●**机械波**：机械振动在弹性媒质中的传播。

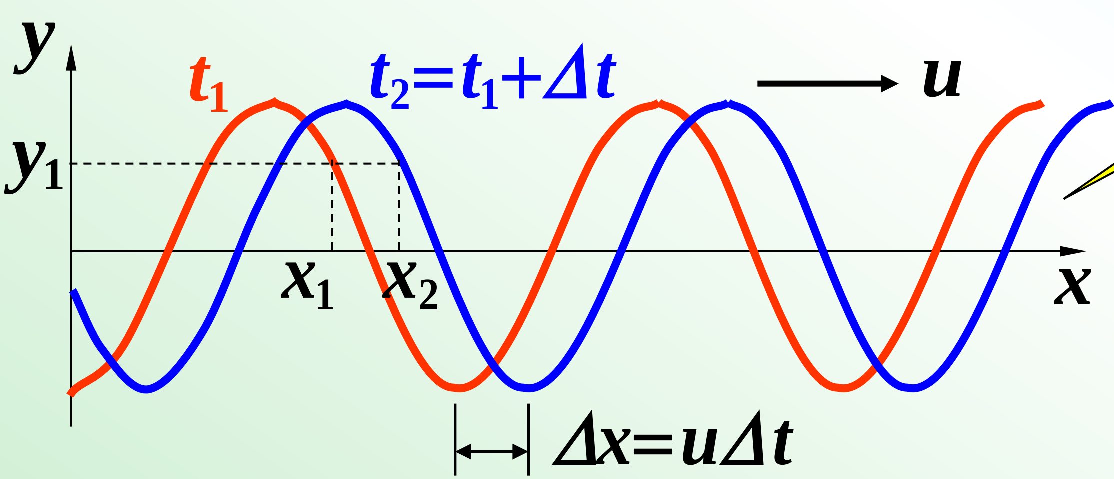
机械波产生的条件 —— 波源、媒质。

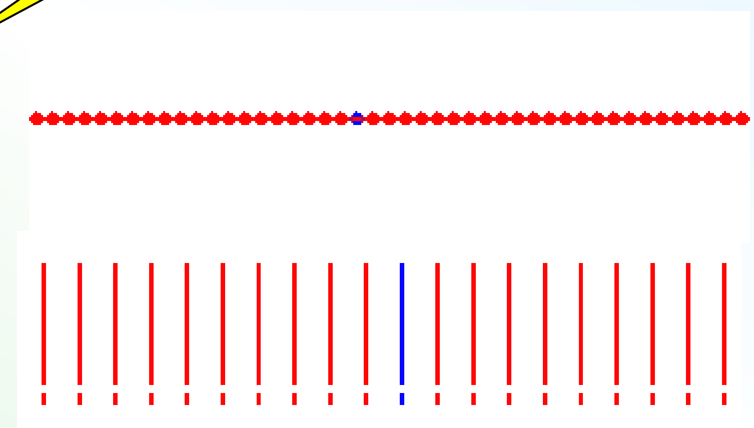
一维简谐波 $y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$

"-" 沿 x 正向
"+" 沿 x 负向

注意：u为波速的大小。

波形曲线



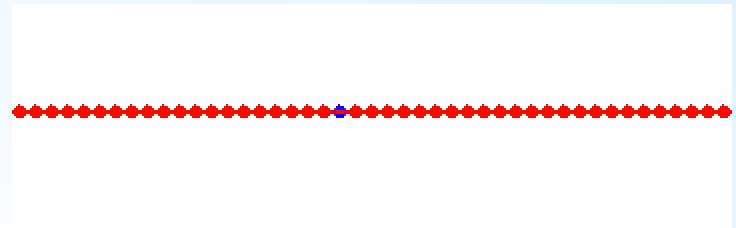


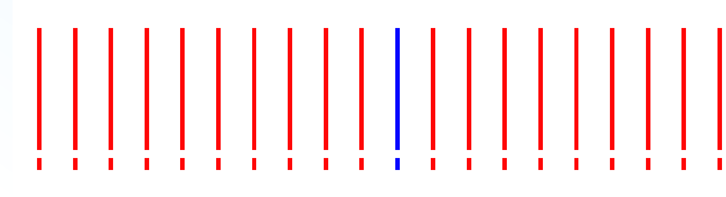
$$y = A\cos[\omega\,(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$$

● 波动与振动的区别和联系

区别 $\left\{\begin{array}{l}\text{振动研究一个质点的运动。} \\ \text{波动研究大量有联系的质点振动的集体表现。}\end{array}\right.$

联系 $\left\{\begin{array}{l}\text{振动是波动的根源。} \\ \text{波动是振动的传播。}\end{array}\right.$





● 波动的特点：

（1）每个质点只在平衡位置附近振动，不向前运动。

（2）后面质点重复前面质点的振动状态，有位相落后。

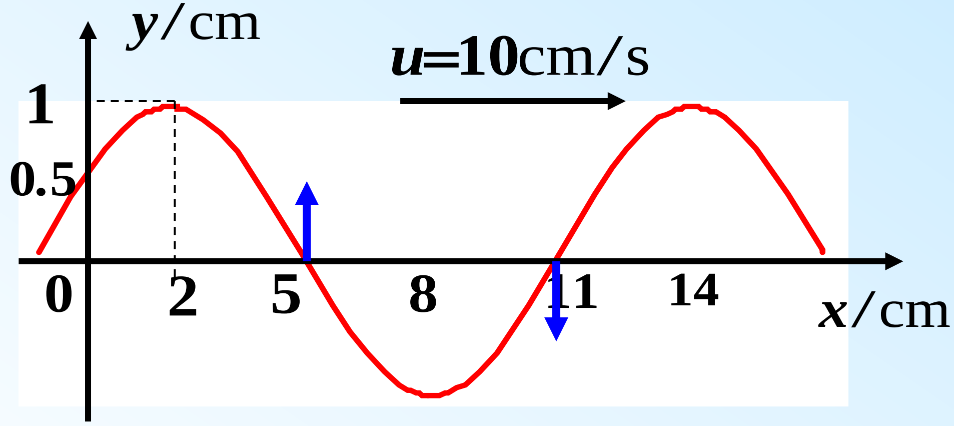
（3）所有质点同一时刻位移不同，形成一个波形。

（4）振动状态(位相)、波形、能量向前传播。

例： $t=0$ 时的波形如图。

求 $x_1=5\text{cm}, x_2=11\text{cm}$

两处质点振动的位相差。



$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

解： x_1处 $y_1=A\cos[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi_0]$

x_2处 $y_2=A\cos[\omega(t-\frac{x_2}{u})+\varphi_0]$

位相差 $\Delta\varphi=[\omega(t-\frac{x_2}{u})+\varphi_0]-[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi_0]=-\frac{\omega}{u}(x_2-x_1)$

$=-\frac{2\pi}{Tu}\Delta x=-\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x=\frac{2\pi}{12}(5-11)=-\pi$ 反相

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

位相差

波程差

$\Delta\varphi=?$

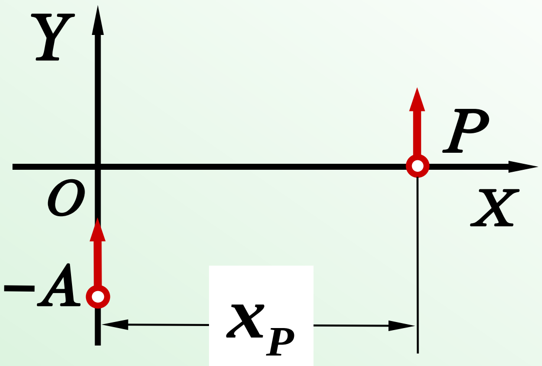
(A) π

(B) $-\pi$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

例： 一正向余弦波，$\lambda = 10\text{m}$ ，t 时刻波线上两质元的振动情况如下：



$$0 < x_P < \lambda$$

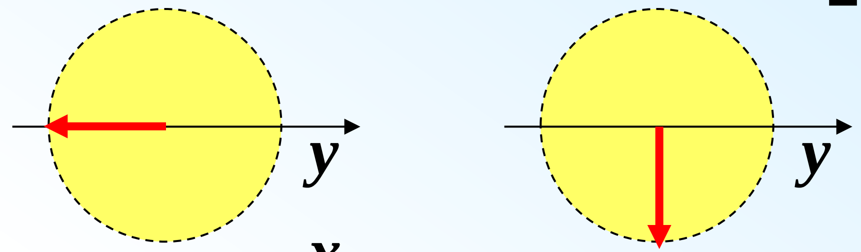
求：

1） x_P

2）波形曲线

解： 1)正向余弦波方程 $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$

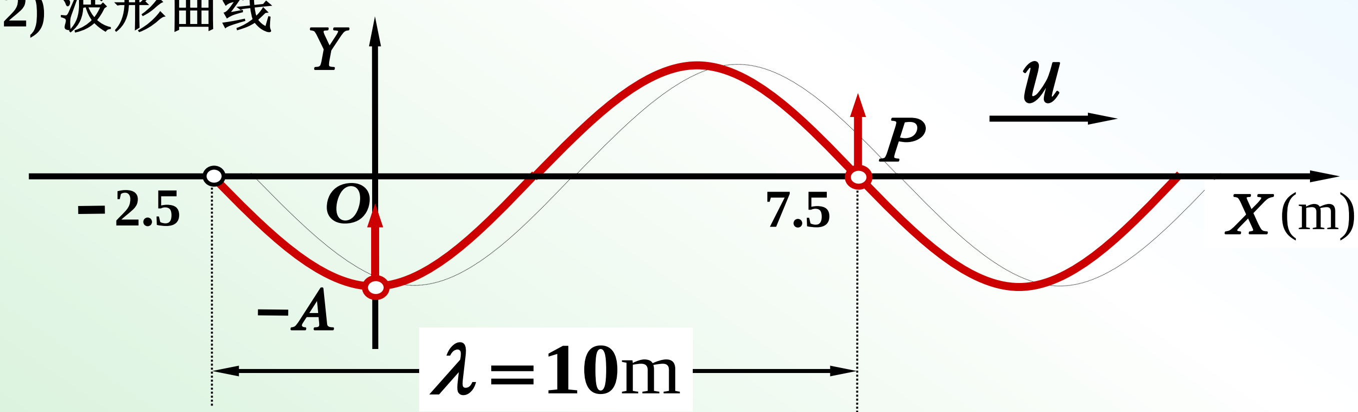
据旋转矢量法 $\begin{cases} \text{对质点}O: & \varphi_O = \pi \\ \text{对质点}P: & \varphi_P = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$



$$\begin{cases} \varphi_P - \varphi_O = [\omega(t - \dfrac{x_P}{u}) + \varphi] - [\omega t + \varphi] = -\omega \dfrac{x_P}{u} \\ \varphi_P - \varphi_P = \dfrac{3\pi}{2} - \pi - 2\pi = -\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$x_P = \frac{3\pi}{2}\frac{u}{\omega} = \frac{3\pi}{2}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{3\lambda}{4} = 7.5(\text{m})$$

2) 波形曲线



例： 已知波函数为$y = 0.02\cos\pi(20t - 0.5x)$ m

求： 波的振幅、波长、波速及质点振动的最大速度

解:

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

已知 $y = 0.02\cos 20\pi(t - \frac{x}{40})$ m

$\therefore$ $A = 0.02$ m

$\omega = 20\pi$ $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 10$ Hz $T = 0.1$ s

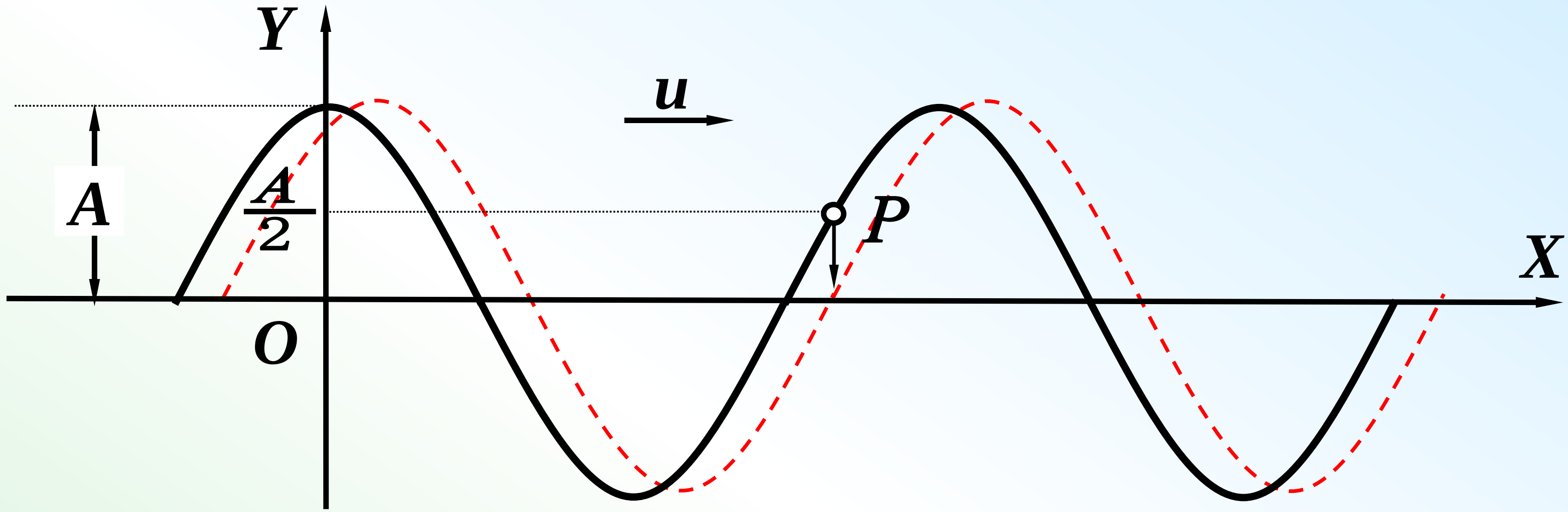
$u = 40$ m/s

$\lambda = uT = 4$ m

质点振动速度： $v = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.02 \times 20\pi \sin\pi(20t - 0.5x)$

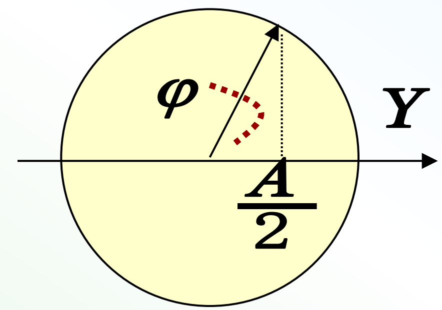
最大速度： $v_{\max} = 0.02 \times 20\pi = 1.26$ (m/s)

例：一简谐波$t = 0$时刻的波形曲线如图所示。



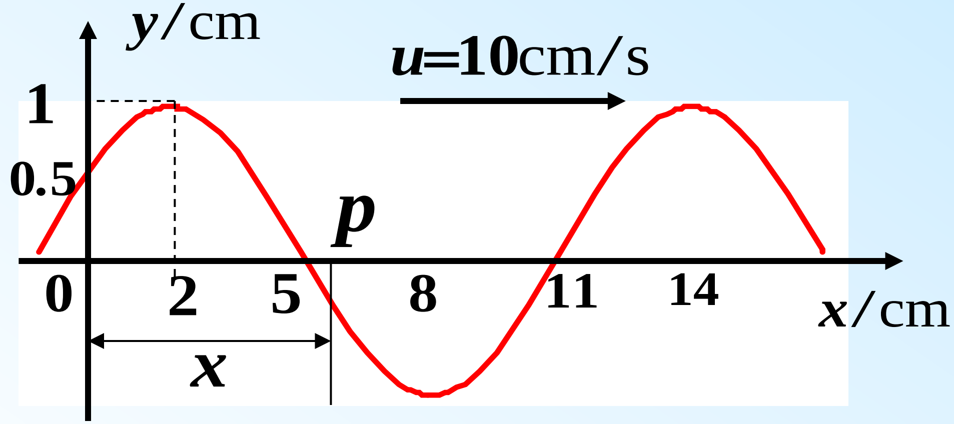
则此时P 点的运动方向 ________，振动位相 = ________

解：波沿正方向传播，沿 X轴正方向稍微平移原波形图，可判断出P点此时向下运动，即P点处质点速度小于零。



由旋转矢量图可知：$\varphi_P = \frac{\pi}{3}$

例： t=0 时的波形如图。试写出波的表达式。



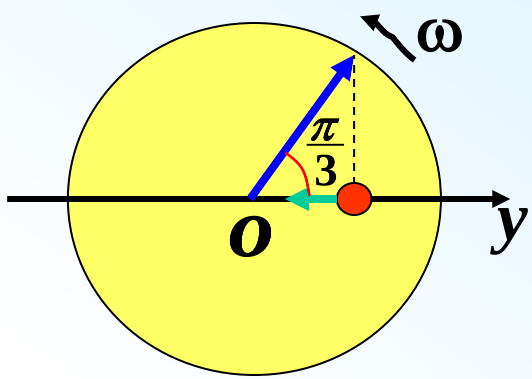
解： 先写 o点振动方程

由图可知

A=1cm　　　λ=12cm

$$T=\frac{\lambda}{u}=\frac{12}{10}=1.2s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{5\pi}{3}\text{rad/s}$$ 关键是确定 $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$



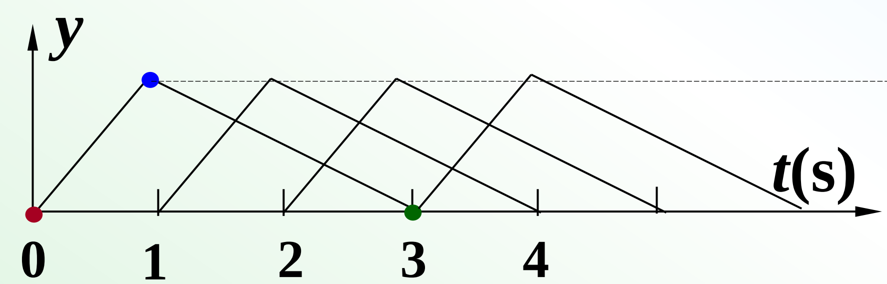
$$y_O=A\cos(\omega t+\varphi_0)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)\ \text{(cm)}$$

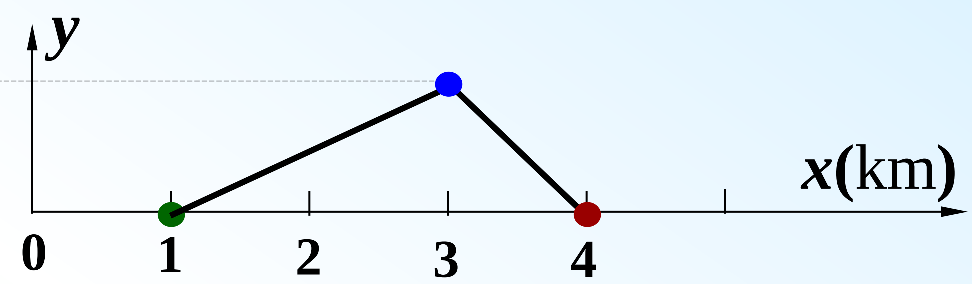
波的表达式

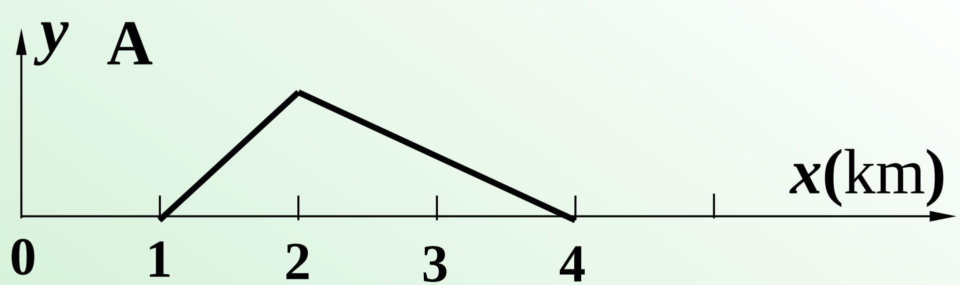
$$y=\cos\left[\frac{5\pi}{3}\left(t-\frac{x}{u}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left[\frac{5\pi}{3}\left(t-\frac{x}{10}\right)+\frac{\pi}{3}\right]\ \text{(cm)}$$

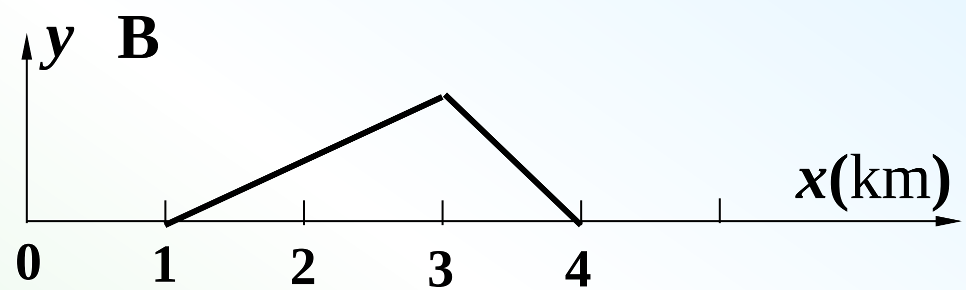
例： x轴原点O处质元的振动曲线为如图所示的三角形，该振动沿x轴正向以速度u=1km/s传播，试画出t =4s时的波形图(波形曲线)。

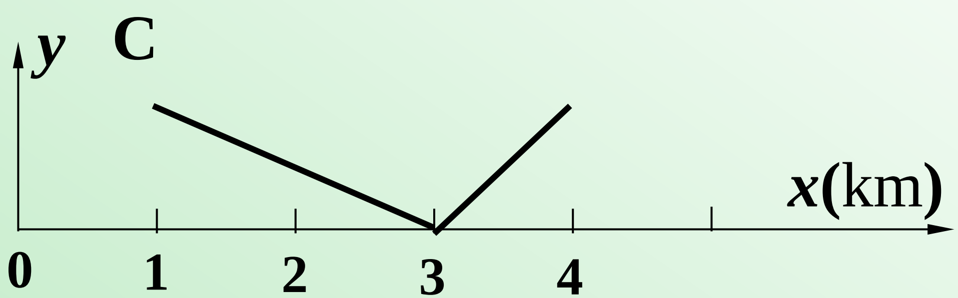
解：

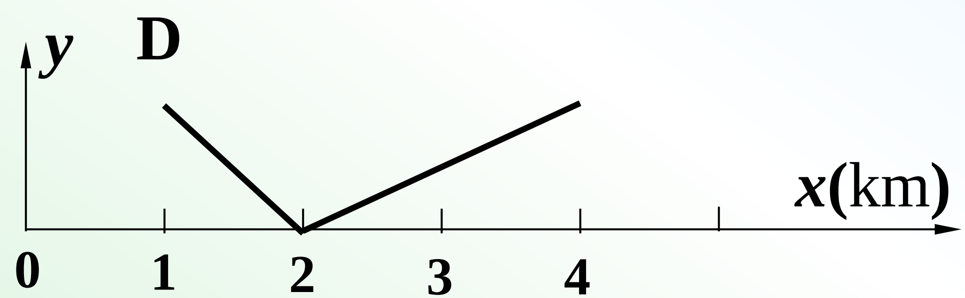




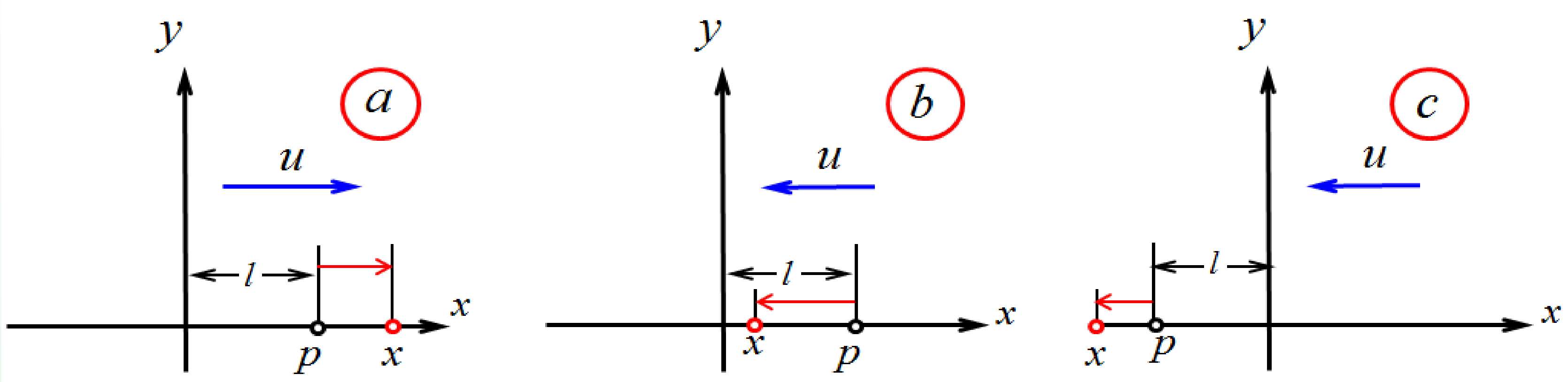








例题 一平面简谐波在媒质中以速率u传播，其传播路径上一点P的振动方程为$y = A\cos\omega t$ 试按照下图中所选的几种坐标分别写出波动表达式。(P点到原点0的距离为l)。



相位落后法

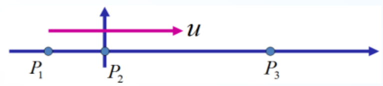
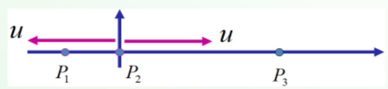
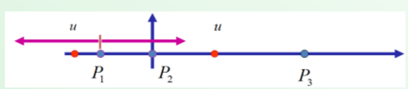
$$y(p,t) = A\cos(\omega t + 0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

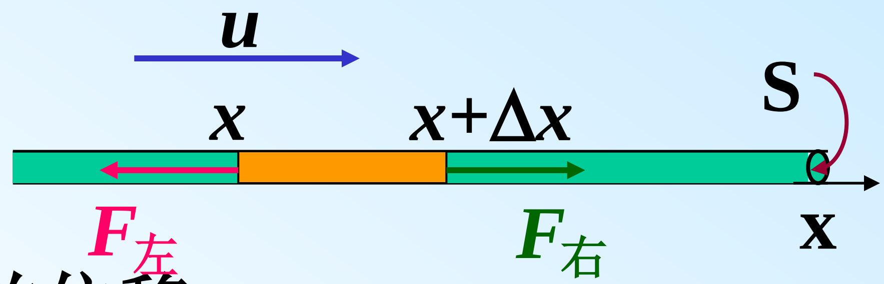
$$\left\{\begin{aligned} y(x,t) &= A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(x-l)\right)\cdots(a) \\ y(x,t) &= A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(l-x)\right)\cdots(b) \\ y(x,t) &= A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(-x-l)\right)\cdots(c) \end{aligned}\right.$$

平面简谐波

波动函数的讨论： $y(0,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}\right)=A\cos(\omega t)$

波源位置	传播方向	坐标关系	波函数
负无穷远	x 轴正向传播		$y(x,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad -\infty<x<+\infty$
正无穷远	x 轴负向传播		$y(x,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{(-x)}{\lambda}\right)=A\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad -\infty<x<+\infty$
原点	x 轴正负双向传播		$y(x,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad x>0$ $y(x,t)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)=A\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad x<0$
非原点	x 轴正负双向传播		$y(x,t)=A\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{\lambda}\left(x+\overline{P_1P_2}\right)\right) \quad x\ge x_{p1}$ $y(x,t)=A\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{\lambda}\left(-x-\overline{P_1P_2}\right)\right) \quad x<x_{p1}$

一维简谐波的动力学方程



以弹性细棒传播的纵波为例：

取棒中一小段原长为Δx

设y表示各处质点相对平衡位置的位移

在左端 x处，　应变为：$\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_x$

在右端 $x+\Delta x$ 处，　应变为：$\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$

设棒的截面积为S

根据胡克定理：

左端受到左边材料的拉力为：$F_{左}=SY\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_x$

右端受到右边材料的拉力为：$F_{右}=SY\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$

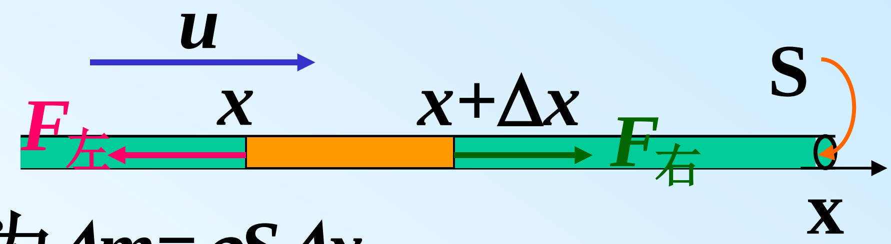
长Δx的棒受合外力为：$\vec{F}_{合}=\vec{F}_{左}+\vec{F}_{右}$

$$F_{合}=SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x=SY\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right]\frac{\partial x}{\partial x}$$

$$=SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\partial x=SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

即：$F_{合}=SY\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$

$$F_{合}=SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$



设棒的质量密度为ρ，则其质量为$\Delta m=\rho S\Delta x$

当$\Delta x\to 0$，此段棒加速度为： $a=\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

根据牛顿定律：$F=ma$ 则：$SY\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x=\rho S\Delta x\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

化简得：$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ 一维简谐波的动力学方程

其中：$u^2=\dfrac{Y}{\rho}$

从 $y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$ 式中可求得 ：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{\omega^2}{u^2}A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$\frac{1}{u^2}\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

波速：$u=\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$

与媒质的惯性和弹性有关

推广到三维空间：$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

ξ为空间位移

三、波的能量及传播

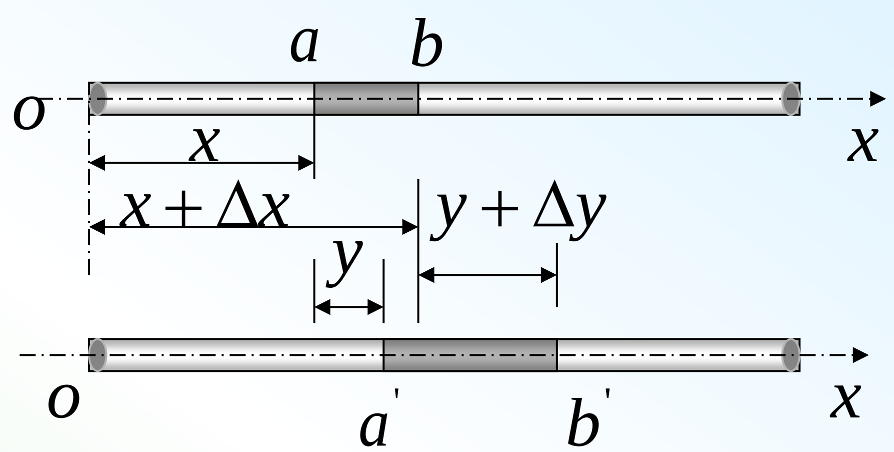
1. 波的能量

机械波的能量是媒质中各质元振动能量(振动动能、形变势能）的总和。

下面的分析以平面余弦弹性纵波在棒中的传播为例。

设棒中平面简谐波的波动表式为

$$y\ (x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})]$$



质元振动速度为

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\omega(t-\frac{x}{u})$$

Δy :伸缩量

（形变的大小）

质元动能： $W_K=\frac{1}{2}(\Delta m)v^2=\frac{1}{2}\rho(\Delta V)v^2$

$$\boxed{W_K=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

应力：横截面内单位面积上的张力。

$$\text{应变}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

相对形变

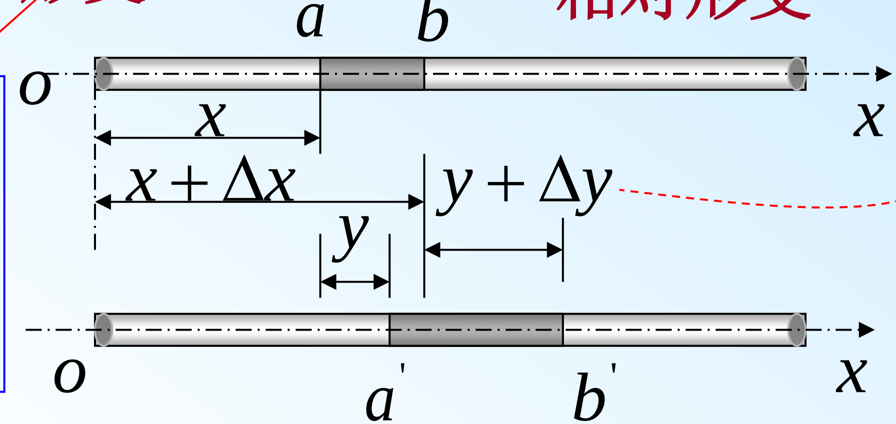
$$\frac{F}{S}=-Y\frac{\Delta y}{\Delta x}\quad （Y\text{:杨氏模量}）$$

$$F=-k\Delta y$$

$$\therefore k=YS/\Delta x$$

形变

$$W_p=A_{外}=\int_0^{\Delta y}k\xi\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}k(\Delta y)^2$$



质元相对形变的弹性势能:

$$W_p=\frac{1}{2}k(\Delta y)^2=\frac{1}{2}\frac{YS}{\Delta x}(\Delta y)^2=\frac{1}{2}YS\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{2}Y\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

弹性势能正比于相对形变

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=A^2\frac{\omega^2}{u^2}\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$$

$$u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$$\left.\begin{aligned}&W_P=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\\&W_K=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\end{aligned}\right\}\text{相等}$$

$$y\ (x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$$

在行波的传播过程中，质元的动能和势能同步变化，始终相等。

$$\boxed{W_P = W_k = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)}$$

质元的总机械能为

$$\boxed{W = W_K + W_P = \rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)}$$

总能量是时间和位置的函数！

可见：

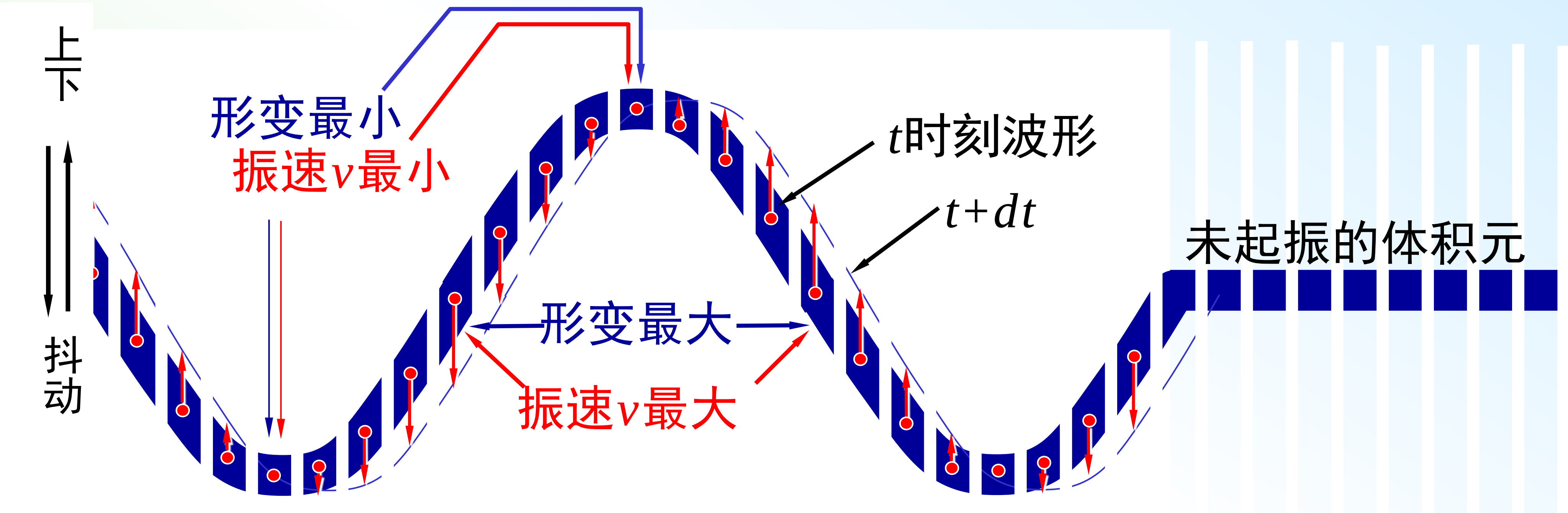
媒质中质元（体积元）的机械能是不守恒的。

以上结果同样适用于横波。

波的能量

若将一软绳（弹性媒质）划分为多个小单元（体积元）

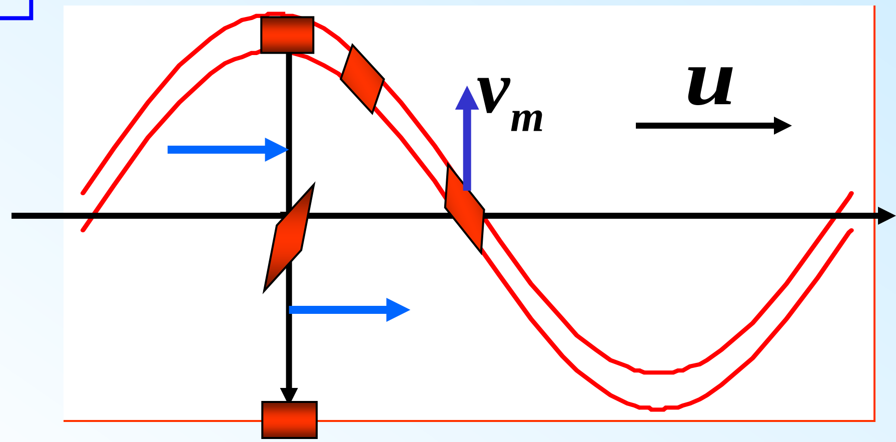
在波动中，各体积元产生不同程度的弹性形变，具有弹性势能ΔE_p。



各体积元以变化的振动速率v上下振动，具有振动动能ΔE_k。

可以证明，当媒质中有行波传播时，媒质中一个体积元在作周期性振动的过程中，其弹性势能ΔE_p和振动动能ΔE_k同时增大、同时减小，而且其变化的量值相等，即$\Delta E_p = \Delta E_k$。

$$\boxed{W_P=W_k=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$ （横波、纵波均适用）



结论:

（1）每个质元的波动动能与势能数值相同，位相相同。同时变大，同时变小。

W_k最大则 W_p也最大，如平衡位置.
W_k 最小则 W_p 也最小，如最大位移处.

与振动能量的特点不同！

（2）ΔV 中 $W=W_K+W_P=\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

W 随 t 、x 变，不守恒 。 能量传输！

最大位移 ⟶ 平衡位置，能量增大，从前面输入；
平衡位置 ⟶ 最大位移，能量减小，向后面输出。

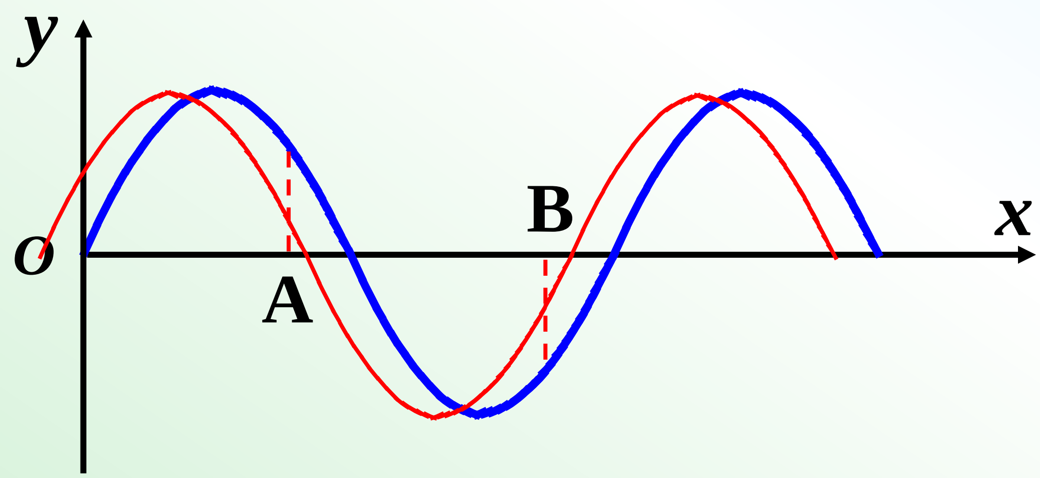
例: 图为一平面简谐机械波在 t 时刻的波形曲线。若此时A点处媒质质元的振动动能在增大，则 [**B**]

(A) A点处质元的弹性势能在减小

(B) 波沿 x 轴负方向传播

(C) B点处质元的振动动能在减小

(D) 各点的波的能量密度都不随时间变化



分析:

A点处媒质质元的振动动能在增大，

说明A点处媒质质元正向平衡位置运动，速度为负。

下一时刻的波形曲线向左平移。

$$W=\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

（3）能量密度：单位体积中的能量

$$w=\frac{W}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

能量密度周期平均值

$$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \propto A^2,\omega^2$$

在dt的时间内，dx范围内的能量dW均可以通过右端面.

因 dx足够小，故

$$\mathrm{d}W=w\mathrm{d}x\cdot\Delta s$$

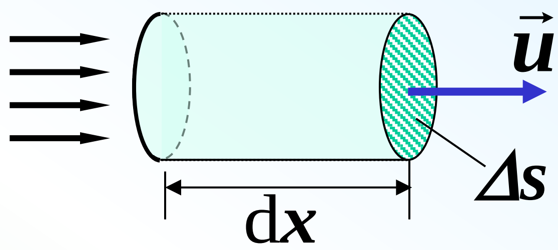
$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=w\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\Delta s$$

2. 能流、能流密度

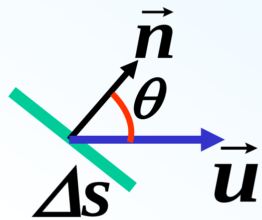
（1）能流P：单位时间通过某面的能量. $P=wu\Delta s$

平均能流 $\overline{P}=\overline{w}u\Delta s$

与电流定义类似 $\overline{P}=\overline{w}u\Delta S\cos\theta$



dx=udt



（2）能流密度i：单位时间内通过垂直于波传播方向单位面积的能量。

与电流密度定义类似 $i=\frac{P}{\Delta s}=wu$

平均能流密度I（又称波的强度，如光强、声强）：

$$\therefore I=\bar{i}=\frac{\bar{P}}{\Delta s}=\bar{w}u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u\propto A^2$$

机械波

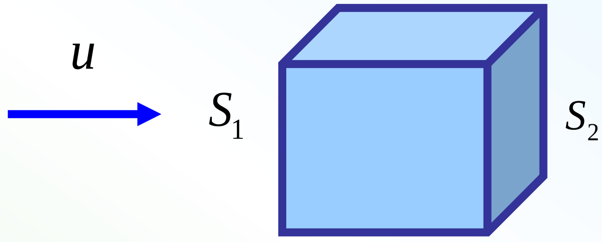
✓波动在传播时振幅的变化

在无吸收的理想媒质中 $<P>$保持不变

$$<P>=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 us \qquad I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$$

平面波：

$$\frac{<P_1>}{<P_2>}=\frac{A_1^2}{A_2^2}\frac{S_1}{S_2}=1$$



平面波振幅不变 $A_1=A_2$

例：证明在无吸收的理想媒质中球面波的振幅与离开其波源的距离成反比。

证：介质无吸收，通过两个球面的平均能流相等。

平均能流：$\overline{P}=\overline{w}u\Delta s$

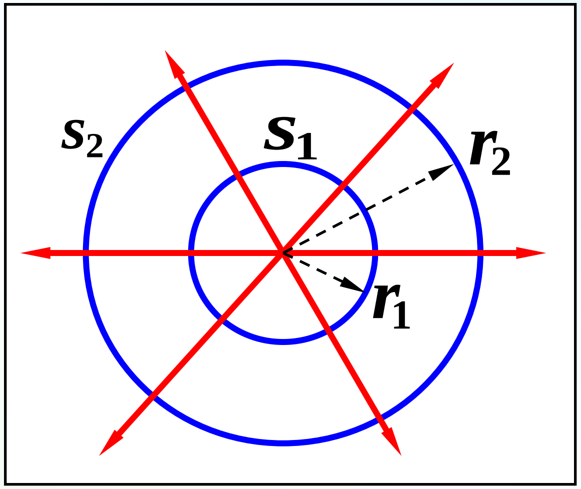
$$\overline{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

$$\overline{w}_1uS_1=\overline{w}_2uS_2$$

即：

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2u4\pi r_1^2=\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2u4\pi r_2^2$$

故 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{r_2}{r_1} \longrightarrow \boxed{A\propto\dfrac{1}{r}}$



例　在直径为0.14 m的圆柱形管内，有一波强为9.00×10^{-3} J/(s m^2) 的空气余弦式平面波以波速 u=300 m/s 沿柱轴方向传播，其频率为300 Hz。求:

（1）平均能量密度及能量密度的最大值;

（2）相邻的两个同位相面的波阵面内的体积中的能量。

解 （1）由 $\bar{I}=\bar{w}u \Rightarrow \bar{w}=\dfrac{\bar{I}}{u}=\dfrac{9\times10^{-3}}{300}=3.00\times10^{-5}\ J/m^2$

$$\boxed{w=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})} \qquad w_{\max}=2\bar{w}$$

（2）一个波长内体积的能量

$$W=\bar{w}\lambda S=\bar{w}(\frac{u}{v})\pi R^2=4.62\times10^{-7}\ J$$

例　一波源的辐射功率为1.00×10^4 W，它向无吸收、均匀、各向同性介质中发射球面波。若波速$u=3.00\times10^8$ m/s，试求离波源400 km处，

(1) 波的强度；

(2) 平均能量密度。

解　(1) 波的强度为

$$I=\frac{\overline{P}}{S}=\frac{1.00\times10^4}{4\pi r^2}=\frac{1.00\times10^4}{4\pi\times(400\times10^3)^2}\ \mathrm{W/m^2}$$

$$=4.98\times10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}$$

(2) 平均能量密度

$$\overline{w}=\frac{I}{u}=\frac{4.98\times10^{-9}}{3\times10^8}\ \mathrm{J/m^3}=1.66\times10^{-17}\ \mathrm{J/m^3}$$

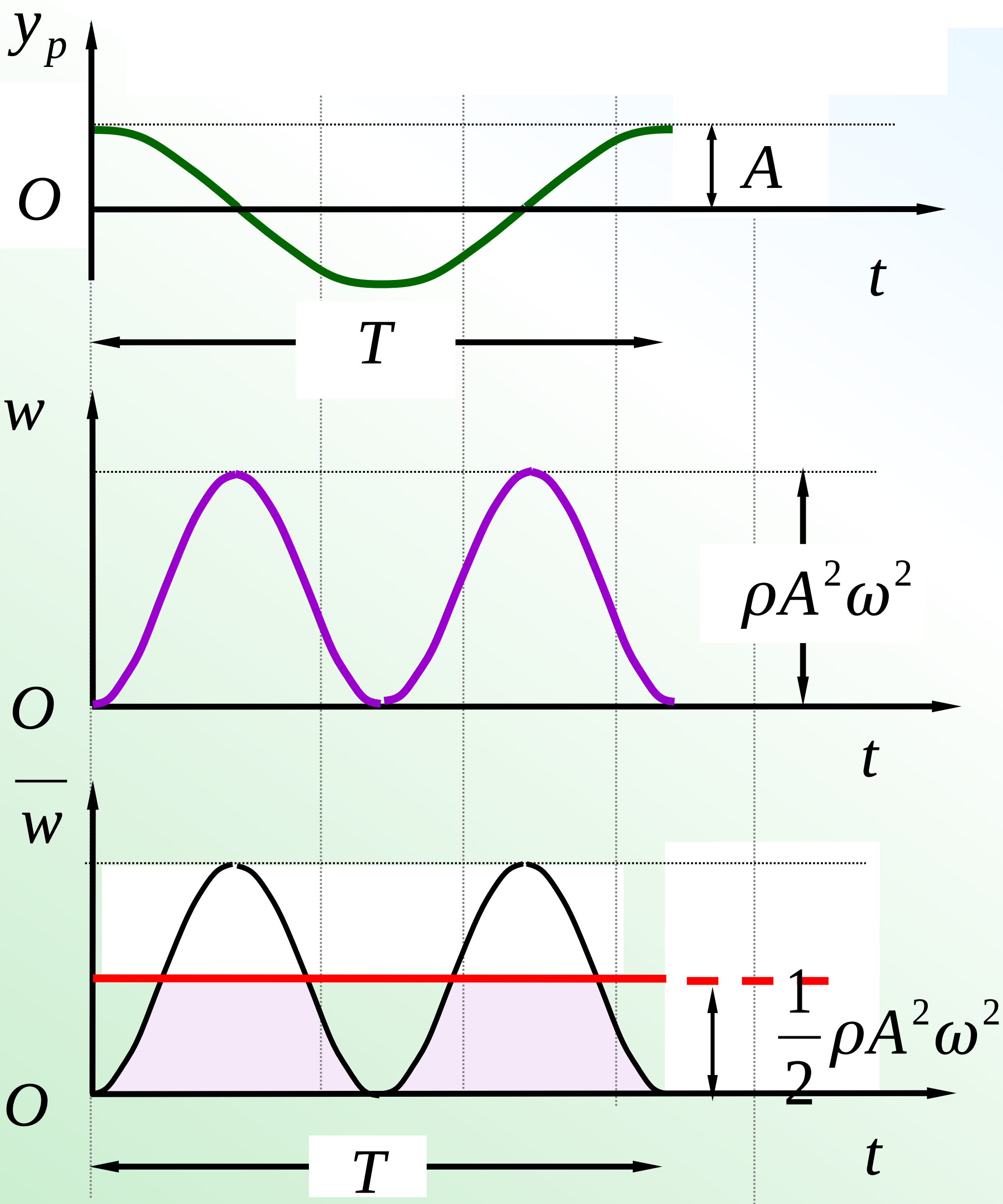
【学而后思】　**平面波波函数：**

$$\boxed{y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]}$$

球面波波函数： ?

$$y(r,t)=\frac{A}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{u}\right)$$

借助图线理解 w 和 $\overline{w}$ 简谐平面波



在密度为ρ的均匀媒质中传播，某点x_p处的振动方程

$$y_p = A\cos\omega(t-\frac{x_p}{u})$$

该处的能量密度 (随时间变化)

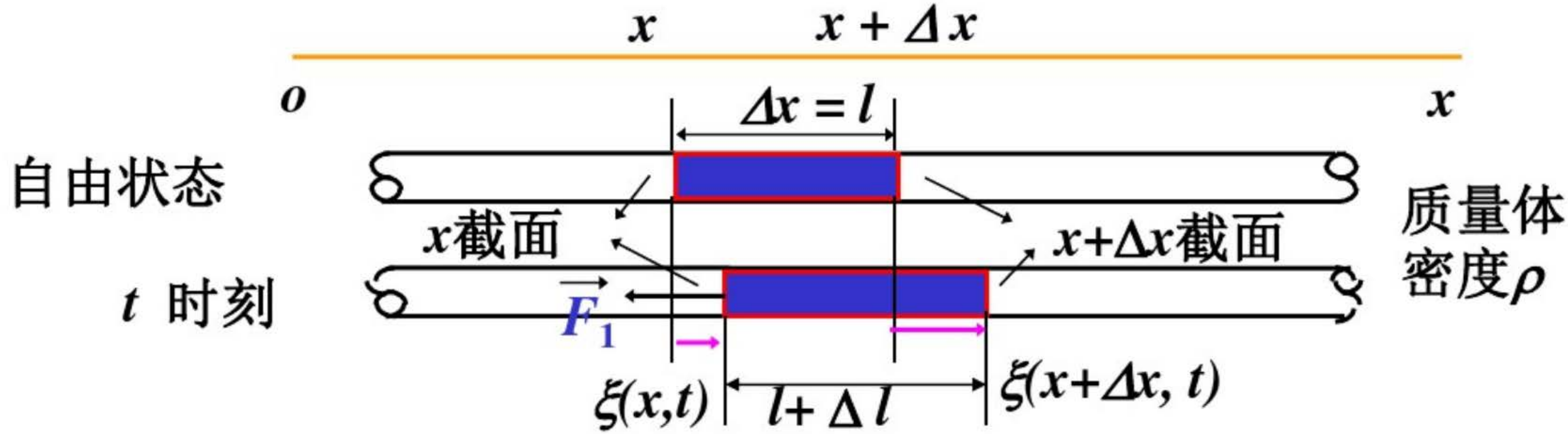
$$w = \rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x_p}{u})$$

该处的 平均能量密度（时间平均值）

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\,dt = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

应变与胡克定律

一. 固体棒中某截面处的应力、应变关系



平均形变 $\Delta l / l = [\xi(x+\Delta x,t) - \xi(x,t)] / \Delta x$ 平均应变

x 处截面应变（$\Delta x \to 0$）：$\partial\xi/\partial x$ 相对形变

应力（内力）
——产生形变 $F(x,t)/S$

$$\frac{F}{S} = Y\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Y –杨氏模量 比较 $F = -k\Delta x$