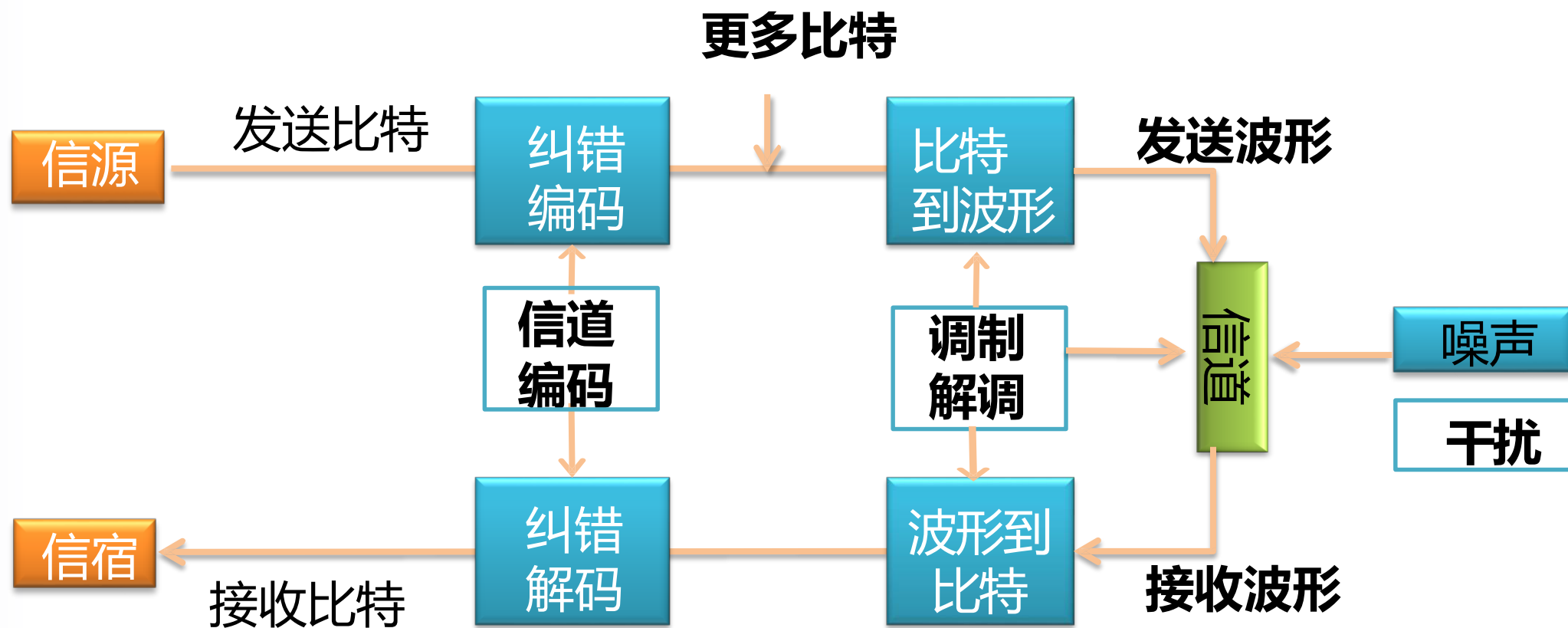


基础信息论

信道编码：线性分组码

华中科技大学电信学院

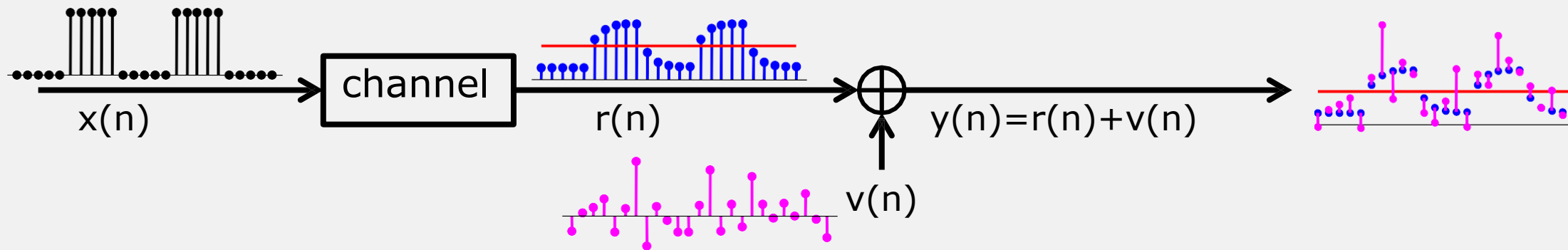
点对点通信



主题：线性分组码

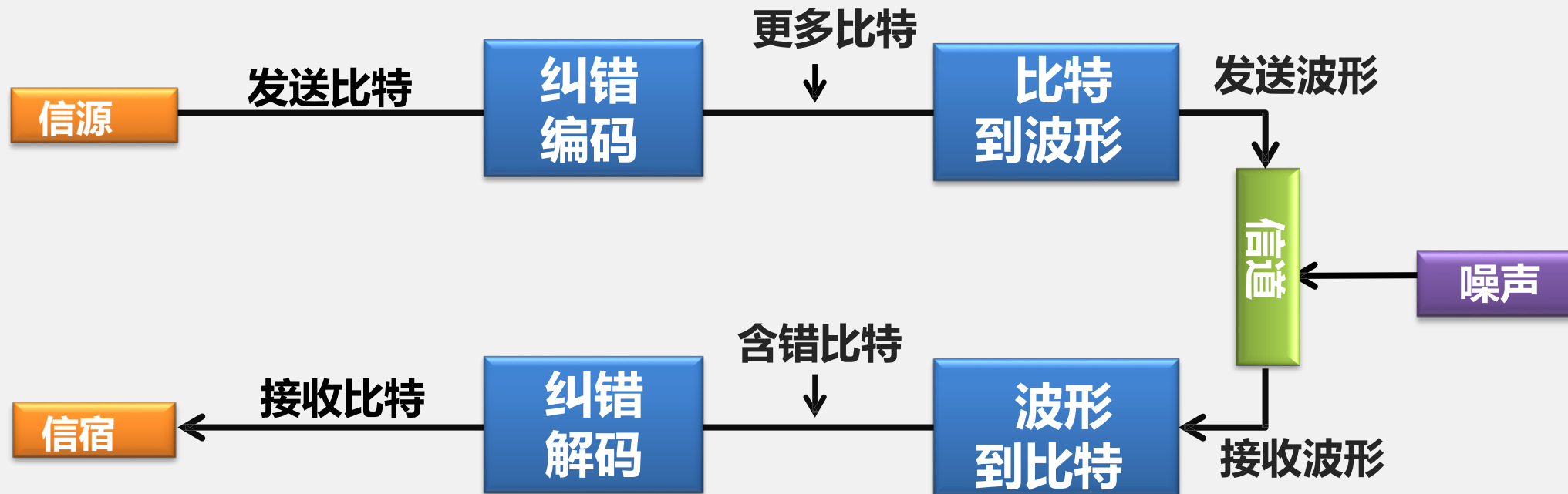
- 目的
 - 实现用于错误检测或纠正的线性分组码和重复码
- 内容
 - 分组码
 - 重复码

误码



- 传输过程中加上的噪声会导致数据流出现误码。
- 通常不可能完全消除错误。
- 我们能做的就是限制误码的概率。
- 信道编码是一种通过增加传输冗余来检测或纠正误码的方法。

信道编码



- 我们向传输的比特流中添加冗余信息，以便我们可以在接收器处检测错误。
- 理想情况下，我们希望
 - 纠正常见错误。
 - 检测不常见的错误，并通过重传之类的方法进行处理。

编码方法

- 当信道为确定的有噪信道时，无论采用什么样的译码规则，我们只能尽量的减小平均错误概率，总不能完全消除
- 因此必须要有方法降低错误概率：编码方法
- 检错与纠错原理
 - 奇偶校验
 - 增加扩展次数（重复消息位）
 - 设计等重码

线性分组码

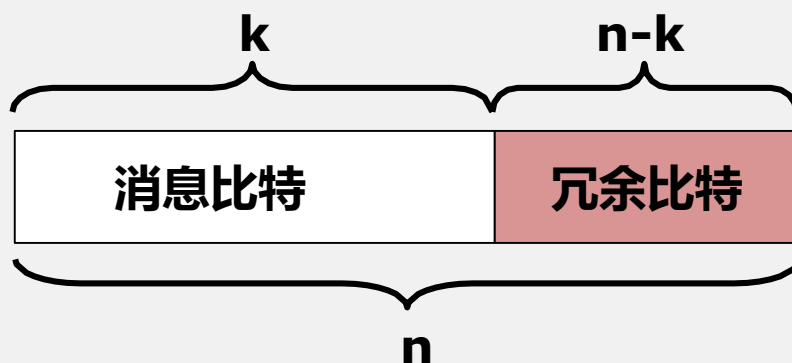
(n, k, d) 分组码



- 将消息拆分为 k 比特的分组
- 通过向每个分组添加 $(n-k)$ 个额外比特来创建码字。
 - 根据消息比特计算额外比特。
 - 因此，它们不包含任何新信息。
- d = 码字之间的最小汉明距离
- 有时我们丢掉 d 只声明 (n, k)

编码率

- 编码率：包含有用信息（即消息）的已发送比特的分数。
- 对于 (n, k, d) 分组码



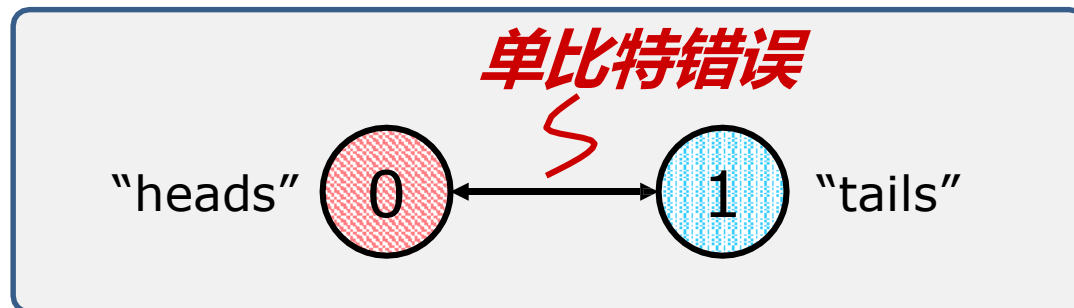
$$\text{编码率} = \frac{k}{n}$$

- 重要参数
 - 总比特率：所有比特发送的速率
 - 也称数据信号传输率；
 - 净比特率：有用比特发送的比率 = 编码率 × 总比特率

$$= \frac{F_s}{\text{SPB}}$$

汉明距离

- 两个码字之间的汉明距离是对应位不同的数量
- 例如
 - (00) 和 (10) 的汉明距离是 1。
 - (00000000)和(11110011) 的汉明距离是6。
- 汉明距离测量将一个码字转换为另一个码字所需的误码数量。
 - 例如，如果我们不使用编码，则每个比特位由两个码字之一表示（“0” 和 “1”）。
 - 因为汉明距离是 1, 单比特错误将一个码字变成另一个码字。



检错vs纠错

■ 检错

- 能够检测到错误
- 但是我们不知道怎么去纠正错误

■ 纠错

- 我们能够检测到错误
- 并且我们还能够纠正错误

- 对于给定码，接收方可以选择是使用该码来检测错误还是对其进行纠正

检错/纠正能力

- 最小汉明距离确定接收器可以检测或纠正的最大误码位数。
- 如果最小汉明距离是 d , 接收器可以
 - 对每个码字检错但不纠错最多 $d-1$ 位
 - 或者
 - 每个码字最多检测并纠错 $(d-1)/2$ 位
- 例如, 如果 $d = 3$, 接收器可以
 - 在每个码字检测 1 或 2 位误码;
 - 在每个码字检测并纠错 1 位误码.
 - ✓ 如果确实发生 2 位误码, 则将检测到该错误, 但不能正确纠正.

重复码

$(n,1,n)$ 重复码

- 重复码是一种分组码，此时
 - 信息元只分配一比特
 - 将该比特重复 n 次扩充为 n 比特分组码

■ 示例

□ $(2,1,2)$ 重复码

- ✓ 信息元比特 0 → 码字 00
- ✓ 信息元比特 1 → 码字 11

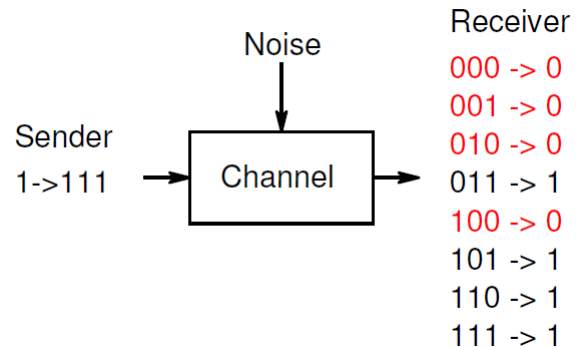
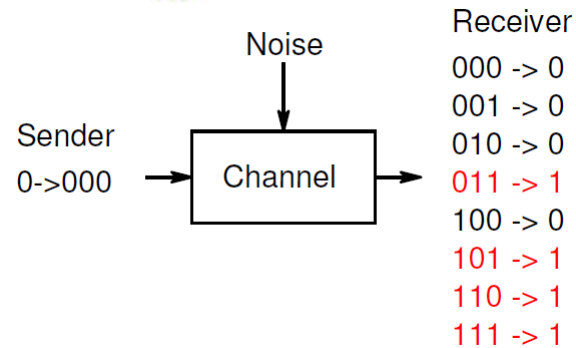
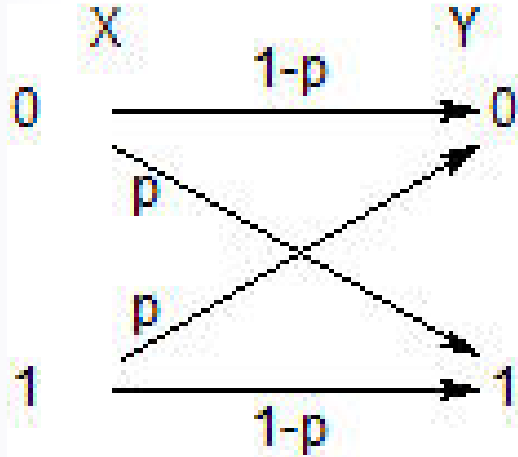
$$\text{编码率} = \frac{1}{2}$$

□ $(3,1,3)$ 重复码

- ✓ 信息元比特 0 → 码字 000
- ✓ 信息元比特 1 → 码字 111

$$\text{编码率} = \frac{1}{3}$$

(3,1,3) 重复码用于 BSC

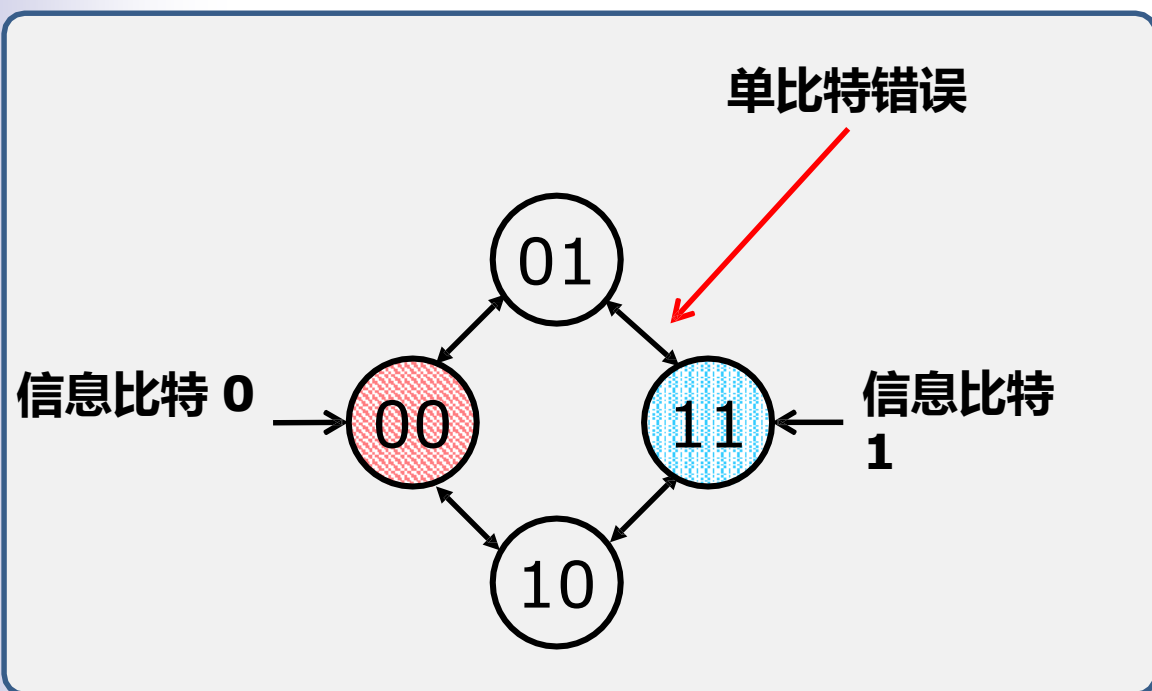


- 假设 $p < 0.5$
- 重复 3 次:
 - $0 \rightarrow 000$
 - $1 \rightarrow 111$
- 应用简单多数的译码规则

$$\begin{aligned}
 p_e &= C_3^2 p^2 (1-p) + C_3^3 p^3 \\
 &= 3p^2 - 2p^3 \\
 &= 3p^2 - 2p^3 - p + p \\
 &= -p(1-p)(1-2p) + p \\
 &< p
 \end{aligned}$$

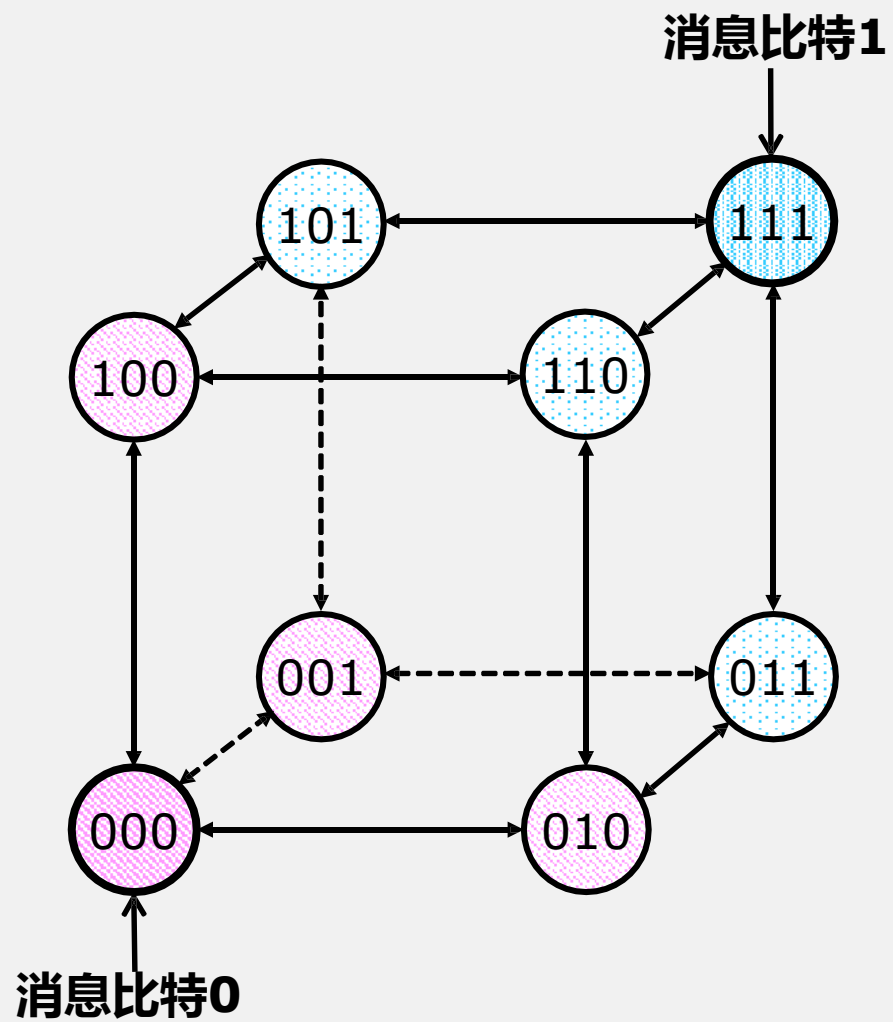
What if $n \rightarrow \infty$?

(2,1,2) 重复码



- 每比特重复两次。
 - 每个码字都有偶数个 “1” 比特。我们称此为 “偶校验”。
- 码字之间的汉明距离是 $d=2$ 。
- 该码可用于检测高达 $d-1 = 1$ 位的错误
 - 如果码字中接收到的 “1” 位数是奇数，则会出现错误。

(3,1,3) 重复码



- 每比特重复三次

- 码字之间的汉明距离 $d=3$

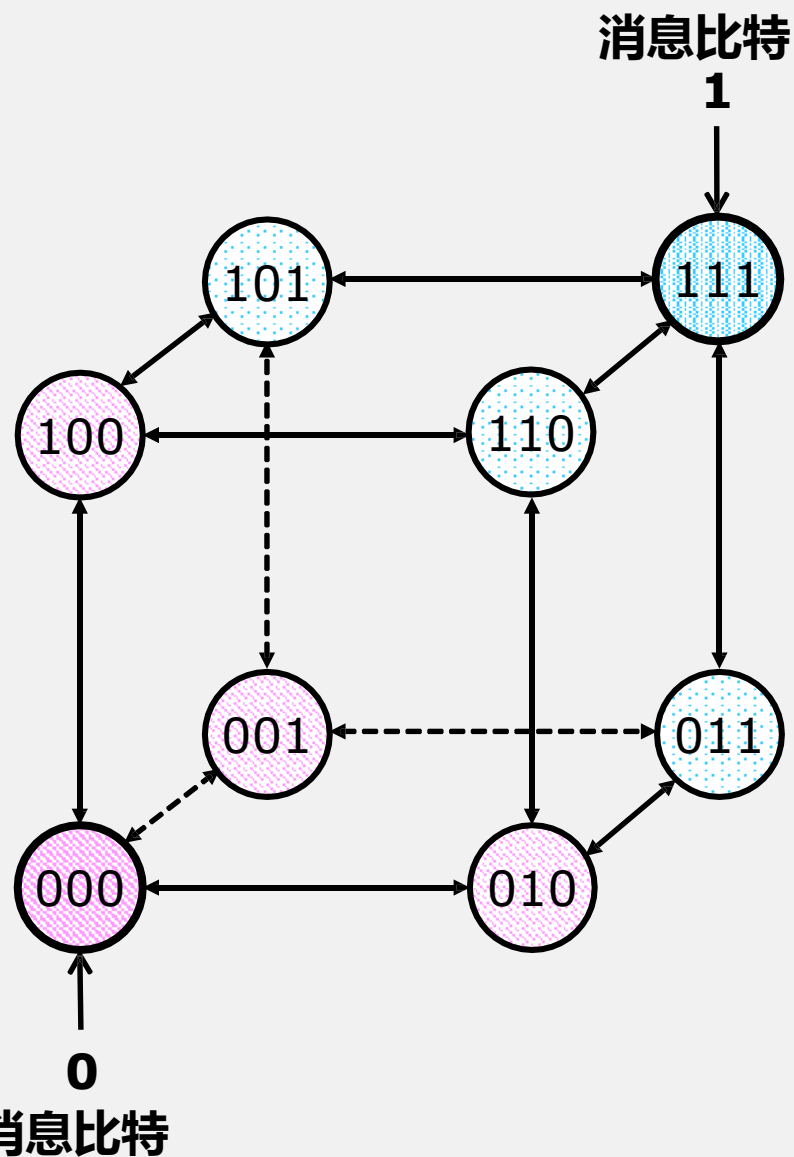
- 我们可以

- 检测最多 $d-1=2$ 比特的错误

或

- 检测并纠错1比特

检错

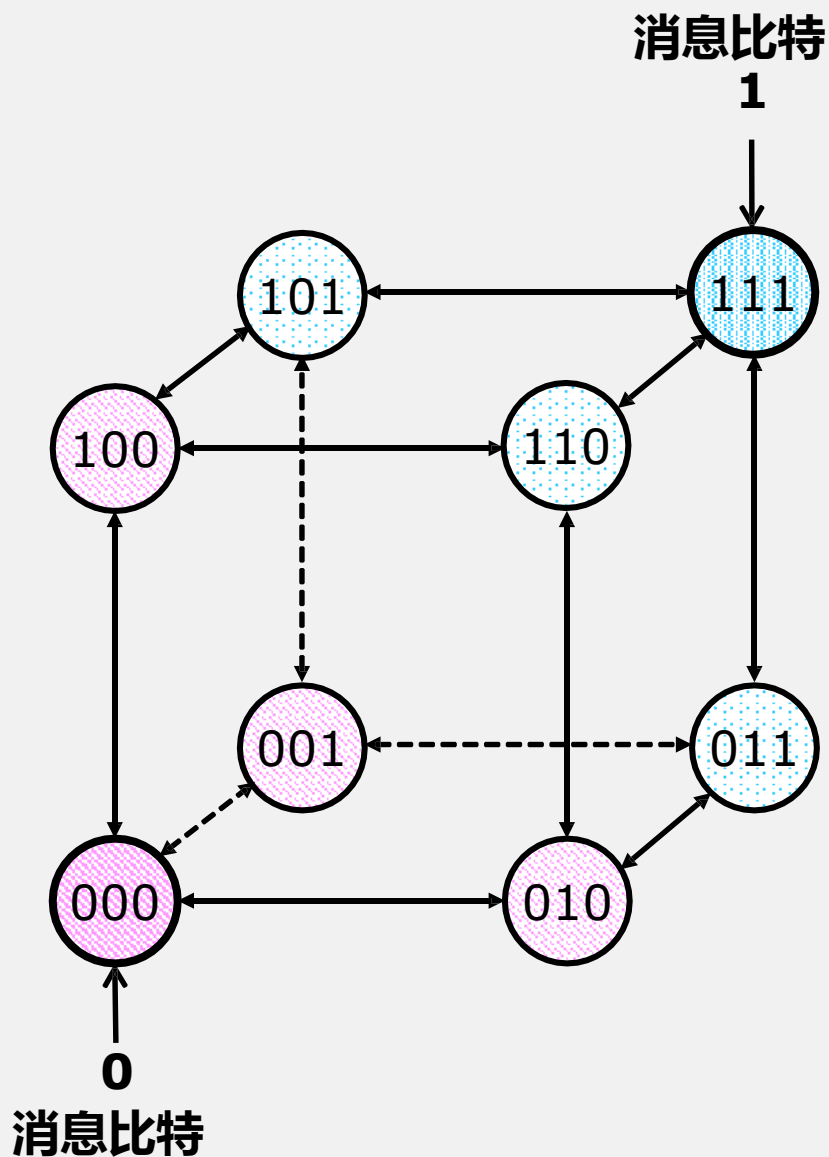


■ 如果我们收到并观察到混合有0和1的码字，则表明发生了错误。

■ 如果我们接收到 100,可能

- 发送的是000 产生了1比特错误
- 发送的是111 产生了2比特错误

纠正错误



- 如果我们假设最多可能发生1位错误，则可以校正错误。
- 如果我们收到100，则由于最多发生1位错误，因此必须发送了000。
- 我们可以通过查看0或1最多的“票数”来纠正错误。

(4,1,4) 重复码

■ 我们可以

- 检测最多 $d-1=3$ bits 错误.

或

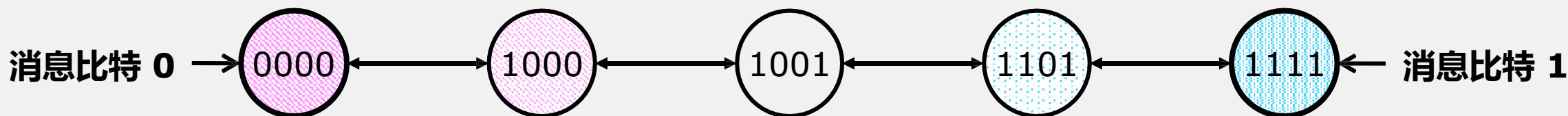
- ~~□ 检测并纠错最多 $(d-1)/2=1.5$ 比特错误~~

- 检测纠正 1 bit 错误, 并且检测 2 bit 错误.

- 例如

- ✓ 如果我们观察到 1000
- ✓ 可能发生 1 位或 3 位错误.
- ✓ 假设没有发生 3 位错误, 我们可以纠正 1 位错误.

- 如果我们观察到 1001, 则码字 0000 或 1111 等距。我们没有可靠的方法来确定传输了哪个比特。



作业：线性分组码自测习题

登录微助教

<http://portal.teachermate.com.cn/>

Thanks

Q & A

参考资料

- *A System View of Communications: From Signals to Packets (Part 1)* <https://www.edx.org/course/system-view-communications-signals-hkustx-elec1200-1x-2>