(5) 频移定理(位移定理)　$\boxed{\text{对变换的参变量而言}}$

若 $\hat{f}(\lambda)=F[f(x)],\ F(s)=L[f(t)],$ 则有

$$F[f(x)e^{-i\lambda_0 x}]=\hat{f}(\lambda+\lambda_0)$$ 傅里叶变换

$$L[f(t)e^{-at}]=F(s+a)$$ 拉普拉斯变换

(6) 延迟定理　$\boxed{\text{对变换的自变量而言}}$

若 $\hat{f}(\lambda)=F[f(x)],\ F(s)=L[f(t)],$ 则有

$$F[f(x-x_0)]=\hat{f}(\lambda)e^{-i\lambda x_0}$$ 傅里叶变换

$$L[f(t-t_0)u(t-t_0)]=F(s)e^{-st_0}$$ 拉普拉斯变换

其中 $$u(t-t_0)=\begin{cases}1, & t>t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases}$$

可简化为 $\boxed{L[f(t-t_0)]=F(s)e^{-st_0}}\ (t>t_0)$

几类常见的傅里叶变换或逆变换

1. $F[\delta(x+a)]=e^{ia\lambda}\quad F[\delta(x-a)]=e^{-ia\lambda}\quad \boxed{F(\delta(x))=1}$

2. $F^{-1}[\dfrac{\sin m\lambda}{\lambda}]=\dfrac{1}{2},\ |x|\le m$

3. $F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}]=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\quad (t>0)$

4. $F^{-1}[e^{-|\lambda|y}]=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{y^2+x^2}\quad (y>0)$

5. $F^{-1}[\cos a\lambda]=\dfrac{1}{2}[\delta(x+a)+\delta(x+a)]$

$F^{-1}[\sin a\lambda]=\dfrac{1}{2i}[\delta(x+a)-\delta(x+a)]$

几类常见的拉普拉斯变换或逆变换 $\boxed{\mathrm{Re}\, s>0}$

1. $L[\delta(t)]=1$

2. $L[e^{-at}]=\dfrac{1}{s+a}$　特别的，$L[1]=\dfrac{1}{s}$

3. $L[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}\qquad L[t^n e^{-at}]=\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

4. $L[\sin at]=\dfrac{a}{s^2+a^2}\qquad L[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}$

5. $L[e^{-at}\sin at]=\dfrac{a}{(s+a)^2+a^2},\quad L[e^{-at}\cos at]=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+a^2}$

6. $L^{-1}[F(s)e^{-sa}]=f(t-a)\quad (t>a)$　延迟定理的逆变换形式

几类常见的拉普拉斯变换或逆变换 $\boxed{\mathrm{Re}\, s>0}$

7. $L^{-1}[\dfrac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}]=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-y^2}dy$　余误差函数

8. $L^{-1}[e^{-a\sqrt{s}}]=\dfrac{a}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$

事实上，$L^{-1}[e^{-a\sqrt{s}}]=L^{-1}[s\cdot\dfrac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}]$　拉氏变换微分定理1

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-y^2}dy\right]=\frac{a}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$$