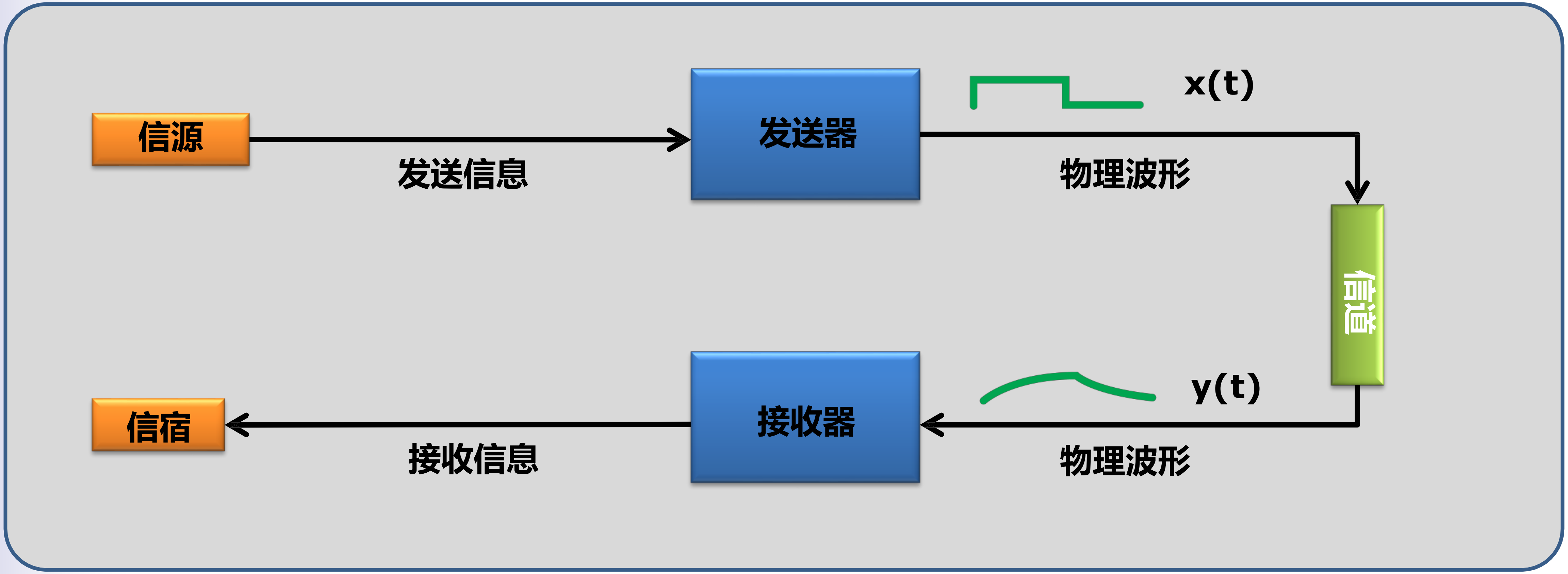
基础信息论

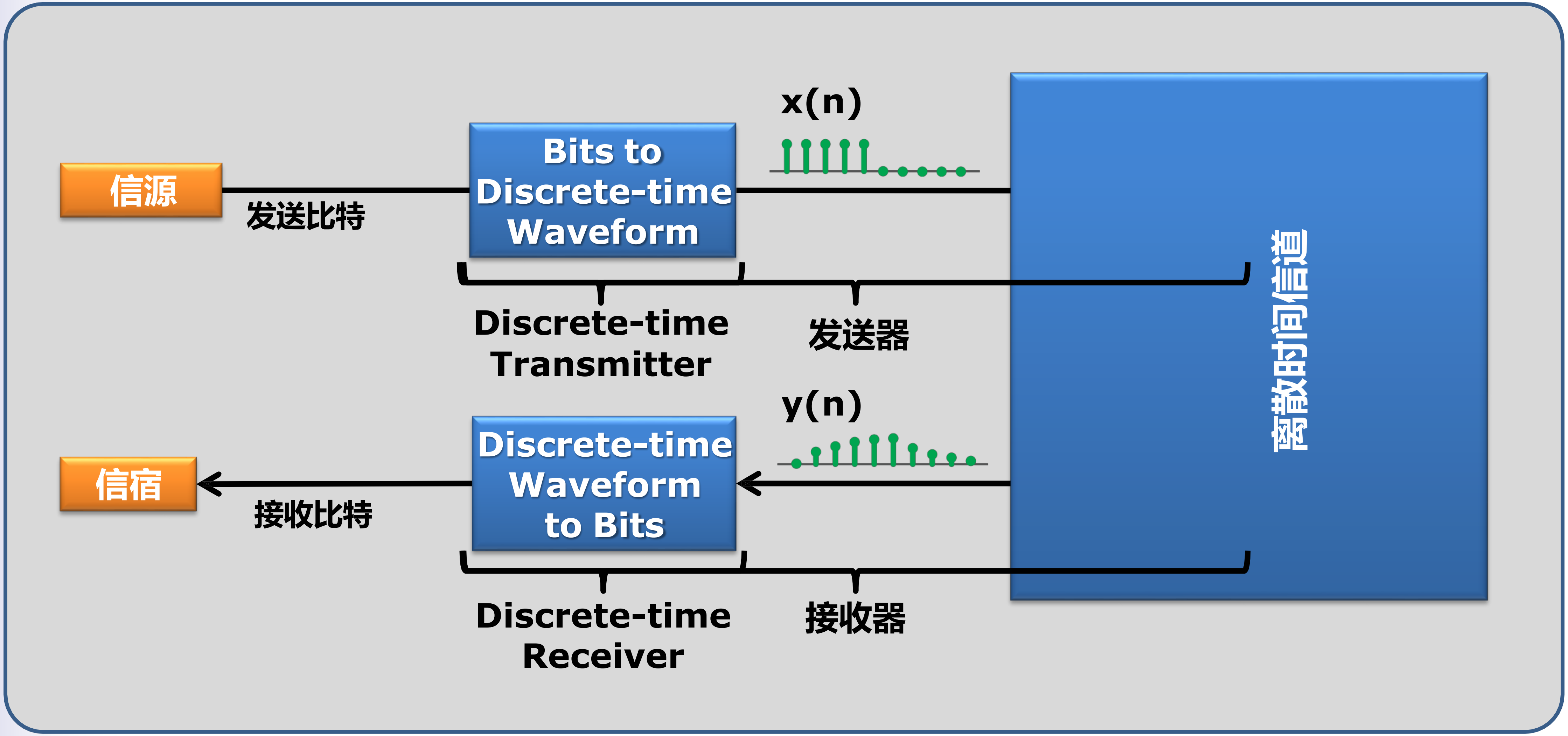
单符号离散信道的信道容量

华中科技大学电信学院

通信系统



离散时间信道



信源
发送比特
Bits to Discrete-time Waveform
x(n)
Discrete-time Transmitter
发送器
y(n)
信宿
接收比特
Discrete-time Waveform to Bits
Discrete-time Receiver
接收器
离散时间信道

学习目标

- 定义单符号信道的数学模型
- 绘制单符号信道转移概率矩阵
- 计算单符号信道的容量

单符号离散信道的信道容量

- 单符号信道的定义和数学模型
  - 信道转移概率矩阵
- 信道容量的定义及一般求取原则
  - 平均互信息、联合熵与条件熵相关概念
- 4种特殊信道的信道容量
  - 无噪 强对称 对称 准对称
- 通过解方程组求信道容量
  - 适用于输入、输出消息数相等的信道；
  - 补充：利用定义进行求解

单符号信道的定义和数学模型

单符号： 信道输入、输出都只是单个符号，可以用单个的随机变量进行描述。

也可理解为：单符号信源+信道

输入：$X \in \{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$ 输出：$Y \in \{y_1, y_2, \ldots\ldots y_m\}$

信道转移（统计）特性：

$x_1 \to$ 信道 $\to y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$p(y_1/x_1) + p(y_2/x_1) + \cdots + p(y_m/x_1) = 1$$

…

…

$x_n \to$ 信道 $\to y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$p(y_1/x_n) + p(y_2/x_n) + \cdots + p(y_m/x_n) = 1$$

信道转移概率矩阵

简称：信道矩阵

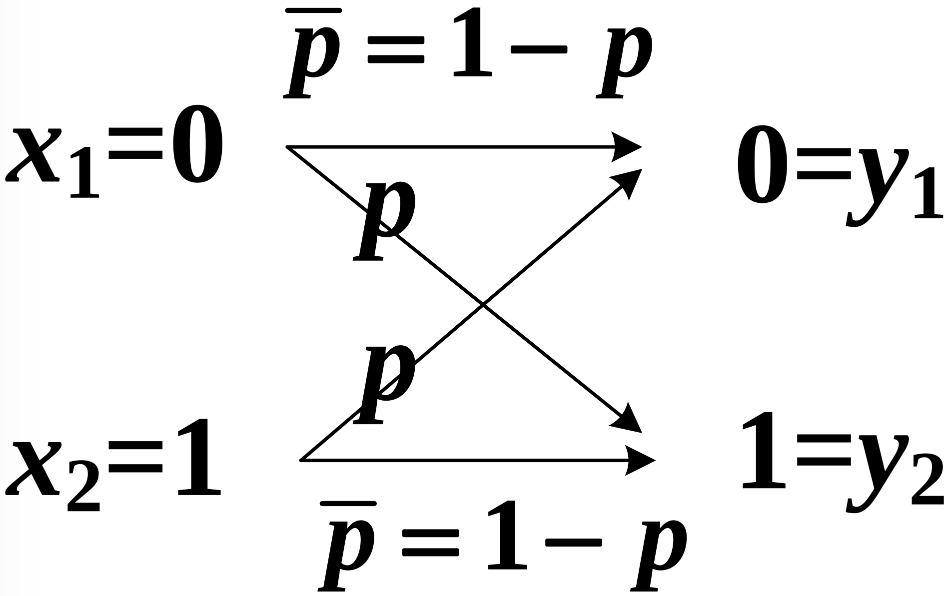
$$\begin{bmatrix} p(y_1/x_1), p(y_2/x_1), \cdots, p(y_m/x_1) \\ p(y_1/x_2), p(y_2/x_2), \cdots, p(y_m/x_2) \\ \cdots\cdots \\ p(y_1/x_n), p(y_2/x_n), \cdots, p(y_m/x_n) \end{bmatrix}_{n\times m} \begin{matrix} \sum = 1 \\ \sum = 1 \\ \vdots \\ \sum = 1 \end{matrix}$$

$$\sum \overset{?}{=} 1 \qquad \sum \overset{?}{=} 1 \qquad \sum \overset{?}{=} 1$$

每一列的和不一定等于1　（只有强对称信道等特殊情况下才等于1）

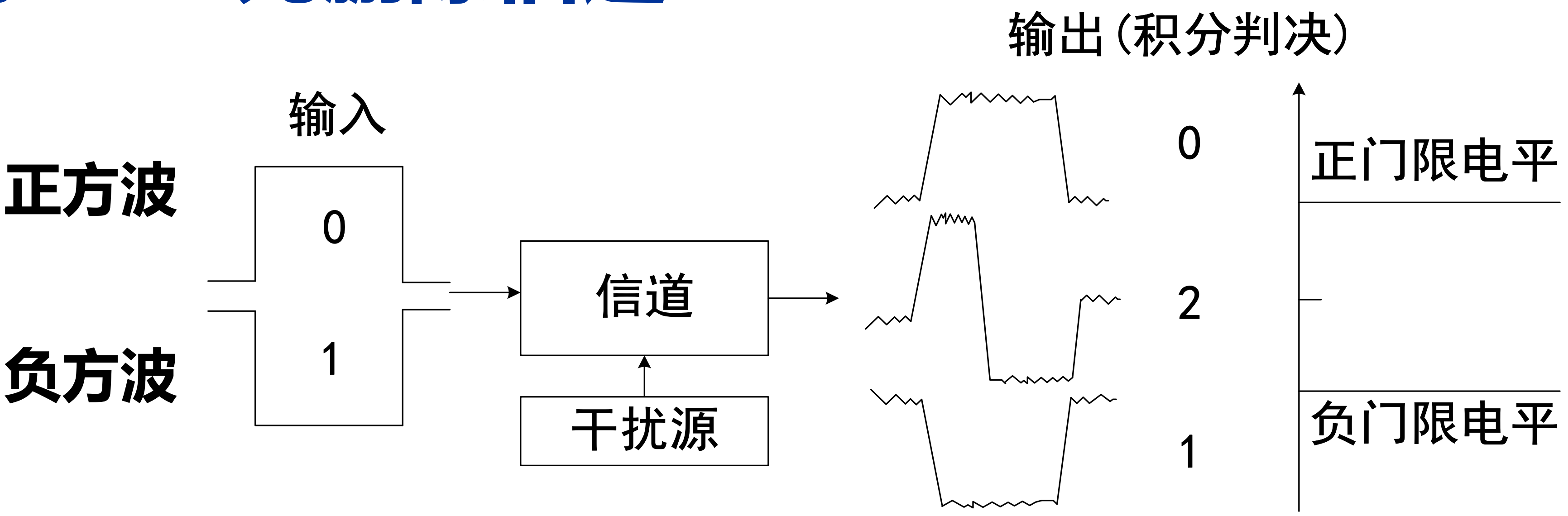
实际信道矩阵实例

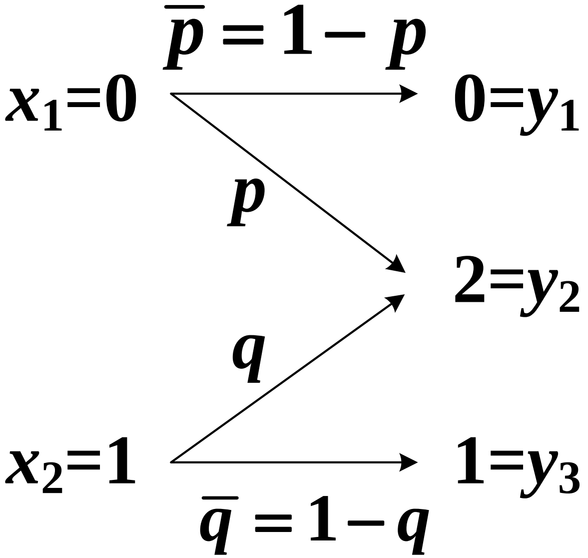
- 实例1　二进制对称信道



$$\begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{bmatrix}$$

实例2　二元删除信道





$$
\begin{array}{c|ccc} & y_1=0 & y_2=2 & y_3=1 \\ \hline x_1=0 & \bar{p} & p & 0 \\ x_2=1 & 0 & q & \bar{q} \end{array}
$$

单符号离散信道的信道容量

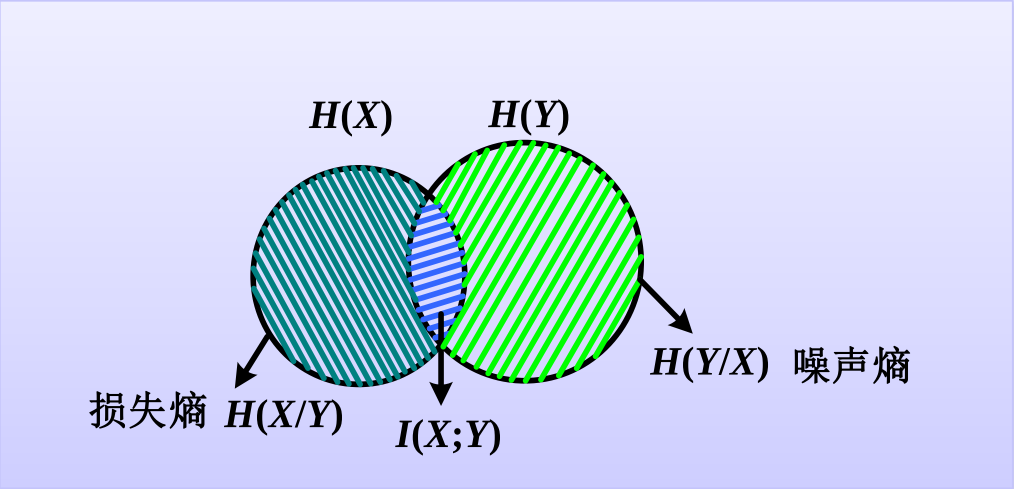
- 单符号信道的定义和数学模型
- 信道容量的定义及一般求取原则
  - 平均互信息、联合熵与条件熵相关概念
- 几种特殊信道的信道容量
  - 无噪 强对称 对称 准对称
- 通过解方程组求信道容量
  - 适用于输入、输出消息数相等的信道；
  - 补充：利用定义进行求解

回忆平均互信息

- 定义：原始信源熵与信道疑义度之差称为平均互信息

$$I(X;Y) \overset{def}{=} H(X) - H(X/Y)$$

- 物理意义：接收到输出符号集Y以后，平均每个符号获得的关于X的信息量。



平均互信息量性质

- 平均互信息量等于X，Y的熵与它们的联合熵之差，即
  - $I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)$
- 平均互信息量总大于或等于0，即
  - $I(X;Y)=I(Y;X)\geq 0$
- X与X的平均互信息量等于X的熵，即
  - $I(X;X)=H(X)$

$$I(X;Y)=f[p(x_i),p(y_j/x_i)]$$

- 对于固定的信源分布，平均互信息量$I(X;Y)$是信道传递概率$p(y/x)$的下凸函数。
- 对于固定的信道，平均互信息$I(X;Y)$是输入信源的概率分布$p(x)$的上凸函数。

数据处理定理的内容（略）

对于串联信道, 例: 微波接力通信(地球曲率、功率限制)。

$$X \rightarrow \boxed{\text{信道I}} \xrightarrow{Y} \boxed{\text{信道II}} \rightarrow Z$$

已知 Y 的条件下，X 与 Z 无关。

数据处理定理：

$$I(X;Z) \le I(X;Y)$$

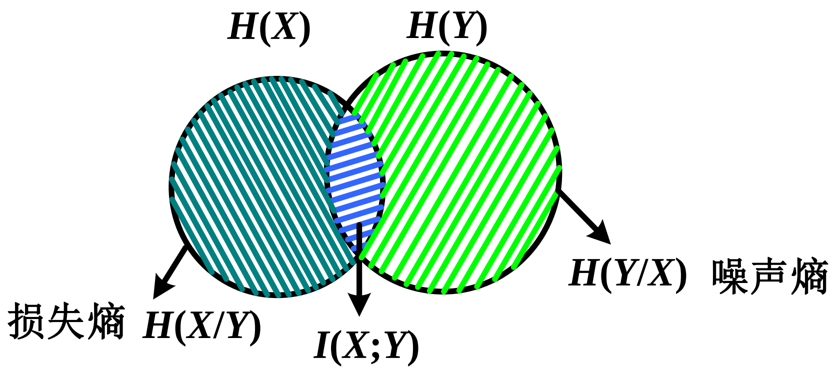
$$I(X;Z) \le I(Y;Z)$$

物理意义： 每经过一级信道，或每进行一次数据处理，平均互信息量趋于变小（尽管消息的形式可能更加有用）。

回忆平均互信息的性质

3.极值性

$$I(X;Y) \le H(X)$$
$$I(Y;X) \le H(Y)$$



证明：

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y)$$

$$I(Y;X) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$\because \quad H(X/Y) \ge 0, H(Y/X) \ge 0$$

$$\therefore \quad I(X;Y) \le H(X), I(X;Y) \le H(Y)$$

条件熵有什么性质?

物理意义：

信宿 Y 通过信道获得的关于信源 X 的信息至多是信源熵$H(X)$；反过来一样。

凸函数性

$$\therefore \quad I(X;Y) = f[\underline{p(x_i)}, \underline{p(y_j/x_i)}] \quad i = 1, \ldots, n \;\; j = 1, \ldots, m$$

信源概率分布，向量

输入输出的条件概率/信道传递概率分布，矩阵

1. 如果固定信道，调节信源，则有：

$$I(X;Y) = f[p(x_i)]$$

2. 如果固定信源，调节信道，则有：

$$I(X;Y) = f[p(y_j/x_i)]$$

凸函数性(续)

(2) 凸函数性质的具体内容

当信道固定时，$I(X;Y)$**是关于**$p(x_i)$ **的上凸函数**

$$I[\alpha p_1(x_i)+(1-\alpha)\cdot p_2(x_i)] \geq \alpha\cdot I[p_1(x_i)]+(1-\alpha)\cdot I[p_2(x_i)]$$

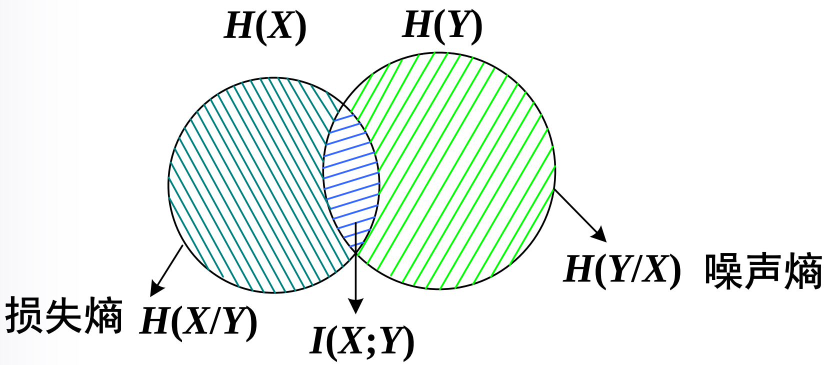
该性质是研究信道容量的理论基础

当信源固定时，$I(X;Y)$**是关于**$p(y_j/x_i)$**的下凸函数**

$$I[\alpha p_1(y_j/x_i)+(1-\alpha)\cdot p_2(y_j/x_i)] \leq \alpha\cdot I[p_1(y_j/x_i)]+(1-\alpha)\cdot I[p_2(y_j/x_i)]$$

该性质是研究率失真函数的理论基础

信道容量的定义及一般求取原则



如果信源熵为 $H(X)$，当然希望在信道输出端接收全部的信息量。

但由于干扰的存在，信宿只能接收到 $I(X;Y)$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y)$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(Y/X)$$

⇓

信道容量：　在某一信道中，$I(X;Y)$可能达到的最大值。

$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y)$$

*

单位：比特/符号

输入信源的概率分布可调

有时更关心：**单位时间内信道的极限信息传输率**。

假设平均每个符号的传输时间需要 t 秒：

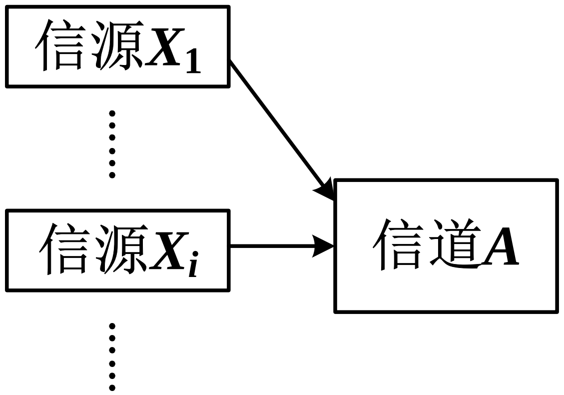
$$C_t = \frac{C}{t} = \frac{1}{t}\max_{p(x_i)} I(X;Y)$$

*

$$\frac{\text{比特/符号}}{\text{秒/符号}}$$

单位：比特/秒

问题：如何测定某实际信道的信道容量?



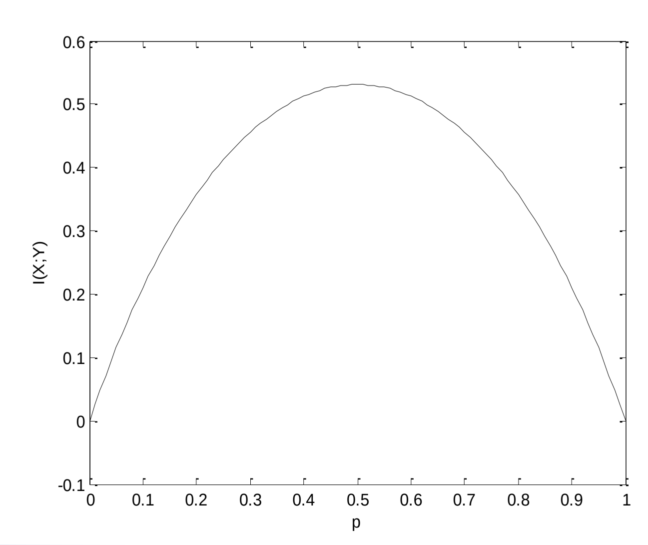
用实验方法测定信道容量的步骤

1. 选定信道，信道转移特性保持不变
2. 选择不同试验信源
3. 寻找平均互信息量的**最大值**

上述实验测量方法很直观，但由于实际的信源有**无穷多**种可能的概率分布，这种测量方法并不现实。因此，我们必须采用**数学计算**方法。

问题：最大值如何计算？计算依据是什么？

分析：当固定信道转移特性的条件下，平均互信息量是信源概率分布的上凸函数。



上凸函数的特点

函数的最大值或者在边界上，或者对应中间导数等于0的点，而该点是唯一的导数等于0的点。

信道容量的计算即为多元函数求极值的问题。但由于信源概率分布必须满足归一化条件。因此，对平均互信息量的最大值的计算就转化为在归一化条件下，计算信源概率分布的**条件极值**问题。

因此，最一般的方法就是采用**拉格朗日乘数法**。

注意：信道容量是**信道本身特性的参量**。 尽管这个最大值的计算过程涉及到最佳信源的寻找问题，但一旦找到这样一个最大值以后，这个值就与信源无关了。

对比：电阻器的阻值　物体的密度

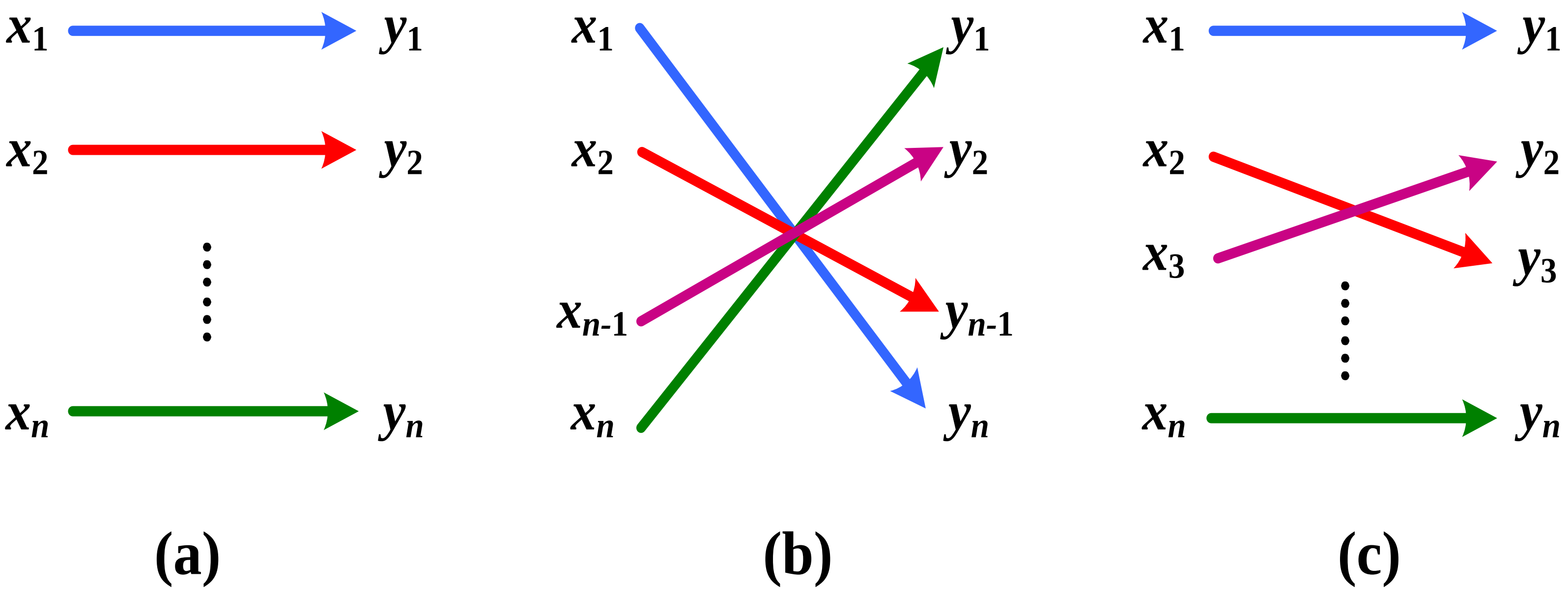
4种特殊信道的信道容量

- 特殊信道：信道转移概率满足特定规律的信道
- 1. 离散无噪信道的信道容量
- 2. 强对称离散信道的信道容量
- 3. 对称离散信道的信道容量
- 4. 准对称离散信道的信道容量

离散无噪信道的信道容量

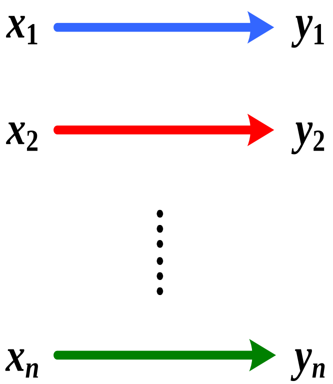
- 三种子类型：
- 1. 具有一一对应关系的无噪信道（ $n=m$ ）
- 2. 具有扩展性能的无噪信道（ $n<m$ ）
- 3. 具有归并性能的无噪信道（ $n>m$ ）

1. 具有一一对应关系的无噪信道($n = m$)



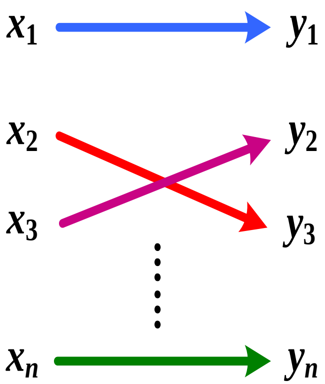
特点：每条输入消息对应唯一的一条输出消息；或反之。

——对应信道矩阵的特点



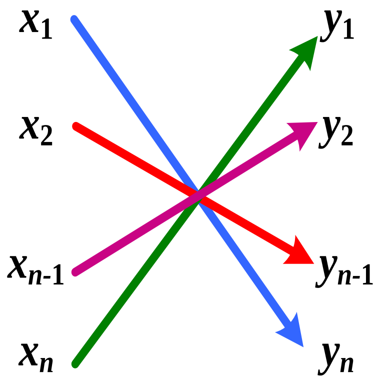
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(a)



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(c)



$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

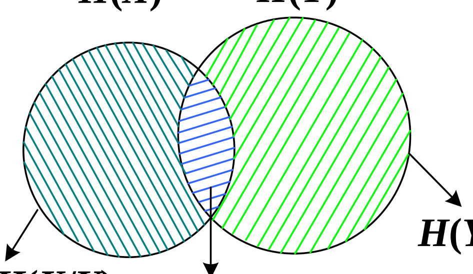
特点:

(1)每一行只有1个1，其余为0

(2)每一列只有1个1，其余为0

分析：对于一一对应信道，$C=?$ ；最佳输入分布对应?

- 信道容量的一般求取原则：求解**平均互信息量**关于**输入信源分布**在**归一化条件下的条件极值**
- 对于特殊信道，则没必要这么繁琐。



平均互信息量的三种计算方法

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)$$

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(Y/X)$$

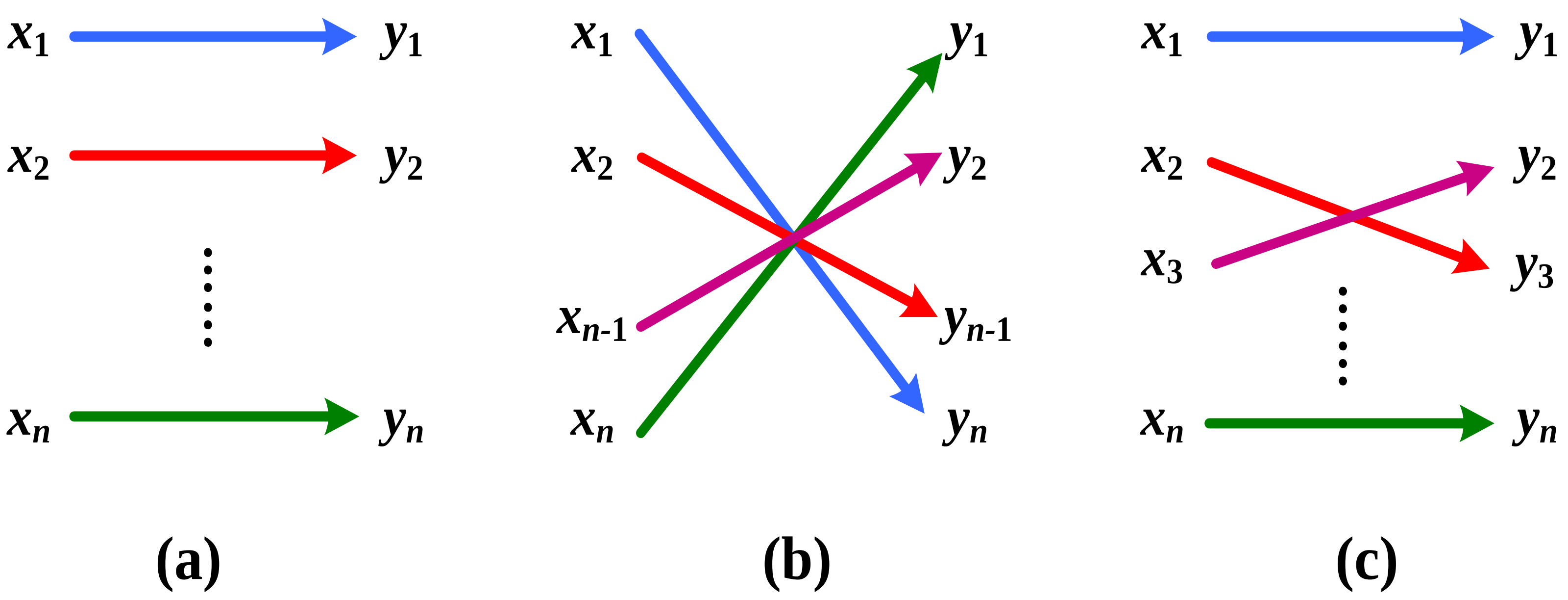
问题：$H(X/Y)=?$

回答：$H(X/Y)=0$ $\Rightarrow$

$$C=\max_{p(x_i)} I(X;Y)=\max_{p(x_i)} H(X)$$

$C=\log n$ 最佳输入：$p(x_i)=\dfrac{1}{n}$ *

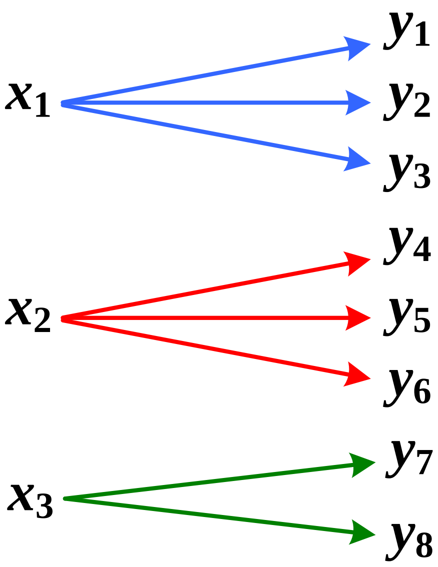
问题：在一一对应信道中，$H(X)$ 与 $H(Y)$ 之间的关系?



回答：

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=H(X)$$
$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=H(Y)$$
$$\therefore\ H(X)=H(Y)$$

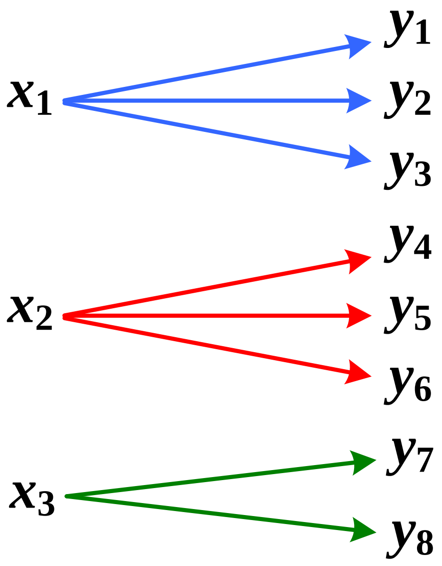
2. 具有扩展性能的无噪信道（$n < m$）



特点：

1. 输出是对输入的扩展。
2. 一条输入消息可能对应多条输出消息。
3. 但一条输出消息只对应一条输入消息。

扩展性能信道矩阵的特点



行：可能有多个非零元素。

列：只有1个非零元素。

分析：$C=?$；最佳输入分布对应?

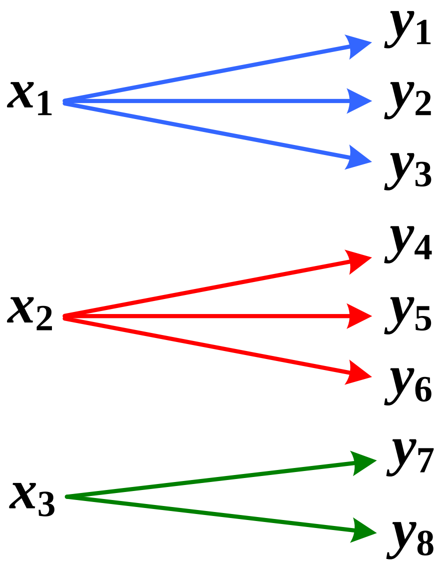
特点：当 Y 已知时，X 跟着确定。

$$H(X/Y)=0 \Rightarrow C=\max_{p(x_i)}\left[H(X)-H(X/Y)\right] =\max_{p(x_i)} H(X)$$

$C=\log n$ 最佳输入：$p(x_i)=\dfrac{1}{n}$ *

$$\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(y_4/x_2) & p(y_5/x_2) & p(y_6/x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(y_7/x_3) & p(y_8/x_3) \end{bmatrix}$$

问题：在扩展无噪信道中，$H(X)$ 与 $H(Y)$ 之间的关系？



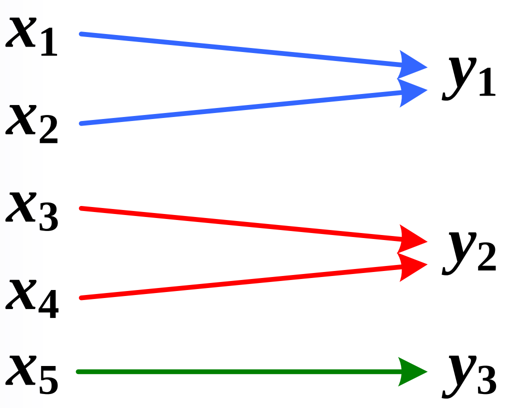
回答：

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=H(X)$$

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)<H(Y)$$

$$\therefore\ H(X)<H(Y)$$

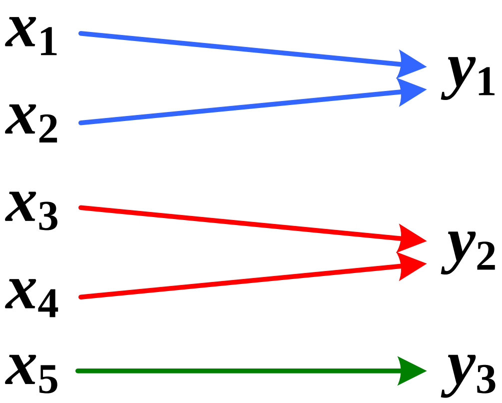
3. 具有归并性能的无噪信道（$n > m$）



特点：

1. 输出是对输入的归并。
2. 一条输出消息可能对应多条输入消息。
3. 但一条输入消息只对应一条输出消息。

归并性能信道矩阵的特点



元素：非0即1。

行：只有1个1。

列：可能不止1个1。

分析：$C=?$ ；最佳输入分布对应?

特点：当 X 已知时, Y 跟着确定。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(Y/X)=0 \Rightarrow C=\max_{p(x_i)}\left[H(Y)-H(Y/X)\right]=\max_{p(x_i)} H(Y)$$

$C=\log m$ 最佳输入：使 $p(y_j)=\dfrac{1}{m}$ 的 $p(x_i)$ *

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

解如下方程组：

$$
\begin{cases}
p(y_1) = p(x_1)\cdot 1 + p(x_2)\cdot 1 = 1/3 \\
p(y_2) = p(x_3)\cdot 1 + p(x_4)\cdot 1 = 1/3 \\
p(y_3) = p(x_5)\cdot 1 = 1/3
\end{cases}
$$

$\therefore$ **最佳输入概率分布并不是唯一的**

问题：在归并无噪信道中， $H(X)$与 $H(Y)$之间的关系？

回答： $I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) < H(X)$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(Y)$$

$$\therefore\ H(Y) < H(X)$$

练习：试求以下信道的信道容量及最佳输入分布

(1) $$[P_1]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

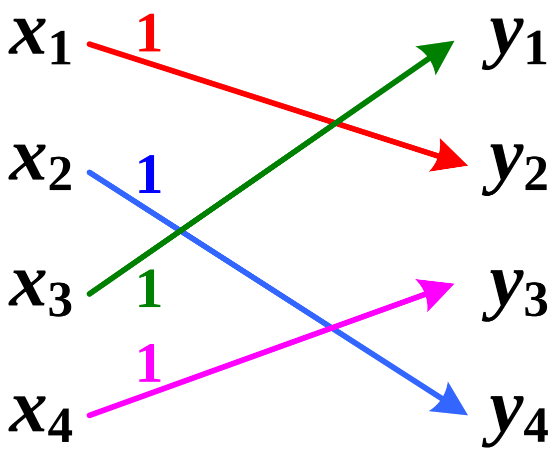
(2) $$[P_2]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) $$[P_3]=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$(1)\ [P_1]=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

解：

信道转移图



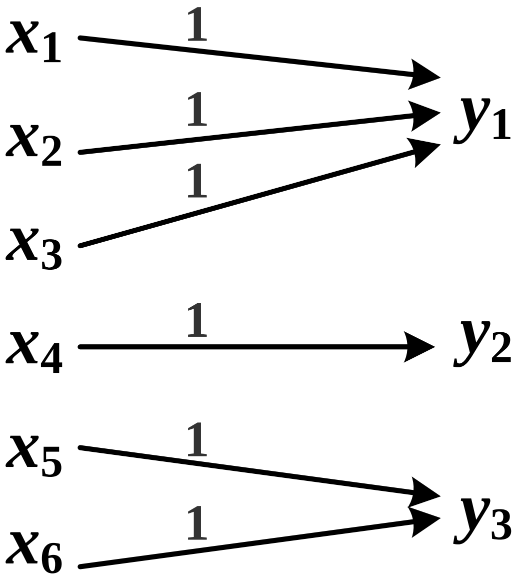
从信道转移图可看出，是一一对应信道，所以：

$C=\log 4=2$ 比特/符号　　最佳输入分布：等概率分布

$$
(2)\ [P_2]=\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

解：

信道转移图



从信道转移图可看出，是归并信道，所以：

$C=\log 3=1.585$ **比特/符号　最佳输入分布：？**

$$[P_2]=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

解如下方程组：

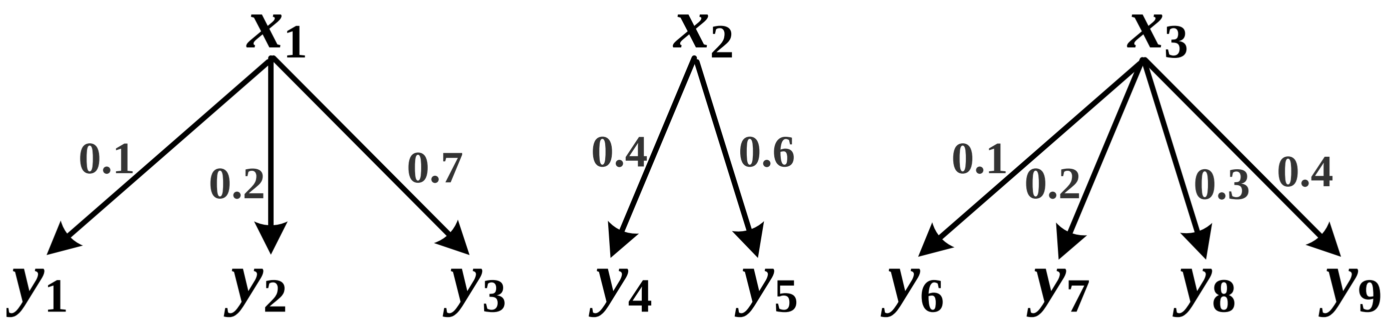
$$\begin{cases} p(y_1)=p(x_1)\cdot 1+p(x_2)\cdot 1+p(x_3)\cdot 1=1/3 \\ p(y_2)=p(x_4)\cdot 1=1/3 \\ p(y_3)=p(x_5)\cdot 1+p(x_6)\cdot 1=1/3 \end{cases}$$

$\therefore$ **最佳输入概率分布并不是唯一的**

$$
(3)\ [P_3]=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}
$$

解：

信道转移图



从信道转移图可看出，是扩展信道，所以：

$C=\log 3=1.585$ **比特/符号 最佳输入分布：等概率分布**

信道类型	特点	结论
一一对应信道 无噪无损信道 $n=m$	输入确定→输出确定 输出确定→输入确定 $H(Y/X)=0, H(X/Y)=0$	$C=\log n$ 最佳输入： 输入等概
扩展信道 无损信道 $n<m$	输出确定→输入确定 反过来不行 $H(X/Y)=0$	$C=\log n$ 最佳输入： 输入等概
归并信道 无噪信道 $n>m$	输入确定→输出确定 反过来不行 $H(Y/X)=0$	$C=\log m$ 最佳输入：使输出等概的输入

技巧：输入与输出谁的消息数少，就取谁的对数。

前提：必须是以上三种信道之一

特殊信道的信道容量

- 特殊信道：信道转移概率满足特定规律的信道
- 1. 离散无噪信道的信道容量
- 2. 强对称离散信道的信道容量
- 3. 对称离散信道的信道容量
- 4. 准对称离散信道的信道容量

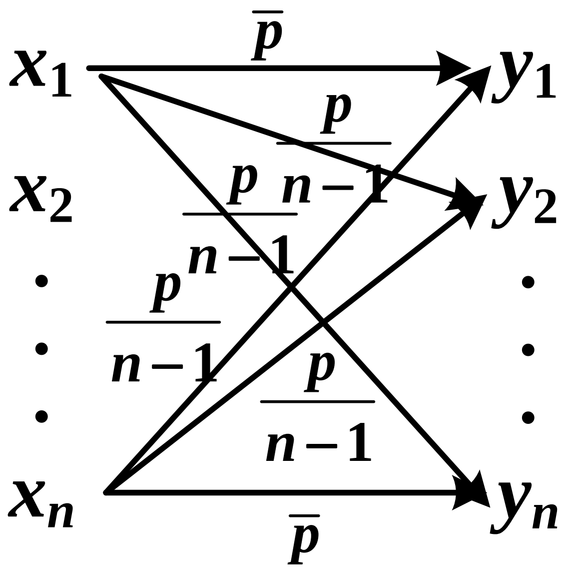
1. 强对称离散信道的定义

a. 输入、输出消息数相等（n 个）

b. 每个输入符号正确传递概率 $\bar{p}$

总错误传递概率 $1-\bar{p}=p$

其它符号错误传递概率 $\dfrac{p}{n-1}$



2. 信道矩阵特点

$$\begin{bmatrix} \bar{p} & \frac{p}{n-1} & \cdots & \frac{p}{n-1} \\ \frac{p}{n-1} & \bar{p} & \cdots & \frac{p}{n-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{p}{n-1} & \frac{p}{n-1} & \cdots & \bar{p} \end{bmatrix}$$

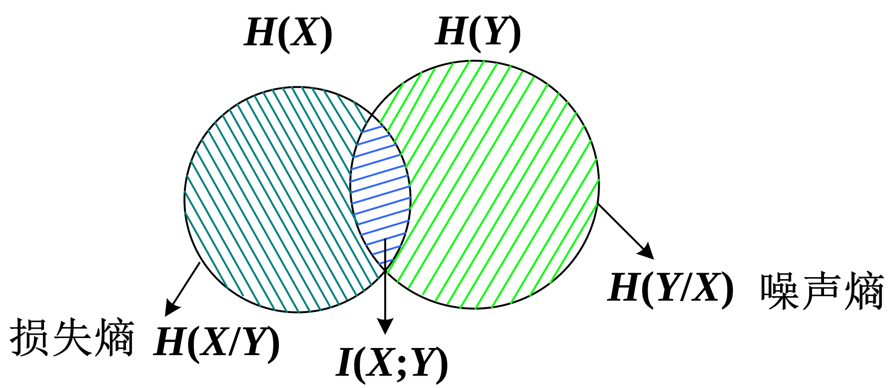
a. 对角线元素都为 $\bar{p}$

b. 其余元素都为 $\frac{p}{n-1}$

c. 每行之和等于1（正常）
每列之和也等于1（特殊）

d. 矩阵为对称阵

3. 信道容量计算公式的推导及最佳信源分布



$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)$$

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY)$$

问题：三种形式中，应用哪种进行推导比较方便?

回答：第二种，因为 $p(y_j/x_i)$ 是已知的。

首先，推导强对称条件下 $H(Y/X)$ 的计算公式。

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p(x_iy_j)\cdot\log p(y_j/x_i)$$

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p(x_i)\cdot p(y_j/x_i)\cdot\log p(y_j/x_i)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\cdot\sum_{j=1}^{n}p(y_j/x_i)\cdot\log p(y_j/x_i)$$

对信道矩阵的每一行，是个常量。

$$=\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\cdot H(\text{行矢量})$$

$$=H(\text{行矢量})$$

将上式代回平均互信息量的第二种表示式：

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=H(Y)-H(\text{行矢量})$$

$$\therefore \quad C=\max_{p(x_i)}[I(X;Y)]=\max_{p(x_i)}[H(Y)]-H(\text{行矢量})$$

对强对称信道，信道容量的计算转化为求最大信宿熵。显然，当输出信号等概率分布时，$H(Y)$ 最大。但必须保证存在某种信源分布恰好使输出等概率分布。

分析：是否存在某种信源分布，满足上述条件?

$$\begin{bmatrix} \bar{p} & \frac{p}{n-1} & \cdots & \frac{p}{n-1} \\ \frac{p}{n-1} & \bar{p} & \cdots & \frac{p}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p}{n-1} & \frac{p}{n-1} & \cdots & \bar{p} \end{bmatrix}
\qquad
\begin{cases} p(y_1)=p(x_1)\cdot\bar{p}+[1-p(x_1)]\cdot\dfrac{p}{n-1} \\ p(y_2)=p(x_2)\cdot\bar{p}+[1-p(x_2)]\cdot\dfrac{p}{n-1} \\ \cdots\cdots \\ p(y_n)=p(x_n)\cdot\bar{p}+[1-p(x_n)]\cdot\dfrac{p}{n-1} \end{cases}$$

观察上述方程组发现，当输入为等概率分布时，输出也一定为等概率分布，所以：

$$C=\max_{p(x_i)}[I(X;Y)]=\max_{p(x_i)}[H(Y)]-H(\text{行矢量})$$

$$=\log n-[-\bar{p}\log\bar{p}-(n-1)\cdot\frac{p}{n-1}\log\frac{p}{n-1}]$$

$$=\log n+\bar{p}\log\bar{p}+p\log\frac{p}{n-1}$$

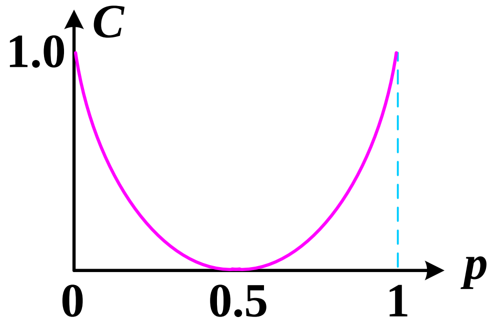
* 最佳信源分布：等概。

要求: 能推导信道容量的计算公式, 并分析最佳输入分布。

4. 二进制对称信道(特例)

代入 $n=2$ ，得:

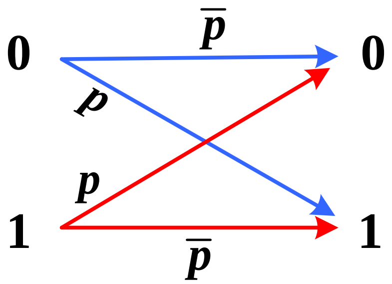
$$C = 1 + \bar{p}\log\bar{p} + p\log p$$



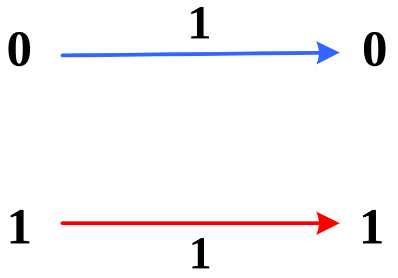
二进制对称信道容量曲线

一般:

$$\begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{bmatrix}$$

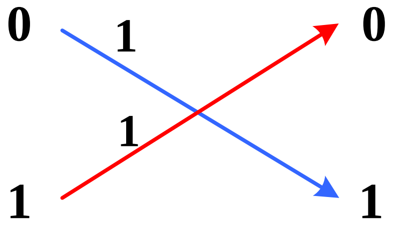


当$p=0$ 时: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



$C=\log 2$
$=1$ 比特/符号

当$p=1$ 时: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



$C=\log 2$
$=1$ 比特/符号

当$p=0.5$时: $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

$p(y_j/x_i)=0.5$

$p(y_j)=p(x_1)\cdot 0.5+p(x_2)\cdot 0.5=0.5$

无用信道
强噪声信道

$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=0$

X、Y 独立

X、Y独立
$C=0$

例 设有扰离散信道的输入端是A, B, C, D 4个字母。该信道的正确传输概率为1/2，错误传输概率平均分布在其它三个字母上。求信道容量及最佳输入分布。

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

信道为强对称信道。

$$C = \log n - H(\text{行矢量})$$

$$= \log 4 - [-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - 3\cdot\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}]$$

$$\approx 0.208 \text{ 比特/符号}$$

最佳输入分布：

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4}$$

例 有一个二元对称信道，其信道矩阵 $\begin{bmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.02 & 0.98 \end{bmatrix}$ 该信道能以1500二元符号/秒的速度传输符号。现有一消息序列共有14000个二元符号，并设 $P(0)=P(1)=1/2$，问从消息传输的角度来考虑，10秒钟内能否将这消息序列**无失真**地传递完?

思路:

要传递的信息量 $\overset{?}{\leq}$ 信道极限传输能力 × 所要求的传输时间

思路：

要传递的信息量 $\overset{?}{\leq}$ 信道极限传输能力 $\times$ 所要求的传输时间

计算步骤：

(1) 计算信源的单符号熵

(2) 计算信源符号序列含有的信息量

(3) 计算信道传输能力（信道容量 单位：比特/符号）

(4) 计算信道传输能力（信道容量 单位：比特/秒）

(5) 判断是否符合要求？ （计算10秒可传递的信息量）

(1) $H(X)=\log 2=1$ 比特/符号

(2) $H(X_1 \dots X_N)=14000$ 符号 $\cdot 1$ 比特/符号 $=14000$ 比特

(3) $C=\log n - H$(行矢量)

$=1-[-0.98\log 0.98-0.02\log 0.02]=0.8586$ 比特/符号

(4) 比特/符号 · 符号/秒= 比特/秒

$C_t=0.8586\cdot 1500=1.288\cdot 10^3$ 比特/秒

(5) 计算10秒钟可传递的信息量

$I=10\cdot C_t=1.288\times 10^4$ 比特 $<$ 1.4×10^4 比特

结论：不能实现无失真传输。

4种特殊信道的信道容量

- 特殊信道：信道转移概率满足特定规律的信道

- 1. 离散无噪信道的信道容量
- 2. 强对称离散信道的信道容量
- 3. 对称离散信道的信道容量
- 4. 准对称离散信道的信道容量

1.对称信道的定义

行可排列： 一个矩阵的每一行都是同一集合 $Q\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ 中各元素(注：重复元素分别计)的不同排列。

例：矩阵中的某行为 $0.3\ \ 0.3\ \ 0.3\ \ 0.1$

$$Q = \{0.1, 0.3, 0.3, 0.3\}$$

$$Q = \{0.3, 0.1\}$$

1.对称信道的定义

行可排列： 一个矩阵的每一行都是同一集合$Q\{q_1,q_2,...,q_m\}$中各元素(注：重复元素分别计)的不同排列。

列可排列： 一个矩阵的每一列都是同一集合$P\{p_1,p_2,...,p_n\}$中各元素的不同排列。

矩阵可排列： 矩阵的行和列**都**是可排列的。

对称信道的定义

信道矩阵具有可排列性的信道。

练习：根据下列信道转移概率矩阵，选择对称信道：

$$[P_1]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$[P_2]=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[P_3]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$[P_4]=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

2. 信道容量公式的推导及最佳输入分布

应用平均互信息量的第二种形式：

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

推导对称信道条件下 $H(Y/X)$ 的计算公式：

$$\begin{aligned}
H(Y/X) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i y_j)\log p(y_j/x_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)\cdot p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\cdot \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\cdot H(\text{行矢量}) = H(\text{行矢量})
\end{aligned}$$

将上式代回平均互信息量的第二种形式：

$$C=\max_{p(x_i)} I(X;Y)=\max_{p(x_i)}[H(Y)-H(\text{行矢量})]$$

$$=\max_{p(x_i)}[H(Y)]-H(\text{行矢量})$$

分析：是否存在某种信源分布，使输出符号等概？

$$\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & \dots & p(y_m/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & \dots & p(y_n/x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1/x_n) & p(y_2/x_n) & \dots & p(y_m/x_n) \end{bmatrix}$$

由于列可排列，每列元素的和为常量。

$$p(y_j)=p(x_1)\cdot p(y_j/x_1)+p(x_2)\cdot p(y_j/x_2)+\dots+p(x_n)\cdot p(y_j/x_n)$$

如果 $p(x_i)=\dfrac{1}{n} \Rightarrow p(y_j)=\dfrac{1}{n}\cdot\underline{\sum_{i=1}^{n} p(y_j/x_i)} \Rightarrow p(y_j)$ 为常量

对于对称信道：　　　　　　(与强对称信道比较)

$\therefore \quad C = \log m - H(\text{行矢量})$ 　最佳输入：$p(x_i) = \frac{1}{n}$ *

要求: 能推导信道容量的计算公式, 并分析最佳输入分布

- 练习：　求如下信道的信道容量及最佳输入分布。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

行可排列
列可排列

解：　该信道为对称信道。

$$C = \log 4 - [-2 \cdot \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6}\log\frac{1}{6}]$$

$$= 0.0817 \text{ 比特/符号}$$

最佳输入分布：　$p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2}$

4种特殊信道的信道容量

- 特殊信道：信道转移概率满足特定规律的信道
- 1. 离散无噪信道的信道容量
- 2. 强对称离散信道的信道容量
- 3. 对称离散信道的信道容量
- 4. 准对称离散信道的信道容量

4. 准对称离散信道的信道容量

定义：一个 n 行m 列离散信道矩阵 $[P]$ 的**行可排列**，**但列不可排列**。但是矩阵中的m 列可分成 s 个不相交的子集，各子集分别有 $m_1,m_2,\ldots,m_s$ 列。每个子集对应的**子矩阵**$[P_k]$**具有可排列性**。

$$[P]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{bmatrix} \Rightarrow [P_1]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad [P_2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

行可排列
列不可排列

行可排列
列可排列

$$[P]=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\0.2 & 0.1 & 0.7\end{bmatrix} \longrightarrow [P_1]=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2\\0.2 & 0.7\end{bmatrix} \quad [P_2]=\begin{bmatrix}0.1\\0.1\end{bmatrix}$$

行可排列
列不可排列

行可排列
列可排列

$$[P]=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6\\1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3\end{bmatrix} \longrightarrow [P_1]=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$[P_2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix} \quad [P_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

行可排列
列不可排列

定理：

对于准对称信道，达到信道容量的最佳输入分布是**等概率分布**，其信道容量为：

$$C = \log n - \sum_{k=1}^{s} N_k \log M_k - H(q_1, q_1, \ldots, q_m) \quad *$$

其中：n 是输入符号集的个数

N_k 是第k个子矩阵中的行元素之和(常数)

M_k 是第k个子矩阵的列元素之和(常数)

s 是子矩阵的个数

$q_1, q_2, \ldots, q_m$ 为整个信道矩阵中的行元素(常数)

定理证明

对于准对称信道，达到信道容量的最佳输入分布是等概率分布，其信道容量为：

$$C = \log n - \sum_{k=1}^{s} N_k \log M_k - H(q_1, q_1, \ldots, q_m)$$

证明思路：

1. 证明等概率分布是最佳输入分布。
2. 在1的基础上，再证明计算公式的正确性。

证明见后附补充内容

综合前面的几项结果：

$$H(Y/X)=H(q_1,q_1,\ldots,q_m)$$

$$H(Y)\text{的前一部分}=\log n$$

$$H(Y)\text{的后一部分}=-\sum_{k=1}^{s}N_k\log M_k$$

最终可得：

$$C=H(Y)-H(Y/X)$$

$$=\log n-\sum_{k=1}^{s}N_k\log M_k-H(q_1,q_1,\ldots,q_m)$$

例: 求如下信道矩阵的信道容量及最佳输入分布

$$P=\begin{bmatrix}1-p-q & q & p\\ p & q & 1-p-q\end{bmatrix}$$

可分解为：　行列均可排列

$$[P_1]=\begin{bmatrix}1-p-q & p\\ p & 1-p-q\end{bmatrix}\quad [P_2]=\begin{bmatrix}q\\ q\end{bmatrix}$$

n：信道矩阵行数

N_k：子集k行元素的和

M_k：子集k列元素的和

H：整个信道矩阵行熵

s：子矩阵的个数

套用计算公式：

$$C=\log n-\sum_{k=1}^{s}N_k\log M_k-H(q_1,q_1,\ldots,q_m)$$

$$C=\log 2-[(1-q)\log(1-q)+q\log 2q]-H(1-p-q,p,q)$$

最佳输入分布：$p(x_1)=p(x_2)=\dfrac{1}{2}$

练习：求如下信道的信道容量及最佳输入分布

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

准对称信道

$$[P_1]=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$[P_2]=\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad [P_3]=\begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

行可排列

列可排列

$$C=\log n-\sum_{k=1}^{s} N_k \log M_k - H(\text{行矢量})$$

$$=\log 2-\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\log\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\log\frac{1}{3}\right)$$

$$-\left(-2\cdot\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}\right)$$

≈ 0.041 **比特/符号**

最佳输入分布： $p(x_1)=p(x_2)=\dfrac{1}{2}$

总结：4种特殊信道的信道容量

- 特殊信道：信道转移概率满足特定规律的信道

- 1. 离散无噪信道的信道容量
- 2. 强对称离散信道的信道容量
- 3. 对称离散信道的信道容量
- 4. 准对称离散信道的信道容量

除了归并无噪信道，上述所有特殊信道，获得信道容量的最佳信源分布都是等概率分布

谢谢！

黑晓军
华中科技大学
电子信息与通信学院
Email: heixj@hust.edu.cn
网址：http://eic.hust.edu.cn/aprofessor/heixiaojun

参考资料

- 陈运，信息论与编码（第三版）第4章，电子工业出版社出版，2015