第二章：随机变量与概率分布

2.3 二维随机变量的条件分布

赵俊舟

junzhou.zhao@xjtu.edu.cn

2025 年 3 月 19 日

目录

目录

离散型随机变量的条件分布

定义 (条件分布律)

设 (X, Y) 为二维离散型随机变量，其联合分布律以及关于 X、关于 Y 的边缘概率分布分别为 $p_{ij}, p_{i\cdot}, p_{\cdot j}$， $i, j = 1, 2, \ldots$

- 对于固定的 j，若 $p_{\cdot j} = P(Y = y_j) > 0$，则称
$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \qquad i = 1, 2, \ldots$$
为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律。
- 同理，对于固定的 i，若 $p_{i\cdot} = P(X = x_i) > 0$，则称
$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \qquad j = 1, 2, \ldots$$
为在 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律。

离散型随机变量的条件分布

- 显然，条件分布律是个分布律，因为

$$P(Y = y_j | X = x_i) \geq 0$$

- 并且

$$\sum_j P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{\sum_j p_{ij}}{p_{i\cdot}} = \frac{p_{i\cdot}}{p_{i\cdot}} = 1$$

条件分布律的直观意义

- 将某变量固定时，例如 $X = x_i$，将原来的样本空间缩为一维点集 $\{(x_i, y_1), (x_i, y_2), \dots\}$。
- 考虑其上的分布律，但因该点集概率之和不等于 1，而等于边缘分布律 $p_{i\cdot}$，故需要用它来规范化。

举例：离散型随机变量的条件分布

例

一袋中有 6 个大小形状相同的球，其中 2 个为红色，4 个为白色，每次从袋中任取一球，共取两次。定义随机变量 X, Y 如下

$$X = \begin{cases} 0, & \text{第一次取出红球} \\ 1, & \text{第一次取出白球} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0, & \text{第二次取出红球} \\ 1, & \text{第二次取出白球} \end{cases}$$

考虑两种取球方式：有放回取球和无放回取球。求在 $X = 0$ 的条件下，Y 的条件分布律。

举例：离散型随机变量的条件分布

- 有放回取球：

$$P(Y=0|X=0)=\frac{P(X=0,Y=0)}{P(X=0)}=\frac{1/9}{1/3}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=1|X=0)=\frac{P(X=0,Y=1)}{P(X=0)}=\frac{2/9}{1/3}=\frac{2}{3}$$

- 无放回取球：

$$P(Y=0|X=0)=\frac{P(X=0,Y=0)}{P(X=0)}=\frac{1/15}{1/3}=\frac{1}{5}$$

$$P(Y=1|X=0)=\frac{P(X=0,Y=1)}{P(X=0)}=\frac{4/15}{1/3}=\frac{4}{5}$$

目录

连续型随机变量的条件分布

- 对于连续型随机变量，无法计算条件概率 $P(X \le x | Y = y)$，因为对于连续型随机变量 Y，始终有 $P(Y = y) = 0$。
- 此时，可以将 $P(X \le x | Y = y)$ 看作是当 $\delta \to 0$ 时 $P(X \le x | y \le Y \le y + \delta)$ 的极限。
- 于是有

$$
\begin{aligned}
P(X \le x | Y = y) &= \lim_{\delta \to 0} P(X \le x | y \le Y \le y + \delta) \\
&= \lim_{\delta \to 0} \frac{P(X \le x, y \le Y \le y + \delta)}{P(y \le Y \le y + \delta)} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+\delta} f(u, v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}{\int_{y}^{y+\delta} f_Y(v) \, \mathrm{d}v} \\
&= \lim_{\delta \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\delta} \int_{y}^{y+\delta} f(u, v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}{\frac{1}{\delta} \int_{y}^{y+\delta} f_Y(v) \, \mathrm{d}v}
\end{aligned}
$$

连续型随机变量的条件分布

$$P(X \leq x | Y = y) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\delta} \int_{y}^{y+\delta} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\frac{1}{\delta} \int_{y}^{y+\delta} f_Y(v)\,\mathrm{d}v}$$

当 $f(x,y), f_Y(y)$ 在 y 处连续时，由积分中值定理可得

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_{y}^{y+\delta} f_Y(v)\,\mathrm{d}v = f_Y(y)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_{y}^{y+\delta} f(u,v)\,\mathrm{d}v = f(u,y)$$

所以

$$P(X \leq x | Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}u \triangleq \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,\mathrm{d}u$$

连续型随机变量的条件分布

定义 (连续型随机变量条件概率密度)

设 (X,Y) 为二维连续型随机变量，其联合概率密度为 $f(x,y)$，(X,Y) 关于 X、Y 的边缘概率密度为 $f_X(x), f_Y(y)$。

- 若对于固定的 y，$f_Y(y)>0$，则在给定 $Y=y$ 时 X 的条件分布定义为

$$F_{X|Y}(x|y) \triangleq P(X \le x | Y=y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,\mathrm{d}u$$

其中

$$f_{X|Y}(x|y) \triangleq \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在 $Y=y$ 条件下 X 的条件概率密度。

连续型随机变量的条件分布

- 若对于固定的 x，$f_X(x) > 0$，则在给定 $X = x$ 时 Y 的条件分布定义为

$$F_{Y|X}(y|x) \triangleq P(Y \le y|X = x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(v|x)\,\mathrm{d}v$$

其中

$$f_{Y|X}(y|x) \triangleq \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

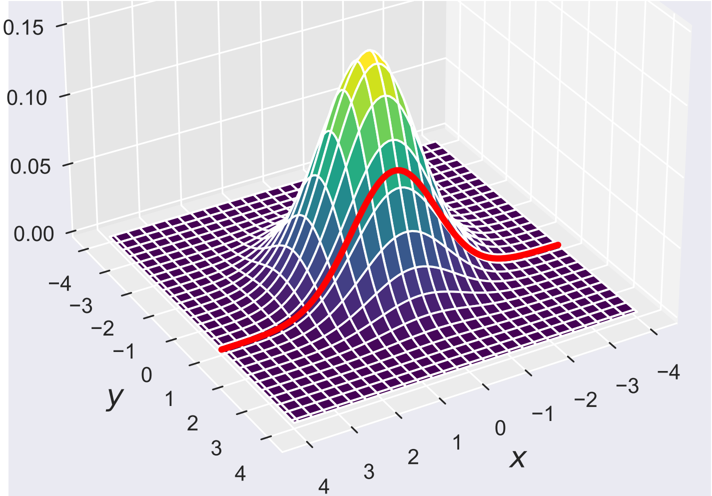
为在 $X = x$ 条件下 Y 的条件概率密度。

条件概率密度也是概率密度，因为

- $f_{X|Y}(x|y) \ge 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1$

连续型随机变量的条件分布

- 条件分布的含义是将二维分布限制在 $Y = y$ 上，X 的分布。
- 其分布关系与二维分布一致，但相差一个规范化因子 $f_Y(y)$。



举例：连续型随机变量的条件分布

例

设 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $P(Y\ge 1/4|X=1/2)$ 及 $P(Y\ge 3/4|X=1/2)$。

根据联合概率密度计算 X 边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{x^2}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & |x|\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

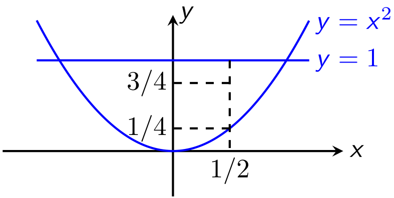
当 $|x|\le 1$ 时，求条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{21/4x^2y}{21/8x^2(1-x^4)}=\frac{2y}{1-x^4}, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

举例：连续型随机变量的条件分布

于是

$$f_{Y|X}(y|\frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{32}{15}y, & \frac{1}{4} \le y \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



故

$$P(Y \ge \frac{1}{4}|X = \frac{1}{2}) = 1$$

$$P(Y \ge \frac{3}{4}|X = \frac{1}{2}) = \int_{3/4}^{+\infty} f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})\,\mathrm{d}y = \int_{3/4}^{1} \frac{32}{15} y\,\mathrm{d}y = \frac{7}{15}$$

在利用条件密度进行计算时，要特别注意定积分限。

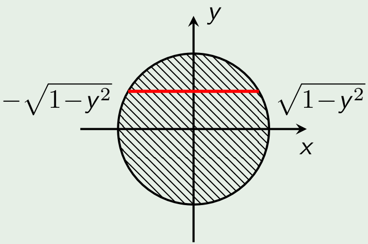
举例：连续型随机变量的条件分布

例

设二维随机变量 (X, Y) 在单位圆上服从均匀分布，即有联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/\pi, & x^2 + y^2 \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$。



当 $|y| < 1$ 时，Y 的边缘概率密度为

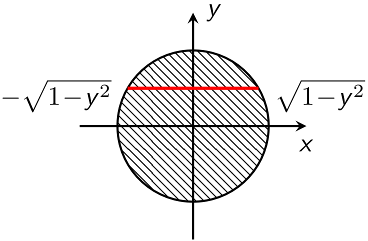
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$$

否则，$f_Y(y) = 0$

举例：连续型随机变量的条件分布

故当给定 $Y=y,|y|<1$ 时，X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1/\pi}{2/\pi\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & |x|\le\sqrt{1-y^2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



表明：当已知 $Y=y,|y|<1$ 时，$X\sim U(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2})$。

举例：连续型随机变量的条件分布

例

已知数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机取值，当观察到 $X=x\in(0,1)$ 时，数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机取值，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

由题意知 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

又知，当给定条件 $X=x\in(0,1)$ 时，Y 的条件分布为区间 $(x,1)$ 上的均匀分布，即

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $0<x<1$ 固定。

举例：连续型随机变量的条件分布

根据公式可得，

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & 0<x<1, x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

小结

1. 离散型随机变量的条件分布
2. 连续型随机变量的条件分布