引 言

振动和波动是存在于自然界中（物理学不同领域）的非常普遍而重要的运动形式。是力学、声学、电磁学、光学及现代物理学等领域的必要基础。

虽然振动与波动是两种不同的运动形式，之间有着极其密切的联系：

振动是产生波动的根源，波动是振动状态在空间的传播。波动过程就是振动能量的传播过程。

振动和波动的研究意义远远超出了力学的范围

月落乌啼霜满天

江枫渔火对愁眠

姑苏城外寒山寺

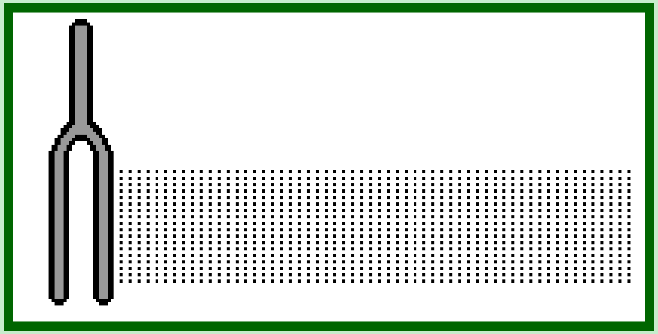
夜半钟声到客船

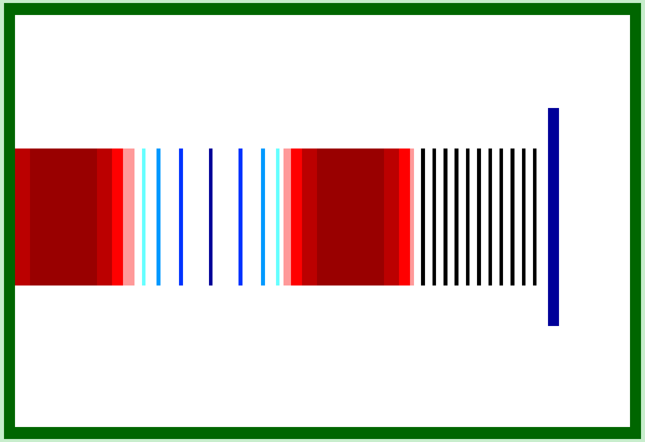
——张继 • 夜泊枫桥

意境很美

钟声尤妙

寒山寺





第十一章之　机械振动 (Vibration)

什么是振动？

广义地定义：

任何物理量随时间的周期性
变化——称为振动

一般分为两大类：

机械振动——振动体以一定位置中心往复运动

电磁振荡——电场与磁场周期性变化

机械振动的传播　机械波

电磁振荡的传播　电磁波

重点介绍
机械振动

第1节 简谐振动 (Simple harmonic motion)

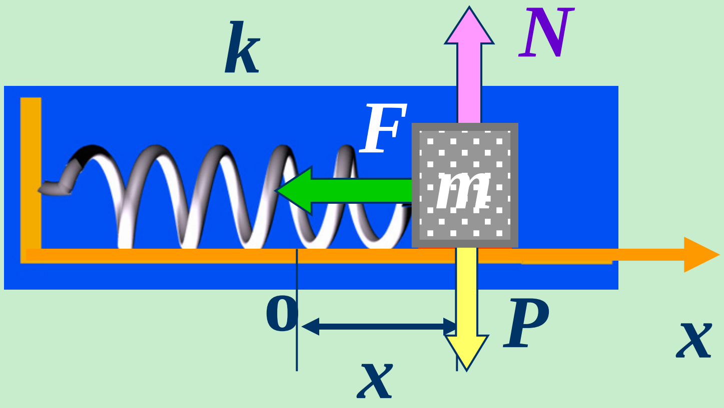
机械振动分类： 振动分为简单与复杂

简谐振动是最简单的、最基本的振动。

一切复杂的振动都可以分解为一些简谐振动的叠加

一、简谐振动的特征及规律

理想模型——弹簧振子



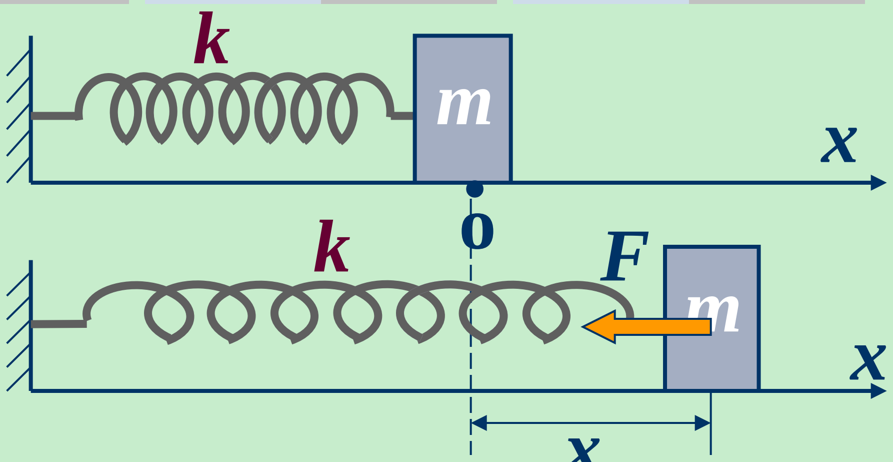
1. 简谐振动的动力学规律

平衡位置：质点在该位置受力为零。

$F = -kx$

取平衡位置为坐标原点。

离开平衡位置，质点受的力总是与质点相对平衡位置的位移成正比，并指向平衡点。



动力学特征:

$$F_{合} = -kx$$

系统在弹性力或回复力作用下运动

根据牛顿定律： $F_{合} = ma = -kx$

令： $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

则： $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ 　即： $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

恒量

微分方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

——运动方程

x可代表任意物理量

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \xrightarrow{\text{广义地}} \frac{d^2Q}{dt^2}+\omega^2Q=0$$

任意物理量

Q作简谐振动

2. 简谐振动的数学表达式

弹簧振子的位移 即求方程：$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ 的解

显然方程的解：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 或：$x=A\sin(\omega t+\varphi)$

A、φ 为积分常数（待定）由初始条件来确定

定义：物体离开平衡位置的位移（或角位移）按正弦或余弦函数的规律随时间变化的运动为简谐振动。

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

简谐振动表达式

简谐振动的运动学特征：x 随 t 按余弦规律变化

3. 振子的振动速度及加速度

$x = A\cos(\omega t+\varphi)$

速度：$v = \dfrac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\varphi) = \omega A\cos(\omega t+\varphi+\dfrac{\pi}{2})$

加速度：$a = \dfrac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$

振子的速度*v*、加速度*a* 均随 *t* 按余弦函数规律变化，

v、*a* ——作简谐振动

4. 简谐振动的周期、振幅、频率或圆频率、位相的意义

1）振动周期*T*

——一次完整振动所需的时间

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$
$$= A\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$
$$= A\cos[\omega t+\omega T+\varphi]$$

余弦函数的变化周期为2π：

$\omega T = 2\pi \quad \therefore \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 谐振的周期，每隔*T* 时间运动完全重复

2）频率、圆频率

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

称为振动频率(固有频率)，

单位时间内振动的次数。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

称为角频率（或圆频率）

单位时间内位相的变化值

$$\omega = 2\pi\nu$$

由系统本身性质决定

——决定于系统内在性质。

3) 简谐振动的振幅、位相、初位相的意义

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

振幅 A ——振动中最大位移量

位相 ——位置状态

$\phi(t)=\omega t+\varphi$ ——位相

φ——初位相

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$
$$v=\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$
$$a=\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

任意 t 时刻，振子的运动状态取决于 $\phi(t)=\omega t+\varphi$

如： $\omega t+\varphi=0$ $x=A$ $v=0$ $a=-\omega^2 A$

$\omega t+\varphi=\pi/2$ $x=0$ $v=-\omega A$ $a=0$

当 $t=0$ 时： $\phi(t)=\varphi$ ——初位相 一般： $0\le\varphi<2\pi$

结论

振幅 A —— 决定振动的范围；

ω、T ——决定振动的快慢；

φ ——$t=0$时刻振子的运动状态。

A、ω（或 T）、φ 为系统的三个特征量，若已知 A、ω（或T）、φ 就唯一确定了一个简谐振动。

5. 特征量 A、ω、φ 的求法

1）求 ω

以弹簧振子为例

由分析受力出发写出振子所受的合外力 $F=-kx$

根据由牛顿定律（牛顿第二定律）列方程

$$F=ma \Longrightarrow ma=-kx \Longrightarrow a=-\frac{k}{m}x$$

与谐振的运动方程相比较

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \Longrightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega=2\pi\nu \qquad T=1/\nu$$

2）求 A、φ

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

A、φ 为积分常数（待定）由初始条件来确定。

$t=0$ 时： $x = x_0$ ， $v = v_0$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x_0 = A\cos\varphi \qquad v_0 = -\omega A\sin\varphi$$

由此可得出：

$(1)^2 + (2)^2$:

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}$$ ——振幅

$(2)/(1)$

$$tg\varphi = -\frac{v_0}{x_0\omega}$$

初位相—— $\boxed{\varphi = tg^{-1}(-\frac{v_0}{\omega x_0})}$

例. 某物体沿x轴作简谐振动，其振动周期$T=\pi$，$t=0$时，$x_o=4m$，$v_o=6m/s$，且向右运动。求物体的运动表达式。

解：$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\ rad/s$ $\quad A = \sqrt{x_o^2 + (\frac{v_o}{\omega})^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5\ m$

$$\varphi = tg^{-1}(-\frac{v_o}{\omega x_o}) = tg^{-1}(-\frac{6}{4\times 2}) = \begin{cases} 143^o \longrightarrow \text{舍去} \\ -36.8^o \end{cases}$$

由v_0定φ的取舍！

$$x = 5\cos(\,2t - 0.64\,)$$ 为所求的方程

例： 弹簧振子 $\begin{cases} m = 5\times 10^{-3}\ \text{kg} \\ k = 2\times 10^{-4}\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1} \end{cases}$

$t = 0$ 时 $x_0 = 0$ $\upsilon_0 = 0.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

完成振动方程 $x = \underline{2}\cos(\underline{0.2}t + \underline{\tfrac{3}{2}}\pi)$ (SI)

解：

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$= 0.2\ (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}$$

$$= 2\ (\text{m})$$

$$tg\varphi = -\frac{\upsilon_0}{\omega x_0} = -\infty$$

$$\upsilon_0 = -\omega A \sin\varphi$$

而 $\upsilon_0 > 0$

故 $\varphi = \frac{3}{2}\pi$

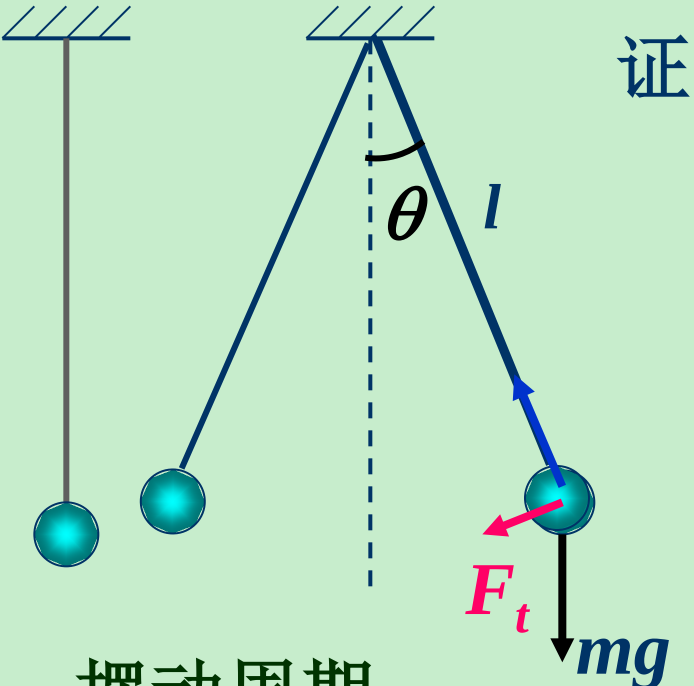
或 $\varphi = \frac{-1}{2}\pi$

6. 简谐振动的例子

特征：$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$ $\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi)}$

例.求证一单摆的摆角θ很小时，其运动为简谐振动，并求其周期T。（忽略空气摩檫）

$\theta=\Theta\cos(\omega t+\varphi)$



证明：单摆在运动方向受力：

$F_t=mg\sin\theta$ 切向力

$\because\ \theta<<1$ $\therefore\ \sin\theta\approx\theta$

$\therefore\ F_t=-mg\theta$ $\theta\rightarrow$为质点的角位移

可见切向力F_t起回复力的作用

准弹性力

又：$F_t=ma_t$ $a_t=l\beta=l\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\therefore\ \cancel{m}l\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\cancel{m}g\theta$ 令：$\omega^2=\frac{g}{l}$

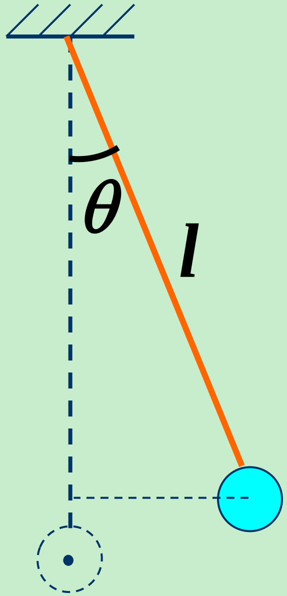
即得：$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$ ——简谐振动

摆动周期：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

注：θ较大时系统不是简谐振动

利用能量关系证明:当单摆的摆角θ很小时，其运动为谐振动，并求其周期T。（忽略空气摩檫）



$(\theta \ll 1)$

证：只有重力做功，故系统机械能守恒。

$$\frac{1}{2}mv^2+mgl(1-\cos\theta)=c$$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+mgl\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$$

$$v\frac{\mathrm{d}(l\omega)}{\mathrm{d}t}+g\sin\theta\cdot l\omega=0$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}$$

为角速度，非角频率

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\theta=0 \quad (\sin\theta\approx\theta)$$

令：$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

即得：$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$ $\rightarrow$谐振动

摆动周期：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

注：θ较大时系统不是谐振动.

若 $t=0$ ，位移 x_0 ，速度 v_0 (初始条件)

则可得
$$\begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2} \\ tg\phi=-\dfrac{v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

然后根据 v_0 的正负决定 ϕ 的取舍！

$$v_0=-A\omega\sin\phi$$

注意：对角谐振动
$$\begin{cases} \beta=-\omega^2\theta \\ \theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

圆频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

角振幅 $\theta_m=\sqrt{\theta_0^2+\left(\dfrac{\Omega_0}{\omega}\right)^2}$

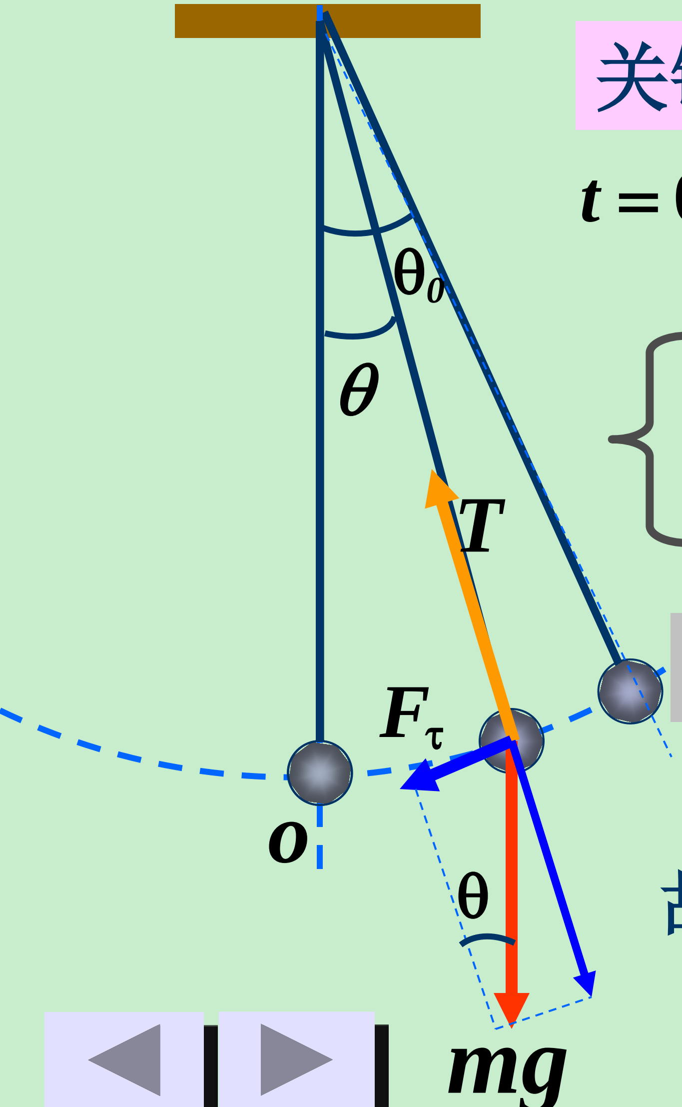
初位相 $\varphi=tg^{-1}\left(-\dfrac{\Omega_0}{\theta_0\omega}\right)$

例. 若将摆拉至最大角度θ_0放手为计时起点，写出振动表达式。

$$\theta = \Theta\cos(\omega t+\varphi)$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

关键是位相φ的确定



$t=0$ 初角位移 θ_0，初角速度 $\alpha_0=0$

$$\begin{cases} \text{角振幅 } \theta_m=\sqrt{\theta_0^2+\left(\dfrac{\alpha_0}{\omega}\right)^2}=\theta_0 \\ tg\varphi=-\dfrac{\alpha_0}{\omega\theta_0}=0 \longrightarrow \varphi=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases} \ ? \end{cases}$$

φ取值范围(0—2π) 或 (-π— π)之间。

$$\because \theta_0=\theta_0\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi=1$$

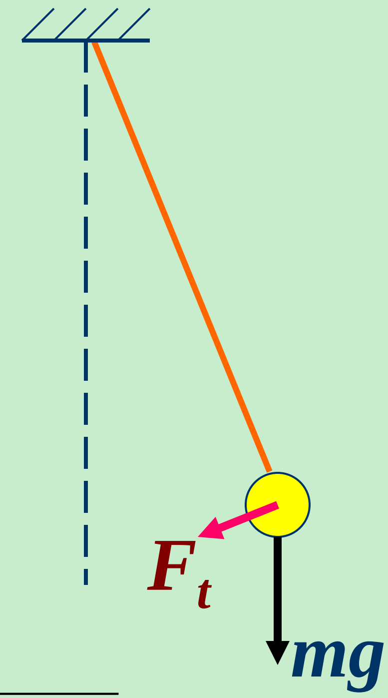
故应取初位相 $\varphi=0$

振动表达式: $\theta=\theta_0\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$

单摆的应用　通过测T，来测g

例： 一位月球探险家，安装了一个长为860mm的单摆，并测出在微小位移时摆的周期 T=4.6s，$g_{月}$=？

显然：由 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$　可得：$g_{月}=\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 l$ $=1.6\ \mathrm{m/s^2}$



物理前沿问题

在单摆的讨论中，隐含了一个前提条件：

$$m_{惯}=m_{引}$$

$$F_t=ma_t \qquad F_t=m_{惯}a_t$$

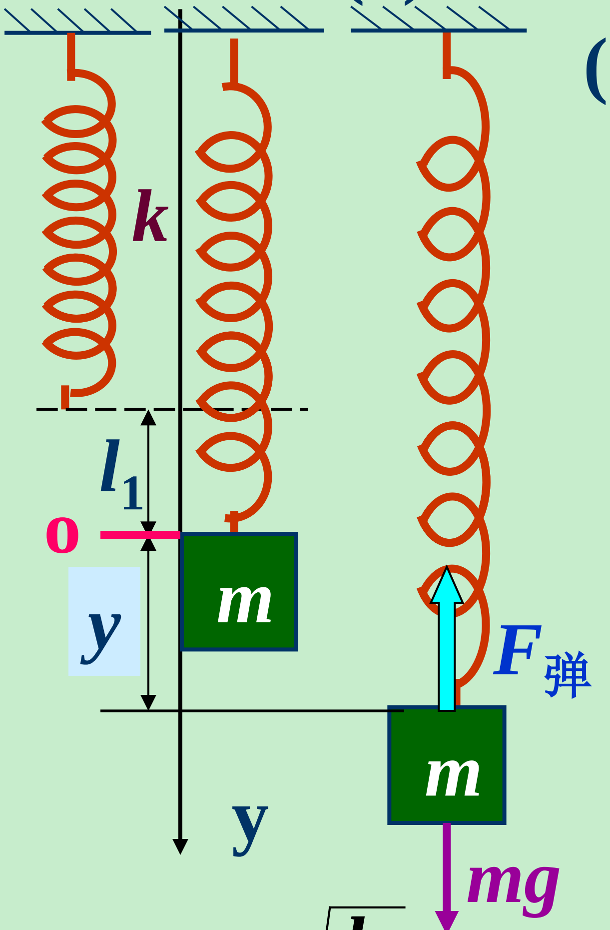
$$F_{引}=m_{引}\frac{GM}{r^2} \qquad F_{重}=m_{引}g$$

$$\therefore m_{惯}l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-m_{引}g\theta$$

若：$m_{惯}\neq m_{引}$　则：$\omega^2=\dfrac{m_{引}g}{m_{惯}l}$　　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_{惯}l}{m_{引}g}}$

$\boxed{m_{惯}\overset{?}{=}m_{引}}$ ⟹ 等效原理

例.将一倔强系数为k的轻质弹簧竖直悬吊。最初弹簧没有拉伸，然后把质量为m的物块加到另一端，达到平衡时，弹簧伸长了l_1，物块又被向下拉了l_2后，静止释放。(1)证明系统作简谐振动。(2)求其振动方程.



(1) 证明：取系统平衡点为坐标原点o

设时刻t，振子运动到y处

其受力：$F = F_{弹} + mg = -k(y + l_1) + mg$

而振子在o点处：$F=0$ 即：$kl_1 = mg$

$\therefore\ F = -ky$ 又：$F = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$

则：$\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}y$ 令：$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

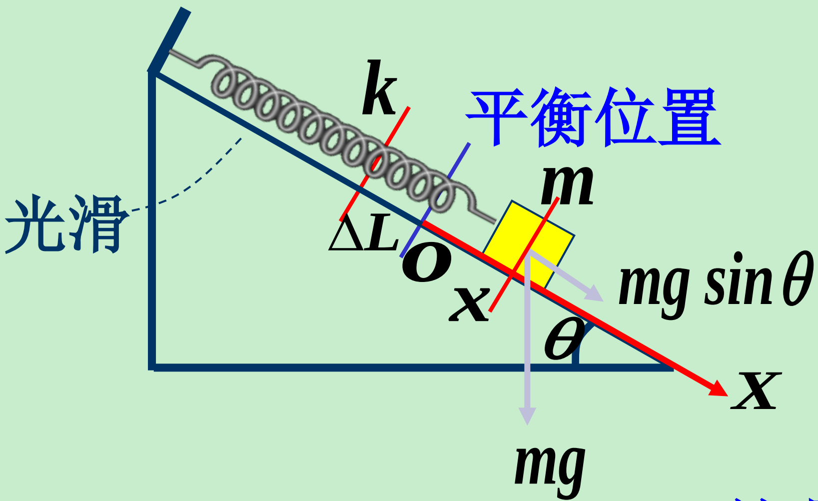
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$——系统作简谐振动

(2) $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ $v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$

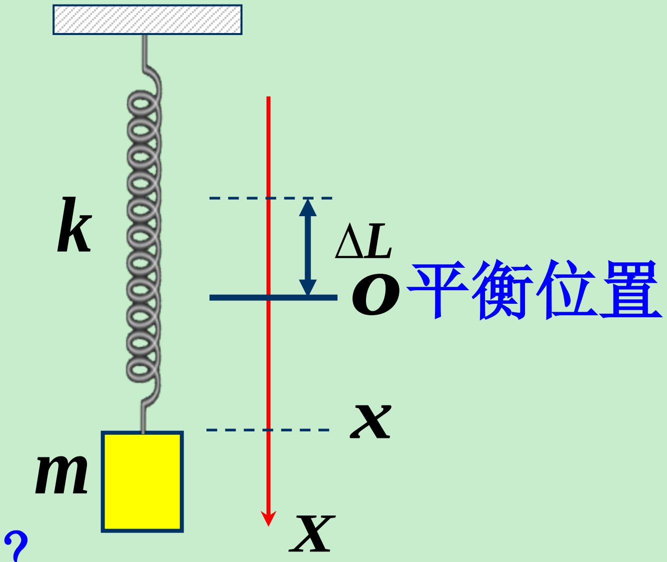
$$t=0\begin{cases} y=l_2 & A\cos\varphi = l_2 > 0 \\ v=0 & \sin\varphi = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = l_2 \end{cases}$$

$$y = l_2\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

例： 证明下列两种情况下，物体作谐振动。



(a)



(b)

这是两个问题吗？

利用能量关系求解？

解： (a) $mg\sin\theta = k\Delta L$ (b) $mg = k\Delta L$

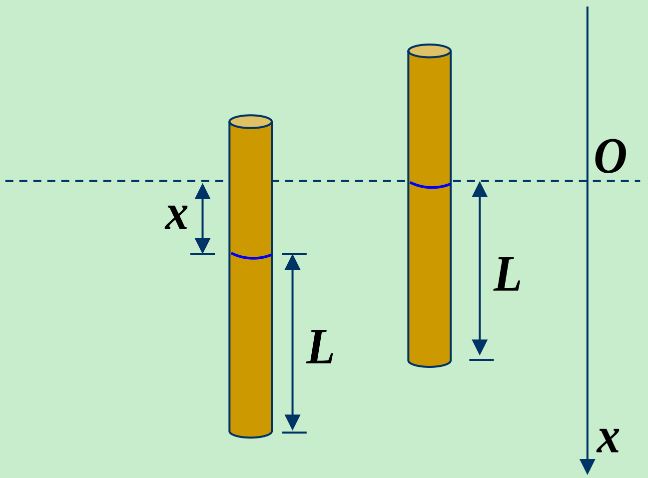
$$f = mg\sin\theta - k(\Delta L + x) = -kx$$

$$f = mg - k(\Delta L + x) = -kx$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x}$$

例：一质量为m的柱体浮在水面上，其横截面积为S。证明其在水中的铅直自由运动是谐振动，并求其振动周期。

解：$mg = \rho g(SL)$



$$f = -\rho gS(x+L)+mg$$

$$= -\rho gSx$$

运动方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t} = -\rho gSx$$

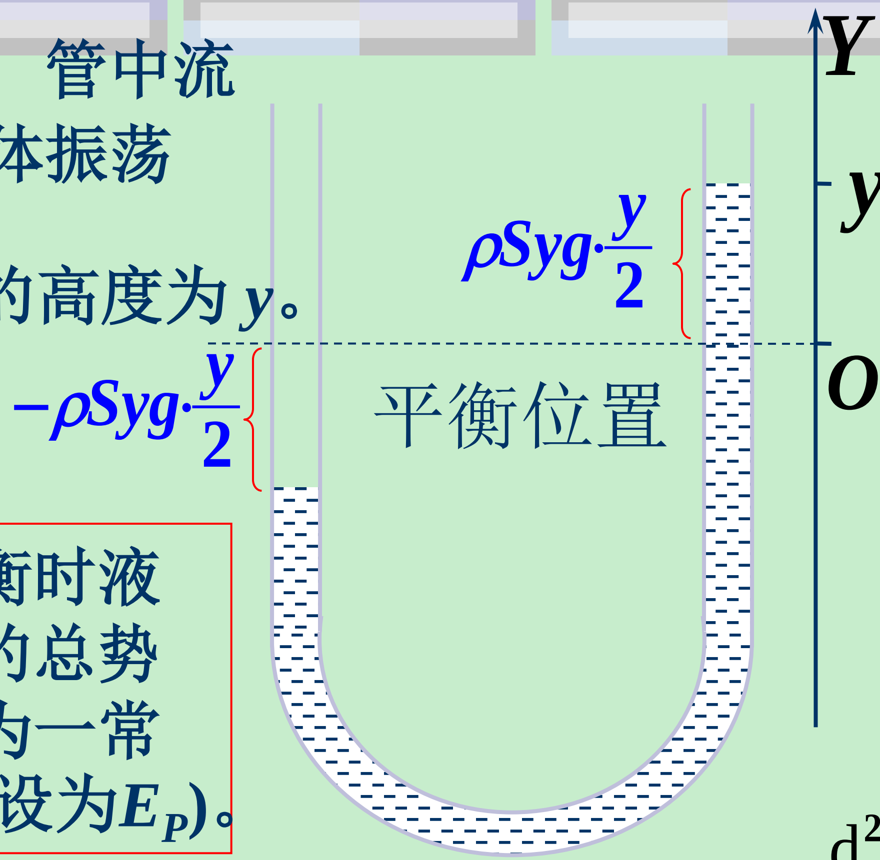
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t}+\frac{\rho gS}{m}x = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t}+\omega^2x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho gS}{m}}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$$

例：光滑U形管的截面面积为 S，管中流体的质量为 m、密度为ρ，求液体振荡周期。

解：设t时刻液面偏离平衡位置的高度为 y。



机械能守恒: $\frac{1}{2}mv^2+(E_P+\Delta E_P)=C$

$$\frac{1}{2}mv^2+\rho Syg\cdot y=C-E_P$$

$$\frac{1}{2}mv^2+\rho Sgy^2=C-E_P$$

平衡时液体的总势能为一常数(设为E_P)。

两边求导得: $m\frac{d^2y}{dt^2}+2\rho Sgy=0$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-2\rho Syg$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{\rho Sg}{m}y=0$$

$F=-2yS\cdot\rho\cdot g$　　$F=m\frac{d^2y}{dt^2}$

$$-2yS\cdot\rho\cdot g=m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{\rho Sg}{m}y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{2\rho Sg}{m}}}$$

故，液柱作谐振动。　$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho Sg}}$ ←

简谐振动描述

1、特征方程与特征量

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$ 运动方程

振动方程 $$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

简谐振动的运动学特征：x 随 t 按余弦规律变化

A、 ω (或 T)、φ 为简谐振动系统的三个特征量

2、特征量 A、 ω、φ 的求法

a. 由分析受力出发写出振子所受的合外力

b. 由牛顿第二定律列方程

c. 与谐振的运动方程相比较得ω

d. 由初始条件来确定A、φ 。

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\varphi=tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

简谐振动的描述方法

1. 解析法

由 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

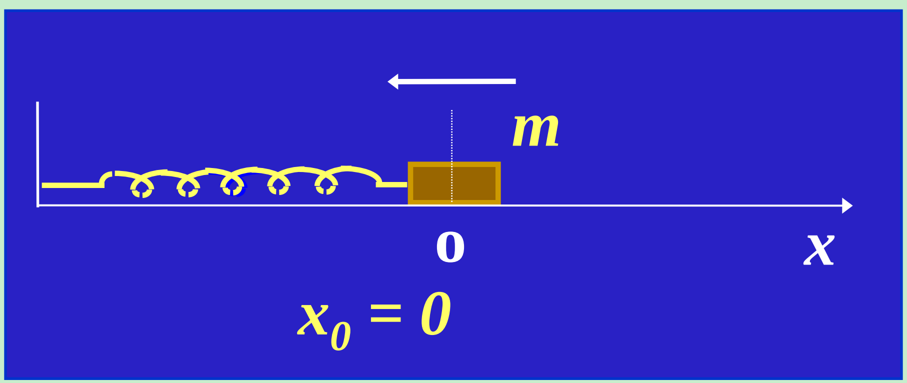
已知表达式 $\Rightarrow$ A、T、φ

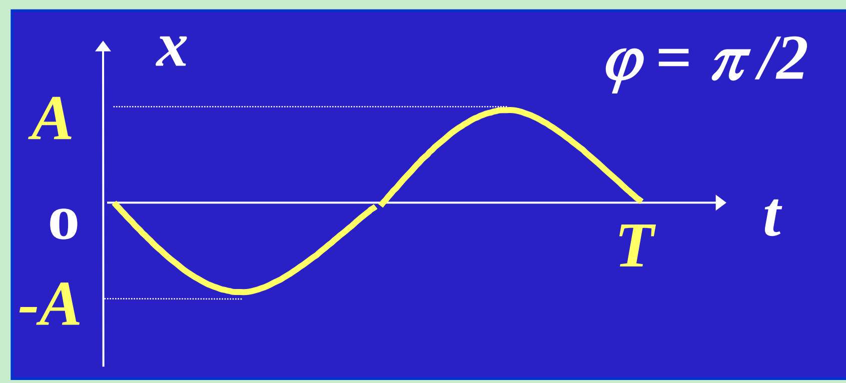
已知A、T、φ $\Rightarrow$ 表达式

2. 曲线法

已知曲线 $\Rightarrow$ A、T、φ

已知 A、T、φ $\Rightarrow$ 曲线





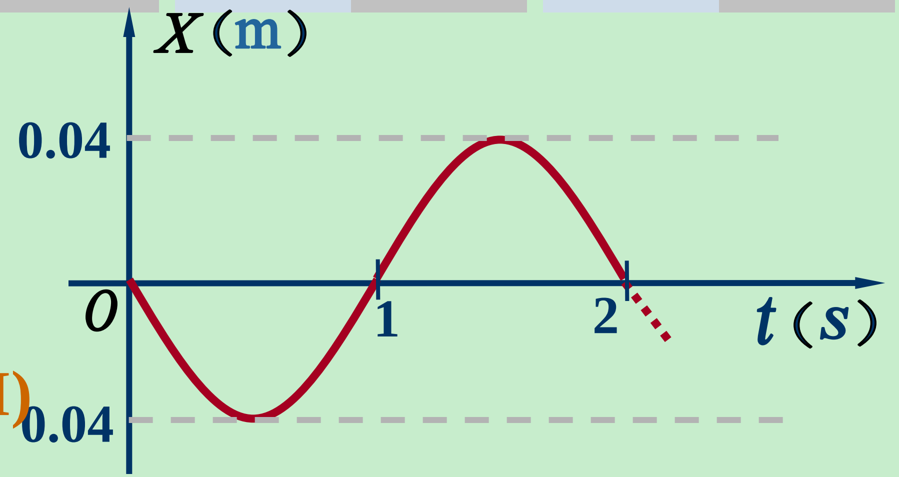
3. 旋转矢量法（*rotational vector*）

例：已知

谐振动的 $x\sim t$ 曲线

完成下列振动方程

$x = \underline{0.04}\cos(\underline{\pi}\,t + \underline{\frac{\pi}{2}})$ (SI)



(A) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

(B) $\varphi = \frac{\pi}{3}$

(C) $\varphi = \frac{\pi}{2}$

(D) $\varphi = \pi$

解：由图知：

$A = 0.04$ (m)

$T = 2$ (s)

故：

$\omega = 2\pi / T = \pi \quad (\text{rad/s})$

已知 $t = 0$ 时，

$x_0 = 0, \quad v_0 < 0$

且：$x_0 = A\cos\varphi$

$v_0 = -\omega A\sin\varphi$

$\therefore \quad \varphi = \pi/2$