基础信息论

离散信源的信息率失真函数

华中科技大学电信学院

信息率失真函数的计算

- 通过前面的对偶问题分析可知：
- 对离散信源，求信息率失真函数 R(D) 与求信道容量C 类似，是一个在有约束条件下求平均互信息极值的问题，只是约束条件不同
  - C 是求平均互信息的条件极大值
  - R(D)是求平均互信息的条件极小值：

已知信源的概率分布 p(x) 和失真函数 d(x,y)，可确定信源的信息率失真函数 R(D)，在约束条件（即保真度准则下），求极小值问题。

一般情况下难于求得闭式解，常采用参量表示法，或采用迭代算法求解。

R(D)参量表示法求解

- 设离散信源的输入序列为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$$

- 输出序列为

$$\begin{bmatrix} Y \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ p(y_1) & p(y_2) & \cdots & p(y_m) \end{bmatrix}$$

- 字符传输的失真函数为

$$d(x_i, y_j),\ \ i = 1, 2, \cdots, n,\ \ j = 1, 2, \cdots, m$$

- 采用如下简记

$$d_{ij} = d(x_i, y_j);\ \ p_{ij} = p(y_j \mid x_i);\ \ p_i = p(x_i);\ \ q_j = p(y_j)$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) p(y_j \mid x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij}$$

R(D)参量表示法求解

信息率失真函数$R(D)$的计算为在约束条件

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} d_{ij} = D & (1) \\ \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \cdots, n & (2) \end{cases}$$

保真度准则

下，

信道转移概率的归一化

求 $I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_j}$ 极小值问题。

(推导略)
见补充内容

应用拉格朗日乘法，引入乘子S和$\mu_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

将上述条件极值问题化成无条件极值问题：

令 $\frac{\partial}{\partial p_{ij}}[I(X;Y) - S(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} d_{ij} - D) - \mu_i(\sum_{j=1}^{m} p_{ij} - 1)] = 0$

R(D)参量表示法求解—总结

第一步：求λ_i

$$1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P(x_i)e^{Sd(x_i,y_j)}$$

第二步：求$p(y_j)$

$$1=\lambda_i\sum_{j=1}^{m}P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)}$$

第三步：求$p(y_j/x_i)$

$$P(y_j/x_i)=\lambda_i P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)}$$

第四步：求$D(S)$

$$D(s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(x_i)\lambda_i P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)}d(x_i,y_j)$$

第五步：求$R(S)$

$$R(s)=SD(S)+\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\ln\lambda_i$$

二元对称信源的信息率失真函数

二元对称信源的信息率失真函数R(D)

例 二进制对称信源，设信源输入符号集为(0,1)，

其中$p(0)=p$，$p(1)=1-p$，$p \le \frac{1}{2}$，失真函数定义为

$$d_{ij}=\begin{cases}0 & i=j\\1 & i\neq j\end{cases}\qquad i,\ j=1,\ 2$$

设输出符号集为（0，1），求信息率失真函数$R(D)$。

解：引入记号$p_1=p(0)=p$，$p_2=p(1)=1-p$，

输出符号概率为q_1,q_2 引入参量λ_1和λ_2 S求解

(推导略)
见补充内容

二元对称信源的R(D)

将参量s代入可得到率失真函数

$$R(D) = sD(s) + p_1 \log \lambda_1 + p_2 \log \lambda_2 \Big|_{s=\log\frac{D}{1-D}}$$

$$= -[p\log p + (1-p)\log(1-p)] + [D\log D + (1-D)\log(1-D)]$$

令$\bar{p} = 1-p, \bar{D} = 1-D,$ 则

$$R(D) = -[p\log p + \bar{p}\log\bar{p}] + [D\log D + \bar{D}\log\bar{D}]$$

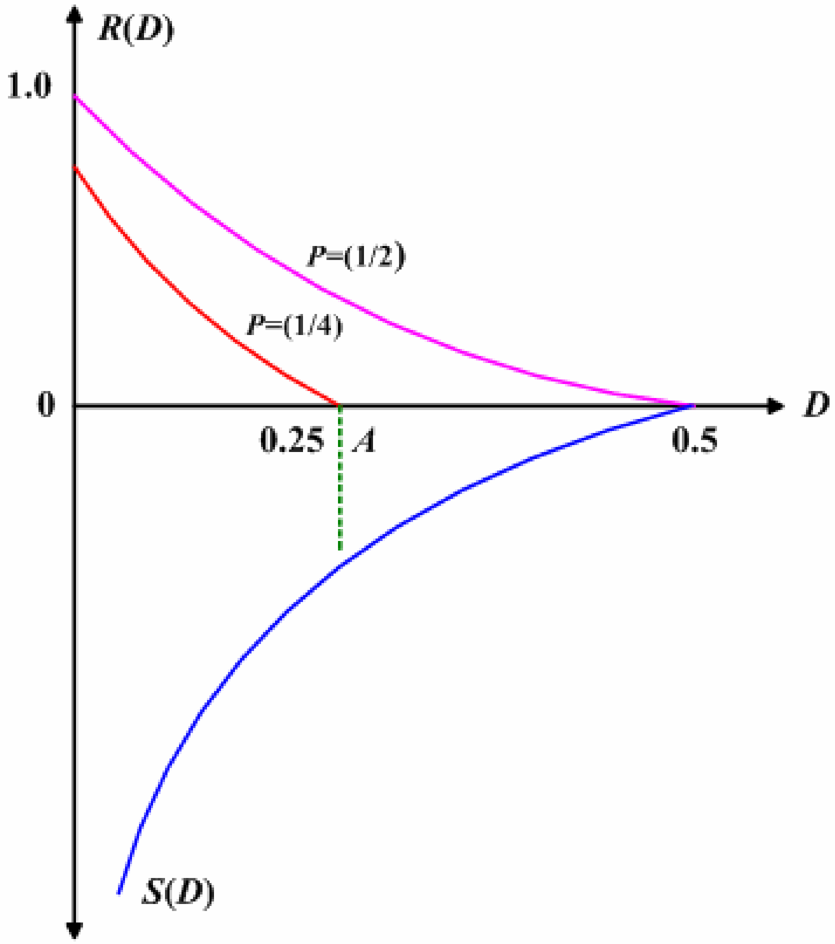
$$= H(p,\bar{p}) - H(D,\bar{D})$$

由$R(D)$和$H(\omega,\bar{\omega})$的性质可确定出信息率失真函数定义域为

$0 \le D \le p, p \le \frac{1}{2},$ 值域为$0 \le R(D) \le H(p,\bar{p})$

二元离散信源的信息率失真函数曲线

- 不同p值对应的二元信息率失真函数



曲线图说明1

- 二元离散信源的α=1，可把$d(x_i\ ,y_j)$看作误码个数，即X和Y不一致时，认为误了一个码元，此时，$d(x_i\ ,y_j)$的数学期望就是平均误码率。能容忍的失真等效于能容忍的误码率。

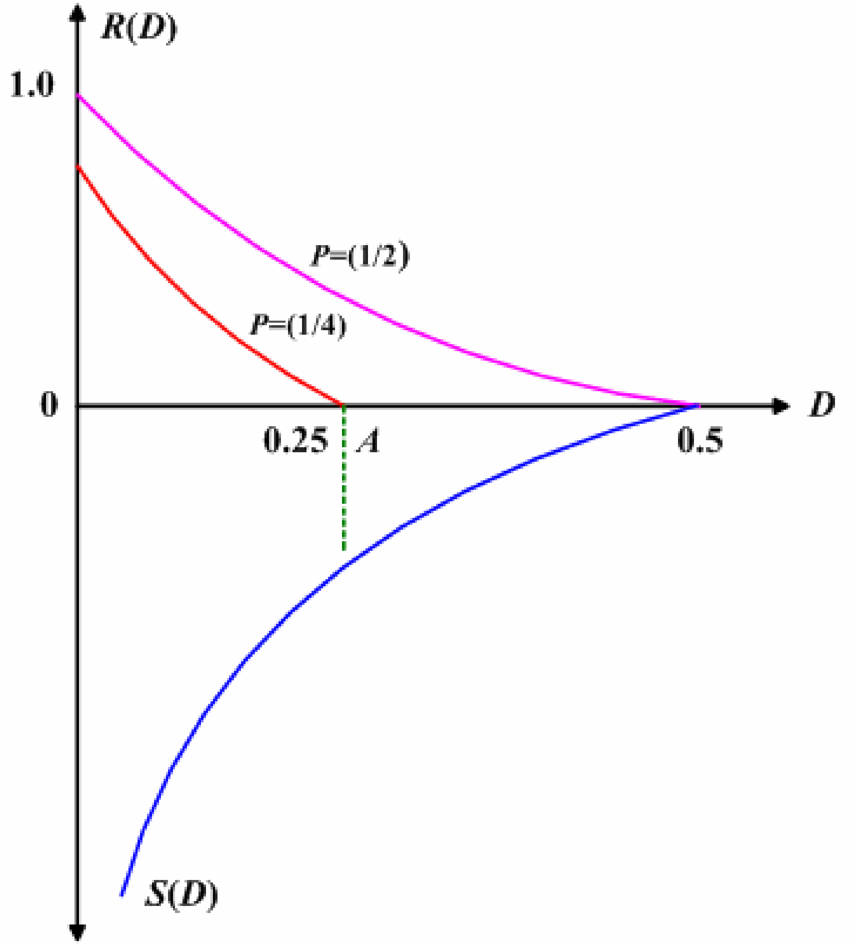


图4.2.2 二元信源和对称失真函数的$R(D)$和$S(D)$曲线

曲线图说明2

- $R(D)$不仅与D有关，还与p有关。概率分布不同，$R(D)$曲线就不一样。当$p=0.25$时，如果能容忍的误码率也是0.25，不用传送信息便可达到，即$R=0$，这就是$R(D_{max})=0$的含义。

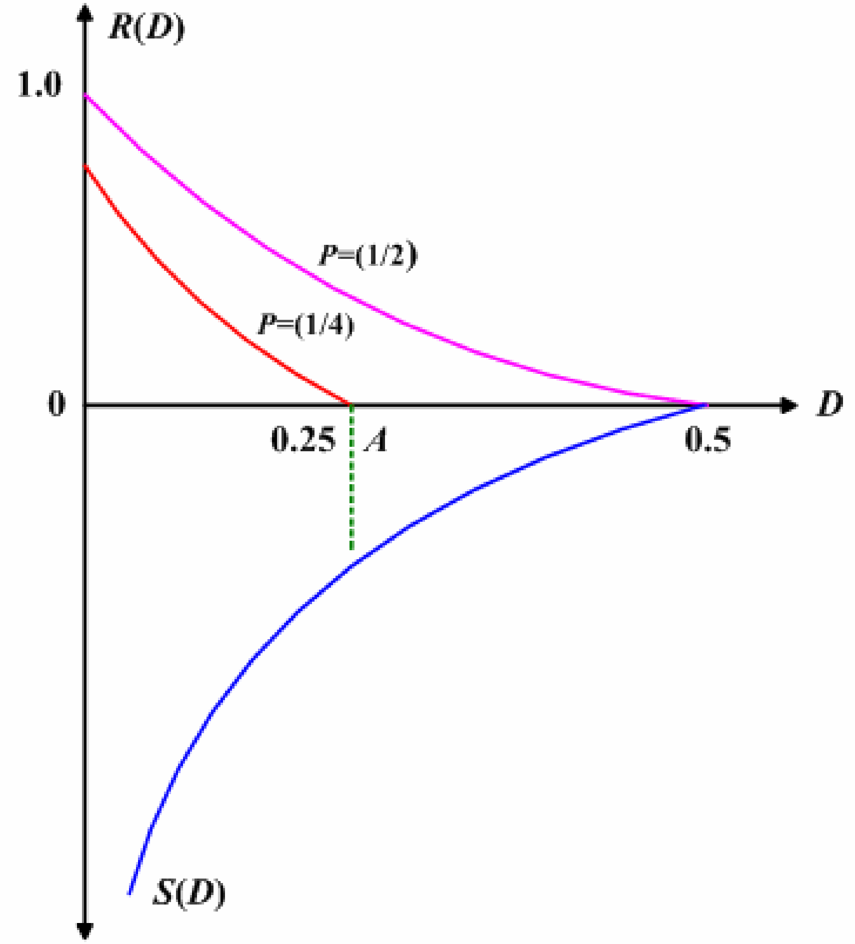


图4.2.2 二元信源和对称失真函数的$R(D)$和$S(D)$曲线

曲线图说明3

- 当D相同时，信源越趋于等概率分布，$R(D)$就越大。由最大离散熵定理，信源越趋于等概率分布，其熵越大，即不确定性越大，要去除这不确定性所需的信息传输率就越大，而$R(D)$正是去除信源不确定性所必须的信息传输率。

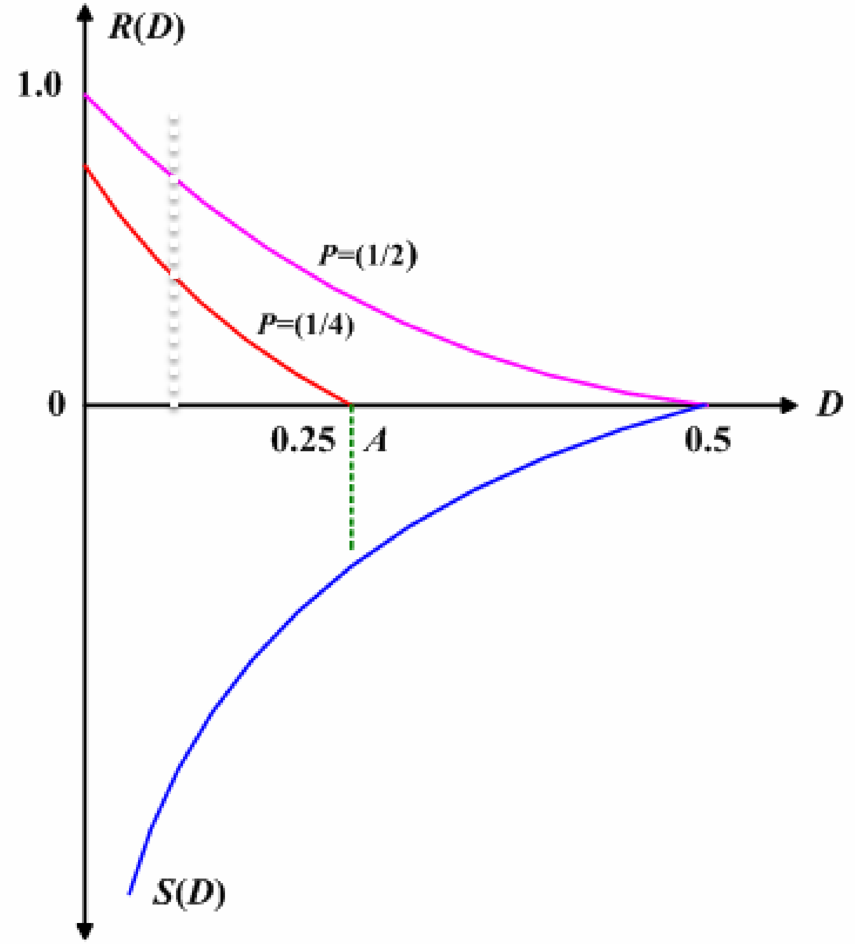


图4.2.2 二元信源和对称失真函数的$R(D)$和$S(D)$曲线

曲线图说明4

- 关于$S(D)$：它与p无直接关系，$S(D)$曲线只有一条，$p=0.5$和$p=0.25$都可以用，但它们的定义域不同；
- $p=0.25$，定义域是$D=0\sim0.25$，即到A点为止，此时$S_{max}=-1.59$。$D>0.25$时，$S(D)$就恒为0了。所以在A点$S(D)$是不连续的；
- 当$p=0.5$时，曲线延伸至$D=0.5$处，此时$S_{max}=0$，故$S(D)$是连续曲线，定义域为$D=0\sim0.5$。

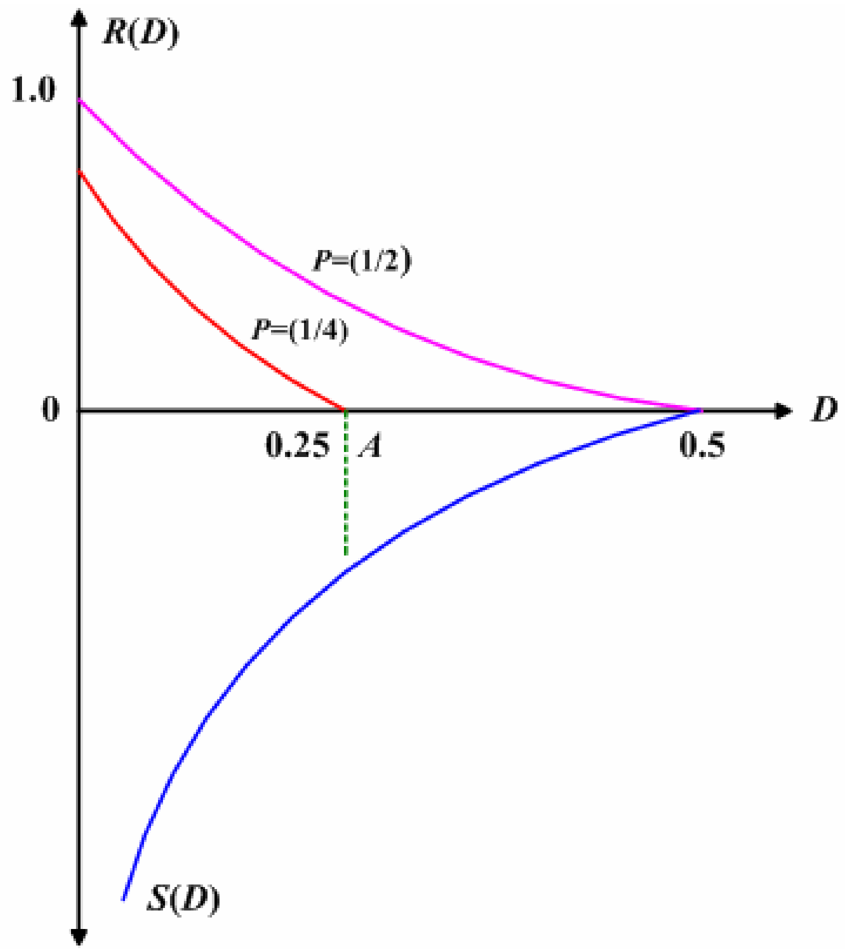


图4.2.2 二元信源和对称失真函数的$R(D)$和$S(D)$曲线

小结

给定平均失真度D：

- **信源分布越均匀（p值接近1/2），R(D)越大，即可压缩性越小；**
- **信源分布越不均匀，R(D)就越小，即可压缩性越大。**

- 这一结论对二进制的数据压缩和二进制的数字通信等实际应用都具有指导意义。
- 例如，信源数据越是偏离等概率分布其压缩比会越高；对于有类似扰码器单元的二进制的数字通信系统，由于扰码器的作用将会使其输出消息变为近似等概率分布，故压缩编码必须放在扰码之前进行。

等概离散信源的信息率失真函数

等概离散信源的信息率失真函数

例　设信源符号集为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

概率分布为 $p(a_i)=\dfrac{1}{n}\quad i=1,2,\cdots,n$

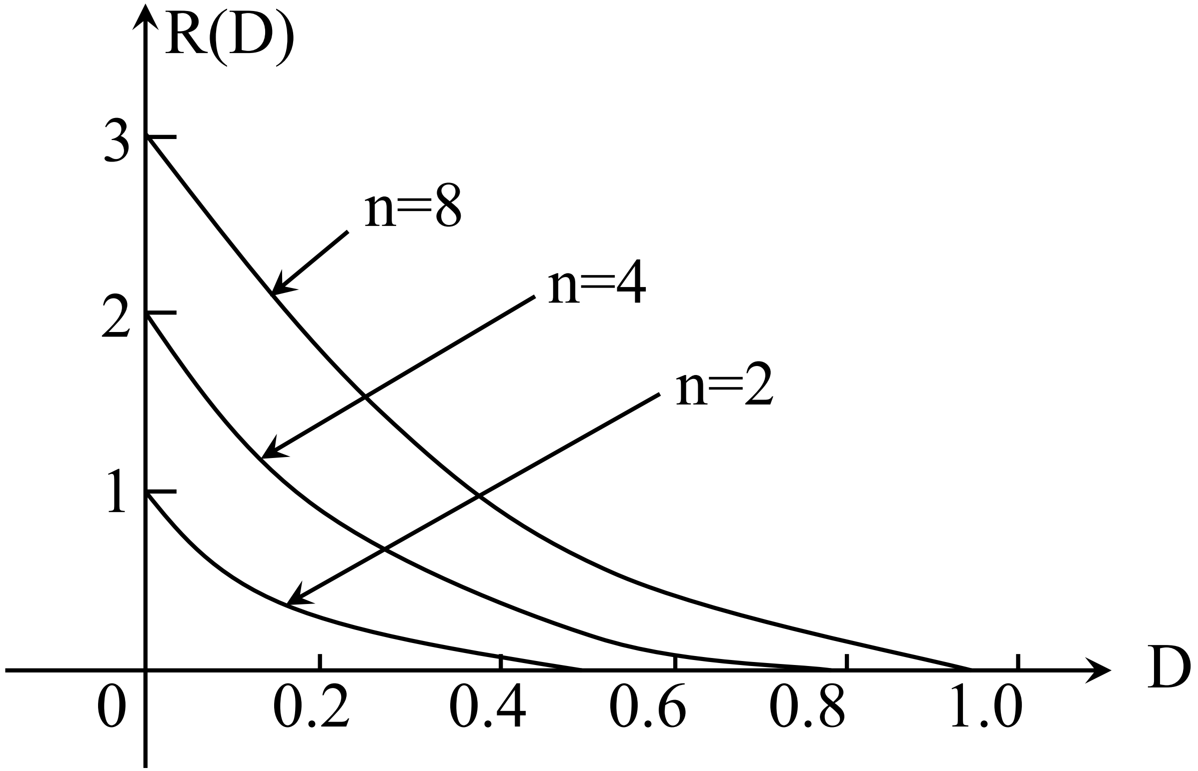
失真函数选为 $d(a_i,a_j)=\begin{cases}\alpha & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$

此时有 $D_{\max}=\min D_j=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\alpha.$ 可解出

$$\boxed{R(D)=\log n+\frac{D}{\alpha}\log\frac{\frac{D}{\alpha}}{n-1}+\left(1-\frac{D}{\alpha}\right)\log\left(1-\frac{D}{\alpha}\right)}$$

等概离散信源的信息率失真函数曲线

- 不同n值对应的等概离散信源信息率失真函数



等概离散信源的信息率失真函数分析

$$R(D)=\log n+\frac{D}{\alpha}\log\frac{\frac{D}{\alpha}}{n-1}+\left(1-\frac{D}{\alpha}\right)\log\left(1-\frac{D}{\alpha}\right)$$

分析:

- 第一项是等概率信源的熵，即无失真传送信源所必须的信息率，后两项则是由于容忍一定失真可以压缩的信息率。
- 对于同一失真度D，n越大，$R(D)$越大，压缩率（可能性）越小；
- 对于同一失真度D，n越小，$R(D)$越小，压缩率（可能性）越大。
- 当$n=2$，$\alpha=1$时，$R(D)=H(p)-H(D)=\log 2-H(D)=1-H(D)$

总结

- 提出失真测度的概念，定义了失真函数d(x_i,y_j)、和平均失真度，给出了保真度准则。
- 给出了信息率失真函数R(D)，并分析了R(D)的性质，画出了R(D)曲线。
- 率失真函数一旦找到，就与求极值过程中选择的试验信道不再有关，而只是信源特性的参量。不同的信源其R(D)是不同的。
- 给出了二进制对称信源和n进制对称信源等概率分布时的信息率失真函数R(D)，并分析了其意义。

谢谢！

黑晓军
华中科技大学
电子信息与通信学院
Email: heixj@hust.edu.cn
网址：http://eic.hust.edu.cn/aprofessor/heixiaojun

补充

R(D)参量表示法求解

二元离散信源的信息率失真函数计算推导

R(D)参量表示法求解

设离散信源的输入序列为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$$

输出序列为

$$\begin{bmatrix} Y \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ p(y_1) & p(y_2) & \cdots & p(y_m) \end{bmatrix}$$

字符传输的失真函数为$d(x_i, y_j)$ $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots, m$

采用如下简记

$$d_{ij} = d(x_i, y_j), \quad p_{ij} = p(y_j \mid x_i), \quad p_i = p(x_i), \quad q_j = p(y_j)$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) p(y_j \mid x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij}$$

R(D)参量表示法求解

信息率失真函数$R(D)$的计算为在约束条件

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} d_{ij} = D & (1) \\ \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \cdots, n & (2) \end{cases}$$

保真度准则

下，

信道转移概率的归一化

求 $I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_j}$ 极小值问题。

应用拉格朗日乘法，引入乘子S和$\mu_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

将上述条件极值问题化成无条件极值问题：

令 $\frac{\partial}{\partial p_{ij}}[I(X;Y) - S(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} d_{ij} - D) - \mu_i(\sum_{j=1}^{m} p_{ij} - 1)] = 0$

$$\frac{\partial}{\partial p_{ij}}[I(X;Y)-S(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_i p_{ij}d_{ij}-D)-\mu_i(\sum_{j=1}^{m}p_{ij}-1)]=0$$

$$P(x_i)\ln\frac{P(y_j/x_i)}{P(y_j)}+P(x_i)-P(x_i)-SP(x_i)d(x_i,y_j)-\mu_i=0$$

令 $\ln\lambda_i=\frac{\mu_i}{P(x_i)}\Rightarrow\ln\frac{P(y_j/x_i)}{P(y_j)}-Sd(x_i,y_j)-\ln\lambda_i=0$

$$\Rightarrow P(y_j/x_i)=\lambda_i P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)} \qquad (3)$$

两边对 j 求和得 $1=\lambda_i\sum_{j=1}^{m}P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)}$ (4)

(3)式两边乘$P(x_i)$并对i求和得

$$P(y_j)=P(y_j)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P(x_i)e^{Sd(x_i,y_j)} \qquad (5)$$

R(D)参量表示法求解-续

由（5）得到m个联立方程

$$1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P(x_i)e^{Sd(x_i,y_j)}$$ ⇨ 求λ_i出后代入(4)可求出$P(y_j)$。

⇩

再根据（3）可得$P(y_j/x_i)$。

⇩

将$P(y_j/x_i)$代入（1）和（2）得到：

$$D(s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(x_i)\lambda_i P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)}d(x_i,y_j)$$

以s为参量的平均失真

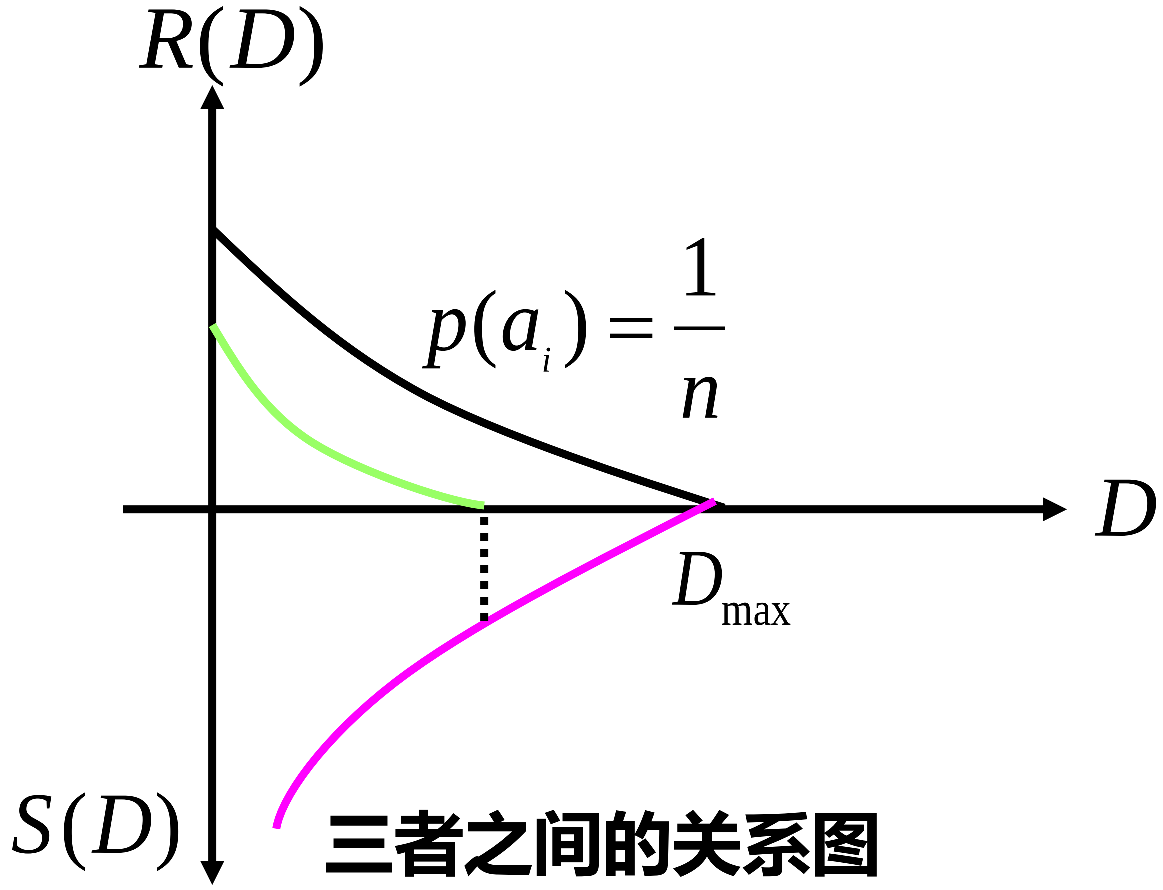
$$R(s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(x_i)\lambda_i P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)}\ln\frac{\lambda_i P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)}}{P(y_j)}$$

$$=SD(S)+\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\ln\lambda_i$$

以s为参量的率失真函数

R(D)参量表示法求解-续

可证s为R(D)的斜率 $\frac{dR}{dD}=S$，且为**负值**，并有 $\frac{dS}{dD}>0$



三者之间的关系图

R(D)参量表示法求解—总结

第一步：求λ_i	$1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P(x_i)e^{Sd(x_i,y_j)}$
第二步：求$p(y_j)$	$1=\lambda_i\sum_{j=1}^{m}P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)}$
第三步：求$p(y_j/x_i)$	$P(y_j/x_i)=\lambda_i P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)}$
第四步：求$D(S)$	$D(s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(x_i)\lambda_i P(y_j)e^{Sd(x_i,y_j)}d(x_i,y_j)$
第五步：求$R(S)$	$R(s)=SD(S)+\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\ln\lambda_i$

二元对称信源的信息率失真函数R(D)

例　二进制对称信源，设信源输入符号集为(0,1)，

其中$p(0)=p,\ p(1)=1-p,\ p\le\frac{1}{2}$，失真函数定义为

$$d_{ij}=\begin{cases}0 & i=j\\ 1 & i\ne j\end{cases}\qquad i,j=1,2$$

设输出符号集为（0，1），求信息率失真函数$R(D)$。

解：引入记号$p_1=p(0)=p,\ p_2=p(1)=1-p,$

输出符号概率为q_1,q_2　算参量λ_1和λ_2

$$\begin{cases}\lambda_1 p_1\exp\{sd_{11}\}+\lambda_2 p_2\exp\{sd_{21}\}=1\\ \lambda_1 p_1\exp\{sd_{12}\}+\lambda_2 p_2\exp\{sd_{22}\}=1\end{cases}$$

（略）二元对称信源的R(D) -续1

解出λ_1和λ_2为

$$\lambda_1 = \frac{\exp\{sd_{22}\} - \exp\{sd_{21}\}}{p_1[\exp\{sd_{11} + sd_{22} - \exp\{sd_{12} + sd_{21}\}]}$$

$$\lambda_2 = \frac{\exp\{sd_{11}\} - \exp\{sd_{12}\}}{p_2[\exp\{sd_{11} + sd_{22}\} - \exp\{sd_{12} + sd_{21}\}]}$$

将已知量代入得：

$$\lambda_1 = \frac{1}{p[1+\exp\{s\}]} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{(1-p)[1+\exp\{s\}]}$$

然后计算q_1和q_2

$$\begin{cases} q_1 \exp\{sd_{11}\} + q_2 \exp\{sd_{12}\} = \dfrac{1}{\lambda_1} \\ q_1 \exp\{sd_{21}\} + q_2 \exp\{sd_{22}\} = \dfrac{1}{\lambda_2} \end{cases}$$

（略）二元对称信源的R(D) -续2

由方程组解出q_1和q_2为

$$q_1=\frac{\frac{1}{\lambda_1}\exp\{sd_{22}\}-\frac{1}{\lambda_2}\exp\{sd_{12}\}}{\exp\{sd_{11}+sd_{22}\}-\exp\{sd_{12}+sd_{21}\}}$$

$$q_2=\frac{\frac{1}{\lambda_2}\exp\{sd_{11}\}-\frac{1}{\lambda_1}\exp\{sd_{21}\}}{\exp\{sd_{11}+sd_{22}\}-\exp\{sd_{12}+sd_{21}\}}$$

将已知量及求得的λ_1和λ_2代入得

$$q_1=\frac{p-(1-p)\exp\{s\}}{1-\exp\{s\}}\qquad q_2=\frac{(1-p)-p\exp\{s\}}{1-\exp\{s\}}$$

（略）二元对称信源的R(D) -续3

将求得的λ_1, λ_2和q_1, q_2,代入$D(s)$最后得到平均失真度

$$
\begin{aligned}
D(s) &= \lambda_1 p_1 q_1 d_{11} \exp\{sd_{11}\} + \lambda_1 p_1 q_2 d_{12} \exp\{sd_{12}\} \\
&\quad + \lambda_2 p_2 q_1 d_{21} \exp\{sd_{21}\} + \lambda_2 p_2 q_2 d_{22} \exp\{sd_{22}\} \\
&= \frac{\exp\{s\}}{1+\exp\{s\}}
\end{aligned}
$$

解出参量s为 $s = \log \dfrac{D}{1-D}$

（略）二元对称信源的R(D) -续4

将参量s代入可得到率失真函数

$$R(D) = sD(s) + p_1 \log \lambda_1 + p_2 \log \lambda_2 \Big|_{s=\log\frac{D}{1-D}}$$

$$= -[p\log p + (1-p)\log(1-p)] + [D\log D + (1-D)\log(1-D)]$$

令 $\bar{p} = 1-p, \bar{D} = 1-D,$ 则

$$R(D) = -[p\log p + \bar{p}\log \bar{p}] + [D\log D + \bar{D}\log \bar{D}]$$

$$= H(p,\bar{p}) - H(D,\bar{D})$$

由$R(D)$和$H(\omega,\bar{\omega})$的性质可确定出信息率失真函数定义域为

$0 \le D \le p, p \le \frac{1}{2},$ 值域为$0 \le R(D) \le H(p,\bar{p})$

参考资料

- 陈运，信息论与编码，第3版，第7章7.2节，电子工业出版社，2015