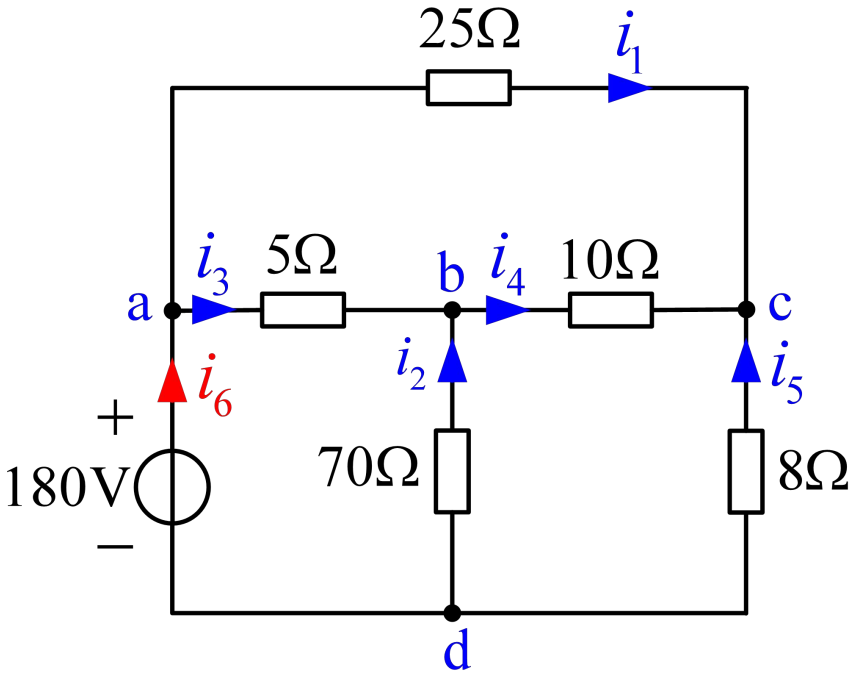
电路理论

——电路分析方程

主讲人：刘旭

电气与电子工程学院

本章导入



第一章：基本定律

独立KCL方程：n-1个

独立KVL方程：b-(n-1)个

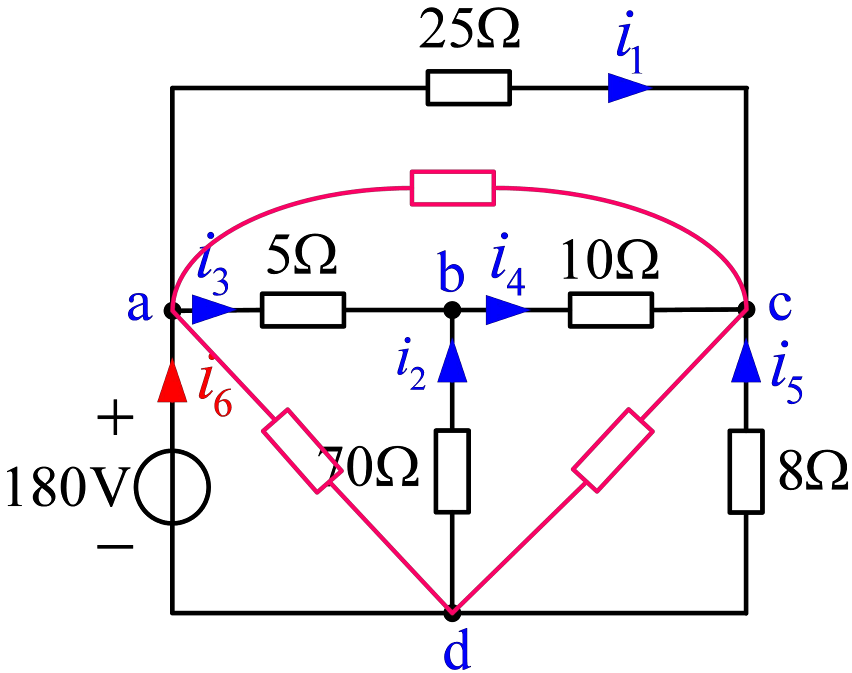
元件特性方程：b个

具有*n*个结点、*b*条支路的电路，可以列写2*b*个基本方程

对于同一电路，可以有多种求解方法。针对具体情况，选择最简、最佳方法。

方程数、待求量太多

本章导入



对于同一电路，可以有多种求解方法。针对具体情况，选择最简、最佳方法。

第二章：等效变换

星—三角变换

戴维南支路 ⟷ 诺顿支路

独立电源特性　　受控电源变换

变换较复杂且易出错

⇨ **有必要寻找减少列写方程数量的方法**

本章学习内容

3.1 概述

3.2 线性代数方程组的解

3.3 结点方程

3.4 网孔方程

3.5 结点法与网孔法对比

3.6 回路方程*

讲授学时：4

本章学习目标与难点

目标

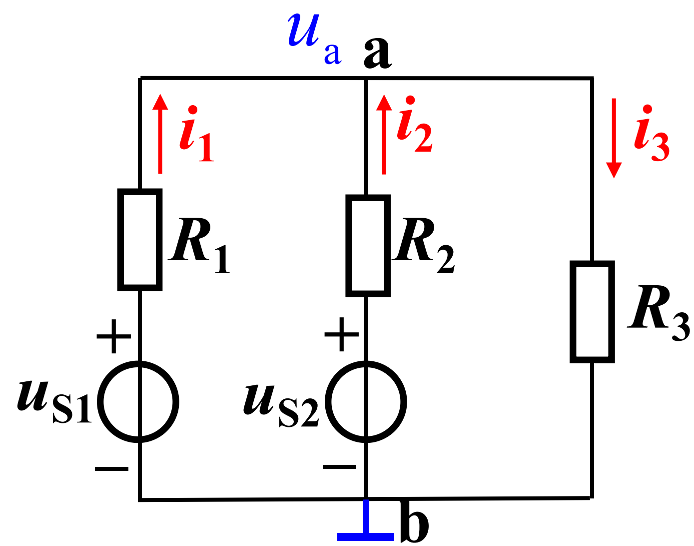
1. 熟练应用结点分析法。
2. 熟练应用网孔分析法。
3. 根据电路特点选择最佳分析方法。

难点

1. 含**电压源支路**电路的结点方程。
2. 含**电流源支路**电路的网孔方程。
3. 合理选择分析方程，利用电路中的电源支路减少方程数目。

3.3 结点方程

结点法：以结点电压为未知量列写结点KCL方程，求解后，各支路电流可用结点电压的线性组合表示

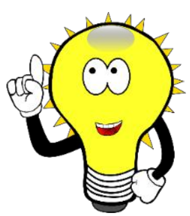


取结点b为参考结点，设结点a电压为u_a

支路电流可由结点电压表示：

$$i_1 = \frac{u_{S1} - u_a}{R_1} \quad i_2 = \frac{u_{S2} - u_a}{R_2} \quad i_3 = \frac{u_a}{R_3}$$

$$-i_1 - i_2 + i_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{u_{S1} - u_a}{R_1} - \frac{u_{S2} - u_a}{R_2} + \frac{u_a}{R_3} = 0$$



为什么不列KVL方程？

由于电位的单值性，结点电压自动满足KVL方程。

3.3 结点方程

举例说明：

$$i_1=\frac{u_{n1}}{5}-1$$

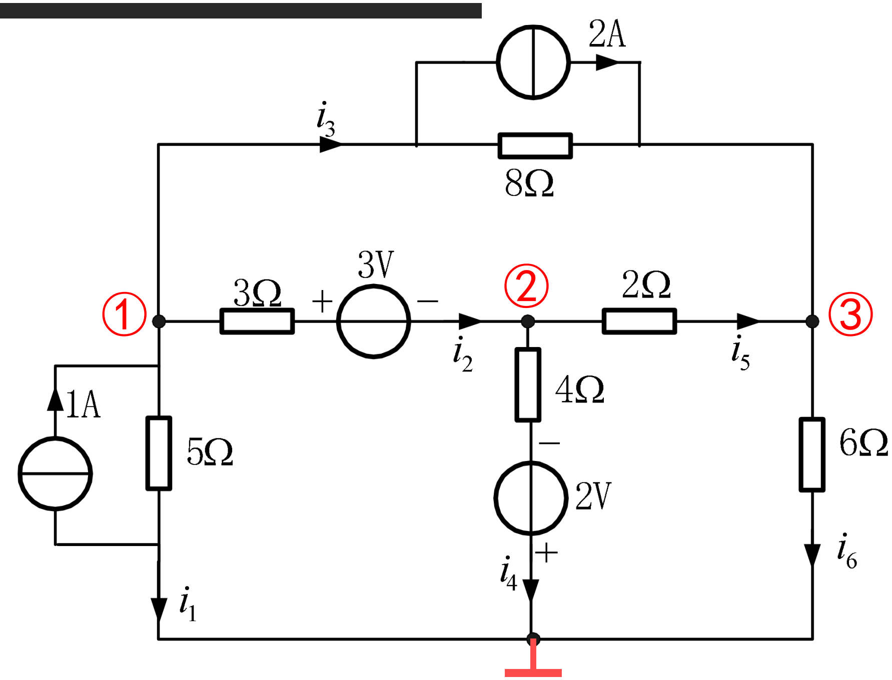
$$i_2=\frac{u_{n1}-u_{n2}-3}{3}$$

$$i_3=\frac{u_{n1}-u_{n3}}{8}+2$$

$$i_4=\frac{u_{n2}+2}{4}$$

$$i_5=\frac{u_{n2}-u_{n3}}{2}$$

$$i_6=\frac{u_{n3}}{6}$$



KCL

$$(\frac{u_{n1}}{5}-1)+(\frac{u_{n1}-u_{n2}-3}{3})+(\frac{u_{n1}-u_{n3}}{8}+2)=0$$

$$-(\frac{u_{n1}-u_{n2}-3}{3})+(\frac{u_{n2}+2}{4})+(\frac{u_{n2}-u_{n3}}{2})=0$$

$$-(\frac{u_{n1}-u_{n3}}{8}+2)-(\frac{u_{n2}-u_{n3}}{2})+(\frac{u_{n3}}{6})=0$$

3.3 结点方程

$$(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8})u_{n1}-\frac{1}{3}u_{n2}-\frac{1}{8}u_{n3}$$

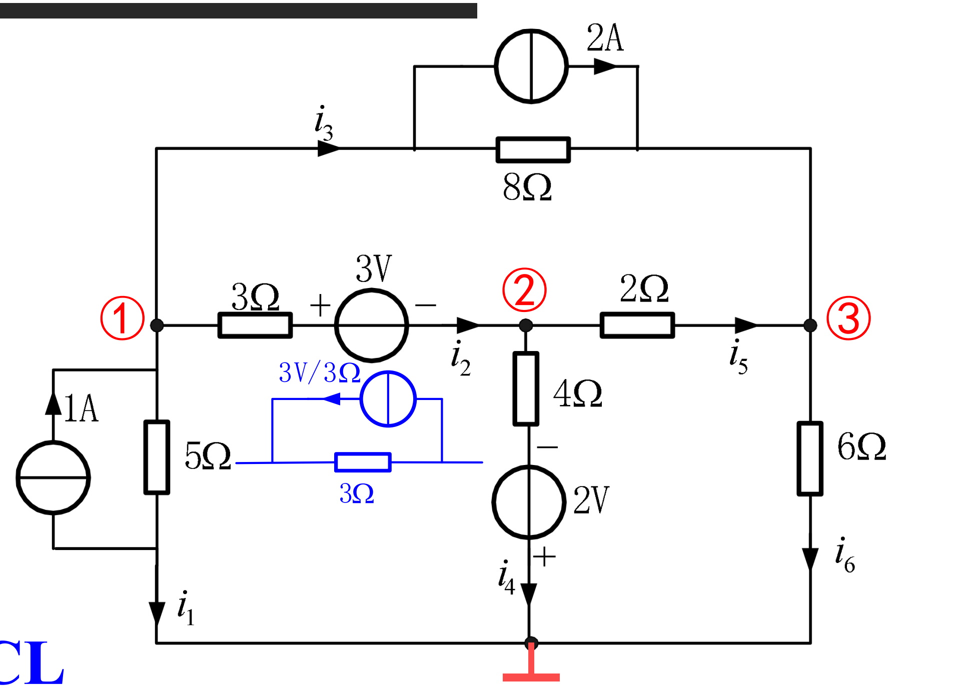
$$=1+\frac{3}{3}-2$$

$$-\frac{1}{3}u_{n1}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2})u_{n2}-\frac{1}{2}u_{n3}$$

$$=-\frac{3}{3}-\frac{2}{4}$$

$$-\frac{1}{8}u_{n1}-\frac{1}{2}u_{n2}+(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})u_{n3}$$

$$=2$$



KCL

$$(\frac{u_{n1}}{5}-1)+(\frac{u_{n1}-u_{n2}-3}{3})+(\frac{u_{n1}-u_{n3}}{8}+2)=0$$

$$-(\frac{u_{n1}-u_{n2}-3}{3})+(\frac{u_{n2}+2}{4})+(\frac{u_{n2}-u_{n3}}{2})=0$$

$$-(\frac{u_{n1}-u_{n3}}{8}+2)-(\frac{u_{n2}-u_{n3}}{2})+(\frac{u_{n3}}{6})=0$$

3.3 结点方程

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)u_{n1}-\frac{1}{3}u_{n2}-\frac{1}{8}u_{n3}$$

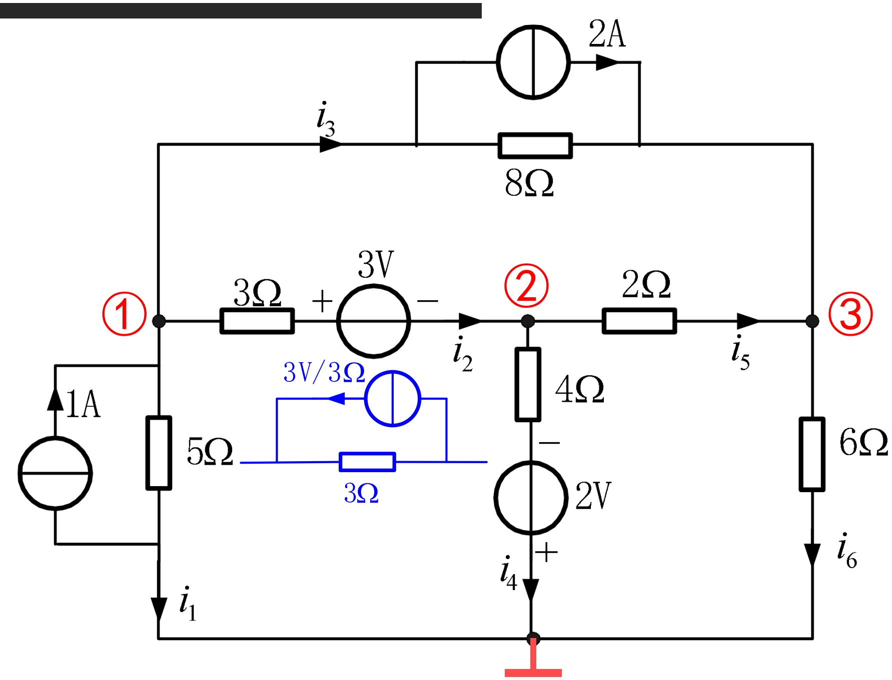
$$=1+\frac{3}{3}-2$$

$$-\frac{1}{3}u_{n1}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)u_{n2}-\frac{1}{2}u_{n3}$$

$$=-\frac{3}{3}-\frac{2}{4}$$

$$-\frac{1}{8}u_{n1}-\frac{1}{2}u_{n2}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)u_{n3}$$

$$=2$$



$$G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+G_{13}u_{n3}=i_{sn1}$$

$$G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+G_{23}u_{n3}=i_{sn2}$$

$$G_{31}u_{n1}+G_{32}u_{n2}+G_{33}u_{n3}=i_{sn3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{G}_n\boldsymbol{U}_n=\boldsymbol{I}_{sn}}$$

$\boldsymbol{G}_n$:结点电导矩阵

3.3 结点方程

将上述结论推广到有n-1个独立结点的仅含电阻、电流源的电路

$$\begin{cases} G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+\ldots+G_{1n}u_{nn}=i_{Sn1} \\ G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+\ldots+G_{2n}u_{nn}=i_{Sn2} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ G_{n1}u_{n1}+G_{n2}u_{n2}+\ldots+G_{nn}u_{nn}=i_{Snn} \end{cases}$$

其中 G_{ii} —自电导，等于接在结点i上所有支路的电导之和，总为正。

$G_{ij}=G_{ji}$ —互电导，等于接在结点i与结点j之间的所支路的电导之和，并冠以负号。

i_{Sni}— 流入结点i的所有电流源电流的代数和。

* 当电路含受控源时，系数矩阵一般不再为对称阵。

3.3 结点方程

结点法的求解步骤：

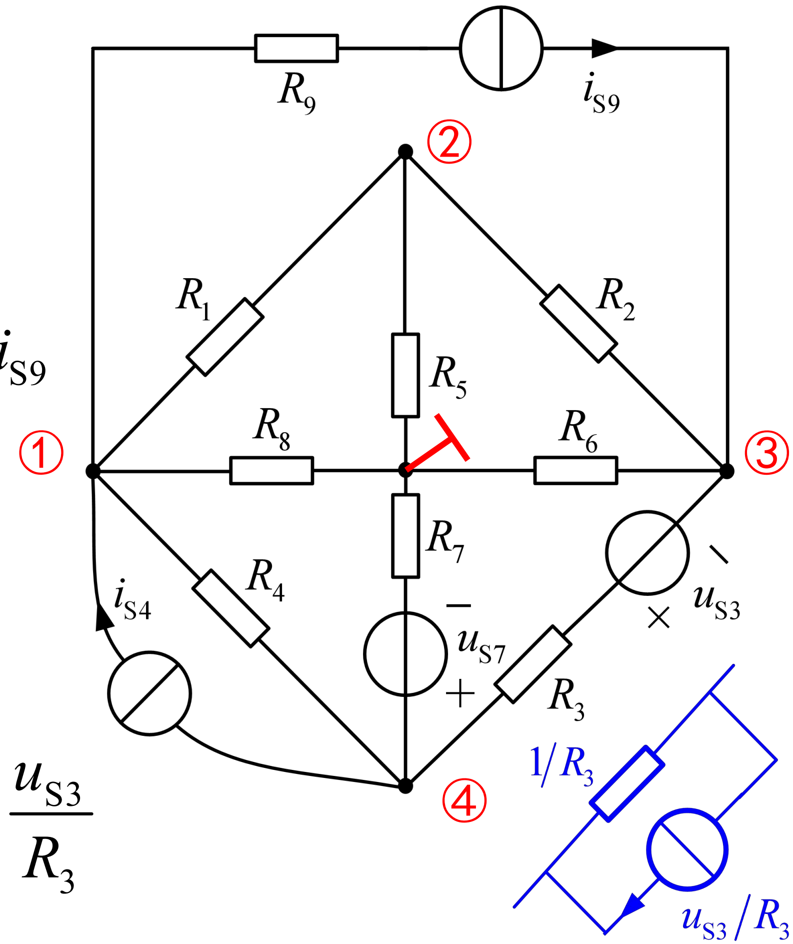
- 任选一个结点为**基准结点**（参考结点），且电位恒取为零，标明n-1个独立结点电位变量；
- 以(n–1)个独立结点的电压为变量列写**(n–1)个独立KCL方程**；
- 求解上述方程，得到n-1个结点电压；
- 求各支路电流及其他电量。

注意：先将所有戴维南支路等效为诺顿支路

3.3 结点方程

例3-1 列写图示电路的结点方程

注意：R_9不在结点方程中



$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_8}\right)u_{n1}-\frac{1}{R_1}u_{n2}-\frac{1}{R_4}u_{n4}=i_{S4}-i_{S9}$$

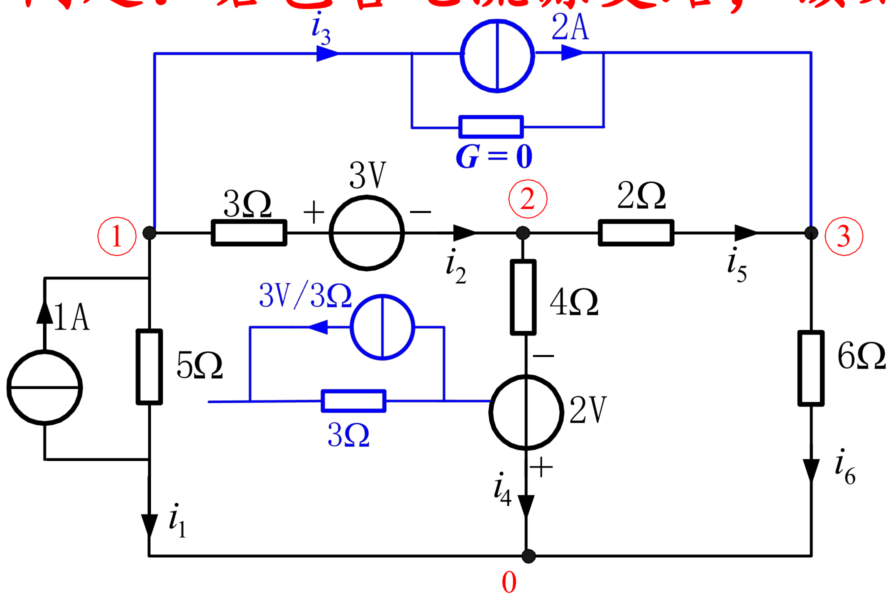
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}\right)u_{n2}-\frac{1}{R_1}u_{n1}-\frac{1}{R_2}u_{n3}=0$$

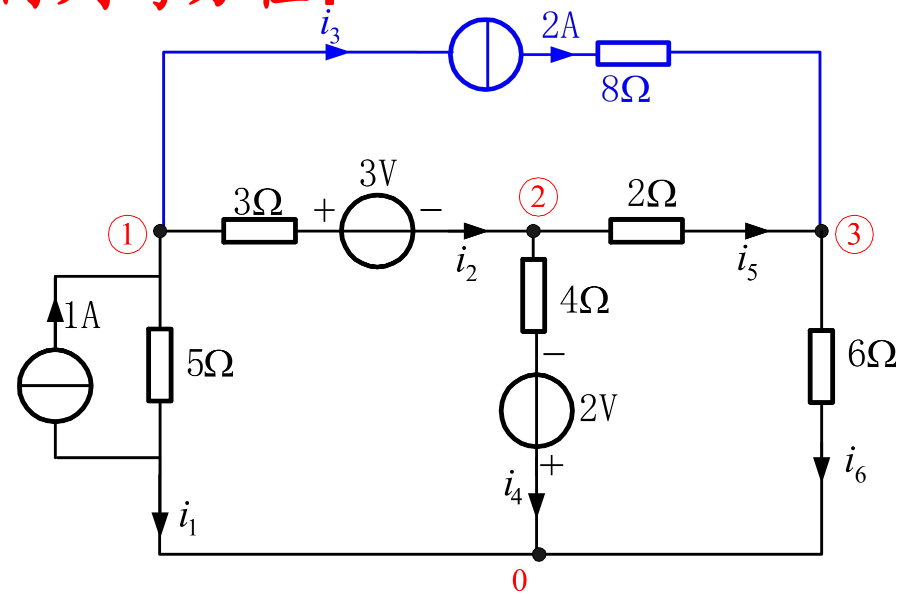
$$\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6}\right)u_{n3}-\frac{1}{R_2}u_{n2}-\frac{1}{R_3}u_{n4}=i_{S9}-\frac{u_{S3}}{R_3}$$

$$\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_7}\right)u_{n4}-\frac{1}{R_4}u_{n1}-\frac{1}{R_3}u_{n3}=-i_{S4}+\frac{u_{S7}}{R_7}+\frac{u_{S3}}{R_3}$$

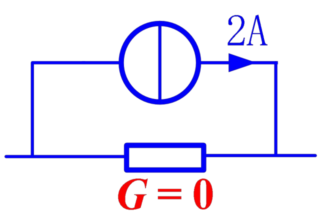
3.3 结点方程

问题：若包含电流源支路，该如何列写方程？





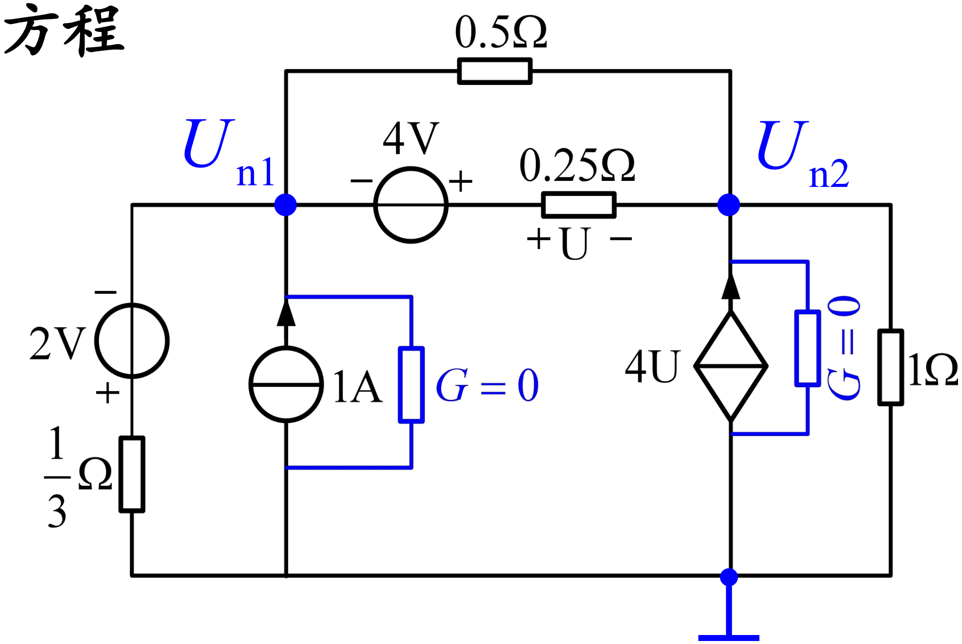
电流源支路视为电导为零的诺顿支路！



$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

3.3 结点方程

例3-2 列写图示电路的结点方程



1) 选定参考结点

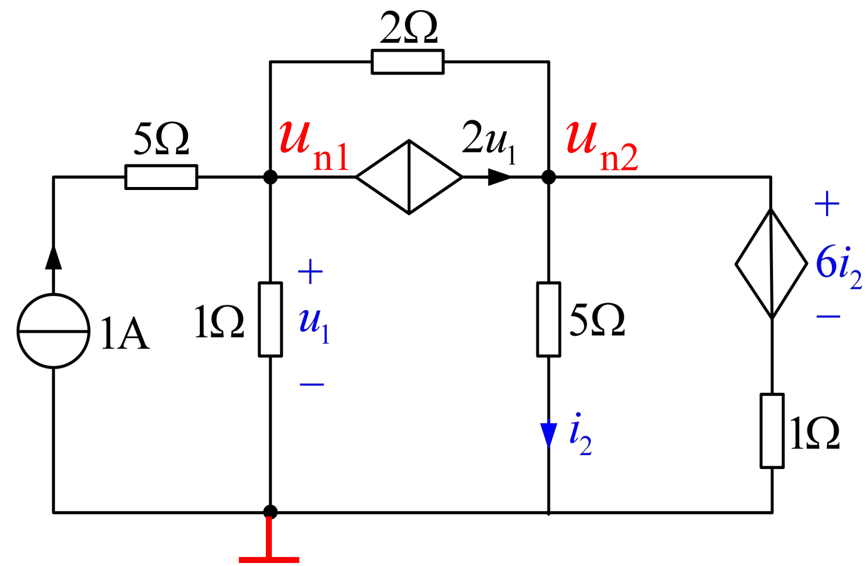
2) 标明其余独立结点电位

3) 列写结点电压方程

$$
\begin{cases}
(3+2+4+0)U_{n1}-(2+4)U_{n2}=1-6-16 \\
(2+4+1+0)U_{n2}-(2+4)U_{n1}=16+4U \\
U=U_{n1}-U_{n2}+4
\end{cases}
$$

3.3 结点方程

例3-3 求电压u_1和电流i_2。



结点方程

$$(1+0.5+0.2)u_{n1}-0.5u_{n2}=1-2u_1$$

$$(1+0.5+0.2)u_{n2}-0.5u_{n1}=2u_1+6i_2$$

$$u_1=u_{n1} \qquad i_2=0.2u_{n2}$$

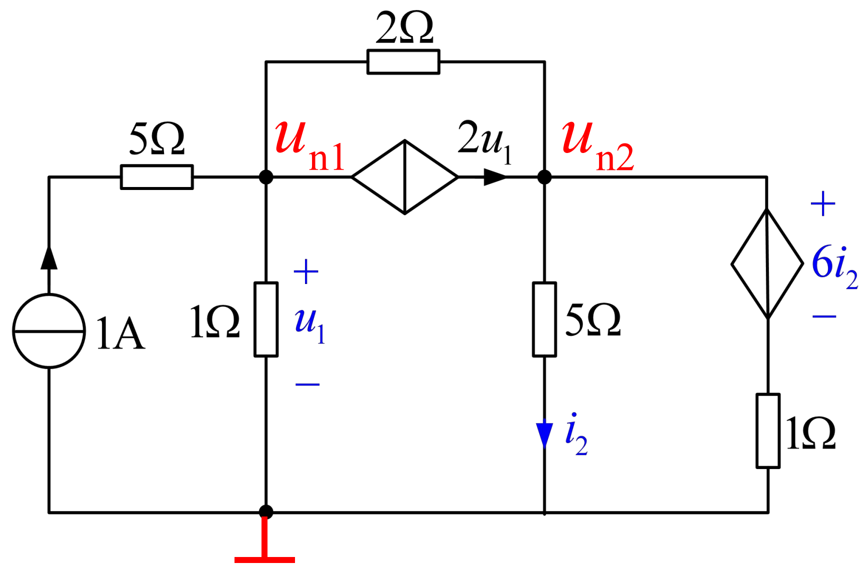
$$\cancel{u_1=u_{n1}=\frac{5}{6}\text{V}}$$

$$\cancel{u_{n2}=\frac{25}{6}\text{V}} \qquad \cancel{i_2=\frac{5}{6}\text{A}}$$

利用参考结点验证计算结果！！！

3.3 结点方程

例3-3 求电压u_1和电流i_2。



与电流源串联的电阻，
不出现在结点方程中

结点方程

$$(1+0.5)u_{n1}-0.5u_{n2}=1-2u_1$$

$$(1+0.5+0.2)u_{n2}-0.5u_{n1}=2u_1+6i_2$$

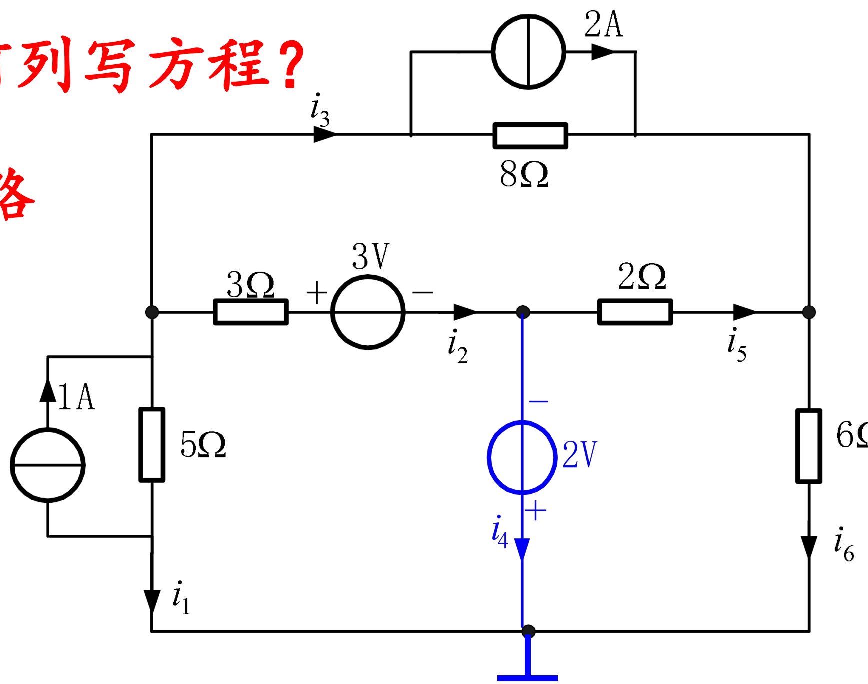
$$u_1=u_{n1} \qquad i_2=0.2u_{n2}$$

$$u_1=u_{n1}=1\text{V}$$

$$u_{n2}=5\text{V} \qquad i_2=1\text{A}$$

3.3 结点方程

问题：若包含电压源支路，该如何列写方程？



□ 电压源支路无法转换为诺顿支路

1）参考结点在电压源支路

选择电压源支路任一结点为参考结点，则

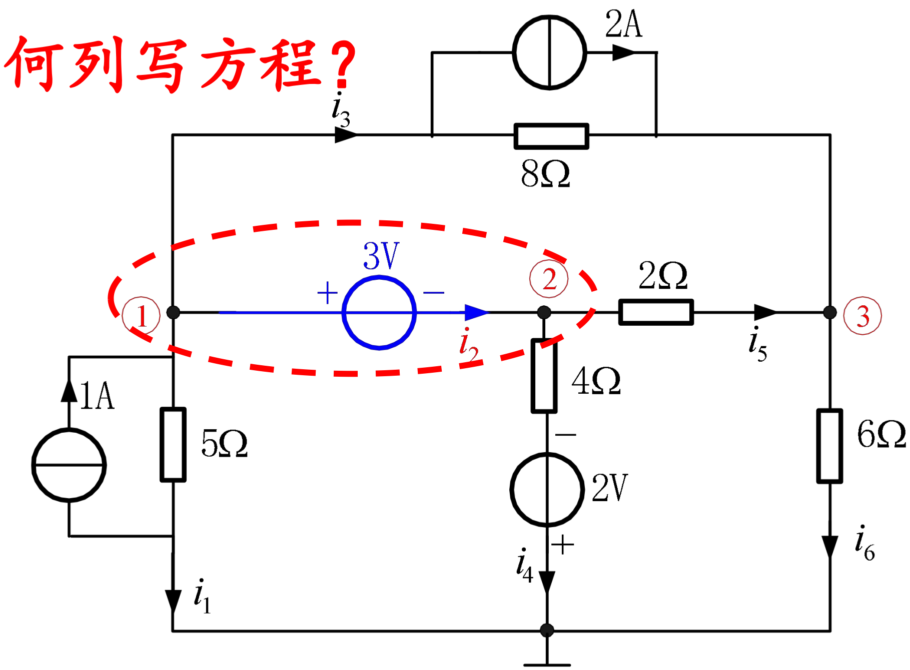
$$u_{n2} = -2\text{V}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ -2 \\ u_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{3}{3}-2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2个方程

3.3 结点方程

问题：若包含电压源支路，该如何列写方程？



2）参考结点不在电压源支路

a. 设电压源支路电流为i_2

4个方程

$$
\begin{cases}
(\frac{1}{5}+\frac{1}{8})u_{n1}-\frac{1}{8}u_{n3}=1-2-i_2 \\
(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})u_{n2}-\frac{1}{2}u_{n3}=i_2-\frac{2}{4} \\
(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})u_{n3}-\frac{1}{8}u_{n1}-\frac{1}{2}u_{n2}=2 \\
u_{n1}-u_{n2}=3
\end{cases}
$$

b. 列写广义结点方程

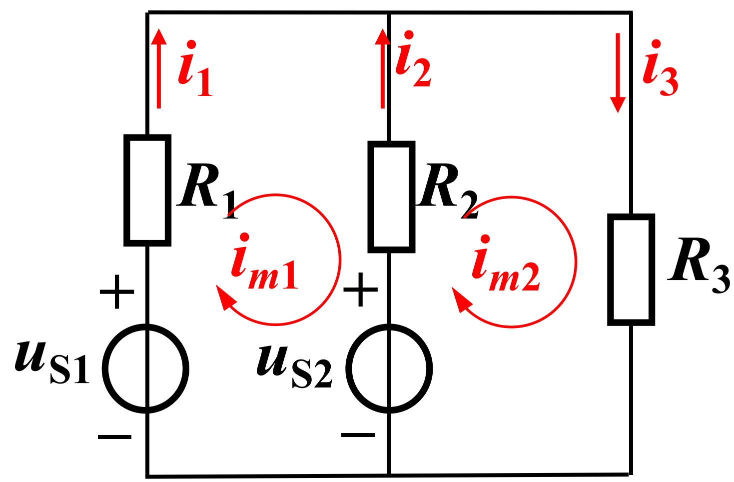
$$
\underbrace{(\frac{1}{5}+\frac{1}{8})}_{\text{自电导}}u_{n1}+\underbrace{(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})}_{\text{自电导}}u_{n2}-\underbrace{(\frac{1}{8}+\frac{1}{2})}_{\text{互电导}}u_{n3}
$$

$$
=1-2-\frac{2}{4}
$$

3个方程

3.4 网孔方程

网孔法：以假想的网孔电流为未知量列写网孔KVL方程，求解后，各支路电流可用网孔电流线性组合表示



支路电流可由网孔电流表示：

$i_1 = i_{m1}$　　$i_2 = i_{m2} - i_{m1}$　　$i_3 = i_{m2}$

网孔1：$-u_{S1} + R_1 i_{m1} - R_2(i_{m2} - i_{m1}) + u_{S2} = 0$

网孔2：$R_2(i_{m2} - i_{m1}) + R_3 i_{m2} - u_{S2} = 0$

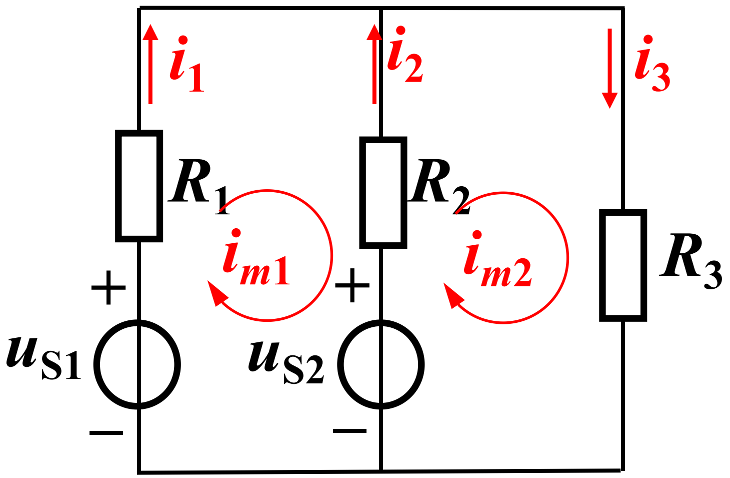
KCL自动满足

$$(R_1 + R_2)\, i_{m1} - R_2 i_{m2} = u_{S1} - u_{S2}$$

$$-R_2 i_{m1} + (R_2 + R_3)\, i_{m2} = u_{S2}$$

3.4 网孔方程

$$(R_1+R_2)i_{m1}-R_2 i_{m2}=u_{S1}-u_{S2}$$
$$-R_2 i_{m1}+(R_2+R_3)i_{m2}=u_{S2}$$



- $R_{11}=R_1+R_2$ — 网孔1的**自电阻**，等于网孔1中所有电阻之和
- $R_{22}=R_2+R_3$ — 网孔2的**自电阻**，等于网孔2中所有电阻之和

$R_{12}=R_{21}=-R_2$ — 网孔1、2间的**互电阻**，等于网孔1、2间公共支路的电阻

$u_{Sm1}=u_{S1}-u_{S2}$ — 网孔1中所有**电压源电压升**的代数和

$u_{Sm2}=u_{S2}$ — 网孔2中所有**电压源电压升**的代数和

3.4 网孔方程

推广到 m 个网孔

$$
\begin{cases}
R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}+\ldots+R_{1m}i_{mm}=u_{Sm1} \\
R_{21}i_{m1}+R_{22}i_{m2}+\ldots+R_{2m}i_{mm}=u_{Sm2} \\
\ldots \\
R_{m1}i_{m1}+R_{m2}i_{m2}+\ldots+R_{mm}i_{mm}=u_{Smm}
\end{cases}
$$

其中 R_{kk}: 第k个网孔的自电阻(总为正)， $k=1,2,\cdots,m$

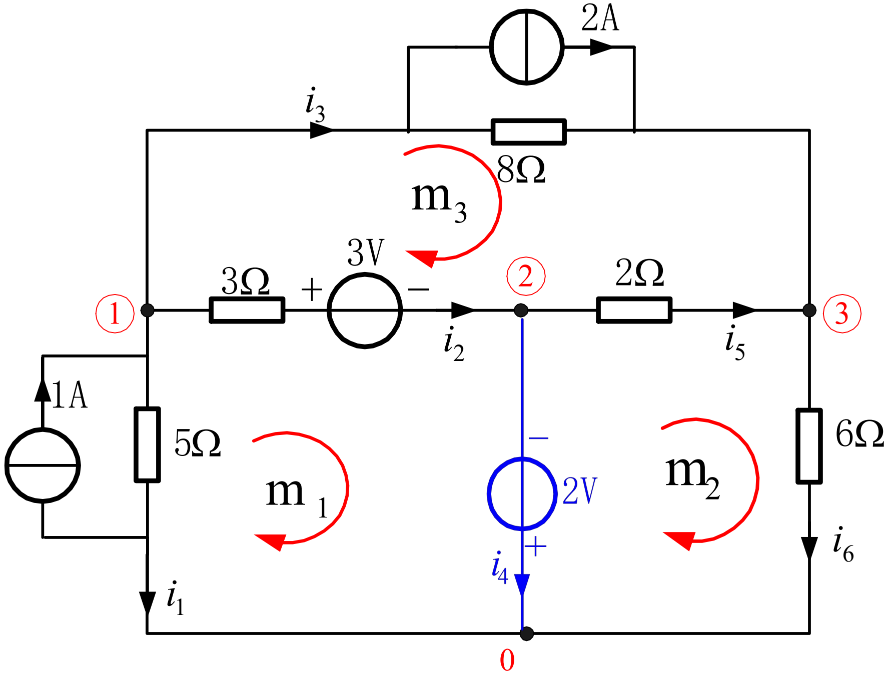
R_{jk}: 第j个网孔和第k个网孔的互电阻

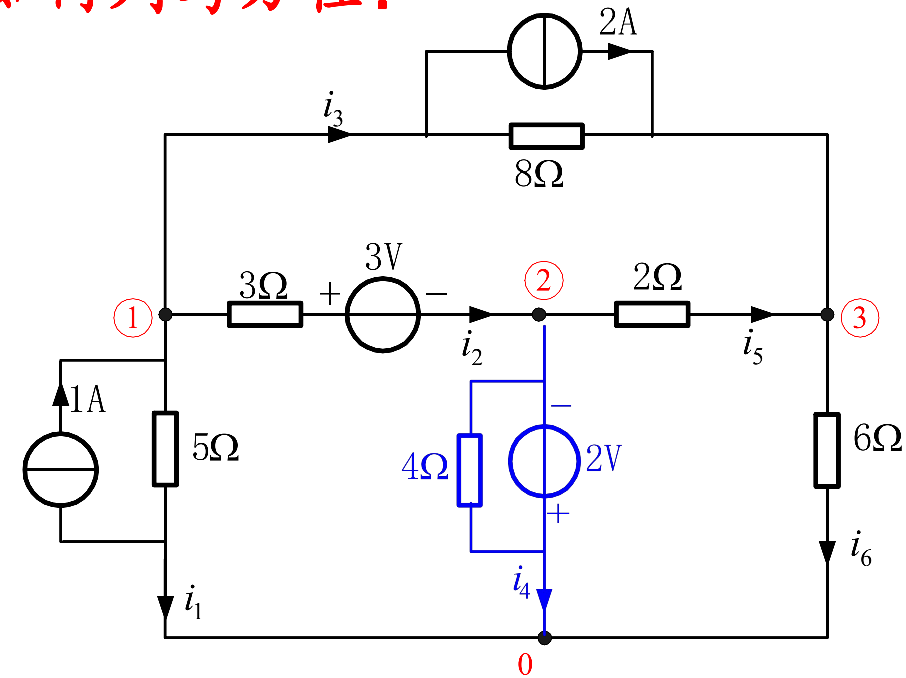
- +：流过互阻的两个网孔电流方向相同
- −：流过互阻的两个网孔电流方向相反
- 0：无关

u_{Smk}: 第k个网孔中所有电压源电压升的代数和

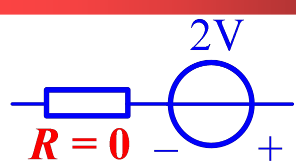
3.4 网孔方程

问题：若包含电压源支路，该如何列写方程？





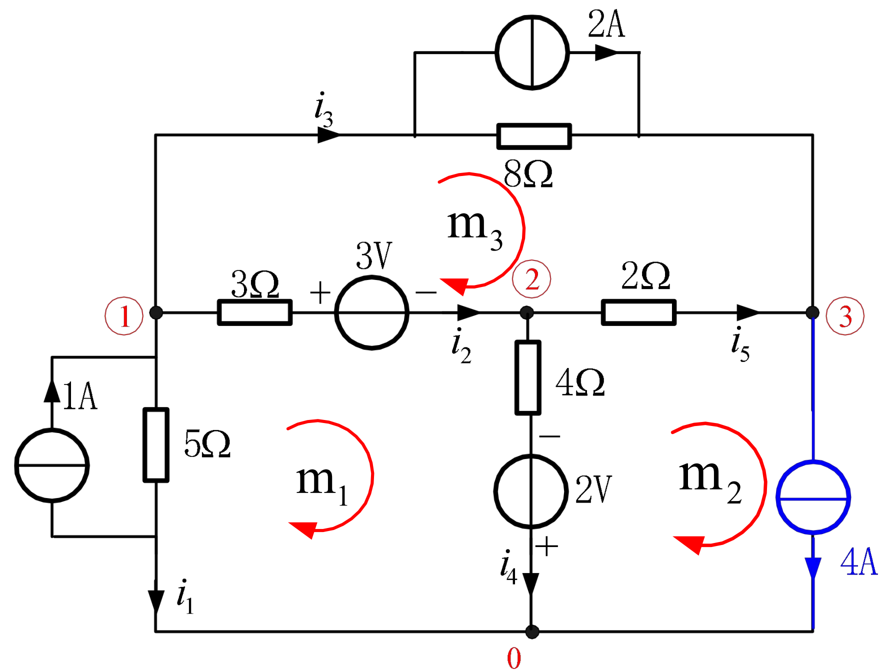
电压源支路视为电阻为零的戴维南支路！



$$
\begin{cases}
(5+3)i_{m1}-0i_{m2}-3i_{m3}=5\times1-3+2 \\
0i_{m1}+(2+6)i_{m2}-2i_{m3}=-2 \\
-3i_{m1}-2i_{m2}+(8+2+3)i_{m3}=2\times8+3
\end{cases}
$$

3.4 网孔方程

问题：若包含电流源支路，该如何列写方程？



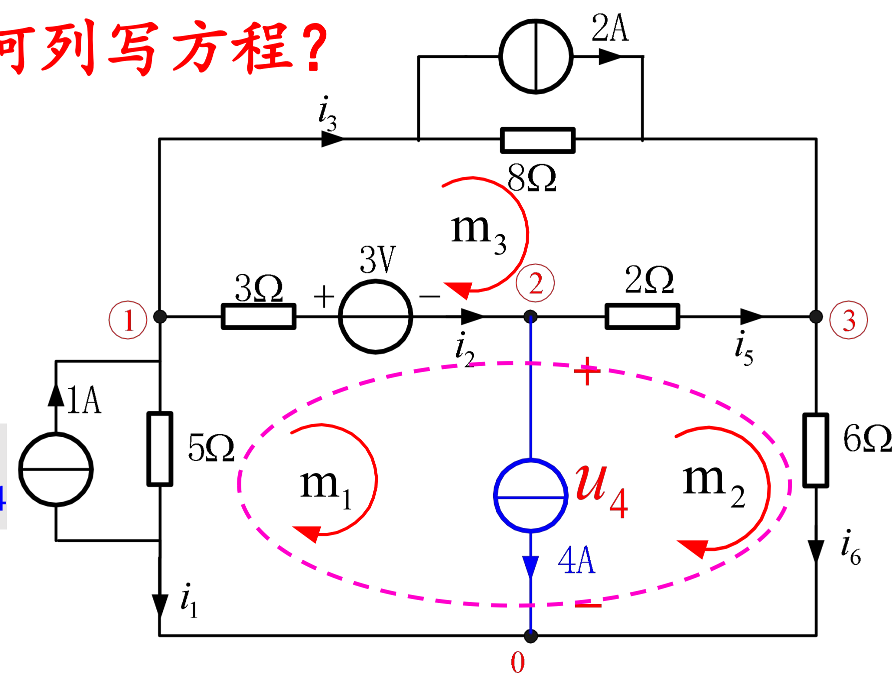
1）若电流源支路只属于一个网孔

$$
\begin{cases}
i_{m2} = 4 \\
(5+3+4)i_{m1} - 4i_{m2} - 3i_{m3} = 5\times 1 - 3 + 2 \\
(8+2+3)i_{m3} - 3i_{m1} - 2i_{m2} = 2\times 8 + 3
\end{cases}
$$

3个方程

3.4 网孔方程

问题：若包含电流源支路，该如何列写方程？



2）若电流源支路属于两个网孔

a. 引入电流源两端电压变量

4个方程

$$
\begin{cases}
(5+3)i_{m1}-0i_{m2}-3i_{m3}=5\times1-3-u_4 \\
0i_{m1}+(2+6)i_{m2}-2i_{m3}=u_4 \\
-3i_{m1}-2i_{m2}+(8+2+3)i_{m3}=2\times8+3 \\
i_{m1}-i_{m2}=4
\end{cases}
$$

b. 广义网孔法

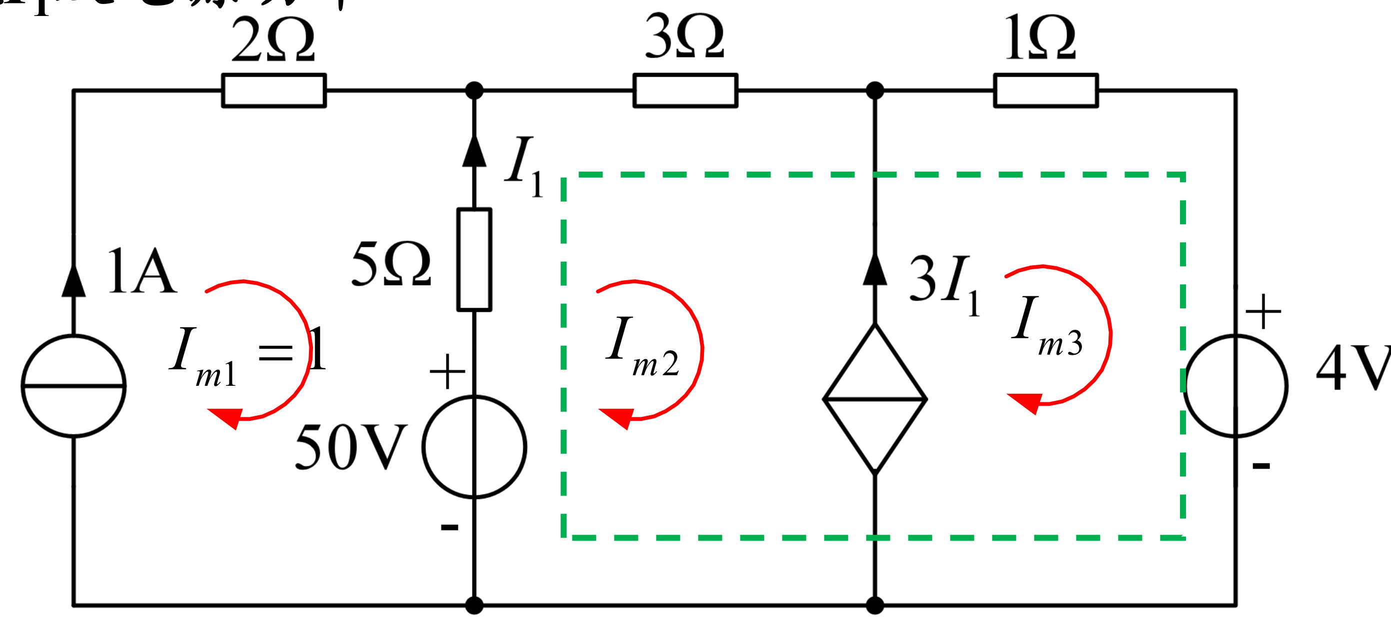
3个方程

$$\underbrace{(5+3)}_{\text{自电阻}}i_{m1}+\underbrace{(2+6)}_{\text{自电阻}}i_{m2}-(3+2)i_{m3}$$

$$=5\times1-3$$

习题练习

例3-4 计算电流I_1及电源功率



广义网孔法

$$\begin{cases} (3+5)I_{m2}+1\times I_{m3}-5I_{m1}=50-4 \\ I_{m3}-I_{m2}=3I_1 \\ I_{m2}-I_{m1}=I_1 \end{cases}$$

$$I_1=3.5\text{A} \quad I_{m2}=4.5\text{A} \quad I_{m3}=15\text{A}$$

$$P_{1A}=1\times(2\times1-5I_1+50)=34.5\text{W}$$

$$P_{50V}=50I_1=175\text{W}$$

$$P_{3I_1}=3I_1\times(1\times15+4)=199.5\text{W}$$

$$P_{4V}=-4I_{m3}=-60\text{W}$$

结点法 or 网孔法?

- 选取方程数较少的方法

  结点法：n-1

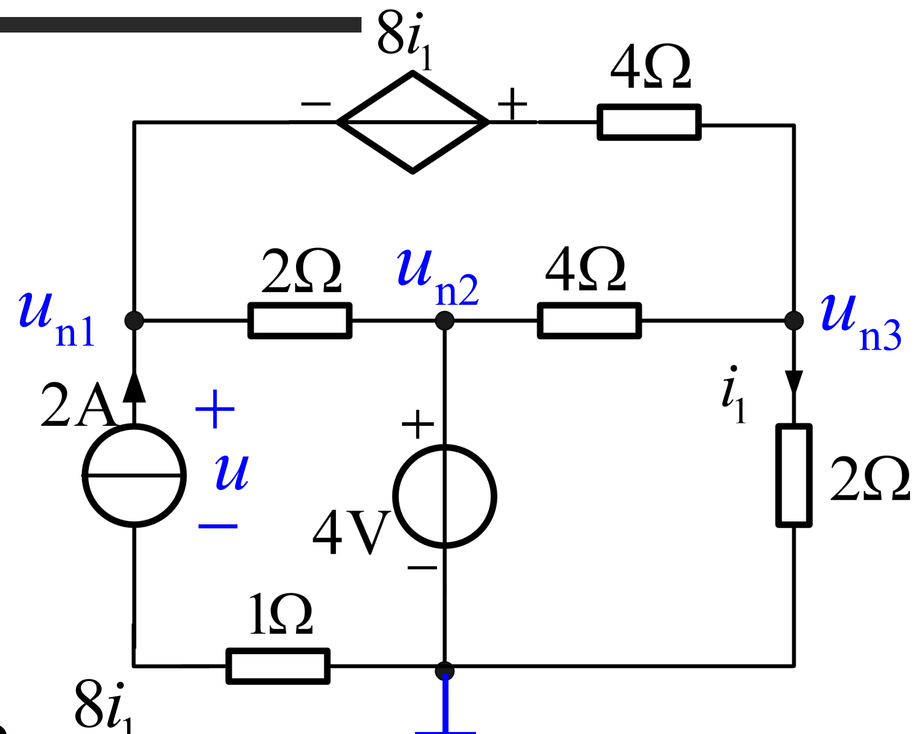
  网孔法：b-n+1

- 对于非平面电路，网孔法不适用，选独立结点较容易

- 网孔法、结点法易于编程。目前用计算机分析网络（电网络，集成电路设计等）采用结点法较多

习题练习

例3-5 求电流源发出的功率



结点法：n-1=3

网孔法：b-n+1=3

结点法：

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+0)u_{n1}-\frac{1}{2}u_{n2}-\frac{1}{4}u_{n3}=2-\frac{8i_1}{4} \\ -\frac{1}{4}u_{n1}-\frac{1}{4}u_{n2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2})u_{n3}=\frac{8i_1}{4} \\ u_{n2}=4 \qquad i_1=\frac{1}{2}u_{n3} \end{cases}$$

$u_{n1}=-4\text{V} \quad u_{n3}=9.33\text{V}$

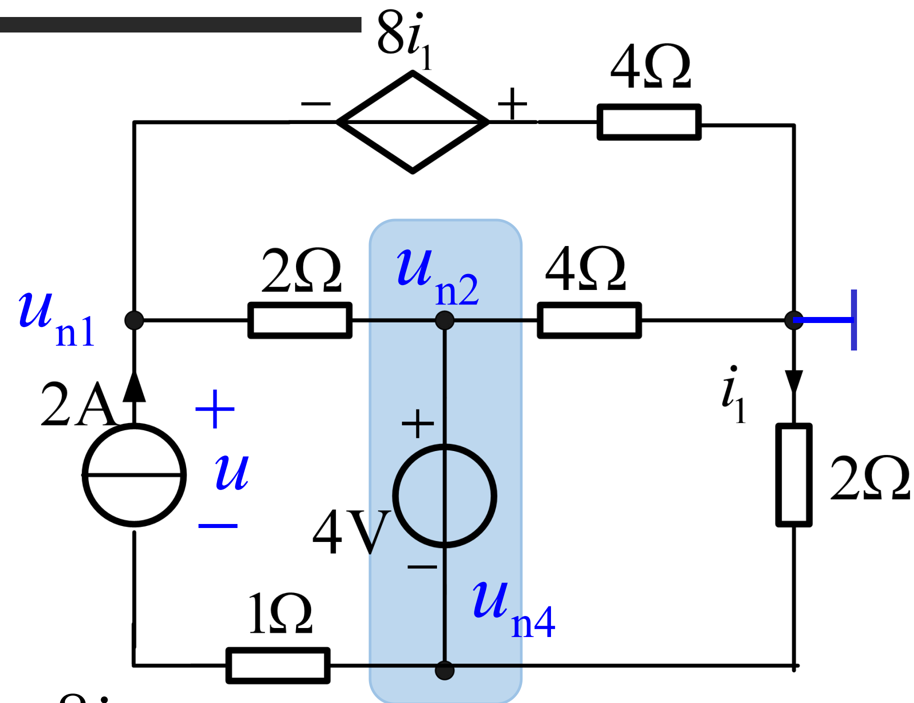
$u=-2\text{V}$

$p=-2\times 2=-4\text{W}$

吸收功率

习题练习

例3-5 求电流源发出的功率



结点法：n-1=3

网孔法：b-n+1=3

广义结点法：

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+0)u_{n1}-\frac{1}{2}u_{n2}-0u_{n4}=2-\frac{8i_1}{4} \\ -\frac{1}{2}u_{n1}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})u_{n2}+\frac{1}{2}u_{n4}=-2 \\ u_{n2}-u_{n4}=4 \qquad i_1=-\frac{1}{2}u_{n4} \end{cases}$$

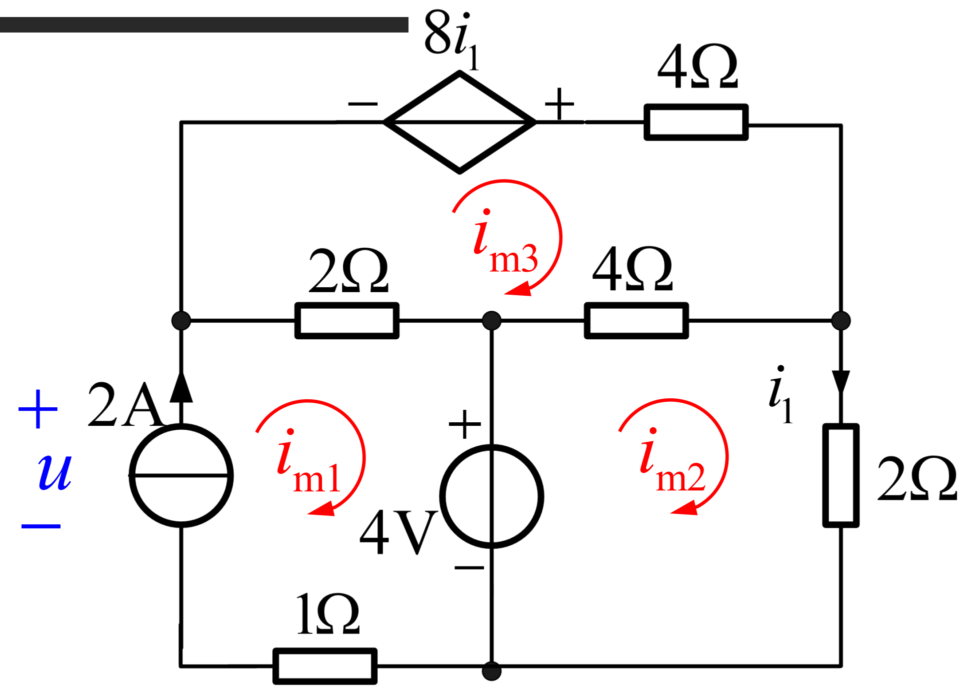
$u_{n1}=-13.33\text{V}$

$u_{n4}=-9.33\text{V}$ $\quad u=-2\text{V}$

$p=-2\times 2=-4\text{W}$ 吸收功率

习题练习

例3-5 求电流源发出的功率



结点法：n-1=3

网孔法：b-n+1=3

网孔法：

$$\begin{cases} i_{m1}=2 \\ (0+4+2)i_{m2}-0i_{m1}-4i_{m3}=4 \\ (4+4+2)i_{m3}-2i_{m1}-4i_{m2}=8i_1 \\ i_1=i_{m2} \end{cases}$$

$$i_{m2}=4.67\text{A} \quad i_{m3}=6\text{A}$$

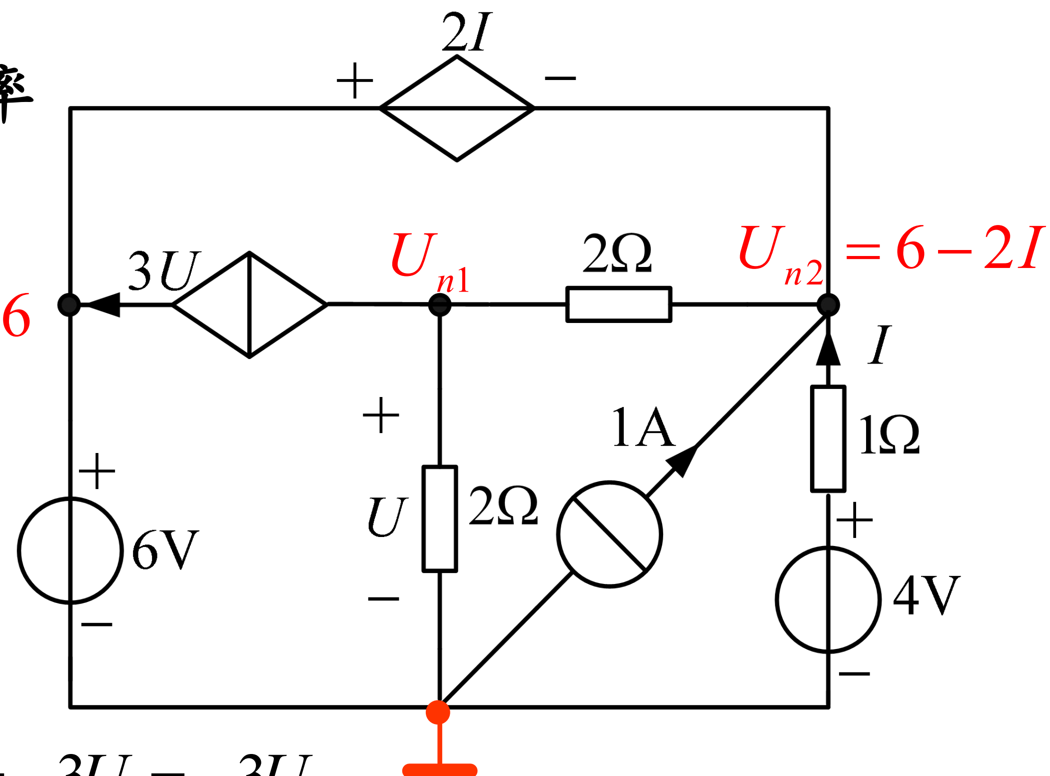
$$u=2\times(i_{m1}-i_{m3})+4+i_{m1}$$

$$=-2\text{V}$$

$$p=-2\times2=-4\text{W}$$ 吸收功率

习题练习

例3-6 计算各独立电源功率



结点法：

n-1=4-1=3

网孔法：

b-n+1=7-4+1=4

选用结点法

$$\begin{cases}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})U_{n1}-\frac{1}{2}U_{n2}-0\cdot U_{n3}=-3U=-3U_{n1}\\ I=-\frac{U_{n2}-4}{1}=-\frac{6-2I-4}{1}\end{cases}$$

$$I=2\text{A}\quad U_{n2}=2\text{V}\quad U_{n1}=0.25\text{V}$$

$$P_{6V}=6\times(\frac{U_{n1}}{2}-1-I)=-17.25\text{W}$$

$$P_{4V}=4\times I=8\text{W}$$

$$P_{1A}=1\times U_{n2}=2\text{W}$$

习题练习

例3-7 求电流i_1和i_2

广义网孔法

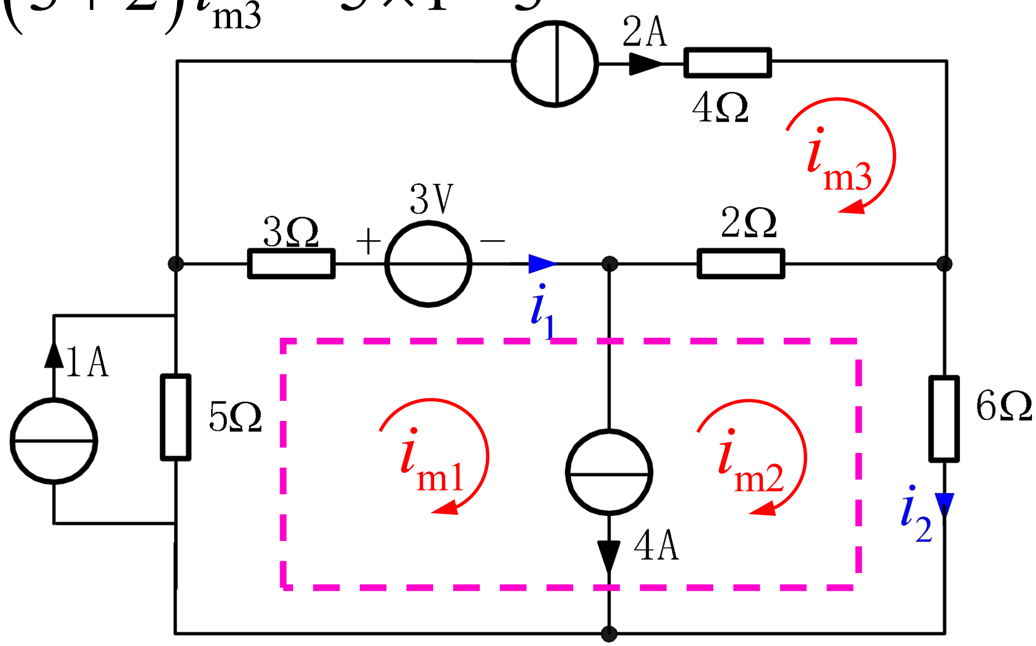
$$\begin{cases} i_{m1} - i_{m2} = 4 \\ i_{m3} = 2 \\ (5+3)i_{m1} + (2+6)i_{m2} - (3+2)i_{m3} = 5\times 1 - 3 \end{cases}$$

$$i_{m1} = 2.75\text{A}$$

$$i_{m2} = -1.25\text{A}$$

$$i_1 = i_{m1} - i_{m3} = 0.75\text{A}$$

$$i_2 = -1.25\text{A}$$



习题练习

例3-7 求电流i_1和i_2

网孔法：电流源支路同属于两个网孔

回路法：电流源支路只属于一个回路

方法2：回路法

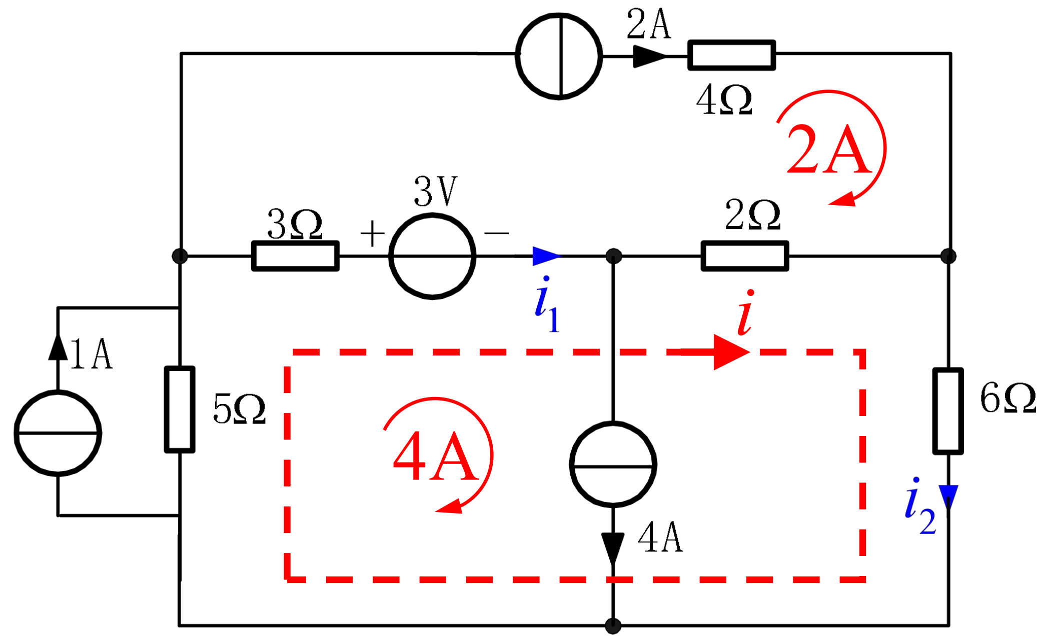
与网孔电流类似，假定回路存在环流

$$(5+3+2+6)i+(3+5)\times4-(3+2)\times2=5\times1-3$$

$$i=-1.25\text{A}$$

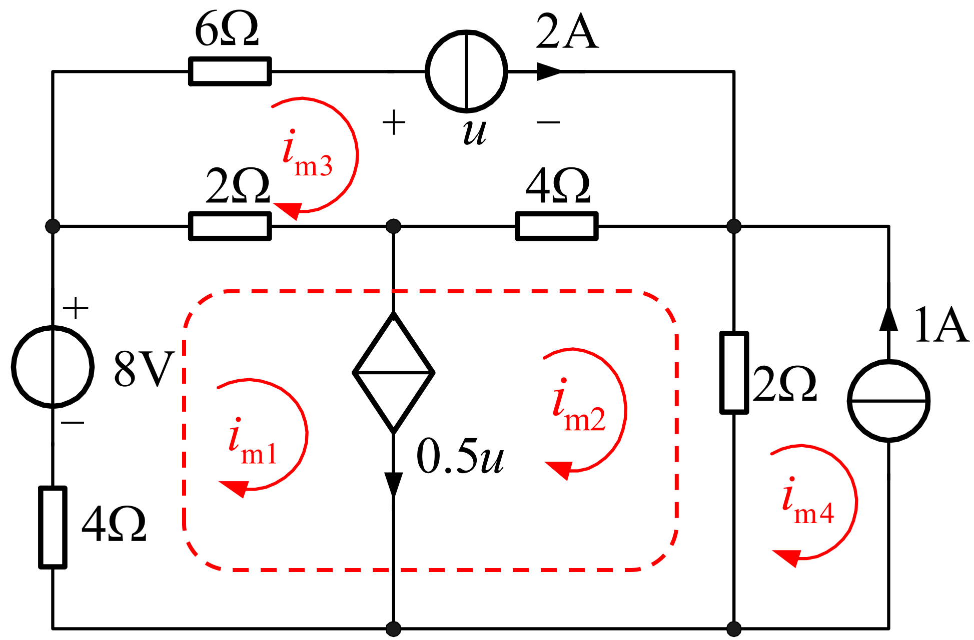
$$i_2=i=-1.25\text{A}$$

$$i_1=-2+4+i=0.75\text{A}$$



习题练习

例3-8 计算各电源功率



$$\begin{cases} i_{m1} - i_{m2} = 0.5u \\ i_{m3} = 2 \\ i_{m4} = -1 \\ (2+4+6)i_{m3} - 2i_{m1} - 4i_{m2} - 0i_{m4} = -u \\ (4+2)i_{m1} + (4+2)i_{m2} - (2+4)i_{m3} - \ i_{m4} = 8 \end{cases}$$

$i_{m1} = -1\text{A}$

$i_{m2} = 4\text{A}$

$u = -10\text{V}$

$p_{8V} = 8i_{m1} = -8\text{W}$ （吸收）

$p_{2A} = ui_{m3} = -20\text{W}$ （发出）

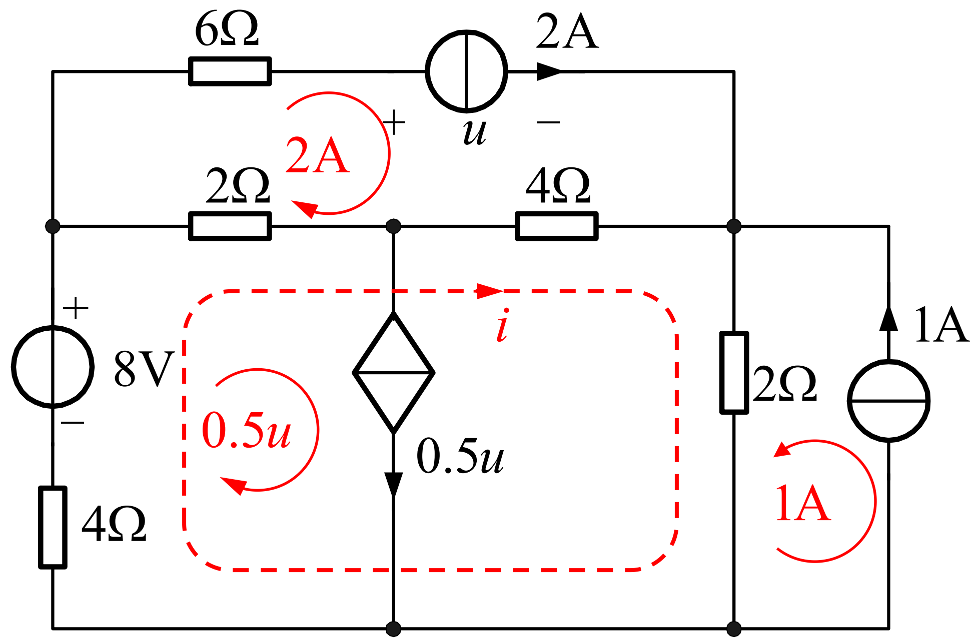
$p_{1A} = 1\times 2(i_{m2} - i_{m4}) = 10\text{W}$ （发出）

$p_{0.5u} = 0.5u\left[4(i_{m2} - i_{m3}) + 2(i_{m2} - i_{m4})\right]$

$= -80\text{W}$ （发出）

习题练习

例3-8 计算各电源功率



方法1：广义网孔法

方法2：回路法

$$(4+2+2+4)i+(4+2)\times 0.5u-(2+4)\times 2+2\times 1=8$$

$$(6+4+2)\times 2-(4+2)i-2\times 0.5u=-u \qquad i=4\text{A} \quad u=-10\text{V}$$

$$p_{8\text{V}}=8(i+0.5u)=-8\text{W} \qquad p_{2\text{A}}=2u=-20\text{W}$$

$$p_{1\text{A}}=1\times 2(i+1)=10\text{W} \qquad p_{0.5u}=0.5u\left[4(i-2)+2(i+1)\right]=-80\text{W}$$

课后作业

- 3.3节：3-7，3-11，3-14
- 3.4节：3-28，3-30
- 综合：3-38，3-40

谢谢聆听！！

刘旭 2023-3-15