

考試安排

一、考試時間: 2023/11/26 上午 8:30 至 11:00

考試地點: (略) (以各學院正式通知為準)

二、答疑時間: 2023 年 11 月 24 日 下午 晚上

11 月 25 日 上午 下午 晚上

上午 8:30-11:30

下午 2:30-5:30

晚上 7:00-9:30

答疑地點: 科技樓南樓 611 室

计算机阅卷考生须知

- 自备正规的 **2B 铅笔**、**橡皮擦**、**黑色中性笔**或**黑色钢笔**。
- 正确填涂学号；正确填写考生的考号、姓名等信息。
- **考号**、**客观题**或**判断题**填涂时，要注意使用 **2B 铅笔**填涂，填涂区域要丰满、不要使用划线、打钩等错误填涂方式。
- 修改客观题答题时，要注意使用**橡皮擦**擦除干净。
- **不要使用**涂改液、涂改纸、透明胶粘贴等方式修改主观题和客观题的答题。**不允许**带计算器
- **主观题**使用**黑色中性笔或钢笔**，在**正确的答题区域**答题，且**不要使用**附加纸进行答题。
- 在标明**禁止答题的区域**内，请勿写入答题内容。

计算机阅卷考生须知

答题卡(纸)样式

第1页 (共4页)

《复变函数与积分变换》期末考试答题卡

考生编号 _____ [监考老师填写]

考试日期: _____ 年 _____ 月 _____ 日

院(系) _____ 专业班级 _____

学号 _____ 姓名 _____

学号(从左至右顺序书写和填涂)

书写填涂要求

1. 答题卡歪斜、破损等请报告监考老师处理;
2. 姓名和学号用黑色墨水笔书写;
3. 学号涂点和选择题涂点用2B铅笔填涂;
4. 按题号顺序填涂选择题, 要涂满、涂实、涂均匀, 涂点不要超出涂点方框, 被擦除的涂点必须擦除干净;
5. 不要弄脏、折叠、撕破答题卡;
6. 填涂不规范, 后果考生自负。

正确填涂



错误填涂



违纪

☐

U	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	9	9	9	9	9	9	9	9	9

一、选择题 (2x12=24分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

• 两张答题卡都有上述卡头。

• 正反两面, 按照题号答题。

• 勿折叠, 勿破坏定位标记。

考试题型

一、客观题(选择题)

二、计算题

- 构造解析函数
- 将函数展开为 Laurent 级数
- 利用留数计算闭路积分
- 计算定积分
- 求像区域
- 构造共形映射(必须画图)
- 利用 Laplace 变换求解常微分方程(组)

三、证明题

主要内容

- 复数的几种表示及**运算**；区域，曲线；初等复变函数。
- **Cauchy-Riemann** 方程：(1) 判断可导与解析，求导数；
(2) **构造解析函数**。
- **Cauchy** 积分公式，**Cauchy** 积分定理，高阶导数公式。
- **Laurent** 展式。
- 留数：(1) **计算闭路积分**； (2) **计算定积分**。
- 共形映射：(1) **求像区域**； (2) **构造共形映射**。
- **Fourier** 变换
- **利用 Laplace** 变换求解常微分方程(组)。

主要内容

一、构造解析函数

问题 已知实部 u ，求虚部 v (或者已知虚部 v ，求实部 u)，使 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 解析，且满足指定的条件。

注意 必须首先检验 u 或 v 是否为调和函数。

方法

- 偏积分法；
- 全微分法(略)。

一、构造解析函数

方法 ● 偏积分法 (不妨仅考虑已知实部 u 的情形)

(1) 由 u 及 $C-R$ 方程
得到待定函数 v 的
两个偏导数:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, & (A) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. & (B) \end{cases}$$

(2) 将 (A) 式的两边对变量 y 进行(偏)积分, 得

$$v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \tilde{v}(x, y) + \varphi(x), \quad (C)$$

其中, $\tilde{v}(x, y)$ 已知, 而 $\varphi(x)$ 待定.

(3) 将 (C) 式代入 (B) 式, 求解即可得到函数 $\varphi(x)$.

二、将函数展开为 Laurent 级数

1. 直接展开法(略)

2. 间接展开法

方法 根据**唯一性**，利用一些已知的展开式，通过**有理运算**、**代换运算**、**逐项求导**、**逐项积分**等方法展开。

牢记 ● 两个重要的已知展开式：

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

二、将函数展开为 Laurent 级数

注意 无论是直接展开法还是间接展开法，在求展开式之前，都需要根据函数的奇点位置，将复平面(或者题目指定的展开区域)分为若干个解析环。

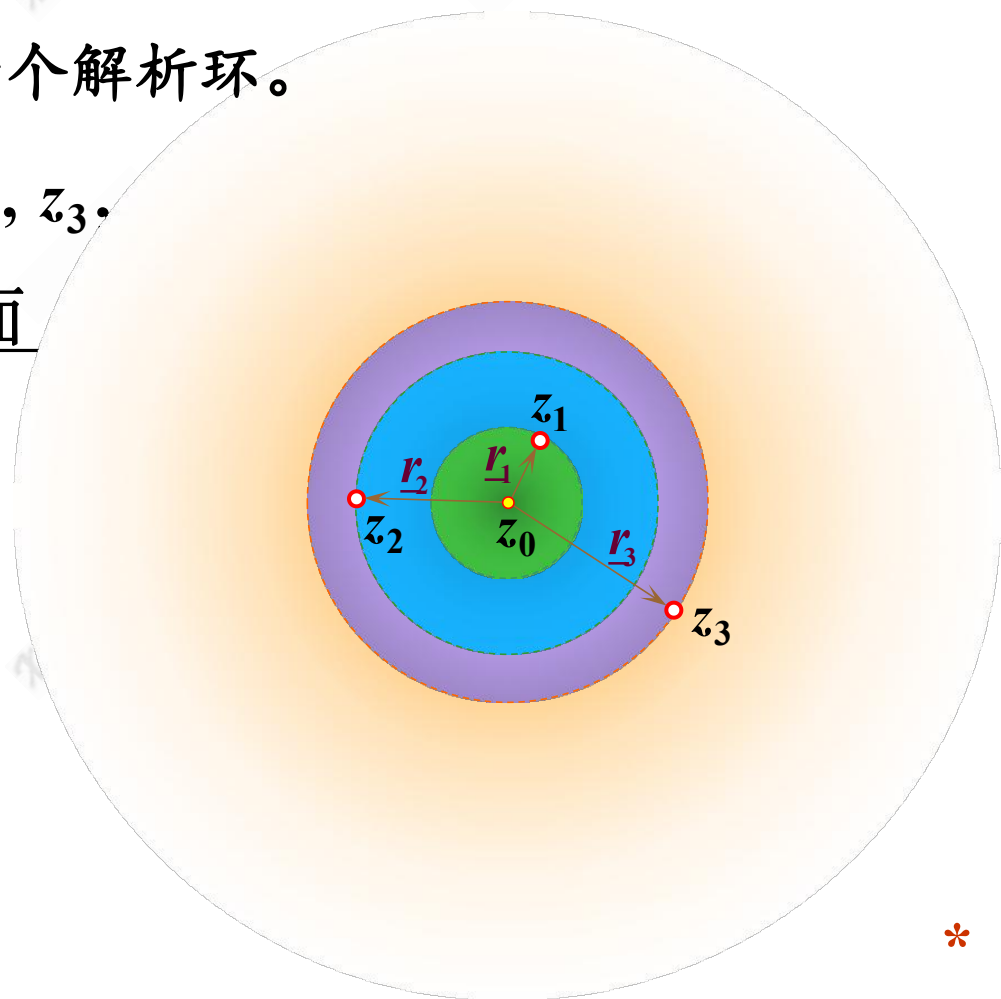
比如 设函数的奇点为 z_1, z_2, z_3 。
展开点为 z_0 ，则复平面
被分为四个解析环：

$$0 \leq |z - z_0| < r_1;$$

$$r_1 < |z - z_0| < r_2;$$

$$r_2 < |z - z_0| < r_3;$$

$$r_3 < |z - z_0| < +\infty.$$



三、利用留数计算闭路积分

1. 计算留数

法则1 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\text{Res}[f(z), z_0] = 0$.

法则2 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则只好将 $f(z)$ 在 z_0 点的去心邻域内展开成洛朗级数。

注意 (1) 在具体展开时，并不需要写出较完整的洛朗级数，只需将其中的系数 a_{-1} 求出来就可以了。

(2) 其实，即使不是本性奇点，该方法有时也很有效，而且事先并不需要知道奇点的类型。

三、利用留数计算闭路积分

1. 计算留数

法则3 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则有

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

特别 若 $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, 其中, $g(z), h(z)$ 在 z_0 点解析,

且 $h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0, g(z_0) \neq 0$, 则有

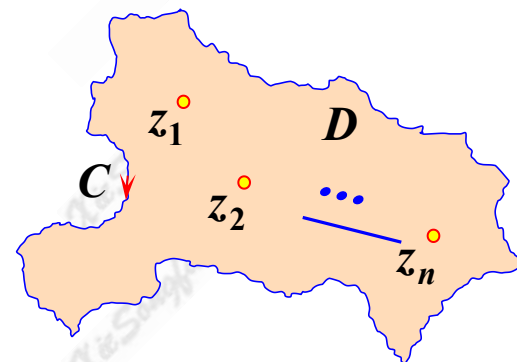
$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

三、利用留数计算闭路积分

2. 计算闭路积分

定理 设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 外处处解析, 在闭域 \bar{D} 上连续, 则有

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k].$$



注意 只需计算积分曲线 C 所围成的有限区域内奇点的留数。

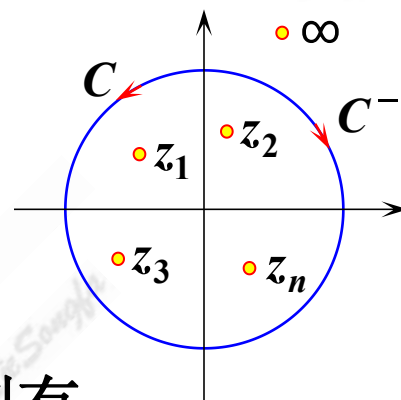
三、利用留数计算闭路积分

2. 计算闭路积分

定理 设函数 $f(z)$ 在扩充复平面上除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \dots, z_n, \infty$ 外处处解析, 则有

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0.$$

其中, $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right].$



四、计算定积分

1. 计算 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$.

要求 $R(u, v)$ 是 u, v 的有理函数, 即 $R(u, v)$ 是以 u, v 为变量的二元多项式或分式函数。

方法 (1) 令 $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$,

$$\text{则 } dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta, \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{dz}{iz},$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

四、计算定积分

1. 计算 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$.

要求 $R(u, v)$ 是 u, v 的有理函数, 即 $R(u, v)$ 是以 u, v 为变量的二元多项式或分式函数。

方法 (2) $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz$

$$= \oint_{|z|=1} f(z) dz$$

$$= 2\pi i \sum_k \text{Res}[f(z), z_k].$$

其中, z_k 是 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内的所有孤立奇点。

四、计算定积分

2. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$.

要求 (1) $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中, $P(x), Q(x)$ 为多项式;

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高二次;

(3) 分母 $Q(x)$ 没有实零点。

方法 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}[R(z), z_k]$.

其中, z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

四、计算定积分

3. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx \ (a > 0).$

要求 (1) $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中, $P(x), Q(x)$ 为多项式;

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高一次;

(3) 分母 $Q(x)$ 没有实零点。

方法 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}[R(z) e^{iaz}, z_k].$

其中, z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

四、计算定积分

3. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx \ (a > 0).$

要求 (1) $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中, $P(x), Q(x)$ 为多项式;

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高一次;

(3) 分母 $Q(x)$ 没有实零点。

应用 (实际) 由 $2\pi i \sum_k \text{Res}[R(z) e^{iaz}, z_k] \stackrel{\text{结果记为}}{=} A + iB, \quad \underline{\text{(复数)}}$

有 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax dx = A;$

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax dx = B.$

五、构造共形映射

● 求共形映射的一般方法与主要步骤。

步骤 (1) 预处理。

(一般)

目标 使区域的边界至多由两个圆弧段构成。

工具 分式线性映射、幂函数、指数函数等。

(2) 将区域映射为角形域(或者带形域)。

方法 将区域边界的一个交点 z_1 映射为 ∞ ;

[另一个(交)点 z_2 映射为 0]。

工具 $w = k \frac{1}{z - z_1}$; 或者 $w = k \frac{z - z_2}{z - z_1}$.

五、构造共形映射

● 求共形映射的一般方法与主要步骤。

步骤 (3) 将角形域(或者带形域)映射为上半平面。

(一般)

工具 $w = z^n$, $w = \sqrt[n]{z}$. (对于角形域)

$w = e^z$. (对于带形域)

(4) 将上半平面映射为单位圆域。

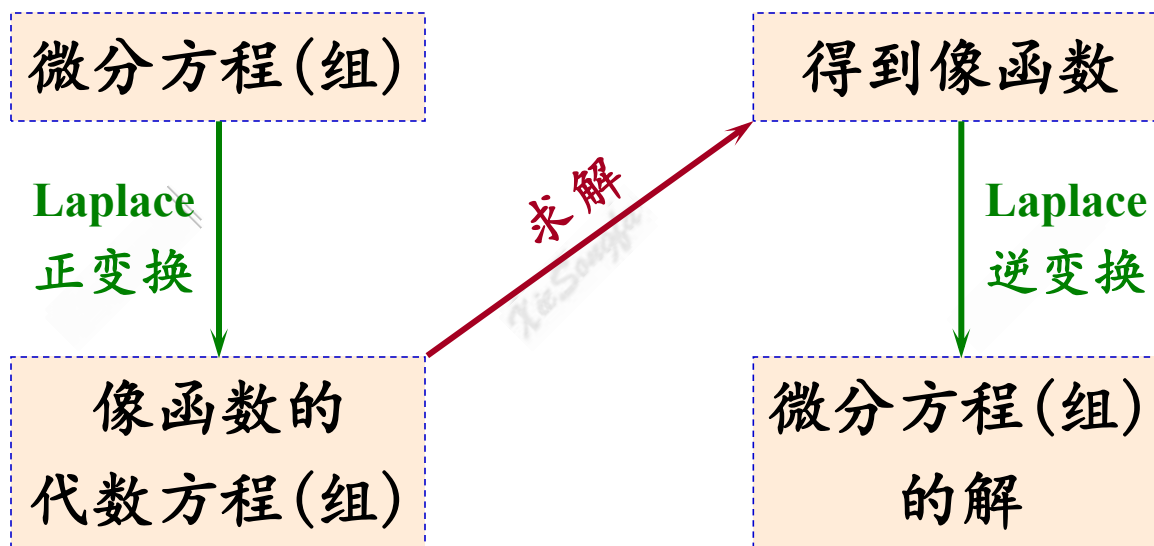
工具 $w = \frac{z-i}{z+i}$. (无附加条件)

$w = e^{i\theta_0} \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$. (由附加条件确定 θ_0, z_0)

六、利用 Laplace 变换求解常微分方程(组)

工具 $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$

- 步骤 (1) 将微分方程(组)化为像函数的代数方程(组);
- (2) 求解代数方程(组)得到像函数;
- (3) 求 Laplace 逆变换得到微分方程(组)的解。



六、利用 Laplace 变换求解常微分方程(组)

● 几个常用函数的 Laplace 变换。

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}.$$

$$\mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}}.$$

$$\mathcal{L}[\cos bt] = \frac{s}{s^2 + b^2}.$$

$$\mathcal{L}[\sin bt] = \frac{b}{s^2 + b^2}.$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1.$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}.$$

$$\mathcal{L}[e^{at} t^m] = \frac{m!}{(s-a)^{m+1}}.$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos bt] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}.$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin bt] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}.$$

七、其它

● 已知复数的实部与虚部，求模与(主)辐角。

● 求复数的方根 $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, (k=0, 1, \dots, n-1).$

● 对数函数 $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z.$

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i, (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

● 幂函数 $w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$

● 求导公式 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$

七、其它

● 柯西积分定理 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在闭域 \bar{D} 上连续, 则 $\oint_C f(z) dz = 0$.

● 柯西积分公式 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在闭域 \bar{D} 上连续, 则 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, (z \in D)$.

● 高阶导数公式 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在闭域 \bar{D} 上连续, 则 $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, (z \in D)$.

七、其它

● 幂级数的收敛半径。

(1) 比值法 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$, 则收敛半径为 $R = \frac{1}{\lambda}$.

(2) 根值法 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$.

(3) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点展开为泰勒级数, 其收敛半径等于从 z_0 点到 $f(z)$ 的最近一个奇点 \tilde{z} 的距离。

● 求共形映射下的像区域。

(1) 分式线性函数、幂函数以及指数函数的映射特点。

(2) 共形映射的分解与复合。

七、其它

● Fourier 变换:

$$\left[\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \\ \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] &= f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \right.$$

● Laplace 变换:

$$\left[\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt. \\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (t > 0). \end{aligned} \right.$$

$$= \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(s) e^{st}, s_k].$$

七、其它

● 单位冲激函数。

(1) 筛选性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0).$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

(2) 对称性质 $\delta(t) = \delta(-t).$

(3) 重要公式 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi \delta(t).$

● 卷积与卷积定理 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega).$$



放松一下吧！
