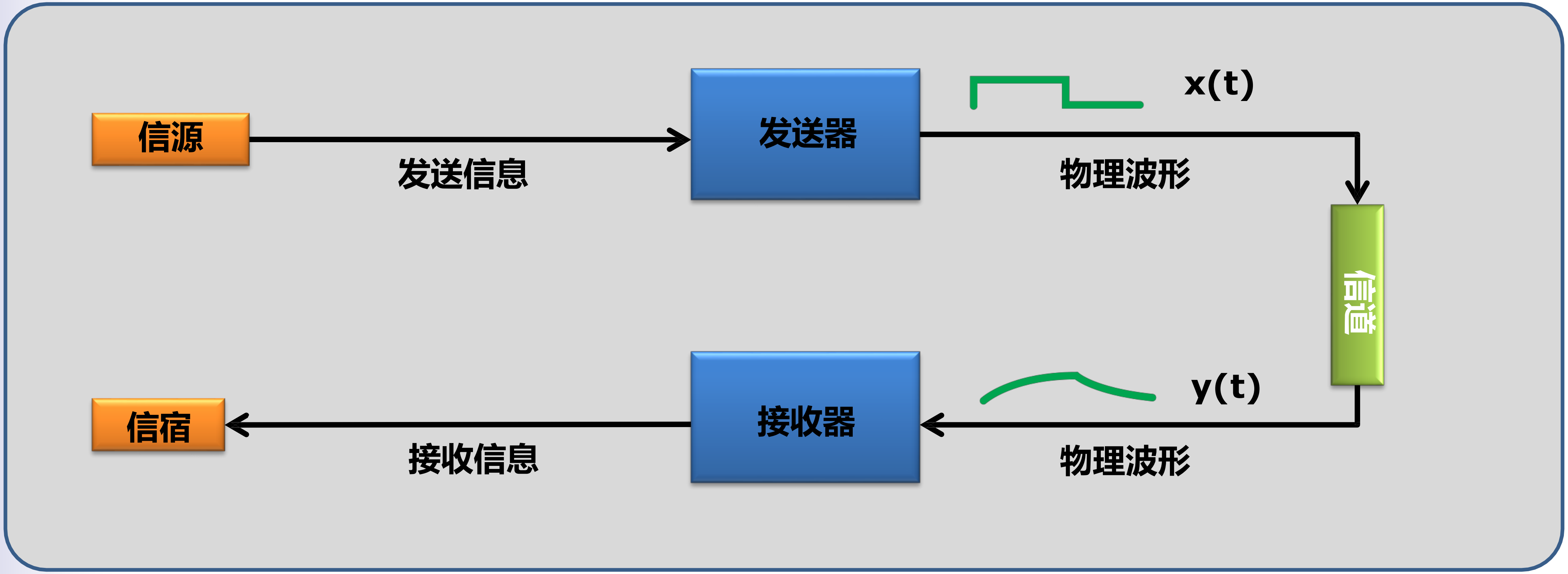
基础信息论

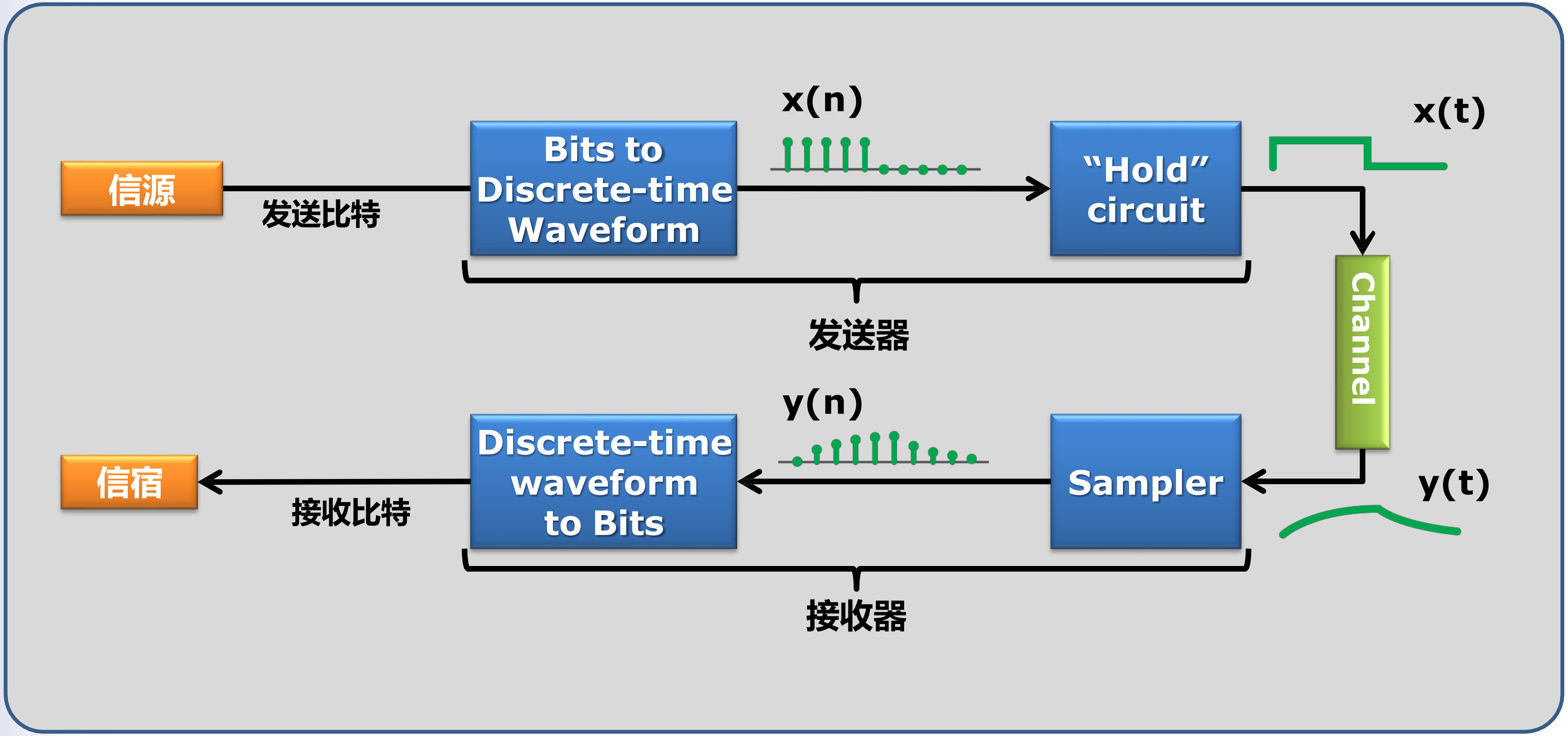
单变量连续信道

华中科技大学电信学院

通信系统



连续时间信道



信源
发送比特
Bits to Discrete-time Waveform
x(n)
"Hold" circuit
x(t)
发送器
Channel
y(t)
Sampler
y(n)
Discrete-time waveform to Bits
接收比特
信宿
接收器

学习目标

- 定义连续信道的数学模型
- 计算高斯连续信道的容量

连续信道信道容量的定义

连续信道： 信道的输入和输出随机变量都取值于连续集合。

离散信道 $\begin{cases}\text{单符号信道}\\ \text{多符号信道}\end{cases}$　　连续信道 $\begin{cases}\text{单符号(变量)信道}\\ \text{多符号(变量)信道}\end{cases}$

为简化起见，本课程**只研究单变量连续信道**。

单符号离散信道数学模型：

$$X=\{x_1, x_2,\cdots, x_n\} \longrightarrow \boxed{P(Y/X)} \longrightarrow Y=\{y_1, y_2,\cdots, y_m\}$$

单变量连续信道数学模型：

$$X=[a, b] \longrightarrow \boxed{p(y/x)} \longrightarrow Y=[a', b']$$

离散信道信道容量：

$$I(X;Y)=f[p(x_i),\underline{p(y_j/x_i)}]$$ 固定

$$C=\max_{p(x_i)}\{I(X;Y)\}$$

连续信道信道容量：

$$I(X;Y)=f[p(x),\underline{p(y/x)}]$$ 固定

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}$$

$I(X;Y)$是关于 $p(x_i)$ 的上凸函数。

离散信道一般求取原则：

极值点位于边界 → 计算机迭代

极值点位于定义域内 → 拉格朗日乘数法求条件极值

问题：离散信道一般求取原则是否适用于连续信道?

回答：不适用。

计算机迭代方法肯定不适用于连续系统。

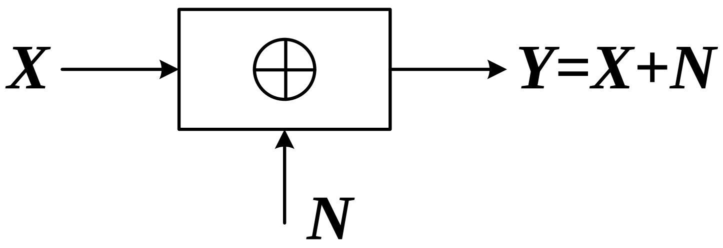
拉格朗日乘数法只能求解多维空间中的条件极值点，而无法求取最佳分布概率密度函数。

结论：一般性连续信道的信道容量并不容易求取，只有在一些特殊情况下才相对容易计算。

加性连续信道信道容量的求取

加性连续信道

- 噪声(N)与信号(X)统计独立。
- 噪声对信号的干扰表现为和输入线性叠加。



信道模型

证明：对于加性连续信道，其信道转移特性为噪声的概率密度，即：$p(y/x)=p(n)$ 。

证明：对于加性连续信道，其信道转移特性为噪声的概率密度。

$$p(y/x)=p(n)$$

证： $Y=X+N$

概率论：$\begin{cases} y_1=g_1(x_1,x_2) \\ y_2=g_2(x_1,x_2) \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=h_1(y_1,y_2) \\ x_2=h_2(y_1,y_2) \end{cases}$ 根据 $p(x_1x_2)\to p(y_1y_2)$

雅克比行列式

$$p(y_1y_2)=|J|\cdot p[h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2)]$$ 其中：$J=\begin{vmatrix} \partial h_1/\partial y_1 & \partial h_1/\partial y_2 \\ \partial h_2/\partial y_1 & \partial h_2/\partial y_2 \end{vmatrix}$

根据 $p(xn)\to p(xy)$

$$\begin{cases} x=g_1(x,n)=x \\ y=g_2(x,n)=x+n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x=h_1(x,y)=x \\ n=h_2(x,y)=-x+y \end{cases}$$

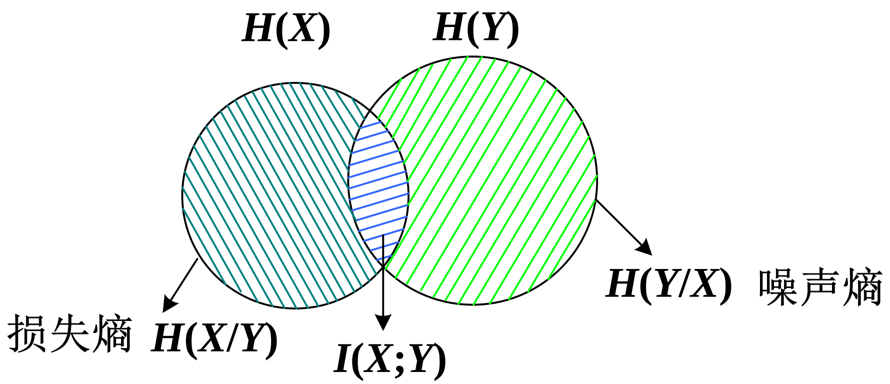
$$\Rightarrow J(x,y)=\begin{vmatrix} \partial h_1/\partial x & \partial h_1/\partial y \\ \partial h_2/\partial x & \partial h_2/\partial y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$\Rightarrow p(xy)=1\cdot p(xn)$$

$$\cancel{p(x)}\cdot p(y/x)=\cancel{p(x)}\cdot p(n)$$

$$\Rightarrow p(y/x)=p(n)$$

回忆：第二章中为什么把$H(Y/X)$叫做噪声熵?



$$H(Y) = I(X;Y) + H(Y/X)$$

信宿熵

从信源处获得的关于信宿的信息量

由噪声带来的“伪信息量”

更直观的解释：

$$H_c(Y/X) = -\iint_{XY} p(x)p(y/x)\log p(y/x)dxdy = -\iint_{XN} p(x)p(n)\log p(n)dxdn$$

$$= -\int_X p(x)dx \int_N p(n)\log p(n)dn = -1\cdot\int_N p(n)\log p(n)dn$$

$$= H_c(N)$$

根据所证明的$H_c(Y/X)=H(N)$求取加性信道的信道容量：

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}=\max_{p(x)}\{H_c(Y)-H_c(Y/X)\}$$

$$=\max_{p(x)}\{H_c(Y)-H_c(N)\}$$

$$=\max_{p(x)}\{H_c(Y)\}-H_c(N)$$ 【信源X与噪声N统计独立】

加性信道的信道容量取决于两方面：

- **噪声的统计特性 $H_c(N)$，当信道选定后，该项为常数。**
- **通过改变$p(x)$，使 $H_c(Y)$ 最大，加性信道的平均互信息量达到信道容量。**

最大离散熵：信源等概率分布时熵最大。

最大连续熵：不同限定条件下，结果也不相同。

常见限定条件：
- 峰值功率受限　均匀分布
- 平均功率受限　高斯(正态)分布　最常见
- 均值受限　指数分布

平均功率受限条件下高斯信道的信道容量

噪声熵的计算：

所谓高斯加性信道，是指噪声(N)的概率密度符合高斯分布，并满足：

零均值 $\int_{-\infty}^{\infty} n \cdot p(n)dn = 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} n^2 \cdot p(n)dn = \sigma^2 = P_N$

随机信号方差与平均功率的关系：

X 某次实验的结果是 x 功率为 $p = x^2$

平均功率为 $P_X = E(x^2)$

$\sigma^2 = E[(x - E(x))^2] = E[x^2] = P_X$

根据高斯分布的概率密度$p(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$ 可计算出 $H_c(N)$

$$H_c(N)=-\int_N p(n)\log p(n)dn=-\int_N p(n)\log[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}]dn$$

$$=\int_N p(n)\log\sqrt{2\pi\sigma^2}dn-\int_N p(n)\cdot\log e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}dn$$

$$=\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\int_N p(n)dn+\log e\cdot\int_N p(n)\cdot\frac{n^2}{2\sigma^2}dn$$

$$=\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)+\log e\cdot\underline{\int_N p(n)\cdot\frac{n^2}{2\sigma^2}dn}$$

其中：$\underline{\int_N p(n)\cdot\frac{n^2}{2\sigma^2}dn}=\frac{1}{2\sigma^2}\int_N p(n)\cdot n^2dn=\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sigma^2=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow H_c(N)=\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)+\frac{1}{2}\log e=\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)=\frac{1}{2}\log(2\pi eP_N)$

问题：在信源平均功率受限的条件下, 何时 $H_c(Y)$ 最大?

分析： P_X 有限， P_N 有限。 $\Rightarrow$ P_Y 有限。【 X, N 独立】

高斯信道选定，
P_N 即确定下来 输出信号的平均功率受限 $\Leftarrow$ $P_Y = P_X + P_N$

回答： Y 满足高斯分布的条件下, $H_c(Y)$最大。

问题：在什么条件下，Y 服从高斯分布?

分析：目前的已知条件有：

噪声服从零均值的高斯分布，X与N独立。

回答：由概率论, 当X也服从零均值的高斯分布时, 有：

$Y = X + N$ 也服从高斯分布，且满足：

$$E(Y) = E(X) + E(N) = 0 \qquad P_Y = \sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \sigma_N^2 = P_X + P_N$$

根据第二章中连续信源的相关结论, 有:

$$\max_{p(x)} H_c(Y) = \frac{1}{2}\log(2\pi e P_Y)$$

再代入之前所得公式， 最后得:

$$C = \max_{p(x)}\{H_c(Y)\} - H_c(N) = \frac{1}{2}\log(2\cancel{\pi}eP_Y) - \frac{1}{2}\log(2\cancel{\pi}eP_N)$$

$$= \frac{1}{2}\log(\frac{P_Y}{P_N}) = \frac{1}{2}\log(\frac{P_X + P_N}{P_N}) = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_X}{P_N}) \rightarrow \text{信噪比}$$

香农公式的第一种形式:

$$\boxed{C = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_X}{P_N})}$$

✱ 单位：比特/符号

很多时候，我们更需要的是单位时间内的信息传输率。

假设：连续信号已按采样定理进行采样, 成为离散信号。

采样定理： 设信道的频带为$(0,W)$，则每秒需进行$2W$ 次采样，在接收端才可无失真地恢复出原始信号。

单位转换：$\dfrac{\text{比特}}{\text{符号}}\times\dfrac{\text{符号}}{\text{秒}}=\dfrac{\text{比特}}{\text{秒}}$

$$\Rightarrow \quad C_t = C\cdot 2W = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_X}{P_N})\cdot 2W = W\log(1+\frac{P_X}{P_N})$$

香农公式的第二种形式： $\boxed{C_t = W\log(1+\frac{P_X}{P_N})}$ * 单位：比特/秒

香农公式的形式还可以进一步地推广。在**通信原理**课程中会学习**随机信号功率谱密度** $P(\omega)$ 的概念，其与随机信号平均功率 P_s 的关系为：$P_s = \dfrac{1}{2\pi}\int P(\omega)d\omega = \int P(\omega)df$

通信原理中还会学习**高斯白噪声**的概念。所谓高斯白噪声是指功率谱密度为常数($N_0/2$)，而在一个频带为 $(0,W)$ 的信道中，噪声的平均功率为:

$$P_N = \frac{N_0}{2}\cdot 2W = N_0 W$$ 【乘以 $2W$ 是因为功率谱均为对称谱】

将P_N 的表示式代入第二种形式，可得:

香农公式的第三种形式: $$\boxed{C_t = W\log(1+\frac{P_X}{N_0 W})}$$ * 单位：比特/秒

当信道的频带很宽时，$\frac{P_X}{(N_0 W)} \ll 1$，此时有:

$$C_t = W\cdot \log e\cdot \ln(1+\frac{P_X}{N_0 W}) \approx W\cdot \log e\cdot \frac{P_X}{N_0 W} = \frac{P_X}{N_0}\log e$$ 【$\ln(1+x) \sim x$ 】

例3.5.1 在图片传输中，每帧约为 2.25×10^{6} 个像素，为了能很好地重现图像，需分16个亮度电平，并假设亮度电平等概分布。试计算每秒钟传送30帧图片所需信道的带宽（功率信噪比为 30 dB）。

解： $C_t = W\log(1+\frac{P_X}{P_N})$ 单位：比特/秒

$$C_t = 30\ \text{帧/秒}\cdot 2.25\times10^{6}\ \text{像素/帧}\cdot \log 16\ \text{比特/像素}$$

$$= 2.7\times10^{8}\ \text{比特/秒}$$

$$\frac{P_x}{P_N}(\text{dB}) = 10\cdot\log_{10}^{\frac{P_x}{P_N}} \Rightarrow \frac{P_x}{P_N} = 10^{\left(\frac{\frac{P_x}{P_N}\text{dB}}{10}\right)}$$

$$\Rightarrow W = \frac{C_t}{\log(1+\frac{P_X}{P_N})} = \frac{2.7\times10^{8}}{\log(1+10^{\frac{30}{10}})} \approx 27\ \text{MHz}$$

关于香农公式使用范围的讨论及相关重要结论

尽管香农公式在推导过程中附加了很多限制条件，如：高斯加性信道，信号与噪声独立，信号的平均功率受限等等。但是，实践表明，多数情况下，实际信道可认为是符合或者近似符合这些特点的。
因此，**香农公式具有非常普遍的意义**。

即便是对于非高斯信道，香农公式仍具有重要意义。原因是：根据第二章中最大连续熵定理，在平均功率受限情况下，高斯分布的噪声熵具有最大值，根据$C=\max\limits_{p(x)}\{H_c(Y)\}-H_c(N)$，在香农公式的推导过程中所扣除的值比实际噪声熵值要多，因此算出的信道容量比实际值偏小。对于**非高斯信道**，用香农公式算出的信道容量是其理论上的**下限值**。

香农公式：$C_t = W\log(1+\frac{P_X}{P_N}) = W\log(1+\frac{P_X}{N_0 W})$

重要结论：

1．带宽一定时，提高信噪比能提高信道容量。

例3.5.2 普通电话线路的带宽可近似为 3.3 KHz ，当信噪比为 20 dB 时，计算其信道容量。当信噪比提升为 30 dB ，重新计算信道容量。

解：信噪比为 20 dB 时，$\frac{P_X}{P_N} = 10^{\frac{20}{10}} = 100$，代入得：

$$C_t = 3.3\times10^3 * \log(1+100) \approx 22\,000 \text{ 比特/秒}$$

信噪比为 30 dB 时 $C_t = 3.3\times10^3 * \log(1+1000) \approx 32\,900$ 比特/秒

分析：信噪比增加10倍，但信道容量仅增加约1.5倍。

香农公式： $C_t = W\log(1+\frac{P_X}{P_N}) = W\log(1+\frac{P_X}{N_0 W})$

比较：

假设线路带宽从 3.3 KHz 提高到 33 KHz ，而信号功率保持不变，计算信道容量。

解：由于带宽提高10倍，信噪比下降10倍。

代入公式可得：$C_t = 33\times10^3 \times \log(1+\frac{100}{10}) \approx 114\,000$ 比特/秒

相比于初始条件，即：带宽 3.3 KHz，信噪比为 20 dB

信道容量提高：$114\,000/22\,000 \approx 5.2$ 倍。

⇓

2. 当倍数相同时，增加带宽通常比提高信噪比更有效。

香农公式： $C_t = W\log(1+\frac{P_X}{P_N}) = W\log(1+\frac{P_X}{N_0 W})$

3. 无噪连续信道的信道容量为无穷大。

原因： $P_N = N_0 W = 0 \Rightarrow C_t = \infty$

4. 当增加信道带宽时，并不能使信道容量无限增加。

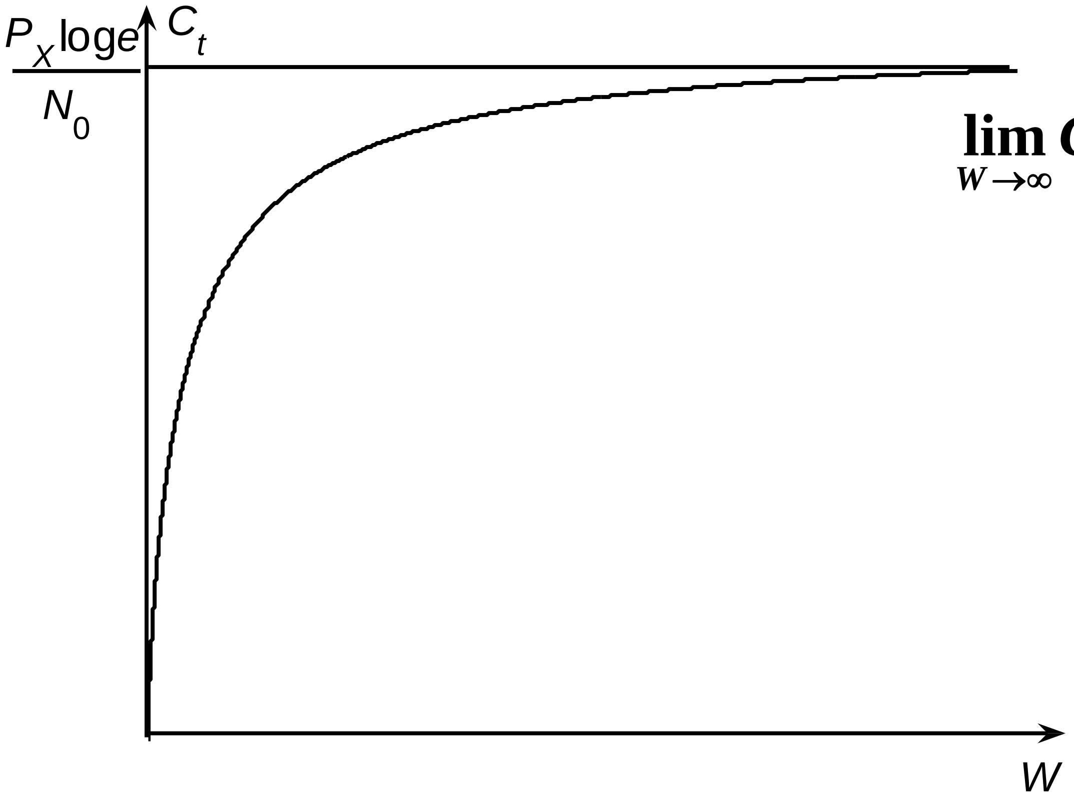
证： $\lim\limits_{W\to\infty} C_t = \lim\limits_{W\to\infty} W\log(1+\frac{P_X}{N_0 W})$ 令 $x = \frac{P_X}{N_0 W} \Rightarrow W = \frac{P_X}{N_0}\cdot\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \lim_{W\to\infty} C_t = \lim_{x\to 0}[\frac{P_X}{N_0}\cdot\frac{1}{x}\cdot\log(1+x)] = \frac{P_X}{N_0}\cdot\lim_{x\to 0}[\log(1+x)^{\frac{1}{x}}]$$

根据高等代数知识， $\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}] = e \Rightarrow \lim\limits_{W\to\infty} C_t = \frac{P_X}{N_0}\cdot\log e\cdot\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}]$

$$\therefore \lim_{W\to\infty} C_t = \frac{P_X}{N_0}\cdot\log e$$

$$C_t = W\log(1+\frac{P_X}{N_0 W})$$



$$\lim_{W\to\infty} C_t = \frac{P_X}{N_0}\cdot\log e \approx 1.4427\cdot\frac{P_X}{N_0}$$

信道容量随信道带宽的变化

香农公式： $C_t = W\log(1+\dfrac{P_X}{P_N}) = W\log(1+\dfrac{P_X}{N_0 W})$

设传输时间为 T ，则总信息量 $I = C_t \cdot T = WT \cdot \log(1+\dfrac{P_X}{P_N})$ 。

5. 当所需要传输的总信息量一定时，则带宽 W、传输时间 T 、信噪比 P_X/P_N 三者可进行相互转换。

(1)若传输时间 T 固定，则可通过扩展信道的带宽 W 来降低对信噪比 P_X/P_N 的要求；或者，通过提高信噪比 P_X/P_N 实现在窄带信道上进行传输（即：可降低对 W 的要求）。

例3.5.3 若要保持信道的信息传输率 $C_t = 12\times10^3$比特/秒，当信道的带宽 W 从 4×10^3 Hz 降低到 3×10^3 Hz，求信号功率所需提高的倍数。

解： 带宽降低前：$C_t = W\log(1+\frac{P_X}{N_0 W})$

带宽降低后：$C_t = W'\log(1+\frac{P_X'}{N_0 W'})$

$$P_X = (2^{\frac{C_t}{W}}-1)\cdot W\cdot N_0$$

$$P_X' = (2^{\frac{C_t}{W'}}-1)\cdot W'\cdot N_0$$

$$\frac{P_X'}{P_X} = \frac{(2^{\frac{C_t}{W'}}-1)\cdot W'}{(2^{\frac{C_t}{W}}-1)\cdot W} = \frac{(2^{\frac{12\times10^3}{3\times10^3}}-1)\cdot 3}{(2^{\frac{12\times10^3}{4\times10^3}}-1)\cdot 4} = 1.6$$

分析： 带宽较小地降低(25%)要求信噪比必须有较大的提高(60%)； 带宽较小地增加 → 信噪比较大改善

设传输时间为 T ，则总信息量 $I = C_t \cdot T = WT \cdot \log(1+\frac{P_X}{N_0 W})$ 。

(2) 若信号功率 P_X 不变, 则增加信道的带宽 W 可以缩短传输时间 T，从而换取传输时间的节省；或花费较长的时间 T 来换取频带 W 的节省。

例如：为了能在窄带电缆信道中传送电视信号，往往可用增加传送时间的办法来压缩所需要的带宽。首先把电视信号以高速记录在录像带上，然后慢放这个磁带，慢到使输出频率降低到足以在窄带电缆中传送的程度。在接收端，将接收到的慢录像带进行快放，于是恢复了原来的电视信号。 (但损失了实时性)

设传输时间为T，则总信息量$I = C_t \cdot T = WT \cdot \log(1+\frac{P_X}{N_0 W})$。

(3) 若保持信道的带宽W不变， 可通过花费较长的时间 T 降低所需要的信噪比(① N_0可以变大，系统可以工作在噪声更恶劣的环境下或者远距离通信中; ② 可降低对通信发射设备功率的要求)；或者通过提高发射功率 P_X加快传输时间 T。

总结：通信系统中，带宽、时间、信噪比可进行互换。

一般而言，究竟以谁换取谁，要根据实际情况而定。
例如：宇宙飞船与地面通信，由于信噪比很小，所以着重考虑增加带宽和传输时间来换取信噪比；而如果信道频带资源非常紧张，则要考虑通过提高信噪比或增加传输时间来降低对带宽的要求。

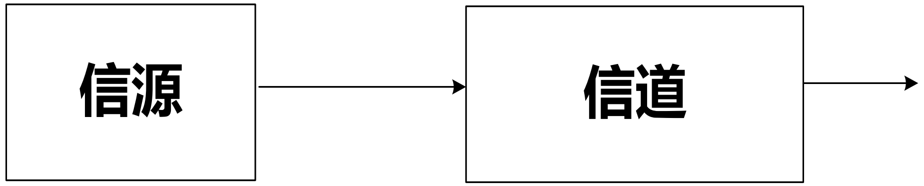
连续信道编码定理

连续信道编码定理的结论(数学描述)

若有一连续无记忆平稳信道，其信道容量为C。输入序列长度为L，只要待传送的信息率$R < C$，当L足够长时，对任意指定的任意大于零的正数ε，总可以找到一种编码，使得译码差错概率$P_e < \varepsilon$。反之，当$R > C$时，任何编码的P_e必大于零，当$L \to \infty$时，$P_e \to 1$。

对信道编码定理严格的数学证明可参见傅祖芸老师教材中的\$6.4节。

直观解释：



要求以速率为R进行无失真地传输，你能办到吗？

$R \le C$ 放心吧，我有办法！

$R > C$ 对不起，无能为力！你找别人吧！

分析： 信道容量C表示的是信道的极限信息传输能力。如果要求的信息传输速率超过了C，无法实现无失真传输；否则，则总可以找到某种方法实现近乎无失真的传输。

通过刚才的分析，只要$R \le C$，理论上就可实现近乎无失真地传输。但具体如何来实现呢？香农先生只给出了大的指导方向，即通过编码的方法。具体而言，就是**增加信道符号序列的长度**。

信道编码的最基本思想： 在信息码元的基础上增加监督码元，通过信道符号序列长度的增加实现传输差错的检验与纠正。

是	第一种方法	1：是	0：否	无差错检验能力
否	第二种方法	111：是	000：否	可检2位错，纠1位错

信源 → 信道 →

随着监督码元长度的增加，纠检错的能力也相应增加，但效率也相应降低。

谢谢！

黑晓军
华中科技大学
电子信息与通信学院
Email: heixj@hust.edu.cn
网址：http://eic.hust.edu.cn/aprofessor/heixiaojun

参考资料

- 陈运，信息论与编码（第三版）第六章，电子工业出版社出版，2015