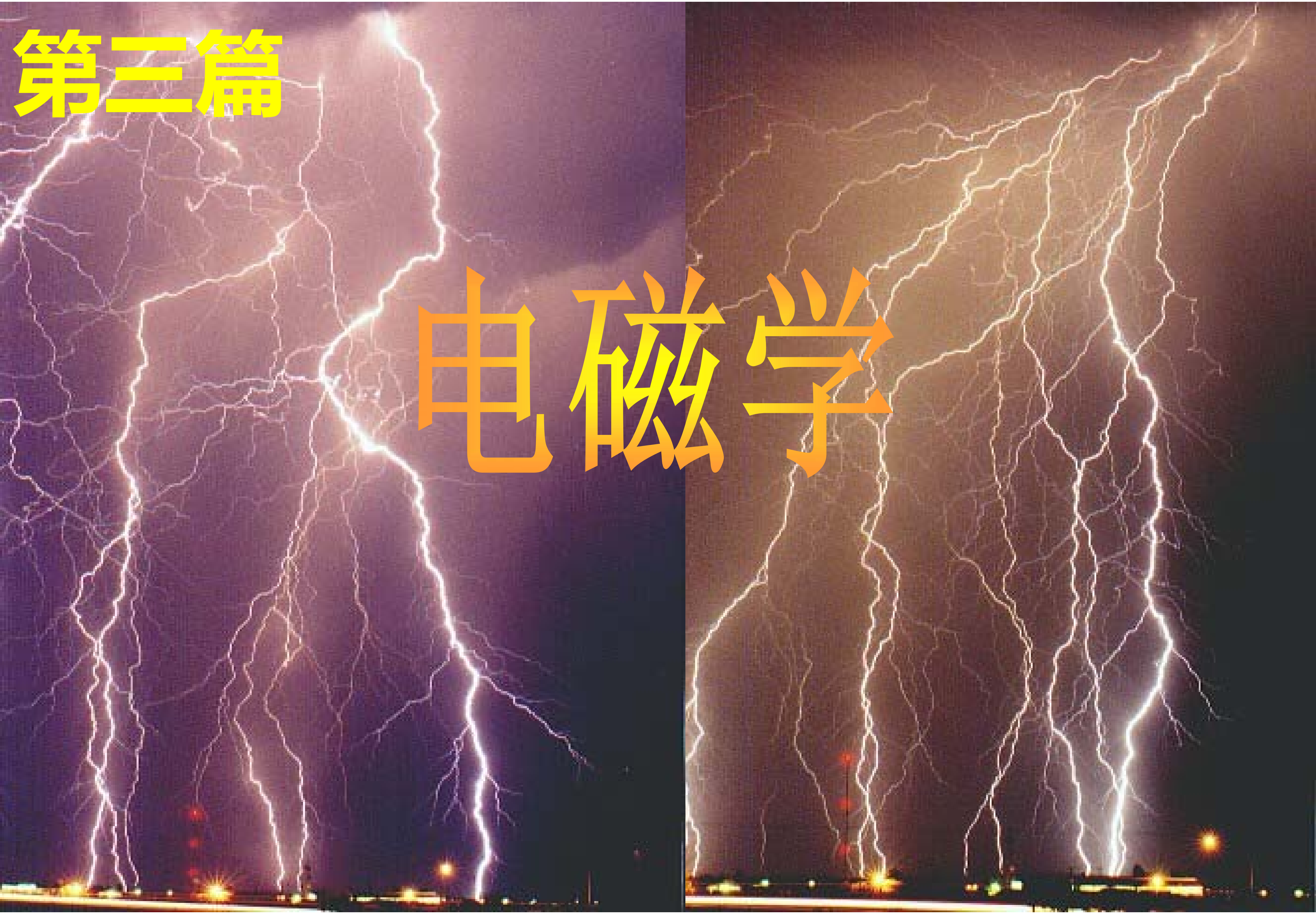
大学物理(二)

华 中 科 技 大 学

刘逆霜

nishuang_liu@foxmail.com

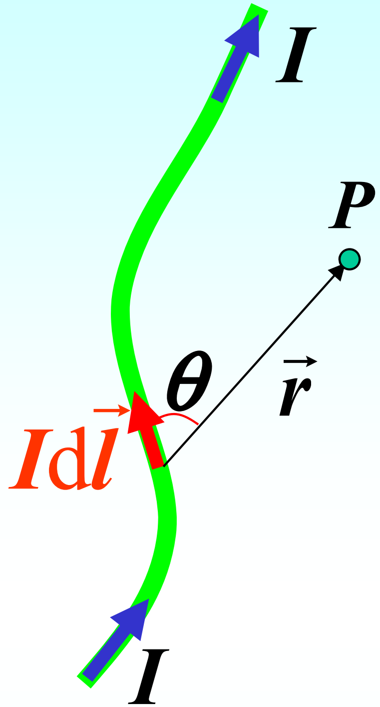

第三篇
电磁学

第7章　稳恒磁场

- 毕奥 — 萨伐尔定律

  电流元$I\mathrm{d}\vec{l}$在P点产生的磁感应强度为

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$



- 磁偶极矩　$\vec{P}_m = IS\vec{n}$

- 高斯定理　$\oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$ → 无源场

- 安培环路定理　$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\sum I_i$ → 有旋场

利用安培环路定理可以计算对称性磁场的$\vec{B}$

绚丽多彩的极光

A Starry Night of Iceland

北极光

在地磁两极附近，由于磁感线与地面垂直，外层空间入射的带电粒子可直接射入高空大气层内，它们和空气分子的碰撞产生的辐射就形成了极光。

六、 磁场与实物粒子的相互作用

1. 带电粒子的受力

设带电为q的粒子处在电场和磁场同时存在的空间，

若 $\vec{v}=0$ 则： $\vec{F}_e=q\vec{E}$

$\vec{v}\neq 0$ 则：$\vec{F}_e=q\vec{E}$，$\vec{F}_m=q\vec{v}\times\vec{B}$——洛仑兹力

$$\vec{F}=\vec{F}_e+\vec{F}_m=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$ ——也称为洛仑兹力。

即：

静止电荷只受电场力作用；

运动电荷，既受电场力，又受磁场力作用。

$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B} \perp \vec{v}$　　洛伦兹力不做功

四个诺贝尔物理奖：

回旋加速器（1939年）　　电子显微镜（1986年）

量子霍尔效应（1985年）　分数量子霍尔效应（1998年）

◆ 下面分三种情况讨论：

①若 $\vec{v} // \vec{B}$，磁场对带电粒子的作用力为零，

粒子仍以原速度作匀速直线运动。

② q以 $\vec{v}\perp\vec{B}$ 进入磁场：

运动方程： $qvB=\dfrac{mv^2}{R}$

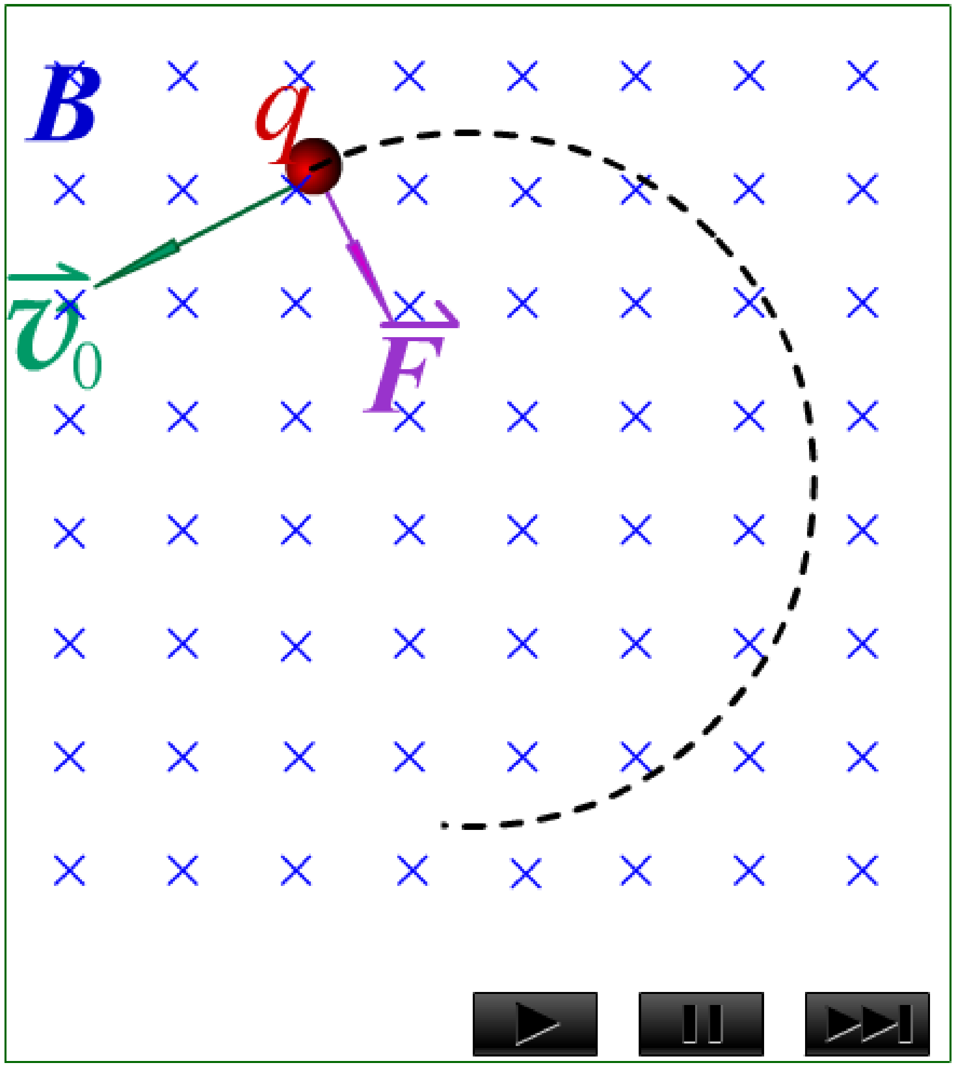
得： $R=\dfrac{mv}{qB}$

q转一周的时间：

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi m}{qB}$$

——回旋周期

频率： $\nu=\dfrac{1}{T}=\dfrac{qB}{2\pi m}$



为磁聚焦，回旋加速器的基本理论依据。

③普遍情形下 $(\widehat{\vec{v},\vec{B}})=\theta$ (任意角)

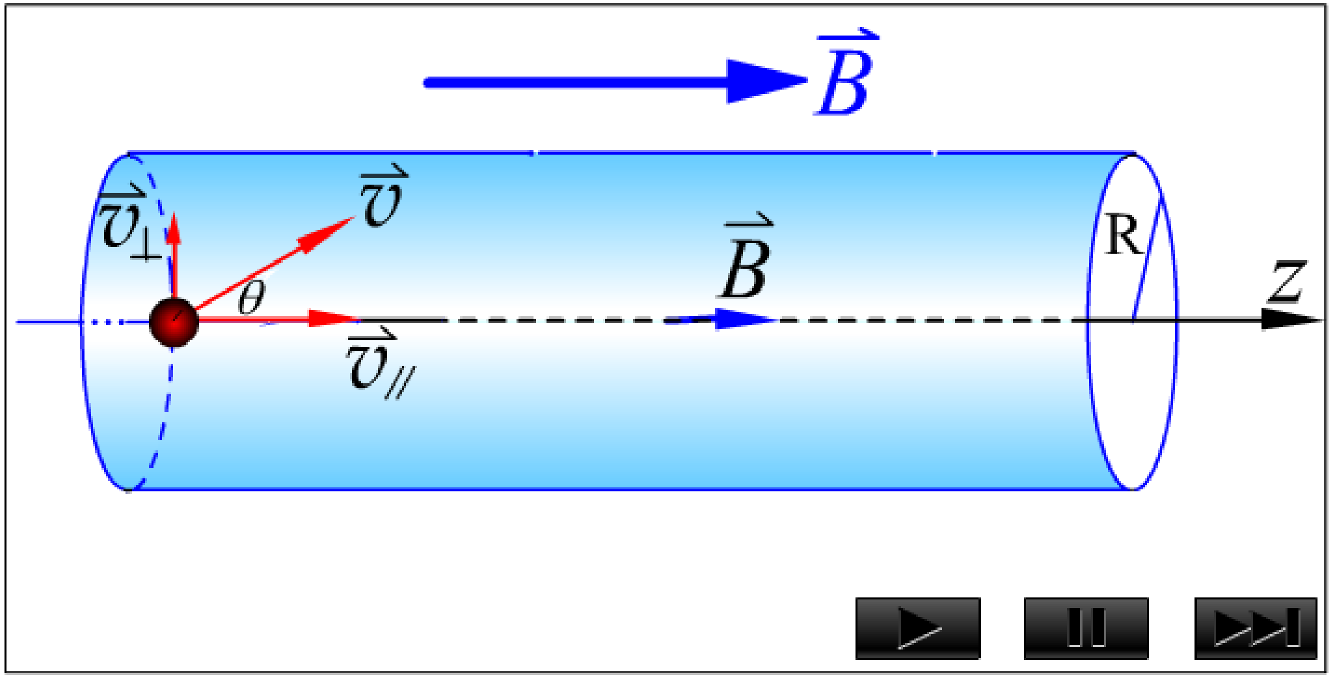
$\vec{v}$ 可分解

$v_{//}=v\cos\theta$ 沿磁场方向匀速直线运动。

$v_{\perp}=v\sin\theta$ ⊥磁场平面匀速率圆周运动。

运动合成 ⟶ 螺旋线。

$$R=\frac{mv_{\perp}}{qB}$$



$$T=\frac{2\pi m}{qB}$$

螺距:

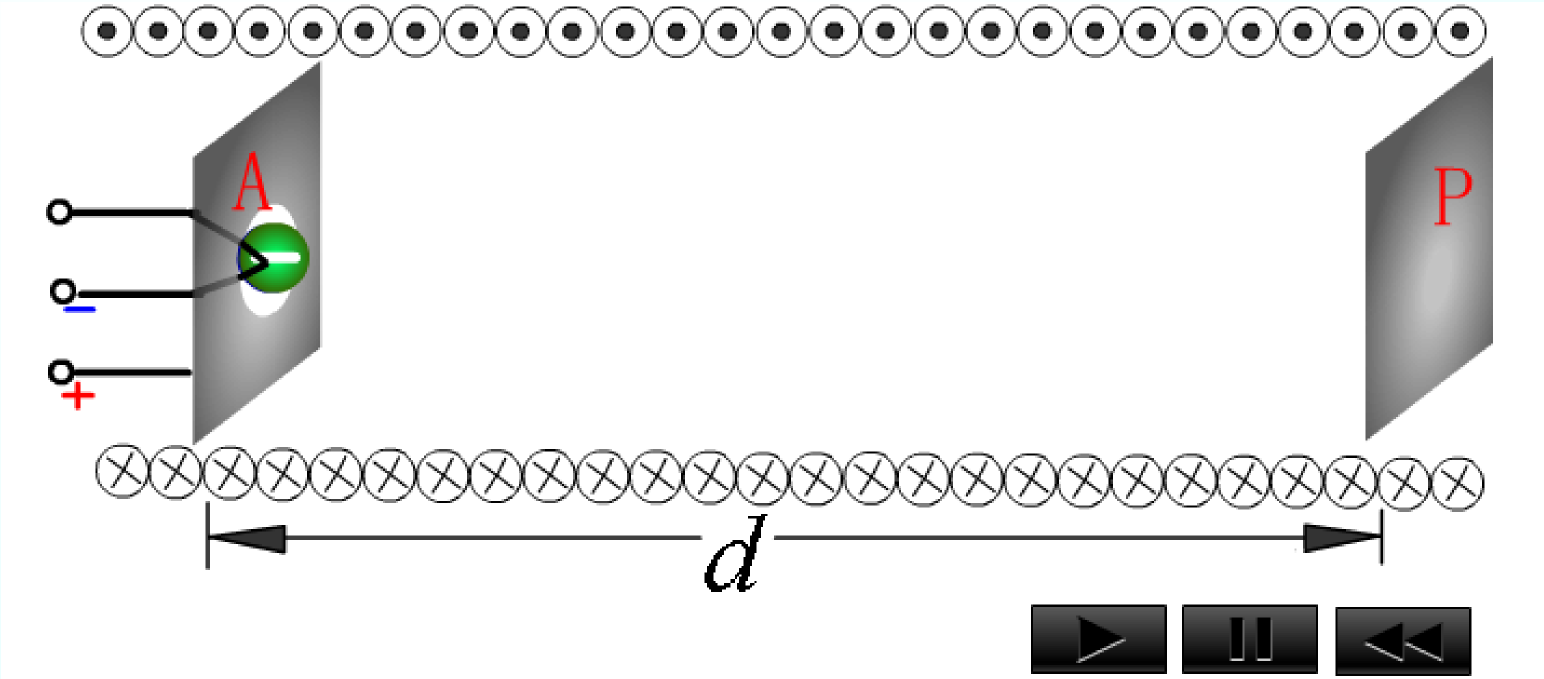
$$d=v_{//}T=\frac{2\pi m v_{//}}{qB}$$

2. 磁聚焦

$$v_{//}=v\cos\theta \qquad d=\frac{2\pi m v_{//}}{qB}$$

当带电粒子束发散角不太大时，即θ很小： $v_{//}\approx v$

若带电粒子的速度大致相同， 则螺距近似相等，



粒子束经过一个回旋周期后，重新会聚。

广泛应用于电子光学特别是电子显微镜中。

3. 磁约束

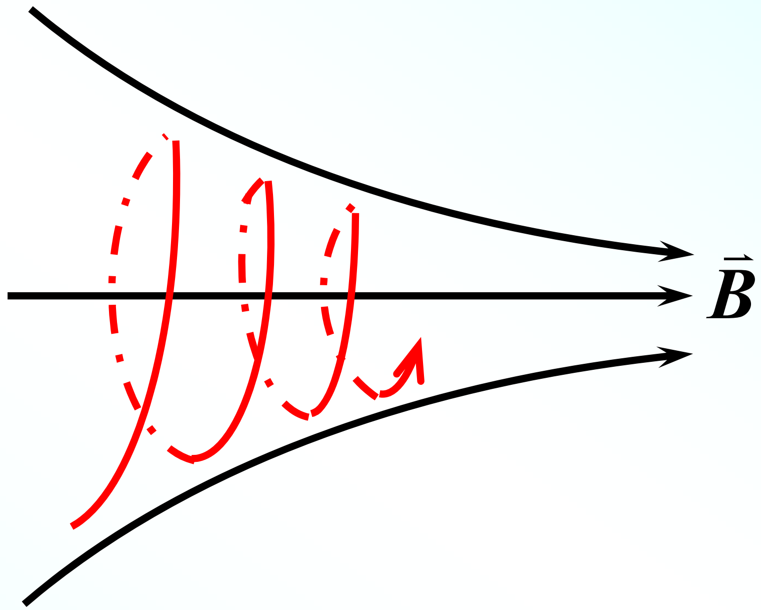
$$R=\frac{mv_{\perp}}{qB} \qquad d=\frac{2\pi m v_{//}}{qB}$$

等离子体, 受控热核反应

在非均匀磁场中，速度方向与磁场方向不同的带电粒子，也要作螺旋运动，但R和d都将不断发生变化。

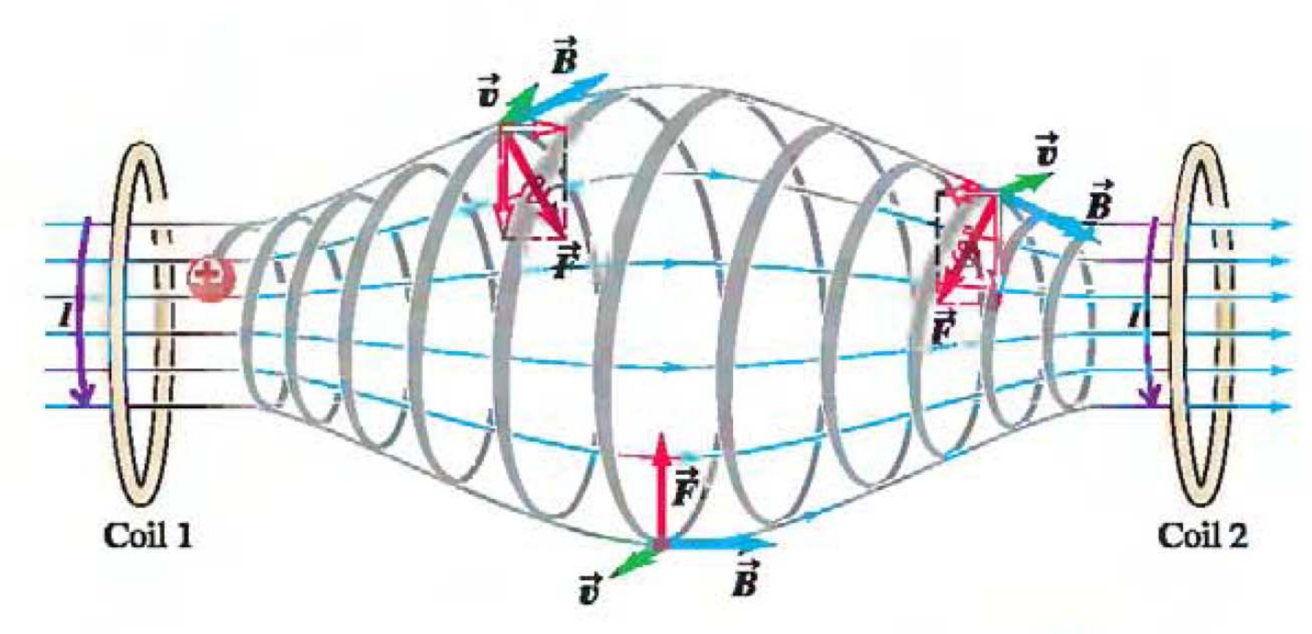
横向磁约束：

磁场越强，半径越小。在强磁场中，带电粒子被约束在一根磁感应线附近很小范围内，只能沿磁感应线作纵向运动。



纵向磁约束：

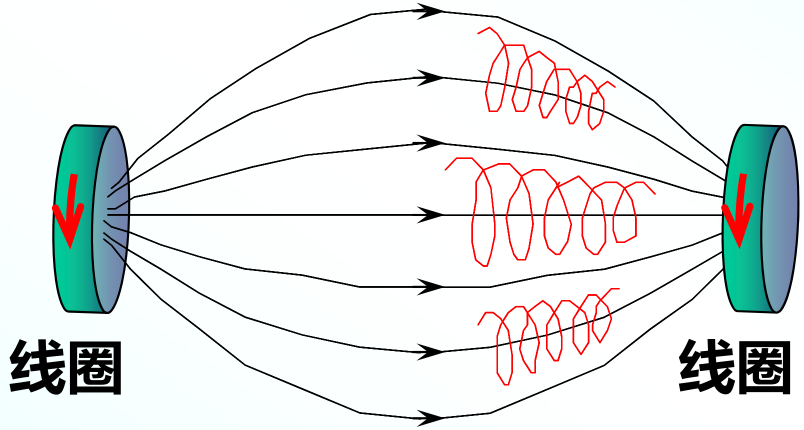
磁场由弱到强的配置称为磁镜。



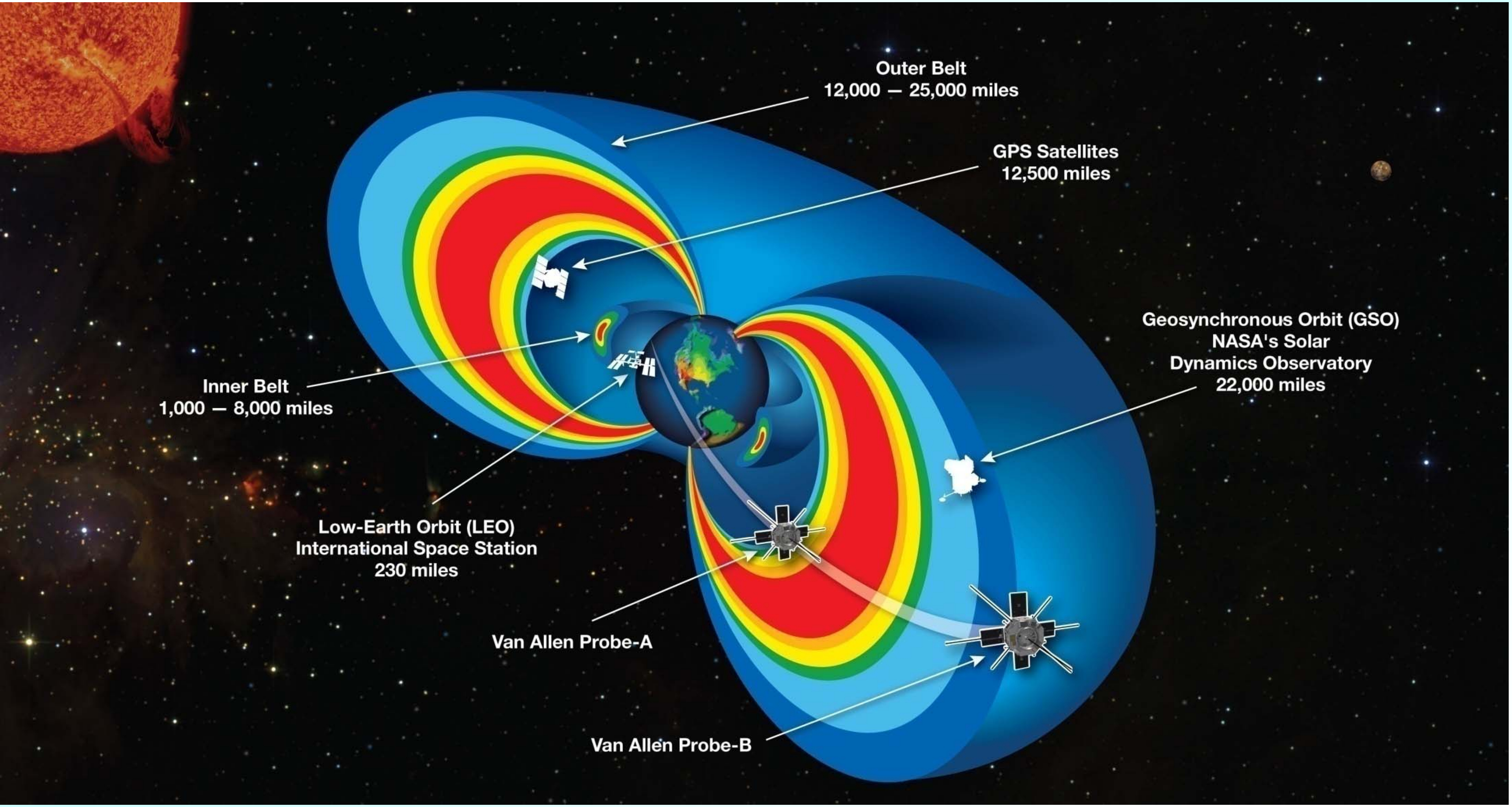
带电粒子会像光在两面镜子间来回反射那样，被限制在两磁镜之间的范围内。

能约束带电粒子运动的磁场分布称为磁镜约束 。

—— 磁瓶



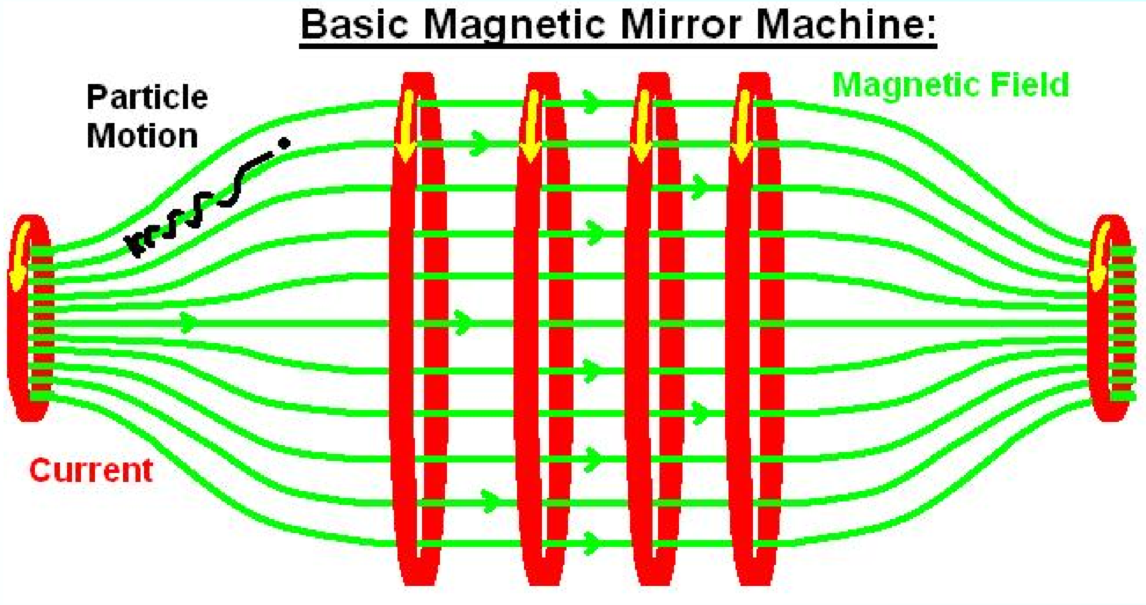
地球磁场中间弱、两极强
地球的磁约束效应 —— 天然磁瓶



范阿仑辐射带 Van Allen radiation belt

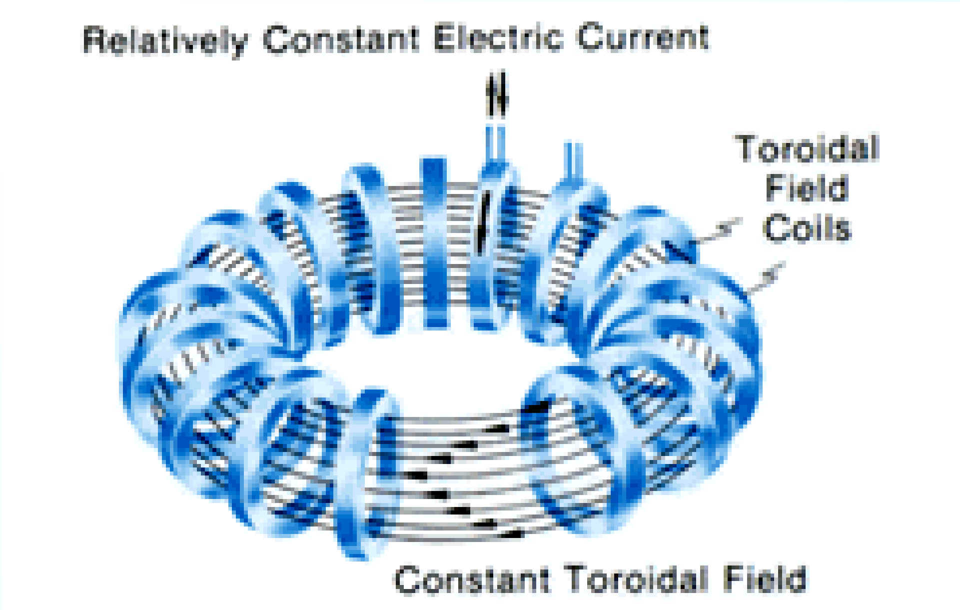
Science **340**, 186 (2013).

磁约束

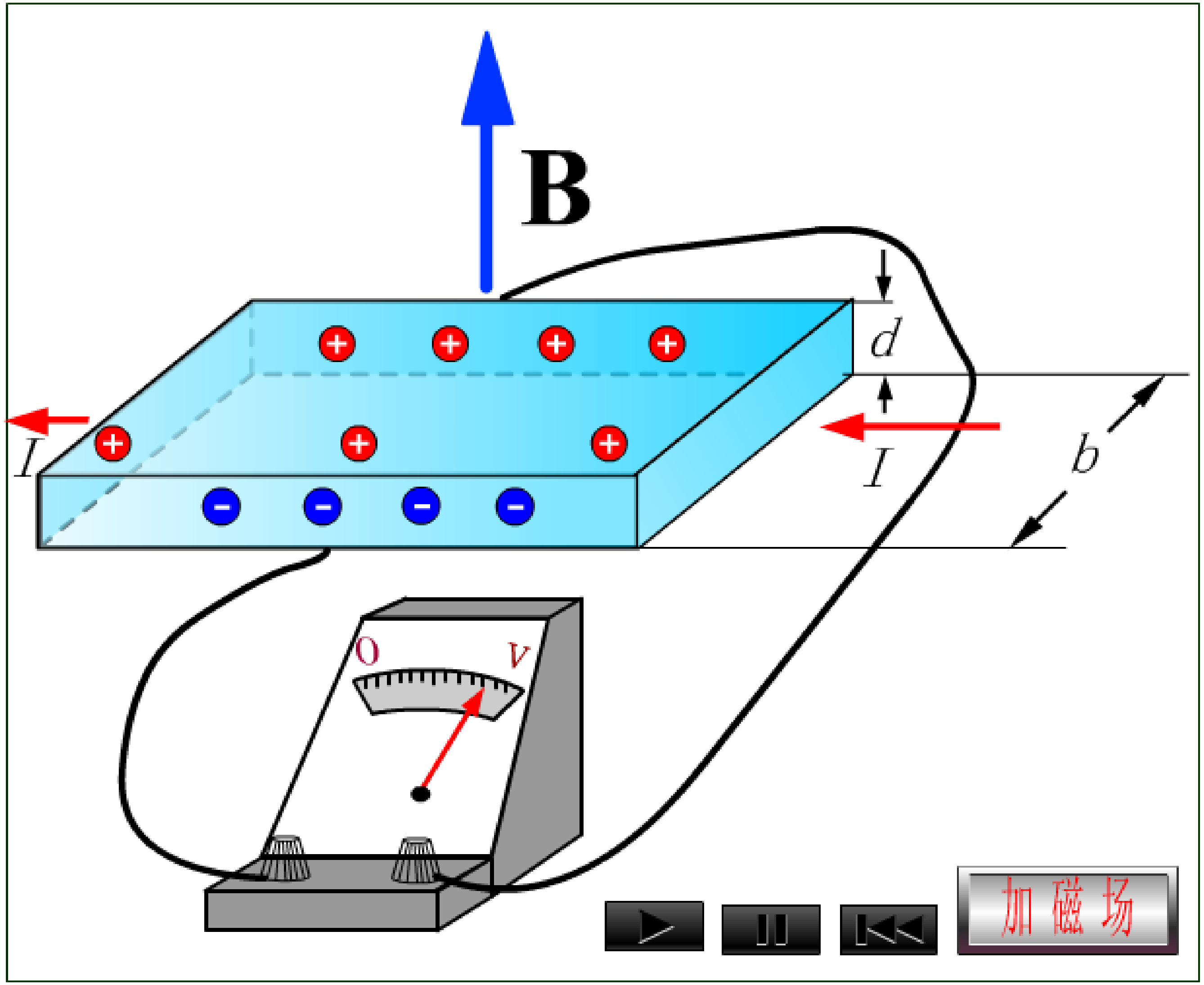


注：平行磁场方向的速度分量较大的粒子，可能从两端逃逸出去。

环形磁场结构可以避免这个缺点。



4. 霍耳效应



在一个通有电流的导体(或半导体)板上，若垂直于板面施加一磁场，则在与电流和磁场都垂直的方向上, 板面两侧会出现微弱电势差。

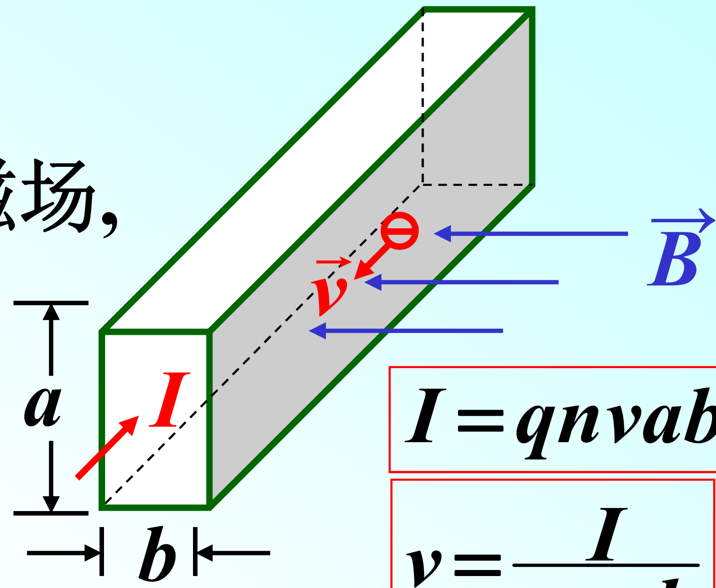
◆ 霍尔电压、霍尔电场

通电金属条中，电子以平均速度$\vec{v}$漂移。

加上与电流方向和金属条侧面垂直的磁场,

则电子受磁场力的作用,且

$$\vec{f}=q\vec{v}\times\vec{B}$$ 方向向上



$$I=qnvab$$

$$v=\frac{I}{qnab}$$

结果在金属条的上下表面分别出现负、正电荷的积累, 形成横向电场, 对电子产生向下的电场力, 并迅速增加, 最终与磁场力平衡.

$$\left|q\vec{E}_H\right|=\left|q\vec{v}\times\vec{B}\right| \qquad E_H=vB$$ ——称为霍耳电场

处在磁场中的导体，其载流子因受磁场力作用而积累,并建立横向电场的现象称为霍耳效应。

在上下两表面间出现稳定的电势差V_H ——霍耳电压

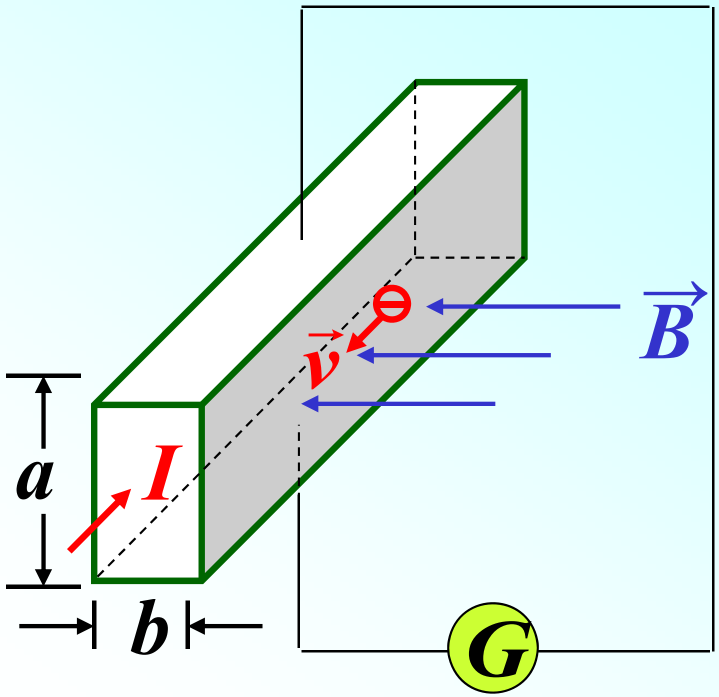
$$V_H=\int\vec{E}_H\cdot d\vec{l}=\int_0^a vB\,dl=vBa \qquad V_H=\frac{1}{nq}\frac{IB}{b}=R_H\frac{IB}{b}$$

00:18:48

$$\boxed{V_H = R_H \frac{IB}{b}} \quad \boxed{R_H = \frac{1}{nq}}$$

说明：

(1) R_H：霍耳系数，与导体材料有关。
此处R_H=1/(nq)只对单价金属成立。



(2)接通上下表面则有电流

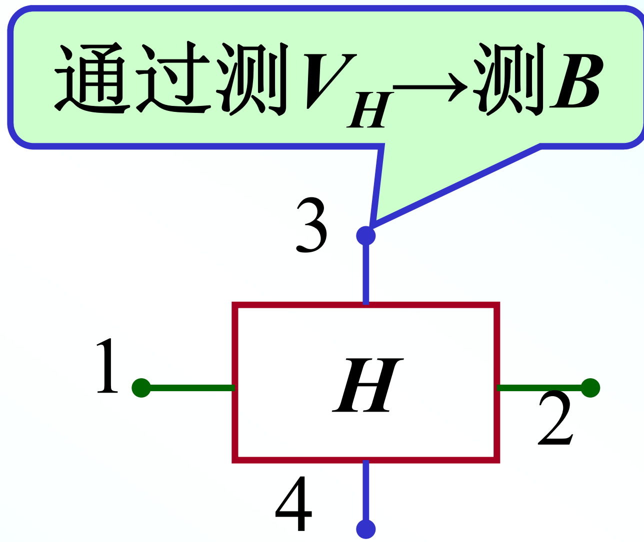
(3)霍尔效应的应用

1° 测试半导体的类型 $<$ n型 电子导电 / p型 空穴导电

2° 测磁场：测磁场常用高斯计

3° 可计算载流子浓度

4° 测大电流，转换交直流信号等



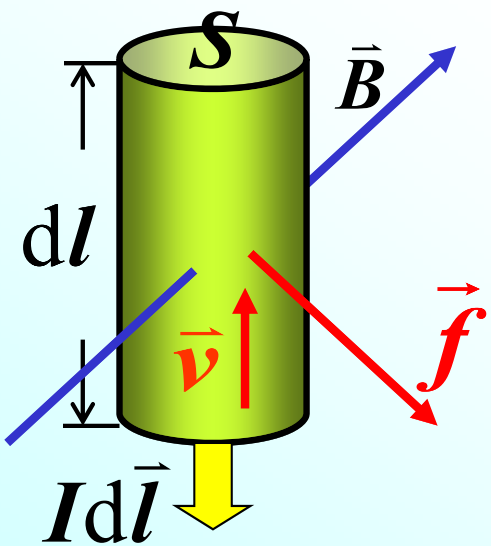
5. 载流导体在磁场中所受的力

1) 安培力：载流导体在外磁场受到的磁力。

载流导体所受安培力 = 各电流元所受的磁场力之矢量和

可从运动电荷所受的洛仑兹力导出电流元所受的安培力。

2) 安培定律：$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$



取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$， 横截面为S， $\boxed{\mathrm{d}\vec{l} = -\vec{v}\mathrm{d}t}$

此电流元处的磁感应强度记作 $\vec{B}$

其内每个定向运动的电子受力 $\vec{f} = e\vec{v} \times \vec{B}$

设自由电子的数密度为n，则其总数为

$$\mathrm{d}N = n\mathrm{d}lS$$

电流元受力：$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}N \cdot \vec{f} = n\mathrm{d}lS \cdot e\vec{v} \times \vec{B}$

$$= -neSv \cdot \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-ne \cdot S\mathrm{d}l)$$

$$= -neSv$$

$$\boxed{\therefore \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$$

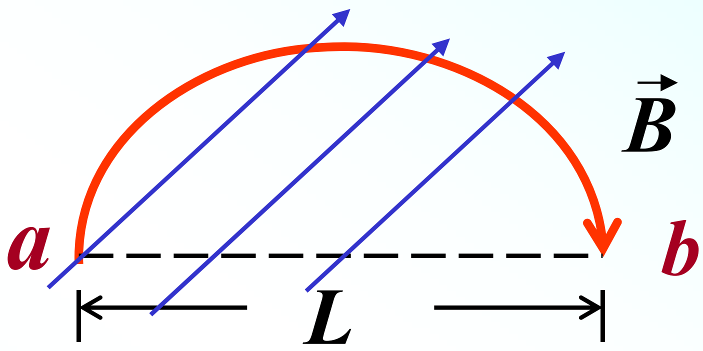
00:18:48

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$$ (安培定律)

任意载流导体在磁场中所受的合力为：

$$\vec{F} = \int_0^l I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

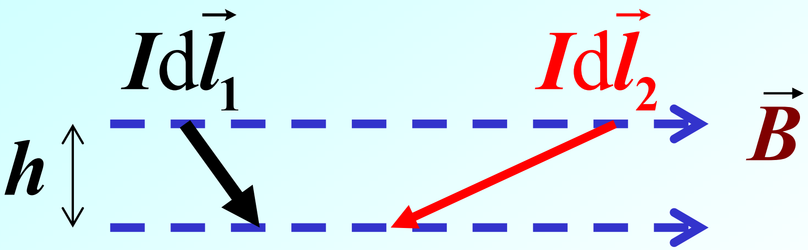
例: 在均匀磁场 $\vec{B}$ 中有一弯曲导线 ab，通有 I 电流，求其所受的磁场力。



00:18:48

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

解： 如图, 作一组与 $\vec{B}$ 同向的平行线.



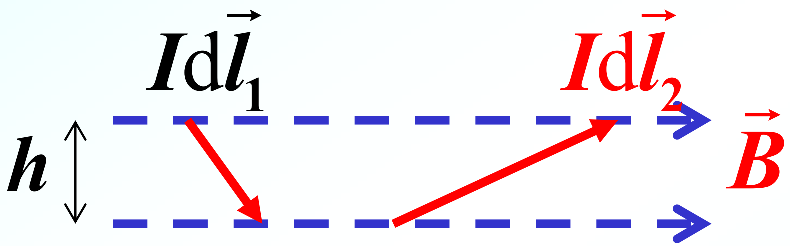
$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_a^b Id\vec{l} \times \vec{B}$$

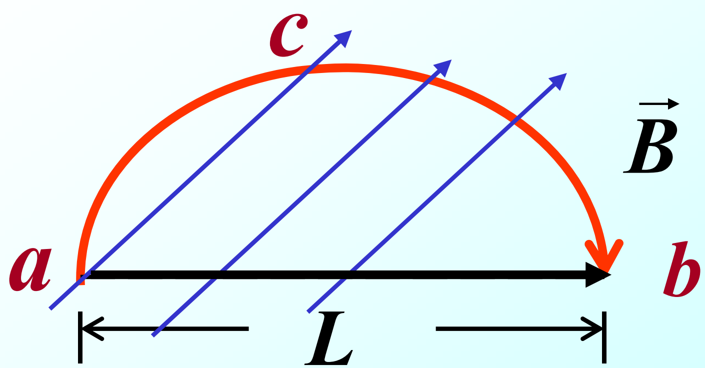
$$= I\left(\int_a^b d\vec{l}\right) \times \vec{B}$$

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{F}_1 = Id\vec{l}_1 \times \vec{B} \\ d\vec{F}_2 = Id\vec{l}_2 \times \vec{B} \end{array}\right\}$$ 同向, 均垂直向外.

$\left|d\vec{F}_1\right| = \left|d\vec{F}_2\right| = IBh$ 大小相等.

两电流元受力相同。故 cb 段受力与 ab 直线段相同。





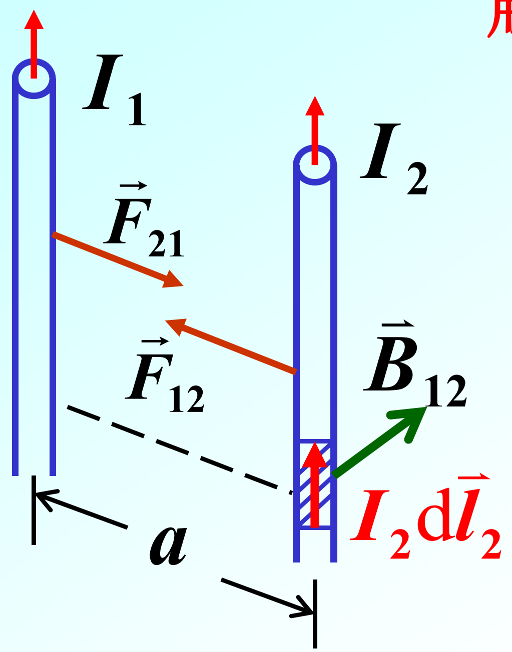
两电流元受力大小相等，方向相反。

ac 段受力为 0 。

综上可知，通电流相同时，acb 段受力与 ab 直线段相同。故

$$\vec{F} = I \cdot \overrightarrow{ab} \times \vec{B}$$

例: 求两平行无限长直导线通有相同电流时的相互作用力。



解: 1）求F_{12}

$$\vec{F} = \int_0^L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

在I_2上取电流元$I_2\mathrm{d}l_2$

$$\vec{F}_{12} = \int I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}$$

$I_2\mathrm{d}l_2$处的磁场为:

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$ 方向垂直 $I_2\mathrm{d}\vec{l}$.

$$\therefore F_{12} = \int I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\mathrm{d}l_2 = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\int \mathrm{d}l_2$$ 指向I_1

同理: $$F_{21} = \int I_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\mathrm{d}l_1 = I_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\int \mathrm{d}l_1$$ 指向I_2

2）单位长度的受力: $$f_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a};\quad f_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}.$$

结论: 两力大小相等，方向相反

- 电流同向→吸引力
- 电流反向→排斥力

00:18:48

$$f_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a};\quad f_{21}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}.$$

3）若令a=1m，$I_1=I_2=I$

则有：$F=\dfrac{\mu_0}{2\pi}I^2$ ——单位长度上的受力。

$$I=\sqrt{\frac{2\pi F}{\mu_0}}$$

当 $F=\dfrac{\mu_0}{2\pi}=2\times10^{-7}$N时，$I$=1安培。

电流强度单位的定义：

在真空中，两条无限长平行导线，各通有相等的稳恒电流，当导线相距一米，每米长度上受力为2×10^{-7}N时，各导线上的电流强度为1安培。

箍缩效应：

两导线间存在有吸引力，一载流导线可看成由许多纵向细丝组成，细丝间也同样存在相互吸引力，若导体是液体、电离气体，则这些力使导体收缩。

例: 在对称发散的磁场中，放有一个R=4cm的电流环，I=15.8A，其所在处B=0.1T，求受合力。

解: 建立如图所示的坐标系，

由对称可知，$\int \mathrm{d}F_x = 0$

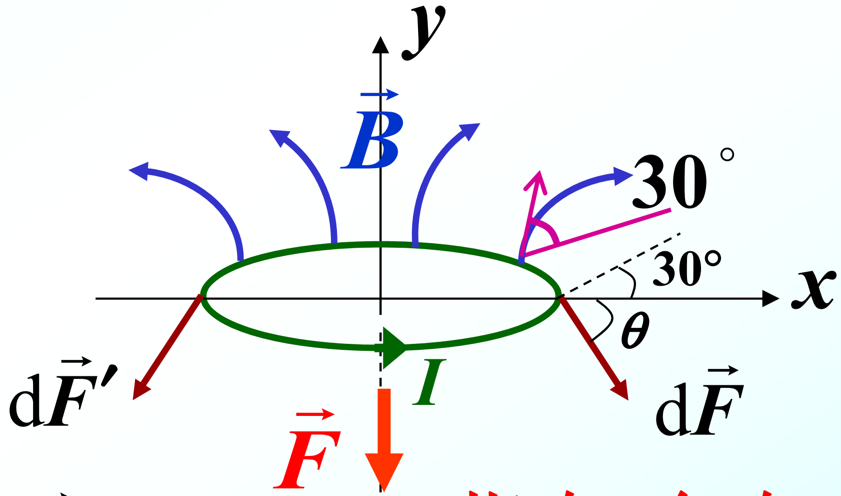
$$F = \int \mathrm{d}F_y = \int \mathrm{d}F \cdot \sin\theta$$

$$= \left|\int I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}\right| \sin\theta \quad (\because I\mathrm{d}\vec{l} \perp \vec{B})$$

$$= I \cdot 2\pi RB \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 15.8 \times 0.1 \times 2\pi \times 0.04 \times \sqrt{3}/2$$

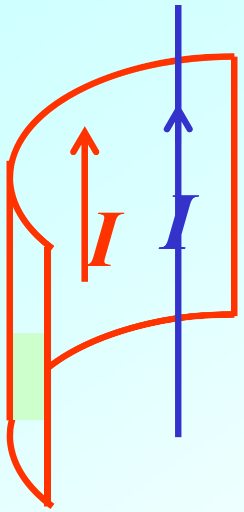
$$= 0.34\mathrm{N}$$



指向y负向

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$$

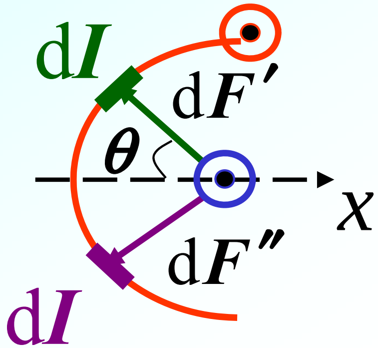
例: 求半圆柱面电流对其轴线上长直载流导线的作用力。



解：平行电流相互作用力

$$\mathrm{d}F' = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathrm{d}I = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\cdot\frac{I}{\pi R}R\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{f_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}}$$



$$\mathrm{d}F'' = \mathrm{d}F'$$

由对称性： $\int \mathrm{d}F_y = 0$

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cos\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2(\pi R)^2}\cos\theta R\mathrm{d}\theta$$

$$F = \int \mathrm{d}F_x = \frac{\mu_0 I^2 R}{(\pi R)^2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}$$ 沿x轴负方向

00:18:48

$$\vec{F}=\int_0^L I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

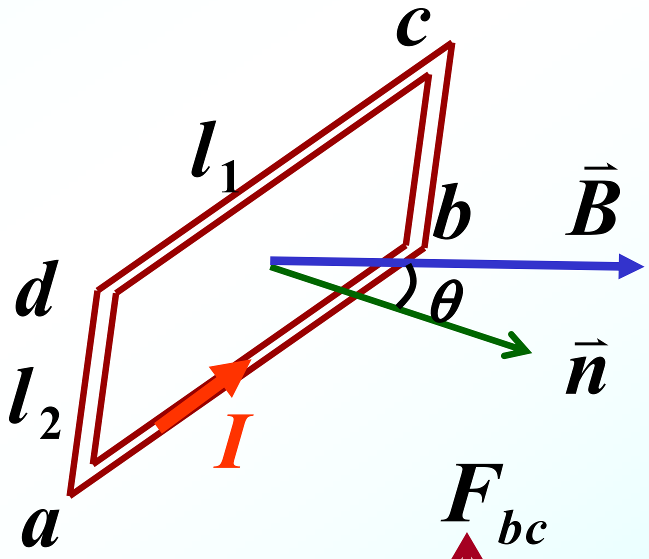
3.载流线圈在磁场中所受的力和力矩

1）在均匀场中的线圈

***a*、矩形线圈：**

设矩形线圈处在均匀磁场$\vec{B}$中

由安培定律，可得各边受力：



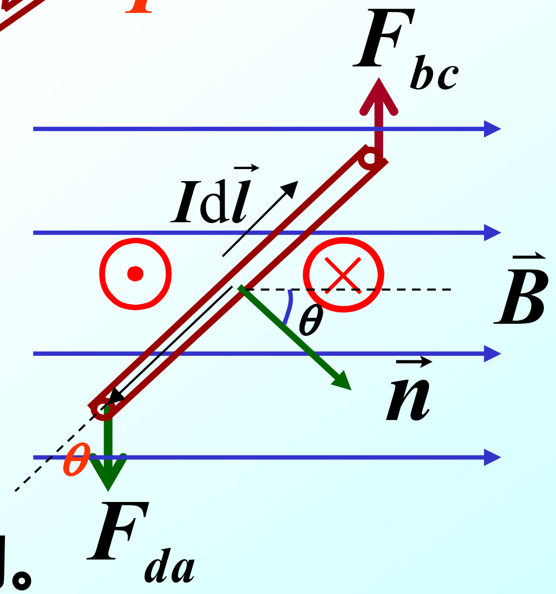
$$F_{da}=\int_d^a I\mathrm{d}l\cdot B=IBl_2$$ 向外

$$F_{bc}=\int_b^c I\mathrm{d}l\cdot B=IBl_2$$ 向里

$$F_{ab}=\int_a^b IB\sin(\pi/2-\theta)\mathrm{d}l=IB\cos\theta\, l_1$$ 向下

$$F_{cd}=\int_c^d IB\sin(\pi/2+\theta)\mathrm{d}l=IB\cos\theta\, l_1$$ 向上

$\therefore \vec{F}_{合}=0$，但$\vec{F}_{da}$、$\vec{F}_{bc}$不共线

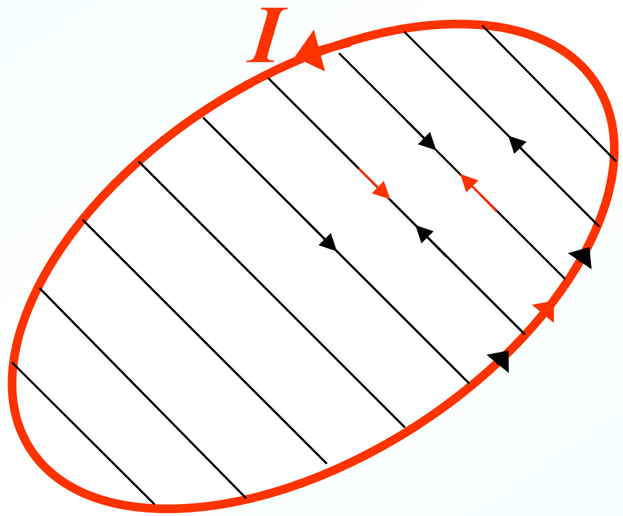


则：线圈受力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ **转轴在哪？轴不动。**

$$M=F_{da}\frac{l_1}{2}\sin\theta+F_{bc}\frac{l_1}{2}\sin\theta=IBl_1l_2\sin\theta=IBS\sin\theta=P_mB\sin\theta$$

$$\therefore \vec{M}=\vec{P}_m\times\vec{B}$$ ⟶ 可推广到任意线圈

b、任意形状的平面线圈（在均匀场中）



设任意形状的闭合平面线圈

面积为S，通有电流I.

设想线圈由许多无限小矩形线圈组成，

每一小线圈所受力矩为：

$$\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}\vec{P}_m \times \vec{B} = I\mathrm{d}S\vec{n} \times \vec{B}$$

线圈受的总力矩为：$\vec{M} = \int \mathrm{d}\vec{M} = \int I\mathrm{d}S\,\vec{n} \times \vec{B} = I(\int \mathrm{d}S)\,\vec{n} \times \vec{B}$

$$= IS\,\vec{n} \times \vec{B} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$

即：$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$

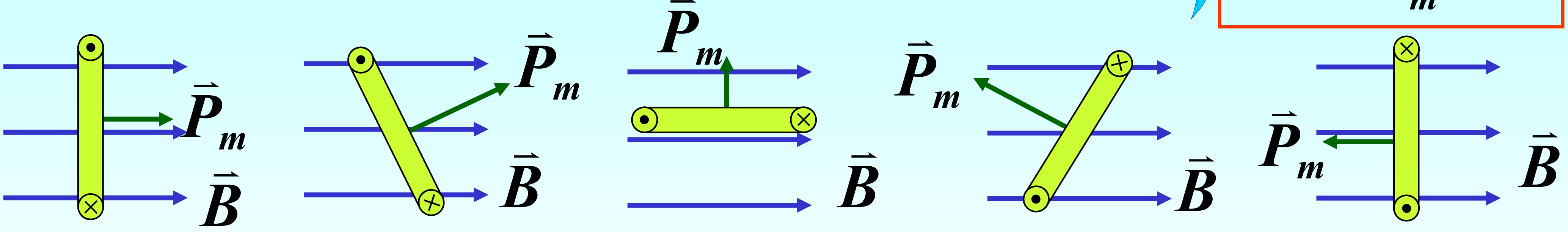
对线圈一般有：$\sum \vec{F} = 0;\quad \sum \vec{M} \neq 0$

注意：

无论线圈什么形状，均匀磁场对它的作用只取决于$\vec{P}_m$，$\vec{P}_m$相同的线圈受磁场的作用完全相同。

（3）平面线圈在磁场中所受力矩的几种情况

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$



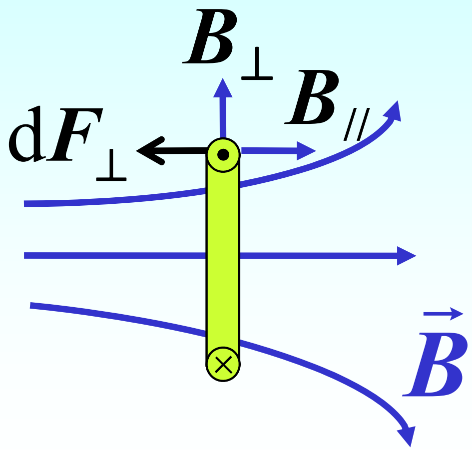
$\theta = 0, M = 0$	$\theta < 90^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta > 90^\circ$	$\theta = \pi, M = 0$
$\vec{P}_m // \vec{B}$	$M \neq 0$	$M = M_{max}$	$M \neq 0$	$\vec{P}_m // -\vec{B}$
稳定平衡				非稳定平衡

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$

磁力矩总是使线圈或磁偶极子转向磁场方向;
电场对电偶极子的力矩总是使其转向电场方向。

2)在非均匀场中的线圈所受的力和力矩

情况较复杂。



一般地：$\vec{F}_{合}\neq 0$，$\vec{M}\neq 0$。

线圈除了转动，还会平动，一般向磁场较强的方向平动。

对非刚性线圈可能还有形变。

André Marie Ampère

(1775 – 1836, France)