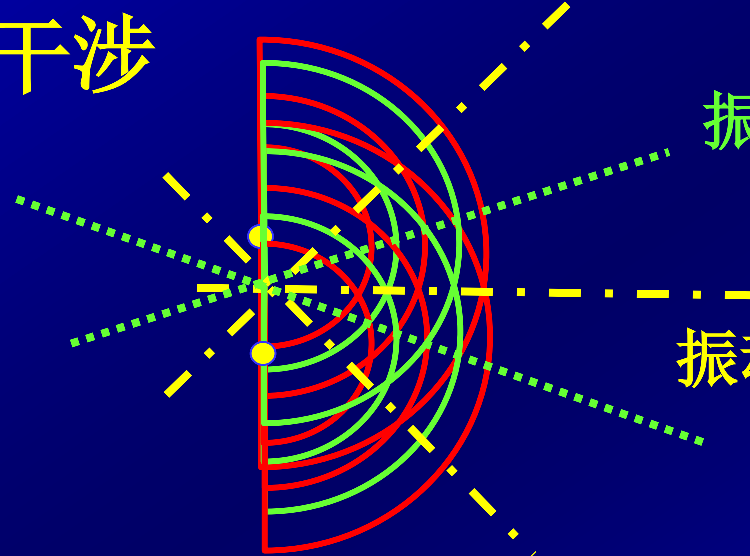
波的干涉



相干波源的条件

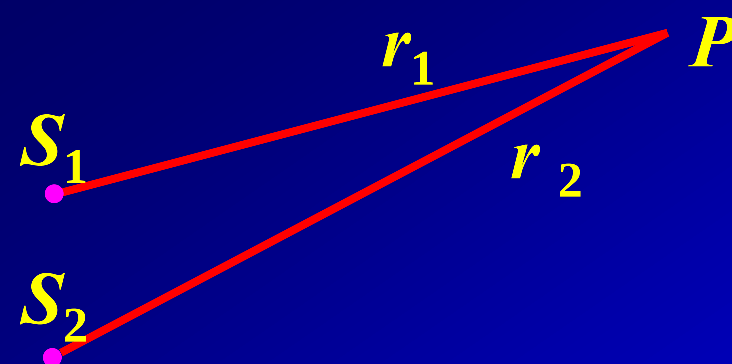
波源振动方向相同

频率相同

有恒定的相位差

干涉相长、相消条件

S_1、S_2 的振动方程分别为：



$$y_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

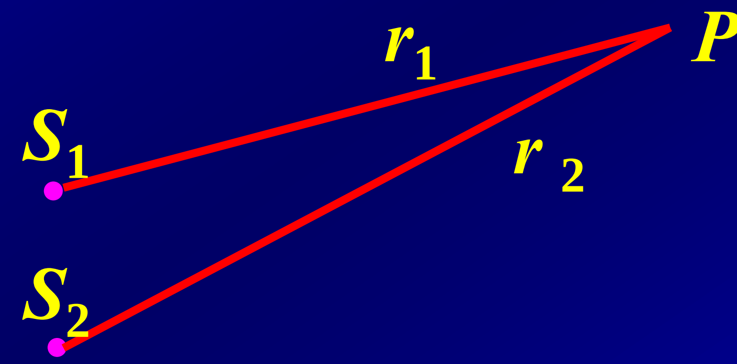
$$y_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

两列波在 P 点的振动方程为：

$$y_1 = A_1\cos[\omega(t - \frac{r_1}{u}) + \varphi_1] = A_1\cos(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \varphi_1)$$

$$y_2 = A_2\cos[\omega(t - \frac{r_2}{u}) + \varphi_2] = A_2\cos(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda} + \varphi_2)$$

$$\begin{cases} y_1 = A_1\cos(\omega t - \dfrac{2\pi r_1}{\lambda} + \varphi_1) \\ y_2 = A_2\cos(\omega t - \dfrac{2\pi r_2}{\lambda} + \varphi_2) \end{cases}$$



两振动的位相差：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$$

合振动为 $y = A\cos(\omega t + \varphi)$

合振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$

* 相长相消的条件

位相差条件：
$$\begin{cases} \Delta\varphi = 2k\pi & A_{max} = A_1 + A_2 \\ \Delta\varphi = (2k+1)\pi & A_{min} = |A_1 - A_2| \end{cases}$$

$k = 0, \pm1, \pm2 \ldots\ldots$

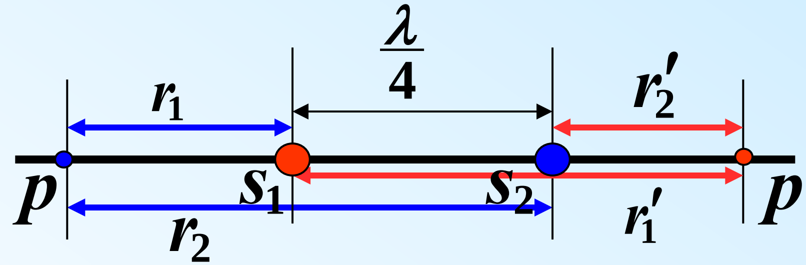
两振动的位相差： $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \dfrac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$

若 $\varphi_1 = \varphi_2$， 则波程差条件：

$$\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = \begin{cases} 2k\pi & \cdots \max \\ (2k+1)\pi & \cdots \min \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \Delta r = r_2 - r_1 = k\lambda & \cdots \max \\ \Delta r = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \cdots \min \end{cases}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$

例： 两相干波源 s_2 超前 s_1 $\frac{\pi}{2}$ ，相距 $l=\frac{\lambda}{4}$ ，$A_1=A_2$ 。讨论延长线上干涉情况。



解： 左边延长线上 p 点：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}=0$$

加强

合振幅：$A=2A_1$

右边延长线上 p 点：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2'-r_1')=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{4}\right)=\pi$$

减弱

合振幅：$A=0$

$\Delta\varphi=?$

$(A)-\pi$

$(B)\pi$

$(C)\frac{\pi}{2}$

$(D)0$

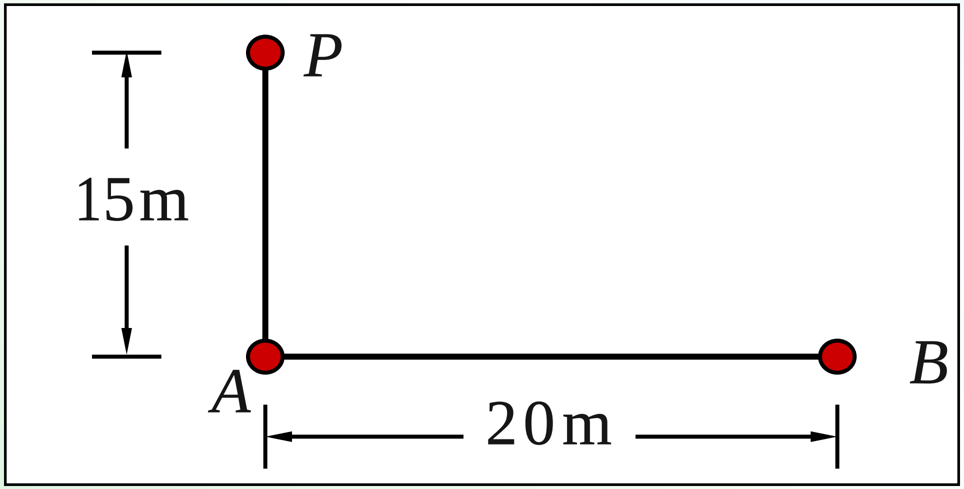
(E)□ □

合成波能量向左传加强 ——— 定向辐射（二元端式天线）

波个数愈多则定向性愈好（天线列阵）

声波定向系统的原理类似。

例. 如图所示，A、B 两点为同一介质中两相干波源。其振幅皆为5cm，频率皆为100Hz，但当点 A 为波峰时，点B 适为波谷。设波速为10m/s，试写出由A、B发出的两列波传到点P 时干涉的结果。



解: $$BP=\sqrt{15^2+20^2}=25\text{ m}$$

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{10}{100}=0.1\text{ m}$$

设 A 的相位较 B 超前，则

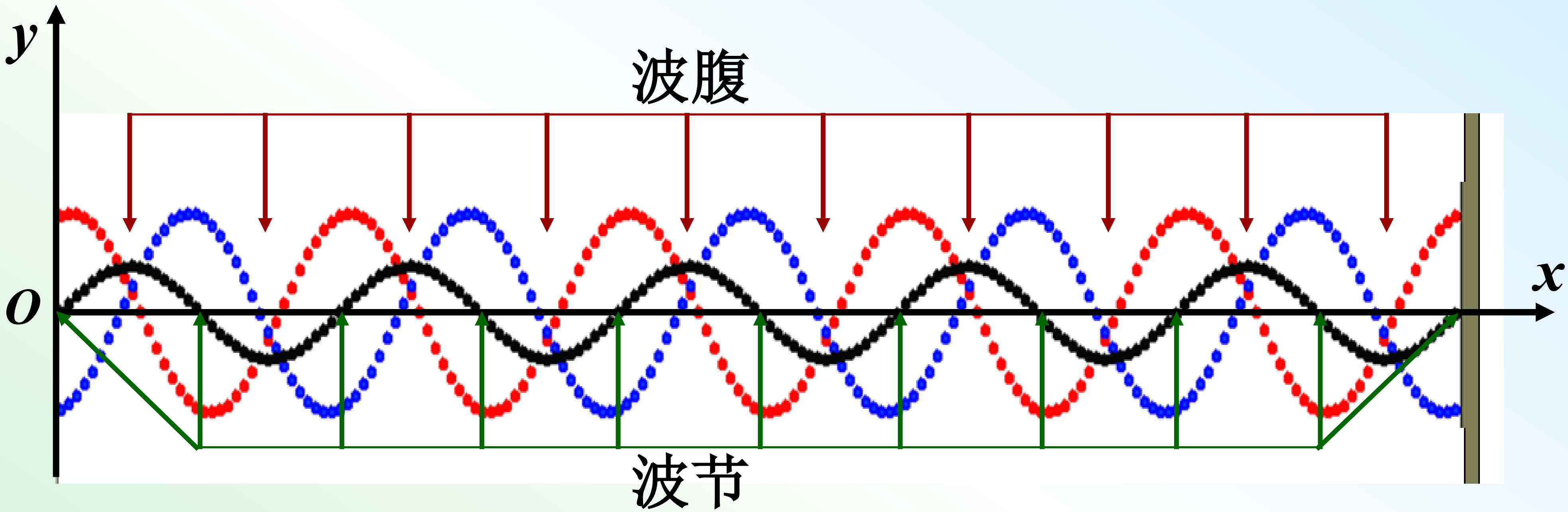
$$\varphi_A-\varphi_B=\pi$$

$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\frac{BP-AP}{\lambda}=-\pi-2\pi\frac{25-15}{\lambda}=-201\pi$$

点P 合振幅 $$A=|A_1-A_2|=0$$

干涉的特例——驻波

1）驻波的形成：两列振幅相等的相干波相向而行，在相遇的区域叠加干涉, 形成驻波。



波腹：振幅最大处

波节：振幅为0处

演示: 弦驻波

演示: 鱼洗

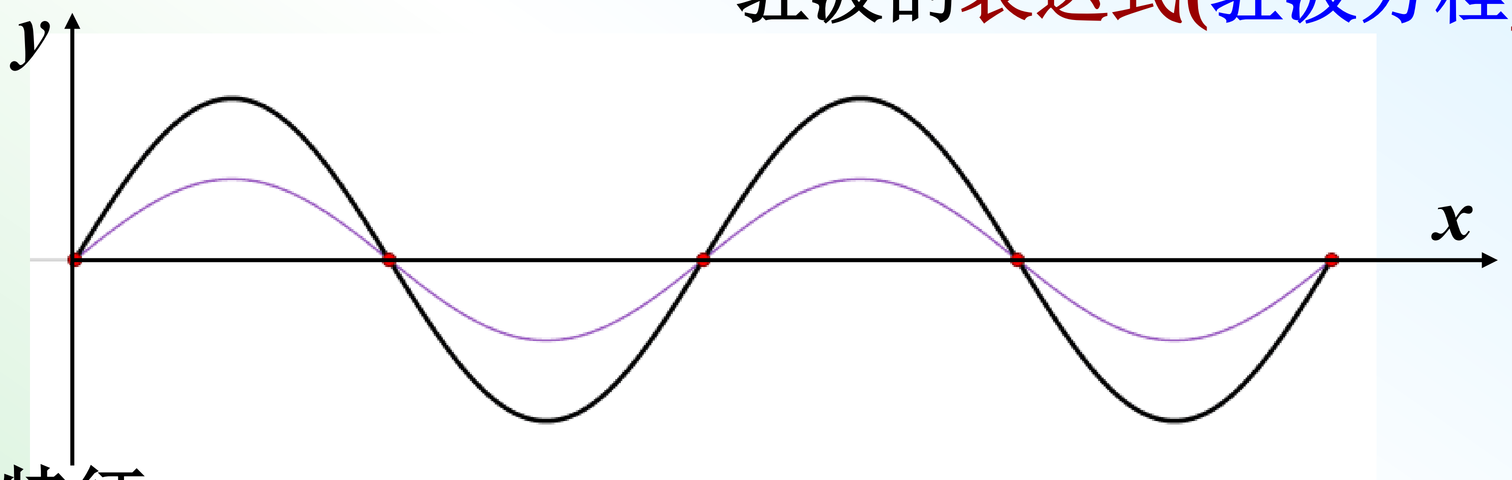
火焰舞

2）驻波的表达式

设两列波为平面余弦波：
$$\begin{cases} y_1=A\cos\omega(t-\dfrac{x}{u}) \\ y_2=A\cos\omega(t+\dfrac{x}{u}) \end{cases}$$

合成波：
$$\boxed{y=y_1+y_2=2A\cos\frac{\omega}{u}x\cdot\cos\omega t}$$

驻波的表达式(驻波方程)

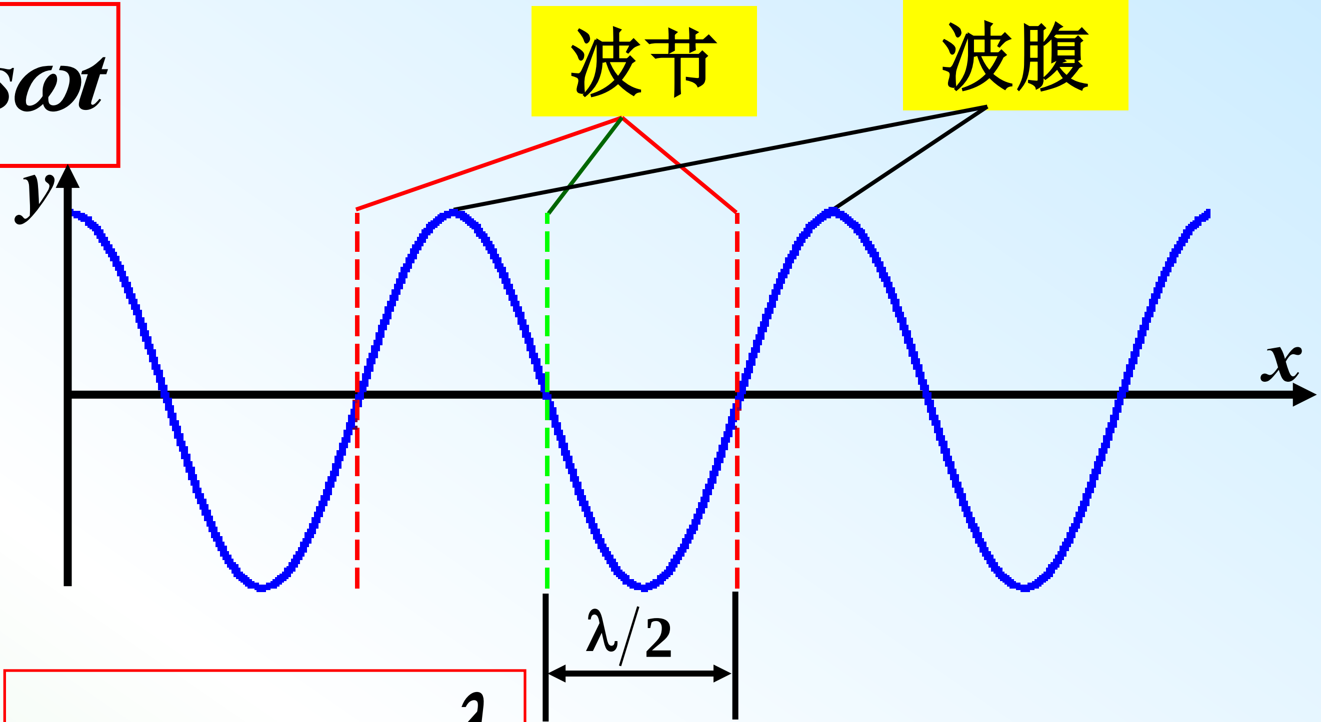


3）驻波的特征

(1)各点均作谐振动，但振幅不同。

振幅 $A_{驻}$是 x 的函数： $A_{驻}=2A\cos\dfrac{\omega}{u}x$
$$\begin{cases} A_{驻\max}=2A \\ A_{驻\min}=0 \end{cases}$$

$$\boxed{y=2A\cos\frac{\omega}{u}x\cdot\cos\omega t}$$



$A_{驻}=0$处 ——波节

波节的位置：

令：$2A\cos\frac{\omega}{u}x=0$

即：$\cos\frac{2\pi}{\lambda}x=0$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x_k=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}}\quad(k=0,1,2\cdots)$$

$A_{驻}=2A$处 ——波腹

波腹的位置：$\cos\frac{2\pi}{\lambda}x=\pm1$　　$\frac{2\pi}{\lambda}x=\pm k\pi$

$$\rightarrow\boxed{x_k=\pm k\frac{\lambda}{2}}\quad(k=0,1,2\cdots)$$

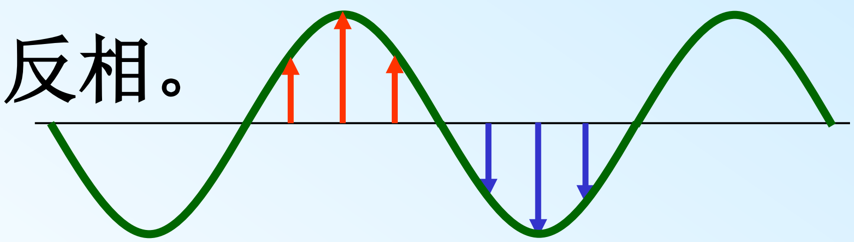
相邻 波节 波腹 间距：$\Delta x=\frac{\lambda}{2}$　波节与相邻波腹间隔：$\Delta x=\frac{\lambda}{4}$

$$y=2A\cos\frac{\omega}{u}x\cdot\cos\omega t$$

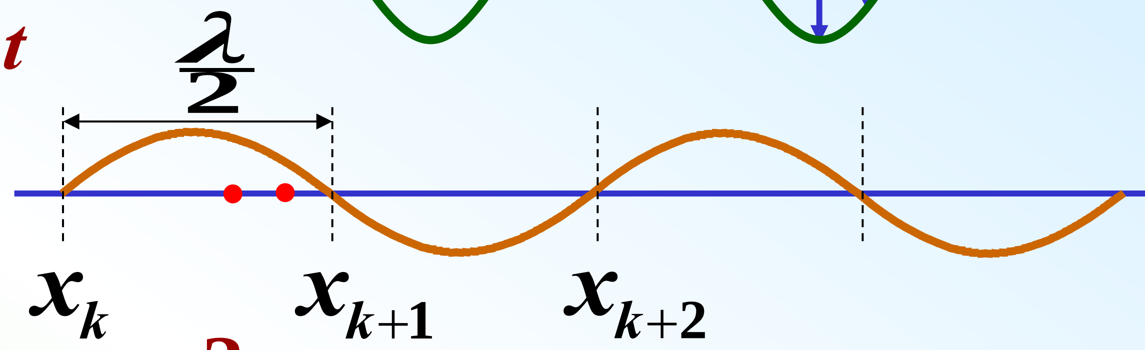
(2)驻波的位相关系

相邻波节之间的各点同相，

波节两侧各半个波长范围内的各点反相。



$$y=y_1+y_2=2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$



第k个波节的坐标是

$$\boxed{x_k=(2k+1)\frac{\lambda}{4}}$$

关键是看 $\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$

考虑两个相邻波节 x_k 和 x_{k+1}之间，离 x_k分别为 d 和 d'（$0<d<d'<\frac{\lambda}{2}$）的任意两个质元的位相。

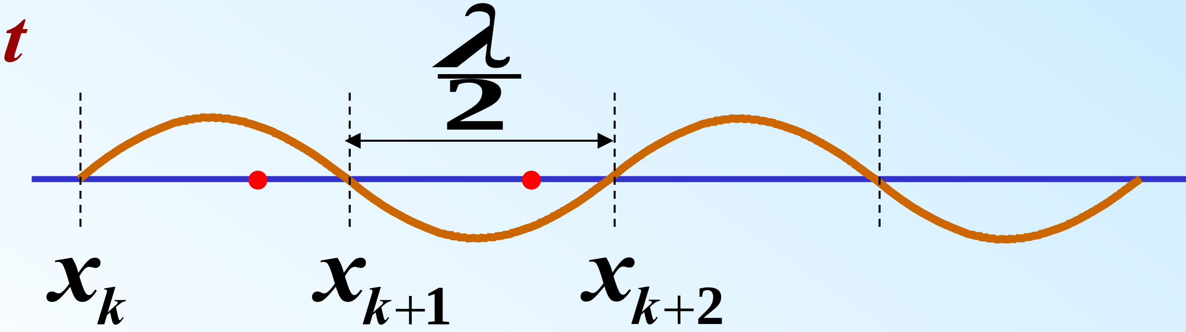
$$\cos\frac{2\pi(x_k+d)}{\lambda}\cos\frac{2\pi(x_k+d')}{\lambda}=\sin\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\frac{2\pi d'}{\lambda}>0$$

故，两个相邻的波节之间所有质元的振动都是同位相的。

$$y=y_1+y_2=2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

第k个波节的坐标

$$\boxed{x_k=(2k+1)\frac{\lambda}{4}}$$



考虑波节 x_{k+1} 两侧的任意两个质元。

在 x_{k+1} 的左侧，x_k 和 x_{k+1}之间任意质元的坐标可以表示为 x_k+h，且 $0<h<\frac{\lambda}{2}$；在 x_{k+1}的右侧，x_{k+1} 和 x_{k+2} 之间任意质元的坐标可以表示为 x_k+h'，且 $\frac{\lambda}{2}<h'<\lambda$。

$$\cos\frac{2\pi(x_k+h)}{\lambda}\cos\frac{2\pi(x_k+h')}{\lambda}=\sin\frac{2\pi h}{\lambda}\sin\frac{2\pi h'}{\lambda}<0$$

同理有，在任意波节x_{k+1}两侧各半个波长范围内，左侧质元的振动位相和右侧质元的位相相反。

(3)振动状态不传播。波形不移动，分段振动(故称“驻”波)。

(4) 驻波中没有净能量传递，能流密度为0

$$\vec{i}_{驻}=\vec{i}_{入}+\vec{i}_{反}=w\vec{u}+(-w\vec{u})=0$$

或波强：$I_{驻}=I_{入}+I_{反}=I_{入}-I_{入}=0$

讨论：

即：驻波系统不向任何方向传播能量。

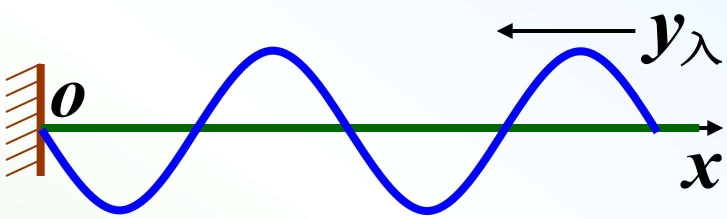
各质点位移(同时)达最大时, 系统的动能为零、势能最大;

$\left.\begin{array}{l}\text{在波节处相对形变最大}\\\text{在波腹处相对形变最小}\end{array}\right\}$ 势能集中在波节。

当各质点(同时)回到平衡位置时，系统的势能为零、动能最大。——动能集中在波腹。

能量从波腹传到波节，又从波节传到波腹，往复循环，能量不被传播。所以驻波不传播能量，它是媒质的一种特殊的运动状态——稳定态。

4）反射与半波损失　　一弦线一端固定在墙上，如图示：



设入射波：　$y_{入} = A\cos\omega(t+\frac{x}{u})$

考虑固定端*o*点的振动方程。

显然，固定端*o*点的振动：$y_{o合}=0$。此振动为入射波和反射波在*o*点引起的振动的叠加，即

$y_{o合}=y_{o入}+y_{o反}=0$。$y_{o入}$已知，那么　$y_{o反}=-y_{o入}$

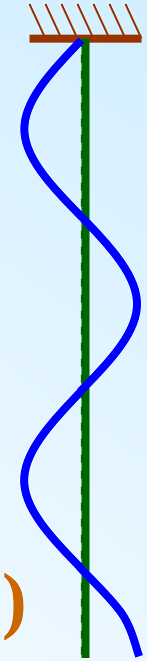
即　$y_{o入}=A\cos\omega t$，$y_{o反}=A\cos(\omega t+\pi)$。因此，

和入射波在反射点引起的振动相比，反射波在反射点引起的振动的位相有π的突变。　谓之**半波损失**（半波突变）

$\Delta\phi=\frac{\omega\Delta x}{u}=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x=\pi$　　$\Delta x=\frac{\lambda}{2}$（半个波长）

一般地： 对半波损失产生条件的进一步讨论

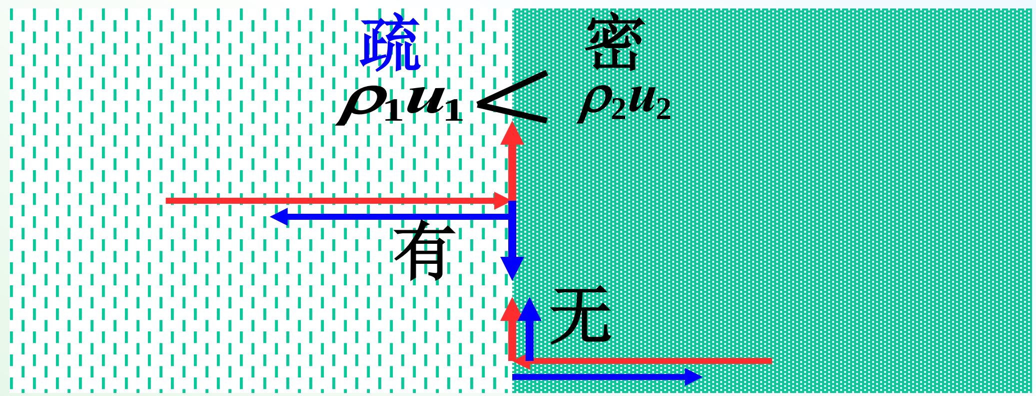
入射波 { 由波疏媒质→波密媒质→反射: 有半波损失(波节)
由波密媒质→波疏媒质→反射 :无半波损失(波腹)



波由波疏媒质传到波密媒质，在分界面上发生反射时，反射点一定是波节；但波在自由端反射时无半波损失，形成波腹。

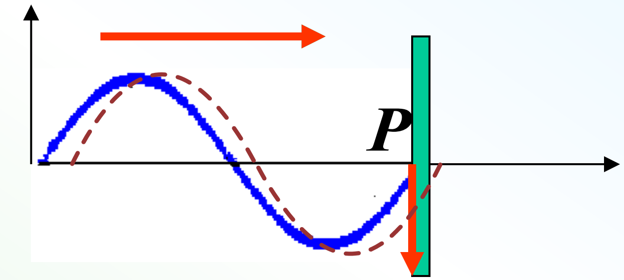
波疏媒质：ρu小的媒质。
波密媒质：ρu大的媒质。
（ρ是密度，u 是波速）

波在两媒质表面反射时



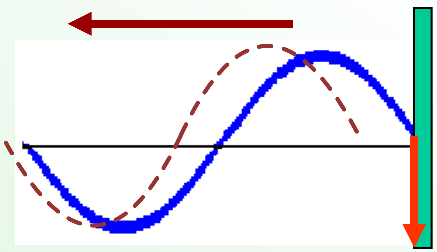
对光波， n大为密媒质，也有上述结论。

例： 已知入射波 t 时刻的波动曲线，问：A、B、C、D 哪条曲线是t 时刻反射波曲线？（反射壁是波密媒质）

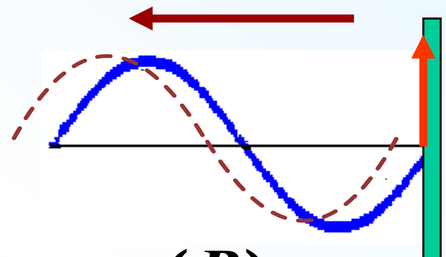


*P*点为波节

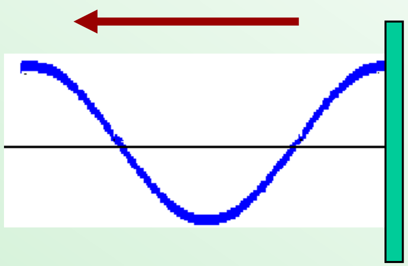
（B）



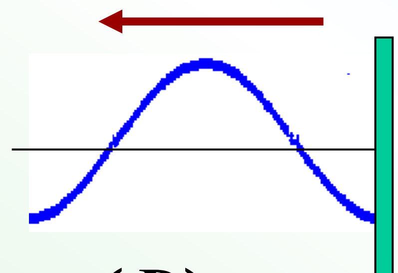
(*A*)



(*B*)

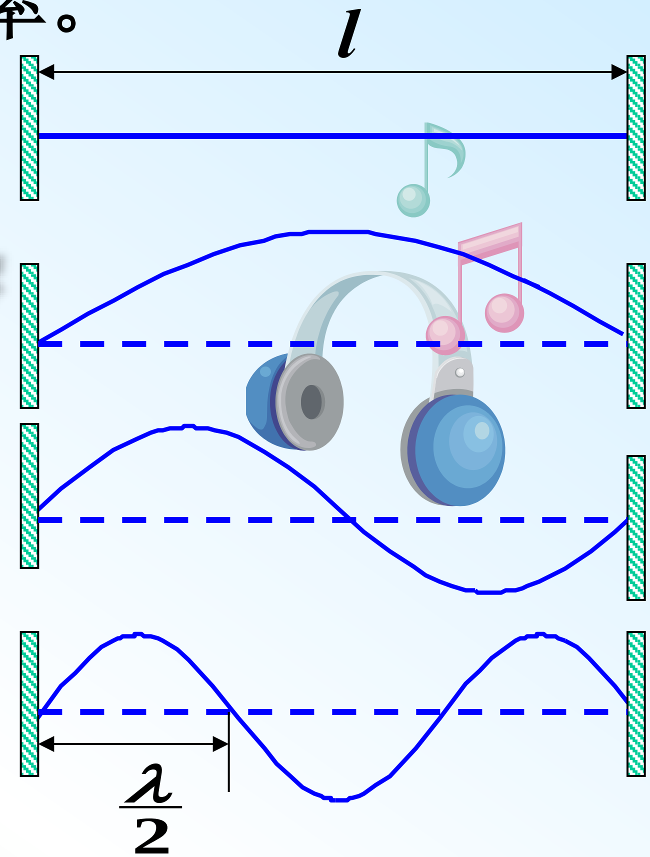


(*C*)



(*D*)

例： 讨论两端固定的弦自由振动的频率。



解： 要形成稳定驻波，两固定端一定为波节，此边界条件就限制了波长，在波速一定时也就限制了频率。

只有弦长等于半波长的整数倍时，才能保证两固定端为波节的边界条件，即

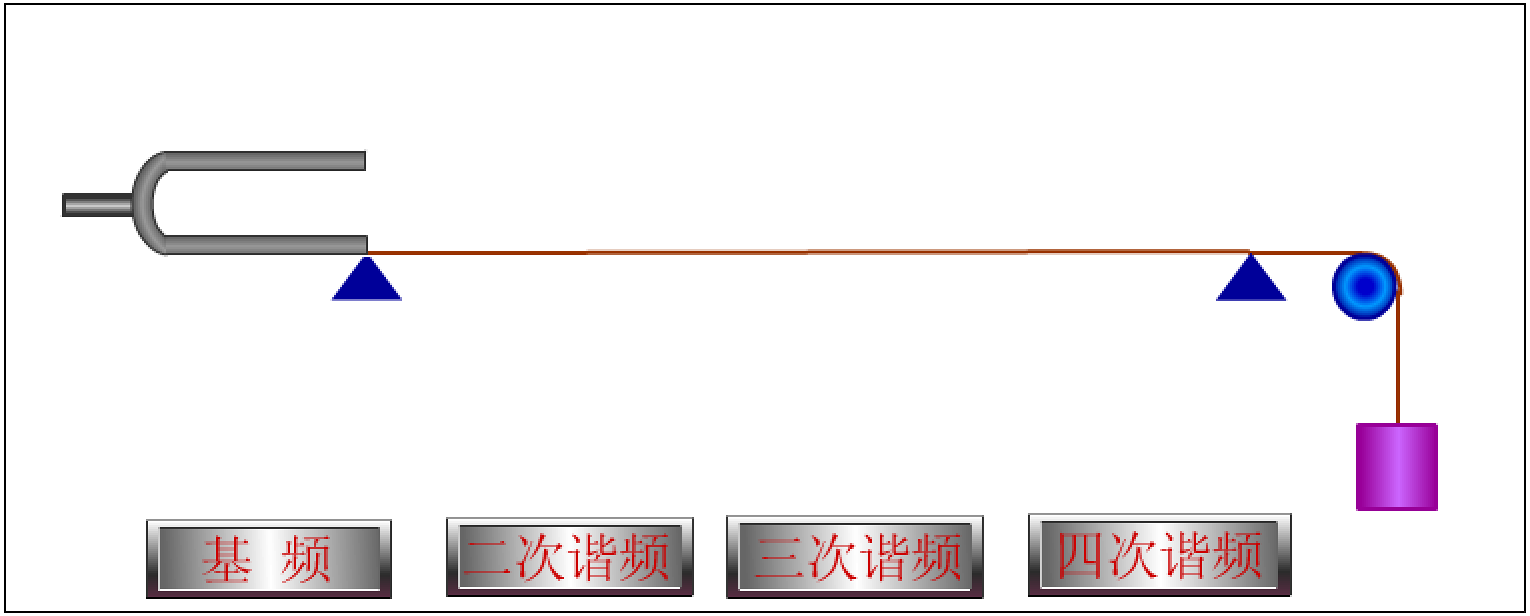
$$l=n\frac{\lambda}{2} \qquad n=1,2,3\cdots$$

$$\lambda=\frac{2l}{n} \longrightarrow \nu=\frac{u}{\lambda}=\frac{nu}{2l}$$

$n=1$ 基频（基音）

$n\geq 2$ 谐频（谐音）

振动的简正模式



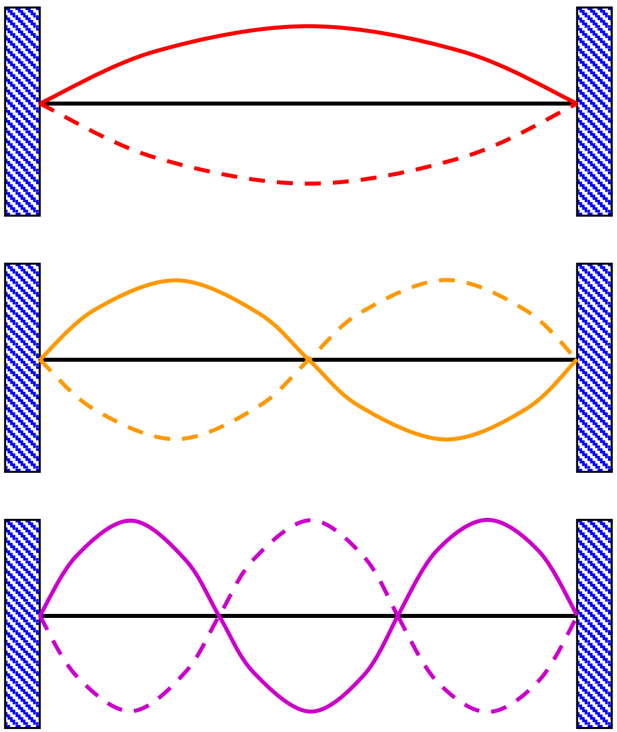
两端固定的弦线形成驻波时，波长λ_n和弦线长l应满足：

$$l = n\frac{\lambda_n}{2},\quad \nu_n = n\frac{u}{2l}\qquad n = 1, 2, \cdots$$

由此频率决定的各种振动方式称为弦线振动的简正模式。

两端固定的弦振动的简正模式

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$



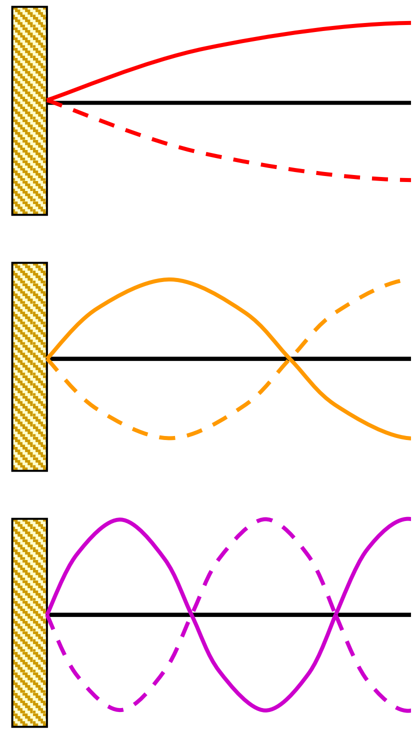
$$l = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$l = \frac{2\lambda_2}{2}$$

$$l = \frac{3\lambda_3}{2}$$

一端固定一端自由的弦振动的简正模式

$$l = (n - \frac{1}{2})\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$



$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

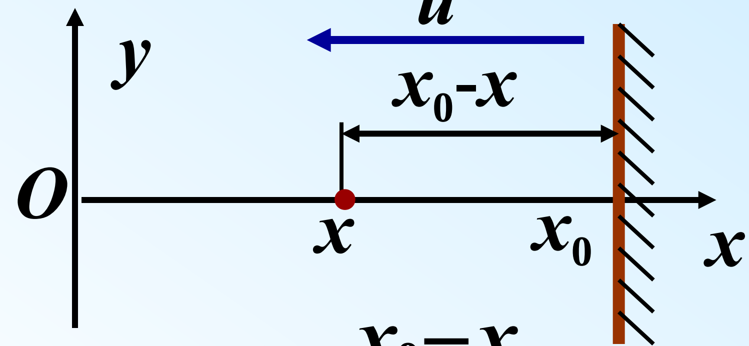
$$l = \frac{3\lambda_2}{4}$$

$$l = \frac{5\lambda_3}{4}$$

例:平面简谐波 $y=A\cos(\omega t-kx)$ ，在$x_0=4\lambda$处(固定端）反射, 求：(1)反射波的波函数；(2)驻波的波函数；(3)0与x_0处之间的各个波节和波腹的位置。

解: (1)方法一： x_0处反射波的振动:

$$y_1=A\cos[(\omega t-kx_0)+\pi]$$



$$\Delta t=\frac{x_0-x}{u}$$

反射波的波函数:

$$y_{反}=A\cos[\omega(t-\Delta t)-kx_0+\pi]$$

$$=A\cos[\omega(t-\frac{x_0-x}{u})-kx_0+\pi]$$

$$=A\cos(\omega t+kx-15\pi)=A\cos(\omega t+kx-\pi)$$

方法二：考虑波由$o \longrightarrow x_0 \longrightarrow x$

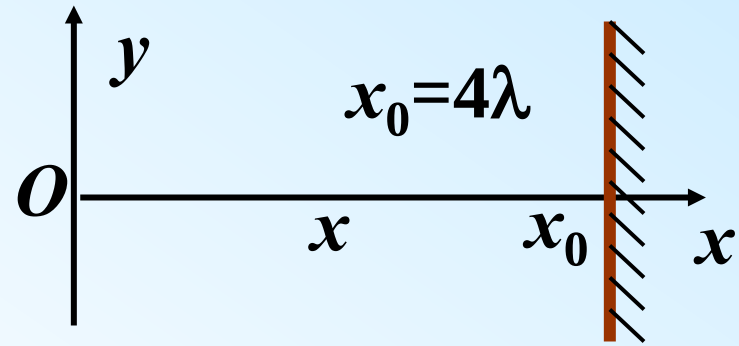
需时: $\Delta t=\dfrac{2x_0-x}{u}$

$$y_{反}=A\cos[\omega(t-\Delta t)-k\cdot 0+\pi]=A\cos(\omega t+kx-\pi)$$

即： $y_{反}=A\cos(\omega t+kx-\pi)$

(1) $y_{入} = A\cos(\omega t - kx)$ $\quad y_{反} = A\cos(\omega t + kx - \pi)$

(2)求驻波的波函数:



$$y = y_{入} + y_{反}$$
$$= 2A\cos(kx - \frac{\pi}{2})\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

(3) O与x_0处之间的各个波节和波腹的位置:

波节的位置应满足: $2A\cos(kx - \frac{\pi}{2}) = 0$

即: $kx - \frac{\pi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

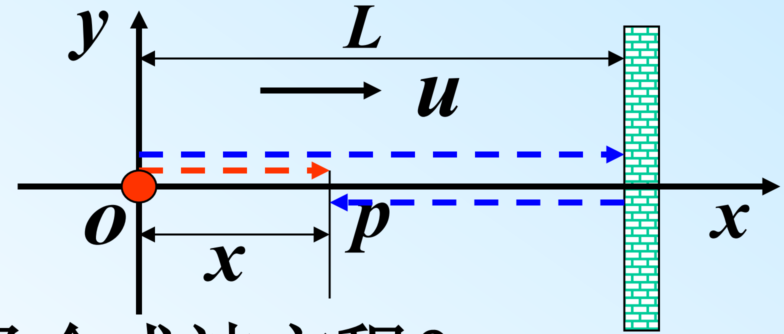
$$\therefore\ x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2} \quad (n = 0,1,2\cdots 8) \quad x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda \cdots 4\lambda$$

波腹的位置应满足: $2A\cos(kx - \frac{\pi}{2}) = 2A$

即: $kx - \frac{\pi}{2} = n\pi \quad (n = 0,1,2\cdots 7)$

$$\therefore\ x = \frac{(2n+1)}{k}\frac{\pi}{2} = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4} \cdots \frac{15}{4}\lambda$$

例：已知：波源 $y_O = A\cos\omega t$



$L = \dfrac{5\lambda}{2}$ 处有一密媒质反射壁

求：（1）$x>0$处的入射波、反射波及合成波方程？

并讨论干涉情况。$\Delta t = \dfrac{2L - x}{u}$

解：

$$y_{入} = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

有半波损失$\pm\pi$

$$y_{反} = A\cos[\omega(t - \frac{2L - x}{u}) - \pi]$$

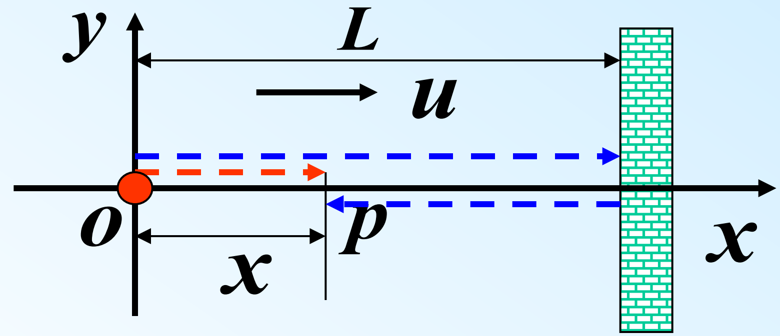
$$= A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \frac{2\pi}{\lambda} 2 \frac{5\lambda}{2} - \pi]$$

$$= A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \pi]$$

驻波方程

$$y_{驻} = y_{入} + y_{反} = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$y_{驻}=y_{入}+y_{反}=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$



波腹：

$$\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{\pi}{2}=\pm k\pi$$

$$x_k=\left(\pm k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$$

x在 0 —— $\frac{5\lambda}{2}$ 之间

$$k=0,1,2,3,4$$

$$x=\frac{\lambda}{4},\frac{3\lambda}{4},\frac{5\lambda}{4},\frac{7\lambda}{4},\frac{9\lambda}{4}$$

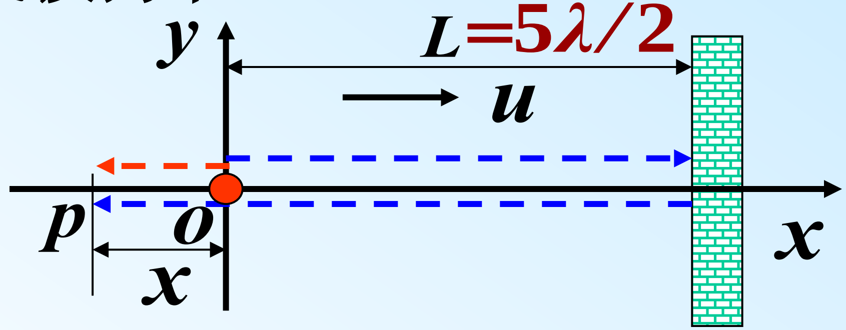
波节：

$$\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{\pi}{2}=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}\longrightarrow x_k=\pm k\frac{\lambda}{2}$$

$$k=0,1,2,3,4,5$$

$$x=0,\frac{\lambda}{2},\lambda,\frac{3\lambda}{2},2\lambda,\frac{5\lambda}{2}$$

（2） $x<0$处的入射波、反射波及合成波方程？并讨论干涉情况。



$$y_{入} = A\cos\omega(t+\frac{x}{u})$$

$$y_{反} = A\cos[\omega(t-\frac{2L-x}{u})-\pi] = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})-\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{5\lambda}{u}-\pi]$$

$$y_{反} = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})-\pi]$$

(实际上，这就是上一问中所求出的)

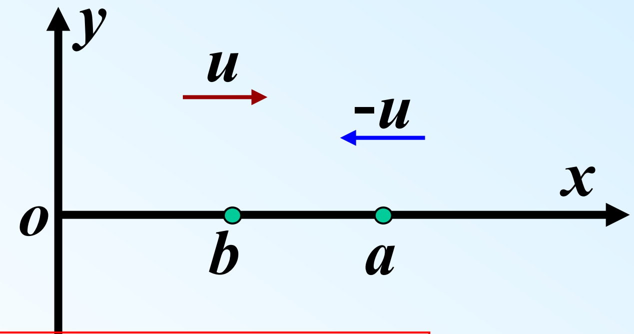
$$y_{合} = y_{入} + y_{反} = 2A\cos(-\frac{\pi}{2})\cos[\omega(t+\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}] = 0$$

干涉静止

若 L为其它值，则 $y_{合}$可不为0，$x<0$合成为行波方程。

行波方程

例: 振幅为A，频率为γ，波长为λ的简谐波沿弦线传播，在自由端a点反射。假设反射后波不衰减。已知$oa=7\lambda/8$，$ob=\lambda/2$. $t=0$ 时, $x=0$处质元的合振动经平衡位置向y负方向运动。求b点处入射波和反射波的合振动方程。



解: 设入射波为

$$y_1=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi]$$

$$=A\cos(2\pi\gamma t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\phi)$$

$$\boxed{y_{O入}=A\cos(2\pi\gamma t+\phi)}$$

$(t-\Delta t)$

a点为自由端，故无半波损失。反射波在o点引起的振动为

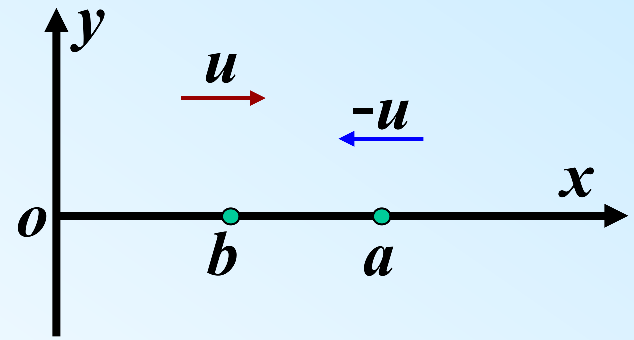
$$y_{O反}=A\cos[2\pi\gamma(t-\frac{2oa}{u})+\phi]=A\cos[2\pi\gamma t-\frac{2\pi\times2oa}{\lambda}+\phi]$$

$$=A\cos(2\pi\gamma t-2\pi\times2\times7\lambda/8/\lambda+\phi)$$

$$=A\cos(2\pi\gamma t+\phi-\frac{3\pi}{2})$$

$$y_1=A\cos(2\pi\gamma t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\phi)$$

$$y_{O反}=A\cos(2\pi\gamma t+\phi-\frac{3\pi}{2})$$



$oa=7\lambda/8$，$ob=\lambda/2$

所以反射波为

$$y_2=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\phi-\frac{3\pi}{2}]$$

合成波为

$$y=y_1+y_2=2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}-\frac{3\pi}{4})\cos(2\pi\gamma t+\phi-\frac{3\pi}{4})$$

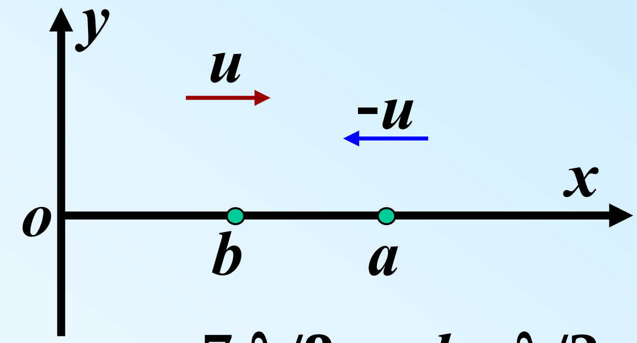
故 $x=0$处质元o点的合振动为

$$y_O=2A\cos(-\frac{3\pi}{4})\cos(2\pi\gamma t+\phi-\frac{3\pi}{4})$$

$$=-\sqrt{2}A\cos(2\pi\gamma t+\phi-\frac{3\pi}{4})$$

$$=\sqrt{2}A\cos(2\pi\gamma t+\phi+\frac{\pi}{4})$$

$$y_O=\sqrt{2}A\cos(2\pi\gamma t+\phi+\frac{\pi}{4})$$



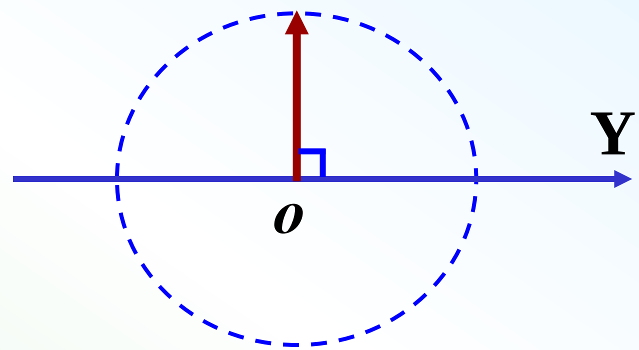
$oa=7\lambda/8$，$ob=\lambda/2$

而$t=0$ 时, $x=0$处质元的合振动经平衡位置向负方向运动，

由旋转矢量图知,

$$\phi+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\phi=\frac{\pi}{4}$$



合成波为

$$y=y_1+y_2=2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}-\frac{3\pi}{4})\cos(2\pi\gamma t+\phi-\frac{3\pi}{4})$$

$$=2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}-\frac{3\pi}{4})\cos(2\pi\gamma t+\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})$$

所以, b点($x_b=\lambda/2$) 的合振动方程为

$$y_b=2A\cos(2\pi\frac{\lambda/2}{\lambda}-\frac{3\pi}{4})\cos(2\pi\gamma t+\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})$$

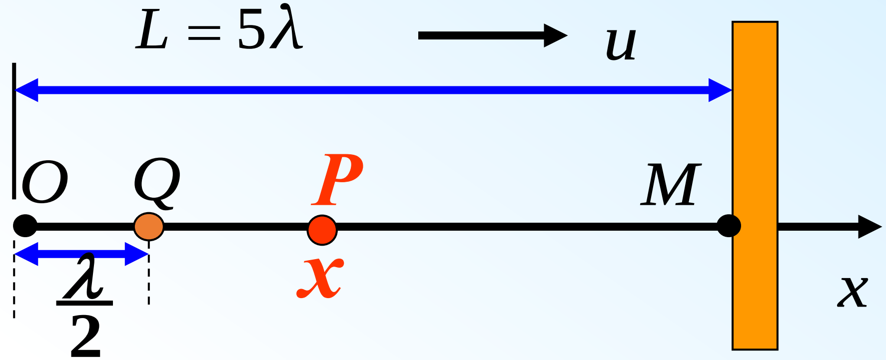
$$=\sqrt{2}A\cos(2\pi\gamma t-\frac{\pi}{2})$$

例. 波长为λ的平面简谐波沿 x正向传播如图已知Q 处振动方程为$y_Q=A\cos(\omega t-\pi)$, 波在M处遇一波密媒质反射面，且假设反射波振幅仍为A，求：

(1) 该平面简谐波波函数；

(2) 反射波波函数；

(3) 驻波方程。



解: (1) 以Q 为参考点

$$y_\lambda = A\cos[\omega(t-\frac{x-\frac{\lambda}{2}}{u})-\pi]$$

$$=A\cos(\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{\cancel{2}\pi\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{2}}}{\cancel{\lambda}}-\pi)$$

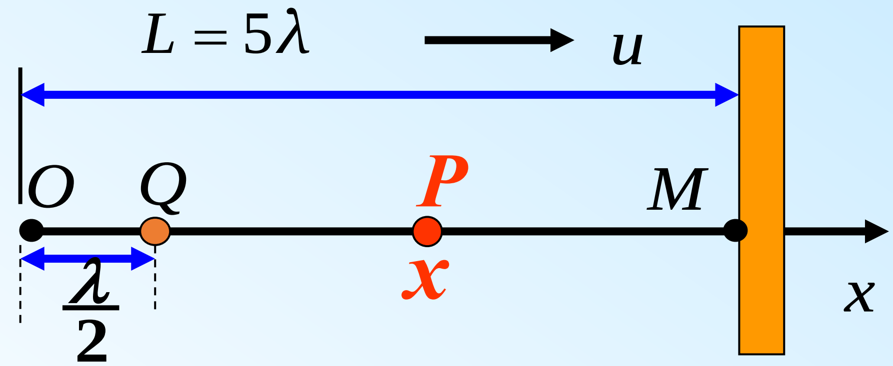
$$=A\cos(\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda})=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$$

(2) 以 P 为参考点，波由

$P \longrightarrow M \longrightarrow P$

所需时间：

$$\Delta t = \frac{2(L-x)}{u}$$



波在M处遇一波密媒质反射面

反射波为：

$$\cancel{y_{反} = A\cos\omega[t - \frac{2(L-x)}{u} - \frac{x}{u}]}$$

$$y_{反} = A\cos\{\omega[t - \frac{2(L-x)}{u} - \frac{x}{u}] + \pi\}$$

整理后得

$$y_{反} = A\cos(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} - 19\pi)$$

$$\begin{cases} y_{入} = A\cos(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda}) \\ y_{反} = A\cos(\omega t + \dfrac{2\pi x}{\lambda} - 19\pi) \end{cases}$$

(3) 入射波与反射波叠加成驻波，方程为

$$y = 2A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda} - 9.5\pi)\cos(\omega t - 9.5\pi)$$

波腹

$$\left|\cos(\frac{2\pi x}{\lambda} - 9.5\pi)\right| = 1$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} - 9.5\pi = k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

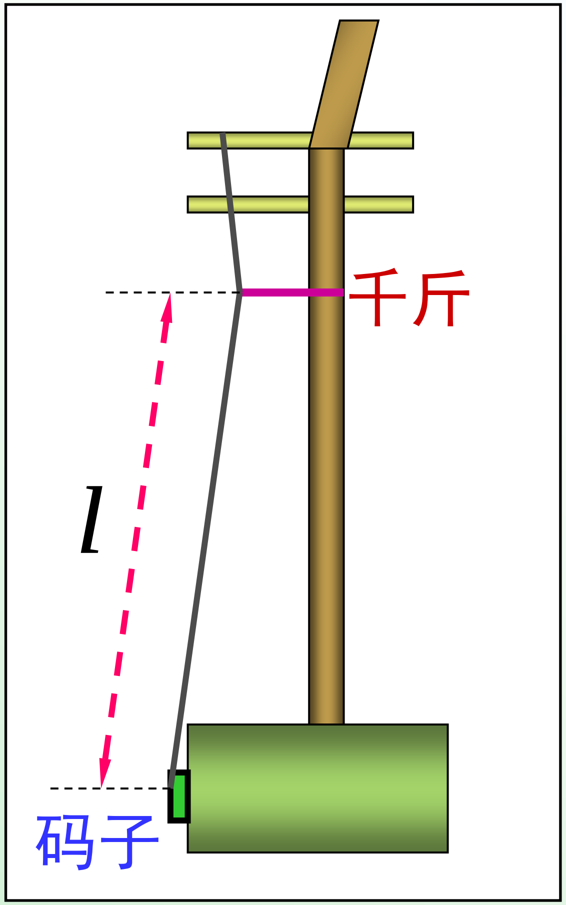
$$x = (k + 9.5)\frac{\lambda}{2}$$

$$\because 0 < x < 5\lambda$$

$$\therefore k = -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$$

共10个波腹

例．如图二胡弦长 l=0.3m，张力 T=9.4N。线密度 $\rho=3.8\times10^{-4}$kg/m，求弦发出的声音的基频与谐频。



解：弦两端为固定点，是波节。

$$l=n\frac{\lambda_n}{2}\quad n=1,2,\cdots$$

频率 $\nu=\dfrac{u}{\lambda}=\dfrac{\mathrm{nu}}{2\mathrm{l}}$　　波速 $u=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

基频　$n=1,\quad \nu_1=\dfrac{1}{2\mathrm{l}}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}=262Hz$

谐频……