西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第二章：随机变量与概率分布

2.5 随机变量函数的概率分布

赵俊舟

junzhou.zhao@xjtu.edu.cn

2025 年 3 月 19 日

目录

目录

随机变量函数的概率分布

- 有时我们关心的随机变量不能直接观测，而是某个可观测随机变量的函数。
- 一些随机变量的分布很难获得，但与其相关的另一些随机变量的分布却往往容易获得。

例 (电功率)

设某供电线路上电流值 X 为一随机变量，其分布函数为 $F_X(x)$。若线路上有一电阻 R，试求 R 上的电功率 Y 的分布函数 $F_Y(y)$。

显然有 $Y=RX^2$，且 Y 取值为非负的，根据分布函数定义，有

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y\le y) = P(RX^2\le y) &= P(-\sqrt{\frac{y}{R}} \le X \le \sqrt{\frac{y}{R}}) \\
&= F_X(\sqrt{\frac{y}{R}}) - F_X(-\sqrt{\frac{y}{R}})
\end{aligned}
$$

随机变量函数的概率分布

定义 (随机变量函数)

记随机变量 X 的一切可能取值集合为 D，设 $g(x)$ 是定义在 D 上的连续函数或分段单调实函数，若对于 X 的每一个可能值 $x \in D$，随机变量 Y 相应地取 $y = g(x)$，则称随机变量 Y 为随机变量 X 的函数，记为 $Y = g(X)$。

- 类似地，可以定义 n 维随机变量 $(X_1, \ldots, X_n)$ 的函数 $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$。
- 一般地，我们需要研究问题：设 X 为一随机变量，分布已知。$Y = g(X)$，其中 g 为一确定的实函数，求 Y 的分布。
- 分别讨论离散型随机变量与连续型随机变量两种情况。

目录

一维离散型随机变量函数的概率分布

求一维离散型随机变量函数的分布律

设随机变量 X 的分布律为:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

求 $Y = g(X)$ 的分布律。

- 计算 Y 的所有可能取值 $g(x_i)$，及其对应的概率 p_i
- 合并所有相同的 $g(x_i)$，并将对应的 p_i 相加

例

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P(X = n) = \frac{1}{2^n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

求随机变量 $Y = \cos(\frac{\pi}{2}X)$ 的分布律。

一维离散型随机变量函数的概率分布

$$\cos(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} -1, & n = 2(2k-1) \\ 0, & n = 2k-1 \qquad\qquad k = 1, 2, \dots \\ 1, & n = 4k \end{cases}$$

所以 $Y = \cos(\frac{\pi}{2}X)$ 不同的可能取值为 $-1, 0, 1$。
由于 X 取 $2, 6, 10, \dots$ 时，对应的 Y 取 -1，所以

$$P(Y = -1) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^6 + (\frac{1}{2})^{10} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/16} = \frac{4}{15}$$

同理可得

$$P(Y = 0) = (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \cdots = \frac{1/2}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}$$

$$P(Y = 1) = (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^8 + (\frac{1}{2})^{12} + \cdots = \frac{1/16}{1 - 1/16} = \frac{1}{15}$$

举例：一维离散型随机变量函数的概率分布

例

设 X 的分布律为

X	0	1/4	1/2	3/4	1
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

令 $Y = \sin^2(\pi X)$，求 Y 的分布律。

- 计算不同 X 值对应的 Y 值

X	0	1/4	1/2	3/4	1
Y	0	1/2	1	1/2	0
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

- 合并后得 Y 的分布律

Y	0	1/2	1
P	0.2	0.4	0.4

举例：一维离散型随机变量函数的概率分布

有时 X 是连续型的，但 Y 仍有可能是离散的。

例 (儿童智商)

设儿童智商 $X \sim N(100, 100)$，将儿童按智商分为 3 类，类标号 Y 规定如下：

$$Y = \begin{cases} 1, & X > 110 \\ 0, & 90 < X \leq 110 \\ -1, & X \leq 90 \end{cases}$$

求 Y 的分布律。

根据 X 的分布，查正态分布表可得：

Y	-1	0	1
P	0.16	0.68	0.16

目录

一维连续型随机变量函数的概率分布

求一维连续型随机变量函数的概率密度

设 X 为连续型随机变量，具有概率密度 $f_X(x)$，又设 $Y = g(X)$ 亦为连续型随机变量，求其概率密度 $f_Y(y)$。

- 从分布函数着手

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \int_{x:\, g(x) \leq y} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

其中积分区域 $\{x: g(x) \leq y\}$ 表示满足 $g(x) \leq y$ 的 x 的点集。

- 进一步化简的关键是寻求上述集合的 x 的显式表达。
- 对分布函数求导，得到概率密度 $f_Y(y)$。

举例：一维连续型随机变量函数的概率分布

例 (电功率，续)

设某供电线路上电流值 X 为一随机变量，设 X 有概率密度 $f_X(x)$。又为方便计算，令 $R=1$，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

由前例已知

$$F_Y(y)=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

对分布函数求导得

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right)$$

或者直接对积分区间求导，即对下式求导

$$F_Y(y)=P(X^2\le y)=\int_{\{x:\,x^2\le y\}} f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

举例：一维连续型随机变量函数的概率分布

例 (正态变量的平方)

设 $X \sim N(0,1)$，求 $Y = X^2$ 的概率密度。

- 当 $y \le 0$ 时，$f_Y(y) = 0$
- 当 $y \ge 0$ 时，

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}))$$
$$= \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}$$

一维连续型随机变量函数的概率分布

定理

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$。若 $y = g(x)$ 为定义在实数域上的严格单调可导函数，则 $Y = g(X)$ 也是一个连续型随机变量，且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min_x g(x)$，$\beta = \max_x g(x)$。

一维连续型随机变量函数的概率分布

- 当 $g(x)$ 严格递增时，则 $g^{-1}(y)$ 也严格递增，此时
$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \le g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$
对上式求导，得

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \tag{1}$$

- 当 $g(x)$ 严格递减时，则 $g^{-1}(y)$ 也严格递减，此时
$F_Y(y)=P(Y \le y)=P(g(X) \le y)=P(X \ge g^{-1}(y))=1-F_X(g^{-1}(y))$
对上式求导，得

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right| \tag{2}$$

- 综合(1)和(2)，得

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|$$

举例：一维连续型随机变量函数的概率分布

例 (线性函数)

设 X 的概率密度为 $f_X(x)$，$Y = aX + b$，$a \neq 0$，求 $f_Y(y)$。

当 Y 为 X 的线性函数时，通常有

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{y-b}{a})$$

特别地，若 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, a = \sigma, b = \mu$，则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

即 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

- 正态分布的线性函数仍为正态分布。
- 任何正态分布都可表示为标准正态分布的线性函数。

举例：一维连续型随机变量函数的概率分布

例 (对数正态分布)

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，令 $Y = e^x$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

因为 $y = e^x$ 满足定理中的条件，当 $y > 0$ 时，$y = e^x$ 的反函数为 $x = \ln y$，有

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \left|\frac{1}{y}\right|, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

称具有上述概率密度的随机变量 Y 服从对数正态分布。

目录

目录

二维离散型随机变量函数的概率分布

例

设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律如右表，求 $Z = X + Y$；$Z = XY$；$Z = \max(X, Y)$；$Z = \min(X, Y)$ 的分布律。

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.2	0.3	0.1
2	0.1	0.1	0.2

(X, Y)	$(-1, 0)$	$(-1, 1)$	$(-1, 2)$	$(2, 0)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$
P	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1	0.2
$X + Y$	-1	0	1	2	3	4
XY	0	-1	-2	0	2	4
$\max(X, Y)$	0	1	2	2	2	2
$\min(X, Y)$	-1	-1	-1	0	1	2

二维离散型随机变量函数的概率分布

故随机变量函数的分布律分别为:

$X+Y$	-1	0	1	2	3	4
P	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1	0.2

XY	-2	-1	0	2	4
P	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

$\max(X,Y)$	0	1	2
P	0.2	0.3	0.5

$\min(X,Y)$	-1	0	1	2
P	0.6	0.1	0.1	0.2

举例：二维离散型随机变量函数的概率分布

例 (二项分布相加)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim B(n_1, p)$， $Y \sim B(n_2, p)$，求 $Z = X + Y$ 的分布律。

Z 的可能取值为 $0, 1, \ldots, n_1 + n_2$。当 $0 \le k \le n_1 + n_2$ 时，有

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \\ &= \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \end{aligned}$$

这表明 $Z \sim B(n_1 + n_2, p)$，即二项分布具有可加性。

目录

二维连续型随机变量函数的概率分布

求二维连续型随机变量函数的概率密度

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，$f(x, y)$ 是其概率密度，又 $Z = g(X, Y)$ 是 X, Y 的连续函数，且 Z 是连续型随机变量，求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$。

- 先求分布函数

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z) = \iint_{g(x,y)\leq z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 再对分布函数求导，得到概率密度 $f_Z(z)$。
- 计算的关键是确定上式的积分区域。

举例：二维连续型随机变量函数的概率分布

例 (瑞利分布)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且 $X \sim N(0,\sigma^2), Y \sim N(0,\sigma^2)$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度。

易知 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$。$z>0$ 时

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le z)=P(X^2+Y^2\le z^2)$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

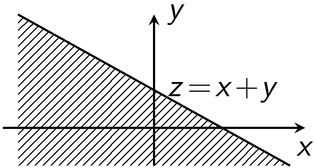
从而得到 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，称为瑞利分布。

随机变量和的概率密度

求随机变量和的概率密度

设 X, Y 为连续型随机变量，有联合概率密度 $f(x,y)$。设 $Z = X + Y$，求 Z 的概率密度。

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(X + Y \le z) \\
&= \iint_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$



令 $t = y + x$，有

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z} f(x, t-x)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{z} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x)\,\mathrm{d}x$$

对 z 求导，得

随机变量和的概率密度

从而得到 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x$$

利用 X 与 Y 的对称性，也可以得到

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,\mathrm{d}y$$

- 特别地，当 X 与 Y 相互独立时：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

- 称为卷积公式。

举例：随机变量和的概率密度

例 (独立正态变量的和)

设 X, Y 均服从 $N(0,1)$ 且相互独立，求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

由卷积公式，有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}\,\mathrm{d}x \overset{t=x-\frac{z}{2}}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

从而得到 $Z \sim N(0,2)$

独立正态分布随机变量和的概率密度

- 若 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且相互独立，则
$$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$
- 若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \ldots, n$ 且相互独立，则
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$$
- 利用前面关于正态线性函数的结论，若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，$i = 1, \ldots, n$ 且相互独立，$a_i > 0$ 为常数，则
$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2)$$

举例：随机变量和的概率密度

例

设随机变量 X, Y 相互独立，且 $X \sim U(0,2), Y \sim \exp(3)$，求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

X, Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由卷积公式计算 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2} f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{t=z-x}{=} \frac{1}{2}\int_{z-2}^{z} f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{2}(1-e^{-3z}), & 0 \le z < 2, \\ \frac{1}{2}(e^{-3(z-2)} - e^{-3z}), & z \ge 2 \end{cases}$$

举例：随机变量和的概率密度

例 (指数分布随机变量的和)

某系统的寿命由一个关键部件决定，该部件寿命 $X \sim \exp(\theta)$，另有一相同备用件，问系统的工作寿命服从什么分布？

设另一个备用件的寿命为 $Y \sim \exp(\theta)$ 且与 X 独立，故系统工作寿命为 $Z = X + Y$。由卷积公式计算 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^z \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{x+z-x}{\theta}}\,\mathrm{d}x = \frac{z}{\theta^2} e^{-\frac{z}{\theta}}$$

设 $X_i \sim \exp(\theta), i = 1, \ldots, n$ 且相互独立，则 $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ 的概率密度为

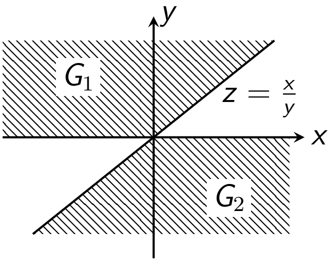
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z^{n-1}}{\theta^n (n-1)!} e^{-\frac{z}{\theta}}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

随机变量商的概率密度

求随机变量商的概率密度

设随机变量 X, Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$，求 $Z = X/Y$ 的概率密度。

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X/Y \le z)$$
$$= \iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$\iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

令 $t = x/y$，注意到 y 是固定的且 $y > 0$，得

$$\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{z} yf(yt,y)\,\mathrm{d}t$$

随机变量商的概率密度

$$
\begin{aligned}
\iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z} yf(yt,y)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{z}\int_0^{+\infty} yf(yt,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0} yf(yt,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t
$$

因此

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_0^{+\infty} yf(yt,y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} yf(yt,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |y|f(yt,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

随机变量商的概率密度

从而得到 $Z = X/Y$ 的概率密度

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) \, \mathrm{d}y$$

特别地，当 X 与 Y 相互独立时，$Z = X/Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y) \, \mathrm{d}y$$

举例：随机变量商的概率密度

例 (指数分布随机变量的商)

设 X, Y 独立同分布 $\exp(1)$，求 $Z = X/Y$ 的概率分布。

由随机变量商的概率密度公式，得

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(y+yz)} y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{1+z}\int_0^{+\infty} e^{-(y+yz)}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(1+z)^2}, \quad z > 0
\end{aligned}
$$

所以

$$
f_Z(z) = \begin{cases} (1+z)^{-2}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0 \end{cases}
$$

举例：随机变量商的概率密度

例

设 X, Y 服从 $N(0,1)$ 且相互独立，求 $T = Y/\sqrt{X^2}$ 的概率密度。

由之前的结果知 $U = X^2$ 的概率密度为

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{-1/2} e^{-u/2}, & u > 0, \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$$

令 $V = \sqrt{U}$ 以及之前的定理，可得 V 的概率密度为

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2}, & v > 0, \\ 0, & v \leq 0 \end{cases}$$

于是得

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v| f_Y(vt) f_V(v) \, \mathrm{d}v = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

随机变量取最大值与最小值的概率密度

- 有些随机变量函数不是可微函数，不能用前面做变换的方法，如 $\max(X, Y), \min(X, Y)$ 等。

随机变量取最大最小

设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数及边缘分布函数分别为 $F(x, y), F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$。设 $M = \max(X, Y), N = \min(X, Y)$，求 M, N 的分布函数。

因为对任意 $z \in \mathbb{R}$ 有

$$
\begin{aligned}
\{\max(X, Y) \le z) &= \{X \le z, Y \le z) \\
\{\min(X, Y) > z) &= \{X > z, Y > z)
\end{aligned}
$$

随机变量取最大值与最小值的概率密度

由分布函数定义，得到

$$
\begin{aligned}
F_M(z) &= P(M \le z) = P(\max(X, Y) \le z) \\
&= P(X \le z, Y \le z) = F(z, z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_N(z) &= P(N \le z) = 1 - P(N > z) \\
&= 1 - P(\min(X, Y) > z) = 1 - P(X > z, Y > z) \\
&= 1 - (1 - F_X(z) - F_Y(z) + F(z, z)) \\
&= F_X(z) + F_Y(z) - F(z, z)
\end{aligned}
$$

若 X 与 Y 相互独立，则有

$$F_M(z) = F_X(z)F_Y(z)$$

$$
\begin{aligned}
F_N(z) &= F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z) \\
&= 1 - \big(1 - F_X(z)\big)\big(1 - F_Y(z)\big)
\end{aligned}
$$

随机变量取最大值与最小值的概率密度

- 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，$F_{X_i}(x_i)$ 是 X_i 的分布函数。设 $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$，$N = \min(X_1, \ldots, X_n)$，则有

$$F_M(z) = F_{X_1}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_N(z) = 1 - \big(1 - F_{X_1}(z)\big) \cdots \big(1 - F_{X_n}(z)\big)$$

- 特别地，当 $X_1, \ldots, X_n$ 独立同分布且分布函数为 $F_X(x)$ 时，有

$$F_M(z) = F_X(z)^n, \quad F_N(z) = 1 - \big(1 - F_X(z)\big)^n$$

- 对上式求导，得概率密度

$$f_M(z) = nF_X(z)^{n-1} f_X(z), \quad f_N(z) = n\big(1 - F_X(z)\big)^{n-1} f_X(z)$$

举例：随机变量取最大值与最小值的概率密度

例

设 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，都服从 $[a, b]$ 上的均匀分布，求 $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$ 与 $N = \min(X_1, \ldots, X_n)$ 的概率密度。

M 的分布函数为

$$F_M(z) = F_X(z)^n = \begin{cases} 0, & z < a, \\ \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n, & a \le z < b, \\ 1, & z \ge b \end{cases}$$

故 M 的概率密度为

$$f_M(z) = \begin{cases} \frac{n(z-a)^{n-1}}{(b-a)^n}, & a < z < b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

举例：随机变量取最大值与最小值的概率密度

N 的分布函数为

$$F_N(z) = 1 - (1 - F_X(z))^n = \begin{cases} 0, & z < a, \\ 1 - \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n, & a \leq z < b, \\ 1, & z \geq b \end{cases}$$

故 N 的概率密度为

$$f_N(z) = \begin{cases} \frac{n(b-z)^{n-1}}{(b-a)^n}, & a < z < b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

举例：随机变量取最大值与最小值的概率密度

例 (均匀分布)

设随机变量 $X_i \sim U(0,\theta), i=1,\ldots,n$ 且相互独立，求随机变量 $M=\max(X_1,\ldots,X_n)$ 的概率密度。

X_i 的分布函数和概率密度分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{\theta}, & 0\le x\le\theta,\\ 1, & x>\theta\end{cases}\qquad f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

故 M 的概率密度为

$$f_M(x)=nF_X(x)^{n-1}f_X(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

小结

1. 一维随机变量函数的概率分布
2. 二维随机变量函数的概率分布

第二章作业

P47: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22,
P76: 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 18(1)(4), 21, 22, 25, 26, 29, 31, 33, 35