



LES NOUVEAUX  
**Précis**  
BRÉAL

**Physique**

# Électrocinétique

MPSI

Cours

Méthodes

Exercices résolus

G. ROSSET

Nouveau programme



Copyrighted material



LES NOUVEAUX  
**Précis**  
BRÉAL

# Électrocinétique

## MPSI

---

G. ROSSET

Professeur en classes préparatoires scientifiques  
au lycée La Martinière à Lyon



1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex



Breal  
éditions

Copyrighted material

LES NOUVEAUX

# Précis

B R É A L

**Mathématiques 1<sup>re</sup> année**

- Analyse MPSI
- Algèbre et géométrie MPSI

**Physique 1<sup>re</sup> année**

- Mécanique MPSI
- Électromagnétisme MPSI
- Électrocinétique MPSI
- Optique MPSI-PCSI-PTSI
- Thermodynamique MPSI

**Chimie 1<sup>re</sup> année**

- Chimie MPSI

**Exercices 1<sup>re</sup> année**

- Mathématiques MPSI
- Physique MPSI



Nous remercions M. Jérôme MAJOU, professeur en classes préparatoires scientifiques au lycée Jules Ferry, à Versailles, pour sa collaboration à cet ouvrage.

*Maquette : Sophie Martinet*

*Couverture : Sophie Martinet*

*Réalisation : Alpha-Édit*

© Bréal 2003

Toute reproduction même partielle interdite.

Dépôt légal : août 2003.

ISBN 2 7495 0224 1

**L**es Nouveaux Précis Bréal sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires une aide efficace dans leur travail. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de première année de la filière MPSI. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.
- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.
- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos ☀ ou ⚡). Certains exercices sont accompagnés de courtes indications, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer !

Il nous est apparu nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Ainsi, les étudiants de MPSI disposeront, en électrocinétique, d'un outil de travail complet, adapté au rythme soutenu de cette première année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce Nouveau Précis les aidera à accéder avec confiance en deuxième année et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse [infos@editions-breal.fr](mailto:infos@editions-breal.fr).

L'éditeur et les auteurs



# Sommaire

<b>Chapitre 1 ■ Lois générales de l'électrocinétique .....</b>	<b>7</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre .....</i>	18
<i>Exercices : énoncés, solutions .....</i>	23
<b>Chapitre 2 ■ Modélisations linéaires d'un dipôle .....</b>	<b>31</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre .....</i>	43
<i>Exercices : énoncés, solutions .....</i>	54
<b>Chapitre 3 ■ Condensateurs et bobines – Dipôles linéaires .....</b>	<b>79</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre .....</i>	90
<i>Exercices : énoncés, solutions .....</i>	94
<b>Chapitre 4 ■ Régimes transitoires .....</b>	<b>103</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre .....</i>	125
<i>Exercices : énoncés, solutions .....</i>	133
<b>Chapitre 5 ■ Signaux sinusoïdaux .....</b>	<b>165</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre .....</i>	173
<i>Exercices : énoncés, solutions .....</i>	176
<b>Chapitre 6 ■ Étude du circuit RLC série : résonance .....</b>	<b>181</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre .....</i>	197
<i>Exercices : énoncés, solutions .....</i>	201
<b>Chapitre 7 ■ Régime sinusoïdal forcé .....</b>	<b>213</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre .....</i>	224
<i>Exercices : énoncés, solutions .....</i>	230
<b>Chapitre 8 ■ Filtres du premier ordre .....</b>	<b>245</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre .....</i>	263
<i>Exercices : énoncés, solutions .....</i>	273
<b>Index .....</b>	<b>284</b>



## CHAPITRE

# **1**

# *Lois générales de l'électrocinétique*

## **Introduction**

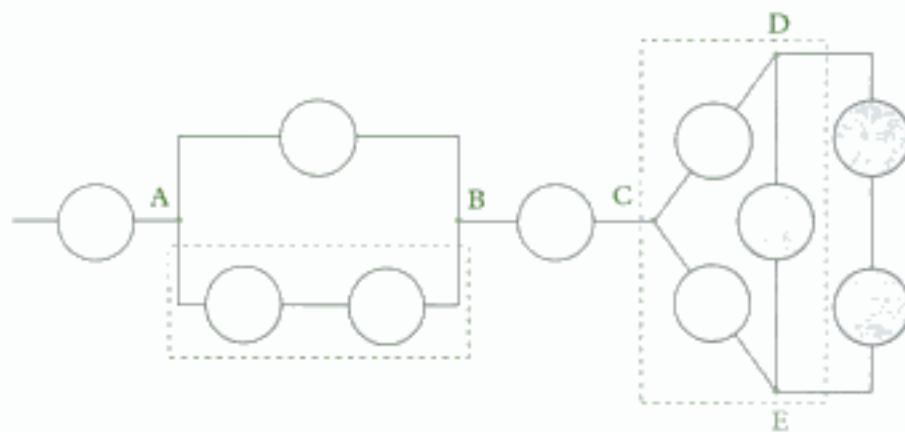
Un circuit électrique est constitué de différents composants reliés entre eux par des fils. On appelle *dipôle électrocinétique* un composant ayant deux bornes, par exemple un générateur, une résistance, un condensateur ou une bobine. En travaux pratiques, on étudiera aussi une diode, une lampe à incandescence, une varistance, etc.

Ce chapitre introduit les grandeurs et les lois fondamentales de l'électrocinétique.

## **Plan du chapitre 1**

<b>A. La loi des nœuds . . . . .</b>	<b>8</b>
1. Les différents courants électriques . . . . .	8
2. Intensité du courant électrique . . . . .	9
3. Densité de courant . . . . .	10
4. Conservation de la charge : la loi des nœuds . . . . .	12
<b>B. La loi des mailles . . . . .</b>	<b>13</b>
1. Différence de potentiel entre deux points . . . . .	13
2. Additivité des tensions : la loi des mailles . . . . .	14
<b>C. Puissance électrique . . . . .</b>	<b>15</b>
1. Caractère générateur – caractère récepteur . . . . .	15
2. Convention générateur – convention récepteur . . . . .	16
3. Puissance électrique d'un dipôle . . . . .	16
<b>C. L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>Méthodes</b>	
L'essentiel ; mise en œuvre . . . . .	18
<b>Énoncés des exercices . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>Indications . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>Solution des exercices . . . . .</b>	<b>25</b>

Dans un circuit électrique, on appelle *nœud* un point du circuit reliant entre eux trois dipôles ou plus. L'ensemble des dipôles compris entre deux nœuds consécutifs constitue une *branche*. Enfin, un ensemble de branches formant un contour fermé constitue une *maille* (fig. 1).



**Fig. 1** - Les points A, B, C, D, E sont des nœuds. Sur le schéma, on a encadré en pointillés la branche AB et la maille CDE.

## A. La loi des nœuds

Le courant électrique dans un circuit correspond à un mouvement ordonné de charges électriques (appelées *porteurs de charges* ou plus simplement *porteurs*), sans tenir compte du mouvement microscopique désordonné de ces charges.

### A.1. Les différents courants électriques

En général, on distingue plusieurs types de courants électriques.

- Le courant de conduction correspond au déplacement de charges électriques dans un support matériel conducteur :
  - dans les conducteurs usuels, les porteurs de charge sont les électrons de charge négative  $q = -e^1$  ;
  - dans les semi-conducteurs, les porteurs de charge sont soit des électrons (semi-conducteurs dopés  $n$ ), soit des « trous » de charge  $q = +e$  (semi-conducteurs dopés  $p$ ) ;
  - dans les électrolytes, les porteurs de charge sont des ions en solution (cations et anions).
- Le courant de convection est causé par le déplacement d'un objet lui-même chargé<sup>2</sup>.
- Le courant de particules est dû aux déplacements de particules chargées dans le vide, par exemple d'électrons dans le tube d'un téléviseur ou d'un oscilloscope.
- Le courant de déplacement est introduit lors de la propagation des ondes électromagnétiques.

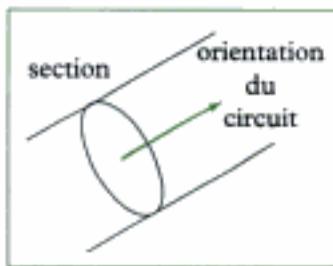
Le passage d'un courant électrique crée toujours un champ magnétique<sup>3</sup>, qui met en rotation une aiguille aimantée (par exemple, dans une boussole).

En première année, seul le courant de conduction est étudié : dans la suite, on se placera donc toujours dans ce cas.

1. La charge élémentaire  $e$  vaut  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

2. Par exemple, en frottant un vêtement en acrylique avec une règle en plastique, on arrache des électrons à la règle qui se charge négativement. Si l'opérateur déplace la règle dans la pièce, il crée alors un courant de convection.

3. Hans Christian Ørsted (1777-1851), physicien danois, découvrit en 1820 l'existence du champ magnétique créé par les courants électriques, ouvrant ainsi la voie à la théorie de l'électromagnétisme.



**Fig. 2** - Section du circuit orienté.

1. Charles de Coulomb (1736-1806), physicien français, établit les lois expérimentales et théoriques de l'électrostatique et du magnétisme.

2. André Marie Ampère (1775-1836), physicien français, jeta les bases de la théorie de l'électromagnétisme et de la théorie électronique de la matière. Il imagina le galvanomètre.

## A.2. Intensité du courant électrique

### A.2.1 - Définition de l'intensité

L'intensité du courant mesure la quantité algébrique d'électricité (c'est-à-dire, la charge électrique) traversant la section d'un circuit orienté par unité de temps (fig. 2). L'unité de charge est le coulomb (C)<sup>1</sup> et l'unité d'intensité est l'ampère (A)<sup>2</sup>.

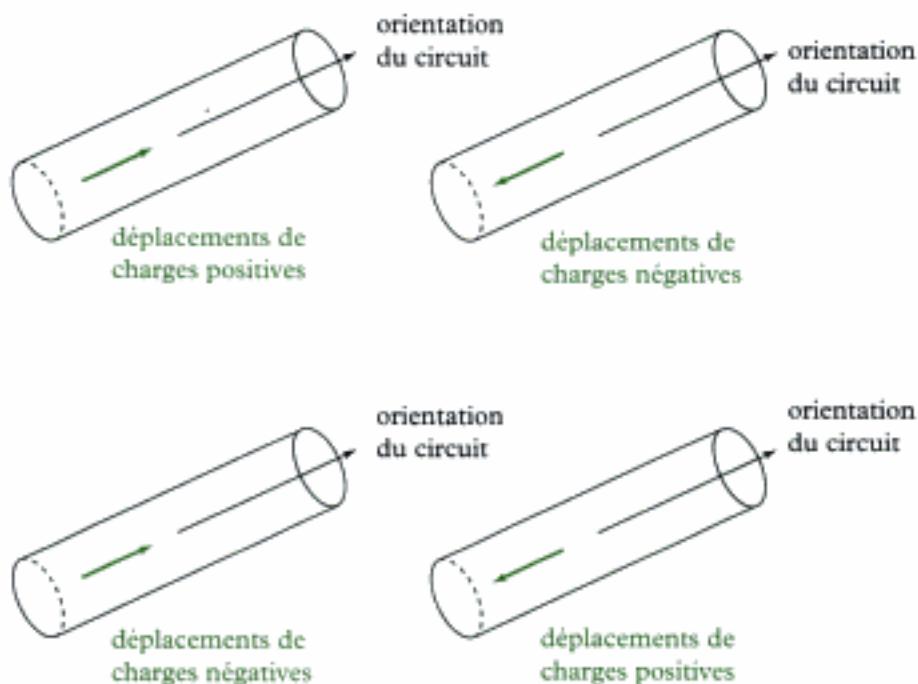
#### Définition 1

**L'intensité** du courant dans un circuit orienté, exprimée en ampère (A), est la grandeur algébrique correspondant au débit de charges.

### A.2.2 - Sens de circulation des charges

D'après la définition, un courant d'intensité positive correspond au déplacement de charges positives dans le sens du circuit orienté ou au déplacement de charges négatives en sens inverse (fig. 3).

*A contrario*, un courant d'intensité négative correspond au déplacement de charges négatives dans le sens du circuit orienté ou au déplacement de charges positives en sens inverse (fig. 3).



**Fig. 3** - En haut, l'intensité du courant est positive (le courant réel circule dans le sens du circuit orienté). En bas, l'intensité du courant est négative (le courant réel circule dans le sens opposé à l'orientation du circuit).

### Remarques expérimentales

L'intensité du courant dans un circuit est mesurée à l'aide d'un ampèremètre. En travaux pratiques, on mesure parfois la tension aux bornes d'une résistance de valeur connue, puis on en déduit la valeur de l'intensité par la loi d'Ohm (voir chapitre 2).

### A.2.3 - Relation charge-intensité

#### 1. Les unités du Système International

sont : le mètre (m), le kilogramme (kg), l'ampère (A), la seconde (s), le kelvin (K), le candela (cd) et la mole (mol). Dans ces unités, on a :

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s.}$$

2. La notation  $\delta t$  représente un intervalle de temps très petit. Quand on fait tendre cet intervalle de temps  $\delta t$  vers 0, la limite du rapport  $\frac{\delta Q}{\delta t}$  est par définition la dérivée de la charge  $Q$  par rapport au temps  $t$ :  $\frac{dQ}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\delta Q}{\delta t} \right)$ .

- En régime permanent, l'intensité  $I$  du courant est constante dans le temps. D'après la définition de l'intensité, une section quelconque du circuit est traversée par la charge algébrique  $Q = It$  pendant la durée  $t$ <sup>1</sup>.

- En régime variable, l'intensité  $i$  du courant évolue avec le temps, mais elle peut être considérée constante sur un intervalle de temps  $\delta t$  très petit. Pendant cette durée, il circule alors la charge algébrique  $\delta Q = i \delta t$ .

Dans un circuit, l'intensité  $i$  du courant est égale à la **dérivée par rapport au temps**  $t$  de la charge  $Q$  traversant une section du circuit orienté<sup>2</sup>:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$i$  intensité en ampère (A)

$Q$  charge en coulomb (C)

$t$  temps en seconde (s)

#### Application 1 Charge d'une batterie

Pour recharger une batterie, un chargeur délivre un courant d'intensité 5,0 A sous une tension de 12 V et fonctionne pendant 10 heures.

- Quelle quantité d'électricité circule dans les fils d'alimentation de la batterie lors de cette charge ?
- Les porteurs de charge sont les électrons. Combien d'électrons ont circulé pendant cette charge ?

#### Solution

- a) L'intensité du courant  $I = 5,0 \text{ A}$  est constante. La durée de la charge est  $t = 10 \text{ h} = 3,6 \cdot 10^4 \text{ s}$ . La quantité d'électricité circulant dans les fils d'alimentation vaut donc :

$$Q = It = 5,0 \times 3,6 \cdot 10^4 = 1,8 \cdot 10^5 \text{ C.}$$

- b) La valeur absolue de la charge d'un électron est  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Pour avoir la charge  $Q$ , il a donc circulé dans les fils  $N$  électrons tels que :

$$Q = Ne, \text{ d'où : } N = \frac{Q}{e} = \frac{1,8 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,1 \cdot 10^{24} \text{ électrons !!!}$$

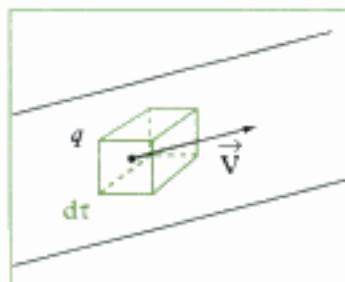


Fig. 4 - Dans le volume élémentaire  $dt$  circulent des porteurs de charge  $q$  à la vitesse moyenne  $\vec{V}$ .

3. Dans un conducteur neutre, la densité de charges totale est la somme de la densité de charges due aux porteurs en mouvement et de la densité de charges due aux ions immobiles du réseau conducteur : elle est donc nulle.

### A.3. Densité de courant

Le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  caractérise le mouvement d'ensemble des porteurs de charges dans un circuit électrique.

#### A.3.1 - Courant créé par un seul type de porteurs

On considère un volume élémentaire  $\delta t$  dans lequel circulent des porteurs de charges  $q$  à la vitesse moyenne  $\vec{V}$  (fig. 4). Ce volume est à la fois suffisamment petit pour être considéré ponctuel à l'échelle humaine et suffisamment grand pour contenir de nombreux porteurs. Il s'agit, par exemple, d'un cube de côté de l'ordre du micron ( $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ ) : cette dimension est petite par rapport à notre échelle (de l'ordre du mètre), mais grande par rapport à la distance entre les molécules, les ions ou les atomes dans le conducteur (de l'ordre de  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ).

Le volume élémentaire  $\delta t$  contient  $\delta N = n \delta t$  porteurs de charges, où  $n$  est la densité volumique des porteurs (c'est-à-dire le nombre de porteurs par unité de volume). On appelle alors  $\rho_m$  la densité volumique de charges mobiles<sup>3</sup> telle que  $\rho_m = nq$ .

## Définition 2

1. Comme  $n$  s'exprime en  $\text{m}^{-3}$ ,  $q$  en coulomb (C) et  $V$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , l'unité de  $j$  est donc :

$$\text{m}^{-3} \times \text{C} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{C} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = \text{A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Dans un circuit, le vecteur **densité de courant**  $\vec{j}$  caractérise le mouvement d'ensemble des porteurs de charges<sup>1</sup> :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{V}$$

$\vec{j}$  densité de courant ( $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ )

$\rho_m$  densité volumique de charges mobiles ( $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$ )

$\vec{V}$  vitesse moyenne des porteurs ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )

Le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  a toujours le même sens que le courant réel dans le circuit.

### A.3.2 - Courant créé par différents types de porteurs

Si le volume  $\delta t$  contient différents types de porteurs de charges  $q_1, q_2, \dots$ , on définit alors les densités de courant correspondant à chacun :

$$\vec{j}_1 = \rho_1 \cdot \vec{V}_1; \quad \vec{j}_2 = \rho_2 \cdot \vec{V}_2; \quad \dots$$

Des charges positives en mouvement dans un sens ont donc le même effet que des charges négatives en mouvement en sens inverse. Globalement, les porteurs contribuent ensemble au courant total.

Dans un circuit, la densité de courant totale  $\vec{j}$  est la somme des densités de courant correspondant à chaque type de porteurs de charges :

$$\vec{j} = \sum_k \vec{j}_k = \sum_k \rho_k \vec{V}_k.$$

### A.3.3 - Densité de courant et intensité

On considère la section d'un circuit électrique dans lequel circule un seul type de porteurs de charges  $q$  à la vitesse moyenne  $\vec{V}$ . La surface élémentaire  $\delta S$ , de dimensions suffisamment petites pour être considérée comme plane, est orientée par le vecteur normal  $\vec{n}$  dans le même sens que le circuit (fig. 5).

Les porteurs de charges traversant la surface  $\delta S$  pendant l'intervalle de temps  $\delta t$  sont tous les porteurs initialement contenus dans le cylindre de base  $\delta S$  et de génératrice  $\vec{V} \delta t$ , dont le volume est  $\delta S \times \delta t \vec{V} \cdot \vec{n}$ <sup>2</sup>. En notant  $\rho_m$  la densité volumique de charges mobiles, la quantité d'électricité traversant  $\delta S$  pendant  $\delta t$  vaut donc<sup>3</sup> :

$$\delta^2 Q = \rho_m \vec{V} \cdot \vec{n} \delta S \delta t.$$

Il circule donc à travers la surface  $\delta S$  un courant élémentaire d'intensité :

$$\delta I = \frac{\delta^2 Q}{\delta t} = \rho_m \vec{V} \cdot \vec{n} \delta S, \text{ soit : } \delta I = \vec{j} \cdot \vec{n} \delta S.$$

Dans le circuit, le courant total  $I$  est la « somme » de tous les courants élémentaires  $\delta I$ . Si la section  $S$  est plane et que la densité  $\vec{j}$  de courant est uniforme<sup>4</sup>, alors le produit scalaire  $\vec{j} \cdot \vec{n}$  est égal pour toutes les surfaces élémentaires  $\delta S$  et la « somme » s'écrit :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{n} S.$$

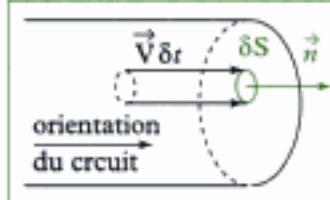


Fig. 5 - La surface  $\delta S$  est orientée par le vecteur normal  $\vec{n}$ .

2. Le volume d'un cylindre oblique est le même que celui du cylindre droit de même base  $S$  et de même hauteur  $h$ .

3. La notation  $\delta^2 Q$  signifie que la charge calculée résulte du produit de deux grandeurs élémentaires : – l'intervalle de temps élémentaire  $\delta t$  ; – la surface élémentaire  $\delta S$ .

4. – Si la section  $S$  est plane, le vecteur normal  $\vec{n}$  à cette surface est normal à toutes les surfaces élémentaires  $\delta S$ . – La densité de courant  $\vec{j}$  est uniforme si le vecteur  $j$  est le même en tout point du domaine

1. Si ces conditions ne sont pas vérifiées (section S plane et densité de courant  $\vec{j}$  uniforme), alors la « somme » des différents courants élémentaires ramène au calcul d'une intégrale « de surface » sur la section S du circuit.

Dans un circuit orienté, si la densité  $\vec{j}$  du courant est uniforme, l'intensité I du courant traversant une section plane S vaut<sup>1</sup> :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{n} S$$

I intensité du courant (A)  
S section du courant ( $\text{m}^2$ )  
 $\vec{j}$  densité de courant ( $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ )  
 $\vec{n}$  vecteur normal à la section orientée

### Application 2 Vitesse des porteurs

Un fil électrique de section droite  $S = 1,0 \text{ mm}^2$  est parcouru par un courant d'intensité constante  $I = 10 \text{ A}$  (ordre de grandeur du courant d'alimentation d'un radiateur ou d'un lave-linge). La densité volumique des porteurs (électrons de charge  $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ) est  $n = 1,0 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$ .

- a) Que vaut la norme  $j$  de la densité de courant ?
- b) Déterminer la vitesse moyenne des porteurs.

#### Solution

a) Lorsque la section est droite, le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est colinéaire au vecteur  $\vec{n}$  normal à la section orientée. On a donc :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{n} S = j S, \text{ soit } j = \frac{I}{S} = \frac{10}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

b) Par définition, on a :  $j = n|q|V$ , où V est la vitesse moyenne des porteurs. On en déduit donc :

$$V = \frac{j}{n e} = \frac{10^7}{1,0 \cdot 10^{29} \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ soit } 0,62 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**Remarque :** à titre de comparaison, la célérité du son dans l'air à  $20^\circ\text{C}$  vaut  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , la célérité de la lumière dans le vide vaut  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et la vitesse quadratique des molécules d'air est de l'ordre de  $500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

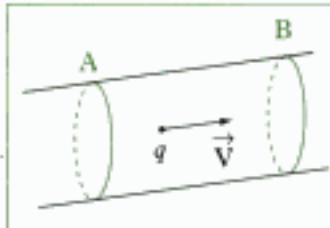


Fig. 6 - En régime permanent, le débit des charges à travers la surface en A est égal au débit des charges à travers la surface en B : l'intensité du courant est donc la même en A et en B.

## A.4. Conservation de la charge : la loi des nœuds

En régime permanent, la charge contenue dans un volume quelconque du conducteur ne varie pas au cours du temps : dans ce volume, le débit des charges entrant réellement est donc égal au débit des charges sortant réellement. En conséquence, l'intensité I du courant a la même valeur en tout point d'une branche du circuit (fig. 6).

En revanche, la densité de courant et la vitesse des porteurs ne sont pas nécessairement égales. Ainsi, si la section S de la branche diminue de moitié entre deux points A et B, l'intensité I restant la même, la densité de courant  $j$  et la vitesse V des porteurs doublent entre ces points.

En un nœud du circuit, la conservation de la charge se traduit par la loi des nœuds.

#### Loi 1

### Loi des nœuds

La somme des intensités  $I_i$  des courants algébriques arrivant à un nœud du circuit est égale à la somme des intensités  $I_j$  des courants algébriques s'éloignant de ce nœud (fig. 7) :

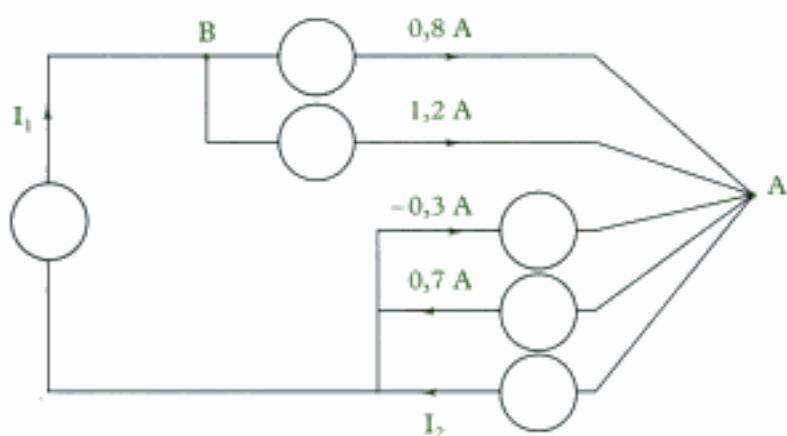
$$\sum_{\text{arrivant}} I_i = \sum_{\text{sortant}} I_j$$

Fig. 7 - Au nœud A, on a :

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4.$$

### Application 3 Intensité du courant dans un dipôle

Déterminer les intensités  $I_1$  et  $I_2$  non précisées sur le schéma ci-dessous.



#### Solution

- Les courants d'intensité 0,8 A, 1,2 A et -0,3 A arrivent en A, alors que les courants d'intensité 0,7 A et  $I_2$  repartent de A. D'après la loi des nœuds :

$$0,8 + 1,2 - 0,3 = 0,7 + I_2, \text{ d'où : } I_2 = 1 \text{ A.}$$

- De même, le courant d'intensité  $I_1$  arrive en B et les courants d'intensités 0,8 A et 1,2 A repartent de B. D'après la loi des nœuds :

$$I_1 = 0,8 + 1,2 = 2 \text{ A.}$$

## B. La loi des mailles

### B.1. Différence de potentiel entre deux points

1. Le cours d'électrostatique définit le champ électrique  $\vec{E}$  et la fonction potentielle  $V$ , dont nous admettrons ici les propriétés.

2. En Terminale, on a vu que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp} = mgz$  dépend du choix de l'origine des altitudes (elle est donc définie à une constante additive près). Ses variations, en revanche, sont indépendantes de ce choix.

3. Le volt rend hommage à Alessandro Volta (1745-1827), physicien italien, inventeur en 1800 de la première pile électrochimique.

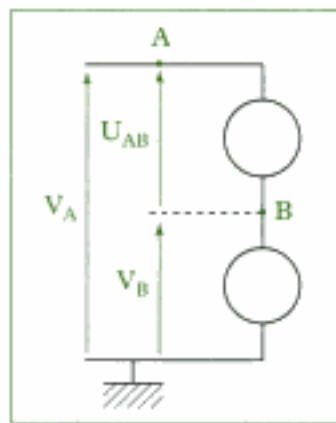
Dans un circuit, le mouvement des porteurs de charges  $q$  est dû à la force  $q\vec{E}$  créée par le champ électrique  $\vec{E}$ . Cette force dérive d'une énergie potentielle  $qV^1$  définie à une constante additive près<sup>2</sup>.

Dans un circuit électrique, les charges évoluent spontanément dans le sens des potentiels décroissants en l'absence de générateur. On peut schématiser cette évolution par analogie avec l'écoulement naturel d'un fluide dans un circuit hydraulique, de l'altitude la plus élevée à l'altitude la plus faible (les charges jouent le rôle du fluide et la fonction potentielle celui de l'altitude).

#### Définition 3

Dans un circuit, le potentiel électrique  $V$ , défini à une constante additive près et exprimé en volt (V)<sup>3</sup>, est à l'origine du mouvement des charges. La **différence de potentiel** (ddp) ou tension, exprimée comme le potentiel en volt (V), est une grandeur algébrique indépendante de l'origine des potentiels électriques.

1. Sur les appareils anciens, la masse était reliée à la terre par l'alimentation électrique. Désormais, la double isolation des appareils de laboratoire n'impose plus ce lien. En revanche, les appareils électriques domestiques (lave-linge...) conservent une liaison à la terre.



**Fig. 8** - Représentation de la différence de potentiel  $U_{AB}$ .

2. Par définition, on a :

$$U_{BA} = -U_{AB}.$$

En pratique, les appareils électriques sont reliés à la « masse », c'est-à-dire à la carcasse interne de l'appareil (par exemple, la borne noire du générateur)<sup>1</sup>. On choisit alors cette masse comme origine des potentiels électriques sur le circuit.

Après avoir défini la masse, on peut associer à chaque point du circuit un potentiel électrique  $V$  unique, égal à la différence de potentiel entre ce point et la masse, choisie comme origine des potentiels électriques.

Le potentiel  $V_A$  du point A (respectivement  $V_B$  du point B) est représenté par une flèche partant de la masse au potentiel nul et arrivant au point A (respectivement au point B). La différence de potentiel  $U_{AB} = V_A - V_B$  est alors représentée par une flèche d'origine B et d'extrémité A (fig. 8).

### Remarques expérimentales

La différence de potentiel  $U_{AB}$  entre deux points A et B du circuit est mesurée à l'aide d'un voltmètre ou observée à l'écran d'un oscilloscope. Il est à noter que celui-ci impose souvent la masse, qui doit être commune aux autres masses présentes sur le circuit. L'oscilloscope permet alors de suivre l'évolution du potentiel d'un point du circuit.

Dans un montage, on veillera toujours à éviter les courts-circuits par les masses.

## B.2. Additivité des tensions : la loi des mailles

- Soit trois points A, B et C d'un circuit. Les différences de potentiel entre les points A et B, B et C, A et C s'écrivent respectivement<sup>2</sup> :

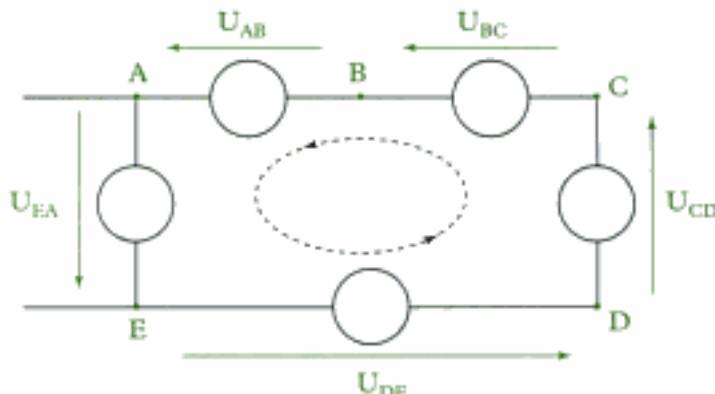
$$U_{AB} = V_A - V_B, \quad U_{BC} = V_B - V_C, \quad U_{AC} = V_A - V_C, \quad \text{d'où : } U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}.$$

Dans un circuit, les différences de potentiel sont additives. Par exemple, si A, B et C sont trois points du circuit, alors on a :

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}.$$

- On considère une maille dans un circuit (fig. 9). En partant d'un point A quelconque et en parcourant complètement la maille dans un sens donné, l'additivité des différences de potentiel s'écrit :

$$U_{AA} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DE} + U_{EA} = 0.$$



**Fig. 9** - La maille est orientée dans le sens des flèches.

**Loi des mailles**

1. La loi des nœuds et la loi des mailles sont appelées les lois de Kirchhoff. Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), physicien allemand, établit en 1845 les lois fondamentales de l'électricité.

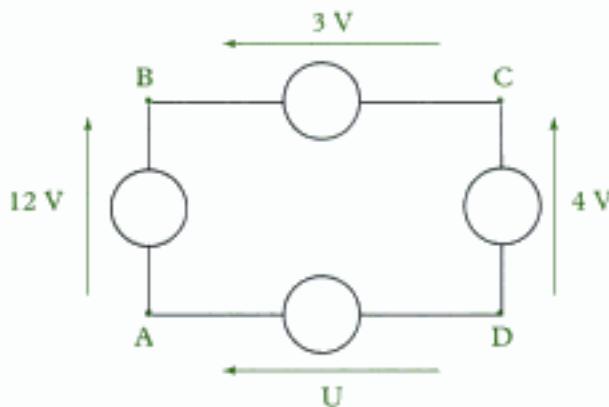
Dans une maille, la somme algébrique des différences de potentiel mesurées en parcourant complètement la maille dans un sens donné est nulle<sup>1</sup> :

$$\sum_{\text{maille}} \mathbf{U}_i = 0.$$

Une maille est un contour fermé contenant des dipôles. Elle n'est pas nécessairement isolée du reste du circuit. Par exemple, sur la figure 9, il existe des connexions avec l'extérieur (non représentées) aux points A, E et D de la maille.

**Application 4 Calcul d'une différence de potentiel**

Déterminer la différence de potentiel U non précisée sur le schéma ci-dessous.

**Solution**

Dans le circuit, on a :  $U_{BA} = 12 \text{ V}$ ;  $U_{BC} = 3 \text{ V}$ ;  $U_{CD} = 4 \text{ V}$ ;  $U_{AD} = U$ . La loi des mailles s'écrit :

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0, \quad \text{avec } U_{AB} = -U_{BA} = -12 \text{ V} \text{ et } U_{DA} = -U_{AD} = -U.$$

On en déduit donc :

$$-12 + 3 + 4 - U = 0, \quad \text{soit : } U = -5 \text{ V.}$$

## C. Puissance électrique

Dans un circuit, le fonctionnement des dipôles met en jeu de l'énergie.

### C.1. Caractère générateur – caractère récepteur

- Un dipôle AB possède un **caractère générateur** si le courant réel circule dans le sens des potentiels croissants à travers ce dipôle. Un générateur fournit de l'énergie au circuit électrique.

*Exemples :* le réseau EDF 220 V, les générateurs électrochimiques (piles, accumulateurs), les générateurs électroniques commandés...

- Un dipôle AB possède un **caractère récepteur** si le courant réel circule dans le sens des potentiels décroissants à travers ce dipôle. Un récepteur reçoit de l'énergie du circuit électrique.

*Exemples :* les conducteurs ohmiques, les moteurs, de nombreux composants électroniques...

## C.2. Convention générateur – convention récepteur

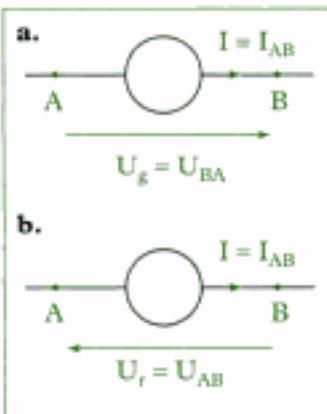


Fig. 10 -

- a. Convention générateur.
- b. Convention récepteur.

On considère un dipôle AB traversé par un courant orienté de la borne A vers la borne B. L'intensité  $I = I_{AB}$  du courant est algébrique : I est positive si le courant réel circule de A vers B, négative si le courant réel circule de B vers A.

On peut alors étudier le dipôle AB selon deux conventions (fig. 10) :

- la **convention générateur**, où la tension mesurée aux bornes du dipôle est  $U_g = U_{BA}$ , orientée dans le même sens que l'intensité  $I = I_{AB}$  ;
- la **convention récepteur**, où la tension mesurée aux bornes du dipôle est  $U_r = U_{AB}$ , orientée en sens inverse de l'intensité  $I = I_{AB}$ .

Ces deux conventions permettent de déterminer le caractère générateur ou récepteur du dipôle AB étudié. En effet :

- en convention générateur, si  $U_g$  et I ont le même signe ( $U_g$  et I positives ou  $U_g$  et I négatives), alors le courant réel circule dans le sens des potentiels croissants et le dipôle AB est générateur ;
- en convention récepteur, si  $U_r$  et I ont le même signe ( $U_r$  et I positives ou  $U_r$  et I négatives), alors le courant réel circule dans le sens des potentiels décroissants et le dipôle AB est récepteur.

En convention générateur (respectivement récepteur), si l'intensité traversant un dipôle et la tension à ses bornes ont le même signe, alors le dipôle possède un caractère générateur (respectivement récepteur)<sup>1</sup>.

## C.3. Puissance électrique d'un dipôle

Lorsqu'un courant circule dans un dipôle AB, des échanges d'énergie électrique ont lieu entre ce dipôle et les charges. L'énergie potentielle d'une charge  $q$  passant du point A (au potentiel  $V_A$ ) au point B (au potentiel  $V_B$ ) varie ainsi de la quantité  $qV_B - qV_A = q(V_B - V_A) = qU_{BA}$ . Par définition de l'intensité du courant, la variation d'énergie totale des charges traversant le dipôle pendant l'unité de temps est égale à la quantité algébrique  $I_{AB}U_{BA}$ <sup>2</sup>. La puissance électrique  $P_g$  fournie par le dipôle aux charges vaut donc<sup>3</sup> :

$$P_g = I_{AB}U_{BA} = IU_g.$$

À l'opposé, la puissance électrique  $P_r$  reçue par le dipôle AB des charges vaut :

$$P_r = -I_{AB}U_{BA} = I_{AB}U_{AB} = IU_r.$$

La **puissance électrique** s'exprime en watt (W) si l'intensité est en ampère (A) et la tension en volt (V) :

puissance fournie  
(convention générateur)  
 $P_g = U_g I$

puissance reçue  
(convention récepteur)  
 $P_r = U_r I$

1. En revanche, en convention générateur (respectivement récepteur), si les grandeurs intensité et tension sont de signes opposés, alors le dipôle possède un caractère récepteur (respectivement générateur), car le courant réel circule dans le sens des potentiels décroissants (respectivement croissants).

2. Par définition, la charge algébrique totale traversant le dipôle AB pendant l'unité de temps est égale à l'intensité  $I = I_{AB}$  du courant.

3. Dans ce paragraphe, toutes les grandeurs sont algébriques. Si la puissance  $P_g$  fournie par le dipôle AB est positive, alors le dipôle fournit effectivement de l'énergie aux charges (et la puissance  $P_r$  reçue par le dipôle des charges est bien négatif). De même, si la puissance  $P_r$  reçue par le dipôle AB est négative, alors le dipôle reçoit effectivement de l'énergie de la part des charges (et la puissance  $P_g$  fournie par le dipôle aux charges est bien négative).

- Le dipôle AB possède un caractère générateur si la puissance  $P_g$  qu'il fournit (calculée en convention générateur) est positive. La puissance  $P_r = -P_g$  qu'il reçoit (calculée en convention récepteur) est alors négative.

- Le dipôle AB possède un caractère récepteur si la puissance  $P_r$  qu'il reçoit (calculée en convention récepteur) est positive. La puissance  $P_g = -P_r$  qu'il fournit (calculée en convention générateur) est alors négative.

## D. L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

1. La grandeur temporelle  $T$  caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques est, par exemple, la période  $T$  du signal si celui-ci est périodique.

Un circuit est en régime « quasi-stationnaire » lorsque les tensions aux bornes des dipôles et l'intensité du courant varient « lentement ». On compare alors la grandeur temporelle  $T$  caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques<sup>1</sup> avec une grandeur temporelle  $\tau$  caractéristique du circuit, définie par le temps mis par le signal électrique pour parcourir le circuit de dimension  $L$ . Comme on peut associer à ce signal une onde se déplaçant à la célérité  $c$  de la lumière dans le vide (programme de deuxième année), on a :

$$\tau = \frac{L}{c}.$$

### Définition 4

Un circuit de dimension  $L$  vérifie l'**approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)** si la grandeur temporelle  $\tau$  liée au circuit est négligeable devant la grandeur temporelle  $T$  caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques :

$$T \gg \tau = \frac{L}{c}, \text{ soit : } L \ll cT \text{ (c célérité de la lumière dans le vide).}$$

Les lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles), énoncées en régime permanent, restent valables pour les régimes quasi-stationnaires. De même, la puissance électrique d'un dipôle AB en régime quasi-stationnaire s'écrit :  $P = ui$ , en veillant à la convention choisie.

### Application 5 Caractère lentement variable d'un circuit

À quelle condition sur la taille du circuit, peut-on considérer le courant fourni par EDF (de fréquence 50 Hz) comme un signal vérifiant l'approximation des régimes quasi-stationnaires ?

#### Solution

Le courant délivré par EDF est un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz, donc de période :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ s, soit : } cT = 3 \cdot 10^8 \times 20 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^6 \text{ m} = 6 \text{ 000 km.}$$

L'approximation des régimes quasi-stationnaires est donc valable pour le domicile d'un particulier ou un site industriel, mais elle ne l'est pas pour l'ensemble du réseau français.

# L'essentiel

## ✓ Éléments d'un circuit électrique

- Un **nœud** est un point du circuit reliant entre eux trois dipôles ou plus.
- Une **branche** est constituée par l'ensemble des dipôles compris entre deux nœuds consécutifs.
- Une **maille** est un ensemble de branches formant un contour fermé.

## ✓ Intensité du courant électrique

- L'intensité  $i$  du courant dans un circuit orienté est la grandeur algébrique correspondant au débit de charges à travers une section du circuit :

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$i$  intensité en ampère (A)  
 $Q$  charge en coulomb (C)  
 $t$  temps en seconde (s)

- Le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  (toujours orienté dans le sens du courant réel) caractérise le mouvement d'ensemble des porteurs de charges :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{V}$$

$\vec{j}$  densité de courant ( $A \cdot m^{-2}$ )  
 $\rho_m$  densité volumique de charges mobiles ( $C \cdot m^{-3}$ )  
 $\vec{V}$  vitesse moyenne des porteurs ( $m \cdot s^{-1}$ )

S'il y a plusieurs types de porteurs de charges, le vecteur  $\vec{j}$  est la somme de toutes leurs contributions :

$$\vec{j} = \sum_k \vec{j}_k = \sum_k \rho_k \vec{V}_k .$$

- Si la densité  $\vec{j}$  du courant est uniforme, l'intensité  $I$  du courant traversant une section plane  $S$  du circuit orienté vaut :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{n} S$$

$S$  section du courant ( $m^2$ )  
 $\vec{j}$  densité de courant ( $A \cdot m^{-2}$ )  
 $\vec{n}$  vecteur normal à la section orientée

## ✓ Potentiel électrique

- Le potentiel électrique  $V$ , défini à une constante additive près et exprimé en volt (V), est à l'origine du mouvement des charges dans le circuit.
- La différence de potentiel (ddp) ou tension  $U$  est une grandeur algébrique indépendante de l'origine des potentiels (en général, la masse du circuit).
- Dans un circuit, les différences de potentiel sont additives. Par exemple, on a :  $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$ .

## ✓ Lois de Kirchhoff

- **Loi des nœuds** : la somme des intensités  $I_i$  des courants algébriques arrivant à un nœud est égal à la somme des intensités  $I_j$  des courants algébriques s'éloignant de ce nœud :

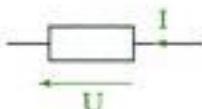
$$\sum_{\text{arrivant}} I_i = \sum_{\text{sortant}} I_j .$$

- **Loi des mailles** : la somme algébrique des différences de potentiel  $U_i$  mesurées en parcourant complètement une maille dans un sens donné est nulle :

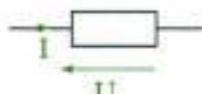
$$\sum_{\text{maille}} U_i = 0.$$

### ✓ Puissance électrique d'un dipôle

- En **convention générateur**, la tension  $U$  mesurée aux bornes du dipôle est orientée dans le même sens que l'intensité  $I$  le traversant.



- En **convention récepteur**, la tension  $U$  mesurée aux bornes du dipôle est orientée en sens inverse de l'intensité  $I$  le traversant.



- La puissance électrique  $P$  d'un dipôle est une grandeur algébrique. Dans la convention choisie, elle a pour expression :

$P = UI$	P puissance électrique du dipôle (W) U tension aux bornes du dipôle (V) I intensité traversant le dipôle (A)
----------	--

En convention générateur, la puissance  $P$  est la **puissance fournie** par le dipôle.

En convention récepteur, la puissance  $P$  est la **puissance reçue** par le dipôle.

### ✓ Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

Un circuit de dimension  $L$  vérifie l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) si la grandeur temporelle  $\tau$  liée au circuit est négligeable devant la grandeur temporelle  $T$  caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques :

$$T \gg \tau = \frac{L}{c}, \text{ soit } L \ll cT \quad (c \text{ célérité de la lumière dans le vide}).$$

## Mise en œuvre

### Méthode n° 1

#### Comment vérifier la validité de l'électrocinétique ?

Il est judicieux, en préambule à l'étude d'un circuit électrique, de vérifier si les lois de l'électrocinétique peuvent effectivement s'appliquer à ce circuit. On se propose de vérifier ce point.

#### → Savoir faire

- | ① Identifier dans le descriptif du circuit, la grandeur  $L$  caractéristique de sa taille.
- | ② Identifier de même la grandeur caractéristique de la durée d'évolution du signal électrique (ce peut être une fréquence, une période ou une pulsation). Convertir cette grandeur en un temps  $T$ .
- | ③ Calculer le rapport  $\frac{L}{T}$ . Si ce rapport est inférieur de deux ordres de grandeur à la célérité  $c$  de la lumière dans le vide ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ), les lois de l'électrocinétique sont applicables.

### → Application

Un poste de radio capte un signal de 98,0 MHz à l'aide d'une antenne de 2,0 m. Le signal est filtré puis amplifié par un circuit dont la taille est inférieure à celle de l'antenne. L'électrocinétique classique s'applique-t-elle à ce signal ?

### Solution

- ① La taille du circuit complet n'excède pas deux fois celle de l'antenne :  $L = 4,0 \text{ m}$ .
- ② La fréquence du signal est 98,0 MHz, donc sa période vaut :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{98,0 \cdot 10^6} = 1,02 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$$

- ③ Le rapport entre la taille du circuit et la grandeur caractéristique de l'évolution du signal électrique vaut :

$$\frac{L}{T} = \frac{4,0}{1,02 \cdot 10^{-8}} = 3,9 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ d'où } \frac{L}{T} > c.$$

L'électrocinétique ne s'applique pas à la réception du signal, à interpréter dans le cadre de la théorie électromagnétique.

### Méthode n° 2

## Comment déterminer la vitesse des porteurs de charge dans un conducteur ?

Soit un milieu conducteur de section  $S$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$  répartie uniformément sur cette section. On se propose de déterminer la vitesse et le sens de déplacement des porteurs de charges.

### → Savoir faire

- ① Calculer le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  :
  - de norme  $j = \frac{I}{S}$  ;
  - de direction perpendiculaire à la section  $S$  ;
  - dans le sens de  $I$  si  $I > 0$  ; dans le sens opposé à celui de  $I$  si  $I < 0$  ( $\vec{j}$  est de même sens que le courant réel).
- ② Déterminer la charge algébrique  $q$  d'un porteur de charge.
- ③ Déterminer la densité de charge libre  $\rho$  dans le conducteur. Selon la nature du milieu conducteur, cela nécessite de dénombrer :
  - les atomes et le nombre de porteurs libérés par ceux-ci dans un conducteur solide ;
  - les ions dans une solution conductrice.
- ④ Calculer le vecteur vitesse  $\vec{v}$  des porteurs de charges :
  - de norme  $v = \frac{j}{|\rho|}$  ;
  - de direction perpendiculaire à la section  $S$  ;
  - de même sens que  $\vec{j}$  si les porteurs de charges ont une charge positive ; de sens opposé si les porteurs de charges ont une charge négative.



Dans le cas d'une solution conductrice, les porteurs de charges sont le plus souvent de deux types (anions et cations). Le vecteur densité de courant est lié aux vitesses de ces porteurs par :

$$\vec{j} = \rho^+ \vec{v}^+ + \rho^- \vec{v}^-.$$

Les vecteurs vitesse de deux ions de charges opposées sont généralement opposés.

### → Application

Dans un fil de cuivre de masse volumique  $\mu = 8\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , les porteurs de charges sont les électrons de charges  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . La masse molaire du cuivre est  $M_{\text{cu}} = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et le nombre d'Avogadro  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Un atome de cuivre libère un électron de conduction.

On considère un fil de cuivre de section  $1 \text{ mm}^2$  parcouru par un courant d'intensité  $1 \text{ A}$ .

Quelle est la vitesse des porteurs de charges ? Quel est leur sens de déplacement par rapport au sens du courant dans le circuit ?

### Solution

❶ Le vecteur densité de courant a pour norme :

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-6}} = 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

❷ Les électrons portent la charge négative  $-e$ .

❸ Le nombre d'atomes de cuivre par mètre cube est :

$$n_{\text{cu}} = \frac{\mu N_A}{M_{\text{cu}}} = \frac{8,8 \cdot 10^3 \times 6,02 \cdot 10^{23}}{63,5 \cdot 10^{-3}} = 8,3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Cela correspond à une densité de charges libres :

$$\rho = n_{\text{cu}} \times (-e) = -1,3 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}.$$

❹ Les porteurs de charges ont une vitesse :

$$v = \frac{j}{|\rho|} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ils se déplacent dans le sens contraire du courant.

### Méthode n° 3

## Comment déterminer le caractère générateur/récepteur d'un dipôle ?

Soit un dipôle traversé par l'intensité algébrique  $I$  et soumis à la différence de potentiel  $U$ . On cherche à déterminer si ce dipôle est générateur ou récepteur.

### → Savoir faire

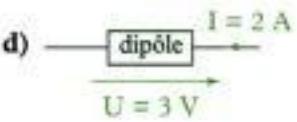
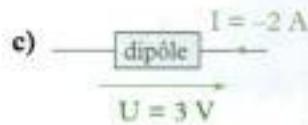
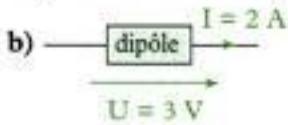
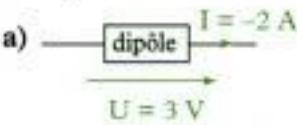
❶ Identifier une convention pour l'étude de ce dipôle :

- si  $I$  et  $U$  sont orientées dans le même sens, identifier la convention générateur ;
- si  $I$  et  $U$  sont orientées en sens inverse, identifier la convention récepteur.

- ② Déterminer le signe de la puissance algébrique  $P = UI$  dans la convention choisie :
- si  $P > 0$ , alors le dipôle est de même nature que la convention (générateur-générateur ou récepteur-récepteur) ;
  - $P < 0$ , alors le dipôle est de nature opposée à la convention (générateur-récepteur ou récepteur-générateur).

### → Application

Le dipôle ci-dessous a-t-il un caractère générateur ou récepteur ?



### Solution

- a) ① L'intensité  $I$  et la tension  $U$  étant orientées dans le même sens, on étudie le dipôle en convention générateur.  
 ② La puissance fournie par le dipôle  $P_g = UI = -6 \text{ W}$  est négative, donc le dipôle est récepteur.
- b) ① L'intensité  $I$  et la tension  $U$  étant orientées dans le même sens, on étudie le dipôle en convention générateur.  
 ② La puissance fournie par le dipôle  $P_g = UI = 6 \text{ W}$  est positive, donc le dipôle est générateur.
- c) ① L'intensité  $I$  et la tension  $U$  étant orientées en sens opposés, on étudie le dipôle en convention récepteur.  
 ② La puissance reçue par le dipôle  $P_r = UI = -6 \text{ W}$  est négative, donc le dipôle est générateur.
- d) ① L'intensité  $I$  et la tension  $U$  étant orientées en sens opposés, on étudie le dipôle en convention récepteur.  
 ② La puissance reçue par le dipôle  $P_r = UI = 6 \text{ W}$  est positive, donc le dipôle est récepteur.



Les situations a) et d) d'une part, b) et c) d'autre part, sont identiques. La convention d'orientation du courant dans le circuit diffère, mais le courant réel traversant le dipôle est le même.

# Exercices

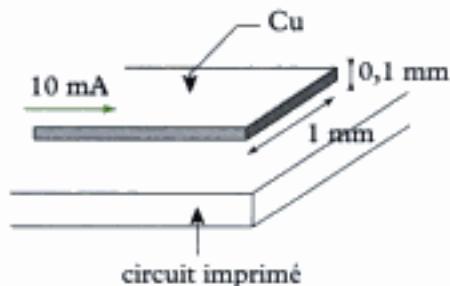
## Niveau 1

### Ex. 1 Densité de courant

Les liaisons électriques sur les cartes des circuits imprimés se font grâce à de fines couches de cuivre d'épaisseur 0,1 mm et de largeur 1 mm.

Le composant électrique placé sur le circuit débite dans la fine couche un courant de 10 mA.

a) Quelle est la densité de courant  $j$  ?

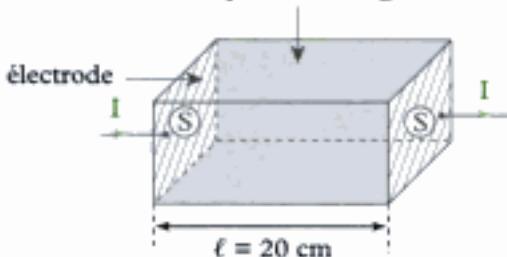


b) Comparer cette densité de courant à celle d'une alimentation domestique dont les fils de section 1 mm<sup>2</sup> sont parcourus par un courant d'intensité 1 A.

### Ex. 2 Vitesse des porteurs de charge

On dissout une masse  $m = 20 \text{ g}$  de chlorure de sodium NaCl dans un bac électrolytique de longueur  $\ell = 20 \text{ cm}$  et de section  $S = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$  rempli d'eau. La dissolution est totale. On fait passer un courant d'intensité  $I = 100 \text{ mA}$  entre deux électrodes situées aux deux extrémités de la cuve.

solution aqueuse de 20 g de NaCl



On donne : les masses molaires de chlore et du sodium  $M_{\text{Cl}} = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $M_{\text{Na}} = 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ; le nombre d'Avogadro  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  et la charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Sachant que les vecteurs vitesse des ions chlorure et des ions sodium sont de sens opposés et dans le rapport 1,5, déterminer la vitesse et le sens de déplacement de ces ions.

### Ex. 3 Référence des potentiels

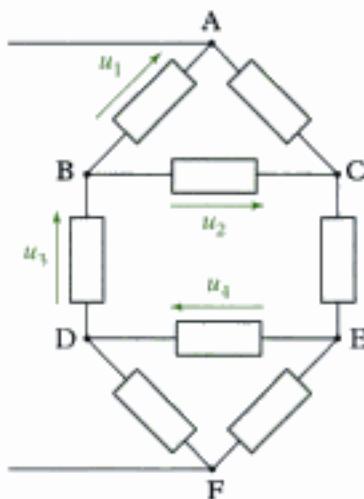
Lors d'une expérience, on a mesuré les potentiels des points A et F par rapport à la masse. On a, de même, mesuré les différences de potentiel  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , et  $u_4$ .

On obtient les résultats suivants :

$$V_A = 7 \text{ V} \text{ et } V_F = -2 \text{ V} ; \quad u_1 = 4 \text{ V} ; \quad u_2 = 2 \text{ V} ; \\ u_3 = 1 \text{ V} \text{ et } u_4 = 2 \text{ V}.$$

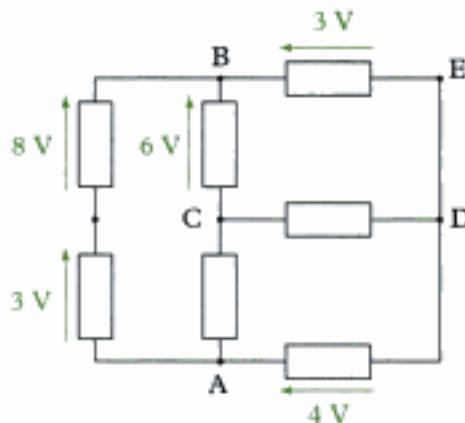
Déterminer les potentiels des points B, C, D et E.

Préciser le point relié à la masse.



### Ex. 4 Loi des mailles

On considère le circuit suivant, dans lequel la nature des dipôles n'est pas précisée.



a) Dénombrer les mailles qui peuvent être définies dans ce circuit.

b) Appliquer la loi des mailles à chacune de celles-ci. Combien de relations indépendantes obtient-on ainsi ?

c) Déterminer les tensions  $u_{AC}$ ,  $u_{CD}$  et  $u_{DF}$ .

### Ex. 5 Loi des noeuds – puissance

a) Dans l'expérience de l'exercice 3, on a mesuré les courants  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  et  $i_4$ . On a obtenu :

$$i_1 = 2 \text{ A} ; \quad i_2 = 1 \text{ A} ; \quad i_3 = 0,5 \text{ A} \text{ et } i_4 = 1,5 \text{ A}.$$

Déterminer les intensités des courants  $i_5$ ,  $i_6$ ,  $i_7$ ,  $i_8$ ,  $i_9$ .

## Niveau 2

### Ex. 6 Semi-conducteur

Les semi-conducteurs sont des matériaux utilisés en électronique et dont la conduction varie fortement avec la température ou avec la présence d'impureté. Dans un semi-conducteur, il existe deux types de porteurs de charge :

- les électrons, de charge  $-e$ , de densité  $n_e$  ;
- les trous, de charge  $+e$ , de densité  $n_p$ .

À une température donnée, du fait des propriétés dues aux liaisons internes au semi-conducteur, le produit  $n_e n_p = n_i^2$  est constant.

La présence des impuretés permet de modifier  $n_e$  ou  $n_p$  tout en maintenant le produit constant.

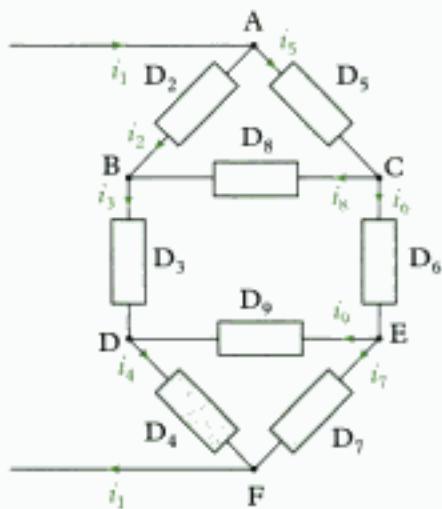
En l'absence d'impuretés, ces deux valeurs sont égales :  $n_e = n_p = n_i$ .

Pour le silicium, nous avons :  $n_i = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$ .

Dans les conditions d'étude, la vitesse des électrons est  $12 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  et celle des trous est  $5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$

a) Déterminer la densité de courant du silicium pur dans les conditions d'étude.

b) Comment varie la densité de courant avec  $n_e$ ? Tracer la courbe correspondante et interpréter.



b) On a mesuré les potentiels des points A, B, C, D, E et F, on a obtenu :

$$V_A = 7 \text{ V} ; \quad V_B = 3 \text{ V} ; \quad V_C = 5 \text{ V} ;$$

$$V_D = 2 \text{ V} ; \quad V_E = 0 \text{ V} \text{ et } V_F = -2 \text{ V}.$$

Déterminer la puissance reçue par chaque dipôle.

Préciser ceux qui sont générateurs et ceux qui sont récepteurs.

c) Déterminer la puissance totale reçue par tous les dipôles. Vérifier la cohérence des résultats.

## Indications

**Ex. 2** Utiliser la relation liant la densité de courant aux porteurs de charges.

**Ex. 5** Appliquer la loi des nœuds.

**Ex. 6 a)** Les contributions des différents types de porteurs s'ajoutent.

**Ex. 6 b)** Un extremum d'une courbe correspond à une dérivée nulle.

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

- a) La section d'une fine couche de cuivre est constante et vaut :

$$S = \ell e = 1 \times 0,1 = 0,1 \text{ mm}^2, \text{ c'est-à-dire } 1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2.$$

La densité de courant dans la couche est donnée par le rapport entre l'intensité du courant et la section du conducteur :

$$j = \frac{I}{S} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-7}} = 1 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$



On peut appliquer cette formule parce que la densité de courant est homogène et la section du conducteur est constante.

- b) De même, dans l'alimentation domestique, on a :

$$j = \frac{I}{S}, \text{ avec } I = 1 \text{ A} \text{ et } S = 1 \text{ mm}^2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

$$\text{A.N. } j = \frac{1}{1 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

La densité de courant est plus grande dans l'alimentation domestique que dans le semi-conducteur.

### Exercice 2



On applique la méthode n° 2 à la solution électrolytique.

La norme du vecteur densité de courant vaut :

$$j = \frac{I}{S} = \frac{0,1}{(0,1)^2} = 10 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Le vecteur  $\vec{j}$  est dans le sens du courant, car l'intensité I est positive. Les porteurs de charges sont les ions sodium  $\text{Na}^+$  (de charge  $+e$ ) et les ions chlorure  $\text{Cl}^-$  (de charge  $-e$ ).

La masse molaire du chlorure de sodium est :  $M_{\text{NaCl}} = M_{\text{Na}} + M_{\text{Cl}}$ .

Le nombre d'ions  $\text{Na}^+$  et  $\text{Cl}^-$  en solution est donc :

$$n_{\text{Na}^+} = n_{\text{Cl}^-} = \frac{m N_A}{(M_{\text{Na}^+} + M_{\text{Cl}^-})} = \frac{20 \times 6,02 \cdot 10^{23}}{(23 + 35,5)} = 2,06 \cdot 10^{23}.$$



Dans l'application numérique, on laisse les masses en g car elles interviennent par un rapport.

Ces ions sont dissous dans un volume  $V = S\ell$ , d'où :

$$\rho^+ = \frac{n_{\text{Na}^+} e}{S\ell} = \frac{2,06 \cdot 10^{23} \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{(0,1)^2 \times 0,2} = 1,65 \cdot 10^8 \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho^- = \frac{n_{\text{Cl}^-} e}{S\ell} = -1,65 \cdot 10^8 \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Ces deux densités de porteurs contribuent au vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = \rho^+ \vec{v^+} + \rho^- \vec{v^-} = \frac{5}{2} \rho^+ \vec{v^+}, \text{ soit : } v^+ = \frac{2j}{5\rho^+}.$$

On a :  $p^- = -p^+$  et  $\vec{v}^- = -\frac{3}{2}\vec{v}^+$ .

$$\text{A.N. } v^+ = \frac{2 \times 10}{5 \times 1,65 \cdot 10^8} = 2,42 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } v^- = \frac{3}{2}v^+ = 3,65 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les ions sodium vont dans le sens de l'intensité I, les ions chlorure vont dans l'autre sens.

### Exercice 3

D'après la définition des différences de potentiel entre deux points, on a :

- $u_1 = V_A - V_B$ , d'où  $V_B = V_A - u_1 = 7 - 4 = 3 \text{ V}$ .
- $u_2 = V_C - V_B$ , d'où  $V_C = V_B + u_2 = 3 + 2 = 5 \text{ V}$ .
- $u_3 = V_B - V_D$ , d'où  $V_D = V_B - u_3 = 3 - 1 = 2 \text{ V}$ .
- $u_4 = V_D - V_E$ , d'où  $V_E = V_D - u_4 = 2 - 2 = 0 \text{ V}$ .

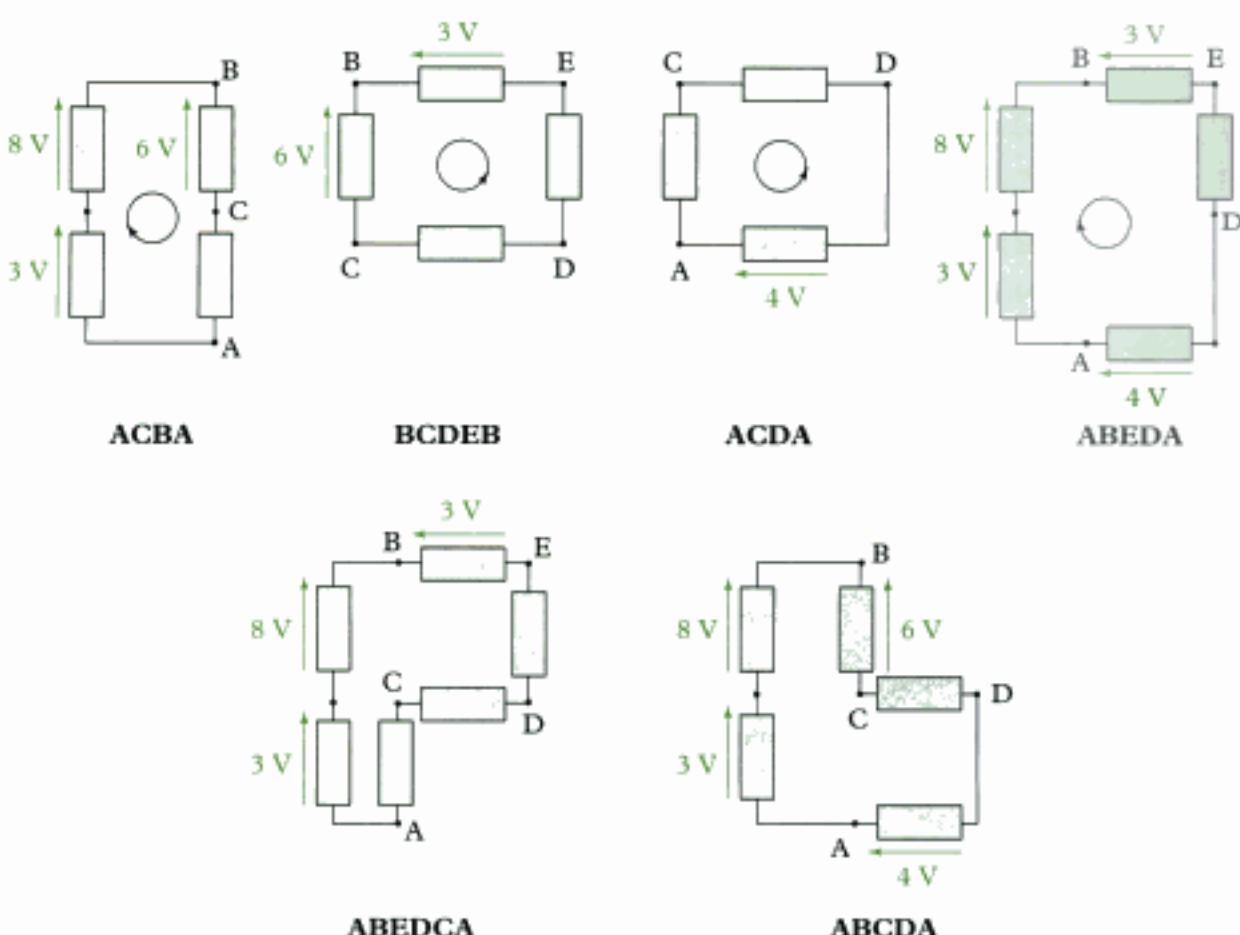
Le point E, de potentiel nul, est relié à la masse.

### Exercice 4

a) On dénombre 6 mailles dans le circuit :

**ACBA ; BCDEB ; ACDA ; ABEDA ; ABEDCA ; ABCDA.**

b)



On obtient le système suivant :

$$-\text{maille ACBA} : 3 + 8 - 6 + u_{AC} = 0 \quad (1)$$

- maille BCDEB :  $-6 + u_{DC} + u_{ED} + 3 = 0$  (2)
- maille ACDA :  $u_{AC} + u_{CD} - 4 = 0$  (3)
- maille ABEDA :  $3 + 8 - 3 + u_{DE} + 4 = 0$  (4)
- maille ABEDCA :  $3 + 8 - 3 + u_{DE} + u_{CD} + u_{AC} = 0$  (5)
- maille ABCDA :  $3 + 8 - 6 + u_{DC} + 4 = 0.$  (6)

Les relations (1), (4) et (6) permettent de définir des tensions inconnues : elles sont donc **indépendantes**. Les relations (2), (3) et (5) s'obtiennent par combinaison linéaire : elles ne sont donc pas **indépendantes**.



Par exemple, on a : (5) = (1) + (4) - (6).

- c) À partir de (1), (4) et (6), on trouve facilement :

$$u_{AC} = -5 \text{ V}; \quad u_{DE} = -12 \text{ V}; \quad u_{CD} = 9 \text{ V}.$$

## Exercice 5

- a) On détermine les intensités cherchées en appliquant la loi des nœuds :

- en A :  $i_1 = i_2 + i_5$ , d'où  $i_5 = i_1 - i_2 = 2 - 1 = 1 \text{ A}$ .
- en B :  $i_2 + i_8 = i_3$ , d'où  $i_8 = i_3 - i_2 = 0,5 - 1 = -0,5 \text{ A}$ .
- en C :  $i_5 = i_8 + i_6$ , d'où  $i_6 = i_5 - i_8 = 1 - (-0,5) = 1,5 \text{ A}$ .
- en D :  $i_3 + i_9 = i_4$ , d'où  $i_9 = i_4 - i_3 = 1,5 - 0,5 = 1 \text{ A}$ .
- en E :  $i_6 = i_9 + i_7$ , d'où  $i_7 = i_6 - i_9 = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ A}$ .



Les courants sont algébriques : ils peuvent donc être négatifs.



En F, la loi des nœuds s'écrirait :  $i_4 + i_7 = i_1$ , ce qui est bien vérifié (car  $1,5 + 0,5 = 2$ ).

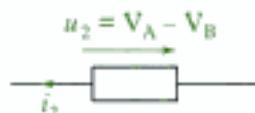
- b) On calcule la puissance reçue par un dipôle en étudiant celui-ci en convention récepteur.



De même, on calcule la puissance fournie par un dipôle en se plaçant en convention générateur.

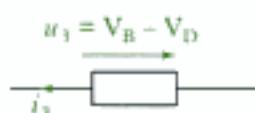
- La puissance reçue par le dipôle  $D_2$  vaut :

$$\mathcal{P}_2 = u_2 i_2 = (V_A - V_B) i_2 = (7 - 3) \times 1 = 4 \text{ W}.$$



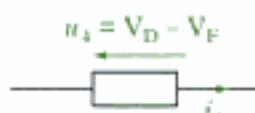
- La puissance reçue par le dipôle  $D_3$  vaut :

$$\mathcal{P}_3 = u_3 i_3 = (V_B - V_D) i_3 = (3 - 2) \times 0,5 = 0,5 \text{ W}.$$



- La puissance reçue par le dipôle  $D_4$  vaut :

$$\mathcal{P}_4 = u_4 i_4 = (V_D - V_F) i_4 = 2 - (-2) \times 1,5 = 6 \text{ W}.$$



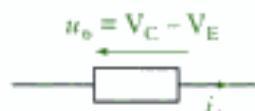
- La puissance reçue par le dipôle  $D_5$  vaut :

$$\mathcal{P}_5 = u_5 i_5 = (V_A - V_C) i_5 = (7 - 5) \times 1 = 2 \text{ W}.$$



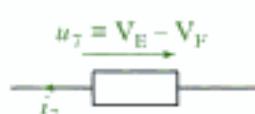
- La puissance reçue par le dipôle  $D_6$  vaut :

$$\mathcal{P}_6 = u_6 i_6 = (V_C - V_E) i_6 = (5 - 0) \times 1,5 = 7,5 \text{ W}.$$



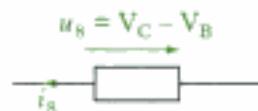
- La puissance reçue par le dipôle  $D_7$  vaut :

$$\mathcal{P}_7 = u_7 i_7 = (V_E - V_F) i_7 = [0 - (-2)] \times 0,5 = 1 \text{ W}.$$



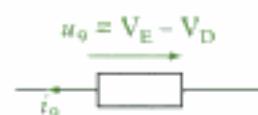
- La puissance reçue par le dipôle  $D_8$  vaut :

$$\mathcal{P}_8 = u_8 i_8 = (V_C - V_B) i_8 = (5 - 3) \times (-0,5) = -1 \text{ W}.$$



- La puissance reçue par le dipôle  $D_9$  vaut :

$$\mathcal{P}_9 = u_9 i_9 = (V_E - V_D) i_9 = (0 - 2) \times 1 = -2 \text{ W}.$$



Les puissances  $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6$  et  $\mathcal{P}_7$  sont positives : les dipôles  $D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$  et  $D_7$  sont des **récepteurs**.

Les puissances  $\mathcal{P}_8$  et  $\mathcal{P}_9$  sont négatives : les dipôles  $D_8$  et  $D_9$  sont des **générateurs**.

- c) • La puissance totale reçue par l'ensemble des dipôles est :

$$\mathcal{P}_1 = \sum_{i=2}^9 P_i = 4 + 0,5 + 6 + 2 + 7,5 + 1 - 1 - 2 = 18 \text{ W}.$$

- La différence de potentiel  $u_1$ , en convention récepteur, appliquée aux bornes du réseau entre A et F est :

$$u_1 = V_A - V_F = 7 - (-2) = 9 \text{ V}.$$

La puissance reçue est :  $\mathcal{P}_1 = u_1 i_1 = 18 \text{ W}$ , donc les résultats sont bien **cohérents**.



Cette égalité traduit la conservation de l'énergie dans le réseau électrique.

## Exercices de niveau 2

### Exercice 6

- a) Dans le silicium, se déplacent deux types de porteurs de charges :

- les électrons ( $\rho_e = -n_e e$ ), à la vitesse  $v_e = 0,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  en sens inverse du courant ;
- les trous ( $\rho_p = n_p e$ ), à la vitesse  $v_p = 0,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le sens du courant.

Les deux contributions s'ajoutent pour créer la densité de courant :

$$j = n_e e v_e + n_p e v_p = (n_e v_e + n_p v_p) e.$$



Le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est la somme de deux termes :  $\vec{j}_e = -n_e e \vec{v}_e$  et  $\vec{j}_p = n_p e \vec{v}_p$ , colinéaires et de même sens. On a donc bien :  $j = j_e + j_p$ .

Dans le cas du silicium pur, on a  $n_e = n_p = n_i$ , d'où :

$$\begin{aligned} j &= n_i e (v_e + v_p) \\ &= 1,5 \cdot 10^{16} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times (0,12 + 0,05) = 4,08 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}. \end{aligned}$$



Malgré une vitesse relativement importante des porteurs de charges, la densité de courant reste faible : le silicium pur conduit très mal le courant.

- b) En présence d'impuretés, le produit  $n_e n_p = n_i^2$  est constant, donc la densité de courant vaut :

$$j = \left( n_e v_e + \frac{n_i^2}{n_e} v_p \right) e, \text{ avec } n_p = \frac{n_i^2}{n_e}.$$

- Quand  $n_e \rightarrow 0$ ,  $n_p$  devient très grand et  $j$  devient très grand :

$$j = n_p v_p e = \frac{n_i^2}{n_e} v_p e.$$

- Quand  $n_e \rightarrow \infty$ ,  $n_p$  devient négligeable et  $j$  devient très grand :

$$j = n_e v_e e.$$

- La densité de courant passe par un extremum quand la dérivée de  $j$  par rapport à  $n_e$  s'annule et change de signe. Or, on a :

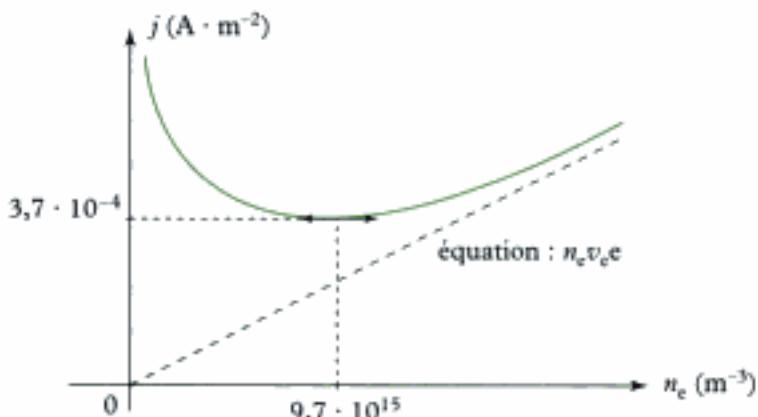
$$\frac{dj}{dn_e} = \left( v_e - \frac{n_i^2}{n_e^2} v_p \right) \times e, \text{ d'où : } \frac{dj}{dn_e} = 0 \text{ pour } n_{e_0} = n_i \sqrt{\frac{v_p}{v_e}}.$$

La valeur de  $j$  correspondante est alors :

$$j_0 = n_{e_0} e \times \left( v_e + \frac{n_i^2}{n_{e_0}^2} v_p \right) = 2 n_{e_0} e v_e = 2 n_i e \sqrt{v_p v_e}.$$

A.N.  $j_0 = 2 \times 1,5 \cdot 10^{16} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times \sqrt{0,05 \times 0,12} = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

$$n_{e_0} = 1,5 \cdot 10^{16} \times \sqrt{\frac{0,05}{0,12}} = 9,7 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}.$$



La courbe admet deux asymptotes : l'axe des ordonnées en 0 et la droite d'équation  $j = n_e v_e e$  en  $+\infty$ .

On remarque que la densité de courant est presque minimale pour le silicium pur. La présence d'impuretés permet d'augmenter la conduction.



## CHAPITRE

# 2

# *Modélisations linéaires d'un dipôle*

## Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons les dipôles en régime permanent, c'est-à-dire parcourus par des courants constants. De nombreux dipôles ont alors pour caractéristique une droite dans leur domaine d'utilisation. Dans ce cas, on peut effectuer une modélisation linéaire du dipôle, encore valable dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

## Plan du chapitre 2

A. Caractéristique d'un dipôle .....	32
1. Définition de la caractéristique .....	32
2. Dipôles passifs, dipôles actifs .....	32
3. Point de fonctionnement du circuit .....	33
B. Les conducteurs ohmiques .....	33
1. La loi d'Ohm .....	33
2. Effet Joule .....	34
3. Association de conducteurs ohmiques .....	34
4. Loi des nœuds exprimée en termes de potentiels .....	36
C. Les dipôles générateurs .....	37
1. Caractéristique d'un générateur .....	37
2. Les générateurs idéaux .....	37
3. Modélisation linéaire d'un générateur .....	38
4. Puissance fournie par un générateur .....	40
D. Les dipôles récepteurs .....	41
1. Modélisation linéaire d'un récepteur .....	41
2. Association de dipôles .....	42
<b>Méthodes</b>	
L'essentiel ; mise en œuvre .....	43
<b>Énoncés des exercices</b> .....	54
<b>Indications</b> .....	58
<b>Solution des exercices</b> .....	59

# A. Caractéristique d'un dipôle

Dans la suite, les dipôles étudiés vérifient l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

## A.1. Définition de la caractéristique

1. En convention générateur, on représente la tension  $u_g$  en fonction de l'intensité  $i$  et en convention récepteur, on représente la tension  $u_r$  en fonction de l'intensité  $i$ .

2. Les deux caractéristiques  $u = f(i)$  et  $i = f(u)$  sont fonctions réciproques l'une de l'autre. Les courbes se déduisent alors l'une de l'autre par symétrie par rapport à la première bissectrice du repère.

### Définition 1

On appelle caractéristique d'un dipôle la courbe représentant la tension  $u$  à ses bornes en fonction de l'intensité  $i$  du courant qui le traverse. La caractéristique d'un dipôle dépend de la convention choisie<sup>1</sup>.

On peut tracer deux sortes de caractéristiques :

- la caractéristique tension-courant  $u = f(i)$  (l'intensité  $i$  est en abscisses et la tension  $u$  en ordonnées) ;
- la caractéristique courant-tension  $i = f(u)$  (la tension  $u$  est en abscisses et l'intensité  $i$  en ordonnées)<sup>2</sup>.

Si la caractéristique est une droite, on dit qu'elle est **linéaire**. On parle parfois de dipôle linéaire.

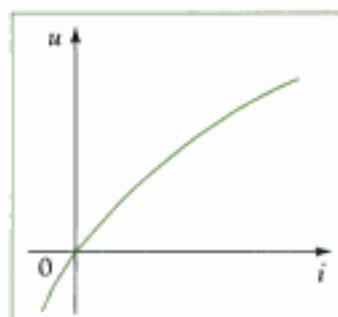


Fig. 1 - Caractéristique tension-courant d'un dipôle passif (tracée en convention récepteur).

## A.2. Dipôles passifs, dipôles actifs

Lors du passage du courant, un transfert d'énergie s'effectue du dipôle vers le milieu extérieur.

### A.2.1 - Les dipôles passifs

Un dipôle est passif lorsque l'énergie électrique qu'il reçoit est complètement dégradée en énergie thermique. La puissance électrique  $P_r$  reçue par le dipôle est positive : c'est donc un récepteur.

La caractéristique tension-courant  $u = f(i)$  d'un dipôle passif passe par l'origine des axes (fig. 1). En convention récepteur, elle appartient aux deux quadrants du plan :

$$(u > 0 \text{ et } i > 0) \text{ et } (u < 0 \text{ et } i < 0).$$

*Exemples de dipôles passifs* : les conducteurs ohmiques, les diodes, de nombreux composants électroniques.

### A.2.2 - Les dipôles actifs

Un dipôle est actif lorsqu'une partie de l'énergie qu'il fournit au milieu extérieur n'est pas de l'énergie thermique.

- Les générateurs convertissent de l'énergie en énergie électrique qu'ils fournissent au circuit. Par exemple, il y a conversion d'énergie chimique en énergie électrique dans une batterie ou une pile. La puissance électrique  $P_g$  fournie par le générateur est positive.
- Les récepteurs convertissent de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie. Par exemple, il y a conversion d'énergie électrique en énergie mécanique dans un moteur électrique. La puissance électrique  $P_r$  reçue par le récepteur est positive.

La caractéristique tension-courant  $u = f(i)$  d'un dipôle actif ne passe pas par l'origine des axes (fig. 2).

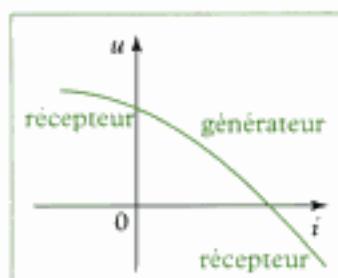


Fig. 2 - Caractéristique tension-courant d'un dipôle actif (tracée en convention générateur).

### Remarque

Les fonctionnements d'un récepteur et d'un générateur sont semblables.

Un moteur convertit de l'énergie électrique en énergie mécanique, récupérée grâce au couple exercé sur l'arbre du moteur en rotation. À l'inverse, un couple moteur est exercé sur l'arbre d'une génératrice, qui, en tournant, convertit de l'énergie mécanique en énergie électrique.

De même, lorsqu'elle se décharge, une batterie convertit de l'énergie chimique en énergie électrique. En revanche, lorsqu'elle se charge, elle fonctionne en récepteur : l'énergie électrique est ainsi convertie en énergie chimique.

## A.3. Point de fonctionnement du circuit

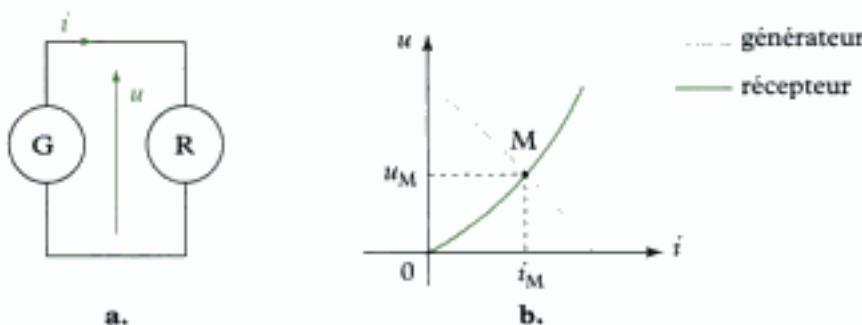


Fig. 3 - Le point de fonctionnement M du circuit est à l'intersection des deux caractéristiques.

On considère le circuit constitué par un dipôle générateur (G) et un dipôle récepteur (R) passif ou actif (fig. 3a). La tension  $u$  aux bornes des deux dipôles est la même et l'intensité  $i$  du courant qui les traverse est égale.

On représente sur un même graphe les caractéristiques tension-courant des deux dipôles (fig. 3b) : la caractéristique de G est tracée en convention générateur et la caractéristique de R est tracée en convention récepteur.

L'intersection des deux courbes définit le point de fonctionnement M du montage : l'abscisse  $i$  représente l'intensité du courant dans le circuit et l'ordonnée  $u$  la tension commune aux deux dipôles.

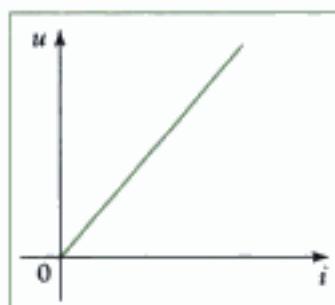


Fig. 4 - Caractéristique tension-courant d'un conducteur ohmique (tracée en convention récepteur).

1. Georg Simon Ohm (1789-1854), physicien allemand, énonça en 1827 les lois fondamentales de l'électricité et introduisit la notion de force électromotrice (fém).

2. On a :  $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$ .

## B. Les conducteurs ohmiques

### B.1. La loi d'Ohm

La caractéristique d'un conducteur ohmique est une droite passant par l'origine des axes (fig. 4).

#### Loi 1

En convention récepteur, un conducteur ohmique vérifie la loi d'Ohm<sup>1</sup> :

$$u = Ri$$

$u$  tension en volt (V)

$i$  intensité en ampère (A)

R résistance en ohm ( $\Omega$ )

On définit de même la conductance G du conducteur ohmique, exprimée en siemens (S)<sup>2</sup> :

$$G = \frac{1}{R}, \text{ d'où : } i = Gu.$$

## B.2. Effet Joule

1. James Prescott Joule (1818-1889), physicien britannique, étudia l'énergie thermique dégagée par les conducteurs en 1841 et établit en 1842 l'équivalent mécanique de la calorie.

La puissance reçue par un conducteur ohmique, appelée effet Joule<sup>1</sup> et entièrement dégradée sous forme thermique, a pour expression :

$$P_r = R i^2 = G u^2, \text{ avec } R \text{ en } \Omega \text{ et } G \text{ en } S.$$

Dans un premier temps, la température du conducteur ohmique augmente jusqu'à atteindre une valeur constante. Lorsque l'équilibre thermique est atteint, la puissance thermique dissipée par le conducteur ohmique est alors égale à la puissance électrique reçue par le dipôle.

## B.3. Association de conducteurs ohmiques

### B.3.1 - Division de tension (association série)

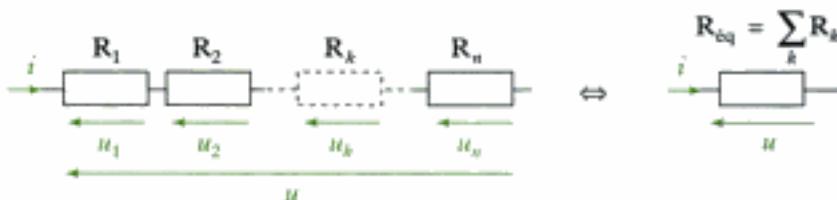


Fig. 5 - Association série de  $n$  conducteurs ohmiques et résistance équivalente.

On considère l'association en série de  $n$  conducteurs ohmiques traversés par le même courant d'intensité  $i$  (fig. 5). En convention récepteur, la tension  $u$  totale aux bornes de l'association vaut (addition des tensions) :

$$u = \sum_k u_k = \sum_k R_k i = \left( \sum_k R_k \right) i, \text{ soit : } u = R_{\text{eq}} i \text{ avec } R_{\text{eq}} = \sum_k R_k.$$

L'association série de  $n$  conducteurs ohmiques de résistances  $R_k$  est équivalente à un conducteur ohmique unique de résistance :

$$R_{\text{eq}} = \sum_k R_k.$$

La tension  $u_k$  aux bornes du conducteur ohmique de résistance  $R_k$  vaut :

$$u_k = R_k i, \text{ soit : } u_k = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}} u.$$

#### Diviseur de tension

Dans l'association série de  $n$  conducteurs ohmiques, la tension  $u_k$  aux bornes du conducteur ohmique de résistance  $R_k$  est<sup>2</sup> :

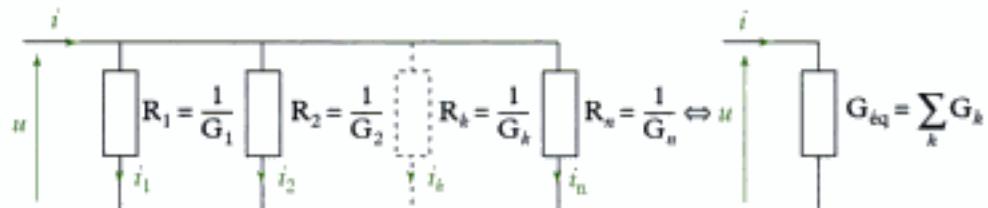
$$u_k = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}} u = \frac{R_k}{\sum_k R_k} u.$$

Exemple : si les conducteurs ohmiques de résistance  $R_1$  et  $R_2$  sont associés en série, alors la tension  $u_1$  aux bornes de la résistance  $R_1$  vaut :

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u.$$

2. Pour appliquer la propriété de division de tension, il faut veiller, d'une part, à ce que la même intensité  $i$  traverse tous les conducteurs ohmiques, et d'autre part, à ce que la tension totale  $u$  soit égale à la somme des tensions  $u_k$  à leurs bornes.

### B.3.2 - Division de courant (association parallèle)



**Fig. 6** - Association parallèle de  $n$  conducteurs ohmiques et conductance équivalente.

On considère l'association en parallèle de  $n$  conducteurs ohmiques soumis à la même tension  $u$  (fig. 6). En convention récepteur, l'intensité  $i$  totale du courant traversant l'association vaut (loi des nœuds) :

$$i = \sum_k i_k = \sum_k G_k u = \left( \sum_k G_k \right) u, \text{ soit } i = G_{\text{éq}} u \text{ avec } G_{\text{éq}} = \sum_k G_k.$$

1. On a :  $G_{\text{éq}} = \frac{1}{R_{\text{éq}}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$ .

L'association parallèle de  $n$  conducteurs ohmiques de conductances  $G_k$  est équivalente à un conducteur ohmique unique de conductance<sup>1</sup> :

$$G_{\text{éq}} = \sum_k G_k.$$

L'intensité  $i_k$  dans le conducteur ohmique de conductance  $G_k$  vaut :

$$i_k = G_k u, \text{ soit } i_k = \frac{G_k}{G_{\text{éq}}} i.$$

#### Diviseur de courant

Dans l'association parallèle de  $n$  conducteurs ohmiques, l'intensité  $i_k$  du courant traversant le conducteur ohmique de conductance  $G_k$  est<sup>2</sup> :

$$i_k = \frac{G_k}{G_{\text{éq}}} i = \frac{G_k}{\sum_k G_k} i.$$

*Exemple* : si les conducteurs ohmiques de résistance  $R_1$  et  $R_2$  sont associés en parallèle, alors l'intensité  $i_1$  traversant la résistance  $R_1$  est :

$$i_1 = \frac{G_1}{G} i, \text{ soit } i_1 = \frac{1}{R_1} \times \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \times i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i.$$

#### Application 1 Résistance équivalente à un réseau

Dans le montage schématisé ci-contre, on a :  $R_1 = 2,0 \text{ k}\Omega$  ;  $R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$  et  $R_3 = 500 \Omega$ . Déterminer la résistance  $R_{\text{éq}}$  équivalente au montage entre les points A et B.

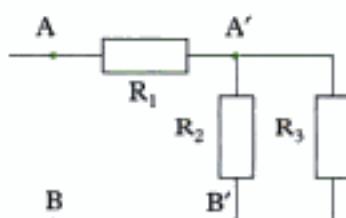
#### Solution

- Les résistances  $R_2$  et  $R_3$  sont en parallèle entre A' et B'.
- La résistance équivalente  $R_{\text{ff}}$  vaut :

$$\frac{1}{R_{\text{ff}}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \text{ soit } R_{\text{ff}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 400 \Omega.$$

- La résistance  $R_{\text{ff}}$  est en série avec  $R_1$  entre A et B. La résistance équivalente du montage est donc :

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_{\text{ff}} = 2,4 \text{ k}\Omega.$$



## B.4. Loi des nœuds exprimée en termes de potentiels

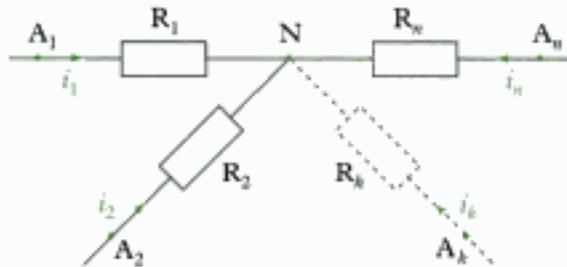


Fig. 7 - Les  $n$  conducteurs ohmiques sont reliés au nœud N.

On considère  $n$  conducteurs ohmiques reliés en un même nœud N d'un circuit électrique (fig. 7). La loi d'Ohm appliquée à chaque conducteur ohmique s'écrit<sup>1</sup> :

$$i_k = G_k u_k = G_k(V_{A_k} - V_N) = \frac{V_{A_k} - V_N}{R_k}.$$

Or, d'après la loi des nœuds en N :

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots = 0, \text{ d'où : } \sum_k \frac{V_{A_k} - V_N}{R_k} = 0.$$

### Théorème 1

#### Théorème de Millman

La loi des nœuds exprimée en tension s'écrit :

$$V_N \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \right) = \frac{V_{A_1}}{R_1} + \frac{V_{A_2}}{R_2} + \frac{V_{A_3}}{R_3} + \dots$$

Exprimé en termes de conductances, le théorème de Millman s'écrit :

$$V_N(G_1 + G_2 + G_3 + \dots) = G_1 V_{A_1} + G_2 V_{A_2} + G_3 V_{A_3} + \dots$$

### Application 2 Calcul du courant dans une résistance

Déterminer grâce au théorème de Millman l'intensité  $i$  du courant traversant le conducteur ohmique de résistance  $r$ .

#### Solution

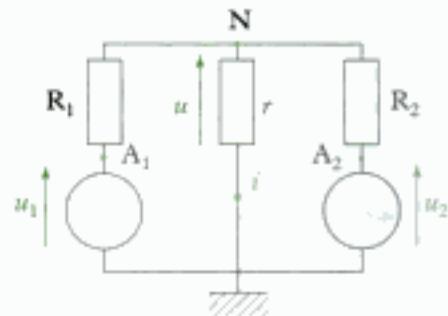
Sur le schéma, la masse impose l'origine des potentiels. Le potentiel  $V_N$  représente la tension  $u = V_N - 0 = ri$  aux bornes de la résistance  $r$ . On a en outre :  $V_{A_1} = u_1$  et  $V_{A_2} = u_2$ .

D'où, d'après le théorème de Millman :

$$V_N \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}, \text{ soit : } i \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}.$$

Finalement, on obtient :

$$i = \frac{\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}, \text{ soit : } i = \frac{R_2 u_1 + R_1 u_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)}.$$



## C. Les dipôles générateurs

### C.1. Caractéristique d'un générateur

La caractéristique d'un dipôle générateur ne passe pas par l'origine des axes. En convention générateur, il s'agit d'une courbe quelconque, difficilement exploitable. En pratique, cependant, les conditions d'utilisation sont telles que seule une petite partie de la caractéristique est concernée. Localement, la caractéristique d'un générateur réel peut donc être modélisée par une droite.

### C.2. Les générateurs idéaux

Les modèles idéaux des générateurs ont des caractéristiques linéaires.

#### C.2.1 - Générateur de tension idéal

##### Définition 2

Un générateur idéal de tension (fig. 8) délivre une tension constante  $E$  quelle que soit le courant  $i$ , positif ou négatif, débité par celui-ci.

La caractéristique  $u = f(i)$  d'un générateur idéal de tension est une droite horizontale.

La puissance fournie par un tel générateur est  $P_g = Ei$ .

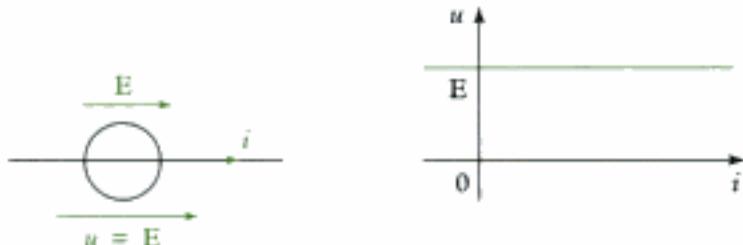


Fig. 8 - Schématisation d'un générateur idéal de tension et caractéristique en convention générateur.

#### C.2.2 - Générateur de courant idéal

##### Définition 3

Un générateur idéal de courant (fig. 9) délivre un courant d'intensité constante  $\eta$  quelle que soit la tension, positive ou négative, aux bornes de celui-ci.

La caractéristique  $u = f(i)$  d'un générateur idéal de courant est une droite verticale.

La puissance fournie par un tel générateur est  $P_g = \eta u$ .



Fig. 9 - Schématisation d'un générateur idéal de courant et caractéristique en convention générateur.

### C.2.3 - Association de générateurs idéaux

- Association série de générateurs de tension idéaux

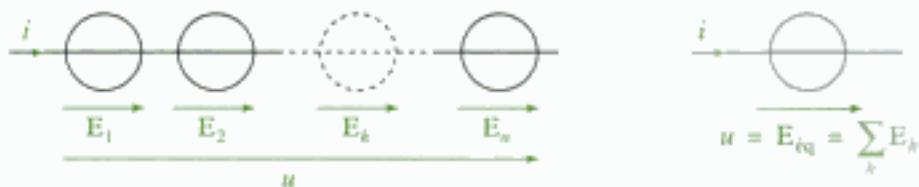


Fig. 10 - Association série de  $n$  générateurs idéaux de tension et générateur équivalent.

On considère l'association en série de  $n$  générateurs de tension idéaux (fig. 10). L'intensité du courant traversant chaque générateur est la même.

Par additivité des tensions, l'association série est équivalente à un générateur de tension idéal unique tel que :

$$E_{\text{eq}} = \sum_k E_k.$$

- Association parallèle de générateurs de courant idéaux



Fig. 11 - Association parallèle de  $n$  générateurs idéaux de courant et générateur équivalent.

On considère l'association en parallèle de  $n$  générateurs de courant idéaux (fig. 11). La tension aux bornes de chaque générateur est la même. D'après la loi des noeuds, l'association parallèle est équivalente à un générateur de courant idéal unique tel que :

$$\eta_{\text{eq}} = \sum_k \eta_k.$$

## C.3. Modélisation linéaire d'un générateur

### C.3.1 - Représentation de Thévenin

- Modèle de Thévenin

**Définition 4**

Dans un domaine où elle est linéaire, la caractéristique  $u = f(i)$  d'un générateur réel a pour équation (en convention générateur) :

$$u = E - Ri,$$

où  $E$  est la force électromotrice (fém) du générateur en volt (V) et  $R$  sa résistance interne en ohm ( $\Omega$ ).

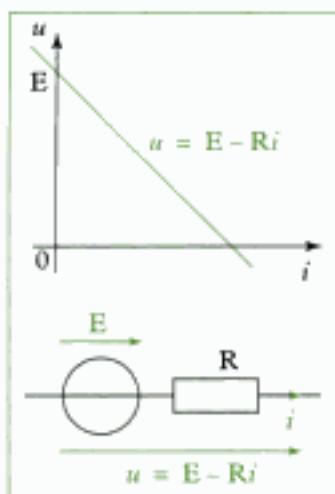


Fig. 12 - Caractéristique tension-intensité d'un générateur linéaire et modèle de Thévenin associé.

La fém  $E$  est l'ordonnée à l'origine de la droite  $u = f(i)$ . En pratique, elle se mesure à l'aide d'un voltmètre lorsque le courant débité par le générateur est nul : elle est donc égale à la tension à vide aux bornes du générateur (si  $i = 0$ , on a  $u = E$ ).

On peut modéliser le générateur réel ainsi linéarisé par un générateur idéal de tension  $E$  en série avec un conducteur ohmique de résistance  $R$  (fig. 12). Ce modèle, appelé **modèle de Thévenin**, est valable si le générateur délivre de faibles courants. La tension  $u$  à ses bornes est alors voisine de sa fém  $E$ .

## • Association série de générateurs linéaires

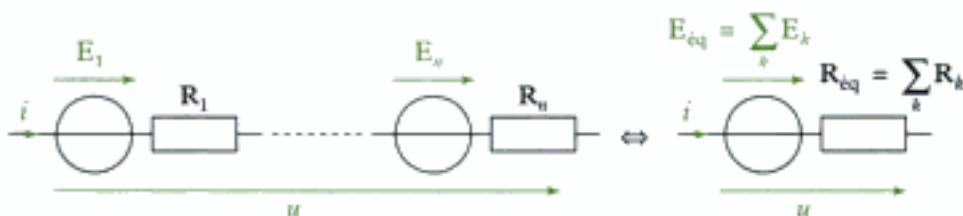


Fig. 13 - Association série de  $n$  générateurs linéaires et générateur de Thévenin équivalent.

On considère l'association en série de  $n$  générateurs de Thévenin ( $E_k, R_k$ ) traversés chacun par la même intensité  $i$  (fig. 13). Les lois d'association en série des générateurs de tension idéaux et des résistances s'appliquent au circuit.

L'association en série de  $n$  générateurs de Thévenin ( $E_k, R_k$ ) est équivalente à un générateur de Thévenin unique ( $E_{\text{eq}}, R_{\text{eq}}$ ) tel que :

$$E_{\text{eq}} = \sum_k E_k \quad \text{et} \quad R_{\text{eq}} = \sum_k R_k.$$

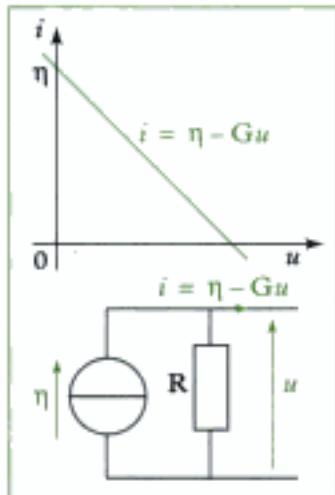


Fig. 14 - Caractéristique intensité-tension d'un générateur linéaire et modèle de Norton associé.

## C.3.2 - Représentation de Norton

### • Modèle de Norton

#### Définition 5

Dans un domaine où elle est linéaire, la caractéristique  $i = f(u)$  d'un générateur réel a pour équation (en convention générateur) :

$$i = \eta - Gu,$$

où  $\eta$  est le courant électromoteur (cém) du générateur en ampère (A) et  $G$  sa conductance interne en siemens (S).

Le cém  $\eta$  est l'ordonnée à l'origine de la droite  $i = f(u)$ . En pratique, il se mesure à l'aide d'un ampèremètre lorsque la tension aux bornes du générateur est nul : il est donc égal au courant de court-circuit délivré par le générateur (si  $u = 0$ , on a  $i = \eta$ ).

On peut modéliser le générateur réel ainsi linéarisé par un générateur idéal de courant  $\eta$  en parallèle avec un conducteur ohmique de résistance  $R$  (fig. 14). Ce modèle, appelé **modèle de Norton**, est valable si la tension  $u$  aux bornes du générateur est proche de zéro, c'est-à-dire au voisinage du court-circuit.

### • Association parallèle de générateurs linéaires

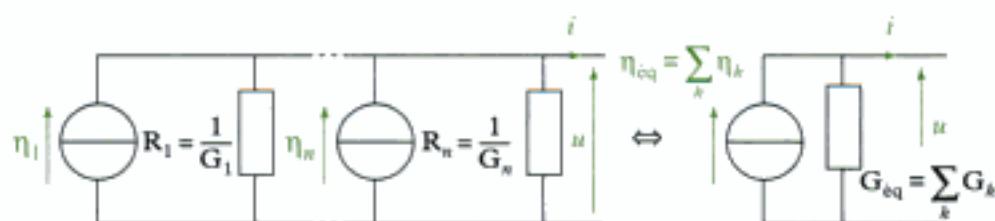


Fig. 15 - Association parallèle de  $n$  générateurs linéaires et générateur de Norton équivalent.

On considère l'association en parallèle de  $n$  générateurs de Norton ( $\eta_k, G_k$ ) soumis chacun à la même tension  $u$  (fig. 15). Les lois d'association en parallèle des générateurs de courant idéaux et des conductances s'appliquent au circuit.

L'association en parallèle de  $n$  générateurs de Norton ( $\eta_k$ ,  $G_k$ ) est équivalente à un générateur de Norton unique ( $\eta_{\text{eq}}$ ,  $G_{\text{eq}}$ ) tel que :

$$\eta_{\text{eq}} = \sum_k \eta_k \quad \text{et} \quad G_{\text{eq}} = \sum_k G_k.$$

### C.3.3 - Passage d'une représentation à l'autre

Dans le modèle de Thévenin, la fém  $E$  est égale à la tension à vide aux bornes du générateur ( $i = 0$ ). De même, dans le modèle de Norton, le cém  $\eta$  est le courant de court-circuit délivré par le générateur ( $u = 0$ ).

Si le générateur est linéaire pour des intensités comprises dans l'intervalle  $[0, \eta]$  (c'est-à-dire, pour des tensions comprises dans l'intervalle  $[0, E]$ ), les modèles de Thévenin et de Norton sont valables. On a alors :

$$u = E - Ri = E - R(\eta - Gu) = E - R\eta + RGu, \text{ soit : } E - R\eta = 0.$$

- 1.** Le générateur idéal de tension du modèle de Thévenin et le générateur idéal de courant du modèle de Norton sont orientés dans le même sens.

Les modèles de Thévenin et de Norton sont équivalents. On passe de l'un à l'autre par la relation<sup>1</sup> :

$$E = R\eta$$

$E$  tension à vide en volt (V)

$R$  résistance interne en ohm ( $\Omega$ )

$\eta$  courant de court-circuit en ampère (A)

### Application 3 Générateur de courant

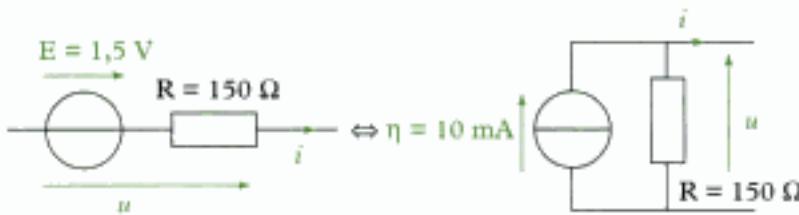
Un générateur électrochimique linéaire délivre une tension à vide  $E = 1,5$  V. Sa résistance interne vaut  $R = 150 \Omega$ . Donner les représentations de Thévenin et de Norton de ce générateur.

#### Solution

Dans le modèle de Norton, le générateur de courant idéal associé délivre une intensité :

$$\eta = \frac{E}{R} = \frac{1,5}{150} = 10 \text{ mA.}$$

Les représentations équivalentes de Thévenin et de Norton du générateur sont donc :



### C.4. Puissance fournie par un générateur

La puissance électrique fournie par un générateur est :

$$\mathcal{P}_g = ui,$$

où  $i$  est l'intensité du courant traversant le générateur et  $u$  la tension à ses bornes en convention générateur.

- Dans la représentation de Thévenin, on a :

$$u = E - Ri, \text{ d'où : } \mathcal{P}_g = Ei - Ri^2.$$

- Le terme  $Ei$  représente la puissance fournie par le générateur idéal de tension.
- Le terme  $Ri^2$  représente la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance interne<sup>2</sup>.

- 2.** La puissance électrique fournie par la résistance interne, négative, est  $-Ri^2$ . Elle correspond à la puissance électrique reçue positive  $Ri^2$ .

- Dans la représentation de Norton, on a :

$$i = \eta - Gu, \text{ d'où : } \mathcal{P}_g = \eta u - Gu^2.$$

- Le terme  $\eta u$  représente la puissance fournie par le générateur idéal de courant.
- Le terme  $Gu^2$  représente la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance interne<sup>1</sup>.

1. La puissance électrique fournie par la résistance interne est  $-Gu^2$ . Elle correspond à la puissance électrique reçue positive  $Gu^2$ .

## D. Les dipôles récepteurs

### D.1. Modélisation linéaire d'un récepteur

#### D.1.1 - Caractéristique d'un récepteur

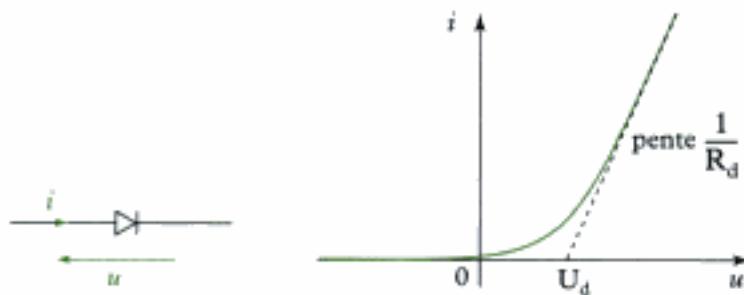


Fig. 16 - Schéma d'une diode et caractéristique courant-tension en convention récepteur.

Les caractéristiques de beaucoup de récepteurs peuvent être linéarisées. Ainsi, la caractéristique courant-tension  $i = f(u)$  d'une diode est constituée, en convention récepteur, par deux portions de droites (fig. 16).

- Quand  $u < U_d$ , l'équation de la portion de droite est  $i = 0$ ; la diode est équivalente à un coupe-circuit (le courant ne circule pas).
- Quand  $u > U_d$ , l'équation de la portion de droite est :  $u = U_d + R_d i$ ; la diode se comporte donc comme un générateur idéal de tension  $E' = U_d$  en série avec un conducteur ohmique de résistance  $R' = R_d$ .

#### D.1.2 - Représentation d'un récepteur

##### Définition 6

Dans un domaine où elle est linéaire, la caractéristique  $u = f(i)$  d'un récepteur réel a pour équation (en convention récepteur) :

$$u = E' + R'i,$$

où  $E'$  est la force contre-électromotrice<sup>2</sup> (fcém) du récepteur en volt (V) et  $R'$  sa résistance interne en ohm ( $\Omega$ ).

2. La tension  $E'$  est appelée force contre-électromotrice, car le générateur, orienté dans le sens récepteur, s'oppose au passage du courant.

On peut donc représenter le récepteur selon le modèle de Thévenin (ou ce qui est équivalent, de Norton), mais orienté en convention récepteur (fig. 17) :

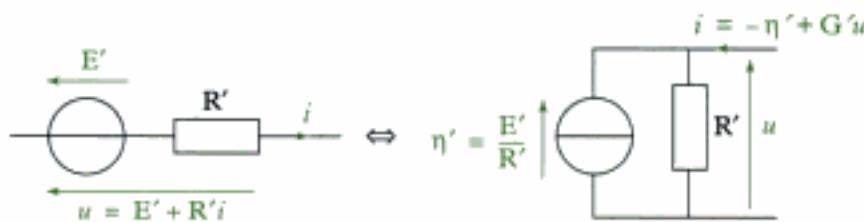


Fig. 17 - Représentations équivalentes d'un récepteur selon les modèles de Thévenin et de Norton.

- En convention générateur, la tension aux bornes du dipôle est opposée :  
 $u = -E' - R'i$ , soit :  $u = E - Ri$  avec  $E = -E'$  et  $R = R'$ .
- Un récepteur ( $E'$ ,  $R'$ ) est donc équivalent à un générateur ( $E = -E'$ ,  $R = R'$ ).
- De même, la fcém d'un générateur utilisé en récepteur est  $E' = -E$ , et sa résistance interne  $R' = R$ . En convention récepteur, on a bien :  
 $u = -E + Ri$ , soit :  $u = E' + R'i$ .

Un générateur ( $E$ ,  $R$ ) est donc équivalent à un récepteur ( $E' = -E$ ,  $R' = R$ ).

### D.1.3 - Puissance reçue par un récepteur

La puissance électrique reçue par un récepteur est :

$$P_r = ui, \text{ soit } P_r = E'i + R'i^2.$$

- Le terme  $E'i$  représente la puissance utile du récepteur, c'est-à-dire la fraction de la puissance électrique reçue par le récepteur pouvant être convertie en une forme d'énergie non thermique.<sup>1</sup>
- Le terme  $R'i^2$  représente la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance interne.

1. Dans un moteur électrique, par exemple, cette puissance est convertie en puissance mécanique.

## D.2. Association de dipôles

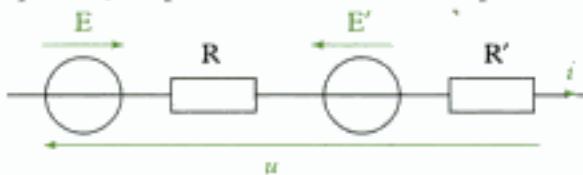
Dans le cas où leurs caractéristiques sont linéaires, on peut modéliser chaque générateur et chaque récepteur d'une association :

- par un générateur idéal de tension en série avec une résistance (modèle de Thévenin), s'il s'agit d'une association série ;
- par un générateur idéal de courant en parallèle avec une résistance (modèle de Norton), s'il s'agit d'une association parallèle.

Dans la convention choisie, on obtient le dipôle équivalent à l'association en appliquant les lois de l'électrocinétique.

### Application 4 Association série d'un générateur et d'un récepteur

Un générateur de fém  $E$  et de résistance interne  $R$  est monté en série avec un récepteur de fcém  $E'$  et de résistance interne  $R'$ . À quelle condition cette association est-elle équivalente à un générateur ? à un récepteur ? (Dans chaque cas, on précisera les caractéristiques du dipôle équivalent.)



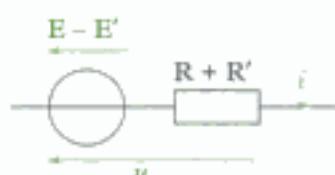
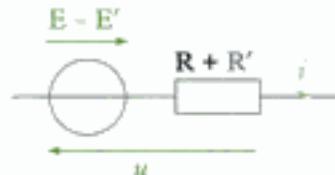
#### Solution

En convention récepteur, la tension  $u$  aux bornes de l'association est :

$$u = E' - E + (R + R')i.$$

• L'association des deux dipôles est un générateur si la fém  $E$  est supérieure à la fcém  $E'$ . La fém de l'ensemble des deux dipôles est  $E - E'$ . La résistance interne du dipôle équivalent est la somme des résistances internes  $R + R'$ .

• L'association des deux dipôles est un récepteur si la fcém  $E'$  est supérieure à la fém  $E$ . La fcém de l'ensemble des deux dipôles est  $E' - E$ . La résistance interne du dipôle équivalent est la somme des résistances internes  $R + R'$ .



# L'essentiel

## ✓ Caractéristique d'un dipôle

- Dans la convention d'étude, on appelle caractéristique d'un dipôle la courbe d'équation  $u = f(i)$  (caractéristique tension-courant) ou  $i = f(u)$  (caractéristique courant-tension). Si la caractéristique est une droite, on dit qu'elle est **linéaire**.
- La caractéristique d'un dipôle passif passe par l'origine des axes ; la caractéristique d'un dipôle actif ne passe pas par l'origine des axes.

## ✓ Conducteurs ohmiques

- En convention récepteur, un conducteur ohmique vérifie la loi d'Ohm :

$$u = \mathbf{R}i \text{ ou } i = \mathbf{G}u$$

$u$	tension en volt (V)
$i$	intensité en ampère (A)
$\mathbf{R}$	résistance en ohm ( $\Omega$ )
$\mathbf{G}$	conductance en siemens (S)

(La conductance  $G$  est l'inverse de la résistance  $R$  :  $G = \frac{1}{R}$ .)

- La puissance reçue par un conducteur ohmique (et entièrement dissipée par effet Joule) vaut :

$$\mathcal{P}_j = \mathbf{R}i^2 = \mathbf{G}u^2.$$

- L'association série de  $n$  résistances  $R_k$  est équivalente à une résistance unique  $\mathbf{R}_{\text{eq}} = \sum_k \mathbf{R}_k$ . La tension  $u_k$  aux bornes de  $R_k$  est (**diviseur de tension**) :

$$u_k = \frac{\mathbf{R}_k}{\mathbf{R}_{\text{eq}}} u = \frac{\mathbf{R}_k}{\sum_k \mathbf{R}_k} u, \text{ avec } u \text{ tension aux bornes de l'association.}$$

- L'association parallèle de  $n$  conductances  $G_k$  est équivalente à une conductance unique  $\mathbf{G}_{\text{eq}} = \sum_k \mathbf{G}_k$ . L'intensité  $i_k$  du courant traversant  $G_k$  est (**diviseur de courant**) :

$$i_k = \frac{\mathbf{G}_k}{\mathbf{G}_{\text{eq}}} i = \frac{\mathbf{G}_k}{\sum_k \mathbf{G}_k} i, \text{ avec } i \text{ intensité du courant traversant l'association.}$$

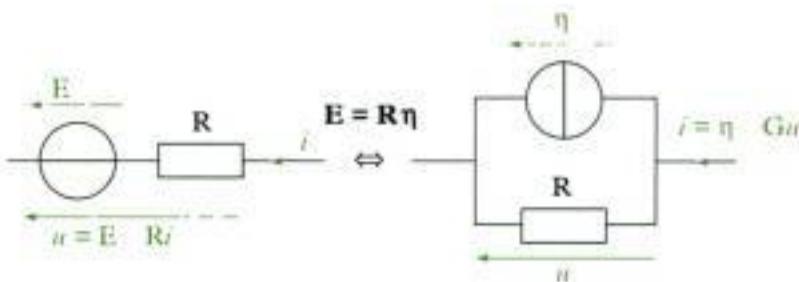
- Si un nœud N d'un circuit est relié à  $n$  résistances  $R_k$  non nulles, la loi des nœuds exprimée en tension s'écrit (théorème de Millman) :

$$V_N \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \right) = \frac{V_{A_1}}{R_1} + \frac{V_{A_2}}{R_2} + \frac{V_{A_3}}{R_3} + \dots$$

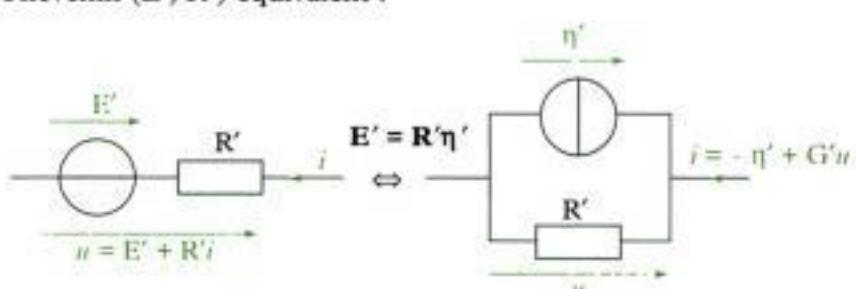
## ✓ Modélisations linéaires de dipôles

- Un générateur idéal de tension délivre une tension constante  $E$  quel que soit le courant  $i$ , positif ou négatif, débité par celui-ci. Un générateur idéal de courant délivre un courant d'intensité constante  $\eta$  quelle que soit la tension, positive ou négative, aux bornes de celui-ci.

- Dans un domaine où sa caractéristique est linéaire, on peut représenter un générateur réel par le modèle de Thévenin ( $E$ ,  $R$ ) ou par le modèle de Norton ( $\eta$ ,  $R$ ) équivalent :



- Dans un domaine où sa caractéristique est linéaire, on peut représenter un récepteur réel par le modèle de Thévenin ( $E'$ ,  $R'$ ) équivalent :



(Formellement, un générateur ( $E$ ,  $R$ ) est équivalent à un récepteur ( $E' = -E$ ,  $R' = R$ ) et vice versa.)

## Mise en œuvre

### Méthode n° 1

#### Comment appliquer les lois de Kirchhoff à un circuit ramifié ?

Lorsqu'un circuit est constitué de plusieurs mailles, l'écriture systématique des lois de Kirchhoff conduit généralement à un excès d'information. Comment être sûr de n'écrire que des relations nécessaires ?

##### → Savoir faire

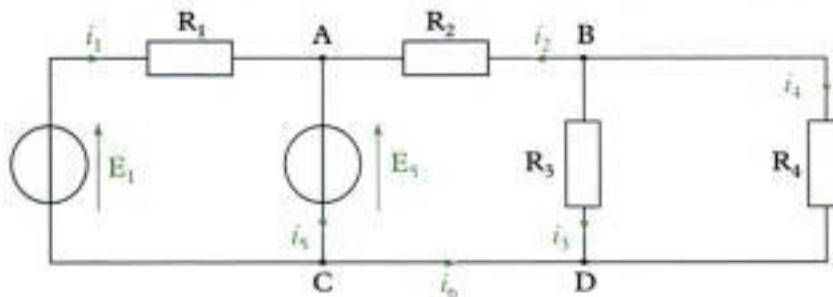
- Dénombrer les nœuds ( $n$ ) et les mailles indépendantes ( $m$ ) dans le circuit.
- Écrire ( $n - 1$ ) lois des nœuds entre les intensités. Le dernier nœud conduit à une relation redondante. (Le nœud inutilisé est indifférent.)
- Écrire ( $m$ ) lois des mailles. (Des mailles sont indépendantes si elles comportent chacune un dipôle que ne comportent pas les autres.)
- Injecter les caractéristiques des dipôles dans les lois des mailles, de façon à n'obtenir que des relations entre les intensités (et les grandeurs caractéristiques des dipôles).
- Résoudre le système constitué de  $b$  équations dont les  $b$  intensités sont les inconnues.



En écrivant toutes ou certaines de ces équations sans précaution, on risque de « tourner en rond » ou d'aboutir à «  $0 = 0$  ».

## → Application

Déterminer les intensités dans le circuit schématisé ci-dessous en fonction des données du problème.

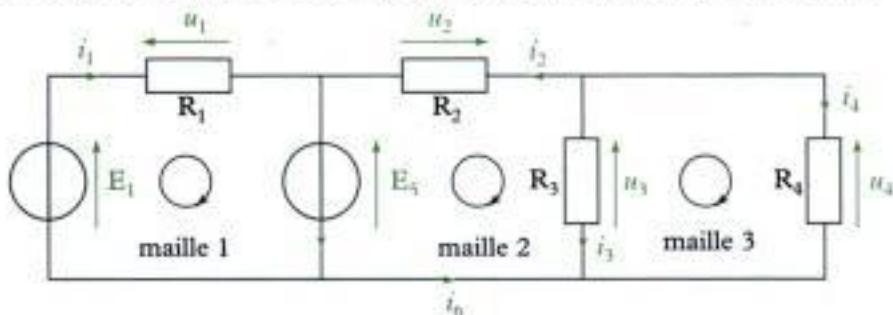


### Solution

- On dénombre  $n = 4$  nœuds A, B, C et D, et  $m = 3$  mailles indépendantes.
- On écrit donc 3 lois des nœuds (le nœud inutilisé est indifférent) :

$$\begin{cases} \text{au nœud A : } i_1 + i_2 - i_5 = 0 \\ \text{au nœud B : } i_2 + i_3 + i_4 = 0 \\ \text{au nœud C : } i_5 - i_1 - i_6 = 0. \end{cases}$$

- On écrit donc 3 lois des mailles. Le fléchage des tensions est arbitraire à ce stade.



$$\begin{cases} \text{maille 1 : } E_1 - U_1 - E_5 = 0 \\ \text{maille 2 : } E_5 + U_2 - U_3 = 0 \\ \text{maille 3 : } U_3 - U_4 = 0. \end{cases}$$

- On injecte les caractéristiques en prenant garde aux conventions de fléchage des tensions. Sur cet exemple, toutes les résistances ont été fléchées en convention récepteur.

$$\begin{cases} U_1 = R_1 i_1 \\ U_2 = R_2 i_2 \\ U_3 = R_3 i_3 \\ U_4 = R_4 i_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 - R_1 i_1 - E_5 = 0 \\ E_5 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 \\ R_3 i_3 - R_4 i_4 = 0. \end{cases}$$

- Le système complet comporte six équations et six inconnues :

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_5 = 0 & (1) \\ i_2 + i_3 + i_4 = 0 & (2) \\ i_5 - i_1 - i_6 = 0 & (3) \\ E_1 - R_1 i_1 - E_5 = 0 & (4) \\ E_5 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 & (5) \\ R_3 i_3 - R_4 i_4 = 0 & (6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} & (4) \\ i_4 = \frac{R_3}{R_4} i_3 & (6) \\ i_2 + \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) i_3 = 0 & (2) + (6) \\ E_5 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 & (5) \\ i_5 = i_1 - i_2 & (1) \\ i_6 = i_5 - i_1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{E_1 - E_5}{R_1} & (4) \\ i_3 &= -\frac{i_2}{1 + \frac{R_3}{R_4}} & (2) + (6) \\ E_5 + R_2 i_2 + R_3 \left( \frac{i_2}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \right) &= 0 & (5) \\ i_4 &= \frac{R_3}{R_4} i_3 & (6) \\ i_5 &= i_1 + i_2 & (1) \\ i_6 &= i_5 - i_1 = i_2 & (3) + (1) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} \\ i_2 = \frac{-E_5}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \\ i_3 = \frac{R_4 E_5}{R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4} \\ i_4 = \frac{R_3 E_5}{R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4} \\ i_5 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} - \frac{E_5}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \\ i_6 = i_2. \end{cases}$$

La résolution d'un système linéaire d'ordre élevé est rarement demandée en physique ; elle est cependant au programme de l'enseignement de mathématiques.



On pourra remarquer que les nœuds C et D de cet exemple sont équipotentiels car reliés par un fil. Si on choisit de ne dénombrer que trois nœuds en les réunissant, l'intensité  $i_6$  de la branche qui les sépare disparaît. On a alors  $m = 3$ ,  $n = 3$ , ce qui conduit aux mêmes résultats.

## Méthode n° 2

### Comment réduire un circuit linéaire à un générateur réel unique ?

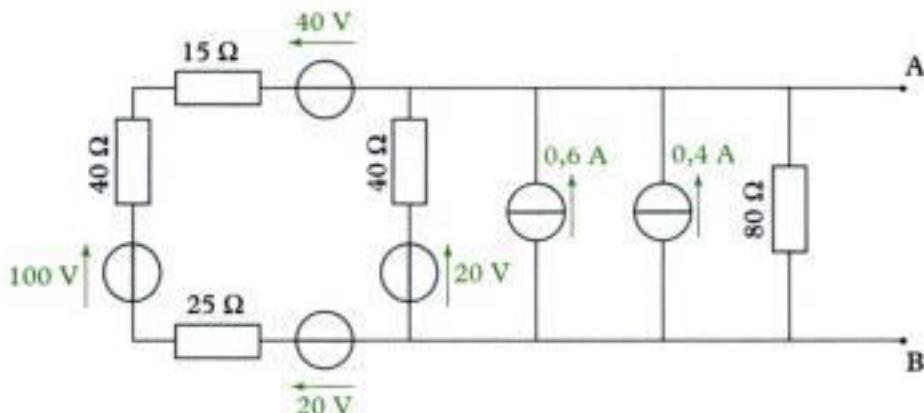
Un circuit constitué uniquement de générateurs idéaux de tension, de générateurs idéaux de courant et de conducteurs ohmiques est équivalent à un générateur réel unique. On se propose de déterminer les caractéristiques de ce générateur.

#### → Savoir faire

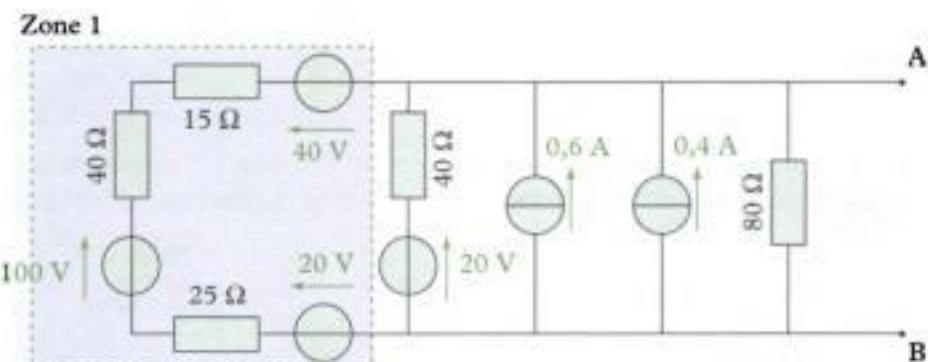
- ❶ Substituer un générateur de tension idéal unique à tous les générateurs de tension associés en série sur la même branche. Les forces électromotrices  $E_k$  s'additionnent algébriquement.
- ❷ Substituer un générateur de courant idéal unique à tous les générateurs de courant associés en parallèle. Les courants électromoteurs  $\eta_k$  s'additionnent algébriquement.
- ❸ Substituer un conducteur ohmique à tous les conducteurs ohmiques associés en série sur la même branche (les résistances s'ajoutent).  
Substituer de même un conducteur ohmique unique à tous les conducteurs ohmiques associés en parallèle (les conductances s'ajoutent).
- ❹ Convertir les générateurs de Thévenin en générateurs de Norton (et vice versa) si cela permet des simplifications. Reprendre alors au ❶.
  - Dans le cas d'une association parallèle des générateurs, on convertit tous les générateurs de Thévenin en générateurs de Norton.
  - Dans le cas d'une association série des générateurs, on convertit tous les générateurs de Norton en générateurs de Thévenin.

## Application

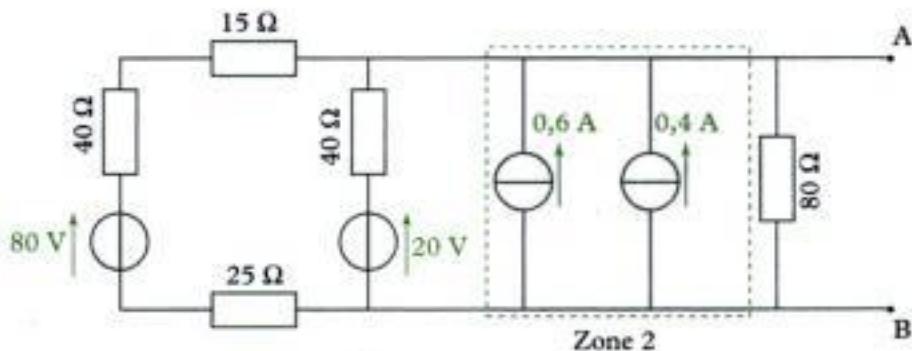
Montrer que le dipôle AB schématisé ci-dessous est équivalent à un générateur réel dont on précisera les caractéristiques.



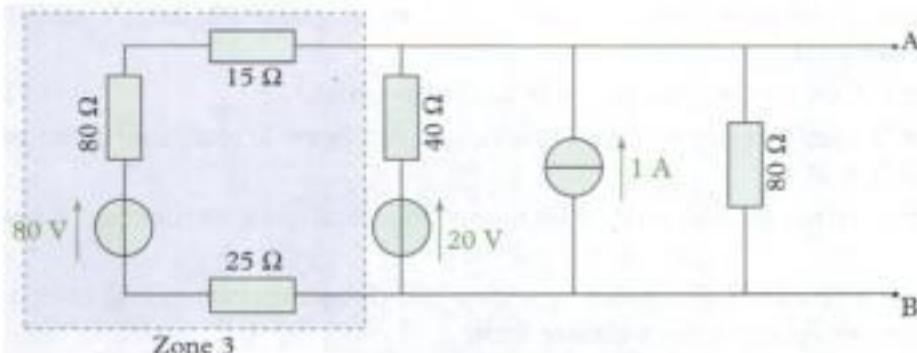
## Solution



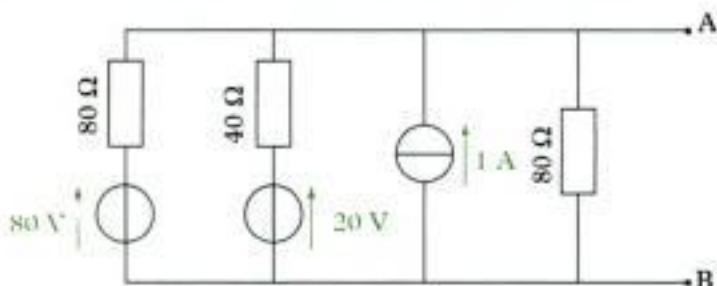
- ➊ Trois générateurs de tension idéaux sont associés en série (zone 1).



- ➋ Deux générateurs de courant idéaux sont associés en parallèle (zone 2).

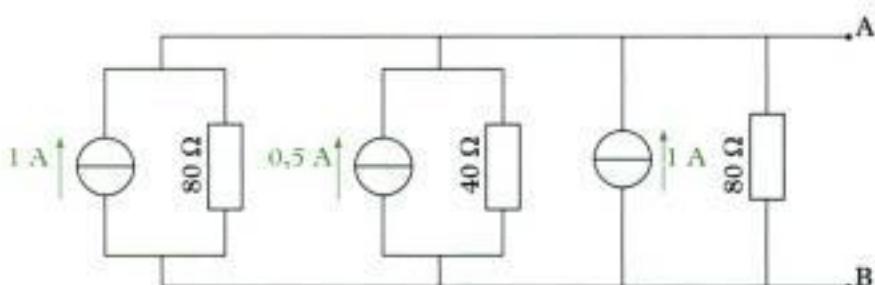


- ❸ Trois résistances associées en série peuvent être combinées (zone 3).

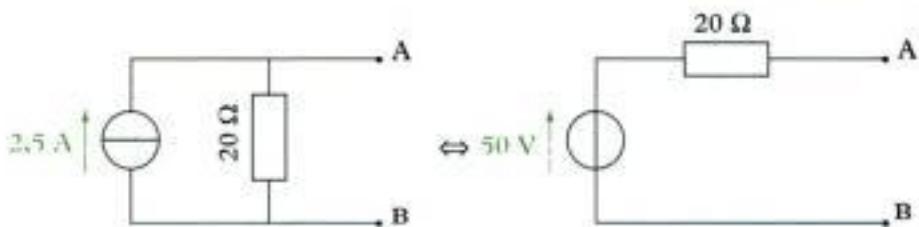


- ❹ Deux générateurs de Thévenin en parallèle sont convertis en générateurs de Norton :

$$E = R\eta, \text{ d'où : } \eta = \frac{E}{R}$$



- ❺ et ❻ Les trois générateurs de courant idéaux et les trois résistances sont associés en parallèle. On obtient ainsi les représentations de Norton et de Thévenin du générateur réel unique équivalent.



### Méthode n° 3

#### Comment exploiter les symétries d'un réseau de résistances identiques ?

Une association de résistances est trop ramifiée pour une simplification directe, mais avec un fort degré de symétrie. On souhaite calculer la résistance entre deux points A et B du réseau.

##### → Savoir faire

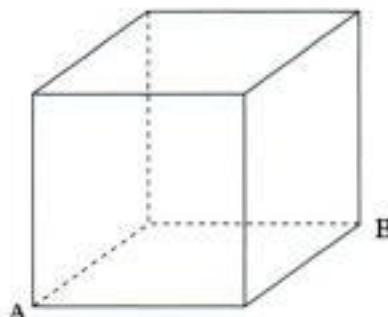
- ❶ Recenser les plans de symétrie du réseau (les plans de symétrie laissent le réseau et les points A et B invariants).
- ❷ Attribuer à deux points symétriques le même potentiel.
- ❸ Identifier le plan d'antisymétrie du réseau (ce plan laisse le réseau invariant mais échange les points A et B).
- ❹ Attribuer le même potentiel à tous les points du réseau qui appartiennent au plan d'antisymétrie.
- ❺ Redessiner le réseau en réunissant tous les points de même potentiel. Vérifier que toutes les résistances ont été replacées sur cette figure.

❶ Calculer la résistance équivalente par association série-parallèle.

 La recherche des plans de symétrie ou d'antisymétrie peut amener à « couper » une résistance R en deux résistances  $\frac{R}{2}$  placées en série.

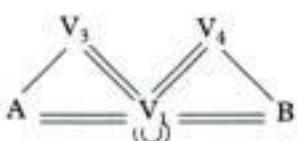
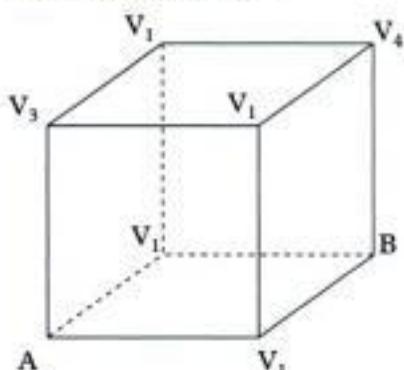
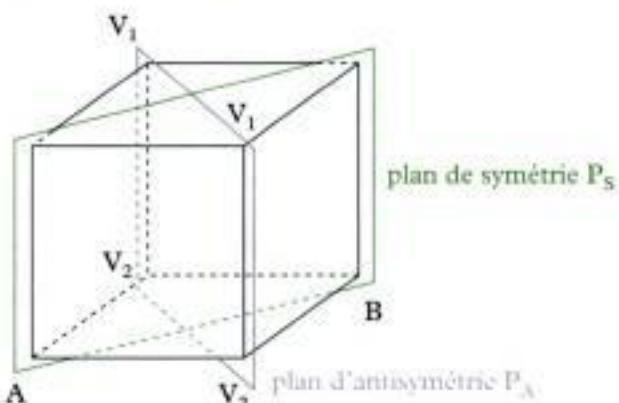
## → Application

Un cube est constitué de 12 arêtes présentant une même résistance R. On cherche la résistance lue par un ohmmètre placé entre deux points A et B du cube.



### Solution

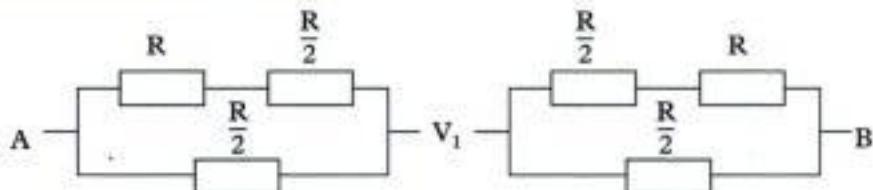
- ① Le plan de symétrie  $P_S$  contient la diagonale AB, il est perpendiculaire au plan contenant ces points.
  - ② Dans ces conditions, deux sommets symétriques ont le même potentiel  $V_1$ , deux autres ont un potentiel  $V_2$ .
  - ③ Le plan d'antisymétrie  $P_A$  est perpendiculaire au précédent, il contient les points de potentiels  $V_1$  et  $V_2$ .
  - ④ Les quatres points précédents sont au même potentiel  $V_1 = V_2$  car ils appartiennent au plan d'antisymétrie.
  - ⑤ Le cube se simplifie comme suit :

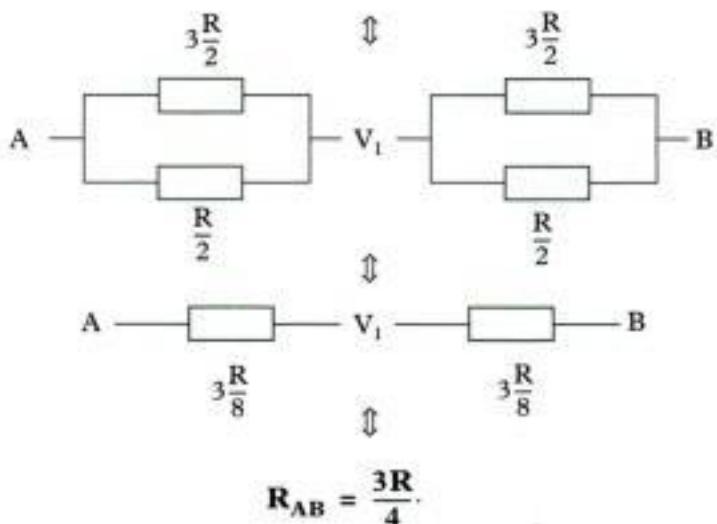


Chaque segment désigne une résistance ; il y a par exemple deux segments entre A et V<sub>1</sub> car deux résistances relient ces deux potentiels sur le cube réel.

Sur cet exemple, deux résistances relient des points de même potentiel  $V_1$  ; elles n'entrent plus en compte dans le calcul de la résistance équivalente.

- ⑤ Les associations série-parallèle conduisent à :





#### Méthode n° 4

### Comment associer à un dipôle quelconque une caractéristique linéaire par morceaux ?

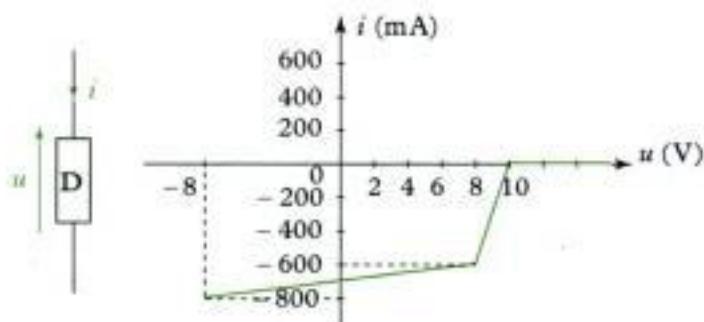
Certains dipôles n'ont pas une caractéristique linéaire. On se propose de découper leur caractéristique en différentes zones, puis d'associer un modèle linéaire à chacune d'elles.

#### → Savoir faire

- 1 Identifier les différentes zones de validité des modèles linéaires sur la caractéristique réelle du composant.
  - 2 Mesurer la pente moyenne de la courbe sur chacune de ces zones. En déduire la résistance de chaque modèle (égale à la valeur absolue de la pente moyenne).
  - 3 Mesurer la tension à vide de chaque zone en prolongeant la modélisation linéaire jusqu'à l'axe ( $i = 0$ ).
  - 4 Donner le générateur réel associé à chaque zone de la caractéristique, assorti du domaine de validité de ce modèle.
- Le dipôle peut être un générateur ou un récepteur.

#### → Application

Un dipôle actif présente la caractéristique courant-tension expérimentale suivante, donnée en convention récepteur. Proposer une caractérisation linéaire par morceaux.



① Sur la caractéristique, on identifie trois zones :

$$\begin{cases} \text{zone 1 : } u < 8 \text{ V} \\ \text{zone 2 : } u \in [8 \text{ V} ; 10 \text{ V}] \\ \text{zone 3 : } u > 10 \text{ V.} \end{cases}$$

② On mesure sur ces trois zones la pente  $\frac{\Delta i}{\Delta u}$  et on en déduit la résistance  $R = \frac{\Delta u}{\Delta i}$ .

- Zone 1 :  $\frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{16} = 0,0125 \Omega^{-1}$ , soit  $R_1 = 80 \Omega$ .

- Zone 2 :  $\frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{600 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,3 \Omega^{-1}$ , soit  $R_2 = 3,33 \Omega$ .

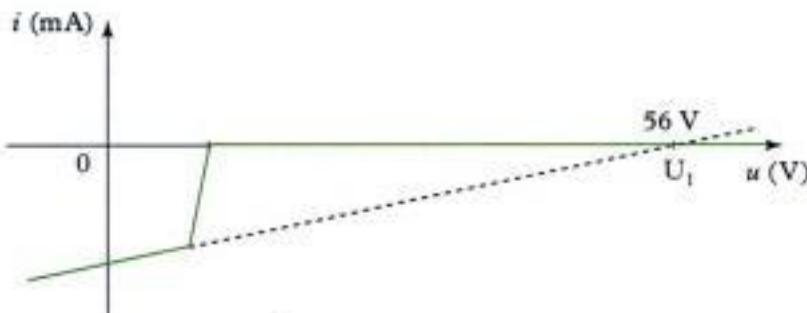
- Zone 3 :  $\frac{\Delta i}{\Delta u} = 0 \Omega^{-1}$ , soit  $R_3$  infinie.

③ On mesure la tension à vide en déterminant l'abscisse de l'intersection du morceau de la caractéristique considéré avec l'axe des abscisses.

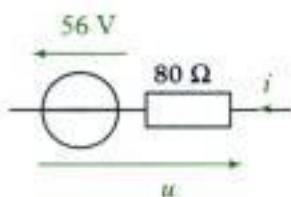
- Zone 1 : on prolonge la caractéristique jusqu'à l'axe des abscisses et on lit  $U_1 = 56 \text{ V}$ .

- Zone 2 : on lit directement sur le graphe  $U_2 = 10 \text{ V}$ .

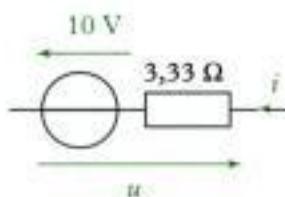
- Zone 3 :  $U_3$  n'est pas définie.



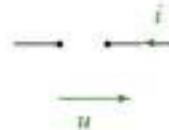
④ Les trois modélisations linéaires sont donc (en représentation de Thévenin) :



pour  $u < 8 \text{ V} :$   
 $u = 56 + 80i$ .



pour  $8 \text{ V} < u < 10 \text{ V} :$   
 $u = 10 + 3,33i$ .



pour  $u > 10 \text{ V} :$   
 $i = 0$ .

### Méthode n° 5

#### Comment déterminer le point de fonctionnement d'un dipôle linéaire par morceau ?

Soit D un dipôle linéaire par morceau inséré dans un circuit linéaire. On souhaite déterminer le point de fonctionnement de D.

## → Savoir faire

- ❶ Réduire la partie linéaire du courant à un générateur réel unique.

Pour chaque morceau linéaire de la caractéristique :

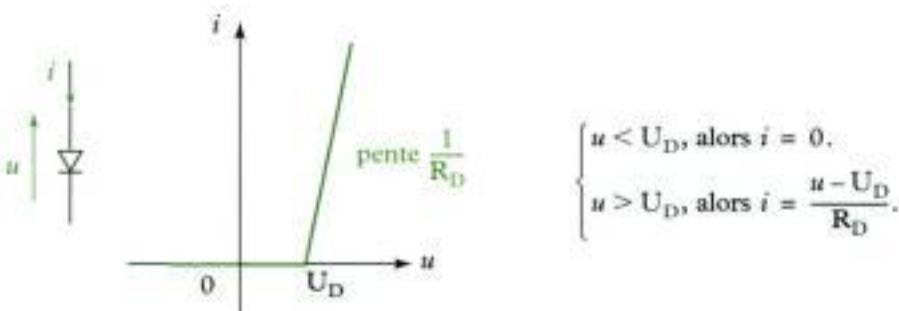
- ❷ Connecter au générateur réel le modèle linéaire associé à la caractéristique. Préciser le domaine de validité du modèle.
- ❸ Déterminer le point de fonctionnement ( $u, i$ ) du dipôle D pour le modèle choisi.
- ❹ Déterminer la condition de validité de ce point de fonctionnement.



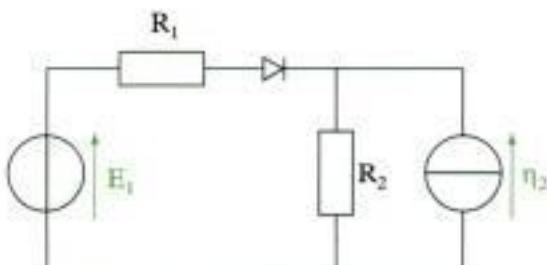
Si la caractéristique de D est continue, les différentes conditions de validité doivent se compléter.

## → Application

Une diode de signal est modélisée par deux demi-droites affines. Sa caractéristique en convention récepteur est donnée ci-dessous.

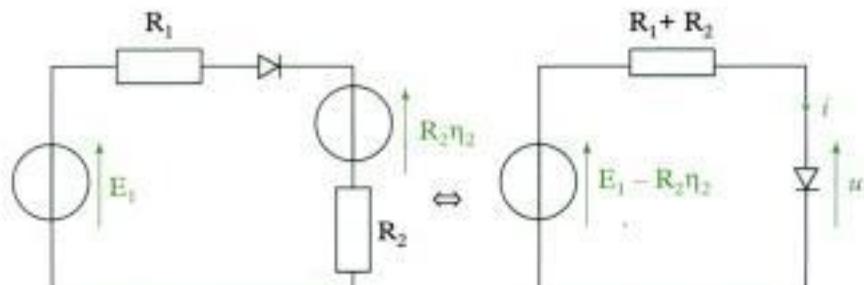


Déterminer le point de fonctionnement de ce dipôle lorsqu'il est inséré dans le circuit suivant.



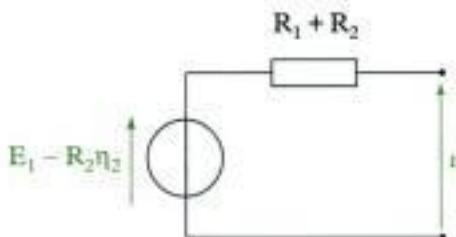
## Solution

- ❶ La portion linéaire de circuit se réduit à un générateur réel unique en convertissant le générateur de Norton ( $\eta_2, R_2$ ) en générateur de Thévenin et en appliquant les règles d'association série.



• Domaine  $u < U_D$

- ② La diode est modélisée par un interrupteur ouvert ( $i = 0$ ). La fém du générateur réel se reporte à ses bornes.



- ③ Le point de fonctionnement du circuit est alors :

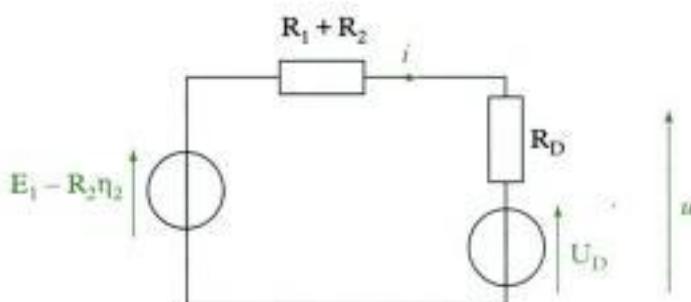
$$(u = E_1 - R_2 \eta_2 ; i = 0).$$

- ④ Ce point est valable pour  $u < U_D$ , soit :

$$E_1 - R_2 \eta_2 < U_D, \text{ soit : } E_1 < U_D + R_2 \eta_2.$$

• Domaine  $u > U_D$

- ② La diode est modélisée par un récepteur réel de fém  $U_D$  et de résistance interne  $R_D$ . On a donc le schéma équivalent ci-dessous :



- La loi des mailles dans le circuit s'écrit :

$$E_1 - R_2 \eta_2 = (R_1 + R_2)i + R_D i + U_D, \quad \text{d'où : } i = \frac{E_1 - R_2 \eta_2 - U_D}{R_1 + R_2 + R_D}.$$

- La tension aux bornes de la diode est :

$$\begin{aligned} u &= U_D + R_D i = U_D + \left( \frac{E_1 - R_2 \eta_2 - U_D}{R_1 + R_2 + R_D} \right) R_D \\ &= \frac{(R_1 + R_2)U_D + (E_1 - R_2 \eta_2)R_D}{R_1 + R_2 + R_D}. \end{aligned}$$

- ③ Le point de fonctionnement du circuit est alors :

$$\left( u = \frac{(R_1 + R_2)U_D + (E_1 - R_2 \eta_2)R_D}{R_1 + R_2 + R_D}; \quad i = \frac{E_1 - R_2 \eta_2 - U_D}{R_1 + R_2 + R_D} \right).$$

- ④ Ce point est valable pour  $u > U_D$ , soit :

$$U_D + \frac{E_1 - R_2 \eta_2 - U_D}{R_1 + R_2 + R_D} > U_D, \quad \text{soit : } E_1 > U_D + R_2 \eta_2.$$



Cette condition est bien complémentaire de la précédente, ce qui était prévisible car la caractéristique de la diode est continue.

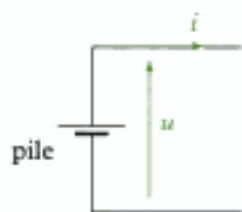
# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Caractéristique d'une pile

Lors de l'étude d'une pile, on a mesuré la tension  $u$  à ses bornes et le courant  $i$  qu'elle débite.

$u$ (V)	1,5	1,45	1,4	1,35	1,2	0,9	0,5	0
$i$ (mA)	0	50	100	150	200	250	300	350



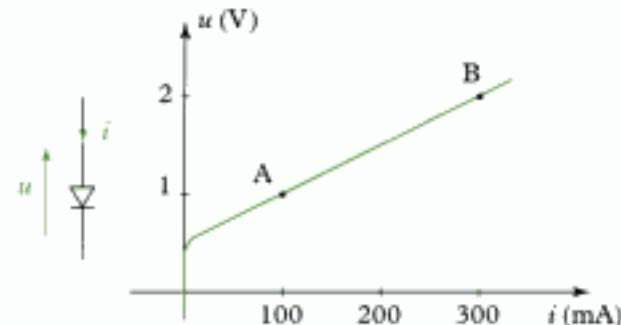
- Décrire un mode opératoire pour les mesures.
- Tracer la caractéristique  $u(i)$ .
- À faible intensité, la pile est modélisable par un générateur de Thévenin. Le déterminer.
- Quelle est, expérimentalement, l'intensité maximale que peut débiter la pile pour conserver une caractéristique linéaire ?

### Ex. 2 Caractéristique d'une diode

Lors de l'étude d'une diode, on a tracé la caractéristique suivante :

- pour  $u < 0,3$  V :  $i = 0$  ;
- pour  $u > 0,7$  V, la caractéristique est linéaire, passant par les points :

A( $u = 1$  V ;  $i = 100$  mA) et B( $u = 2$  V ;  $i = 300$  mA).

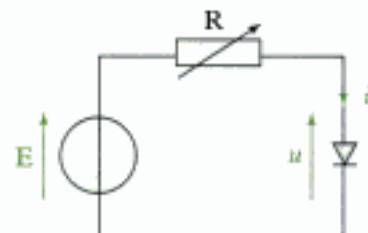


- Comment peut-on tracer la caractéristique d'une telle diode ?
- Dans sa partie linéaire ( $u > 0,7$  V), donner un modèle équivalent à la diode.
- On branche aux bornes de la diode un générateur de tension de force électromotrice  $E = 1,5$  V et de résistance interne R.

Le courant dans la diode vaut alors  $I = 100$  mA.

Déterminer la résistance R, la puissance reçue par la diode et la puissance fournie par le générateur.

- On modélise la caractéristique de la diode par deux droites. Préciser les droites modélisant le mieux la diode.
- On utilise le modèle établi en d) pour la diode. Elle est branchée sur un générateur de tension idéal  $E = 1,5$  V, placé en série avec une résistance R variable.



Tracer la courbe donnant la puissance  $\mathcal{P}$  reçue par la diode en fonction de R.

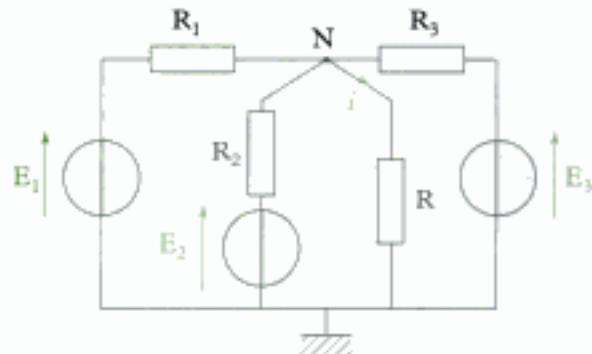
### Ex. 3 Adaptation d'impédance

Un générateur modélisé par son modèle de Thévenin ( $E, R_i$ ) est branché sur une résistance variable R.

- Déterminer le courant circulant dans la résistance R.
- Déterminer la puissance  $\mathcal{P}$  dissipée par effet Joule dans la résistance R. Tracer la courbe  $\mathcal{P}(R)$ .
- Pour quelle valeur  $R_0$  de R la puissance dissipée dans la résistance est-elle maximale ? On parle alors d'adaptation d'impédance.

### Ex. 4 Théorème de Millman

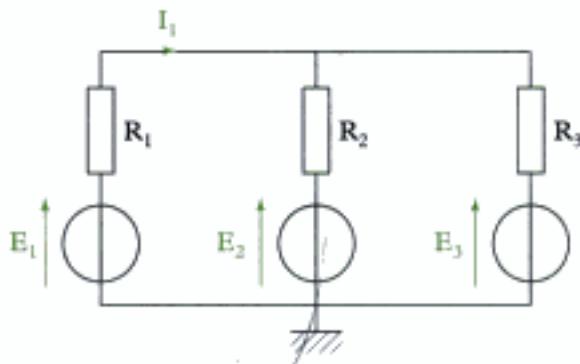
- Énoncer la loi des nœuds exprimée en tension pour déterminer le potentiel  $V_N$  du nœud N dans le montage ci-dessous. En déduire le courant  $i$  dans la résistance R.



- Reprendre l'exercice en remplaçant les générateurs de Thévenin ( $E_k, R_k$ ) par des générateurs de Norton. En déduire alors la source de Thévenin branchée aux bornes de la résistance R et le courant circulant dans cette résistance.

## Ex. 5 Théorème de superposition

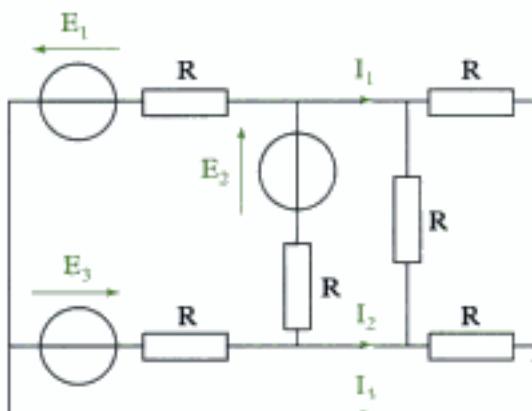
a) Déterminer, par application des lois de Kirchhoff, le courant  $I_1$  circulant dans la résistance  $R_1$  du montage ci-dessous.



- b) • Que vaut le courant, noté  $I_{11}$ , quand  $E_2 = E_3 = 0$  ?
  - Que vaut le courant, noté  $I_{12}$ , quand  $E_1 = E_3 = 0$  ?
  - Que vaut le courant, noté  $I_{13}$ , quand  $E_1 = E_2 = 0$  ?
- Montrer que l'on a bien :  $I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13}$ .  
Énoncer le théorème de superposition.

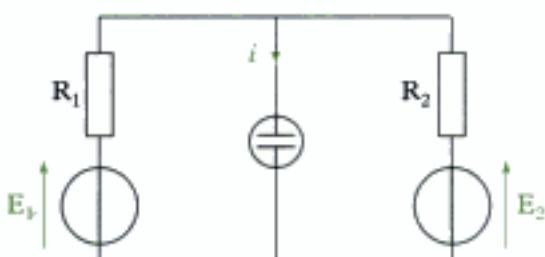
## Ex. 6 Calculs de courants

Déterminer les courants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  du montage ci-dessous.

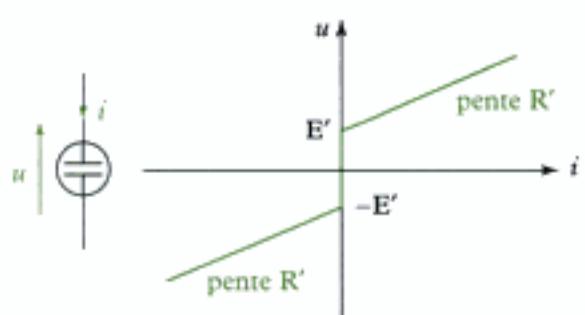


## Ex. 7 Alimentation d'un dipôle actif

Le montage étudié est le suivant :



Le générateur de tension de fém  $E_1 = 1,5$  V possède une résistance interne  $R_1 = 6 \Omega$ ; celui de fém  $E_2$  a une résistance interne  $R_2 = 6 \Omega$ . Le dipôle actif est un électrolyseur de fém  $E' = 1,5$  V et de résistance interne  $R' = 3 \Omega$ . Sa caractéristique est représentée sur le graphe ci-dessous.



a) On a  $E_2 = 6$  V. Déterminer le courant  $i$  dans l'électrolyseur.

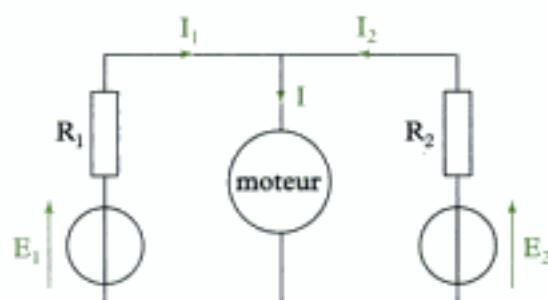
b) Reprendre l'étude quand  $E_2 = 1$  V. Déterminer à nouveau le courant  $i$ .

## Ex. 8 Alimentation d'un moteur

Un moteur de force contre électromotrice  $E'$  et de résistance interne  $R'$  est alimenté grâce à deux générateurs de forces électromotrices respectives  $E_1$  et  $E_2$  et de résistances internes respectives  $R_1$  et  $R_2$ .

Déterminer les courants  $I$ ,  $I_1$  et  $I_2$  circulant dans le moteur et les générateurs.

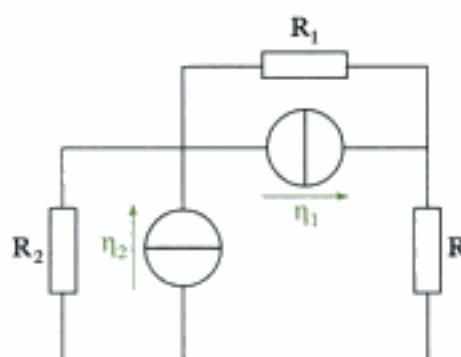
(Pour obtenir ce résultat, on appliquera la loi des nœuds exprimée en tension.)



## Ex. 9 Générateurs de courant

Deux générateurs, modélisés par leur modèle de Norton :

cém  $\eta_1$  et  $\eta_2$ ; résistance interne  $R_1$  et  $R_2$ , sont placés en série avec une résistance  $R$ .

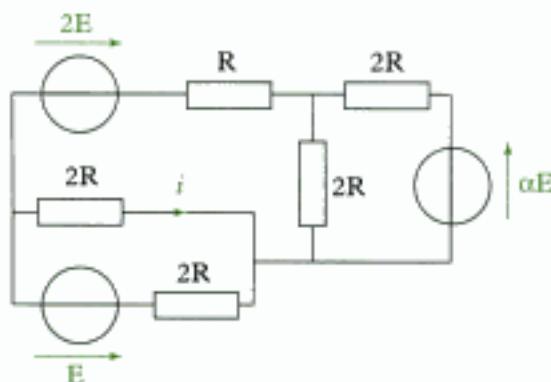


a) Remplacer les générateurs de Norton par des générateurs de Thévenin.

b) En déduire la tension aux bornes de la résistance  $R$ , le courant qui y circule et la puissance dissipée par effet Joule.

### Ex. 10 Application des lois de Kirchhoff

Déterminer l'intensité  $i$  sur le schéma ci-dessous.



## Niveau 2

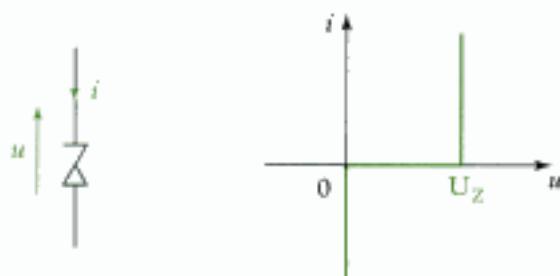
### Ex. 11 Alimentation d'un moteur

Un moteur est un récepteur actif de résistance  $R'$  et de fém  $E' = kN$ , où  $N$  est la vitesse de rotation du moteur. La puissance motrice fournie par le moteur est  $\mathcal{P}_m = E'i$ , où  $i$  est l'intensité du courant circulant en convention récepteur dans le moteur.

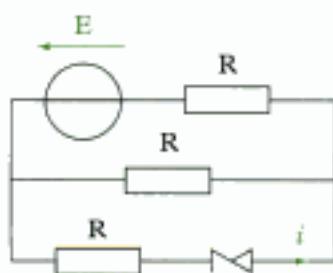
Le moteur est alimenté par un générateur de fém  $E$  et de résistance interne  $R$ .

- Déterminer l'intensité  $i$  circulant dans le moteur. Donner son expression en fonction de  $E$ ,  $R$ ,  $R'$  et  $kN$ .
- Quelle est la puissance motrice  $\mathcal{P}_m$  ?
- Tracer la courbe donnant  $\mathcal{P}_m$  en fonction de  $N$ . Pour quelle valeur  $N_0$  de la vitesse de rotation du moteur la puissance motrice est-elle maximale ?

### Ex. 12 Diode Zener



Une diode Zener est placée dans un montage où la fém  $E$  peut être réglée ( $E > 0$  ou  $E < 0$ ).



Le but de l'exercice est de déterminer  $i$  en fonction de  $E$  et de  $R$ .

a) Réduire la partie linéaire du circuit à un générateur unique.

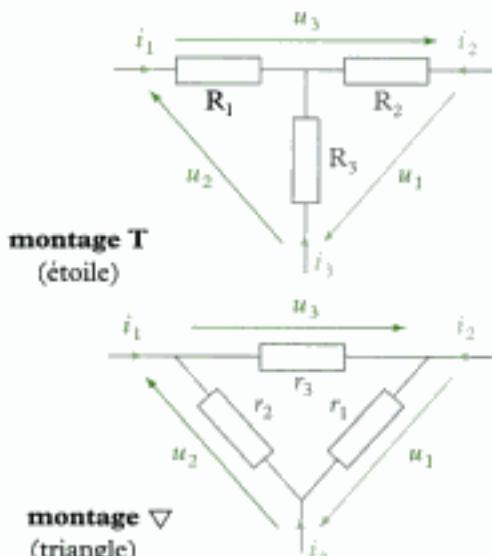
b) Déterminer alors la condition portant sur  $E$  pour avoir  $i = 0$ .

• À quelle condition a-t-on  $i > 0$ ? Déterminer alors  $i$ .

• À quelle condition a-t-on  $i < 0$ ? Déterminer alors  $i$ . Tracer la courbe  $i = f(E)$ .

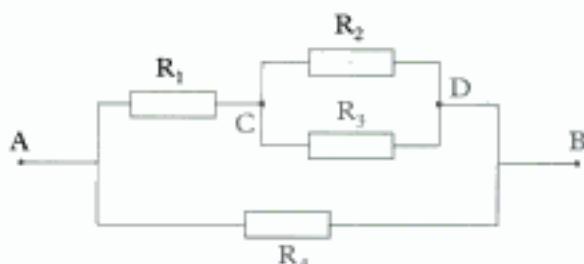
### Ex. 13 Théorème de Kennely

À quelles conditions les deux montages sont-ils équivalents ?

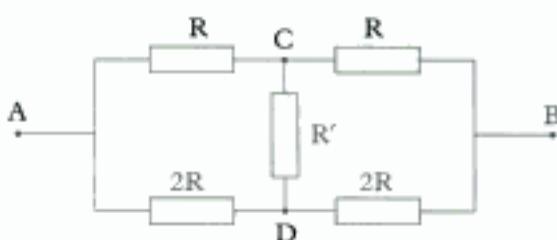


### Ex. 14 Résistances équivalentes

a) Déterminer la résistance équivalente au montage entre A et B.

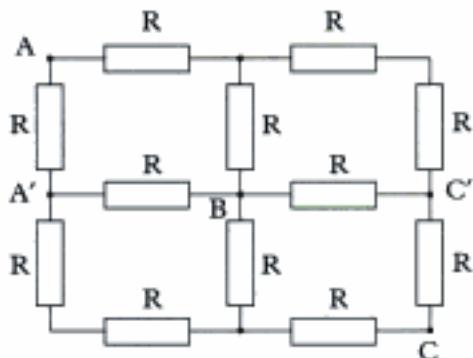


b) Déterminer la résistance équivalente au montage entre A et B.



c) Déterminer la résistance équivalente au montage ci-dessous :

- lorsque le courant entre en A et ressort en B ;
- lorsque le courant entre en  $A'$  et ressort en B ;
- lorsque le courant entre en A et ressort en C' ;
- lorsque le courant entre en  $A'$  et ressort en C'.



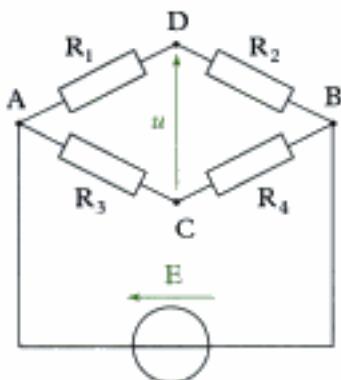
## Niveau 3

### Ex. 15 Pont de Wheatstone

Un pont de Wheatstone est un montage électrique permettant de déterminer une résistance inconnue.

#### 1) Équilibrage du pont

Le schéma du pont est représenté sur la figure ci-dessous.



La résistance à déterminer est la résistance  $R_1$ . Les résistances  $R_3$  et  $R_4$  sont des résistances fixes connues.

La résistance  $R_2$  est une résistance variable dont on connaît la valeur.

Le pont est équilibré quand la tension  $u$  mesurée entre C et D est nulle.

a) Déterminer la tension  $u$  en fonction de E et des résistances  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$ .

b) À quelle condition le pont est-il équilibré ? Déterminer alors  $R_1$ .

A.N.  $R_3 = 100 \Omega$ ;  $R_4 = 5 \text{ k}\Omega$ ;  $R_2 = 1\,827 \Omega$ ;  $E = 6 \text{ V}$ .

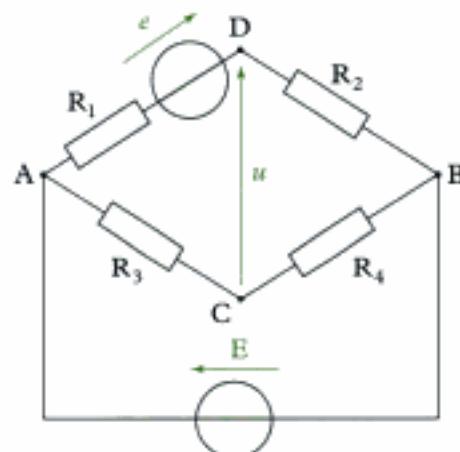
c) Le voltmètre indique la tension «  $u = 0$  » si, en réalité, on a :  $|u| < 1 \text{ mV}$ .

Dans le cadre de l'application numérique de la question précédente, donner la précision sur la mesure de  $R_1$ .

#### 2) Présence de fém parasite

Le pont précédent est supposé en équilibre, c'est-à-dire que l'on a rigoureusement  $u = 0$ .

Nous allons étudier l'influence d'une force électromotrice  $e$  sur l'équilibre du pont ( $e$  est placé en série avec la résistance ; cela peut modéliser une tension apparue lors du contact de deux matériaux de nature chimique différente).



a) Exprimer la tension  $u$  apparue à cause de la présence de  $e$ .

b) On veut que l'influence de  $e$  soit négligeable au cours de la mesure. On estime que cette influence est négligeable si  $|u| < 1 \text{ mV}$ . Quelle est alors la condition portant sur  $e$ ? On rappelle que l'on a :  $E = 6 \text{ V}$ ;  $R_2 = 1\,827 \Omega$ ;  $R_3 = 100 \Omega$ ;  $R_4 = 5 \text{ k}\Omega$ .

### Ex. 16 Sources liées

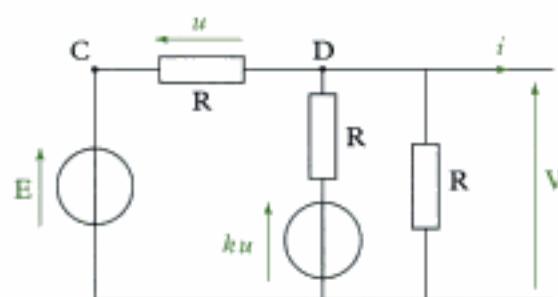
Le montage étudié débite un courant  $i$  vers l'extérieur. Il possède un générateur de tension  $E$  et une source liée dont la tension  $k u$  est proportionnelle à la tension  $u$  aux bornes de la résistance située entre C et D.

En utilisant la loi des nœuds, montrer que la tension  $V$  se met sous la forme :

$$V = E_{th} - R_{th} i,$$

où  $E_{th}$  et  $R_{th}$  s'expriment uniquement en fonction de  $R$ ,  $k$  et  $E$ .

(Le montage est alors équivalent à un générateur de Thévenin de fém  $E_{th}$  et de résistance interne  $R_{th}$ .)



## Indications

- Ex. 3** L'extremum d'une fonction correspond à une dérivée nulle.
- Ex. 4 a)** Exprimer les potentiels utiles en fonction des fém des générateurs.
- Ex. 5** Suivre logiquement l'énoncé pas à pas.
- Ex. 6** Limiter le nombre d'intensités inconnues dans le circuit avant d'écrire les lois de Kirchhoff.
- Ex. 7** Convertir les générateurs de Thévenin en leurs générateurs de Norton équivalents, et vice versa.
- Ex. 8** Utiliser la loi des nœuds exprimée en tension.
- Ex. 10** Limiter le nombre d'intensités inconnues dans le circuit avant d'écrire les lois de Kirchhoff.
- Ex. 11** Une parabole est « symétrique » par rapport à son extremum.
- Ex. 12 a)** Utiliser les équivalences entre les modèles de Thévenin et de Norton.
- Ex. 13** Exercice calculatoire. Exprimer la loi des mailles dans le montage « étoile » et la loi des nœuds dans le montage « triangle », puis combiner les résultats et identifier.
- Ex. 14** Exploiter les symétries des circuits et simplifier les montages en débranchant les résistances dans lesquelles ne circule aucun courant.
- Ex. 15 1) a)** Utiliser un diviseur de tension.  
2) a) Appliquer le « théorème de superposition » énoncé à l'exercice 5.
- Ex. 16** Utiliser la loi des nœuds exprimée en tension en D.

# Solutions des exercices

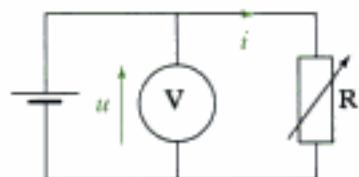
## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

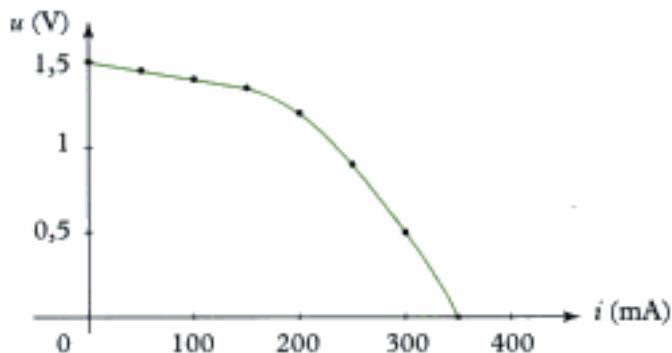
a) • Pour effectuer les mesures, on peut utiliser un voltmètre permettant de connaître la tension aux bornes de la pile et un ampèremètre permettant de déterminer le courant qu'elle débite.

• Une autre façon d'effectuer les mesures et de placer aux bornes de la pile une résistance variable étalonnée.

La mesure de la tension grâce au voltmètre donne alors la tension aux bornes de la pile. L'intensité débitée par la pile est :  $i = \frac{u}{R}$ .



b) On peut alors tracer la caractéristique tension-courant  $u = f(i)$ .



c) À faible intensité, la caractéristique est linéaire ; on peut donc écrire  $u = E - Ri$ .



On applique la méthode n° 4 à la pile étudiée en convention générateur.

• On mesure la pente  $\frac{\Delta u}{\Delta i}$  de la droite et on en déduit la résistance  $R$  :

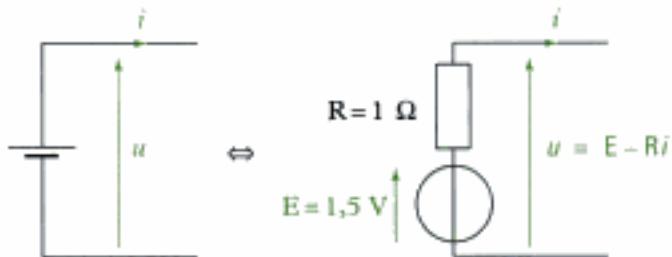
$$R = -\frac{\Delta u}{\Delta i}, \text{ soit } R = -\frac{1,5 - 1,4}{0 - 0,1} = 1 \Omega.$$

• On mesure la tension à vide  $E$  en faisant  $i = 0$ , d'où :  $E = 1,5 \text{ V}$ .



Comme la droite modèle est décroissante, sa pente vaut  $-R$ .

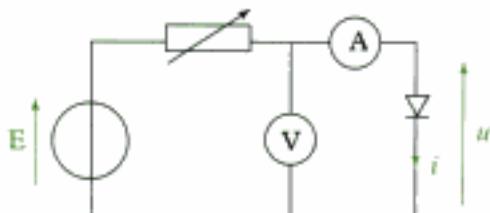
À faible intensité, la pile est donc équivalente au générateur de Thévenin de fém  $E = 1,5 \text{ V}$  et de résistance interne  $R = 1 \Omega$ .



d) À faible intensité, la caractéristique est linéaire jusqu'à un courant d'intensité 150 mA.

## Exercice 2

- a) Pour tracer la caractéristique de la diode, il faut placer en amont de celle-ci un générateur dont on peut faire varier la tension (alimentation stabilisée) ou utiliser un générateur en série avec un potentiomètre (résistance variable). Un voltmètre aux bornes de la diode permet de mesurer la tension  $u$ , un ampèremètre en série avec celle-ci donnera la mesure de l'intensité  $i$  du courant.



- b) Pour  $u > 0,7 \text{ V}$ , la caractéristique est linéaire ; on peut écrire  $u = E' + R'i$ , où  $E'$  est la tension du générateur de Thévenin et  $R'$  la résistance interne.

On applique la méthode n° 4 à la diode étudiée en convention récepteur.

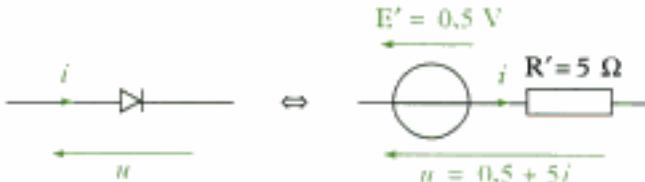
- On mesure la pente  $\frac{\Delta u}{\Delta i}$  de la droite et on en déduit la résistance  $R'$  :

$$R' = \frac{\Delta u}{\Delta i}, \text{ soit : } R' = \frac{2 - 1}{0,3 - 0,1} = 5 \Omega.$$

- On mesure la tension à vide  $E'$  en faisant  $i = 0$ , d'où :  $E' = 0,5 \text{ V}$ .

Pour déterminer  $E'$ , on prolonge la droite jusqu'à l'axe des ordonnées.

La diode est donc équivalente à la fcém  $E' = 0,5 \text{ V}$  en série avec la résistance  $R' = 5 \Omega$ .



- c) Le montage réalisé est schématisé ci-contre.

Comme  $I = 0,1 \text{ A}$ , on lit sur la caractéristique de la diode  $U = 1 \text{ V}$ .

- En convention générateur, la tension aux bornes du générateur est :

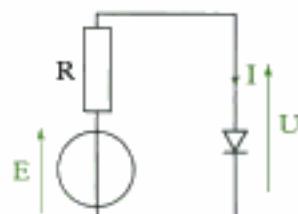
$$U = E - RI, \text{ d'où : } R = \frac{E - U}{I} = \frac{1,5 - 1}{0,1} = 5 \Omega.$$

- La puissance reçue par la diode est :

$$\mathcal{P}_{\text{diode}} = UI = 1 \times 0,1 = 0,1 \text{ W.}$$

- La puissance fournie par le générateur est :

$$\mathcal{P}_g = UI = 0,1 \text{ W.}$$



La puissance reçue par un dipôle se calcule en convention récepteur. La puissance fournie par un dipôle se calcule en convention générateur.

On constate que l'énergie se conserve dans le circuit : la puissance reçue par la diode est égale à la puissance fournie par le générateur.

- d) Les droites modélisant le mieux la diode sont (avec  $u$  en volt et  $i$  en ampère) :

- pour  $u < 0,5$ ,  $i = 0$ ;
- pour  $u > 0,5$ ,  $u = 5i + 0,5$ .

e)

On applique la méthode n° 5 au circuit constitué du générateur de tension, de la résistance variable et de la diode.

- On se propose de déterminer le point de fonctionnement du circuit quand un courant  $i$  circule.
- L'intensité  $i$  se déduit de la loi des mailles :

$$u = E' + R'i = E - Ri, \text{ d'où : } i = \frac{E - E'}{R + R'} > 0 \text{ (car } E > E').$$

Il faut toujours vérifier que le point de fonctionnement trouvé est valable. Comme ici  $E > E'$ , il circule bien un courant positif du générateur vers le récepteur, indépendamment de la valeur de  $R$ .

- La tension  $u$  aux bornes de la diode vaut alors :

$$u = E' + R'i = E' + R' \frac{E - E'}{R + R'} = \frac{R'E + RE'}{R + R'}.$$

- La puissance  $\mathcal{P}$  reçue par la diode est :

$$\mathcal{P} = ui = \frac{R'E + RE'}{R + R'} \times \frac{E - E'}{R + R'} = \frac{(E - E')(R'E + RE')}{(R + R')^2}.$$

Pour étudier les variations de la fonction  $\mathcal{P}(R)$ , on calcule sa dérivée :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = (E - E') \frac{E'(R + R')^2 - 2(R + R')(R'E + RE')}{(R + R')^4} = \frac{E - E'}{(R + R')^3} [E'(R' - R) - 2R'E].$$

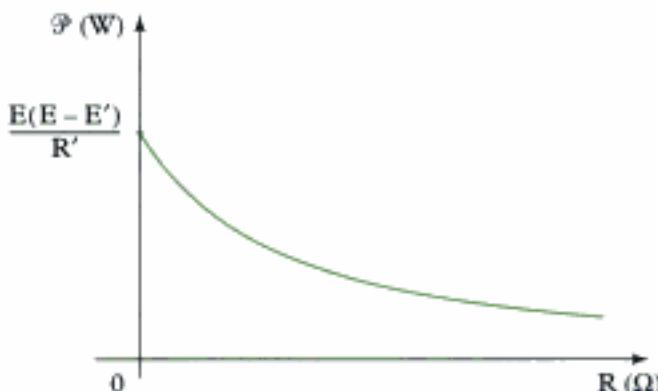
La dérivée s'annulerait pour :

$$E'(R' - R) - 2R'E = 0, \text{ soit : } R = \frac{R'(E' - 2E)}{E'} < 0.$$

Comme la résistance  $R$  est toujours positive ou nulle, la dérivée ne s'annule pas et la fonction  $\mathcal{P}(R)$  est décroissante avec :

$$\left( \mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_{\max} = \frac{E(E - E')}{R'} = 0,3 \text{ W} \right) \text{ et } (\mathcal{P}(R) \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow \infty).$$

Le signe de la dérivée est donné par :  $\frac{d\mathcal{P}}{dR}(R = 0) = \frac{E - E'}{R'^2}(E' - 2E) < 0$ .

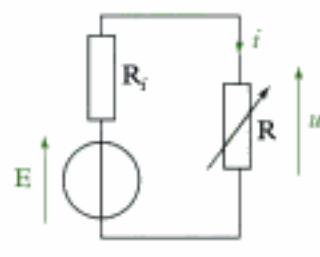


### Exercice 3

- a) La loi des mailles donne immédiatement :

$$E - (R_i + R)i = 0, \text{ soit : } i = \frac{E}{R + R_i}.$$

On étudie la résistance en convention récepteur.



b) La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance est :

$$\mathcal{P} = R i^2, \text{ soit } \mathcal{P} = \frac{R E^2}{(R + R_i)^2}.$$

- Quand  $R \rightarrow 0$ , on a :  $\mathcal{P} - \frac{R E^2}{R_i^2} \rightarrow 0$ .
- Quand  $R \rightarrow \infty$ , on a :  $\mathcal{P} - \frac{R E^2}{R^2} = \frac{E^2}{R} \rightarrow 0$ .

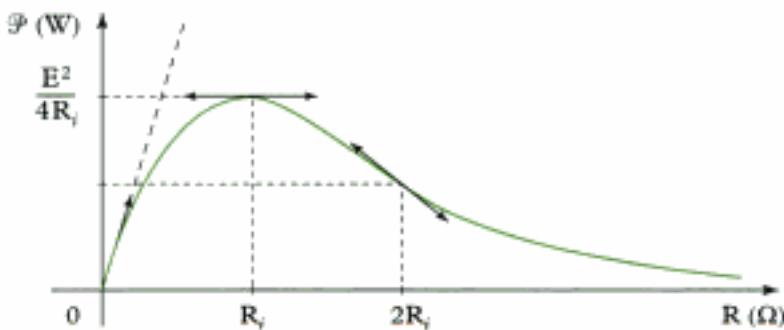
La puissance étant toujours positive, elle passe nécessairement par un maximum. Pour le déterminer, on peut écrire  $\mathcal{P}$  sous forme :

$$\mathcal{P} = \frac{\frac{E^2}{(R + R_i)^2}}{R} = \frac{E^2}{R + \frac{R_i^2}{R} + 2R_i} = \frac{E^2}{f(R)},$$

Le maximum de  $\mathcal{P}$  correspond au minimum de  $f$ , atteint pour :

$$f'(R) = 1 - \frac{R_i^2}{R^2} = 0, \text{ soit } R = R_i.$$

La puissance dissipée par effet Joule est donc maximum pour  $R = R_i$  et  $\mathcal{P}(R_i) = \mathcal{P}_{\max} = \frac{E^2}{4R_i}$ .



On peut remarquer que la courbe possède un point d'inflexion en  $R = 2R_i$ .

c) D'après la question précédente, l'adaptation d'impédance a lieu pour :

$$R_0 = R_i \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \frac{E^2}{4R_0}.$$

#### Exercice 4

a) La loi des nœuds exprimée en tension permet de déterminer le potentiel  $V_N$  du nœud N :

$$V_N \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R} \right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}.$$

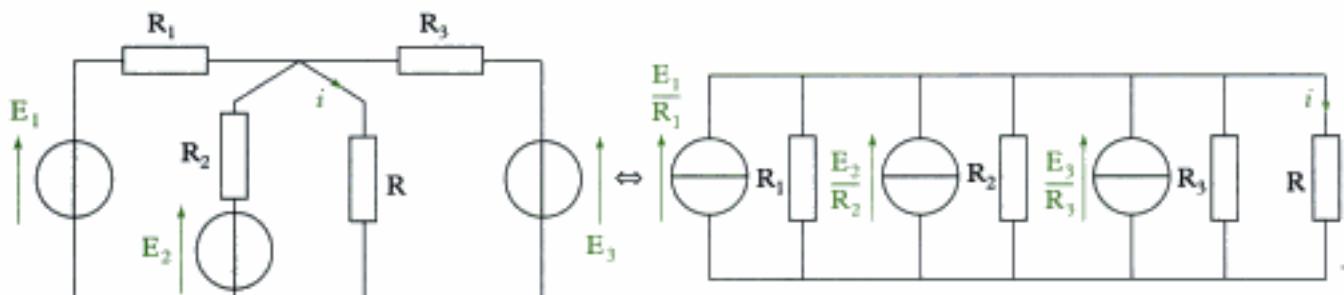


Les générateurs de tension  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  étant reliés à la masse, le potentiel de la borne reliée à la résistance est égal à la fém.

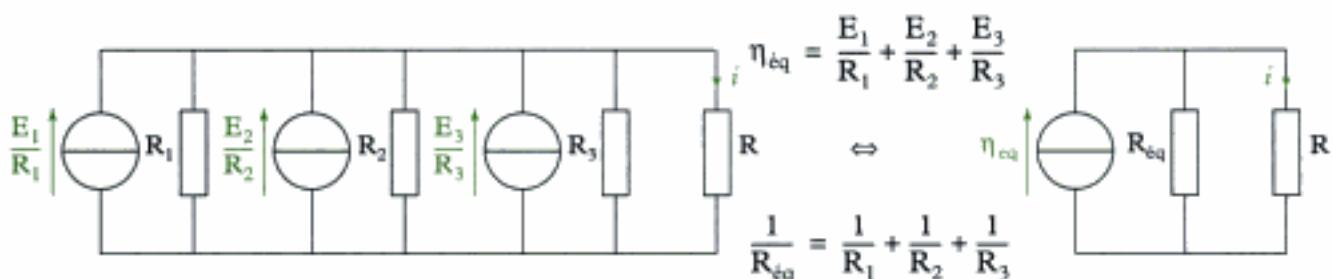
La loi d'Ohm aux bornes de la résistance R s'écrit :

$$V_N - 0 = R i, \text{ d'où } i = \frac{V_N}{R} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{1 + R \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}.$$

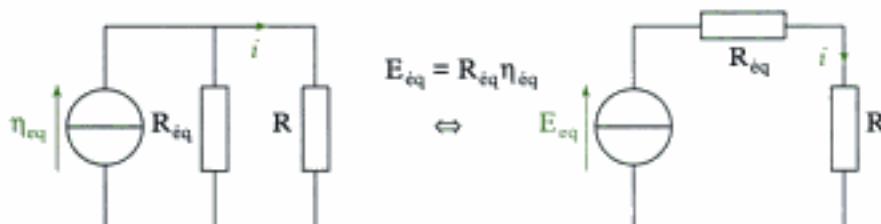
- b) Chaque branche entre la masse et le point N contient un générateur de Thévenin ( $E_k, R_k$ ) que l'on peut convertir en un générateur de Norton ( $\eta_k = \frac{E_k}{R_k}, R_k$ ). On a donc :



- Les trois générateurs de courant idéaux et les trois résistances sont associés en parallèle. On peut donc les remplacer par un générateur et une résistance équivalentes.



- On convertit le générateur de Norton en générateur de Thévenin :



La loi des mailles donne l'intensité  $i$  du courant dans le circuit :

$$i = \frac{E_{eq}}{R + R_{eq}} = \frac{R_{eq} \eta_{eq}}{R + R_{eq}} = \frac{\eta_{eq}}{1 + \frac{R}{R_{eq}}} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{1 + R \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}$$

Cet exemple montre bien l'intérêt d'utiliser le théorème de Millman quand la configuration du circuit s'y prête.

En appliquant le théorème de division de courant au circuit comprenant le générateur de Norton ( $\eta_{eq}, R_{eq}$ ) en parallèle avec la résistance  $R$ , on pouvait alors écrire :

$$i = \frac{\eta_{eq} R_{eq}}{R + R_{eq}}$$

## Exercice 5

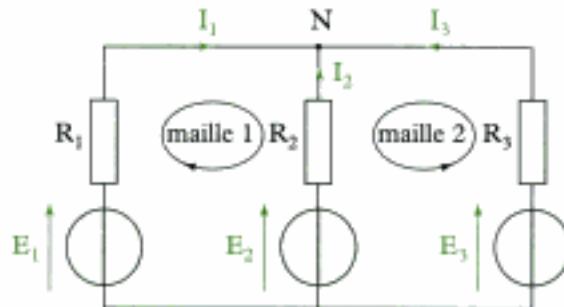
a)



On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

Le montage étudié comporte deux nœuds et deux mailles indépendantes.

On applique donc une fois la loi des nœuds et deux fois la loi des mailles. Les paramètres inconnus sont les courants dans les résistances, notés  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .



L'orientation des courants  $I_1$  et  $I_3$  est arbitraire.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nœud N : } I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ \text{maille 1 : } E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 = 0 \\ \text{maille 2 : } E_3 - R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_2 = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

On reporte  $I_2 = -I_1 - I_3$  dans (2) et (3) :

$$(R_1 + R_2)I_1 + R_2 I_3 = E_1 - E_2 \quad (2)$$

$$R_2 I_1 + (R_2 + R_3)I_3 = E_3 - E_2. \quad (3)$$

On élimine  $I_3$  par la combinaison  $(R_2 + R_3)(2) - R_2(3)$  et on en déduit :

$$I_1 = \frac{(E_1 - E_2)(R_2 + R_3) - R_2(E_3 - E_2)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - R_2^2} = \frac{(R_2 + R_3)E_1 - R_3E_2 - R_2E_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

b) • Si  $E_2 = E_3 = 0$ , on a :  $I_{11} = \frac{(R_2 + R_3)E_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$ .

• Si  $E_1 = E_3 = 0$ , on a :  $I_{12} = -\frac{R_3E_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$ .

• Si  $E_1 = E_2 = 0$ , on a :  $I_{13} = -\frac{R_2E_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$ .

On a bien :  $I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13}$ . Les dipôles utilisés sont tous linéaires. Une conséquence de cette linéarité est le théorème de superposition.

Le courant dans un dipôle, créé par un ensemble de générateurs, est la somme des courants obtenus en prenant chaque source individuellement (en annulant toutes les autres).

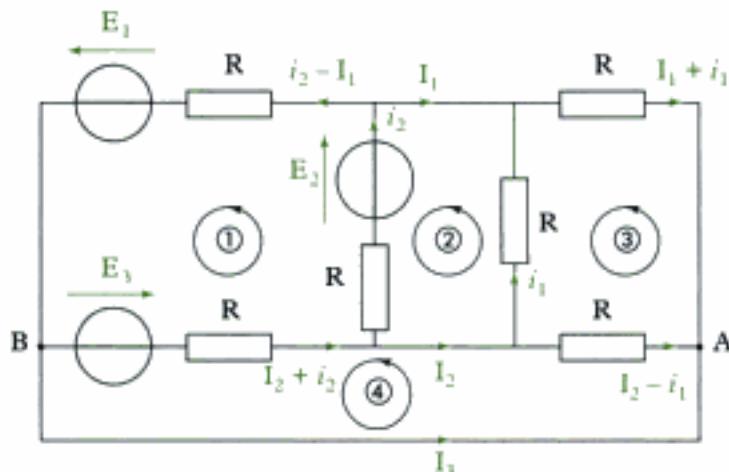


On peut généraliser cette propriété à la tension aux bornes d'un dipôle, comme à la présence de générateurs de courant.

## Exercice 6

 On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

Le montage étudié comporte 6 nœuds et 4 mailles indépendantes. Pour simplifier l'étude, nous allons paramétriser les courants comme l'indique le schéma ci-dessous :



 Initialement, on comptait 9 branches, c'est-à-dire 9 intensités à calculer. En utilisant judicieusement la loi des nœuds, on introduit seulement les deux inconnues supplémentaires  $i_1$  et  $i_2$ .

Le montage se réduit alors à 2 nœuds (A et B) et 4 mailles indépendantes. On applique donc une fois la loi des nœuds et quatre fois la loi des mailles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nœud A : } I_3 + I_1 + i_1 + I_2 - i_1 = 0 \\ \text{maille 1 : } E_1 - R(i_2 - I_1) + E_3 - R(I_2 + i_2) + E_2 - Ri_2 = 0 \\ \text{maille 2 : } -E_2 + Ri_2 - Ri_1 = 0 \\ \text{maille 3 : } R(I_1 + i_1) + Ri_1 - R(I_2 - i_1) = 0 \\ \text{maille 4 : } -E_3 + R(I_2 + i_2) + R(I_2 - i_1) = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array}$$

Le système peut aussi s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_3 = -I_1 - I_2 \\ -RI_1 + RI_2 + 3Ri_2 = E_1 + E_2 + E_3 \\ -Ri_1 + Ri_2 = E_2 \\ RI_1 - RI_2 + 3Ri_1 = 0 \\ 2RI_2 - Ri_1 + Ri_2 = E_3. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array}$$

En soustrayant (3) à (5), on obtient :

$$2RI_2 = E_3 - E_2, \text{ soit : } I_2 = \frac{E_3 - E_2}{2R}.$$

En soustrayant (4) à (2), on obtient :

$$\begin{aligned} -2RI_1 + 2RI_2 - 3R(i_1 - i_2) &= E_1 + E_2 + E_3, \\ -2RI_1 + E_3 - E_2 + 3E_2 &= E_1 + E_2 + E_3, \\ I_1 &= \frac{E_2 - E_1}{2R}. \end{aligned}$$

En reportant  $I_1$  et  $I_2$  dans (1), on obtient enfin :

$$I_3 = -\frac{E_2 - E_1}{2R} - \frac{E_3 - E_2}{2R} = \frac{E_1 - E_3}{2R}.$$

 Les équations (2) et (4) permettraient de calculer  $i_1$  et  $i_2$ .

## Exercice 7

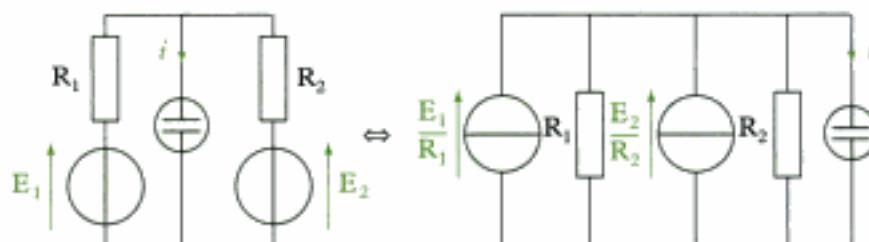
a)



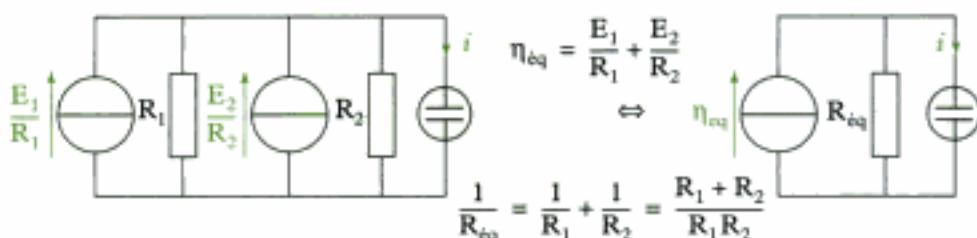
On applique la méthode (2) au circuit étudié.

- On convertit chaque générateur de Thévenin ( $E_k, R_k$ ) en un générateur de Norton ( $\eta_k = \frac{E_k}{R_k}, R_k$ ).

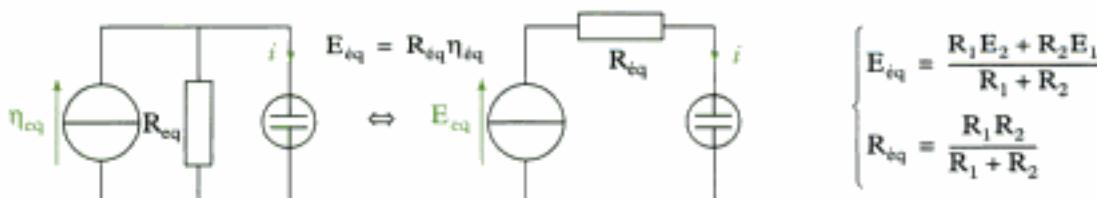
On a donc :



- Les deux générateurs de courant idéaux et les deux résistances sont associés en parallèle. On peut donc les remplacer par un générateur et une résistance équivalents.



- On convertit le générateur de Norton en générateur de Thévenin :



$$A.N. \quad E_{eq} = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 6 + 6 \times 1,5}{6 + 6} = 3,75 \text{ V.}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 6}{6 + 6} = 3 \Omega.$$

La fém du générateur équivalent est supérieure à la fcém  $E'$  de l'électrolyseur. Un courant  $i$  positif circule donc dans l'électrolyseur, et la loi des mailles donne :

$$i = \frac{E_{eq} - E'}{R_{eq} + R'} = \frac{3,75 - 1,5}{3 + 3} = 0,375 \text{ A.}$$



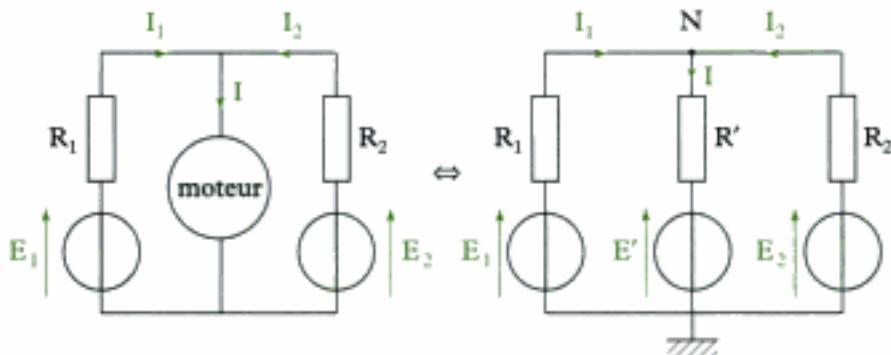
b) Pour  $E_2 = 1 \text{ V}$ , on a :

$$E_{eq} = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 1 + 6 \times 1,5}{6 + 6} = 1,25 \text{ V.}$$

La fém du générateur équivalent est inférieure à la fcém  $E'$  de l'électrolyseur. Le courant ne peut donc pas circuler dans l'électrolyseur :  $i = 0$ .

## Exercice 8

On remplace le moteur par son modèle de Thévenin :



La loi des nœuds exprimée en tension permet de déterminer le potentiel  $V_N$  du nœud N :

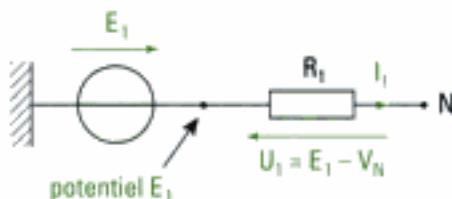
$$V_N = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E'}{R'}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'}}.$$

Pour des explications supplémentaires, voir l'exercice 4.

La loi d'Ohm aux bornes de la résistance  $R_1$  s'écrit :

$$R_1 I_1 = E_1 - V_N = \frac{\frac{E_1 - E_2}{R_2} + \frac{E_1 - E'}{R'}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'}}, \text{ soit : } I_1 = \frac{\frac{E_1 - E_2}{R_2} + \frac{E_1 - E'}{R'}}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R'}}.$$

En convention récepteur, on a :



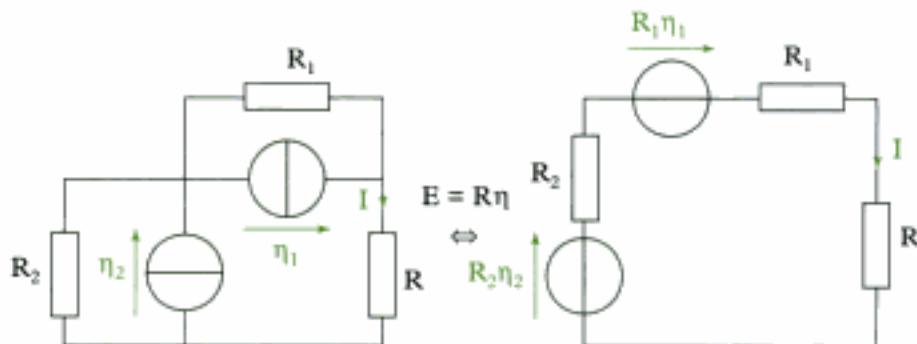
Des calculs identiques donnent :

$$I_2 = \frac{\frac{E_2 - E_1}{R_1} + \frac{E_2 - E'}{R'}}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R'}} \quad \text{et} \quad I = I_1 + I_2 = \frac{\frac{E_1 - E'}{R_1} + \frac{E_2 - E'}{R_2}}{1 + \frac{R'}{R_1} + \frac{R'}{R_2}}.$$

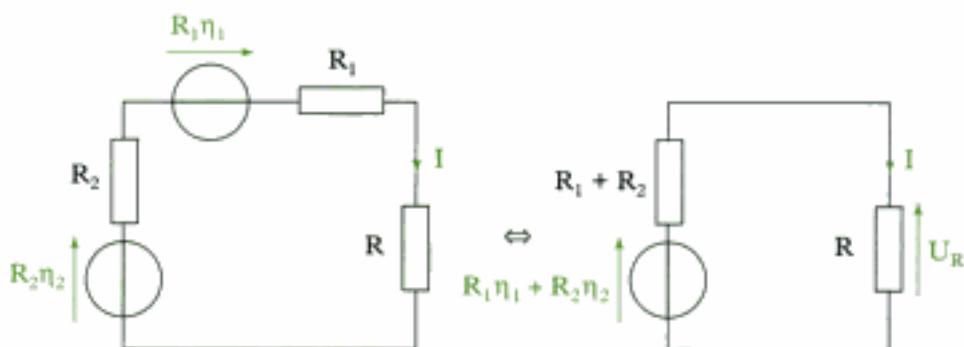
Les calculs n'ont pas été développés, mais ils ne présentent aucune difficulté technique.

## Exercice 9

a) Comme l'indique l'énoncé, on convertit les générateurs de Norton en générateurs de Thévenin :



Deux générateurs de tension et deux résistances sont associés en série :



b) La loi des mailles donne le courant I dans le circuit :

$$I = \frac{R_1\eta_1 + R_2\eta_2}{R_1 + R_2 + R}, \text{ d'où : } U_R = RI = R \frac{R_1\eta_1 + R_2\eta_2}{R_1 + R_2 + R}.$$

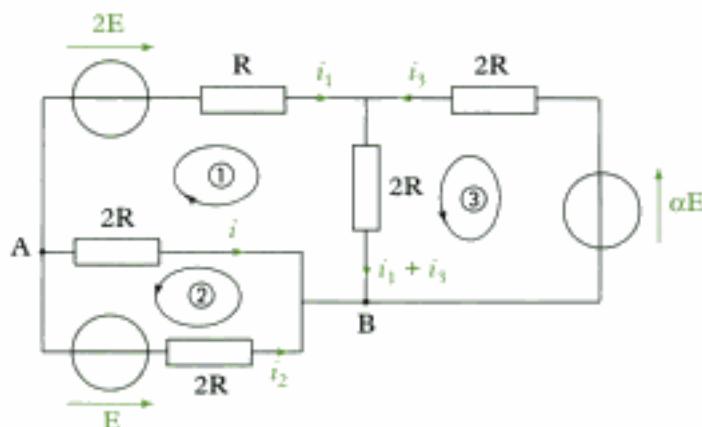
La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R vaut :

$$\mathcal{P}_J = RI^2 = R \left( \frac{R_1\eta_1 + R_2\eta_2}{R_1 + R_2 + R} \right)^2.$$

## Exercice 10

On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

Le montage étudié comporte 3 nœuds et 3 mailles indépendantes. On le paramètre simplement en introduisant les deux inconnues supplémentaires  $i_2$  et  $i_3$ .



 Le montage se réduit alors à 2 noeuds (A et B) et 3 mailles indépendantes. On applique donc une fois la loi des noeuds et trois fois la loi des mailles.

On obtient donc le système d'équations ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nœud A : } i_1 + i + i_2 = 0 \\ \text{maille 1 : } 2E - Ri_1 - 2R(i_1 + i_3) + 2Ri = 0 \\ \text{maille 2 : } E - 2Ri_2 + 2Ri = 0 \\ \text{maille 3 : } \alpha E - 2Ri_3 - 2R(i_1 + i_3) = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} i_2 = -i_1 - i \\ 3Ri_1 + 2Ri_3 - 2Ri = 2E \\ 2Ri_1 + 4Ri = -E \\ 2Ri_1 + 4Ri_3 = \alpha E \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

 On a injecté (1) dans l'équation (3). L'objectif est maintenant d'exprimer  $i_1$  et  $i_2$  en fonction de  $i$ .

On déduit de l'équation (3) :

$$2Ri_1 = -E - 4Ri, \text{ soit : } Ri_1 = -\frac{1}{2}(E + 4Ri).$$

On déduit de l'équation (4) :

$$4Ri_3 = \alpha E - 2Ri_1 = (\alpha + 1)E + 4Ri, \text{ soit : } Ri_3 = \frac{1}{4}[(\alpha + 1)E + 4Ri].$$

On reporte ces deux résultats dans l'équation (2) :

$$-\frac{3}{2}(E + 4Ri) + \frac{1}{2}[(\alpha + 1)E + 4Ri] - 2Ri = 2E.$$

$$-6Ri + \frac{1}{2}\alpha E - E = 2E.$$

$$i = -\frac{E}{6R} \left( 3 - \frac{\alpha}{2} \right).$$

 Le système d'équations permettrait de calculer aussi  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$ .

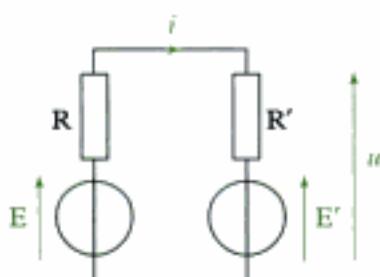
## Exercices de niveau 2

### Exercice 11

a) D'après le schéma du montage, la loi des mailles donne immédiatement :

$$i = \frac{E - E'}{R + R'} = \frac{E - kN}{R + R'}.$$

 Le moteur est un récepteur. Sur le schéma du montage, la fém  $E$  et la fcém  $E'$  doivent donc avoir des sens opposés par rapport au courant.



b) La puissance motrice du moteur a pour expression :

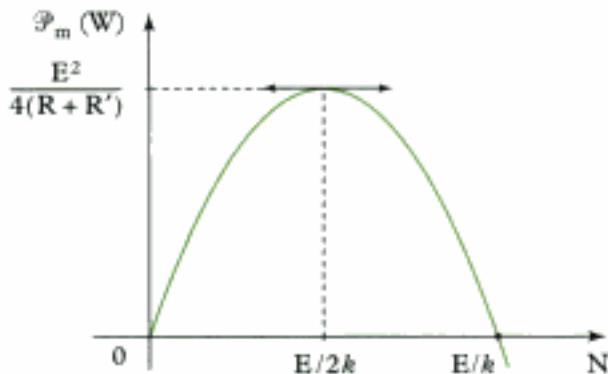
$$\mathcal{P}_m = E'i = k \frac{N(E - kN)}{R + R'}.$$

c) D'après son équation, la courbe donnant  $\mathcal{P}_m$  en fonction de  $N$  est une parabole à concavité vers le bas. Elle s'annule pour :

$$N(E - kN) = 0, \text{ soit : } N = 0 \text{ ou } N = \frac{E}{k}.$$

La puissance motrice  $\mathcal{P}_m$  est donc maximale pour  $N_0 = \frac{E}{2k}$ . Elle vaut alors :

$$\mathcal{P}_m(N_0) = \mathcal{P}_{\max} = \frac{E^2}{4(R + R')}$$



La concavité d'une parabole d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  est donnée par le signe de  $a$  (si  $a > 0$ , la concavité est vers le haut ; si  $a < 0$ , la concavité est vers le bas).

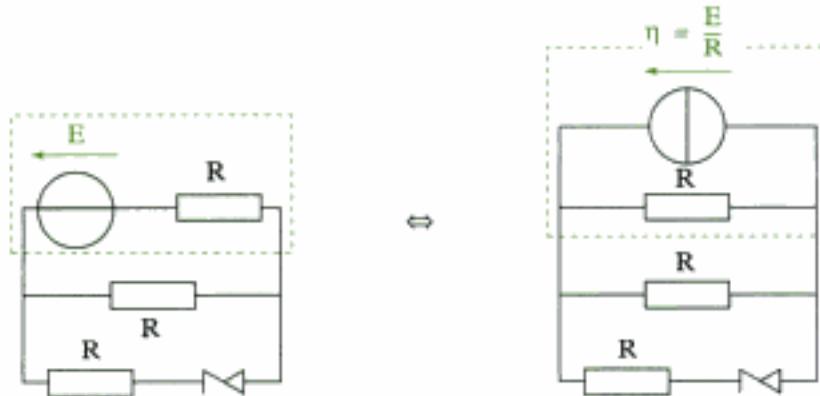
Une parabole est toujours « symétrique » par rapport à l'axe vertical passant par son extrémum.

## Exercice 12

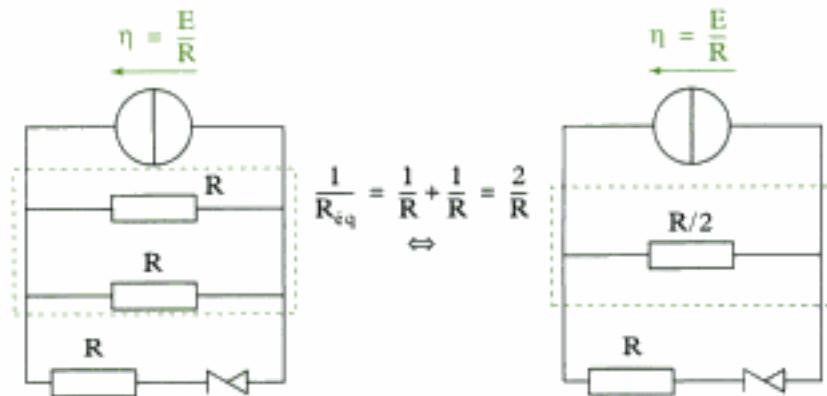
a)

On applique la méthode n° 2 à la partie linéaire du circuit. Le fait que  $E$  soit une grandeur algébrique ( $E > 0$  ou  $E < 0$ ) ne change rien au raisonnement.

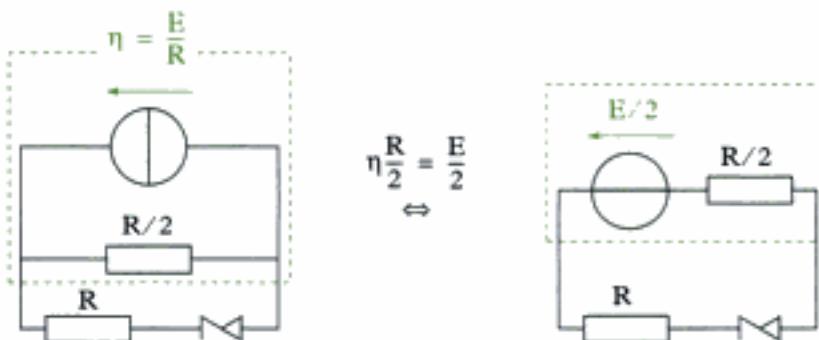
- On convertit le générateur de Thévenin ( $E$ ,  $R$ ) en générateur de Norton :



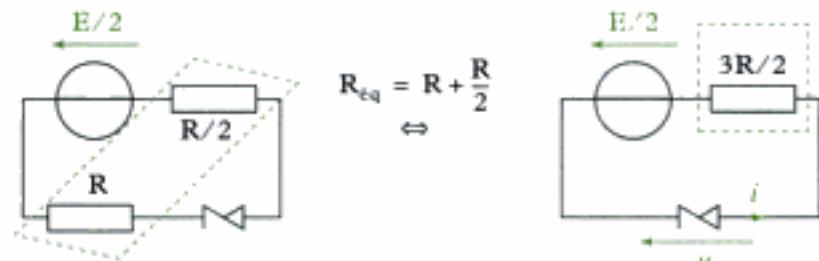
- Les deux résistances  $R$  en parallèle peuvent être combinées :



- On convertit le générateur de Norton  $\left(\frac{E}{R}, \frac{R}{2}\right)$  en générateur de Thévenin :



- Les deux résistances en série peuvent être associées :



- Si  $i = 0$ , alors :  $u = \frac{E}{2}$ . D'après la caractéristique de la diode Zener, on a donc :

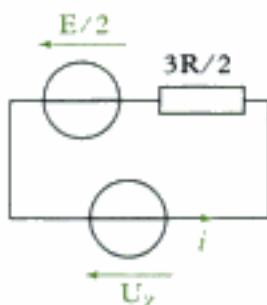
$$u \in [0 ; U_Z], \text{ d'où : } E \in [0 ; 2U_Z].$$

- Si  $i > 0$ , la diode Zener peut être modélisée par une fcém  $E' = U_Z$ . La loi des mailles dans le circuit s'écrit alors :

$$\frac{E}{2} - \frac{3R}{2}i = U_Z, \text{ soit : } i = \frac{E - 2U_Z}{3R}.$$

La condition sur E est donc :

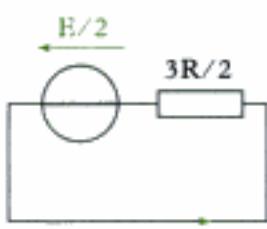
$$\frac{E - 2U_Z}{3R} > 0, \text{ soit : } E > 2U_Z.$$



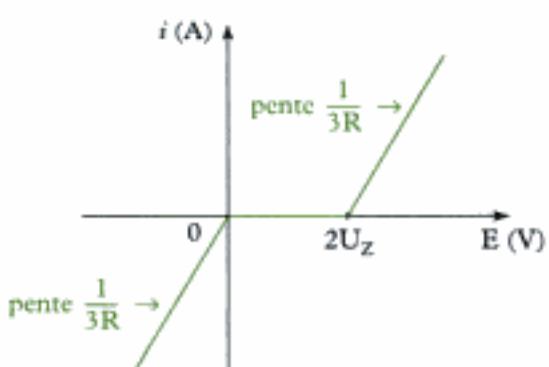
Cette condition traduit simplement le fait que le courant circule dans le circuit si la fém du générateur est supérieure à la fcém du récepteur.

- Si  $i < 0$ , la diode Zener peut être modélisée par un fil ( $u = 0$ ). La loi des mailles s'écrit alors :

$$\frac{E}{2} - \frac{3R}{2}i = 0, \text{ soit : } i = \frac{E}{3R}.$$



La condition sur E est donc :  $E < 0$ .





Les conditions sur  $E$  sont bien complémentaires, ce qui est logique, car la caractéristique de la diode Zener est continue.

### Exercice 13

Dans les montages T et V, on a :

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 0 & \text{(loi des mailles)} \\ i_1 + i_2 + i_3 = 0 & \text{(loi des nœuds).} \end{cases}$$

Seules les tensions  $u_1$  et  $u_2$  d'une part, les courants  $i_1$  et  $i_2$  d'autre part sont indépendants.



D'après les équations, deux tensions et deux courants sont indépendants, mais leur choix est libre.

• Exprimons  $u_1$  et  $u_2$  en fonction de  $i_1$  et  $i_2$  dans le montage T :

$$\begin{cases} u_1 = R_3 i_3 - R_2 i_2 = -R_3 i_1 - (R_2 + R_3) i_2 & \text{(a)} \\ u_2 = R_1 i_1 - R_3 i_3 = (R_1 + R_3) i_1 + R_3 i_2. & \text{(b)} \end{cases}$$

• Exprimons  $i_1$  et  $i_2$  en fonction de  $u_1$  et  $u_2$  dans le montage V :

$$\begin{cases} i_1 = \frac{u_2}{r_2} - \frac{u_3}{r_3} = \frac{u_1}{r_3} + u_2 \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) & \text{(a')} \\ i_2 = \frac{u_3}{r_3} - \frac{u_1}{r_1} = -u_1 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - \frac{u_2}{r_3}. & \text{(b')} \end{cases}$$

Reportons les expressions de  $i_1$  et  $i_2$  obtenues en (a') et (b') dans les expressions de  $u_1$  et  $u_2$  de (a) et (b) :

$$\begin{aligned} u_1 &= -R_3 \left[ \frac{u_1}{r_3} + u_2 \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \right] + (R_2 + R_3) \left[ u_1 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{u_2}{r_3} \right] \\ &= u_1 \left[ R_2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_1} \right] + u_2 \left[ \frac{R_2}{r_3} - \frac{R_3}{r_2} \right] \\ u_2 &= (R_1 + R_3) \left[ \frac{u_1}{r_3} + u_2 \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \right] - R_3 \left[ u_1 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{u_2}{r_3} \right] \\ &= u_1 \left[ \frac{R_1}{r_3} - \frac{R_3}{r_1} \right] + u_2 \left[ R_1 \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_2} \right]. \end{aligned}$$

De ces égalités, nous déduisons :

$$R_2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_1} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{R_2}{r_3} - \frac{R_3}{r_2} = 0 \quad (2)$$

$$R_1 \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_2} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{R_1}{r_3} - \frac{R_3}{r_1} = 0. \quad (4)$$



Les deux égalités auxquelles on aboutit peuvent s'écrire :  $u_1 = Au_1 + Bu_2$  et  $u_2 = Cu_1 + Du_2$ , où A, B, C et D sont des constantes. Pour que ces égalités soient vérifiées quelles que soient les valeurs de  $u_1$  et  $u_2$ , on doit nécessairement avoir :

$$(A = 1 \text{ et } B = 0) \quad \text{et} \quad (C = 0 \text{ et } D = 1).$$

On tire de (2) :  $R_3 = \frac{r_2}{r_3} R_2$ , que l'on reporte dans (1) :

$$R_2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{r_2}{r_1 r_3} \right) = 1, \text{ soit : } R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

De même, on tire de (4) :  $R_3 = \frac{r_1}{r_3} R_1$ , que l'on reporte dans (3) :

$$R_1 \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{r_1}{r_2 r_3} \right) = 1, \text{ soit : } R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

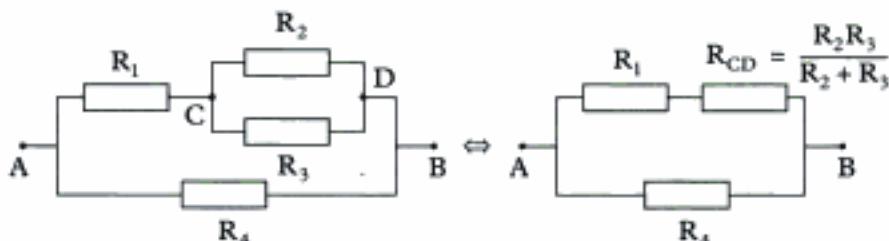
Enfin, grâce à (2) ou (4), on trouve :

$$R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

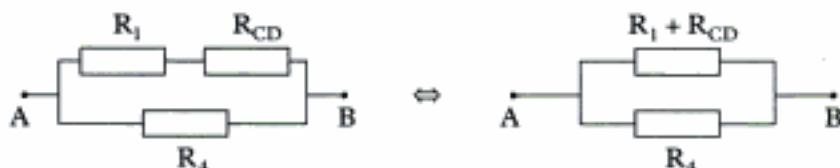
 Cette condition d'équivalence entre les deux montages permet de remplacer, selon les cas, un montage triangle par un montage étoile (et vice versa).

## Exercice 14

a) Les résistances  $R_2$  et  $R_3$  sont associées en parallèle entre C et D :



Les résistances  $R_1$  et  $R_{CD}$  sont associées en série :



Les résistances  $(R_1 + R_{CD})$  et  $R_4$  sont associées en parallèle :



La résistance équivalente  $R_{AB}$  vaut donc :

$$R_{AB} = \frac{R_4 \left( R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right)}{R_1 + R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3}.$$

 Sur cet exemple simple, on a utilisé les lois d'association en série et en parallèle des résistances sans autre considération.

b)

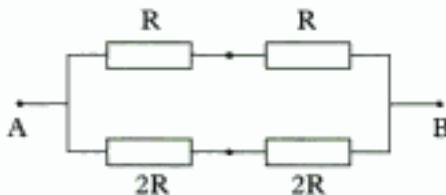


Dans ce circuit, la résistance  $R'$  n'est ni en série, ni en parallèle avec les autres résistances. Il faut donc d'abord simplifier le circuit en introduisant des considérations de symétrie.



On applique la méthode n° 3 au circuit étudié.

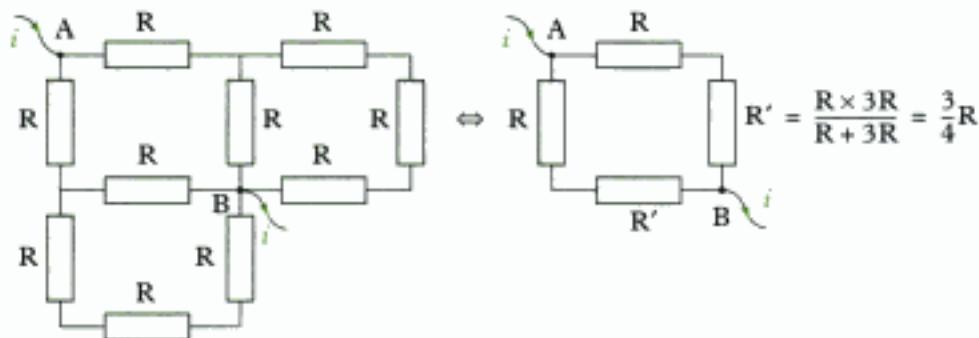
Le montage est antisymétrique par rapport à (CD). Les points C et D sont donc au même potentiel, aucun courant ne circulant dans la résistance  $R'$ . On peut alors simplifier le montage en « supprimant » celle-ci.



La résistance équivalente  $R_{AB}$  vaut donc :

$$R_{AB} = \frac{(R+R)(2R+2R)}{(R+R)+(2R+2R)} = \frac{4}{3}R.$$

c) • Le montage est symétrique par rapport à (AB). Comme le courant sort du circuit en B, il ne circule aucun courant dans la branche contenant C : on peut donc l'éliminer.



La résistance équivalente  $R_{AB}$  vaut donc :

$$R_{AB} = \frac{R+R'}{2} = \frac{R+\frac{3}{4}R}{2} = \frac{7}{8}R.$$

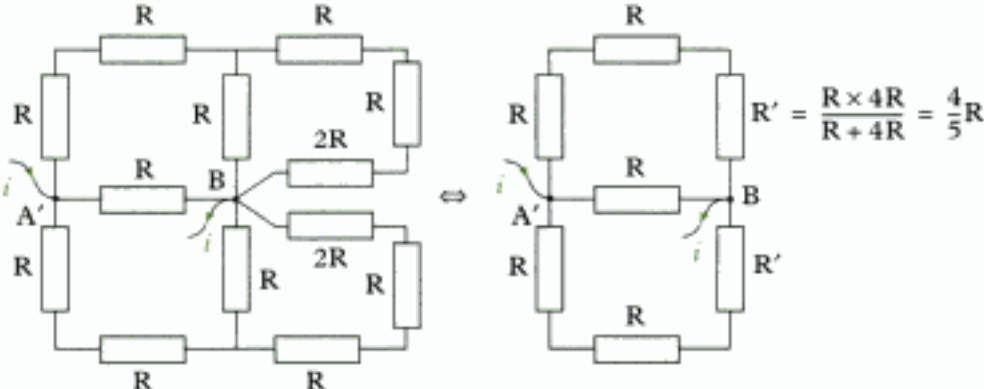


Les symétries du réseau sont aussi des symétries pour les répartitions de courant. En effet, en un nœud, le courant se partage également entre deux résistances égales.



Un courant non nul dans la branche contenant C ne respecterait pas la symétrie de cette répartition.

• Le montage est symétrique par rapport à (A'B). On peut alors modifier le schéma sans modifier la résistance du montage en remplaçant la résistance R entre B et C' par deux résistances en parallèle de valeur 2R.



La résistance équivalente  $R_{A'B}$  vaut donc (3 résistances en parallèle) :

$$\frac{1}{R_{A'B}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R+R'} + \frac{1}{2R+R'} = \frac{1}{R} + \frac{2}{2R+\frac{4}{5}R} = \frac{1}{R} + \frac{5}{7R} = \frac{12}{7R},$$

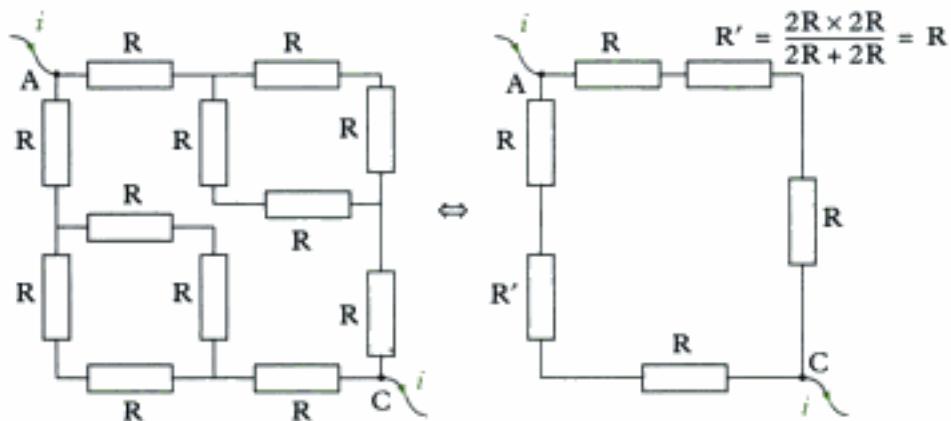
soit :  $R_{A'B} = \frac{7}{12}R$ .

 On vérifie qu'il y a bien équivalence entre :



Le courant se répartit équitablement entre les deux branches et les points  $C'_1$  et  $C'_2$  sont au même potentiel que le point  $C'$ .

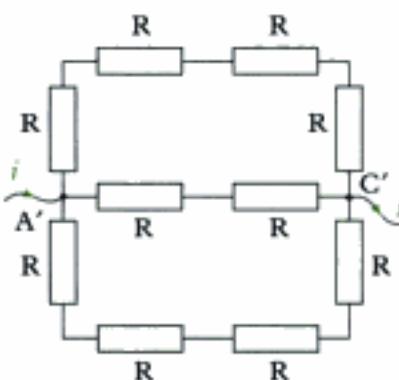
- Le montage est symétrique par rapport à (AC). On peut alors séparer les résistances en B sans modifier la résistance du montage et les répartitions de courant.



La résistance équivalente  $R_{AC}$  vaut donc (2 résistances en parallèle) :

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{2R+R'} + \frac{1}{2R+R'} = \frac{2}{3R}, \text{ soit : } R_{AC} = \frac{3}{2}R.$$

- Le montage est antisymétrique par rapport à la droite passant par B et perpendiculaire à (A'C'). Tous les nœuds appartenant à cette droite sont au même potentiel, donc aucun courant ne circule dans les branches correspondantes : on élimine ces résistances.



La résistance équivalente  $R_{A'C'}$  vaut donc (3 résistances en parallèle) :

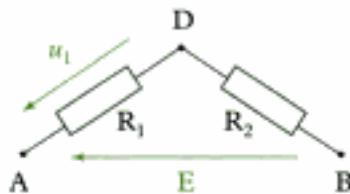
$$\frac{1}{R_{A'C'}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} + \frac{1}{4R} = \frac{1}{R}, \text{ soit : } R_{A'C'} = R.$$

 Le montage est aussi symétrique par rapport à (A'C'), mais cette symétrie ne permet aucune simplification intéressante.

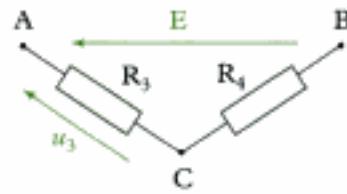
## Exercices de niveau 3

### Exercice 15

1) a) On applique le théorème de division de tension pour les branches ADB, puis ACB.



$$\text{On a : } u_1 = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$



$$\text{On a : } u_3 = E \frac{R_3}{R_3 + R_4}.$$

Les théorèmes de division de tension et de division de courant sont des outils très puissants.

La tension  $u$  demandée vaut donc :

$$u = -u_1 + u_3, \text{ soit : } u = E \left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = \frac{E(R_2R_3 - R_1R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

b) Le pont est équilibré si  $u = 0$ , d'où :

$$R_2R_3 - R_1R_4 = 0, \text{ soit : } R_1 = \frac{R_2R_3}{R_4} = \frac{1827 \times 100}{5 \cdot 10^3} = 36,5 \Omega.$$

c) Dans l'expression trouvée à la question a), le dénominateur croît avec  $R_1$  et le numérateur décroît avec  $R_1$ . La plus petite valeur de  $u$  admise ( $u_m = -10^{-3}$  V) est associée à la plus grande valeur de  $R_1$  (notée  $R_{1M}$ ) et la plus grande valeur de  $u$  admise ( $u_M = +10^{-3}$  V) est associée à la plus petite valeur de  $R_1$  (notée  $R_{1m}$ ).

On a donc :

$$U_m = E \frac{R_2R_3 - R_{1M}R_4}{(R_{1M} + R_2)(R_3 + R_4)}, \text{ soit : } R_{1M} = \frac{E \frac{R_2R_3}{R_3 + R_4} - u_m R_2}{E \frac{R_4}{R_3 + R_4} + u_m}.$$

De même, on obtient :

$$R_{1m} = \frac{E \frac{R_2R_3}{R_3 + R_4} - u_M R_2}{E \frac{R_4}{R_3 + R_4} + u_M}.$$

Dans le calcul,  $u_m$  et  $u_M$  jouent le même rôle. On passe donc de l'expression de  $R_{1M}$  à celle de  $R_{1m}$  en remplaçant  $u_m$  par  $u_M$ .

A.N.  $R_{1M} = 36,8 \Omega$  et  $R_{1m} = 36,2 \Omega$ .

Grâce à la mesure effectuée, la résistance  $R_1$  est connue à 0,3 Ω près :

$$R_1 = 36,5 \pm 0,3 \Omega.$$

2) a)

On applique le théorème de superposition énoncé dans l'exercice 5.

La tension  $u$  est la somme des tensions  $u_E$  due à la présence de la fém  $E$  seule et  $u_e$  due à la présence de la fém  $e$  seule.

- Le pont étant équilibré, on a :  $u_E = 0$ .
- Pour déterminer  $u_e$ , on « annule »  $E$ , c'est-à-dire qu'on relie les points A et B par un fil. Aucun courant ne passe donc dans la branche ADB et on a  $u_e = u_2$ .

Le fil court-circuite la branche ADB.

Dans la branche ACB, le théorème de division de tension donne alors :

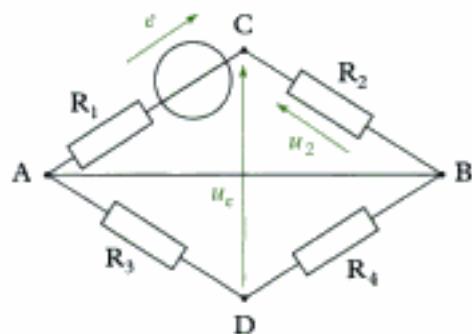
$$u_e = u_2 = \frac{eR_2}{R_1 + R_2}.$$

Finalement :

$$u = u_E + u_e = \frac{eR_2}{R_1 + R_2}.$$

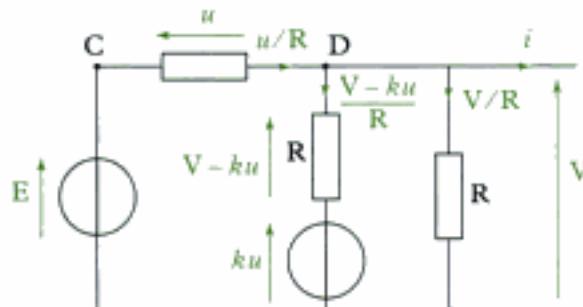
b) On veut  $|u| < 1 \text{ mV} = u_M$  (cf. question 1. c), d'où :

$$|e| \frac{R_2}{R_1 + R_2} < u_M, \text{ soit : } |e| < \frac{R_1 + R_2}{R_2} u_M = 1,02 \text{ mV}.$$



## Exercice 16

D'après la loi des mailles, on a :  $E = u + V$ . Précisons sur le schéma les intensités dans chaque branche et les tensions aux bornes des résistances.



D'après la loi des nœuds en D, on a :

$$\frac{u}{R} = \frac{V - ku}{R} + \frac{V}{R} + i.$$

Comme  $u = E - V$ , on en déduit :

$$\frac{E - V}{R} = \frac{V - k(E - V)}{R} + \frac{V}{R} + i.$$

$$(k + 1)E = V(k + 3) + Ri.$$

$$V = \frac{k + 1}{k + 3} E - \frac{R}{k + 3} i.$$

Le générateur de Thévenin équivalent au montage a pour caractéristiques :

$$E_{th} = \frac{k + 1}{k + 3} E \quad \text{et} \quad R_{th} = \frac{R}{k + 3}.$$



## CHAPITRE

# 3

# *Condensateurs et bobines – Dipôles linéaires*

### Introduction

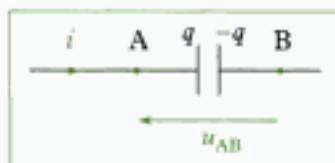
Jusqu'à présent, nous avons étudié uniquement des dipôles en régime permanent. De nombreux dipôles, néanmoins, fonctionnent en régime variable. Par exemple, la réponse d'un condensateur ou d'une bobine à un échelon de tension n'est pas instantanée et passe par une phase transitoire. Dans les deux cas, les grandeurs électriques  $u$  et  $i$  vérifient une équation différentielle linéaire : on dit alors que le condensateur et la bobine sont des dipôles linéaires.

### Plan du chapitre 3

A. Étude des condensateurs .....	80
1. Description d'un condensateur parfait .....	80
2. Énergie d'un condensateur parfait .....	81
3. Association de condensateurs parfaits .....	82
4. Modélisation d'un condensateur réel .....	83
B. Étude des bobines .....	84
1. Description d'une bobine parfaite .....	84
2. Énergie d'une bobine parfaite .....	85
3. Association de bobines parfaites .....	86
4. Modélisation d'une bobine réelle .....	87
C. Les dipôles linéaires .....	88
1. Définition et exemples .....	88
2. Associations de dipôles linéaires .....	88
<b>Méthodes</b>	
L'essentiel ; mise en œuvre .....	90
<b>Énoncés des exercices</b> .....	94
<b>Indications</b> .....	95
<b>Solution des exercices</b> .....	96

# A. Étude des condensateurs

## A.1. Description d'un condensateur parfait



**Fig. 1** - Étude d'un condensateur en convention récepteur. Les charges portées par les deux armatures sont opposées.

**1.** Michael Faraday (1791-1867), chimiste et physicien britannique, découvrit l'induction électromagnétique, établit la loi de l'électrolyse et fonda la théorie de l'électrisation. En chimie, il découvrit le benzène et liquéfia de nombreux gaz.

**2.** En électronique, on utilise les sous-multiples du farad :

– le microfarad ( $\mu\text{F}$ ) :

$$1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$$

– le nanofarad ( $\text{nF}$ ) :

$$1 \text{nF} = 10^{-9} \text{ F} = 10^{-3} \mu\text{F}$$

– le picofarad ( $\text{pF}$ ) :

$$1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F} = 10^{-6} \mu\text{F} = 10^{-3} \text{nF}$$

**3.** Si le courant  $i$  est positif, la quantité d'électricité  $dQ > 0$  s'accumule sur l'armature du condensateur : la charge  $q$  augmente. Si le courant  $i$  est négatif, la quantité d'électricité  $dQ < 0$  quitte l'armature du condensateur : la charge  $q$  diminue.

**4.** En convention générateur, il faut introduire un signe moins.

### A.1.1 - Charge d'un condensateur

Un condensateur est l'association de deux conducteurs en regard, appelés armatures. Lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel  $u$  non nulle, des charges opposées  $q_A = q$  et  $q_B = -q_A = -q$  s'accumulent sur les deux armatures (fig. 1).

#### Définition 1

La charge  $q_A$  d'un condensateur est proportionnelle à la tension  $u_{AB}$  à ses bornes. Le coefficient de proportionnalité  $C$ , exprimé en farad ( $\text{F}$ )<sup>1</sup>, s'appelle la capacité du condensateur<sup>2</sup> :

$$q_A = Cu_{AB}$$

$q_A$  charge en coulomb (C)

$C$  capacité en farad (F)

$u_{AB}$  tension en volt (V)

On étudie un condensateur en convention récepteur et on ne représente généralement que l'armature portant la charge  $q$ . D'après la relation charge-tension, celle-ci est algébrique :

$$q > 0 \text{ si } u > 0 \text{ et } q < 0 \text{ si } u < 0.$$

### A.1.2 - Relation charge-intensité pour un condensateur

D'après le chapitre 1, on sait que l'intensité  $i$  du courant s'écrit :

$$i = \frac{dQ}{dt},$$

où  $dQ$  est la quantité d'électricité traversant une section quelconque du circuit pendant la durée  $dt$ . D'après la conservation de la charge, la charge  $q$  de l'armature du condensateur varie donc dans le même temps de la quantité  $dq = dQ$ .

En convention récepteur, la relation charge-intensité s'écrit pour un condensateur :

$$i = \frac{dq}{dt}, \text{ où } q \text{ est la charge du condensateur (C).}$$

### A.1.3 - Relation tension-intensité pour un condensateur

Des relations charge-tension et charge-intensité, on déduit la relation tension-intensité pour un condensateur en convention récepteur<sup>4</sup> :

$$q = Cu \text{ et } i = \frac{dq}{dt}, \text{ d'où : } i = C \frac{du}{dt}.$$

L'intensité du courant dans les fils d'alimentation du condensateur ne peut pas être infinie : la tension  $u$  ne subit donc pas de discontinuité.

La tension  $u(t)$  aux bornes d'un condensateur est toujours une fonction continue du temps.

### Application 1 Tension aux bornes d'un condensateur

Un générateur de courant idéal débite un courant constant d'intensité  $I = 1,0 \mu\text{A}$  dans un condensateur de capacité  $C = 100 \text{nF}$ . Initialement, la tension  $u$  aux bornes du condensateur est nulle. Comment  $u$  varie-t-elle au cours du temps ?

#### Solution

En convention récepteur, on a :

$$i = I = C \frac{du}{dt}, \text{ soit : } du = \frac{I}{C} dt.$$

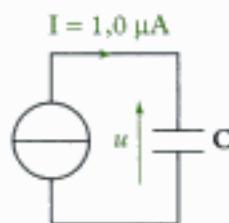
On intègre cette équation par rapport au temps :

$$u(t) = \frac{I}{C} t + \text{cte}, \text{ avec } u(t=0) = 0.$$

On déduit des conditions initiales à  $t = 0$  :

$$\text{cte} = 0, \text{ d'où : } u(t) = \frac{I}{C} t, \text{ soit : } u(t) = \frac{1,0 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-9}} t = 10t.$$

La tension  $u$  varie linéairement avec le temps.



## A.2. Énergie d'un condensateur parfait

#### Définition 2

L'énergie électrostatique  $E_{\text{elec}}$  emmagasinée dans un condensateur soumis à la tension  $u$  est égale à l'énergie électrique reçue par le condensateur initialement déchargé lorsque la tension à ses bornes passe de 0 à  $u$ . Elle a pour expression<sup>1</sup> :

$$E_{\text{elec}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} qu^2$$

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} Cu^2$$

$E_{\text{elec}}$  énergie en joule (J)  
 $C$  capacité en farad (F)  
 $u$  tension en volt (V)

1. D'après la relation charge-tension  $q = Cu$ , on a aussi :

L'énergie  $E_{\text{elec}}$  emmagasinée par un condensateur est donc d'autant plus grande que sa capacité  $C$  est grande.

#### Démonstration

La puissance électrique  $P_r$  reçue par le condensateur à l'instant  $t$  vaut :

$$P_r = ui \text{ avec } i = C \frac{du}{dt}, \text{ d'où : } P_r = Cu \frac{du}{dt}.$$

L'énergie  $dE_{\text{elec}}$  reçue par le condensateur pendant la durée infinitésimale  $dt$  vaut donc<sup>2</sup> :

$$P_r = \frac{dE_{\text{elec}}}{dt}, \text{ d'où : } dE_{\text{elec}} = P_r dt = Cu du.$$

L'énergie totale  $E_{\text{elec}}$  reçue par le condensateur est la somme des énergies élémentaires reçues lorsque la tension passe de 0 à  $u$ . D'où :

$$E_{\text{elec}} = \int_0^u dE_{\text{elec}} = \int_0^u Cu du = \frac{1}{2} Cu^2.$$

2. Si la puissance  $P$  reçue par un système est constante, son énergie  $E$  varie de la quantité  $\Delta E = P \Delta t$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , d'où :

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

En revanche, si  $P$  n'est pas constante, on peut seulement écrire que  $E$  varie de la quantité  $\Delta E = P dt$  pendant l'intervalle de temps infinitésimal  $dt$ , d'où :

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

## Application 2 Énergie emmagasinée dans un condensateur

Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité  $C = 100 \text{ nF}$  chargé sous la tension constante  $U = 10 \text{ V}$ .

### Solution

L'énergie du condensateur vaut :

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2}CU^2, \text{ d'où : } E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \times 1,00 \cdot 10^{-7} \times 10^2 = 5,0 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 5,0 \mu\text{J}.$$

## A.3. Association de condensateurs parfaits

### A.3.1 - Association en parallèle

On considère  $n$  condensateurs parfaits associés en parallèle et soumis à la même tension  $u$  (fig. 2). En convention récepteur, le condensateur  $k$  de capacité  $C_k$  est parcouru par le courant d'intensité  $i_k$  telle que :

$$i_k = C_k \frac{du}{dt}.$$

D'après la loi des nœuds, l'intensité totale  $i$  s'écrit :

$$i = \sum_k i_k, \text{ d'où : } i = \sum_k C_k \frac{du}{dt} = \left( \sum_k C_k \right) \frac{du}{dt}.$$

L'association en parallèle de condensateurs parfaits de capacités  $C_k$  est équivalente à un condensateur unique de capacité  $C$  telle que :

$$C = \sum_k C_k.$$

### A.3.2 - Association en série

On considère  $n$  condensateurs parfaits associés en série et parcourus par le même courant d'intensité  $i$  (fig. 3). En convention récepteur, la tension  $u_k$  aux bornes du condensateur  $k$  de capacité  $C_k$  vérifie :

$$i = C_k \frac{du_k}{dt}, \text{ soit : } \frac{du_k}{dt} = \frac{i}{C_k}.$$

D'après la loi d'addition des tensions, la tension totale  $u$  s'écrit :

$$u = \sum_k u_k, \text{ d'où : } \frac{du}{dt} = \sum_k \frac{du_k}{dt} = \sum_k \frac{i}{C_k} = i \sum_k \frac{1}{C_k}.$$

L'association en série de condensateurs parfaits de capacités  $C_k$  est équivalente à un condensateur unique de capacité  $C$  telle que :

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}.$$

Fig. 2 - Association en parallèle de  $n$  condensateurs parfaits.

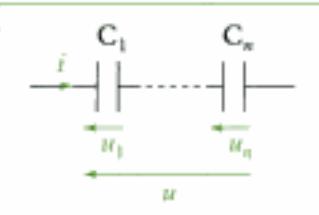
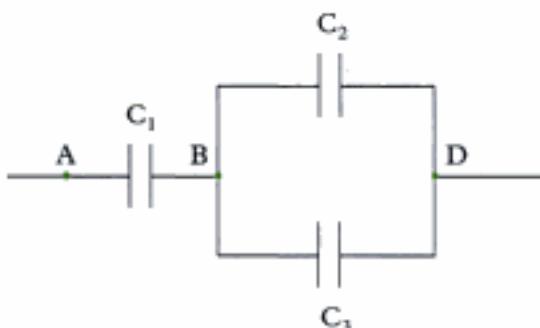


Fig. 3 - Association en série de  $n$  condensateurs parfaits.

### Application 3 Association de condensateurs

Quelle est la capacité du condensateur équivalent à l'association des trois condensateurs schématisée ci-dessous ?



#### Solution

Entre les points B et D, la capacité du condensateur équivalent aux deux condensateurs en parallèle vaut :

$$C_{BD} = C_2 + C_3.$$

Entre les points A et D, le condensateur de capacité  $C_{BD}$  est lui-même en série avec le condensateur de capacité  $C_1$ . La capacité  $C$  du condensateur équivalent est donnée par la relation :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{BD}} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1(C_2 + C_3)}, \text{ soit : } C = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

## A.4. Modélisation d'un condensateur réel

### A.4.1 - Description d'un condensateur réel

1. Un diélectrique est un isolant augmentant la capacité  $C$  du condensateur. (En réalité, il est toujours légèrement conducteur.)

Les deux armatures d'un condensateur réel sont séparées par un diélectrique légèrement conducteur<sup>1</sup>, à travers lequel le condensateur se décharge lentement. Un condensateur réel se modélise donc par l'association en parallèle d'un condensateur parfait de capacité  $C$  avec une « résistance de fuite »  $R_f$  (fig. 4).

En convention récepteur, les intensités  $i_C$  dans le condensateur et  $i_R$  dans la résistance de fuite valent respectivement :

$$i_C = C \frac{du}{dt} \text{ et } i_R = \frac{u}{R_f} \quad (\text{loi d'Ohm}).$$

D'après la loi des nœuds, le courant total  $i$  s'écrit :

$$i = i_R + i_C, \text{ d'où : } i = \frac{u}{R_f} + C \frac{du}{dt}.$$

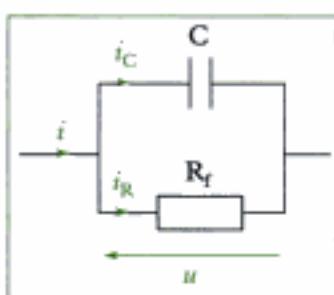


Fig. 4 - Modélisation d'un condensateur réel.

### A.4.2 - Énergie reçue par un condensateur réel

La puissance électrique  $P_r$  reçue par un condensateur réel à l'instant  $t$  vaut :

$$P_r = ui \text{ avec } i = \frac{u}{R_f} + C \frac{du}{dt}, \text{ d'où : } P_r = \frac{u^2}{R_f} + C u \frac{du}{dt}.$$

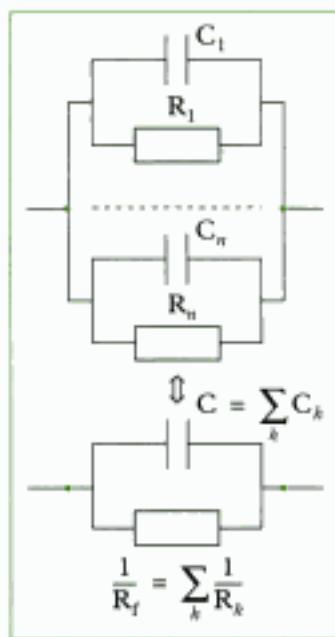
L'énergie reçue par le condensateur réel est la somme de deux termes :

- L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance  $R_f$  entre l'instant initial  $t = 0$  et l'instant  $t_u$  où la tension aux bornes du condensateur vaut  $u$  :

$$E_{\text{Joule}} = \int_0^{t_u} \frac{u^2}{R_f} dt.$$

- L'énergie électrostatique emmagasinée dans la capacité C :

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u^2.$$



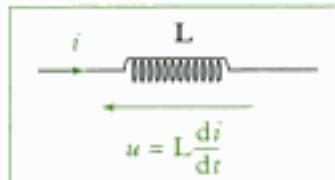
**Fig. 5** - Condensateur réel équivalent à l'association en parallèle de  $n$  condensateurs réels.

1. On pourrait montrer que l'association en série de deux condensateurs réels ( $R_1, C_1$ ) et ( $R_2, C_2$ ) aboutit à une relation tension-intensité compliquée qui n'apporte pas d'informations supplémentaires.

2. Le passage du courant dans la bobine crée un champ magnétique  $\vec{B}$  dont la valeur est proportionnelle à l'intensité  $i$ .

3. En convention générateur, il faut introduire un signe moins.

4. Joseph Henry (1797-1878), physicien américain, découvrit l'auto-induction en 1832.



**Fig. 6** - En convention récepteur, tension aux bornes d'une bobine parfaite.

### A.4.3 - Association de condensateurs réels

#### • Association en parallèle

On considère  $n$  condensateurs réels ( $C_k, R_k$ ) associés en parallèle et soumis à la même tension  $u$  (fig. 5).

– L'association en parallèle des capacités  $C_k$  est équivalente à la capacité C :

$$C = \sum_k C_k.$$

– L'association en parallèle des résistances  $R_k$  est équivalente à la résistance  $R_f$  telle que :

$$\frac{1}{R_f} = \sum_k \frac{1}{R_k}.$$

L'association des  $n$  condensateurs est donc équivalente au condensateur réel de capacité C et de résistance de fuite  $R_f$  telles que :

$$C = \sum_k C_k \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_f} = \sum_k \frac{1}{R_k}.$$

#### • Association en série

L'association en série de condensateurs réels n'est pas équivalente à un dipôle simple<sup>1</sup>.

## B. Étude des bobines

### B.1. Description d'une bobine parfaite

Une bobine est constituée par l'enroulement régulier d'un fil métallique conducteur<sup>2</sup>. Elle peut être plate (l'enroulement est constitué de quelques spires) ou longue (le fil est enroulé en hélice sur un cylindre).

#### Définition 3

La tension  $u$  aux bornes d'une bobine est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de l'intensité  $i$  du courant qui la traverse. En convention récepteur<sup>3</sup>, le coefficient de proportionnalité L, exprimé en henry (H)<sup>4</sup>, s'appelle l'inductance propre de la bobine (fig. 6) :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$u$  tension en volt (V)

L inductance propre en henry (H)

$i$  intensité en ampère (A)

La tension aux bornes de la bobine ne peut pas être infinie : l'intensité  $i$  du courant qui la traverse ne subit donc pas de discontinuité.

L'intensité  $i(t)$  du courant dans une bobine est toujours une fonction continue du temps.

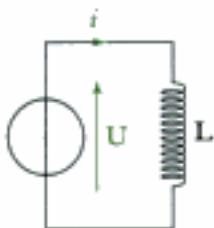
#### Application 4 | Intensité dans une bobine

Une bobine d'inductance  $L = 100 \text{ mH}$  est soumise à la tension constante  $U = 1,0 \text{ V}$ . Initialement, l'intensité  $i$  du courant dans la bobine est nulle. Comment  $i$  varie-t-elle au cours du temps ?

#### Solution

En convention récepteur, on a :

$$U = L \frac{di}{dt}, \text{ d'où : } di = \frac{U}{L} dt.$$



On intègre cette équation par rapport au temps :

$$i(t) = \frac{U}{L} t + \text{cte}, \text{ avec } i(t=0) = 0.$$

On déduit des conditions initiales à  $t = 0$  :

$$\text{cte} = 0, \text{ d'où : } i(t) = \frac{U}{L} t, \text{ soit : } i(t) = \frac{1,0}{100 \cdot 10^{-3}} t = 10t.$$

L'intensité  $i$  du courant varie linéairement avec le temps.

## B.2. Énergie d'une bobine parfaite

#### Définition 4

L'énergie magnétique  $E_{\text{mag}}$  emmagasinée dans une bobine traversée par un courant d'intensité  $i$  est égale à l'énergie électrique reçue par la bobine lorsque l'intensité passe de 0 à  $i$ . Elle a pour expression :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2$$

$E_{\text{mag}}$  énergie en joule (J)  
 $L$  inductance propre en henry (H)  
 $i$  intensité en ampère (A)

L'énergie  $E_{\text{mag}}$  emmagasinée dans une bobine est donc d'autant plus grande que son inductance  $L$  est grande.

#### Démonstration

La puissance électrique  $P_t$  reçue par la bobine à l'instant  $t$  vaut :

$$P_t = ui \text{ avec } u = L \frac{di}{dt}, \text{ d'où : } P_t = L i \frac{di}{dt}.$$

L'énergie  $dE_{\text{mag}}$  reçue par la bobine pendant la durée infinitésimale  $dt$  vaut donc :

$$P_t = \frac{dE_{\text{mag}}}{dt}, \text{ d'où : } dE_{\text{mag}} = P_t dt = L i di.$$

L'énergie totale  $E_{\text{mag}}$  reçue par la bobine est la somme des énergies élémentaires reçues lorsque l'intensité du courant passe de 0 à  $i$ . D'où :

$$E_{\text{mag}} = \int_0^i dE_{\text{mag}} = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2.$$

### Application 5 Énergie emmagasinée dans une bobine

Calculer l'énergie emmagasinée dans une bobine d'inductance  $L = 100 \text{ mH}$  parcourue par un courant d'intensité  $I = 1,0 \text{ A}$ .

#### Solution

L'énergie de la bobine vaut :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}LI^2, \text{ d'où : } E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \times 0,100 \times 1,0^2 = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ J} = 50 \text{ mJ}.$$

1. Par rapport au condensateur, les rôles de la tension  $u(t)$  et de l'intensité  $i(t)$  sont inversés.

## B.3. Association de bobines parfaites<sup>1</sup>

On suppose que les influences des bobines présentes dans le circuit les unes sur les autres sont nulles.

### B.3.1 - Association en série

On considère  $n$  bobines parfaites associées en série et traversées par le même courant d'intensité  $i$  (fig. 7). En convention récepteur, la tension aux bornes de la bobine  $k$  d'inductance  $L_k$  s'écrit :

$$u_k = L_k \frac{di}{dt}.$$

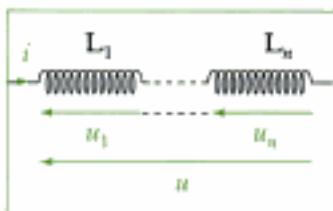


Fig. 7 - Association en série de  $n$  bobines parfaites.

D'après la loi d'addition des tensions, la tension totale  $u$  s'écrit :

$$u = \sum_k u_k, \text{ d'où : } u = \sum_k L_k \frac{di}{dt} = \left( \sum_k L_k \right) \frac{di}{dt}.$$

L'association en série de bobines parfaites d'inductance  $L_k$  est équivalente à une bobine unique d'inductance  $L$  telle que :

$$L = \sum_k L_k.$$

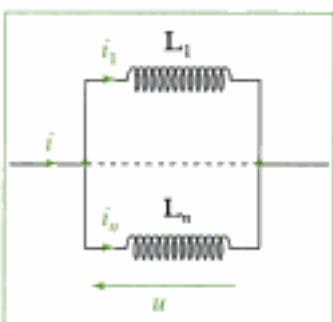


Fig. 8 - Association en parallèle de  $n$  bobines parfaites.

### B.3.2 - Association en parallèle

On considère  $n$  bobines parfaites associées en parallèle et soumises à la même tension  $u$  (fig. 8). En convention récepteur, l'intensité  $i_k$  du courant traversant la bobine  $k$  d'inductance  $L_k$  vérifie :

$$u = L_k \frac{di_k}{dt}, \text{ soit : } \frac{di_k}{dt} = \frac{u}{L_k}.$$

D'après la loi des nœuds, l'intensité totale  $i$  s'écrit :

$$i = \sum_k i_k, \text{ d'où : } \frac{di}{dt} = \sum_k \frac{di_k}{dt} = \sum_k \frac{u}{L_k} = u \sum_k \frac{1}{L_k}.$$

L'association en parallèle de bobines parfaites d'inductance  $L_k$  est équivalente à une bobine unique d'inductance  $L$  telle que :

$$\frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k}.$$

## B.4. Modélisation d'une bobine réelle

### B.4.1 - Description d'une bobine réelle

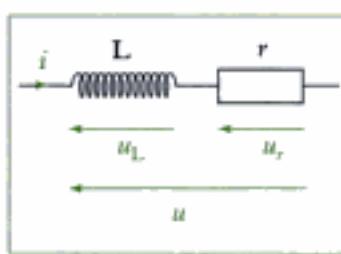


Fig. 9 - Modélisation d'une bobine réelle.

L'enroulement de fil d'une bobine réelle possède une résistance non nulle. Une bobine réelle se modélise donc par l'association en série d'une bobine parfaite d'inductance  $L$  avec une résistance  $r$  (fig. 9).

En convention récepteur, la tension  $u$  aux bornes de la bobine réelle s'écrit donc :

$$u = L \frac{di}{dt} + ri.$$

### B.4.2 - Énergie reçue par une bobine réelle

La puissance électrique  $P_r$  reçue par une bobine réelle à l'instant  $t$  vaut :

$$P_r = ui \text{ avec } u = L \frac{di}{dt} + ri, \text{ d'où : } P_r = ri^2 + L i \frac{di}{dt}.$$

L'énergie reçue par la bobine réelle est la somme de deux termes :

- L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance  $r$  entre l'instant initial  $t = 0$  et l'instant  $t_i$  où l'intensité du courant dans la bobine vaut  $i$  :

$$E_{\text{joule}} = \int_0^{t_i} r i^2 dt.$$

- L'énergie magnétique emmagasinée dans l'inductance  $L$  :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2.$$

### B.4.3 - Association de bobines réelles

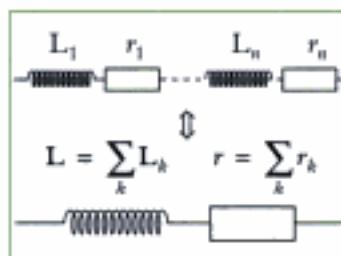


Fig. 10 - Bobine réelle équivalente à l'association en série de  $n$  bobines réelles.

#### • Association en série

On considère  $n$  bobines réelles associées en série et traversées par le même courant d'intensité  $i$  (fig. 10).

- L'association en série des inductances  $L_k$  est équivalente à l'inductance  $L$  :

$$L = \sum_k L_k.$$

- L'association en série des résistances  $r_k$  est équivalente à la résistance  $r$  :

$$r = \sum_k r_k.$$

L'association des  $n$  bobines est donc équivalente à la bobine réelle d'inductance  $L$  et de résistance  $r$  telles que :

$$L = \sum_k L_k \quad \text{et} \quad r = \sum_k r_k.$$

#### • Association en parallèle

L'association en parallèle de bobines réelles n'est pas équivalente à un dipôle simple.

## C. Les dipôles linéaires

### C.1. Définition et exemples

L'étude des dipôles linéaires s'effectue dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ou quasi-permanents). On considère donc que la tension  $u(t)$  aux bornes d'un dipôle et l'intensité  $i(t)$  du courant le traversant varient lentement au cours du temps.

#### Définition 5

Un dipôle est linéaire lorsque la tension  $u(t)$  à ses bornes et l'intensité  $i(t)$  du courant le traversant vérifient une équation différentielle linéaire (à coefficients constants).

1. L'ordre d'une équation différentielle est celui de la dérivée la plus élevée intervenant dans l'équation.

- Les conducteurs ohmiques, les générateurs, les récepteurs... dont la caractéristique  $u = f(i)$  peut être localement modélisée par une droite sont des dipôles linéaires vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre 0<sup>1</sup> (relation affine entre  $u$  et  $i$ ).
- Les condensateurs (parfaits ou réels) sont des dipôles linéaires vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en  $u(t)$ .
- Les bobines (parfaites ou réelles) sont des dipôles linéaires vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en  $i(t)$ .

### C.2. Associations de dipôles linéaires

#### C.2.1 - Exemple : association d'un condensateur parfait et d'une bobine réelle

On étudie en convention récepteur l'association d'un condensateur parfait  $C$  et d'une bobine réelle ( $L, r$ )<sup>2</sup>.

##### \* Association en série (fig. 11)

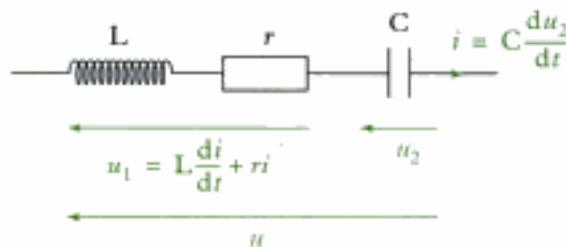


Fig. 11 - Association en série d'une bobine réelle ( $L, r$ ) et d'un condensateur parfait  $C$ .

D'après la loi d'addition des tensions, la tension totale  $u$  s'écrit :

$$u = u_1 + u_2 = L \frac{di}{dt} + ri + u_2.$$

En dérivant une fois cette expression, on obtient :

$$\frac{du}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{du_2}{dt}, \text{ d'où : } \frac{du}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}.$$

L'association est donc équivalente à un dipôle linéaire vérifiant une équation différentielle d'ordre 2 en  $i(t)$  et d'ordre 1 en  $u(t)$ .

• Association en parallèle (fig. 12)

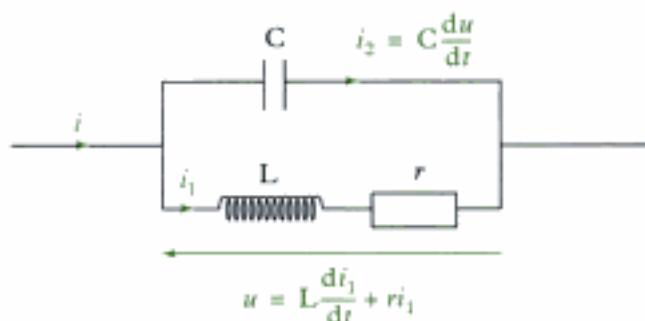


Fig. 12 - Association en parallèle d'une bobine réelle ( $L, r$ ) et d'un condensateur parfait  $C$ .

D'après la loi des nœuds, l'intensité totale  $i$  s'écrit :

$$i = i_1 + i_2, \quad \text{d'où : } i_1 = i - i_2 = i - C \frac{du}{dt}.$$

En reportant  $i_1$  dans l'expression de la tension  $u$  écrite aux bornes de la bobine réelle, on obtient :

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di_1}{dt} + ri_1 = L \frac{d}{dt} \left( i - C \frac{du}{dt} \right) + r \left( i - C \frac{du}{dt} \right) \\ &= L \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2 u}{dt^2} + ri - rC \frac{du}{dt}. \end{aligned}$$

D'où finalement, en ordonnant les termes en  $u$  et les termes en  $i$  :

$$u + rC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2 u}{dt^2} = L \frac{di}{dt} + ri.$$

L'association est donc équivalente à un dipôle linéaire vérifiant une équation différentielle d'ordre 2 en  $u(t)$  et d'ordre 1 en  $i(t)$ .

### C.2.2 - Propriété

1. Par exemple, l'association en série de deux condensateurs réels vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 en  $u(t)$ . De même, l'association en parallèle de deux bobines réelles vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 en

On peut généraliser les résultats obtenus sur les exemples précédents à l'association de  $n$  dipôles linéaires quelconques.

L'association de  $n$  dipôles linéaires est équivalente à un dipôle linéaire. L'ordre de l'équation différentielle obtenue augmente avec le nombre de dipôles associés<sup>1</sup>.

# L'essentiel

## ✓ Propriétés des condensateurs

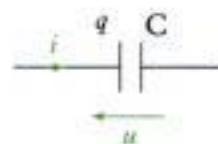
- La charge  $q$  d'un condensateur est proportionnelle à la tension  $u$  à ses bornes :

$$q = Cu$$

$q$  charge en coulomb (C)

$C$  capacité en farad (F)

$u$  tension en volt (V)



- En convention récepteur, les relations charge-intensité et tension-intensité s'écrivent pour un condensateur :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}, \text{ où } i \text{ est l'intensité du courant dans le circuit.}$$

- La tension  $u(t)$  aux bornes d'un condensateur est toujours une fonction continue du temps.
- L'énergie électrostatique  $E_{elec}$  emmagasinée dans un condensateur a pour expression :

$$E_{elec} = \frac{1}{2} Cu^2$$

$E_{elec}$  énergie en joule (J)

$C$  capacité en farad (F)

$u$  tension en volt (V)

- L'association parallèle de condensateurs de capacités  $C_k$  est équivalente à un condensateur unique de capacité  $C = \sum_k C_k$ .

L'association série de condensateurs de capacités  $C_k$  est équivalente à un condensateur unique de capacité  $C$  telle que  $\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}$ .

- Un condensateur réel se modélise par l'association en parallèle d'un condensateur de capacité  $C$  avec une \* résistance de fuite \*  $R_f$ .

## ✓ Propriétés des bobines

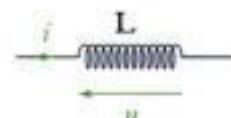
- La tension  $u$  aux bornes d'une bobine est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de l'intensité  $i$  du courant qui la traverse. En convention récepteur, on a :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$u$  tension en volt (V)

$L$  inductance en henry (H)

$i$  intensité en ampère (A)



- L'intensité  $i(t)$  du courant dans une bobine est toujours une fonction continue du temps.

- L'énergie magnétique  $E_{mag}$  emmagasinée dans une bobine a pour expression :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} Li^2$$

$E_{mag}$  énergie en joule (J)

$L$  inductance en henry (H)

$i$  intensité en ampère (A)

- L'association série de bobines d'inductance  $L_k$  est équivalente à une bobine unique d'inductance  $L = \sum_k L_k$ .

L'association parallèle de bobines d'inductance  $L_k$  est équivalente à une bobine unique d'inductance  $L$  telle que  $\frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k}$ .

- Une bobine réelle se modélise par l'association en série d'une bobine d'inductance  $L$  avec une résistance  $r$ .

### ✓ Les dipôles linéaires

- Un dipôle est linéaire lorsque la tension  $u(t)$  à ses bornes et l'intensité  $i(t)$  du courant le traversant vérifient une équation différentielle linéaire (à coefficients constants).

*Exemple :* les conducteurs ohmiques, les dipôles dont la caractéristique peut être localement modélisée par une droite, les condensateurs (parfaits ou réels), les bobines (parfaites ou réelles)...

- L'association de  $n$  dipôles linéaires est équivalente à un dipôle linéaire. L'ordre de l'équation différentielle obtenue augmente avec le nombre de dipôles associés.

## Mise en œuvre

### Méthode n° 1

#### Comment déterminer les conditions initiales d'un régime transitoire ?

Lorsqu'on modifie un régime continu en ouvrant ou en fermant un interrupteur, certaines grandeurs électriques varient continûment, tandis que d'autres subissent des discontinuités. On se propose de déterminer les valeurs de ces grandeurs à l'instant  $t = 0^+$  qui suit la modification du circuit.

#### → Savoir faire

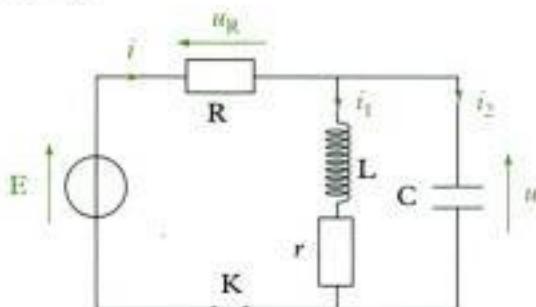
- ❶ Construire le schéma équivalent au circuit en régime permanent continu. Il faut pour cela substituer :
  - un fil à une bobine ;
  - un interrupteur ouvert à un condensateur.

 En régime permanent continu :  $u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0$  et  $i_C = C \frac{du_C}{dt} = 0$ .

- ❷ Déterminer les grandeurs électriques en  $t = 0^-$  (avant la modification du circuit) à partir de ce schéma équivalent.
- ❸ Identifier les grandeurs continues (ce sont les tensions aux bornes des condensateurs et les intensités dans les bobines) et préciser leurs valeurs en  $t = 0^+$ .
- ❹ Déterminer les valeurs des autres grandeurs électriques en  $t = 0^+$  par application des lois de Kirchhoff. Ce calcul doit être mené sur le circuit réel (et non sur le schéma équivalent) *après* modification de celui-ci.
- ❺ Pour chaque condensateur (chaque bobine), déterminer la dérivée de  $u$  (respectivement de  $i$ ) en  $t = 0^+$  en exploitant sa caractéristique.  
 Ces résultats seront utilisés pour l'étude des régimes transitoires au chapitre 4.

## → Application

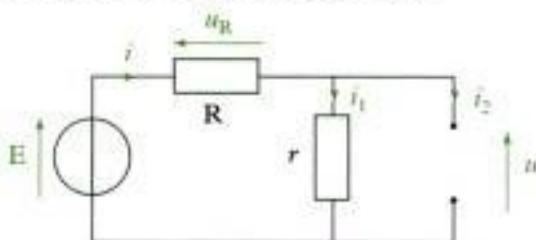
Le circuit ci-dessous est en régime permanent continu lorsque l'interrupteur K est ouvert à un instant choisi comme origine des temps.



Déterminer les valeurs des différentes grandeurs électriques juste après l'ouverture de l'interrupteur K, ainsi que les valeurs de  $\frac{di_1}{dt}$  et  $\frac{du}{dt}$ .

### Solution

① Le schéma équivalent *avant* ouverture de l'interrupteur est :



② Avant l'ouverture de l'interrupteur K, le théorème de division de tension donne :

$$u_R = \frac{RE}{R+r} \quad \text{et} \quad u = \frac{rE}{R+r}.$$

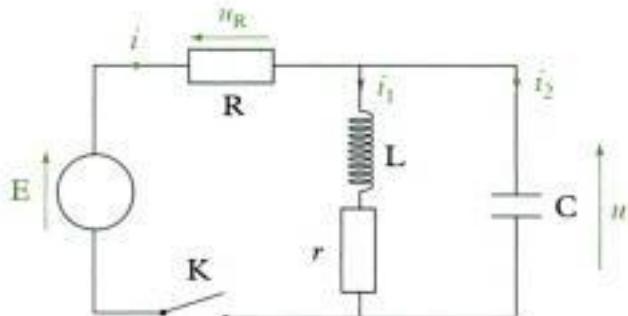
On en déduit les intensités :

$$i = \frac{E}{R+r}; \quad i_1 = \frac{E}{R+r}; \quad i_2 = 0.$$

③ Seules  $u$  et  $i_1$  sont nécessairement continues. Leurs valeurs en  $t = 0^+$  sont inchangées :

$$u(0^+) = \frac{rE}{R+r} \quad \text{et} \quad i_1(0^+) = \frac{E}{R+r}.$$

④ Après ouverture de l'interrupteur K, le circuit réel devient :



- $i(0^+) = 0$ , car la branche est ouverte.
- $u_R(0^+) = 0$ , d'après la caractéristique de la résistance R.
- $i_2(0^+) = i(0^+) - i_1(0^+)$ , soit :  $i_2(0^+) = -\frac{E}{R+r}$ .

Ces trois grandeurs électriques sont discontinues en  $t = 0$ .



Les grandeurs autres que les tensions aux bornes de condensateurs et les courants dans les bobines ne sont pas nécessairement discontinues. La tension aux bornes de  $r$ , par exemple, est continue, bien que cela ne soit pas systématique pour une résistance.

- La caractéristique de la bobine s'écrit :

$$u_L = L \frac{di_1}{dt}, \text{ soit : } \frac{di_1}{dt} = \frac{u_L}{L} \text{ avec } u_L = u - ri_1.$$

On en déduit :

$$u_L(0^+) = u(0^+) - ri_1(0^+) = \frac{rE}{R+r} - \frac{rE}{R+r} = 0, \text{ soit : } \frac{di_1}{dt}(0^+) = 0.$$

- De même, la caractéristique du condensateur donne :

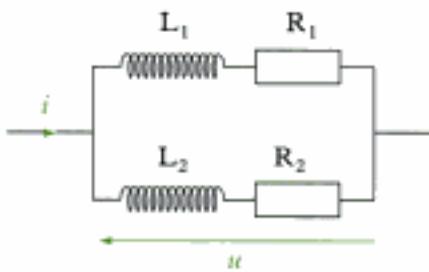
$$i_2 = C \frac{du}{dt}, \text{ soit : } \frac{du}{dt}(0^+) = \frac{i_2(0^+)}{C} = -\frac{E}{(R+r)C}.$$

# Exercices

## Niveau 1

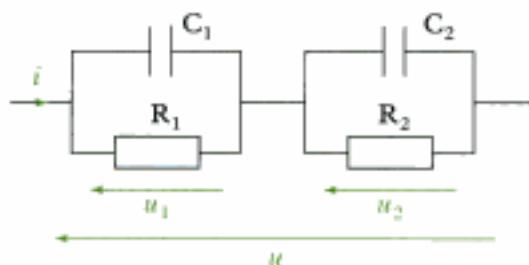
### Ex. 1 Bobines réelles en parallèle

Déterminer l'équation différentielle liant la tension  $u$  et le courant  $i$  dans le montage ci-dessous, comportant deux bobines réelles en parallèle.



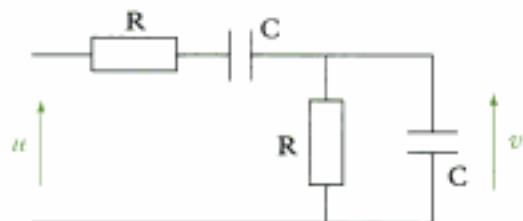
### Ex. 2 Condensateurs avec fuite en série

Déterminer l'équation différentielle liant la tension  $u$  et le courant  $i$  dans le montage ci-dessous, comportant deux condensateurs avec fuite en série. On notera  $u_1$  et  $u_2$  les tensions aux bornes de chaque condensateur.



### Ex. 3 Filtre de Wien

Le montage schématisé ci-dessous comporte deux résistances identiques  $R$  et deux condensateurs de capacité  $C$ .

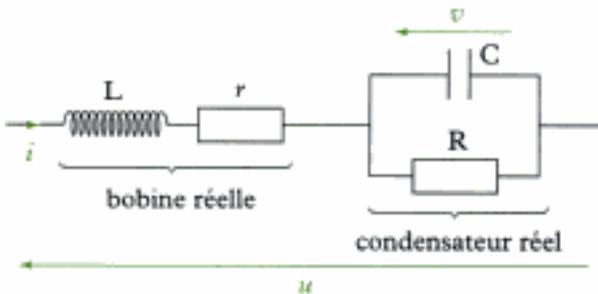


a) Écrire l'équation différentielle liant la tension de sortie  $v$  aux bornes du condensateur et la tension d'entrée  $u$ .

b) À l'instant initial, les deux condensateurs sont déchargés et la tension  $u = E$  est constante. Déterminer les conditions initiales portant sur  $v$  et  $\frac{dv}{dt}$  juste après le branchement du circuit ( $v(0^+)$  et  $\frac{dv}{dt}(0^+)$ ).

### Ex. 4 Bobine réelle en série avec un condensateur avec fuite

Une bobine réelle d'inductance  $L$  possède une résistance  $r$ . Elle est placée en série avec un condensateur de capacité  $C$  et de résistance de fuite  $R$ .



On note  $u$  la tension totale,  $v$  la tension aux bornes du condensateur et  $i$  l'intensité du courant.

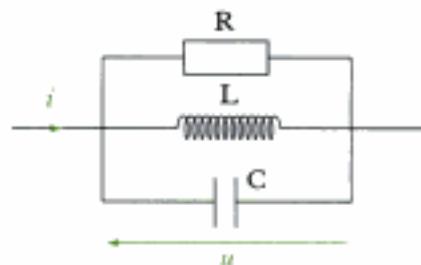
a) Déterminer l'équation différentielle liant l'intensité  $i$  et la tension  $u$ .

b) À  $t = 0$ , la tension aux bornes du condensateur vaut  $v_0$  et pour  $t \geq 0$ , on impose  $u = 0$ .

Juste après installation du court-circuit, que valent  $i(0^+)$ ?  $v(0^+)$ ?  $\frac{di}{dt}(0^+)$ ?  $\frac{dv}{dt}(0^+)$ ?

### Ex. 5 Circuit RLC parallèle

Un conducteur ohmique de résistance  $R$ , une bobine parfaite d'inductance  $L$  et un condensateur sans fuite de capacité  $C$  sont placés en parallèle. On note  $u$  la tension aux bornes des trois composants et  $i$  l'intensité totale traversant l'association.



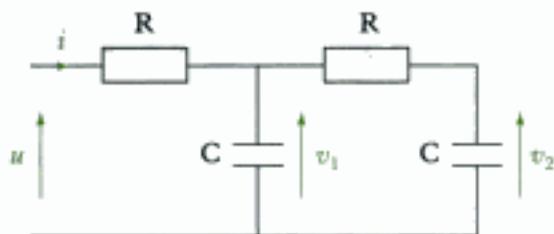
a) Quelle est l'équation différentielle liant  $u$  et  $i$ ?

b) On impose à partir de  $t = 0$ , un courant  $i = I_0$ . Pour les instants négatifs, le condensateur était déchargé et la bobine n'était parcourue par aucun courant.

Déterminer  $u(0^+)$  et  $\frac{du}{dt}(0^+)$ .

### Ex. 6 Cascade de circuits RC

On étudie le montage ci-dessous comportant deux circuits RC en cascade. On note  $u$  la tension d'entrée et  $v_1$  et  $v_2$  les tensions respectives aux bornes des condensateurs.



- a) Déterminer l'équation différentielle liant  $v_2$  à  $u$ .
- b) Déterminer l'équation différentielle liant  $v_1$  à  $u$ .
- c) À l'instant  $t = 0$ , on a :  $u = U_0$ ,  $v_1 = V_{10}$  et  $v_2 = 0$ .  
Déterminer  $\frac{dv_1}{dt}(0)$  et  $\frac{dv_2}{dt}(0)$ .

## Indications

**Ex. 2** Distinguer deux cas possibles.

**Ex. 3** a) Noter  $v_1$  la tension aux bornes du condensateur et N le nœud du circuit. Appliquer les lois de Kirchhoff.  
b) Utiliser les propriétés de continuité.

**Ex. 4** b) Utiliser les propriétés de continuité.

**Ex. 5** a) Dériver l'expression obtenue en appliquant la loi des nœuds.

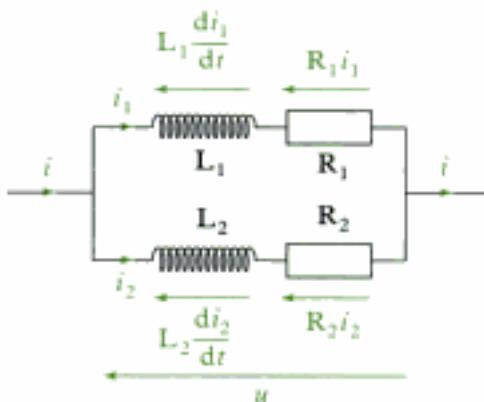
b) Utiliser les propriétés de continuité.

**Ex. 6** b) et c) Utiliser les équations posées à la question a).

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1



La tension  $u$  se retrouve aux bornes de chaque bobine. En notant  $i_1$  et  $i_2$  les courants les traversant, on peut écrire :

$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 & \text{(a)} \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 & \text{(b)} \end{cases} \quad \text{avec } i = i_1 + i_2 \quad \text{(c).}$$

On reporte  $i_2 = i - i_1$ , tiré de (c), dans (b) :

$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i - L_2 \frac{di_1}{dt} - R_2 i_1.$$



On cherche à exprimer  $i_1$  en fonction de  $i$  et de  $u$ , puis on injecte cette expression dans la caractéristique de la première bobine.



On pourrait aussi chercher à exprimer  $i_2$  en fonction de  $i$  et de  $u$ , puis injecter cette expression dans la caractéristique de la deuxième bobine. Les calculs aboutiraient à la même équation différentielle.

On reporte  $\frac{di_1}{dt} = \frac{u}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} i_1$ , tiré de (a), dans l'équation ci-dessus :

$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i - \frac{L_2}{L_1} u + \left( \frac{L_2}{L_1} R_1 - R_2 \right) i_1,$$

$$\text{d'où : } i_1 = \frac{u \left( 1 + \frac{L_2}{L_1} \right) - L_2 \frac{di}{dt} - R_2 i}{\frac{L_2}{L_1} R_1 - R_2} \quad \text{si } \frac{R_2}{R_1} \neq \frac{L_2}{L_1}.$$

On reporte cette expression dans (a) :

$$u = \frac{L_1}{\frac{L_2}{L_1} R_1 - R_2} \left[ \left( 1 + \frac{L_2}{L_1} \right) \frac{du}{dt} - L_2 \frac{d^2 i}{dt^2} - R_2 \frac{di}{dt} \right] + \frac{R_1}{\frac{L_2}{L_1} R_1 - R_2} \left[ \left( 1 + \frac{L_2}{L_1} \right) u - L_2 \frac{di}{dt} - R_2 i \right].$$

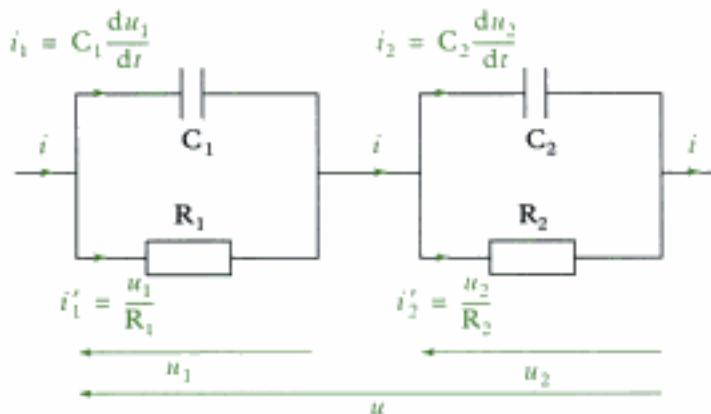
Après simplification, on obtient :

$$(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) \frac{du}{dt} + (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)u = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \frac{d^2i}{dt^2} + (\mathbf{R}_1 \mathbf{L}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{L}_1) \frac{di}{dt} + \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 i.$$

**⚠** Si  $\frac{\mathbf{L}_2}{\mathbf{L}_1} = \frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1}$ , l'expression est plus simple et on a immédiatement :

$$u = \mathbf{L}_2 \frac{di}{dt} + \mathbf{R}_2 i - \frac{\mathbf{L}_2}{\mathbf{L}_1} u, \text{ d'où : } u \left(1 + \frac{\mathbf{L}_2}{\mathbf{L}_1}\right) = \mathbf{L}_2 \frac{di}{dt} + \mathbf{R}_2 i.$$

## Exercice 2



On a pour chaque condensateur réel :

$$i = C_1 \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{R_1} = C_2 \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_2}, \quad \text{avec } u = u_1 + u_2.$$

Reportons  $u_2 = u - u_1$  dans l'expression précédente :

$$i = C_2 \frac{du}{dt} + \frac{u_2}{R_2} - C_2 \frac{du_1}{dt} - \frac{u_1}{R_2}.$$

**💡** On cherche à exprimer  $u_1$  en fonction de  $i$  et de  $u$ , puis on injecte cette expression dans la caractéristique du premier condensateur.

**⚠** On pourrait aussi chercher à exprimer  $u_2$  en fonction de  $i$  et de  $u$ , puis injecter cette expression dans la caractéristique du deuxième condensateur. Les calculs aboutiraient à la même équation différentielle.

Reportons  $\frac{du_1}{dt} = \frac{i}{C_1} - \frac{u_1}{R_1 C_1}$  dans l'expression précédente :

$$i = C_2 \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2} - \frac{C_2}{C_1} i + \frac{C_2}{R_1 C_1} u_1 - \frac{u_1}{R_2}.$$

• Si  $R_1 C_1 = R_2 C_2$ , l'expression obtenue est :

$$i \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) = C_2 \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2}.$$

• Si  $R_1 C_1 \neq R_2 C_2$ , on extrait  $u_1 = \frac{i \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) - C_2 \frac{du}{dt} - \frac{u}{R_2}}{\frac{C_2}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2}}$ , d'où :

$$i = \frac{C_1}{\frac{C_2}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2}} \left[ \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) \frac{di}{dt} - C_2 \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{R_2} \frac{du}{dt} \right] + \frac{1}{\frac{C_2}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2}} \left[ \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) i - C_2 \frac{du}{dt} - \frac{u}{R_2} \right].$$

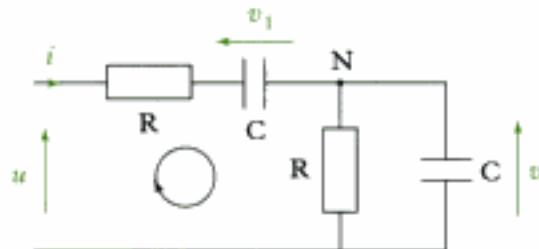
Après simplification, nous obtenons :

$$C_1 C_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_1 R_2} = (C_1 + C_2) \frac{di}{dt} + i \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

 Il ne faut pas oublier de traiter les deux cas possibles.

### Exercice 3

- a) Notons  $v_1$  la tension aux bornes du premier condensateur et  $i$  l'intensité du courant le parcourant en convention récepteur.



- En appliquant la loi des nœuds en N, nous avons :

$$i = C \frac{dv_1}{dt} = \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

- En appliquant la loi des mailles, nous avons aussi :

$$u = Ri + v_1 + v = R \left( \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} \right) + v_1 + v,$$

$$\text{soit : } u = RC \frac{dv}{dt} + 2v + v_1 \quad (2)$$

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{du}{dt} = RC \frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + \frac{dv_1}{dt}.$$



On ne dispose pas d'une relation exprimant directement  $v_1$  en fonction de  $u$  et de  $v$ . En revanche, l'égalité (1) fait intervenir la dérivée de  $v_1$ . Pour pouvoir l'exploiter, on dérive donc l'égalité (2).

- Reportons l'égalité (1) dans l'expression précédente :

$$\frac{du}{dt} = RC \frac{d^2 v}{dt^2} + 3 \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC}.$$



Nous obtenons bien une équation différentielle linéaire.

- b) • La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue. On a donc :

$$v_1(0^+) = v_1(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad v(0^+) = v(0^-) = 0.$$

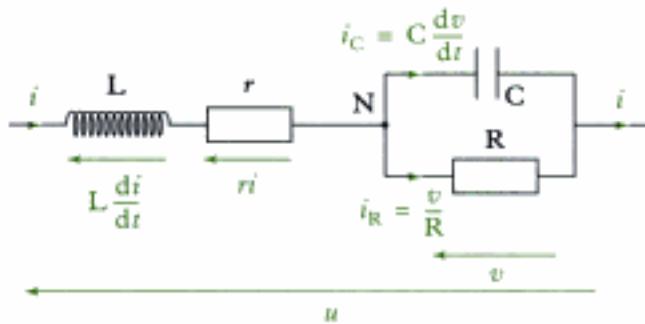


Les deux condensateurs sont déchargés, donc la tension à leurs bornes est nulle.

- Comme  $u(0^+) = E$ , nous obtenons grâce à l'équation (2) :

$$\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{u(0^+)}{RC} - 2v(0^+) - v_1(0^+), \text{ soit : } \frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}.$$

## Exercice 4



a) • La loi des nœuds en N s'écrit :

$$i = i_C + i_R = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \quad (1)$$

• La loi d'addition des tensions donne en outre :

$$u = L \frac{di}{dt} + ri + v, \text{ soit : } v = u - ri - L \frac{di}{dt} \quad (2)$$

• En reportant (2) dans (1), on a donc :

$$i = C \left( \frac{du}{dt} - r \frac{di}{dt} - L \frac{d^2i}{dt^2} \right) + \frac{u - ri - L \frac{di}{dt}}{R}.$$

L'équation différentielle linéaire s'écrit alors :

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + \left( rC + \frac{L}{R} \right) \frac{di}{dt} + i \left( 1 + \frac{r}{R} \right) = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}.$$

b) • Le courant dans la bobine et la tension aux bornes du condensateur sont continus :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad v(0^+) = v(0^-) = v_0.$$

Avant d'installer le court-circuit, l'association n'est pas branchée : il ne circule donc aucun courant ( $i(t < 0) = 0$ ).

• L'équation (2) écrite à l'instant  $t = 0^+$  donne :

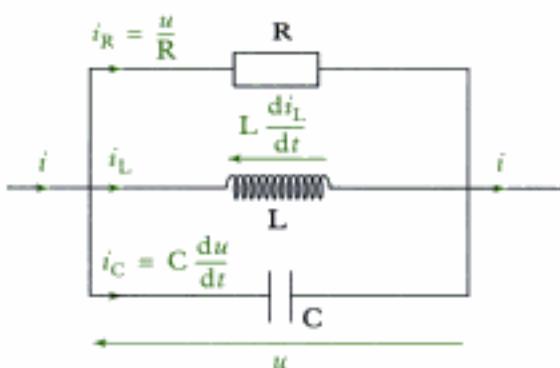
$$v_0 = 0 - 0 - L \frac{di}{dt}(0^+), \text{ soit : } \frac{di}{dt}(0^+) = - \frac{v_0}{L}.$$

• L'équation (1) écrite à l'instant  $t = 0^+$  donne :

$$0 = C \frac{dv}{dt}(0^+) + \frac{v_0}{R}, \text{ soit : } \frac{dv}{dt}(0^+) = - \frac{v_0}{RC}.$$

## Exercice 5

a)



La tension aux bornes de la bobine vaut :

$$u = L \frac{di_L}{dt}.$$

La loi des nœuds s'écrit :

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{u}{R} + i_L + C \frac{du}{dt}.$$

On dérive cette expression par rapport au temps :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{di_L}{dt} + C \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} + C \frac{d^2u}{dt^2}.$$

L'équation différentielle se met alors sous la forme :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + u = L \frac{di}{dt}.$$



Pour pouvoir exploiter la relation donnée par la bobine, il est nécessaire de dériver la loi des nœuds par rapport au temps. Techniquelement, les calculs sont très simples.

b) • La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue. Comme le condensateur est initialement déchargé, on a donc :

$$u(0^+) = u(0^-) = 0.$$

• La tension aux bornes de la résistance étant nulle, il n'y circule aucun courant :  $i_R(0^+) = 0$ .

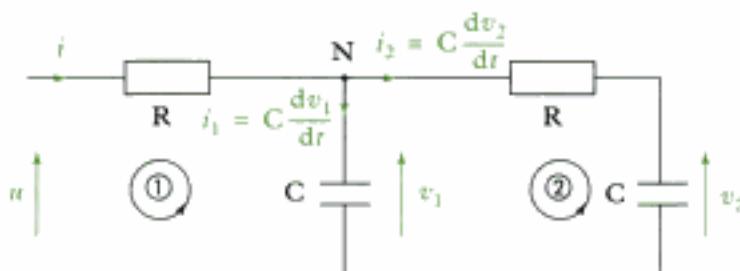
De même, le courant dans la bobine est continu, donc on a :  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ .

La loi des nœuds écrite à l'instant  $t = 0^+$  donne alors :

$$i(0^+) = I_0 = i_C(0^+) = C \frac{du}{dt}(0^+), \text{ d'où } \frac{du}{dt}(0^+) = \frac{I_0}{C}.$$

## Exercice 6

a)



• La loi des nœuds en N s'écrit :

$$i = i_1 + i_2 = C \frac{dv_1}{dt} + C \frac{dv_2}{dt} \quad (1)$$

• Le circuit possède deux mailles indépendantes, qui donne deux équations en appliquant la loi des mailles :

$$\begin{cases} \text{maille 1 : } u = Ri + v_1 & (2) \\ \text{maille 2 : } v_1 = RC \frac{dv_2}{dt} + v_2 & (3) \end{cases}$$

• On reporte (1) et (3) dans (2) :

$$u = RC \frac{dv_1}{dt} + RC \frac{dv_2}{dt} + RC \frac{dv_2}{dt} + v_2.$$

On reporte à nouveau (3) dans l'expression précédente :

$$u = R^2 C^2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + 3RC \frac{dv_2}{dt} + v_2.$$

b)

 On repart des équations (1), (2) et (3) établies à la question précédente et on exprime  $i$  et  $v_2$  en fonction de  $u$  et  $v_1$ .

– De l'équation (2), on tire :

$$i = \frac{u - v_1}{R}.$$

– On reporte ce résultat dans l'équation (1) :

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{i}{C} - \frac{dv_1}{dt} = \frac{u - v_1}{RC} - \frac{dv_1}{dt} \quad (4)$$

– On reporte ce résultat dans l'équation (3) :

$$v_2 = v_1 - RC \frac{dv_2}{dt} = 2v_1 - u + RC \frac{dv_1}{dt}.$$

– On reporte ce résultat dans l'équation (4) :

$$2 \frac{dv_1}{dt} - \frac{du}{dt} + RC \frac{d^2 v_1}{dt^2} = \frac{u}{RC} - \frac{v_1}{RC} - \frac{dv_1}{dt}.$$

On obtient finalement l'équation différentielle :

$$RC \frac{du}{dt} + u = R^2 C^2 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + 3RC \frac{dv_1}{dt} + v_1.$$



Les deux condensateurs ne jouent pas le même rôle dans le circuit. Les équations différentielles vérifiées par  $v_1$  et  $v_2$  ne sont donc pas les mêmes.

c) • À  $t = 0$ , on a :  $v_1 = V_{10}$  et  $v_2 = 0$ . L'équation (3) donne alors :

$$\frac{dv_2}{dt}(0) = \frac{v_1(0) - v_2(0)}{RC} = \frac{V_{10}}{RC}.$$

• À  $t = 0$ , on a :  $u = U_0$  et  $v_1 = V_{10}$ . L'équation (2) donne alors :

$$i(0) = \frac{u(0) - v_1(0)}{R} = \frac{U_0 - V_{10}}{R}.$$

En reportant les deux résultats précédents dans (1), on a donc :

$$\frac{dv_1}{dt}(0) = \frac{i(0)}{C} - \frac{dv_2}{dt}(0) = \frac{U_0 - V_{10}}{RC} - \frac{V_{10}}{RC} = \frac{U_0 - 2V_{10}}{RC}.$$



## CHAPITRE

# 4

# Régimes transitoires

### Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier les réponses à un échelon de tension de quelques circuits simples comprenant des condensateurs, des bobines et des résistances (circuit RC série, circuit RL série, circuit RLC série).

### Plan du chapitre 4

<b>A. Étude d'un circuit RC série.....</b>	<b>104</b>
1. Charge du condensateur .....	104
2. Décharge du condensateur .....	109
<b>B. Étude d'un circuit RL série.....</b>	<b>111</b>
1. Établissement du courant dans la bobine.....	111
2. Arrêt du courant dans la bobine .....	114
<b>C. Étude d'un circuit RLC série.....</b>	<b>116</b>
1. Montage expérimental .....	116
2. Évolution de la tension $u_C$ .....	116
3. Évolution de l'intensité $i$ .....	121
4. Interprétation physique .....	122
5. Étude énergétique.....	122
6. Analogie avec l'oscillateur linéaire .....	124
<b>Méthodes</b>	
L'essentiel ; mise en œuvre .....	125
<b>Énoncés des exercices.....</b>	<b>133</b>
<b>Indications .....</b>	<b>138</b>
<b>Solutions des exercices.....</b>	<b>139</b>

# A. Étude d'un circuit RC série

## A.1. Charge du condensateur

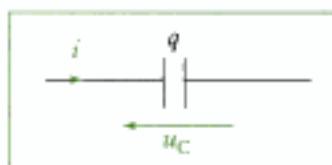


Fig. 1 - En convention récepteur, on a :  $q = Cu_C$ .

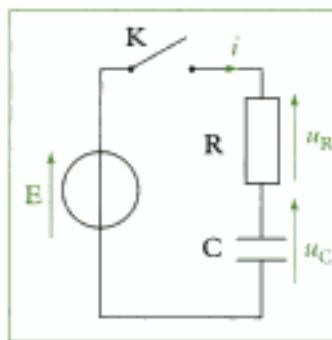


Fig. 2 - Montage pour étudier la charge d'un condensateur dans un circuit RC série.

### A.1.1 - Montage expérimental

- Pour étudier la charge d'un condensateur de capacité  $C$  à travers un conducteur ohmique de résistance  $R$ , on réalise le montage schématisé sur la figure 2 :
  - un générateur idéal de tension continue de fém  $E$  est branché aux bornes du circuit RC ;
  - pour  $t < 0$ , le condensateur est déchargé et l'interrupteur  $K$  est ouvert ;
  - à l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$  : le générateur débite alors un courant dans le circuit.
- Dans ce circuit, on note  $i$  l'intensité du courant,  $u_C$  la tension aux bornes du condensateur et  $u_R$  la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique et le condensateur sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = Ri \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}, \text{ d'où : } u_R = RC \frac{du_C}{dt}.$$

### A.1.2 - Évolution de la tension $u_C$

#### • Équation différentielle vérifiée par la tension $u_C$

- Pour  $t < 0$ , l'interrupteur  $K$  est ouvert : l'intensité  $i$  est nulle, ainsi que les tensions  $u_R$  et  $u_C$ . La tension  $E$  aux bornes du générateur de tension se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert  $K$ .
- Pour  $t > 0$ , la tension aux bornes de l'interrupteur  $K$  est nulle et la loi d'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_C.$$

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à l'échelon de tension  $E$  vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

#### • Constante de temps du circuit

- La variation infinitésimale d'une grandeur s'exprime dans la même unité que cette grandeur. Comme  $du_C$  s'exprime en V et  $dt$  en s, le rapport  $\frac{du_C}{dt}$  s'exprime en  $V \cdot s^{-1}$ .

Les termes  $E$  et  $u_C$  sont des tensions exprimées en volt (V). L'équation différentielle est homogène si le terme  $RC \frac{du_C}{dt}$  a la même dimension que les autres termes. Or, la dérivée  $\frac{du_C}{dt}$  s'exprime<sup>1</sup> en  $V \cdot s^{-1}$  ; le produit  $RC$  a donc lui aussi la dimension d'un temps.

**Définition 1**

1. On peut retrouver que  $\tau$  a la dimension d'un temps grâce aux relations :  $q = Cu_C$  et  $u_R = Ri$ .

En effet :

- l'unité de  $C$  est celle d'une charge ( $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$ ) divisée par celle d'une tension (V), c'est-à-dire  $\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1}$ ;
- l'unité de  $R$  est celle d'une tension (V) divisée par celle d'une intensité (A), c'est-à-dire  $\text{V} \cdot \text{A}^{-1}$ . Le produit  $RC$  s'exprime donc bien en seconde (s).

On définit la constante de temps  $\tau$  du circuit RC par le produit<sup>1</sup> :

$$\tau = RC$$

$\tau$ constante de temps en seconde(s)
$R$ résistance en ohm ( $\Omega$ )
$C$ capacité en farad (F)

### • Solution de l'équation différentielle

Pour  $t > 0$ , il faut résoudre l'équation du premier ordre à coefficients constants avec second membre :

$$\tau \frac{du_1}{dt} + u_1 = E.$$

#### (1) Méthode de résolution mathématique

La solution générale de cette équation est la somme :

- de la solution générale  $u_1$  de l'équation homogène associée :

$$\tau \frac{du_1}{dt} + u_1 = 0;$$

- d'une solution particulière  $u_2$  de l'équation.

#### (2) Solution particulière constante

Comme le second membre de l'équation est constant, on cherche comme solution particulière une fonction constante :

$$\tau \frac{du_2}{dt} + u_2 = E \quad \text{avec} \quad \frac{du_2}{dt} = 0, \quad \text{d'où : } u_2 = E.$$

#### (3) Solution de l'équation homogène

On cherche une solution de l'équation homogène sous la forme :

$$u_1 = Ae^{rt}, \quad \text{où } A \text{ est une constante et } r \text{ un réel.}$$

L'équation homogène s'écrit alors :

$$\frac{du_1}{dt} = Are^{rt} = ru_1, \quad \text{soit : } \tau ru_1 + u_1 = 0.$$

En simplifiant<sup>2</sup> par  $u_1$ , on obtient alors le polynôme caractéristique<sup>3</sup> en  $r$  :

$$\tau r + 1 = 0, \quad \text{d'où : } r = -\frac{1}{\tau}.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$u_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{où } A \text{ est une constante.}$$

#### (4) Solution générale

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est :

$$u_C = u_1 + u_2, \quad \text{soit : } u_C = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E.$$

### • Application des conditions de continuité

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur est continue. À l'instant  $t = 0$ , la condition initiale sur la tension s'écrit<sup>4</sup> :  $u_C(t=0) = 0$ . On en déduit donc, en posant  $t = 0$  dans la solution générale de l'équation différentielle :

$$0 = A + E, \quad \text{soit : } A = -E.$$

2. On élimine ainsi la solution triviale  $u_1 = 0$  qui ne correspond pas à la réalité physique.

3. Ce polynôme n'admet qu'une solution (ce qui est logique, car l'équation différentielle est du premier ordre).

4. L'équation différentielle étant du premier ordre, connaître une seule condition initiale suffit à déterminer l'unique constante d'intégration  $A$ .

1. Lorsque la charge du condensateur est terminée ( $t \rightarrow \infty$ ), la tension  $u_C$  à ses bornes vaut  $E$  (car  $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$ ). Cette tension maximale ne dépend pas des conditions initiales. Elle correspond à la solution particulière constante  $u_2$ . La charge du condensateur est alors  $CE$ .

2. Lorsque la charge du condensateur est terminée ( $t \rightarrow \infty$ ), l'intensité  $i$  du courant dans le circuit est nulle.

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à un échelon de tension  $E$  a pour expression<sup>1</sup> :

$$u_C = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = RC \text{ constante de temps (s).}$$

### A.1.3 - Évolution de l'intensité $i$

L'intensité  $i$  du courant est proportionnelle à la dérivée de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur :

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \text{ soit } i = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

L'intensité  $i$  du courant est maximale à la fermeture de l'interrupteur K. Pendant la charge du condensateur, elle décroît avec le temps ; lorsque le condensateur est chargé, il se comporte comme un interrupteur ouvert<sup>2</sup>.

#### Application 1 Quand le courant dans le circuit est-il négligeable ?

On considère le montage schématisé sur la figure 2. À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur K et le courant commence à circuler dans le circuit. Au bout de combien de temps l'intensité initiale est-elle divisée par 10 ? par 100 ?

#### Solution

Lors de la charge du condensateur, l'intensité  $i$  du courant dans le circuit a pour expression :

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ d'où } i(0) = \frac{E}{R}.$$

– L'intensité initiale  $i(0)$  est divisée par 10 si :

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{10}, \text{ c'est-à-dire } t = -\tau \ln\left(\frac{1}{10}\right) = \tau \ln(10) = 2,3\tau.$$

– L'intensité initiale  $i(0)$  est divisée par 100 si :

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{100} = 10^{-2}, \text{ c'est-à-dire } t = -\tau \ln(10^{-2}) = 2\tau \ln(10) = 4,6\tau.$$

On peut estimer que le courant devient négligeable au bout de  $5\tau$ . Le condensateur est alors chargé à 1 % près ; sa tension vaut  $E$  et sa charge  $CE$ .

### A.1.4 - Représentation graphique

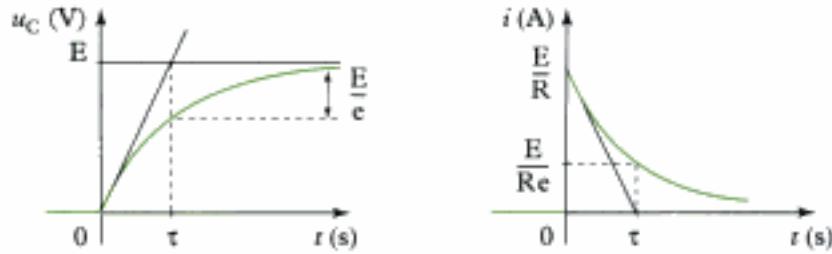


Fig. 3 - Évolution de  $u_C$  et de  $i$  en fonction du temps.

3. Pour la tension  $u_C$ , l'axe asymptote est la droite horizontale  $u_C = E$ . Pour l'intensité  $i$ , l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

• On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de  $u_C$  et de  $i$  (fig. 3). La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur est continue ; en revanche, l'intensité  $i$  du courant subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote<sup>3</sup> au point d'abscisse  $t = \tau$ .

- La charge du condensateur correspond à un régime transitoire (le courant dans le circuit varie). Lorsque le condensateur est chargé ( $t \rightarrow \infty$ ), le régime permanent est atteint (le courant dans le circuit est constant) : on a alors  $u_C = E$  et  $i = 0$  (fig. 4).

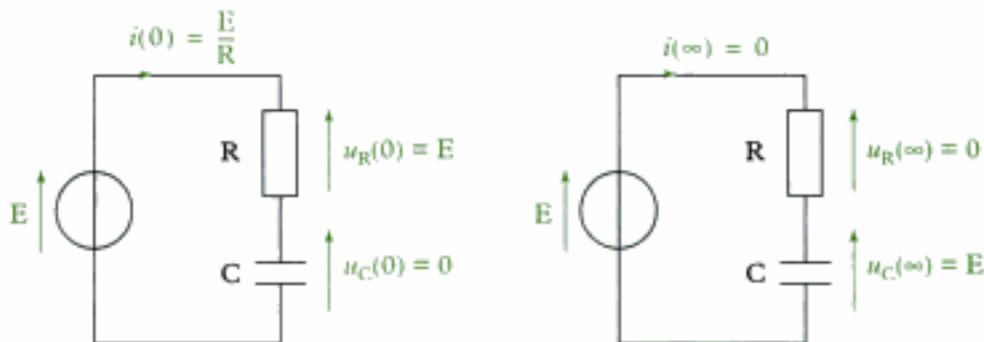


Fig. 4 - État du circuit quand  $t = 0$  et quand  $t \rightarrow \infty$ .

### Application 2 Démonstration des propriétés de la tangente

Démontrer que la tangente de la courbe  $u_C(t)$  à l'origine des temps coupe l'axe asymptote au point d'abscisse  $t = \tau$ .

#### Solution

Lors de la charge, la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur a pour expression :

$$u_C = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

La courbe  $u_C(t)$  admet donc une asymptote horizontale d'équation  $u_C = E$ . La pente de la tangente à l'origine est donnée par la dérivée à  $t = 0$  :

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ d'où : } \frac{du_C}{dt}(t=0) = \frac{E}{\tau}.$$

L'équation de la tangente à l'origine est alors :

$$y = \frac{E}{\tau} t, \text{ d'où : } y = E \text{ pour } t = \tau.$$

La tangente de la courbe  $u_C(t)$  à l'origine des temps coupe l'axe asymptote au point d'abscisse  $t = \tau$ . (On pourrait faire la même étude pour l'intensité.)

### A.1.5 - Étude énergétique

- Lors de la charge du condensateur, l'addition des tensions dans le circuit étudié s'écrit :

$$E = u_R + u_C = Ri + u_C.$$

Pour passer à une égalité en puissance<sup>1</sup>, on multiplie par  $i$  :

$$Ei = Ri^2 + u_C i,$$

$$\text{soit } ^2: Ei = Ri^2 + Cu_C \frac{du_C}{dt} = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt}.$$

- Le terme  $Ei$  est la puissance  $P_g$  positive fournie par le générateur de tension idéal de fém  $E$ .
- Le terme  $Ri^2$  est la puissance  $P_J$  positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$ .

1. Le générateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique et le condensateur sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

2. On a :  $i = C \frac{du_C}{dt}$ .

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$$

– Le terme  $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$  est la puissance positive reçue par le condensateur et emmagasinée dans la capacité C sous forme électrostatique<sup>1</sup>.

1. L'énergie électrostatique  $E_{elec}$  d'un condensateur est :

$$E_{elec} = \frac{1}{2}Cu_C^2.$$

2. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{totale fournie} = P_{totale dissipée}$$

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et sert à augmenter l'énergie du condensateur<sup>2</sup> :

$$P_g = P_J + \frac{dE_{elec}}{dt}. \quad (1)$$

• En intégrant l'égalité (1) entre l'instant  $t = 0$  (fermeture de l'interrupteur K) et l'instant  $t$ , on obtient l'égalité (2) traduisant les transferts d'énergie :

$$E_g = E_J + \Delta E_{elec}. \quad (2)$$

– L'énergie électrique  $E_g$  fournie par le générateur entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t$  est égale à :

$$E_g = \int_0^t P_g dt = \int_0^t E_i dt = E \int_0^t i dt, \text{ avec } i dt = C du_C.$$

On en déduit donc :

$$E_g = CE \int_0^{u_C(t)} du_C = CE u_C(t).$$

– L'énergie électrostatique  $\Delta E_{elec}$  emmagasinée dans la capacité C entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t$  est égale à :

$$\Delta E_{elec} = \int_0^t \frac{dE_{elec}}{dt} dt = E_{elec}(t) - E_{elec}(0) = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2.$$

– D'après l'équation (2), l'énergie  $E_J$  dissipée par effet Joule dans la résistance R entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t$  est égale à :

$$E_J = E_g - \Delta E_{elec} = Cu_C(t) \left( E - \frac{1}{2}u_C(t) \right).$$

Quand le condensateur est totalement chargé, la tension à ses bornes est  $u_C = E$ . D'après les expressions précédentes, au cours de la charge :

- le générateur a fourni l'énergie :  $E_g = CE^2$  ;
- le condensateur a emmagasiné l'énergie :  $\Delta E_{elec} = \frac{1}{2}CE^2$  ;
- le conducteur ohmique a dissipé l'énergie<sup>3</sup> :  $E_J = \frac{1}{2}CE^2$ .

Au cours de la charge, la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur<sup>4</sup> est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et l'autre moitié est emmagasinée sous forme électrostatique dans le condensateur.

3. Au cours de la charge, l'énergie dissipée par effet Joule ne dépend pas de la résistance R du conducteur ohmique. Elle ne dépend que de la capacité C du condensateur.

4. Lorsque le condensateur est chargé, le générateur ne fournit plus d'énergie au circuit (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert).

### Application 3 Énergie dissipée par effet Joule

Déterminer, par un calcul direct, l'expression de l'énergie  $E_J$  dissipée par effet Joule dans la résistance R en fonction du temps  $t$ . Montrer sa cohérence avec celle donnée dans le cours.

#### Solution

- La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R est :

$$P_J = Ri^2, \text{ avec } i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{T}} \text{ (voir § A.1.3), d'où : } P_J = \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{T}}.$$

L'énergie dissipée par effet Joule entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t$  vaut donc :

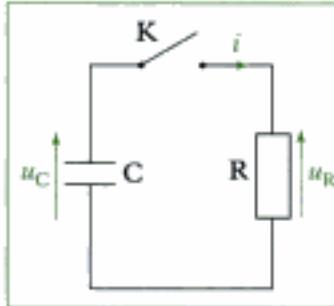
$$E_J = \int_0^t P_J dt = \frac{E^2}{R} \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt, \text{ avec } \tau = RC \text{ et } \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{\tau}{2} \left( e^{-\frac{2t}{\tau}} - 1 \right), \text{ d'où : } E_J = \frac{1}{2} CE^2 \left( 1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right).$$

- L'expression de l'énergie  $E_J$  en fonction de la tension  $u_C$  est :

$$E_J = Cu_C \left( E - \frac{1}{2} u_C \right), \text{ avec } u_C = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ (voir § A.1.2).}$$

On obtient donc finalement :

$$E - \frac{1}{2} u_C = \frac{1}{2} E \left( 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{et} \quad E_J = \frac{1}{2} CE^2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \left( 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{1}{2} CE^2 \left( 1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right).$$



**Fig. 5** - Montage pour étudier la décharge d'un condensateur dans un circuit RC série.

1. On aurait pu aussi étudier le condensateur en convention récepteur et le conducteur ohmique en convention générateur. On aurait eu alors :

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad u_R = -Ri,$$

ce qui aurait conduit à la même relation entre  $u_R$  et  $u_C$ . L'étude du montage ne dépend pas de la convention choisie.

## A.2. Décharge du condensateur

### A.2.1 - Montage expérimental

- Pour étudier la décharge d'un condensateur de capacité  $C$  à travers un conducteur ohmique de résistance  $R$ , on réalise le montage schématisé sur la figure 5 :
  - le condensateur a été chargé sous la tension  $U_0$  constante ;
  - pour  $t < 0$ , la tension aux bornes du condensateur chargé est égale à  $U_0$  et l'interrupteur K est ouvert ;
  - à l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur K.
- Dans ce circuit, on note  $u_C$  la tension aux bornes du condensateur,  $i$  l'intensité du courant qu'il fournit et  $u_R$  la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le condensateur est étudié en convention générateur (attention au signe) et le conducteur ohmique en convention récepteur<sup>1</sup>. On a donc :

$$u_R = Ri \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt} = -C \frac{du_C}{dt}, \text{ d'où : } u_R = -RC \frac{du_C}{dt}.$$

### A.2.2 - Évolution de la tension $u_C$

#### • Équation différentielle vérifiée par la tension $u_C$

- Pour  $t < 0$ , l'interrupteur K est ouvert : l'intensité  $i$  est nulle, ainsi que la tension  $u_R$ . La tension E aux bornes du condensateur se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K.
- Pour  $t \geq 0$ , la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et on a :

$$u_C = u_R, \text{ soit : } u_C - u_R = 0.$$

La tension  $u_C$  aux bornes d'un condensateur de capacité  $C$  se déchargeant dans une résistance  $R$  vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

La constante de temps du circuit RC est encore égale à  $\tau = RC$ .

#### • Expression de la tension $u_C$

Le second membre étant nul, la solution générale de l'équation différentielle est la solution  $u_1$  de l'équation homogène du § A.1 :

$$u_C = u_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur est continue. À l'instant  $t = 0$ , la condition initiale sur la tension s'écrit :  $u_C(t=0) = U_0$ , d'où :  $A = U_0$ .

1. Lorsque la décharge du condensateur est terminée ( $t \rightarrow \infty$ ), la tension  $u_C$  à ses bornes est nulle (car  $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$ ).

2. En revanche, le sens du courant change, car le condensateur est étudié en convention récepteur pendant la charge et en convention générateur pendant la décharge.

3. Pour les deux courbes, l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

4. Le condensateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique est étudié en convention récepteur : on fait donc apparaître la puissance reçue.

5. On a :  $i = -C \frac{du_C}{dt}$ .

6. Le condensateur se comporte alors comme un générateur dans le circuit.

7. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}$$

La tension  $u_C$  aux bornes d'un condensateur de capacité  $C$  se déchargeant dans une résistance  $R$  a pour expression<sup>1</sup> :

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

### A.2.3 - Évolution de l'intensité $i$

L'intensité  $i$  du courant dans le circuit a donc pour expression :

$$i = -C \frac{du_C}{dt}, \text{ soit } i = \frac{CU_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La loi de décroissance du courant est la même lors de la charge et lors de la décharge du condensateur<sup>2</sup>.

### A.2.4 - Représentation graphique

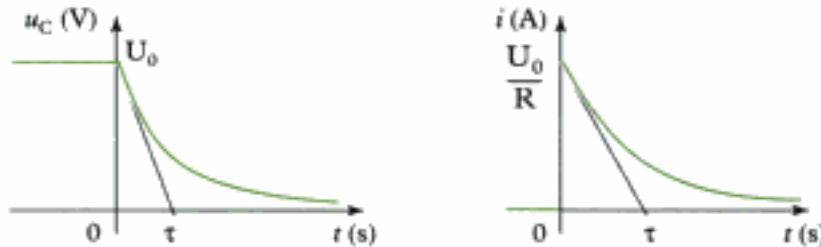


Fig. 6 - Évolution de  $u_C$  et de  $i$  en fonction du temps.

- On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de  $u_C$  et de  $i$  (fig. 6). La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur est continue ; en revanche, l'intensité  $i$  du courant subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote<sup>3</sup> au point d'abscisse  $t = \tau$ .
- La décharge du condensateur correspond à un régime transitoire. Lorsque le régime permanent est atteint, on a alors :  $u_C = 0$  et  $i = 0$ .

### A.2.5 - Étude énergétique

- Lors de la décharge du condensateur, on a :

$$u_C = u_R = Ri.$$

Pour passer à une égalité en puissance<sup>4</sup>, on multiplie par  $i$  :

$$u_C i = Ri^2, \text{ soit } -Cu_C \frac{du_C}{dt} = -\frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt} = Ri^2.$$

- Le premier terme est la puissance  $-\frac{dE_{\text{élec}}}{dt}$  positive fournie par le condensateur<sup>5</sup>.
- Le terme  $Ri^2$  est la puissance  $P_J$  positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$ .

La puissance fournie par le condensateur correspond à une diminution de l'énergie électrostatique emmagasinée. Elle est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique<sup>7</sup> :

$$-\frac{dE_{\text{élec}}}{dt} = P_J.$$

1. L'énergie initiale du condensateur est :

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C U_0^2.$$

2. L'énergie dissipée par effet Joule ne dépend pas de la résistance R du conducteur ohmique.

Quand le condensateur est déchargé ( $U_C = 0$ ), son énergie est nulle : il a donc fourni toute son énergie au circuit<sup>1</sup>.

Au cours de la décharge, l'énergie électrostatique  $E_{\text{elec}}$  initialement emmagasinée dans le condensateur est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique<sup>2</sup>.

## B. Étude d'un circuit RL série

### B.1. Établissement du courant dans la bobine

#### B.1.1 - Montage expérimental

- Pour étudier l'établissement du courant dans une bobine d'inductance L à travers un conducteur ohmique de résistance R<sup>3</sup>, on réalise le montage schématisé sur la figure 7 :

- un générateur idéal de tension continue de fém E est branché aux bornes du circuit RL ;
- pour  $t < 0$ , l'interrupteur K est ouvert ;
- à l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

- Dans ce circuit, on note  $i$  l'intensité du courant,  $u_R$  la tension aux bornes de l'inductance L et  $u_L$  la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = R i \quad \text{et} \quad u_L = L \frac{di}{dt}.$$

#### B.1.2 - Évolution de l'intensité $i$

##### • Équation différentielle vérifiée par l'intensité $i$

- Pour  $t < 0$ , l'interrupteur K est ouvert : l'intensité  $i$  est nulle, ainsi que les tensions  $u_R$  et  $u_L$ . La tension E aux bornes du générateur de tension se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K.

- Pour  $t > 0$ , la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et la loi d'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L, \text{ soit : } E = R i + L \frac{di}{dt}.$$

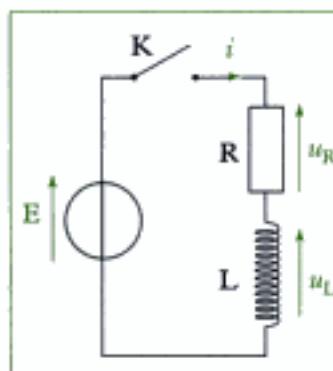
L'intensité  $i$  du courant traversant un circuit RL série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}.$$

##### • Constante de temps du circuit

Les termes  $\frac{E}{R}$  et  $i$  sont des intensités exprimées en ampère (A). L'équation différentielle est homogène si le terme  $\frac{L}{R} \frac{di}{dt}$  a la même dimension. Or, la dérivée  $\frac{di}{dt}$  s'exprime en  $A \cdot s^{-1}$  ; le rapport  $\frac{L}{R}$  a donc la dimension d'un temps.

3. La résistance R représente la résistance totale du circuit, incluant éventuellement la résistance interne  $r$  de la bobine si celle-ci est réelle.



**Fig. 7** - Montage pour étudier l'établissement du courant dans un circuit RL série.

**Définition 2**

On définit la constante de temps  $\tau$  du circuit RL par le rapport :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$\tau$  constante de temps en seconde(s)

L inductance en henry (H)

R résistance en ohm ( $\Omega$ )

### • Solution de l'équation différentielle

Pour  $t > 0$ , il faut résoudre l'équation différentielle avec second membre :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$$

Par analogie avec l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C$  au § A.1.2, la solution générale  $i$  de cette équation s'écrit<sup>1</sup> :

$$i = i_1 + i_2 = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

### • Application des conditions de continuité

L'intensité  $i$  du courant dans l'inductance est continue. À l'instant  $t = 0$ , la condition initiale sur l'intensité s'écrit :  $i(t = 0) = 0$ . On en déduit donc, en posant  $t = 0$  dans la solution générale de l'équation différentielle :

$$0 = A + \frac{E}{R}, \text{ soit : } A = -\frac{E}{R}.$$

1. Dans les deux cas, l'équation différentielle est de la forme :

$$t \frac{dy}{dt} + y = \text{cte.}$$

2. Lorsque le courant est établi ( $t \rightarrow \infty$ ), l'intensité  $i$  dans le circuit vaut  $\frac{E}{R}$  (car  $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$ ). Cette intensité maximale ne dépend pas des conditions initiales. Elle correspond à la solution particulière constante  $i_p$ . La tension aux bornes du conducteur ohmique est alors  $E$ .

3. Lorsque le courant est établi ( $t \rightarrow \infty$ ), la tension  $u_L$  aux bornes de l'inductance est nulle.

L'intensité  $i$  du courant traversant un circuit RL série soumis à l'échelon de tension  $E$  a pour expression<sup>2</sup> :

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{L}{R} \text{ constante de temps (s).}$$

### B.1.3 - Évolution de la tension $u_L$

La tension  $u_L$  aux bornes de l'inductance est proportionnelle à la dérivée de l'intensité  $i$  du courant :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \text{ soit : } u_L = \frac{LE}{R\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La tension  $u_L$  aux bornes de l'inductance est maximale à la fermeture de l'interrupteur K. Pendant l'établissement du courant, elle décroît avec le temps ; lorsque le courant est établi, l'inductance se comporte comme un fil<sup>3</sup>.

### B.1.4 - Représentation graphique

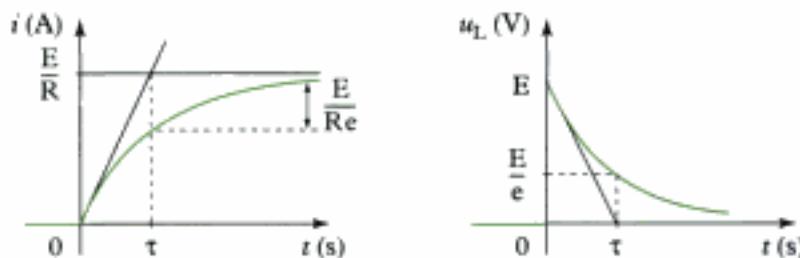


Fig. 8 - Évolution de  $i$  et de  $u_L$  en fonction du temps.

- On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de  $i$  et de  $u_L$  (fig. 8). L'intensité  $i$  du courant dans l'inductance est continue ; en revanche,

1. Pour l'intensité  $i$ , l'axe asymptote est la droite horizontale  $i_L = \frac{E}{R}$ . Pour la tension  $u_L$ , l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

la tension  $u_L$  à ses bornes subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote<sup>1</sup> au point d'abscisse  $t = \tau$ .

- L'établissement du courant correspond à un régime transitoire. Lorsque le régime permanent est atteint, on a alors :  $i = \frac{E}{R}$  et  $u_L = 0$  (fig. 9).

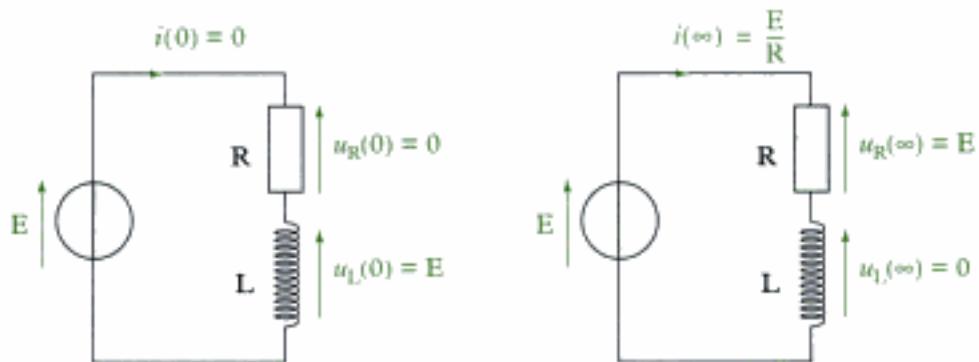


Fig. 9 - État du circuit quand  $t = 0$  et quand  $t \rightarrow +\infty$ .

#### Application 4 Établissement du courant dans une bobine

On établit le courant dans une bobine idéale d'inductance  $L = 100 \text{ mH}$  à travers une résistance  $R = 100 \Omega$  grâce à un générateur idéal de tension de fém  $E = 5 \text{ V}$ . Calculer la constante de temps  $\tau$  du circuit  $RL$ , l'intensité  $i$  lorsque le courant est établi dans le circuit et l'instant  $t$  au bout duquel l'intensité vaut 90 % de sa valeur finale.

#### Solution

- La constante de temps  $\tau$  du circuit  $RL$  est alors :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{100} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \text{ c'est-à-dire } \tau = 1 \text{ ms.}$$

- Lorsque le courant est établi dans le circuit, la bobine se comporte comme un fil et la tension du générateur se retrouve aux bornes du conducteur ohmique :

$$u_R = E = Ri, \text{ d'où : } i = \frac{E}{R} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ A c'est-à-dire } i = 50 \text{ mA.}$$

- D'après l'expression déterminée au § B.1.2, l'intensité  $i$  vaut 90 % de sa valeur si :

$$\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0,9 \frac{E}{R}, \text{ d'où : } e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,1 = 10^{-1}, \text{ soit : } t = \tau \ln(10) = 2,3 \text{ ms.}$$

#### B.1.5 - Étude énergétique

- Lors de l'établissement du courant, l'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Pour passer à une égalité en puissance<sup>2</sup>, on multiplie par  $i$  :

$$Ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}, \text{ soit : } Ei = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}.$$

2. Le générateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

Le terme  $Ei$  est la puissance  $P_g$  positive fournie par le générateur idéal de fém  $E$ .

Le terme  $Ri^2$  est la puissance  $P_J$  positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$ .

1. L'énergie magnétique  $E_{\text{mag}}$  d'une bobine est :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}L i^2.$$

2. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}.$$

3. L'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine dépend de la résistance  $R$ . Elle est d'autant plus faible que  $R$  est grande.

- Le dernier terme est la puissance  $\frac{dE_{\text{mag}}}{dt}$  positive reçue par la bobine et emmagasinée dans l'inductance  $L$  sous forme magnétique<sup>1</sup>.

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et sert à augmenter l'énergie de la bobine<sup>2</sup> :

$$P_g = P_J + \frac{dE_{\text{mag}}}{dt}.$$

- Quand le courant est établi, l'intensité dans le circuit est  $i = \frac{E}{R}$ . En régime permanent, l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine n'augmente plus :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2 = \text{cte}, \text{ d'où : } \frac{dE_{\text{mag}}}{dt} = 0.$$

La puissance électrique fournie par le générateur et la puissance dissipée par effet Joule sont donc égales et valent :

$$P_g = P_J = \frac{E^2}{R}.$$

Lorsque le courant est établi, l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine reste constante<sup>3</sup>. L'énergie électrique fournie par le générateur est alors entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

## B.2. Arrêt du courant dans la bobine

### B.2.1 - Montage expérimental

- Pour étudier l'arrêt du courant lors de la fermeture d'un circuit comportant une bobine d'inductance  $L$  et un conducteur ohmique de résistance  $R$ , on réalise le montage schématisé sur la figure 10 :

- un générateur idéal de tension continue de fém  $E$ , branché aux bornes du circuit  $RL$ , a permis d'établir un courant permanent d'intensité  $I_0$  positive<sup>4</sup> ;
- pour  $t < 0$ , l'interrupteur  $K$  relie le circuit  $RL$  au générateur (position 1) ; à l'instant  $t = 0$ , on bascule l'interrupteur  $K$  en position 2 : le circuit  $RL$  est alors en court-circuit.

- Dans ce circuit, on note  $i$  l'intensité du courant,  $u_L$  la tension aux bornes de l'inductance  $L$  et  $u_R$  la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = Ri \quad \text{et} \quad u_L = L \frac{di}{dt}.$$

### B.2.2 - Évolution de l'intensité $i$

#### • Équation différentielle vérifiée par l'intensité $i$

- Pour  $t < 0$ , l'interrupteur  $K$  est en position 1 :  $i = I_0$ ,  $u_R = RI_0$  et  $u_L = 0$ .
- Pour  $t > 0$ , la tension aux bornes de l'interrupteur  $K$  est nulle et la loi des mailles s'écrit :

$$0 = u_R + u_L, \text{ soit : } 0 = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

L'intensité  $i$  du courant traversant un circuit  $RL$  série en court-circuit vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0.$$

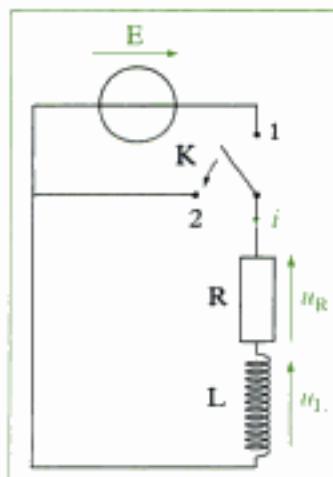


Fig. 10 - Montage pour étudier l'arrêt du courant dans un circuit  $RL$  série.

$$4. \text{ On a : } I_0 = \frac{E}{R}.$$

La constante de temps du circuit RL est encore égale à  $\tau = \frac{L}{R}$ .

#### • Expression de l'intensité $i$

Le second membre étant nul, la solution générale de l'équation différentielle est la solution  $i_1$  de l'équation homogène :

$$i = i_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

L'intensité  $i$  du courant dans l'inductance est continue. À l'instant  $t = 0$ , la condition initiale sur l'intensité s'écrit :  $i(t = 0) = I_0$ , d'où :  $A = I_0$ .

1. L'intensité  $i$  tend alors vers 0.

L'intensité  $i$  du courant traversant un circuit RL série en court-circuit a pour expression<sup>1</sup> :

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

#### B.2.3 - Évolution de la tension $u_L$

La tension  $u_L$  aux bornes de l'inductance a donc pour expression :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \text{ soit : } u_L = -\frac{LI_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

2. En revanche, la tension aux bornes de l'inductance change de signe.

La loi de décroissance de la tension est la même lors de l'établissement du courant dans le circuit RL et lors de son arrêt<sup>2</sup>.

#### B.2.4 - Représentation graphique

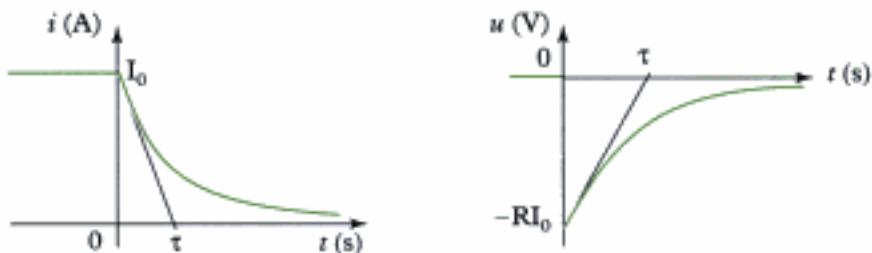


Fig. 11 - Évolution de  $i$  et de  $u_L$  en fonction du temps.

3. Pour les deux courbes, l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

• On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de  $i$  et de  $u_L$  (fig. 11). L'intensité  $i$  du courant dans l'inductance est continue ; en revanche, la tension  $u_L$  à ses bornes subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote<sup>3</sup> au point d'abscisse  $t = \tau$ .

• L'arrêt du courant correspond à un régime transitoire. Lorsque le régime permanent est atteint, on a alors :  $i = 0$  et  $u_L = 0$ .

#### B.2.5 - Étude énergétique

Lors de l'arrêt du courant, la loi des mailles s'écrit :

$$0 = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

4. Le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention-récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

Pour passer à une égalité en puissance<sup>4</sup>, on multiplie par  $i$  :

$$0 = Ri^2 + L i \frac{di}{dt}, \text{ soit : } -\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt} = Ri^2.$$

- Le terme  $\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}$  est la puissance  $\frac{dE_{mag}}{dt}$  négative reçue par la bobine,

donc  $-\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}$  est la puissance  $-\frac{dE_{mag}}{dt}$  positive fournie par la bobine<sup>1</sup>.

- Le terme  $Ri^2$  est la puissance  $P_J$  positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R.

**1.** La bobine se comporte alors comme un générateur dans le circuit.

**2.** Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}$$

**3.** L'énergie initiale de la bobine est :

$$E_{mag} = \frac{1}{2}Li_0^2$$

La puissance fournie par la bobine correspond à une diminution de l'énergie magnétique emmagasinée. Elle est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique<sup>2</sup> :

$$-\frac{dE_{mag}}{dt} = P_J$$

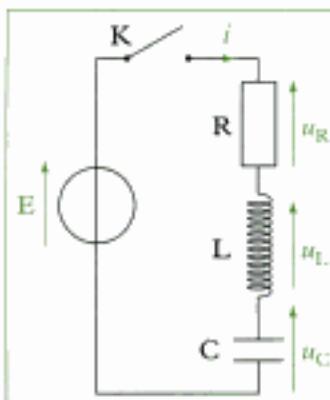
À l'arrêt du courant ( $i = 0$ ), l'énergie de la bobine est nulle : celle-ci a donc fourni toute son énergie au circuit<sup>3</sup>.

Au cours de l'arrêt du courant, l'énergie magnétique  $E_{mag}$  initialement emmagasinée dans la bobine est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

## C. Étude d'un circuit RLC série

### C.1. Montage expérimental

**4.** La résistance R représente la résistance totale du circuit, incluant éventuellement la résistance interne r de la bobine si celle-ci est réelle.



**Fig. 12** - Montage pour étudier la charge d'un condensateur dans un circuit RLC série.

• Pour étudier la charge d'un condensateur de capacité C à travers une bobine d'inductance L et un conducteur ohmique de résistance R<sup>4</sup>, on réalise le montage schématisé sur la figure 12 :

- un générateur idéal de tension continue de fém E est branché aux bornes du circuit RLC ;
- pour  $t < 0$ , le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert ;
- à l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

• Dans ce circuit, on note  $i$  l'intensité du courant,  $u_C$  la tension aux bornes du condensateur,  $u_L$  la tension aux bornes de l'inductance et  $u_R$  la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique, le condensateur et la bobine sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = Ri \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt} \text{ avec } i = C \frac{du_C}{dt}, \text{ d'où : } u_R = RC \frac{du_C}{dt} \text{ et } u_L = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}.$$

### C.2. Évolution de la tension $u_C$

#### C.2.1 - Équation différentielle vérifiée par $u_C$

- Pour  $t < 0$ , l'interrupteur K est ouvert : l'intensité  $i$  est nulle, ainsi que les tensions  $u_R$ ,  $u_L$  et  $u_C$ . La tension E aux bornes du générateur de tension se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K.

- Pour  $t > 0$ , la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et la loi d'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L + u_C.$$

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

### C.2.2 - Résolution de l'équation différentielle

Pour  $t > 0$ , il faut résoudre une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre.

#### (1) Méthode de résolution mathématique

La solution générale de cette équation est la somme :

- de la solution générale  $u_1$  de l'équation homogène associée :

$$LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + RC \frac{du_1}{dt} + u_1 = 0 ;$$

- d'une solution particulière  $u_2$  de l'équation.

#### (2) Solution particulière constante

Comme le second membre de l'équation est constant, on cherche comme solution particulière une fonction constante :

$$LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = E \text{ avec } \frac{d^2 u_2}{dt^2} = \frac{du_2}{dt} = 0, \text{ d'où : } u_2 = E.$$

#### (3) Solution de l'équation homogène

On cherche une solution de l'équation homogène sous la forme :

$$u_1 = Ae^{rt}, \text{ où A est une constante.}$$

L'équation homogène s'écrit alors :

$$\frac{du_1}{dt} = Are^{rt} = ru_1 \text{ et } \frac{d^2 u_1}{dt^2} = r^2 u_1, \text{ soit : } LC r^2 u_1 + RC ru_1 + u_1 = 0.$$

En simplifiant<sup>1</sup> par  $u_1$ , on obtient alors le *polynôme caractéristique* en  $r$  :

$$LCr^2 + RC r + 1 = 0, \text{ soit : } r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0.$$

Ce polynôme admet deux solutions<sup>2</sup>, éventuellement confondues. Pour les déterminer, on introduit les variables réduites du problème.

### C.2.3 - Utilisation des variables réduites

#### • Pulsation propre

##### Définition 3

On définit la pulsation propre  $\omega_0$  du circuit LC par la relation<sup>3</sup> :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\omega_0$	pulsation propre en $s^{-1}$ (ou $\text{rad} \cdot s^{-1}$ ) <sup>4</sup>
L	inductance en henry (H)
C	capacité en farad (F)

1. On élimine ainsi la solution triviale  $u_1 = 0$  qui ne correspond pas à la réalité physique.

2. Ce qui est logique, car l'équation différentielle est du second ordre.

3. On retient plus aisément l'expression :  $LC\omega_0^2 = 1$ .

4. La pulsation s'exprime en  $s^{-1}$  ou en  $\text{rad} \cdot s^{-1}$ . L'unité rad, définie comme le rapport de deux longueurs, est sans dimension. Les unités  $s^{-1}$  ou  $\text{rad} \cdot s^{-1}$  sont donc équivalentes.

5. L'étude des oscillations libres du circuit RLC série a été effectuée en Terminale S. On caractérise l'évolution temporelle du système par la période propre  $T_0$  ou la pulsation propre  $\omega_0$  telles que :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Elle correspond à la pulsation des oscillations du système en l'absence d'amortissement ( $R = 0$ )<sup>5</sup>.

### Application 5 Détermination de l'unité de $\omega_0$

En utilisant les constantes de temps des circuits RC et RL, montrer que la pulsation propre  $\omega_0$  s'exprime en  $s^{-1}$ .

#### Solution

Les constantes de temps des circuits RC et RL s'écrivent :

$$\tau_{RC} = RC \text{ et } \tau_{RL} = \frac{L}{R}, \text{ d'où : } \tau_{RC} \times \tau_{RL} = LC = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

Le produit LC s'exprime en  $s^2$ , donc la pulsation propre  $\omega_0$  s'exprime en  $s^{-1}$ .

#### • Facteur d'amortissement

##### Définition 4

1. Le facteur d'amortissement  $\lambda$  est directement lié à la constante de temps  $\tau_{RL}$  du circuit RL.

$$\lambda = \frac{R}{2L}$$

$\lambda$  facteur d'amortissement en  $s^{-1}$

R résistance en ohm ( $\Omega$ )

L inductance en henry (H)

2. Le facteur d'amortissement est parfois noté  $m$  ou  $\xi$ .

Plus le facteur d'amortissement  $\lambda$  est grand, plus le circuit est amorti. Un circuit non amorti correspond à  $\lambda = 0$ , donc à  $R = 0$  (circuit LC série).

– Afin d'avoir des grandeurs sans dimension, on introduit le coefficient d'amortissement  $\alpha$  tel que<sup>2</sup> :

$$\lambda = \alpha \omega_0, \text{ soit : } \alpha = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{1}{2}RC\omega_0 \text{ ou } \alpha = \frac{R}{2\sqrt{L}}.$$

– Pour étudier les circuits, on introduit souvent le facteur de qualité Q, sans dimension, lié au coefficient d'amortissement  $\alpha$  par la relation :

$$\alpha = \frac{1}{2Q}, \text{ soit : } Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}.$$

#### • Écriture du polynôme caractéristique en variables réduites

En utilisant les variables réduites  $\omega_0$  et  $\lambda$  (ou  $\alpha$ ), le polynôme caractéristique en  $r$  associé à l'équation homogène s'écrit :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0.$$

Les deux expressions précédentes sont homogènes. Comme  $\lambda$  et  $\omega_0$  s'expriment en  $s^{-1}$ , les racines  $r_1$  et  $r_2$  du polynôme caractéristique s'expriment aussi en  $s^{-1}$ .

#### C.2.4 - Conditions de continuité

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur et l'intensité  $i$  du courant dans l'inductance sont continues. À l'instant  $t = 0$ , les conditions initiales sur la tension et l'intensité s'écrivent donc<sup>3</sup> :  $u_C(t = 0) = 0$  et  $i(t = 0) = 0$ .

Comme  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , la condition  $i(t = 0) = 0$  équivaut à :  $\frac{du_C}{dt}(t = 0) = 0$ .

Les deux conditions initiales permettant de résoudre le problème sont :

$$u_C(t = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du_C}{dt}(t = 0) = 0.$$

3. L'équation différentielle étant du second ordre, il faut connaître deux conditions initiales pour déterminer les deux constantes d'intégration :

- continuité de  $u_C$  à  $t = 0$ ;
- continuité de  $i$  à  $t = 0$ .

### C.2.5 - Les différents régimes solutions

On détermine les racines du polynôme caractéristique  $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$  en utilisant le discriminant réduit  $\Delta'$  :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 (\alpha^2 - 1).$$

Selon le signe de  $\Delta'$ , trois cas sont possibles.

- **Le régime apériodique :  $\Delta' > 0$ .**

Cette condition est réalisée pour :

$$\lambda > \omega_0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \Leftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

1. Les racines peuvent aussi s'écrire :

$$r = -\omega_0(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}).$$

Le polynôme caractéristique admet alors deux racines négatives<sup>1</sup> :

$$r_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

On en déduit la solution générale de l'équation homogène :

$$u_1 = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$u_C = u_1 + u_2, \text{ soit } u_C = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + E.$$

D'après les conditions initiales, on a :

$$(u_C(t=0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 + E = 0) \text{ et } \left( \frac{du_C}{dt}(t=0) = 0 \Rightarrow r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0 \right).$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues fournit :

$$A_1 = \frac{r_2}{r_1 - r_2} E \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{r_1}{r_1 - r_2} E.$$

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur vaut donc (fig. 13) :

$$u_C(t) = E \left( \frac{r_2}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + 1 \right).$$

Si le coefficient d'amortissement  $\alpha$  du circuit RLC série est strictement supérieur à 1 ( $\alpha > 1$ ), l'oscillateur est fortement amorti : le régime est dit **apériodique**.

- **Le régime critique :  $\Delta' = 0$ .**

Cette condition est réalisée pour :

$$\lambda = \omega_0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \Leftrightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_c \text{ (résistance critique).}$$

Le polynôme caractéristique admet alors une racine double négative :

$$r = -\lambda = -\omega_0.$$

On en déduit la solution générale de l'équation homogène :

$$u_1 = (At + B)e^{-\lambda t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$u_C = u_1 + u_2, \text{ soit } u_C = (At + B)e^{-\lambda t} + E.$$

D'après les conditions initiales, on a :

$$(u_C(t=0) = 0 \Rightarrow B + E = 0) \quad \text{et} \quad \left( \frac{du_C}{dt}(t=0) = 0 \Rightarrow A - \lambda B = 0 \right).$$

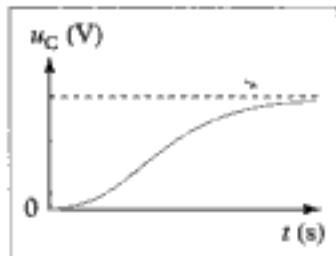


Fig. 13 - Allure de la tension en régime apériodique.

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues fournit :

$$B = -E \text{ et } A = -\lambda E.$$

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur vaut donc (fig. 14) :

$$u_C(t) = E[1 - (\lambda t + 1)e^{-\lambda t}].$$

Si le coefficient d'amortissement  $\alpha$  du circuit RLC série est égal à 1 ( $\alpha = 1$ ), le régime est dit apériodique critique ou **critique**.

#### • Le régime pseudo-périodique : $\Delta' < 0$ .

Cette condition est réalisée pour :

$$\lambda < \omega_0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \Leftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Le polynôme caractéristique admet alors deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative. En posant  $\omega^2 = -\Delta'$ , il vient :

$$r_1 = -\lambda - j\omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda + j\omega.$$

On en déduit la solution générale de l'équation homogène :

$$u_1 = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] e^{-\lambda t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$u_C = u_1 + u_2, \text{ soit } u_C = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] e^{-\lambda t} + E.$$

D'après les conditions initiales, on a :

$$(u_C(t=0) = 0 \Rightarrow A + E = 0) \quad \text{et} \quad \left( \frac{du_C}{dt}(t=0) = 0 \Rightarrow -\lambda A + \omega B = 0 \right).$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues fournit :

$$A = -E \quad \text{et} \quad B = \frac{\lambda}{\omega} E.$$

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur vaut donc (fig. 15) :

$$u_C(t) = E \left\{ 1 - e^{\lambda t} \left[ \cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right] \right\}.$$

Si le coefficient d'amortissement  $\alpha$  du circuit RLC série est strictement inférieur à 1 ( $\alpha < 1$ ), l'oscillateur est faiblement amorti : le régime est dit oscillatoire amorti ou **pseudo-périodique**. La pseudo-pulsation  $\omega$  des oscillations vaut<sup>1</sup> :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \text{où } \omega_0 \text{ est la pulsation propre } (\omega < \omega_0).$$

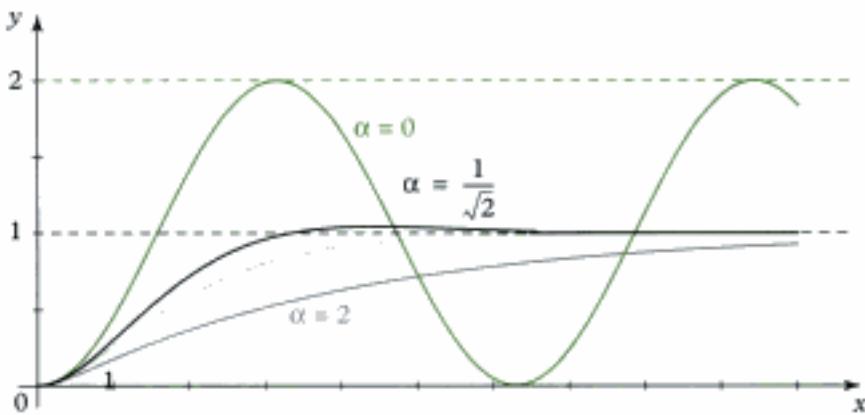
#### Remarque

Si  $\alpha = 0$ , on retrouve bien les oscillations non amorties du circuit RLC série.

### C.2.6 - Le réseau de graphes

La figure 16 montre l'évolution du régime d'oscillations en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement  $\alpha$ . Pour simplifier, les graphes sont tracés en coordonnées  $x$  et  $y$  définies par :

$$x = \omega_0 t \quad \text{et} \quad y = \frac{u_C}{E}.$$



**Fig. 16** - Tracés des graphes pour  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2$ .

### C.3. Évolution de l'intensité $i$

1. Les détails des calculs, longs mais simples, ne sont pas donnés ici.

- On obtient l'intensité  $i$  du courant en dérivant la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur<sup>1</sup> :

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

- En régime apériodique ( $\alpha > 1$ ) :

$$i(t) = \mathbf{C} \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{E}}{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2} (\mathbf{e}^{\mathbf{r}_1 t} - \mathbf{e}^{\mathbf{r}_2 t}).$$

- En régime critique ( $\alpha = 1$ ) :

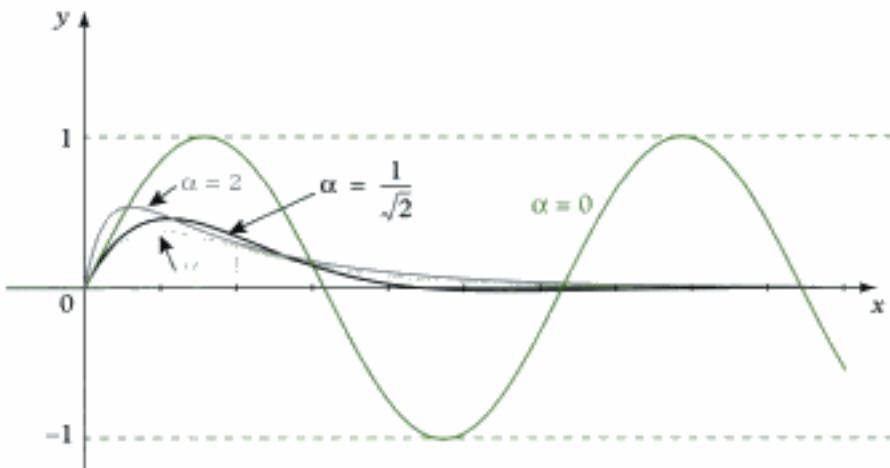
$$i(t) = \mathbf{C} \mathbf{E} \lambda^2 t \mathbf{e}^{-\lambda t}.$$

- En régime pseudo-périodique ( $\alpha < 1$ ) :

$$i(t) = \mathbf{C} \mathbf{E} \frac{\omega^2 + \lambda^2}{\omega} \mathbf{e}^{-\lambda t} \sin(\omega t).$$

- La figure 17 montre l'évolution du régime d'oscillations en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement  $\alpha$ . Pour simplifier, les graphes sont tracés en coordonnées  $x$  et  $y$  définies par :

$$x = \omega_0 t \quad \text{et} \quad y = \frac{i}{\mathbf{C} \mathbf{E} \omega_0} = \frac{i}{\mathbf{E} \sqrt{\mathbf{C}}}.$$



**Fig. 17** - Tracés des graphes pour  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2$ .

### Application 6 Équation différentielle vérifiée par l'intensité $i$

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité  $i$  du courant et préciser les conditions initiales permettant de résoudre cette équation.

#### Solution

- La loi d'addition des tensions s'écrit pour  $t > 0$  :

$$E = u_R + u_L + u_C, \text{ soit : } Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = E \text{ avec } i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Par dérivation, on obtient donc l'équation différentielle caractérisant l'évolution de l'intensité  $i$  au cours du temps :

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad \text{ou} \quad LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = 0.$$

Le polynôme caractéristique est le même que pour l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C$ . Quand  $u_C$  évolue suivant un régime pseudo-périodique (ou apériodique ou critique), alors  $i$  évolue aussi suivant un régime pseudo-périodique (ou apériodique ou critique).

- L'intensité  $i$  du courant dans l'inductance est continue, d'où la première condition initiale :

$$i(t=0) = 0.$$

Il faut aussi déterminer une condition sur la dérivée de  $i$ . À l'instant  $t = 0$ , la tension aux bornes du conducteur ohmique est nulle :  $u_R(t=0) = Ri(t=0) = 0$ . En outre, la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur est continue, d'où :  $u_C(t=0) = 0$ . D'après la loi d'addition des tensions, on obtient donc la seconde condition initiale :

$$u_L(t=0) = E \text{ avec } u_L(t=0) = L \frac{di}{dt}(t=0), \text{ soit : } \frac{di}{dt}(t=0) = \frac{E}{R}.$$

### C.4. Interprétation physique

Quel que soit le régime, la charge du condensateur correspond à un régime transitoire. Lorsque le condensateur est chargé ( $t \rightarrow \infty$ ), le régime permanent est atteint : on a alors  $u_C = E$  et  $i = 0$  (fig. 18).

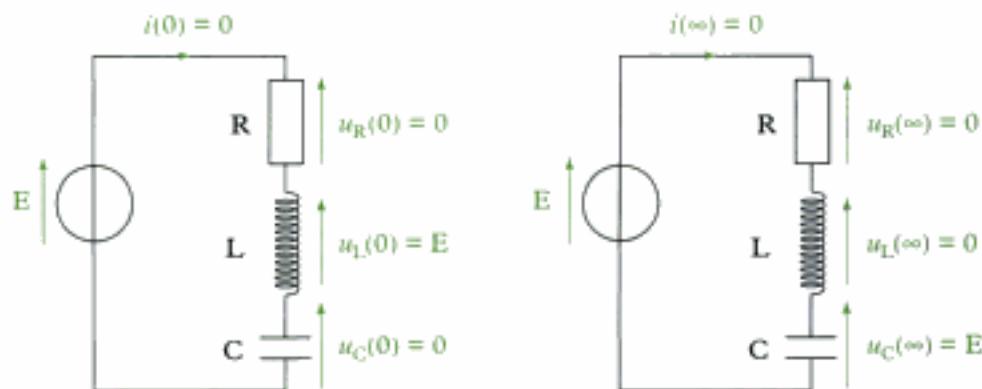


Fig. 18 - État du circuit quand  $t=0$  et quand  $t \rightarrow \infty$ .

### C.5. Étude énergétique

- Lors de la charge du condensateur, l'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C.$$

1. Le générateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique, la bobine et le condensateur sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

2. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}$$

Pour passer à une égalité en puissance<sup>1</sup>, on multiplie par  $i = C \frac{du_C}{dt}$  :

$$Ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + Cu_C \frac{du_C}{dt}.$$

– Le terme  $Ei$  est la puissance  $P_g$  positive fournie par le générateur idéal de fém  $E$ .

– Le terme  $Ri^2$  est la puissance  $P_J$  positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$ .

– Le terme  $\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}$  est la puissance  $\frac{dE_{\text{mag}}}{dt}$  positive ou négative reçue par la bobine correspondant aux variations de l'énergie emmagasinée dans l'inductance  $L$  sous forme magnétique.

– Le terme  $\frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt}$  est la puissance  $\frac{dE_{\text{elec}}}{dt}$  positive ou négative reçue par le condensateur correspondant aux variations de l'énergie emmagasinée dans la capacité  $C$  sous forme électrostatique.

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et sert à faire varier l'énergie de la bobine et l'énergie du condensateur<sup>2</sup> :

$$P_g = P_J + \frac{dE_{\text{mag}}}{dt} + \frac{dE_{\text{elec}}}{dt} \quad (1)$$

• En intégrant l'égalité (1) entre l'instant initial  $t = 0$  (fermeture de l'interrupteur  $K$ ) et l'instant final  $t \rightarrow \infty$ , on obtient l'égalité (2) traduisant les transferts d'énergie dans le circuit :

$$E_g = E_J + \Delta E_{\text{mag}} + \Delta E_{\text{elec}} \quad (2)$$

– L'énergie électrique  $E_g$  fournie par le générateur entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t$  est égale à (voir § A. 1. 5) :

$$E_g = \int_0^t P_g dt = E \int_0^t i dt = CE \int_0^{u_C(t)} du_C = CE u_C(t).$$

Quand le condensateur est totalement chargé, la tension  $u_C$  vaut  $E$  et le générateur a fourni l'énergie :

$$E_g = CE^2.$$

– L'intensité du courant est nulle à  $t = 0$  ; elle est de nouveau nulle quand  $t \rightarrow \infty$ . L'énergie magnétique  $\Delta E_{\text{mag}}$  emmagasinée dans l'inductance  $L$  entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t \rightarrow \infty$  est égale à :

$$\Delta E_{\text{mag}} = E_{\text{mag}}(\infty) - E_{\text{mag}}(0) = 0.$$

L'énergie magnétique emmagasinée par la bobine au début du régime transitoire est redonnée à la fin de ce régime lorsque le courant s'arrête.

– La tension aux bornes du condensateur croît de 0 à  $E$ . L'énergie électrostatique  $\Delta E_{\text{elec}}$  emmagasinée dans la capacité  $C$  entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t \rightarrow \infty$  est égale à :

$$\Delta E_{\text{elec}} = E_{\text{elec}}(\infty) - E_{\text{elec}}(0) = \frac{1}{2}CE^2.$$

– D'après l'équation (2), l'énergie  $E_J$  dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$  entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t \rightarrow \infty$  est égale à<sup>3</sup> :

$$E_J = E_g - \Delta E_{\text{elec}} - \Delta E_{\text{mag}} = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2.$$

3. Au cours de la charge, l'énergie dissipée par effet Joule ne dépend pas de la résistance  $R$  du conducteur ohmique. Elle ne dépend que de la capacité  $C$  du condensateur.

1. Lorsque le condensateur est chargé, le générateur ne fournit plus d'énergie au circuit (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert).

2. Au cours de la charge, lorsque le courant traverse le circuit, l'énergie de la bobine n'est pas nulle.

Au cours de la charge, la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur<sup>1</sup> est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et l'autre moitié est emmagasinée sous forme électrostatique dans le condensateur. L'énergie magnétique, nulle au début de la charge, est à nouveau nulle à la fin de la charge<sup>2</sup>.

## C.6. Analogie avec l'oscillateur linéaire

Dans un circuit RLC série, l'équation différentielle vérifiée par la charge  $q$  du condensateur s'écrit :

$$\mathbf{L}\ddot{q} + \mathbf{R}q + \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{C}} = \mathbf{E}, \text{ avec } \dot{q} = \frac{dq}{dt} = i \text{ et } \ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt}.$$

En mécanique, l'équation différentielle de l'oscillateur linéaire est :

$$m\ddot{x} + f\dot{x} = kx = 0, \text{ avec } \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v \text{ et } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Cette équation est formellement identique à celle de l'équation homogène de l'oscillateur électrique étudié précédemment. Bien que les oscillateurs électrique et mécanique correspondent à des situations physiques *a priori* très différentes, leurs comportements, décrits par un même « squelette algébrique », sont les mêmes. Le tableau ci-dessous définit les grandeurs analogues.

Grandes électriques		Grandes mécaniques	
charge du condensateur	$q$	déplacement de la masse	$x$
intensité du courant	$i$	vitesse de la masse	$v$
inductance propre	$L$	masse	$m$
résistance du circuit	$R$	coefficients de frottement	$f$
capacité du condensateur	$C$	inverse de la raideur du ressort	$\frac{1}{k}$
énergie magnétique	$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}L i^2$	énergie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$
énergie électrostatique	$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	énergie potentielle élastique	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$
pertes par effet Joule	$P_J = R i^2$	pertes par frottement	$P_f = fv^2$

On peut alors poser :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \lambda = \alpha\omega_0 = \frac{f}{2m}.$$

En fonction de la valeur de  $\alpha$ , on retrouve trois régimes d'oscillations : le régime apériodique ( $\alpha > 1$ ), le régime critique ( $\alpha = 1$ ) et le régime pseudo-périodique ( $\alpha < 1$ ).

# L'essentiel

## ✓ Étude d'un circuit RC série

- On définit la constante de temps  $\tau$  du circuit RC par le produit :

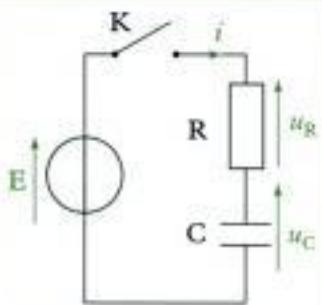
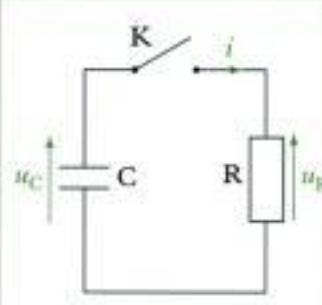
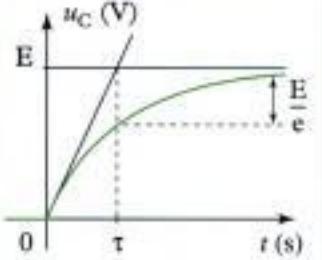
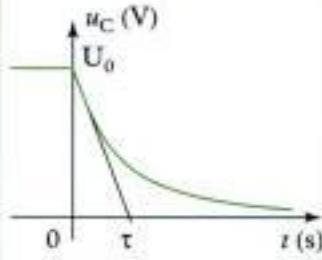
$$\tau_{RC} = RC$$

$\tau$  constante de temps en seconde (s)

R résistance en ohm ( $\Omega$ )

C capacité en farad (F)

- Charge et décharge du condensateur :

	Charge du condensateur	Décharge du condensateur
Montage		
Équation différentielle (premier ordre)	$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E$	$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$
Conditions initiales	$u_C(0) = 0$	$u_C(0) = U_0$
Tension $u_C$ (V)	$u_C = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Intensité $i$ (A)	$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$
Allure de $u_C(t)$		
Bilan énergétique	<p>La moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée sous forme d'énergie électrostatique <math>E_{elec}</math> dans la capacité.</p>	<p>L'énergie électrostatique <math>E_{elec}</math> initialement emmagasinée dans la capacité est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.</p>

✓ Étude d'un circuit RL série

- On définit la constante de temps  $\tau$  du circuit RL par le rapport :

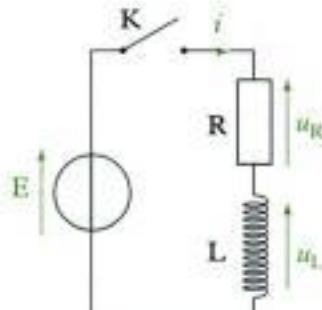
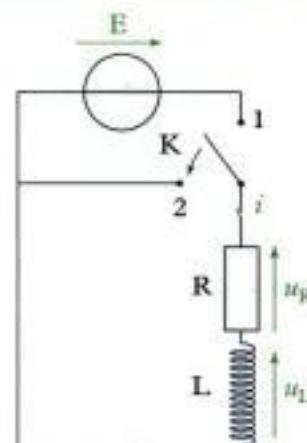
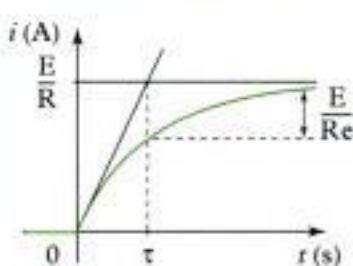
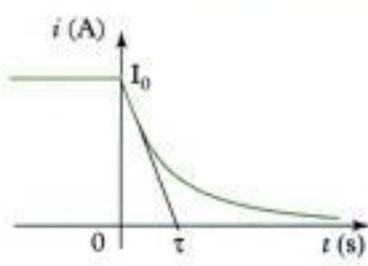
$$\tau_{RL} = \frac{L}{R}$$

$\tau$  constante de temps en seconde (s)

L inductance en henry (H)

R résistance en ohm ( $\Omega$ )

- Établissement et arrêt du courant dans la bobine :

	Établissement du courant dans la bobine	Arrêt du courant dans la bobine
<b>Montage</b>		
Équation différentielle (premier ordre)	$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$	$\tau \frac{di}{dt} + i = 0$
Conditions initiales	$i(0) = 0$	$i(0) = I_0$
Intensité $i$ (A)	$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$	$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Tension $u_L$ (V)	$u_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{t}{\tau}}$	$u_L = L \frac{di}{dt} = -R I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Allure de $u_C(t)$		
Bilan énergétique	<p>Lorsque le courant est établi, l'énergie magnétique <math>E_{mag}</math> emmagasinée dans la bobine reste constante. L'énergie électrique fournie par le générateur est alors entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.</p>	<p>L'énergie magnétique <math>E_{mag}</math> initialement emmagasinée dans la bobine est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.</p>

## ✓ Étude d'un circuit RLC série

- Pour l'étude du régime transitoire du circuit RLC, on introduit les variables réduites :

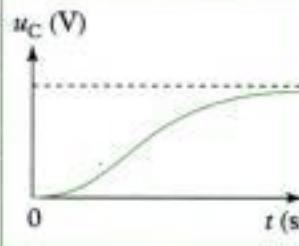
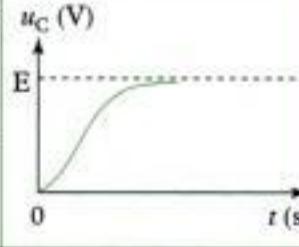
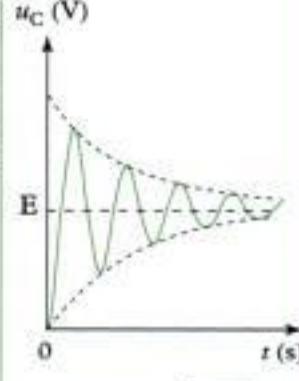
Pulsation propre ( $s^{-1}$ ou rad · s $^{-1}$ )	Facteur d'amortissement ( $s^{-1}$ )	Coefficient d'amortissement (sans dimension)	Facteur de qualité (sans dimension)
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\lambda = \frac{R}{2L}$	$\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0}$	$Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

La pulsation propre  $\omega_0$  est la pulsation des oscillations en l'absence d'amortissement.

- La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E.$$

- En fonction de la valeur de  $\alpha$  (ou, ce qui est équivalent, de la valeur de Q), on distingue trois régimes différents.

<b>Régime apériodique :</b> $\alpha > 1$ ou $Q < \frac{1}{2}$ <b>(fort amortissement)</b>	Solution de l'équation homogène ( $\Delta > 0$ ): $u_1 = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ , avec $r_1$ et $r_2$ racines réelles du polynôme caractéristique.	
<b>Régime critique :</b> $\alpha = 1$ ou $Q = \frac{1}{2}$ <b>(amortissement critique)</b>	Solution de l'équation homogène ( $\Delta = 0$ ): $u_1 = (At + B)e^{rt}$ , avec $r$ racine double du polynôme caractéristique.	
<b>Régime pseudo-périodique :</b> $\alpha < 1$ ou $Q > \frac{1}{2}$ <b>(amortissement faible)</b>	Solution de l'équation homogène ( $\Delta < 0$ ): $u_1 = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] - e^{-\lambda t}$ , avec $r_1 = -\lambda + j\omega$ et $r_2 = -\lambda - j\omega$ racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique.	 $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$

- Au cours de la charge, la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée sous forme d'énergie électrostatique  $E_{elec}$  dans la capacité. L'énergie magnétique  $E_{mag}$  emmagasinée dans l'inductance, nulle au début de la charge, est à nouveau nulle à la fin de la charge.

# Mise en œuvre

## Méthode n° 1

### Comment résoudre une équation différentielle linéaire à second membre constant ?

L'étude d'un régime transitoire fait systématiquement appel à la résolution d'une équation différentielle. On se propose de résoudre cette équation.

#### → Savoir faire

- ➊ Chercher la solution particulière constante qui vérifie l'équation différentielle avec second membre.
- ➋ Injecter une solution exponentielle du type  $Ae^{rt}$  dans l'équation différentielle dont le second membre a été annulé (équation homogène). Le coefficient  $r$  vérifie une équation appelée polynôme caractéristique.
- ➌ Déterminer la ou les valeurs de  $r$  qui sont racines du polynôme caractéristique. Construire la solution sans second membre, de la forme :
  - $Ae^{rt}$  pour une équation du premier ordre ;
  - $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$  pour une équation du second ordre admettant deux racines réelles ou complexes conjuguées ;
  - $(A + Bt)e^{rt}$  pour une équation du second ordre admettant une racine double.



Dans le cas de deux racines complexes conjuguées  $\alpha \pm j\beta$ , on peut écrire la solution sous la forme :

$$[A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)]e^{\alpha t}.$$

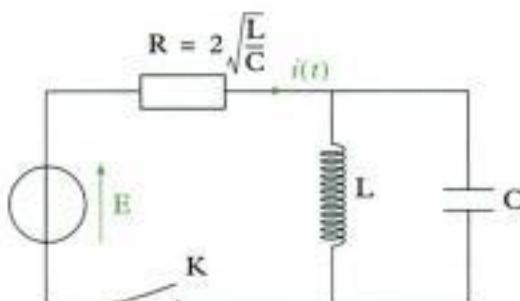
- ➍ Déterminer la ou les constantes d'intégration de la solution générale, qui est la somme de la solution particulière établie au ➊ et de la solution sans second membre établie au ➌. Cette étape nécessite de connaître les conditions initiales données par les relations de continuité (voir la méthode n° 1 du chapitre 3).



Il faut veiller à déterminer les constantes d'intégration sur la solution générale, c'est-à-dire après avoir réuni les solutions particulières et sans second membre.

#### → Application

On considère le circuit ci-dessous, dont l'interrupteur K est fermé à l'instant  $t = 0$ .



La mise en équation du circuit et la recherche des conditions initiales conduisent, pour l'intensité dans la branche principale, à :

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}, \quad \text{avec} \begin{cases} i(0^+) = \frac{E}{R} \\ \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{E}{R^2C}. \end{cases}$$

Déterminer l'expression de  $i(t)$ .

### Solution

- La solution particulière constante est :

$$i_2(t) = \frac{E}{R}.$$

- L'équation sans second membre s'écrit :

$$LC \frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_1}{dt} + i_1 = 0.$$

On injecte la solution type  $Ae^{rt}$  dans cette équation :

$$LCr^2Ae^{rt} + \frac{L}{R}rAe^{rt} + Ae^{rt} = 0.$$

- Comme  $Ae^{rt}$  ne s'annule pas (car  $A = 0$  est une solution sans intérêt), le polynôme caractéristique est donc :

$$LCr^2 + \frac{L}{R}r + 1 = 0.$$

Son discriminant vaut :  $\Delta = \frac{1}{R^2C^2} - \frac{4}{LC}$ , c'est-à-dire zéro compte tenu du choix des composants. Le polynôme caractéristique admet une racine double (régime critique) :

$$\alpha = -\frac{1}{2RC}.$$

Replacée dans la solution, cette racine double conduit à :

$$i_1(t) = (A + Bt) \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right).$$

- La solution générale est donc :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{R} + (A + Bt) \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right).$$

En  $t = 0^+$ , on détermine les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{cases} i(0^+) = \frac{E}{R} = \frac{E}{R} + A \\ \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{E}{R^2C} = B - \frac{A}{2RC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{E}{R^2C}. \end{cases}$$

Soit en replaçant ces valeurs dans la solution générale :

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{Et}{R^2C} \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right),$$

d'où :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{t}{RC} \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right)\right).$$

## Méthode n° 2

### Comment caractériser un régime transitoire du premier ordre à partir de son oscillogramme ?

Soit un oscillogramme indiquant un régime transitoire du premier ordre. On se propose d'établir l'équation différentielle associée à cet oscillogramme.

#### → Savoir faire

- ① Déterminer la valeur initiale  $u(t = 0) = u_0$  de la tension étudiée.
- ② Déterminer la valeur limite  $u_\infty$  en  $t \rightarrow +\infty$  de la tension étudiée.
- ③ Tracer la tangente à la courbe  $u(t)$  issue du point  $t = 0$ . Mesurer le temps  $\tau$  caractéristique du régime transitoire à l'intersection de cette tangente avec la droite  $u = u_\infty$ .
- ④ Écrire l'équation différentielle sous la forme :

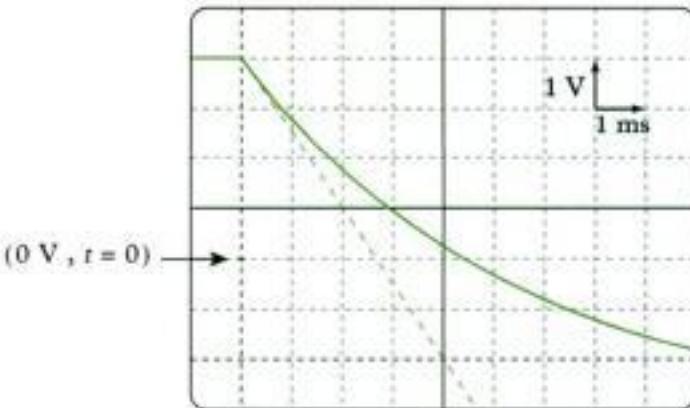
$$\tau \frac{du}{dt} + (u - u_\infty) = 0.$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$u(t) = u_\infty + (u_0 - u_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

#### → Application

Établir l'équation différentielle associée à l'oscillogramme représenté ci-dessous.



#### Solution

- ① On mesure 4 divisions verticales à partir du point origine  $(0 \text{ V}, t = 0)$  :  $u(0) = 4 \text{ V}$ .
- ② En  $t = +\infty$ , l'asymptote a pour équation :  $u_\infty = -2 \text{ V}$ .
- ③ La tangente à la courbe  $u(t)$  à l'origine coupe la droite  $u_C = -2 \text{ V}$  en  $(t = 4 \text{ ms} ; u = -2 \text{ V})$ , soit :  $\tau = 4 \text{ ms}$ .
- ④ L'équation différentielle vérifiée par  $u$  est donc :

$$(4 \cdot 10^{-3}) \frac{du}{dt} + u = -2, \text{ avec } u \text{ en V et } t \text{ en s.}$$



La solution de cette équation est :

$$u(t) = -2 + 4 \exp\left(-\frac{t}{4 \cdot 10^{-3}}\right), \text{ avec } u \text{ en V et } t \text{ en s.}$$

## Méthode n° 3

### Comment effectuer le bilan énergétique d'un régime transitoire ?

On se propose d'évaluer l'énergie dissipée par effet Joule au cours d'un régime transitoire.

#### → Savoir faire

- ❶ Déterminer les valeurs prises par les courants et les tensions du circuit à l'issue du régime transitoire en utilisant un schéma équivalent du circuit.

- ❷ Déterminer l'énergie reçue (et stockée) par les condensateurs et bobines du circuit pendant ce régime transitoire :

$$\Delta E_{\text{stockée}} = \Delta E_{\text{elec}} + \Delta E_{\text{mag}},$$

– Pour un condensateur :  $\Delta E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u_{\infty}^2 - \frac{1}{2} C u_0^2,$

– Pour une bobine :  $\Delta E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i_{\infty}^2 - \frac{1}{2} L i_0^2.$

( $u_0$ ,  $u_{\infty}$ ,  $i_0$  et  $i_{\infty}$  sont les tensions et courants avant et après le régime transitoire.)

- ❸ Exprimer le courant  $i_g(t)$  qui traverse le générateur. Si ce courant s'annule au bout d'un temps infini, calculer l'énergie fournie au circuit par le générateur :

$$E_{\text{fournie}} = \int_0^{+\infty} u_g i_g dt, \text{ avec } u_g \text{ et } i_g \text{ en convention générateur.}$$

- ❹ Si l'énergie fournie par le générateur est finie, calculer l'énergie dissipée par effet Joule :

$$E_J = E_{\text{fournie}} - \Delta E_{\text{stockée}}.$$

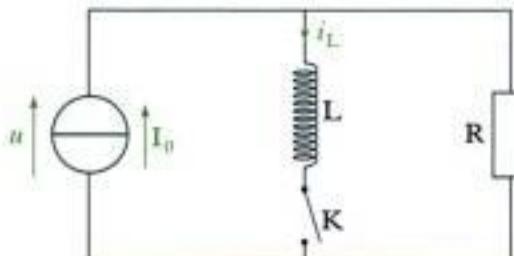


Dans la plupart des circuits, un courant circule encore à l'issue du régime transitoire. La puissance fournie par le générateur est alors entièrement dissipée par le réseau de résistances.

#### → Application

On considère le circuit suivant, dans lequel l'interrupteur K est initialement ouvert. On choisit comme origine des temps l'instant où K est fermé.

On montre que  $u(t) = RI_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$ . Calculer l'énergie dissipée par effet Joule pendant le régime transitoire à l'aide d'un bilan énergétique.

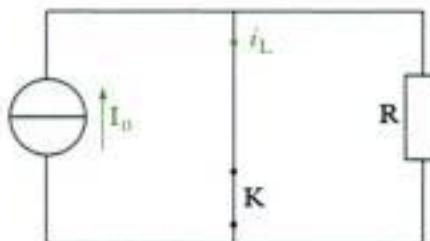


#### Solution

- ❶ Initialement,  $i_L(0) = 0$  car la branche est ouverte. Au bout d'un temps infini, le régime permanent est établi et la bobine équivaut à un fil :  $i_L(\infty) = I_0$ .

- ❷ Le circuit reçoit et stocke de l'énergie dans la bobine :

$$\Delta E_{\text{stockée}} = \frac{1}{2} L i_L(\infty)^2 - \frac{1}{2} L i_L(0)^2 = \frac{1}{2} L I_0^2.$$



- ③ Le courant dans le générateur ne s'annule pas, mais la tension à ses bornes s'annule. La puissance fournie s'annule donc et l'énergie fournie au circuit est calculable :

$$E_{\text{fournie}} = \int_0^{+\infty} I_0 u(t) dt = RI_0^2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) dt.$$

On intègre la fonction exponentielle entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow +\infty$  :

$$E_{\text{fournie}} = RI_0^2 \left[ -\frac{L}{R} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right]_0^{+\infty} = RI_0^2 \left( \frac{L}{R} \right) = LI_0^2.$$

- ④ L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance vaut donc :

$$E_J = E_{\text{fournie}} - \Delta E_{\text{stockée}} = LI_0^2 - \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance, et ceci indépendamment de sa valeur.



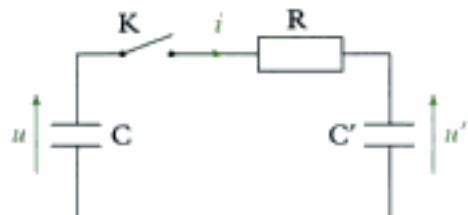
On peut retrouver ce résultat en intégrant la puissance reçue par la résistance pendant le régime transitoire, mais ce calcul est techniquement plus compliqué.

# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Décharge d'un condensateur dans un autre

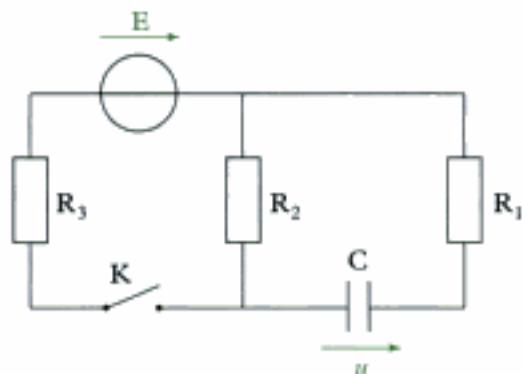
Le condensateur de capacité  $C$  est chargé sous une tension  $U_0$ . Il est branché à l'instant initial sur un autre condensateur de capacité  $C'$ , initialement déchargé, par l'intermédiaire d'une résistance  $R$ . On note  $u$  la tension aux bornes de  $C$  et  $u'$  la tension aux bornes de  $C'$ .



- Déterminer les évolutions des tensions  $u(t)$  et  $u'(t)$ .
- Déterminer l'évolution de l'intensité  $i(t)$ .
- Déterminer l'énergie  $E_J$  dissipée par effet Joule. Effectuer un bilan énergétique et retrouver le résultat précédent.

### Ex. 2 Charge et décharge d'un condensateur

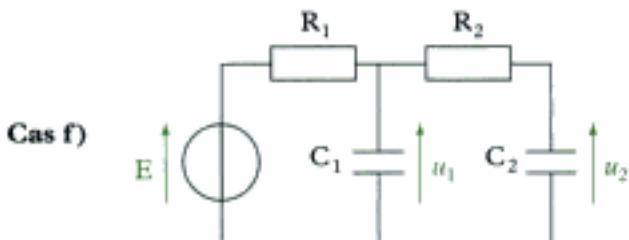
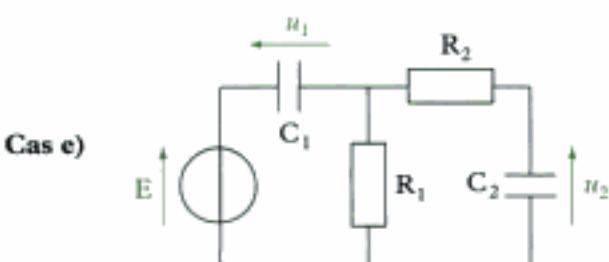
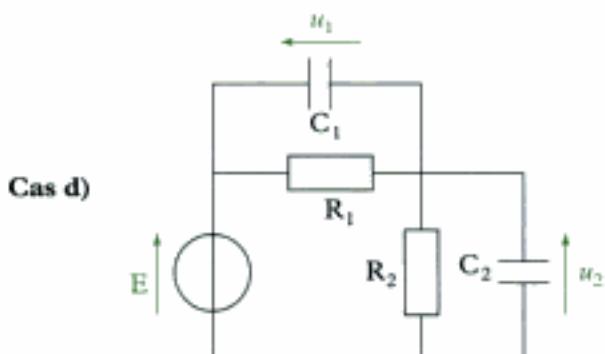
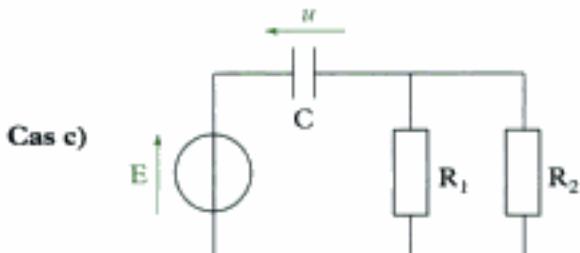
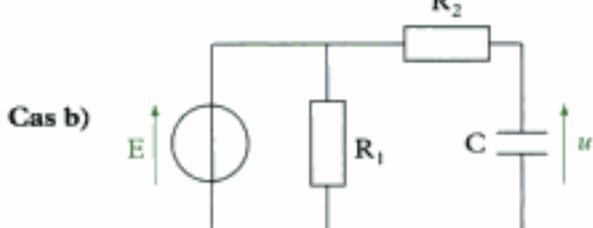
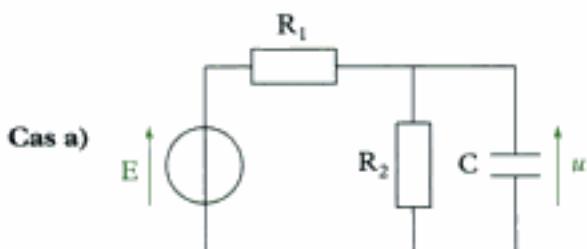
On considère le circuit suivant, comportant les résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ , le condensateur de capacité  $C$  et le générateur de tension  $E$ .



- Initialement, le condensateur est déchargé et on ferme l'interrupteur  $K$  à  $t = 0$ . Déterminer l'évolution de la tension  $u(t)$ . Pouvait-on prévoir la tension maximale  $u_{\max}$  du condensateur ?
- L'interrupteur  $K$  étant fermé depuis longtemps, on a alors  $u = u_{\max}$ . À l'instant  $t = 0$ , on ouvre l'interrupteur. Déterminer l'évolution de la tension  $u(t)$ .

### Ex. 3 Recherche de régimes permanents avec des condensateurs

Dans les montages ci-dessous, déterminer la (ou les) tension(s) aux bornes du (ou des) condensateur(s) lorsque le régime permanent est établi.



### Ex. 4 Résistance d'un voltmètre

Un condensateur chimique de capacité  $C = 47 \mu\text{F}$  est chargé sous une tension  $U_0 = 4,5 \text{ V}$ . On le branche aux bornes d'un voltmètre.

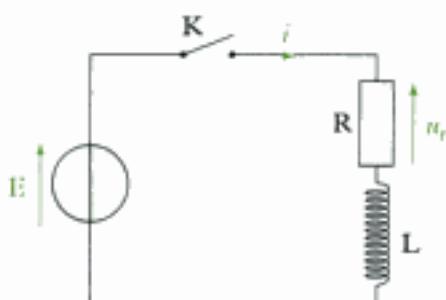
À l'instant  $t = 0$ , on mesure normalement  $U_0 = 4,5 \text{ V}$ .  
À l'instant  $t = 200 \text{ s}$ , on lit sur le voltmètre  $U = 3 \text{ V}$ .  
Quelle est la résistance du voltmètre ?

### Ex. 5 Établissement du courant dans une bobine

Une bobine parfaite d'inductance  $L$  est en série avec un conducteur ohmique de résistance  $R = 15 \Omega$  et une batterie de force électromotrice  $E = 6 \text{ V}$ .

À l'instant  $t = 0$ , on ferme le circuit.

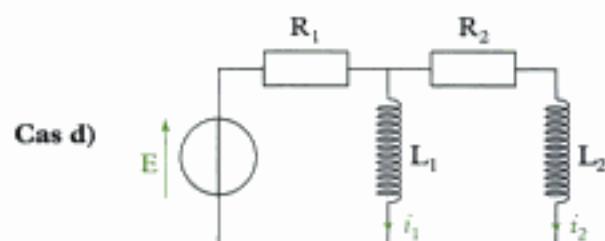
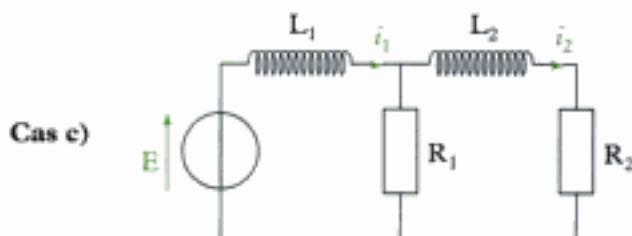
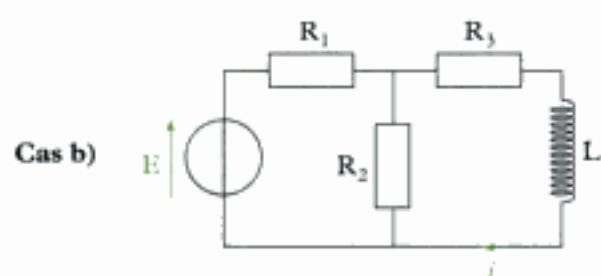
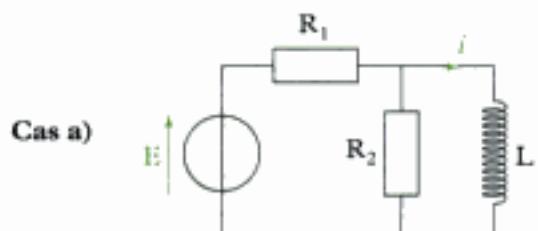
La tension aux bornes de la résistance croît pour atteindre  $U_R = 2,7 \text{ V}$  à l'instant  $t = 2 \text{ ms}$ .



- Déterminer la valeur de l'inductance  $L$ .
- Quelle est l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine à l'instant  $t = 2 \text{ ms}$  ?
- Quelle est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance entre  $t = 0$  et  $t = 2 \text{ ms}$ .

### Ex. 6 Recherche de régimes permanents en présence de bobines

Dans les montages ci-dessous, déterminer l'intensité du courant circulant dans chaque bobine lorsque le régime permanent est établi.



### Ex. 7 Oscillations d'un circuit LC

Un condensateur de capacité  $C = 10 \mu\text{F}$  est initialement chargé sous une tension  $U_0 = 6 \text{ V}$ . On le connecte à l'instant  $t = 0$  à une bobine de résistance négligeable et d'inductance  $L = 25 \text{ mH}$ .

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u$  aux bornes du condensateur.
- Déterminer  $u(t)$ . Exprimer la fréquence des oscillations et l'amplitude de celles-ci.
- Déterminer  $i(t)$ . Quelle est alors l'amplitude de l'intensité ?
- Exprimer l'énergie du condensateur et celle de la bobine au cours du temps. Vérifier que l'énergie totale reste constante.

### Ex. 8 Régime critique

Le condensateur de capacité  $C = 10 \mu\text{F}$ , initialement chargé sous une tension  $U_0 = 6 \text{ V}$ , est connecté à l'instant  $t = 0$  à une bobine d'inductance  $L = 25 \text{ mH}$  et de résistance  $R$ .

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u$  aux bornes du condensateur.
- Le régime étudié est le régime critique. Déterminer  $R$ . Exprimer alors  $u(t)$ . Tracer  $u(t)$ .
- En déduire l'intensité  $i(t)$ . Tracer  $i(t)$ .
- Quelle est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$  ?

### Ex. 9 Régime pseudo-périodique

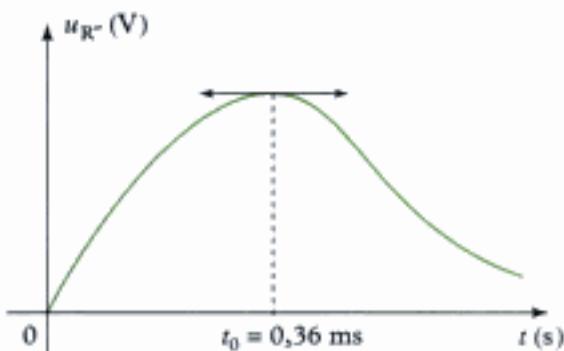
On reprend l'étude de l'exercice 8, mais la résistance de la bobine est maintenant  $R'$ .

Le régime étudié est pseudo-périodique et la pseudo-période vaut  $T = 5 \text{ ms}$ .

- Déterminer la résistance  $R'$ .
- Déterminer numériquement  $u(t)$ .

## Ex. 10 Régime apériodique

Un condensateur de capacité  $C = 10 \mu\text{F}$ , chargé sous la tension  $U_0$ , se décharge dans une bobine d'inductance  $L = 2 \text{ mH}$  et de résistance  $R''$ . Le régime est apériodique et l'on a enregistré l'évolution de la tension aux bornes de la résistance  $R''$ .



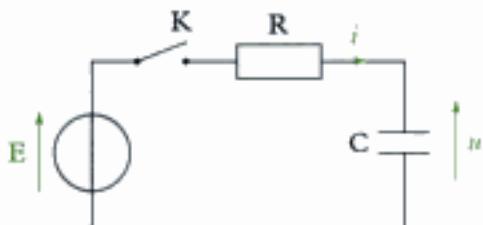
On observe un maximum de  $u_{R''}$  à l'instant  $t_0 = 0,36 \text{ ms}$ . Déterminer  $R''$ .

## Niveau 2

### Ex. 11 Établissement du courant dans un condensateur

1) Le condensateur étudié est chargé sous une tension  $U_0$ . Il est placé en série avec une résistance  $R$ , un générateur de tension  $E$  et un interrupteur  $K$ .

Pour  $t < 0$ , l'interrupteur est ouvert. À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.



a) Déterminer l'équation d'évolution de la tension  $u$  aux bornes du condensateur.

b) Résoudre l'équation obtenue pour  $t > 0$ .

c) Tracer la courbe  $u(t)$ .

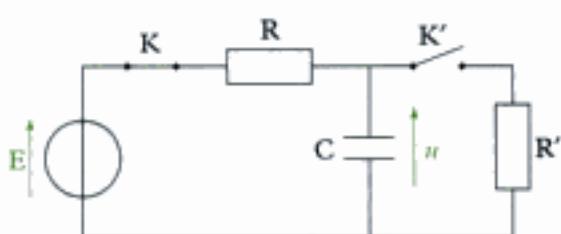
d) Déterminer l'intensité  $i(t)$  du courant.

e) Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule.

f) Faire un bilan énergétique et retrouver le résultat précédent.

2) Le condensateur est maintenant chargé sous la tension  $E$ . On branche à ses bornes, comme l'indique le schéma ci-dessous, une résistance  $R'$ .

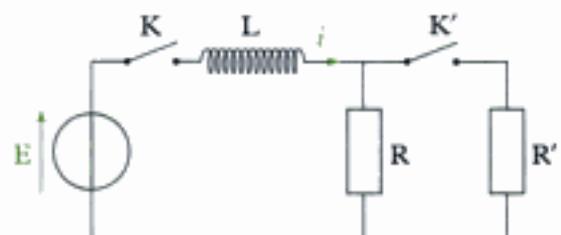
On choisit l'origine des temps au moment du branchement de  $R'$ .



- Déterminer l'équation d'évolution de la tension  $u$  aux bornes du condensateur.
- Déterminer  $u(t)$  et tracer la courbe correspondante.
- Effectuer un bilan énergétique.

### Ex. 12 Établissement du courant dans un circuit

On considère le circuit suivant comportant une bobine d'inductance  $L$  et deux résistances  $R$  et  $R'$ .  $K$  et  $K'$  sont deux interrupteurs et le générateur de tension possède la fém  $E$ .

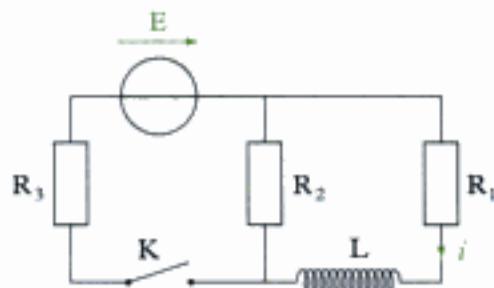


a)  $K'$  est ouvert. À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ . Déterminer la loi d'évolution de l'intensité  $i(t)$ . Quel est le courant  $I$  en régime permanent ?

b) Le régime permanent d'intensité  $I$  est établi ( $K$  est fermé). À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K'$ . Établir la nouvelle loi d'évolution de l'intensité  $i(t)$ . Quelle est la nouvelle intensité  $I'$  en régime permanent ?

### Ex. 13 Trois résistances et une bobine

Le circuit étudié comporte trois résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ , une bobine parfaite d'inductance  $L$ , un générateur de fém  $E$  et un interrupteur  $K$ .



a) Initialement, la bobine n'est parcourue par aucun courant. À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ . Établir la loi d'évolution de  $i(t)$  et déterminer le courant  $I$  en régime permanent dans la bobine.

b) Le courant d'intensité  $I$  est établi, on ouvre  $K$  à  $t = 0$ . Déterminer la nouvelle loi donnant  $i(t)$  et l'énergie dissipée par effet Joule dans les résistances.

### Ex. 14 Diode de roue libre

Un moteur est modélisé par une résistance  $R$  et une bobine  $L$ .

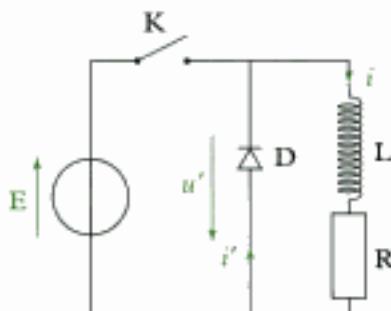
L'interrupteur  $K$  est fermé depuis longtemps. Le courant permanent dans la bobine est :

$$i = I = \frac{E}{R}.$$

Pour éviter une étincelle aux bornes du moteur, lors de l'ouverture du circuit, on place en parallèle avec le moteur une diode  $D$ .

Quand l'interrupteur  $K$  est fermé, aucun courant ne circule dans  $D$ .

Quand on ouvre  $K$ , la diode court-circuite le moteur et l'énergie magnétique contenue dans la bobine est dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$ .



a) La caractéristique de la diode vérifie les conditions données ci-dessous :

$$u' \leq 0 : i' = 0 ; \quad i' \geq 0 : u' = 0.$$

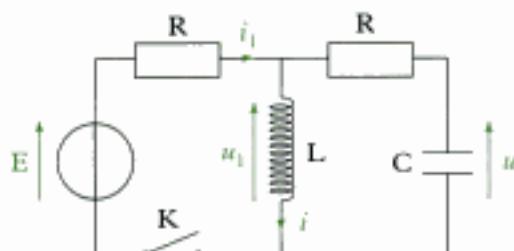
Déterminer la loi d'évolution de  $i(t)$ .

b) Reprendre l'étude en tenant compte de la tension seuil  $V_s$  de la diode :

$$u' \leq V_s : \quad i' = 0 ; \quad i' \geq 0 : u' = V_s.$$

### Ex. 15 Établissement et rupture dans un « circuit parallèle »

On considère le montage schématisé ci-dessous.



a) Pour  $t < 0$ , le condensateur est déchargé. On a :

$$\tau = \frac{L}{R} = RC.$$

À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ .

Établir  $i(t)$  et  $u(t)$  pour  $t > 0$ .

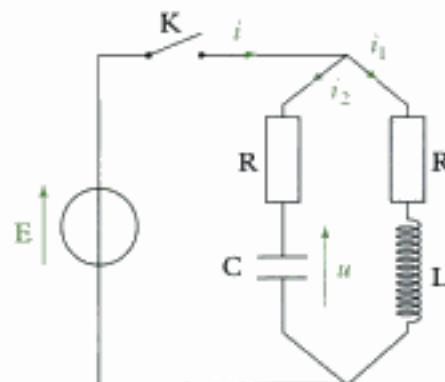
Déterminer le régime permanent  $I$  de courant dans la bobine et le régime permanent  $U$  de tension aux bornes du condensateur.

b) Le régime permanent est établi. À l'instant  $t = 0$ , on ouvre  $K$ . Déterminer  $i(t)$  et  $u(t)$  pour  $t > 0$ .

### Ex. 16 Évolution simultanée du courant dans une bobine et un condensateur

Le circuit comporte un condensateur de capacité  $C$  en série avec une résistance  $R$ . Cette branche est en parallèle avec une branche comportant une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $R$ . On a :  $\tau = RC = \frac{L}{R}$ .

L'ensemble est alimenté par un générateur de fém  $E$  comme l'indique le schéma suivant :



a) Le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur  $K$ . Déterminer  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  et  $i(t)$ .

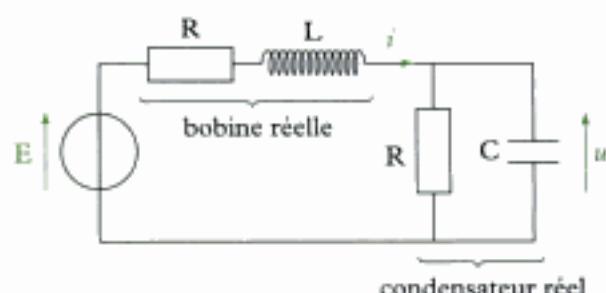
Déterminer  $u(t)$ .

b) Le régime permanent est établi. On ouvre  $K$ . Déterminer  $u(t)$ .

### Ex. 17 Bobine réelle en série avec un condensateur réel

Le montage ci-dessous modélise une bobine réelle ( $L$ ,  $R$ ) en série avec un condensateur réel ( $C$ ,  $R$ ) initialement déchargé. On a la propriété :

$$\tau = \frac{L}{R} = RC.$$



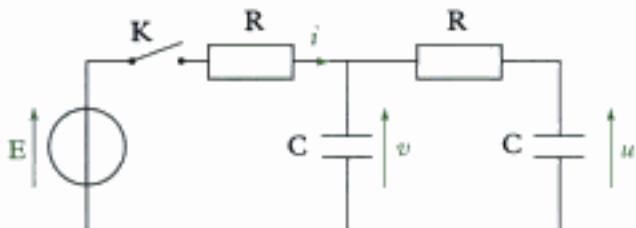
a) Déterminer l'évolution de la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur lorsque le circuit est branché, à  $t = 0$ , sur un générateur de tension  $E$ . Représenter  $u(t)$ .

b) Peut-on prévoir le régime permanent sans calcul ? Si oui, déterminer  $U$ , tension aux bornes du condensateur, et  $I$ , courant dans la bobine, en régime permanent.

### Ex. 18 Circuit avec deux condensateurs

Le circuit schématisé ci-après comporte deux résistances  $R$  et deux condensateurs de capacité  $C$ , initialement déchargés. À l'instant  $t = 0$ , on le branche sur

un générateur de tension  $E$ . Déterminer  $u(t)$ . Quel est le facteur de qualité  $Q$  du montage ? On pose  $\tau = RC$ .

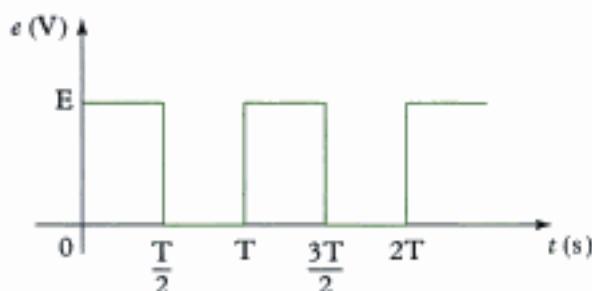
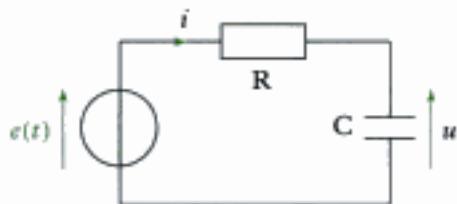


## Niveau 3

### Ex. 19 Alimentation d'un condensateur par une tension créneau

Le condensateur de capacité  $C$  est alimenté par l'intermédiaire d'une résistance  $R$  grâce à un générateur délivrant une tension créneau  $e(t)$  vérifiant la propriété suivante ( $n \in \mathbb{N}$ ) :

- si  $t \in [nT ; nT + \frac{T}{2}]$ ,  $e(t) = E$ ;
- si  $t \in [nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T]$ ,  $e(t) = 0$ .



La tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur évolue en permanence. Nous allons étudier les premières phases de cette évolution pour essayer d'en tirer une loi, puis nous regarderons le régime oscillatoire permanent.

Nous noterons  $u_n$  la tension  $u(nT + \frac{T}{2})$  et  $v_n$  la tension  $u(nT)$ .

a) Écrire l'équation d'évolution de la tension  $u$  dans chaque intervalle de temps.

- pour  $t \in [nT ; nT + \frac{T}{2}]$  ;
- pour  $t \in [nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T]$  ;

b) Déterminer  $u(t)$  pour  $t \in [0 ; \frac{T}{2}]$ . En déduire  $u_0$ .

On suppose que le condensateur est déchargé à  $t = 0$  ( $v_0 = 0$ ).

c) Déterminer  $u(t)$  pour  $t \in [\frac{T}{2} ; T]$ . En déduire  $v_1$ .

d) Étudier  $u(t)$  pour  $t \in [nT ; (n+1)T]$  en décomposant l'intervalle en deux parties et obtenir  $u_n$  en fonction de  $v_n$  et  $v_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ . Nous avons ainsi défini la double loi de récurrence.

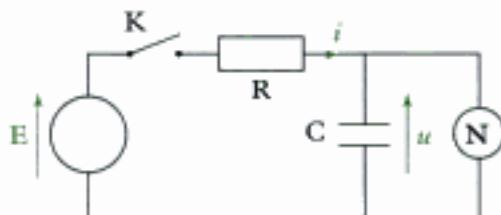
e) On admet que la suite  $\{u_n\}$  tend vers une limite  $U$  et la suite  $\{v_n\}$  vers une limite  $V$ . Déterminer  $U$  et  $V$ . Tracer alors l'allure du régime oscillatoire permanent  $u(t)$ .

### Ex. 20 Oscillateur de relaxation

Une ampoule au néon est placée en parallèle sur le condensateur d'un circuit  $RC$ . La lampe au néon présente la particularité de ne s'allumer que si la tension entre ses bornes atteint la valeur  $V_a$ , dite tension d'allumage. En revanche, elle reste allumée tant que la tension à ses bornes est supérieure à  $V_c < V_a$ ;  $V_c$  est appelée tension d'extinction.

La lampe éteinte ne conduit pas le courant ; elle est équivalente à un interrupteur ouvert.

La lampe allumée est équivalente à une résistance  $r$ . Le condensateur étant initialement déchargé, on ferme l'interrupteur  $K$ .



a) À quelle condition la lampe s'allume-t-elle ?

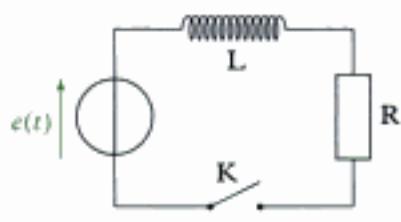
Décrire  $u(t)$  entre l'instant  $t = 0$  et l'instant d'allumage  $t_a$ . Déterminer  $t_a$ .

b) La lampe étant allumée, comment évolue  $u(t)$  ? À quelle condition la lampe s'éteint-elle ?

c) Les deux conditions précédentes étant vérifiées, décrire l'évolution de  $u(t)$ . Faire apparaître une période  $T$  décrivant cette évolution.

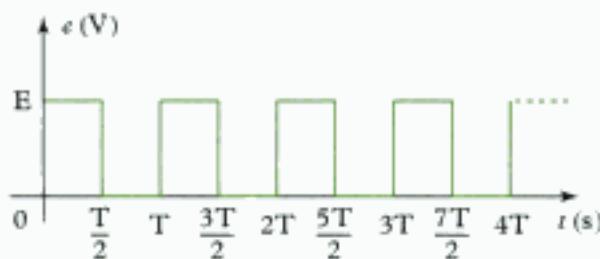
### Ex. 21 Lissage du courant

1) Déterminer la loi d'établissement du courant dans une bobine d'inductance  $L$  à travers une résistance  $R$ . Le générateur a une fém constante :  $e(t) = E$ .



Déterminer le temps nécessaire pour que le courant dans le circuit ne diffère pas de plus de 5 % de sa valeur finale.

2) Le générateur de tension  $e(t)$  est maintenant périodique, comme le précise sa loi d'évolution sur le schéma ci-dessous.



a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  pour chaque demi-période :

$$\left[ nT ; nT + \frac{T}{2} \right] \text{ et } \left[ nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T \right]$$

b) À l'instant  $t = 0$ , on a :  $i(t) = 0$ . Représenter l'allure de la courbe  $i(t)$  sur les quatre premières périodes.

c) On recherche le régime périodique permanent. À l'instant  $nT$ , le courant est  $I_m$ .

À l'instant  $nT + \frac{T}{2}$ , le courant est  $I_M$ .

À l'instant  $(n+1)T$ , le courant vaut  $I_m$ , etc.

Déterminer  $I_m$  et  $I_M$ . Tracer l'allure de  $i(t)$  en régime permanent.

## Indications

**Ex. 1** Un des condensateurs est étudié en convention génératrice, l'autre en convention récepteur.

**Ex. 3** En régime permanent, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

**Ex. 5 c)** Utiliser la conservation de l'énergie dans le circuit électrique.

**Ex. 6** En régime permanent, une bobine se comporte comme un fil.

**Ex. 9 a)** Déduire la valeur de la résistance de celle de la pseudo-pulsation  $\omega$  du circuit.

**Ex. 10** Déterminer l'extremum de la fonction  $u_R(t)$ .

**Ex. 11** Faire attention aux conditions initiales portant sur la tension aux bornes du condensateur.

**Ex. 14 a)** La diode court-circuite le moteur quand on ouvre l'interrupteur.

b) L'équation n'est valable que pour  $i \geq 0$ .

**Ex. 20** Si les deux conditions sont réalisées, la lampe s'allume et s'éteint périodiquement (oscillateur de relaxation).

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

- a) • L'intensité  $i$  du courant dans le circuit s'écrit :

$$i = C' \frac{du'}{dt} = -C \frac{du}{dt}, \text{ soit : } C' \frac{du'}{dt} + C \frac{du}{dt} = 0.$$



Le condensateur  $C$  est étudié en convention générateur : il ne faut pas oublier le signe « - » dans l'expression de  $i$ .

En intégrant, on obtient :  $C'u' + Cu = \text{cte}$ . Or, à  $t = 0$ , on a :  $u' = 0$  et  $u = U_0$ , d'où :

$$C'u' + Cu = CU_0.$$

- La loi des mailles donne :

$$u = Ri + u', \text{ soit : } U_0 - \frac{C'}{C}u' = RC' \frac{du'}{dt} + u'.$$

L'équation différentielle vérifiée par  $u'$  est alors :

$$\frac{RCC'}{C + C'} \frac{du'}{dt} + u' = \frac{CU_0}{C + C'}.$$

La constante de temps est  $\tau = \frac{RCC'}{C + C'}$ , et la solution particulière constante est  $u'_2 = \frac{CU_0}{C + C'}$ .



La constante de temps  $\tau$  n'apparaît que si l'équation est écrite sous sa forme canonique, c'est-à-dire si le coefficient de  $u'$  est égal à 1.

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$u' = u'_1 + u'_2 = \frac{CU_0}{C + C'} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{RCC'}{C + C'}.$$

La tension aux bornes du condensateur est continue, d'où :

$$u'(t=0) = 0 = \frac{CU_0}{C + C'} + A, \text{ soit : } A = -\frac{CU_0}{C + C'}.$$

La loi d'évolution de la tension  $u'$  s'écrit :

$$u'(t) = \frac{CU_0}{C + C'} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = -\frac{RCC'}{C + C'}.$$

On en déduit donc :

$$u(t) = U_0 - \frac{C'}{C} u'(t) = \frac{U_0}{C + C'} \left( C + C'e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$



La tension  $u'$  croît au cours du temps, alors que la tension  $u$  décroît, ce qui est normal, car le condensateur  $C$  se décharge dans le condensateur  $C'$ .

- b) L'intensité  $i$  du courant vaut alors :

$$i = C' \frac{du'}{dt} = C' \times \frac{CU_0}{C + C'} \times \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ soit : } i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

c) • L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R vaut :

$$\mathcal{E}_J = \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} R i^2 dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{U_0^2}{R} \left[ -\frac{\tau e^{-\frac{2t}{\tau}}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\tau U_0^2}{2R} = \frac{1}{2} \frac{CC'}{C+C'} U_0^2.$$

• La loi des mailles donne pour  $t > 0$  :  $u = Ri + u'$ .

On multiplie les deux membres de l'égalité par  $i = C' \frac{du'}{dt} = -C \frac{du}{dt}$  :

$$ui = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right) = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C'u'^2 \right),$$

$$\text{d'où : } Ri^2 = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 + \frac{1}{2} C'u'^2 \right).$$

↑  
puissance Joule  
dissipée dans R

↑  
variation de l'énergie des  
condensateurs au cours  
du temps

 On a :  $ui = -Cu \frac{du}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right)$  et  $u'i = C'u' \frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C'u'^2 \right)$ .

On intègre chaque terme de l'égalité précédente sur la durée de la décharge de C dans C' :

$$\int_0^{+\infty} Ri^2 dt = -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 + \frac{1}{2} C'u'^2 \right).$$

$$\mathcal{E}_J = -(\Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} + \Delta \mathcal{E}'_{\text{elec}}).$$

La variation de l'énergie électrostatique des condensateurs vaut :

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2} Cu(\infty)^2 - \frac{1}{2} Cu(0)^2 = \frac{1}{2} C \left( \frac{CU_0}{C+C'} \right)^2 - \frac{1}{2} CU_0^2.$$

$$\Delta \mathcal{E}'_{\text{elec}} = \frac{1}{2} Cu'(\infty)^2 - \frac{1}{2} Cu'(0)^2 = \frac{1}{2} C \left( \frac{CU_0}{C+C'} \right)^2.$$



La variation de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur C est négative, car celui-ci fournit de l'énergie au circuit.

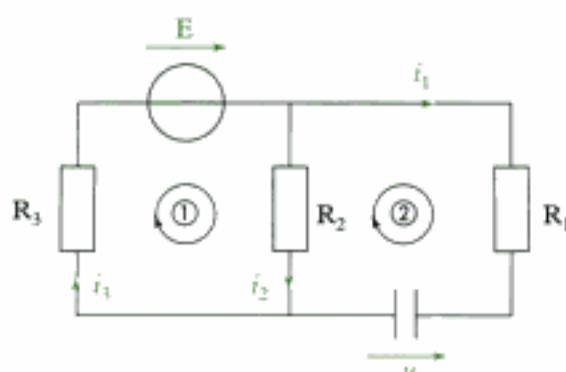
On en déduit donc :

$$\mathcal{E}_J = -\frac{1}{2} C \left( \frac{CU_0}{C+C'} \right)^2 + \frac{1}{2} CU_0^2 - \frac{1}{2} C' \left( \frac{CU_0}{C+C'} \right)^2 = \frac{1}{2} CU_0^2 \left( 1 - \frac{C}{C+C'} \right) = \frac{1}{2} \frac{CC'}{C+C'} U_0^2.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

## Exercice 2

a) Paramétrons le circuit comme l'indique le schéma ci-dessous :



- La loi des nœuds donne :

$$i_1 + i_2 = i_3, \text{ avec } i_1 = C \frac{du}{dt}.$$

Le circuit comporte deux mailles indépendantes pour lesquelles on peut écrire :

$$\begin{cases} \text{maille 1 : } E = R_2 i_2 + R_3 i_3 = (R_2 + R_3) i_2 + R_3 C \frac{du}{dt} \\ \text{maille 2 : } R_2 i_2 = R_1 i_1 + u = R_1 C \frac{du}{dt} + u. \end{cases}$$

Reportons alors  $i_2$  dans l'égalité obtenue pour la maille 1 :

$$E = \left[ \frac{(R_2 + R_3)R_1}{R_2} + R_3 \right] C \frac{du}{dt} + \frac{R_2 + R_3}{R_2} u = \left[ R_1 + R_3 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \right] C \frac{du}{dt} + \frac{R_2 + R_3}{R_2} u.$$

L'équation différentielle vérifiée par la tension  $u$  s'écrit donc :

$$\frac{(R_1 + R_3)R_2 + R_3 R_1}{R_2 + R_3} C \frac{du}{dt} + u = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E,$$

ou sous sa forme « canonique » :

$$\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} C \frac{du}{dt} + u = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E.$$

La constante de temps est  $\tau = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} C$  et la solution particulière constante vaut

$$u_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E.$$

 La constante de temps  $\tau$  n'apparaît que si l'équation est écrite sous sa forme canonique, c'est-à-dire si le coefficient de  $u$  est égal à 1.

Compte tenu des conditions initiales ( $u(0) = 0$ ), nous obtenons :

$$u(t) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} C.$$

La tension maximale est obtenue pour  $t \rightarrow +\infty$  :  $u_{\max} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E$ .

- En régime permanent, nous avons  $u = u_{\max} = \text{cte}$ , d'où :  $i_1 = 0$  et  $i_2 = i_3$ . La tension  $u_{\max}$  vaut :

$$u_{\max} = R_2 i_2 \text{ avec } i_2 = \frac{E}{R_2 + R_3}, \text{ d'où : } u_{\max} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E.$$

 En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

- b) L'étude correspond à la décharge d'un condensateur initialement chargé sous la tension  $u_{\max}$  à travers une résistance  $R = R_1 + R_2$ .

La constante de temps vaut  $\tau' = (R_1 + R_2)C$  et nous avons alors :

$$u(t) = u_{\max} e^{-\frac{t}{\tau'}} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E e^{-\frac{t}{\tau'}}, \text{ avec } \tau' = (R_1 + R_2)C.$$

 Pour plus de détails se reporter au § A. 2 du cours (décharge du condensateur).

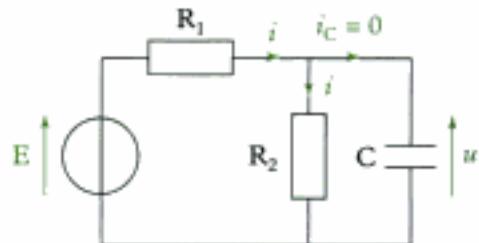
### Exercice 3



En régime permanent, les tensions aux bornes des condensateurs sont constantes et les courants qui y circulent sont nuls (les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts).

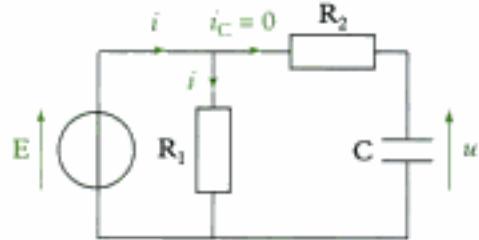
- a) Tout le courant passant dans  $R_1$  passe dans  $R_2$  comme si le condensateur n'était pas présent. D'après le théorème de division de tension, on a :

$$u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E.$$



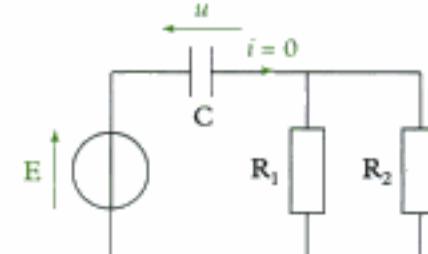
- b) Le courant dans  $R_2$  est nul. La tension  $u$  se retrouve entièrement aux bornes de  $R_1$ . On a donc :

$$u = E.$$



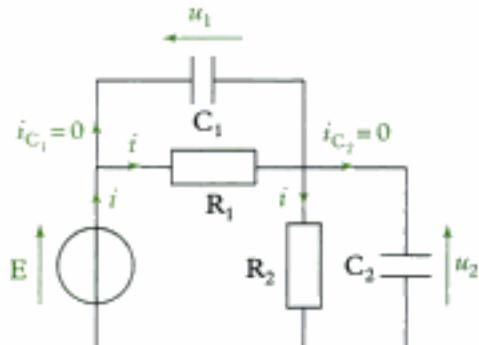
- c) Aucun courant ne passe dans  $R_1$  et  $R_2$ . La tension aux bornes du dipôle équivalent est alors nulle et on a :

$$u = E.$$



- d) Comme les courants dans  $C_1$  et  $C_2$  sont nuls, tout le courant passant dans  $R_1$  passe dans  $R_2$  comme si aucun condensateur n'était présent. D'après le théorème de division de tension, on a :

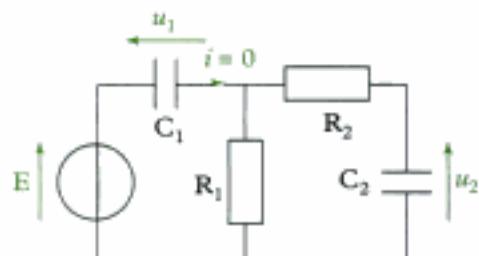
$$u_1 = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$



- e) Comme la tension  $u_2$  est constante, le courant dans  $R_2$  est nul. La tension  $u_2$  se retrouve alors aux bornes de  $R_1$ .

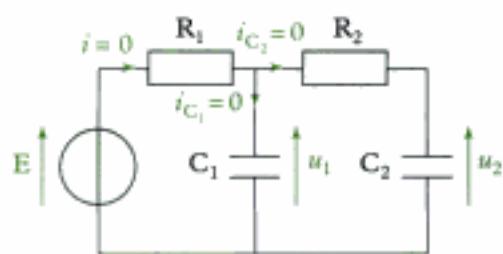
Comme la tension  $u_1$  est constante, le courant dans  $R_1$  est nul et on a :

$$u_2 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = E.$$



- f) Les tensions  $u_1$  et  $u_2$  sont constantes. Aucun courant ne circule et on a alors :

$$u_1 = u_2 = E.$$



## Exercice 4

Notons  $R$  la résistance du voltmètre et  $C$  la capacité du condensateur. La tension aux bornes du condensateur évolue suivant la loi  $u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ , avec  $\tau = RC$  (décharge d'un condensateur dans une résistance).

Nous en tirons :

$$\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{U_0}{u(t)}\right), \text{ d'où : } R = \frac{t}{C \ln\left(\frac{U_0}{u(t)}\right)}.$$

 Cette relation est valable quel que soit l'instant  $t$  considéré.

A.N.  $R = \frac{200}{47 \cdot 10^{-6} \times \ln\left(\frac{4,5}{3}\right)} = 1,05 \cdot 10^7 \Omega = 10,5 \text{ M}\Omega.$

## Exercice 5

a) La loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par l'intensité  $i$  du courant :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E, \text{ soit : } \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}.$$

Lors de l'établissement du courant dans la bobine, l'intensité  $i$  suit la loi d'évolution :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

La tension aux bornes de la résistance  $R$  a pour expression :

$$u_R = Ri = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

On en déduit la valeur de l'inductance  $L$  :

$$\frac{Rt}{L} = -\ln\left(1 - \frac{u_R}{E}\right), \text{ d'où : } L = -\frac{Rt}{\ln\left(1 - \frac{u_R}{E}\right)} = 50 \text{ mH.}$$

 Cette relation est valable quel que soit l'instant  $t$  considéré.

b) L'énergie magnétique stockée dans la bobine à l'instant  $t$  vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li(t)^2 = \frac{L}{2R^2} u_R(t)^2.$$

 Comme l'énoncé indique la valeur de  $u_R$  pour  $t = 2 \text{ ms}$ , il est plus rapide d'utiliser cette donnée que l'expression de  $i$  trouvée à la question précédente.

A.N.  $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \times 2,7^2}{2 \times 15^2} = 0,81 \text{ mJ.}$

c)

 On applique la méthode n° 3 au circuit étudié. Le calcul direct de l'énergie dissipée par effet Joule est plus long.

L'énergie fournie par le générateur entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t$  vaut :

$$\mathcal{E}_g = \int_0^t Ei(t)dt = \frac{E^2}{R} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[t + \frac{L}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}\right]_0^t = \frac{E^2}{R} \left[t + \frac{L}{R} \left(e^{-\frac{Rt}{L}} - 1\right)\right].$$

A.N.  $\mathcal{E}_g = 1,19 \text{ mJ.}$

D'après la loi de conservation de l'énergie dans le circuit, l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t = 2 \text{ ms}$  vaut donc :

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_g - \mathcal{E}_{\text{mag}} = 0,38 \text{ mJ}.$$

### Exercice 6

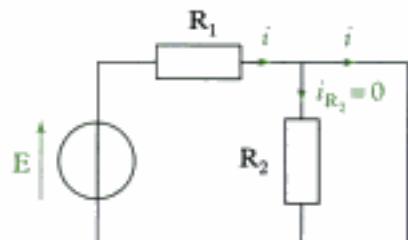


En régime permanent, le courant est constant, la tension aux bornes de chaque bobine est donc nulle (une bobine se comporte comme un fil).

a) La tension aux bornes de  $R_2$  est nulle.

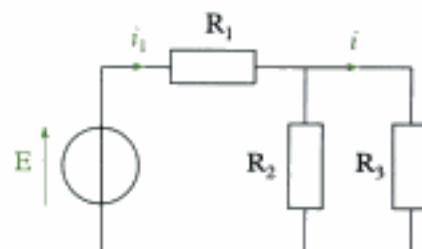
Tout le courant passe donc dans l'inductance :

$$i = \frac{E}{R_1}.$$



b) Comme la tension aux bornes de L est nulle, les résistances  $R_2$  et  $R_3$  sont en parallèle. D'après la loi des mailles, le courant principal  $i_1$  vaut :

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}.$$

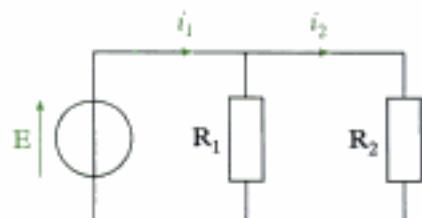


En appliquant le théorème de division de courant, on obtient :

$$i = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_1, \text{ soit } i = \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

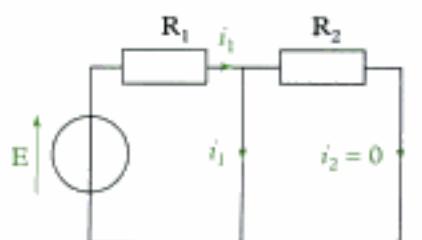
c) Les deux bobines se comportent comme des fils. On a donc simplement :

$$i_2 = \frac{E}{R_2} \quad \text{et} \quad i_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} E.$$



d) Les deux bobines se comportent comme des fils. On a donc simplement :

$$i_2 = 0 \quad \text{et} \quad i_1 = \frac{E}{R_1}.$$



### Exercice 7

a) Dans le circuit LC, les caractéristiques du condensateur et de la bobine s'écrivent :

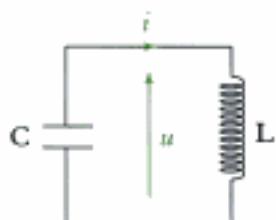
$$i = -C \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad u = L \frac{di}{dt}.$$



Le condensateur C est étudié en convention générateur : il ne faut pas oublier le signe « - » dans l'expression de  $i$ .

L'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $u$  et donc :

$$u = -LC \frac{d^2u}{dt^2}, \text{ soit } LC \frac{d^2u}{dt^2} + u = 0.$$



Hidden page

L'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $u$  est donc :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0.$$

b)

 On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

– Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle est :

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0.$$

Le discriminant vaut  $\Delta = 0$  (régime critique). On en déduit :

$$\Delta = R^2C^2 - 4LC = 0, \text{ soit } R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 100 \Omega.$$

Le polynôme caractéristique admet la racine double :

$$r = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} = -\omega_0.$$

– La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$u(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

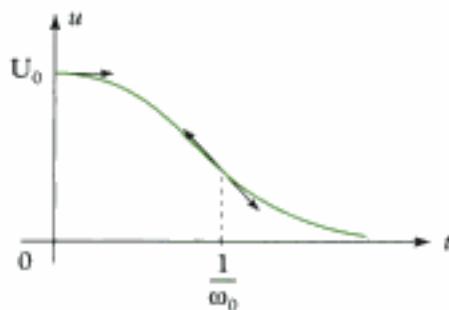
$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow B = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow A - \omega_0 B = 0, \text{ d'où : } A = U_0 \omega_0. \end{cases}$$

 L'équation différentielle étant du second ordre, il faut deux conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.

– La loi d'évolution de la tension  $u$  est donc :

$$u(t) = U_0(\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

L'allure de la courbe  $u(t)$  est :



c) • La loi d'évolution de l'intensité  $i$  est :

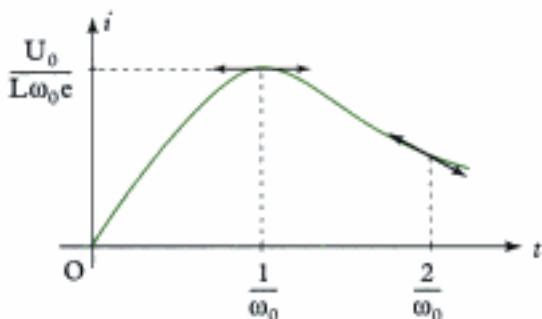
$$i = -C \frac{du}{dt} = CU_0 \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}, \text{ soit : } i(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\omega_0 t}.$$

En régime critique, l'intensité  $i$  croît au début de la décharge du condensateur, puis décroît jusqu'à s'annuler. Le maximum de  $i$  est donné par :

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{-\omega_0 t} - \frac{U_0}{L} \omega_0 t e^{-\omega_0 t} = 0, \text{ soit : } t = \frac{1}{\omega_0}.$$



D'après la relation entre  $i$  et  $u$ ,  $\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2u}{dt^2} = 0$ . Le maximum de  $i$  est donc point d'inflexion pour  $u$ .



- d) L'énergie électrostatique initialement emmagasinée dans le condensateur est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} C U_0^2 = 180 \mu J.$$



L'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine est nulle au début et à la fin de la décharge du condensateur ( $i(0) = 0$  et  $i(\infty) = 0$ ).

### Exercice 9

a)



Pour un raisonnement complet, se reporter à la question a) et au début de la question b) de l'exercice 8.

En régime pseudo-périodique, le discriminant  $\Delta$  du polynôme caractéristique est négatif. Celui-ci admet donc deux racines complexes conjuguées :

$$r = \frac{-R'C \pm j\sqrt{4LC - R'^2C^2}}{2LC} = -\frac{R'}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R'^2}{4L^2}}.$$

La pseudo-pulsation  $\omega$  du circuit vaut alors :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R'^2}{4L^2}} = \frac{2\pi}{T}, \text{ d'où : } R' = 2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{T^2}}.$$

A.N.  $R' = 77,8 \Omega$ .



Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent :  $r = \lambda \pm j\omega$ , où  $\lambda$  est le facteur d'amortissement du circuit et  $\omega$  sa pseudo-pulsation.

- b) La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\frac{R'}{2L}t}.$$

On détermine les constantes  $A$  et  $B$  grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow A = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow \omega B - \frac{R'}{2L}A = 0, \text{ d'où : } B = \frac{R'U_0}{2L\omega}. \end{cases}$$

Numériquement :  $A = 6$  ;  $B = 7,43$  ;  $\omega = 1\,257 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

La loi numérique d'évolution de la tension  $u$  est donc :

$$u(t) = 6e^{-1,556t}(6 \cos(1\,257t) + 7,43 \sin(1\,257t)), \text{ avec } t \text{ en s et } u \text{ en V.}$$

## Exercice 10



Le montage est identique à celui des exercices 8 et 9. Pour un raisonnement complet, se reporter à la question a) et au début de la question b) de l'exercice 8.

- En régime apériodique, le discriminant  $\Delta$  du polynôme caractéristique est positif. Celui-ci admet donc deux racines réelles :

$$r_1 = -\frac{R''}{2L} + \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{R''}{2L} - \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$



Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent :  $r = -\lambda \pm \omega$ , où  $\lambda$  est le facteur d'amortissement du circuit et  $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ .

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow A + B = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow Ar_1 + Br_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{r_2}{r_2 - r_1}U_0 \\ B = -\frac{r_1}{r_2 - r_1}U_0 \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension  $u$  est :

$$u(t) = \frac{U_0}{r_2 - r_1}(r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}).$$

- La tension aux bornes de la résistance  $R''$  a pour expression :

$$u_{R''} = R''i = -R''C \frac{du}{dt} = \frac{R''CU_0r_1r_2}{r_2 - r_1}(e^{r_2 t} - e^{r_1 t}).$$

La tension est maximale lorsque la dérivée de  $u_{R''}$  s'annule, c'est-à-dire à l'instant  $t_0$  tel que :

$$r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} = 0.$$

En posant :  $r_1 = -\lambda + \omega$  et  $r_2 = -\lambda - \omega$ , l'équation à résoudre devient :

$$-(\lambda + \omega)e^{-\omega t_0} + (\lambda - \omega)e^{\omega t_0} = 0,$$

d'où en introduisant les fonctions hyperboliques :

$$2\lambda \operatorname{sh}(\omega t_0) - 2\omega \operatorname{ch}(\omega t_0) = 0, \text{ soit : } \operatorname{th}(\omega t_0) = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}.$$



Les fonctions hyperboliques sont définies par :

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

La résolution numérique de cette équation en  $\omega$  donne :  $\omega = 4027 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .



Graphiquement, on détermine l'abscisse du point d'intersection des courbes (avec  $X = 10^{-3} \omega$ ) :

$$Y_1 = \operatorname{th}(0,36X) \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{X^2}}}.$$

La résistance  $R''$  s'obtient alors par la relation :

$$\lambda = \frac{R''}{2L} = \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}, \text{ soit : } R'' = 2L\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2} = 225 \Omega.$$

## Exercices de niveau 2

### Exercice 11

1) a) Quand l'interrupteur est fermé, il circule le courant :  $i = C \frac{du}{dt}$ . La tension aux bornes de la résistance vaut :  $u_R = Ri = RC \frac{du}{dt}$ . La loi des mailles nous donne alors :

$$E = u + RC \frac{du}{dt}, \text{ avec } \tau = RC.$$

b) – La solution particulière constante de l'équation différentielle est :  $u_2 = E$ .

– La solution de l'équation homogène est :  $u_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ .

– La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$u = u_1 + u_2 = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = RC.$$

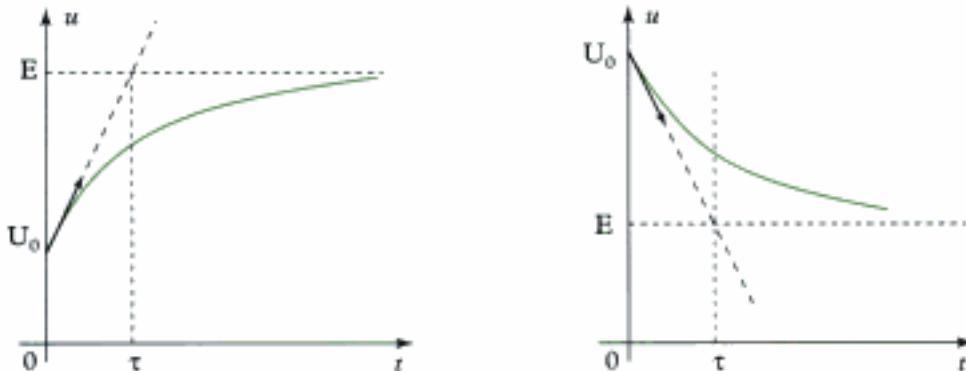
– La tension aux bornes du condensateur est continue, d'où :

$$u(t=0) = U_0 = E + A, \text{ soit } A = U_0 - E.$$

La loi d'évolution de la tension  $u$  s'écrit donc :

$$u(t) = E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = RC.$$

c) L'allure de la courbe est la suivante (cas  $U_0 < E$  et cas  $U_0 > E$ ) :



Si la fém  $E$  du générateur est supérieure à la tension initiale  $U_0$  du condensateur, celui-ci se charge ; si la fém  $E$  du générateur est inférieure à la tension initiale  $U_0$  du condensateur, celui-ci se décharge.

d) L'intensité  $i(t)$  du courant est :

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = -C \frac{U_0 - E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

e) L'énergie dissipée par effet Joule au cours de la charge vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_J &= \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_J dt = \int_0^{+\infty} Ri(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{(E - U_0)^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{\tau}{2} \frac{(E - U_0)^2}{R} \left[ e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} C(E - U_0)^2. \end{aligned}$$



Comme la loi d'évolution de l'intensité est exponentielle, le calcul direct est assez simple.

f) La loi des mailles donne pour  $t > 0$  :  $E = Ri + u$ .



 On applique la méthode n° 3 au circuit étudié.

On multiplie les deux membres de l'égalité par  $i = C \frac{du}{dt}$ :

$$Ei = CE \frac{du}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right).$$

↑                      ↑                      ↑

puissance            puissance Joule      variation de l'énergie du  
fournie par       dissipiée dans R      condensateur au cours  
le générateur                                      du temps

- On intègre chaque terme de l'égalité précédente sur la durée de la charge.
  - L'énergie fournie par le générateur vaut :

$$\mathcal{E}_g = \int_0^{+\infty} E idt = \int_{U_0}^E CEdu = CE(E - U_0).$$

- La variation de l'énergie électrostatique contenue dans le condensateur vaut :

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C U^2 \right) dt = \frac{1}{2} C E^2 - \frac{1}{2} C U_0^2.$$

- L'énergie dissipée par effet Joule vaut :

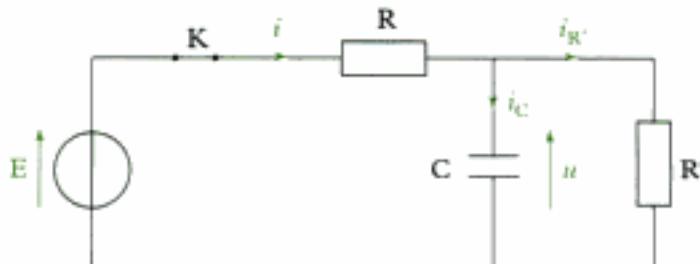
$$\mathcal{E}_J = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_J dt.$$

- La conservation de l'énergie dans le circuit donne :

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_g - \Delta E_{elec} = CE(E - U_0) - \left[ \frac{1}{2}CE^2 - \frac{1}{2}CU_0^2 \right] = \frac{1}{2}C(E - U_0)^2.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

2) a) On paramètre, pour  $t > 0$ , le circuit comme le précise le schéma ci-dessous :



On a :  $i_C = C \frac{du}{dt}$  et  $i_R = \frac{u}{R}$ , d'où d'après la loi des nœuds :

$$i = i_C + i_R = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R},$$

La loi des mailles donne alors l'équation différentielle :

$$E = Ri + u, \text{ d'où : } E = RC \frac{du}{dt} + \left( \frac{R}{R'} + 1 \right) u.$$

b) La constante de temps du circuit est :  $\tau' = \frac{RR'}{R + R'} C$ .



Pour la mettre en évidence, il faut récrire l'équation différentielle sous la forme canonique :

$$\frac{RR'}{R+R'} C \frac{du}{dt} + u = \frac{R'}{R+R'} E.$$

La solution particulière constante de l'équation est :

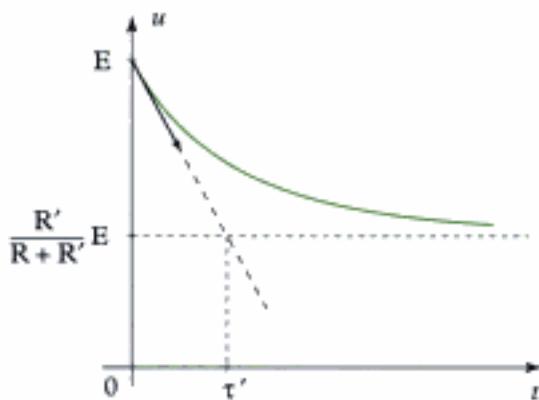
$$u_2 = \frac{R'}{R+R'} E, \text{ d'où : } u(t) = \frac{R'}{R+R'} E + A' e^{-\frac{t}{\tau'}}.$$

À l'instant  $t = 0$ ,  $u(0) = E$ , soit :  $A' = \frac{R}{R+R'} E$ .

La loi d'évolution de la tension  $u$  s'écrit donc :

$$u(t) = \frac{E}{R+R'} \left[ R' + R e^{-\frac{t}{\tau'}} \right], \text{ avec } \tau' = \frac{RR'}{R+R'} C.$$

L'allure de la courbe est la suivante :



c) Comme à la question 1) f), on a toujours l'équation :

$$Ei = Ri^2 + ui, \text{ avec } ui = ui_C + ui_{R'} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right) + R'i_{R'}^2.$$

La tension aux bornes de la résistance  $R'$  vaut en effet :  $u = R'i_{R'}$ , d'où :  $ui_{R'} = R'i_{R'}^2$ .

On obtient donc l'égalité :

$$Ei = Ri^2 + R'i_{R'}^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right).$$

puissance fournie par le générateur      puissance Joule dissipée dans R      puissance Joule dissipée dans  $R'$       variation de l'énergie du condensateur au cours du temps

La puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans les résistances  $R$  et  $R'$  et sert à faire varier l'énergie emmagasinée dans le condensateur.

On pourrait calculer tous les termes intervenant dans ce bilan et les intégrer pour obtenir les énergies correspondantes, car on connaît  $u$  et  $i$  (donc  $i_{R'}$ ).

## Exercice 12

a) L'interrupteur  $K'$  étant ouvert, le circuit est un circuit  $RL$  alimenté par un générateur de fém  $E$ . La loi d'évolution de l'intensité  $i$  lors de l'établissement du courant dans la bobine est alors :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Lorsque le régime permanent est atteint, le courant dans la bobine est constant et la tension à ses bornes est nulle. On a donc :

$$I = \frac{E}{R}.$$

Hidden page

La constante de temps est  $\tau = \frac{(R_2 + R_3)L}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$  et la solution particulière constante (régime permanent) vaut :

$$I = \frac{R_2E}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

Compte tenu des conditions initiales ( $i(0) = 0$ ), on obtient donc :

$$i(t) = I \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

b) • Quand on ouvre l'interrupteur K, l'équation différentielle vérifiée par  $i$  devient :

$$\frac{L}{R_1 + R_2} \frac{di}{dt} + i = 0.$$

Compte tenu des conditions initiales ( $i(0) = I$ ), on obtient donc :

$$i = I e^{-\frac{t}{\tau'}}, \text{ avec } \tau' = \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

• L'énergie magnétique initialement emmagasinée dans la bobine est :  $\frac{1}{2} LI^2$ .

Le circuit ne comporte pas de générateur. Au cours de l'arrêt du courant, l'énergie magnétique de la bobine est entièrement dissipée par effet Joule dans les résistances  $R_1$  et  $R_2$ .

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L \left( \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \right)^2.$$

 Un raisonnement physique simple permet de répondre à la question posée sans aucun calcul.

## Exercice 14

a) La diode joue le rôle de court-circuit. La loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par l'intensité  $i$  :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0.$$

Compte tenu des conditions initiales ( $i(0) = I = \frac{E}{R}$ ), on obtient donc :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

 Si K est ouvert, on a :  $i' = i > 0$ . La diode est bien passante.

b) Quand on ouvre K, le courant  $i' = i > 0$  circule dans la diode et la tension à ses bornes vaut  $u' = V_S$ . La loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par  $i$  :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = -\frac{V_S}{R}, \text{ tant que } i \geq 0.$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$i = -\frac{V_S}{R} + A e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Le courant dans la bobine est continu, donc à  $t = 0$ , on a :

$$i(0) = I = \frac{E}{R} = -\frac{V_S}{R} + A, \text{ d'où : } A = \frac{E + V_S}{R}.$$

La loi d'évolution de l'intensité  $i$  est alors :

$$i(t) = -\frac{V_S}{R} + \frac{E + V_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ tant que } i \geq 0.$$

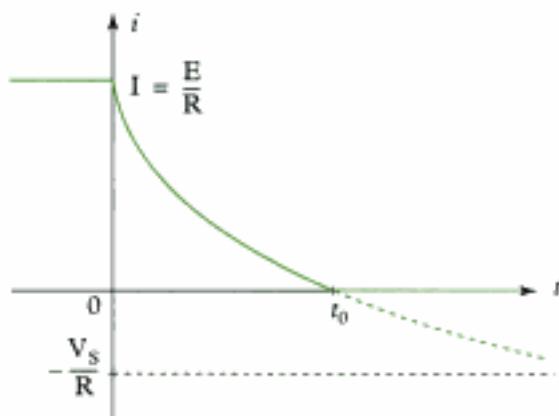


Le courant dans le circuit ne peut pas prendre de valeurs négatives. Il s'annule quand toute l'énergie magnétique initialement emmagasinée dans la bobine a été dissipée dans le circuit.

L'intensité  $i$  du courant s'annule à l'instant  $t_0$  tel que :

$$-V_S + (E + V_S)e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 0, \text{ d'où : } t_0 = -\tau \ln\left(\frac{V_S}{E + V_S}\right) = \tau \ln\left(1 + \frac{E}{V_S}\right).$$

Pour  $t > t_0$ , le courant reste nul. On peut représenter l'évolution de l'intensité  $i$  au cours du temps :



L'énergie magnétique de la bobine s'est dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$ , mais aussi dans la diode qui reçoit une puissance positive (quand  $i \geq 0$ , on a :  $v' i' = V_S i \geq 0$ ).

## Exercice 15

a) Dans le circuit étudié, la loi des nœuds donne :

$$i_1 = i + C \frac{du}{dt} \quad (1)$$

Le circuit comporte deux mailles indépendantes, d'où :

$$\begin{cases} \text{maille de gauche : } E = R i_1 + L \frac{di}{dt} \\ \text{maille de droite : } L \frac{di}{dt} = R C \frac{du}{dt} + u \end{cases} \quad (2) \quad (3)$$



On cherche à combiner les égalités (1), (2) et (3) pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par  $u$ .

On reporte les égalités (1) et (3) dans l'égalité (2) :

$$E = \left( R i + R C \frac{du}{dt} \right) + \left( R C \frac{du}{dt} + u \right) = R i + 2 R C \frac{du}{dt} + u \quad (4)$$

On dérive l'égalité précédente et on utilise (3) :

$$0 = R \frac{di}{dt} + 2 R C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = \frac{R}{L} \left( R C \frac{du}{dt} + u \right) + 2 R C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt}.$$

L'équation différentielle vérifiée par  $u$  s'écrit donc :

$$2\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2} + 2\tau \frac{du}{dt} + u = 0 \text{ ou } \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{u}{2\tau^2} = 0, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R} = RC.$$

 On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

• Le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \frac{1}{\tau} r + \frac{1}{2\tau^2} = 0, \text{ avec } \Delta = -\frac{1}{\tau^2} < 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées (régime pseudo-périodique) :

$$r = -\frac{1}{2\tau} \pm j\frac{1}{2\tau}.$$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ A \cos\left(\frac{t}{2\tau}\right) + B \sin\left(\frac{t}{2\tau}\right) \right].$$

À l'instant  $t = 0$ , les conditions initiales sont :  $u(0) = 0$  et  $i(0) = 0$ . D'après la loi des mailles :

$$i_1(0) = \frac{E}{2R}, \text{ d'où } \frac{du}{dt}(0) = \frac{i_1(0)}{C} = \frac{E}{2RC} = \frac{E}{2\tau}.$$

 À l'instant  $t=0$ , tout le courant débité par le générateur traverse la branche contenant le condensateur.

On peut ainsi déterminer les constantes  $A$  et  $B$  :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \\ \frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{2\tau} \Rightarrow \frac{B}{2\tau} = \frac{E}{2\tau}, \text{ d'où : } B = E. \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension  $u$  s'écrit donc :

$$u(t) = E e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin\left(\frac{t}{2\tau}\right).$$

La loi d'évolution de l'intensité  $i$  se déduit de l'égalité (4) :

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{2\tau}{R} \frac{du}{dt} - \frac{u}{R} = \frac{E}{R} \left[ 1 - \cos\left(\frac{t}{2\tau}\right) e^{-\frac{t}{2\tau}} \right].$$

En régime permanent, on a donc :

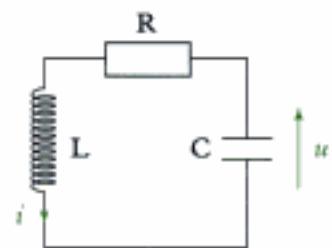
$$u = 0 \quad \text{et} \quad I = \frac{E}{R}.$$

 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil et court-circuite la branche contenant le condensateur. Tout le courant débité par le générateur traverse donc la bobine.

b) À l'ouverture du circuit, on se ramène à l'étude d'un circuit RLC série avec  $i = -C \frac{du}{dt}$  (le condensateur est en convention générateur).

L'équation différentielle du second ordre vérifiée par la tension  $u$  est donc :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2} = 0.$$





On a :  $\tau = RC = \frac{L}{R}$ , d'où :  $LC = \frac{L}{R} \times RC = \tau^2$ .

Le polynôme caractéristique s'écrit alors :

$$r^2 + \frac{r}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} = 0, \text{ avec } \Delta = -\frac{3}{\tau^2} < 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées (régime pseudo-périodique) :

$$r = -\frac{1}{2\tau} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2\tau}.$$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t\right) \right].$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = -\frac{E}{\tau} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}B}{2\tau} = -\frac{E}{\tau}, \text{ d'où : } B = -\frac{2E}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension  $u$  s'écrit donc :

$$u(t) = -\frac{2E}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t\right).$$

On en déduit la loi d'évolution de l'intensité  $i$  :

$$i(t) = -C \frac{du}{dt} = \frac{E}{R\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ -\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t\right) \right].$$

## Exercice 16

a) • Le circuit RL contenant la bobine est soumis à l'échelon de tension E. Lors de l'établissement du courant dans la bobine ( $i_1(0) = 0$ ), on a donc :

$$i_1(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

• Le circuit RC contenant le condensateur est soumis à l'échelon de tension E. Lors de la charge du condensateur ( $u(0) = 0$ ), on a donc :

$$u(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = RC.$$

On en déduit l'expression de  $i_2$  :

$$i_2(t) = C \frac{du}{dt} = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

• On obtient alors l'intensité totale  $i$  d'après la loi des nœuds :

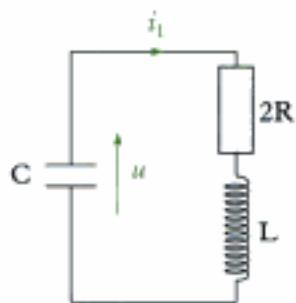
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{R}.$$

b) Quand on ouvre K, le condensateur C se décharge dans la résistance 2R et la bobine L. L'équation vérifiée par  $u$  est alors :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + 2RC \frac{du}{dt} + u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2} = 0.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \frac{2}{\tau} r + \frac{1}{\tau^2} = 0, \text{ avec } \Delta = 0 \text{ et } r = -\frac{1}{\tau}.$$



En régime critique, la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = (At + B)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = E \Rightarrow B = E \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i_1(0)}{C} = -\frac{E}{RC} \Rightarrow A - \frac{B}{\tau} = -\frac{E}{RC}, \text{ d'où : } A = 0. \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension  $u$  s'écrit donc :

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

### Exercice 17

a) • La loi des nœuds donne la relation :

$$i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \quad (1)$$

La loi des mailles donne la relation :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + u \quad (2)$$

En reportant (1) dans (2), on a :

$$E = \left( RC \frac{du}{dt} + u \right) + \frac{L}{R} \left( RC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} \right) + u = \tau^2 \frac{d^2u}{dt^2} + 2\tau \frac{du}{dt} + 2u,$$

$$\text{soit : } \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{2}{\tau^2} u = \frac{E}{\tau^2}.$$

On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

• La solution particulière constante est :  $u_2(t) = \frac{E}{2}$ .

L'équation sans second membre s'écrit :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{2}{\tau^2} u = 0,$$

de polynôme caractéristique :  $r^2 + \frac{2}{\tau} r + \frac{2}{\tau^2} = 0$ , avec  $\Delta = -\frac{4}{\tau^2} < 0$ .

Le polynôme admet deux racines complexes conjuguées :

$$r = -\frac{1}{\tau} \pm j\frac{1}{\tau}.$$

En régime pseudo-périodique, la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = \frac{E}{2} + e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ A \cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B \sin\left(\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

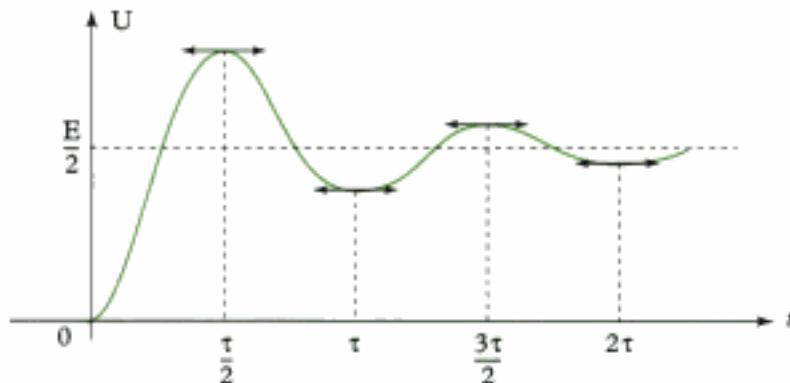
On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = 0 = A + \frac{E}{2} = 0, \text{ donc } A = -\frac{E}{2} \\ \frac{du}{dt}(0) = \frac{1}{C} \left( i(0) - \frac{u(0)}{R} \right) = 0 \Rightarrow \frac{B}{\tau} - \frac{A}{\tau} = 0, \text{ donc } B = A = -\frac{E}{2}. \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension  $u$  s'écrit donc :

$$u(t) = \frac{E}{2} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + \sin\left(\frac{t}{\tau}\right) \right] \right].$$

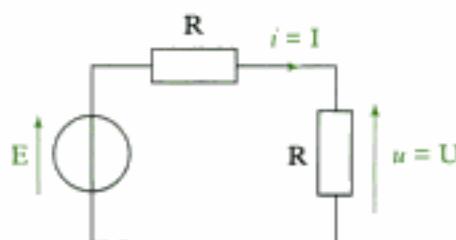
L'allure de  $u$  est représentée ci-dessous :



b) En régime permanent, la tension  $u$  aux bornes du condensateur et l'intensité  $i$  dans la bobine sont constantes :

$$u = U \quad \text{et} \quad i = I.$$

Le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. Le montage est équivalent au schéma simple ci-dessous :



La loi des mailles donne immédiatement :

$$I = \frac{E}{2R}, \quad \text{d'où : } U = \frac{E}{2}.$$

On retrouve évidemment ces résultats en utilisant les lois d'évolution de la tension  $u(t)$  et de l'intensité  $i(t)$ .

### Exercice 18

- La loi des nœuds donne :

$$i = C \frac{dv}{dt} + C \frac{du}{dt} \quad (1)$$

Le circuit comporte deux mailles indépendantes. On en déduit le système ci-dessous :

$$\begin{cases} E = Ri + v & (2) \\ v = RC \frac{du}{dt} + u & (3) \end{cases}$$

On reporte les égalités (1) et (3) dans l'égalité (2) :

$$E = RC \left( \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \right) + \left( RC \frac{du}{dt} + u \right).$$

On reporte l'égalité (3) dans l'expression précédente :

$$E = R^2 C^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3RC \frac{du}{dt} + u \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2} = \frac{E}{\tau^2}.$$

On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

- La solution particulière constante est :  $u_2(t) = E$ .

Le polynôme caractéristique associé à l'équation sans second membre s'écrit :

$$r^2 + \frac{3}{\tau} r + \frac{1}{\tau^2} = 0, \text{ avec } \Delta = \frac{5}{\tau^2} > 0.$$

Le polynôme admet deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2\tau} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2\tau}.$$

En régime apériodique, la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = E + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow E + A + B = 0, \\ \frac{du}{dt}(0) = \frac{1}{RC}(v(0) - u(0)) = 0 \Rightarrow Ar_1 + Br_2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$\begin{cases} A = \frac{r_2}{r_1 - r_2} E = -\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} E \\ B = -\frac{r_1}{r_1 - r_2} E = \frac{3\sqrt{5} - 5}{10} E. \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension  $u$  s'écrit alors :

$$u(t) = E \left[ 1 - \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \exp\left(-\frac{3 + \sqrt{5}}{2\tau} t\right) + \frac{3\sqrt{5} - 5}{10} \exp\left(-\frac{3 + \sqrt{5}}{2\tau} t\right) \right].$$

- L'équation différentielle vérifiée par  $u$  est :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{R^2 C^2} = \frac{E}{R^2 C^2}.$$

Par identification avec l'expression en variables réduites, on obtient :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{R^2 C^2}, \text{ soit : } Q = \frac{1}{3}.$$

En variables réduites, on a :  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$ .

## Exercices de niveau 3

### Exercice 19

a) • Si  $t \in \left]nT ; nT + \frac{T}{2}\right[$ , on a :  $v(t) = E$ , d'où :  $RC\frac{du}{dt} + u = E$ .

• Si  $t \in \left]nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T\right[$ , on a :  $v(t) = 0$ , d'où :  $RC\frac{du}{dt} + u = 0$ .

b) Pour  $t \in \left]0 ; \frac{T}{2}\right[$ , on est dans le cas de la charge du condensateur d'un circuit RC, initialement déchargé, soumis à l'échelon de tension E. On a donc :

$$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \text{ avec } \tau = RC.$$

On en déduit :  $u_0 = u\left(\frac{T}{2}\right) = E\left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}\right)$ .

c) Pour  $t \in \left]\frac{T}{2} ; T\right[$ , on est dans le cas de la décharge d'un condensateur chargé sous la tension  $u_0$  à l'instant  $\frac{T}{2}$ . On a donc :

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{1}{\tau}(t-\frac{T}{2})} = E\left(e^{\frac{T}{2\tau}} - 1\right)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

 Dans l'expression de  $u$ , on introduit un décalage temporel de  $\frac{T}{2}$  car la décharge commence à  $t = \frac{T}{2}$ .

On en déduit :  $v_1 = u(T) = E\left(e^{-\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)$ .

d) On découpe l'intervalle  $\left]nT ; (n+1)T\right[$  en deux intervalles :

$$\left]nT ; nT + \frac{T}{2}\right[ \text{ et } \left]nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T\right[.$$

• Pour  $t \in \left]nT ; nT + \frac{T}{2}\right[$ , on est dans le cas de la charge du condensateur d'un circuit RC, initialement chargé sous la tension  $u(nT) = v_n$ , soumis à l'échelon de tension E.

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :  $u(t) = E + A_n e^{-\frac{1}{\tau}(t-nT)}$ .

 Le condensateur n'étant pas initialement déchargé, on n'a pas  $A_n = -E$ . En outre, on tient compte du décalage temporel de  $nT$ .

À l'instant  $t = nT$ , on a :  $u(nT) = v_n = E + A_n$ , soit :  $A_n = v_n - E$ .

On en déduit donc :

$$u(t) = E + (v_n - E)e^{-\frac{1}{\tau}(t-nT)}.$$

À l'instant  $t = nT + \frac{T}{2}$ , on obtient :

$$u\left(nT + \frac{T}{2}\right) = u_n = E + (v_n - E)e^{-\frac{T}{2\tau}}.$$

- Pour  $t \in \left]nT + \frac{T}{2}; (n+1)T\right[$ , on est dans le cas de la décharge d'un condensateur initialement chargé sous la tension  $u_n$ . On a donc :

$$u(t) = u_n e^{-\frac{1}{\tau} \left[ t - \left( nT + \frac{T}{2} \right) \right]}.$$

À l'instant  $t = (n+1)T$ , on obtient :

$$u((n+1)T) = v_{n+1} = u_n e^{-\frac{T}{2\tau}}.$$

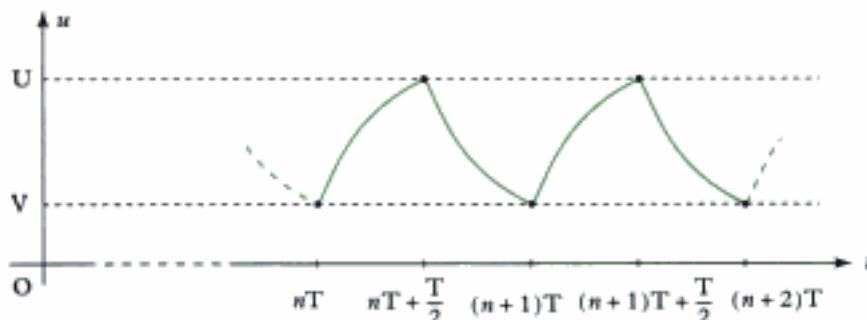
- Les limites  $U$  et  $V$  des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  vérifient les équations :

$$\begin{cases} U = E + (V - E)e^{-\frac{T}{2\tau}} \\ V = U e^{-\frac{T}{2\tau}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right) = E \left( 1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) \\ V = U e^{-\frac{T}{2\tau}} \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$U = E \frac{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad \text{et} \quad V = E \frac{e^{-\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}.$$

En régime oscillatoire permanent, l'allure de  $u(t)$  est représentée ci-dessous :



En régime oscillatoire permanent, on peut considérer le temps écoulé suffisamment grand pour que les limites  $U$  et  $V$  soient atteintes.

## Exercice 20

- La lampe étant éteinte, le circuit est un circuit RC alimenté par un générateur de fém  $E$ . Comme le condensateur est initialement déchargé, on a :

$$u(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

- La lampe s'allume si  $u > V_a$ . Il suffit donc que :  $E > V_a$ .

- L'instant d'allumage  $t_a$  vérifie :

$$V_a = E \left( 1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}} \right), \quad \text{soit} : \quad t_a = -\ln \left( 1 - \frac{V_a}{E} \right).$$

- La lampe allumée est équivalente à une résistance  $r$ .

Le courant  $i$  traversant la résistance  $R$  est la somme du courant traversant le condensateur et du courant traversant la lampe. La loi des mailles s'écrit :

$$E = Ri + u = R \left( C \frac{du}{dt} + \frac{u}{r} \right) + u, \quad \text{d'où} : \quad \frac{Rr}{R+r} C \frac{du}{dt} + u = \frac{r}{r+R} E.$$

La constante de temps du circuit est  $\tau' = \frac{Rr}{R+r}C$  et la solution particulière constante  $u_2 = \frac{r}{r+R}E$ .

La solution générale de l'équation différentielle est :

$$u = \frac{r}{r+R}E + Ae^{-\frac{(t-t_a)}{\tau'}}.$$



On tient compte dans l'expression de  $u$  du décalage temporel  $t_a$ .

À l'instant  $t = t_a$ , on a :

$$u(t_a) = V_a, \quad \text{soit : } A = V_a - \frac{r}{r+R}E.$$

On en déduit donc :

$$u(t) = \frac{r}{r+R}E + \left(V_a - \frac{r}{r+R}E\right)e^{-\frac{(t-t_a)}{\tau'}}, \quad \text{avec } \tau' = \frac{Rr}{R+r}C.$$

• La lampe s'éteint si  $u < V_e$ . Il suffit donc que :

$$\frac{r}{R+r}E < V_e.$$

c) On suppose les deux conditions précédentes réalisées. On peut donc distinguer différentes phases.

• Si  $t \in ]0 ; t_a[$ , alors le condensateur se charge. Il existe un instant  $t_c$  tel que  $u(t_c) = V_e$ :

$$t_c = -RC\ln\left(1 - \frac{V_e}{E}\right).$$

• Si  $t \in ]t_a ; t'_c[$ , alors le condensateur se décharge et la lampe s'éteint quand  $t = t'_c$  tel que :

$$u(t'_c) = V_e = \frac{r}{r+R}E + \left(V_a - \frac{r}{r+R}E\right)e^{-\frac{(t'_c-t_a)}{\tau'}}, \quad \text{soit : } t'_c = -\tau'\ln\left(\frac{V_e - \frac{r}{r+R}E}{V_a - \frac{r}{r+R}E}\right) - t_a.$$



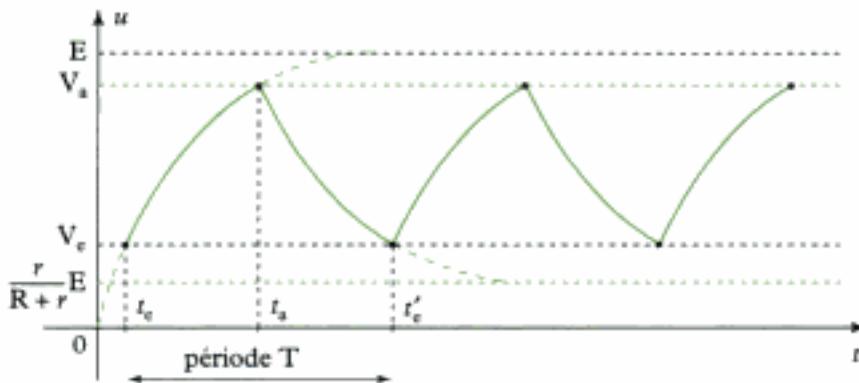
Les calculs sont longs, mais pas très difficiles.

• Si  $t \in ]t'_c ; t'_c + t_a[$ , alors le condensateur se charge à nouveau dans les mêmes conditions que précédemment, etc. On peut donc définir la période  $T$  du phénomène par :

$$T = t'_c - t_c = \tau'\ln\left(\frac{V_a - \frac{r}{r+R}E}{V_e - \frac{r}{r+R}E}\right) + \tau'\ln\left(\frac{E - V_e}{E - V_a}\right).$$



On remplace  $t_a$ ,  $t_c$  et  $t'_c$  par leurs expressions et on utilise les propriétés des logarithmes.



## Exercice 21

- 1) • L'équation différentielle d'établissement du courant dans la bobine est :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Compte tenu des conditions initiales ( $i(0) = 0$ ), on obtient donc :

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

- La valeur limite de  $i$  est  $\frac{E}{R}$ . Elle est atteinte à 5 % près à l'instant  $t$  tel que :

$$0,95 \frac{E}{R} = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ soit : } t = -\tau \ln(0,05) = 3\tau.$$

 Le régime permanent est établi à 5 % près au bout de  $3\tau$ .

- 2) a) • Si  $t \in \left]nT ; nT + \frac{T}{2}\right[$ , on a :  $e(t) = E$ , d'où :  $\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$ .

- Si  $t \in \left]nT + \frac{T}{2} ; nT + T\right[$ , on a :  $e(t) = 0$ , d'où :  $\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0$ .

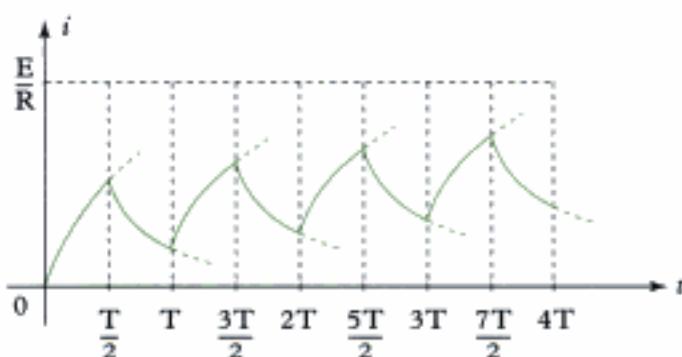
 Cette question est analogue à la question a) de l'exercice 19.

- b) D'après les équations différentielles écrites à la question présente, l'intensité  $i$  a la forme :

- d'une exponentielle croissante sur la demi-période  $\left]nT ; nT + \frac{T}{2}\right[$ ;
- d'une exponentielle décroissante sur la demi-période  $\left]nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T\right[$ .

 La première demi-période correspond à l'établissement du courant dans la bobine, la seconde à l'arrêt du courant dans la bobine.

L'allure de l'évolution de  $i(t)$  sur les quatre premières périodes est représentée ci-dessous :



- c) On se place maintenant en régime périodique permanent. L'intensité du courant varie entre les valeurs  $I_m$  et  $I_M$  au cours d'une période  $T$ .

- Si  $t \in \left]nT ; nT + \frac{T}{2}\right[$ , la solution de l'équation différentielle posée à la question 2) a) est :

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{(t-nT)}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

 On tient compte dans l'expression de  $i$  du décalage temporel  $nT$ .

- À l'instant  $t = nT$ , on a :

$$i(nT) = I_m = \frac{E}{R} + A, \text{ soit : } A = I_m - \frac{E}{R} \quad (1)$$

- À l'instant  $t = nT + \frac{T}{2}$  on a :

$$i\left(nT + \frac{T}{2}\right) = I_M = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{T}{2\tau}}, \text{ soit : } A = \left(I_M - \frac{E}{R}\right)e^{\frac{T}{2\tau}} \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on déduit donc :

$$I_m - \frac{E}{R} = \left(I_M - \frac{E}{R}\right)e^{\frac{T}{2\tau}} \quad (a)$$

• Si  $t \in \left]nT + \frac{T}{2}; (n+1)T\right[$ , la solution de l'équation différentielle posée à la question 2) a) est :

$$i(t) = A'e^{-\frac{[t-(nT+\frac{T}{2})]}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

 On tient compte dans l'expression de  $i$  du décalage temporel  $nT + \frac{T}{2}$ .

- À l'instant  $t = nT + \frac{T}{2}$ , on a :

$$i\left(nT + \frac{T}{2}\right) = I_M = A' \quad (3)$$

- À l'instant  $t = (n+1)T$ , on a :

$$i[(n+1)T] = I_m = A'e^{-\frac{T}{2\tau}} \quad (4)$$

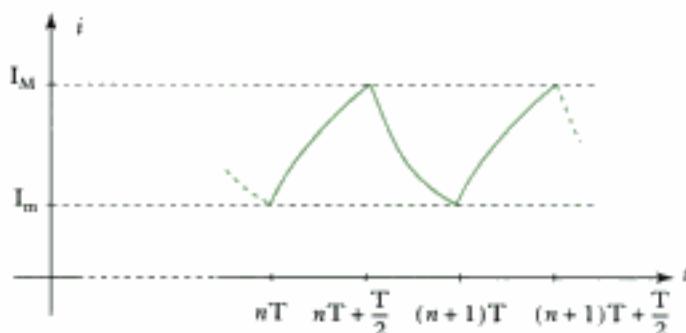
Des égalités (3) et (4), on déduit donc :

$$I_m = I_M e^{-\frac{T}{2\tau}} \quad (b)$$

• Des égalités (a) et (b), on obtient donc finalement :

$$I_M = \frac{E}{R} \frac{e^{\frac{T}{2\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{2\tau}}} \quad \text{et} \quad I_m = \frac{E}{R} \frac{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{e^{\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{2\tau}}}$$

En régime périodique permanent, l'allure de la courbe  $i(t)$  devient :



## CHAPITRE

# 5

# Signaux sinusoïdaux

### Introduction

Ce chapitre constitue une courte introduction à l'étude des circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé. Les définitions données seront alors réinvesties en exercices ou en travaux pratiques.

### Plan du chapitre 5

A. Description des signaux sinusoïdaux .....	166
1. Écriture d'un signal sinusoïdal .....	166
2. Analyse de Fourier d'un signal périodique .....	167
3. Notations complexes .....	167
B. Observation de signaux sinusoïdaux .....	169
1. Visualisation à l'oscilloscope .....	169
2. Mesures et comparaison .....	170

### Méthodes

L'essentiel ; mise en œuvre .....	173
Énoncés des exercices .....	176
Indications .....	176
Solution des exercices .....	177

# A. Description des signaux sinusoïdaux

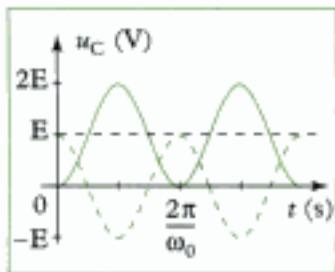


Fig. 1 - Mise en évidence de la composante continue et de la composante sinusoïdale.

1. Ce qui équivaut à  $R = 0$ , donc au cas d'un circuit LC série.

2. On rappelle que la pulsation propre  $\omega_0$  vaut :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

3. Le signal S peut être une tension ou une intensité.

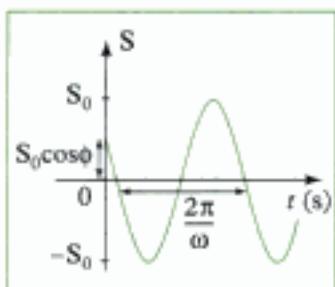


Fig. 2 - Représentation d'un signal sinusoïdal.

4. Nous verrons dans un prochain chapitre une définition énergétique de la valeur efficace  $S_{\text{eff}}$ .

## A.1. Écriture d'un signal sinusoïdal

### A.1.1 - Exemple : circuit RLC série non amorti

Considérons la charge du condensateur d'un circuit RLC série soumis à un échelon de tension E étudiée au chapitre 4 (voir § C). En régime pseudo-périodique, la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur a pour expression (voir § C.2.5) :

$$u_C(t) = E \left\{ 1 - e^{-\alpha \omega_0 t} \left[ \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2} t) + \frac{\lambda}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2} t) \right] \right\}$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'amortissement du circuit. Si  $\alpha$  est nul<sup>1</sup>, alors les oscillations du circuit ne sont pas amorties et on a :

$$u_C(t) = E[1 - \cos(\omega_0 t)], \text{ avec } \omega_0 \text{ pulsation propre}^2.$$

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur s'écrit alors comme la différence de deux termes (fig. 1) :

- une tension continue E ;
- une tension sinusoïdale  $E \cos(\omega_0 t)$ .

### A.1.2 - Caractéristiques d'un signal sinusoïdal

#### Définition 1

Le signal électrique S<sup>3</sup> est sinusoïdal si son évolution au cours du temps peut s'écrire sous la forme (fig. 2) :

$$S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi).$$

#### • Amplitude du signal – Valeur efficace

- La grandeur  $S_0$  correspond à la valeur maximale du signal au cours du temps : on l'appelle l'amplitude du signal (elle s'exprime dans la même unité que le signal).
- On définit aussi la valeur efficace  $S_{\text{eff}}$  liée au signal sinusoïdal S par le rapport<sup>4</sup> :

$$S_{\text{eff}} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}, \text{ où } S_0 \text{ est l'amplitude du signal.}$$

#### • Pulsation – Période – Fréquence

- La grandeur  $\omega$ , exprimée en  $s^{-1}$  (ou en  $\text{rad} \cdot s^{-1}$ ), s'appelle la pulsation du signal.
- La période T du signal, exprimée en seconde (s), correspond à la durée d'une oscillation complète : on a donc  $S(t+T) = S(t)$ .
- La fréquence f du signal, exprimée en hertz (Hz), est par définition l'inverse de la période T (en s).

La pulsation  $\omega$ , la période T et la fréquence f du signal sinusoïdal sont liées par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad (\text{ou } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}).$$

### • Phase du signal – Phase à l'origine

La grandeur  $(\omega t + \phi)$ , exprimée en radian (rad), s'appelle la phase du signal. Le nombre  $\phi$ , compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ , est la phase à l'origine des temps ( $t = 0$ ).

## A.2. Analyse de Fourier d'un signal périodique

L'étude des signaux sinusoïdaux revêt un grand intérêt, car un signal périodique quelconque de fréquence  $f_0$  peut toujours être décomposé en une somme (finie ou infinie) de signaux sinusoïdaux de fréquences  $f_n$  ( $n$  est un entier naturel), appelée **série de Fourier**. Dans ce développement :

- la fréquence  $f_1 = f_0$  correspond au fondamental ( $n = 1$ ) ;
- la fréquence  $f_n = n f_0$  correspond à l'harmonique d'ordre  $n$  ( $n > 1$ ).

Les amplitudes  $A_n$  des signaux sinusoïdaux sont liées à l'amplitude  $A_0$  du signal périodique. Les logiciels actuels permettent de décomposer très rapidement les signaux en leur série de Fourier<sup>1</sup>.

*Exemple :*

Un signal carré de période  $T_0$  et d'amplitude  $A_0$  (fig. 3) peut être décomposé de la façon suivante :

- Fondamental :

$$\text{fréquence } f_1 = f_0 = \frac{1}{T_0} ; \quad \text{amplitude } A_1 = \frac{4}{\pi} A_0.$$

- Harmoniques impaires ( $n = 2p + 1$ ) :

$$\text{fréquence } f_n = n f_0 ; \quad \text{amplitude } A_n = \frac{A_1}{n}.$$

- Harmoniques paires ( $n = 2p$ ) :

$$\text{fréquence } f_n = n f_0 ; \quad \text{amplitude } A_n = 0.$$

1. Le calcul analytique des coefficients du développement en série de Fourier sera traité dans le cours de mathématiques de deuxième année.

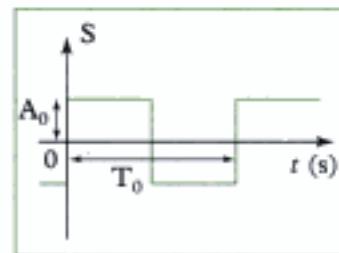


Fig. 3 - Signal carré de période  $T_0$  et d'amplitude  $A_0$ .

2. En électrocinétique, on utilise le nombre complexe  $j$  (tel que  $j^2 = -1$ ) plutôt que le nombre  $i$  (pour ne pas introduire de confusion avec l'intensité du courant  $i$ ).

3. On a :  
 $\underline{S}(t) = S(t) + j \operatorname{Im}(S(t))$

4. On écrit parfois :  
 $\omega t + \phi = \angle \underline{S}(t)$ .

## A.3. Notations complexes

### A.3.1 - Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

Considérons le signal sinusoïdal  $S$  tel que :  $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$ . En passant à une écriture complexe<sup>2</sup>, ce signal peut aussi s'écrire :

$$S(t) = \operatorname{Re}[\underline{S}(t)], \quad \text{avec} \quad \underline{S}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \phi)}.$$

Un signal sinusoïdal peut donc être représenté par une grandeur complexe<sup>3</sup>. L'amplitude  $S_0$  du signal est le module :  $S_0 = |\underline{S}(t)|$ . La phase  $(\omega t + \phi)$  du signal est l'argument<sup>4</sup> :  $\omega t + \phi = \arg(\underline{S}(t))$ .

L'écriture complexe de la grandeur sinusoïdale  $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$  est :

$$\underline{S}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \phi)} = S_0 e^{j\omega t}, \quad \text{avec} \quad S_0 = S_0 e^{j\phi}.$$

$S_0$  est l'amplitude complexe du signal  $S$  : son module est l'amplitude réelle  $S_0$  ( $S_0 = |\underline{S}_0|$ ) ; son argument est la phase à l'origine des temps ( $\phi = \arg(\underline{S}_0)$ ).

Le passage à l'écriture complexe permet très souvent de simplifier techniquement les calculs.

### Application 1 Addition de deux signaux de même fréquence

On considère les signaux sinusoïdaux  $S_1(t) = S_0 \cos(\omega t)$  et  $S_2(t) = S_0 \sin(\omega t)$ . En utilisant les représentations complexes, calculer la somme  $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ . Préciser l'amplitude et la phase à l'origine de ce signal.

#### Solution

Les représentations complexes des signaux  $S_1$  et  $S_2$  s'écrivent :

$$\underline{S}_1(t) = S_0 e^{j\omega t} \text{ et } \underline{S}_2 = S_0 e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}, \text{ car } \sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

La somme  $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$  admet donc pour représentation complexe :

$$\underline{S}(t) = \underline{S}_1(t) + \underline{S}_2(t) = S_0 e^{j\omega t} [1 - j], \text{ car } e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j.$$

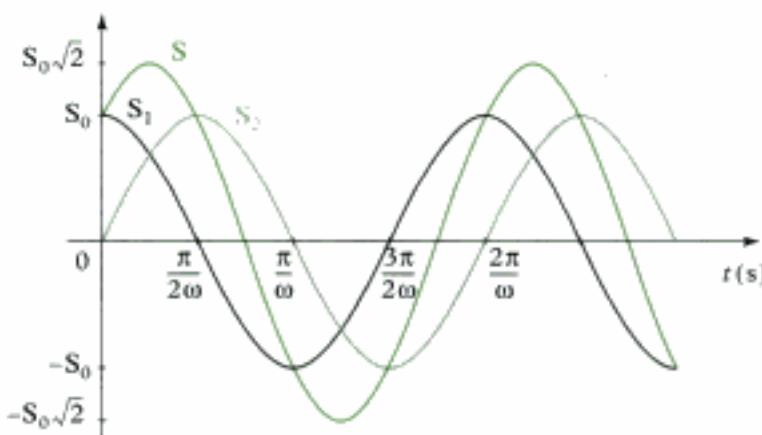
Le complexe  $1 - j$  a pour module  $\sqrt{2}$  et pour argument  $-\frac{\pi}{4}$ . D'où :

$$1 - j = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}, \text{ soit : } \underline{S}(t) = S_0 e^{j\omega t} \times \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} = S_0 \sqrt{2} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Le signal réel  $S(t)$  est la partie réelle du complexe  $\underline{S}(t)$  :

$$S(t) = \operatorname{Re} \left[ S_0 \sqrt{2} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)} \right] = S_0 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

L'amplitude du signal vaut  $S_0 \sqrt{2}$  et la phase à l'origine des temps est  $-\frac{\pi}{4}$ .



#### A.3.2 - Déivation et intégration

Soit le signal sinusoïdal  $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$  représenté par le complexe  $\underline{S}(t) = S_0 e^{j\omega t}$ , que l'on peut aussi écrire  $\underline{S}(t) = S(t) + j \operatorname{Im}[\underline{S}(t)]$ . En dérivant ces deux expressions de  $\underline{S}(t)$  par rapport au temps, on obtient donc :

$$\frac{d\underline{S}}{dt} = j\omega \underline{S}_0 e^{j\omega t} = j\omega \underline{S}(t) \text{ et } \frac{d\underline{S}}{dt} = \frac{dS}{dt} + j \frac{d\operatorname{Im}[\underline{S}]}{dt}.$$

Soit le signal sinusoïdal  $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$  représenté par le complexe  $\underline{S}(t)$ . La dérivée par rapport au temps de  $S$  s'écrit :

$$\frac{d\underline{S}}{dt} = \operatorname{Re} \left[ \frac{d\underline{S}}{dt} \right], \text{ avec } \frac{dS}{dt} = j\omega \underline{S}.$$

De manière générale, on remplace en notations complexes l'opérateur dérivation  $\frac{d}{dt}$  par  $j\omega$  et l'opérateur dérivation  $n^{\text{ème}}$   $\frac{d^n}{dt^n}$  par  $(j\omega)^n$ .

#### Remarque

De même, une primitive du signal sinusoïdal  $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$  s'écrit :

$$\int S(t) dt = \operatorname{Re}[\int S(t) dt], \text{ avec } \int S(t) dt = \frac{1}{j\omega} S(t).$$

## B. Observation de signaux sinusoïdaux

### B.1. Visualisation à l'oscilloscope

L'oscilloscope permet de visualiser en temps réel les tensions mesurées aux bornes des dipôles d'un circuit (fig. 4). Pour une bonne observation des signaux, il est nécessaire d'effectuer différents réglages.

#### B.1.1 - Les réglages initiaux

- Pour déterminer les valeurs de certaines grandeurs caractéristiques du signal, il faut au préalable **calibrer** les boutons de mesure. On réalise en général cette opération en plaçant les boutons en « butée ». Dans ces conditions, les indications fournies par les calibres sont valables. En position non calibrée, l'observation des signaux ne donne que des indications relatives sur les grandeurs mesurées.
- Pour effectuer les mesures de tension, il est nécessaire de connaître le « **zéro** » du circuit et éventuellement de recentrer le signal. On obtient la position zéro en mettant la touche associée au calibre sur la position **ground** (terre).
- Dans le cas de plusieurs signaux, l'observation est facilitée par une bonne utilisation de la touche de **synchronisation**. On choisit en général de synchroniser les signaux sur le signal de plus grande amplitude.
- Si on étudie seulement la composante alternative du signal au cours du temps, on utilise le mode A-C de la voie de l'oscilloscope, qui supprime la composante continue. En revanche, si on s'intéresse à la valeur de la tension mesurée par rapport au zéro, on utilise le mode D-C qui laisse aussi passer la composante continue du signal.

#### B.1.2 - Base de temps et sensibilité verticale

- La **base de temps** (calibre temporel donnant le défilement horizontal des signaux) permet de connaître la durée du signal visualisé. En pratique, la plupart des signaux étudiés sont périodiques. En général, on choisit un calibre tel que l'on puisse observer une, deux ou trois périodes des signaux (fig. 5).
- La **sensibilité verticale** (calibre d'amplification augmentant la taille des signaux sur l'écran) permet de connaître la valeur de la tension visualisée. En général, on choisit un calibre tel que l'on puisse observer une amplitude maximale des signaux (fig. 5).

#### B.1.3 - Mode X-Y

Lorsqu'on étudie simultanément deux signaux, il est possible d'observer le signal 2 en fonction du signal 1, la courbe étant alors paramétrée par le temps  $t$ . Sur l'oscilloscope, cette opération s'effectue automatiquement en enfonçant la touche X-Y.

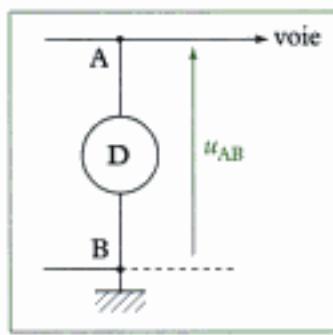


Fig. 4 - La tension aux bornes du dipôle D visualisée sur la voie de l'oscilloscope est la tension  $u_{AB}$ .

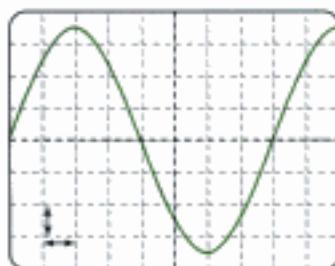


Fig. 5 - Choix de la base de temps et de la sensibilité verticale pour bien visualiser le signal à l'écran de l'oscilloscope.

## B.2. Mesures et comparaison

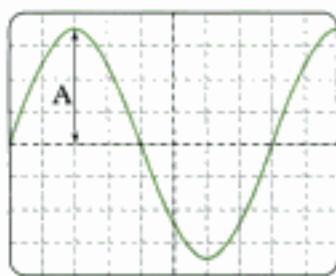


Fig. 6 - Le signal étant centré verticalement, son amplitude A vaut 3,5 carreaux.

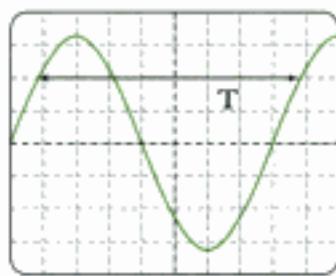


Fig. 7 - La période T du signal vaut 8 carreaux.

1. C'est-à-dire, deux signaux qui ont la même période T.

2. Cela revient à effectuer le changement de variable :

$$t \rightarrow t - \frac{\phi_1}{\omega}$$

3. Le maximum de  $S_2$  est atteint à l'instant  $t = -\frac{\phi_1}{\omega} > 0$ , donc après le maximum de  $S_1$ .

4. Le maximum de  $S_2$  est atteint à l'instant  $t = -\frac{\phi_1}{\omega} < 0$ , donc avant le maximum de  $S_1$ .

5. Ce décalage se mesure entre deux maxima ou entre deux passages à zéro dans le même sens.

### B.2.1 - Mesure de l'amplitude

Sur l'écran de l'oscilloscope (fig. 6), l'amplitude A d'un signal se mesure grâce à la sensibilité verticale en repérant l'élargissement maximal du signal par rapport à sa valeur moyenne.

À l'aide de l'oscilloscope, on peut comparer les amplitudes de deux signaux différents, en veillant aux calibres utilisés sur les deux voies.

### B.2.2 - Mesure de la période

Sur l'écran de l'oscilloscope (fig. 7), la période T d'un signal périodique se mesure grâce à la base de temps en repérant deux points consécutifs correspondant à la répétition du signal (même élargissement et même pente).

À l'aide de l'oscilloscope, on peut comparer les périodes de deux signaux périodiques différents (même base de temps).

### B.2.3 - Mesure temporelle d'une différence de phase

Deux signaux sinusoïdaux synchrones<sup>1</sup> n'ont pas nécessairement la même phase à l'origine des temps. On étudie par exemple les signaux  $S_1$  et  $S_2$  tels que :

$$S_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{et} \quad S_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2).$$

En choisissant convenablement l'origine des temps<sup>2</sup>, on peut écrire :

$$S_1(t) = A_1 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad S_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi).$$

Le nombre sans dimension  $\phi$  compris entre  $-\pi$  et  $\pi$  ( $\phi = \phi_2 - \phi_1$  à  $2\pi$  près), s'appelle l'**avance de phase** (ou déphasage) du signal  $S_2$  sur le signal  $S_1$ .

Avec l'origine des temps ainsi choisie, le signal  $S_1$  est maximal à l'instant initial  $t = 0$  et le signal  $S_2$  est maximal à l'instant  $t$  tel que  $\omega t = -\phi$ .

– Si  $\phi < 0$ , le signal  $S_2$  est décalé vers la droite par rapport au signal  $S_1$  sur l'écran de l'oscilloscope<sup>3</sup> :  $S_2$  est « en retard » par rapport à  $S_1$ .

– Si  $\phi > 0$ , le signal  $S_2$  est décalé vers la gauche par rapport au signal  $S_1$  sur l'écran de l'oscilloscope<sup>4</sup> :  $S_2$  est « en avance » par rapport à  $S_1$ .

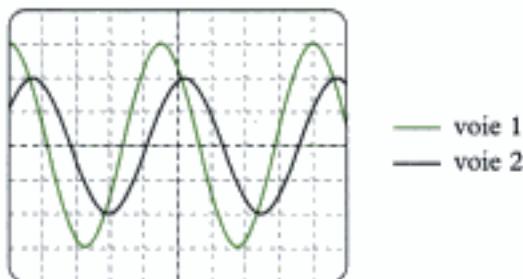
Pour déterminer la valeur de  $\phi$ , on compte sur l'écran de l'oscilloscope le nombre  $N$  de carreaux correspondant à la période T des signaux et le nombre  $n$  de carreaux correspondant au décalage de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  vers la droite ou vers la gauche<sup>5</sup>. La période T vérifie  $\omega T = 2\pi$ , c'est-à-dire  $360^\circ$ . En raisonnant par proportionnalité, on en déduit :

$$|\phi| = 2\pi \frac{n}{N} \quad (\text{en rad}) \quad \text{ou} \quad |\phi| = 360 \frac{n}{N} \quad (\text{en } ^\circ).$$

Pour obtenir une meilleure mesure du déphasage, il est préférable que T corresponde à la valeur maximale de N, c'est-à-dire à 10 carreaux (cette opération est possible en « décalibrant » la base de temps). Un carreau représente alors un déphasage de  $36^\circ$ .

## Application 2 Mesures d'amplitude, de période et de déphasage

On observe simultanément deux signaux sur les voies 1 et 2 de l'oscilloscope. La base de temps est 1 ms/carréau. Les calibres sont 2 V/carréau pour la voie 1 et 50 mV/carréau pour la voie 2. L'oscillogramme obtenu est représenté ci-contre. Déterminer les amplitudes des deux signaux, leur période et leur fréquence, ainsi que le déphasage de la voie 2 sur la voie 1.



### Solution

- Les deux signaux sont centrés verticalement. L'elongation maximale de la voie 1 est donc de 3 carreaux et celle de la voie 2 est de 2 carreaux. En tenant compte des calibres de chaque voie, les amplitudes des deux signaux valent :

$$A_1 = 3 \text{ carreaux} \times 2 \text{ V/carréau} = 6 \text{ V}$$

et

$$A_2 = 2 \text{ carreaux} \times 50 \text{ mV/carréau} = 100 \text{ mV} = 0,1 \text{ V}.$$

- Pour les deux signaux, les deux premiers maxima sont distants de 4,5 carreaux. En tenant compte de la base de temps, la période T des signaux (synchrone) vaut :

$$T = 4,5 \times 1 \text{ ms/carréau} = 4,5 \text{ ms}, \text{ d'où : } f = \frac{1}{4,5 \times 10^{-3}} = 2,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}.$$

- La voie 2 est décalée vers la droite par rapport à la voie 1, donc  $\phi < 0$  (retard de phase). On mesure environ 0,7 carreaux de décalage entre les deux courbes. Comme la période correspond à 4,5 carreaux, on a donc :

$$|\phi| = 360 \times \frac{0,7}{4,5} = 56^\circ, \text{ soit : } \phi = -56^\circ.$$

(Cette mesure n'est pas très précise du fait de l'incertitude sur le repérage des courbes à l'écran.)

### B.2.4 - Mesure d'une différence de phase en mode X-Y

Quand les signaux observés à l'oscilloscope sont sinusoïdaux et synchrones, la courbe obtenue sur l'écran de l'oscilloscope en mode X-Y est une ellipse. Sur cette courbe, on peut mesurer l'amplitude de chaque signal et le déphasage entre les deux signaux.

En effet, en choisissant convenablement l'origine des temps, on peut écrire comme précédemment :

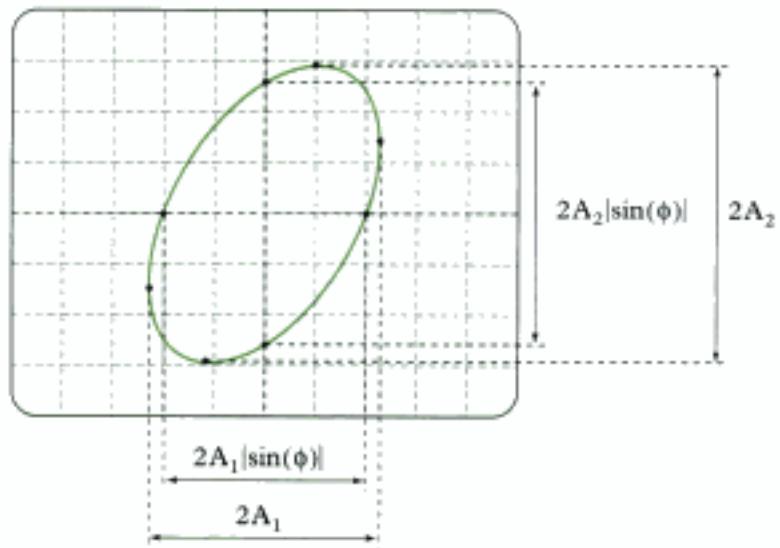
$$S_1 = A_1 \cos(\omega t) \text{ et } S_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi).$$

- L'écart entre les deux positions extrêmes de  $S_1$  est  $2A_1$  et l'écart entre les deux positions extrêmes de  $S_2$  est  $2A_2$ .

- Le signal  $S_2$  s'annule quand  $\omega t + \phi = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi)$ , soit :  $S_1 = \pm A_1 \sin \phi$ .

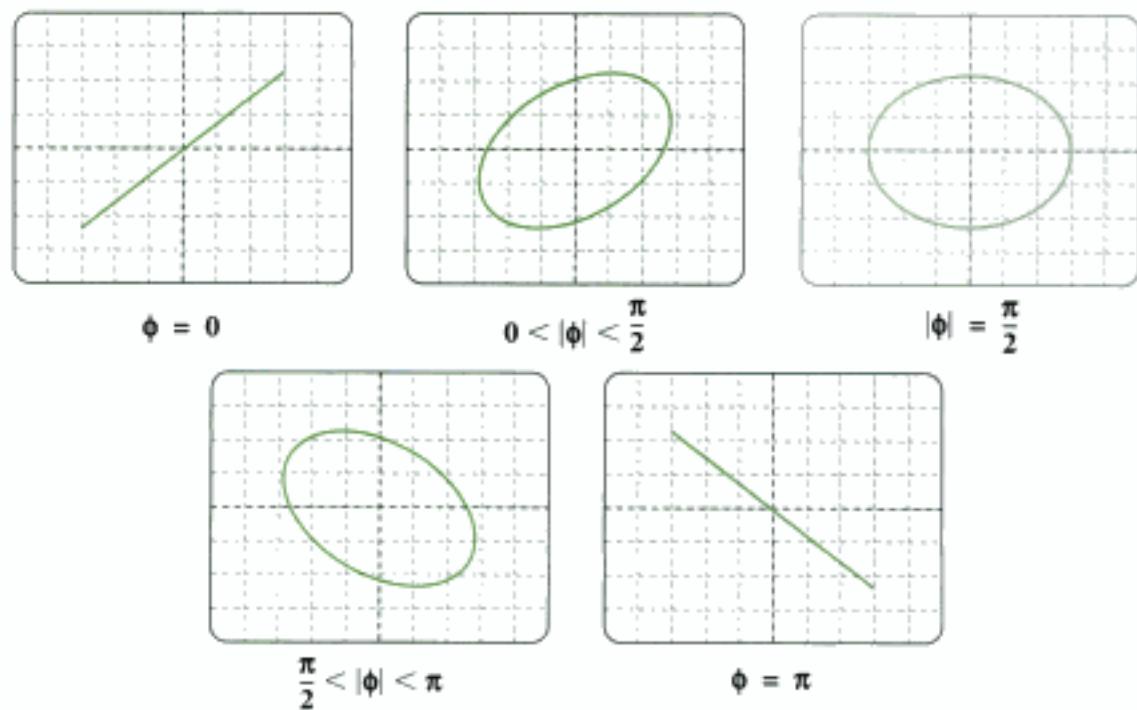
- Le signal  $S_1$  s'annule quand  $\omega t = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi)$ , soit :  $S_2 = \pm A_2 \sin \phi$ .

On peut donc déterminer les valeurs de  $A_1$ ,  $A_2$  et  $\phi$  comme l'indique la figure 8.



**Fig. 8** - Détermination des valeurs de  $A_1$ ,  $A_2$  et  $\phi$  en mode X-Y.

La [figure 9](#) résume les différents cas de figure en fonction de la valeur du déphasage  $\phi$ .



**Fig. 9** - Le déphasage  $\phi$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

# L'essentiel

## ✓ Description d'un signal sinusoïdal

- Le signal électrique  $S$  est sinusoïdal si son évolution au cours du temps peut s'écrire sous la forme :

$$S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$S_0$  amplitude du signal (unité de  $S$ )

$\omega$  pulsation du signal ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ )

$\phi$  phase à l'origine (rad)

- La pulsation  $\omega$  (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ), la période  $T$  (en s) et la fréquence  $f$  (en Hz) du signal sinusoïdal vérifient la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad \text{ou} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}.$$

- L'écriture complexe de la grandeur sinusoïdale  $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$  est :

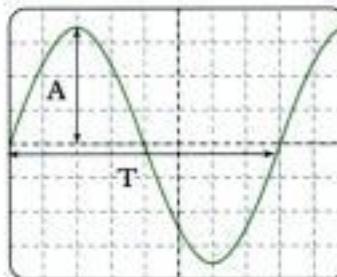
$$\underline{S}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{S}_0 e^{j\omega t}, \text{ avec } \underline{S}_0 = S_0 e^{j\phi}.$$

– Le complexe  $\underline{S}_0$  est l'amplitude complexe du signal  $S$ . Son module est l'amplitude réelle  $S_0$  ( $S_0 = |\underline{S}_0|$ ) et son argument est la phase à l'origine ( $\phi = \arg(\underline{S}_0)$ ).

– En notations complexes, on remplace l'opérateur dérivation  $\frac{d}{dt}$  par  $j\omega$  et l'opérateur dérivation  $n^{\text{ième}}$   $\frac{d^n}{dt^n}$  par  $(j\omega)^n$ .

## ✓ Observation à l'oscilloscope d'un signal sinusoïdal

- L'amplitude  $A$  d'un signal se mesure grâce à la sensibilité verticale en repérant l'élargissement maximal du signal par rapport à sa valeur moyenne.

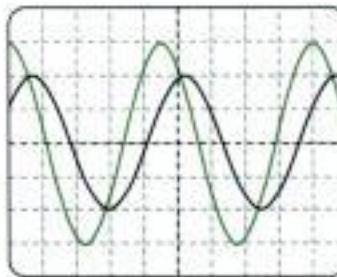


- La période  $T$  d'un signal se mesure grâce à la base de temps en repérant deux points consécutifs correspondant à la répétition du signal (même élargissement et même pente).

- Deux signaux sinusoïdaux  $S_1$  et  $S_2$  sont synchrones s'ils ont même pulsation  $\omega$  :

$$S_1(t) = A_1 \cos(\omega t)$$

et  $S_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi)$ .



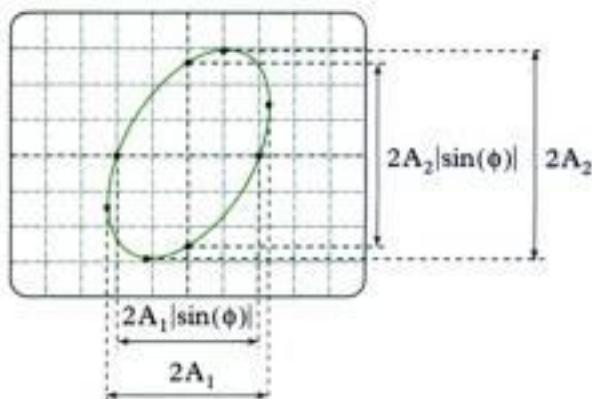
Le nombre sans dimension  $\phi$  compris entre  $-\pi$  et  $\pi$  ( $\phi = \phi_2 - \phi_1$  à  $2\pi$  près) est l'avance de phase (ou déphasage) du signal  $S_2$  sur le signal  $S_1$ .

– Si  $\phi < 0$ , le signal  $S_2$  est décalé vers la droite par rapport au signal  $S_1$  sur l'écran de l'oscilloscope :  $S_2$  est « en retard » par rapport à  $S_1$ .

voie 1 (avance)  
voie 2 (retard)

– Si  $\phi > 0$ , le signal  $S_2$  est décalé vers la gauche par rapport au signal  $S_1$  sur l'écran de l'oscilloscope :  $S_2$  est « en avance » par rapport à  $S_1$ .

- Quand deux signaux sinusoïdaux synchrones  $S_1$  et  $S_2$  sont observés à l'oscilloscope, la courbe obtenue en mode X-Y est une ellipse. Sur cette ellipse, on peut mesurer l'amplitude de chaque signal et le déphasage  $\phi$  entre les deux signaux.



## Mise en œuvre

### Méthode n° 1

#### Comment mesurer un déphasage ?

Deux signaux sinusoïdaux de même fréquence qui n'atteignent pas leur maximum en même temps sont déphasés. Comment mesurer le déphasage  $\phi$  entre ces deux signaux ?

#### → Savoir faire

- 1 Mesurer la période  $T$  des signaux  $S_1$  et  $S_2$ .
- 2 Déterminer les instants  $t_1$  et  $t_2$  correspondant à deux maxima voisins de  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$ .
- 3 Calculer la phase  $\phi$  en degré :

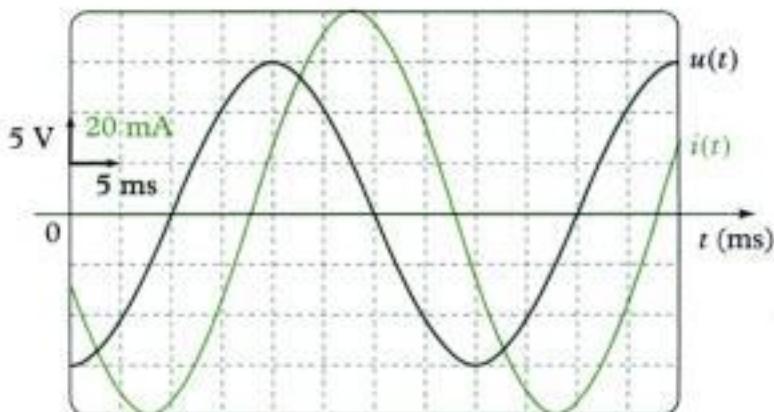
$$\phi \text{ (°)} = \frac{t_2 - t_1}{T} \times 360^\circ,$$

ou en radians :

$$\phi \text{ (rad)} = \frac{t_2 - t_1}{T} \times 2\pi.$$

#### → Application

Mesurer le déphasage entre  $u(t)$  et  $i(t)$  (visualisé à un coefficient multiplicateur près) sur l'oscillogramme représenté ci-dessous.



## Solution

- ① On mesure une période de 8 carreaux pour les deux signaux soit :

$$T = 8 \times 5 \text{ ms} = 40 \text{ ms}.$$

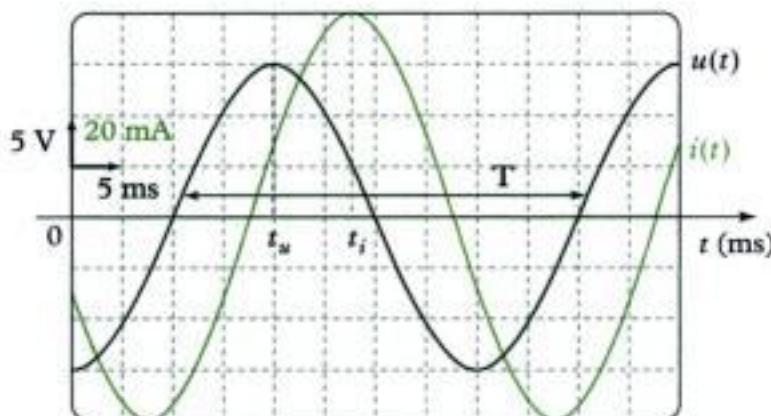
- ② On mesure des instants de passage à la valeur maximale (premier maximum de  $u$  et premier maximum de  $i$ ) :

- $t_u = 20 \text{ ms}$  pour la tension ;
- $t_i = 27,5 \text{ ms}$  pour l'intensité.

- ③ Le déphasage entre la tension  $u(t)$  et l'intensité  $i(t)$  vaut donc :

$$\phi = \frac{t_u - t_i}{T} \times 360 = \frac{20 \cdot 10^{-3} - 27,5 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3}} \times 360 = -67,5^\circ,$$

soit :  $\phi = -\frac{3\pi}{8}$  ( $i$  est en retard sur  $u$ ).



# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Représentation de signaux

Les signaux envoyés sur la voie 1 et la voie 2 de l'oscilloscope ont respectivement pour expression :

$$\begin{cases} \text{Voie 1 : } Y_1 = A_1 \cos(\omega t), \text{ avec } A_1 = 5 \text{ V.} \\ \text{Voie 2 : } Y_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi), \text{ avec } A_2 = 2 \text{ V et } \phi = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

La fréquence  $f$ , égale pour les deux signaux, a pour valeur :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1\,000 \text{ Hz.}$$

La base de temps est :  $200 \mu\text{s}/\text{carreau}$ . Les calibres utilisés sont les suivants :

$$\begin{cases} \text{Voie 1 : } 2 \text{ V/carreau} \\ \text{Voie 2 : } 1 \text{ V/carreau.} \end{cases}$$

Le signal de la voie 1 sert à la synchronisation de l'oscilloscope : niveau 0 ; sens +. (Ceci signifie que le signal de la voie 1 démarre quand il passe par une valeur nulle dans le sens croissant.)

- a) Représenter l'écran de l'oscilloscope.
- b) Représenter l'écran de l'oscilloscope en mode X-Y :
  - la voie 1 est suivant X ;
  - la voie 2 est suivant Y.

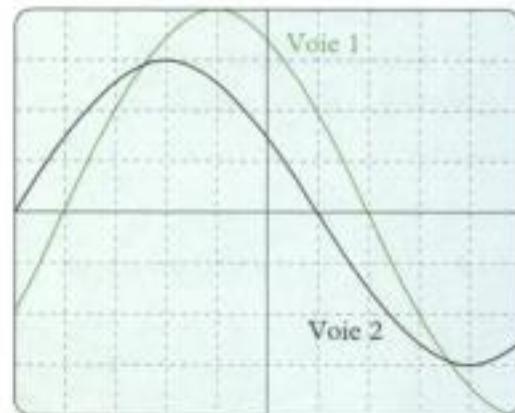
### Ex. 2 Détermination d'une avance de phase et d'amplitude

Les calibres de l'oscilloscope sont les suivants :

$$\begin{cases} \text{Voie 1 : } 1 \text{ V/carreau} \\ \text{Voie 2 : } 2 \text{ V/carreau.} \end{cases}$$

La base de temps est  $500 \mu\text{s}/\text{carreau}$ . On observe l'écran de l'oscilloscope ci-dessous.

Quelles sont les amplitudes des signaux, leur fréquence et l'avance de phase de la voie 2 sur la voie 1 ?



Représenter l'écran de l'oscilloscope en mode X-Y :

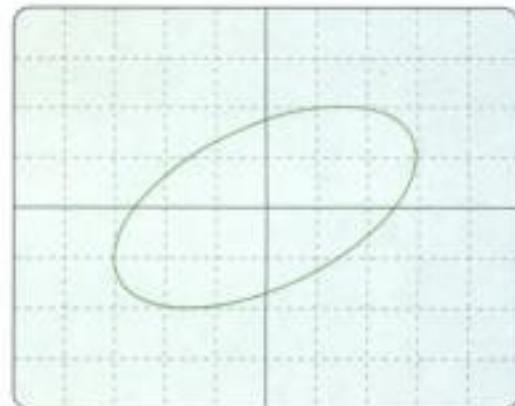
- la voie 1 est suivant X ;
- la voie 2 est suivant Y.

### Ex. 3 Courbe X-Y

On observe l'oscilloscope en mode X-Y :

- la voie 1 est suivant X ;
- la voie 2 est suivant Y.

L'écran obtenu est représenté ci-dessous.



Déterminer le déphasage de la voie 2 sur la voie 1. (La voie 2 est en avance.)

## Indications

**Ex. 1** a) Bien penser aux contraintes imposées par la synchronisation sur la voie 1.

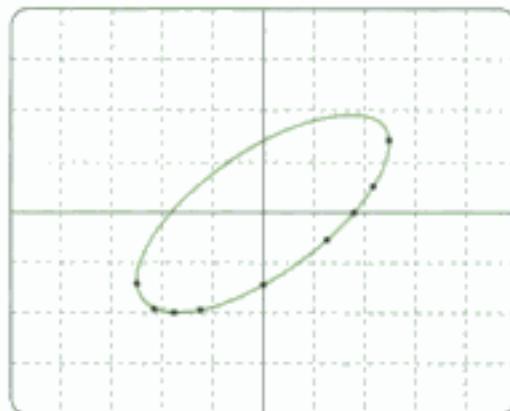
b) Avant de tracer l'ellipse, dresser un tableau de valeurs.

**Ex. 2** On ne visualise à l'écran qu'une demi-période des signaux.

**Ex. 3** Déduire graphiquement  $|\sin \phi|$  de l'ellipse obtenue.

Hidden page

On obtient la courbe XY suivante :



En mode X-Y, il faut tenir compte des calibres propres à chaque voie.

## Exercice 2

- L'amplitude de la voie 1 est 4 carreaux, d'où :  $A_1 = 4 \text{ V}$ .

L'amplitude de la voie 2 est 3 carreaux, d'où :  $A_2 = 3 \times 2 = 6 \text{ V}$ .

- Une demi-période du signal fait 6 carreaux, c'est-à-dire 3 ms.

La période du signal est 6 ms, la fréquence est :

$$f = \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} = 167 \text{ Hz}.$$

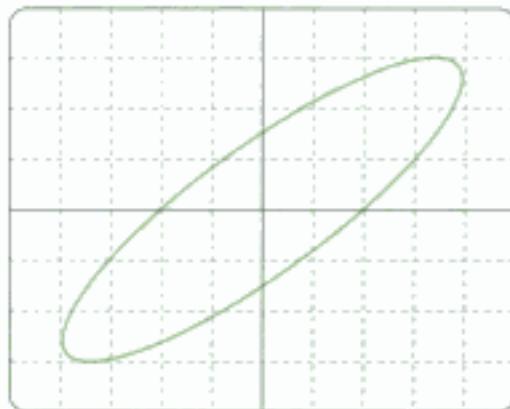
- La voie 2 est décalée de 1 carreau vers la gauche par rapport à la voie 1 ; le déphasage est positif et vaut :

$$\phi = 2\pi \times \frac{1}{2 \times 6} = \frac{\pi}{6} \text{ (avance de phase de la voie 2 sur la voie 1).}$$



Le décalage entre les deux voies est 1 carreau et une période des signaux occupe  $2 \times 6 = 12$  carreaux, d'où la valeur de  $\phi$ .

- Nous pouvons reporter point par point les valeurs de X et Y pour tracer la courbe XY. Nous obtenons la courbe suivante :



Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

La solution de l'équation différentielle précédente est la somme :

– de la solution générale  $u_1$  de l'équation homogène :

$$LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + RC \frac{du_1}{dt} + u_1 = 0;$$

– d'une solution particulière  $u_2$  de l'équation.

### B.1.2 - Solution de l'équation homogène : régime transitoire

La résolution de l'équation homogène a déjà été effectuée au chapitre 4 (cf. § C.2.3 et § C.2.5). On obtient le polynôme caractéristique en  $r$  :

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0.$$

Ce polynôme admet deux racines réelles négatives, éventuellement confondues, ou deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative. Les solutions de l'équation homogène tendent donc toujours à s'annuler avec le temps<sup>1</sup>.

La solution de l'équation homogène constitue le régime transitoire d'évolution de la tension  $u_C$ .

1. Elles correspondent respectivement au régime apériodique, au régime critique et au régime pseudo-périodique.

2. Lorsque le second membre de l'équation différentielle est une fonction sinusoïdale, elle admet pour solution particulière une fonction sinusoïdale de même pulsation.

3. L'équation différentielle étant du second ordre, il faut connaître deux conditions initiales pour déterminer les deux constantes d'intégration :
- continuité de  $u_C$  à  $t=0$  ;
  - continuité de  $i$  à  $t=0$ .

### B.1.3 - Solution particulière sinusoïdale : régime sinusoïdal permanent

Comme le second membre de l'équation est une fonction sinusoïdale, on cherche comme solution particulière une fonction sinusoïdale de la forme<sup>2</sup> :

$$u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi), \text{ où } \omega \text{ est la pulsation du signal.}$$

L'amplitude  $U_0$  et la phase à l'origine  $\phi$  dépendent des données  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $E_0$  et  $\omega$  du problème. Leurs expressions seront déterminées dans le prochain paragraphe en utilisant les nombres complexes.

La solution particulière sinusoïdale de l'équation différentielle constitue le régime sinusoïdal permanent d'évolution de la tension  $u_C$ . Ce régime s'installe lorsque le régime transitoire s'annule.

### B.1.4 - Conditions de continuité

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur et l'intensité  $i$  du courant dans l'inductance sont continues. À l'instant  $t = 0$ , les conditions initiales sur la tension et l'intensité s'écrivent donc<sup>3</sup> :

$$u_C(t=0) = 0 \text{ et } i(t=0) = 0.$$

Comme  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , la condition  $i(t=0) = 0$  équivaut à :

$$\frac{du_C}{dt}(t=0) = 0.$$

Les deux conditions initiales permettant de résoudre le problème sont :

$$u_C(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du_C}{dt}(t=0) = 0.$$

Il est à noter que les conditions de continuité s'appliquent à la solution de l'équation complète. Une erreur classique consiste cependant à ne les appliquer qu'à la seule solution de l'équation homogène.

Hidden page

### B.2.3 - Solution réelle

- La solution particulière sinusoïdale  $u_2 = U_0 \cos(\omega t + \phi)$  est la partie réelle de la solution particulière complexe  $\underline{u}_2 = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$ :

$$u_2 = \operatorname{Re}[\underline{U}_0 e^{j\omega t}], \text{ avec } \underline{U}_0(t) = U_0 e^{j\phi}.$$

L'amplitude réelle  $U_0$  est le module de l'amplitude complexe  $\underline{U}_0$  et la phase à l'origine des temps  $\phi$  est son argument :

$$\underline{U}_0 = |\underline{U}_0| \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{U}_0).$$

1. Le module du nombre complexe  $z = a + jb$  vaut :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On a les propriétés suivantes :

$$|j| = 1; \quad |e^{j\alpha}| = 1;$$

$$|zz'| = |z| \times |z'|; \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

2. Un argument du nombre complexe  $z = a + jb$  vaut :

$$\arg(z) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a > 0.$$

$$\arg(z) = \pm \pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a < 0.$$

On a les propriétés suivantes :

$$\arg(j) = \frac{\pi}{2}; \quad \arg(e^{j\alpha}) = \alpha;$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z');$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg(z').$$

- D'après l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{U}_0$ , l'amplitude réelle  $U_0$  vaut<sup>1</sup> :

$$\underline{U}_0 = |\underline{U}_0| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

- Pour calculer la phase à l'origine des temps  $\phi$ , on utilise les propriétés des arguments des nombres complexes<sup>2</sup>. En écrivant l'amplitude complexe  $\underline{U}_0$  comme le rapport de deux nombres, on a :

$$\arg(\underline{U}_0) = -\arg(\text{dénominateur}), \text{ car } \arg(E_0) = 0 \text{ (réel positif).}$$

La partie réelle du dénominateur est  $1 - LC\omega^2$ . Comme son signe varie avec les valeurs de la pulsation  $\omega$ , elle ne permet pas d'aboutir à une formule unique valable dans tous les cas. En revanche, la partie imaginaire  $RC\omega$  du dénominateur est toujours positive. On peut donc écrire le dénominateur sous la forme :

$$j[RC\omega - j(1 - LC\omega^2)], \text{ d'argument : } \frac{\pi}{2} - \operatorname{Artan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right).$$

La phase à l'origine des temps  $\phi$  vaut donc :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right).$$

**Remarque :** on pourrait aussi écrire la solution  $u_2$  sous la forme :

$$u_2 = U_0 \sin(\omega t + \phi), \text{ avec } \phi = \operatorname{Artan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right).$$

#### Application 1 Régime sinusoïdal permanent de la tension $u_C$

On considère un circuit RLC série tel que la pulsation  $\omega$  de la source de tension est égale à la pulsation propre  $\omega_0$  du circuit LC correspondant :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Écrire la solution réelle  $u_2(t)$  du régime sinusoïdal permanent de la tension aux bornes du condensateur en fonction de R, L, C et  $E_0$ .

#### Solution

- Comme  $LC\omega_0^2 = 1$ , le dénominateur de l'amplitude complexe  $\underline{U}_0$  est alors :

$$(1 - LC\omega_0^2) + jRC\omega_0 = jRC\omega_0, \text{ soit : } \underline{U}_0 = \frac{E_0}{jRC\omega_0} = -j \frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- L'amplitude réelle  $U_0$  est le module de l'amplitude complexe  $\underline{U}_0$  :

$$U_0 = \left| -j \frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right| = \frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- La phase à l'origine des temps est l'argument de l'amplitude complexe  $\underline{U}_0$  :

$$\phi = \arg(\underline{U}_0) = \arg(-j) = -\frac{\pi}{2}.$$

On trouverait bien le même résultat en appliquant la formule générale. En effet :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right) \text{ avec } 1 - LC\omega_0^2 = 0, \text{ d'où : } \phi = -\frac{\pi}{2} \text{ (car Arctan}(0)=0).$$

- La solution réelle  $u_2(t)$  du régime sinusoïdal permanent s'écrit donc :

$$u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi) = \frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \text{ soit : } u_2(t) = \frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega t).$$

## B.3. Expressions en variables réduites

### B.3.1 - Coefficient d'amortissement $\alpha$

Le régime sinusoïdal permanent dépend des paramètres R, L et C du circuit. Comme pour l'étude du régime transitoire (*cf. chapitre 4*), il peut être plus simple d'exprimer l'amplitude réelle  $U_0$  et la phase à l'origine  $\phi$  en fonction de variables réduites. On utilise alors :

- la variable  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , où  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  est la pulsation propre du circuit ;
- le coefficient d'amortissement  $\alpha = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{1}{2}RC\omega_0$  (ou, ce qui est équivalent, le facteur de qualité  $Q = \frac{1}{2\alpha}$ ).

L'amplitude complexe  $\underline{U}_0$  s'écrit alors<sup>1</sup> :

$$\underline{U}_0 = \frac{E_0}{1 - x^2 + 2j\alpha x}.$$

1. Les calculs à effectuer pour obtenir les expressions de  $U_2$ ,  $U_3$  et  $\phi$  en fonction de  $x$  et de  $\alpha$  ne sont pas compliqués.

On en déduit donc :

$$U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2}} \quad \text{et} \quad \phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - x^2}{2\alpha x}\right).$$

### B.3.2 - Analogie avec l'oscillateur linéaire

Le tableau ci-dessous résume les analogies entre l'oscillateur électrique en régime sinusoïdal forcé étudié en électrocinétique et l'oscillateur linéaire en régime sinusoïdal forcé étudié en mécanique. L'inductance L correspond à « l'inertie », la résistance R aux « frottements » et l'inverse de la capacité C au « rappel » (*cf. chapitre 4 § C. 6*).

	Oscillateur électrique	Oscillateur mécanique
Équation différentielle	$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_0 \cos(\omega t)$	$m \frac{d^2 X}{dt^2} + f \frac{dX}{dt} + kX = F_0 \cos(\omega t)$
Pulsation propre	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Hidden page

- **Deuxième cas :**  $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$  (c'est-à-dire  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ ).

La dérivée  $f'$  s'annule pour  $x = 0$  et  $x = \sqrt{1 - 2\alpha^2}$ ; elle est négative pour  $x \in ]0 ; \sqrt{1 - 2\alpha^2}[\$  ( $f$  est décroissante) et positive pour  $x \in ]\sqrt{1 - 2\alpha^2} ; +\infty[$  ( $f$  est croissante). La fonction  $U_0$  croît donc jusqu'à un maximum  $U_{\max}$  atteint en  $x_{\max} = \sqrt{1 - 2\alpha^2}$ , puis décroît vers 0 (fig. 5). La valeur du maximum est :

$$U_{\max} = U_0(x_{\max}) = U_0(\sqrt{1 - 2\alpha^2}) = \frac{E_0}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

L'abscisse  $x_{\max}$  croît vers 1 quand  $\alpha \rightarrow 0$ . La pulsation correspondante  $\omega_{\max}$  croît donc vers la pulsation propre  $\omega_0$  du circuit.

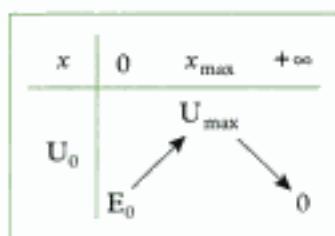


Fig. 5 - Tableau de variation de  $U_0$ .

#### Propriété 1

Si le coefficient d'amortissement  $\alpha$  est faible ( $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), c'est-à-dire si le facteur de qualité  $Q$  est élevé ( $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), alors l'amplitude  $U_0$  de la tension passe par un maximum ( $U_{\max} > E_0$ ) pour une pulsation  $\omega_{\max}$  voisine de la pulsation propre  $\omega_0$  ( $\omega_{\max} < \omega_0$  et  $\omega_{\max} \rightarrow \omega_0$  quand  $\alpha \rightarrow 0$ ); on dit que l'oscillateur entre en **résonance tension**.

On peut tracer le réseau de courbes  $y = \frac{U_0}{E_0} = g_\alpha(x)$  paramétrée par le coefficient d'amortissement  $\alpha$ , c'est-à-dire par le facteur de qualité  $Q$  (fig. 6). Dans tous les cas, on a :  $y(0) = 1$  et  $y(1) = Q$ .

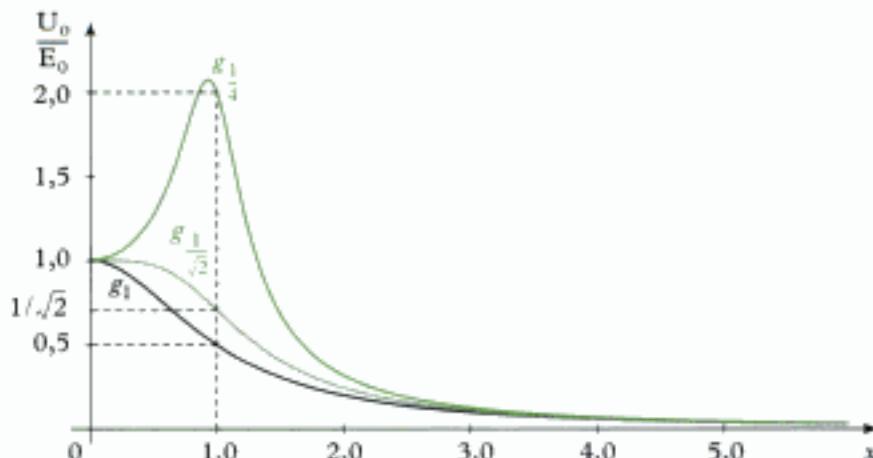


Fig. 6 - Allure des courbes  $g_1$ ,  $g_1/\sqrt{2}$  et  $g_1/4$ . L'ordonnée du point d'abscisse 1 est égale au facteur de qualité  $Q$ .

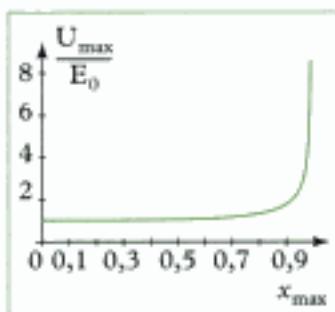


Fig. 7 - Courbe des maxima  $U_{\max}(x_{\max})$  au facteur  $E_0$  près.

#### B.4.2 - Courbe des maxima

Pour  $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$  (ou  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), la courbe  $U_0(x)$  passe par un maximum :

$$U_{\max} = \frac{E_0}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}, \text{ pour } x = x_{\max} = \sqrt{1 - 2\alpha^2}.$$

Hidden page

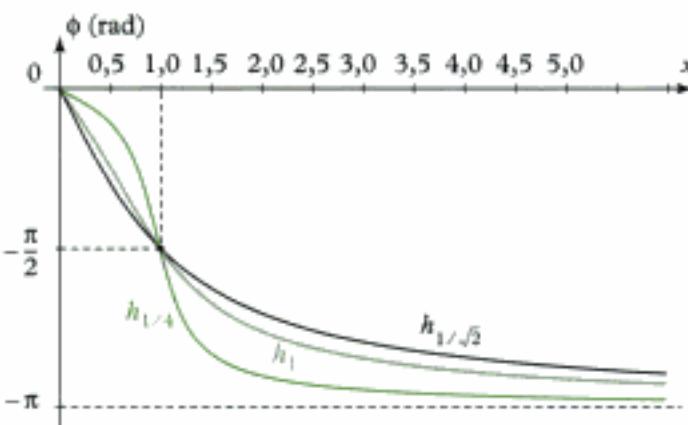


Fig. 10 - Allure des courbes  $h_1$ ,  $h_{1/\sqrt{2}}$  et  $h_{1/4}$ . L'ordonnée du point d'abscisse 1 est  $-\frac{\pi}{2}$ .

## B.5. Solution complète de l'équation différentielle

Il est difficile de donner la solution complète de l'équation différentielle dans le cas général, car de trop nombreux paramètres interviennent pour la définir. Nous allons donc étudier le cas particulier suivant :

- la pulsation de la source sinusoïdale est :  $\omega = \omega_0$  ;
- le coefficient d'amortissement vaut :  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

De ces valeurs, on déduit les égalités<sup>1</sup> :

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} \quad \text{et} \quad RC = \frac{1}{\omega_0}.$$

L'équation différentielle établie au § A.1.1 s'écrit alors :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0 \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega_0 t).$$

- Le régime sinusoïdal permanent correspond à la solution particulière sinusoïdale  $u_2$  de l'équation différentielle. En notations complexes, on peut écrire<sup>2</sup> :

$$-\omega_0^2 \underline{u}_2 + j\omega_0^2 \underline{u}_2 + \omega_0^2 \underline{u}_2 = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega_0 t}, \text{ d'où : } \underline{u}_2 = -jE_0 e^{j\omega_0 t} = E_0 e^{j\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

La solution réelle est la partie réelle de la solution complexe :

$$u_2(t) = E_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = E_0 \sin(\omega_0 t).$$

- Le régime transitoire correspond à la solution de l'équation homogène :

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + \omega_0 \frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = 0.$$

Le polynôme caractéristique en  $r$  associé à l'équation est :

$$r^2 + \omega_0 r + \omega_0^2 = 0, \text{ de racines : } r = -\frac{1}{2}\omega_0[1 \pm j\sqrt{3}].$$

Le régime transitoire est donc pseudo-périodique (cf. chapitre 4) :

$$u_1(t) = e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right].$$

- La solution complète est la somme de  $u_1$  et  $u_2$  :

$$u_C(t) = u_1(t) + u_2(t) = e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right] + E_0 \sin(\omega_0 t).$$

Pour déterminer les constantes d'intégration A et B, il faut utiliser les conditions de continuité :

$$u_C(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du_C}{dt}(t=0) = 0.$$

On a donc :

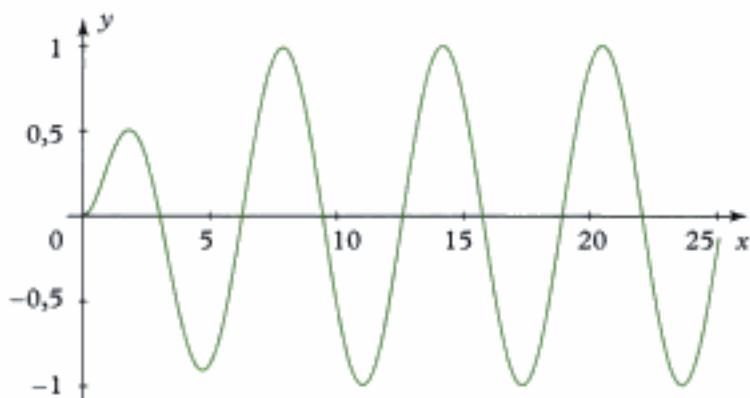
$$A = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} B + E_0 = 0, \quad \text{d'où : } B = -\frac{2\sqrt{3}}{3} E_0.$$

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur vaut donc :

$$u_C(t) = E_0 \left[ \sin(\omega_0 t) - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right].$$

En posant  $x = \omega_0 t$ , on peut tracer la courbe d'équation (fig. 11) :

$$y = \frac{u_C}{E_0} = \sin x - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$



**Fig. 11** - Évolution de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur dans le cas particulier où  $\omega = \omega_0$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

## C. Étude du courant dans le circuit

### C.1. Régime transitoire – Régime permanent

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur s'écrit  $u_C = u_1 + u_2$ , où  $u_1$  exprime le régime transitoire et  $u_2$  le régime sinusoïdal permanent. L'intensité  $i$  du courant, obtenue en dérivant  $u_C$ , est donc aussi la somme de deux termes :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{du_1}{dt} + C \frac{du_2}{dt} = i_1 + i_2.$$

– Le terme  $i_1$  correspond au régime transitoire. Son expression a déjà été donnée au chapitre 4 (cf. § C.3).

– Le terme  $i_2$  correspond au régime sinusoïdal permanent. L'expression de  $i_2$  est de la forme :

$$i_2(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi'), \quad \text{où } \omega \text{ est la pulsation du signal.}$$

L'amplitude  $I_0$  et la phase à l'origine  $\phi'$  dépendent des données  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $E_0$  et  $\omega$  du problème. Leurs expressions seront déterminées dans le prochain paragraphe en utilisant les nombres complexes.

## C.2. Utilisation des nombres complexes

- De même que pour la tension, on peut représenter l'intensité  $i_2$  par une grandeur complexe :

$$i_2 = I_0 \cos(\omega t + \phi') = \operatorname{Re}[i_2(t)], \text{ avec } i_2 = I_0 e^{j\omega t} \text{ et } I_0 = I_0 e^{j\phi'}.$$

L'amplitude réelle  $I_0$  est le module de l'amplitude complexe  $I_0$  et la phase à l'origine des temps  $\phi'$  est son argument :

$$I_0 = |I_0| \quad \text{et} \quad \phi' = \arg(I_0).$$

- D'après la définition de  $i_2$ , on a donc (cf. § A.2.2) :

$$i_2 = C \frac{du_2}{dt} = jC\omega u_2, \text{ d'où : } i_2 = jC\omega \frac{E_0 e^{j\omega t}}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1}.$$

Comme  $i_2(t) = I_0 e^{j\omega t}$ , l'amplitude complexe  $I_0$  s'écrit :

$$I_0 = \frac{jC\omega E_0}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1}.$$

- L'amplitude réelle  $I_0$  est le module de l'amplitude complexe  $I_0$  :

$$I_0 = |I_0| = \frac{C\omega E_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

- La phase à l'origine  $\phi'$  est l'argument de l'amplitude complexe  $I_0$ . Elle se déduit simplement de l'expression  $i_2 = jC\omega u_2$  :

$$\phi' = \frac{\pi}{2} + \phi, \text{ d'où : } \phi' = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right).$$

### Application 2 Régime sinusoïdal permanent de l'intensité $i$

On considère un circuit RLC série tel que la pulsation  $\omega$  de la source de tension est égale à la pulsation propre  $\omega_0$  du circuit LC correspondant :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Écrire la solution réelle  $i_2(t)$  du régime sinusoïdal permanent de l'intensité dans le circuit en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $E_0$ .

#### Solution

Comme  $LC\omega_0^2 = 1$ , le dénominateur de l'amplitude complexe  $I_0$  est alors :

$$(1 - LC\omega_0^2) + jRC\omega_0 = jRC\omega_0, \text{ soit : } I_0 = \frac{jC\omega E_0}{jRC\omega_0} = \frac{E_0}{R}.$$

L'amplitude complexe est un nombre réel positif. On a donc :

$$I_0 = |I_0| = \frac{E_0}{R} \quad \text{et} \quad \phi' = \arg(I_0) = 0, \text{ d'où : } i_2(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi') = \frac{E_0}{R} \cos(\omega t).$$

Hidden page

### C.3.3 - Étude de la phase $\phi'$

Comme  $\phi' = \frac{\pi}{2} - \phi$ , on obtient la courbe donnant  $\phi'$  en fonction de  $x$  par une translation de  $\frac{\pi}{2}$  de la courbe donnant  $\phi$  en fonction de  $x$  (fig. 14).

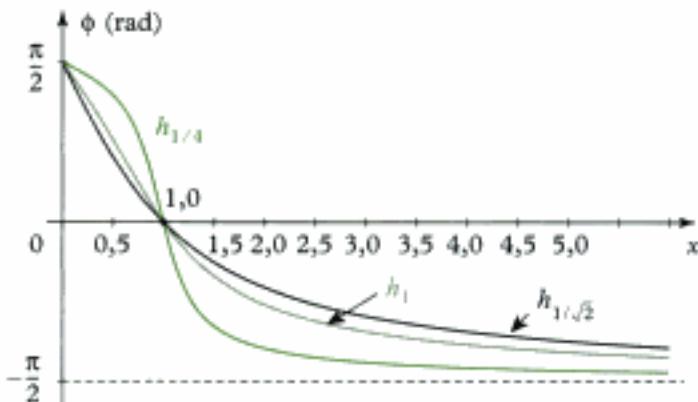


Fig. 14 - Allure des courbes  $h_1$ ,  $h_{1/\sqrt{2}}$  et  $h_{1/4}$ . L'ordonnée du point d'abscisse 1 est nulle.

## C.4. Bande passante du circuit

On cherche à déterminer les valeurs de la pulsation (appelées « pulsations de coupure ») qui vérifient :

$$I_0(x) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } I_{\max} = \frac{E_0}{R}.$$

Il faut donc résoudre l'équation :

$$I_0 = \frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}, \text{ soit : } Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1 \text{ ou } x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0.$$

On ne garde que les racines positives de ces deux polynômes :

$$x_1 = \frac{1}{2Q} [\sqrt{1 + 4Q^2} - 1] \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2Q} [\sqrt{1 + 4Q^2} + 1].$$

Les **pulsations de coupure** associées à ces valeurs de  $x$  sont donc :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} [\sqrt{1 + 4Q^2} - 1] \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} [\sqrt{1 + 4Q^2} + 1].$$

On appelle alors **bande passante** la différence :  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

#### Définition 1

La bande passante d'un circuit est définie par la différence  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les pulsations de coupure du circuit. Pour un circuit RLC série, on a :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$\Delta\omega$ bande passante ( $s^{-1}$ )
$\omega_0$ période propre ( $s^{-1}$ )
Q facteur de qualité (sans dimension)

1. On définit ainsi plus généralement le facteur de qualité  $Q$  d'un circuit :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

où  $\omega_0$  est la pulsation de résonance et  $\Delta\omega$  la largeur de la bande passante.

Plus le facteur de qualité  $Q$  est élevé, plus la bande passante  $\Delta\omega$  est petite et plus la résonance intensité du circuit est aiguë<sup>1</sup>.

Hidden page

$$\left\langle \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt} dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2}Cu_C^2 \right]_0^T = 0.$$

1. On a :  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$  et

$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ . En effet, l'aire comprise sous les deux courbes est la même sur une période T :  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle$  et  $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ .

En passant aux valeurs moyennes, l'égalité (1) s'écrit donc<sup>1</sup> :

$$\langle E(t)i(t) \rangle = \langle RI^2 \rangle = \frac{RI_0^2}{2}, \text{ car } i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi').$$

En régime sinusoïdal permanent, la puissance moyenne fournie par le générateur est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.

La puissance moyenne P fournie par le générateur est maximale à la résonance intensité ( $\omega = \omega_0$ ). Elle vaut alors :

$$P = \langle E(t)i(t) \rangle = \frac{E_0^2}{2R}.$$

### D.3. Interprétation énergétique de Q

2. On a :  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ .

3. Voir les résultats des applications 1 & 2.

• L'énergie dissipée par effet Joule et perdue par le circuit au cours d'une période  $T_0$  à la résonance intensité vaut<sup>2</sup> :

$$E_{\text{perdue}} = \langle E(t)i(t) \rangle = \frac{E_0^2}{2R} \times 2\pi\sqrt{LC} = \pi \frac{E_0^2}{R} \sqrt{LC}.$$

À la résonance intensité, l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la bobine et dans le condensateur vaut<sup>3</sup> :

$$E_{\text{élecmag}} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2, \text{ avec } i(t) = \frac{E_0}{R} \cos(\omega_0 t) \text{ et } u_C = -\frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_0 t).$$

$$E_{\text{élecmag}} = \frac{1}{2}L \times \frac{E_0^2}{R^2} \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}C \times \frac{E_0^2 L}{R^2 C} \sin^2(\omega_0 t) = \frac{LE_0^2}{2R^2}.$$

Le rapport de ces deux énergies est alors :

$$\frac{E_{\text{élecmag}}}{E_{\text{perdue}}} = \frac{\frac{LE_0^2}{2R^2}}{\pi \frac{E_0^2}{R} \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

4. Cf. chapitre 4 § C.2.3.

• À la résonance intensité, le facteur de qualité Q vaut<sup>4</sup> :

$$Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ d'où : } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

#### Propriété 3

Le facteur de qualité Q est proportionnel au rapport de l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit par l'énergie perdue par effet Joule au cours d'une oscillation électrique à la résonance intensité :

$$Q = 2\pi \frac{E_{\text{élecmag}}}{E_{\text{perdue}}}$$

# L'essentiel

## ✓ Résonance tension du circuit RLC série

- La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série soumis à la tension sinusoïdale  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$  vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_0 \cos(\omega t).$$

- La solution  $u_1$  de l'équation homogène correspond au régime transitoire (cf. chapitre 4).
- La solution particulière sinusoïdale  $u_2$  correspond au régime sinusoïdal permanent. Elle est la partie réelle de la solution  $\underline{u}_2$  de l'équation différentielle complexe associée :

$$u_2 = U_0 \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[\underline{u}_2(t)], \text{ avec } \underline{u}_2 = \underline{U}_0 e^{j\omega t}.$$

L'amplitude réelle  $U_0$  est alors le module de l'amplitude complexe  $\underline{U}_0$  et la phase à l'origine des temps  $\phi$  est son argument ( $\underline{U}_0 = U_0 e^{j\phi}$ ) :

$$\begin{cases} \underline{U}_0 = |\underline{U}_0| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} & \text{ou} & U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \\ \phi = \arg(\underline{U}_0) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right) & \text{ou} & \phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(Q \frac{1 - x^2}{x}\right). \end{cases}$$

On utilise le facteur de qualité :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} \text{ et } x = \frac{\omega}{\omega_0},$$

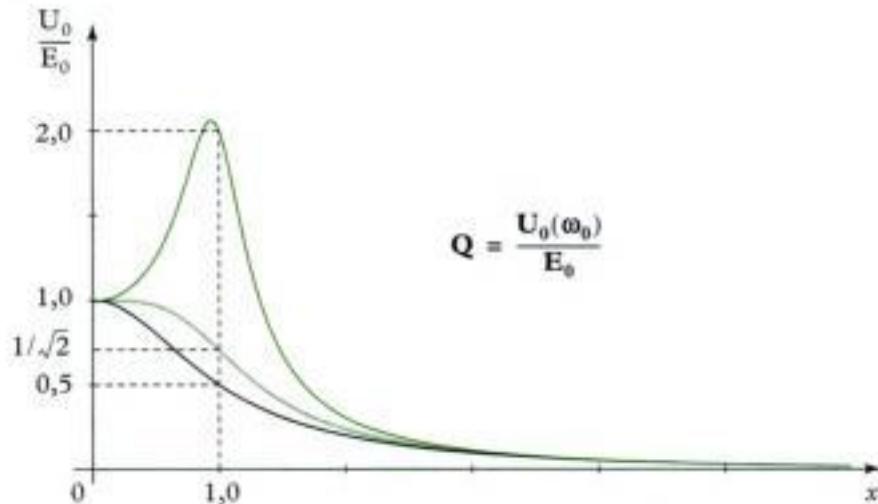
avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  pulsation propre (cf. chapitre 4).

- L'étude de la résonance tension aux bornes du condensateur est l'étude des variations de l'amplitude  $U_0$  (et de la phase  $\phi$ ) des oscillations en fonction de la pulsation  $\omega$  de la source excitatrice.

- Si le facteur de qualité  $Q$  est faible ( $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  ou  $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), alors  $U_0$  décroît avec  $\omega$ .
- Si le facteur de qualité  $Q$  est élevé ( $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  ou  $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), alors l'oscillateur entre en résonance tension pour la pulsation :

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{et} \quad U_{\max} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} E_0.$$

Plus  $Q$  est élevé, plus la pulsation  $\omega_{\max}$  est proche de la pulsation propre  $\omega_0$  et plus la surtension  $U_{\max}$  aux bornes du condensateur à la résonance est grande ( $U_{\max} = QE_0$ ).



$$Q = \frac{U_0(\omega_0)}{E_0}$$

### ✓ Résonance intensité du circuit RLC série

- Comme pour la tension  $u_C$ , l'intensité  $i$  du courant dans un circuit RLC série soumis à la tension sinusoïdale  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$  est la somme du terme  $i_1$  correspondant au régime transitoire et du terme  $i_2$  correspondant au régime sinusoïdal permanent :

$$i_2 = I_0 \cos(\omega t + \phi') = \text{RE}[i_2(t)],$$

avec  $[i_2(t)] = I_0 e^{j\omega t}$  et  $i_2 = C \frac{du_2}{dt} = jC\omega u_2$ .

- L'amplitude réelle  $I_0$  est le module de l'amplitude complexe  $I_0$  et la phase à l'origine des temps  $\phi'$  est son argument ( $I_0 = I_0 e^{j\phi'}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0 = |I_0| = C\omega U_0 = \frac{I_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}} \\ \phi' = \arg(I_0) = \frac{\pi}{2} + \phi = \arctan(Q \frac{1 - x^2}{x}) \end{array} \right.$$

- L'oscillateur entre en résonance intensité pour la pulsation propre  $\omega_0$ . L'amplitude maximale vaut :

$$I_{\max} = \frac{E_0}{R}.$$

- La bande passante d'un circuit est définie par la différence :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1,$$

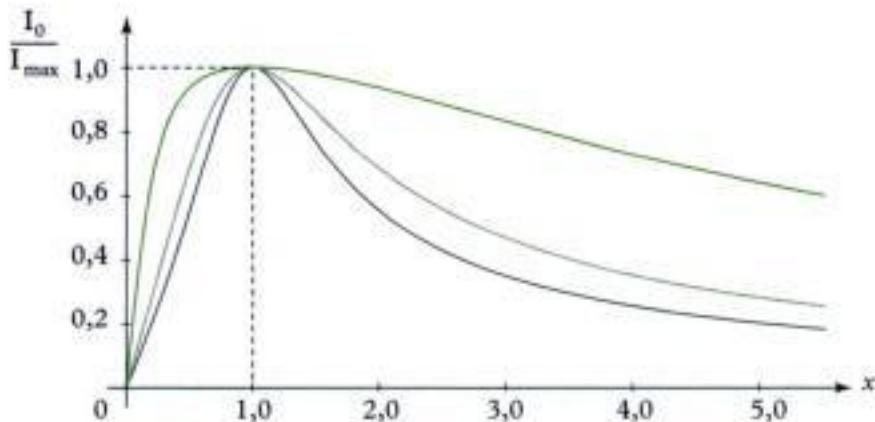
où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les pulsations de coupure  $I_0(\omega_1) = I_0(\omega_2) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ .

Pour un circuit RLC série, on a :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$\Delta\omega$	bande passante ( $s^{-1}$ )
$\omega_0$	période propre ( $s^{-1}$ )
$Q$	facteur de qualité (sans dimension)

Plus le facteur de qualité  $Q$  est élevé, plus la bande passante  $\Delta\omega$  est petite et plus la résonance intensité du circuit est aiguë.



### ✓ Aspects énergétiques du circuit RLC série

- Sur l'intervalle  $[0 ; T]$ , la valeur moyenne de la grandeur  $G$  périodique est :

$$\langle G \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T G(t) dt.$$

- En régime sinusoïdal permanent, la puissance moyenne fournie par le générateur est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.
- Le facteur de qualité  $Q$  est proportionnel au rapport de l'énergie électromagnétique  $E_{\text{elecmag}}$  emmagasinée dans le circuit par l'énergie  $E_{\text{perdue}}$  perdue par effet Joule au cours d'une période des oscillations électriques à la résonance intensité :

$$Q = 2\pi \frac{E_{\text{elecmag}}}{E_{\text{perdue}}}.$$

## Mise en œuvre

### Méthode n° 1

#### Comment utiliser les nombres complexes pour étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé ?

Soit un circuit linéaire soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . On se propose d'utiliser les nombres complexes pour déterminer la solution sinusoïdale permanente de l'équation.

#### → Savoir faire

- 1 Établir l'équation différentielle avec second membre qui caractérise le circuit.
- 2 Construire une équation complexe dont la partie réelle est l'équation précédente (la partie imaginaire n'est pas utile en tant que telle, mais elle permet de simplifier le calcul).
- 3 Injecter une solution complexe de la forme  $\underline{x}(t) = X_0 e^{i(\omega t + \phi)}$  dans l'équation.
- 4 Factoriser l'amplitude complexe  $X_0 = X_0 e^{i\phi}$ . Son expression ne fait plus intervenir le temps.
- 5 Déterminer l'amplitude  $X_0$  de la solution réelle et sa phase  $\phi$  :

$$X_0 = |\underline{X}_0| \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{X}_0).$$

 Cette solution s'accompagne d'une solution sans second membre transitoire de durée  $\tau$  caractéristique. Au bout de quelques  $\tau$ , la solution sinusoïdale permanente perdure seule.

Hidden page

# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Résonance intensité

On effectue l'étude de la résonance intensité d'un circuit RLC série. Le générateur de tension sinusoïdale branché à ses bornes délivre une tension d'amplitude constante  $E_0 = 6$  V. On s'intéresse au régime sinusoïdal permanent. Quand on fait varier la fréquence, on observe que l'intensité du courant passe par un maximum d'amplitude  $I_{0\max} = 60$  mA pour la fréquence  $f_0 = 1\ 590$  Hz.

Pour la fréquence  $f = 3\ 000$  Hz, l'amplitude de l'intensité est 36 mA.

- Déterminer la pulsation propre  $\omega_0$  du circuit.
- Déterminer le facteur de qualité Q et le coefficient d'amortissement  $\alpha$ .
- Exprimer les grandeurs L, R et C.

### Ex. 2 Résonance aiguë

On étudie la résonance tension aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une bobine réelle d'inductance L et de résistance r. On observe une résonance aiguë.

Le générateur de tension sinusoïdale branché aux bornes du circuit délivre une tension d'amplitude  $E_0$  indépendante de la fréquence.

On constate qu'à faibles fréquences, la tension aux bornes de C possède l'amplitude :  $E_0 = 6$  V.

Cette amplitude passe par un maximum pour la fréquence de résonance  $f_r = 800$  Hz :  $U_{\max} = 75$  V.

À la fréquence  $f = 1\ 600$  Hz, cette amplitude vaut :  $U_0 = 5,9$  V.

- Quel est le facteur de qualité Q du circuit ? En déduire le coefficient d'amortissement.
- Quelle est la pulsation propre  $\omega_0$  ?
- Déterminer L et r sachant que  $C = 200$  nF.
- Vérifier alors qu'à la fréquence  $f = 1\ 600$  Hz, on a bien l'amplitude  $U_0 = 5,9$  V pour la tension aux bornes du condensateur.

Déterminer alors l'avance de phase de la tension aux bornes du condensateur par rapport à la tension délivrée par l'alimentation du circuit.

### Ex. 3 Résonance floue

En travaux pratiques, nous étudions un circuit RLC avec  $C = 800$  nF. On dresse le tableau de mesure suivant, où  $U_0$  est l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur et  $E_0$  l'amplitude de la tension aux bornes du générateur.

$f$ (Hz)	0	300	500	600	700
$\frac{U_0}{E_0}$	1	1,07	1,15	1,15	1,10

$f$ (Hz)	800	1 000	1 200	1 500
$\frac{U_0}{E_0}$	1	0,73	0,51	0,32

- Tracer la courbe de résonance tension.
- Quel est l'ordre de grandeur de la fréquence de résonance ? La détermination est-elle précise ?
- Estimer le facteur de qualité Q.
- Déterminer, en exploitant la fréquence de 800 Hz, la fréquence de résonance  $f_r$  et la fréquence propre  $f_0$  du circuit.
- En déduire les grandeurs L et R.

## Niveau 2

### Ex. 4 Influence de la capacité

On étudie la résonance tension aux bornes d'un condensateur de capacité C en utilisant une bobine d'inductance L et de résistance R.

On note Q le facteur de qualité,  $\omega_0$  la pulsation propre ( $\omega_0 = 2\pi f_0$ ) et  $\omega_r$  la pulsation de résonance ( $\omega_r = 2\pi f_r$ ).

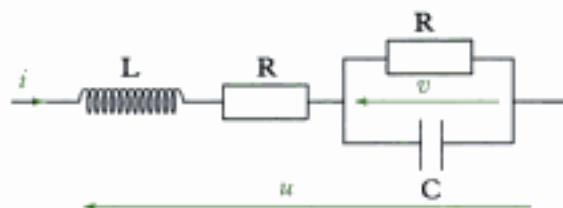
- Exprimer Q,  $\omega_0$  et  $\omega_r$  en fonction de L, R et C.
- On peut faire varier la capacité C. Expérimentalement, on mesure la fréquence de résonance  $f_r$  en fonction de C.

Quelle courbe doit-on tracer pour avoir une relation linéaire ?

Montrer qu'à partir de ce tracé, on peut déterminer l'inductance L et la résistance R de la bobine.

### Ex. 5 Courant dans un circuit

- Dans le circuit ci-dessous, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $v(t)$  aux bornes du condensateur.



- b) La tension appliquée est sinusoïdale, de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $U_0$ . On étudie le cas particulier où :

$$\frac{L}{R} = RC = \tau.$$

Déterminer la tension  $v$  en fonction de  $\omega$  en régime sinusoïdal permanent.

Tracer la courbe donnant l'amplitude de  $v$  en fonction de  $\omega$ .

Effectuer l'étude de la phase.

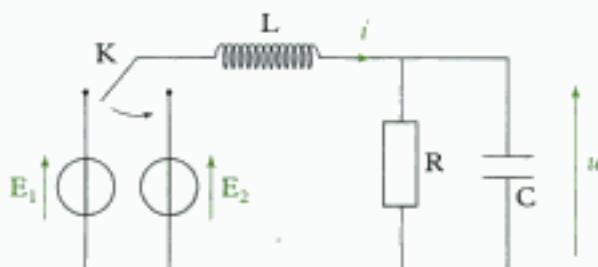
### Ex. 6 Deux générateurs : régime transitoire

Le circuit ci-dessous est branché depuis longtemps sur le générateur de tension constante  $E_1 = E_0$ . À l'instant  $t = 0$ , on bascule l'interrupteur K sur le générateur sinusoïdal  $E_2 = E_0 \cos(\omega t)$ .

- a) Déterminer  $u(t)$  pour  $t > 0$  dans le cas où :

$$\frac{L}{R} = RC = \tau.$$

- b) Étudier le régime sinusoïdal permanent et tracer la courbe de résonance tension.



## Niveau 3

### Ex. 7 Résonance tension aux bornes de l'inductance L

Le circuit RLC est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ .

- a) Rappeler l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur.

Retrouver, en notations complexes, l'expression de la tension  $u_C$  en fonction de  $e$ . En déduire l'amplitude complexe  $U_{C_0}$  en fonction du  $E_0$ .

- b) Retrouver l'expression de l'intensité complexe  $i$  et celle de l'amplitude complexe  $I_0$ .

- c) Quelle relation linéaire lie la tension  $u_L$  aux bornes de l'inductance L et l'intensité  $i$ ? En déduire l'expression de la tension complexe  $u_L$  et celle de l'amplitude complexe  $U_{L_0}$ .

- d) On pose :  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ .

Déterminer l'amplitude réelle  $U_{L_0} = |U_{L_0}|$  en fonction de  $E_0$ ,  $x$  et  $Q$ .

- e) On pose  $x' = \frac{1}{x}$ . Exprimer à nouveau  $U_{L_0}$  et  $U_{L_0}$  en fonction de  $x'$ .

Vérifier que la loi obtenue est la même que celle de l'amplitude réelle  $U_{C_0}$  de la tension aux bornes du condensateur en fonction de  $x$ .

Quelle conclusion peut-on en tirer pour le tracé des courbes de résonance ?

## Indications

- Ex. 1 b)** Connaitre l'expression de l'amplitude  $I_0$  en fonction de la variable  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et du facteur de qualité Q.

- Ex. 2 a)** Lorsque le facteur de qualité Q est élevé, la pulsation à la résonance tension est très proche de la pulsation propre  $\omega_0$ .

- d)** Connaitre l'expression de l'amplitude  $U_0$  en fonction de la variable  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et du facteur de qualité Q.

- Ex. 3 c)** Connaitre l'expression de l'amplitude  $U_0$  à la résonance tension.

- Ex. 5 b)** Utiliser les nombres complexes pour étudier le régime sinusoïdal permanent.

- Ex. 6 a)** Déterminer les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales sur la solution complète.

- b)** Utiliser les nombres complexes pour étudier le régime sinusoïdal permanent.

Hidden page

On peut donc considérer en bonne approximation que :

$$Q = \frac{U_{\max}}{E_0} = 12,5 \text{ et } \alpha = \frac{1}{2Q} = 0,04.$$



Contrairement à la résonance intensité, la résonance tension ne se fait pas pour une pulsation égale à la pulsation propre  $\omega_0$ .

b) Plus la résonance est aiguë, plus la fréquence de résonance est voisine de la fréquence propre :

$$f_0 = f_r = 800 \text{ Hz, d'où : } \omega_0 = 2\pi f_0 = 5027 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) On a :  $LC\omega_0^2 = 1$ , d'où :  $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = 0,198 \text{ H}$ .



On préfère souvent retenir l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  sous la forme  $LC\omega_0^2 = 1$ .

Par ailleurs :  $Q = \frac{L\omega_0}{r}$ , d'où :  $r = \frac{L\omega_0}{Q} = 79,6 \Omega$ .

d) • L'amplitude de  $U_0$  s'écrit en fonction de la variable  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et du facteur de qualité  $Q$  :

$$U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

Pour  $f = 1600 \text{ Hz}$ , on a :  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = 2$ , d'où :  $U_0 = 5,92 \text{ V}$ .

On retrouve bien le résultat expérimental.

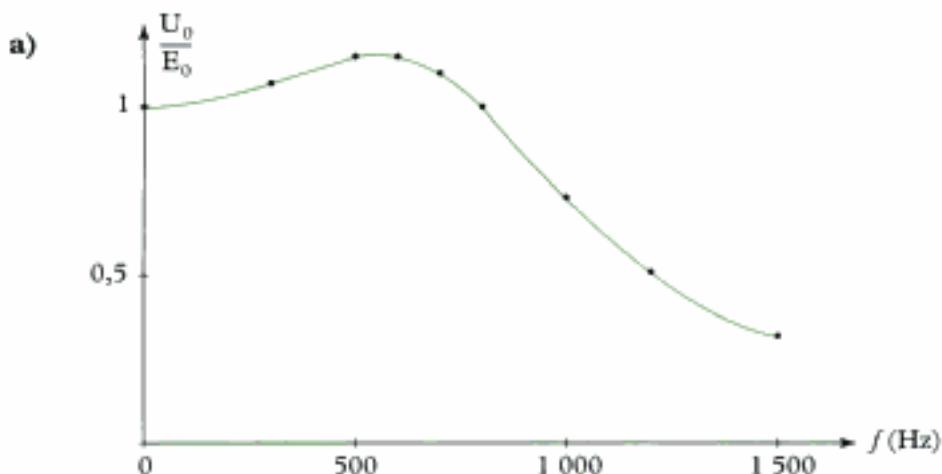
• L'avance de phase  $\phi$  est donnée par la relation :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(Q \frac{1-x^2}{x}\right) = -3,08 \text{ rad, soit : } \phi = -177^\circ.$$



Pour retrouver ces expressions, se reporter respectivement aux § B. 4. 1 et B. 4. 2 du cours.

### Exercice 3



b) La fréquence de résonance est de l'ordre de 500 à 600 Hz. La détermination n'est pas très précise.

c) La courbe passe par un maximum de valeur :

$$\left(\frac{U_0}{E_0}\right)_{\max} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = 1,15.$$
$$4Q^4 - (1,15)^2(4Q^2 - 1) = 0.$$
$$Q^4 - (1,15)^2 Q^2 + \left(\frac{1,15}{2}\right)^2 = 0.$$

 Pour retrouver cette expression, se reporter au § B. 4. 1 du cours.

L'équation bicarrée possède deux solutions en  $Q^2$  :

$$\begin{cases} Q^2 = 0,335 \Rightarrow Q = 0,579 \\ Q^2 = 0,988 \Rightarrow Q = 0,994 \end{cases}$$

La courbe admet un maximum si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On a donc :

$$Q = 0,994, \text{ soit : } Q \approx 1.$$

 Si  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , alors  $U_0$  décroît avec  $\omega$ .

d) Pour  $f = 800$  Hz, on a :  $\frac{U_0}{E_0} = 1 \approx Q$ , d'où :  $f_0 \approx 800$  Hz.

La fréquence de résonance est donc :

$$f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = 562 \text{ Hz.}$$

 Comme  $\omega = 2\pi f$ , une relation entre pulsations reste valable entre fréquences.

e) On a :  $LC\omega_0^2 = 1$ , d'où :  $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = 49,4 \text{ mH.}$

Par ailleurs :  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ , d'où :  $R = \frac{L\omega_0}{Q} = 250 \Omega$ .

## Exercices de niveau 2

### Exercice 4

a) On a :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ;  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R\sqrt{C}}$  et pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .

On en déduit :

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{2L}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

b) Quand C varie, pour vérifier une relation linéaire, il faut tracer  $f_r^2$  en fonction de  $\frac{1}{C}$ . En effet :

$$\omega_r = 2\pi f_r, \text{ d'où : } f_r^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} \right).$$

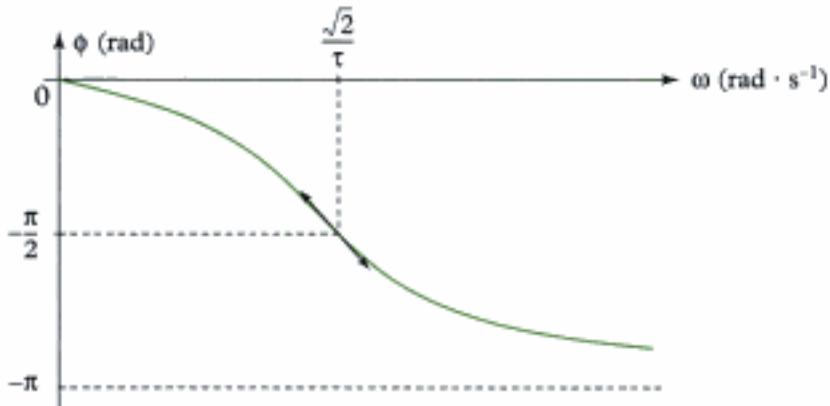
Hidden page

La phase  $\phi$  est l'argument de l'amplitude complexe  $\underline{V}_0$  :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{2-\omega^2\tau^2}{2\omega\tau}\right).$$

$\phi$  est aussi une fonction décroissante de  $\omega$ , variant de  $\phi = 0$  pour  $\omega = 0$  à  $\phi = -\pi$  pour  $\omega \rightarrow +\infty$ .

**A** On peut aussi écrire :  $\frac{2-\omega^2\tau^2}{2\omega\tau} = \frac{1}{\omega\tau} - \frac{\omega\tau}{2}$ , somme de deux fonctions décroissantes. Comme la fonction Arctan est croissante, elle conserve le sens des variations.



## Exercice 6

a) Pour  $t > 0$ , on a :  $E_2 = L \frac{di}{dt} + u$ , avec  $i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$ .

**💡** On applique une fois la loi des mailles et une fois la loi des nœuds au circuit étudié.

On en déduit donc l'équation différentielle vérifiée par  $u$  :

$$E_2 = LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u,$$

encore écrite :

$$\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2} + \tau \frac{du}{dt} + u = E_0 \cos(\omega t).$$

• Recherche de la solution  $u_1$ , de l'équation homogène :

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{\tau^2} = 0.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$r^2 + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} = 0, \quad \text{avec } \Delta = \frac{1}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = -\frac{3}{\tau^2} < 0.$$

La solution correspondant au régime transitoire (pseudo-périodique) est donc :

$$u_1(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) \right].$$

• Recherche de la solution particulière  $u_2$  sinusoïdale :

$$\underline{u}_2[-\omega^2\tau^2 + j\omega\tau + 1] = E_0 e^{j\omega t}, \quad \text{d'où : } \underline{u}_2 = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{1 - \omega^2\tau^2 + j\omega\tau}.$$

La solution réelle  $u_2(t)$  est la partie réelle de la solution complexe  $\underline{u}_2(t)$  :

$$\underline{u}_2(t) = \frac{E_0[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)](1 - \omega^2\tau^2 - j\omega\tau)}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2},$$

d'où :

$$u_2(t) = \operatorname{Re}[\underline{u}_2(t)] = \frac{E_0}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2} [(1 - \omega^2\tau^2)\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)].$$

 Pour déterminer la solution particulière sinusoïdale  $u_2(t)$ , on utilise toujours les nombres complexes.

• Écriture de la solution complète :

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) \right] + \frac{E_0[(1 - \omega^2\tau^2)\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)]}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}.$$

• Les constantes A et B intervenant dans l'expression du régime transitoire se déterminent grâce aux conditions initiales.

– La tension aux bornes du condensateur est continue. On a donc :

$$u(0) = E_0 = A + \frac{E_0(1 - \omega^2\tau^2)}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}, \text{ d'où : } A = \frac{E_0\omega^4\tau^4}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}.$$

– L'intensité  $i$  dans la bobine est continue. À  $t = 0$ , on a :

$$i(0) = \frac{E_0}{R} \text{ et } u(0) = E_0, \text{ d'où : } \frac{du}{dt}(0) = 0.$$

On en déduit :

$$-\frac{A}{2\tau} + \frac{\sqrt{3}}{2\tau}B + \frac{E_0\omega^2\tau}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2} = 0, \text{ d'où : } B = \frac{3}{\sqrt{3}}E_0\omega^2\tau^2 \frac{(\omega^2\tau^2 - 2)}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}.$$

 L'expression complète de  $u(t)$  est très lourde !

b) Le régime sinusoïdal permanent correspond à la solution particulière sinusoïdale  $u_2$ . On détermine l'amplitude  $U_{20}$  et la phase  $\phi$  en utilisant l'écriture complexe  $\underline{u}_2$  :

$$\underline{u}_2 = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{1 - \omega^2\tau^2 + j\omega\tau} = U_2 e^{j\omega t}.$$

• L'amplitude réelle est le module de l'amplitude complexe :

$$U_{20} = |\underline{U}_2| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \omega^2\tau^2 + \omega^4\tau^4}}.$$

On pose :  $x = \omega\tau$ . L'amplitude  $U_{20}$  s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{U_{20}}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 + x^4}} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \text{ avec } f(x) = 1 - x^2 + x^4.$$

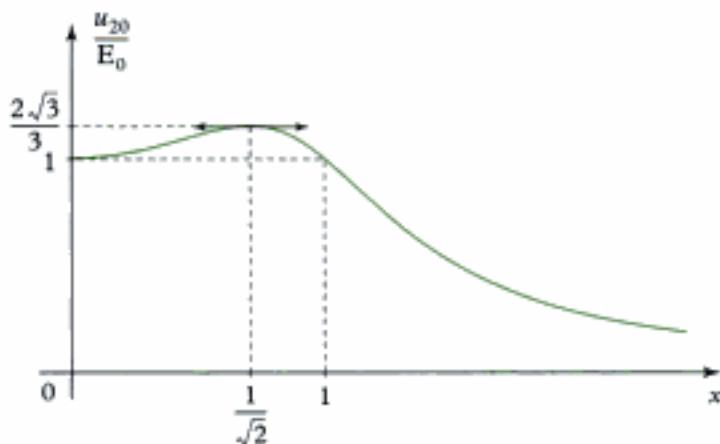
La fonction  $f$  passe par un minimum en  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On a alors :

$$\left(\frac{U_{20}}{E_0}\right)_{\max} = \frac{U_{20}}{E_0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15.$$

 On détermine très simplement le sens de variation de la fonction  $f$  en étudiant le signe de sa dérivée.



Le minimum de la fonction  $f$  correspond au maximum de la fonction  $U_{20}$ .



- La phase est l'argument de l'amplitude complexe :

$$\phi = \arg(\underline{U}_2) = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - \omega^2\tau^2}{\omega\tau}\right).$$

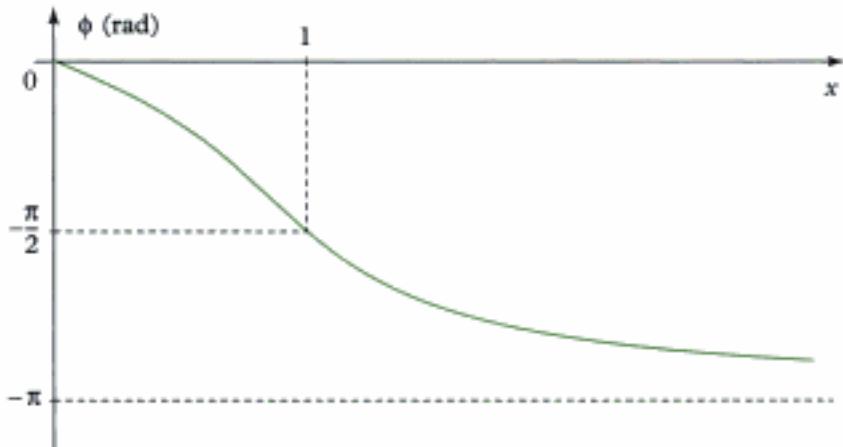


On obtient cette expression en multipliant d'abord le numérateur et le dénominateur par  $j$ .

On pose :  $x = \omega\tau$ . La phase  $\phi$  s'écrit alors sous la forme :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x} - x\right).$$

La fonction  $\phi$  décroît entre les valeurs  $0$  (pour  $x = 0$ ) et  $-\pi$  (pour  $x \rightarrow +\infty$ ).



## Exercices de niveau 3

### Exercice 7

- a) L'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur est :

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t) = E_0 \cos(\omega t).$$

En notations complexes, on remplace  $e(t)$  par  $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$  et  $u_C$  par  $\underline{u}_C$  comme  $\frac{du_C}{dt} = j\omega \underline{u}_C$  et  $\frac{d^2 \underline{u}_C}{dt^2} = -\omega^2 \underline{u}_C$ , on obtient :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}, \text{ d'où : } \underline{U}_{C_0} = \frac{E_0}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

b) On a :  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , d'où :  $i = C \frac{d\underline{u}_C}{dt} = jC\omega \underline{u}_C$ .

On en déduit donc :

$$\underline{i} = \frac{jC\omega \underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \text{ et } \underline{I}_0 = \frac{jC\omega E_0}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

c) La relation liant  $u_L$  à  $i$  est :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \text{ d'où : } \underline{u}_L = jL\omega \underline{i}.$$

On en déduit donc :

$$\underline{u}_L = \frac{-LC\omega^2 \underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \text{ et } \underline{U}_{L_0} = \frac{-LC\omega^2 E_0}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

d) On fait apparaître  $\omega_0$  dans l'expression de  $\underline{U}_{L_0}$  :

$$\underline{U}_{L_0} = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} E_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jRC\omega_0 \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Or,  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , d'où :

$$\underline{U}_{L_0} = \frac{-x^2 E_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}.$$

L'amplitude réelle vaut donc :

$$U_{L_0} = |\underline{U}_{L_0}| = \frac{x^2 E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

e) On remplace  $x$  par  $\frac{1}{x'}$  dans l'expression de  $\underline{U}_{L_0}$  :

$$\underline{U}_{L_0} = \frac{-\frac{1}{x'^2} E_0}{1 - \frac{1}{x'^2} + j\frac{1}{Qx'}} = \frac{-E_0}{(x'^2 - 1) + j\frac{x'}{Q}}.$$

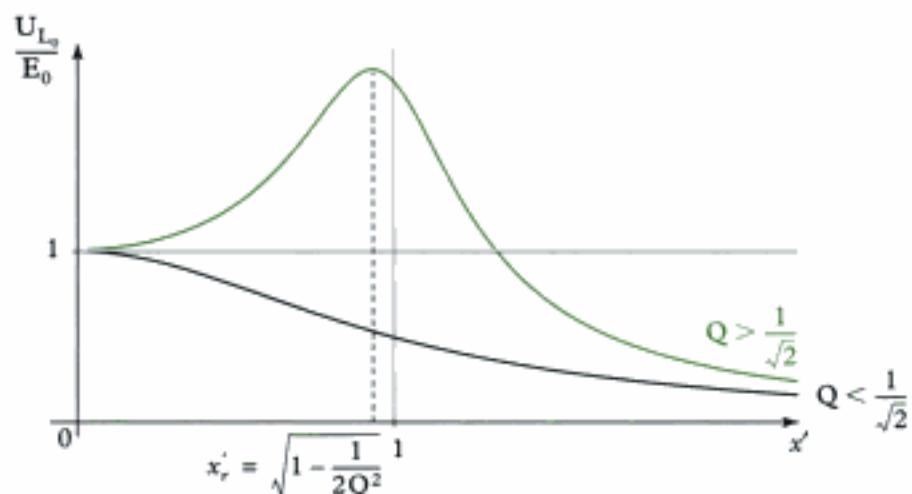
D'où :  $U_{L_0} = |\underline{U}_{L_0}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x'^2)^2 + \frac{x'^2}{Q^2}}}.$

D'après la question a), l'amplitude réelle de la tension aux bornes du condensateur vaut :

$$U_{C_0} = |\underline{U}_{C_0}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

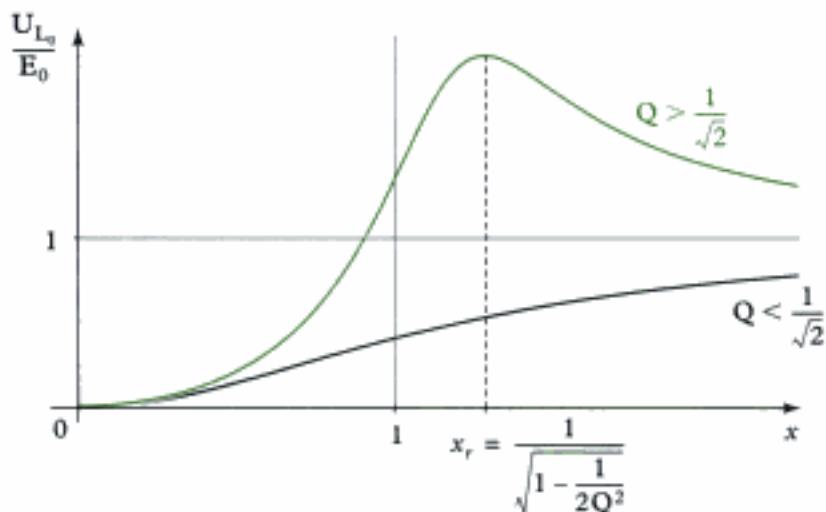
Les fonctions  $U_{L_0}(x')$  et  $U_{C_0}(x)$  sont identiques, donc les courbes de résonance sont semblables.

On obtient alors le réseau de courbes suivant en fonction de  $x'$ :



On retrouve le réseau de courbes tracé dans le cours au § A. 4 sur la figure 6.

En fonction de  $x = \frac{1}{x'}$ , le réseau de courbe devient :





## CHAPITRE

# 7

# Régime sinusoïdal forcé

### Introduction

Pour étudier le régime sinusoïdal permanent d'un circuit RLC alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, nous avons écrit les grandeurs électriques au moyen des nombres complexes. Dans ce chapitre, nous généraliserons cette technique à un circuit électrique quelconque en régime sinusoïdal forcé.

### Plan du chapitre 7

<b>A. Généralisation des notations complexes .....</b>	214
1. Le régime sinusoïdal forcé.....	214
2. Utilisation des nombres complexes .....	214
<b>B. Impédance et admittance complexes .....</b>	214
1. Définitions .....	214
2. Cas des composants R, L et C .....	215
3. Généralisation de la loi d'Ohm .....	215
<b>C. Lois de l'électrocinétique en complexes .....</b>	216
1. Loi des nœuds .....	217
2. Loi des mailles .....	217
3. Théorèmes généraux de l'électrocinétique .....	217
<b>D. Étude énergétique .....</b>	220
1. Puissance instantanée – Puissance moyenne .....	220
2. Valeurs efficaces .....	221
3. Facteur de puissance .....	222
<b>Méthodes</b>	
L'essentiel ; mise en œuvre .....	224
<b>Énoncés des exercices .....</b>	230
<b>Indications .....</b>	232
<b>Solutions des exercices .....</b>	233

# A. Généralisation des notations complexes

## A.1. Le régime sinusoïdal forcé

Considérons un circuit linéaire quelconque alimenté par un générateur de tension sinusoïdale (fig. 1). Son évolution au cours du temps est caractérisée par une équation différentielle linéaire (cf. chapitre 4).

### Définition 1

On appelle **régime sinusoïdal forcé** le régime sinusoïdal permanent associé à la solution particulière sinusoïdale de l'équation différentielle. Les grandeurs électriques  $i$  et  $u$  sont des fonctions sinusoïdales de même pulsation  $\omega$  que le générateur.

Fig. 1 - circuit linéaire alimenté en tension sinusoïdale.

1. Le régime transitoire dépend des conducteurs ohmiques définissant l'amortissement (cf. chapitre 4).

Lorsque le régime transitoire<sup>1</sup> s'achève, le circuit en régime sinusoïdal forcé évolue de manière analogue à la source de tension branchée à ses bornes. Dans la suite de ce chapitre, on n'étudiera que de tels régimes.

## A.2. Utilisation des nombres complexes

L'utilisation des nombres complexes permet de substituer à l'équation différentielle linéaire caractérisant l'évolution d'un circuit une relation linéaire entre la tension complexe  $u$  à ses bornes et l'intensité complexe  $i$  du courant le traversant.

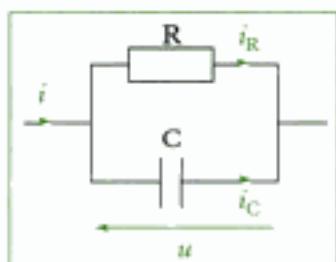


Fig. 2 - Association parallèle d'une résistance R et d'une capacité C.

2. En notations complexes, l'opérateur dérivation s'écrit :

$$\frac{d}{dt} = j\omega.$$

Par exemple, étudions la portion de circuit constituée d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  en parallèle avec un condensateur de capacité  $C$  (fig. 2). La loi des nœuds s'écrit :

$$i = i_R + i_C, \text{ avec } u = Ri_R \text{ et } i_C = C \frac{du}{dt}.$$

On en déduit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants caractérisant l'évolution du circuit :

$$i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}.$$

En notations complexes, cette équation différentielle devient<sup>2</sup> :

$$i = \frac{u}{R} + jC\omega u = \left( \frac{1}{R} + jC\omega \right) u, \text{ avec } u = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ et } i = I_0 e^{j(\omega t + \varphi')}.$$

# B. Impédance et admittance complexes

## B.1. Définitions

En régime sinusoïdal forcé, il existe une relation linéaire entre la tension complexe  $u = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$  et l'intensité complexe  $i = I_0 e^{j(\omega t + \varphi')}$ .

### Définitions 2

1. Le circuit est étudié en convention récepteur.

- L'impédance complexe  $\underline{Z}$  d'un circuit, homogène à une résistance, est définie comme le rapport de la tension complexe  $\underline{u}$  aux bornes du circuit par l'intensité complexe  $\underline{i}$  du courant le traversant<sup>1</sup> :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

- De même, l'admittance complexe  $\underline{Y}$  du circuit, homogène à une conductance, est définie comme l'inverse de l'impédance complexe  $\underline{Z}$  :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}$$

## B.2. Cas des composants R, L et C

### B.2.1 - Résistance R

La relation entre la tension  $u$  aux bornes d'un conducteur ohmique et l'intensité  $i$  du courant le traversant est donnée par la loi d'Ohm (fig. 3) :

$$u = Ri, \text{ d'où en notations complexes : } \underline{u} = \underline{R}\underline{i}.$$

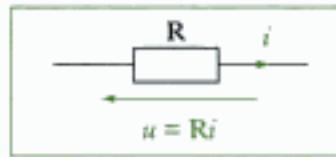


Fig. 3 - Étude d'une résistance en convention récepteur.

L'impédance complexe  $\underline{Z}$  d'un conducteur ohmique est égale à sa résistance  $R$  :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{R} = G.$$

### B.2.2 - Capacité C

La relation entre la tension  $u_C$  aux bornes d'un condensateur et l'intensité  $i$  du courant le traversant est (fig. 4) :

$$I = C \frac{du_C}{dt}, \text{ d'où en notations complexes : } \underline{i} = C \frac{d\underline{u}_C}{dt} = jC\omega \underline{u}_C.$$

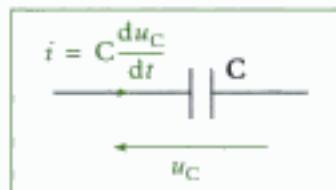


Fig. 4 - Étude d'un condensateur en convention récepteur.

L'impédance complexe  $\underline{Z}$  d'un condensateur de capacité  $C$  vaut :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}_C}{\underline{i}} = \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}_C} = jC\omega.$$

### B.2.3 - Inductance L

La relation entre la tension  $u_L$  aux bornes d'une bobine d'inductance  $L$  et l'intensité  $i$  du courant la traversant est (fig. 5) :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \text{ d'où en notations complexes : } \underline{u}_L = L \frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega \underline{i}.$$

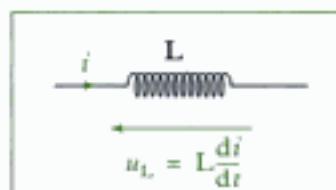


Fig. 5 - Étude d'une bobine en convention récepteur.

L'impédance complexe  $\underline{Z}$  d'une bobine d'inductance  $L$  vaut :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}_L}{\underline{i}} = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}_L} = \frac{1}{jL\omega}.$$

## B.3. Généralisation de la loi d'Ohm

### B.3.1 - Loi d'Ohm en notations complexes

En régime sinusoïdal forcé, on peut généraliser la loi d'Ohm à tous les dipôles linéaires grâce aux notations complexes. La tension complexe  $\underline{u}$  aux bornes

Hidden page

## C.1. Loi des nœuds

Loi 1

### Loi des nœuds

La somme des intensités complexes  $\underline{i}_i$  des courants algébriques arrivant à un nœud du circuit est égale à la somme des intensités complexes  $\underline{i}_j$  des courants algébriques s'en éloignant :

$$\sum_{\text{arrivant}} \underline{i}_i = \sum_{\text{sortant}} \underline{i}_j$$

## C.2. Loi des mailles

Dans un circuit, les différences de potentiel complexes changent de signe si on inverse les bornes de mesure et elles sont additives :

$$\underline{u}_{BA} = -\underline{u}_{AB} \quad \text{et} \quad \underline{u}_{AC} = \underline{u}_{AB} + \underline{u}_{BC}.$$

Loi 2

### Loi des mailles

Dans une maille, la somme algébrique des différentielles de potentiel complexes mesurées en parcourant complètement la maille dans un sens donné est nulle :

$$\sum_{\text{maille}} \underline{u}_i = 0.$$

## C.3. Théorèmes généraux de l'électrocinétique

### C.3.1 - Associations d'impédances complexes

#### • Association série

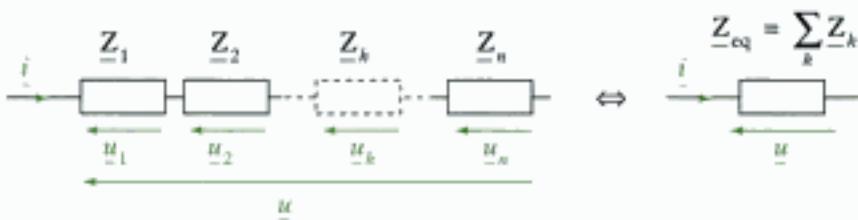


Fig. 6 - Association série de  $n$  dipôles d'impédances complexes et impédance complexe équivalente.

On considère l'association série de  $n$  dipôles d'impédances complexes  $\underline{Z}_k$  (fig. 6). L'intensité complexe  $i$  du courant est la même dans toutes les impédances. La tension complexe totale  $\underline{u}$  est égale à la somme des tensions complexes  $\underline{u}_k$ . On a donc :

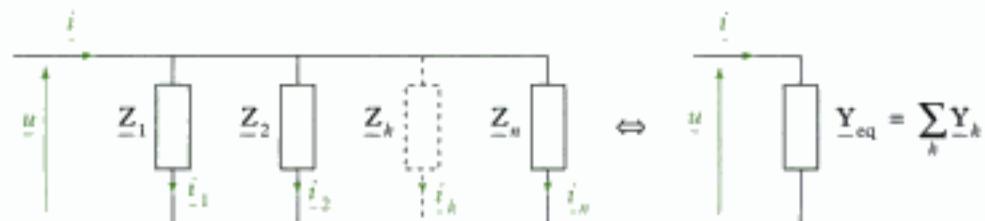
$$\underline{u} = \sum_k \underline{u}_k = \sum_k \underline{Z}_k i = \underline{Z}_{\text{eq}} i, \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Z}_k.$$

L'association série de  $n$  dipôles d'impédances complexes  $\underline{Z}_k$  est équivalente à un dipôle unique d'impédance complexe<sup>1</sup> :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Z}_k.$$

<sup>1</sup> Cette relation n'est pas vraie dans le cas général pour les impédances réelles, modules des impédances complexes.

## \* Association parallèle



**Fig. 7** - Association parallèle de  $n$  impédances complexes et admittance équivalente.

On considère l'association parallèle de  $n$  dipôles d'impédances complexes  $\underline{Z}_k$  (fig. 7). La tension complexe  $u$  est la même aux bornes de chaque impédance. L'intensité complexe totale  $i$  du courant est égale à la somme des intensités complexes  $i_k$ . On a donc :

$$i = \sum_k i_k = \sum_k \underline{Y}_k u = \underline{Y}_{\text{eq}} u, \quad \text{avec} \quad \underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Y}_k = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}.$$

1. Cette relation n'est pas vraie dans le cas général pour les admittances réelles, modules des admittances complexes.

L'association parallèle de  $n$  dipôles d'admittances complexe  $\underline{Y}_k$  est équivalente à un dipôle unique d'admittance complexe<sup>1</sup> :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Y}_k = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}}.$$

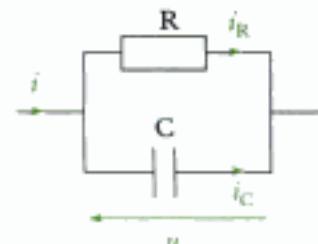
### Application 1 Calcul d'une impédance équivalente

Déterminer l'impédance équivalente au circuit constitué par un conducteur ohmique de résistance  $R$  en parallèle avec un condensateur de capacité  $C$ .

#### Solution

L'association parallèle de la résistance  $R$  et de la capacité  $C$  est équivalente à l'admittance complexe :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R}, \quad \text{d'où : } \underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{\underline{Y}_{\text{eq}}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$



### C.3.2 - Diviseur de tension

On considère l'association série de  $n$  impédances complexes  $\underline{Z}_k$ . La tension complexe  $u_k$  aux bornes de l'impédance complexe  $\underline{Z}_k$  vaut :

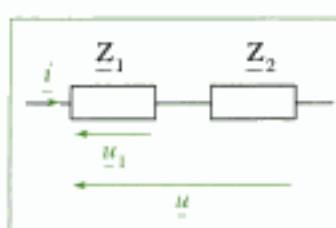
$$u_k = \underline{Z}_k i, \quad \text{d'où : } u_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{\text{eq}}} u.$$

#### Théorème 1

##### Diviseur de tension

Dans l'association série de  $n$  impédances complexes  $\underline{Z}_k$ , la tension complexe  $u_k$  aux bornes de l'impédance  $\underline{Z}_k$  vaut :

$$u_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{\text{eq}}} u = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_k \underline{Z}_k} u.$$



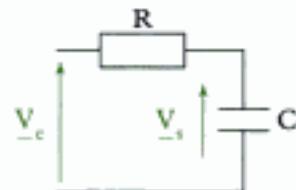
**Fig. 8** - Diviseur de tension.

*Exemple :* si les impédances complexes  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  sont associées en série (fig. 8), alors la tension complexe  $\underline{u}_1$  aux bornes de l'impédance  $\underline{Z}_1$  vaut :

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{u}.$$

### Application 2 Calcul d'une fonction de transfert

Déterminer le rapport  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ , où  $\underline{V}_e$  est la tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  appliquée aux bornes du circuit.



#### Solution

On applique le théorème de division de tension avec :

$$\underline{Z}_1 = R \text{ et } \underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}:$$

$$\underline{V}_s = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}_e = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{V}_e.$$

$$\text{La fonction de transfert vaut donc : } \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

### C.3.3 - Diviseur de courant

On considère l'association parallèle de  $n$  admittances complexes  $\underline{Y}_k$ . L'intensité complexe  $\underline{i}_k$  traversant l'admittance complexe  $\underline{Y}_k$  vaut :

$$\underline{i}_k = \underline{Y}_k \underline{u}, \quad \text{d'où : } \underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{eq}} \underline{i}.$$

#### Théorème 2

#### Diviseur de courant

Dans l'association parallèle de  $n$  admittances  $\underline{Y}_k$ , l'intensité complexe  $\underline{i}_k$  traversant l'admittance  $\underline{Y}_k$  vaut :

$$\underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{eq}} \underline{i} = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_k \underline{Y}_k} \underline{i}.$$

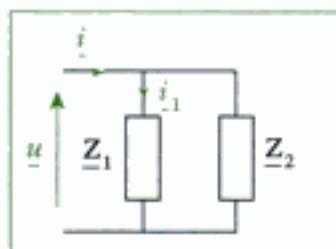


Fig. 9 - Diviseur de courant.

*Exemple :* si les admittances complexes  $\underline{Y}_1$  et  $\underline{Y}_2$  sont associées en parallèle (fig. 9), alors l'intensité complexe  $\underline{i}_1$  traversant l'admittance  $\underline{Y}_1$  vaut :

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{i} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{i}.$$

### C.3.4 - Loi des nœuds exprimée en termes de potentiel

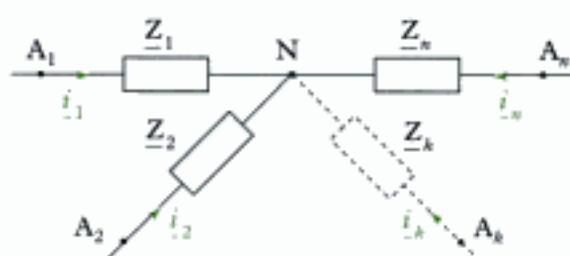


Fig. 10 - Les  $n$  impédances complexes sont reliées au nœud N.

Hidden page

Hidden page

### D.2.2 - Cas des grandeurs sinusoïdales

1. On utilise la même relation trigonométrique que précédemment, avec  $a = b = \omega t + \varphi'$ .

Considérons par exemple l'intensité sinusoïdale  $i$ . On a<sup>1</sup> :

$$i(t)^2 = I_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi') = \frac{1}{2} I_0^2 [\cos(2\omega t + 2\varphi') + 1].$$

Par définition, le carré de l'intensité efficace  $I_{\text{eff}}$  vaut :

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt = \frac{1}{2} I_0^2,$$

d'où :

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Si la grandeur électrique  $g$  est sinusoïdale, la grandeur efficace  $g_{\text{eff}}$  et l'amplitude  $g_0$  vérifient la relation :

$$g_{\text{eff}} = \frac{g_0}{\sqrt{2}}.$$

Pour la tension  $u$  et l'intensité  $i$ , on a ainsi :

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

### D.3. Facteur de puissance

En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne  $\mathcal{P}$  s'écrit :

$$\mathcal{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi,$$

où  $\cos \phi$  est le facteur de puissance du circuit ( $\phi = \arg(Z)$ ).

- L'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  vaut :

$$\underline{Z} = R,$$

d'où :  $\phi = \arg(Z) = 0$  et  $\cos(\phi) = 1$ .

La puissance moyenne dissipée dans une résistance est :

$$\mathcal{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = RI_{\text{eff}}^2 = GU_{\text{eff}}^2.$$

- L'impédance complexe d'un condensateur de capacité  $C$  vaut :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega},$$

d'où :  $\phi = \arg(Z) = -\frac{\pi}{2}$  et  $\cos(\phi) = 0$ .

La puissance moyenne dissipée dans un condensateur est nulle.

- L'impédance complexe d'une bobine d'inductance  $L$  vaut :

$$\underline{Z} = jL\omega,$$

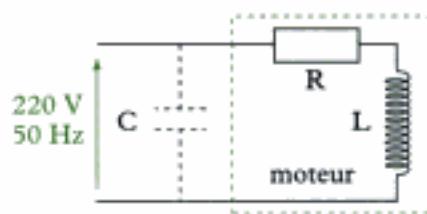
d'où :  $\phi = \arg(Z) = \frac{\pi}{2}$  et  $\cos(\phi) = 0$ .

La puissance moyenne dissipée dans une bobine est nulle.

### Application 5 Comment relever le facteur de puissance ?

Les circuits industriels doivent avoir un facteur de puissance proche de 1 pour que l'intensité du courant dans le réseau EDF soit la plus faible afin de réduire les pertes d'énergie en ligne par effet Joule. On dit alors que l'on « relève le  $\cos(\phi)$  ».

Un moteur d'inductance  $L = 1\text{H}$  et de résistance  $R = 10\ \Omega$  est alimenté par un courant de fréquence 50 Hz sous une tension efficace de 220 V.



a) Quel est le facteur de puissance du moteur ?

b) Pour « relever le  $\cos(\phi)$  », on place en parallèle au moteur un condensateur de capacité C. Déterminer la valeur de C pour que le facteur de puissance de l'association soit égal à 1.

#### Solution

a) L'impédance  $Z$  du moteur est :  $Z = R + jL\omega$ . Comme  $\phi = \arg(Z)$ , le facteur de puissance du moteur vaut :

$$\cos(\phi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 0,032.$$

b) L'admittance équivalente à l'association parallèle du moteur et du condensateur est :

$$Y_{eq} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}.$$

Le  $\cos(\phi)$  de l'association est égal à 1, donc  $\phi = -\arg(Y_{eq}) = 0$  et  $Y_{eq}$  est réel. L'argument du numérateur ( $1 - LC\omega^2 + jRC\omega$ ) est égal à l'argument du dénominateur ( $R + jL\omega$ ). On a donc :

$$\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} = \frac{L\omega}{R}, \quad \text{d'où : } C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2} = 1,01 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 10 \mu\text{F}.$$

# L'essentiel

## ✓ Régime sinusoïdal forcé

- En régime sinusoïdal forcé, on remplace l'équation différentielle linéaire caractérisant l'évolution d'un circuit par une relation linéaire entre la tension complexe  $\underline{u}$  à ses bornes et l'intensité complexe  $\underline{i}$  du courant le traversant.
- **L'impédance complexe  $\underline{Z}$**  du circuit, homogène à une résistance, et **l'admittance complexe  $\underline{Y}$**  du circuit, homogène à une conductance, vérifient la loi d'Ohm en notations complexes :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}.$$

	Résistance <b>R</b>	Capacité <b>C</b>	Inductance <b>L</b>
<b>Impédance complexe</b>	R	$\frac{1}{jC\omega}$	$jL\omega$
<b>Admittance complexe</b>	G	$jC\omega$	$\frac{1}{jL\omega}$

- L'impédance réelle  $Z$  (l'admittance réelle  $Y$ ) d'un circuit est le module de son impédance complexe  $\underline{Z}$  (admittance complexe  $\underline{Y}$ ) :

$$Z = |\underline{Z}| \quad (\text{en } \Omega) \quad \text{et} \quad Y = |\underline{Y}| = \frac{1}{Z} \quad (\text{en S}).$$

Elle permet de calculer l'amplitude  $I_0$  de l'intensité connaissant l'amplitude  $U_0$  de la tension et réciproquement :

$$U_0 = ZI_0 \quad \text{et} \quad I_0 = YU_0.$$

- L'avance de phase  $\phi = \varphi - \varphi'$  de la tension  $\underline{u}$  sur l'intensité  $\underline{i}$  est l'argument de l'impédance complexe  $\underline{Z}$  du circuit :

$$\phi = \arg(\underline{Z}) \quad \text{ou} \quad \phi = -\arg(\underline{Y}).$$

## ✓ Lois de l'électrocinétique en complexes

- La somme des intensités complexes  $i_i$  des courants algébriques arrivant à un nœud du circuit est égale à la somme des intensités complexes  $i_j$  des courants algébriques s'en éloignant :

$$\sum_{\text{arrivant}} i_i = \sum_{\text{sortant}} i_j \quad (\text{loi des nœuds}).$$

- Dans une maille, la somme algébrique des différentielles de potentiel complexes mesurées en parcourant complètement la maille dans un sens donné est nulle :

$$\sum_{\text{maille}} \underline{u}_i = 0 \quad (\text{loi des mailles}).$$

- L'association série de  $n$  impédances  $\underline{Z}_k$  est équivalente à une impédance unique  $\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Z}_k$ . La tension complexe  $\underline{u}_h$  aux bornes de  $\underline{Z}_k$  est (**diviseur de tension**) :

$$\underline{u}_h = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{\text{eq}}} \underline{u} = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_h \underline{Z}_h} \underline{u}, \quad \text{avec } \underline{u} \text{ tension aux bornes de l'association.}$$

- L'association parallèle de  $n$  admittances  $\underline{Y}_k$  est équivalente à une admittance unique  $\underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Y}_k$ . L'intensité complexe  $\underline{i}_k$  traversant  $\underline{Y}_k$  est (**diviseur de courant**) :

$$\underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{\text{eq}}} \underline{i} = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_k \underline{Y}_k} \underline{i}, \text{ avec } \underline{i} \text{ intensité traversant l'association.}$$

- Si un nœud N du circuit est relié à  $n$  impédances  $\underline{Z}_k$  non nulles, la loi des nœuds exprimée en termes de potentiels s'écrit (théorème de Millman) :

$$\underline{V}_N \left[ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \dots \right] = \frac{\underline{V}_{A_1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_{A_2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_{A_3}}{\underline{Z}_3} + \dots$$

### ✓ Aspect énergétique

- La puissance instantanée  $p$  d'un dipôle est la puissance reçue par ce dipôle à l'instant  $t$ . En régime sinusoïdal forcé, c'est une fonction de période moitié de la période T de la source.
- En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne  $\mathcal{P}$  est définie comme la valeur moyenne de la puissance instantanée  $p$  sur une période T des oscillations :

$$\mathcal{P} = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi.$$

- Les termes  $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$  et  $I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  sont respectivement la **valeur efficace** de la tension sinusoïdale  $u$  et de l'intensité sinusoïdale  $i$ .
- Le terme  $\cos \phi$  est le **facteur de puissance** du circuit, où  $\phi = \arg(\underline{Z})$  est l'avance de phase de la tension  $u$  sur l'intensité  $i$ .
- La puissance moyenne dissipée dans un condensateur ou dans une bobine est nulle.

## Mise en œuvre

### Méthode n° 1

#### Comment déterminer une valeur efficace ou un facteur de forme ?

Un signal périodique d'amplitude  $U_0$  a les mêmes effets énergétiques sur une résistance qu'un signal continu de valeur  $U_{\text{eff}}$ . On se propose de déterminer la valeur efficace  $U_{\text{eff}}$  d'un signal périodique, ainsi que son facteur de forme  $f = \frac{U_{\text{eff}}}{U_0}$ .

#### → Savoir faire

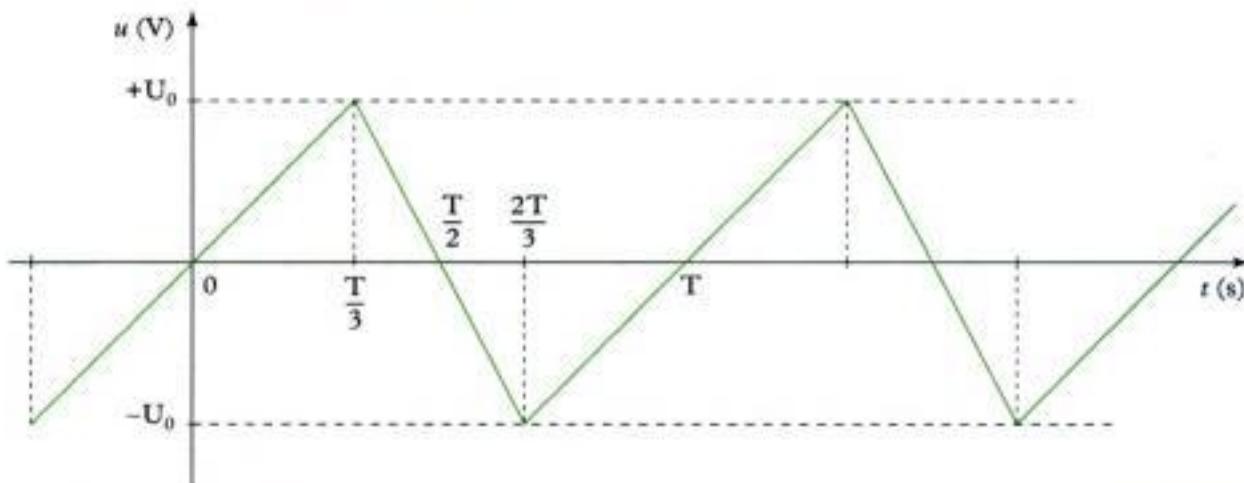
- | ① Découper une période du signal en petits intervalles de temps de façon à disposer d'une expression de  $u(t)$  sur chacun de ces intervalles.
- | ② Identifier les zones de la courbe qui conduisent à une même valeur de l'intégrale  $\int u^2(t) dt$ . Graphiquement, deux portions de courbes symétriques par rapport à l'axe horizontal ou par rapport à un axe vertical conduisent à une intégrale  $\int u^2(t) dt$  identique.

- ❸ Calculer l'intégrale de  $u^2(t)$  sur une période. Ce calcul est simplifié en prenant en compte les contributions identiques de certains intervalles de temps.
- ❹ Calculer la valeur efficace  $U_{\text{eff}}$  du signal et son facteur de forme  $f$ :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad \text{et} \quad f = \frac{U_{\text{eff}}}{U_0}.$$

### → Application

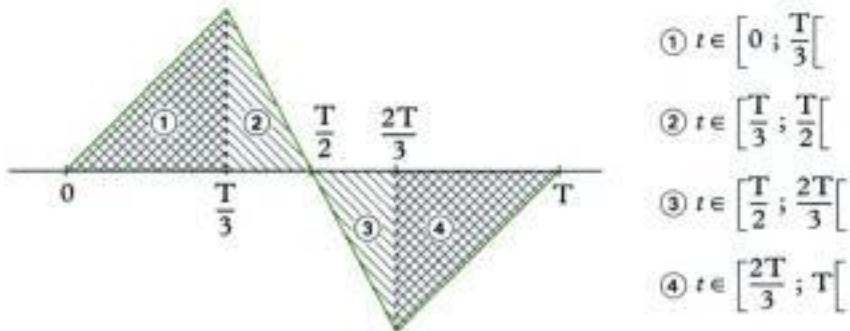
Déterminer la valeur efficace du signal triangulaire suivant :



Ce signal est dissymétrique, puisque le temps de montée est plus long que le temps de descente.

### Solution

- ❶ On peut découper une période  $T$  de ce signal en quatre morceaux :



La tension  $u(t)$  est affine sur chacun de ces morceaux.

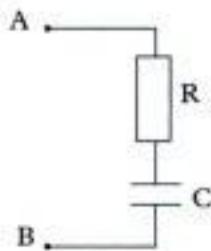
- ❷ Les zones  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{4}$  d'une part,  $\textcircled{2}$  et  $\textcircled{3}$  d'autre part conduisent à une même valeur de  $\int u^2(t) dt$ .
- ❸ Sur l'intervalle  $\textcircled{1}$ , on calcule  $\int_0^{\frac{T}{3}} u^2(t) dt$  avec  $u(t) = U_0 \times \frac{t}{T}$ , soit :

$$\int_0^{\frac{T}{3}} u^2(t) dt = U_0^2 \int_0^{\frac{T}{3}} \frac{9t^2}{T^2} dt = \frac{9U_0^2}{T^2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{T}{3}} = \frac{U_0^2 T}{9}.$$

Hidden page

## → Application

Quel dipôle doit-on associer à un circuit RC série pour rendre le facteur de puissance de l'ensemble égal à 1 ?



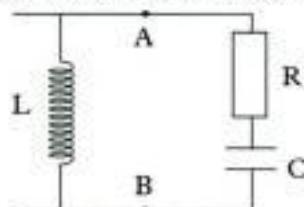
### Solution

- ① La résistance R et le condensateur C sont associés en série, donc :

$$Z_{\text{cir}} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega}.$$

- ② On a :  $\tan\phi = -\frac{1}{RC\omega} < 0$ . L'argument de  $Z_{\text{cir}}$  est toujours négatif (quelle que soit la valeur de la pulsation  $\omega$ ).

- ③ On associe le circuit RC en parallèle à une bobine d'inductance L :



- ④ L'impédance équivalente à cette association vaut :

$$Z_{\text{eq}} = \frac{jL\omega \left( R + \frac{1}{jC\omega} \right)}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jL\omega(1 + jRC\omega)}{1 - CL\omega^2 + jRC\omega}.$$

- ⑤ Pour le numérateur, on a :  $\tan\phi_N = \frac{-1}{RC\omega}$ .

Pour le dénominateur, on a :  $\tan\phi_D = \frac{RC\omega}{1 - CL\omega^2}$ .

Soit :  $-\frac{1}{RC\omega} = \frac{RC\omega}{1 - CL\omega^2} \Leftrightarrow 1 - CL\omega^2 = -(RC\omega)^2$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{C \omega^2}.$$



Sur cet exemple, le circuit RC a un effet capacitif. La plupart des circuits industriels comportent des moteurs électriques, et donc des bobines. Leur comportement est ainsi souvent inductif, et on ramène leur facteur de puissance à 1 en plaçant une batterie de condensateurs en parallèle.

## Méthode n° 3

### Comment équilibrer un pont ?

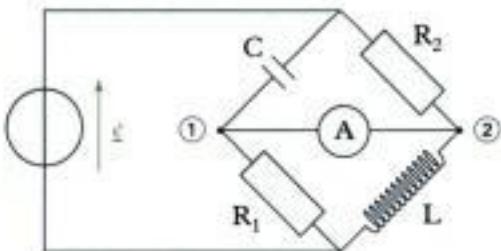
La structure en « pont », très fréquemment rencontrée en électronique, est constituée de quatre impédances disposées sur un carré. Cette structure est alimentée par un générateur placé sur une diagonale ; elle est équilibrée lorsque les potentiels des deux autres sommets sont égaux.

## → Savoir faire

- ① Déterminer, par des ponts diviseurs de tension, les potentiels des deux nœuds à équilibrer.
- ② Égaler ces potentiels et en déduire deux équations, l'une portant sur la partie réelle et l'autre sur la partie imaginaire de l'égalité.
- ③ Déterminer les valeurs des composants qui satisfont aux égalités précédentes.

## → Application

Comment choisir les composants  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  et  $C$  pour annuler l'intensité dans l'ampèremètre du circuit ci-dessous ?



### Solution

- ❶ Les potentiels des nœuds situés de part et d'autre de l'ampèremètre sont, en appliquant le théorème de division de tension :

$$\underline{V}_1 = \frac{R_1 \underline{e}}{R_1 + \frac{1}{jC\omega}} \quad \text{et} \quad \underline{V}_2 = \frac{jL\omega \underline{e}}{R_2 + jL\omega}.$$



Ces ponts diviseurs ne sont valables que parce que l'on suppose l'intensité dans l'ampèremètre nulle. Si ce n'était pas le cas, la résistance  $R_1$  ne serait pas en série avec le condensateur, pas plus que la résistance  $R_2$  avec la bobine  $L$ .

- ❷ En égalant les potentiels  $\underline{V}_1$  et  $\underline{V}_2$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{R_1 \underline{e}}{R_1 + \frac{1}{jC\omega}} &= \frac{jL\omega \underline{e}}{R_2 + jL\omega} \Leftrightarrow R_1(R_2 + jL\omega) = \left( R_1 + \frac{1}{jC\omega} \right) jL\omega \\ &\Leftrightarrow R_1 R_2 + jR_1 L\omega = jR_1 L\omega + \frac{L}{C} \\ &\Leftrightarrow \left( R_1 R_2 - \frac{L}{C} \right) + j(R_1 L\omega - R_1 L\omega) = 0. \end{aligned}$$

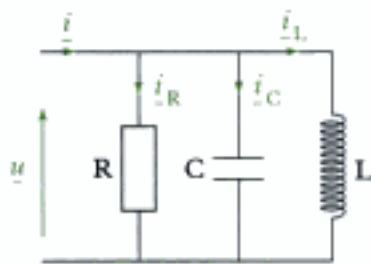
- ❸ La condition donnée par la partie imaginaire est systématiquement vérifiée. Celle donnée par la partie réelle impose :

$$R_1 R_2 = \frac{L}{C}.$$



Cet équilibrage est valable pour toutes les valeurs de la pulsation  $\omega$ . Dans le cas général, les relations obtenues font intervenir la pulsation  $\omega$  et l'équilibrage n'est valable que pour une fréquence donnée.

Hidden page



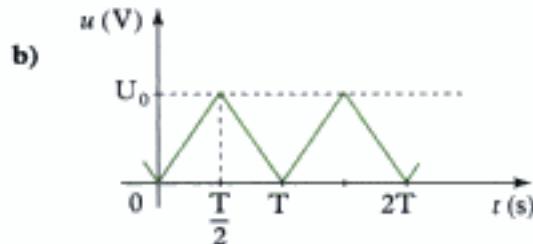
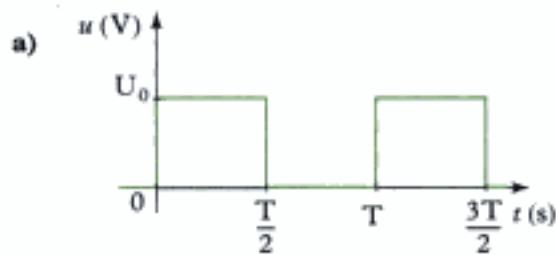
Vérifier que l'étude de la résonance tension  $u$  (ou de la résonance courant  $i_R$  dans la résistance), lorsqu'on applique un courant sinusoïdal en notation complexe  $\underline{i} = I_0 e^{j\omega t}$ , est identique à celle de la résonance courant dans le circuit RLC. Exprimer alors  $\omega_0$ , pulsation propre, et  $Q'$ , facteur de qualité du circuit RLC parallèle (et  $\alpha' = \frac{1}{2Q'}$ , coefficient d'amortissement).

b) Appliquer le théorème de division de courant et déterminer le courant complexe  $\underline{i}_L$  en fonction de  $\underline{i}$ .

Utiliser  $\omega_0$  et  $Q'$  (ou  $\alpha'$ ) et vérifier que l'étude de la résonance de  $i_L$  est la même que celle de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur.

### Ex. 5 Grandeurs efficaces

Déterminer les grandeurs efficaces des fonctions périodiques suivantes.

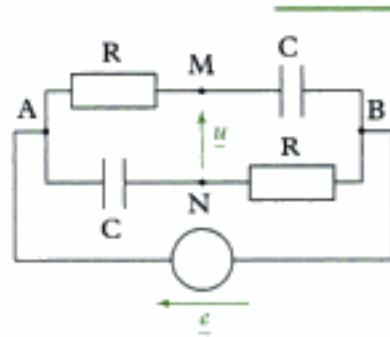


## Niveau 2

### Ex. 6 Circuit déphaseur

L'association parallèle de dipôles RC est alimentée par une source de tension alternative  $e$  de grandeur efficace  $E$ .

Déterminer  $u$ , la tension efficace  $U_{eff}$  et l'avance de phase  $\phi$  de  $u$  sur  $e$ .



### Ex. 7 Amélioration du facteur de puissance

Un moteur fonctionnant sous une tension efficace  $U = 200$  V à la fréquence  $f = 50$  Hz est modélisable par une résistance  $R$  en série avec une inductance propre  $L$ .

La puissance consommée est  $P = 1\,000$  W, alors que l'intensité efficace vaut  $I = 10$  A.

- Déterminer  $L$  et  $R$ . Que vaut le  $\cos\phi$  ?
- Quelle est la capacité  $C$  du condensateur à placer en parallèle à ses bornes pour que le facteur de puissance soit égal à l'intensité ?
- On utilise un condensateur de capacité  $C' < C$ . Le facteur de puissance vaut 0,95. Déterminer  $C'$ .

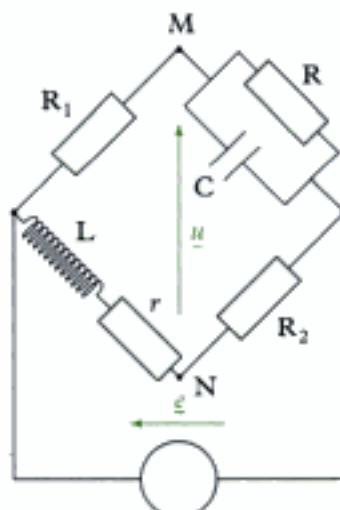
### Ex. 8 Facteur de puissance

Un moteur fonctionne sous une tension efficace  $U = 20$  V, de fréquence  $f = 50$  Hz. Il est modélisé par une résistance  $R = 3\ \Omega$  en série avec une inductance  $L$ . Le courant circulant dans le moteur est  $I = 4$  A.

- Déterminer l'inductance  $L$ , l'impédance réelle  $Z$  et la puissance  $P$  consommée par le moteur.
- On place en parallèle avec le moteur deux ampoules consommant chacune une puissance de 8 W. Quel est le facteur de puissance du montage ?

### Ex. 9 Équilibre d'un pont

Le pont ci-dessous est alimenté en alternatif. À quelle condition le pont est-il équilibré ? Montrer que l'on peut déterminer  $L$  et  $r$  en fonction de  $C$  et de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R$ .



Hidden page

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1



En série, les impédances s'ajoutent ; en parallèle les admittances s'ajoutent.

a) On a :  $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$ , d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}(RC\omega) - \frac{\pi}{2} = -\text{Arctan}\left(\frac{1}{RC\omega}\right). \end{cases}$$



Cette avance de phase est négative quelle que soit la valeur de  $\omega$ . Le dipôle est globalement capacitif, ce qui est logique d'après sa constitution ; l'intensité est en avance sur la tension.

b) On a :  $\underline{Z} = R + jL\omega$ , d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right). \end{cases}$$

c) On a :  $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ , d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right). \end{cases}$$



Le signe de l'avance de phase est à présent fonction de la pulsation  $\omega$ . Le comportement global (inductif ou capacitif) dépend de la pulsation.

d) On a :  $\underline{Z} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R(2 + jRC\omega)}{1 + jRC\omega}$ , d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = R \sqrt{\frac{4 + R^2 C^2 \omega^2}{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{RC\omega}{2}\right) - \text{Arctan}(RC\omega). \end{cases}$$

e) On a :  $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{1 - R^2 C^2 \omega^2 + 3jRC\omega}{jC\omega(1 + jRC\omega)}$ , d'où :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega} \sqrt{\frac{(1 - R^2 C^2 \omega^2)^2 + 9R^2 C^2 \omega^2}{1 + R^2 C^2 \omega^2}}.$$

Hidden page

D'où :

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{(R + jL\omega)(1 + jRC\omega)}{1 - LC\omega^2 + 2jRC\omega}$$

On en déduit :

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{\frac{(R^2 + L^2\omega^2)(1 + R^2C^2\omega^2)}{(1 - LC\omega^2)^2 + 4R^2C^2\omega^2}}$$

• Réécrivons  $\underline{Z}$  :  $\underline{Z} = \frac{(R + jL\omega)(1 + jRC\omega)}{jC\omega \left[ 2R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \right]}$

On en déduit :

$$\phi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) + \arctan(RC\omega) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{2R}\right)$$

i) On a :  $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} = R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$ , d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega}\right)^2} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}\right). \end{cases}$$

## Exercice 2

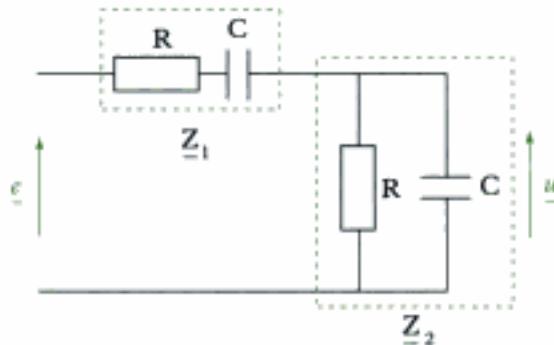
a) Un diviseur de tension entre le condensateur d'une part et l'association série {résistance + bobine} d'autre part donne :

$$\underline{u}_C = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e} = \frac{\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On retrouve bien le résultat intermédiaire obtenu dans le chapitre 6 lors de l'étude de la résonance tension aux bornes du condensateur. En posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R}$ , on a en effet :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\alpha \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\underline{e}}{1 - x^2 + 2j\alpha x}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

b) On substitue à l'association série {R + C} une impédance  $\underline{Z}_1$  et à l'association parallèle {R/C} une impédance  $\underline{Z}_2$  :



On a d'après le théorème de division de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{e} = \frac{1}{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} + 1} \underline{e},$$

d'où :

$$\underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \underline{Y}_2}, \text{ avec } \underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \text{ et } \underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega.$$



Il faut veiller à n'appliquer le diviseur de tension qu'à des dipôles parcourus par le même courant. C'est bien le cas de  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  dans ce circuit.

On en tire :

$$\underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + \left( R + \frac{1}{jC\omega} \right) \left( \frac{1}{R} + jC\omega \right)}, \text{ d'où : } \underline{u} = \frac{\underline{e}}{3 + j \left( RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)}.$$

### Exercice 3



Le schéma du montage est celui de la question a) de l'exercice 2.

L'intensité  $\underline{i}$  dans le circuit RLC est :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}} \quad \text{avec} \quad \underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega},$$

d'où :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} = \frac{jC\omega \underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

On pose encore :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

On trouve alors :

$$\underline{i} = \frac{\frac{\underline{e}}{\underline{R}} \times 2j\alpha x}{1 - x^2 + 2j\alpha x} \quad \text{ou} \quad \underline{i} = \frac{\frac{\underline{e}}{\underline{R}}}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}.$$

### Exercice 4

a) Déterminons l'admittance du circuit (association parallèle) :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = \frac{1}{R} + j \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right).$$

On en déduit :

$$\underline{u} = \frac{\underline{i}}{\underline{Y}}, \quad \text{d'où : } \underline{u} = \frac{\underline{i}}{\frac{1}{R} + j \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)}.$$

Le courant dans la résistance vaut alors :

$$\underline{i}_R = \frac{u}{R} = \frac{\underline{i}}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}.$$

Posons :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ;  $Q' = \frac{1}{2\alpha'} = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

 On a :  $Q' = \frac{1}{x}$ , où  $Q$  est le facteur de qualité du circuit RLC série.

On obtient alors :

$$\underline{i}_R = \frac{\underline{i}}{1 + jQ'\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

L'étude de la résonance de  $i_R$  est analogue à celle de la résonance courant dans le circuit RLC série.

b) Le théorème de division de courant s'écrit :

$$\underline{i}_L = \frac{\frac{1}{jL\omega}}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} \underline{i} = \frac{\underline{i}}{1 - L C \omega^2 + \frac{jL\omega}{R}}.$$

On a donc, avec les notations réduites :

$$\underline{i}_L = \frac{\underline{i}}{1 - x^2 + 2j\alpha'x}.$$

L'étude de la résonance de  $i_L$  est similaire à celle de la résonance tension aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série.

## Exercice 5

 On applique la méthode n° 1 aux deux types de signaux.

a) On identifie deux intervalles sur une période du signal :

$$\bullet u(t) = U_0 \text{ pour } t \in \left[0 ; \frac{T}{2}\right];$$

$$\bullet u(t) = 0 \text{ pour } t \in \left[\frac{T}{2} ; T\right].$$

L'intégrale à calculer vaut donc :

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_0^2 dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 dt = \frac{U_0^2}{2},$$

$$\text{d'où : } U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Le facteur de forme du signal carré est :  $f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

b) Deux intervalles définissant une aire identique sous la courbe  $u^2(t)$  apparaissent.

- Sur  $\left[0 ; \frac{T}{2}\right]$ , la tension  $u(t)$  vérifie :  $u(t) = U_0 \times \frac{t}{\frac{T}{2}} = \frac{2U_0 t}{T}$ , soit :

$$\int_0^{\frac{T}{2}} u^2(t) dt = \frac{4U_0^2}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} t^2 dt = \frac{4U_0^2}{3T^2} \left(\frac{T}{2}\right)^3 = \frac{U_0^2 T}{6}.$$

- Sur  $\left[\frac{T}{2} ; T\right]$ , l'intégrale de  $u^2(t)$  prend une valeur identique d'où :

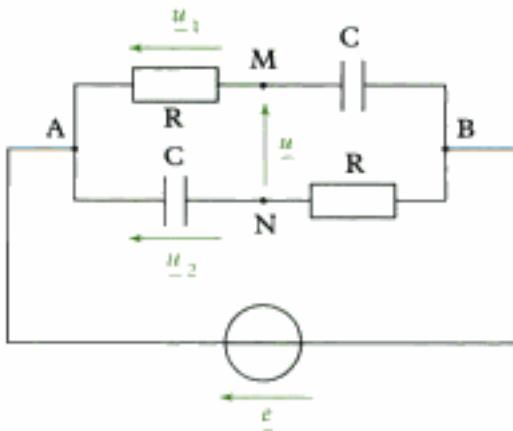
$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \left( 2 \times \frac{U_0 T}{6} \right)}, \text{ soit : } U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}.$$

Le facteur de forme du signal triangulaire est :  $f = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**⚠** La relation  $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ , valable pour un signal sinusoïdal, n'est pas valable dans le cas général.

## Exercices de niveau 2

### Exercice 1



Nous allons exprimer les tensions  $u_1$  et  $u_2$  par application du théorème de division de tension :

$$u_1 = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} e = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} e \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} e = \frac{1}{1 + jRC\omega} e.$$

On a :  $u = u_2 - u_1$ , d'où :  $u = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} e$ .

**⚠** Cette expression de la tension  $u$  n'est valable qu'à vide, c'est-à-dire en l'absence de dipôle branché entre les points M et N. Si on connecte un dipôle à ces bornes, un courant circule entre les noeuds M et N et le théorème de division de tension ne s'applique plus.

Hidden page

On a :

$$\underline{D} = 1 - LC\omega^2 + jRC\omega = jC\omega \left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right], \text{ d'où : } \arg(\underline{D}) = \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right).$$

$$\text{On a donc : } \arctan \left( \frac{L\omega}{R} \right) = \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right), \text{ d'où :}$$

$$\frac{L\omega}{R} = \frac{-R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} = \frac{-1}{\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}}.$$

 On rappelle que :  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$ .

On en déduit :

$$\frac{L\omega}{R} \left( \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right) = -1, \text{ d'où : } C = \frac{L}{L^2\omega^2 + R^2} = 138 \mu F.$$

 On a aussi  $C = \frac{L}{Z^2}$ , où  $Z$  est l'impédance réelle du moteur.

 Lorsque le facteur de puissance vaut 1, la même puissance est obtenue avec une intensité plus faible que dans la question a). Cela ne change rien pour l'utilisateur du moteur, mais cela diminue les pertes par effet Joule dans le réseau qui achemine cette intensité.

c) Avec la capacité  $C'$ , nous avons :  $\cos\phi = 0,95$ . En outre :

$$\begin{aligned} Z' &= \frac{R + jL\omega}{1 - LC'\omega^2 + jRC'\omega} = \frac{(R + jL\omega)(1 - LC'\omega^2 - jRC'\omega)}{(1 - LC'\omega^2)^2 + (RC'\omega)^2} \\ &= \frac{R + j\omega[L - C'(R^2 + L^2\omega^2)]}{(1 - LC'\omega^2)^2 + RC'\omega^2}. \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\tan\phi = \frac{\omega[L - C'(R^2 + L^2\omega^2)]}{R} = \frac{\omega[L - Z^2C']}{R},$$

soit :  $C' = \frac{L - \frac{R\tan\phi}{\omega}}{Z^2}$ , où  $Z$  est l'impédance réelle du moteur.

Comme  $\cos\phi = 0,95$  et  $C' < C$ , il faut prendre :

$$\tan\phi = 0,329, \text{ d'où : } C' = 112 \mu F.$$

 Le cas  $\tan\phi = -0,329$  conduit à  $C' = 164 \mu F$ . Cette valeur de la capacité conduit à un ensemble (moteur//capacité correctrice) globalement capacitif, et dont le facteur de puissance est également inférieur à 1.

### Exercice 3

a) Les valeurs efficaces de la tension  $U$  et du courant  $I$  circulant dans le moteur permettent de calculer son impédance réelle :

$$Z = \frac{U}{I} = 5 \Omega.$$

 Cette impédance diffère de la résistance  $R$  du moteur du fait de l'effet inductif de la bobine.

Or, on a (association série d'une résistance et d'une inductance) :

$$Z = \sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}, \text{ d'où : } L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} = 12,7 \text{ mH.}$$

La puissance consommée dans le moteur est le fait des seuls effets résistifs, soit :

$$\mathcal{P} = RI^2 = 48 \text{ W.}$$

b) La résistance d'une lampe est  $r$  telle que :

$$\mathcal{P}_{\text{lampe}} = \frac{U^2}{r}, \text{ d'où : } r = \frac{U^2}{\mathcal{P}_{\text{lampe}}} = 50 \Omega.$$

Le montage équivalent est :



$$\text{L'admittance du circuit vaut : } Y = \frac{1}{R + jL\omega} + \frac{2}{r} = \frac{r + 2R + 2jL\omega}{r(R + jL\omega)},$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } Z &= \frac{r(R + jL\omega)}{(r + 2R) + 2jL\omega} = \frac{r(R + jL\omega)(r + 2R - 2jL\omega)}{(r + 2R)^2 + 4L^2\omega^2} \\ &= \frac{r[R(r + 2R) + 2L^2\omega^2 + jL\omega r]}{(r + 2R)^2 + 4L^2\omega^2}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\tan \phi = \frac{rL\omega}{R(r + 2R) + 2L^2\omega^2} = \frac{50 \times 4}{3 \times 56 + 2 \times 4^2} = 1, \text{ d'où : } \cos \phi = 0,707.$$

#### Exercice 4



Il s'agit d'appliquer la méthode n° 3 au circuit.

Lorsque le pont est équilibré, les potentiels des points M et N sont égaux. Ces potentiels s'obtiennent par des diviseurs de tension :

$$V_M = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{\frac{R}{R_1 + jRC\omega}} \varepsilon \quad \text{et} \quad V_N = \frac{R_2 \varepsilon}{R_2 + r + jL\omega}.$$

L'égalité entre ces potentiels conduit à :

$$\frac{R}{(1 + jRC\omega)R_1 + R} = \frac{R_2}{R_2 + r + jL\omega}.$$

$$\Leftrightarrow RR_2 + Rr + jRL\omega = R_1R_2 + jRR_1R_2C\omega + RR_2$$

$$\Leftrightarrow RR_2 + Rr - R_1R_2 - RR_2 + j(RL\omega - RR_1R_2C\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Rr = R_1R_2 \\ RL = RR_1R_2C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{R_1R_2}{R} \\ L = R_1R_2C. \end{cases}$$



En règle générale, l'équilibrage d'un pont conduit à deux conditions.

Hidden page

Hidden page

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

1. La pulsation  $\omega$  est toujours associée au nombre complexe  $j$ .

En régime harmonique, la fonction de transfert complexe  $H$  d'un quadripôle est fonction de la pulsation  $\omega$  de la source<sup>1</sup>. Elle s'écrit :

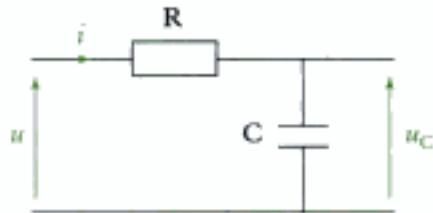
$$H(j\omega) = \frac{\text{amplitude complexe de la grandeur de sortie}}{\text{amplitude complexe de la grandeur d'entrée}}.$$

### Application 1 Fonction de transfert d'un filtre RC

Un réseau constitué d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$  est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal délivrant la tension  $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ . On définit un quadripôle dont les variables sont :

- en entrée : la tension  $u(t)$  du générateur ;
- en sortie : la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur.

Déterminer la fonction de transfert du montage en notations complexes :  $H(j\omega) = \frac{U_C(j\omega)}{U(j\omega)}$ .



#### Solution

- L'impédance complexe du montage est :

$$Z = R + \frac{1}{jC\omega}, \text{ d'où } u(t) = Z i(t) \text{ ou } U_0 = Z I_0.$$

$U_0$  est l'amplitude complexe de la tension appliquée et  $I_0$  celle du courant circulant dans le circuit.

- L'impédance complexe du condensateur vaut :

$$Z_c = \frac{1}{jC\omega}, \text{ d'où } u_c(t) = Z_c i(t) \text{ ou } U_{c_0} = Z_c I_0.$$

$U_{c_0}$  est l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur.

- On obtient en reportant :

$$U_{c_0} = \frac{Z_c}{Z} U_0, \text{ soit } U_{c_0} = \frac{1}{1 + jRC\omega} U_0.$$

Cette relation permet d'écrire la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

### A.3.3 - Amplification en tension

#### Définition 2

En régime harmonique, on appelle amplification en tension complexe la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$  définie par le rapport sans dimension :

$$H(j\omega) = \frac{U_s}{U_e},$$

où  $U_e$  est l'amplitude complexe de la tension d'entrée et  $U_s$ , l'amplitude complexe de la tension de sortie.

2. On la trouve parfois écrite  $A_0(\omega)$ .

Le module  $H(\omega) = |H(j\omega)|$  de la fonction de transfert est l'amplification en tension<sup>2</sup> et son argument  $\phi(\omega) = \arg(H(j\omega))$  est la phase.

L'amplification en tension est la fonction de transfert la plus utilisée dans les montages en électronique. Il est à noter que son module peut être inférieur ou supérieur à 1. Le terme « amplification » ne signifie pas que l'amplitude du signal de sortie est plus grande que celle du signal d'entrée. En revanche, il est utilisé chaque fois que la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie sont de même nature.

## A.4. Le diagramme de Bode

En régime harmonique, les fonctions de transfert des quadripôles de l'électrocinétique dépendent de la fréquence. Pour exploiter cette propriété, on utilise un diagramme de Bode ou courbe de réponse à un signal sinusoïdal.

### A.4.1 - Utilisation de l'échelle logarithmique

La représentation des fonctions de transfert se fait en traçant deux graphes, l'un relatif au module et l'autre à la phase. Usuellement, on représente le graphe du module en utilisant la fonction logarithme<sup>1</sup>.

#### • Raisons physiologiques

Chez un être vivant, la sensation à une excitation extérieure est proportionnelle au logarithme de l'excitation. L'étendue des puissances ou des énergies perceptibles fait qu'une représentation logarithmique traduit bien les impressions ressenties<sup>2</sup>.

#### • Raisons techniques

L'échelle logarithmique permet une représentation graphique correcte sur l'ensemble du domaine de variation des fréquences étudiées (de quelques hertz à quelques centaines de kilohertz). De même, l'amplitude peut varier d'un facteur 100 ou 1 000.

## A.4.2 - Gains en décibels

#### • Gain en puissance

L'amplification en puissance  $A_p$  du quadripôle est le rapport sans dimension de la puissance moyenne  $P_s$  fournie à la charge et de la puissance moyenne  $P_e$  reçue du générateur<sup>3</sup> :

$$A_p(\omega) = \frac{P_s}{P_e}$$

#### Définition 3

On définit le gain en puissance  $G_p$  du quadripôle, exprimé en décibel (dB), par la relation<sup>4</sup> :

$$G_p(\omega) = 10 \log [A_p(\omega)], \text{ avec } A_p \text{ amplification en puissance.}$$

L'utilisation du gain en puissance nécessite des calculs parfois longs des courants et des tensions.

#### • Gain en tension

La puissance moyenne  $P$ , dans un circuit, est proportionnelle au carré de la tension  $U$  à ses bornes<sup>5</sup> :

$$P = k|U|^2, \text{ d'où : } G_p = 20 \log \left| \frac{U_s}{U_e} \right| + \text{cste.}$$

Afin de simplifier les calculs, on exprime alors le gain en tension.

1. En base 10, on a :

$$\log(10^n) = n \log 10 = n.$$

La quantité calculée augmente de 10 fois chaque fois qu'on multiplie par 10.

2. L'oreille détecte des puissances de  $10^{-16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$  à  $10^{-3} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$  suivant la fréquence. Afin de comparer les sons, on définit l'intensité par la relation :

$$I = 10 \log \left( \frac{P}{P_0} \right), \text{ avec}$$

$$P_0 = 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

L'intensité des sons audibles va donc de 0 dB (bruit d'une feuille tombant) à 130 dB (limite de douleur).

3. L'amplification en puissance est une grandeur réelle dépendant de la pulsation  $\omega$ .

4. Afin de rappeler le choix de la notation logarithmique, l'unité de gain est le décibel de symbole dB (décì rappelle le facteur 10).

5. La valeur de la constante de proportionnalité  $k$  dépend de la nature du circuit.

Hidden page

#### • Décade et octave

1. En effet, on a en abscisses :  
 $\log(10f) - \log(f) = \log(10) = 1$ .

2. En effet, on a :  
 $\log(2f) - \log(f) = \log(2)$ .

– La décade correspond à l'intervalle de fréquences pour passer de la fréquence  $f$  à la fréquence  $10f$ . Dans le diagramme de Bode, cet intervalle est l'intervalle de longueur 1 (intervalle unité<sup>1</sup>).

– L'octave correspond à l'intervalle de fréquences pour passer de la fréquence  $f$  à la fréquence double  $2f$ . Dans le diagramme de Bode, cet intervalle a pour longueur  $\log(2)$ <sup>2</sup>.

#### • Pente d'une droite

Dans la représentation du gain en tension  $G$  en fonction de  $\log(f)$ , la pente d'une droite est calculée en dB/décade.

## A.5. Ordre d'un filtre

La fonction de transfert complexe peut toujours s'écrire comme le rapport de deux polynômes en  $j\omega$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$$

Pour des raisons de stabilité du filtre, le degré du polynôme  $\underline{N}(j\omega)$  au numérateur de la fonction de transfert est inférieur ou égal au degré du polynôme  $\underline{D}(j\omega)$  au dénominateur.

#### Définition 6

On appelle **ordre du filtre** le degré du polynôme  $\underline{D}(j\omega)$  situé au dénominateur de la fonction de transfert complexe  $\underline{H}$ .

### Application 3 Ordre du filtre RC

Déterminer l'ordre du filtre RC étudié à l'application 1.

#### Solution

La fonction de transfert du filtre RC est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est donc :

$$\underline{D}(j\omega) = 1 + jRC\omega$$

C'est un polynôme du premier ordre en  $j\omega$  : le filtre est donc un **filtre du premier ordre**.

## A.6. Bande passante d'un filtre

Pour caractériser les propriétés d'un quadripôle, on définit le domaine de fréquences sur lequel le signal d'entrée se retrouve en sortie avec une amplification suffisante et le domaine de fréquences sur lequel le signal de sortie se retrouve atténué.

### A.6.1 - Pulsations de coupure

Soit  $f_{\max}$  la fréquence (ou  $\omega_{\max}$  la pulsation) associée à un maximum d'amplification (ou de gain). On note alors  $H(\omega_{\max}) = H_{\max}$  la valeur maximale de  $H(\omega)$  correspondant à la pulsation  $\omega = \omega_{\max}$ .

1. Il existe parfois deux pulsations de coupure  $\omega_{c_1}$  et  $\omega_{c_2}$ .

2. On a en effet :

$$-10\log 2 = -3.$$

3. En effet, on peut aussi écrire :

$$G_P(\omega_c) = G_{P_{max}} - 3\text{dB},$$

$$\text{d'où : } P_s = \frac{P_{max}}{2}.$$

#### Définition 7

On appelle pulsation de coupure  $\omega_c$  la pulsation telle que<sup>1</sup> :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}, \text{ soit}^2 : G(\omega_c) = G_{max} - 3\text{dB} \text{ avec } G_{max} = 20\log(H_{max}).$$

(À cette pulsation de coupure  $\omega_c$  correspond une fréquence de coupure  $f_c$  telle que  $\omega_c = 2\pi f_c$ .)

Cette définition signifie que la puissance fournie par le dipôle est divisée par 2 en passant de la fréquence  $f_{max}$  à la fréquence  $f_c$  si la charge du quadripôle est une résistance<sup>3</sup>.

#### A.6.2 - Bande passante

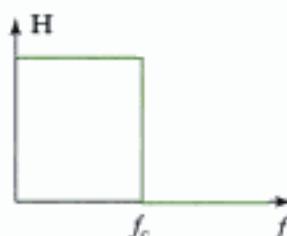
#### Définition 8

On appelle bande passante d'un filtre l'intervalle de pulsations  $\Delta\omega$  donnant une amplification (ou un gain) supérieur à la valeur de coupure :

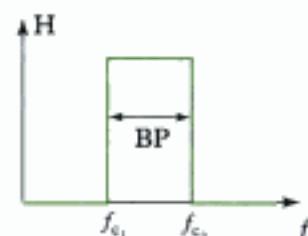
$$H(\omega) > H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \text{ ou } G(\omega) > G(\omega_c) = G_{max} - 3\text{dB}.$$

(À cet intervalle de pulsations  $\Delta\omega$  correspond un intervalle de fréquences  $\Delta f$  tel que  $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ .)

- On suppose que le filtre possède une seule fréquence de coupure  $f_c$  (fig. 5).
- Si l'amplification est maximum pour une fréquence nulle ou pour une fréquence  $f_0 < f_c$ , le filtre ne laisse passer que les fréquences inférieures à  $f_c$  (**filtre passe-bas**). La bande passante est alors :  $\text{BP}(f) = f_c$ .
- Si l'amplification est maximum pour une fréquence tendant vers l'infini ou pour une fréquence  $f_0 > f_c$ , seules les fréquences supérieures à  $f_c$  ne sont pas atténuerées (**filtre passe-haut**). On précise alors la fréquence de coupure.
- On suppose que le filtre possède deux fréquences de coupure  $f_{c_1}$  et  $f_{c_2}$  (fig. 5).
- Si l'amplification est maximum pour une fréquence  $f_0$  comprise entre les fréquences de coupures ( $f_{c_1} < f_0 < f_{c_2}$ ), le quadripôle est un filtre passe-bande de bande passante :  $\text{BP}(f) = f_{c_2} - f_{c_1}$ .
- Si l'amplification est maximum en dehors de la bande de fréquence  $f_{c_2} - f_{c_1}$ , le quadripôle est un filtre réjecteur de fréquences.



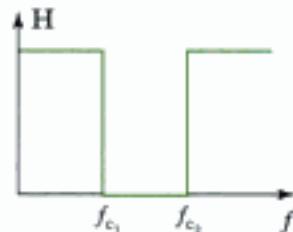
a. filtre passe-bas



b. filtre passe-bande



c. filtre passe-haut



d. filtre réjecteur de fréquences

Fig. 5 - Les différents types de filtres : passe-bas, passe-bande, passe-haut, réjecteur de fréquences.

### Remarques

- Un filtre du premier ordre possède au plus une fréquence de coupure (filtre passe-bas du premier ordre ou filtre passe-haut du premier ordre).
- Un filtre du second ordre peut avoir deux fréquences de coupure. Tous les cas de la figure 5 sont alors possibles.

#### Application 4 Bande passante du filtre RC

Déterminer la (les) fréquence(s) de coupure et la bande passante du filtre RC étudié à l'application 1. Quelle est la nature de ce filtre ?

#### Solution

La fonction de transfert du filtre RC est :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}, \text{ d'où : } H(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}.$$

L'amplification  $H(\omega)$  est une fonction décroissante de la pulsation  $\omega$ . Elle est donc maximale pour  $\omega = 0$ , et alors  $H_{\max} = 1$ . La pulsation de coupure  $\omega_c$  correspond donc à :

$$H(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega_c^2}}, \text{ d'où : } RC\omega_c = 1.$$

La pulsation et la fréquence de coupure valent donc :

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \text{ et } f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Comme la fonction  $H(\omega)$  est une fonction décroissante de la pulsation  $\omega$ , le filtre étudié est un filtre passe-bas du premier ordre de bande passante :

$$BP(f) = f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$

## B. Filtres passifs – Filtres actifs

### B.1. Définition

Dans un quadripôle, il y a toujours un transfert de puissance entre l'entrée (puissance  $P_e$  fournie par la source au quadripôle) et la sortie (puissance  $P_s$  reçue par la charge du quadripôle).

#### B.1.1 - Quadripôle actif

Un **quadripôle actif** est un quadripôle comportant des sources « internes » d'énergie (c'est-à-dire des sources indépendantes du signal d'entrée), obtenues grâce à l'alimentation du quadripôle<sup>1</sup>.

#### B.1.2 - Quadripôle amplificateur

Si la puissance d'entrée  $P_e$  est inférieure à la puissance de sortie  $P_s$ , le quadripôle est **actif et amplificateur**. Des sources internes fournissent l'énergie permettant d'amplifier la puissance. Un quadripôle actif comporte au moins un dipôle actif (c'est-à-dire un dipôle comportant une source interne). Il est évident qu'il peut aussi posséder des dipôles passifs.

1. L'amplificateur d'une chaîne hi-fi est un quadripôle actif. La source est le tuner ou le lecteur CD et la charge est le haut-parleur restituant le signal sonore. L'amplificateur est alimenté par une source (par exemple, le secteur) fournit l'énergie nécessaire pour amplifier le son.

### B.1.3 - Quadripôle atténuateur

Si la puissance d'entrée  $P_e$  est supérieure à la puissance de sortie  $P_s$ , le quadripôle est **atténuateur**. Deux cas se présentent :

- si le quadripôle ne comporte que des composants passifs (conducteurs ohmiques, condensateur, bobines), il est **passif** ;
- si le quadripôle possède des sources internes, l'apport d'énergie correspondant est insuffisant pour amplifier la puissance. Le quadripôle est **actif et atténuateur**.

## B.2. Amplificateur opérationnel (A.O.)

### B.2.1 - Présentation de l'A.O.

À l'origine, le terme « amplificateur » désignait les composants électroniques destinés à effectuer diverses « opérations mathématiques ». Or, on découvre qu'un amplificateur de gain élevé auquel on applique une contre-réaction se comporte comme un circuit de gain précis. En choisissant les éléments de cette réaction, l'amplificateur opérationnel (A.O.) permet alors d'additionner, soustraire, amplifier, comparer...

L'emploi de l'amplificateur opérationnel dans les appareils de mesure s'est généralisé du fait de ses bonnes performances et de sa simplicité. Il est souvent utilisé pour transformer des signaux analogiques en d'autres signaux analogiques<sup>1</sup>.

### B.2.2 - Schématisation de l'A.O.

L'amplificateur opérationnel est un composant actif dont l'alimentation<sup>2</sup> symétrique possède trois bornes de sortie délivrant les tensions  $-V_{cc}$ ,  $0$ ,  $+V_{cc}$  (la tension «  $0$  » correspond à la masse de l'alimentation).

Sur le schéma de l'amplificateur (fig. 6), les deux bornes d'entrée sont indiquées par les symboles «  $-$  » et «  $+$  ». La charge, branchée à la borne de sortie de l'amplificateur, est alors reliée à la masse.

Le signal d'entrée est la différence de potentiel  $\epsilon = V_+ - V_-$  entre les deux bornes d'entrée «  $+$  » (entrée non inverseuse) et «  $-$  » (entrée inverseuse). Le signal de sortie est la tension  $V_s$  mesurée à la sortie de l'amplificateur. Celui-ci étant alimenté par des tensions symétriques  $\pm V_{cc}$ , la tension de sortie  $V_s$  ne peut dépasser la tension de saturation  $\pm V_{sat}$  (avec  $V_{sat} \leq V_{cc}$ )<sup>3</sup>.

La fonction de transfert complexe de l'amplificateur opérationnel est :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{\epsilon}, \text{ avec } \epsilon = V_+ - V_-.$$

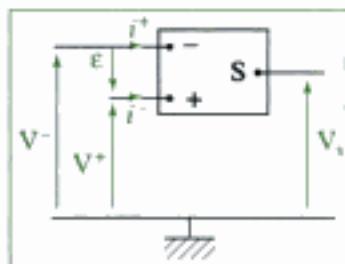


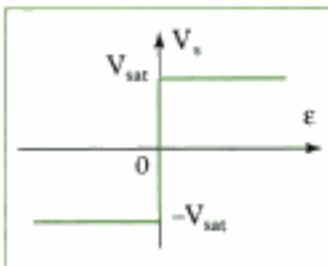
Fig. 6 - Schéma d'un amplificateur opérationnel (l'alimentation n'est pas représentée).

3. On prendra  $V_{sat} = 15$  V dans les applications numériques.

### B.2.3 - Amplificateur opérationnel idéal

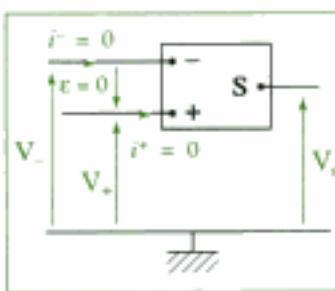
L'**amplificateur opérationnel idéal** possède une amplification en tension infinie, des impédances d'entrée infinies et une impédance de sortie nulle.

Les courants d'entrée  $i_-$  et  $i_+$  sont donc nuls et la tension de sortie  $V_s$  est indépendante de la charge. En outre, l'amplification est indépendante de la fréquence (bande passante infinie) et le déphasage entre le signal d'entrée  $\epsilon$  et le signal de sortie  $V_s$  est nul.

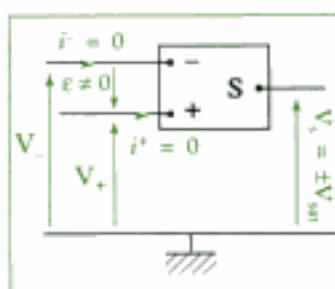


**Fig. 7** - Caractéristique d'un amplificateur opérationnel idéal.

Régime de saturation	Régime linéaire	Régime de saturation
$e < 0 \Rightarrow$ $V_s = -V_{sat}$	$e = 0 \Rightarrow$ $-V_{sat} < V_s < +V_{sat}$	$e > 0 \Rightarrow$ $V_s = +V_{sat}$
l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation basse	le fonctionnement de l'amplificateur opérationnel est linéaire	l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation haute



**Fig. 8** - Amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire.



**Fig. 9** - Amplificateur opérationnel idéal en régime de saturation.

La caractéristique liant la tension d'entrée  $e$  à la tension de sortie  $V_s$  de l'amplificateur opérationnel idéal est donnée sur la figure 7.

### B.2.4 - Régimes de fonctionnement de l'A.O. idéal

- **Régime linéaire (fig. 8)**

Le régime linéaire de l'A.O. idéal est caractérisé par :

$$e = V_+ - V_- = 0 \quad \text{et} \quad |V_s| \leq V_{sat}.$$

Pour que le fonctionnement en régime linéaire soit possible, il faut qu'une partie du signal de sortie soit réinjecté sur l'entrée inverseuse « - » de l'amplificateur opérationnel. Les variations du signal de sortie dues à celles du signal d'entrée sont alors amoindries par cette réaction et la tension de sortie  $V_s$  reste inférieure en valeur absolue à la tension de saturation  $V_{sat}$ .

- **Régimes de saturation (fig. 9)**

En l'absence d'une réaction efficace, l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation :

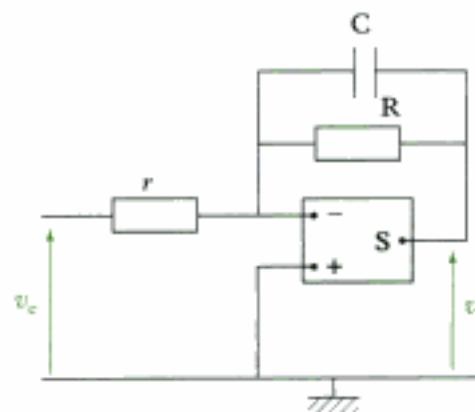
- si  $e = V_+ - V_- > 0$ , alors  $V_s = +V_{sat}$  (saturation haute) ;
- si  $e = V_+ - V_- < 0$ , alors  $V_s = -V_{sat}$  (saturation basse).

- **Remarque**

Les amplificateurs opérationnels utilisés dans les filtres actifs doivent avoir un fonctionnement linéaire pour une bonne restitution du signal. Dans la suite, on supposera cette condition réalisée.

#### Application 5 Fonction de transfert d'un filtre actif

Déterminer la fonction de transfert du montage schématisé ci-dessous et préciser l'ordre du filtre. L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.



### Solution

- L'entrée non-inverseuse  $+ - +$  est reliée à la masse du montage : le potentiel  $V_+$  est donc nul. Comme l'amplificateur fonctionne en régime linéaire, le potentiel  $V_-$  de l'entrée inverseuse  $- + -$  est nul aussi. La tension  $v_e$  se retrouve alors aux bornes de la résistance  $r$ ; de même la tension de sortie  $v_s$  se retrouve aux bornes de la résistance  $R$  en parallèle avec le condensateur  $C$ .
- Comme les courants d'entrée de l'amplificateur opérationnel sont nuls, le courant  $i$  traversant la résistance  $r$  passe dans la résistance  $R$  en parallèle avec le condensateur  $C$ .
- On a donc la relation ( $R$  et  $C$  sont étudiés en convention générateur) :

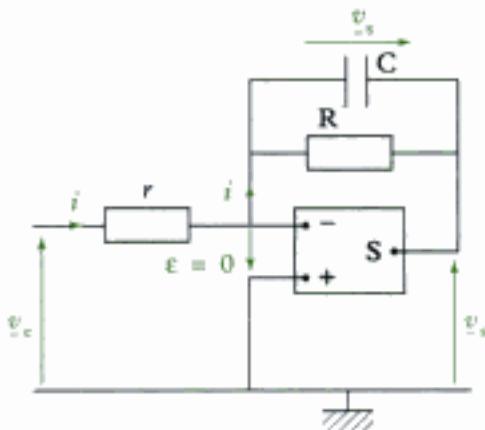
$$v_e = r i \text{ avec } i = -\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)v_s, \text{ d'où :}$$

$$v_e = -r\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)v_s.$$

La fonction de transfert complexe du montage s'écrit donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = -\frac{R}{r + jrRC\omega}.$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est un polynôme du premier ordre en  $j\omega$  : le filtre obtenu est donc un **filtre actif du premier ordre**.



## C. Filtres du premier ordre

### C.1. Expression de la fonction de transfert

Le dénominateur de la fonction de transfert  $\underline{H}$  d'un filtre du premier ordre est un polynôme du premier degré en  $j\omega$ . Pour étudier cette fonction, on pose :

$$x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}, \quad \text{où } \omega_{\text{réf}} \text{ est la pulsation de référence du circuit.}$$

L'écriture la plus générale de la fonction de transfert  $\underline{H}$  d'un filtre du premier ordre en fonction de la variable  $x$  est alors :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{N}(jx)}{1 + jx},$$

où  $\underline{N}(jx)$  est un polynôme en  $jx$  de degré inférieur ou égal à 1.

### C.2. Filtre passe-bas

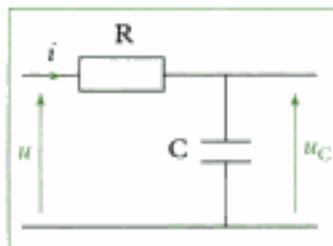
#### C.2.1 - Fonction de transfert

##### Propriété 1

1.  $H_0$  peut être positif ou négatif.  
Dans la suite, on choisira toujours  $H_0 > 0$ .

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit<sup>1</sup> :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}, \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}.$$



**Fig. 10** - Exemple de filtre passe-bas du premier ordre.

Exemple :

La fonction de transfert du filtre RC étudié à l'application 1 est (fig. 10) :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

En posant  $\omega_{\text{réf}} = \frac{1}{RC}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$ , il vient :

$$H(jx) = \frac{1}{1 + jx}, \text{ fonction de transfert d'un filtre passe-bas.}$$

### C.2.2 - Fréquence de coupure – bande passante

L'amplification en tension H d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$H(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

La fonction H(x) décroît quand x varie de 0 à  $+\infty$ . Elle est maximum pour x = 0 et on a alors  $H_{\max} = H_0$ . La pulsation de coupure  $\omega_c$  vérifie donc :

$$H(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + x_c^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}, \text{ avec } x_c = \frac{\omega_c}{\omega_{\text{réf}}}.$$

On en déduit :  $x_c = 1$ , soit :

$$\omega_c = \omega_{\text{réf}} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega_{\text{réf}}}{2\pi}.$$

La bande passante d'un filtre passe-bas du premier ordre vaut :

$$\text{BP}(f) = f_c = \frac{\omega_{\text{réf}}}{2\pi}, \text{ où } \omega_{\text{réf}} \text{ est la pulsation de référence du circuit.}$$

### C.2.3 - Étude du gain

Le gain en tension G d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$G(x) = 20\log(H(x)) = 20\log(H_0) - 10\log(1 + x^2).$$

• La fonction G(x) décroît quand x varie de 0 à  $+\infty$ . Elle est maximum pour x = 0 et on a alors<sup>1</sup> :

$$G_{\max} = G(0) = 20\log(H_0).$$

• Par définition des valeurs de coupure, on sait que :

$$G(1) = G_{\max} - 3\text{dB}.$$

• Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de G quand  $x \rightarrow 0$  et quand  $x \rightarrow +\infty$ .

– Quand  $x \rightarrow 0$ , alors  $H(x) \rightarrow H_0$  et on a :

$$G(x) \rightarrow 20\log(H_0) = G_{\max}.$$

Aux basses fréquences, le gain G tend vers le gain basses fréquences maximum  $G_{\max}$ . L'asymptote correspondante est une droite horizontale.

– Quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $H(x) \rightarrow \frac{H_0}{x}$  et on a :

$$G(x) \rightarrow 20\log(H_0) - 20\log(x) = G_{\max} - 20\log(x).$$

1. La fonction log étant croissante, les variations de G(x) sont les mêmes que celles de H(x).

2. Une décade correspond à une variation de  $x$  d'un facteur multiplicatif égal à 10, donc à une variation de  $\log(x)$  d'un facteur additif égal à 1.

Aux hautes fréquences, le gain  $G$  tend vers la courbe  $G_{\max} - 20\log(x)$ . En échelle logarithmique, il s'agit d'une droite de pente  $-20 \text{ dB/décade}^1$ . Les deux courbes asymptotes se coupent en  $x = 1$ .

#### C.2.4 - Étude de la phase

La phase  $\phi$  d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit en fonction de  $x$  :

$$\phi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = -\arg(\underline{D}(jx)) = -\text{Arctan}(x).$$

- Pour  $x = 1$ , on a :  $\phi = -\frac{\pi}{4}$ .
- Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de  $\phi$  quand  $x \rightarrow 0$  et quand  $x \rightarrow +\infty$ .
  - Quand  $x \rightarrow 0$ , alors  $\phi(x) \rightarrow 0$  (par valeur inférieure). Aux basses fréquences, l'asymptote correspondante est une droite horizontale.
  - Quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $\phi(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$  (par valeur supérieure). Aux hautes fréquences, l'asymptote correspondante est une droite horizontale.

#### C.2.5 - Diagramme de Bode

On peut représenter le gain et la phase en fonction de  $\log(x)$ . On trace sur le même graphe les asymptotes précédemment définies (fig. 11).

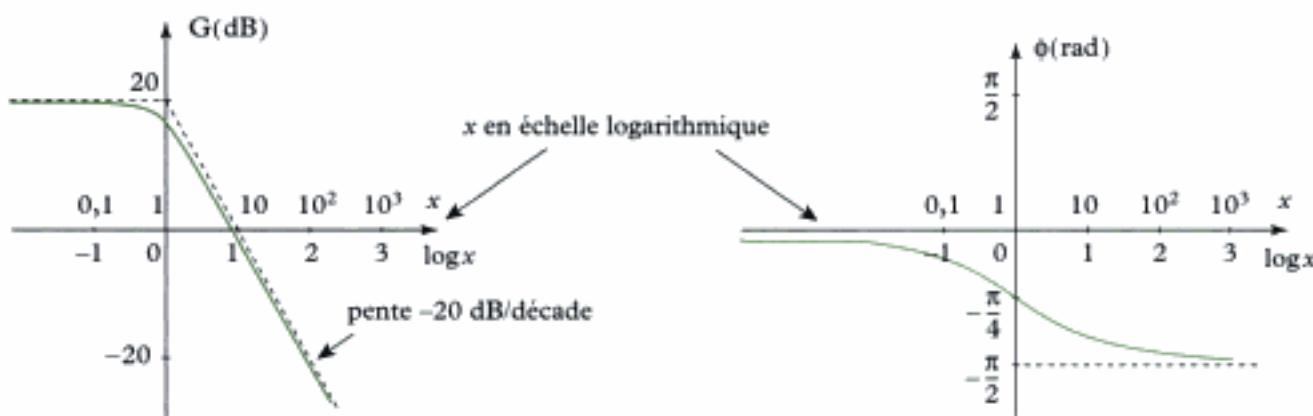


Fig. 11 - Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre (cas particulier où  $G_{\max} = 20 \text{ dB}$ ).

#### C.2.6 - Interprétation physique du comportement asymptotique

On peut étudier physiquement la nature d'un filtre composé uniquement de composants usuels (résistances, condensateurs, bobines) en analysant leurs comportements aux basses et aux hautes fréquences.

- L'impédance d'un condensateur est :  $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ . Quand  $\omega \rightarrow 0$ , alors on a :  $|\underline{Z}| \rightarrow \infty$ ; quand  $\omega \rightarrow +\infty$ , alors on a :  $|\underline{Z}| \rightarrow 0$ .

Un condensateur se comporte aux basses fréquences comme un interrupteur ouvert et aux hautes fréquences comme un court-circuit (fil).

- L'impédance d'une inductance est :  $\underline{Z} = jL\omega$ . Quand  $\omega \rightarrow 0$ , alors on a :  $|\underline{Z}| \rightarrow 0$ ; quand  $\omega \rightarrow +\infty$ , alors on a :  $|\underline{Z}| \rightarrow \infty$ .

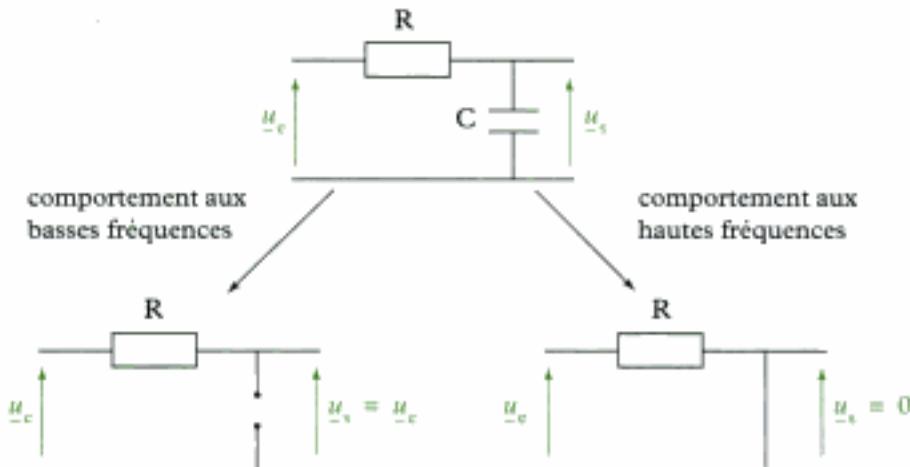
Une bobine se comporte aux basses fréquences comme un court-circuit (fil) et aux hautes fréquences comme un interrupteur ouvert.

### Application 6 Comportement asymptotique d'un filtre RC

Retrouver qualitativement que le filtre RC de la figure 11, et déjà étudié à l'application 1, est un filtre passe-bas.

#### Solution

On remplace le condensateur par un fil aux hautes fréquences et par un interrupteur ouvert aux basses fréquences. On peut donc établir les schémas équivalents suivants pour le circuit :



Le filtre étudié est bien un filtre passe-bas, comme l'étude de la fonction de transfert l'avait déjà montré.

## C.3. Filtre passe-haut

### C.3.1 - Fonction de transfert

#### Propriété 2

1.  $H_0$  peut être positif ou négatif.  
Dans la suite, on choisira toujours  $H_0 > 0$ .

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit :

$$H(jx) = \frac{H_0 jx}{1 + jx}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}.$$

*Exemple :*

On considère le filtre de la figure 12. La tension d'entrée est la tension sinusoïdale  $u_e$ . La tension de sortie  $u_s$  est la tension aux bornes de la résistance R. D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert complexe du filtre vaut :

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} u_e, \text{ d'où : } H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

En posant  $\omega_{\text{réf}} = \frac{1}{RC}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$ , il vient :

$$H(jx) = \frac{jx}{1 + jx}, \text{ fonction de transfert d'un filtre passe-haut.}$$

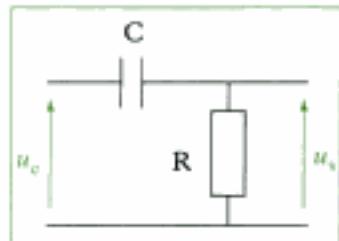


Fig. 12 - Exemple de filtre passe-haut du premier ordre.

### C.3.2 - Fréquence de coupure

L'amplification en tension  $H$  d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit en fonction de  $x$  :

$$H(x) = H_0 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

Comme  $\frac{1}{x^2}$  décroît quand  $x$  varie de 0 à  $+\infty$ , la fonction  $H(x)$  est croissante. Elle est maximum pour  $x \rightarrow +\infty$  et on a alors  $H_{\max} = H_0$ . La pulsation de coupure  $\omega_c$  vérifie donc :

$$H(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{1+\frac{1}{x_c^2}}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}, \text{ avec } x_c = \frac{\omega_c}{\omega_{\text{réf}}}.$$

On en déduit :  $x_c = 1$ , soit :

$$\omega_c = \omega_{\text{réf}} \text{ et } f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega_{\text{réf}}}{2\pi}.$$

La fréquence de coupure d'un filtre passe-haut du premier ordre vaut :

$$f_c = \frac{\omega_{\text{réf}}}{2\pi}, \text{ où } \omega_{\text{réf}} \text{ est la pulsation de référence du circuit.}$$

### C.3.3 - Étude du gain

Le gain en tension  $G$  d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit en fonction de  $x$  :

$$G(x) = 20\log(H(x)) = 20\log(H_0) + 20\log(x) - 10\log(1+x^2).$$

- La fonction  $G(x)$  croît quand  $x$  varie de 0 à  $+\infty$ . Elle est maximum pour  $x \rightarrow +\infty$ , et on a alors<sup>1</sup> :

$$G_{\max} = 20\log(H_0).$$

- Par définition des valeurs de coupure, on sait que :

$$G(1) = G_{\max} - 3\text{dB}.$$

- Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de  $G$  quand  $x \rightarrow 0$  et quand  $x \rightarrow +\infty$ .

- Quand  $x \rightarrow 0$ , alors  $H(x) \rightarrow H_0x$  et on a :

$$G(x) \rightarrow 20\log(H_0) + 20\log(x) = G_{\max} + 20\log(x).$$

Aux basses fréquences, le gain  $G$  tend vers la courbe  $G_{\max} + 20\log(x)$ . En échelle logarithmique, il s'agit d'une droite de pente +20 dB/décade<sup>2</sup>.

- Quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $H(x) \rightarrow H_0$  et on a :

$$G(x) \rightarrow G_{\max} = 20\log(H_0).$$

Aux hautes fréquences, le gain  $G$  tend vers le gain hautes fréquences maximum  $G_{\max}$ . L'asymptote correspondante est une droite horizontale. Les deux courbes asymptotes se coupent en  $x = 1$ .

### C.3.4 - Étude de la phase

La phase  $\phi$  d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit en fonction de  $x$  :

$$\phi(x) = \arg(H(jx)) = \arg(N(jx)) - \arg(D(jx)) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x).$$

Hidden page

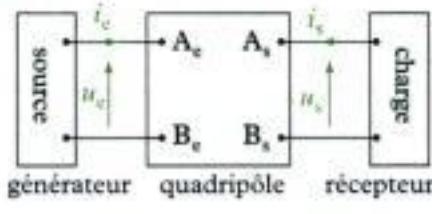
Hidden page

Hidden page

# L'essentiel

## ✓ Fonction de transfert d'un quadripôle

- Un **quadripôle** est une portion de réseau possédant deux bornes d'entrée reliées à un générateur (source) et deux bornes de sortie reliées à un récepteur (charge). Un quadripôle constitué de dipôles linéaires est **linéaire**.



- La **fondation de transfert  $H$**  d'un quadripôle est le rapport de la valeur d'une grandeur de sortie  $G_s$  à la valeur d'une grandeur d'entrée  $G_e$ . En régime harmonique (source sinusoïdale de pulsation  $\omega$ ), l'amplification en tension complexe  $H(j\omega)$  est définie par le rapport sans dimension :

$$H(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} \quad \left| \begin{array}{l} H \text{ amplification en tension complexe} \\ U_e \text{ amplitude complexe de la tension d'entrée} \\ U_s \text{ amplitude complexe de la tension de sortie} \end{array} \right.$$

Le module  $H(\omega) = |H(j\omega)|$  de la fondation de transfert est l'amplification en tension et son argument  $\phi(\omega) = \arg(H(j\omega))$  est la phase.

**L'ordre du filtre** est le degré du polynôme  $D(j\omega)$  situé au dénominateur de  $H$ .

- Le gain en puissance  $G_p$  du quadripôle, exprimé en décibel (dB), est défini par la relation :

$$G_p(\omega) = 10 \log \left( \frac{P_s}{P_e} \right) \quad \left| \begin{array}{l} G_p \text{ gain en puissance} \\ P_e \text{ puissance moyenne reçue du générateur} \\ P_s \text{ puissance moyenne fournie à la charge} \end{array} \right.$$

- Le gain en tension  $G$ , exprimé en décibel (dB) et plus simple à calculer, représente la dépendance énergétique du filtre :

$$G(\omega) = 20 \log \left| \frac{U_s}{U_e} \right| = 20 \log |H(\omega)|, \text{ avec } H(\omega) \text{ amplification en tension.}$$

- Le **diagramme de Bode** d'un quadripôle est constitué par deux courbes :

- le gain  $G$  (en dB) en fonction de  $\log(f)$  ( $f$  fréquence en Hz) ou de  $\log(\omega)$  ( $\omega$  pulsation en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ) ;
- la phase  $\phi$  (en rad) en fonction de  $\log(f)$  ( $f$  fréquence en Hz) ou de  $\log(\omega)$  ( $\omega$  pulsation en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

- On appelle **pulsation de coupure  $\omega_c$**  du filtre la pulsation vérifiant :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ soit } G(\omega_c) = G_{\max} - 3 \text{ dB.}$$

**La bande passante** est alors l'intervalle de pulsations  $\Delta\omega$  donnant une amplification  $H$  (ou un gain  $G$ ) supérieur à l'amplification de coupure  $H(\omega_c)$  (ou au gain de coupure  $G(\omega_c)$ ).

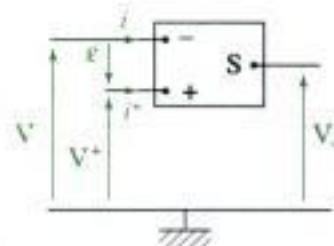
(À la pulsation de coupure  $\omega_c$  correspond la fréquence de coupure  $f_c$  telle que  $\omega_c = 2\pi f_c$  et à l'intervalle de pulsations  $\Delta\omega$  correspond l'intervalle de fréquences  $\Delta f$  tel que  $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ .)

- Un **quadripôle actif** comporte des sources « internes » d'énergie. Si la puissance d'entrée  $P_e$  est inférieure à la puissance de sortie  $P_s$ , le quadripôle est **amplificateur** (actif). Dans le cas contraire, le quadripôle est **atténuateur** (passif ou actif).

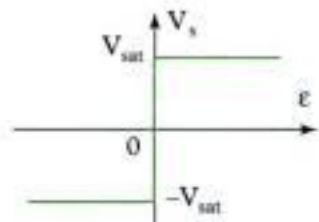
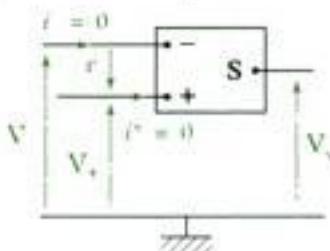
#### ✓ L'amplificateur opérationnel (A.O.)

- L'**amplificateur opérationnel** est un composant actif dont l'alimentation symétrique possède trois bornes de sortie délivrant les tensions  $-V_{cc}$ ,  $0$ ,  $+V_{cc}$ . Le signal d'entrée est la différence de potentiel  $\epsilon = V_+ - V_-$  entre les deux bornes d'entrée  $+$ / $+$  (entrée non inverseuse) et  $-$ / $-$  (entrée inverseuse). Le signal de sortie est la tension  $V_s$  mesurée à la sortie de l'amplificateur ( $V_s$  ne peut dépasser la tension de saturation  $\pm V_{sat}$ , avec  $V_{sat} < V_{cc}$ ). La fonction de transfert complexe de l'amplificateur opérationnel est :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{\epsilon}$$



- L'**amplificateur opérationnel idéal** possède une amplification en tension infinie, des impédances d'entrée infinies et une impédance de sortie nulle. Les courants d'entrée  $i_-$  et  $i_+$  sont donc nuls et la tension de sortie  $V_s$  est indépendante de la charge. En outre, l'amplification est indépendante de la fréquence (bande passante infinie) et le déphasage entre le signal d'entrée  $\epsilon$  et le signal de sortie  $V_s$  est nul.



Régime de saturation	Régime linéaire	Régime de saturation
$\epsilon < 0 \Rightarrow V_s = -V_{sat}$	$\epsilon = 0 \Rightarrow -V_{sat} < V_s < +V_{sat}$	$\epsilon > 0 \Rightarrow V_s = +V_{sat}$
l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation basse	le fonctionnement de l'amplificateur opérationnel est linéaire	l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation haute

#### ✓ Filtres du premier ordre

- Le dénominateur de la fonction de transfert  $H$  d'un filtre du premier ordre est un polynôme du premier degré en  $j\omega$ . Pour étudier cette fonction, on pose :

$$x = \frac{\omega}{\omega_{ref}}, \text{ où } \omega_{ref} \text{ est la pulsation de référence du circuit.}$$

- La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit :

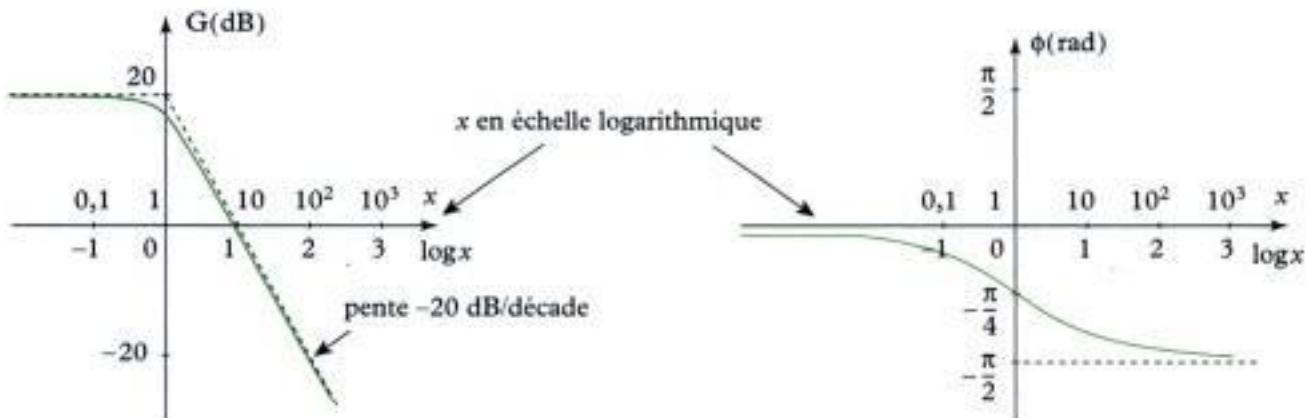
$$H(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_{ref}}.$$

La bande passante d'un filtre passe-bas du premier ordre vaut donc :

$$\text{BP}(f) = f_c = \frac{\omega_{ref}}{2\pi}.$$

Le gain  $G$  et la phase  $\phi$  ont pour expression :

$$G(x) = G_{\max} - 10 \log(1 + x^2) \quad \text{et} \quad \phi(x) = -\arctan(x).$$



- La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit :

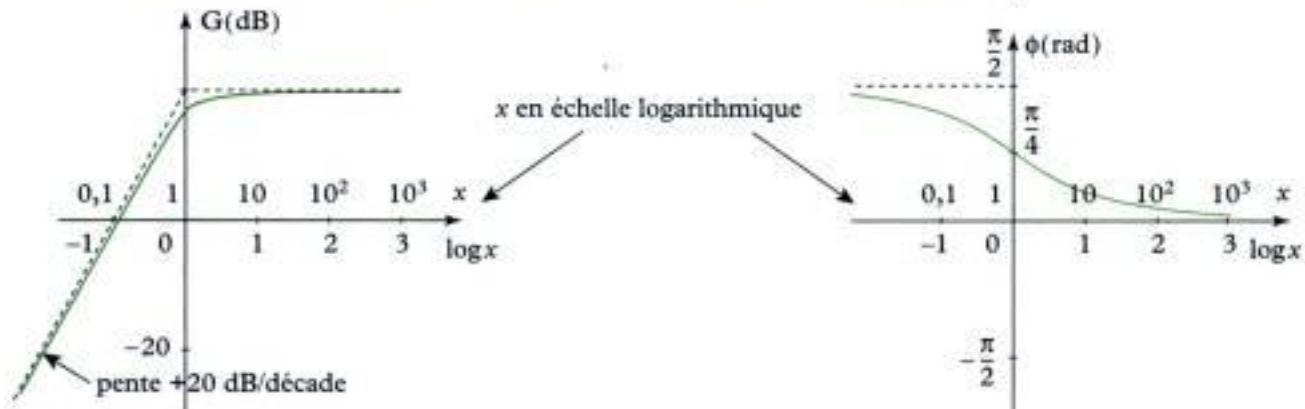
$$\underline{H}(jx) = H_0 \frac{jx}{1 + jx}, \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}.$$

La fréquence de coupure d'un filtre passe-haut du premier ordre vaut :

$$f_c = \frac{\omega_{\text{ref}}}{2\pi}.$$

Le gain  $G$  et la phase  $\phi$  ont pour expression :

$$G(x) = G_{\max} + 20 \log(x) - 10 \log(1 + x^2) \quad \text{et} \quad \phi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$



- Un condensateur se comporte aux basses fréquences comme un interrupteur ouvert et aux hautes fréquences comme un court-circuit (fil).

Une bobine se comporte aux basses fréquences comme un court-circuit (fil) et aux hautes fréquences comme un interrupteur ouvert.

# Mise en œuvre

## Méthode n° 1

### Comment tracer le diagramme de Bode d'un filtre passif ?

Le diagramme de Bode est la représentation la plus utilisée de la fonction de transfert d'un filtre. On précise ici les étapes pour y aboutir.

#### → Savoir faire

- ❶ Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  du filtre en appliquant les diviseurs de tension et des associations d'impédances.
- ❷ Écrire la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  comme le rapport de deux polynômes  $\underline{N}(j\omega)$  et  $\underline{D}(j\omega)$ . Pour un filtre du premier ordre, faire apparaître la pulsation de référence  $\omega_{\text{réf}}$  en mettant le dénominateur sous la forme :

$$\underline{D}(jx) = 1 + jx \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}.$$

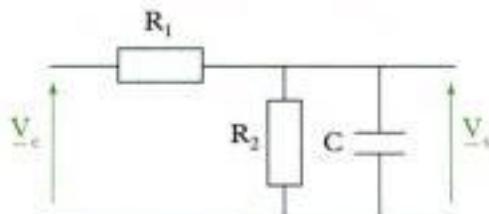


La pulsation de référence  $\omega_{\text{réf}}$  est souvent imposée par l'énoncé.

- ❸ Exprimer le gain en décibel  $G(x) = 20\log|\underline{H}(jx)|$  et la phase  $\phi(x) = \arg(\underline{H}(jx))$  associés à la fonction de transfert  $\underline{H}(jx)$ .
- ❹ Déterminer des fonctions vers lesquelles tend le gain en décibel aux basses fréquences ( $x \rightarrow 0$ ), puis aux hautes fréquences ( $x \rightarrow \infty$ ). En déduire les asymptotes correspondantes.
- ❺ Déterminer les extrema éventuels du gain en décibel.
- ❻ Tracer les asymptotes du diagramme de Bode, puis le gain  $G$  en fonction de  $\log(x)$  en prenant en compte la présence d'éventuels extrema.
- ❼ Déterminer les limites de la phase aux basses fréquences. En déduire les asymptotes correspondantes. Tracer la phase  $\phi$  en fonction de  $\log(x)$ .

#### → Application

Tracer le diagramme de Bode du filtre schématisé ci-dessous :



#### Solution

- ❶ La résistance  $R_2$  et le condensateur  $C$  sont en parallèle et se ramènent à une admittance unique :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{R_2} + jC\omega.$$

Un diviseur de tension donne alors :

$$\underline{V}_s = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R_1 + \underline{Z}_{\text{eq}}} \underline{V}_e = \frac{1}{1 + R_1 \underline{Y}_{\text{eq}}} \underline{V}_e.$$

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_o}{\underline{V}_e} = \frac{1}{1 + R_1 \left( \frac{1}{R_2} + jC\omega \right)} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + jR_1 C\omega}.$$

- ❷ On factorise  $1 + \frac{R_1}{R_2}$  au dénominateur. La fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \times \frac{1}{1 + j \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \omega}.$$

On pose :  $\omega_{\text{réf}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$ , d'où :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \times \frac{1}{1 + jx}.$$

- ❸ Le gain en décibel G est défini par :

$$G(x) = 20 \log(|\underline{H}(jx)|) = -20 \log\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - 10 \log(1 + x^2).$$

La phase  $\phi$  est définie par :

$$\phi(x) = -\arg(\underline{H}(jx)) = -\text{Arctan}x.$$

- ❹ Aux basses fréquences ( $x \rightarrow 0$ ), le gain G tend vers :

$$G(x) \rightarrow 20 \log\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right).$$

(L'asymptote correspondante est une droite horizontale).

Aux hautes fréquences ( $x \rightarrow +\infty$ ), le gain G tend vers :

$$G(x) \rightarrow 20 \log\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) - 20 \log(x).$$

(L'asymptote correspondante est une droite de pente -20 dB/décade).



Attention à ne pas confondre un équivalent du gain (obtenu en ne conservant que le terme prépondérant) et la limite de l'expression (ici,  $-\infty$  pour les hautes fréquences). La limite, à elle seule, ne permet pas de tracer le diagramme.

- ❺ Comme la fonction  $f(x) = 1 + x^2$  est strictement croissante, le gain G décroît quand x varie de 0 à  $+\infty$ . Le gain G n'a pas d'extremum.

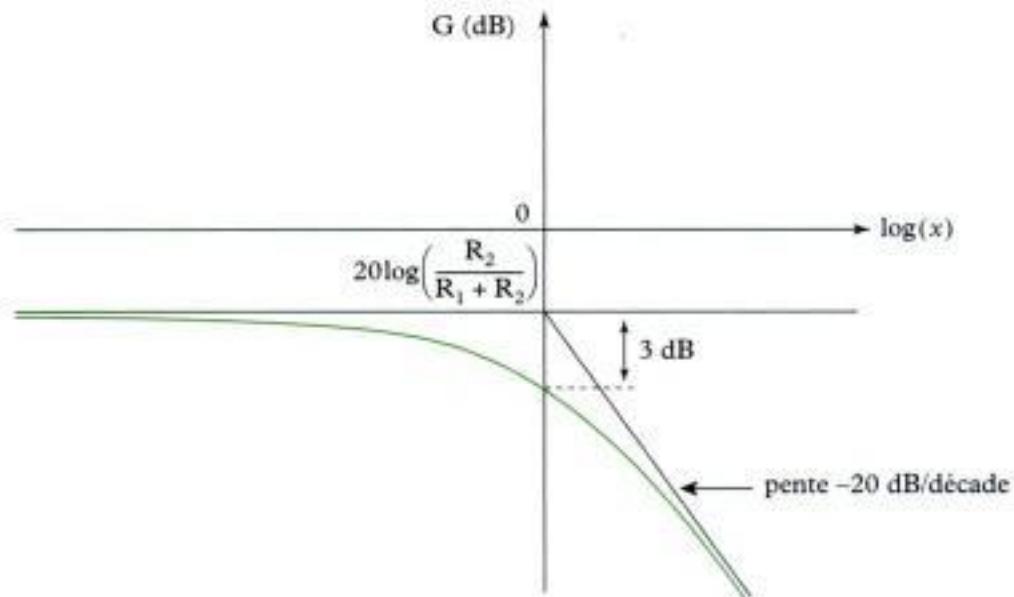
- ❻ Le tracé est simplifié en cherchant l'intersection des asymptotes :

$$\underbrace{20 \log\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)}_{\text{basses fréquences}} = \underbrace{20 \log\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) - 20 \log(x)}_{\text{hautes fréquences}}$$

d'où :  $\log(x) = 0$  et  $x = 1$ .



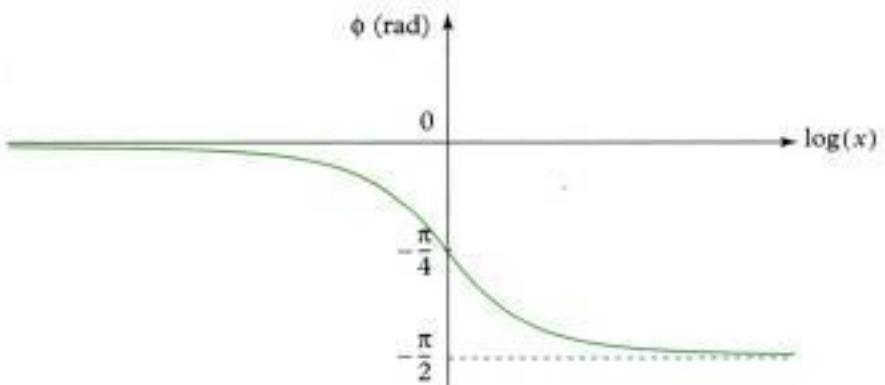
Pour un filtre passe-bas ou passe-haut, l'intersection des asymptotes aux basses fréquences et aux hautes fréquences de la courbe du gain dans le diagramme de Bode correspond à l'abscisse de coupure.



La courbe de gain se place sous ses asymptotes. Pour un filtre du premier ordre, on peut prévoir que la coupure à  $-3$  dB se fait sous l'intersection des asymptotes.

- Aux basses fréquences ( $x \rightarrow 0$ ),  $\phi(x) \rightarrow 0$ .

Aux hautes fréquences ( $x \rightarrow +\infty$ ),  $\phi(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ .



Le filtre étudié est un filtre passe-bas de premier ordre.

## Méthode N° 2

### Comment établir le modèle équivalent d'un filtre passif ?

La fonction de transfert  $H(j\omega)$ , qui est calculée à vide, ne suffit pas à caractériser un filtre. On se propose de construire un quadripôle équivalent à un filtre passif.

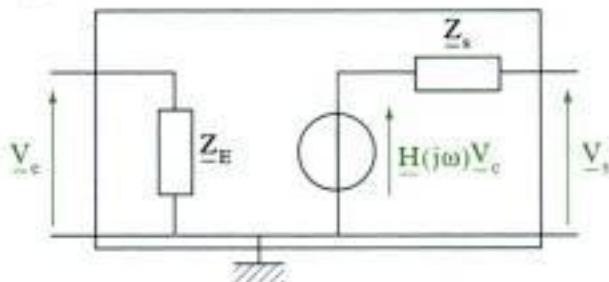
#### → Savoir faire

- Calculer l'impédance équivalente au filtre entre la masse et la borne d'entrée. Cette impédance constitue l'impédance d'entrée  $Z_e$  du filtre.



Aucun composant ne doit être branché en sortie.

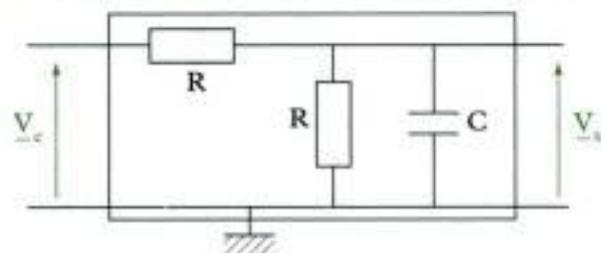
- Relier la borne d'entrée à la masse, puis calculer l'impédance équivalente au circuit entre la masse et la borne de sortie. Il s'agit de l'impédance de sortie  $Z_s$  du filtre.
- Déterminer la fonction de transfert  $H(j\omega)$  du filtre.
- Donner le quadripôle équivalent au filtre :



Cette modélisation permet de prendre en compte les effets du filtre sur le circuit en amont, et également les effets du circuit en aval sur le filtre.

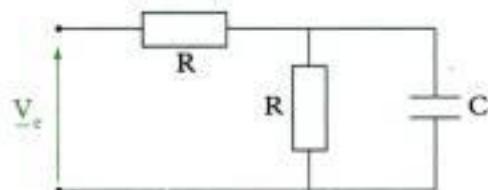
### → Application

Déterminer le quadripôle équivalent au filtre RC schématisé ci-dessous.



### Solution

- Lorsque l'impédance est mesurée entre les bornes d'entrée, il n'y a pas de courant en sortie. Le circuit équivaut ainsi à l'association suivante :



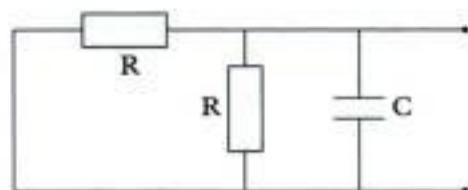
L'impédance d'entrée vaut alors :

$$Z_E = R + \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$



L'association parallèle RC et la résistance R sont en série au cours de ce calcul. Ceci est dû au fait que la borne de sortie n'est pas utilisée.

- On place l'entrée à la masse, ce qui a pour effet de mettre les deux résistances et le condensateur en parallèle.



L'impédance de sortie est mesurée entre les bornes de sortie et vaut :

$$Z_s = \frac{R}{2 + jRC\omega}.$$

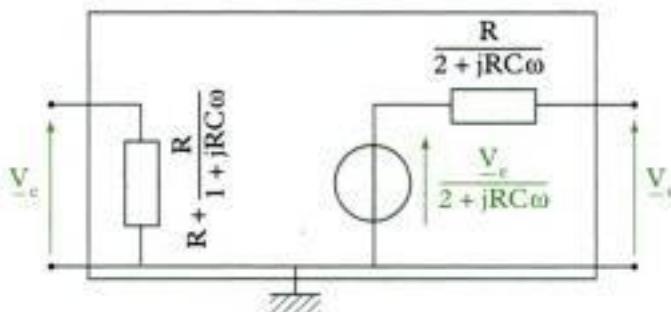


La nature des associations entre les dipôles a changé entre le calcul de  $Z_o$  et le calcul de  $Z_s$ . Cela est dû au fait que ces impédances ne sont pas mesurées au même point, et également au fait que le circuit a été modifié entre les deux calculs (la tension d'entrée est annulée pour le calcul de  $Z_s$ ).

- ③ Un diviseur de tension donne la fonction de transfert.

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \frac{R}{1 + jRC\omega}}, \text{ soit : } H(j\omega) = \frac{1}{2 + jRC\omega}.$$

- ④ Le quadripôle équivalent au filtre est donc :



Pour le circuit amont, être connecté au filtre est équivalent à être connecté à une impédance  $Z_o$ .

### Méthode n° 3

## Comment déterminer les impédances d'entrée et de sortie d'un filtre actif ?

Soit un filtre comportant des éléments actifs (sources de tension ou de courant, amplificateur opérationnel). On se propose de déterminer ses impédances d'entrée et de sortie, et ainsi de caractériser ses effets sur les circuits dans lesquels il est inséré.

### → Savoir faire

- ① Éteindre les sources libres (c'est-à-dire celles dont la force électromotrice ou le courant électromoteur est une constante). Cela revient à remplacer :
- une source de tension par un fil ;
  - une source de courant par un interrupteur ouvert.

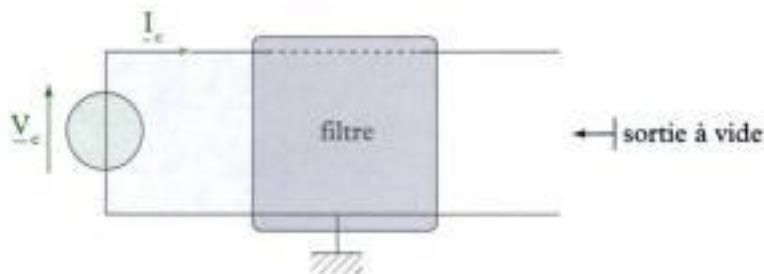


Les sources dont la fém (ou la cém) est proportionnelle à une tension ou un courant dans le circuit sont dites liées. On ne peut pas éteindre de telles sources. Un amplificateur opérationnel ne doit pas non plus être éteint.

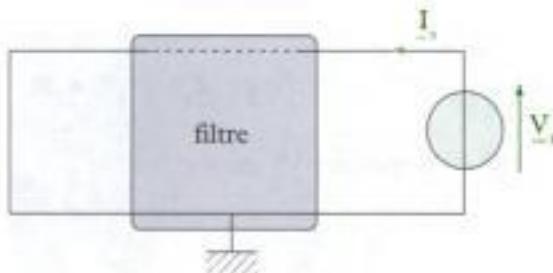
- ② Évaluer le courant  $I_e$  entrant dans le filtre lorsque celui-ci est utilisé à vide, c'est-à-dire sans brancher de composant entre les bornes de sortie. En déduire l'impédance d'entrée  $Z_e$  du filtre :

$$Z_e = \frac{V_e}{I_e}.$$

Pour cette étape du calcul, le filtre est alimenté par une source de tension  $V_e$  placée entre les bornes d'entrée



- Alimenter le filtre par une source de tension  $V_s$  placée entre les bornes de sortie. Relier la borne d'entrée à la masse (ce qui revient à annuler  $V_e$ ).



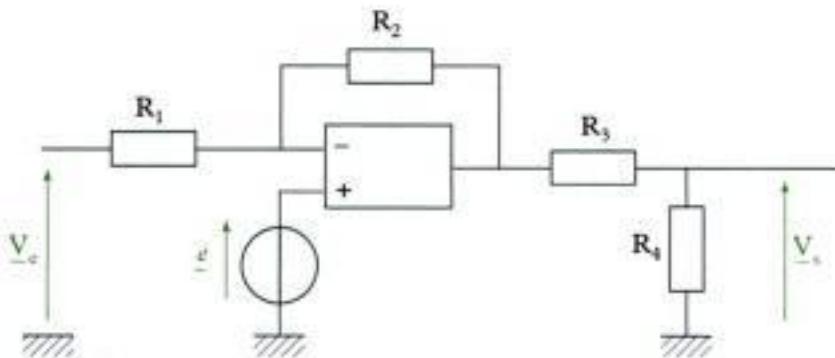
Déterminer la relation entre le courant de sortie  $I_s$  et la tension de sortie  $V_s$ . En déduire l'impédance de sortie :

$$Z_s = \frac{V_s}{I_s}$$

**⚠️** La détermination de  $Z_e$  et celle de  $Z_s$  ne sont pas des opérations parfaitement symétriques : en effet le calcul de  $Z_e$  s'effectue en ouvrant la sortie du filtre, tandis que celui de  $Z_s$  s'effectue en court-circuitant l'entrée.

### → Application

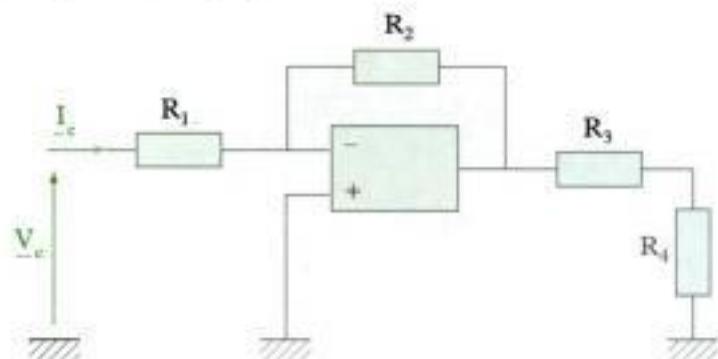
Déterminer les impédances d'entrée et de sortie du circuit schématisé ci-dessous, où l'amplificateur opérationnel idéal fonctionne en régime linéaire.



### Solution

- La source de tension de fém  $e$  peut être éteinte. L'amplificateur opérationnel ne le peut pas.

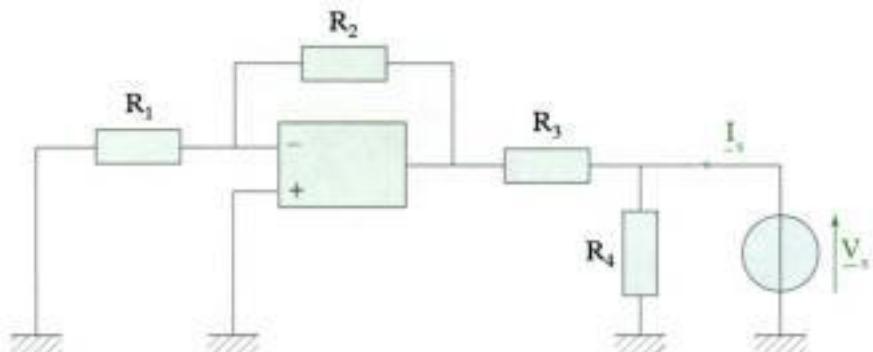
❷ On étudie le filtre à vide, et le circuit équivalent est :



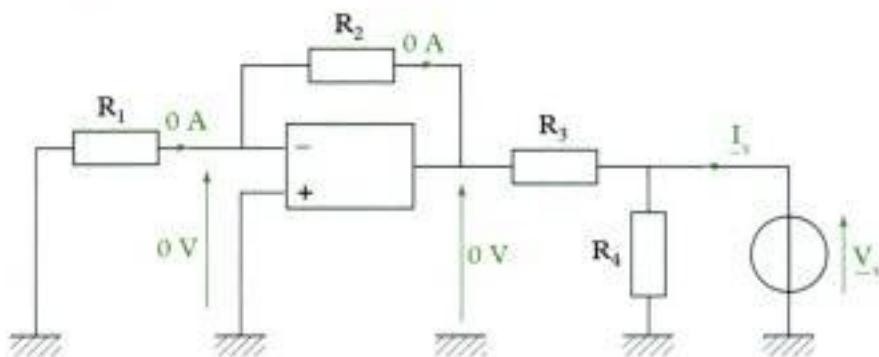
En régime linéaire, on a pour l'A.O. idéal :  $V^+ = V^- = 0 \text{ V}$ , donc la tension  $V_e$  s'applique à la résistance  $R_1$ . Il vient :

$$V_e = R_1 I_e, \text{ d'où } Z_e = \frac{V_e}{I_e} = R_1.$$

❸ On étudie maintenant le filtre en imposant  $V_s$  en sortie :



La encore, la linéarité de l'amplificateur opérationnel idéal impose :  $V^+ = V^- = 0 \text{ V}$ . Il s'ensuit que la tension aux bornes de  $R_1$  est nulle, et que le courant traversant  $R_1$  et  $R_2$  l'est également. (Le potentiel en sortie de l'amplificateur opérationnel est nul).



Le courant de sortie circule entre les deux résistances  $R_3$  et  $R_4$  qui peuvent être considérées en parallèle. On a :

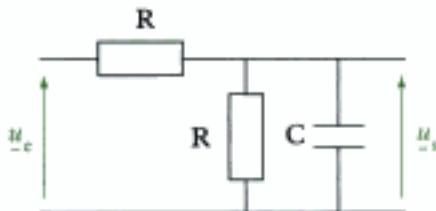
$$Z_s = \frac{V_s}{I_s} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Filtre passe-bas passif

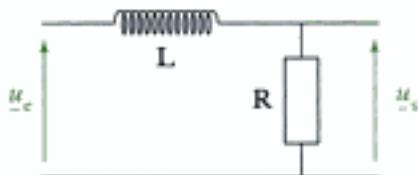
- Déterminer la fonction de transfert du montage ci-dessous.
- Tracer le diagramme de Bode du gain.
- Déterminer les impédances d'entrée  $Z_e$  et de sortie  $Z_s$  du filtre.



### Ex. 2 Présence d'une bobine

Déterminer la fonction de transfert du montage ci-dessous.

Préciser si le filtre est passe-haut ou passe-bas, ainsi que sa pulsation de coupure.



## Niveau 2

### Ex. 3 Détermination d'une capacité inconnue

On a réalisé un filtre passe-bas à l'aide d'un condensateur de capacité  $C = 1 \mu\text{F}$  et d'une résistance  $R = 1 \text{k}\Omega$ .

La tension d'entrée a la valeur efficace  $U_e = 6 \text{ V}$ . On a mesuré la tension de sortie  $U_s$  en fonction de la fréquence, d'où le tableau suivant :

$f(\text{Hz})$	200	500	$1 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$
$U_s(\text{V})$	5,95	5,72	5,08	3,73	1,82
$f(\text{Hz})$	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$	
$U_s(\text{V})$	0,943	0,476	0,191	$95,5 \cdot 10^{-3}$	

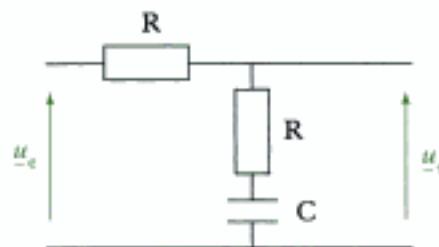
- Tracer le diagramme de Bode du gain.
- Déterminer la fréquence de coupure.
- En déduire la capacité  $C$  du condensateur.

### Ex. 4 Cas particulier

Déterminer la fonction de transfert du montage ci-dessous.

Exprimer cette fonction de transfert en fonction de  $x = RC\omega$ .

Tracer le diagramme de Bode.

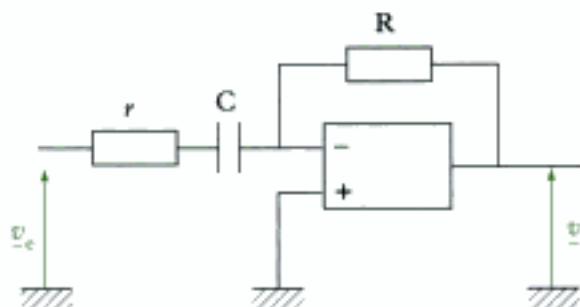


### Ex. 5 Filtre passe-haut actif

a) L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire.

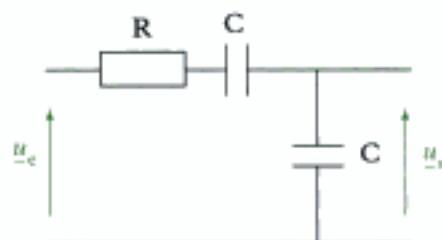
Déterminer la fonction de transfert et tracer le diagramme de Bode du gain.

b) Déterminer les impédances d'entrée  $Z_e$  et de sortie  $Z_s$ .



### Ex. 6 Présence de deux condensateurs

Déterminer la fonction de transfert du montage ci-dessous. En déduire la nature du filtre.



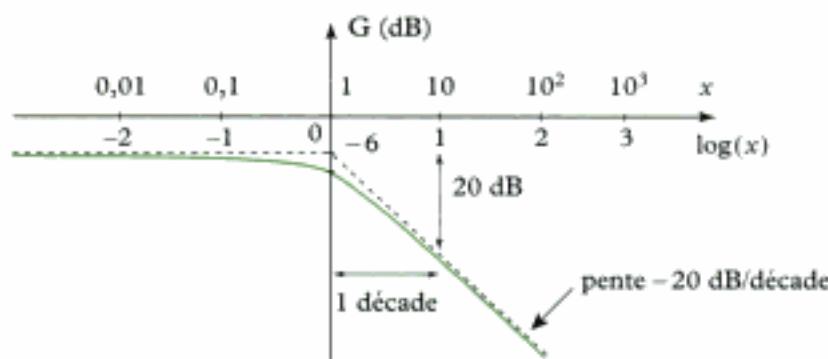
### Ex. 7 Bobines et résistance

Déterminer les fonctions de transfert des montages ci-après.

Prévoir qualitativement leur comportement asymptotique.

Hidden page

Hidden page



Le diagramme de Bode de la phase serait celui obtenu dans le cours pour un filtre passe-bas du premier ordre (cf. figure 11).

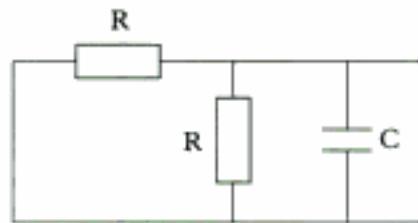
c)

On applique la méthode n° 2 au circuit étudié.

- On détermine l'impédance d'entrée en laissant la sortie à vide. Dans ces conditions, la résistance R et l'association parallèle {C // R} sont en série :

$$\underline{Z}_e = R + \frac{R}{1 + jRC\omega} = R \left( \frac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right).$$

- On mesure l'impédance de sortie en court-circuitant l'entrée. Le circuit est alors :



Les trois dipôles R, R et C sont en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}_s} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC\omega, \quad \text{soit : } \underline{Z}_s = \frac{R}{2 + jRC\omega}.$$

La nature des associations entre dipôles varie d'un calcul à l'autre. L'association de R et {R // C} en série est ainsi valable pour le calcul de  $\underline{Z}_e$ , mais pas pour celui de  $\underline{Z}_s$ . La mesure de  $\underline{Z}_s$  suppose en effet qu'un courant circule dans la branche de sortie.

## Exercice 2

D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert du montage est :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_1 = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = R.$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + jL\omega}, \quad \text{soit : } \underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jx}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} = \frac{L\omega}{R}.$$

On pose donc ici :  $\omega_{\text{réf}} = \frac{R}{L}$ , inverse de la constante de temps  $t_{RL}$  du circuit RL.

On reconnaît la fonction de transfert **d'un filtre passe-bas** de pulsation de coupure :

$$\omega_c = \omega_{\text{réf}} = \frac{R}{L}$$

💡 On pourrait retrouver facilement la nature du filtre par un raisonnement direct. En effet,  $H(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , d'où :

$H(x) \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow 0$  et  $H(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

## Exercices de niveau 2

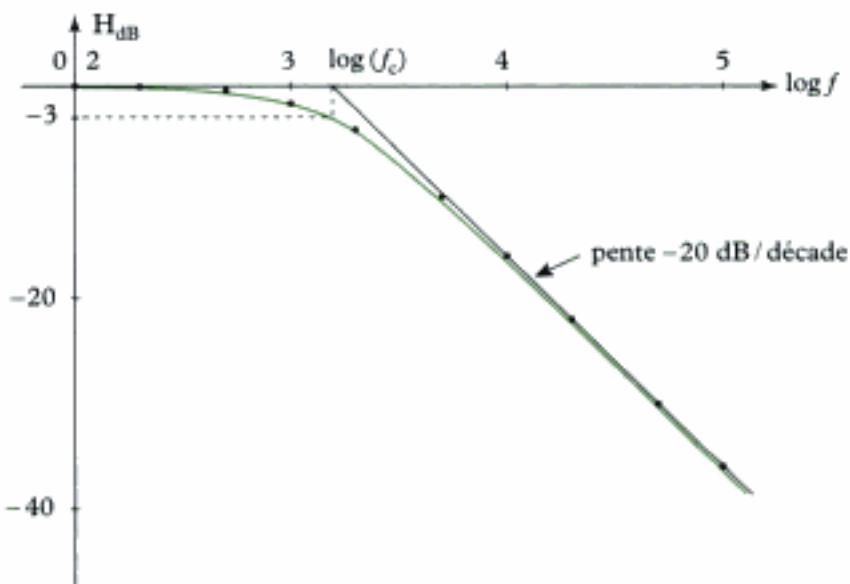
### Exercice 3

a) Pour tracer le diagramme de Bode, il faut déterminer  $\log(f)$  et  $H_{\text{dB}}$ . Pour cela, on utilise :

$$H_{\text{dB}} = 20 \log(H) = 20 \log \left| \frac{U_s}{U_e} \right| = 20 \log \left( \frac{U_s}{U_e} \right).$$

💡 Le gain se note indifféremment  $G$  ou  $H_{\text{dB}}$ .

$f(\text{Hz})$	200	500	$1 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$
$U_s (\text{V})$	5,95	5,72	5,08	3,73	1,82	0,943	0,476	0,191	0,0955
$H$	0,992	0,954	0,847	0,623	0,303	0,157	0,079	0,032	0,016
$H_{\text{dB}}$	-0,07	-0,41	-1,4	-4,1	-10,4	-16	-22	-30	-36
$\log f$	2,3	2,7	3	3,3	3,7	4	4,3	4,7	5



💡 Pour le diagramme de Bode du gain, le choix de l'abscisse ( $\log x$ ,  $\log f$  ou  $\log \omega$ ) ne change pas la forme de la courbe obtenue.

b) Graphiquement, on lit pour la fréquence de coupure à  $-3 \text{ dB}$  :

$$\log(f_c) = 3,2, \quad \text{soit : } f_c = 1,6 \text{ kHz.}$$

- c) Le filtre réalisé est un filtre passe-bas constitué d'un condensateur et d'une résistance. Il s'agit donc du montage :



Pour s'en convaincre, se reporter à l'exemple de § C.2.1 du cours. Si on inverse les rôles de R et de C, le filtre est un filtre passe-haut (cf. § C.3.1 du cours).

L'amplification du filtre vaut donc :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}, \quad \text{d'où : } H_{\max} = 1.$$

La pulsation  $\omega_c$  de coupure vérifie alors :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}, \quad \text{d'où : } RC\omega_c = 1.$$

On en déduit la capacité C du condensateur :

$$C = \frac{1}{R\omega_c} = \frac{1}{2\pi RF_c}.$$

$$\text{A.N. } C = \frac{1}{2\pi \times 1 \cdot 10^3 \times 1,6 \cdot 10^3} = 99 \cdot 10^{-8} \text{ F.}$$

#### Exercice 4

- D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert du montage est :

$$H = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad \text{avec } Z_1 = R \text{ et } Z_2 = R + \frac{1}{jC\omega}.$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$H(j\omega) = \frac{R + \frac{1}{jC\omega}}{R + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1 + jRC\omega}{1 + 2jRC\omega}, \quad \text{soit : } H(x) = \frac{1 + jx}{1 + 2jx}.$$

- Les expressions du gain  $H_{\text{dB}}$  et de la phase  $\phi$  sont alors en fonction de  $x$  :

$$\begin{cases} H_{\text{dB}}(x) = 20 \log |H(jx)| = 10 \log \left( \frac{1+x^2}{1+4x^2} \right) \\ \phi(x) = \arg(H(jx)) = \arctan(x) - \arctan(2x). \end{cases}$$



Le filtre étudié n'est ni un filtre passe-haut ni un filtre passe-bas.

On étudie le comportement asymptotique du filtre :

- Quand  $x \rightarrow 0$ , alors :

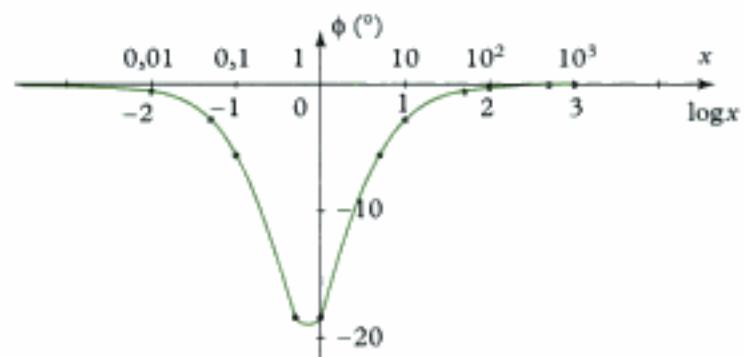
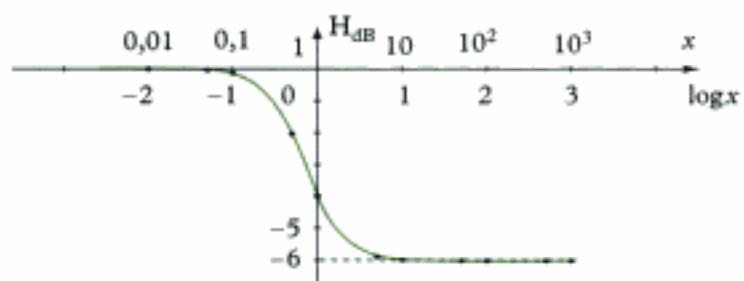
$$H_{\text{dB}}(x) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \phi(x) \rightarrow 0.$$

- Quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors :

$$H_{dB}(x) \rightarrow 10 \log\left(\frac{1}{4}\right) = -20 \log(2) = -6 \text{ dB} \quad \text{et} \quad \phi(x) \rightarrow 0.$$

Pour tracer le diagramme de Bode du gain et de la phase, on dresse alors un tableau de valeurs.

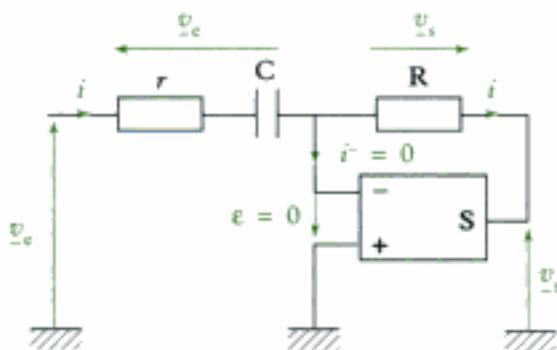
<b>x</b>	$1 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	1	5	10	50	100	500	$1 \cdot 10^3$
<b>log x</b>	-2	-1,3	-1	-0,3	0	0,7	1	1,7	2	2,7	3
<b>H<sub>dB</sub></b>	0	-0,03	-0,13	-2,04	-3,98	-5,89	-5,99	-6,02	-6,02	-6,02	-6,02
<b><math>\phi</math></b>	$-0,6^\circ$	$-2,8^\circ$	$-5,6^\circ$	$-18,4^\circ$	$-18,4^\circ$	$-5,6^\circ$	$-2,8^\circ$	$-0,6^\circ$	$-0,3^\circ$	$-0,06^\circ$	$-0,03^\circ$



## Exercice 5

a) L'amplificateur opérationnel idéal étant en régime linéaire, on a :

$$i^- = i^+ = 0 \quad \text{et} \quad e = V^+ - V^- = 0.$$



Tout le courant circule donc dans la résistance R et la tension  $v_o$  se reporte aux bornes de celle-ci.  
La tension  $v_o$  se reporte, quant à elle, aux bornes de l'association série  $\{r + C\}$ .

On a donc :

$$\underline{v}_e = \left( r + \frac{1}{jC\omega} \right) i \quad \text{et} \quad \underline{v}_s = -Ri.$$

 La résistance  $R$  est étudiée en convention générateur.

On en déduit la fonction de transfert du montage :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = -\frac{R}{r + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{-RjC\omega}{1 + jR\omega C}.$$

Cette fonction peut aussi s'écrire :

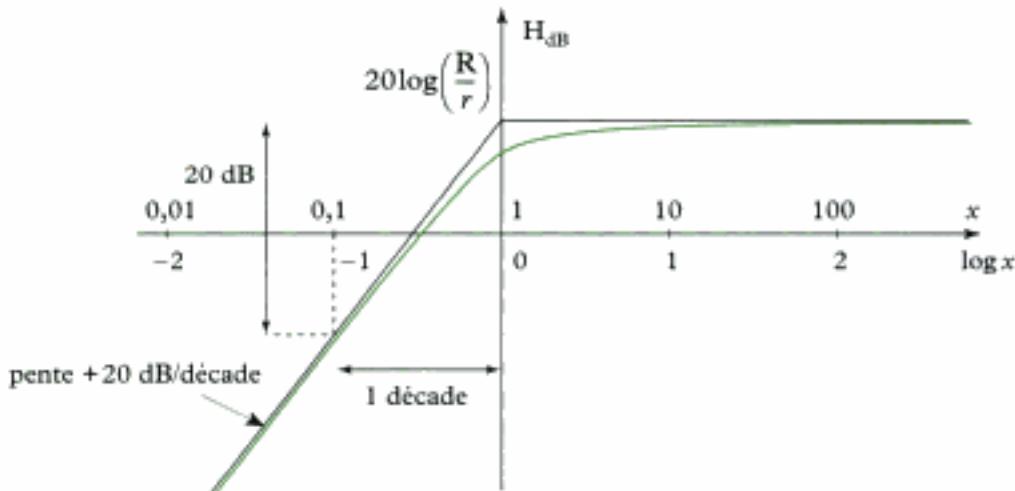
$$\underline{H}(x) = H_0 \frac{jx}{1 + jx}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}} = R\omega C \quad \text{et} \quad H_0 = -\frac{R}{r}.$$

 On pose donc ici :  $\omega_{\text{ref}} = \frac{1}{RC}$ . On remarque que  $H_0 < 0$ .

On reconnaît la fonction de transfert d'un **filtre passe-haut** de pulsation de coupure :

$$\omega_c = \omega_{\text{ref}} = \frac{1}{RC}.$$

 On pourrait retrouver facilement la nature du filtre par un raisonnement direct. En effet,  $H(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , d'où :  
 $H(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$  et  $H(x) \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .



 Le diagramme de Bode de la phase serait celui obtenu dans le cours pour un filtre passe-haut du premier ordre (cf. figure 13). Ici,  $20 \log |H_0| = 20 \log \left( \frac{R}{r} \right)$ .

b)

 On applique la méthode n° 3 au circuit étudié.

• L'A.O. ne peut pas être éteint. Il impose donc en régime linéaire  $e = 0$ . La tension  $\underline{v}_e$  s'applique aux bornes de l'association série  $\{r + C\}$ , de sorte que :

$$\underline{Z}_e = r + \frac{1}{jC\omega}.$$

L'impédance de sortie  $\underline{Z}_s$  est **infinie**, car la tension  $\underline{v}_s$  est prise à la sortie de l'A.O. idéal.

Hidden page

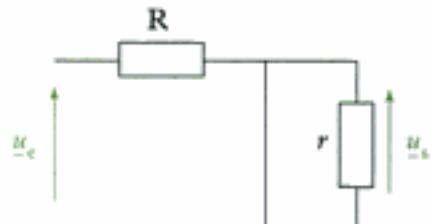
soit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{r}{r+R} \times \frac{\frac{r+R}{rR} jL\omega}{1 + \frac{r+R}{rR} jL\omega}.$$

💡 On reconnaît l'expression d'un filtre passe-haut du premier ordre avec  $\omega_{ref} = \frac{rR}{(r+R)L}$  et  $H_0 = \frac{r}{r+R}$ .

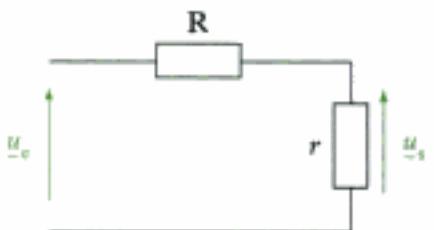
\* Aux basses fréquences, l'inductance L est équivalente à un fil :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = 0.$$



\* Aux hautes fréquences, l'inductance L est équivalente à un interrupteur ouvert :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{r}{r+R}.$$



💡 On retrouve bien que le filtre est un filtre passe-haut.



# *Index*

## A

- Adaptation d'impédance, 54
- Admittance complexe, 214
- Amplificateur opérationnel idéal, 253
- Approximation des régimes quasi-stationnaires, 17
- Asymptotique (diagramme), 262
- Associations
  - de résistances, 34
  - de générateurs idéaux, 38

## B

- Bandé passante, 194
- Bode (diagramme de), 248

## C

- Caractéristique d'un dipôle, 32
- Coefficient d'amortissement, 118
- Complexes (grandeurs)
  - admittance, 214
  - impédance, 214
- Condition de continuité
  - dans C, 80
  - dans L, 84
- Conductance, 33
- Conducteur ohmique, 33
- Conservation de la charge, 12
- Constante de temps, 104
- Contre-électromotrice (force), 41
- Coupe (pulsion de), 194
- Courant
  - de conduction, 8
  - électromoteur, 39
  - (générateur idéal de), 37
  - (sens du), 9
- Court-circuit (courant de), 40

## D

- dB, 248

## d.d.p.

- complexe, 184
- efficace, 221

## Décade

## Décibel

## Densité de courant

## Diagramme de Bode asymptotique

## Différence de phase

## Diode

- (caractéristique d'une), 52
- Zener, 56

## Dipôle

- actif, 32
- caractéristique, 32
- électrocinétique, 7
- linéaire, 88
- passif, 32

## Diviseur

- de courant, 35
- de tension, 34

## E

- Échelon de tension, 104
- Effet Joule, 34
- Électromoteur (courant), 39
- Électromotrice (force), 38
- Entrée
  - inverseuse, 253
  - non inverseuse, 253

## F

## Facteur

- d'amortissement, 118
- de puissance, 222
- de qualité, 118
- de surtension, 189

## Filtre

- coupe bande (réjecteur), 251
- passe-bande, 251
- passe-bas, 251
- passe-haut, 251

## Filtre de Wien

## Fonction de transfert

**Force contre-électromotrice**, 41  
**Force électromotrice**, 38

## G-H

### Gain

- en dB, 249
- en puissance, 248
- en tension, 249

### Générateur(s)

- (association de), 38
- de courant idéal, 37
- de Norton, 39
- de tension idéal, 37
- de Thévenin, 38

### Impédance

- adaptation, 54
- complexe, 214

### Intensité

- complexe, 184
- de court-circuit, 40
- (définition), 9
- efficace, 221

## J-K

### Joule (effet), 34

### Kirchhoff

- (loi de) relative aux mailles, 14
- (loi de) relative aux nœuds, 12

### Linéaire

- dipôle, 88
- (association de dipôles), 88
- (régime) d'un amplificateur opérationnel, 254

### Loi

- de Kirchhoff relative aux mailles, 14
- de Kirchhoff relative aux nœuds, 12
- d'Ohm, 33
- d'Ohm (généralisation), 215

## M

**Maille**, 8  
**Mailles (loi de Kirchhoff relative aux)**, 14  
**Masse**, 253  
**Millman (théorème de)**, 36

## N-O

**Nœud**, 8  
**Nœuds (loi de Kirchhoff relative aux)**, 12  
**Norton (générateur de)**, 39  
**Ohm**

- (loi d'), 18
- (loi d') (généralisation), 215

**Opérationnel (amplificateur)**, 253  
**Ordre**

- (fonction de transfert du 1<sup>er</sup>), 265
- (fonction de transfert du 2<sup>er</sup>), 284

**Oscilloscope**, 169

## P-Q

**Point de fonctionnement**, 33  
**Pont de Wheatstone**, 57  
**Porteurs de charge**, 8  
**Premier ordre (fonction de transfert du)**, 255  
**Pseudo-période**, 120  
**Pseudo-pulsation**, 120  
**Puissance**

- (facteur de), 222
- instantanée, 220
- moyenne, 220

**Quadripôle**

- actif, 252
- (fonction de transfert d'un), 246

## R

**Récepteur**, 41  
**Régime**

- apériodique, 119
- critique, 119
- forcé, 214
- oscillatoire amorti (pseudo-périodique), 120
- permanent, 10
- quasi-stationnaire, 17
- transitoire, 103
- variable, 10

## Résistance

- d'un conducteur ohmique, 33
- interne d'un générateur, 38
- interne d'un récepteur, 41

## Résonance intensité, 193

## Résonance tension, 187

## S

Saturé (régime) d'un amplificateur opérationnel, 254

Semi-conducteur, 24

Siemens, 33

Superposition (théorème de), 55

Surtension (facteur de), 189

Système

- du 1<sup>er</sup> ordre, 255
- du 2<sup>e</sup> ordre, 284

## T

Temps (constante de), 104

Théorème

- de Kennelly, 56
- de Millman, 36
- de superposition, 55

Transfert (fonction de), 246

## V-W-Z

Wheatstone (pont de), 57

Wien (filtre de), 94

Zener (diode), 56



Imprimé en France par I.M.E. 25110 Baume-les-Dames  
Dépôt légal : juillet : 2006  
**209 0341/02**

Copyrighted material







**Titres disponibles en première année dans la filière MPSI...**

**En Physique**

Optique MPSI-PCSI-PTSI  
Mécanique MPSI  
Électrocinétique MPSI  
Électromagnétisme MPSI  
Thermodynamique MPSI

**En Chimie**

Chimie MPSI

**En Mathématiques**

Analyse MPSI  
Algèbre et géométrie MPSI  
**Livres d'exercices**  
Mathématiques MPSI  
Physique MPSI

LES NOUVEAUX  
**Précis**  
B R É A L

**Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.**

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

**Les Nouveaux Précis Bréal sont la collection de référence pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.**



9 782749 502243