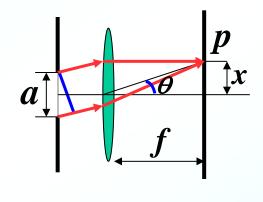


- 例: 单缝衍射a=0.1mm, f=100mm, $\lambda=500$ nm, p点(x=1.75mm)处是明纹.
- 求: (1) p点条纹级数k.

明纹
$$asin\theta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$
 $\longrightarrow a\frac{x}{f} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

$$\longrightarrow k = \frac{ax}{f\lambda} - \frac{1}{2} = 3.5 - 0.5 = 3$$

第3级明纹



$$\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

(2) 对应于P点缝可分成多少个半波带?

$$asin\theta$$
= $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ = $(2\times3+1)\frac{\lambda}{2}$ = 7 个半波带

(3) p 点的相对光强?

:
$$k=3,\alpha=\frac{7\pi}{2}$$
 $\longrightarrow \frac{I}{I_0}=\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{(\frac{7\pi}{2})^2}=0.0083=0.83\%$

(4)将缝宽增加1倍,P点将变为什么条纹?

$$2asin\theta=2\times\frac{7\lambda}{2}=14\frac{\lambda}{2}=7\lambda$$
 第7级暗纹

例: (1)在单缝衍射中,衍射角 秒 越大(级数越高)的那些明纹的亮度是越大还是越小? 用菲涅耳半波带法加以解释。(2)在单缝衍射中,如果把整个装置放入水中,衍射图样将怎样变化? ■

解: (1) $AC=a \sin\theta$ 若: AC = 奇数个半波长 $a \sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, k=1,2,3\cdots$ 明纹

 $\theta \uparrow$, $k \uparrow$ 则级数越高,AC越长,缝AB分成 的半波带越多, 每个半波带越窄,在P点处引起的光强越小。 因此,衍射角越大的明纹的亮度越小.

(2) 如果把整个装置放入水中,

明纹满足
$$nasin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, k=1,2,3...$$

暗纹满足 $nasin\theta=\pm k\lambda$ k=1,2,3...

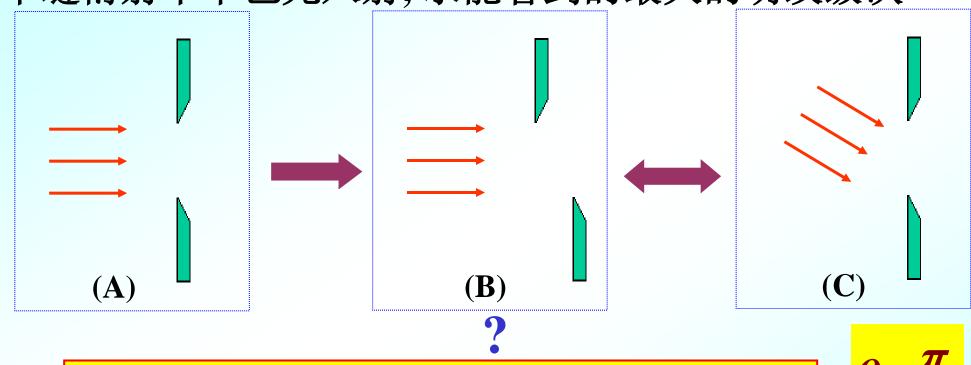
第
$$k$$
级明纹的衍射角的大小为 $\theta_k \approx \sin \theta_k = \frac{(2k+1)\lambda}{2na}$ 次极大条纹的宽度: $\Delta \theta = \theta_{k+1} - \theta_k \approx \frac{\lambda}{na}$

所以,衍射图样将向中间收缩,条纹宽度变小。



问题:

单缝衍射中单色光入射, 求能看到的最大的明纹级次?



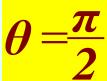
在折射率为n的气态或液态介质中,

$$nasin\theta = \pm k\lambda$$
, $k=1,2,3$.

$$n \operatorname{asin} \theta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \cdot k = 1, 2, 3$$

一一暗纹

——明纹





最大级次

rse ser

讨论

1. 平行光斜入射问题

单缝上下沿光线光程差为:

$$\delta = AD - BC = a(\sin\theta - \sin\alpha)$$

$$\delta' = a(\sin\theta + \sin\alpha)$$

$$\delta' = a(\sin\theta + \sin\alpha)$$

$$a(\sin\theta \pm \sin\alpha) = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{暗纹中心} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{明纹} \end{cases}$$

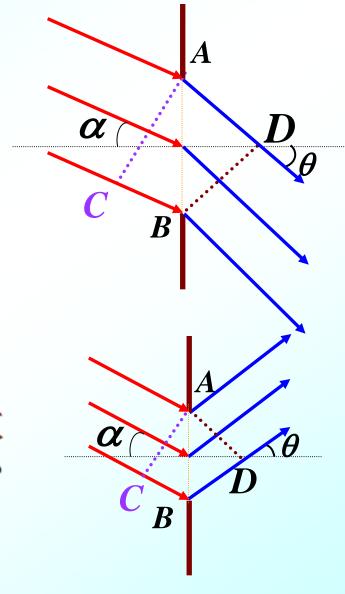
 α 与 θ 在法线同侧时取"+"

在法线异侧时取"一"

中央明纹: $\sin \theta = \sin \alpha$

条纹将向下方平移

(间距不变)。

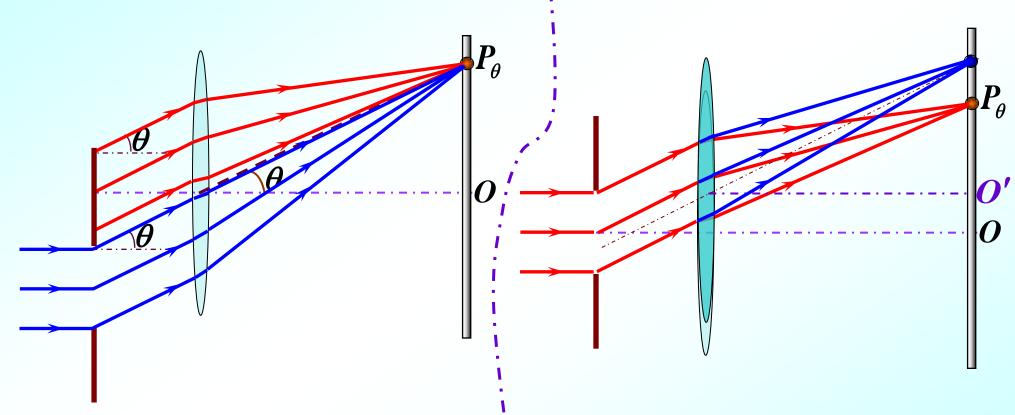




2. 单缝位置上下移动时,屏 上条纹如何变化?







单缝衍射图样,不随缝的 上下移动而变化。

沿L的移动方向作 等距离的平移。

细丝的衍射测量———巴俾涅原理

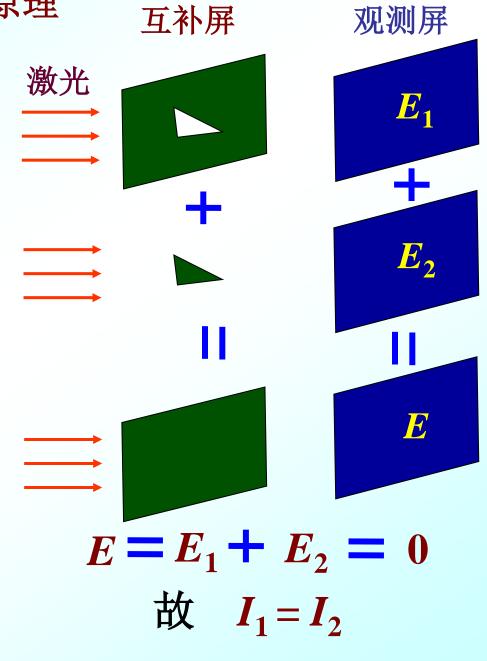
演示: 单丝衍射

两个互补屏产生的衍射条纹和光强分布是完全相同的,仅位相相差 π .

根据巴俾涅原理可用互补法

测量细丝和薄片的尺寸。

对外径0.1mm以下的细丝, 测量精度可达0.05μm.



单缝衍射的应用一一一间隙衍射传感器

利用缝宽(间隙)的变化可制成<u>衍射传感器</u>。(非接触式)

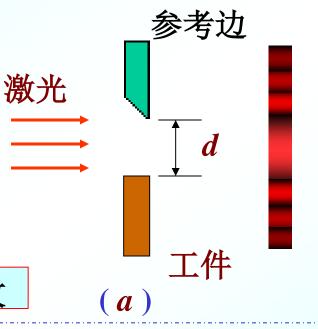
(a)进行比较测量: 先用标准间隙作零位, 通过回路的亦从是按算出工作日本

通过间隙的变化量换算出工件尺寸

的变化量。

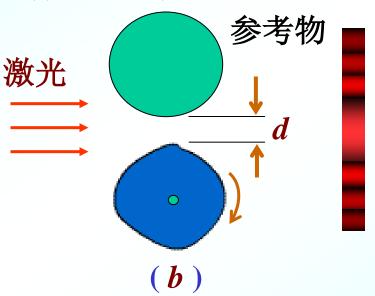
 $asin\theta = \pm k\lambda$, k=1,2,3.

一暗纹

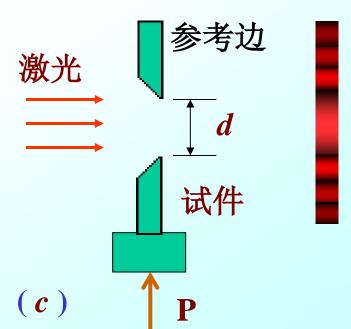


(b)作轮廓测量:

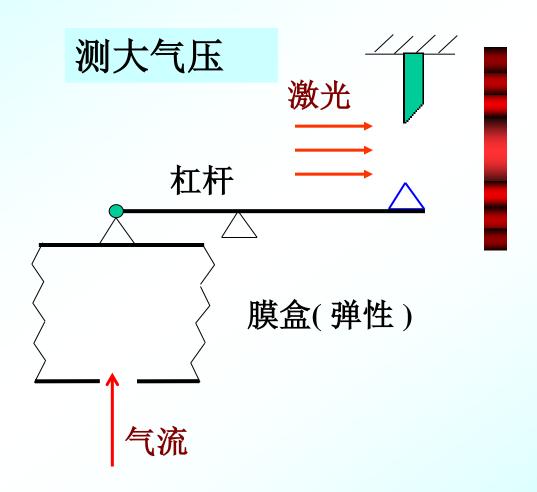
测工件的轮廓偏差



(c)作应变传感器:



(d) 压力传感器

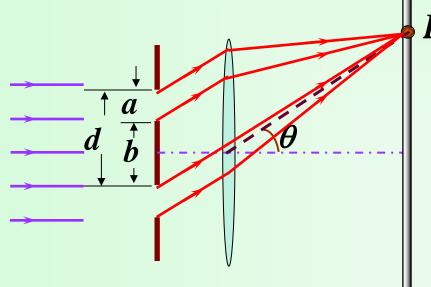


任何待测几何量、物理量、化学量,只要能将其转化为间隙变化量,即可用衍射法进行高精度测量。

11

三、双缝衍射与干涉

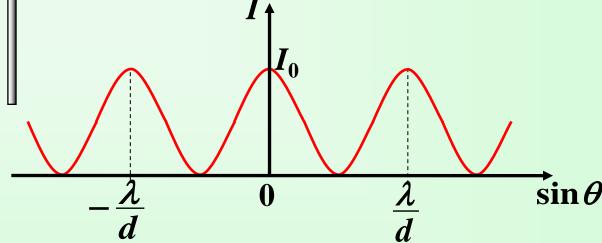
1. 双缝衍射光强公式



设缝间距为d=a+b。

光强公式:
$$I = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta \varphi}{2}$$

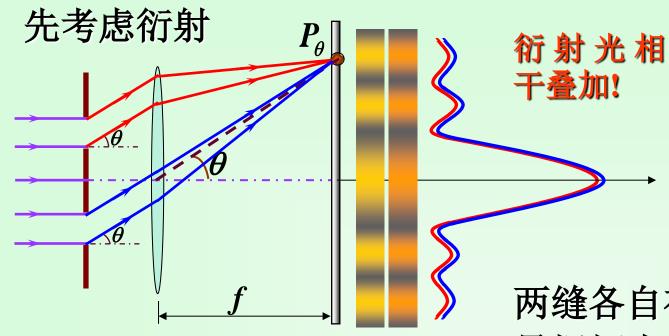
双缝干涉的光强分布:



但每逢均为单逢衍射!

现象为两个单缝衍射的干涉!

屏上光强重新分布!



单缝的夫琅和费衍 射图样,不随缝的 上下移动而变化。 每个缝的衍射图样 位置是相重叠的。

两缝各自在屏上引起的电矢量振幅为:

$$\boldsymbol{E}_{1} = \boldsymbol{E}_{10} \frac{\sin \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{20} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

两衍射波是相干波,合成波强度为:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos\Delta\varphi = 4I_1\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}$$
 $I_1 \propto E_1^2 = E_2^2$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

 $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{2}$

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

双缝衍射光强公式:

衍射因子

干涉因子

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2 \beta$$

$$\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

2. 双缝衍射图样特点:

 $(1)\theta=0$ 时, $\alpha=0$, $\beta=0$ 则: $I=I_0$ 为单缝光强的4倍。

透镜L的主光轴与屏的交点处的光强 ——中央极大

(2)光强极小 两因子 $\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$ 与 $\cos^2\beta$ 有一个为0, I=0 $\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = 0$ — 单缝衍射暗纹条件 $a\sin\theta = \pm k\lambda, (k=1,2,3\cdots)$

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = 0 \longrightarrow$$
 单缝衍射暗纹条件

$$a\sin\theta=\pm k\lambda,(k=1,2,3\cdots)$$

 $\cos^2 \beta = 0$ — 双缝暗纹条件 $d \sin \theta' = \pm (2k'+1)\frac{\lambda}{2} (k'=0,1,2,\cdots)$

比较 θ 与 θ : k=1, $\sin\theta=\frac{\lambda}{a}$ k' = 0, $\sin \theta' = \frac{\lambda}{2d}$ 干涉因子确定极小的间距小。

屏上呈现明、暗条纹的位置由干涉因子确定。



满足:
$$\cos^2\beta = 1$$
 $\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = \pm k'\pi$

即:
$$d \sin \theta = \pm k'\lambda$$
 $k' = 0,1,2,\cdots$ 干涉极大

(4) 缺级 若某 θ 角满足: $d \sin \theta = \pm k' \lambda$

同时满足: $a \sin \theta = \pm k\lambda$ ——衍射极小

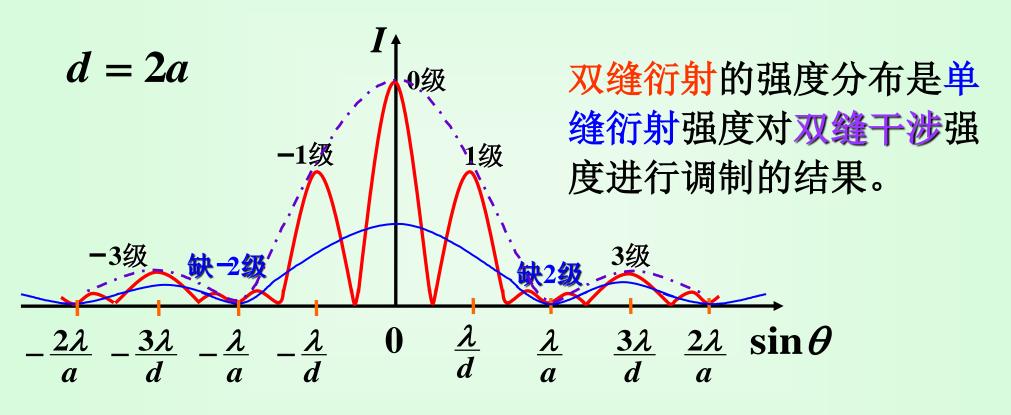
此k'级极大实际不出现——做级

缺级条件: $k' = k \frac{d}{a}$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 1, k'$ 为整数

缺级是双缝及多缝衍射中存在的一种普遍现象。 d/a = 3

(5)单缝衍射的作用:

由每缝发出的光线的强度受衍射因子的调制。



单缝衍射中央主极大(中央包络线)内极大的条数:

$$2\left(\frac{d}{a}-1\right)+1=2\frac{d}{a}-1$$

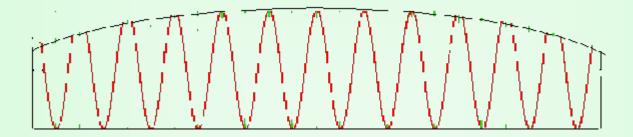
$$I_{\theta} = I_{0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^{2} \cos^{2} \beta \qquad d \sin \theta = \pm k' \lambda$$

 $asin\theta = \pm k\lambda$

6) 在 $a = \lambda$ 或 $a < \lambda$ 时, $k_{\text{max}} = 1$ $asin\theta_1 = \lambda$

 $sin\theta_1 \leq 1$

此日角为整个视场角,那么每一级极大的光强几乎相等



 $\dot{a} < \lambda$ 时,双缝衍射的强度分布情况变为理想的杨氏干 涉的强度分布情况:

$$\alpha = \frac{\pi \alpha \sin \theta}{\lambda} \rightarrow 0 I_{\theta} = I_{0} (\frac{\sin \alpha}{\alpha})^{2} \cos^{2} \beta$$

杨氏双缝干涉光强—— $I_{ heta}=I_{0}cos^{2}oldsymbol{eta}$

双缝衍射与双缝干涉的异同:——都是波的相干叠加

历史的原因: 从相干波源在空间的分布条件来区别

干涉:由有限数目"分立"相干光源传来的光波相干叠加。

衍射: 由相干光源"连续"分布的无限多子波波中心发出的子波相干叠加。

双缝干涉:

观测屏上只出现两个单缝衍射的中央极大之间的干涉。 两个很窄的双缝得到的是干涉图样 由两个"分立"相干光源传来的光波相干叠加

双缝衍射:

观测屏上除了中央极大之间还出现其它次级明纹之间的干涉。

由两个"连续"分布的子波中心发出的光波相干叠加从两个较宽的双缝得到的是干涉、衍射结合的图样。

例: 已知 D=50cm, $\lambda=480$ nm, d=0.1mm, a=0.02mm d=a+b $I_{\theta}=I_{0}(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^{2}\cos^{2}\beta$ 求: $I_{\theta}=I_{0}(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^{2}\cos^{2}\beta$

- (1) 双缝衍射相邻两条明纹的间距
- (2) 中央包络线中x的坐标值(见图)
- (3) 双缝衍射的第1级明纹的相对强度
- (4) 中央明纹的包线中, 共包含了几条完整的明纹?
- (5) 中央明纹包线中恰好11条明纹,如何选择 a、d?

解: (1)
$$\Delta x = x_{k+1} - x_k \approx \lambda D/d = 2.4 \text{mm}$$
 $asin\theta_1 = \lambda$
(2) $x = Dtg\theta_1 \approx Dsin\theta_1 = D\frac{\lambda}{a} = 12 \text{mm}$ $sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$

 $dsin\theta = k\lambda$ 明

 $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

 $d\frac{x_k}{D} \approx k\lambda$

(3) 双缝衍射的第1级明纹的相对强度

 $dsin\theta = k\lambda$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

根据
$$I_{\theta} = I_{0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^{2} \cos^{2} \beta$$

$$\frac{I_{\theta}}{I_{0}} = (\frac{\sin \alpha}{\alpha})^{2} \cos^{2} \beta \qquad 根据题意: \qquad \frac{d \sin \theta = \lambda}{\sin \theta = \frac{\lambda}{d}}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = \pi \\ \alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \frac{a}{d} \pi = \frac{0.02}{0.1} \pi = \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

$$\frac{I_{\theta}}{I_{0}} = (\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\frac{\pi}{5}})^{2}(\cos\pi)^{2} = 86\%$$

D=50cm, $\lambda=480$ nm,d=0.1mm,a=0.02mm

(4) 中央明纹的包线中, 共包含了几条完整的明条纹?

包线的第一极小的衍射角: $asin\theta_1 = \lambda$

设中央明纹中共有 k 级明纹: $dsin\theta_1=k\lambda$

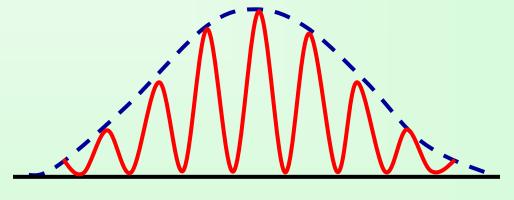
$$\frac{d}{a} = k \qquad \Rightarrow k = \frac{d}{a} = \frac{0.1}{0.02} = 5 \qquad (第 5 级缺级)$$

包含了 $2\times4+1=9$ 条明条纹

(5) 若要中央明纹的包线中恰好有11条明纹,应如何 设计 $a \cdot d$?

$$\frac{d}{a} = k = 6$$

实际上, $5<\frac{d}{\leq 6}$ 就行。



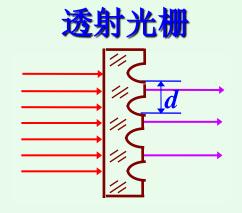
四、光栅衍射



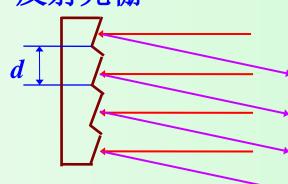
1. 光栅

大量等宽等间距的平行狭缝(或反射面)构成的光学元件。

主要分为两大类:



反射光栅

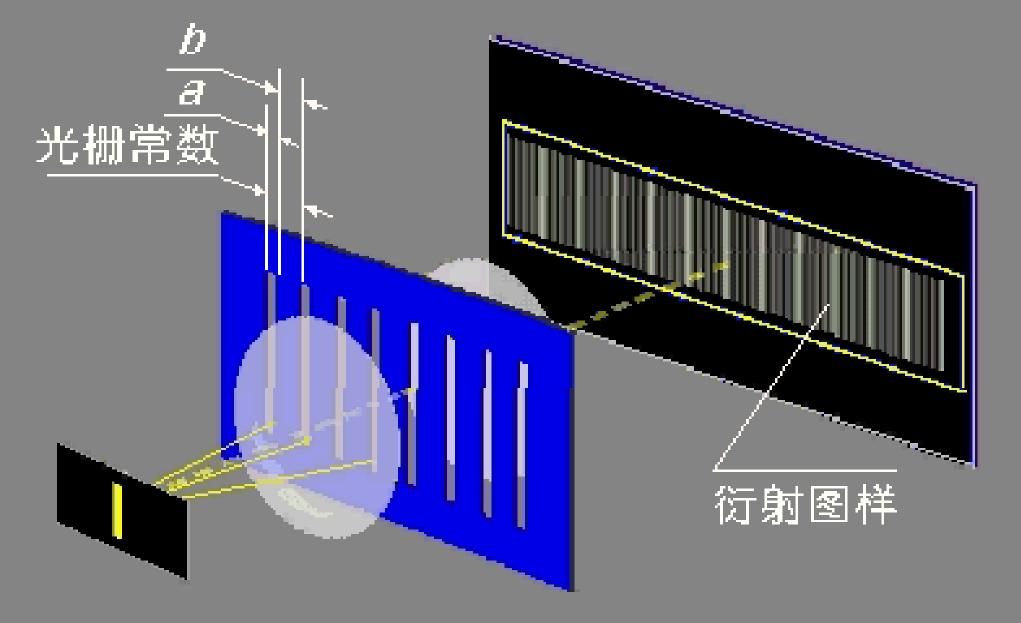


光栅常数:

透光部分的宽度a(缝宽)与不透光部分的宽度b之和。

$$d = a + b$$
 实用光栅每 cm 内有成千上万条刻痕。

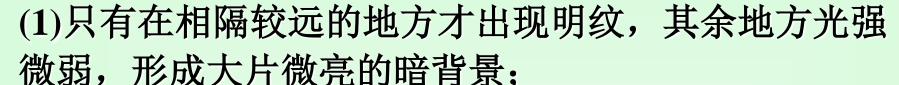
如1 cm内有1000条刻痕,则: $d = \frac{1 \times 10^{-2}}{1000} = 10^{-5}$ m



光栅衍射装置图

74.E

光栅衍射的特点:





(2)明纹的亮度随狭缝的增多而增大,且宽度变细。

2. 光栅衍射条纹的形成

(1)各个缝发出的光之间将发生干涉;

缝间干涉+

(2)每个缝发出的光本身会衍射。

各缝衍射

3. 光栅衍射分析

设光栅总缝数为N,平行单色光垂直入射到光栅平面上。

(1)多缝干涉的影响

①光栅方程

$$d\sin\theta = \pm k\lambda$$

$$k = 0,1,2,3\cdots$$

——主极大

P点的振幅为一条缝的

光的振幅的N倍

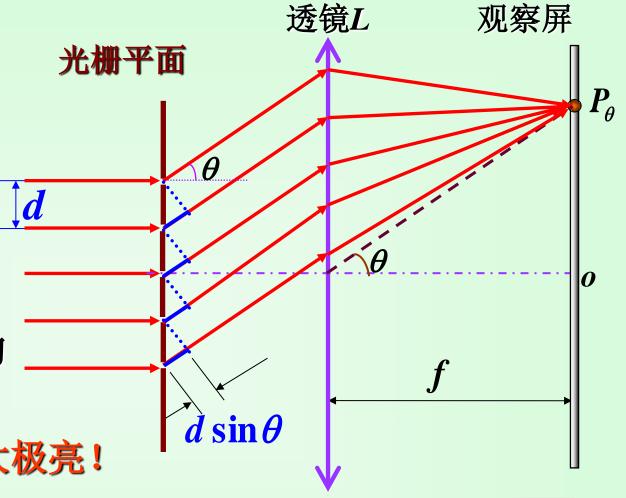
光强为 N^2 倍! 主极大极亮!

②光栅的多缝使主极大明条纹尖锐

明条纹宽度:相邻暗

纹间的角距离。

用半波帶法分析暗纹



光栅最上的缝和最下的缝的光程差为:





若它正好分为偶数个半波带:

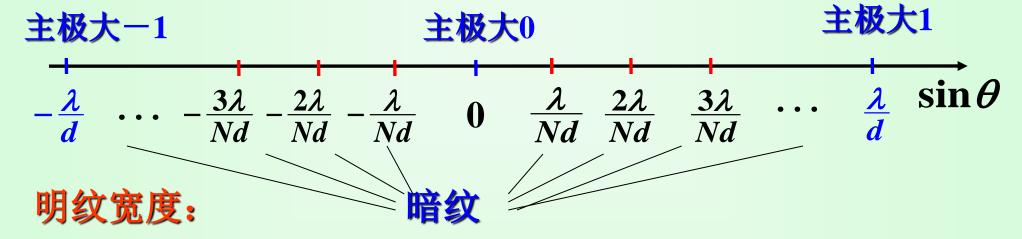


$$Nd\sin\theta = \pm m\lambda$$

$$m = 1,2,3\cdots(N-1),(N+1)\cdots$$

$$(m \neq kN \quad k = 0,1,2,\cdots)$$

得0级主极大两侧分布的暗纹:



如中央明纹: $\Delta\theta_0 \approx 2\frac{\lambda}{Nd}$

而:
$$\theta_1 \approx \frac{\lambda}{d}$$

$$\theta_1 >> \Delta \theta_0$$
 明纹很窄!

③相邻两主极大间有N-1条暗纹。

可由衍射条纹确定光栅缝数。

④其它位置光强比主极大小得多。

在相邻暗条纹之间必定有明纹,称为次极大。相邻主极大之间有(N-2)个次极大。 光强太弱 观察不到

(2)单缝衍射的影响

每个单缝的衍射光强决定于来自各单缝的光矢量振幅 E_i 的大小,它随衍射角 θ 而变化。

各主极大受到单缝衍射的调制。

光栅衍射图样是多缝干涉光强分布受单缝衍射光强分布调制的结果。

(3)光栅夫琅禾费衍射的光强公式

每个单缝在P点(对应衍射角 θ)均有

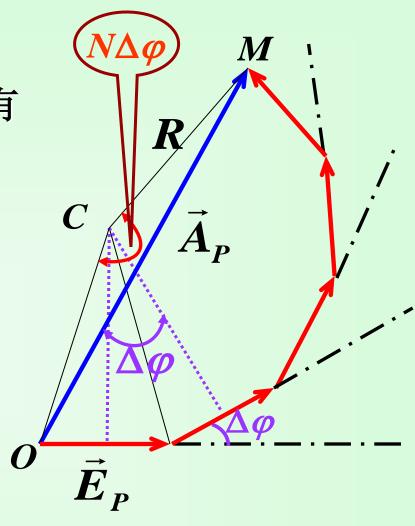
$$E_P = E_{0} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

相邻缝在P点相位差

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

$$A_P = 2R\sin\frac{N\Delta\varphi}{2} ,$$

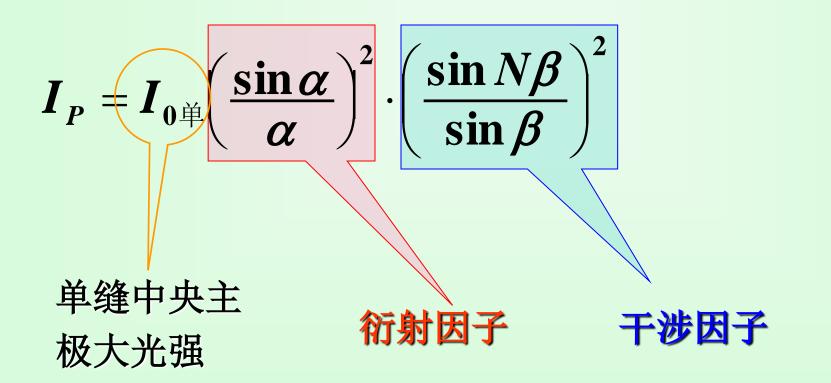


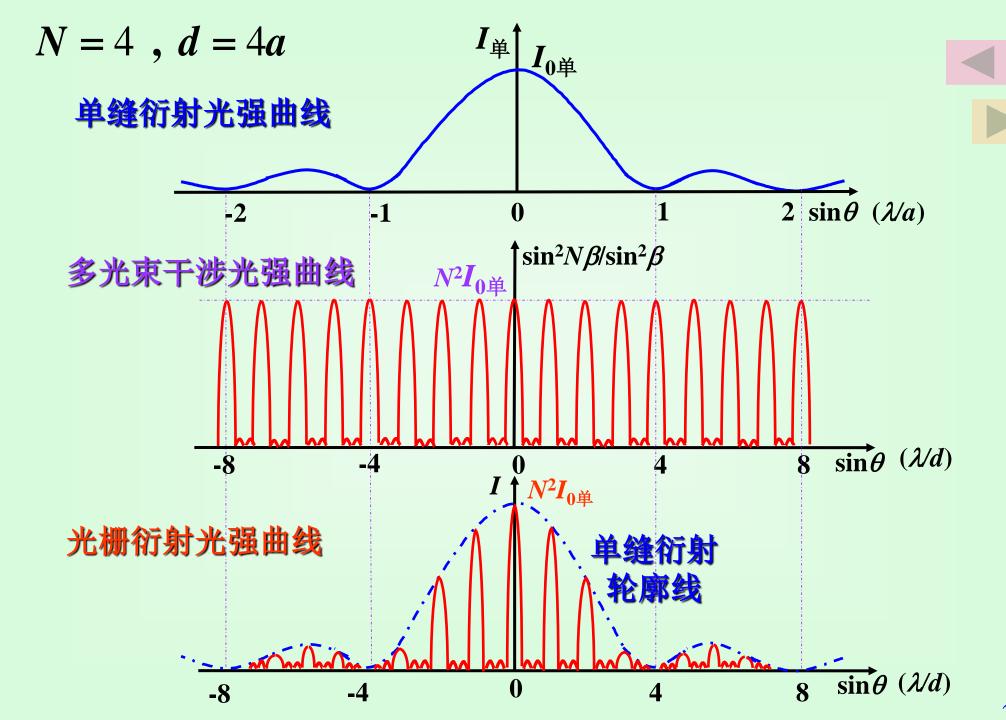
$$E_P = 2R\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$



$$\therefore A_{P} = E_{P} \cdot \frac{\sin N \frac{\Delta \varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}} = E_{0} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}$$

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$





(4)缺级现象:

主极大缺级级次:

$$d\sin\theta = \pm k\lambda$$
 同时 $a\sin\theta = \pm k'\lambda$ 成立

$$k = \pm \frac{d}{a}k'$$
 $k' = 1,2,3\cdots$

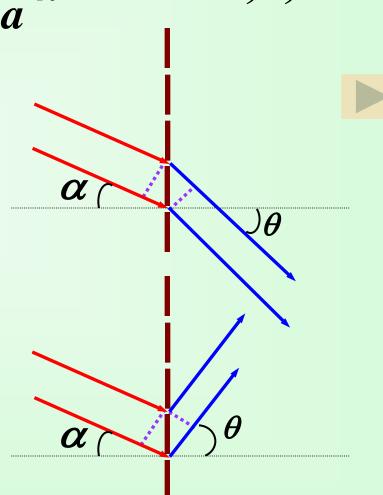
(5)平行光斜入射光栅方程

$$d(\sin\theta\pm\sin\alpha)=\pm k\lambda$$

 α 与 θ 在法线同侧时取"+" 在法线异侧时取"一"

0级主极大: $\sin \theta = \sin \alpha$

条纹将向下方平移(间距不变)。

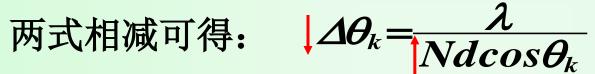


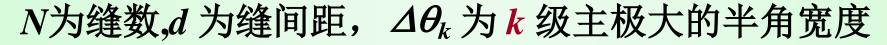
6) 主极大的半角宽

定义: 主极大的中心到邻近极小的角距离为它的半角宽。

k主极大: $dsin\theta_k = k\lambda$

邻近极小:
$$dsin(\theta_k + \Delta \theta_k) = (k + \frac{1}{N})\lambda$$



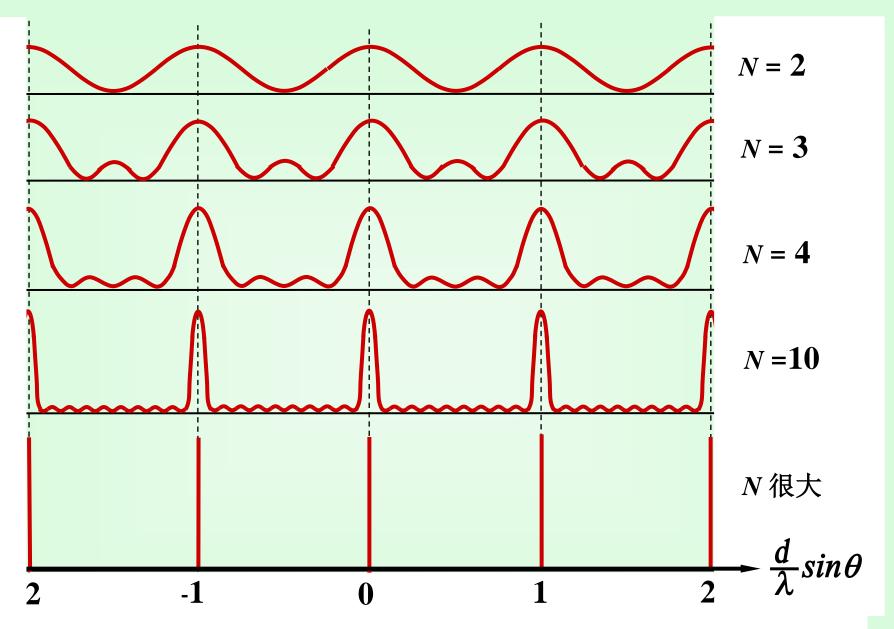


d一定时,缝数越多,条纹越尖细、越亮

中央主极大:
$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}$$

可以证明,主极大强度 $I \propto N^2$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$



N 增大, 主极大条纹变亮变窄, 次极大数目变多而相对强度变小。

(7)最高级次



$$d \sin \theta = \pm k\lambda$$

而:
$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
 即: $-1 < \sin \theta < 1$

即:
$$-1 < \sin \theta < 1$$

$$-\frac{d}{\lambda} < k < \frac{d}{\lambda}$$

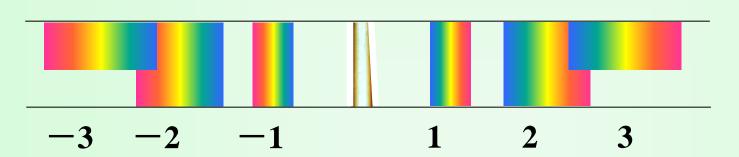
$$-\frac{d}{\lambda} < k < \frac{d}{\lambda}$$
 $|k_{\text{max}}| < \frac{d}{\lambda}$ 取小于此值的整数。

斜入射比垂直入射可以观察到更高级次的

4. 光栅的色散

复色光入射时,除零级外,各级明纹将形成彩色光带。

光栅光谱: 波长不同的同级谱线的集合



级数高 的光谱 有重叠

光栅的色散: 谱线中不同波长的光位置的偏移。

光谱的角色散D: 对光栅方程: $d \sin \theta = k \lambda$ 取微分:

$$D = \frac{\Delta \theta}{\Delta \lambda} \big|_{k=\text{const}} = \frac{k}{d \cos \theta_k}$$

同一级光谱中单位波 长间隔的两条谱线散 开角度的大小。

$$D = \frac{k}{d\cos\theta_k}$$

角色散 D 与光栅常数 d 成反比,与光谱级次 k 成正比。 k 越大, θ_k 越大, $\cos\theta_k$ 越小,角色散 D 也越大。

谱线重级:

当两波长的光同时满足:

$$d \sin \theta = k_1 \lambda_1$$
$$d \sin \theta = k_2 \lambda_2$$

在该衍射方向上两波 长对应的 k_1 和 k_2 级 重叠,称为重级现象。 例:波长为 $\lambda = 590$ nm的平行光垂直入射到每毫米 500条 刻痕的光栅上时,屏幕上最多可以看到多少条明纹?

解: 光栅常数
$$d = \frac{1}{500} = 2000$$
nm

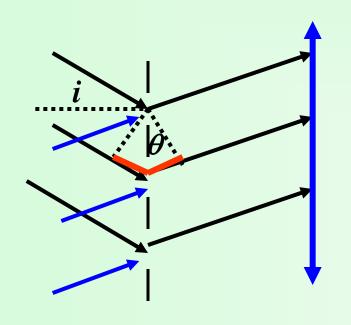
 $dsin\theta=\pm k\lambda$ $k=0,1,\cdots$ 明纹

$$\theta = \pm 90$$
时 $dsin 90^0 = \pm k\lambda$

$$k = \pm \frac{d}{\lambda} = \pm \frac{2000}{590} = \pm 3 \cdot 4 \Longrightarrow \pm 3$$

故,最多可以看到 $2\times3+1=7$ 条明纹

例:在上题条件下,平行光斜入射 $i=30^{\circ}$ 时,屏幕上 最多可以看到哪些条明纹? $d\sin\theta = \pm k\lambda$



解: 光栅方程为

 $dsin\theta+dsini=\pm k\lambda$ $k=0,1\cdots$ 明纹

$$d(sin90^0+sin30^0)=k\lambda$$

$$k = 5 \cdot 1 \Rightarrow 5$$
级

当
$$\theta$$
=-90⁰时

$$d[sin(-90^{\circ})+sin30^{\circ}]=-k\lambda$$

$$-k = -1$$
 $\Longrightarrow -1$ 级

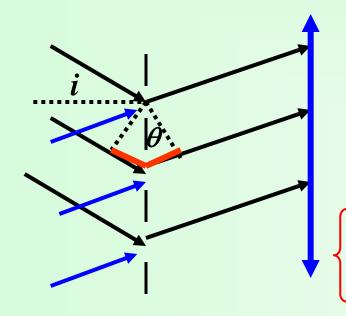
最多见到7条,上方 5条,下方 1条。

注意: 平行光 / 斜入射时, 光栅方程为

 $dsin\theta$ - $dsini=\pm k\lambda$ $k=0,1\cdots$ 明纹

最多见到7条,上方1条,下方5条。

问题: 此时如何考虑缺级?



解: 光栅方程为

 $dsin\theta+dsini=\pm k\lambda$ $k=0,1\cdots$ 明纹

此即主极大。

故,所缺级次k'须同时满足:

 $\begin{cases} d(sin\theta+sini)=\pm k'\lambda & k=0,1\cdots \\ & ---干涉极大 \end{cases}$ $a(sin\theta+sini)=\pm k\lambda & k=1,2,\cdots$

---衍射极小

$$k'=k\frac{d}{a}$$

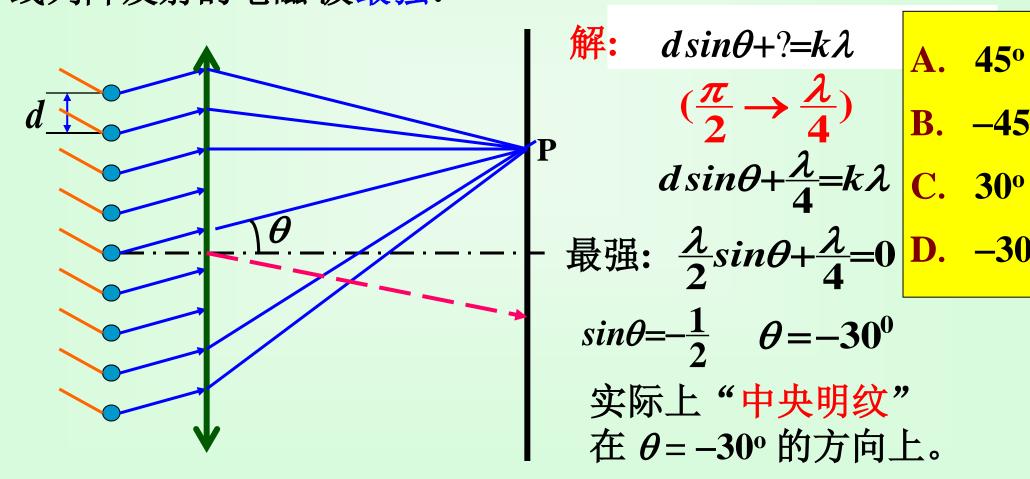
与垂直入射时的缺级公式一样。



例:天线列阵由一沿水平直线等距排列的 N 个天线组成,每个在电磁波最强处,各根天线引起的光振动同位相,振幅相加

个天线, 位相 $\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \bigcirc$ 间的距离 $d=\lambda/2$,

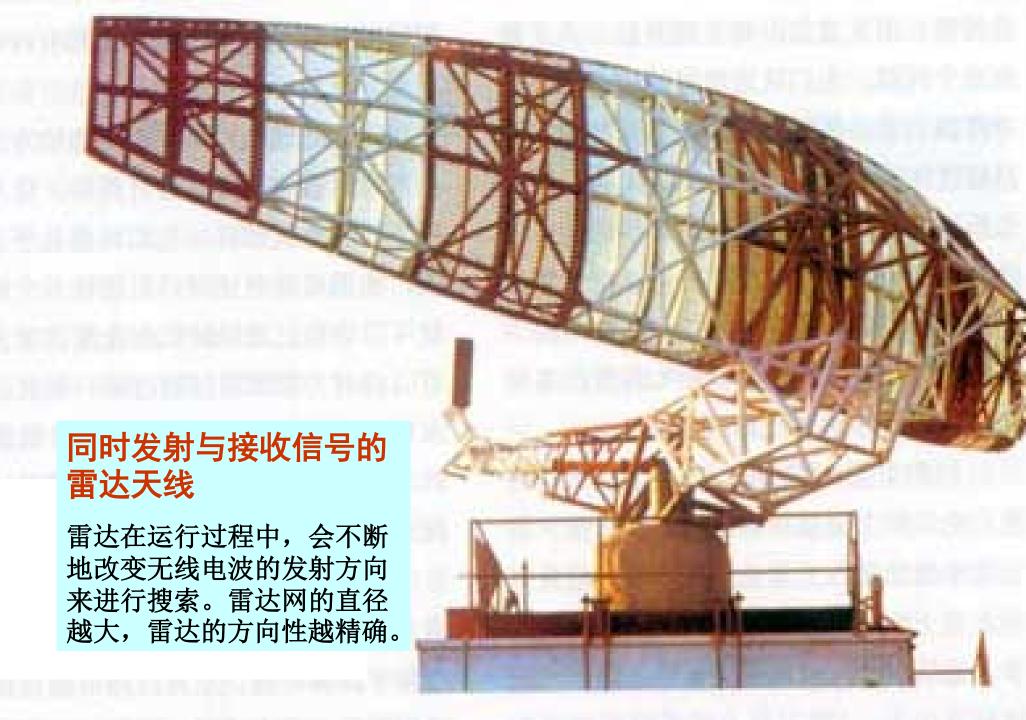
问: 离天线很远处什么方向上 (与天线列阵的法线夹角 $\theta=?$),天线列阵发射的电磁波最强?



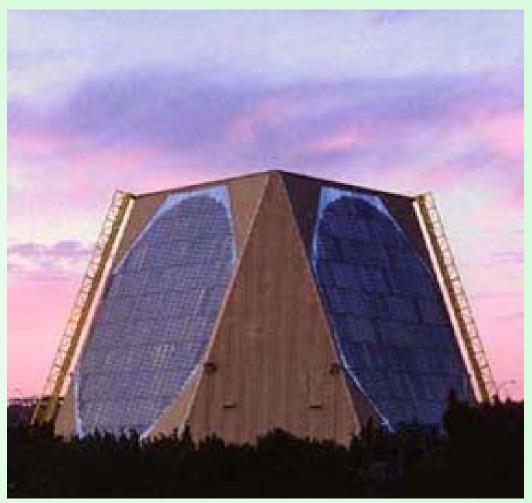
40

相控阵雷达

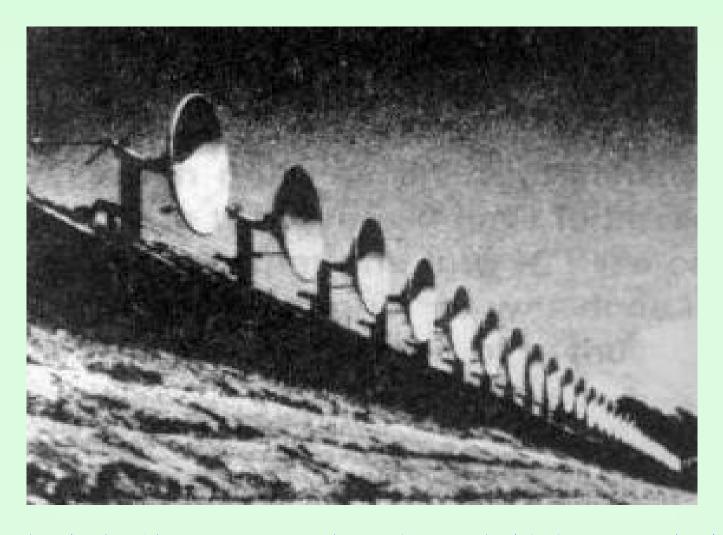
雷达在搜索目标时,需要不断改变波束的方向。改变波束方向的 传统方法是转动天线,使波束扫过一定的空域、地面或海面,称为机 械扫描。把天线做成一个平面,上面有规则地排列许多个辐射单元和 接收单元,称为阵元。利用电磁波的相干原理,通过计算机控制输往 天线各阵元电流相位的变化来改变波束的方向,同样可进行扫描,称 为电扫描。接收单元将收到的雷达回波送入主机,完成雷达的搜索、 跟踪和测量任务。这就是相控阵技术。利用相控阵技术的雷达称为相 控阵雷达。与机械扫描雷达相比,相控阵雷达的天线无需转动,波扫 描更灵活,能跟踪更多的目标,抗干扰性能好,还能发现隐形目标。 相控阵雷达的军事应用十分广泛,在地面远程预警、机载和舰载预警 、地面和舰艇防空系统、机载和舰载火控系统、炮位测量、靶场测量 等领域,都已经使用相控阵雷达。有代表性的相控阵雷达有美国的" 丹麦眼镜蛇"和AN / EPS-115战略预警雷达、"爱国者"防空导弹 系统用的AN / MPO-53多功能相控阵雷达、"宙斯盾"指挥控制系 统的相控阵雷达等。



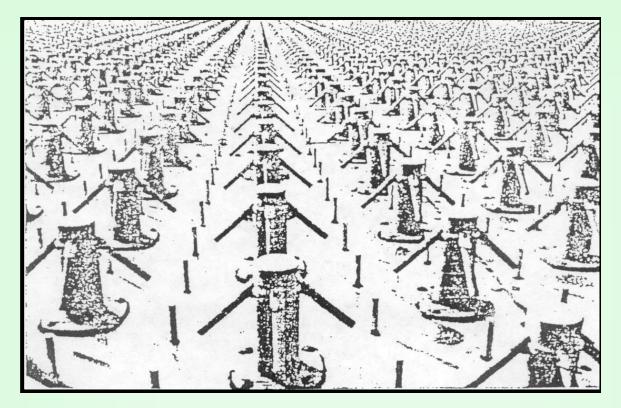




美空军现役的"铺路爪"相控阵雷达



设在澳大利亚Sydney大学的一维射电望远镜阵列 $(N=32, \lambda=21 \text{cm}, a=2 \text{m}, d=21 \text{m},$ 阵列长213m)



设在美国鳕角(Cape cod)的相控阵雷达照片

阵列宽31m,有1792个辐射单元,覆盖240°视野。 能探测到5500公里范围内的10m²大小的物体。 用于搜索洲际导弹和跟踪人造卫星。



45