华中科技大学2022—2023学年第一学期
《复变函数与积分变换》A卷参考答案

一. 单选题(每题2分，共24分)

CBCA BADA DCBD

二. 解: $\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + e^{-x}\cos y$

$= -e^{-x}(x\cos y + y\sin y - \cos y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(-x\sin y + \sin y + y\cos y)$

根据C-R方程: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdots ①$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \cdots ②$.

由①可得: $\frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x}(x\cos y + y\sin y - \cos y)$

偏积分得 $V(x,y) = \int -e^{-x}(x\cos y + y\sin y - \cos y)\,dy$

$= -e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + f(x) \cdots ③$

将③代入②式可得

$e^{-x}(-x\sin y + \sin y + y\cos y) = -e^{-x}(x\sin y - y\cos y - \sin y) + f'(x)$

$\therefore f'(x) = 0$, 即 $f(x) = C$ (C为实常数)

$\therefore V(x,y) = -e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + C$

$\therefore f(z) = u(x,y) + iV(x,y)$

$= e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + i[-e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + C]$

$= ze^{-z} + iC$

三.解: $f(z)=\frac{-2}{z-1}+\frac{3}{z-2}$

① 当 $0<|z-1|<1$ 时

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1-1}=-\frac{1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n$$

$$\therefore f(z)=-\frac{2}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}3(z-1)^n$$

另解1. $f(z)=\frac{z-1+2}{z-1}\cdot\frac{1}{z-2}=\left(1+\frac{2}{z-1}\right)\cdot\frac{1}{z-2}$

$$=\left(1+\frac{2}{z-1}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}-(z-1)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}2(z-1)^{n-1}$$

化简得到上面的结果.

另解2. $f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{z-2+3}{z-2}=\frac{1}{z-1}\left(1+\frac{3}{z-2}\right)$

$$=\frac{1}{z-1}\left(1+\sum_{n=0}^{+\infty}-3(z-1)^n\right)$$

$$=\frac{1}{z-1}-3\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}$$

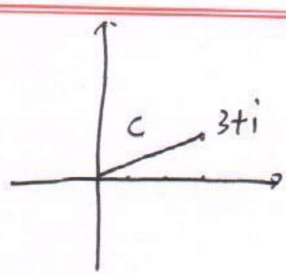
② 当 $1<|z|<2$ 时

$$f(z)=\frac{-2}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{-3}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}-2\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{2^{n+1}}z^n.$$

四. 1. 解: 曲线C的参数方程为: $x=3t$, $y=t$



$$z=z(t)=3t+it,\quad t: 0\to 1$$

$$\therefore \int_C (-2y+2xi)\,dz$$

$$=\int_0^1 (-2t+6ti)(3+i)\,dt$$

$$=(-2+6i)(3+i)\int_0^1 t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}(-2+6i)(3+i)$$

$$=-6+8i$$

2. 解: ∵被积函数在 $|z|=0.5$ 内只有一个奇点 $z=0$.

$$\frac{1-\cos z}{z^5(1-z)}=\frac{1}{z^5}\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)(1+z+z^2+\cdots)$$

$$=\cdots\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)\frac{1}{z}+\cdots$$

$$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^5(1-z)};0\right]=\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}=\frac{11}{24}$$

$$\therefore 原式=2\pi i\cdot\frac{11}{24}=\frac{11}{12}\pi i$$

五. 1. 解: 记 $f(z)=\dfrac{z^{30}}{(z-4)(z^6+1)^5}$

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),4]=\lim_{z\to 4}\frac{z^{30}}{(z^6+1)^5}=\frac{4^{30}}{(4^6+1)^5}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty)=-\operatorname{Res}\left[f\left(\tfrac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=-\operatorname{Res}\left[\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{30}}{\left(\frac{1}{z}-4\right)\left(\frac{1}{z^6}+1\right)^5\cdot z^2},0\right]$$

$$=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1-4z)(1+z^6)^5\cdot z},0\right]=-1$$

$$\therefore 原式=-2\pi i\left\{\operatorname{Res}[f(z),4]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]\right\}$$

$$=-2\pi i\left[\frac{4^{30}}{(4^6+1)^5}-1\right].$$

2. 解: $原式=\dfrac{1}{2}\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx+\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx\right]$$

$$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+1},i\right]\quad(一阶极点)$$

$$=2\pi i\cdot\frac{e^{iz}}{2z}\Big|_{z=i}$$

$$=\pi e^{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2+1},i\right]$$

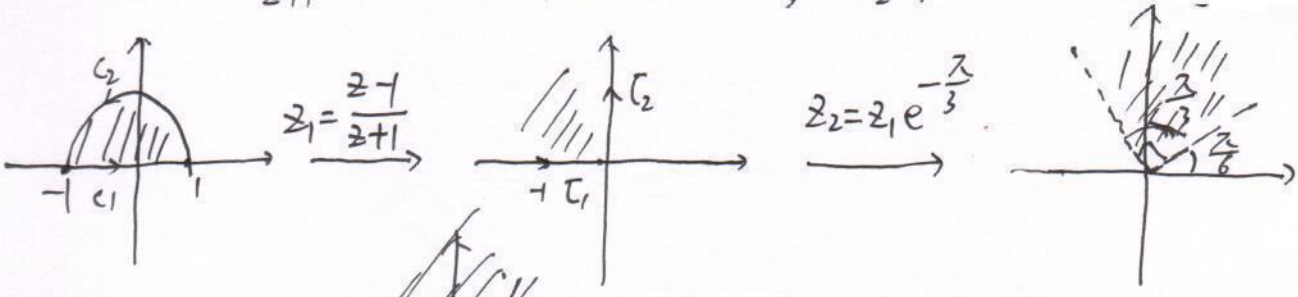
$$=2\pi i\cdot\frac{e^{iz}}{2}\Big|_{z=i}=\pi i e^{-1}$$

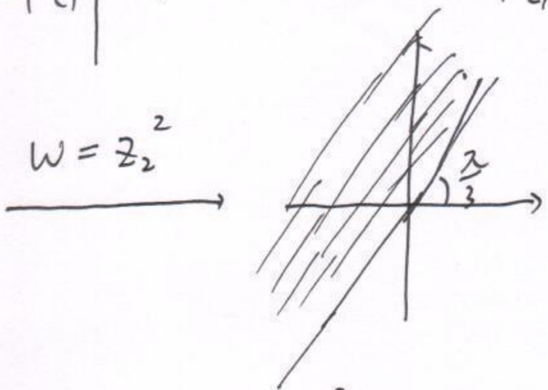
$$\therefore 原式=\frac{1}{2}\left[\pi e^{-1}+\pi e^{-1}\right]$$

$$=\pi e^{-1}.$$

六. 解: $w=\left(\frac{z-1}{z+1}e^{-\frac{\pi}{3}}\right)^2$ 可分解为如下映射的复合:

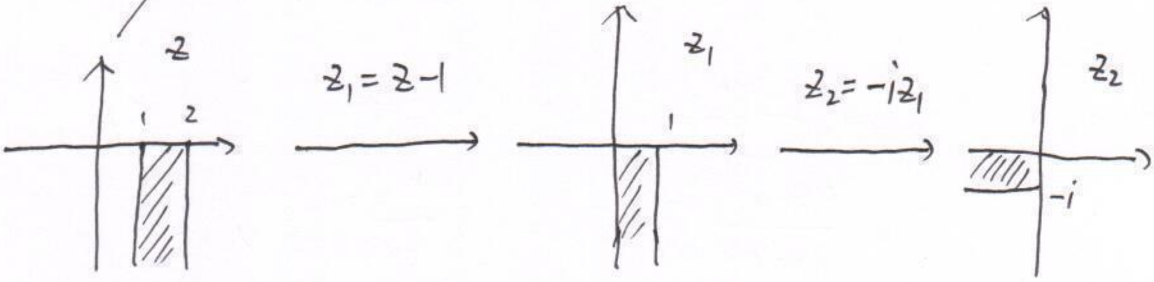
$z_1=\frac{z-1}{z+1}$, $z_2=z_1e^{-\frac{\pi}{3}}$, $z_3=z_2^2$.

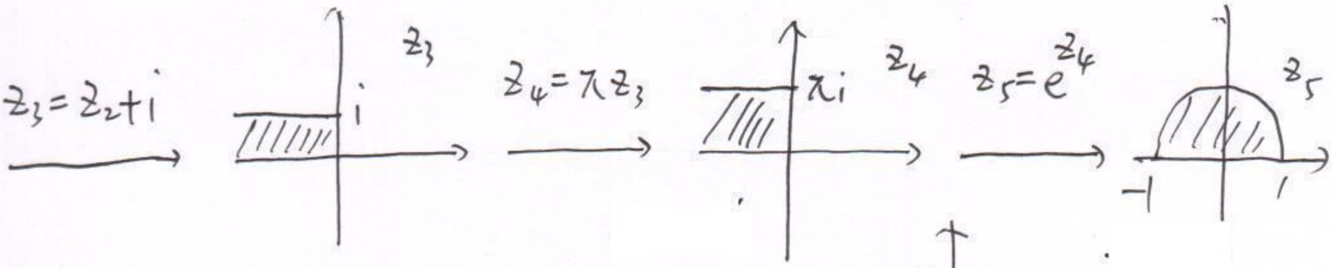


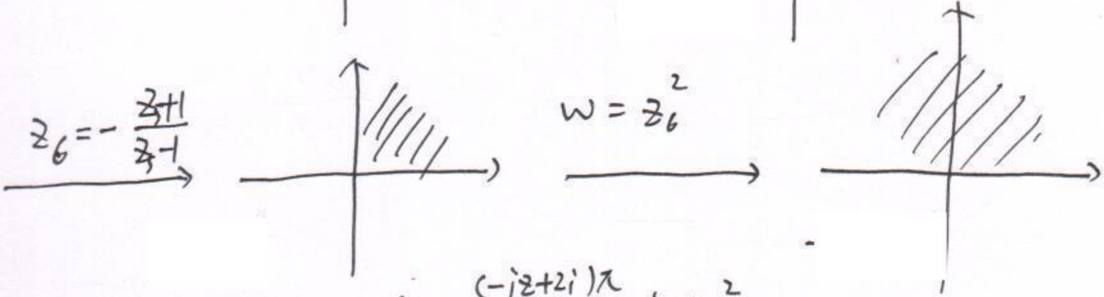


像区域为 $\{w:\ \frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{2}{3}\pi\}$.

七. 解:







$$\therefore w=\left(-\frac{e^{(-iz+2i)\pi}+1}{e^{(-iz+2i)\pi}-1}\right)^2 .$$

八. 解：记 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则方程关于 t 作 Laplace 变换可得：

$$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)-2[sF(s)-f(0)]+F(s)=\frac{-2}{s^2+1}.$$

代入初始条件得：

$$s^2F(s)-1-2sF(s)+F(s)=\frac{-2}{s^2+1}$$

即 $$(s-1)^2F(s)=\frac{s^2-1}{s^2+1}$$

$$\therefore F(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s^2+1)}$$

又 $$F(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+1}$$

$$\therefore f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$=e^t-\cos t.$$

九. 证明一. $\because \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z-z_0} = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} \cdot \dfrac{z}{z-z_0} = 0.$

$\therefore$ 对 $\forall \varepsilon>0$, 取 C 为 $|z-z_0|=R$, 当 R 充分大时

在 C 上, $\left|\dfrac{f(z)}{z-z_0}\right| < \varepsilon$.

由高阶导数公式: $f'(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$

$$\therefore |f'(z_0)| \le \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_C \left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right| \cdot \frac{1}{|z-z_0|}\,ds$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{R}\cdot 2\pi R = \varepsilon.$$

由 ε 的任意性, $f'(z_0)=0$

$\therefore$ 函数 $f(z)$ 在任意一点的导数为 0, 则 $f(z)$ 为常数.

即 $\forall z_0$, $f(z_0)=f(0)$.

证法二: 也可用 Cauchy 积分公式估计

$$f(z_0) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz$$

证法三. 利用刘维尔定理证明, 必须讲清楚 $f(z)$ 在全平面是有界函数.

例如 $\quad f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad |z| < +\infty$

当 $0<|z|<+\infty$ 时

$$\frac{f(z)}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n-1} = \frac{a_0}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}$$

$$\triangleq \frac{a_0}{z} + g(z)$$

$\because \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{f(z)}{z} = 0$, $\therefore \lim\limits_{z\to+\infty} g(z) = 0$, 又 $\because g(z)$ 在全平面解析

$\therefore g(z)$ 有界, 由刘维尔定理 $g(z)$ 为常数且 $g(z)\equiv 0$

$\therefore f(z) = a_0$ 恒为常数.