第4节　磁场的能量

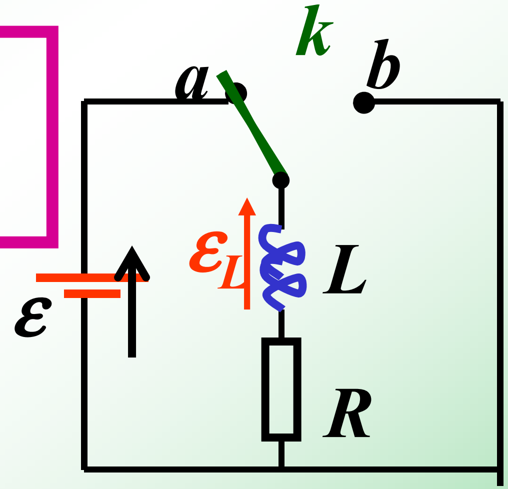
Energy of Magnetic Fields

一、*LR*电路中的能量转换

电路在建立稳定电流的过程中
电源力克服自感电动势 ε_L作功

能　量

储存在 *L*中



当电流以d*i*/d*t* >0变化时，电流变化d*i*，电源克服ε_L作功为đ*A*：

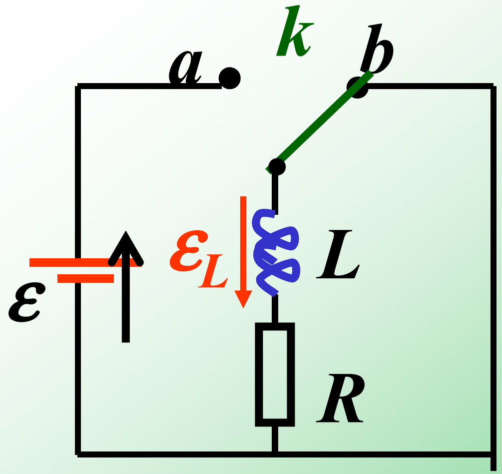
$$đA = -\varepsilon_L dq = -\varepsilon_L i dt$$

$$\because \varepsilon_L = -L\frac{di}{dt} \quad \therefore \quad đA = Lidi$$

$$A = \int đA = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{\text{储存}} W = \frac{1}{2}LI^2$$

$$A = W = \frac{1}{2}LI^2$$

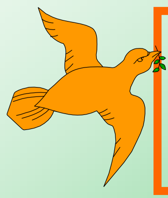
电流稳定后，去掉电源，电流i 从$I \to 0$，ε_L作功，释放存在线圈内的能量，把能量传给电阻，以热能形式散发：



$$Q = \int Ri^2 \mathrm{d}t = \int R(I^2 e^{-2\frac{R}{L}t})\mathrm{d}t$$

$$= RI^2 \int_0^{\infty} e^{-2\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}LI^2$$



$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L}$$

可见： $Q = A = W = \dfrac{1}{2}LI^2$

二、磁能与磁能密度

由上可知，通有电流 I 的自感线圈中储能：

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

类比电能存在电场中, 磁能也储存在磁场中;
那么, $W_m \rightarrow$ 磁场（B、H）, 如何联系？

以长直螺线管为例：

已知，长直螺线管的 n、l、S、I。

在例中我们已求得长直螺线管的自感：

$$L = \mu_0 n^2 lS$$

则其中存储的磁能为：

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 lS \cdot I^2 \quad \text{而 } B = \mu_0 nI$$

$$= \frac{B^2}{2\mu_0}lS = \frac{B^2}{2\mu_0}V \quad \text{其中 } V = lS$$

通有电流 I,体积为V的长直螺线管储存的

磁能为： $\boxed{W_m = \frac{B^2}{2\mu_0}V}$

又长直螺线管管内为均匀磁场!

$\therefore$ 单位体积储存的磁场能量为：

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$ ——**磁能密度**

其中 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ ——磁场强度

以上结论对任意形式的磁场都成立!

一般地，非均匀场：

$$W_m = \int w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V$$

三、磁能与自感系数

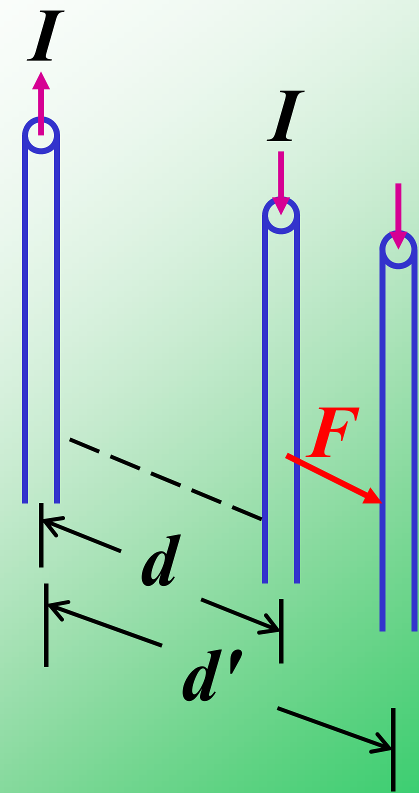
$$\vec{F}=\int_0^L I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

若已知 $L\rightarrow W_m=\frac{1}{2}LI^2$ **反之, 已知** $W_m\rightarrow L$ 。

例11. 两根平行输电线相距为d, 半径为a, 若维持 I 不变。（单位长度上的自感 $L=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}$ ）

求：（1）当$d\rightarrow d'$时，磁力作的功。

（2）磁能改变多少？增加？减少？说明能量来源？



解:（1）单位长度受力

$$F=IlB=I\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$A=\int_d^{d'}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_d^{d'}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

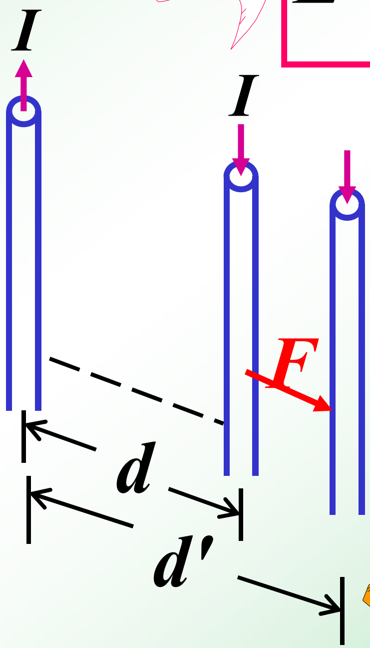
$$=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}>0$$

（2）磁能改变多少？

$$\Delta W = W_{d'} - W_d = \frac{1}{2}L'I^2 - \frac{1}{2}LI^2$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d} > 0$$

能量从何而来？



$$\boxed{L = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}}$$

$$\boxed{\Psi = Li}$$

导线移动时→自感电动势：

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -L\cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} - I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

为维持I不变，电源力必须克服ε_L作功：

$$A_{外} = -\int \varepsilon_L \mathrm{d}q = \int I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\cdot I\mathrm{d}t = \int_L^{L'} I^2 \mathrm{d}L = I^2(L' - L)$$

$$= I^2\left(\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d'}{a} - \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}\right) = \frac{\mu_0 I^2}{\pi}\ln\frac{d'}{d}$$

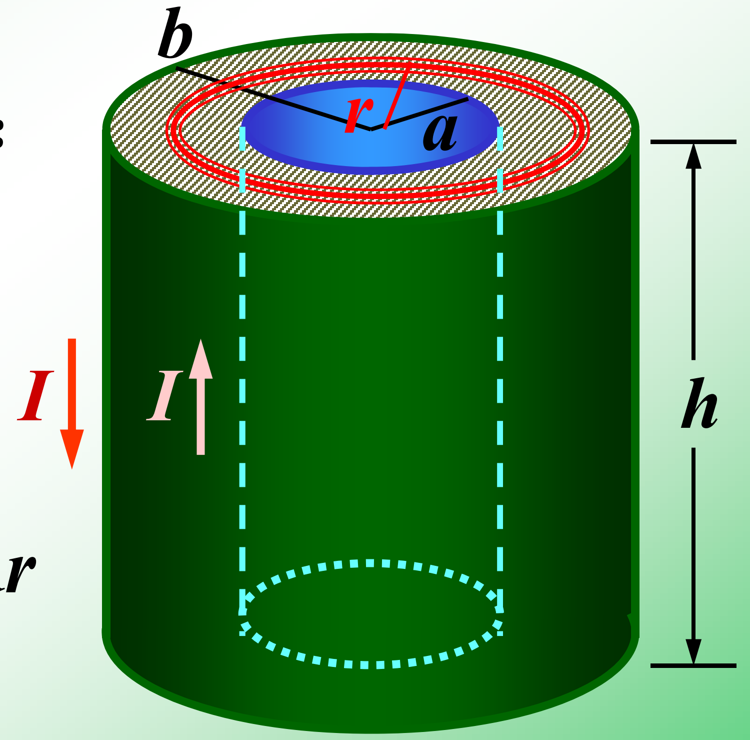
$$= A_{磁力} + \Delta W$$ **能量守恒**

例12. 一很长的同轴电缆,由半径为a、b的薄圆筒构成,其间充满介质μ,电流由内筒流出外筒流回。

求：长度为h 的电缆内磁场的能量W_m和L？

解：设电缆通有电流 I,

则两圆柱面间的磁场为：



$$B=\frac{\mu I}{2\pi r}$$

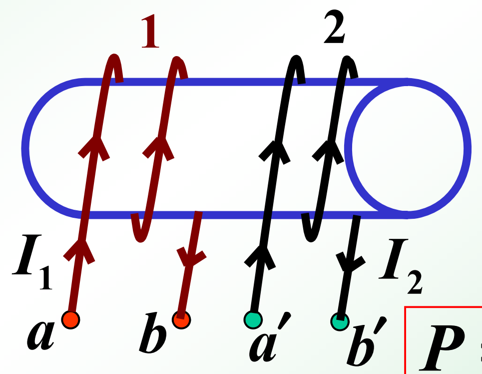
$$W_m=\int\frac{1}{2\mu}B^2\mathrm{d}V$$

$$=\int_a^b\frac{1}{2}\frac{\mu I^2}{(2\pi r)^2}h2\pi r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu I^2 h}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

由$W_m\rightarrow L=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{\mu h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

例：通过计算载流回路的磁场能量，证明两回路间的互感系数相等。



$\boxed{P=UI}$

证明：设线圈1、2开始时均是开路状态。

先接通线圈1的电源，使其电流由0增加到I_1。在此过程中，电源克服线圈1的自感电动势做功储存到磁场中的能量为：

$$W_1=\frac{1}{2}L_1I_1^2$$

再接通线圈2的电源，使其电流由0增加到I_2。

则线圈2中储存的磁场能量为：

$$W_2=\frac{1}{2}L_2I_2^2$$

在线圈2中的电流增大过程中，会在线圈1中产生互感电动势：

$$\varepsilon_{21}=-M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

调节线圈1的外接电源来克服此互感电动势做功，以使线圈1的电流保持为I_1不变。则由外接电源做功储存到磁场中的能量为：

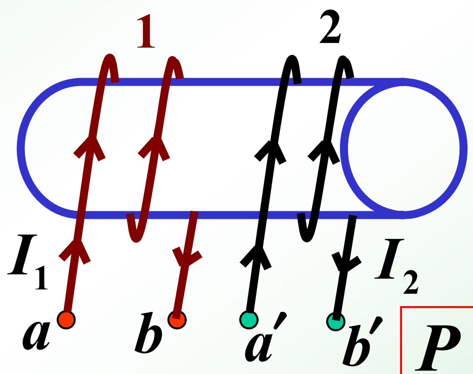
$$W_{21}=\int-\varepsilon_{21}I_1\mathrm{d}t=\int M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}I_1\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{I_2}M_{21}I_1\mathrm{d}i_2=M_{21}I_1I_2$$

系统的磁场中储存的总能量为：

$$\boxed{W_m=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+M_{21}I_1I_2}$$

例：通过计算载流回路的磁场能量，证明两回路间的互感系数相等。



$\boxed{P = UI}$

证明：

先接通线圈2的电源，使其电流由0增加到I_2。

再接通线圈1的电源，使其电流由0增加到I_1。

同理可得，系统的磁场中储存的总能量为：

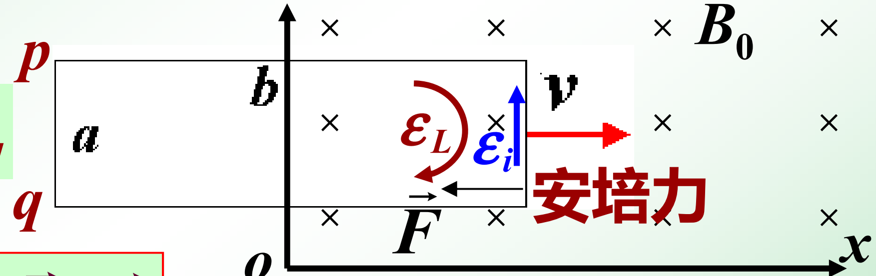
$$\left.\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{12}I_1I_2 \\ W_m &= \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{21}I_1I_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{M_{12} = M_{21}}$$

系统的磁场中储存的总能量为：

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{21}I_1I_2$$

例: 一矩形金属线框，边长为 a、b （b足够长），线框质量为 m 自感系数为 L ，电阻忽略，线框以初速度 v_0 沿 x 轴方向从磁场外进入磁感应强度大小为B_0 的均匀磁场中，求矩形线圈在磁场内的速 度与时间的关系式 $v=v(t)$ 和沿 x 轴方向移动的距离与时间的关系式 $x=x(t)$.

解：线圈的一部分进入磁场后，线圈内有动生电动势和自感电动势。



$$V_p=V_q$$

$$V_p+|\varepsilon_L|-|\varepsilon_i|=V_q$$

$$\therefore|\varepsilon_L|-|\varepsilon_i|=0$$

$$\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

$$\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_i=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=B_0av$$

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-B_0av=0 & (1) \\ B_0aI=-m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & (2) \end{cases}$$

由（2）有：

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{B_0a}{m}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \quad (3)$$

联立（1）、（3）

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2v=0$$

$$\boxed{\omega^2=\frac{B_0^2a^2}{mL}}$$

$$v=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$$

$$v = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

$$B_0 a I = -m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad (2)$$

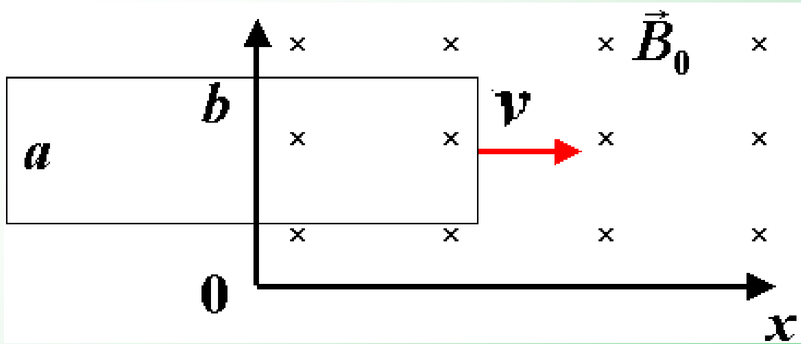
当$t = 0$ 时，$v = v_0 \Rightarrow C_2 = v_0$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t = -\frac{B_0 a I}{m}$$

当 $t = 0$时， $I = 0$

$$C_1 \omega \cos 0 = 0$$

$$\therefore C_1 = 0$$



$$\begin{cases} v = v_0 \cos \omega t \\ x = \dfrac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

讨论$R = 0$这一近似的合理性。

$$v = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

另解:

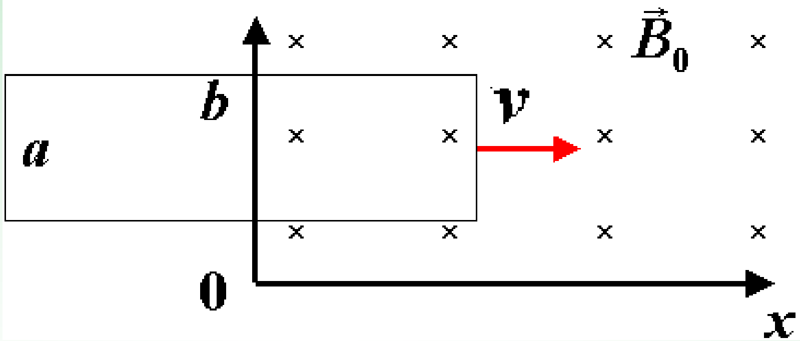
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}LI^2$$

$$\therefore\ mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=0$$

将 $L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-B_0av=0$ (1)代入上式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+B_0aI=0\quad(2)$$

以下同解法一.



解法一:

$$\begin{cases} L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-B_0av=0 & (1) \\ m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-B_0aI & (2) \end{cases}$$