第八章 Fourier 变换

§ 8.1 Fourier 变换的概念

§ 8.2 单位冲激函数

§ 8.3 Fourier 变换的性质

§ 8.1 Fourier 变换的概念

Fourier 变换是积分变换中常见的一种变换，它既能够简化运算（如求解微分方程、化卷积为乘积等等），又具有非常特殊的物理意义。

因此，Fourier 变换不仅在数学的许多分支中具有重要的地位，而且在各种工程技术中都有着广泛的应用。

Fourier 变换是在周期函数的 Fourier 级数的基础上发展起来的，因此本小节将首先简单地回顾一下Fourier级数展开。

§ 8.1 Fourier 变换的概念

一、周期函数的 Fourier 级数

二、非周期函数的 Fourier 积分

三、Fourier 变换的概念

一、周期函数的 Fourier 级数

1. Fourier 级数的三角形式

定理 (Dirichlet 定理) 设 $f_T(t)$ 是以 T 为周期的实值函数，且在区间 $[-T/2, T/2]$ 上满足如下条件 (称为 Dirichlet 条件)：

P159 定理 8.1

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 只有有限个极值点.

则在 $f_T(t)$ 的连续点处有

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \qquad \text{(A)}$$

在 $f_T(t)$ 的间断点处，上式左端为 $\frac{1}{2}[f_T(t+0) + f_T(t-0)]$.

一、周期函数的 Fourier 级数

1. Fourier 级数的三角形式

定理 （Dirichlet 定理）

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t), \qquad \text{(A)}$$

其中， $a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=0,1,2,\cdots$

(系数是利用函数的正交性得到)

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots$$

$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$，称之为基频。

定义 称 (A) 式为 Fourier 级数的三角形式。

一、周期函数的 Fourier 级数

2. Fourier 级数的指数形式

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\right).$$

令 $c_0=\dfrac{a_0}{2}$, $c_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2}$, $c_{-n}=\dfrac{a_n+jb_n}{2}$, 则有

$$\boxed{f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{jn\omega_0 t},}\qquad \text{(B)}$$

其中, $c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

定义 称 (B) 式为 Fourier 级数的指数形式。

称系数 c_n 为离散频谱，记为 $F(n\omega_0)=c_n$.

一、周期函数的 Fourier 级数

2. Fourier 级数的指数形式

几点说明

(1) 对于给定的函数，其Fourier 级数展开式是唯一的。

(2) 在计算展开系数 c_n 时，可在任意一个长度为 T 的区间上计算其中的积分。

(3) 采用周期延拓技术，可以将结论应用到仅仅定义在某个有限区间上的函数。

换句话说，对于定义在有限区间上的函数，同样可以展开为Fourier 级数。

二、非周期函数的Fourier积分

借助 Fourier 级数展开，使得人们能够完全了解一个信号的频率特性，从而认清了一个信号的本质，这种对信号的分析手段也称为频谱分析(或者谐波分析)。

但是，Fourier 级数要求被展开的函数必须是周期函数，而在实际问题中，大量遇到的是非周期函数，那么，对一个非周期函数是否也能进行频谱分析呢?

二、非周期函数的Fourier积分

1. 简单分析

当 $T \to +\infty$ 时，级数求和发生了什么变化?

分析

P163

$$f(t) = \lim_{T\to+\infty} f_T(t) = \lim_{T\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}\,t]\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$$

将间隔 ω_0 记为 $\Delta\omega$，节点 $n\omega_0$ 记为 ω_n，

并由 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$ 得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t)\mathrm{e}^{-j\omega_n t}\mathrm{d}\,t]\mathrm{e}^{j\omega_n t}\Delta\omega \qquad \text{(C)}$$

二、非周期函数的Fourier积分

1. 简单分析

(2) 当 $T\to+\infty$ 时，级数求和发生了什么变化?

分析　记 $g_T(\omega)=[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{e}^{j\omega t}$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_T(\omega_n)\Delta\omega$$

按照积分定义，在一定条件下，(C) 式可写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

结论　级数求和变成函数积分。

二、非周期函数的Fourier积分

2. Fourier 积分公式

定理 设函数 $f(t)$ 满足

P164 定理 8.2

(1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一有限区间内满足 Dirichlet 条件;

(2) 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$.

则在 $f(t)$ 的连续点处，有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}\,t\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\,\omega \qquad \text{(D)}$$

在 $f(t)$ 的间断处，公式的左端应为 $\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$.

定义 称 (D) 式为 Fourier 积分公式或Fourier 积分表达式。

三、Fourier 变换的定义

Fourier 积分 $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

定义 (1) Fourier 正变换(简称傅氏正变换)

P164 定义 8.1

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\mathscr{F}[f(t)]$$

(2) Fourier 逆变换(简称傅氏逆变换)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

其中，$F(\omega)$ 称为象函数，$f(t)$ 称为象原函数.

$f(t)$ 与 $F(\omega)$ 称为傅氏变换对，记为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

注 上述变换中的广义积分为柯西主值。

三、Fourier 变换的定义

2. Fourier 变换的物理意义

与周期函数 Fourier 级数的物理意义一样，Fourier 变换同样刻画了一个非周期函数的频谱特性，

不同的是，非周期函数的频谱是连续取值的。

$F(\omega)$ 反映的是 $f(t)$ 中各频率分量的分布密度，它一般为复值函数，故可表示为

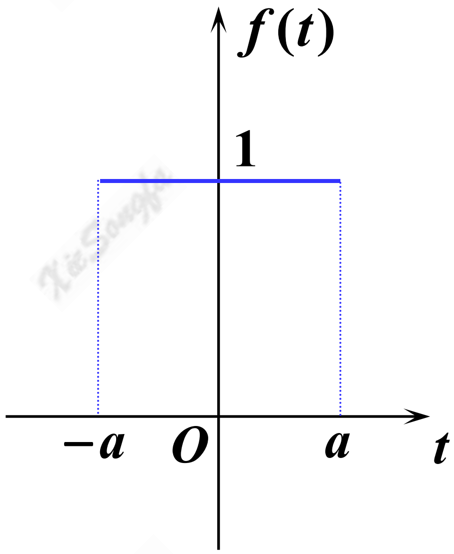
$$F(\omega)=|F(\omega)|\,\mathrm{e}^{j\arg F(\omega)}.$$

定义 称 $F(\omega)$ 为频谱密度函数（简称为连续频谱或者频谱）；

P164

称 $|F(\omega)|$ 为振幅谱； 称 $\arg F(\omega)$ 为相位谱。

例 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$ $(a>0)$ 的 Fourier 变换及 Fourier 积分表达式。P165 例8.2



解(1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{1}{-j\omega}(e^{-ja\omega}-e^{ja\omega})$$

$$=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{(e^{-ja\omega}-e^{ja\omega})}{-2j}=2a\frac{\sin a\omega}{a\omega}.$$

解 (2) 求 Fourier 逆变换，即可得到的 Fourier 积分表达式。

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega + \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \begin{cases} 1, & |t| < a, \\ 1/2, & |t| = a, \\ 0, & |t| > a. \end{cases}$$

注 ● 在上式中令 $t = 0$， 可得重要积分公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x = \pi,\ (a > 0).$$

注 在上式中令 $t=0$, 可得重要积分公式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x=\pi,\ (a>0).$$

一般地，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -\pi, & a<0.\end{cases}$$

特别地，有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

§ 8.2 单位冲激函数

一、为什么要引入单位冲激函数

二、单位冲激函数的概念及性质

三、单位冲激函数的 Fourier 变换

四、周期函数的 Fourier 变换

一、为什么要引入单位冲激函数

理由 (1) 在数学、物理学以及工程技术中，一些常用的重要函数，如常数函数、线性函数、符号函数以及单位阶跃函数等等，都不能进行 Fourier 变换。

(2) 周期函数的Fourier级数与非周期函数的Fourier变换都是用来对信号进行频谱分析的，它们之间能否统一起来。

(3) 在工程实际问题中，有许多瞬时物理量不能用通常的函数形式来描述，如冲击力、脉冲电压、质点的质量等等。

单位冲激函数的概念及性质

1. 单位冲激函数的概念

定义 单位冲激函数 $\delta(t)$ 满足:

P168

(1) 当 $t \neq 0$ 时，$\delta(t) = 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

- 单位冲激函数 $\delta(t)$又称为 Dirac 函数或者 δ 函数。

二、单位冲激函数的概念及性质

1. 单位冲激函数的概念

注 (1) 单位冲激函数 $\delta(t)$ 并不是经典意义下的函数，而是一个广义函数（或者奇异函数），它不能用通常意义下的“值的对应关系”来理解和使用，而总是通过它的性质来使用它。

(2) 单位冲激函数有多种定义方式，前面给出的定义方式是由 Dirac（狄拉克）给出的。

单位冲激函数

其它定义方式

二、单位冲激函数的概念及性质

2. 单位冲激函数的性质

性质 (1) 筛选性质

P168 性质 8.1

设函数 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界函数，

且在 $t=0$ 处连续，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$.

一般地，若 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 点连续，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0).$$

P169 性质 8.2

(2) 对称性质

δ 函数为偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$.

二、单位冲激函数的概念及性质

2. 单位冲激函数的性质

性质 (3) 积分性质

P169 性质 8.3

设函数 $u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$

则有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\delta(s)ds=u(t), u'(t)=\delta(t)$

函数 $u(t)$ 为单位阶跃函数，也称为Heaviside函数，

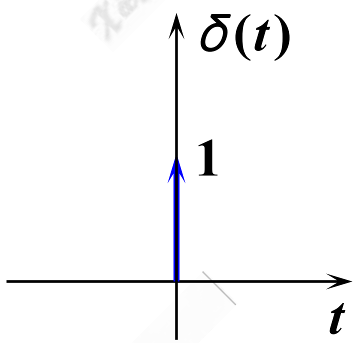
它是工程技术中最常用的函数之一。

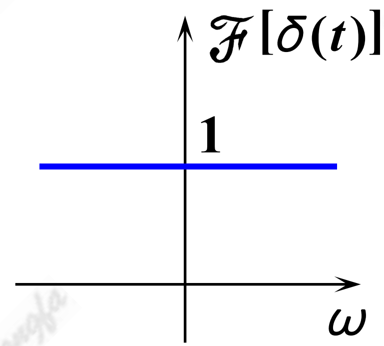
三、单位冲激函数的 Fourier 变换

- **利用筛选性质，可得出 δ 函数的 Fourier 变换：** P195

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1.$$

即 $\delta(t)$ 与 1 构成Fourier变换对 $\qquad \delta(t) \longleftrightarrow 1.$





- 由此可见，单位冲激函数包含所有频率成份，且它们具有相等的幅度，称此为均匀频谱或白色频谱。

三、单位冲激函数的 Fourier 变换

注 在 δ 函数的 Fourier 变换中，其广义积分是根据 δ 函数的性质直接给出的，而不是通过通常的积分方式得出来的，称这种方式的 Fourier 变换是一种广义的Fourier变换。

三、单位冲激函数的 Fourier 变换

- 按照 Fourier 逆变换公式有

$$\mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{j\omega t}\,d\omega = \delta(t).$$

- 重要公式 $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\,d\omega = 2\pi\delta(t).}$

启示：在使用 δ 函数时，应牢记三个性质及重要公式。

例 分别求函数 $f_1(t)=1$ 与 $f_2(t)=t$ 的 Fourier 变换。

P170 例8.7 修改

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-j\omega t}dt$

$$=2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega).$$

(2) 将等式 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)$ 的两边对 ω 求导，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-jt)e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta'(\omega),$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}t\,e^{-j\omega t}dt=2\pi j\delta'(\omega),$$

即得 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]=2\pi j\delta'(\omega).$

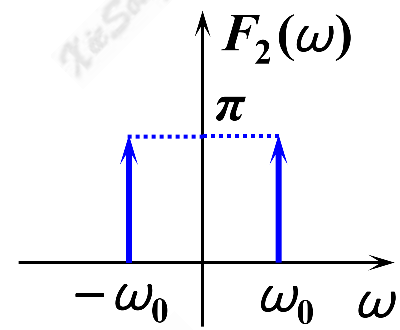
例 分别求函数 $f_2(t)=\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$ 与 $f_2(t)=\cos\omega_0 t$ 的 Fourier 变换。

P170 例8.7 部分　　P170 例8.9

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega_0-\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

(2) 由 $\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})$,



有 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$

$$=\frac{1}{2}(\mathscr{F}[\mathrm{e}^{j\omega_0 t}]+\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}])$$

$$=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0).$$

§ 8.3 傅立叶变换的性质

一、基本性质

二、卷积与卷积定理

一、基本性质

- 在下面给出的基本性质中，所涉及到的函数的 Fourier 变换均存在，且 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]$.
- 对于涉及到的一些运算(如求导、积分、极限及求和等)的次序交换问题，均不另作说明。

1. 线性性质

性质 设 a,b 为常数，则

$$\mathscr{F}[af(t)+bg(t)]=aF(\omega)+bG(\omega).$$

一、基本性质

2. 位移性质

性质 设 t_0, ω_0 为实常数，则

$$(1)\quad \mathscr{F}[f(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-j\omega t_0}F(\omega); \qquad (\text{时移性质})$$

$$(2)\quad \mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)] = \mathrm{e}^{j\omega_0 t}f(t). \qquad (\text{频移性质})$$

- 时移性质表明：当一个信号沿时间轴移动后，各频率成份的大小不发生改变，但相位发生变化；

- 频移性质则被用来进行频谱搬移，这一技术在通信系统中得到了广泛应用。

一、基本性质

3. 相似性质

性质 设 a 为非零常数，则 $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

- 相似性质表明， 若信号被压缩 $(a>1)$，则其频谱被扩展；
  若信号被扩展 $(a<1)$，则其频谱被压缩。

一、基本性质

4. 微分性质

性质 若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t)=0$，则 $\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega F(\omega)$.

一般地，若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0$，$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，

则 $\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n F(\omega)$.

记忆 由 $f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$,

$$\Rightarrow \boxed{f'(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{j\omega F(\omega)}e^{j\omega t}d\omega;$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(n)}(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{(j\omega)^n F(\omega)}e^{j\omega t}d\omega.$$

一、基本性质

4. 微分性质

- 同理，可得到像函数的导数公式

$$\mathscr{F}^{-1}[F'(\omega)] = -jtf(t);$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)] = (-jt)^n f(t).$$

- 上式可用来求 $t^n f(t)$ 的 Fourier 变换.

记忆 由 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$

$$\Rightarrow \boxed{F'(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{(-jt) f(t)} e^{-j\omega t} dt;$$

$$\Rightarrow \boxed{F^{(n)}(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{(-jt)^n f(t)} e^{-j\omega t} dt.$$

一、基本性质

5. 积分性质

性质 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t=0$，则 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{j\omega}F(\omega)$.

证明 令 $g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} g(t)=0$，

由微分性质有 $\mathcal{F}[g'(t)]=j\omega G(\omega)$，

又 $g'(t)=f(t)$，有 $\mathcal{F}[f(t)]=j\omega\mathcal{F}[g(t)]$，

即得 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{j\omega}F(\omega)$.

第五章 留数及其应用

一、基本性质

$f(t)$实值函数

6. 帕塞瓦尔(Parseval)等式 $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.}$

证明 由 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$，有 $\overline{F(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t}dt$

右边 $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cdot\overline{F(\omega)}\,\mathrm{d}\omega$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ = 左边.

例 设 $f(t)=t^2\cos t$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 令 $g(t)=\cos t$，则 $f(t)=t^2 g(t)$，　$\mathscr{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-jt)^n f(t)$.

又已知 $G(\omega)=\mathscr{F}[\cos t]=\pi\delta(\omega-1)+\pi\delta(\omega+1)$,

根据微分性质 $\mathscr{F}^{-1}[G''(\omega)]=(-jt)^2 g(t)$，有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[t^2 g(t)]=-G''(\omega)$$

$$=-\pi\delta''(\omega-1)-\pi\delta''(\omega+1).$$

例 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,\mathrm{d}\omega$ 的值。 P175 例8.12

解 设矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1,\\ 0, & |t|>1,\end{cases}$

已知 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$,

由 Parserval 等式有 $\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\sin^2\omega}{\omega^2}\,\mathrm{d}\omega=2\pi\int_{-1}^{1}1^2\,\mathrm{d}t=4\pi.$$

由于被积函数为偶函数，故有 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}$.

二、卷积与卷积定理

1. 卷积的概念与运算性质

定义 设函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 对任何实数 t 都收敛，则它在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义了一个自变量为 t 的函数，称此函数为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积，记为 $f_1(t)*f_2(t)$，即

P176 定义 8.2

$$\boxed{f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.}$$

二、卷积与卷积定理

1. 卷积的概念与运算性质

性质 (1) 交换律

P176

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$

(2) 结合律

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t).$$

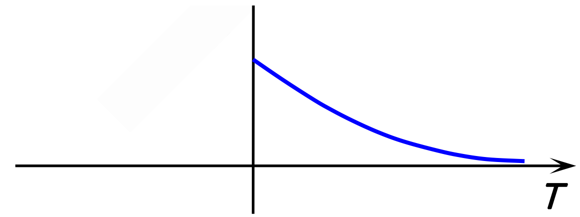
(3) 分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t).$$

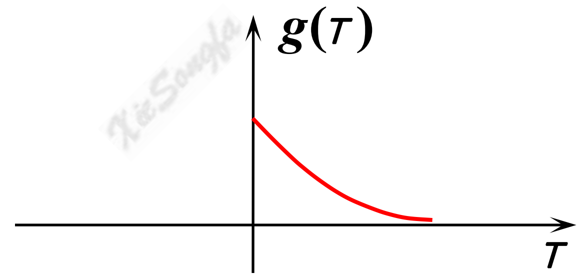
例 设 $f(t)=e^{-\alpha t}u(t)$，$g(t)=e^{-\beta t}u(t)$，其中，$\alpha>0$，$\beta>0$，且 $\alpha\neq\beta$，求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。

P176 例8.13

解 $f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$，



(1) 当 $t\leq 0$ 时，$f(t)*g(t)=0$.

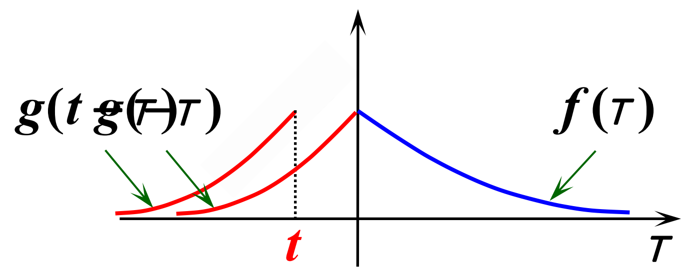


(2) 当 $t>0$ 时，

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-a\tau}e^{-\beta(t-\tau)}\,d\tau$$

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



$$=\frac{e^{-\beta\tau}-e^{-at}}{a-\beta}.$$

- 从上面的例子可以看出 P178

(1) 在计算一些分段函数的卷积时，如何确定积分限是解题的关键。如果采用图形方式则比较容易确定积分限。

(2) 卷积由反褶、平移、相乘、积分四个部分组成。即首先将函数 $g(\tau)$ 反褶并平移到 t，得到 $g(t-\tau)=g(-(\tau-t))$，再与函数 $f(t)$ 相乘后求积分，得到卷积 $f(t)*g(t)$.

因此，卷积又称为褶积或卷乘。

- 另外，利用卷积满足交换律这一性质，适当地选择两个函数的卷积次序，还可以使积分限的确定更直观一些。

二、卷积与卷积定理

2. 卷积定理

定理 设 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$，则有

P178 定理 8.4

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega); \qquad (A)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=2\pi f_1(t)\cdot f_2(t). \qquad (B)$$

证明 $\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)*f_2(t)e^{-j\omega t}\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-j\omega t}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)e^{-j\omega\tau}\underline{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}\,dt\right]}\,d\tau=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega);$$

同理可证 (*B*) 式。

例 求函数 $h(t)$ 和 $\delta(t)$ 的卷积。

解 方法一 $h(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = h(t).$

方法二 已知 $\delta(t)$ 的 Fourier 变换为 $D(\omega) = \mathscr{F}[\delta(t)] = 1,$

令 $H(\omega) = \mathscr{F}[h(t)]$, 根据卷积定理有

$$h(t)*\delta(t) = \mathscr{F}^{-1}[H(\omega)\cdot D(\omega)]$$

$$= \mathscr{F}^{-1}[H(\omega)] = h(t).$$

注 一般地，有 $h(t)*\delta(t-t_0) = h(t-t_0).$

第九章 Laplace变换

§ 9.1 Laplace变换的概念

§ 9.2 Laplace变换的性质

§ 9.3 Laplace逆变换

§ 9.4 Laplace变换的应用

§ 9.1 Laplace 变换的概念

一、Laplace 变换的引入

二、Laplace 变换的定义

三、存在性定理

四、几个常用函数的 Laplace 变换

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的“局限性”？

- 当函数 $f(t)$ 满足 Dirichlet 条件，且在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积时，便可以进行古典意义下的 Fourier 变换。

- 由于绝对可积是一个相当强的条件，使得一些简单函数（如常数函数、线性函数、正弦函数与余弦函数等等）的 Fourier 变换也受到限制。

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的“局限性”？

- 广义 Fourier 变换的引入，扩大了古典 Fourier 变换的适用范围，使得“缓增”函数也能进行 Fourier 变换，而且将周期函数的 Fourier 级数与 Fourier 变换统一起来。

- 广义 Fourier 变换对以指数级增长的函数如 $e^{at}\ (a>0)$ 等仍然无能为力；而且在变换式中出现冲激函数，也使人感到不太满意。

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的“局限性”？

- 在工程实际问题中，许多以时间 t 为自变量的函数(比如起始时刻为零的因果信号等)在 $t<0$ 时为零，而有些甚至在 $t<0$ 时根本没有意义。

- 因此在对这些函数进行 Fourier 变换时，没有必要(或者不可能)在整个实轴上进行。

一、Laplace 变换的引入

2. 如何对 Fourier 变换要进行改造?

基本想法

(1) 将函数 $f(t)$ 乘以一个单位阶跃函数 $u(t)$，使得函数在 $t<0$ 的部分补零（或者充零）；

(2) 将函数再乘上一个衰减指数函数 $e^{-\beta t}(\beta>0)$，使得函数在 $t>0$ 的部分尽快地衰减下来。

- 这样，就有希望使得函数 $f(t)\cdot u(t)\cdot e^{-\beta t}$ 满足 Fourier 变换的条件，从而对它进行 Fourier 变换。

一、Laplace 变换的引入

2. 如何对 Fourier 变换要进行改造?

实施结果

$$\mathscr{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-(\beta+j\omega)t}\,dt$$

将上式中的 $\beta + j\omega$ 记为 s， 就得到了一种新的变换：

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \xlongequal{\text{记为}} F(s).$$

注意 上述广义积分存在的关键：

$\boxed{\text{变量 } s \text{ 的实部 } \mathrm{Re}\, s = \beta \text{ 足够大。}}$

二、Laplace 变换的定义

P186 定义 9.1

定义 设函数 $f(t)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的实值函数， 如果对于复参数 $s=\beta+j\omega$，积分 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 在复平面 s 的某一区域内收敛，则称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换或像函数，记为 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$， 即

$$\boxed{F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\,.}$$

相应地，称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换或像原函数，记为 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

Laplace 简介

注 $f(t)$ 的 Laplace 变换就是 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换。

例 $$\mathscr{L}[1]=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s},\qquad (\operatorname{Re} s>0)$$

P187 例 9.1

$$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},\qquad (\operatorname{Re} s>0)$$

$$\mathscr{L}[\operatorname{sgn} t]=\int_0^{+\infty}\operatorname{sgn} t\, e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},\qquad (\operatorname{Re} s>0)$$

P188 例 9.2

$$\mathscr{L}[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}\,dt=\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-a},\qquad (\operatorname{Re} s>\operatorname{Re} a)$$

P189 例9.3

要点 进行积分时，确定 s 的取值范围，保证积分存在。

- 从上述例子可以看出

(1) 即使函数以指数级增长，其 Laplace 变换仍然存在；

(2) 即使函数不同，但其 Laplace 变换的结果可能相同。

问题

(1) 到底哪些函数存在 Laplace 变换呢?

若存在，收敛域(或者存在域)如何？有何特点?

(2) Laplace 逆变换如何做？是否惟一?

三、存在性定理

定理 设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时，满足：

P188 定理 9.1

(1) 在任何有限区间上分段连续；

(2) 具有有限的增长性，

即存在常数 c 及 $M > 0$，使得 $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{ct}$,

（其中，c 称为函数 $f(t)$ 的“增长”指数）。

则象函数 $F(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,s > c$ 上一定存在且解析。

两点说明

(1) 像函数 $F(s)$ 的存在域一般是一个右半平面 $\operatorname{Re} s > c$，即只要复数 s 的实部足够大就可以了。

- 因此在进行Laplace变换时，常常略去存在域，只有在非常必要时才特别注明。

(2) 在 Laplace 变换中的函数一般均**约定**在 $t < 0$ 时为零，即函数 $f(t)$**等价于**函数 $f(t)u(t)$.

- 比如 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}] = 1$.

四、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

解 (2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\,dt$

$$=e^{-st}\Big|_{t=0}=1.$$

四、几个常用函数的Laplace变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

解 (3) $\mathscr{L}[t^m]=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^m \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{-s}\int_0^{+\infty} t^m \mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-st}$

$$=\frac{1}{-s}t^m \mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{m}{s}\int_0^{+\infty} t^{m-1}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{m}{s}\mathscr{L}[t^{m-1}]$$

$$=\frac{m(m-1)}{s^2}\mathscr{L}[t^{m-2}]=\cdot\quad=\frac{m!}{s^m}\mathscr{L}[1]=\frac{m!}{s^{m+1}}.$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

(4) $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$;

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}$;

解 (5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{jat}e^{-st}\,dt+\int_0^{+\infty} e^{-jat}e^{-st}\,dt\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}[e^{jat}]+\mathscr{L}[e^{-jat}]\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ja}+\frac{1}{s+ja}\right)=\frac{s}{s^2+a^2}.$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

(4) $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$;

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}$;

(6) $\mathscr{L}[\sin at]=\dfrac{a}{s^2+a^2}$.

特点 变换的结果均为分式函数。

它们的分母几乎涵盖了单根、重根及复根等情况

§ 9.2 Laplace 变换的性质

- 在下面给出的基本性质中， 所涉及到的函数的 Laplace 变换均假定存在，它们的**增长指数**均假定为 c。

如无特别说明，默认函数与像函数按大小写自然对应，如：

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)],\quad G(s)=\mathscr{L}[g(t)].$$

- 对于涉及到的一些运算(如**求导**、**积分**、**极限**及**求和**等)的次序交换问题，均不另作说明。

一、线性性质与相似性质

1. 线性性质 P189

性质 设 a，b 为常数，则有

$$\mathscr{L}[a f(t)+b g(t)]=a F(s)+b G(s);$$

$$\mathscr{L}^{-1}[a F(s)+b G(s)]=a f(t)+b g(t).$$

2. 相似性质（尺度性质） P190

设a为任一正实数，则 $\mathscr{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right).$

二、延迟性质与位移性质

1. 延迟性质

性质 设当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则对任一非负实数 τ 有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

注意 在延迟性质中专门强调了当 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 这一约定。

因此，本性质也可以直接表述为：

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

可见，在利用本性质求逆变换时应为：

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)] = f(t-\tau)u(t-\tau).$$

例 设 $F(s)=\dfrac{1}{s-1}e^{-2s}$, 求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$. P195 例9.13 修改

已经变换后的式子

解 由于 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-1}\right]=e^{t}u(t)$, 根据延迟性质:

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=e^{t-2}u(t-2)$$

$$=\begin{cases} e^{t-2}, & t>2, \\ 0, & t<2. \end{cases}$$

二、延迟性质与位移性质

2. 位移性质 P195

性质 设 a 为任一复常数，则 $\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$.

例如 $\mathscr{L}[e^{t}\cos t]=\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}$.

$\mathscr{L}[e^{t}\sin t]=\dfrac{1}{(s-1)^2+1}$.

三、微分性质

1. 导数的象函数 P190

性质 $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$

证明 $\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}f(t)$

$$= f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

由 $|f(t)| \le M\mathrm{e}^{ct}$，有 $|f(t)\mathrm{e}^{-st}| \le M\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,s-c)t}$，

因此当 $\mathrm{Re}\,s = \beta > c$ 时，有 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st} = 0$，

即得 $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$

三、微分性质

1. 导数的象函数

性质 $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0);$

一般地，有

$$\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).}$$

其中，$f^{(k)}(0)$ 应理解为 $\lim\limits_{t \to 0^+} f^{(k)}(t).$

- Laplace 变换的这一性质非常重要，可用来求解微分方程(组)的初值问题。(§ 9.4 将专门介绍)

三、微分性质

2. 象函数的导数 P218

性质 $F'(s) = -\mathscr{L}[t\,f(t)];$

一般地，有 $F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathscr{L}[t^n f(t)].$

证明 由 $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 有

$$F'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^{+\infty} t\,f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = -\mathscr{L}[t\,f(t)];$$

同理可得 $F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathscr{L}[t^n f(t)].$

例 求函数 $f(t)=t^2\cos^2 t$ 的 Laplace 变换。 P192 例9.9

解 $t^2\cos^2 t=\dfrac{1}{2}t^2(1+\cos 2t)$,

已知 $\mathscr{L}[1]=\dfrac{1}{s}$, $\mathscr{L}[\cos 2t]=\dfrac{s}{s^2+2^2}$,

根据**线性性质**以及**象函数的导数**性质有

$$\mathscr{L}[t^2\cos^2 t]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2^2}\right]$$

$$=\frac{2(s^6+24s^2+32)}{s^3(s^2+4)^3}.$$

四、积分性质 P219

1. 积分的象函数 P219

性质 $\mathscr{L}[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t] = \dfrac{1}{s}F(s).$

证明 令 $g(t)=\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $g'(t)=f(t)$ 且 $g(0)=0$，

由微分性质有

$$\mathscr{L}[g'(t)] = sG(s)-g(0) = sG(s),$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}[g'(t)] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)],$$

即得 $\mathscr{L}[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t] = \dfrac{1}{s}F(s).$

四、积分性质

2. 象函数的积分 P192

性质 $$\int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

一般地，有

$$\underbrace{\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_s^{\infty}}_{n\text{次}} F(s)\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right].$$

五、周期函数的像函数 P223

性质 设 $f(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 内以 T 为周期的函数，且逐段光滑，

则 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-st}dt$.

证明 $\mathscr{L}[f(t)]=\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-st}dt+\int_T^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \overset{\text{记为}}{=\!=} I_1+I_2$,

其中，$I_2 \overset{\text{令}\,x=t-T}{=\!=\!=} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x+T)e^{-s(x+T)}dx$

$=e^{-sT}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx=e^{-sT}\mathscr{L}[f(t)]$,

即得 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-st}dt$.

例 求全波整流后的正弦波 $f(t)=|\sin\omega t|$ 的象函数。 P224 例9.14

解 函数 $f(t)$ 的周期为 $T=\dfrac{\pi}{\omega}$，故有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T \mathrm{e}^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-st}(-s\sin\omega t-\omega\cos\omega t)}{s^2+\omega^2}\Bigg|_0^T$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{-sT}}{1-\mathrm{e}^{-sT}}$$

六、卷积与卷积定理 P224

1. 卷积

- 按照上一章中卷积的定义，两个函数的卷积是指

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- 如果函数满足：当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$， 则有

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad (t \geq 0).$$

- 显然，由上式给出的卷积的仍然满足交换律、结合律以及分配律等性质。

2.卷积定理

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s).$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

P225 例9.16

解 由于 $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}$，$\mathscr{L}[\dfrac{s}{s^2+1}]=\cos t$，故有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\cos t*\cos t$$

$$=\int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

§ 9.3 Laplace 逆变换

一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

二、求 Laplace 逆变换的方法

一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

1. 公式推导

推导 (1) 由 Laplace 变换与 Fourier 变换的关系可知，

函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=F(\beta+j\omega)$

就是函数 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换，

即 $F(s)=F(\beta+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t.$

(2) 根据 Fourier 逆变换，在 $f(t)$ 的连续点 t 处，有

$$f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

1. 公式推导

推导 (2) 根据 Fourier 逆变换，在 $f(t)$ 的连续点 t 处，有

$$f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

(3) 将上式两边同乘 $\mathrm{e}^{\beta t}$，并由 $s=\beta+j\omega$，有

$$f(t)u(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s.$$

即得 $$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\ (t>0).}$$

一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

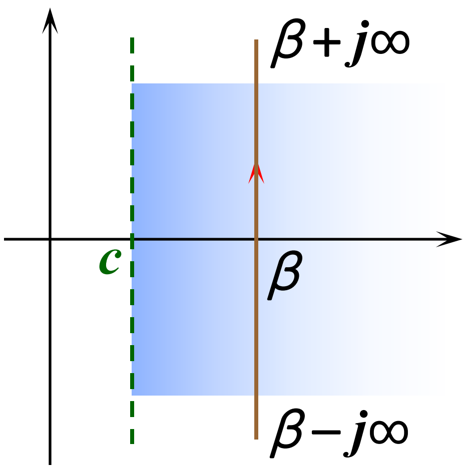
2. 反演积分公式

- 根据上面的推导，得到如下的 Laplace 变换对：

$$\begin{cases} F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt; & (A) \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}\,ds,\ (t>0). & (B) \end{cases}$$

P227（9.16）式

定义 称 (*B*) 式为<u>反演积分公式</u>。



注 <u>反演积分公式</u>中的积分路径是 s 平面上的一条直线 $\mathrm{Re}\,s=\beta$，该直线处于 $F(s)$ 的存在域中。

二、求 Laplace 逆变换的方法

1. 留数法

- 利用留数计算反演积分。

定理 设函数 $F(s)$ 除在半平面 $\mathrm{Re}\, s \le c$ 内有有限个孤立奇点 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 外是解析的，且当 $s \to \infty$ 时，$F(s) \to 0$，则

P227 定理 9.2

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta - j\infty}^{\beta + j\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}\, s$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,[F(s)\mathrm{e}^{st},\ s_k],\quad (t > 0).$$

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法 常用

- 利用 Laplace 变换的性质，并根据一些已知函数的 Laplace 变换来求逆变换。

- 大多数情况下，象函数 $F(s)$ 常常为（真）分式形式：

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)},$$ 其中，$P(s)$ 和 $Q(s)$ 是实系数多项式。

由于真分式总能进行部分分式分解，因此，利用查表法很容易得到象原函数。 （真分式的部分分式分解）

- 此外，还可以利用卷积定理来求象原函数。

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法

- 几个常用的 Laplace 逆变换的性质

$$\mathscr{L}^{-1}[aF(s)+bG(s)] = af(t)+bg(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)] = f(t-\tau)u(t-\tau).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s-a)] = \mathrm{e}^{at}f(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)] = f_1(t)*f_2(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F'(s)] = -tf(t). \qquad \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}F(s)] = \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法

- 几个常用函数的 Laplace 逆变换

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{m!}{s^{m+1}}\right]=t^m.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+b^2}\right]=\cos bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{b}{s^2+b^2}\right]=\sin bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[1]=\delta(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=\mathrm{e}^{at}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}\right]=\mathrm{e}^{at}\,t^m.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right]=\mathrm{e}^{at}\cos bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right]=\mathrm{e}^{at}\sin bt.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法一 利用查表法求解

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2},\quad \Rightarrow\quad f(t)=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

方法二 利用留数法求解

$s_1=0,\ s_2=1$ 分别为 $F(s)$ 的一阶与二阶极点，

$$f(t)=\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},0]+\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},1]$$

$$=\left.\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s-1)^2}\right|_{s=0}+\left.\left(\frac{\mathrm{e}^{st}}{s}\right)'\right|_{s=1}=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法三 利用卷积定理求解

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]*\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$=t\,\mathrm{e}^t*1=\int_0^t \tau\,\mathrm{e}^\tau\cdot 1\,\mathrm{d}\tau=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

方法四 利用积分性质求解 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]=\int_0^t g(t)\,\mathrm{d}t.$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right]=\int_0^t \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^t t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

§ 9.4 Laplace 变换的应用及综合举例

一、求解常微分方程(组)

二、综合举例

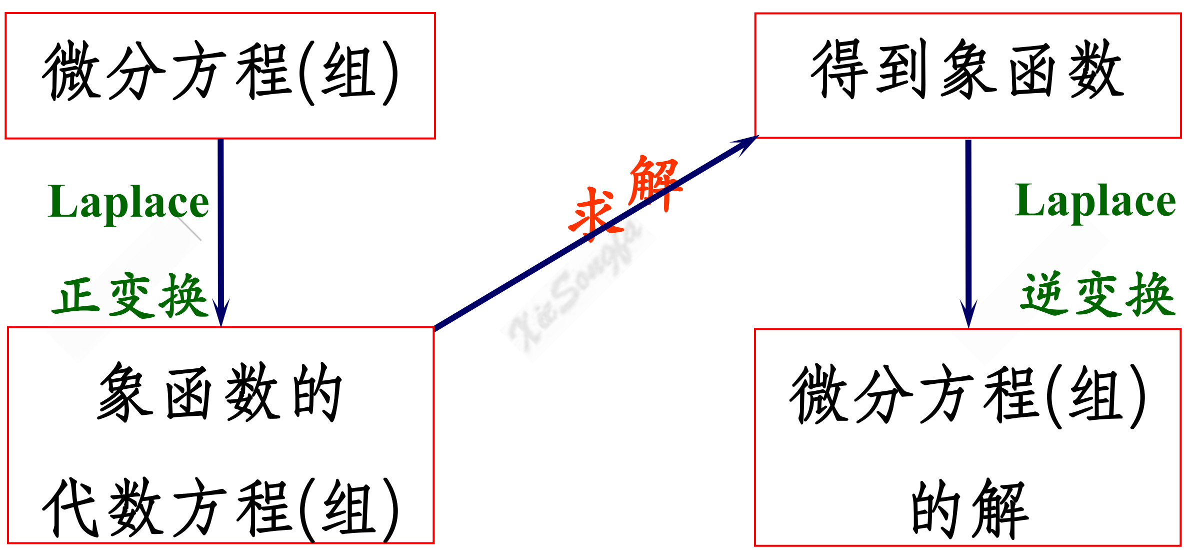
一、求解常微分方程(组)

工具 $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$

步骤 (1) 将微分方程(组)化为象函数的代数方程(组);

(2) 求解代数方程得到象函数;

(3) 求 Laplace 逆变换得到微分方程(组)的解。



例 利用 Laplace 变换求解微分方程

$$y''(t)+\omega^2 y(t)=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=\omega.$$

解 (1) 令 $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程两边取 Laplace 变换，有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y(s)=0,$$

代入初值即得 $s^2Y(s)-\omega+\omega^2Y(s)=0,$

$$\Rightarrow\ Y(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\sin\omega t.$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\mathrm{e}^t, & x(0)=1, \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=2\mathrm{e}^t, & y(0)=1. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

整理得
$$\begin{cases} (s+1)X(s)-Y(s)=\dfrac{s}{s-1}, \\ 3X(s)+(s-2)Y(s)=\dfrac{s+1}{s-1}. \end{cases}$$

求解得 $X(s)=\dfrac{1}{s-1}$, $Y(s)=\dfrac{1}{s-1}$.

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\mathrm{e}^t, & x(0)=1, \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=2\mathrm{e}^t, & y(0)=1. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

求解得 $X(s)=\dfrac{1}{s-1}$, $Y(s)=\dfrac{1}{s-1}$.

(2) 求 Laplace 逆变换，得 $x(t)=y(t)=\mathrm{e}^t$.

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x' + y'' = \delta(t-1), & x(0) = y(0) = 0, \\ 2x + y''' = 2u(t-1), & y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$，

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$\begin{cases} sX(s) + s^2 Y(s) = \mathrm{e}^{-s}, \\ 2X(s) + s^3 Y(s) = \dfrac{2}{s}\mathrm{e}^{-s}. \end{cases}$$

求解得 $X(s) = \dfrac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}$，$Y(s) = 0$.

(2) 求 Laplace 逆变换，得 $x(t) = u(t-1)$，$y(t) = 0$.

例 利用 Laplace 变换求解积分方程 P232 例9.24

$$f(t)=at-\int_0^t \sin(x-t)f(x)\,\mathrm{d}x,\quad (a\neq 0).$$

解 (1) 由于 $f(t)*\sin t=\int_0^t f(x)\sin(t-x)\,\mathrm{d}x$,

因此原方程为 $f(t)=at+f(t)*\sin t.$

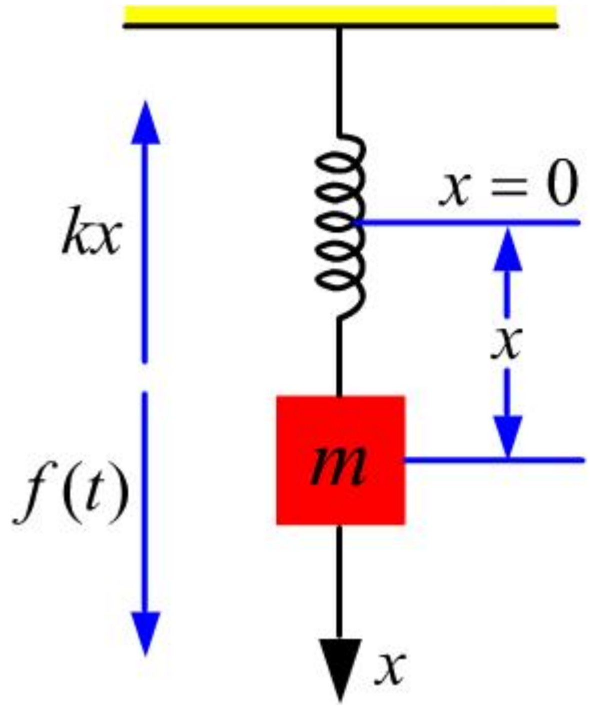
(2) 令 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，在方程两边取 Laplace 变换得

$$F(s)=a\mathscr{L}[t]+F(s)\cdot\mathscr{L}[\sin t]=\frac{a}{s^2}+F(s)\cdot\frac{1}{s^2+1},$$

$$\Rightarrow\quad F(s)=\frac{a}{s^2}+\frac{a}{s^4}.$$

(3) 求 Laplace 逆变换，得 $f(t)=at+\dfrac{at^3}{6}.$

例 质量为 m 的物体挂在弹簧系数为 k 的弹簧一端（如图），作用在物体上的外力为 $f(t)$。若物体自静止平衡位置 $x=0$ 处开始运动，求该物体的运动规律 $x(t)$.



解 (1) 由Newton定律及Hooke定律有

$$m\,x''(t)=f(t)-k\,x(t).$$

即物体运动的微分方程为

$$m\,x''(t)+k\,x(t)=f(t),\quad x(0)=x'(0)=0.$$

解 (1) $m\,x''(t)+k\,x(t)=f(t)$， $x(0)=x'(0)=0$.

(2) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$， $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$m\,s^2X(s)+k\,X(s)=F(s),$$

记 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$， 有 $X(s)=\dfrac{1}{m\omega_0}\cdot\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\cdot F(s)$，

(3) 由 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right]=\sin\omega_0 t$，并利用卷积定理有

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\frac{1}{m\omega_0}\cdot[\sin\omega_0 t * f(t)].$$

当 $f(t)$ 具体给出时，即可以求的运动方程 $x(t)$.

解 (3) 由 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right]=\sin\omega_0 t$，利用卷积定理有

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\frac{1}{m\omega_0}\cdot[\sin\omega_0 t * f(t)].$$

当 $f(t)$ 具体给出时，即可以求的运动方程 $x(t)$.

例如 设物体在 $t=0$ 时受到冲击力 $f(t)=A\delta(t)$，A 为常数。

此时 $x(t)=\dfrac{A}{m\omega_0}\cdot\sin\omega_0 t$.

- 可见，在冲击力的作用下，运动为正弦振动，振幅为 $\dfrac{A}{m\omega_0}$，角频率为 ω_0，称 ω_0 为该系统的自然频率或固有频率。

放松一下吧！……