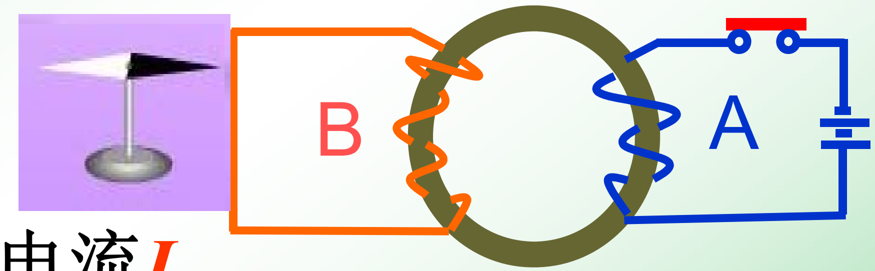
二、感生电动势

$\varepsilon_{感生}$ → 导体回路不动，$\vec{B}$变化。

1. 产生感生电动势的机制——感应电场$\vec{E}_i$

（1）感应电场的引入



在线圈A中, I→变化时,

线圈B中将出现→感应电流I_i

注： 驱动线圈B 中电荷运动的决不是磁场力!

此处 $\vec{f}_{洛}=-e(\vec{v}\times\vec{B})=0$

是不是静电场 $\vec{E}_e$? $\because \oint_L \vec{E}_e\cdot d\vec{l}=0$ 保守力场

$\therefore$ **静电场$\vec{E}_e$不能为闭合回路运动的电荷提供能量。**

麦克斯韦 $\xrightarrow{\text{引入}}$ **感应电场**

（2）感应电场的概念

磁场 $\vec{B} \rightarrow t$ 变化的同时 $\xrightarrow{\text{产生}}$ $\boxed{\textbf{感应电场}\vec{E}_i}$

$\vec{E}_i$的特点：

1° $\vec{E}_i$与 $\vec{E}_e$一样, 对场中的电荷有力的作用。

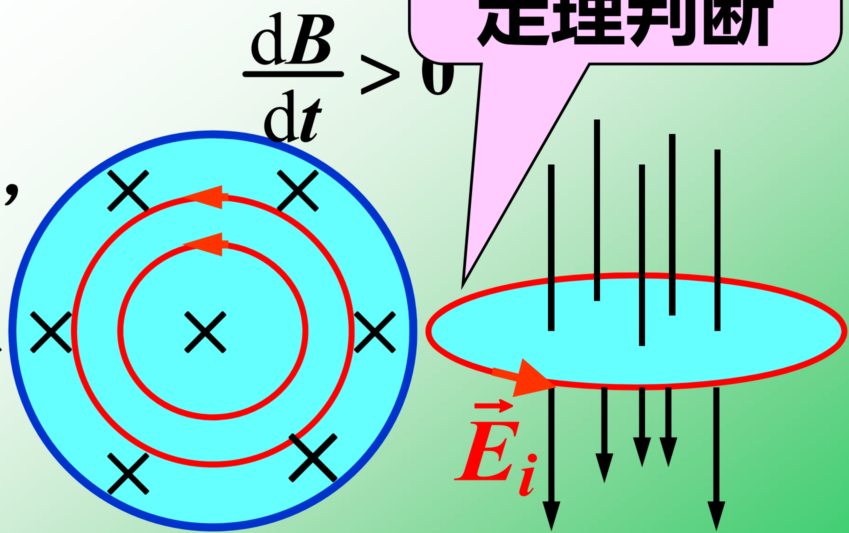
$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} \qquad \vec{F} = q\vec{E}_i$$

2° $\vec{E}_i$不依赖空间是否有导体存在。

可用楞次定理判断

3° $\vec{E}_i$的方向

在轴对称的变化磁场中，感应电场的电场线是一些同心圆，无头无尾的闭合曲线——**涡旋场**。



4° $\vec{E}_i$是非保守力场 $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \neq 0$

2. *感生电动势* ——感应电场 $\vec{E}_i$ 环路定理

定义： $\varepsilon_i = \int_-^+ \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$

对闭合回路：

$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$ 显然ε_i与导体回路形状有关

又： $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

$\therefore \boxed{\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$ ⟹ $\vec{E}_i$ **的环路定律**

注： $d\vec{l}$ **与** $d\vec{S}$ **成右手螺旋关系。**

3. $\vec{E}_i$与$\vec{E}_e$的异同

静电场	感应电场
由静止的电荷激发	由变化的磁场激发
对场中的电荷有力的作用	相同
使导体产生静电感应	使导体产生电磁感应
平衡时导体内场强$E=0$	导体内产生感应电动势
导体是等势体 不能形成持续电流	形成感应电流
高斯定理：$\oint_S \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$	$\oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$
环路定理：$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$
电力线不闭合有源无旋场	电力线闭合有旋无源场
保守场	非保守场

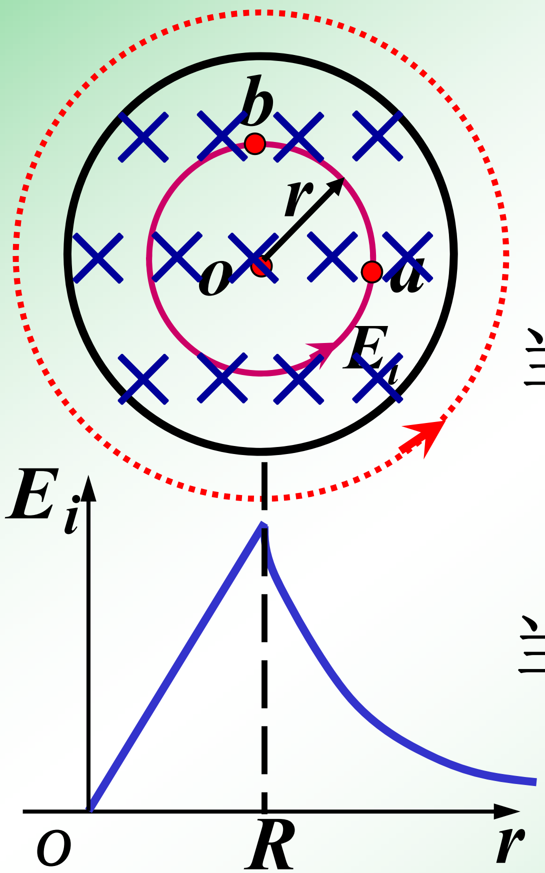
4. $\vec{E}_i$ 的计算

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

例5. 在半径为R的圆柱形区域有一均匀磁场$\vec{B}$，

且 $\dfrac{dB}{dt}>0$。 求:（1）任意距中心o为r处的$\vec{E}_i$=?

解:（1）由$\vec{B}$对称性可知, 在同一圆周上$\vec{E}_i$的大小相等, 方向沿切线方向。



取半径为r 的电场线为积分路径，方向沿逆时针方向:

当$r<R$时： $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = E_i \cdot 2\pi r$

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{dB}{dt} \cdot (-\pi r^2)$$

$$\Bigg\} \; E_i = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

当$r>R$时： $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = E_i \cdot 2\pi r$

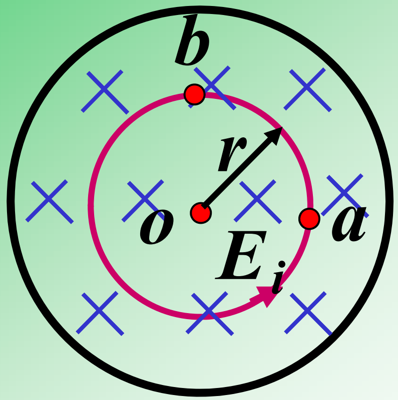
$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{dB}{dt}\pi R^2$$

$$\Bigg\} \; E_i = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

例5. ……求:（2）将单位正电荷从$a\rightarrow b$，$\vec{E}_i$的功。

解:（2）将单位正电荷从$a\rightarrow b$，$\vec{E}_i$作功:

$$E_i = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



沿1/4圆周

$$A_{\frac{1}{4}ab} = \int \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{o}^{\frac{\pi r}{2}} \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}l = \frac{\pi}{4} r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

沿3/4圆周

$$A_{\frac{3}{4}ab} = \int \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{o}^{\frac{3\pi r}{2}} \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}l = -\frac{3\pi}{4} r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

结论：

1° $E_i \propto \mathrm{d}B/\mathrm{d}t$，与$B$大小无关？

2° $r > R$，在磁场范围外$E_i \neq 0$。

3° $A_{1/4ab} \neq A_{3/4ab}$

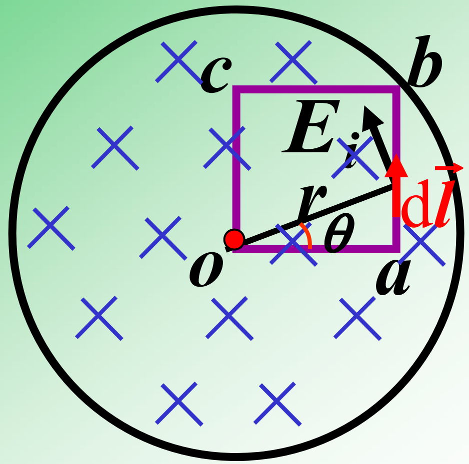
即:E_i作功与路径有关——**非保守力场**

注意：

$$\boxed{\oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

对任意形状的回路都成立！

例6. 在例5中，如图放入一边长为L的正方形导体回路$oabc$。求:（1）回路各边的感应电动势;



解:（1）由图可知

$$\left.\begin{array}{l}\because oa \perp E_i \\ \quad oc \perp E_i\end{array}\right\} \therefore \varepsilon_{oa} = \varepsilon_{oc} = 0$$

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\theta dl$$

$$= \int_a^b \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\cos\theta dl$$

$$= \int_a^b \frac{L}{2}\frac{dB}{dt} dl = \frac{1}{2}L^2\frac{dB}{dt}$$

$$\boxed{\varepsilon_i = \int_-^+ \vec{E}_i \cdot d\vec{l}}$$

$$\boxed{E_i = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}}$$

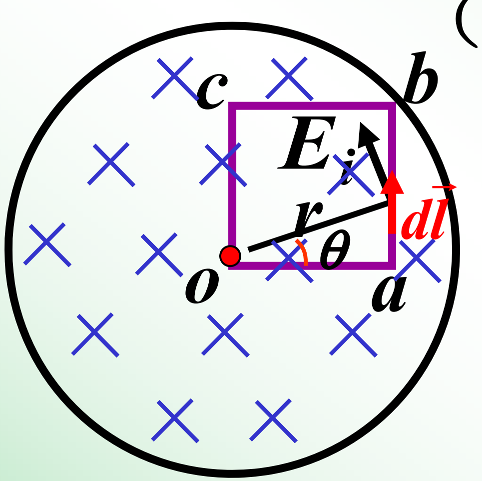
同理：$\varepsilon_{bc} = \dfrac{1}{2}L^2\dfrac{dB}{dt}$

例6……求（2）回路总的感应电动势$\varepsilon_{i总}$；

（3）回路内有静电场吗？

若有，c与a哪点电势高。

$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{bc}=\frac{L^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



解：（2）$\varepsilon_{总}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bc}=L^2\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

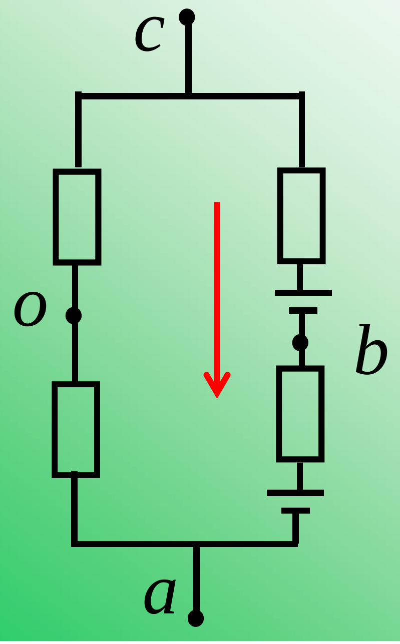
或 $\varepsilon_{总}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{B}\cdot\vec{S})=S\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

（3）有静电场！$\because \varepsilon_{oa}=\varepsilon_{oc}=0$

$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{bc}$会使正电荷在$c$点聚集，

而a点有负电荷积累从而出现静电场

等效电路



$$V_{aoc}=V_a-V_c=0-\sum I_iR_i$$

$$=-\frac{\varepsilon_i}{R}\left(\frac{1}{4}R+\frac{1}{4}R\right)$$

$$=-\frac{1}{2}L^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}<0\qquad\therefore V_c>V_a$$

补充说明：

$\vec{E}_i$ 是涡旋场——非保守场，不能引入势函数，

但它对在其场中的导体提供电动势：$\varepsilon_i=\int \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

①导体不闭合时→使导体内电荷重新分布→产生$\vec{E}_e$

则导体内的总电场：$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_e$

静电平衡时：$\vec{E}_i = -\vec{E}_e \quad \vec{E} = 0$

由于$\vec{E}_e$的存在，则出现电势。

② 在导体内：$\int_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L (\vec{E}_i + \vec{E}_e) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

静电平衡时：$\vec{E} = 0 \quad \therefore \int_L (\vec{E}_i + \vec{E}_e) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$

即：$\int_L \vec{E}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\Delta V + \varepsilon_i = 0 \quad \therefore \Delta V = \varepsilon_i$

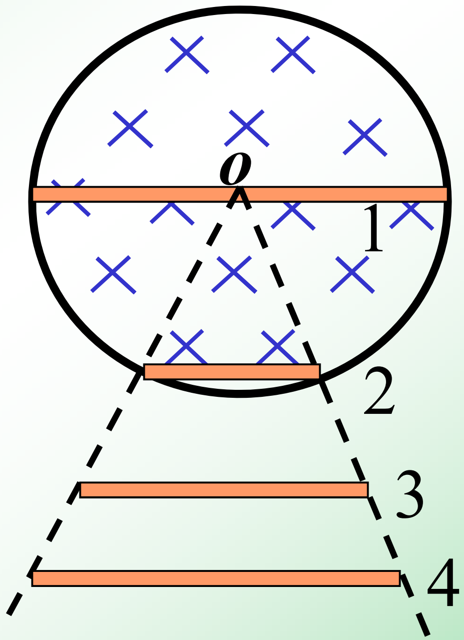
ΔV为导线两端电势差，即开路时电源的端电压。

例：在上例的磁场的磁场中，放有四根导体棒。

1）比较各棒中的ε_i。

2）3，4连成通路I_i=？

3）棒中哪端电势高？



解：

1）$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 = 0$

2）I_i=0

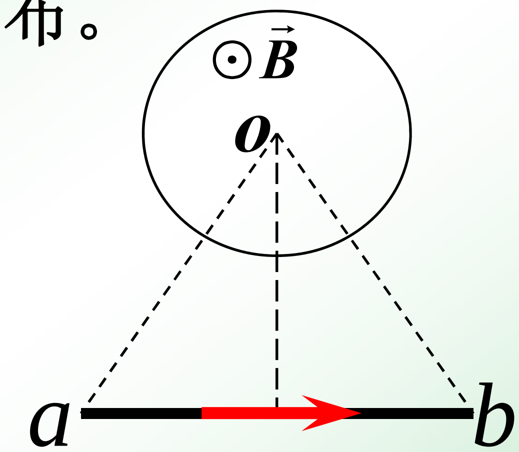
3）$V_{右} > V_{左}$

问题：

还有什么样的情况可以得到感应电场的解析表达式？

例：磁力线限制在圆柱体内，沿轴向均匀分布。

$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=c$，求：$\varepsilon_{ab}$



解：补上半径 oa，ob，

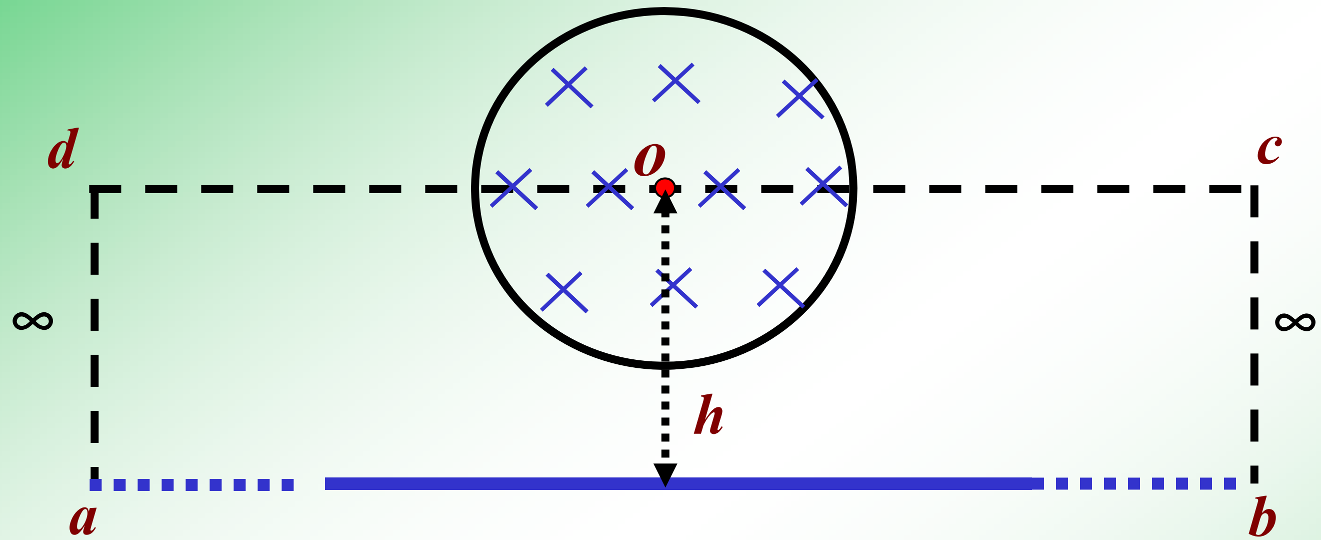
设回路方向如图.

$$\boxed{\varepsilon_{oabo}=\varepsilon_{oa}+\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bo}=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}\qquad\boxed{\varepsilon_{oa}=0,\varepsilon_{bo}=0}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ab}=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}\qquad\boxed{\phi=BS_{\text{扇形}}}\qquad\boxed{\varepsilon_{ab}=-S_{\text{扇形}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$

若ab无限长呢？

例： 磁场均匀分布在半径为R的范围，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，且大于零。求无限长直导线ab上的电动势。



解： 由$\vec{B}$的均匀及柱对称性可知，在同一圆周上E_i的大小相等，方向沿切线方向.

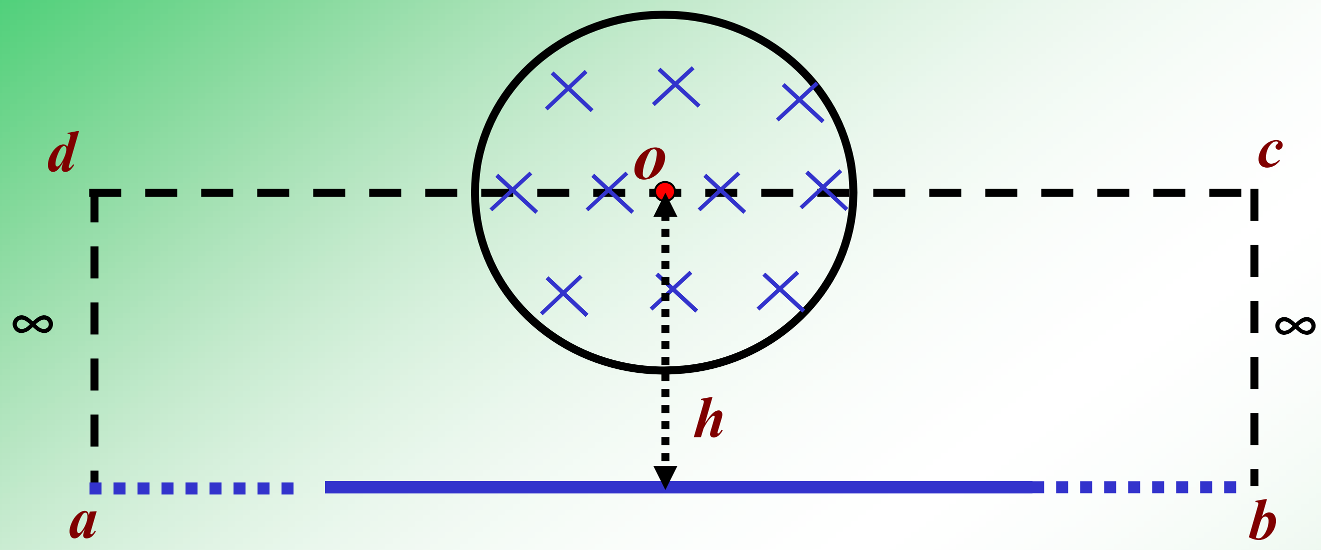
当$r>R$时，$E_i=\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\varepsilon_i=\int_{-}^{+}\vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

另解：

取如图所示的矩形回路。

$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$



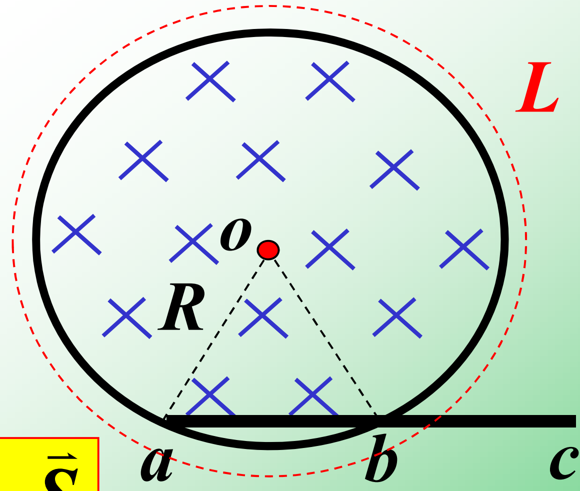
解：考虑回路 $abcd$, $\varepsilon_{abcd} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} + \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{da}$,

而 $\varepsilon_{bc} = \varepsilon_{cd} = \varepsilon_{da} = 0$ ，

故 $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{abcd} = -\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = -\,(\pi R^2/2)\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$

方向：由愣次定律知 $a \rightarrow b$

例: 在半径为R的圆形区域内，有垂直向里的均匀磁场正在减小。有一金属棒abc放在图示位置，已知$ab=bc=R$，求（1）a、b、c三点感应电场的大小和方向（在图上标出）；（2）棒上感应电动势ε_{abc}为多大；（3）a、c哪点电势高。



解:（1）$\oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \ (= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t})$

取回路L，且绕行方向为顺时针。

由楞次规律知，感应电场的方向是顺时针沿L回路。

$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$

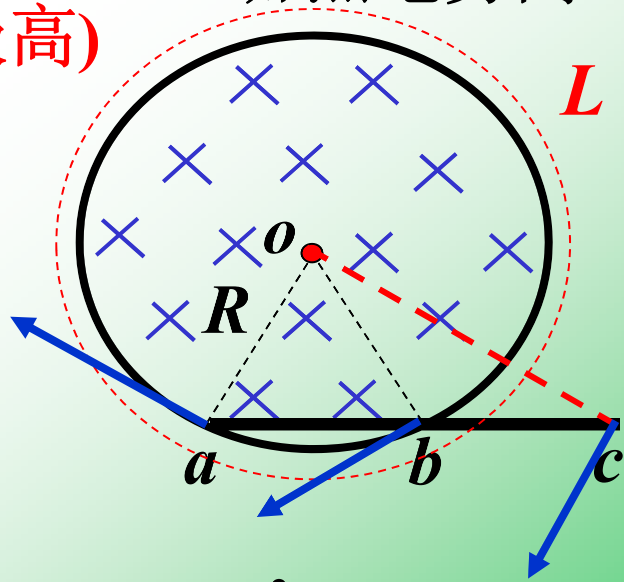
由对称性知，$\oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_i \cdot 2\pi r$

$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot \pi R^2$

$\rightarrow E_i = -\frac{R^2}{2r} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

例: 在半径为R的圆形区域内，有垂直向里的均匀磁场正在速减小。有一金属棒abc放在图示位置，已知$ab=bc=R$，求（1）a、b、c三点感应电场的大小和方向（在图上标出）；（2）棒上感应电动势ε_{abc}为多大；（3）a、c哪点电势高。

（3）a点电势高。(正极高)



解:

$$E_a = E_b = -\frac{R}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$E_c = -\frac{R^2}{2\overline{oc}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{2\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

感应电场的方向如图所示。

$$E_i = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

（2）$\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc}$

分别对oab、obc回路应用

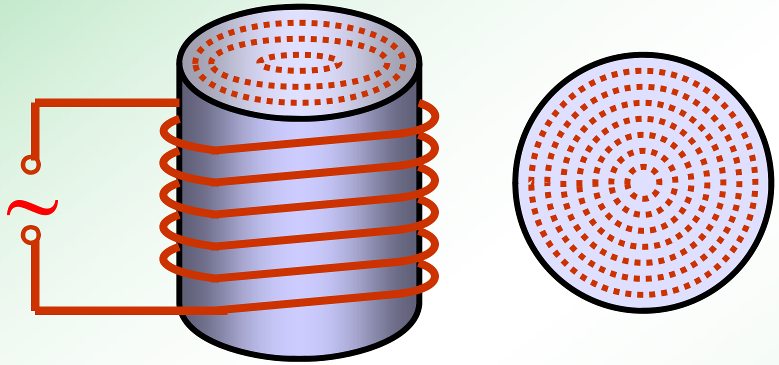
$\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ 即可。或直接考虑oac回路。

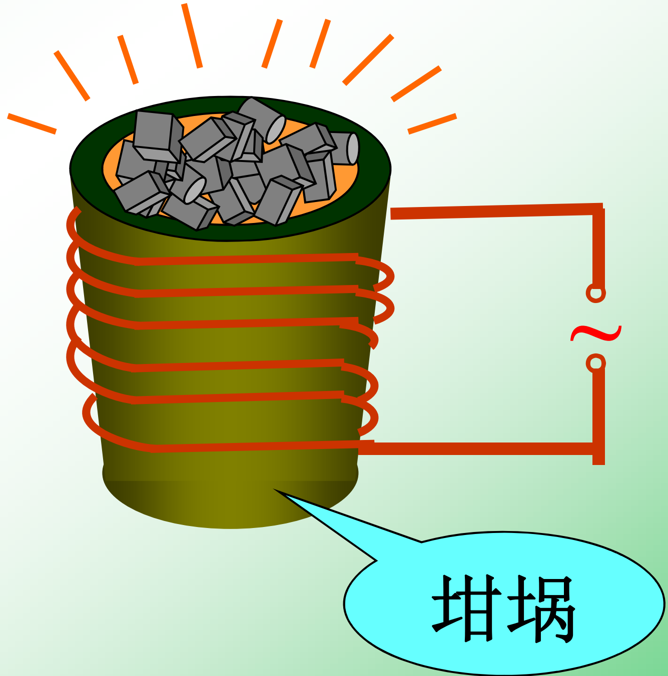
5. *感应电场的应用*

$$E_i = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

（1）涡流——高频电磁感应炉

将导体块放置在E_i中, 则在导体中将产生环形电流→涡流。

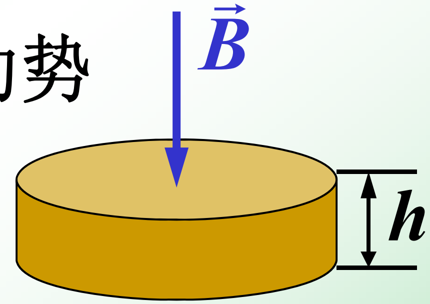




注：

涡流还是有害的，它不仅消耗电功率，而且降低设备能量利用效率。

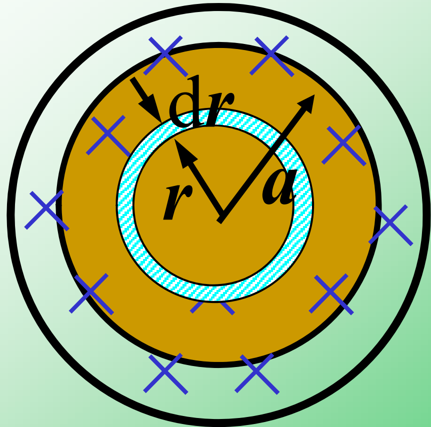
例7. 将半径为a的金属圆盘, 厚为h, 电导率为σ, 同轴放置在轴对称匀强磁场$\vec{B}$中, 且$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t > 0$。求圆盘电流强度及产生的热功率。



解： 取半径为r,厚度为dr的圆筒,其电动势

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\cdot\pi r^2) = -\pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

其上电阻为：$R = \dfrac{2\pi r}{\sigma\cdot h\cdot \mathrm{d}r}$



电流为：$\mathrm{d}I_i = \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon_i}{R} = -\dfrac{r}{2}\sigma h\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}r$

总电流： $I_i = \int \mathrm{d}I_i = -\dfrac{1}{4}a^2\sigma h\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

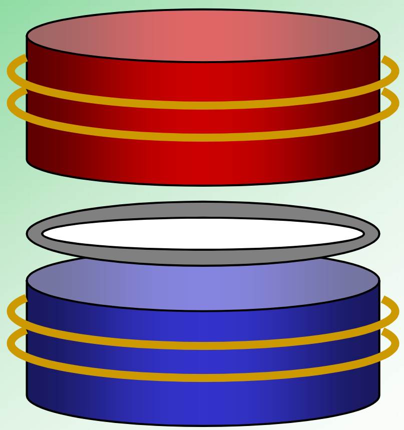
产生的热功率：

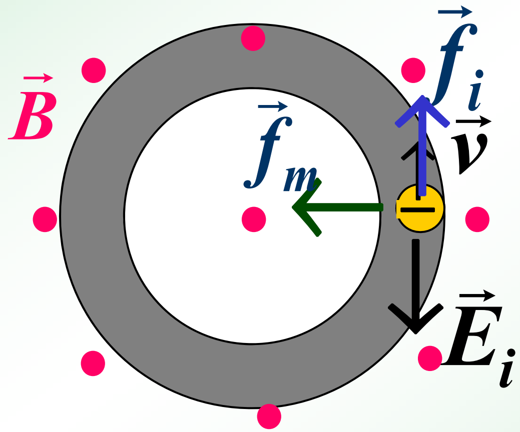
$$P = \int \mathrm{d}P = \int R(\mathrm{d}I_i)^2 = \frac{1}{8}\pi\sigma h a^4\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

（2）物理学中应用——**电子感应加速器**

原理：用变化磁场所激发的感应电场来加速电子

交流电在前 1/4周期时，假定管中的感应电场是顺时针的(俯视图)





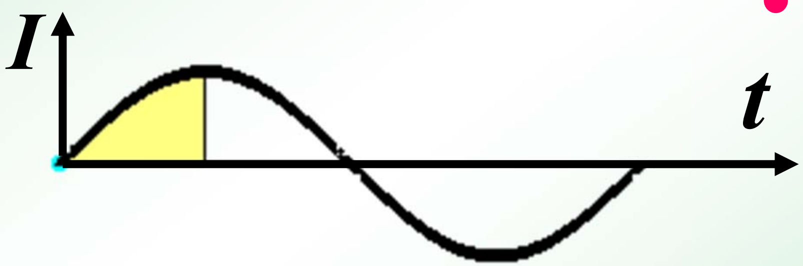
电子受力：

$\vec{f}_i = -e\vec{E}_i$

(切向加速)

$\vec{f}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$

(向心力)



加速器的成功证实了感应电场的客观存在!

问题： 为什么在电流 I 的每一个变化周期里，只有前1/4周期是在给电子加速？