第一章：随机事件与概率

赵俊舟

junzhou.zhao@xjtu.edu.cn

2025 年 3 月 28 日

目录

1. 随机事件
2. 概率的定义
3. 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
4. 随机事件的独立性

目录

1 随机事件
- 随机现象与随机试验
- 样本空间与随机事件
- 事件的关系与运算

2 概率的定义

3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

4 随机事件的独立性

目录

1. 随机事件
   - 随机现象与随机试验
   - 样本空间与随机事件
   - 事件的关系与运算
2. 概率的定义
3. 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
4. 随机事件的独立性

必然现象和随机现象

必然现象

在一定条件下，只会出现一个结果的现象。

例 (必然现象)

- 向空中抛一物体必然落回地面。
- 在自然状态下，水从高处流向低处阿。
- 太阳必然不会从西边出来。
- 水在标准大气压下加热到 $100^{\circ}\mathrm{C}$ 就沸腾。

必然现象和随机现象

随机现象

在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象。

例 (随机现象)

- 掷一颗筛子，刚好出现 6 点。
- 抽检 100 件电子元件，刚好有 3 件次品。
- 下一届世界杯赛的冠军是法国队。
- 一天内进入某超市的顾客数。

随机现象和随机试验

- 对随机现象的研究始于观测，各种观测手段统称为**试验**。

定义（随机试验）

如果试验满足以下条件，则称为**随机试验**，简称为**试验**。

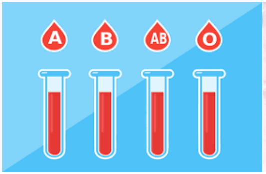
- 可以在相同条件下**重复**进行；
- 每次试验的可能结果不止一个，但事先能明确**全部可能**的结果；
- 进行一次**试验之前不能肯定**哪一个结果会出现。

🔔 通常用 E 或 $E_1, E_2, \ldots$ 来表示随机试验。

随机现象和随机试验

例（随机试验）

- E_1：观察单位时间段内某网站的点击数。
- E_2：人的血型有 4 种：O、A、B、AB，观察一个人的血型。
- E_3：彩票号码由 6 位数字组成，观察开奖时的中奖号码。
- E_4：研究某地的气温变化，连续观察 7 天的日最低气温与最高气温。



目录

1 随机事件
- 随机现象与随机试验
- 样本空间与随机事件
- 事件的关系与运算

2 概率的定义

3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

4 随机事件的独立性

样本空间

定义 (样本和样本空间)

- 随机试验的每一个可能结果称为一个**样本**，记为 ω。
- 所有可能出现的结果的集合称为**样本空间**，记为 Ω。

例 (上例中随机试验的样本空间)

- $E_1 : \Omega_1 = \{0, 1, \ldots\}$
- $E_2 : \Omega_2 = \{\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{AB}\}$
- $E_3 : \Omega_3 = \{(n_1, \ldots, n_6) | n_i \in \{0, \ldots, 9\}, i \in \{1, \ldots, 6\}\}$
- $E_4 : \Omega_4 = \{[(t_1, T_1), \ldots, (t_7, T_7)] | t_i \le T_i, i \in \{1, \ldots, 7\}\}$

样本空间

例 (连续掷筛子)

连续掷两个筛子，观察其点数之和，若首次出现 7 点或 8 点，则试验结束。写出此随机试验的样本空间。

$$\Omega_5 = \{(s_1, \ldots, s_n) | s_n \in \{7, 8\}, s_1, \ldots, s_{n-1} \notin \{7, 8\}, n = 1, 2, \ldots\}$$

- 样本空间中的元素可以是数、属性、向量或更复杂的结构；
- 样本空间至少有两个样本点，含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间；
- 样本空间可能包含有限个样本点（例如 Ω_2, Ω_3），也可能包含无限个样本点（例如 $\Omega_1, \Omega_4, \Omega_5$）。

随机事件

随机事件（Event）

实际应用中，通常会关心随机试验的一些特定结果，它们通常是样本空间 Ω 的子集，称为**随机事件**，简称**事件**，通常用大写字母 $A, B, \ldots$ 表示。

例 (随机事件)

- E_1： 在单位时间段内，该网站点击次数超过 $100,000$ 次:

$$A_1 = \{n \in \Omega_1 | n \geq 100,000\}$$

- E_2： 某人的血型至少可为两种不同血型的人输血:

$$A_2 = \{\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}\}$$

随机事件

- E_3：彩票号码的最末两个数字是 0 和 1:
$$A_3 = \{(n_1, \ldots, n_6) \in \Omega_3 | n_5 = 0, n_6 = 1\}$$
- E_4：连续 7 天气温都在 15°C 到 25°C 之间：
$$A_4 = \{[(t_1, T_1), \ldots, (t_7, T_7)] \in \Omega_4 | 15 \le t_i \le T_i \le 25, 1 \le i \le 7\}$$

- 对于试验 E_1，若结果为 $\omega = 200,000$，事件 A_1 是否发生？
- 对于试验 E_2，若结果为 $\omega = \mathrm{AB}$，事件 A_2 是否发生？
- 可见，事件 A 发生，就是当且仅当属于 A 的某一个样本 $\omega \in A$ 在试验中出现。
- 这样就建立起了事件运算与集合运算的对应关系。

目录

1. 随机事件
   - 随机现象与随机试验
   - 样本空间与随机事件
   - 事件的关系与运算
2. 概率的定义
3. 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
4. 随机事件的独立性

事件的关系与运算

以下大写字母均为样本空间 Ω 中的事件。

- $A \subseteq B$ 指事件 A 必然导致事件 B 发生；
- $A = B$ 指 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$；
- $A \cup B$ 称为事件 A 与 B 的和事件，表示事件 A 与 B 至少有一个发生；
- $A \cap B$ 称为事件 A 与 B 的积事件，表示事件 A 与 B 同时发生，也常记为 AB；

事件的关系与运算

- $\bar{A}$ 称为 A 的**对立事件**，表示事件 A 不发生，有时也记作 A^c；
- Ω 称为**必然事件**，$\emptyset$ 称为**不可能事件**；
- 若 $AB = \emptyset$，则称事件 A 与 B **互斥**；
- $A - B = A\bar{B}$ 指事件 A 发生而事件 B 不发生的事件。

事件的运算定律

交换律

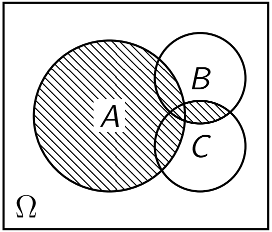
$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



对偶律

对偶律（德 · 摩根律）

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$$

证明.

- 若 $\omega \in \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$，则 $\forall i \in I, \omega \in \bar{A}_i$，即 $\omega \notin A_i$。
- 于是 $\omega \notin \bigcup_{i \in I} A_i$，亦即 $\omega \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$。
- 这就证明了 $\bigcap_{i \in I} \bar{A}_i \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$。
- 同理可以证明 $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$。 □

目录

1 随机事件

2 概率的定义
- 概率的古典定义
- 概率的统计定义
- 概率的公理化定义

3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

4 随机事件的独立性

目录

1 随机事件

2 概率的定义
- 概率的古典定义
- 概率的统计定义
- 概率的公理化定义

3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

4 随机事件的独立性

概率的古典定义

- 称具有以下两个特征的随机试验的数学模型为**古典概型**：
  - **有限样本**：只有有限个试验结果；
  - **等可能假设**：每个试验结果发生的可能性相等。
- 古典概型是概率论史上研究最早的情形，不需要重复试验。

定义 (概率的古典定义)

设古典概型试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$，若事件 $A\subseteq\Omega$ 包含其中 m 个结果，则事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)\triangleq\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{m}{n}$$

对概率 $P(A)$ 的计算，转化为对样本空间 Ω 和事件 A 两个集合大小的计算。

概率的古典定义

例 (掷硬币)

连续掷两次硬币，求出现一个正面一个反面的概率。

- 样本空间为 $\Omega = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$
- 事件“出现一正一反”为 $A = \{\mathrm{HT}, \mathrm{TH}\}$
- 因此 $P(A) = 1/2$

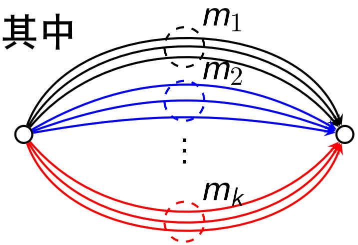
例 (掷筛子)

连续掷两次筛子，求点数之和是 9 的概率。

- 样本空间为 $\Omega = \{(i,j) | i,j \in \{1,2,\ldots,6\}\}$
- 事件“点数和是 9”为 $A = \{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}$
- 因此 $P(A) = 1/9$

回顾：加法原理

- 如果某件事情可由 k 类不同途径完成，其中
  - 第一类途径有 m_1 种方法
  - 第二类途径有 m_2 种方法
  - $\cdots\cdots$
  - 第 k 类途径有 m_k 种方法
- 那么完成这件事情共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 种方法。

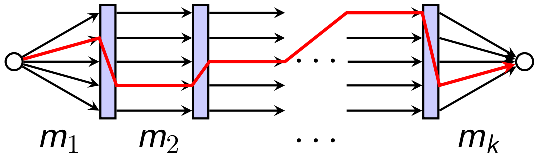


例 (加法原理)

由甲城到乙城去旅游有三类交通工具：汽车、火车和飞机。而汽车有 5 个班次，火车有 3 个班次，飞机有 2 个班次，那么从甲城到乙城共有 $5+3+2=10$ 个班次供旅游者选择。

回顾：乘法原理

- 如果完成某件事情需要经过 k 个步骤，其中
  - 第一步有 m_1 种做法
  - 第二步有 m_2 种做法
  - ……
  - 第 k 步有 m_k 种做法



- 那么完成这件事情共有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$ 种方法。

例 (乘法原理)

由甲城到乙城有 3 条旅游线路，由乙城到丙城有 2 条旅游线路，那么从甲城经乙城去丙城旅游共有 $3 \times 2 = 6$ 条旅游线路可供选择。

回顾：排列组合 I

- **全排列**：n 个不同编号的球排成一列，共有 $n!$ 种排列。
- **部分排列**：从 n 个不同编号的球中不放回地取出 m 个排成一列，共有 $n(n-1)\cdots(n-m+1)=n!/(n-m)!$ 种排列。
- **组合**：从 n 个不同编号的球中取出 m 个作为一组（不考虑顺序），共有 $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 种取法。
  - $\binom{n}{m}$ 称为**二项式系数**，也可以写作 C_n^m
- **分组**：把 n 个不同编号的球分成 k 组，第 i 组有 n_i 个球，$\sum_{i=1}^k n_i=n$，共有 $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}=\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$ 种分组方法。
  - $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$ 称为**多项式系数**。

回顾：排列组合 II

- **有部分重复的排列**：n 个球，其中 m 个球有相同编号，则这 n 个球共有 $n!/m!$ 种排列。
- **分组排列**：有 n 个球，分为 2 组，属于同一组的球具有相同编号，其中第 1 组有 m 个球，第 2 组有 $n-m$ 个球，则这 n 个球共有 $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 种排列。
- **分组排列的一般形式**：有 n 个球，分为 k 组，同一组的球都具有相同编号，其中第 i 组有 n_i 个球，$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$，则这 n 个球共有 $\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$ 种排列。

举例：扑克同花色

例 (扑克同花色)

将一副扑克（去掉大小王）共 52 张牌均分给四个玩家，问刚好每人拿到一手同花色牌的概率是多少？

- 将 52 张牌分成 4 组，共有 $\binom{52}{13,13,13,13}$ 种分法。
- 每个人拿到同花色共有 $4!$ 种分法。
- 故

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4!}{\binom{52}{13,13,13,13}} \approx 4.4739 \times 10^{-28}$$

举例：抽样问题

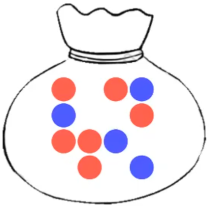
例 (抽样问题)

从装有 r 个红球和 b 个蓝球的口袋里依次取出两个球，求取出的两个球均为红球的概率？

用 A 表示事件“取出的两个球均为红球”。

- 有放回抽样：

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{r^2}{(r+b)^2}$$



- 无放回抽样：

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\binom{r}{2}}{\binom{r+b}{2}}$$

举例：抽样问题

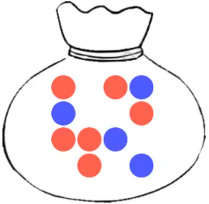
例（抽样问题推广）

将取两个球推广为取 n 个球（$n \le r+b$），其中包含 k 个红球（$k \le r$）和 $n-k$ 个蓝球的情况。

用 A_k 表示事件"取出的 n 个球中有 k 个红球"。

- 有放回抽样：

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k} r^k b^{n-k}}{(r+b)^n}$$



- 无放回抽样：

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}$$

概率的古典定义：几何概型

- 将等可能有限样本假设推广至无限试验结果的情形，即是几何概型。
- 若某试验 E 满足：
  - 样本空间为有限区域 Ω，其测度（例如长度、面积、体积）用 S_Ω 表示；
  - 样本点落入 Ω 内任何区域 A 中的可能性与区域 A 的测度 S_A 成正比。
- 那么与区域 A 相关的事件发生的概率定义为

$$P(A) \triangleq \frac{S_A}{S_\Omega}$$

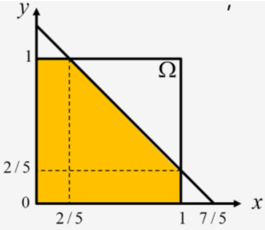
举例：几何概型

例

在区间 $(0,1)$ 中随机取两个数，求两数之和小于 $7/5$ 的概率。

- 在区间 $(0,1)$ 中随机取两个数分别记为 x, y，则 (x,y) 可能取值形成如下的正方形 $\Omega=\{(x,y)|0<x,y<1\}$，其面积 $S_\Omega=1$。
- 而事件“两数之和小于 $7/5$”可表示为 $A=\{(x,y)|0<x,y<1, x+y<7/5\}$，即图中阴影部分，其面积 $S_A=0.82$。
- 所以得到

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=0.82$$



举例：几何概型

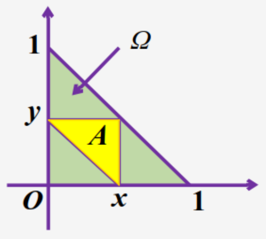
例（三角形概率）

将一单位长木棒随机折成三段，求刚好能构成三角形的概率。

记其中两个边的长度分别为 x 和 y，能形成三角形应满足：

$$A:\begin{cases} x+y>1-(x+y) \\ x+1-(x+y)>y \\ y+1-(x+y)>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y>\frac{1}{2} \\ y<\frac{1}{2} \\ x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

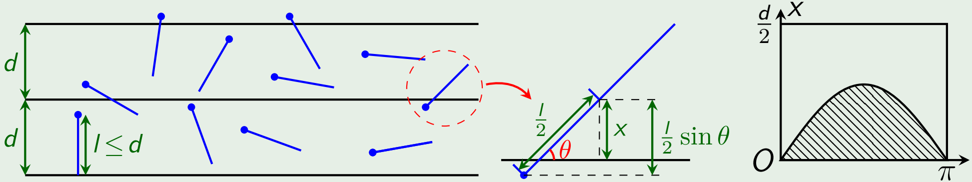
得到 $P(A)=1/4$.



举例：蒲丰投针试验

例 (蒲丰投针试验，1777 年)

平面上画有间隔为 d 的等距平行线，向平面中任意投掷一枚长为 $l < d$ 的针，求针与任一平行线相交的概率。



令针与平行线的夹角为 θ，针的中点与离它比较近的线的距离为 x，则 $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq x \leq d/2$。所以样本空间 Ω 是 θ 与 x 围成的矩形区域。针与线相交的条件为 $x \leq \frac{l}{2}\sin\theta$，所以

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\frac{d}{2}\pi} = \frac{2l}{d\pi}$$

目录

1. 随机事件
2. 概率的定义
   - 概率的古典定义
   - 概率的统计定义
   - 概率的公理化定义
3. 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
4. 随机事件的独立性

概率两大学派

- 频率学派（频率说）：坚持概率的频率解释的统计学家形成的学派，反对贝叶斯学派先验概率的主观性，代表人物为奈曼（1894-1981）、“伯克利们”，上世纪 30 年代学派形成。
- 贝叶斯学派（主观说）：认为先验分布可以是主观的，它没有也不需要有频率解释，代表人物为贝叶斯（1701-1761），上世纪 60 年代学派形成。
- 两个学派的争论是战后数理统计学发展的一个特色，对今后数理统计学的发展还将产生影响。
- 贝叶斯学派在实际应用上取得的成功慢慢改变了人们的观点，逐渐受到重视，已经成为统计学中的热门研究课题。

频率学派

频率学派（频率说）

在一系列重复随机试验中考察随机事件发生的频率 $\Leftrightarrow$ 样本信息

例 (考察 26 个英文字母在文献中出现的频率)

字母	频率	字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.1268	R	0.0594	M	0.0244	K	0.0060
T	0.0978	H	0.0573	W	0.0214	X	0.0016
A	0.0788	L	0.0394	Y	0.0202	J	0.0010
O	0.0776	D	0.0389	G	0.0187	Q	0.0009
I	0.0707	U	0.0280	P	0.0186	Z	0.0006
N	0.0706	C	0.0268	B	0.0156		
S	0.0634	F	0.0256	V	0.0102		

贝叶斯学派

贝叶斯学派（主观说）

根据以往的资料或经验，形成的关于随机事件发生可能性的印象。$\Leftrightarrow$ **先验信息**

- 例如，考察某人是某案件嫌疑人的概率；推测山洞里隐藏的某种类型动物的概率。

统计概率

例：抛硬币试验

实验者	抛硬币次数	正面朝上次数	正面出现频率
蒲丰	$4,048$	$2,048$	0.5069
德 · 摩根	$2,048$	$1,061$	0.5181
皮尔逊	$12,000$	$6,019$	0.5016
皮尔逊	$24,000$	$12,012$	0.5005
罗曼诺夫斯基	$80,640$	$39,699$	0.4923

频率的“稳定性”就是统计规律性，即频率稳定于概率。

定义 (统计概率或经验概率)

设有随机试验 E，当试验的重复次数 n 充分大时，若事件 A 的发生频率 $f_n(A)$ 稳定在 p 附近，则称 p 为事件 A 发生的概率。这样定义的概率称为**统计概率**（或**经验概率**），记为 $P(A) = p$.

目录

1. 随机事件
2. 概率的定义
   - 概率的古典定义
   - 概率的统计定义
   - 概率的公理化定义
3. 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
4. 随机事件的独立性

概率的公理化问题

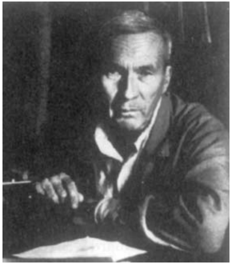
- 概率论发展史上有：古典定义、几何定义、频率定义、主观定义，这些定义只适合一类随机现象，如何给出适用于一切随机现象的概率的最一般定义呢？
- 1900 年，希尔伯特提出要建立概率的公理化定义，**从最少的几条本质特性出发去刻画概率**，即希尔伯特第六问题。

The investigations on the foundations of geometry suggest the problem: To treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which mathematics plays an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics.

Hilbert's Sixth Problem

概率的公理化定义

- 1933 年，前苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出概率的公理化定义。
- 从日常生活经验出发，概率应该满足什么特性？
- 非负性：随机事件发生可能性的大小应当非负；
- 规范性：可能性大小应取值于 $[0,1]$ 之间，虽然不是本质的，但很自然；
- 可加性：两个互斥事件之和发生的可能性大小，应该是各自可能性大小之和。



概率的公理化定义

定义 (概率的公理化定义)

概率空间定义在三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上，其中

- Ω 为**样本空间**；
- $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ 为**事件域**且满足公理 F1–F3；
- $P: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ 为将事件映射为**概率**的实值函数且满足公理 P1–P3。

事件域 F 满足以下公理：

F1 $\Omega \in \mathcal{F}$

F2 若 $A \in \mathcal{F}$，则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$

F3a 若 $A, B \in \mathcal{F}$，则 $A \cup B \in \mathcal{F}$

F3b 若 $A_i \in \mathcal{F}$，$i \geq 1$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

概率的公理化定义

概率 P 满足以下公理：

P1 $\forall A \in \mathcal{F}$，都有 $P(A) \geq 0$

P2 $P(\Omega) = 1$

P3a 若 $A, B \in \mathcal{F}$ 且 $A \cap B = \emptyset$，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

P3b 若 $A_i \in \mathcal{F}$，$i \geq 1$，且 $A_i \cap A_j = \emptyset$，$i \neq j$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- 事实上，F3a 和 P3a 可以分别由 F3b 和 P3b 得到，但反之不成立。
- P3 称为概率的**加法公理**，其中 P3b 也称为概率的**无限可列可加性**。

事件域 $\mathcal{F}$ 的性质

性质 1：不可能事件属于事件域

$$\emptyset \in \mathcal{F}$$

由 F1 和 F2 可以直接得到，进而可以证明 F3b $\Rightarrow$ F3a。

性质 2：乘积事件属于事件域

若 $A, B \in \mathcal{F}$，则 $A \cap B \in \mathcal{F}$。

由 F2 得 $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{F}$，再由 F3a 得 $\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{F}$，所以 $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in \mathcal{F}$。

概率 P 的性质

性质 1：不可能事件的概率

$$P(\emptyset)=0$$

由 P2 和 P3a 得到 $P(\Omega\cup\emptyset)=P(\Omega)+P(\emptyset)$。

性质 2：有限可列可加性

设 $A_i\in\mathcal{F},1\le i\le n$ 且 $A_iA_j=\emptyset, i\neq j$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1\cup\cdots\cup A_n\cup\emptyset\cup\cdots)$

概率 P 的性质

性质 3：单调性

若 $A, B \in \mathcal{F}$ 且 $A \subseteq B$，则 $P(A) \leq P(B)$ 且 $P(B-A) = P(B) - P(A)$。

$$P(B) = P(A \cup (B-A)) = P(A) + P(B-A)$$

性质 4：有界性

若 $A \in \mathcal{F}$，则 $0 \leq P(A) \leq 1$。

$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ （或由 P1 和单调性得到）

性质 5：对立事件的概率

若 $A \in \mathcal{F}$，则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$。

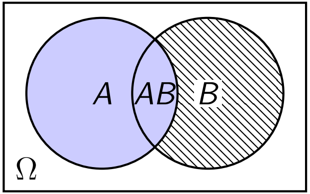
$$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

概率 P 的性质

性质 6： 和事件的概率

设 $A, B \in \mathcal{F}$，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$。

- 因为 $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{AB})$，所以由 P3a 得 $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{AB})$
- 又因为 $B \cap \overline{AB} = \overline{\overline{B} \cup AB}$，所以由性质 5 和 P3a 得 $P(B \cap \overline{AB}) = 1 - P(\overline{B} \cup AB) = 1 - P(\overline{B}) - P(AB) = P(B) - P(AB)$



推论

若 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$，则

加奇减偶

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n)$$

概率 P 的性质

定义 (极限事件)

- 对事件域 $\mathcal{F}$ 中任一单调不减事件列 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$，称可列并 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为事件列 $\{A_n\}$ 的极限事件，记为

$$\lim_{n\to\infty} A_n \triangleq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

- 对事件域 $\mathcal{F}$ 中任一单调不增事件列 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$，称可列交 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 为事件列 $\{A_n\}$ 的极限事件，记为

$$\lim_{n\to\infty} A_n \triangleq \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

概率 P 的性质

性质 7：概率的连续性

设 P 为事件域 $\mathcal{F}$ 上的概率，则 P 满足下面的性质：

- 下连续：对事件域 $\mathcal{F}$ 中任一单调不减事件列 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$，有
$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$
- 上连续：对事件域 $\mathcal{F}$ 中任一单调不增事件列 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$，有
$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

该性质表明，对于事件域中的单调不减（增）事件列，求极限运算和求概率运算可以交换次序。

对概率下连续性的证明

证明.

令 $B_1 = A_1, B_i = A_i - A_{i-1}, i = 2, 3, \ldots$。显然 $B_iB_j = \emptyset, \forall i \neq j$，且

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

由可列可加性得

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$$

$$= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

□

举例：概率的性质

例 (和事件的概率)

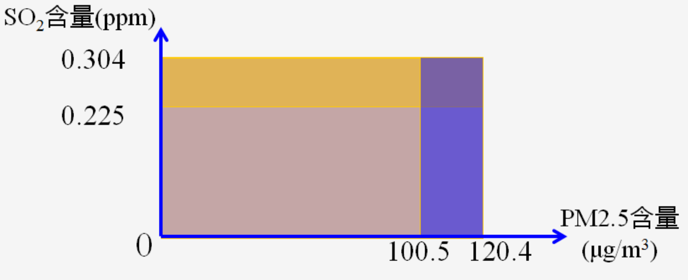
在 $1 \sim 1000$ 的整数中随机取一个数，问取到的整数能被 4 整除或者能被 6 整除的概率是多少?

- 设 A 为事件“取到的数能被 4 整除”，B 为事件“取到的数能被 6 整除”
- 则所求事件概率为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- $P(A) = \frac{\lfloor 1000/4 \rfloor}{1000}$, $P(B) = \frac{\lfloor 1000/6 \rfloor}{1000}$, $P(AB) = \frac{\lfloor 1000/12 \rfloor}{1000}$
- 故 $P(A \cup B) = 0.333$

举例：概率的性质

例 (和事件的概率)

已知空气中 PM2.5 含量一般在 $0 \sim 120.4\mu g/m^3$ 之间，SO_2 含量一般在 $0 \sim 0.304$ppm 之间。一般认为，PM2.5 含量在 $100.5\mu g/m^3$ 以上或 SO_2 含量在 0.225ppm 以上为对人体有害。问空气质量为有害的概率是多少？



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

举例：概率的性质

例 (配对问题)

旅社管理员共管理 n 间客房，钥匙标牌丢失，随机将这 n 个钥匙分给 n 个旅客，求至少有一人能打开房门的概率。

记 A_i 为事件“第 i 个房门被打开”，A 为事件“至少有一人能打开房门”，则 $A=\bigcup_{i=1}^n A_i$。利用加法公式

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\sum_{i=1}^n P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)$$

易知 $P(A_i)=\frac{1}{n}, P(A_iA_j)=\frac{1}{n(n-1)},\ldots,P(A_1\cdots A_n)=\frac{1}{n!}$。故

$$\begin{aligned}P(A)&=\binom{n}{1}\frac{1}{n}-\binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!}\\&=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\xrightarrow{n\to\infty}1-e^{-1}\end{aligned}$$

举例：概率的性质

例 (掷双筛子)

反复掷两个筛子，观察其点数和，若首次出现 7 点或 8 点，则试验结束。求试验结束的概率。

- 设 A_i 表示事件“前 $i-1$ 次投掷不出现 7 点或 8 点，第 i 次投掷出现 7 点”，A 表示事件“试验结果出现 7 点而结束”
- 设 B_i 表示事件“前 $i-1$ 次投掷不出现 7 点或 8 点，第 i 次投掷出现 8 点”，B 表示事件“试验结果出现 8 点而结束”
- 显然 A_i, B_i 均互斥，如果可以算出 $P(A_i), P(B_i)$，则可算出 $P(A), P(B)$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$$

举例：概率的性质

- A_i：前 $i-1$ 次不能出现 7 点或 8 点，第 i 次出现 7 点，所以
$$P(A_i)=(1-\frac{11}{36})^{i-1}\cdot\frac{1}{6}$$
所以
$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\frac{6}{11}$$
- B_i：前 $i-1$ 次不能出现 7 点或 8 点，第 i 次出现 8 点，所以
$$P(B_i)=(1-\frac{11}{36})^{i-1}\cdot\frac{5}{36}$$
所以
$$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)=\frac{5}{11}$$

目录

1. 随机事件
2. 概率的定义
3. 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
   - 条件概率与乘法公式
   - 全概率公式与贝叶斯公式
4. 随机事件的独立性

目录

1 随机事件

2 概率的定义

3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
- 条件概率与乘法公式
- 全概率公式与贝叶斯公式

4 随机事件的独立性

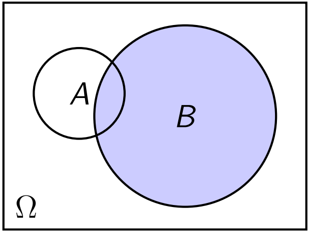
条件概率

定义 (条件概率)

设 A, B 为两个事件，$P(B) > 0$，定义

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**。



- 事件 A 发生的概率 $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$
- 当获得额外信息“事件 B 发生”，此时 A 发生的概率变为

$$\frac{|AB|}{|B|} = \frac{|AB|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(AB)}{P(B)} \triangleq P(A|B)$$

条件概率

例

一盒内装有 10 个乒乓球，分别编号 $1 \sim 10$ 号，现从盒中随机取一个乒乓球，考虑以下事件：

$$A = \{\text{取得编号不超过 5 的球}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{\text{取得奇数球}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

若已知取到的是奇数号球，则取得编号不超过 5 的球的概率是多少？

易知 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}$。令 $AB = \{$ 取得编号不超过 5 的奇数号球 $\} = \{1, 3, 5\}$，有 $P(AB) = \frac{3}{10}$。根据条件概率公式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3/10}{1/2} = \frac{3}{5}$$

条件概率

若 $P(B)>0$，条件概率 $P(\cdot|B)$ 是否是概率？

即验证 $P(\cdot|B)$ 是否满足概率的三个公理：

P1 非负性 $P(A|B)\geq 0$

P2 规范化 $P(\Omega|B)=\dfrac{P(\Omega B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$

P3 可列可加 设事件 $A_1,A_2,\ldots$ 两两互斥，即 $A_iA_j=\emptyset$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\frac{P\left((\bigcup_i A_i)B\right)}{P(B)}=\frac{P\left(\bigcup_i A_iB\right)}{P(B)}$$

$$=\frac{\sum_i P(A_iB)}{P(B)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)$$

条件概率

例 (连续掷骰子)

反复掷两颗骰子，观察其和直至出现 7 点或 8 点为止，求出现 7 点的概率。

- 令 B 表示事件“出现 7 点或 8 点”，A 表示事件“出现 7 点”，求 $P(A|B)$。
- 易知 $P(A) = \frac{6}{36}, P(B) = \frac{11}{36}$ 且 $AB = A$
- 故 $P(A|B) = \frac{6}{11}$.

乘法公式

定理（乘法公式）

若 $P(B) > 0$，由条件概率的定义可得下述结论

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

- 意义：用以计算积事件的概率（通常可避免计算组合数）。
- 事实上，允许 $P(B) = 0$。

例（摸球问题）

在无放回的情况下，求从 r 只红球，b 只蓝球的袋中摸出两只红球的概率。

$$P(R_1R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) = \frac{r}{r+b}\frac{r-1}{r+b-1}$$

乘法公式

推广到三个事件的乘法公式:

$$P(ABC) = P(AB)P(C|AB) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$P(ABC) = P(A|BC)P(BC) = P(A|BC)P(B|C)P(C)$$

推论 (乘法公式一般形式)

对任意 n 个事件 $A_1, \ldots, A_n$，若 $P(A_1 \cdots A_i) > 0$，$1 \leq i \leq n-1$，则

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})$$

举例：条件概率与乘法公式

例 (排队抽签问题)

n 个人以抽签方式决定谁将得到一张奥运会开幕式的入场券，n 个人依次抽签，求第 k 个人抽中的概率（$1 \le k \le n$）。

- 令 A_k 表示事件"第 k 个人抽到入场券"
- 对于 $1 \le k \le n$，因 $A_k \subseteq \overline{A_1} \cdots \overline{A_{k-1}}$，故 $A_k = \overline{A_1} \cdots \overline{A_{k-1}} A_k$
- 由乘法定理得

$$
\begin{aligned}
P(A_k) &= P(\overline{A_1} \cdots \overline{A_{k-1}} A_k) \\
&= P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) \cdots P(A_k | \overline{A_1} \cdots \overline{A_{k-1}}) \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

结论：在排队依次抽签时，中签的可能性与排位先后没有关系。

举例：条件概率与乘法公式

注意：一些实际问题中的“概率”有时应理解为条件概率。

例（网球比赛）

某网球运动员参加一次赛事，淘汰赛制，须赢 5 轮方可夺冠，已知他第 i 轮获胜的概率为 $0.6 - i/10$，求他夺冠的概率。

设 A_i 为“第 i 轮胜”，“第 i 轮获胜的概率”是指 $P(A_i|A_1\cdots A_{i-1}) = 0.6 - i/10,\ i = 2,3,4,5.$

$$
\begin{aligned}
P(\text{夺冠}) &= P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_5|A_1\ldots A_4)\\
&= 0.5\times 0.4\times 0.3\times 0.2\times 0.1\\
&= 0.0012
\end{aligned}
$$

目录

1 随机事件
2 概率的定义
3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
- 条件概率与乘法公式
- 全概率公式与贝叶斯公式

4 随机事件的独立性

全概率公式

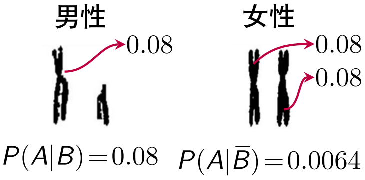
例 (色盲问题)

人类色盲基因由 X 染色体携带，若男性的 X 染色体有此基因则男性患色盲，女性则要两个 X 染色体均有此基因才患色盲。设色盲基因出现概率为 0.08，又设男女婴出生比为 $110:100$。

问题：求一新生儿有色盲的概率。

设 A 表示事件“新生儿有色盲”，B 表示事件“新生儿是男婴”，所以 $A = AB \cup A\bar{B}$。

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(AB) + P(A\bar{B}) \\
&= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \\
&= 0.08 \times \frac{1.1}{2.1} + 0.0064 \times \frac{1}{2.1} \\
&= 0.045
\end{aligned}
$$



全概率公式

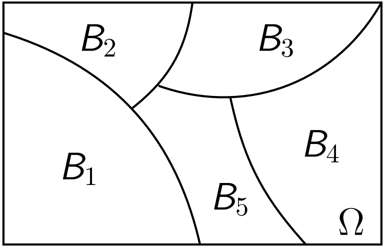
- 注意到在上例中 $B \cup \overline{B} = \Omega$ 且 $B\overline{B} = \emptyset$，称 B 和 $\overline{B}$ 构成 互斥完备事件群。
- 一般地，有以下定义：

定义 (互斥完备事件群)

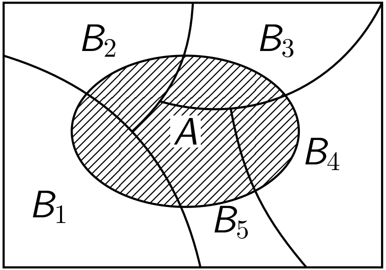
设 $\{B_i\}_{i\in I}$ 为可数个事件，若它们满足

- $B_iB_j = \emptyset, \forall i \neq j$
- $\bigcup_{i\in I} B_i = \Omega$

则称这组事件为互斥完备事件群（或称互补相容完备事件组）。



全概率公式



$$\Omega = \bigcup_{i \in I} B_i$$

- **先化整为零**：$A = \bigcup_{i \in I} AB_i$ 且 AB_i 与 AB_j 互斥，$\forall i \neq j$
- **再聚零为整**：

$$P(A) = P(\bigcup_{i \in I} AB_i) = \sum_{i \in I} P(AB_i) = \sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i)$$

全概率公式

定理 (全概率公式，Law of Total Probability, LTP)

若事件 $B_1, \ldots, B_n$ 构成互斥完备事件群，且 $P(B_i) > 0, \forall i$，则对任一事件 A 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

全概率公式的作用：

$$\boxed{\text{一个复杂事件的概率计算问题}} \Longrightarrow \boxed{\text{若干个简单事件的概率计算问题}}$$

举例：全概率公式

例 (追捕疑犯)

现追捕某犯罪嫌疑人，据分析他外逃、市内藏匿、自首的概率依次为 $0.3, 0.5, 0.2$。又设在外逃及市内藏匿情况下，成功缉拿的概率依次是 $0.4, 0.7$。问该犯罪嫌疑人最终归案的概率是多少？

- B_1：外逃，B_2：市内藏匿，B_3：自首
- 设 A 表示事件“最终归案”，则

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\
&= 0.4 \times 0.3 + 0.7 \times 0.5 + 1 \times 0.2 \\
&= 0.67
\end{aligned}
$$

举例：全概率公式

例（产品合格率）

某家电产品来自甲、乙、丙三家工厂，这三家工厂的产品比例为 $1:2:1$，产品合格率分别为 $90\%, 85\%, 80\%$。现从该类家电产品中随机抽取一件，问抽到一件合格品的概率是多少？

- 令 $B_1 \triangleq \{$ 取到一件甲厂产品 $\}$，$B_2 \triangleq \{$ 取到一件乙厂产品 $\}$，$B_3 \triangleq \{$ 取到一件丙厂产品 $\}$，B_1, B_2, B_3 构成互斥完备事件群。令 $A \triangleq \{$ 取出的产品是合格品 $\}$。
- $P(B_1):P(B_2):P(B_3) = 1:2:1$，即 $P(B_1) = P(B_3) = 0.25$，$P(B_2) = 0.5$
- $P(A|B_1) = 0.9$，$P(A|B_2) = 0.85$，$P(A|B_3) = 0.8$，由 LTP 得 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) = 0.85$

举例：全概率公式

例 (输血问题)

中国人血型分布如下表

血型	O	A	B	AB
比例	0.41	0.28	0.24	0.07

今随机抽取两人，问甲能给乙输血的概率为多少？

分析：

- 输血涉及双方的血型，可任取一方可能血型作划分来计算；
- 可设 A 为事件“甲可给乙输血”；
- B_0, B_1, B_2, B_3 分别是事件“甲的血型为 O，A，B，AB”。

举例：全概率公式

- 可知 $P(B_0) = 0.41, P(B_1) = 0.28, P(B_2) = 0.24, P(B_3) = 0.07$.
- 由卫生常识可知 $P(A|B_0) = 1$, $P(A|B_1) = 0.28 + 0.07 = 0.35$, $P(A|B_2) = 0.24 + 0.07 = 0.31$, $P(A|B_3) = 0.07$.
- 故由全概率公式得

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(A|B_i)P(B_i) = 0.5873$$

- 注：若设 B_0, B_1, B_2, B_3 是“乙的血型分别是 O, A, B, AB”，则 $P(A|B_i)$ 不同，但 $P(A)$ 不变。

贝叶斯公式

- 全概率公式通过划分 $B_1, \ldots, B_n$ 来计算一个事件 A 的概率；
- 有时候需要弄清楚在 A 发生的条件下，每个 B_i 发生的条件概率 $P(B_i|A)$，这个时候需要**贝叶斯公式**。

定理（贝叶斯公式，Bayes' Theorem）

若事件 $B_1, \ldots, B_n$ 构成互斥完备事件群，且 $P(B_i) > 0, \forall i$，则对任一事件 A 且 $P(A) > 0$ 有

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)} \quad 1 \leq i \leq n$$

证明.

由条件概率定义得 $P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)}$。对分子应用乘法公式，对分母应用全概率公式，即得贝叶斯公式。 $\square$

贝叶斯公式

$$\underbrace{P(B_i|A)}_{\text{后验概率}} = \frac{P(A|B_i)\,\overbrace{P(B_i)}^{\text{先验概率}}}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

- 常用于由果溯因，由已发生事件来推断各因素的可能性。
  - 根据检测结果推断病人患某种疾病的概率
  - 根据观测到的特征，推断物体类别的概率（贝叶斯分类）
- 先验概率与后验概率：贝叶斯统计的基本出发点
  - 先验概率：由以往的经验得到的概率
  - 后验概率：经随机试验后，由结果对先验概率修正
  - 修正方法：贝叶斯公式

举例：贝叶斯公式

例 (癌症检查)

某医学方法用于检查某种癌症，已知该癌症的发病率为 0.002，该方法对于癌症患者呈阳性反应的概率为 0.98，对于非癌症患者呈阳性反应的概率为 0.04。若某人在此项检查中呈阳性，他实际患癌症的概率为多少？

- 设 B 为“患癌症”，A 为“反应呈阳性”，由题设得：

  $$P(B) = 0.002 \quad P(\overline{B}) = 0.998 \quad P(A|B) = 0.98 \quad P(A|\overline{B}) = 0.04$$

- 即要求 $P(B|A)$，由贝叶斯公式得

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})} \approx 0.0468$$

？为什么这么小

举例：贝叶斯公式

例 (产品合格率)

对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时，产品的合格率为 90%，而当机器发生故障时，产品合格率为 30%。已知每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 75%。试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率。

- 设 $A=\{$产品合格$\}$，$B=\{$机器调整良好$\}$，则 $P(A|B)=0.9$, $P(A|\bar{B})=0.3$, $P(B)=0.75$，所求概率为 $P(B|A)$。
- 由贝叶斯公式得

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})}=0.9$$

举例：贝叶斯公式

例 (靶纸判断)

已知一老战士与一新战士射击命中率分别为 0.9 与 0.5。两人一同去射击，各 3 发。后发现现场留下一靶纸，初步判断认为属于新、老战士留下的可能性是等同的。后发现靶纸上有 2 发命中，问此时对可能性问题有什么新看法？

- 设 A 为"命中 2 枪"，B_1 为"老战士留下"，B_2 为"新战士留下"，则 $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$。 $\Leftarrow$ 先验信息
- 比较 $P(B_1|A)$ 与 $P(B_2|A)$ 的大小。 $\Leftarrow$ 后验信息

举例：贝叶斯公式

由于 $P(B_i|A) = \dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{2} P(A|B_j)P(B_j)}, i = 1, 2$，故只需比较 $P(A|B_1)$ 与 $P(A|B_2)$ 的大小。

$$P(A|B_1) = \binom{3}{2} \times 0.9^2 \times 0.1 = 0.243$$

$$P(A|B_2) = \binom{3}{2} \times 0.5^2 \times 0.5 = 0.375$$

得到 $P(B_2|A) > P(B_1|A)$，所以新战士可能性大。

根据试验结果修正关于事物认知的先验信息，得到后验信息。

目录

1 随机事件

2 概率的定义

3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

4 随机事件的独立性
- 两个事件的独立性
- 多个事件的独立性
- 随机试验的相互独立性

目录

1 随机事件

2 概率的定义

3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

4 随机事件的独立性
- 两个事件的独立性
- 多个事件的独立性
- 随机试验的相互独立性

两个事件的独立性

问题：$P(A)$ 与 $P(A|B)$ 是否总是不同？

例 (孩子性别)

设生男生女是等可能的。考察任一两孩家庭，分别求“老二是女孩”的概率和在“老大是男孩”的条件下“老二是女孩”的概率。

- 样本空间 $\Omega = \{bb, bg, gb, gg\}$
- 设 A 为“老二是女孩”，B 为“老大是男孩”，则

$$A = \{bg, gg\} \quad B = \{bb, bg\}$$

- 因此计算出

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(A|B) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

？说明什么

两个事件的独立性

- 上例中条件概率与无条件概率是一样的，说明“老大是男孩”这一事件对“老二是女孩”这一事件的概率没有影响，或者说这两个事件是独立的。
- 一般地，若 $P(A) = P(A|B)$，则有以下定义：

定义 (两个事件相互独立)

设 A, B 为两个事件，若有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

称事件 A 与 B 相互独立。(无须 $P(B) > 0$)

两个事件的独立性

例 (嫌疑人排查)

在侦破某团伙作案时，查看相关监控录像，发现两嫌疑人在所有视频中出现的概率依次为 0.11 与 0.12，但同时出现的概率为 0.1。问是否有理由认为他们是同伙？

- 设 A 为“某甲出现”，B 为“某乙出现”
- 方法一：通过条件概率判断

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{10}{12} \neq P(A) \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{10}{11} \neq P(B)$$

- 方法二：如果甲、乙独立，则

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.0132 \neq 0.1$$

两个事件的独立性

定理

若四对事件 $\{A, B\}, \{A, \bar{B}\}, \{\bar{A}, B\}, \{\bar{A}, \bar{B}\}$ 中有一对是相互独立的，则另外三对也是相互独立的。

- 求证：当 A, B 相互独立时，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。
- 因为 A 与 B 独立，所以 $P(AB) = P(A)P(B)$，则有：

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A)P(B)) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) \\ &= P(\bar{A})P(\bar{B}) \end{aligned}$$

两个事件的独立性

- 实际问题中常从事物的背景判断独立性。
- 物理意义“独立”的事件通常是独立的，反之不一定成立。

例 (有放回取球)

袋中有 5 个白球，3 个红球，从中每次任取一个，有放回地连续取两次，求两次取出的球中至少有一个白球的概率。

令 $A_i=\{$第 i 次取得白球$\}, i=1,2$。在有放回取球方式下，A_1 和 A_2 相互独立，于是所求概率为

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=\frac{55}{64}$$

或，由于 A_1,A_2 独立，知 $\overline{A_1}$ 与 $\overline{A_2}$ 独立，则有

$$P(A_1\cup A_2)=1-P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})=\frac{55}{64}$$

目录

1. 随机事件
2. 概率的定义
3. 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
4. 随机事件的独立性
   - 两个事件的独立性
   - 多个事件的独立性
   - 随机试验的相互独立性

多个事件的独立性

事件的独立性概念可推广到多个事件的情形

定义 (多个事件相互独立)

设 $A_1, \ldots, A_n$ 是 n 个事件，若对任意 $1 < k \leq n$，任意 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$，都成立

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1, \ldots, A_n$ 相互独立。

- 特别地，当 $k = 2$ 时，称 $A_1, \ldots, A_n$ 两两独立。
- 但是 $A_1, \ldots, A_n$ 两两独立并不能保证 $A_1, \ldots, A_n$ 相互独立。
- 即对于多个事件，两两独立是相互独立的必要不充分条件。

多个事件的独立性

例

设一袋中有四张形状相同的卡片，在这四张卡片上分别标有数字：110，101，011，000，从袋中任取一张卡片，以 A_i 表示事件“取到的卡片第 i 位上的数字为 1”，$i=1,2,3$。求证 A_1,A_2,A_3 是两两独立的，但 A_1,A_2,A_3 不是相互独立的。

- $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/2$，且有 $P(A_1A_2)=P(A_2A_3)=P(A_1A_3)=1/4$
- 从而 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$，$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$，$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$，所以 A_1,A_2,A_3 两两独立。
- 但是 $P(A_1A_2A_3)=0\neq\frac{1}{8}=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$，由此可见 A_1,A_2,A_3 不是相互独立。

多个事件的独立性

定理

若 n 个事件 $A_1, \ldots, A_n$ 相互独立，那么把其中任意 $1 \leq m \leq n$ 个事件相应地换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立。

如果事件 A, B, C 相互独立，那么

- 事件 $\bar{A}, B, C$ 也相互独立
- 事件 $A, \bar{B}, C$ 也相互独立
- 事件 $\bar{A}, \bar{B}, C$ 也相互独立
- 事件 $A, \bar{B}, \bar{C}$ 也相互独立
- ...

多个事件的独立性

例

设一个小时内，甲、乙、丙三台机器需要维修的概率分别为 0.1，0.2 和 0.15，求一个小时内（1）没有一台机器需要维修的概率；（2）至少有一台机器不需要维修的概率。

- 用 A, B, C 表示甲、乙、丙三台机器需要维修，显然 A, B, C 相互独立。
- 用 D 表示事件“没有一台机器需要维修”，则 $D = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$，因此
$$P(D) = P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0.612.$$
- 用 E 表示事件“至少有一台机器不需要维修”，则 $E = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$，因此
$$P(E) = P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = 1 - P(ABC) = 0.997.$$

事件独立与事件互斥的关系

- 事件的相互独立与事件的互斥是两个不同的概念。
- 如果两个事件发生的概率都不为零，那么有：**互斥不独立，独立不互斥**。
- 若 $A_1, \ldots, A_n$ 两两互斥，则可简化和事件概率计算

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$

- 若 $A_1, \ldots, A_n$ 相互独立，则可简化积事件概率计算

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1) \ldots P(A_n).$$

- 另外，当 $A_1, \ldots, A_n$ 相互独立时，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

目录

1 随机事件
2 概率的定义
3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
4 随机事件的独立性
- 两个事件的独立性
- 多个事件的独立性
- 随机试验的相互独立性

随机试验的相互独立性

定义（两个试验相互独立）

设有试验 E_1, E_2，若试验 E_1 的任一结果（事件）与试验 E_2 的任一结果（事件）都是相互独立的，则称这**两个试验相互独立**。

定义（n 重独立试验）

若试验 E_1 的任一结果，试验 E_2 的任一结果，⋯⋯，试验 E_n 的任意结果都是相互独立的，则称试验 $E_1, \ldots, E_n$ 相互独立，假如这 n 个试验还是相同的，则称其为 **n 重独立试验**。

随机试验的相互独立性

定义 (n 重伯努利试验)

在 n 重独立试验中，每次试验的结果为两个，比如扔硬币试验只会出现正反两者结果，记为 A 或 $\bar{A}$，则称这种试验为 n 重伯努利试验。

例

在 n 重伯努利试验中，若事件 A 在每次实验中发生的概率均为 $P(A) = p \in (0, 1)$，试求在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次这一事件的概率 $P(B_{nk})$ 。

$$P(B_{nk}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

小结

1. 随机事件
2. 概率的定义
3. 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式
4. 随机事件的独立性