电路理论

——正弦稳态电路的频率响应

主讲人：刘旭

电气与电子工程学院

本章学习内容

14.2 传递函数与频率响应

14.3 谐振电路

讲授学时：2

本章学习目标与难点

目标

1. 理解频率响应的意义，学会用传递函数分析电路的频率响应
2. 理解**谐振现象及其特点**

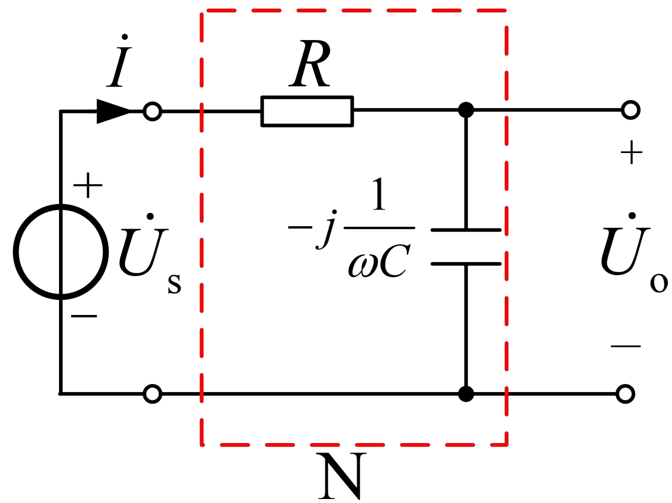
难点

理解频率响应的含义，并掌握其应用

14.1 概述

频率响应：正弦稳态响应随激励频率的变化规律。

$$Z_{\text{in}} = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{\text{s}}}{R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\omega C}{1 + \mathrm{j}\omega CR}\dot{U}_{\text{s}}$$

$$\dot{U}_{\text{R}} = \frac{\mathrm{j}\omega CR}{1 + \mathrm{j}\omega CR}\dot{U}_{\text{s}} \qquad \dot{U}_{\text{C}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega CR}\dot{U}_{\text{s}}$$

不同频率下工作状态不同！

$$\omega \to 0 \quad \frac{1}{\omega C} \to \infty,\ I \to 0,\ U_{\text{R}} \to 0,\ U_{\text{C}} \to U_{\text{s}}$$

$$\omega \to \infty \quad \frac{1}{\omega C} \to 0,\ I \to \frac{U_{\text{s}}}{R},\ U_{\text{R}} \to U_{\text{s}},\ U_{\text{C}} \to 0$$

14.1 概述

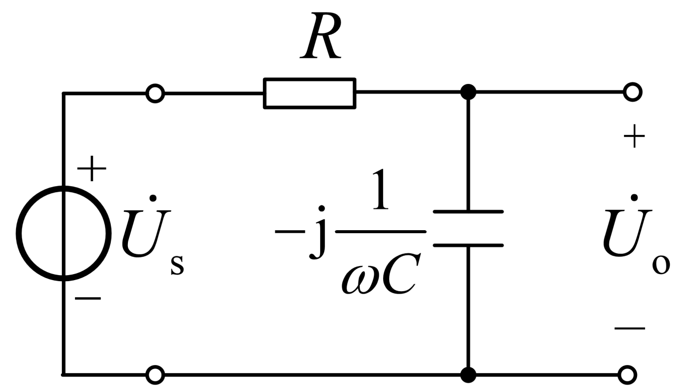
用什么手段来描述频率响应?

分析频率响应有何意义?

14.2 传递函数与频率响应

如何描述响应与激励频率之间的关系？

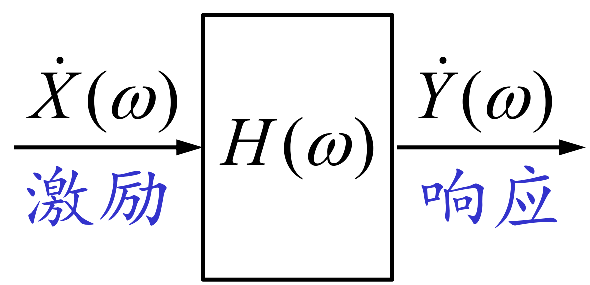
$$H(\omega)=\frac{\dot{U}_{\mathrm{o}}(\omega)}{\dot{U}_{\mathrm{s}}(\omega)}=\frac{-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}{R-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$



只包含频率

1. 传递函数 响应相量与激励相量的比值

$$H(\omega)=\frac{\dot{Y}(\omega)}{\dot{X}(\omega)}=\frac{\text{响应}}{\text{激励}}$$



14.2 传递函数与频率响应

- 传递函数与电路结构、参数、输入与输出变量类型、端口对的相对位置有关。

相同端口　　　　　　　　不同端口

$$H(\omega)=\frac{\dot{U}_s(\omega)}{\dot{I}_s(\omega)} \qquad H(\omega)=\frac{\dot{U}_o(\omega)}{\dot{U}_s(\omega)} \qquad H(\omega)=\frac{\dot{I}_o(\omega)}{\dot{I}_s(\omega)}$$

$$H(\omega)=\frac{\dot{I}_s(\omega)}{\dot{U}_s(\omega)} \qquad H(\omega)=\frac{\dot{U}_o(\omega)}{\dot{I}_s(\omega)} \qquad H(\omega)=\frac{\dot{I}_o(\omega)}{\dot{U}_s(\omega)}$$

- 传递函数是一个复数，频率特性分为幅频特性和相频特性。

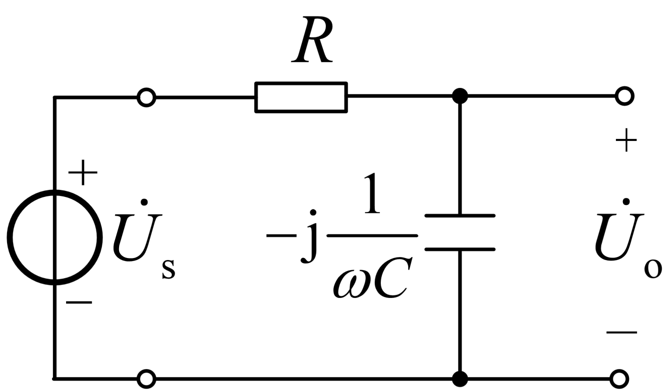
$$H(\omega)=|H(\omega)|\angle\varphi(\omega)$$

幅频响应　相频响应

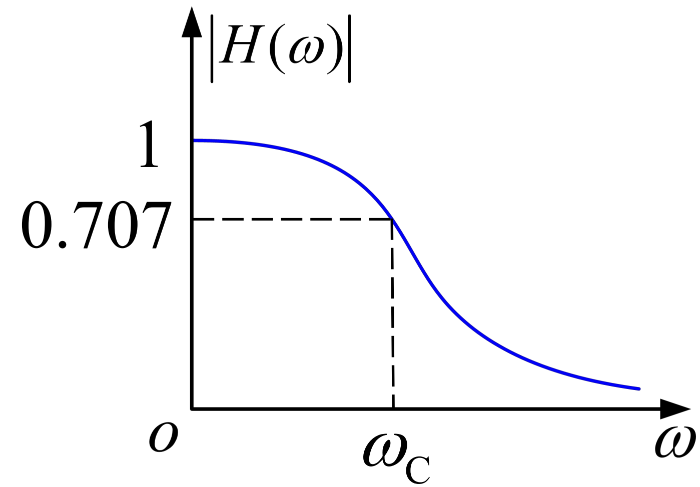
响应幅值与激励幅值之比

响应初相与激励初相之差

2. 频率响应 电路对信号的频率具有选择性

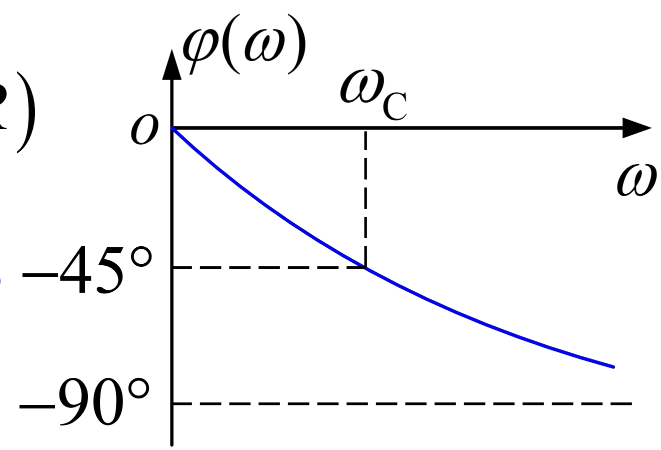


低通滤波器



$$H_C(\omega)=\frac{\dot{U}_o(\omega)}{\dot{U}_s(\omega)}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\angle -\arctan(\omega CR)$$

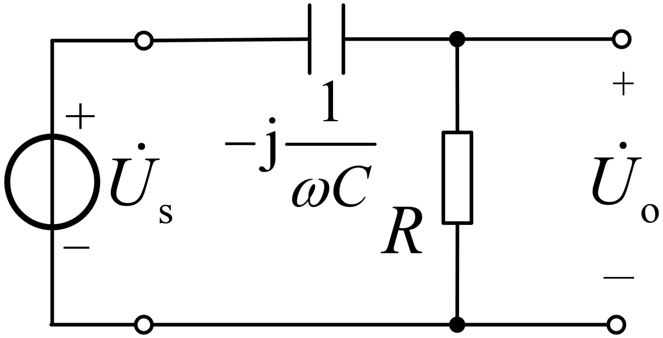


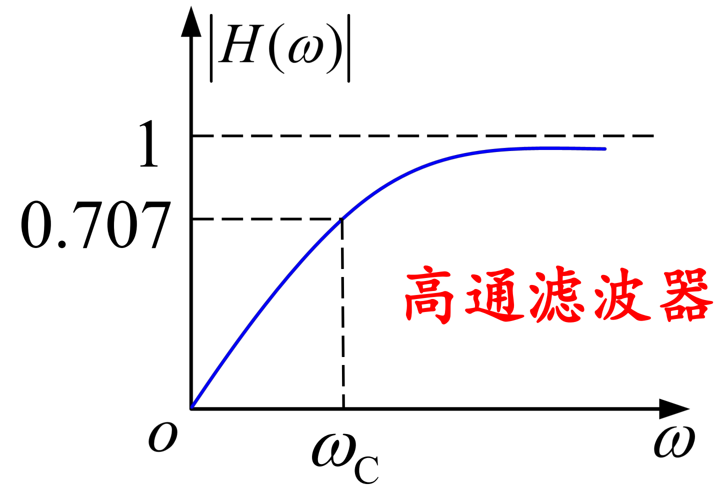
$H_C(0)=1\angle 0°$ $H_C(\infty)=0\angle -90°$

$H_C(1/RC)=0.707\angle -45°$

14.2 传递函数与频率响应

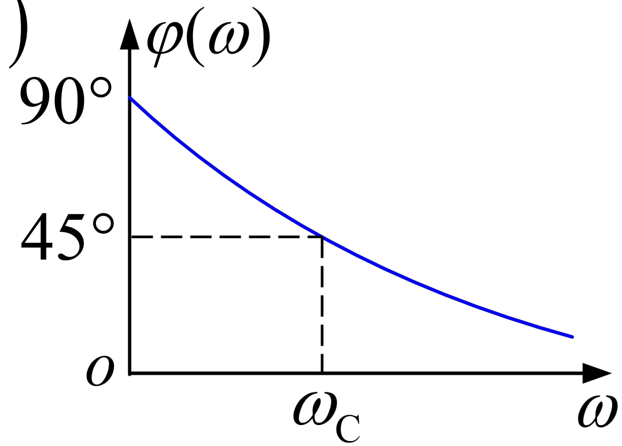
2. 频率响应





$$H_R(\omega)=\frac{\dot{U}_o(\omega)}{\dot{U}_s(\omega)}=\frac{\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

$$=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\angle 90^\circ-\arctan(\omega CR)$$

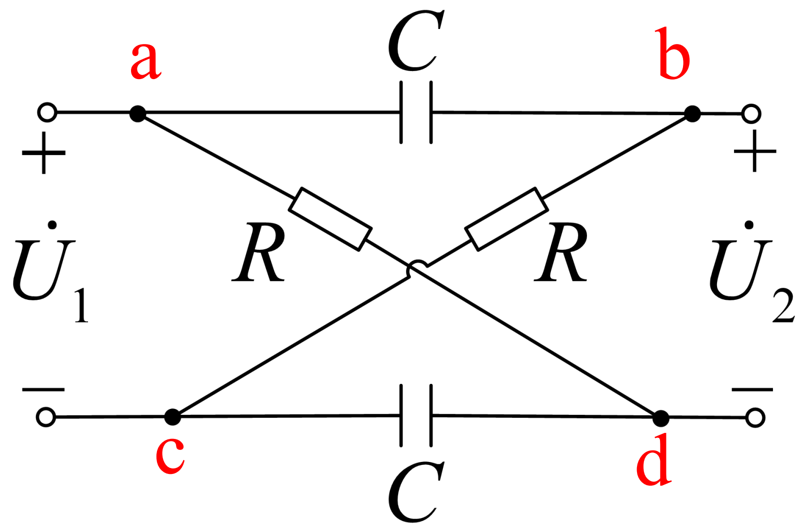


$H_R(0)=0\angle 90^\circ$ $\quad$ $H_R(\infty)=1\angle 0^\circ$

$H_R(1/RC)=0.707\angle 45^\circ$

14.2 传递函数与频率响应

例14-1 图示电路中RC=1 s。求电压增益$\dot{U}_2/\dot{U}_1$



解 根据分压公式，有：$\dot{U}_2=\dot{U}_{\rm bc}-\dot{U}_{\rm cd}$

$$\dot{U}_2=\frac{R}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\dot{U}_1-\frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\dot{U}_1=\frac{\mathrm{j}\omega CR-1}{1+\mathrm{j}\omega CR}\dot{U}_1=\frac{\mathrm{j}\omega-1}{1+\mathrm{j}\omega}\dot{U}_1$$

14.3 谐振电路

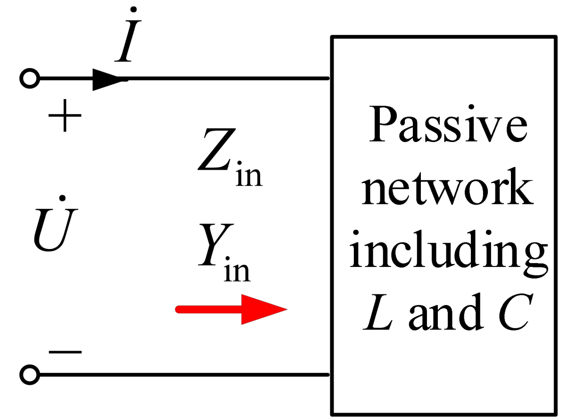
1. 谐振 正弦稳态下，电感和电容的阻抗(导纳)完全互补

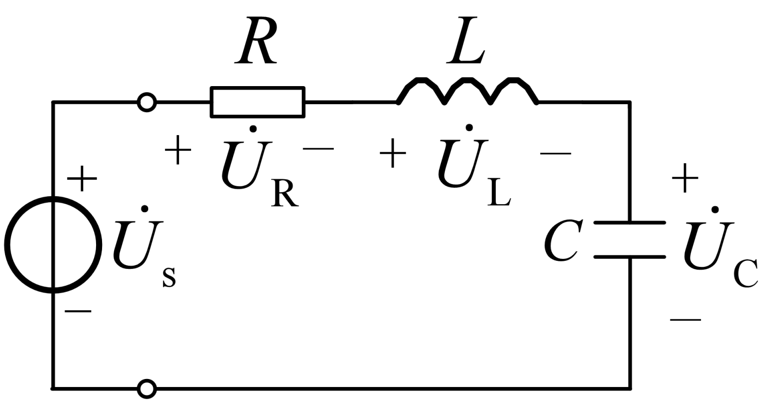
$$Z_{\text{in}} = R(\omega) + \text{j}X(\omega) \qquad X(\omega) = 0$$

$$Y_{\text{in}} = G(\omega) + \text{j}B(\omega) \qquad B(\omega) = 0$$

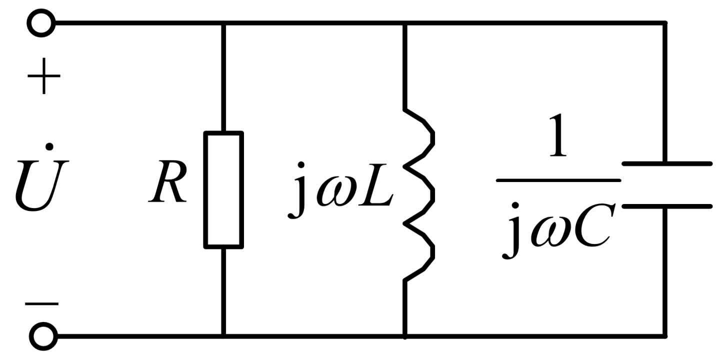
电路呈阻性 $\Rightarrow \dot{U}$和 $\dot{I}$ 同相位

$$P = UI \qquad Q = 0$$





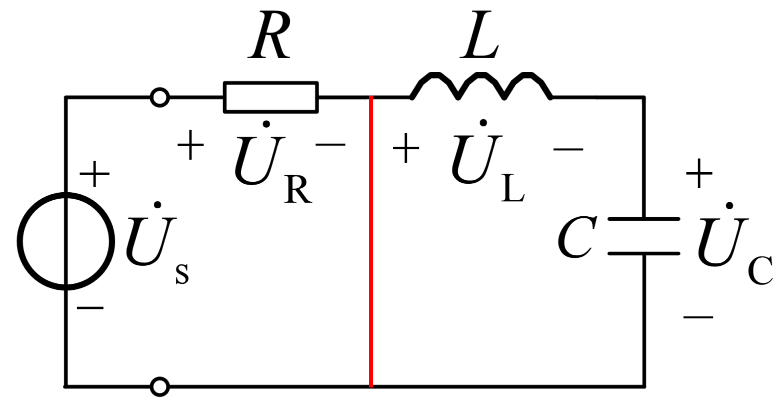
*RLC*串联电路



*RLC*并联电路

14.3 谐振电路

2. RLC串联谐振



$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$ 谐振频率

对外相当于短路！

谐振特点：

(1) $|Z(\omega_0)| = R = |Z_{min}(\omega)|$

(2) $\dot{U}_S$ 和 $\dot{I}_0$ 同相位

(3) $|\dot{I}_0| = \left|\frac{\dot{U}_S}{R}\right| = |\dot{I}_{max}(\omega)|$

(4) $\dot{U}_{R0} = \dot{U}_S$

(5) $\dot{U}_{L0} = j\omega_0 L \dot{I}_0 = j\frac{\omega_0 L}{R}\dot{U}_S$

$$\dot{U}_{C0} = -j\frac{1}{\omega_0 C}\dot{I}_0 = -j\frac{1}{\omega_0 CR}\dot{U}_S$$

$$U_{L0} = U_{C0} = QU_S$$

Q：品质因数

14.3 谐振电路

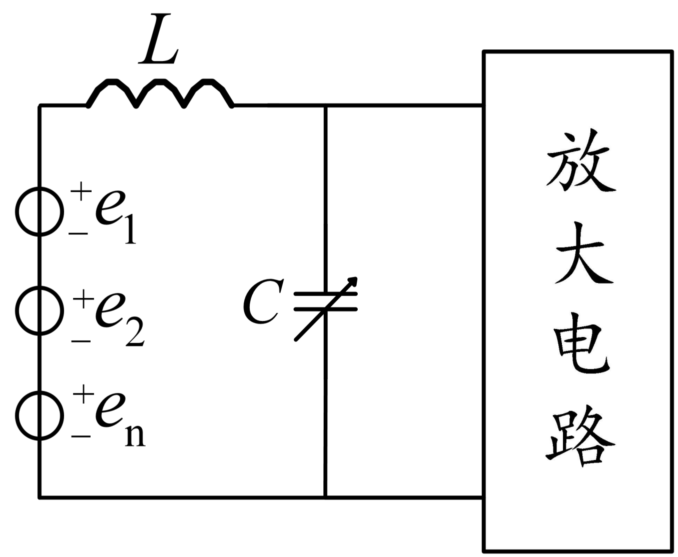
收音机

品质因数

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$U_{L0} = U_{C0} = QU_S$$

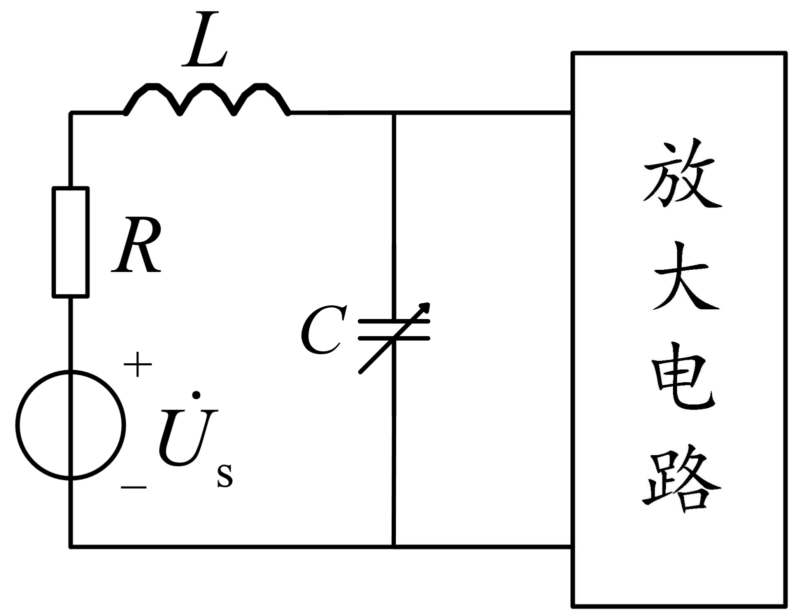
当Q>>1时，电容或电感上电压将远大于电源电压，称为过电压现象。



应用：电信系统的信号放大

14.3 谐振电路

例14-2 某收音机输入回路L=0.3mH，R=10Ω，为收到中央电台560kHz信号，求（1）调谐电容C；（2）如输入电压为1.5μV，求谐振电流和电容电压。



解 （1）调谐电容C

$$C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = 269\ \text{pF}$$

（2）谐振电流和电容电压

$$I_0 = \frac{U}{R} = 0.15\ \mu\text{A}$$

$$U_C = I_0 X_C = 158.5\ \mu\text{V} \gg 1.5\ \mu\text{V}$$

14.3 谐振电路

（6）能量关系

储能 $w_0 = w_{L0} + w_{C0} = \frac{1}{2} L i_0{}^2 + \frac{1}{2} C u_{C0}{}^2$

$$= L I_0{}^2 (\cos \omega_0 t)^2 + C(\frac{I_0}{\omega_0 C})^2 [\cos(\omega_0 t - 90°)]^2$$

$$= L I_0{}^2 (\cos \omega_0 t)^2 + L I_0{}^2 (\sin \omega_0 t)^2 \ = L I_0{}^2$$

- 电感和电容能量按正弦规律变化，且最大值相等。L、C的电场能量和磁场能量作周期振荡性的交换，而不与电源进行能量交换；
- 总能量是不随时间变化的常量，且等于最大值。

14.3 谐振电路

（6）能量关系　储能 $w_0 = LI_0^{\ 2}$

耗能 $w_{R0} = \int_0^{T_0} i_0^{\ 2} R \mathrm{d}t = I_0^{\ 2} R T_0 = I_0^{\ 2} R \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi I_0^{\ 2} R \sqrt{LC}$

$$\frac{w_0}{w_{R0}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{Q}{2\pi} \qquad Q = 2\pi \frac{\text{谐振电路存储的能量}}{\text{一个周期内消耗的能量}}$$

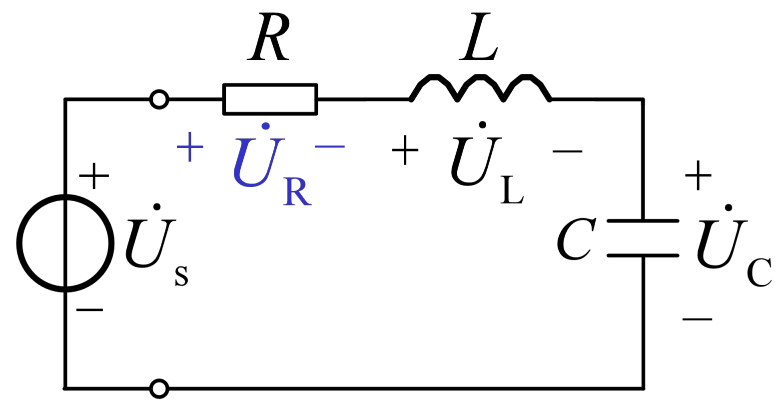
Q值反映了谐振回路中电磁振荡的程度，Q越大，总能量就越大，维持振荡所消耗的能量越小，振荡程度越剧烈，则振荡电路的“品质”越好。一般要求在发生谐振的回路中尽可能的提高Q值。

14.3 谐振电路

$$|H_R(\omega)| = \left|\frac{\dot{U}_R(\omega)}{\dot{U}_S(\omega)}\right| = \frac{R}{\left|R + \mathrm{j}(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})\right|}$$

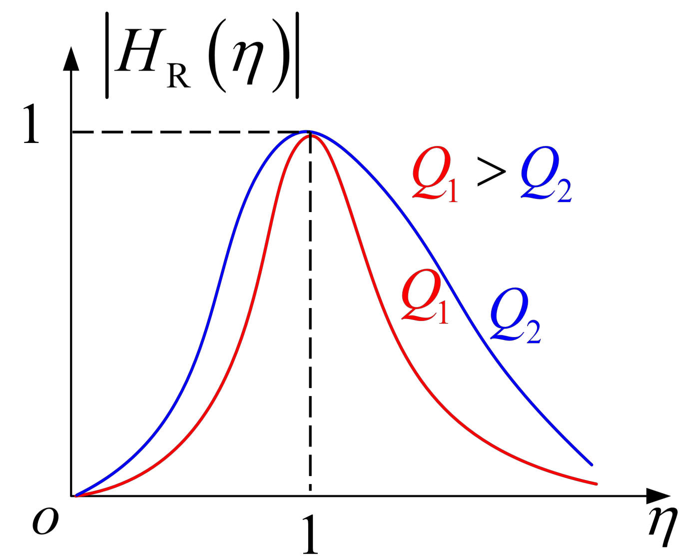
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{1}{R\omega C}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$



$$\frac{\omega}{\omega_0} = \eta \qquad |H_R(\eta)| = 1\Big/\sqrt{1+Q^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}$$

$$|H_R(0)| = 0 \qquad |H_R(\infty)| = 0 \qquad |H_R(1)| = 1$$



Q值越大，频率选择性越好

14.3 谐振电路

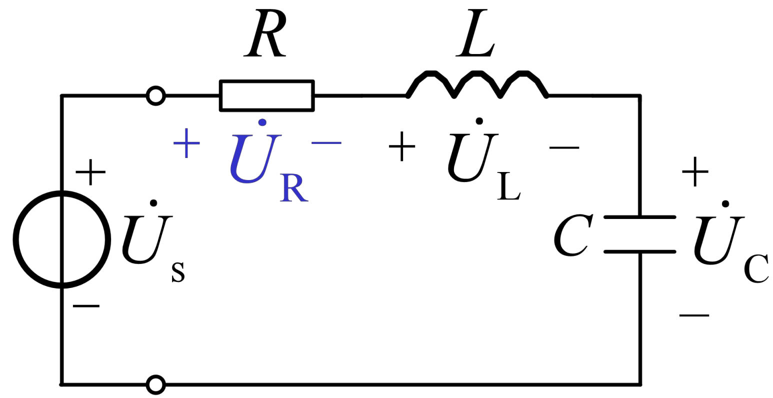
➢谐振电路具有选择性

在谐振点响应出现峰值，当ω偏离ω_0时，输出下降。即**串联谐振电路对不同频率信号有不同的响应，对谐振信号响应最大**，而对远离谐振频率的信号具有抑制能力。这种对不同输入信号的选择能力称为“选择性”。

➢谐振电路的选择性与Q成正比

Q越大，谐振曲线越陡。电路对非谐振频率信号的抑制能力强，所以选择性好。因此，**Q是反映谐振电路性质的一个重要指标。**

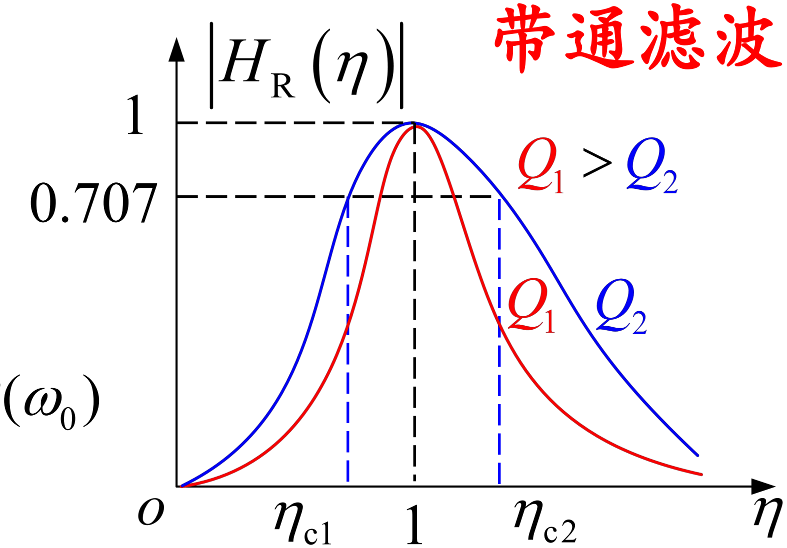
14.3 谐振电路



- 在谐振点电路消耗的有功功率最大；
- 当$|H_R(\eta)|$下降至0.707倍时，信号就被截止了。

$$|H_R(\eta_{c1,c2})| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

带通滤波器



从有功功率角度：

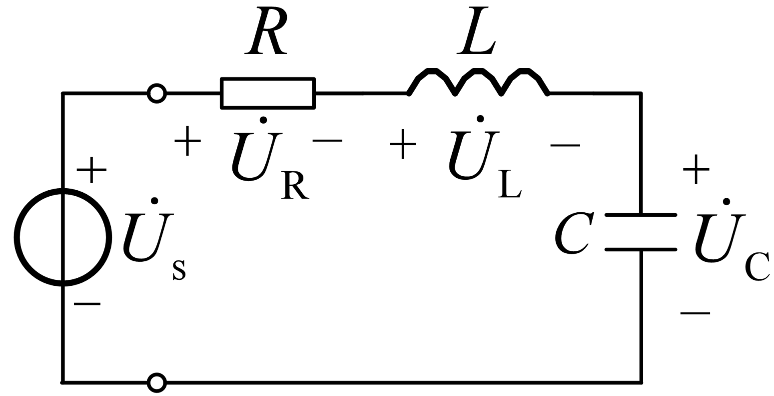
$$P(\omega_{c1,c2}) = \frac{U_R^2}{R} = \frac{(U_S/\sqrt{2})^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{U_S^2}{R} = \frac{1}{2}P(\omega_0)$$

截止频率（半功率频率）

$$\omega_{c1,c2} = \eta_{c1,c2}\omega_0$$

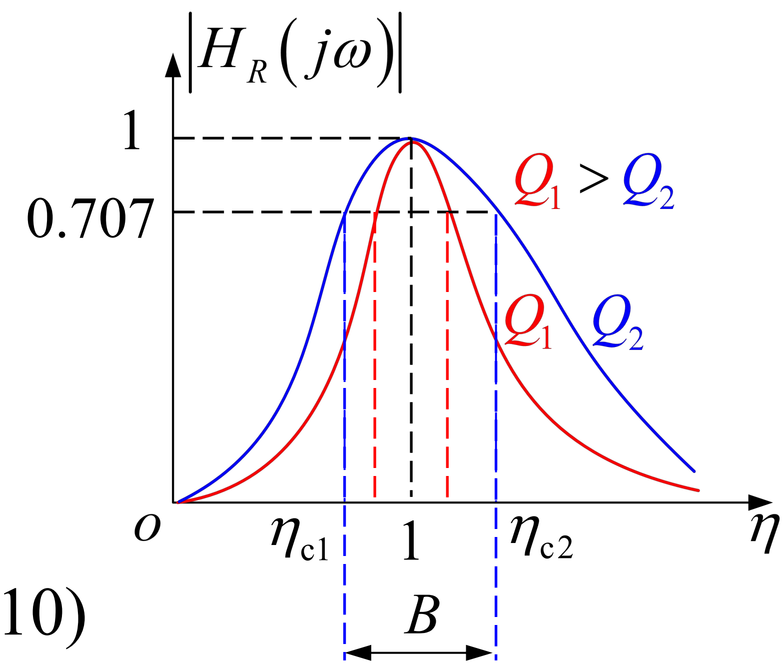
14.3 谐振电路

$$\left|H_R(\eta)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\begin{cases} \eta_{c1} = -\dfrac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \\ \eta_{c2} = \dfrac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \end{cases}$$

带宽 $B = (\eta_{c2} - \eta_{c1})\omega_0 = \dfrac{\omega_0}{Q}$



截止频率 $\omega_{c1,c2} \approx \omega_0 \mp \dfrac{1}{2}B \quad (Q \geq 10)$

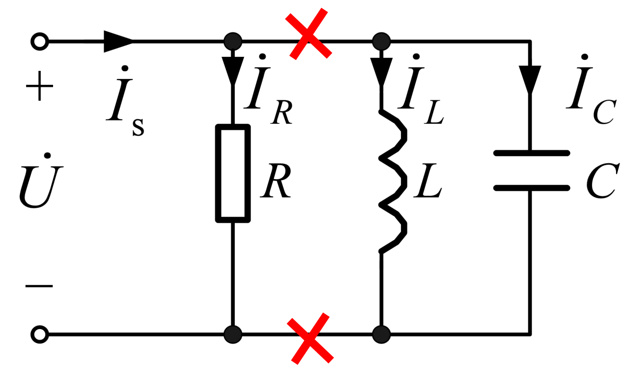
14.3 谐振电路

*RLC*串联谐振的频率响应

谐振频率	$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$
品质因数	$Q=\dfrac{X_{L0}(X_{C0})}{R}=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}=\dfrac{U_{L0}(U_{C0})}{U_S}=2\pi\dfrac{w_0}{w_{R0}}=\dfrac{\omega_0}{B}$
截止频率	$\omega_{c1,c2}=\mp\dfrac{\omega_0}{2Q}+\omega_0\sqrt{1+(\dfrac{1}{2Q})^2}=\mp\dfrac{R}{2L}+\sqrt{(\dfrac{R}{2L})^2+\dfrac{1}{LC}}$ $\omega_{c1,c2}\approx\omega_0\mp\dfrac{B}{2}\quad(Q\geq 10)$
带宽	$B=\omega_{c2}-\omega_{c1}=\dfrac{\omega_0}{Q}=\dfrac{R}{L}$

14.3 谐振电路

3. RLC并联谐振



$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$ 谐振频率

对外相当于开路！

谐振特点：

(1) $|Y(\omega_0)| = G = |Y_{\min}(\omega)|$

(2) $\dot{U}_S$ 和 $\dot{I}_0$ 同相位

(3) $|\dot{U}_0| = \left|\frac{\dot{I}_S}{G}\right| = |\dot{U}_{\max}(\omega)|$

(4) $\dot{U}_{R0} = \dot{I}_S / G$

(5) $\dot{I}_{L0} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 L}\dot{U}_0 = -\mathrm{j}\frac{1}{G\omega_0 L}\dot{I}_s$

$$\dot{I}_{C0} = \mathrm{j}\omega_0 C\dot{U}_0 = \mathrm{j}\frac{\omega_0 C}{G}\dot{I}_s$$

$$I_{L0} = I_{C0} = QI_S$$

截止频率、带宽与串联谐振相同

14.3 谐振电路

	RLC串联谐振	GCL并联谐振
谐振频率	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$	
品质因数	$Q = \dfrac{\omega_0 L}{R} = \dfrac{1}{\omega_0 CR} = \dfrac{\omega_0}{B}$	$Q = \dfrac{1}{\omega_0 LG} = \dfrac{\omega_0 C}{G} = \dfrac{\omega_0}{B}$
截止频率	$\omega_{c1,c2} = \mp\dfrac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{1+(\dfrac{1}{2Q})^2}$ $\omega_{c1,c2} \approx \omega_0 \mp \dfrac{B}{2}\ (Q \geq 10)$	
带宽	$B = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \dfrac{\omega_0}{Q}$	

14.3 谐振电路

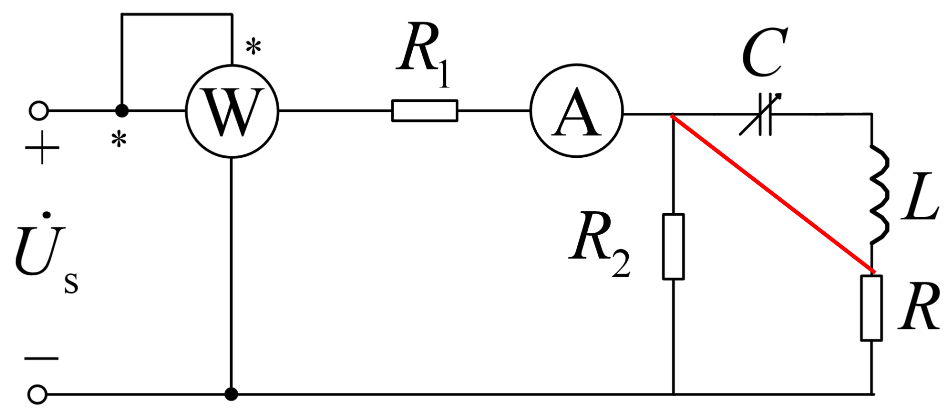
例14-3 电源频率f=100/π Hz，R_1=6 Ω，R_2=20 Ω，当改变电容C=1000 μF时，电流表读数I最大为1A，功率表读数为10 W，试计算电阻R和电感L。

解 电流最大→总阻抗最小

→LC串联谐振

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

⇨ $L = 25\ \text{mH}$

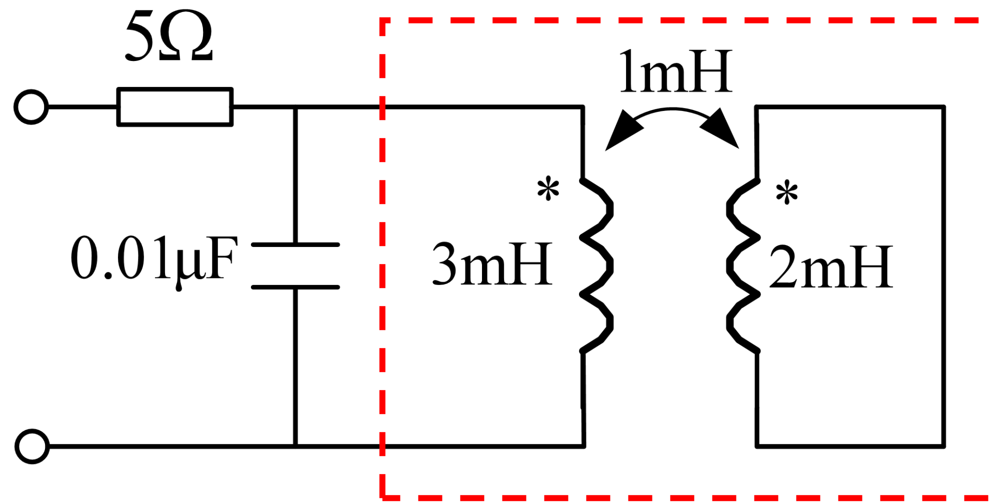


当LC发生串联谐振时，对外相当于短路。

$$P = U_s I = I^2 R_{eq} = I^2 (R_1 + R_2 // R)$$ ⇨ $R = 5\ \Omega$

14.3 谐振电路

例14-4 求如图所示电路发生谐振时的谐振角频率ω_0



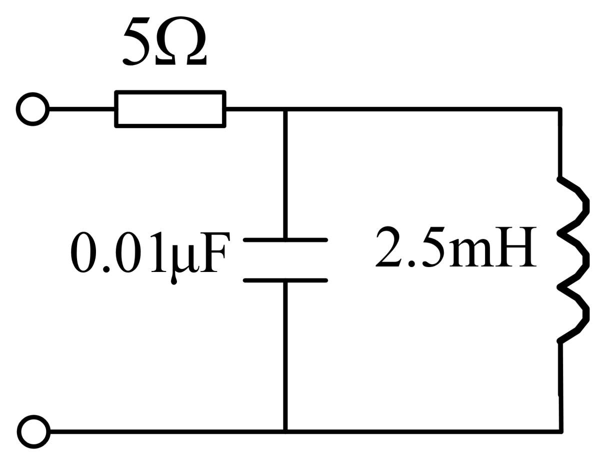
解 映射阻抗法

$$Z_{eq} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2}$$

$$= j\omega\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)$$

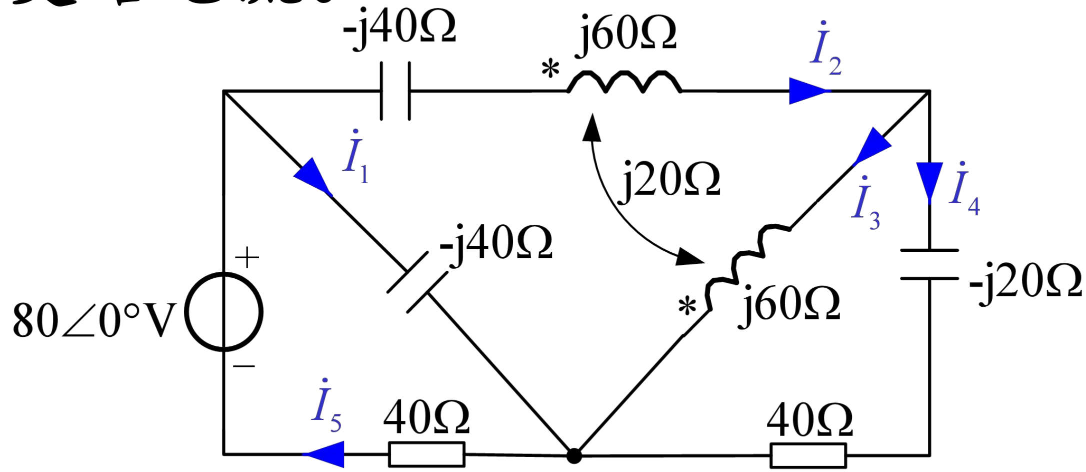
$$L_{eq} = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = 2.5\ \text{mH}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{eq}C}} = 200\ \text{kHz}$$



14.3 谐振电路

例14-5 求图示电路中各支路电流。



解 先去耦。

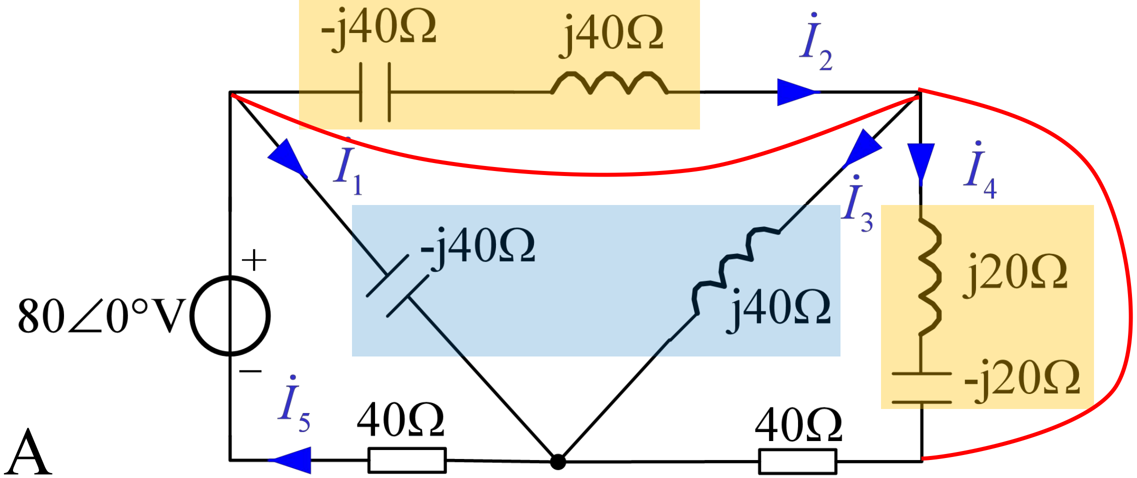
$$\dot{I}_1 + \dot{I}_3 = 0$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_5 = \frac{80\angle 0^\circ}{40+40} = 1\angle 0^\circ\,\text{A}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{40\dot{I}_4}{\text{j}40} = 1\angle -90^\circ\,\text{A}$$

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_3 = 1\angle 90^\circ\,\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = \sqrt{2}\angle -45^\circ\,\text{A}$$



课后作业

- 14.3节：14-9，14-13
- 综合：14-26

谢谢聆听！！

刘旭 2023-5-24