第一章：随机事件与概率

1.3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

赵俊舟

junzhou.zhao@xjtu.edu.cn

2025 年 2 月 26 日

目录

目录

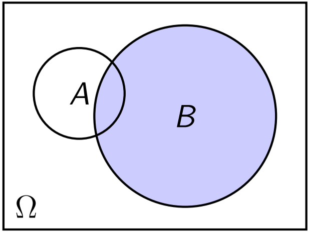
条件概率

定义（条件概率）

设 A, B 为两个事件，$P(B) > 0$，定义

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**。



- 事件 A 发生的概率 $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$
- 当获得额外信息“事件 B 发生”，此时 A 发生的概率变为

$$\frac{|AB|}{|B|} = \frac{|AB|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(AB)}{P(B)} \triangleq P(A|B)$$

条件概率

例

一盒内装有 10 个乒乓球，分别编号 $1 \sim 10$ 号，现从盒中随机取一个乒乓球，考虑以下事件：

$$A = \{\text{取得编号不超过 5 的球}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{\text{取得奇数球}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

若已知取到的是奇数号球，则取得编号不超过 5 的球的概率是多少？

易知 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}$。令 $AB = \{$ 取得编号不超过 5 的奇数号球 $\} = \{1, 3, 5\}$，有 $P(AB) = \frac{3}{10}$。根据条件概率公式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3/10}{1/2} = \frac{3}{5}$$

条件概率

若 $P(B)>0$，条件概率 $P(\cdot|B)$ 是否是概率？

即验证 $P(\cdot|B)$ 是否满足概率的三个公理：

P1 非负性 $P(A|B)\geq 0$

P2 规范化 $P(\Omega|B)=\dfrac{P(\Omega B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$

P3 可列可加 设事件 $A_1, A_2, \ldots$ 两两互斥，即 $A_iA_j=\emptyset$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B)=\frac{P\left((\bigcup_i A_i)B\right)}{P(B)}=\frac{P\left(\bigcup_i A_iB\right)}{P(B)}$$

$$=\frac{\sum_i P(A_iB)}{P(B)}=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

条件概率

例 (连续掷骰子)

反复掷两颗骰子，观察其和直至出现 7 点或 8 点为止，求出现 7 点的概率。

- 令 B 表示事件“出现 7 点或 8 点”，A 表示事件“出现 7 点”，求 $P(A|B)$。
- 易知 $P(A) = \frac{6}{36}, P(B) = \frac{11}{36}$ 且 $AB = A$
- 故 $P(A|B) = \frac{6}{11}$.

乘法公式

定理 (乘法公式)

若 $P(B) > 0$，由条件概率的定义可得下述结论

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

- 意义：用以计算积事件的概率（通常可避免计算组合数）。
- 事实上，允许 $P(B) = 0$。

例 (摸球问题)

在无放回的情况下，求从 r 只红球，b 只蓝球的袋中摸出两只红球的概率。

$$P(R_1R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) = \frac{r}{r+b}\frac{r-1}{r+b-1}$$

乘法公式

推广到三个事件的乘法公式：

$$P(ABC) = P(AB)P(C|AB) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$
$$P(ABC) = P(A|BC)P(BC) = P(A|BC)P(B|C)P(C)$$

推论 (乘法公式一般形式)

对任意 n 个事件 $A_1, \ldots, A_n$，若 $P(A_1 \cdots A_i) > 0$，$1 \le i \le n-1$，则

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})$$

举例：条件概率与乘法公式

例 (排队抽签问题)

n 个人以抽签方式决定谁将得到一张奥运会开幕式的入场券，n 个人依次抽签，求第 k 个人抽中的概率 $(1 \le k \le n)$。

- 令 A_k 表示事件“第 k 个人抽到入场券”
- 对于 $1 \le k \le n$，因 $A_k \subseteq \overline{A_1} \cdots \overline{A_{k-1}}$，故 $A_k = \overline{A_1} \cdots \overline{A_{k-1}} A_k$
- 由乘法定理得

$$
\begin{aligned}
P(A_k) &= P(\overline{A_1} \cdots \overline{A_{k-1}} A_k) \\
&= P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) \cdots P(A_k | \overline{A_1} \cdots \overline{A_{k-1}}) \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

结论：在排队依次抽签时，中签的可能性与排位先后没有关系。

举例：条件概率与乘法公式

注意：一些实际问题中的“概率”有时应理解为条件概率。

例（网球比赛）

某网球运动员参加一次赛事，淘汰赛制，须赢 5 轮方可夺冠，已知他第 i 轮获胜的概率为 $0.6 - i/10$，求他夺冠的概率。

设 A_i 为“第 i 轮胜”，“第 i 轮获胜的概率”是指 $P(A_i|A_1 \cdots A_{i-1}) = 0.6 - i/10,\ i = 2, 3, 4, 5.$

$$
\begin{aligned}
P(\text{夺冠}) &= P(A_1A_2A_3A_4A_5) \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_5|A_1\ldots A_4) \\
&= 0.5 \times 0.4 \times 0.3 \times 0.2 \times 0.1 \\
&= 0.0012
\end{aligned}
$$

目录

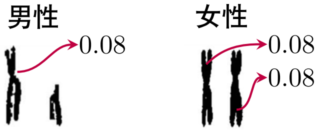
全概率公式

例 (色盲问题)

人类色盲基因由 X 染色体携带，若男性的 X 染色体有此基因则男性患色盲，女性则要两个 X 染色体均有此基因才患色盲。设色盲基因出现概率为 0.08，又设男女婴出生比为 $110:100$。
问题：求一新生儿有色盲的概率。

设 A 表示事件“新生儿有色盲”，B 表示事件“新生儿是男婴”，所以 $A = AB \cup A\bar{B}$。

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(AB) + P(A\bar{B}) \\
&= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \\
&= 0.08 \times \frac{1.1}{2.1} + 0.0064 \times \frac{1}{2.1} \\
&= 0.045
\end{aligned}
$$



$P(A|B) = 0.08$ $\quad$ $P(A|\bar{B}) = 0.0064$

全概率公式

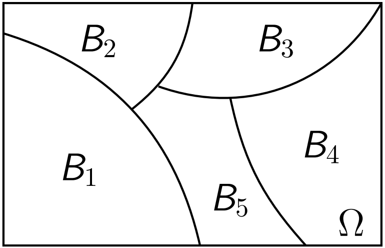
- 注意到在上例中 $B \cup \overline{B} = \Omega$ 且 $B\overline{B} = \emptyset$，称 B 和 $\overline{B}$ 构成 互斥完备事件群。
- 一般地，有以下定义：

定义 (互斥完备事件群)

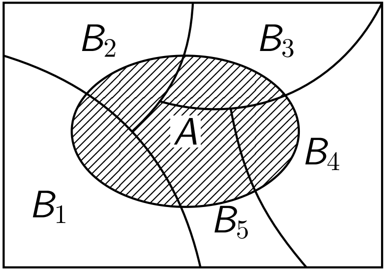
设 $\{B_i\}_{i \in I}$ 为可数个事件，若它们满足

- $B_i B_j = \emptyset, \forall i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$

则称这组事件为互斥完备事件群（或称互补相容完备事件组）。



全概率公式



$$\Omega = \bigcup_{i \in I} B_i$$

- **先化整为零**：$A = \bigcup_{i \in I} AB_i$ 且 AB_i 与 AB_j 互斥，$\forall i \neq j$
- **再聚零为整**：

$$P(A) = P(\bigcup_{i \in I} AB_i) = \sum_{i \in I} P(AB_i) = \sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i)$$

全概率公式

定理 (全概率公式，Law of Total Probability, LTP)

若事件 $B_1,\ldots,B_n$ 构成互斥完备事件群，且 $P(B_i)>0,\forall i$，则对任一事件 A 有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

全概率公式的作用：

$$\boxed{\text{一个复杂事件的概率计算问题}} \Longrightarrow \boxed{\text{若干个简单事件的概率计算问题}}$$

举例：全概率公式

例 (追捕疑犯)

现追捕某犯罪嫌疑人，据分析他外逃、市内藏匿、自首的概率依次为 $0.3, 0.5, 0.2$。又设在外逃及市内藏匿情况下，成功缉拿的概率依次是 $0.4, 0.7$。问该犯罪嫌疑人最终归案的概率是多少？

- B_1：外逃，B_2：市内藏匿，B_3：自首
- 设 A 表示事件“最终归案”，则

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0.4 \times 0.3 + 0.7 \times 0.5 + 1 \times 0.2 \\ &= 0.67 \end{aligned}$$

举例：全概率公式

例 (产品合格率)

某家电产品来自甲、乙、丙三家工厂，这三家工厂的产品比例为 $1:2:1$，产品合格率分别为 $90\%, 85\%, 80\%$。现从该类家电产品中随机抽取一件，问抽到一件合格品的概率是多少？

- 令 $B_1 \triangleq \{$ 取到一件甲厂产品 $\}$，$B_2 \triangleq \{$ 取到一件乙厂产品 $\}$，$B_3 \triangleq \{$ 取到一件丙厂产品 $\}$，B_1, B_2, B_3 构成互斥完备事件群。令 $A \triangleq \{$ 取出的产品是合格品 $\}$。
- $P(B_1) : P(B_2) : P(B_3) = 1 : 2 : 1$，即 $P(B_1) = P(B_3) = 0.25$，$P(B_2) = 0.5$
- $P(A|B_1) = 0.9$，$P(A|B_2) = 0.85$，$P(A|B_3) = 0.8$，由 LTP 得 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) = 0.85$

举例：全概率公式

例 (输血问题)

中国人血型分布如下表

血型	O	A	B	AB
比例	0.41	0.28	0.24	0.07

今随机抽取两人，问甲能给乙输血的概率为多少？

分析：

- 输血涉及双方的血型，可任取一方可能血型作划分来计算；
- 可设 A 为事件“甲可给乙输血”；
- B_0, B_1, B_2, B_3 分别是事件“甲的血型为 O，A，B，AB”。

举例：全概率公式

- 可知 $P(B_0) = 0.41, P(B_1) = 0.28, P(B_2) = 0.24, P(B_3) = 0.07$.
- 由卫生常识可知 $P(A|B_0) = 1$, $P(A|B_1) = 0.28 + 0.07 = 0.35$, $P(A|B_2) = 0.24 + 0.07 = 0.31$, $P(A|B_3) = 0.07$.
- 故由全概率公式得

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(A|B_i)P(B_i) = 0.5873$$

- 注：若设 B_0, B_1, B_2, B_3 是 "乙的血型分别是 O, A, B, AB"，则 $P(A|B_i)$ 不同，但 $P(A)$ 不变。

贝叶斯公式

- 全概率公式通过划分 $B_1, \dots, B_n$ 来计算一个事件 A 的概率；
- 有时候需要弄清楚在 A 发生的条件下，每个 B_i 发生的条件概率 $P(B_i|A)$，这个时候需要**贝叶斯公式**。

定理（贝叶斯公式，Bayes' Theorem）

若事件 $B_1, \dots, B_n$ 构成互斥完备事件群，且 $P(B_i) > 0, \forall i$，则对任一事件 A 且 $P(A) > 0$ 有

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)} \quad 1 \le i \le n$$

证明.

由条件概率定义得 $P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)}$。对分子应用乘法公式，对分母应用全概率公式，即得贝叶斯公式。 $\square$

贝叶斯公式

$$\underbrace{P(B_i|A)}_{\text{后验概率}} = \frac{P(A|B_i)\,\overbrace{P(B_i)}^{\text{先验概率}}}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

- 常用于由果溯因，由已发生事件来推断各因素的可能性。
  - 根据检测结果推断病人患某种疾病的概率
  - 根据观测到的特征，推断物体类别的概率（贝叶斯分类）
- 先验概率与后验概率：贝叶斯统计的基本出发点
  - 先验概率：由以往的经验得到的概率
  - 后验概率：经随机试验后，由结果对先验概率修正
  - 修正方法：贝叶斯公式

举例：贝叶斯公式

例 (癌症检查)

某医学方法用于检查某种癌症，已知该癌症的发病率为 0.002，该方法对于癌症患者呈阳性反应的概率为 0.98，对于非癌症患者呈阳性反应的概率为 0.04。若某人在此项检查中呈阳性，他实际患癌症的概率为多少？

- 设 B 为“患癌症”，A 为“反应呈阳性”，由题设得：
  $P(B) = 0.002 \quad P(\overline{B}) = 0.998 \quad P(A|B) = 0.98 \quad P(A|\overline{B}) = 0.04$
- 即要求 $P(B|A)$，由贝叶斯公式得

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})} \approx 0.0468$$

为什么这么小？

举例：贝叶斯公式

例（产品合格率）

对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时，产品的合格率为 90%，而当机器发生故障时，产品合格率为 30%。已知每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 75%。试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率。

设 $A=\{$产品合格$\}$，$B=\{$机器调整良好$\}$，则 $P(A|B)=0.9$, $P(A|\bar{B})=0.3$, $P(B)=0.75$，所求概率为 $P(B|A)$。
由贝叶斯公式得

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})}=0.9$$

举例：贝叶斯公式

例 (靶纸判断)

已知一老战士与一新战士射击命中率分别为 0.9 与 0.5。两人一同去射击，各 3 发。后发现现场留下一靶纸，初步判断认为属于新、老战士留下的可能性是等同的。后发现靶纸上有 2 发命中，问此时对可能性问题有什么新看法？

- 设 A 为“命中 2 枪”，B_1 为“老战士留下”，B_2 为“新战士留下”，则 $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$。　$\Leftarrow$先验信息
- 此题要比较 $P(B_1|A)$ 与 $P(B_2|A)$ 的大小。

举例：贝叶斯公式

由于 $P(B_i|A) = \dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{2} P(A|B_j)P(B_j)}, i = 1, 2$，故只需比较 $P(A|B_1)$ 与 $P(A|B_2)$ 的大小。

$$P(A|B_1) = \binom{3}{2} \times 0.9^2 \times 0.1 = 0.243$$
$$P(A|B_2) = \binom{3}{2} \times 0.5^2 \times 0.5 = 0.375$$

得到 $P(B_2|A) > P(B_1|A)$，所以新战士可能性大。$\Leftarrow$后验信息

小结

1. 条件概率与乘法公式
2. 全概率公式与贝叶斯公式