
华中科技大学
复变函数与积分变换

复变函数
与积分变换

杨美华

QQ群号：**261030147**

华中科技大学数学与统计学院

一、课程信息

课堂教学：　40 学时

课程教材：

《复变函数与积分变换》李红，谢松法, 高等教育出版社(第5版)，2018.10(2019.6 重印)

二、教学内容

- 本教材的内容是由复变函数与积分变换两个部分组成。
- 复变函数的内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示、留数及其应用、共形映射以及解析函数在平面场的应用。
- 积分变换的内容包括：傅里叶变换和拉普拉斯变换。
- 讲授章节：1-6章, 8-9章

  微积分(分析)：第1-5章（1-3章是基础）

  共性映射(几何): 第6章

  两个变换: 第8-9章

三、课程要求和说明

- 参考书：与教材配套的《学习辅导与习题全解》；其它教辅
- 作　业：学习的重要环节（训练、巩固和检验）；
  平时成绩的主要参考。要独立、按时完成。
- 下周起，周一上课时交作业。要按时交作业！
- 课程成绩: 平时成绩30%; 考试成绩70%; 计算机阅卷
- 练习册：扫码购买！　慕课(MOOC)：网络学习平台
- 答疑：周二晚 7:00～9:00，2-10周；地点：科技楼南楼611

三、课程要求和说明

- 学习中遇到问题要及时解决。主动学习！
- 学习要点：复变函数与积分变换主要研究（一元）复变量函数的解析性质(复变量微积分)和两个变换。复习微积分！

学习中，学习数学基础知识的同时，注意学习和领会数学的思维，培养数学的素养。

数学的地位与作用

- **数学是科学的语言；**
- 数学与素质教育（李大潜院士）

高新技术本质上是一种数学技术

数学教育本质上是一种素质教育

树立明确的数量观念，“胸中有数”；提高逻辑思维能力；培养认证细致、一丝不苟的作风和习惯；形成精益求精的风格；提高运用数学知识解决复杂的实际问题的意识、信念和能力；增强拼搏精神和应变能力；调动探索精神和创造力；培养数学上的直觉和想象力…

李大潜院士在复旦大学数学科学学院的迎新讲话:

2013 学习数学四字诀：少、慢、精、深;

2014 学知识、学办事、学做人;

2015 学习数学、品味数学、热爱数学、献身数学;

2016 数学帮助我们认识和改造世界（七个一;八种素质）

2017 打好基础，肩负使命

2018 与时俱进，牢牢掌握大学数学学习的主动权

李克强总理谈数学

在2018年1月3日的国务院常务会议上，李克强总理突出强调数学等基础学科对提升原始创新能力的重要意义. 他说，数学特别是理论数学是我国科学研究的重要基础.无论是人工智能还是量子通言等，都需要数学、物理等基础学科作有力支撑.

2021年7月19日李克强考察国家自然科学基金委员会并 主持召开座谈会. 总理在会上说：“我们到了要大声疾呼加强基础研究的关键时刻”.

在听取了数理科学部的情况汇报时, 李克强说：“我们之所以强调要重视数学，因为自然科学首先发端于数学，人类文明真正进入科学领域也是从数学开始的. 可以 说，数学是一切科学的基础. 事实上，许多‘卡脖子’的问题，最终都‘卡’在基础研究上”. ………….

- 这门课程是工科的一门重要的数学基础课程，也在许多工程技术领域有着广泛的应用。

世上最伟大的十个数学公式：人类文明进程的标志

英国科学期刊《物理世界》曾让读者投票评选出的“最伟大的公式”。

No.1 麦克斯韦方程组（The Maxwell's Equations）
No.2 欧拉公式（Euler's Identity）
No.3 牛顿第二定律（Newton's Second Law of Motion）
No.4 勾股定理/毕达哥拉斯定理（Pythagorean Theorem）
No.5 质能方程（Mass–energy Equivalence）
No.6 薛定谔方程（The Schrödinger Equation）
No.7 1+1=2
No.8 德布罗意方程组（The de Broglie Relations）
No.9 傅立叶变换（The Fourier Transform）
No.10 圆的周长公式（The Length of the Circumference of a Circle）

例如： 现代医疗：CT扫描，核磁共振成像，这些影像分析和解释都依赖于发展于19世纪的**傅立叶变换理论**等。

课程学习的主要目的：

<u>学习数学知识、数学思维，培养数学素质</u>

第一章 复数与复变函数

- 复数的产生最早可以追溯到十六世纪中期，但是直到十八世纪末期，经过卡尔丹、笛卡尔、欧拉以及高斯等许多人的长期努力，复数的地位才被确立下来。

- 复变函数理论又称为复分析，其产生于十八世纪。为该学科的发展作了大量奠基工作的则是柯西、黎曼和维尔斯特拉斯等。

- 我国数学家也为该学科的发展作出重大贡献，如：华罗庚在多复变函数方面作出杰出贡献，等等。

- 复变函数理论中的许多概念、理论和方法都是实变量函数在复数领域的推广和发展。

§1.1 复数

一、复数的基本概念

二、复数的四则运算

▲三、共轭复数

一、复数的基本概念 P1

定义 (1) 设 x 和 y 是任意两个实数，将形如

$$z = x + iy \quad \text{或者} \quad z = x + yi$$

的数称为复数。其中，$i = \sqrt{-1}$ 称为虚数单位。

(2) 称 x 和 y 分别为复数 z 的实部与虚部，通常表示为：

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(3) 当 $x = 0$ 时，$z = 0 + iy = iy$ 称为纯虚数；

当 $y = 0$ 时，$z = x + i0 = x$ 就是实数。

- 可见，实数可以看作是复数的特殊情形。

一、复数的基本概念

相等 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数，

如果 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，则称复数 z_1 与 z_2 相等。

- 特别地，$z = x + iy = 0$ 当且仅当 $x = y = 0$.

注意 两个复数(虚部不为零)之间不能比较大小，

它们之间只有相等与不相等的关系。

二、复数的四则运算 P2

- 设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数，

(1) 复数的加减法

加法 $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$;

减法 $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.

(2) 复数的乘除法

乘法 $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

除法 如果存在复数 z, 使得 $z_1 = z_2 \cdot z$, 则 $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

二、复数的四则运算

(3) 四则运算法则

交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

结合律 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

分配律 $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

三、共轭复数

1. 共轭复数的概念 P1

定义 设 $z = x + iy$ 是一个复数，

称 $z = x - iy$ 为 z 的共轭复数，记作 $\bar{z}$。

注 实数的共轭复数是其本身。

2. 共轭复数的性质 P 3

性质 (1) $\bar{\bar{z}} = z$.

(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,

其中，“·”可以是 +, −, ×, ÷.

三、共轭复数

性质 (3) $z \cdot \overline{z} = [\operatorname{Re} z]^2 + [\operatorname{Im} z]^2 = x^2 + y^2.$

(4) $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \operatorname{Re} z = x;$

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \operatorname{Im} z = y.$$

注 共轭复数有许多用途。

比如

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(x_1 + i y_1)(x_2 - i y_2)}{(x_2 + i y_2)(x_2 - i y_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例 已知 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$ 求 $\dfrac{z_1}{z_2}, \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

解 (1) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$

$$= \frac{-35-5i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

(2) $$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

例 证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

P3 例 1.1

证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}}$

$$=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}$$

$$=2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

§ 1.2 复数的几种表示

一、复数的几何表示

二、复数的三角表示和指数表示

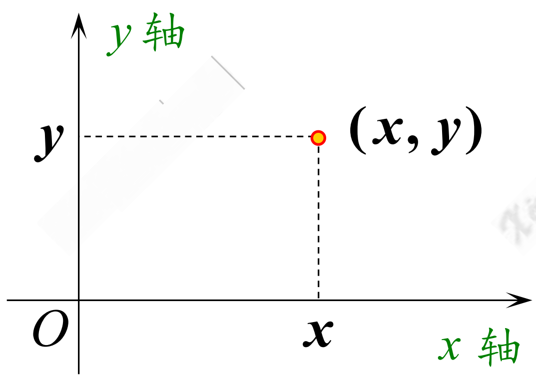
三、复数的乘幂与开方

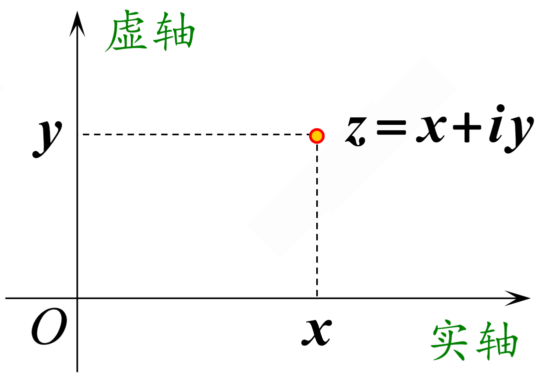
四、几个关系式

一、复数的几何表示

1. 复平面 P 4

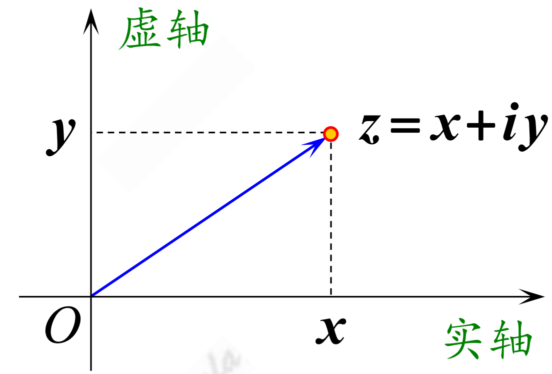
定义 在平面上建立一个直角坐标系，用坐标为 (x, y) 的点来表示复数 $z = x + iy$，从而将全体复数和平面上的全部点一一对应起来，这样表示复数 z 的平面称为复平面或者 z 平面。此时，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴。





一、复数的几何表示

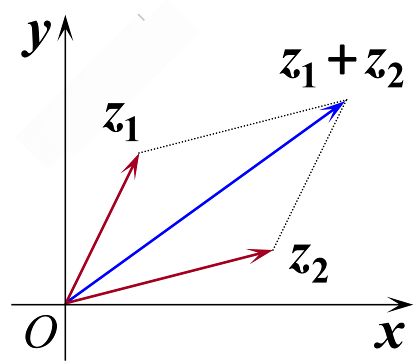
1. 复平面

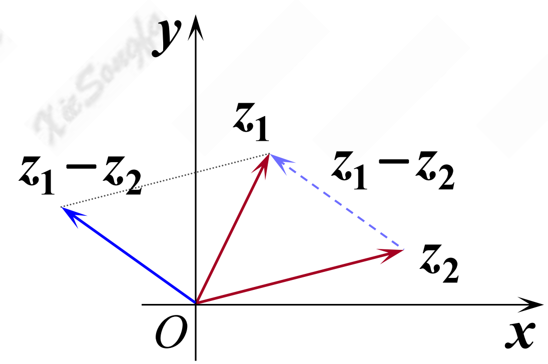


- 在复平面上，作一条从原点到 z 的向量，则复数 z 与向量也构成一一对应关系(复数零对应零向量)。

- 引入复平面后，复数 z、点 z 及 向量 z 视为同一个概念。

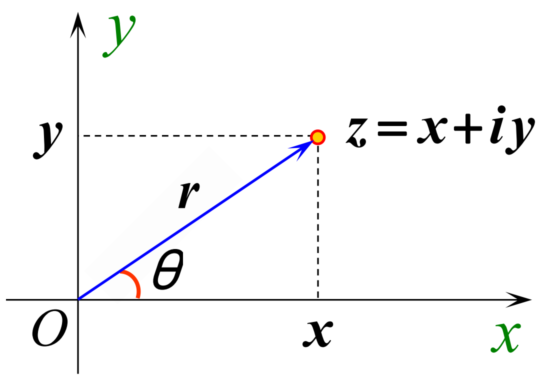
- 比如，复数的加减法等同于向量的平行四边形法则。





一、复数的几何表示

2. 复数的模与辐角 P 4



- 将复数和向量对应之后，除了利用实部与虚部来给定一个复数以外，还可以借助向量的长度与方向来给定一个复数。

定义 设 z 是一个不为 0 的复数，

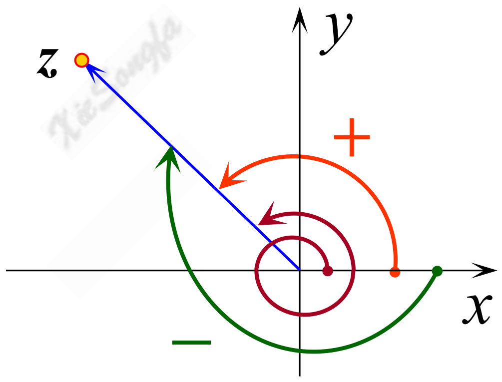
(1) 向量 z 的长度称为复数 z 的模，记为 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) 向量 z 的方向角[注]称为复数 z 的辐角，记为 $\operatorname{Arg} z$.

[注] 事实上，严格来说，从实轴的正向绕原点旋转到向量 z，所转过的角度称为复数 z 的辐角。

一、复数的几何表示

2. 复数的模与辐角



几点说明：

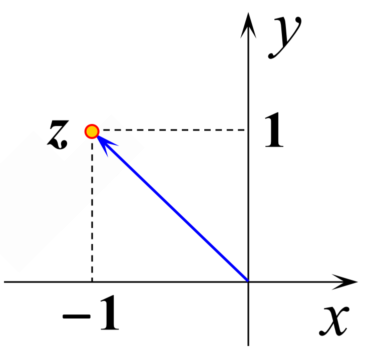
(1) 辐角是多值的。

- 相互之间可相差 $2k\pi$，其中 k 为整数。

(2) 辐角的符号约定为：逆时针取正号，顺时针取负号。

例如 对于复数 $z=-1+i$，则有 $|z|=\sqrt{2}$，

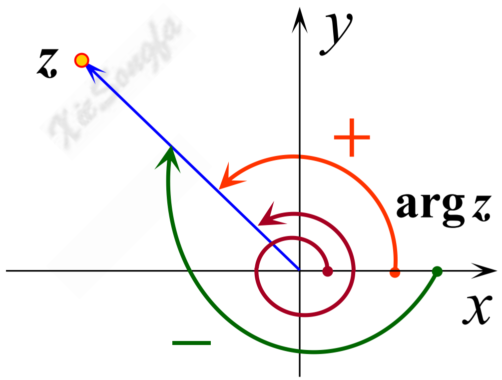
$$\operatorname{Arg} z=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$



注意 复数 0 的模为 0，辐角无意义。

一、复数的几何表示

2. 复数的模与辐角



主辐角 对于给定的复数 $z \neq 0$，

设有 α 满足：

$$\alpha \in \operatorname{Arg} z \text{ 且 } -\pi < \alpha \leq \pi,$$

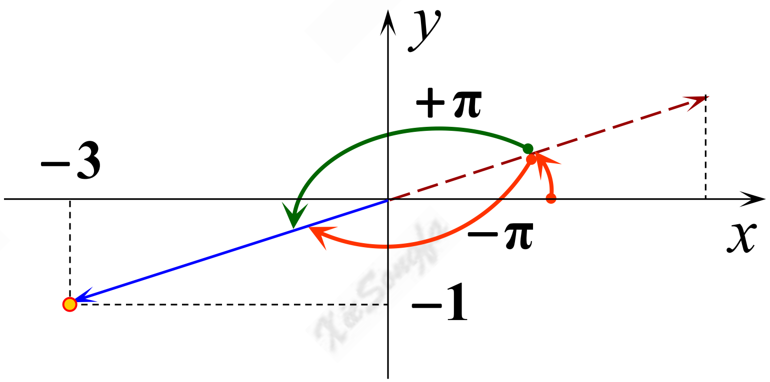
则称 α 为复数 z 的主辐角，记作 $\arg z$.

- 由此就有如下关系：

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

例 求复数 $z=\dfrac{2i}{1-i}+\dfrac{2(1-i)}{i}$ 的模与主辐角。

解 $z=\dfrac{2i}{1-i}+\dfrac{2(1-i)}{i}=-3-i.$



$$|z|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10},$$

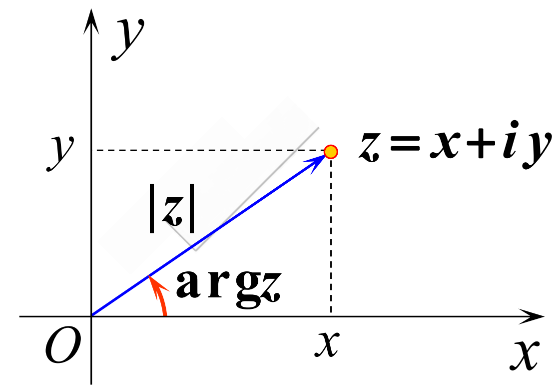
$$\arg z=\arctan\left(\frac{-1}{-3}\right)-\pi$$

$$=\arctan\frac{1}{3}-\pi.$$

一、复数的几何表示

3. 相互转换关系 P 5

(1) 已知实部与虚部，求模与辐角。

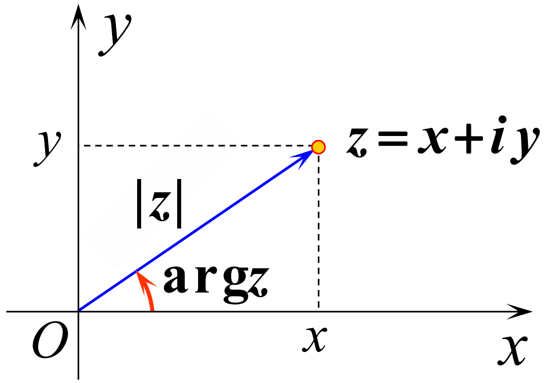


模 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

主辐角 $$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0,\ y \text{ 任意}, \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0, \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

一、复数的几何表示

3. 相互转换关系 P 5



(1) 已知实部与虚部，求模与辐角。

(2) 已知模与辐角，求实部与虚部。

实部 $x = |z|\cos(\arg z) = |z|\cos(\operatorname{Arg} z);$

虚部 $y = |z|\sin(\arg z) = |z|\sin(\operatorname{Arg} z).$

- 由此引出复数的三角表示式与指数表示式。

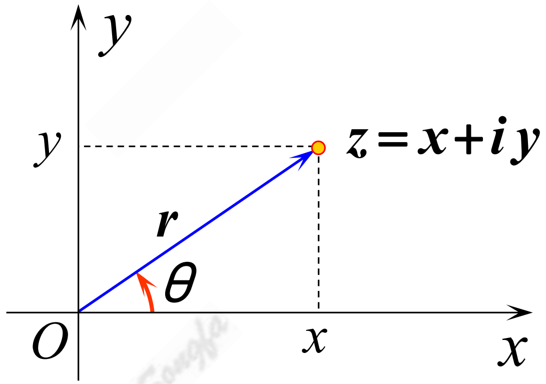
二、复数的三角表示和指数表示

1. 复数的三角表示 P6

- 如图，由 $x = r\cos\theta$， $y = r\sin\theta$，

有 $z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta).$$



定义 设复数 $z \neq 0$， r 是 z 的模， θ 是 z 的任意一个辐角，

称 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 为复数 z 的三角表示式。

二、复数的三角表示和指数表示

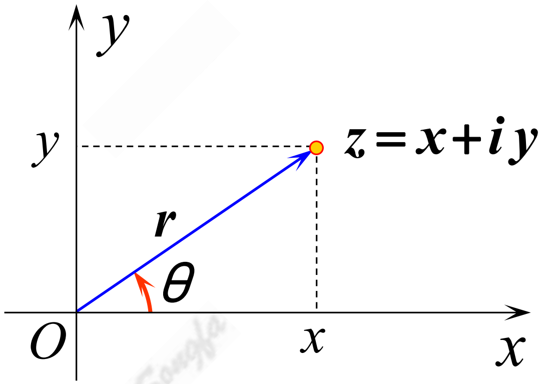
2. 复数的指数表示

补 (欧拉公式)

- 利用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,

即得 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=re^{i\theta}.$$



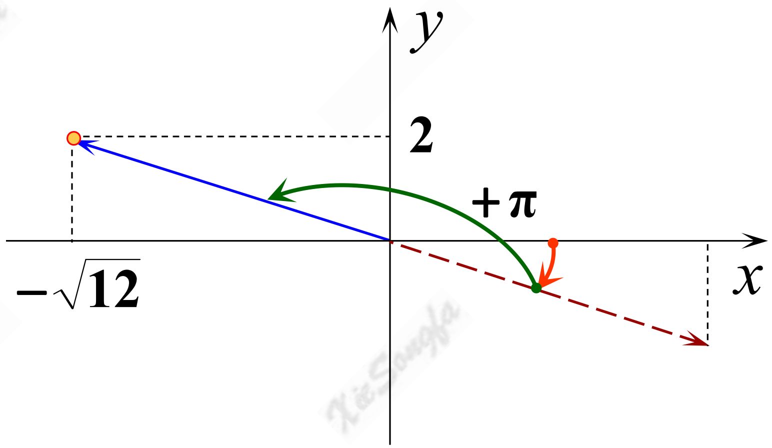
定义 设复数 $z\neq 0$, r 是 z 的模, θ 是 z 的任意一个辐角,

称 $z=re^{i\theta}$ 为复数 z 的指数表示式。

注 在复数的三角表示式与指数表示式中，辐角不是唯一的，但习惯上一般取为主辐角。

例 写出复数 $z=-\sqrt{12}+2i$ 的三角表示式与指数表示式。

解 $|z|=\sqrt{12+4}=4,$



$$\arg z=\arctan\left(\frac{2}{-\sqrt{12}}\right)+\pi$$

$$=-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi$$

$$=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}.$$

复数 z 的三角表示式为：$z=4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right).$

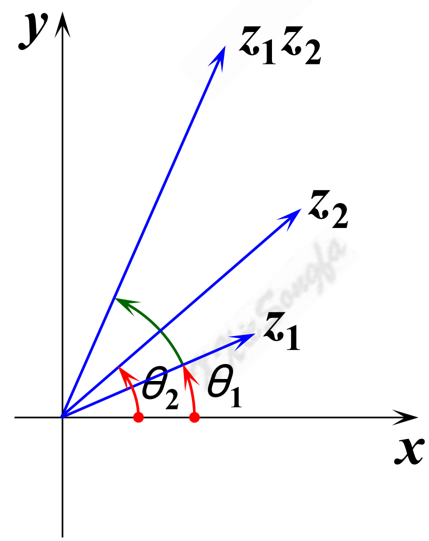
复数 z 的指数表示式为：$z=4e^{\frac{5\pi}{6}i}.$

二、复数的三角表示和指数表示

3. 利用复数的指数表示作乘除法

P9 修改

- 设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$,



乘法 $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

即得 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 .$$ (在集合意义下)

(集合意义)

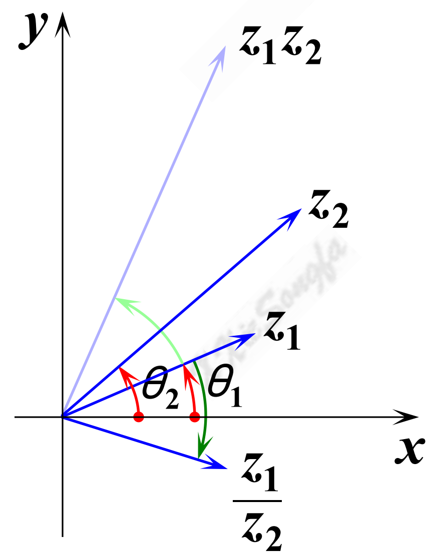
结论 两个复数乘积的 模等于它们的模的乘积; 辐角等于它们辐角的和。

二、复数的三角表示和指数表示

3. 利用复数的指数表示作乘除法

P9 修改

- 设 $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}$， $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}$，



除法 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}}{r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

即得 $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2.$$ (在集合意义下)

结论 两个复数相除的 模等于它们的模的相除；辐角等于它们辐角的差。

例 计算 $\dfrac{i}{1-i}$.

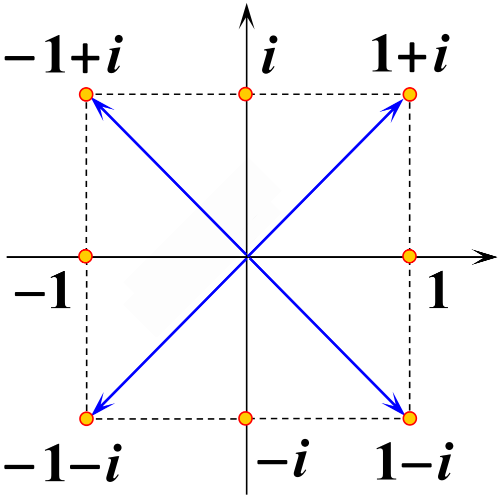
解 由 $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$，$1-i=\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$，有

$$\frac{i}{1-i}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)i}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}i}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

附 一些简单复数的指数形式

$$e^{2\pi i}=1,\quad e^{2k\pi i}=1,\quad e^{\pi i}=-1,$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i,\quad \cdots.$$



例 计算 $(1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}-i)$ 和 $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}-i}$. P10 例1.5 修改

解 由于 $1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $-\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$, 因此有

(1) $$(1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}-i)=2e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot 2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$$

$$=4e^{(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})i}=4e^{-\frac{\pi}{2}i}=-4i.$$

(2) $$\frac{1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}-i}=\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{-\frac{5\pi}{6}i}}=e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6})i}=e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

$$=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

三、复数的乘幂与开方

1. 复数的乘幂 P 10 参考 P 38

定义　设 $z \neq 0$ 是给定的复数，n 为正整数，n 个 z 相乘的积称为复数 z 的乘幂，记为 z^n，即 $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n个}$.

● 利用复数的指数表示式，易得乘幂法则。

法则　设 $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $z^n = (r\,\mathrm{e}^{i\theta})^n = r^n\,\mathrm{e}^{in\theta}$.

三、复数的乘幂与开方

1. 复数的乘幂

- 棣莫弗(De Moivre)公式

由 $z^n = (r\,\mathrm{e}^{i\theta})^n = r^n\,\mathrm{e}^{in\theta}$ 以及复数的三角表示，可得

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

在上式中令 $r=1$，则得到棣莫弗(De Moivre)公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

- 进一步，易得正弦函数和余弦函数的 n 倍角公式。

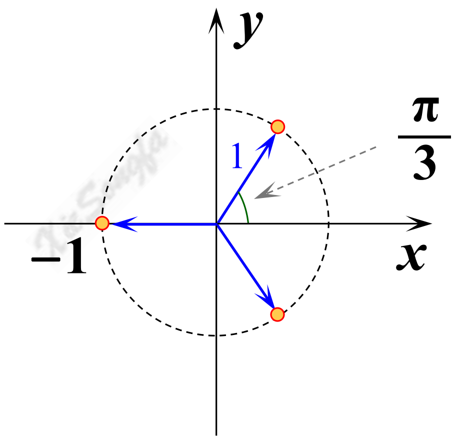
比如 $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

例 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=(e^{\frac{\pi}{3}i})^2=e^{\frac{2\pi}{3}i}.$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=(e^{\frac{\pi}{3}i})^3=e^{\pi i}=-1.$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=(e^{-\frac{\pi}{3}i})^3=e^{-\pi i}=-1.$$



此外，显然有 $(-1)^3=-1.$

- 由此引出开方的概念。

三、复数的乘幂与开方

2. 复数的开方 P11

- 复数的开方是复数乘幂的逆运算。

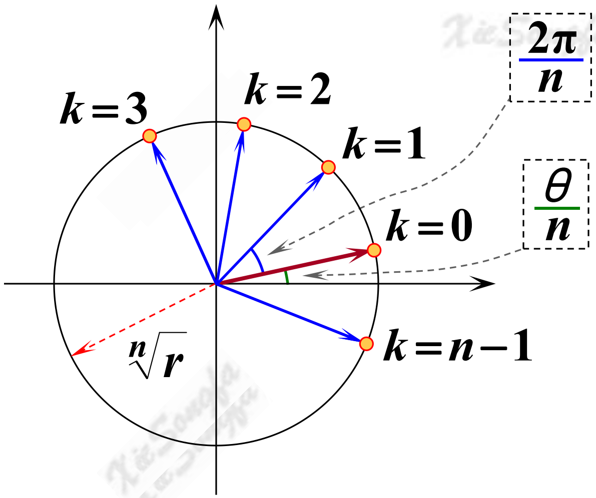
定义 设 z 是给定的复数，n 是正整数，求所有满足 $w^n = z$ 的复数 w，称为把复数 z 开 n 次方，或者称为求复数 z 的 n 次方根，记作 $w = \sqrt[n]{z}$ 或 $w = z^{1/n}$.

- 复数 z 的 n 次方根一般是多值的。

三、复数的乘幂与开方

2. 复数的开方 P11

● 由复数的指数表示，易得开方法则。



推导 设 $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$，$w = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$，

由 $w^n = z$，有 $\rho^n\,\mathrm{e}^{in\varphi} = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$，

得 $\rho^n = r$， $\Rightarrow$ $\rho = \sqrt[n]{r}$；——算术根。

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

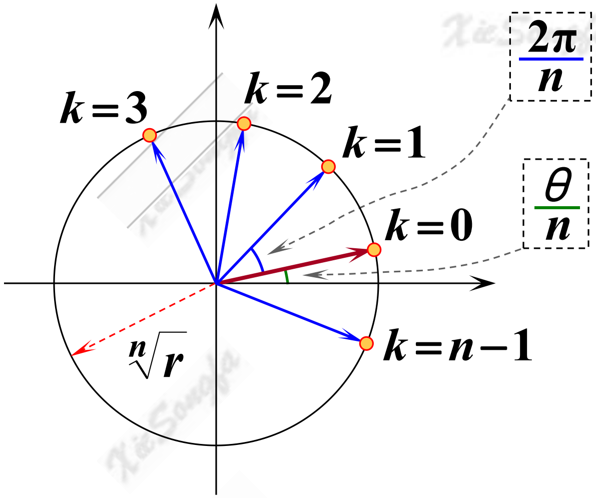
由此即得 $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$， $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$.

三、复数的乘幂与开方

2. 复数的开方

法则 设 $z = r e^{i\theta}$，则 $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$，$(k = 0, 1, \cdots, n-1)$.

描述 复数 $z = r e^{i\theta}$ 的 n 个方根均匀地分布在以原点为圆心，以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上，且其中一个方根的辐角是 (θ/n).

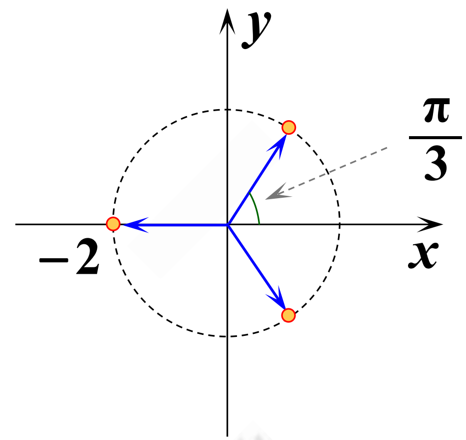


方法
- 直接利用公式求根；
- 先找到一个特定的根，再确定出其余的根。

例 求 $\sqrt[3]{-8}$.

解 $\sqrt[3]{-8}=2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3})}$, $(k=0,1,2)$.

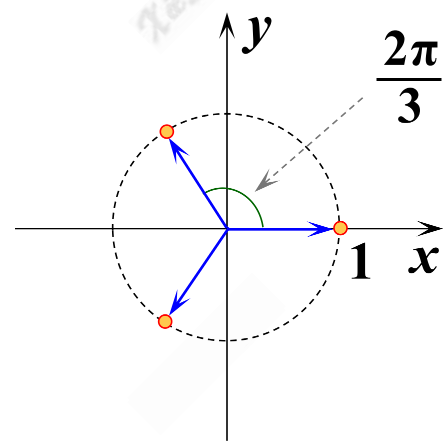
具体为： -2, $2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$.



例 求解方程 $z^3-1=0$.

解 $z=\sqrt[3]{1}=1\cdot e^{i(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3})}$, $(k=0,1,2)$.

具体为： 1, $e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

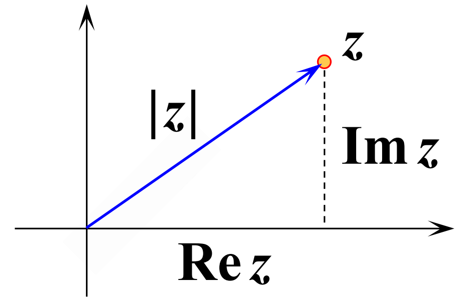


四、几个关系式

(1) $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|, \quad |\mathrm{Im}\, z| \le |z|;$

P6

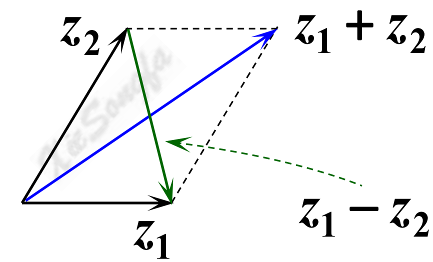
$|z| \le |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|.$



(2) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|;$

P8

$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|.$

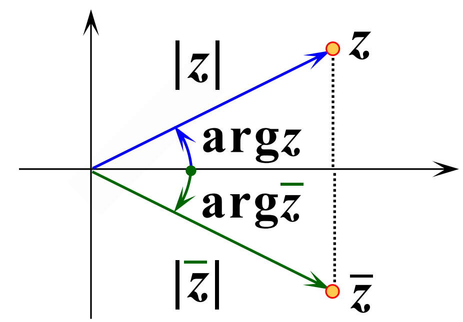


(3) $|z| = |\bar{z}|;$

P6

$\arg z = -\arg \bar{z}, \ (\arg z \ne \pi);$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}.$



§1.3 平面点集的一般概念

一、平面点集

二、区域

三、平面曲线

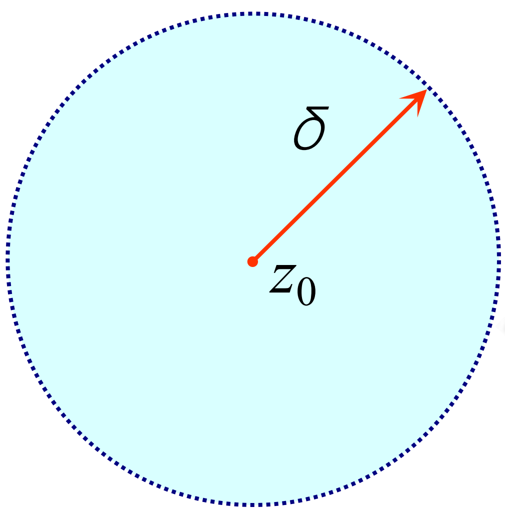
一、平面点集

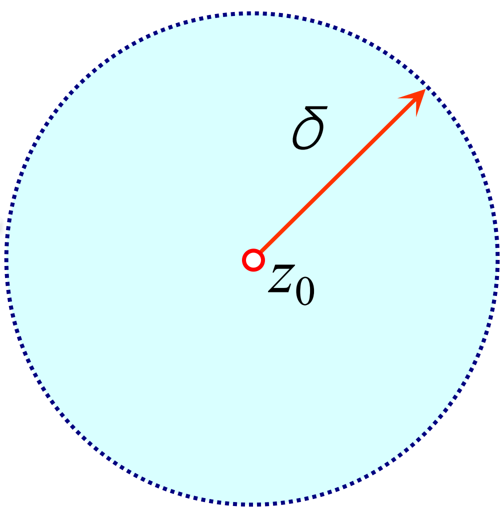
1. 邻域(Neighborhood)

定义 设 z_0 为复平面上的一点， $\delta > 0$，

(1) 称点集 $\{z : |z - z_0| < \delta\}$ 为 z_0 点的 δ 邻域;

(2) 称点集 $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 为 z_0 点的 δ 去心邻域。





一、平面点集

2. 内点、外点、边界点与孤立点

- 考虑某平面点集 G 以及某一点 z_0，

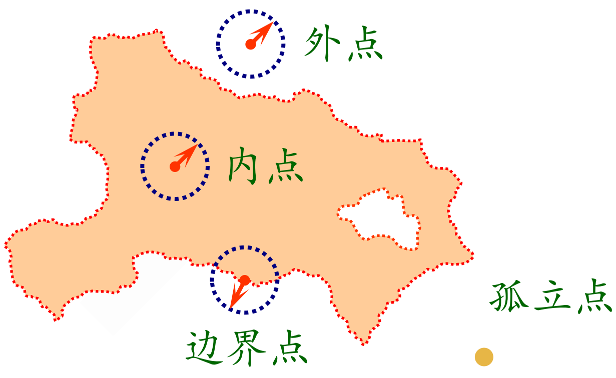
内点(interior point） (1) $z_0 \in G$; (2) $\exists \delta > 0$, $\forall z: |z - z_0| < \delta$, 有 $z \in G$.

外点(exterior point） (1) $z_0 \notin G$; (2) $\exists \delta > 0$, $\forall z: |z - z_0| < \delta$, 有 $z \notin G$.

边界点 (boundary point) (1) z_0 不一定属于 G;

(2) $\forall \delta > 0$, 在 $|z - z_0| < \delta$ 中，

既有 $z \in G$, 又有 $z \notin G$.



孤立点 (isolated point) (1) z_0 属于 G;

(2) $\exists \delta > 0$, 在 $|z - z_0| < \delta$ 中，除 z_0外，任意 $z \notin G$.

一、平面点集

3. 开集，闭集与边界(open set、closed set、boundary)

开集　如果 G 的每个点都是它的内点，则称 G 为开集。

闭集　开集的余集是闭集。

边界　G 的边界点的全体称为 G 的边界。

4. 有界集与无界集(bounded、unbounded)

定义　若存在 $\delta > 0$，使得点集 G 包含在原点的 δ 邻域内，则 G 称为有界集，否则称为非有界集或无界集。

二、区域

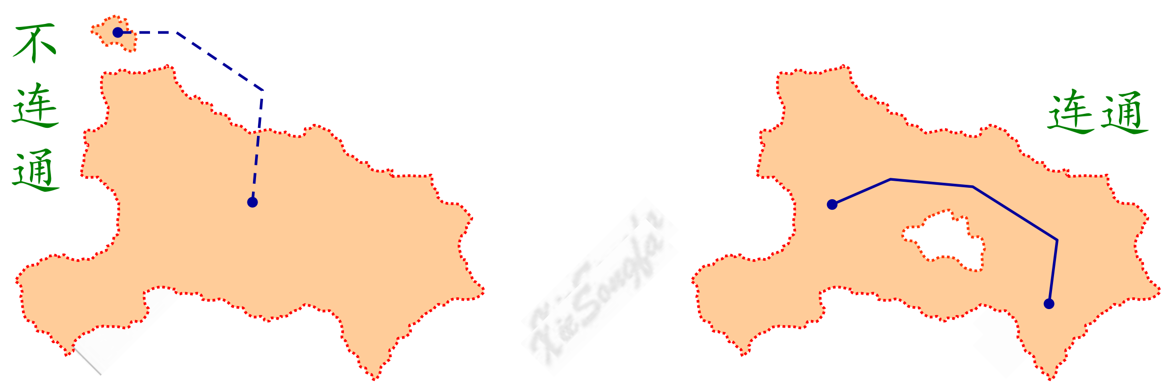
1. 区域与闭区域(region、closed region)

区域 平面点集 D 称为一个区域，如果它满足下列两个条件:

(1) D 是开集;

(2) D 是连通的，即 connected

D 中任何两个点都可以用完全属于 D 的一条折线连接起来。



闭区域 区域 D 与它的边界一起构成闭区域或闭域，记作 $\overline{D}$。

二、区域

2. 有界区域与无界区域（顾名思义）

3. 内区域与外区域

定义 一条“简单闭曲线”将整个复平面分成两个区域，其中有界的一个称为该简单闭曲线的内部(或内区域)，另一个称为该简单闭曲线的外部(或外区域)。

4. 单连通域与多连通(**simply-connected**、non–simply **connected**)

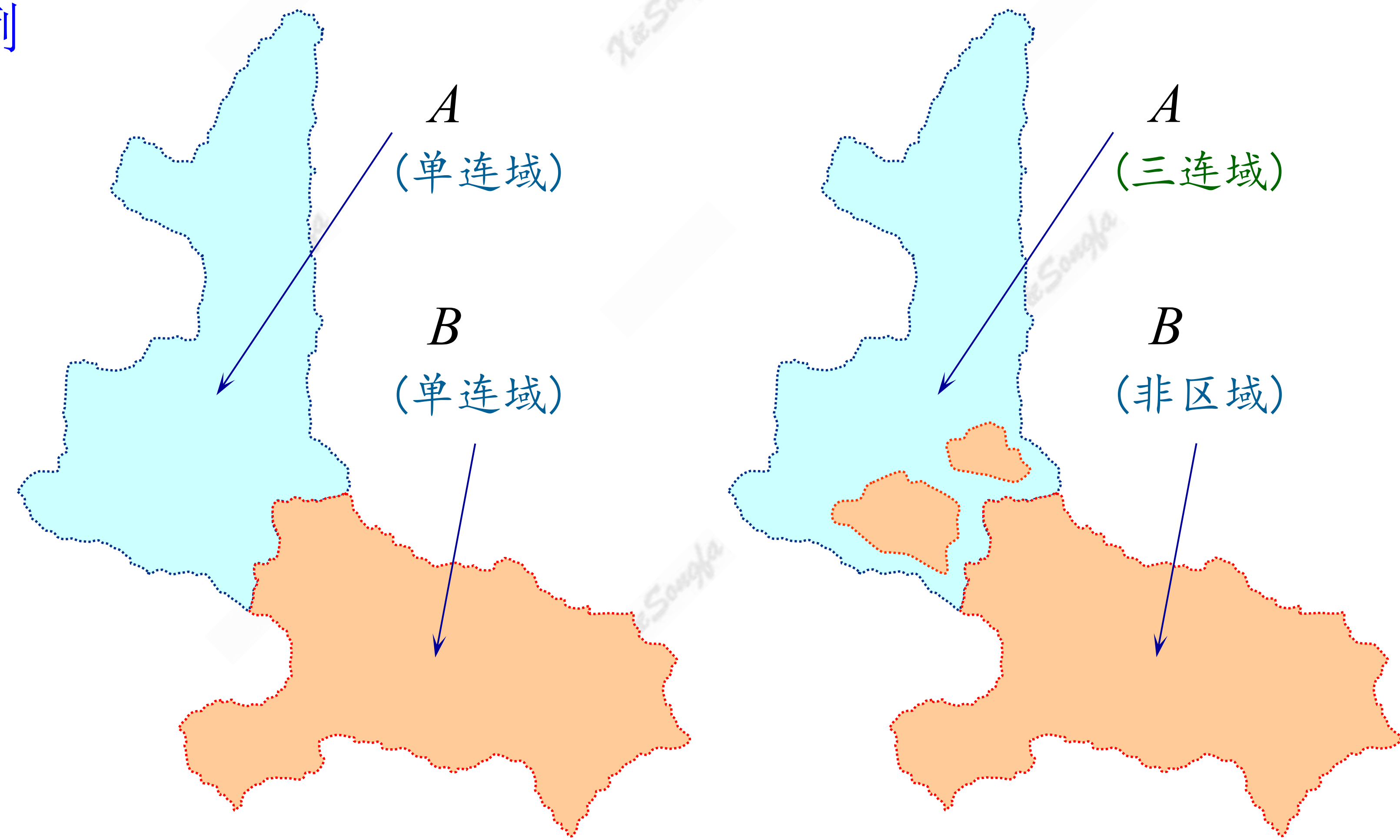
定义 设 D 为区域，如果 D 内的任何一条简单闭曲线的内部仍属于 D，则 D 称为单连通域，否则称为多连通域。

- 多连通域又可具体分为二连域、三连域、…… ……。

二、区域

4. 单连通域与多连通域

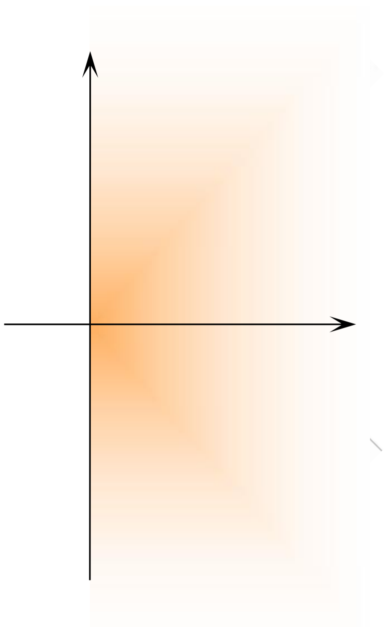
举例



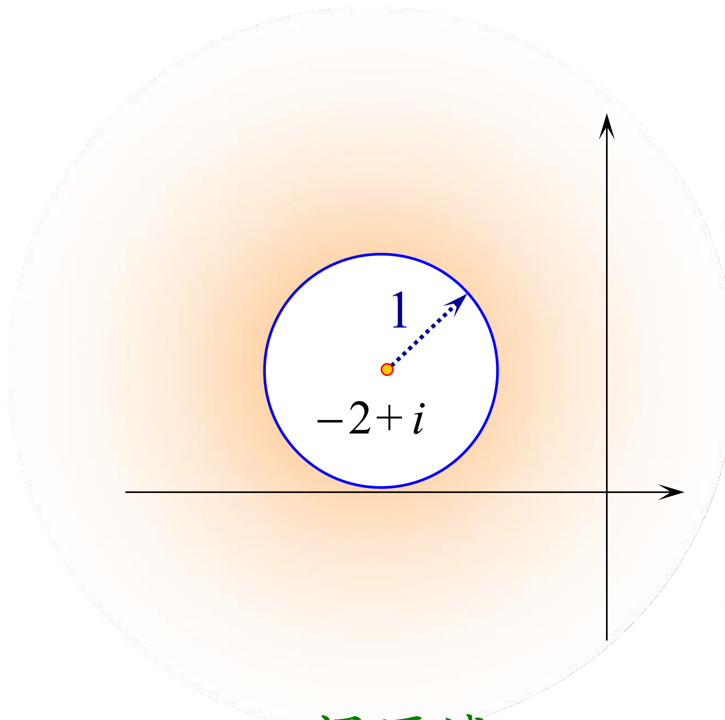
例 (1) $z+\overline{z}>0, \quad \Rightarrow \quad x>0;$

(2) $|z+2-i|\geq 1, \quad \Rightarrow \quad |z-(-2+i)|\geq 1;$

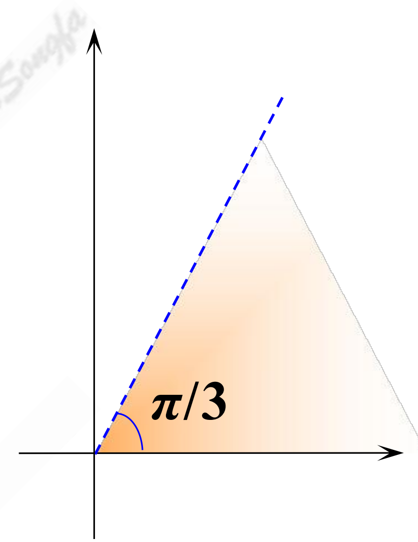
(3) $0<\arg z<\pi/3.$



区域



闭区域



(角形)区域

三、平面曲线

1. 方程式

- 在直角平面上 $f(x,y)=0.$
- 在复平面上 $f(z)=0.$
- 如何相互转换?

(1) $f(x,y)=0 \xrightarrow[y=(z-\bar{z})/(2i)]{x=(z+\bar{z})/2} \tilde{f}(z)=0.$

(2) $f(z)=0 \xrightarrow{z=x+iy} \tilde{f}(x,y)=0.$

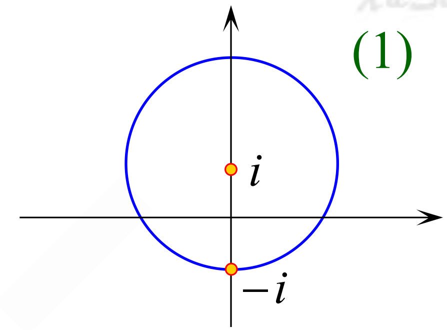
例 (1) $|z-i|=2, \Rightarrow x^2+(y-1)^2=4.$

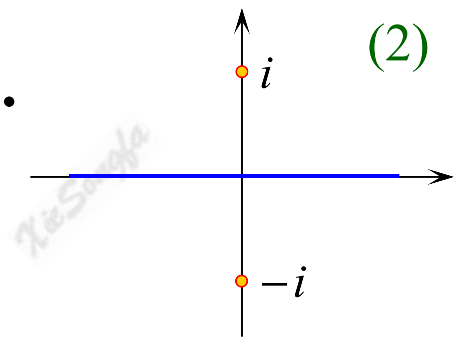
(2) $|z+i|=|z-i|, \Rightarrow y=0.$

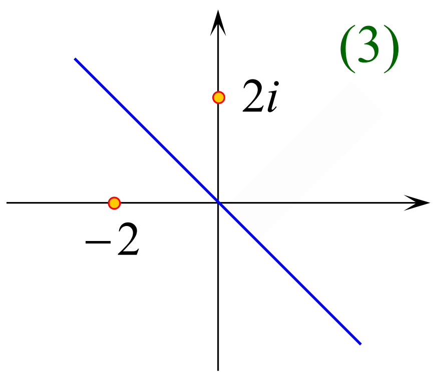
(3) $|z-2i|=|z+2|, \Rightarrow y=-x.$

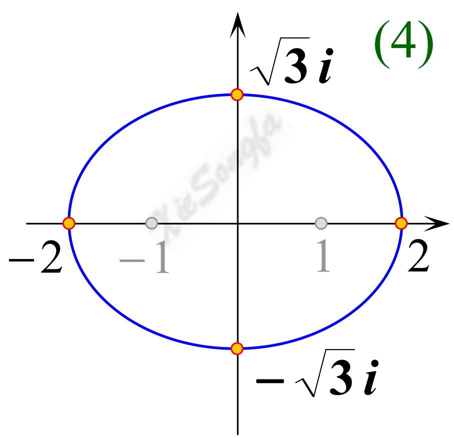
(4) $|z+1|+|z-1|=4, \Rightarrow \dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1.$

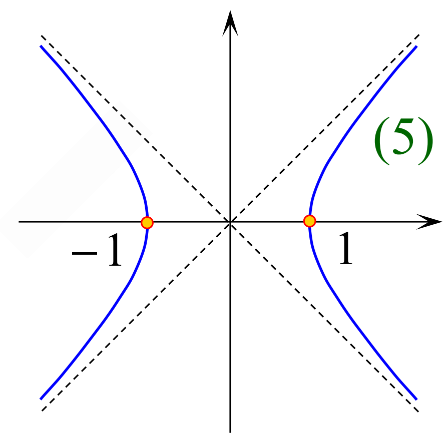
(5) $\mathrm{Re}(z^2)=1, \Rightarrow x^2-y^2=1.$











三、平面曲线

2. 参数式

- 在直角平面上 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta).$

- 在复平面上 $z = z(t) = x(t) + i\,y(t),\ (\alpha \le t \le \beta).$

例如 考察以原点为圆心、以 R 为半径的圆周的方程。

(1) 在直角平面上 $\begin{cases} x = x(\theta) = R\cos\theta, \\ y = y(\theta) = R\sin\theta, \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi).$

(2) 在复平面上 $z = z(\theta) = x(\theta) + i\,y(\theta) = R(\cos\theta + i\sin\theta),$

$$\Rightarrow \quad z = R\,\mathrm{e}^{i\theta},\quad (0 \le \theta \le 2\pi).$$

三、平面曲线

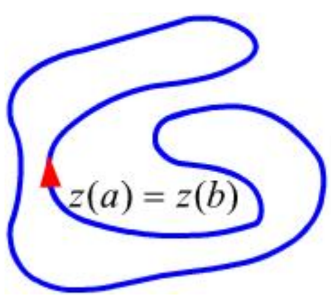
3. 曲线的分类

- 考虑曲线 $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$，$(\alpha \le t \le \beta)$.

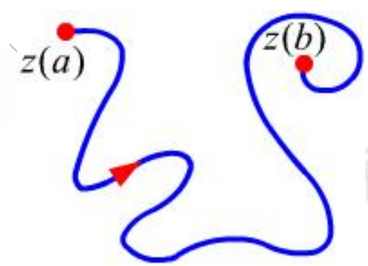
简单曲线　$\forall\, t_1 \in (\alpha, \beta)$，$t_2 \in [\alpha, \beta]$，当 $t_1 \ne t_2$ 时，$z(t_1) \ne z(t_2)$.

简单闭曲线　简单曲线且 $z(\alpha) = z(\beta)$.

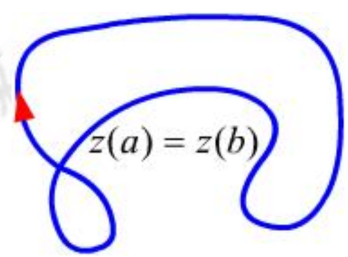
光滑曲线　在区间 $[\alpha, \beta]$ 上，$x'(t)$ 和 $y'(t)$ 连续且 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$



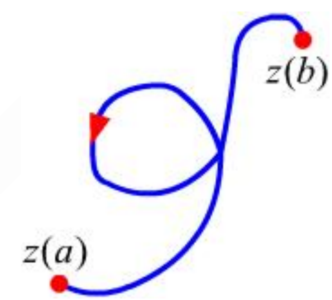
简单、闭



简单、不闭



不简单、闭



不简单、不闭

三、平面曲线

4. 有向曲线

定义 设 C 为平面上一条给定的光滑(或分段光滑)曲线,

(1) 如果指定 C 的两个可能方向中的一个作为正向,则该曲线称为有向曲线,仍记为 C。

(2) 此时,C^- 代表与 C 的方向相反(负向)的曲线。

三、平面曲线

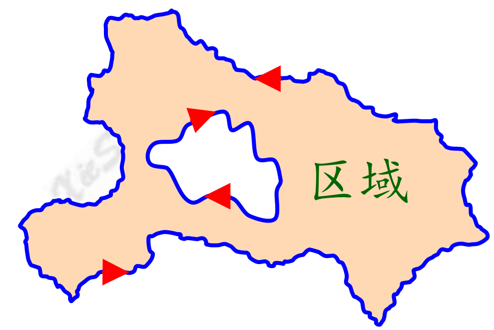
- 简单闭曲线的正向一般约定为：

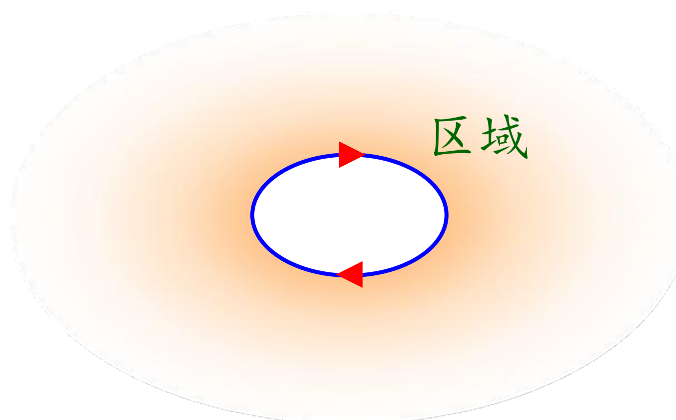
　　当曲线上的点 P 顺此方向沿曲线前进时，曲线所围成的有界区域始终位于 P 点的左边。

曲线

- 区域边界曲线的正向一般约定为：

　　当边界上的点 P 顺此方向沿边界前进时，所考察的区域始终位于 P 点的左边。





注意：区域可以是多连域。

§1.4 无穷大与无穷远点

一、无穷大

二、无穷远点

一、无穷大

定义 一个特殊的复数 ∞，称为无穷大，满足 $\infty = \dfrac{1}{0}$.

法则

(1) $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty, \quad (z \neq \infty);$

(2) $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \quad (z \neq 0);$

(3) $\dfrac{z}{\infty} = 0, \quad \dfrac{\infty}{z} = \infty, \quad (z \neq \infty).$

问题

- 实部虚部是多少? $\mathrm{Re}\,\infty, \mathrm{Im}\,\infty$ 无意义。
- 模与辐角是多少? $|\infty| = +\infty, \mathrm{Arg}\,\infty$ 无意义。
- 在复平面上对应到哪一点?

二、无穷远点

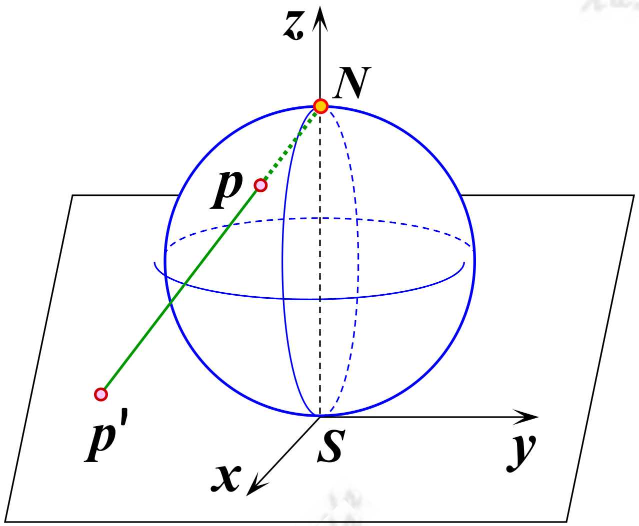
1. 无穷远点的概念

定义 在"复平面"上，一个与复数 ∞ 对应的"理想"点，称为无穷远点。

- 事实上，在通常的复平面上并不存在这样的点，因此只能说它是一个"理想"点。
- 那么，这个"理想"点到底在哪里呢?
- 下面就来看看黎曼(Riemnann)给出的解释。

二、无穷远点

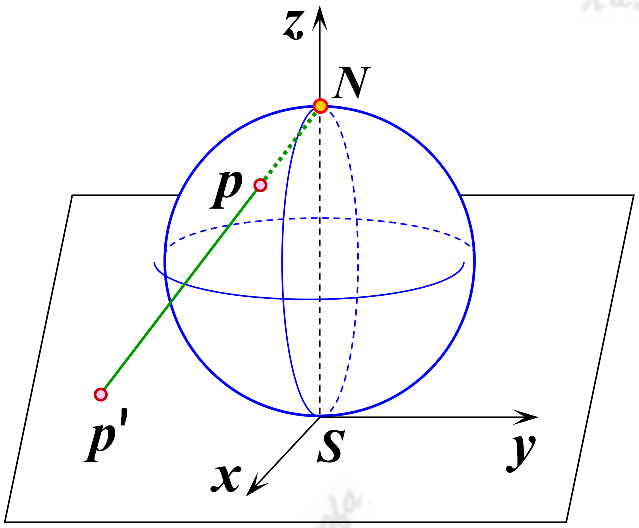
2. 复球面



- 如图，某球面与复平面相切，其中，N 为北极，S 为南极。
- 对于复平面上的任意一点 p'，用直线将 p'点与 N 点相连，与球面相交于 p 点。
- 球面上除 N 点外的所有点和复平面上的所有点一一对应，这样的球面称作复球面或Riemann球面。
- 球面上的N 点本身 则对应到了 “复平面 ”的无穷远点。

二、无穷远点

2. 复球面



意义 通俗地讲，所谓无穷远点就是所有模为无穷大的点，但“它们”只是一个点。

注 显然，复数 ∞ 不能写成 $+\infty$ 或者 $-\infty$。

3. 扩充复平面

定义 (1) 包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面；

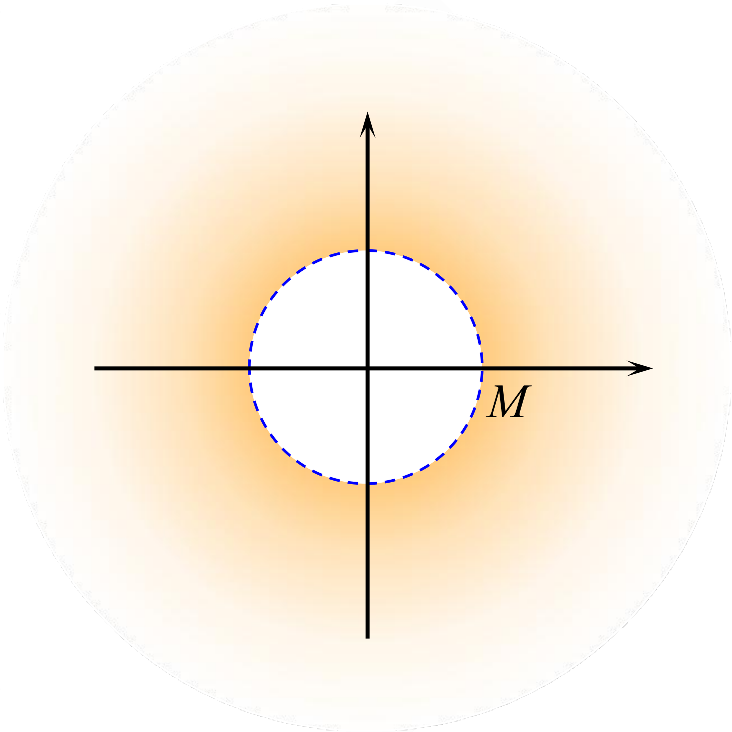
(2) 不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面，或者简称为复平面。

二、无穷远点

4. 无穷远点的邻域

定义 设实数 $M>0$，

(1) 包括无穷远点在内且满足 $|z|>M$ 的所有点的集合，称为无穷远点的邻域。



(2) 不包括无穷远点在内且满足 $|z|>M$ 的所有点的集合，称为无穷远点的去心邻域，也可记为 $M<|z|<+\infty$.

§1.5 复变函数

一、基本概念

二、图形表示

三、极限

四、连续

一、基本概念

定义 设 D 是复平面上的一个点集，对于 D 中任意的一点 z，按照一定法则，有确定的复数 w 与它对应，则称在 D 上定义一个复变函数，记作 $w = f(z)$.

- 单值函数　对每个 $z \in D$，有唯一的 w 与它对应；
  比如 $w = f(z) = z^2$.
- 多值函数　对每个 $z \in D$，有多个 w 与它对应；
  比如 $w = \sqrt[3]{z}$，$w = \mathrm{Arg}\, z$.
- 一般情形下，所讨论的函数都是指单值函数。

- 在以后的讨论中，D 常常是一个平面区域，称之为定义域。

一、基本概念

分析 设 $z = x + iy$，$w = u + iv$，则 $w = f(z)$ 可以写成：

$$w = u + iv = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

其中，$u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 为实值二元函数。

分开上式的实部与虚部得到 $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases}$

- 可见，一个复变函数对应于两个二元实变函数。

例 将复变函数 $w = z^2 + 1$ 化为一对实变函数。

P18 例 1.13

解 记 $z = x + iy$，$w = u + iv$，

代入 $w = z^2 + 1$ 得：

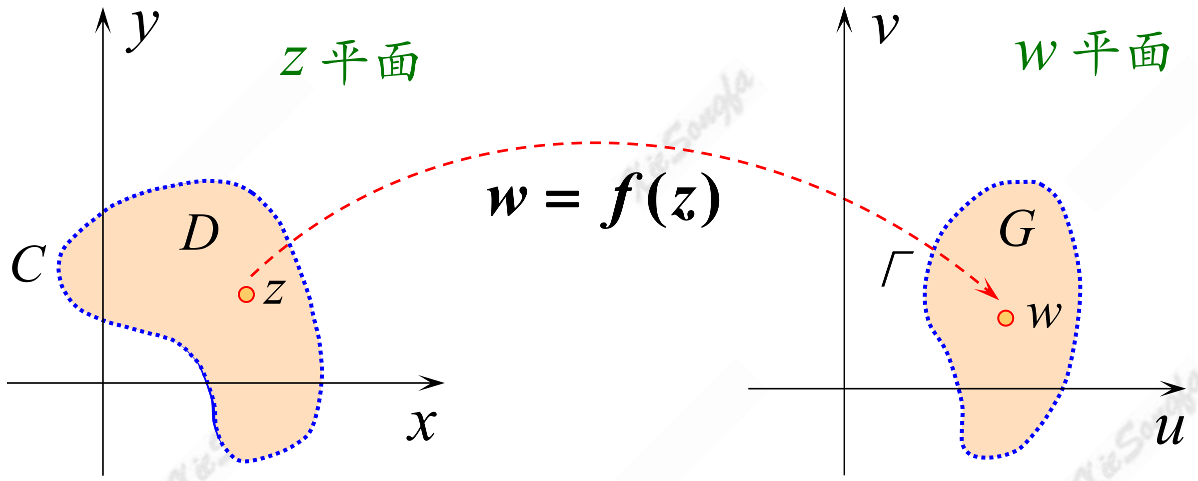
$$u + iv = (x + iy)^2 + 1 = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy),$$

分开实部与虚部即得：

$$u = x^2 - y^2 + 1,$$

$$v = 2xy.$$

二、图形表示



映射　复变函数 $w = f(z)$ 在几何上被看作是把 z 平面上的一个点集 S 变到 w 平面上的一个点集 S^* 的映射(或者变换)。其中，点集 S^* 称为像，点集 S 称为原像。

- 函数、映射以及变换可视为同一个概念。

（分析）（几何）（代数）

二、图形表示

- 反函数与逆映射

设函数 $w=f(z)$ 的定义域为 z 平面上的点集 D，值域为 w 平面上的点集 G，则 G 中的每个点 w 必将对应着 D 中的一个(或几个)点 z，按照函数的定义，在 G 上就确定了一个函数 $z=\tilde{f}(w)$，它称为函数 $w=f(z)$ 的反函数，也称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射。

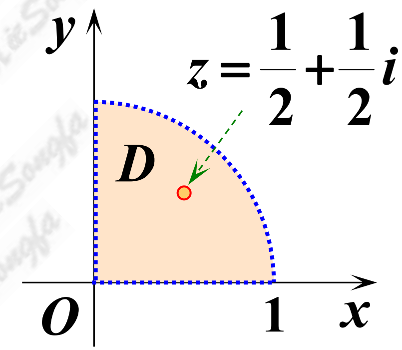
- 双方单值与一一映射

若映射 $w=f(z)$ 与它的逆映射 $z=\tilde{f}(w)$ 都是单值的，则称映射 $w=f(z)$ 是双方单值的或者一一映射。

例 已知函数 $w=z^2$, 求下列点集的像。 P 19

(1) 点 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$,

(2) 区域 $D=\{z:\ \mathrm{Im}\,z>0,\ \mathrm{Re}\,z>0,\ |z|<1\}$.



解 (1) 点 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ 对应的像点为 $w=\dfrac{1}{2}i$.

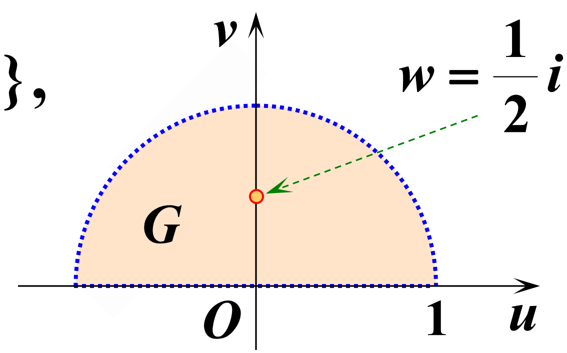
(2) 区域 D 可改写为:

$$D=\{z:\ 0<|z|<1,\ 0<\arg z<\pi/2\},$$

令 $z=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, 则 $w=z^2=r^2\,\mathrm{e}^{i2\theta}$,

即得区域 D 的像区域 G 为:

$$G=\{w:\ 0<|w|<1,\ 0<\arg w<\pi\}.$$



三、极限

定义 设函数 $w=f(z)$ 在z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，

P23 定义 1.1

若存在复数 $A\neq\infty$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得

当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，

则称 A 为函数 $w=f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，记作

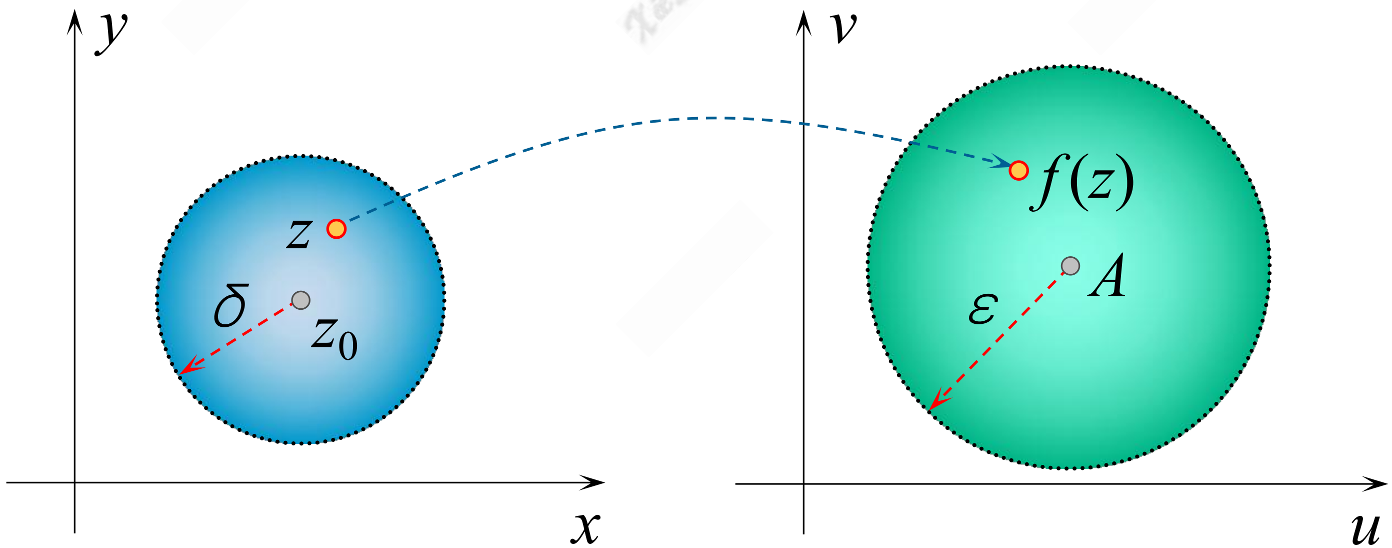
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \quad 或 \quad f(z)\to A \quad (z\to z_0).$$

注 (1) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点可以无定义；

(2) z 趋向于 z_0 的方式是任意的。

三、极限

● 几何意义



● 当变点 z 一旦进入 z_0 的充分小的 δ 邻域时，

它的像点 $f(z)$ 就落在 A 的预先给定的 ε 邻域内。

三、极限

性质 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

$$(1)\quad \lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B,$$

$$(2)\quad \lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=A\cdot B,$$

$$(3)\quad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

三、极限

定理 设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, $A=u_0+i\,v_0$, $z_0=x_0+i\,y_0$,

P20 定理 1.1

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

证明 必要性"$\Rightarrow$" 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,

当 $0<|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$$|f(z)-A|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\varepsilon,$$

$\Rightarrow\quad |u-u_0|<\varepsilon,\ |v-v_0|<\varepsilon,$

$\Rightarrow\quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$

三、极限

定理 设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, $A=u_0+i\,v_0$, $z_0=x_0+i\,y_0$,

P20 定理 1.1

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

证明 充分性 "$\Leftarrow$" 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$,

则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$$|u-u_0|<\varepsilon,\ |v-v_0|<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow\ |f(z)-A|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\sqrt{2}\,\varepsilon,$$

$$\Rightarrow\ \lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

三、极限

- 关于含 ∞ 的极限作如下规定：

(1) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=A;$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)}=0;$

(3) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}=0.$

- 所关心的两个问题：

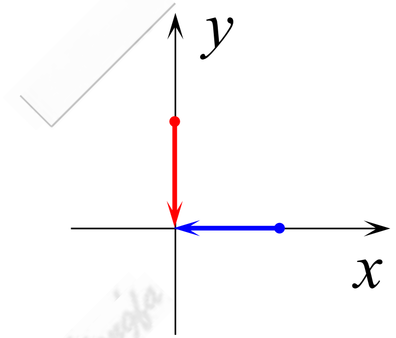
(1) 如何证明极限存在？ 放大技巧 $|f(z)-A|\le g(|z-z_0|)$。

(2) 如何证明极限不存在？ 选择不同的路径进行攻击。

例 讨论函数 $f(z)=\dfrac{\overline{z}}{z}$ 在 $z\to 0$ 的极限。 P21 例 1.15

解 方法一

$$f(z)=\frac{\overline{z}^{\,2}}{|z|^2}=\frac{x^2-y^2-i\,2xy}{x^2+y^2},$$



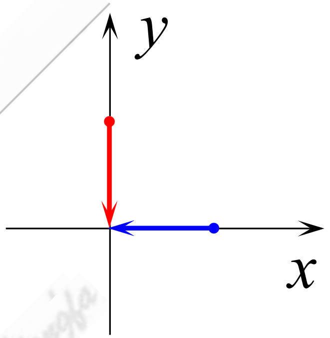
$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

$$\begin{cases} \text{当 } y=0,\ x\to 0 \text{ 时},\ u(x,y)\to 1, \\ \text{当 } x=0,\ y\to 0 \text{ 时},\ u(x,y)\to -1. \end{cases}$$

因此极限不存在。

例 讨论函数 $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$ 在 $z\to 0$ 的极限。 P21 例 1.15

解 方法二

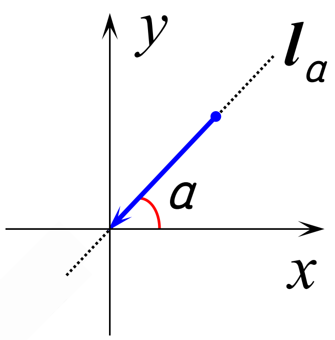


$$f(z)=\frac{x-iy}{x+iy},$$

$$\begin{cases} \text{当 } y=0,\ x\to 0 \text{ 时,} \quad f(z)\to 1, \\ \text{当 } x=0,\ y\to 0 \text{ 时,} \quad f(z)\to -1. \end{cases}$$

因此极限不存在。

方法三



沿着射线 l_α: $z=re^{i\alpha},\ r\to 0,$

$\lim\limits_{\substack{z\in l_\alpha \\ z\to 0}} f(z)=e^{i(-2\alpha)}$, 与 α 有关，因此极限不存在。

四、连续

定义 若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

P21 定义 1.2

若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续。

注 (1) 三个要素： $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在； $f(z_0)$ 存在； 两者相等。

(2) 等价表示：

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|\Delta z| \to 0} |\Delta w| = 0.$$

其中， $\Delta z = z - z_0, \Delta w = f(z) - f(z_0)$

- 通常说，当自变量充分靠近时，函数值充分靠近。

四、连续

性质 (1) 如果两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 都在z_0点连续，则它们的和、差、积、商(分母在 z_0不为零)在 z_0 点连续。

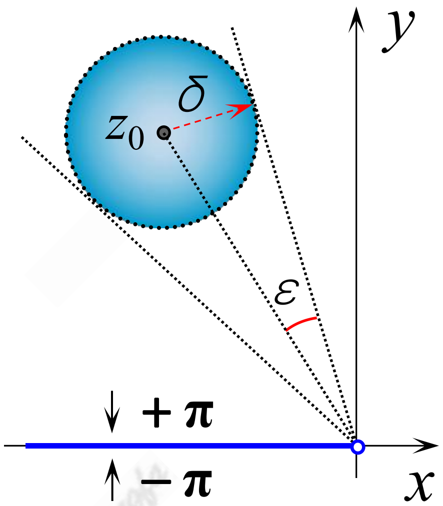
(2) 如果函数 $\xi=g(z)$ 在 z_0点连续，且函数 $w=f(\xi)$ 在 $\xi_0=g(z_0)$ 连续，则函数 $w=f[g(\xi)]$ 在z_0 点连续。

(3) 若函数 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则

P 22

- $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上必有界；
- $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上必能取到最大值与最小值；
- $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上必一致连续。

例 证明 $f(z)=\arg z$ 在复平面上除去原点和负实轴的区域上连续。 P21 例 1.16



证 (略)

例 讨论函数 $w=f(z)=|z|^2$ 的连续性。

解 $w=|z|^2=z\cdot\bar{z}$,

$$|\Delta w|=|(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})-z\cdot\bar{z}|$$

$$=|\Delta z\cdot\bar{z}+\overline{\Delta z}\cdot z+\Delta z\cdot\overline{\Delta z}|$$

$$\leq 2|\Delta z|\cdot|z|+|\Delta z|^2\to 0,$$ (当 $\Delta z\to 0$ 时)

故函数 $w=f(z)=|z|^2$ 处处连续。

四、连续

定理 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+i\,y_0$ 点连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续。

P21 定理 1.2

证明 (略)

例如 函数 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$ 在复平面内除原点外是处处连续的。

理由 因为 $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外是处处连续的，而 $v(x,y)=x^2-y^2$ 是处处连续的。

放松一下吧！……

附：知识广角 —— 奇妙的欧拉公式

- 1748 年，欧拉给出了著名的公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

- 令 $\theta=\pi$ 有 $e^{i\pi}+1=0$. 克莱茵认为这是数学中最卓越的公式之一，它把五个最重要的数 $1,0,i,\pi,e$ 联系起来。

- $e^{i(\alpha+\beta)}=\underline{\cos(\alpha+\beta)}+i\,\underline{\sin(\alpha+\beta)}$,

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$

$$=\underline{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}+i\,\underline{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{cases}$$

附：人物介绍 —— 欧拉

欧 拉

Leonhard Euler

(1707～1783)

瑞士数学家、自然科学家

- 十八世纪数学界最杰出的人物之一。
- 数学史上最多产的数学家。
- 不但为数学界作出贡献，
  而且把数学推至几乎整个物理领域。

附：人物介绍 —— 欧拉

- 欧拉是科学史上最多产的一位杰出的数学家。

  以每年平均 800 页的速度写出创造性论文。

  一生共写下了 886 本(篇)书籍和论文。

  其中 分析、代数、数论占 40%，几何占 18%，

  物理和力学占 28%，天文学占 11%，

  弹道学、航海学、建筑学等占 3%，

- 彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了 47 年。

  整理出他的研究成果多达 74 卷。

  (牛顿全集 8 卷，高斯全集 12 卷)

附：人物介绍 —— 欧拉

- 欧拉编写了大量的力学、分析学、几何学的教科书。

  《无穷小分析引论》、《微分学原理》以及《积分学原理》都成为数学中的经典着作。

- 课本上常见的如 i, e, sin, cos, tg, $\triangle$x, Σ, $f(x)$ 等等，也都是他创立并推广的。

- 有的学者认为，自从 1784 年以后，微积分的教科书基本上都抄袭欧拉的书。

附：人物介绍 —— 欧拉

- 如今几乎每一个数学领域都可以看到欧拉的名字：

初等几何的欧拉线	微分方程的欧拉方程
多面体的欧拉定理	复变函数的欧拉公式
解析几何的欧拉变换	变分学的欧拉方程
四次方程的欧拉解法	级数论的欧拉常数
数论中的欧拉函数	…………

附：人物介绍 —— 欧拉

- 欧拉的记忆力惊人！

能背诵罗马诗人维吉尔(Virgil)的史诗Aeneil，

能背诵前一百个质数的前十次幂，

能背诵“全部”的数学公式，

直至晚年，还能复述年轻时的笔记的“全部”内容。

附：人物介绍 —— 欧拉

- 欧拉的心算能力罕见！

道听途说　欧拉的两个学生把一个复杂的收敛级数的前 17 项加起来，算到第 50 位数字，两人相差一个单位；

欧拉为了确定究竟谁对，用心算进行了全部运算，最后把错误找了出来。

附：人物介绍 —— 欧拉

- 欧拉的毅力极其顽强！

可以在任何不良的环境中工作。

常常抱着孩子在膝上完成论文。

在双目失明以后，也没有停止对数学的研究。

在失明后的 17 年间，还口述了400 篇左右的论文。

(返回)

附：关于 $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$（在集合意义下）

- 所谓“在集合意义下”是指：

分别从集合 $\mathrm{Arg}\, z_1$ 与 $\mathrm{Arg}\, z_2$ 中任取一个辐角，相加后，得到集合 $\mathrm{Arg}(z_1 z_2)$ 中的一个辐角。

比如 设 $w = z \cdot z$，则有 $|w| = |z| \cdot |z| = |z|^2$，

$$\mathrm{Arg}\, w = \mathrm{Arg}(z \cdot z) = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, z \neq 2\,\mathrm{Arg}\, z. \quad (?)$$

理由 $\mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, z = (\arg z + 2k_1\pi) + (\arg z + 2k_2\pi)$

$$= 2\arg z + 2(k_1 + k_2)\pi = 2\arg z + \underline{2k\pi};$$

$$2\,\mathrm{Arg}\, z = 2(\arg z + 2k\pi) = 2\arg z + \underline{4k\pi}.$$

（返回）

附：历史知识 —— 虚数史话

- 1722 年，法国数学家德摩佛给出德摩佛定理：

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta,$$

其中 n 是大于零的整数。

- 1748 年，欧拉给出了著名的欧拉公式：

$$\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\,x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x,$$

并证明了德摩佛定理对 n 是实数时也成立。

- 1777 年，欧拉在递交给彼德堡科学院的论文《微分公式》中首次使用 i 来表示 $\sqrt{-1}$.

附：历史知识 —— 虚数史话

- 十八世纪末，高斯的出现使得复数的地位被确立下来。
- 1797 年，当时年仅 20 岁的高斯在他的博士论文中证明了代数基本定理。即 任何多项式在复数域里必有根，而且 n 次多项式恰好有 n 个根。
- 高斯在证明中巧妙地给出了复数的几何表示，使得人们直观地理解了复数的真实意义。
- 十九世纪中叶以后，复变函数论开始形成，并逐渐发展成为一个庞大的数学分支。

附：人物介绍 —— 高斯

高 斯

Johann Carl Friedrich Gauss

(1777～1855)

德国数学家、物理学家、天文学家

- 许多数学学科的开创者和奠基人。
- 几乎对数学的所有领域都做出了重大贡献。
- 享有数学王子的美誉。

附：人物介绍 —— 高斯

- 高斯去世后，哥廷根大学对高斯的文稿进行了整理，历时 67 年，出版了《高斯全集》，共 12 卷。

- 在哥廷根大学的广场上，矗立着一座用白色大理石砌成的纪念碑，它的底座砌成 正十七边形，纪念碑上是高斯的青铜雕像。

18 岁

(返回)