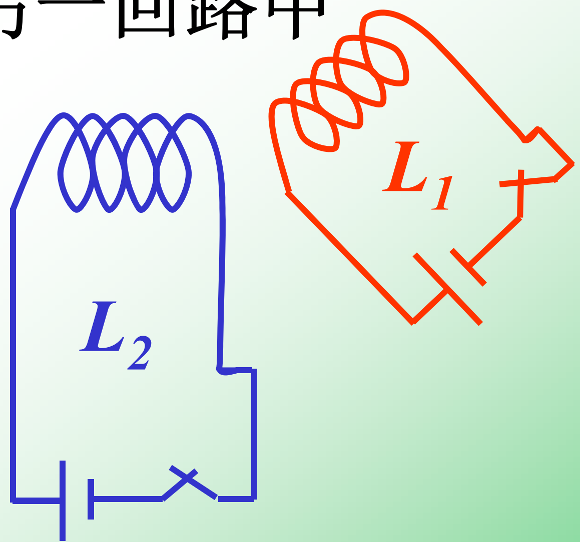
第3节　互感与自感

Mutual Induction and Self-Induction

一、互感

一导体回路的电流变化，在另一回路中产生感应电动势~~**互感电动势**。



1.互感系数

L_1中的i_1变化 $\xrightarrow{\text{引起}}$ L_2中Φ_{12}的变化

在L_2中产生感应电动势

~~**互感电动势**ε_{12}

反之: L_2中i_2的变化,也在L_1中产生**互感电动势**ε_{21}

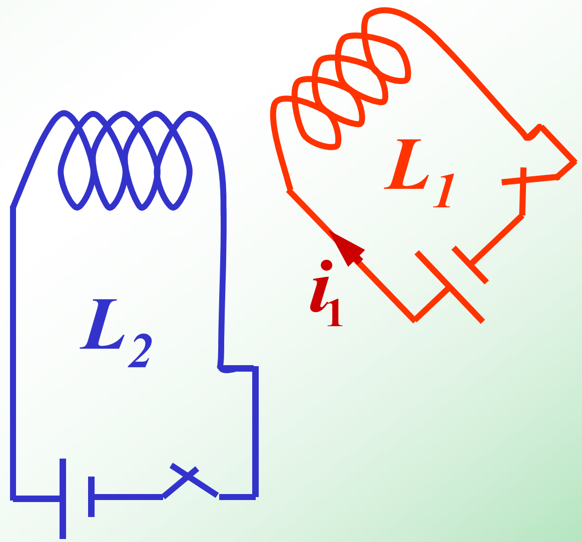
显然, ε_{12}、ε_{21}不仅与另一线圈的电流变化有关，而且还与它们的相对位置有关。

若两线圈的相对位置确定:

设L_1的电流为i_1,在L_2中产生的磁通匝链数为ψ_{12}。

$\because\ B_1 \propto i_1$ 则 $\Psi_{12} \propto B_1 \propto i_1$

即有: $\Psi_{12} \propto i_1$



$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{12} = M_{12} i_1 \\ \text{同理:}\ &\Psi_{21} = M_{21} i_2 \end{aligned}\right\}$$

可证明: $M_{12} = M_{21} = M$

M—**互感系数，简称互感。**

单位: 亨利（H）

M与$\left\{\begin{array}{l}\text{两回路的位置有关;} \\ \text{线圈的几何形状及介质}\mu\text{有关。}\end{array}\right.$

互感电动势

$$\varepsilon_M = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - i\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

当 $M =$ 常数时

$$\varepsilon_M = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \begin{cases} \varepsilon_{12} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_{21} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

2.互感的计算

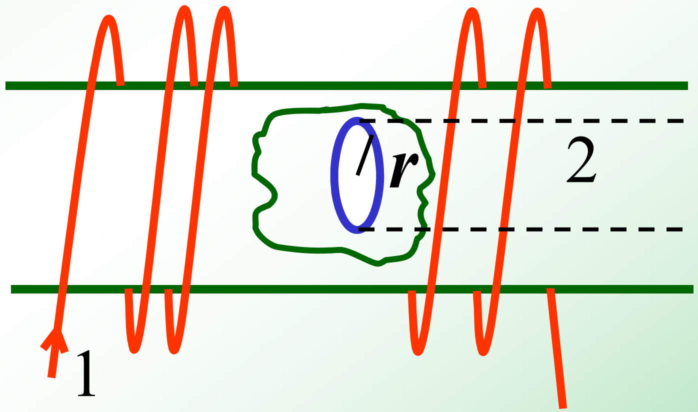
根据 $\varepsilon_M = -M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 或 $\begin{cases} \Psi_{12} = Mi_1 \\ \Psi_{21} = Mi_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{M = \Psi_{12}/i_1 = \Psi_{21}/i_2} \\ M = \left|\dfrac{\varepsilon_{12}}{\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t}\right| = \left|\dfrac{\varepsilon_{21}}{\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t}\right| \end{cases}$$

例8. 长直螺线管，单位长度上有n 匝线圈，另一半径为r 的圆环放在螺线管内，环平面与管轴垂直。求它们之间的互感M?

解：由互感的定义可知

$$M=\frac{\Psi_{21}}{i_2}=\frac{\Psi_{12}}{i_1}$$



但此处Ψ_{21}很难算出!

设此螺线管通有i_1，则$B_1=\mu_0 n i_1$,

圆环中：$\Psi_{12}=B_1\pi r^2=\mu_0 n i_1 \pi r^2$

$$\therefore M=\frac{\Psi_{12}}{i_1}=\mu_0 n\pi r^2$$

注：

1^{o} 原则上可对任一线圈产生磁场计算另一线圈的磁通量 $\psi \to M = \psi / i$。

但很多实际问题中M很难算出。

2^{o} 互感在电工和无线电技术中应用广泛

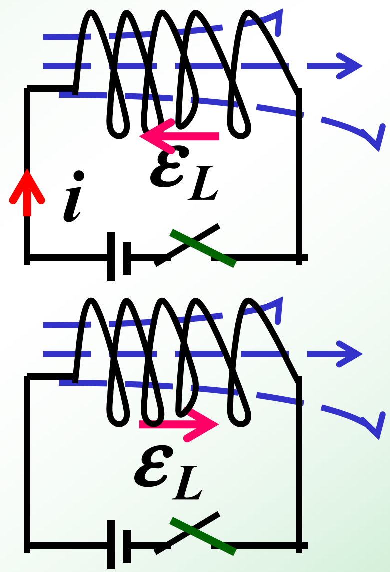
如:变压器，互感器……

互感往往也是有害的……

二、自感

1. 自感电动势

回路自身 i 变化→B变化→Ψ变化



$$\Psi \propto B \propto i \qquad \Psi = Li$$

L~~自感系数或自感（**电感**）

$$L = \frac{\Psi}{i}$$ → 取决于回路的大小、形状、匝数以及μ。

$$\varepsilon_{自} = \varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - i\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

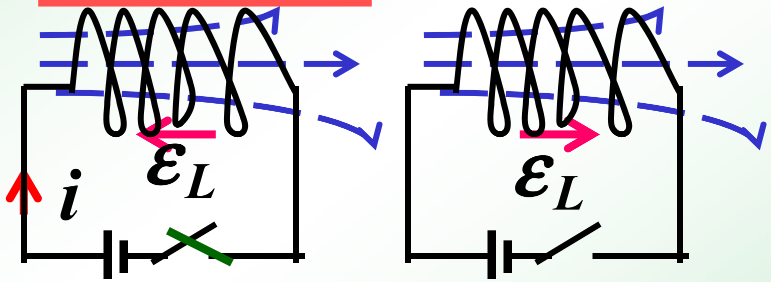
ε_L总是阻碍回路自身电流的变化

当L=常量：$\varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

ε_L的方向：反抗回路中电流的改变

电流增加时，自感电动势与原电流方向相反；
电流减小时，自感电动势与原电流方向相同。

$\varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt} - i\dfrac{dL}{dt}$ $\xrightarrow{L=常量}$ $\varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt}$ $\quad \Psi = Li$



结论：

1° $\varepsilon_L \propto \dfrac{di}{dt}$，回路里 $di/dt \neq 0 \rightarrow \varepsilon_L$

直流电路在*ON*、*OFF*开关的瞬间才出现ε_L。

2° $\varepsilon_L \propto L$
- L大，ε_L大→阻碍电路变化的阻力大；
- L小，ε_L小→阻碍电路变化的阻力小。

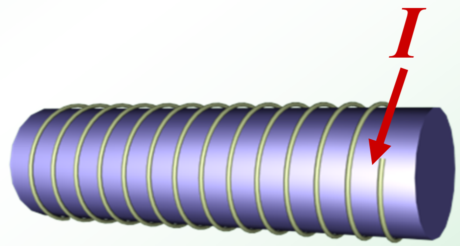
∴ L~~对电路“电磁惯性”的量度

3° L的定义：$L = \dfrac{\Psi}{i}$ 或：$L = \left|\dfrac{\varepsilon_L}{\frac{di}{dt}}\right|$

注意：两个定义式只有在 L 是常量时是一致的

2. 自感L的计算

例9. 计算一长直螺线管的自感,截面积为S, 长为l , 单位长度上的匝数为n, 管中充有μ 的磁介质, 求 该螺线管的自感L。



解: 设螺线管通有I 的电流,

则管内磁场为: $B = \mu nI$

管内全磁通:

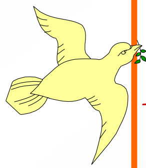
$$\Psi = N\Phi = NBS = N\mu nIS = n^2\mu I lS \qquad V = lS$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = n^2\mu V$$ 若管内为真空: $L = n^2\mu_0 V$

可见: $L \propto \mu,\ V,\ n$

注:除线圈外,任何一个实际电路都存在自感,输电线相当于单匝回路,回路上有分布自感。

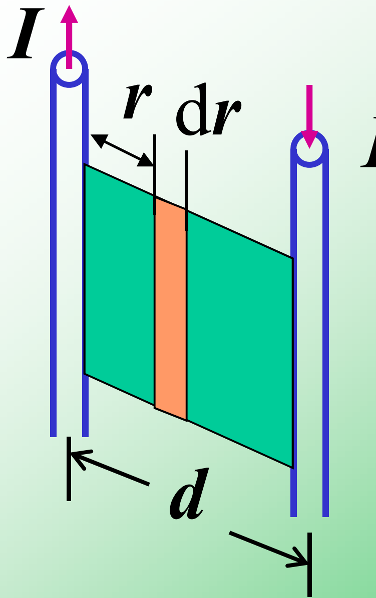
例10. 两根中心距离为d半径为a的平行输电导线，求：两导线单位长度上的分布电感（$d >> a$）。



$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

解： 如图，设导线中有电流 I，

单位长度上的磁通量



$$\Psi=\Phi=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

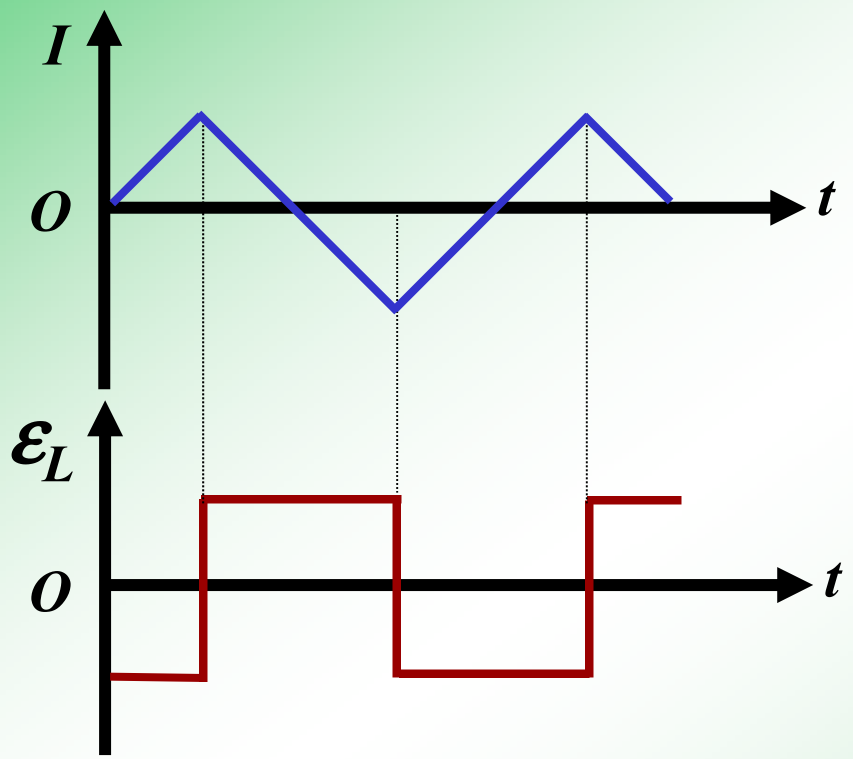
$$=\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r+\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}\qquad(d>>a)$$

例: 一线圈中通过的电流I 随时间t 变化的规律如图.试画出自感电动势ε_L随时间 t 变化的规律(以I 的正方向为ε_L的正向).



解: 根据

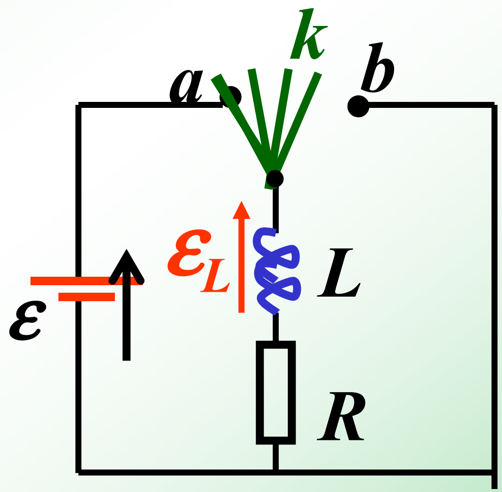
$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

可得左边的 ε_L 随 t 变化的曲线。

3. *LR* 电路

由一自感线圈L，电阻R，与电源ε组成电路。

求：电键 k 接a上一段时间后，
又接到b上回路里 i 的变化。



$k \to a$，$i \boxed{\nearrow} I$，L上产生ε_L，

$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \quad \varepsilon_{总} = \varepsilon + \varepsilon_L$$

即：$\varepsilon + \varepsilon_L = iR$

$$\varepsilon - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \varepsilon$$

积分可得：$i = \dfrac{\varepsilon}{R} + \mathrm{C}e^{-Rt/L}$ C为积分常数。

由初始条件：$t=0$，$i=0$，则 $\mathrm{C} = -\varepsilon/R$，

$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-Rt/L})}$$

讨论：

$$i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L})$$

1° $t\to\infty,\ i=\frac{\varepsilon}{R}=I$

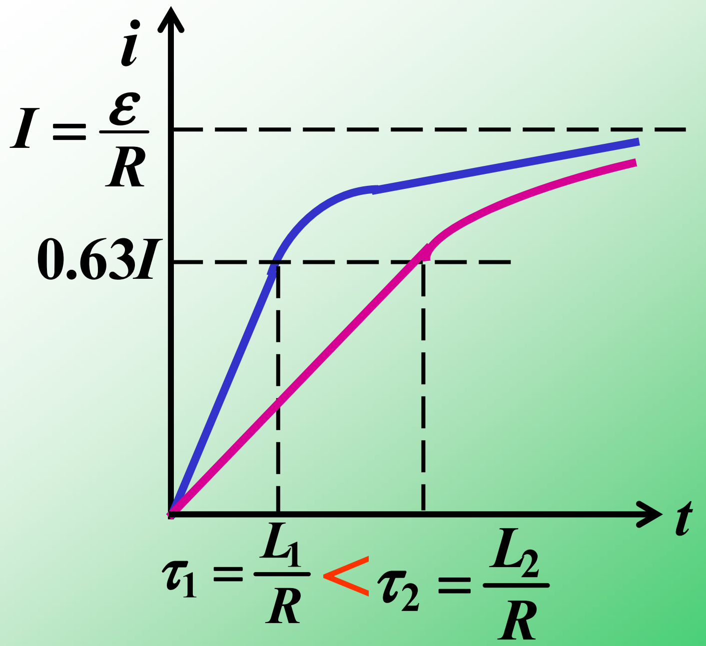
2° $t=L/R$ $\quad i=\frac{\varepsilon}{R}(1-\frac{1}{e})=0.63I$

时间常数

令 $\tau=L/R$， i从0 →0.63I所需时间

τ大, L大, i 增长慢,
ε_L 阻力大, **电磁惯性大;**

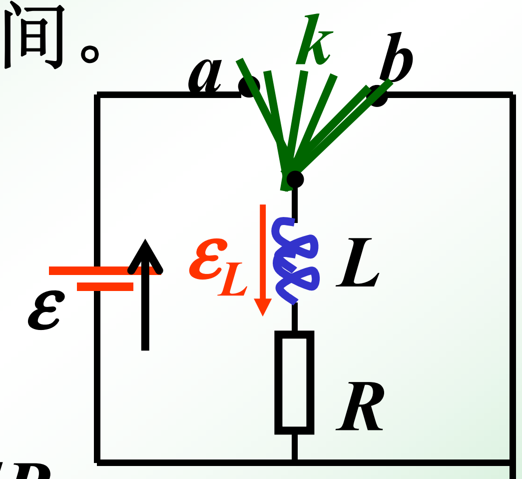
τ小, L小, i 增长快
ε_L 阻力小, **电磁惯性小。**



$i \to I$后，$k \to b$（**相当于电路加了阶跃电压$\varepsilon \to 0$**）

自感电动势将使电流维持一段时间。

$$\because \left.\begin{aligned} \varepsilon_L &= -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_L &= iR \end{aligned}\right\} -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR$$

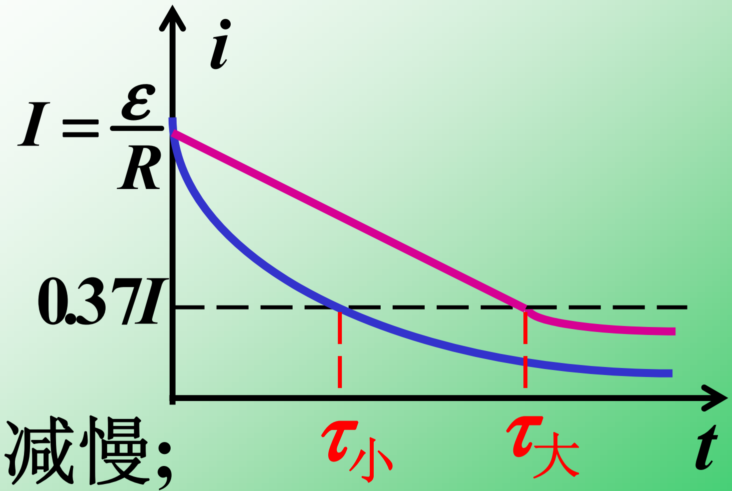


积分可得：$i = \mathrm{C}e^{-Rt/L}$

初始条件：$t=0$，$i=I$，$\mathrm{C}=I=\varepsilon/R$

$$\boxed{\therefore \quad i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-Rt/L}}$$

可见:去掉电源,电流仍按指数递减,递减快慢仍由$\tau=L/R$表征。



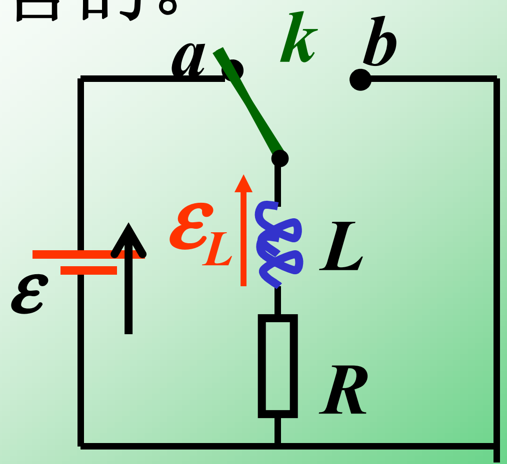
$t=\tau$时，$i=0.37I$ $\begin{cases} \tau\text{大，}i\text{衰减慢；} \\ \tau\text{小，}i\text{衰减快。} \end{cases}$

结论：

1° *LR*电路在阶跃电压的作用下，电流不能突变，$\tau=L/R$ 标志滞后时间。

L有平稳电流作用

2° 自感在电工及无线电技术中应用很广泛，但在大自感电路里也是有害的。



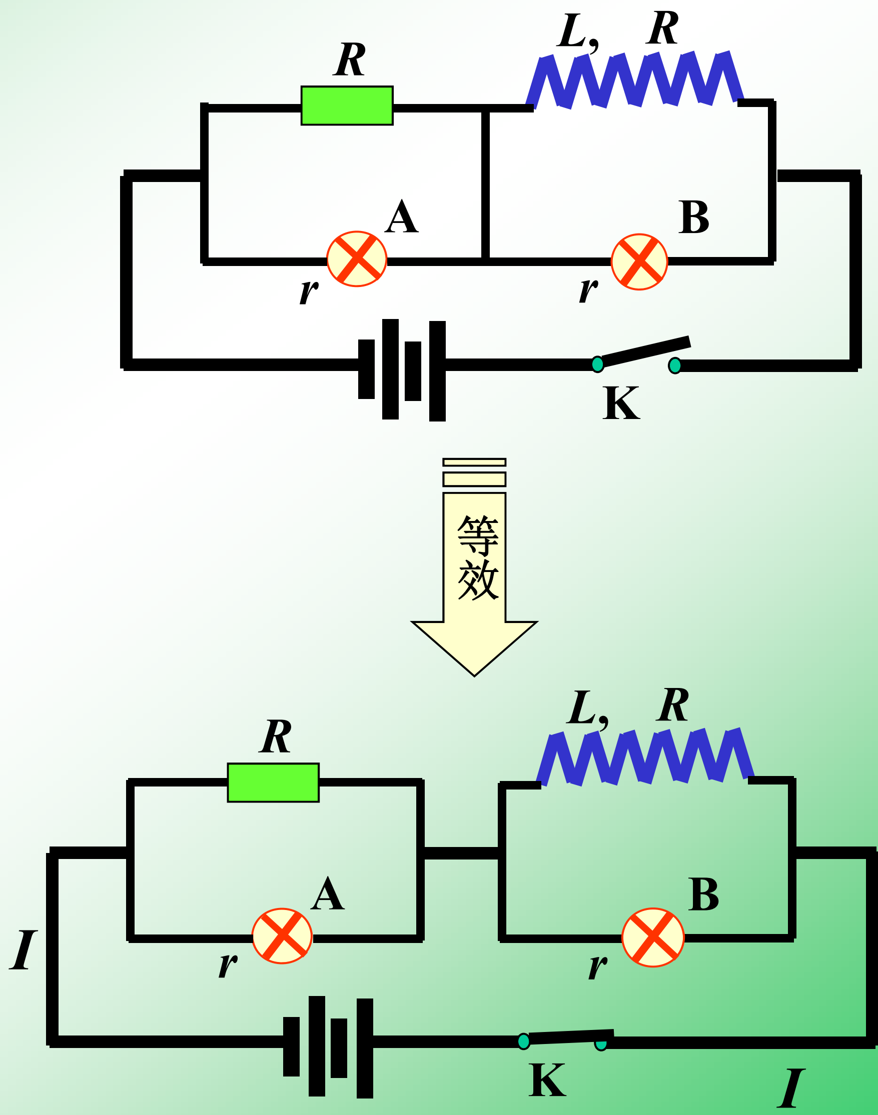
例： A、B是相同的两灯泡，内阻$r>>R$. 线圈的电阻为R，L很大。则下面正确的是[　　　].

(A) K接通时，$I_A<I_B$.

(B) K接通时，$I_A=I_B$.

(C) K断开时，A、B同时灭.

(D) K断开时，$I_A=I_B$.



解：

K接通时，因$r>>R$，故$I_A<<I$.

又因L很大，故 ε_L 大，

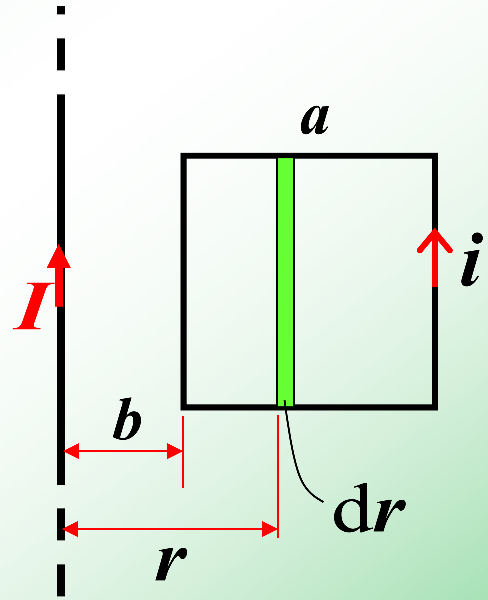
所以$I_L\approx 0$，$I_B\approx I$

故，K接通时，$I_B>I_A$.

K断开时，仍有$I_B>I_A$.

例：载流正方形线圈旁有一无限长直导线。若线圈中有变化的电流i，求在无限长直导线中产生的感应电动势。

解：直导线中的电动势是互感电动势。



$$\varepsilon = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$M = ?$$

设直导线中有电流I，在线圈中

$$\phi = \int \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_{b}^{b+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot a\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} ln\frac{b+a}{b}$$

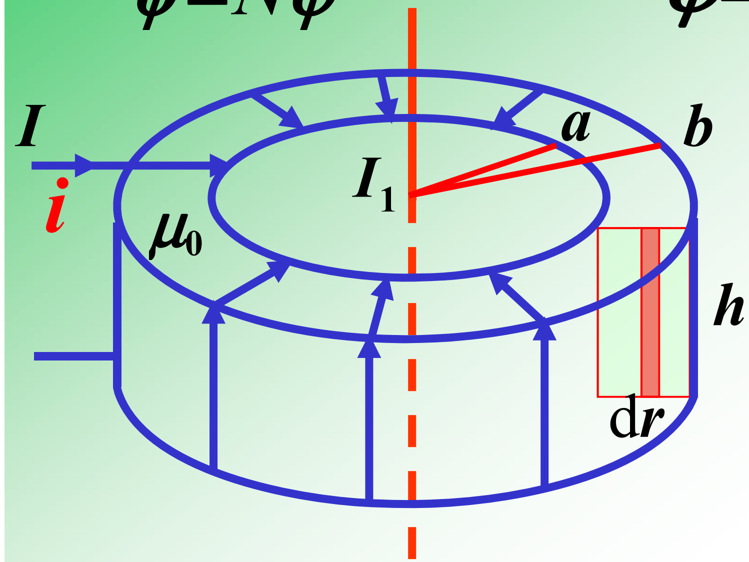
$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} ln\frac{b+a}{b}$$

$$\therefore \varepsilon = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} ln\frac{b+a}{b}$$

例：环形螺线管总匝数 N（如图） （1）求 L

解：设线圈中通有电流 I.

$\psi = N\varphi$



安培环路定理

$$\varphi = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\cdot h\,dr = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h\cdot \ln\frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\varphi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

（2）若中心有一无限长直导线，求M.

设直线中通电流 I_1 $\quad M = \psi_2 / I_1$

$$= \frac{N\varphi_2}{I_1} = \frac{N}{I_1}\cdot\int_a^b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cdot h\,dr = \frac{\mu_0 N}{2\pi} h \ln\frac{b}{a}$$

（3）若在螺绕环中通以交变 电流 $i = I_0 \cos\omega t$， 求在长直导线中的感应电动势.

$$\varepsilon = -M\frac{di}{dt} = +\frac{\mu_0 Nh}{2\pi}\ln\frac{b}{a} I_0 \omega \sin\omega t$$

方向?