基础信息论

频域

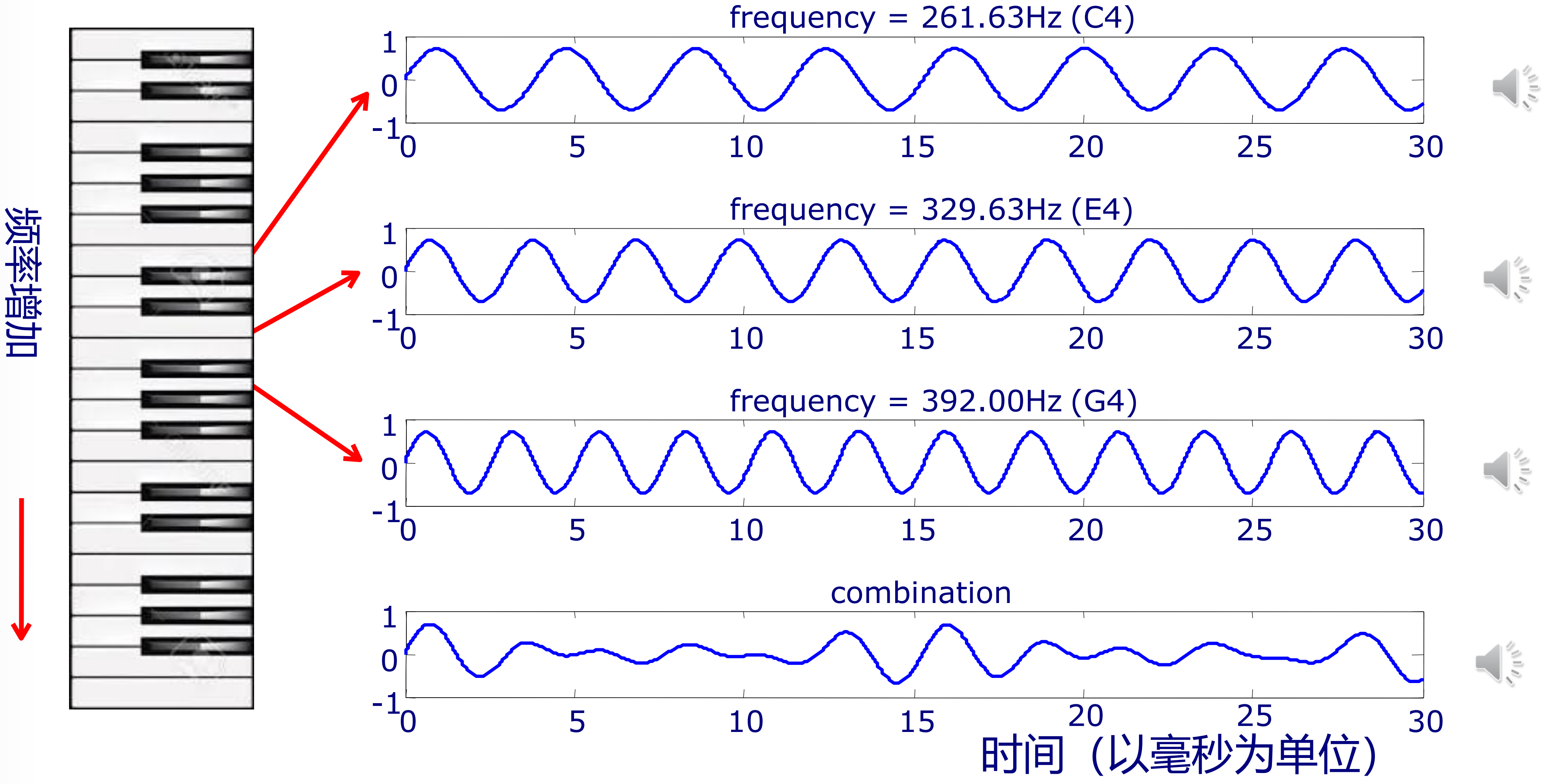
华中科技大学电信学院

主题：频域

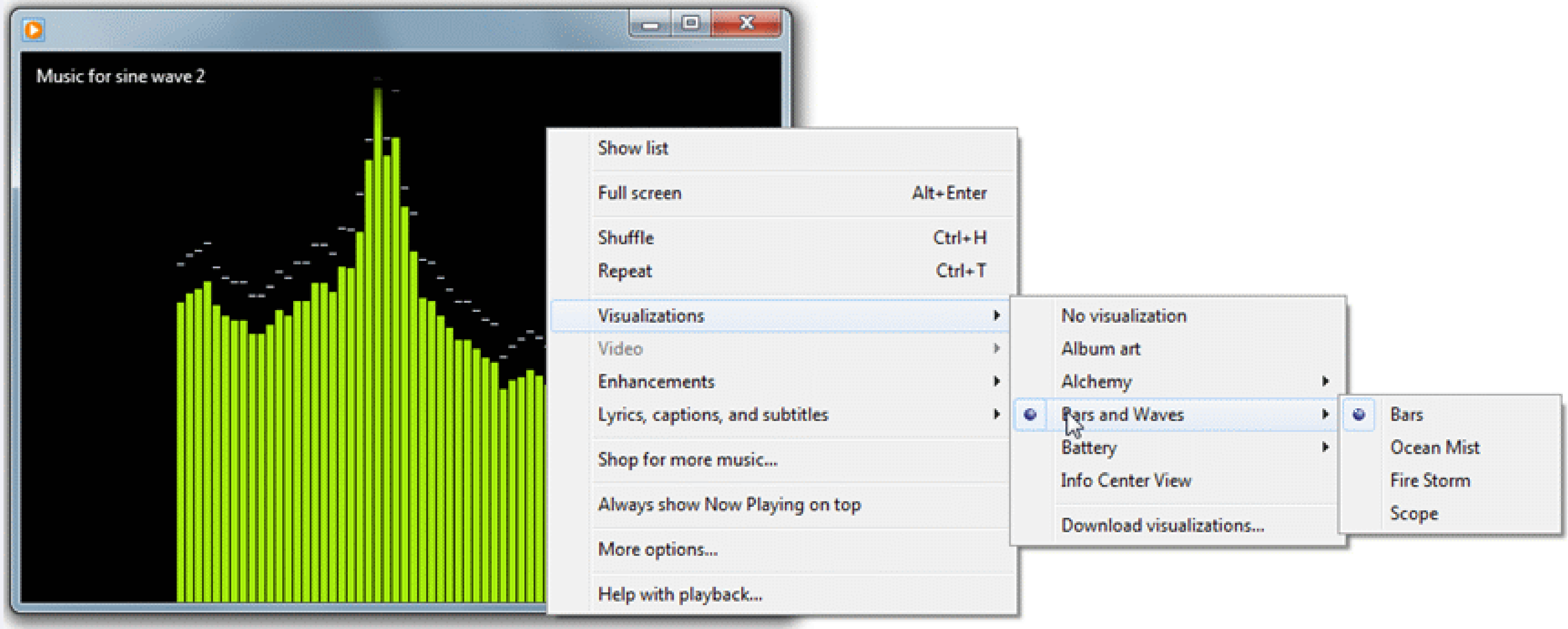
- 学习目标
  - 说明控制连续和离散时间正弦曲线形状的参数
  - 推导信号可以表示为正弦波之和
  - 计算信号的傅立叶系数
- 学习内容
  - 音乐
  - 连续时间正弦函数
  - 离散正弦函数
  - 傅立叶级数

音乐：不同频率的声音组合

钢琴键盘


频率增加
frequency = 261.63Hz (C4)
frequency = 329.63Hz (E4)
frequency = 392.00Hz (G4)
combination
时间（以毫秒为单位）

可视化音乐



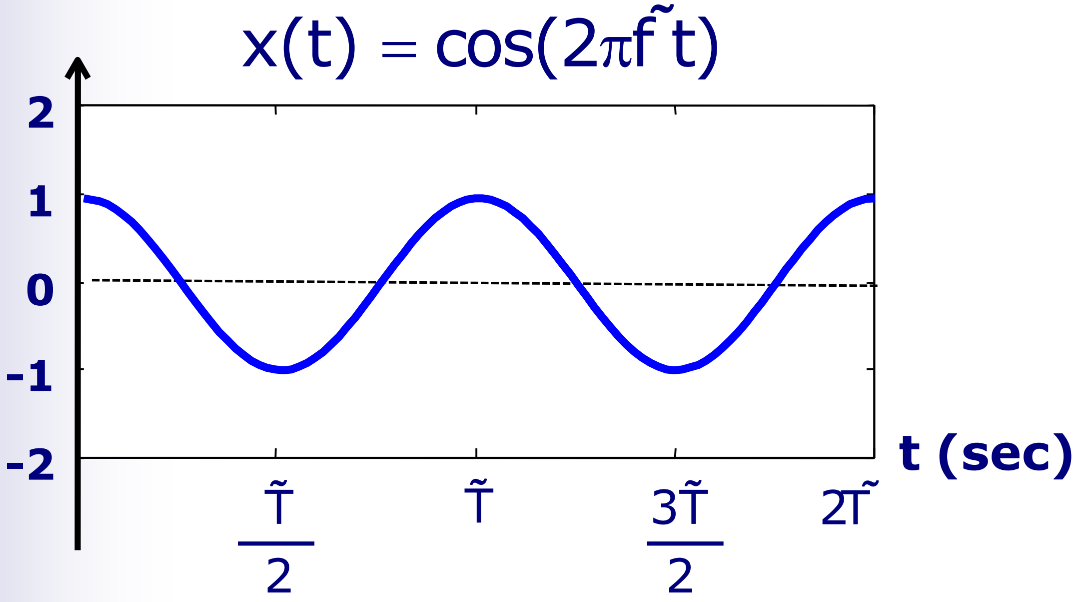
Music for sine wave 2
Show list
Full screen Alt+Enter
Shuffle Ctrl+H
Repeat Ctrl+T
Visualizations
Video
Enhancements
Lyrics, captions, and subtitles
Shop for more music...
Always show Now Playing on top
More options...
Help with playback...
No visualization
Album art
Alchemy
Bars and Waves
Battery
Info Center View
Download visualizations...
Bars
Ocean Mist
Fire Storm
Scope

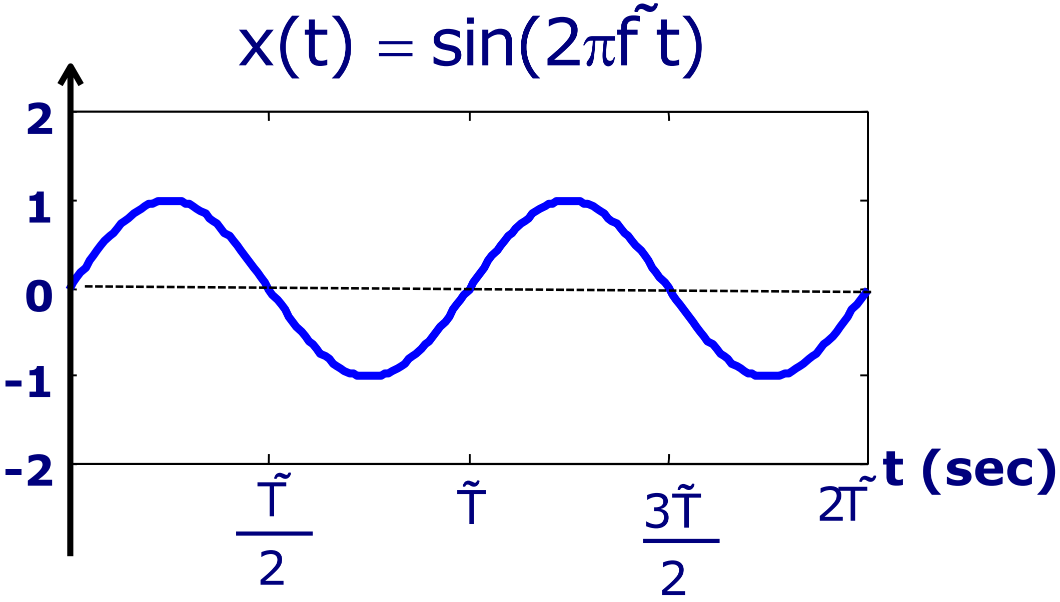
振幅

频率

连续时间正弦曲线

正弦函数





参数:

$\tilde{T}$ = 周期 (秒)

$\tilde{f}$ = 频率 hz (每秒周期数)

$\tilde{\omega}$ = 频率 (弧度/秒)

注意: '~' 表示连续时间参数

$$\tilde{f} = \frac{1}{\tilde{T}}$$

$$\tilde{\omega} = 2\pi\tilde{f}$$

聚焦余弦函数

$$\sin(2\pi\tilde{f}t) = \cos\left(2\pi\tilde{f}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

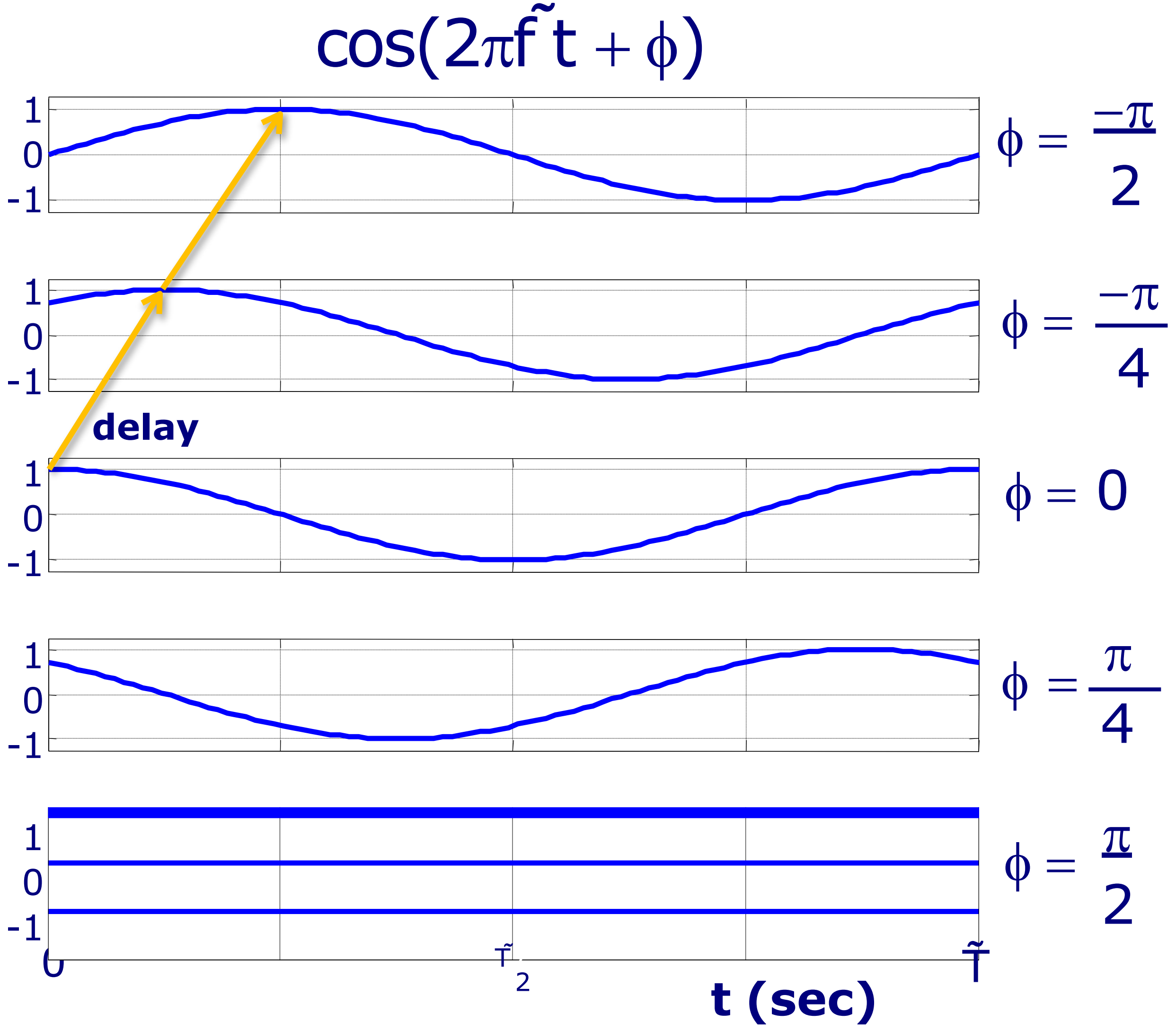
相移会引入延迟

$$\mathbf{d} = \frac{-\phi}{2\pi\tilde{f}} = \frac{-\phi\tilde{T}}{2\pi}$$

证明:

$$\cos(2\pi\tilde{f}t+\phi) = \cos\left(2\pi\tilde{f}\left(t - \frac{-\phi}{2\pi\tilde{f}}\right)\right)$$

$$= \cos\left(2\pi\tilde{f}(t-d)\right)$$



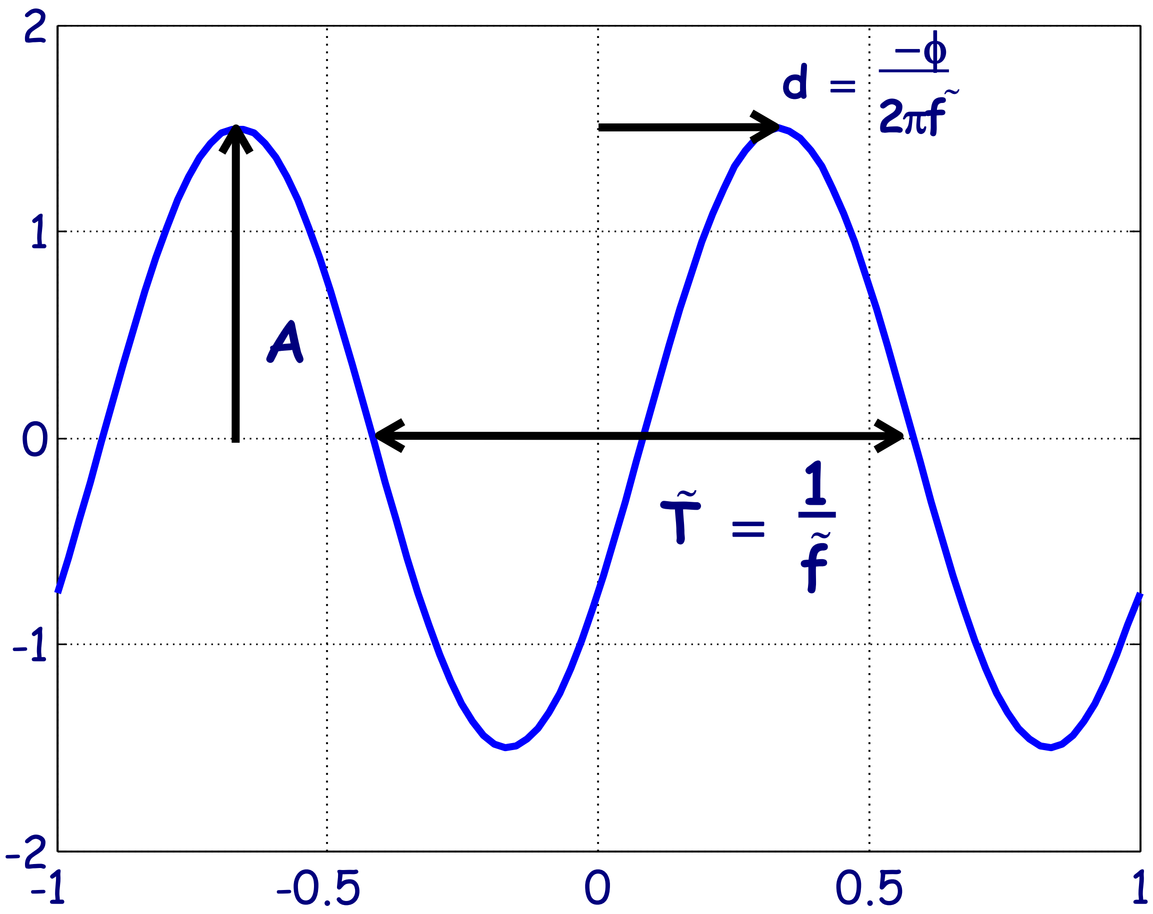
一般形式

$$x(t) = A\cos(2\pi\tilde{f}t + \phi)$$

A = 振幅

$\tilde{f}$ = 频率

ϕ = 相位



离散时间正弦函数

离散时间余弦函数

考虑N个样本点的离散时间余弦函数

$$\cos(2\pi f n+\phi) \quad for \quad n=0,1,\dots,(N-1)$$

接下来我们假设N为奇数。如果我们只有N个样本点，那只需要考虑 $\frac{N}{2}$ +1个频率。

$$f_k=\frac{k}{N} \quad for\ k\in\left\{0,1,\dots,\frac{N}{2}\right\}$$

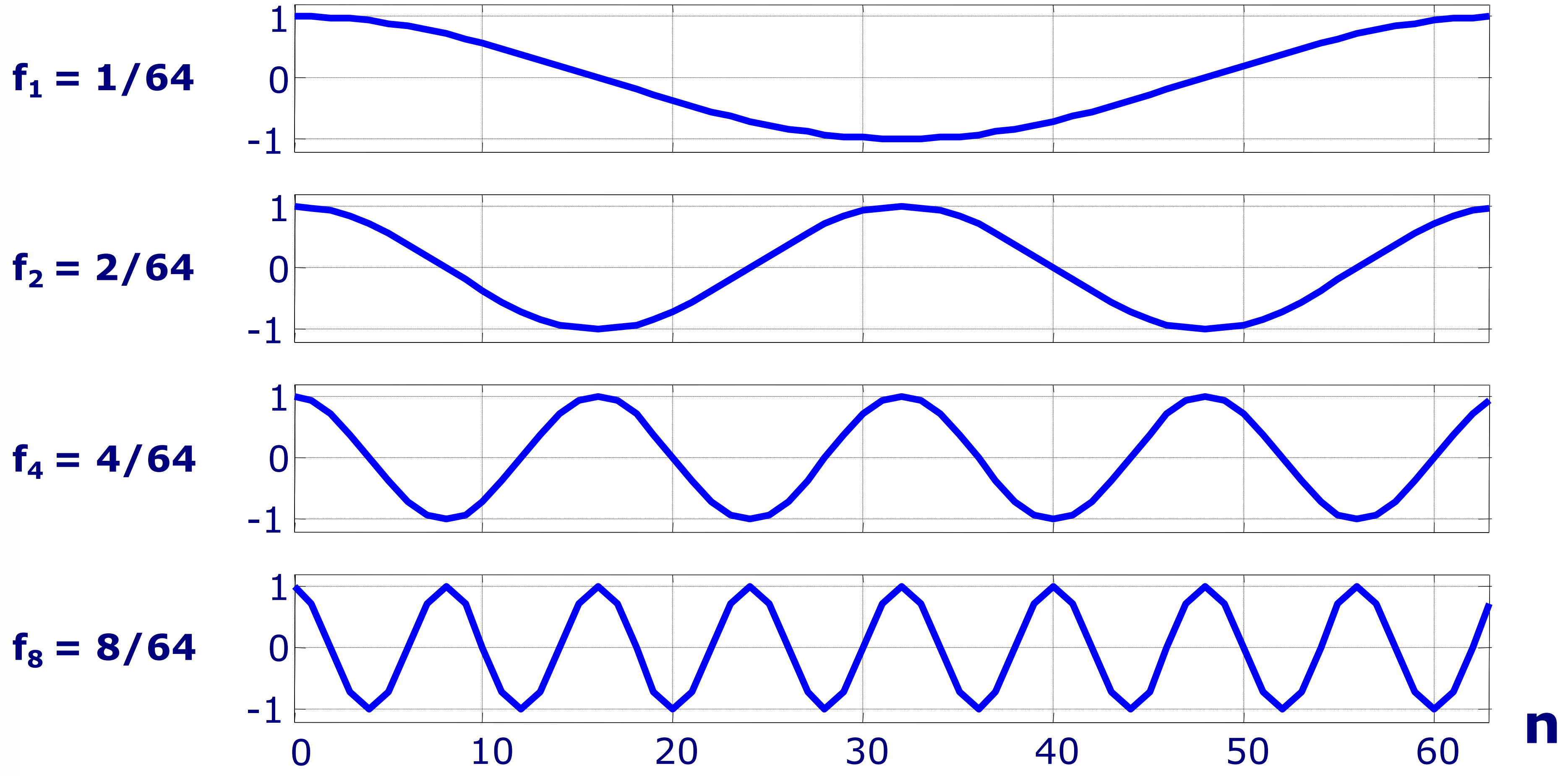
f_k称为归一化频率
它具有周期/样本单位

对于所有的N，$0\le f_k \le 0.5k$ 表示N个样本中余弦重复多少次

$$\cos(2\pi f_k n)=\cos\left(2\pi k\frac{n}{N}\right)$$

k越大，频率越高

离散时间余弦函数



归一化频率f

以频率F_s对$\cos(2\pi\tilde{f}t)$ **采样**

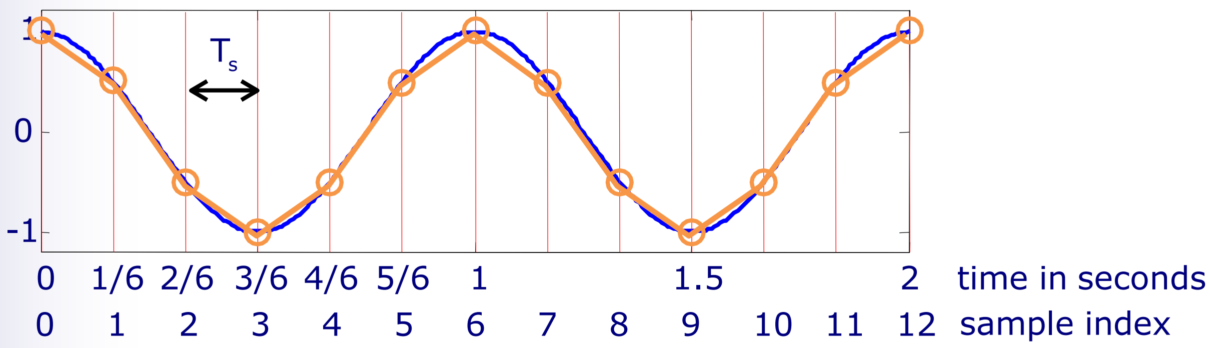
$$x(n) = \cos\left(2\pi\tilde{f}\frac{n}{F_s}\right) \longleftarrow$$

因为周期 $T_s = \frac{1}{F_s}$, 时间t内采样n次 $= \frac{n}{F_s}$

$$= \cos\left(2\pi\frac{\tilde{f}}{F_s}n\right)$$

$$= \cos(2\pi f n) \Rightarrow \boxed{f = \frac{\tilde{f}}{F_s}}$$

$\tilde{f}$ = 1Hz cosine sampled at F_s = 6Hz



归一化频率单位:

$$\frac{\tilde{f}\ \ \text{cycles}/\cancel{\text{sec}}}{F_s\ \ \text{samples}/\cancel{\text{sec}}} = f\ \boxed{\text{cycles}/\text{samples}}$$

傅立叶级数

傅立叶级数

任何具有N个采样点的采样数据波形x（n）： $x(n) \quad n = 0,1,\ldots,(N-1)$

可以表示为N / 2 + 1个余弦波的总和

$$f_k = \frac{k}{N} \quad \text{for } k \in \left\{0,1,\ldots \tfrac{N}{2}\right\}$$

使用傅里叶级数: $$x(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2} A_k \cos(2\pi f_k n + \phi_k)$$

不同的N个采样波形具有不同的 A_k和 ϕ_k值，但具有相同的f_k值

总和中的每一项称为频率分量。

振幅、频率、相位

$$x(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2} A_k \cos(2\pi f_k n + \phi_k)$$

振幅 A_k

- **告诉我们余弦波有多大.**
- **振幅最大的频率分量是"最重要的"。**

频率 f_k

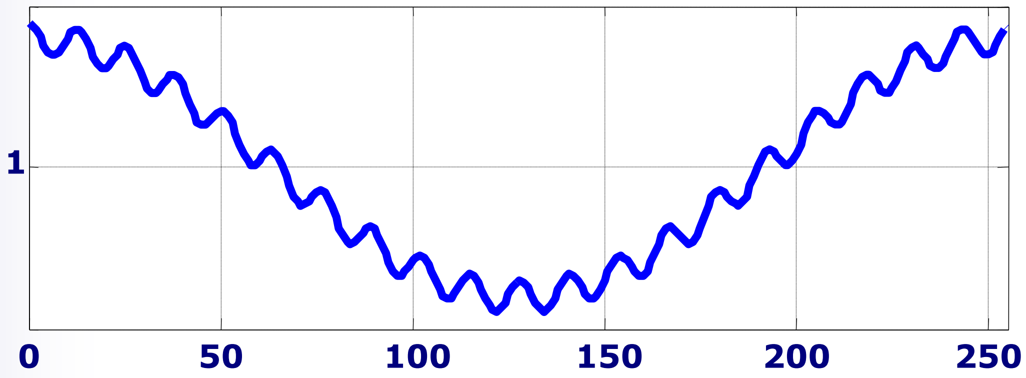
- **告诉我们余弦波变化有多快**
- **小k =低频=缓慢变化**
- **大k =高频=快速变化**

相位 ϕ_k

- **不那么重要，只需将每个余弦向左或向右移动。**

示例

$$x(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2} A_k \cos(2\pi f_k n + \phi_k)$$

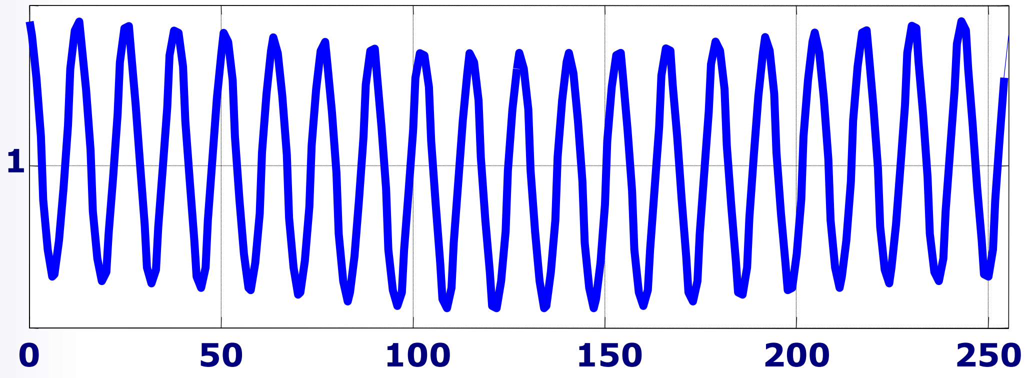


$A_0 = 1$

$A_1 = 0.8$

$A_{20} = 0.1$

低频分量大
高频分量小



$A_0 = 1$

$A_1 = 0.1$

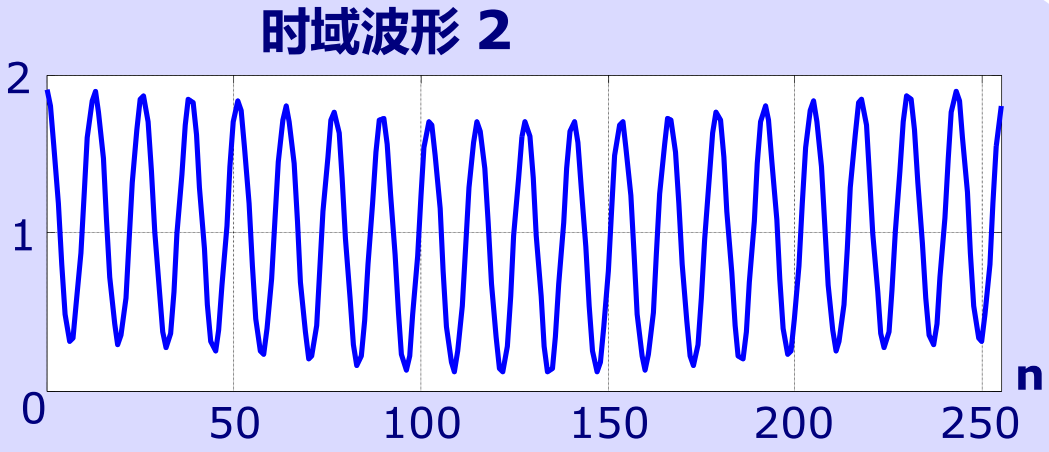
$A_{20} = 0.8$

低频分量小
高频分量大

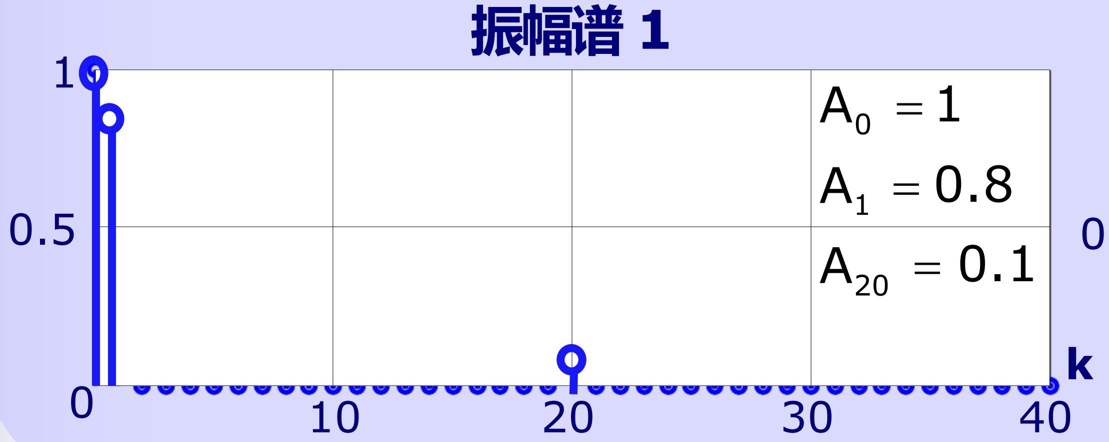
$A_{20} = 0.8$

振幅谱

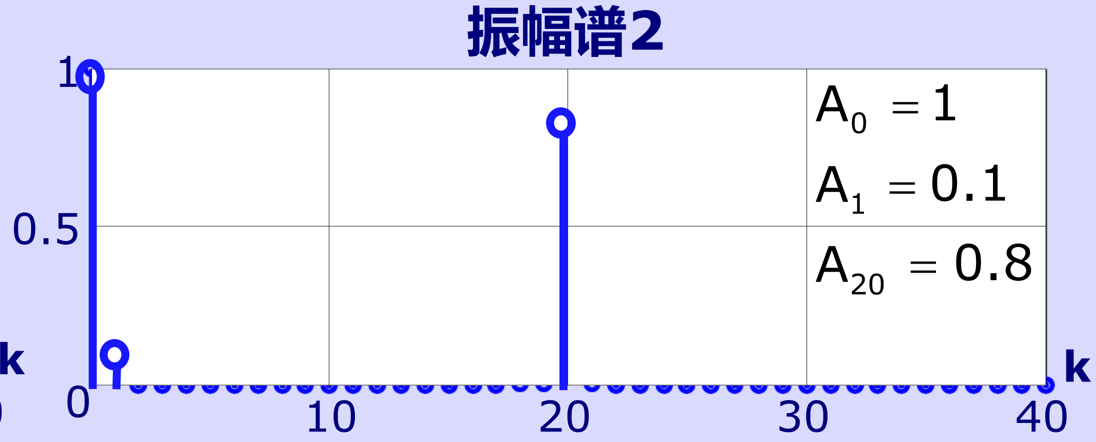
时域波形 1
2
1
0
50
100
150
200
250
n



时域波形 2
2
1
0
50
100
150
200
250
n

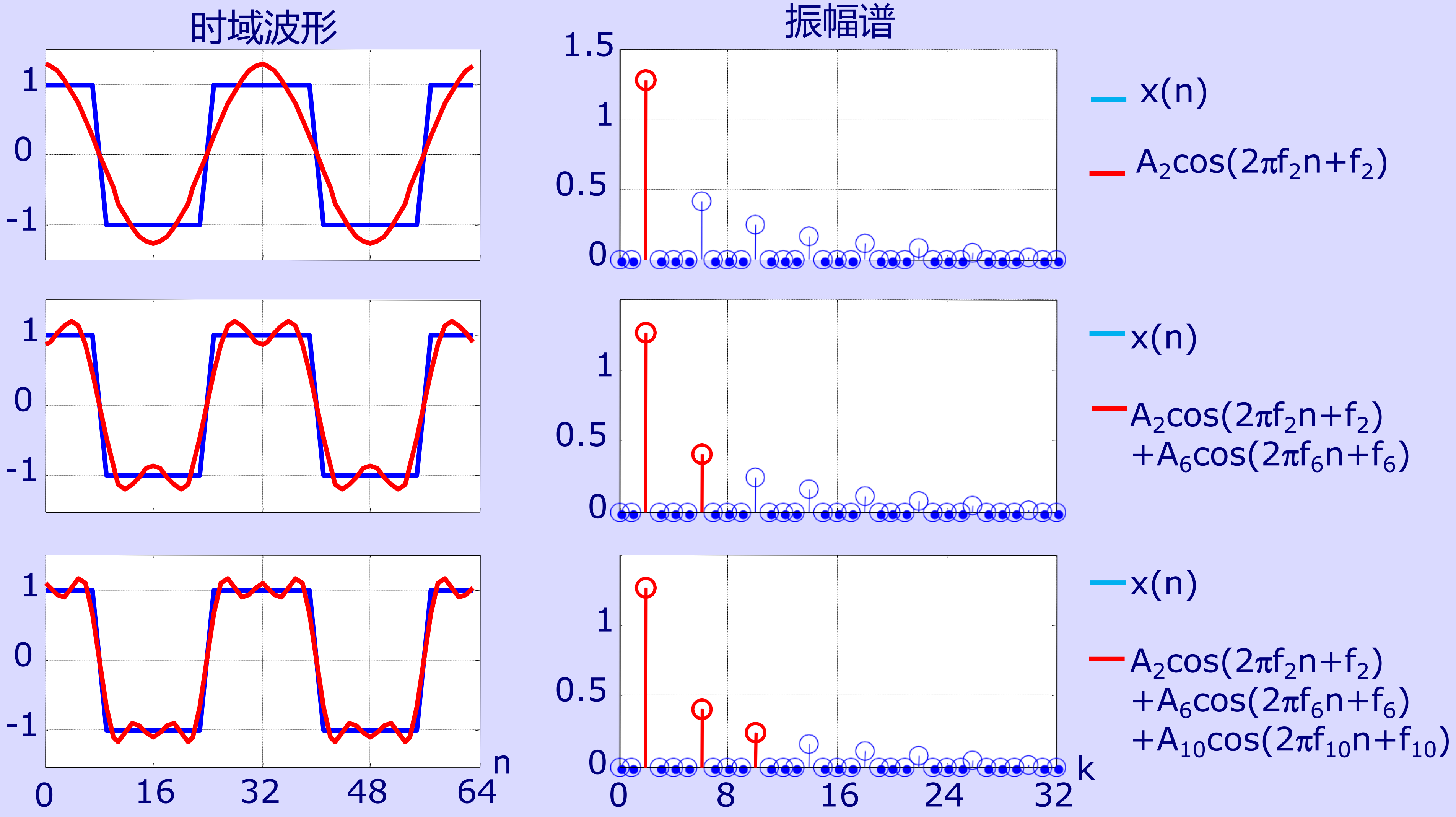


振幅谱 1
1
0.5
0
10
20
30
40
k
$A_0 = 1$
$A_1 = 0.8$
$A_{20} = 0.1$

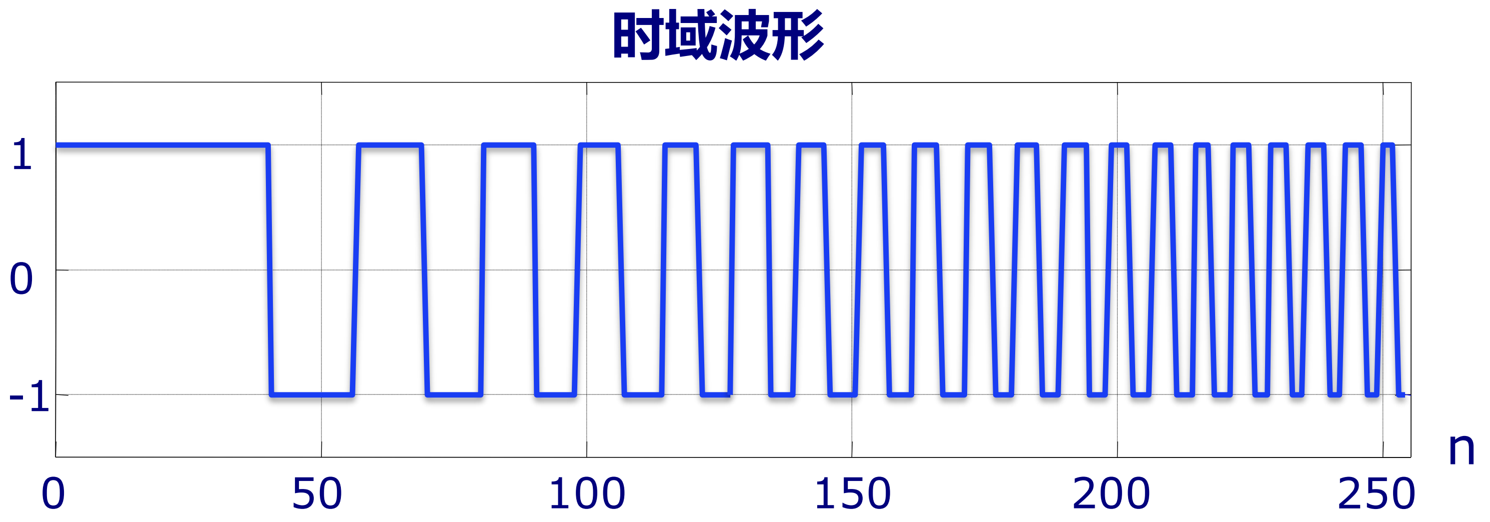


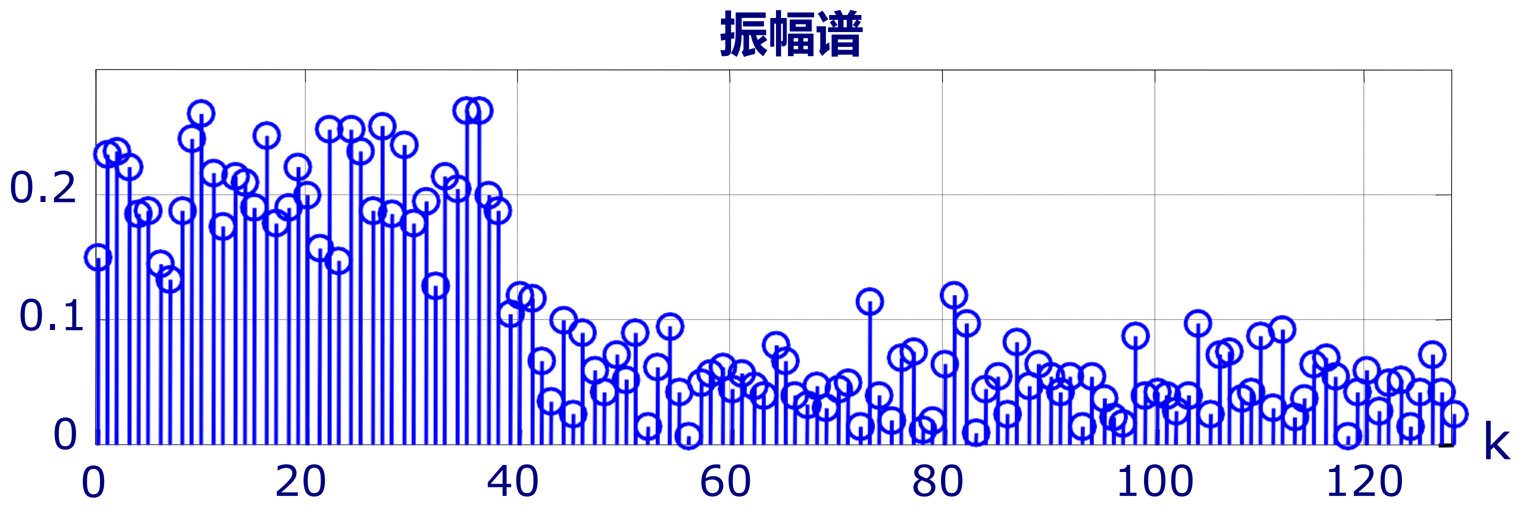
振幅谱2
1
0.5
0
10
20
30
40
k
$A_0 = 1$
$A_1 = 0.1$
$A_{20} = 0.8$

示例：方波


时域波形
振幅谱
1
0
-1
0
16
32
48
64
n
1.5
1
0.5
0
0
8
16
24
32
k
x(n)
A2cos(2πf2n+f2)
x(n)
A2cos(2πf2n+f2)
+A6cos(2πf6n+f6)
x(n)
A2cos(2πf2n+f2)
+A6cos(2πf6n+f6)
+A10cos(2πf10n+f10)

更复杂的示例



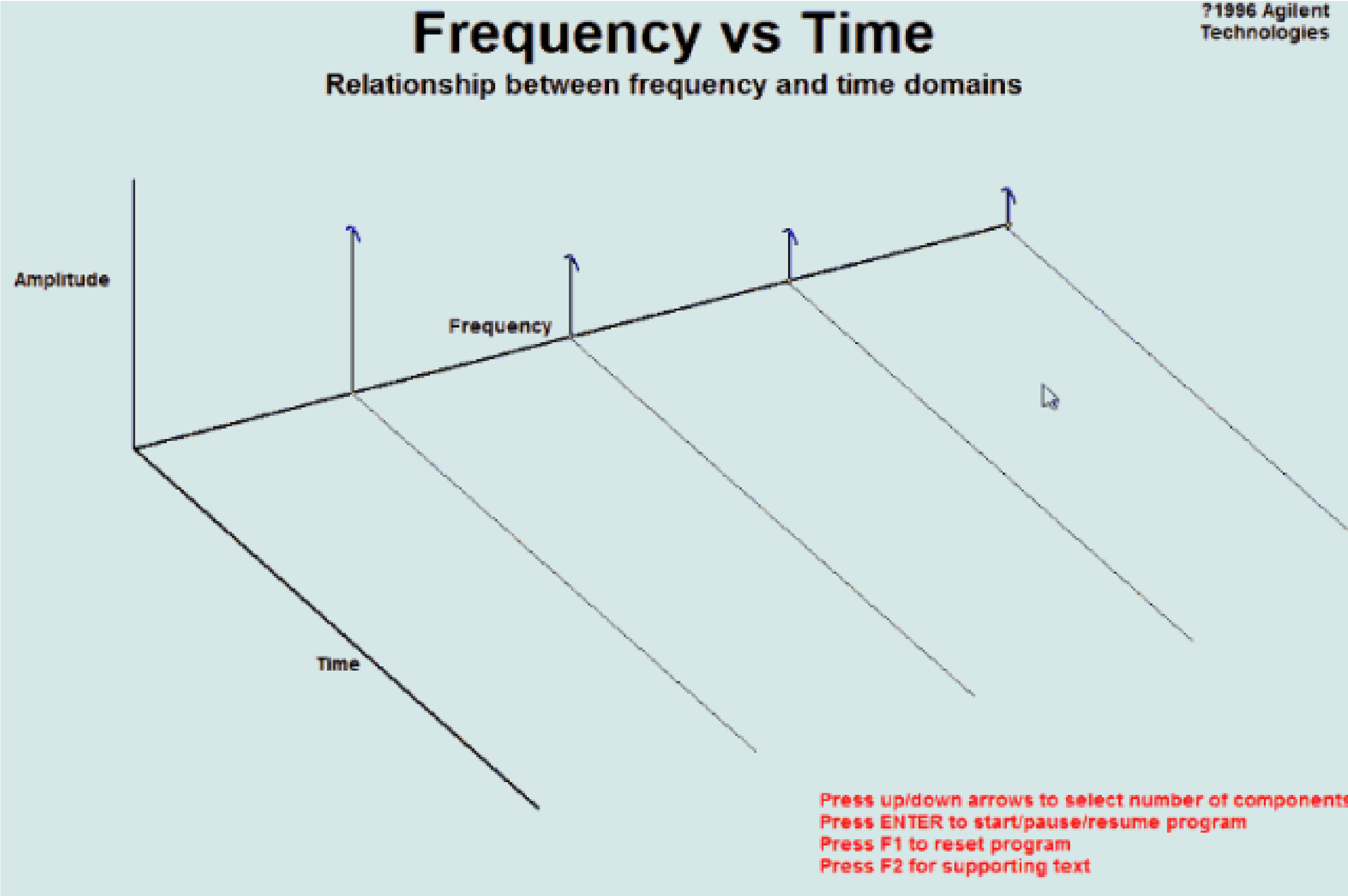


变换

- 傅立叶级数只是众多变换之一:
  - 傅立叶变换
  - 拉普拉斯变换
  - Z变换
- 变换只是表示相同数据的另一种方式。 进行变换时，不会丢失或获取任何信息。
- 变换提供了查看或理解信号的不同方式。
- 进行转换后，对信号的某些操作更易于理解/分析。

总结：频域与时域

- 时域是信号在时间轴随时间变化的总体概括。
- 频域是把时域波形的表达式做傅立叶等变化得到复频域的表达式，所画出的波形就是频谱图。
- 频谱图描述频率变化和幅度变化的关系。



作业：频域习题

登录微助教

http://portal.teachermate.com.cn/

补充阅读

- Ref. Book: (Frenzel, Louis E, "Principles of electronic communication systems." 4th, McGraw-Hill, 2014) P.78-82
- Ref. Wiki: Fourier series
  https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series

谢谢

Q & A

参考资料

A System View of Communications: From Signals to Packets (Part 2)

https://www.edx.org/course/a-system-view-of-communications-from-signals-to-packets-part-2-2