# §11.5　机械波

- 机械波的一般概念
- 平面简谐波
- 行波输送的能量
- 惠更斯原理　　折射与反射
- 波的叠加原理　干涉与衍射
- 驻波

# 机械波

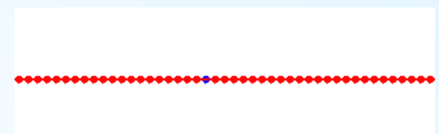
波的分类

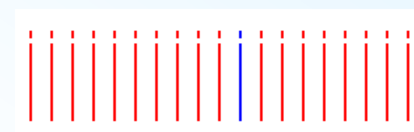
按性质分类

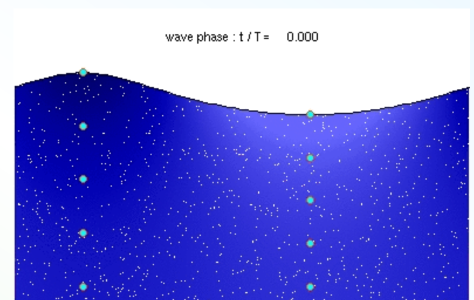
- 机械波： 机械振动在弹性媒质中的传播过程
- 电磁波： 电磁场周期性变化在空间的传播
- 引力波： 时空形变，以*c*的速度在空间传播

按振动方向与传播方向分类

- 横波：振动方向与传播方向垂直　　如:电磁波
- 纵波：振动方向与传播方向相同　　如:声波
- 混合波：　如 水波、地震波

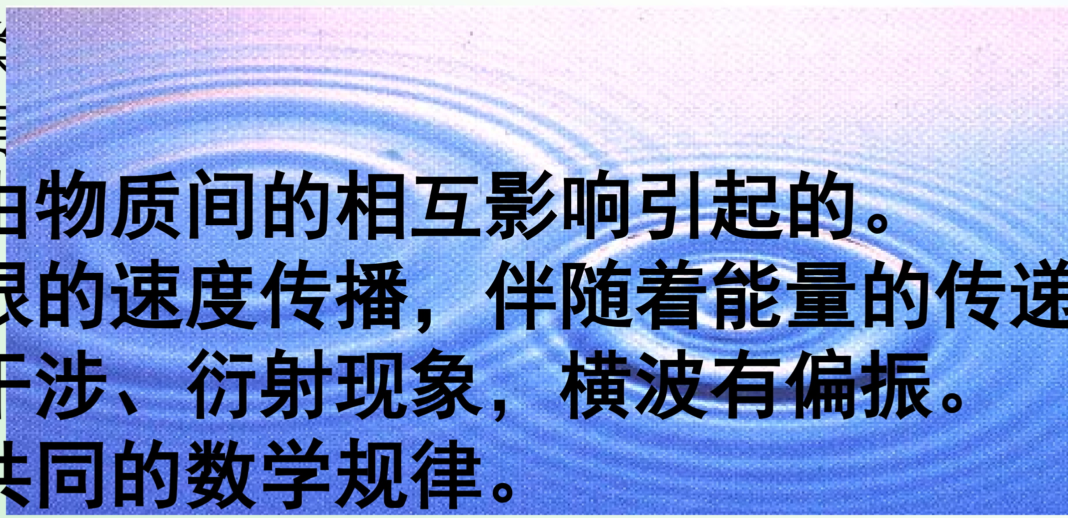







各种类

但也有



态

✓都是由物质间的相互影响引起的。

✓以有限的速度传播，伴随着能量的传递。

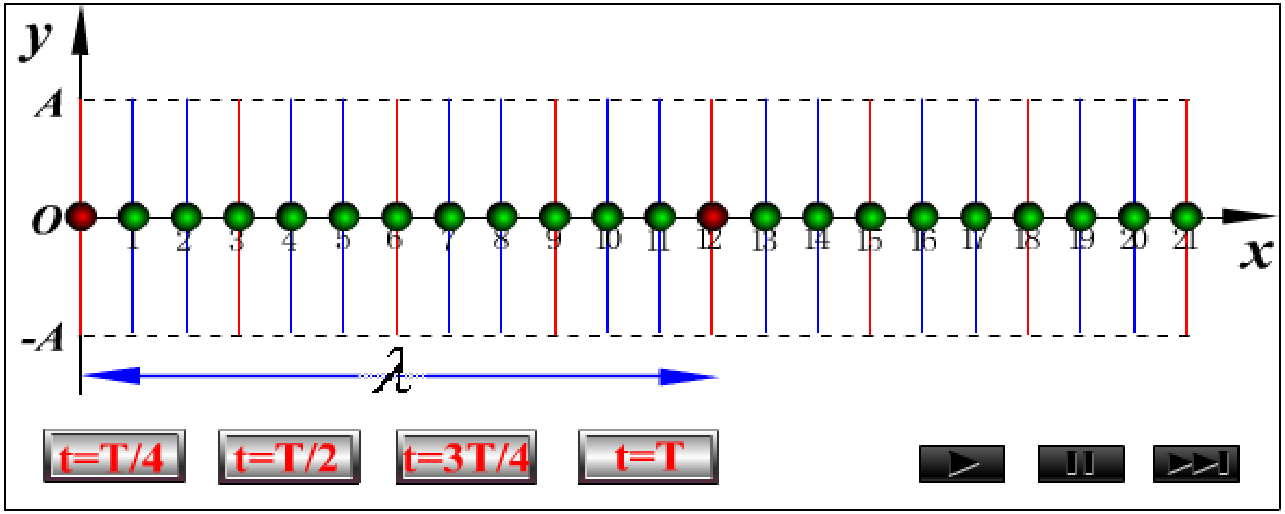
✓都有干涉、衍射现象，横波有偏振。

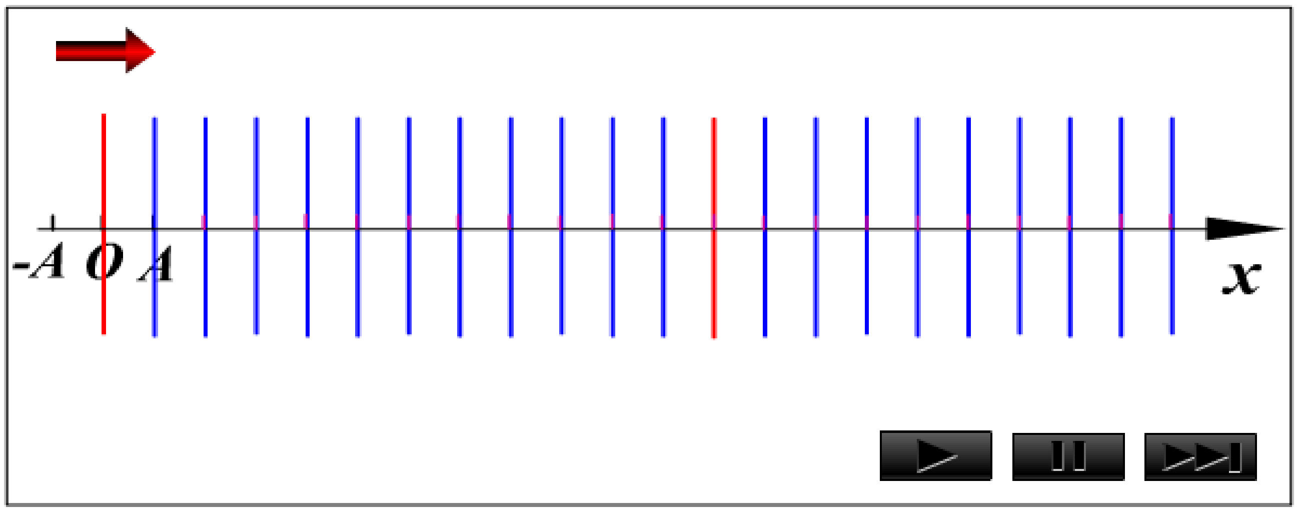
✓服从共同的数学规律。

波动与振动是两个不同的概念，但是又紧密相连。

振动是波动的基础，波动（研究对象：多个有联系的质点 ）是振动的传播。

## 机械波的产生和传播




注意:

1° 波的传播过程是振动状态的传播过程。

（质点本身不随波运动）

是位相的传播，

能量的传播。

2° 波是指媒质整体表现的运动状态，其特点是：

相邻质点的振动位相依次落后。

- 有波源～振动的质点。

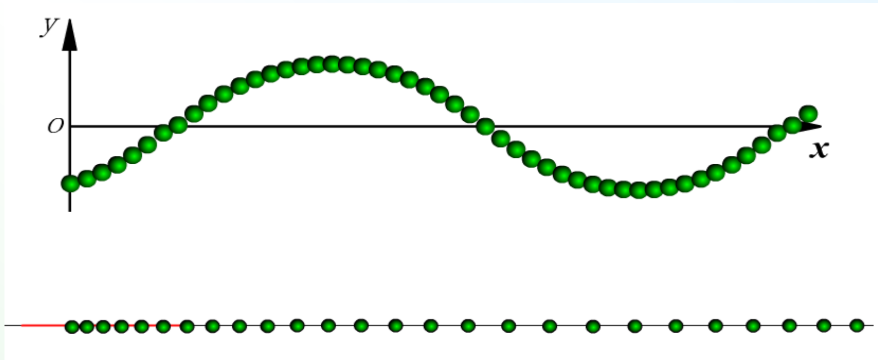
没有媒质质点仅孤立振动，振动不能形成传播～波动。

- 有媒质～某质点振动后，通过弹性媒质使相邻的质点振动。

## 机械波的一般概念

### 机械波的产生和传播

**波动：** 多个有联系的质点在空间排列且随时间变化的队形。

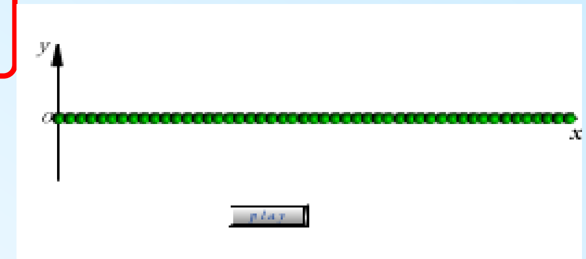



**媒质的作用：** （无穷多质点通过相互之间的弹性力作用组合在一起的连续介质）

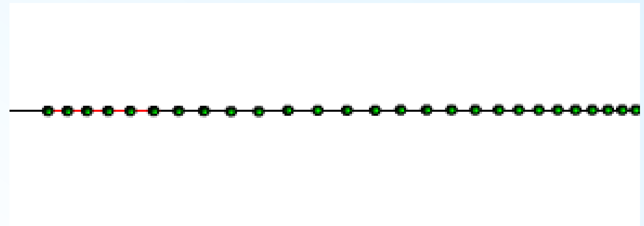
① 向下游质点传递上游质点简谐振动的全部信息，因此波速由媒质确定，与质点本身运动状态无关。

② 向下游质点传递能量，波线上原本静止的质点开始作简谐振动。因此质点能量不守恒，随时间周期性变化。

# 机械波的一般概念

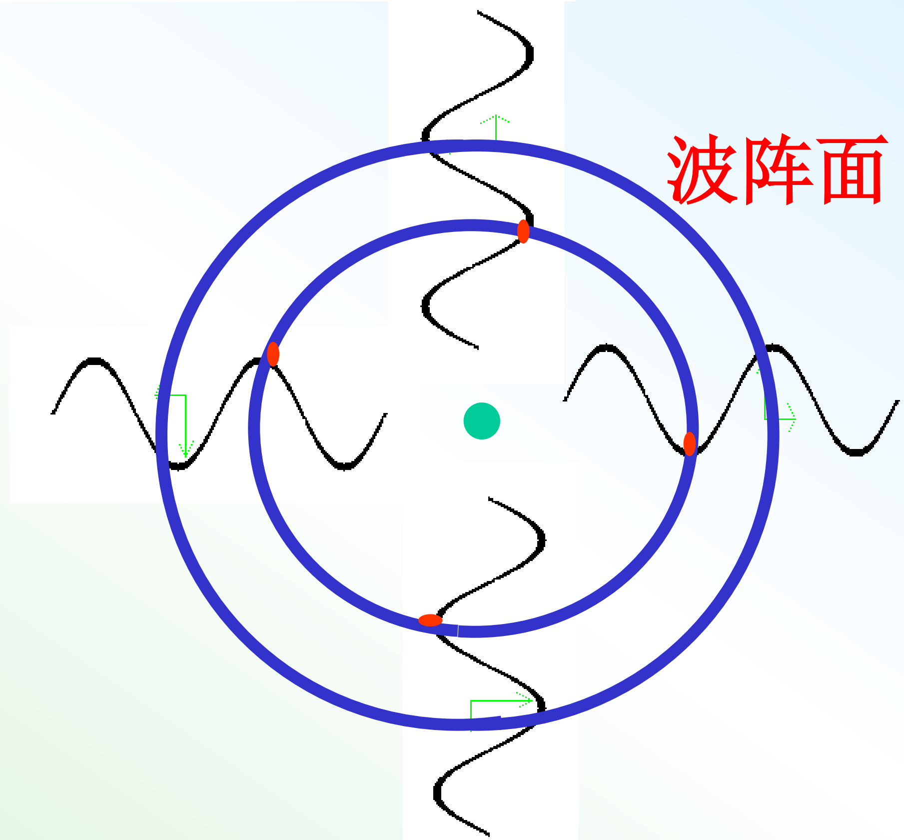


横波：振动方向与传播方向垂直



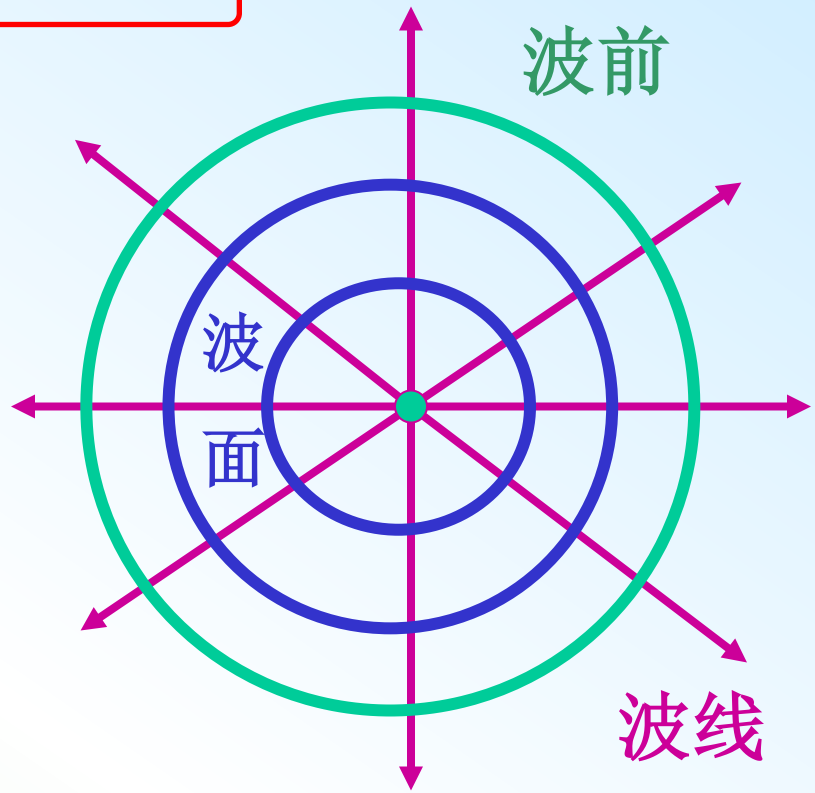
纵波：振动方向与传播方向相同

波阵面：波源的振动位相传播时，空间中位相相同点的轨迹是一个面，该面为波阵面。（同相面）

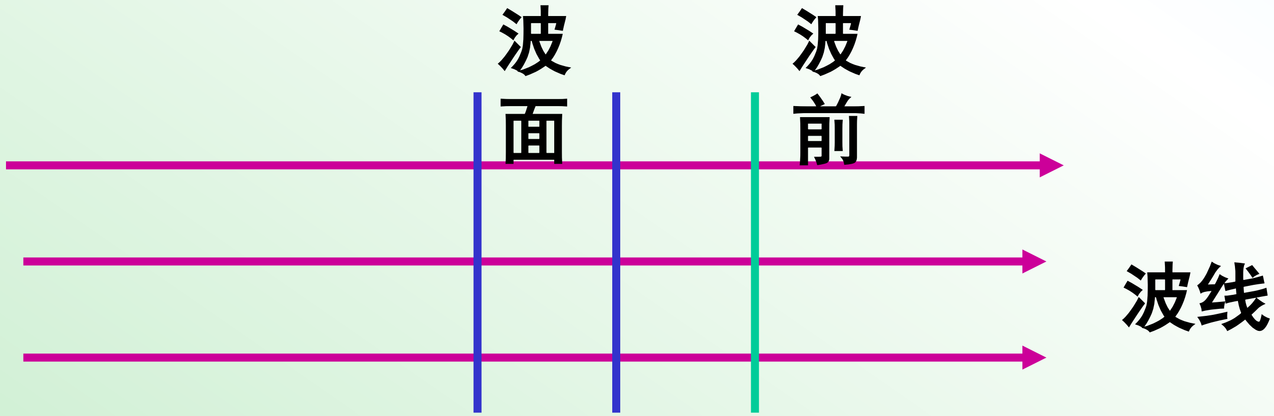


## 机械波的一般概念

- 波前：波动最前端的波阵面。
- 波线：指示波传播方向的射线，与波阵面垂直。

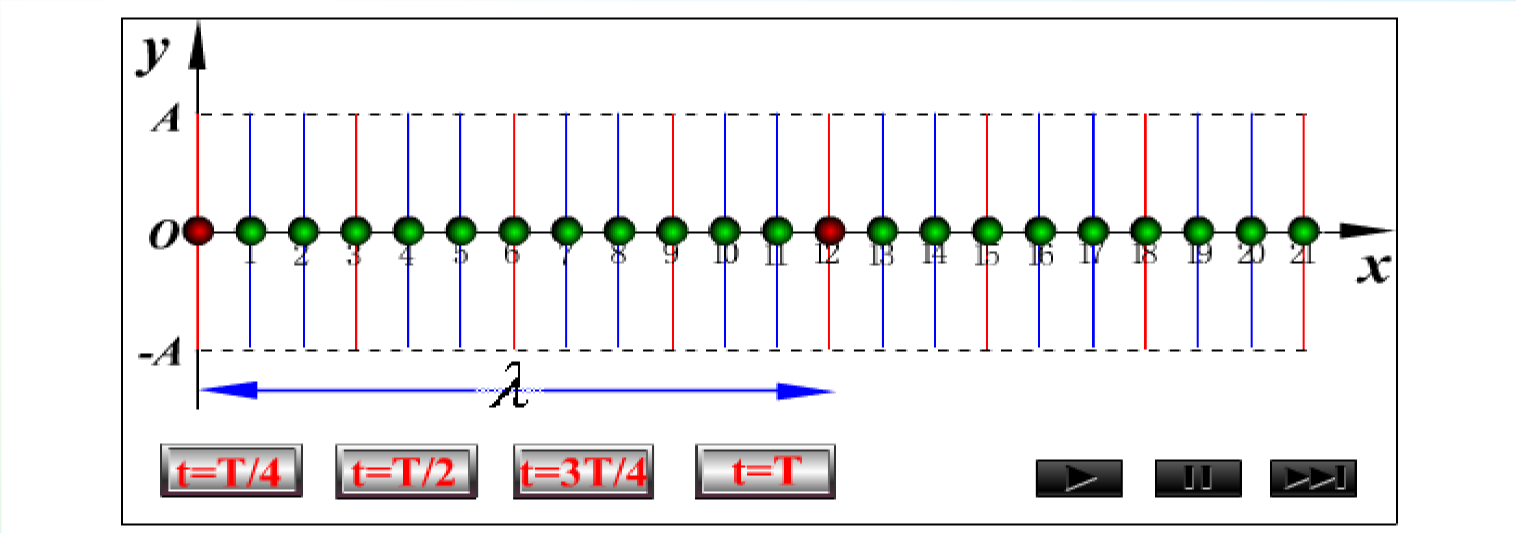



- 球面波：波阵面是球面
- 平面波：波阵面是平面的波动。



## 机械波的一般概念

### 波动的周期性:




设有函数: $f\left(x\right)$

$$f\left(x\right)=f\left(x+x_0\right)=f\left(x+2x_0\right)=\cdots=f\left(x+nx_0\right)$$

$x_0$ 称为周期。

# 机械波的一般概念

## 波的时间周期：

波动中的任意一个质点的振动是简谐振动，则振动的振动函数：

$$y = f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

由振动的原理： $$y = f(t) = f(t+T)$$

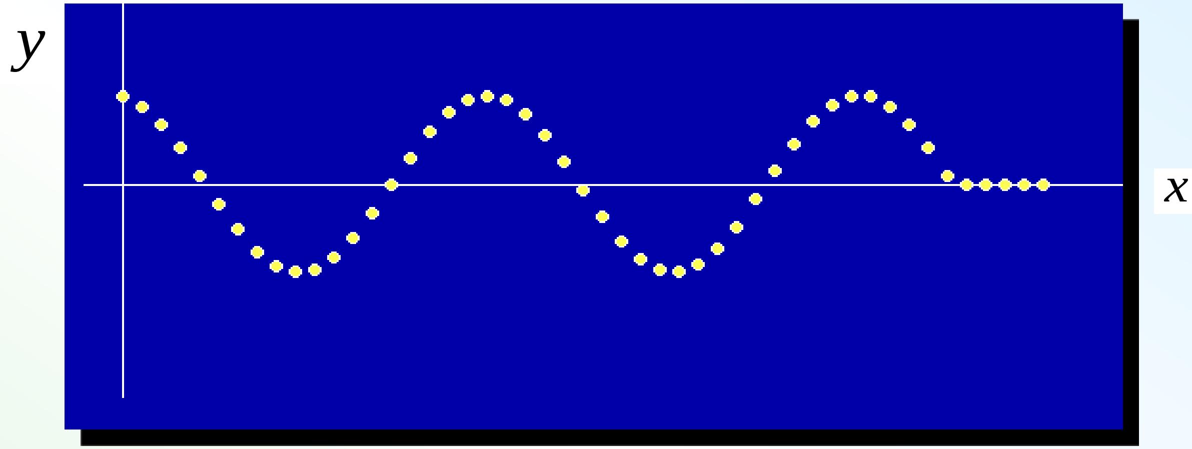
$T$ 是波动的周期～时间周期。

$$\nu = \frac{1}{T}$$ 是波动的**时间频率** $\Leftrightarrow$ $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

定义：$T$、$\nu$ 为波的时间周期、时间频率。

## 机械波的一般概念

### 波的空间周期：




参与波动的质点中，每间隔一段距离有质点的运动状态相同：

$$y = f(x) = f(x+\lambda)$$ ⟸ $\lambda$ 是波动的周期～空间周期。

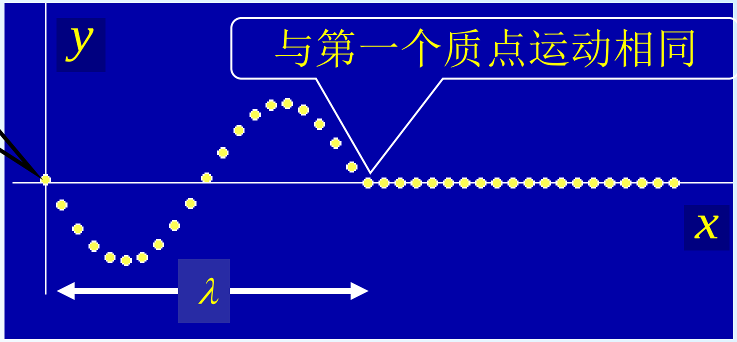
$\frac{1}{\lambda}$ 是波动的**空间频率**。 ⟺ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 波数（空间圆频率）

空间周期一波长

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ （时间圆频率）

# 机械波的一般概念

□时空周期、频率的联系：




**波动实质是振动位相（质点运动状态）的传播**

考虑均匀媒质中位相传播的速度为 $u$ ，有：

$$\boxed{\lambda = u \cdot T} \iff x = u \cdot t$$

原点处质点的位相用时间 $T$，传播 $\lambda$ 距离！

$u$ 称为波的速度，与媒质的特性有关；与质点的振动无关。

注意

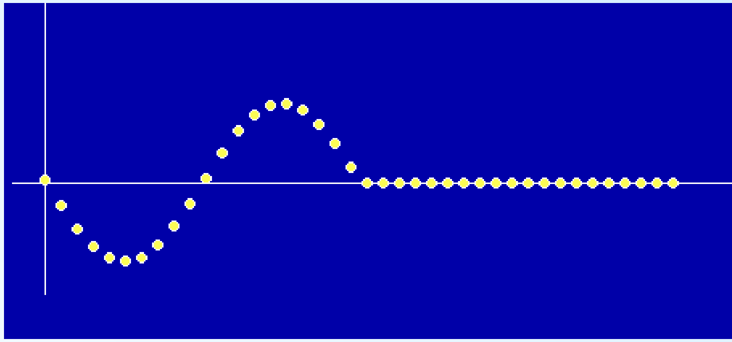
**周期或频率只决定于波源的振动!**

**波速只决定于媒质的性质！**

$$\boxed{u_{波} \neq u_{振}}$$

## 机械波的一般概念

**波动质点的空间间隔与相位间隔的关系：**

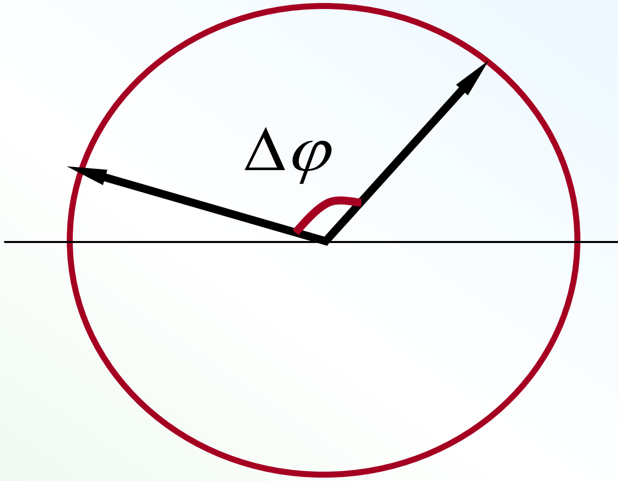


考虑均匀媒质中位相传播的速度为 $u$：

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= u\cdot\Delta t\\ \Delta\varphi &= \omega\Delta t\end{aligned}\right\}\quad |\Delta\varphi| = \omega\frac{\Delta x}{u} = \frac{2\pi}{T}\frac{\Delta x}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

质点相位超前与落后取决于质点运动的秩序

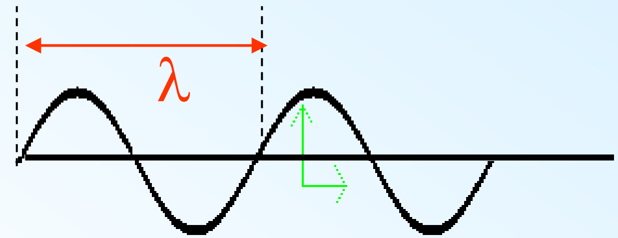
空间间隔和位相间隔变换 $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x}$



# 机械波的一般概念

a) 波长 $\lambda$

同一波线上，两相邻的位相差为2π
的质点间的距离 （一个完整的波的长度 ）。




b) 周期 $T$

波传播一个波长用的时间。

c) 频率 $\nu$

单位时间内，波推进的距离中包含的完整的
波长的数目。

$$\nu = \frac{1}{T}$$

波速$u$与介质的性质有关，$\rho$为介质的密度。

固体 $\begin{cases} u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}} & \text{切变模量} \\ u=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}} & \text{弹性模量} \end{cases}$

横 波

流体 $u=\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$ 体变模量

弹性模量、体变模量 — 纵 波

如声音的传播速度 $\begin{cases} \text{空气} & u=343\ \mathrm{m/s} \\ \text{混凝土} & u\approx 4000\ \mathrm{m/s} \end{cases}$

例. 在室温下，已知空气中的声速$u_1$为340 m/s，水中的声速$u_2$为1450 m/s ，求频率为200 Hz和2000 Hz 的声波在空气中和水中的波长各为多少？

解：由$\lambda=u/\nu$，频率为200 Hz和2000 Hz 的声波在空气中的波长

$$\lambda_1=\frac{u_1}{\nu_1}=\frac{340}{200}=1.7\ \mathrm{m} \qquad \lambda_2=\frac{u_1}{\nu_2}=0.17\ \mathrm{m}$$

在水中的波长

$$\lambda'_1=\frac{u_2}{\nu_1}=\frac{1450}{200}=7.25\ \mathrm{m} \qquad \lambda'_2=\frac{u_2}{\nu_2}=0.725\ \mathrm{m}$$

# 一维机械简谐波——平面波

媒质中各质点都作谐振动，并且向一个方向传播。

**波动中的任意质点的运动不仅与自身的振动有关，而且与该质点的位置有关。**

能够描述任意质点在任意时刻的振动情况

➤ **简谐波波函数—波线上各质点振动方程通式**

以横波为例：

**设波动沿 $x$ 方向传播，任意质点偏离平衡点的距离是 $y$，则：**


$$y = f(t, x)$$

注意:x轴上一点的运动其实代表该点所在波阵面上所有质点的运动。x轴代表整个空间。

注：波传播的是质点的振动状态

即：波速=位相传播的速度（相速）

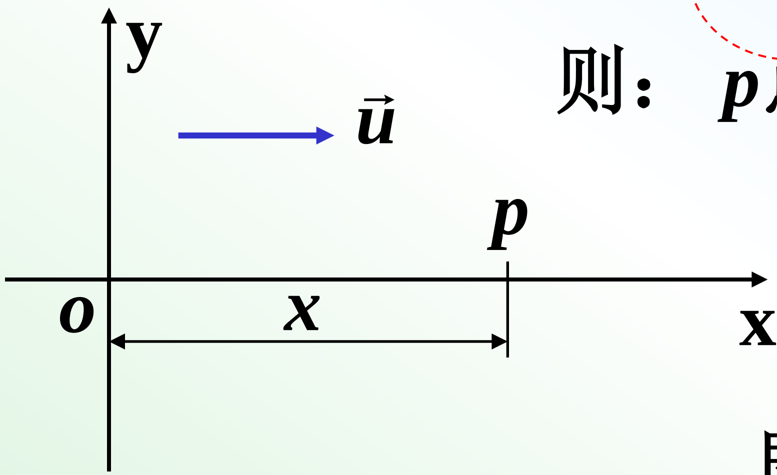
p点的振动是从o点振动传过来，o点t时刻的位相，经 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$ 传到p点

p点的位相总是落后于o点的位相

即：　波速=位相传播的速度 =相速

$p$点的振动是从$o$点振动传过来，
$o$点$t$时刻的位相，经 $\Delta t=\dfrac{x}{u}$ 传到$p$点

$p$点的位相总是落后于$o$点的位相




则：$p$点$t$时刻的位相=$o$点$(t-\Delta t)$时刻的位相

$o$点的振动：$y_O=A\cos(\omega t+\varphi)$

$o$点 $t$ 时刻的位相为：$\omega t+\varphi$

$o$点 $t-\Delta t$时刻的位相为：$\omega(t-\Delta t)+\varphi$

即$p$点在 $t$ 时刻的位相为：$\omega(t-\Delta t)+\varphi$

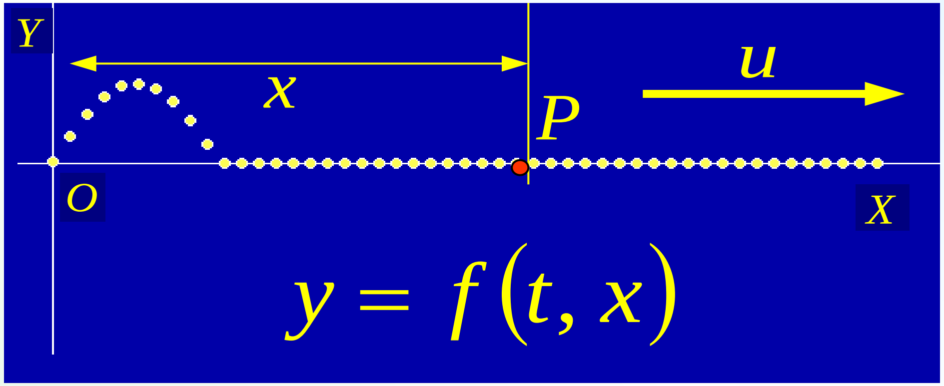
任意点$p$的振动为：$y=A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi]=A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi]$

即：$\boxed{y=A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi]}$（一维简谐波的波函数）

描述了整个空间任意质点在任意时刻的振动状态。

注意: $u$为速度的大小(正的)

## 平面简谐波




$$y_0(t,0) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$y_x(t,x) = A\cos(\omega t + \varphi - \Phi)$$

原点质点的位相用时间 $t'$，传播 $x$ 距离。

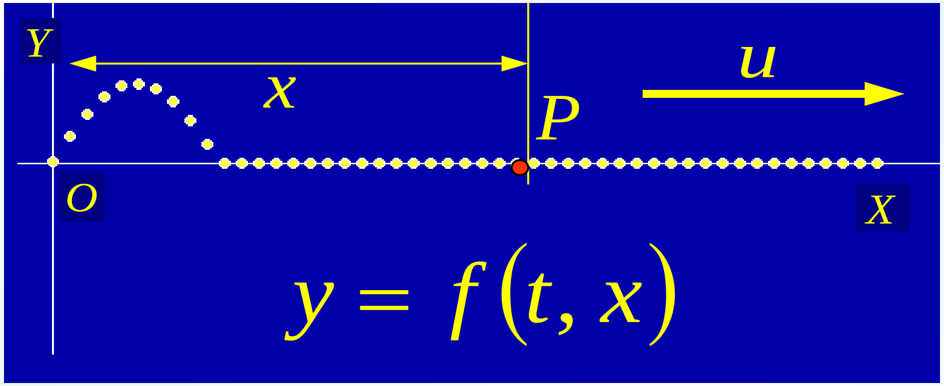
空间间隔和位相间隔变换 ⇒

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \Phi}$$

$$\lambda = uT$$

$$y_x(t,x) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right)$$

# 平面简谐波




$$y_0(t,0) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = u \cdot t'$$

$$y_x(t,x) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right)$$

本质上是用*t'*时间前原点的振动表示任意点当前的振动。

$$y(x,t) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

得到描述沿*x*轴正向传播波的波函数！

## 平面简谐波

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \qquad \lambda = uT \qquad y_0(t,0) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

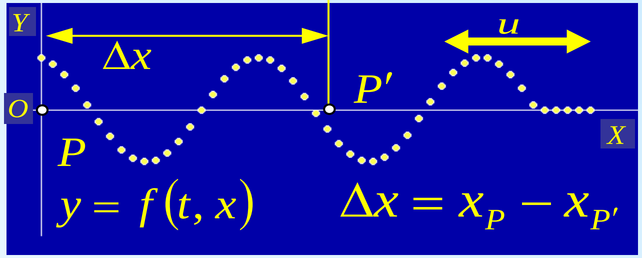
$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

$$y(x,t) = A\cos\left[(\omega t + \varphi) - \frac{2\pi}{\lambda}x\right]$$

**波动的表达式---波函数**

# 平面简谐波

$$y_P(t,x)=A\cos(\omega t+\varphi)$$




**基本原理：** 用波源P的振动方程求解波线上任意质点的振动方程。

**基本法则：** 1、确定波源. 2、确定传播方向.

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

3、写出传播方向下游与波源相距($\Delta x$)任意点P'的落后相位.

4、根据3直接在波源振动方程的相位上作用落后相位.

$$y_{P'}(t,x)=A\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\right)$$

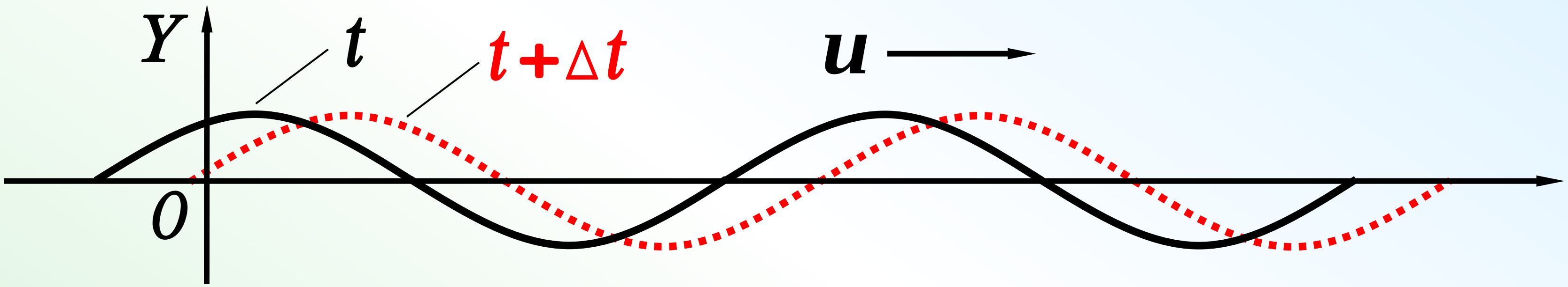
有符号

写波函数的两个方法：1) 已知某确定点的振动方程，根据任意点$P$与此点的位相关系来写；2)若已知的是原点的振动方程，则可以直接套用波函数的标准形式。

$$y_0 = A\cos[\omega t + \varphi]$$

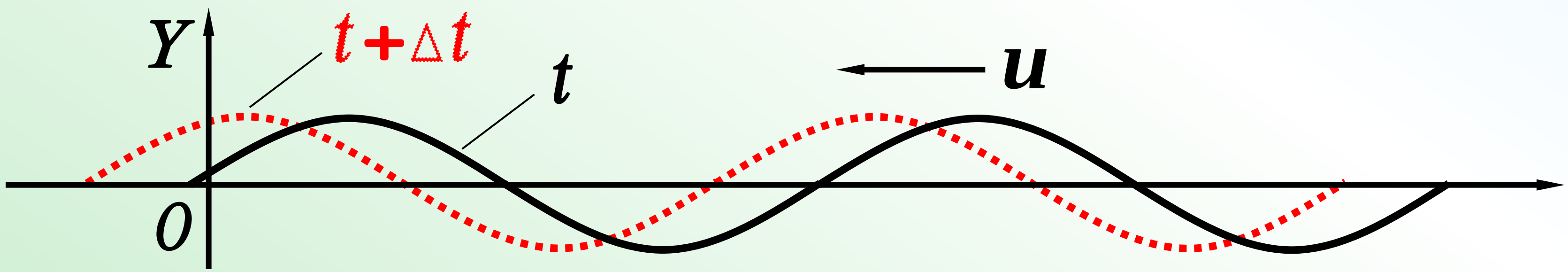
波沿$X$轴正方向传播:

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

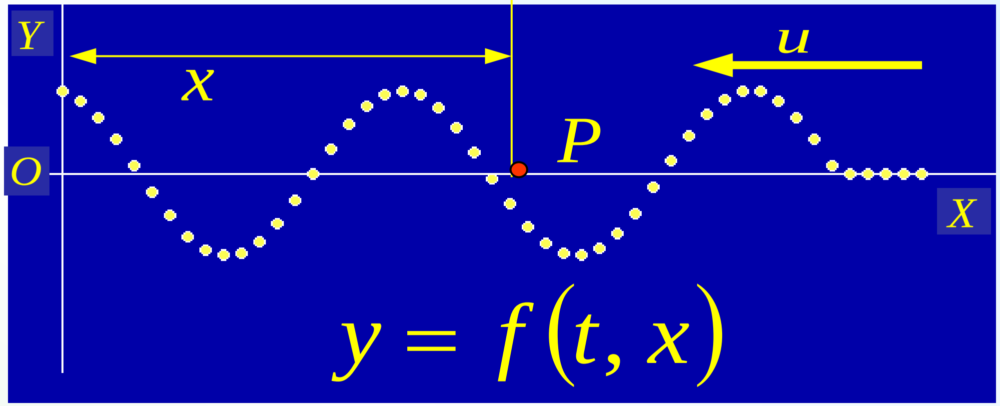



波沿$X$轴负方向传播:

$$y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$



## 平面简谐波




设波动沿 $x$ 轴负向传播：　　$x = u \cdot t'$

本质上是用$t'$时间**后**原点的振动表示任意点当前的振动。

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

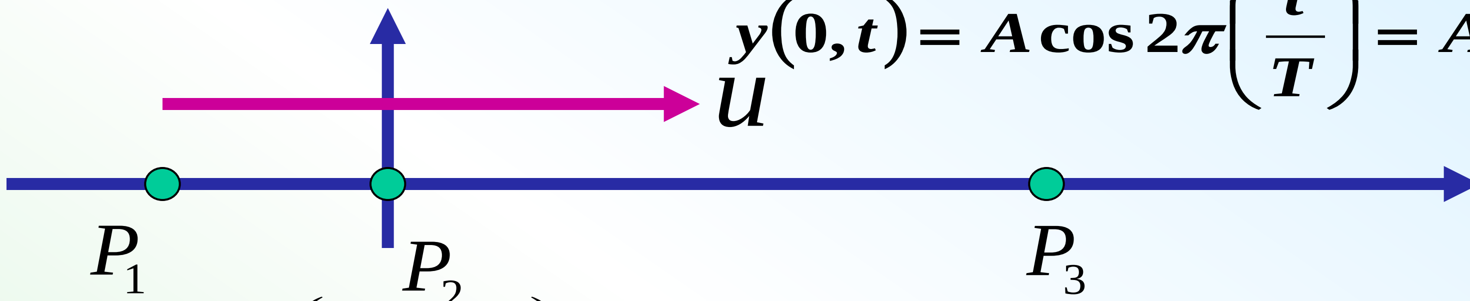
$$\boxed{y(x,t) = A\cos\left[(\omega t + \varphi) + \frac{2\pi}{\lambda}x\right]}$$

# 平面简谐波

**波动函数的讨论:**

**波动沿 $x$ 轴正向传播，波源在负无穷远:**

$$y(0,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}\right)=A\cos(\omega t)$$



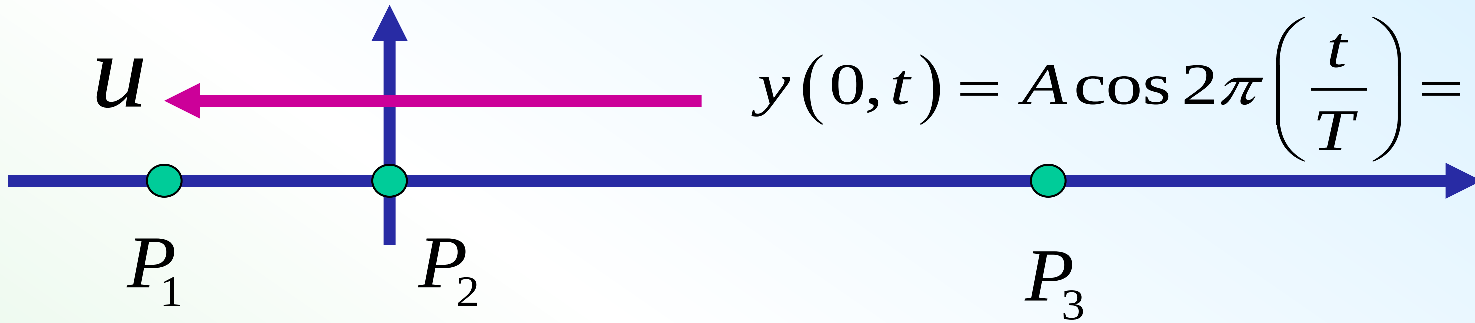

$$y(x,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=A\cos(\omega t-kx) \qquad -\infty<x<\infty$$

**振动质点从左到右，位相依次落后。式中$x$坐标值是代数值。**

$$y(P_1,t)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x_{P_1}\right) \qquad y(P_3,t)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x_{P_3}\right)$$

## 平面简谐波

波动沿 $x$ 轴负传播，波源在正无穷远：




$$y(0,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}\right)=A\cos(\omega t)$$

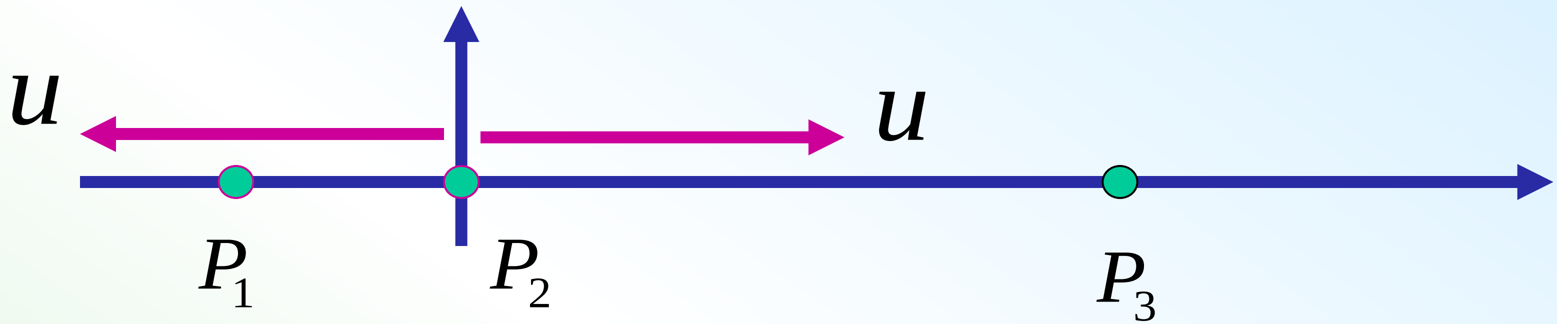
$$y(x,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{(-x)}{\lambda}\right)=A\cos(\omega t+kx)\qquad -\infty<x<\infty$$

**振动质点从右到左，位相依次落后。式中$x$坐标值是代数值。**

$$y(P_1,t)=A\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x_{P_1}\right)\qquad y(P_3,t)=A\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x_{P_3}\right)$$

## 平面简谐波

波动沿 $x$ 轴传播，波源在原点：




$$y(x,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=A\cos(\omega t-kx)\qquad x>0$$

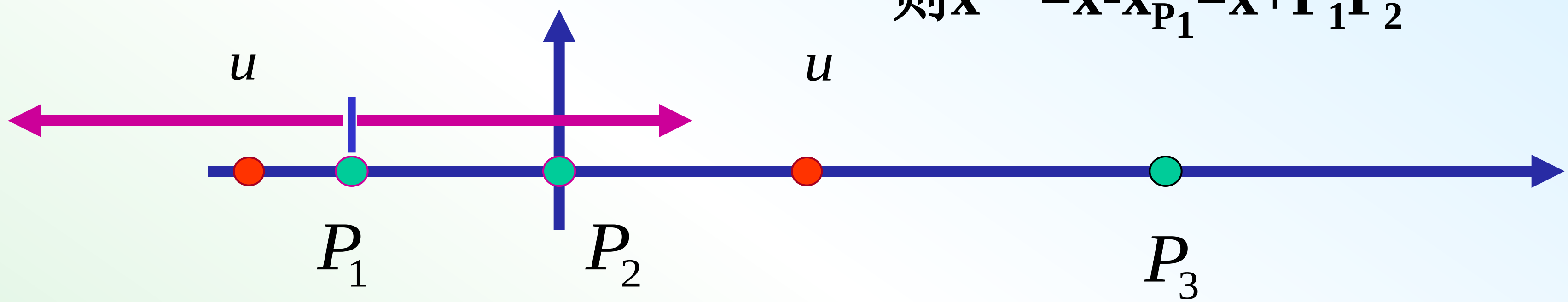
$$y(x,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)=A\cos(\omega t+kx)\qquad x<0$$

振动质点从原点开始，位相依次落后。式中 $x$ 坐标值是代数值。

## 平面简谐波

波动沿 $x$ 轴传播，波源不在原点：

坐标平移：
以$P_1$点为坐标原点建立坐标轴x’轴
则$x' = x - x_{P_1} = x + \overline{P_1P_2}$




$$y = A\cos\left(\omega t + \varphi - k\left(x + \overline{P_1P_2}\right)\right) \qquad x \ge x_{p1}$$

$$y = A\cos\left(\omega t + \varphi - k\left(-x - \overline{P_1P_2}\right)\right) \qquad x < x_{p1}$$

# 波函数的物理意义

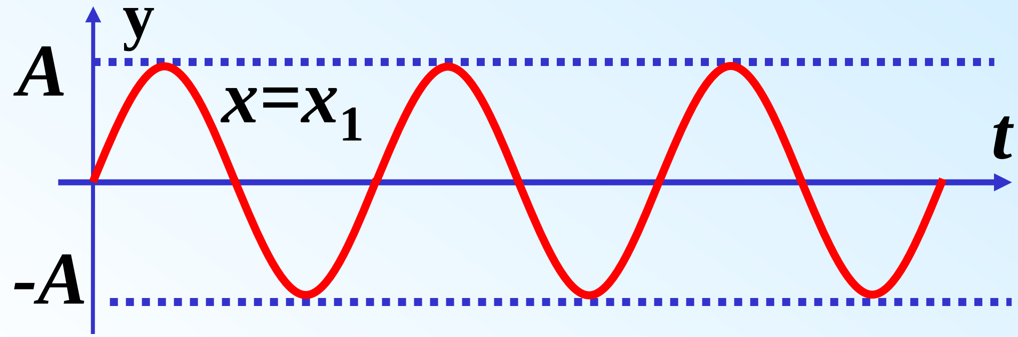
$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

**a.** 当 $x=x_1=$ 常数

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi]$$

$$=A\cos[\omega t+\varphi_1]=f(t)$$

表示 $x_1$ 处质点随时间 $t$ 的振动规律 —振动方程



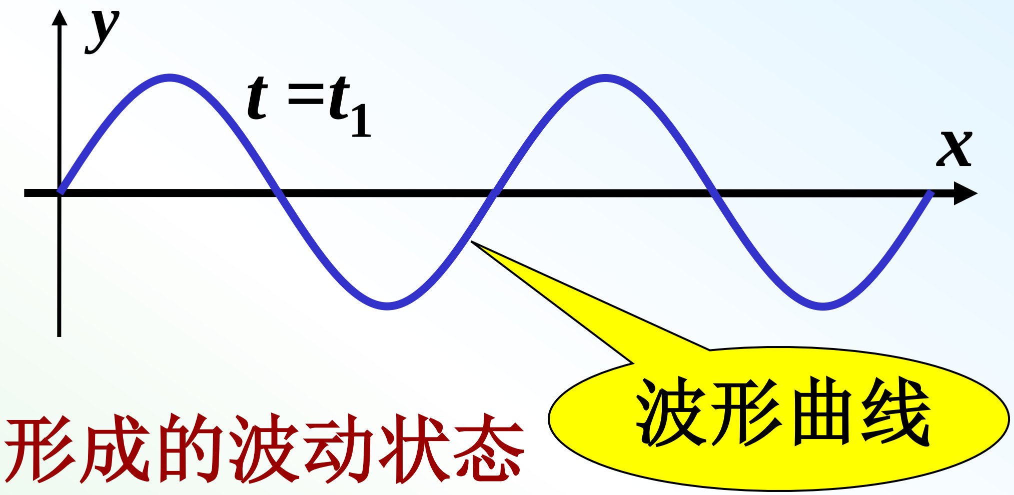

**b.** 当 $t=t_1=$ 常数

$$y=A\cos[\omega(t_1-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$=A\cos[(\omega t_1+\varphi)-\frac{x}{u}]$$

$$=f(x)$$

给出 $t_1$ 时刻传播方向上所有质点的振动状态 —媒质形成的波动状态




**c.** $x\neq$ 常数，$t\neq$ 常数　　$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

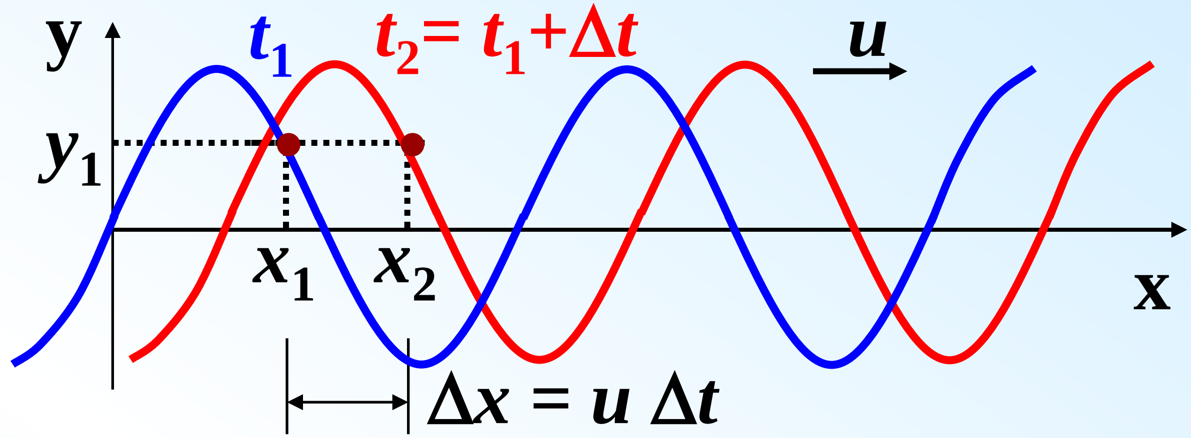
描写不同时刻，不同位置质点的振动状态，每一时刻都有一波形曲线。

**d.** $x = x_1$， $t = t_1$， 都是常数

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$y=A\cos[\omega(t_1-\frac{x_1}{u})+\varphi)] = y_1 = 常数$$

表示 $t_1$时刻，$x_1$处质点的位移。




当 $t = t_1+\Delta t = t_2$时，

质点 $x_2= x_1+\Delta x= x_1+u\Delta t$

其位移为：

$$y_2=A\cos[\omega(t_2-\frac{x_2}{u})+\varphi)] = A\cos\{\omega[(t_1+\Delta t)-\frac{x_1+\Delta x}{u}]+\varphi)\}$$

$$=A\cos[\omega t_1+\omega\Delta t-\frac{\omega x_1}{u}-\frac{\omega\Delta x}{u}+\varphi]$$

$$=A\cos[\omega(t_1-\frac{x_1}{u})+\varphi)] = y_1$$

即：$t_2$时刻，$x_2$质点振动的位移恰是 $t_1$时刻$x_1$质点的位移。

结论：经$\Delta t$ 时间，整个波形向前移动了一段路程$\Delta x=u\Delta t$。

总之：各点位移变化，才使波形变化！

波形传播的速度 = $u$ = 波速 = 相速

波函数的几种等价表式：

向x轴正向传播的波

(A) $y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

(B) $y(x,t)=A\cos[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi]$

(C) $y(x,t)=A\cos[\omega t-kx+\varphi]$

(D) $y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$

(E) $y(x,t)=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ut)+\varphi]$

(F) $y(x,t)=A\cos[k(x-ut)+\varphi]$

(G) $y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T})+\varphi]$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$

$u=\frac{\lambda}{T}$

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$

也可写成复数形式 $y=Ae^{i(\omega t-kx+\varphi)}$（取实部）

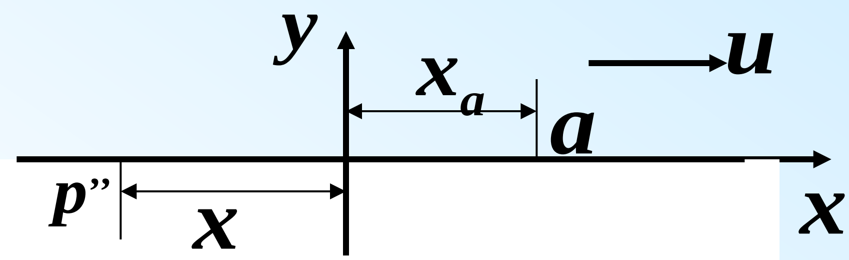
以上讨论也适用于纵波。

可将纵波的密集区看成波峰，疏散区看成波谷。此说对否？

例：已知波沿 $x$轴正向传播，波速为 $u$ ，$x = x_a$ 处的振动方程为

$$y_a = A\cos(\omega t + \varphi)$$

试写出波的表达式。




解1: 从位相差考虑。

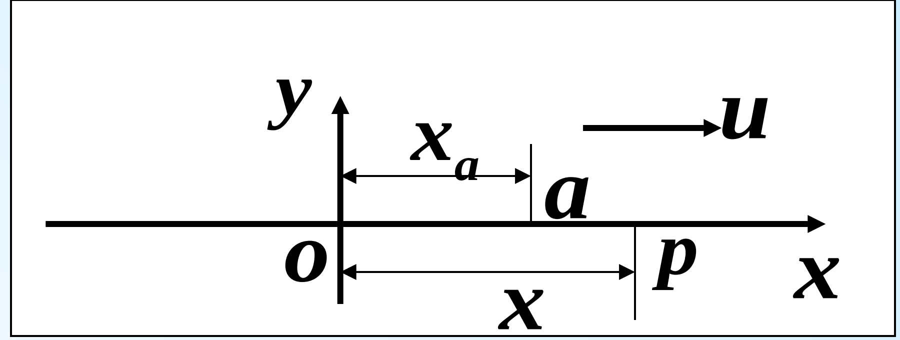
$$\Delta t = \frac{x - x_a}{u}$$ ($a$点的振动经过$\Delta t$的时间之后传到$P$点)

$$y = A\cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi] = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_a}{u}) + \varphi]$$

若 $p \longrightarrow p'$ $\quad \Delta t = \frac{x_a - x}{u}$ 则 $(t + \frac{x_a - x}{u})$

若 $p \longrightarrow p''$ $\quad \Delta t = \frac{-x + x_a}{u}$ 则 $(t + \frac{-x + x_a}{u})$

$$y_a = A\cos(\omega t + \varphi)$$




**解2：** 根据标准形式求解。

可设波函数为: $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi]$

在上式中代入$a$点的坐标$x_a$可得$a$点的振动方程:

$$y_a = A\cos[\omega(t - \frac{x_a}{u}) + \phi]$$

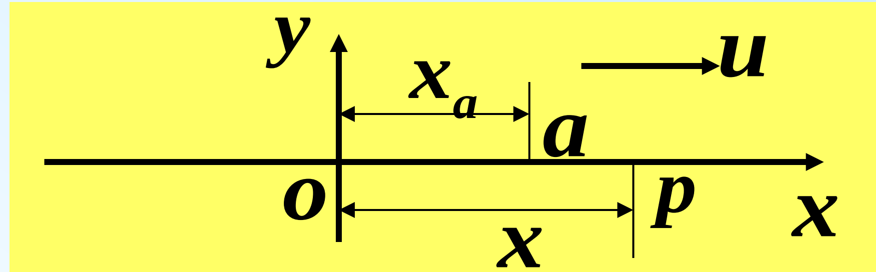
由题设有 $y_a = A\cos(\omega t + \varphi)$

以上两方程都是$a$ 点的振动方程，故位相相同。所以，

$$\omega(t - \frac{x_a}{u}) + \phi = \omega t + \varphi \quad \Longrightarrow \quad \phi = \varphi + \frac{\omega x_a}{u}$$

故： $y = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_a}{u}) + \varphi]$

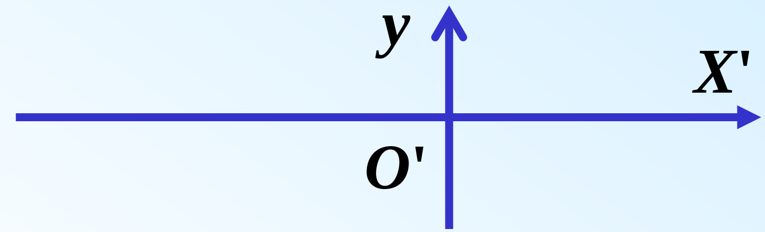
$$y_a = A\cos(\omega \underline{t} + \varphi)$$




**解3：** 坐标变换法。

建新坐标$O'X'$与$OX$重合，

且$O'$点与$a$点重合。



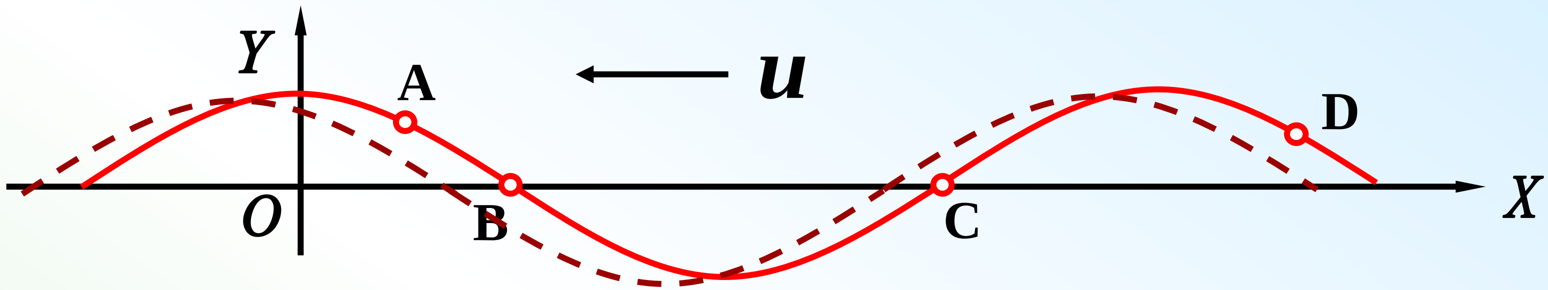

则在新坐标$O'X'$中，波函数为

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x'}{u}) + \varphi]$$

而 $x' = x - x_a$，代入上式得

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_a}{u}) + \varphi]$$

例：以波速 $u$ 沿 $X$ 轴反方向传播的简谐波在 $t$ 时刻的波形曲线如下图所示。则以下说法正确的是[　　]



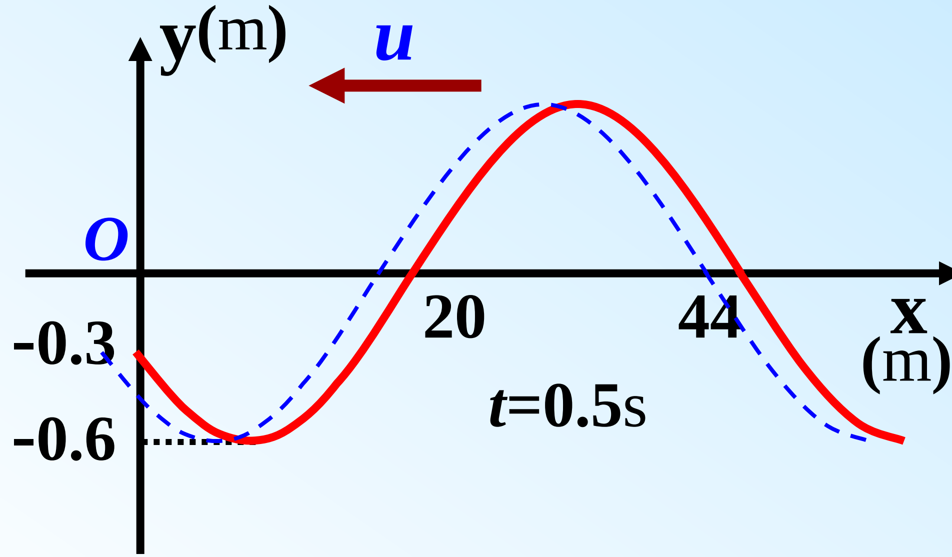

（1）A点的速度大于零；

（2）B点静止不动；

（3）C点向下运动；

（4）D点的振动速度小于零。

例：一平面简谐波在$t$=0.5s时的波形如图所示，该波以12m/s的速度沿x轴负方向传播，求波函数。



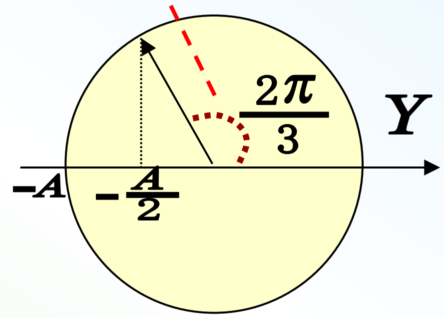

解：先求原点处的振动方程

$$A = 0.6\ m$$

$$\lambda = 2\times(44-20) = 48\ (\text{m}) \quad T=\frac{\lambda}{u}=4\text{s} \quad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\ (\text{rad/s})$$

原点处振动方程：$y_O=0.6\cos(\boxed{\frac{\pi}{2}t+\varphi})\ (\text{m})$

$t=0.5\text{s}$ 时，$y_O=-0.3\text{m}$ 且 $v_O<0$




$\varphi=?$

$(A)\ \frac{2}{3}\pi$

$(B)\ \frac{5}{3}\pi$

$(C)\ \frac{5}{12}\pi$

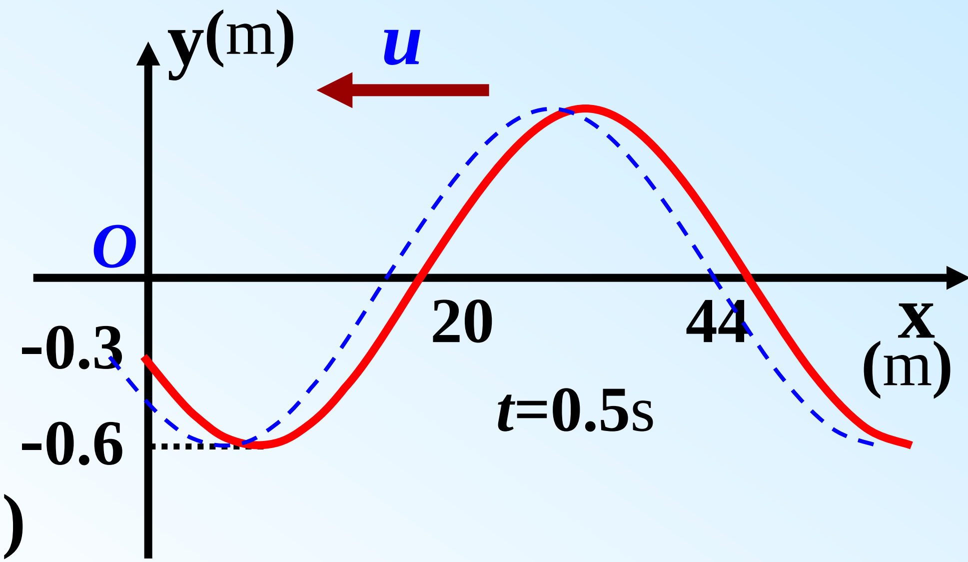
$(D)\ \frac{7}{12}\pi$

$$\therefore \frac{\pi}{2}\times 0.5+\varphi=+\frac{2\pi}{3} \qquad \varphi=\frac{5}{12}\pi$$

$$y_O=0.6\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{5\pi}{12})\ (\text{m})$$

波函数为：$y=0.6\cos[\frac{\pi}{2}(t+\frac{x}{12})+\frac{5\pi}{12}]\ \text{m}$

例：一平面简谐波在$t$=0.5s时的波形如图所示，该波以12m/s的速度沿x轴负方向传播，求波函数。




另解：$A = 0.6\ m$

$\lambda = 2\times(44-20) = 48\ (\mathrm{m})$

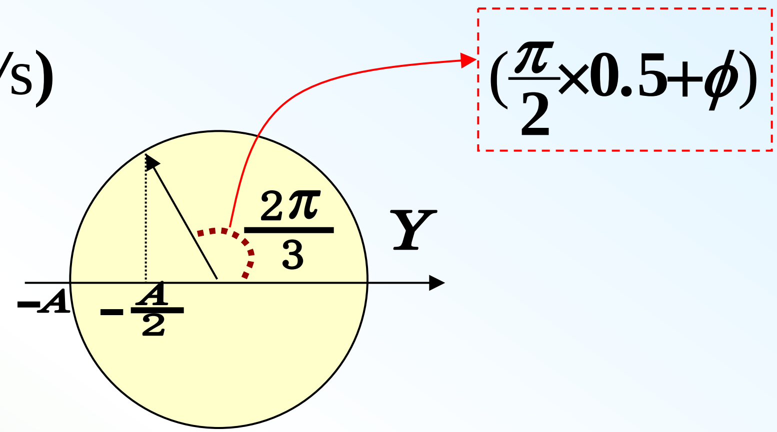
$T = \dfrac{\lambda}{u} = 4\mathrm{s} \qquad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}\ (\mathrm{rad/s})$

可设波函数为：

$$y = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\phi]$$

$$=0.6\cos[\frac{\pi}{2}(t+\frac{x}{12})+\phi]$$

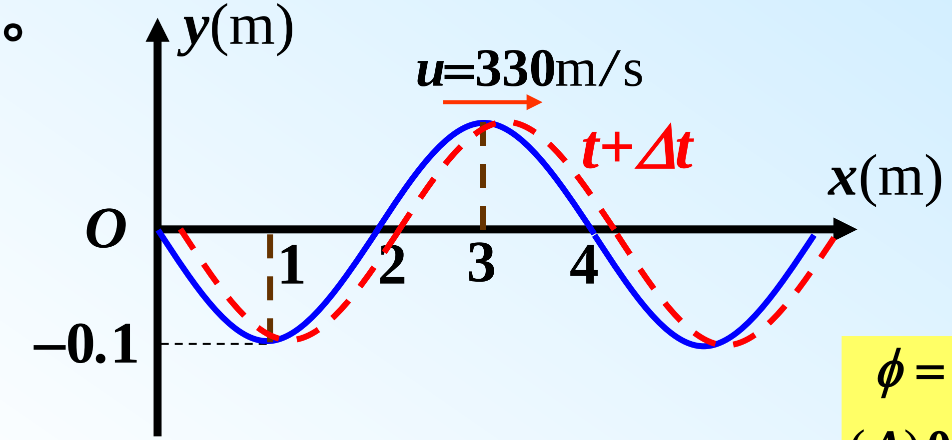
$$\therefore y_O = 0.6\cos(\frac{\pi}{2}t+\phi)$$




$$(\frac{\pi}{2}\times 0.5+\phi) = \frac{2\pi}{3} \qquad \phi = \frac{5\pi}{12}$$

波函数为：$y = 0.6\cos[\frac{\pi}{2}(t+\frac{x}{12})+\frac{5\pi}{12}]$ m

例: 图为一平面简谐波在$t=T/4$时的波形曲线。
求波动方程（波的表达式）。




解: 可设波函数为

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi]$$

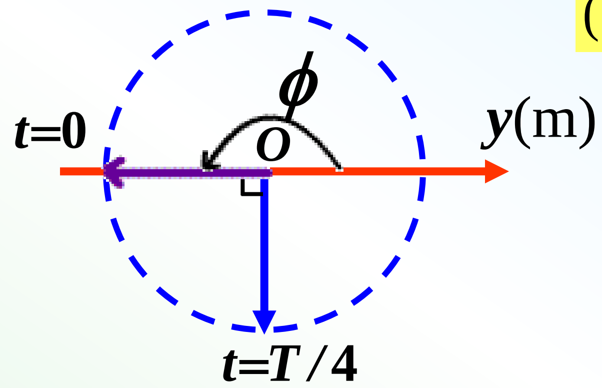
由图知, $A=0.1$m, $u=330$m/s,
$\lambda=4$m

$\therefore T=\lambda/u=2/165$(s)，$\omega=2\pi/T=165\pi$(rad/s), $\phi=?$

$\phi=?$
(A) 0
(B) $\frac{\pi}{2}$
(C) $\frac{\pi}{3}$
(D) $\pi$

下面求原点$O$的振动初位相$\phi$:

从$t=0$到$t=T/4$, 旋转矢量扫过的角度为1/4个圆周。于是，$\phi=\pi$. 所以，




$$y=0.1\cos[165\pi(t-\frac{x}{330})+\pi](\mathrm{m})$$