第二章：随机变量与概率分布

2.4 随机变量的相互独立性

赵俊舟

junzhou.zhao@xjtu.edu.cn

2025 年 3 月 19 日

随机变量的相互独立性

- 随机事件 A, B 的独立性，指 $P(AB) = P(A)P(B)$。
- 即若事件相互独立，当且仅当乘积事件的概率等于事件概率的乘积。
- 考虑由随机变量确定的事件：$A = \{X \leq x\}, B = \{Y \leq y\}$。
- 这样事件 A, B 的相互独立性就可以扩展到随机变量 X, Y 的相互独立性。

随机变量的相互独立性

定义 (随机变量相互独立)

设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$，X 与 Y 的边缘分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$，如果对任意实数 x, y 恒有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

即 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$，则称**随机变量 X 与 Y 相互独立**。

定理 (离散型随机变量的相互独立性)

对于离散型随机变量 (X, Y)，X 与 Y 相互独立的充要条件为：对 (X, Y) 的所有可能取值 (x_i, y_j)，都有

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

即 $p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ 对一切 i, j 成立。

举例：随机变量的相互独立性

例

设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律如右表，若 X,Y 相互独立，试确定未知数 a,b,c。

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0.08	a	0.2
2	b	0.18	c

- 由 $p_{21}=p_{2\cdot}p_{\cdot 1}$ 得 $(a+0.18)(a+0.28)=a$，故 $a=0.12$ 或 0.42。
- 当 $a=0.12$ 时，由 $p_{11}=p_{1\cdot}p_{\cdot 1}$ 得 $(b+0.08)\times 0.4=0.08$，故 $b=0.12$。由 $p_{31}=p_{3\cdot}p_{\cdot 1}$ 得 $(c+0.2)\times 0.4=0.2$，故 $c=0.3$。
- 当 $a=0.42$ 时，可计算出 $b=6/175, c=3/35$。

随机变量的相互独立性

定理 (连续型随机变量的相互独立性)

设连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度与边缘概率密度分别为 $f(x, y), f_X(x), f_Y(y)$，则 X 与 Y 相互独立的充要条件为：对任意实数 x, y，下式几乎处处成立

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

例

设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度如下

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

问 X, Y 是否相互独立？

随机变量的相互独立性

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

同理

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

故 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$，即 X, Y 相互独立。

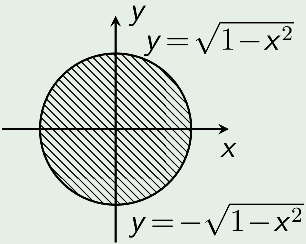
可见，若 (X,Y) 为独立的连续型随机变量，则其联合概率密度 $f(x,y)$ 可以表成分离形式 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$。

举例：随机变量的相互独立性

例

设 (X, Y) 的概率密度如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



求 $f_X(x), f_Y(y)$，并问二者是否独立？

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, x\in[-1,1]$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, y\in[-1,1]$$

故 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，两者不独立。

随机变量相互独立性的推广

定义 (多个随机变量相互独立)

设 n 维随机变量 $(X_1,\dots,X_n)$ 的联合分布函数为 $F(x_1,\dots,x_n)$，X_i 的边缘分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$。若 $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，有

$$F(x_1,\dots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1,\dots,X_n$ 相互独立。

定义 (两组随机变量相互独立)

设 $(X_1,\dots,X_m)\sim F_1(x_1,\dots,x_m)$，$(Y_1,\dots,Y_n)\sim F_2(y_1,\dots,y_n)$，$(X_1,\dots,X_m;Y_1,\dots,Y_n)\sim F(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)$。若 $\forall(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$，$\forall(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，有

$$F(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)=F_1(x_1,\dots,x_m)F_2(y_1,\dots,y_n)$$

则称 $(X_1,\dots,X_m)$ 与 $(Y_1,\dots,Y_n)$ 相互独立。

随机变量相互独立性的推广

定理

设 $(X_1, \ldots, X_m)$ 与 $(Y_1, \ldots, Y_n)$ 相互独立，若 h, g 是两个多元连续函数，则 $h(X_1, \ldots, X_m)$ 与 $g(Y_1, \ldots, Y_n)$ 也相互独立。

两堆独立数据

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{X_1, \ldots, X_m} \arrow[d, "h"] & \boxed{Y_1, \ldots, Y_n} \arrow[d, "g"] \\
\boxed{h(X_1, \ldots, X_m)} & \boxed{h(Y_1, \ldots, Y_n)}
\end{tikzcd}
$$

处理后仍然独立

随机变量相互独立性的推广

定理

若随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，把它们分为不相交的 k 个组，每个组中所有变量由一个连续函数复合而生成一个新的随机变量，则这 k 个新的随机变量仍相互独立。

例

设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 相互独立，而 $Y_1 = \cos(X_1 + X_3)$，$Y_2 = \sin X_2$，$Y_3 = X_4 + 10$，由上述定理知 Y_1, Y_2, Y_3 相互独立。