第一章：随机事件与概率

1.1 随机事件

赵俊舟
junzhou.zhao@xjtu.edu.cn

2025 年 2 月 20 日

目录

目录

必然现象和随机现象

必然现象

在一定条件下，只会出现一个结果的现象。

例 (必然现象)

- 向空中抛一物体必然落回地面。
- 在自然状态下，水从高处流向低处阿。
- 太阳必然不会从西边出来。
- 水在标准大气压下加热到 $100^{\circ}\mathrm{C}$ 就沸腾。

必然现象和随机现象

随机现象

在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象。

例 (随机现象)

- 掷一颗骰子，刚好出现 6 点。
- 抽检 100 件电子元件，刚好有 3 件次品。
- 下一届世界杯赛的冠军是法国队。
- 一天内进入某超市的顾客数。

随机现象和随机试验

- 对随机现象的研究始于观测，各种观测手段统称为**试验**。

定义（随机试验）

如果试验满足以下条件，则称为**随机试验**，简称为**试验**。

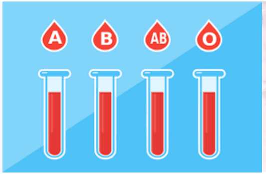
- 可以在相同条件下**重复**进行；
- 每次试验的可能结果不止一个，但事先能明确**全部可能**的结果；
- 进行一次**试验之前不能肯定**哪一个结果会出现。

通常用 E 或 $E_1, E_2, \ldots$ 来表示随机试验。

随机现象和随机试验

例（随机试验）

- E_1：观察单位时间段内某网站的点击数。
- E_2：人的血型有 4 种：O、A、B、AB，观察一个人的血型。
- E_3：彩票号码由 6 位数字组成，观察开奖时的中奖号码。
- E_4：研究某地的气温变化，连续观察 7 天的日最低气温与最高气温。



目录

样本空间

定义（样本和样本空间）

- 随机试验的每一个可能结果称为一个**样本**，记为 ω。
- 所有可能出现的结果的集合称为**样本空间**，记为 Ω。

例（上例中随机试验的样本空间）

- $E_1 : \Omega_1 = \{0, 1, \dots\}$
- $E_2 : \Omega_2 = \{\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{AB}\}$
- $E_3 : \Omega_3 = \{(n_1, \dots, n_6) | n_i \in \{0, \dots, 9\}, i \in \{1, \dots, 6\}\}$
- $E_4 : \Omega_4 = \{[(t_1, T_1), \dots, (t_7, T_7)] | t_i \leq T_i, i \in \{1, \dots, 7\}\}$

样本空间

例 (连续掷骰子)

连续掷两个骰子，观察其点数之和，若首次出现 7 点或 8 点，则试验结束。写出此随机试验的样本空间。

$$\Omega_5 = \{(s_1, \dots, s_n) | s_n \in \{7, 8\}, s_1, \dots, s_{n-1} \notin \{7, 8\}, n = 1, 2, \dots\}$$

- 样本空间中的元素可以是数、属性、向量或更复杂的结构；
- 样本空间至少有两个样本点，含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间；
- 样本空间可能包含有限个样本点（例如 Ω_2, Ω_3），也可能包含无限个样本点（例如 $\Omega_1, \Omega_4, \Omega_5$）。

随机事件

随机事件（Event）

实际应用中，通常会关心随机试验的一些特定结果，它们通常是样本空间 Ω 的子集，称为**随机事件**，简称**事件**，通常用大写字母 $A, B, \ldots$ 表示。

例 (随机事件)

- E_1：在单位时间段内，该网站点击次数超过 $100,000$ 次:
$$A_1 = \{n \in \Omega_1 | n \geq 100,000\}$$
- E_2：某人的血型至少可为两种不同血型的人输血:
$$A_2 = \{\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}\}$$

随机事件

- E_3：彩票号码的最末两个数字是 0 和 1:
$$A_3 = \{(n_1, \dots, n_6) \in \Omega_3 | n_5 = 0, n_6 = 1\}$$
- E_4：连续 7 天气温都在 15°C 到 25°C 之间:
$$A_4 = \{[(t_1, T_1), \dots, (t_7, T_7)] \in \Omega_4 | 15 \le t_i \le T_i \le 25, 1 \le i \le 7\}$$

- 对于试验 E_1，若结果为 $\omega = 200,000$，事件 A_1 是否发生？
- 对于试验 E_2，若结果为 $\omega = \mathrm{AB}$，事件 A_2 是否发生？
- 可见，事件 A 发生，就是当且仅当属于 A 的某一个样本 $\omega \in A$ 在试验中出现。
- 这样就建立起了事件运算与集合运算的对应关系。

目录

事件的关系与运算

以下大写字母均为样本空间 Ω 中的事件。

- $A \subseteq B$ 指事件 A 必然导致事件 B 发生;
- $A = B$ 指 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$;
- $A \cup B$ 称为事件 A 与 B 的和事件,表示事件 A 与 B 至少有一个发生;
- $A \cap B$ 称为事件 A 与 B 的积事件,表示事件 A 与 B 同时发生,也常记为 AB;

事件的关系与运算

- $\bar{A}$ 称为 A 的**对立事件**，表示事件 A 不发生，有时也记作 A^c；
- Ω 称为**必然事件**，$\emptyset$ 称为**不可能事件**；
- 若 $AB=\emptyset$，则称事件 A 与 B **互斥**；
- $A-B=A\bar{B}$ 指事件 A 发生而事件 B 不发生的事件。

事件的运算定律

交换律

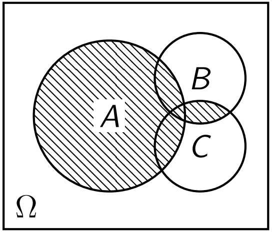
$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



对偶律

对偶律（德 · 摩根律）

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

证明.

- 若 $\omega \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$，则 $\forall i \in I, \omega \in \overline{A_i}$，即 $\omega \notin A_i$。
- 于是 $\omega \notin \bigcup_{i \in I} A_i$，亦即 $\omega \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$。
- 这就证明了 $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$。
- 同理可以证明 $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$。 □

小结

1. 随机现象与随机试验
2. 样本空间与随机事件
3. 事件的关系与运算