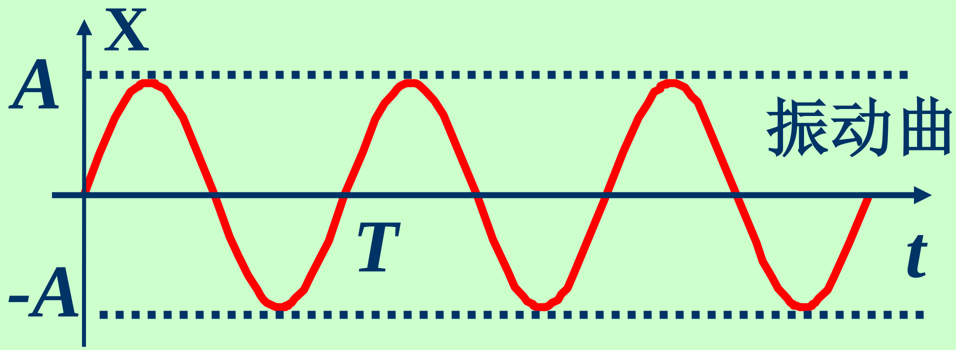
● 谐振动的表示法

1. 解析法　　$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

2. 振动曲线法

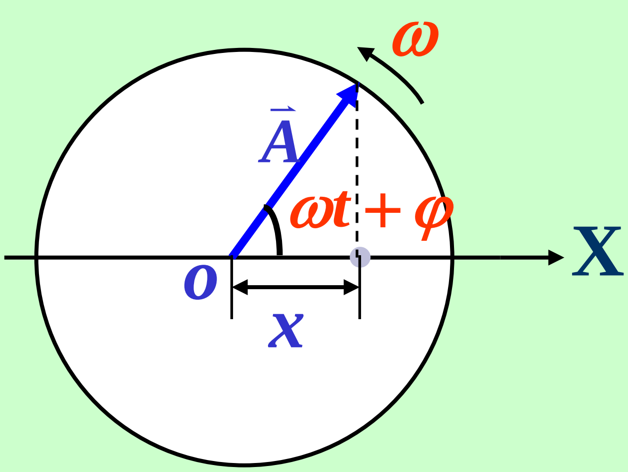


3. 旋转矢量法

旋转矢量的末端在X轴上的投影：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

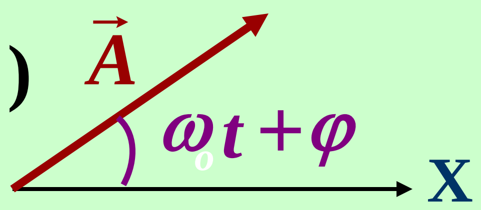
即：投影点的运动是一谐振动。

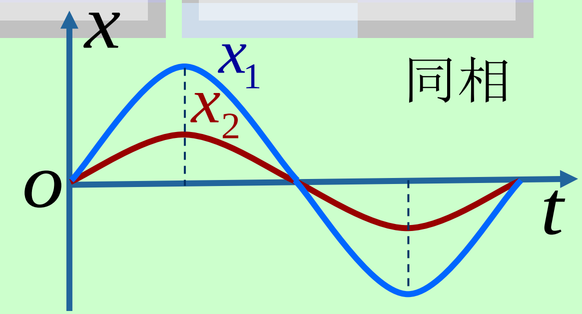


旋转矢量图

●旋转矢量与位相

1）位相 $(\omega_o t+\varphi)=(\widehat{\vec{A},\vec{X}})$





2）位相差

设两频率相等的谐振动：

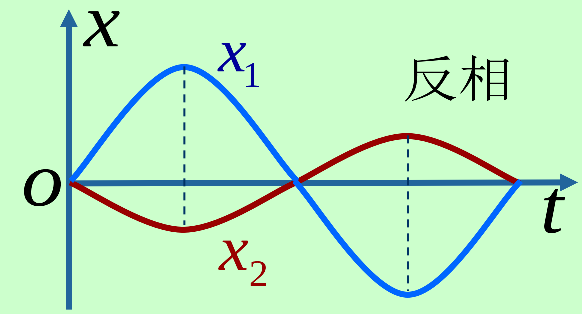
$x_1 = A_1\cos(\omega_o t+\varphi_1)$　　$x_2 = A_2\cos(\omega_o t+\varphi_2)$

它们的位相差：$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$

由$\Delta\phi$可以比较两振动的步调：

(1) $\Delta\phi = 2k\pi$ ——同相

(2) $\Delta\phi = (2k+1)\pi$ ——反相

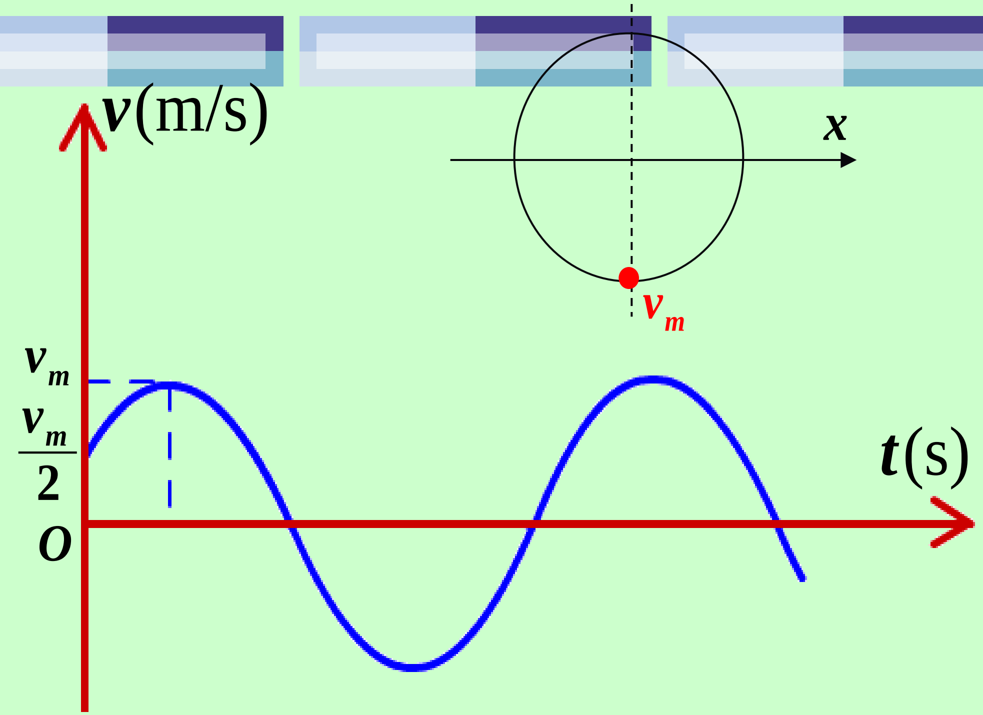


(3) $\Delta\phi \neq k\pi$ 则两振动不同相，若$\Delta\phi > 0$，

则称x_2比x_1超前 $\Delta\phi$ 的位相 (或x_1比x_2落后$\Delta\phi$ 的位相)

(4)不同物理量也可比较振动的步调

例:右图为一作谐振动的物体的**速度--时间**曲线. 若用余弦函数表示简谐振动，则振动的初位相是多少?



解： $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$=-v_m\sin(\omega t+\varphi)$$

$$t=0\text{时},\ v=\frac{v_m}{2}$$

$$\therefore \frac{v_m}{2}=-v_m\sin\varphi$$

$$\sin\varphi=-\frac{1}{2}$$

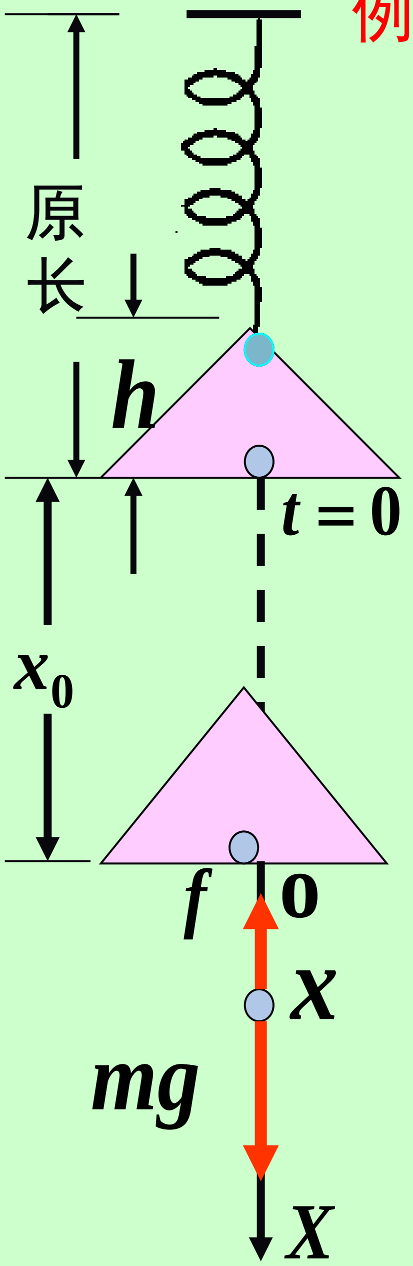
$$\varphi=\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$$ 应取哪一个值?

考虑 $$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_m\omega\cos(\omega t+\varphi)$$

$$t=0\text{时},\ a>0 \quad \therefore -v_m\omega\cos\varphi>0$$

$$\therefore \cos\varphi<0 \quad \text{即}\ \varphi=\frac{7\pi}{6}$$

例. 将天平盘子挂在一个刚度系数为k的弹簧下端，有一质量为m的物体，从离盘高为h处自由下落至盘中后不再跳离盘子，因此盘子和物体一起开始运动(盘和弹簧的质量忽略)。问(1)是否为谐振动？



解：盘、弹簧、物体构成的一个系统

设物体 m 落入盘中后，系统运动至o处所受合力为零（o为平衡位置）。

建立坐标如左图，则

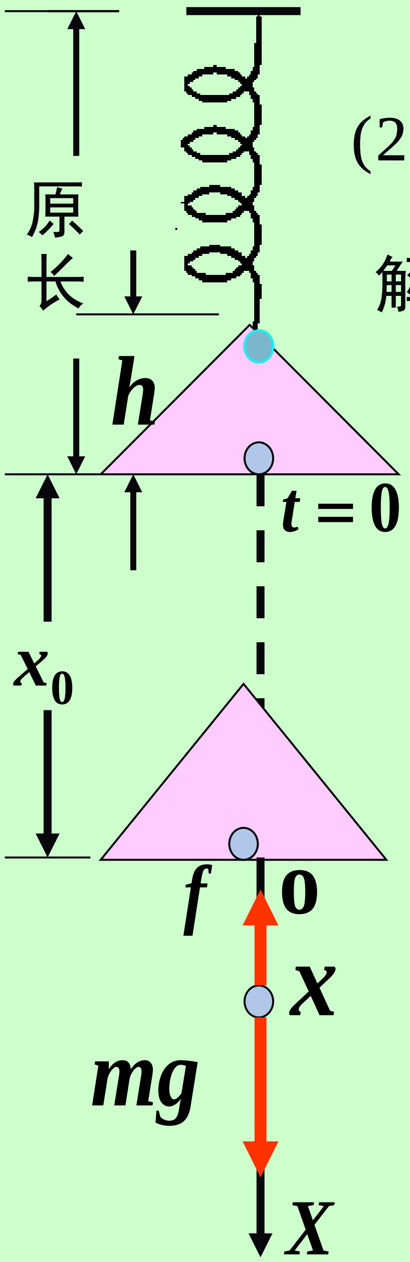
$$mg - kx_0 = 0 \quad \Rightarrow mg = kx_0$$

系统在任一时刻所受的合力为：

$$\sum F = mg - f = kx_0 - k(x_0 + x)$$

即 $\sum F = -kx$ 是谐振动！

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0}$$



(2) 求振动时的周期 T 振幅 A 位相 φ 及振动方程。

解：根据
$$\begin{cases}\sum F=-kx\\ \sum F=ma\end{cases} \qquad -kx=ma$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x \quad 则 \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

即
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

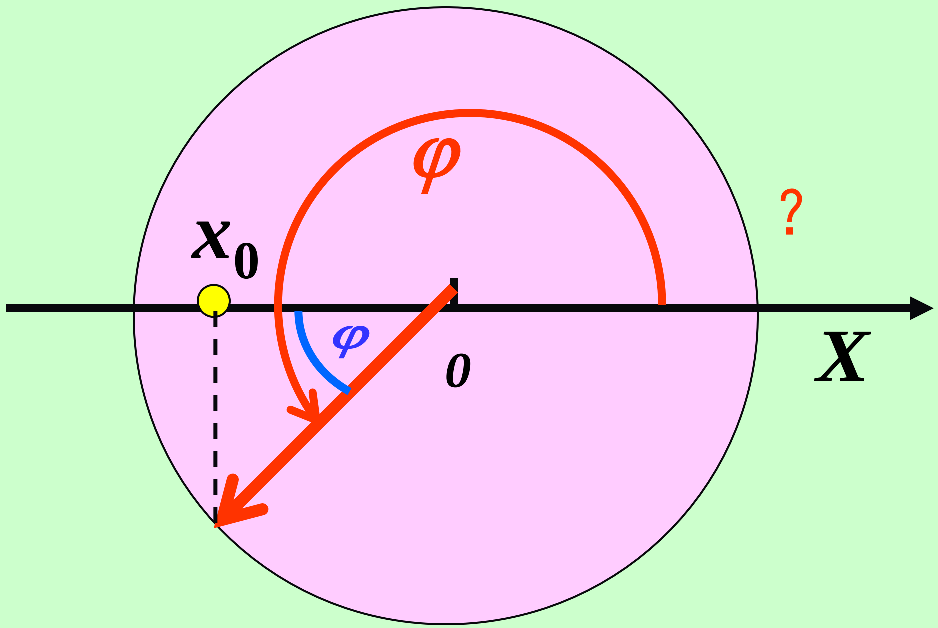
$t=0$ 时
$$x_0=-\frac{mg}{k} \qquad v_0=\sqrt{2gh}$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{x_o\omega}\right)$$

$$\cancel{= tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{2kh}{mg}}\right)}$$

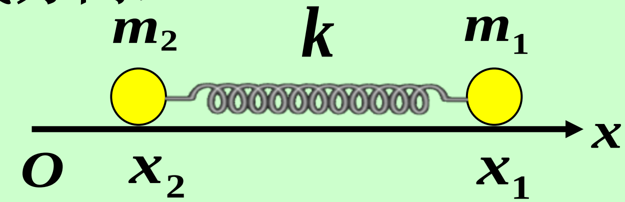
$$\varphi = tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{2kh}{mg}}\right) \pm \pi$$



$$\boxed{A = \frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$x = \frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t + \left(tg^{-1}\sqrt{\frac{2kh}{mg}} \pm \pi\right)\right]$$

例：如图所示，有两个质量各为m_1, m_2并有轻弹簧连系着的小球放在水平光滑桌面上，弹簧的强度是：当m_1固定时m_2能够每秒振动n次。试求(1)当m_2固定时，m_1每秒振动的次数；(2)当m_1, m_2均自由时，它们每秒振动的次数N。（设每次振动的方向均沿弹簧的直线方向）



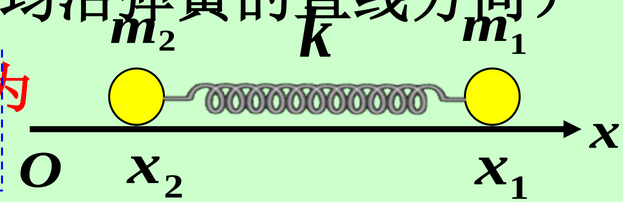
解：(1) $$\omega_2=2\pi n=\sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

$$\omega_1=2\pi n'=\sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\therefore n'=n\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

例：如图所示，有两个质量各为m_1, m_2并有轻弹簧连系着的小球放在水平光滑桌面上，弹簧的强度是：当m_1固定时m_2能够每秒振动n次。试求(1)当m_2固定时，m_1每秒振动的次数；(2)当m_1, m_2均自由时，它们每秒振动的次数N。（设每次振动的方向均沿弹簧的直线方向）



解：(2) 设弹簧原长为l

弹簧总的伸缩量为
$[(x_1-x_2)-l]$

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}&=-k[(x_1-x_2)-l] \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}&=k[(x_1-x_2)-l] \end{aligned}\right\} \quad \frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}=-k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)[(x_1-x_2)-l]$$

令$x=x_1-x_2-l, \dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x=-\omega^2x$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}$$

$$\omega=2\pi N=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}$$

$$\boxed{\omega_2=2\pi n=\sqrt{\frac{k}{m_2}}}$$

$$\therefore N=n\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}}=n\sqrt{\frac{m_2+m_1}{m_1}}$$

三、简谐振动的能量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

1. 简谐振动系统的能量

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$f_{弹性力} = -kx = -\frac{dE_p}{dx}$$

水平弹簧振子

动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

势能

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

随时间变化

机械能

$$E = E_k + E_p$$
$$= \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right] = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\boxed{E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2}$$ ——常量

单 摆　*simple pendulum*

$$\theta=\Theta\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v=l\frac{d\theta}{dt}=-l\omega\Theta\sin(\omega t+\varphi)$$

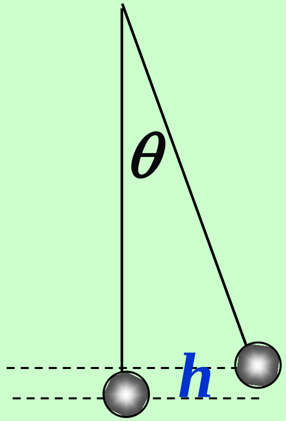
动能　$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\omega^2\Theta^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

势能　$E_p=mgh=mgl(1-\cos\theta)$

$$\boxed{\omega^2=\frac{g}{l}}$$

$$=\frac{1}{2}ml^2\omega^2\Theta^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

随时间变化



当θ很小时　$\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2}$

机械能

$$E_{总}=E_k+E_p=\frac{1}{2}ml^2\omega^2\Theta^2=\frac{1}{2}mgl\Theta^2$$

——常量

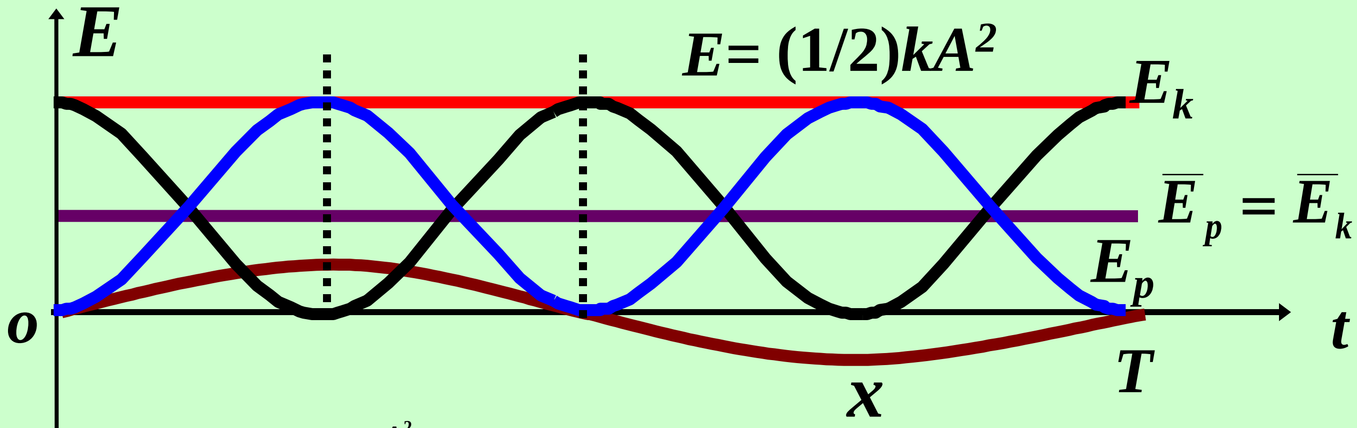
结论：简谐振动系统机械能守恒

2. 谐振动系统能量的特点

1）E_K、E_p各自随时间作周期性变化

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)} \quad \boxed{E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)}$$

E_k、E_p 总是此涨彼消



可见：谐振动的过程是动能与势能相互转换的过程。 $\propto A^2$

$E=\frac{i}{2}\nu RT$

$i=t+r+2s$

2）$E_{总}$=常量

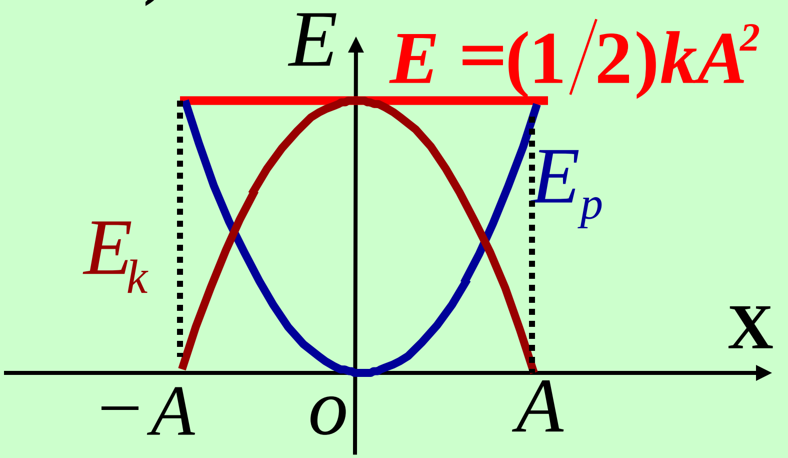
3）动能与势能的时间平均值： $\overline{E_p}=\overline{E_k}=\frac{1}{2}E_{总}$

$$\overline{E_k}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2 sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)\mathrm{d}t=\frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0}sin^2 x\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E_P}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2 cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)\mathrm{d}t=\frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0}cos^2 x\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kA^2$$

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) \longrightarrow E_k=\frac{1}{2}k(A^2-x^2)$$

$$E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \longrightarrow E_p=\frac{1}{2}kx^2$$



4）$E_{总}$正比于振幅的平方A^2

可见：

a. 弹簧振子的动能和势能的平均值相等，均为总机械能的一半。

b. 谐振动的**总能量**与**振幅的平方**成正比 $\boxed{E_{总}\propto A^2}$

c. 振幅不仅给出谐振动运动的范围，而且还反映了振动系统总能量的大小及振动的强度。

这些结论适用于任何谐振动。

一、同方向简谐振动的合成

1. 两个同方向、同频率的简谐振动的合成

分振动： $x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

合振动： $x = x_1 + x_2$

$$x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

合振动是简谐振动，其频率仍为ω

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

同振动方向、同频率的两个谐振动的合成:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= A_1 cos\omega t cos\varphi_1 - A_1 sin\omega t sin\varphi_1 + A_2 cos\omega t cos\varphi_2 - A_2 sin\omega t sin\varphi_2$$

$$= \underline{(A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2)} cos\omega t - \underline{(A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2)} sin\omega t$$

$$= \underline{B_1} cos\omega t - \underline{B_2} sin\omega t$$

$$= \underline{\sqrt{B_1^{\ 2} + B_2^{\ 2}}} \left(\frac{B_1}{\underline{\sqrt{B_1^{\ 2} + B_2^{\ 2}}}} cos\omega t - \frac{B_2}{\underline{\sqrt{B_1^{\ 2} + B_2^{\ 2}}}} sin\omega t \right)$$

$$= \underline{A}(\underline{cos\varphi} cos\omega t - \underline{sin\varphi} sin\omega t) = A cos(\omega t + \varphi)$$

$$\therefore x = A cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2 cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$tg\varphi = \frac{B_2}{B_1} = \frac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}$$

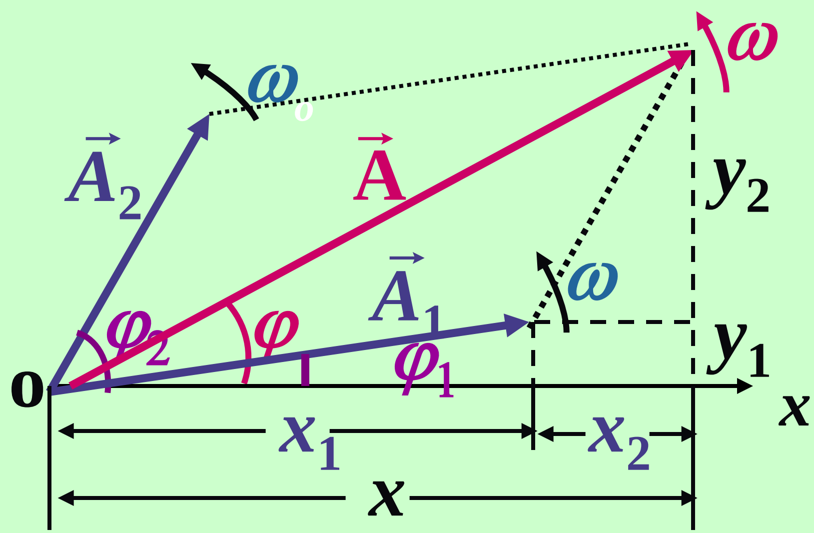
用旋转矢量法： $\vec{A}_1+\vec{A}_2=\vec{A}$

$\vec{A}$在x轴的投影： $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

由几何关系得： $x=x_1+x_2$

x_1、x_2的合振动就是 x

$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$



其中： $A^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$ $\quad tg\varphi=(y_1+y_2)/(x_1+x_2)$

合振动的振幅为A： $A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$

合振动的初位相φ： $tg\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$

结论:

(1)合振动仍是同频率的简谐振动。

(2)合振幅不仅与分振幅有关还与$\Delta\varphi$有关。

(3)合振幅的大小不随时间变化

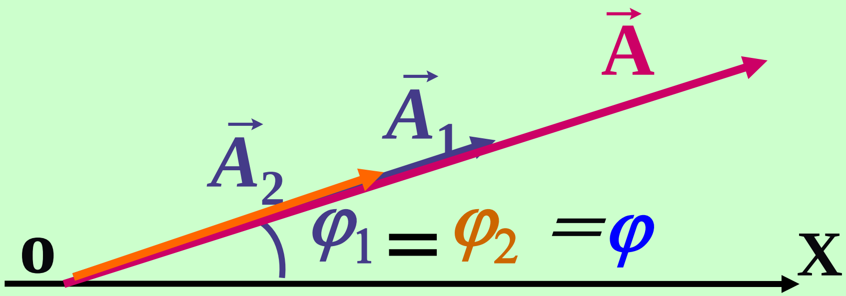
两个重要的特例
(同方向同频率的合成)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

（1）两分振动同相：$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ （k=0, ±1,±2 …）

$\vec{A}_1$ $\vec{A}_2$重合，合振幅为：

$$A = A_1 + A_2$$

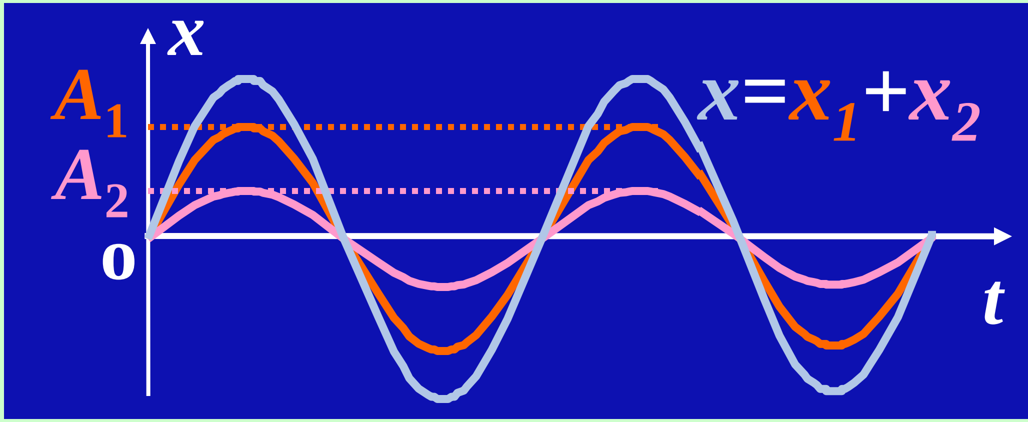


合振动初位相：$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$

合振动方程：

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \varphi_1)$$



合振动的振幅最大

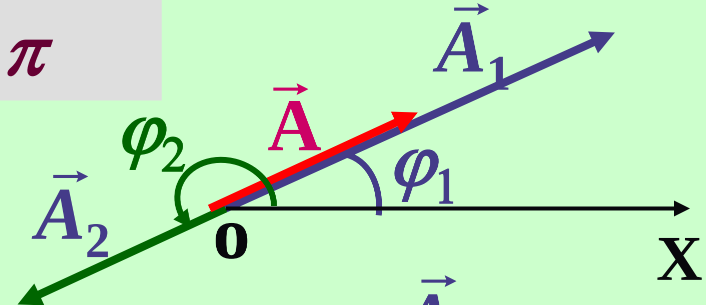
两振动的合成效果：——使振动加强

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

（2）两分振动反相: $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$

$\vec{A}_1$与$\vec{A}_2$方向相反，合振幅为：

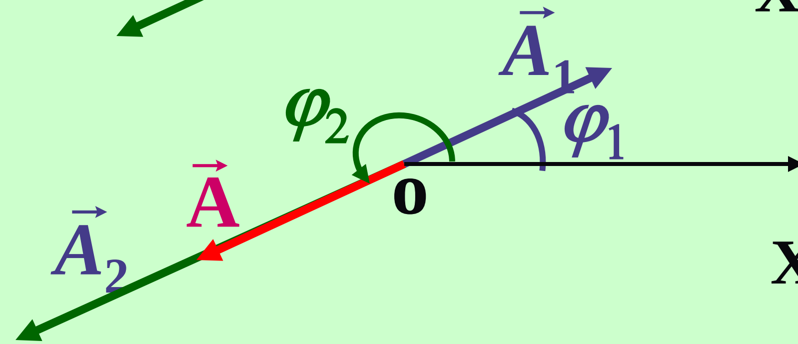
$$A=|A_1-A_2|$$



合振动初位相：

若$A_1>A_2$ $\varphi=\varphi_1$

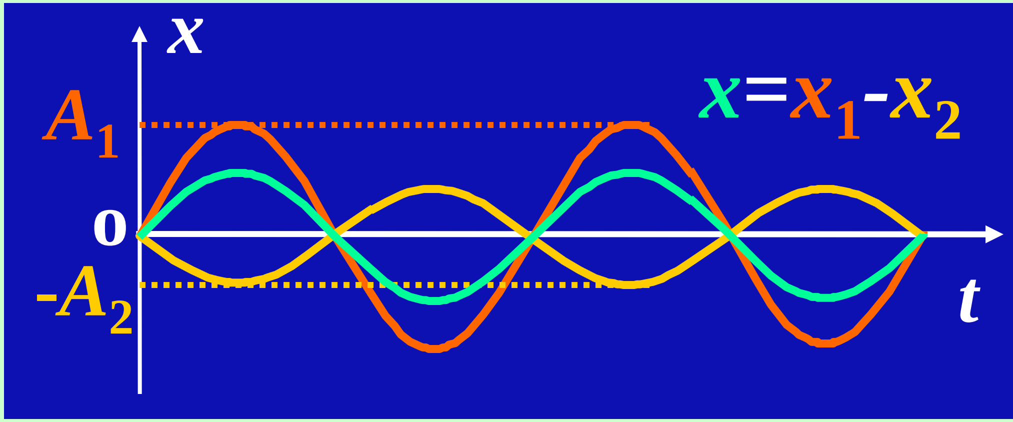
若$A_1<A_2$ $\varphi=\varphi_2$



两振动合成的振幅最小

两振动的合成效果

——使振动减弱

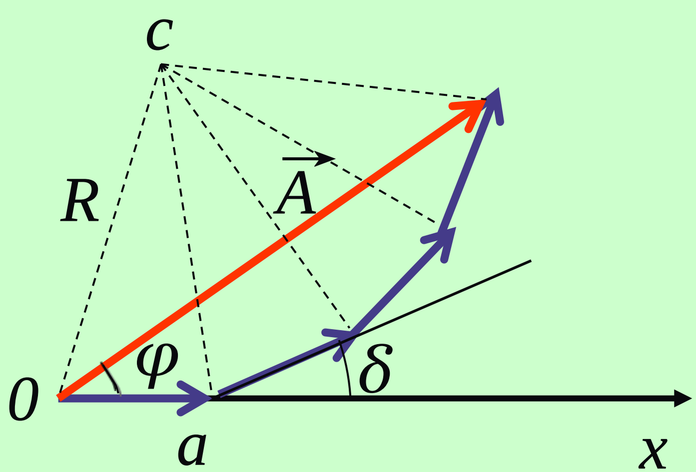


(3) 两分振动的位相差: $\varphi_2-\varphi_1\neq k\pi$

合成振动的振幅： $|A_1-A_2|<A<A_1+A_2$

*同方向的 N 个同频率谐振动的合成

若它们的振幅相等，初相位依次相差一个恒量。
其表达式为：



$$x_1 = a\cos(\omega t)$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \delta)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\delta)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_N = a\cos\left[\omega t + (N-1)\delta\right]$$

用矢量合成法 或解析法均可得合成振动：

$$x = a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cos\left[\omega t + \frac{(N-1)\delta}{2}\right]$$

2. 同方向不同频率的简谐振动的合成

振幅相同
初相位相同

分振动 $x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi)$ $x_2=A_1\cos(\omega_2 t+\varphi)$

合振动 $x=x_1+x_2$

合振动不是简谐振动

$$x=\underbrace{2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)}_{\text{合振动的振幅}}\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$$

当$\omega_2\approx\omega_1$时 $\omega_2-\omega_1 \ll \omega_2+\omega_1$

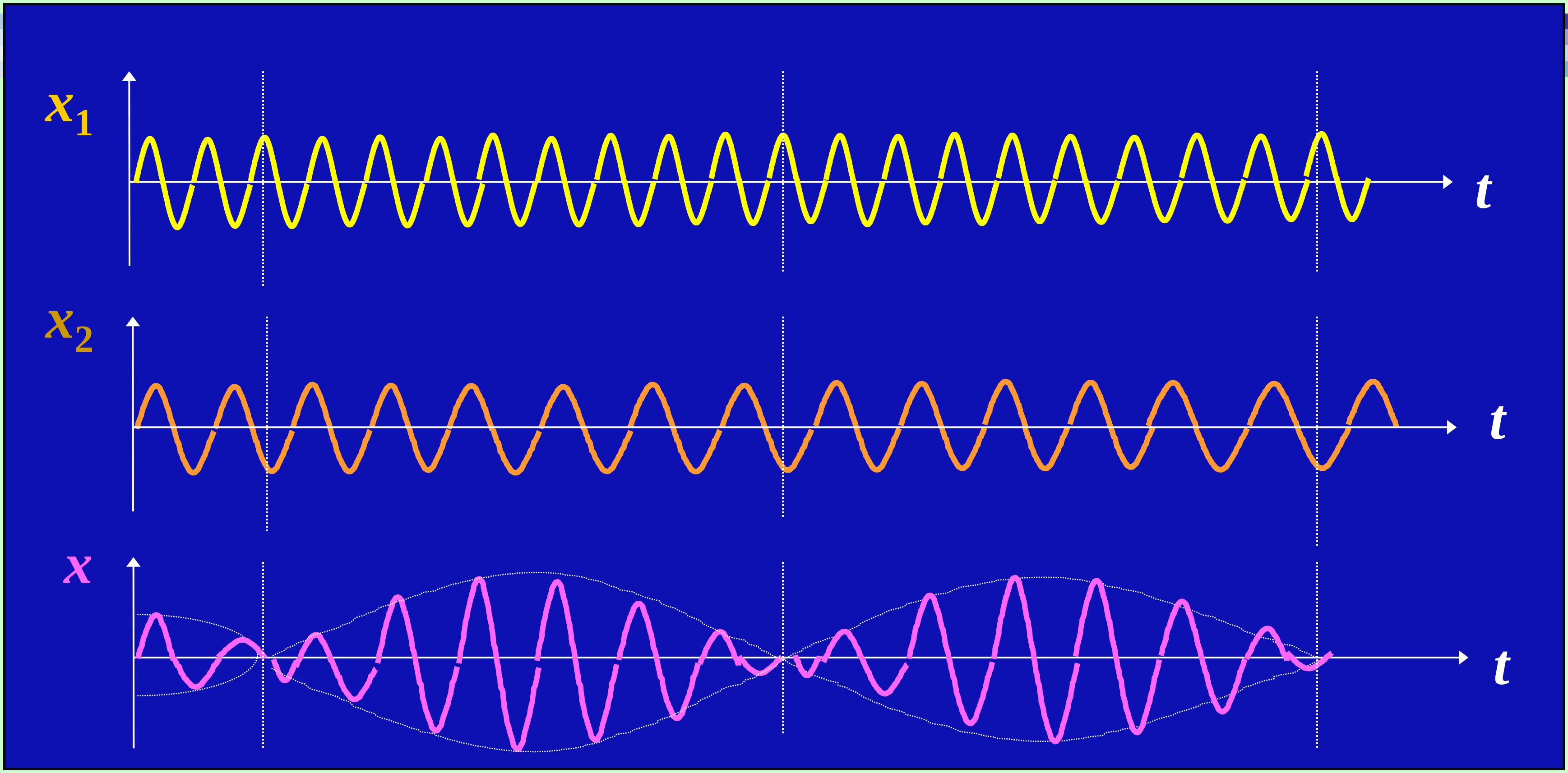
$$x=A(t)\cos(\bar{\omega}t+\varphi)$$

其中

$$A(t)=2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t$$ 随 t 缓变

$$\cos(\bar{\omega}t+\varphi)=\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$$ 随 t 快变

合振动可看作振幅缓变的简谐振动



振幅*A*按余弦函数变化，变化范围：$0 \le A \le 2A_1$

合振动忽强忽弱

*A*是变化的振幅

这种振幅出现加强和减弱现象称为——拍 (*beat*)。

在声振动、电振动 、波动、激光等问题中常遇到。

拍频 (*beat frequency*)：单位时间内强弱变化的次数

$\nu = |\nu_2 - \nu_1|$ ——合振幅变化频率

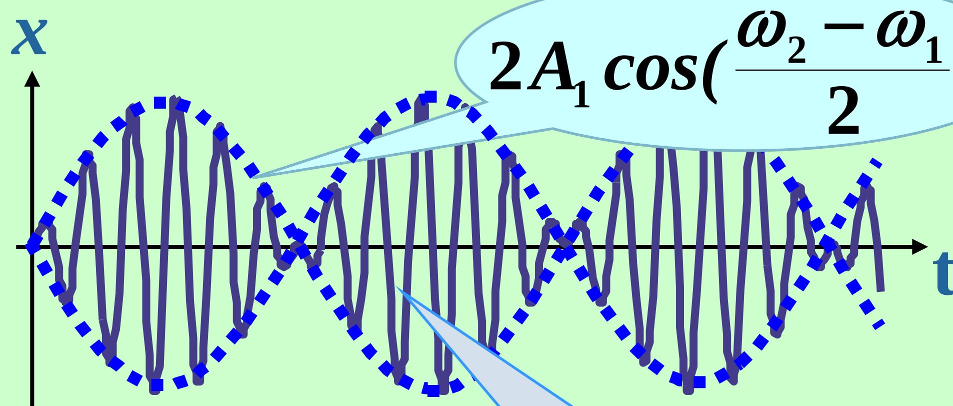
合振动方程

$$x=2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

振幅A按余弦函数变化，变化范围：$0\le A\le 2A_1$

可见 $\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$ 改变π时，A就重复出现一次变化

这种振幅出现加强和减弱现象称为——拍。



拍的周期T：$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}T=\pi$ $\quad T=\frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}$

拍的频率ν：$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}=\nu_2-\nu_1$

注：(1)拍现象只在两分振动的频率相差不太大时才显出来。即：$\omega_1+\omega_2>>|\omega_1-\omega_2|$ 现象才明显

(2)与合振动位移变化的频率是完全不同的

$$\omega_x=\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\qquad \nu_x=\frac{\omega_x}{2\pi}=\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\neq\nu$$

第 2 节、简谐振动的合成与分解

一、同方向简谐振动的合成

1. 同方向同频率的简谐振动的合成

分振动 $x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

合振动 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$tg\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

2. 同方向不同频率的简谐振动的合成

振幅相同
初相位相同

分振动 $x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi)$ $x_2=A_1\cos(\omega_2 t+\varphi)$

合振动 $$x=2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

特别：当$\omega_2\approx\omega_1$时 $\omega_2-\omega_1<<\omega_2+\omega_1$

合振动可看作振幅缓变的简谐振动

二、方向垂直的简谐振动的合成

1. 方向垂直, 同频率简谐振动的合成

两分振动 $x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

合运动（消去t）：

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

特 点:

(1) 合运动一般是在 $2A_1$(x向)、$2A_2$(y向)范围内的一个椭圆

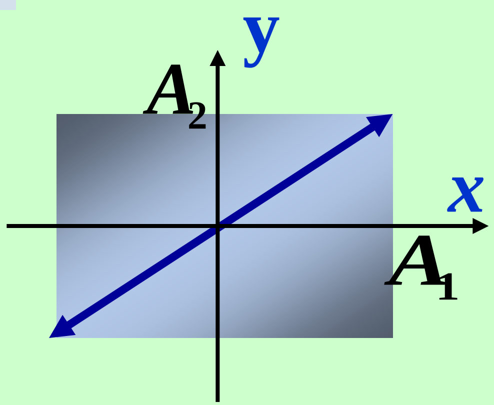
(2) 椭圆的性质 (方位、长短轴、左右旋)在 A_1、A_2确定之后，主要决定于$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

$$\frac{x^2}{A_1^{\,2}}+\frac{y^2}{A_2^{\,2}}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

动画

几种特殊情况：

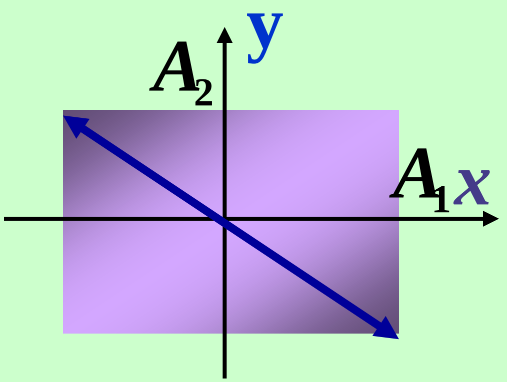
1）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=0$ $\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$



$y=\frac{A_2}{A_1}x$ 斜率：$tg\theta=\frac{A_2}{A_1}$ $\varphi_2=\varphi_1=\varphi$

距原点的位移：$S=\pm\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

2）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pi$ $\left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0$

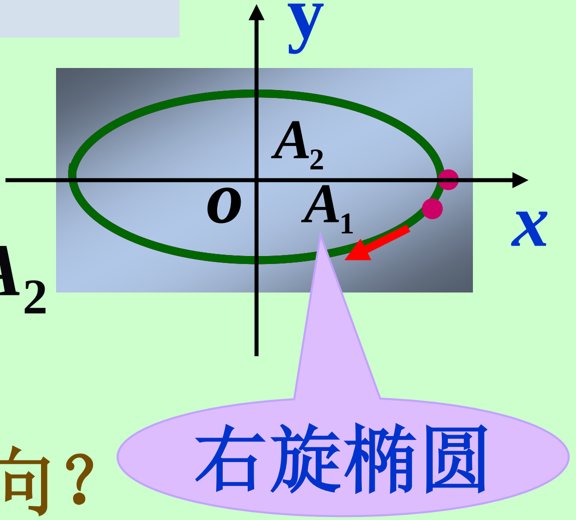


$y=-\frac{A_2}{A_1}x$ 斜率：$tg\theta=-\frac{A_2}{A_1}$

位移、频率、振幅同上，质点沿$y=-\frac{A_2}{A_1}x$直线振动

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

3）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ 则有：$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$



轨迹为一正椭圆长短轴分别为$2A_1$、$2A_2$

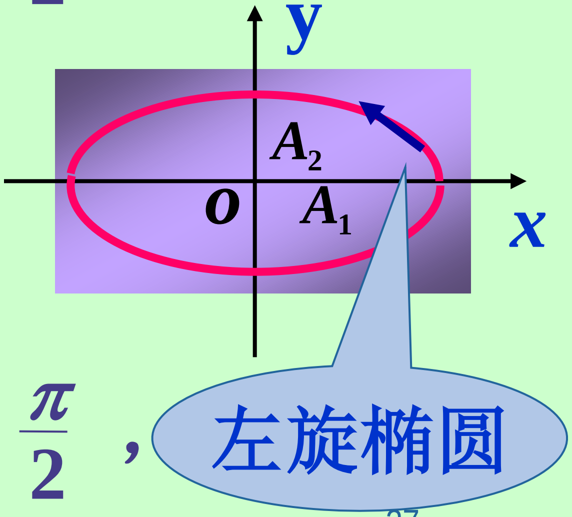
若$A_1=A_2$，就是一个圆。

因 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ 问题：运动方向？

则 x 轴方向的振动落后于y 方向的振动 $\frac{\pi}{2}$，

运动为顺时针方向（右旋）

4) $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ 同理：$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$

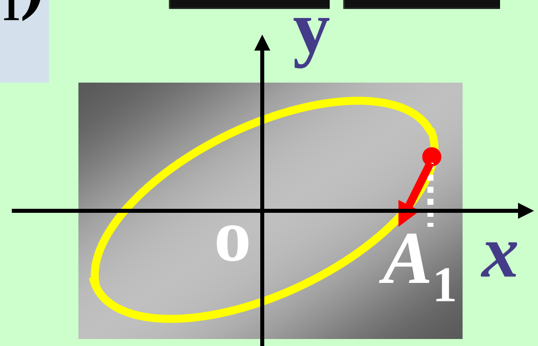


因 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$

则 y 轴方向的振动落后于x 方向的振动 $\frac{\pi}{2}$，

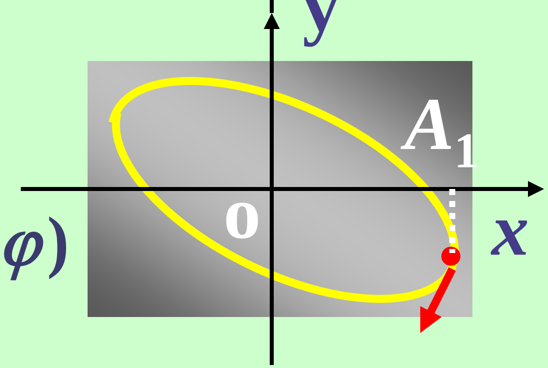
运动为逆时针方向（左旋）

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$



5）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\varphi$ φ 为其它任意值，

轨迹是任意一个斜椭圆，其倾斜角度取决于位相差的取值。 左旋或右旋？

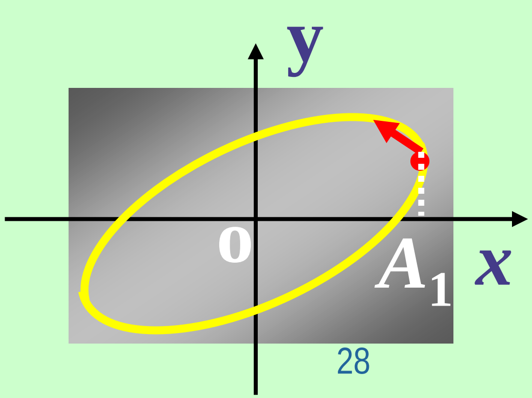


为便于讨论：令 $\varphi_1=0$, 则 $\begin{cases} x = A_1\cos\omega t \\ y = A_2\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$

x 轴方向的振动落后于 y 方向的振动 φ ，

当 $0<\varphi<\pi$ ， $t=0$ 时：

$x=A_1$ $y=A_2\cos\varphi$ 右旋椭圆

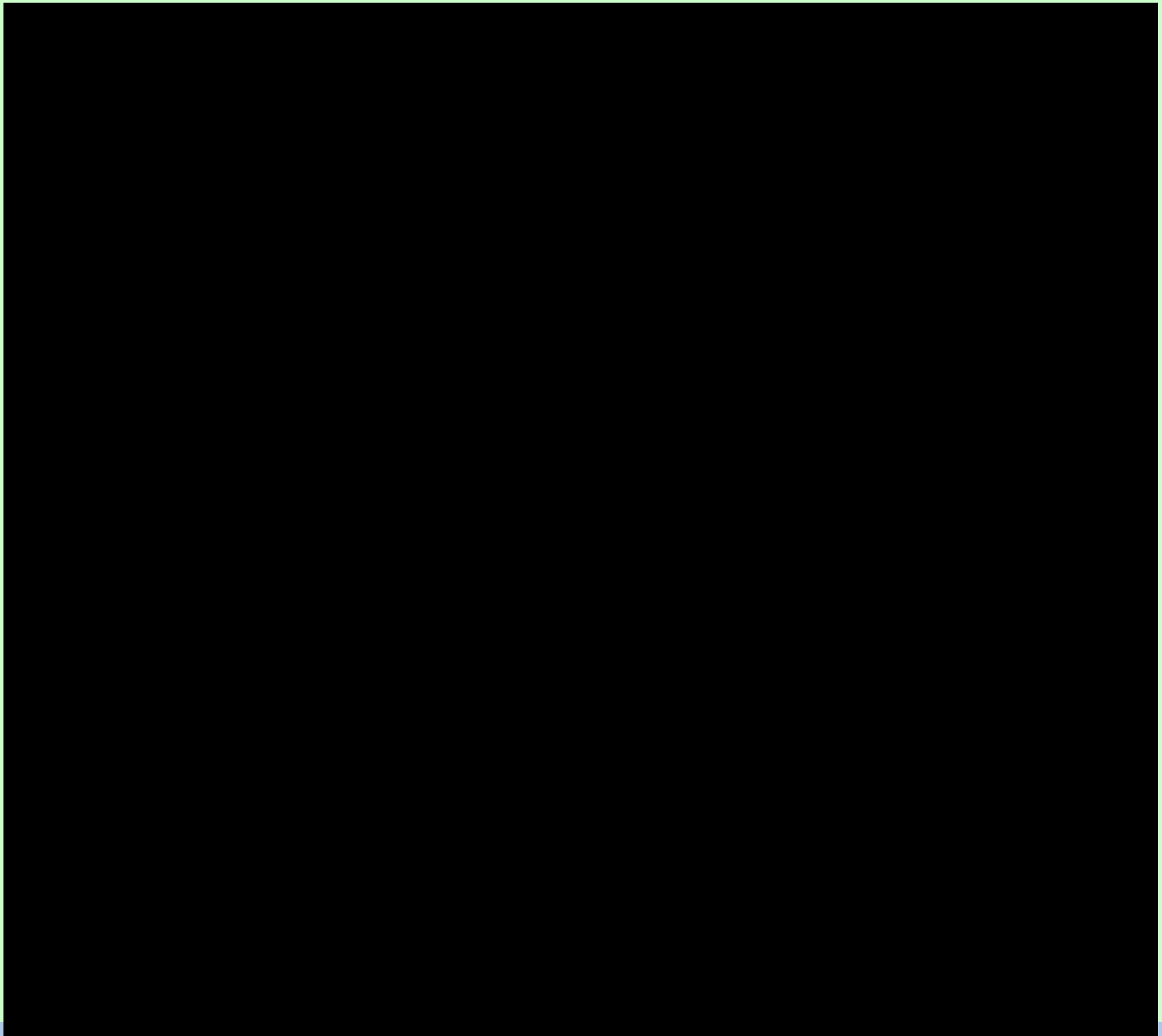


当 $\pi<\varphi<2\pi$ ，或 $-\pi<\varphi<0$ 左旋椭圆

结 论

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

$\Delta\varphi$ 为任意值时，合振动的轨迹一般为椭圆



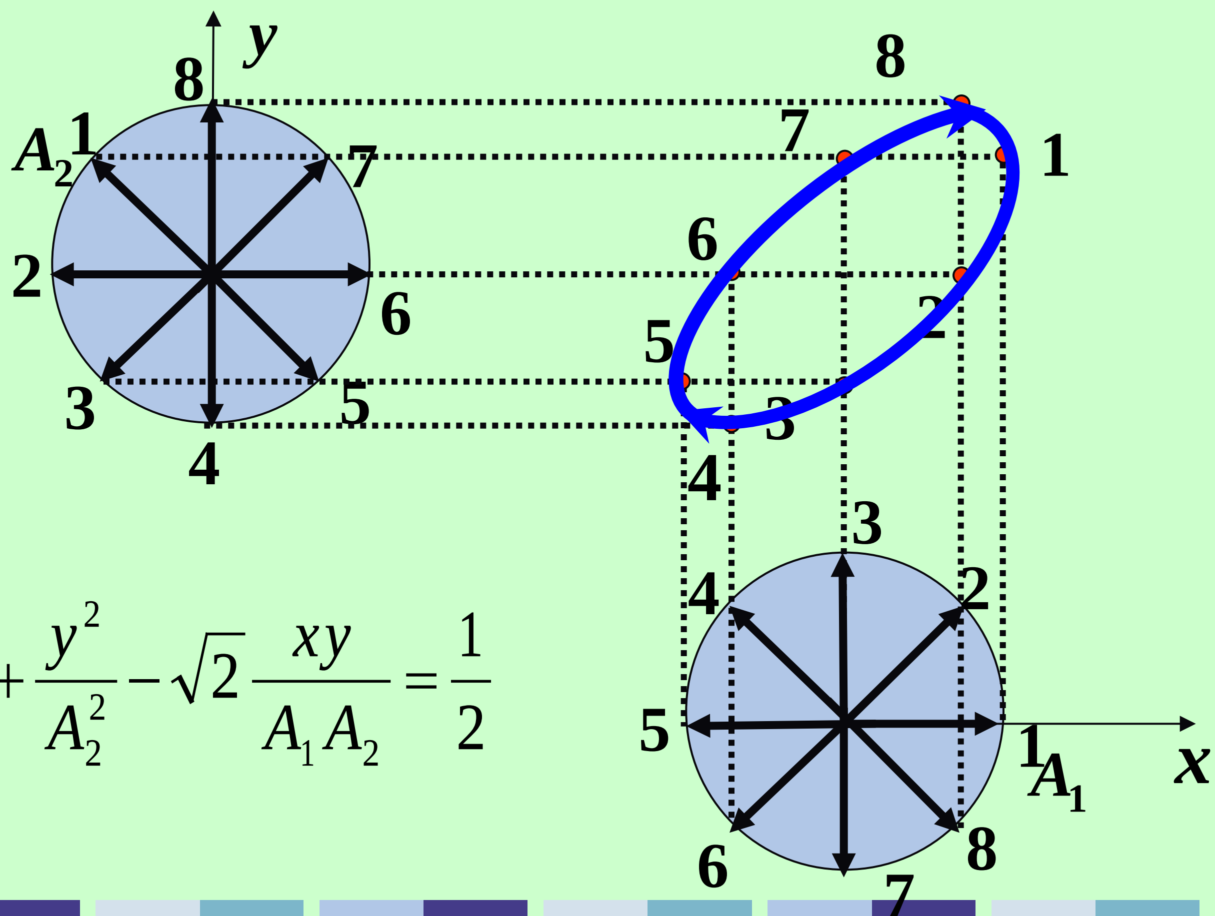
例. 已知两分振动为

$$x = A_1 \cos\omega t \quad y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$$

求(1) 合振动的轨迹。

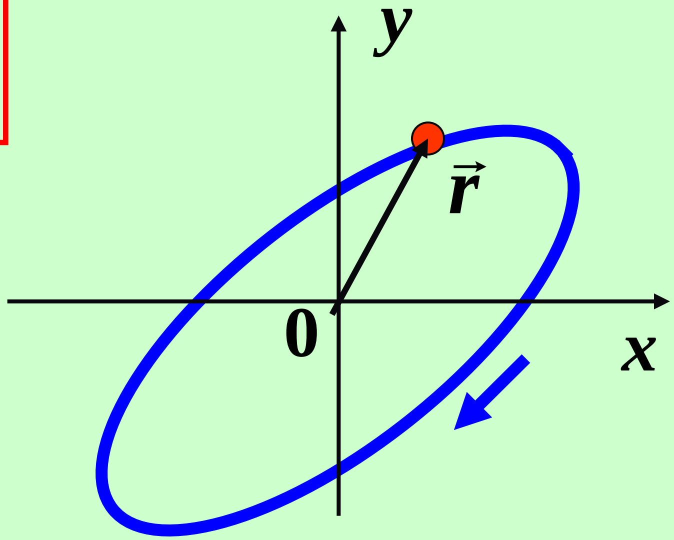
(2) 若已知A，ω、φ，m，求质点在任一位置所受的力。

解: (1) 几何作图法



$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \sqrt{2}\frac{xy}{A_1 A_2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A_1 \cos\omega t \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}}$$



(2) 求质点在任一位置所受的力

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$= m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{F} = m\left\{\left[-A_1\omega^2\cos\omega t\right]\vec{i} + \left[-A_2\omega^2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right]\vec{j}\right\}$$

$$= -m\omega^2\left\{A_1\cos\omega t\,\vec{i} + A_2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{j}\right\}$$

$$= -m\omega^2(x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$= -m\omega^2\vec{r}$$