基础信息论

信息熵的物理解释

华中科技大学电信学院

学习目标

- 分析信息熵的物理解释
- 计算平均互信息量
- 绘制各种信息熵的维纳图

A. 平均互信息量

问题：有了互信息量，为什么还要求平均?

回答：
$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ P(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_m \\ p(y_1) & \cdots & p(y_m) \end{bmatrix}$$

互信息量只反映了某一对输入、输出消息间信息的流通。我们更希望从平均意义上来衡量信源、信宿间的信息流通。

第一种形式的数学定义及物理意义：

互信息量
$$I(x_i;y_j) = I(x_i) - I(x_i/y_j) = \log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}$$

平均互信息量
$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i y_j)\cdot\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}$$

*

A. 平均互信息量1

接下来，对上述数学定义式进行变形：

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\cdot\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\cdot\log p(x_i)-[-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\cdot\log p(x_i/y_j)]$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\log p(x_i)\cdot\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)-H(X/Y)=-\sum_{i=1}^{n}\log p(x_i)\cdot p(x_i)-H(X/Y)$$

$$=H(X)-H(X/Y)$$ *

通信前对 X 的平均不确定度

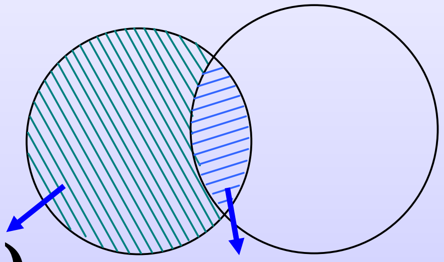
通信后，已知 Y 条件下，对 X 的平均不确定度

对比：

$I(x_i;y_j)=I(x_i)-I(x_i/y_j)$

维拉图

$H(X)$ $H(Y)$



损失熵

$H(X/Y)$

$I(X;Y)$

A. 平均互信息量2

第二种形式的数学定义及物理意义：

互信息量
$$I(y_j;x_i)=I(y_j)-I(y_j/x_i)=\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}$$

平均互信息量
$$I(Y;X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\cdot\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}$$ *

与第一种形式类似，可推导出：

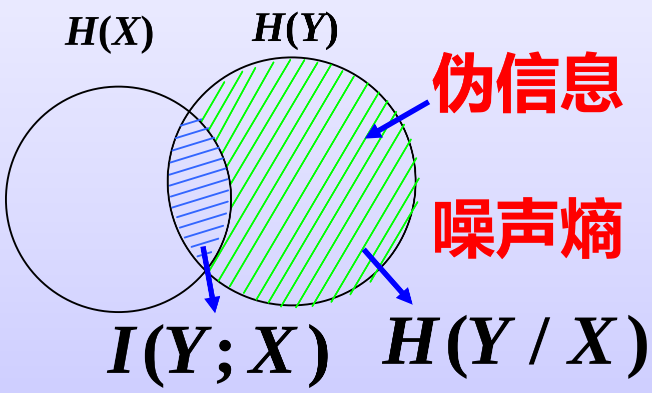
$$I(Y;X)=H(Y)-H(Y/X)$$ *

通信前对 Y 的平均不确定度

通信后，已知 X 条件下，对 Y 的平均不确定度

$$H(Y)=I(Y;X)+H(Y/X)$$

维拉图



A. 平均互信息量3

第三种形式的数学定义及物理意义：

互信息量

$$I(x_i;y_j)=[I(x_i)+I(y_j)]-I(x_iy_j)=\log\frac{p(x_iy_j)}{p(x_i)p(y_j)}$$

平均互信息量

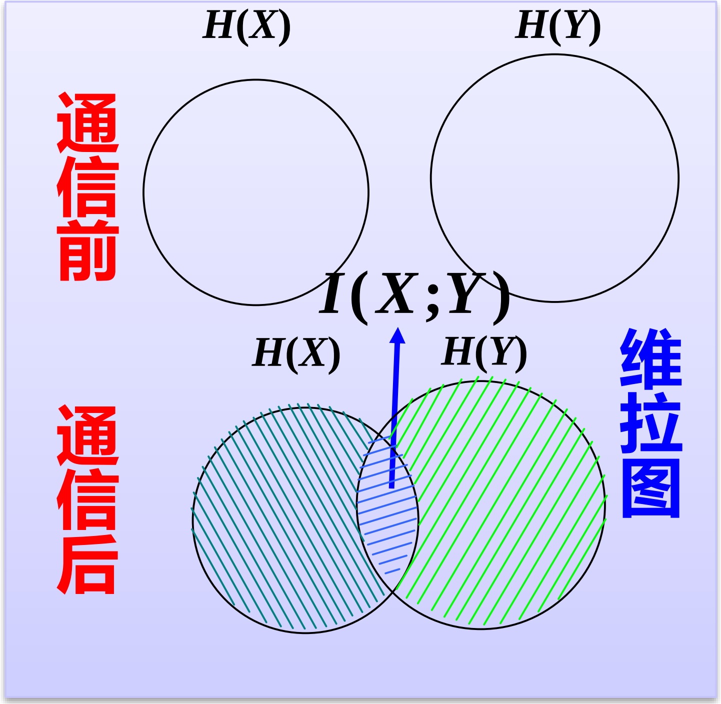
$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\cdot\log\frac{p(x_iy_j)}{p(x_i)p(y_j)} \quad *$$

与前两种形式类似，可推导出：

$$I(X;Y)=[H(X)+H(Y)]-H(XY) \quad *$$

通信前对系统整体的平均不确定度

通信后对系统整体的平均不确定度



平均互信息的性质

1. 对称性(互易性) $I(X;Y)=I(Y;X)$

依据： $I(x_i;y_j)=I(y_j;x_i)$

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\cdot I(x_i;y_j) \quad I(Y;X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\cdot I(y_j;x_i)$$

2. 非负性 $I(X;Y)\geq 0$

比较： $I(x_i;y_j)$ 可正可负

证明：利用平均互信息量的第三种形式

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\cdot\log\frac{p(x_iy_j)}{p(x_i)p(y_j)}$$ 两边同乘以-1

平均互信息的性质（续）

接下来要证明：

$$-I(X;Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\cdot\log\frac{p(x_i)p(y_j)}{p(x_iy_j)}\leq 0$$

接下来利用自然对数的性质：

$$\ln x\leq x-1$$

$$-I(X;Y)\leq \log e\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\cdot[\frac{p(x_i)p(y_j)}{p(x_iy_j)}-1]$$

$$=\log e\cdot[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i)p(y_j)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)]$$

$$=\log e\cdot[\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\cdot\sum_{j=1}^{m}p(y_j)-1]=0$$

物理意义： 从平均意义而言，通过随机变量 Y 可间接获得一些关于 X 的信息，最差情况为 0 。不会出现由于 Y 的发生，使 X 的不确定度反而增加。

平均互信息的性质（续）

3. 极值性

$$I(X;Y) \le H(X)$$

$$I(Y;X) \le H(Y)$$

证明：

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y)$$

$$I(Y;X) = H(Y) - H(Y/X)$$

条件熵有什么性质?

$$\because \quad H(X/Y) \ge 0, H(Y/X) \ge 0$$

$$\therefore \quad I(X;Y) \le H(X), I(X;Y) \le H(Y)$$

物理意义：

信宿 Y 通过信道获得的关于信源 X 的信息至多是信源熵 $H(X)$；反之亦然。

极值性讨论

- 问题：以上两个式子中，何时等式成立?
- 分析：因为 $I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)\le H(X)$

  $I(Y;X)=H(Y)-H(Y/X)\le H(Y)$

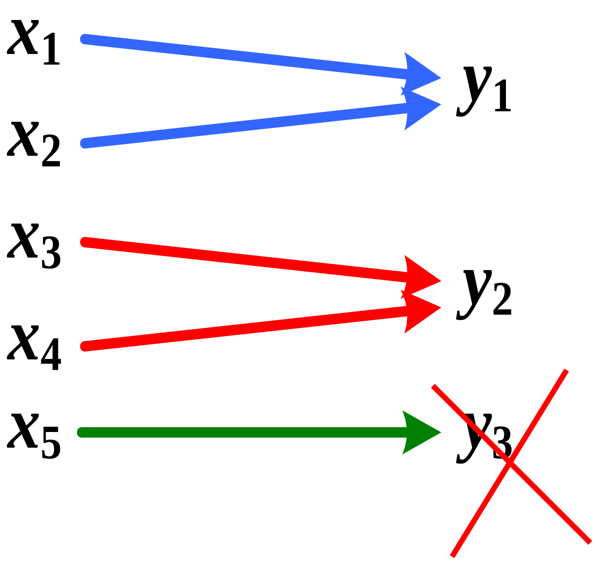
- 分别讨论
- (1) 当 $H(X/Y)=0$ 时，$I(X;Y)$ 取得最大 $H(X)$。

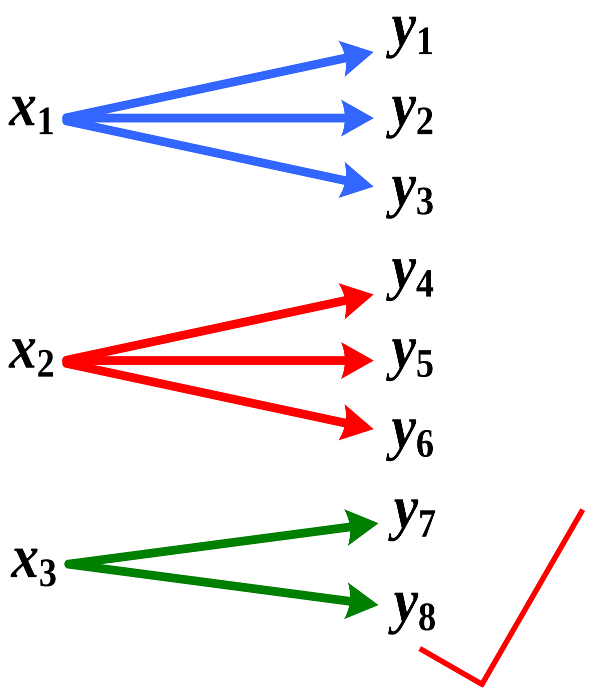
转化为：损失熵 $H(X/Y)$ 什么情况下等于零?

要求：已知 Y 时，X 跟着完全确定。

极值性讨论（续）

以下信道是否符合要求?





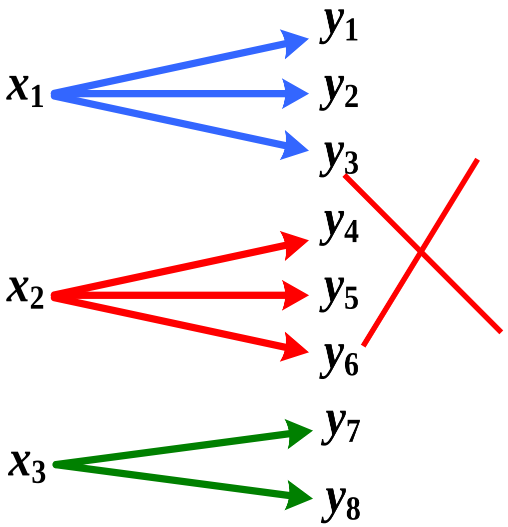
要求：每条输出消息只能对应一条输入消息；但一条输入消息可以对应多条输出消息。（无损信道）

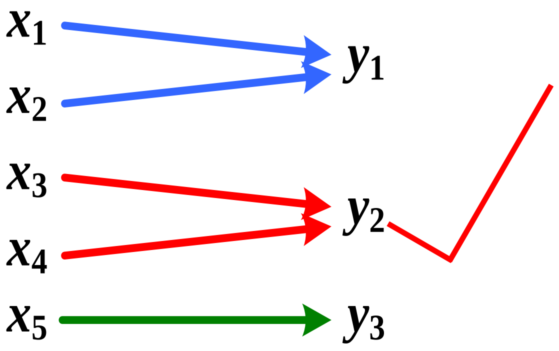
极值性讨论（续）

(2) 当$H(Y/X)=0$时，$I(Y;X)$取得最大值 $H(Y)$。

转化为：噪声熵 $H(Y/X)$ 什么情况下等于零?

要求：已知 X 时，Y 跟着完全确定。





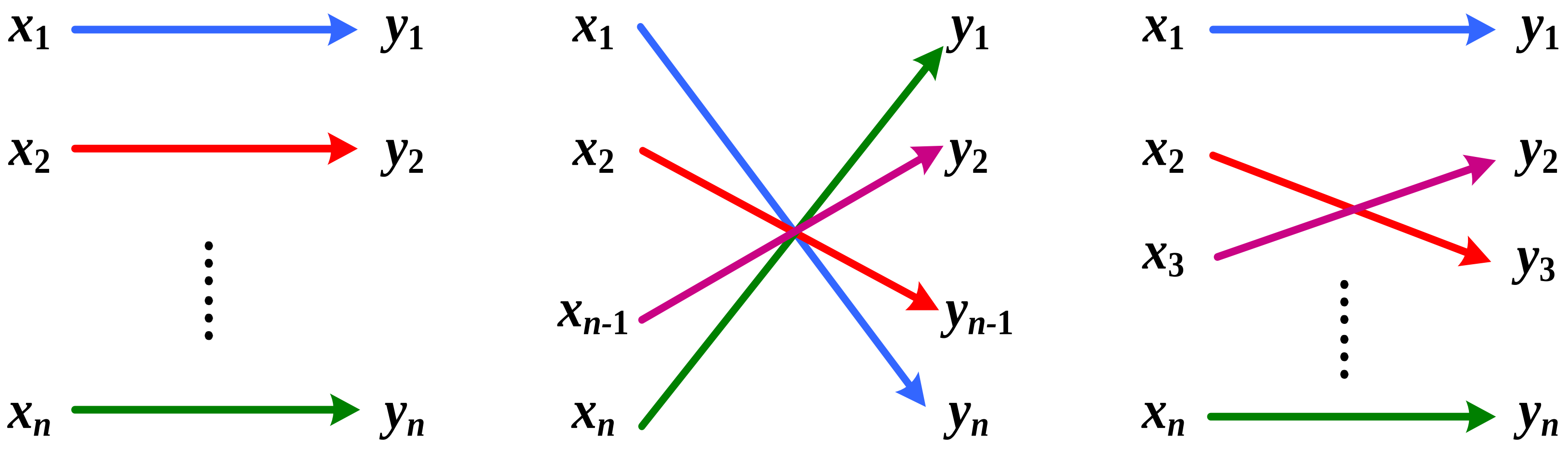
要求：每条输入消息只能对应一条输出消息；但一条输出消息可以对应多条输入消息。

(无噪信道)

极值性讨论（续）

问题：当要求 $H(X/Y)=0$ 和 $H(Y/X)=0$ 同时满足时，对应什么类型的信道?

回答：一一对应信道（无噪无损信道）。



(a) (b) (c)

平均互信息的性质（续）

4. 凸函数性

$I(X;Y)$是谁的函数
性质的具体内容
性质的应用

(1) $I(X;Y)$ 是谁的函数

根据平均互信息量的第二种形式，有：

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i y_j)\cdot\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}$$ 站在信源端

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i)\cdot p(y_j/x_i)\cdot\log\frac{p(y_j/x_i)}{\sum_{k=1}^{n}p(x_k)\cdot p(y_j/x_k)}$$

凸函数性

$$\therefore \quad I(X;Y)=f[p(x_i),p(y_j/x_i)] \qquad i=1,\ldots,n \quad j=1,\ldots,m$$

信源概率分布，向量

输入输出的条件概率/信道传递概率分布，矩阵

1. 如果固定信道，调节信源，则有：

$$I(X;Y)=f[p(x_i)]$$

2. 如果固定信源，调节信道，则有：

$$I(X;Y)=f[p(y_j/x_i)]$$

凸函数性(续)

(2) 凸函数性质的具体内容

当信道固定时，$I(X;Y)$是关于 $p(x_i)$的上凸函数

$$I[\alpha p_1(x_i)+(1-\alpha)\cdot p_2(x_i)] \geq \alpha\cdot I[p_1(x_i)]+(1-\alpha)\cdot I[p_2(x_i)]$$

该性质是研究信道容量的理论基础

当信源固定时，$I(X;Y)$是关于$p(y_j/x_i)$的下凸函数

$$I[\alpha p_1(y_j/x_i)+(1-\alpha)\cdot p_2(y_j/x_i)] \leq \alpha\cdot I[p_1(y_j/x_i)]+(1-\alpha)\cdot I[p_2(y_j/x_i)]$$

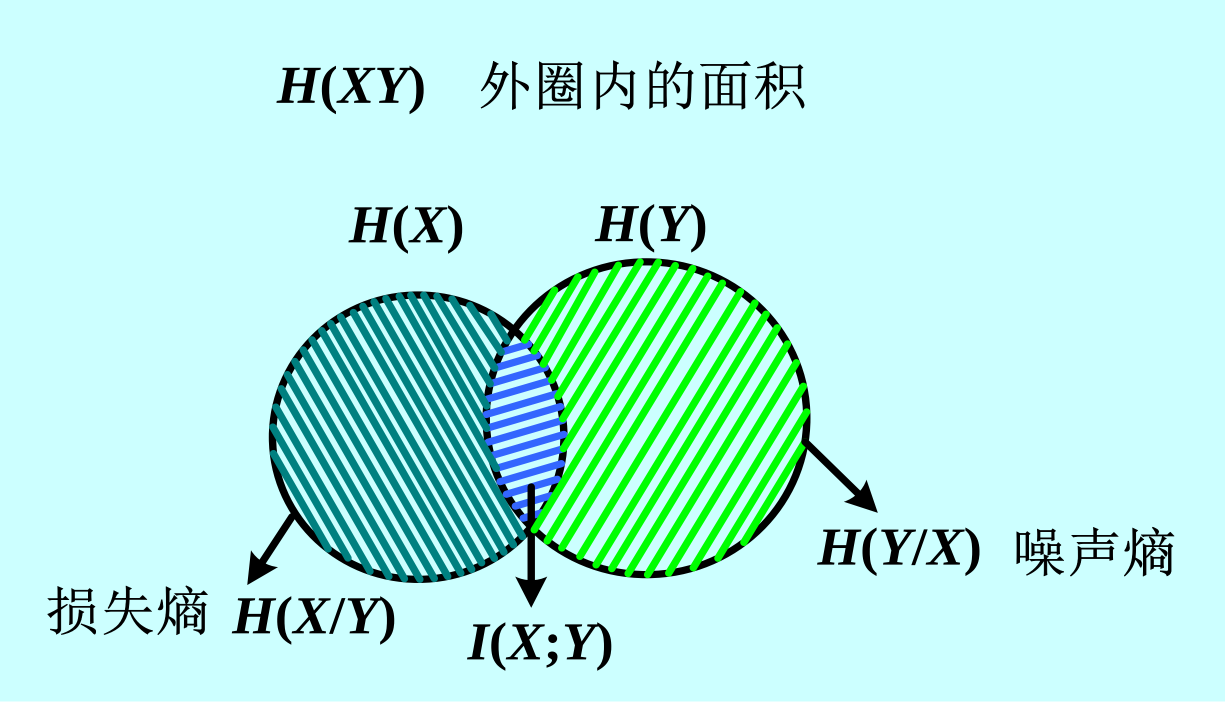
该性质是研究率失真函数的理论基础

平均互信息和各类熵的关系

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)$$

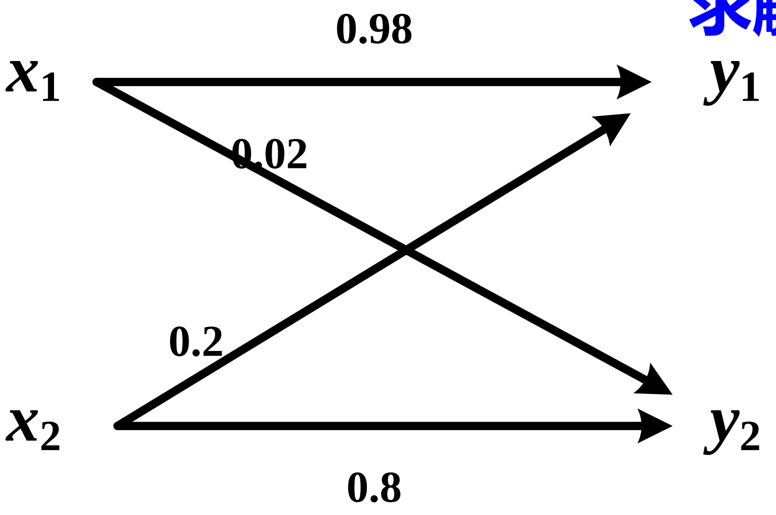
$$I(Y;X)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$I(X;Y)=[H(X)+H(Y)]-H(XY)$$



例题1

- 把已知信源 $\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ 接到如图所示的信道上。
- 计算在该信道上传输的平均互信息量 $I(X;Y)$，损失熵 $H(X/Y)$，噪声熵 $H(Y/X)$ 和联合熵 $H(XY)$。



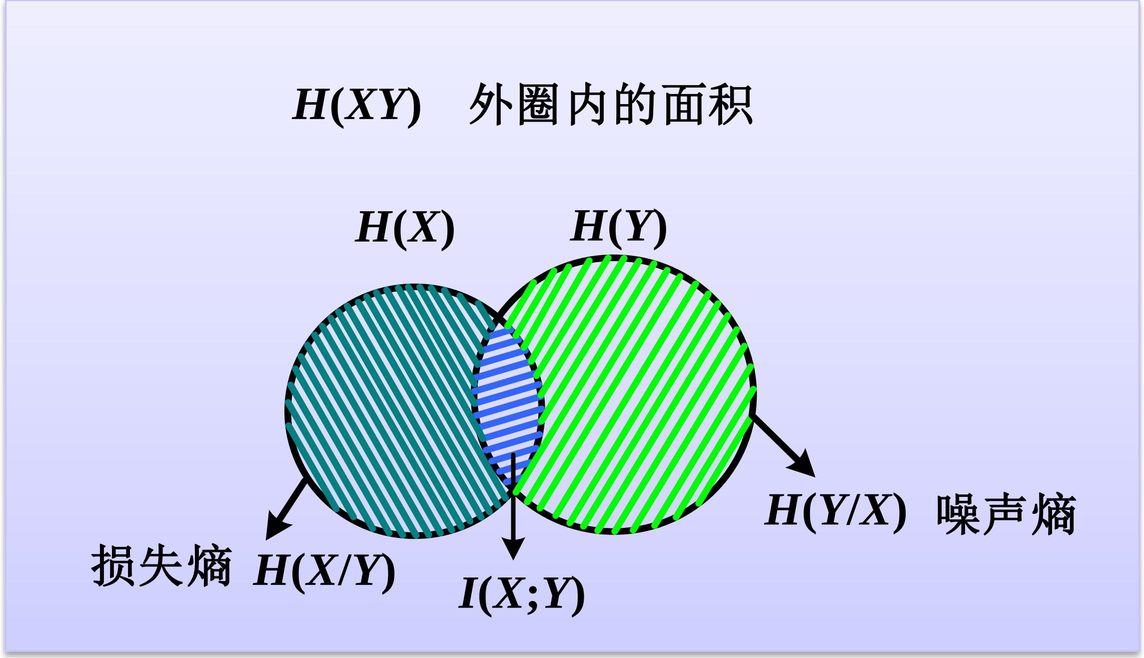
求解思路： $P(X) \Rightarrow H(X)$

$$\left\{\begin{matrix} P(X) \\ P(Y/X) \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} P(Y) \Rightarrow H(Y) \\ P(XY) \Rightarrow H(XY) \end{matrix}\right.$$

$$H(X), H(Y), H(XY)$$

$$\Downarrow$$

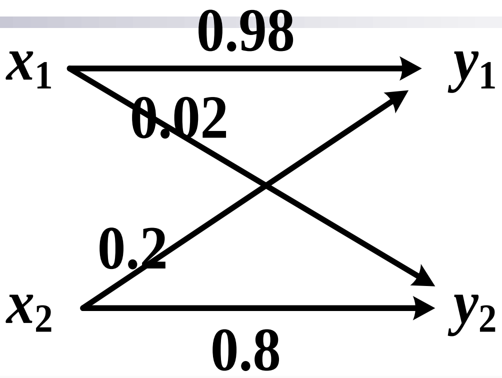
$$I(X;Y), H(X/Y), H(Y/X)$$



共有： $H(X)\ H(Y)\ H(XY)\ H(X/Y)\ H(Y/X)\ I(X;Y)$

知道其中三个，可计算出另三个。

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$



解：(1) 由 $P(X)$ 计算 $H(X)$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot \log p(x_i) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1}{2} = 1 \text{ 比特/符号}$$

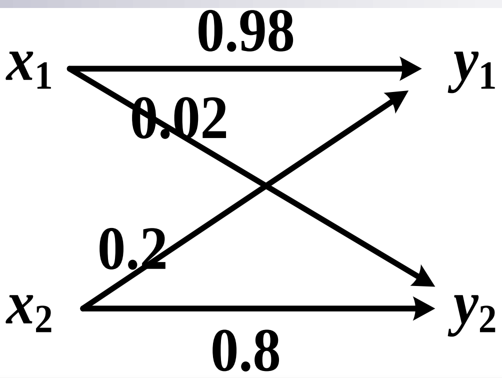
(2) 由 $P(X)$ 和 $P(Y/X)$ 计算 $P(Y)$ 和 $H(Y)$

$$p(y_1) = p(x_1) \cdot p(y_1/x_1) + p(x_2) \cdot p(y_1/x_2) = 0.5 \cdot 0.98 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.59$$

$$p(y_2) = p(x_1) \cdot p(y_2/x_1) + p(x_2) \cdot p(y_2/x_2) = 0.5 \cdot 0.02 + 0.5 \cdot 0.8 = 0.41$$

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{n} p(y_i) \cdot \log p(y_i) = -0.59 \cdot \log 0.59 - 0.41 \cdot \log 41 = 0.98 \text{ 比特/符号}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$



(3) 由 $P(X)$ 和 $P(Y/X)$ 计算 $P(XY)$ 和 $H(XY)$

$$p(x_1y_1) = p(x_1)\cdot p(y_1/x_1) = 0.5\cdot 0.98 = 0.49$$

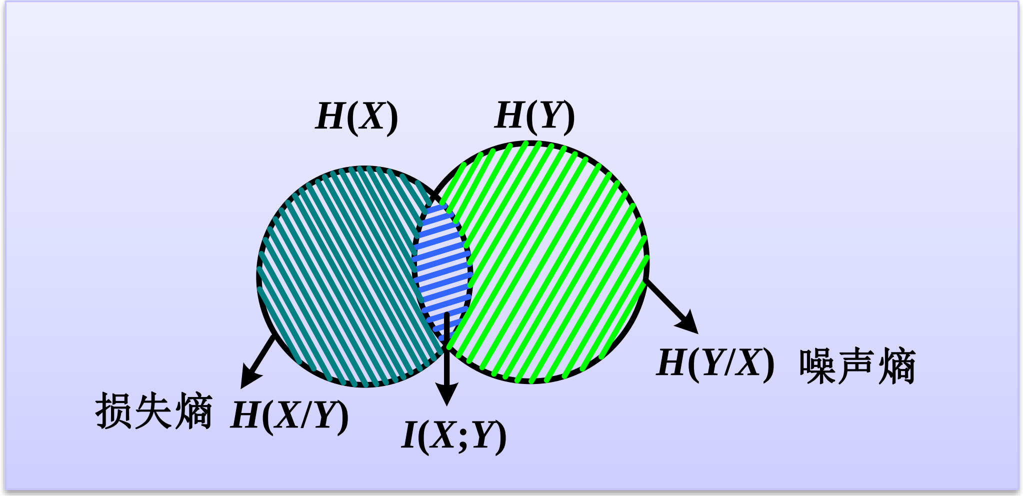
$$p(x_1y_2) = p(x_1)\cdot p(y_2/x_1) = 0.5\cdot 0.02 = 0.01$$

$$p(x_2y_1) = p(x_2)\cdot p(y_1/x_2) = 0.5\cdot 0.2 = 0.1$$

$$p(x_2y_2) = p(x_2)\cdot p(y_2/x_2) = 0.5\cdot 0.8 = 0.4$$

$$H(XY) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_iy_j)\cdot\log p(x_iy_j) = -0.49\cdot\log 0.49$$

$$-0.01\cdot\log 0.01 - 0.1\cdot\log 0.1 - 0.4\cdot\log 0.4 = 1.43$$ 比特/符号



(4) 由 $H(X), H(Y), H(XY)$ 计算 $I(X;Y), H(X/Y), H(Y/X)$

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$$

$$= 1 + 0.98 - 1.43 = 0.55 \quad \text{比特/符号}$$

$$H(X/Y) = H(X) - I(X;Y)$$

$$= 1 - 0.55 = 0.45 \quad \text{比特/符号}$$

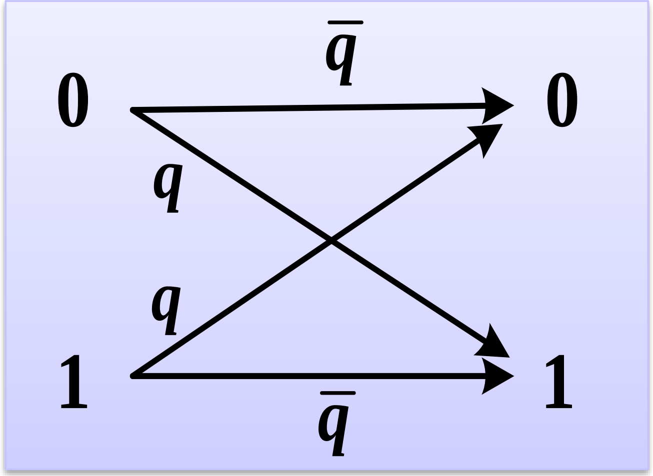
$$H(Y/X) = H(Y) - I(X;Y)$$

$$= 0.98 - 0.55 = 0.43 \quad \text{比特/符号}$$

例题2

设二进制对称信道的输入概率空间为:

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ \bar{p} = 1 - p & p \end{Bmatrix}$$，信道转移图为



计算：当信道固定时，$I(X;Y)$ 的变化规律。

解：当信道固定(q 固定)时，$I(X;Y)$是关于 p 的函数。

利用第二种形式 $I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$ 进行计算。

首先计算 $H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i y_j) \cdot \log p(y_j / x_i)$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)\cdot p(y_j/x_i)\cdot \log p(y_j/x_i)$$

$$\begin{array}{c|cc} & Y=0 & Y=1 \\ \hline X=0 & \bar{q} & q \\ X=1 & q & \bar{q} \end{array}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\cdot \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)\cdot \log p(y_j/x_i)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\cdot[\bar{q}\log\bar{q} + q\log q]$$

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ \bar{p} & p \end{Bmatrix}$$

$$= -\bar{q}\log\bar{q} - q\log q = \underline{H(q)}$$

简化表示符号

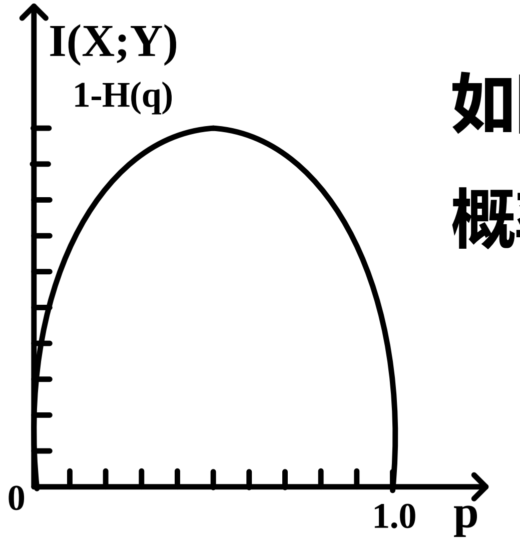
接下来计算 $H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\log p(y_j)$

$$p(y=0) = p(x=0)\cdot p(y=0/x=0) + p(x=1)\cdot p(y=0/x=1) = \bar{p}\cdot\bar{q} + p\cdot q$$

$$p(y=1)=p(x=0)\cdot p(y=1/x=0)$$
$$+p(x=1)\cdot p(y=1/x=1)=\bar{p}\cdot q+p\cdot\bar{q}$$

$$H(Y)=-(\bar{p}\cdot\bar{q}+p\cdot q)\log(\bar{p}\cdot\bar{q}+p\cdot q)$$
$$-(\bar{p}\cdot q+p\cdot\bar{q})\log(\bar{p}\cdot q+p\cdot\bar{q})=H(\bar{p}\cdot\bar{q}+pq)$$

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=H(\bar{p}\cdot\bar{q}+pq)-H(q)$$



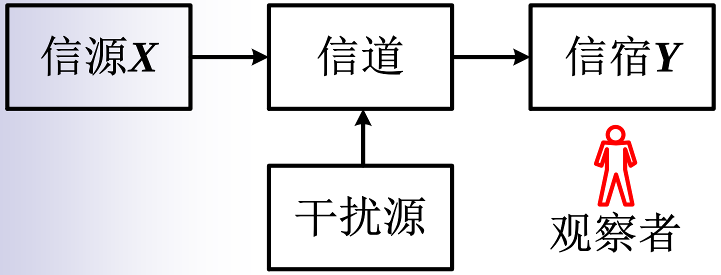
熵函数

如图为二进制对称信道的情况，可知，输入呈等概率分布：$p=\bar{p}=\frac{1}{2}$ 时，平均互信息量**最大**。

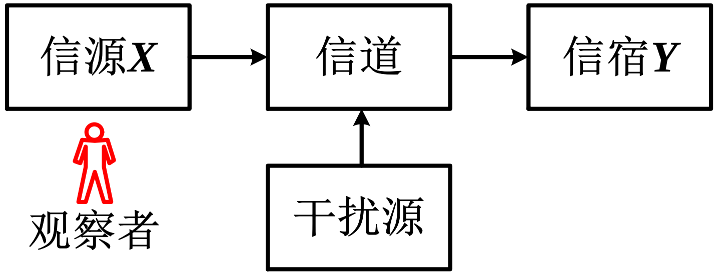
总结

- 从微观/宏观角度分析互信息量的物理解释，结果自洽

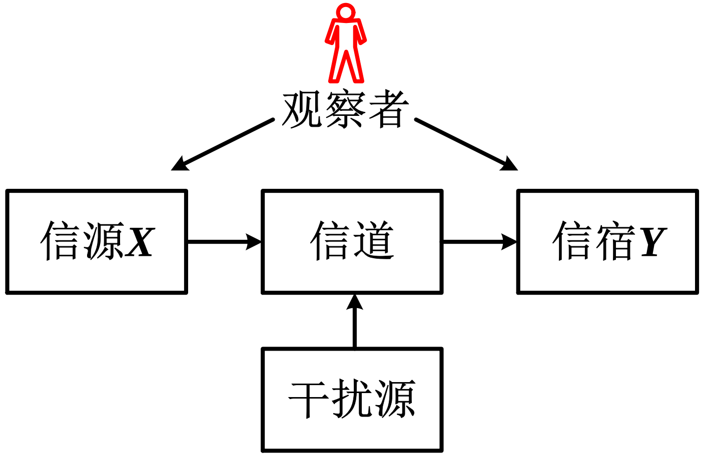
$$I(x_i;y_j)=I(x_i)-I(x_i/y_j)=\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}$$



$$I(y_j;x_i)=I(y_j)-I(y_j/x_i)=\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}$$



$$I(x_i;y_j)=\log\frac{p(x_iy_j)}{p(x_i)\cdot p(y_j)}$$



$$I(x_i;y_j)=I(y_j;x_i)$$

$$I(x_i;y_j)=I(x_i)+I(y_j)-I(x_i,y_j)$$

$$I(X;Y)=\sum_{x_i}\sum_{y_j}p(x_i;y_j)I(x_i;y_j)$$

谢谢！

黑晓军
华中科技大学
电子信息与通信学院
Email: heixj@hust.edu.cn
网址： http://eic.hust.edu.cn/aprofessor/heixiaojun

参考资料

- 陈运，信息论与编码（第三版）第4章，电子工业出版社，2015