第一章：随机事件与概率

1.4 随机事件的独立性

赵俊舟

junzhou.zhao@xjtu.edu.cn

2025 年 2 月 26 日

目录

目录

两个事件的独立性

问题：$P(A)$ 与 $P(A|B)$ 是否总是不同？

例 (孩子性别)

设生男生女是等可能的。考察任一两孩家庭，分别求“老二是女孩”的概率和在“老大是男孩”的条件下“老二是女孩”的概率。

- 样本空间 $\Omega = \{bb, bg, gb, gg\}$
- 设 A 为“老二是女孩”，B 为“老大是男孩”，则

$$A = \{bg, gg\} \quad B = \{bb, bg\}$$

- 因此计算出

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(A|B) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} \quad \Leftarrow \text{说明什么？}$$

两个事件的独立性

- 上例中条件概率与无条件概率是一样的，说明“老大是男孩”这一事件对“老二是女孩”这一事件的概率没有影响，或者说这两个事件是独立的。
- 一般地，若 $P(A) = P(A|B)$，则有以下定义：

定义 (两个事件相互独立)

设 A, B 为两个事件，若有

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

称事件 A 与 B 相互独立。(无须 $P(B) > 0$)

两个事件的独立性

例 (嫌疑人排查)

在侦破某团伙作案时，查看相关监控录像，发现两嫌疑人在所有视频中出现的概率依次为 0.11 与 0.12，但同时出现的概率为 0.1。问是否有理由认为他们是同伙？

- 答案：有理由这样认为。
- 设 A 为“某甲出现”，B 为“某乙出现”，计算条件概率
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{10}{12}, \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{10}{11}$$
- 而如果甲、乙独立，则
$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.0132 \ll 0.1$$

两个事件的独立性

定理

若四对事件 $\{A, B\}$, $\{A, \bar{B}\}$, $\{\bar{A}, B\}$, $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ 中有一对是相互独立的，则另外三对也是相互独立的。

- 求证：当 A, B 相互独立时，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。
- 因为 A 与 B 独立，所以 $P(AB) = P(A)P(B)$，则有：

$$
\begin{aligned}
P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - (P(A) + P(B) - P(A)P(B)) \\
&= (1 - P(A))(1 - P(B)) \\
&= P(\bar{A})P(\bar{B})
\end{aligned}
$$

两个事件的独立性

- 实际问题中常从事物的背景判断独立性。
- 物理意义“独立”的事件通常是独立的，反之不一定成立。

例 (有放回取球)

袋中有 5 个白球，3 个红球，从中每次任取一个，有放回地连续取两次，求两次取出的球中至少有一个白球的概率。

令 $A_i=\{\text{第 } i \text{ 次取得白球}\}, i=1,2$。在有放回取球方式下，$A_1$ 和 A_2 相互独立，于是所求概率为

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=\frac{55}{64}$$

或，由于 A_1,A_2 独立，知 $\overline{A_1}$ 与 $\overline{A_2}$ 独立，则有

$$P(A_1\cup A_2)=1-P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})=\frac{55}{64}$$

目录

多个事件的独立性

事件的独立性概念可推广到多个事件的情形

定义 (多个事件相互独立)

设 $A_1, \ldots, A_n$ 是 n 个事件，若对任意 $1 < k \le n$，任意 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$，都成立

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1, \ldots, A_n$ 相互独立。

- 特别地，当 $k = 2$ 时，称 $A_1, \ldots, A_n$ 两两独立。
- 但是 $A_1, \ldots, A_n$ 两两独立并不能保证 $A_1, \ldots, A_n$ 相互独立。
- 即对于多个事件，两两独立是相互独立的必要不充分条件。

多个事件的独立性

例

设一袋中有四张形状相同的卡片，在这四张卡片上分别标有数字：110，101，011，000，从袋中任取一张卡片，以 A_i 表示事件 $\{$取到的卡牌第 i 位上的数字为 $1\}$ $(i = 1, 2, 3)$，求证 A_1, A_2, A_3 是两两独立的，但 A_1, A_2, A_3 不是相互独立的。

易知 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/2$，且有
$P(A_1A_2) = P(A_2A_3) = P(A_1A_3) = 1/4$，从而
$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$，$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$，
$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$，证得 A_1, A_2, A_3 两两独立。
但是 $P(A_1A_2A_3) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$，由此可见
A_1, A_2, A_3 不是相互独立。

多个事件的独立性

定理

若 n 个事件 $A_1, \dots, A_n$ 相互独立，那么把其中任意 $1 \le m \le n$ 个事件相应地换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立。

- 如果事件 A, B, C 相互独立，那么
- 事件 $\bar{A}, B, C$ 也相互独立
- 事件 $A, \bar{B}, C$ 也相互独立
- 事件 $\bar{A}, \bar{B}, C$ 也相互独立
- 事件 $A, \bar{B}, \bar{C}$ 也相互独立
- ...

多个事件的独立性

例

设一个小时内，甲、乙、丙三台机器需要维修的概率分别为 0.1，0.2 和 0.15，求一个小时内（1）没有一台机器需要维修的概率；（2）至少有一台机器不需要维修的概率。

- 用 A, B, C 表示甲、乙、丙三台机器需要维修，显然 A, B, C 相互独立。
- 用 D 表示事件“没有一台机器需要维修”，则 $D = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$，因此
$$P(D) = P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0.612.$$
- 用 E 表示事件“至少有一台机器不需要维修”，则 $E = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$，因此
$$P(E) = P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = 1 - P(ABC) = 0.997.$$

多个事件的独立性

- 注意，事件的相互独立与事件的互斥（互不相容）是两个不同的概念。
- 若 $A_1, \ldots, A_n$ 两两互斥，则可简化和事件概率计算
$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$
- 若 $A_1, \ldots, A_n$ 相互独立，则可简化积事件概率计算
$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1) \ldots P(A_n).$$
- 另外，当 $A_1, \ldots, A_n$ 相互独立时，有
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$$

目录

随机试验的相互独立性

定义（两个试验相互独立）

设有试验 E_1, E_2，若试验 E_1 的任一结果（事件）与试验 E_2 的任一结果（事件）都是相互独立的，则称这**两个试验相互独立**。

定义（n 重独立试验）

若试验 E_1 的任一结果，试验 E_2 的任一结果，$\cdots\cdots$，试验 E_n 的任意结果都是相互独立的，则称试验 $E_1, \ldots, E_n$ 相互独立，假如这 n 个试验还是相同的，则称其为 **n 重独立试验**。

随机试验的相互独立性

定义 (n 重伯努利试验)

在 n 重独立试验中，每次试验的结果为两个，比如扔硬币试验只会出现正反两者结果，记为 A 或 $\bar{A}$，则称这种试验为 n **重伯努利试验**。

例

在 n 重伯努利试验中，若事件 A 在每次实验中发生的概率均为 $P(A) = p \in (0,1)$，试求在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次这一事件的概率 $P(B_{nk})$ 。

$$P(B_{nk}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

小结

1. 两个事件的独立性
2. 多个事件的独立性
3. 随机试验的相互独立性

第一章作业

P22: 1，2，6，7，8，9，10，14，16，18，19，21，23，24，27，28，29，31，32，33，35，37，38，39