第五章 留数及其应用

§ 5.1 孤立奇点

一、引言

二、函数的零点

三、函数的孤立奇点

四、孤立奇点的分类

五、如何进行孤立奇点的分类

六、如何判断极点的阶数

一、引言

- 如图，设函数 $f(z)$ 在 Γ 上连续，试计算积分 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$.

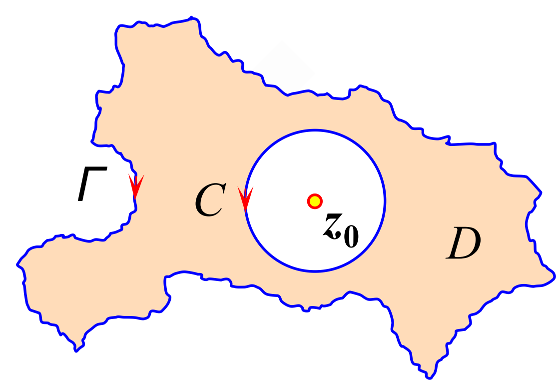
(1) 若 $f(z)$ 在 D 上解析，则 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

(2) 若 $f(z)$ 在 D 上有唯一的奇点 z_0，则 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \oint_C f(z)\mathrm{d}z$.

此时，将函数 $f(z)$ 在 z_0 点的邻域内洛朗展开：

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots,$$

由于 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1, \end{cases}$



因此积分 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ 不难得到。

二、函数的零点

- 所谓函数 $f(z)$ 的零点就是方程 $f(z)=0$ 的根。

定义 设函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析，

P93 定义 5.2

(1) 若 $f(z_0)=0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的零点；

(2) 若 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 处解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，

则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

结论 对于一个不恒为零的解析函数，其零点是孤立的。

P93

二、函数的零点

● 如何判断零点的阶数？

定理 设函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则下列条件是等价的，

P93 定理 5.4 修改

(1) z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

(2) $f^{(k)}(z_0)=0,\ (k=0,1,2,\cdots,m-1);\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

(3) $f(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内的泰勒展式为：

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,\quad (a_m\neq 0).$$

即 $$f(z)=(z-z_0)^m\underline{[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots]}$$

收敛且解析

$$=(z-z_0)^m\varphi(z).$$

例 $f(z)=z^3-1.$

$$f(z)=(z-1)(z^2+z+1),$$

故 $z=1$ 为 $f(z)$ 的一阶零点。

例 $f(z)=\dfrac{(2z+3)^3}{1+\mathrm{e}^z}.$

$$f(z)=[z-(-\frac{3}{2})]^3\frac{8}{1+\mathrm{e}^z}.$$

故 $z=-\dfrac{3}{2}$ 为 $f(z)$ 的三阶零点。

例 $f(z)=z-\sin z$.

方法一 $f(0)=0$, $f'(0)=1-\cos z\big|_{z=0}=0$,

$f''(0)=\sin z\big|_{z=0}=0$, $f'''(0)=\cos z\big|_{z=0}=1\neq 0$,

故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶零点。

方法二 $f(z)=z-(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots)$

$=z^3(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}z^2+\cdots)$.

故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶零点。

例 $f(z)=1-\cos z$.

$$f(z)=1-(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots)=z^2(1-\frac{1}{4!}z^2+\cdots)$$

故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶零点。

例 $f(z)=e^z-z-1$.

$$f(z)=(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots)-z-1$$

$$=z^2(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2\cdots)$$

故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶零点。

三、函数的孤立奇点

定义 设 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，且存在 $\delta > 0$,

P89 定义 5.1

使得 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析,

则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

例 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $z = 0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

例 $f(z) = \ln z$, 原点及负实轴上的点均为 $f(z)$ 的奇点,

但它们都不是孤立奇点。

三、函数的孤立奇点

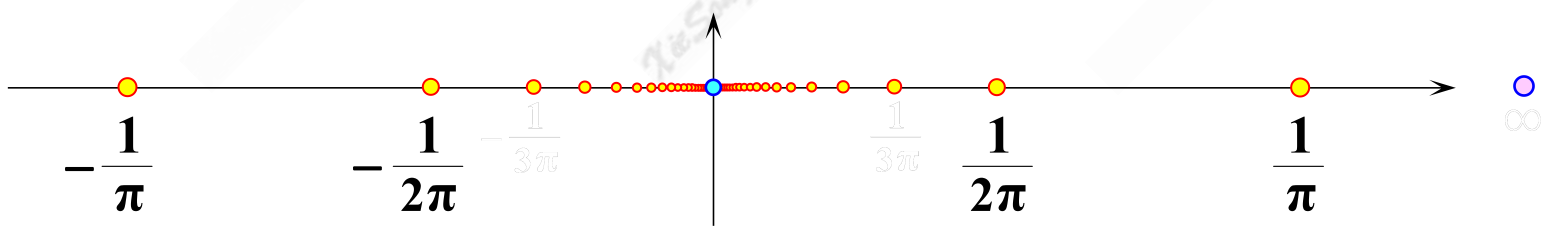
例 $f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$.

P89 例5.3

(1) 令 $\sin\dfrac{1}{z}=0$, $\Rightarrow \dfrac{1}{z}=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,

$\Rightarrow z_k=\dfrac{1}{k\pi}$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点;

(2) $z=0$ 也是 $f(z)$ 的奇点，但不是孤立奇点。



四、孤立奇点的分类

- 根据函数在孤立奇点的去心邻域的洛朗级数，对奇点分类。

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内

P 90

展开为洛朗级数：$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$，

(1) 若 $\forall n<0$，有 $a_n=0$，（即不含负幂次项）

则称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

四、孤立奇点的分类

- 根据函数在孤立奇点的去心邻域的洛朗级数，对奇点分类。

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内

P 90

展开为洛朗级数：$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$，

(2) 若 $\exists N<0$，有 $a_N\neq 0$，

且 $\forall n<N$，有 $a_n=0$，（即含有限个负幂次项）

则称 z_0 为 $f(z)$ 的 N 阶极点。

- 特别地，当 $N=1$ 时，称 z_0 为 $f(z)$ 的简单极点。

四、孤立奇点的分类

- 根据函数在孤立奇点的去心邻域的洛朗级数，对奇点分类。

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内

P 90

展开为洛朗级数：$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$，

(3) 若 $\forall N<0$，$\exists n<N$，有 $a_n \neq 0$，（即含无限个负幂次项）

则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点。

四、孤立奇点的分类

- 根据函数在孤立奇点的去心邻域的洛朗级数，对奇点分类。

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内

P 90

展开为洛朗级数：$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$，

小结 $f(z)=\underbrace{\cdot\quad\cdot\quad+}_{\text{本性奇点}}\underbrace{\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdot\quad\frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{N\text{阶极点}}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\cdot}_{\text{可去奇点}}$，

(1) 可去奇点 不含负幂次项；

(2) N 阶极点 含有限个负幂次项，且最高负幂次为 N；

(3) 本性奇点 含无穷多个负幂次项。

五、如何进行孤立奇点的分类

$$f(z)=\underbrace{\cdots+}_{\text{本性奇点}}\underbrace{\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{N\text{阶极点}}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\cdots}_{\text{可去奇点}}.$$

方法 (1) 可去奇点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$ (常数);

P90~91 定理5.1~~5.3

(2) N 阶极点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$; (该条件只能判断是极点)

N 阶极点 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^N}[a_{-N}+a_{-N+1}(z-z_0)+\cdots].$

(3) 本性奇点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在，且不为∞;

注 在求 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 时，可使用罗必达法则。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的奇点的类型。 P92 例 5.4

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点，由于 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$,

因此，$z=0$ 是 $f(z)$ 的<u>可去奇点</u>。

注 事实上，$f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数为：

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$$

$$=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$ （不含负幂次项）

- 如果约定 $f(z)$ 在 $z=0$ 点的值为 1，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 点就解析了，因此称 $z=0$ 为 $f(z)$ 的<u>可去奇点</u>。

例 判断函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 的奇点的类型。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点，下面考察极限 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} f(z)=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty;\qquad \lim_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} f(z)=\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0,$$

可知，$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在，且不为 ∞.

因此，$z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

注 事实上，$f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数为：

$$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\,z^n}+\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

（含无穷多个负幂次项）

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ 的奇点的类型。

解 $z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点，由于 $\lim\limits_{z\to1} f(z)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{e^z}{(z-1)^2}=\infty$，

因此，$z=1$ 是 $f(z)$ 的极点。

注 事实上，$f(z)$ 在 $z=1$ 的去心邻域内的洛朗级数为：

$$f(z)=\frac{e\cdot e^{z-1}}{(z-1)^2}=\frac{e}{(z-1)^2}\left(1+(z-1)+\frac{1}{2!}(z-1)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{z-1}+\frac{e}{2!}+\frac{e}{3!}(z-1)+\cdots,\ (0<|z|<+\infty).$$

（含有限个负幂次项，且最高负幂次为2）

- 可见，$z=1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ 的奇点的类型。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点，由于 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z}{z^3}=\infty$，

因此，$z=0$ 是 $f(z)$ 的极点。

注 事实上，$f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数为：

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!\,z}+\frac{1}{4!}z-\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

含有限个负幂次项，且最高负幂次为 3。

- 可见，$z=0$ 为 $f(z)$ 的三阶极点。

问题 是否还有其它办法来判断极点的阶数呢?

六、如何判断极点的阶数

结论1 若 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^N}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，则 z_0 为 $f(z)$ 的 N 阶极点。

P91 式(5.1)

理由 奇点 z_0 为 $f(z)$ 的 N 阶极点的充要条件(即定义)为:

$$f(z)=\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^N}\left[a_{-N}+a_{-N+1}(z-z_0)+\cdots\right]=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^N},$$

其中，$\varphi(z)$ 在 z_0 点解析，且 $\varphi(z_0)=a_{-N}\neq 0$.

(反问：等于 0 又如何?)

六、如何判断极点的阶数

结论2 若 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，且 z_0 既是分母 $\psi(z)$ 的 n 阶零点，

又是分子 $\varphi(z)$ 的 m 阶零点，即

$$f(z)=\frac{(z-z_0)^m\varphi_1(z)}{(z-z_0)^n\psi_1(z)}$$

则 (1) 当 $m \geq n$ 时，z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

(2) 当 $m<n$ 时，z_0 为 $f(z)$ 的 $(n-m)$ 阶极点。

特别 若 $f(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$，则 $\psi(z)$ 的 n 阶零点是函数 $f(z)$ 的 n 阶极点。

P93 定理 5.5

例 试判断函数 $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点的类型。

解 由于 $f(z)=\dfrac{(z+1)(z-1)}{(z+1)(z-1)^2}$,

因此，$z=-1$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，

$z=1$ 是 $f(z)$ 的一阶极点(即简单极点)。

例 试判断函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ 的奇点的类型。

解 由于 $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$,

因此，$z=\pm i$ 是 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ 的奇点的类型。

解 令 $z_k=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，

由于 z_k 是 $\cos z$ 的一阶零点， 故 z_k 是 $f(z)$ 的一阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{\cos z}{\sin^2 z}$ 的奇点的类型。

解 令 $z_k=k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，

由于 z_k 是 $\sin^2 z$ 的二阶零点，但不是 $\cos z$ 的零点，

故 z_k 是 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^z-(1+z)}{z^4}$ 的奇点的类型。

解 方法1 $z=0$ 是 z^4 的四阶零点， 是 $e^z-(1+z)$ 的二阶零点，

因此，$z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点。

方法2 将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开， 有

$$f(z)=\frac{1}{z^4}\left[\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right)-(1+z)\right]$$

$$=\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}z\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

因此，$z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点。

例　判断函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z-\sin z}$ 的奇点的类型。

解　$z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，是 e^z-1 的一阶零点，

因此，$z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点。

例　判断函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(e^{z^2}-1)}$ 的奇点的类型。

解　$z=0$ 是 $z^2(e^{z^2}-1)$ 的四阶零点，是 $\sin z$ 的一阶零点，

因此，$z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶极点。

- 什么情况下会出现本性奇点呢？

例 判断下列函数的奇点的类型。

(1) $f(z)=\sin\left(e^{\frac{1}{z}}\right),$ $z=0$ 为本性奇点。

(2) $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}},$ $z=1$ 为本性奇点。

(3) $f(z)=\cos\left(\frac{1}{z-1}\right),$ $z=1$ 为本性奇点。

§ 5.2 留数及其应用

一、留数的概念

二、留数的计算方法

三、留数定理

四、函数在无穷远点的留数

一、留数的概念

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内展开成洛朗级数：

P97 定义 5.4

$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

（两边积分）

称 a_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数，记作

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

其中，C 是 z_0 的去心邻域内绕 z_0 的一条简单闭曲线。

注 有时直接称 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数。

（留数）

二、留数的计算方法

1. 可去奇点

方法 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.

2. 本性奇点

方法 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则“只好”将 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内展开成洛朗级数。

注意 (1) 在具体展开时，并不需要写出较完整的洛朗级数，**只需将其中的系数 a_{-1} 求出来就可以了。**

(2) 其实，即使不是本性奇点，该方法有时也很有效，而且事先并不需要知道奇点的类型。

二、留数的计算方法

3. 极点

方法 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则有

P 100 法则 Ⅲ

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

推导 已知 $f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$.

第一步：用 $(z-z_0)^m$ 乘上式两端，得

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} +$$

$$a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots .$$

二、留数的计算方法

3. 极点

方法 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则有

P100 法则 Ⅲ

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

推导 已知 $f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots.$

第二步：两边求 $(m-1)$ 阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!a_{-1} + (z-z_0)\varphi(z),$$

其中，$\varphi(z)$ 为幂级数。

二、留数的计算方法

3. 极点

方法 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则有

P100 法则 Ⅲ

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

推导 已知 $f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$.

第三步：令 $z \to z_0$，两端取极限，**即得**

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

- 显然，理解了上述三个步骤，则该方法不难记忆。

二、留数的计算方法

3. 极点

方法 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则有

P 100 法则 Ⅲ

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)].$$

特别 (1) 若 z_0 为 $f(z)$ 的简单极点，则有

P 99 法则 Ⅰ

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} [(z-z_0) f(z)].$$

二、留数的计算方法

3. 极点

特别 (2) 若 $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$，其中，$g(z)$, $h(z)$ 在 z_0 点解析，

P100 法则 II

且 $h(z_0)=0$，$h'(z_0)\neq 0$，$g(z_0)\neq 0$，则有

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0]=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- 事实上，此时 z_0 为 $f(z)$ 的简单极点，故有

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}$$

$$=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

例 求下列函数在奇点处的留数。

$$(1)\ f_1(z)=\frac{1-\cos z}{z^2},\qquad (2)\ f_2(z)=\frac{1}{z(z-1)}.$$

解 (1) $z=0$ 是 $f_1(z)$ 的可去奇点,

$$\mathrm{Res}[f_1(z),0]=0.$$

(2) $z=0$ 和 $z=1$ 均为 $f_2(z)$ 的一阶极点,

$$\mathrm{Res}[f_2(z),0]=\lim_{z\to 0}[z f_2(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-1}=-1,$$

$$\mathrm{Res}[f_2(z),1]=\lim_{z\to 1}[(z-1)f_2(z)]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z}=1.$$

例 求下列函数在奇点处的留数。

$$(1)\ f_1(z)=\frac{\cos z}{4z^3},\qquad (2)\ f_2(z)=\frac{\sin z}{4z^3}.$$

解 (1) $z=0$ 是 $f_1(z)$ 的三阶极点,

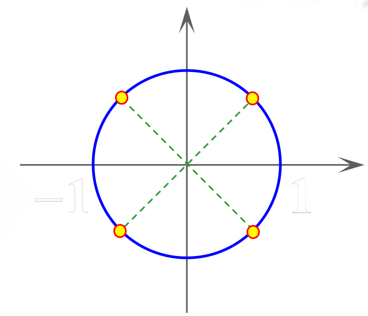
$$\mathrm{Res}[f_1(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\cdot\frac{\cos z}{4z^3}\right)''=-\frac{\cos z}{8}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{8}.$$

(2) $z=0$ 为 $f_2(z)$ 的二阶极点,

$$\mathrm{Res}[f_2(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{\sin z}{4z^3}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{4z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z-\sin z}{4z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z}{8}=0.$$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$ 在奇点处的留数。



解 函数 $f(z)$ 有四个简单极点，

$$z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i},\quad z_2=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i},\quad z_3=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i},\quad z_4=\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

$$(1)\ \operatorname{Res}[f(z),z_1]=\left.\frac{z^2}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=z_1}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

$$(2)\ 同理\ \operatorname{Res}[f(z),z_2]=\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=z_2}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_3]=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}i},\quad \operatorname{Res}[f(z),z_4]=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

例 求函数 $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}$ 在奇点处的留数。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点,

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开， 有

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}=z^2\cdot\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\cdots\right)$$

$$=z^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^4}+\cdots,$$

即得 $\operatorname{Res}[f(z),0]=0$.

例 求函数 $f(z)=(1+z)e^{\frac{1}{z}}$ 在奇点处的留数。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开，有

$$f(z)=(1+z)e^{\frac{1}{z}}=(1+z)\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(1+\frac{1}{2!}\right)\frac{1}{z}+\cdots,$$

即得 $\mathrm{Res}[f(z),0]=1+\frac{1}{2!}=\frac{3}{2}.$

例 求函数 $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z-1}$ 在奇点处的留数。

解 $z=1$ 是 $f(z)$ 的本性奇点,

将 $f(z)$ 在 $z=1$ 的去心邻域内洛朗展开, 有

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z-1}=(z-1+1)^2\cos\frac{1}{z-1}$$

$$=[(z-1)^2+2(z-1)+1]\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(-2\cdot\frac{1}{2!}\right)\frac{1}{z-1}+\cdots,$$

即得 $\mathrm{Res}[f(z),1]=-1$.

例 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}e^{\frac{1}{z}}$ 在奇点处的留数。

解 (1) $z=1$ 是 $f(z)$ 的简单极点，$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{1}{z}e^{\frac{1}{z}}=e.$

(2) $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点， （证明?）

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}e^{\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}e^{\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot(1+z+z^2+\cdots)\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots\right)$$

$$=\cdots-\frac{1}{z}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)+\cdots,$$

即得 $\operatorname{Res}[f(z),0]=-\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots\right)=-e.$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 点的留数。

解 方法一 利用极点的留数计算法则求解。

由于 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶极点，因此有

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}[z^3 f(z)]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{(z^2-12)\sin z+6z\cos z+6z}{z^5}$$

反复使用罗比达法则

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{z^2\cos z+4z\sin z-2\cos z}{5!}=-\frac{1}{5!}.$$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 点的留数。

解 方法一 利用极点的留数计算法则求解。

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{d^5 z}[z^6 f(z)]$$

$$=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{d^5 z}(z-\sin z)$$

$$=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z)=-\frac{1}{5!}.$$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 点的留数。

解 方法二 直接利用洛朗展式求留数。

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开，有

$$f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot[z-(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots)]$$

$$=\frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{5!z}+\frac{1}{7!}z-\cdots,$$

即得 $\mathrm{Res}[f(z),0]=-\dfrac{1}{5!}.$

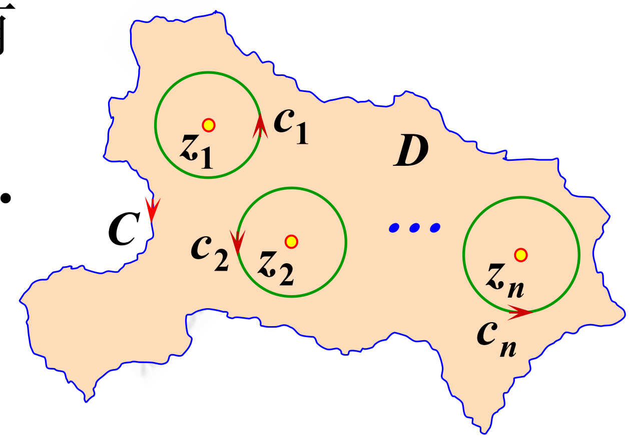
- 可见，直接利用洛朗展式求留数的方法，有时非常有效。

三、留数定理

定理 设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析，在闭域 $\overline{D}$ 上连续，则有

P98 定理5.7

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$



证明 如图，将各孤立奇点用含于 D 内且互不重叠的圆圈包围，由复合闭路定理，即得

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{c_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

注意 只需计算积分曲线 C 所围成的有限区域内奇点的留数。

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

P101 例 5.21

解 被积函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有两个奇点：

可去奇点 $z=0$， 一阶极点 $z=1$，

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=0.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\sin^2 z}{z^2}=\sin^2 1.$$

即得 $I=2\pi i\left(\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),1]\right)=2\pi i\sin^2 1.$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z}{\cos \pi z}dz$， 其中 C 为 $|z|=1$.

解 被积函数 $f(z)$ 的奇点为 $z_k=k-\dfrac{1}{2}$， $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，

但在 $|z|<1$ 内只有两个简单极点： $z_0=-\dfrac{1}{2}$， $z_1=\dfrac{1}{2}$，

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{e^z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{e^z}{-\pi\sin \pi z}\right|_{z=z_0}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\left.\frac{e^z}{-\pi\sin \pi z}\right|_{z=z_1}=-\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}},$$

即得 $I=2\pi i\left(\dfrac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}}\right)=-4i\,\mathrm{sh}\dfrac{1}{2}.$

例 计算 $I=\oint_C \sin\frac{z}{z-1}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 令 $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$， $z=1$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，

将 $f(z)$ 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内展开为洛朗级数：

$$f(z)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sin 1\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\cdots\right)$$

$$+\cos 1\cdot\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots\right),$$

即得 $\mathrm{Res}[f(z),1]=\cos 1$， $\Rightarrow$ $I=2\pi i\cos 1$.

例 计算 $I=\oint_C \frac{1}{z^{101}(1-z^2)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=0.5$.

解 令 $f(z)=\frac{1}{z^{101}(1-z^2)}$， $z=0$ 为 $f(z)$ 的 101 阶极点。

将 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内展开为洛朗级数:

$$f(z)=\frac{1}{z^{101}}\sum_{n=0}^{+\infty}z^{2n}=\frac{1}{z^{101}}+\frac{1}{z^{99}}+\cdots+\frac{1}{z}+z+z^2+\cdots,$$

即得 $\operatorname{Res}[f(z),0]=1$,

$$\Rightarrow\quad I=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),0]=2\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z-1}{z^3}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 方法一 利用极点的留数计算法则求解。

$z=0$ 为被积函数 $f(z)$ 的二阶极点，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to0}\left(z^2\cdot\frac{e^z-1}{z^3}\right)'=\lim_{z\to0}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{ze^z-e^z+1}{z^2}=\lim_{z\to0}\frac{e^z}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=\pi i.$$

方法二 利用高阶导数公式求解。

$$I=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}(e^z-1)''=\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \frac{e^z-1}{z^3}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 方法三 利用洛朗展式求解。

将被积函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开，

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\cdots,$$

即得 $\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow\quad I=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=\pi i.$$

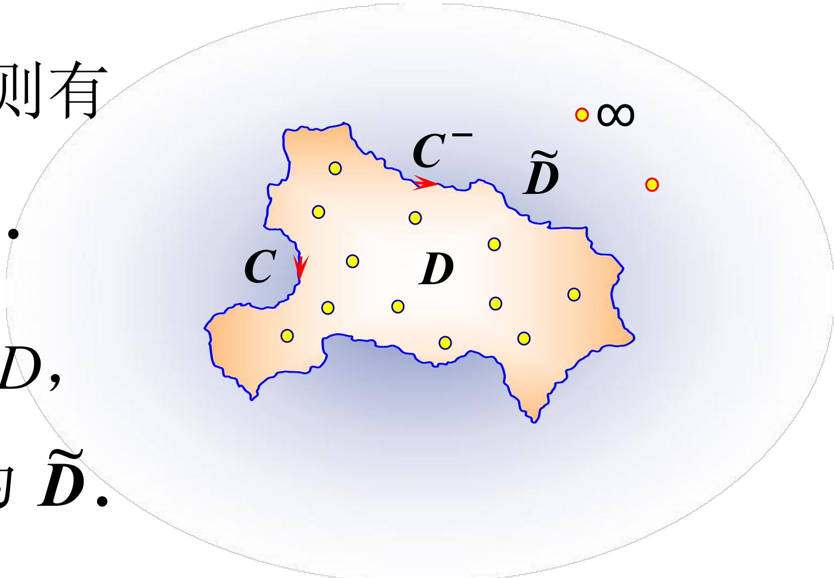
四、函数在无穷远点的留数

- 一般说来，闭路积分只与闭路所包围的区域内的奇点有关，但为什么又要引入无穷远点的留数呢？

设想

- 设 C 是一条简单闭曲线，则有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z.$$



- 将曲线 C 围成的区域记为 D，而曲线 C^- 围成的区域记为 $\tilde{D}$.

- **如果区域 D 内的奇点很多，但区域 $\tilde{D}$ 内的奇点很少，** 甚至只有无穷远点 ∞ 为奇点，则计算等式右边的积分也许比计算等式左边的积分要省事一些。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

定义 如果函数 $f(z)$ 在无穷远点 ∞ 的去心邻域 $R<|f(z)|<+\infty$ 内解析，则称点 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

P94 定义 5.3

手段 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则点 $z=\infty$ 对应于点 $\xi=0$，

相应地，$f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)\xlongequal{\text{记为}}\varphi(\xi)$，

因此， 函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的性态可由函数 $\varphi(\xi)$ 在原点 $\xi=0$ 的性态来刻画。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

例 设 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$, 问 $z=\infty$ 是否为 $f(z)$ 的孤立奇点?

P96 例 5.13

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$, 则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{\xi}} \xlongequal{\text{记为}} \varphi(\xi)$,

函数 $\varphi(\xi)$ 的奇点为:

$$\xi=0; \quad \xi_k=\frac{1}{k\pi}, \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

由于 $\xi=0$ 不是 $\varphi(\xi)$ 的孤立奇点,

因此 $z=\infty$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

例 设 $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

P96 例 5.10

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1}{\xi}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\xi^2}}$

$$=\frac{\xi^2}{\xi(1+\xi^2)}\overset{\text{记为}}{=\!=\!=}\varphi(\xi),$$

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的可去奇点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

例 设 $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1+z}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1+\dfrac{1}{\xi^2}}{1+\dfrac{1}{\xi}}$

$$=\frac{1+\xi^2}{\xi(1+\xi)} \xlongequal{\text{记为}} \varphi(\xi),$$

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的一阶极点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的一阶极点。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

例 设 $f(z)=e^{z}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

P96 例 5.12

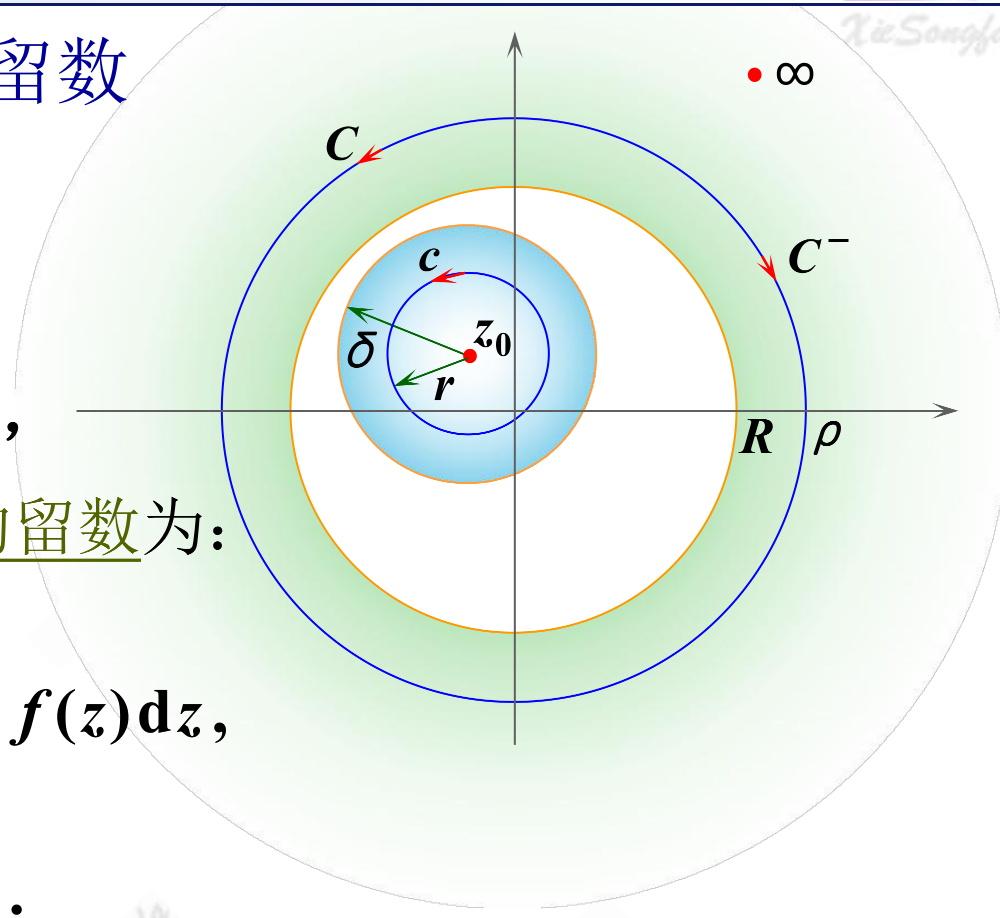
解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$， 则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=e^{\frac{1}{\xi}} \overset{\text{记为}}{=\!=\!=} \varphi(\xi)$,

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的本性奇点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

四、函数在无穷远点的留数

2. 函数在无穷远点的留数



定义 设函数 $f(z)$ 在圆环域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，

P102 定义 5.5

则 $f(z)$ 在无穷远点的留数为:

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

其中，C 为 $|z|=\rho>R$.

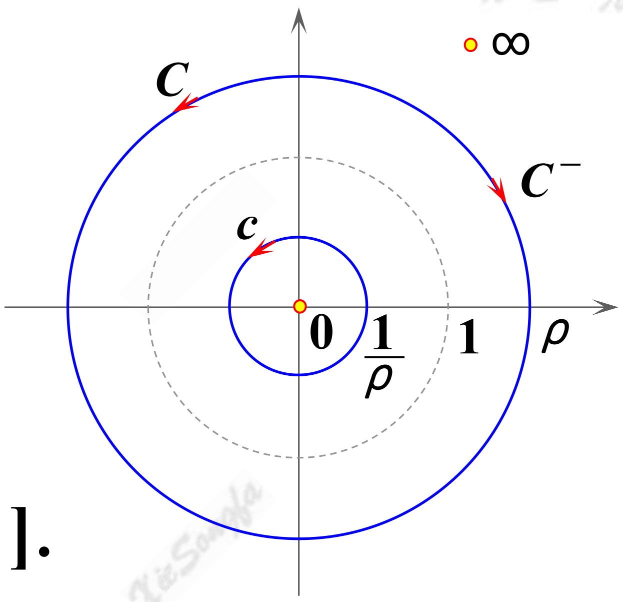
对比 函数 $f(z)$ 在“有限”孤立奇点 z_0 的留数为:

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} f(z)\,\mathrm{d}z,$$ 其中，c 为 $|z|=r<\delta$.

四、函数在无穷远点的留数

2. 函数在无穷远点的留数

- 如何计算在无穷远点的留数?



公式 P103 法则 IV

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\Big[f\Big(\frac{1}{z}\Big)\cdot\frac{1}{z^2},0\Big].$$

推导 如图，已知 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z$,

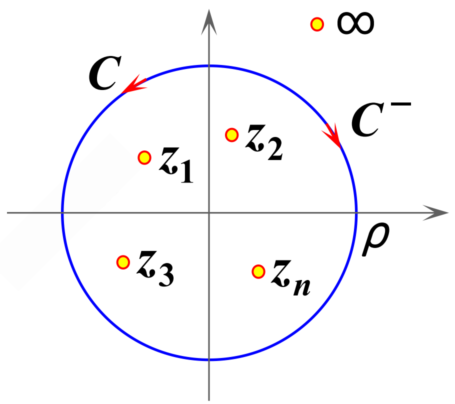
令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{c}f\Big(\frac{1}{\xi}\Big)\cdot\frac{1}{\xi^2}\mathrm{d}\xi$

$$=-\mathrm{Res}\Big[f\Big(\frac{1}{z}\Big)\cdot\frac{1}{z^2},0\Big].$$

四、函数在无穷远点的留数

2. 函数在无穷远点的留数

● 在无穷远点的留数有何用处?



定理 设函数 $f(z)$ 在扩充复平面上除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$ 外处处解析，则有

P102 定理 5.8

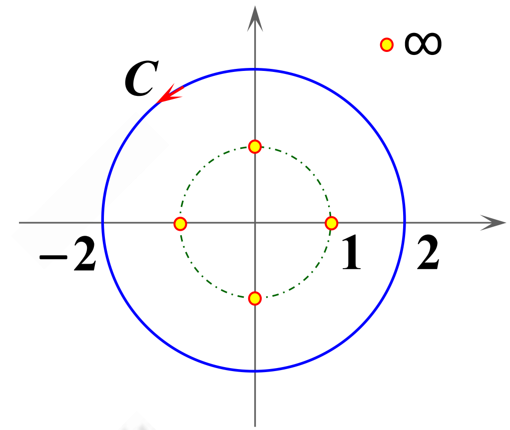
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0.$$

证明 如图，令 ρ 充分大，即 $\rho > \max_k |z_k|$，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,dz = 0,$$

即 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0.$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{z^3}{z^4-1}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.



解 函数 $f(z)=\dfrac{z^3}{z^4-1}$ 在 $|z|<2$ 内有四个

一阶极点 $z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{4}i}$，$(k=0,1,2,3)$.

根据留数定理，有

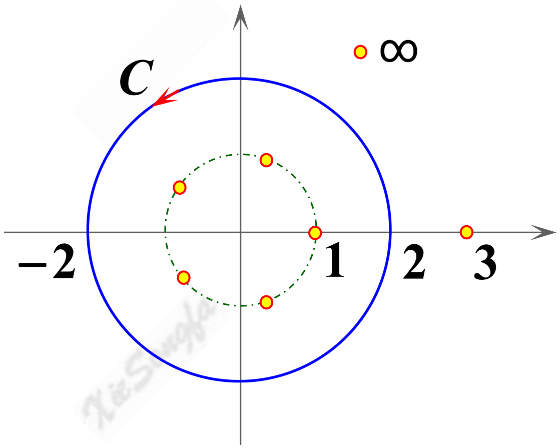
$$I=2\pi i\sum_{n=0}^{3}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

$$=-2\pi i\operatorname{Res}[f(z),\infty]=2\pi i\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(1-z^4)},0\right]=2\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 (1) 令 $f(z)=\dfrac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}$,



在 $|z|<2$ 内，$f(z)$ 有五个奇点：

$$z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}i},\quad (k=0\sim 4).$$

在 $|z|>2$ 上，$f(z)$ 只有两个奇点：$z=3$，$z=\infty$.

根据留数定理，有

$$I=2\pi i\sum_{n=0}^{4}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

$$=-2\pi i\big(\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\big).$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 (2) $\operatorname{Res}[f(z),3]=\lim\limits_{z\to 3}(z-3)f(z)=\dfrac{1}{(3^5-1)^3}$,

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\times\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=-\operatorname{Res}\left[\frac{z^{14}}{(1-z^5)^3(1-3z)},0\right]=0.$$

即得 $I=-2\pi i\big(\operatorname{Res}[f(z),3]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]\big)$

$$=-\frac{2\pi i}{(3^5-1)^3}=-\frac{2\pi i}{14172488}.$$

§ 5.3 留数在定积分计算中的应用

一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

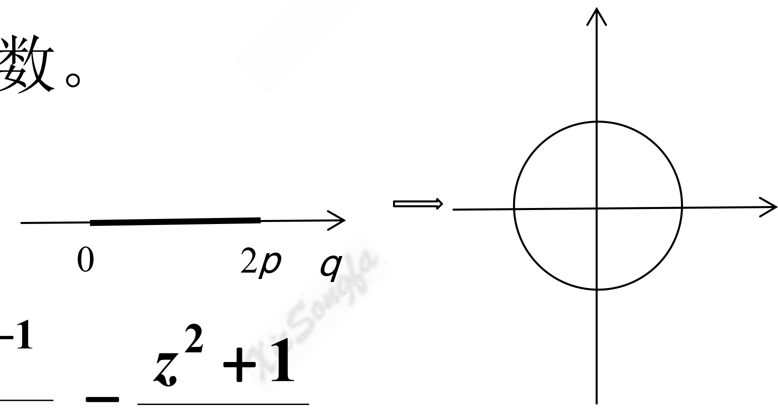
三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x \ (a > 0)$ 的积分

首先将定积分变为闭路积分的形式，然后利用留数定理进行计算。

一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分

要求　$R(u,v)$ 是 u, v 的有理函数，　即 $R(u,v)$ 是以 u, v 为变量的二元多项式函数或者分式函数。

方法　(1) 令 $z = e^{i\theta}$



$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}, \qquad \cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z},$$

$$\sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz},$$

从而上述积分化为沿正向单位圆周的复积分如下

$$(2) \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}\mathrm{d}z$$

一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

要求 $R(u,v)$ 是 u, v 的有理函数， 即 $R(u,v)$ 是以 u, v 为变量的二元多项式函数或者分式函数。

方法 (2) $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \boxed{R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}}\,\mathrm{d}z$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \boxed{f(z)}$$

$$= 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

其中， z_k 是 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的孤立奇点。

注意：上述定积分的积分区间长度为2π时才能由 $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ 变换化为单位圆周上的复闭路积分。

例 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 的值。

解 积分是有意义的。

(1) 令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$，$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$，

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{z+z^{-1}}{2}\cdot\frac{1}{5+4\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\boxed{\frac{1+z^2}{4iz(z+1/2)(z+2)}}\mathrm{d}z\overset{\text{记为}}{=\!=\!=}\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z.$$

例 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 的值。

解 (2) 在 $|z|<1$ 内，$f(z)$ 有两个一阶极点：$z_1=0$，$z_2=-1/2$.

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z f(z)=\left.\frac{1+z^2}{4i(z+1/2)(z+2)}\right|_{z=0}=\frac{1}{4i};$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-1/2]=\lim_{z\to -1/2}(z+1/2)f(z)$$

$$=\left.\frac{1+z^2}{4iz(z+2)}\right|_{z=-1/2}=-\frac{5}{12i}.$$

(3) $I=2\pi i\left[\frac{1}{4i}-\frac{5}{12i}\right]=-\frac{\pi}{3}$, （实数）

例　计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 的值。

解　由于被积函数为偶函数，记 $\tilde{I}=2I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta.$

$$\Rightarrow\quad I=\frac{1}{2}\tilde{I}=-\frac{\pi}{6}.$$

二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高二次；

(3) 分母 $Q(x)$ 没有实零点。

方法 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum\limits_{k} \mathrm{Res}[R(z), z_k]$.

其中，z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

公式 设 $R(x)=P(x)/Q(x)$ 为有理函数，$Q(x)$ 的次数比 $P(x)$ 的次数至少高二次，且 $Q(x)$ 没有实零点，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k].$$

其中，z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

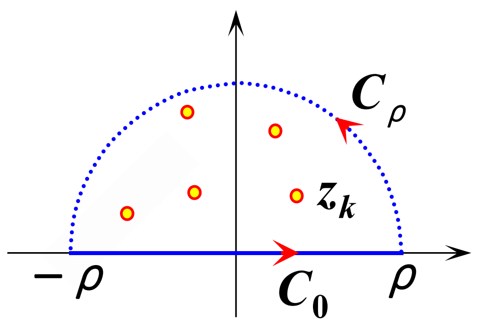
推导（思路） (1) 取闭路 C_0+C_ρ，其中 $\rho > \max\limits_k |z_k|$.

根据留数定理，可得

$$\int_{C_0} R(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_\rho} R(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-\rho}^{\rho} R(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_\rho} R(z)\,\mathrm{d}z$$

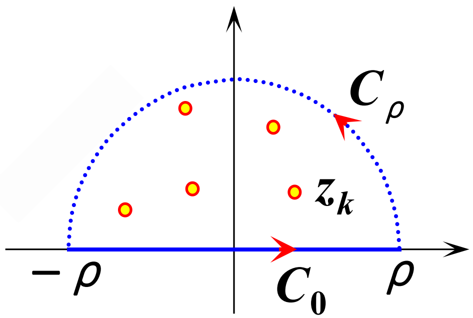
$$= 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k].$$



关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分的公式推导

推导 (2) 在 C_ρ 上，令 $z=\rho e^{i\theta}$，则有

(思路)



$$\int_{C_\rho} R(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\frac{P(\rho e^{i\theta})\rho e^{i\theta}}{Q(\rho e^{i\theta})}i\,d\theta$$

由于 $Q(x)$ 的次数比 $P(x)$ 的次数<u>至少高二次</u>，因此有

$$\frac{P(\rho e^{i\theta})\rho e^{i\theta}}{Q(\rho e^{i\theta})}=\frac{zP(z)}{Q(z)}\to 0,\quad \text{当 } |z|=\rho\to+\infty \text{ 时。}$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to+\infty}\int_{C_\rho} R(z)\,\mathrm{d}z=0,$$

即得 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x=2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z),z_k].$

例 计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x.$

P107 例 5.25

解 (1) 令 $R(z)=\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}=\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)}$,

在上半平面内，i 与 $3i$ 为 $R(z)$ 的一阶极点。

(2) $\mathrm{Res}[R(z),i]=\left.\frac{z^2-z+2}{(z+i)(z^2+9)}\right|_{z=i}=-\frac{1+i}{16}$,

$\mathrm{Res}[R(z),3i]=\left.\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z+3i)}\right|_{z=3i}=\frac{3-7i}{48}.$

(3) $I=2\pi i\left(-\frac{1+i}{16}+\frac{3-7i}{48}\right)=\frac{5\pi}{12}.$

例 计算 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$，$(a>0,\ b>0,\ a\neq b)$.

解 (1) 令 $R(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$， 记 $\tilde{I}=2I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$，

在上半平面内，ai 与 bi 为 $R(z)$ 的一阶极点。

(2) $\operatorname{Res}[R(z),ai]=\lim\limits_{z\to ai}[(z-ai)R(z)]=\dfrac{a}{2i(a^2-b^2)}$，

$\operatorname{Res}[R(z),bi]=\lim\limits_{z\to bi}[(z-bi)R(z)]=\dfrac{b}{2i(b^2-a^2)}$.

(3) $I=\dfrac{1}{2}\tilde{I}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\dfrac{a}{2i(a^2-b^2)}+\dfrac{b}{2i(b^2-a^2)}\right)=\dfrac{\pi}{2(a+b)}$.

三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$ 的积分

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高一次；

(3) 分母 $Q(x)$ 没有实零点。

方法 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[\,R(z)\,\mathrm{e}^{iaz}, z_k\,].$

其中，z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

推导（略）

三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$ 的积分

应用（实际）　由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)(\cos ax + i\sin ax)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,\mathrm{d}x,$$

$$2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z)\mathrm{e}^{iaz}, z_k] \overset{\text{结果记为}}{=\!=\!=\!=} A + iB, \quad \text{（复数）}$$

即得 $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,\mathrm{d}x = A;}$

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = B.}$

例 计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{z^2-2z+10}=\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{[z-(1+3i)]\cdot[z-(1-3i)]}$,

在上半平面内，$1+3i$ 为一阶极点。

$$\mathrm{Res}[f(z),1+3i]=\left.\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{2z-2}\right|_{z=1+3i}=\frac{1+3i}{6i}\mathrm{e}^{-3+i}.$$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x=2\pi i\cdot\frac{1+3i}{6i}\mathrm{e}^{-3+i}$$

$$=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(1+3i)(\cos 1+i\sin 1).$$

例 计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x$.

解 (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(1+3i)(\cos 1+i\sin 1)$

$$=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(\cos 1-3\sin 1)+i\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(3\cos 1+\sin 1).$$

(3) 即得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(\cos 1-3\sin 1)$;

- 顺便求得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(3\cos 1+\sin 1)$.

例 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2+1}\mathrm{d}x$，$(a>0, b>0)$.

解 (1) 令 $f(z)=\frac{e^{iaz}}{z^2+1}=\frac{e^{iaz}}{(z-i)(z+i)}$,

在上半平面内， i 为一阶极点。

$$\mathrm{Res}[f(z), i]=\left.\frac{e^{iaz}}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{e^{-a}}{2i}.$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}\mathrm{d}x=2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2i}=\pi e^{-a}$.

例 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2+1}\mathrm{d}x$，$(a>0,\ b>0)$.

解 (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}\mathrm{d}x=2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2i}=\pi e^{-a}$.

即得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}\mathrm{d}x=\pi e^{-a}$, $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi e^{-a}}{2}$,

同理 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi e^{-b}}{2}$.

(3) $I=\frac{\pi e^{-a}}{2}-\frac{\pi e^{-b}}{2}=\frac{\pi}{2}(e^{-a}-e^{-b})$.

放松一下吧！……