电路理论

——一阶电路的暂态分析

主讲人：刘旭

电气与电子工程学院

本章学习内容

8.1 概述

8.2 零输入响应（自然响应）

8.3 直流电源激励下的响应

8.4 正弦电源激励下的RC电路

8.6 线性非时变特性

讲授学时：4

本章学习目标与难点

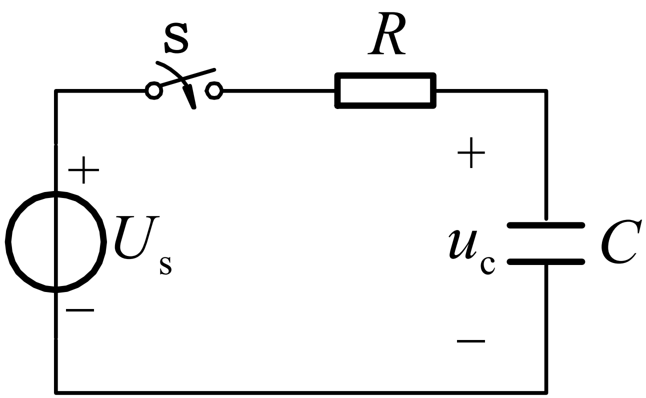
目标

1. 掌握一阶电路零输入响应的变化规律；
2. 掌握直流电源激励的一阶电路响应计算方法；
3. 掌握自由分量与强制分量、暂态分量与稳态分量、阶跃响应与冲激响应等概念。

难点

1. 分析状态跳变换路问题；
2. 线性非时变特性的应用。

8.1 概述



- 暂态电路：含储能元件的电路
- 暂态电路阶数由独立储能元件个数决定
- 求解方法：**经典时域分析**

列写微分方程 ⟶ 确定初始条件 ⟶ 求解微分方程

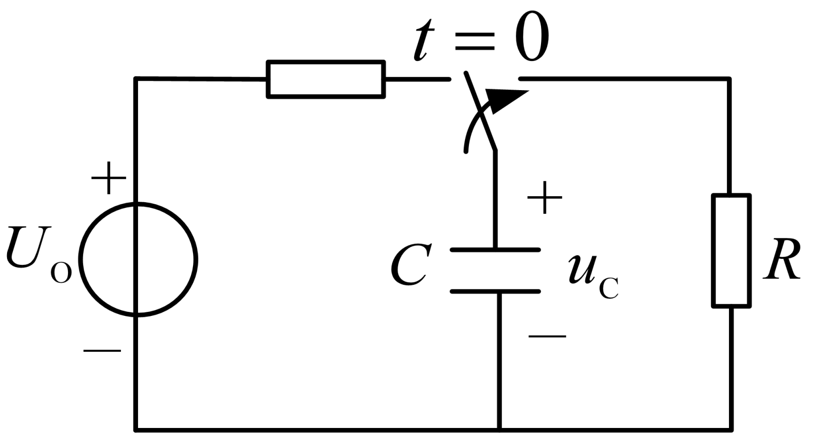
$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \qquad u_C(0^+)=u_C(0^-) \qquad \Rightarrow u_C,\ i_C,\ u_R$$

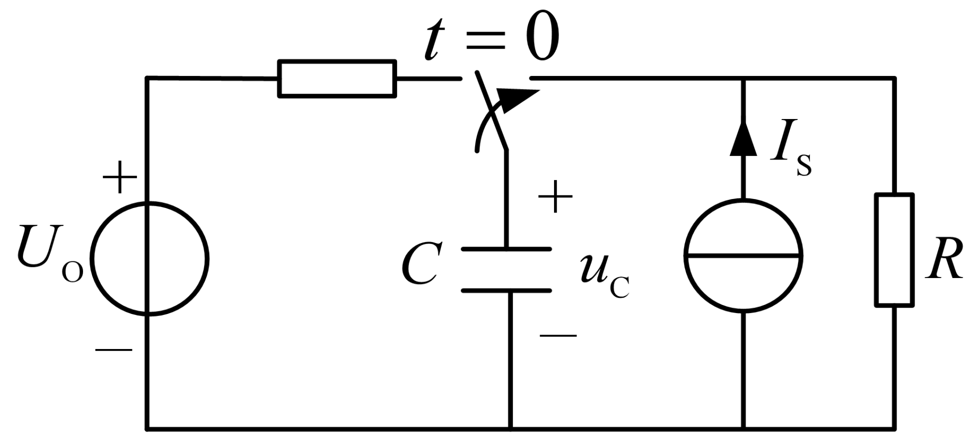
$U_S=0$ 齐次线性微分方程 $y(t)=y_h(t)=\sum_{a=1}^{n}k_a e^{s_a t}$

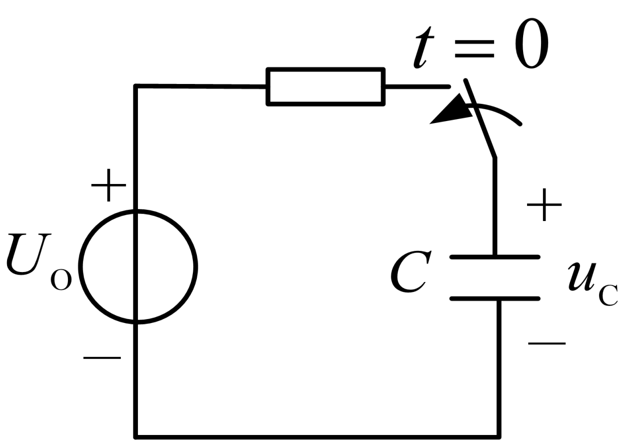
$U_S\neq 0$ 非齐次线性微分方程 $y(t)=y_h(t)+\underline{y_p(t)}$ 与U_S具有相同函数形式

8.1 概述

一阶暂态电路三种状态：







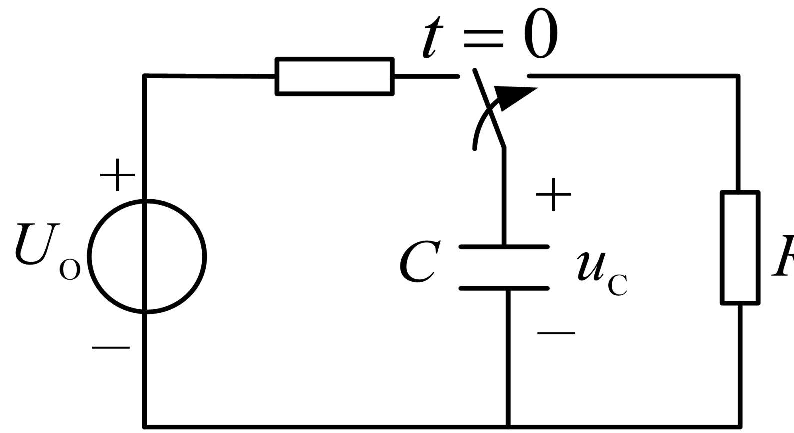
零输入响应： 换路后外加激励为零，仅由动态元件初始储能产生的电压和电流。

零状态响应： 动态元件初始能量为零，由 $t>0$ 电路中外加激励作用所产生的响应。

全响应： 电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

8.2 零输入响应

1. *RC* 电路



$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \qquad t>0 \\ u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0 \end{cases}$$

通解： $u_C = k\mathrm{e}^{st}$

特征方程： $RC\mathrm{s}+1=0$

特征根： $\mathrm{s}=-\dfrac{1}{RC}$ 　　则： $u_C = ke^{-\frac{1}{RC}t}$

代入初始值： $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$ 　可得： $k=U_0$

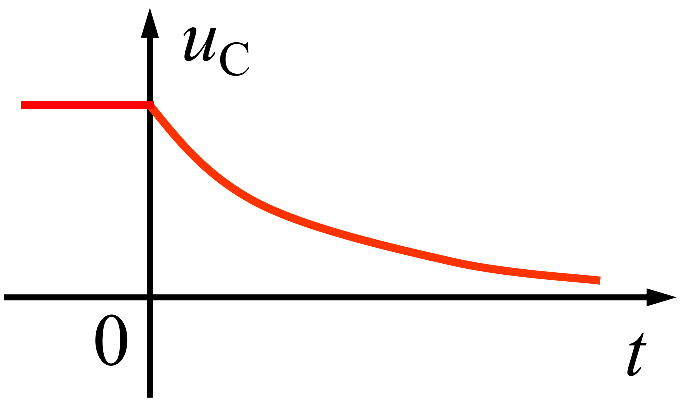
最终可得： $\boxed{u_C = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}}$ 　 $\boxed{i_R=\dfrac{u_C}{R}=\dfrac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}=I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$

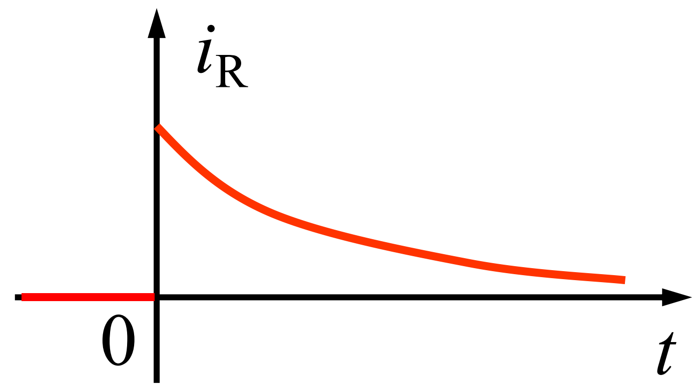
$(t\geq 0)$ 　　 $(t>0)$

8.2 零输入响应

$$u_C = U_o e^{-\frac{1}{RC}t}$$

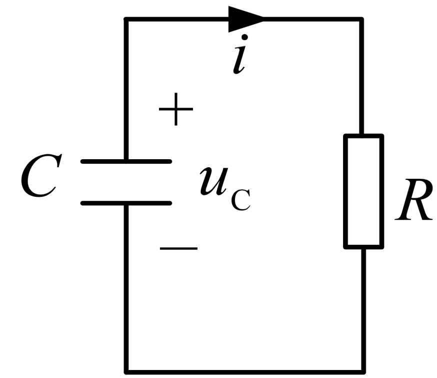
$$i_R = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$





- 电容电压在$t=0$处连续，其他变量在$t=0$处跳变；
- 电压、电流是随时间按**同一指数规律衰减**的函数；
- 响应与初始状态成**线性关系**，其衰减快慢与RC有关。

能量转换



设 $u_C(0_+)=U_0$

电容储能 $W_C=\dfrac{1}{2}CU_0^2$

电阻耗能 $W_R=\int_0^{\infty} i^2R\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left(\dfrac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2R\mathrm{d}t$

$$=\frac{U_0^2}{R}\int_0^{\infty}e^{-\frac{2t}{RC}}\mathrm{d}t=\frac{U_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{2}CU_0^2$$

- 零输入响应是储能的自然释放过程
- 电容不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕

8.2 零输入响应

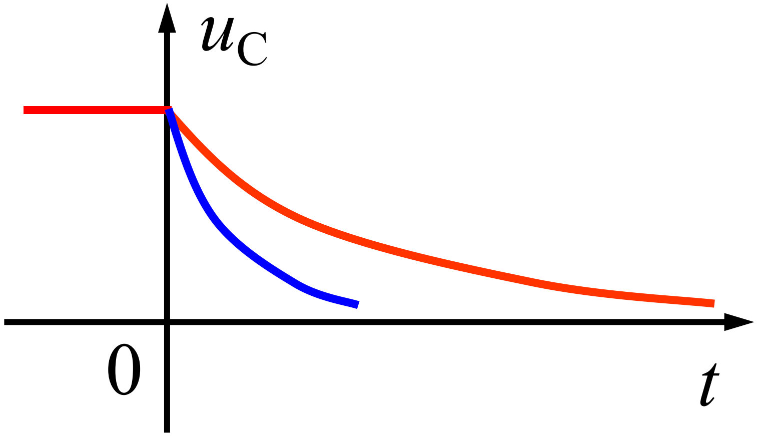
时间常数 $\tau = RC$

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- τ反映了电路过渡过程时间的长短

  τ 大→过渡过程时间长

  τ 小→过渡过程时间短



物理含义

当电压初值一定时：

C 大（R一定）→ $W = Cu^2/2$ → 初始储能大

R 大（C一定）→ $i = u/R$ → 放电电流小

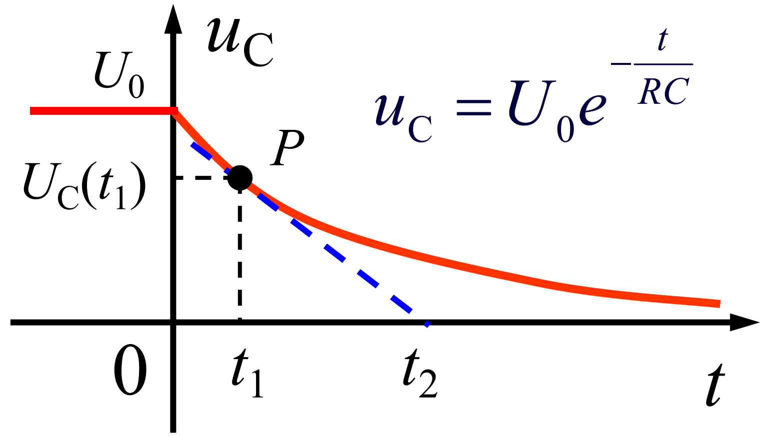
⇨ 放电时间长

8.2 零输入响应

几何意义

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t_1}=-\frac{U_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\bigg|_{t_1}=-\frac{1}{\tau}u_C(t_1)=k$$

$$k=\frac{u_C(t_1)-0}{t_1-t_2}\quad\Rightarrow\tau=t_2-t_1\ \text{次切距}$$



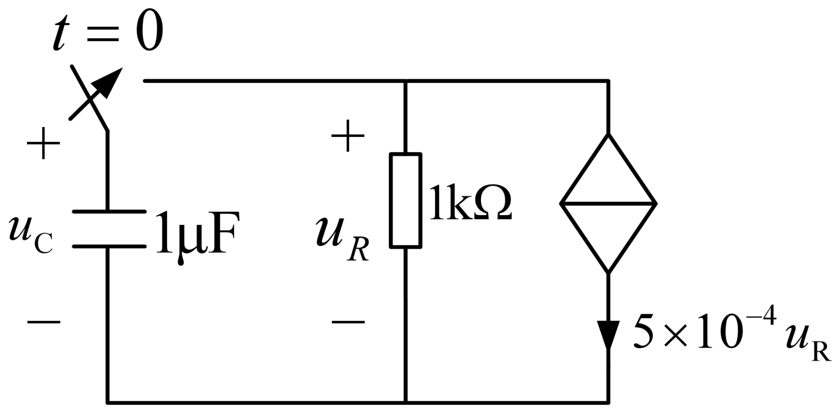
时间常数测量方法

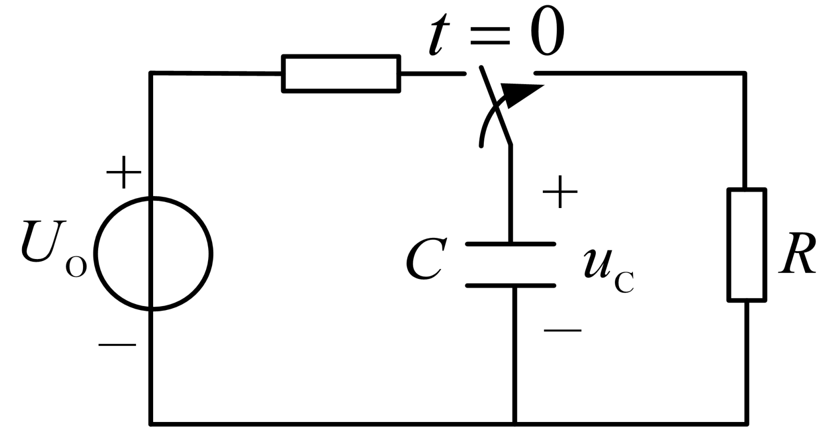
t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$u_c(t)/U_0$	1	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067

- τ：电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间
- 工程上认为经过$3\tau\sim5\tau$时间后过渡过程结束

例8-1 假定$u_c(0\text{-})=10\text{V}$，求$u_c(t>0)$

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = RC$$





解 1. 计算时间常数

上述公式仅适用于*RC*电路！

$$\tau = 1000\times10^{-6} = 1\times10^{-3}\,\text{s}$$

2. 计算待求变量的初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10\text{V}$$

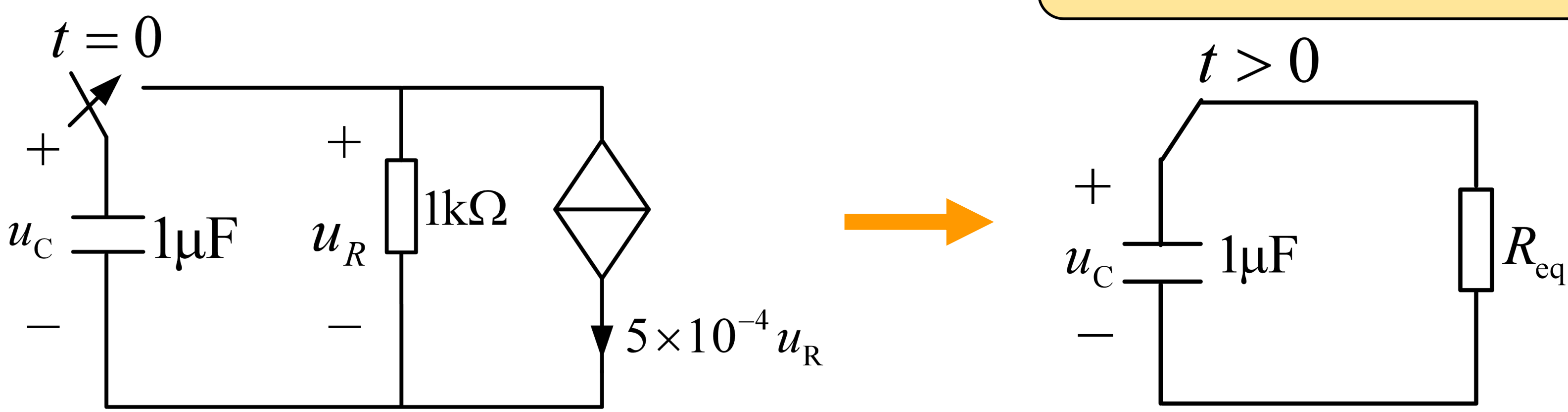
3. 写出零输入响应

$$\cancel{u_C(t) = u_C(0_+)\text{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 10\text{e}^{-1000t}\text{V}}$$

8.2 零输入响应

例8-1 假定$u_c(0\text{-})=10\text{V}$，求$u_c(t>0)$

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = R_{eq}C$$



解 1. 将**电路等效为*RC*电路**，计算时间常数

$$R_{eq} = 1 \| 2 = \frac{2}{3}\text{k}\Omega \quad \Rightarrow \tau = 1 \times \frac{2}{3} \times 10^{-3}\text{s}$$

2. 计算待求变量的初始值

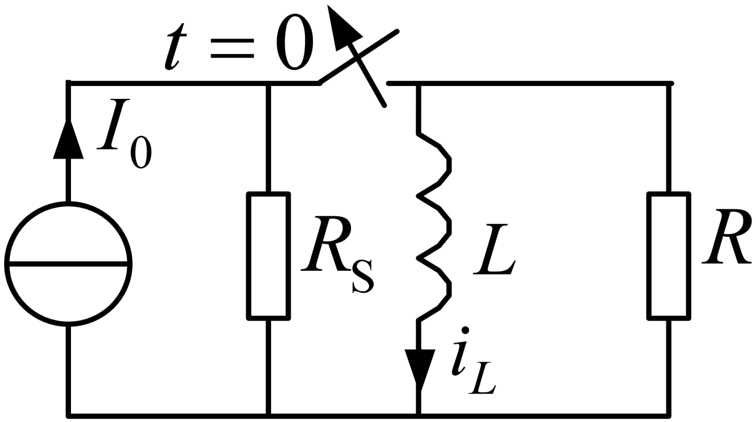
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10\text{V}$$

3. 写出零输入响应

$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-1500t}\text{V}$$

8.2 零输入响应

2. *RL* 电路

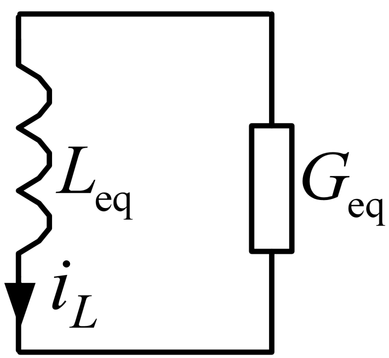


$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=0 & (t>0) \\ i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_0 \end{cases}$$

$$s=-\frac{R}{L}=-\frac{1}{GL} \quad \rightarrow \quad \tau=GL$$

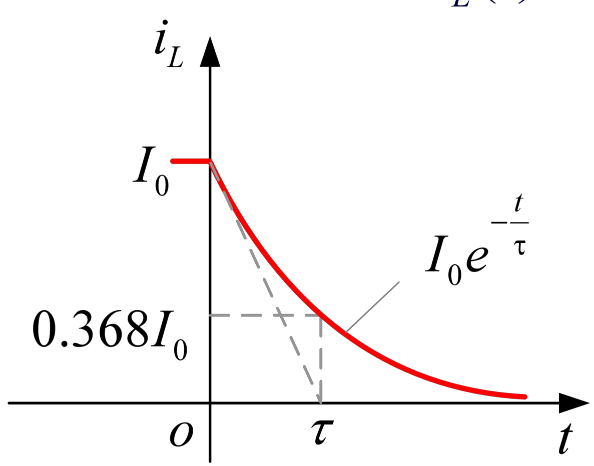
$$i_L=I_0e^{-\frac{t}{GL}} \quad (\mathrm{t}>0)$$

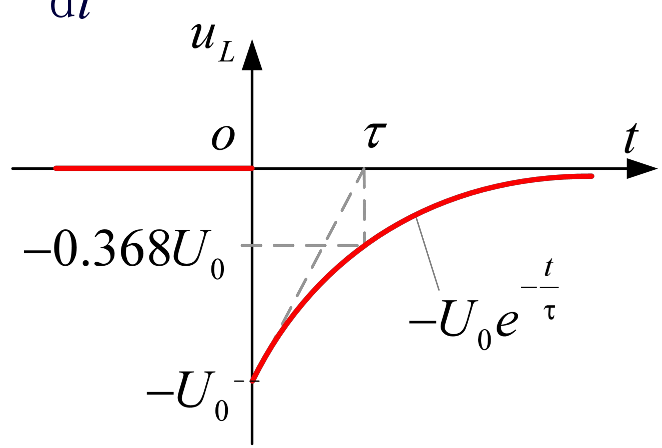
$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-RI_0e^{-\frac{t}{L/R}}$$



$$\tau=G_{\mathrm{eq}}L$$

$$\tau=R_{\mathrm{eq}}C$$





8.2 零输入响应

- 电感电流在t=0处连续，其他变量在t=0处跳变；
- 响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与*L*/R有关；
- 时间常数τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ 大→过渡过程时间长　　　τ 小→过渡过程时间短

当电流初值一定时：

L 大（G一定）→ $W = Li^2/2$ → 初始储能大

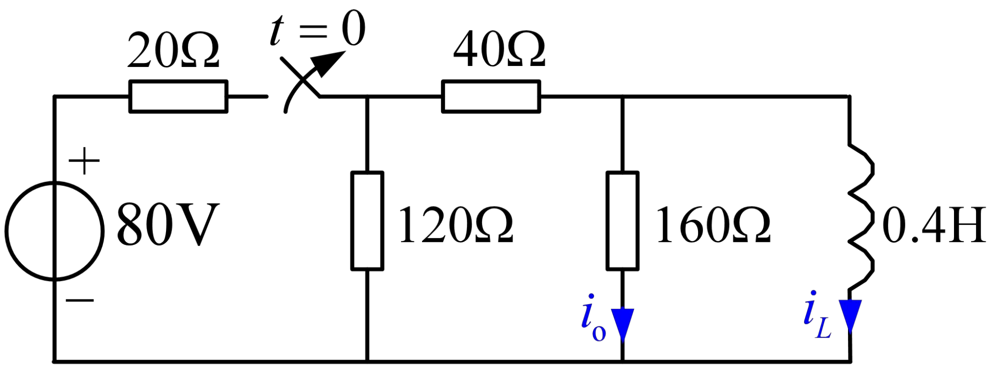
G 大（L一定）→ $P = Ri^2$ → 放电功率小

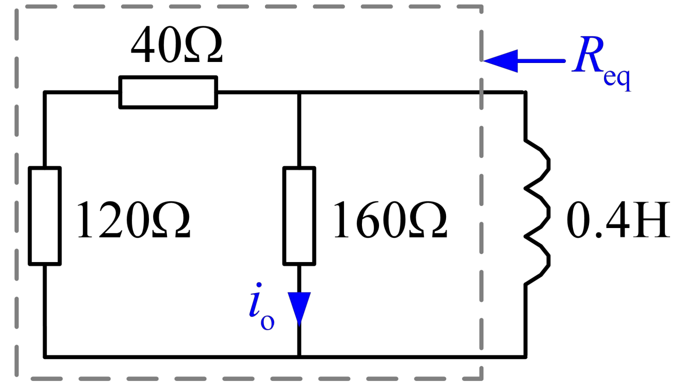
⇒ 放电时间长

8.2 零输入响应

例8-2 t=0时开关打开，求i_o

$$u_L(t) = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = G_{eq}L$$





解 思路：先求i_L及u_L，再求$i_o=u_L/R$

1. 将电路等效为*RL*电路，计算时间常数

$$R_{eq} = 80\Omega \qquad \tau = LG_{eq} = 0.4/80 = 5\times10^{-3}\text{s}$$

2. 计算待求变量的初始值

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1.2\text{A}$$

3. 写出零输入响应

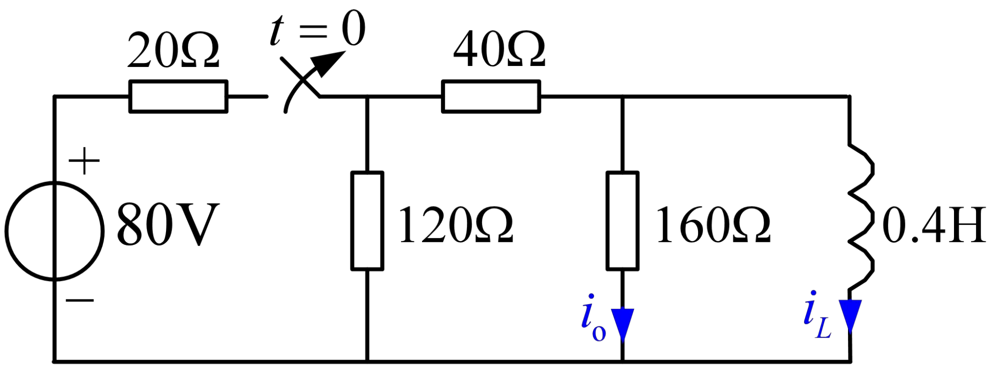
$$u_L = -80\times1.2e^{-200t}\ \text{V}$$

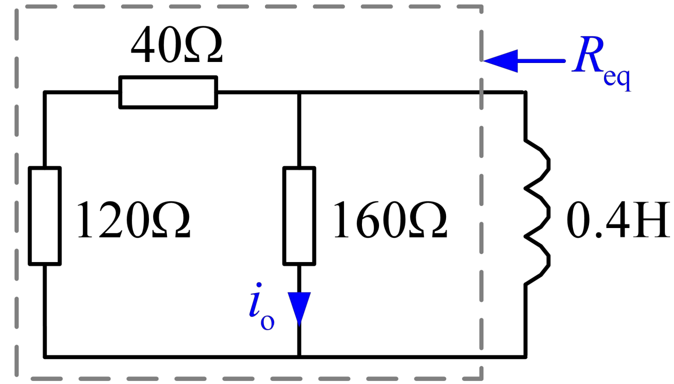
$$\Rightarrow i_o = u_R/R = u_L/R = -0.6e^{-200t}\ \text{A}$$

8.2 零输入响应

例8-2 t=0时开关打开，求i_o

$$u_L(t) = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = G_{eq}L$$





解 电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数

$$\Rightarrow y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1. 将电路等效为*RL*电路，计算时间常数 $\tau = 5\times10^{-3}\text{s}$

2. 计算待求变量的初始值

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1.2\text{A}$$

$$\Rightarrow i_o(0_+) = -0.6\text{A}$$

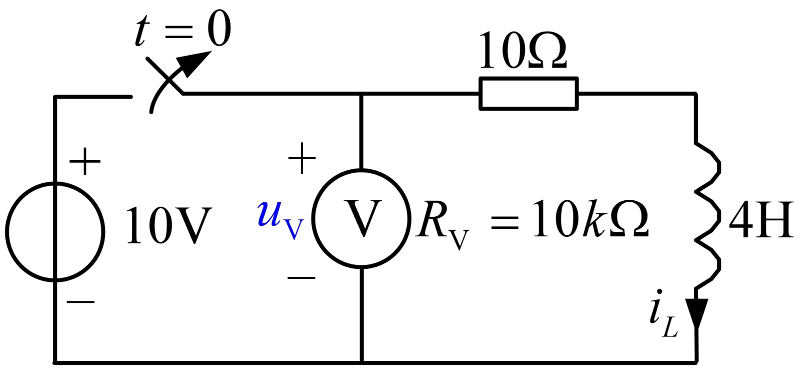
3. 写出零输入响应

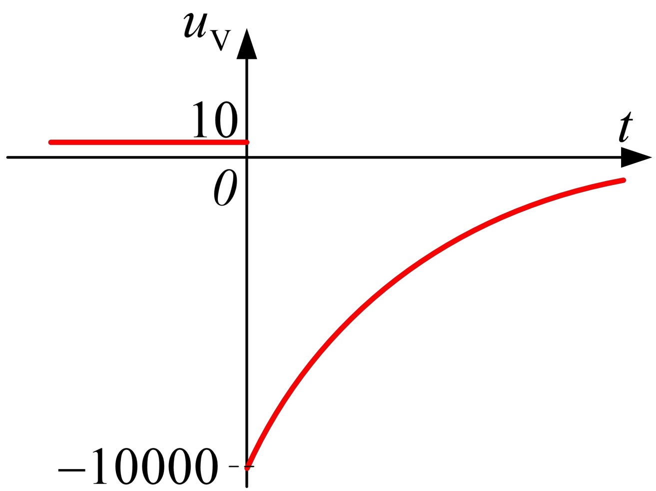
$$i_o = i_o(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -0.6e^{-200t}\ \text{A}$$

8.2 零输入响应

例8-3 t=0时开关打开，求u_V

$$y(t)=y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}\quad \tau=G_{eq}L$$





解 $i_L(0_+)=i_L(0_-)\approx 1\text{A}$

i_L当做电流源：

$$u_V(0_+)=-10000\text{V}$$

$$\tau=\frac{L}{R+R_V}=\frac{4}{10010}\approx 4\times10^{-4}\text{s}$$

$$u_V=-R_Vi_L=-10000e^{-2500t}\quad t\geq 0$$

造成电压表瞬间过压损坏

8.2 零输入响应

零输入响应小结

- 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应，仅电容电压和电感电流换路时连续；

$$u_C(0_+)=u_C(0_-) \quad i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

- 暂态过程衰减快慢取决于时间常数τ;

RC**电路：**$\tau = R_{eq}C$　　RL**电路：**$\tau = G_{eq}L$

R为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻

- 同一电路中所有响应具有同一指数规律变化；

$$y(t)=y(0_+)e^{-t/\tau}$$

两个元素 $\begin{cases}\text{时间常数 } \tau \\ \text{换路后初值 } y(0_+)\end{cases}$

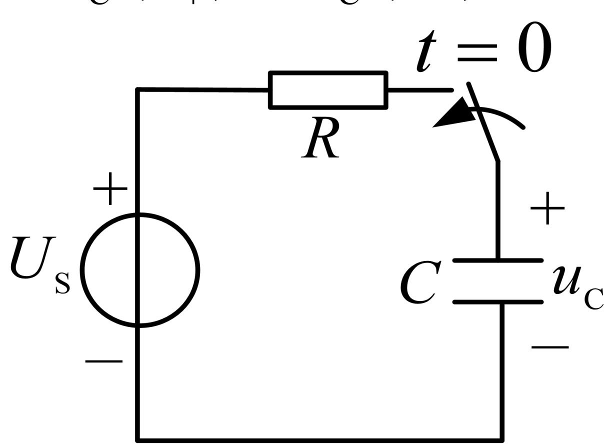
8.3 直流电源激励下的响应

零状态响应（阶跃响应）

动态元件初始能量为零，由$t>0$电路中外加激励作用所产生的响应。

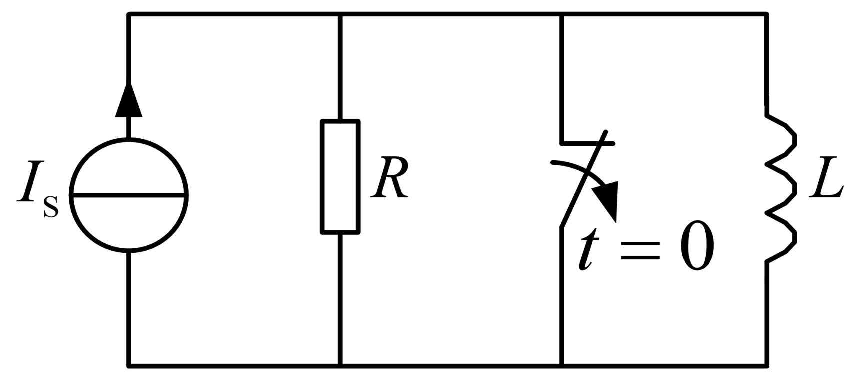
RC电路

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_\mathrm{S} \quad (t>0) \\ u_C(0_+)=u_C(0_-)=0 \end{cases}$$



RL电路

$$\begin{cases} \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=I_\mathrm{S} \quad (t>0) \\ i_L(0_+)=i_L(0_-)=0 \end{cases}$$



8.3 直流电源激励下的响应

直流电源激励下的一阶电路：

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_\mathrm{S} \quad (t>0) \\ u_C(0_+)=u_C(0_-)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=I_\mathrm{S} \quad (t>0) \\ i_L(0_+)=i_L(0_-)=0 \end{cases}$$

非齐次线性微分方程解：$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

通解：$y_h(t)=ke^{-t/\tau} \;\Rightarrow\; y(t)=ke^{-t/\tau}+y_p(t)$

当$t=0_+$时 $y(0_+)=ke^{-0/\tau}+y_p(0_+) \;\Rightarrow\; k=y(0_+)-y_p(0_+)$

$$\Rightarrow y(t)=\left[y(0_+)-y_p(0_+)\right]e^{-t/\tau}+y_p(t)$$

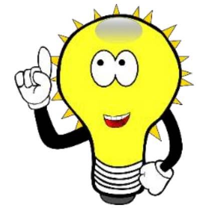
$$y_p(t)=C \;\Rightarrow 0+C=U_\mathrm{S} \qquad y_p(t)=U_\mathrm{S}=y(\infty)$$

$$y(t)=[y(0_+)-y(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}+y(\infty)$$

8.3 直流电源激励下的响应

直流电源激励下的一阶电路解：

$$y(t)=[y(0_+)-y(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}+y(\infty)$$



三要素法是否适用于零输入响应？

三要素： 初始值 $y(0_+)$　稳态解 $y(\infty)$　时间常数 τ

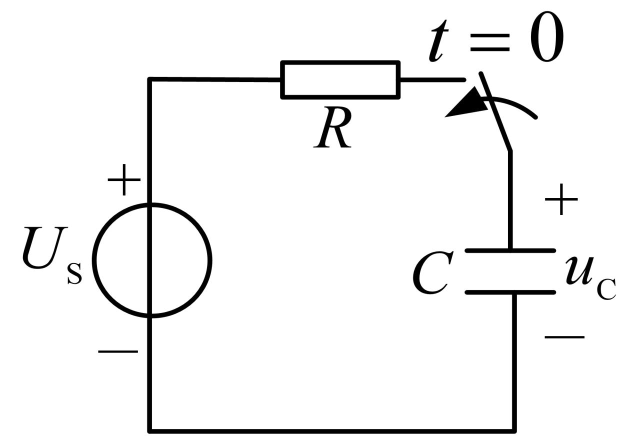
三要素法　分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素

解题步骤

1. 计算时间常数（独立源置零，等效为 RC 电路或 RL 电路）
2. 计算待求变量的初始值（0_+等效电路）
3. 计算待求变量的直流稳态值（稳态电路）
4. 写出响应表达式

8.3 直流电源激励下的响应

1. *RC*电路



$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S & t>0 \\ u_C(0_+)=u_C(0_-)=0 \end{cases}$$

$$u_C(t)=[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}+u_C(\infty)$$

三要素：$u_c(0_+)=u_c(0_-)=0$

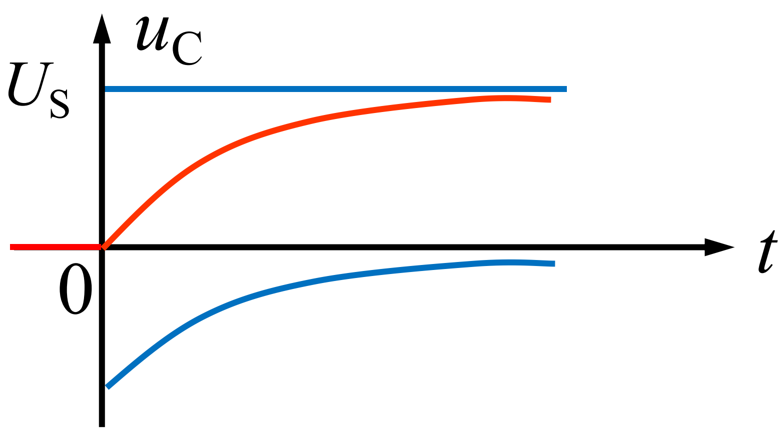
$u_C(\infty)=U_S \qquad \tau=RC$

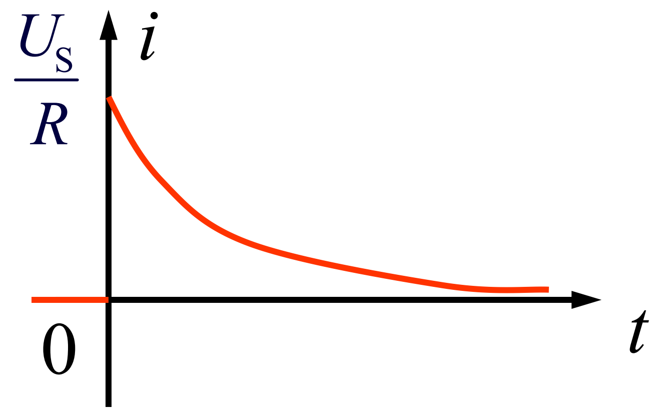
$$\Rightarrow u_C=U_S-U_Se^{-\frac{t}{RC}}=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (t\geq 0)$$

从以上式子可以得出：$i=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\dfrac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

8.3 直流电源激励下的响应

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0) \qquad i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$





- 电压、电流是随时间按**同一指数规律变化**的函数；

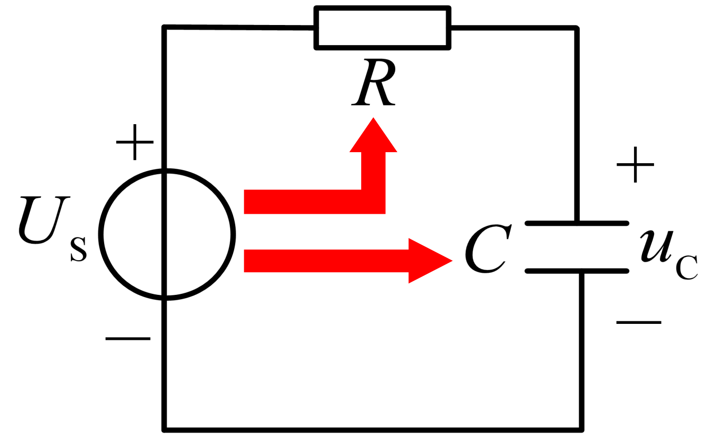
  电容电压连续，其他变量基本都会跃变

- 响应变化的快慢，由时间常数τ＝*RC*决定；

  τ大→充电慢　τ小→充电快

- 响应与外加激励成线性关系；

8.3 直流电源激励下的响应



□ 能量关系

电源提供能量：

$$W_S=\int_0^{\infty}U_S i\mathrm{d}t=U_S q=CU_S^2$$

电阻消耗能量：

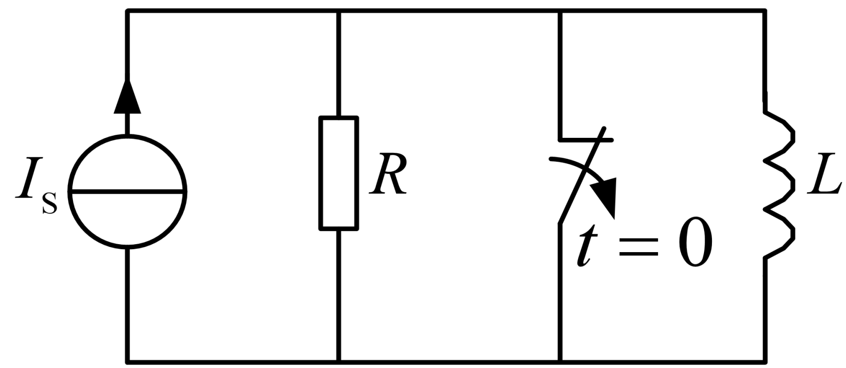
$$W_R=\int_0^{\infty}i^2R\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left(\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2R\mathrm{d}t=\frac{1}{2}CU_S^2$$

电容储存能量：$W_C=\dfrac{1}{2}CU_S^2$

直流电源提供的能量一半消耗在电阻上，一半转换成电场能量储存在电容中。

8.3 直流电源激励下的响应

2. *RL*电路



$$\begin{cases} \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=I_S \quad (t>0) \\ i_L(0_+)=i_L(0_-)=0 \end{cases}$$

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \tau=GL$$

$$\Rightarrow i_L=I_S\left(1-e^{-\frac{t}{GL}}\right)$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=RI_Se^{-\frac{t}{GL}}$$

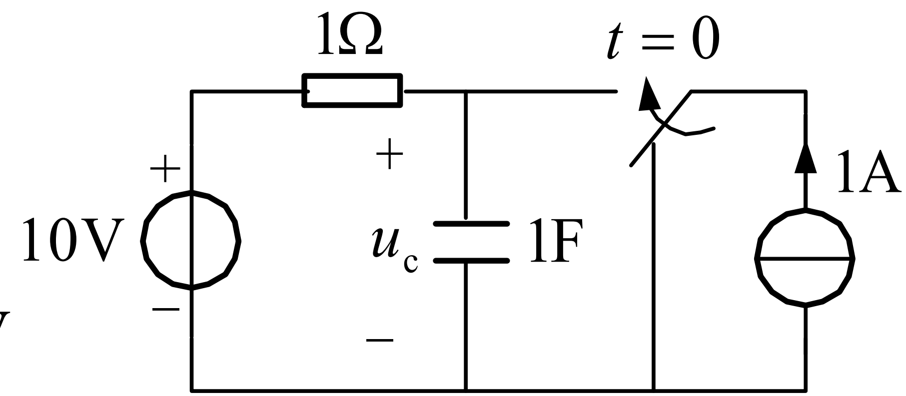
$$W_S=\int_0^\infty uI_S\mathrm{d}t=I_S\int_0^\infty L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=LI_S{}^2$$

$$W_R=\int_0^\infty \frac{u_R^2}{R}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}LI_S{}^2$$

$$W_L=\frac{1}{2}LI_S{}^2$$ 与*RC*电路规律类似

8.3 直流电源激励下的响应

例8-3 t=0时开关闭合，求u_C

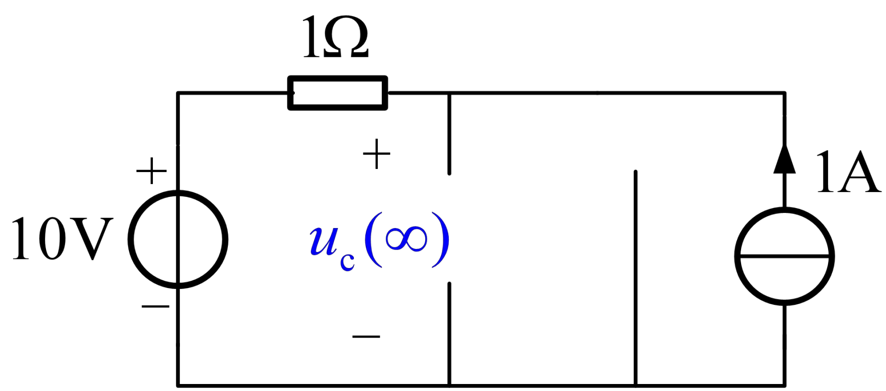


解 三要素法：

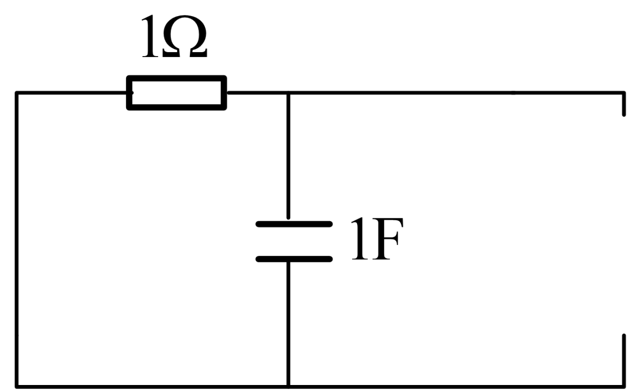
$$u_C(0_+) = 10\text{V} \qquad u_C(\infty) = 11\text{V}$$

$$\tau = 1 \times 1 = 1\text{s}$$

$$u_c(t) = [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-t/\tau} + u_c(\infty) = -e^{-t/\tau} + 11\ \text{V}$$



计算稳态值



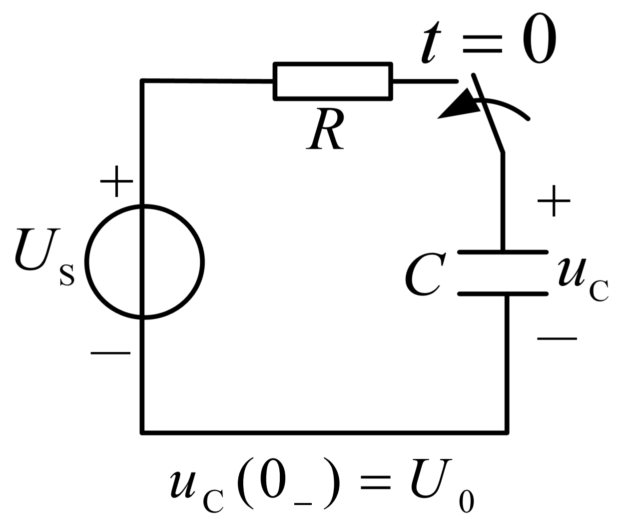
计算时间常数

8.3 直流电源激励下的响应

全响应

电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

以RC电路为例，电路微分方程：



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

三要素：$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$

$$u_C(\infty)=U_S$$

$$\tau=RC$$

$$\Rightarrow u_C=U_S+(U_0-U_S)e^{-t/\tau}\quad t\geq 0$$

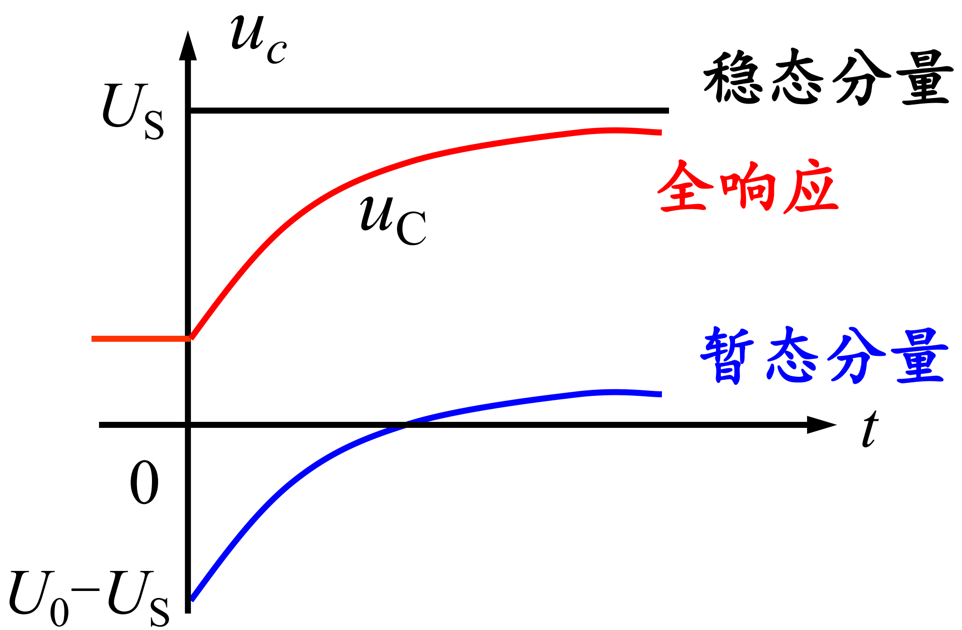
8.3 直流电源激励下的响应

全响应的两种分解方式：

A. 着眼于电路的两种工作状态 ➡ 物理概念清晰

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-t/\tau} \quad t \geq 0$$

全响应=强制分量(稳态分量)+自由分量(暂态分量)



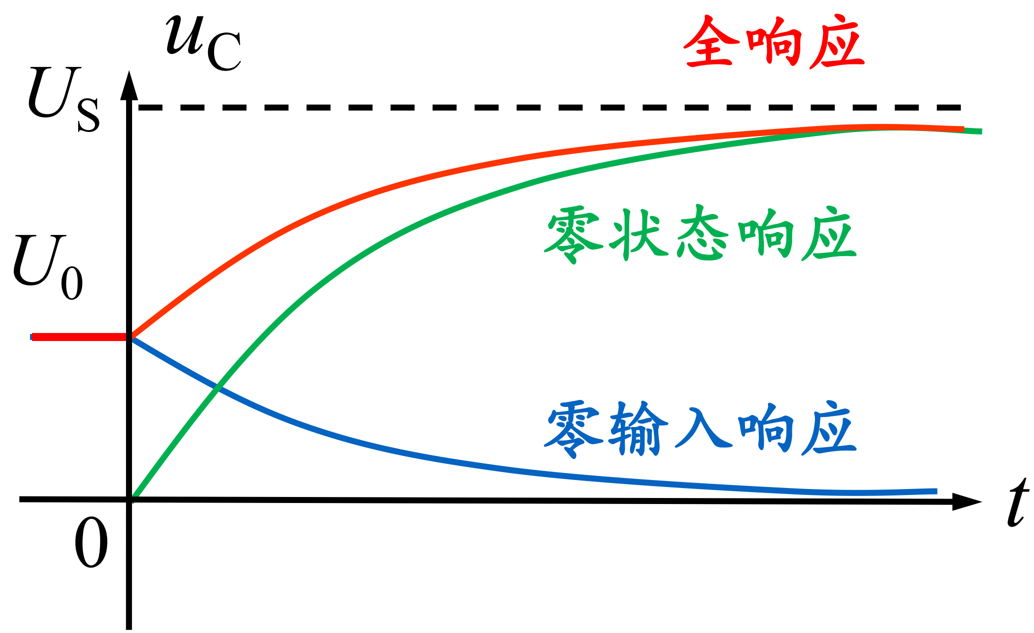
8.3 直流电源激励下的响应

B. 着眼于因果关系 → 便于叠加计算

$$u_C = U_S + \left(U_0 - U_S\right)e^{-t/\tau} \quad t \geq 0$$

$$= U_0 e^{-t/\tau} + U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad t \geq 0$$

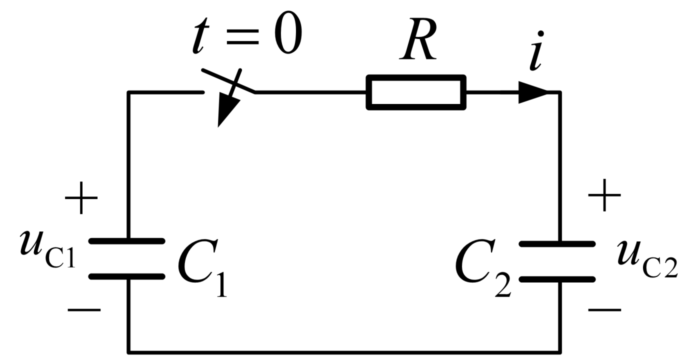
全响应 = 零状态响应 + 零输入响应



8.3 直流电源激励下的响应

例8-4 t=0时开关闭合，求$i(t)$、 $u_{C1}(t)$、 $u_{C2}(t)$

解 三要素法：



$u_{C1}(0_-)=U_1$

$u_{C2}(0_-)=U_2$

初值
$$\begin{cases} u_{C1}(0_+)=u_{C1}(0_-)=U_1 \\ i(0_+)=\dfrac{u_{C1}(0_+)-u_{C2}(0_+)}{R} \end{cases}$$

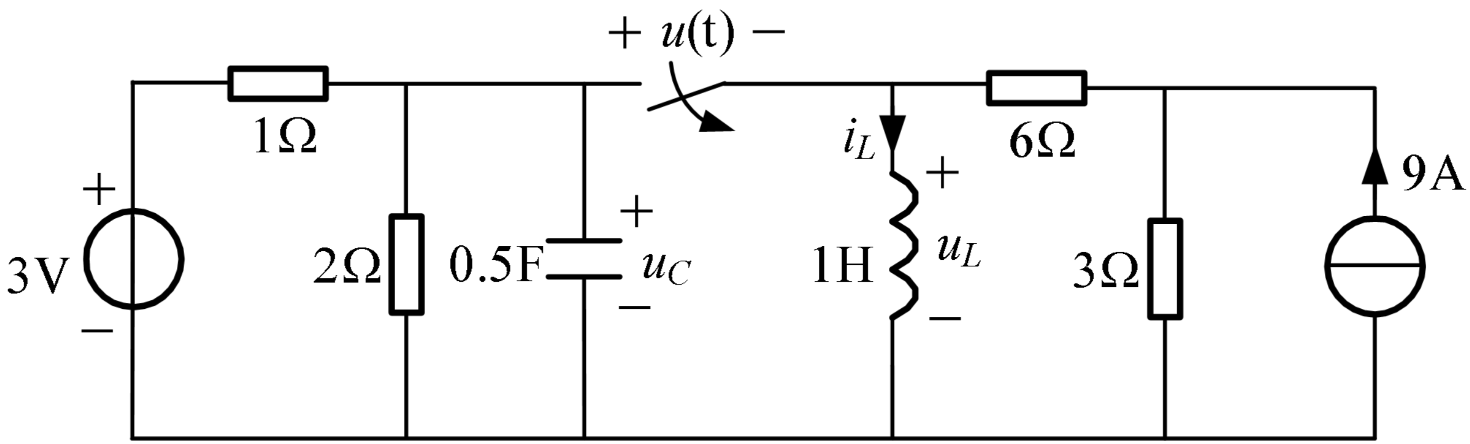
稳态值
$$\begin{cases} u_{C1}(\infty)=u_{C2}(\infty) \\ C_1u_{C1}(0_-)+C_2u_{C2}(0_-)=C_1u_{C1}(\infty)+C_2u_{C2}(\infty) \\ i(\infty)=0 \end{cases}$$

时间常数 $\tau=R\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$

$$y(t)=[y(0_+)-y(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}+y(\infty)$$

8.3 直流电源激励下的响应

例8-5 图示电路中各参数已给定，开关S打开前电路为稳态，$t=0$时开关S打开，求开关打开后电压u(t)。

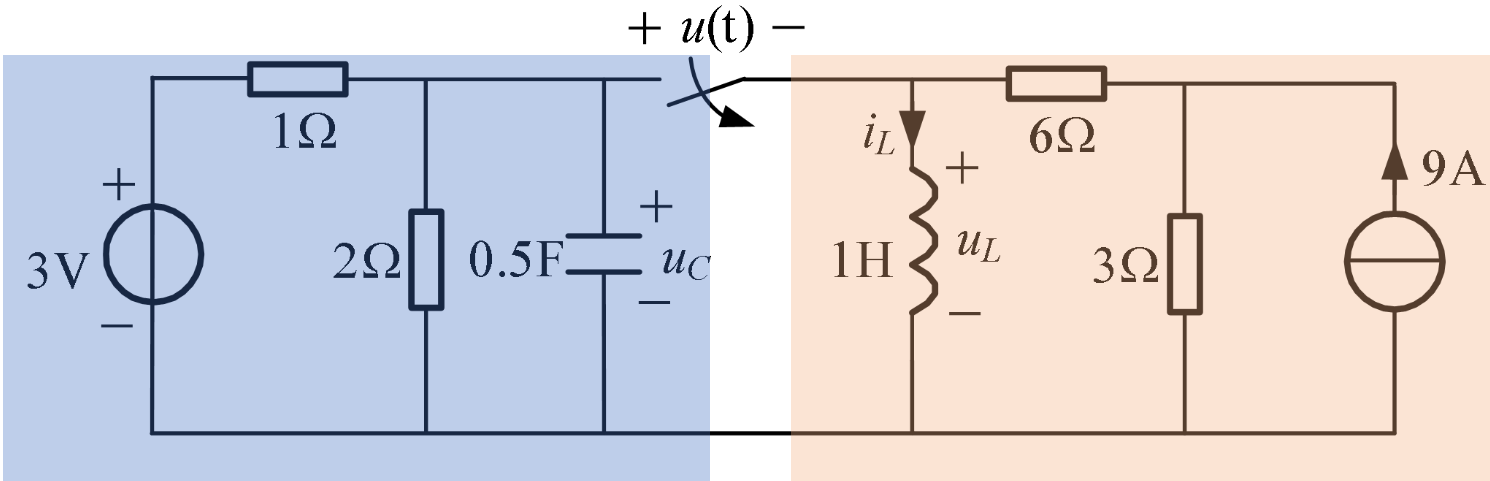


解 $u(t)=u_C(t)-u_L(t)$

开关打开前：C开路、L短路

$$u_C(0\_)=0 \qquad i_L(0\_)=\frac{3}{1}+9\times\frac{3}{6+3}=6\text{ A}$$

8.3 直流电源激励下的响应



零状态响应

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

$$u_C(\infty) = \frac{3}{1+2} \times 2 = 2\ \text{V}$$

$$\tau = R_{\text{eq}} C = \frac{1\times 2}{1+2} 0.5 = \frac{1}{3}\ \text{s}$$

$$\Rightarrow u_C(t) = 2\left(1 - e^{-3t}\right)\ \text{V}$$

全响应

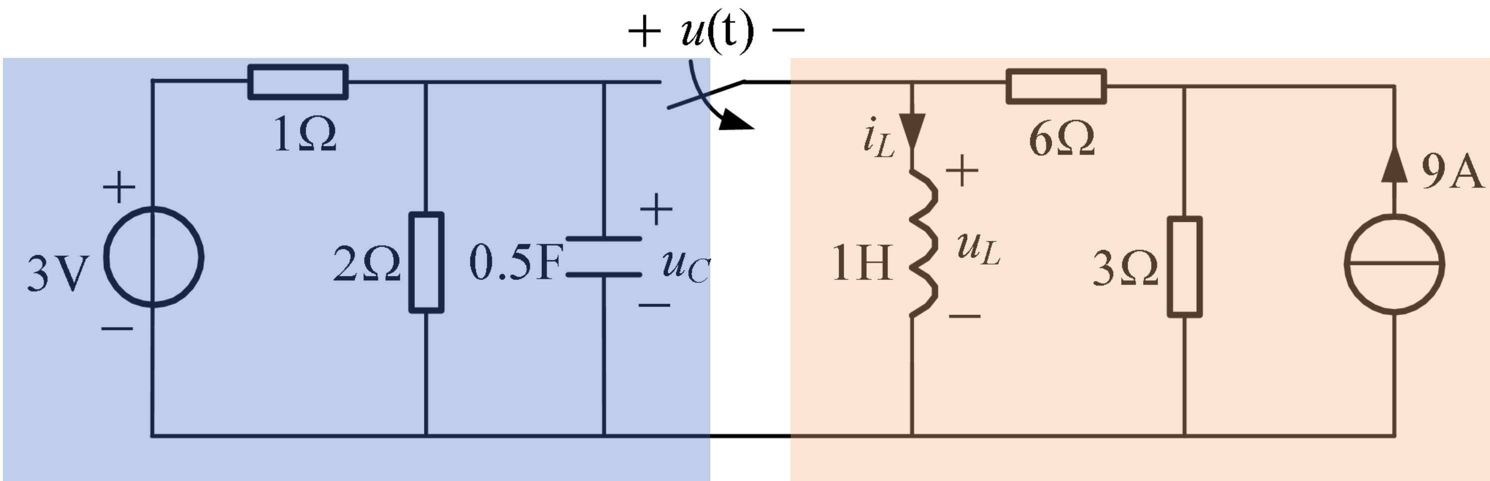
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 6\ \text{A}$$

$$i_L(\infty) = \frac{3}{3+6} \times 9 = 3\ \text{A}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{6+3} = \frac{1}{9}\ \text{s}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \left[3 + (6-3)e^{-9t}\right]\ \text{A}$$

8.3 直流电源激励下的响应



零状态响应

全响应

$$\Rightarrow u_C(t) = 2\left(1 - e^{-3t}\right)\ \text{V}$$

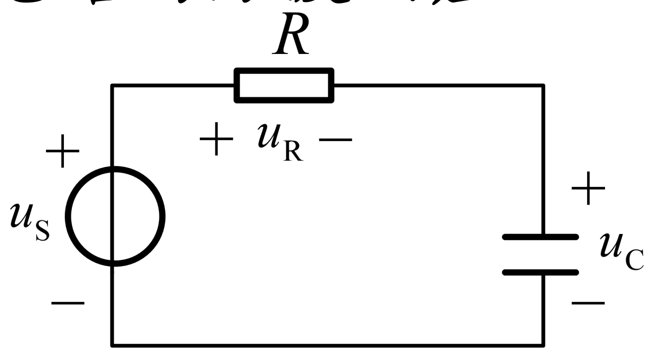
$$\Rightarrow i_L(t) = \left[3 + (6-3)e^{-9t}\right]\ \text{A}$$

$$\Rightarrow u(t) = u_C(t) - u_L(t)$$

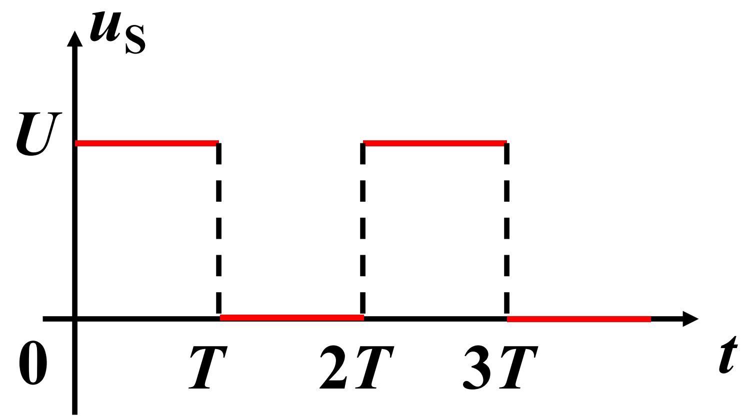
$$= u_C(t) - L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = 2\left(1 - e^{-3t}\right) + 27e^{-9t}\ \text{V}$$

8.3 直流电源激励下的响应

*RC*电路的方波响应



$u_C(0_-)=0$

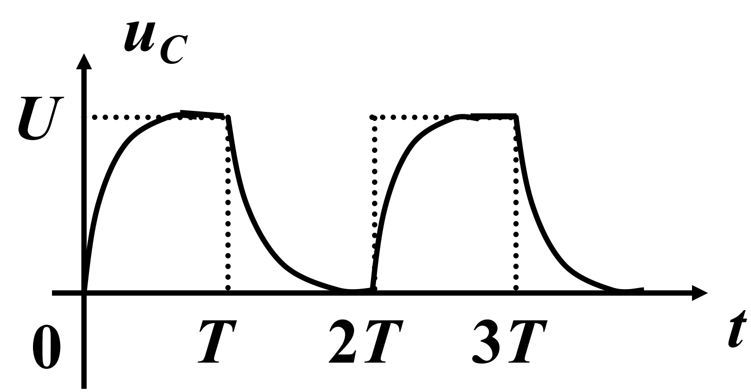


(1) $T>5\tau$　在每个T内均能达到稳态

当$0<t<T$时

$$u_C(0_+)=0 \qquad u_C(\infty)=u_C(T)=U$$

$$\tau=RC \quad \Rightarrow u_C=U\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\text{V}$$

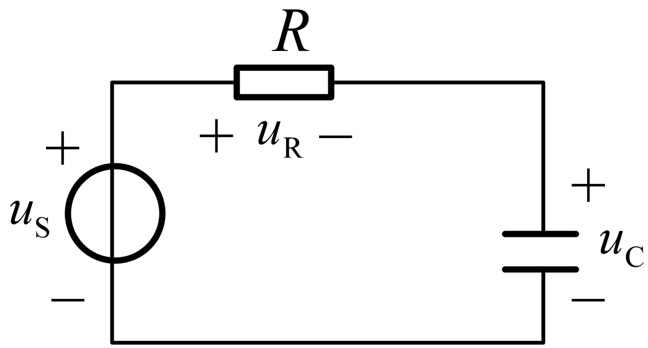


当$T<t<2T$时

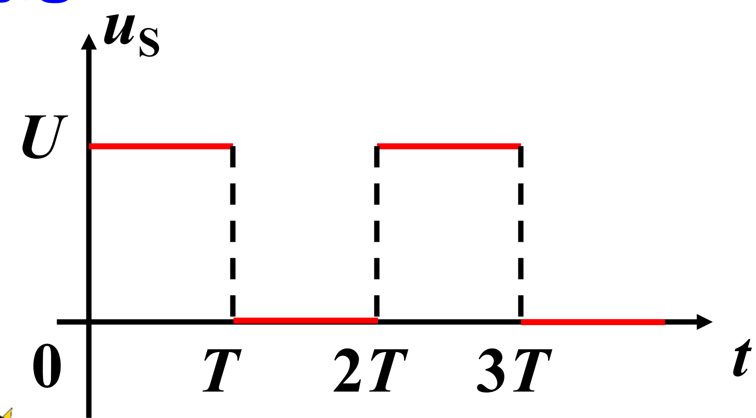
$$u_C(T_+)=U \quad u_C(\infty)=u_C(2T)=0 \quad \tau=RC \quad \Rightarrow u_C=Ue^{-\frac{t-T}{RC}}\text{V}$$

8.3 直流电源激励下的响应

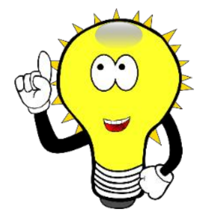
(2) $T<5\tau$　在每个T内均不能达到稳态



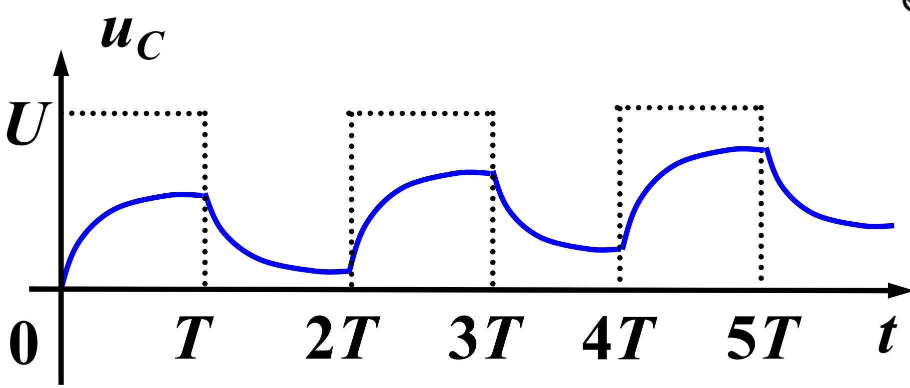
$u_C(0_-)=0$

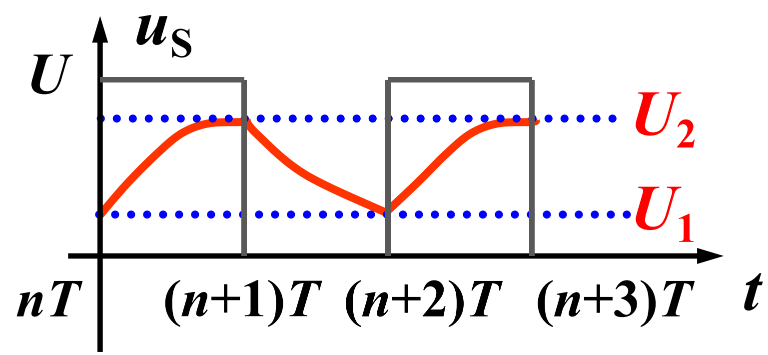


暂态过程：



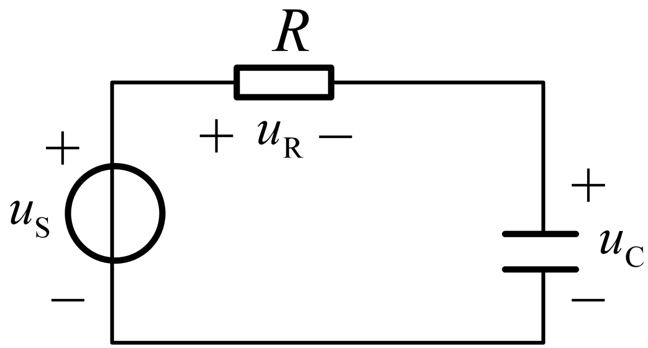
是否会达到稳态？



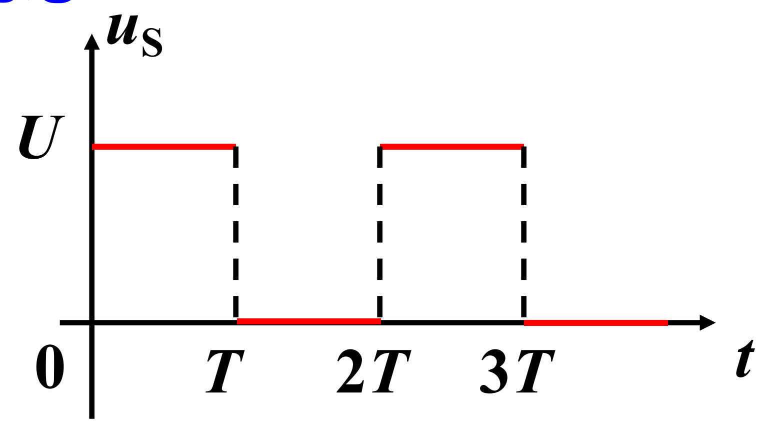


8.3 直流电源激励下的响应

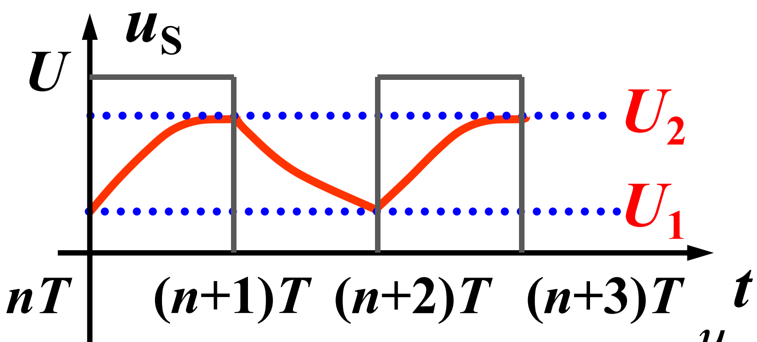
(2) $T<5\tau$　在每个T内均不能达到稳态



$u_C(0_-)=0$



稳态过程：



$nT<t<(n+1)T$　全响应

$u_C(nT)=U_1$　$u_C(\infty)=U$　$\tau=RC$

$$u_C=U+\left(U_1-U\right)e^{-\frac{t-nT}{RC}}\ \mathrm{V}$$

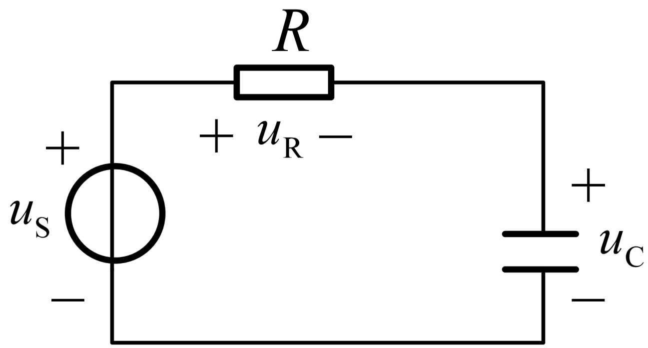
$(n+1)T<t<(n+2)T$　零输入响应

$u_C((n+1)T)=U_2$　$u_C(\infty)=0$　$\tau=RC$

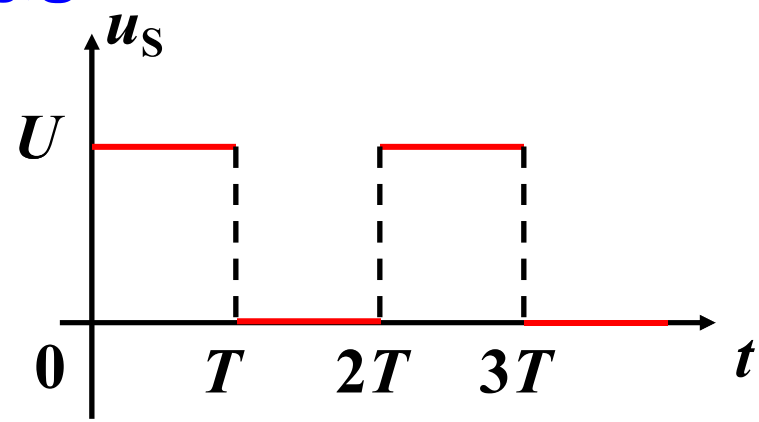
$$u_C=U_2e^{-\frac{t-(n+1)T}{RC}}\ \mathrm{V}$$

8.3 直流电源激励下的响应

(2) $T<5\tau$　在每个T内均不能达到稳态



$u_C(0_-)=0$



$nT<t<(n+1)T$

$$u_C=U+\left(U_1-U\right)e^{-\frac{t-nT}{RC}}\ \text{V}$$

$t=(n+1)\,T$

$$u_C=U+\left(U_1-U\right)e^{-\frac{T}{RC}}=U_2$$

$(n+1)T<t<(n+2)T$

$$u_C=U_2e^{-\frac{t-(n+1)T}{RC}}\ \text{V}$$

$t=(n+2)\,T$　$u_C=U_2e^{-\frac{2T-T}{RC}}=U_1$

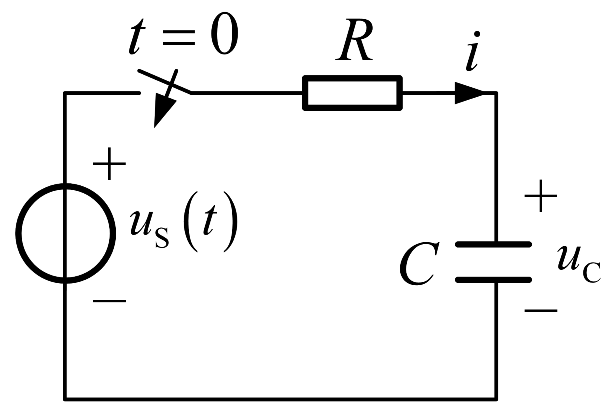
如何求U_1和U_2?

利用边界条件求出

$$U_1=\frac{Ue^{-\frac{T}{RC}}}{1+e^{-\frac{T}{RC}}}=\frac{U}{1+e^{\frac{T}{RC}}}\qquad U_2=\frac{U}{1+e^{-\frac{T}{RC}}}$$

8.4 正弦电源激励下的RC电路

微分方程： $RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_s \qquad t>0$



$u_S(t)=U_m\cos(\omega t+\phi)$

$u_C(0_-)=U_0$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$$

$$u_C=ke^{-t/RC}+u_{CP} \qquad u_{CP}=A_m\cos(\omega t+\theta)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} A_m=\dfrac{U_m}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \\ \theta=\phi-\arctan(\omega RC) \end{cases}$$

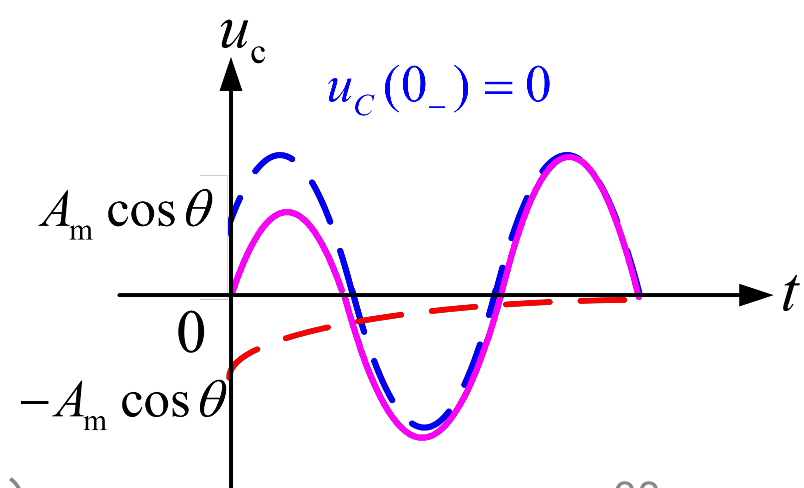
$$u_C=ke^{-t/RC}+A_m\cos(\omega t+\theta)$$

$$U_0=ke^{-0/RC}+A_m\cos\theta$$

$$\Rightarrow k=U_0-A_m\cos\theta$$

$$u_C=(U_0-A_m\cos\theta)e^{-\frac{1}{RC}t}+A_m\cos(\omega t+\theta)$$

暂态分量　　　　稳态分量



8.4 正弦电源激励下的*RC*电路

在零状态下，$U_0 = 0$

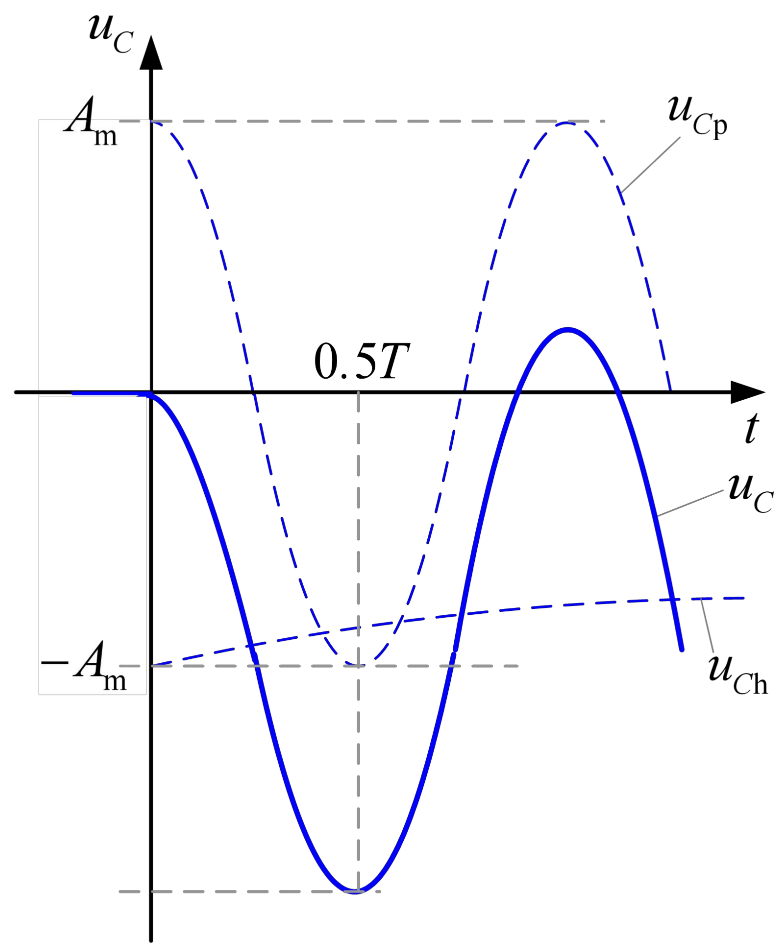
$$u_C = -A_{\mathrm{m}} \ \text{o} \ \theta e^{-\frac{1}{RC}t} + A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \theta)$$

若 $\begin{cases} \theta = \phi - \arctan\omega RC = 0 \\ 5\tau \gg T \end{cases}$

则u_C在$t = 0.5T$附近达到峰值

$$u_C \approx -A_{\mathrm{m}} + A_{\mathrm{m}}\cos\pi = -2A_{\mathrm{m}}$$

如果当电压的稳态分量经过极大值时换路，而电路的时间常数又很大，则换路后电压的最大瞬时绝对值接近于稳态电压振幅的2倍。**在工程中要注意电容器的耐压。**



8.6 线性非时变特性

线性非时变电路：

- 除独立电源外，元件是线性、非时变元件。
- 线性非时变动态电路的微分方程是常系数线性微分方程。

$$\text{输入} \longrightarrow \boxed{\text{线性非时变动态电路}} \longrightarrow \text{零状态响应}$$

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$$

线性特性 $k_1x_1(t)+k_2x_2(t) \longrightarrow k_1y_1(t)+k_2y_2(t)$

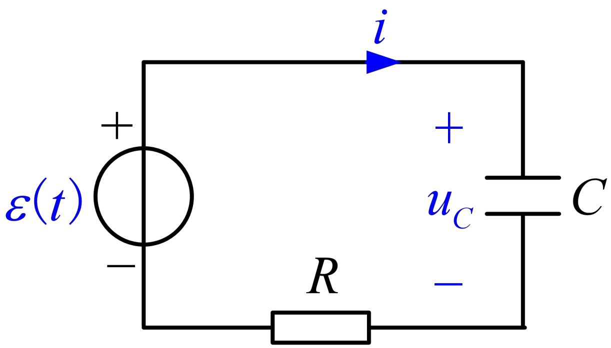
非时变特性 $x_1(t-t_0) \longrightarrow y_1(t-t_0)$

只适用于零状态响应

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ &\int_{-\infty}^{t} x_1(t)\mathrm{d}t \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} y_1(t)\mathrm{d}t \end{aligned}\right.$$

8.7 冲激响应计算

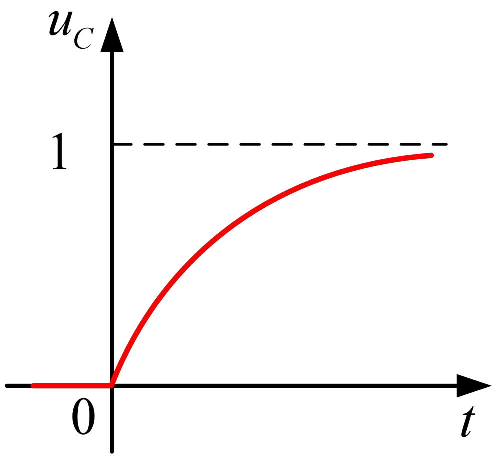
单位阶跃响应



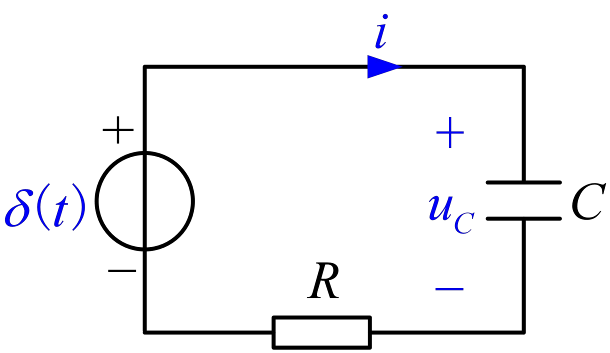
$s(t)$：单位阶跃响应

$$u_C = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



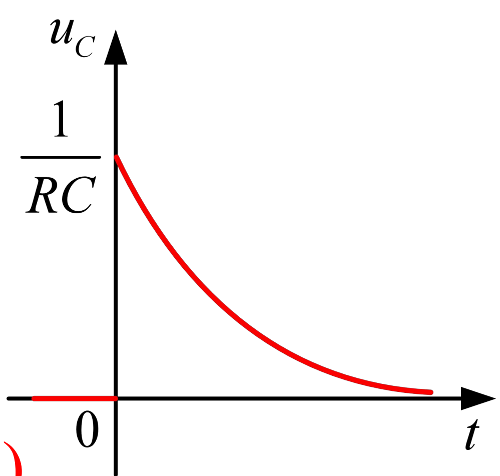
单位冲激响应 $\delta(t) = \mathrm{d}\varepsilon(t)/\mathrm{d}t$



$$h(t) = \mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t$$

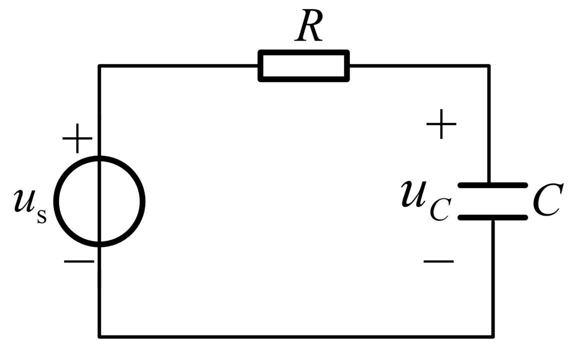
$$u_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

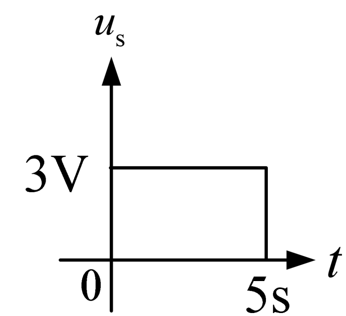
$$i(t) = -\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) + \frac{1}{R}\delta(t)$$



8.7 冲激响应计算

例8-6 求零状态响应 u_C





解

$$u_s = [3\varepsilon(t) - 3\varepsilon(t-5)]\ \text{V}$$

$$u_C = 3\text{s}(t) - 3\text{s}(t-5)$$

$$\text{s}(t) = [(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)]\ \text{V}$$

$$u_C = [3(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) - 3(1 - e^{-\frac{t-5}{RC}})\varepsilon(t-5)]\ \text{V}$$

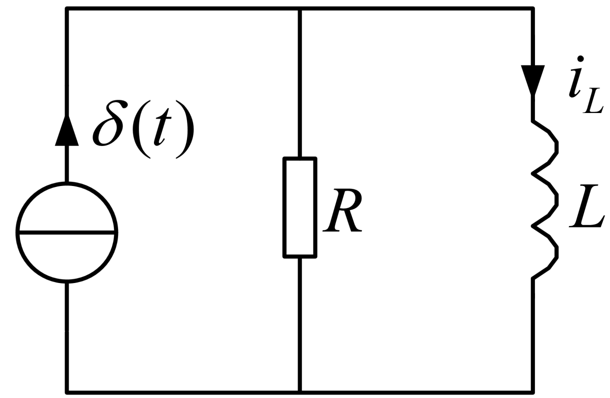
$0<t<5$: 零状态响应 $$u_C = 3(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\ \text{V}$$

$t>5$: 零输入响应 $$u_C(5_-) = 3(1 - e^{-\frac{5}{RC}}) = u_C(5_+)$$

$$\Rightarrow u_C(t) = 3(1 - e^{-\frac{5}{RC}})e^{-\frac{t-5}{RC}}\ \text{V}$$

8.7 冲激响应计算

例8-7 求冲激响应i_L



$$\tau = \frac{L}{R}$$

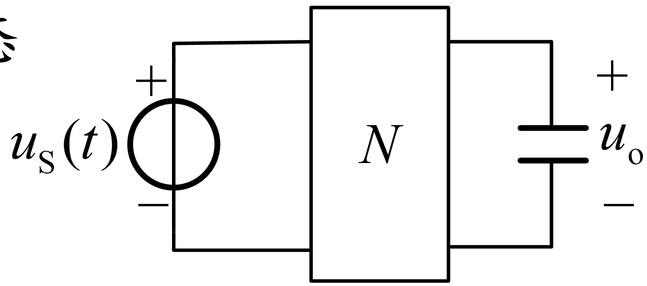
解 由阶跃响应获得冲激响应

$$\mathrm{s}(t) = i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$
$$= (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

$$\mathrm{h}(t) = \frac{\mathrm{ds}(t)}{\mathrm{d}t} = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\delta(t) + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$
$$= \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

8.7 冲激响应计算

例8-8 含独立电源的线性时不变网络N的零输入响应为e^{-t}V；原始储能不变，电压源$u_s(t)=\delta(t)$V激励下的全响应为$3e^{-t}$V。试确定$u_s(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$V下的零状态响应。

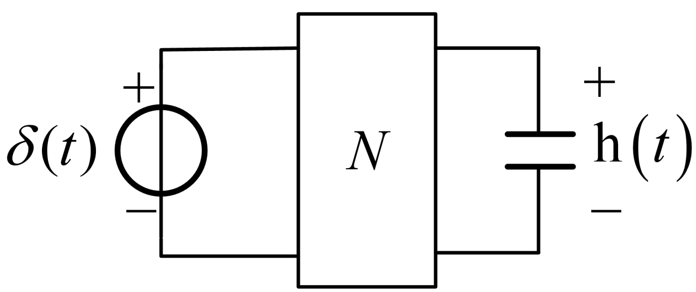


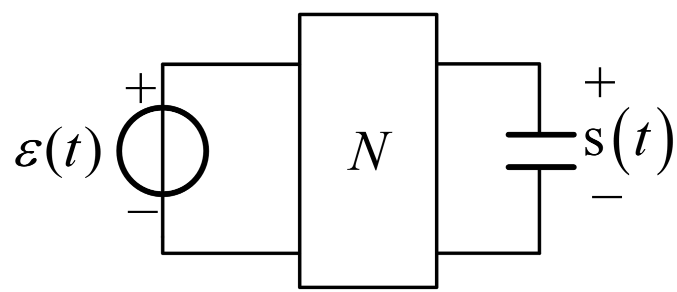
解 电压源 $u_s(t)=\delta(t)$V 激励下的零状态响应为：

$$h(t)=(3e^{-t}-e^{-t})\varepsilon(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)dt=\int_{-\infty}^{t}2e^{-t}\varepsilon(t)dt=(\int_{0}^{t}2e^{-t}dt)\varepsilon(t)=(2-2e^{-t})\varepsilon(t)$$

$$u_o(t)=(2-2e^{-t})\varepsilon(t)-[2-2e^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$





课后作业

- 8.2节：8-2、8-4
- 8.3节：8-13、8-18，8-31
- 8.5节：8-37
- 8.6节：8-41
- 8.7节：8-48

谢谢聆听！！

刘旭 2023-4-17