华中科技大学2022～2023学年第一学期

“ 复变函数与积分变换 ”考试试卷(A卷)

考试方式：<u>闭 卷</u>　考试日期：<u>2022-11-13</u>　考试时长：<u>150</u>分钟

院（系）：____________________　专业班级：____________________

学　　号：____________________　姓　　名：____________________

一、单项选择题 (*每题2分，共24分*).

1. 复数$\sqrt{-\frac{1}{2}i}$的值为 (　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(k\pi+\frac{\pi}{4})i}\ (k=0,1)$，　　B．$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(k\pi+\frac{\pi}{4})i}\ (k=0,1)$,

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(k\pi-\frac{\pi}{4})i}\ (k=0,1)$，　　D．$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(k\pi-\frac{3\pi}{4})i}\ (k=0,1)$.

2. 复数 $\ln\left(-\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)$的值为 (　　).

A . $\frac{7}{8}\pi i$，　B . $\frac{5}{8}\pi i$，　C . $\frac{3}{8}\pi i$，　D . $\frac{1}{8}\pi i$.

3. 下列关系不正确的是 (　　).

A . $\overline{e^{z}}=e^{\overline{z}}$,　B. $\overline{\cos z}=\cos\overline{z}$,　C. $\overline{\ln z}=\ln\overline{z}$,　D. $\overline{\sin z}=\sin\overline{z}$.

4. 函数$f(z)=x^2-iy$ 在下面哪个点可导？(　　).

A. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，　B. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，　C. $\frac{1}{2}i$，　D. $-\frac{1}{2}i$.

5. 设C为单位圆周，则积分$\oint_C\frac{1}{z^2\sin(1/z)}dz$的值为(　　).

A．0，　B． 2πi，　C．−2πi，　D．4πi..

6. 若 C 为单位圆周，则积分$\oint_C\frac{e^z}{\cos z}dz$的值为(　　).

A．0，　B．−2πi，　C．2πi，　D．4πi.

7. 级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{e^{n-in}}$的收敛半径为（ ）.

A. 1，　　B. $1/e$，　　C. e^{1-i}，　　D. e .

8. 函数$\frac{z-\sin z}{1-\cos z}+1$在$0<|z|<2\pi$上展开成洛朗级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n$时，系数$a_{-1}$为（ ）.

A. 0，　　B. 1/3，　　C. 1/2，　　D. 1.

9. $z=0$是函数$\frac{1}{1-\cos z}-\frac{2}{z^2}$何种类型的孤立奇点？（ ）.

A 本性奇点，　　B. 二阶极点，　　C. 三阶极点，　　D. 可去奇点.

10. 下列哪种映射在扩充复平面上不是分式线性映射? （ ）

A. $w=6z+1$，　　B. $w=1+1/z$ ，　　C. $w=z+1/z$，　　D. $w=z/3$.

11. 设$f(t)=e^{jt}+\delta(t-1)$，则$f(t)$的 Fourier 变换$F(\omega)$为( ).

A. $e^{-j\omega}+\delta(\omega-1)$，　　B. $e^{-j\omega}+2\pi\delta(\omega-1)$，

C. $e^{-j\omega}-\delta(\omega-1)$，　　D. $e^{-j\omega}-2\pi\delta(\omega-1)$.

12. $\delta(1-t)$ 与 $\sin(t-1)$ 的卷积为( ).

A. $\sin(t-1)$，　　B. $-\sin(t-1)$，　　C. 0，　　D. $\sin(t-2)$.

二、(12 分) 已知解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的实部$u=e^{-x}(x\cos y+y\sin y)$，求解析函数$f(z)$.

三、(12 分) 把函数$f(z)=\frac{z+1}{(z-1)(z-2)}$在下列环域内展开为洛朗级数：

(1) $0<|z-1|<1$,　　(2) $1<|z|<2$.

四、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\int_C(-2y+2xi)dz$, 其中 C 为从原点到$3+i$的直线段.

2. $\oint\limits_{|z|=0.5}\frac{1-\cos z}{z^5(1-z)}\mathrm{d}z$.

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z^{30}}{(z-4)(z^6+1)^5}\mathrm{d}z$，　　　　2. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos x + x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

六、(6 分) 求区域 $D=\{z:|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$ 在映射 $w=\left(\dfrac{z-1}{z+1}e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^2$ 下的像.

（答题过程需用图形表示）

七、(10 分) 求一共形映射 $w=f(z)$，将区域 $D=\{z:1<\operatorname{Re} z<2, \operatorname{Im} z<0\}$ 映射到上半平面.**（答题过程需用图形表示）**

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$$f''(t)-2f'(t)+f(t)=-2\sin t, \quad f(0)=0,\ f'(0)=1.$$

九、 (6 分) 若函数 $f(z)$ 在全平面解析，且有 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)/z=0$. 证明对复平面上任意一点 z_0，都有 $f(z_0)=f(0)$.