华中科技大学

《数理方程与特殊函数》考试试卷(A卷)

考试方式: 闭卷　考试日期: ________　考试时长: 150 分钟

院(系): ________________　专业班级: ________________

学　号: ________________　姓　名: ________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得　分	
评卷人	

一 **(满分 15 分)** 用分离变量法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1 + 6\pi\cos(3\pi x). \end{cases}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

二 **(满分 10 分)** 设 a 是正常数, 用固有函数展开法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 5\sin(5\pi x),\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

三 **(满分 15 分)** 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题:

$$
\begin{cases}
u_{xx}+u_{yy}=\sin x, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, \quad 0<y<\pi, \\
u(0,y)=-1, \qquad u_x(\frac{\pi}{2},y)=1, \\
u_y(x,0)=0, \qquad u(x,\pi)=x-1.
\end{cases}
$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四 (满分 10 分) 设 a 是正常数, 利用行波法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0,\ x \geqslant 0, \\ u_x|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

五 (满分 15 分) 用拉普拉斯变换求解如下问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos t, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} u_x(x,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

提示: $\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-as}] = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & 0 < t < a. \end{cases}$, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+a^2}] = \cos at.$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

六 (满分 10 分) 用傅里叶变换求解如下问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 3t^2 u, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$

[提示: $\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$.]

得　分	
评卷人	

七 (满分 15 分) (第1小题5分, 第2小题10分.)

1. 用试探法求解环域内的 Laplace 方程:

$$\begin{cases} \Delta u(r,\theta)=0, & 1<r<2, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1}=0, & u|_{r=2}=1. \end{cases}$$

2. 设 Ω 为三维空间中的有界区域, 若 u 是 Ω 中的二阶连续可微函数且满足: $\triangle u\geqslant 0$, 试证明: 对 Ω 中的任意一个以 M_0 为心, 以 a 为半径的球 $B_a(M_0)$, Γ_a 是 $B_a(M_0)$ 的边界, 都有

$$u(M_0)\leqslant\frac{1}{4\pi a^2}\int\int_{\Gamma_a} u dS.$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

八 **(满分 10 分)** 用分离变量法求解如下问题(若答题区域不够，可在背面答题):

$$\begin{cases} u_t = 4(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r - \frac{4}{r^2}u), \quad 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u(1,t) = 0, \quad |u(0,t)| < +\infty, \\ u(r,0) = 1 - r^2. \end{cases}$$

提示: $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$, $\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$, $J_0(0) = 1$,
$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$.