第 2 节、简谐振动的合成与分解

一、同方向简谐振动的合成

1. 同方向同频率的简谐振动的合成

分振动 $x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

合振动 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$tg\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

振幅相同
初相位相同

2. 同方向不同频率的简谐振动的合成

分振动 $x_1=A_1cos(\omega_1 t+\varphi)$ $x_2=A_1cos(\omega_2 t+\varphi)$

合振动 $$x=2A_1cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$$

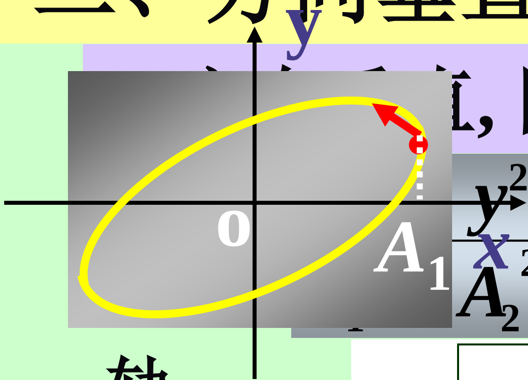
特别：当$\omega_2\approx\omega_1$时 $\omega_2-\omega_1<<\omega_2+\omega_1$

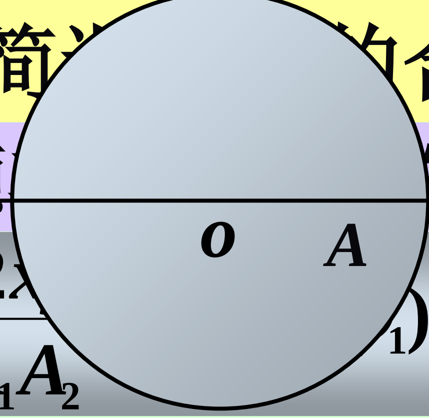
拍频现象 合振动可看作振幅缓变的简谐振动

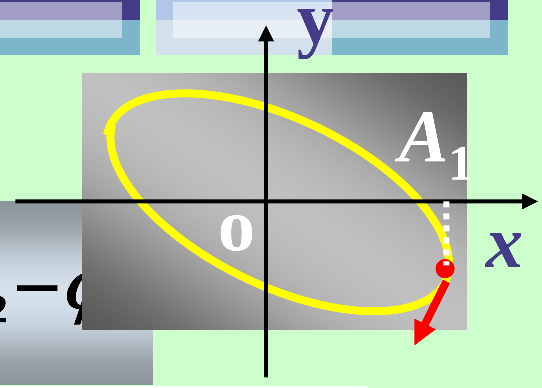
二、方向垂直的简……的合成

……直, 同频……的合成

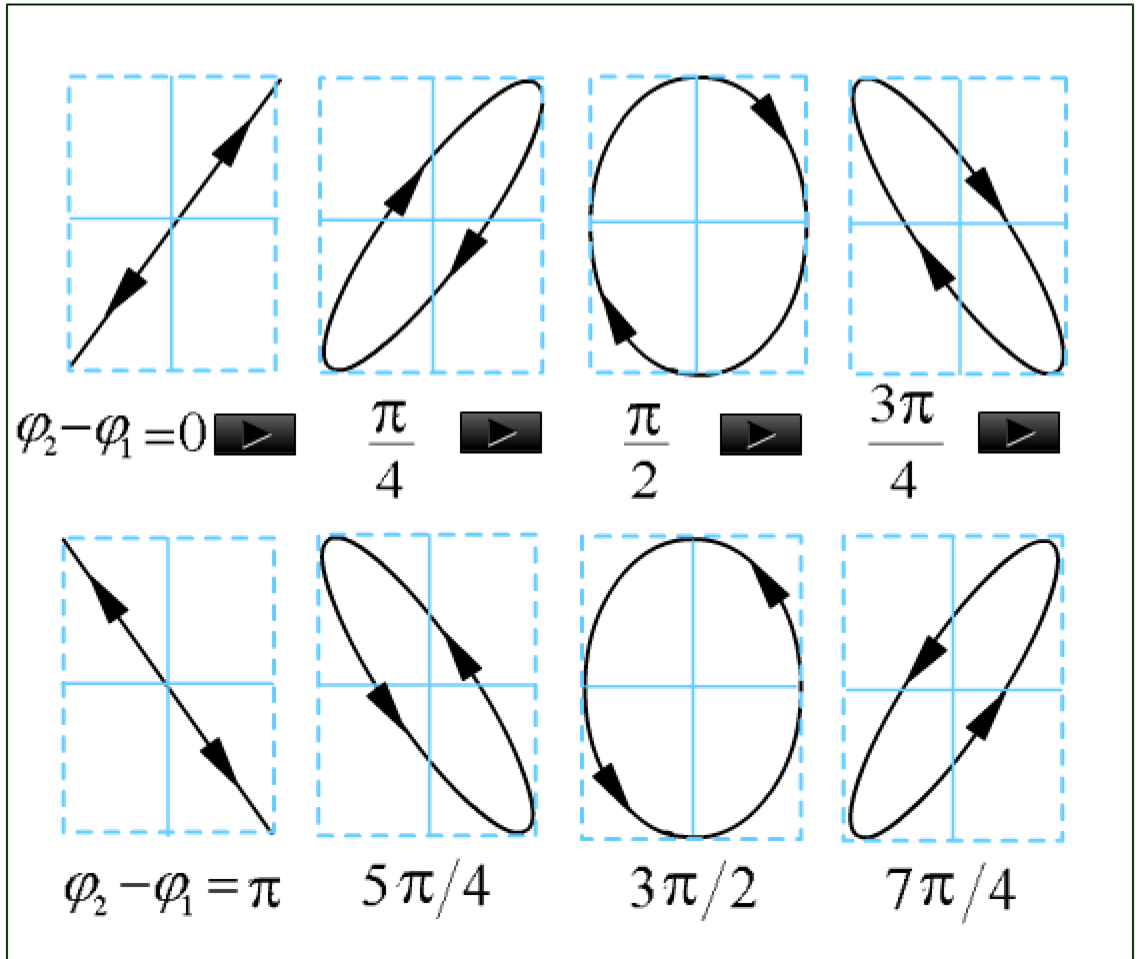
$$\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2x\ldots}{A_1A_2}\ldots)=\sin^2(\varphi_2-\varphi\ldots$$







为任意值时，合振动的轨迹一般为椭圆



2. 垂直方向不同频率简谐振动的合成

一般情况很复杂，且不稳定。下面介绍两种简单情况：

1). 两分振动频率相差很小

$$\Delta\phi = (\omega_2-\omega_1)\,t + (\varphi_2-\varphi_1)$$

可看作两频率相等, 而 $\Delta\phi$ 随 t 缓慢变化($\Delta\phi$ 将从 $0 \to \pi/2 \to \pi \to 3\pi/2 \to 2\pi$)

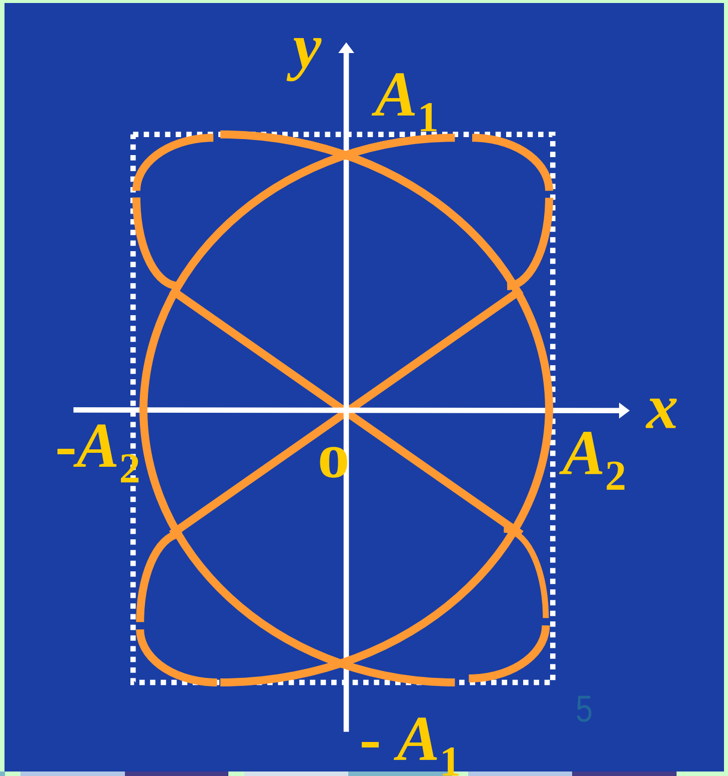
则合运动轨迹将按上页图依次（从直线→斜椭圆→正椭圆→斜椭圆→直线→…）不停地变化下去。

2). 两振动的频率成整数比

轨迹称为利萨如图 (*Lissajous figures*)

$\omega_x:\omega_y=3:2$

$\varphi_2=0,\quad \varphi_1=\pi/4$



●李萨如图形（两振动的频率成整数比时）

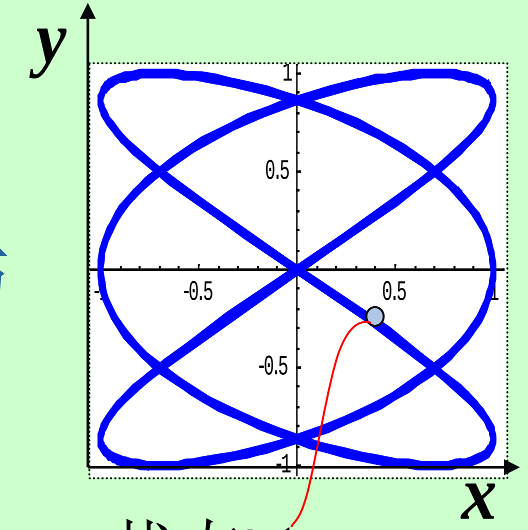
两振动：$x = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$　$y = A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

由切点数之比 $\dfrac{N_y}{N_x}=\dfrac{T_y}{T_x}=\dfrac{\nu_x}{\nu_y}$ 可测频率。

再次到达状态1，所需时间为：

$$T=n_xT_x=n_yT_y$$

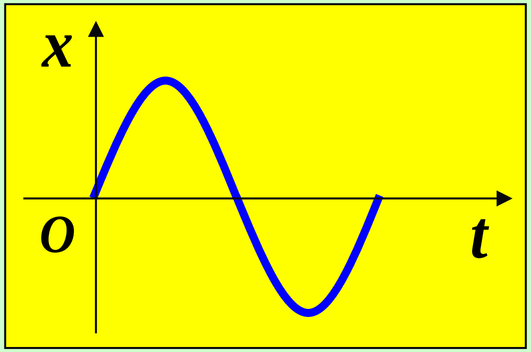
n_x,n_y分别是x方向和y方向的振动经历的周期个数。



x每次到达最大值就产生y方向上的一个切点。一个振动周期内x到达最大值一次。

状态1:(x,y,v_x,v_y)

$$\left.\begin{aligned}&\therefore N_y=n_x \quad N_x=n_y\\ &\therefore N_yT_x=N_xT_y\end{aligned}\right\}\quad \frac{N_y}{N_x}=\frac{T_y}{T_x}=\frac{\nu_x}{\nu_y}$$



李萨如图

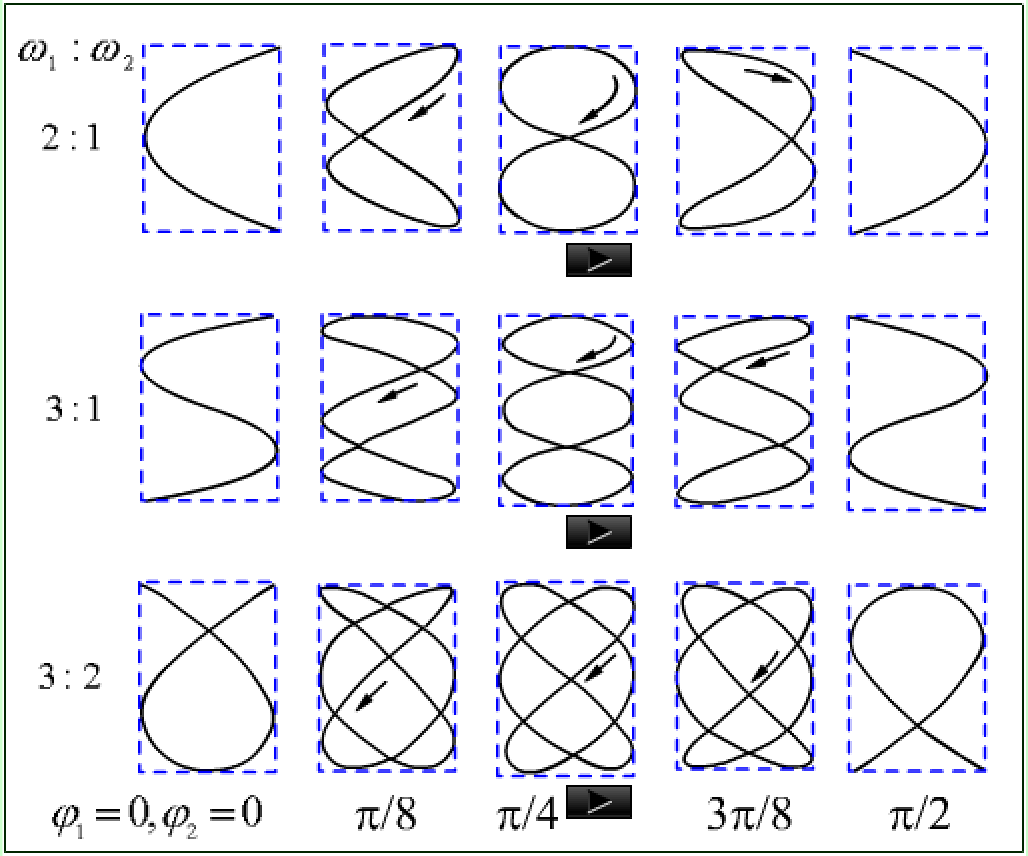
$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\varphi_1 = 0$$

$$\varphi_2 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$$

$$\frac{N_x}{N_y} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

测量振动频率和相位的方法

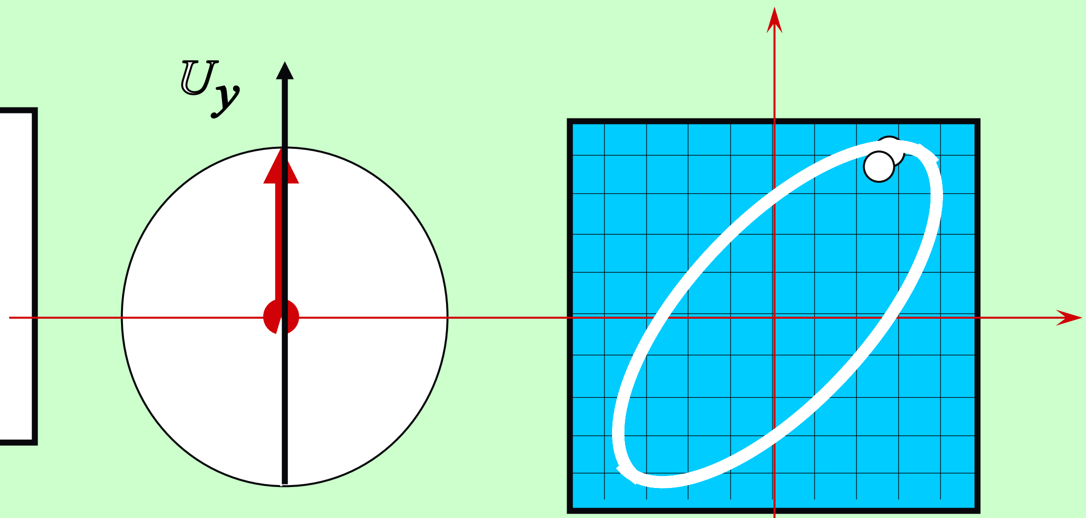


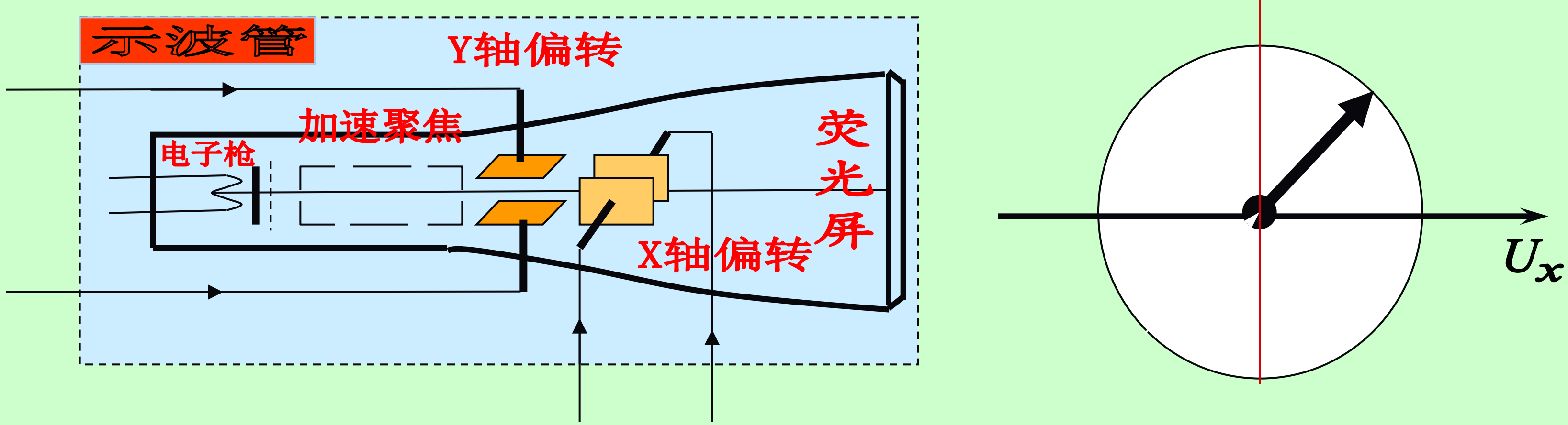
X-Y模式：李萨如图形

X-Y模式：当X轴和Y轴同时加入正弦信号

$$f_x : f_y = 1:1$$

$$\varphi_x - \varphi_y = \pi/4$$





激光垂直振动合成

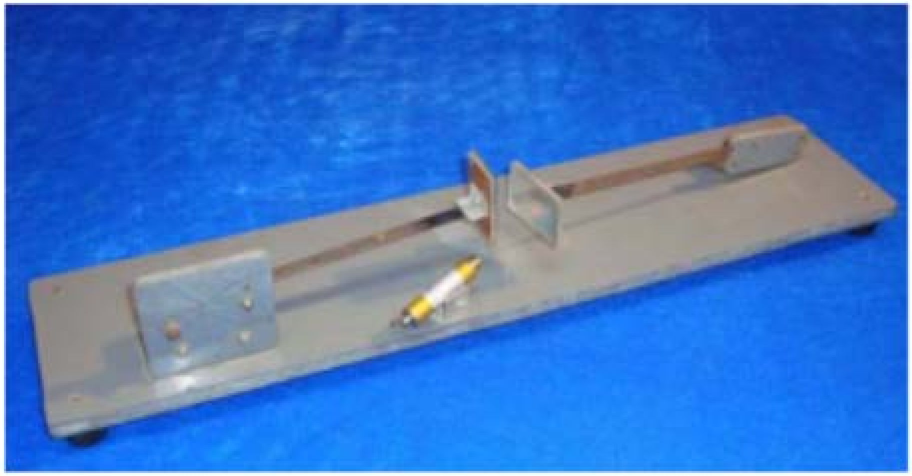


图 a

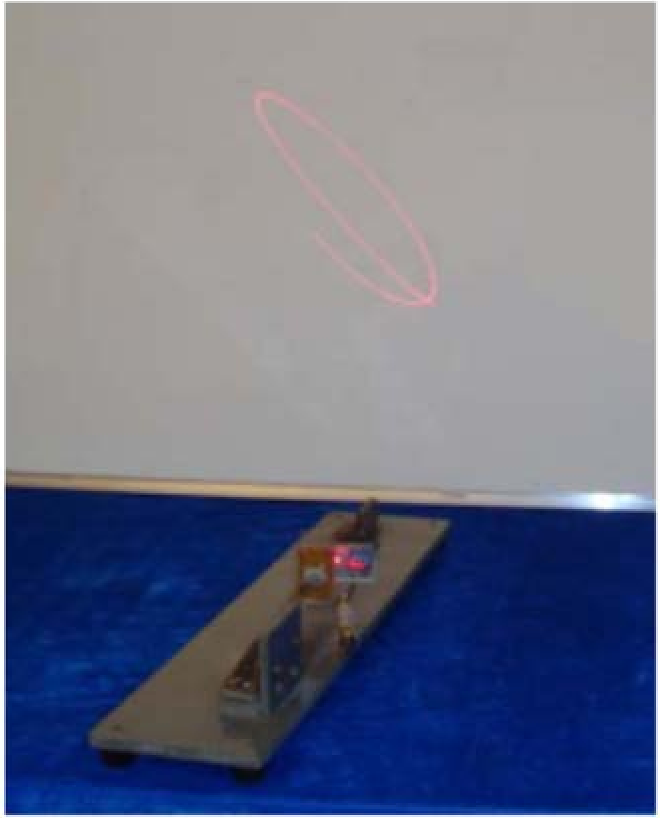


图 b

三、谐振分析

任一个周期性非简谐振动(复杂)可分解为一系列(若干个)不同频率的简谐振动，这种分解方法称为<u>谐振分析</u>。

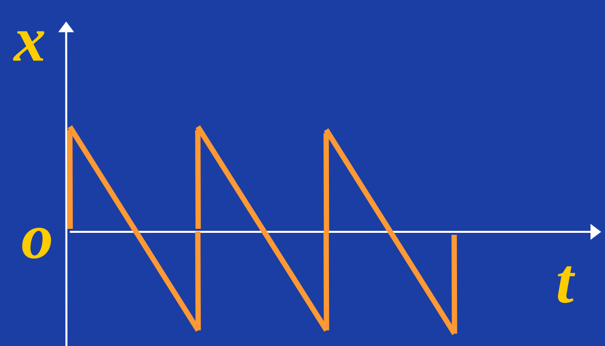
分解为一系列频率分立的简谐振动(其频率都是主频率的整数倍——倍频

谱分析方法
傅里叶分析

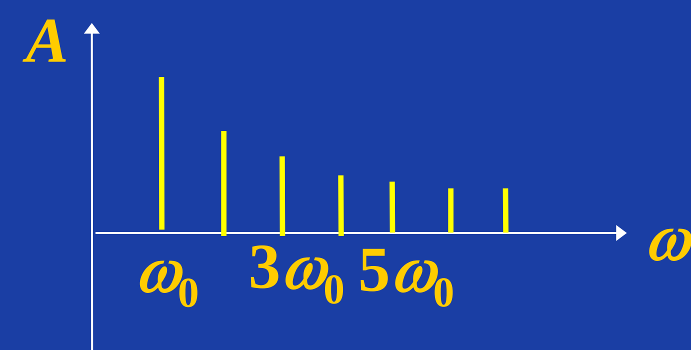
如：若周期振动的频率为 : ω_0

则各分振动的频率为: $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \ldots$

(基频 , 二次谐频 , 三次谐频 , …)

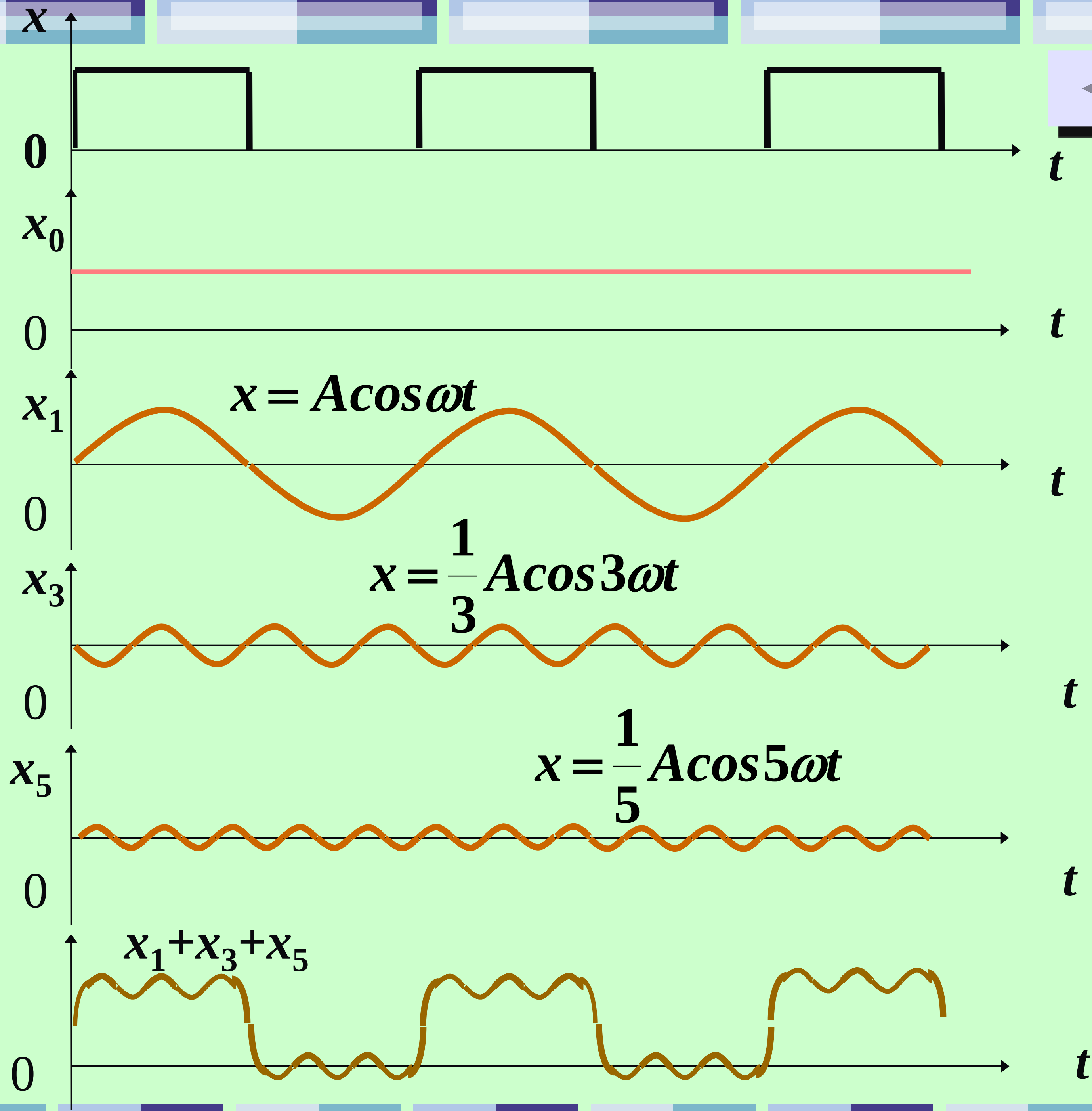


锯齿波

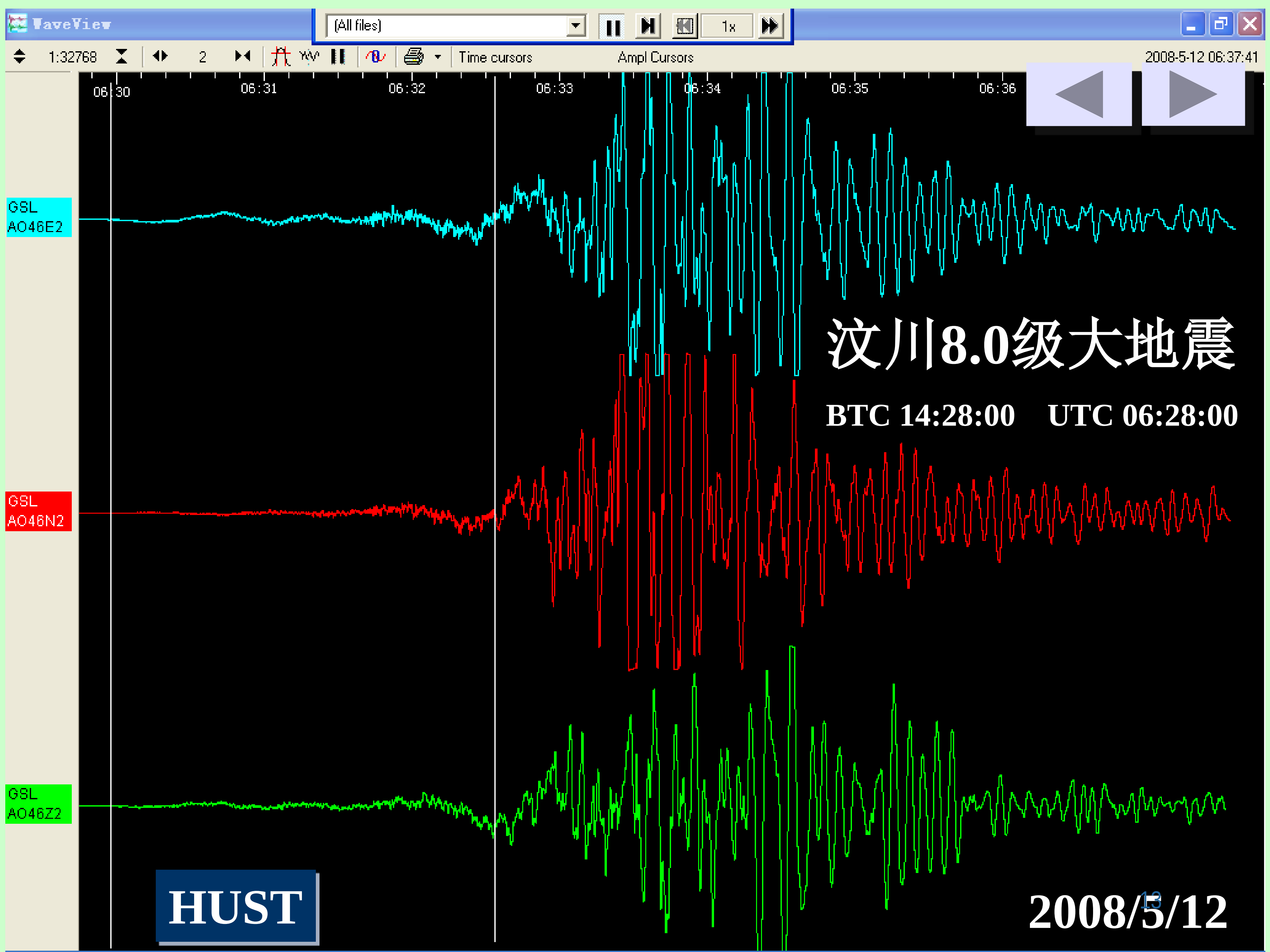


锯齿波频谱图

方波的分解

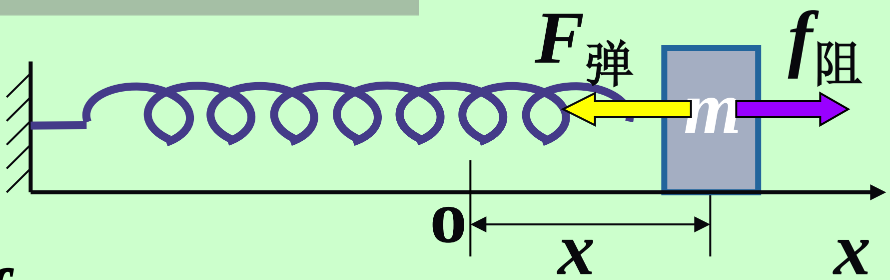


x
0
t
x_0
0
t
x_1
$x = A\cos\omega t$
0
t
x_3
$x = \frac{1}{3}A\cos 3\omega t$
0
t
x_5
$x = \frac{1}{5}A\cos 5\omega t$
0
t
$x_1 + x_3 + x_5$
0
t


WaveView
(All files)
1x
1:32768
2
Time cursors
Ampl Cursors
2008-5-12 06:37:41
06:30
06:31
06:32
06:33
06:34
06:35
06:36
GSL AO46E2
GSL AO46N2
GSL AO46Z2
汶川8.0级大地震
BTC 14:28:00 UTC 06:28:00
HUST
2008/5/12

第3节、振动的一般情形

一、谐振子的阻尼振动 (damped vibration)



1. 动力学方程 $F = F_{弹} + f_{阻}$

$$F_{弹} = -kx \qquad f_{阻} = -\gamma v = -\gamma\frac{dx}{dt}$$

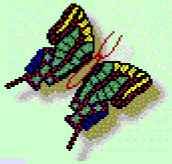
根据牛顿定律：$F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 则：$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\dfrac{dx}{dt}$

即：$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_o{}^2 x = 0$$ ——动力学方程

阻尼项

其中：$\omega_o{}^2 = \dfrac{k}{m}$ $2\beta = \dfrac{\gamma}{m}$

β——阻尼系数
damping coefficient



$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

2）运动学特征

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_o{}^2x=0$$

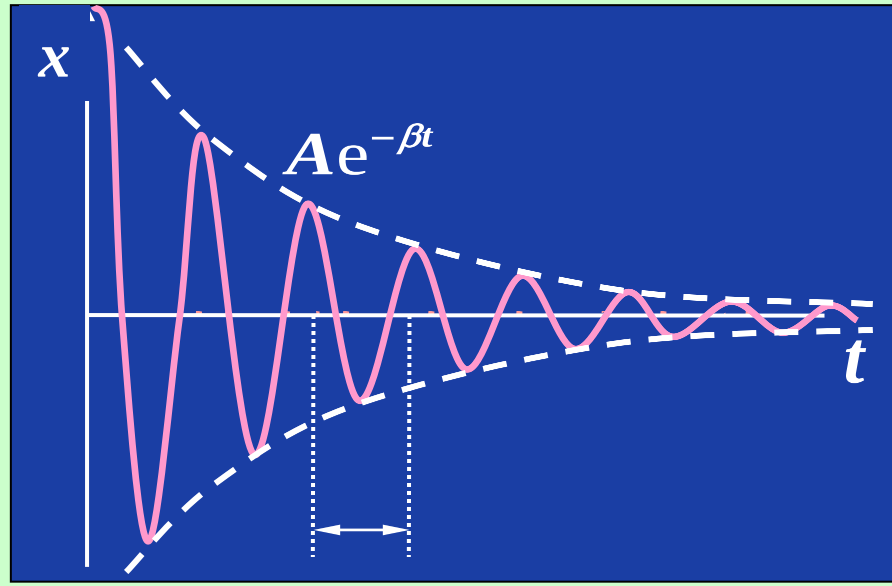
一般 β 不同振动状态就不同

（1）阻尼较小时，$\beta<\omega_0$，称为**弱阻尼**

此方程的解：$x(t)=Ae^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t+\varphi_0)$

其中：振幅 $A=A_0e^{-\beta t}$

频率 $\omega=\sqrt{\omega_o^2-\beta^2}$



振动特点

a. 振幅随 t 按指数衰减

经一周期两振幅之比：

$$\frac{A_oe^{-\beta t}}{A_oe^{-\beta(t+T)}}=e^{\beta T}$$

b. 是准周期运动　位相改变 2π 所经历的时间——**周期**

出现两次极大的时间间隔：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2-\beta^2}}>\dfrac{2\pi}{\omega_0}=T_0$

周期变长，振动变慢

c. 能量 E 随振幅 A 的减小而衰减　$E\propto A^2$

（2）阻尼较大时 $\beta>\omega_o$，称为过阻尼

方程的解：$x(t)=C_1e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_o^2})t}+C_2e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_o^2})t}$

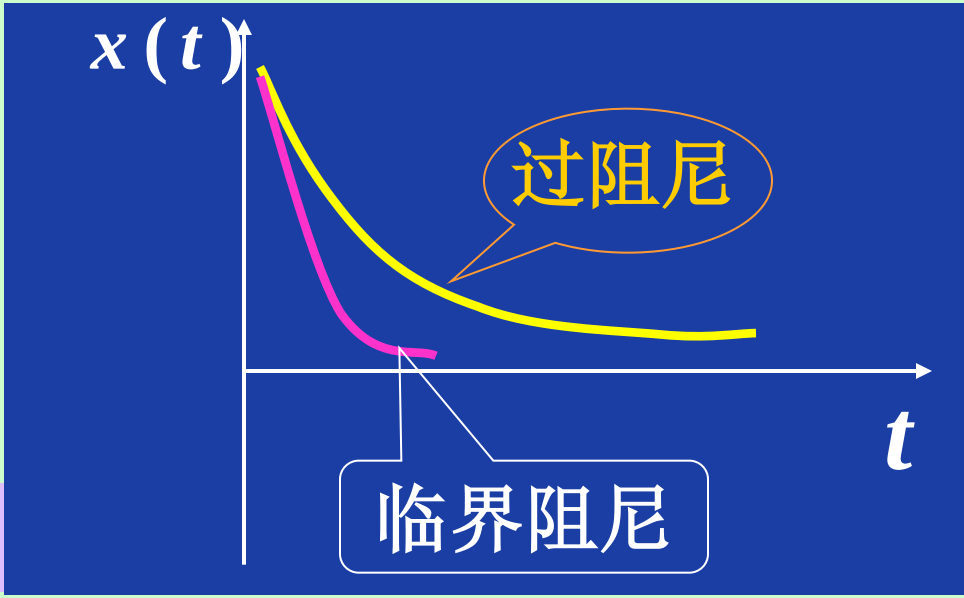
其中 C_1、C_2 是积分常数，由初始条件来决定。

振动特点

*非周期运动

*无振动发生

运动一开始，便逐渐回到平衡位置。



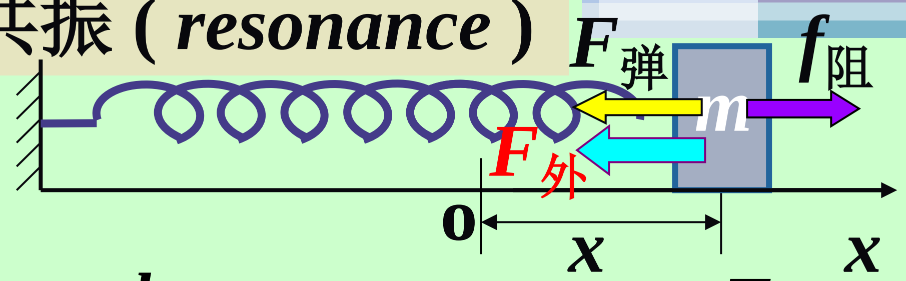
（3）$\beta=\omega_o$，称为临界阻尼

方程的解：$x(t)=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}$ 　C_1、C_2 由初始条件决定

振动特点同上，但很快回到平衡位置。

是从有周期性因子 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ 到无周期性的临界点。

二、 谐振子的受迫振动和共振 (*resonance*)



1. 谐振子的受迫振动方程

设强迫力

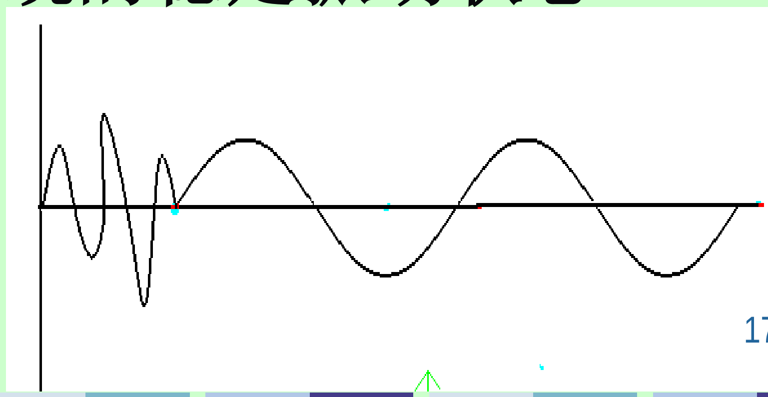
$$\omega_o^2=\frac{k}{m}\qquad 2\beta=\frac{\gamma}{m}\qquad f_o=\frac{F_o}{m}$$

则有：$\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\beta\dfrac{dx}{dt}+\omega_o^2x=f_0\cos\omega_{外}t}$ —— 动力学方程

由微分方程理论：

方程的通解=齐次微分方程的解+非齐次的一个特解

反映系统的暂态行为　　系统的稳定振动状态



经过足够长的时间，

称为稳态解：

$$x(t)=A_p\cos(\omega_{外}t+\alpha)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x=f_0\cos\omega_{外}t$$

稳态解

$$x(t)=A_p\cos(\omega_{外}t+\alpha)$$

即：稳态时的受迫振动按简谐振动的规律变化

稳态频率：$\omega=\omega_{外}$

将稳态解代入方程可得：

$$\begin{cases}\text{振幅: } A_p=\dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega_{外}^2)^2+4\beta^2\omega_{外}^2}}\\ \text{位相: } tg\alpha=-\dfrac{2\beta\omega_{外}}{\omega_o^2-\omega_{外}^2}\end{cases}$$

2)稳定受迫振动与简谐振动的区别：

1 受力不同：　弹簧振子— $F_{弹}$，　受迫振动— $F_{外}$

2 三特征量的本质不同：

受迫振动不是简谐振动！

弹簧振子 $\begin{cases}\omega_o & \text{—系统固有}\\ A, \varphi & \text{由初始条件决定}\end{cases}$

受迫振动 $\begin{cases}\omega_{外} & \text{—外力决定}\\ A_p, \alpha & \text{解方程求得}\end{cases}$

3 能量情况不同：简谐振动系统能量守恒

受迫振动系统阻力消耗的能量=外力作功

3. 共振 —— 位移共振 (*displacement resonance*)

在一定条件下，振幅出现 极大值，振动剧烈的现象。

$$A_p = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_{外}^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_{外}^2}}$$

令：$\dfrac{dA_p}{d\omega_{外}} = 0$

$\omega_r = \omega_{外} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$ —共振振幅

共振频率

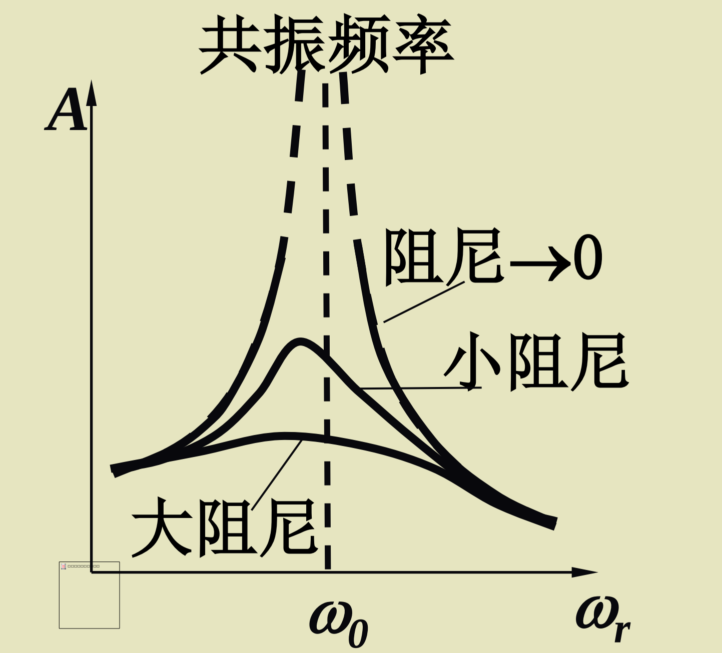
一般 $\omega_r < \omega_o$，与 β 有关

β大，ω_r 小　　A_{max}—小

β小，ω_r大　　A_{max}—大

若 $\beta << \omega_o$，则 $\omega_r \approx \omega_o$

$A_r \approx f_0/(2\beta\omega)$ ——称尖锐共振



$\boxed{\text{若}\beta \to 0 \quad A_{max} \to \infty}$ → 实际上不可能

当 $\beta \to 0$ 弱阻尼时

共振发生在固有频率处，

称为尖锐共振。

$$A_p = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{外}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{外}^2}}$$

$$\tan\alpha = -\frac{2\beta\omega_{外}}{\omega_0^2 - \omega_{外}^2}$$

$$\therefore \omega_r = \omega_0, \quad A_p \longrightarrow \infty, \quad \alpha_r = -\pi/2$$

受迫振动相位落后于强迫力相位 $\frac{\pi}{2}$ ，即振动速度与强迫力同位相，那么外力始终对系统做正功。这正是振幅急剧增大的原因。

但是，随着振幅的增大，阻力的功率也不断增大，最后与强迫力的功率相抵，从而使振幅保持恒定。共振时，外力做功的能量转化为共振质点的能量，称为共振吸收。

◈ 共振现象的危害

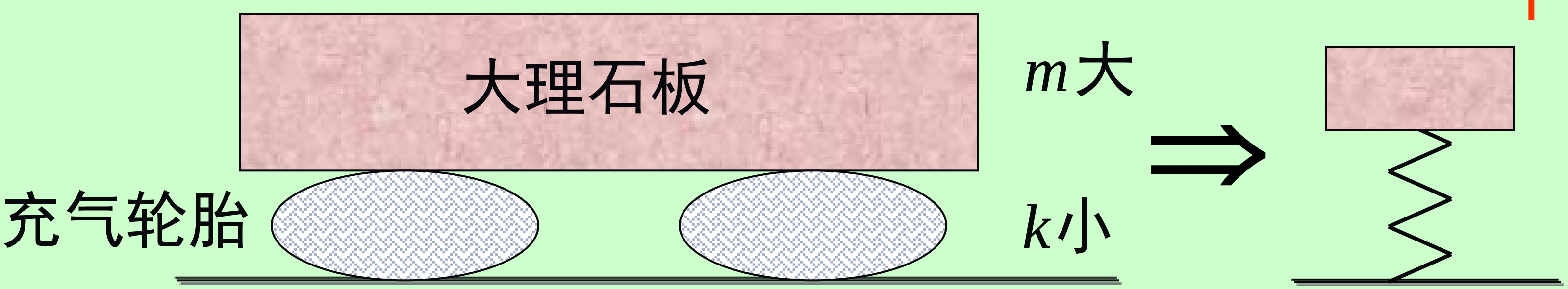
1940 年7月1日美国 Tocama 悬索桥因共振而坍塌

阻尼振动 $\xrightarrow{F}$ 受迫振动 $\xrightarrow{\omega_{外}=\omega}$ 共振

应如何设计一防振台？

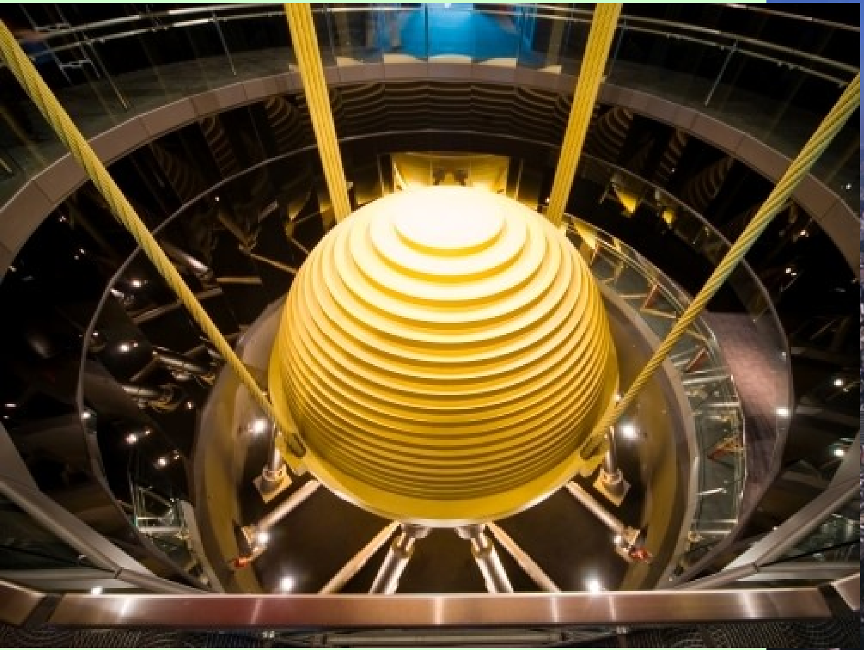
要使 $\omega_{外} >> \omega$！

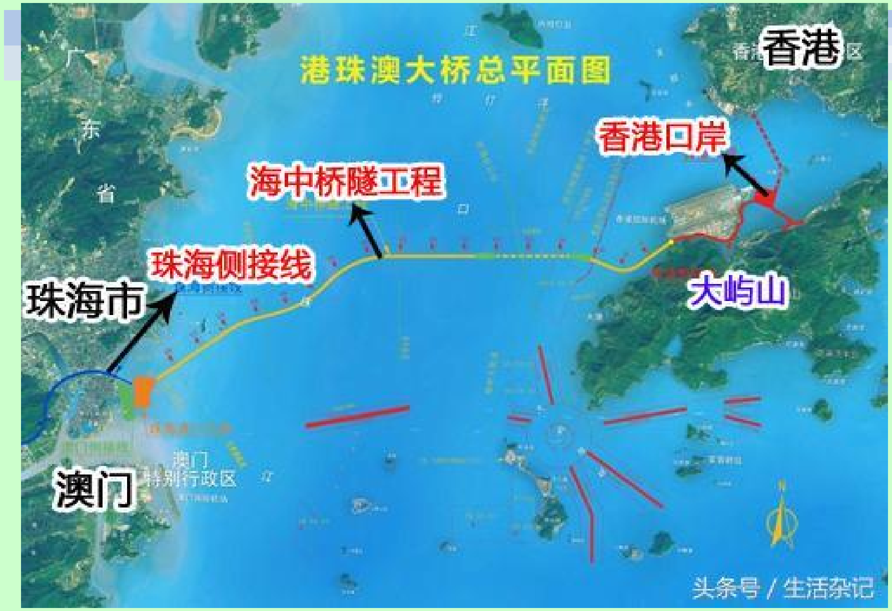
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



台北101大楼，设有世界最大的风阻尼器，又称“调质阻尼器”。

重660吨，直径为5.5米的巨大钢球，从92楼悬挂到87楼。利用摆动来减缓建筑物的晃动幅度。这也是全世界最早开启向游客开放之门的巨型阻尼器。





港珠澳大桥是连接香港、珠海、澳门的超大型跨海通道。

港珠澳大桥所在的伶仃洋海域6级以上大风天气全年超过200天。在台风高发季节，在**共振**的作用下，大桥主塔会不断从风流中吸取能量而导致结构损坏。根据伶仃洋海域的特殊环境，港珠澳大桥的抗风能力设计为抗16级。建设者对大桥模型进行多次风洞模拟试验，优化主塔结构，**使主塔的固有频率与风漩涡的频率相隔很远**，保证大桥结构安全。

港珠澳大桥-台风“山竹”

视频和图片来自网络