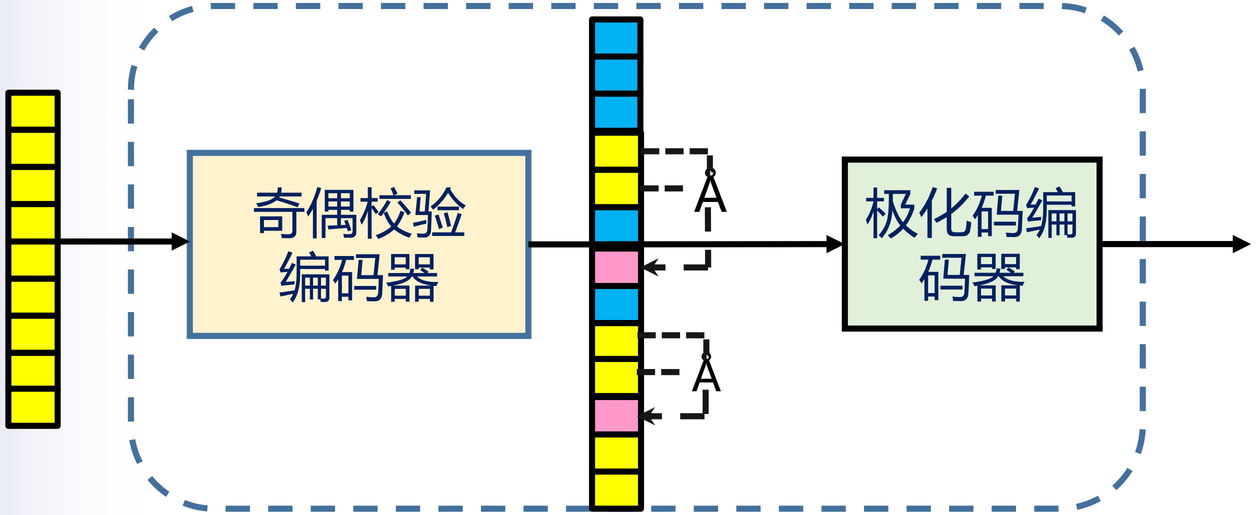
基础信息论

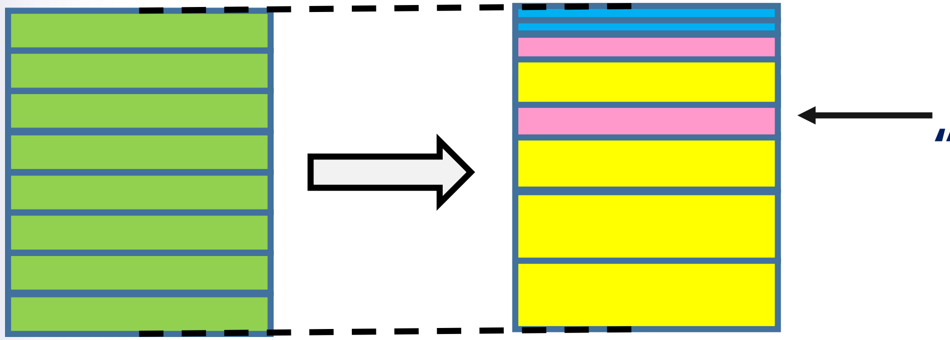
纠错编码基本概念

华中科技大学电信学院

电信学院代表性成果



校验级联极化码成为5G标准



利用可靠性“居中”的信道承载校验比特保护信息比特

3GPP TS 38.212 V1.2.1 (2017-12)

Technical Specification

3rd Generation Partnership Project;
Technical Specification Group Radio Access Network;
NR;
Multiplexing and channel coding
(Release 15)

A GLOBAL INITIATIVE

5.3.1.2 Polar encoding

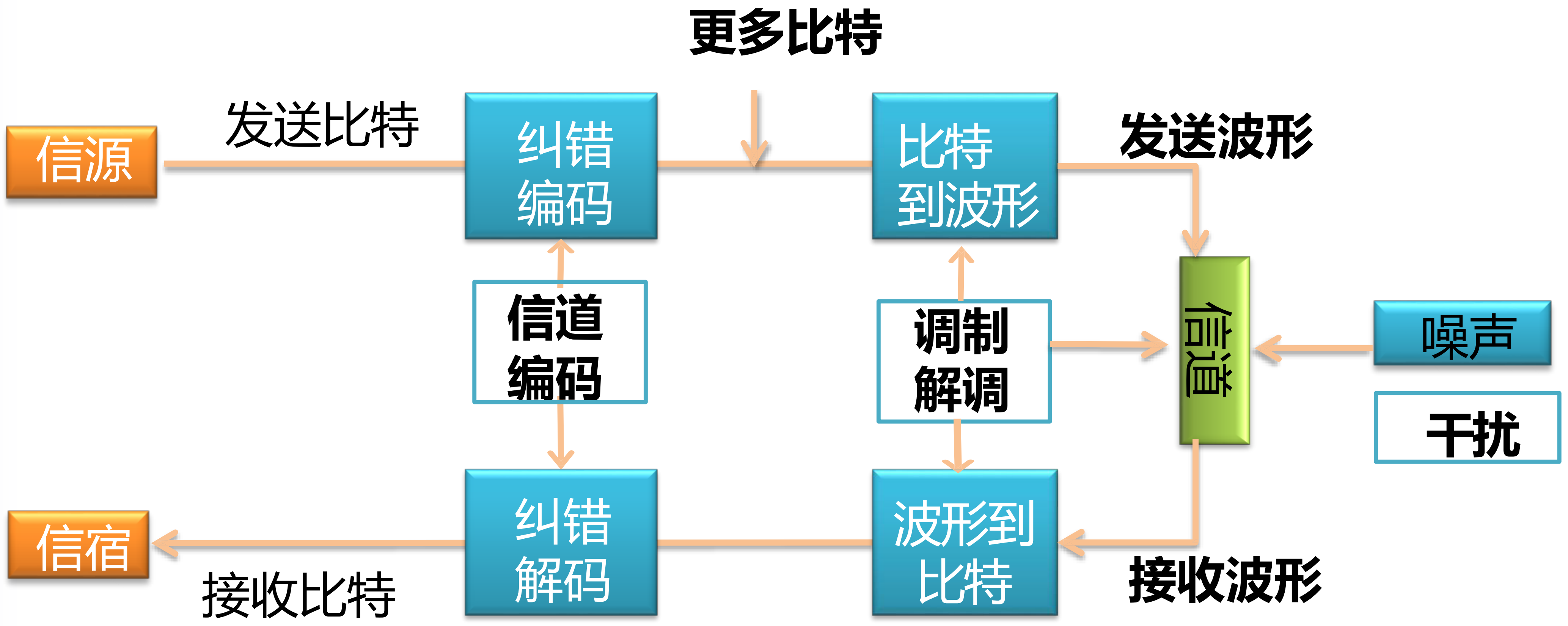
The Polar sequence $\mathbf{Q}_0^{N_{max}-1} = \{Q_0^{N_{max}}, Q_1^{N_{max}}, ..., Q_{N_{max}-1}^{N_{max}}\}$ is given by Table5.3.1.2-1, where $0 \le Q_i^{N_{max}} \le N_{max}-1$ denotes a bit index before Polar encoding for $i = 0,1,..., N_{max}-1$ and $N_{max} = 1024$. The Polar sequence $\mathbf{Q}_0^{N_{max}-1}$ is in ascending order of reliability $W(Q_0^{N_{max}}) < W(Q_1^{N_{max}}) < ... < W(Q_{N_{max}-1}^{N_{max}})$, where $W(Q_i^{N_{max}})$ denotes the reliability of bit index $Q_i^{N_{max}}$.

For any code block encoded to N bits, a same Polar sequence $\mathbf{Q}_0^{N-1} = \{Q_0^N, Q_1^N, Q_2^N, ..., Q_{N-1}^N\}$ is used. The Polar sequence $\mathbf{Q}_0^{N-1}$ is a subset of Polar sequence $\mathbf{Q}_0^{N_{max}-1}$ with all elements $Q_i^{N_{max}}$ of values less than N, ordered in ascending order of reliability $W(Q_0^N) < W(Q_1^N) < W(Q_2^N) < ... < W(Q_{N-1}^N)$.

Denote $\mathbf{Q}_I^N$ as a set of bit indices in Polar sequence $\mathbf{Q}_0^{N-1}$, and $\mathbf{Q}_F^N$ as the set of other bit indices in Polar sequence $\mathbf{Q}_0^{N-1}$, where $\mathbf{Q}_I^N$ and $\mathbf{Q}_F^N$ are given in Section 5.4.1.1, $|\mathbf{Q}_I^N| = K + n_{PC}$, $|\mathbf{Q}_F^N| = N - |\mathbf{Q}_I^N|$, and n_{PC} is the number of parity check bits.

[45] T. Wang, D. Qu, and T. Jiang, "Parity-check-concatenated polar codes," *IEEE Communications Letters*, vol. 20, no. 12, pp. 2342–2345, December 2016.

点对点通信

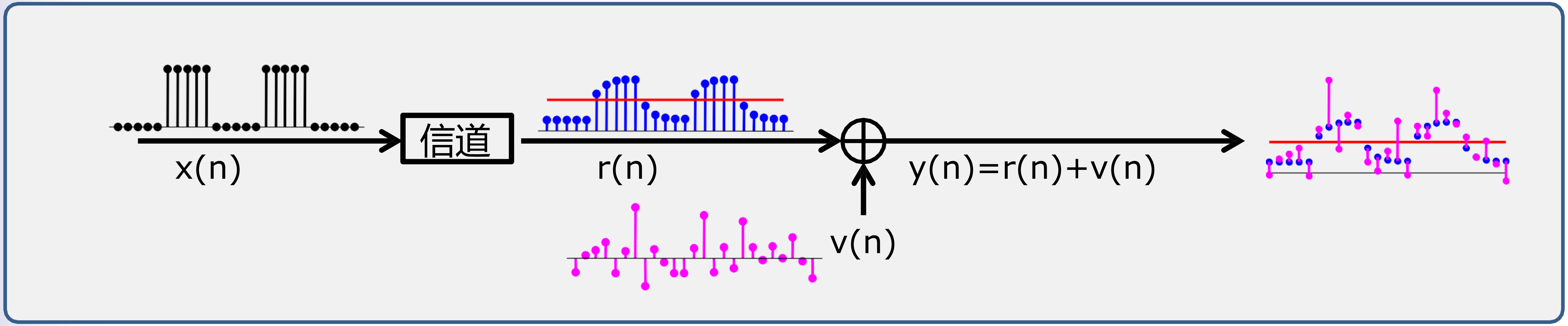


更多比特
发送比特
信源
纠错
编码
比特
到波形
发送波形
信道
编码
调制
解调
信道
噪声
干扰
信宿
纠错
解码
波形到
比特
接收比特
接收波形

学习目标：纠错编码基本概念

- 目的
  - 分析信道编码的作用
  - 定义译码准则
    - 最大后验概率译码规则
    - 极大似然译码规则
  - 实现用于错误检测或纠正的重复码
- 内容
  - 信道编码
  - 纠错编码分类
  - 译码准则
  - 信道编码定理

误码



- 传输过程中加上的噪声会导致数据流出现误码。
- 通常不可能完全消除错误。
- 我们能做的就是限制误码的概率。
- 信道编码是一种通过增加**传输冗余**来**检测**或**纠正**误码的方法。

Photo from: http://www.eecs.umich.edu/shannonstatue/

Claude Elwood Shannon

Father of Information Theory

Electrical engineer, mathematician, and native son of Gaylord. His creation of information theory, the mathematical theory of communication, in the 1940s and 1950s inspired the revolutionary advances in digital communications and information storage that have shaped the modern world.

This statue was donated by the Information Theory Society of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, whose members follow gratefully in his footsteps.

Dedicated October 6, 2000
Eugene Daub, Sculptor

- "The perspective introduced by Shannon's communication theory (now called information theory) is the foundation of the digital revolution, and every device containing a microprocessor or microcontroller is a conceptual descendant of Shannon's publication in 1948"--Neil Sloane

https://en.wikipedia.org/wiki/Claude_Shannon

Photo from: http://www.eecs.umich.edu/shannonstatue/

Claude Elwood Shannon

Father of Information Theory

Electrical engineer, mathematician, and native son of Gaylord. His creation of information theory, the mathematical theory of communication, in the 1940s and 1950s inspired the revolutionary advances in digital communications and information storage that have shaped the modern world.

This statue was donated by the Information Theory Society of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, whose members follow gratefully in his footsteps.

Dedicated October 6, 2000
Eugene Daub, Sculptor

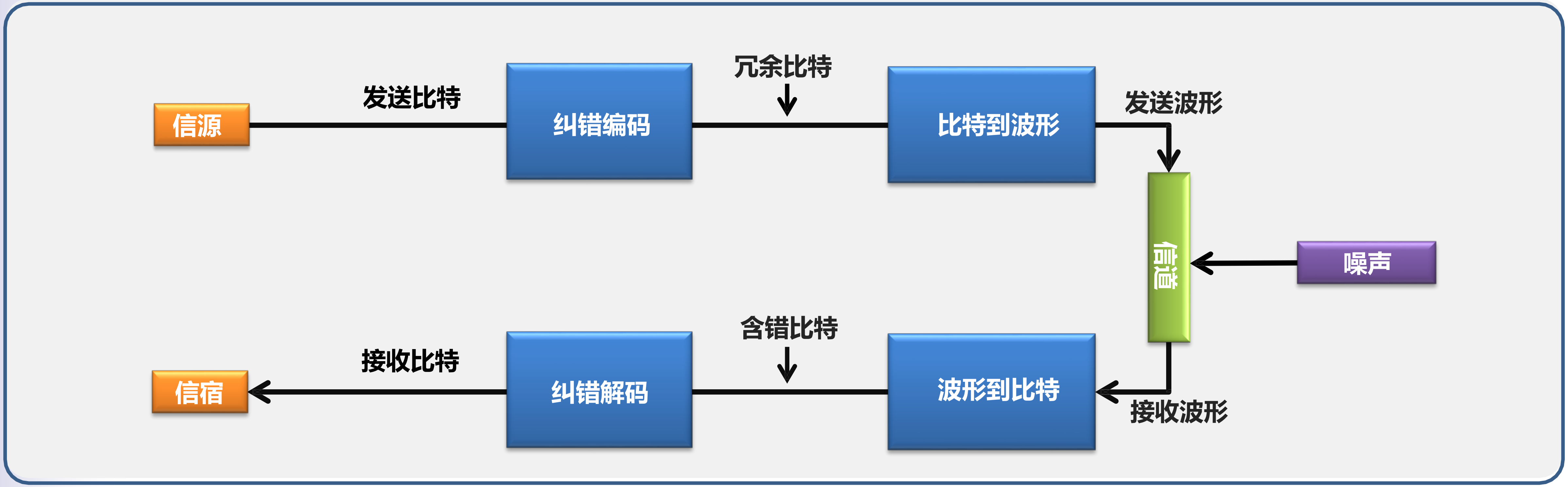
- 信息论的思维模式
- 系统设计->建模->性能瓶颈->优化系统

香农第二定理：信道编码定理

加噪信道具有**信道容量C**，即可以传输有用信息的**最大速率**。

对于任何数据速率R<C，都**存在**一种对数据进行编码的方法，使错误概率**任意小**。

信道编码



- 我们在传输的比特流中添加冗余信息，以便我们可以在接收器处理比特错误。
- 理想情况下，我们希望
  - **纠正常见错误，例如前向纠错编码(FEC)；**
  - **检测不常见的错误，并通过重传之类的方法进行处理。**

噪声信道的编码问题

信源编码：

以提高通信**有效性**为目的，故在构造上并**未考虑抗干扰**。

如果把信源编码器的输出直接接入信道，会怎样?

由于信道中存在噪声干扰，将引起误码，降低通信可靠性。

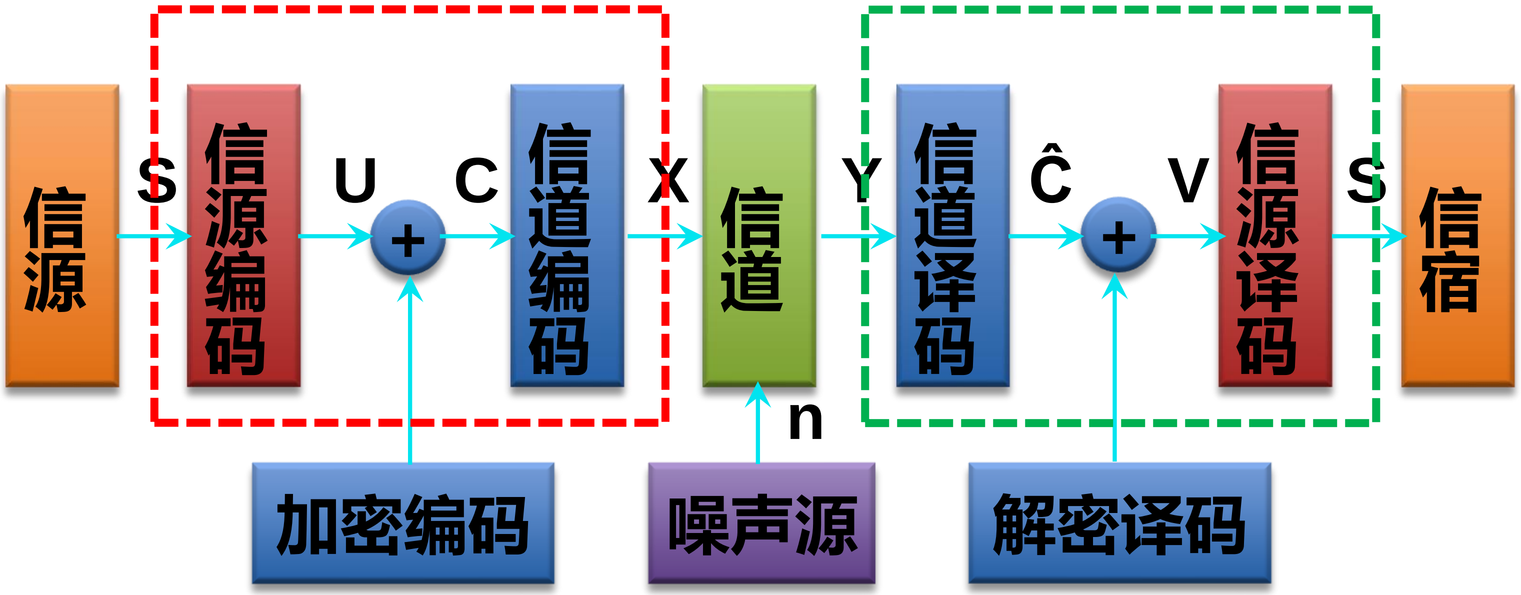
信道编码：

以提高通信**可靠性**为主要目的。

它是对信源编码器输出的最佳码再进行一次编码，以提高其抗干扰能力的一种编码形式。

通信系统的编码过程

- 在二进制数字通信系统中，编码器的编码过程分为两步：
  - 信源编码：把信源的消息数据序列编成二进制数字构成的码序列；
  - 信道编码：把二进制数据序列编成具有纠检错能力的二进制序列。



通信系统基本模型

编码信道

编码信道：信道编码研究的对象。是由信道编码器、信道译码器和实际信道一起形成的一个新的信道。

它可以是：

- 无线通信中的如发射机、天线、自由空间、接收机等全体；
- 有线通信中的如调制解调器、电缆等全体；
- 互联网的多个路由器、节点、电缆、低层协议等全体；
- 计算机的存储器如磁盘等的全体；
- …… …… 。

信道编译码的基本思想1

- **信道编码的编码对象**：
  - 信源编码器输出的数字序列M（信息序列）。
  - 通常是二元符号0，1构成的序列，且0和1独立等概。
- **信道编码算法/规则**：
  - 如何组成这M种码字，才能达到无差错地传送。
  - 实质上，这是希望信源与信道特性相匹配，所以称为信道编码。
- **方法：按一定的规则给数字序列M增加一些多余的码元，使不具有规律性的信息序列M变换为具有某种规律性的数字序列C（码序列）。**

信道编译码的基本思想2

信源编码的输出：数字序列M 0和1独立且等概 ⇨ **码序列中,信息序列码元与多余码元之间是相关的。**

信道译码：

利用这种预知的编码规则来译码，或检错(检验接收到的数字序列R中是否有错)，或纠错(纠正其中的差错)。

信道编码的基本思想：

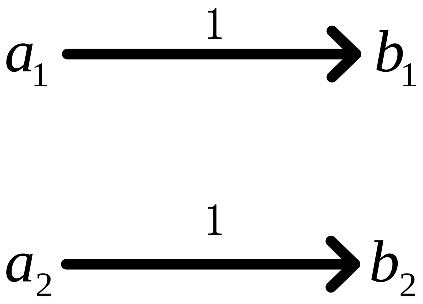
根据相关性来检测和纠正传输过程中产生的差错，提高通信可靠性。

通信可靠性的相关因素

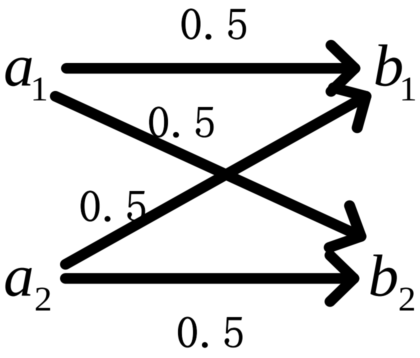
问题：影响通信可靠性(错误概率)，受哪些因素影响?

分析：(1)通信的可靠性显然与信道的统计特性有关，因为杂噪干扰是造成错误的主要因素。

例：



无噪无损信道：
错误概率0



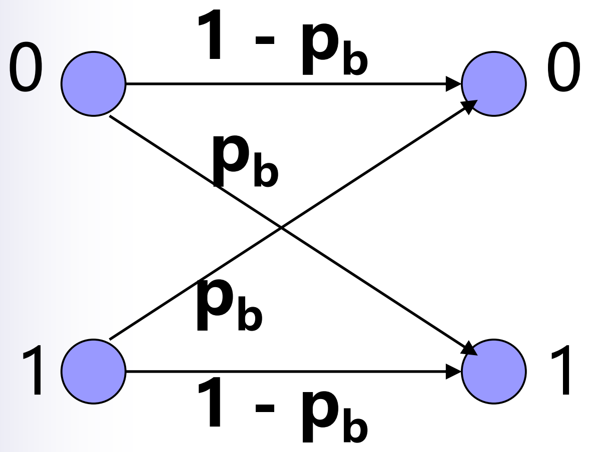
P=0.5的二元对称信道：
错误概率50%

(2)除了信道本身的影响，**译码规则**和**编码方法**也将影响信息传输的可靠性。

错误概率和译码规则

例：考虑一个二元对称信道：

单符号错误传递概率是p_b=0.9，其输入符号为等概分布。



二元对称信道

译码规则1：

输出端接收到符号0时，译成0；接收到1时译成1

此时，译码错误概率为0.9。

译码规则2：

接收到符号0时译成1；

接收到1时译成0

此时，译码错误概率为0.1。

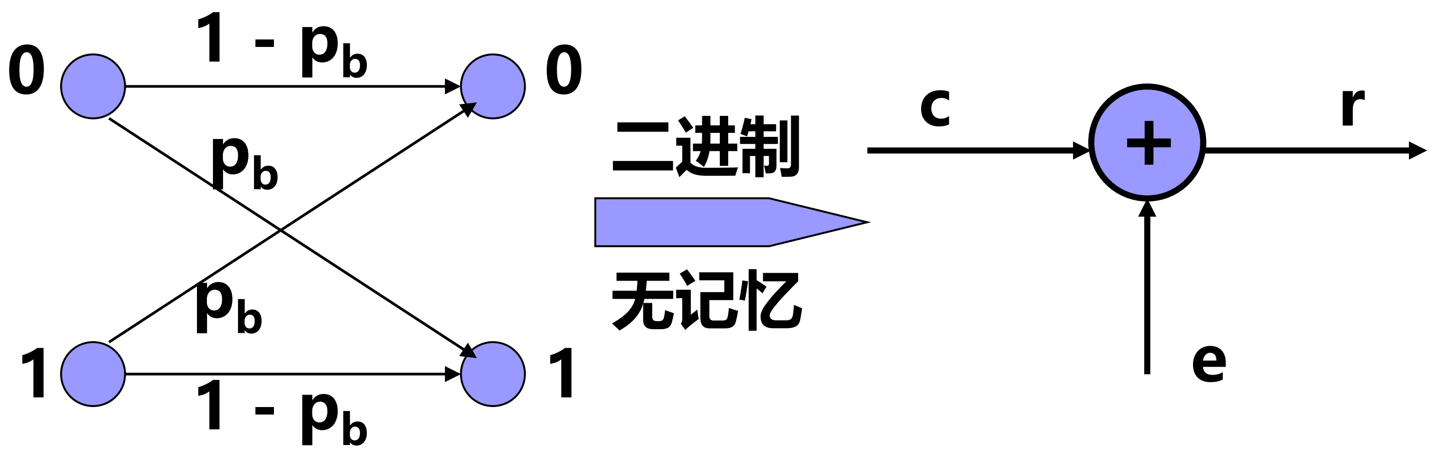
错误概率既与信道统计特性有关，也与译码规则有关。

无记忆二元对称信道（BSC）

- **假定数字通信系统的编码信道是无记忆二元对称信道：**
  - □ **二元信道**是指码字和接收向量均由二元序列表示的信道，即$c=(c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})$ $c_i \in \{0,1\}$、
  - □ $r=(r_0,r_1,\ldots,r_{n-1})$ $r_i \in \{0,1\}$。
  - □ 二进制信道可用转移概率p(r/c)描述输入输出关系；
  - □ 满足以下公式的二进制信道称为**无记忆二元信道**：
  - □ $p(r/c)=\prod p(r_i / c_i)$ $i=0\ldots n-1$
  - □ 满足以下对称特性的无记忆二进制信道称为**无记忆二元对称信道**，简称BSC：$p(0/1)=p(1/0)=p_b$

BSC的信道模型

- 只要噪声是**白噪声**，大多数二进制传输信道的模型可等效为一个BSC，其**信道模型**如下图所示。



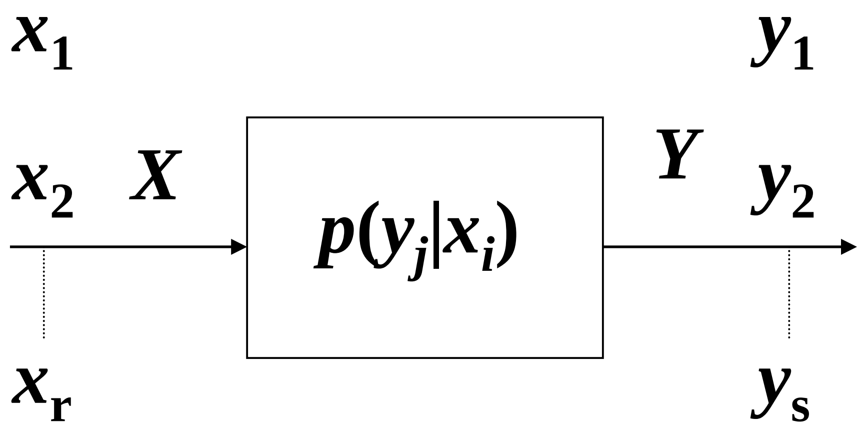
BSC转移概率

BSC**编码信道**

译码规则的定义

设信道的输入符号集$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$**，输出符号集为**$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_s\}$**。若对每一个输出符号**x_i**都有一个确定的函数**y_j**，使对应于唯一的一个输入符号**$F(y_j)$**，则称这样的一个函数为译码规则，记为**$F(y_j)$

$$F(y_j)=x_i \qquad (i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,s)$$



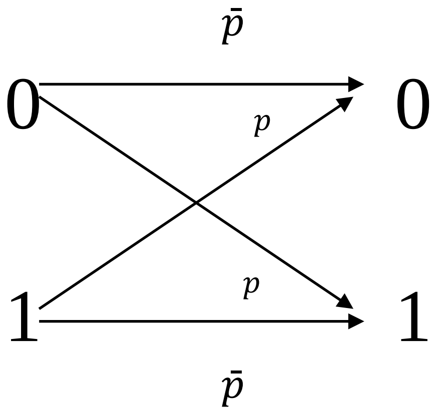
译码规则的定义

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\} \longrightarrow \boxed{\text{信道}} \longrightarrow Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_s\}$$

$$\left.\begin{array}{l} F(y_1)=\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{array} \\ \vdots \\ F(y_s)=\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{array} \end{array}\right\}$$

共有r^s 种
译码规则

例1：



$r^s=2^2=4$

译码规则

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F(1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F(0)=0 \\ F(1)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(0)=1 \\ F(1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F(0)=1 \\ F(1)=1 \end{cases}$$

译码规则-例2

例2：设一个信道的信道矩阵为 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\\0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$**，根据此信道矩阵，设计译码规则。**

解：

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\\0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned}F(y_1)&=x_1\\F(y_2)&=x_2\\F(y_3)&=x_3\end{aligned}\right\}$$ **译码规则A**

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\\0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned}F(y_1)&=x_1\\F(y_2)&=x_3\\F(y_3)&=x_2\end{aligned}\right\}$$ **译码规则B**

还有译码规则C、D…

译码规则的选择

问题：

对于有r个输入符号，s个输出符号的信道，总共可以设计出r^s种译码规则，到底哪一种译码规则最好？依据什么标准来选择译码规则？

在评定译码规则的优劣以前，首先必须定量描述错误概率.

错误译码概率1

设译码规则为

$$F(y_j)=x_i \begin{cases} \text{当输入符号是}x_i\text{时，} & \text{译码正确} \\ \text{当输入符号为除}x_i\text{以外的}(r\text{-}1)\text{种符号时，} & \text{译码错误} \end{cases}$$

$\therefore$ **正确译码的概率：**

$$p[F(y_j)|y_j]=p(x_i|y_j)$$

错误译码的概率：

$$p(e|y_j)=1-p(x_i|y_j)=1-p[F(y_j)|y_j]$$

错误译码概率2

因为输出信号是个随机变量，y_j只是其中一个符号

- **平均错误译码概率：**

$$P_E = \sum_{j=1}^{s} p(y_j)p(e|y_j) = \sum_{j=1}^{s} p(y_j)\{1 - p[F(y_j)|y_j]\}$$

- **平均正确译码概率：**

$$\overline{P}_E = \sum_{j=1}^{s} p(y_j)p[F(y_j)|y_j]$$

译码准则

- 最大后验概率译码规则
- 极大似然译码规则

最大后验概率译码规则

为提高规则通信的可靠性，所采用的译码应当使平均错误译码概率最小

$$\boxed{P_E \to P_{E\min}}$$

已知： $P_E = \sum_{j=1}^{s} p(y_j)\{1 - p[F(y_j)|y_j]\}$ $\qquad p(y_j) \geq 0$

∴当求和项中的每一项都达到最小值时，P_E就最小。

⇨ $1 - p[F(y_j)|y_j]$**要最小** ⇨ $p[F(y_j)|y_j]$**要最大**

令$F(y_j) = x^*$**，**$x^* \in X$**，而**x^***应满足条件:**

后验概率

$$\boxed{p(x^*|y_j) \geq p(x_i|y_j) \quad i = 1,2,\ldots,r}$$

称满足上述条件的译码函数对应的译码规则为最大后验概率译码规则(最小错误概率准则)。

最大后验概率准则下的错误概率1

后验概率矩阵

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & & y_s \end{array} \\
\mathbf{Q} = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{array} & \begin{bmatrix} p(x_1|y_1) & p(x_1|y_2) & \cdots & p(x_1|y_s) \\ p(x_2|y_1) & p(x_2|y_2) & \cdots & p(x_2|y_s) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p(x_r|y_1) & p(x_r|y_2) & \cdots & p(x_r|y_s) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
P_{E\min} = \sum_{j=1}^{s} p(y_j)[1 - p(x^* | y_j)] = \sum_{j=1}^{s} p(y_j) \sum_{i \neq *} p(x_i | y_j)
$$

最小 **最大** **除去最大，剩下的部分**

最大后验概率准则下的错误概率1

最大后验概率准则的条件式可以写成

$$P_{E\min} = \sum_{j=1}^{s} p(y_j)[1 - p(x^* \mid y_j)] = \sum_{j=1}^{s} p(y_j) \sum_{i\neq *} p(x_i \mid y_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{i\neq *} p(x_i y_j)$$ **联合概率**

$$\mathbf{P}_{XY} = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} p(x_1 y_1) & p(x_1 y_2) & \cdots & p(x_1 y_s) \\ p(x_2 y_1) & p(x_2 y_2) & \cdots & p(x_2 y_s) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p(x_r y_1) & p(x_r y_2) & \cdots & p(x_r y_s) \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} y_1 & \quad y_2 & \quad & \quad y_s \end{array} \end{array}$$

最大似然准则

问题：最大后验概率 $p(x_i|y_j)$ 通常是**未知**的，使用不方便。

我们能否推导出更**便于使用**的译码规则?

分析：$p(x^*|y_j) \geq p(x_i|y_j) \quad i = 1,2,\ldots,r$

$$\frac{p(x^*)p(y_j|x^*)}{p(y_j)} \geq \frac{p(x_i)p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

贝叶斯公式

$$p(x^*)p(y_j|x^*) \geq p(x_i)p(y_j|x_i)$$

(2) 极大似然译码规则

当输入符号等概分布时

$$\boxed{p(y_j|x^*) \geq p(y_j|x_i)}$$

说明

1)当输入符号**等概分布**时，采用极大似然译码准则**等价**于最大后验概率准则。

2)当输入符号不等概分布或先验概率未知时，采用极大似然译码准则不一定使P_E最小。最大似然准则不是最佳译码规则。

最大似然准则下的错误概率

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & & y_s \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{array} & \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & \cdots & p(y_s|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & \cdots & p(y_s|x_2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p(y_1|x_r) & p(y_2|x_r) & \cdots & p(y_s|x_r) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P_{E\min} = \sum_{j=1}^{s} p(y_j)[1 - p(x^*|y_j)] = \sum_{j=1}^{s} p(y_j) \sum_{i\neq *} p(x_i|y_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{i\neq *} p(x_i y_j) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i\neq *} p(x_i) p(y_j|x_i)$$

当输入符号等概分布时

$$\boxed{(r-1)\times s\text{项}} \qquad = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i\neq *} p(y_j|x_i)$$

例：设信道矩阵为 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix}$，且输入符号等概分布，即，求译码规则和平均错误译码概率。

$$p(x_1)=p(x_2)=p(x_3)=\frac{1}{3}$$

解：等概率分布时，用最大似然准则，等效于最大后验概率准则。对于传递矩阵中的每一列，选一个最大的传递概率，对应的输入符号即为该输出符号的译码函数

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned}F(y_1)&=x_1\\ F(y_2)&=x_2\\ F(y_3)&=x_3\end{aligned}\right\}\text{译码规则}$$

$$P_{E\min}=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i\neq *}p(y_j|x_i)$$

$$P_E=\frac{1}{3}[(0.3+0.2)+(0.3+0.3)+(0.2+0.4)]=0.57$$

例 假设输入等概，求以下两种译码规则的平均错误译码概率。

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}F(y_1)&=x_1\\ F(y_2)&=x_2\\ F(y_3)&=x_3\end{aligned}\right\}$$ **译码规则A**

$$P_E=\frac{1}{3}[(0.2+0.3)+(0.3+0.3)+(0.2+0.5)]=0.6$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}F(y_1)&=x_1\\ F(y_2)&=x_3\\ F(y_3)&=x_2\end{aligned}\right\}$$ **译码规则B**

$$P_E=\frac{1}{3}[(0.2+0.3)+(0.3+0.3)+(0.2+0.4)]=0.567$$

如果 $p(x_1)=p(x_2)=\frac{1}{4}, p(x_3)=\frac{1}{2}$

求以下两种译码规则的平均错误译码概率

$$P_E=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i\neq *}p(x_iy_j)=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i\neq *}p(x_i)p(y_j|x_i)$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

$$P_E=\frac{1}{4}(0.3+0.2)+\frac{1}{4}(0.2+0.5)+\frac{1}{2}(0.3+0.3)=0.6$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

$$P_E=\frac{1}{4}(0.3+0.2)+\frac{1}{4}(0.2+0.3)+\frac{1}{2}(0.3+0.4)=0.6$$

如果 $p(x_1)=p(x_2)=\frac{1}{4}, p(x_3)=\frac{1}{2}$ **最大后验概率译码准则**

分析：已知输入概率分布，用最大后验概率准则，求联合概率

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_{XY}=\begin{bmatrix}0.125 & 0.075 & 0.05\\ 0.05 & 0.075 & 0.125\\ 0.15 & 0.15 & 0.2\end{bmatrix}$$

$$P_E=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i\neq *}p(x_i y_j)$$
$$=(0.125+0.05)+(0.075+0.075)+(0.05+0.125)$$
$$=0.5$$

课堂练习

- 离散信道的传递概率矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \qquad p(x_1)=\frac{1}{2} \quad p(x_2)=\frac{1}{4} \quad p(x_3)=\frac{1}{4}$$

- 分别按照最小错误概率准则和最大似然准则，确定译码规则，并计算相应的平均错误概率

课堂练习

- 用最大后验概率准则，求联合概率

$$p(x_i y_j) = p(x_i)p(y_j|x_i)$$

$$\text{对于}y_1 \quad p(x_1y_1) = \frac{1}{4} \quad p(x_2y_1) = \frac{1}{24} \quad p(x_3y_1) = \frac{1}{12} \quad \therefore F(y_1) = x_1$$

$$\text{对于}y_2 \quad p(x_1y_2) = \frac{1}{6} \quad p(x_2y_2) = \frac{1}{8} \quad p(x_3y_2) = \frac{1}{24} \quad \therefore F(y_2) = x_1$$

$$\text{对于}y_3 \quad p(x_1y_3) = \frac{1}{12} \quad p(x_2y_3) = \frac{1}{12} \quad p(x_3y_3) = \frac{1}{8} \quad \therefore F(y_3) = x_3$$

$$\overline{P_E} = p(x_1y_1) + p(x_1y_2) + p(x_3y_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24}$$

$$P_E = 1 - \overline{P_E} = \frac{11}{24}$$

课堂练习

- 用最大似然准则

$$F(y_1) = x_1 \quad F(y_2) = x_2 \quad F(y_3) = x_3$$

$$\overline{P_E} = p(x_1 y_1) + p(x_2 y_2) + p(x_3 y_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= 0.5$$

$$P_E = 1 - \overline{P_E} = 0.5$$

作业：本节小测验

登录微助教

https://www.teachermate.com.cn/

谢谢！

黑晓军
华中科技大学
电子信息与通信学院
Email: heixj@hust.edu.cn
网址： http://eic.hust.edu.cn/aprofessor/heixiaojun

参考资料

- *A System View of Communications: From Signals to Packets (Part 1) https://www.edx.org/course/system-view-communications-signals-hkustx-elec1200-1x-2*

费诺不等式

- 译码时发生错误是由信道中噪声引起，因此平均错误概率与信道疑义度H(X|Y)有关，其关系由费诺不等式表示。

$$\boxed{H(X|Y) \le H(P_E) + p_E \log(n-1)}$$

费诺不等式

物理意义：一次译码判决后所保留的关于信源的不确定性可以分成两部分

接收到Y后，判决是否发生错误的不确定性H(P_E)，H(P_E)是译码平均错误概率P_E 的熵，表示产生错误概率P_E的不确定性。

当判决是错误的，其错误概率为P_E时，到底是n-1个输入符号中哪一个引起错误的最大不确定性，它是(n-1)个符号不确定性的最大值log(n-1)与P_E 的乘积。

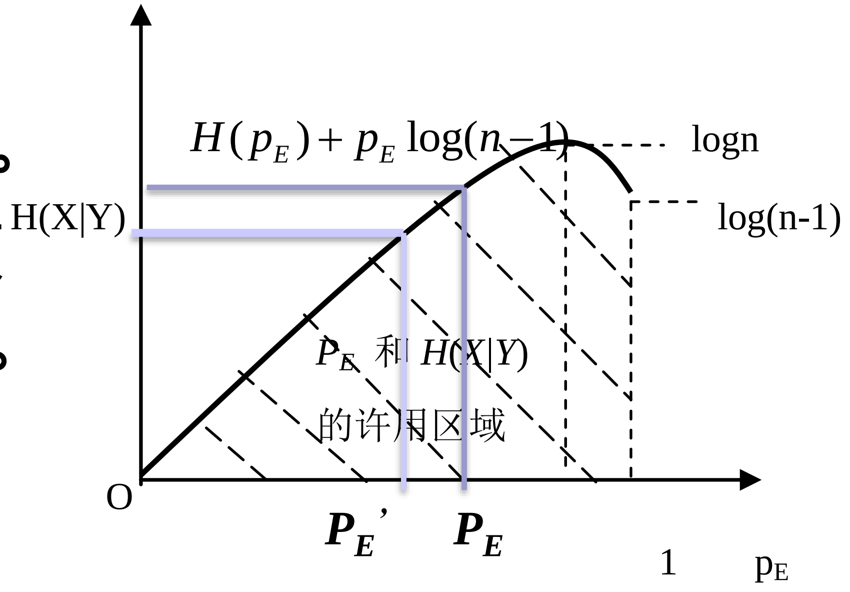
说明：虽然P_E与译码规则有关，但不管采用什么译码规则，费诺不等式均成立。

费诺不等式的几何含义

- 信道疑义度

$$H(X|Y) = H(X) - I(X;Y)$$

- 是信源熵H(X)超过平均互信息I(X;Y)的部分。
- 若以H(X|Y)为纵坐标，P_E为横坐标，则函数H(P_E)+ P_E log(n-1)随P_E变化的曲线如图所示。



由图可知，当信源、信道给定时，信道疑义度H(X|Y)就给定了译码平均错误概率P_E的下限。