华中科技大学

《数学物理方程与特殊函数》考试试卷(A卷)

考试方式: 闭卷　考试日期: ______　考试时长: 150 分钟

院(系): ______________　专业班级: ______________

学　号: ______________　姓　名: ______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

一 **(满分 15 分)** 用分离变量法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}, \quad x\in(0,l), \quad t>0, \\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \\ u(x,0)=x(l-x), \quad u_t(x,0)=0. \end{cases}$$

解：用分离变量法,令$u(x,t)=X(x)T(t)$**(2分)**,则

问题的固有值为: $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$,固有函数为:$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$, $n=1,\ldots.$ 易得: $T_n(t)=a_n\cos\frac{2n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{2n\pi t}{l}$, $n=1,2...,$ **(5 分)**

所以方程的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{2n\pi t}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \textbf{(2分)}$$

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{2na_n\pi}{l}\sin\frac{2n\pi t}{l}+\frac{2nb_n\pi}{l}\cos\frac{2n\pi t}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}.\textbf{(2分)}$$

代入初值,得

$$u(x,0)=x(l-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \textbf{(1分)}$$

$$u_t(x,0)=0=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nb_n\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad \textbf{(1分)}$$

得$b_n=0$, $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{4l^2(1-(-1)^n)}{(n\pi)^3}$. **(1分)**

故解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4l^2(1-(-1)^n)}{(n\pi)^3}\cos\frac{2n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad \textbf{(1分)}$$

得　分	
评卷人	

二 **(满分 10 分)** 用固有函数法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\cos\frac{2\pi x}{a},\ 0<x<a,\ 0<y<b, \\ u_x(0,y)=0, \quad u_x(a,y)=0, \\ u(x,0)=1, \quad u(x,b)=0. \end{cases}$$

解：问题的固有值为$\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2, \quad n=0,1,...,$ 固有函数是$X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{a}$.**(2 分)** 可

设

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(y)\cos\frac{n\pi x}{a}, \qquad \textbf{(2分)}$$

代入方程得

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n''-\frac{n^2\pi^2}{a^2}a_n)\cos\frac{n\pi x}{a}=\cos\frac{2\pi x}{a}. \qquad \textbf{(2 分)}$$

得$a_n''-\frac{n^2\pi^2}{a^2}a_n=0, \quad n\neq 2, \quad a_2''-\frac{4\pi^2}{a^2}a_2=1.$ **(1分)**

由边界条件,得

$$u(x,0)=1=a_0(0)+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(0)\cos\frac{n\pi x}{a},\ u(x,b)=a_n(b)+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(b)\cos\frac{n\pi x}{a}=0.$$

得 $a_0(0)=1,\ a_n(0)=0,\ n\neq 0$ 及 $a_n(b)=0.$ **(1分)**

解得:

$$a_0(y)=1-y, \quad a_2(y)=\frac{a^2}{4\pi^2}\left(\frac{(e^{\frac{2\pi b}{a}}-1)e^{\frac{2\pi y}{a}}+(e^{\frac{4\pi b}{a}}-e^{\frac{2\pi b}{a}})e^{-\frac{2\pi y}{a}}}{e^{\frac{4\pi b}{a}}-1}-1\right) \quad a_n(y)=0, n\neq 0,2.$$

(1分)

故方程的解为

$$u(x,y)=1-y+\frac{a^2}{4\pi^2}\left(\frac{(e^{\frac{2\pi b}{a}}-1)e^{\frac{2\pi y}{a}}+(e^{\frac{4\pi b}{a}}-e^{\frac{2\pi b}{a}})e^{-\frac{2\pi y}{a}}}{e^{\frac{4\pi b}{a}}-1}-1\right)\cos\frac{2\pi x}{a}. \qquad \textbf{(1分)}$$

得　分	
评卷人	

三 **(满分 15 分)** 求解如下具有非齐次边界条件的定解问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2x, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 1,\ u(2,t) = -1, \\ u(x,0) = -\frac{x^3}{3} + x. \end{cases}$$

解：令 $v(x,t) = u(x,t) - w(x,)$,则$v(x,t)$满足：

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + w''(x) + 2x, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ v_x(0,t) = 1 - w'(0), \quad v(2,t) = -1 - w(2), \\ v(x,0) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - w(x). \end{cases} \qquad \textbf{(2分)}$$

令$w''(x) + 2x = 0, w'(0) = 1,\ w(2) = -1$, 解得, $w(x) = -\frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3}$. **(3分)** 故有

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ v_x(0,t) = 0, \quad v(2,t) = 0, \\ v(x,0) = \frac{1}{3}. \end{cases} \qquad \textbf{(2分)}$$

此问题可由分离变量法求解，固有值为$\lambda_n = (\frac{(2n+1)\pi}{4})^2$, 固有函数为$X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{4}$, $n = 0, 1, 2...$ **(3分)**, $T_n(x) = C_n e^{-(\frac{(2n+1)\pi}{4})^2 t}$, 故有

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n e^{-(\frac{(2n+1)\pi}{4})^2 t} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{4}. \qquad \textbf{(3 分)}$$

代入初值, 得

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{4} = \frac{1}{3}.$$

由此解得：

$$C_n = \frac{1}{3}\int_0^2 \cos\frac{(2n+1)\pi x}{4} dx = (-1)^n \frac{4}{3(2n+1)\pi}. \quad \textbf{(1分)}$$

故原问题的解为

$$u(x,t) = -\frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{3(2n+1)\pi} e^{-(\frac{(2n+1)\pi}{4})^2 t} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{4} \qquad \textbf{(1分)}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四 (满分 10 分) 设a是正常数，利用行波法求解如下无界弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \\ u|_{x=at} = 2x, \quad u_t(0,t) = t^2 + 3. \end{cases}$$

解：波动方程通解为

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at) \qquad \textbf{(2分)}$$

代入初值

$$2x = f(0) + g(2x), \quad -af'(-at) + ag'(at) = t^2 + 3. \qquad \textbf{(2分)}$$

得

$$g(x) = x - f(0), \quad f'(x) = 1 - \frac{3}{a} - \frac{x^2}{a^3} \qquad \textbf{(2分)}$$

得

$$f(x) = x - \frac{3x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + c. \qquad \textbf{(1分)}$$

由此

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-at) + g(x+at) \\ &= x - at - \tfrac{3x-3at}{a} - \tfrac{(x-at)^3}{3a^3} + c + x + at - f(0), \end{aligned} \qquad \textbf{(1分)}$$

由$u(0,0)=0$, 得 $c - f(0) = 0$. **(1分)**

得方程的解为

$$u(x,t) = x - at - \frac{3x-3at}{a} - \frac{(x-at)^3}{3a^3} + x + at \qquad \textbf{(1分)}$$

得　分	
评卷人	

五 (满分 15 分) 用积分变换法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_t - 4u, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = f(t), \quad \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

提示：$\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-as}] = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & 0 < t < a. \end{cases}$

解:u关于t做拉氏变换,记为$U(x,s)$, $L(f(t)) = F(s)$**(3分)**, 则有

$$\begin{cases} s^2U(x,s) = U_{xx} - 4sU - 4U, \\ U(0,s) = F(s), \quad \lim\limits_{x\to+\infty} U(x,s) = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(3分)}$$

解关于x的二阶线性常系数齐次微分方程,得通解为

$$U(x,s) = c_1e^{(s+2)x} + c_2e^{-(s+2)x}, \quad \textbf{(2分)}$$

由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x,s) = 0$, 得 $c_1 = 0$; **(1分)** 代入 $U(0,s) = F(s)$, 得 $c_2 = F(s)$. **(1分)**
故有

$$U(x,s) = F(s)e^{-(s+2)x}. \quad \textbf{(2分)}$$

再由拉氏逆变换,解得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-2x}\mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-sx}]. & \textbf{(2分)} \\ &= \begin{cases} e^{-2x}f(t-x), & t \geq x, \\ 0, & 0 < t < x. \end{cases} & \textbf{(1分)} \end{aligned}$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

六 **(满分 10 分)** 求解如下问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$

[提示：$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda)e^{-ia\lambda}] = f(x-a)$.]

解:u关于x做傅里叶变换,记为$U(\lambda,t)$, $\mathcal{F}[\phi(x)] = \hat{\phi}(\lambda)$ **(2分)**, 则有

$$\begin{cases} U_t(\lambda,t) = -\lambda^2 U + i\lambda U, \\ U(\lambda,0) = \hat{\phi}(\lambda). \end{cases} \qquad \textbf{(2分)}$$

解关于t的一阶线性齐次微分方程,得通解为

$$U(\lambda,t) = ce^{(-\lambda^2 + i\lambda)t}. \qquad \textbf{(2分)}$$

由初值条件,解得

$$U(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{(-\lambda^2+i\lambda)t}. \qquad \textbf{(2 分)}$$

再由傅里叶逆变换,解得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(x) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-\lambda^2 t}e^{i\lambda t}), \\ &= \phi(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x+t)^2}{4t}}, \qquad . \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) e^{-\frac{(x+t-y)^2}{4t}} dy, \end{aligned} \qquad \textbf{(2分)}$$

得　分	
评卷人	

七 (满分 15 分) (第1小题10分，第2小题5分, **如本页写不下，答案请写在背面**)

1. 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $r_0<1$ 为一个正常数. 记 $\Omega=\{(x,y)|r_0<r<1\}$为二维平面上的圆环域. $a>0$, 若函数 $u(x,y)$ 满足：

$$\begin{cases} \Delta u=0, & r_0<r<1, \\ u|_{r=1}=0, & u|_{r=r_0}\le a\ln\frac{1}{r_0}. \end{cases}$$

试用极值原理或比较原理证明：

$$u(x,y)\le a\ln\frac{1}{r}, \text{ 对任意的 } (x,y)\in\Omega.$$

2. 若 $u(x,y)$ 在 $\{(x,y)|0<r\le 1\}$ 中连续且满足

$$\begin{cases} \Delta u=0, & 0<r<1, \\ u|_{r=1}=0, & \lim\limits_{r\to 0}\frac{u(x,y)}{\ln r}=0. \end{cases}$$

试证明：

$$u(x,y)\equiv 0, \quad 0<r\le 1.$$

1的证明：记：$w=a\ln\frac{1}{r}-u$**(2分)**, 则w满足：

$$\begin{cases} \Delta w=0, & r_0<r<1, \\ w|_{r=1}=0, & w|_{r=r_0}\ge 0. \quad \textbf{(3分)} \end{cases}$$

由极值原理, $w\ge 0$ 即 $u(x,y)\le a\ln\frac{1}{r}$ 当 $r_0\le r\le 1$. **(5分)**.

2.的证明：对任意给定的$M=(x_1,y_1)\ne(0,0)$, 记$r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$. 由$\lim\limits_{r\to 0}\frac{u(x,y)}{\ln r}=0$, 对$\forall\epsilon>0$, 充分小, 存在$r_1>\delta_1>0$, 使得, $|u(x,y)|\le\epsilon\ln\frac{1}{\delta_1}$ 当 $r=\delta_1$. 故有

$$\begin{cases} \Delta u=0, & \delta_1<r<1, \\ u|_{r=1}=0, & u|_{r=\delta_1}\le\epsilon\ln\frac{1}{\delta_1}. \end{cases}$$

可得$u(M)\le\epsilon\ln\frac{1}{r_1}$, **(2分)**. 同理, 可得 $u(M)\ge-\epsilon\ln\frac{1}{r_1}$, **(2分)**. 即 $|u(M)|\le\epsilon\ln\frac{1}{r_1}$, 由$\epsilon$ 任意性, 令$\epsilon\to 0$, 可得$u(M)=0$, 对任意$M\ne(0,0)$. **(1分)**.

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

八 **(满分 10 分)** (第1小题4分，第2小题6分)

1. 设 $\mu_m^{(0)}$是贝塞尔函数 $J_0(x)$的第 m个正零点，试将函数 $4-r^2$在区间 $[0,2]$上按函数系 $\{J_0(\mu_m^{(0)}r)\}$展开成傅里叶-贝塞尔级数。
2. 用分离变量法求解如下问题：

$$\begin{cases} u_t = 4(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), \quad 0 < r < 2, \quad t > 0, \\ u(2,t) = 0, \\ u(r,0) = 4 - r^2, \quad |u(r,t)| < +\infty. \end{cases}$$

[提示：$(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$, $J_0'(x) = -J_1(x)$.]

解1. 令 $4-r^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m J_0(\frac{\mu_m^{(0)} r}{2})$. **(1分)** 则 $a_m = \frac{\int_0^2 (4r-r^3) J_0(\frac{\mu_m^{(0)} r}{2})dr}{2J_1^2(\mu_m^{(0)})}$. **(1分)**

$$\int_0^2 (4r-r^3)J_0(\frac{\mu_m^{(0)}r}{2})dr = \frac{16}{(\mu_m^{(0)})^4}\int_0^{\mu_m^{(0)}}((\mu_m^{(0)})^2 x - x^3)J_0(x)dx$$

$$= \frac{16}{(\mu_m^{(0)})^4}((\mu_m^{(0)})^2 xJ_1(x) - x^3J_1(x) - 2x^2J_0(x) + 4xJ_1(x))|_0^{\mu_m^{(0)}} = \frac{64J_1(\mu_m^{(0)})}{(\mu_m^{(0)})^3}.$$

由此

$$4 - r^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{32}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1(\mu_m^{(0)})} J_0(\frac{\mu_m^{(0)}r}{2}).\textbf{(2 分)}$$

解2：由分离变量法,设$u=T(t)R(r)$. 可解得, 本问题的固有值为$\lambda_m = (\frac{\mu_m^{(0)}}{2})^2$, 固有函数是$R_m(r) = J_0(\frac{\mu_m^{(0)}r}{2})$, $m=1,2,....$ **(1分)**

$$T_m'(t) + (\mu_m^{(0)})^2 T_m(t) = 0, \qquad \textbf{(1分)}$$

解得$T_m(t) = c_m e^{-(\mu_m^{(0)})^2 t}$. **(1分)**

故有

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m e^{-(\mu_m^{(0)})^2 t} J_0(\frac{\mu_m^{(0)}r}{2}), \quad \textbf{(1分)}$$

由初值条件，可得

$$u(r,0) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m J_0(\frac{\mu_m^{(0)}r}{2}) = 4 - r^2, \quad \textbf{(1分)}.$$

由此，可得

$$c_m = \frac{32}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1(\mu_m^{(0)})}.$$

故有

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{32}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1(\mu_m^{(0)})} e^{-(\mu_m^{(0)})^2 t} J_0(\frac{\mu_m^{(0)}r}{2}), \quad \textbf{(1分)}$$