华中科技大学2020～2021学年第一学期

“ 复变函数与积分变换 ”考试试卷(A卷)

考试方式：<u>闭 卷</u>　考试日期：<u>2020-12-3</u>　考试时长：<u>150</u>分钟

院（系）：________________　专业班级：________________

学　　号：________________　姓　　名：________________

一、单项选择题 (**每题2分，共24分**).

1. 复数$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3$的值为 (　　).

A.$8\mathrm{i}$，　　B．-8，　　C．$-8\mathrm{i}$，　　D．8．

2. e^{-3-4i} 的主辐角为 (　　).

A . $\arctan\dfrac{4}{3}-\pi$，　　B . $-4+\pi$，　　C . $\arctan\dfrac{3}{4}-\pi$，　　D．$-4+2\pi$.

3. 下列说法不正确的是 (　　).

A．指数函数 e^z 是周期函数,　　B. 幂函数 z^α 一定是多值函数,

C．正弦函数 $\sin z$ 是无界函数,　　D. $\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z=\mathrm{Ln}z^2$.

4. 函数$f(z)=2xy+(y^2-x^2)i$在$z=1$处的导数值为(　　).

A.-2，　　B. $2i$，　　C.$-2i$，　　D. 2 .

5. 积分$\oint_{|z|=1}(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{z}{\sin z})\mathrm{d}z$ 的值为(　　).

A.0，　　B.$2\pi i$，　　C.$4\pi\mathrm{i}$，　　D.$6\pi i$.

6. 若有向曲线C为从$-i$到i的右半单位圆周，则积分$\int_C 3z^2\mathrm{d}z$ 的值为(　　).

A． 0，　　B． **2**，　　C． $-2i$，　　D．$2i$．

7. 若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-i)^n$在点$z=1$发散，则该级数一定发散的点为 (　).

A．$-i$，　　B.0，　　C．i，　　D．$2i$.

8. 函数$\dfrac{z}{\sin(z/2-\pi/8)}$在点$z=-\pi$展开成 Taylor 级数的收敛半径为(　　).

A．$\dfrac{\pi}{4}$ ，　　B．$\dfrac{\pi}{2}$，　　C．$\dfrac{3\pi}{4}$，　　D．$\dfrac{5\pi}{4}$.

9. 下列函数中，∞为可去奇点的是（　　）.

A．$\dfrac{1}{e^{z}-1}$，　　B．$z\sin\dfrac{1}{z}$，　　C．$\dfrac{1}{z}\sin z$，　　D．$ze^{\frac{1}{z}}$.

10. 下列哪个函数是区域$|z|<4$上的共形映射？　(　　)

A．$w=z^{2}$，　　B．$w=\ln z$，　　C．$w=e^{z}$，　　D．$w=\dfrac{1}{z}$.

11. 设$F(\omega)=2\pi\delta(\omega-1)\sin\omega$，则$F(\omega)$的 Fourier 逆变换为(　　).

A．$2\pi\sin 1$，　　B．$\sin 1$，　　C．$2\pi\ e^{jt}\sin 1$，　　D．$e^{jt}\sin 1$.

12. 连续函数$h(t-t_0)$与单位冲激函数$\delta(t-t_1)$的卷积$h(t-t_0)*\delta(t-t_1)$为(　　).

A．$h(t-t_0-t_1)$，　　B．$h(t-t_0+t_1)$，　　C．$h(t+t_0-t_1)$，　　D．$h(t+t_0+t_1)$.

二、(*12 分*) 已知$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为复平面上的解析函数，且满足

$u(x,y)+v(x,y)=y^{2}+2xy-x^{2}+2(x-y)$，求函数$f(z)$.

三、(*12 分*) 把函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$在点$z_0=4$处展开为 Laurent 级数.

四、计算下列积分(**每题 5 分，共 10 分**).

1. $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1+z-e^{z}}{z^{10}}\mathrm{d}z$　　　　2. $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos z}{\sin^{3} z}\mathrm{d}z$

五、计算下列积分(**每题 5 分，共 10 分**).

1. $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z}{1-z^{2}}\cos\frac{1}{z}\mathrm{d}z$　　　　2. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}\mathrm{d}\theta$

六、(6 分) 求区域$D=\{z:|z|>2,\operatorname{Im}z>0\}$在映射 $w=i\left(\dfrac{z-2}{z+2}\right)^2$ 下的像。**（答题过程需用图形表示）**

七、(10 分) 求一共形映射$w=f(z)$，将 **z** 平面上的区域$D=\{z:|z-i|>1,|z-4i|>2\}$映射到 **w** 平面的上半平面。**（答题过程需用图形表示）**

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$$f^{(4)}(t)-f(t)=1\text{，且 } f(0)=0,\ f'(0)=0,\quad f''(0)=1,\ f'''(0)=2.$$

九、(6 分) 若函数$f(z)$在$|z|<2$内解析且只有一个零点$z=0$，$f'(z)\neq 0$，证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2f'(z)}\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=1.$$