第二章 解析函数

§ 2.1 解析函数的概念

一、导数与微分

二、解析函数

三、柯西-黎曼方程

一、导数与微分

1. 复变函数的导数

定义 设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 点的某邻域内有定义，$z_0 + \Delta z$ 是 z_0 的邻域内的任意一点，$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$，如果

P25 定义 2.1

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在有限的极限值 A，则称 $f(z)$ 在 z_0 处可导，且称 A 为 $f(z)$ 在 z_0 处的导数，记作 $f'(z_0)$.

- 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点都可导，则称 $f(z)$ 在 D 内可导，此时即得 $f(z)$ 的导(函)数 $f'(z)$.

一、导数与微分

2. 复变函数的微分

定义 设函数 $w=f(z)$ 在 z 点的某邻域内有定义，$z+\Delta z$ 是 z 的邻域内的任意一点，如果存在 A，使得

P 25
补充

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)=A\Delta z+o(|\Delta z|),$$

则称 $f(z)$ 在 z 处可微，$A\Delta z$ 为微分，记作 $\mathrm{d}w=A\Delta z$.

- 特别地，有 $\mathrm{d}z=\Delta z$. 由此可得：

$$\boxed{\mathrm{d}w=A\mathrm{d}z.}$$

- 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微，则称 $f(z)$ 在 D 内可微。

一、导数与微分

结论 (1) 函数 $w=f(z)$ 可导的充要条件是 $f(z)$ 可微；且有

$$\mathrm{d}w=f'(z)\mathrm{d}z \quad \text{即} \quad f'(z)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$$

(2) 函数可导必连续，但连续不一定可导。

证明 (略)

注意 导数与微分是两个不同的概念，它们有着本质的区别，事实上，导数反映变化率，而微分则体现逼近。

例 求下列函数的的导数。

$$(1)\ f(z)=z^2; \qquad (2)\ f(z)=\frac{1}{z}.$$

解 (1) 由 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z,$$

得 $f'(z)=(z^2)'=2z$.

- 同理可得 $(z^n)'=nz^{n-1}$, (n 为正整数);

$(C)'=0$, (C 为复常数)。

例 求下列函数的的导数。

$$(1)\ f(z)=z^2; \qquad (2)\ f(z)=\frac{1}{z}.$$

解 (2) 由 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{z+\Delta z}-\dfrac{1}{z}}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{z(z+\Delta z)}=-\frac{1}{z^2}.$$

得 $f'(z)=(\dfrac{1}{z})'=-\dfrac{1}{z^2}.$

一、导数与微分

3. 求导法则 P 26

(1) 四则运算法则

$$[f(z)\pm g(z)]' = f'(z)\pm g'(z);$$

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}, \quad (g(z)\neq 0).$$

一、导数与微分

3. 求导法则 26

(2) 复合函数的求导法则

$$[f(g(z))]' = f'(g(z))g'(z).$$

(3) 反函数的求导法则

$$\varphi'(w) = \left.\frac{1}{f'(z)}\right|_{z=\varphi(w)} = \frac{1}{f'[\varphi(w)]}.$$

其中， $z = \varphi(w)$ 与 $w = f(z)$ 是两个互为反函数的单值函数，且 $f'(z) \neq 0$.

二、解析函数

P26 定义 2.2

定义 (1) 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点以及 z_0 点的邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析；

(2) 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点解析，则称 $f(z)$ 在区域 D 内解析，或者称 $f(z)$ 是 D 内的解析函数。

关系 (1) 点可导 $\not\rightleftarrows$ 点解析；

(2) 区域可导 $\rightleftarrows$ 区域解析。

(3) 闭区域可导 $\not\rightleftarrows$ 闭区域解析。

奇点 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点。

（解析函数的由来）

二、解析函数

性质 (1) 如果两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 都在区域 D 内解析，则它们的和、差、积、商(除去分母为零的点)也在区域 D 内解析。

(2) 如果函数 $w=f(\xi)$ 在 ξ 平面上的区域 G 内解析，函数 $\xi=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，且对区域 D 内的每一点 z，函数 $g(z)$ 的值都属于 G，则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内解析。

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z+3}{4z^2-1}$ 的解析区域及在该区域上的导数。

解 (1) 设 $P(z)=z+3$，$Q(z)=4z^2-1$，

由解析函数的性质，有

当 $Q(z)\neq 0$ 时，函数 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 解析，

又由于方程 $Q(z)=4z^2-1=0$ 的根是 $z=\pm\dfrac{1}{2}$，

因此在复平面上除去点 $z=\pm\dfrac{1}{2}$ 的区域内，$f(z)$ 解析。

(2) $f'(z)=\dfrac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{[Q(z)]^2}=\dfrac{4z^2-1-8z(z+3)}{(4z^2-1)^2}$.

例 讨论函数 $w=f(z)=|z|^2$ 的解析性。

解 由于 $w=f(z)=|z|^2=\bar{z}z$，因此有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})-z\bar{z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\bar{z}+z\boxed{\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}}+\overline{\Delta z}\right).$$

极限不存在

（见 §1.5）

当 $z\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 不存在；

当 $z=0$ 时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=0$，即 $f'(0)=0$.

注意：

$f(z)=x^2+y^2$

因此，$w=f(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 点可导，处处不解析。

例 讨论函数 $w=f(z)=x+i2y$ 的解析性。

解 $$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(x+\Delta x)+i2(y+\Delta y)-(x+i2y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x+i2\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

$$\begin{cases}\text{当 } \Delta x=0,\ \Delta y\to 0 \text{ 时,} & \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=2,\\[2ex] \text{当 } \Delta y=0,\ \Delta x\to 0 \text{ 时,} & \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=1,\end{cases}$$

因此， $w=f(z)=x+i2y$ 处处不可导，处处不解析。

问题 对函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，如何判别其解析性?

三、柯西-黎曼方程

1. 点可导的充要条件

P27 定理 2.1

定理 函数 $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 在点 $z = x + i\,y$ 处可导的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，且满足柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

（简称 $C-R$ 方程）

温习 实二元函数 $u(x,y)$ 可微的概念：

$$\Delta u = A\,\Delta x + B\,\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \boxed{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})}.$$

$\boxed{o(|\Delta z|)}$

三、柯西–黎曼方程

1. 点可导的充要条件

证明 必要性 “$\Rightarrow$” 若 $w = f(z) = u + iv$ 在 $z = x + iy$ 处可导，

则必可微，即 $\triangle w = f'(z)\triangle z + o(\triangle z)$

记 $f'(z) = a + ib$，由 $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$，$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$，

可得 $\Delta u + i\Delta v = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|)$，

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(|\Delta z|), \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(|\Delta z|), \end{cases}$$

故 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微，且

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -b = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

三、柯西–黎曼方程

1. 点可导的充要条件

证明 充分性 "$\Leftarrow$" 若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,

$$\text{则}\ \begin{cases} \Delta u = u'_x\,\Delta x + u'_y\,\Delta y + o(|\Delta z|), \\ \Delta v = v'_y\,\Delta y + v'_x\,\Delta x + o(|\Delta z|), \end{cases}$$

又由 u 和 v 满足 $C-R$ 方程: $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$,

$$\text{可得}\ \begin{cases} \Delta u = u'_x\,\Delta x - v'_x\,\Delta y + o(|\Delta z|), \\ \Delta v = u'_x\,\Delta y + v'_x\,\Delta x + o(|\Delta z|), \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \Delta w = \Delta u + i\,\Delta v = (u'_x + i\,v_x)\,\boxed{\Delta z} + o(|\Delta z|),$$

$$\boxed{\Delta x + i\,\Delta y}$$

即 $f(z)$ 在 $z = x + i\,y$ 处可微(可导),且 $f'(z) = u'_x + i\,v'_x$.

三、柯西–黎曼方程

1. 点可导的充要条件

求导公式　若函数 $f(z)=u+iv$ 在 $z=x+iy$ 处可导，

P 28

则 $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(关于 $C-R$ 条件)

三、柯西–黎曼方程

2. 区域解析的充要条件

定理 函数 $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在区域 D 内可微，且满足 $C-R$ 方程。

P29 定理 2.2

推论 若函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的四个偏导数 u'_x, u'_y, v'_x, v'_y 在区域 D 内存在且连续，并满足 $C-R$ 方程，则函数 $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析。

P29 推论

例 讨论函数 $w=\bar{z}$ 的可导性与解析性。

解 由 $w=\bar{z}=x-iy$，有 $u=x,\ v=-y$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-1,$$

可知<u>不满足 $C-R$ 方程</u>，

解析的定义是什么?

所以 $w=\bar{z}$ 在复平面内处处不可导，<u>处处不解析</u>。

解析的定义是在一点处和在一点的邻域处可导.
或是在区域内处处可导

例 讨论函数 $w=\bar{z}z^2$ 的可导性与解析性。

解 由 $w=\bar{z}z^2=|z|^2 z=(x^3+xy^2)+i(x^2y+y^3)$,

有 $u=x^3+xy^2,\ v=x^2y+y^3$,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\\&\frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2,\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{由}\ \underline{C-R\text{方程}},\\&\Rightarrow\ x=y=0,\end{aligned}$$

所以 $w=\bar{z}z^2$ 仅在 $(0,0)$ 点可导，处处不解析。

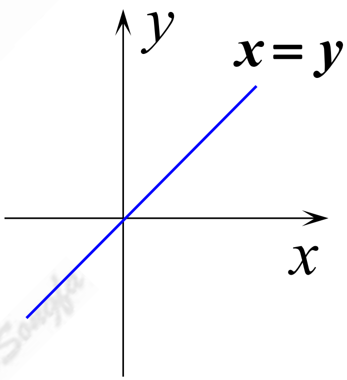
例 讨论函数 $f(z)=x^2+iy^2$ 的可导性与解析性。

解 由 $u=x^2, v=y^2$, 有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2y,\end{aligned}\right\}$$

由C−R方程,

$\Rightarrow\ x=y,$



所以 $f(z)=x^2+iy^2$ 仅在直线 $x=y$ 上可导，处处不解析。

例 讨论函数 $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$ 的可导性与解析性。

P29 例 2.4 部分

解 由 $u=e^{x}\cos y,\ v=e^{x}\sin y$，有

$$\left.\begin{aligned} u'_x&=e^{x}\cos y, & u'_y&=-e^{x}\sin y,\\ v'_x&=e^{x}\sin y, & v'_y&=e^{x}\cos y,\end{aligned}\right\}$$

四个偏导数连续，

且满足 $C-R$ 方程，

故 $f(z)$ 在复平面上处处可导，处处解析，

且 $f'(z)=u'_x+i\,v'_x=e^{x}(\cos y+i\sin y)$.

注 函数 $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)=e^{x}\cdot e^{iy}\xlongequal{\text{记为}}e^{z}$，

本例结果表明：$(e^{z})'=e^{z}$.

例 设函数 $f(z)=(x^2+Axy+By^2)+i(Cx^2+Dxy+y^2)$，求常数 A,B,C,D 的值，使 $f(z)$ 在复平面内处处解析。

解 由 $u=x^2+Axy+By^2$，$v=Cx^2+Dxy+y^2$，有

$$u'_x=2x+Ay,\quad u'_y=Ax+2By,$$

$$v'_x=2Cx+Dy,\quad v'_y=Dx+2y,$$

由 C−R 方程可得 $\begin{cases}2x+Ay=Dx+2y,\\ Ax+2By=-(2Cx+Dy),\end{cases}$

求解即得：$A=2$，$B=-1$，$C=-1$，$D=2$.

例 设 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，且满足下列条件之一：

P30 例 2.5 修改

(1) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析；

(2) $|f(z)|$ 在 D 内为常数。

证明：$f(z)$ 在区域 D 内为常数。

证 (1) 由 $f(z)=u+iv$ 解析， $\Rightarrow\ u'_x=v'_y,\ u'_y=-v'_x,$

由 $\overline{f(z)}=u-iv$ 解析， $\Rightarrow\ u'_x=(-v)'_y,\ u'_y=-(-v)'_x,$

$\Rightarrow\ u'_x=u'_y=v'_x=v'_y=0,\ \Rightarrow\ u,v$ 为常数，

即得 $f(x,y)=c$（常数）。

证 (2) 由 $f(z)=u+iv$ 解析，$\Rightarrow\ u'_x=v'_y,\ u'_y=-v'_x,$

由 $|f(z)|$ 在 D 内为常数，$\Rightarrow\ u^2+v^2=a$（常数），

两边分别对 x,y 求偏导得：

$$\begin{cases} u\cdot u'_x+v\cdot v'_x=0, \\ u\cdot u'_y+v\cdot v'_y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u\cdot u'_x-v\cdot u'_y=0, \\ v\cdot u'_x+u\cdot u'_y=0, \end{cases} \quad (A)$$

① 若 $\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}=0,\ \Rightarrow\ u=v=0,\ \Rightarrow\ f(x,y)=0$（常数）；

② 若 $\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}\neq 0,\ \Rightarrow$ 方程组 (A) 只有零解，

$\Rightarrow\ u'_x=u'_y=v'_x=v'_y=0,\ \Rightarrow\ u,v$ 为常数，

即得 $f(x,y)=c$（常数）。

例 设函数 $f(z)=u+iv_1$ 和 $g(z)=u+iv_2$ 均在某区域 D 内解析，证明：$v_1(x,y)=v_2(x,y)+c$，其中 c 为常数。

解 令 $h(z)=f(z)-g(z)=0+i(v_1-v_2)\overset{\text{记为}}{=\!=\!=}\tilde{u}+i\tilde{v}$,

由 $f(z)$ 和 $g(z)$ 解析，得 $h(z)$ 也解析，

由 $C-R$ 方程有 $\tilde{u}'_x=\tilde{v}'_y, \quad \Rightarrow \quad (v_1-v_2)'_y=0,$

$\tilde{u}'_y=-\tilde{v}'_x, \quad \Rightarrow \quad (v_1-v_2)'_x=0,$

即得 $v_1(x,y)-v_2(x,y)=c$（常数）。

意义 解析函数的实(虚)部给定，则虚(实)部只差一个常数。

- 下节还将看到，解析函数的实部(虚部)本身也有要求。

总结：

(1) 点邻域可导 $\rightleftarrows$ 点解析 $\longrightarrow$ 点可导 $\longrightarrow$ 点连续

(2) z点可导 $\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array}$ (x,y)点处实、虚部函数可微

$+$

(x,y)点处柯西-黎曼方程成立

$\downarrow\uparrow$

z点可导

§2.2 解析函数与调和函数的关系

一、调和函数

二、共轭调和函数

三、构造解析函数

一、调和函数

引例 考察三维空间中无旋无源力场(或流速场)的势函数。

设该力场为 $\vec{F}=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$.

(1) 无旋场

- 沿闭路做功为零(即做功与路径无关),

  又称为保守场或者梯度场或者有势场。

- 存在势函数 $\varphi(x,y,z)$,使得

$$P=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad R=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

即 $\vec{F}=\{P,Q,R\}=\{\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}.$

一、调和函数

引例 考察三维空间中无旋无源力场(或流速场)的势函数。

设该力场为 $\vec{F}=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$.

(1) 无旋场 $\vec{F}=\{P,Q,R\}=\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y},\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\}$.

(2) 无源场 • 散度为零，即 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.

(3) 无旋无源场 势函数 φ 满足 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$.

• 特别地，对于平面力场，有 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$.

一、调和函数

定义 若二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内有连续二阶偏导数，

P36 定义 2.3

且满足拉普拉斯(Laplace)方程:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数。

附 泊松(Poisson)方程:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=f(x,y).$$

(∇算子与Δ算子)

一、调和函数

定理 若函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析，

P31 定理 2.3

则 $u(x,y)$, $v(u,y)$ 在区域 D 内都是调和函数。

证明 由 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 解析，有

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \underset{(?)}{\Rightarrow} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}, \quad \underset{(?)}{\Rightarrow} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \end{array}\right\} \underset{(?)}{\Rightarrow} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$

二、共轭调和函数

定义 设函数 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 均为区域 D 内的调和函数，

P31 定义 2.4

且满足 $C-R$ 方程： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

则称 v 是 u 的共轭调和函数。

定理 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要

P31 定理 2.4

条件是：在区域 D 内，v 是 u 的共轭调和函数。

注意 v 是 u 的共轭调和函数 $\not\Rightarrow$ u 是 v 的共轭调和函数。

（在矩阵中表现为对角线和副对角线互换，但
两种矩阵的
是相等和相反的位置关系
不变。

例： $f(z)=x+iy$

$$\begin{pmatrix} u'_x, u'_y \\ v'_x, v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v'_x, v'_y \\ u'_x, u'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$$

三、构造解析函数

问题 已知实部 u，求虚部 v（或者已知虚部 v，求实部 u），使 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 解析，且满足指定的条件。

依据 构造解析函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 的依据：

(1) u 和 v 本身必须都是调和函数；

(2) u 和 v 之间必须满足 $C-R$ 方程。

注意 必须首先检验 u 或 v 是否为调和函数。

方法
- 偏积分法；
- 全微分法。

三、构造解析函数

方法 ● 偏积分法（不妨仅考虑已知实部 u 的情形）

(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的两个偏导数：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}, & (A) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}. & (B) \end{cases}$$

(2) 将 (A) 式的两边对变量 y 进行（偏）积分得：

$$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\tilde{v}(x,y)+\varphi(x), \qquad (C)$$

其中，$\tilde{v}(x,y)$ 已知，而 $\varphi(x)$ 待定。

(3) 将 (C) 式代入 (B) 式，求解即可得到函数 $\varphi(x)$.

三、构造解析函数

方法 ● 全微分法（不妨仅考虑已知实部 u 的情形） P 39

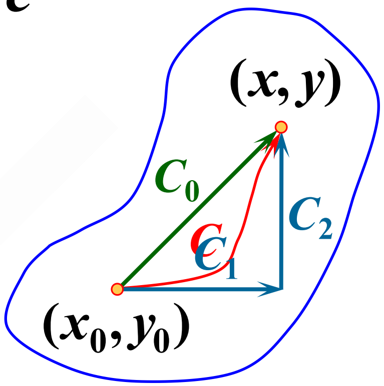
(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的全微分:

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

(2) 利用第二类曲线积分（与路径无关）得到原函数:

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_C-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+c.$$



其中，$C=C_0$ 或 C_1+C_2.

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$. P32 例 2.6 修改

解 (1) 验证 $u(x,y)$ 为调和函数。

由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x$,

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

故 $u(x,y)$ 是调和函数。

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$. 方法一：偏积分法

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,

$$\Rightarrow\ v=\int(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y=3x^2y-y^3+\varphi(x),$$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+\varphi'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy$,

$$\Rightarrow\ \varphi'(x)=0,\qquad \Rightarrow\ \varphi(x)=c,$$

$$\Rightarrow\ v(x,y)=3x^2y-y^3+c.$$

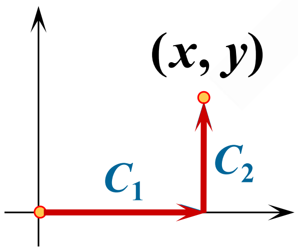
例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$. 方法二：全微分法

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy,$

$$\Rightarrow \mathrm{d}v=v'_x\mathrm{d}x+v'_y\mathrm{d}y=6xy\,\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y,$$

$$\Rightarrow v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}6xy\,\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+c$$



$$=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+c$$

$$=3x^2y-y^3+c.$$

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (3) 求确定常数 c.

$$f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3+c),$$

根据已知条件 $f(i)=-i$,

将 $x=0$, $y=1$ 代入上式，可得：

$$i(-1+c)=-i, \quad \Rightarrow \quad c=0,$$

即得 $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)=z^3.$

例 验证 $u = x^2 - y^2 + xy$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i) = -1 + i$.

P33 例 2.8

解 (1) 验证 $u(x,y)$ 为调和函数。

由 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

故 $u(x,y)$ 是调和函数。

例 验证 $u = x^2 - y^2 + xy$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i) = -1 + i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$. 方法一：偏积分法

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$,

$$\Rightarrow \ v = \int (2x + y)\,\mathrm{d}y = 2xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x),$$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - x$,

$$\Rightarrow \ \varphi'(x) = -x, \quad \Rightarrow \ \varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c,$$

$$\Rightarrow \ v(x,y) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c.$$

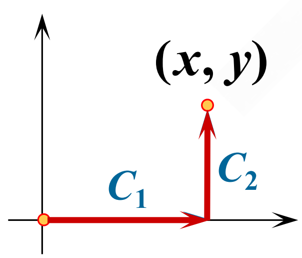
例 验证 $u = x^2 - y^2 + xy$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i) = -1 + i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$. 方法二：全微分法（利用曲线积分）

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - x$,

$$\Rightarrow \mathrm{d}v = v'_x \mathrm{d}x + v'_y \mathrm{d}y = (2y - x)\mathrm{d}x + (2x + y)\mathrm{d}y,$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2y - x)\mathrm{d}x + (2x + y)\mathrm{d}y + c$$



$$= \int_0^x (-x)\mathrm{d}x + \int_0^y (2x + y)\mathrm{d}y + c$$

$$= 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c.$$

例 验证 $u = x^2 - y^2 + xy$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i) = -1 + i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$. 方法三：全微分法(利用“反微分”)

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$，$\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - x$，

$$\Rightarrow \mathrm{d}v = v'_x \mathrm{d}x + v'_y \mathrm{d}y = (2y - x)\mathrm{d}x + (2x + y)\mathrm{d}y,$$

$$= \underline{2y\,\mathrm{d}x} + \mathrm{d}\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \underline{2x\,\mathrm{d}y} + \mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2}\right),$$

$$= \mathrm{d}\left(2xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right),$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c.$$

例 验证 $u = x^2 - y^2 + xy$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i) = -1 + i$.

解 (3) 求确定常数 c.

$$f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i\left(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c\right).$$

根据条件 $f(i) = -1 + i$，将 $x = 0$，$y = 1$ 代入，可得

$$-1 + i\left(\frac{1}{2} + c\right) = -1 + i, \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2},$$

即得 $f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i\left(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)$

$$= z^2 + \frac{1}{2i}z^2 + \frac{1}{2}i.$$

§2.3 初等函数

一、指数函数

二、对数函数

三、幂函数

四、三角函数

五、反三角函数

六、双曲函数与反双曲函数

§2.3 初等函数

引言 (1) 复变函数中的初等函数是实数域中初等函数的推广，因此，它们的定义尽可能保持一致。

(2) 一般说来，需要从下面几个方面来认识初等函数：

- 定义、定义域、值域以及运算法则；
- 单值性、连续性、解析性以及映射关系。

(3) 本节将重点讲解指数函数与对数函数，其余的函数仅作一些简略的介绍。

- 特别需要注意它们与实初等函数的区别。

一、指数函数

定义 对于复数 $z = x + iy$，称 $w = e^x(\cos y + i\sin y)$ 为指数函数，记为 $w = \exp z$ 或 $w = e^z$.

P34 定义 2.5

注 (1) 指数函数是初等函数中最重要的函数，其它初等函数都是通过指数函数来定义的。

(2) 借助欧拉公式，指数函数可以这样来记忆：

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

(3) 事实上，从上述定义本身来看，指数函数 e^z 应理解为仅仅是一种记号或者甚至是一种规定。

一、指数函数

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

- 定义域　指数函数 $w = e^z$ 在复平面上处处有定义。
- 值域　由于 $e^x > 0$，$\cos y + i\sin y \neq 0$，因此 $w = e^z \neq 0$.
- 运算法则　$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

推导　设 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，则有

$$
\begin{aligned}
e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + \\
&\qquad i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] \\
&= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}.
\end{aligned}
$$

一、指数函数

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

性质 (1) e^z 是单值函数。

(2) e^z 在复平面上处处连续，处处解析，且 $(e^z)' = e^z$.

(3) e^z 是以 $2k\pi i$ 为周期的周期函数。

- 事实上，由 $e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$,

  有 $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z$.

(4) 当 $z \to \infty$ 时，e^z 的极限不存在。

- 事实上，当 $y = 0$, $x \to +\infty$ 时，$e^z \to +\infty$;

  当 $y = 0$, $x \to -\infty$ 时，$e^z \to 0$.

一、指数函数

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

性质 (5) 映射关系：

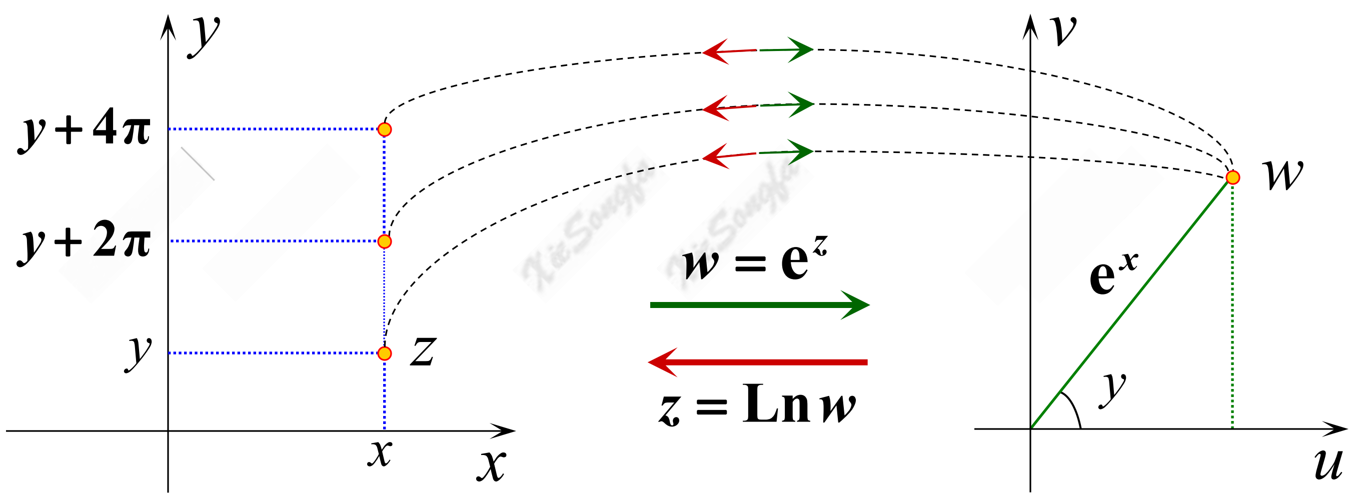
由 $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cdot e^{iy}$

有 $\begin{cases} |w| = e^x, \\ \operatorname{Arg} w = y + 2k\pi, \end{cases}$

$|w| = e^x$ ⟶ 由 z 的实部得到 w 的模；

$\operatorname{Arg} w = y + 2k\pi$ ⟶ 由 z 的虚部得到 w 的辐角。

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$



二、对数函数

定义 满足方程 $e^w = z$ 的函数 $w = f(z)$ 称为对数函数，

P36 定义 2.6

记作 $w = \mathrm{Ln}\, z$.

推导 令 $z = |z| e^{i\,\mathrm{Arg}\, z} = r e^{i\theta}$， $w = u + i v$，

由 $e^w = z$，有 $e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\theta}$，

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \ln r = \ln|z|, \\ v = \theta = \mathrm{Arg}\, z. \end{cases}$$

由 z 的模得到 w 的实部；

由 z 的辐角得到 w 的虚部。

即得 $w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$

$$= \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

二、对数函数

公式 $w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

- 显然，对数函数为多值函数。

主值(枝) 称 $w = \ln|z| + i\arg z$ 为 $\mathrm{Ln}\, z$ 的主值(枝)，

记为 $w = \ln z$.

从而有 $\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

特别地，当 $z = x > 0$ 时，

$\mathrm{Ln}\, z$ 的主值 $\ln z = \ln x$ 就是实对数函数。

分支(枝) 对于任意一个固定的k，称 $\ln z + 2k\pi i$ 为 $\mathrm{Ln}\, z$ 的一个分支(枝)。

二、对数函数

- 定义域 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 的定义域为 $z \neq 0$，即它仅在原点无定义。
  - 函数 $\ln|z|$ 或 $\arg z$ 仅在原点无定义，或 $z = e^{w} \neq 0$.
- 运算法则

法则 (1) $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$；

(2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$.

注意 ● $\mathrm{Ln}\, z$ 是多值函数，故上式是指在集合意义下成立，

比如，不能推出 $\mathrm{Ln}\, z^n = n\,\mathrm{Ln}\, z$。

$\ln z = \ln|z| + i \arg z$.　　$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i$，$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

二、对数函数

性质 (1) $\mathrm{Ln}\,z$ 的各分支在除去原点及负实轴的复平面上连续。

- 只需考察函数 $\ln|z|$ 与函数 $\arg z$ 的连续性即可。

(2) 函数 $w=\ln z$ 在除去原点及负实轴的复平面上解析。

- 由反函数求导法则，可得

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{(\mathrm{e}^{w})'_{w}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{w}}=\frac{1}{z}.$$

- 进一步，由于 $\mathrm{Ln}\,z=\ln z+2k\pi i$，故函数 $\mathrm{Ln}\,z$ 的各分支在除去原点及负实轴的复平面上也解析，并且有相同的导数值。

例 求下列对数以及它们的主值。

(1) $\mathrm{Ln}(-i)$; (2) $\mathrm{Ln}(1+i)$.

解 (1) $\mathrm{Ln}(-i)=\ln|-i|+i\arg(-i)+2k\pi i$

$$=\ln 1+i(-\frac{\pi}{2})+2k\pi i=-\frac{\pi}{2}i+2k\pi i,$$

主值 $\ln(-i)=-\dfrac{\pi}{2}i$.

(2) $\mathrm{Ln}(1+i)=\ln|1+i|+i\arg(1+i)+2k\pi i$

$$=\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4})+2k\pi i,$$

主值 $\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i(\dfrac{\pi}{4})$.

例 求对数 Ln(−1) 以及它的主值。

P37 例 2.11

解 $$\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+i\arg(-1)+2k\pi i$$

$$=\ln 1+i\pi+2k\pi i=(2k+1)\pi i;$$

主值 $\ln(-1)=\pi i.$

- 可见，在复数域内，负实数是可以求对数的。

例 求对数 $\mathrm{Ln}\,2$ 以及它的主值。

解 $\mathrm{Ln}\,2=\ln|2|+i\arg 2+2k\pi i=\ln 2+2k\pi i$;

主值 $\ln 2=\ln 2$.

在实数范围内

在复数范围内

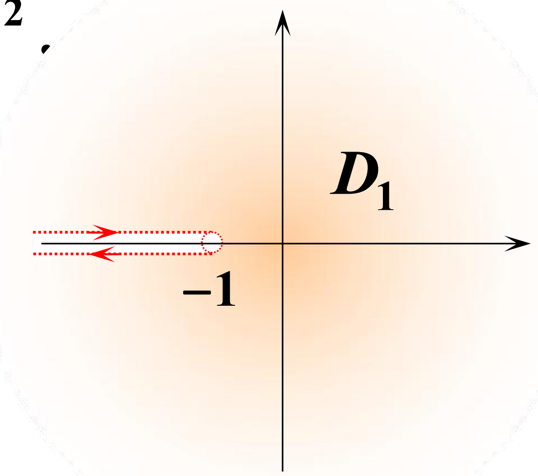
可见，当 z 为正实数时，$\ln z$ 与实对数函数是一致的。

例 求下列函数的导数。

(1) $f(z)=\ln(1+z)$; (2) $g(z)=\ln z^2$.

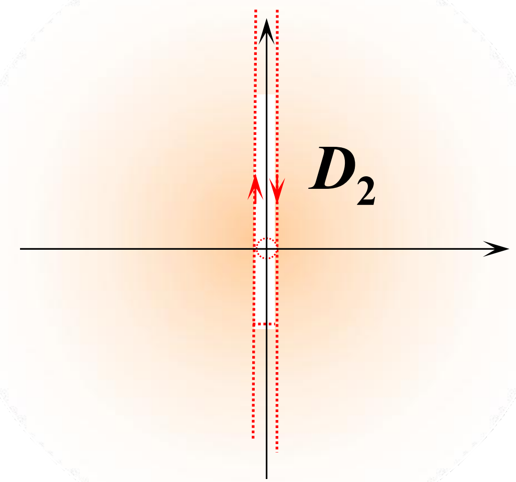
解 (1) $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}$,

其中，$z\in D_1$ (如图)。



(2) $g'(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot 2z=\dfrac{2}{z}$,

其中，$z\in D_2$ (如图)。



三、幂函数

定义 函数 $w = z^a$ 规定为 $z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z}$（$a$ 为复常数，且 $z \neq 0$），称为复变量 z 的幂函数。

P38 定义 2.7

还规定：当 a 为正实数，且 $z = 0$ 时，$z^a = 0$.

注意 上面利用指数函数以一种规定的方式定义了幂函数，但千万不要将这种规定方式反过来作用于指数函数，

三、幂函数

讨论 (1) 当 a 为正整数时, $z^n = e^{n\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{n\ln z}$, (单值)

此时, z^a 处处解析, 且 $(z^a)' = a z^{a-1}$.

(2) 当 a 为负整数时, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$. (单值)

此时, z^a 除原点外处处解析, 且 $(z^a)' = a z^{a-1}$.

(3) 当 $a = 0$ 时, $z^0 = 1$.

三、幂函数 $z^{a}=\mathrm{e}^{a\,\mathrm{Ln}\,z}$

讨论 (4) 当 a 为有理数时，$z^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{z^{m}}$.（$n$值）

其中，m 与 n 为互质的整数，且 $n\geq 1$.

此时，z^{a} 的相应分支在除原点与负实轴外处处解析，

且 $(z^{a})'=a\,z^{a-1}$.

(5) 当 a 为无理数或复数（$\mathrm{Im}\,a\neq 0$）时，

一般为无穷多值。

此时，z^{a} 的相应分支除原点与负实轴外处处解析。

例 求 i^i 的值。 P 39

解 $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i)} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

- 可见，i^i 是正实数，它的主值是 $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 的值。

解 $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{\sqrt{2}[0+i(0+2k\pi)]} = e^{2\sqrt{2}k\pi i}$

$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

- 可见，不要想当然地认为 $1^a = 1$.

四、三角函数

启示 由欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，有 $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$，

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}),\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}).$$

定义 余弦函数 $\cos z=\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$;

P40 定义 2.8

正弦函数 $\sin z=\dfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$.

其他三角函数 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$,

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}.$$

四、三角函数

性质 (略)

- 周期性、可导性、奇偶性、零点等与实函数一样。
- 各种三角公式以及求导公式可以照搬；
- 有界性 (即 $|\cos z| \le 1, |\sin z| \le 1$) 不成立。

例 求 $\cos i$.

解 根据定义，有 $\cos i = \dfrac{e^{ii}+e^{-ii}}{2} = \boxed{\dfrac{e^{-1}+e}{2}}$.

例 求 $\sin(1+2i)$.

解 根据定义，有

$$\sin(1+2i) = \frac{e^{i(1+2i)} - e^{-i(1+2i)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1) - e^{2}(\cos 1 - i\sin 1)}{2i}$$

$$= \boxed{\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}}\sin 1 + i\boxed{\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}}\cos 1.$$

五、反三角函数

定义 如果 $\cos w = z$，则称 w 为复变量 z 的反余弦函数，

P41 定义 2.9

记为 $w = \operatorname{Arc}\cos z$.

推导 由 $z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$， $\Rightarrow (e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$，

$$\Rightarrow e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad \Rightarrow iw = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\Rightarrow w = \operatorname{Arc}\cos z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 同理可得 $\operatorname{Arc}\sin z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$；

$$\operatorname{Arc}\tan z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i+z}{i-z}.$$

六、双曲函数与反双曲函数

定义 双曲正弦函数 $\operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}(e^{z} - e^{-z});$

P42 定义 2.10

双曲余弦函数 $\operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}(e^{z} + e^{-z});$

双曲正切函数 $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z};$

双曲余切函数 $\operatorname{coth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$

六、双曲函数与反双曲函数

定义 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1});$

P 42

反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$

反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1+z}{1-z};$

反双曲余切函数 $\operatorname{Arcoth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z+1}{z-1}.$

放松一下吧！……

附 可导与可微以及连续之间的关系

结论 (1) 函数 $w = f(z)$ 可导的充要条件是 $f(z)$ 可微；且有

$$\boxed{\mathrm{d}w = f'(z)\mathrm{d}z \quad \text{即} \quad f'(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.}$$

(2) 函数可导必连续，但连续不一定可导。

证明 (1) 必要性 “$\Rightarrow$”

如果可导 $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) \Rightarrow \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w - f'(z)\Delta z}{\Delta z} = 0$

$\Rightarrow \Delta w - f'(z)\Delta z = o(|\Delta z|) \Rightarrow$ 可微。

附 可导与可微以及连续之间的关系

结论 (1) 函数 $w=f(z)$ 可导的充要条件是 $f(z)$ 可微；且有

$$\boxed{\mathrm{d}w=f'(z)\mathrm{d}z \quad \text{即} \quad f'(z)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.}$$

(2) 函数可导必连续，但连续不一定可导。

证明 (1) 充分性 “$\Leftarrow$”

如果可微 $\Rightarrow \Delta w=A\Delta z+o(|\Delta z|) \Rightarrow \dfrac{\Delta w}{\Delta z}=A+\dfrac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=A=f'(z) \Rightarrow \text{可导。}$$

由此可得 $\mathrm{d}w=f'(z)\mathrm{d}z$ 即 $f'(z)=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

附 可导与可微以及连续之间的关系

结论 (1) 函数 $w = f(z)$ 可导的充要条件是 $f(z)$ 可微；且有

$$\boxed{\mathrm{d}w = f'(z)\mathrm{d}z \quad \text{即} \quad f'(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.}$$

(2) 函数可导必连续，但连续不一定可导。

证明 (2) 仅证函数可导必连续。

如果可导 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow \Delta w = A\Delta z + o(|\Delta z|)$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0 \Rightarrow$ 连续。

(返回)

附：知识广角 —— 解析函数的由来

- 一般认为，解析函数(Analytic Function)这一名称最早是由孔多塞(Condorcet)提出并使用的。他的研究报告并没有公开出版，但有很多人知道他的工作。
- 在孔多塞使用该名称约20年之后，拉格朗日(Lagrange)也使用了该术语。他在1797年出版的《解析函数论》中将能展开成级数的函数说成是解析函数。
- 现在所使用的解析函数的概念，则基本上是在魏尔斯特拉斯(Weierstrass)的著作中形成的。

(返回)

附：人物介绍 —— 柯西

柯 西

A. L. Cauchy

(1789～1857)

法国数学家

- 数学史上最多产的数学家之一。
- 复变函数论的奠基人之一。
- 数理弹性理论的奠基人之一 。

附：人物介绍 —— 柯西

- 在纯数学和应用数学方面的功力相当深厚。很多数学定理和公式都是以他的名字命名的，如柯西不等式、柯西积分公式等等。

- 在论文写作的数量上，柯西仅次于欧拉。他一生中共发表了 789 篇论文和几本书。

- 他的全集总计 28 卷。 从 1882 年开始出版，直到 1974 年才出齐最后一卷，

附：人物介绍 —— 黎曼

黎 曼

B. Riemann

(1826～1866)

德国数学家

- 是世界数学史上最具独创精神的数学家之一。
- 复变函数论的奠基人之一。
- 黎曼几何的创始人。

附：人物介绍 —— 黎曼

- 柯西、黎曼和维尔斯特拉斯是公认的复变函数论的主要奠基人，但在处理复变函数理论的方法上，黎曼的方法被认为是本质的。
- 在其短暂的一生中，黎曼为数学的众多领域作出了许多奠基性、创造性的工作。
- 黎曼的著作不多，但却异常深刻，极具创造与想象力。
- 复变函数中许多术语，如单值函数、多值函数、分支、单叶曲面以及单连通区域等，都是黎曼首先使用的。

(返回)

放松一下吧！……