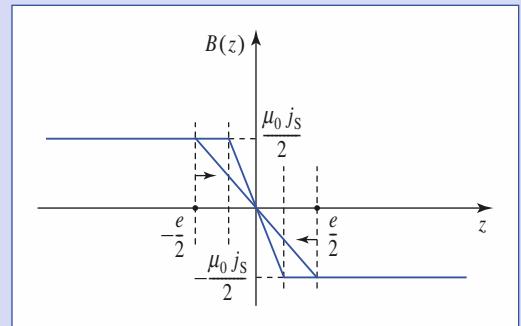
Le courant traversant une longueur ℓ mesurée selon (Oy) est $I(\ell) = j e \ell$.

La densité surfacique de courant est donc $j_S = j e$.

On retrouve, à l'extérieur, les valeurs de \vec{B} créé par une nappe surfacique :

$$\vec{B} \approx \pm \frac{1}{2} \mu_0 j_S \vec{e}_y .$$

À l'intérieur, la variation est de plus en plus brusque au fur et à mesure que $e \rightarrow 0$; à la limite, le champ \vec{B} est discontinu.



Remarquons une fois encore que c'est la modélisation surfacique qui introduit la discontinuité. Pour la distribution volumique, les expressions du 2) montrent que \vec{B} est continu en $\pm \frac{e}{2}$.

2)

• Il y a n électrons de charge $-e$, soit une charge totale $(-n e)$ par unité de volume.

La densité volumique de charge est $\rho = -n e$.

• Le vecteur densité volumique de courant est tel que $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$, $\rho_m = \rho = -n e$ et $\vec{j} = -n e \vec{v}$.

2) Pour une répartition de charge à symétrie cylindrique, \vec{E} est de la forme : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

On détermine $E(r)$ par le théorème de Gauss appliqué à un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h quelconque. On obtient :

$$\vec{E} = -\frac{n e R^2}{2 \epsilon_0 r} \vec{e}_r \text{ si } r > R \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{n e r}{2 \epsilon_0} \vec{e}_r \text{ si } r < R .$$

3) Pour une répartition de courants à symétrie cylindrique, \vec{B} est de la forme $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.

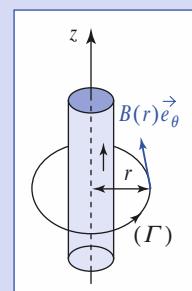
On détermine $B(r)$ par le théorème de Gauss appliqué à une ligne de champ circulaire de rayon r :

On obtient :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(r)\vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \mu_0 \iint_{\Sigma} (-n e v) \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z .$$

$$\text{Soit } B(r) \cdot 2\pi r = -n e v \mu_0 \pi h^2 \text{ si } r > R$$

$$B(r) \cdot 2\pi r = -n e v \mu_0 \pi r^2 \text{ si } r < R$$



Corrigés

d'où $\vec{B} = -\frac{\mu_0 n e v R^2}{2r} \vec{e}_\theta$ si $r > R$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 n e v r}{2} \vec{e}_\theta \text{ si } r < R.$$

Pour cette distribution volumique \vec{E} et \vec{B} sont continus en R .

On remarque que, dans les deux cas :

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \wedge \vec{E}.$$

4) Un électron, à une distance r de l'axe ($r < R$) est soumis à la force de Lorenz :

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Avec les expressions trouvées de \vec{E} et \vec{B} :

$$\vec{F} = \frac{n e^2 r}{2 \epsilon_0} (1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2) \vec{e}_r.$$

Or, $\epsilon_0 \mu_0$ et la vitesse de la lumière dans le vide sont liés par :

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

On en déduit :

$$\vec{F} = \frac{n e^2 r}{2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{e}_r.$$

Pour une particule matérielle, v est inférieure à c ; la force est donc dirigée vers l'extérieur.

Sous l'effet de son propre champ électromagnétique, un faisceau électronique initialement parallèle tend à diverger.



1) Modélisation volumique

Les lignes de courant sont parallèles à l'axe (Oz) : $\vec{j} = j \vec{e}_z$.

L'intensité I est le flux de \vec{j} à travers une section du fil, soit :

$$I = \pi [(R + e)^2 - R^2] j.$$

Donc $\vec{j} = \frac{I}{\pi(e^2 + 2Re)} \vec{e}_z$.

Modélisation surfacique

I est égale au produit de j_S par la circonference du tube, $j_S = \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_z$.

2) Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie ; cela implique $\vec{B} = (r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.

Le système est invariant par translation parallèle à (Oz), et par rotation d'axe (Oz). B ne peut dépendre ni de z ni de θ .

\vec{B} est donc de la forme $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.

Les lignes de champ sont des cercles sur lesquels $B(r)$ est uniforme. On applique le théorème d'Ampère à une ligne de champ Γ de rayon r :

$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r) = \mu_0 i(r)$, où $i(r)$ est le courant traversant la surface plane Σ délimitée par Γ .

$$B(r) = \frac{\mu_0 i(r)}{2\pi r}.$$

On exprime maintenant $i(r)$:

• $r > R + e$: la totalité de courant I traverse la surface Σ délimitée par Γ :

$$i(r) = I;$$

• $R < r < R + e$: seule une partie de I traverse la surface Σ :

$$i(r) = j \pi(r^2 - R^2) = I \frac{r^2 - R^2}{e^2 + 2Re};$$

• $r < R$: aucun courant ne traverse la surface Σ :

$$i(r) = 0.$$

En conclusion :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \text{ si } r > R;$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - R^2}{e^2 + 2Re} \vec{e}_\theta \text{ si } R < r < R + e;$$

$$\vec{B} = \vec{0} \text{ si } r < R.$$

3) a) Les expressions sont inchangées à l'intérieur du tube et à l'extérieur. Dans le volume du conducteur, l'expression se simplifie, en posant $r = R \left(1 + \frac{u}{R}\right)$:

$$\frac{1}{r} \frac{r^2 - R^2}{e^2 + 2Re} = \frac{1}{R \left(1 + \frac{u}{R}\right)} \frac{R^2 \left(2 \frac{u}{R} + \frac{u^2}{R^2}\right)}{R^2 \left(2 \frac{e}{R} + \frac{e^2}{R^2}\right)} \approx \frac{u}{eR},$$

à l'ordre le plus bas en $\frac{e}{R}$.

Soit l'expression linéarisée pour $R < r < R + e$:

$$B(u) = \frac{\mu_0 I}{2\pi Re} u.$$

b) $\vec{B} = \vec{0}$ pour $r = R^-$

et $\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\theta$ pour $r = R^+$.

La discontinuité de \vec{B} est :

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\theta = \mu_0 j_S \vec{e}_\theta = \mu_0 j_S \wedge \vec{e}_r.$$

On retrouve bien l'expression générale de la discontinuité de \vec{B} lors de la traversée d'une nappe de courants surfaciques.

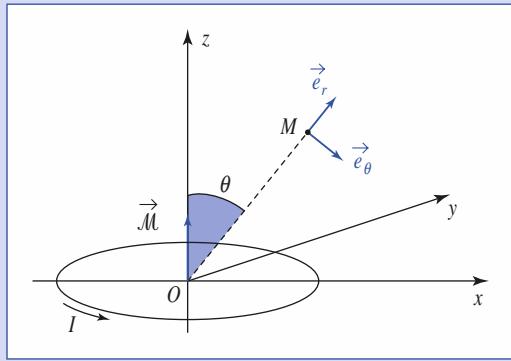
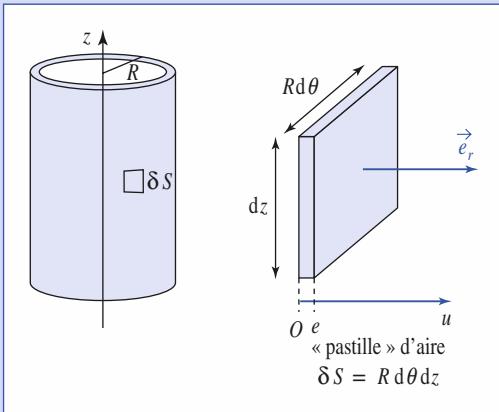
4) a) En coordonnées cylindriques, un élément de volume a pour expression $d\tau = r dr d\theta dz$.

Dans le conducteur, à l'ordre le plus bas en $\frac{e}{R}$, $r \approx R$ et $dr = du$, soit :

$$d\tau = R du d\theta dz.$$

De plus :

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi(e^2 + 2Re)} \vec{e}_z \approx \frac{I}{2\pi Re} \vec{e}_z.$$



On applique la loi de Laplace :

$$d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau \approx -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2 e^2} u \vec{e}_r R d\theta dz du.$$

b) On peut aussi écrire :

$$d\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2 e^2} u du \delta S \vec{e}_r.$$

La force totale $\vec{\delta F}$ qui s'exerce sur la « pastille » d'aire δS est :

$$\vec{\delta F} = \int_{u=0}^e d\vec{F}.$$

$$\vec{\delta F} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2 e^2} \int_{u=0}^e u du \delta S \vec{e}_r,$$

$$\text{soit } \vec{\delta F} = -\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} \delta S \vec{e}_r.$$

c) La force $\vec{\delta F}$ est normale à la surface et proportionnelle à δS .

On peut donc poser $\vec{\delta F} = -P_m \delta S \vec{e}_r$, avec :

$$P_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} = \frac{1}{2} \mu_0 j_s^2.$$

La pression magnétique tend à comprimer le conducteur.

Remarque : Cette pression est très faible :

pour $I = 1000 \text{ A}$ et $R = 1 \text{ cm}$, $P_m = 160 \text{ Pa}$...

1) Le moment magnétique de la spire est :

$$\vec{M} = \pi R^2 I \vec{e}_z.$$

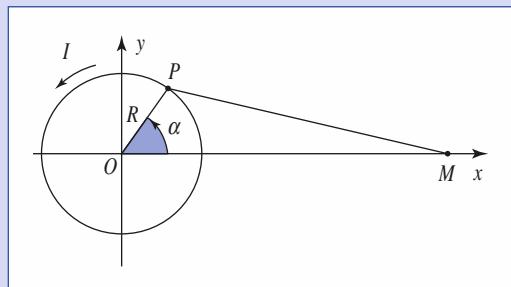
En un point de l'axe (Ox), les coordonnées sphériques d'axe (Oz) sont telles que :

$$r = x, \theta = \frac{\pi}{2}, \vec{e}_r = \vec{e}_x \text{ et } \vec{e}_\theta = -\vec{e}_z.$$

En utilisant l'expression des composantes du champ \vec{B} dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, on obtient :

$$\vec{B}_0(x) = -\frac{\mu_0 I R^2}{4x^3} \vec{e}_z.$$

2) On calcule le champ \vec{B} en un point M de l'axe (Ox) par intégration de la loi de Biot et Savart.



Soit $d\vec{B}$, en M (d'abscisse x), correspondant à l'élément de spire de longueur $R d\alpha$ situé au voisinage de P .

D'après la relation de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\ell \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3}$$

avec ici $d\ell = (-R \sin \alpha \vec{e}_x + R \cos \alpha \vec{e}_y) d\alpha$

et $\vec{PM} = (x - R \cos \alpha) \vec{e}_x - R \sin \alpha \vec{e}_y$;

d'où $d\vec{B} = dB \vec{e}_z$, avec :

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 I (R^2 - Rx \cos \alpha) d\alpha}{4\pi (R^2 + x^2 - 2Rx \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi x^3} \frac{\left(1 - \frac{x}{R} \cos \alpha\right) d\alpha}{\left(1 - 2\frac{R}{x} \cos \alpha + \frac{R^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

En intégrant sur la spire (α variant de 0 à 2π), on obtient $\vec{B}(x) = \vec{B}_0(x) f(x)$, avec :

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{x}{R} \cos \alpha\right)}{\left(1 - 2\frac{R}{x} \cos \alpha + \frac{R^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} d\alpha.$$

Corrigés

3)

$\frac{x}{R}$	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	1,023	1,018	1,014	1,011	1,009	1,008

L'approximation dipolaire est donc exacte à mieux que 1 % près dans le plan de la spire, à une distance du centre supérieure à $11 R$.

4) Sur l'axe de la spire : $r = z$, $\theta = 0$ et $\vec{e}_r = \vec{e}_z$.

$$\text{On en déduit } \vec{B}_0 = \frac{2\mu_0\pi R^2 I}{4\pi z^3} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 R^2 I}{2z^3} \vec{e}_z.$$

L'expression exacte du champ est :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \text{ ou encore :}$$

$$\vec{B}(z) = \vec{B}_0(z)g(z) \text{ avec } g(z) = \frac{1}{2\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $g(z)$ est inférieur à 1, $g(z) \approx 1$ à mieux que 1 % près si $g(z) > 1 - 10^{-2}$. Avec un développement limité de $g(z)$, cette condition devient :

$$1 - \frac{3R^2}{2z^2} > 1 - 10^{-2}, \text{ soit } z > 12,2 R.$$

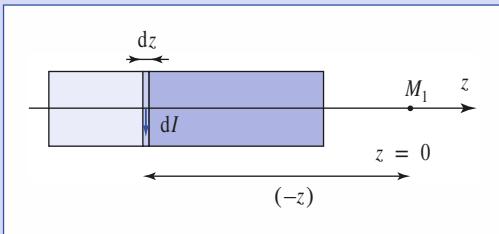
En extrapolant ces résultats aux autres directions, on en conclut que l'approximation dipolaire est exacte à mieux que 1 % près, pour des distances supérieures à environ 15 fois le rayon de la spire. Ainsi, si on se place à 8 cm d'une spire circulaire de diamètre $D = 1$ cm (parcourue par un courant I), cette spire peut être assimilée (avec une excellente approximation) à un dipôle magnétique.

5)

1) À une tranche de longueur dz , on peut associer une spire de section S , normale à l'axe (Oz), parcourue par un courant élémentaire $dI = NI \frac{dz}{\ell}$.

Cette tranche possède donc un moment magnétique élémentaire $d\vec{M} = NIS \frac{dz}{\ell} \vec{e}_z$.

2)



On suppose $M_1 \ll$ à droite » du solénoïde, comme sur la figure, et on fixe en M_1 l'origine des z . La distance entre la spire et M_1 est alors égale à $(-z)$.

Si on utilise l'expression du champ créé par un dipôle magnétique en coordonnées polaires alors $r = (-z)$, $\theta = 0$ et $\vec{e}_r = \vec{e}_z$ et le champ créé en M_1 par la tranche de cote z a pour expression :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 NIS}{4\pi\ell(-z)^3} dz \vec{e}_z.$$

Le champ total est obtenu par intégration :

$$\vec{B}(M_1) = \int_{z=-h+\ell}^{-h} dB$$

$$\text{soit : } \vec{B}(M_1) = \frac{\mu_0 NIS}{4\pi\ell} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{(h+\ell)^2} \right) \vec{e}_z.$$

Si $M_1 \ll$ à gauche » du solénoïde, on a $r = +z$, $\cos\theta = -1$ et $\vec{e}_r = -\vec{e}_z$.

L'expression finale de $\vec{B}(M_1)$ est inchangée, ce qui est en accord avec le fait que le plan médian du solénoïde est un plan de symétrie pour les courants.

Dans le cas particulier du solénoïde à section circulaire de rayon R : $S = \pi R^2$ et la valeur cherchée du champ en M_1 est :

$$\vec{B}(M_1) = \frac{\mu_0 NI}{4\ell} \left(\frac{R^2}{h^2} - \frac{R^2}{(h+\ell)^2} \right) \vec{e}_z$$

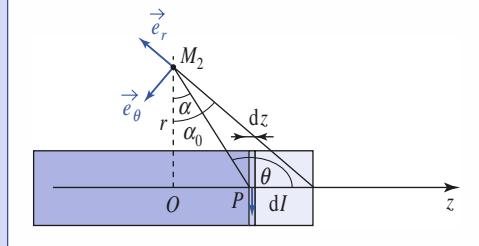
$$\vec{B}(M_1) = \frac{\mu_0 NI}{4\ell} (\tan^2 \theta_2 - \tan^2 \theta_1) \vec{e}_z.$$

À grande distance, θ_1 et θ_2 tendent vers 0, et à l'ordre de 2, on a :

$$\cos \theta_1 - \cos \theta_2 \approx \frac{1}{2} (\tan^2 \theta_2 - \tan^2 \theta_1).$$

La valeur approchée et la valeur exacte sont bien équivalentes à grande distance.

3)



On place cette fois l'origine O des coordonnées dans le plan de symétrie.

$\vec{B}(M_2)$, normal à ce plan, est parallèle à \vec{e}_z .

La tranche de cote z crée en M_2 un champ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 NIS}{4\pi\ell PM_2^3} (2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta).$$

Avec les notations précisées sur le schéma :

$$PM_2 = \frac{r}{\cos\alpha}; z = r\tan\alpha,$$

$$\text{d'où : } dz = \frac{r}{\cos^2\alpha} d\alpha;$$

$$(2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = 2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha.$$

On ne calcule que la composante dB_z :

$$dB_z = \frac{\mu_0 NIS \cos\alpha d\alpha}{4\pi\ell r^2} (2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).$$

Par intégration $\vec{B} = \int_{\alpha=-\alpha_0}^{\alpha_0} dB_z \vec{e}_z$, soit :

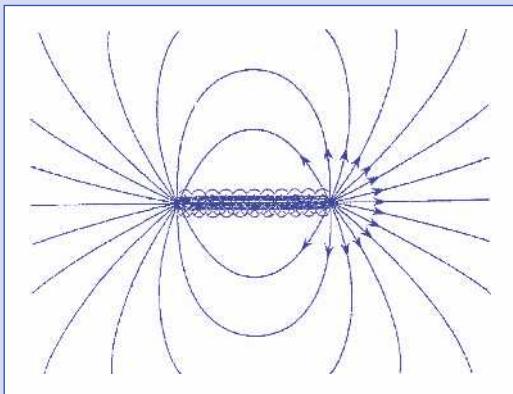
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NIS}{4\pi\ell r^2} (\sin^3\alpha_0 - \sin\alpha_0) \vec{e}_z.$$

Or, comme :

$$\sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{\ell^2}{4r^2 + \ell^2}} : \vec{B}(M_2) = -\frac{2\mu_0 NIS}{\pi(4r^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z.$$

Si $\ell \ll r$, le solénoïde se comporte comme un dipôle de moment magnétique NIS .

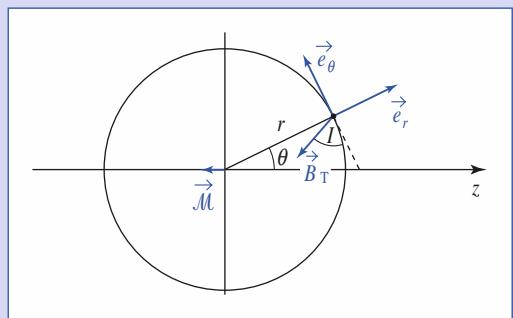
Si $\ell \gg r$, on retrouve le modèle du solénoïde infiniment long, pour lequel le champ \vec{B} est nul à l'extérieur.



6

1) Dans ce modèle, le champ est invariant par rotation autour de l'axe des pôles (Oz). \vec{M} est donc orienté selon (Oz). Le sens de \vec{B}_T , tel qu'il est indiqué sur la figure, est cohérent avec une orientation dans le sens nord → sud.

2) Avec les notations usuelles des coordonnées polaires, on obtient :



Connaissant les composantes B_r et B_θ de \vec{B}_T , on peut écrire :

$$\tan I = \frac{B_r}{B_\theta} = 2 \cotan \theta, \text{ soit } \tan I = 2 \tan \lambda.$$

3) Pour $\lambda = 45^\circ$, on trouve $\tan I = 2$, soit $I = 63^\circ$.

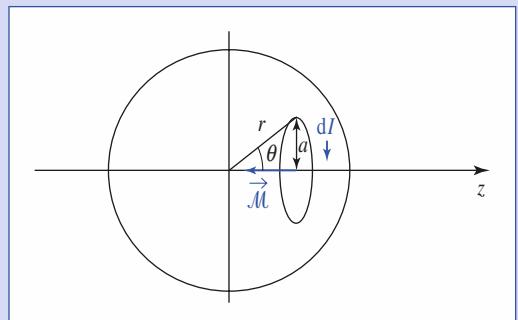
Le modèle est, de ce point de vue, satisfaisant.

$$B_H = -B_\theta = \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi R^3} = \frac{\mu_0 M \cos \lambda}{4\pi R^3},$$

d'où $M = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

4) On considère le noyau de rayon R comme un ensemble de spires élémentaires dont les caractéristiques sont : rayon $a = r \sin \theta$; section $dS = r dr d\theta$; courant $dI = J dS$; moment magnétique :

$$dM = \pi a^2 dI = J \pi r^3 \sin^2 \theta dr d\theta.$$



Pour sommer sur l'ensemble des spires élémentaires, il faut faire varier θ entre 0 et π et r entre 0 et R . On obtient :

$$M = J \pi \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi^2 R^4}{8} J,$$

soit $J = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$.

7 1) Le champ créé par un fil infini a pour expression $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r}$ (théorème d'Ampère) $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$ et $\vec{\text{grad}}(\ln r) = \frac{\vec{e}_r}{r}$, d'où :

$$\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{e}_r}{r} = \vec{e}_z \wedge \vec{\text{grad}} f(r),$$

avec $f(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$, r_0 étant une distance constante quelconque.

2) Le point M est à une distance r_1 du fil d'abscisse $\frac{a}{2}$ (intensité $+I$) et à une distance r_2 du fil d'abscisse $-\frac{a}{2}$ (intensité $-I$).

Le champ total en M est, par superposition :

$$\vec{B}(M) = \vec{e}_z \wedge (\vec{\text{grad}} f_1 + \vec{\text{grad}} f_2) = \vec{e}_z \wedge \vec{\text{grad}} f,$$

$$\text{avec } f = f_1 + f_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{r_1}{r_0} - \ln \frac{r_2}{r_0} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

$$r_1^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} - a r \cos \theta \text{ soit, à l'ordre 1 :}$$

$$r_1 = r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right).$$

De même :

$$r^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} + a r \cos \theta \text{ soit, à l'ordre 1 :}$$

$$r_2 = r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \text{ et } \frac{r_1}{r_2} = 1 - \frac{a}{r} \cos \theta.$$

Corrigés

On obtient donc, à l'ordre 1 en $\frac{a}{r}$:

$$f = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{r} \cos \theta$$

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{r^2} \cos \theta \vec{e}_r + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{r^2} \sin \theta \vec{e}_\theta \text{ et donc :}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{r^2} \sin \theta \vec{e}_r + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{r^2} \cos \theta \vec{e}_\theta.$$

On peut comparer ce champ à celui créé par un dipôle magnétique à grande distance : la croissance des composantes de \vec{B} est en $\frac{1}{r^2}$ alors que pour le dipôle elle est en $\frac{1}{r^3}$.

3) Soit $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ un déplacement élémentaire le long d'une ligne de champ.

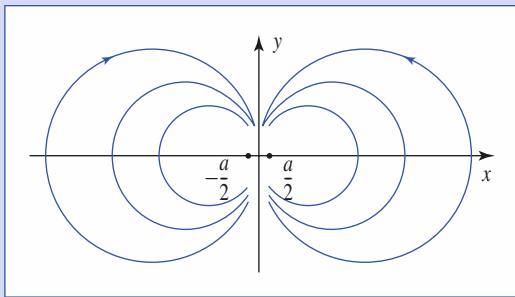
$d\vec{\ell}$ est parallèle à \vec{B} , d'où :

$$\frac{dr}{r d\theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

Cette dernière équation s'intègre en :

$$\ln r = \ln \cos \theta + \text{cte} \text{ ou encore } r = 2R \cos \theta.$$

Les lignes de champ sont donc des cercles tangents en O à l'axe (Oy).



4) La norme de \vec{B} ne dépend que de la distance r , et non de θ . On obtient $B = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ T}$.

À titre de comparaison :

- un fil unique parcouru par le même courant crée à 10 cm un champ de $2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$;
- la composante horizontale du champ magnétique terrestre est, en France, de l'ordre de $2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

8 Pour étudier le mouvement de rotation, on applique le théorème du moment cinétique, en projection sur l'axe (Oz) de rotation, en notant θ l'angle de l'inclinaison du pendule par rapport à la verticale.

Le petit aimant subit le couple $\Gamma = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = -\mathcal{M} B \sin \theta \vec{e}_z$ de la part du champ magnétique.

Remarque :

Si $B > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$ par exemple, on trouve bien que le dipôle magnétique a tendance à s'aligner sur le champ \vec{B} .

L'équation du mouvement de rotation est donc :

$$m L^2 \ddot{\theta} = -m g L \sin \theta - \mathcal{M} B \sin \theta.$$

Si $\mathcal{M} B > -m g L$ (en particulier lorsque le moment magnétique de l'aimant est dans le même sens que le champ magnétique en $\theta=0$), la position d'équilibre $\theta=0$ est stable.

Si le champ et le moment magnétique sont de directions opposées en $\theta=0$ et si $\mathcal{M} B < -m g L$, c'est la position $\theta=\pi$ qui est alors position d'équilibre stable.

La période des petites oscillations s'obtient en écrivant, pour la position stable en 0, par exemple, $\sin \theta \approx \theta$ soit :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{m g L + \mathcal{M} B}{m L^2} \right) \theta = 0$$

$$\text{et : } T = 2\pi L \sqrt{\frac{m}{m g L + \mathcal{M} B}}.$$

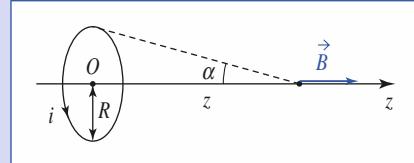
Pour $\theta=\pi$:

$$T = 2\pi L \sqrt{-\frac{m}{m g L + \mathcal{M} B}}.$$

9

1) Le champ créé par une spire en un point de son axe est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z.$$



Le champ que subit l'aimant de moment $\vec{\mathcal{M}}$ est donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)^3 \vec{e}_z.$$

La force subie par le dipôle est :

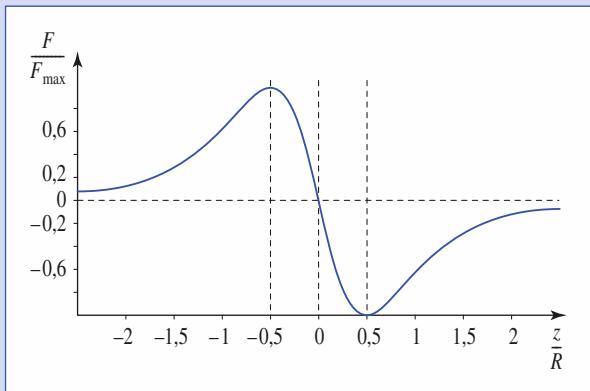
$$\vec{F} = \mathcal{M}_z \frac{dB}{dz} \vec{e}_z$$

$$\text{soit : } \vec{F} = -\frac{3\mu_0 i \mathcal{M}}{2} \frac{R^2 z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \vec{e}_z.$$

Les variantes de $\frac{F(z)}{F_{\max}}$ sont représentées sur le schéma ci-après, si $\vec{\mathcal{M}}$ et \vec{B} sont orientés dans le même sens.

La force a une amplitude maximale :

$$F_{\max} = \frac{24\mu_0 i \mathcal{M}}{5^2 R}, \text{ atteinte en } z = \pm \frac{R}{2}.$$



2) La position $z = 0$ paraît être la position d'équilibre du dipôle qui glisse le long de l'axe (Oz) car $F = 0$.

Celle-ci est stable pour l'orientation envisagée du dipôle : un déplacement $\delta z > 0$ donne naissance à une force algébrique négative, qui ramène alors le dipôle à sa position d'équilibre.

Au voisinage de cette position d'équilibre, l'équation du mouvement du dipôle est, pour $|z| \ll R$:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = F(z) = -\frac{3 \mu_0 i M}{2 R^3}.$$

On obtient alors l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de période :

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{2 m R^3}{3 \mu_0 i M}}.$$

Pour étudier la position d'équilibre, on peut calculer l'énergie potentielle d'interaction entre \vec{M} et \vec{B} , soit à partir de \vec{F} , soit directement à partir de :

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B},$$

$$E_p = -\frac{M \mu_0 i R^3}{2 R} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En dérivant $E_p(z)$ on obtient :

$$\frac{dE_p(z)}{dz} = \frac{3}{2} M \mu_0 i R^2 \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

qui s'annule bien pour la seule valeur $z = 0$: on retrouve la position d'équilibre.

Enfin le calcul de $\left(\frac{d^2E_p(z)}{dz^2}\right)_{z=0}$ montre que pour $M > 0$:

$$\left(\frac{d^2E_p(z)}{dz^2}\right)_{z=0} = \frac{3 \mu_0 i M}{2 R^3} > 0,$$

la position est stable, et :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2E_p(z)}{dz^2}\right)_{z=0} = \frac{k}{m},$$

où $k = \left(\frac{d^2E_p(z)}{dz^2}\right)_{z=0}$ est la constante de raideur du ressort équivalent.

Enfin :

$$T = \frac{2 \pi}{\omega_0} = 2 \pi \sqrt{\frac{2 m R^3}{3 \mu_0 i M}}.$$

10

a) Soit un point de coordonnées cylindriques $r = (R_2, \theta, z)$ appartenant à la petite spire.

Ce point appartient à un plan contenant l'axe (Oz), qui coupe diamétrallement la grande spire.

C'est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant correspondant à la grande spire. Le champ magnétique \vec{B}_1 au point M appartient à ce plan, donc :

$$\vec{B}_1 = B_{1z}(r, z) \hat{e}_z + B_{1r}(r, z) \hat{e}_r,$$

B_1 n'étant pas fonction de θ car la distribution de courant de (1) est de révolution autour de (Oz).

Le rayon de la spire 2, étant faible devant R_1 et d , on peut considérer que, au voisinage de l'axe :

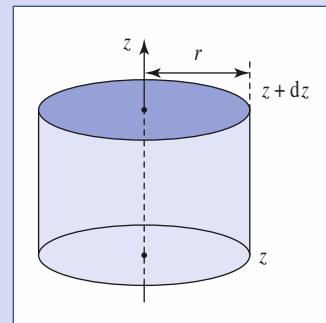
$$B_{1z}(r, z) \approx B_{1z(axe)}(z).$$

Soit une surface fermée ayant la forme d'un petit cylindre d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur dz . le flux du champ \vec{B}_1 à travers cette surface est nécessairement nul, donc :

$$\pi r^2 [B_{1z(axe)}(z + dz) - B_{1z(axe)}(z)] + 2 \pi r dz B_{1r}(r, z) = 0.$$

La composante radiale du champ est liée à la valeur du champ sur l'axe par :

$$B_{1r}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_{1z(axe)}}{dz}.$$



On en déduit finalement :

$$\vec{B}_1 = B_{1z(axe)}(z) \hat{e}_z - \frac{r}{2} \frac{dB_{1z(axe)}(z)}{dz} \hat{e}_r.$$

Seule la partie non uniforme de cette expression sera utile pour calculer la résultante des forces de Laplace exercées sur la petite spire.

La résultante des forces exercées sur la petite spire s'en déduit :

$$\begin{aligned} \vec{f}_L &= \oint_{\text{petite spire}} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_1 \\ &= \oint_{\phi=0 \dots 2\pi} i a d\phi \hat{e}_\theta \wedge \left(-\frac{r}{2} \frac{dB_{1z(axe)}(z)}{dz} \hat{e}_r \right)_{\substack{r=R_2 \\ z=d}} \\ &= i \pi R_2^2 \left(\frac{dB_{1z(axe)}(z)}{dz} \right)_{\substack{z=d}} \hat{e}_z. \end{aligned}$$

On sait que la grande spire crée sur l'axe le champ :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2 R_1} \sin^3 \alpha \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I R_1^2}{2 (R_1^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_z,$$

Corrigés

et cela donne : $\vec{f}_L = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I R_1^2 (\pi R_2^2 i) d}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z,$

qui est une force attractive si les deux spires sont orientées dans le même sens (i et I de même signe).

- b) En considérant la petite spire comme un dipôle magnétique de moment $\vec{M}_2 = i \pi R_2^2 \vec{e}_z$, on peut exprimer la force, dirigée selon (Oz) (symétrie de révolution du problème), sous la forme :

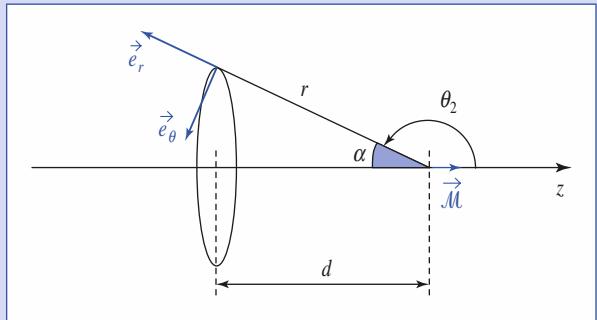
$$\begin{aligned}\vec{f}_L &= \mathcal{M}_z \frac{dB}{dz} \vec{e}_z = (i \pi R_2^2) \left(\frac{dB_{1(\text{axe})}(z)}{dz} \right)_{z=d} \vec{e}_z \\ &= i \pi R_2^2 \left(-\frac{3 \mu_0 I R_1^2 d}{2 (R_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right)_{z=d} \vec{e}_z,\end{aligned}$$

ce qui redonne bien le même résultat.

Ce calcul suppose que l'on ne conserve que le premier terme du développement de \vec{B}_1 : le dipôle \vec{M}_2 est en un point de l'axe (Oz) .

- c) En un point P de la grande spire, le champ \vec{B}_2 créé par la petite spire est assimilable à celui d'un dipôle de moment \vec{M} , soit :

$$\begin{aligned}\vec{B}_2(P) &= \frac{\mu_0 M}{4 \pi} \left(\frac{2 \cos \theta_2 \vec{e}_r + \sin \theta_2 \vec{e}_\theta}{r^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 M}{4 \pi} \left(\frac{-2 \cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta}{(R_1^2 + d^2)^2} \right).\end{aligned}$$



La force exercée sur la grande spire s'en déduit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \oint_{\substack{\text{petite spire} \\ \phi = 0 \dots 2\pi}} IR_1 d\phi \vec{e}_\phi \wedge \vec{B}_2 \\ &= \frac{\mu_0 M I R_1}{4 \pi} \oint_{\substack{\text{grande spire} \\ \phi = 0 \dots 2\pi}} d\phi \vec{e}_\phi \wedge \left(\frac{-2 \cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 M I R_1}{4 \pi} \oint_{\phi = 0 \dots 2\pi} d\phi \left(\frac{-2 \cos \alpha \vec{e}_\theta - \sin \alpha \vec{e}_r}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 M I R_1}{2} \left(\frac{+3 \cos \alpha \sin \alpha \vec{e}_z}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 \pi i I R_1^2 R_2^2 d}{(R_1^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} \vec{e}_z,\end{aligned}$$

résultat logiquement opposé aux précédents.

Conducteurs en équilibre électrostatique Condensateurs

MP-MP*

4

Introduction

L'équilibre de charges électriques est un cas particulier de régime permanent ; cet état existe lorsque des charges sont accumulées sur des conducteurs électriques.

L'étude de telles situations permet d'aborder le principe des condensateurs, qui sont des composants usuels de circuits électriques et dont l'utilisation dépasse le cadre très restrictif des régimes statiques.

O B J E C T I F S

- Propriétés des conducteurs en équilibre électrique.
- Condensateurs.

P R É R E Q U I S

- Champ électrique permanent.
- Potentiel scalaire.

Le conducteur en équilibre électrique

1.1. Champ dans le conducteur

Un conducteur possède des **charges dites libres**, pouvant se déplacer dans l'ensemble du volume occupé par le milieu conducteur. Le déplacement de ces **charges de conduction** assure le passage de courant électrique dans le milieu lorsque celui-ci est soumis à un champ électrique.

Lorsqu'un conducteur est à l'équilibre électrique, les charges mobiles qu'il contient sont au repos.

Ce régime est statique. Nous parlerons de conducteurs en **équilibre électrostatique**.

La vitesse d'ensemble des charges mobiles est nulle : le champ électrostatique auquel elles sont soumises est donc nul au sein du milieu conducteur en équilibre.

Dans un conducteur à l'équilibre électrostatique, le champ électrique est nul.

Remarque

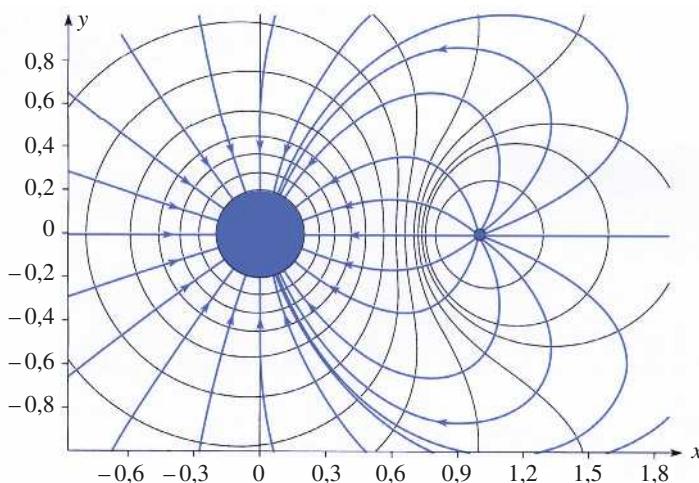
Nous admettons que les actions subies par les charges de conduction peuvent être représentées par la seule influence d'un champ électrique, grandeur macroscopique que nous supposons définie à l'intérieur du conducteur. C'est ce champ macroscopique qui est nul dans le conducteur à l'équilibre.

1.2. Potentiel du conducteur

Le champ électrostatique est un cas particulier de champ électrique permanent qui dérive d'un potentiel scalaire V :

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

Dans le conducteur à l'équilibre, le champ est nul et le potentiel est donc uniforme.



◀ **Doc. 1.** Équipotentielle et lignes de champ du système constitué d'une charge ponctuelle q et d'une sphère métallique portant une charge Q ($q > 0$ et $Q < 0$ sur cette simulation).

Le volume occupé par un conducteur à l'équilibre est un volume équipotentiel.

Le potentiel étant continu, la surface du conducteur est une surface équipotentielle.

Envisageons le cas particulier d'une charge ponctuelle q placée au voisinage d'une sphère métallique portant la charge Q .

Sur le document 1 sont représentées quelques lignes de champ et traces de surfaces équipotentielles de ce système à l'équilibre électrostatique : nous voyons qu'au voisinage de la sphère, les équipotentielles, qui sont de révolution autour de l'axe (Ox), sont quasiment sphériques.

1.3. Charges du conducteur

Dans le conducteur à l'équilibre, nous avons :

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ et donc } \operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

La charge volumique du milieu est donc nulle.

Un conducteur peut porter une charge totale Q_{totale} non nulle, s'il a été électrisé. La charge volumique étant nulle, cette charge est répartie à la surface du conducteur.

Les charges portées par un conducteur à l'équilibre sont réparties à sa surface.

Rappelons qu'il est impossible de définir le champ en un point Q d'une surface portant une densité surfacique de charge σ . Il est donc impossible de définir le champ en un point de la surface.

Il est impossible de définir le champ électrostatique en un point situé sur la surface d'un conducteur.

1.4. Champ au voisinage immédiat de la surface du conducteur. Théorème de Coulomb

Le champ électrostatique \vec{E} est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles. En un point P , situé **au voisinage immédiat d'un point Q de la surface du conducteur** (c'est-à-dire juste à l'extérieur de celui-ci) (doc. 2a), le champ est donc colinéaire au vecteur unitaire $\vec{N}(Q)$ normal à la surface du conducteur :

$$\vec{E}(P) = E \vec{N}(Q),$$

lorsque P est voisin de Q .

Si le champ n'est pas nul, il définit sans ambiguïté la direction des lignes de champ : elles sont normales à la sphère métallique (doc. 1).

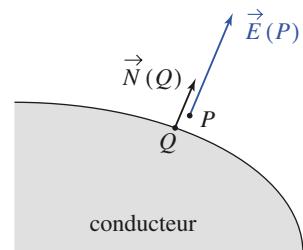
Considérons une surface de Gauss Σ_G , à cheval sur la surface du conducteur (doc. 2b).

La surface Σ_G affleure la surface (supposée régulière) du conducteur, et l'élément dS qui lui correspond est d'extension suffisamment faible pour que nous puissions considérer que la charge surfacique σ et le champ électrostatique sont uniformes dans cette zone.

Le champ est nul dans le conducteur ; il est normal à la surface du conducteur et son flux à travers la partie latérale est donc nul.

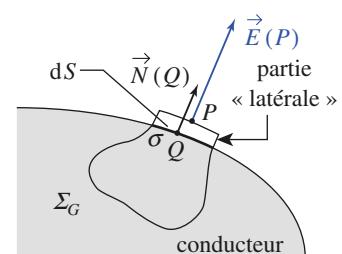
Le flux du champ \vec{E} à travers la surface Σ_G est donc :

$$\Phi = \oint_{\Sigma_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E}(P) \cdot \vec{N}(P) dS = \vec{E}(P) \cdot \vec{N}(Q) dS = E dS.$$



Doc. 2a. Le champ électrostatique en un point P , situé au voisinage immédiat d'un point Q de la surface d'un conducteur, est tel que :

$$\vec{E}(P) = E \vec{N}(Q).$$



Doc. 2b. Le champ à la surface d'un conducteur.

D'après le théorème de Gauss (il n'y a pas de charge volumique dans le conducteur), ce flux est égal à :

$$\Phi = \frac{q(\Sigma_G)}{\epsilon_0} = \frac{\sigma(Q) dS}{\epsilon_0}.$$

Nous en déduisons la valeur du champ en un point situé au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur :

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{N}(Q).$$

Ce résultat constitue : **le théorème de Coulomb**.

Soit un point Q de la surface d'un conducteur en équilibre ; en un point P situé au voisinage immédiat du point Q , le champ électrostatique est normal et égal à :

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{N}(Q).$$

- Nous retrouvons la discontinuité habituelle $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}$ à travers d'une surface chargée σ .
- La valeur du champ au voisinage immédiat de la surface du conducteur ne dépend que de la densité surfacique de charge à l'endroit considéré. Ce champ est toute fois lié à l'ensemble des charges portées par ce conducteur et par des conducteurs voisins éventuels : la valeur de σ n'est qu'un élément de cette répartition, qui correspond à l'équilibre de l'ensemble du système considéré.

2 Réalisation de l'équilibre électrostatique

2.1. Analyse d'un équilibre

Nous venons de décrire quelques propriétés générales d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. Pour analyser plus précisément la répartition des charges sur le conducteur à l'équilibre, envisageons le cas d'une sphère métallique subissant l'influence d'un champ électrique permanent qui lui est appliqué.

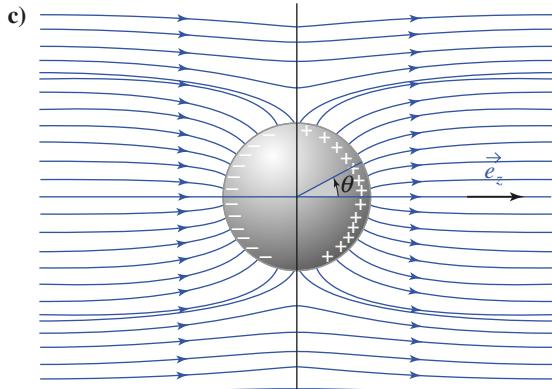
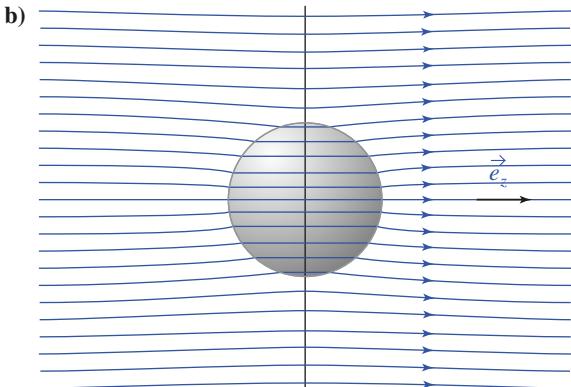
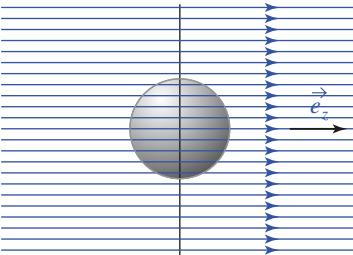
Nous supposerons que cette sphère est :

- **initiallement non chargée**, c'est-à-dire que la somme totale de ses charges est nulle (on dit aussi que la sphère est initialement neutre) ;
- **isolée**, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun contact électrique entre cette sphère et « l'extérieur » ; la sphère reste globalement neutre (conservation de la charge).

Cette sphère, de centre O et de rayon R , est soumise au champ uniforme :

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z \quad (\text{doc. 3a}).$$

a)



Doc. 3. Sphère métallique soumise à un champ $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$:

- le champ appliqué est uniforme ;
- état transitoire : le champ dû au déplacement des charges dans la sphère déforme les lignes du champ E_0 ;
- l'équilibre est atteint pour $\vec{E}_0 = \vec{0}$ à l'intérieur de la sphère.

Soumis au champ \vec{E}_0 , les électrons de conduction dérivent au sein de la sphère et se déplacent sous l'influence du champ appliqué.

Un excès de charges négatives apparaît sur l'hémisphère d'abscisse $z < 0$, tandis qu'un défaut d'électrons entraîne l'apparition d'une charge positive sur l'hémisphère opposé.

Remarque : Nous ne cherchons pas ici à décrire l'évolution réelle du conducteur vers l'équilibre.

- La sphère n'est plus seulement passive, car elle crée à son tour un champ électrique propre \vec{E}' , dirigé de ses charges positives vers ses charges négatives. À l'intérieur de la sphère, ce champ \vec{E}' s'oppose au champ \vec{E}_0 appliqué (doc. 3b), dont les lignes sont déformées.

- L'amplitude du champ « propre » \vec{E}' augmente avec le déplacement des charges. L'équilibre est atteint lorsque le champ électrique total $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ est nul à l'intérieur de la sphère. La densité volumique de charges l'est aussi, et le conducteur porte une charge surfacique totale nulle de densité σ variable avec la position sur la sphère, donc avec θ (doc. 3c).

- Ce raisonnement nous permet d'imaginer l'état du conducteur à l'équilibre. Pour déterminer complètement l'équilibre atteint, nous aurons à calculer σ ou \vec{E}' , ou bien un potentiel $V = V_0 + V'$ associé à ce problème (la connaissance de l'une de ces grandeurs nous permet d'obtenir les deux autres). L'*application* suivante en propose une détermination.

Application 1

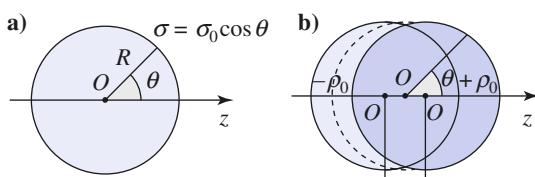
Sphère métallique soumise à un champ initialement uniforme

Dans une région de l'espace existe un champ uniforme \vec{E}_0 , porté par un axe (Oz). Une sphère conductrice, initialement neutre et isolée, est placée en O dans ce champ électrique \vec{E}_0 . Pour étudier la répartition de charges σ sur la sphère, on se propose de construire l'état d'équilibre par superposition du champ appliqué \vec{E}_0 et de celui créé par la sphère en équilibre électrique \vec{E}' . On travaille en coordonnées sphériques.

1) Quelle doit être la dépendance de la charge surfacique $\sigma(\theta, \phi)$ vis-à-vis de l'angle ϕ , en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) de centre O et d'axe (Oz) ? Pourquoi le choix $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ peut-il sembler une solution acceptable a priori ?

2) Le document 4a représente la sphère de centre O et de rayon R , portant la charge surfacique $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$. Sur le document 4b figurent deux boules de rayon R et de centre respectifs O^+ et O^- , d'abscisse $+\frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2}$ sur l'axe (Oz), chargées uniformément avec les densités respectives $+\rho_0$ et $-\rho_0$.

Montrer que la première distribution peut être obtenue comme limite de la seconde, lorsque la distance a tend vers zéro, à condition d'imposer une relation particulière liant ρ_0 , a et σ_0 .



Doc. 4. Sphères chargées :
a) en surface ;

b) en volume.

3) Déterminer le champ créé par cette distribution dans et à l'extérieur de la sphère.

4) Quelle valeur faut-il donner à la constante σ_0 pour que la distribution de charges envisagée sur la sphère métallique représente effectivement l'état de polarisation obtenu à l'équilibre électrostatique ?

5) Quelle est la valeur du champ total \vec{E} en tout point ?

Discuter le comportement de ce champ en $r = R$.

Commenter l'allure des lignes de champ, représentées sur le document 3c, au voisinage de la sphère.

1) La solution de ce problème de recherche de l'équilibre électrostatique doit être invariante par rotation autour de l'axe de révolution (Oz). La densité surfacique σ ne doit pas dépendre de la variable φ .

Le champ dans la sphère doit être nul et les charges surfaciques doivent créer un champ opposé à \vec{E}_0 dans la sphère, donc $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ semble acceptable, avec $\sigma_0 > 0$: il doit y avoir plus de charges positives à droite qu'à gauche.

2) Considérons un élément de surface de la sphère, repéré par les angles moyens θ et φ , de surface :

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Cet élément porte la charge :

$$dq = \sigma dS = \sigma_0 R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi.$$

Considérons maintenant les deux boules chargées. Dans l'espace commun, la charge totale est nulle. Ainsi, lorsque a tend vers zéro, les charges de cette distribution sont localisées dans une mince pellicule, au voisinage de la surface de la sphère de centre O et de rayon R , portant la charge volumique $+\rho_0$ ou $-\rho_0$ suivant le signe de z , donc de $\cos \theta$.

L'élément de volume $d\tau$ compris entre ces deux sphères, sur lesquelles il découpe pour $a \ll R$ la même surface élémentaire dS , est égal à :

$$a dS |\cos \theta|.$$

Il contient la charge : $dq = \rho_0 a dS \cos \theta$ ($d\theta$ est bien du signe de $\cos \theta$).

En comparant les deux expressions de l'élément de charge $d\theta$, nous pouvons obtenir la sphère chargée comme limite de l'ensemble des deux boules chargées, lorsque a tend vers zéro, à condition d'imposer $\rho_0 a = \sigma_0$.

3) À l'intérieur de la sphère, les deux boules chargées créent les champs :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_- M} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(M) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_+ M},$$

soit au total : $\vec{E}'(M) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_+ O_-} = -\frac{\rho_0 a}{3\epsilon_0} \vec{e}_z$.

Lorsque $a \rightarrow 0$, nous obtenons à l'intérieur de la sphère le champ uniforme :

$$\vec{E}' = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z.$$

À l'extérieur de la sphère, nous savons que les deux boules chargées créent le même champ que celui qui serait créé si toute leur charge :

$$\pm q = \pm \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$$

était concentrée en O_- ou O_+ respectivement. Lorsque $a \rightarrow 0$, le champ vu à la distance supérieure R du point O correspond au champ d'un dipôle placé en O et de moment dipolaire :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{O_- O_+} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \vec{e}_z.$$

Le champ créé vaut donc à l'extérieur de la sphère :

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} \\ &= \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3} \right). \end{aligned}$$

4) Le champ électrique total, $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, est nul à l'intérieur de la sphère métallique, à l'équilibre électrostatique. Nous en déduisons que la constante σ_0 vaut :

$$\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0.$$

5) À la surface de la sphère, le champ électrique total est :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}' \\ &= E_0 (\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) + \vec{E}' \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } r = R^- \\ 3E_0 \cos \theta \vec{e}_r = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \vec{e}_r & \text{si } r = R^+. \end{cases}$$

Ce résultat est en accord avec le théorème de Coulomb. Le champ électrique est normal à la sphère métallique, volume équipotentiel.

Les lignes de champ que nous observons (doc. 3c) sont, elles aussi, normales à la sphère.

Ce n'est cependant pas vrai pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: la courbe, intersection de la sphère avec le plan $z = 0$ correspond à une ligne neutre ($\sigma = 0$) donc à des points de champ nul. Ce champ est bien normal à la surface équipotentielle en ces points, mais pas obligatoirement les lignes de champ.

2.2. Le problème électrostatique

2.2.1. Influence électrostatique

Le problème que nous venons de décrire est élémentaire, car la géométrie est simple et le champ appliqué uniforme.

En pratique, le champ \vec{E} appliqué à un conducteur \mathcal{C}_1 (la sphère pour notre exemple) est lui-même engendré par des charges portées par un ou plusieurs conducteurs ($\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n$). Une fois en équilibre, le conducteur \mathcal{C}_1 agit à son tour sur ses voisins. L'équilibre électrostatique d'un ensemble de conducteurs est donc le fruit d'un équilibre global où les conducteurs influent les uns sur les autres. Nous parlerons d'**influence électrostatique** mutuelle des conducteurs.

2.2.2. Charge d'un conducteur par influence

Prenons l'exemple d'une charge q placée au voisinage d'un plan conducteur relié à la terre : lorsque la charge q est approchée, des charges surfaciques apparaissent sur le plan métallique.

Cette charge du conducteur s'effectue sans contact électrique avec la charge qui est approchée : le plan conducteur est chargé « par influence » (notons qu'il est en revanche relié à la terre, dont il « tire » la charge, égale à $-q$, qui se répartit à sa surface).

La **charge d'un conducteur par influence** est une manifestation du phénomène général d'influence électrostatique.

Approcher un conducteur chargé C_1 d'un conducteur C_2 influence la répartition de charge sur C_2 .

- Si C_2 est isolé, sa charge totale reste constante, mais ses charges superficielles sont modifiées.
 - Si C_2 est maintenu à un potentiel donné, sa charge totale est modifiée par la présence de C_1 .

Remarque

Nous n'avons envisagé que le cas où une charge ponctuelle q est approchée à distance d d'un conducteur. Si cette charge est portée par une sphère de rayon non négligeable devant d , la répartition de charge à la surface de la sphère est notablement modifiée par la présence du plan conducteur. L'influence électrostatique est mutuelle.

2.2.3. Éléments correspondants

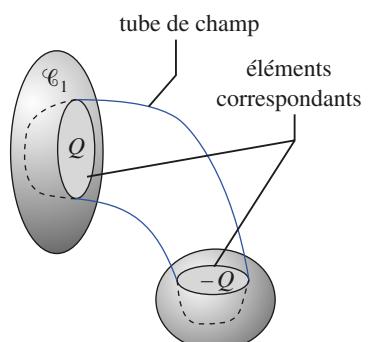
Considérons deux éléments de surface sur deux conducteurs voisins, qui se correspondent : ces éléments sont reliés l'un à l'autre par un tube du champ électrostatique (doc. 5).

Formons une surface de Gauss en refermant ce tube par deux surfaces complémentaires contenues dans les conducteurs ; le flux du champ \vec{E} à travers cette surface est nul puisque $\vec{E} = \vec{0}$ dans les conducteurs et \vec{E} est orthogonal au vecteur surface hors des conducteurs.

Cette surface de Gauss contient donc une charge nulle : deux éléments correspondants des conducteurs portent des charges opposées.

2.2.4. Influence totale

Deux conducteurs sont en état d'influence totale si toute ligne de champ partant de l'un aboutit à l'autre.



Doc. 5. Éléments correspondants.

Dans ces conditions, leurs surfaces entières constituent deux éléments correspondants.

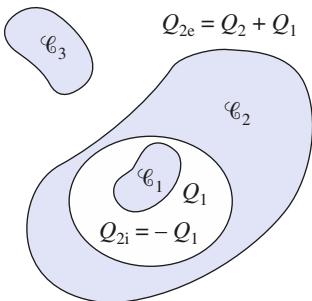
Les charges portées par ces conducteurs sont donc opposées.

Deux conducteurs en état d'influence totale portent des charges opposées.

En pratique, une telle situation est difficilement réalisable, car la présence d'autres conducteurs est susceptible de perturber cet état d'influence totale. Elle peut cependant être préservée si l'un des conducteurs se trouve dans une cavité de l'autre, qui forme alors un écran électrique protégeant l'intérieur de la cavité d'influences extérieures (*doc. 6*).

Dans ce cas, toute ligne de champ partant, dans la cavité, du conducteur \mathcal{C}_1 , ne peut pas revenir sur celui-ci et elle aboutit sur le conducteur \mathcal{C}_2 , car les lignes de champ « descendantes » les potentiels.

Placer un conducteur dans la cavité d'un second permet d'obtenir deux armatures métalliques en état d'influence totale.



Doc. 6. Conducteur \mathcal{C}_1 dans la cavité de \mathcal{C}_2 , de charge totale :

$$Q_2 = Q_{2i} + Q_{2e}$$

Les charges intérieures en regard sont opposées :

$$Q_{2i} = -Q_1$$

3 Ensemble de conducteurs en équilibre

L'équilibre électrostatique d'un ensemble de conducteurs est régi par des critères assez simples (propriétés générales d'un conducteur à l'équilibre). Nous devinons cependant que la recherche de l'équilibre d'un ensemble de conducteurs est un problème délicat. Nous en décrirons ici quelques aspects.

3.1. Données du problème

Considérons divers conducteurs fixes dans l'espace ; sur certains conducteurs (*doc. 7*) :

- le potentiel est imposé (conducteurs de type 1) ;
- sur d'autres, la charge totale est imposée (conducteurs de type 2) ; ils sont dits isolés.

Le but est de connaître « tout » : ainsi, cet équilibre peut être considéré comme étant entièrement déterminé si nous connaissons :

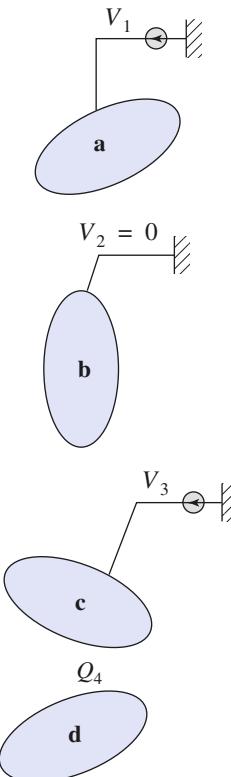
- **a** : le potentiel V_k des divers conducteurs ;
- **b** : la charge Q_k des divers conducteurs ;
- **c** : la répartition de charges sur les conducteurs $\sigma(Q_k)$;
- **d** : le champ électrostatique $\vec{E}(M)$;
- **e** : le potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace, extérieur aux conducteurs.

3.2. La connaissance du potentiel est suffisante

En réalité, la connaissance du potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace, extérieur aux conducteurs (**e**), est suffisante pour tout déterminer.

- **a**) Le potentiel est continu. Soit un point M_k de la surface d'un conducteur k et P un point voisin du point M_k , le potentiel s'écrit :

$$V_k = V(M_k) = \lim_{P \rightarrow M_k} V(P)$$



Doc. 7. Certains conducteurs sont :

- de type 1 (**a**, **b** et **c**) : leur potentiel est imposé ;
- de type 2 (**d**) : leur charge est imposée (ils sont isolés de tout générateur).

- b) $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur des conducteurs.

Le potentiel permet de calculer $\vec{E}(M)$ à l'extérieur des conducteurs :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M).$$

- c) La discontinuité du champ \vec{E} permet de calculer la répartition des charges sur les conducteurs (théorème de Coulomb) :

$$\sigma(M_k) = \epsilon_0 \vec{E}(P) \cdot \vec{N}(M_k).$$

- d) Cette répartition de charge permet d'atteindre la charge Q_k du conducteur k , égale à :

$$Q_k = \oint_{\Sigma_k} \sigma(M_k) dS_k.$$

Pour déterminer l'équilibre électrostatique, nous pouvons donc chercher un potentiel scalaire $V(M)$ en tout point extérieur aux conducteurs et les diverses autres grandeurs s'en déduiront.

La connaissance du potentiel $V(M)$, en tout point M de l'espace extérieur aux conducteurs, permet de déterminer tous les paramètres électriques du système (charges, répartition des charges, potentiel des conducteurs, champ électrique, ...).

3.3. Équation de Laplace, conditions aux limites et théorème d'unicité

Pour l'espace vide de charge séparant les conducteurs C_1, \dots, C_n , le potentiel vérifie l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

Supposons connues les conditions aux limites, c'est-à-dire :

- soit les n potentiels de ces n conducteurs ;
- soit les n charges de ces n conducteurs ;
- soit les charges des conducteurs 1 à k et les potentiels des conducteurs $k + 1$ à n (k quelconque).

Alors on démontre, et nous admettrons, que la fonction potentiel V , nulle à l'infini et satisfaisant $\Delta V = 0$, est unique.

Il n'existe pas de méthode générale de résolution de l'équation de Laplace avec des conditions aux limites.

3.4. Théorème de superposition

Supposons que le système de n conducteurs dans l'état d'équilibre unique correspondent aux conditions aux limites suivantes : les charges des conducteurs 1 à k sont imposées ($Q_1 \dots Q_k$) et les potentiels des autres sont également imposés ($V_{k+1} \dots V_n$). La fonction potentiel satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ compte tenu de ces conditions aux limites est notée $V_a(M)$.

Ce même système de conducteurs (on ne les change pas de place, on n'en retire pas, on n'en ajoute pas...) voit ses conditions aux limites changer : les conducteurs 1 à k ont maintenant les charges imposées $Q'_1 \dots Q'_k$ et les autres les potentiels $V'_{k+1} \dots V'_n$. La fonction (unique), potentiel solution de l'équation de Laplace est notée $V_b(M)$.

Si maintenant nous imposons à ce système les conditions aux limites ($Q_1 + Q'_1 \dots Q_k + Q'_k, V_{k+1} + V'_{k+1}, V_n + V'_n$) alors la fonction potentiel solution de $\Delta V = 0$ est $V_a(M) + V_b(M)$ puisque l'équation de Laplace est linéaire.

En fait, nous pouvons, dans le deuxième état, changer ce que nous imposons à un conducteur : charge ou potentiel. En effet V et Q sont liés (*cf.* § 3.2).

Les charges des conducteurs se déduisent de leurs potentiels par des relations linéaires : une superposition d'états d'équilibre est encore un état d'équilibre. Ainsi, si les états :

$$(Q_1, V_1, \dots, Q_n, V_n) \text{ et } (Q'_1, V'_1, \dots, Q'_n, V'_n)$$

sont deux états d'équilibre d'un ensemble de n conducteurs, l'état :

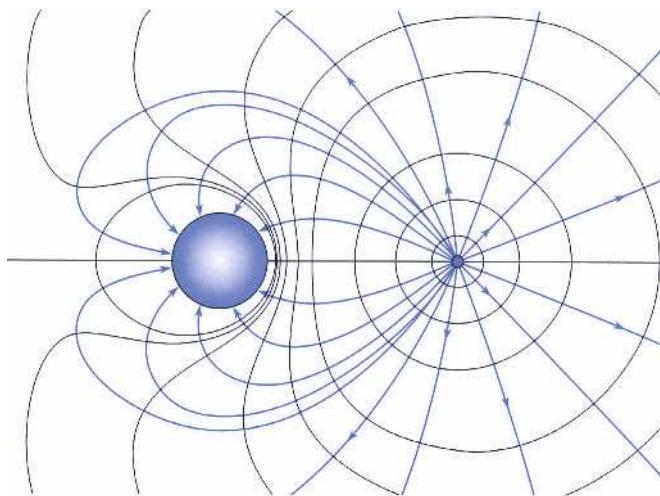
$$(Q_1 + Q'_1, V_1 + V'_1, \dots, Q_n + Q'_n, V_n + V'_n)$$

en est un autre, le champ total au sein des conducteurs étant ici encore nul.

Une superposition d'états d'équilibre électrostatique d'un ensemble de conducteurs est encore un état d'équilibre de ce système.

Nous pourrons mettre en pratique ce résultat en « construisant » certains états d'équilibre par superposition d'états d'équilibre plus « simples ».

Plaçons, par exemple, une toute petite bille métallique portant la charge q au voisinage d'une sphère conductrice maintenue au potentiel nul. La sphère, au potentiel nul, se charge par influence et acquiert une charge Q_1 (*doc. 8a*).



Doc. 8a. La charge q vaut q_1 et la sphère est au potentiel nul :

$$q = q_1 ; \quad V_1 = 0 \quad \text{et} \quad Q = Q_1.$$

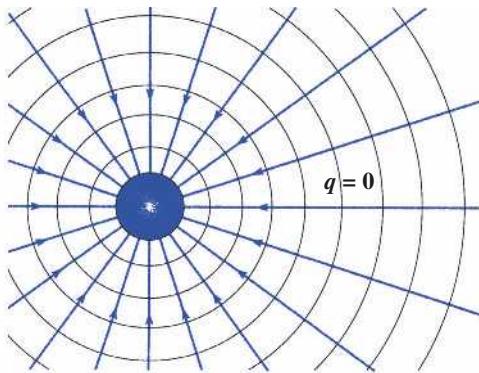
Si cette sphère est portée au potentiel V_2 , la charge q étant maintenant nulle ($q = 0$) sur la petite bille (quasi ponctuelle : rayon négligeable devant celui de la sphère et sa distance à celle-ci), nous obtenons un deuxième état d'équilibre où la sphère porte la charge $Q_2 = 4\pi\epsilon_0 R V_2$.

Cet état est représenté par le *document 8b*.

Par superposition de ces deux états, nous obtenons un troisième état d'équilibre où la sphère, maintenue au potentiel V_2 , porte, en présence de la charge q_1 , la charge totale $Q_1 + Q_2$. Cet état est représenté par le *document 8c*.

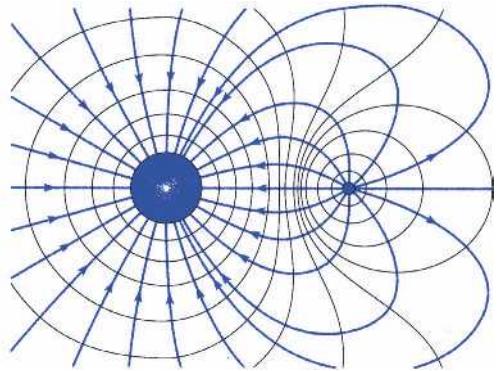
Remarque

Dans la mesure où nous négligeons le rayon de la petite bille, nous ne pouvons pas définir son potentiel.



Doc. 8b. La charge q est nulle et la sphère est au potentiel V :

$$q = 0 ; \quad V = V_2 \quad \text{et} \quad Q = Q_2.$$



Doc. 8c. La charge q vaut q_1 et la sphère est au potentiel V_2 . Cet état d'équilibre est la superposition des deux autres :

$$q = q_1 ; \quad V = V_2 \quad \text{et} \quad Q = Q_1 + Q_2.$$

Application 2

Cavité d'un conducteur, écran électrique

1) Un conducteur \mathcal{C} de potentiel V_0 possède une cavité vide de charge (doc. 9a).

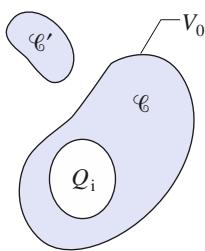
Quelles sont les valeurs du champ et du potentiel dans la cavité du conducteur ?

Quelle est la charge surfacique σ portée par la surface du conducteur bordant la cavité ?

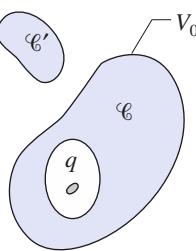
Quelle est la charge Q_i portée par cette surface intérieure ?

2) Que devient ce dernier résultat si la cavité contient un deuxième conducteur portant la charge q (doc. 9b) ?

Quel est le potentiel de ce conducteur quand $q = 0$?



Doc. 9a. Cavité vide de charge.



Doc. 9b. Cavité contenant une charge q .

La présence de \mathcal{C}' change-t-elle le résultat ?

3) \mathcal{C}' est neutre \mathcal{C} est porté au potentiel 0 et le conducteur intérieur à \mathcal{C}' est chargé.

Quel est le potentiel de \mathcal{C}' ? Le conducteur intérieur influence-t-il \mathcal{C}' ?

4) Énoncer le théorème des écrans le plus général.

1) La cavité constitue un domaine vide de charges, où le potentiel vérifie $\Delta V = 0$. Il existe une solution évidente de cette équation, qui vaut V_0 sur les bords de la cavité, c'est $V = V_0$ en tout point de la cavité.

Comme la solution est unique, c'est la solution du problème. Le champ électrique est donc nul en tout point de la cavité. Par application du théorème de Coulomb, nous en déduisons que la charge surfacique du conducteur sur toute la surface de la cavité est nulle et donc $Q_i = 0$.

2) Sauf précision supplémentaire (et géométrie très simple !), nous ne sommes pas en mesure de déterminer complètement la valeur des champs et potentiels dans la cavité. Nous savons cependant qu'à l'équilibre, le champ électrique est nul au sein du conducteur \mathcal{C} . L'application du théorème de Gauss à une surface fermée, contenue dans le conducteur \mathcal{C} et contenant la cavité, nous permet d'écrire :

$$0 = \frac{q + Q_i}{\epsilon_0}, \text{ soit } Q_i = -q. \text{ Dans la cavité, les charges en regard sont opposées : c'est le théorème des éléments correspondant.}$$

Quand $q = 0$, $Q_i = 0$ et donc on trouve comme en 1) : $V = V_0$ qui est le potentiel à l'intérieur de la cavité et aussi sur le deuxième conducteur.

Ce résultat ne fait pas intervenir \mathcal{C}' . Ainsi le potentiel du conducteur neutre intérieur au conducteur creux porté au potentiel V_0 est V_0 indépendant de \mathcal{C}' . Le conducteur creux porté à un potentiel fixé fait écran aux influences de \mathcal{C}' sur le conducteur neutre intérieur.

3) \mathcal{C}' est à l'extérieur de \mathcal{C} et le potentiel à l'extérieur de \mathcal{C} vérifie $\Delta V = 0$ avec $V = 0$ sur \mathcal{C} et à l'infini.

Essayons la solution $V = 0$ partout. Elle vérifie bien $\Delta V = 0$ et $V = 0$ sur \mathcal{C} et à l'infini.

On a alors aussi $V = 0$ sur \mathcal{C}' d'où, puisque $V = 0$ « à côté » de \mathcal{C}' un champ \vec{E} nul au voisinage de tout point de \mathcal{C}' donc $\sigma = 0$ partout sur \mathcal{C}' donc $Q_{\mathcal{C}'} = 0$ ce qui est vrai.

Ainsi $V = 0$ est le potentiel qui convient à cette situation : $\Delta V = 0$ avec $V = 0$ sur \mathcal{C} et à l'infini et $Q = 0$ sur \mathcal{C}' .

La présence du conducteur chargé intérieur au conducteur creux n'est pas intervenue : celui-ci fait écran aux influences du conducteur intérieur sur \mathcal{C}' extérieur.

4) Par superposition des situations précédentes : un conducteur creux porté à un potentiel fixé fait écran aux influences des conducteurs extérieurs sur les conducteurs intérieurs et aux influences des conducteurs intérieurs sur les conducteurs extérieurs.

Remarque : L'espace est séparé en 2 parties disjointes par une surface fermée portée à un potentiel donné.

3.5. Relations entre charges et potentiels

Limitons-nous au cas de deux conducteurs et considérons un premier état d'équilibre électrostatique {1} : $\{Q'_1, V'_1; Q'_2, V'_2 = 0\}$.

Les relations entre charges et potentiels sont linéaires ; nous pouvons écrire :

$$Q'_1 = C_{11}V'_1 \quad \text{et} \quad Q'_2 = C_{21}V'_1,$$

où les coefficients C_{11} et C_{21} ne dépendent que de la **géométrie de l'ensemble** des conducteurs.

Avec un état {2} : $\{Q''_1, V''_1 = 0; Q''_2, V''_2\}$, nous pouvons écrire de même :

$$Q''_1 = C_{12}V''_2 \quad \text{et} \quad Q''_2 = C_{22}V''_2.$$

La superposition des deux états {1} et {2}, nous donne, dans le cas de deux conducteurs seuls en présence :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases} \quad \text{où } Q_i = Q'_i + Q''_i \quad \text{et} \quad V_i = V'_i + V''_i.$$

Les coefficients C_{ij} , appelés **coefficients d'influence électrostatique** de l'ensemble des deux conducteurs \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 en présence, ne dépendent que de la géométrie du système.

Application 3

Influence électrostatique mutuelle de deux sphères conductrices

Deux sphères de rayons R_1 et R_2 , dont les centres sont distants de d , sont mises en présence, maintenues respectivement aux potentiels V_1 et V_2 .

1) Évaluer les valeurs des coefficients d'influence caractérisant ce système, lorsque d est très supérieure aux rayons des sphères.

2) On appelle capacité propre d'un conducteur le coefficient C permettant de relier la charge Q de ce conducteur à son potentiel V , lorsque ce conducteur est seul dans l'espace, le potentiel étant pris nul à l'infini.

Quelles sont les valeurs des capacités propres C_1 et C_2 des sphères précédentes ?

Sont-elles rigoureusement identiques aux coefficients C_{11} et C_{22} précédents ?

1) Le potentiel du conducteur 1 peut être calculé en n'importe quel point de la sphère, par exemple au centre O_1 (M_1 sur \mathcal{C}_1 et M_2 sur \mathcal{C}_2) :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\iint_{S(\mathcal{C}_1)} \frac{\sigma_1 dS_1}{O_1 M_1} + \iint_{S(\mathcal{C}_2)} \frac{\sigma_2 dS_2}{O_1 M_2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} + \iint_{S(\mathcal{C}_2)} \frac{\sigma_2 dS_2}{O_1 M_2} \right). \end{aligned}$$

Si la distance d est suffisamment grande devant R_2 , la distance $O_1 M_2$ est relativement peu différente de d , et nous aurons :

$$\begin{aligned} V_1 &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{d} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \left(Q_1 + \frac{R_1}{d} Q_2 \right). \end{aligned}$$

De même, pour le potentiel V_2 :

$$V_2 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \left(\frac{R_2}{d} Q_1 + Q_2 \right).$$

En ne gardant que les termes au plus d'ordre 1 en $\frac{R_1}{d}$ ou $\frac{R_2}{d}$, nous en déduisons :

$$C_{11} \approx 4\pi\epsilon_0 R_1; \quad C_{12} \approx -4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{d} \approx C_{21};$$

$$C_{22} \approx 4\pi\epsilon_0 R_2.$$

Remarque : Nous avons $C_{12} = C_{21}$: cette propriété n'est pas liée aux approximations de calcul utilisées : on a toujours $C_{ij} = C_{ji}$.

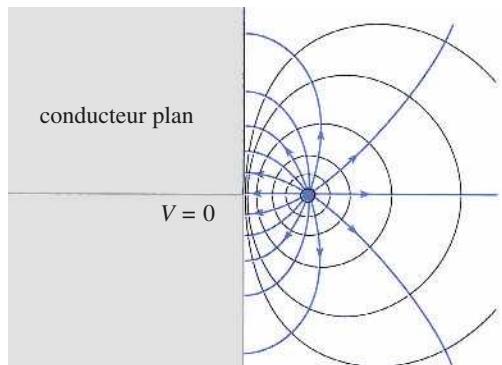
2) Lorsque l'une des sphères est seule dans l'espace, nous obtenons $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1$ (ou $C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2$), sans approximation.

L'égalité entre les coefficients C_{11} et C_1 n'est liée qu'à l'approximation que nous avons effectuée.

3.6. Un exemple de construction de solution

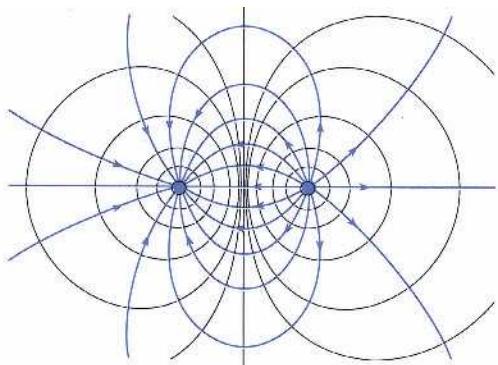
La solution du problème électrostatique est unique, mais sa détermination exacte est en général très délicate. Il est en pratique beaucoup plus facile d'inverser le raisonnement : à partir de la donnée de surfaces équipotentielles, nous pourrons envisager une situation d'équilibre électrostatique acceptable, associée à des distributions de charges simples.

Considérons le cas d'une charge q placée au voisinage d'un plan conducteur, d'équation $x = 0$ et maintenu au potentiel nul (doc. 10a).



Doc. 10a. Charge ponctuelle et plan conducteur au potentiel $V = 0$.

Nous pouvons remplacer cette situation par une distribution très simple, constituée de deux charges opposées placées symétriquement par rapport au plan $x = 0$ (doc. 10b). Dans les deux cas, nous avons dans la zone $x > 0$ une charge q placée devant le plan $x = 0$, sur ce plan $V = 0$, et en dehors des charges $\Delta V = 0$.



Doc. 10b. Deux charges ponctuelles symétriques : on retrouve le plan de potentiel $V = 0$.

Les deux situations sont, dans cette zone, caractérisées par la même équation différentielle et les mêmes conditions aux limites. La solution, unique, est la même dans les deux cas. Ainsi, les lignes de champ et surfaces équipotentielles sont identiques, sur les documents 10a et 10b, dans la zone $x > 0$.

4 Condensateurs

4.1. Définition

Considérons deux conducteurs en état d'influence totale.

La donnée des potentiels V_1 et V_2 des deux conducteurs détermine le potentiel V , solution unique de l'équation de Laplace dans la cavité.

Lorsque les potentiels V_1 et V_2 sont identiques, l'unique solution V est évidente : c'est $V = V_1 = V_2$ dans la cavité. Le champ est alors nul dans la cavité et les charges Q_1 et Q_{2i} aussi (doc. 11).

Lorsqu'une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ est imposée entre les deux conducteurs, le champ n'est plus nul dans la cavité. Les surfaces en regard portent alors les charges Q_1 et $Q_{2i} = -Q_1$.

Deux conducteurs en état d'influence totale définissent un condensateur, qui accumule des charges électriques opposées sur ses armatures lorsqu'une différence de potentiel est imposée entre celles-ci.

4.2. Capacité du système

La charge Q_1 peut s'écrire :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2.$$

Elle est nulle si $V_1 = V_2$, donc $C_{11} = -C_{12}$.

Posons $C = C_{11} = -C_{12}$. La charge Q accumulée par l'armature 1 du condensateur ($Q = Q_1 = -Q_{2i}$) est donc liée à la différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ entre les armatures du condensateur.

Elle peut alors s'écrire :

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \text{ ou } Q = C U, \text{ soit } Q_{2i} = -Q_1 = C(V_2 - V_1).$$

La charge Q emmagasinée par un condensateur est liée à la différence de potentiel U existant entre ses armatures par la relation :

$$Q = C U.$$

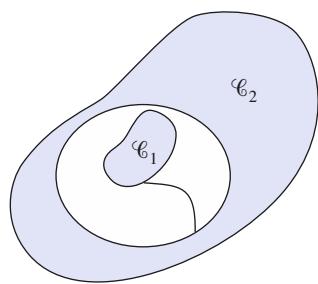
Le coefficient C est la capacité du condensateur.

Lorsque les armatures du condensateur sont reliées par un circuit électrique celui-ci peut libérer cette charge emmagasinée jusqu'à ce que la différence de potentiel entre ses armatures soit nulle.

La géométrie des armatures détermine la forme du potentiel dans la cavité, qui ne dépend pas de la présence d'éventuels conducteurs à l'extérieur de cette cavité (cf. Application 2).

La capacité est une caractéristique intrinsèque du condensateur, fixée par sa géométrie.

De plus, si le potentiel V_1 est supérieur au potentiel V_2 , les lignes de champ sont dirigées de \mathcal{C}_1 vers \mathcal{C}_2 . La charge Q est donc du signe de la différence de potentiel U : C est positive.



Doc. 11. Le condensateur est déchargé :

$$V_1 = V_2 \text{ et } Q_{2i} = -Q_1 = 0.$$

**La capacité C du condensateur est un facteur géométrique, positif.
Son unité est le farad (F).**

Remarque : C est homogène à $\epsilon_0 L$: $[C] = [\epsilon_0]L$, ϵ_0 s'exprime en $F \cdot m^{-1}$.

4.3. Modèles de condensateurs

Il n'est pas possible d'accéder à un conducteur enfermé dans la cavité d'un autre. Les condensateurs réels réalisent de façon approchée un cas d'influence totale.

4.3.1. Le condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques planes, de surface S , distantes de e .

Le cas d'influence totale est assez bien réalisé et nous pourrons évaluer convenablement la capacité de ce condensateur si son épaisseur e est faible devant les dimensions des plaques qui le constituent.

Lorsqu'une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ est imposée entre ses armatures, celles-ci acquièrent des charges opposées. Des charges de signes opposés s'attirent, de sorte que les charges se disposent essentiellement sur les faces en regard des plaques du condensateur, « à l'intérieur » du condensateur.

Les lignes de champ observées sont alors quasiment rectilignes et parallèles entre elles entre les armatures, comme indiqué sur le document 12a. Sur les bords du condensateur, elles « débordent » de celui-ci. Si l'épaisseur e est petite par rapport à la taille des armatures, ces zones où les lignes de champ sont distordues ne contiennent qu'une partie relativement faible de la charge accumulée par le condensateur. Par la suite, nous nous contenterons de négliger les effets de bords (doc. 12b).

Nous savons que lorsque les lignes de champ sont rectilignes et parallèles, le champ est uniforme. Le champ à l'intérieur du condensateur est donc de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z,$$

et la différence de potentiel entre les armatures vaut :

$$U = V_1 - V_2 = eE_0.$$

Le théorème de Coulomb nous indique d'autre part que la charge surfacique portée par l'armature 1 est :

$$\sigma_1 = \epsilon_0 \vec{e}_z \cdot \vec{E} = \epsilon_0 E_0 = -\sigma_2.$$

Remarque

Négliger les effets de bords revient à considérer que le champ du condensateur est, entre ses armatures, assimilable au champ engendré par deux plans infinis parallèles (portant des charges surfaciques uniformes et opposées).

Cette charge surfacique est uniforme et la charge de cette armature est :

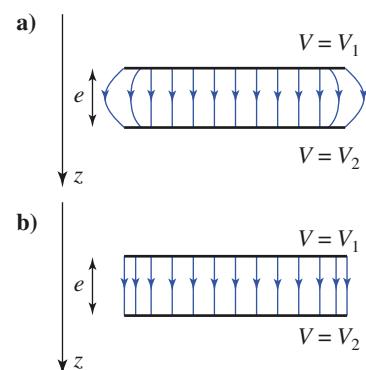
$$Q_1 = \sigma_1 S = Q = \epsilon_0 \frac{U}{e} S.$$

La capacité d'un condensateur plan de surface S et d'épaisseur e vaut :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}.$$

Remarque

Notre étude est a priori limitée aux seuls régimes statiques. L'étude du comportement d'un condensateur plan en régime variable, au chapitre 5, nous montrera que notre description du champ du condensateur reste valable dans l'A.R.Q.P., c'est-à-dire en pratique jusqu'à des fréquences très élevées.



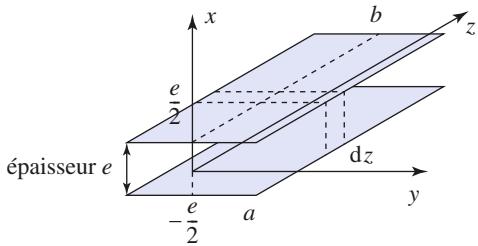
Doc. 12. Champ d'un condensateur plan :

- a) allure des lignes de champ ;
- b) effets de bord négligés.

Application 4

Étude des effets de bord d'un condensateur plan

Soit un modèle de condensateur plan, constitué de deux plaques métalliques rectangulaires, infiniment fines et distantes de e (doc. 13). On suppose que $e \ll a \ll b$.



Doc. 13. Condensateur plan, dont la surface des armatures est rectangulaire.

I. Condensateur plan idéal

Calculer la capacité C de ce condensateur plan, lorsque l'on néglige les effets de bord.

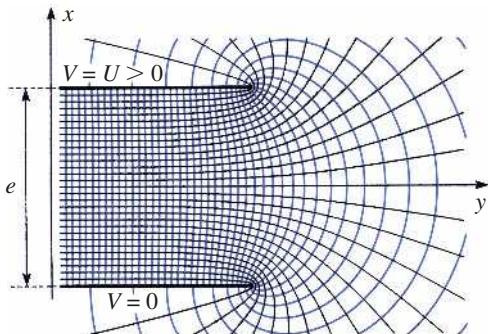
En déduire la capacité par unité de longueur \mathcal{C} , comptée dans la direction de sa grande dimension :

$$\mathcal{C} = \frac{dC}{db}.$$

II. Étude des effets de bord

1) On se propose d'étudier les effets de bord existant en $y = a$. Pour cela, on s'intéresse à une portion du condensateur de longueur dz .

L'armature de cote $x = -\frac{e}{2}$ est au potentiel $V = 0$ et celle de cote $x = \frac{e}{2}$ est au potentiel $V = U$ (on suppose $U > 0$). Le tracé des lignes de champ et des équipotentielles (dans un plan $z = \text{cte}$) apparaît sur le document 14.



Doc. 14. Mise en évidence des lignes de champ et des lignes équipotentielles au voisinage du bord d'un condensateur plan semi infini.

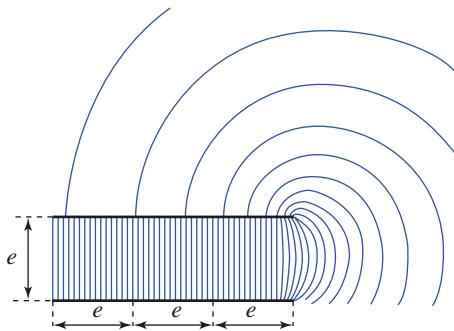
a) Commenter ces courbes.

En déduire un ordre de grandeur de la distance δ sur laquelle s'exercent les effets de bord.

b) La différence de potentiel ΔV entre deux équipotentielles est-elle constante ?

Quelle est sa valeur ?

2) Le tracé des lignes de champ est en fait tel que le flux du champ électrique E à travers tout tube de champ est une constante (doc. 15).



Doc. 15. Pour l'ensemble des tubes de champ de \vec{E} , le flux du champ électrique \vec{E} , à travers toute surface s'appuyant sur un tube de champ, est une constante $\Delta\Phi$ pour ce tracé.

a) Donner un ordre de grandeur de la charge Δq , « interceptée » sur les plaques du condensateur (profondeur Δz), par les divers tubes de champ de la simulation ?

Préciser la valeur de cette charge Δq en fonction de ϵ_0 , U et Δz .

b) Commenter la répartition des charges à l'intérieur du condensateur plan, à l'extérieur du condensateur plan, et à l'extrémité des plaques.

c) Les deux conducteurs sont-ils en influence totale ?

Comment pourrait-on estimer la capacité « parasite » constituée par l'extrémité du condensateur plan de largeur e , $2e$, $3e$, ... et de profondeur dz , en ne tenant compte que des charges « intérieures » et « extérieures » sur ces distances. (L'expression générale de la capacité n'est pas demandée, car la connaissance du champ à l'extérieur serait nécessaire.)

I. La capacité de ce condensateur plan vaut :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{e} = \epsilon_0 \frac{ab}{e}.$$

La capacité par unité de longueur est égale à :

$$\mathcal{C} = \frac{dC}{db} = \epsilon_0 \frac{a}{e}.$$

II. 1) a) Les lignes de champ perpendiculaires aux équipotentielles sont constituées de droites parallèles à « l'intérieur » du condensateur plan « idéal ». Nous pouvons estimer que les effets de bord existent sur une profondeur δ de l'ordre de e , épaisseur du condensateur plan.

b) Les équipotentielles sont régulièrement réparties dans la zone du « condensateur plan idéal » : la différence de potentiel ΔV entre deux équipotentielles voisines est donc une constante.

Cette différence de potentiel est égale à (doc. 14) :

$$\Delta V = \frac{U}{30}.$$

Comme ΔV est une constante, plus la distance entre deux équipotentielles est grande et plus le champ électrique est faible, et inversement.

2) a) Le long de tous les tubes de champ, la différence de potentiel est la même et vaut U .

La répartition surfacique $\sigma(Q)$ de charge en un point Q de la plaque est proportionnelle au champ électrique $\vec{E}(P)$ existant en un point P situé au voisinage immédiat de cette plaque :

$$\sigma(Q) = \epsilon_0 \vec{E}(P) \cdot \vec{N}(Q).$$

Le flux $\Delta\Phi$ du champ électrique étant constant pour l'ensemble des lignes de champ, la quantité $\Delta\Phi = \vec{E}(P) \cdot \vec{N}(Q) \Delta S$ est proportionnelle à la charge interceptée Δq par ces tubes de champ :

$$\Delta q = \epsilon_0 \Delta\Phi.$$

Dans la zone du « condensateur plan idéal », la relation liant $\Delta\Phi$ et U est connue. En notant h la distance entre deux lignes de champ voisines dans la zone de champ uniforme (graphiquement, nous avons $h = \frac{e}{20}$, cf. doc. 15), cela donne :

$$Eh\Delta z = \Delta\Phi;$$

avec $E = \frac{U}{e}$:

$$\Delta q = \epsilon_0 \frac{U}{e} h \Delta z = \epsilon_0 \frac{U}{20} \Delta z.$$

Dans une zone sans charge, plus les lignes de champ sont serrées et plus le champ est important. Le champ le plus intense existe donc à l'extrémité des plaques du condensateur.

b) • À l'intérieur du condensateur plan, dans la zone « condensateur plan idéal », les charges sont en répartition uniforme. Ce qui n'est pas le cas au voisinage du bord, car la répartition surfacique de charge augmente lorsque l'on s'approche de l'extrémité.

• À l'extérieur du condensateur plan, il existe des charges, mais de répartition diminuant rapidement en s'écartant de l'extrémité.

• À l'extrémité des plaques, il existe une densité surfacique de charge quasiment infinie.

c) Toutes les lignes de champ issues d'un conducteur vont sur l'autre. Ces deux conducteurs sont donc en influence totale : il est possible de parler de capacité. Les divers tubes de champ permettent de définir des capacités élémentaires dc toutes identiques : $dc = \epsilon_0 \frac{h dz}{e} = \epsilon_0 \frac{dz}{20}$.

Ces capacités sont associées en parallèle. Pour déterminer la capacité parasite, il suffit de compter le nombre n de tubes de champ arrivant sur les plaques : $dC = ndc$. Ainsi pour les diverses largeurs e , $2e$ et $3e$, on pourrait écrire :

largeur L	\mathcal{C} « mesuré »	\mathcal{C} « attendu »	écart relatif
e	$30,3 \frac{\epsilon_0}{20} \approx 1,51 \epsilon_0$	ϵ_0	50 %
$2e$	$52 \frac{\epsilon_0}{20} \approx 2,6 \epsilon_0$	$2\epsilon_0$	30 %
$3e$	$73 \frac{\epsilon_0}{20} \approx 3,6 \epsilon_0$	$3\epsilon_0$	20 %

Doc. 16. Quelques valeurs de la capacité par unité de longueur.

Le tableau met bien en évidence les effets de bord.

4.3.2. Le condensateur cylindrique

Les armatures du condensateur cylindrique sont deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 et de hauteur h (doc. 17).

Nous négligerons, ici encore, les effets de bord liés au caractère fini de la longueur h . Cela revient à « renvoyer à l'infini » les extrémités du condensateur. Tout se passe, dans cette approximation, comme si le système était non seulement de révolution autour de l'axe (Oz), mais aussi invariant par translation parallèlement à l'axe (Oz).

Dans ces conditions, le potentiel est, en coordonnées cylindriques, de la forme :

$$V(r, \theta, z) = V(r).$$

Dans l'espace vide de charge séparant les armatures, le champ est à flux conservatif. En effet, à travers un cylindre de hauteur h et de rayon r compris entre R_1 et R_2 , son flux ne dépend pas de r et vaut :

$$2\pi rhE(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

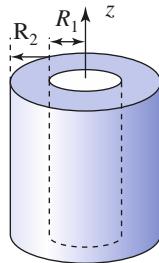
Nous en déduisons : $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{\vec{e}_r}{r}$, puis :

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

La capacité du condensateur cylindrique est donc :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

quantité positive, homogène à $\epsilon_0 L$.



Doc. 17. Condensateur cylindrique.

Application 5

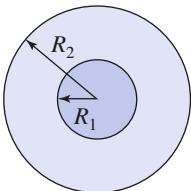
Capacité d'un condensateur sphérique

Utiliser le même type de raisonnement pour exprimer la capacité d'un condensateur sphérique, constitué par deux armatures sphériques concentriques, de rayons R_1 et R_2 (doc. 18).

Interpréter ce résultat lors que la différence relative des rayons est très faible.

Pour ce système à symétrie sphérique, le champ et le potentiel sont de la forme :

$$V(r, \theta, \phi) = V(r)$$



Doc. 18. Condensateur sphérique.

$$\text{et } \vec{E}(r, \theta, \phi) = E(r)\vec{e}_r = -\frac{dV(r)}{dr}\vec{e}_r.$$

En appliquant le théorème de Gauss à une sphère de rayon r , compris entre R_1 et R_2 nous obtenons :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} U &= V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \end{aligned}$$

puis la capacité (positive) :

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}.$$

Lorsque les deux rayons sont relativement proches, notons $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$.

Nous avons alors :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 + e} \approx \frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{e}{R_1}\right),$$

soit :

$$C \approx \frac{4\pi R_1^2 \epsilon_0}{e} = \frac{\epsilon_0 S}{e},$$

expression analogue à celle obtenue pour le condensateur plan.

4.3.3. Condensateurs utilisés dans les circuits électriques : ordres de grandeur

La constante diélectrique du vide est :

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}.$$

La capacité d'un condensateur plan placé dans le vide, constitué par des armatures de surface $S = 10 \text{ cm}^2$ et séparées de $e = 1 \text{ mm}$, est :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \approx 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 8,8 \text{ pF}.$$

Cette valeur est très faible, puisqu'en général les capacités des condensateurs utilisés en électronique vont de quelques picofarads à quelques microfarads.

Le condensateur que nous avons envisagé est pourtant assez encombrant ($S = 10 \text{ cm}^2$!)

Pour augmenter cette valeur nous avons plusieurs possibilités.

- Placer un matériau isolant entre les armatures : la permittivité diélectrique ϵ_0 du vide est alors remplacée par celle, notée $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, du milieu diélectrique utilisé.

La permittivité relative ϵ_r est de l'ordre de 2 ou 3 pour les condensateurs à film plastique.

Elle peut être de l'ordre de quelques milliers pour les condensateurs à céramique (les armatures en aluminium sont séparées par un diélectrique à base de titanate de baryum BaTiO_3).

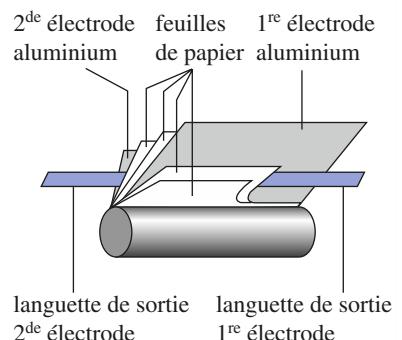
- Diminuer l'écartement entre les armatures : les armatures des condensateurs sont séparés par un film isolant.

Remarque

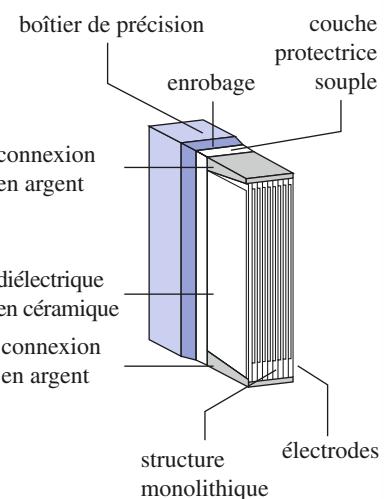
Le condensateur possède une tension maximale d'utilisation. Diminuer l'épaisseur du condensateur accroît sa capacité, mais augmente aussi le champ électrique (pour une différence de potentiel donnée). Un champ trop important peut provoquer l'ionisation du milieu situé entre les armatures (claquage du diélectrique).

- Augmenter la surface de ses armatures, mais en limitant son encombrement, ce qui justifie les structures enroulées (doc. 19) ou feuillettées (doc. 20) des condensateurs utilisés comme composants électroniques.

Ces modifications permettent d'atteindre des valeurs de capacités usuelles pour réaliser des montages électroniques.



Doc. 19. Condensateur à structure enroulée.



Doc. 20. Condensateur à structure feuillettée.

Remarques

- Les condensateurs électrolytiques, qui sont polarisés, ont des capacités importantes qui vont de $1 \mu\text{F}$ à $10\,000 \mu\text{F}$.
- En régime variable, les variations de la polarisation imposées au diélectrique introduisent des pertes et limitent la fréquence d'utilisation des composants. Les condensateurs à film plastique ont une bande d'utilisation large, allant jusqu'au GHz. Les condensateurs multicouches sont utilisables jusqu'à quelques 100 MHz. La fréquence maximale d'utilisation d'un condensateur électrolytique reste, en revanche, de l'ordre de 10 kHz.

4.4. Complément : énergie du condensateur**4.4.1. Énergie emmagasinée**

L'accumulation de charge sur les armatures d'un condensateur nécessite un apport d'énergie. Lorsque l'interrupteur représenté sur le document 21 est en position 1, l'équation électrique du circuit est :

$$U = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}, \text{ avec } i(t) = \frac{dq(t)}{dt}.$$

Si le condensateur est initialement non chargé, nous obtenons :

$$q(t) = CU \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = RC.$$

La charge finale accumulée par le condensateur est :

$$Q = q(t = \infty) = CU.$$

Au travail électrique du générateur :

$$W_{\text{générateur}} = \int_{t=0}^{\infty} U i(t) dt = QU = CU^2,$$

nous devons retrancher l'énergie absorbée par effet Joule dans la résistance R et évacuée par transfert thermique :

$$Q_{\text{Joule}} = \int_{t=0}^{\infty} R i^2(t) dt = \frac{U^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{2} CU^2,$$

pour exprimer l'énergie reçue par le condensateur :

$$W_{\text{générateur}} - Q_{\text{Joule}} = \frac{1}{2} CU^2.$$

Réciproquement, le condensateur ayant accumulé la charge Q , laissez-le se décharger, l'interrupteur devenant passant en position 2 à l'instant $t' = 0$.

Nous avons alors :

$$0 = Ri(t') + \frac{q(t')}{C}, \text{ donc } q(t') = Q e^{-\frac{t'}{\tau}} \text{ et } i(t') = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t'}{\tau}}.$$

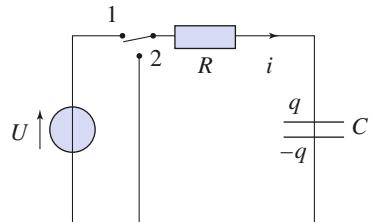
L'énergie libérée par le condensateur est dissipée par effet Joule :

$$Q'_{\text{Joule}} = \int_{t'=0}^{\infty} R i^2(t') dt' = \frac{1}{2} CU^2.$$

L'énergie que le condensateur a reçue lors de la charge est donc restituée lors de sa décharge.

Lorsqu'un condensateur accumule la charge $Q = CU$, il stocke l'énergie :

$$\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$



Doc. 21. Charge d'un condensateur

4.4.2. Énergie du champ

En se déchargeant, le condensateur libère la charge accumulée et perd cette énergie stockée. Ceci correspond aussi à l'annulation du champ électrique régnant entre ses armatures (hors du condensateur, le champ n'est pas modifié, (*cf. doc. 11*)).

L'amplitude du champ régnant dans le condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel entre ses armatures.

L'énergie du condensateur est donc une fonction quadratique de l'amplitude de son champ électrique.

Considérons le cas du condensateur plan ; l'énergie stockée est de la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{2}CU^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} (Ee)^2 = \frac{\epsilon_0 S E^2}{2} \\ &= \frac{\epsilon_0 E^2}{2} V,\end{aligned}$$

où $V = Se$ est le volume du condensateur dans lequel règne le champ E .

La grandeur $\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ est donc homogène à une énergie par unité de volume.

Accumuler une charge électrique dans le condensateur revient à emmagasiner de l'énergie en créant un champ électrique. D'après le résultat précédent, il serait logique d'associer au champ électrique une énergie volumique :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Cela marche pour le condensateur plan, pour lequel le champ est uniforme entre ses armatures. Nous pouvons nous demander si ce résultat est généralisable à tout condensateur, sous la forme :

$$\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \iiint_{\substack{\text{entre ses} \\ \text{armatures}}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau.$$

Prenons comme nouvel exemple le cas du condensateur cylindrique (*cf. § 4.2.2*). Q étant la charge portée par l'armature intérieure, de rayon R_1 , nous avons obtenu l'expression du champ régnant entre ses armatures :

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{\vec{e}_r}{r}.$$

Calculons alors l'intégrale volumique précédente :

$$\iiint_{\substack{\text{entre ses} \\ \text{armatures}}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r} \right)^2 h 2\pi r dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

où $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ est la capacité du condensateur cylindrique, que nous avons

déjà déterminée. L'intégrale coïncide donc bien avec l'énergie emmagasinée par le condensateur. Nous pourrons vérifier ce fait pour d'autres condensateurs ; ce résultat est général.

Au champ électrique \vec{E} peut être associée l'énergie volumique :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

L'identification des expressions :

$$\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \iiint_{\substack{\text{entre ses} \\ \text{armatures}}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

de l'énergie emmagasinée par un condensateur permet la détermination de l'expression de sa capacité.

Application 6

Capacité d'un condensateur sphérique

Appliquer cette méthode pour retrouver l'expression de la capacité du condensateur sphérique.

Nous savons que le champ du condensateur est :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{e}_r}{r},$$

entre ses armatures (avec $R_1 < r < R_2$).

Nous en déduisons :

$$\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \iiint_{\substack{\text{entre ses} \\ \text{armatures}}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{condensateur}} &= \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \end{aligned}$$

On obtient bien la capacité du condensateur sphérique :

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}.$$

4.4.3. Stockage de l'énergie sous forme électrique

Considérons un condensateur plan constitué par deux armatures de surface $S = 10 \text{ cm}^2$, séparées de $e = 1 \text{ mm}$. Rappelons que sa capacité est $C = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F}$.

Si le milieu situé entre les armatures n'est pas le vide mais de l'air, nous pouvons encore évaluer la capacité du condensateur en utilisant la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 . Nous ne pourrons cependant pas charger le condensateur sous une différence de potentiel trop élevée : un champ de l'ordre de $3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ peut provoquer l'ionisation de l'air (sec).

Remarque

La tension correspondante est $U = 3 \text{ kV}$, alors que la charge accumulée vaut $Q = CU \approx 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ coulombs}$. La tension est élevée, alors que la charge est très faible (un courant de 1 mA transporte en une seconde environ 3 800 fois la charge emmagasinée ici). Le domaine de l'électrostatique est celui des grandes tensions et des faibles charges. C'est un domaine assez peu

courant, car les systèmes physiques présentant des séparations de charges ne restent jamais bien longtemps dans cet état. L'observation de courants électriques dans des milieux électriquement neutres est beaucoup plus usuelle.

L'énergie volumique maximale associée au champ, $\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$, est de l'ordre de $40 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$.

Dans le condensateur envisagé, nous stockerons ainsi une énergie restituée d'environ $0,4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$, ce qui est extraordinairement peu : c'est l'énergie nécessaire au fonctionnement d'une plaque de cuisson électrique de 1 kW pendant un temps inférieur à la microseconde !

De fait, il est difficilement envisageable de stocker de l'énergie sous forme électromagnétique (nous pourrions essayer de la stocker dans une bobine, sous forme magnétique), car les valeurs obtenues sont sans commune mesure avec les énergies couramment requises.



● CONDUCTEUR EN ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE

- Dans un conducteur à l'*équilibre électrostatique*, le champ électrique est nul. Les charges qu'il porte sont réparties à la surface.

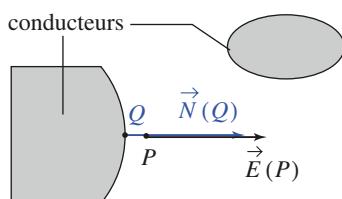
Le volume occupé par un conducteur à l'équilibre est un volume équipotentiel. La surface du conducteur est une surface équipotentielle.

Il est impossible de définir le champ électrostatique en un point situé *sur* la surface d'un conducteur.

• Théorème de Coulomb

En un point P situé au voisinage immédiat d'un point Q de la surface d'un conducteur à l'équilibre, le champ, normal, est donné par :

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{N}(Q).$$



● SYSTÈME DE CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE

• Solution de l'équation de Laplace

L'équilibre électrostatique de conducteurs $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$, mis en présence et maintenus aux potentiels V_1, \dots, V_n , peut être déterminé en trouvant l'*unique fonction potentiel scalaire* V , prise nulle à l'infini, qui est solution de l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ dans l'espace séparant les conducteurs.

Remarque : On peut imposer une charge donnée au conducteur à la place d'un potentiel.

• Influence électrostatique et charge par influence

Approcher un conducteur chargé \mathcal{C}_1 d'un conducteur \mathcal{C}_2 influence la répartition de charge sur \mathcal{C}_2 . Si \mathcal{C}_2 est isolé, sa charge totale reste constante, mais ses charges surfaciques sont modifiées. Si \mathcal{C}_2 est maintenu à un potentiel donné, sa charge totale est modifiée par la présence de \mathcal{C}_1 . Cette influence est annulée dans une éventuelle cavité de \mathcal{C}_2 , porté à un potentiel imposé, qui joue un rôle d'*écran électrique*.

• Détermination de l'équilibre

Une superposition d'états d'équilibre électrostatique d'un ensemble de conducteurs est encore un état d'équilibre de ce système.

• Conducteurs en état d'influence totale

Deux conducteurs sont en état d'*influence totale* si toute ligne de champ partant de l'un aboutit à l'autre. Ces conducteurs portent alors des charges en regard opposées.

Placer un conducteur dans la cavité d'un second conducteur permet d'obtenir deux armatures métalliques en état d'influence totale.

● CONDENSATEURS

Deux conducteurs en état d'influence totale définissent un condensateur, qui accumule des charges électriques opposées sur ses armatures lorsqu'une différence de potentiel est imposée entre celles-ci.

• Capacité d'un condensateur

La charge Q emmagasinée par un condensateur est liée à la différence de potentiel U existant entre ses armatures par la relation :

$$Q = CU.$$

Le coefficient C est la *capacité* du condensateur ; c'est un facteur géométrique, positif et son unité est le farad (F). Une capacité est homogène à $[\epsilon_0] L$.

La capacité d'un condensateur plan de surface S et d'épaisseur e vaut :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}.$$

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Quelles sont les caractéristiques du champ et du potentiel à l'intérieur d'un conducteur en équilibre ?
- ✓ Ses charges sont-elles réparties en surface ou en volume ?
- ✓ Comment définir l'influence électrostatique ?
- ✓ Expliquer comment un champ électrique uniforme influe sur la charge d'une sphère initialement neutre et isolée.
- ✓ Quelle équation au potentiel doit être satisfaite dans l'espace interconducteur pour un ensemble de conducteurs en équilibre ?
- ✓ Qu'est-ce que l'influence totale ?
- ✓ Définir la capacité d'un condensateur.
- ✓ Comment la détermination du potentiel permet-elle de connaître le champ électrique et les charges des conducteurs en équilibre.
- ✓ Que peut-on dire de la solution de $\Delta V = 0$ avec des conditions aux limites déterminées.

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. À l'intérieur d'une cavité creusée dans un conducteur à l'équilibre :

- a. le champ électrique est nul
- b. le potentiel est nul
- c. la densité surfacique de charge sur la face interne de la cavité est uniforme
- d. le vecteur densité de courant surfacique sur la face interne de la cavité est nul
- e. on ressent les effets d'un conducteur extérieur.

2. Deux éléments correspondants :

- a. portent la même charge
- b. portent deux charges opposées
- c. sont reliés par un tube de champ.

3. Soit une sphère conductrice de rayon R maintenue au potentiel U > 0 et une charge -e en influence :

- a. les lignes de champ vont de la charge vers la sphère
- b. la sphère acquiert une charge -e

- c. la sphère acquiert une charge $4\pi\epsilon_0RU$
- d. les deux conducteurs sont en influence totale
- e. les surfaces équipotentielles près de la sphère et de la charge sont des sphères.

4. La capacité d'un condensateur plan vaut :

- a. $\frac{\epsilon_0 S}{d}$ si l'espace entre les plaques est vide
- b. $\frac{\epsilon_0 S}{d}$ quel que soit le milieu entre les plaques.

5. La capacité d'un condensateur :

- a. s'exprime en F . m⁻¹
- b. est une grandeur dépendant uniquement de la géométrie des conducteurs en influence totale
- c. est toujours positive
- d. est d'autant plus grande que le condensateur permet une accumulation de charge importante pour une différence de potentiel appliquée fixée.

► Solution, page 122.

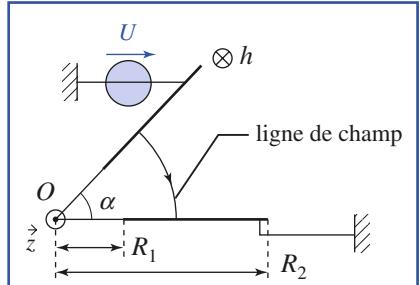
Exercice commenté

Condensateur diédrique

ÉNONCÉ

Le condensateur diédrique est formé par deux armatures rectangulaires planes de surface $S = h(R_1 - R_2)$, qui font entre elle un angle α . Dans le cas où on néglige les effets de bord, les lignes de champ sont des arcs de cercles d'axe (Oz).

- 1) Quelle est la forme des équipotentielles dans le condensateur ?
- 2) La répartition des charges sur les armatures sera-t-elle uniforme ?
Déterminer la répartition de ces charges.
- 3) Quelle est la capacité du condensateur ?
- 4) Calculer l'énergie stockée par le condensateur à l'aide de la densité volumique d'énergie associée au champ et retrouver ainsi l'expression de la capacité du condensateur.



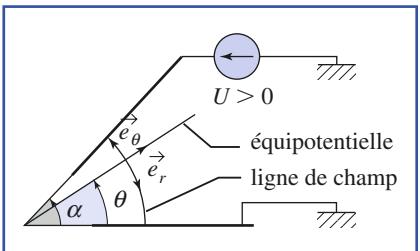
CONSEILS

Le champ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

Le champ ne dépend pas de z si l'on néglige les effets de bord, ce qui revient à considérer que tout se passe comme si h était infinie

SOLUTION

- 1) Les lignes de champ étant des arcs de cercle d'axe (Oz), les surfaces équipotentielles sont les plans contenant l'axe du dièdre.



- 2) Les charges de signes opposées, portées par les armatures, s'attirent. Elles auront donc tendance à s'accumuler préférentiellement sur le côté des plaques proche de l'axe du dièdre.

Le champ électrostatique du condensateur est de la forme :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E(r, \theta) \vec{e}_\theta.$$

Entre les armatures, son flux est conservatif.

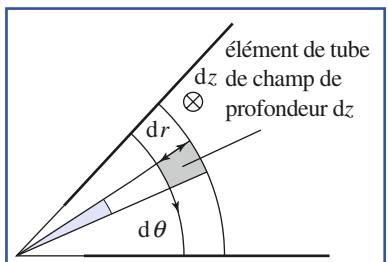
Il est donc le même à travers les sections d'un petit tube de champ de section $dz dr$, dont les côtés sont des arcs de cercle d'axe (Oz).

On en déduit :

$$E(r, \theta) dz dr = E(r, \theta + d\theta) dr dz.$$

Le champ est donc plus simplement de la forme :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E(r) \vec{e}_\theta.$$



Sa circulation le long d'un arc de cercle reliant les deux armatures donne (au signe près) la différence de potentiel U , de sorte que :

$$E(r) r \alpha = -U.$$

Finalement, on retrouve $\vec{E}(r, \theta, z) = -\frac{U}{\alpha r} \vec{e}_\theta$.

Le théorème de Coulomb permet alors de calculer la charge surfacique des armatures.

Sur l'armature reliée à la terre, elle vaut :

$$\sigma_0(r) = -\frac{\epsilon_0 U}{\alpha r}.$$

La charge portée par l'armature d'équation $\theta = \alpha$ est opposée, soit :

$$\sigma_\alpha(r) = \frac{\epsilon_0 U}{\alpha r}.$$

3) La charge emmagasinée par le condensateur vaut :

$$Q = \int_{r=R_1}^{R_2} \sigma_\alpha(r) h dr = \frac{\epsilon_0 h U}{\alpha} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

La capacité du condensateur diédrique est donc :

$$C = \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Cette quantité est bien homogène à $[\epsilon_0]L$.

4) L'énergie emmagasinée est :

$$\mathcal{E} = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau = \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\theta=0}^{\alpha} \frac{\epsilon_0}{2} \frac{U^2}{\alpha^2 r^2} h dr r d\theta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 h U^2}{\alpha} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

entre les
armatures

En l'identifiant à $\frac{1}{2} C U^2$, on retrouve bien la capacité précédemment déterminée.

Exercices

1 Charges obtenues par influence

L'origine des potentiels est prise à l'infini. Le sol est également au potentiel nul.

On considère un conducteur (éventuellement lié électriquement au sol) et un corps chargé, presque ponctuel, de charge Q_0 positive.

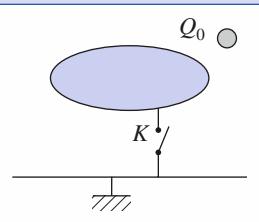
On suppose que ce système n'est soumis à aucune autre influence électrique.

1) K est fermé.

Déterminer le signe de la charge Q du conducteur.

2) On considère un second équilibre où K est ouvert, le conducteur étant globalement neutre.

Déterminer le signe du potentiel V du conducteur.



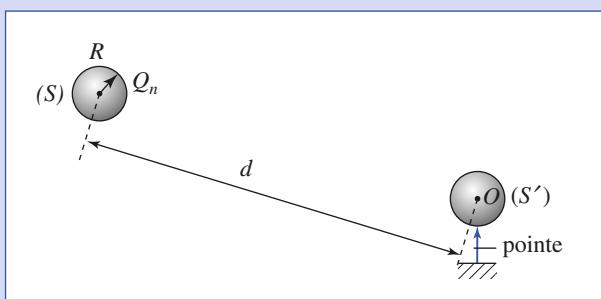
2 Sphères électrisées

Une sphère S de rayon R porte la charge initiale Q_0 .

Son centre est à distance $d \gg R$ de l'origine. Une autre sphère S' (identique à S) est centrée en O et posée sur une pointe conductrice reliée au sol par un fil conducteur.

On déplace S' jusqu'à l'amener au contact de S , puis on la ramène dans sa position initiale.

Quelle est la charge portée par S après cet aller-retour ? Généraliser au cas de n allers-retours.

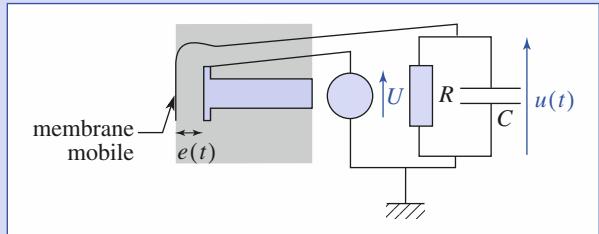


3 Microphone électrostatique

Un microphone électrostatique utilise la variation de capacité d'un condensateur plan de section S . Ses armatures sont séparées par une distance $e(t)$ qui varie en fonction du déplacement de l'armature mobile, la membrane, lorsqu'elle reçoit une onde sonore. De tels microphones peuvent être de taille réduite (quelques mm pour certains) et permettent une exploration sonore d'un milieu avec un minimum de perturbation. Ce microphone est placé dans

le circuit électrique représenté ci-dessous, qui fait apparaître une source de tension constante U et un oscilloscope représenté par un circuit (R, C) en parallèle. L'épaisseur du condensateur contenu dans le microphone est notée $e(t) = e_0 + \delta e(t)$, avec $\delta e(t) \ll e_0$.

On désigne par C_0 la capacité de ce condensateur lorsque $e = e_0$. On supposera que les lois de l'électrostatique restent valables en régime variable (A.R.Q.P.).



1) Quelle est l'équation différentielle, linéarisée, liant $u(t)$ et le déplacement $\delta e(t)$?

2) Quelle est la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{u}{\delta e}$ du système en régime sinusoïdal permanent ?

Dans quelles conditions ce système constitue-t-il un capteur de déplacement ?

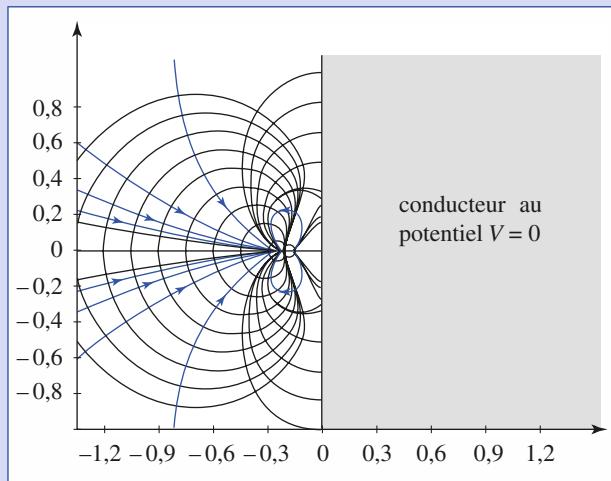
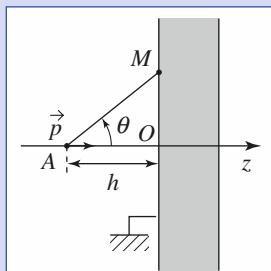
4 Dipôle placé devant un plan conducteur

Un dipôle de moment :

$$\vec{p} = p \vec{e}_z$$

est placé à la distance h d'un plan conducteur, d'équation $z = 0$, maintenu au potentiel nul.

Quelques lignes de champ et traces de surfaces équipotentielles sont représentées ci-dessous.



1) Proposer une situation électrostatique, où le plan conducteur est remplacé par une distribution de charges « équivalente » très simple, qui nous permet de calculer sans difficulté le champ et le potentiel électrostatiques dans la zone $z < 0$.

2) Quelle est la charge surfacique $\sigma(\theta)$ portée par le plan conducteur à l'équilibre électrostatique ?

3) La charge portée par la portion du plan conducteur vue sous l'angle θ est notée $q(\theta)$. Tracer l'allure de la courbe donnant les variations de la « densité angulaire » de charge $\frac{dq}{d\theta}$ en fonction de l'angle θ .

Quelle remarque peut-on faire au sujet de ce graphe ?

4) Montrer qu'il existe, sur le plan conducteur, une ligne neutre, c'est-à-dire caractérisée par :

$$\sigma(\theta) = 0.$$

Vérifier la position de celle-ci à l'aide du schéma des lignes de champ.

5) Quelle est la force subie par le dipôle \vec{p} ?

5 Loi de Coulomb et masse du photon

L'interaction électromagnétique entre particules chargées est une interaction véhiculée par le photon, particule de masse nulle. On s'intéresse ici à d'éventuelles modifications apportées à l'électrostatique par une éventuelle masse m_γ du photon, qui conduirait à une modification des équations de Maxwell.

On utilise dans ce cas l'équation :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{1}{d^2} V,$$

avec $d = \frac{\hbar}{m_\gamma c}$ ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$, où h est la constante de Planck

et $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ la vitesse de la lumière dans le vide),

\vec{E} le champ électrique et V le potentiel.

1) Masse de la particule et portée de l'interaction

a) Quelle est la dimension de la constante d ?

b) Quelle est l'équation satisfait par le potentiel scalaire V ?

c) Comparer les comportements de la fonction potentiel scalaire $V(r)$ associée à une charge localisée au voisinage de l'origine O (pour r supérieur au rayon supposé « petit » de la charge) dans les cas $m_\gamma = 0$ et $m_\gamma > 0$. Le laplacien scalaire est donné ci-dessous, on utilisera la fonction $f(r) = rV(r)$ pour résoudre l'équation différentielle de $V(r)$.

Quelle portée peut-on associer à l'interaction électromagnétique dans le cas d'une masse du photon égale à m_γ ? Que vaut-elle si la masse du photon est nulle ?

2) Limite supérieure de la masse du photon

Une sphère métallique creuse, de rayon R et de centre O , porte une charge électrique Q uniformément répartie sur sa surface.

a) Dans le cas d'une masse nulle du photon, quelle est la charge portée par la surface intérieure de la sphère creuse, et quelle est la valeur du potentiel en tout point de l'espace ?

Puis on s'intéresse à la modification de ces résultats par une éventuelle masse du photon.

On notera $V_0 = V(r=0)$ la valeur du potentiel au centre de la sphère.

b) En distinguant les zones $r > R$ et $r < R$, indiquer les formes *a priori* acceptables pour la fonction potentiel, nulle à l'infini. Achever la détermination du potentiel scalaire à l'aide des conditions aux limites.

c) Montrer que la discontinuité « usuelle » du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée reste valable. En déduire la relation liant V_0 à la charge Q portée par la sphère.

d) La masse du photon étant dans tous les cas peu élevée, on considère que $R \ll d$. Évaluer dans ces conditions la différence de potentiel δV entre un point de la sphère de rayon R et un point situé à une distance $R' < R$.

e) Pour $R = 72$ cm et $R' = 61$ cm, la mesure de cette différence de potentiel donne :

$$\left| \frac{\delta V}{V_0} \right| \approx 0,03 \cdot 10^{-9}.$$

Comparer la limite supérieure de la masse du photon correspondant à ce résultat à la masse m_e de l'électron.

Données : Le laplacien d'une fonction à symétrie sphérique que $V(r, \theta, \varphi) = V(r)$ est :

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV(r))}{\partial r^2}.$$

Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Constante de Planck : $\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J · s.

6 Sphère placée dans un champ uniforme

Une sphère conductrice de rayon R , globalement neutre, est placée dans un champ électrostatique uniforme :

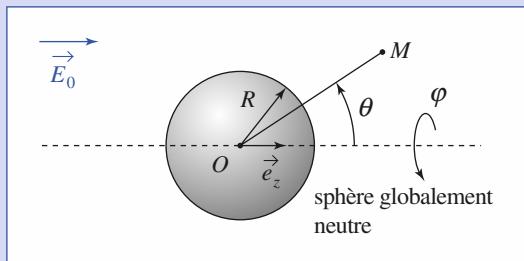
$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z.$$

La sphère est prise comme origine des potentiels.

Cette situation est étudiée dans l'*application 1*.

Exercices

On se propose de retrouver l'équilibre électrostatique par deux autres méthodes : une superposition « adéquate et équivalente » et une résolution de l'équation de Laplace.



1) Une superposition adéquate

Proposer une analogie avec un dipôle électrostatique pour déterminer le champ en tout point extérieur à la sphère.

Calculer alors le champ et le potentiel électrostatiques en tout point, puis la charge surfacique sur la sphère.

2) Résolution de l'équation de Laplace

On cherche le potentiel sous la forme d'une fonction à variables séparées :

$$V(r, \theta, \varphi) = u(r)v(\theta)w(\varphi),$$

en coordonnées sphériques.

a) Déterminer $w(\varphi)$.

b) Pourquoi $v(\theta) = \cos \theta$ est-elle une solution acceptable ?

c) Chercher des solutions de la forme $u(r) = r^n$ pour conclure.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 117.

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1. Vrai : a, d ; | Faux : b, c, e |
| 2. Vrai : b, c ; | Faux : a |
| 3. Vrai : e ; | Faux : a, b, c, d |
| 4. Vrai : a ; | Faux : b |
| 5. Vrai : c, d ; | Faux : a, b |

2) Les lignes de champ issues de la charge Q_0 et arrivant sur le conducteur définissent une zone chargée négativement.

Comme le conducteur est neutre, il existe donc une zone chargée positivement. Les lignes de champ qui en sont issues ne peuvent aller que sur le sol ou à l'infini.

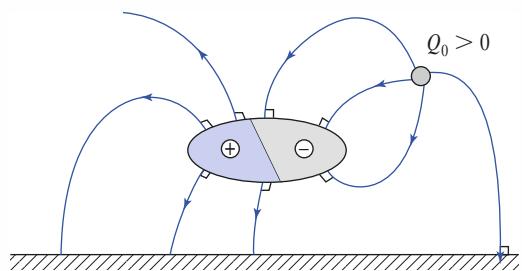
Comme le potentiel décroît le long d'une ligne de champ parcourue dans le sens de \vec{E} , on en conclut que V est positif.

1

On peut deviner l'orientation des lignes de champ, qui « descendant » les potentiels, car cette orientation détermine le signe de la charge surfacique du conducteur sur laquelle la ligne de champ aboutit, d'après le théorème de Coulomb.

1) K étant fermé, le potentiel du conducteur est nul : une ligne de champ ne peut pas ici relier le conducteur au sol ou à l'infini.

Les lignes de champ qui arrivent sur le conducteur sont donc issues de la charge Q_0 . Comme cette charge est positive, les lignes de champ sont orientées vers le conducteur et la densité superficielle de charge est négative (ou nulle) en tout point de la surface. Q est donc négatif.



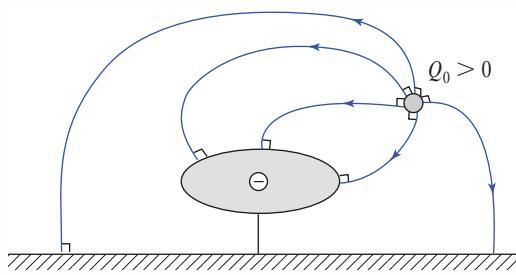
2

On étudie la sphère S' , initialement au potentiel nul. Ce potentiel est dû aux charges Q'_0 (situées à la distance R du point O , centre de S') et aux charges Q_0 (situées à la distance d du même point O , car $d \ll R$).

État initial

$$0 = V(0) \approx \frac{Q'_0}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 d}, \text{ soit } Q'_0 \approx -\frac{R}{d}Q_0.$$

Ce n'est pas parce qu'un conducteur est au potentiel nul que sa charge l'est aussi !



Corrigés

- La sphère S' est ensuite décollée du contact et sa charge reste constante jusqu'à ce qu'elle touche S . Le système des deux sphères, symétrique, correspond alors à la répartition de la charge :

$$\frac{Q_0 + Q'_0}{2} = Q_0 + \frac{1 - \frac{R}{d}}{2}$$

sur chacune des deux sphères.

- Les deux sphères sont décollées et S' est ramenée au contact de potentiel nul : après un aller-retour, l'état du système est donc le suivant :

$$\begin{cases} Q_1 = Q_0 + \left(\frac{1 - \frac{R}{d}}{2} \right) \\ Q'_1 = -\frac{R}{d} Q_1 \end{cases}$$

Après $n + 1$ aller-retour, la charge portée par S est ainsi :

$$Q_{n+1} = Q_n \frac{1 - \frac{R}{d}}{2}$$

et celle portée par S' :

$$Q'_{n+1} = -\frac{R}{d} Q_{n+1}.$$

On en déduit finalement :

$$Q_n = Q_0 \left(\frac{1 - \frac{R}{d}}{2} \right)^n$$

où n est le nombre d'allers-retours effectués.

- 3** 1) Soit $q(t) = \frac{\epsilon_0 S}{e(t)} (U - u(t))$ la charge portée par l'armature fixe du condensateur du microphone.

En régime permanent, les valeurs de e , q et u sont :

$$e = e_0, q = q_0 = C_0 U \text{ et } u = u_0 = 0.$$

En régime variable, on note donc :

$$e(t) = e_0 + \delta e(t), q(t) = q_0 + \delta q(t).$$

On trouve :

$$\begin{aligned} U &= u(t) + \frac{1}{\epsilon_0 S} (e_0 + \delta e(t))(q_0 + \delta q(t)) \\ &= u(t) + U \left(1 + \frac{\delta e(t)}{e_0} \right) \left(1 + \frac{\delta q(t)}{q_0} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

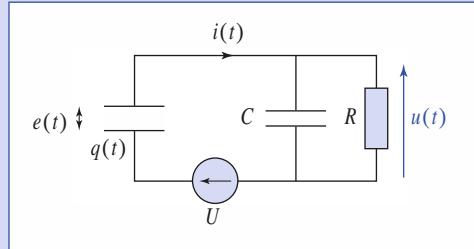
Les variations relatives de l'épaisseur sont très faibles et celles de la charge q le sont aussi.

À l'ordre linéaire, l'équation (1) prend la forme :

$$0 = u(t) + \frac{\delta q(t)}{C_0} + U \frac{\delta e(t)}{e_0}.$$

D'autre part, le courant traversent le circuit est :

$$i(t) = \frac{d(\delta q(t))}{dt} = C \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R}.$$



On en déduit l'équation différentielle liant $u(t)$ au déplacement $\delta e(t)$ de la membrane du microphone :

$$\left(1 + \frac{C}{C_0} \right) \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{RC_0} = -\frac{U}{e_0} \frac{d(\delta e(t))}{dt}.$$

2) En régime sinusoïdal permanent, l'utilisation de la notation complexe donne immédiatement :

$$H(j\omega) = \frac{U}{e_0} \frac{-jR C_0 \omega}{jR C_0 \omega \left(1 + \frac{C}{C_0} \right) + 1}.$$

Ce transfert dépend peu de ω si $\omega \gg \frac{1}{R(C + C_0)}$. Dans cette zone de fréquences, les grandeurs $u(t)$ et $\delta e(t)$ sont simplement proportionnelles :

$$u(t) = -\frac{U}{e_0} \frac{\delta e(t)}{\left(1 + \frac{C}{C_0} \right)}$$

et le système constitue un capteur de déplacement.

4 1) On utilise une analogie avec ce qui a été vu dans le *cours*, dans le cas d'une charge q en présence d'un plan conducteur porté au potentiel $V = 0$. On modélise le dipôle par un doublet de charges $+q$ et $-q$, distantes de d (doublet toujours observé à une distance grande devant d , donc en particulier $d \ll h$) avec $\vec{p} = +q \vec{NP} = +q d \vec{e}_z$.

Aux charges $+q$ et $-q$, on peut faire correspondre des « charges images », symétriques par rapport au plan $z = 0$, et de charges respectives $-q$ et $+q$.

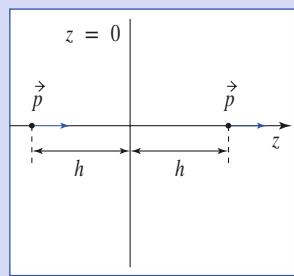
Ainsi, au dipôle \vec{p} , on associe un « dipôle image », symétrique par rapport au plan $z = 0$ (attention au terme symétrique : le « dipôle image » a un moment égal à $+\vec{p}$ puisqu'on change à la fois le sens de \vec{NP} et le signe de la charge).

Pour la situation initiale considérée, le champ et le potentiel électrostatique sont donc les mêmes, dans la région $z < 0$, que ceux créés par ces deux dipôles. Ces situations sont électrostatiquement semblables.

En superposant les influences des deux dipôles, on peut obtenir le champ total représenté dans l'énoncé.

2) Au point M du plan conducteur repéré par l'angle θ , le champ électrostatique (en $z = 0^-$) est dirigé selon (Oz) :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{\text{dipôle}}(M) + \vec{E}_{\text{dipôle image}}(M) = 2 (\vec{E}_{\text{dipôle}}(M) \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z.$$



Corrigés

Le champ d'un dipôle est :

$$\vec{E}_{\text{dipôle}} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

et la distance r est ici $r = \frac{h}{\cos\theta}$.

On en déduit $\vec{E}(M) = 2 \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos^2\theta - \sin^2\theta) \vec{e}_z$.

Le théorème de Coulomb donne donc :

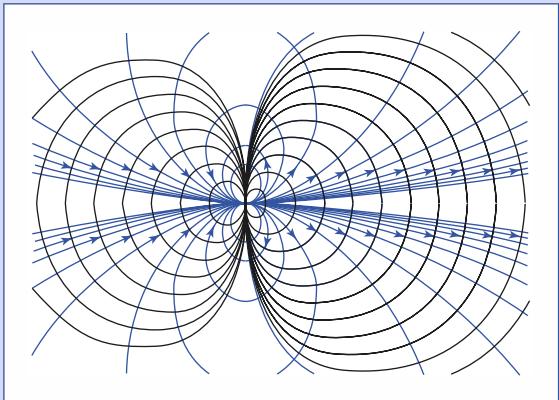
$$\sigma(M) = \sigma(\theta) = \frac{-2p}{4\pi h^3} \cos^3\theta (3\cos^2\theta - 1).$$

3) La charge, vue sous l'angle θ , est :

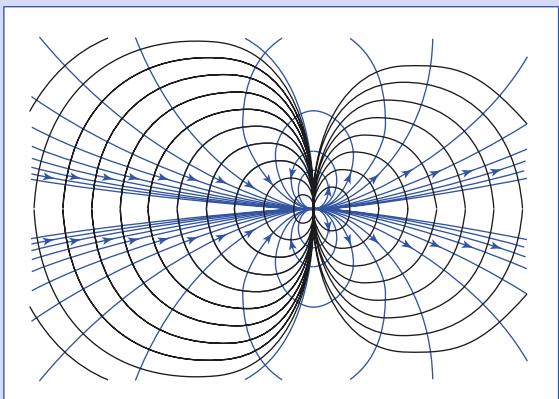
$$q(\theta) = \int_{\alpha=0}^{\theta} \sigma(\alpha) 2\pi R dR \quad \text{avec } R = h \tan\alpha.$$

La densité angulaire est $\frac{dq}{d\theta} = -\frac{p}{h} \sin\theta (3\cos^2\theta - 1)$.

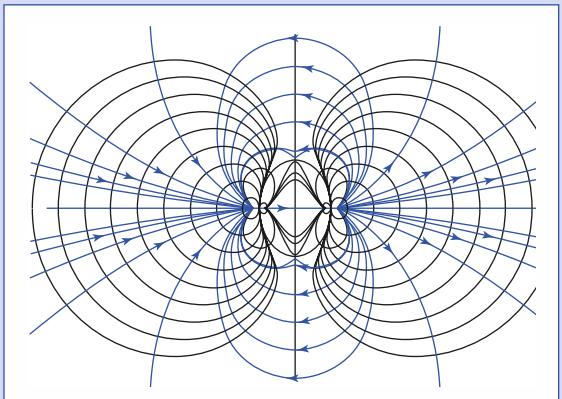
Le graphe de la fonction $\frac{dq}{d\theta} = f(\theta)$ (amplitude ramenée à l'unité) est tracé sur le schéma suivant.



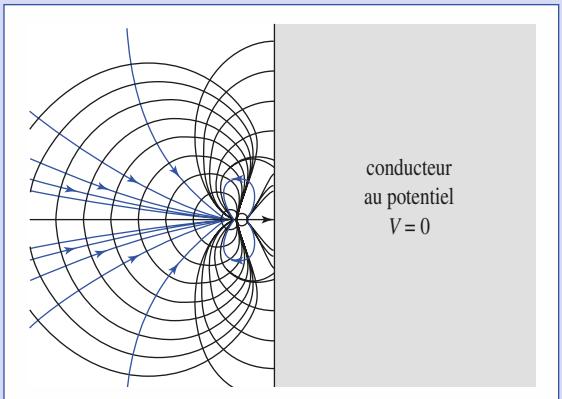
Dipôle \vec{p} en $(0, 0, -h)$.



Dipôle \vec{p} en $(0, 0, +h)$.



Deux « dipôles images ».



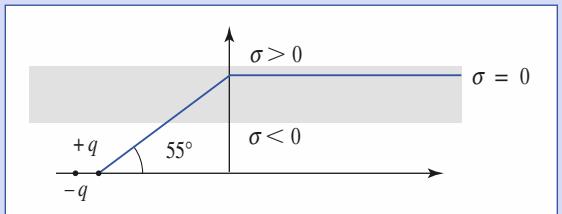
Dipôle et plan conducteur.

La charge surfacique est négative pour :

$$\theta < \theta_0 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 55^\circ,$$

et elle est positive au-delà.

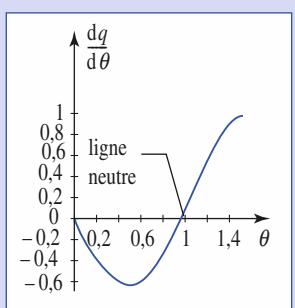
Le résultat est bien cohérent :



La charge totale portée par le plan conducteur est nulle puisque les « charges images » sont $+q$ et $-q$, de somme nulle (on peut aussi le vérifier par le calcul de

$$Q_{\text{plan}} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma(\theta) 2\pi R dR.$$

4) La ligne neutre est le cercle d'axe (O_z), tracé sur le plan $z = 0$, de rayon $R_0 = h \tan\theta_0$ avec : $\tan\theta_0 = 1.4$, soit $\theta_0 = 55^\circ$.



On peut repérer les points de coordonnées $(0, \pm R_0, 0)$ appartenant à ce cercle sur le schéma des lignes de champ : en ces points arrivent deux lignes de champ non parallèles. Il s'agit donc de points de champ nul, donc de charge surfacique nulle.

5) Le dipôle subit les effets du champ électrostatique créé par le plan conducteur. Celui-ci est identique (dans la zone $z < 0$) au champ créé par le « dipôle image ».

$$\vec{F}_{\text{plan} \rightarrow \text{dipôle}} = \vec{F}_{\text{dipôle image} \rightarrow \text{dipôle}}.$$

Le système est de révolution autour de l'axe (Oz), de sorte que ce vecteur est dirigé selon (Oz) :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{dipôle image} \rightarrow \text{dipôle}} &= [(\vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E}_{\text{dipôle image}}]_{(0, 0, -h)} \\ &= p \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{-2p}{4\pi\epsilon_0(h-z)^3} \right) \right]_{z=-h} \vec{e}_z = \frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 h^4} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Le dipôle est attiré par le plan conducteur (les charges surfaciques les plus proches de la charge $+q$ sont négatives ; les charges positives ne sont pas plus nombreuses et sont plus loin).

5

1 a) Le champ \vec{E} est égal (au signe près) au gradient du potentiel scalaire V . Sa divergence s'exprime donc en $\text{V} \cdot \text{m}^{-2}$. La constante d est donc une longueur.

$$\text{b)} \Delta V - \frac{V}{d^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

$$\text{c)} \text{Pour } r > 0, \rho = 0 \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r V(r)) - \frac{V(r)}{d^2} = 0.$$

On introduit la fonction $f(r) = r V(r)$. Celle-ci vérifie :

$$\ddot{f}(r) - \frac{f(r)}{d^2} = 0,$$

$$\text{soit } f(r) = A e^{-\frac{r}{d}} + A' e^{+\frac{r}{d}}.$$

Le potentiel ne divergeant pas à l'infini, on obtient donc une solution de la forme $V(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{d}}$, pour $r > 0$.

Pour $m_\gamma = 0$, soit $d = \infty$, le potentiel engendré par une charge localisée au voisinage de l'origine est de la forme $V(r) = \frac{\text{cte}}{r}$.

Pour $r \ll d$, ces deux formes du potentiel conduisent à des interactions analogues.

La première forme correspond en revanche à des interactions rapidement négligeables au-delà de la distance d . On peut associer à cette interaction une portée finie : $d = \frac{\hbar}{m_\gamma c}$.

Si la masse du photon est nulle, la portée de l'interaction électromagnétique est infinie.

2 a) Dans le cas d'une masse nulle du photon, la surface intérieure de la cavité (vide de charge) n'est pas chargée, et la charge Q est exclusivement répartie sur la surface externe de la sphère métallique creuse. Le potentiel associé est :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ pour } r \geq R$$

$$\text{et } V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \text{cte pour } r \leq R.$$

b) Dans le cas d'une masse du photon non nulle, on voit que la fonction potentiel satisfait l'équation différentielle $\Delta V - \frac{V}{d^2} = 0$ dans la cavité, c'est-à-dire pour $r < R$, et hors de la sphère, soit pour $r > R$.

$$\text{On notant encore } f(r) = r V(r), \text{ on a } f(r) = A e^{-\frac{r}{d}} + A' e^{+\frac{r}{d}}.$$

À l'extérieur de la sphère, on gardera une solution bornée, de la forme :

$$V(r) = \frac{A_1}{r} e^{-\frac{r}{d}}.$$

À l'intérieur de la sphère, une solution qui ne diverge pas en $r = 0$ est de la forme :

$$V(r) = \frac{A_2}{r} \sinh\left(\frac{r}{d}\right).$$

Les conditions aux limites sont :

- $V = 0$ à l'infini (déjà assuré) ;
- $V = V_0$ en $r = 0$, soit $A_2 = d V_0$;
- continuité de V en $r = R$, soit $A_1 e^{-\frac{R}{d}} = A_2 \sinh\left(\frac{R}{d}\right)$.

On trouve :

$$V(r) = V_0 \frac{d}{r} \sinh\left(\frac{r}{d}\right) \text{ pour } r \leq R,$$

$$\text{et } V(r) = V_0 \frac{d}{r} \sinh\left(\frac{R}{d}\right) e^{\frac{R-r}{d}} \text{ pour } r \geq R.$$

c) Les équations locales « usuelles » $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$ imposent la relation de passage $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_1 \rightarrow_2$ au champ électrique.

Ce champ est discontinu s'il existe une répartition surfacique de charge sur l'interface considérée, c'est-à-dire un modèle où ρ tend vers ∞ dans une écorce d'épaisseur tendant vers zéro.

Le potentiel restant fini, l'écriture $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{1}{d^2} V$ ne remet pas en cause ces conclusions.

La discontinuité normale du champ, égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ à la traversée de la sphère, s'exprime sous la forme :

$$\left\{ V_0 \sinh\left(\frac{R}{d}\right) \left(\frac{d}{r^2} + \frac{1}{r} \right) e^{\frac{R-r}{d}} - V_0 \left(\frac{d}{r^2} \sinh\left(\frac{r}{d}\right) - \frac{1}{r} \cosh\left(\frac{r}{d}\right) \right) \right\}_{r=R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

$$\text{d'où : } V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} e^{-\frac{R}{d}}.$$

$$\text{Le potentiel est : } V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{d}{r} e^{-\frac{r}{d}} \sinh\left(\frac{r}{d}\right) \text{ pour } r \leq R,$$

$$\text{et } V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{d}{r} e^{-\frac{r}{d}} \sinh\left(\frac{R}{d}\right) \text{ pour } r \geq R.$$

d) À l'intérieur de la sphère, on peut se contenter d'un développement limité du potentiel scalaire.

$$\text{On a alors : } V(r) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} e^{-\frac{R}{d}} \left(1 - \frac{r^2}{6d^2} \right).$$

$$\text{Il vient donc : } \frac{\delta V}{V_0} = \frac{R'^2 - R^2}{6d^2}.$$

Corrigés

e) $\frac{m_\gamma}{m_e} = \frac{\hbar}{m_e c} \sqrt{\frac{6 |\delta V|}{V_0}} \approx 1,5 \cdot 10^{-17}$.

La masse du photon possède donc une limite supérieure... très faible ! Ouf !

6

1) Soit un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = p \vec{e}_z$ (placé selon l'axe \vec{e}_z , comme le champ appliqué : en effet, tourner le champ appliqué fait de même tourner la polarisation de la sphère).

Son champ, superposé au champ appliqué, donne :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} + \vec{E}_0 \\ &= \left(\cos\theta \left(E_0 + \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \vec{e}_r + \sin\theta \left(-E_0 + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \vec{e}_\theta \right),\end{aligned}$$

et $V = \cos\theta \left(-E_0 r + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)$,

compte tenu de l'origine choisie pour les potentiels.

La valeur $p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$ permet alors d'annuler la valeur du potentiel sur la sphère.

En dehors de celle-ci les deux problèmes « \vec{E}_0 et sphère au potentiel nul » et « \vec{E}_0 et dipôle \vec{p} en O » sont équivalents, et correspondent aux mêmes potentiel et champ électrostatique, dans la zone extérieure à la sphère.

On en déduit :

$$\vec{E} = E_0 \left(\cos\theta \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \vec{e}_r + \sin\theta \left(-1 + \frac{R^3}{r^3} \right) \vec{e}_\theta \right),$$

et $V = E_0 \cos\theta \left(-r + \frac{R^3}{r^2} \right)$,

puis $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$ à la surface de la sphère.

2) a) Le problème est de révolution autour de l'axe (Oz), on peut donc prendre :

$$w(\varphi) = 1.$$

b) La solution proposée correspond bien à l'antisymétrie du problème vis-à-vis du changement $z \rightarrow -z$, soit $\theta \rightarrow \pi - \theta$.

C'est une solution acceptable.

c) La fonction $V(r, \theta, \varphi) = \cos\theta u(r)$ satisfait l'équation de Laplace (dans la zone $r > R$), ce qui implique :

$$r^2 \ddot{u}(r) + 2r \dot{u}(r) + 2u(r) = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène dont on peut chercher des solutions de la forme $u(r) = r^n$, ce qui conduit à deux possibilités :

$$n = 1 \quad \text{et} \quad n = -2.$$

La solution générale est de la forme $u(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$, et on a alors :

$$V(r, \theta, \varphi) = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos\theta$$

et $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \left(-A + \frac{2B}{r^3} \right) \cos\theta \vec{e}_r + \left(A + \frac{B}{r^3} \right) \sin\theta \vec{e}_\theta$.

Sachant qu'il faut avoir $\vec{E} \rightarrow \vec{E}_0$ pour $r \rightarrow \infty$ et $V = 0$ pour $r = R$,

on obtient : $A = -E_0$ et $B = +E_0 R^3$.

On retrouve ainsi les expressions précédentes.

5

Équations de Maxwell

Introduction

À l'aide des propriétés du champ permanent, nous avons introduit au chapitre 2 une description du champ électromagnétique permanent grâce à des lois locales : les équations de Maxwell. Nous achèverons ici cette approche en écrivant le groupe des quatre équations de Maxwell en régime variable.

James Clerk Maxwell (1831-1879) publie un mémoire, en 1864, présentant la théorie de l'électromagnétisme classique, dont les équations lui permettent de décrire la propagation des ondes électromagnétiques.

Grâce à cette théorie, il expose la possibilité de transmettre des signaux par ondes radio, prédiction confirmée par les expériences de Hertz en 1888.

Cette théorie permet également de prévoir la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide à la vitesse de la lumière c . Les expériences de Michelson et Morley (1881-1887) confirmeront le caractère universel de cette vitesse.

O B J E C T I F S

- Équation de Maxwell.
- Énergie électromagnétique.
- Approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.).

P R É R E Q U I S

- Lois locales pour les champs électromagnétiques permanents.

Nous avons vu dans le *chapitre 2* les équations locales vérifiées par le champ électromagnétique dans le vide en régime permanent ; le champ électrique permanent et le champ magnétique permanent vérifient des équations différentielles indépendantes :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E}(M) &= \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}, & \operatorname{rot} \vec{E}(M) &= \vec{0}; \\ \operatorname{div} \vec{B}(M) &= 0, & \operatorname{rot} \vec{B}(M) &= \mu_0 \vec{j}(M).\end{aligned}$$

Certaines lois locales doivent être modifiées pour permettre une interprétation correcte des phénomènes physiques expérimentaux et des lois déjà connues en régime variable. Ainsi :

- l'équation locale $\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$ n'est pas modifiée en régime variable : elle ne conduit à aucune contradiction avec l'expérience ; le théorème de Gauss est donc valable en régime variable ;
- l'équation locale $\operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0$ n'est pas modifiée : à une date t donnée $\vec{B}(M, t)$ est un champ de flux conservatif ; il n'y a pas de contradiction avec l'expérience ;
- l'équation $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ doit être modifiée ; l'équation modifiée permettra d'interpréter les phénomènes d'induction ;
- l'équation locale $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ doit être modifiée : la divergence des deux membres donne $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, équation incompatible avec la loi locale : $\operatorname{div} \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$ liée au postulat de conservation de la charge.

En régime variable les lois locales suivantes :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0} \text{ et } \operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0$$

sont inchangées : ce sont deux des quatre équations de Maxwell.

Le théorème de Gauss reste valable pour \vec{E} .

Le vecteur \vec{B} est un champ à flux conservatif.

Équation de Maxwell-Faraday

L'équation locale concernant le rotationnel du champ électrique permanent s'écrit $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$.

De nombreuses situations expérimentales montrent que cette équation est fausse lorsque le champ électromagnétique est fonction du temps (les phénomènes d'induction électromagnétiques et leurs importantes applications pratiques en font partie, cf. chapitres 6 et 7) et nous nous proposons d'en étudier une de manière simplifiée pour mettre en défaut l'équation précédente.

1.1. Une expérience en régime variable

Considérons l'expérience schématisée sur le doc 1 :

- une bobine 1 constituée de 1 000 spires, d'inductance $L = 10 \text{ mH}$ et de résistance $R = 8 \Omega$ est alimenté dans un circuit primaire par une source de tension continue ($U = 24 \text{ V}$) ;
- une deuxième bobine 2 identique et disposée contre la première de sorte que leurs axes soient identiques.

À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur. On observe :

- un régime transitoire durant lequel :
 - le courant dans le circuit primaire augmente de la valeur $i_1 = 0$ à la valeur $I_1 = 3 \text{ A}$;
 - le courant dans le circuit secondaire augmente de la valeur 0 à une valeur de l'ordre de quelques dizaines de mA (fonction de la forme et de la position respective des bobines, cf. chapitre 7) puis diminue jusqu'à la valeur 0 ;
- un régime permanent qui dure tant que le circuit primaire est alimenté et durant lequel le courant est constant et égal à 3 A dans le circuit primaire et nul dans le circuit secondaire (doc. 2).

L'observation dans le circuit primaire peut s'interpréter à l'aide d'un modèle électrocinétique (étudié en Première année, voir *H-Prépa, Electronique, 1^{re} année*) : augmentation du courant durant un régime de temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$, et état final permanent $I = \frac{U}{R} = 3 \text{ A}$.

Pour le circuit secondaire la mise en mouvement des charges de conduction (les électrons libres du métal) doit correspondre à l'action d'un champ électrique. Or les électrons sont soumis uniquement au champ magnétique créé par la première bobine.

Lors de la fermeture du circuit et du régime transitoire ce champ magnétique est **variable dans le temps**.

Lors du régime permanent il est constant.

Nous en concluons que la **variation temporelle** du champ magnétique induit le champ électrique permettant la circulation des charges du circuit secondaire.

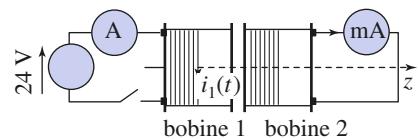
Remarque

La modélisation complète de ce problème sera vue au chapitre 7 ; nous avons uniquement cherché à mettre en évidence qualitativement un lien entre le champ magnétique variable dans le temps créé par une distribution de courants et le champ électrique créé qui permet la mise en mouvement de charges situés dans une autre région de l'espace (cf. aussi Application 1).

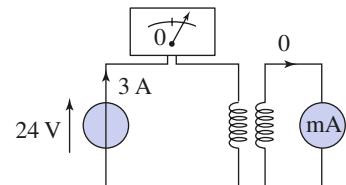
1.2. Équation locale de Maxwell-Faraday

Assimilons la bobine 2 à une superposition de spires de courant en série (doc. 3).

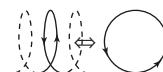
Lors du régime transitoire nous pouvons considérer que chaque spire se comporte comme un générateur (doc. 4a) ce qui correspond à une circulation non nulle du champ électrique le long du contour de la spire (sinon la d.d.p. à ses bornes serait nulle et il n'y aurait pas de courant). Or l'équation $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ impliquerait, par application du théorème de Stokes, que la circulation du champ électrique soit nulle : elle ne peut être appliquée ici.



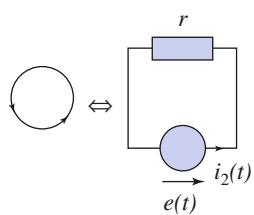
Doc. 1. La bobine du circuit secondaire est soumise pendant le régime transitoire au champ magnétique variable $\vec{B}_1 = \mu_0 n i_1(t) \vec{e}_z$ de la bobine du circuit primaire.



Doc. 2. En régime permanent établi, l'ampèremètre du circuit primaire affiche un courant de 3 A. Il n'y a pas de courant dans le secondaire.



Doc. 3. Une spire peut être considérée comme une boucle de courant en série avec les autres.



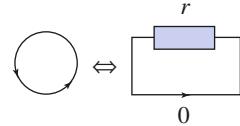
Doc. 4a. Si la circulation de \vec{E} est non nulle la spire se comporte comme un générateur.

En revanche, pour le régime permanent établi, la spire se comporte comme un dipôle passif (doc. 4b) qu'aucun courant ne traverse ; la d.d.p. est nulle et :

$$\oint_{\text{spire}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Si nous regroupons les conclusions précédentes, nous devons relier la variation temporelle du champ magnétique au caractère non conservatif de la circulation du champ électrique. Ce lien est réalisé par l'**équation locale de Maxwell-Faraday** que nous donnons comme postulat :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}.$$



Doc. 4b. Si la circulation de \vec{E} est nulle la spire est un dipôle passif parcourue par un courant nul.

Un champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ évoluant dans le temps peut induire une composante du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ à circulation non conservative. Ces deux champs sont liés par l'équation locale de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}.$$

1.3. Circulation du champ électrique

En appliquant le **théorème de Stokes** nous pouvons utiliser cette équation locale pour exprimer la circulation du champ électrique (doc. 5).

La circulation du champ électrique sur un contour Γ est :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

où Σ désigne une surface orientée s'appuyant sur ce contour Γ .

Dans le cas d'un contour Γ fixe dans un référentiel galiléen d'étude, et d'une surface Σ fixe s'appuyant sur ce dernier, nous aurons :

$$\iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\phi(t)}{dt},$$

où $\phi(t)$ est, à l'instant t , le flux du champ magnétique à travers toute surface Σ orientée s'appuyant sur Γ .

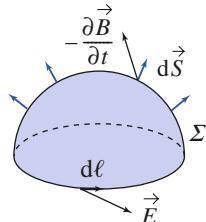
La circulation du champ électrique, sur un contour Γ fixe dans le référentiel galiléen d'étude, est égale à l'opposé de la variation du flux magnétique à travers ce contour par unité de temps :

$$\oint_{\Gamma \text{ fixe}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\phi(t)}{dt}.$$

Remarque

Ce flux ne dépend pas du choix de la surface S s'appuyant sur Γ , car le champ magnétique est à flux conservatif :

$$\text{div } \vec{B}(M, t) = 0.$$



Doc. 5. Surface orientée s'appuyant sur un contour.

Application 1

Champ électrique induit par un solénoïde

Un solénoïde très long comporte n spires jointives bobinées par unité de longueur sur un cylindre de rayon a et d'axe (Oz).

Déterminer le champ électrique induit par un courant $i(t)$ variable circulant dans le solénoïde.

La distribution de courants est invariante par translation parallèlement à l'axe (Oz) du solénoïde (approximation du solénoïde infini) et par rotation autour de cet axe. Tout plan perpendiculaire à cet axe est un plan de symétrie de la distribution qui engendre un champ magnétique de la forme $\vec{B} = B(r, t)\vec{e}_z$, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

Nous savons que le champ est $B(r, t) = \mu_0 n i(t)$ à l'intérieur du solénoïde, et qu'il est nul à l'extérieur. (cf. H. Prépa, Électromagnétisme, 1^{re} année).

Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courants, qui engendre donc un champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = E(r, t)\vec{e}_\theta.$$

Calculons la circulation de ce champ sur un cercle d'axe (Oz) et de rayon r en utilisant la relation :

$$\oint_R \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_\Sigma -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Nous obtenons :

$$2\pi r E(r, t) = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \text{ pour } r < a,$$

et :

$$2\pi r E(r, t) = -\pi a^2 \mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \text{ pour } r > a.$$

Nous en déduisons :

$$\vec{E} = -\mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \frac{r}{2} \vec{e}_\theta \text{ pour } r < a,$$

et :

$$\vec{E} = -\mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \frac{a^2}{2r} \vec{e}_\theta \text{ pour } r > a.$$

Nous voyons ici que le champ magnétique variable induit un champ électrique non nul dans la zone ($r > a$), où il n'y a pourtant pas de champ magnétique.

2 Équation de Maxwell-Ampère

2.1. Courant de déplacement de Maxwell

La conservation de la charge électrique est un fait expérimental, admis comme un principe de base de la physique. Les équations de Maxwell, qui sont censées décrire l'évolution du champ électromagnétique, doivent donc être compatibles avec l'équation de conservation de la charge électrique :

$$\operatorname{div} \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0.$$

L'équation $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ implique, en prenant sa divergence membre à membre, que $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Ce résultat est incompatible avec la loi de conservation de la charge électrique dans le cas le plus général.

Pour pallier ce défaut, l'idée de Maxwell fut d'introduire un terme supplémentaire au second membre, appelé **courant de déplacement** noté \vec{j}_D .

L'équation de Maxwell-Ampère doit donc s'écrire dans le cas le plus général :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D).$$

Cette forme est compatible avec la conservation de la charge électrique si :

$$\mu_0 \operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_D) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = 0, \text{ soit } \operatorname{div} \vec{j}_D = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

L'équation de Maxwell-Gauss, qui est inchangée en régime variable (ce que nous admettrons), nous indique une forme du courant de déplacement compatible avec cette contrainte :

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

2.2. Équation de Maxwell-Ampère

La forme que nous venons d'envisager n'est pas la seule solution envisageable, mais par construction, elle permet la compatibilité des équations de Maxwell avec le principe fondamental de conservation de la charge électrique. Nous admettrons la validité de ce choix, et le prendrons comme base de postulat.

L'équation de Maxwell-Ampère est :

$$\operatorname{rot} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$$

où $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$ est le courant de déplacement \vec{j}_D .

2.3. Théorème d'Ampère généralisé

L'équation de Maxwell-Ampère ayant été modifiée, il en est naturellement de même pour sa forme intégrale.

Le théorème d'Ampère peut être généralisé sous la forme :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Dans l'expression de la circulation du champ magnétique sur un contour Γ , le flux du courant de déplacement à travers une surface Σ orientée s'appuyant sur Γ , s'ajoute à celui du courant de charges.

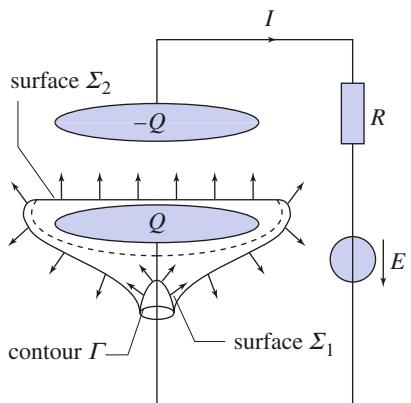
Pour illustrer cette nouvelle formulation du théorème d'Ampère, nous pouvons imaginer un système dont l'évolution modifie la répartition de la charge électrique, c'est-à-dire un système pour lequel l'équation $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ est prise en défaut.

Considérons donc un condensateur plan, constitué par deux plaques métalliques circulaires en regard, placé dans le circuit représenté sur le document 6.

Le contour Γ choisi entoure le fil reliant le générateur de tension au condensateur. La surface Σ_1 s'appuie sur ce contour et intercepte le fil conducteur. La surface Σ_2 s'appuie aussi sur le contour, mais passe entre les armatures sans couper les lignes de courant électrique.

L'application au contour Γ et à chacune de ces deux surfaces, du théorème d'Ampère dérivé de l'équation locale $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, nous donnerait deux résultats incohérents :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I \quad \text{et} \quad \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0.$$



Doc. 6. Accumulation de charges et application du théorème d'Ampère généralisé.

Le champ électrique créé par ce circuit est en fait négligeable sur l'ensemble des surfaces Σ_1 et Σ_2 , excepté entre les armatures du condensateur, où il est quasiment uniforme et à la même expression qu'en régime permanent (cf. chapitre 2, Application 3). Il s'écrit donc :

$$\vec{E} = \frac{\sigma \vec{e}_z}{\epsilon_0},$$

où σ est la charge surfacique de l'armature de surface S portant la charge Q telle que $\sigma = \frac{Q}{S}$.

Remarque

Ces expressions sont convenables dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.), (cf. § 5), et pour un condensateur très plat (écartement des armatures faible devant leur rayon).

Nous reviendrons sur le rôle de l'A.R.Q.P. et sur l'uniformité du champ dans l'Application 3.

Nous pouvons alors appliquer le théorème d'Ampère généralisé au contour Γ et à la surface Σ_1 .

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ = \mu_0 I + 0.$$

Appliqué à Σ_2 , nous obtenons :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ = 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 S} \right) S \\ = 0 + \mu_0 I.$$

Le courant de déplacement corrige bien l'incohérence précédente.

► Pour s'entraîner : ex. I.

3 Les quatre équations de Maxwell

3.1. Champ électromagnétique permanent

En régime permanent, le champ électromagnétique est lié à ses sources par les

lois locales

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}.$$

Nous avons pu étudier indépendamment le champ électrique permanent et le champ magnétique permanent car ces équations sont découplées.

3.2. Équations de Maxwell

Nous avons montré les carences du système précédent en régime variable et postulé deux modifications de ces lois :

- l'introduction d'un premier couplage entre champs électrique et magnétique, sous la forme de l'équation de Maxwell-Faraday ;

- l'adjonction du courant de déplacement à l'équation de Maxwell-Ampère.
- L'expérience montre que ces modifications sont suffisantes pour rendre compte du comportement du champ électromagnétique dans le cas général.

Les quatre équations de Maxwell, qui régissent l'évolution locale du champ électromagnétique dans tout référentiel galiléen, sont :

- **l'équation de Maxwell-Gauss (M-G) :** $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;
- **l'équation de Maxwell-Ampère (M-A) :** $\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$;
- **l'équation du flux magnétique (M-Φ) :** $\operatorname{div} \vec{B} = 0$;
- **l'équation de Maxwell-Faraday (M-F) :** $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

La définition de l'ampère impose la valeur exacte de μ_0 :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.$$

La définition du mètre est fondée sur la constance de la vitesse de la lumière prise exactement égale à $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Il résulte du choix de ces unités la valeur exacte de ϵ_0 :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}.$$

Et on donne souvent :

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Les deux premières équations que nous avons écrites (M-G) et (M-A) lient le champ électromagnétique à ses sources ρ et \vec{j} . Leurs écritures sous forme intégrale sont le théorème de Gauss et le théorème d'Ampère généralisé.

Les deux dernières, (M-G) et (M-F), ne font pas intervenir les sources du champ. Elles traduisent des propriétés intrinsèques du champ électromagnétique. L'équation de conservation de la charge est désormais une loi fondamentale contenue dans le groupe des équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère.

Remarque

*Les équations de Maxwell correspondent à une description de l'**interaction électromagnétique par une théorie de champ classique**, c'est-à-dire non quantifiée. Une théorie quantique du champ ferait apparaître la notion de photon, particule véhiculant l'interaction électromagnétique.*

3.3. Évolution des charges et du champ électromagnétique

3.3.1. Force de Lorentz et transformation galiléenne du champ

Le mouvement des charges nous est *a priori* inconnu. Nous ne pourrons généralement pas étudier le seul champ électromagnétique, mais nous devrons nous intéresser à l'évolution de l'ensemble « champ électromagnétique et charges électriques », car :

- le champ est lié aux charges par les équations de Maxwell ;

5. Équations de Maxwell

- les charges sont liées au champ par l'intervention de la force de Lorentz dans leur évolution :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

La force de Lorenz décrit l'action du champ électromagnétique sur une particule chargée de vitesse \vec{v} , et nous permet d'étudier son évolution dans le référentiel galiléen \mathcal{R} où est observé le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) .

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}' , en translation à la vitesse \vec{v}_e constante par rapport au référentiel \mathcal{R} nous écrivons :

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'),$$

où le champ électromagnétique (\vec{E}', \vec{B}') est vu dans \mathcal{R}' .

En mécanique classique, la force est invariante par changement de référentiel.

Sachant que $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_e$, nous en déduisons que l'égalité :

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = (\vec{E}' - \vec{v}_e \wedge \vec{B}') + \vec{v} \wedge \vec{B}',$$

doit être vérifiée pour toute vitesse \vec{v} . En identifiant les termes dépendants de la vitesse \vec{v} et ceux n'en dépendant pas dans cette expression, nous voyons que le champ électromagnétique vu dans \mathcal{R}' s'obtient à partir de celui vu dans \mathcal{R} par :

$$\begin{cases} \vec{B}' = \vec{B} \\ \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \end{cases}.$$

Ces relations constituent les formules de **transformation galiléenne du champ électromagnétique** (en mécanique non relativiste, v et v_e sont très inférieures à c).

Remarques

- Le nom de Galileo Gallei (1564-1642), qui a formulé le principe de la relativité des mouvements est attaché à toutes les relations non relativistes de changement de référentiel.

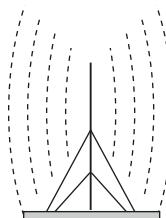
• Les champs \vec{E} et \vec{B} sont liés dans les formules de transformation galiléenne. Cet aspect justifie le terme « champ électromagnétique » désignant l'entité physique globale (\vec{E}, \vec{B}) dont nous avons décrit les deux facettes dans le cas des régimes permanents.

• La dissymétrie entre \vec{E} et \vec{B} peut choquer. En fait, dans le cadre de la relativité, \vec{B} dépend également du référentiel, mais nous n'aurons pas à étudier le cas d'une spire mobile à une vitesse voisine de celle de la lumière...

3.3.2. Équations aux champs

Pour une distribution de charges et courants imposée (une antenne radio alimentée par une source oscillante par exemple, cf. doc. 7), nous n'aurons en revanche qu'à chercher le champ électromagnétique qu'elle engendre. Son évolution nous sera connue si nous parvenons à résoudre les équations de Maxwell, connaissant les densités de charge $\rho(\vec{r}, t)$ et de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

Nous pouvons imaginer une résolution directe des lois locales à partir des équations de Maxwell. Pour cela, nous devons établir les équations liant séparément les champs \vec{E} et \vec{B} .



Doc. 7. Rayonnement d'ondes électromagnétiques par une antenne.

Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday d'une part et de l'équation de Maxwell-Ampère d'autre part, nous obtenons :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\text{et } \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = +\mu_0(\vec{\text{rot}}\vec{j}) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \mu_0 \vec{\text{rot}}\vec{j} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

En utilisant l'identité de dérivation vectorielle :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A},$$

et les deux autres équations de Maxwell, nous déduisons, avec $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$:

$$\vec{\Delta E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\text{grad}}\rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\text{rot}}\vec{j}.$$

Contrairement au cas des distributions permanentes, la densité de courant électrique \vec{j} est présente dans l'équation relative au champ électrique. Plus exactement, ce sont ses variations temporelles qui contribuent à la création du champ \vec{E} .

Nous savons en effet qu'un courant variable engendre un champ magnétique variable, qui induit lui-même un champ électrique dont le rotationnel est donné par l'équation de Maxwell-Faraday.

3.3.3. Propagation du champ électromagnétique

Si nous écrivons les deux équations précédentes dans un milieu vide de charge et de courant, elles deviennent :

$$\vec{\Delta E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0},$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

Ces relations permettent l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Cette propagation s'effectue à la vitesse finie c , dans le vide, dans **tous** les référentiels galiléens (*cf. H-Prépa, Ondes, 2nd année*).

Les équations de Maxwell dans le vide permettent de rendre compte du phénomène de propagation des ondes électromagnétiques à vitesse c dans tous les référentiels galiléens.

L'universalité de cette vitesse de propagation est en contradiction flagrante avec la loi de composition des vitesses galiléenne. Cette découverte de Maxwell confirmée par l'expérience, a entraîné le remplacement de la physique galiléenne par la physique relativiste, développée par Einstein : les équations de Maxwell sont compatibles avec la physique relativiste.

Les équations de Maxwell sont compatibles, dans l'approximation non relativiste, avec les lois de la mécanique classique. Dans cette approximation, nous pourrons continuer à utiliser la relation fondamentale de la dynamique classique pour étudier les mouvements des particules chargées soumises à un champ électromagnétique.

L'emploi simultané des équations de Maxwell et de la mécanique de Newton peut conduire à des contradictions. *L'application suivante en donne un exemple.*

Application 2

Approximation non relativiste

Un fil rectiligne infini de charge linéique λ , portée par l'axe (Oz), se déplace à vitesse constante $\vec{v} = v \vec{e}_z$ (avec $v \ll c$) dans un référentiel galiléen \mathcal{R} .

1) Quel est le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) engendré par cette distribution de charges et courants dans le référentiel \mathcal{R} ?

2) On se propose de déterminer ce même champ dans le référentiel \mathcal{R}' lié au fil, de deux manières différentes :

a) par un calcul direct dans \mathcal{R}' ; on désignera par (\vec{E}', \vec{B}') le résultat obtenu;

b) en utilisant les formules de transformation galiléenne du champ; on désignera par (\vec{E}'', \vec{B}'') le résultat obtenu.

c) Les deux résultats sont-ils en accord? Commenter.

3) Une particule non relativiste de charge q se déplace à la vitesse \vec{v}' dans le référentiel \mathcal{R}' . Quelles expressions \vec{F}' et \vec{F}'' de la force subie par cette particule soumise au champ du fil, dans \mathcal{R}' , peut-on déduire des résultats précédents?

Proposer une explication permettant de lever l'incohérence de ces deux expressions.

1) Le fil en mouvement constitue une distribution permanente de charges et courants : fil rectiligne de charge linéique λ , parcouru par le courant $i = \lambda v$. Le champ électromagnétique vu dans \mathcal{R} s'en déduit immédiatement :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r} \text{ et } \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r}.$$

(Conséquences des équations de Maxwell dans \mathcal{R} .)

2) a) Dans le référentiel \mathcal{R}' , le fil est immobile et nous obtenons immédiatement :

$$\vec{E}' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r} \text{ et } \vec{B}' = \vec{0}.$$

(Conséquences des équations de Maxwell dans \mathcal{R}' .)

b) En utilisant les formules de transformation galiléenne du champ, nous obtenons, dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned} \vec{E}'' &= \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r} + v \vec{e}_z \wedge \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi} \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\vec{e}_r}{r} \\ \text{et } \vec{B}'' &= \vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r}. \end{aligned}$$

c) Ces résultats sont clairement incompatibles avec ce qui précède :

$$\vec{E}'' \neq \vec{E}' \text{ et } \vec{B}'' \neq \vec{B}'.$$

Les formules de transformation galiléenne du champ que nous avons construites, au § 3.3.1., dans le cadre de la mécanique classique ne sont donc pas compatibles avec les équations de Maxwell.

3) En utilisant (\vec{E}', \vec{B}') , nous obtenons :

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r}.$$

Avec (\vec{E}'', \vec{B}'') , il vient :

$$\begin{aligned} \vec{F}'' &= q(\vec{E}'' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'') \\ &= \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\vec{e}_r}{r} + \frac{vv'}{c^2} \wedge \vec{e}_\theta \right]. \end{aligned}$$

Cette expression est incompatible avec la précédente : $\vec{F}'' \neq \vec{F}'$.

Cependant, dans l'approximation non relativiste, lorsque $\frac{v}{c}$ et $\frac{v'}{c}$ tendent vers 0, nous obtenons tout de même : $\vec{F}'' \rightarrow \vec{F}'$.

Les équations de Maxwell restent ainsi compatibles avec la mécanique classique dans l'approximation non relativiste.

Remarque

Nous avons construit les formules de transformation galiléenne du champ de façon à obtenir :

$$\vec{F}'' = \vec{F},$$

où $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ est la force de Lorentz exprimée directement dans le référentiel \mathcal{R} .

L'expression \vec{F}'' , qui diffère de \vec{F}' , n'est qu'une expression approchée de cette force dans \mathcal{R}' .

3.4. Conditions aux limites

Nous avons, lors de l'étude des champs permanents, observé des discontinuités de certaines composantes des champs électriques ou magnétiques à la traversée de densité **surficiques** de charges ou de courant. Nous pouvons nous demander ce qu'il advient de ces discontinuités en régime variable.

3.4.1. Un exemple de discontinuité du champ électrique

Pour une sphère uniformément chargée en surface l'application du théorème de Gauss montre que les champs intérieur et extérieur, à la surface de la sphère, s'expriment par :

$$\vec{E}_{\text{int}}(R) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\text{ext}}(R) = \frac{Q_{\text{surface}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r,$$

où Q_{surface} est la charge totale portée par la surface de la sphère, R son rayon et \vec{e}_r le vecteur radial des coordonnées sphériques. Il existe donc une discontinuité du champ électrique qu'on peut mettre sous la forme :

$$\Delta\vec{E}_R = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r.$$

Supposons que la distribution des charges surfaciques, toujours uniforme, soit maintenant fonction du temps $\sigma(t)$. Le théorème de Gauss s'applique toujours en régime variable et les mêmes relations sont utilisables à l'instant t , d'où :

$$\Delta\vec{E}_R(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{e}_r \quad (\text{doc. 8}).$$

Remarquons que dans cet exemple le champ électrique est dirigé, de part et d'autre de la surface chargée, suivant la normale à cette surface.

3.4.2. Un exemple de discontinuité du champ magnétique

Pour une nappe plane infinie (que nous considérons orthogonale à un axe (Oz) où O appartient à la nappe) parcourue par des courants surfaciques uniformes caractérisés par $\vec{j}_S = j_S \vec{e}_x$, l'application du théorème d'Ampère montre que le champ magnétique de part et d'autre de la nappe vaut :

$$\vec{B}(0^+) = -\frac{\mu_0 j_S}{2} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}(0^-) = \frac{\mu_0 j_S}{2} \vec{e}_y;$$

la discontinuité peut se mettre sous la forme :

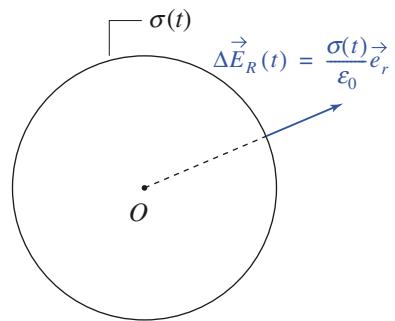
$$\vec{B}(0^+) - \vec{B}(0^-) = \Delta\vec{B}_0 = \mu_0 j_S \vec{e}_z \quad (\text{doc. 9})$$

Si la densité de courant, toujours uniforme, dépend du temps, nous devons appliquer le théorème d'Ampère généralisé : en effet, un courant dépendant du temps crée un champ magnétique dépendant du temps qui, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, induit un champ électrique fonction lui aussi du temps. Nous devons donc écrire :

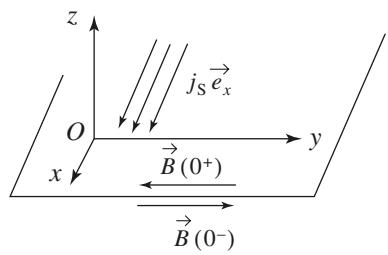
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_{\text{enlacé}} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right).$$

Les symétries de la distribution de courant sont conservées et nous aurons *a priori* $B(z, t) \vec{e}_y$ et $E(z, t) \vec{e}_x$. Choisissons un contour plan perpendiculaire à (Ox) « à cheval » sur la nappe, de hauteur h et de longueur $d\ell$ infinitésimale (doc. 10).

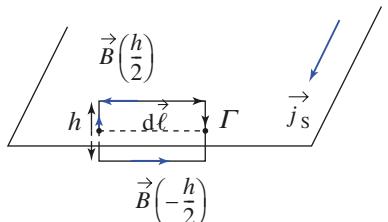
Nous appliquons le théorème d'Ampère en faisant tendre h vers 0 ;



Doc. 8. Discontinuité du champ électrique à la traversée d'une surface chargée.



Doc. 9. Discontinuité du champ magnétique à la traversée d'une densité surfacique de courant constante.



Doc. 10. Circulation du champ magnétique.

- lorsque h tend vers zéro, les contributions de la circulation sur les côtés parallèles à z tendent aussi vers zéro ;
- sur la longueur $d\ell$ les champs magnétiques de part et d'autre de la nappe peuvent être considérés comme uniformes ; soit $\vec{B}(0^+)$ et $\vec{B}(0^-)$ ces champs. La circulation s'écrit :

$$[\vec{B}(0^+) - \vec{B}(0^-)] \cdot \vec{e}_y d\ell ;$$

$$\bullet I_{\text{enlacé}} = -j_S d\ell ;$$

- l'aire de la surface à travers laquelle on calcule le flux du champ électrique est $h d\ell$ et tend vers zéro quand h tend vers zéro ; or, le champ électrique même discontinu reste fini de part et d'autre de la nappe donc le terme de flux tend vers zéro.

Le théorème d'Ampère s'écrit donc $\vec{B}(0^+) - \vec{B}(0^-) = -\mu_0 j_S$ ce qui correspond à la même discontinuité que précédemment.

Remarquons que, dans cet exemple, le champ magnétique est tangent à la nappe sur sa surface.

3.4.3. Généralisation

Dans le premier exemple, l'équation de Maxwell-Gauss, par l'intermédiaire du théorème de Gauss, nous a permis de déterminer la discontinuité du champ électrique à la traversée d'une surface chargée.

Dans le deuxième exemple, c'est l'équation de Maxwell-Ampère qui conduit au résultat pour une surface parcourue par un courant volumique.

Nous admettrons que chaque équation de Maxwell permet d'écrire une relation de passage à la traversée d'une densité surfacique de charges ou de courants :

À la traversée d'une nappe, séparant deux milieux 1 et 2 et portant des charges et courants surfaciques caractérisés par les densités σ et

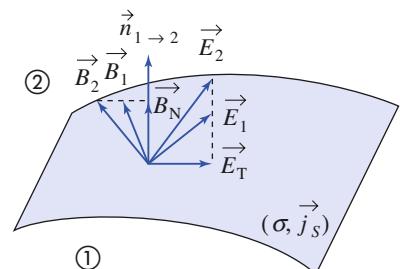
\vec{j}_S , le champ électromagnétique présente :

• une discontinuité des composantes normale du champ électrique et tangentielle du champ magnétique (doc. 11) :

$$(MG) \quad \vec{E}_{N_2} - \vec{E}_{N_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_1 \rightarrow 2 \quad \text{et} \quad (MA) \quad \vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_1 \rightarrow 2 ;$$

• une continuité des composantes normale du champ magnétique et tangentielle du champ électrique :

$$(MF) \quad \vec{E}_{T_2} - \vec{E}_{T_1} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (M\phi) \quad \vec{B}_{N_2} - \vec{B}_{N_1} = \vec{0} .$$



Doc. 11. \vec{B}_N et \vec{E}_T sont continus
 \vec{B}_T et \vec{E}_N sont discontinus.

Il est très important de noter que seule l'introduction d'une *modélisation surfacique de l'interface séparant deux milieux* conduit à une discontinuité des champs. Cette discontinuité est artificielle : le fait de simplifier un problème en ne tenant pas compte d'une de ces dimensions introduit les discontinuités.

Dans le cas d'une modélisation volumique le champ électromagnétique est continu.

Remarque

Le lecteur pourra vérifier les résultats ci-dessus dans les nombreux exemples de Première année (cf. H-Prépa, Électromagnétisme, 1^{re} année).

4 Potentiel scalaire V et potentiel vecteur \vec{A}

4.1. Structure intrinsèque du champ électromagnétique

L'équation du flux magnétique assure l'existence d'un potentiel vecteur (*cf. chapitre 2, § 2.4*) :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

L'équation de Maxwell-Faraday fait d'autre part apparaître un champ de gradient :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} V. \end{aligned}$$

Les équations intrinsèques du champ électromagnétique (M-Φ et M-F) assurent l'existence d'un potentiel scalaire V et d'un potentiel vecteur \vec{A} tels que :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Le champ magnétique reste, comme en régime permanent, un champ de rotationnel. Mais le champ électrique n'est plus un simple champ de gradient : sa circulation n'est plus conservative en régime variable : cette propriété importante, liée au phénomène d'induction déjà évoqué, sera développée aux *chapitres 6 et 7*.

Nous admettrons que l'utilisation des équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère ainsi que les relations ci-dessus permettent de donner deux équations liant les potentiels V et \vec{A} et les sources.

Comme dans le cas du régime permanent les potentiels ne sont connus qu'à un choix de jauge près ; ils ne sont donc pas uniques. Si l'on choisit une jauge particulière, dite **jauge de Lorentz** :

$$\operatorname{div}(\vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

on peut montrer que chaque potentiel vérifie une équation le liant aux sources.

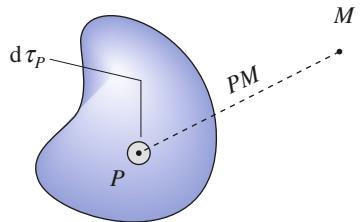
Remarque

Ainsi l'**équation de Poisson** vue au chapitre 2 devient $\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ en régime variable dans la jauge de Lorentz.

4.2. Potentiels retardés

Les solutions de ces équations sont données ci-dessous (*doc. 12*) :

$$\begin{aligned} V(M, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{distribution}} \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c}) d\tau_P}{PM} \\ \text{et} \quad \vec{A}(M, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\text{distribution}} \frac{\vec{j}(P, t - \frac{PM}{c}) d\tau_P}{PM}. \end{aligned}$$



Doc. 12. Observation en M des potentiel scalaire $V(M, t)$ et potentiel vecteur $\vec{A}(M, t)$ créés par une distribution volumique de charges $\rho(P, t)$ et de courants $\vec{j}(P, t)$, en un point P .

Ces solutions portent le nom de **potentiels retardés** : le décalage $\Delta t = \frac{PM}{c}$

traduit le fait que l'état des sources au point P à l'instant t n'est ressenti que $\frac{PM}{c}$ plus tard au point M parce que l'information « voyage » à une vitesse finie c ; autrement dit, ce qui se produit en M à l'instant t est l'effet d'une cause datant de l'instant $t - \frac{PM}{c}$.

Nous retrouverons des solutions de cette forme lors de l'étude de la propagation des ondes (cf. *H-Prépa, Ondes, 2nd année*).

5 Approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.)

5.1. Champ instantané

Ainsi que nous l'avons déjà mentionné au chapitre 1, le retard de propagation de l'information, dans un milieu de dimension caractéristique L , est de l'ordre de $\frac{L}{c}$. Il est négligeable si le temps caractéristique d'évolution T des grandeurs physiques lui est très supérieur : $T \gg \frac{L}{c}$, ou encore si $\lambda \gg L$ (doc. 13).

Dans l'A.R.Q.P., nous négligeons le retard de propagation de l'information. Il s'agit d'une approximation de vitesse de propagation infinie : $c \rightarrow \infty$.

Les potentiels retardés sont alors assimilables aux potentiels « instantanés ». Les expressions approchées :

$$V(M, t) = \iiint_{\text{distribution}} \frac{\rho(P, t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\tau}{PM}$$

$$\text{et } \vec{A}(M, t) = \iiint_{\text{distribution}} \frac{\mu_0 \vec{j}(P, t)}{4\pi} \frac{d\tau}{PM},$$

sont ici suffisantes pour déterminer le champ électromagnétique.

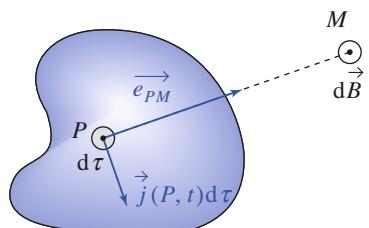
Le champ magnétique est $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$. Les dérivations ne s'appliquant qu'aux variables spatiales, nous voyons que le champ magnétique instantané n'est autre que le champ donné par la loi de Biot et Savart (doc. 14) :

$$\vec{B}(M, t) = \iiint_{\text{distribution}} \frac{\mu_0 \vec{j}(P, t) d\tau}{4\pi} \wedge \frac{\vec{e}_{PM}}{PM^2}.$$

En revanche, le champ électrique $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ne s'identifie pas, même dans l'A.R.Q.P., à un champ de Coulomb « instantané ».

fréquence $v(\text{Hz})$	période (s) $T = \frac{1}{v}$	longueur d'onde (m) $\lambda = cT = \frac{c}{v}$
50	$2 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^6$
10^5	10^{-5}	300

Doc. 13. Domaine de validité de l'A.R.Q.P. pour des signaux sinusoïdaux : $\lambda \ll L$.

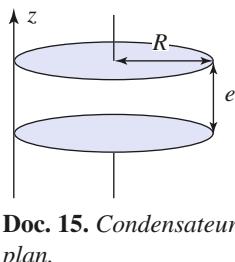


Doc. 14. Champ magnétique d'une distribution de courants.

Application 3

Condensateur alimenté à haute fréquence

Un condensateur plan (doc. 15), constitué de deux plaques circulaires d'axe (Oz) et de rayon R , séparées par une distance e faible devant R , est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω .



Doc. 15. Condensateur plan.

- 1) Pour ce système à symétrie cylindrique, on écrira le champ électrique sous forme :

$$\vec{E} = E(r) \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction $E(r)$?

Déterminer celle-ci sous la forme d'une série entière développée en puissances de la variable sans dimension $x = \frac{r\omega}{c}$.

- 2) Pour $\omega = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$ et $R = 5 \text{ cm}$, que peut-on dire de la fonction $E(r)$ à l'intérieur du condensateur ? L'A.R.Q.P. est-elle convenable ?

- 3) Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du condensateur ?

Données : en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , le laplacien d'une fonction $f(r, \theta, z)$ est :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

- 1) Dans l'espace vide de charges situé entre les armatures du condensateur, le champ électrique vérifie l'équation :

$$\vec{0} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \left(\Delta E(r) + \frac{\omega^2}{c^2} E(r) \right) \vec{e}_z$$

$$= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E(r)}{\partial r} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} E(r) \right] \vec{e}_z$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 E(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E(r)}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} E(r) = 0.$$

Si nous cherchons une solution de la forme :

$$E(r) = \sum_n a_n x^n,$$

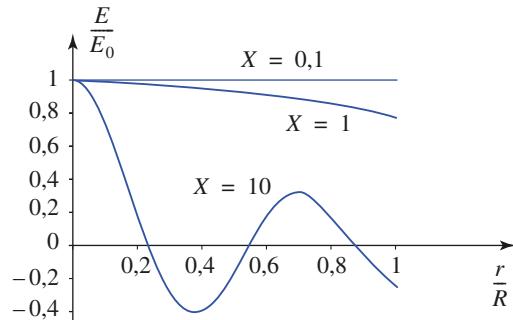
nous obtenons $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$, avec $a_1 = 0$ et $a_0 = E_0$, valeur du champ sur l'axe (Oz).

La solution recherchée s'écrit donc :

$$E(r) = E_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2} \left(\frac{r\omega}{c} \right)^{2p}.$$

- 2) Le cas numérique envisagé correspond à $X = \frac{R\omega}{c} = 0,1$, ce qui donne un champ électrique quasiment uniforme à l'intérieur du condensateur (doc. 16) : le premier terme du développement vaut $-\frac{1}{4}X^2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ pour $X = 0,1$. Nous avons bien

$T \gg \frac{R}{c}$, de sorte que l'A.R.Q.P. est ici acceptable même à cette fréquence de 100 MHz (le fait de négliger les effets de bord risque bien de constituer une approximation nettement moins bonne).



Doc. 16. Évolution du rapport $\frac{E}{E_0}$ en fonction de la variable réduite $\frac{r}{R}$, pour différentes valeurs du paramètre $X = \frac{R\omega}{c}$.

Remarque

Notons que la condition de validité de l'A.R.Q.P. peut aussi s'écrire $R \ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$, soit $R \ll \lambda$, où λ est la longueur d'onde d'une onde électromagnétique de pulsation ω dans le vide.

- 3) Dans le condensateur, le champ magnétique est, pour ce problème à géométrie cylindrique, de la forme :

$$\vec{B} = B(r, t) \vec{e}_\theta.$$

Comme $\vec{j} = \vec{0}$ entre les plaques, le théorème d'Ampère généralisé nous indique que la circulation du champ magnétique sur un cercle de rayon r ($r < R$) et d'axe (Oz) est égale au flux du courant de déplacement à travers les disques correspondant, multiplié par μ_0 .

Soit :

$$2\pi r B(r, t) = \mu_0 r^2 [-\omega \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t)]\pi.$$

Le champ magnétique est alors :

$$\vec{B} = -\frac{1}{2} \frac{r\omega}{c} \frac{E_0}{c} \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

5.2. L'A.R.Q.P dans les conducteurs

5.2.1. L'A.R.Q.P en électricité

Pour un circuit électrique de dimension L de l'ordre de 10 cm, l'A.R.Q.P. est applicable si le temps caractéristique d'évolution T vérifie $T \gg \frac{L}{c} \approx 3 \cdot 10^{-10}$ s. Ceci correspond, en régime sinusoïdal, à des fréquences inférieures au GHz.

L'A.R.Q.P. est une approximation peu contraignante en électronique, et parfaitement justifiée en électrotechnique (la vitesse de rotation d'un moteur est au plus de quelques milliers de tours par minute).

5.2.2. Loi d'Ohm

Dans ces circuits électriques, les fils conducteurs sont constitués de cuivre, métal bon conducteur, dont le temps de relaxation τ est de l'ordre de 10^{-14} s. Or nous savons que, dans un conducteur, la loi d'Ohm est applicable si le temps T caractéristique d'évolution du système vérifie $T \gg \tau$.

Les ordres de grandeur du temps caractéristique T que nous venons d'envisager, nous permettent d'énoncer la propriété suivante.

Dans les circuits électriques, la loi d'Ohm est valable lorsque l'A.R.Q.P. est justifiée.

5.2.3. Courant de déplacement dans un conducteur

Au sein d'un conducteur ohmique fixe, le courant de conduction est $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ lorsque la loi d'Ohm est utilisable.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors, au sein du conducteur :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Nous pouvons comparer, pour un temps caractéristique d'évolution T , les courants de conduction et de déplacement dans le conducteur en écrivant :

$$\frac{|\vec{j}|}{|\vec{j}_D|} \approx \frac{|\gamma \vec{E}|}{\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \approx \frac{\gamma E}{\epsilon_0 \frac{E}{T}} = \frac{\gamma T}{\epsilon_0}.$$

Pour le cuivre de conductivité $\gamma \approx 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, ce rapport est de l'ordre de $10^{19} T$, avec T en seconde (soit supérieur à 10^9 pour T de l'ordre de 10^{-10} s).

Pour les régimes d'évolution justifiant l'emploi de la loi d'Ohm, le courant de déplacement est, au sein du conducteur ohmique, négligeable devant le courant de conduction : $|\vec{j}_D| \ll |\vec{j}|$.

5.3. Équations de Maxwell de l'A.R.Q.P.

Pour un circuit électrique utilisé dans l'A.R.Q.P., nous pouvons négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction. L'équation de Maxwell-Ampère prend donc la forme approchée : $\vec{\text{rot}} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$.

Les équations de Maxwell de l'A.R.Q.P. :

- **l'équation de Maxwell-Gauss (M-G) :** $\text{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$;
- **l'équation de Maxwell-Ampère (M-A) :** $\vec{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t)$;
- **l'équation du flux magnétique (M-Φ) :** $\text{div} \vec{B}(M, t) = 0$;
- **l'équation de Maxwell-Faraday (M-F) :** $\vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$;

décrivent l'évolution du champ électromagnétique dans le cadre de l'A.R.Q.P.

- Le champ magnétique vérifie les mêmes équations (M-A et M-Φ) qu'en régime permanent. La loi de Biot et Savart, par exemple, reste applicable dans l'A.R.Q.P.
- Les champs électrique et magnétique restent, malgré la simplification de l'équation de Maxwell-Ampère, couplés par l'équation de Maxwell-Faraday : une variation temporelle du champ magnétique *induit* un champ électrique.
- Dire que l'équation de Maxwell-Ampère simplifiée correspond au domaine de l'A.R.Q.P. est un abus de langage usuel. Un condensateur par exemple, peut fonctionner dans l'A.R.Q.P. alors que l'inégalité $|\vec{j}| \gg |\vec{j}_D|$ n'est pas valable entre ses armatures puisque le courant de conduction est nul ! Nous avons d'ailleurs appliqué le théorème d'Ampère généralisé dans le calcul du champ *entre* les plaques du condensateur (*cf. Application 3*).

En revanche, cette écriture est valable dans les conducteurs, donc les circuits électriques, si les lignes de courant ne sont pas interrompues par des surfaces.

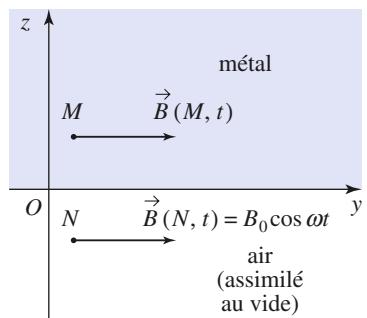
Nous retrouvons ici la conservation du flux de \vec{j} ($\text{div} \vec{j} = 0$) associée à la validité de l'équation de Maxwell-Ampère simplifiée.

Ces équations nous permettront alors d'étudier le **phénomène d'induction électromagnétique**, en écrivant l'équation électrique traduisant le fonctionnement du circuit envisagé (*cf. chapitres 6 et 7*).

5.4. Effet de peau

5.4.1. Équation de diffusion du champ

Nous cherchons à décrire le comportement du champ électromagnétique au sein d'un bon conducteur ohmique (de conductivité γ) dans l'A.R.Q.P., à l'aide d'un modèle unidimensionnel : le métal occupe la zone d'espace ($z > 0$), et l'air la zone $z < 0$. Dans l'air règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0(t)$. Nous cherchons à savoir comment ce champ « pénètre » dans le conducteur (*doc. 17*).



Doc. 17. Champ magnétique dans un conducteur ohmique.

La loi d'Ohm s'écrit $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, et ce courant de conduction est largement supérieur, au sein du conducteur, au courant de déplacement de Maxwell, d'où :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}.$$

Pour éliminer le champ électrique, formons le rotationnel des deux membres de cette équation :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Le champ magnétique, de divergence nulle, vérifie donc l'équation :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Il en est de même pour \vec{j} et \vec{E} .

Remarque

Cette équation est semblable à l'**équation de la diffusion thermique** dans un matériau homogène de coefficient de diffusion D (cf. H-Prépa, Thermodynamique, 2^{de} année) :

$$\Delta T = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

5.4.2. Épaisseur de peau

Nous supposons qu'il existe dans l'air, et donc à la surface du conducteur (il n'y a pas ici de courant surfacique : $\vec{j}_S = \vec{0}$), un champ magnétique $\vec{B}(z \leq 0, t) = \vec{B}_0 \cos \omega t$, et nous nous plaçons en régime sinusoïdal établi. De ce fait, pour résoudre l'équation différentielle linéaire et à coefficients indépendants du temps vérifiée par le champ, il est commode d'utiliser la notation complexe : $\vec{B} = \Re(\underline{B})$, avec $\vec{B}(\vec{r}, t) = \underline{b}(z) e^{j\omega t} \vec{e}_y$.

Nous obtenons alors l'équation différentielle : $\frac{d^2 \underline{b}(z)}{dz^2} = j \mu_0 \gamma \omega \underline{b}(z)$.

La solution $\underline{b}(z)$ est de la forme :

$$\underline{b}(z) = \underline{b}_1 e^{-\alpha z} + \underline{b}_2 e^{+\alpha z},$$

avec $\alpha^2 = j \mu_0 \gamma \omega$, donc $\alpha = \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\delta}$, où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ est une grandeur homogène à une longueur.

Le conducteur occupe le demi-espace ($z > 0$) et le champ ne peut diverger lorsque z tend vers l'infini, donc $\underline{b}_2 = 0$. De plus, sa valeur en $z = 0$ nous permet de fixer : $\underline{b}_1 = \underline{B}_0$ car le champ est continu pour ce modèle de conduction volumique.

Finalement, nous obtenons :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \underline{B}_0 e^{j\omega t - \alpha z} \vec{e}_y, \text{ donc } \vec{B}(\vec{r}, t) = \underline{B}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_y.$$

• Le terme $\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$ prend la même valeur à l'instant t et à l'abscisse z qu'à l'instant $t + dt$ et à l'abscisse $z + dz$, avec $dz = (\omega \delta) dt = v dt$.

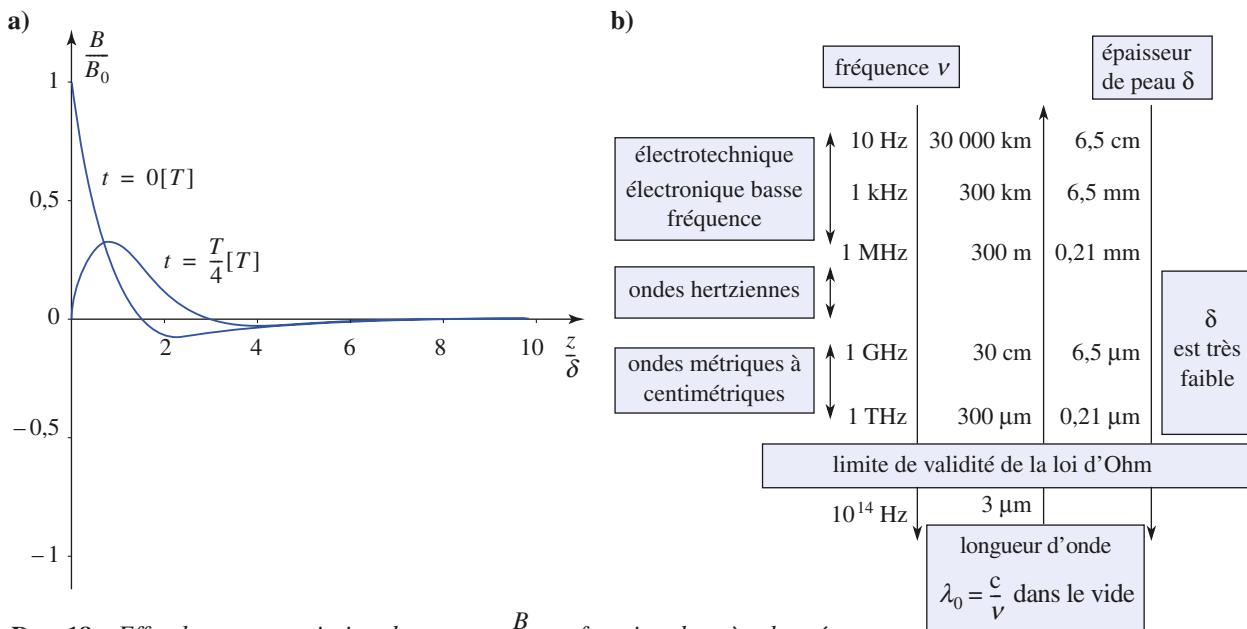
Ce facteur correspond donc à une propagation du champ électromagnétique variable, de pulsation ω à la vitesse $v = \omega \delta$, dans le conducteur.

- Le terme $e^{-\frac{z}{\delta}}$ nous indique que cette propagation s'accompagne d'une atténuation : le champ électromagnétique interagit avec les charges du milieu conducteur, et l'énergie contenue dans cette onde électromagnétique est progressivement convertie par effet Joule.

La profondeur caractéristique de la pénétration du champ magnétique est la longueur δ : elle porte le nom d'**épaisseur de peau** (doc. 18a).

Considérons le cas d'un bon conducteur comme le cuivre, de conductivité $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Le document 18b indique quelques valeurs de l'épaisseur δ pour des fréquences allant de 10 Hz à 1 THz, pour lesquelles la loi d'Ohm est applicable (le temps de relaxation du milieu est de l'ordre de 10^{-14} s).

Nous constatons que l'épaisseur de peau diminue lorsque la fréquence augmente. À haute fréquence, le champ magnétique (ainsi que le champ électrique et les courants de conduction) est localisé dans une fine pellicule d'épaisseur de l'ordre de δ , au voisinage de la surface du conducteur. Ceci justifie l'appellation d'épaisseur de peau donnée à la longueur δ .



5.4.3. Cas limite du conducteur parfait

L'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ est d'autant plus petite que la fréquence et aussi la conductivité prennent des valeurs importantes. Il est ainsi usuel de considérer le modèle du métal infiniment conducteur, appelé métal *parfait*. Dans ce modèle, l'épaisseur de peau δ est nulle à toute fréquence : cela nous conduit à écrire que \vec{E} , \vec{j} et \vec{B} sont nuls à l'intérieur d'un conducteur parfait.

Les champs \vec{E} , \vec{j} et \vec{B} sont nuls à l'intérieur d'un conducteur parfait, de conductivité infinie. Dans un conducteur parfait, les courants sont donc localisés en surface.

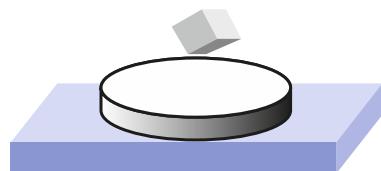
■ Cas particulier des supraconducteurs

Les supraconducteurs peuvent être considérés comme des conducteurs parfaits : ils possèdent effectivement cette propriété de repousser les lignes de champ magnétique.

Les courants apparaissant en surface du supraconducteur créent un champ qui tend à annuler le champ magnétique que l'aimant « tente » d'imposer au matériau supraconducteur.

Ce dernier, expulsant le champ magnétique, tend à éloigner l'aimant, qui peut l'éviter au-dessus du supraconducteur (doc. 19).

► Pour s'entraîner : ex. 4.



Doc. 19. Lévitation d'un petit aimant au-dessus d'un supraconducteur à base d'yttrium à la température d'ébullition de l'azote liquide.

6 Énergie électromagnétique

6.1. Recherche d'un bilan énergétique

6.1.1. Puissance cédée par le champ

Considérons un volume \mathcal{V} , fixe dans le référentiel galiléen d'étude, à l'intérieur duquel règne un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) dépendant de (\vec{r}, t) (doc. 20). Nous savons que le champ électromagnétique est susceptible de fournir de l'énergie aux charges qui se déplacent au sein de ce volume, la puissance volumique transmise aux charges s'écrivant (*cf. chapitre 1*) :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

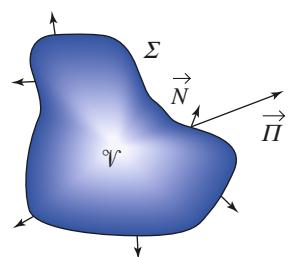
6.1.2. Ecriture du bilan d'énergie

\mathcal{P}_{vol} correspond à un transfert d'énergie du champ vers les charges. Pouvez-vous plus généralement associer une énergie au champ, et exprimer ses variations, au sein du volume \mathcal{V} , par un bilan énergétique complet ?

Si nous associons une énergie volumique \mathcal{E}_{vol} au champ électromagnétique, l'énergie électromagnétique contenue dans le volume \mathcal{V} s'écrit :

$$\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{E}_{\text{vol}} d\tau.$$

Cette énergie est susceptible de varier, du fait des échanges énergétiques entre le champ et les charges contenues dans le volume \mathcal{V} .



Doc. 20. Volume \mathcal{V} et surface Σ fermée associée.

La variation de l'énergie \mathcal{E} du champ liée à ce transfert s'écrit :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\substack{\text{interaction} \\ \text{avec les charges} \\ \text{de } \mathcal{V}}} = \iiint_{\mathcal{V}} -\mathcal{P}_{\text{vol}} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Cette puissance est une énergie reçue par le champ par unité de temps, alors que \mathcal{P}_{vol} est la puissance volumique reçue par les charges, d'où le signe moins.

Cette énergie peut aussi varier du fait de transferts énergétiques entre le champ contenu dans \mathcal{V} et le milieu extérieur. Ces transferts ont lieu à travers la surface fermée Σ qui délimite \mathcal{V} . Il est logique de pouvoir leur associer une direction et une intensité, c'est-à-dire un **vecteur densité de courant d'énergie**, que nous notons $\vec{\Pi}$. Nous écrivons alors :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\substack{\text{transfert} \\ \text{à travers } \Sigma}} = \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{\Pi} d\vec{S}.$$

Ce vecteur $\vec{\Pi}$ indique la direction du transfert d'énergie, et la surface fermée Σ est conventionnellement orientée vers l'extérieur, d'où à nouveau un signe moins.

Remarque

Ce vecteur est défini localement à un instant t donné $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}(M, t)$.

La variation de l'énergie du champ électromagnétique, par unité de temps, s'écrit :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} d\tau,$$

où \mathcal{E}_{vol} est la densité volumique d'énergie en un point M du volume \mathcal{V} à l'instant t : $\mathcal{E}_{\text{vol}}(M, t)$.

Elle est due aux transferts précédents :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right) = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\substack{\text{transfert} \\ \text{à travers } \Sigma}} + \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\substack{\text{interaction} \\ \text{avec les charges de } \mathcal{V}}}.$$

Un bilan énergétique traduisant l'évolution de l'énergie du champ électromagnétique contenue dans un volume délimité par la surface fermée Σ , doit prendre la forme :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} d\tau = \oint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Or, le flux d'énergie à travers la surface fermée peut s'exprimer à l'aide de la divergence du vecteur $\vec{\Pi}$ (théorème de Green-Ostrogradski, cf. Annexe) :

$$\oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\Pi} d\tau.$$

Le bilan précédent étant valable par tout volume \mathcal{V} , nous pouvons l'exprimer pour un volume élémentaire $d\tau$:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} d\tau = -\operatorname{div} \vec{\Pi} d\tau - \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Ce bilan d'énergie s'exprime donc localement par :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}(M, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{\Pi}(M, t) - \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t).$$

Remarque

Ce bilan est similaire à celui traduisant la conservation de la charge électrique : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}$.

Il suffirait de remplacer la densité d'énergie \mathcal{E}_{vol} et le vecteur densité de courant d'énergie $\vec{\Pi}$ par la densité de charge ρ et le vecteur densité de courant de charge \vec{j} . Le terme supplémentaire $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ traduit cependant une différence essentielle : l'énergie du champ (à ne pas confondre avec l'énergie totale contenue dans \mathcal{V}) n'est pas conservée, puisqu'elle peut être échangée avec les charges en mouvement.

Nous pouvons d'ailleurs interpréter $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ comme un terme de source volumique d'énergie du champ électromagnétique. Le bilan que nous proposons est donc plutôt à rapprocher de celui que nous effectuons dans le cas d'échanges énergétiques par conduction thermique (cf. H-Prépa, Thermodynamique, 2^{de} année), où apparaît aussi un terme de source volumique d'énergie.

6.2. Bilan énergétique local

Pour exprimer le terme de source d'énergie, utilisons l'équation de Maxwell-Ampère qui permet d'exprimer la densité volumique de courant électrique :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \left(\operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

soit, en effectuant un produit scalaire par le champ électrique \vec{E} :

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}}{\mu_0} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) - \frac{\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}}{\mu_0} \quad (1)$$

Pour obtenir une meilleure symétrie entre les champs électriques et magnétiques, écrivons parallèlement l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{0} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E}.$$

En effectuant un produit scalaire membre à membre avec le champ magnétique \vec{B} , il vient :

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2 \mu_0} \right) + \frac{\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}}{\mu_0} \quad (2)$$

Sommant membre à membre les équations (1) et (2), nous obtenons :

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \mu_0} \right) + \frac{(\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B})}{\mu_0}.$$

L'identité de dérivation vectorielle $\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$, nous permet d'écrire cette dernière égalité sous la forme :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \mu_0} \right) = \vec{j} \cdot \vec{E} + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (3)$$

Nous avons remarqué au chapitre 2 que l'énergie $\frac{1}{2}CU^2$ d'un condensateur peut être calculée par sommation, sur le volume du condensateur, du terme $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$, homogène à une énergie volumique.

Lors de l'étude de l'induction électromagnétique, nous vérifierons que l'énergie $\frac{1}{2}LI^2$ stockée par une bobine peut être calculée par la sommation spatiale du terme $\frac{B^2}{2\mu_0}$, homogène à une énergie volumique.

Dans un circuit électrique oscillant formé par un condensateur et une bobine mis en série (doc. 21), l'énergie du circuit reste constante, mais passe alternativement de la forme électrique à la forme magnétique.

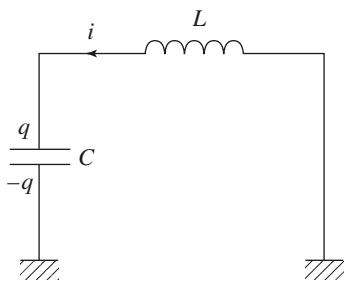
Dans le cas général, nous pouvons donc nous attendre à retrouver à la fois le terme électrique et le terme magnétique dans l'expression de l'énergie volumique du champ électromagnétique :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Cette expression nous permet d'écrire la relation (3) sous la forme :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} = - \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) - \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Cette expression est compatible avec la forme recherchée pour le bilan local d'énergie électromagnétique.



Doc. 21. Oscillateur électrique.

Associer au champ électromagnétique :

- une densité volumique d'énergie du champ électromagnétique :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- un vecteur flux de puissance ou vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

permettent d'écrire un bilan énergétique cohérent.

Le champ électromagnétique prend ici un aspect nouveau : ce n'est plus un simple intermédiaire de calcul, mais un objet physique auquel nous pouvons associer une énergie. En exercice, nous lui associerons aussi une impulsion, un moment cinétique...

Remarques

- Nous n'avons pas montré l'unicité de choix, mais nous nous sommes assurés de sa cohérence.
- $\vec{\Pi}$, défini comme étant le produit vectoriel du champ électrique (vecteur polaire) par le champ magnétique (vecteur axial), possède les propriétés de symétrie d'un vecteur polaire.

Application 4

Bilan énergétique associé à l'effet de peau

Lors de l'étude d'un modèle unidimensionnel de diffusion d'un champ électromagnétique variable dans un milieu conducteur ohmique, de conductivité γ , il a été obtenu au § 5.4.2. l'expression :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_y.$$

C'est l'expression du champ magnétique dans le conducteur occupant le demi-espace ($z > 0$).

- 1) Quelles sont les expressions des champs \vec{E} et \vec{j} associés à ce champ magnétique oscillant ?
- 2) Quelle est la puissance moyenne temporelle \mathcal{P} transférée au conducteur, à travers une surface unité $\Delta x \Delta y$?
- 3) Que devient cette énergie ?

Faire une vérification à l'aide de l'expression de la densité volumique de courant \vec{j} au sein du conducteur.

1) Dans le conducteur, et pour les régimes d'évolution envisagés, le courant de déplacement est négligeable. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{\vec{\text{rot}} \vec{B}}{\gamma \mu_0} = -\frac{1}{\gamma \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{e}_x \\ \vec{E} &= \frac{B_0}{\gamma \mu_0 \delta} e^{-\frac{z}{\delta}} \left[+\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right] \vec{e}_x. \end{aligned}$$

2) Le vecteur de Poynting vaut, en $z = 0$:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(0, t) &= \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)_{z=0} \\ &= \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0^2 \delta} \cos(\omega t) [\cos(\omega t) - \sin(\omega t)] \vec{e}_z. \end{aligned}$$

La puissance surfacique moyenne recherchée est égale au flux moyen de vecteur de Poynting à travers une surface unité du plan ($z = 0$), orientée dans le sens des z croissants (vers le métal), soit :

$$\mathcal{P} = \langle \vec{\Pi}(0, t), \vec{e}_z \rangle = \frac{B_0^2}{2 \gamma \mu_0^2 \delta}$$

car $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ et $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$.

3) Les expressions de $\langle E^2 \rangle$ et $\langle B^2 \rangle$ montrent que l'énergie volumique moyenne associée au champ électromagnétique ne varie pas dans le temps.

Cette puissance est donc transférée aux charges du milieu conducteur, et convertie par effet Joule.

Calculons donc la puissance \mathcal{P}_j , rapportée à une surface $\Delta x \Delta y$ unité, dissipée par effet Joule dans le matériau.

Elle vaut :

$$\mathcal{P}_j = \int_{z=0}^{\infty} \langle \frac{j^2}{\gamma} \rangle (\Delta x \Delta y dz)$$

$$\text{Or, } j^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \gamma^2} e^{-\frac{2z}{\delta}} \left(1 - 2 \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right)$$

$$\text{et } \langle j^2 \rangle = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2} e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

$$\mathcal{P}_j = \int_{z=0}^{\infty} \frac{B_0^2}{2 \gamma \mu_0^2 \delta^2} e^{-\frac{2z}{\delta}} dz = \frac{B_0^2}{2 \gamma \mu_0^2 \delta},$$

et nous retrouvons $\mathcal{P}_j = \mathcal{P}$. Ce résultat correspond à ce que nous savons d'un conducteur ohmique passif : en régime établi, il restitue toute l'énergie électrique reçue par effet Joule.

6.3. Théorème de Poynting

Du bilan énergétique local :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} = - \text{div} \vec{\Pi} - \vec{j} \cdot \vec{E},$$

nous déduisons l'expression de ce bilan pour un volume \mathcal{V} donné.

Le bilan d'énergie électromagnétique peut être traduit, pour un volume donné, délimité par la surface fermée Σ , par le théorème de Poynting :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau + \oint_{\Sigma} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Application 5

Bilan énergétique pour un fil conducteur ohmique

Un fil conducteur ohmique de conductivité γ , assimilé à un cylindre d'axe (Oz) et de rayon a , est soumis au champ électrique uniforme et permanent :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z.$$

1) Déterminer le champ magnétique engendré par les courants du cylindre.

2) Quel est le flux du vecteur de Poynting à travers un cylindre d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon r ? Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat?

1) Le fil est parcouru par la densité volumique de courant $\vec{j} = \gamma \vec{E} = j \vec{e}_z$ uniforme.

Le champ magnétique créé par cette distribution est de la forme :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_{\theta}.$$

En appliquant le théorème d'Ampère, en régime permanent, à un cercle d'axe (Oz) et de rayon r , nous obtenons :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} \vec{e}_{\theta} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_{\theta},$$

à l'intérieur du fil, et :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j \pi a^2}{2\pi r} \vec{e}_{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_{\theta},$$

à l'extérieur, en notant $I = \pi a^2 j$ le courant par-courant le fil.

2) Le vecteur de Poynting est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 I}{2\pi a^2} (-r \vec{e}_r) \text{ pour } r \leq a,$$

$$\text{et } \vec{\Pi} = \frac{E_0 I}{2\pi} \left(-\frac{\vec{e}_r}{r} \right) \text{ pour } r \geq a.$$

Son flux à travers un cylindre d'axe (Oz) et de rayon r , compté vers l'intérieur de celui-ci, vaut :

$$\Phi = 2\pi r h (-\vec{e}_r \cdot \vec{\Pi}) = \frac{E_0 I}{\pi a^2} (\pi r^2 h)$$

$$= \frac{j^2}{\gamma} (\pi r^2 h) \text{ pour } r \leq a,$$

$$\text{et } \Phi = \frac{E_0 I}{\pi a^2} (\pi a^2 h) = \frac{j^2}{\gamma} (\pi a^2 h) \text{ pour } r \geq a.$$

Nous reconnaissions, dans les deux cas, la puissance absorbée (par effet Joule) par la partie du fil contenue dans le cylindre de rayon r considéré.

Ce résultat illustre, en régime permanent, le bilan énergétique :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} d\tau = \oint_{\Sigma} -\vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = 0.$$

Nous retrouvons en effet, pour le cylindre envisagé :

$$\oint_{\Sigma} -\vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{j^2}{\gamma} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

► Pour s'entraîner : ex.2, 3, 5, 6 et 8.



En régime variable les lois locales suivantes :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0$$

sont inchangées : ce sont deux des quatre équations de Maxwell.

Le théorème de Gauss reste valable pour \vec{E} .

Le vecteur \vec{B} est un champ à flux conservatif.

● ÉQUATION DE MAXWELL-FARADAY

- Un champ magnétique évoluant dans le temps peut induire une composante du champ électrique à circulation non conservative. Son rotationnel est donné par l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

- La circulation du champ électrique sur un contour Γ s'écrit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

où Σ désigne une surface orientée s'appuyant sur ce contour. Si le contour Γ est fixe dans le référentiel galiléen d'étude, cette circulation s'identifie à l'opposé de la variation du flux magnétique à travers ce contour, par unité de temps :

$$\oint_{\Gamma \text{ fixe}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

● ÉQUATION DE MAXWELL-AMPÈRE

Le théorème d'Ampère généralisé :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

est la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$, où le courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ assure la compatibilité des équations du champ, avec le principe de conservation de la charge électrique.

● LES QUATRE ÉQUATIONS DE MAXWELL

Les quatre équations de Maxwell, qui régissent l'évolution locale du champ électromagnétique dans tout référentiel galiléen, sont :

- l'équation de Maxwell-Gauss (M-G) : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;
- l'équation de Maxwell-Ampère (M-A) : $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$;



- l'équation du flux magnétique (M-Φ) : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$;
- l'équation de Maxwell-Faraday (M-F) : $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Les constantes fondamentales $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ vérifient la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

Les équations de Maxwell permettent de rendre compte du phénomène de propagation des ondes électromagnétiques à vitesse c dans *tous* les référentiels galiléens.

Elles sont compatibles, dans l'approximation non relativiste, avec les lois de la mécanique classique.

Dans cette approximation, nous pourrons continuer à utiliser la relation fondamentale de la dynamique classique pour étudier les mouvements des particules chargées soumises à un champ électromagnétique.

● DISCONTINUITÉS DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

À la traversée d'une nappe séparant deux milieux 1 et 2, portant les charges et courants surfaciques σ et \vec{j}_s , le champ électromagnétique présente une discontinuité finie :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} ; \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2}).$$

● POTENTIEL SCALAIRE V ET POTENTIEL VECTEUR \vec{A}

Les équations intrinsèques du champ électromagnétique (M-Φ et M-F) assurent l'existence des potentiels scalaire V et vecteur \vec{A} tel que :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Dans la jauge de Lorenz : $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, les potentiels scalaires et vecteur sont liés aux charges et courants par les équations découplées :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}.$$

Les potentiels retardés constituent des solutions des équations aux potentiels qui intègrent les effets de la vitesse finie de propagation de l'information.

● L'A.R.Q.P.

Dans l'A.R.Q.P., nous négligeons le retard à la propagation de l'information. Il s'agit d'une approximation de vitesse de propagation infinie : $c \rightarrow \infty$.

• A.R.Q.P. dans les conducteurs

Dans les circuits électriques, la loi d'Ohm est utilisable lorsque l'A.R.Q.P. est justifiée.

Pour les régimes d'évolution justifiant l'emploi de la loi d'Ohm, le courant de déplacement est, au sein du conducteur ohmique, négligeable devant le courant de conduction.

• Équations de Maxwell de l'A.R.Q.P.

- l'équation de Maxwell-Gauss (M-G) : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;



– l'équation de Maxwell-Ampère (M-A) : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$;

– l'équation du flux magnétique (M-Φ) : $\text{div} \vec{B} = 0$;

– l'équation de Maxwell-Faraday (M-F) : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Elles décrivent l'évolution du champ électromagnétique dans le cadre de l'A.R.Q.P., lorsque le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction (c'est le cas dans un bon conducteur).

Les grandeurs \vec{E} , \vec{j} , ρ et \vec{B} sont nulles à l'intérieur d'un conducteur parfait (de conductivité infinie). Dans un conducteur parfait, les courants sont donc localisés en surface.

● ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Le bilan énergétique local, $\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} = -\text{div} \vec{P} - \vec{j} \cdot \vec{E}$, peut être traduit convenablement en considérant que :

- la densité d'énergie du champ électromagnétique est $\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$;
- le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique, appelé *vecteur de Poynting*, est :

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Le bilan d'énergie électromagnétique peut être traduit, pour un volume \mathcal{V} donné, délimité par la surface fermée Σ , par le théorème de Poynting :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau = \oint_{\Sigma} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Quelles équations de Maxwell sont modifiées par rapport au régime permanent ?
- ✓ Le théorème de Gauss est-il applicable quel que soit le régime étudié ?
- ✓ L'équation de conservation de la charge est-elle contenue dans les équations de Maxwell ?
- ✓ Comment s'écrivent les équations de Maxwell dans l'A.R.Q.P. ?
- ✓ Le champ électromagnétique pénètre-t-il dans un bon conducteur ohmique ?
- ✓ Comment s'écrivent le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique.
- ✓ Comment s'écrit le bilan énergétique de l'interaction entre le champ électromagnétique et un milieu donné ?
- ✓ Pouvez-vous relier les potentiels V et \vec{A} au champ électromagnétique ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. c :

- a. est la vitesse de propagation de la lumière dans un milieu quelconque
- b. est indépendante du référentiel galiléen d'étude
- c. s'exprime par $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$
- d. s'exprime par $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$.

2. Pour un conducteur ohmique dans le cadre de l'A.R.Q.P., l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

- a. $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \gamma \vec{E}$
- b. $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \frac{\mu_0}{\gamma} \vec{E}$
- c. $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \gamma \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

3. Dans un conducteur parfait :

- a. le champ magnétique intérieur est nul
- b. le vecteur densité de courants volumiques est non nul
- c. la conductivité est infinie
- d. le champ électrique pénètre sur une profondeur $\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

4. À la traversée d'une nappe surfacique, la composante tangentielle du champ magnétique :

- a. est continue
- b. subit une discontinuité :
$$\vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}.$$
- c. subit une discontinuité :
$$\vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{2 \rightarrow 1}.$$
- d. subit une discontinuité :
$$\vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}.$$

5. L'énergie électromagnétique volumique :

- a. s'exprime en $J \cdot m^{-3}$
- b. est également répartie entre le terme magnétique et le terme électrique
- c. s'écrit $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2$
- d. a une variation temporelle opposée à la divergence du vecteur de Poynting
- e. est une grandeur locale.

► Solution, page 161.

Exercice commenté

Bilan énergétique associé à un condensateur dans l'A.R.Q.P.

ÉNONCÉ

Le condensateur du circuit électrique représenté ci-contre est constitué de deux disques métalliques, d'axe (Oz) et de rayon a , distants de e .

Le système fonctionne dans le cadre de l'A.R.Q.P. (cf. Application 3) et on négligera tout effet de bord.

1) Quelles sont les valeurs des champs électrique et magnétique à l'intérieur du condensateur ?

2) Calculer en fonction de $Q(t)$, $I(t)$, c et a le rapport, ρ , du terme magnétique au terme électrique de l'énergie volumique en $r = a$.

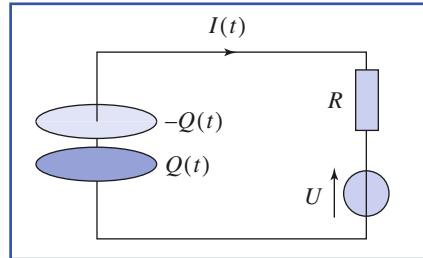
Évaluer le rapport $\frac{Q}{I}$ et donner une nouvelle expression de ρ ; conclure.

En déduire l'expression de la capacité d'un condensateur plan.

3) Calculer le vecteur de Poynting associé, puis le flux d'énergie électromagnétique à travers les « parois » du condensateur, constituées par le cylindre d'axe (Oz), de rayon a et de hauteur e .

À quelle grandeur ce flux est-il égal ?

4) Vérifier sur cet exemple l'écriture du théorème de Poynting.



CONSEILS

L'Application 3 a montré que, dans l'A.R.Q.P., le champ électrique est quasiment uniforme à l'intérieur du condensateur.

SOLUTION

1) Dans le condensateur, le champ électrique est $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \vec{e}_z$.

Le condensateur est de révolution autour de l'axe (Oz). On cherche donc un champ magnétique de la forme :

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B(r, z) \vec{e}_\theta.$$

Le théorème d'Ampère généralisé appliqué à un cercle d'axe (Oz) et de rayon r , contenu dans le condensateur permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 2\pi r B(r, z) &= \oint_{\text{cercle}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\text{disque de rayon } r} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\text{disque de rayon } r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 S} \right) \pi r^2 = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{S}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{B}_{\text{dans le condensateur}} = \frac{\mu_0 I}{2 S} r \vec{e}_\theta.$$

À l'extérieur du condensateur, on obtient : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

2) En un point du condensateur (avec $r = a$), $\epsilon_{\text{vol}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$, soit

$$\epsilon_{\text{vol}} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0(\pi a^2)^2} + \frac{\mu_0 I^2}{8(\pi a)^2}, \text{ soit } \rho = \left(\frac{I}{Q} \right)^2 \left(\frac{a}{2c} \right)^2.$$

Pour une charge de condensateur (en supposant $Q(0) = 0$),

$$Q(t) = CU \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) \right) \text{ et } I(t) = \frac{U}{R} \exp \left(-\frac{t}{RC} \right).$$

Exercice commenté

Dans l'A.R.Q.P., l'énergie stockée par le condensateur est essentiellement sous forme électrique :

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \gg \frac{B^2}{2\mu_0}$$

dans le condensateur

Le flux d'énergie électromagnétique correspond au flux du vecteur de Poynting.

Nous écrivons l'identité correspondant au théorème de Poynting pour vérifier le bilan énergétique du système.

Ainsi pour un instant quelconque de l'intervalle de charge, $\frac{Q}{I} \approx RC$ qui est le temps caractéristique τ de charge du condensateur. Or ce temps est, dans le cadre de l'A.R.Q.P., très supérieur au temps de propagation qui est de l'ordre de $\frac{\tau}{c}$, d'où $\rho \ll 1$ ($\rho = \left(\frac{a}{2\tau c}\right)^2$).

L'énergie est donc essentiellement stockée sous forme électrique dans le condensateur, et elle vaut :

$$\mathcal{E} = \iiint_{\text{condensateur}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau = \frac{eQ^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

où $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ est la capacité du condensateur plan.

3) Le vecteur de Poynting vaut, sur les parois du condensateur, donc en $r = a$:

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 S} \vec{e}_z \right) \wedge \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{e}_\theta \right) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 a S} Q \frac{dQ}{dt} \vec{e}_r,$$

et le flux d'énergie électromagnétique reçu par le volume compris entre les armatures du condensateur, formant un cylindre de rayon a et de hauteur e , est :

$$\Phi = \iint -\vec{P} \cdot d\vec{S} = 2\pi a e \frac{1}{2\pi a \epsilon_0 S} Q \frac{dQ}{dt} = \frac{e}{\epsilon_0 S} Q \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right).$$

4) On peut identifier ce flux à la variation de l'énergie stockée par le condensateur $\Phi = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$.

Cette dernière égalité revient à écrire le bilan énergétique, pour le volume \mathcal{V} du condensateur, sous la forme :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau = \iint - \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S},$$

et correspond bien à l'écriture du théorème de Poynting dans la mesure où il n'y pas de courant électrique ($\vec{j} = \vec{0}$) entre les armatures du condensateur.

Exercices

1 Sphère radioactive

Une sphère radioactive, de rayon R , émet des particules chargées de façon isotrope dans l'espace. On note $Q(r, t)$ la charge contenue à l'instant t dans une sphère de rayon r ($r > R$).

1) Calculer le champ électrique et le champ magnétique à la distance r du centre de la sphère radioactive.

Calculer le vecteur densité de courant volumique à la distance r .

2) Les résultats précédents sont-ils en accord avec l'équation $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$? Commenter.

2 Vecteur de Poynting nul ou transfert d'énergie nul ?

Une charge ponctuelle constante q et un dipôle magnétique de moment dipolaire \vec{M} , indépendant du temps, sont immobiles, placés comme indiqué sur le schéma.



1) Le vecteur de Poynting est-il nul en un point quelconque de l'espace extérieur aux sources ?

2) Cette situation correspond-elle à un transfert d'énergie d'une zone de l'espace vers une autre ?

Ces deux résultats sont-ils incompatibles ?

Donnée : $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\text{rot } \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\text{rot } \vec{b})$.

3 Câble coaxial en régime statique

Un câble coaxial de longueur L est constitué de deux cylindres minces c_1 et c_2 parfaitement conducteurs de rayon R_1 et R_2 , avec $R_2 > R_1$, et de même axe (Oz).

Les phénomènes étudiés ici sont à symétrie de révolution autour de l'axe (Oz). On suppose $L \gg R_2$.

L'âme c_1 , au potentiel V_1 , porte une charge linéique λ , et est parcourue par le courant I .

L'âme c_2 est au potentiel V_2 . Elle porte une charge linéique $-\lambda$, et est parcourue par le courant $-I$.

On note $U = V_1 - V_2$.

1) Calculer les charges surfaciques σ_1 et σ_2 , puis le champ \vec{E} en tout point et la densité linéique d'énergie électrique $\frac{dW_E}{dz}$.

En déduire la capacité linéique Γ du câble coaxial (en n'oubliant pas que l'énergie d'un condensateur de capacité C portant une charge Q est égale à $W_E = \frac{Q^2}{2C}$).

2) Calculer les courants surfaciques sur c_1 et c_2 , puis le champ \vec{B} en tout point et la densité linéique d'énergie magnétique $\frac{dW_B}{dz}$; en déduire l'inductance linéique Λ du câble coaxial (en n'oubliant pas que l'énergie d'une inductance L parcourue par un courant I est égale à $W_B = \frac{LI^2}{2}$).

3) Quelle est la valeur du produit $\Lambda\Gamma$?

Quelle impédance Z_c , à exprimer en fonction de R_1 et R_2 , peut-on former avec Λ et Γ ?

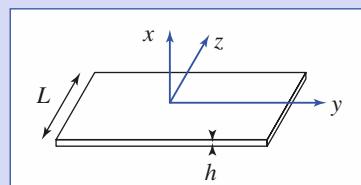
4) Calculer le vecteur de Poynting \vec{P} dans le câble coaxial, ainsi que le flux Φ d'énergie électromagnétique dans le câble.

Montrer que ce flux se met sous la forme $\Phi = UI$.

Commenter brièvement.

4 Effet de peau dans une plaque

Une plaque de cuivre de conductivité, $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, d'épaisseur h et de largeur L très supérieure à h , parallèle au plan (yOz), est parcourue par un courant de densité $\vec{J} = J(x, t)\vec{e}_y$.



On néglige toute action extérieure.

1) Déterminer la fonction $J(x, t)$ en régime sinusoïdal.

On prendra l'origine des x sur le plan médiateur et on supposera que $J(0, t) = J_m(0)\cos \omega t$.

$$J_m\left(\frac{h}{2}\right)$$

2) Déterminer le rapport $\frac{J_m(h)}{J_m(0)}$ des amplitudes de J au bord et au centre. Commenter.

Données : $h = 1 \text{ mm}$ et fréquence $f = 100 \text{ kHz}$.

3) Calculer la valeur maximale I_m de l'intensité.

Exercices

5 Résistance de fuite dans un condensateur cylindrique

Un système électrique cylindrique, de hauteur h , est constitué de deux cylindres métalliques creux coaxiaux de rayon R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$).

Initialement, le cylindre intérieur reçoit une charge Q et le cylindre extérieur une charge nulle. Le milieu qui les sépare possède une permittivité diélectrique et une perméabilité magnétique assimilables à celle du vide (ϵ_0 et μ_0), mais il est légèrement conducteur. On le supposera ohmique et de conductivité γ .

Dans tout l'exercice, les effets de bord sont négligés : tout se passe comme si les cylindres, de hauteur h , étaient infinis.

1) Vers quel état final le système évolue-t-il ? Déterminer le champ électrique à l'instant initial et à l'instant final. Que vaut le champ magnétique à tout instant ?

En déduire la variation d'énergie électromagnétique associée à cette transformation.

2) Quelle est la valeur du vecteur de Poynting au cours de cette transformation ?

Que peut-on conclure quant à la variation de l'énergie électromagnétique calculée à la question précédente ?

3) Déterminer le vecteur densité de courant électrique à tout instant. En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans le système. Vérifier les conclusions établies en 2) en composant les résultats obtenus en 1) et 3).

6 *Énergie magnétique stockée dans une bobine

Une bobine, de longueur l , de rayon a et d'axe (Oz), est constituée par un enroulement de n spires circulaires jointives par unité de longueur. On utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini pour décrire cette bobine et l'on se placera dans le cadre de l'A.R.Q.P.

1) Quelle est, dans ces conditions, le champ magnétique engendré par la bobine lorsqu'elle est parcourue par le courant I ?

2) Quelle est l'énergie magnétique \mathcal{E}_m associée à la bobine ? Quelle valeur du coefficient d'induction L de la bobine peut-on en déduire ?

A.N. : $I = 1 \text{ A}$, $l = 10 \text{ cm}$, $a = 10 \text{ cm}$, $n = 5\,000 \text{ m}^{-1}$ (cette valeur élevée peut être obtenue par superposition d'enroulements : le modèle du solénoïde à une couche d'enroulement est alors simpliste, mais les ordres de grandeur sont tout de même convenables).

3) La bobine est mise en charge par un générateur de force électromotrice e , de résistance interne R grande par rapport à celle de l'enroulement. Quelle est la loi d'évolution du courant dans le circuit, fermé à l'instant $t = 0$?

4) Calculer les champs magnétique et électrique engendrés par la bobine à l'instant t en tout point.

Comparer les ordres de grandeur des densités volumiques d'énergie magnétique et électrique (on pourra prendre des valeurs numériques raisonnables pour mener à bien ce calcul).

5) Quelle est l'expression du flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant le volume où la bobine crée un champ non négligeable (cylindre de rayon a et de longueur ℓ) ? Interpréter ce résultat.

7 *Mise en rotation d'une sphère chargée

Une sphère constituée d'un matériau isolant, de centre O , de rayon R et de masse m , porte une charge Q (la charge Q et la masse m sont réparties uniformément en volume).

La sphère peut tourner librement autour d'un axe (Oz) et on appelle J le moment d'inertie de cette sphère par rapport à (Oz) : $J = \frac{2}{5}mR^2$.

La sphère est placée dans une bobine, d'axe (Oz), constituée par un enroulement de n spires circulaires jointives par unité de longueur (on utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini pour décrire cette bobine).

1) À l'instant $t = 0$, le courant circulant dans le solénoïde, passe très rapidement de 0 à la valeur I_0 .

Pourquoi la sphère se met-elle à tourner ?

2) Exprimer la vitesse de rotation finale de la sphère en fonction de sa charge, de sa masse, et du champ magnétique $B_0 = \mu_0 n I_0$ créé par le solénoïde.

3) Évaluer numériquement cette vitesse de rotation en proposant des valeurs raisonnables pour réaliser cette expérience. Commenter.

4) Quelle est la relation liant le moment magnétique de la sphère en rotation au champ auquel elle est soumise ?

5) Lorsque la sphère se met en rotation, elle crée un champ magnétique variable négligé jusqu'ici. Évaluer ce champ magnétique au centre O de la sphère. On donne

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{4}{3}.$$

À quelle condition est-il effectivement négligeable devant celui du solénoïde ?

8

Impulsion du champ électromagnétique

Le champ électrique d'une onde plane sinusoïdale qui se propage dans le vide dans la direction de l'axe (Oz) a la forme suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x.$$

1) Exprimer le champ magnétique \vec{B} oscillant associé, dans cette onde, au champ électrique précédent.

Montrer que la compatibilité du champ de l'onde avec les équations de Maxwell dans le vide impose une relation entre k et ω (on prendra $k > 0$, pour une propagation à z croissant). On trouvera dans l'*Annexe* les expressions du rotationnel et de la divergence.

2) Quelle est la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie de cette onde ?

3) La grandeur $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$ est appelée impulsion volumique du champ (ou quantité de mouvement par unité de volume).

L'unité de cette grandeur est-elle en accord avec cette définition ?

4) Dans un modèle corpusculaire, on associe à cette onde un faisceau de photons se déplaçant à la vitesse c de l'onde.

On rappelle qu'un photon est une particule (relativiste) de masse nulle, d'énergie $\mathcal{E} = h\nu$ (où $\nu = \frac{2\pi}{\omega}$ désigne la fréquence de l'onde) et d'impulsion, ou quantité de mouvement :

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Quelle densité particulaire n de photons peut être associée à cette onde ?

En déduire l'expression de l'impulsion volumique associée à l'onde et vérifier qu'elle s'identifie bien à la moyenne temporelle de la grandeur \vec{g} définie à la question 3).

Corrigés

Solution du tac au tac, page 156.

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| 1. Vrai : b, c ; Faux : a, d | 4. Vrai : b ; Faux : a, c, d |
| 2. Vrai : a ; Faux : b, c | 5. Vrai : a, c, e ; Faux : b, d |
| 3. Vrai : a, c ; Faux : b, d | |

1

1) a) Puisque l'émission est isotrope, la distribution de charges et courants est à symétrie sphérique :

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(r, t) \text{ et } \vec{j}(\vec{r}, t) = j(r, t) \vec{e}_r.$$

Pour un point M donné, tout plan contenant M et l'origine O située au centre de la sphère est un plan de symétrie de cette distribution de charges et de courants :

• $\vec{E}(M)$ appartient à tous les plans contenant (OM) donc $\vec{E}(M) = E(r, t) \vec{e}_r$.

• $\vec{B}(M)$ est orthogonal à tous les plans contenant (OM) : $\vec{B}(M) = \vec{0}$.

En appliquant le théorème de Gauss à une sphère de rayon r , on obtient :

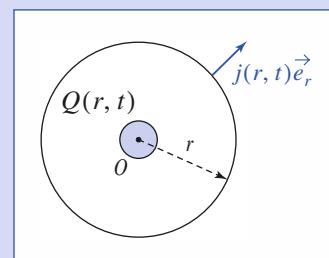
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{Q(r, t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

$Q(r, t)$ et $j(r, t)$ sont liés par l'équation de conservation de la charge :

$$\oint_{\Sigma} \vec{j}(\vec{r}, t) d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\Sigma}} \rho(r, t) d\tau,$$

soit pour la sphère de rayon r :

$$j(r, t) 4\pi r^2 = -\frac{\partial Q(r, t)}{\partial t}.$$



2) Il est ici impossible d'écrire $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, puisque le champ magnétique est nul alors que le vecteur densité de courant ne l'est pas. La densité de courant de déplacement de Maxwell est ici :

$$\vec{j}_D(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q(r, t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \right) = -\vec{j}(\vec{r}, t).$$

On retrouve donc que la forme $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$ assure bien la cohérence des équations du champ électromagnétique avec la conservation de la charge électrique.

Corrigés

2

1) Le dipôle magnétique, immobile, crée un champ magnétique \vec{B} permanent. La charge électrique, immobile, crée un champ électrique \vec{E} permanent. Ces deux champs sont non nuls et non parallèles en général. Le vecteur de Poynting n'est pas nul.

2) Cette situation statique ne s'accompagne pourtant d'aucune modification de l'énergie électromagnétique en tout point.

Ces deux aspects semblent contradictoires. Ils le seront effectivement si l'on trouve une surface fermée telle que le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface, soit non nul : de l'énergie serait alors reçue (ou perdue) par la partie d'espace située à l'intérieur de cette surface.

$$\text{Le vecteur de Poynting est } \vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

On calcule la divergence de ce vecteur :

$$\mu_0 \operatorname{div} \vec{P} = \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\operatorname{rot} \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\operatorname{rot} \vec{B}).$$

Les champs sont des champs statiques indépendants du temps et il n'existe pas de courant \vec{j} en dehors des sources.

Pour un point de l'espace extérieur aux sources les équations de Maxwell, Ampère et Faraday donnent $\operatorname{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$ et $\operatorname{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$.

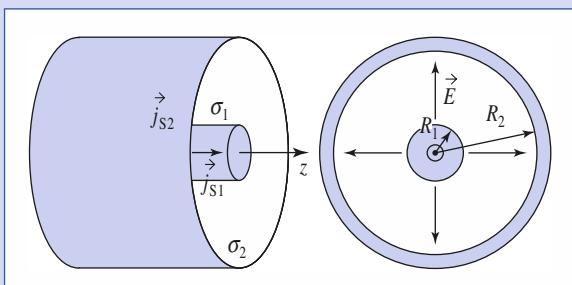
Le vecteur de Poynting n'est pas nul, mais possède une divergence nulle. On ne pourra pas trouver de surface fermée à travers laquelle son flux est non nul. Le vecteur de Poynting n'est pas nul, mais il n'y a pas pour autant de transfert d'énergie associé à cette situation.

3

1) Les charges linéaires de chaque armature sont opposées et les densités surfaciques de charges sont :

$$\sigma_1 = \frac{\lambda}{2\pi R_1} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{-\lambda}{2\pi R_2}.$$

Le champ électrostatique de la distribution à symétrie cylindrique proposée est de la forme $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.



En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe (Oz) et de rayon r , on obtient :

- pour $r < R_1$: $\vec{E} = \vec{0}$;
- pour $R_1 < r < R_2$: $\vec{E} = \frac{2\pi R_1 \sigma_1}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$;
- pour $R_2 < r$: $\vec{E} = \vec{0}$.

Le champ électrique est non nul entre l'âme et la gaine du câble, il est nul en dehors du câble.

L'énergie stockée sous forme électrique dans une longueur unité du câble vaut donc :

$$\begin{aligned} \frac{dW_E}{dz} &= \int_{r=0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} 2\pi r dr \\ &= \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \epsilon_0 r^2} 2\pi r dr = \frac{1}{2} \lambda^2 \left[\frac{1}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right]. \end{aligned}$$

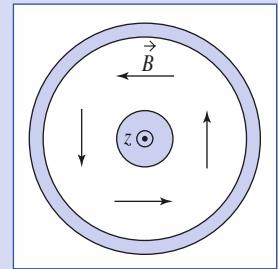
Elle est de la forme $\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{I}$, énergie par unité de longueur d'un condensateur portant la charge linéaire λ . On obtient alors :

$$\Gamma = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

2) Le champ magnétique de la distribution proposée est, du fait des symétries, de la forme $\vec{B} = \vec{B}(r)\vec{e}_\theta$. En appliquant le théorème d'Ampère à un cercle d'axe (Oz) et de rayon r , on obtient :

- pour $r < R_1$: $\vec{B} = \vec{0}$;
- pour $R_1 < r < R_2$: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$;
- pour $R_2 < r$: $\vec{B} = \vec{0}$.

Le champ magnétique est non nul entre l'âme et la gaine du câble, et nul en dehors du câble.



On calcule l'énergie magnétique linéique correspondante :

$$\frac{dW_B}{d\tau} = \int_{r=0}^{\infty} \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r dr = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

identifiable à $\frac{1}{2} \Lambda I^2$, avec $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

3) Le produit $\Lambda \Gamma$ vaut $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

L'impédance s'écrit $Z_C = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

4) Le vecteur de Poynting est nul en dehors du câble mais entre l'âme et la gaine du câble, il vaut $\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2} \vec{e}_z$.

Son flux à travers une section d'abscisse z du câble est :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\text{section}} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_{r=R_1}^{R_2} \vec{P} \cdot 2\pi r dr \\ &= \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{\lambda I}{2\pi^2 \epsilon_0 r^2} 2\pi r dr = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

On peut introduire la tension U aux bornes du câble coaxial :

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right),$$

pour exprimer ce flux sous la forme $\Phi = UI$, expression usuelle en électrocinétique, puisqu'il s'agit de celle de la puissance électrique transmise par le câble coaxial.

4

1) $J(x, t)$ est solution de l'équation de diffusion (cf. § 5.4) :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial J}{\partial t}.$$

En notation complexe, cette densité s'écrit :

$$\underline{J} = \underline{J}_0(x) e^{i\omega t}$$

$$\text{et } \frac{d^2 \underline{J}_0}{dx^2} = i \mu_0 \gamma \omega \underline{J}_0 = \left(\frac{1+i}{\delta} \right)^2 \underline{J}_0,$$

$$\text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Par symétrie, J est une fonction paire de x , et :

$$\underline{J}_0 = A \left[e^{\frac{(1+i)x}{\delta}} + e^{-\frac{(1+i)x}{\delta}} \right],$$

d'où :

$$\begin{aligned} J(x, t) &= \Re(\underline{J}_0(x) e^{i\omega t}) \\ &= \frac{J_m(0)}{2} \left[e^{\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right) + e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$2) J_m(x) = |J_0(x)| = \sqrt{\underline{J}_0 \underline{J}_0^*} = \frac{J_m(0)}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{ch} \frac{2x}{\delta} + \cos \frac{2x}{\delta}}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{J_m\left(\frac{h}{2}\right)}{J_m(0)} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{h}{\delta} + \cos \frac{h}{\delta}}{2}}$$

$$\text{A.N. : } \delta = 0,21 \text{ mm et } \frac{J_m\left(\frac{h}{2}\right)}{J_m(0)} = 5,4. \delta \text{ représente la profondeur de la pénétration de l'onde de courant dans la plaque. À cette fréquence } \delta \text{ n'est pas négligeable devant } h.$$

$$\begin{aligned} 3) \underline{I} &= L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{J} dx \\ &= \frac{L\delta}{1+i} \left[e^{(1+i)\frac{h}{2\delta}} - e^{-(1+i)\frac{h}{2\delta}} \right] J_m(0) e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

$$I_m = |\underline{I}|, \text{ d'où } I_m = L \delta J_m(0) \sqrt{\operatorname{ch} \frac{h}{\delta} - \cos \frac{h}{\delta}}.$$

5

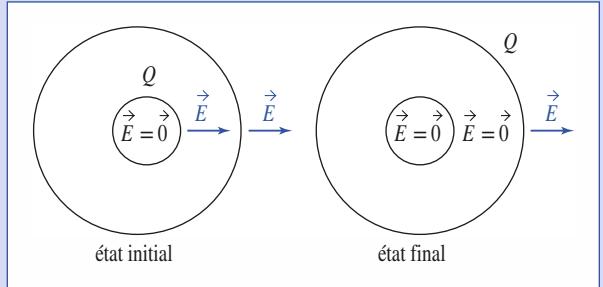
1) Dans l'état initial, le cylindre intérieur porte une charge surfacique Q et le cylindre extérieur est non chargé : d'après le théorème de Gauss, le champ électrique est nul à l'intérieur du cylindre intérieur et non nul entre les deux cylindres.

Cette situation va provoquer un flux de charges, donc l'établissement d'une densité de courant, radiale, entre les deux cylindres. Ce courant ne peut être établi indéfiniment : le milieu intercylindre est ohmique et va dissiper de l'énergie par effet Joule.

Le courant cessera lorsque le champ entre les cylindres sera nul ; toujours d'après le théorème de Gauss, cela se produit lorsque la charge Q est répartie sur la surface du cylindre extérieur.

Compte tenu de la symétrie de révolution autour de l'axe commun des cylindres, les champs \vec{E} et \vec{j} sont de la forme :

$$\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{j} = j(r, t) \vec{e}_r.$$



À l'instant initial, il y a une charge Q sur le cylindre de rayon R_1 . En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r , le champ électrique obtenu est :

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r \text{ pour tout } r > R_1,$$

et nul si $r < R_1$.

Dans l'état final, l'expression est la même mais seulement dans la zone $r > R_2$, le champ étant nul ailleurs.

En un point M passe un plan contenant l'axe de révolution du système, ainsi qu'un plan perpendiculaire à cet axe ; ces deux plans sont des plans de symétrie lorsqu'on néglige les effets de bord. On déduit que le champ magnétique est nul à tout instant.

La variation d'énergie du système est (attention au signe) :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \left[\iiint_{\text{espace}} \left(\frac{\epsilon_0 E}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right]_{t=0}^{t=\infty} = - \iint_{\substack{\text{entre les} \\ \text{cylindres}}} \frac{\epsilon_0 E(r, t=0)^2}{2} d\tau \\ \Delta \mathcal{E} &= - \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \right)^2 2\pi r h dr = - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

2) Le champ magnétique étant nul, le vecteur de Poynting l'est aussi. Cette perte d'énergie a donc uniquement lieu au profit du milieu conducteur, par effet Joule. On doit donc avoir :

$$\Delta \mathcal{E} = - \int_0^\infty \mathcal{P}_{\text{Joule}} dt,$$

$$\Delta \mathcal{E} = - \int_{t=0}^{t=\infty} \left[\iint_{\substack{\text{entre les} \\ \text{cylindres}}} \frac{j(r, t)^2}{\gamma} d\tau \right] dt,$$

3) Pour le vérifier, on calcule le vecteur densité de courant électrique. Le champ magnétique étant nul, on a $\vec{j} = -\vec{D} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, avec $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$, d'où :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t=0) e^{-\frac{t}{\tau_R}},$$

en notant $\tau_R = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$ le temps de relaxation associé à l'évolution du système.

On a donc, entre les cylindres conducteurs :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma Q}{2\pi\epsilon_0 rh} e^{-\frac{t}{\tau_R}} \vec{e}_r.$$

Corrigés

On peut alors vérifier que :

$$\int_{t=0}^{t=\infty} \left(\iiint_{\text{entre les cylindres}} \frac{j(r, t)^2}{\gamma} d\tau \right) dt = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma Q}{2\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{2\pi}{h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau_R}{2}$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = -\Delta \mathcal{E}.$$

6

1) Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur de la bobine :

$$\vec{B}_0 = \mu_0 n I \vec{e}_z.$$

Il est nul en dehors de celle-ci.

2) L'énergie volumique associée au champ magnétique est $\frac{B_0^2}{2\mu_0}$.
L'énergie associée vaut donc :

$$\mathcal{E}_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0} l \pi a^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 l \pi a^2) I^2.$$

En identifiant ce résultat à l'expression usuelle $\frac{1}{2} L I^2$ de l'énergie emmagasinée par la bobine, il vient $L = \mu_0 n^2 l \pi a^2$;

L'application numérique donne $L \approx 100 \text{ mH}$.

Pour obtenir les inductances élevées, de l'ordre du Henry, il faut introduire un noyau de fer dans l'enroulement. La bobine perd alors généralement ses propriétés de composant linéaire. L'énergie stockée est assez faible :

$$\mathcal{E}_m \approx 50 \text{ mJ}.$$

3) L'équation d'évolution du courant dans le circuit est :

$$e = L \frac{dI}{dt} + RI,$$

soit compte tenu de conditions initiales $I(t) = \frac{e}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, où $\tau = \frac{L}{R}$ est le temps caractéristique d'évolution du circuit.

4) Le champ magnétique engendré par la bobine est (en utilisant les coordonnées cylindriques) :

• à l'intérieur de la bobine (pour $r < a$) :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \vec{B}_0 = \mu_0 n \frac{e}{R} \vec{e}_z;$$

• à l'extérieur de la bobine (pour $r > a$) : $\vec{B} = \vec{0}$.

(Pas d'effets de bord : les bords sont « rejetés » à l'infini dans l'approximation de solénoïde très long.)

Nous vérifions que le champ magnétique appartient, en tout point M , au plan contenant M et l'axe (Oz), qui est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant du solénoïde. Le champ électrique est lui au point M , perpendiculaire à un tel plan ; il est donc de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t) \vec{e}_\theta.$$

On écrit la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, en choisissant comme contour un cercle de rayon r et d'axe (Oz) .

• Pour $r \leq a$: $2\pi r E(r, t) = -\pi r^2 \left(B_0 \frac{1}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)$.

• Pour $r \geq a$: $2\pi r E(r, t) = -\pi a^2 \left(B_0 \frac{1}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)$.

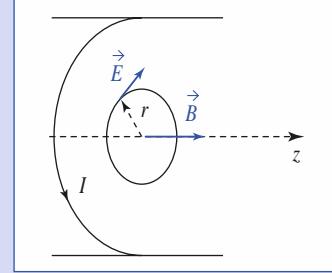
Finalement, le champ électrique engendré par le solénoïde est :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} -\frac{r}{2} \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq a; \\ -\frac{a^2}{2r} \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_\theta & \text{si } r \geq a. \end{cases}$$

Les densités volumiques d'énergie magnétique et électrique valent respectivement, puisque

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 :$$

$$\mathcal{E}_{\text{B vol}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}$$



$$\text{et } \mathcal{E}_{\text{E vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \begin{cases} \frac{r^2 \mu_0 n^2}{8c^2} \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 & \text{si } r \leq a; \\ \frac{a^4 \mu_0 n^2}{8r^2 c^2} \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 & \text{si } r \geq a. \end{cases}$$

Si on compare ces deux densités en $r = a$ (où $\mathcal{E}_{\text{E vol}}$ est maximale), il vient :

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{E vol}}}{\mathcal{E}_{\text{B vol}}} = \frac{a^2}{4c^2} \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 \approx \left(\frac{a}{2c\tau}\right)^2.$$

En reprenant les valeurs numériques du 2) et $R = 10 \text{ k}\Omega$, on trouve :

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{E vol}}}{\mathcal{E}_{\text{B vol}}} = 1,7 \cdot 10^{-5}.$$

On constate ainsi que la densité volumique d'énergie électrique est tout à fait négligeable devant celle d'énergie magnétique : une bobine est dans l'A.R.Q.P. « purement magnétique » (cf. l'exercice commenté, page 157).

5) Le vecteur de Poynting vaut, dans le solénoïde :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\mu_0 n^2 I(t) \frac{dI(t)}{dt} \frac{r}{2} \vec{e}_r = \Pi(r, t) \cdot \vec{e}_r.$$

Son flux entrant à travers le cylindre, de longueur ℓ et de rayon a , à l'intérieur duquel le champ magnétique n'est pas nul, vaut :

$$-2\pi a \ell \Pi(r = a, t) = +\mu_0 n^2 \pi a^2 \ell I(t) \frac{dI(t)}{dt}.$$

Ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme :

$$LI(t) \frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) = \frac{d\mathcal{E}_m}{dt}.$$

Il correspond à la variation de l'énergie emmagasinée sous forme magnétique par la bobine par unité de temps.

Z

1) On sait qu'un champ magnétique n'agit « directement » que sur des charges en mouvement. Cependant si un champ magnétique dépend du temps, il induit, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, un champ électrique qui, lui, peut mettre des charges en mouvement.

Pendant l'intervalle de temps très court où I varie de 0 à I_0 la variation temporelle de \vec{B} (de 0 à $\mu_0 n I_0 \vec{e}_z$) sera importante, donc la mise en mouvement possible ; comme la sphère est isolante, les charges vont l'entraîner dans leur mouvement.

2) Le champ engendré par le solénoïde est non nul à l'intérieur de celui-ci :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 n I(t) \vec{e}_z.$$

L'expression du champ électrique, à l'intérieur du solénoïde, en coordonnées cylindriques $(r_{\text{cyl}}, \theta_{\text{cyl}}, z)$ d'axe (Oz) (cf. exercice 6) est :

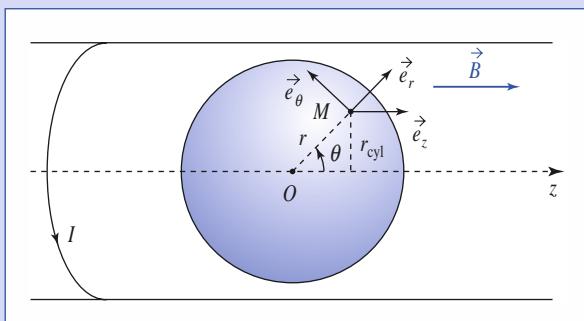
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{r_{\text{cyl}}}{2} \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_{\theta_{\text{cyl}}}.$$

Ce champ est orthoradial, et permet la mise en rotation de la sphère autour de son axe de rotation (Oz) .

Étant donné la géométrie sphérique du corps mis en rotation, on utilise, par la suite, l'expression du champ \vec{E} en coordonnées sphériques $(r, \theta$ et φ avec $r \sin \theta = r_{\text{cyl}}$) de centre O et d'axe (Oz) , soit :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{r \sin \theta}{2} \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_{\varphi} = E(r, \theta) \vec{e}_{\varphi}.$$

Attention aux notations : le vecteur orthoradial des coordonnées sphériques \vec{e}_{φ} s'identifie avec le vecteur orthoradial des coordonnées cylindrique $\vec{e}_{\theta_{\text{cyl}}}$.



On applique le théorème du moment cinétique à la sphère, en projection sur son axe de rotation. La rotation est supposée libre (sans frottement), et le moment des actions exercées sur la sphère, par rapport à l'axe (Oz) , se réduit au moment $\vec{\mathcal{M}}$ des actions exercées sur la sphère par le champ électrique engendré par le solénoïde : $J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_z$ avec :

$$\mathcal{M}_z = \iiint_{\text{sphère}} (\vec{OM} \wedge \vec{E} dq) \cdot \vec{e}_z = \iiint_{\text{sphère}} (dq \cdot E_{\varphi}) (r \sin \theta).$$

On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(Q \frac{dr r d\theta r \sin \theta d\varphi}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right) \\ &\quad \times \left(-\frac{r \sin \theta}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} \right) (r \sin \theta) = -\frac{1}{5} \mu_0 n \frac{dI}{dt} Q R^2. \end{aligned}$$

Par intégration de l'équation du mouvement de rotation entre l'instant initial et l'instant final, on obtient :

$$\omega = -\mu_0 n I_0 \frac{Q}{2m} = -\frac{Q B_0}{2m}.$$

3) Soit le cas d'une sphère de 1 cm de rayon, de masse $m = 1$ g (aussi légère que possible, pour qu'elle tourne « vite », portant la charge $Q = 10^{-10}$ C (pour cette charge, le champ en surface de la sphère est de l'ordre du champ disruptif de l'air, de l'ordre de 10^4 V · m $^{-1}$).

Remarque : Il n'est pas évident de choisir une boule électrisée, qui ne doit pas être conductrice, dans tout son volume. Si la sphère était chargée en surface, cela reviendrait à remplacer dans l'expression de ω le facteur $\frac{1}{2}$ par un autre facteur, mais cela ne changerait pas notablement l'ordre de grandeur de la vitesse de rotation.

Pour le solénoïde, on emploie « les grands moyens » : électro-aimant puissant créant un champ de l'ordre du tesla.

La vitesse de rotation atteinte n'est, avec ces ordres de grandeur, que de $5 \cdot 10^{-8}$ rad · s $^{-1}$, soit environ 1 tour en quatre ans ! sachant que l'on a négligé les frottements sur l'axe...

Pour augmenter considérablement cette valeur, il faudrait jouer sur le rapport $\frac{Q}{m}$. Ce n'est malheureusement guère possible, car on a déjà ajusté au mieux ce rapport, qui ne vaut que 10^{-7} C · kg $^{-1}$.

À l'échelle atomique, en revanche, le rapport $\frac{Q}{m}$ peut atteindre des valeurs de l'ordre de $\frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 10^{11}$ (valeurs prises pour un électron), la réaction de la matière à un champ appliqué pourra dès lors devenir notable...

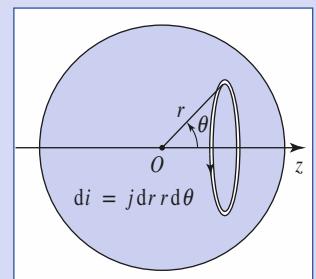
La théorie quantique est cependant nécessaire pour rendre compte convenablement des effets observés.

4) La sphère en rotation est assimilable à un ensemble de boucles de courant. La densité volumique de courant à l'intérieur de la sphère est :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \frac{3Q}{4\pi R^3} r \sin \theta \omega \vec{e}_{\varphi}.$$

À une boule de courant circulaire, d'axe (Oz) , de rayon $r \sin \theta$ et de section élémentaire $dS = r dr d\theta$, parcourue par le courant : $di = j \cdot dS$, on peut associer le moment magnétique élémentaire :

$$\begin{aligned} d\vec{\mathcal{M}} &= \pi (r \sin \theta)^2 di \vec{e}_z \\ &= \frac{3Q}{4R^3} \omega r^4 \sin^3 \theta dr d\theta \vec{e}_z. \end{aligned}$$



Le moment magnétique de la sphère en rotation est donc :

$$\vec{\mathcal{M}} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{3Q}{4R^3} \omega r^4 \sin^3 \theta dr d\theta \vec{e}_z = \frac{QR^2}{5} \omega \vec{e}_z.$$

Il est lié au champ imposé par le solénoïde par la relation :

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{Q^2 B_0 R^2}{10m} \vec{e}_z.$$

On constate que ce moment magnétique est proportionnel au champ appliqué et dirigé en sens inverse : la mise en rotation de la sphère constitue une approche élémentaire d'une propriété importante de la matière appelée diamagnétisme.

Corrigés

Soumis à un champ \vec{B} , les atomes et les molécules constituant la matière acquièrent un moment magnétique opposé au champ \vec{B} . La matière a ainsi tendance à s'aimanter, en s'opposant au champ qui lui est appliqué.

5) La boucle de courant élémentaire envisagée en 4) crée au point O le champ magnétique :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 di}{2(r\sin\theta)} \sin^3\theta \vec{e}_z.$$

Par superposition, on obtient le champ magnétique créé par la sphère en son centre :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\mu_0 \left(\frac{3Q}{4\pi R^3} r \sin\theta \omega r dr d\theta \right)}{2r\sin\theta} \sin^3\theta \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi R} \omega \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 Q^2 B_0}{8\pi R m} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Ce champ est négligeable devant celui du solénoïde si $\frac{\mu_0 Q^2}{8\pi R m} \ll 1$, soit :

$$\frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R} \ll 2mc^2.$$

Pour l'expérience « classique » précédemment envisagée, cette inégalité est évidemment vérifiée, le champ magnétique créé par la sphère étant même beaucoup trop faible pour être observable.

Pour un électron ($Q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg), et avec $R \approx 10^{-10}$ m (dimension d'une « trajectoire » électronique autour d'un noyau), cette inégalité est encore convenablement satisfait. On sait cependant qu'une théorie quantique est alors nécessaire.

8

1) L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E} = -k E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y.$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient le champ magnétique de l'onde :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \quad (\text{un champ statique près, qui n'intervient pas dans les relations de couplage entre les champs électrique et magnétique}).$$

Les équations de Maxwell dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) imposent à ces champs une divergence nulle, ce qui est vérifié dans le cas présent.

L'équation de Maxwell-Faraday est vérifiée par construction.

L'équation de Maxwell-Ampère impose ici :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{k^2 c^2}{\omega} E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x.$$

Sachant que $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x$, on en déduit la relation :

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

2) La densité volumique d'énergie du champ de l'onde est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{vol}} &= \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{2\epsilon_0 \mu_0 \omega^2} \right) \cos^2(\omega t - kz) \\ &= \epsilon_0 E^2 \cos^2(\omega t - kz) \end{aligned}$$

et sa moyenne temporelle est $\langle \mathcal{E}_{\text{vol}} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$.

3) L'analyse dimensionnelle de \vec{g} donne :

$$[\epsilon_0 E B] = \left[\epsilon_0 E^2 \frac{k}{\omega} \right] = \left[\frac{\epsilon_0}{c} E^2 \right].$$

$$[\epsilon_0 E B] = \frac{\text{densité volumique d'énergie}}{\text{vitesse}} = \frac{\text{énergie}}{\text{volume} \times \text{vitesse}} = \frac{\text{impulsion}}{\text{volume}}$$

elle nous montre que cette grandeur est bien homogène à une impulsion volumique.

4) En identifiant l'énergie volumique moyenne $\langle \mathcal{E}_{\text{vol}} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$ à celle des photons, soit $n h \nu$, on obtient :

$$n = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2 h \nu}.$$

Les photons, associés à l'onde, se dirigent comme celle-ci dans la direction de l'axe (Oz). L'impulsion volumique de ces photons vaut donc :

$$\langle \vec{g} \rangle = n \frac{h \nu}{c} \vec{e}_z = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c} \vec{e}_z.$$

Or, à partir du champ de l'onde, on obtient :

$$\langle \vec{g} \rangle = \langle \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle = \langle \epsilon_0 E_0^2 \frac{k}{\omega} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c} \vec{e}_z$$

Résultat en accord avec le précédent.

6

Induction électromagnétique

Introduction

Les phénomènes d'induction électromagnétique ont été découverts, puis formalisés au XIX^e siècle, quand il a été possible de produire et mesurer des courants électriques.

Michael Faraday (1791-1867), physicien et chimiste anglais, a mené des travaux importants en chimie (lois de l'électrolyse) et en électrostatique. Il a étudié les actions réciproques d'un aimant et d'un circuit électrique. En 1831, il découvre le phénomène d'induction.

Franz Ernst Neumann (1798-1895), physicien allemand, publie en 1845 une théorie mathématique du phénomène d'induction.

Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), physicien hollandais, s'est attaché à élaborer des explications microscopiques aux phénomènes électromagnétiques. Il a obtenu le prix Nobel en 1902 pour sa théorie électronique de la matière.

O B J E C T I F S

- Étude d'un circuit électrique mobile dans un champ magnétique permanent et bilan énergétique.
- Étude d'un circuit soumis à un champ magnétique variable.

P R É R E Q U I S

- Éléments d'électrocinétique.
- Équation de Maxwell.
- Propriétés du champ électromagnétique dans l'A.R.Q.P.
- Force de Laplace.

L'induction électromagnétique

1.1. Le phénomène d'induction

1.1.1. Bobine mobile dans un champ magnétique permanent

■ Expérience (doc. 1)

Déplaçons une bobine plate près des pôles d'un aimant (aimant en U par exemple) fixe.

■ Qu'observons-nous ?

Si les deux bornes de la bobine sont reliées à un oscilloscope, nous constatons l'existence d'une tension $u(t)$ alors qu'aucun générateur ne figure dans le circuit :

- si la bobine est immobile, alors $u = 0$;
- si u est positive lorsque la bobine s'approche, alors elle est négative lorsque celle-ci s'éloigne ; l'amplitude de u augmente avec la vitesse v_e du déplacement imposé à la bobine.

■ Commentaires

Ce dispositif se comporte comme un **générateur électrocinétique** capable de mettre en mouvement les charges mobiles du conducteur. Nous dirons que le circuit est le siège d'un phénomène d'**induction électromagnétique**. Ce générateur est induit par le déplacement du circuit dans une zone où règne un champ magnétique permanent.

Un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent peut se comporter comme un générateur électrocinétique : il est le siège d'un phénomène d'induction. Nous parlerons, dans ce cas, d'*induction de Lorentz*.

Remarques

En parlant de champ permanent, nous supposons implicitement que les sources de ce champ sont extérieures au circuit mobile.

Lorsque le circuit mobile est ouvert, ce qui est quasiment le cas ici dans l'observation à l'oscilloscope, la tension $u(t)$ observée est la force électromotrice induite. Il ne circule aucun courant dans ce circuit ouvert.

Si nous remplaçons l'oscilloscope par une petite ampoule électrique, celle-ci s'éclaire lors des déplacements de la bobine et il circule donc un courant appelé « courant induit ». Celui-ci crée alors un champ magnétique appelé « champ propre », dépendant du temps qui n'est pas pris en compte ici dans cette première approche. Nous y reviendrons.

1.1.2. Bobine fixe dans un champ magnétique variable

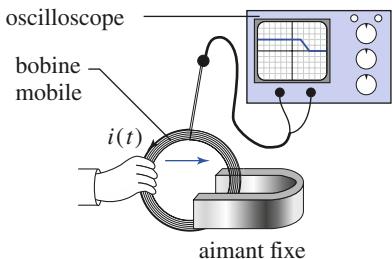
■ Expérience (doc. 2)

Reprendons l'expérience précédente en déplaçant l'aimant et en laissant la bobine immobile.

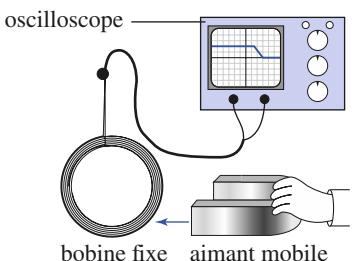
■ Qu'observons-nous ?

Les deux bornes de la bobine étant toujours reliées à un oscilloscope, nous constatons l'existence d'une tension $u(t)$ tandis qu'aucun générateur ne figure dans le circuit :

- si l'aimant est immobile, alors $u = 0$;



Doc. 1. La bobine mobile (déplacée par l'observateur) se comporte comme un générateur.



Doc. 2. La bobine fixe se comporte comme un générateur si l'aimant se déplace.

- si u est positive lorsque l'aimant s'approche, alors elle est négative lorsque celui-ci s'éloigne ; l'amplitude de u augmente avec la vitesse du déplacement imposé à l'aimant.

■ Commentaires

Le système se comporte encore comme un **générateur**.

Le circuit est à nouveau le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique.

C'est ici l'aimant qui se déplace dans le référentiel du laboratoire : le circuit voit ici un champ magnétique qui varie au cours du temps. Ce sont ces variations temporelles du champ magnétique qui doivent ici être responsables du phénomène d'induction.

Lorsqu'un circuit fixe est soumis à un champ magnétique variable, il est encore le siège d'un phénomène d'induction. Nous parlerons alors d'induction de Neumann.

Remarque : Là encore, si le circuit fixe est fermé (nous remplaçons l'oscilloscope par une petite ampoule), un courant (induit) circule dans le circuit. Le champ magnétique propre au circuit peut être englobé dans le champ variable observé. Le champ propre a un effet d'induction sur le circuit lui-même : nous parlerons alors d'auto-induction.

En pratique, nous pourrons aussi créer un champ magnétique variable à l'aide d'un circuit fixe. Dans l'expérience représentée sur le document 3, nous utilisons deux bobines b_1 et b_2 de 1 000 spires chacune. La première est alimentée par un générateur de tension variable $u_1(t)$ que nous observons à l'oscilloscope.

En reliant la seconde bobine à l'autre voie de l'oscilloscope, nous observons une tension $u_2(t)$, sensiblement proportionnelle aux variations de $u_1(t)$: les variations temporelles du champ magnétique \vec{B}_1 créé par b_1 sont perçues par b_2 , qui est le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique.

Dans cette expérience, la bobine b_2 détecte le champ électromagnétique, variable engendré par b_1 : nous avons réalisé une antenne (rudimentaire !). Nous verrons que l'induction électromagnétique possède des applications nombreuses et importantes.

Remarque

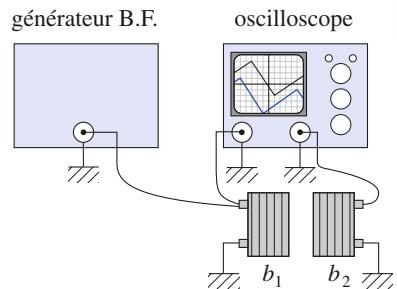
La seconde bobine lorsqu'elle est en circuit fermé crée à son tour un champ \vec{B}_2 variable qui agit sur b_1 . Il y a ici un phénomène de mutuelle induction. Chaque bobine subit aussi l'influence de son propre champ magnétique variable : il y a aussi auto-induction; Nous reviendrons sur ces effets au prochain chapitre.

1.1.3. Les deux facettes de l'induction

Dans la première expérience, le déplacement du circuit à vitesse \vec{v}_e dans le champ permanent \vec{B}_0 de l'aimant entraîne l'apparition d'une force magnétique de la forme $q \vec{v}_e \wedge \vec{B}_0$ susceptible de faire circuler les charges de conduction du circuit.

Nous tenons ici l'explication du phénomène d'induction de Lorentz, que nous détaillerons au § 2.

Dans la seconde expérience, le circuit, fixe dans le référentiel du laboratoire, voit apparaître un champ magnétique variable créé par l'aimant. Nous avons vu au chapitre précédent que les variations temporelles du champ magnétique



Doc. 3. Seule la bobine b_1 est alimentée ; b_2 se comporte comme un générateur.

entraînent l'apparition d'un champ électrique induit, ce que traduit l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Le champ électrique induit est capable de mettre en mouvement les charges du circuit et son existence justifie le phénomène d'induction de Neumann (*cf. § 3*).

Nous pouvons aussi remarquer que la seconde expérience est, pour un observateur qui se déplacerait avec l'aimant, semblable à la première : cet observateur voit la bobine se déplacer dans un champ magnétique permanent. La distinction de ces deux cas est liée à un choix d'observation (choix de référentiel d'étude), mais leurs effets sont les mêmes.

Ce que nous avons appelé phénomène d'induction de Lorentz dans la première expérience, ou phénomène d'induction de Neumann dans la seconde, n'est en fait qu'un seul et même phénomène physique, observé selon deux points de vue différents.

L'induction électromagnétique est un phénomène unique : l'induction de Lorentz et l'induction de Neumann en sont deux facettes, qui dépendent du point de vue de l'observateur.

Dans la suite du cours, nous étudierons les caractéristiques de ces deux facettes de l'induction électromagnétique.

Nous pourrons ensuite décrire le phénomène d'induction électromagnétique dans le cas général, lorsqu'un circuit mobile se déplace dans un champ magnétique variable.

Remarques

- *Les effets observés dans les deux expériences sont rigoureusement identiques si le mouvement relatif de la bobine et de l'aimant est un mouvement de translation rectiligne uniforme, car les lois de la physique ont la même formulation dans tous les référentiels galiléens.*
- *Notons aussi qu'il peut être difficile de déplacer un oscilloscope à vitesse constante pour assurer une équivalence parfaite des deux observations. Le lecteur est donc autorisé à le remplacer par une ampoule reliée à la bobine...*

1.2. Loi qualitative de Lenz (ou loi de modération)

1.2.1. Les effets de l'induction

Analysons les conséquences du phénomène d'induction, à l'aide d'une nouvelle expérience.

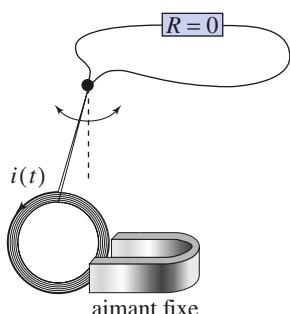
■ Expérience (doc. 4)

Reprends l'expérience décrite sur le document 1, en remplaçant l'oscilloscope par un court-circuit (cela ne signifie pas que la résistance totale du circuit est nulle).

Au lieu d'imposer un mouvement à cette bobine en la tenant, nous la laissons osciller dans le champ magnétique extérieur permanent imposé par l'aimant, après l'avoir écartée de sa position d'équilibre.

■ Qu'observons-nous ?

- Les oscillations de la bobine sont amorties.
- si la bobine est en circuit ouvert, les oscillations sont aussi amorties (présence de frottements mécaniques), mais la durée d'amortissement est bien plus importante que lorsque le circuit est fermé.



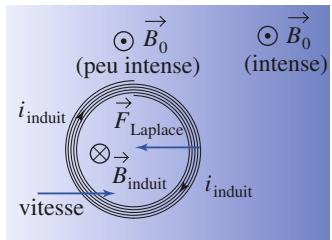
Doc. 4. La bobine est « fermée » sur une résistance nulle (la résistance totale du circuit est non nulle). Il y circule un courant induit $i(t)$. Une fois lâchée, elle effectue des oscillations amorties.

■ Commentaires

- Lorsque le circuit est ouvert, seuls les frottements mécaniques expliquent l'amortissement.
- Le mouvement est plus amorti lorsque le circuit est fermé. Or, les seules forces supplémentaires pouvant exister sont les forces de Laplace : il existe un courant circulant dans la bobine. Ce courant induit $i(t)$ et le champ permanent \vec{B}_0 entraînent l'existence de forces de Laplace, qui s'opposent au mouvement du circuit.

Dans l'expérience décrite, les forces de Laplace sont donc des forces opposées au déplacement qui les engendre : il est ainsi possible d'en déduire le sens du courant induit, dans les différentes phases du mouvement.

Examinons les documents 5a, 5b et 5c.



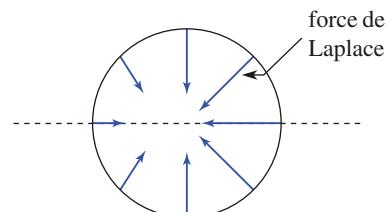
Doc. 5a. Le champ \vec{B}_0 appliqué (donc « vu » par la bobine) est de plus en plus intense au fur et à mesure que celle-ci pénètre dans cette zone : le courant a le sens de la flèche pour produire une force opposée à la vitesse.

• Observation du document 5a

La bobine entre dans le champ magnétique (vitesse orientée vers la droite) : le champ appliqué (ou « vu » par la bobine) devient de plus en plus intense au fur et à mesure que la bobine pénètre dans ce champ (doc. 5b).

La résultante des forces de Laplace devant freiner le mouvement, elle est opposée à la vitesse et donc orientée vers la gauche, d'où l'orientation du courant induit.

Remarquons que le courant induit crée lui aussi un champ magnétique (champ magnétique induit), opposé à \vec{B}_0 , mais surtout opposé à la variation du champ « vu » par la bobine.



Doc. 5b. Le courant induit étant uniforme sur la bobine, les forces de Laplace sont prépondérantes dans la zone de champ fort.

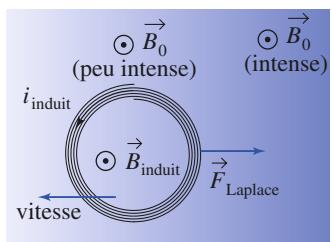
• Observateur du document 5c

La bobine sort du champ magnétique (vitesse orientée vers la gauche) : le champ appliqué diminue d'intensité au fur et à mesure que la bobine quitte ce champ.

La résultante des forces de Laplace (toujours prépondérantes dans la zone de champ fort) doit freiner le mouvement, donc s'opposer à la vitesse : elle est donc orientée vers la droite, d'où l'orientation du courant induit.

Remarquons que le courant induit crée lui aussi un champ magnétique (champ magnétique induit), orienté suivant \vec{B}_0 , mais surtout à nouveau opposé à la variation du champ « vu » par la bobine.

Notons que, dans cette expérience, $\|\vec{B}_{\text{induit}}\|$ est faible devant $\|\vec{B}_0\|$.



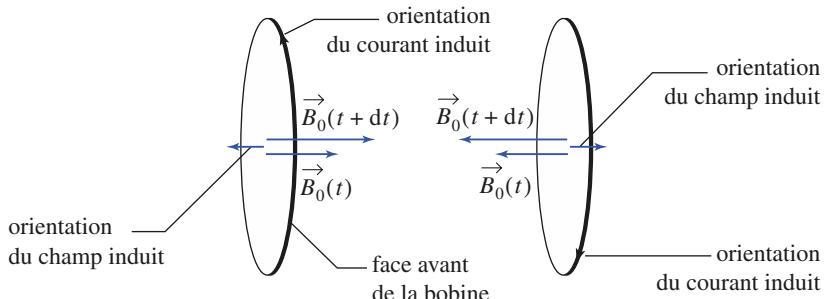
Doc. 5c. La bobine sort de la zone où le champ appliqué \vec{B}_0 (donc « vu » par la bobine) est intense. Le courant a le sens de la flèche pour produire une force opposée à la vitesse.

1.2.2. Loi de modération

Toujours dans cette expérience, nous constatons que le système réagit de façon à s'opposer à la cause de l'induction.

- Dans le référentiel du laboratoire, l'induction est due au déplacement de la bobine, et le système réagit en produisant une force qui s'oppose à son mouvement.
- Dans le référentiel de la bobine, l'induction est provoquée par la variation du champ \vec{B} « vu » par la bobine. Le système réagit en produisant un champ magnétique induit opposé à la variation de champ magnétique imposée à la bobine.

Les documents 6 permettent de bien détailler les résultats précédents.

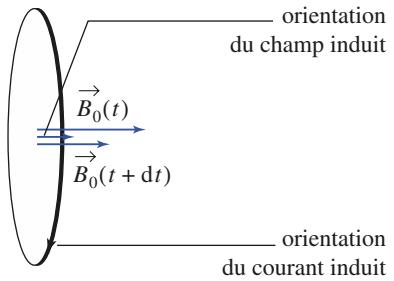


Doc. 6a. et b. Orientations du courant et du champ induits lorsque la bobine est soumise à un champ appliqué \vec{B}_0 croissant.

Nous pouvons généraliser ces conclusions en énonçant une loi de modération associée aux phénomènes d'induction électromagnétique : la **loi de Lenz**.

Loi de Lenz

Les effets magnétiques, électrocinétiques et mécaniques de l'induction sont orientés de façon à s'opposer à ses causes.



Doc. 6c. Orientations du courant et du champ induits lorsque la bobine est soumise à un champ appliqué \vec{B}_0 décroissant.

Cette loi est, en pratique, extrêmement utile, car elle permet de détecter de manière qualitative et simple les erreurs d'orientation qui se traduisent par des erreurs de signes.

Application 1

Bobine dans un entrefer

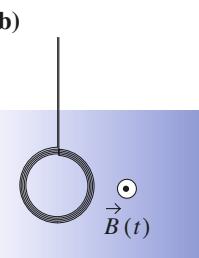
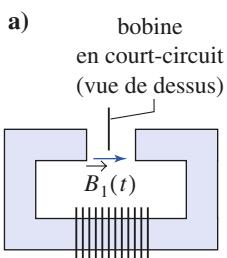
Dans l'expérience décrite sur les documents 7, la bobine, fermée sur elle-même, est suspendue au-dessus d'un électro-aimant. Initialement, elle n'est que partiellement plongée dans l'entrefer et l'électro-aimant n'est pas alimenté.

1) Décrire les phénomènes observés à partir de l'instant où l'on alimente l'électro-aimant.

On distinguera :

- a) la phase (très brève) d'établissement du champ ;
- b) la phase où le champ est permanent.

2) Décrire les phénomènes observés à partir de l'instant t_0 où l'on coupe l'alimentation de l'électro-aimant.



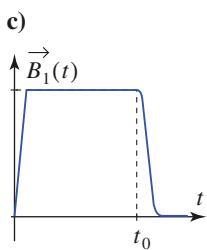
1) a) Pendant la phase d'établissement du champ \vec{B}_1 , la bobine tend à gagner les zones de champ faible, pour s'opposer à l'augmentation du champ qu'elle « voit ».

On peut aussi dire que le (faible) champ magnétique induit doit être opposé à \vec{B}_1 pour que la variation du champ total soit moins rapide.

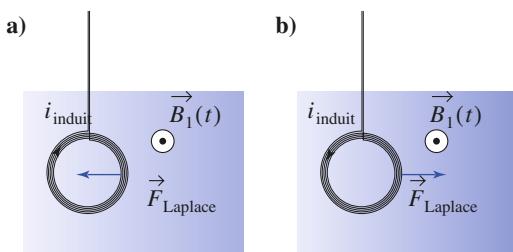
Nous en déduisons le sens du courant induit (doc. 8a).

L'analyse des actions de Laplace montre que la bobine subit une force qui tend à l'expulser du champ.

b) Juste après l'établissement de \vec{B}_1 , la bobine a acquis une vitesse dirigée vers l'extérieur de l'entrefer.



Doc. 7a, b et c. La bobine est partiellement plongée dans le champ magnétique $\vec{B}_1(t)$ de l'électro-aimant.



Doc. 8. Courant induit et forces de Laplace
 a. durant la phase d'établissement du champ ;
 b. durant la phase de coupure du champ.

D'après la loi de Lenz, la résultante des actions de Laplace est une force opposée au mouvement et le mouvement de la bobine, de résistance faible mais non nulle, est rapidement amorti.

2) Pendant la rapide décroissante \vec{B}_0 , le système réagit par une force qui tend à pousser la bobine vers la zone de champ fort, c'est-à-dire vers l'entrefer. Une fois le champ \vec{B}_0 coupé, il n'y a plus de phénomène d'induction. Le mouvement du pendule n'est amorti que par les frottements mécaniques.

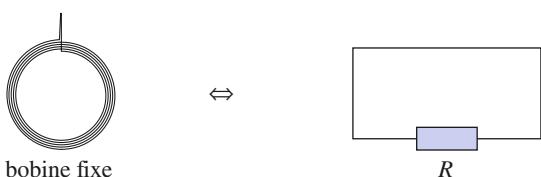
2 Circuit mobile dans un champ magnétique permanent : induction de Lorentz

Nous étudions un circuit qui se déplace dans un champ « extérieur » indépendant du temps. Notons que cela revient à ne pas tenir compte du champ induit, nécessairement variable, créé par ce circuit.

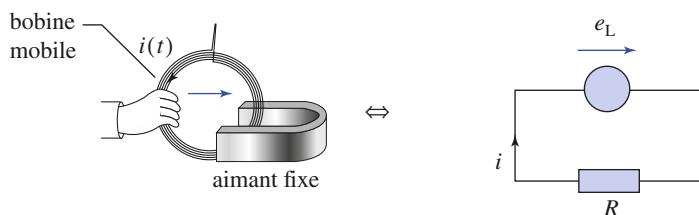
2.1. Force électromotrice de déplacement

Reprendons l'expérience du *document 1* avec un circuit fermé sur lui-même.

- Si le circuit est immobile, il est électriquement équivalent à une résistance R :



- Si le circuit est mobile dans le champ extérieur permanent, il est le siège d'un courant induit et se comporte comme un générateur ; il est donc équivalent au circuit suivant :



L'action d'un champ magnétique extérieur permanent sur un circuit en mouvement est équivalente à celle d'un générateur de tension dont la force électromotrice e_L est appelée force électromotrice de Lorentz ou force électromotrice de déplacement.

Ce générateur induit est lié au champ magnétique permanent \vec{B} dans lequel se déplace le circuit. Ce champ intervient aussi dans l'expression des efforts de Laplace exercés sur ce même circuit. La f.e.m. et les forces de Laplace sont

deux manifestations, à l'échelle macroscopique, des effets du terme magnétique de la force de Lorentz exercée sur une particule chargée. Or nous savons que la puissance associée à ce terme est nulle.

Au niveau macroscopique, le champ \vec{B} ne saurait apparaître dans un bilan énergétique complet : la puissance de la f.e.m. de déplacement et celle des actions de Laplace doivent se compenser.

La puissance de la force électromotrice de Lorentz est compensée par celle des actions de Laplace exercée sur le circuit :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_L i = 0.$$

Remarques

- Cette identité est vraie pour le circuit tout entier, mais également pour toute partie de circuit. On peut donc affecter une f.e.m. bien précise à chaque branche d'un circuit.
- Un champ magnétique variable induirait un champ électrique susceptible de fournir de l'énergie aux charges. Notre bilan est réservé au cas d'un **champ magnétique extérieur permanent**.

Application 2

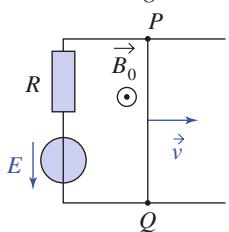
Force électromotrice de Lorentz et actions de Laplace

Soit la situation décrite sur le document 9a. La tige conductrice PQ , de masse m , qui glisse sur deux rails conducteurs horizontaux en leur restant perpendiculaire, est soumise à un champ permanent et vertical $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ supposé uniforme. Le circuit est alimenté par un générateur de tension constante E et de résistance interne R grande devant celle des fils. Un opérateur extérieur exerce une force qui maintient la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$ constante.

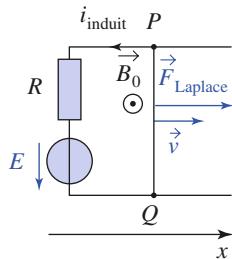
1) Si le phénomène d'induction n'existe pas, quelles seraient alors :

- l'équation traduisant la loi d'Ohm ;
- la puissance des forces de Laplace ;
- la puissance dissipée par effet Joule ;
- la puissance délivrée par la source ?

Quelle relation doit lier ces grandeurs ? Conclure.



Doc. 9a. La tige conductrice PG glisse sur les rails à la vitesse \vec{v} .



Doc. 9b. Choix des orientations.

2) Montrer qu'en ajoutant une f.e.m. dans le circuit le bilan énergétique devient satisfaisant.

Calculer cette f.e.m. Conclure.

3) Montrer que lorsqu'un circuit se déplace dans un champ magnétique extérieur permanent, on peut toujours affirmer les deux propositions suivantes :

- si la résultante des actions extérieures de Laplace s'exerçant sur une portion de circuit en mouvement à la vitesse v s'écrit :

$$F = k i(t),$$

alors la f.e.m. de Lorentz correspondante est donnée par $e_L(t) = -k v(t)$;

- si le moment de ces actions par rapport à un axe Δ s'exerçant sur une portion de circuit en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Δ s'écrit $\Gamma_\Delta = \Phi_0 i(t)$, alors la f.e.m. est donnée par :

$$e_L = -\Phi_0 \omega(t).$$

1) Commençons par préciser les orientations sur le schéma (doc. 9b).

- En l'absence d'induction, la loi d'Ohm s'écrit :

$$E = R i.$$

- La force de Laplace étant égale à :

$$\vec{F}_{\text{Laplace}} = B_0 i a \vec{e}_x,$$

la puissance des forces de Laplace est égale à :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = B_0 i a v = B_0 \frac{E}{R} a v.$$

- La puissance dissipée par effet Joule est égale à :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R i^2 = \frac{E^2}{R}.$$

- La puissance fournie par le générateur est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\text{géné}} = E i = \frac{E^2}{R} (= \mathcal{P}_{\text{Joule}}).$$

La vitesse étant constante, la force de Laplace est opposée à la force exercée par l'extérieur (opérateur et frottements), d'où $\mathcal{P}_{\text{ext}} = -\mathcal{P}_{\text{Laplace}}$.

Un bilan énergétique complet doit donc s'écrire :

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = \mathcal{P}_{\text{géné}} + \mathcal{P}_{\text{ext}} = \mathcal{P}_{\text{dissipée}},$$

soit : $\mathcal{P}_{\text{géné}} + (-\mathcal{P}_{\text{Laplace}}) = \mathcal{P}_{\text{Joule}}$.

Ce bilan n'est pas vérifié avec les expressions précédemment trouvées : *il manque donc un terme !*

Il faut prendre en compte l'induction due au mouvement d'une portion de circuit dans un champ magnétique.

La prise en compte de l'induction est nécessaire pour obtenir un bilan énergétique exact lorsque celui-ci fait intervenir les forces de Laplace dans un champ magnétique permanent.

2) Supposons que la tige mobile soit équivalente à un générateur de f.e.m. e_L , supposée inconnue.

- Pour la loi d'Ohm nous obtenons :

$$e_L + E = R i \quad (1)$$

- La puissance des forces de Laplace est égale à :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = B_0 i a v.$$

- La puissance dissipée par effet Joule est égale à :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R i^2.$$

- La puissance fournie par le générateur est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\text{géné}} = E i.$$

Le bilan exact, $\mathcal{P}_{\text{géné}} - \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}}$, nous donne :

$$E i - B_0 a v i = R i^2,$$

Soit :

$$E - B_0 a v = R i \quad (2)$$

En identifiant les deux expressions (1) et (2) de $R i$, nous obtenons :

$$e_L = -B_0 a v,$$

et nous retrouvons bien la loi générale :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_L i = 0.$$

3) Si la force de Laplace $\vec{F}(t)$, s'exerçant sur un circuit se déplaçant à la vitesse :

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{e}_x$$

dans un champ magnétique extérieur permanent s'écrit :

$$\vec{F}(t) = k i(t) \vec{e}_x,$$

sa puissance $\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$ égale à $-e_L(t) i(t)$, permet d'obtenir e_L :

$$e_L = -k v(t).$$

Si le moment $\Gamma_\Delta(t)$ des forces de Laplace par rapport à Δ (s'exerçant sur un circuit tournant à la vitesse angulaire $\vec{\omega}(t) = \omega(t) \vec{e}_z$ dans un champ magnétique extérieur permanent) s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_\Delta(t) = \Phi_0 i(t) \vec{e}_z,$$

sa puissance $\vec{\Gamma}_\Delta(t) \cdot \vec{\omega}(t)$ égale à $-e_L(t) i(t)$, permet d'obtenir e_L :

$$e_L = -\Phi_0 \omega(t).$$

Ces résultats simples ne sont valables qu'en présence d'un champ magnétique extérieur permanent.

2.2. Champ électromoteur de Lorentz

2.2.1. Induction de déplacement

Cherchons maintenant à comprendre le mécanisme de la « pompe à charges » du générateur induit.

Considérons un conducteur mobile \mathcal{C} . Notons \vec{v}_e la vitesse d'un point M de \mathcal{C} par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} , et $\vec{v}_{\mathcal{C}}$ la vitesse des charges de conduction par rapport à \mathcal{C} .

D'après la loi de composition des vitesses, la vitesse d'une charge quelconque de conduction par rapport à \mathcal{R} peut s'écrire, en M (doc. 10) :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}} = \vec{v}_e + \vec{v}_{\mathcal{C}}.$$

Remarque : En général, \vec{v}_e dépend du point M du circuit considéré.

Chaque charge est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{E} + \vec{v}_{\mathcal{R}} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}_{\mathcal{C}} \wedge \vec{B}).$$

- \vec{E} est le champ électrique, défini dans le référentiel \mathcal{R} .
- $\vec{v}_{\mathcal{C}} \wedge \vec{B}$ est une grandeur homogène à un champ électrique, responsable de l'effet Hall évoqué au chapitre 1. Étant normal à $\vec{v}_{\mathcal{C}}$ et donc aux lignes de courant, il ne peut expliquer l'existence du courant.
- Le terme $q \vec{v}_e \wedge \vec{E}$ est une force supplémentaire qui ne s'applique aux charges de conduction que si le conducteur se déplace. Cette force peut mettre en mouvement les charges du circuit : une f.e.m. d'induction est associée au déplacement du circuit. Nous appelons **champ électromoteur de Lorentz** la grandeur vectorielle homogène à un champ électrique :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

Dans le cas représenté sur le document 11a, le champ électromoteur est plus important dans la zone où le champ \vec{B} est plus intense ; cette différence explique bien le sens du courant induit et nous pouvons vérifier que la résultante des forces de Laplace a un sens conforme à la loi de Lenz (doc. 11b).

Lors du déplacement d'un conducteur dans un champ magnétique constant, les charges de conduction sont mises en mouvement par une force :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

- \vec{v}_e est la vitesse de déplacement du conducteur.
- $\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$ est appelé **champ électromoteur de Lorentz** ou **champ électromoteur de déplacement**.

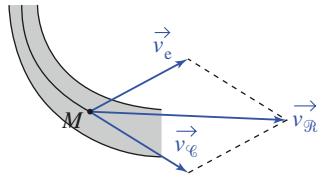
2.2.2. Circulation du champ électromoteur

La force de Laplace exercée sur un élément de circuit filiforme de longueur $d\vec{\ell}$, parcouru par le courant i et soumis au champ magnétique \vec{B} , est :

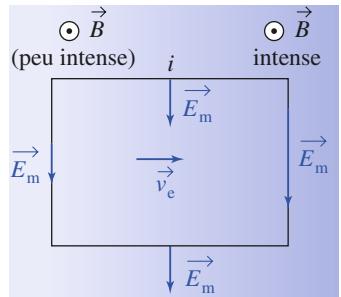
$$d\vec{F}_{\text{Laplace}} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

Lorsque le tronçon AB de circuit se déplace (doc. 12), la puissance des efforts de Laplace est :

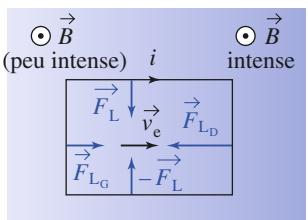
$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \int_A^B i (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e = -i \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = -i \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$$



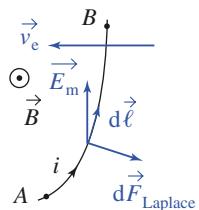
Doc. 10. Conducteur en mouvement : composition des vitesses.



Doc. 11a. Le circuit entre dans la zone où le champ \vec{B} est intense. Le champ électromoteur \vec{E}_m est plus intense à droite, ce qui explique le sens du courant.



Doc. 11b. Sur les parties horizontales les forces de Laplace se compensent. Sur la portion verticale où B est plus intense la force de Laplace est plus forte que sur l'autre : la résultante s'oppose au déplacement.



Doc. 12. Champ électromoteur et force de Laplace.

Sachant que $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -e_L i$, nous en déduisons le résultat suivant :

La force électromotrice de Lorentz induite par le déplacement du circuit électrique dans un champ magnétique permanent \vec{B} est égale à la circulation du champ électromoteur de déplacement le long du circuit :

$$e_L = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}.$$

L'existence de courants induits est liée au caractère non conservatif de la circulation du champ électromoteur.

2.2.3. Équivalence electrocinétique

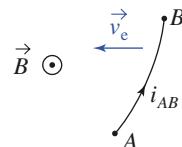
Considérons la portion de circuit AB du document 13 ; si sa résistance est R_{AB} , nous pouvons affirmer d'après ce qui précède qu'elle est équivalente d'un point de vue electrocinétique à un générateur de résistance R_{AB} et de f.e.m. e_L (doc. 13b) :

Pour une portion AB de circuit (circuit ohmique R_{AB}) se déplaçant dans un champ magnétique permanent \vec{B} extérieur permanent à la vitesse \vec{v}_e , nous pouvons écrire la loi d'Ohm sous la forme :

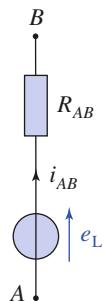
$$V_A - V_B + e_L = R_{AB} i_{AB} \quad \text{avec} \quad e_L = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}.$$

Remarques

- Pour un circuit fermé, la relation ci-dessus s'écrit $e_L = R i$: on voit bien ici que la circulation du champ électromoteur est non nulle sur un contour.
- Pour calculer cette circulation, nous devons convenir d'une orientation du circuit. Celle-ci est arbitraire, mais sera fixée une fois pour toutes et imposera simultanément les valeurs algébriques de la f.e.m. et du courant circulant dans le circuit.



a. Portion de fil de résistance ohmique R entre les points A et B en mouvement de vitesse \vec{v}_e dans un champ magnétique \vec{B} extérieur permanent.



b. Circuit électrique équivalent avec $e_L = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$ et $V_A - V_B + e_L = R_{AB} i_{AB}$

Doc. 13. Équivalence electrocinétique d'une portion de conducteur.

Application 3

Courants induits dans une roue

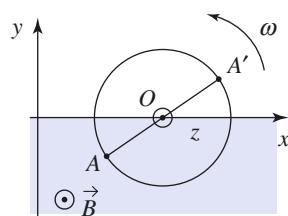
La circonference et un diamètre d'une roue de rayon a sont conducteur et ont la même résistance R .

La roue est mobile autour de l'axe (Oz), avec une vitesse angulaire de rotation ω (doc. 14a).

Un champ magnétique permanent $\vec{B} = B \vec{e}_z$ est imposé sur la moitié $y < 0$ de la roue, le champ magnétique étant nul pour $y > 0$.

On admettra qu'un tel champ discontinu existe, sachant que c'est une modélisation simplificatrice.

En l'absence de source, déterminer les courants



Doc. 14a. Roue conductrice en rotation.

et le moment des actions de Laplace par rapport à l'axe de rotation.

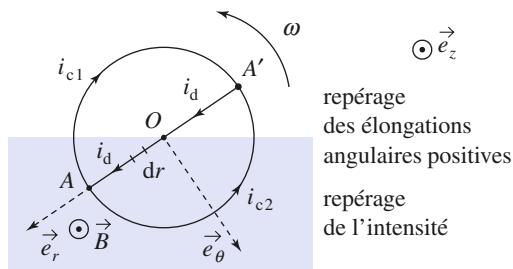
On utilisera deux méthodes faisant appel à :

- la puissance des forces de Laplace ;
- la circulation du champ électromoteur.

Quelle que soit la méthode utilisée, la solution comporte quatre étapes :

- orienter le circuit (cf. les orientations arbitraires que nous avons choisies sur le document 14b) ;
- calculer les f.e.m. ;
- dessiner le schéma électrocinétique équivalent (très utile dès que le circuit comporte plus d'une maille) ;
- en déduire les courants et donc les actions mécaniques.

Orientons le diamètre de O vers A situé dans le champ (doc. 14b).



Doc. 14b. Choix des orientations.

a) Première méthode

- Pour un élément dr de rayon plongé dans le champ : $d\vec{F}_{\text{Laplace}} = i_d dr \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z$, soit :

$$d\vec{F}_{\text{Laplace}} = -Bi_d dr \vec{e}_\theta.$$

Le moment par rapport à l'axe de rotation (Oz) est :

$$dM = -Bi_d r dr.$$

En intégrant, nous obtenons, pour le rayon plongé dans le champ :

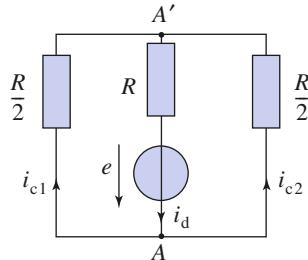
$$M = -i_d B \frac{a^2}{2},$$

et $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -\omega i_d B \frac{a^2}{2} = -e_{OA} i_d$,

d'où la f.e.m. $e_{OA} = \omega B \frac{a^2}{2}$.

- Pour toute portion de la circonférence, le moment des forces de Laplace par rapport à (Oz), est nul : il en est de même pour la puissance. La f.e.m. est donc aussi nulle.

En conclusion, une f.e.m. est localisée uniquement entre O et A . Nous pouvons désormais déterminer les courants en dessinant un schéma electrocinétique équivalent au système étudié (doc. 15). Comme $i_{c1} = i_{c2}$, nous noterons i_c cette valeur commune.



Doc. 15. Schéma électrocinétique équivalent.

L'analyse électrocinétique fournit le résultat :

$$i_d = 2i_c = \frac{e}{R + \frac{R}{4}} = \frac{2\omega B a^2}{5R}.$$

D'où le moment des forces de Laplace

$$M = -\frac{B^2 a^4}{5R} \omega.$$

Conformément à la loi de Lenz, il s'agit d'un moment opposé à la rotation du système.

b) Seconde méthode

Le champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = (\omega r \vec{e}_\theta) \wedge \vec{B} = \omega r B \vec{e}_r$$

est normal à la circonférence et parallèle au diamètre.

Pour la circonférence, la f.e.m. est donc nulle.

Pour le diamètre :

$$e_{OA} = \int_0^a \omega B r dr = \omega B \frac{a^2}{2}.$$

Le schéma électrocinétique équivalent est donc celui du document 15.

La f.e.m. de Lorentz, localisée sur la portion de circuit OA, se met sous la forme :

$$e_L = -\Phi_0 \omega.$$

Nous en déduisons (cf. Application 2) que sur cette même portion de circuit s'exercera le moment :

$$M = \Phi_0 i_d, \text{ avec } \Phi_0 = -B \frac{a^2}{2}.$$

2.3. Loi de Faraday

Nous allons montrer que, dans le cas d'une maille filiforme, la f.e.m. de Lorentz peut aussi s'exprimer à partir du flux du champ \vec{B} permanent extérieur. Pour un circuit fermé de contour Γ :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = i \oint_{\Gamma} (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e.$$

Pendant la durée dt , chaque point M du circuit se déplace de $d\vec{u} = \vec{v}_e dt$, et le travail des actions de Laplace peut s'écrire, en transformant le produit mixte :

$$\delta W_{\text{Laplace}} = i \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot (d\vec{u} \wedge d\vec{\ell}).$$

$d\vec{S}_b = d\vec{u} \wedge d\vec{\ell}$ a pour norme l'aire de la surface « balayée » par l'élément de circuit (doc. 16).

L'intégrale $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot (d\vec{u} \wedge d\vec{\ell})$ représente donc le flux de \vec{B} à travers la surface Σ_b balayée par le circuit fermé pendant dt (doc. 17).

Notons Σ_t et Σ_{t+dt} les surfaces orientées délimitées par le circuit aux instants t et $t+dt$. Les surfaces Σ_t , Σ_b et Σ_{t+dt} réunies forment une surface fermée Σ_0 dont les normales sont orientées vers l'extérieur, à condition de changer l'orientation de Σ_{t+dt} .

Le champ permanent \vec{B} étant à flux conservatif, son flux à travers Σ_0 est nul et, si $\Phi(t)$ représente le flux de \vec{B} à travers le circuit à l'instant t , nous pouvons écrire :

$$\iint_{\Sigma_0} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\Phi(t+dt) + \Phi(t) + \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot (d\vec{u} \wedge d\vec{\ell}) = 0.$$

Le signe $(-)$ devant $\Phi(t+dt)$ vient du changement d'orientation pour Σ_{t+dt} .

Nous en déduisons :

$$\delta W_{\text{Laplace}} = i[\Phi(t+dt) - \Phi(t)] = i d\Phi,$$

ou encore :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = i \frac{d\Phi}{dt}.$$

Comme par ailleurs $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -e_L i$, nous pouvons en déduire que :

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Par exemple, pour la tige mobile étudiée dans l'*application 2* :

$$\Phi(t) = +B a x,$$

si x est l'abscisse de la tige. Donc $e_L = -B a v$.

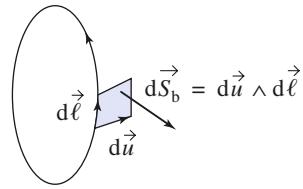
La f.e.m. de Lorentz pour une maille filiforme mobile peut aussi être déterminée par la loi de Faraday :

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

$\Phi(t)$ est le flux de champ magnétique extérieur permanent à travers toute surface Σ orientée qui s'appuie sur le contour Γ de la maille.

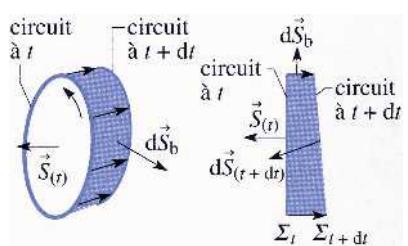
Remarques

- Il n'est pas possible de définir un flux si le circuit n'est pas filiforme ou si le champ n'est pas connu en tout point d'une surface qui s'appuie sur le circuit.
- La démonstration qui nous a amenés à établir la loi de Faraday est fausse si la vitesse des points du circuit est discontinue, comme cela se produit au niveau d'un contact mobile. La loi de Faraday peut alors ne pas s'appliquer.
- Lorsque le flux n'est pas très facile à définir (cf. Application 3), il est toujours possible de revenir au calcul de la circulation du champ électromoteur de déplacement.



Doc. 16. Aire élémentaire balayée par un élément de circuit.

a)



b)

- 1) Σ_b est la surface balayée par le circuit pendant dt .
- 2) Σ_t , Σ_{t+dt} et Σ_b forment une surface fermée Σ_0 dont les normales sont orientées vers l'extérieur à condition de changer l'orientation de Σ_{t+dt} .
- 3) Le flux de \vec{B} à travers Σ_0 est nul.

Doc. 17a et b. Orientations des surfaces.

Lorsque nous avons écrit au début du paragraphe l'expression de la puissance des forces de Laplace, le courant i sorti de l'intégrale, est supposé le même à l'instant t en tout point des branches du circuit : nous sommes donc dans l'A.R.Q.P.

► Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.

3 Circuit fixe dans un champ magnétique variable (cas de Neumann)

3.1. Équivalence des phénomènes

Reprenons l'expérience du § 1, dans la situation représentée sur le document 2. L'aimant est soumis à une translation à la vitesse \vec{v}_e dans le référentiel \mathcal{R} d'étude (que nous pouvons supposer galiléen), alors que la bobine est fixe. Si nous supposons que cette vitesse de translation est constante, le référentiel \mathcal{R}' lié à l'aimant est également galiléen.

- Adoptons le point de vue d'un observateur lié au référentiel \mathcal{R}' . Le circuit se déplace à la vitesse $-\vec{v}_e$ dans le champ permanent non uniforme de l'aimant immobile. Il s'agit d'un cas d'induction de Lorentz, et nous savons que la bobine se comporte comme un générateur de f.e.m. :

$$e_L = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

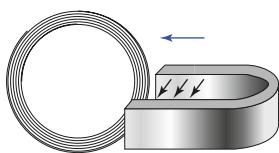
- Adoptons maintenant le point de vue d'un observateur lié au référentiel \mathcal{R} du laboratoire. Il interprète le phénomène d'induction (de Neumann) comme étant dû à une f.e.m. e_N qui a la même valeur que e_L .

Comme, à l'approximation non relativiste, le champ magnétique, et donc $\Phi(t)$, ont la même valeur pour les deux référentiels, il peut donc aussi écrire :

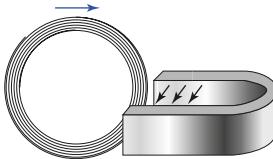
$$e_N = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Dans les deux descriptions, $\Phi(t)$ représente le flux du champ \vec{B} à travers le circuit à l'instant t .

Dans le premier cas, le flux varie car la bobine s'approche de l'aimant, et dans le second, le flux varie parce que le champ vu par la bobine évolue au cours du temps (doc. 18). Cette variation est cependant la même dans les deux cas.



Doc. 18a. On déplace l'aimant dans \mathcal{R} .



Doc. 18b. Dans \mathcal{R}' , c'est la bobine qui est mobile.

Remarque

Si la vitesse \vec{v}_e n'était pas constante, la loi de conduction qui relie e_L et le courant dans la bobine pourrait être modifiée en raison des forces d'inertie. Cet effet est en réalité négligeable, et, en pratique, nous ne nous préoccupons jamais de savoir si le référentiel lié à un circuit est galiléen ou non.

3.2. Loi de Faraday

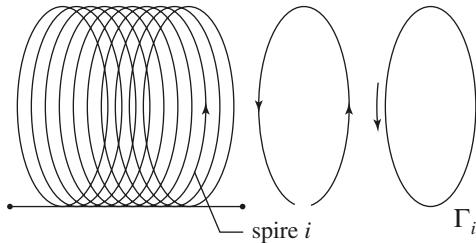
En généralisant, nous admettons qu'il est possible de prolonger l'application de la loi de Faraday au cas d'induction de Neumann.

Pour un circuit fixe soumis à un champ magnétique dépendant du temps, la f.e.m. d'induction de Neumann est donnée par la loi de Faraday :

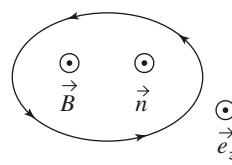
$$e_N = - \frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

3.3. Calcul pratique du flux

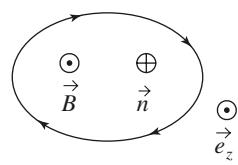
3.3.1. Force électromotrice d'une bobine



Doc. 19a. Une bobine et le contour équivalent à une spire.



Doc. 19b. $e_N = -S \frac{dB}{dt}$.



Doc. 19c. $e_N = +S \frac{dB}{dt}$.

Il est aisément de se représenter la surface Σ qui s'appuie sur le contour Γ du circuit lorsque la forme de celui-ci est simple.

En revanche, cela devient bien plus délicat pour un solénoïde !

La f.e.m. est en général très faible pour un circuit simple et les phénomènes d'induction sont souvent localisés dans des bobines qui comportent un grand nombre de spires.

Chacun des n spires d'une bobine se comporte comme un générateur.

Pour déterminer la f.e.m. e_i de la $i^{\text{ème}}$ spire, nous lui associons une spire fictive fermée dont le contour Γ_i suit presque son trajet (doc. 19a).

Nous pouvons alors définir et calculer un flux Φ_i à travers cette spire fictive, puis écrire avec une excellente approximation :

$$e_i = - \frac{d\Phi_i}{dt}.$$

Les n spires étant en série, la bobine complète est équivalente à un générateur dont la f.e.m. est :

$$e = - \frac{d\Phi_{\text{bobine}}}{dt}, \text{ avec } \Phi_{\text{bobine}} = \sum_i \Phi_i.$$

Dans les deux cas, $\vec{B} = B(t) \vec{e}_z$.

b) Avec cette convention d'orientation $\vec{n} = +\vec{e}_z$, et nous avons :

$$\Phi(t) = B(t) S,$$

$$\text{d'où } e_N = -S \frac{dB}{dt}.$$

c) Avec cette convention d'orientation $\vec{n} = -\vec{e}_z$, et nous avons :

$$\Phi(t) = -B(t) S,$$

$$\text{d'où } e_N = +S \frac{dB}{dt}.$$

Les orientations des circuits étant opposées, les f.e.m. physiques sont bien égales ; il en sera de même des courants.

3.3.2. Orientation

Il faut toujours être vigilant pour les orientations. Une fois le circuit orienté (arbitrairement), il faut calculer le flux avec le signe exact, puis placer dans le schéma electrocinétique équivalent un générateur de tension :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt},$$

orienté dans le sens de la maille.

Il va de soi que si on choisit l'orientation opposée, tous les signes sont modifiés, mais la f.e.m. et le courant physiques sont inchangés (doc. 19b et c).

Remarque : Bien évidemment, ces considérations s'appliquent aussi au calcul de la f.e.m. de déplacement.

Application 4

Courant induit par un aimant tournant

Un aimant, assimilé à un dipôle magnétique de moment \vec{M} , tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de son axe (Oz) (doc. 20a).

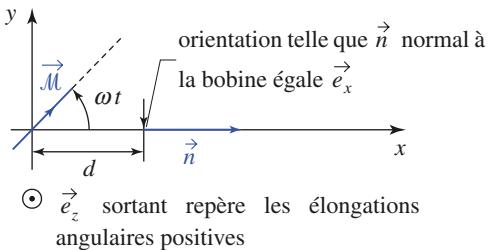
Une bobine plate de N spires d'aire S et de résistance électrique R , normales à l'axe (Ox), est placée sur l'axe (Ox) à une distance d , très grande devant ses dimensions et devant celles de l'aimant.

1) Calculer le courant $i(t)$ dans la spire en négligeant l'influence du champ magnétique propre de la bobine.

2) Calculer l'ordre de grandeur du champ magnétique propre au voisinage du centre de la bobine, puis discuter la validité de l'hypothèse précédente.

Commençons par préciser les orientations choisies (doc. 20b).

1) Si d est suffisamment grand, nous pouvons supposer que le champ de l'aimant est uniforme sur toute la bobine.



Doc. 20b. Choix des orientations.

La composante B_x du champ créé par l'aimant est en fait la composante radiale du champ du dipôle, soit :

$$B_x = \frac{\mu_0 M \cos \omega t}{2 \pi d^3}.$$

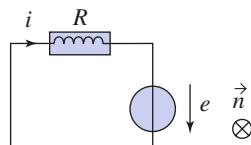
La bobine étant orientée de façon que \vec{e}_x soit son vecteur normal \vec{n} , le flux du champ \vec{B} créé par l'aimant à travers celle-ci est $\Phi = NSB_x$.

Le courant i se détermine en introduisant un générateur de f.e.m. :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 M N S \omega}{2 \pi d^3} \sin \omega t.$$

orienté selon le sens du circuit.

Le circuit de la bobine plate est donc équivalent à :



donc pour l'orientation choisie :

$$i = \frac{\mu_0 M N S \omega}{2 \pi d^3 R} \sin \omega t.$$

2) Le champ créé en son centre, par une spire de rayon a parcourue par un courant i , est :

$$B_{\text{propre}} = \frac{\mu_0 i}{2a}.$$

En généralisant l'ordre de grandeur, pour une bobine de forme différente le champ induit au centre est de l'ordre de :

$$B_{\text{propre}} \approx \frac{\mu_0 N i}{\sqrt{S}} = -\frac{\mu_0 N^2 \sqrt{S}}{R} \frac{dB_x}{dt}.$$

Ainsi, B_{propre} est négligeable si son amplitude est faible devant celle de B_x , soit si :

$$\frac{\mu_0 N^2 \sqrt{S} \omega}{R} \ll 1.$$

Par exemple, si $N = 100$ spires, $S = 1 \text{ cm}^2$ et $R = 1 \Omega$, cette condition devient :

$$\omega \ll 10^4 \text{ rad.s}^{-1}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 3.

3.4. Champ électromoteur de Neumann

Dans le cas d'induction de Lorentz, nous avons pu analyser l'origine du courant électrique circulant dans la bobine lorsqu'elle se déplace dans le champ de l'aimant fixe. C'est le terme supplémentaire :

$$q \vec{v}_e \wedge \vec{B} = q \vec{E}_m,$$

qui force l'écoulement des charges de conduction dans le circuit.

Dans le cas de **Neumann**, le mécanisme de la « pompe à charges » s'interprète différemment. Le champ magnétique dépend ici explicitement du temps, et ses variations temporelles induisent une composante du champ électrique dont la circulation le long d'un contour peut être non nulle. Ce fait est traduit par l'**équation de Maxwell-Faraday** :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Pour un circuit filiforme de contour Γ , soumis à un champ magnétique variable, le flux $\Phi(t)$ peut, d'après le théorème de Green-Ostrogradsky, s'exprimer à l'aide du potentiel vecteur $\vec{A}(M, t)$ associé au champ magnétique $\vec{B}(M, t)$:

$$\Phi(t) = \iint_{\Sigma} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A}(M, t) \cdot d\vec{\ell},$$

où Σ est une surface orientée s'appuyant sur Γ .

Si le circuit est fixe, nous pouvons écrire :

$$e_N = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} \vec{A}(M, t) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}.$$

Dans un cas d'induction de Neumann, nous pouvons associer au phénomène d'induction le champ électromoteur de Neumann :

$$\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

Pour calculer la f.e.m. associée sous la forme $e_N = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$.

4 Propriétés générales de l'induction

Les cas particuliers de Neumann et de Lorentz sont deux facettes du phénomène d'induction. Les deux causes de l'induction agissent simultanément si un circuit se déplace dans un champ magnétique non permanent.

4.1. Approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.)

Les phénomènes d'induction que nous étudions sont toujours compatibles avec l'A.R.Q.P., approximation peu contraignante pour l'étude des circuits électriques aux fréquences usuelles. Dans le cadre de cette approximation, le champ électrique dépend des variations du champ magnétique par l'équation de Maxwell-Faraday mais les équations locales du champ magnétique sont inchangées par rapport au cas de la magnétostatique.

Les phénomènes d'induction se traitent en général dans le cadre de l'A.R.Q.P. Le champ magnétique se détermine alors en utilisant les méthodes de la magnétostatique.

4.2. Force électromotrice d'induction

4.2.1. Additivité des forces électromotrices

Nous admettrons que, si les deux causes de l'induction existent simultanément, il faut additionner leurs effets.

Le déplacement du circuit fermé crée à la date t une f.e.m. e_L telle que :

$$e_L i = -\mathcal{P}_{\text{Laplace}}$$

et :

$$e_L = \int_{\text{circuit}} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}(t)) \cdot d\vec{\ell}.$$

\vec{B} n'est plus nécessairement permanent.

La variation de $\vec{B}(t)$ crée une f.e.m. e_N telle que :

$$e_N = \oint_{\text{circuit}} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}.$$

Le circuit se comporte alors comme un générateur dont la f.e.m. est :

$$e = e_L + e_N.$$

Nous admettrons cette loi de Faraday généralisée, dont la démonstration est délicate.

Pour une maille fermée, mobile dans un champ \vec{B} variable, la f.e.m. d'induction est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

$\frac{d\Phi}{dt}$ représente la dérivée totale de $\Phi(t)$, tenant compte du déplacement du circuit et de la variation de \vec{B} .

4.2.2. Loi d'Ohm généralisée

Nous pouvons généraliser les résultats du § 2.2.3.

Du point de vue électrocinétique, l'induction se manifeste donc toujours par une f.e.m. e introduite dans le circuit. Si le conducteur filiforme est ohmique (résistance R_{AB} pour la portion AB), sa caractéristique $u(i)$ devient donc (*doc. 21a et b*) :

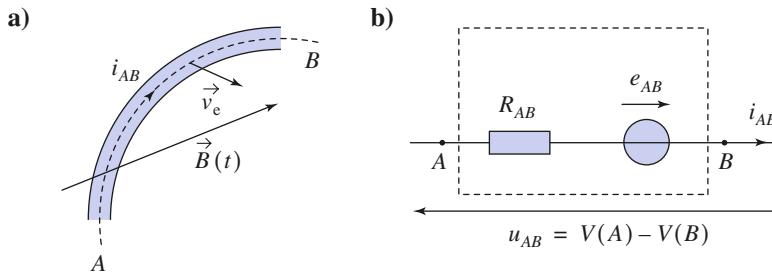
$$u_{AB} + e_{AB} = R_{AB} i_{AB}.$$

Cette expression porte le nom de loi d'Ohm généralisée. Elle correspond à un schéma électrocinétique équivalent, dans lequel la f.e.m. e_{AB} est représentée par un générateur de tension orienté de A vers B .

Une portion AB de circuit filiforme vérifie la loi d'Ohm généralisée :

$$u_{AB} + e_{AB} = R_{AB} i_{AB}.$$

6. Induction électromagnétique



- ◀ Doc. 21a. Conducteur filiforme en présence d'induction.
b. Son équivalent électrocinétique.

4.3. Loi locale de conduction dans un circuit mobile

Nous avons vu, au chapitre 1, que la loi locale de conduction dans un conducteur immobile \mathcal{C} en présence d'un champ magnétique \vec{B} est :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_\# = \gamma [\vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B}],$$

où R_H est la **constante de Hall** du matériau.

Si le conducteur est en mouvement, avec une vitesse \vec{v}_e , il faut tenir compte de la force supplémentaire $q \vec{v}_e \wedge \vec{B}$ qui apparaît dans la force de Lorentz, et la loi de conduction devient $\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B})$.

Examinons les divers termes :

- $R_H \vec{j} \wedge \vec{B}$ est le **terme de Hall** : ce terme est quasiment toujours négligeable dans un métal (bon conducteur), mais il est souvent non négligeable dans les semi-conducteurs ;
- le terme $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ représente le **champ électromoteur de Lorentz**, que le champ magnétique dépende ou non du temps ;
- le champ \vec{E} est le vecteur champ électrique solution des équations de Maxwell écrites dans le référentiel du laboratoire : ainsi, en présence d'un champ magnétique variable, l'équation $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ a pour solution :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Dans le cas le plus général, la loi d'Ohm microscopique s'écrit :

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E}_{\text{laboratoire}} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B}),$$

soit :
$$\vec{j} = \gamma \left(- \overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \right),$$

et pour un conducteur usuel :

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E}_{\text{laboratoire}} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

soit :
$$\vec{j} = \gamma \left(- \overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right).$$

\vec{E} et \vec{B} apparaissant dans ces formules sont \vec{E} et \vec{B} solutions des équations de Maxwell dans le référentiel du laboratoire.

Les symétries permettent souvent de déterminer les diverses grandeurs.

Remarque

Dans l'A.R.Q.P. (approximation des régimes stationnaires) $\text{div } \vec{j} = 0$: les lignes de courants sont donc fermées, ce sont des contours.

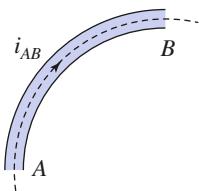
Si des courants existent, la circulation de \vec{j} sur un contour est strictement non nulle. Si cette circulation est nulle, c'est que le vecteur densité volumique de courant est partout nul.

Cette étude sera développée au chapitre suivant (cf. exercice 8).

Application Σ

Forme intégrée de la loi de conduction

- 1) Pour une portion AB de conducteur filiforme immobile (doc. 22), rappeler la définition de la résistance, vue au chapitre 1.



- Doc. 22.** Conducteur modélisé par un circuit filiforme.
2) Quel terme supplémentaire faut-il ajouter au champ électrique si le conducteur est mobile dans un champ magnétique ?

- 3) Exprimer le champ électrique au moyen des potentiels $\vec{A}(M, t)$ et $V(M, t)$, puis en déduire une démonstration de la loi d'Ohm généralisée.

- 1) En régime permanent, la résistance vaut :

$$R = \frac{1}{i_{AB}} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{u_{AB}}{i_{AB}}.$$

- 2) Si le conducteur se déplace en présence d'un champ magnétique, il faut, comme dans la loi locale, remplacer \vec{E} par $\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$,

soit : $R i_{AB} = \int_A^B (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}.$

$$3) \vec{E} = - \nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

La loi intégrée de conduction devient donc :

$$R i_{AB} = - \int_A^B \nabla V \cdot d\vec{\ell} + \int_A^B - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} + \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}.$$

• $\int_A^B \nabla V \cdot d\vec{\ell} = V(A, t) - V(B, t)$ est égal à la différence de potentiel u_{AB} , ou tension aux bornes de l'élément de circuit.

• $\int_A^B - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} + \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$ est la force électromotrice d'induction totale e_{AB} de l'élément de circuit orienté de A vers B.

Nous retrouvons bien la loi d'Ohm généralisée, à savoir : $u_{AB} = R i_{AB} - e_{AB}$

ou encore : $u_{AB} + e_{AB} = R i_{AB}.$



● LE PHÉNOMÈNE D'INDUCTION

- Un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent peut se comporter comme un générateur électrocinétique : il est le siège d'un phénomène d'induction. Nous parlerons dans ce cas d'*induction de Lorentz*.

Lorsqu'un circuit fixe est soumis à un champ magnétique variable, il est encore le siège d'un phénomène d'induction. Nous parlerons alors d'*induction de Neumann*.

L'induction électromagnétique est un phénomène unique : l'induction de Lorentz et l'induction de Neumann en sont deux facettes, qui dépendent du point de vue de l'observateur.

• Loi qualitative de Lenz

Les effets magnétiques, électrocinétiques et mécaniques de l'induction sont toujours orientés de façon à s'opposer à ses causes.

● CONDUCTION MOBILE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE PERMANENT « EXTÉRIEUR »

- L'action d'un champ magnétique permanent sur un circuit en mouvement est équivalente à celle d'un générateur de tension, dont la force électromotrice e_L est appelée *force électromotrice de Lorentz* ou *force électromotrice de déplacement*.

La puissance de la force électromotrice de Lorentz est compensée par celle des actions de Laplace exercée sur le circuit :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_L i = 0.$$

- Lors du déplacement d'un conducteur dans un champ magnétique constant, les charges de conduction sont mises en mouvement par une force $\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$, où :

• \vec{v}_e est la vitesse de déplacement du conducteur ;

• \vec{E}_m est appelé *champ électromoteur de Lorentz* ou *champ électromoteur de déplacement*.

- La force électromotrice de Lorentz induite par le déplacement du circuit électrique dans un champ magnétique \vec{B} est égale à la circulation du champ électromoteur de déplacement le long du circuit.

Pour le tronçon AB de circuit filiforme :

$$e_L = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}.$$

- L'existence de courants induits est liée au caractère non conservatif de la circulation du champ électromoteur.

- La f.e.m. de Lorentz pour une maille filiforme mobile peut aussi être déterminée par la loi de Faraday :

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

$\Phi(t)$ est le flux du champ magnétique extérieur permanent à travers toute surface Σ orientée qui s'appuie sur le contour Γ de la maille.

● CIRCUIT IMMOBILE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE DÉPENDANT DU TEMPS

- Pour un circuit fixe soumis à un champ magnétique dépendant du temps, la f.e.m. d'induction (de Neumann) est donnée par la loi de Faraday :

$$e_N = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$



- Dans un cas d'induction de Neumann, nous pouvons associer au phénomène d'induction le champ électromoteur de Neumann : $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ pour calculer la f.e.m. associée sous la forme :

$$e_N = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}.$$

● CARACTÉRISTIQUE D'UN CIRCUIT SOUMIS À L'INDUCTION

- Pour une maille fermée (ou, par extension, pour une bobine) mobile dans un champ \vec{B} variable, la f.e.m. d'induction est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

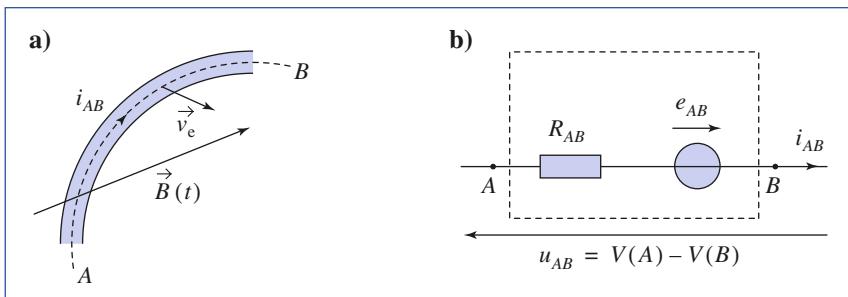
$\frac{d\Phi}{dt}$ représente ici la dérivée totale de $\Phi(t)$, tenant compte du déplacement du circuit et de la variation de \vec{B} .

● LOIS D'OHM

• Loi d'Ohm généralisée

- Une portion AB de circuit filiforme (de résistance ohmique R_{AB}) vérifie la loi d'Ohm généralisée :

$$u_{AB} + e_{AB} = R_{AB} i_{AB}$$



a. Conducteur filiforme en présence d'induction. b. Son équivalent électrocinétique.

• Loi d'Ohm microscopique

Pour un bon conducteur, cette loi d'Ohm s'écrit :

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E}_{laboratoire} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

soit :

$$\vec{j} = \gamma \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right)$$

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Pouvez-vous décrire à partir d'une manipulation simple l'induction de Lorentz ?
- ✓ Quelle est l'expression du champ électromoteur dans ce cas ? Comment s'exprime alors la f.e.m. d'induction ?
- ✓ Dans le cas de l'induction de Lorentz comment s'exprime le bilan énergétique du phénomène d'induction ?
- ✓ Pouvez-vous décrire à partir d'une manipulation simple l'induction de Neumann ?
- ✓ Comment s'énonce la loi de Lenz ?
- ✓ Écrivez la loi de Faraday.
- ✓ Quel est l'équivalent electrocinétique d'un circuit filiforme soumis à un champ magnétique ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

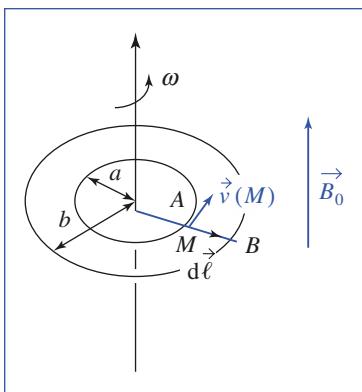
1. On considère la situation ci-dessous où la tige tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de (Oz) ; les cercles ont des rayons a et b avec $a < b$; la f.e.m. d'induction s'exprime par :

a. $e_{AB} = \int_A^B (\vec{v}(M) \wedge \vec{B}_0) \cdot d\vec{\ell}$.

b. $e_{AB} = -\int_A^B (\vec{v}(M) \wedge \vec{B}_0) \cdot d\vec{\ell}$.

c. $e_{AB} = \omega a (b-a) B_0$.

d. $e_{AB} = \omega \frac{b^2 - a^2}{2} B_0$.



2. On considère maintenant la situation ci-dessous où on lance la tige à la vitesse ω_0 à $t=0$:

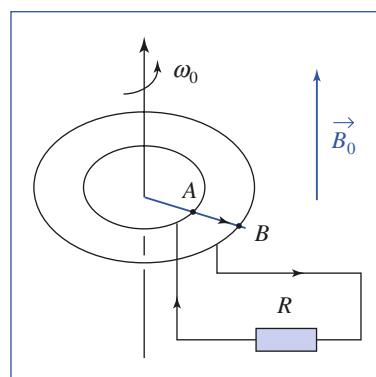
a. $i_{AB} > 0$

b. $i_{AB} < 0$

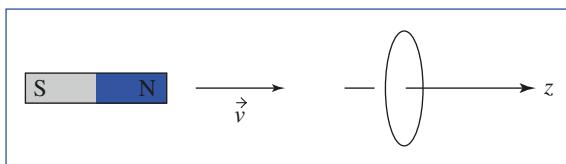
c. les actions de Laplace vont contribuer à accélérer la tige

d. les actions de Laplace vont contribuer à ralentir la tige

e. les actions de Laplace n'ont pas d'action sur la tige.



- 3. Un aimant droit est approché à vitesse constante d'une spire immobile dans le référentiel du laboratoire et dont le plan est orthogonal à l'axe z :**

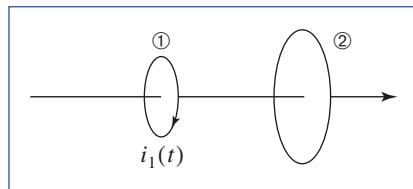


- a. Dans ce référentiel, il s'agit d'induction de Neumann.
- b. Dans ce référentiel, il s'agit d'induction de Lorentz.
- c. Le champ magnétique induit est dirigé suivant \vec{e}_z .
- d. Le champ magnétique induit est dirigé suivant $-\vec{e}_z$.

- 4. Le champ électromoteur associé au phénomène d'induction de Neumann s'exprime par :**

- a. $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
- b. $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
- b. $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}(V)$.

- 5. Soit deux spires circulaires, immobiles, de même axe de révolution ; initialement seule la spire ① est parcourue par un courant $i_1(t) > 0$:**



- a. Le courant induit dans la spire ② est de même sens que i_1 .
- b. Le courant induit dans la spire ② est de sens opposé à i_1 .
- c. Il faut connaître le sens de variation de i_1 pour répondre à la question.
- d. Il n'y a pas de courant induit dans la spire ②.

- 6. Pour un matériau bon conducteur localement en mouvement à la vitesse \vec{v}_e dans un champ magnétique $\vec{B}(t)$, la loi d'Ohm peut s'écrire :**

- a. $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$
- b. $\vec{j} = \gamma\left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B}\right)$
- c. $\vec{j} = \gamma\left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}\right)$
- d. $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B})$.

► Solution page 193.

Exercices

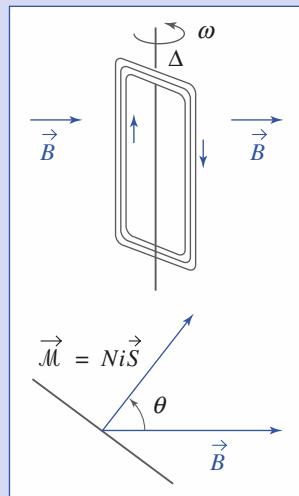
1 Alternateur rudimentaire

Une bobine plate de $N = 200$ spires, d'aire $S = 20 \text{ cm}^2$, tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ entre les pôles d'un aimant en « U », qui produit un champ $B = 0,2 \text{ T}$ supposé uniforme et normal à l'axe de rotation.

La bobine dont les bornes sont reliées, possède une résistance $R = 1 \Omega$. Le champ qu'elle crée est négligeable devant celui de l'aimant.

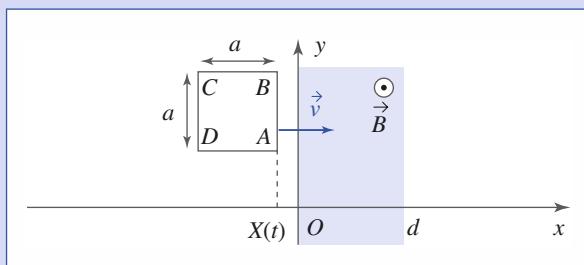
1) Calculer la f.e.m. d'induction induite par le mouvement de la bobine.

2) Déterminer le moment Γ par rapport à l'axe qu'il faut exercer pour entretenir la rotation (on pourra proposer plusieurs méthodes).



2 Déplacement d'un cadre conducteur

On suppose que le champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ est uniforme et constant entre les plans ($x = 0$) et ($x = d$), et nul ailleurs.



Un cadre conducteur carré, de côté a ($a < d$), de résistance totale R et de côtés parallèles aux axes (Ox) et (Oy), circule avec une vitesse constante $\vec{v} = ve_x$. On désigne par $X(t)$ l'abscisse du côté avant du cadre.

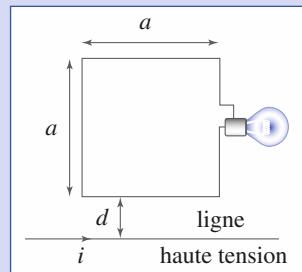
Déterminer en fonction de X le courant i et la force électromagnétique \vec{F} résultante qui s'exerce sur le cadre :

- 1) en calculant le champ électromoteur ;
- 2) en utilisant la loi de Faraday ;
- 3) par un bilan énergétique.

3 Induction près d'une ligne électrique

Une ligne haute tension transporte un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz et de valeur efficace $I = 1 \text{ kA}$.

On approche une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30 \text{ cm}$ à une distance $d = 2 \text{ cm}$ comme indiqué sur le schéma.



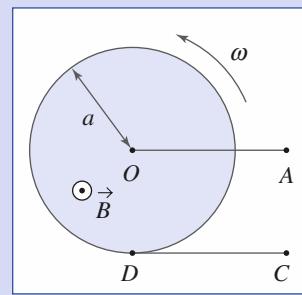
Cette bobine, d'inductance et de résistance négligeables, est fermée sur une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace à ses bornes est supérieure à 1,5 V.

Déterminer le nombre de spires nécessaire pour que l'ampoule s'allume.

4 Roue de Barlow génératrice

Une « roue de Barlow » est un disque conducteur mince de rayon a , tournant autour de son axe de symétrie, et soumis à un champ magnétique constant.

Elle est reliée à deux bornes fixes par son axe (conducteur) et par un contact fixe et quasi ponctuel qui frotte en D sur la circonference.



Pour les calculs, on supposera que le champ \vec{B} est uniforme et normal au disque.

Déterminer la tension u_{AC} (mesurable à courant nul) en fonction de la vitesse de rotation ω de la roue.

Données : $B = 0,2 \text{ T}$; $a = 3 \text{ cm}$; $\omega = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

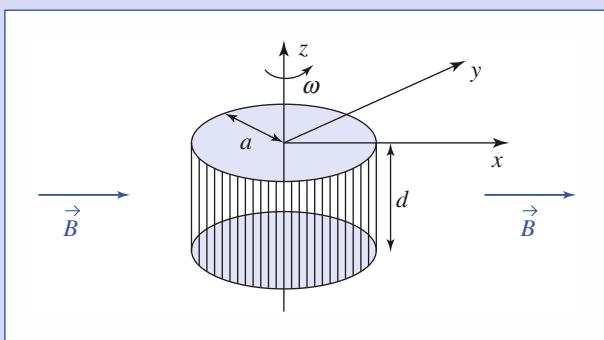
5 Freinage électromagnétique

Deux disques de cuivre de rayon a , parallèles, de même axe (Oz) et distants de d , sont reliés par N fils fins, parallèles à (Oz), régulièrement répartis sur la circonference, et chacun de résistance R .

N est très grand, et on néglige la résistance des disques. L'ensemble, plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$, peut tourner autour de l'axe (Oz).

On note J le moment d'inertie du système par rapport à (Oz).

Exercices



- 1) Montrer que la tension u entre les deux disques est nulle.
- 2) En l'absence de tout frottement mécanique, déterminer la loi d'évolution $\omega(t)$ de la vitesse angulaire.

6 Action d'un aimant mobile sur une bobine

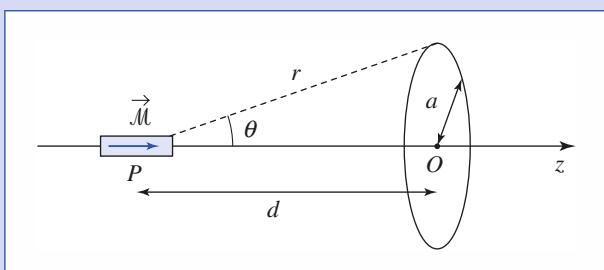
Une bobine b , de centre O et d'axe (Oz), est constituée de N spires circulaires de rayon a . Elle est fermée sur elle-même ; sa résistance est R et son inductance est négligeable.

On approche de la bobine un aimant le long de l'axe (Oz), à la vitesse v constante.

On suppose que le champ créé par l'aimant est le même que celui d'un dipôle magnétique de moment \vec{M} , situé en P , colinéaire à (Oz).

On admettra l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ en un point M , créé par un dipôle de moment \vec{M} situé en P :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 \vec{M} \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3}.$$



Déterminer, en fonction de l'angle θ du schéma la force \vec{F} exercée par l'aimant sur la bobine.

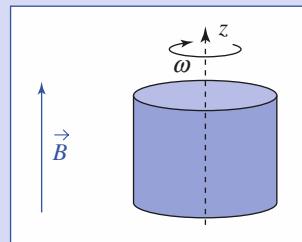
Pour quelle distance d_0 cette force est-elle maximale ?

On exprimera d_0 en fonction de a .



7 Champ électromoteur dans un cylindre en rotation

Un cylindre conducteur, homogène, de rayon a et très long, est en rotation de vitesse angulaire constante ω autour de son axe (Oz). Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$ est appliqué.

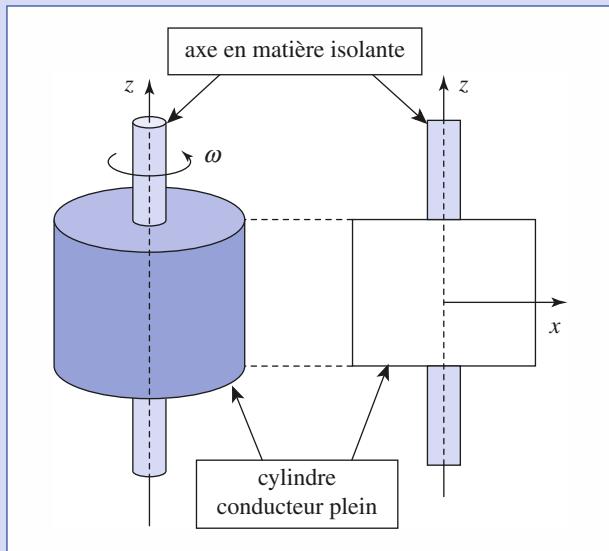


Montrer qu'en régime permanent, il existe des charges électriques dans le cylindre et sur sa surface (on pourra faire toute approximation utile).



8 Courants dans un cylindre en rotation

Un cylindre conducteur plein et de conductivité γ est en rotation de vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ autour de son axe (Oz). L'axe est en matière isolante.



1) Champ axial

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$ (colinéaire à l'axe de rotation) est appliqué.

a) Analyser les effets de la rotation du cylindre pour justifier l'établissement d'un régime permanent.

Existe-t-il des courants dans le cylindre lorsque ce régime est établi ?

b) Décrire la répartition des charges dans le cylindre en régime permanent (le cylindre a un rayon a très petit devant sa hauteur d).

2) Champ transverse

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$ (orthogonal à l'axe de rotation) est appliqué.

a) Justifier l'existence de courants dans le cylindre en prévoyant leur allure. Quel est leur effet mécanique ?

Si le cylindre est très long ($h \gg a$), on suppose que loin des extrémités, la densité de courant et de la forme :

$$\vec{j} = j(r, \theta)\vec{e}_z.$$

b) Quelle est la relation entre $j(r, \theta)$ et $j(r, \theta + \pi)$?

c) Quelle est la valeur du champ électrique $\vec{E}(r, \theta, z)$ (mesuré dans le référentiel d'étude « fixe ») à l'intérieur du conducteur en rotation, dans le cadre de ce modèle ?

d) En déduire la fonction $j(r, \theta)$, et la puissance dissipée au sein du cylindre.

e) Déterminer le moment des efforts de Laplace par rapport à l'axe de rotation.

Faire l'application numérique pour un cylindre de cuivre de 1 cm de rayon, de hauteur 5 cm, en rotation à 1 tour/seconde dans un champ de 0,2 T. Pour le cuivre, $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 190.

- | | |
|------------------|----------------|
| 1. Vrai : a, d ; | Faux : b, c |
| 2. Vrai : a, d ; | Faux : b, c, e |
| 3. Vrai : a, d ; | Faux : b, c |
| 4. Vrai : b ; | Faux : a, c |
| 5. Vrai : c ; | Faux : a, b, d |

6. Vrai : a, b, c, d) (sachant que le terme $R_H j \wedge \vec{B}$ est souvent négligeable pour un bon conducteur).

1) La surface étant la seule donnée, on calcule la f.e.m de déplacement par la loi de Faraday. L'angle entre le champ \vec{B} et la normale au circuit est $\theta(t) = \omega t + \varphi$. On a $\phi = NSB \cos(\omega t + \varphi)$. D'où :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = +e_m \sin(\omega t + \varphi), \text{ avec } e_m = NSB \omega = 0,8 \text{ V.}$$

2) $i = \frac{e}{R} = \frac{NSB \omega}{R} \sin(\omega t + \varphi)$.

Première méthode

La spire de moment magnétique $\vec{M} = Ni\vec{S}$ est soumise au moment des actions de Laplace $\vec{\Gamma}_{\text{Laplace}} = \vec{M} \wedge \vec{B}$, porté par l'axe de rotation, soit en mesure algébrique :

$$\Gamma_{\text{Laplace}} = -MB \sin \theta = -\frac{(NSB)^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t + \varphi).$$

On en déduit $\Gamma = -\Gamma_{\text{Laplace}} = \frac{(NSB)^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t + \varphi)$.

A.N. : $\Gamma_{\text{max}} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$.

Remarque : $\Gamma_{\text{Laplace}} < 0$ tend à s'opposer à la rotation de la bobine : on vérifie bien la loi de Lenz.

Deuxième méthode

Un premier bilan énergétique donne :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \Gamma_{\text{Laplace}} \omega = -ei \quad \text{et} \quad \Gamma = -\Gamma_{\text{Laplace}},$$

et on retrouve : $\Gamma = \frac{(NSB)^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t + \varphi)$.

Troisième méthode

Un second bilan énergétique est $\mathcal{P}_{\text{opérateur}} = \mathcal{P}_{\text{dissipée}}$, soit :

$$\Gamma \omega = Ri^2, \text{ d'où la valeur de } \Gamma.$$

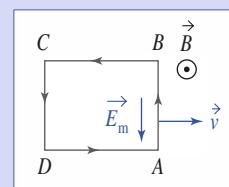
2) On oriente le cadre dans le sens ABCDA.

1) $\vec{E}_m = -Bv\vec{e}_y$, si $0 < x < d + a$.

La circulation de \vec{E}_m est nulle sur les côtés BC et DA, 4 cas sont à envisager.

a) $X < 0$ et $X > d + a$: \vec{E}_m est nul, $e = 0$,

$$i = 0 \text{ et } \vec{F} = \vec{0}.$$



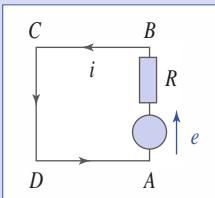
Corrigés

b) $0 < X < a$: seul le côté AB est dans le champ :

$$e = \int_A^B (-Bv)dy = -Bva;$$

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{Bva}{R} < 0$$

et $\vec{F} = iaB\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = -\frac{B^2a^2}{R}ve_x\vec{e}_x$.



c) $a < X < d$: les circulations de \vec{E}_m sur AB et CD sont opposées ;

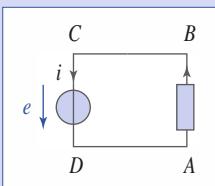
$$e = 0, \quad i = 0 \quad \text{et} \quad \vec{F} = \vec{0}.$$

d) $d < X < d + a$: seul le côté CD est dans le champ ;

$$e = \int_C^D (-Bv)dy = +Bva;$$

$$i = +\frac{Bva}{R} > 0$$

et $\vec{F} = iaB(-\vec{e}_y) \wedge \vec{e}_z = -\frac{B^2a^2}{R}ve_x\vec{e}_x$.



La force est, lorsqu'elle existe, toujours résistante et proportionnelle à la vitesse, conformément à la loi de Lenz.

Remarque : Un changement d'orientation du circuit modifie les signes de i et e mais pas les conclusions finales.

2) a) Si $X < 0$, $a < X < d$ ou $X > a + d$: le flux est constant, donc le courant est nul.

b) $0 < X < a$: la partie du cadre plongée dans le champ a pour aire $S = aX$, orientée positivement dans le sens de \vec{e}_z . On en déduit :

$$\phi = BaX, \quad e = -\frac{d\phi}{dt} = -Bav = Ri \quad \text{et donc} \quad \vec{F} = -\frac{B^2a^2}{R}\vec{v}.$$

c) $d < X < a + d$: la partie du cadre plongée dans le champ a pour aire $S = a(a + d - X)$, orientée positivement dans le sens de \vec{e}_z .

Il vient alors $\phi = Ba(a + d - X)$, $e = -\frac{d\phi}{dt} = +Bav = Ri$

et donc $\vec{F} = -\frac{B^2a^2}{R}\vec{v}$.

3) $\vec{F} = ia[B(X) - B(X - a)]\vec{e}_x$ et donc :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = ia[B(X) - B(X - a)]v.$$

Comme $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -ei$, on obtient donc :

$$Ri = e = -a[B(X) - B(X - a)]v,$$

ce qui redonne les expressions précédentes de i et \vec{F} :

a) Si $X < 0$, $a < X < d$ ou $X > a + d$:

$$B(X) = B(X - a) \quad \text{et} \quad i \text{ est nul.}$$

b) $0 < X < a$: $B(X) = B$ et $B(X - a) = 0$, d'où $i = -\frac{Bav}{R}$.

c) $d < X < a + d$: $B(X) = 0$ et $B(X - a) = B$, d'où $i = +\frac{Bav}{R}$.



En utilisant le théorème d'Ampère dans le cadre de l'A.R.Q.P., on montre que le champ magnétique est orthoradial et vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta, \quad \text{avec} \quad i = I\sqrt{2} \cos \omega t.$$

La f.e.m d'induction de Newmann que crée ce champ variable dans la bobine plate vaut $e = -\frac{d\phi}{dt}$.

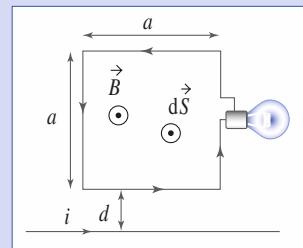
Avec l'orientation ci-contre :

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = Na \int_a^{a+d} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr$$

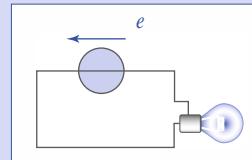
$$\phi_B = Na \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{a}\right)$$

et donc :

$$e = Na\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{a}\right) I\sqrt{2} \sin \omega t,$$



le circuit est donc :



$$\text{et } E_{\text{efficace}} = \frac{Na\mu_0}{2\pi} I\omega \ln\left(\frac{d+a}{a}\right).$$

Il faut $E_{\text{efficace}} > 1,5$ V soit $N > 28$.



On utilise les coordonnées cylindriques : $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

En un point M de la roue situé à la distance r du centre O , le champ électromoteur est :

$$\vec{E}_m = r\omega \vec{e}_\theta \wedge \vec{B} = r\omega \vec{e}_r.$$

$$\text{On remarquera que } \vec{E}_m = \vec{\text{grad}} \frac{B\omega r^2}{2}.$$

On oriente le circuit de A vers C , alors :

$$u_{AC} = -e_{AC} = -\int_0^D \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = -\frac{B\omega d^2}{2} \quad (\text{le courant étant nul}).$$

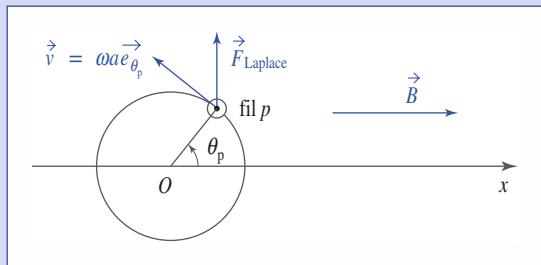
A.N. : $u_{AC} = -e_{AC} = -0,9$ mV.

Remarques :

- On n'a pas calculé, comme dans un circuit filiforme, la circulation de \vec{E}_m sur une ligne déterminée.

- Le champ électromoteur n'est égal à $\vec{\text{grad}} \frac{B\omega r^2}{2}$ que sur la roue. Sa circulation sur un circuit complet fermé n'est pas nécessairement nulle.

5



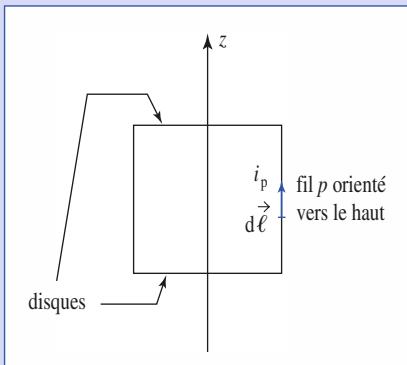
- 2) • Le fil p est parcouru par le courant (orienté conventionnellement vers le haut) :

$$i_p = \frac{e_p}{R} = -\frac{B\omega ad}{R} \cos \theta_p,$$

$$\text{et est soumis à la force } \vec{F}_p = -\frac{B^2\omega ad^2}{R} \cos \theta_p \vec{e}_y.$$

Le moment de cette force par rapport à (Oz) vaut :

$$\mathcal{M}_p = -\frac{B^2 a^2 d^2}{R} \omega \cos^2 \theta_p.$$



- Au total, le système est soumis au moment $\mathcal{M} = -\frac{B^2 a^2 d^2}{R} \omega \sum_{p=1}^N \cos^2 \theta_p$.

N étant très grand et les θ_p régulièrement répartis, on peut considérer que la

somme $\sum_{p=1}^N \cos^2 \theta_p$ est égale à N fois la valeur moyenne de $\cos^2 \theta_p$, soit $\frac{N}{2}$,

$$\text{d'où } \mathcal{M} = -\frac{NB^2 a^2 d^2}{2R} \omega.$$

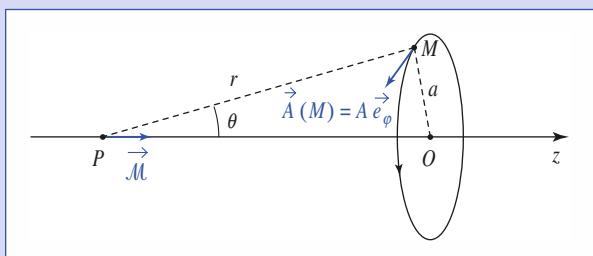
Le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe (Oz) donne alors :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M} \approx -\frac{NB^2 a^2 d^2}{2R} \omega.$$

On en déduit $\omega = \omega_0 e^{-\frac{1}{\tau_R}}$, avec $\tau_R = \frac{2RJ}{NB^2 a^2 d^2}$.

6

On oriente la spire comme indiqué sur le schéma et on utilise les coordonnées sphériques de centre P .



En un point de la bobine : $\vec{A} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin \theta}{4\pi r^2} \vec{e}_\phi$, où $\theta(t)$ est une fonction du temps.

La f.e.m. est :

$$\text{avec } \phi = \oint_{\text{bobine}} \vec{A} \cdot d\ell = N \frac{\mu_0 \mathcal{M} a \sin \theta}{2r^2} = \mu_0 N \frac{\mathcal{M}}{2a} \sin^3 \theta \text{ avec } r = \frac{a}{\sin \theta}.$$

Le courant est $i = \frac{e}{R} = -\frac{3\mu_0 N \mathcal{M}}{2aR} \sin^2 \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$, en négligeant le champ créé par le courant induit.

En coordonnées sphériques, le champ \vec{B} créé par l'aimant est, en un point de la bobine :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin^3 \theta}{4\pi a^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta), \text{ puisque } r = \frac{a}{\sin \theta}.$$

La résistance \vec{F} des forces de Laplace exercées sur la bobine est orientée selon (Oz).

- 1) Pour un fil (orienté vers le haut) dont la position est repérée par l'angle polaire θ_p , la force de Laplace est $i_p B d\vec{e}_y$ et la puissance de cette force vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = i_p B d\vec{e}_y \cdot (\omega a \vec{e}_{\theta_p}) = \omega i_p B a d \cos \theta_p.$$

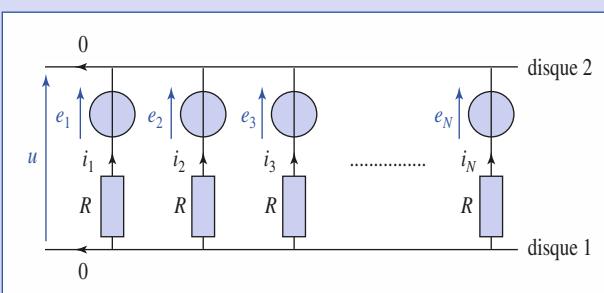
Par suite, la f.e.m. est :

$$e_p = -\frac{\mathcal{P}_{\text{Laplace}}}{i_p} = -\omega a B d \cos \theta_p.$$

Remarque : On peut aussi calculer la f.e.m. induite par :

$$e_p = \int_0^d (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\ell, \text{ avec } \vec{v} = \omega a \vec{e}_{\theta_p}, \vec{B} = B \vec{e}_x \text{ et } d\ell = dz \vec{e}_z.$$

Le schéma électrocinétique équivalent est donc le suivant :



La somme des courants est nulle :

$$\sum_{p=1}^N \frac{e_p - u}{R} = 0 \quad \text{donc} \quad u = -\frac{B\omega ad}{N} \sum_{p=1}^N \cos \theta_p.$$

Les θ_p étant régulièrement répartis, il vient $\sum_{p=1}^N \cos \theta_p = 0$ et donc $u = 0$.

Corrigés

Pour un élément $d\vec{\ell} = d\ell \vec{e}_\theta$ de spire, la composante parallèle à (Oz) de la force de Laplace est :

$$dF_z = i(d\ell \vec{e}_\theta \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 M \sin^3 \theta}{4\pi a^3} i d\ell (-3 \cos \theta \sin \theta) \vec{e}_z.$$

d'où : $\vec{F} = -\frac{3\mu_0 N M}{2a^2} i (\sin^4 \theta \cos \theta) \vec{e}_z$

$$\vec{F} = \left(\frac{3\mu_0 N M}{2}\right)^2 \frac{1}{Ra^3} (\sin^6 \theta \cos^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z.$$

Sachant que $\cotan \theta = -\frac{z_p}{a}$ (attention aux signes : $z_p = -d$), on en déduit

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{a} \sin^2 \theta, \text{ et enfin } \vec{F} = \left(\frac{3\mu_0 N M}{2}\right)^2 \frac{v}{Ra^4} (\sin^8 \theta \cos^2 \theta) \vec{e}_z.$$

La force est toujours orientée dans le sens de \vec{v} , ce qui est conforme à la loi de Lenz : pour minimiser la variation de flux, la force due à l'induction tend à déplacer le circuit dans le même sens que l'aimant.

La force est maximale pour $\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$, soit $\tan \theta = 2$ et $d_0 = \frac{a}{\tan \theta} = \frac{a}{2}$.

7 On utilise les coordonnées cylindriques. Un point M de ce cylindre à la distance r de l'axe (Oz), possède une vitesse $\vec{v}_e = \omega r \vec{e}_\theta$.

En ce point, le champ électromoteur $\vec{v}_e \wedge \vec{B} = B \omega r \vec{e}_r$, radial, ne peut entretenir de courant permanent, mais il peut repousser des charges vers la périphérie et en attirer d'autres vers le centre.

En régime permanent établi, il existe une densité volumique de charge ρ dans le conducteur et une densité superficielle σ sur la paroi ; ces charges ne dépendent évidemment pas du temps. On écrit les différentes relations utiles suivantes.

- Soit m la masse des charges de conduction et q leur charge. En régime permanent elles ont un mouvement circulaire uniforme (celui du cylindre).

D'après la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a} = -m\omega^2 r \vec{e}_r = \vec{qE} + qB\omega r \vec{e}_r.$$

Le terme $m\omega^2 r$ est en fait négligeable devant $qB\omega r$ (une application numérique à l'électron donnerait $\left|\frac{m\omega^2 r}{qB\omega r}\right| = \left|\frac{m\omega}{qB}\right| \approx 5,6 \cdot 10^{-12} \frac{\omega}{B}$).

Il reste donc $\vec{E} = -B\omega r \vec{e}_r = E(r) \vec{e}_r$.

$$\bullet \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \text{ Sachant que } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d(rE(r))}{dr} = -2B\omega, \text{ on en déduit :}$$

$$\rho = -2\epsilon_0 B\omega.$$

- Le cylindre reste globalement neutre. Pour toute hauteur h , la charge localisée en surface doit être opposée à la charge répartie en volume, soit :

$$\pi a^2 h \rho = -\sigma 2\pi a h, \text{ d'où } \sigma = -\frac{\rho a}{2} = \epsilon_0 B\omega a.$$

8 Dans les deux cas étudiés, on utilisera les coordonnées cylindriques d'axe (Oz), et la vitesse de déplacement d'un point du conducteur est : $\vec{v}_e = r\omega \vec{e}_\theta$.

1) a) Le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = B\omega r \vec{e}_r$ est radial et toujours dirigé vers la périphérie.

On peut donc prévoir un régime transitoire pendant lequel la répartition de charges au sein du cylindre est modifiée par migration radiale des charges de conduction. Ceci fait apparaître un champ électrique \vec{E} qui va finalement compenser le champ électromoteur.

En régime permanent, la loi d'Ohm s'écrit pour ce matériau conducteur :

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

où \vec{E} est un champ de nature électrostatique, car $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, donc :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V.$$

De plus le champ électromoteur se met sous la forme :

$$\vec{E}_m = \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} B\omega r^2 \right).$$

Donc \vec{j} étant la somme de deux gradients, est un gradient, et sa circulation sur une ligne de courant est nulle. Or, pour qu'il existe un courant, cette circulation doit être non nulle, donc $\vec{j} = \vec{0}$.

On en déduit donc :

$$\vec{E} = -\vec{E}_m = -\operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} B\omega r^2 \right) = -B\omega r \vec{e}_r.$$

b) La densité volumique de charge est :

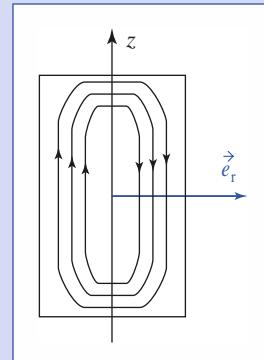
$$\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r} \frac{d(rE(r))}{dr} = -2\epsilon_0 B\omega.$$

Or, le cylindre reste globalement neutre. Pour toute hauteur h , la charge localisée en surface doit être opposée à la charge répartie en volume, soit :

$$\pi a^2 h \rho = -\sigma 2\pi a h, \text{ d'où : } \sigma = \epsilon_0 B\omega a.$$

2) a) Le champ électromoteur est :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = B\omega r \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_x = -B\omega r \cos \theta \vec{e}_z.$$



On constate que :

$$\vec{E}_m(r, \theta + \pi) = -\vec{E}_m(r, \theta).$$

Les lignes de courant suggérées par la figure sont vraisemblables car la circulation de \vec{E}_m est positive sur ces contours. Elles sont compatibles avec les limites du conducteur (le « virage » près des « bords » du cylindre fait appel à un champ électrique propre au cylindre qui doit posséder des inhomogénéités de répartition des charges au voisinage de ses extrémités).

Ces courants induits ont pour effet de s'opposer à la cause de l'induction, c'est-à-dire au mouvement : le moment par rapport à l'axe des forces de Laplace est de signe opposé à celui de ω .

b) En négligeant les effets de bords pour un cylindre très long, en deux points du cylindre symétriques par rapport à l'axe de rotation, les champs électromoteurs et donc les courants seront opposés :

$$\vec{j}(r, \theta + \pi) = -\vec{j}(r, \theta).$$

En particulier, sur (Oz) :

$$j(0, \theta) = -j(0, \theta + \pi) = 0.$$

c) D'après la loi locale de conduction :

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_m).$$

Le champ \vec{E} , comme \vec{j} et \vec{E}_m est colinéaire à l'axe (Oz) .

Le long de l'axe : $\vec{j} = \vec{0}$, $\vec{E}_m = \vec{0}$ et donc $\vec{E} = \vec{0}$.

En régime permanent $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ impose $\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$: le champ \vec{E} ne dépend que de z .

Comme il est nul sur l'axe (Oz) , il est nul en tout point.

d) Le champ électrique \vec{E} est nul, et la loi de conduction devient (en dehors des extrémités) :

$$\vec{j} = -\gamma B \omega r \cos \theta \vec{e}_z.$$

La puissance volumique dissipée par effet Joule est : $\mathcal{P}_{\text{vol}} = \frac{j^2}{\gamma}$. On obtient la puissance dissipée par intégration avec $d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot dz$:

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \iint_{\text{cylindre}} \mathcal{P}_{\text{vol}} d\tau = \gamma B^2 \omega^2 h \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{\pi}{4} \gamma B^2 h a^4 \omega^2$$

e) L'énergie du champ magnétique et l'énergie mécanique du cylindre sont constantes. La puissance fournie par l'opérateur pour maintenir la rotation est donc :

$$\mathcal{P}_{\text{op}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}}.$$

Or $\mathcal{P}_{\text{op}} = \Gamma_{\text{op}} \omega = -\Gamma_{\text{Laplace}} \omega$, il vient donc :

$$\Gamma_{\text{Laplace}} = -\frac{\pi}{4} \gamma B^2 h a^4 \omega.$$

Remarque : On peut aussi calculer :

• la force de Laplace sur un élément de volume :

$$d\vec{F}_{\text{Laplace}} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau = -\gamma B^2 \omega r \cos \theta \vec{e}_y d\tau,$$

• son moment par rapport à (Oz) :

$$d\Gamma_{\text{Laplace}} = -\gamma B^2 \omega r^2 \cos^2 \theta,$$

• le moment total :

$$\Gamma_{\text{Laplace}} = -\gamma B^2 \omega h \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = -\frac{\pi}{4} \gamma B^2 h a^4 \omega.$$

Application

$\omega = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $|\Gamma_{\text{Laplace}}| = 0,93 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, soit l'équivalent d'une force de frottement de 0,093 N appliquée sur la périphérie du disque.

7

Applications de l'induction

O B J E C T I F S

- Conducteurs en régime quasi permanent.
- Coefficient d'inductance et de mutuelle inductance.
- Couplages électromécaniques.

P R É R E Q U I S

- Electrocinétique : régime sinusoïdal et régimes transitoires, notation complexe.
- Induction électromagnétique.
- Relations fondamentales de la dynamique pour un solide.
- Théorème de l'énergie cinétique pour un solide.

Introduction

L'étude générale des phénomènes d'induction, (cf. chapitre 6), va nous permettre maintenant d'en examiner les conséquences et les applications.

Les lois de l'induction permettent de comprendre le fonctionnement de nombreux systèmes électriques ou électromécaniques : chauffage à induction, transformateurs, moteurs, générateurs, etc.

Nous pourrons constater que l'induction introduit souvent un couplage entre deux éléments. Ainsi, deux bobines proches s'influencent mutuellement par l'intermédiaire du champ magnétique : c'est le couplage électromagnétique.

Dans le cas d'un conducteur mobile en présence d'un champ magnétique, le mouvement et le courant interagissent l'un sur l'autre : c'est le couplage électromécanique.

Nous supposerons les phénomènes suffisamment lents pour pouvoir appliquer dans un conducteur :

- l'approximation des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.) ;
- la **loi d'Ohm locale** : $\vec{j} = \gamma [\vec{E}_{\text{labo}} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}]$, si on néglige l'effet Hall, ce qui est en général justifié dans les conducteurs usuels (cf. chapitre 4, § 4.3.).

Rappelons que la deuxième condition est en fait plus contraignante que la première. Pour un conducteur métallique, la loi d'Ohm locale n'est plus applicable si la fréquence dépasse quelques 10^{11} Hz, alors que les équations locales de l'A.R.Q.P. sont encore acceptables.

Remarquons que $\vec{E}_{\mathcal{C}}$ peut encore s'écrire $\vec{E}_{\mathcal{C}} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$, où \vec{E}_s est un champ de nature électrostatique et \vec{E}_m le **champ électromoteur** :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

Induction dans les circuits

1.1. Auto-induction

1.1.1. Force électromotrice d'auto-induction

Un élément de circuit électrique filiforme (une bobine, par exemple) est soumis à l'influence du champ magnétique total \vec{B} , correspondant à la somme du champ \vec{B}_{ext} créé par l'extérieur et du champ propre créé par lui-même :

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{propre}}.$$

La f.e.m. d'induction est donc également la somme de deux termes :

$$e = e_{\text{ext}} + e_{\text{propre}},$$

où e_{propre} est appelée **f.e.m. d'auto-induction**.

1.1.2. Inductance d'une bobine

En pratique, e_{propre} n'a de valeur appréciable que si le champ propre est lui-même suffisamment intense, c'est-à-dire pour des bobines possédant un grands nombre de spires.

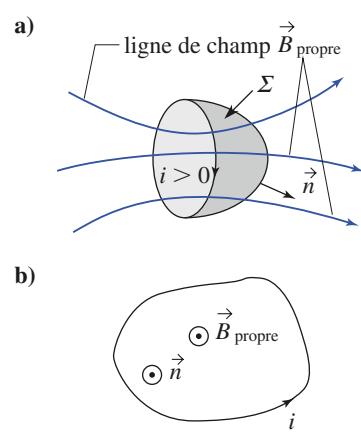
Pour une bobine, nous pouvons définir un flux ϕ_{propre} appelé **flux propre**.

Ce flux représente le flux du champ magnétique créé par la bobine à travers toute surface s'appuyant sur son contour.

\vec{B}_{propre} et donc son flux ϕ_{propre} sont proportionnels à l'intensité i dans la bobine, ce que nous traduisons par :

$$\phi_{\text{propre}} = L i \quad \text{et} \quad e_{\text{propre}} = -\frac{d\phi_{\text{propre}}}{dt} = -\frac{d(L i)}{dt}.$$

L , l'*inductance* de la bobine, est un coefficient purement géométrique, qui ne dépend que de la forme de la bobine à l'instant t .



Doc. 1a. et b. \vec{B}_{propre} et \vec{n} ont même sens et L est positive.

Le coefficient L est toujours positif. La spire du *document 1a* est orientée arbitrairement et est parcourue par un courant i , ici positif : cela nous permet d'orienter les lignes de champ de B_{propre} ; la surface orientée (son orientation dépend de l'orientation de la spire) permet d'affirmer que le flux :

$$\phi_{\text{propre}} = \iint_{\Sigma} \vec{B}_{\text{propre}} \cdot \vec{n} \, dS \text{ est positif, comme } i > 0, L > 0.$$

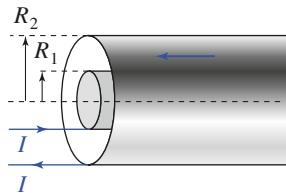
Remarquons que si i change de signe, ϕ_{propre} change aussi de signe, mais L est toujours positif.

Remarques

- Cette proportionnalité est une conséquence de la linéarité des équations du champ magnétique dans le vide. En présence d'un corps où ces équations ne sont pas linéaires (comme le fer en particulier), l'inductance n'est plus un coefficient purement géométrique.
- Nous traiterons essentiellement des cas où les bobines sont rigides. L'inductance L est alors constante et $e_{\text{propre}} = -L \frac{di}{dt}$.
- Le modèle du circuit filiforme, correct pour le calcul de champs magnétiques, est souvent inutilisable pour le calcul des coefficients d'inductance propre : ce calcul conduit à une intégrale qui diverge dans le cas d'une spire circulaire par exemple.
- Dans le cas des nappes de courant surfaciques, il est parfois difficile de définir correctement une surface s'appuyant sur le contour du circuit. C'est le cas du câble coaxial (*doc. 2 et 3*) : on préférera dans ce cas une autre définition, basée sur l'énergie (cf. § 1.1.6).



Doc. 2. Photo d'un câble coaxial.



Doc. 3. Câble coaxial : modélisation.

Application 1

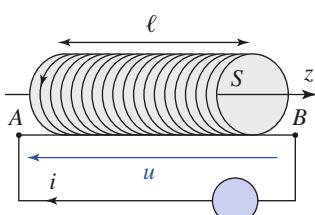
Inductance d'un solénoïde

Un solénoïde (*doc. 4*) est constitué de N spires régulières, supposées jointives, de section S .

Sa longueur ℓ est très grande devant ses dimensions latérales et on ne tient pas compte des extrémités.

Déterminer son inductance propre L .

Quelle est sa valeur si $N = 5\,000$, $\ell = 10\text{ cm}$ et $S = 5\text{ cm}^2$?



Doc. 4. Solénoïde

Soit ϕ_{propre} le flux de \vec{B} à travers le solénoïde.

Soit ϕ_0 le flux de \vec{B}_{propre} à travers une spire fictive fermée sur elle-même, très proche d'une spire du solénoïde.

Le champ propre est uniforme à l'intérieur, il a la même expression dans l'A.R.Q.P. qu'en magnétostatique :

$$\vec{B}_{\text{propre}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \phi_0 = \vec{B}_{\text{propre}} \cdot \vec{S} \text{ et } \phi_0 = \mu_0 \frac{N}{\ell} S i.$$

On en déduit :

$$\phi_{\text{propre}} = N \phi_0 = \mu_0 N^2 \frac{S}{\ell} i,$$

$$\text{d'où l'inductance } L = \frac{\phi_{\text{propre}}}{i} = \mu_0 N^2 \frac{S}{\ell}.$$

Nous vérifions sur cet exemple que L est une grandeur positive qui ne dépend que de paramètres géométriques.

Numériquement, cette expression donne :

$$L = 0,16\text{ H}.$$

À l'aide de cette formule, il est ainsi possible de connaître rapidement l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine utilisée en travaux pratiques.

Une bobine de 500 spires, de section carrée de 5 cm de côté, dont les spires sont régulièrement réparties

sur environ 8 cm, donne une valeur de L voisine de 10 mH.

Avec une bobine identique de 1 000 spires, nous aurons une inductance environ quatre fois plus grande, c'est-à-dire 40 mH.

1.1.3. Loi d'Ohm généralisée

Avec les conventions de signe du document 5, la loi d'Ohm généralisée s'écrit, en présence d'un champ extérieur :

$$u = R i - e_{\text{propre}} - e_{\text{ext}} = R i + \frac{d(L i)}{dt} - e_{\text{ext}}.$$

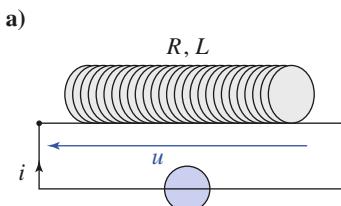
Dans le schéma électrocinétique, la f.e.m. propre est prise en compte au moyen d'une inductance pure, c'est-à-dire un dipôle dont la caractéristique est :

$$u_L = \frac{d(L i)}{dt}.$$

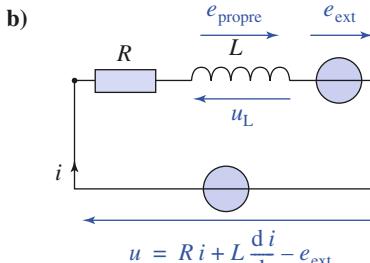
Le plus souvent, le circuit est rigide et l'inductance est constante. nous pouvons alors écrire :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad u = R i + L \frac{di}{dt} - e_{\text{ext}}.$$

Remarquons que cette équation différentielle fait apparaître une constante de temps $\tau_R = \frac{L}{R}$.



Doc. 5. a. bobine.



b. Schéma électrocinétique équivalent.

1.1.4. Énergie magnétique

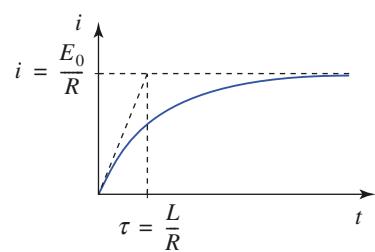
Alimentons une bobine indéformable, de résistance R et d'inductance L , par un générateur stabilisé de tension u . Nous supposons qu'il n'y a aucune autre source de champ magnétique ($\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$) et que l'inductance L est constante. Dans ce cas, l'équation électrique est, avec les conventions de signe du document 5 :

$$u + e_{\text{propre}} = R i \quad \text{avec} \quad e_{\text{propre}} = -L \frac{di}{dt}, \quad \text{soit donc : } u = R i + L \frac{di}{dt}.$$

Si u est constante, le courant augmente à partir de l'instant 0 selon la loi (doc. 6) :

$$i = \frac{u}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Rappelons que le courant dans une bobine est continu (donc $i = 0$ à $t = 0^+$).



Doc. 6. $i(t)$ dans la bobine.

Pendant ce temps, la source fournit une puissance $\mathcal{P}_{\text{source}} = u i$ et la puissance dissipée par effet Joule est $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R i^2$.

Nous constatons que ces deux termes ne sont pas égaux, car :

$$\mathcal{P}_{\text{source}} - \mathcal{P}_{\text{Joule}} = L i \frac{di}{dt}.$$

Pendant le régime transitoire, le solénoïde qui absorbe donc une puissance supplémentaire, accumule une **énergie magnétique** qui a pour expression :

$$\mathcal{E}_m = \int_0^t L d\left(\frac{i^2}{2}\right) = \frac{1}{2} L i^2.$$

Cette énergie accumulée illustre un résultat fondamental établi au *chapitre 5*.

L'énergie \mathcal{E}_m correspond exactement à la partie magnétique de l'énergie associée au champ, dont la densité volumique \mathcal{E}_{vol} est égale à :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{B^2}{2 \mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Vérifions ce résultat dans le cas d'un solénoïde idéal, de longueur ℓ et comprenant N spires de section S .

- Le champ propre a pour valeur $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$ à l'intérieur et il est nul à l'extérieur.
- La densité volumique d'énergie magnétique est égale à $\frac{B^2}{2 \mu_0}$ à l'intérieur, c'est-à-dire dans un volume égal à $S \ell$, et elle est nulle à l'extérieur.
- L'énergie associée au champ magnétique est donc puisque \vec{B} est uniforme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{B^2}{2 \mu_0} S \ell = \frac{\mu_0 N^2 S}{2 \ell} i^2.$$

$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$ est l'inductance du solénoïde (*cf. Application 2*) et nous obtenons bien :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L i^2 = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2 \mu_0} d\tau.$$

Remarque

Cette énergie est « de même nature » que l'énergie électrostatique emmagasinée dans une capacité. À l'aide du circuit simple du document 7, nous pouvons mettre en évidence un transfert d'énergie magnétique en énergie électrostatique :

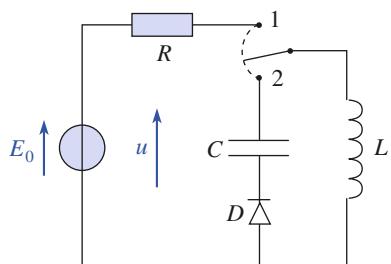
• Position 1

L'inductance se « charge ». En régime permanent, elle est traversée par un courant $i_0 = \frac{E_0}{R}$.

• Position 2

L'inductance se « décharge » dans le condensateur de capacité C . La présence de la diode permet de conserver l'énergie dans le condensateur et d'éviter ainsi qu'elle ne finisse de se dissiper par effet Joule lors des oscillations amorties dans le circuit (L, C).

Avec une diode parfaite et une inductance sans résistance ohmique, nous devrions avoir $\frac{1}{2} C U_0^2 = \frac{1}{2} L i_0^2$ en désignant par U_0 la tension aux bornes du condensateur en fin d'expérience. En réalité, une partie de l'énergie manquante a été dissipée dans l'étincelle de rupture (*cf. ci-dessous*).



Doc. 7. Lors du passage rapide de l'interrupteur de la position 1 à la position 2, une partie de l'énergie magnétique de l'inductance L est transférée dans le condensateur de capacité C .

1.1.5. Étincelle de rupture

L'énergie magnétique n'est pas une énergie irréversiblement dissipée comme celle de l'effet Joule. Elle est restituée au circuit si le courant diminue. Ainsi lorsque l'on ouvre l'interrupteur d'un circuit électrique, un « arc électrique » (une étincelle) se forme au moment de la rupture entre les contacts de l'interrupteur assurant une diminution rapide mais continue du courant vers 0.

Cet effet est d'autant plus intense que l'énergie à restituer est grande et, pour l'observer, il faut une grande inductance et une forte intensité (on peut augmenter l'inductance en introduisant un noyau de fer dans le solénoïde).

L'application 2 propose une modélisation simple de ce phénomène.

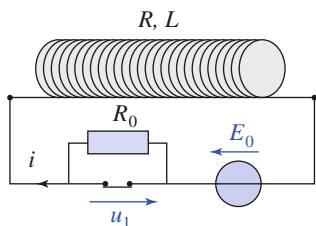
Application 2

Ouverture d'un interrupteur

Dans le circuit représenté sur le document 8, la résistance R_0 , très grande devant R , représente la résistance de l'air situé entre les contacts de l'interrupteur juste après l'ouverture de celui-ci.

Le courant ayant été établi depuis très longtemps, l'interrupteur est ouvert à l'instant $t = 0$.

Déterminer la tension $u_1(t)$ aux bornes de l'interrupteur.



Doc. 8. Modélisation de l'interrupteur ouvert par une résistance $R_0 \gg R$.

Remarque : La modélisation est simpliste, car cette résistance R_0 est variable. En particulier, elle s'effondre dès l'amorçage de l'étincelle, constituée par du gaz ionisé. On néglige aussi l'aspect capacitatif du solénoïde : les spires voisines forment de petits condensateurs.

À $t = 0$, le courant est celui du régime permanent, c'est-à-dire $i(0) = \frac{E_0}{R}$.

Pour $t > 0$, le courant est solution de l'équation différentielle :

$$L \frac{di}{dt} + (R + R_0)i = 0.$$

Le courant dans la bobine étant une fonction continue (sinon la tension à ses bornes serait infinie), la solution est donc :

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \exp\left[-\frac{R + R_0}{L} t\right],$$

$$\text{donc } u_1(t) = E_0 \frac{R_0}{R} \exp\left[-\frac{R + R_0}{L} t\right]$$

$$\text{et } u_1(0_+) = E_0 \left(\frac{R_0}{R}\right) \gg E_0.$$

Au moment de l'ouverture, la tension aux bornes de l'interrupteur est très élevée, ce qui est suffisant pour ioniser l'air et amorcer une étincelle. Si la tension E_0 est assez grande, l'arc, une fois amorcé, s'entretient de lui-même et peut durer plusieurs secondes.

1.1.6. Seconde définition de l'inductance

Au § 1. 1. 2, nous avons évoqué les difficultés pour le calcul et l'estimation d'une inductance propre. Pour étendre la définition de L à tous les circuits, nous pouvons identifier les deux expressions de l'énergie magnétique :

$$\frac{1}{2} L i^2 = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2 \mu_0} B_{\text{propre}}^2 d\tau.$$

Ainsi, l'inductance est toujours définie : comme les circuits réels ne sont pas strictement filiformes, le champ \vec{B} est fini et l'énergie magnétique d'un circuit limité dans l'espace est une quantité finie.

Cependant, le calcul analytique de l'intégrale de B_{propre}^2 sur tout l'espace est le plus souvent impossible, et la valeur de L doit être souvent considérée comme une donnée expérimentale.

Cette définition implique également $e_{\text{propre}} = -L \frac{di}{dt}$ dans le cas d'un circuit rigide ($L = \text{constante}$).

Il suffit pour le montrer de reprendre « à l'envers » le bilan énergétique du § 1. 1. 4. pour un circuit rigide :

$$\mathcal{P}_{\text{source}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{d\mathcal{E}_m}{dt},$$

d'où :

$$ui = (Ri - e_{\text{propre}})i = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{Li^2}{2}\right)}{dt}$$

et donc :

$$e_{\text{propre}} = -L \frac{di}{dt}.$$

- Pour un circuit donné, la f.e.m. due au *champ propre* créé par ce circuit est la *f.e.m. d'auto-induction* e_{propre} .
- Il existe une grandeur L strictement positive, qui ne dépend que de la géométrie du circuit et telle que :

$$e_{\text{propre}} = -\frac{d(Li)}{dt}, \text{ ou pour un circuit rigide } e_{\text{propre}} = -L \frac{di}{dt}.$$

L est appelée *inductance* du circuit (ou de l'élément de circuit).

Dans le système international, L se mesure en henry (H).

- Le courant i qui parcourt un circuit, crée un champ magnétique propre \vec{B}_{propre} , auquel est associée une énergie magnétique propre \mathcal{E}_m égale à $\frac{1}{2} Li^2$.

• L'identité :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \iint_{\text{espace}} \frac{1}{\mu_0} B_{\text{propre}}^2 d\tau = \frac{1}{2} Li^2$$

permet de définir l'inductance d'un circuit et de pouvoir éventuellement calculer celle-ci de manière simple.

- S'il est possible de définir le flux du champ propre à travers le circuit, son inductance peut être déterminée plus simplement par :

$$\phi_{\text{propre}} = Li.$$

- Pour une bobine rigide soumise à un champ magnétique extérieur, la loi d'Ohm généralisée s'écrit :

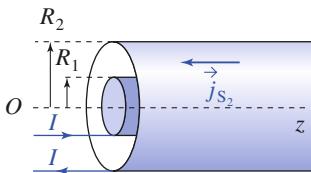
$$u + e_{\text{ext}} = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Application 3

Calcul du coefficient d'inductance propre d'un câble coaxial par unité de longueur

Soit un câble coaxial constitué de deux cylindres de longueur infinie, de rayon R_1 et R_2 (doc. 3) parcourus par des courants surfaciques \vec{j}_{S_1} et \vec{j}_{S_2} colinéaires à l'axe de symétrie (Oz) des deux cylindres.

Le cylindre intérieur est alimenté par l'intensité I , qui ressort par le cylindre extérieur (doc. 9).



Doc. 9. Câble coaxial où les courants surfaciques sont parallèles à (Oz).

- 1) Calculer le champ \vec{B} dans tout l'espace.
- 2) En déduire la densité volumique d'énergie magnétique dans tout l'espace.
- 3) Quelle est l'énergie magnétique emmagasinée dans l'espace situé entre deux plans, de cote z et $z + \ell$?
- 4) En déduire l'inductance propre \mathcal{L} par unité de longueur de ce câble coaxial.

1) Les symétries imposent que \vec{B} soit orthoradial. L'application du théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r et d'axe (Oz) nous donne :

- pour $r < R_1$: $2\pi r B(r) = 0$, soit $B(r) = 0$;

- pour $R_1 < r < R_2$:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I, \text{ soit } B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ;$$

- pour $R_2 < r$: $2\pi r B(r) = \mu_0(I-I) = 0$, soit $B(r) = 0$.

2) La densité volumique d'énergie magnétique s'écrit :

$$\bullet \text{ pour } r < R_1 : \frac{B^2}{2\mu_0} = 0 ;$$

$$\bullet \text{ pour } R_1 < r < R_2 : \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} ;$$

$$\bullet \text{ pour } R_2 < r : \frac{B^2}{2\mu_0} = 0 .$$

3) L'énergie magnétique \mathcal{E}_m située entre deux plans de cote z et $z + \ell$ est donnée par :

$$\mathcal{E}_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r \ell \, dr = \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r},$$

$$\text{soit : } \mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

4) Nous en déduisons l'expression de l'inductance propre L :

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right),$$

soit une inductance propre \mathcal{L} par unité de longueur :

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

1.2. Couplage magnétique de circuits

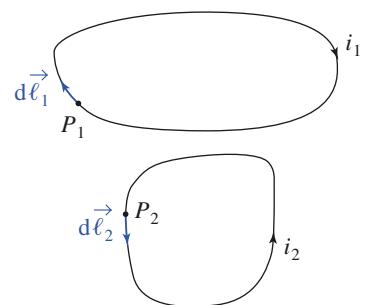
1.2.1. Inductance mutuelle de deux circuits

Nous considérons deux circuits, repérés par les indices (1) et (2). Pour simplifier, nous nous limitons aux circuits filiformes fermés pour lesquels il est possible de définir un flux (doc. 10). Bien entendu, nous pourrons étendre ces résultats aux bobines « presque fermées ».

Pour une disposition donnée de deux circuits, le flux de \vec{B}_1 créé par (1) à travers (2) est proportionnel à i_1 , soit :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1,$$

où M_{12} est un coefficient indépendant de i_1 et de i_2 , qui ne dépend que de la géométrie du système.



Doc. 10. Deux circuits couplés.

De même, le flux de \vec{B}_2 créé par (2) à travers (1) s'écrit :

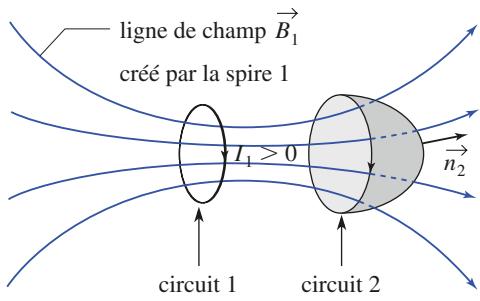
$$\phi_{2 \rightarrow 1} = M_{12} i_2.$$

En fait, les deux coefficients M_{12} et M_{21} sont égaux. Il existe en effet une grandeur unique M , appelée *inductance mutuelle* des deux circuits, qui ne dépend que de la disposition des deux circuits et telle que :

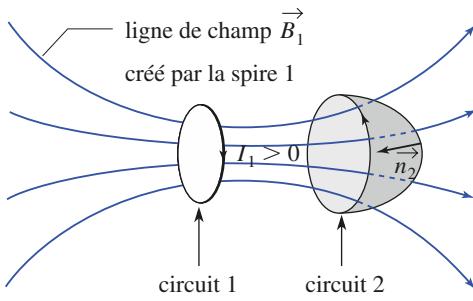
$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \text{ et } \phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2.$$

Nous admettons cette propriété ; elle est mise en évidence dans le cas de deux spires de l'*application 4* ci-après.

Contrairement à l'inductance qui est toujours positive, l'inductance mutuelle est positive ou négative, selon les orientations choisies pour chacun des deux circuits. Elle change de signe si on inverse l'orientation (arbitraire) d'un des deux circuits (*doc. 11*).



Doc. 11a. Avec ces orientations, $M > 0$.



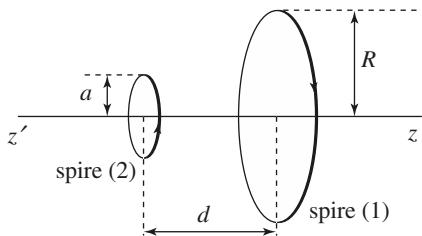
Doc. 11b. Avec ces orientations, $M < 0$.

Application 4

Inductance mutuelle entre deux spires

Soit deux spires, la première de rayon R et d'axe (Oz), et la seconde de même axe et de rayon a très petit par rapport à R . Ces deux spires sont à une distance d l'une de l'autre.

Calculer les coefficients M_{12} et M_{21} , puis montrer que $M = M_{12} = M_{21}$. On prendra les orientations choisies sur le document 12 a.



Doc. 12a. Spires (1) et (2) distantes de d et de rayons a et R ($a \ll R$).

Calculons le flux de \vec{B}_1 créé par la spire (1), parcourue par un courant I_1 , à travers la spire (2) :

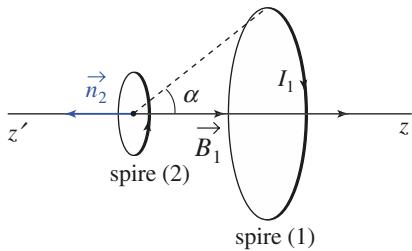
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z, \text{ avec } \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + d^2}}.$$

Comme $a \ll R$, \vec{B}_1 est quasiment uniforme sur la surface plane de la spire (2).

L'orientation de \vec{B}_1 et \vec{n}_2 (normale à la spire (2)) nous donne un flux de \vec{B}_1 à travers la spire (2) égal à (*doc. 12b*) :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0 I_1 \pi a^2}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = M_{12} I_1,$$

$$\text{avec } M_{12} = -\frac{\mu_0 \pi a^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



Doc. 12b. Orientation de \vec{B}_1 (avec $I_1 > 0$) et \vec{n}_2 .

Calculons le flux de \vec{B}_2 créé par la spire (2), parcourue par un courant I_2 , à travers la spire (1). Les points de (1) étant très éloignés de ceux de (2), car $R \gg a$, nous pouvons nous placer dans l'approximation dipolaire ; la spire (2) de centre O_2 , de moment $\vec{M} = -\mathcal{M}\vec{e}_z$ (avec $\mathcal{M} = \pi a^2 I_2$) créé au point P le champ \vec{B}_2 de composantes B_{r_2} , B_{θ_2} et B_{z_2} , en coordonnées sphériques (doc. 12 c).

$$\begin{cases} B_{r_2} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{r^3} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{2 \cos \beta}{r^3} \\ B_{\theta_2} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{\sin \beta}{r^3} \\ B_{z_2} = 0 \end{cases} .$$

Le champ magnétique étant à flux conservatif, nous pouvons exprimer le flux de \vec{B}_2 à travers n'importe quelle surface s'appuyant sur la spire (1) ;

choisissons la calotte sphérique de centre O_2 :

$$\begin{aligned} \phi_{2 \rightarrow 1} &= \iint_{\Sigma_1} \vec{B}_2(M) \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_1} B_{r_2} \cdot dS_1 \\ &= -\frac{2\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \frac{\cos \beta dS_1}{r^3}. \end{aligned}$$

Sachant que $dS_1 = r^2 \sin \beta d\beta d\phi$, nous obtenons :

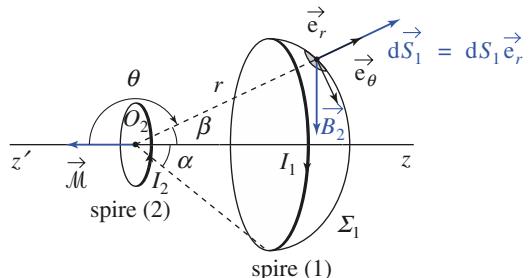
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \frac{\cos \beta dS_1}{r^3} &= \frac{1}{r} \int_0^\alpha \cos \beta \sin \beta d\beta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{1}{r} \pi \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

puis $\phi_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2r} \sin^2 \alpha$

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\mu_0 \pi a^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} I_2 = M_{21} I_2.$$

Nous vérifions effectivement, sur cet exemple, que :

$$M_{12} = M_{21} = M.$$



Doc. 12c. Calotte sphérique Σ_1 de centre O_2 , de rayon r , s'appuyant sur la spire (1).

1.2.2. Loi d'Ohm généralisée

S'il n'y a pas d'autre source de champ magnétique, nous pouvons écrire pour chaque circuit :

$$\phi = \phi_{\text{propre}} + \phi_{\text{ext}},$$

c'est-à-dire : $\phi_1 = \phi_{1 \rightarrow 1} + \phi_{2 \rightarrow 1}$ et $\phi_2 = \phi_{2 \rightarrow 2} + \phi_{1 \rightarrow 2}$,

ou encore : $\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$ et $\phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$.

Les f.e.m. d'induction sont alors, si les circuits sont *rigides* et *immobiles* :

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

La loi d'Ohm s'écrit alors :

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Les équations qui régissent les deux circuits sont **couplées par le terme d'inductance mutuelle**.

Si deux circuits filiformes (1) et (2) sont les seules sources de champ magnétiques, les flux de \vec{B} à travers ces deux circuits peuvent s'exprimer à partir des courants i_1 et i_2 :

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \text{ et } \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1.$$

M , appelée *inductance mutuelle*, caractérise symétriquement le couplage magnétique entre les deux circuits. La valeur absolue de M ne dépend que de la géométrie du système et son signe dépend des orientations choisies.

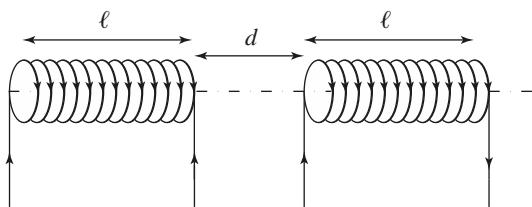
Si les deux circuits sont *rigides immobiles* et *isolés* (donc \vec{B}_{ext} nul), la loi d'Ohm généralisée devient :

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \text{ et } u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Application 5

Étude expérimentale du couplage de deux circuits

On considère deux bobines identiques, d'*inductance* L , de *résistance* R , que l'on place de façon que les deux bobinages soient coaxiaux, avec le même sens d'enroulement ; la distance entre les deux bobines est d (doc. 13).



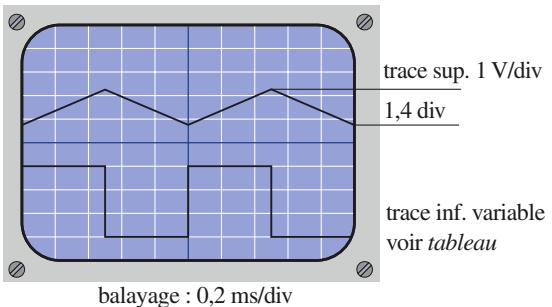
Doc. 13. Dispositions des deux bobines.

On mesure le couplage entre les deux bobines en envoyant dans l'une d'elles une tension triangulaire et en comparant à l'oscilloscope cette tension avec la tension induite dans l'autre, celle-ci étant en circuit ouvert.

On a branché en série entre le générateur de fonction et la première bobine une résistance $R' = 100 \Omega$. On négligera la résistance R des bobines.

1) Faire le schéma du montage.

2) Les traces observées à l'oscilloscope ont l'allure suivante (doc. 14) :



Doc. 14.

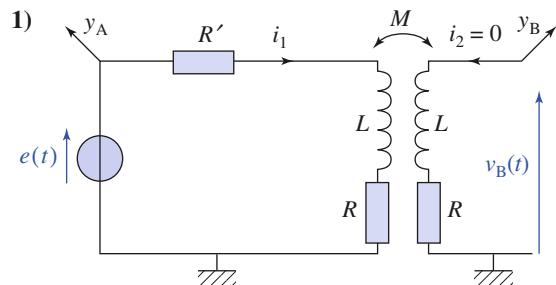
En faisant varier la distance d entre les bobines, on observe pour l'amplitude crête à crête A du signal induit, mesurée en divisions de l'écran, les valeurs suivantes.

calibre	0,01 V/div		
$d(\text{cm})$	4	5	6
A	4,3	3,3	2,6
calibre	5 mV/div		
$d(\text{cm})$	7	8	10
A	4,3	3,4	2,3
calibre	2 mV/div		1 mV/div
$d(\text{cm})$	12	16	20
A	4	2,1	2,4

Écrire les équations électriques du circuit. En remarquant que la tension aux bornes de la deuxième bobine est constante sur chaque demi-période du signal d'entrée, montrer que, si T est la période du signal d'entrée et Δe son amplitude crête à crête, l'inductance mutuelle M entre les deux bobines et l'amplitude crête à crête A du signal induit sont reliées par l'équation :

$$A = \frac{4M\Delta e}{R'T}.$$

Calculer alors, en mH, l'inductance mutuelle M entre les deux bobines pour chaque valeur de d .



Doc. 15. Schéma du montage.

3) Écrivons les équations électriques couplées :

$$\begin{cases} e(t) = (R + R')i_1(t) + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_B(t) = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R i_2(t) \end{cases}$$

La seconde bobine étant en série avec l'oscilloscope : $i_2(t) = 0$; les équations se simplifient donc, compte tenu des conditions expérimentales :

$$\begin{cases} e(t) = R'i_1 + L \frac{di_1}{dt} \quad (1) \\ v_B(t) = M \frac{di_1}{dt} \quad (2) \end{cases}$$

D'après les courbes $v_B = \text{cte}$ sur chaque demi-période soit :

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{v_B}{M} = \text{cte} \text{ et } \frac{d^2i_1}{dt^2} = 0 \quad (3)$$

$$\text{En dérivant (1)} : \frac{de}{dt} = R' \frac{di_1}{dt} \quad (4)$$

On obtient en identifiant (3) et (4).

$$\frac{v_B}{M} = \frac{e}{R't}.$$

Or, pendant un intervalle $\frac{T}{2}$ de montée :

$$v_{B_{\max}} = \frac{M}{R'} \frac{(+\Delta e)}{\frac{T}{2}};$$

et pendant un intervalle $\frac{T}{2}$ de descente :

$$v_{B_{\min}} = \frac{M}{R'} \frac{(-\Delta e)}{\frac{T}{2}};$$

d'où :

$$A = v_{B_{\max}} - v_{B_{\min}} = \frac{4M\Delta e}{TR'}.$$

$d(\text{cm})$	4	5	6	7	8
$M(\text{mH})$	0,77	0,59	0,46	0,38	0,30

$d(\text{cm})$	10	12	16	20
$M(\text{mH})$	0,21	0,14	0,07	0,04

Remarque : Les valeurs de M sont faibles devant les valeurs rencontrées pour L sauf si les deux bobines sont proches l'une de l'autre : le § 1.2.5. précise ce point.

1.2.3. Cas de deux bobines en série

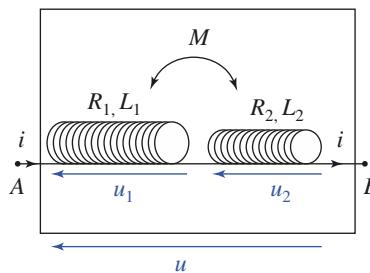
Déterminons l'inductance L équivalente à deux bobines (1) et (2) en série, donc parcourues par le même courant i (doc. 16).

Le flux de \vec{B} à travers l'ensemble des spires est $\phi = \phi_1 + \phi_2$, soit :

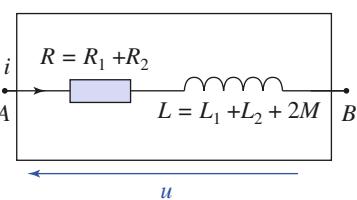
$$\phi = (L_1 i + M i) + (L_2 i + M i),$$

de la forme $\phi = Li$ avec $L = L_1 + L_2 + 2M$.

En général, $L \neq L_1 + L_2$. L'inductance de deux bobines en série n'est pas en général égal à la somme des inductances.



Doc. 16a. Deux bobines en série.



Doc. 16b. Schéma équivalent.

1.2.4. Énergie magnétique d'un système de deux circuits

Considérons deux circuits (1) et (2) rigides et immobiles (L_1 , L_2 et M constants). Ils sont alimentés par des sources de tensions u_1 et u_2 variables (doc. 17). Nous allons identifier l'énergie magnétique du système à une fonction des courants i_1 et i_2 au moyen d'un bilan énergétique.

- Les sources fournissent une puissance :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{source}} &= u_1 i_1 + u_2 i_2 \\ &= \left(R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right) i_1 + \left(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \right) i_2. \end{aligned}$$

- La puissance dissipée par effet Joule est $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$.

- Le bilan énergétique s'écrit $\mathcal{P}_{\text{source}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{d\mathcal{E}_m}{dt}$, d'où :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}.$$

En posant $\mathcal{E}_m = 0$ lorsque les courants sont nuls, nous pouvons donner la définition suivante,

L'énergie magnétique \mathcal{E}_m d'un système de deux circuits est, en l'absence d'autres sources de champ magnétique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

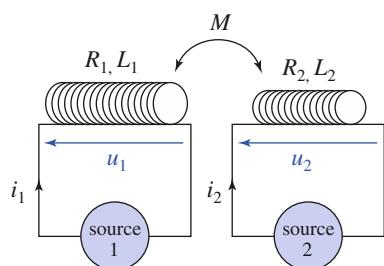
Remarque

L'énergie magnétique d'un système de courant, $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{\mu_0} B^2 d\tau$, est une fonction d'état. Pour un état donné du système, caractérisé par la forme des circuits et la valeur des courants, le champ \vec{B} en tout point et l'énergie sont déterminés.

L'expression $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$ est donc encore exacte pour un système déformable.

1.2.5. Valeurs de l'inductance mutuelle

Comme nous l'avons vu dans l'*application 5*, l'inductance mutuelle M de deux circuits donnés dépend de leur position relative. Pour fixer des limites aux valeurs de M , il suffit d'écrire que l'énergie magnétique est strictement positive et évidemment nulle s'il n'existe aucun courant dans l'espace.



Doc. 17. Deux circuits couplés par inductance mutuelle.

En posant $X = \frac{i_1}{i_2}$, il vient alors $L_1 X^2 + 2 M X + L_2 > 0$, quel que soit X .

Cette condition est satisfaite si le discriminant est strictement négatif, soit si $M^2 < L_1 L_2$.

Remarquons que si le discriminant était nul, c'est-à-dire $M^2 = L_1 L_2$, il existerait un système de courants défini par :

$$X^* = -\frac{M}{L_1} = -\frac{L_2}{M},$$

qui pourrait apparaître dans l'espace sans apport d'énergie extérieure : ceci est impossible.

Le cas limite $M^2 = L_1 L_2$ est en réalité celui du couplage parfait idéal n'ayant pas d'existence réelle, pour lequel toutes les lignes de champ créées par un circuit traversent l'autre. Or, il existe toujours des pertes de flux magnétique.

► Pour s'entraîner : ex. 1, 3, 5 et 6.

2 Systèmes électromécaniques

2.1. Exemple de couplage électromécanique : le haut-parleur à bobine mobile

2.1.1. Membrane vibrante

Un haut-parleur est un **transducteur** qui produit un signal sonore image d'un signal électrique. Le signal sonore est émis par les vibrations d'une membrane de forme généralement conique.

- La puissance acoustique moyenne rayonnée à travers une surface S par une onde sonore de fréquence f (ou de pulsation ω) est donnée par la relation (cf. H-Prépa, Ondes, 2nd année) :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho c v_m^2 S = \frac{1}{2} \rho c S \omega^2 \zeta_m^2,$$

où ρ est la masse volumique de l'air, c la célérité de propagation du son, v_m la valeur maximale de la vitesse de vibration de l'air et ζ_m l'amplitude d'oscillation.

Si le haut-parleur rayonne 0,1 W et si l'aire de la membrane est de 25 cm², celle-ci oscille avec une amplitude ζ_m de l'ordre 60 µm à 1 kHz et de l'ordre de 600 µm à 100 Hz. Ces valeurs ne sont que des ordres de grandeur, car toute la membrane ne vibre pas de façon homogène.

- Si z représente le déplacement (supposé uniforme) de la membrane, la puissance perdue par rayonnement peut donc se mettre sous forme :

$$\mathcal{P} = f_1 z^2,$$

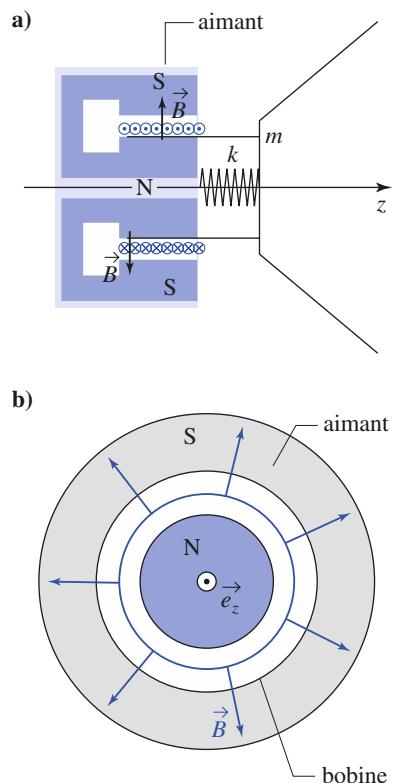
avec f_1 de l'ordre de $\rho c S$.

- L'émission de l'onde sonore est, avec ce modèle simplifié, équivalente à une force de frottement proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{F}_{\text{ray}} = -f_1 \dot{z} \vec{e}_z.$$

2.1.2. Schéma de principe

Un haut-parleur est représenté sur le document 18.



Doc. 18. Principe d'un haut-parleur.

- Coupe transversale
- Vue de face de l'aimant.

L'aimant permanent annulaire crée un champ radial constant $\vec{B} = B \vec{e}_r$ au niveau des fils de la bobine mobile. Celle-ci est solidaire de la membrane, et comporte N spires de rayon a . La bobine est les fils d'alimentation ont une résistance totale R_0 et une inductance L_0 .

Nous supposons que le mouvement de la membrane de masse m , est un mouvement de translation. Elle est rappelée vers sa position d'équilibre par une force élastique que nous modélisons par un ressort de raideur k . La cote $z = 0$ correspond au repos du système. Enfin, les frottements mécaniques sont représentés par un frottement proportionnel à la vitesse, de coefficient f_0 .

2.1.3. Équation mécanique

La résultante des actions de Laplace sur la bobine est, avec les orientations mécanique et électrique choisies (doc. 18a) :

$$\vec{F}_{\text{Laplace}} = -N 2 \pi a B i \vec{e}_z.$$

L'équation mécanique est donc :

$$m \ddot{z} = -k z - (f_0 + f_1) \dot{z} - N 2 \pi a B i (M).$$

2.1.4. Équation électrique

- Nous pouvons calculer la f.e.m. de déplacement de deux manières différentes :
 - par circulation du champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \dot{z} \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_r = \dot{z} B \vec{e}_\theta$$

$$\text{soit : } e_L = N \int_0^{2\pi} \dot{z} B \vec{e}_\theta \cdot a d\theta \vec{e}_\theta = 2 \pi a N B \dot{z};$$

- par la puissance des forces de Laplace :

$$e_L = -\frac{\mathcal{P}_{\text{Laplace}}}{i} = -\frac{-N 2 \pi a B i \vec{e}_z \cdot \dot{z} \vec{e}_z}{i},$$

ce qui amène au même résultat.

Remarque

Nous retrouvons ici le résultat important énoncé au § 2 du chapitre précédent.

- L'équation électrique se déduit du schéma électrocinétique du document 19 :

$$u = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt} - 2 \pi N a B \dot{z} \quad (E)$$

où R_0 est la résistance ohmique du bobinage et L_0 son coefficient d'inductance propre.

2.1.5. Couplage électromécanique

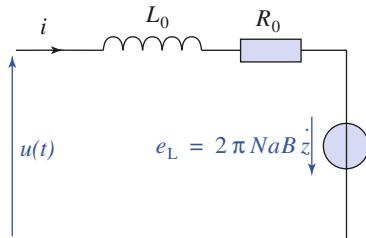
- Le terme $-N 2 \pi a B i$ de l'équation (M) fait figurer i dans une équation mécanique. De même, le terme $-2 \pi N a B \dot{z}$ fait intervenir z dans une équation électrique (E).

Nous voyons bien la réalité du couplage entre les phénomènes électriques et mécaniques.

- Nous avons rappelé au § 2.1.4. que $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_L i = 0$.

Si nous réalisons la combinaison $i_x \times (E) - \dot{z} \times (M)$ nous obtenons un bilan énergétique qui ne fait plus intervenir ni la force de Laplace ni la f.e.m. de déplacement :

$$ui - m \ddot{z} \dot{z} = +k z \dot{z} + (f_0 + f_1) \dot{z}^2 + R_0 i^2 + L_0 i \frac{di}{dt}$$



Doc. 19. Schéma électrocinétique équivalent.

$$\text{soit : } ui - (f_0 + f_1)\dot{z}^2 - R_0 i^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_0 i^2 + \frac{1}{2} k z^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \right).$$

• ui est la puissance instantanée fournie par la source au système électromécanique.

• $-(f_0 + f_1)\dot{z}^2 - R_0 i^2$ correspond à la puissance instantanée dissipée par le système.

• $\frac{1}{2} L_0 i^2 + \frac{1}{2} k z^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2$ apparaît comme l'énergie électromécanique du système haut-parleur.

Ce bilan de puissance contient donc les termes électriques et mécaniques qui sont ici indissociables.

2.1.6. Impédance d'entrée

En régime sinusoïdal forcé, nous utilisons les images complexes \underline{u} , \underline{i} et \underline{v} de $u(t)$, $i(t)$ et $\dot{z}(t)$. Nous écrivons (M) et (E) en complexes :

$$\underline{u} = R_0 \underline{i} + j L_0 \omega \underline{i} - N 2 \pi a B \underline{v}$$

$$\text{et } \left[f_0 + f_1 + j \left(m \omega - \frac{k}{\omega} \right) \right] \underline{v} = -N 2 \pi a B \underline{i}.$$

En éliminant \underline{v} , nous obtenons :

$$\underline{u} = Z \underline{i} \text{ avec } Z = R_0 + j L_0 \omega + Z_m, \text{ avec } Z_m = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j L_1 \omega} + j C_1 \omega}$$

$$\text{et } R_1 = \frac{(2 \pi N a B)^2}{f_0 + f_1}; \quad L_1 = \frac{(2 \pi N a B)^2}{k}; \quad C_1 = \frac{m}{(2 \pi N a B)^2}.$$

Le couplage revient donc à ajouter à l'impédance de la bobine, une **impédance motionnelle** Z_m , liée au mouvement de la membrane. Cette impédance motionnelle est elle-même équivalente à R_1 , L_1 et C_1 en parallèle.

L'impédance d'entrée du haut-parleur apparaît donc sur le document 20.

2.1.7. Diagramme d'impédance

L'impédance complexe du haut-parleur peut s'exprimer en séparant la partie réelle $R_m(\omega)$ et la partie imaginaire $X_m(\omega)$ de l'impédance motionnelle :

$$Z(\omega) = R_0 + R_m(\omega) + j(L_0 \omega + X_m(\omega)).$$

Le **diagramme d'impédance** (doc. 21) représente l'évolution de $Z(\omega)$ dans le plan complexe.

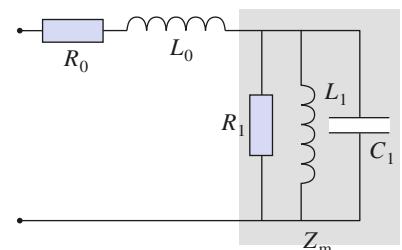
Les calculs sur cette expression théorique font apparaître que :

• R_m tend vers 0 aux hautes et aux basses fréquences et sa valeur maximale,

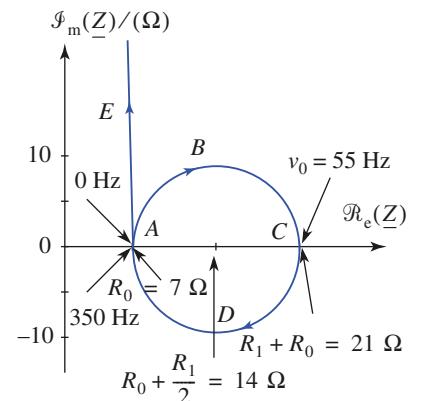
égale à $R_1 = \frac{(2 \pi N a B)^2}{f_0 + f_1}$ est obtenue pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$;

• X_m tend vers 0 aux hautes et aux basses fréquences ; X_m est également nul pour $\omega = \omega_0$.

• L'image de Z_m dans le plan complexe décrit donc un cercle passant par l'origine et centré au point d'affixe $\frac{(2 \pi N a B)^2}{2(f_0 + f_1)} = \frac{R_1}{2}$.



Doc. 20. Impédance équivalente de l'entrée.



Doc. 21. Diagramme de l'impédance théorique Z d'un haut-parleur lorsque

la fréquence $v = \frac{\omega}{2\pi}$ varie :

• sur ABC , v varie de 0 à 55 Hz

$$v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 55 \text{ Hz};$$

• sur CDA , v varie de 55 Hz à 350 Hz ;

• sur AE , $v > 350$ Hz.

Pour faire coïncider au mieux le diagramme théorique avec des mesures réalisées sur un haut-parleur « 8 ohms », de diamètre voisin de 10 cm, nous avons pris les valeurs suivantes des paramètres :

$$R_0 = 7 \Omega ; \quad L_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ H} ; \quad 2\pi N a B = 4,4 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$f_0 + f_1 = 1,4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} ; \quad k = 1,2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} ; \quad m = 10 \text{ g}.$$

Les mesures coïncident assez bien avec les prédictions du modèle jusqu'à 500 Hz. Au-delà, la valeur expérimentale de R_1 augmente, tandis que celle de L_1 diminue.

En effet, à ces fréquences, les courants induits dans le fer de l'aimant ne sont plus négligeables.

L'énergie qu'ils dissipent se traduit par une augmentation de la résistance équivalente de la bobine.

2.1.8. Rendement énergétique

Écrivons le bilan énergétique pour un nombre entier de périodes.

Comme les énergies cinétique, magnétique et potentielle moyennes sont constantes, la puissance moyenne délivrée par la source est égale à la somme des puissances moyennes dissipées par la résistance et par les frottements mécaniques, et de la puissance sonore moyenne rayonnée :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{source}} \rangle = \frac{1}{2} R_0 i_m^2 + \langle \mathcal{P}_{\text{frot}} \rangle + \langle \mathcal{P}_{\text{son}} \rangle.$$

Par ailleurs, d'après le schéma électrique équivalent :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{source}} \rangle = \frac{1}{2} (R_m + R_0) i_m^2.$$

$$\text{Il vient donc : } \langle \mathcal{P}_{\text{frot}} \rangle + \langle \mathcal{P}_{\text{son}} \rangle = \frac{1}{2} R_m i_m^2.$$

Comme nous pouvons en général négliger $\langle \mathcal{P}_{\text{frot}} \rangle$ devant $\langle \mathcal{P}_{\text{son}} \rangle$, nous obtenons le rendement énergétique $\rho(\omega)$ de l'appareil :

$$\rho(\omega) = \frac{\langle \mathcal{P}_{\text{son}} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{\text{source}} \rangle} = \frac{R_m}{R_0 + R_m}.$$

En dehors des fréquences proches de ω_0 , R_m est très inférieure à R_0 et seule une faible proportion de la puissance électrique incidente est restituée sous forme de puissance acoustique.

Plus précisément, les calculs donnent en négligeant f_0 :

$$\rho(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_{m_{\max}}} \left[1 + \left(\frac{m \omega_0}{f_1} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]},$$

$$\text{avec } R_{m_{\max}} = \frac{(2\pi N a B)^2}{f_1} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Nous obtenons les courbes théoriques des documents 22, en échelle linéaires et en échelles logarithmiques.

Ce modèle sommaire permet de comprendre qu'un haut-parleur n'a un rendement acceptable que dans une bande de fréquence déterminée. Les enceintes acoustiques de bonne qualité comportent toujours plusieurs haut-parleurs, de façon à couvrir l'ensemble du spectre audible.

$$\underline{Z}(\omega) = (R_0 + R_m) + j(L_0 \omega + X_m)$$

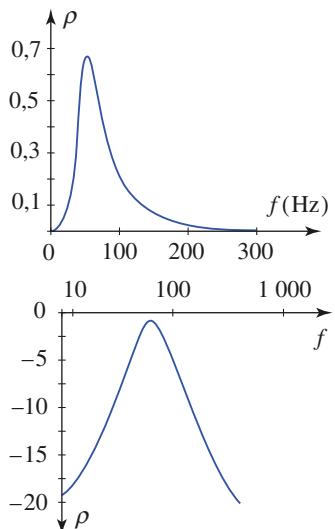
avec :

$$R_m = \frac{R_1}{1 + \left(\frac{m \omega_0}{f_0 + f_1} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

$$X_m = - \frac{R_1 \left(\frac{m \omega_0}{f_0 + f_1} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1 + \left(\frac{m \omega_0}{f_0 + f_1} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

$\underline{Z}_m = R_m + j X_m$ décrit le cercle d'équation :

$$Z_m^2 + \left(R_m - \frac{R_1}{2} \right)^2 = \left(\frac{R_1}{2} \right)^2.$$



Doc. 22. Rendement énergétique d'un haut-parleur.

a. Échelle linéaire.

b. Échelle logarithmique.

- $R_0 = 7 \Omega$, $m = 10 \text{ g}$
- $\omega_0 = 350 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_0 = 55 \text{ Hz}$
- $R_{m_{\max}} = 14 \Omega$

2.1.9. Fonctionnement en microphone

Bien que l'appareil ne soit pas techniquement adapté à cet usage, le haut-parleur peut fonctionner en microphone. Si nous réalisons l'expérience décrite sur le document 23, nous constatons que la tension mesurée par l'oscilloscope aux bornes du haut-parleur de droite est une image (atténuee et déphasée) de la tension imposée aux bornes du haut-parleur de gauche.

2.1.10. Conclusion

De cet exemple, nous pouvons extraire quelques idées générales, que nous pourrons appliquer à d'autres systèmes électromécaniques.

Lorsqu'une partie d'un circuit électrique est mobile dans un champ magnétique, les grandeurs électriques et mécaniques ne sont pas indépendantes. Il y a couplage électromécanique.

- L'équation mécanique fait intervenir les actions de Laplace, donc les courants.
- L'équation électrique tient compte des f.e.m. d'induction donc de la vitesse des conducteurs.
- La caractéristique electrocinétique dépend des contraintes mécaniques.
- Inversement, le comportement mécanique dépend des composants du circuit électrique. Ainsi, la présence de résistances se traduit souvent par une force équivalente à un frottement.

2.2. Exemple de conversion électromécanique : moteur à courant continu et génératrice

2.2.1. Principe

Considérons le document 24. Une bobine, constituée de N spires sur un cadre rectangulaire de côtés a et b , est en rotation autour d'un axe Δ . Sa position est repérée par l'angle θ . Sa résistance totale est R et son inductance L . Elle est reliée à une source de tension E par des contacts H et K qui commutent à chaque demi-tour.

L'extrémité K de la bobine est reliée au pôle \oplus si $\sin \theta > 0$ et au pôle \ominus si $\sin \theta < 0$. Le système mobile a un moment d'inertie J par rapport à l'axe Δ .

Un aimant permanent produit un champ magnétique \vec{B} , que nous supposons radial et de norme B uniforme au niveau des fils MN et PQ . Un système mécanique S exerce sur l'axe un couple résistant noté $(-\Gamma)$ (doc. 24). Nous supposons que Γ est constant.

Remarque

On se rapproche de cette structure radiale en jouant sur la forme des pôles en plaçant un cylindre de fer sur l'axe de la bobine. Il existe bien entendu une zone de transition où le champ n'a pas cette structure, mais nous n'en tiendrons pas compte dans cette étude.

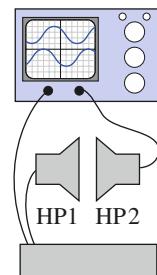
2.2.2. Équation mécanique

Les forces de Laplace sur les côtés NP et QM sont parallèles à Δ .

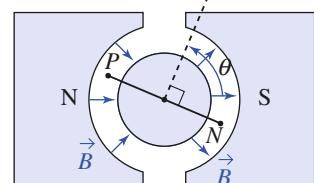
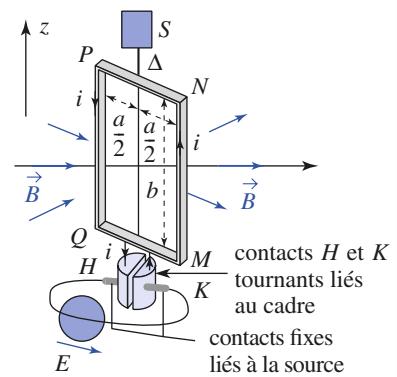
Leur moment par rapport à Δ est donc nul.

Les forces de Laplace sur les côtés MN et PQ sont égales à Bib . En raison de la commutation, leur moment a toujours le même signe (doc. 25) :

$$\mathcal{M}_\Delta = Bib \frac{a}{2}.$$

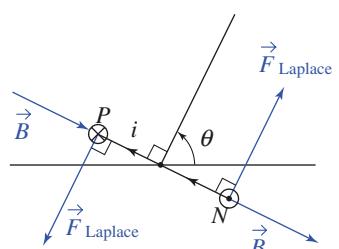


Doc. 23. Le haut-parleur de droite (HP2) fonctionne comme un microphone.



Doc. 24a. Principe d'un moteur à courant continu.

b. Bobine et aimants vues de dessus.



Doc. 25. Action de Laplace : dans la branche NP , i circule toujours de N vers P : ainsi i sort toujours de N et entre toujours en P .

Au total $M_{\text{Laplace}} = 2NiBb\frac{a}{2} = i\phi_0$, en posant $\phi_0 = NBab$ (ϕ_0 a la dimension d'un flux, mais ne représente pas le flux de \vec{B} à travers le cadre !). Il en résulte l'équation différentielle :

$$J\ddot{\theta} = M_{\text{Laplace}} - \Gamma \text{ ou } J\ddot{\theta} + \Gamma = i\phi_0.$$

2.2.3. Équation électrique

La puissance des actions de Laplace est :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -e_{\text{Lorentz}}i = i\phi_0\dot{\theta}.$$

Nous en déduisons l'expression de la f.e.m. de Lorentz. $e_{\text{Lorentz}} = -\phi_0\dot{\theta}$. Du point de vue électrocinétique, la rotation équivaut à un générateur idéal de tension $e = \phi_0\dot{\theta}$, opposée au courant. De ce fait, on appelle parfois cette quantité force contre-électromotrice. Le schéma est donc celui du document 26 et l'équation électrique s'écrit :

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \phi_0\dot{\theta} = E.$$

2.2.4. Régime transitoire

En éliminant $i(t)$, nous obtenons une équation différentielle en $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$:

$$\frac{L}{R}\ddot{\omega} + \dot{\omega} + \omega\frac{\phi_0^2}{RJ} + \frac{\Gamma}{J} = \frac{E\phi_0}{RJ}.$$

$\frac{L}{R}\ddot{\omega}$ est toujours très faible devant $\dot{\omega}$, aussi nous négligeons ce terme, et l'équation se simplifie en $\dot{\omega} + \omega\frac{\phi_0^2}{RJ} = \frac{E\phi_0}{RJ} - \frac{\Gamma}{J}$.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Si Γ est constant et si le moteur est arrêté à $t = 0$, les solutions sont de la forme :

$$\omega = \omega_\ell \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \text{ avec } \omega_\ell = \frac{E}{\phi_0} - \frac{R\Gamma}{\phi_0^2} \text{ et } \tau = \frac{RJ}{\phi_0^2}.$$

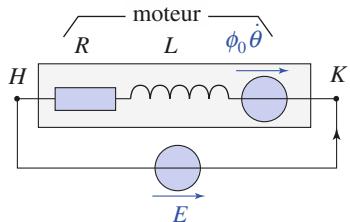
Pendant ce régime transitoire, le courant $i = \frac{E - \phi_0\dot{\theta}}{R}$ décroît de $\frac{E}{R}$ à $\frac{\Gamma}{\phi_0}$.

2.2.5. Régime permanent

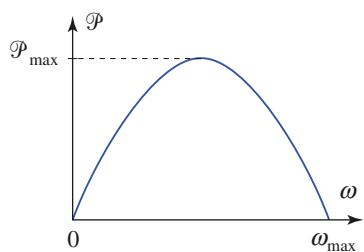
En régime permanent, $\omega = \omega_\ell$ et donc le moment des forces de Laplace, opposé au couple résistant, est égal à Γ et la vitesse angulaire limite ω_ℓ est une

fonction affine décroissante de Γ : $\omega_\ell = \frac{E}{\phi_0} - \frac{R\Gamma}{\phi_0^2}$.

- La valeur maximale $\omega_{\max} = \frac{E}{\phi_0}$ est obtenue « à vide » pour $\Gamma = 0$.
- Si $\Gamma > \frac{E\phi_0}{R}$, alors le moteur ne peut pas tourner.
- La puissance mécanique $\mathcal{P}_{\text{meca}} = \Gamma\omega$, fournie par le moteur (doc. 27), est :
$$\mathcal{P}_{\text{meca}} = \frac{E\phi_0}{R}\omega \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{\max}}\right).$$



Doc. 26. Schéma électrocinétique.



Doc. 27. Puissance mécanique.

- Nous pouvons également déterminer $\mathcal{P}_{\text{meca}}$ par un bilan énergétique :

$$\mathcal{P}_{\text{meca}} + R i^2 = \mathcal{P}_{\text{source}} = E i,$$

avec $i = \frac{E}{R} - \frac{\phi_0}{R} \omega$.

- La puissance maximale $\mathcal{P}_{\text{max}} = \frac{E^2}{4R}$ est obtenue pour $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\text{max}}$.

2.2.6. Fonctionnement en générateur

Ce dispositif peut également fonctionner en générateur. Supposons maintenant qu'un opérateur impose une vitesse de rotation constante ω_0 en exerçant un couple moteur $\Gamma' = -\Gamma$. Remplaçons la source par une résistance R_0 .

- L'équation électrique devient, toujours en négligeant L :

$$i = -\frac{\phi_0 \omega_0}{R_0 + R}.$$

- L'équation mécanique donne $\Gamma' = -i \phi_0$, soit :

$$\Gamma' = \frac{\phi_0^2 \omega_0}{R_0 + R}.$$

- Du point de vue mécanique, le couplage se traduit par un couple de frottement proportionnel à la vitesse qui dépend de la résistance R_0 .
- Du point de vue électrique, le système est équivalent à un générateur de f.e.m. $E(t) = \phi_0 \omega_0$.
- Si nous pouvions faire abstraction des résistances et des frottements internes, le rendement énergétique de ces convertisseurs serait de 100 %. En effet, la puissance de l'opérateur, opposée en moyenne à celle des actions de Laplace, est égale à la puissance de la f.e.m. du générateur. Dans l'exemple étudié, la puissance est dissipée dans la résistance de charge, et nous trouvons bien :

$$\Gamma' \omega_0 = (R_0 + R)i^2.$$

2.2.7. Conclusion

Les moteurs et les générateurs électriques sont des convertisseurs de puissance susceptible de produire de la puissance mécanique à partir d'une source électrique, ou de la puissance électrique à partir d'une excitation mécanique.

Théoriquement, les deux sens de conversion sont en général possibles, mais les appareils sont en général adaptés techniquement à un seul mode de fonctionnement.

S'il était possible de faire abstraction des résistances, le rendement serait de 100 %.

En effet, la puissance mécanique est celle des actions de Laplace et la puissance électrique est, en l'absence de résistance, celle de la f.e.m. de déplacement.

D'après les lois de l'induction, ces deux grandeurs sont égales en valeur absolue.

Application 6

Principe du moteur asynchrone

Les moteurs asynchrones sont généralement de gros moteurs qui intègrent de nombreux composants. On en étudie ici seulement le principe de fonctionnement, en raisonnant sur un modèle très simplifié.

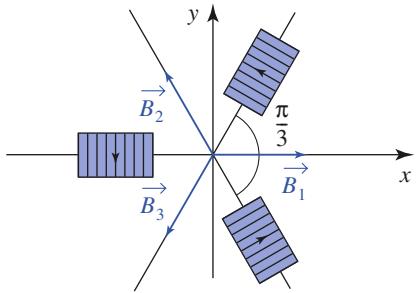
1) Production d'un champ tournant

Pour les installations de forte puissance, la distribution de l'énergie électrique se fait en « triphasé ».

Par rapport à une tension de référence (le fil « neutre »), les trois fils de « phase » sont portés à des tensions de même valeur efficace et déphasées de $\frac{2\pi}{3}$, de telle sorte que (doc. 28) :

$$u_1 = u_m \cos(\omega t); \quad u_2 = u_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$u_3 = u_m \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$



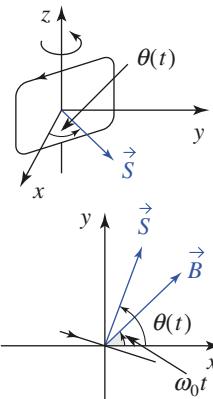
Doc. 28. Réalisation d'un champ tournant.

Les trois électro-aimants créent, au voisinage du point O, trois champs proportionnels respectivement à u_1 , u_2 et u_3 (avec la même constante de proportionnalité). Montrer que le champ résultant en O est un champ tournant de norme constante.

2) Une bobine de N spires d'aire S, fermée sur elle-même, de résistance R, d'inductance L et de moment d'inertie J par rapport à (Oz), peut tourner autour de l'axe (Oz) : sa position est repérée par l'angle :

$$\theta(t) = (\vec{e}_x, \vec{S}).$$

Cette bobine est soumise à un champ tournant de norme B et tel que : $(\vec{e}_x, \vec{B}) = \omega_0 t$.



Doc. 29. Bobine mobile dans un champ tournant.

On suppose que ce champ est uniforme sur toute la bobine (doc. 29).

La bobine est soumise en plus à un couple résistant qui maintient sa vitesse constante.

a) En appliquant la loi de Lenz, déterminer le signe du moment des actions de Laplace.

b) Écrire les équations différentielles mécanique et électrique. On posera : $\phi_0 = NSB$.

3) On étudie le régime permanent $\theta = \omega t$, avec ω constant.

a) Déterminer le courant $i(t)$ dans la bobine, puis le couple électromagnétique $\Gamma(t)$ exercé par le champ \vec{B} sur la bobine.

b) En fait, le moteur a une grande inertie mécanique et la grandeur significative est la valeur moyenne $\langle \Gamma \rangle$ de $\Gamma(t)$.

Étudier les variations de $\langle \Gamma \rangle$ en fonction de ω . On posera pour cela :

$$X = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \lambda = \frac{L\omega_0}{R} \quad \text{et} \quad \Gamma_0 = \frac{\phi_0^2}{2R}.$$

Pourquoi ce moteur est-il appelé « asynchrone » ?

c) Déterminer la puissance mécanique $\mathcal{P}_{\text{méca}}$ fournie par ce moteur.

Étudier sommairement les variations de $\mathcal{P}_{\text{méca}}$ en fonction de ω .

$$1) \vec{B}_1(O, t) = B_m \cos(\omega_0 t) \vec{e}_x;$$

$$\vec{B}_2(O, t) = B_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y\right);$$

$$\vec{B}_3(O, t) = B_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y\right);$$

Le champ total en O est :

$$\begin{aligned} \vec{B}(O, t) &= \vec{B}_1(O, t) + \vec{B}_2(O, t) + \vec{B}_3(O, t) \\ &= \frac{3}{2} B_m (\cos \omega_0 t \vec{e}_x + \sin \omega_0 t \vec{e}_y). \end{aligned}$$

$\vec{B}(O, t)$ est donc un champ de norme constante égale à $\frac{3}{2}B_m$ et dont la direction est repérée par l'angle $\theta = \omega_0 t$.

2) a) Comme $(\vec{B}, \vec{S}) = \theta(t) - \omega_0 t$ est fonction du temps, le flux de \vec{B} à travers la bobine varie, ce qui provoque un courant induit.

D'après la loi de Lenz, l'effet mécanique de ce courant s'oppose à la cause de l'induction.

La bobine est donc soumise à des actions de Laplace qui tendent à la placer dans l'état où le flux ne varie pas, c'est-à-dire à une vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$ égale à ω_0 . Le moment des actions de

Laplace est donc positif si ω est inférieure à ω_0 .

b) Équation mécanique

dans le champ uniforme \vec{B} , la bobine est assimilable à un dipôle de moment magnétique $\vec{M} = N i \vec{S}$ et subit un couple $\vec{M} \wedge \vec{B}$.

Le théorème scalaire du moment cinétique donne :

$$(\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z - \Gamma = J \ddot{\theta},$$

soit $J \ddot{\theta} - \phi_0 i \sin[\omega_0 t - \theta(t)] + \Gamma = 0$.

Équation électrique

Pour la spire orientée, le flux du champ extérieur est :

$$\phi_{\text{ext}} = \phi_0 \cos[\omega_0 t - \theta(t)].$$

$$\text{L'équation électrique } R i + L \frac{di}{dt} + \frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} = 0$$

s'écrit donc :

$$R i + L \frac{di}{dt} - (\omega_0 - \dot{\theta}) \phi_0 \sin[\omega_0 t - \theta(t)] = 0.$$

3) a) En régime permanent, l'équation électrique est découpée de l'équation mécanique. C'est une équation linéaire dont le second membre est une fonction sinusoïdale de pulsation $\Omega = \omega_0 - \omega$.

Elle s'écrit (en changeant l'origine des temps) :

$$R i + L \frac{di}{dt} = \Omega \phi_0 \sin \Omega t.$$

La solution en régime forcé, c'est-à-dire :

$$i = i_m \sin(\Omega t - \psi),$$

se détermine en utilisant la représentation complexe. Nous obtenons :

$$i_m = \frac{\Omega \phi_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \text{ et } \psi = \arctan \frac{L \Omega}{R}.$$

Introduisons cette expression dans l'équation mécanique, nous trouvons :

$$\Gamma(t) = \frac{\Omega \phi_0^2}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t).$$

b) Les variations de $\langle \Gamma \rangle$ dépendent de :

$$\langle \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t) \rangle = \frac{1}{2} \cos \psi.$$

Il vient :

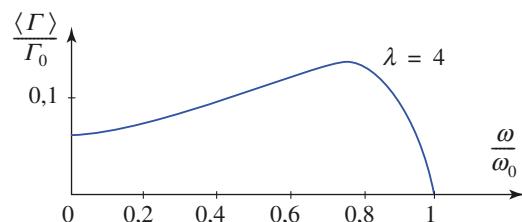
$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\Omega \phi_0^2}{2 \sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \cos \psi.$$

En remplaçant ψ par sa valeur, nous obtenons :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{(\omega_0 - \omega) \phi_0^2 R}{2(R^2 + L^2 (\omega_0 - \omega)^2)},$$

$$\text{ou encore } \langle \Gamma \rangle = \frac{\Gamma_0(1-X)}{1 + \lambda^2(1-X)^2}.$$

Les variations de $\langle \Gamma \rangle$ en fonction de ω sont représentées sur le document 30. Nous avons restreint ω à l'intervalle $[0 ; \omega_0]$ pour lequel $\langle \Gamma \rangle$ est positif. En fait, le système extérieur impose Γ , ce qui détermine la valeur de ω .



Doc. 30. Couple moteur en fonction de ω .

- $\langle \Gamma \rangle = 0$ si $\omega = \omega_0$, car dans ce cas le flux est constant.
- $\langle \Gamma \rangle > 0$ si $\omega < \omega_0$: par conséquent le moteur tourne moins vite que le champ, d'où le nom de moteur asynchrone : le moteur n'est pas synchronisé sur le champ.
- Si $\lambda < 1$, $\langle \Gamma \rangle$ est une fonction décroissante de ω .
- Dans la pratique, λ est toujours supérieur à 1 et $\langle \Gamma \rangle$ passe par un maximum.

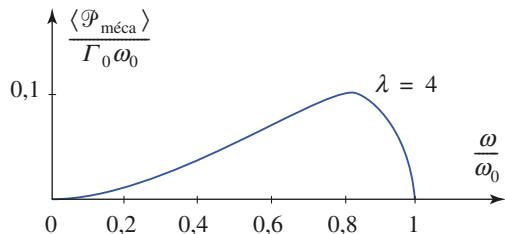
Si deux valeurs de ω correspondent à la valeur imposée de $\langle \Gamma \rangle$, seule la plus grande des deux correspond à un état stable, car $\langle \Gamma \rangle$ est alors une fonction décroissante de ω .

En effet, une augmentation de la vitesse se traduit par une diminution du couple moteur, ce qui a pour effet de ramener la vitesse à sa valeur d'équilibre.

c) La puissance mécanique moyenne fournie par le moment est :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{méca}} \rangle = \langle \Gamma \rangle \omega.$$

La courbe donnant les valeurs de $\langle \mathcal{P}_{\text{méca}} \rangle$ en fonction de ω est celle du document 31. la puissance s'annule pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \omega_0$.



Doc. 31. Puissance en fonction de ω .

► Pour s'entraîner : ex. 7, 10, 11 et 12.

3 Courant de Foucault

3.1. Courants induits volumiques

Une pièce de métal placée près d'un circuit électrique parcouru par un courant variable, ou en mouvement près d'un aimant, est le siège de courants volumiques induits appelés *courant de Foucault*. Contrairement aux courants « classiques », ils ne sont pas guidés par des fils, et il est très souvent impossible de les calculer analytiquement.

3.2. Effet de peau et champ induit

Nous avons vu au chapitre 5, qu'un champ électromagnétique dépendant du temps ne peut pénétrer profondément à l'intérieur d'un conducteur.

Les champs \vec{E} et \vec{B} , ainsi que le courant volumique \vec{j} , subissent une atténuation, dont la longueur caractéristique δ dépend de la fréquence v et de la conductivité γ :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \pi v}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \text{ avec } \omega = 2\pi v.$$

Nous pouvons interpréter qualitativement cet effet en considérant qu'il s'agit d'un phénomène d'induction. Les variations de \vec{B} dans le conducteur induisent des courants volumiques, qui eux-mêmes créent un champ induit \vec{B}_{induit} . D'après la loi de Lenz \vec{B}_{induit} est orienté de façon à s'opposer à la cause de l'induction, c'est-à-dire à la partie variable du champ \vec{B} .

Pour l'étude des courants induits volumiques, nous pouvons considérer deux cas extrêmes, suivant l'épaisseur e du conducteur (sa plus petite dimension).

- $e \ll \delta$

L'épaisseur du conducteur est faible par rapport à δ . L'effet de peau est alors négligeable, ou ce qui est équivalent, le champ induit est négligeable devant le champ appliqué de l'extérieur.

- $e \gg \delta$

L'épaisseur du conducteur est grande devant δ . Les courants induits sont alors modélisables par un courant de surface ; en tout point intérieur au conducteur, le champ induit est opposé au champ appliqué et le champ résultant est nul.

3.3. Caractéristiques des courants de Foucault

3.3.1. Conducteur en mouvement dans un champ constant

Raisonnons sur un exemple : une plaque métallique rectangulaire, de conductivité γ , entre dans une zone où règne un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_z$ avec une vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$ (doc. 32). Pour simplifier, nous supposerons que le champ \vec{B} est uniforme de chaque côté de la frontière (un tel champ n'a pas d'existence réelle, mais il nous permet de bien mettre en évidence les phénomènes).

Le champ électromoteur de Lorentz \vec{E}_m est égal à $-B v \vec{e}_y$ dans la partie de la plaque soumise au champ et il est nul dans l'autre partie.

Étudions qualitativement les courants induits qui peuvent en résulter.

- Les lignes de courant, quand elles existent sont des lignes fermées. Elles sont astreintes à des conditions aux limites : comme les charges ne peuvent sortir du conducteur, \vec{j} est tangent à la surface extérieure du conducteur.
- La circulation de \vec{j} le long d'une ligne de courant Γ est nécessairement positive. Or, pour un bon conducteur (cf. chapitre 6) :

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E}_s + \vec{E}_m) \text{ et } \oint_{\Gamma} \vec{E}_s \cdot d\vec{\ell} = 0,$$

car \vec{E}_s dérive un potentiel scalaire V si le champ \vec{B} est constant. Il vient donc :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} > 0.$$

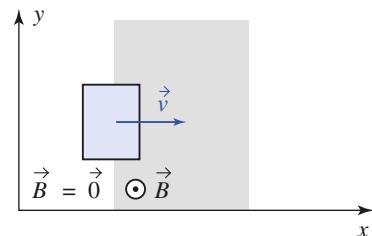
Si la plaque est entièrement plongée dans le champ \vec{B} uniforme, \vec{E}_m est uniforme et sa circulation est nulle sur toute ligne fermée. Les courants n'existent donc que lorsque la plaque traverse la frontière. Les lignes de courant passent de part et d'autre de cette frontière.

• L'analyse des actions de Laplace montre que le conducteur subit une force résultante de freinage pendant cette phase (doc. 33). Une analyse analogue montre que le conducteur subit également une force de freinage si, à la suite d'une inversion de la vitesse, il sort du champ. Cette force de freinage, proportionnelle à $\vec{j} \wedge \vec{B}$, est proportionnelle à $B^2 v$ et sa puissance à $B^2 v^2$.

Cette puissance est dissipée sous forme thermique par effet Joule.

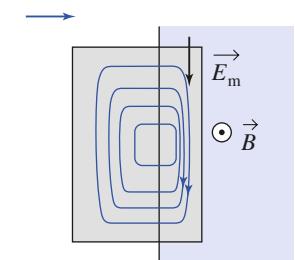
3.3.2. Généralisation

Nous pouvons généraliser cette analyse qualitative à tous les courants induits volumiques : les courants de Foucault se développent dans un conducteur en mouvement ou soumis à un champ \vec{B} variable, s'il peut exister des lignes de courant où la circulation de \vec{j} , et donc celle du champ électromoteur, est positive. Ainsi, il n'y a pas de courant de Foucault dans un conducteur solide en rotation autour d'un axe parallèle à un champ \vec{B} uniforme, car alors \vec{E}_m est le gradient

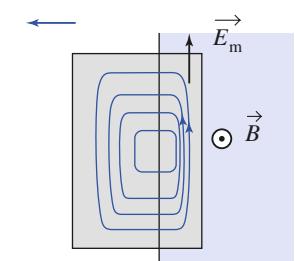


Doc. 32. Plaque conductrice en translation pénétrant dans un champ magnétique.

a) vitesse de la plaque

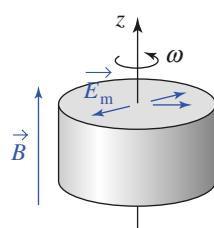


b) vitesse de la plaque



Doc. 33. Lignes de courant lorsque :

- la plaque pénètre dans le champ
- la plaque sort du champ.



Doc. 34. \vec{B} est parallèle à l'axe de rotation : il n'y a pas de courant de Foucault.

de $\frac{\omega B}{2} r^2$ (doc. 34). En revanche, si \vec{B} est normal à l'axe, il existe des courants de Foucault dans le conducteur (doc. 35) (revoir l'exercice 8 du chapitre 6).

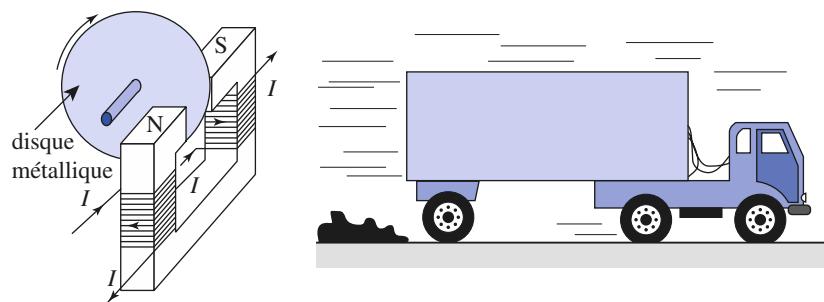
3.4. Application des courants de Foucault

Les courants volumiques induits ont, soit des effets secondaires nuisibles, soit produisent un effet principal voulu.

- Si l'induction est provoquée par un champ \vec{B} variable, le vecteur \vec{j} est proportionnel à la dérivée de B , soit, en régime sinusoïdal, à ωB . La puissance dissipée (par effet Joule) est proportionnelle à $\omega^2 B^2$.

Ce mode de chauffage est utilisé pour les **fours à induction**, ou, dans le domaine électroménager, dans les **plaques à induction** (doc. 36).

- Les courants de Foucault engendrés par le mouvement d'un conducteur dissipent une puissance proportionnelle au carré de la vitesse et créent une **action de freinage** (doc. 37) proportionnelle à la vitesse et au carré du champ. de tels dispositifs sont utilisés comme ralentisseurs sur des poids lourds (doc. 38) ; ils ne peuvent se substituer aux freins à friction, car la force de freinage, dans un ralentisseur, n'est intense qu'à grande vitesse.

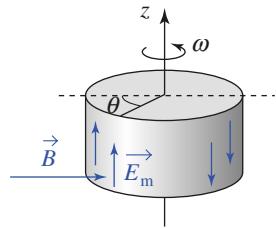


Doc. 37. Si aucun courant ne passe dans l'électro-aimant, le disque tourne librement ; dès que l'électro-aimant est excité, le disque est freiné.

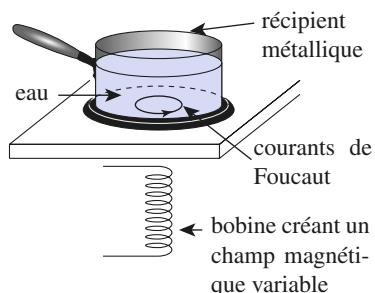
Pour les moteurs électriques et les transformateurs, on enroule les bobines sur des noyaux de fer pour augmenter la valeur du champ magnétique.

Bien que n'appartenant pas au circuit électrique, ces pièces sont le siège de courants de Foucault qui peuvent devenir intenses et dissiper une puissance importante par effet Joule. Pour les atténuer, on « entrave » les courants en remplaçant le bloc de fer par un ensemble de feuilles minces, isolées entre elles et orientées le long des lignes de champ de \vec{B} (doc. 39).

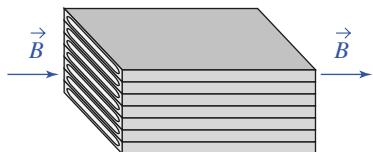
Dans un conducteur immobile soumis à un champ magnétique variable, ou dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique constant, il apparaît des courants volumiques appelés *courants de Foucault*. Ces courants dissipent de l'énergie et sont responsables, lorsque le conducteur est en mouvement, d'actions de Laplace (force ou moment) de freinage, opposées au déplacement du conducteur.



Doc. 35. \vec{B} est normal à l'axe de rotation. Alors $\vec{E}_m = \omega r B \cos \theta \vec{e}_z$ et il existe des courants de Foucault.



Doc. 36. Principe d'une plaque à induction : des courants apparaissent dans le récipient métallique soumis à un champ magnétique variable.



Doc. 39. Barreau de fer feuilletté.

Application 7

Courants de Foucault dans un disque

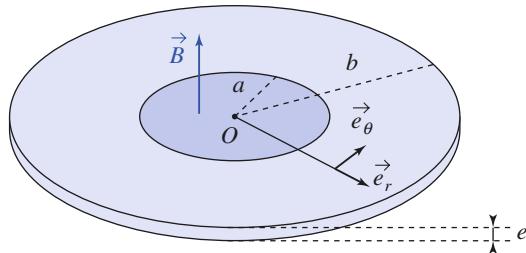
Un disque conducteur ohmique de conductivité γ , mince, d'axe (Oz), de rayon b et d'épaisseur e , est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}(t) = B_m \cos \omega t \vec{e}_z$ localisé dans un cylindre de rayon a et nul ailleurs (doc .40).

On convient de négliger le champ \vec{B} induit créé par le courant induit.

1) Quelle est la forme des lignes de courant ?

2) Calculer le vecteur densité de courant en tout point du disque.

3) Déterminer la puissance moyenne dissipée dans le disque. Faire le calcul pour un disque de cuivre ($\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$) de 2 mm d'épaisseur; de rayon $a = 2 \text{ cm}$ entièrement plongé ($a = b$) dans un champ de valeur maximale $B_m = 0,1 \text{ T}$ vibrant à 50 Hz.



Doc. 40. Disque conducteur.

4) Calculer le champ \vec{B} induit créé au centre par la distribution de courants induits, puis discuter la pertinence de l'hypothèse initiale.

1) Les conditions aux limites (\vec{j} tangent à la surface extérieure, disque mince) et la symétrie du problème nous incitent à rechercher une solution de la forme $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$ (en coordonnées cylindriques).

2) Sur une ligne de courant de rayon r :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r \frac{j(r, t)}{\gamma} = -\frac{d\phi}{dt}.$$

• Si $r < a$:

$$\phi = \pi r^2 B \quad \text{et} \quad j(r, t) = \frac{\gamma}{2} \omega r B_m \sin \omega t.$$

Si $a < r < b$:

$$\phi = \pi a^2 B \quad \text{et} \quad j(r, t) = \frac{\gamma}{2} \omega \frac{a^2}{r} B_m \sin \omega t.$$

3) La puissance volumique dissipée par effet Joule est (cf. chapitre 1) :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}_m = \frac{j^2}{\gamma}.$$

Pour une couronne de rayon r , de largeur dr et d'épaisseur e .

$$d\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \mathcal{P}_{\text{vol}} d\tau = 2\pi r e dr \frac{j^2(r, t)}{\gamma}.$$

La puissance totale dissipée par le disque est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{Joule}} &= \frac{\pi e \gamma}{2} \omega^2 B^2 \sin^2 \omega t \times \left[\int_0^a r^3 dr + \int_a^b \frac{a^4}{r} dr \right] \\ &= \frac{\pi e \gamma}{2} \omega^2 a^4 B^2 \sin^2 \omega t \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

Sur une durée grande devant la période, la puissance moyenne dissipée est :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{Joule}} \rangle = \frac{\pi e \gamma}{4} \omega^2 a^4 B_m^2 \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right),$$

soit lorsque $a = b$:

$$\langle \mathcal{P}_{\text{Joule}} \rangle = \frac{\pi e \gamma}{16} \omega^2 a^4 B_m^2.$$

Remarquons que cette puissance est effectivement proportionnelle :

- à la pulsation au carré (terme en ω^2);
- au champ magnétique au carré (terme en B^2);
- à la surface au carré (terme en a^4).

Le disque de cuivre dissipe une puissance moyenne égale à 3,7 W.

4) Le champ dB créé au centre d'une spire de rayon r et de largeur dr est :

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2r} \quad \text{avec} \quad di = j(r, t) e dr.$$

Le champ créé par l'ensemble des courants induits est donc :

$$\begin{aligned} B_{\text{induit}} &= \int_{r=0}^a dB + \int_{r=a}^b dB \\ &= \mu_0 \gamma \omega \frac{e a}{2} \left(1 - \frac{a}{2b} \right) B_m \sin \omega t. \end{aligned}$$

B_{induit} est toujours négligeable devant B_{total} si :

$$ae \ll \delta^2 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Nous retrouvons bien la règle générale, à savoir : le champ induit est négligeable si l'épaisseur du conducteur est petite devant δ .

Pour du cuivre à 50 Hz, $\delta = 9,2$ mm.
Si $a = b = 2$ cm et $e = 2$ mm, l'approximation est à la limite de validité.

► Pour s'entraîner : ex. 2 et 8.



● AUTO-INDUCTION

- Pour un circuit donné, la f.e.m. due au champ propre créé par ce circuit est la *f.e.m. d'auto-induction* e_{propre} .
- Il existe une grandeur L positive, qui ne dépend que de la géométrie du circuit et telle que :

$$e_{\text{propre}} = -\frac{d(Li)}{dt},$$

ou pour un circuit rigide : $e_{\text{propre}} = -L \frac{di}{dt}.$

L est appelée inductance du circuit ; dans le système international, L se mesure en Henry (H).

- Le courant i qui parcourt un circuit crée un champ magnétique propre \vec{B}_{propre} , auquel est associée une énergie magnétique propre \mathcal{E}_m égale à $\frac{1}{2} L i^2$.
- L'identité :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{\mu_0} B_{\text{propre}}^2 d\tau = \frac{1}{2} L i^2,$$

permet de définir l'inductance d'un circuit.

- S'il est possible de définir le flux du champ propre à travers le circuit, son inductance peut être déterminée plus simplement par :

$$\phi_{\text{propre}} = Li.$$

- Pour une bobine rigide soumise à un champ magnétique extérieur, la loi d'Ohm généralisée s'écrit :

$$u + e_{\text{ext}} = Ri + L \frac{di}{dt}.$$



● COUPLAGE MAGNÉTIQUE ENTRE DEUX CIRCUITS

- Si deux circuits filiformes (1) et (2) sont les seules sources de champ magnétique, les flux de \vec{B} à travers ces deux circuits peuvent s'exprimer à partir des courants i_1 et i_2 .

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{et} \quad \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1.$$

- L'inductance mutuelle* M caractérise symétriquement le couplage magnétique entre les deux circuits. La valeur absolue de M ne dépend que de la géométrie du système et son signe dépend des orientations choisies.

- Si les deux circuits sont rigides, immobiles et isolés (\vec{B}_{ext} nul), la loi d'Ohm généralisée devient :

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

- L'énergie magnétique d'un système de deux circuits est, en l'absence d'autres sources de champ magnétique :

$$\%_{\text{m}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

● COUPLAGE ÉLECTROMÉCANIQUE

Lorsqu'une partie d'un circuit électrique est mobile dans un champ magnétique, les grandeurs électriques et mécaniques ne sont pas indépendantes. Il y a *couplage électromécanique*.

- L'équation mécanique fait intervenir les actions de Laplace et donc les courants.
- L'équation électrique tient compte des f.e.m. d'induction et donc de la vitesse des conducteurs.
- La caractéristique électrocinétique dépend des contraintes mécaniques.
- Inversement, le comportement mécanique dépend des composants du circuit électrique. Ainsi, la présence de résistances se traduit souvent par une force équivalente à un frottement.

● CONVERSION DE PUISSANCE

Les moteurs et les générateurs électriques sont des convertisseurs de puissance susceptibles de produire de la puissance mécanique à partir d'une source électrique, ou de la puissance électrique à partir d'une excitation mécanique.

- Théoriquement, les deux sens de conversion sont possibles, mais les appareils sont en général adaptés techniquement à un seul mode de fonctionnement.
- S'il était possible de faire abstraction des résistances, le rendement serait de 100 %. En effet, la puissance mécanique est celle des actions de Laplace et la puissance électrique est, en l'absence de résistance, celle de la f.e.m. de déplacement. D'après les lois de l'induction, ces deux grandeurs sont égales en valeur absolue.

● COURANTS DE FOUCAULT

Dans un conducteur immobile soumis à un champ magnétique variable ou dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique constant, il peut apparaître des courants volumiques appelés *courants de Foucault*. Ces courants dissipent de l'énergie et sont responsables, lorsque le conducteur est en mouvement, d'actions de Laplace (force ou moment) de *freinage*, opposées au déplacement du conducteur, ce qui est en accord avec la loi de Lenz.

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Pouvez-vous définir de deux manières différentes le coefficient d'auto-induction d'un circuit?
- ✓ Écrivez la loi d'Ohm généralisée pour un circuit filiforme soumis à la fois à un champ extérieur et à son champ propre.
- ✓ Que vaut l'énergie propre $\mathcal{E}(t)$ associée à un circuit de coefficient d'auto-induction L parcouru par un courant I ?
- ✓ Quels sont les facteurs susceptibles de faire varier le coefficient d'inductance mutuelle de deux circuits?
- ✓ Pourquoi dit-on de deux circuits en induction mutuelle qu'ils sont couplés?
- ✓ Indiquer en quoi un haut-parleur est un système électromécanique.
- ✓ Dans quelles circonstances peuvent apparaître des courants de Foucault?
- ✓ Citer quelques conséquences néfastes et intéressantes des courants de Foucault.

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Le coefficient d'auto-induction d'un solénoïde parfait de longueur a , de section s et comportant n spires par unité de longueur vaut :

- a. $\mu_0 n^2 \frac{s}{a}$
- b. $\mu_0 n^2 s a$
- c. $\mu_0 n \frac{s}{a}$
- d. $\mu_0 n s a$.

2. L'énergie magnétique de deux circuits couplés par induction mutuelle s'écrit :

- a. $\frac{1}{2} L i_1^2 + \frac{1}{2} L i_2^2 + \frac{1}{2} M i_1 i_2$
- b. $\frac{1}{2} L i_1^2 + \frac{1}{2} L i_2^2 + M i_1 i_2$
- c. $\frac{1}{2} L i_1^2 + \frac{1}{2} L i_2^2 + 2 M i_1 i_2$.

3. Le coefficient d'inductance mutuelle M de deux circuits filiformes indéformables :

- a. est toujours positif
- b. est fonction des caractéristiques géométriques de chacun des circuits
- c. est fonction de l'orientation de chaque circuit

d. n'est pas fonction de la position relative des deux circuits.

4. Un conducteur ohmique volumique est soumis à un champ \vec{B} variant sinusoïdalement dans le temps ; la puissance dissipée par effet Joule dans ce conducteur est :

- a. proportionnelle à la fréquence
- b. indépendante de la fréquence
- c. proportionnelle au carré de la fréquence
- d. inversement proportionnelle à la fréquence.

5. Le bilan énergétique global d'un haut-parleur électromécanique :

- a. ne fait plus intervenir les actions de Laplace et la f.e.m. de déplacement
- b. montre que le haut-parleur a un rendement unité
- c. fait apparaître des termes de pertes dont un seulement a un intérêt dans le fonctionnement du haut-parleur
- d. permet de définir l'énergie électromécanique du

$$\text{haut-parleur : } \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k z^2.$$

► Solution, page 235.

Exercice commenté

Voltmètre analogique

ÉNONCÉ

1) Microampèremètre magnétoélectrique

N spires de fil fin sont bobinées sur un cadre rectangulaire $MNPQ$ de côtés a et b . Un aimant permanent et un noyau de fer créent un champ magnétique permanent \vec{B} . Ce champ est porté par \vec{e}_r , de norme constante sur les côtés QM et PN , mais sa valeur algébrique est fonction de la « région » considérée :

- région 1 : $\vec{B} = -B_0 \vec{e}_r$;
- région 2 : $\vec{B} = +B_0 \vec{e}_r$.

Les schémas ci-contre montrent le microampèremètre vu de dessus et mettent en évidence le champ magnétique de type radial.

Ce cadre représenté de face sur le schéma ci-contre peut tourner autour de l'axe Δ et son moment d'inertie par rapport à Δ est J .

Un ressort en spirale (non représenté) assure un couple de rappel élastique :

$$M_{\text{rappel}} = -C\theta.$$

Les frottements mécaniques (frottements de l'air, par exemple) sont représentés par un couple de frottement, proportionnel à la vitesse :

$$M_{\text{fort}} = -h\dot{\theta}.$$

Une aiguille solidaire du cadre indique la déviation.

Le branchement électrique est décrit ci-contre.

La résistance de la bobine est R , son inductance est L ; on suppose que le reste du circuit est représentable par un générateur de f.e.m. E et de résistance R_e .

a) Écrire les équations différentielles vérifiées par $i(t)$ et $\theta(t)$. On posera $\Phi_0 = NB_0ab$.

Quelle est la dimension de Φ_0 ?

b) Déterminer θ_p et i_p , valeurs de θ et de i en régime permanent.

c) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$. On négligera l'influence de l'inductance et on posera :

$$2\lambda = \frac{1}{J} \left(h + \frac{\Phi_0^2}{R + R_e} \right) \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}.$$

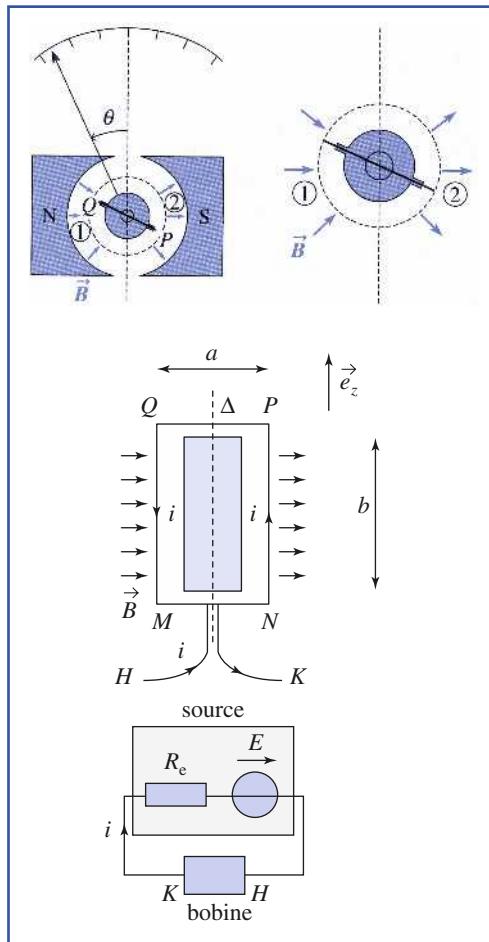
d) Décrire sommairement la forme des solutions.

En quoi le cas $\lambda = \omega_0$ est-il intéressant pour un appareil de mesure ?

Pour quelle valeur R_{cc} de R_e cet amortissement (critique) est-il réalisé ?

2) Réalisation du voltmètre

Le montage suivant est celui d'un voltmètre analogique : aux bornes du microampèremètre de résistance R , on branche deux résistances R_{ec} (dont la valeur a été calculée à la question 1) d) et R_1 .



Exercice commenté

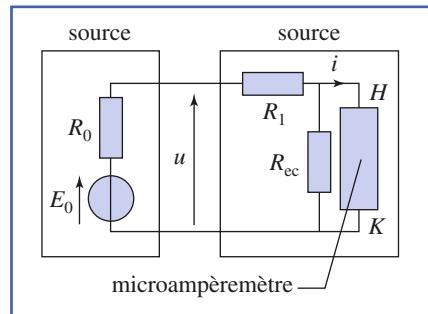
La résistance R_1 est très grande devant R et R_{ec} qui sont inférieures à $1 \text{ k}\Omega$. Ce voltmètre est alimenté par un générateur de tension de f.e.m. E_0 et de résistance R_0 .

a) Quel est l'ordre de grandeur de la résistance R_{th} équivalente au circuit « vu » par le microampèremètre lorsque E_0 est éteinte ? Conclure.

b) Établir la relation d'étalonnage $\theta_p(u)$ du voltmètre.

c) La déviation maximale de l'aiguille est obtenue pour $i = 100 \text{ mA}$ et une tension mesurée $u = 10 \text{ V}$ avec R de l'ordre de 100Ω .

Déterminer l'ordre de grandeur de R_1 et commenter.

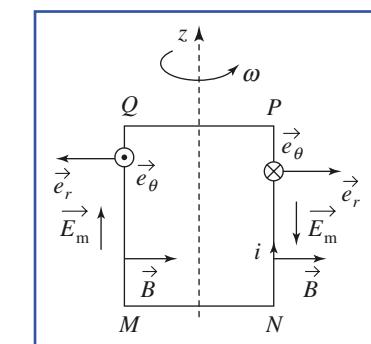


CONSEILS

1) a) Dans tous ces problèmes sur l'induction, il faut être attentif au signe des f.e.m. et à celui des actions mécaniques. Il faut orienter les grandeurs électriques relativement à un sens de parcours choisi, puis s'assurer que les effets obtenus vérifient bien la loi de Lenz.

Pour déterminer la f.e.m de déplacement, on a en général le choix entre le bilan de puissance, le calcul de la circulation du champ électromoteur et l'application de la loi de Faraday. Cette dernière loi est ici inapplicable, car on ne connaît la valeur du champ que sur les fils. Le bilan d'énergie fournit souvent la solution la plus simple. Le calcul de la circulation du champ électromoteur donne ici sur NP :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{Lorenz}} &= \vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= \left(\dot{\theta} \frac{a}{2} \vec{e}_\theta \right) \wedge (\mathbf{B} \vec{e}_r) \\ &= -\dot{\theta} \frac{a}{2} \mathbf{B} \vec{e}_z, \text{ d'où :} \\ e_{NP} &= \int_N^P \vec{E}_{\text{Lorenz}} \cdot d\vec{l} = -\dot{\theta} \frac{a}{2} B b. \end{aligned}$$



SOLUTION

1) a) Équation mécanique

Pour chaque tour de bobinage, les forces de Laplace sur les côtés NP et QM sont égales à Bib , et leur moment par rapport à Δ est $Bib \frac{a}{2}$ (les moments sont tous dans le même sens). Les forces sont nulles pour les côtés MN et PQ . Au total, cela donne :

$$M_{\text{Laplace}} = NiBab = i\Phi_0.$$

On en déduit $J\ddot{\theta} = M_{\text{Laplace}} + M_{\text{rappel}} + M_{\text{fort}}$, soit :

$$J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + C\theta = i\Phi_0.$$

Φ_0 est homogène à un flux, mais ne représente pas du tout le flux de \vec{B} (non nul) à travers le cadre.

Équation électrique

La f.e.m. de déplacement e_L est donnée par :

$$e_L i = -\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -M_{\text{Laplace}} \dot{\theta},$$

d'où :

$$e_L = -\Phi_0 \dot{\theta}.$$

La f.e.m. d'auto-induction est $e_{\text{auto}} = -L \frac{di}{dt}$. On en déduit :

$$E - \Phi_0 \dot{\theta} - L \frac{di}{dt} = (R + R_e)i.$$

b) En régime permanent, les dérivées sont nulles et on obtient :

$$i_p = \frac{E}{R + R_e} \quad \text{et} \quad \theta_p = \frac{\Phi_0}{C} i_p.$$

c) L'équation électrique s'écrit :

$$i + \frac{L}{R + R_e} \frac{di}{dt} + \frac{\Phi_0}{R + R_e} \dot{\theta} = i_p = \frac{C}{\Phi_0} \theta_p.$$

De l'équation mécanique, il vient :

$$i = \frac{J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + C\theta}{\Phi_0}.$$

Si on néglige l'auto-induction, on obtient :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \omega_0^2\theta_p.$$

Sur QM , on obtient de la même façon :

$$e_{QM} = -\dot{\theta} \frac{a}{2} Bb.$$

Sur MN et sur PQ , les circulations du champ \vec{E}_{Lorentz} sont nulles.

D'où, au total $e_L = -\dot{\theta} BNab$.

Il est préférable d'utiliser la méthode la plus simple et la plus sûre qui consiste à écrire que la puissance des forces de Laplace dans un champ magnétique permanent « extérieur » est égale à $-e_L i$.

c) La résistance du circuit électrique dissipe de l'énergie : le terme en R de l'équation différentielle est opposé au mouvement.

Vérifier son signe. Ici, λ étant positif, on a bien :

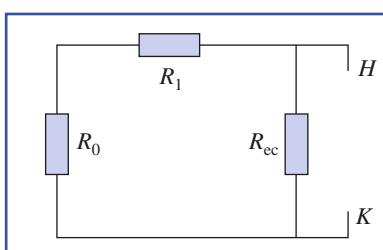
$$\ddot{\theta} = -2\lambda\dot{\theta} - \omega_0^2\theta + \omega_0^2\theta_p,$$

ce qui indique que le terme $-2\lambda\dot{\theta}$ joue le rôle d'un terme d'amortissement fluide.

d) C'est une occasion de revoir les oscillations libres amorties, étudiées en première année (cf. H-Prépa, Mécanique, 1^{re} année).

En particulier, quelles sont les caractéristiques essentielles des trois régimes pseudo-périodique, critique, et apériodique ? Comment les obtient-on ? Un utilisateur demande à un appareil d'avoir, entre autres qualités, un temps de réponse aussi bref que possible.

2) Voici le schéma équivalent pour le calcul de la résistance équivalente :

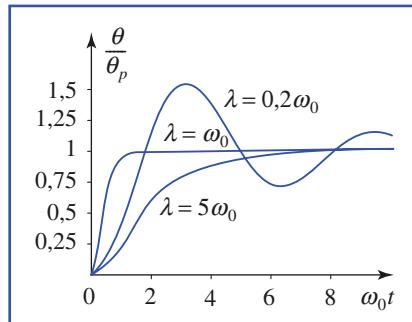


d) On reconnaît une équation classique d'oscillateur amorti :

- $\lambda < \omega_0$: amortissement faible, régime pseudo-périodique ;
- $\lambda > \omega_0$: amortissement fort, régime apériodique ;
- $\lambda = \omega_0$: amortissement critique.

Les trois courbes ci-dessous représentent ces trois régimes pour la même valeur de ω_0 et pour les mêmes conditions initiales.

$$\theta(0) = 0 \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0.$$



Pour que l'appareil soit utilisable, il faut que la valeur permanente soit rapidement atteinte, d'où l'intérêt de se rapprocher du régime critique qui est obtenu pour :

$$R_e = R_{ec} = \frac{\Phi_0^2}{2J\omega_0 - h} - R.$$

2) a) La résistance équivalente vue de l'ampèremètre est $R_{th} = (R_0 + R_1) // R_{ec}$

$$R_{th} = \frac{(R_0 + R_1)R_{ec}}{R_0 + R_1 + R_{ec}}.$$

La résistance R_1 est très grande devant R_{ec} , donc $R_{th} \approx R_{ec}$.

La résistance d'alimentation du microampèremètre est donc voisine de R_{ec} , ce qui optimise le temps de réponse du voltmètre.

b) En régime permanent, le système est équivalent à un réseau de résistances ; il vient :

$$i_p = \frac{R_{ec}}{R_1(R_{ec} + R) + R_{ec}R} u$$

$$\frac{\Phi_0}{C} R_{ec}$$

et donc $\theta_p = \frac{\Phi_0}{R_1(R_{ec} + R) + R_{ec}R} u$.

$$\text{c)} \frac{R_{ec}}{R_1(R_{ec} + R) + R_{ec}R} = \frac{i_{\max}}{u_{\max}} = 10^{-5} \text{ S.}$$

Si $R_1 \gg R_{ec}$ et $R_1 \gg R$, cette équation se simplifie en :

$$R_1 \approx 100 \text{ k}\Omega.$$

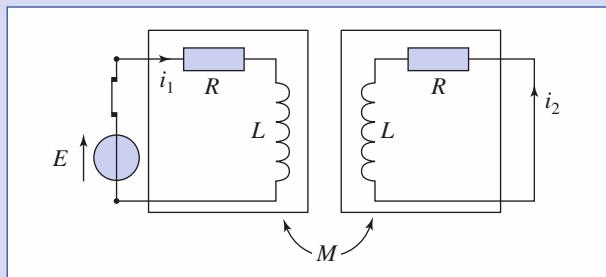
Les hypothèses de calcul sont donc justifiées.

Exercices

1 Régime transitoire dans deux circuits couplés

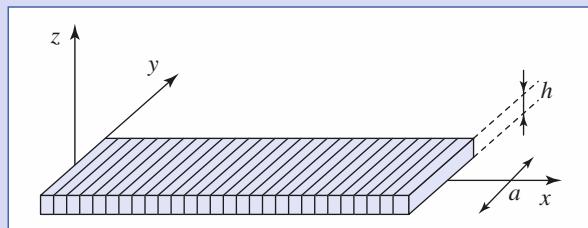
Soit les deux circuits couplés du document ci-dessous, avec E constant et $M > 0$.

- 1) Écrire les deux équations différentielles couplées vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$ lorsque l'interrupteur est fermé.
- 2) En déduire deux équations différentielles découplées par un changement de variable simple.
- 3) L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.
- a) Déterminer $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans le cas où M est inférieur à L .
- b) Reprendre ce dernier calcul dans le cas limite du couplage parfait (pour $L = M$).



2 Courants de Foucault

Sur un parallélépipède de largeur a , d'épaisseur $h \ll a$ et de grande longueur, est enroulé du fil parcouru par un courant d'intensité $I = I_m \cos(\omega t)$, à raison de n tours par unité de longueur. Ce solénoïde, très aplati, est rempli par un métal non magnétique de conductivité γ .



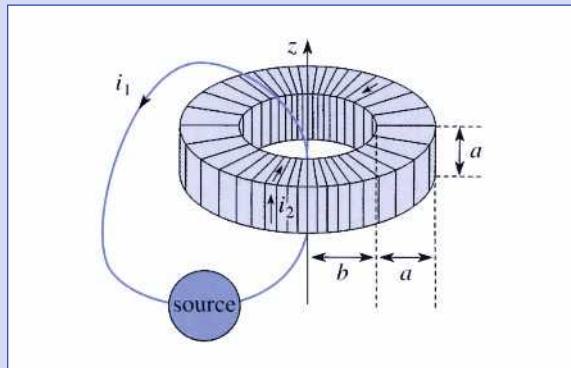
Loin des bords, on suppose que le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E(z)\vec{e}_y$.

- 1) Vérifier que cette hypothèse est compatible avec les lois de l'électromagnétisme et la géométrie du système.
Étudier la parité de la fonction $E(z)$.
- 2) Calculer le vecteur densité de courant \vec{j} et la puissance moyenne \mathcal{P} dissipée par une longueur ℓ mesurée selon (Ox) , en négligeant le champ \vec{B} créé par les courants induits.
- 3) À quelle condition cette dernière hypothèse est-elle justifiée ?

3 Inductance mutuelle d'une spire et d'une bobine torique

N spires sont régulièrement bobinées sur un tore de section carrée de côté a , d'axe (Oz) et de rayon intérieur b .

Cette bobine a une résistance ohmique totale R_2 .



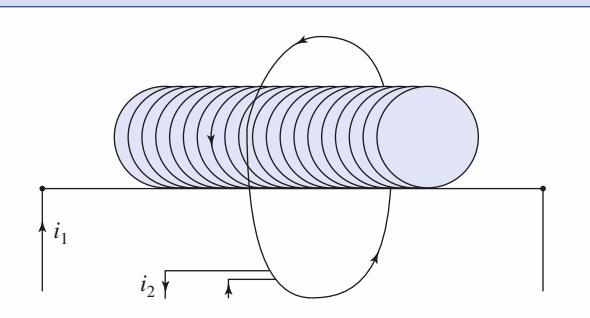
Une spire parcourue par un courant $i_1 = i_{1m} \cos \omega t$ enlace le tore.

- 1) Calculer l'inductance L_2 de la bobine torique et l'inductance mutuelle M des deux circuits en respectant les orientations de la figure.
- 2) La bobine torique est fermée sur elle-même. Calculer le courant i_2 dans cette bobine, en régime sinusoïdal.
- 3) La bobine torique est ouverte.
Déterminer la tension maximale entre ses bornes.

4 Couplage entre un solénoïde et une bobine

Une bobine de N_2 spires enlace un solénoïde idéal de N_1 spires, de longueur ℓ et de section S .

- 1) Calculer l'inductance mutuelle M de ces deux circuits, avec les orientations du document ci-dessous.
- 2) La bobine de résistance R est fermée sur elle-même.



Le solénoïde est parcouru par le courant i_1 tel que :

$$i_1 = i_0 \cos \omega t.$$

On suppose de plus que $N_2 \ll N_1$.

Montrer que l'inductance L_2 est négligeable et déterminer le courant i_2 dans la bobine.

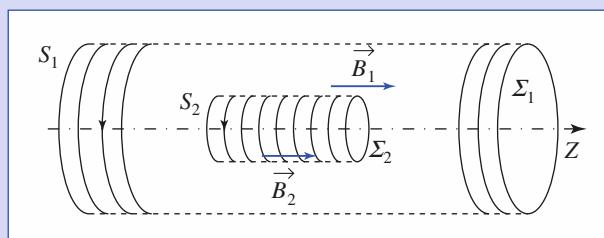
3) Proposer une méthode simple, utilisant un générateur B.F. et un oscilloscope pour mesurer M .

5 Couplage entre deux solénoïdes

Deux solénoïdes S_1 et S_2 , de section circulaire, ont pour caractéristiques respectives :

- n_1 et n_2 spires par unité de longueur ;
- section d'aires Σ_1 et Σ_2 ($\Sigma_2 < \Sigma_1$) ;
- longueurs ℓ_1 et ℓ_2 ($\ell_2 < \ell_1$) suffisamment grandes pour pouvoir négliger les effets d'extrémités ;
- résistances R_1 et R_2 .

S_2 est placé à l'intérieur de S_1 et leurs axes de symétries sont confondus.



1) Déterminer les inductances L_1 et L_2 ainsi que la mutuelle inductance M .

2) S_2 est fermé sur lui-même et S_1 est parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation ω , qui crée un champ magnétique $\vec{B}_1 = B_1(t)\vec{e}_z$, à l'intérieur de S_1 . Soit alors :

$$\vec{B}_2 = B_2(t)\vec{e}_z,$$

le champ magnétique (total) qui règne à l'intérieur de S_2 .

Déterminer le rapport des amplitudes $\frac{B_{2m}}{B_{1m}}$ des deux champs.

3) Une tension en créneaux u_1 , de valeur $\pm U_0$ et de période T grande devant les constantes de temps des solénoïdes, alimente S_1 . De plus, S_2 est en circuit ouvert. Déterminer la tension u_2 aux bornes de S_2 .

4) Les deux solénoïdes, bobinés dans le même sens, sont branchés en parallèle et sont alimentés par une tension sinusoïdale de pulsation ω .

On suppose :

$$R_1 = R_2 = R; \quad n_1 = n_2 = n \quad \text{et} \quad \ell_1 = \ell_2 = \ell.$$

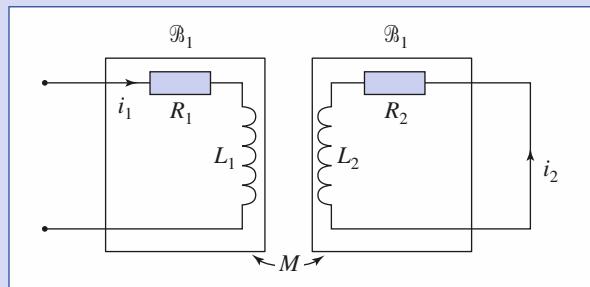
Déterminer le rapport des valeurs maximales des courants i_1 et i_2 .



Impédance équivalente

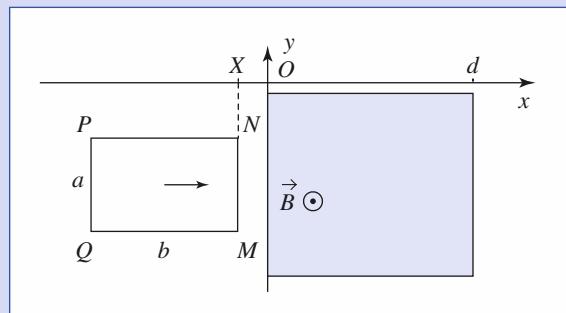
Une bobine \mathcal{B}_1 d'inductance L_1 et de résistance R_1 est couplée, avec un coefficient de mutuelle M , à une bobine \mathcal{B}_2 d'inductance L_2 et de résistance R_2 fermée sur elle-même.

Déterminer l'impédance complexe entre les bornes de \mathcal{B}_1 , en régime sinusoïdal de pulsation ω .



Freinage électromagnétique

Une spire conductrice rectangulaire $MNPQ$ mobile de côtés a et b , de masse m , de résistance R et d'inductance négligeable, et en translation parallèlement à (Ox) .



Elle traverse une zone de longueur d supérieure à b , où le champ magnétique est uniforme et égal à $B\vec{e}_z$.

On admet que le champ est nul en dehors de cette zone, sans se préoccuper du problème lié à la discontinuité de \vec{B} . On néglige aussi toute force autre que magnétique (ce qui peut être approximativement réalisé en suspendant le conducteur à un fil très long). $X(t)$ représente l'abscisse du côté MN , de longueur a , et v désignant la vitesse du cadre.

1) Écrire les équations différentielles vérifiées par $v(t)$ et par $v(X)$.

2) Le conducteur entre dans le champ avec une vitesse v_0 . À quelle condition en ressort-il ? Si cette condition est vérifiée, déterminer la diminution de vitesse Δv .

Exercices

3) Le conducteur est en fait une plaque mince carrée de cuivre, d'épaisseur h et de côté a . À partir d'un modèle grossier, évaluer l'ordre de grandeur de Δv .

A.N. : conductivité $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$;

masse volumique $\rho = 9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;

$B = 0,5 \text{ T}$; $a = 1 \text{ cm}$.

8 Résistance équivalente aux pertes par courant de Foucault

À l'intérieur d'un solénoïde très long, de longueur ℓ , comportant N spires d'aire S , normales à l'axe (Oz) et de résistance R_0 , on introduit un tube cylindrique creux conducteur de conductivité γ , de rayon a et de même longueur ℓ . La paroi du tube est suffisamment mince pour y négliger l'effet de peau et son épaisseur b est faible devant a .

1) Rappeler l'expression de l'inductance L_0 du solénoïde en l'absence du tube.

2) Le solénoïde est traversé par un courant sinusoïdal $i = i_m \cos \omega t$ et il apparaît dans le tube un courant induit de densité volumique \vec{j} .

a) Déterminer, en utilisant les symétries et le théorème d'Ampère, le champ \vec{B}_0 créé par le courant i , puis le champ \vec{B}_1 créé par le courant induit dans le tube.

b) Déterminer l'impédance complexe :

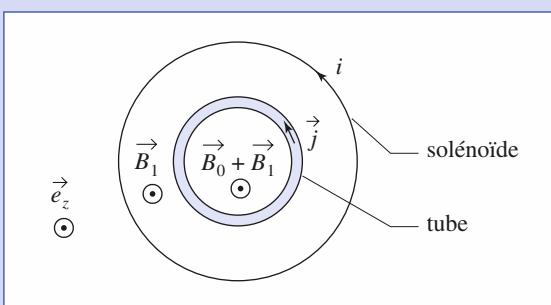
$$Z(\omega) = R(\omega) + jL(\omega)\omega$$

entre les bornes du solénoïde, en fonction de L_0 , γ , ω , a et b .

c) Un solénoïde, de section circulaire de rayon $a = 1 \text{ cm}$ est bobiné sur un anneau (creux) de cuivre de conductivité $\gamma = 6,0 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et d'épaisseur $b = 1 \text{ mm}$.

En basse fréquence, la résistance du solénoïde est $R_0 = 10 \Omega$ et son inductance est $L_0 = 0,1 \text{ H}$.

Préciser les fréquences pour lesquelles le modèle précédent est acceptable et calculer l'ordre de grandeur de $R(\omega)$ à 1 kHz.



9 Lévitation magnétique

Un long solénoïde vertical (semi-infini) à section circulaire (de rayon a et ayant n spires jointives par unité de longueur) est parcouru par $i_1 = i_{1m} \cos \omega t$. Une bobine circulaire constituée de N spires de rayon b ($b \ll a$), de résistance R , d'inductance L et de masse m , est placée au-dessus du solénoïde, à une distance z de son extrémité. On repérera la position de la bobine par l'angle θ .

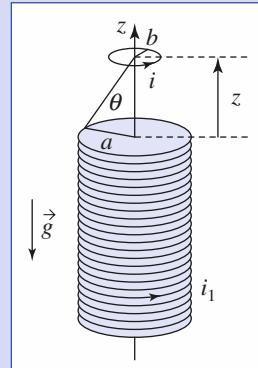
1) Calculer la force magnétique moyenne $\langle F \rangle$ appliquée à la bobine. Pour quelle valeur i_{0lm} de i_{1m} la spire peut-elle léviter, juste au-dessus du solénoïde, à la cote z ? L'équilibre est-il stable?

2) Quelle est alors la puissance \mathcal{P}_0 dissipée par effet Joule dans la bobine?

3) A.N. : $L = 0,7 \text{ mH}$;
 $R = 0,2 \Omega$; fréquence = 5 kHz ;
 $b = 1 \text{ cm}$; $a = 3 \text{ cm}$;
 $mg = 0,3 \text{ N}$; $N = 100$; $n = 10^4 \text{ spires} \cdot \text{m}^{-1}$.

Comparer les valeurs de R et $L\omega$?

Calculer i_{0lm} et \mathcal{P}_0 .



10 Principe du moteur linéaire

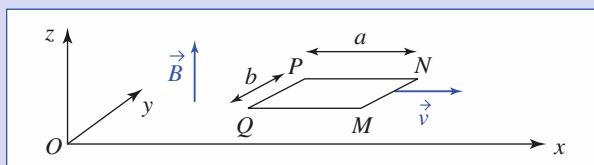
Un ensemble d'électro-aimants (non représentés ci-dessous) crée le long d'un axe (Ox) un champ magnétique dépendant du temps et de l'abscisse, de la forme :

$$\vec{B} = f(u) \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad u = t - \frac{x}{v_0}.$$

Un conducteur se déplace le long de l'axe (Ox) avec une vitesse v . On modélise ce conducteur par une spire rectangulaire $MNPQ$ de dimensions a et b , normale à \vec{e}_z , de résistance R et d'inductance négligeable. L'abscisse du côté MN du cadre est notée $X(t)$.

1) Décrire $\vec{B}(x, t)$.

2) Calculer la force magnétique qui s'exerce sur le conducteur en fonction de b , R , v_0 , v et de valeurs particulières $f(u_1)$, $f(u_2)$ de la fonction f . On précisera les expressions de u_1 et u_2 en fonction de t , X , v_0 et a . Discuter son signe à partir de la loi de Lenz.



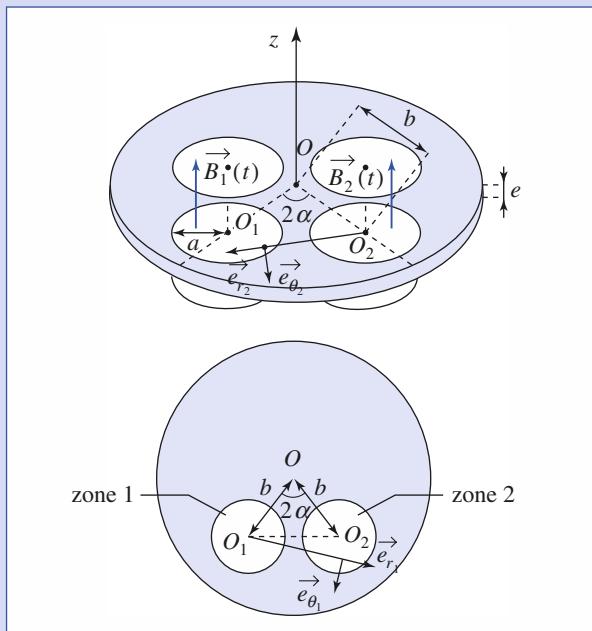
11

Principe du compteur électrique

Deux électro-aimants créent, chacun dans une zone à section circulaire de rayon a , un champ magnétique variable : $\vec{B}_1 = B_1(t)\vec{e}_z$ et $\vec{B}_2 = B_2(t)\vec{e}_z$.

Ces champs s'appliquent sur un disque métallique mince, d'épaisseur e et de conductivité γ , mobile autour de l'axe vertical (Oz). Les centres O_1 et O_2 des deux zones sont situés à une distance b de l'axe de rotation.

On néglige le champ induit par les courants de Foucault et la rotation est suffisamment lente pour pouvoir négliger le champ électromoteur de Lorentz (sur les anciens modèles de compteurs électriques, équipés de disques mobiles, il est possible d'observer que la vitesse de rotation de ces disques est toujours faible).



1) En supposant que le disque est illimité, calculer les densités de courant j_1 et j_2 induites par les deux champs, à l'extérieur de leur zone d'application. On utilisera deux systèmes de coordonnées polaires, de centres O_1 et O_2 .

2) On pose $\vec{I} = \iint_{\text{zone } 2} \frac{\vec{e}_{r_1}}{r_1} dS$ et $I = \|\vec{I}\|$.

Exprimer en fonction de I et des données (des champs $B_1(t)$, $B_2(t)$ et de leurs dérivées, entre autres), le moment $\mathcal{M}_{2 \rightarrow 1}$ par rapport à l'axe de rotation des actions de Laplace dues à l'interaction du champ \vec{B}_2 et du courant \vec{j}_1 , puis le

moment $\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}$, correspondant à l'interaction de \vec{B}_1 et de \vec{B}_2 , et enfin le moment total $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2 \rightarrow 1} + \mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}$, (on admettra que les autres contributions éventuelles au moment total sont négligeables).

3) Estimer une valeur approchée de ce moment en supposant $a \ll b$ et $a \ll O_1O_2$.

4) On suppose :

$$B_1(t) = B_{1m} \cos(\omega t + \psi)$$

$$\text{et} \quad B_2(t) = B_{2m} \cos(\omega t).$$

Montrer que :

$$\mathcal{M} = CB_{1m}B_{2m} \sin \psi,$$

et donner une valeur approchée de C .

5) Les deux électro-aimants EA₁ et EA₂, assimilés à des inductances pures L_1 et L_2 , sont branchés selon le schéma électrique ci-contre. La source de tension sinusoïdale produit dans le circuit une tension $u = u_m \cos \omega t$ et un courant $i = i_m \cos(\omega t + \phi)$, qui alimentent le dipôle D dont on veut mesurer l'énergie électrique consommée. Les champs B_1 et B_2 créés par les électro-aimants EA₁ et EA₂ sont alors proportionnels aux courants qui les traversent et on peut noter, avec i courant dans EA₁ et i_u courant dans EA₂ :

$$B_1 = K_1 i \quad \text{et} \quad B_2 = K_2 i_u.$$

Un aimant permanent freine le disque en provoquant des courants de Foucault qui exercent un moment de freinage égal à $-f \Omega$, où Ω représente la vitesse angulaire de rotation du disque. Le régime transitoire étant très bref, on admet que cette vitesse de rotation Ω est en permanence égale à $\frac{\mathcal{M}}{f}$.

Montrer que la rotation du disque (angle balayé par le disque) indique l'énergie consommée dans le dipôle D .

12

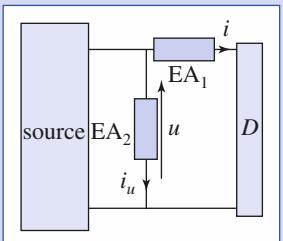
Principe de la dynamo auto-excitée

Un disque conducteur, de rayon a et d'épaisseur e , est en rotation, à la vitesse angulaire ω constante, autour de son axe (OA) coïncidant avec l'axe (Oz). L'axe (OA) est conducteur et le tour du disque est en contact électrique avec une couronne fixe, par l'intermédiaire de balais.

La couronne fixe est reliée à une borne C par un fil fixe lui aussi.

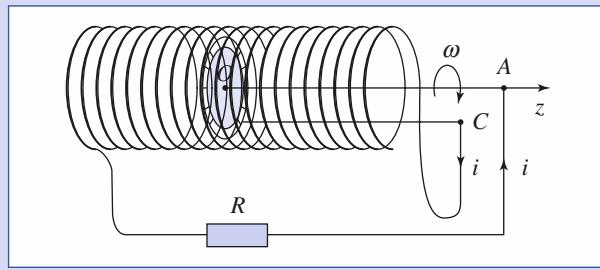
L'ensemble est soumis à un champ magnétique extérieur constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

On néglige la résistance électrique de tous ces conducteurs.

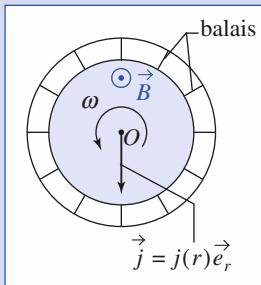


Exercices

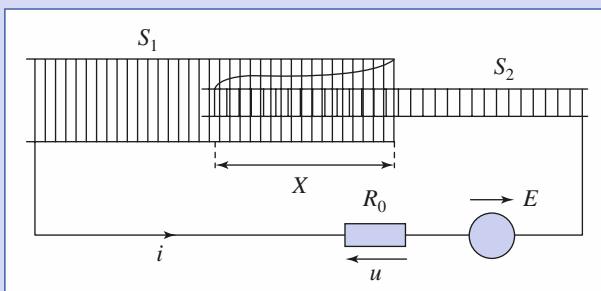
- 1) Déterminer la différence de potentiel u_{AC} .
- 2) Le champ \vec{B} est en fait dû au courant i créé par la rotation du disque.
- On peut supposer que le disque mobile est placé dans un solénoïde d'inductance L , comportant n spires jointives par unité de longueur, comme sur le schéma électrique ci-après. La résistance R inclut celle du solénoïde.



- a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par le courant i .
- b) Montrer que, pour une valeur ω_0 de ω , il existe une solution stable non nulle pour i . Que se passe-t-il si ω est inférieur ou supérieur à ω_0 ?
- c) Dans le cas où i est non nul, déterminer de deux façons la relation existant entre le couple qu'il faut exercer pour faire tourner le disque et l'intensité.
- 3) Quel rapport peut-il exister entre ce système et le champ magnétique terrestre ?



13 Capteur de vitesse



Un solénoïde S_2 peut coulisser à l'intérieur d'un autre solénoïde S_1 .

Les deux solénoïdes ont la même longueur ℓ , la même inductance L_0 et la même résistance R .

Leurs sections ont pour aires S_1 et S_2 avec $S_1 = 4S_2$.

S_1 et S_2 sont en série comme indiqué sur la figure et les spires sont bobinées dans le même sens.

On suppose que X est suffisamment grand pour pouvoir négliger les effets de bords.

- 1) Déterminer, à l'aide de L_0 , X et ℓ , l'inductance propre de l'ensemble S_1S_2 en série.

- 2) S_2 est animé d'un petit mouvement oscillant : $X = X_0 + \delta X(t)$ avec $\delta X(t) = a \cos \omega t$, avec $a \ll X_0$. La tension $u(t)$ se met alors sous la forme : $u(t) = U_0 + \delta u(t)$ où $|\delta u| \ll U_0$.

Exprimer $\delta u(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

- 3) Soit $v = \frac{dX}{dt}$ la vitesse de déplacement.

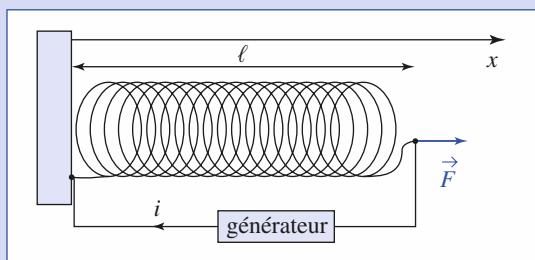
Pour quelles fréquences peut-on écrire $\delta u(t) = Kv$, K étant une constante indépendante de ω ?

Tracer le diagramme représentant la fonction de transfert $\log \frac{\delta u}{v_{\max}}$ en fonction de ω .

Comment qualifier cette fonction de transfert ?

14 Contraction d'un ressort

Un ressort de longueur au repos ℓ_0 et de raideur k constitue un solénoïde étirable de N spires de section S .



- 1) Évaluer l'inductance propre L du solénoïde.

- 2) On envisage la transformation élémentaire suivante : tandis qu'un opérateur augmente lentement la longueur du ressort en appliquant une force de traction $F = Fe_x$, le générateur électrique fournit un courant stabilisé à une valeur donnée.

Effectuer un bilan faisant apparaître les énergies fournies par ces sources, ainsi que celles qui ont été accumulées par le système (à définir) qui les a reçues.

En déduire une expression de la force exercée pour éviter la contraction du solénoïde de la forme :

$$F = k(\ell - \ell_0) + h(\ell)i^2.$$

Cette relation peut-elle être appliquée dans le cas général, avec une source quelconque ?

- 3) Application : le ressort possède $N = 500$ spires, sa longueur est de $\ell_0 = 1$ mètre, sa section vaut 2 cm^2 . Il s'allonge de 4 cm par Newton.

Pour quelle valeur du courant sa longueur diminue-t-elle de 1 mm ?

Conclure.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 226.

- | | |
|-------------------|----------------|
| 1. Vrai : b ; | Faux : a, c, d |
| 2. Vrai : b ; | Faux : a, c |
| 3. Vrai : b, c ; | Faux : a, d |
| 4. Vrai : c ; | Faux : a, b, d |
| 5. Vrai : a, c, d | Faux : b |

La solution pour I est inchangée, donc :

$$i_1 = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right] \quad \text{et} \quad i_2 = -\frac{E}{2R} e^{-\frac{t}{\tau_1}}.$$

Il s'agit d'un cas limite, vers lequel tendent les solutions pour M tendant vers L . Les courbes ci-dessous représentent le cas où $M = 0,95L$ et le cas $M = L$. On observe dans ce cas une discontinuité des intensités bien qu'il y ait des inductances, c'est-à-dire des inerties électriques.

À la date $t = 0^+$, les deux courants i_1 et i_2 sont apparus spontanément, car on est dans le cas où (cf. § 1.2.5) :

$$\frac{i_1}{i_2} = X = -\frac{M}{L} = -\frac{L}{M} = -1.$$

1)

Lorsque l'interrupteur est fermé, on écrit :

$$E = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

et

$$0 = Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

2) En posant $I = i_1 + i_2$ et $J = i_1 - i_2$, on obtient deux équations différentielles découplées :

$$E = RI + (L+M) \frac{dI}{dt} \quad \text{et} \quad E = RJ + (L-M) \frac{dJ}{dt}.$$

3) a) Si L est différent de M , on pose :

$$\tau_1 = \frac{L+M}{R} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{L-M}{R}.$$

Les conditions initiales sont à $t = 0$:

$$i_1(0) = i_2(0) = 0, \quad \text{soit} \quad I(0) = J(0) = 0.$$

On obtient :

si $\tau_2 \neq 0$, c'est-à-dire si $L \neq M$;

$$I = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right] \quad \text{et} \quad J = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

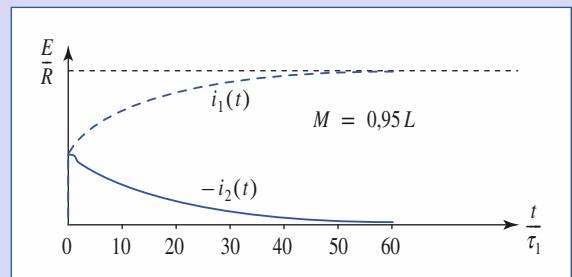
soit :

$$i_1 = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

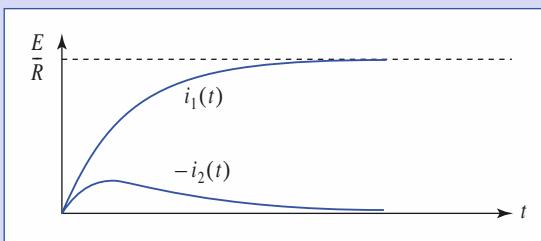
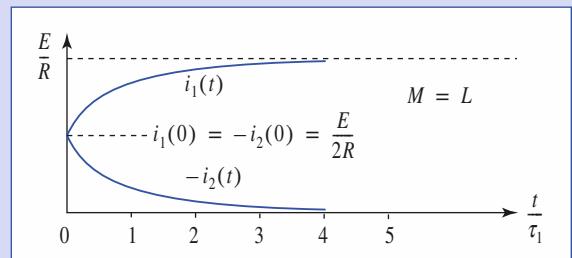
et

$$i_2 = \frac{E}{2R} \left[e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right].$$

Les courbes sont représentées ci-dessous. L'analyse qualitative confirme que l'état final est bien $i_1 = \frac{E}{R}$ et $i_2 = 0$, puisqu'en régime permanent une bobine se comporte comme un fil.



Ce circuit n'a pas d'existence réelle, mais si l'observation des intensités se fait sur un temps très grand devant $\frac{L}{R}$, ces discontinuités seront observables dans le cas limite où $M^2 \approx L^2$.



b) Si $L = M$, $J(t) = \frac{E}{R}$ est discontinu en $t = 0$. Cette discontinuité n'est pas interdite, car si $L = M$, la f.e.m. totale est nulle à l'instante 0^+ dans chaque circuit.

2) Dans le solénoïde, le champ \vec{B} est colinéaire à l'axe (Ox) et les effets de bord son négligés. Ce champ vaut $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_x$ et il est nul à l'extérieur. On peut vérifier que pour le champ \vec{E} proposé :

- $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}$ est bien orienté selon (Ox) comme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$;
- tout plan orthogonal à (Ox) est plan de symétrie pour les sources (ici le courant) ; \vec{E} est donc orthogonal à (Ox) ;
- $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (le métal n'est pas chargé).

Ainsi, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ est tangent à la surface extérieure du métal.

Si on retourne le solénoïde (par une rotation de π autour de l'axe (Ox)), le système est inchangé et $\vec{E}(z)$ devient $-\vec{E}(-z)$, $\vec{E}(z)$ est donc impaire.

Corrigés

2) On calcule la circulation de \vec{E} le long du rectangle formé à partir de deux segments de longueur a , parallèles à (Oy) , de même abscisse x et de cotes $+z$ et $-z$.

D'après le théorème de Stokes

$$\oint_{\text{rectangle}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2aE(z) = -2za \frac{dB}{dt},$$

d'où $E(z) = \mu_0 n I_m \omega \sin(\omega t) z$.

La puissance moyenne volumique dissipée dans le métal est :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \gamma \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \gamma (\mu_0 n \omega I_m z)^2.$$

D'où pour une longueur ℓ de métal :

$$\mathcal{P} = \iiint \mathcal{P}_{\text{vol}} d\tau = \frac{\gamma}{24} (\mu_0 n \omega I_m)^2 a \ell h^3.$$

3) L'hypothèse est justifiée si l'épaisseur de la plaque est faible devant la profondeur de pénétration du champ, soit :

$$a \ll \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Cela correspond donc aux basses fréquences.

3 1) Soit \vec{B}_2 le champ créé par le courant i_2 . D'après la symétrie du problème, $\vec{B}_2 = B_2(r, z)\hat{e}_\theta$. D'après le théorème d'Ampère, $B_2 = 0$ à l'extérieur de la bobine et $B_2 = -\frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r}$ à l'intérieur.

$$\Phi_{\text{propre}} = \int_{r=b}^{b+a} \frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r} adr = L_2 i_2,$$

$$\text{avec } L_2 = \mu_0 N^2 \frac{a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}.$$

Le flux de B_2 à travers la spire se limite au flux de B_2 à travers une section du tore. D'où, avec les orientations choisies :

$$M = -\mu_0 N \frac{a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}.$$

2) $R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$ donne en notation complexe :

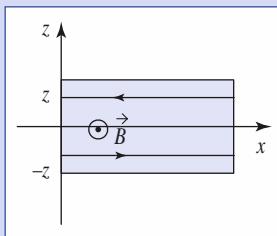
$$i_2 = -i_1 \frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}.$$

Donc $i_2 = i_{2m} \cos(\omega t + \phi)$ avec :

$$i_{2m} = \frac{i_{1m}}{\sqrt{N^2 + \left(\frac{R_2}{M\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \phi = \arctan \frac{R_2}{L_2\omega}.$$

3) $u_2 = M \frac{di_1}{dt}$, soit $u_{2m} = |M| \omega i_{1m}$.

4 1) On ne sait pas calculer le champ créé par une bobine en tout point. En revanche, celui créé par le solénoïde est connu en tout point.



Il faut donc calculer $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ pour déterminer M . Le champ créé par le solénoïde est égal à :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1 \hat{e}_z,$$

à l'intérieur et il est nul à l'extérieur. Son flux à travers toute spire de la bobine est donc :

$$\Phi_0 = +\mu_0 \frac{N_1}{\ell} S i_1,$$

car les spires de la bobine ont la même orientation que celles du solénoïde. Cela donne :

$$M = N_2 \Phi_0 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} S.$$

2) La f.e.m. d'induction et le courant dans la bobine sont :

$$e_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{e_2}{R}.$$

Comme l'inductance L_2 est proportionnelle à N_2^2 , il est possible de la négliger devant M .

Cela donne immédiatement :

$$i_2 \approx -\frac{M}{R} \frac{di_1}{dt} = +\mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \frac{S}{R} i_0 \omega \sin(\omega t).$$

3) La bobine est ouverte ($i_2 = 0$) et un oscilloscope bicourbe mesure simultanément la tension u_2 entre ses bornes et une tension proportionnelle à i_1 , aux bornes d'une résistance placée en série avec le solénoïde. On obtient en régime sinusoïdal :

$$i_1 = i_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$u_2 = -e_2 = -Mi_0 \omega \sin(\omega t + \phi).$$

On peut ainsi mesurer :

$$M = \frac{u_{2\max}}{\omega i_{1\max}}.$$

5 1) $L_1 = \mu_0 n_1^2 \ell_1 \Sigma_1$; $L_2 = \mu_0 n_2^2 \ell_2 \Sigma_2$ et $M = \mu_0 n_1 n_2 \ell_2 \Sigma_2$.

Il faut noter que le calcul de M se fait à partir du flux du champ \vec{B}_1 créé par S_1 à travers S_2 .

2) Le courant i_2 est solution de :

$$R_2 i_2 = e_{\text{induit total}} = -\frac{dB_2}{dt} n_2 \ell_2 \Sigma_2,$$

(on rappelle que B_2 désigne le champ total dans S_2).

Le théorème d'Ampère conduit à $B_2 - B_1 = \mu_0 n_2 i_2$, d'où :

$$B_2 - B_1 + \frac{\mu_0 n_2^2 \ell_2 \Sigma_2}{R_2} \frac{dB_2}{dt} = 0.$$

Soit, en notation complexe :

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{1 + j \frac{L_2 \omega}{R_2}} \quad \text{et} \quad \frac{B_{2m}}{B_{1m}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L_2 \omega}{R_2}\right)^2}}.$$

$$3) u_2 = M \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad u_1(t) = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}.$$

$i_1(t)$ est une succession de fonctions exponentielles :

$$i_1 = \pm \frac{U_0}{R_1} \left[1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} \right], \text{ avec } \tau = \frac{L_1}{R_1},$$

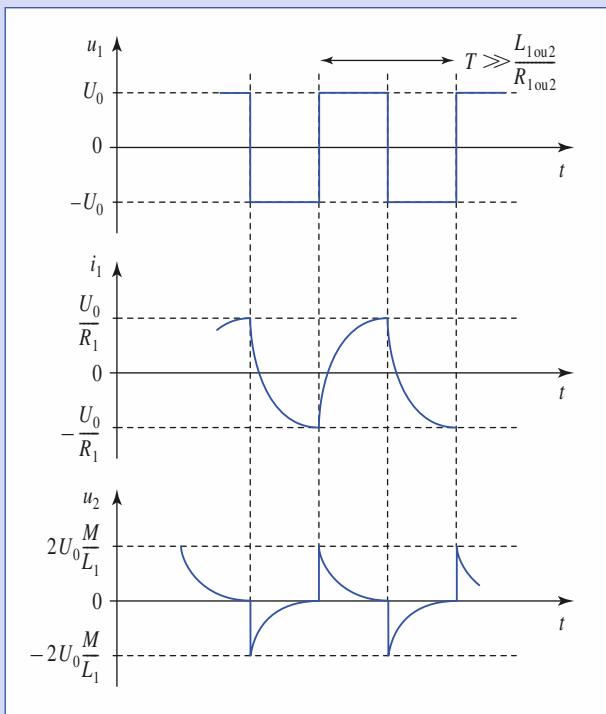
(en prenant $t=0$ à chaque basculement de u_1 et en n'oubliant pas que i_1 est continu à chaque basculement).

On en déduit :

$$u_2 = \pm 2U_0 \frac{M}{L_1} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

soit :

$$u_2 = \pm 2U_0 \frac{n_2}{n_1} e^{-\frac{R_1 t}{L_1}}.$$



$$4) u_1 = u_2 = R i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = R i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Dans le cas étudié, $L_2 = M$, et il vient, en notation complexe :

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{R + j\omega(L_1 - M)}{R} = 1 + j \frac{\mu_0 n^2 \ell (\Sigma_1 - \Sigma_2) \omega}{R}$$

$$\text{d'où : } \frac{i_{2m}}{i_{1m}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0 n^2 \ell (\Sigma_1 - \Sigma_2) \omega}{R} \right)^2}.$$

6 On écrit la loi d'Ohm généralisée pour les deux bobines, en notation complexe :

$$u_1 = R_1 i_1 + jL_1 \omega i_1 + jM \omega i_2$$

$$\text{et } 0 = R_2 i_2 + jL_2 \omega i_2 + jM \omega i_1.$$

On en déduit que u_1 est de la forme $u_1 = Z i_1$, avec $Z = R(\omega) + jX(\omega)\omega$.

$$R(\omega) = R_1 + \frac{R_2}{\frac{L_2^2}{M^2} + \frac{R_2^2}{M^2 \omega^2}} \quad \text{et} \quad X(\omega) = L_1 - \frac{L_2}{\frac{L_2^2}{M^2} + \frac{R_2^2}{M^2 \omega^2}}.$$

Remarque : $Z \approx R_1 + jL_1 \omega$ si ω tend vers 0 ou si M tend vers 0.

Comme $M^2 \leq L_1 L_2$, $X(\omega)$ est toujours positif.



1) On oriente la bobine dans le sens $MNPQ$ en faisant attention aux signes.

- $0 < X < b$

Le flux est $\Phi = BaX$, d'où $e = -Bay$ et $i = -\frac{Bay}{R}$.

L'équation mécanique est $m \frac{dv}{dt} = +Bai$, d'où :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 a^2}{mR} v \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dX} = -\frac{B^2 a^2}{mR} \quad \text{car} \quad dX = v dt.$$

- $d < X < d + b$

On a de manière analogue : $\Phi = Ba(b + d - X)$, d'où :

$$i = \frac{Bay}{R} \quad \text{et} \quad m \frac{dv}{dt} = -Bai.$$

L'équation finale est identique à celle obtenue précédemment.

- En dehors de ces intervalles, Φ est constant et v aussi.

2) $v(X)$ est affine sur deux intervalles de longueur b . On en déduit donc :

$$\Delta v = 2 \frac{B^2 a^2}{mR} b \quad \text{si} \quad v_0 > v_c = 2 \frac{B^2 a^2}{mR} b.$$

Si $v_0 < v_c = 2 \frac{B^2 a^2}{mR} b$, le conducteur s'immobilise dans le champ.

Remarque

Si $v_0 > v_c$ on peut déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps lorsque le cadre se trouve partiellement dans le champ \vec{B} , pour $0 < X < b$:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{B^2 a^2}.$$

On en déduit :

$$X(t) = v_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

et on retrouve la diminution de vitesse, $\Delta v = v_0 - v(t_f)$, avec t_f donné par $X(t_f) = 2b$.

3) On identifie le conducteur à un « fil large » de longueur $\ell = 4 \frac{a}{2} = 2a$, de largeur $\frac{a}{2}$ et d'épaisseur h .

Avec ce modèle, il vient :

$$R = \frac{1}{\gamma S} \frac{\ell}{h} \approx \frac{4}{\gamma h},$$

et la vitesse critique vaut :

$$v_c = \frac{B^2 a^2}{mR} a = \frac{\gamma B^2 a}{2\rho} \approx 8,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Si la vitesse v_0 est inférieure à la vitesse critique v_c , le bloc métallique s'immobilise dans le champ (conformément à l'expérience).

Corrigés

8

$$1) L_0 = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S.$$

2) a) D'après les symétries, on sait que $\vec{j} = j\hat{e}_\theta$ et $\vec{B} = B\hat{e}_z$ (pour \vec{B}_0 ou \vec{B}_1).

En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire dont deux côtés sont parallèles à (Oz), on trouve qu'à l'intérieur du solénoïde :

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{\ell} i = \frac{L_0}{NS} i.$$

Le tube de métal se comporte comme un solénoïde parcouru par un courant jb par unité de longueur de tube. On trouve, ainsi, que $B_1 = \mu_0 jb$ à l'intérieur du tube et $B_1 = 0$ à l'extérieur du tube.

b) En calculant la circulation du vecteur de courant $\vec{j} = j\hat{e}_\theta$ sur le cercle de rayon a (paroi du tube) et en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale on obtient :

$$\oint_{\text{ cercle}} \vec{j} \cdot d\vec{r} = 2\pi a j = -\gamma \frac{d(B_0 + B_1)}{dt} \pi a^2,$$

$$\text{soit, puisque } j = \frac{B_1}{\mu_0 b}; 2 \frac{B_1}{\mu_0 b} = -\gamma \frac{d(B_0 + B_1)}{dt} a.$$

En notation complexe (avec $j^2 = -1$), on en déduit :

$$\underline{B}_1 = \underline{B}_0 \frac{1}{-1 + \frac{2j}{\mu_0 \gamma \omega ab}}.$$

Par suite, la loi d'Ohm généralisée s'écrit pour le solénoïde :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= R_0 i + j \omega N(SB_0 + \pi a^2 B_1) \\ &= i \left[R_0 + j L_0 \omega \left(1 + \frac{\pi a^2}{S} \frac{1}{-1 + \frac{2j}{\mu_0 \gamma \omega ab}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \underline{u} = \underline{Z} i = [R(\omega) + jL(\omega)\omega]i,$$

$$\text{avec : } R(\omega) = R_0 + \left(\frac{\pi a^2}{S} \frac{2L_0}{\mu_0 \gamma ab} \right)$$

$$\text{et } L(\omega) = L_0 \left(1 - \frac{\pi a^2}{S} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega ab} \right)^2} \right).$$

c) Cette approximation fournit un ordre de grandeur convenable, tant que b est très inférieur à la profondeur de pénétration $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$. Elle est donc acceptable à 1 kHz, puisque l'on trouve $\delta = 2$ mm.

Dans le cas étudié, $\pi a^2 = S$ et on obtient $R = 235 \Omega$.

9

1) Il faut calculer successivement le courant dans la bobine, puis la résultante des forces de Laplace.

• Le champ \vec{B}_1 crée par le solénoïde au voisinage de son axe est tel que :

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{e}_z = B_0(1 - \cos \theta), \text{ avec } B_0 = \frac{\mu_0 n i_1}{2} \text{ et } \tan \theta = \frac{a}{z}.$$

Le flux de ce champ à travers la bobine (orientée dans le même sens que le solénoïde) vaut :

$$\Phi_{\text{ext}} = NB_0(1 - \cos \theta)\pi b^2 = Mi_1,$$

$$\text{en posant } M = \frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2}(1 - \cos \theta).$$

Donc la bobine est parcourue par un courant i vérifiant :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0.$$

En régime sinusoïdal, on en déduit :

$$i = I \cos \omega t + J \sin \omega t,$$

$$\text{avec } I = -\frac{ML\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} i_{1m} \text{ et } J = \frac{MR\omega}{R^2 + L^2\omega^2} i_{1m}.$$

• La bobine peut être considérée comme un dipôle magnétique dans un champ presque uniforme. Sur ce dipôle s'exerce la force résultante :

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{B}_{\text{ext}} = F \hat{e}_z, \text{ avec } F = Ni\pi b^2 \frac{\partial B_1}{\partial z} = i_1 i \frac{dM}{dz}.$$

La valeur moyenne de cette force est :

$$\langle F \rangle = \langle i_1 i \rangle \frac{dM}{dz} = \frac{1}{2} I i_{1m} \frac{dM}{dz},$$

car $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$ et $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$. On détermine $\frac{dM}{dz}$:

$$\frac{dM}{dz} = -\frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \frac{d(\cos \theta)}{dz} = \frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dz} = -\frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \sin^3 \theta,$$

puisque en dérivant $\tan \theta = \frac{a}{z}$, on obtient $\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dz} = -\frac{a}{z^2}$.

Finalement, on obtient une force moyenne répulsive :

$$\langle F \rangle = \left(\frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \right)^2 \frac{(1 - \cos \theta) \sin^3 \theta}{a} \frac{L\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} i_{1m}^2.$$

« Juste au-dessus » du solénoïde, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et la lévitation se produit pour :

$$mg = \left(\frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \right)^2 \frac{1}{a} \frac{L\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} i_{01m}^2.$$

L'équilibre est stable vis-à-vis d'une translation verticale, car la force répulsive est une fonction décroissante de l'altitude.

En revanche, les autres mouvements éventuels ne sont pas stabilisés dans cette configuration.

2) La puissance dissipée par effet Joule dans la bobine vaut (pour $\theta = \frac{\pi}{2}$) :

$$\mathcal{P}_0 = R \langle i^2 \rangle = \frac{1}{2} R (I^2 + J^2) = \frac{1}{2} R i_{01m}^2 \frac{M_0^2 \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2}$$

$$\text{avec } M_0 = \frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2}.$$

3) Avec les valeurs numériques proposées, on constate que $R \ll L\omega$ et on peut simplifier les relations précédentes :

$$mg = \left(\frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \right)^2 \frac{1}{aL} i_{01m}^2, \text{ d'où } i_{01m} \approx 12,78 \text{ A},$$

$$\mathcal{P}_0 = \frac{1}{2} R \left(\frac{M_0}{L} \right)^2 i_{01m}^2, \text{ soit } \mathcal{P}_0 \approx 1,3 \text{ W}.$$

10 1) \vec{B} a la forme d'une onde qui se propage sans déformation à la vitesse v_0 :

$$B(x, t) = B(x - v_0 \Delta t, t - \Delta t).$$

2) $X(t)$ désigne l'abscisse du point M . On oriente la spire dans le sens $MNPQ$, puis on détermine le flux du champ \vec{B} à travers la spire :

$$\Phi(t) = \int_{X(t)-a}^{X(t)} bB(x, t) dx = -v_0 b \int_{t-\frac{X-a}{v_0}}^{t-\frac{X}{v_0}} f(u) du,$$

car $dx = -v_0 du$.

En désignant par $F(u)$ une primitive de $f(u)$, on peut exprimer ce flux par :

$$\Phi(t) = -v_0 b \left[F\left(t - \frac{X(t)}{v_0}\right) - F\left(t - \frac{X(t)-a}{v_0}\right) \right].$$

On en déduit le courant induit i dans la spire (en n'oubliant pas que $v = \frac{dX}{dt}$):

$$e = Ri = -\frac{d\Phi}{dt} = v_0 b \left(1 - \frac{v}{v_0} \right) \left[f\left(t - \frac{X(t)}{v_0}\right) - f\left(t - \frac{X(t)-a}{v_0}\right) \right].$$

La résultante des actions de Laplace vaut alors :

$$\vec{F} = bi(t)[B(X, t) - B(X-a, t)]\vec{e}_x,$$

$$\text{soit : } \vec{F} = \frac{b^2}{R}(v_0 - v) \left[f\left(t - \frac{X(t)}{v_0}\right) - f\left(t - \frac{X(t)-a}{v_0}\right) \right]^2 \vec{e}_x.$$

Si $v_0 > v$, la loi de Lenz impose à la force d'être orientée selon \vec{e}_x : le cadre est « emmené » par le champ.

En effet, pour s'opposer à la cause de l'induction, c'est-à-dire à la variation du flux, le circuit doit suivre \vec{B} dans sa propagation. À la limite $v = v_0$, il n'y aurait plus de variation de flux.

Il faut noter que si la fonction f est périodique, de période spatiale (ou longueur d'onde) a , la force est nulle. En effet, le flux à travers le circuit est alors constant quelle que soit sa vitesse et il n'y a pas d'induction.

11 1) En calculant la circulation du champ électrique induit (orthoradial de centre O_1) $\vec{E}_1 = E_1(r_1)\vec{e}_{\theta_1}$, par le champ magnétique \vec{B}_1 sur le cercle de centre O_1 et de rayon $r_1 (r_1 > a)$, on obtient :

$$2\pi r_1 E_1 = -\pi a^2 \frac{dB_1}{dt},$$

d'où l'on déduit :

$$\vec{j}_1 = \gamma \vec{E}_1 = -\frac{\gamma a^2}{2r_1} \frac{dB_1}{dt} \vec{e}_{\theta_1} \text{ pour } r_1 > a, \text{ en dehors de la zone 1.}$$

De même, on a :

$$\vec{j}_2 = -\frac{\gamma a^2}{2r_2} \frac{dB_2}{dt} \vec{e}_{\theta_2} \text{ pour } r_2 > a, \text{ en dehors de la zone 2.}$$

2) Sur un élément de disque d'aire dS , l'action de \vec{B}_2 sur \vec{j}_1 est :

$$\vec{dF}_{2 \rightarrow 1} = \vec{j}_1 e dS \wedge \vec{B}_2 = -\frac{\gamma a^2}{2r_1} B_2 \frac{dB_1}{dt} e dS \vec{e}_{r_1}$$

et le moment correspondant par rapport à l'axe (Oz) vaut :

$$d\mathcal{M}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\gamma a^2 e}{2r_1} B_2 \frac{dB_1}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{e}_{r_1}) \cdot \vec{e}_z dS.$$

Sachant que $(\vec{OM} \wedge \vec{e}_{r_1}) \cdot \vec{e}_z = (\vec{OO}_1 \wedge \vec{e}_{r_1}) \cdot \vec{e}_z$, on obtient :

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\gamma a^2 e}{2} B_2 \frac{dB_1}{dt} (\vec{OO}_1 \wedge \vec{I}) \cdot \vec{e}_z.$$

D'après la symétrie, on peut affirmer que \vec{I} est parallèle et de même sens que le vecteur \vec{OO}_2 .

En outre, on a $\iint_{\text{zone 1}} \frac{\vec{e}_{r_2}}{r_2} dS = -\vec{I}$ et $\vec{OO}_1 \wedge \vec{I} = \vec{OO}_2 \wedge \vec{I} = Ib \cos \alpha \vec{e}_z$.

On en déduit :

$$\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\gamma a^2 e}{2} B_1 \frac{dB_2}{dt} (\vec{OO}_2 \wedge \vec{I}) \cdot \vec{e}_z,$$

$$\text{et } \mathcal{M} = \frac{\gamma a^2 e}{2} \left(B_1 \frac{dB_2}{dt} - B_2 \frac{dB_1}{dt} \right) Ib \cos \alpha.$$

3) Sur toute la zone 2, $r_1 \approx O_1 O_2 = 2b \sin \alpha$ et par suite :

$$I \approx \frac{\pi a^2}{2b \sin \alpha}.$$

On en déduit une valeur approchée de \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} \approx \frac{\gamma \pi a^4 e}{2 \tan \alpha} \left(B_1 \frac{dB_2}{dt} - B_2 \frac{dB_1}{dt} \right).$$

$$4) B_1 \frac{dB_2}{dt} - B_2 \frac{dB_1}{dt} = B_{1m} B_{2m} \omega [-\sin(\omega t) \cos(\omega t + \psi) + \cos(\omega t) \sin(\omega t + \psi)] \\ = B_{1m} B_{2m} \omega \sin \psi,$$

$$\text{et donc } \mathcal{M} = CB_{1m} B_{2m} \sin \psi, \text{ avec } C = \frac{\gamma \pi a^4 e \omega}{2 \tan \alpha}.$$

5) Par hypothèse, on a :

$$B_1 = K_1 i_m \cos(\omega t + \phi) \text{ et } B_2 = K_2 i_u = \frac{K_2 u_m}{L_2 \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

car en notation complexe $\underline{u} = j L_2 \omega \underline{i}_u$.

Le déphasage de B_1 par rapport à B_2 est : $\psi = \phi + \frac{\pi}{2}$ et $\sin \psi = \cos \phi$.

La vitesse de rotation du disque peut donc s'écrire :

$$\Omega = \frac{\mathcal{M}}{f} = \frac{\gamma \pi a^4 e \omega}{2 \tan \alpha} \frac{K_1 K_2}{L_2 \omega} u_m i_m \cos \phi,$$

qui est de la forme $\Omega = C' \mathcal{P}$, puisque la puissance moyenne consommée par l'ensemble EA_1 en série avec D est :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} u_m i_m \cos \phi.$$

Comme EA_1 ne consomme pas de puissance, \mathcal{P} est également la puissance moyenne consommée par D .

Par suite, l'angle de rotation du disque est proportionnel à l'intégrale de \mathcal{P} , c'est-à-dire à l'énergie consommée par D .

Corrigés

12

1) En un point du disque situé à la distance r du centre O , le champ électromoteur de Lorentz est :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = B\omega r \vec{e}_r,$$

d'où :

$$u_{AC} = -e_{AC} = - \int_{r=0}^a B\omega r dr = -\frac{1}{2} B\omega a^2.$$

2) a) L'équation électrique est :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \frac{1}{2} B\omega a^2 = \frac{\mu_0 n a^2 \omega}{2} i,$$

le champ magnétique crée par le solénoïde étant $B = \mu_0 n i$.

b) L'équation différentielle vérifiée par i est donc de la forme :

$$\tau_R \frac{di}{dt} + i = 0, \text{ avec } \tau_R = \frac{L}{R \left(1 - \frac{\mu_0 n a^2 \omega}{2R} \right)} = \frac{L}{R \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)},$$

$$\text{en posant } \omega_0 = \frac{2R}{\mu_0 n a^2}.$$

• Si $\tau_R > 0$ ou $\omega < \omega_0$: toute fluctuation de courant est amortie et la solution stable est nécessairement $i = 0$.

• Si $\tau_R < 0$, ou $\omega > \omega_0$: la solution $i = 0$ est alors instable. Toute perturbation de courant (bruit thermique, par exemple) est amplifiée et tend vers l'infini.

Cela crée des actions de Laplace qui s'opposent à la rotation et ne permettent pas de maintenir $\omega > \omega_0$.

• Pour $\omega = \omega_0$, τ est « infini » : toute solution i constante convient alors. En fait, on démarre le système avec $\omega > \omega_0$, le courant croît et les actions de Laplace diminuent la vitesse de rotation pour la stabiliser à ω_0 .

c) Soit $j = j(r)\vec{e}_r$ la densité de courant dans le disque. En raison de la conservation du flux de j à travers tout cylindre de rayon r , il vient :

$$j(r) = \frac{i}{2\pi r}.$$

La force de Laplace sur un élément de disque de volume élémentaire $d\tau = er dr d\theta$ est $dF = -j(r)Ber dr d\theta \vec{e}_\theta$.

Le moment par rapport à l'axe de rotation est :

$$dM_{\text{Laplace}} = -j(r)Ber^2 dr d\theta.$$

Après intégration, on obtient :

$$M_{\text{Laplace}} = -\frac{1}{2} iBa^2 = -\frac{1}{2} \mu_0 n a^2 i^2.$$

Pour faire tourner le disque à vitesse constante, il faut donc exercer le couple :

$$\Gamma = -M_{\text{Laplace}} = \frac{1}{2} \mu_0 n a^2 i^2.$$

On obtient la même relation par un bilan énergétique, l'énergie du champ étant constante :

$$\mathcal{P}_{\text{opérateur}} = -\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \mathcal{P}_{\text{dissipée}},$$

$$\text{soit } \Gamma \omega_0 = R i^2 \text{ avec } \omega_0 = \frac{2R}{\mu_0 n a^2}.$$

3) Un courant et un champ magnétique peuvent donc apparaître dans un ensemble de conducteurs en mouvement relatif, en l'absence de sources électriques.

Les mouvements de convection à l'intérieur de la Terre peuvent ainsi produire le champ magnétique terrestre.

13

1) L'inductance du dipôle constitué par les deux bobines en série dépend de L_0 et de l'inductance mutuelle M .

On peut déterminer M à partir du flux $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$.

Si on ne tient pas compte des effets de bord, c'est-à-dire si on utilise le modèle du solénoïde infini :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = n_2 X S_2 B_1 = \mu_0 n_1 n_2 S_2 X i_1$$

(les spires étant bobinées dans le même sens) où n_1 et n_2 sont les nombres de spires par unité de longueur de S_1 et S_2 , $n_2 X$ étant le nombre de spires de S_2 soumises au champ \vec{B}_1 .

On en déduit $M = \mu_0 n_1 n_2 S_2 X$.

Un calcul de même type permet de déterminer l'inductance de chaque bobine :

$$L_1 = L_0 = \mu_0 n_1^2 \ell S_1 \quad \text{et} \quad L_2 = L_0 = \mu_0 n_2^2 \ell S_2.$$

$$\text{D'où : } \mu_0 n_1 n_2 \ell = \frac{L_0}{\sqrt{S_1 S_2}} \quad \text{et} \quad M = L_0 \sqrt{\frac{S_2}{S_1} X}$$

$$\text{ou encore : } M = \frac{1}{2} L_0 \frac{X}{\ell}.$$

Le flux total est :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad \text{avec} \quad \Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1.$$

Pour les bobines en série : $i_1 = i_2 = i$.

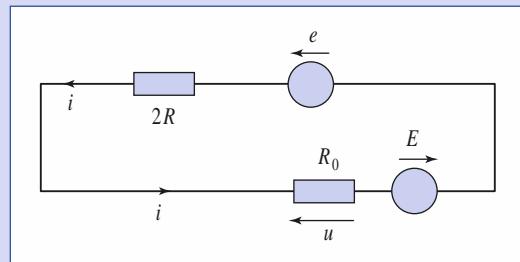
Dans le cas étudié : $L_1 = L_2 = L_0$.

On en déduit l'inductance équivalente : $L_e = 2(L_0 + M) = L_0 \left(2 + \frac{X}{\ell} \right)$.

2) L'inductance étant variable, la f.e.m. d'induction pour les bobines est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(L_e i)}{dt} = -i \frac{dL_e}{dt} - L_e \frac{di}{dt}.$$

D'après le schéma électrocinétique équivalent :



On obtient :

$$E + e = (R_0 + 2R)i \quad \text{soit} \quad E = (R_0 + 2R)i + i \frac{dL_e}{dt} + L_e \frac{du}{dt}$$

ou encore :

$$R_0 E = (R_0 + 2R)u + u \frac{dL_e}{dt} + L_e \frac{du}{dt}.$$

En régime statique X est constant et égal à X_0 et u est égal à U_0 :

$$R_0 E = (R_0 + 2R)U_0.$$

Par soustraction des deux dernières équations, on obtient :

$$0 = (R_0 + 2R)\delta u + (U_0 + \delta u) \frac{L_0 d(\delta X)}{\ell} + L_0 \left(2 + \frac{X_0}{\ell} + \frac{\delta X}{\ell} \right) \frac{d(\delta u)}{dt}$$

où δX , $\frac{d(\delta X)}{dt}$, δu , $\frac{d(\delta u)}{dt}$ sont des termes qui tendent vers 0 lorsque l'amplitude a tend vers 0 ; on peut mettre en évidence le couplage à l'ordre 1 en linéarisant cette équation :

$$0 = (R_0 + 2R)\delta u + U_0 \frac{L_0}{\ell} \frac{d(\delta X)}{dt} + L_0 \left(2 + \frac{X_0}{\ell}\right) \frac{d(\delta u)}{dt}$$

ou encore :

$$(R_0 + 2R)\delta u + L_0 \left(2 + \frac{X_0}{\ell}\right) \frac{d(\delta u)}{dt} = -U_0 \frac{L_0}{\ell} \frac{d(\delta X)}{dt} = U_0 \frac{L_0}{\ell} \omega \sin \omega t.$$

Le second membre est une fonction sinusoïdale du temps. En régime forcé (obtenu après amortissement du régime transitoire), δu est une fonction sinusoïdale de même pulsation ω . Pour la déterminer, on utilise la notation complexe :

$$\underline{\delta u} \left[R_0 + 2R + jL_0 \left(2 + \frac{X_0}{\ell}\right) \omega \right] = -j \frac{U_0}{\ell} L_0 \omega \underline{\delta X}$$

soit :

$$\underline{\delta u} = -\underline{\delta X} \frac{j U_0 \frac{L_0}{\ell} \omega}{R_0 + 2R + jL_0 \omega \left(2 + \frac{X_0}{\ell}\right)}.$$

On obtient donc, pour le régime forcé $\delta u = \delta u_m \sin(\omega t - \phi)$ avec :

$$u_m = |\underline{\delta u}| = \frac{a U_0 \frac{L_0}{\ell} \omega}{\sqrt{(R_0 + 2R)^2 + L_0^2 \omega^2 \left(2 + \frac{X_0}{\ell}\right)^2}}$$

$$\text{et } \phi = \arctan \frac{L_0 \omega \left(2 + \frac{X_0}{\ell}\right)}{R_0 + 2R}.$$

3) On exprime $\underline{\delta u}$ en fonction de la vitesse complexe $\underline{v} = j\omega \underline{\delta X}$:

$$\underline{\delta u} = -\frac{U_0 \frac{L_0}{\ell}}{R_0 + 2R + jL_0 \omega \left(2 + \frac{X_0}{\ell}\right)} \underline{v}.$$

Le coefficient de proportionnalité entre δu et la vitesse est indépendant de la fréquence si :

$$L_0 \left(2 + \frac{X_0}{\ell}\right) \omega \ll R_0 + 2R.$$

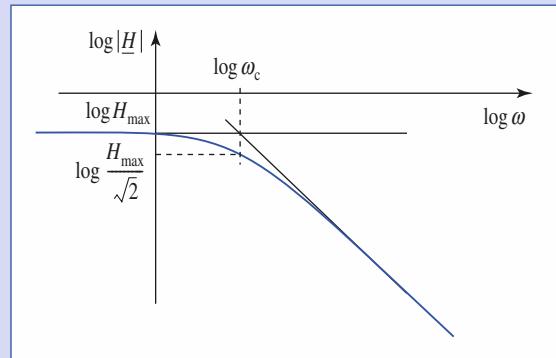
$$\text{Ou encore si } \omega \ll \omega_c \text{ avec } \omega_c = \frac{R_0 + 2R}{L_0 \left(2 + \frac{X_0}{\ell}\right)}.$$

δu donne une image non déformée de la vitesse si $\omega \ll \omega_c$; il s'agit d'un capteur de vitesse « passe-bas ».

Pour l'ensemble des fréquences, on reconnaît une fonction de transfert de type « passe-bas d'ordre 1 » :

$$H = \frac{\underline{\delta u}}{\underline{v}} = \frac{H_{\max}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad H_{\max} = \frac{U_0 \frac{L_0}{\ell}}{R_0 + 2R}.$$

Son diagramme de Bode pour l'amplitude est rappelé sur la figure suivante :



14) Dans l'approximation du solénoïde infini, le champ magnétique est uniforme, d'amplitude $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$ à l'intérieur de la bobine. Le flux propre est $\phi = NSB$, mais aussi $\phi = Li$, soit :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}.$$

2) La transformation effectuée consiste à augmenter la longueur ℓ de $d\ell$ pendant l'intervalle de temps dt .

L'opérateur fournit un travail mécanique :

$$\delta W_{\text{op}} = F d\ell.$$

Le générateur de courant fournit le travail électrique : $\delta W_{\text{gén}} = E idt$, où E est sa force électromotrice :

Cette f.e.m. vaut $E = Ri - e$ où la f.e.m. d'induction est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -i \frac{dL}{dt} \text{ car } i \text{ est maintenu constant.}$$

L'inductance L de la bobine a été calculée, et il vient :

$$dL = -\frac{\mu_0 N^2 S}{\ell^2} d\ell.$$

Le travail du générateur électrique peut donc s'écrire :

$$\delta W_{\text{gén}} = \left(Ri + i \frac{dL}{dt} \right) idt = R i^2 dt - \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell^2} i^2 d\ell.$$

Ces énergies ont été reçues par le solénoïde.

Le solénoïde stocke de l'énergie dans le champ magnétique. Cette énergie magnétique peut s'écrire :

$$\begin{aligned} E_m &= \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \iiint_{\text{intérieur du solénoïde}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{\left(\mu_0 \frac{N}{\ell} i\right)^2}{2\mu_0} S \ell \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} i^2 = \frac{1}{2} L i^2 \end{aligned}$$

et sa variation élémentaire est, à courant constant :

$$dE_m = \frac{1}{2} i^2 dL = -\frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell^2} i^2 d\ell.$$

Le solénoïde « ressort » possède une énergie interne qui peut varier.

Les interactions au niveau microscopique au sein de ce milieu déformable se manifestent au niveau macroscopique par l'élasticité du ressort.

Corrigés

Les variations de l'énergie d'interaction interne s'identifient à celles de son énergie potentielle élastique $E_{\text{élastique}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$.

L'agitation thermique au sein du matériau peut aussi varier : il s'échauffe lorsqu'il est traversé par un courant électrique, c'est l'effet Joule. La variation d'énergie associée peut ici encore s'écrire très simplement à l'aide de grandeurs macroscopiques, soit : $R i^2 dt$.

La variation d'énergie totale du solénoïde correspond à l'énergie qu'il a reçue de la part des sources, ce qui s'écrit :

$$\delta W_{\text{op}} + \delta W_{\text{gén}} = d\left[\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2\right] + d\left[\frac{1}{2}L i^2\right] + R i^2 dt.$$

Remarque : On peut noter, qu'en pratique, le ressort qui s'échauffe du fait de l'effet Joule subit des pertes thermiques au profit de l'air extérieur, que l'on n'a pas comptées dans ce bilan. Si besoin, il suffit de considérer le système [solénoïde-ressort + air ambiant] qui est celui qui reçoit, globalement, la quantité d'énergie $R i^2$.

Nous en déduisons :

$$Fd\ell + R i^2 dt - \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell^2} i^2 d\ell = k(\ell - \ell_0)d\ell - \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell^2} i^2 d\ell + R i^2 dt.$$

On peut ainsi identifier :

$$F = k(\ell - \ell_0) + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell^2} i^2.$$

En plus de la force de traction usuelle exercée sur un ressort, on voit ici apparaître un terme positif qui doit compenser une tendance à la contraction du solénoïde lorsqu'il est parcouru par un courant.

Les forces responsables de cette contraction sont les forces de Laplace sur les spires, qui ne dépendent que du courant i .

Changer le type de transformation envisagé (on pourrait redétailler le bilan avec un générateur de tension E constante) modifierait les termes du bilan énergétique, mais pas l'expression finale de la force F .

3) Avec les valeurs numériques proposées : $\ell \approx \ell_0 = 1 \text{ m}$, on trouve $k = 25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

À l'équilibre, aucune force n'est appliquée sur le solénoïde ($F = 0$) pour $\Delta\ell = \ell - \ell_0 = -1 \text{ mm}$, d'où :

$$i^2 \approx -\frac{2k\ell_0^2}{\mu_0 N^2 S} \Delta\ell,$$

soit $i \approx 28 \text{ A}$.

L'effet n'est ici observable que pour de fortes intensités.

Ferromagnétisme

PSI-PSI*

8

Introduction

Certains matériaux acquièrent sous l'effet d'une excitation magnétique des propriétés remarquables : ils s'aimantent fortement et conservent une mémoire de cette aimantation lorsque l'excitation a cessé : nous avons tous utilisé ou joué avec des aimants, nous nous servons depuis une cinquantaine d'années de bandes magnétiques pour conserver des données (audio et vidéo)...

Ces matériaux, dits ferromagnétiques, ont des applications pratiques très importantes et nous sont devenus indispensables : on les trouve dans les moteurs et les générateurs électriques, les transformateurs domestiques et industriels, les disques durs d'ordinateurs (on produit pour les disques durs des matériaux capables de stocker jusqu'à 1 Gbit par cm^2), etc.

Dans ce chapitre, nous étudierons qualitativement le principe de l'aimantation de ces milieux, nous adapterons l'équation de Maxwell-Ampère à leur étude puis nous verrons comment étudier expérimentalement leurs propriétés.

O B J E C T I F S

- Aimantation de la matière.
- Théorèmes d'Ampère et de Faraday dans les milieux aimantés.
- Tracé du cycle d'hystéresis d'un milieu ferromagnétique.
- Propriétés d'un milieu ferromagnétique.

P R É R E Q U I S

- Équations de Maxwell dans le vide.
- Dipôles magnétiques.
- Induction électromagnétique, loi de Faraday.

Aimantation d'un milieu matériel

1.1. Les différents milieux magnétiques

Dans une image classique simplifiée (et même simpliste), nous pouvons imaginer qu'un atome, un ion ou une molécule sont constitués d'électrons « gravitant » autour des noyaux. Ainsi un électron parcourant une orbite circulaire de vitesse angulaire ω peut être assimilé à une boucle de courant d'intensité $I = \frac{-e}{T}$, où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et le système possède donc un moment magnétique $\vec{M} = I \vec{S}$, soit :

$$\vec{M} = -\frac{e\omega}{2} R^2 \vec{n} \text{ (doc. 1).}$$

Remarque

Ces moments ne peuvent à eux seuls expliquer les propriétés magnétiques de la matière. Il faut faire appel à la mécanique quantique, théorie dans laquelle les électrons, les protons et les neutrons possèdent un moment intrinsèque de spin. Le moment magnétique total est la superposition de tous les moments orbitaux précédents et des moments de spin.

Ces moments magnétiques peuvent interagir avec un champ magnétique imposé et provoquer l'aimantation d'un milieu matériel (cf. § 1.2.).

On distingue deux types de corps.

- Les corps constitués de particules qui ne possèdent pas de moments magnétiques permanents.

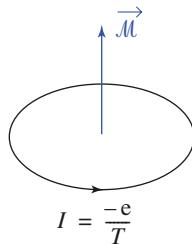
Ces **corps** ne présentent pas d'aimantation permanente à l'échelle macroscopique et sont appelés **diamagnétiques**.

- Les corps constitués de particules qui possèdent un moment magnétique permanent.
 - En raison de l'agitation thermique, ces moments sont orientés de manière aléatoire les uns par rapport aux autres et, en général, ces **corps** ne présentent pas d'aimantation permanente à l'échelle macroscopique ; ils sont appelés **paramagnétiques**.
 - Cependant, il peut exister, dans certains corps, des interactions très fortes entre les moments magnétiques d'atomes voisins.

Ces moments ont alors tendance à s'orienter parallèlement les uns par rapport aux autres et l'agitation thermique n'arrive pas à détruire complètement cette orientation privilégiée. Ces **corps** peuvent présenter une aimantation permanente très forte et sont appelés **ferromagnétiques**.

1.2. Action de \vec{B} sur un matériau magnétique : vecteur aimantation

Lorsque le matériau est plongé dans un champ magnétique \vec{B} , ce dernier agit sur les électrons et les noyaux constituant le milieu matériel (l'influence de \vec{B} étant d'ailleurs nettement plus importante sur les électrons beaucoup plus légers que les noyaux).



Doc. 1. Moment magnétique dans le modèle planétaire.

1.2.1. Cas d'une substance diamagnétique

Sur une substance diamagnétique, \vec{B} déforme les nuages électroniques et fait ainsi apparaître au sein des atomes et des molécules des moments magnétiques induits.

La loi de Lenz nous indique que les champs magnétiques produits par ces moments microscopiques s'opposent au champ \vec{B} initial. À l'échelle macroscopique, le milieu acquiert donc, sous l'action du champ \vec{B} , une aimantation de sens opposé à \vec{B} (doc. 2a).

Cette aimantation induite, toujours très faible, reste quasiment indépendante de la température.

1.2.2. Cas d'une substance paramagnétique

Sur une substance paramagnétique en plus de l'action précédente, \vec{B} a tendance à orienter les dipôles atomiques dans sa direction. Rappelons-nous en effet qu'un champ \vec{B} exerce un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ sur un dipôle magnétique de moment \vec{M} .

Cet effet étant plus important que le diamagnétisme, le milieu acquiert une aimantation induite de même sens que \vec{B} (doc. 2b).

Cette aimantation induite \vec{M} , reste également très faible, mais elle dépend fortement de la température, car l'agitation thermique entrave l'orientation privilégiée des dipôles.

1.2.3. Cas d'une substance ferromagnétique

Plongé dans un champ \vec{B} , un matériau ferromagnétique acquiert une aimantation très importante, sans commune mesure avec celles des corps diamagnétiques ou paramagnétiques.

En outre, cette aimantation subsiste en général après disparition du champ initial.

1.2.4. Vecteur aimantation

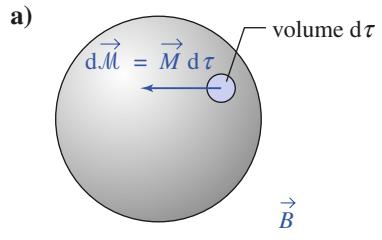
Dans tous les cas, lorsqu'un matériau est soumis à l'action d'un champ magnétique \vec{B} , tout volume mésoscopique $d\tau$ de ce matériau présente un moment magnétique $d\vec{M} = \vec{M} d\tau$; le vecteur \vec{M} , appelé **vecteur aimantation**, dépend du point où on le considère et de l'intensité du champ magnétique en ce point. Ainsi en présence d'un champ nul, \vec{M} est nul pour un corps diamagnétique ou paramagnétique. Si le champ dépend du temps, \vec{M} dépendra également du temps.

L'aimantation \vec{M} se mesure en $A \cdot m^{-1}$ et est donc homogène à une densité surfacique de courant.

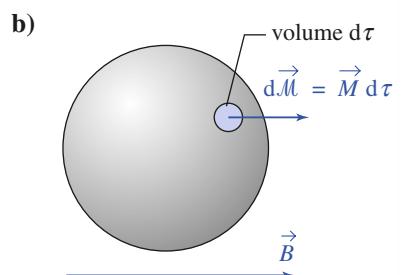
Plongé dans un champ magnétique, un milieu s'aimante : chaque volume mésoscopique $d\tau$ de matière acquiert un moment dipolaire magnétique $d\vec{M}$ induit par le champ, caractérisé par un moment dipolaire volumique \vec{M} appelé vecteur aimantation et défini par :

$$d\vec{M} = \vec{M} d\tau.$$

Certains milieux, appelés milieux ferromagnétiques, peuvent présenter une aimantation permanente.



Doc. 2a. Pour un corps diamagnétique, l'aimantation induite \vec{M} et le champ \vec{B} sont opposés.



Doc. 2b. Pour un corps paramagnétique, l'aimantation induite \vec{M} et le champ \vec{B} sont de même sens.

1.2.5. Courants d'aimantation équivalents

Nous nous proposons de vérifier, à partir d'une analyse très simplifiée, qu'il est possible d'étudier l'état magnétique d'un milieu matériel en définissant une densité volumique de courants d'aimantation dans le vide.

Supposons qu'un milieu possède une aimantation \vec{M} colinéaire à l'axe (Oz) et ne dépendant que de y , soit $\vec{M} = M_z(y)\vec{e}_z$ (doc. 3a).

En un point P de coordonnées (x, y, z) , un volume élémentaire $dx dy dz$ de matériau possède un moment magnétique : $d\vec{M} = M_z(y) dx dy dz \vec{e}_z$, et est assimilable à une boucle de courant de moment : $d\vec{M} = dI(y) dx dy \vec{e}_z$.

Nous constatons sur le document 3a, que la face d'abscisse $y + dy$ commune à deux éléments de volume voisins, est parcourue par le courant :

$$(-dI(y) + dI(y + dy)) = (-M_z(y) + M_z(y + dy)) dz = \frac{\partial M_z}{\partial y} dy dz$$

dans le sens de l'axe (Ox).

Tout se passe donc comme si un courant $\frac{\partial M_z}{\partial y} dy dz$ traversait une section d'aire $dy dz$. Ce courant correspond à une densité de courant volumique : $j_{x1} = \frac{\partial M_z}{\partial y}$ suivant x .

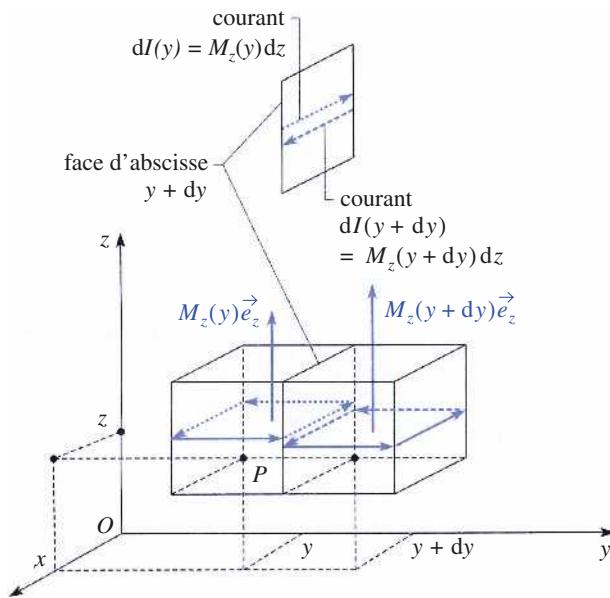
Le même raisonnement pour un matériau possédant une aimantation :

$$\vec{M} = M_y(z)\vec{e}_y \text{ (doc. 3b) montre qu'il existe un courant équivalent } -\frac{\partial M_y}{\partial z} dy dz$$

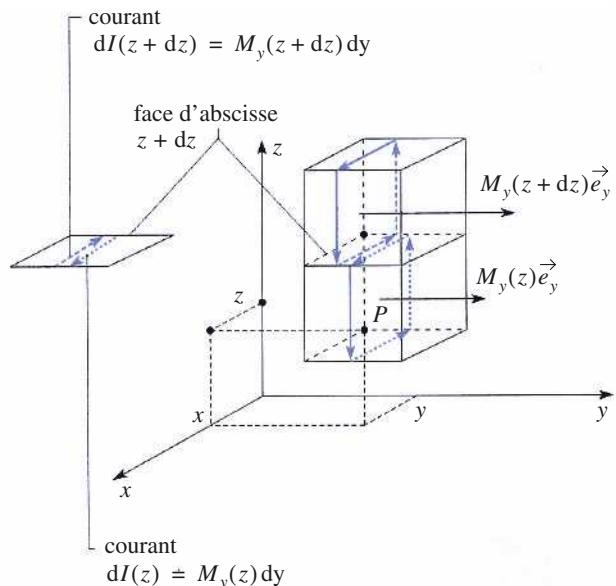
et un courant volumique $j_{x2} = -\frac{\partial M_y}{\partial z}$ à travers la section $dy dz$.

En superposant les deux contributions : $j_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$ qui correspond à la coordonnée sur x du rotationnel de \vec{M} . Soit en généralisant :

$$\vec{j}_{\text{aimantation}} = \text{rot}(\vec{M}).$$



Doc. 3a. Courants d'aimantation pour un matériau possédant une aimantation $M_z(y)\vec{e}_z$.



Doc. 3b. Courants d'aimantation pour un matériau possédant une aimantation $M_y(z)\vec{e}_y$.

2 Lois de l'électromagnétisme dans les milieux aimantés

2.1. Excitation magnétique

Considérons un milieu magnétique quelconque (isolant ou non). La densité volumique du courant dans ce milieu peut être écrite sous la forme :

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{aimantation}} + \vec{j}_{\text{autre}} \quad \text{où :}$$

- $\vec{j}_{\text{aimantation}} = \text{rot}(\vec{M})$ correspond aux courants équivalents mis en évidence dans le paragraphe précédent ;

- \vec{j}_{autre} représente la contribution de tous les courants autres que ceux correspondant à l'action du champ \vec{B} (ces courants peuvent provenir, par exemple, d'une circulation d'électrons libres ou d'oscillations d'ions d'un réseau cristallin autour de leurs positions d'équilibre sous l'effet d'un champ électrique).

Si nous remplaçons \vec{j} dans l'équation de Maxwell-Ampère qui lie le champ électromagnétique et la densité de courant nous voyons apparaître le rotationnel du vecteur $\vec{B} - \mu_0 \vec{M}$:

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j}_{\text{aimantation}} + \vec{j}_{\text{autre}}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

soit : $\text{rot}(\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_{\text{autre}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$

Nous introduisons alors un nouveau champ qui prend en compte à la fois le champ magnétique et l'aimantation résultante :

Le vecteur $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ est appelé vecteur excitation magnétique du milieu.

2.2. Équation de Maxwell-Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors :

$$\text{rot}(\mu_0 \vec{H}) = \mu_0 \vec{j}_{\text{autre}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Nous faisons deux hypothèses supplémentaires qui s'appliqueront facilement aux matériaux ferromagnétiques étudiés dans la suite du chapitre :

- les courants autres que ceux d'aimantation sont essentiellement dus aux courants libres c'est-à-dire aux courants correspondant à un déplacement d'ensemble de charges dans le matériau, ce qui implique donc qu'il soit conducteur (c'est ce que nous avons supposé dans le cas des métaux, où les cations placés aux noeuds du réseau dans lequel circulent les électrons libres sont considérés comme immobiles) ;
- nous nous plaçons dans le cadre de l'A.R.Q.S. donc pour des régimes lentement variables : cette hypothèse est justifiée par les fréquences d'utilisation des matériaux ferromagnétiques.

On néglige alors le terme $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant $\mu_0 \vec{j}_{\text{autre}} = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}}$.

Pour un matériau de conductivité γ , cela revient à supposer que $\epsilon_0 \omega \ll \gamma$, soit :

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0} \sim 10^{13} \text{ rad . s}^{-1}$$

pour un bon conducteur.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j}_{\text{libre}}.$$

2.3. Théorème d'Ampère

Dans un milieu aimanté vérifiant les hypothèses précédentes le théorème d'Ampère s'applique au vecteur excitation magnétique \vec{H} (doc. 4) :

$$\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}(\vec{H}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{j}_{\text{libre}} \cdot d\vec{S},$$

où Σ est une surface quelconque s'appuyant sur un contour Γ .

D'après le théorème de Stokes : $\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}(\vec{H}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ et donc :

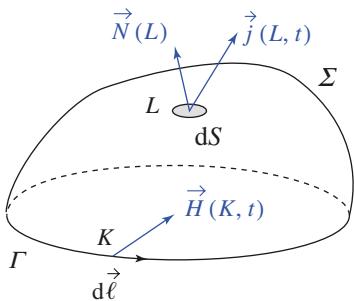
$$\oint_{\Gamma} \vec{H}(K, t) \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \vec{j}_{\text{libre}}(L, t) \cdot \vec{N}(L) dS :$$

la circulation du vecteur \vec{H} sur un contour Γ est égale au flux à travers n'importe quelle surface Σ orientée s'appuyant sur Γ du vecteur densité de courants volumiques libres.

Le flux du vecteur \vec{j}_{libre} à travers la surface Σ représente la courant « libre » enlacé par Γ .

Pour un milieu aimanté conducteur dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents, le théorème d'Ampère s'applique sous la forme :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{libre enlacé}}.$$



Doc. 4. Circulation du vecteur excitation magnétique et théorème d'Ampère.

2.4. Loi de Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday n'est jamais modifiée par le type de milieu considéré : elle lie les champs électrique et magnétique indépendamment des sources :

Dans un milieu aimanté :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Donc la forme intégrale de cette loi est inchangée, et

la loi de Faraday s'écrit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right).$$

Remarque

En ce qui concerne les autres équations de Maxwell :

- comme celle de Maxwell-Ampère, l'équation de Maxwell-flux est inchangée : $\vec{\text{div}}(\vec{B}) = 0$;
- en revanche, il faudrait modifier l'équation de Maxwell-Gauss pour tenir compte de l'action d'un champ électrique sur les charges du milieu (électrons libres, ions libres ou aux nœuds de réseaux cristallins, doublets électroniques des liaisons chimiques, etc.), phénomène que nous connaissons sous le nom de polarisation (cf. H-Prépa, Ondes, chapitre 9).

3 Étude expérimentale d'un milieu ferromagnétique

3.1. Approche qualitative

• Nous savons qu'un aimant attire un morceau de fer, alors qu'il est pratiquement sans effet sur un morceau d'aluminium ou de platine ; ces trois corps possèdent des moments magnétiques permanents, mais l'action du champ de l'aimant est bien plus grande dans le cas du fer : il a, comme le nickel, le cobalt, le gadolinium, certains alliages et certains oxydes, une grande aptitude à l'aimantation : c'est une première caractéristique essentielle des matériaux ferromagnétiques.

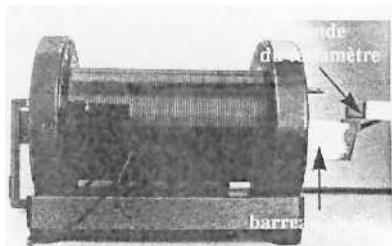
• Considérons le solénoïde représenté sur le *document 5*, alimenté par un courant de 1 A. Le champ magnétique mesuré sur la face A est $B_a = 0,02$ T.

Lorsque le même solénoïde contient un barreau cylindrique de fer, le champ magnétique mesuré au même point devient $B = 0,1$ T : ce champ dû aux dipôles du matériau est bien supérieur au champ appliqué.

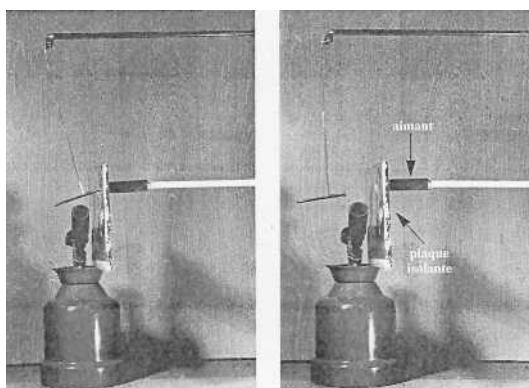
• Si nous faisons varier I , nous constatons que, comme prévu, B_a est une fonction linéaire de I . En revanche $B(I)$ n'est approximativement linéaire que pour les faibles valeurs de I .

De plus, si nous remplaçons le barreau de fer par un barreau de d'acier, nous constatons qu'un champ magnétique, donc une aimantation, subsiste même lorsque le champ appliqué est supprimé. La non-linéarité et l'existence d'une aimantation sans champ appliqué sont de caractéristiques essentielles des matériaux ferromagnétiques.

• Au-delà d'une certaine température, dite température de Curie, les corps ferromagnétiques perdent leurs propriétés : on voit sur le *document 6a* un clou en fer attiré par un aimant ; sur le *document 6b* le clou chauffé perd ses propriétés et n'est plus attiré par l'aimant ; comme cet effet est réversible, le clou, une fois refroidi, est de nouveau attiré et ainsi de suite : nous avons ainsi réalisé un **oscillateur magnétique** ou oscillateur à relaxation.



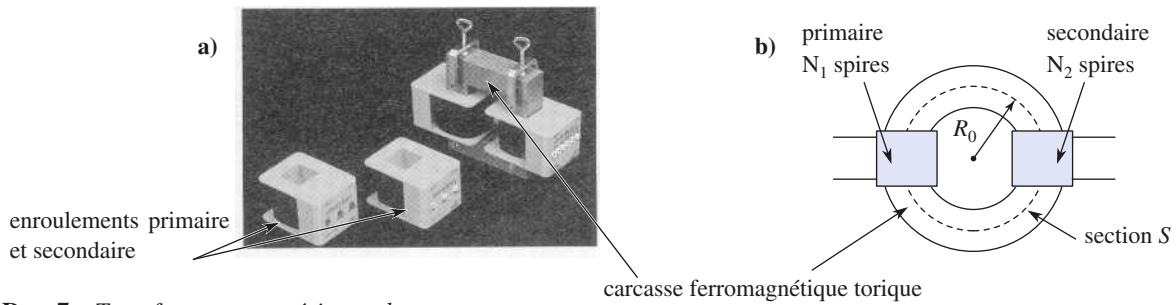
Doc. 5. Une bobine avec un morceau de fer. La présence du barreau de fer à l'intérieur de la bobine modifie considérablement le champ magnétique.



► Doc. 1a. et b. Réalisation d'un oscillateur magnétique : la plaque isolante empêche l'aimant de perdre lui aussi ses propriétés.

3.2. Tracé du cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique

■ Dans l'optique d'étudier le comportement des transformateurs (*doc. 7a*) nous choisissons de nous intéresser à un matériau ferromagnétique de géométrie torique (*doc. 7b*) de rayon moyen R_0 et de section S .



Doc. 7a. Transformateur expérimental ;
b. Modélisation géométrique de sa carcasse.

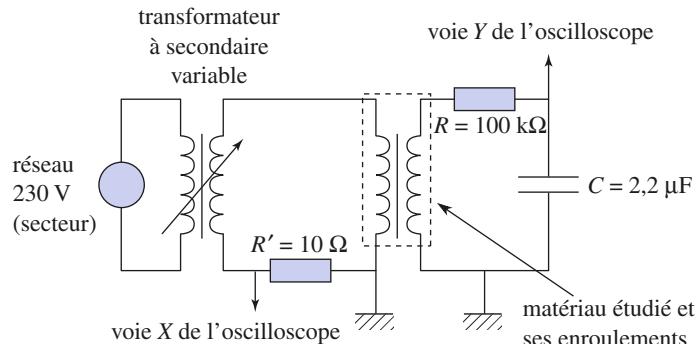
Remarque

L'étude des transformateurs sera réalisée en TP-cours (cf. H-Prépa, Électrotechnique, 2nd année).

- Le but de la manipulation est de relever des valeurs de grandeurs électriques qui nous permettent d'accéder à l'excitation magnétique \vec{H} et au champ magnétique \vec{B} .

Le montage est schématisé sur le document 8 :

- un transformateur à secondaire variable permet d'isoler le circuit étudié du secteur et de choisir différentes amplitudes de la tension d'alimentation du circuit primaire ;



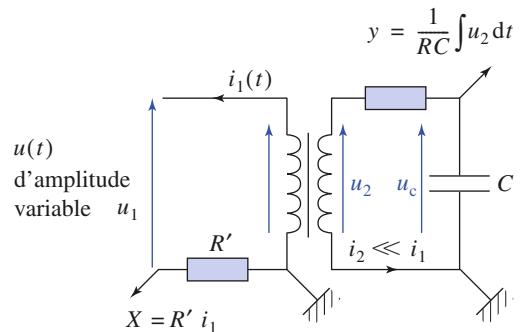
Doc. 8. Montage utilisé pour tracer un cycle d'hystérésis.

- au niveau du secondaire le pont diviseur RC joue le rôle d'intégrateur (en effet sa constante de temps $T = RC = 0,22$ s est choisie pour être grande devant $T = 20$ ms, période du secteur) et $u_c = \frac{1}{RC} \int u_2 dt$ (doc. 9) ;

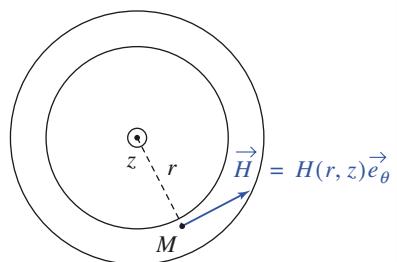
La résistance $R = 100$ kΩ est grande devant toutes les autres impédances des circuits donc le courant du circuit secondaire pourra être négligé devant celui du primaire. On a donc le schéma équivalent du document 9.

- Étudions le lien entre le vecteur excitation magnétique et le courant i_1 :
- le champ magnétique et \vec{H} ont les mêmes symétries : compte tenu de l'invariance par rotation de la géométrie torique choisie $H(r, z)$ (doc. 10). De plus, tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie et \vec{H} est orthogonal à ce plan en tout point de celui-ci :

$$\vec{H}(M) = H(r, z) \vec{e}_\theta \quad (\text{doc. 10}).$$



Doc. 9. Montage équivalent.



Doc. 10. Modèle torique et notations.

\vec{B} et \vec{M} sont colinéaires à \vec{H} .

De même $\vec{B}(M) = B(r, z)\vec{e}_\theta$;

– l'application du théorème d'Ampère en choisissant un contour circulaire, dont le centre est sur l'axe (Oz) et de rayon r ; donne :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i_{\text{enlacés}}.$$

Pour un point intérieur au tore :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H(r, z) \cdot 2\pi r \text{ et } i_{\text{enlacés}} = N_1 i_1 \text{ car } i_2 \ll i_1.$$

Soit, en considérant le rayon moyen du tore, $R_0 \approx r$:

$$\vec{H} = \frac{N_1 i_1}{2\pi R_0} \vec{e}_\theta.$$

Pour un point extérieur, $i_{\text{enlacés}} = 0$ et $\vec{H} = \vec{0}$.

Ainsi la détermination de i_1 permet celle de \vec{H} .

■ Étudions maintenant le lien entre \vec{B} et $u_c(t)$:

$$u_c(t) = \frac{1}{R} \int u_2(t) dt.$$

Or, d'après la loi de Faraday :

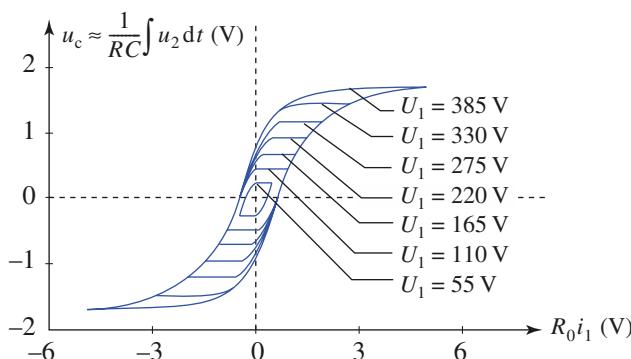
$$u_2(t) = -e_2(t) = N_2 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \vec{e}_\theta \cdot dS \vec{e}_\theta$$

où S est la section du tore orientée par \vec{e}_θ . Comme $\vec{B} = B(t)\vec{e}_\theta$ en prenant $B(r) \approx B(R_0)$

$$u_2(t) = N_2 \frac{dB(t)}{dt} S$$

$$\text{soit : } u_c(t) = \frac{N_2 B(t) S}{RC}.$$

Finalement, tracer u_c en fonction de $R_0 i_1$ revient à connaître l'allure et les caractéristiques de la courbe $B(H)$.



Doc. 11. Cycle d'hystérosis. $u_c = 1 \text{ V}$ correspond environ à $B = 1 \text{ T}$ et $R_0 i_1 = 0,5 \text{ V}$ à $H = 100 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.

Pour différentes valeurs de la tension d'alimentation $u(t)$, nous obtenons une série de courbes fermées et symétriques par rapport à l'origine (doc. 11). Ces courbes sont appelées *cycles d'hystérosis* (cf. encadré).

Pendant la demi-période où H (c'est-à-dire i_1) augmente, le point représentatif parcourt la partie droite du cycle. Pendant l'autre demi-période, celle où H diminue, le point représentatif parcourt la partie gauche du cycle. Ainsi, à une valeur de H correspondent deux valeurs de B , et la valeur de B dans le noyau dépend de l'état antérieur du noyau (lorsque H croît : partie droite du cycle ; lorsque H décroît : partie gauche du cycle).

Remarque

Des cycles d'hystérésis entre deux grandeurs x et y peuvent se rencontrer dans d'autres domaines de la physique. Signalons, par exemple, le comparateur à hystérésis étudié en électronique de première année (cf. H-Prépa, Électronique, 1^{re} année).

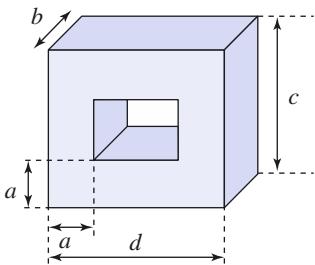
Application 1

Détermination quantitative de B et H

La carcasse d'un transformateur démontable a les caractéristiques géométriques suivantes :

$a = b = 5 \text{ cm}$ et $c = d = 15 \text{ cm}$ (doc. 12).

Le primaire est constitué de 1 000 spires et le secondaire de 250 spires.



Doc. 12. Carcasse de transformateur démontable.

Calculer les ordres de grandeur des coefficients de proportionnalité entre l'intensité dans le circuit primaire et H , puis entre la tension aux bornes du circuit intégrateur (R, C), (avec $R = 100 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \mu\text{F}$), et B .

L'application du théorème d'Ampère donne $H\ell = N_1 i_1$, où ℓ est la longueur moyenne du circuit magnétique :

$$\ell = 2(c - a + d - a) = 2c + 2d - 4a = 40 \text{ cm},$$

d'où : $H = 2,5 i_1$

avec H en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ et i_1 en mA.

La tension aux bornes du condensateur est :

$$u_C \approx \frac{1}{RC} \int u_2 dt = \frac{\Phi_2}{RC} \approx \frac{N_2 abB}{RC},$$

soit $B \approx 0,16 u_C$ (B est en tesla et u_C en volt).

3.3. Caractéristiques du cycle d'hystérésis

3.3.1. Caractère ferromagnétique

Introduisons l'aimantation \vec{M} du circuit magnétique : $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$.

Lors d'une variation alternative de l'excitation magnétique, l'aimantation décrit aussi un cycle. Pour une valeur de H donnée, la valeur de M est différente si H croît ou si H décroît.

Remarquons que généralement B est très supérieur à $\mu_0 H$ ($B \gg \mu_0 H$), donc M est très supérieur à H ($M \gg H$) et $\mu_0 M$ peut être confondu avec B ($B \approx \mu_0 M$).

En général, $B \gg \mu_0 H$, donc $M \gg H$ et $B \approx \mu_0 M$.

Utilisons les résultats du document 11 pour déterminer l'ordre de grandeur, en utilisation courante, du rapport :

$$\frac{|\vec{M}|_{\max}}{|\vec{H}|_{\max}} \approx \frac{|\vec{B}|_{\max}}{\mu_0 |\vec{H}|_{\max}}.$$

Pour un champ magnétique de 1 T, nous avons une excitation maximale de $300 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$, ce qui donne un rapport minimum voisin de 2 500 (environ).

Ce rapport est très grand et nous avons bien $M \gg H$.

Dans un milieu ferromagnétique, la relation entre aimantation et excitation magnétique n'est pas linéaire et dépend des états antérieurs du milieu magnétique.

L'aimantation \vec{M} est importante pour une excitation magnétique \vec{H} même faible : $M \gg H$ et donc $B \approx \mu_0 M$.

3.3.2. Aimantation à saturation

Pour une tension d'alimentation importante le courant dans le circuit primaire augmente de façon importante. Ceci signifie que H_{\max} augmente alors beaucoup plus vite que B_{\max} .

Le cycle d'hystérésis $B(H)$ obtenu présente alors (doc. 13) deux domaines (a) et (c), où les deux branches du cycle sont confondues et où B varie linéairement en fonction de H . La pente en est très faible, de l'ordre de la valeur numérique de μ_0 , soit $1,3 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$. Dans ce domaine, nous pouvons écrire $B = \mu_0(H + M_{\text{sat}})$.

L'aimantation de la carcasse est alors constante et maximale. Elle est appelée aimantation à saturation.

La valeur $\mu_0 M_{\text{sat}}$ déduite des mesures est de l'ordre de 1,8 T. Elle dépend de la composition de l'alliage constitutif des tôles de carcasse magnétique et peut varier de 0,8 à 3 T.

3.3.3. Champ rémanent

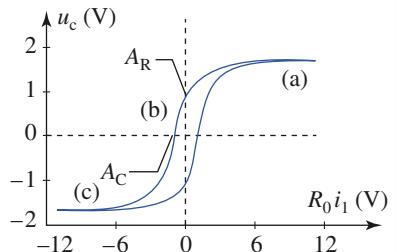
Étudions la portion de cycle correspondant à la diminution de H à partir de sa valeur maximale c'est-à-dire le domaine (b) du document 13. Nous remarquons que pour $H = 0$ (point A_R de la courbe), le champ magnétique est non nul.

La valeur B_r de B correspondante s'appelle **champ rémanent**.

En ce point, $\vec{B}_r = \mu_0 \vec{M}_r$: le circuit magnétique présente donc une aimantation M_r en absence d'excitation, appelée aimantation rémanente.

Le champ magnétique dans un aimant permanent est son champ rémanent.

Le phénomène de rémanence est nuisible dans les systèmes de lecture magnétique. Ainsi, Les têtes de lecture de bande magnétique doivent être démagnétisées si elles sont accidentellement aimantées. C'est aussi le cas des moniteurs d'ordinateur (doc. 14a et b).

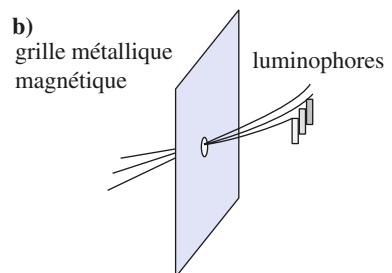
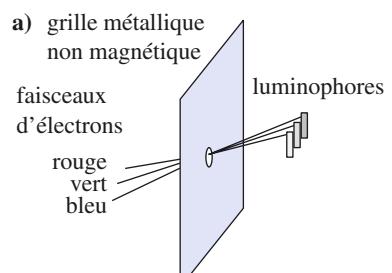


Doc. 13. Saturation.

$H_C = 150 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ avec $B_r \approx 1 \text{ T}$ et $B_{\text{sat}} \approx 1,8 \text{ T}$.

- $u_c = 1 \text{ V}$ correspond à $B = 1 \text{ T}$.

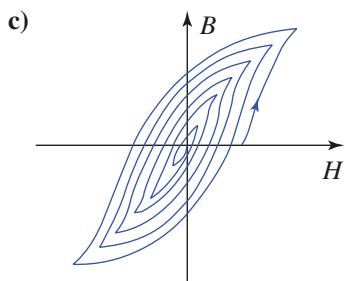
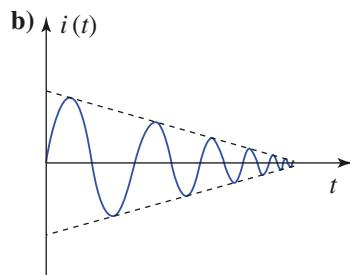
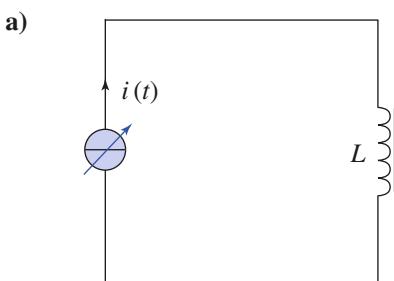
- $R_0 i_1 = 0,5 \text{ V}$ correspond à : $H = 100 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.



Doc. 14. Moniteur d'ordinateur.

a. Les faisceaux d'électrons bombardent l'écran au niveau des luminophores prévus : image de bonne qualité.

b. Les faisceaux d'électrons ne bombardent pas l'écran : image de mauvaise qualité.



Doc. 15. Désaimantation : on fait subir au matériau des cycles d'hystérésis de plus en plus petit.

a. Montage.

b. Forme de l'onde.

c. Cycle d'hystérésis.

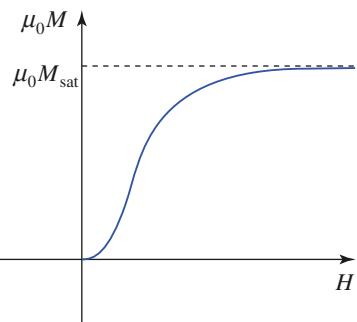
Pour effectuer cette désaimantation, on fait décrire des cycles d'hystérésis de plus en plus petits au milieu magnétique (*doc. 15*), jusqu'à la quasi-annulation de son aimantation.

Si l'on applique un champ magnétique à un matériau ferromagnétique d'aimantation nulle ou désaimanté, il va subir une « première aimantation ». La courbe $M(H)$ correspondante (que l'on peut obtenir par le même dispositif expérimental) est donnée sur le *document 16* ; on retrouve bien le caractère non linéaire du milieu ainsi que la saturation de l'aimantation.

3.3.4. Champ coercitif

En diminuant toujours H , B s'annule pour une valeur négative de H (point A_C de la courbe ; *document 13*).

La valeur de l'excitation correspondant à l'annulation du champ magnétique est $-H_C$, où H_C est appelée champ coercitif ou excitation coercitive.



Doc. 16. Courbe de première aimantation.

Application 2

Matériau à cycle d'hystérésis rectangulaire

Certains matériaux (aimant en particulier) présentent des champs coercitifs très intenses. Dans ce cas le champ magnétique peut différer de façon notable de $\mu_0 M$.

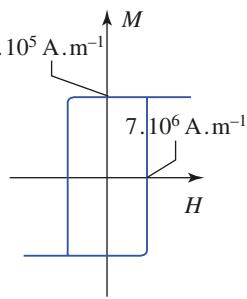
1) Tracer l'allure du cycle d'hystérésis $B(H)$ pour le matériau $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ (qui permet de réaliser des aimants performants et de coût raisonnable) à l'aide de sa caractéristique (*doc. 17*).

2) Déterminer l'aimantation à saturation, puis le champ rémanent et le champ coercitif.

1) La relation entre B , M et H est :

$$B = \mu_0(H + M).$$

Les valeurs de H ne nous permettent pas de confondre B avec $\mu_0 M$.



Doc. 17. Cycle d'hystérésis $M(H)$ à champ coercitif important

Nous obtenons donc le cycle suivant en utilisant les points dont nous connaissons les coordonnées (*doc. 18*).

2) Le champ rémanent correspond au point où H est nul, soit :

$$B_r = \mu_0 M = 1,1 \text{ T}.$$

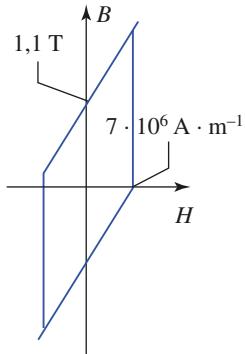
Le champ coercitif correspond au point où B s'annule. Comme le cycle est rectangulaire :

$$H_c \approx 7 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1},$$

(valeur extrêmement importante et non classique).

L'aimantation à saturation est la valeur limite de M , soit $M_{sat} = 8,6 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ et la valeur correspondante $B_{sat} \approx \mu_0 M_{sat} = 1,1 \text{ T}$.

Ces cycles nécessitent des excitations magnétiques très importantes et ils ne sont pas obtenus par la méthode envisagée dans ce chapitre.



Doc. 18. cycle d'hystérésis $B(H)$ à champ coercitif important.

3.4. Classement des milieux ferromagnétiques

Les milieux ferromagnétiques sont classés en fonction de la forme de leur cycle d'hystérésis (*doc. 19*).

Si le cycle est étroit, le milieu est *doux* ; le champ coercitif est alors très faible (inférieur à $100 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$). C'est le cas des alliages fer-silicium, ou fer-nickel, des carcasses de transformateur (cf. § 3.5.4.).

Si le cycle est large, le milieu est *dur*. Le champ coercitif est alors important (supérieur à $1000 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$). C'est le cas de l'acier (fer avec 1 % de carbone) et de tous les matériaux constituant les aimants.

En effet, dans un aimant permanent, le champ coercitif doit être le plus élevé possible, de façon à éviter sa désaimantation accidentelle.

Remarque

Certains matériaux, des ferrites, présentent même un cycle carré, car leur aimantation est toujours voisine de sa valeur à saturation. Leur effet mémoire était utilisé pour stocker les informations dans les ordinateurs des premières générations.

		champ coercitif $H_c (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$	champ rémanent $B_r (\text{T})$
matériaux doux	fer au silicium	8	1,4
	ferrite manganèse zinc	100	0,35
matériaux durs	acier (fer au carbone)	$4 \cdot 10^3$	1,0
	alnico (aimants permanents)	$5 \cdot 10^4$	0,7

Doc. 20. Exemple de quelques matériaux ferromagnétiques.

Notons que dans un matériau doux hors de la saturation, le cycle d'hystérésis présente une allure quasi linéaire et comme il est étroit nous pouvons en donner une caractéristique idéale (doc. 21) que nous utiliserons dans l'étude des transformateurs (cf. *H-Prépa, Électronique, 2nd année*). Dans le domaine linéaire $\mu_0 \vec{M} = C \vec{H}$, soit $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = K \vec{H}$.

Un matériau doux peut être considéré (en première approximation) comme un milieu linéaire pour lequel :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H},$$

$\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} \approx \mu_r \vec{H}$, où μ_r est une constante

sans dimension appelée « perméabilité magnétique relative au milieu ».

Les valeurs de μ_r vont de 2 000 à plus de 10^6 pour certains matériaux.

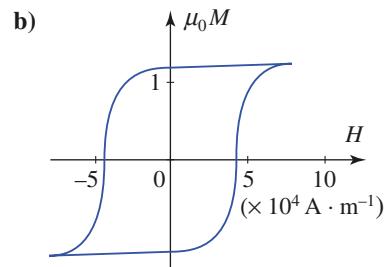
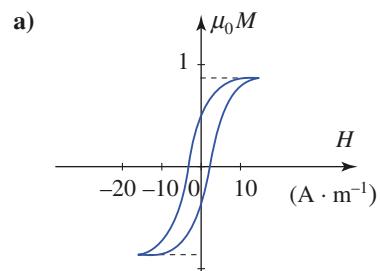
3.5. Dissipation d'énergie dans la carcasse

3.5.1. Courant de Foucault

Un matériau ferromagnétique est en général un bon conducteur ohmique (alliage à base de fer).

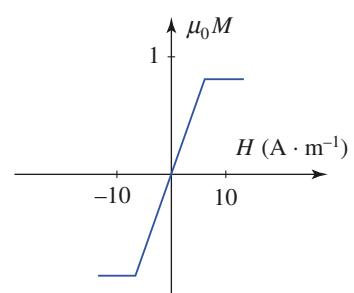
Ce matériau soumis au champ magnétique variable $\vec{B}(t)$ est le siège de courants de Foucault (cf. chapitre 7, § 3) ; or, les pertes de courant de Foucault sont proportionnelles :

- à la conductivité du milieu ;
- au carré de la fréquence ;
- au carré de la section des tôles ;
- au carré de la valeur maximale du champ magnétique. (cf. chapitre 7, Application 7).



Doc. 19. Cycles d'hystérésis :

- a. milieu doux ;
- b. milieu dur.



Doc. 21. Caractéristique idéale d'un matériau doux.

Pour minimiser ces pertes dans une masse métallique importante, celle-ci doit être constituée de tôles peu épaisses parallèles au champ magnétique, isolées les unes des autres (*doc. 22*).

Remarques

- L'enchevêtrement des tôles limite les courants de Foucault sans créer d'entrefer important.
- L'isolant entre les tôles modifie la section effective du matériau magnétique, qui devient différente de la section de la carcasse.

3.5.2. Pertes dues à l'hystérésis

Reprendons le modèle torique du § 3.2, le secondaire étant ouvert. Supposons que les pertes par courant de Foucault et par effet Joule dans le primaire sont négligeables.

La puissance $\mathcal{P}_H = u_1 i_1$, dissipée dans le transformateur, est alors uniquement due aux propriétés ferromagnétiques de la carcasse.

D'après l'étude du § 3.2, $H = \frac{N_1 i_1}{\ell}$ et $u_1 = -e_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 S \frac{dB}{dt}$

(en négligeant la résistance ohmique du primaire), donc $\mathcal{P}_H = S \ell H \frac{dB}{dt}$.

Comme le produit $S \ell$ représente le volume \mathcal{V} de la carcasse magnétique, la puissance $\mathcal{P}_{H, \text{vol}}$ dissipée par unité de volume de carcasse vaut $\mathcal{P}_{H, \text{vol}} = H \frac{dB}{dt}$.

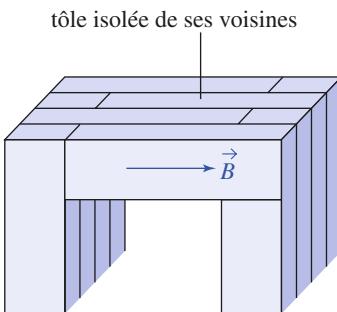
L'énergie \mathcal{E}_H dissipée par unité de volume sur une période T vaut donc :

$$\mathcal{E}_H = \int_t^{t+T} H \frac{dB}{dt} dt = \oint_{\text{cycle}} H dB.$$

Cette intégrale représente l'aire du cycle d'hystérésis.

la densité volumique d'énergie dissipée par période est égale à l'aire du cycle d'hystérésis ; la puissance volumique moyenne correspondante est donnée par :

$$\langle \mathcal{P}_{H, \text{vol}} \rangle = f \oint_{\text{cycle}} H dB \text{ où } f \text{ est la fréquence.}$$



Doc. 22. Enchevêtrement des tôles de la carcasse.

3.5.3. Choix du matériau pour un transformateur

Le matériau choisi pour constituer la carcasse doit satisfaire les conditions suivantes :

- les pertes par hystérésis doivent être minimales, donc le cycle d'hystérésis doit être le plus étroit possible ; en effet, le cycle est parcouru un très grand nombre de fois par unité de temps, il faut choisir un milieu doux ;
- les pertes par courant de Foucault doivent être faibles : la carcasse doit être soit feuilletée (ceci n'est efficace qu'à basse fréquence), soit réalisée dans un matériau isolant ;
- l'aimantation à saturation doit être grande : le champ magnétique dans le transformateur doit être inférieur à sa valeur à saturation pour un bon fonctionnement (quasi linéaire).

La relation $u_1 \approx -e_1 = \frac{d\Phi}{dt} = N_1 S \frac{dB}{dt}$ montre que :

$$U_{\max} = N_1 S \omega B_{\max}.$$

Donc plus B_{\max} est important, plus le produit $N_1 S$ peut être faible.

L'encombrement et le prix du transformateur sont alors diminués.

Dans les transformateurs basse-fréquence, les courants de Foucault sont limités par le feuillement de la carcasse. Elle est constituée de la tôle en alliage à base de fer, soit :

- au silicium, isolées par une oxydation thermique de leur surface ;
- au silicium à grains orientés (les cristaux constituant la tôle sont orientés par laminage à froid) ; l'isolation est due à une couche de silicate de magnésium obtenu par un recuit des tôles ;
- au nickel, très sensibles aux chocs.

Dans les transformations hautes fréquence (transformateurs d'impulsion, transformateurs d'alimentation à découpage, transformateurs pour signaux radioélectriques de fréquence allant jusqu'à 1 Ghz), le feuillement de la carcasse est insuffisant. Il est nécessaire d'utiliser des matériaux ferromagnétiques isolants : les **ferrites**.

Remarque

Une ferrite est une céramique de formule MeFe_2O , où Me est une combinaison de métaux bivalents le plus couramment manganèse et zinc.

Elle est obtenue par mélange de poudres d'oxydes et de carbonates de ces métaux.

Par rapport aux tôles silicium, les ferrites ont comme avantage leur caractère isolant, mais comme inconvénients leur aimantation à saturation faible, leur perméabilité relative faible, leur fragilité (matériau dur et cassant) et leur prix de revient élevé.

composition	épaisseur de tôle (mm)	$\mu_0 M_{\text{sat}}(\text{T})$	$B_r (\text{T})$	$H_C (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$	μ_{rmax}	résistivité ($\mu\Omega \cdot \text{cm}$)	perte ($\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$)
fer 3 % silicium	0,3 à 0,5	2	1	25	7 000	48	$\frac{1}{(B_{\text{max}} = 1 \text{ T}, 50 \text{ Hz})}$
fer silicium (grains orientés)	0,05	3	1,4	8	> 40 000	48	$\frac{0,2}{(B_{\text{max}} = 1 \text{ T}, 50 \text{ Hz})}$
anhyster (36 % Ni, 64 % Fe)	0,5	1,3	0,6	56	6 000	75	$\frac{1,1}{(B_{\text{max}} = 1 \text{ T}, 50 \text{ Hz})}$
ferrite (Mn Zn)	d'un bloc	0,48	0,15	30	2 500	10^8	$10^{-3}f$ $(B_{\text{max}} = 0,2 \text{ T}, \text{fréquence } f)$

Doc. 23. Caractéristiques de quelques milieux ferromagnétiques.



● AIMANTATION D'UN MILIEU MATÉRIEL

Plongé dans un champ magnétique, un milieu s'aimante : chaque volume mésoscopique $d\tau$ de matière acquiert un moment dipolaire magnétique $d\vec{M}$ induit par le champ, caractérisé par un moment dipolaire volumique \vec{M} appelé *vecteur aimantation* et défini par :

$$d\vec{M} = \vec{M} d\tau.$$

Certains milieux, appelés milieux ferromagnétiques, peuvent présenter une aimantation permanente.

● LOIS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME DANS LES MILIEUX AIMANTÉS

- Le vecteur $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ est appelé vecteur excitation magnétique du milieu.
- L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_{\text{libres}}.$$
- Pour un milieu aimanté conducteur dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents le théorème d'Ampère s'applique sous la forme :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = I_{\text{libre, enlacé}}.$$

- Dans un milieu aimanté $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.
- La loi de Faraday s'écrit : $\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} \right)$.

● ÉTUDE EXPÉRIMENTALE D'UN MILIEU FERROMAGNÉTIQUE

- Dans un milieu ferromagnétique, la relation entre aimantation et excitation magnétique n'est pas linéaire et dépend des états antérieurs du milieu magnétique.
- L'aimantation \vec{M} est importante pour une excitation magnétique \vec{H} même faible : $M \gg H$, donc $B = \mu_0 M$.
- Le champ magnétique dans un aimant permanent est *son champ rémanent*.
- Un matériau doux peut être considéré (en première approximation) comme un milieu linéaire pour lequel :

$$B = \mu_0 \mu_r H,$$

$$M = (\mu_r - 1)H \approx \mu_r H, \text{ où } \mu_r \text{ est une constante}$$

sans dimension appelée « perméabilité magnétique relative au milieu ».

Les valeurs de μ_r vont de 2 000 à plus de 10^6 pour certains matériaux.

- La densité volumique d'énergie dissipée par période est égale à l'aire du cycle d'hystérésis ; la puissance volumique correspondante est donnée par :

$$\langle \mathcal{P}_{H, \text{vol}} \rangle = f \oint_{\text{cycle}} H dB, \text{ où } f \text{ est la fréquence.}$$

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Pouvez-vous décrire en deux phrases le phénomène d'aimantation d'un milieu ?
- ✓ Quelle relation lie le vecteur « aimantation » et le vecteur « densité de courants volumiques d'aimantation » ?
- ✓ Comment s'écrit, dans l'approximation des régimes quasi permanents, le théorème d'Ampère dans un milieu aimanté ?
- ✓ Donner le schéma électrique du montage permettant de tracer le cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique.
- ✓ Tracer l'allure de ce cycle et placer les points remarquables.
- ✓ Quelles sont les principales propriétés d'un matériau ferromagnétique ?
- ✓ Qu'est-ce qui différencie un matériau ferromagnétique doux d'un matériau ferromagnétique dur ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Le vecteur excitation magnétique est défini

par :

- a. $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$
- b. $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} + \vec{M}$
- c. $\vec{H} = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B} + \vec{M}$
- d. $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$.

2. Dans l'équation de Maxwell-Ampère

$\vec{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j}$, \vec{j} désigne :

- a. la densité de courants volumiques libres
- b. la densité totale de courants volumiques
- c. la densité de courants volumiques d'aimantation
- d. la densité de courants volumiques autres que ceux d'aimantation.

3. Un matériau ferromagnétique :

- a. est linéaire
- b. conserve son aimantation quel que soit le traitement qu'il subit
- c. ne dissipe pas d'énergie par courants de Foucault
- d. dissipe une énergie proportionnelle à l'aire de son cycle d'hystérésis $B(H)$
- e. perd ses propriétés en deçà de la température de Curie.

4. Un matériau ferromagnétique dur :

- a. a un cycle d'hystérésis étroit
- b. peut être utilisé comme aimant permanent
- c. peut être utilisé comme carcasse de transformateur
- d. est caractérisé par un fort champ coercitif.

► Solution, page 263.

Exercices

1

Champs caractéristiques d'un matériau ferromagnétique

À l'aide du montage ci-dessous, on relève différents cycles d'hystérésis pour un transformateur, dont le primaire possède 1 000 spires et le secondaire 250.

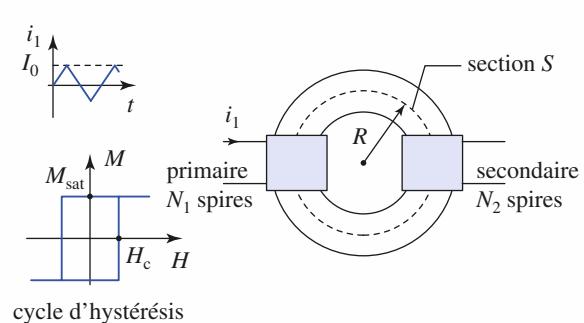
La longueur moyenne ℓ de la carcasse est de 40 cm et sa section S de 25 cm^2 .

1) Donner les relations entre u_1 , u_2 , H et B (en supposant $i_2 \ll i_1$).

2) En déduire le champ rémanent, l'aimantation à saturation et le champ coercitif du matériau.

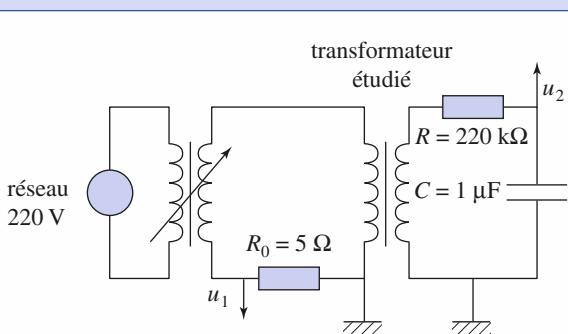
3) Le transformateur est utilisé sous 220 V, 50 Hz.

Estimer ses pertes par hystérésis.

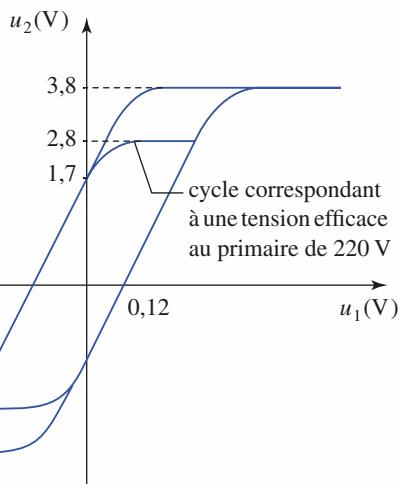


On impose au primaire d'un transformateur de ce type un courant en forme de signal triangulaire, son secondaire étant à vide ($i_2 = 0$).

Déterminer l'allure de la tension au secondaire en négligeant H devant M_{sat} .



Doc. 1.



Doc. 2.

2 Cycle d'hystérésis rectangulaire

On suppose que le cycle d'hystérésis donnant l'aimantation en fonction de l'excitation magnétique est rectangulaire pour la carcasse magnétique d'un transformateur.

3 * Étude d'un transformateur à noyau ferromagnétique

On rappelle les valeurs du nombre d'Avogadro :

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

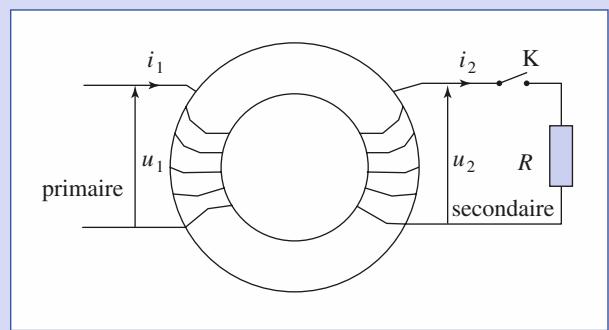
et de la constante de Boltzmann :

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Soit un circuit magnétique torique de longueur moyenne $\ell = 41,3 \text{ cm}$ et de section droite $S = 1,5 \text{ cm}^2$ taillé dans un matériau ferromagnétique, homogène et conducteur, comportant deux enroulements (bobines) dont les nombres de spires sont $N_1 = 250$ et $N_2 = 500$.

L'interrupteur K est d'abord ouvert.

On néglige tout phénomène d'hystérésis et de fuites magnétiques ainsi que la résistance des bobines.



On désigne par B la norme du champ magnétique, par H celle de l'excitation magnétique et par i_1 celle du courant dans le bobinage 1.

On considère que B a une valeur unique dans tout le circuit magnétique et qu'il dépend de H selon le tableau ci-dessous relevé expérimentalement.

I_1 (A)	H (A . m ⁻¹)	B (T)
$4,38 \cdot 10^{-2}$	26,5	0,10
$8,76 \cdot 10^{-2}$	53,0	0,2
0,175	106	0,4
0,506	307	1,00
0,999	605	1,30
3,003	1 818	1,65
9,651	5 842	2,00
22,8	13 800	2,01

1) Déterminer le lien entre H et i_1 d'après les mesures données.

Retrouver ce résultat théoriquement.

2) Représenter l'allure du graphe $B(H)$.

Décrire physiquement la courbe $B(H)$, notamment pour :

- $H < 150$ A . m⁻¹ ;
- $H > 5 000$ A . m⁻¹.

3) Déterminer un ordre de grandeur de l'aimantation M , noté M_{sat} , lorsque le matériau est saturé.

4) La masse volumique du matériau est :

$$\rho = 7 860 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

et sa masse molaire est de 56 g . mol⁻¹.

En déduire un ordre de grandeur du moment magnétique dipolaire \mathcal{M} que l'on peut attribuer à chacun des atomes.

5) En comparant l'énergie d'interaction de $\vec{\mathcal{M}}$ dans un champ \vec{B} et l'énergie d'agitation thermique à la température ambiante, donner un ordre de grandeur de B , noté B_{sat} , pour lequel on obtiendra la saturation.

Que pensez-vous du résultat ?

Comment interpréter la valeur expérimentale de B_{sat} ?

6) On cherche à relier H à B par une expression empirique de la forme $H = aB + bB^n$, n étant un entier impair.

Proposer des valeurs pour a , b et n .

7) On impose une tension $u_1(t) = U_{\text{m}_1} \cos \omega t$, avec $\omega = 800 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Déterminer $B(t)$ en fonction de N_1 , S , U_{m_1} et ω .

Déterminer $u_2(t)$, sa valeur maximale U_{m_2} . Que vaut $\frac{U_{\text{m}_2}}{U_{\text{m}_1}}$?

Faire les applications numériques correspondantes.

8) Exprimer $i_1(t)$. On admettra que l'expression trouvée pour $I_1(t)$, a pour développement en série de Fourier :

$$i_1 = 5,675 \sin(\omega t) - 2,880 \sin(3\omega t) + 0,959 \sin(5\omega t) - 0,136 \sin(7\omega t).$$

Tracer $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $i_1(t)$ pour $f = 50$ Hz.

Commenter ces courbes.

9) Le bobinage 1 étant soumis à la tension précédente $u_1(t)$, on ferme K : le bobinage 2 est alors en série avec une résistance $R = 23 \Omega$.

Déterminer $B(t)$. Trouver l'expression de $i_2(t)$, ainsi que son amplitude.

10) Déterminer la nouvelle expression de $i_1(t)$ et montrer que seul le terme fondamental du courant $i_1(t)$ précédent est modifié.

11) Déterminer la puissance moyenne absorbée par le bobinage 1.

$$\text{Mettre cette puissance sous la forme } \frac{U_{\text{m}}^2}{2R_{\text{eq}}}.$$

Exprimer simplement R_{eq} en fonction de R , N_2 et N_1 . Calculer R_{eq} .

Calculer numériquement cette puissance moyenne.



* Circuit torique à plusieurs matériaux

On considère un volume torique de section S , de rayon moyen R tel que $R^2 \gg S$, constitué de trois parties :

- une pièce de matériau ferromagnétique dur (aimant) de longueur $a = 4 \text{ cm}$;
- deux pièces de matériau ferromagnétique doux de longueur totale $b = 20 \text{ cm}$;
- un entrefer d'épaisseur e ($e > 1 \text{ mm}$) et de section S .

Le matériau dur est caractérisé par un cycle d'hystéresis rectangulaire, comme ci-dessous, avec les valeurs remarquables :

$$B_{\text{sat}} = 1 \text{ T} \quad \text{et} \quad H_c = 5 \cdot 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Le matériau doux est linéaire, $B = \mu_0 \mu_r H$, avec $\mu_r = 5 000$.

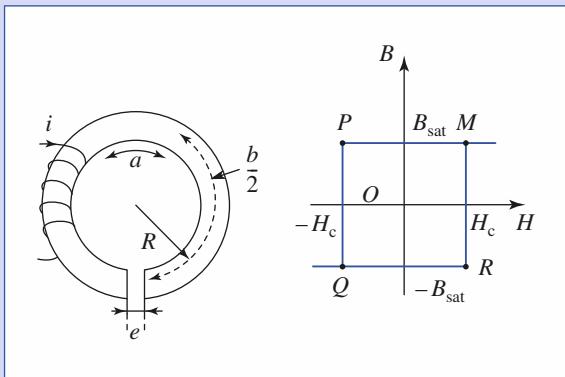
On dispose $N = 4 000$ tours de fils sur le circuit magnétique et on fait circuler dans le bobinage un courant d'intensité i .

On admet qu'il n'y a aucune fuite magnétique.

1) Dans l'aimant, le champ B et l'excitation H sont liés par le cycle d'hystéresis, ce qui donne une première

Exercices

relation entre B et H . Déterminer une seconde relation liant le champ B et l'excitation H dans l'aimant. Simplifier la relation obtenue en tenant compte des valeurs numériques. On utilisera dans toute la suite cette relation simplifiée.



- 2)** On suppose $e = e_1 = 5 \text{ mm}$.
- a)** Écrire, en passant aux valeurs numériques, la relation précédente entre B et i .

- b)** i décroît de $i_{01} = 2 \text{ A}$ à $-i_{01}$.

Représenter graphiquement les variations de B en fonction de i pendant cette décroissance.

Compléter le graphe pour la phase de croissance où i passe de $-i_{01}$ à i_{01} , en indiquant par des flèches le sens du parcours du cycle obtenu.

Préciser les valeurs remarquables de i correspondant aux points M, P, Q, R du cycle d'hystérésis de l'aimant.

- 3)** Reprendre l'étude du **2) b)** avec :

$$e = e_2 = 2 \text{ mm} \quad \text{et} \quad i_{02} = 1,2 \text{ A}.$$

- 4)** Quelle est la valeur du champ magnétique B dans l'entrefer, si, après une série de cycles, on ramène i de i_0 à 0 ? On traitera les deux cas $e = e_1 = 5 \text{ mm}$ et $e = e_1 = 2 \text{ mm}$.

- 5)** Quelle serait la longueur minimale à donner à a , toutes les autres dimensions et caractéristiques restant inchangées, pour que, une fois le bobinage enlevé après aimantation, le champ magnétique résiduel dans l'entrefer soit égal à $B_{\text{sat}} = 1 \text{ T}$ pour $e = e_1 = 5 \text{ mm}$?

Corrigés

Solution du tac au tac, page 259

- | | |
|------------------|----------------|
| 1. Vrai : a, d ; | Faux : b, c |
| 2. Vrai : a ; | Faux : b, c, d |
| 3. Vrai : d ; | Faux : a, b, c |
| 4. Vrai : b, d ; | Faux : a, c |

1

1) En utilisant les résultats et les hypothèses du § 3.2 :

- le théorème d'Ampère donne, pour un contour à l'intérieur de la carcasse : $N_1 i_1 = \ell H$.

D'où $H = \frac{N_1 u_1}{\ell R_0} \approx 500 u_1$, avec u_1 en volt et H en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$;

- la relation entre le flux commun $\phi_C = SB$ et la f.e.m. d'induction au secondaire $e_2 = -N_2 \frac{d\phi_C}{dt}$ donne :

$$e_2 = -S N_2 \frac{dB}{dt}.$$

La constante de temps du circuit RC vaut 0,22 s et c'est une valeur très grande devant la période 20 ms du signal de fréquence 50 Hz. Le circuit intègre donc la tension de sortie du transformateur et on obtient :

$$u_2 \approx \frac{1}{RC} \int -e_2 dt = \frac{S N_2}{RC} B,$$

soit $B \approx 0,35 u_2$ (u_2 en volt et B en tesla).

- 2) Le champ rémanent est obtenu par $H = 0$, soit $u_1 = 0$ et $u_2 = 1,7$ V, d'où $B_r = 0,60$ T.

L'excitation coercitive est obtenue pour $B = 0$, soit $u_1 = 0,12$ V et $u_2 = 0$, d'où $H_C = 60 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le champ magnétique à saturation est obtenu lorsque u_2 est constant, donc pour $u_2 = 3,8$ V, $B_{\text{sat}} = 0,35 u_2 = 1,33$ T et l'aimantation correspondante est égale à :

$$M_{\text{sat}} = \frac{B_{\text{sat}}}{\mu_0} = 1,06 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Pour $u_2 = 2,8$ V, $B_{2\max} = 0,98$ T et $M_{2\max} = 0,78 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.

Dans ce cas B_{\max} ne correspond pas au champ à saturation et $M_{2\max} \neq M_{\text{sat}}$.

- 3) Quand le primaire est alimenté sous 220 V efficace, la valeur maximale du champ magnétique correspond à $u_2 = 2,8$ V, soit $B_{\max} = 0,98$ T.

L'énergie dissipée par unité de volume en une période, à cause des phénomènes d'hystérésis, est obtenue en multipliant l'aire du cycle d'hystérésis par la fréquence, soit une puissance :

$$\langle \mathcal{P}_{H,\text{vol}} \rangle = f \oint_{\text{cycle}} H dB.$$

L'aire du cycle est environ $4B_{\max}H_C = 235 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$, d'où :

$$\langle \mathcal{P}_{H,\text{vol}} \rangle \approx 11,8 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-3}.$$

La puissance dissipée dans le transformateur est donc :

$$\mathcal{P}_H = \ell S \langle \mathcal{P}_{H,\text{vol}} \rangle = 11,8 \text{ W}.$$

2

L'excitation magnétique est reliée au courant primaire par :

$$N_1 i_1 = 2\pi R H \quad (\text{cf. § 3.2.})$$

La relation $B = \mu_0(H + M)$ se simplifie si on néglige H devant M_{sat} en :

$$B = \pm \mu_0 M_{\text{sat}}.$$

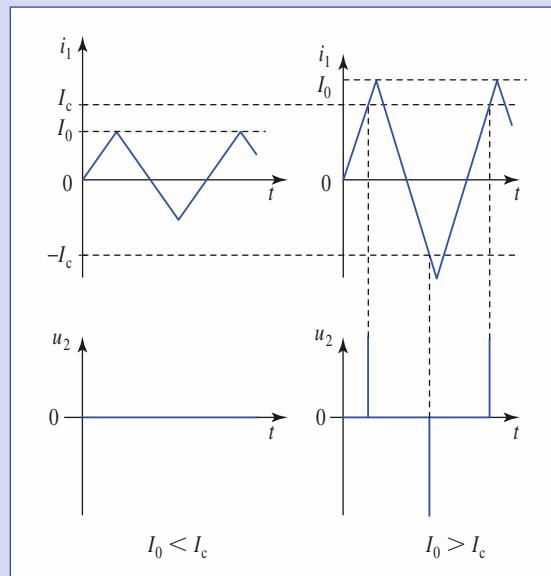
La relation entre tension secondaire et champ magnétique est $u_2 = N_2 S \frac{dB}{dt}$.

Deux cas sont possibles :

- $I_0 < I_C = \frac{2\pi R}{N_1} H_C$. $|H|$ est toujours inférieur à H_C . L'aimantation de la carcasse magnétique ne peut pas changer. Le champ magnétique est quasiment constant, donc u_2 reste toujours nul.

- $I_0 > I_C = \frac{2\pi R}{N_1} H_C$. L'aimantation de la carcasse change périodiquement :

- Quand i_1 croît et atteint la valeur $I_c = \frac{2\pi R}{N_1} H_C$, M passe de $-M_{\text{sat}}$ à M_{sat} . Ceci provoque une variation brutale de B de $-\mu_0 M_{\text{sat}}$ à $\mu_0 M_{\text{sat}}$, donc une impulsion de tension positive pour u_2 .
- Quand i_1 décroît et atteint la valeur $-I_c = -\frac{2\pi R}{N_1} H_C$, M passe de M_{sat} à $-M_{\text{sat}}$. Ceci provoque une variation brutale de B de $\mu_0 M_{\text{sat}}$ à $-\mu_0 M_{\text{sat}}$, donc une impulsion négative de tension pour u_2 .



3

- 1) On trouve à partir des valeurs expérimentales $H = 605I_1$.

Or, en utilisant le théorème d'Ampère, il vient $H\ell = N_1 I_1$.

ici, $\ell = 41,3 \text{ cm}$ et $N_1 = 250$. On retrouve bien $H = 605I_1$ avec H en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ et I en A.

- 2) Sur le graphe ci-après on voit que :

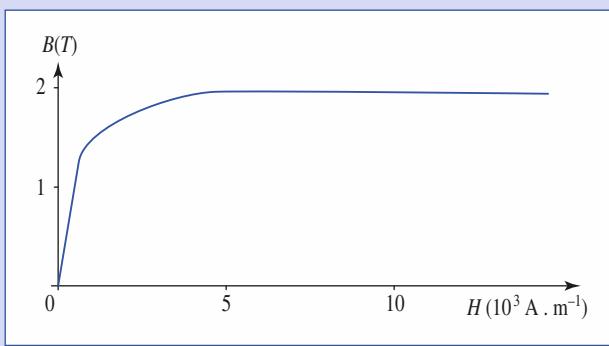
- pour $H < 150 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$, B et H sont proportionnels et on peut écrire :

$$B = \mu_0 \mu_r H;$$

- pour $H > 5000 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$, la saturation est atteinte et :

$$B = B_{\text{sat}}.$$

Corrigés



A.N. : $B_{\text{sat}} = 2 \text{ T}$ et, dans la partie linéaire, $\mu_r = 3000$.

3) $B_{\text{sat}} = \mu_0(H + M_{\text{sat}})$; or, en général $H \ll M_{\text{sat}}$, soit $M_{\text{sat}} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.

Cette valeur est bien supérieure à $H_{\text{max}} = 1,4 \cdot 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.

4) On sait que \vec{M} est la densité volumique de moment magnétique :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{d\tau}$$

Lors de la saturation, considérons que tous les moments sont alignés et qu'ils sont tous égaux :

$$M_{\text{sat}} = n\mathcal{M}$$

où n est le nombre de moments magnétiques par unité de volume :

$$n = N_A \frac{\rho}{M_{\text{molaire}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \frac{M_{\text{molaire}}}{\rho N_A} \cdot M_{\text{sat}} = 1,9 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

5) La saturation est obtenue si tous les dipôles sont alignés, donc si l'énergie d'agitation thermique, qui tend à homogénéiser leur distribution dans l'espace, est faible devant l'énergie d'interaction $\mathcal{E}_B = -\vec{M} \cdot \vec{B}$. On se souvient, par exemple, du facteur de Boltzmann $\exp\left(-\frac{\mathcal{E}_B}{k_B T}\right)$ donnant la répartition statistique d'un système de dipôles à la température T .

Donc, il faut $B_{\text{sat}} \gg \frac{k_B T}{\mathcal{M}} \approx 200 \text{ T}$ à 293 K.

Or, expérimentalement $B_{\text{sat}} = 2 \text{ T}$: en réalité, le champ réellement ressenti par un dipôle est la superposition du champ appliqué et de la contribution de tous les autres dipôles voisins : cette contribution est prépondérante dans le ferromagnétisme.

6) Aux faibles valeurs de B , on doit retrouver une loi linéaire :

$$H = aB, \text{ avec } a = \frac{106}{0,4} = 265 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$$

Pour les fortes valeurs de B , lorsque B passe de 1,65 T à 2 T (on ne prend pas le dernier point de mesure dont la valeur $B = 2,01 \text{ T}$ est trop proche de celle du point précédent $B = 2 \text{ T}$) H passe de 1 818 A · m⁻¹ à 5 842 A · m⁻¹, d'où :

$$\left(\frac{2}{1,65}\right)^n = \frac{5842 - 256 \times 2}{1818 - 256 \times 1,65}, \text{ d'où } n = 7$$

La valeur de b peut se trouver en considérant la valeur intermédiaire $B = 1 \text{ T}$:

$$H = 307 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}, \text{ d'où } b = 42 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$$

On trouve finalement la relation $H = 265B + 42B^7$, qui permet de retrouver à peu près les valeurs expérimentales.

7) L'application de la loi de Faraday au circuit primaire conduit à :

$$u_1 = N_1 S \frac{dB}{dt}$$

En effet $u_1 = R_1 i_1 - e_1$ avec $e_1 = -\frac{d\vec{\phi}_B}{dt}$ à travers les N_1 spires S et $R_1 = 0$. D'où :

$$B(t) = \frac{U_{m_1} \sin \omega t}{N_1 S \omega}$$

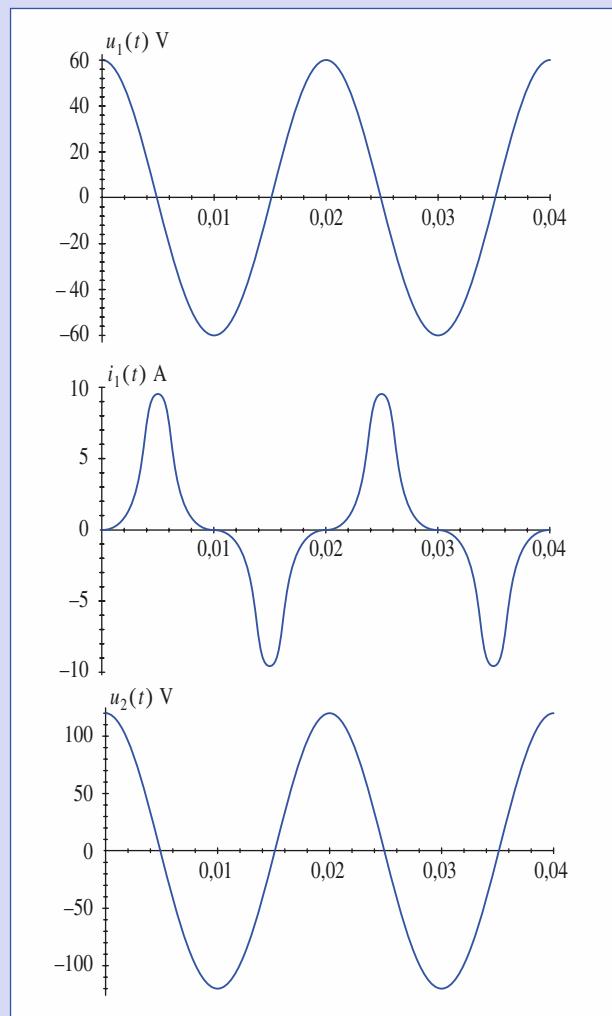
La loi de Faraday appliquée au secondaire donne $u_2 = -e_2 = \frac{d\vec{\phi}_B}{dt}$ à travers les N_2 spires de section S . D'où :

$$u_2 = \frac{N_2}{N_1} u_1 \quad \text{et} \quad \frac{U_{m_2}}{U_{m_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

Ce rapport est appelé « rapport de transformation », m , du transformateur (*cf. H-Prépa Electronique, chapitre 7*). A.N. : $u_{m_1} = 60 \text{ V}$; $u_{m_2} = 120 \text{ V}$; $m = 2$.

$$8) i_1(t) = \frac{H\ell}{N_1} = 43,8B(t) + 6,94B^7(t), \text{ que l'on notera } i_{10}$$

En utilisant $i_1(t)$ donné dans l'énoncé, on obtient les courbes suivantes.



On observe que :

- i_1 est en quadrature de phase par rapport à u_1 et u_2 ;
- $u_2(t)$ est l'image de $u_1(t)$: on a réalisé un transformateur de tension de rapport 2 ;
- $i_1(t)$ n'est pas linéairement liée à $u_1(t)$: le milieu ferromagnétique est non linéaire.

9) Lorsque l'interrupteur K est fermé, la relation $u_1 = N_1 S \frac{dB}{dt}$ au primaire reste toujours valable ; le champ B conserve la même valeur et par suite l'excitation H également.

Au secondaire, on a, en introduisant le rapport de transformation $m = \frac{N_2}{N_1}$;

$$u_2 = N_2 S \frac{dB}{dt} = mu_1 = -R i_2 \text{ (attention au signe !)}$$

d'où $i_2 = -\frac{1}{R} mu_1 = -\frac{1}{R} m U_m \cos \omega t = -5,2 \cos \omega t$ (A) ; $i_2(t)$ est en opposition de phase avec u_1 et u_2 .

10) Le théorème d'Ampère donne maintenant $H\ell = N_1 i_1 + N_2 i_2$, d'où :

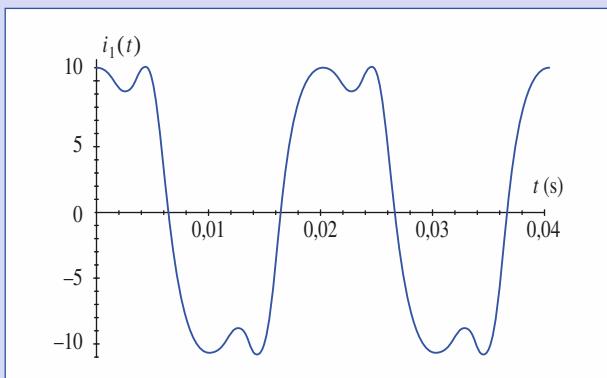
$$i_1 = -\frac{1}{N_1} (H\ell - N_2 i_2) = i_{10} - mi_2.$$

Remarque

Plus R est faible, plus la contribution i_{10} sera faible devant i_2 .

À la limite $i_1 = -mi_2$, soit $\frac{i_2}{i_1} = -\frac{1}{m}$: on a réalisé un transformateur de courant de rapport $-\frac{1}{m}$. Le secondaire est alors en court-circuit.

i_2 étant sinusoïdal de pulsation ω , on constate que seul le terme fondamental de l'intensité i_1 au primaire est modifié. Le nouveau graphe de $i_1(t)$ est donné ci-dessous.



11) La puissance instantanée absorbée au primaire s'écrit : $\mathcal{P}_1 = u_1 i_1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= U_m \cos \omega t \left((5,675 \sin(\omega t) - 2,880 \sin(3\omega t) + 0,959 \sin(5\omega t) \right. \\ &\quad \left. - 0,136 \sin(7\omega t) + m \frac{1}{R} m U_m \cos \omega t \right) \end{aligned}$$

d'où, en valeur moyenne $\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2R} m^2 U_m^2$ de la forme $\mathcal{P}_1 = \frac{U^2}{2R_{eq}}$, avec $R_{eq} = \frac{R}{m^2}$.

Pour $U_m = 60$ V, on trouve $\mathcal{P}_1 = 313$ W.



1) Les conditions aux limites (continuité de la composante normale de B sur les différentes interfaces imposent la même valeur de B dans l'aimant, le matériau doux et dans l'entrefer.

D'après le théorème d'Ampère sur le cercle de rayon R , on a :

$$Ha + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} b + \frac{B}{\mu_0} e = Ni.$$

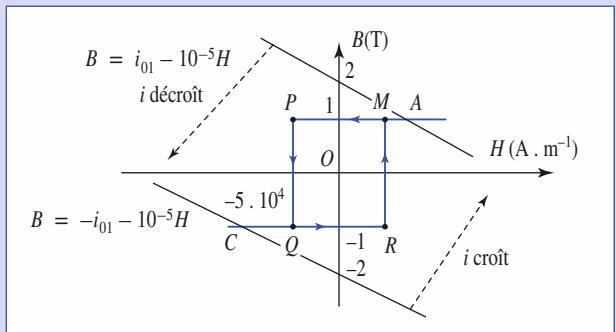
Sachant que $\frac{b}{\mu_r} = 0,04$ mm $\ll e$, on peut simplifier en $Ha + \frac{B}{\mu_0} e \approx Ni$.

2) a) Pour $e = e_1 = 5$ mm, la relation précédente donne :

$$B = i - 10^{-5}H,$$

avec B en T, i en A et H en A . m⁻¹.

b) Pour obtenir la courbe $B(i)$ lorsque i décroît de $i_{01} = 2$ A à $-i_{01}$, il suffit de faire « glisser » la droite $B = i - 10^{-5}H$ sur le cycle d'hystérésis et tracer ensuite le lieu des points d'intersection des deux courbes (partie AMPQC du cycle) :



• de A à P , B reste constant à la valeur $B_{sat} = 1$ T ; en M , $i = 1,5$ A et en P , $i = 0,5$ A ;

• de P à Q , B décroît suivant la loi $B = i + 10^{-5}H_c = i + 0,5$;

• de Q à C , B reste constant à la valeur $-B_{sat} = -1$ T ; en Q , on a $i = -1,5$ A .

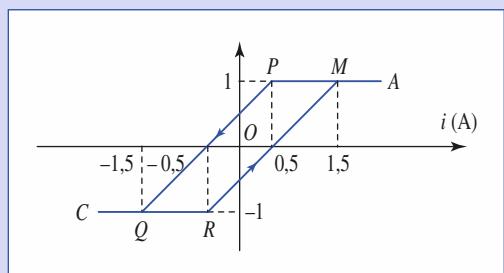
Lorsque i croît de $-i_{01}$ à $+i_{01}$, le point d'intersection entre la droite $B = i - 10^{-5}H$ et le cycle suit la partie $CQRMA$:

• de C à R , B reste constant à la valeur $-B_{sat} = -1$ T ; en R , on a $i = -0,5$ A .

• de R à M , B croît suivant la loi $B = i - 10^{-5}H_c = i - 0,5$;

• de M à A , B reste constant à la valeur $B_{sat} = 1$ T .

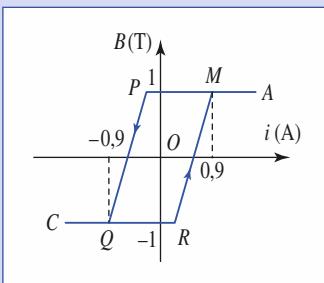
On en déduit le cycle $B = B(i)$, représenté ci-dessous.



Corrigés

3) Pour $e = e_2 = 2 \text{ mm}$, B et H sont reliés par $B = 2,5i - 2,5 \cdot 10^{-5}H$. Lorsque i varie entre $i_{02} = 1,2 \text{ A}$ et $-i_{02}$, on obtient le cycle ci-dessous, un peu moins incliné que celui de la question précédente, avec :

$$\begin{aligned} \text{en } M : i &= 0,9 \text{ A} ; & \text{en } P : i &= -0,1 \text{ A} ; \\ \text{en } Q : i &= -0,9 \text{ A} & \text{et en } R : i &= 0,1 \text{ A}. \end{aligned}$$



4) Lorsqu'on supprime le courant, l'excitation H s'annule et subsiste le champ rémanent B_r , soit :

- $B_r = 0,5 \text{ T}$ pour $e = 5 \text{ mm}$ (la saturation n'est pas atteinte à la question 2) ;
- $B_r = 1 \text{ T}$ pour $e = 2 \text{ mm}$ (la saturation est atteinte à la question 3) ;

5) Pour obtenir la saturation lorsque le courant i est nul, il faut que le point P du cycle $B(i)$ corresponde à une intensité négative, à la limite nulle. Dans le cas limite, la droite $Ha + \frac{B}{\mu_0 e} = Ni$ coupe légèrement MP du cycle d'hystérésis

de l'aimant en P pour $i = 0$, d'où $-H_c a + \frac{B_{\text{sat}}}{\mu_0} e = 0$.

On en déduit $a = \frac{B_{\text{sat}} e}{\mu_0 H_c}$, soit pour $e = e_1 = 5 \text{ mm}$: $a = 8 \text{ cm}$.

Annexe

Formulaire

On désigne par U et V des champs scalaires :

$$U = U(M, t) \quad \text{et} \quad V = V(M, t).$$

On désigne par \vec{A} et \vec{B} des champs de vecteurs :

$$\vec{A} = \vec{A}(M, t) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}(M, t).$$

1 Quelques relations utiles

$$\overrightarrow{\text{grad}}(UV) = U \overrightarrow{\text{grad}} V + V \overrightarrow{\text{grad}} U.$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(UA) = U \overrightarrow{\text{rot}} A + \overrightarrow{\text{grad}} U \wedge \overrightarrow{A}.$$

$$\text{div}(U\vec{A}) = U \text{div}\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \vec{A}.$$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}.$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} U) = \vec{0}.$$

$$\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0.$$

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} U)$$

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\text{rot} \vec{A})$$

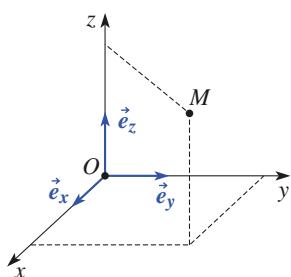
$$\text{ou } \overrightarrow{\text{rot}}(\text{rot} \vec{A}) = -\Delta \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}).$$

2 Utilisation des coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

$$U(M, t) = U(x, y, z, t).$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(M, t) &= A_x(x, y, z, t) \vec{e}_x + A_y(x, y, z, t) \vec{e}_y \\ &\quad + A_z(x, y, z, t) \vec{e}_z. \end{aligned}$$



■ Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z.$$

■ Divergence

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

■ Rotationnel

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

■ Laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

■ Laplacien d'un champ de vecteurs

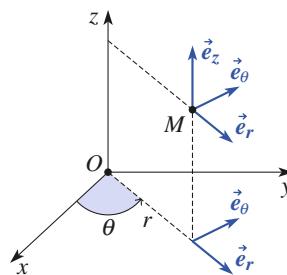
$$\Delta \vec{A} = \begin{cases} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

3 Utilisation des coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.$$

$$U(M, t) = U(r, \theta, z, t).$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(M, t) &= A_r(r, \theta, z, t) \vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, z, t) \vec{e}_\theta \\ &\quad + A_z(r, \theta, z, t) \vec{e}_z. \end{aligned}$$



Annexe

■ Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z.$$

■ Divergence

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

■ Rotationnel

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta \\ &\quad + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z. \end{aligned}$$

■ Laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

■ Quelques résultats utiles en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U(r)) = \frac{dU}{dr} \vec{e}_r.$$

$$\text{div} \left(\frac{\vec{e}_r}{r} \right) = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{e}_\theta}{r} \right) = \vec{0}.$$

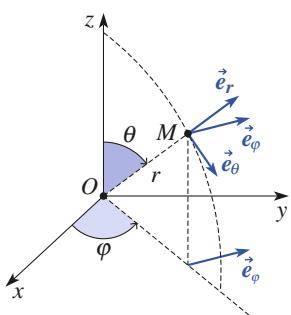
$$\Delta(U(r)) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right).$$

4 Utilisation des coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r.$$

$$U(M, t) = U(r, \theta, \varphi, t).$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(M, t) &= A_r(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_\theta \\ &\quad + A_\varphi(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$



■ Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

■ Divergence

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

■ Rotationnel

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

■ Laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

■ Quelques résultats utiles en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U(r)) = \frac{dU}{dr} \vec{e}_r.$$

$$\text{div} \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = 0.$$

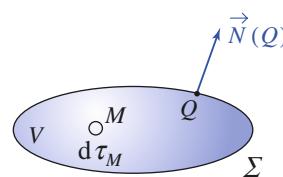
$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin \theta} \right) = \vec{0}.$$

$$\begin{aligned} \Delta(U(r)) &= \frac{1}{r} \frac{d^2(rU)}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) \\ &= \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{d^2 U}{dr^2}. \end{aligned}$$

5 Théorème de Green-Ostrogradski

Le flux sortant d'un champ vectoriel \vec{G} (ne présentant pas de discontinuité sur une surface fermée ou non située à l'intérieur du volume V) à travers une surface Σ fermée est égal à l'intégrale, sur le volume V limité par cette surface Σ , de sa divergence :

$$\iint_{\text{surface } \Sigma \text{ fermée}} \vec{G}(Q) \cdot \vec{N}(Q) dS = \iiint_{\text{volume } V} \text{div}_M(\vec{G}(M)) d\tau_M$$

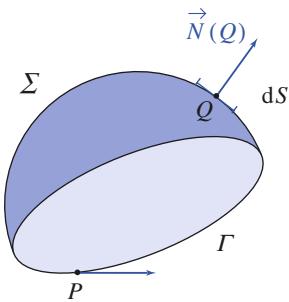


6

Théorème de Stokes-Ampère

La circulation d'un champ vectoriel \vec{G} le long d'un contour fermé Γ est égale au flux de son rotationnel à travers TOUTE surface s'appuyant sur ce contour (\vec{G} est supposé continu)

$$\oint_{\text{contour } \Gamma} \vec{G}(P) \cdot d\ell_P = \iint_{\substack{\text{surface } \Sigma \\ \text{s'appuyant sur } \Gamma}} \text{rot}(\vec{G}(Q)) \cdot \vec{N}(Q) \cdot dS.$$



Index

A

A.R.Q.P.

- dans les conducteurs 143
- en électricité 143
- action d'un champ extérieur sur un dipôle 76
- aimantation 244
 - à saturation 253
- application des courants de Foucault 222
- approximation
 - des régimes quasi permanents (A.R.Q.P.) 11, 141
- dipolaire 71
- auto-induction 199

C

capacité

- du condensateur 106
- du système 106

champ

- coercitif 254
- de gradient 41
- électromagnétique 12
- induit 220
- propre 168
- rémanent 253
- champ électromoteur
 - de Lorentz 176, 185
 - de Neumann 183

champ magnétique

- permanent 45
- tournant 218

charge

- d'un conducteur 95
- d'un conducteur par influence 99
- de conduction 16

circulation

- conservative 41
- du champ électrique 41

coefficient d'influence électrostatique 104

compteur électrique 233

condensateur 106

- cylindrique 110
- plan 44, 107
- sphérique 110

conducteur

- en équilibre 94
- parfait 147

conduction

- électrique 16

conductivité 17

- d'un milieu 16

conservation de la charge 8

contour d'Ampère 64

B

conversion électromécanique 215

convertisseur de puissance 217

couplage

électromécanique 211

magnétique de circuits 205

courant

d'aimantation équivalent 246

de déplacement 131

de déplacement dans un conducteur

 143

de Foucault 220, 255

induit 168

induit volumique 220

courbe de première aimantation 254

cycle d'hystérésis 249

D

dipôle

électrostatique 72

magnétique 71

discontinuité

du champ électrique 138

du champ magnétique 138

distribution

de charges 6

de courant axisymétrique 67

non filiforme 64

E

écran électrique 103

effet

de bord 108

de l'induction 170

de peau 144, 220

Hall 22

Joule 21

élément correspondant 99

énergie

d'un ensemble de conducteurs en équilibre 100

du champ 113

du condensateur 112

électromagnétique 147

magnétique 201

potentielle d'interaction 79

équation

de diffusion du champ 144

de Laplace 101

de Maxwell 133

de Maxwell-Ampère 131, 132, 134, 247

de Maxwell-Faraday 128, 134

de Maxwell-Gauss 40, 134

de Poisson 42

du flux magnétique 134

équilibre électrostatique 43, 96

F – H

étincelle de rupture 203

excitation magnétique 247

F – H

flux

magnétique 134

propre 199

force

de Lorentz 134

électromotrice d'auto-induction 199

électromotrice d'induction 184

magnétique 22

haut-parleur 211

I – J

inductance

d'une bobine 199

mutuelle de deux circuits 205

mutuelle entre deux spires 206

induction

de Lorentz 168, 170

de Neumann 169, 170

électromagnétique 168

influence

électrostatique 99

totale 99

intensité électrique 7

jauge de Lorentz 140

L – M

loi

d'Ohm 143

d'Ohm généralisée 201, 207

d'Ohm intégrale 20

d'Ohm locale 16

de Biot et Savart 45

de Faraday 248

de modération 170

locale 43

qualitative de Lenz 170

magnéton de Bohr 70

matériau ferromagnétique 249

microphone 215

milieu

aimanté 247

ferromagnétique 249

modèle de Drude 17

moment

dipolaire 70

dipolaire magnétique 69

magnétique 69

magnétique atomique 69

moteur

à courant continu et génératrice 215

asynchrone 218

Index

P

perte due à l'hystéresis 256
phénomène d'induction 168
potentiel
 du conducteur 94
 retardé 140
 scalaire 41
 scalaire V 140
 vecteur 74
 vecteur A 140
première aimantation 254
principe du moteur asynchrone 218
production d'un champ tournant 218

puissance cédée par le champ 147
aux charges 14

R - S - T

régime permanent 10
sphère radioactive 159
substance
 diamagnétique 245
 ferromagnétique 245
 paramagnétique 245
supraconducteur 147
théorème
 d'Ampère 64, 248
 d'Ampère généralisé 132

de Coulomb 95, 96
de Poynting 151
de Stockes 64
de superposition 101
transformateur 256
transformation galiléenne du champ 134

V

vecteur
 aimantation 244, 245
 de Poynting 150
voltmètre analogique 227

**NOUVEAU
PROGRAMME**



*La collection de référence
des classes préparatoires scientifiques*

Électromagnétisme

2^e année MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*

1. Charges et champs électromagnétique
2. Champ électromagnétique permanent
3. Compléments de magnétostatique
4. Conducteurs en équilibre électrostatique.
Condensateurs

5. Équations de Maxwell
6. Induction électromagnétique
7. Applications de l'induction
8. Ferromagnétisme (PSI)



le savoir-faire Hachette au service des prépas

MATHÉMATIQUES

- Algèbre-Géométrie MP-MP*
Analyse 1 MP-MP*
Analyse 2 MP-MP*
Algèbre-Géométrie PC-PC* PSI-PSI*
Analyse PC-PC* PSI-PSI*

PHYSIQUE

- Optique ondulatoire MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Ondes MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Électromagnétisme MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Thermodynamique MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Mécanique du solide et des systèmes MP-MP* PC-PC*
Mécanique des fluides PC-PC* PSI-PSI*
Électronique PSI-PSI*

CHIMIE

- Chimie PC-PC*
Chimie MP-MP* PT-PT*
Chimie PSI-PSI*
(parution janvier 2005)



EXERCICES & PROBLÈMES

Des rappels de cours et de nombreux exercices corrigés pour s'entraîner toute l'année et pour préparer les concours

**TOUT LE PROGRAMME
EN UN SEUL VOLUME**



www.hachette-education.com

ISBN : 978-2-0118-1758-7



HACHETTE
Supérieur