八、麦克斯韦方程组

$(\vec{D}=\varepsilon\vec{E})$

$(\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu})$

1. 静电场、稳恒磁场的普遍规律及推广

静电场

$$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_i \longrightarrow \oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_i$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \longrightarrow \oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

稳恒磁场

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \longrightarrow \oint\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

$$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_i \longrightarrow ?$$

$\vec{E}$、$\vec{B}$不随时间变化 $\xrightarrow{\text{推广}}$ $\vec{E}$、$\vec{B}$随时间变化

麦克斯韦完成了此推广，得到了麦克斯韦方程组。

那么，如何做？

安培环路定理 $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_i$

2. 位移电流

以L为边界作曲面s_1、s_2，

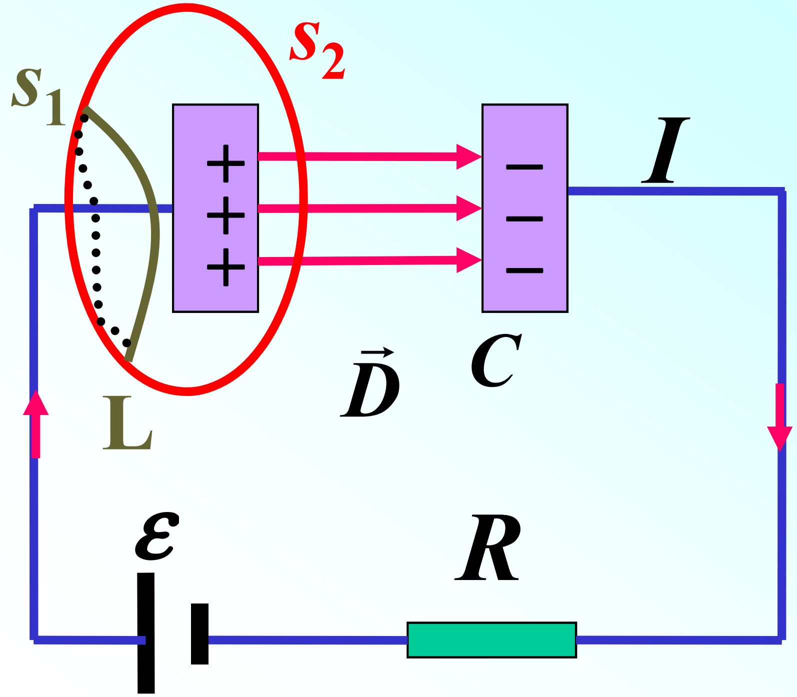
对回路L，由安培环路定理得

s_1：$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$

s_2：$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$

相矛盾！

怎么办？



麦克斯韦大胆假设：

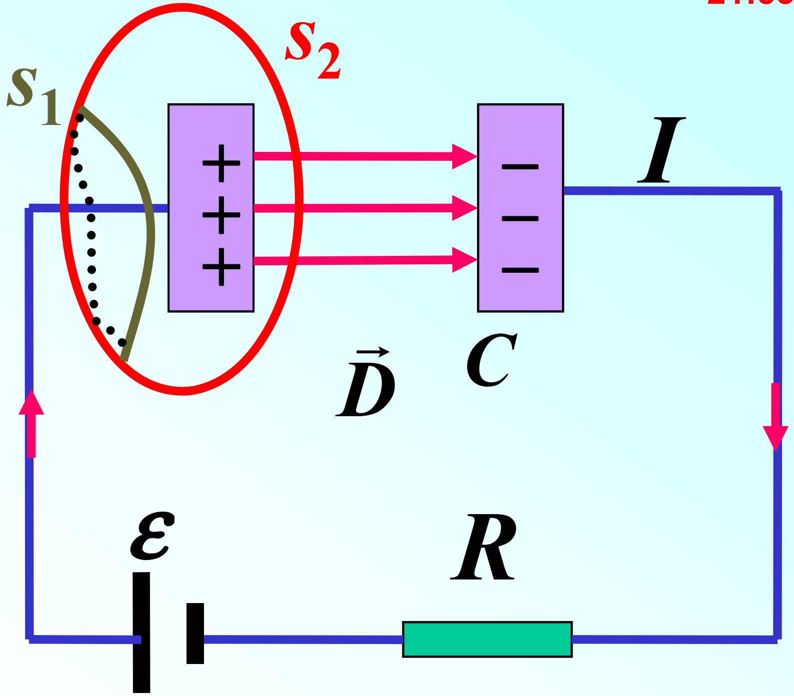
，且 $I_D = I$.

位移电流

则对于 s_2：$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_D = I$

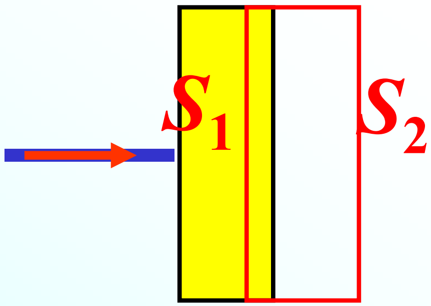
矛盾不复存在。 问题是：I_D 到底是什么？

安培环路定理 $\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum I_i$



在电容的充放电过程中, 考虑左极板。

如图取高斯面， 则由



$$\Phi_D=\oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum q_i$$

可得:

$$\oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\underbrace{\int_{S_1}\vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}_{0}+\int_{S_2}\vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\Phi_{S_2}=q_{极板}$$

$$I=\int \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

而穿过S_1的电流: $I=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}q_{极板}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{S_2}\vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right)$

有电流的量纲

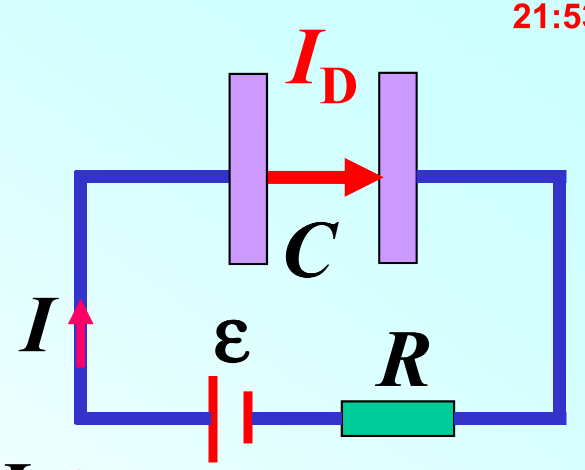
若S_2面不随时间t变化: $I=\int_{S_2}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{S_2}}{\mathrm{d}t}$

$$\vec{j}_D=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

定义: $I_D=\dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\int \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 位移电流

显然, $I_D=I$.

定义位移电流： $I_D=\dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\int\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$



位移电流密度： $\vec{j}_D=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\left.\begin{array}{llllll}
\text{电容充电：} & q\uparrow & D\uparrow & \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}/\!/\vec{D} & \vec{j}_D/\!/\vec{D}\ /\!/I \\
\text{电容放电：} & q\downarrow & D\downarrow & \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\uparrow\downarrow\vec{D} & \vec{j}_D\uparrow\downarrow\vec{D}\uparrow\downarrow I
\end{array}\right\}\ \vec{j}/\!/I$$

$$\boxed{I=\int\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

结论：在电容器中，$I_{D总}=I$，极板中断的电流由I_D接替，保持电流的连续性。

$$\boxed{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\neq 0,\ \vec{j}_D\neq 0}$$

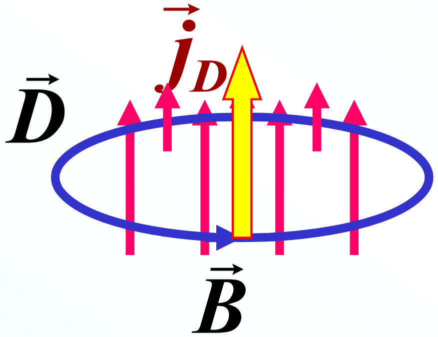
● 位移电流的性质

1）I_D的实质是变化的电场， I_D不产生焦耳热

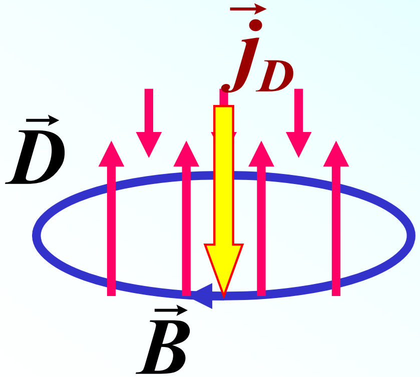
2）I_D在激发磁场方面与I等效

在极板间没有传导电流，但有I_D： $\oint\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I_D$

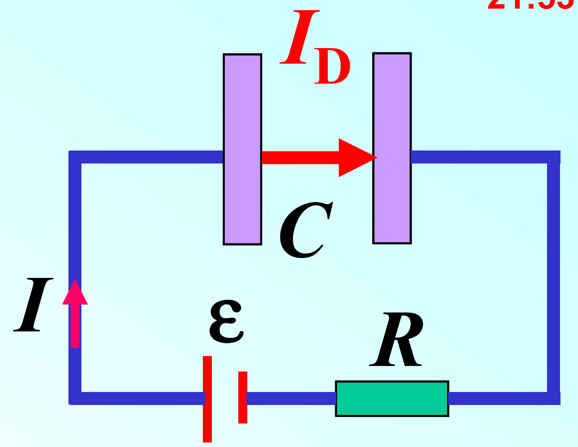
3）I_D激发的磁场$\vec{B}$与其成右手螺旋关系：



$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}>0 \qquad \vec{j}_D /\!/ \vec{D}$$



$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}<0 \qquad \vec{j}_D \uparrow\downarrow \vec{D}$$



3. 全电流定理

传导电流 + 位移电流 = 全电流

在非稳恒情况，往往是传导电流I与位移电流同时存在，两者之和的总的电流总是闭合的。

一般情况下的安培定律：

$$\boxed{\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=I+\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}} \longrightarrow \text{全电流定理}$$

或：$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=I+I_D$

即：磁场强度$\vec{H}$沿任意闭合环路的积分等于穿过此环路的传导电流与位移电流的代数和。

例: 一空气平行板电容器，略去边缘效应。

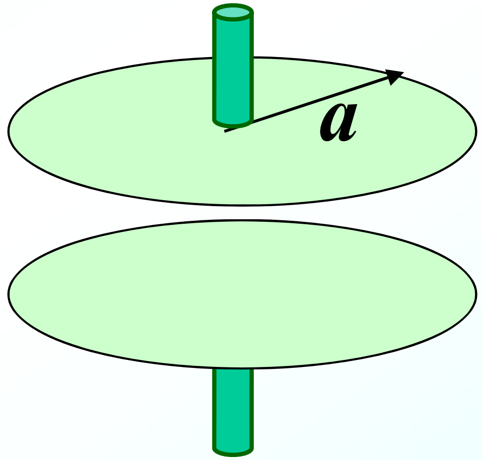
1）充电完毕后，断开电源，然后拉开两极板。
此过程中两极板间是否有 j_D? ⟶ $j_D=0$

2）充电完毕后，仍接通电源，然后拉开两极板。
此过程中两极板间是否有 j_D? 为什么?

$j_D \neq 0$ $\because V = E \cdot d$ V不变，$d\uparrow$，$E\downarrow$ D改变

$$\boxed{\begin{aligned} I_D &= \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \vec{j}_D &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

例:一圆形平行板电容器，两极板的半径为a。设其正在充放电，电荷按规律$Q=Q_0\sin\omega t$变化，忽略边缘效应求：两极板间任意点的j_D和B?

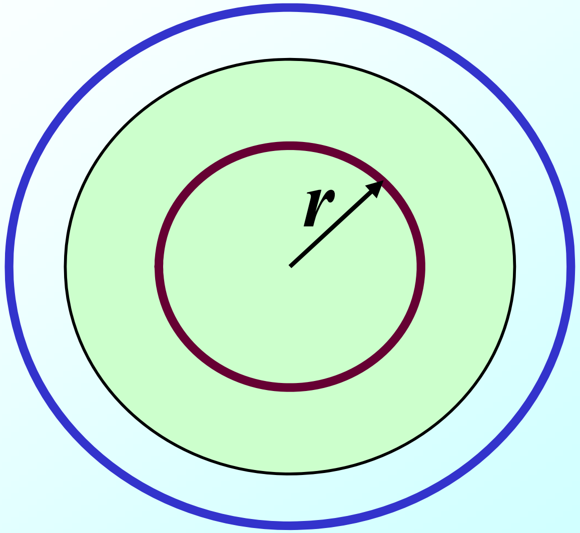


解：(1)平行板之间的电场为： $D=\sigma=\dfrac{Q}{S}$

$$j_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\omega Q_0}{S}\cos\omega t$$

j_D均匀分布在横截面上，与传导电流同向。

(2)在极板间取半径为r的同心圆环为积分回路



根据全电流定理： $\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=I+I_D$

$r<a$时 $\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=H\cdot 2\pi r$

$$\left.\begin{array}{l}\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=H\cdot 2\pi r\\ I+I_D=\int\vec{j}_D\cdot d\vec{S}=j_D\cdot\pi r^2\end{array}\right\}H=\frac{r}{2}j_D$$

0

$$B=\mu_0 H=\frac{\mu_0\omega Q_0}{2\pi a^2}r\cos\omega t$$

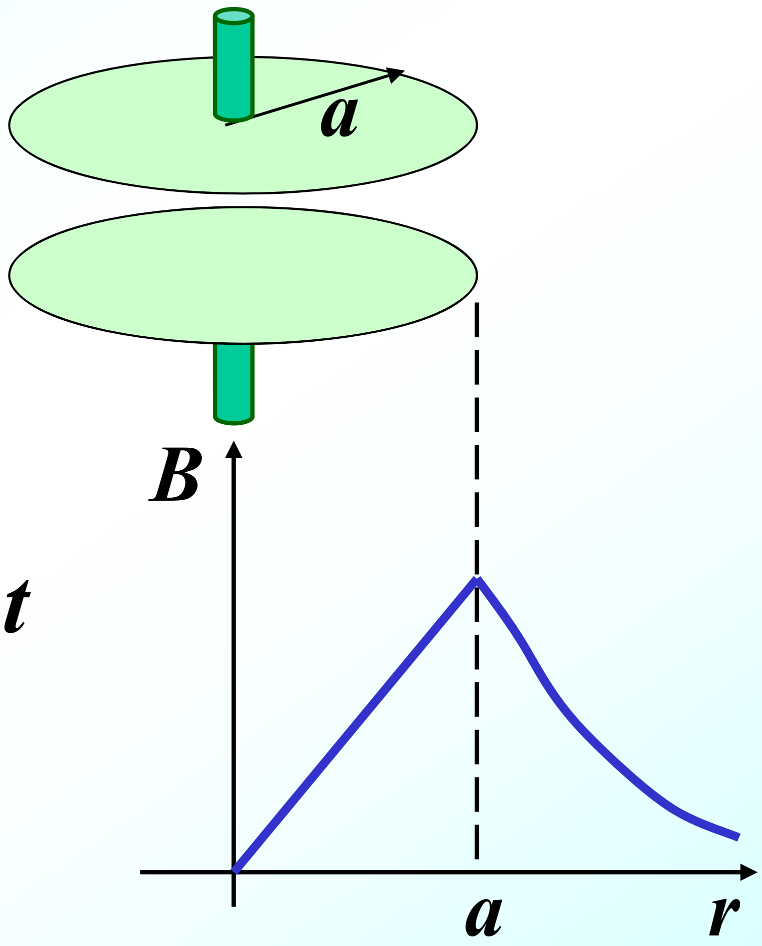
$r>a$时 $I+I_D=\int\vec{j}_D\cdot d\vec{S}=j_D\cdot\pi a^2$ $\quad H=\dfrac{a^2}{2r}j_D$

0

$$B=\frac{\mu_0\omega Q_0}{2\pi r}\cos\omega t$$

$$\boxed{\vec{j}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$$

$$\begin{cases} B = \dfrac{\mu_0 j_D}{2} r & (r < a) \\ B = \dfrac{\mu_0 a^2 j_D}{2r} & (r > a) \end{cases} \qquad j_D = \frac{\omega Q_0}{\pi a^2} \cos\omega t$$



$$r = a \quad B = B_{max} = \frac{\mu_0 j_D}{2} a = \frac{\mu_0 \omega Q_0}{2\pi a} \cos\omega t$$

一般，变化的电场产生的磁场很小。

如：a=5cm，$\dfrac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}$，若$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$=$10^{12}$ V/ms

B_{max}=3×10^{-7} T　　地球表面地磁场的大小约5×10^{-5} T

例：加在平行板电容器极板上的电压变化率为**1.0×10⁶**v/s.在电容器内产生**1.0**A的位移电流，则该电容器的电容是多少？

解：

$$I_D=\int\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$=S\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$E=V/d$$

$$\therefore I_D=\frac{\varepsilon S}{d}\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

$$\therefore I_D=C\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\therefore \quad C=1uF$$

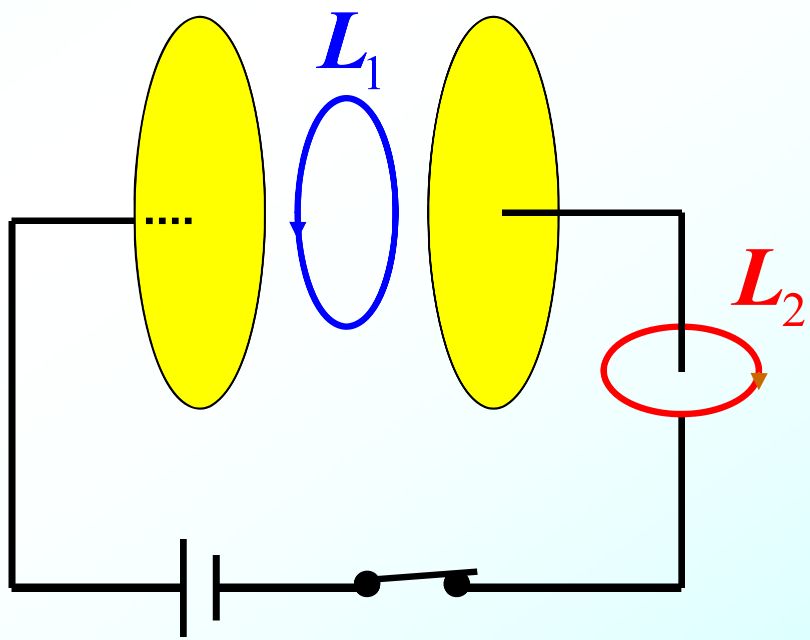
例: 如图，平行板电容器（忽略边缘效应）充电时，沿环路 L_1、L_2的磁场强度的环流中，正确的是（ **C** ）。

(A) $\oint_{L_1} \vec{H}\cdot d\vec{l} > \oint_{L_2} \vec{H}\cdot d\vec{l}$

(B) $\oint_{L_1} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{H}\cdot d\vec{l}$

(C) $\oint_{L_1} \vec{H}\cdot d\vec{l} < \oint_{L_2} \vec{H}\cdot d\vec{l}$

(D) $\oint_{L_1} \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$



4、麦克斯韦方程组

★静电场和稳恒磁场的基本实验规律

(1) $\oint \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \sum q_i$

(2) $\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = 0$

(3) $\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = 0$

(4) $\oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = I$

★感应电场的新理论

(5) $\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\phi_m}{dt} = -\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

★位移电流的新思想

(6) $\oint \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = I_D = \dfrac{d\phi_D}{dt} = \int \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

麦克斯韦电磁理论建立的基础

麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases}(1)\ \oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum q_i \\ (2)\ \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ (3)\ \oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0 \\ (4)\ \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I+\int \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\end{cases}$$

a. 各方程的物理意义：

(1)在任何电场中，通过任何闭合曲面的电通量等于该闭合曲面内自由电荷的代数和。 ——有源场

(2)在任何磁场中，通过任何闭合曲面的磁通量恒等于0。 ——无源场

(3)在一般电场中，电场强度$\vec{E}$沿任意闭合环路的积分，等于穿过该环路磁通量随时间变化率的负值。 ——有旋场

(4)磁场强度$\vec{H}$沿任意闭合环路的积分，等于穿过该环路传导电流和位移电流的代数和。 ——有旋场

麦克斯韦方程组是电磁场理论的基础，其正确性已被大量实验所证实。麦克斯韦方程组已成为现代电子学、无线电学等学科的理论基础。

麦克斯韦预言了电磁波的存在，并计算出电磁波在真空的速度大小为：

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\approx 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

b. 麦克斯韦方程组的微分形式（自学）

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

讨论：

麦克斯韦方程并非完全对称。

(1) $\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_i$ (2) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

磁流

I_m ？

(3) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ (4) $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=I+\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

磁荷

q_m ？

磁单极存在否？

英国物理学家狄拉克(Paul Dirac)早在1931年就利用数学公式预言磁单极存在于携带磁场的管（所谓的狄拉克弦）的末端。当时他认为既然带有基本电荷的电子在宇宙中存在，那么理应带有基本"磁荷"的粒子存在，从而启发了许多物理学家开始寻找磁单极的工作。

磁单极存在与否尚无定论，找寻磁单极可以说是21世纪物理学重要的研究主题之一。

例. 反映电磁场基本性质和规律的积分形式的麦克斯韦方程组为:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_i q_i \quad ①$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad ②$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \quad ③$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_i I_i + \frac{d\Phi_e}{dt} \quad ④$$

试判断下列结论是包含于或等效于哪一个麦克斯韦方程式的，将你确定的方程式用代号填在相应结论后的空白处。

1．变化的磁场一定伴随有电场___②___;

2．磁感应线是无头无尾的___③___；

3．电荷总伴随有电场___①___；

九. 电磁场的物质性

实验证实： 电磁场——**客观存在的一种物质形态**

一切物质具有基本属性：能量、质量、动量。

1) 电磁场能量（随时间变化的电磁场）

$$W = W_e + W_m = \int_V w \mathrm{d}V$$ 非稳恒情况下是空间和时间的函数

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

2) 能流密度矢量

定 义: 单位时间内通过与传播方向垂直的单位面积的能量. 指向能量传播的方向.

理论证明： $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ ——又称坡印廷矢量

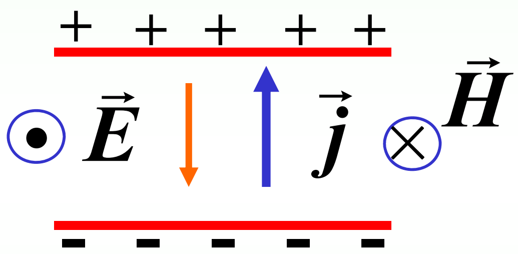
$$\boxed{\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}}$$

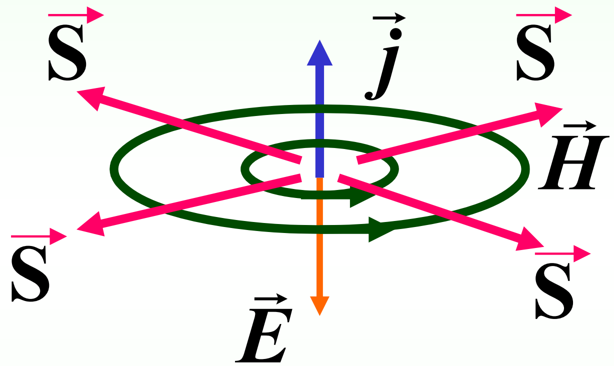
注：S不仅适用于变化的电磁场，也适用于稳恒场。

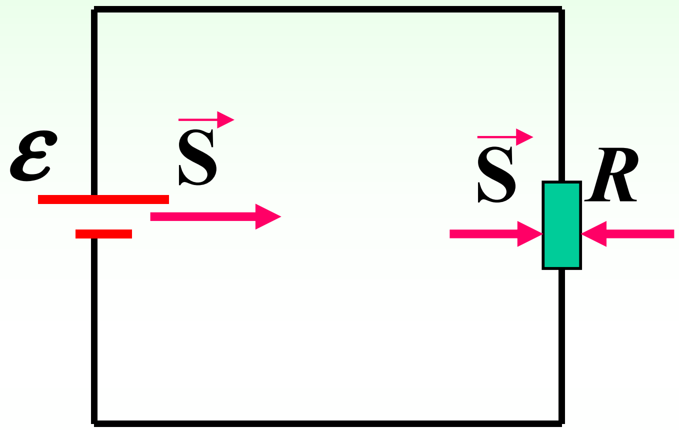
在稳恒场中，电磁能也是场传播的。

例：直流电路中的能量传递。

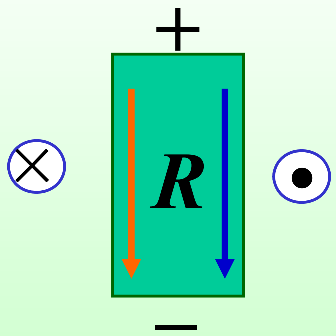
电源：

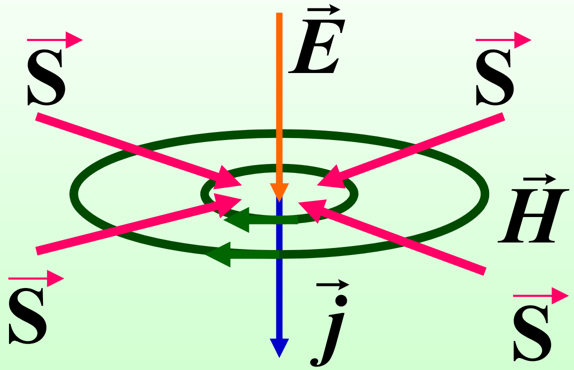






负载：





结论：

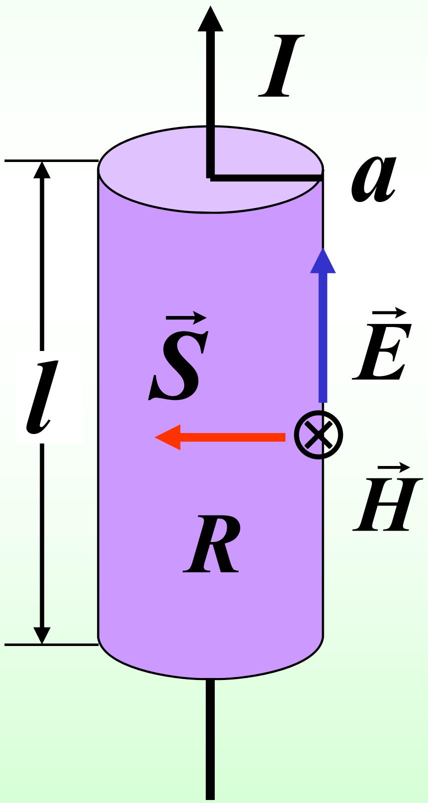
(1)电源的能量是通过电磁场从电源的侧面传出。

(2)电阻消耗的能量是通过电磁场从电阻的侧面传入。

导线起引导场能的作用。

例：圆柱形导体，长l半径为a，电阻为R，载电流I，求证从导体侧表面输入导体的电磁能量，正好等于同时间内导体上产生的焦耳热.

解：单位时间从导体表面输入导体的电磁能量为



$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=-\int\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

$$=-\int(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

$$=EHA$$

$$E=\frac{V}{l}=\frac{IR}{l}$$

$$H=\frac{I}{2\pi a}$$

$$A=2\pi a\cdot l$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{IR}{l}\cdot\frac{I}{2\pi a}\cdot 2\pi a l$$

$$=I^2R$$

得证.

2. 电磁场质量

电磁场具有有限的运动速度c，则其具有一定的质量M。

由相对论质能关系： $E=Mc^2$

设单位体积中，电磁场质量为m，能量为w： $w=mc^2$

$$m=\frac{w}{c^2}=\frac{1}{2c^2}(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H})$$ ——质量密度

3. 电磁场物质性的特点

（1）没有静止质量： $M_0=0$ 实验精度：10^{-50}左右

（2）电磁场以波的形式传播，
以粒子的形式与实物相互作用；

（3）电磁场可相互迭加，同时占据同一空间；

（4）电磁波的波速与参考系无关。

第8章 电磁感应总结

一、电磁感应定律

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

能同时反映电动势的大小和方向。

二、楞次定律

快捷判断感应电流的方向。

三、动生电动势

$$\varepsilon = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

方向：右手定则

导体中动生电动势的方向由电势低指向电势高。

四、感生电动势　感应电场

1. $\vec{E}_i$ 的环路定理

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

2. 感应电场的方向　$\vec{E}_i$ 与 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 成左螺旋关系或楞次定律。

3. 感应电场的计算

4. 圆柱形变化磁场中导体上的感生电动势的计算

五、自感与互感

1. 自感系数、互感系数的计算

2. 借助互感系数计算互感电动势

六、磁场的能量

1. 自感磁能 $W_m = \frac{1}{2} L I^2$

2. 磁场的能量 $W_m = \int \frac{B^2}{2\mu} \mathrm{d}V$

七、麦克斯韦方程组

1. 位移电流及其计算

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

方向即 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 的方向。

$$I_D = \int_S \vec{j}_D \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

2. 麦克斯韦方程组中各方程的物理意义