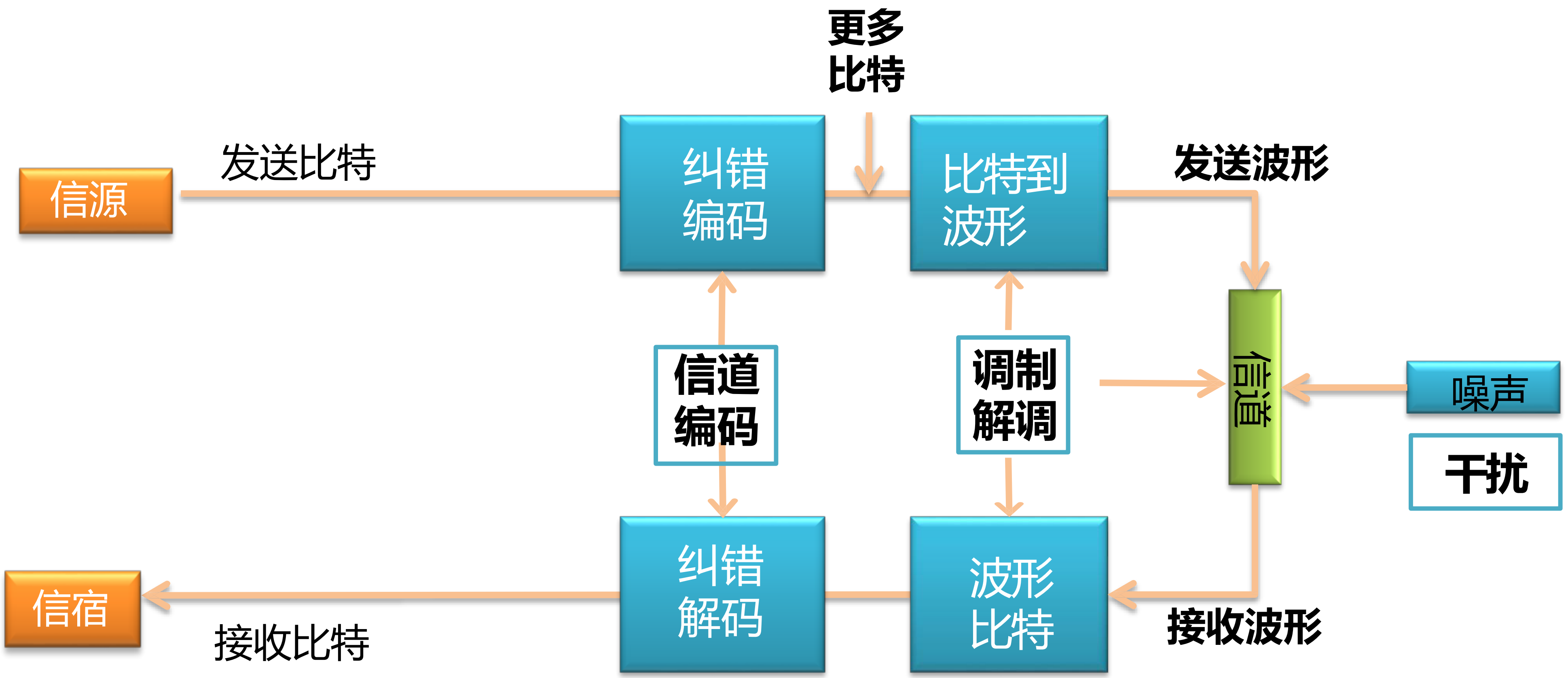
基础信息论

比特误码

华中科技大学电信学院

点对点通信



更多
比特
信源
发送比特
纠错
编码
比特到
波形
发送波形
信道
编码
调制
解调
信道
噪声
干扰
信宿
接收比特
纠错
解码
波形
比特
接收波形

主题：比特误码

- 目的
  - 简述信噪比和误码率之间的关系
  - 分析选择不同阈值对误码率的影响
- 内容
  - 信号平均功率
  - 高斯噪声模型
  - 计算误码率
  - 信噪比的影响
  - 高斯噪声的误码率表达式

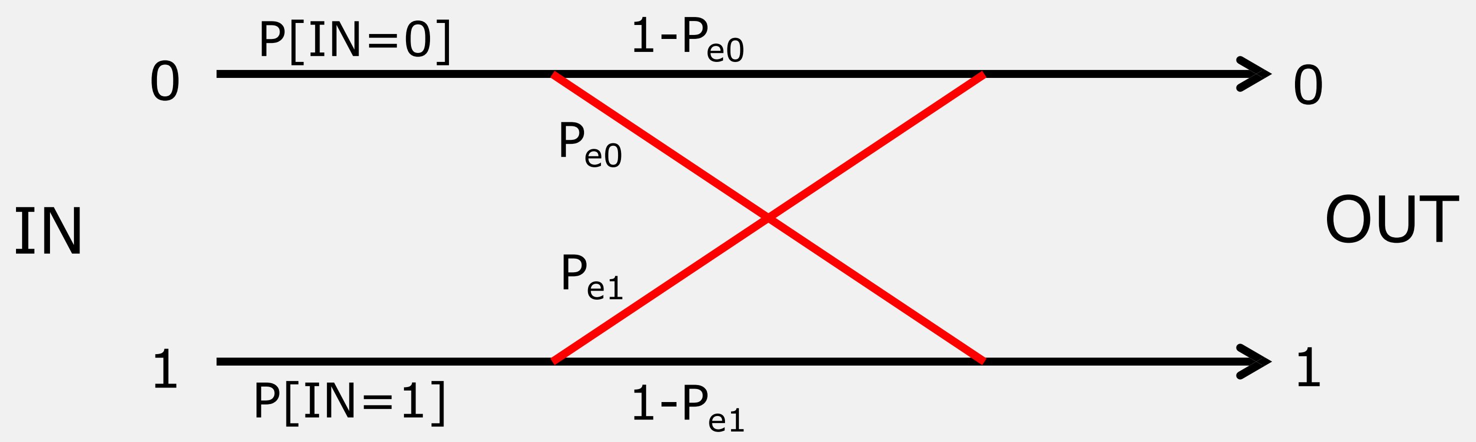
讨论

微助教

请举出一个不确定结果的事例，如何应对不确定性？

信号平均功率

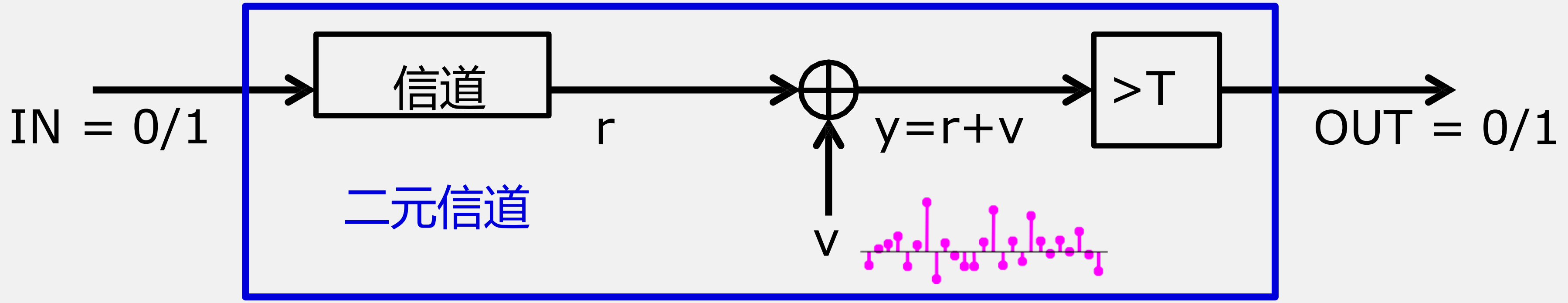
二元信道模型



$$\mathrm{BER}=P_{e0}\cdot P[IN=0]+P_{e1}\cdot P[IN=1]$$

- 通常，发送端确定 P[IN=0/1]
  - 例如，P[IN=0] = P[IN=1] = 0.5
- P_{e0} 和 P_{e1} 取决于
  - 发送电平 (r_{min},r_{max})
  - 噪声功率
  - 阈值

二元信道内部



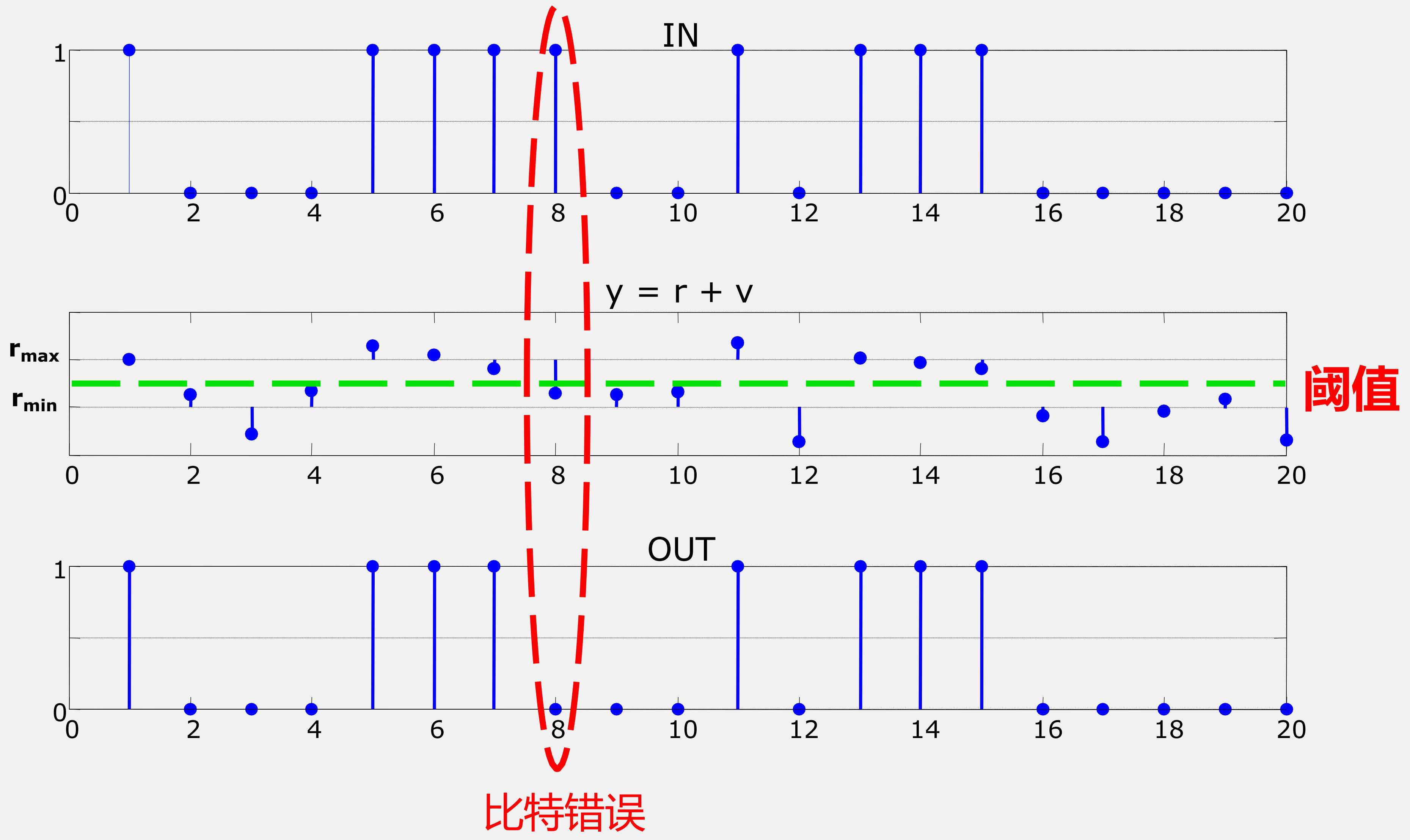
- 简化假设，我们仅考虑传输一位比特。
- 信道添加偏移量r_{min}并按r_{max}-r_{min}缩放

$$r = \begin{cases} r_{min} & \text{若 } IN = 0 \\ r_{max} & \text{若 } IN = 1 \end{cases}$$

- 噪声v是加性的: y = r + v
- 通过y阈值化得到输出:

$$OUT = \begin{cases} 0 & \text{若 } y < T \\ 1 & \text{若 } y \geq T \end{cases} \qquad T\text{: 阈值}$$

噪声会导致比特误码



能量消耗

- 功率是单位时间内使用的能量：
  - 功率 = 能量/时间
  - 1瓦=功率单位
  - 1秒内将一个苹果（~100g）提起1m需要~1W

- 电池包含固定的能量。
  - 它们所驱动设备的功率消耗越高，消耗的能量就越快。

$$可用时间=\frac{能量}{能量功耗}$$

能量消耗

- 计算电池中的能（电）量
  - 电池的额定电压通常为固定电压（伏特）（V），充电容量为毫安小时（mAh）
  - 把它们相乘就得到了电池中存储的总能量，单位是毫瓦时(mWh)
  - 例如，这个手机电池含有3700毫瓦（mWh）的能量
- 典型的能量消耗:
  - 微波炉1000 w
  - 台式电脑120 w
  - 笔记本电脑40 w
  - 人类大脑10 w
  - 移动电话1 w

习题

假设一台笔记本电脑的平均耗电量是30瓦，由下图所示的电池供电，如果电池一开始充满电，请预测这台笔记本电脑能运行多长时间?

答题

微助教

A.11小时　　B.4.4小时　　C.1.6小时　　D.1.1小时

习题答案

假设一台笔记本电脑的平均耗电量是30瓦，由下图所示的电池供电，如果电池一开始充满电，请预测这台笔记本电脑能运行多长时间?

A.11小时　B.4.4小时　C.1.6小时　D.1.1小时

$$\text{可用时间} = \frac{\text{能量}}{\text{功率}}$$

$$\text{电池的能量} = 11.1V \times 4400mAh \approx 49Wh$$

$$\text{功率} = 30W$$

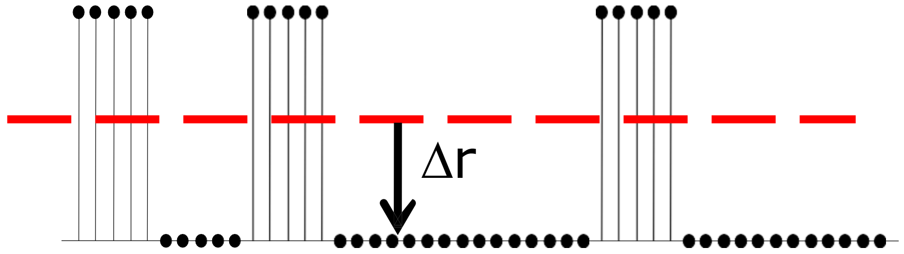
$$\text{可用时间} = \frac{49Wh}{30W}$$

选 C

信号平均功率

- 对于通信，我们通常有一个平均值左右变化的信号。

$$r_{ave} = \text{平均值}$$



- 对于通信，我们感兴趣的是信号与其平均值的差异有多大：$\Delta r = r - r_{ave}$

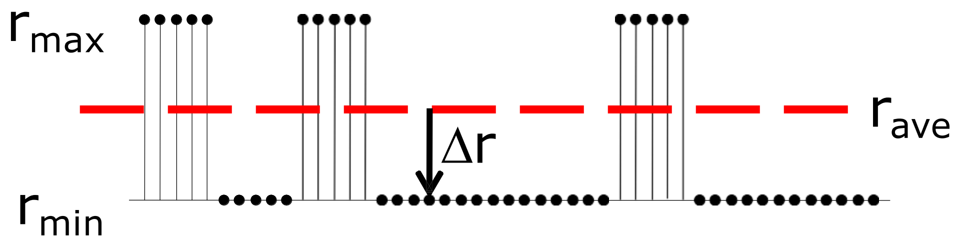
- 由于Δr既可以是正数也可以是负数，因此它在大量样本中的平均值为零：

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Delta r(n) = 0$$

- 平均功率是多个样本的均方值：

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\Delta r(n)\right)^2$$

比特信号的平均功率



$$P_{signal} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\Delta r(n)\right)^2$$

- 若0和1等概出现，

$$r_{ave} = \frac{1}{2}r_{min} + \frac{1}{2}r_{max}$$

- 若 IN = 0，

$$\Delta r = r_{min} - r_{ave} = r_{min} - \left(\frac{1}{2}r_{min} + \frac{1}{2}r_{max}\right) = \frac{1}{2}(r_{min} - r_{max})$$

- 若 IN = 1，

$$\Delta r = r_{max} - r_{ave} = r_{max} - \left(\frac{1}{2}r_{min} + \frac{1}{2}r_{max}\right) = \frac{1}{2}(r_{max} - r_{min})$$

- 平均功率为

$$P_{signal} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(r_{min} - r_{max})\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(r_{max} - r_{min})\right)^2 = \frac{(r_{max} - r_{min})^2}{4}$$

高斯噪声模型

什么是高斯(正态)分布?

讨论

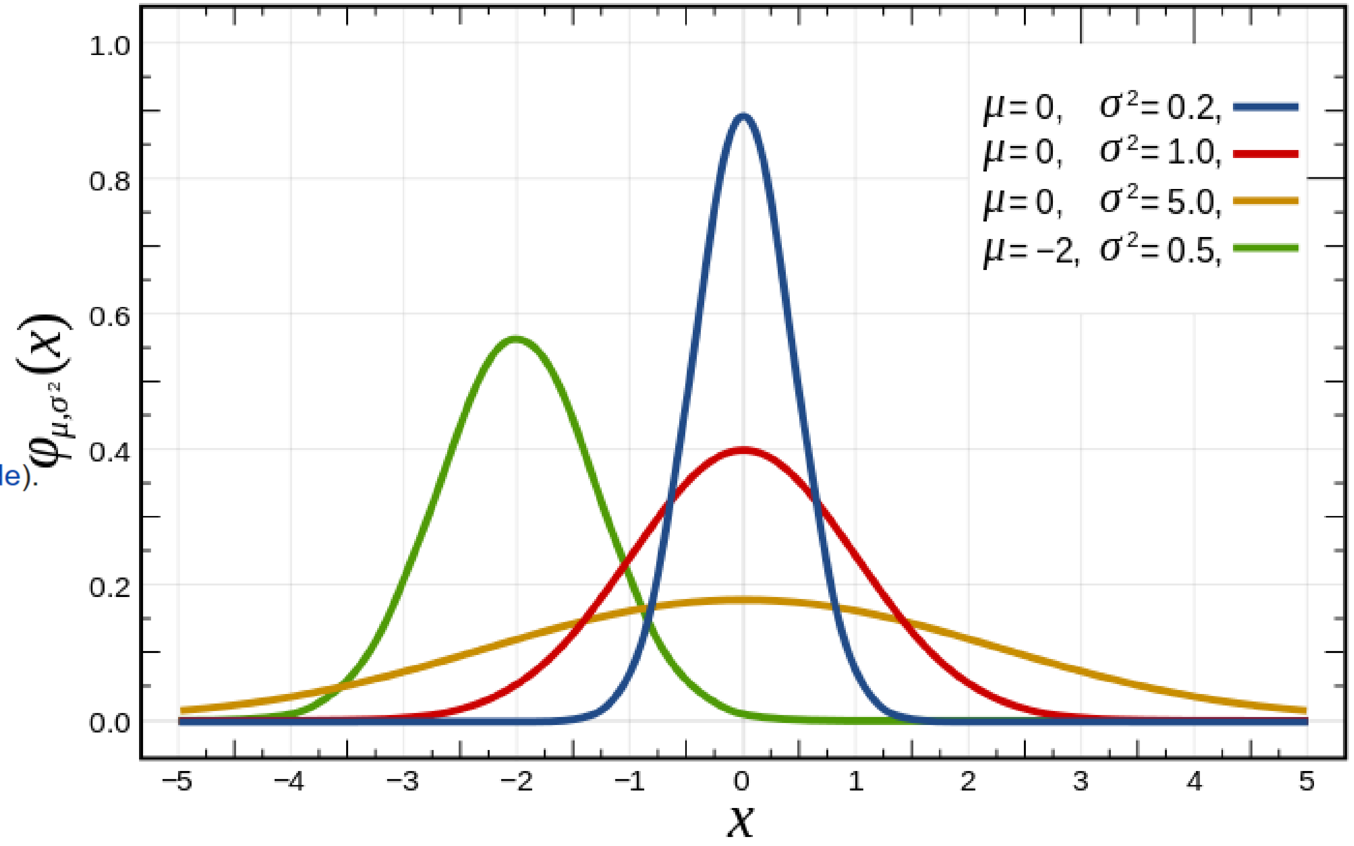
微助教

The probability density of the normal distribution is:

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Where:

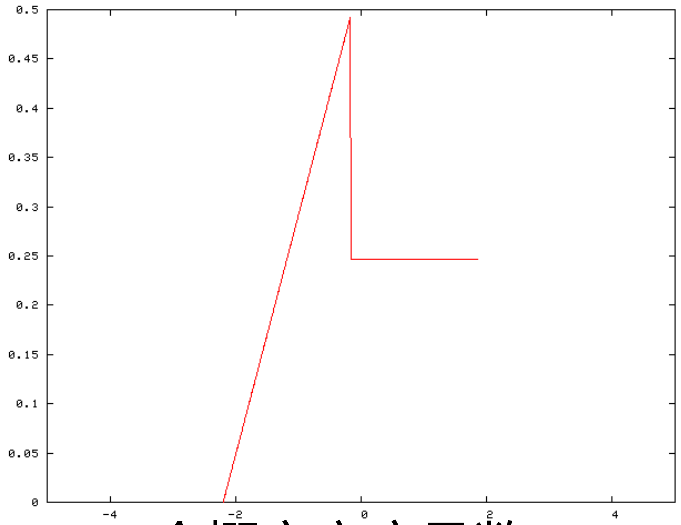
- μ is mean or expectation of the distribution (and also its median and mode).
- σ is standard deviation
- σ^2 is variance



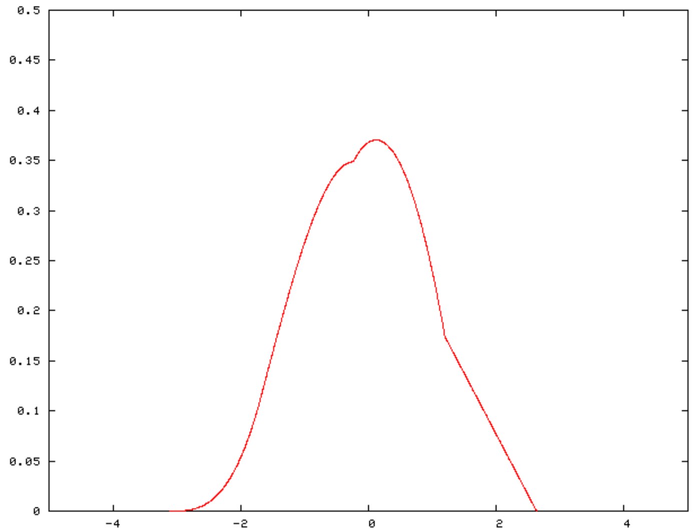
https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution

什么是中心极限定理?

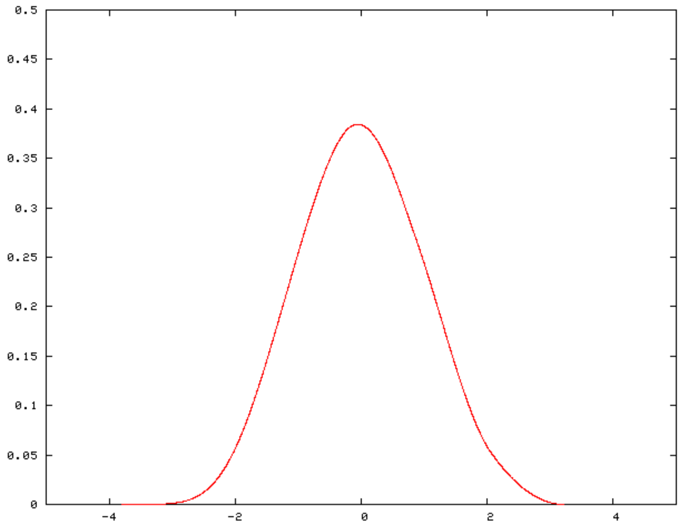
一个展示中心极限定理的例子



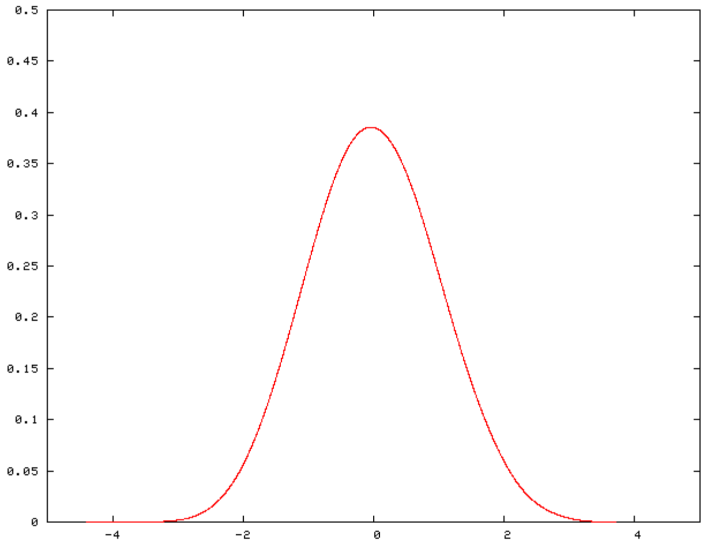
一个概率密度函数。



两个变量之和的密度。



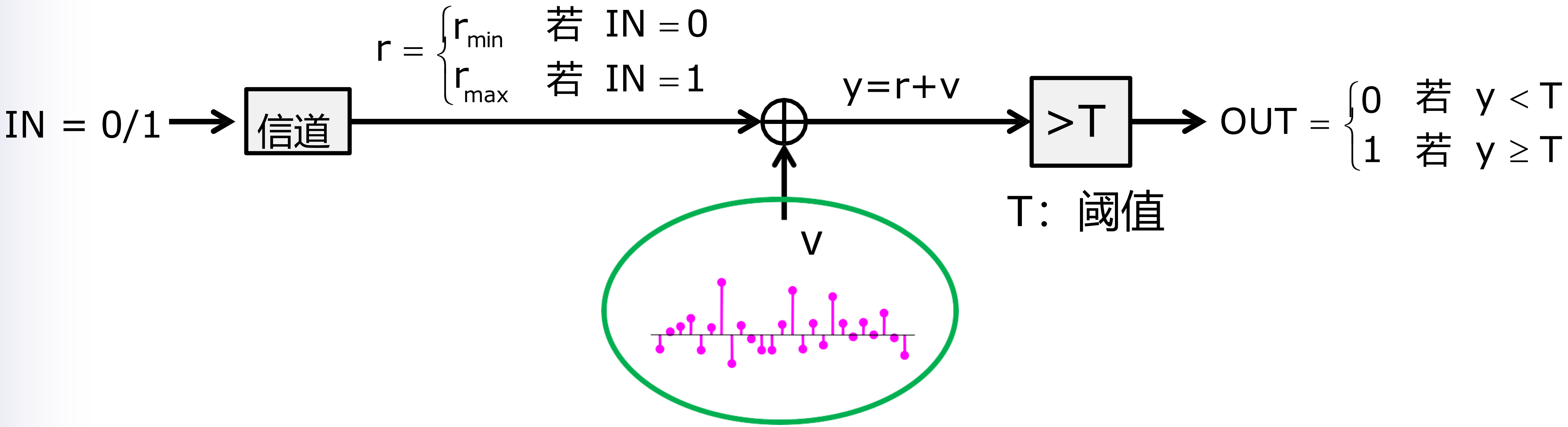
三个变量之和的密度。



四个变量之和的密度。

https://en.wikipedia.org/wiki/Central_limit_theorem

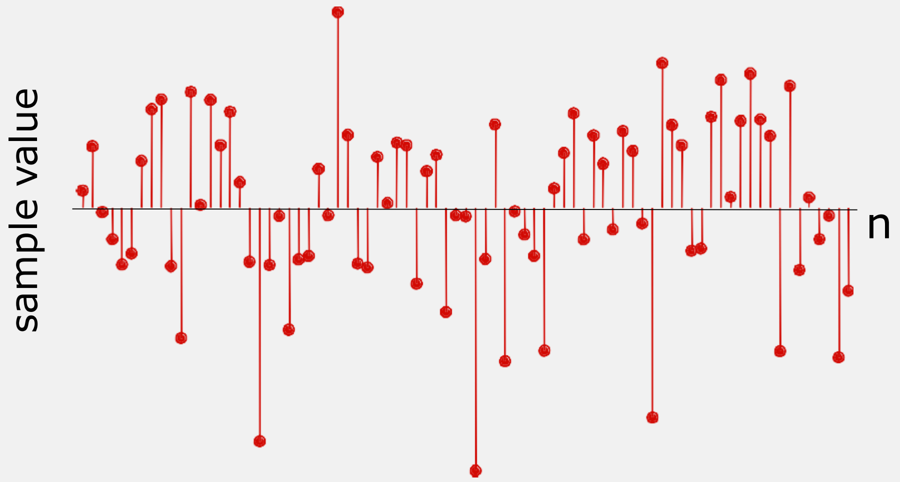
二元信道内部



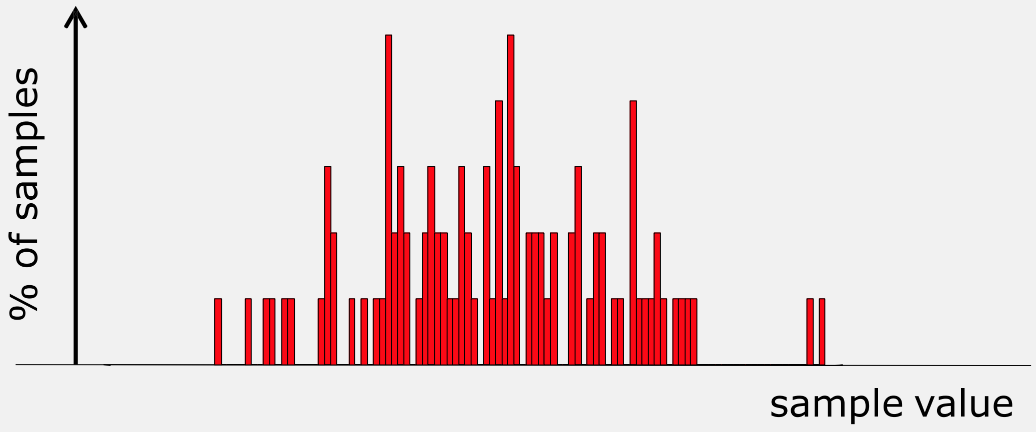
我们称噪声v为随机变量。

噪声统计

- 每个噪声样本的值都是随机的，但是大量样本的统计量是可以预测的。

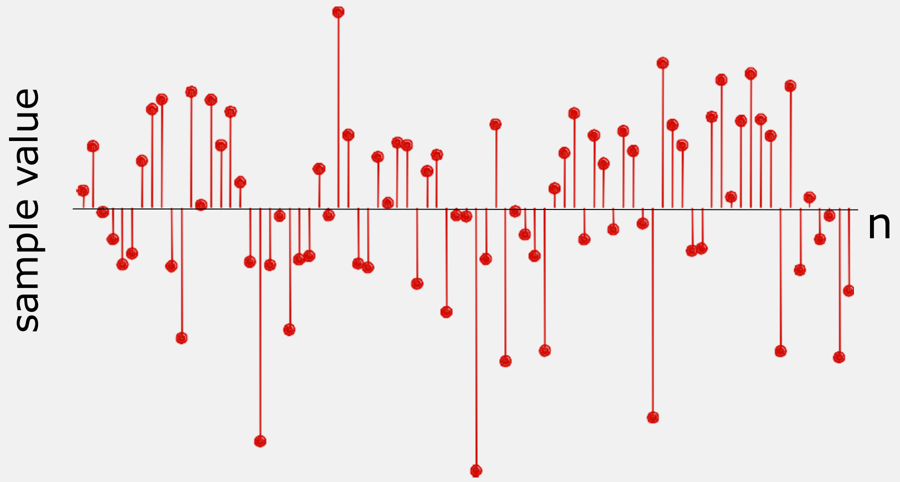


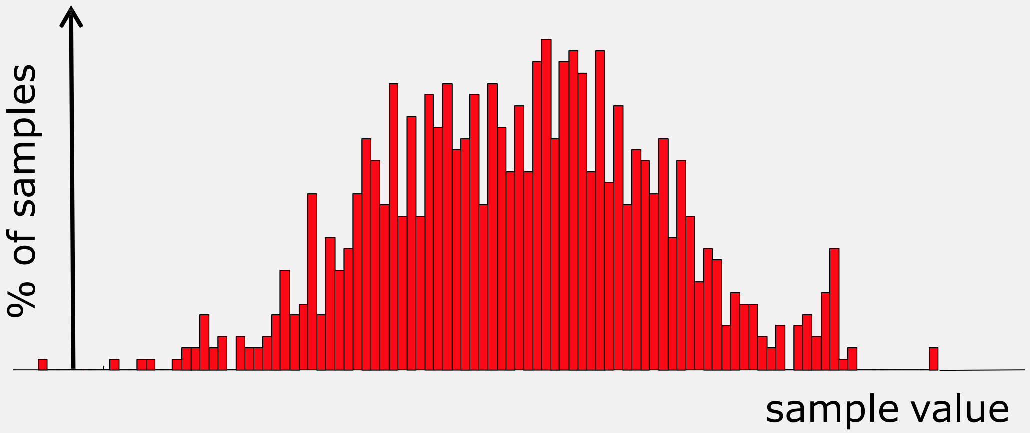
100个样本的直方图



噪声统计

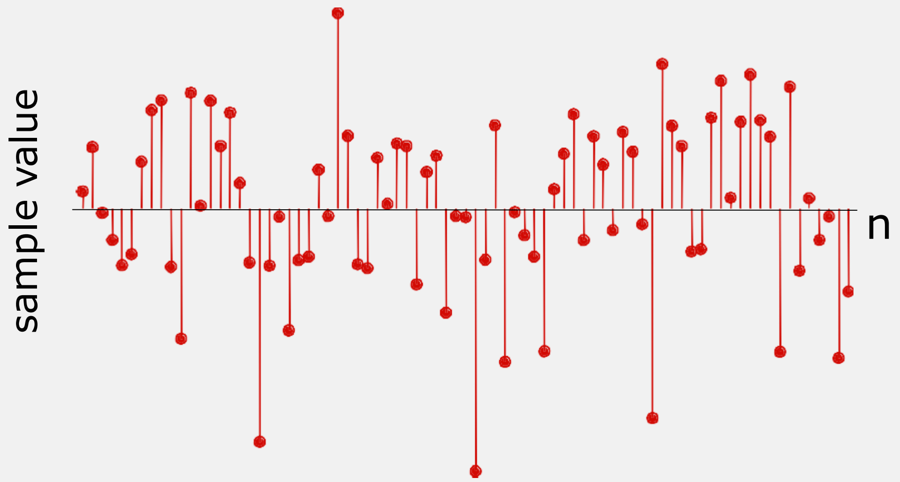
- 每个噪声样本的值是随机的，但大量样本的统计量是可预测的。

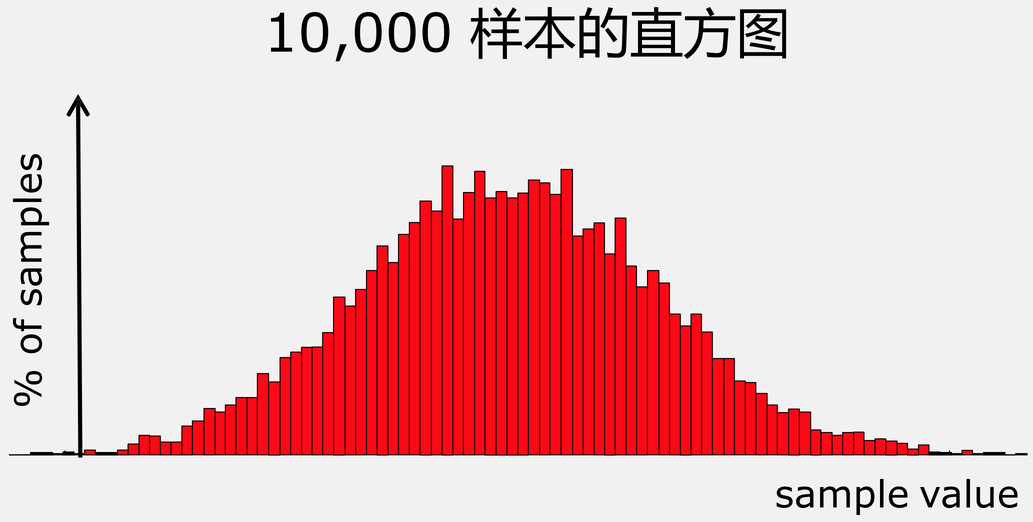




噪声统计

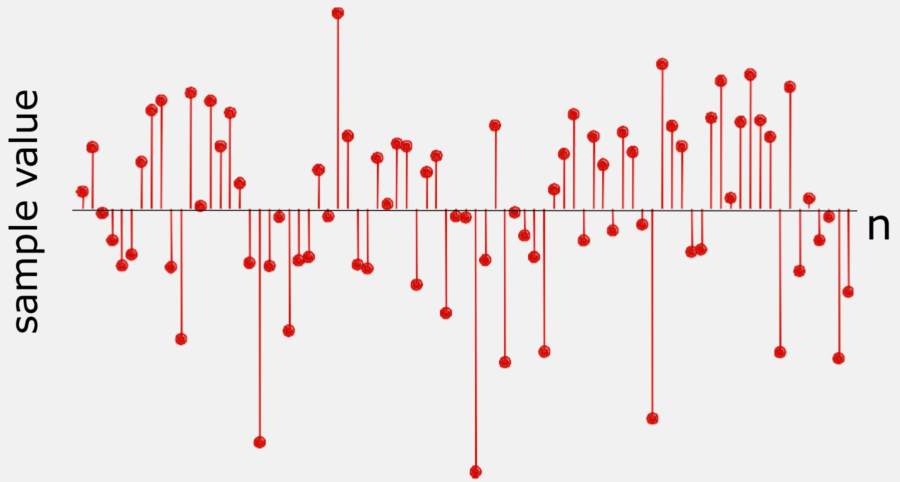
- 每个噪声样本的值是随机的，但大量样本的统计量是可预测的。



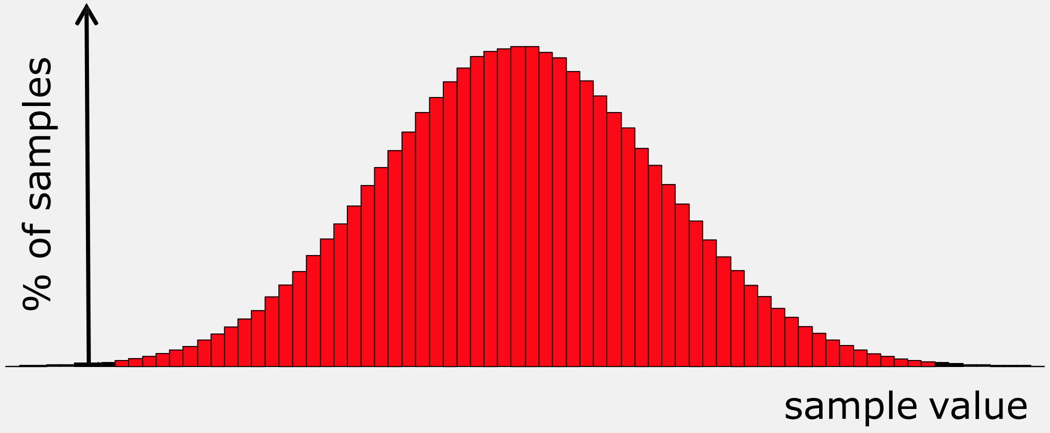


噪声统计

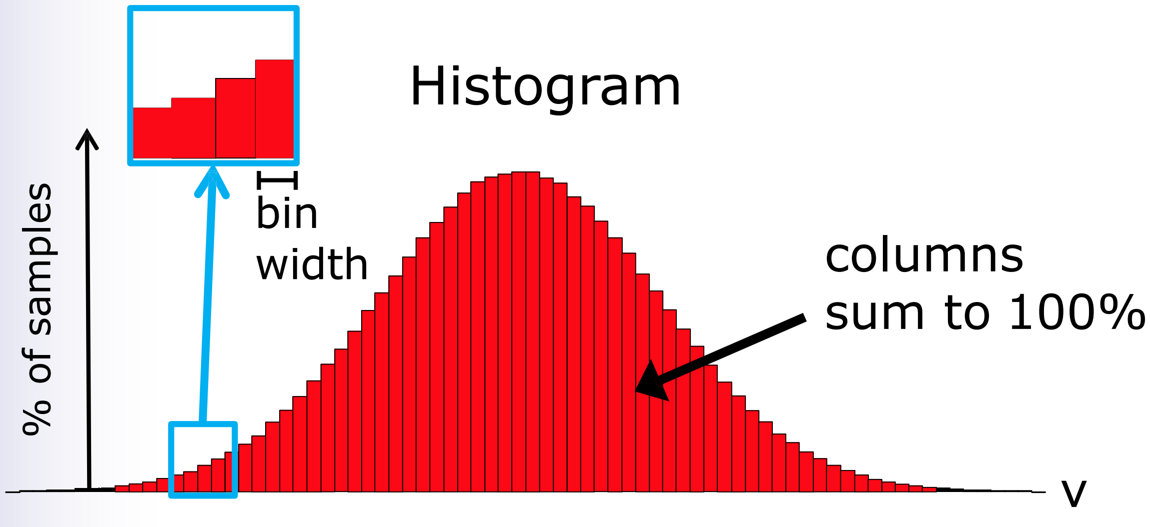
- 每个噪声样本的值是随机的，但大量样本的统计量是可预测的。

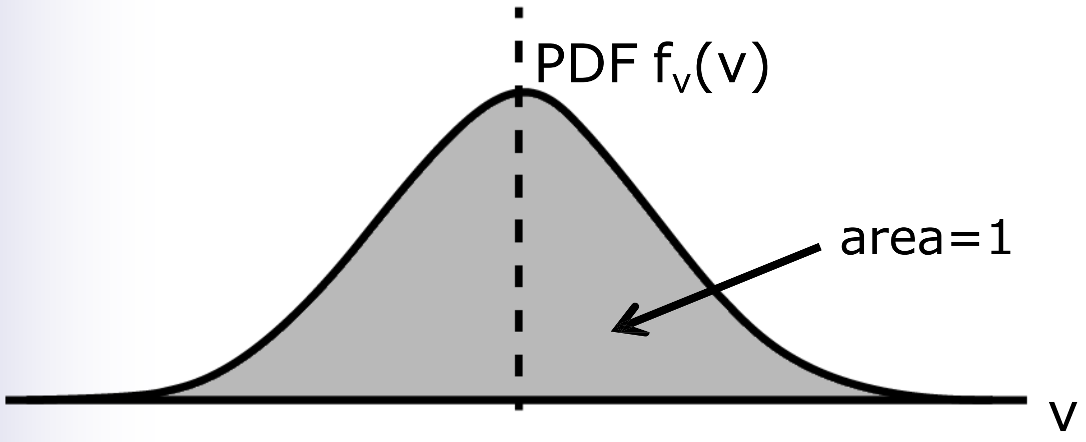


1,000,000 个样本的直方图



概率密度函数

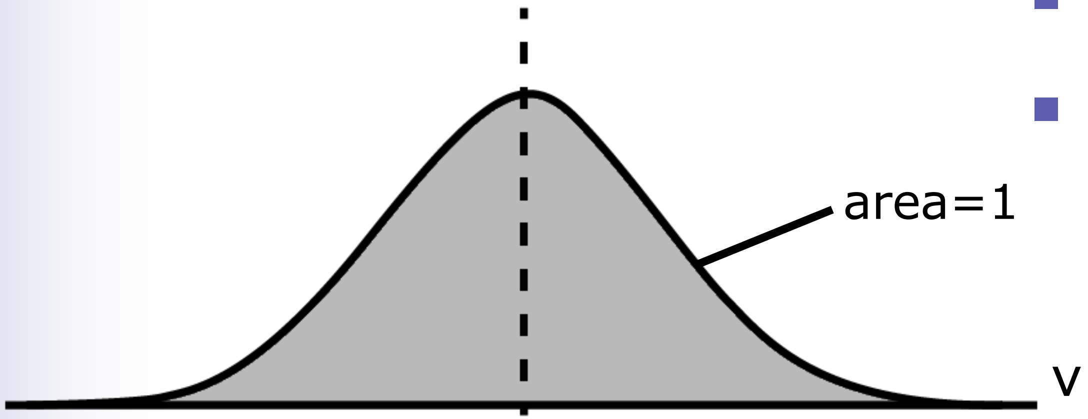




- 直方图并不完全平滑，因为我们在有限宽度的组距中对样本进行计数。
- 随着组距变得越来越小，曲线变得越来越平滑。
- 它接近一个函数称为概率密度函数(pdf) , $f_v(v)$

高斯密度函数

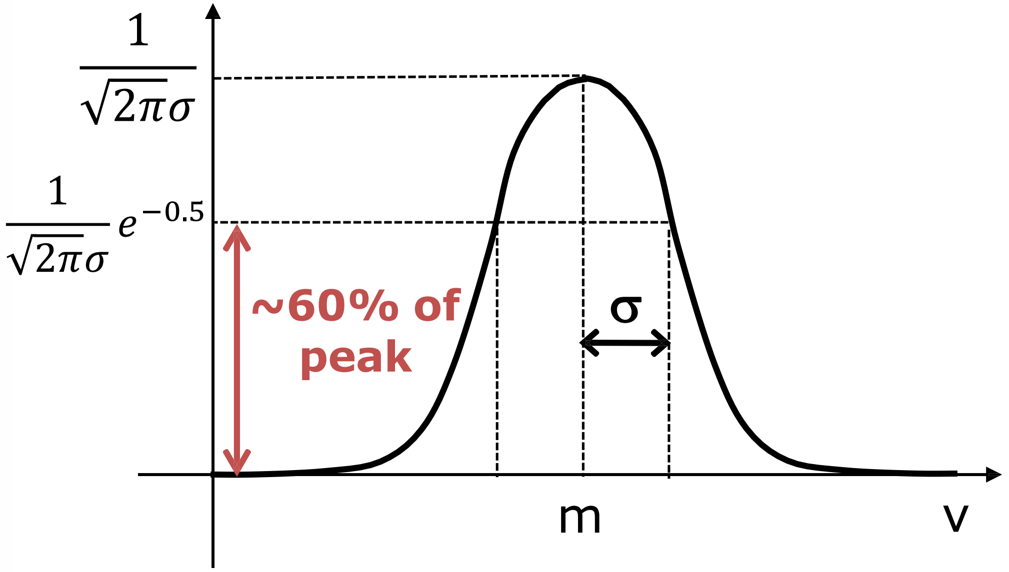
$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(v-m)^2}{2\sigma^2}}$$



- 许多自然发生的随机量（例如噪声）的概率密度函数趋于呈钟形，称为高斯分布。
- 这个非常重要的结果叫做**中心极限定理**。
- 高斯分布非常普遍，因此也称为“正态”分布。
- 应用:
  - 通信系统中的噪声
  - 布朗运动中的粒子
  - 电阻两端的电压

控制形状的参数

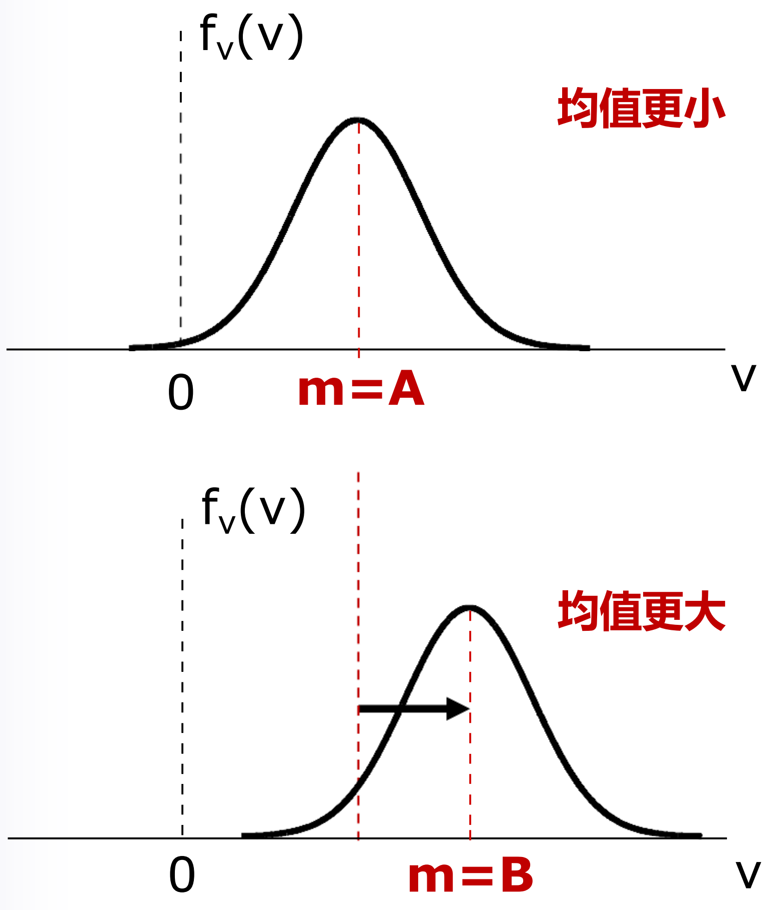
$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(v-m)^2}{2\sigma^2}}$$



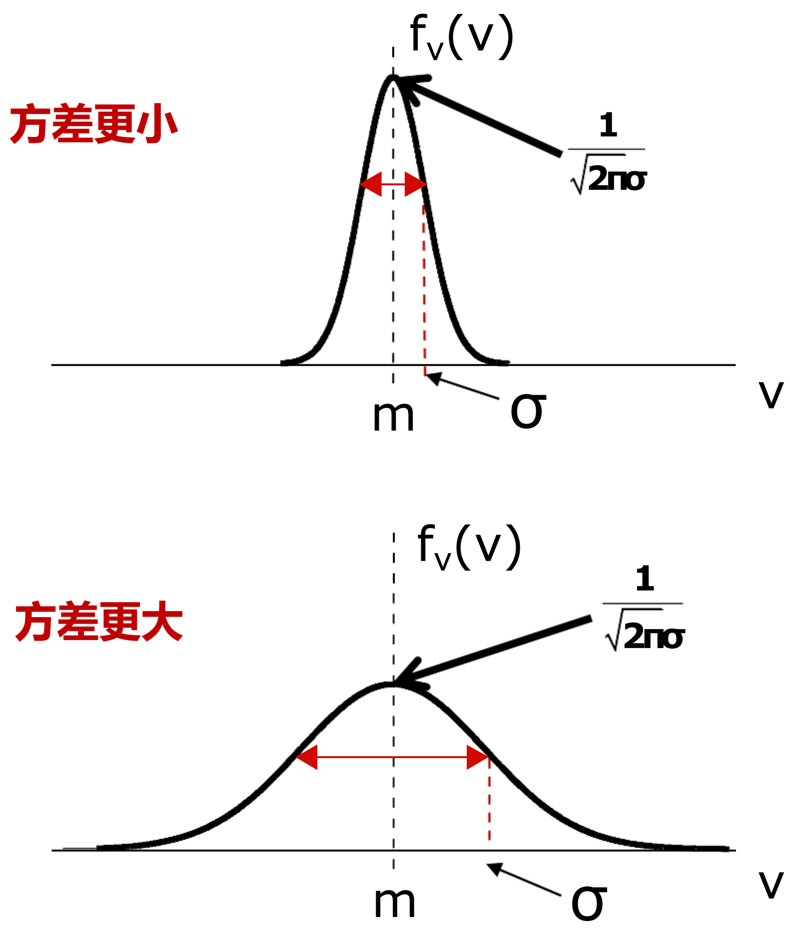
- 平均值（m）为
  - ：多个样本的平均值
  - pdf的中心位置
- 标准差(σ)为:
  - 表示样本的“扩散”
  - pdf宽度的量度
- 方差(σ²) 为:
  - 标准差的平方
  - 许多样本的平均幂

改变均值和方差

均值的变化使PDF的中心偏移of

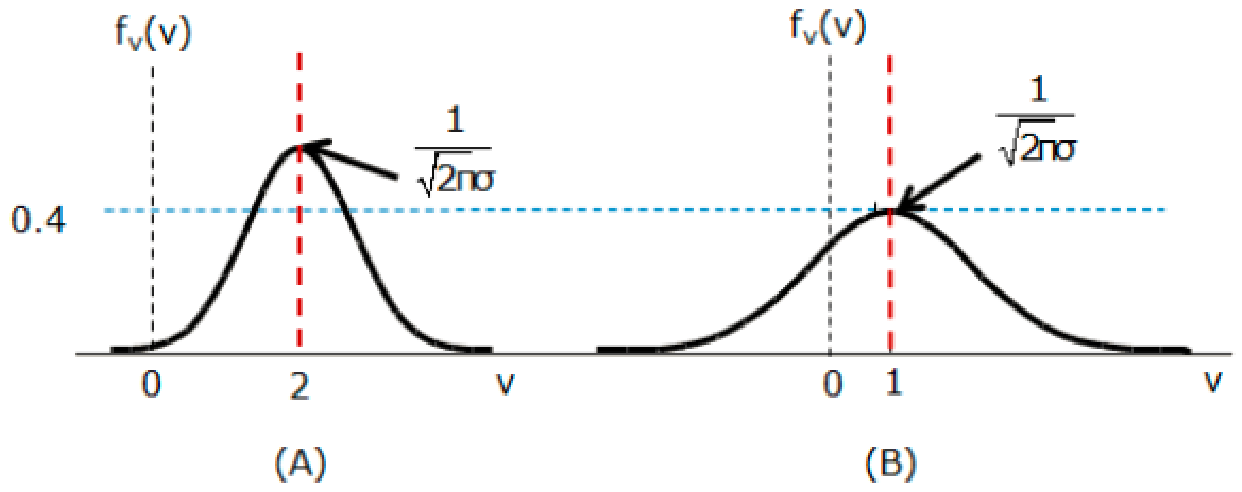


方差的变化会缩小或扩大PDF



习题

考虑下面显示的两个概率密度函数(probability density function，PDF)。下列哪个说法是正确的?

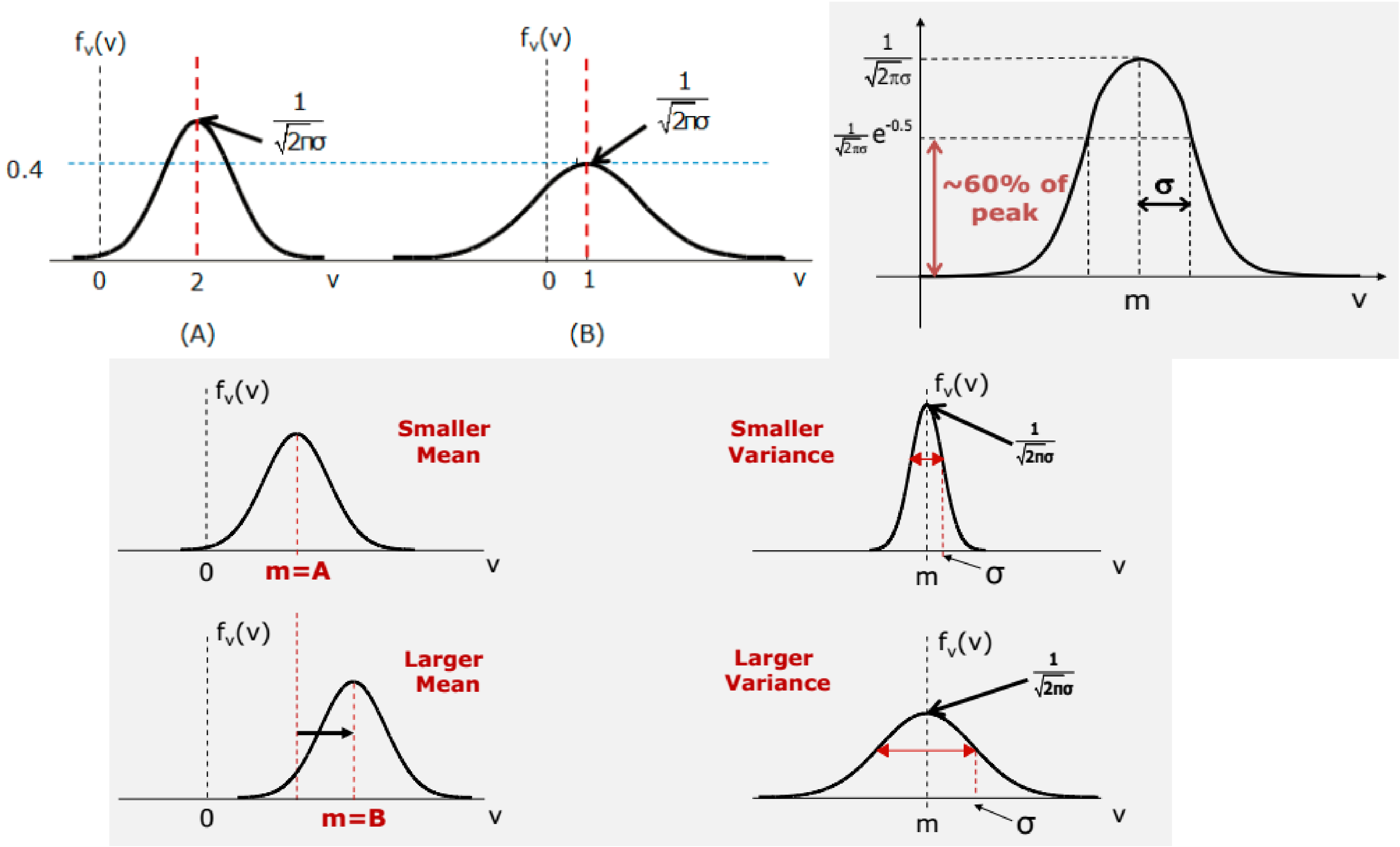


A. PDF (B)比PDF (a)的均值大，方差小。
B. PDF (B)的均值和方差都大于PDF (a)。
C. PDF (B)的均值和方差都小于PDF (a)。
D. PDF (B)比PDF (a)的均值小，方差大。

答题

微助教

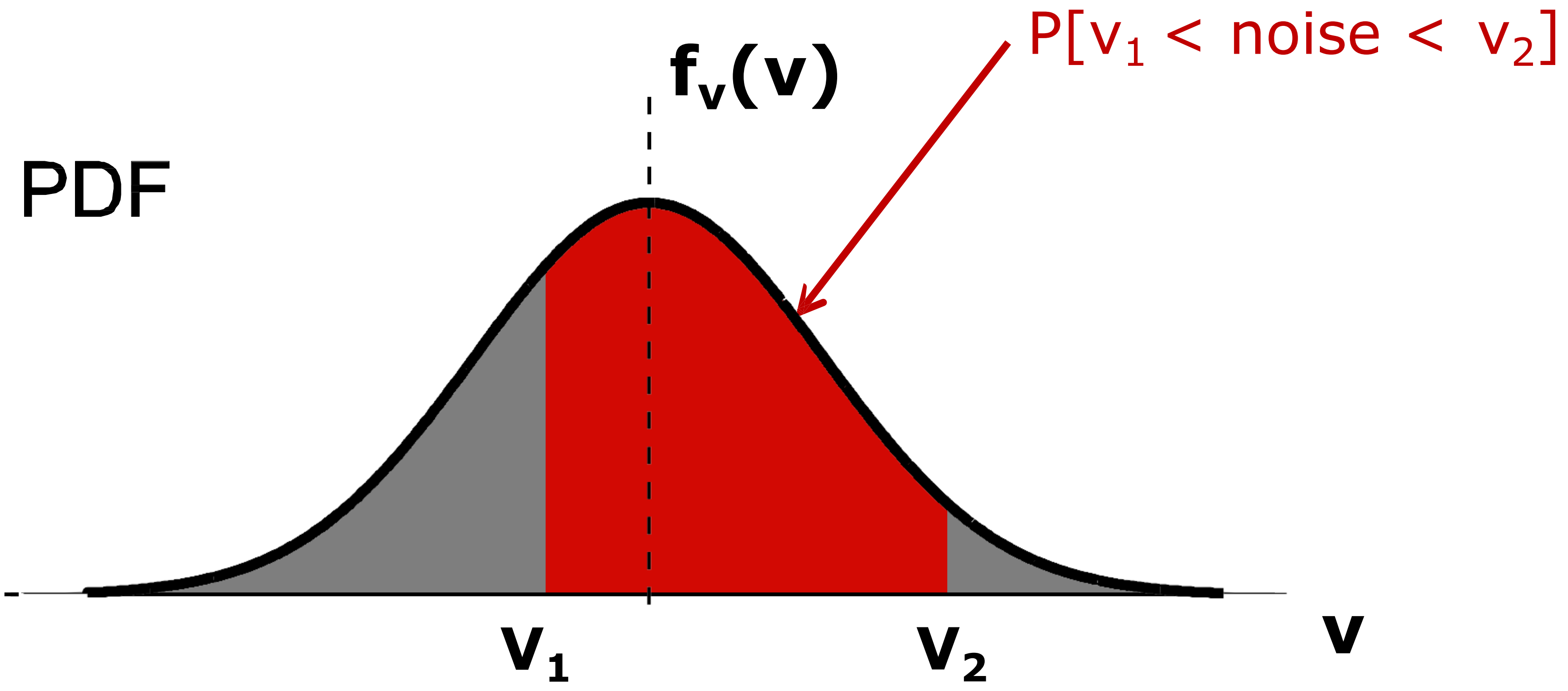
答案



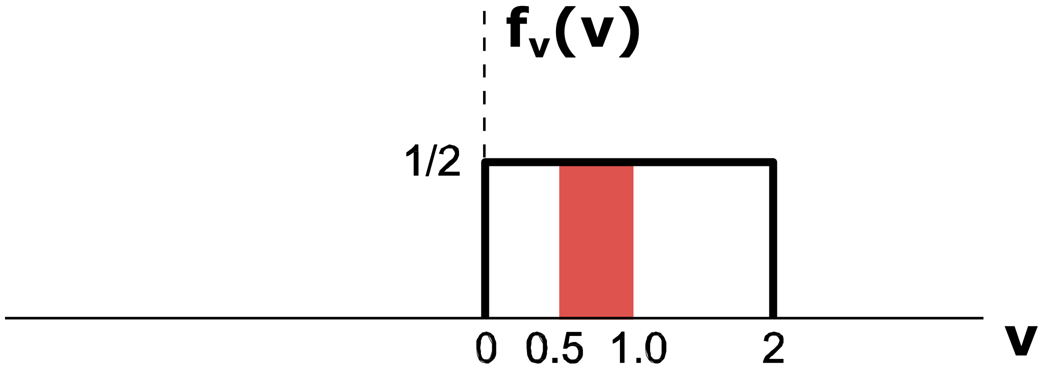
PDF (B)的均值小于PDF (a)，方差大于PDF (a)。选 D

通过积分计算概率

- 噪声v在v1和v2之间的概率是v1和v2之间的概率密度函数下的面积。



概率计算示例



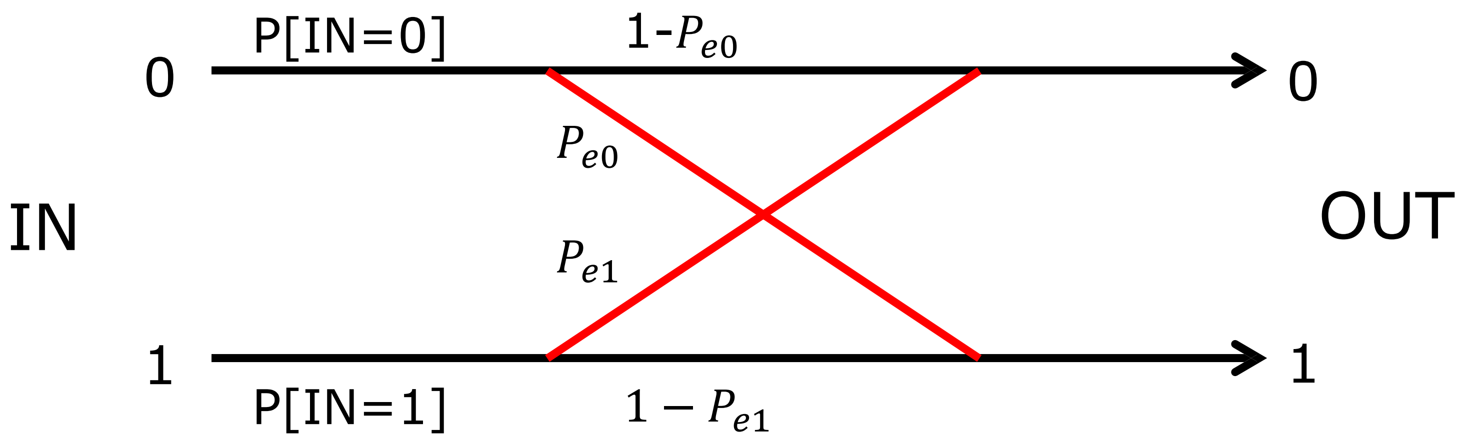
- **验证总面积为 1:**
  - **由于曲线定义了矩形，因此面积为底×高:**

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

- **求出v在0.5到1.0之间的概率:**
  - **阴影区域的面积为** $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
  - **因此,** $P[0.5 < v < 1.0] = \frac{1}{4}$

计算误码率

二元信道模型

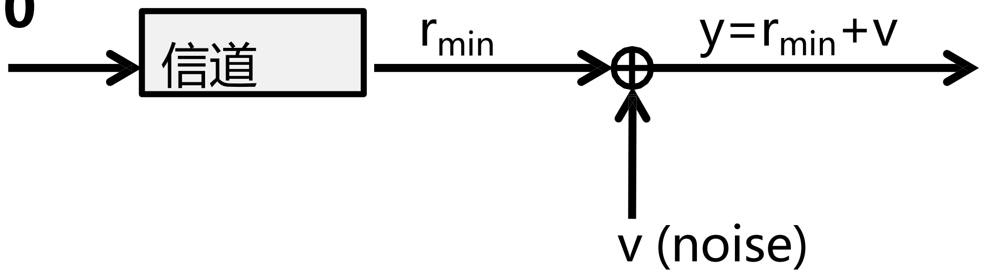


$$\boxed{\text{BER} = P_{e0} \cdot \text{P[IN=0]} + P_{e1} \cdot \text{P[IN=1]}}$$

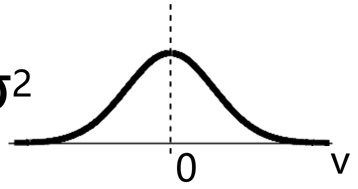
- P_{e0}和P_{e1}的值取决于
  - 发送电平(r_{min}, r_{max})
  - 噪声功率(σ^2)
  - 阈值（T)

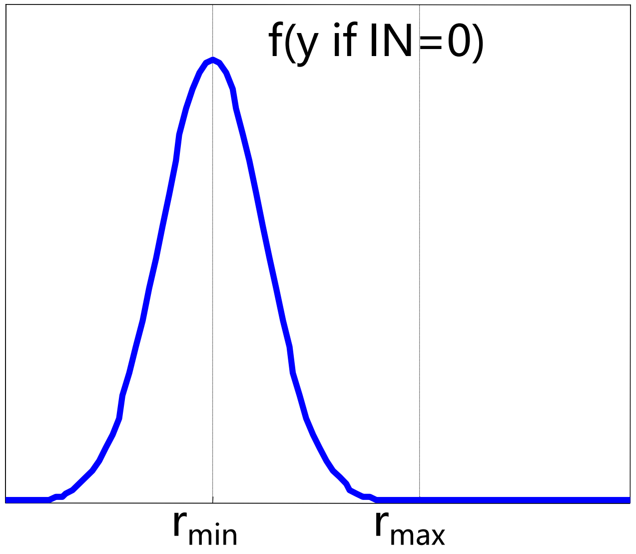
接收信号的概率密度函数+ 噪声

- **若 IN=0**



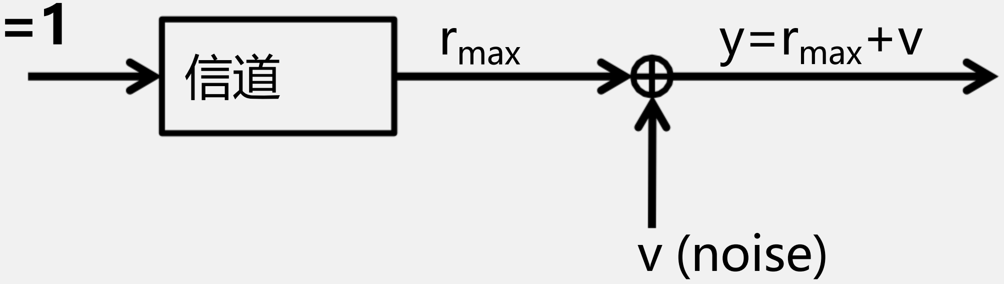
高斯分布，均值为0，方差为σ^2



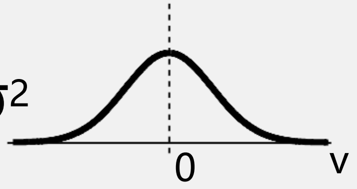


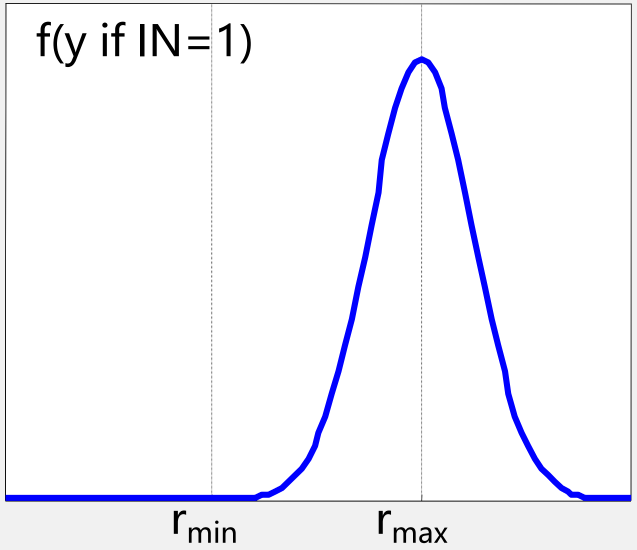
y 是高斯分布
- 均值 r_{min}
- 方差 σ^2

- **若 IN=1**



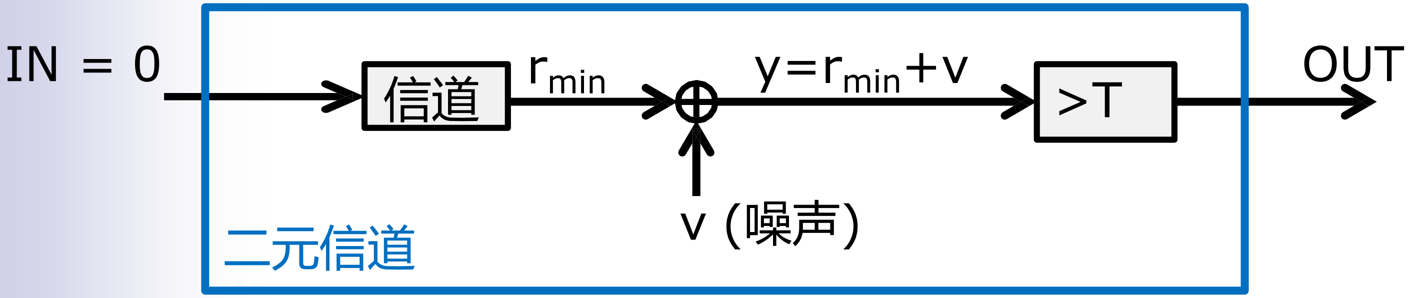
高斯分布，均值为0，方差为σ^2

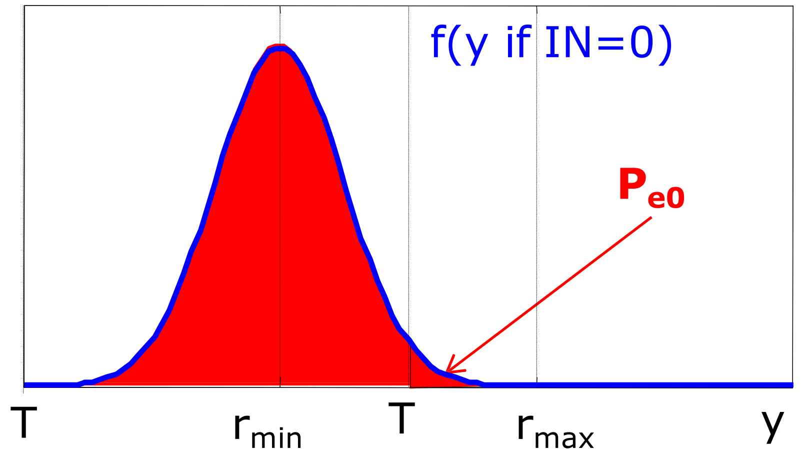




y 是高斯分布
- 均值 r_{max}
- 方差 σ^2

P_{e0}(IN=0时的误差概率)

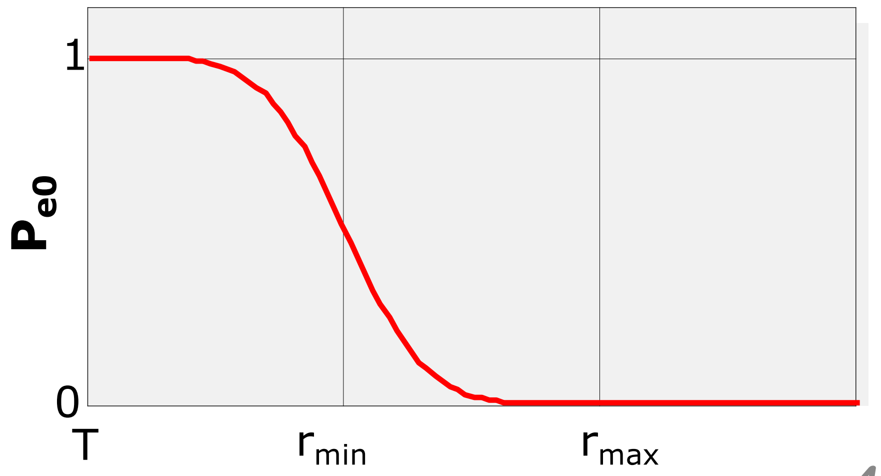




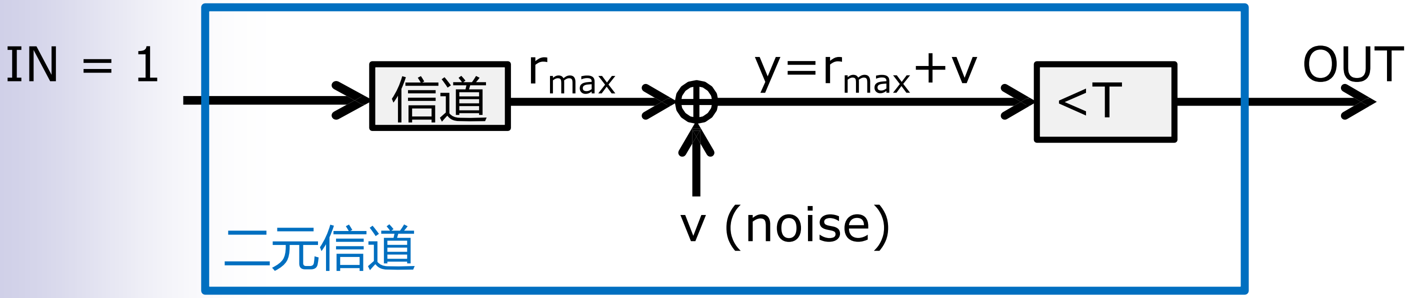
- 如果有一个错误
  - OUT = 1
  - 噪声把 y 推到T**之上**

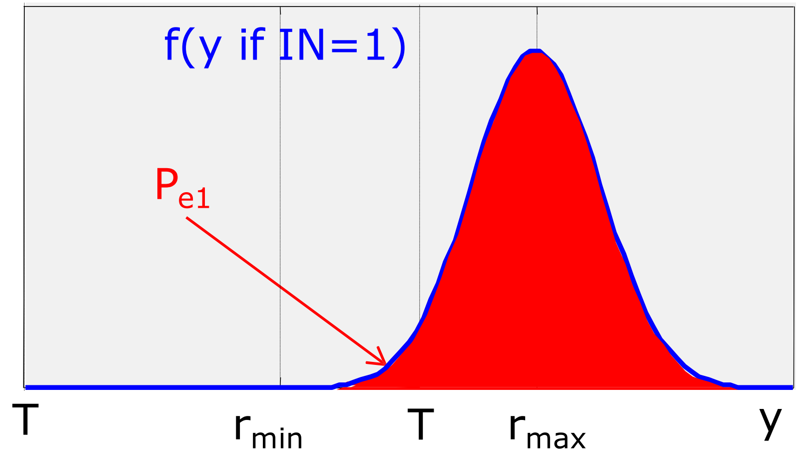
$$P_{e0} = P[y > T\ if\ IN = 0]$$

- 误差的概率随着T的增加而**减少**。



P_{e1} (IN=1时的误差概率)

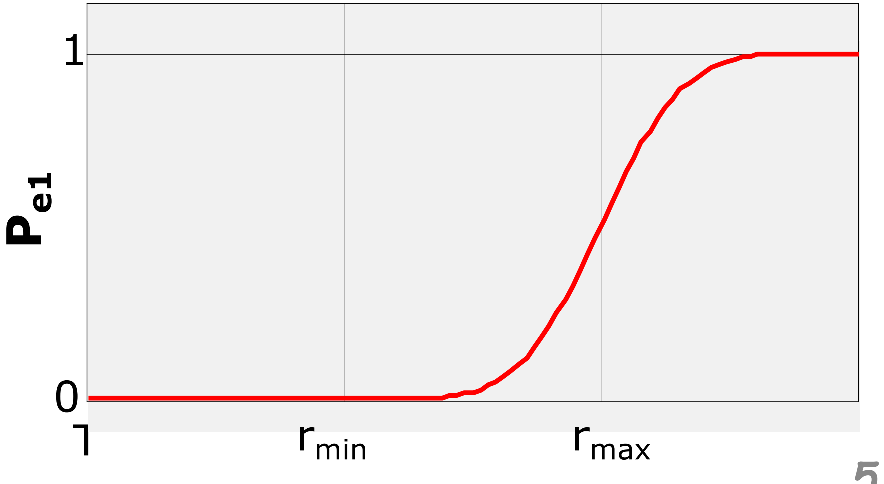




- 如果有一个错误
  - OUT = 0
  - 噪声把 y 推到T**之下**

$$P_{e1} = P[y < T\ if\ IN = 1]$$

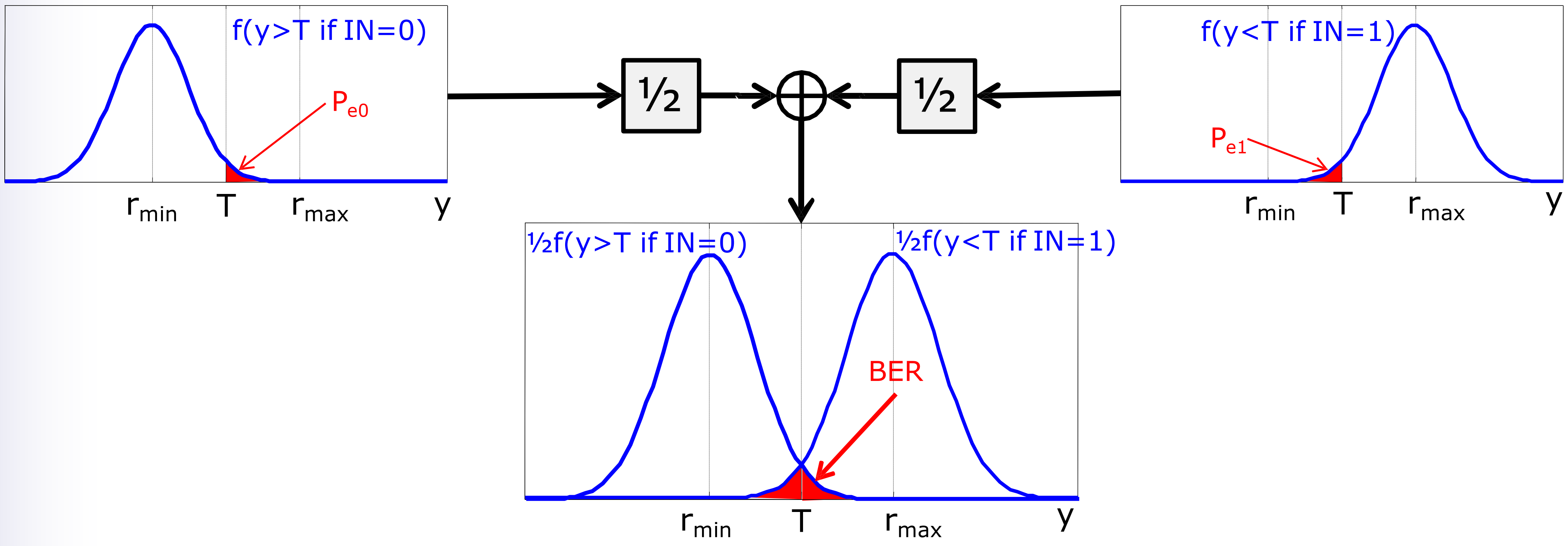
- 误差的概率随着T的增加而**增加。**



预测 BER

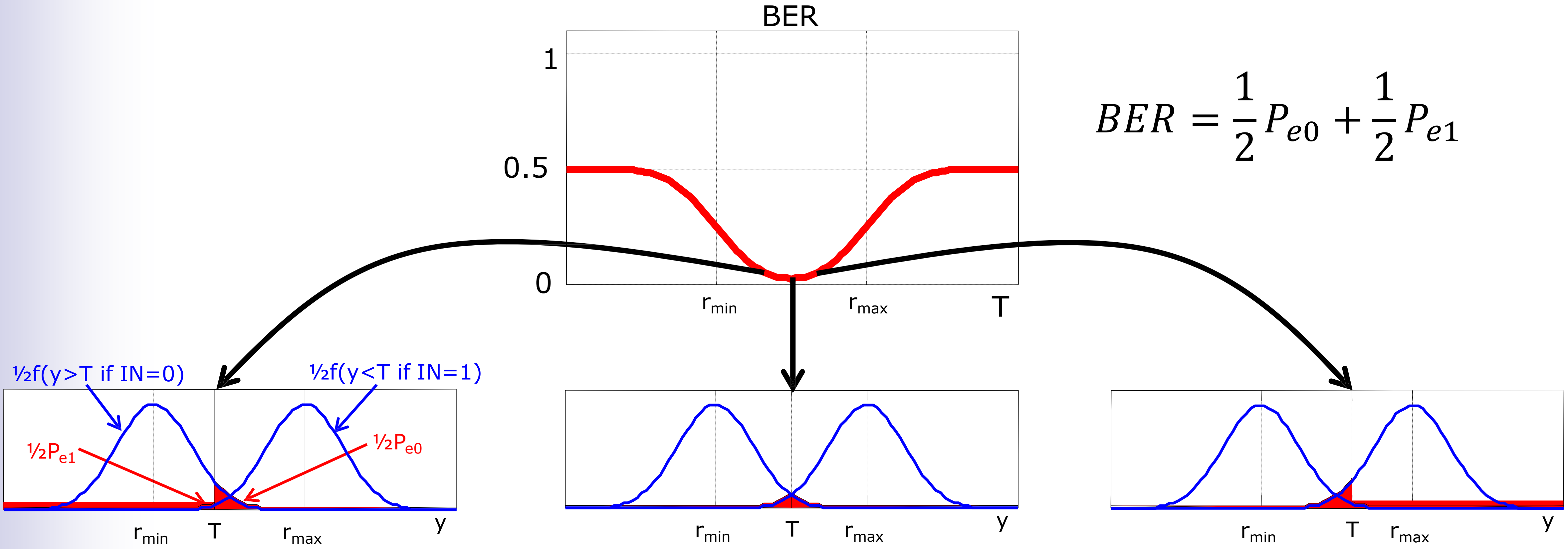
如果输入比特0和1等概分布，

$$BER = \frac{1}{2}P_{e0} + \frac{1}{2}P_{e1}$$



改变阈值

- 选择T就是在P_{e0}和P_{e1}之间的权衡。



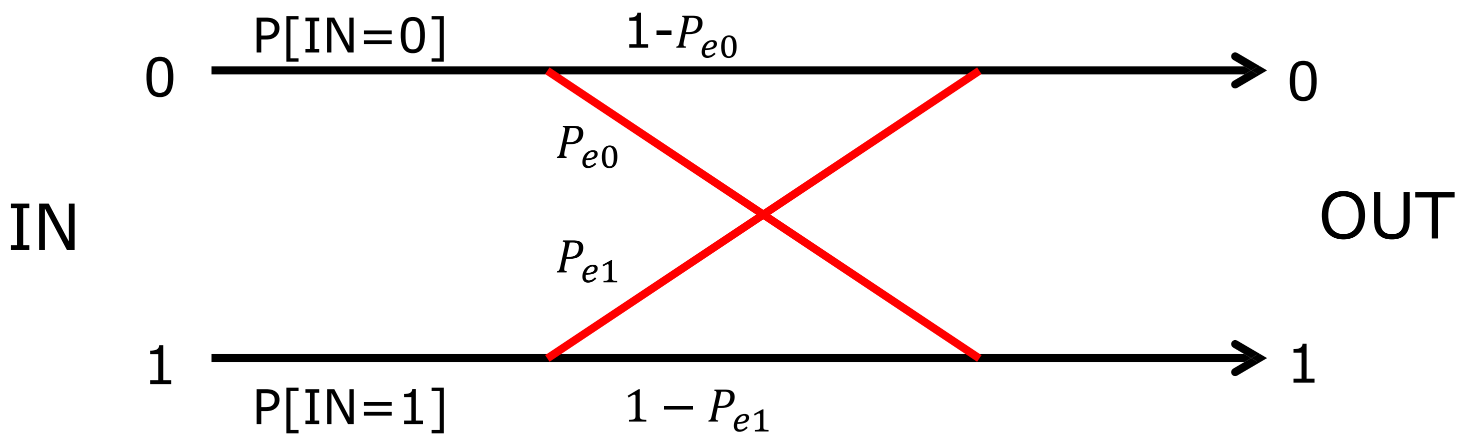
$$BER = \frac{1}{2}P_{e0} + \frac{1}{2}P_{e1}$$

若P[IN = 0] = P[IN = 1]，最佳阈值

$$T = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max})$$

信噪比的影响

二元信道模型



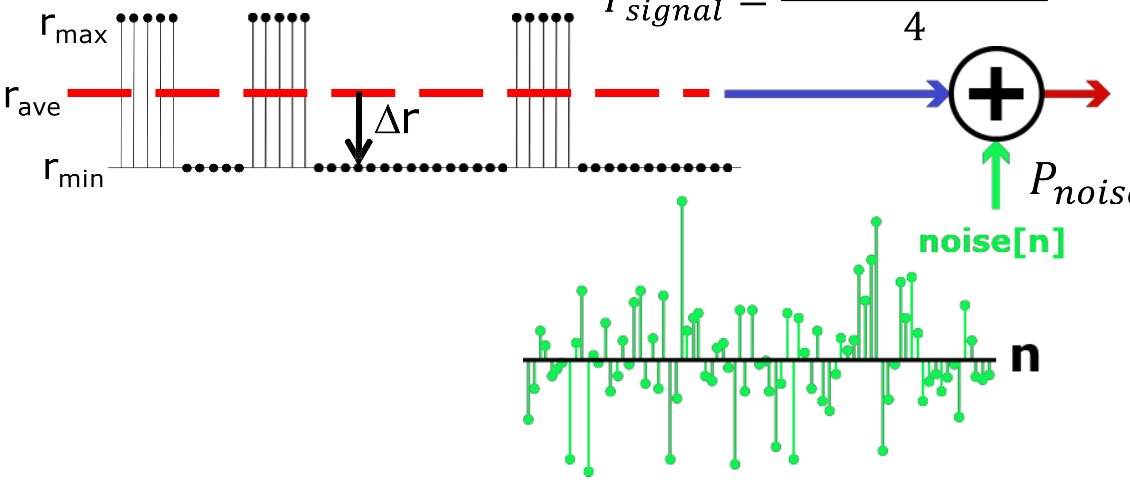
$$\boxed{\text{BER}= P_{e0}\cdot\text{P[IN=0]} + P_{e1}\cdot\text{P[IN=1]}}$$

- **这个表达式能够让我们理解下列因素的影响**
  - **发送电平(r_{min}, r_{max})**
  - **噪声功率(σ^2)**

信噪比

- 重要的不是绝对信号或噪声功率，而是信噪比(SNR)。

$$P_{signal} = \frac{(r_{max} - r_{min})^2}{4}$$



$$P_{noise} = \sigma^2$$

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \frac{(r_{max} - r_{min})^2}{4\sigma^2}$$

- 信噪比通常用分贝(dB)来衡量：

  0分贝的信号功率等于噪声功率

  10dB的信号功率是噪声功率的10倍

  20dB的信号功率是噪声功率的100倍

  30dB的信号功率是噪声功率的1000倍

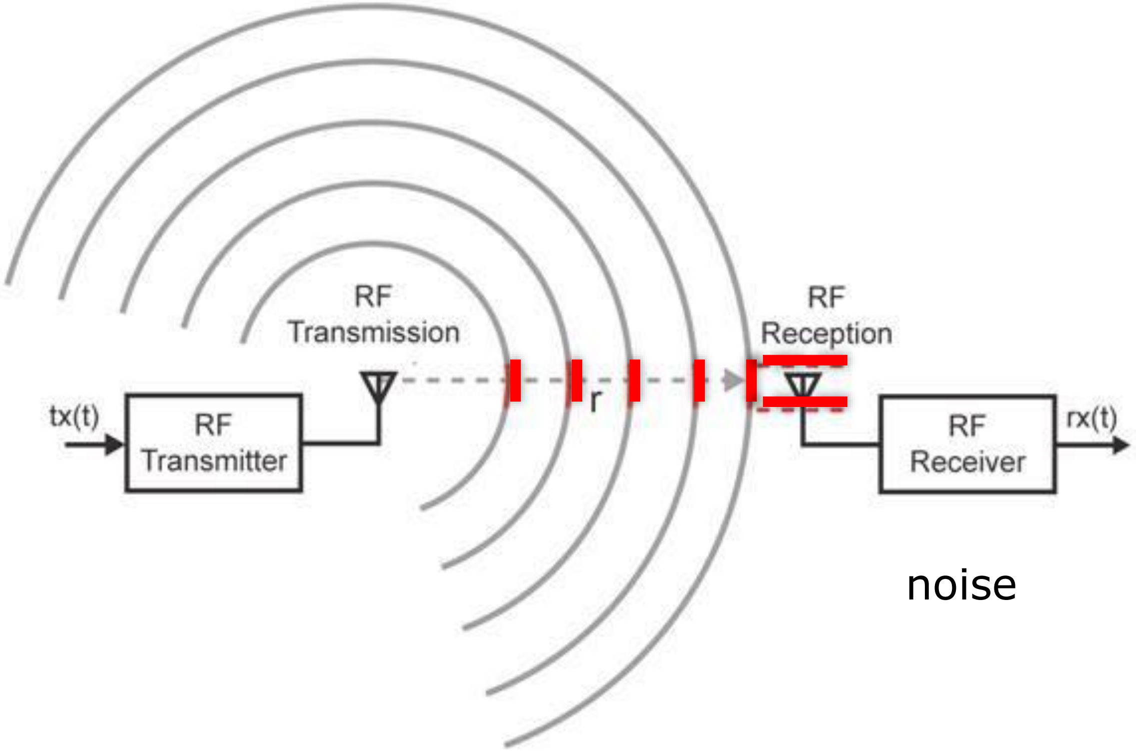
$$SNR(dB) = 10log_{10}\frac{P_{signal}}{P_{noise}}$$

手机的噪音水平

- 它确定了无线电和接收器能接收到的最小信号
- 手机输入的典型噪音功率是多少?
- 非常非常小，10^{-15}W
- 当你的接收信号下降到这个水平，你的手机将失去它的连接
- 确切的水平取决于
  - 电路和元件的质量
  - 符号（比特）率

影响SNR的因素

- 随着接收器移开，接收功率降低
- 接收信号功率的降低导致信噪比降低
- 一旦SNR降到10dB以下，接收器将停止工作，例如对于手机，这大约是10^{-14}W

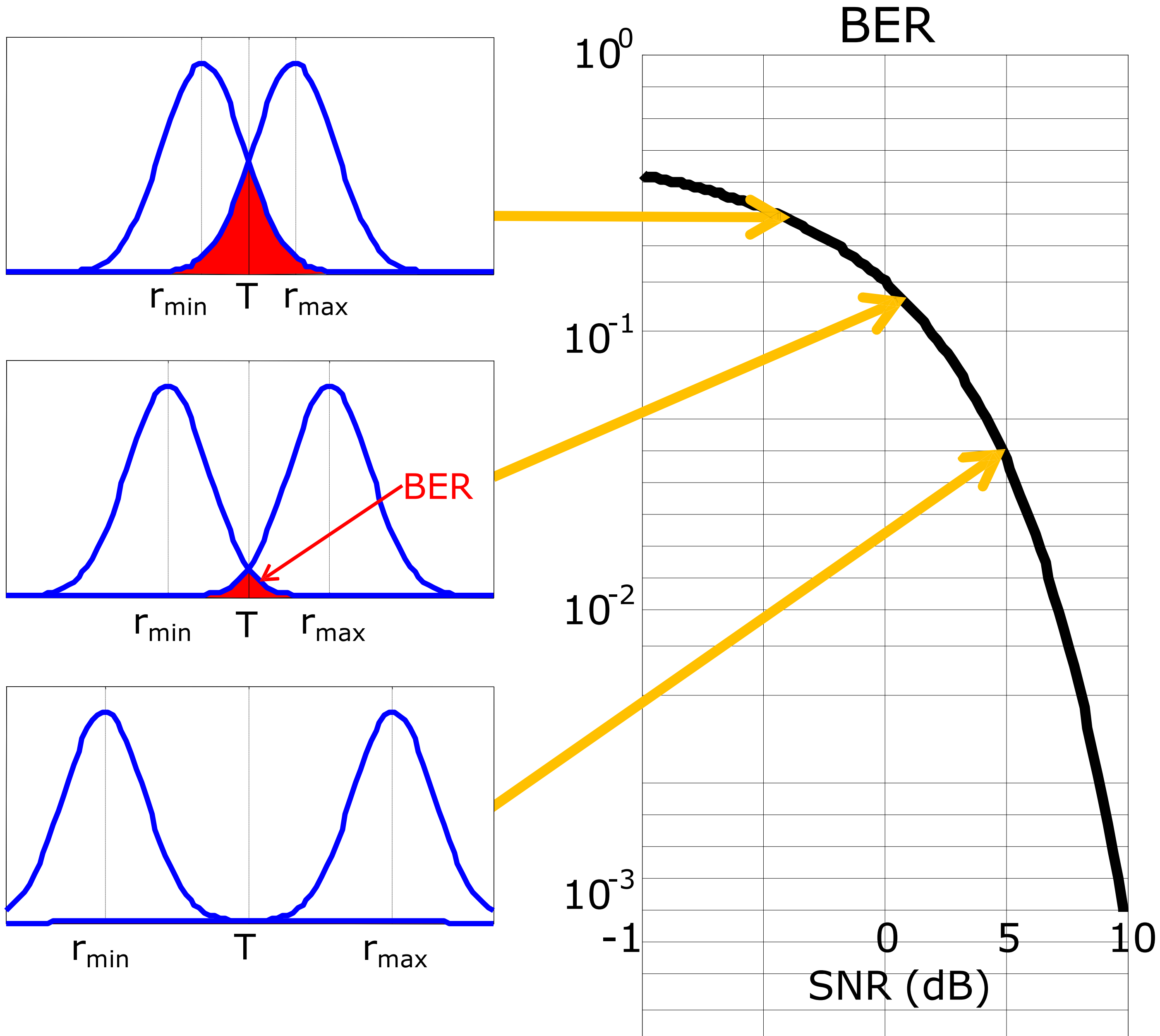


信号功率变化时的误码率

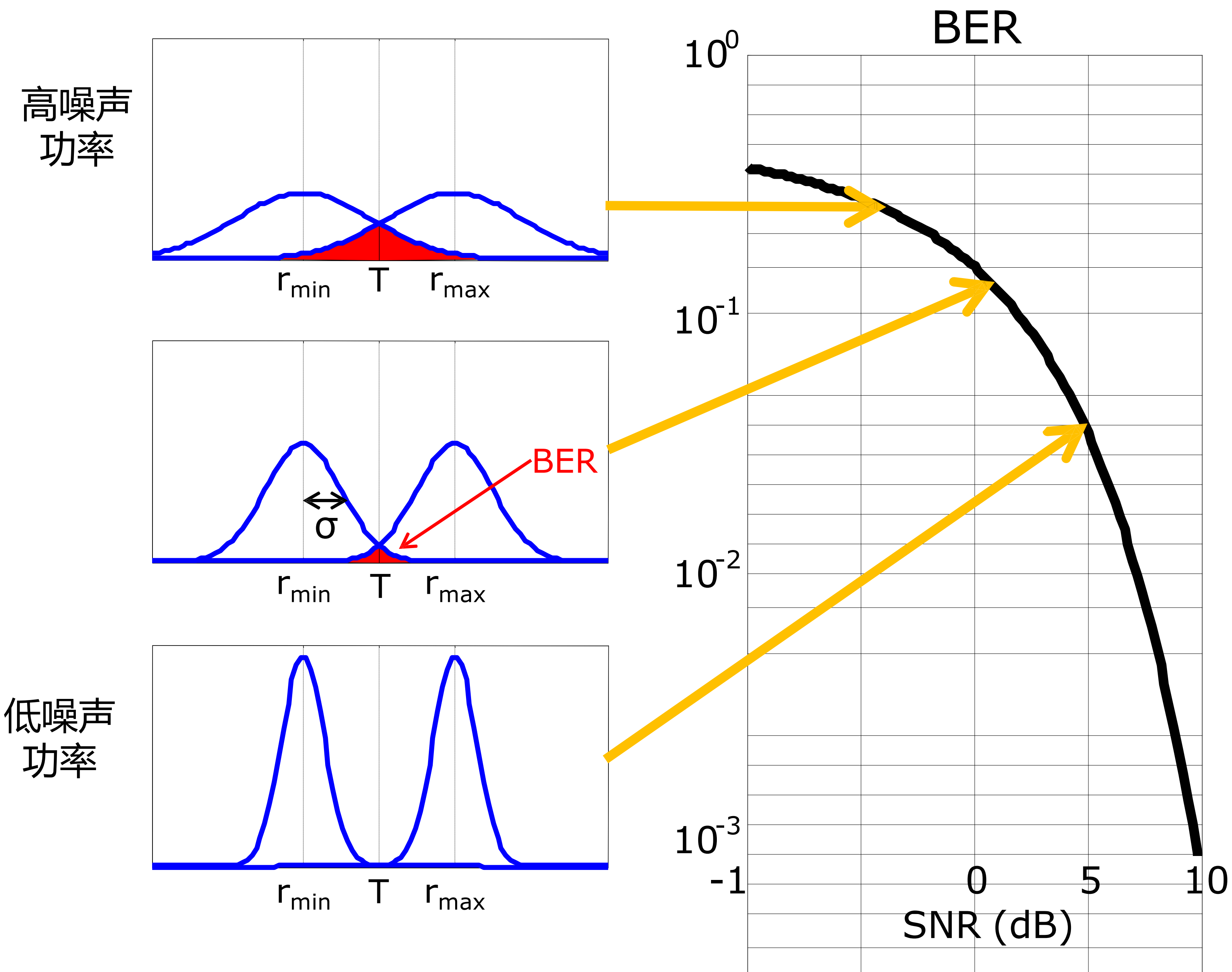
低信号功率

$$P_{signal} = \frac{(r_{max} - r_{min})^2}{4}$$

高信号功率



信号功率变化时的误码率



高斯噪声的误码率表达式

Q函数

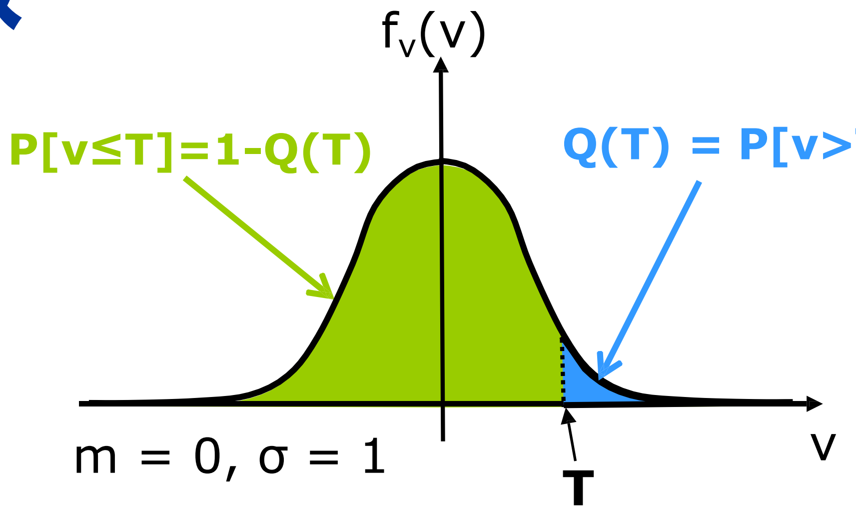
- 假设v为高斯分布且m = 0，σ = 1 。
- v大于特定值T的概率由Q函数给出

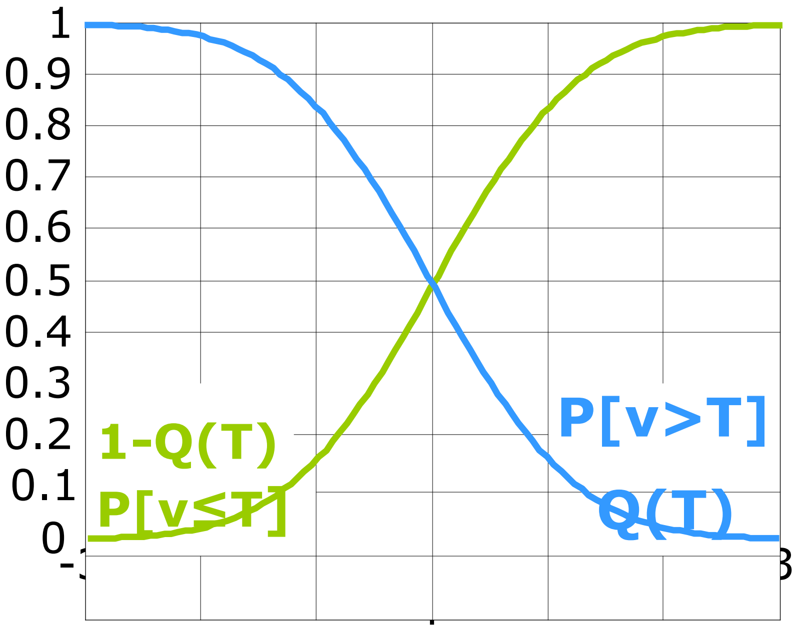
$$Q(T) = P[v > T]$$

- $Q(T)$没有封闭形式的表达式。其值必须以数字形式找到，例如
  - 从查找表中
  - MATLAB 函数 `qfunc(T)`
- 性质

$$P[v \leq T] = 1 - Q(T)$$

$$Q(0) = \frac{1}{2}$$

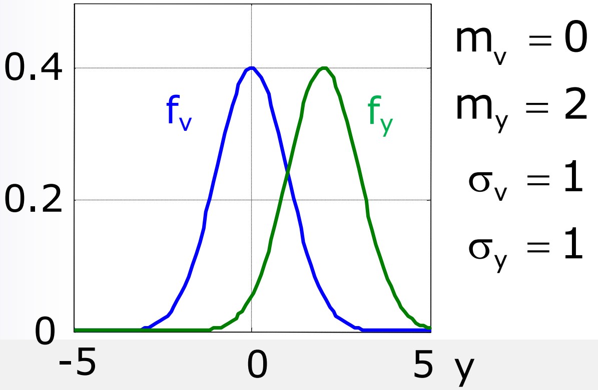


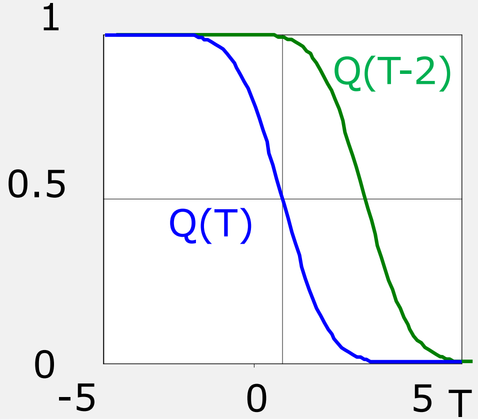


其他高斯函数的概率

- 如果y高斯分布，
  $m_y \neq 0$ 且 $\sigma_y = 1$

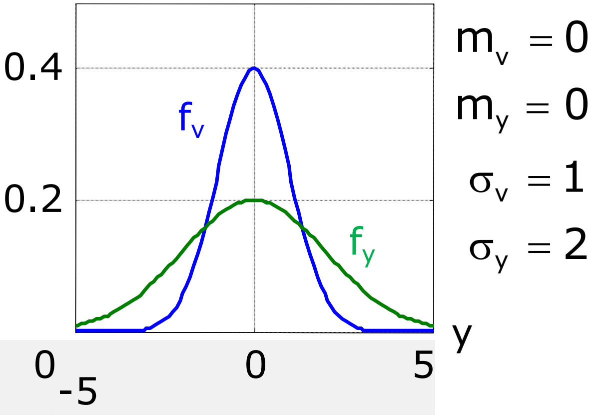
$$P[y > T] = Q(T - m_y)$$

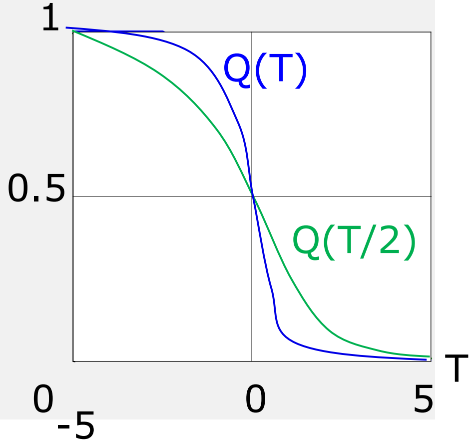




- 如果y高斯分布，
  $m_y = 0$ 且 $\sigma_y \neq 1$,

$$P[y > T] = Q\left(\frac{T}{\sigma}\right)$$





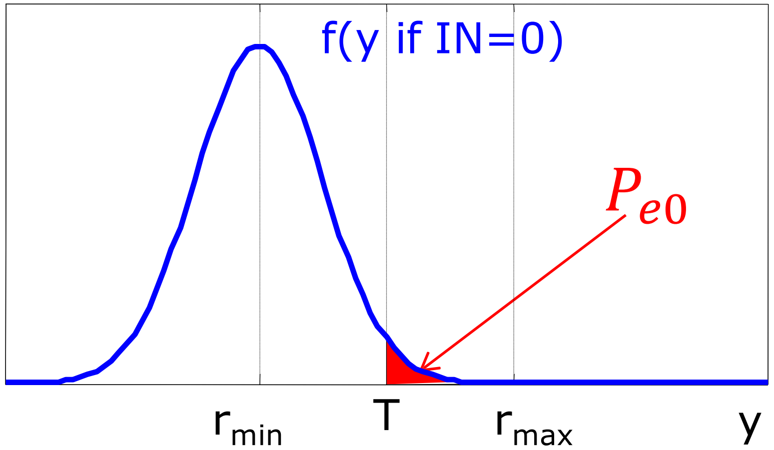
- 一般来说，
  若y是高斯分布，$m_y \neq 0$ 且 $\sigma_y \neq 1$,

$$P[y > T] = Q\left(\frac{T - m_y}{\sigma_y}\right)$$

P_{e0}和P_{e1}的表达式

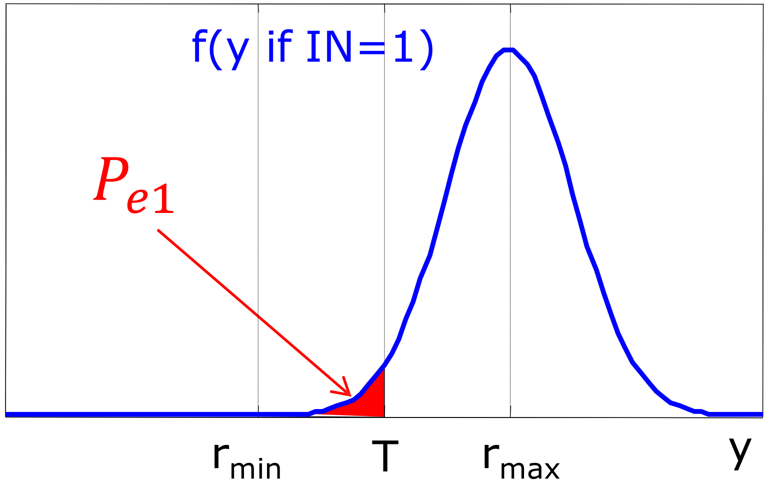
- **若 IN = 0, 有个错误**
  - **OUT = 1**
  - **噪声将y推到T之上**

$$P_{e0} = P[y > T\ if\ IN = 0] = Q\left(\frac{T - r_{min}}{\sigma}\right)$$



- **若IN = 1，有个错误**
  - **OUT = 0**
  - **噪声将y推到T之下**

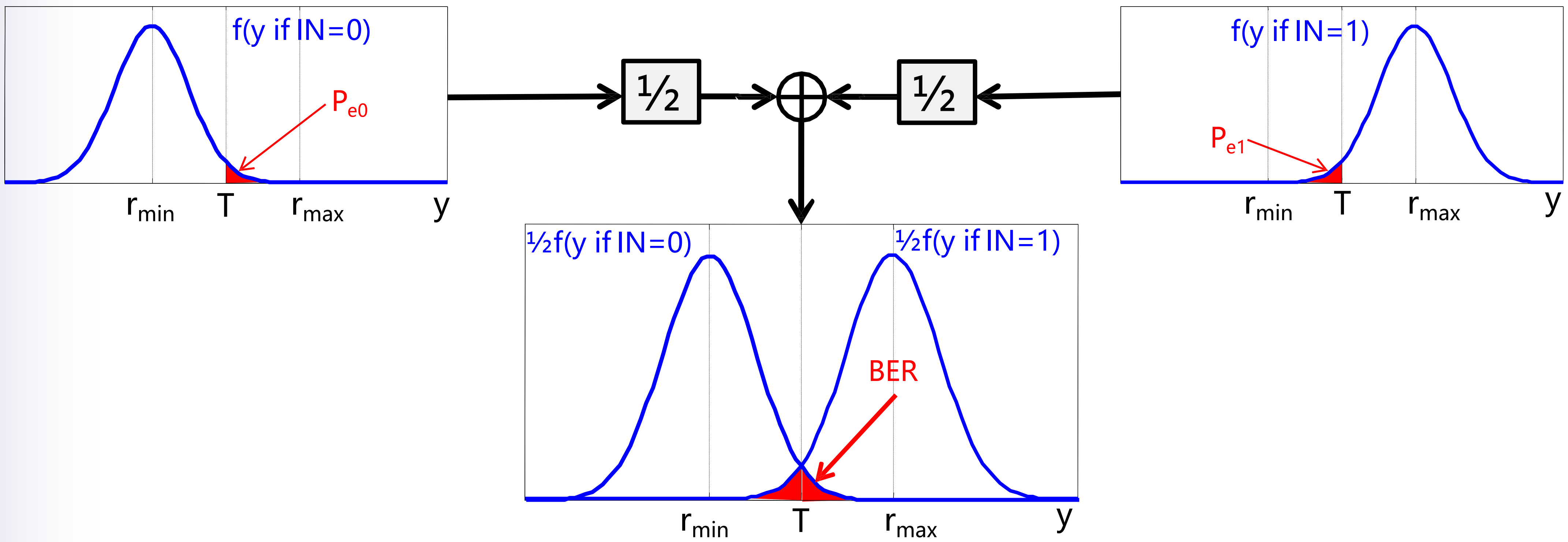
$$P_{e1} = P[y < T\ if\ IN = 1] = 1 - Q\left(\frac{T - r_{max}}{\sigma}\right)$$



预测误码率BER

如果比特0和1等概输入

$$BER = \frac{1}{2}P_{e0} + \frac{1}{2}P_{e1} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{T - r_{min}}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\left[1 - Q\left(\frac{T - r_{max}}{\sigma}\right)\right]$$



答题

微助教

习题

考虑具有二进制输入IN和二进制输出OUT的通信系统，其中

1.信道的输出

a. 若IN = 0，则r = 0.4 V

b. 若IN = 1，则r = 0.9 V

c. v是一个均值为零，方差σ^2 =0.04V^2的高斯随机变量

2. 将信道输出与阈值T=0.7进行比较，得到通信系统的二进制输出OUT。

3.二进制输入IN，是0或1的概率相等。

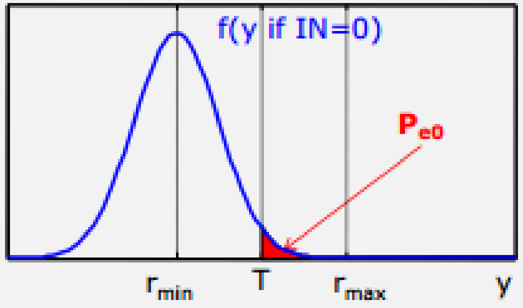
在上述假设下，如果IN = 0，则出现误码的概率是多少?

答案

- **If IN = 0, there is an error if**
  - **OUT = 1**
  - **The noise pushes y above T**

$$P_{e0} = P[y > T \text{ if IN} = 0]$$

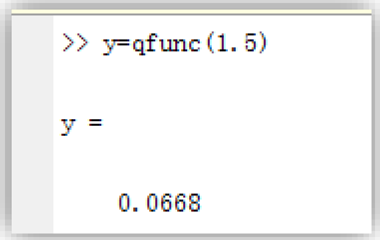
$$= Q\left(\frac{T - r_{min}}{\sigma}\right)$$



若IN=0,r=0.4V　=>　r_{min}=0.4

$$\mathrm{P}[error|IN = 0] = Q\left(\frac{T - r_{min}}{\sigma}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{0.7 - 0.4}{0.2}\right) = \mathrm{Q}(1.5) \approx 0.067$$

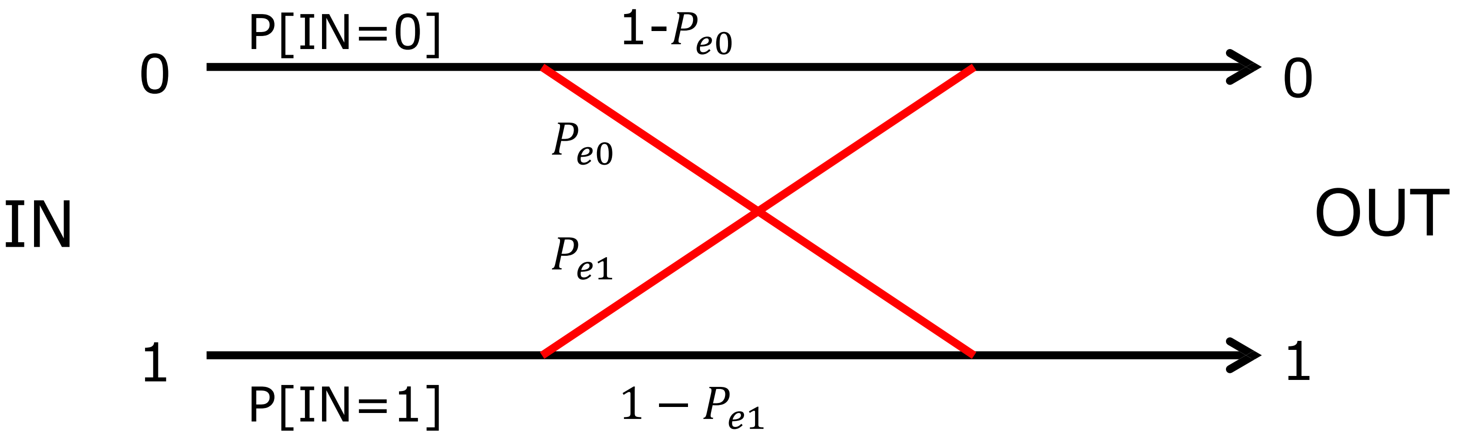
如何得到Q（1.5）

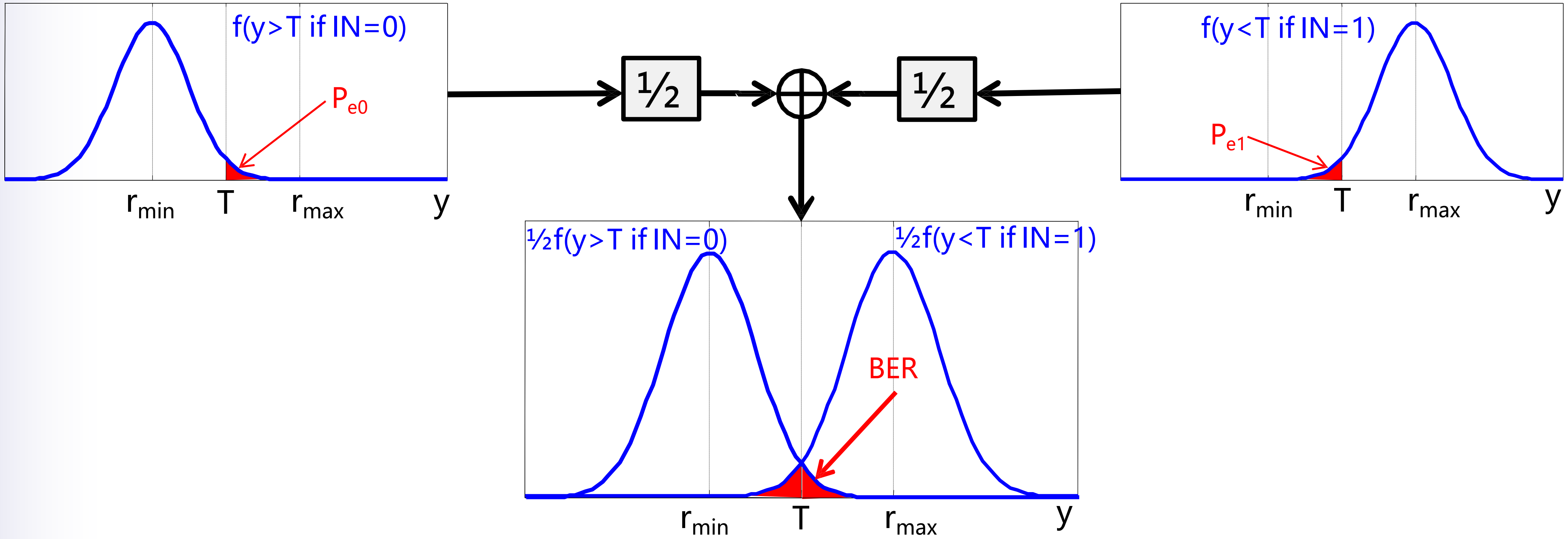


```
>> y=qfunc(1.5)

y =

    0.0668
```

总结

- 通信系统的重要性能指标
  - 误码率
- 二元信道模型
- 计算误码率BER





作业：比特误码自测习题

登录微助教

http://portal.teachermate.com.cn/

补充阅读

- Ref. Book: (F)　(P.413-414)
- Ref. Wiki: Binary symmetric channel
  http://en.wikipedia.org/wiki/Binary_symmetric_channel

- (F) Frenzel, Louis E, "Principles of electronic communication systems." McGraw-Hill, 2008

Thanks

Q & A

参考资料

A System View of Communications: From Signals to Packets (Part 1)

https://www.edx.org/course/a-system-view-of-communications-from-signals-to-pa