回顾：

形如 $x = A\cos(\omega t+ \varphi)$ 的振动称为谐振动，或简谐振动。

$\omega t + \varphi$： 位相，表征任意 t 时刻的振动状态。

φ： 初位相，表征 $t = 0$ 时刻的振动状态。

$$F_{合} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

位 移：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$——振动方程

符合以上三个方程中任意一个的运动即为谐振动。

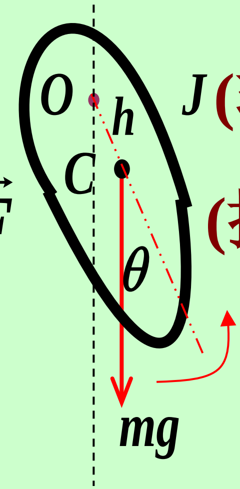
三个特征量：A，ω，φ

例：求复摆（物理摆）的周期。

解：利用能量关系。

$$\frac{1}{2}J\omega^2+mgh(1-\cos\theta)=c$$

$$\vec{M}_O=\vec{r}\times\vec{F}$$



$$J\omega\frac{d\omega}{dt}+mgh\cdot\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=0$$

$\omega=\frac{d\theta}{dt}$ $\sin\theta\approx\theta$ (因摆角很小)

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+mgh\cdot\theta=0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgh}{J}\theta=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$$

周期：$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}$

复摆的等值单摆长：

$$L=J/mh$$

另解：

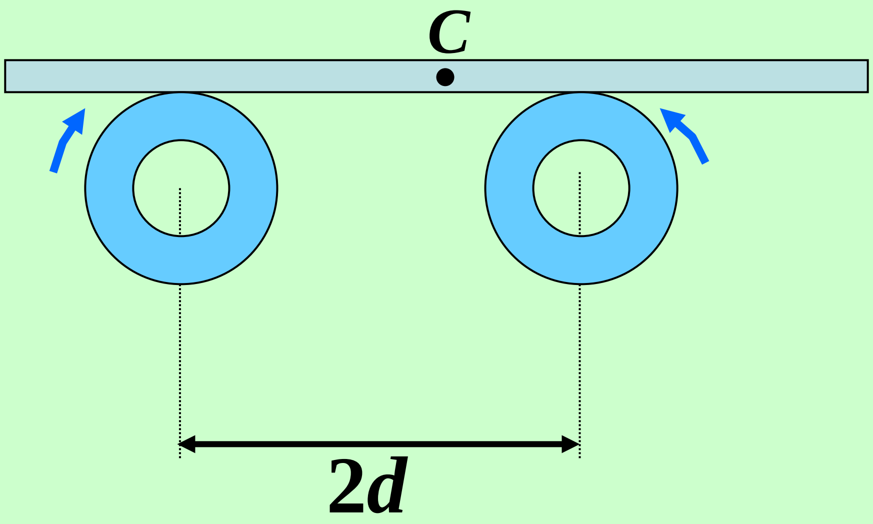
$$M=J\beta=J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$M=\boxed{-mgh\sin\theta}$$

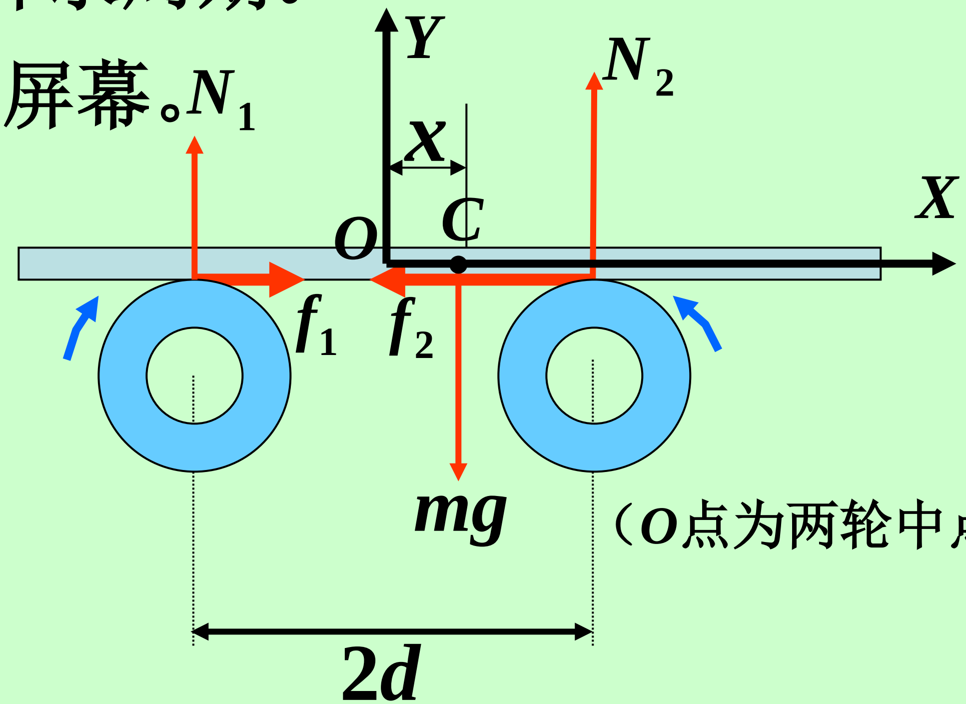
$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}=\boxed{-mgh\sin\theta}$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+mgh\cdot\theta=0$$

例: 两轮的轴相距 2d，且互相平行。两轮转速相同而方向相反，将质量为m的一匀质薄板搁在两轮上，板与轮的摩檫系数为μ，若板的质心 C 起初距一轮较近（如图），试证明板作谐振动并求周期。



例: 两轮的轴相距 $2d$，且互相平行。两轮转速相同而方向相反，将质量为m的一匀质薄板搁在两轮上，板与轮的摩擦系数为μ，若板的质心 C 起初距一轮较近（如图），试证明板作谐振动并求周期。



（O点为两轮中点）

解: 设转轴过O点,且垂直于屏幕。

$$F_x = f_1 + f_2 = \mu N_1 - \mu N_2$$

$$\therefore \mu(N_1 - N_2) = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$N_2 d - N_1 d - mgx = 0$$

$$N_1 - N_2 = -\frac{mgx}{d}$$

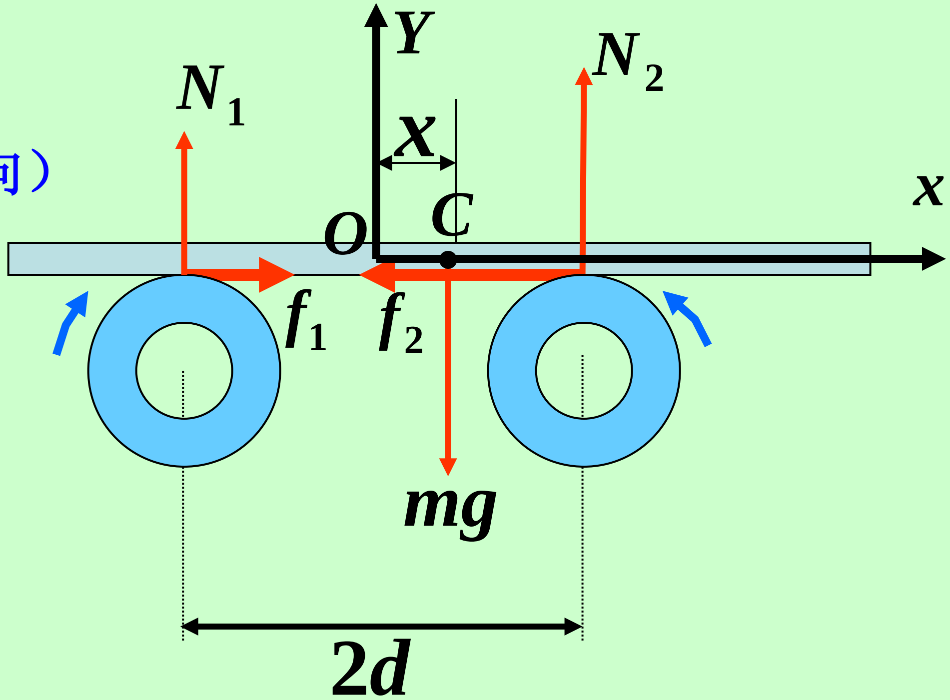
$$\therefore -\mu\frac{mgx}{d} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

另：亦可设转轴过C点求解。

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu g}{d}x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{d}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

另解：设转轴过C点。

$$\mu N_1-\mu N_2=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$（水平方向）



$$\begin{cases} N_1(d+x)-N_2(d-x)=0 \\ N_1+N_2=mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1=\frac{1}{2}mg(1-\frac{x}{d}) \\ N_2=\frac{1}{2}mg(1+\frac{x}{d}) \end{cases}$$

$$\therefore \mu N_1-\mu N_2=-\frac{\mu mgx}{d}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\mu mgx}{d}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu g}{d}x=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{\mu g}{d}} \qquad \therefore T=2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

又解：水平方向上有

$$\mu N_1-\mu N_2=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

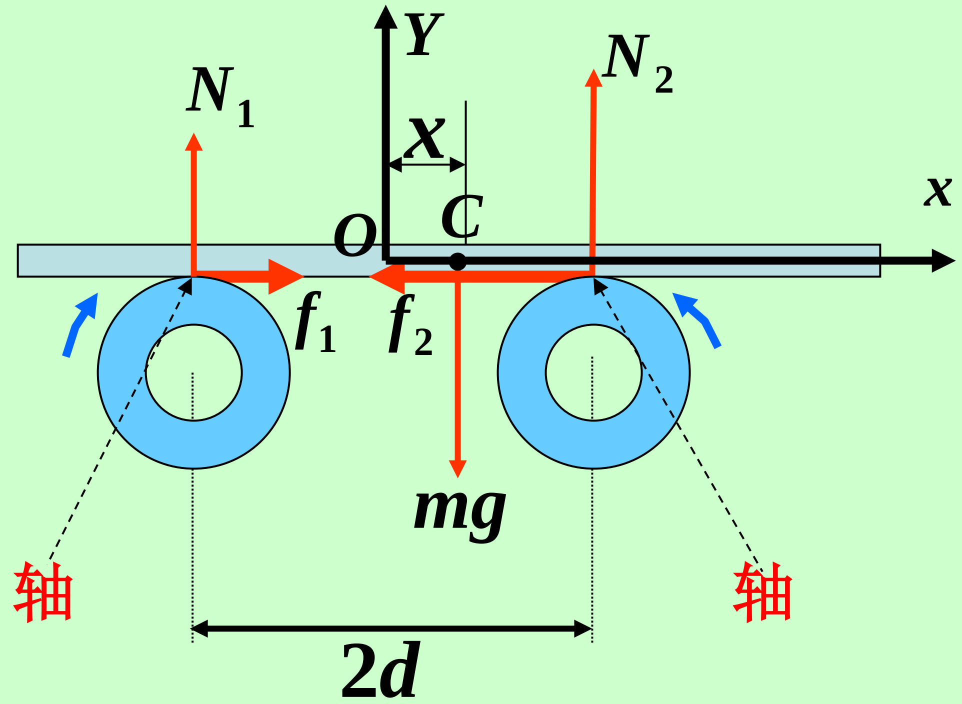
$$mg(d-x)-N_1 2d=0$$

$$N_1=\frac{1}{2}mg(1-\frac{x}{d})$$

$$mg(d+x)-N_2 2d=0$$

$$N_2=\frac{1}{2}mg(1+\frac{x}{d})$$

$$\therefore\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu g}{d}x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{\mu g}{d}} \qquad \therefore T=2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$



例： 在一平板上放一质量为m =2 kg的物体，平板在竖直方向作谐振动，其振动周期为T = 0.5 s，振幅A = 4 cm，求

(1) 物体对平板的压力的表达式。

(2) 平板以多大的振幅振动时，物体才能刚好离开平板？

解: (1)物体随平板在竖直方向作谐振动，

对物体：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

取当$x=A$时$t=0$，则可有$\varphi=0$

即 $x=A\cos\omega t$

$$f=ma=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-m\omega^2A\cos\omega t$$

$$\therefore N-mg=-m\omega^2A\cos\omega t$$

物体对平板的压力F为：

$$F=-N=-mg+m\omega^2A\cos\omega t$$

(2)物体刚好离开平板即$N=0$

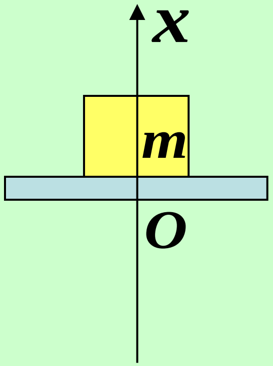
$$0-mg=-m\omega^2A\cos\omega t$$

(物体即将停止作谐振动)

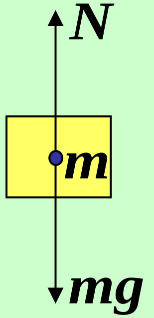
$$\cos\omega t=\frac{g}{\omega^2A}$$

$$|\cos\omega t|=\frac{g}{\omega^2A}\le 1$$

$$\therefore A\ge\frac{g}{\omega^2}$$



另：向下运动时 $a\ge g$ 则脱离。



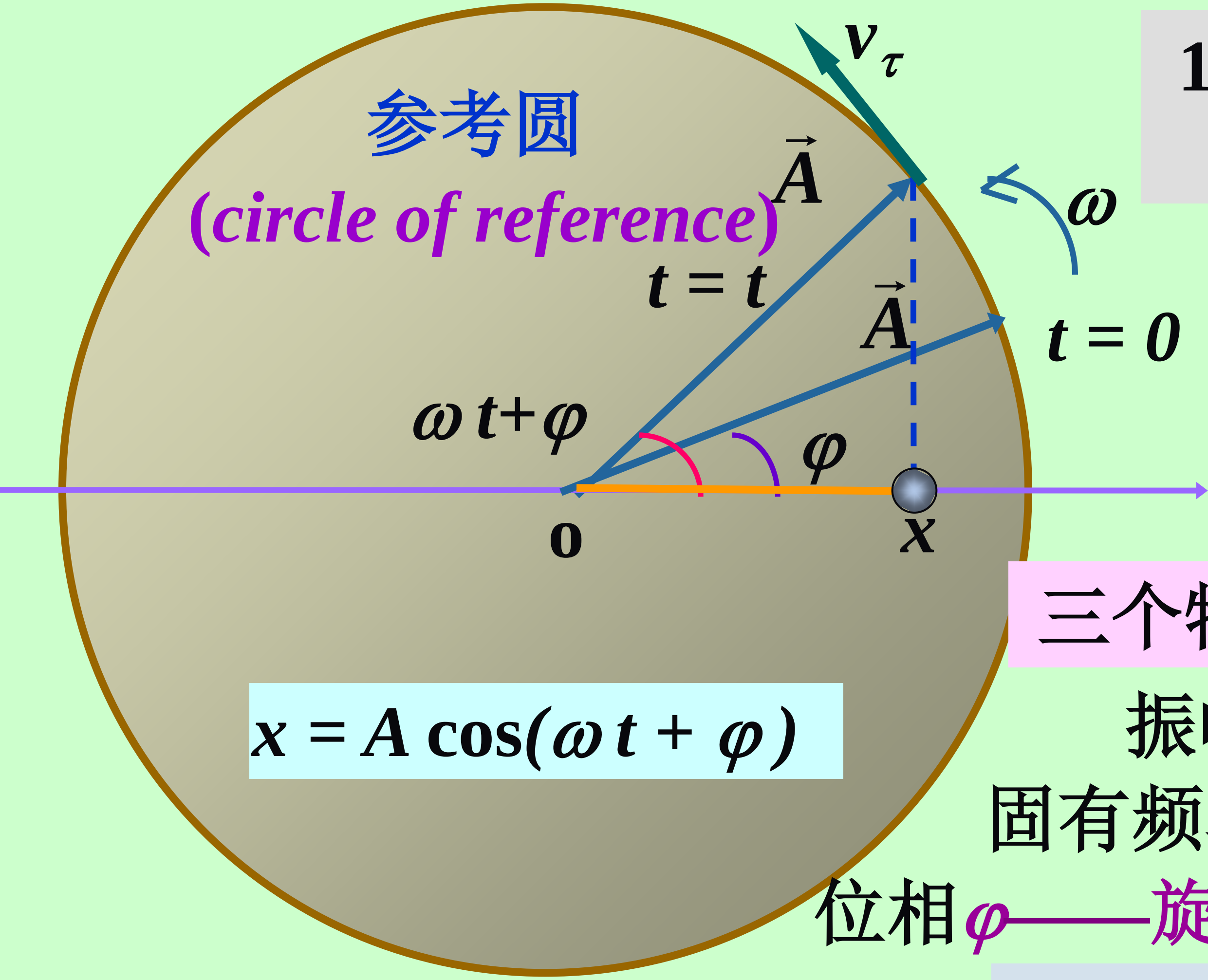
$$\omega^2A\cos\omega t>g$$

（∵ $t=0$时$x=A$，a最大）

$$A>\frac{g}{\omega^2\cos\omega t}\ge\frac{g}{\omega^2}$$

二、简谐振动的矢量表示法

1. 匀速圆周运动
与简谐振动。



$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

A——是振幅矢量

圆心 0——平衡点

三个特征量的几何意义：

振幅A ——圆周半径

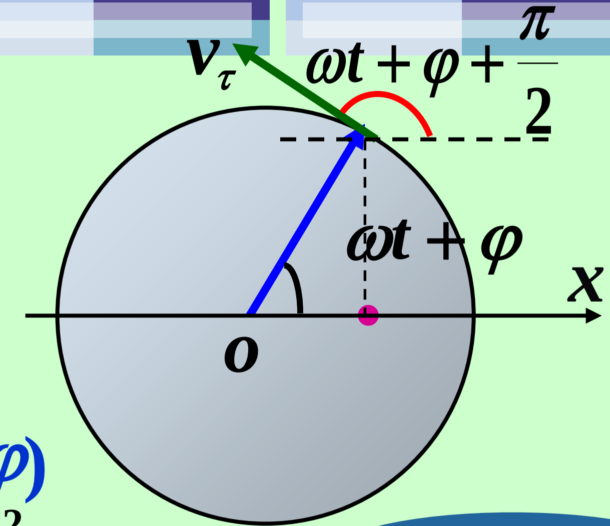
固有频率ω——匀角速度

位相φ——旋转矢量与x轴的夹角

物理问题几何化

旋转矢量法——非常形象而方便地描述简谐振动

2. 旋转矢量与速度 *v*、加速度*a*



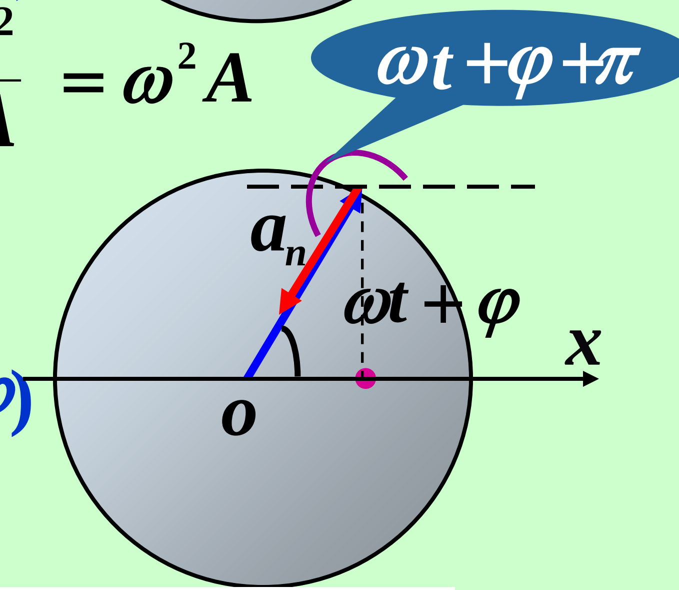
旋转矢量端点运动的速度：$v_\tau=\omega A$

在x轴上的投影：

$$v_{\tau x}=\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

即投影点的速度： $v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

旋转矢量端点的加速度：$a=a_n=\dfrac{v^2}{A}=\omega^2 A$



a_n在x轴上的投影：

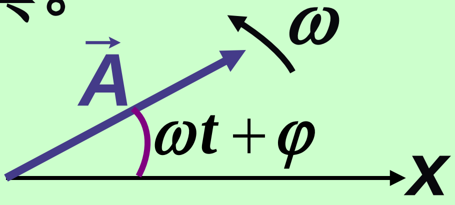
$$a_x=\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

投影点的加速度：$a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$

结论

旋转矢量作匀速转动时，其端点的位置、速度、加速度在x 轴上的投影，等于一特定的简谐振动的位移、速度、加速度。

旋转矢量法只是直观描述谐振动的工具。

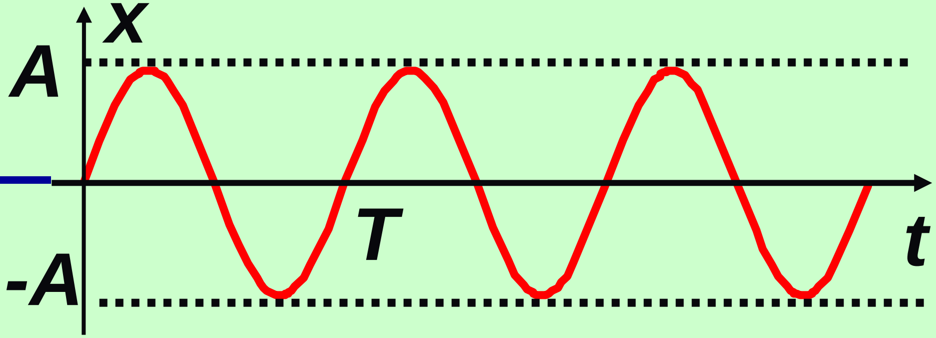


旋转矢量图

谐振动的另外两种表示：

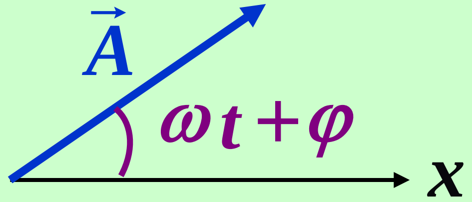
振动方程 —— $\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$

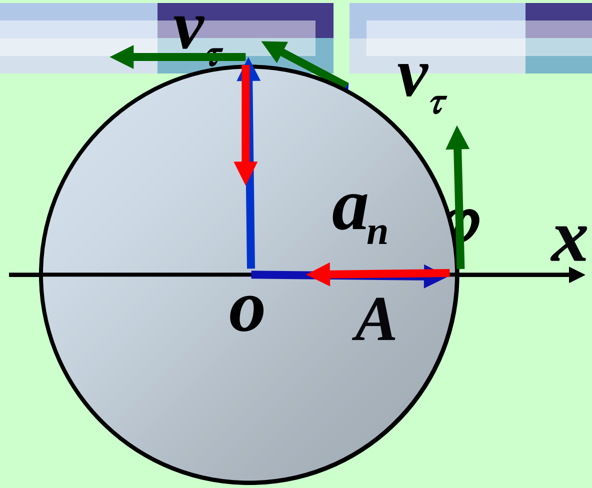
振动曲线 ——



3. 旋转矢量与位相

位相： $(\omega t+\varphi)=(\widehat{\vec{A},\vec{x}})$





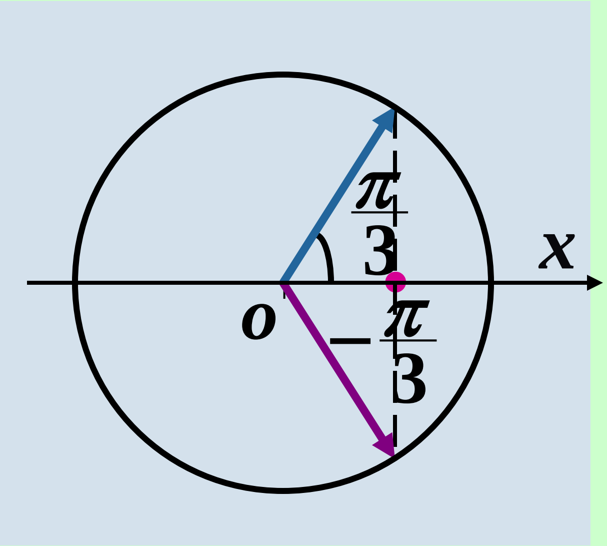
利用旋转矢量的位置可推出振动系统各时刻的状态：

$\omega t+\varphi=0$　　$x=A$　　$v=0$　　$a=-\omega^2 A$

$\omega t+\varphi=\pi$　　$x=-A$　　$v=0$　　$a=\omega^2 A$

$\omega t+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$　　$x=0$　　$v=-\omega A$　　$a=0$

$\omega t+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$　　$x=0$　　$v=\omega A$　　$a=0$



例：$t=0$时，$x=0.5A$，振子向x轴正向运动，$\varphi=?$

注意条件！　$\because\ v>0$　$\therefore\ \varphi=-\dfrac{\pi}{3}$

利用旋转矢量很容易求出简谐振动的位相和初位相

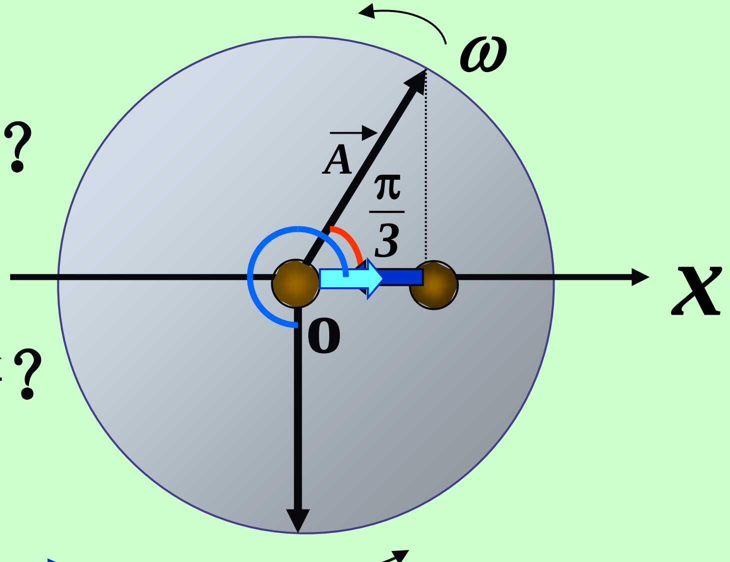
例. 已知位相求状态

如：位相 $\omega t_1+\varphi=\pi/3$，问状态？

$x=A/2$,且向X负向运动。

如： 位相 $\omega t_2+\varphi=3\pi/2$，问状态？

$x=0$ ，且向 x 正向运动。



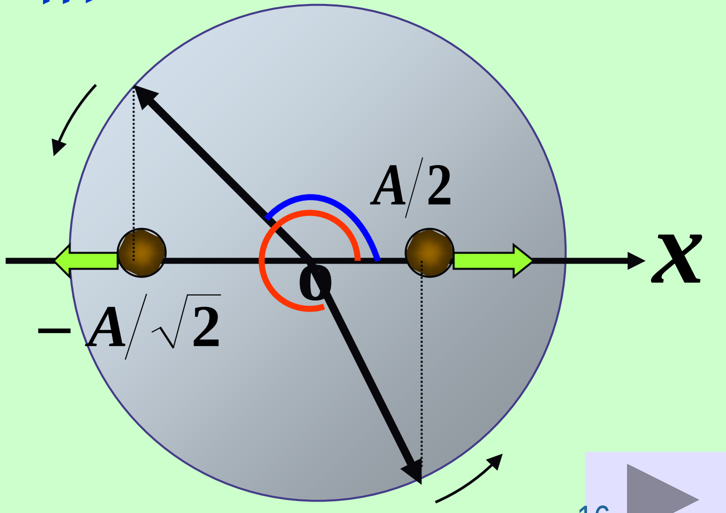
例. 已知状态求位相（特别是初位相）

如：$t=0$, $x_0=A/2$, $v_0>0$，求 φ？

$\varphi=5\pi/3$ 或 $\varphi=-\pi/3$

如：$t=0$, $x_0=-A/\sqrt{2}$, $v_0<0$, 求 φ？

$\varphi=3\pi/4$



注意四个特殊状态的 φ 值！

位相差 (*Phase difference*)

$$\Delta\phi = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1)$$

对两同频率的谐振动 $\Delta\phi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ ——初相差

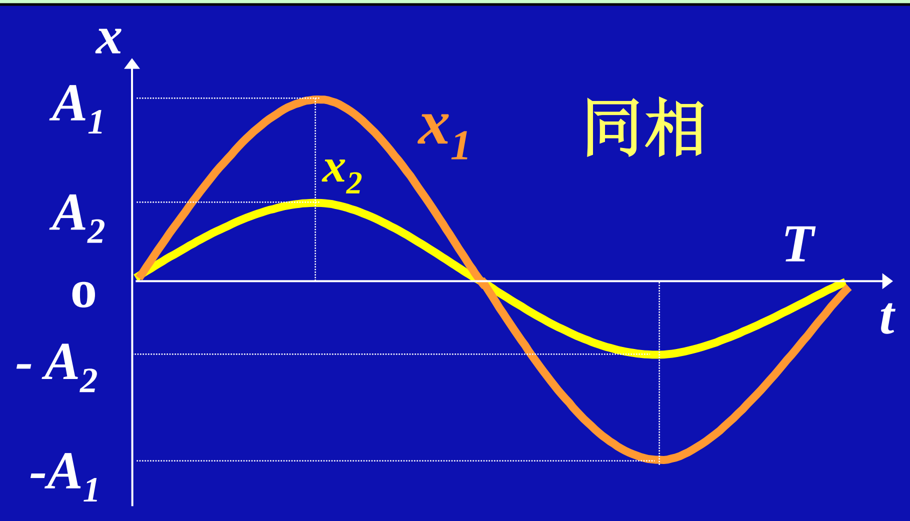
1、同相和反相

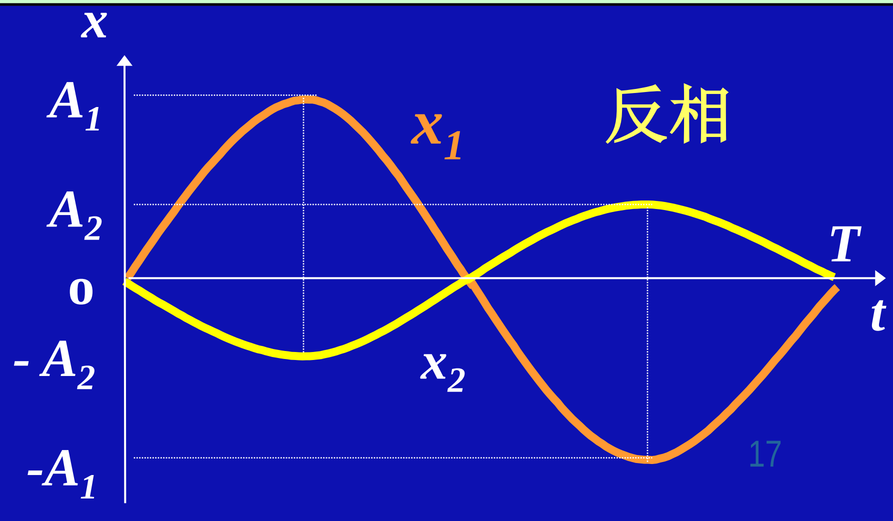
当 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$, (k =1,2,…),
两振动步调相同,称同相

两振子同时到达同方向各自最大位移处，同时过平衡点向同方向运动。

当 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$, (k =0,1,2,…),
两振动步调相反 , 称反相 。

两振子同时到达相反方向最大位移处，同时过平衡点，但向相反方向运动。

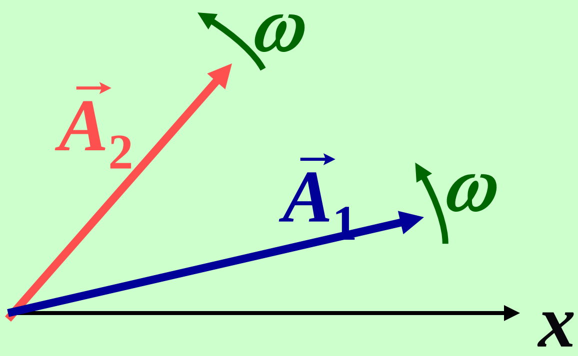




2、超前和落后

对两同频率的谐振动

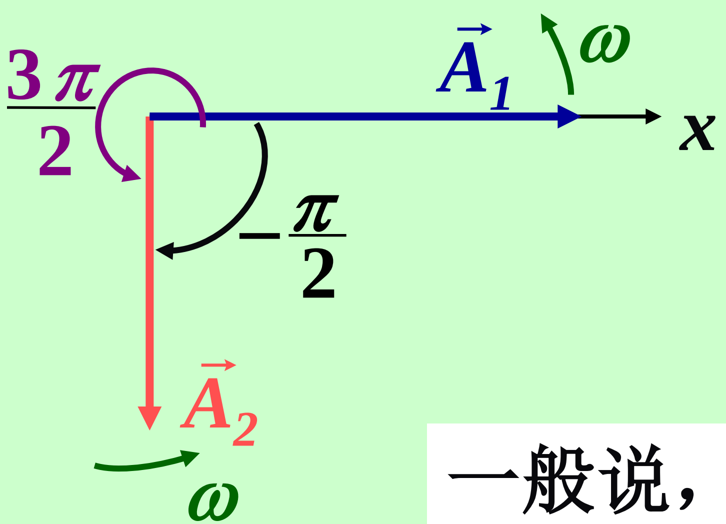
若$\Delta\varphi \neq k\pi$，$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$，则 x_2比x_1较早达到正最大，称x_2比x_1超前(或x_1比x_2落后)。

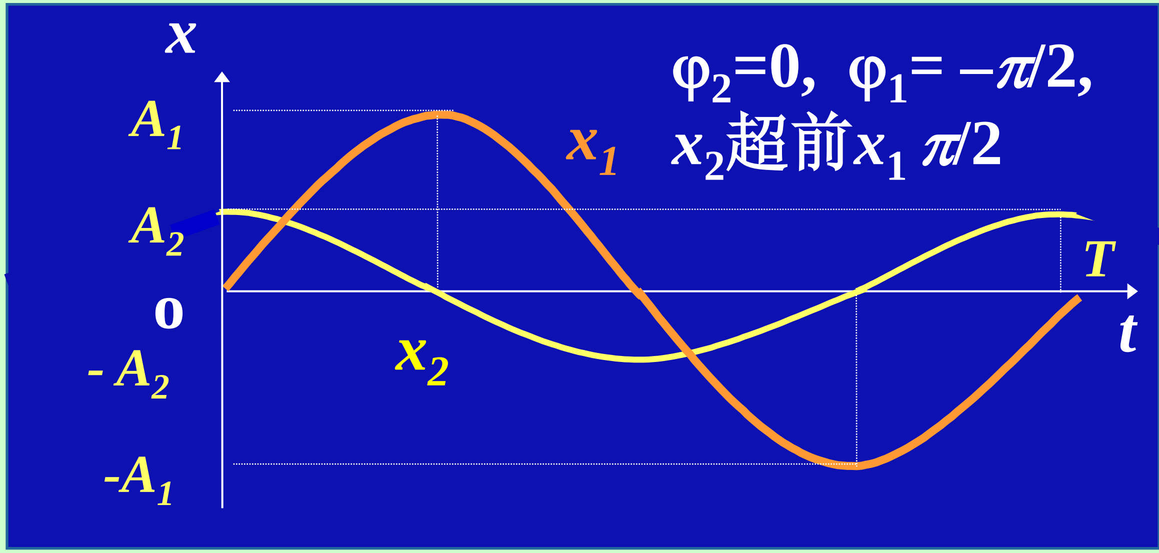


领先或落后以<π 的相位角来判断 (位相的周期是2π,$\Delta\varphi$ 的值限制在π 以内)

例如：$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3}{2}\pi$

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$





一般说，x_2的振子比 x_1的落后$\pi/2$的位相

1) $\Delta\varphi \neq 0$ 不同相的两振动，达同一运动状态有一时间差

两振动运动状态相同: $\phi_1 = \phi_2$ 即：$\omega t_1 + \varphi_1 = \omega t_2 + \varphi_2$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\omega} = -\frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

2) 对同一振动, 从 $\phi_1 = \omega t_1 + \varphi$ 到 $\phi_2 = \omega t_2 + \varphi$, 所需时间:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\omega} = \frac{\Delta\phi}{\omega}$$

例：一质点沿x轴作简谐振动，已知A=0.12m、T=2s，t=0时，x=0.06m、v>0, 求质点第一次过平衡点t=？

解： 由已知条件可求得: $x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$

第一次过平衡点的位相: $\phi = \frac{\pi}{2}$ 而 $t = 0$, $\phi = -\frac{\pi}{3}$

$$\therefore t = \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3})}{\pi} = \frac{5}{6}(s)$$

注意 (1)比较两个振动的步调时，必须将所比的简谐振动化成标准表达式： $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

初位相

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$

$$x_2 = -A_2\cos(\omega t+\varphi_2) = A_2\cos(\underbrace{\omega t+\varphi_2+\pi}_{\phi_2})$$

$$\Delta\phi = \Delta\varphi + \pi$$

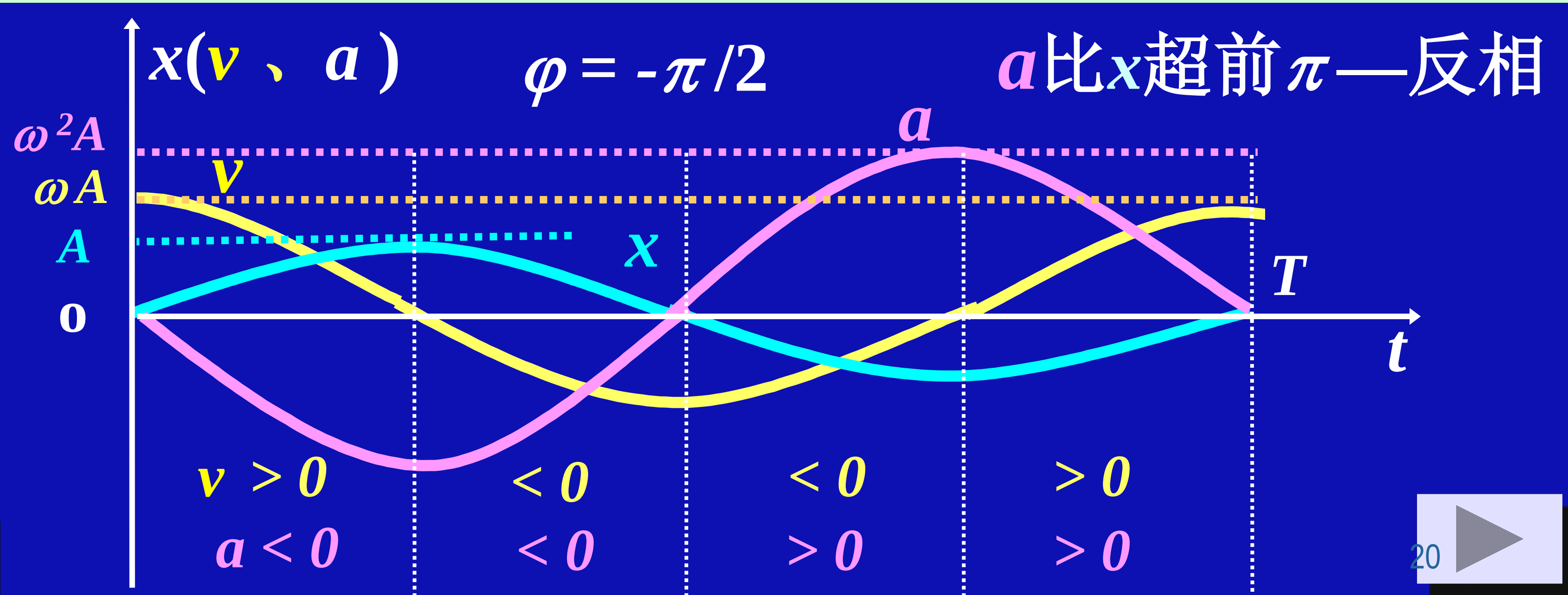
(2)不同物理量也可比较振动的步调

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v = \omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

v 比 x 超前 $\pi/2$



(3)不同物理量比较振动的步调-例 —— 交流电的功率

瞬时功率*P*(*t*)由瞬间电压和瞬间电流决定：

$$P(t)=u(t)i(t)$$

一般来说，瞬间电压和瞬间电流之间有位相差，

$$i(t)=I_0\cos\omega t$$

$$u(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi)$$

$$P(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi)\cdot I_0\cos\omega t$$
$$=\frac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi+\frac{1}{2}U_0I_0\cos(2\omega t+\varphi)$$

平均功率 $\overline{P}=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi$

例: 一质点作谐振动，周期为T。当它由平衡位置向X轴正方向运动时，从二分之一最大位移处到最大位移处这段路程所需时间为多少?

解: 可根据旋转矢量图求解。

$$\Delta t = t_2 - t_1 = ?$$

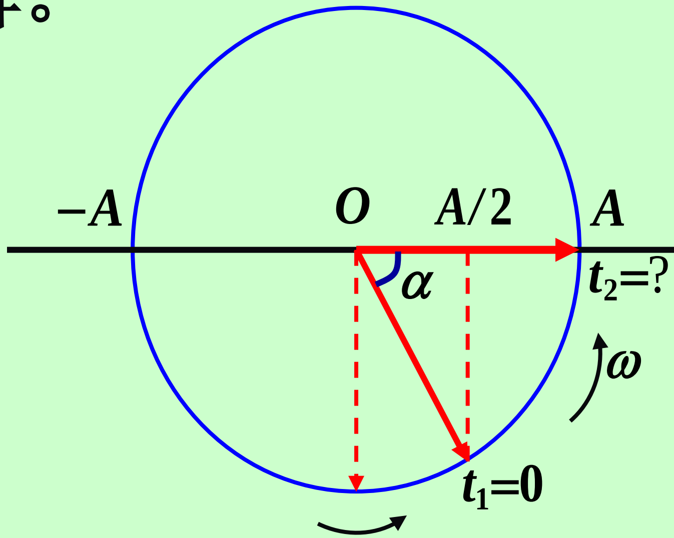
$$\cos\alpha=(A/2)/A=1/2$$

结合图知, $\alpha = \pi/3$

$$\Delta t = \alpha / \omega$$

$$\omega = 2\pi/T$$

$$\Delta t = \alpha / \omega = (\pi/3)/(2\pi/T) = T/6$$



(A) $\dfrac{T}{4}$

(B) $\dfrac{T}{3}$

(C) $\dfrac{T}{6}$

(D) $\dfrac{T}{2}$

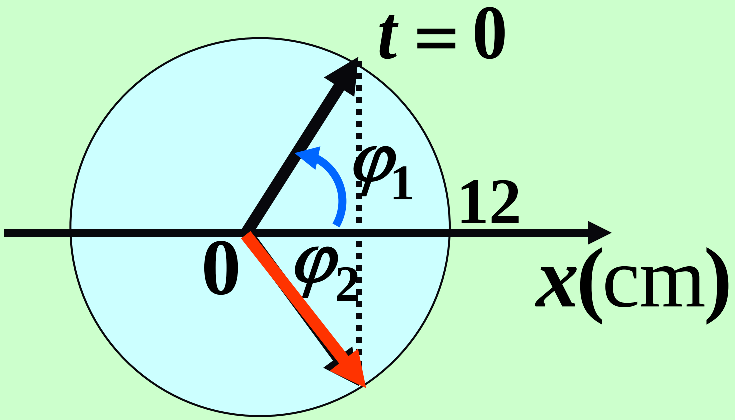
例. 一物体沿 x 轴作简谐振动，A= 12cm, T = 2s

当 t = 0时, x_0= 6cm, 且向x正方向运动。

求（1）初位相φ。

（2）t =0.5s 时, 物体的位置、速度、加速度。

解: （1）由旋转矢量图看



$$\begin{cases} \varphi_1 ? = \dfrac{\pi}{3} \\ \varphi_2 ? = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

（2）t =0.5s 时

ω

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 12\cos\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \times 0\cdot 5 - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 10.4(\text{cm})$$

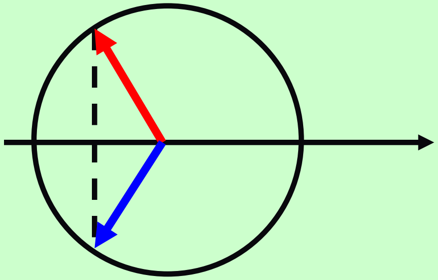
$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = -18.8(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -103(\text{cm}\cdot\text{s}^{-2})$$

例. 一物体沿 x 轴作简谐振动，A= 12cm, T = 2s

当t = 0时, x_0= 6cm, 且向x正方向运动。

求（3）在x =– 6cm处且向 x负方向运动时, 物体的速度、加速度以及从这一位置回到平衡位置需的时间。



解:（用解析法） $-6 = 12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$

$(\pi t - \frac{\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3}$（舍去）$(\cancel{\pi} t - \frac{\cancel{\pi}}{3}) = \frac{2\cancel{\pi}}{3} \Rightarrow t = 1(\mathrm{s})$

将t =1s代入(2)中 v、a 的解析式，求得:

$$v = -12\pi\sin(\pi\times 1 - \frac{\pi}{3}) = -32.7(\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

$$a = -12\pi^2\cos(\pi\times 1 - \frac{\pi}{3}) = 59.2(\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

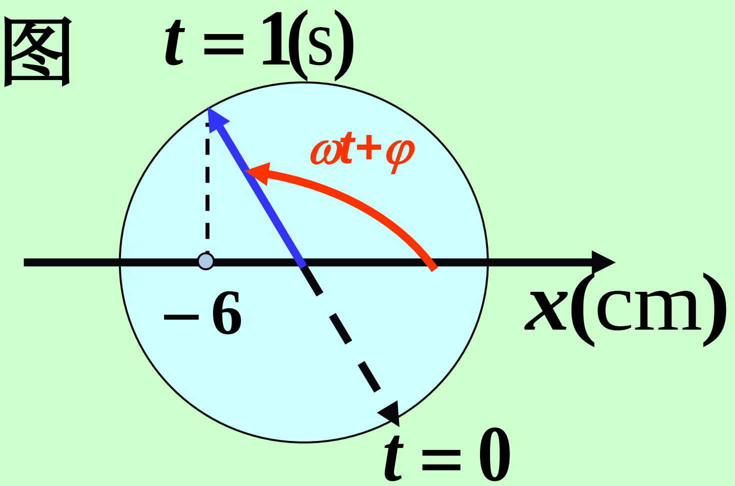
最简单的解法是用旋转矢量法

$x=-6cm$时，“$\omega t+\varphi$”如图

与t =0 相比较知：

振动物体经过了$T/2$

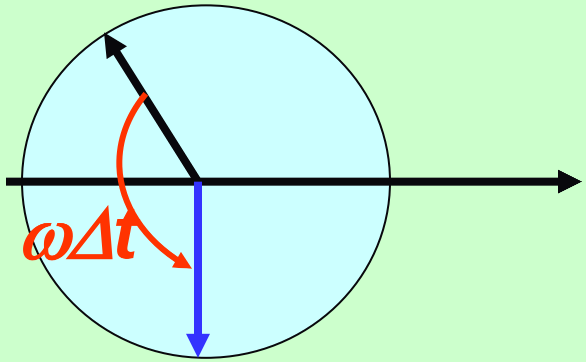
故t =1（s）再求得 v，a



从这一位置回到平衡位置所需的时间：

$$\Delta t=?$$

$$\omega\Delta t=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$$



$$\Delta t=\frac{5\pi}{6\omega}=\frac{5\pi}{6\pi}=\frac{5}{6}\approx 0\cdot 833(s)$$

例. 一物体沿 x 轴作简谐振动，A= 12cm, T = 2s 当t = 0时, x_0= 6cm, 且向x正方向运动。

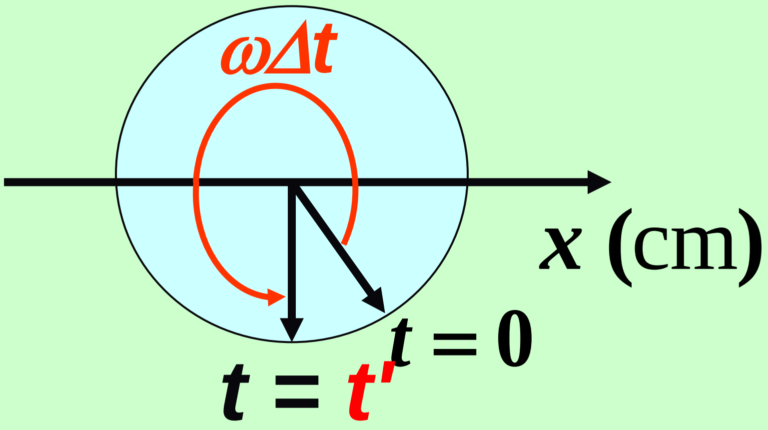
求（4）从初始时刻开始，第二次通过平衡位置的时刻t。

解: 如图所示, $t = t'$ 时物体第二次过平衡位置

$$\omega\Delta t = \frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{11}{6}\pi$$

$$t' = \frac{11}{6}(\text{s})$$



例: 一质点作谐振动，速度最大值 $v_{max}=5\text{cm/s}$，振幅 $A=2\text{cm}$。令速度具有正最大值的那一刻 $t=0$。求振动方程。

解: $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

$$v = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$= -v_{max}\sin(\omega t+\varphi)$$

$v_{max}= A\omega,\ \longrightarrow\ 5 = 2\omega$

$\omega = 2.5\ \text{rad/s}$

$t=0$ 时，$v=v_{max}>0$

而 $v_{max} = -v_{max}\sin(\omega t+\varphi)$

故 $\sin\varphi = -1$，$\varphi = 3\pi/2$

$\therefore x = 2\cos(2.5t + 3\pi/2)\ \text{cm}$

另解: 根据旋转矢量图求 φ。

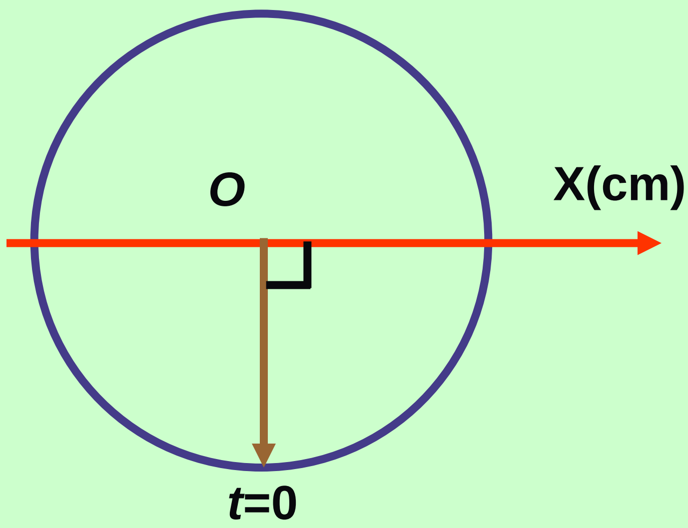
$v_{max}= A\omega,\ \longrightarrow\ \omega = 2.5\ \text{rad/s}$

(A) $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

(B) $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$

(C) $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$

(D) $\varphi = \pi$



所以，初位相 $\varphi = 3\pi/2$

$\therefore x = 2\cos(2.5t + 3\pi/2)\ \text{cm}$

例： 已知 x—t曲线，写出振动方程。

解: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$(A)\ \omega = \dfrac{3\pi}{4}\ \text{rad/s}$

$A = 2\text{cm} \qquad \varphi = ?$

$(B)\ \omega = \dfrac{4\pi}{3}\ \text{rad/s}$

$\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$

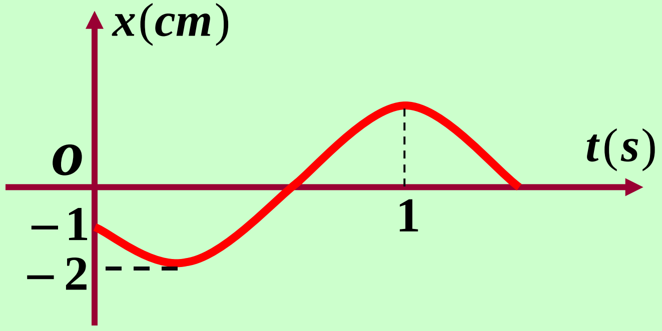
$(C)\ \omega = \dfrac{2\pi}{3}\ \text{rad/s}$

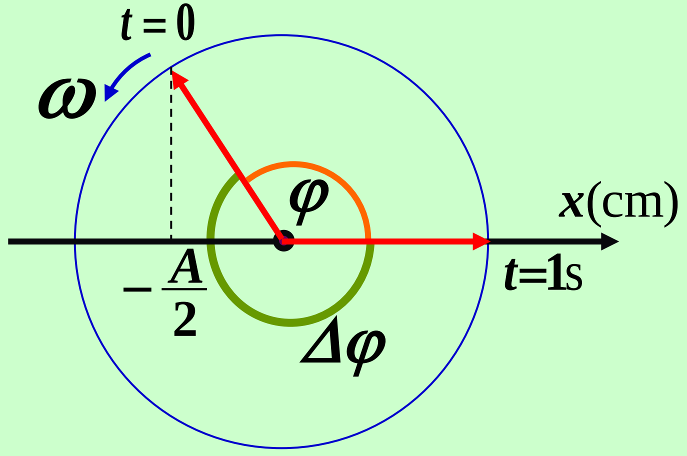
$\omega = ?$

$(D)\ \omega = \dfrac{3\pi}{2}\ \text{rad/s}$

$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3}$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{4\pi/3}{1} = \frac{4\pi}{3}\ \text{rad/s}$$





$$\therefore x = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right)\text{cm}$$

例: 已知谐振动 A=10cm，T=2s，当 t=0 时位移为 –5cm，且向 x 负向运动。求:

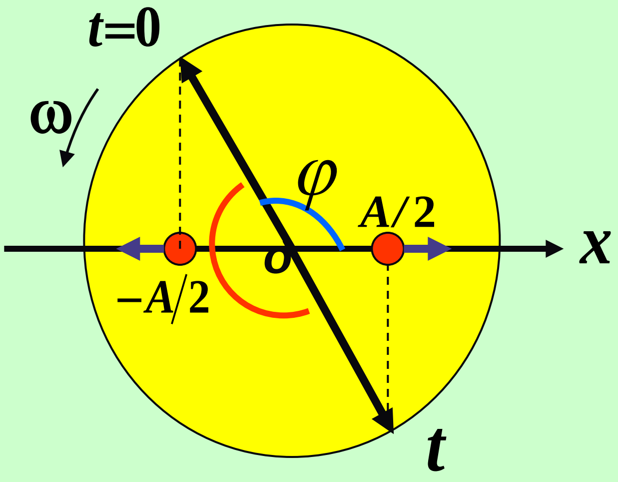
（1）振动方程。

（2）x=5cm 且向 x 正向运动时的速度、加速度及从这一位置回到平衡位置的最短时间。

解:（1）$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \quad \text{(rad/s)}$$

由旋转矢量得 $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$



$$x=0.1\cos(\pi t+\frac{2\pi}{3})\ \text{m}$$

（2）先求 t。由旋转矢量法

$$t=\frac{\Delta\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{\pi}=1\text{s}$$ （半个周期）

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

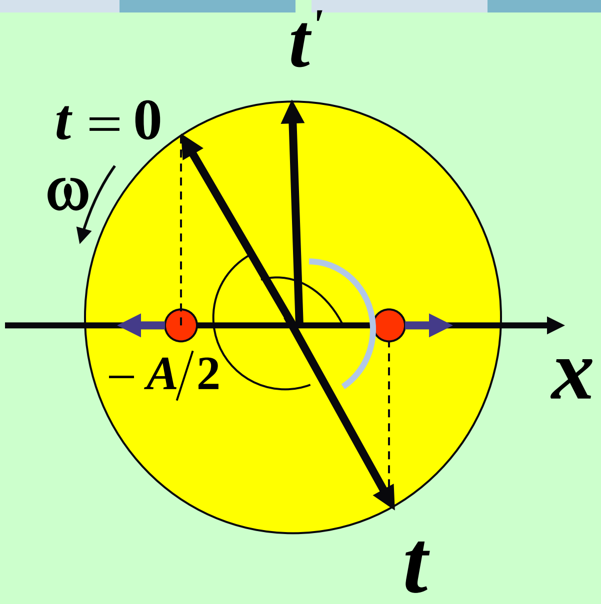
$$= -0.1\pi\sin(\pi + 2\pi/3)$$

$$= 0.27\,\mathrm{m/s}$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -0.1\pi^2\cos(\pi + 2\pi/3)$$

$$= -0.49\,\mathrm{m/s^2}$$



由旋转矢量法：

$$\Delta\varphi' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

（也可用解析法）

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi'}{\omega} = \frac{5\pi/6}{\pi} = \frac{5}{6}\,\mathrm{s}$$

例: 轻质弹簧下挂一小盘,小盘作谐振动, 平衡位置在原点，位移向下为正，并用余弦表示。小盘处于最低位置的时刻有一小物体落到盘上并粘住。若以新的平衡位置为原点，并设新的平衡位置相对原平衡位置向下移动的距离小于原振幅，小物体与盘相碰为计时零点。那么，新的位移表达式的初位相在[   ]

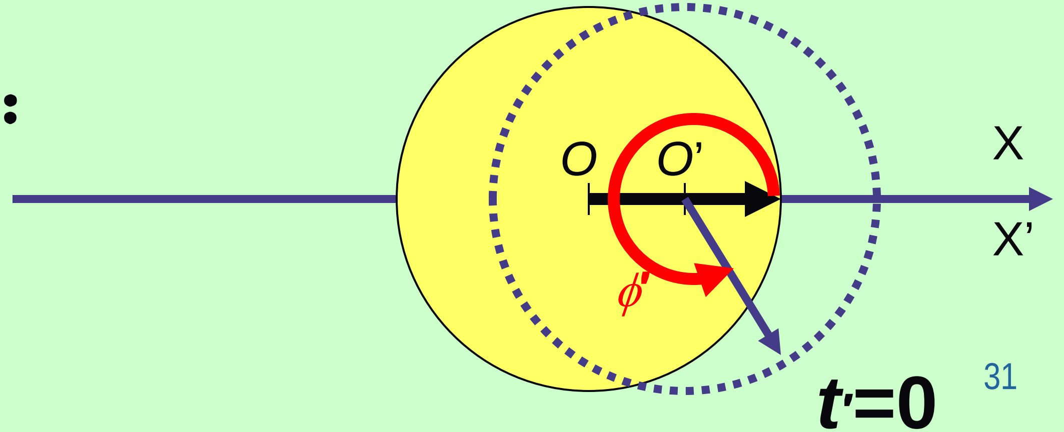
(A) 0~ $\pi/2$ 之间　　(B) $\pi/2$ ~π 之间

(C) π ~ $3\pi/2$之间　　(D) $3\pi/2$ ~ 2π之间

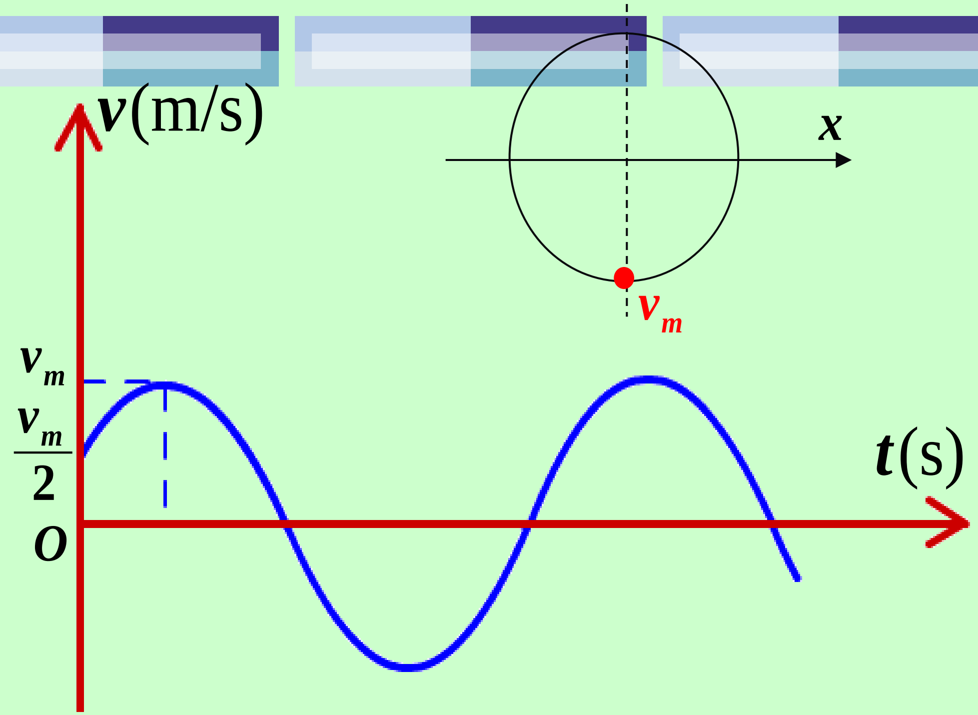
解: $t'=0$ 时，盘与小物体继续下移。故$v'>0$,　$x'>0$。

可作旋转矢量图:

所以 (D) 对。



例:右图为一作谐振动的物体的**速度--时间**曲线. 若用余弦函数表示简谐振动，则振动的初位相是多少?



解: $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$=-v_m\sin(\omega t+\varphi)$$

$$t=0\text{时}, v=\frac{v_m}{2}$$

$$\therefore \frac{v_m}{2}=-v_m\sin\varphi$$

$$\sin\varphi=-\frac{1}{2}$$

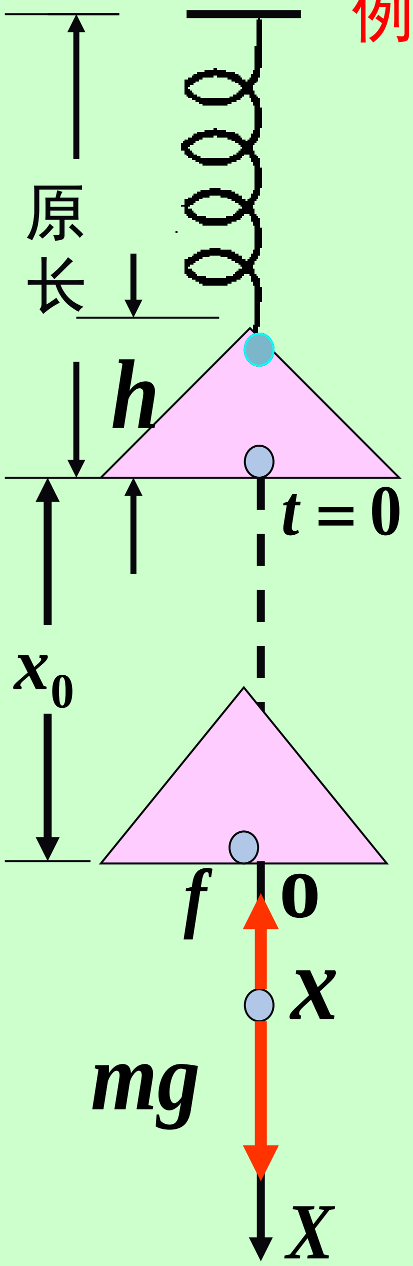
$$\varphi=\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$$ 应取哪一个值?

考虑 $$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_m\omega\cos(\omega t+\varphi)$$

$$t=0\text{时}, a>0 \quad \therefore -v_m\omega\cos\varphi>0$$

$$\therefore \cos\varphi<0 \quad \text{即}\ \varphi=\frac{7\pi}{6}$$

例. 将天平盘子挂在一个刚度系数为k的弹簧下端，有一质量为m的物体，从离盘高为h处自由下落至盘中后不再跳离盘子，因此盘子和物体一起开始运动(盘和弹簧的质量忽略)。问(1)是否为谐振动？



解：盘、弹簧、物体构成的一个系统

设物体 m 落入盘中后，系统运动至o处所受合力为零（o为平衡位置）。

建立坐标如左图，则

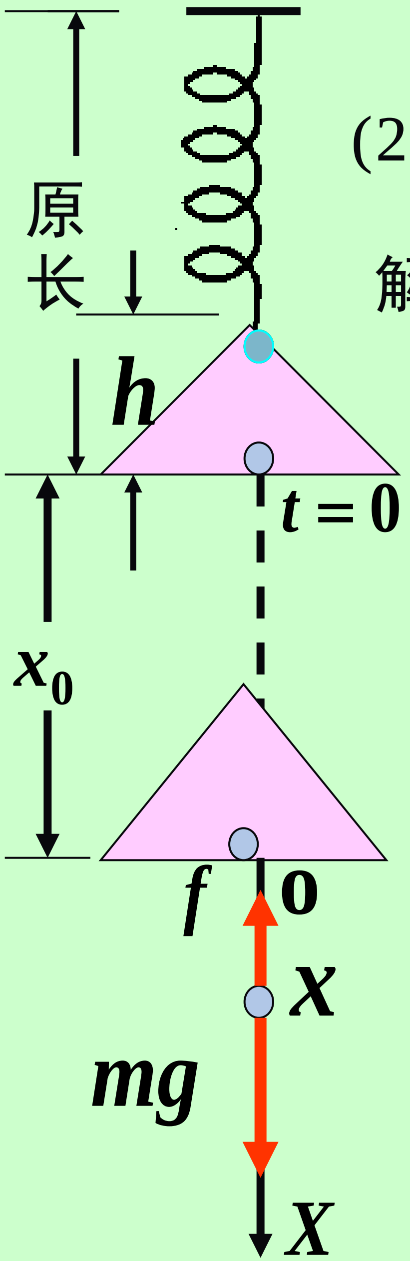
$$mg - kx_0 = 0 \quad \Rightarrow mg = kx_0$$

系统在任一时刻所受的合力为：

$$\sum F = mg - f = kx_0 - k(x_0 + x)$$

即 $\sum F = -kx$ 是谐振动！

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0}$$



(2) 求振动时的周期 T 振幅 A 位相 φ 及振动方程。

解：根据 $\begin{cases}\sum F=-kx\\ \sum F=ma\end{cases}$ $\qquad -kx=ma$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x \quad 则 \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

即 $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

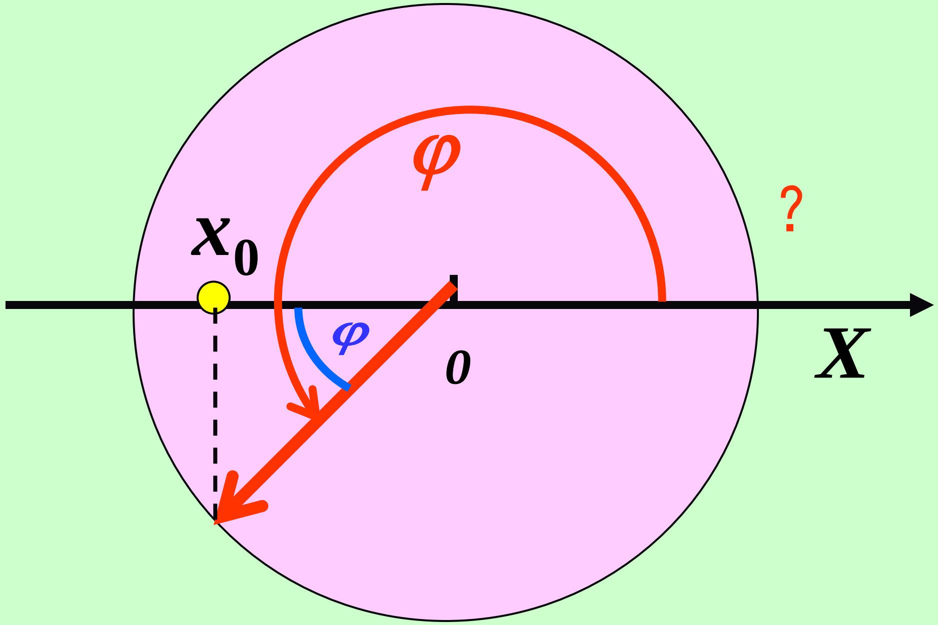
$t=0$ 时 $\quad x_0=-\dfrac{mg}{k} \qquad v_0=\sqrt{2gh}$

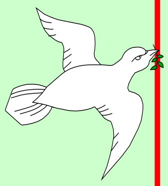
$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{x_o\omega}\right)$$

$$\cancel{= tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{2kh}{mg}}\right)}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{2kh}{mg}}\right) \pm \pi$$





$$\boxed{A = \frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$x = \frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t + \left(tg^{-1}\sqrt{\frac{2kh}{mg}} \pm \pi\right)\right]$$

三、简谐振动的能量

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$f_{弹性力} = -kx = -\frac{dE_p}{dx}$$

1. 简谐振动系统的能量

水平弹簧振子

动能 $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

势能 $$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

机械能 $$E = E_k + E_p$$

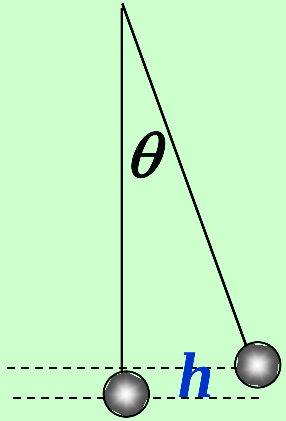
$$= \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t+\varphi)+\cos^2(\omega t+\varphi)\right] = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\boxed{E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2}$$ ——常量

单 摆 *simple pendulum*

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = l\frac{d\theta}{dt} = -l\omega\Theta\sin(\omega t + \varphi)$$



动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\omega^2\Theta^2\sin^2(\omega t + \varphi)$

势能 $E_p = mgh = mgl(1 - \cos\theta)$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{l}} \qquad = \frac{1}{2}ml^2\omega^2\Theta^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

当θ很小时 $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

机械能

$$E_{总} = E_k + E_p = \frac{1}{2}ml^2\omega^2\Theta^2 = \frac{1}{2}mgl\Theta^2$$ ——常量

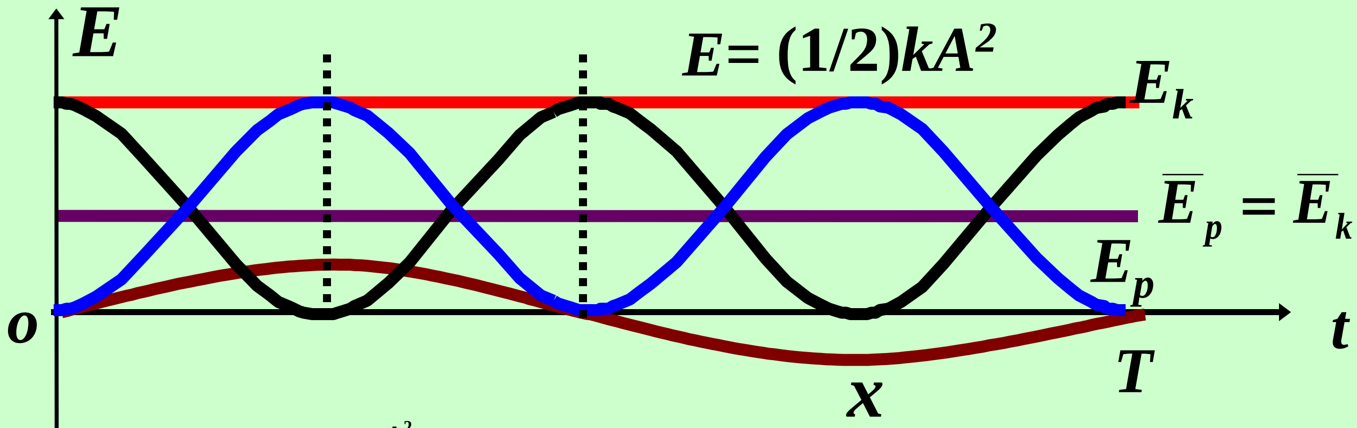
结论：简谐振动系统机械能守恒

2. 谐振动系统能量的特点

1）E_K、E_p各自随时间作周期性变化

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)}\qquad \boxed{E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)}$$

E_k、E_p 总是此涨彼消



$\propto A^2$

可见：谐振动的过程是动能与势能相互转换的过程。

$$E=\frac{i}{2}\nu RT$$

$$i=t+r+2s$$

2）$E_{总}$=常量

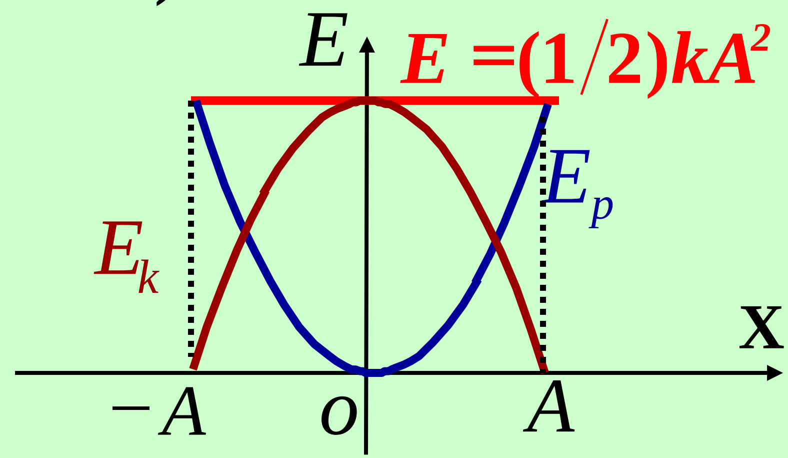
3）动能与势能的时间平均值： $\overline{E_p}=\overline{E_k}=\frac{1}{2}E_{总}$

$$\overline{E_k}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)\mathrm{d}t=\frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0}\sin^2x\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E_P}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)\mathrm{d}t=\frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0}\cos^2x\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kA^2$$

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) \longrightarrow E_k=\frac{1}{2}k(A^2-x^2)$$

$$E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \longrightarrow E_p=\frac{1}{2}kx^2$$



4）$E_{总}$正比于振幅的平方A^2

可见：

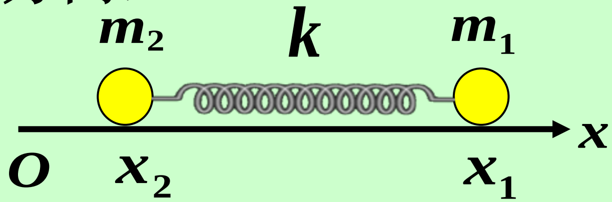
a. 弹簧振子的动能和势能的平均值相等，
均为总机械能的一半。

b. 谐振动的**总能量**与**振幅的平方**成正比 $\boxed{E_{总}\propto A^2}$

c. 振幅不仅给出谐振动运动的范围，而且还反映了振动系统总能量的大小及振动的强度。

这些结论适用于任何谐振动。

例：如图所示，有两个质量各为m_1, m_2并有轻弹簧连系着的小球放在水平光滑桌面上，弹簧的强度是：当m_1固定时m_2能够每秒振动n次。试求(1)当m_2固定时，m_1每秒振动的次数；(2)当m_1, m_2均自由时，它们每秒振动的次数N。（设每次振动的方向均沿弹簧的直线方向）



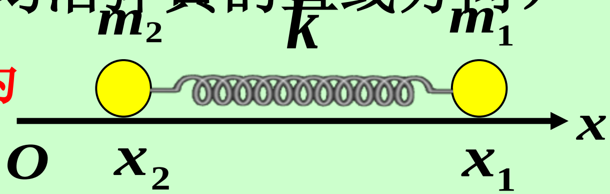
解：(1) $$\omega_2=2\pi n=\sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

$$\omega_1=2\pi n'=\sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\therefore n'=n\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

例：如图所示，有两个质量各为m_1, m_2并有轻弹簧连系着的小球放在水平光滑桌面上，弹簧的强度是：当m_1固定时m_2能够每秒振动n次。试求(1)当m_2固定时，m_1每秒振动的次数；(2)当m_1, m_2均自由时，它们每秒振动的次数N。（设每次振动的方向均沿弹簧的直线方向）



解：(2) 设弹簧原长为l

弹簧总的伸缩量为$[(x_1-x_2)-l]$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-k[(x_1-x_2)-l]$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=k[(x_1-x_2)-l]$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}=-k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)[(x_1-x_2)-l]$$

令$x=x_1-x_2-l, \frac{1}{m}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x=-\omega^2x$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}$$

$$\omega=2\pi N=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}$$

$$\boxed{\omega_2=2\pi n=\sqrt{\frac{k}{m_2}}}$$

$$\therefore N=n\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}}=n\sqrt{\frac{m_2+m_1}{m_1}}$$