第三章 复变函数的积分

§3.1 复积分的概念

§3.2 柯西积分定理

§3.3 柯西积分公式

§3.4 解析函数的高阶导数

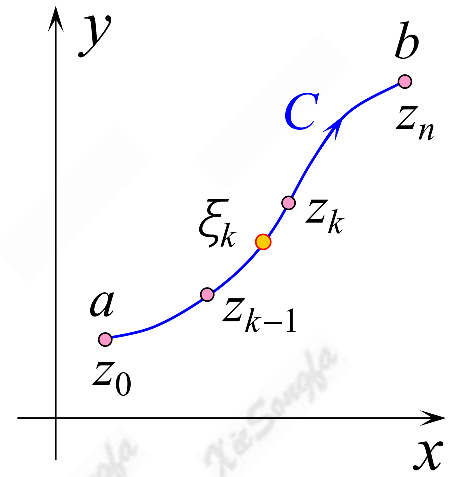
§ 3.1 复积分的概念

一、复积分的定义

二、复积分的性质

三、复积分的计算

一、复积分的定义



定义 设 C 为一条光滑的简单曲线，其方向从 a 到 b，函数 $f(z)$ 在 C 上有定义，

P46 定义 3.1

(1) 将曲线 C 任意划分：

$$z_0 = a,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n = b,$$

记 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，$\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} |\Delta z_k|$，

(2) 在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 上，任取一点 $\xi_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$，

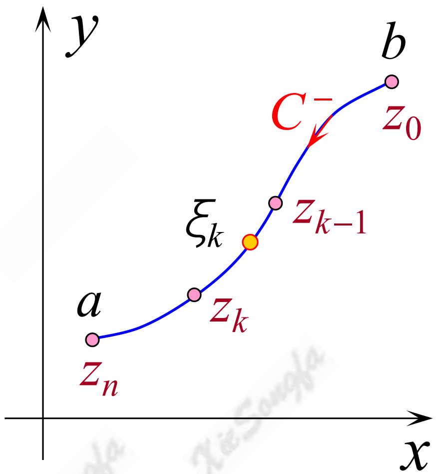
若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ 存在（不依赖 C 的划分和 ξ_k 的选取），

则称之为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

一、复积分的定义

● 几点说明:

(1) $\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ 表示沿 C 的负方向积分。



- 与沿 C 的(正)方向积分相比,

  由于求和式 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ 中的

  增量 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ 反号,从而结果也反号。

(2) $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$ 表示沿闭曲线 Γ 积分。

- 此时,如果 Γ 没有指定方向,则沿闭曲线所约定的的正向(即逆时针方向)进行积分。

二、复积分的性质 P 49

(1) $\int_C [\alpha f(z)+\beta g(z)]\mathrm{d}z=\alpha\int_C f(z)\mathrm{d}z+\beta\int_C g(z)\mathrm{d}z$.

(2) $\int_C f(z)\mathrm{d}z=-\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$.

(3) $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$,

其中，$C=C_1+C_2$.

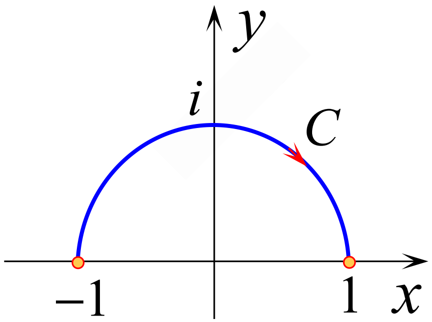
(4) $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C |f(z)||\mathrm{d}z|=\boxed{\int_C |f(z)|\mathrm{d}s}\le ML$,

其中，$M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|$,

L 为曲线 C 的弧长。

第一类曲线积分

例 估计 $\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z$ 的模的一个上界，其中 C 如图所示。



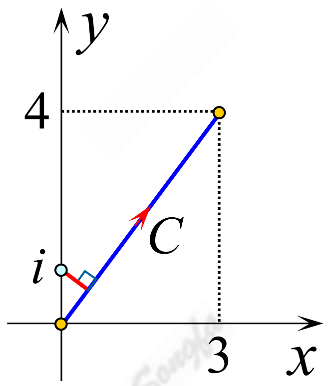
解 $\left|\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z\right| \le \int_C \left|\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right| |\mathrm{d}z|$

$$= \int_C \frac{|\mathrm{e}^z|}{|z|}\mathrm{d}s = \int_C |\mathrm{e}^x|\mathrm{d}s$$

$$= \int_C \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}s \le \mathrm{e}\pi .$$

例 估计 $\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$ 的模的一个上界，其中 C 如图所示。

P50 例 3.4



解 曲线 C： $z = 3t + i4t$， $t: 0 \to 1$，

$$|z-i| = |3t + i(4t-1)|$$

$$= \sqrt{(3t)^2 + (4t-1)^2}$$

$$= \sqrt{25t^2 - 8t + 1}$$

$$= \sqrt{25\left(t - \frac{4}{25}\right)^2 + \frac{9}{25}} \geq \frac{3}{5}.$$

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \leq \int_C \frac{1}{|z-i|}\mathrm{d}s \leq \frac{5}{3}\cdot 5 = \frac{25}{3}.$$

例 试证 $\lim\limits_{r\to 0}\oint_{|z|=r}\dfrac{z^3}{1+z^2}\mathrm{d}z=0.$

P50例 3.5

证 不妨设 $r<1$,

$$|1+z^2|\geq\big|1-|z|^2\big|$$

$$0\leq\left|\oint_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}\mathrm{d}z\right|\leq\oint_{|z|=r}\frac{|z|^3}{|1+z^2|}\mathrm{d}s$$

$$\leq\oint_{|z|=r}\frac{|z|^3}{\big|1-|z|^2\big|}\mathrm{d}s=\frac{2\pi r^4}{1-r^2}\to 0,\ (r\to 0).$$

即 $\lim\limits_{r\to 0}\oint_{|z|=r}\dfrac{z^3}{1+z^2}\mathrm{d}z=0.$

三、复积分的计算

方法一 化为第二类曲线积分 P47 定理3.1

(推导)

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)$$

$$=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y.$$

- 进一步可化为定积分或者二重积分。

温习 格林(Green)公式

设 D 为单连域，边界 C 分段光滑，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 $\overline{D}=D+C$ 上的偏导数连续，则

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

三、复积分的计算

方法二 直接化为定积分 P 47

设曲线 $C: z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$，$t: a \to b$，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中，$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$.

附 其它方法(后面的章节介绍)

- 利用原函数计算，即 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$.
- 利用柯西积分公式、高阶导公式计算。
- 利用留数计算。

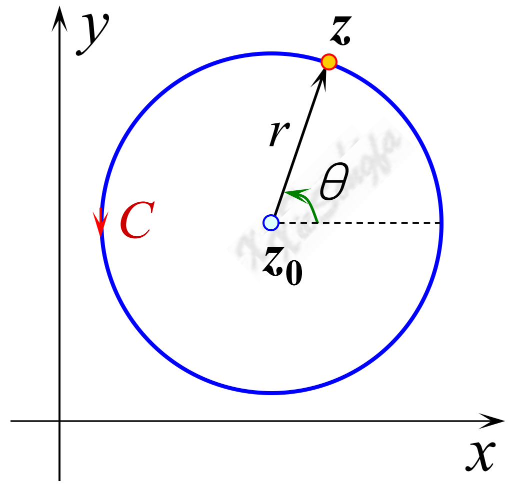
例 计算 $I=\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$，其中，$C$ 为 $|z-z_0|=r$，n 为整数。

P48 例 3.2

解 曲线 C 的参数方程为 $z=z_0+r\mathrm{e}^{i\theta}$，$\theta:0\to 2\pi$,

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{e}^{i\theta}\,i}{(r\mathrm{e}^{i\theta})^n}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(1-n)\theta}\mathrm{d}\theta,$$



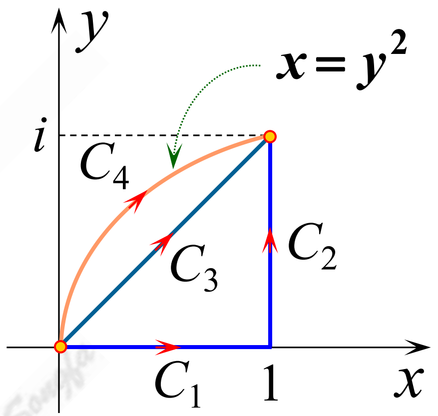
当 $n=1$ 时，$I=2\pi i$;

当 $n\neq 1$ 时，$I=\dfrac{i}{i(1-n)r^{n-1}}\mathrm{e}^{i(1-n)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0.$

注 此例的结果非常重要!

例 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为(如图)： P49 例 3.3 补充

(1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$； (3) $C=C_4$.



解 (1) 曲线 C_1 的方程为 $z=x$，$x:0\to 1$，

曲线 C_2 的方程为 $z=1+iy$，$y:0\to 1$，

$$I=\int_{C_1} z\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} z\,\mathrm{d}z,$$

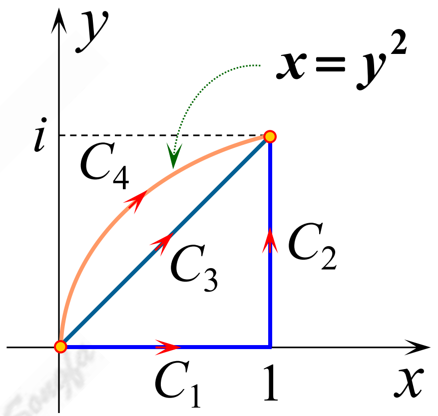
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 (1+iy)\,\mathrm{d}(1+iy)$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 i(1+iy)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\left(iy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1=i.$$

例 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为(如图)： P49 例 3.3 补充

(1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$； (3) $C=C_4$.



解 (2) 曲线 C_3 的方程为 $z=t+it$，$t:0\to 1$，

$$I=\int_{C_3} z\,\mathrm{d}z$$

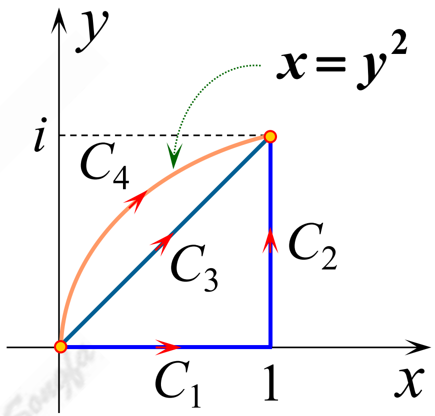
$$=\int_0^1 (t+it)\,\mathrm{d}(t+it)$$

$$=(1+i)(1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2i\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1=i.$$

例 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为(如图)： P49 例 3.3 补充

(1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$； (3) $C=C_4$.



解 (3) 曲线 C_4 的方程为 $z=t^2+it$，$t:0\to 1$，

$$I=\int_{C_4} z\,\mathrm{d}z$$

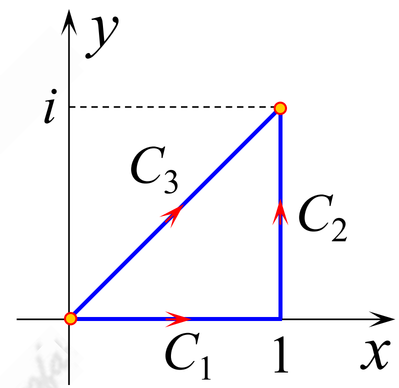
$$=\int_0^1 (t^2+it)\,\mathrm{d}(t^2+it)$$

$$=\frac{1}{2}(t^2+it)^2\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(1+i)^2=i.$$

例 计算 $I=\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$，其中 C 为：(1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$.

P48 例 3.1 修改



解 (1) 曲线 C_1 的方程为 $z=x$，$x:0\to1$，

曲线 C_2 的方程为 $z=1+iy$，$y:0\to1$，

$$I=\int_{C_1}\overline{z}\,\mathrm{d}z+\int_{C_2}\overline{z}\,\mathrm{d}z,$$

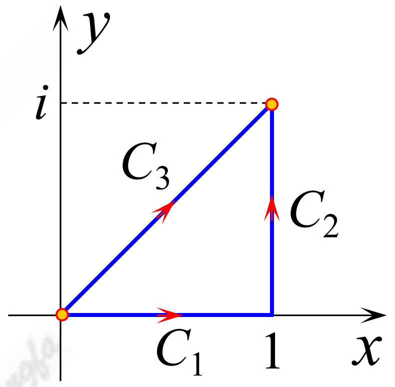
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1(1-iy)\,\mathrm{d}(1+iy)$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 i(1-iy)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\left(iy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1=1+i.$$

例 计算 $I=\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$，其中 C 为：(1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$.

P48 例 3.1 修改



解 (2) 曲线 C_3 的方程为 $z=t+it$， $t:0\to 1$，

$$I=\int_{C_3}\overline{z}\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 (t-it)\,\mathrm{d}(t+it)$$

$$=(1-i)(1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 \;=1.$$

§3.2 柯西积分定理

一、柯西基本定理

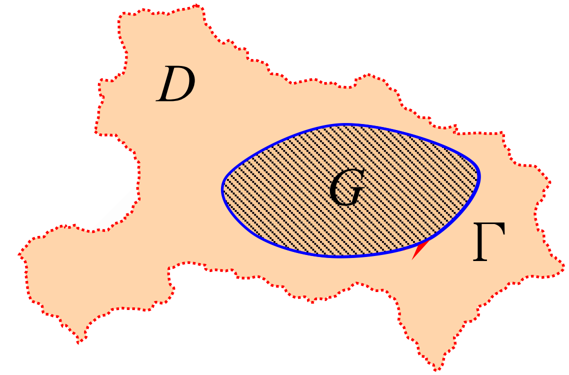
二、闭路变形原理

三、复合闭路定理

四、路径无关性

五、原函数

一、柯西基本定理



定理 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，

P51 定理 3.2

Γ 为 D 内的任意一条简单闭曲线，

则有 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

证明 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma}(u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\oint_{\Gamma}(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$

$$\overset{\text{Green 公式}}{=\!=\!=\!=} -\iint_G\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

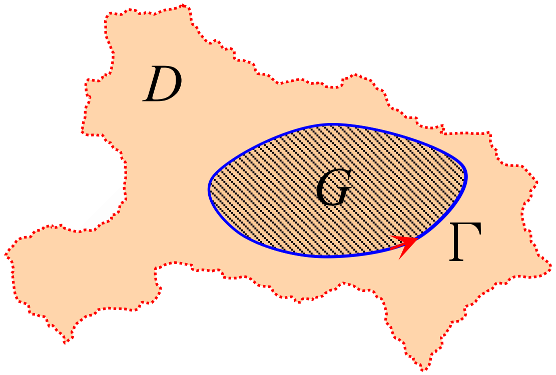
$$\overset{\text{C-R 方程}}{=\!=\!=\!=} 0.$$

- 上述定理又称为柯西–古萨 (Cauchy–Goursat) 基本定理。

一、柯西基本定理

定理 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，Γ 为 D 内的任意一条简单闭曲线，则有 $\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

P51 定理 3.2

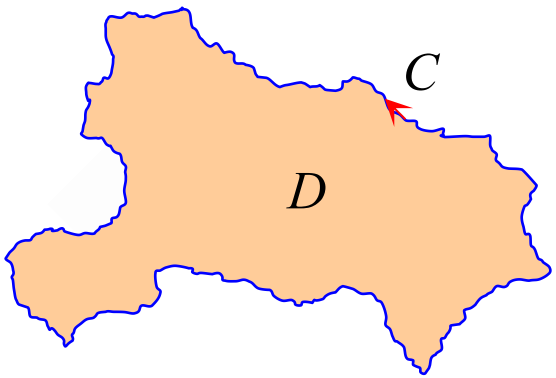


注 (1) 定理中的曲线 Γ 可以不是简单闭曲线。

(2) 定理中的条件还可以进一步减弱。

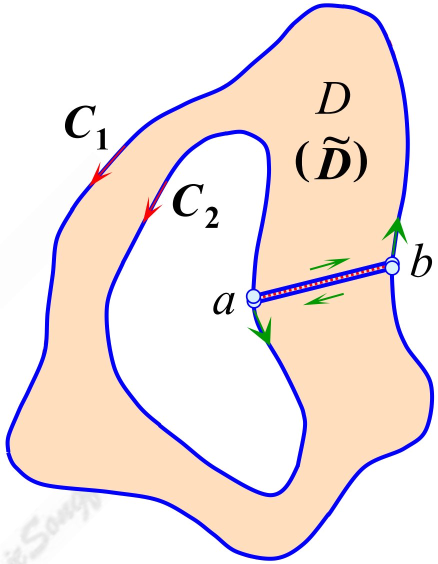
定理 设单连域 D 的边界为 C，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D} = D + C$ 上连续，则有 $\oint_{C} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

P 52 [注]



二、闭路变形原理

- 将柯西积分定理推广到二连域



定理 设 D 为二连域，边界为 $C = C_1 + C_2^-$，

P52 定理 3.4

函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 C 上连续，

则有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$.

证明 (1) 如图，作线段 $\overline{ab}$，则 D 变为单连域 $\tilde{D}$，其边界为：

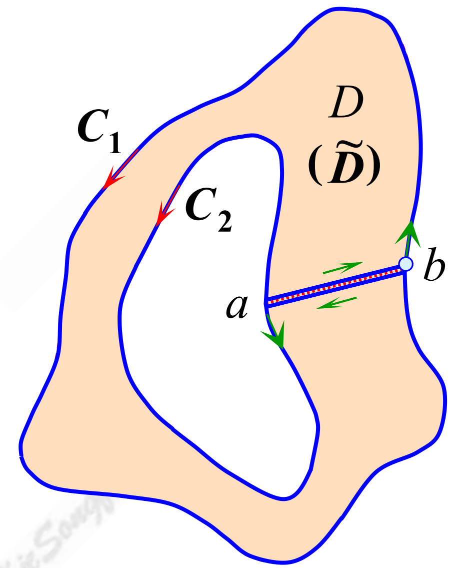
$$\tilde{C} = C_1 + \overrightarrow{ba} + C_2^- + \overrightarrow{ab}.$$

由于函数 $f(z)$ 在 $\tilde{D}$ 内解析，在 $\tilde{C}$ 上连续，因此有

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overrightarrow{ba}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overrightarrow{ab}} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

二、闭路变形原理

● 将柯西积分定理推广到二连域



定理 设 D 为二连域，边界为 $C = C_1 + C_2^-$，

P52 定理 3.4

函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 C 上连续，

则有 $\boxed{\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.}$

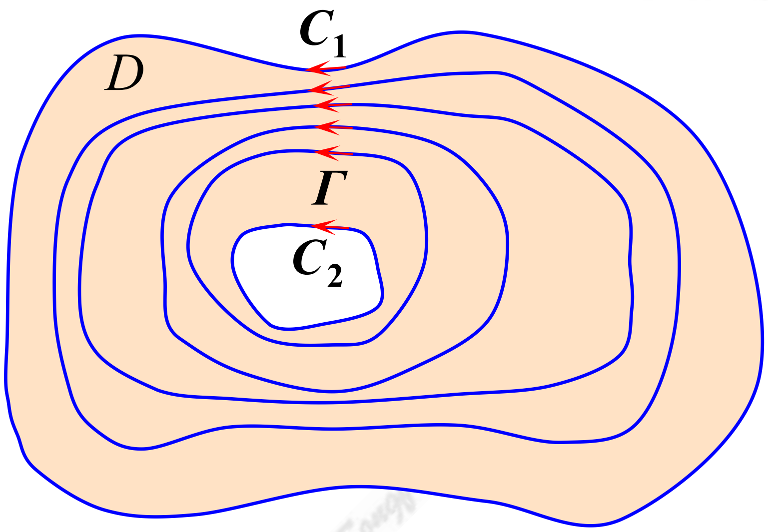
证明 (2) 由 $\int_{\overrightarrow{ba}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\overrightarrow{ab}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，即得

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \Rightarrow \quad \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

注 显然，上式还可改写为 $\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$

二、闭路变形原理

- 闭路变形原理 P 53



如图，设 $f(z)$ 在 D 内解析，

在边界 $C=C_1+C_2^-$ 上连续，

Γ 为 D 内的一条闭曲线，

则有 $\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$.

- 在某区域内的一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值，称此为闭路变形原理。

三、复合闭路定理

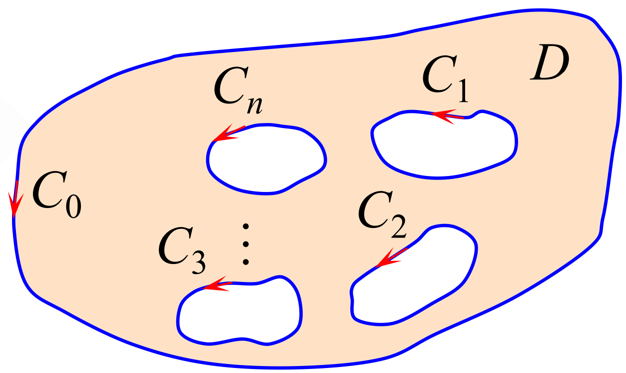
● 将柯西积分定理推广到多连域

定理 设多连域 D 的边界为 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$（如图），

P53 推论

函数 $f(z)$ 在 D 内解析，

在 C 上连续，则有：



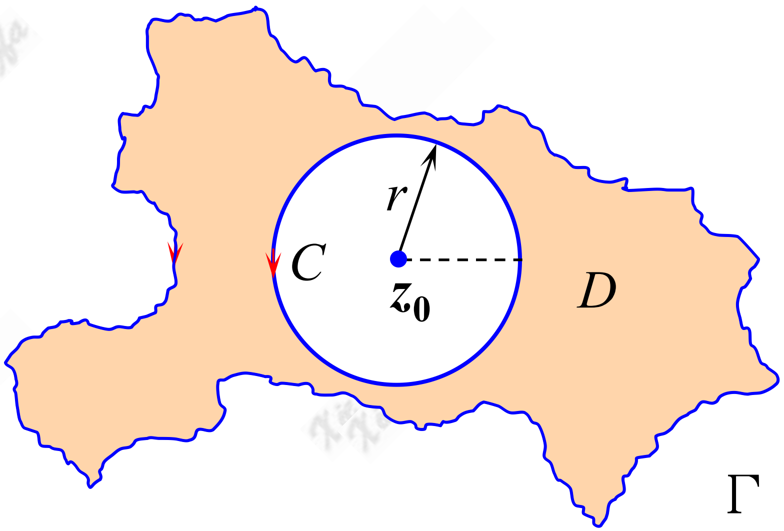
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

即 $\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$

证明 （略）

例 计算 $I=\oint_{\Gamma}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$，其中，$\Gamma$ 为包含 z_0 的一条闭曲线。

解 如图以 z_0 为圆心 r 为半径作圆，



则函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ 在

$\overline{D}=D+\Gamma+C^-$ 上解析，

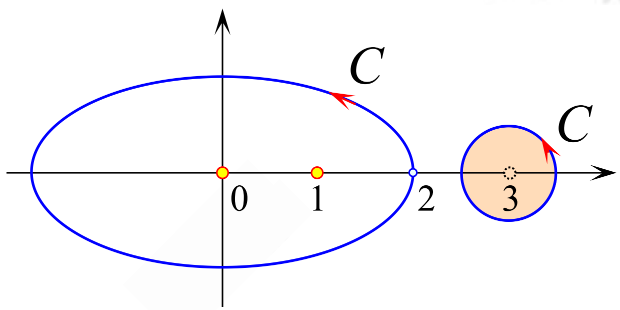
因此有 $I=\oint_{\Gamma}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$

$$=\oint_{C}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & \text{当 } n=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}。\end{cases}$$

例 计算 $I=\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 C 为：

P53 例3.7 修改

(1) $|z-3|=\frac{1}{2}$; (2) $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1}=1$.



解 令 $f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z}$，则 $f(z)$ 奇点为 $z=0,1$.

对 $f(z)$ 进行部分分式分解，可得 $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}$.

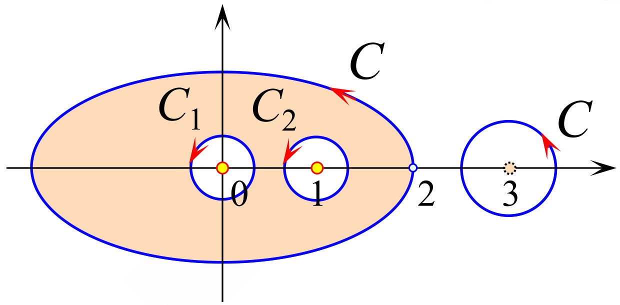
(1) 当 C 为 $|z-3|=\frac{1}{2}$ 时，$I=\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z=0$.

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 C 为：

P53 例 3.7

修改

(1) $|z-3|=\dfrac{1}{2}$； (2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$.



解 (2) 当 C 为 $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 时，

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}}$$

令 C_1：$|z|=\dfrac{1}{3}$， C_2：$|z-1|=\dfrac{1}{3}$， 则有

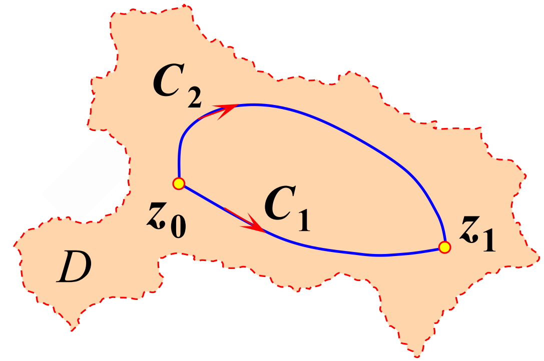
$$I=\oint_{C_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i+0+0+2\pi i=4\pi i.$$

四、路径无关性

定理 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，C_1, C_2 为 D 内任意两条从 z_0 到 z_1 的曲线，则 $\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$.

P52 定理 3.3



证明 由 $\int_{C_1+C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$，即得

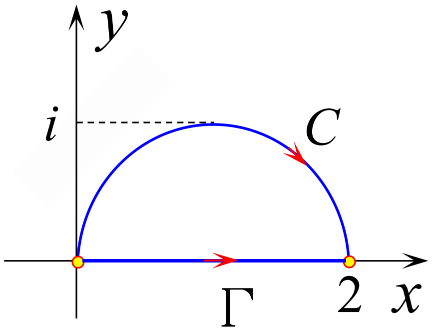
$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

- 可见，解析函数在单连域内的积分只与起点和终点有关，

因此，$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z \overset{\text{可记为}}{=\!=\!=\!=} \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z.$

例 计算 $I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为如图所示的一个半圆。

P52 例 3.6



解 设Γ如图所示，由于 $\sin z$ 在复平面上处处解析，因此有

$$I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z=\int_\Gamma \sin z\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^2 \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^2=1-\cos 2.$$

问题 是否可以像定积分一样直接计算?

即 $I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z=\int_0^2 \sin z\,\mathrm{d}z=-\cos z\Big|_0^2=1-\cos 2.$

五、原函数

1. 基本概念及性质

定义 设在单连域 D 内，函数 $F(z)$ 恒满足条件 $F'(z)=f(z)$，

P55 定义 3.2

则 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数。

性质 函数 $f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数。

证明 设 $G(z)$ 和 $H(z)$ 是 $f(z)$ 的两个原函数，则

$$[G(z)-H(z)]'=G'(z)-H'(z)=f(z)-f(z)=0,$$

$\Rightarrow G(z)-H(z)=c$，其中，c 为任意常数。

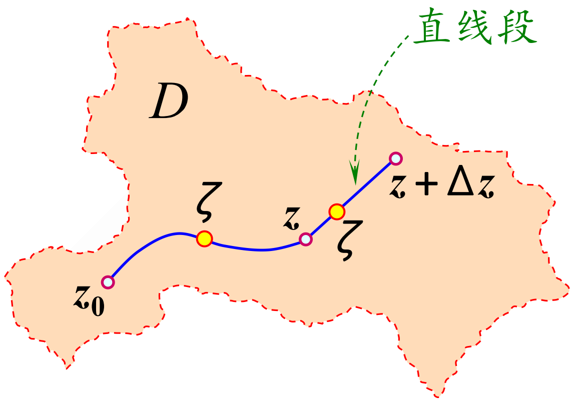
定义 函数 $f(z)$ 的原函数 $F(z)+c$ 称为 $f(z)$ 的不定积分，

补

记作 $\int f(z)\,\mathrm{d}z=F(z)+c$.

五、原函数

2. 由变上限积分构成的原函数



定理 若 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析，

P 54 定理 3.5

令 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$，$(z, z_0 \in D)$，

则 $F(z)$ 在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$.

证明（思路） (1) $$\frac{\Delta F}{\Delta z}=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

$$f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta,$$

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}s.$$

五、原函数

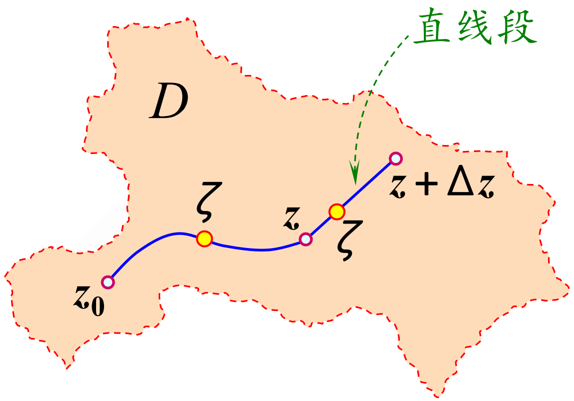
2. 由变上限积分构成的原函数

P54 定理 3.5

定理 若 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析，

令 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$，$(z, z_0 \in D)$，

则 $F(z)$ 在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$.



证明（思路） (2) $\left|\dfrac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| \le \dfrac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}s$

$$\le \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon,$$ （当 $|\Delta z|$ 充分小时）

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|=0,$$ 即 $F'(z)=f(z)$.

五、原函数

3. Newton−Leibniz 公式

定理 若 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析， $G(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数，

P55 定理 3.6

则 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0)$，其中 $z, z_0 \in D$.

证明 由于 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 也是 $f(z)$ 的一个原函数，

有 $F(z) = G(z) + c$， $\Rightarrow$ $F(z_0) = G(z_0) + c$,

$F(z_1) = G(z_1) + c$,

$$\Rightarrow F(z_1) - F(z_0) = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z - 0 = G(z_1) - G(z_0).$$

例 求 $\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z$.

解 $\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3$.

例 求 $\int_a^b \cos z \,\mathrm{d}z$.

解 $\int_a^b \cos z \,\mathrm{d}z = \sin z \Big|_a^b = \sin b - \sin a$.

例 求 $\int_0^i z \cos z \,\mathrm{d}z$.

解 $\int_0^i z \cos z \,\mathrm{d}z = \int_0^i z \,\mathrm{d}\sin z = z\sin z|_0^i - \int_0^i \sin z dz$

$= (z\sin z + \cos z)\Big|_0^i = i\sin i + \cos i - 1$.

例 求 $\int_{-i}^{i}\ln(1+z)\mathrm{d}z$.

P56 例 3.9

解 $$\int_{-i}^{i}\ln(1+z)\mathrm{d}z = z\ln(1+z)\Big|_{-i}^{i} - \int_{-i}^{i}\frac{z}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$= z\ln(1+z)\Big|_{-i}^{i} - \int_{-i}^{i}\frac{z+1-1}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$= [z\ln(1+z) - z + \ln(1+z)]\Big|_{-i}^{i}$$

$$= (-2+\ln 2)i + \frac{\pi}{2}i.$$

§3.3 柯西积分公式

一、柯西积分公式

二、平均值公式

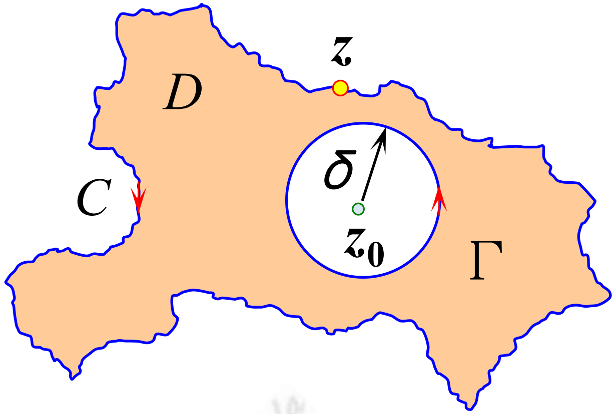
三、最大模原理

一、柯西积分公式

定理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在边界 C 上连续，$z_0 \in D$，则

P57 定理 3.7

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$



证明 (1) 如图，以 z_0 为圆心，δ 为半径作圆 Γ，则有

(思路)

$$\text{右边} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z,$$

$$\text{左边} = f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

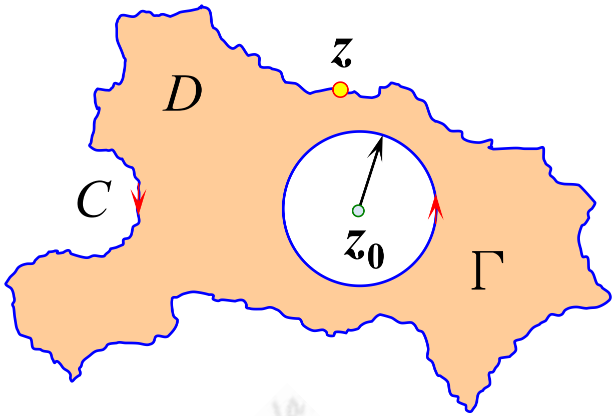
一、柯西积分公式

定理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，

P57 定理 3.7

在边界 C 上连续，$z_0 \in D$，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$



证明 (2) $|$右边 − 左边$|$ $\le \dfrac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\mathrm{d}s$

（思路）

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\delta}\cdot 2\pi\delta = \varepsilon,$$ （当 δ 充分小时）

即只要 δ 足够小，所证等式两边的差的模可以任意小，

由于左边与右边均为常数，与 δ无关，故等式成立。

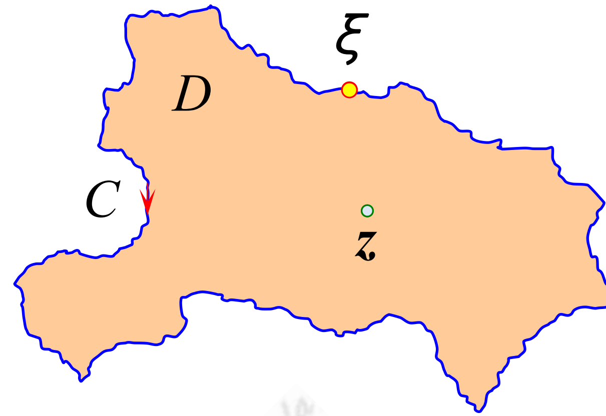
一、柯西积分公式

定理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，

P57 定理 3.7

在边界 C 上连续，$z_0 \in D$，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z .$$



意义 将 z_0 换成 z，积分变量 z 换成 ξ，则上式变为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi,\ (z\in D).$$

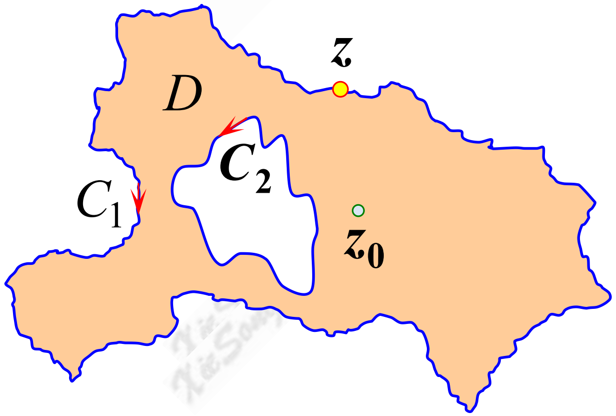
- 解析函数在其解析区域内的值由边界上的值完全确定。
- 换句话说，解析函数可用其解析区域边界上的值以一种特定的积分形式完全表达出来。

一、柯西积分公式

注意 柯西积分公式中的区域 D 可以是多连域。 P58 推论 2

比如 若定理中的区域 D 为二连域，

其边界为 $C=C_1+C_2^-$， 则有



$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

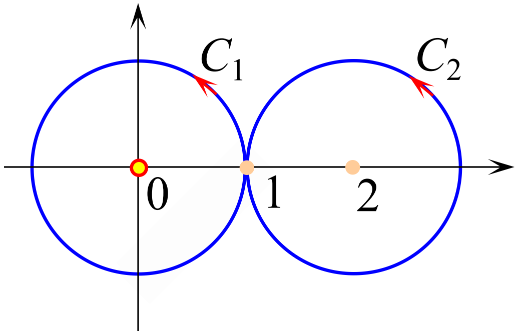
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z,\ (z_0\in D).$$

应用

- 反过来计算积分 $\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i\,f(z_0).$
- 推出一些理论结果，从而进一步认识解析函数。

例 计算 $I=\oint_C \frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$，其中 C 为：

(1) $C_1: |z|=1$; (2) $C_2: |z-2|=1$.



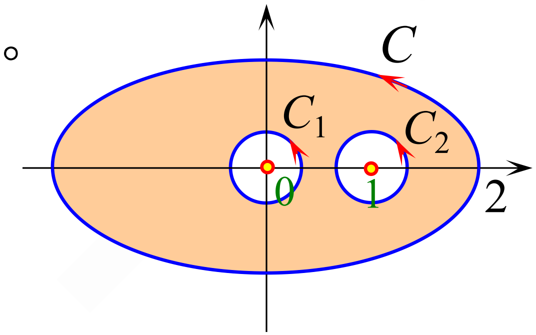
解 (1) $I=\oint_{C_1}\frac{\boxed{\cos z}}{z}\mathrm{d}z$ 在 $|z|\le 1$ 上解析

$$\xlongequal{\text{(柯西积分公式)}} 2\pi i\cdot\cos z\Big|_{z=0}=2\pi i.$$

(2) $I=\oint_{C_2}\frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$ (函数 $\frac{\cos z}{z}$ 在 $|z-2|\le 1$ 上解析)

$$\xlongequal{\text{(柯西积分定理)}} 0.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$，其中 C 如图所示。



解 令 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z}$， 则 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z(z-1)}$，

令 C_1：$|z|=\dfrac{1}{3}$， C_2：$|z-1|=\dfrac{1}{3}$，

则 $I=\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ （复合闭路定理）

$$=\oint_{C_1}\frac{\boxed{\left(\dfrac{2z-1}{z-1}\right)}}{z}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\boxed{\left(\dfrac{2z-1}{z}\right)}}{z-1}\,\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{(柯西积分公式)}}{=\!=\!=\!=} 2\pi i\cdot\left.\frac{2z-1}{z-1}\right|_{z=0}+2\pi i\cdot\left.\frac{2z-1}{z}\right|_{z=1}=4\pi i\,.$$

二、平均值公式

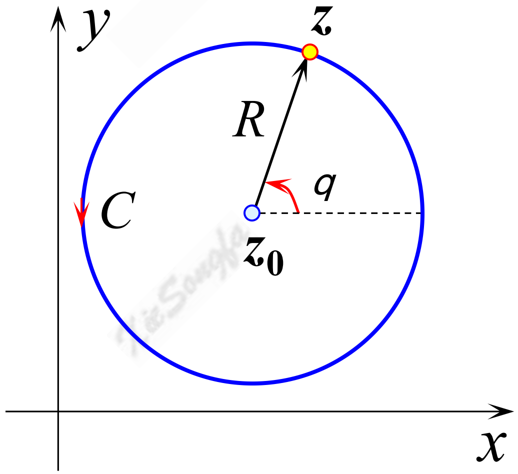
(连续函数的平均值)

定理(平均值公式)如果函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析,

P58 推论 1

在 $|z-z_0|\le R$ 上连续,则有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$



证明 根据柯西积分公式,可得

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})}{R\mathrm{e}^{i\theta}}R\mathrm{e}^{i\theta}i\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

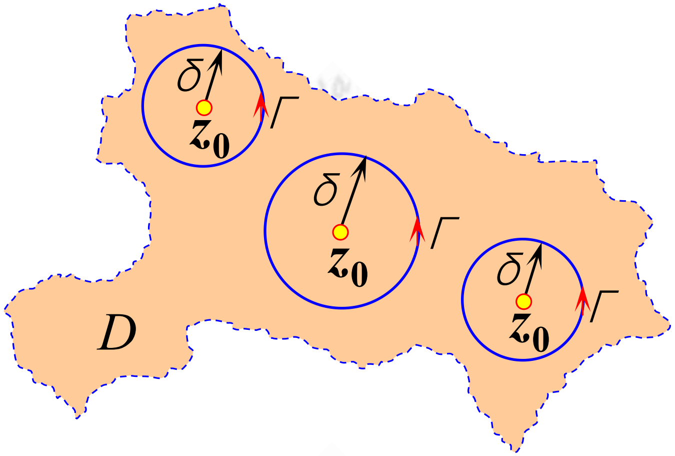
三、最大模原理

定理 (最大模原理) 如果函数 $f(z)$ 在 D 内解析，且不为常数，则在 D 内 $|f(z)|$ 没有最大值。

P568 定理 3.8

证明 (略)

理解 如图，函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内任意一点 z_0 的函数值是以该点为圆心的圆周上所有点的函数值的平均值，因此，$|f(z_0)|$ 不可能达到最大，除非 $f(z)$ 为常数。



三、最大模原理

推论 1 在区域 D 内解析的函数，如果其模在 D 内达到最大值，则此函数必恒为常数。

P 70 推论 1

推论 2 如果 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析，在 D 的边界上连续，则 $|f(z)|$ 必在 D 的边界上达到最大值。

P 70 推论 2

例 设函数 $f(z)$ 在全平面解析，又 $\forall r>0$，$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

证明 $M(r)$ 是 r 的单调上升函数。 P61 例 3.11

证 (1) 由最大模原理及其推论可知，

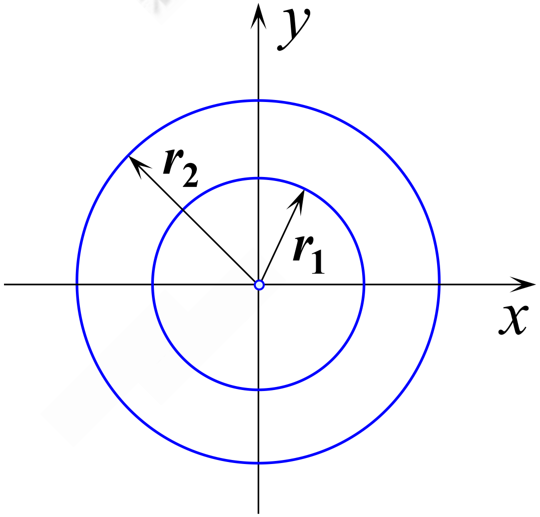
$|f(z)|$ 在 $|z|\le r$ 上的最大值必在 $|z|=r$ 上取得。

即 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|=\max\limits_{|z|\le r}|f(z)|$.

(2) 当 $0<r_1<r_2$ 时，有

$$M(r_1)=\max_{|z|\le r_1}|f(z)|$$

$$\le\max_{|z|\le r_2}|f(z)|=M(r_2).$$



即 $M(r)$ 是 r 的单调上升函数。

§ 3.4 解析函数的高阶导数

一、高阶导数定理

二、柯西不等式

三、刘维尔定理

一、高阶导数定理

分析 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，

则由柯西积分公式有 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,\ (z\in D).$

又 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(\zeta-z)^{-1}]=(\zeta-z)^{-2},\quad \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}[(\zeta-z)^{-1}]=2(\zeta-z)^{-3},$

$$\cdots\cdots \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)=n!(\zeta-z)^{-(n+1)}=\frac{n!}{(\zeta-z)^{n+1}},$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ (z\in D).$$

(?)

一、高阶导数定理

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，

P62 定理 3.9

则 $f(z)$ 的各阶导数均在 D 上解析，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,\ (z\in D).$$

意义 解析函数的导数仍解析。

证明 由函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，有

$$|f(z)| \text{ 在 } \overline{D}=D+C \text{ 上有界，即 } |f(z)|\le M.$$

设边界 C 的长度为 L。

(1) 先证 $n=1$ 的情形，即证 $f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z$.

证明 (1) 先证 $n=1$ 的情形，即证 $f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z.$

根据柯西积分公式有 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z,$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i\Delta z}\oint_C f(z)\left(\frac{1}{z-z_0-\Delta z}-\frac{1}{z-z_0}\right)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\mathrm{d}z,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z=\frac{\Delta z}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

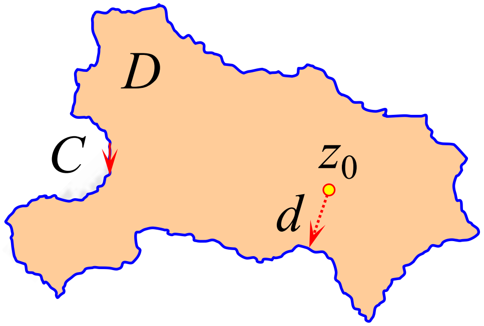
$$\overset{\text{记为}}{=\!=} I.$$

- 下面需要证明：当 $\Delta z\to 0$ 时，$I\to 0$.

证明 (1) 先证 $n=1$ 的情形，即证 $f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z.$

$$I=\frac{\Delta z}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\mathrm{d}z.$$

如图，设 d 为 z_0 到 C 的最短距离，



即 $|z-z_0|\geq d,$

取 Δz 适当小，使其满足 $|\Delta z|<\frac{d}{2}$，则

$$|z-z_0-\Delta z|\geq|z-z_0|-|\Delta z|>\frac{d}{2},$$

即得 $|I|\leq\frac{|\Delta z|}{2\pi}\cdot\frac{2}{d}\cdot\frac{1}{d^2}\cdot ML\ \to 0,\ (\Delta z\to 0),$

证明 (2) 对于 $n=2$ 的情形

由于前面已经证明了解析函数的导数仍是解析函数，

因此将 $f'(z)$ 作为新的函数，用同样的方法求极限：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z},$$

即可得 $f''(z_0)=\dfrac{2!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^3}\mathrm{d}z.$

(3) 依此类推，则可以证明

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,\ (z_0\in D).$$

一、高阶导数定理

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则 $f(z)$ 的各阶导数均在 D 上解析，且

P62 定理 3.9

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad (z\in D).$$

应用

- 反过来计算积分 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0).$
- 推出一些理论结果，从而进一步认识解析函数。

例 计算 $\oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} \mathrm{d}z$. P63 例 3.12 部分

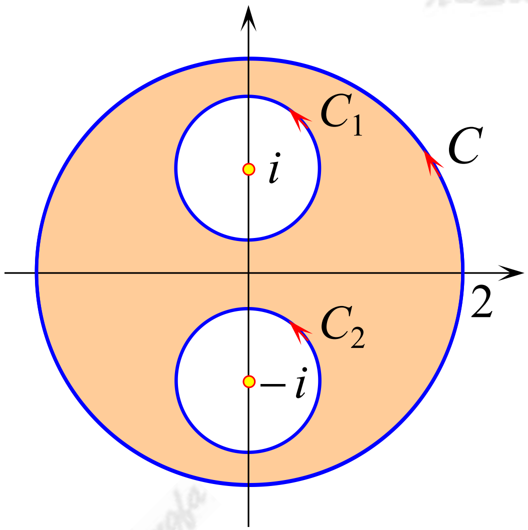
解 $\oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!} \cos'' z \Big|_{z=i}$

$$= -\pi i \cos i = -\frac{\pi i}{2}(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}).$$

例 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z^{100}} \mathrm{d}z$.

解 $\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z^{100}} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{99!} (\mathrm{e}^z)^{(99)} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{99!}$.

例 计算 $I=\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$



解 (1) 令 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}=\dfrac{e^z}{(z-i)^2(z+i)^2}.$

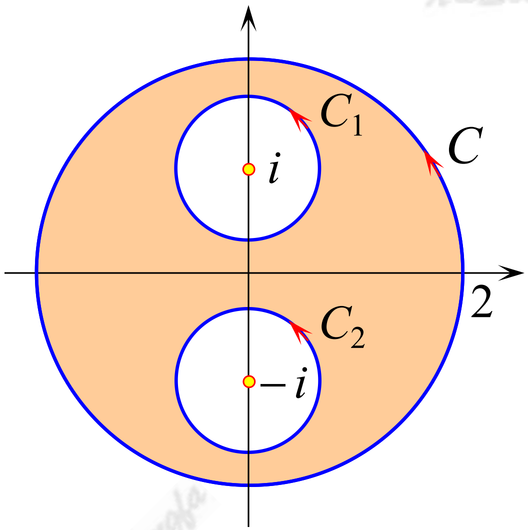
如图，作 C_1, C_2两个小圆，

则 $I=\oint_{C_1} f(z)dz+\oint_{C_2} f(z)dz$ （复合闭路定理）

$$=\oint_{C_1}\boxed{\frac{e^z}{(z+i)^2}}\cdot\frac{dz}{(z-i)^2}+\oint_{C_2}\boxed{\frac{e^z}{(z-i)^2}}\cdot\frac{dz}{(z+i)^2}$$

$$\overset{\text{记为}}{=\!=\!=} I_1+I_2.$$

例 计算 $I=\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$



解 (2) $I_1=\oint_{C_1}\dfrac{\boxed{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}\,dz}{(z-i)^2}$

$$\overset{\text{(高阶导数公式)}}{=\!=\!=}\frac{2\pi i}{1!}\cdot\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)e^i.$$

同样可求得 $I_2=-\dfrac{\pi}{2}(1+i)e^{-i}.$

(3) $I=I_1+I_2=\dfrac{\pi}{2}[(1-i)e^i-(1+i)e^{-i}]=\sqrt{2}\pi i\sin\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right).$

二、柯西不等式

定理 设函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，且 $|f(z)|<M$，则

P63 定理 3.10

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!M}{R^n},\quad (n=1,2,\cdots).$$ （柯西不等式）

证明 $\forall R_1: 0<R_1<R$，函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\le R_1$ 上解析，

$$\Rightarrow f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,\ (n=1,2,\cdots).$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=R_1}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\mathrm{d}s \le \frac{n!M}{R_1^n},$$

令 $R_1\to R$，即得 $|f^{(n)}(z_0)| \le \dfrac{n!M}{R^n},\ (n=1,2,\cdots).$

三、刘维尔定理

定理 设函数 $f(z)$ 在全平面上解析且有界，则 $f(z)$ 为一常数。

P64 定理 3.11

证明 设 z_0 为平面上任意一点，

$\forall R>0$，函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 上解析，且 $|f(z)|<M$，

根据柯西不等式，有 $|f'(z_0)|\leq \dfrac{M}{R}$，

令 $R\to+\infty$，即得 $f'(z_0)=0$，

由 z_0 的任意性，知在全平面上有 $f'(z)\equiv 0$，

则 $f(z)$ 为一常数。

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且 $|f(z)-z|\leq \dfrac{1}{|2-z|}$，

证明 $|f'(0)|\leq 2$.

证 (1) 任取正数 $r<2$,

则函数 $f(z)$ 在 $|z|\leq r$ 内解析，由高阶导数公式有

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z,$$

$$\Rightarrow |f'(0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)-z+z}{z^2}\mathrm{d}z\right|,$$

$$\Rightarrow |f'(0)|\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)-z|+|z|}{|z|^2}\mathrm{d}s.$$

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且 $|f(z)-z|\le \dfrac{1}{|2-z|}$，证明 $|f'(0)|\le 2$.

证 (1) $|f'(0)|\le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\oint_{|z|=r}\dfrac{|f(z)-z|+|z|}{|z|^2}\mathrm{d}s$.

(2) 由 $|f(z)-z|\le \dfrac{1}{|2-z|}$，有

$$|f'(0)|\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{1}{|z|^2\cdot|2-z|}\mathrm{d}s+\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{1}{|z|}\mathrm{d}s$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{1}{|z|^2\cdot(2-|z|)}\mathrm{d}s+\frac{1}{2\pi r}\cdot 2\pi r,$$

$$\Rightarrow |f'(0)|\le \frac{1}{2\pi r^2(2-r)}\cdot 2\pi r+1.$$

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且 $|f(z)-z|\le \dfrac{1}{|2-z|}$，

证明 $|f'(0)|\le 2$.

证 (1) $|f'(0)|\le \dfrac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\dfrac{|f(z)-z|+|z|}{|z|^2}\,\mathrm{d}s$.

(2) $|f'(0)|\le \dfrac{1}{2\pi r^2(2-r)}\cdot 2\pi r+1 = \dfrac{1}{r(2-r)}+1$.

(3) 令 $r=1$ 得 $|f'(0)|\le 2$.

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且满足 $|f(z)-2|\le|z|$,

证明 $$\frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\frac{dz}{z}=f'(0).$$

证 (1) 由于 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，根据高阶导数定理可得

在 $|z|<2$ 内，$f'(z)$ 也解析。

(2) 由 $|f(z)-2|\le|z|$ 可得

在 $|z|<2$ 内，$f(z)\neq 0$,

$$\Rightarrow\ z+\frac{f'(z)}{f(z)}$$ 在 $|z|<2$ 内解析。

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且满足 $|f(z)-2|\le|z|$，

证明 $$\frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z}=f'(0).$$

证 (3) 根据柯西积分公式有

$$\frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi i\cdot\frac{1}{\pi i}\left(z+\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\bigg|_{z=0}$$

$$=\frac{2f'(0)}{f(0)}.$$

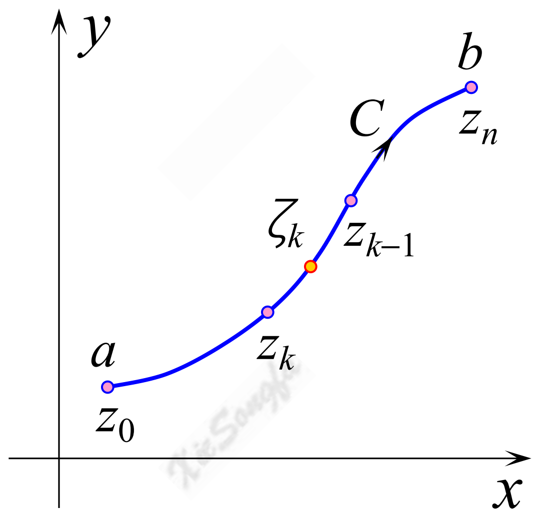
(4) 由 $|f(z)-2|\le|z|$， $\Rightarrow\ |f(0)-2|\le 0$， $\Rightarrow\ f(0)=2$，

即得 $$\frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z}=f'(0).$$

放松一下吧！……

附：复积分化为第二类曲线积分的公式推导

(1) 如图 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$,



设函数 $f(z)=u+iv$ 在 C 上连续，

则 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 也在 C 上连续；

由 $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$，有

当 $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k| \to 0$ 时， $\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta x_k| \to 0$， $\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta y_k| \to 0$；

记 $\zeta_k = (\xi_k, \eta_k)$，则

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k),$$

附：复积分化为第二类曲线积分的公式推导

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k),$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k],$$

将上式两端取极限(即令 $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k| \to 0$)，得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

附：复积分化为第二类曲线积分的公式推导

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+i\int_C v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y.$$

(2) 设曲线 $C: z=z(t)=x(t)+i\,y(t)$， $t: a\to b$， 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b [u(x(t),\,y(t))x'(t)-v(x(t),\,y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t$$

$$+i\int_a^b [v(x(t),\,y(t))x'(t)+u(x(t),\,y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b [u(x(t),\,y(t))+i\,v(x(t),\,y(t))]\,\underbrace{[x'(t)+iy'(t)]}_{z'(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

即 $$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(返回)