Ein Mathematik-Lehrmittel für Mittelschulen und das Selbststudium

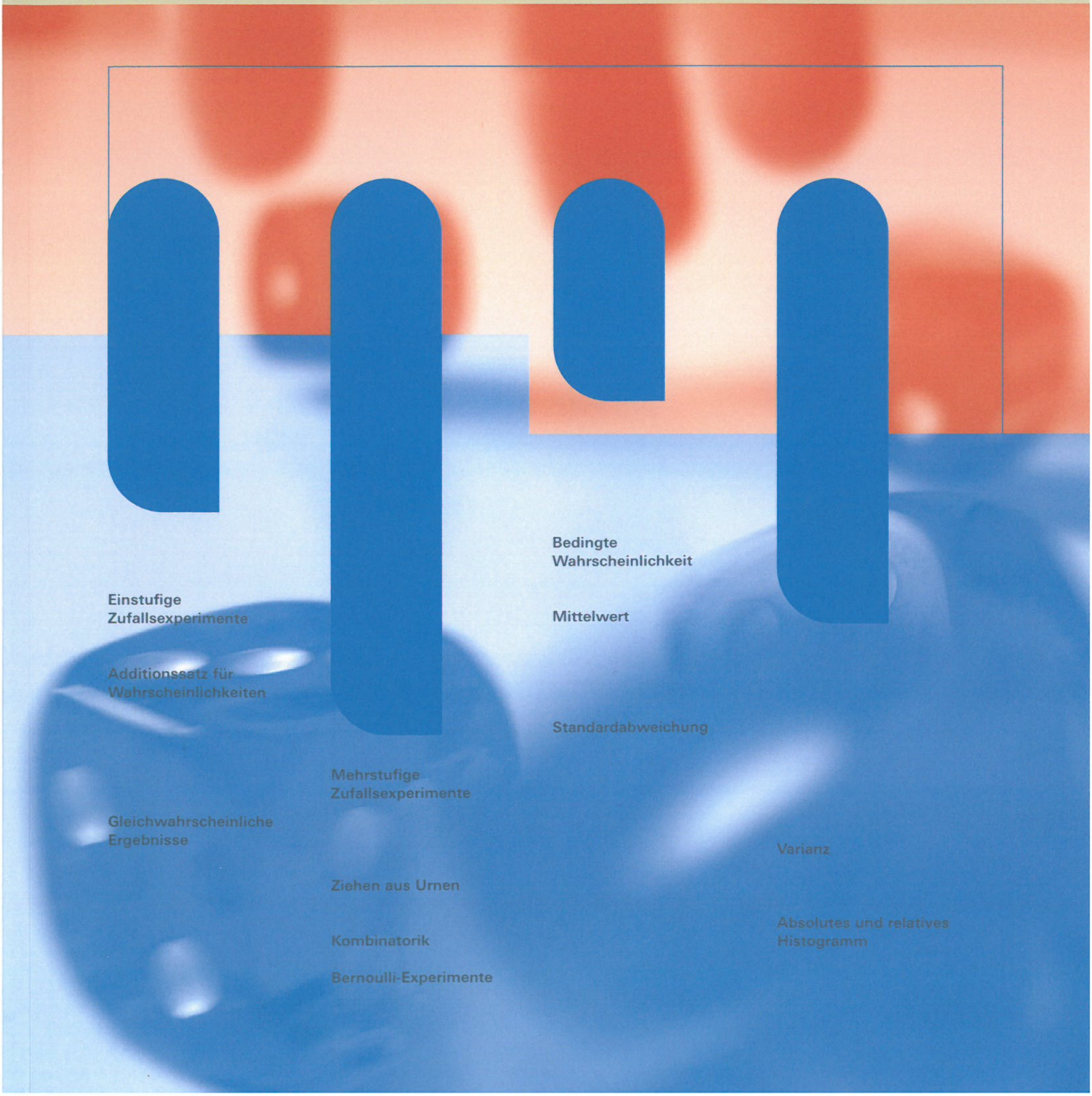
compendio Bildungsmedien

Mathematik

Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibende Statistik

Lerntext und Aufgaben mit kommentierten Lösungen

Otto M. Keiser, Friedrich Barth, Hansjürg Stocker, Karl Stoop und Thomas Dumm



Einstufige Zufallsexperimente

Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten

Gleichwahrscheinliche Ergebnisse

Mehrstufige Zufallsexperimente

Ziehen aus Urnen

Kombinatorik

Bernoulli-Experimente

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Mittelwert

Standardabweichung

Varianz

Absolutes und relatives Histogramm

compendio Bildungsmedien
Mathematik

Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibende Statistik

Lerntext und Aufgaben mit kommentierten Lösungen

Otto M. Keiser, Friedrich Barth, Hansjürg Stocker, Karl Stoop
und Thomas Dumm

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser

Das Lehrmittel «Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibende Statistik» vermittelt Ihnen das Grundwissen zu den Themen Wahrscheinlichkeiten einstufiger und mehrstufiger Zufallsexperimente, Bernoulli-Experimente, bedingte Wahrscheinlichkeiten und beschreibende Statistik.

Es orientiert sich dabei an den Lerninhalten des Grundlagenfachs Mathematik auf normalem Niveau der schweizerischen Maturität nach MAR, ergänzt um das Thema Kombinatorik, und richtet sich in erster Linie an Schülerinnen und Schüler einer Maturitätsschule. Das Lehrmittel kann aber auch in der technischen oder naturwissenschaftlichen Berufs- und Erwachsenenbildung eingesetzt werden.

«Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibende Statistik» zeichnet sich durch einen gut verständlichen, klar strukturierten Text aus, enthält viele unterstützende Grafiken, illustrative Beispiele sowie zahlreiche Aufgaben mit ausführlichen Lösungswegen. Durch diese Elemente eignet es sich besonders für einen von der Stoffvermittlung entlasteten Unterricht oder für das Selbststudium, etwa als Vorbereitung für Universität oder Fachhochschule.

Inhalt und Aufbau

Die «Wahrscheinlichkeitsrechnung» ist ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik. Zusammen mit der «Kombinatorik» und der «Statistik» erlaubt sie die Beschreibung zufälliger Ereignisse.

Dabei geht es bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor allem darum, die Eintreffenswahrscheinlichkeit eines betrachteten Ereignisses zu berechnen. Es wird dabei unterschieden zwischen einem einstufigen Zufallsexperiment, wie z. B. dem Ziehen einer Spielkarte, und einem mehrstufigen Zufallsexperiment, wie dem Ziehen mehrerer Spielkarten.

Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich immer dann leicht berechnen, wenn bekannt ist, auf wie viele Arten ein Ereignis zustande kommen kann. So hängt die Wahrscheinlichkeit, im Lotto einen Vierer zu erreichen, davon ab, auf wie viele Arten der Vierer zustande kommen kann. Dies lässt sich mit Aussagen der Kombinatorik berechnen.

Während es bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung darum geht, Voraussagen über den Ausgang eines Experiments zu machen, geht es in der beschreibenden Statistik darum, die Resultate eines Experiments in geeigneter Weise zusammengefasst zu beschreiben.

Dieses Lehrmittel ist wie folgt aufgebaut:

1. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung
2. Mehrstufige Zufallsexperimente
3. Kombinatorik
4. Bernoulli-Experimente, bedingte Wahrscheinlichkeiten
5. Beschreibende Statistik

Arbeitshinweise

Dieses Lehrmittel eignet sich auch für das Selbststudium. Nützliche Tipps dazu erhalten Sie auf www.compendio.ch/Lerntipps.

In eigener Sache

Um den Text möglichst einfach und verständlich zu halten, verwenden wir bei Personenbezeichnungen abwechslungsweise die männliche und die weibliche Form. Wenn möglich verwenden wir bei der Mehrzahl das substantivierte Partizip I und beziehen uns dabei sowohl auf männliche als auch weibliche Personen.

Haben Sie Fragen oder Anregungen zu diesem Lehrmittel? Über unsere E-Mail-Adresse postfach@compendio.ch können Sie uns diese gerne mitteilen. Sind Ihnen Tipp- oder Druckfehler aufgefallen, danken wir Ihnen für einen entsprechenden Hinweis über die E-Mail-Adresse korrekturen@compendio.ch.

Wir wünschen Ihnen viel Spass und Erfolg beim Studium dieses Buchs!

Zürich, im August 2008

Otto M. Keiser, Friedrich Barth, Hansjürg Stocker, Karl Stoop und Thomas Dumm

Teil A Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

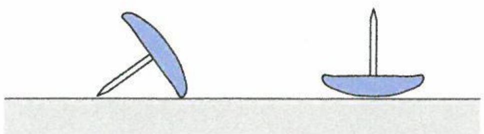
1 Ergebnisse eines Zufallsexperiments

Lernziele: Nach der Bearbeitung dieses Kapitels können Sie …
- die absoluten und relativen Häufigkeiten der Ergebnisse eines Zufallsexperiments tabellarisch darstellen.
- anhand der relativen Häufigkeiten der Ergebnisse eines Zufallsexperiments ein mathematisches Modell des Experiments erstellen.

Schlüsselbegriffe: absolute Häufigkeit, Ergebnis, Ergebnisraum, Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten, mathematisches Modell, Prozent, relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit, zufälliges Ergebnis, Zufallsexperiment

1.1 Absolute und relative Häufigkeiten eines Ergebnisses

Wir werfen einen Reissnagel (z. B. aus 50 cm Höhe) auf eine bestimmte Unterlage (Spiegel, Teppich oder dergleichen). Über den Ausgang des Wurfs wissen wir im Voraus nur, dass der Reissnagel entweder auf den Fuss oder den Kopf fallen wird.



Definition

Wenn das Ergebnis eines Versuchs nicht berechnet oder vorausgesagt werden kann, sprechen wir von einem *Zufallsexperiment.* Den Ausgang eines Zufallsexperiments bezeichnen wir als *zufälliges Ergebnis* oder einfach kurz als *Ergebnis.*

Wie der Zufall waltet, sehen wir besonders deutlich, wenn wir wiederholt werfen. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse von 100 Würfen festgehalten, und zwar unterteilt in Gruppen von 10 Würfen. In der zweiten Zeile haben wir in einer Strichliste gezählt, wie oft jeweils das Ergebnis «Kopf» vorgekommen ist.

Die dritte Zeile der Tabelle zeigt uns schliesslich, wie oft **insgesamt** der Reissnagel auf dem Kopf lag (Symbol f_K; f für Frequenz, K für Kopf); man bezeichnet f_K als *absolute Häufigkeit.*

$n =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Strich-liste	///// /	///// ////	///// /	////	///// //	/////	///// //	///// /	///// //	/////
$f_k =$	6	15	21	25	32	37	44	50	…	…

Anzahl Versuche n, Anzahl «Kopf» pro Serie und absolute Häufigkeit für «Kopf» f_K.

Definition

Die *absolute Häufigkeit* eines Ergebnisses gibt an, wie oft das Ergebnis aufgetreten ist. Die absolute Häufigkeit hängt davon ab, wie oft ein Zufallsexperiment durchgeführt wurde.

Obwohl unser Versuch vom Zufall regiert wird, zeigt sich doch eine Gesetzmässigkeit: Das Ergebnis «Kopf» tritt deutlich häufiger auf als «Fuss». Wir können diese zunächst vage Aussage präzisieren, indem wir die *relative Häufigkeit* für das Ergebnis «Kopf» angeben, d. h., indem wir die *absolute Häufigkeit* f_K auf die Anzahl n der Versuche beziehen.

Definition

Die *relative Häufigkeit* bezeichnen wir mit h_K (h steht für Häufigkeit). Man erhält sie wenn man die absolute Häufigkeit f_K durch die Anzahl Versuche n dividiert:

$$h_K = \frac{f_K}{n}$$

In der nachfolgenden Tabelle finden Sie die Werte von h_K in der untersten Zeile:

$n =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f_K =$	6	15	21	25	32	37	44	50	…	…
$h_K =$	0.60	0.75	0.70	0.63	0.64	0.62	0.63	0.63	…	…

Betrachten wir nun diese unterste Zeile: Sie stellen fest, dass sich die Werte von h_K nach anfänglich beträchtlichen Schwankungen mit zunehmender Versuchszahl n **stabilisieren,** d. h. immer weniger um einen gewissen festen Wert, ungefähr 0.63, pendeln.

Die entsprechende Beobachtung macht man bei **allen** derartigen Zufallsexperimenten. Dabei stabilisieren sich verschiedene Versuchsreihen beim gleichen Zufallsexperiment stets beim ungefähr gleichen Wert. Wie wir sehen werden, ist es gerade **diese** Tatsache, die den Zufall einer Berechnung zugänglich macht. Wir merken uns:

Satz

Die Gesetzmässigkeit eines beliebigen Zufallsexperiments besteht darin, dass sich die relative Häufigkeit h_E für ein beliebiges Ergebnis E mit zunehmender Versuchszahl n stabilisiert, d. h., die relative Häufigkeit pendelt immer weniger um einen gewissen Wert. Für grosse n gilt also:

$$h_E \approx \text{konstant}$$

Wir geben oft relative Häufigkeiten in **Prozenten** an.

Definition

Für die Umrechnung der relativen Häufigkeiten in *Prozent* müssen wir nur beachten, dass «Prozent» nichts anderes als «pro Hundert» d. h. «Hundertstel» bedeutet. 1 % ist eine Abkürzung für ein Hundertstel:

$$1\ \% = \frac{1}{100} = 0.01$$

Beispiel

Relative Häufigkeiten in Prozenten angegeben:

- $8\ \% = \frac{8}{100} = 0.08$
- $23\ \% = \frac{23}{100} = 0.23$

Diese Gleichungen dürfen und sollen Sie auch von rechts nach links lesen.

Das Beispiel zeigt, dass Sie die Prozentzahlen erhalten, indem Sie den Dezimalpunkt jeweils um zwei Stellen nach rechts verschieben.

Beispiel

$$1.085 = 108.5\ \%$$

Auf diese Weise erhalten wir für das Ergebnis «Kopf» bei unserem Reissnagel die relative Häufigkeit

$$h_K = 0.63 = 63\ \%$$

Beachten Sie, dass wir stets von «unserem» Reissnagel gesprochen haben. Wenn Sie selber ein solches Reissnagelexperiment durchführen, erhalten Sie vermutlich andere Häufigkeiten.

Egal welches Zufallsexperiment wir betrachten, für relative Häufigkeiten gilt immer:

Satz

Relative Häufigkeiten sind Zahlen zwischen 0 und 1 bzw. zwischen 0 % und 100 % (Grenzen immer eingeschlossen):

$$0 \leq h_E \leq 1$$

oder:

$$0\ \% \leq h_E \leq 100\ \%$$

Ein Zufallsexperiment werde n-mal durchgeführt. Dabei trete ein bestimmtes Ergebnis ω mit der absoluten Häufigkeit f_ω auf. Die relative Häufigkeit des Ergebnisses ω beträgt dann:

$$h_\omega = \frac{f_\omega}{n}$$

Relative Häufigkeiten sind dabei immer Zahlen zwischen 0 und 1, bzw. 0 % und 100 % (Grenzen eingeschlossen):

$$0 \leq h_\omega \leq 1$$

$$0\ \% \leq h_\omega \leq 100\ \%$$

Wird n erhöht, so beobachtet man, dass die relative Häufigkeit mit zunehmender Versuchszahl n immer weniger von einem gewissen Wert k abweicht. Für sehr grosse n gilt also:

$$h_\omega \approx k$$

Aufgabe 1

Wir werfen einen Reissnagel auf eine Unterlage. Das Protokoll dieses Experiments lautet (K steht für das Ergebnis «Kopf»):

$n =$	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**
$f_K =$	15	25	37	50	62
$h_K =$	0.75	0.63	0.62	0.63	0.62

A] Berechnen Sie f_F und h_F (F steht für das Ergebnis «Fuss»). Geben Sie Zahlen – wo sinnvoll – immer auch in Prozent an.

B] Was stellen Sie fest, wenn Sie für eine beliebige Versuchszahl n die Summe $h_K + h_F$ bilden?

C] Versuchen Sie, die Beobachtung zu begründen.

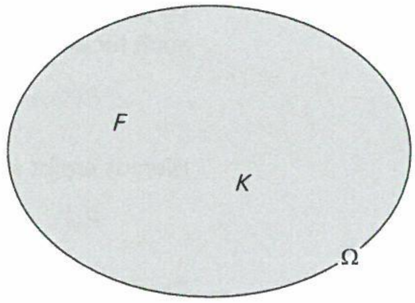
1.2 Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses

Wenn sich die Mathematik mit dem Reissnagelwurf als Zufallsexperiment beschäftigt, so kümmert sie sich weder um die Form des Reissnagels, noch um die Wurfhöhe oder dergleichen. Sie versucht das für den Versuch Wesentliche in einem sogenannten *mathematischen Modell* zu erfassen.

Wesentlich ist zunächst die Tatsache, dass beim Experiment genau zwei verschiedene Ergebnisse in Betracht gezogen werden, nämlich die Ergebnisse K (für Kopf) und F (für Fuss). Es ist üblich, diese Ergebnisse in einer mathematischen *Menge* zusammenzufassen. Man nennt diese Menge den *Ergebnisraum* und bezeichnet sie mit dem Symbol Ω (grosses Omega). In unserem Fall gilt also:

$$\Omega = \{F, K\}$$

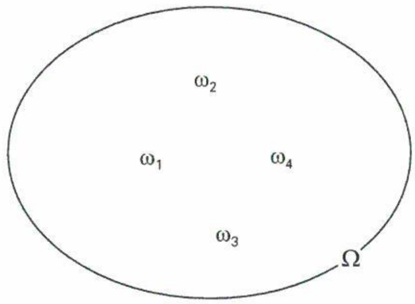
Es ist durchaus üblich und zweckmässig, Mengendiagramme zu zeichnen.



Definition

Ein Ergebnis eines Experiments ist ein beobachteter Ausgang des Experiments. Unter dem *Ergebnisraum* Ω eines beliebigen Zufallsexperiments verstehen wir die Menge, die alle betrachteten Ergebnisse des Experiments als Elemente enthält.

Die einzelnen Ergebnisse des Zufallexperiments werden – wenn nicht von einem konkreten Experiment die Rede ist – mit $\omega_1, \omega_2, \ldots$ bezeichnet.



Als Nächstes ist wichtig, dass die Ergebnisse K und F stabile relative Häufigkeiten aufweisen. Das mathematische Modell gibt diesen empirischen Sachverhalt wieder, indem es den Ergebnissen K und F Zahlen, die sog. mathematischen *Wahrscheinlichkeiten* $P(K)$ und $P(F)$ zuordnet. P steht für das englische probability = Wahrscheinlichkeit. Für die Wahrscheinlichkeiten soll die Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten gelten:

Satz

«Das Ergebnis ω hat die Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$» bedeutet: Wiederholt man das Zufallsexperiment sehr oft, so ist die relative Häufigkeit h_ω des Ergebnisses ω etwa so gross wie $P(\omega)$:

$$P(\omega) \approx h_\omega$$

Es ist klar, dass aus dem Versuchsprotokoll nicht eindeutig hervorgeht, wie z. B. $P(K)$ zu wählen ist. Wir sehen, dass beim Werfen eines Reissnagels die relative Häufigkeit h_K zwischen 0.62 und 0.63 schwankt. Wenn wir mit unserem Modell **rechnen** wollen, müssen wir uns auf einen bestimmten **Wert** festlegen, etwa $P(K) = 0.625$. Sollte sich diese Wahl später nicht bewähren, so müssten wir eine bessere Wahl treffen. Vorläufig rechnen wir mit:

$$P(K) = 0.625$$

Ausserordentlich wichtig ist nun die Einsicht, dass wir in der Wahl für die Wahrscheinlichkeit von F nicht mehr frei sind. Wir haben uns bereits überlegt, dass die Summe der relativen Häufigkeiten stets den Wert 1 = 100 % hat:

$$h_K + h_F = 1 = 100\,\%$$

Da ja die Wahrscheinlichkeiten den relativen Häufigkeiten entsprechen sollen, fordern wir auch für die Summe der Wahrscheinlichkeiten:

$$P(K) + P(F) = 1 = 100\,\%$$

Hieraus ergibt sich für die (mathematische) Wahrscheinlichkeit $P(F)$ in unserem Modell:

$$P(F) = 1 - P(K) = 1 - 0.625 = 0.375 = 37.5\,\%$$

Damit steht ein mathematisches Modell für den Reissnagel bereits fest:

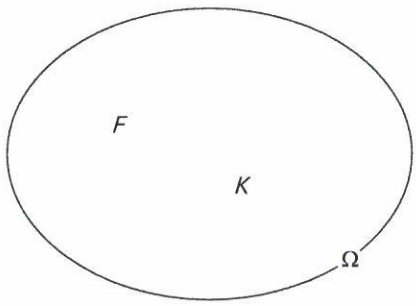
Das Zufallsexperiment hat den *Ergebnisraum* $\Omega = \{F, K\}$.

Weiter sind den Ergebnissen K und F die *Wahrscheinlichkeiten* $P(K)$ und $P(F)$ zugeordnet:

$$P(K) = 0.625 = 62.5\,\%$$

$$P(F) = 0.375 = 37.5\,\%$$

$$P(K) + P(F) = 1 = 100\,\%$$



Kürzer und prägnanter können wir das mathematische Modell auch mit der folgenden Tabelle erfassen:

$\omega =$	K	F
$P(\omega) =$	0.625	0.375

In der ersten Zeile sehen wir alle möglichen **Ergebnisse,** d. h. im Wesentlichen den *Ergebnisraum.* Dabei wählt man als Variable für die Ergebnisse gewöhnlich ω (kleines Omega). Die einem beliebigen Ergebnis ω zugeordnete *Wahrscheinlichkeit* $P(\omega)$ finden wir dann in der zweiten Zeile.

Definition

Das mathematische Modell eines Zusallsexperiments besteht aus dem Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, … . Das mathematische Modell lässt sich besonders elegant in einer Tabelle darstellen.

Sobald wir uns beim Reissnagelwurf auf ein Modell festgelegt haben, können wir nun gewisse Fragen rein rechnerisch beantworten.

Beispiel

Wir werfen den Reissnagel unseres Modells 250 Mal. Wie oft etwa werden wir das Ergebnis K erhalten?

Lösung

Wir sagen uns, dass die Wahrscheinlichkeit $P(K) = 0.625$ eine **idealisierte relative Häufigkeit** ist, d. h., es gilt:

$$P(K) \approx \frac{f_K}{n}$$

Dabei ist $n = 250$ die gegebene Versuchszahl und f_K die gesuchte absolute Häufigkeit für K. Wenn wir jetzt die Ungefährgleichung wie eine Gleichung behandeln und nach f_K auflösen, erhalten wir:

$$f_K \approx n \cdot P(K) = 250 \cdot 0.625 = 156.25$$

Das heisst, das Ergebnis K wird in unserem Modell etwa 156 Mal auftreten. Wenn das Modell gut ist, werden wir in einer effektiv durchgeführten Versuchsreihe ungefähr diesen Wert erhalten.

Beispiel

Wie oft etwa müsste man unseren Reissnagel durchschnittlich werfen, damit das Ergebnis F etwa 100 Mal registriert werden kann?

Lösung

Wir halten uns an die obige Interpretationsregel und schreiben:

$$P(F) \approx h_F$$

Es gilt also:

$$P(F) \approx \frac{f_F}{n}$$

Hier ist $f_F = 100$ und n die gesuchte Versuchsanzahl. Wir lösen die Ungefährgleichung nach n auf und erhalten:

$$n \approx \frac{f_F}{P(F)} = \frac{100}{0.375} = 266.6$$

Wir müssen also etwa 267 Mal werfen.

Wichtig

Zufallsexperimente haben kein Gedächtnis. Zeigt die Münze bei einem idealen Münzwurf den Kopf, so ändert das nichts an der Wahrscheinlichkeit, dass die Münze beim nächsten Münzwurf wieder den Kopf zeigt.

Die stabilen relativen Häufigkeiten h_ω jedes Ergebnisses ω machen es sinnvoll, Zufallsexperimente mit einem mathematisches Modell zu beschreiben: Jedem Ergebnis ω wird dazu eine Zahl, die sog. (mathematische) Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$, zugeordnet. Wahrscheinlichkeiten sind somit idealisierte relative Häufigkeiten. Für grosse n gilt:

$$h_w \approx P(\omega)$$

Das mathematische Modell eines Zufallsexperiments lässt sich kompakt in Tabellenform darstellen:

$\omega =$	ω_1	ω_2	...	ω_k
$P(\omega) =$	$P(\omega_1)$	$P(\omega_2)$	...	$P(\omega_k)$

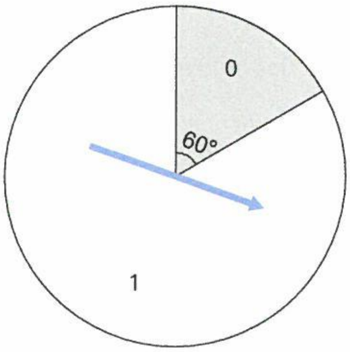
Die Wahrscheinlichkeiten als idealisierte, relative Häufigkeiten müssen die gleichen Eigenschaften wie diese haben, d. h., es sind Zahlen zwischen 0 und 1 und ihre Summe ist 1.

Unter dem Ergebnisraum Ω eines Zufallsexperiments versteht man die Menge aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten das Zufallsexperiment «Glücksrad»: Der im Kreiszentrum drehbar gelagerte Pfeil wird angekickt und bleibt wegen der Reibung nach einiger Zeit zufällig in einem der mit 0 bzw. 1 bezeichneten Sektoren stehen.



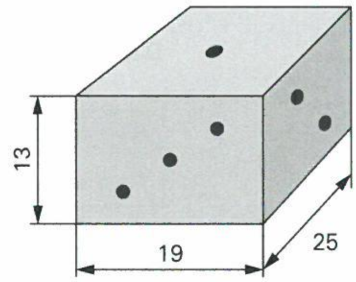
A] Geben Sie ein mathematisches Modell des Zufallsexperiments an (Tabellenform).

B] Wenn wir 200 Mal nacheinander drehen, erhalten wir eine Sequenz aus 0 und 1. Wie oft etwa kommt 0 vor?

C] Wie oft müssen wir etwa drehen, bis wir 200 Mal eine 1 haben?

1.3 Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse ist 1

Wir betrachten einen Quader. Die Augen sind auf dem Quader wie auf einem gewöhnlichen Würfel so verteilt, dass auf gegenüberliegenden Seiten stets insgesamt deren 7 liegen.



Nur nebenbei sei erwähnt, dass in der Antike während Jahrhunderten mit asymmetrischen Knochenwürfeln gespielt wurde.

Der Quader wurde $n = 116$ Mal unter stets gleichen Bedingungen geworfen. Das Auftreten der einzelnen Ergebnisse ω wurde mit einer Strichliste in der zweiten Zeile notiert. Hierauf wurden die absoluten Häufigkeiten f_ω und die relativen Häufigkeiten $h_\omega = f_\omega / 116$ ermittelt.

$\omega =$	1	2	3	4	5	6
Strichliste	///// ///// ///// ///// ///// ///// ///// //	///// ///// ///	///	/////	///// ///// ///// ///// ///	///// ///// ///// ///// ///// ///// /////
$f_\omega =$	37	13	3	5	23	35
$h_\omega =$	31.9 %	11.2 %	2.6 %	4.3 %	19.8 %	30.2 %

Beim Betrachten der relativen Häufigkeiten in der Tabelle fällt auf: Die Summe aller relativen Häufigkeiten ist, bis auf einen kleinen Rundungsfehler, 100 %. Das gilt auch bei jedem anderen Zufallsexperiment.

Satz

Die **Summe der relativen Häufigkeiten** aller Ergebnisse eines beliebigen Zufallsexperiments ist stets gleich 1 = 100 %.

Wir wollen nun aus dem Experiment ein mathematisches Modell ableiten.

Die relativen Häufigkeiten für die Ergebnisse 2 und 5 (gegenüberliegende Seiten) sind wider Erwarten ziemlich verschieden. Trotzdem ist es wohl angebracht, wenn wir den beiden Ergebnissen in unserem Modell die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnen, z. B. das arithmetische Mittel der beiden relativen Häufigkeiten h_2 und h_5:

$$P(2) = P(5) = \frac{0.112 + 0.198}{2} = 0.155 = 15.5\ \%$$

Mit den gleichen Überlegungen erhalten wir:

$$P(1) = P(6) = \frac{0.319 + 0.302}{2} = 0.31 = 31\ \%$$

Nun sind wir nicht mehr frei, die restlichen Wahrscheinlichkeiten festzulegen. Denn so wie die Summe der relativen Häufigkeiten 100 % ergeben muss, so müssen wir das auch von deren Idealisierungen – den Wahrscheinlichkeiten – fordern. Merken wir uns:

Satz

Die **Summe der Wahrscheinlichkeiten** aller Ergebnisse eines beliebigen Zufallsexperiments ist stets 1 = 100 %.

Diese Überlegung ergibt nun bei unserem Quaderwürfel:

$$P(3) = P(4) = \frac{100\ \% - 2 \cdot 31\ \% - 2 \cdot 15.5\ \%}{2} = 3.5\ \%$$

Das Werfen des Quaderwürfels wird vollständig durch das folgende Modell beschrieben:

$\omega =$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$P(\omega) =$	31 %	15.5 %	3.5 %	3.5 %	15.5 %	31 %

Die Summe der relativen Häufigkeiten aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments ist 1 bzw. 100 %. Entsprechend gilt: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments ist 1 bzw. 100 %.

Aufgabe 3

Eine gezinkte Münze zeigt nach dem Wurf entweder Kopf oder Zahl. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf beträgt 0.6.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für Zahl?

2 Ereignisse eines Zufallsexperiments

Lernziele: Nach der Bearbeitung dieses Kapitels können Sie …

- Ereignisse in einem Mengendiagramm darstellen und ihre Wahrscheinlichkeiten berechnen.
- das sichere, das unmögliche und das entgegengesetzte Ereignis in die Berechnungen einbeziehen.

Schlüsselbegriffe: entgegengesetztes Ereignis, Ereignis, Gegenereignis, sicheres Ereignis, unmögliches Ereignis

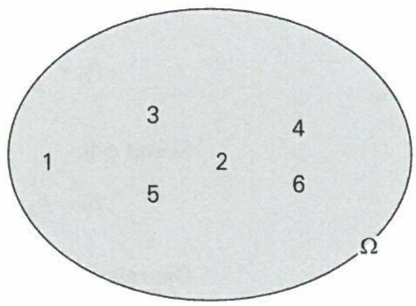
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Spiel eine Primzahl gewürfelt wird? Das besondere an der Fragestellung ist, dass sie nicht nur auf **ein Ergebnis** abzielt, sondern gleich auf **drei mögliche Ergebnisse** abzielt. Um diesen Umstand etwas genauer untersuchen zu können, betrachten wir in diesem Kapitel nochmals unseren Quaderversuch.

2.1 Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Der Quader wurde $n = 116$ Mal unter stets gleichen Bedingungen geworfen. Das Auftreten der einzelnen Ergebnisse ω wurde mit einer Strichliste in der zweiten Zeile notiert. Hierauf wurden die absoluten Häufigkeiten f_ω und die relativen Häufigkeiten $h_\omega = f_\omega / 116$ ermittelt.

ω =	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Strichliste	///// ///// ///// ///// ///// ///// ///// //	///// ///// ///	///	/////	///// ///// ///// ///// ///	///// ///// ///// ///// ///// ///// /////
f_ω =	37	13	3	5	23	35
h_ω =	31.9 %	11.2 %	2.6 %	4.3 %	19.8 %	30.2 %

Wir fassen sämtliche Ergebnisse unseres Quaderversuchs zu einer mathematischen Menge, dem Ergebnisraum Ω zusammen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit, in einem Wurf eine Primzahl zu erhalten?

Unter unseren Ergebnissen gibt es die Primzahlen 2, 3 und 5 (1 ist keine Primzahl.) Das besondere an der Fragestellung ist, dass sie nicht nur auf **ein,** sondern gleich auf **drei mögliche Ergebnisse** abzielt.

Statt von Ergebnissen, sprechen wir dann von *zufälligen Ereignissen* oder kurz von *Ereignissen.* Ereignisse bezeichnen wir in der Regel mit grossen Buchstaben E, F usw.

Wichtig

Unterscheiden Sie **strikt zwischen Ergebnis** und **Ereignis:** Jedes Ergebnis ist auch ein Ereignis, ein Ereignis «besteht» jedoch in der Regel aus mehreren Ergebnissen.

Statt von Ergebnis spricht man manchmal auch von **Elementarereignis.**

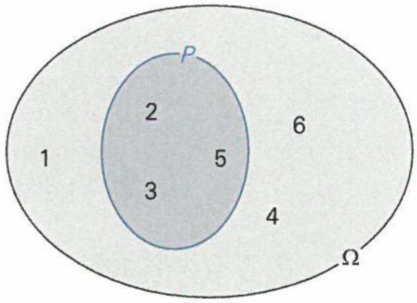
Wir befassen uns jetzt also mit dem Ereignis P[1]:

P = «Primzahl»

Dieses Ereignis P kann durch die Menge $P = \{2, 3, 5\}$ dargestellt werden.

In dieser Schreibweise ist P wie in der Abbildung erkennbar eine Teilmenge des Ergebnisraumes Ω. Symbolisch:

$$P \subset \Omega$$



Das Ereignis P tritt genau dann ein, wenn das Wurfergebnis ein Element der Teilmenge P ist.

Wie wir sehen werden, ist es für viele Überlegungen vorteilhaft, sich Ereignisse in dieser Weise als Teilmengen des Ergebnisraums vorzustellen. Wir können in dieser Vorstellung umgekehrt auch **jede Teilmenge des Ergebnisraums als ein Ereignis ansehen.**

Wie goss ist nun die Wahrscheinlichkeit von P? Wir überlegen so: Wahrscheinlichkeiten sind idealisierte relative Häufigkeiten. Also müssen wir die gesuchte Zahl

$$P(\text{«Primzahl»}) = P(P)$$

so festlegen, dass sie im Experiment der relativen Häufigkeit des Ereignisses «Primzahl» entspricht.

Wie oft wurde in unserem Experiment eine Primzahl gewürfelt? Wir müssen einfach die absoluten Häufigkeiten für 2, 3 und 5 addieren und erhalten so die absolute Häufigkeit des Ereignisses «Primzahl»:

$$f_p = f_2 + f_3 + f_5$$

Für die relative Häufigkeit müssen wir durch die Anzahl Würfe teilen, also durch n teilen:

$$h_p = \frac{f_P}{n} = \frac{f_2 + f_3 + f_5}{n} = \frac{f_2}{n} + \frac{f_3}{n} + \frac{f_5}{n} = h_2 + h_3 + h_5$$

Somit gilt:

$$h_P = h_2 + h_3 + h_5$$

Die relative Häufigkeit von P ist also gerade die Summe der relativen Häufigkeiten der Ergebnisse 2, 3 und 5. Somit legen wir in unserem mathematischen Modell entsprechend fest:

$$P(P) = P(2) + P(3) + P(5)$$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten können wir der Modelltabelle des vorhergehenden Abschnitts entnehmen:

$$P(P) = 15.5\ \% + 3.5\ \% + 15.5\ \% = 34.5\ \%$$

1] P hat in diesem Abschnitt zwei verschiedene Bedeutungen: $P(\ldots)$ für Wahrscheinlichkeit und P = «Primzahl». Wenn Sie aufmerksam lesen, sind Verwechslungen ausgeschlossen.

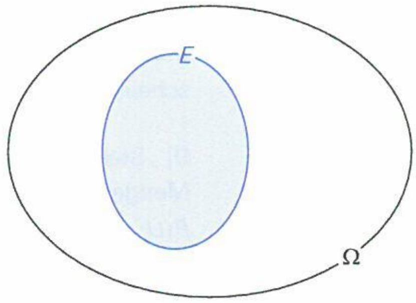
Die Antwort auf die Frage «Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Wurf eine Primzahl zu erhalten?» lautet somit: Das Ereignis «Primzahl» tritt bei unserem Quaderwürfel mit der Wahrscheinlichkeit 34.5 % auf.

Bevor wir unser Vorgehen an weiteren Ereignissen erproben, wollen wir das Wesentliche festhalten:

Definition

Unter einem *(zufälligen) Ereignis E* verstehen wir eine beliebige Teilmenge E des Ergebnisraums Ω:

$$E \subset \Omega$$



Satz

Ein Ereignis E besteht aus den Ergebnissen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_i$. Für die *Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E* gilt dann:

$$P(E) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_i)$$

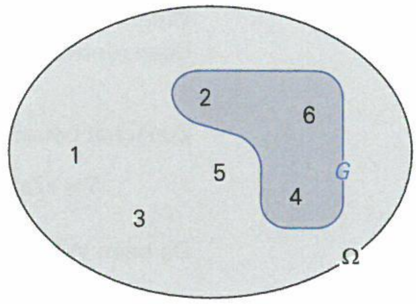
Beispiel

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass beim Quaderwürfeln eine gerade Zahl gewürfelt wird:

G = «Gerade Zahl»

G ist die Teilmenge:

$$G = \{2, 4, 6\}$$



Somit hat G die Wahrscheinlichkeit:

$$P(G) = P(2) + P(4) + P6) = 15.5\ \% + 3.5\ \% + 31\ \% = 50\ \%$$

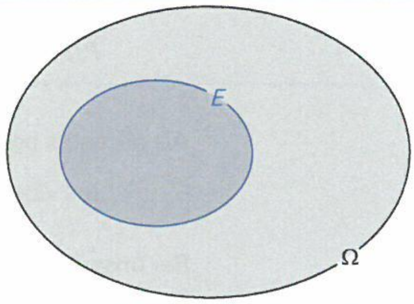
Ein Ereignis E ist eine beliebige Teilmenge aus Ω:

$$E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i\}$$

E tritt ein, falls eines der Ergebnisse $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i$ eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E beträgt dann:

$$P(E) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_i)$$



TEIL A GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Aufgabe 4

Betrachten Sie das Werfen eines Quaders mit dem folgenden mathematischen Modell:

$\omega =$	1	2	3	4	5	6
$P(\omega) =$	31 %	15.5 %	3.5 %	3.5 %	15.5 %	31 %

A] Stellen Sie das Ereignis K = «Wurfzahl ist kleiner als 6» als Teilmenge des Ergebnisraums mit der Mengenschreibweise und zeichnerisch dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(K)$.

B] Stellen Sie das Ereignis U = «ungerade Zahl» als Teilmenge des Ergebnisraums mit der Mengenschreibweise und zeichnerisch dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(U)$.

2.2 Das sichere, das unmögliche und das entgegengesetzte Ereignis

Wir haben gesagt, dass wir jede Teilmenge des Ergebnisraums als ein Ereignis ansehen wollen. Diese Definition enthält auch zwei ausgefallene Ereignisse, auf welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht verzichten kann.

Beispiel

Wenn man einen Stein fallen lässt, fällt er immer nach unten (sicheres Ereignis), nie nach oben (unmögliches Ereignis).

Zunächst betrachten wir das Ereignis:

S = «Zahl kleiner als 11»

Da beim Würfeln **jedes** Ergebnis diese Bedingung erfüllt, müssen wir schreiben:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

Wir nennen deshalb S das *sichere Ereignis;* seine Wahrscheinlichkeit ist 1:

$$P(S) = P(\Omega) = 1$$

Definition

Unter dem *sicheren Ereignis* S versteht man $S = \Omega$ mit der Wahrscheinlichkeit:

$$P(S) = 1$$

Als nächstes betrachten wir das Ereignis:

L = «Zahl grösser als 13»

Bei unserem Quader gibt es kein Ergebnis, das diese Bedingung erfüllt. L ist folglich die leere Menge, für welche die Symbole $\{\}$ und Ø üblich sind. Wir schreiben:

$$L = \{\}$$

und geben ihm die Wahrscheinlichkeit 0.

Definition

Unter dem *unmöglichen Ereignis* L versteht man die leere Menge $L = \{\}$ mit der Wahrscheinlichkeit:

$$P(L) = 0$$

Manchmal ist es zweckmässig, vom *entgegengesetzten Ereignis* oder *Gegenereignis* von E, symbolisch von $\overline{E}$ zu sprechen (Lies: E quer).

Definition

Unter dem *Gegenereignis* $\overline{E}$ von E versteht man:

$\overline{E}$ = «Das Ereignis E tritt nicht ein.»

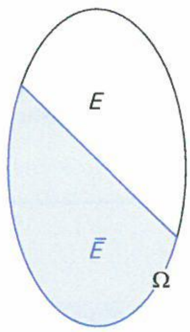
Beispiel

Das Gegenereignis von G = «gerade Zahl» ist das Ereignis U = «ungerade Zahl», d. h., wir können schreiben:

$$\overline{G} = U$$

Umgekehrt gilt $\overline{U} = G$.

In der Sprache der Mengenlehre handelt es sich bei $\overline{E}$ um die Komplementmenge von E in Ω.



Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit von $\overline{E}$ im Vergleich zu derjenigen von E? Wir überlegen so: Da entweder E oder $\overline{E}$ eintreten **muss,** beträgt die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten 1 = 100 %:

$$P(E) + P(\overline{E}) = 100\ \%$$

bzw.

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

Hieraus folgt aber:

$$P(\overline{E}) = 100\ \% - P(E)$$

bzw.

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Merken wir uns:

Satz

Für die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $\overline{E}$ gilt:

$$P(\overline{E}) = 100\ \% - P(E)$$

bzw.

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Hie und da ist es einfacher, $P(\overline{E})$ statt $P(E)$ zu berechnen.

Beispiel

Betrachten wir das Ereignis:

K = «Zahl kleiner als 6» = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(K) &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) \\ &= 31\ \% + 15.5\ \% + 3.5\ \% + 3.5\ \% + 15.5\ \% \\ &= 69\ \% \end{aligned}$$

Weniger aufwendig wäre folgende Überlegung gewesen: Das Gegenereignis von K ist:

$\overline{K} = \{6\}$

Es gilt:

$P(\overline{K}) = P(6) = 31\ \%$

Somit ist:

$P(K) = 100\,\% - P(\overline{K}) = 100\ \% - 31\ \% = 69\ \%$

Wir werden den scheinbaren Umweg über das Gegenereignis noch häufig anwenden. Deshalb merken wir uns:

Satz

Manchmal ist es einfacher, die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses E indirekt mit der Wahrscheinlichkeit des Gegenergebnisses $\overline{E}$ und der folgenden Formel zu berechnen:

$P(E) = 1 - P(\overline{E})$

In jedem Zufallsexperiment gibt es das sichere Ereignis $S = \Omega$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(S) = 1$ und das unmögliche Ereignis $L = \{\}$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(L) = 0$.

Zu jedem Ereignis E kann man das Gegenereignis $\overline{E}$ betrachten:

$\overline{E}$ = «E tritt nicht ein»

Für die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses gilt:

$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

bzw.

$P(\overline{E}) = 100\ \% - P(E)$

Um $P(E)$ zu bestimmen, ist es oft einfacher erst $P(\overline{E})$ zu berechnen und dann $P(E) = 1 - P(\overline{E})$ zu benutzen. Dies gilt besonders für Ereignisse der Form E = «wenigstens ... ».

Aufgabe 5

Betrachten Sie das Werfen eines Quaders mit dem folgenden mathematischen Modell:

$\omega =$	1	2	3	4	5	6
$P(\omega) =$	31 %	15.5 %	3.5 %	3.5 %	15.5 %	31 %

Betrachten Sie das Ereignis:

Q = «geworfene Zahl ist Quadrat einer natürlichen Zahl»

A] Ermitteln Sie Q und $P(Q)$.

B] Ermitteln Sie $\overline{Q}$ und $P(\overline{Q})$

3 Der Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten

Lernziel: Nach der Bearbeitung dieses Kapitels können Sie ...

- den Additionssatz für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten anwenden.

Schlüsselbegriffe: Additionssatz, unvereinbare Ereignisse

Wir wollen uns überlegen wie wir allgemein die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses eines Zufallsexperiments berechnen, bei dem wir die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ergebnisse kennen. Damit lässt sich dann z. B. beim Spiel mit einem idealen Würfel die Wahrscheinlichkeit der Ereignisses «ungerade Augenzahl» berechnen, da hier die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse bekannt sind.

3.1 Der Additionssatz für unvereinbare Ereignisse

Ein Ereignis kommt selten allein! Wie sollen wir die Chancen eines Angebers beurteilen, der behauptet: «Ich werfe im nächsten Wurf entweder eine Primzahl oder die höchste Zahl.»? Es geht hier offenbar um ein neues Ereignis E, das etwas mit den bereits diskutierten Ereignissen

$$P = \text{«Primzahl»} = \{2, 3, 5\}$$

und

$$H = \text{«höchste Zahl»} = \{6\}$$

zu tun hat.

Dieses neue Ereignis tritt ein, wenn eines der Ergebnisse 2, 3, 5 oder 6 eintritt, d. h., es gilt:

$$E = \{2, 3, 5, 6\}$$

Dieses Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(2) + P(3) + P(5) + P(6) \\ &= 15.5\ \% + 3.5\ \% + 15.5\ \% + 31\ \% \\ &= 65.5\ \% \end{aligned}$$

Unser Angeber wird also in rund zwei von drei Fällen recht haben.

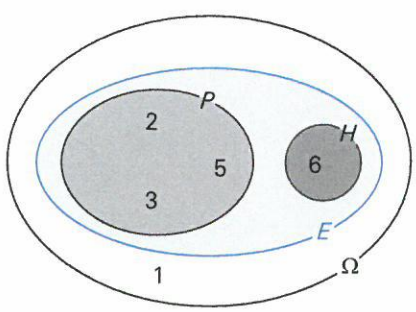
Schöner wäre es, wenn wir $P(E)$ aus den schon früher berechneten Wahrscheinlichkeiten $P(P)$ und $P(H)$ berechnen könnten. Das Ziel des Abschnitts besteht deshalb darin, die Wahrscheinlichkeit für E mithilfe der Wahrscheinlichkeiten für P und H auszudrücken.

Wir gehen so vor: E ergibt sich offenbar aus P und H durch Zusammenfassen aller Elemente von P und H zu einer neuen Menge E.

In der Sprache der Mengenlehre spricht man von der *Vereinigung* von P und H und schreibt symbolisch:

$$E = P \cup H$$

Wir lesen: «P oder H».



Wir schreiben nun die obige Gleichung nochmals auf und teilen dabei die Summanden in zwei Gruppen auf:

$$P(E) = P(2) + P(3) + P(5) + P(6)$$

Somit gilt:

$$P(E) = P(P) + P(H)$$

Dabei gilt:

$$P(P) = P(2) + P(3) + P(5)$$

$$P(H) = P(6)$$

Zusammenfassend gilt also:

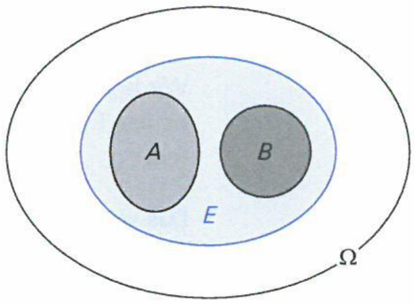
$$P(P \cup H) = P(P) + P(H)$$

Sehr wichtig ist nun allerdings die folgende einschränkende Feststellung: Diese Formel gilt nur, weil die beiden zu E beitragenden Ereignisse P und H **unvereinbar** sind. Die beiden Ereignisse P und H können nicht **zugleich** eintreten. Die entsprechende Formel ist nicht anwendbar, wenn wir z. B. die beiden Ereignisse P = «Primzahl» und G = «gerade Zahl» betrachten. Mit dem Ergebnis 2 treten nämlich sowohl P als auch G ein. P und G sind **nicht unvereinbar.** Diesen Fall werden wir aber erst im nächsten Abschnitt behandeln. Vorläufig merken wir uns:

Definition

Unter dem Ereignis $E = A \cup B$ (lies «A oder B») versteht man das Ereignis, das dann eintritt, wenn wenigstens eines der beiden Ereignisse eintritt.

A und B heissen *unvereinbar,* wenn nicht beide Ereignisse zugleich eintreten können, d. h. wenn A und B keine gemeinsamen Elemente haben.



Satz

Sind die Ereignisse A und B unvereinbar gilt der *Additionssatz für unvereinbare Ereignisse:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Das Ereignis $E \cup F$ = «E oder F» tritt dann ein, wenn wenigstens eines der beiden Ereignisse E, F eintritt.
- Das Ereignis $E \cap F$ = «zugleich E und F» tritt ein, wenn beide Ereignisse E, F zugleich eintreten.
- Die beiden Ereignisse E und F heissen unvereinbar, wenn nicht beide Ereignisse zugleich eintreten können, d. h., das Ereignis $E \cap F$ ist das unmögliche Ereignis.

Sind die Ereignisse unvereinbar so gilt:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Die entsprechende Beziehung gilt auch für mehr als zwei Ereignisse, wenn die Ereignisse paarweise unvereinbar sind.

Aufgabe 6

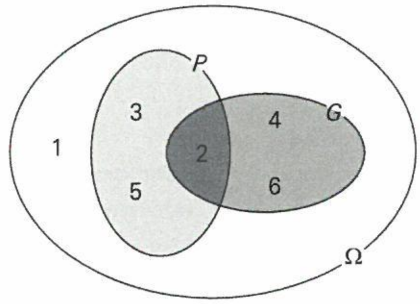
Betrachten Sie die beiden Quaderereignisse Z = «Zweierpotenz» und R = «ungerade Primzahl» für den Quader.

A] Sind Z und R unvereinbar? Wie gross ist $P(R)$?

B] Berechnen Sie mithilfe des Additionssatzes: $P(Z \cup R)$

3.2 Der allgemeine Additionssatz

Die Ereignisse G = «gerade Zahl» und P = «Primzahl» sind – wie gesagt – nicht unvereinbar, weil mit dem Eintreffen des Ergebnisses 2 beide Ereignisse zugleich eintreten. Im Mengendiagramm erkennt man diese Situation daran, dass sich die beiden Mengen «überlappen», d. h. dass sie gemeinsame Elemente haben.



Was sollen wir nun in diesem Fall unter dem Ereignis F verstehen, das darin besteht, dass P **oder** G eintritt? Zunächst schreiben wir wie oben:

$$P \cup G$$

Dies wird gelesen als «P oder G».

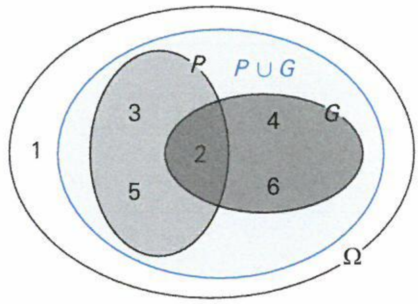
Wir legen fest, dass das Ereignis genau dann eintreten soll, wenn **wenigstens eines** der beiden Ereignisse eintritt, d. h. wenn P eintritt, oder G eintritt oder zugleich G und P eintreten.

Wichtig

Das «oder» hat **nicht** die Bedeutung von «entweder … oder».

Bei dieser Definition von «oder» wird klar, dass man die Menge F auch in diesem Fall durch Vereinigung aller Ergebnisse von P und G erhält:

$$F = P \cup G = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$



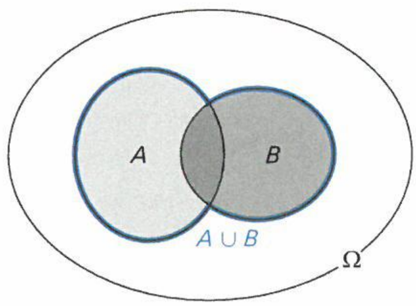
Diese Besonderheit der Definition von «oder» müssen Sie sich unbedingt merken:

Definition

Das Ereignis E = «A oder B», symbolisch $E = A \cup B$ tritt ein,

- wenn A eintritt
- oder B eintritt
- oder A **und** B zugleich eintreten.

Mengenmässig entspricht $E = A \cup B$ der *Vereinigungsmenge* von A und B.

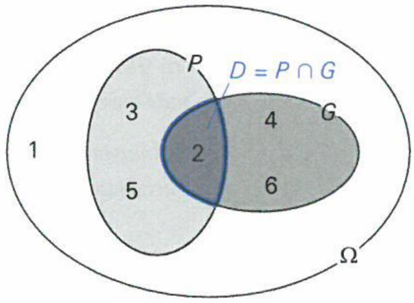


TEIL A GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Nach dieser allgemeinen Definition kehren wir wieder zu unserem besonderen Beispiel $P \cup G$ zurück. Wenn das Ereignis 2 eintritt, treten – wie schon gesagt – P und G zugleich ein.

In der Sprache der Mengenlehre ist die Menge $\{2\}$ die Schnittmenge von P und G; deshalb bezeichnet man das Ereignis D, das darin besteht, dass P und G zugleich eintreten, symbolisch mit:

$$D = P \cap G = \{2\}$$



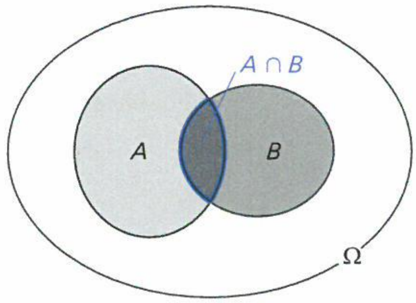
Dies wird gelesen als «zugleich P und G».

Sie sollten sich diese neue Definition in allgemeiner Form merken:

Definition

Das Ereignis D = «zugleich A und B», symbolisch $D = A \cap B$ tritt ein, wenn A und B zugleich eintreten.

Mengenmässig entspricht $D = A \cap B$ der *Schnittmenge* von A und B.



Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$G \cup P$ = «gerade Zahl oder Primzahl.»

Dabei geht es uns, wie im letzten Abschnitt, nicht in erster Linie um das Resultat:

$$P(G \cup P) = P(\{2, 3, 4, 5, 6\}) = P(2) + \ldots + P(6) = 69\ \%$$

sondern wir wollen herausfinden, wie man diese Wahrscheinlichkeit mithilfe der Wahrscheinlichkeiten $P(P)$ und $P(G)$ berechnen kann.

Falsch wäre es, einfach wie vorher $P(P)$ und $P(G)$ zu addieren, denn so würden wir $P(2) = 15.5\ \%$ zweimal berücksichtigen. Mit dieser Überlegung haben wir aber auch schon die richtige Idee:

$$\begin{aligned} P(G \cup P) &= P(P) + P(G) - P(2) \\ &= 34.5\ \% + 50\ \% - 15.5\ \% \\ &= 69\ \% \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt noch beachten, dass $\{2\} = P \cap G$, so können wir anstelle der ersten Zeile in der obigen Herleitung schreiben:

$$P(G \cup P) = P(P) + P(G) - P(P \cap G)$$

Damit haben wir unser Ziel erreicht: $P(G \cup P)$ wird durch $P(P)$ und $P(G)$ ausgedrückt. Verallgemeinern wir diese Beziehung auf beliebige Ereignisse, so haben wir den *allgemeinen Additionssatz* formuliert, den wir uns merken müssen.

Satz

Der *allgemeine Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten* lautet:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

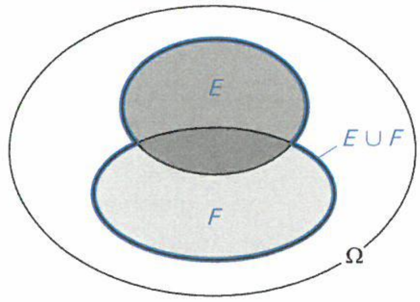
Im Vergleich zum Additionssatz für unvereinbare Ergebnisse ist im allgemeinen Additionssatz noch ein Korrekturterm dazugekommen.

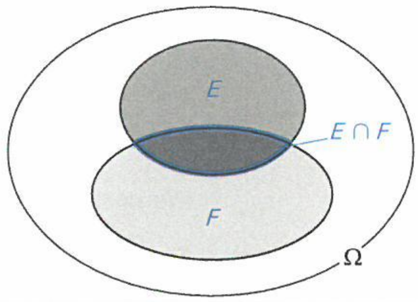
Schlagen Sie den Satz gleich jetzt in Ihrer Formelsammlung nach, damit Sie später darauf zurückgreifen können.

Das Ereignis $E \cup F$ = «E oder F», tritt dann ein, wenn wenigstens eines der beiden Ereignisse E, F eintritt.
Das Ereignis $E \cap F$ = «zugleich E und F» tritt ein, wenn beide Ereignisse E, F zugleich eintreten.

Für beliebige Ereignisse E, F gilt:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$





Aufgabe 7

Betrachten Sie beim Quaderwürfel die Ereignisse:

- Z = «Zweierpotenz» mit $P(Z) = 50\ \%$
- P = «Primzahl» mit $P(P) = 34.5\ \%$

A] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:

N = «Primzahl und zugleich Zweierpotenz»

B] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:

W = «Primzahl oder Zweierpotenz»

4 Gleichwahrscheinliche Ergebnisse

Lernziele: Nach der Bearbeitung dieses Kapitels können Sie ...
- für Zufallsexperimente mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen mathematische Modelle berechnen.
- für Zufallsexperimente mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen.

Schlüsselbegriffe: gleichwahrscheinliche Ergebnisse, idealer Spielwürfel, ideale Münze

Oft hat man es bei Spielen mit Zufallsexperimenten mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen zu tun. Solche Zufallsexperimente lassen sich mit einer einfachen Formel berechnen.

4.1 Gleichwahrscheinlichkeit aus Symmetriegründen

In einigen Sportarten ist es üblich, zwischen zwei Alternativen (z. B. die Seite des Spielfeldes) mit einem Münzenwurf zu entscheiden. In der Regel bezeichnet man die beiden Münzenseiten mit Bild (*B*) und Zahl (*Z*). Aus Symmetriegründen sind bei einer «guten» Münze beide Ergebnisse **gleichwahrscheinlich.**

Für gleichwahrscheinliche Ergebnisse gilt:

Satz

Sind aus Symmetriegründen die m möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments *gleichwahrscheinlich,* so gilt für die Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse:

$$P(\omega) = \frac{1}{m}$$

Satz

Eine *ideale Münze* hat aus Symmetriegründen die $m = 2$ gleichwahrscheinlichen Ergebnisse Zahl und Bild. Sie hat somit das Modell:

$\omega =$	**Bild**	**Zahl**
$P(\omega) =$	$\frac{1}{2} = 50\ \%$	$\frac{1}{2} = 50\ \%$

Hat ein Zufallsexperiment insgesamt m gleichwahrscheinliche Ergebnisse, so gehört zum Zufallsexperiment das folgende Modell:

$\omega =$	ω_1	ω_2	...	ω_m
$P(\omega) =$	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$	...	$\frac{1}{m}$

ω steht hier für das Ergebnis, $P(\omega)$ steht für die Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 8

Beschreiben Sie, wie man mit dem Würfel einen Münzenwurf nachahmen kann.

4.2 Die Formel «günstige für das Ereignis über mögliche»

Beim Werfen des Spielwürfels handelt es sich wohl um das bekannteste Zufallsexperiment. Der ideale Spielwürfel zeichnet sich dadurch aus, dass alle sechs möglichen Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit k. Dies führt zu folgendem Modell für den idealen Spielwürfel:

$\omega =$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$P(\omega) =$	k	k	k	k	k	k

Nun wissen wir, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 = 100 % geben muss, d. h., es muss gelten:

$$6 \cdot k = 1$$

Daraus folgt:

$$k = \frac{1}{6} = 16.7\ \%$$

Satz

Der *ideale Spielwürfel* hat das Modell:

$\omega =$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$P(\omega) =$	16.7 %	16.7 %	16.7 %	16.7 %	16.7 %	16.7 %

Mit diesem Modell für den Spielwürfel lassen sich Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse berechnen.

Beispiel

Würfelwurf mit Ereignis «Primzahl»

Berechnen wir mit diesem Modell die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis P = «Primzahl»:

$$P(P) = P(2) + P(3) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Wir kürzen den Bruch und erhalten:

$$(P) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\ \%$$

Wir wollen dieses Beispiel verallgemeinern: Beim Würfel gibt es $m = 6$ **mögliche** Ergebnisse. Von diesen sind $g_P = 3$ Ergebnisse **günstig** für P. Mithilfe dieser Symbole können wir schreiben:

$$P(P) = \frac{3}{6} = \frac{g_P}{m} = \frac{\text{«günstige für } P\text{»}}{\text{«mögliche»}}$$

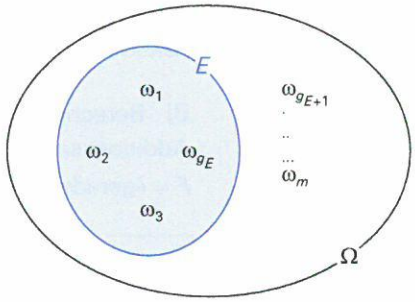
Die entsprechende Formel gilt für beliebige andere gleichwahrscheinliche Würfelereignisse.

Halten wir diese neue und wichtige Erkenntnis über **gleichwahrscheinliche** Ergebnisse in ganz allgemeiner Form fest:

Satz

Ein Zufallsexperiment habe m mögliche *gleichwahrscheinliche Ergebnisse.* Für das Eintreten des Ereignisses E seien g_E dieser Ergebnisse günstig. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit von E:

$$P(E) = \frac{g_E}{m} = \frac{\text{«günstige für } E\text{»}}{\text{«mögliche»}}$$



Beispiel

Würfelwurf mit Ereignis «Vielfaches von 3»

Betrachten wir das Würfel-Ereignis:

V = «Vielfaches von 3»

Es ist $V = \{3, 6\}$ und damit:

$$P(V) = P(3) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Das Resultat hätten wir auch mit der Formel

$$\frac{\text{«günstige für } V\text{»}}{\text{«mögliche»}}$$

erhalten. Für V sind $g_V = 2$ Ergebnisse günstig und wir erhalten wie schon zuvor:

$$P(V) = \frac{g_V}{m} = \frac{2}{6}$$

Wir kürzen am Schluss noch den Bruch und erhalten:

$$P(V) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 33.3\ \%$$

Die Formel «günstige für E» über «mögliche» hilft in unzähligen Zufallsexperimenten weiter. Aber aufgepasst:

Wichtig

Die Formel «günstige für E» über «mögliche» darf nur dann verwendet werden, wenn alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind.

Wenn das Ereignis E durch g_E gleichwahrscheinliche Ergebnisse zustande kommen kann, so beträgt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E:

$$P(E) = \frac{g_E}{m} = \frac{\text{«günstige für } E\text{»}}{m}$$

Beispiel: Der Wurf mit dem idealen Spielwürfel ist ein Zufallsexperiment mit $m = 6$ gleichwahrscheinlichen Ergebnissen.

Aufgabe 9

Der ideale Spielwürfel hat die Ereignisse G = «gerade Zahl» und Z = «Zweierpotenz».

A] Stellen Sie diese Ereignisse als Mengen dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten mit der Formel «günstige für E» über «mögliche»:

B] Berechnen Sie unter Verwendung der eben berechneten Resultate und mithilfe des Additionssatzes die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
F = «gerade Zahl oder Zweierpotenz».

5 Zufallsexperimente mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen

Lernziele: Nach der Bearbeitung dieses Kapitels können Sie …

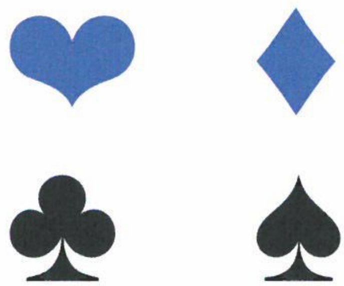
- für Zufallsexperimente mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen mathematische Modelle berechnen.
- für Zufallsexperimente mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen.

Schlüsselbegriffe: französische Spielkarten, Stichprobe, Urne

Wir wollen uns einige bekannte Zufallsexperimente mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen genauer anschauen.

5.1 Das Ziehen von Spielkarten

Wir betrachten französische Spielkarten mit 52 verschiedenen Karten. Es gibt bekanntlich vier verschiedene «Farben», nämlich Karo, Kreuz, Herz und Pic. Jede Farbe ist in den 13 verschiedenen Werten 2, 3, …, 9, 10, Bube, Dame, König und Ass vorhanden.



Unser Zufallsexperiment besteht darin, dass wir nach dem Mischen zufällig eine Karte aus dem vollständigen Stapel ziehen.

Jede der 52 Karten ist ein mögliches Ergebnis, d. h., zu diesem neuen Zufallsexperiment gehört ein Ergebnisraum Ω mit $m = 52$ möglichen Ergebnissen, z. B. ω_1 = «Herz-Ass», ω_2 = «Karo-Bube», ω_3 = «Pic-2».

Jedes dieser 52 Ergebnisse ist gleichwahrscheinlich. Also hat jedes mögliche Ergebnis ω die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\omega) = \frac{1}{52}$$

Satz

Für die *französischen Spielkarten* gilt das Modell (wegen des Umfangs können wir es nur andeuten):

$\omega =$	Karo 2	…	Karo Ass	Herz 2	…	Herz Ass	Pic 2	…	Pic Ass	Kreuz 2	…	Kreuz Ass
$P(\omega) =$	$\frac{1}{52}$	…	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	…	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	…	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	…	$\frac{1}{52}$

In diesem Modell können wir viele Ereignisse betrachten, z. B. A = «Ass», H = «Herz» E = «Herz oder Ass». Da alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, können wir mit der Formel

$$\frac{\text{«günstige für } E\text{»}}{\text{«mögliche»}}$$

für diese und andere Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten berechnen.

Wir betrachten französische Spielkarten mit 52 verschiedenen Karten. Es gibt vier verschiedene «Farben», nämlich Karo, Kreuz, Herz und Pic. Jede Farbe ist in den 13 verschiedenen Werten 2, 3, ..., 9, 10, Bube, Dame, König und Ass vorhanden.

Ein Zufallsexperiment besteht darin, dass wir nach dem Mischen zufällig eine Karte aus dem vollständigen Stapel ziehen. Jede der 52 Karten ist ein mögliches Ergebnis. Die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Karte zu ziehen ist $1/_{52}$.

Aufgabe 10

Sie haben einen Satz von französischen Spielkarten. Wir betrachten die Ereignisse A = «Ass», H = «Herz» E = «Herz oder Ass».

A] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A und H.

B] Überlegen Sie sich, um was für ein Ereignis es sich bei $A \cap H$ handelt und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit.

C] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von E.

5.2 Der Doppelwurf mit dem Spielwürfel

Wir werfen gleichzeitig einen roten und einen schwarzen Würfel. Das Ergebnis eines solchen Wurfs können wir durch eine zweistellige Zahl festhalten, in der nur die Ziffern 1 bis 6 vorkommen. So bedeutet $\omega = 31$, dass der schwarze Würfel eine 3 und der rote eine 1 zeigt.

Bei idealen Würfeln werden wir jedes Ergebnis etwa mit der gleichen relativen Häufigkeit antreffen. Das bedeutet für unser Modell: Der Ergebnisraum Ω des Dopplewurfs umfasst die $m = 36$ möglichen gleichwahrscheinlichen Ergebnisse 11, 12, ..., 16, 21, 22, ..., 26, 31, ..., 66.

Am übersichtlichsten wird der Ergebnisraum, wenn wir die Ergebnisse in sog. Matrizenform darstellen.

Jedes dieser Ergebnisse hat die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\omega) = \frac{1}{m} = \frac{1}{36}$$

$$\begin{array}{cccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{array} \quad \Omega$$

Satz

Zum *idealen Doppelwurf* (Wurf mit zwei idealen verschiedenfarbigen Würfeln) gehört das Modell (wegen seines Umfangs nur angedeutet):

$\omega =$	**11**	**12**	**13**	...	**64**	**65**	**66**
$P(\omega) =$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	...	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Bei gleichwahrscheinlichen Ergebnissen gilt für die Wahrscheinlichkeiten die Formel:

$$\frac{\text{«günstige für } E\text{»}}{\text{«mögliche»}}$$

Mit dieser Formel wollen wir nun die Wahrscheinlichkeiten einiger Ereignisse beim Doppelwurf berechnen. Zuerst für den Doppelwurf mit «Augensumme 5», dann für den Doppelwurf mit «Produkt ist nicht grösser als 4» und zum Schluss noch für den Doppelwurf mit «Wenigstens eine 6», wo wir die Wahrscheinlichkeit gleich auf 3 verschiedene Arten berechnen werden.

Beispiel

Doppelwurf mit Ereignis «Augensumme 5»

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit beim Doppelwurf die Augensumme 5 zu erhalten? Wir definieren:

F = «Augensumme 5»

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Summe 5 zu erhalten:

$$5 = 4 + 1 = 2 + 3$$

Wir müssen allerdings berücksichtigen, dass es beim Ereignis F = «Augensumme 5» keinen Unterschied macht, ob der schwarze Würfel die 1 und der rote die 4 zeigt oder umgekehrt. Somit gilt für das Ereignis F:

$$F = \{14, 41, 23, 32\}$$

Folglich hat F die Wahrscheinlichkeit:

$$P(F) = \frac{g_F}{m} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 11.1\ \%$$

Beispiel

Doppelwurf mit Ereignis «Produkt ist nicht grösser als 4»

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der beiden Augenzahlen nicht grösser als 4 ist?

P = «Produkt ist nicht grösser als 4»

Wir verwenden für das Produkt die Abkürzung P, obwohl dadurch P in diesem Abschnitt in doppelter Bedeutung vorkommt: Vorher stand P für Primzahl, jetzt steht P für Produkt.

Zum Ereignis P gehören alle Doppelwurfergebnisse mit den Produkten 1, 2, 3 oder 4. Deshalb definieren wir die Ereignisse:

- P_1 = «Produkt ist 1»
- P_2 = «Produkt ist 2»
- P_3 = «Produkt ist 3»
- P_4 = «Produkt ist 4»

Mit diesen Definitionen gilt:

$P = P_1$ oder P_2 oder P_3 oder P_4

Mit Symbolen geschrieben:

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$$

Die vier Ereignisse sind **paarweise unvereinbar:** Es ist nicht möglich, dass ein Doppelwurf zugleich z. B. das Produkt 1 und das Produkt 3 hat. Wir können deshalb die Wahrscheinlichkeit von P mit dem **Additionssatz für unvereinbare Ereignisse** berechnen (Der Additionssatz gilt in analoger Form auch für mehrere Ereignisse.):

$$\begin{aligned} P(P) &= P(P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4) \\ &= P(P_1) + P(P_2) + P(P_3) + P(P_4) \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden berechnen wir mit der Formel:

$$\frac{\text{«günstige für } P_i\text{»}}{\text{«mögliche»}}$$

- P_1 = «Produkt ist 1» = $\{11\}$, also $P(P_1) = \dfrac{1}{36}$
- P_2 = «Produkt ist 2» = $\{12, 21\}$, also $P(P_2) = \dfrac{2}{36}$
- P_3 = «Produkt ist 3» = $\{13, 31\}$, also $P(P_3) = \dfrac{2}{36}$
- P_4 = «Produkt ist 4» = $\{14, 41, 22\}$, also $P(P_4) = \dfrac{3}{36}$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$P(P) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = 22.2\ \%$$

Beispiel

Doppelwurf mit Ereignis «wenigstens eine 6»

Wir betrachten beim Doppelwurf das Ereignis:

W = «wenigstens eine 6»

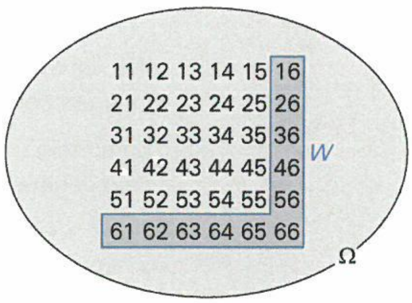
Wir berechnen im Folgenden mit 3 verschiedenen Methoden die Wahrscheinlichkeit für diese Ereignisse.

Methode 1

Wir zählen alle Ergebnisse von W auf:
$W = \{16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65\}$

Somit gilt:

$$P(W) = \frac{g_W}{m} = \frac{11}{36} = 30.6\ \%$$

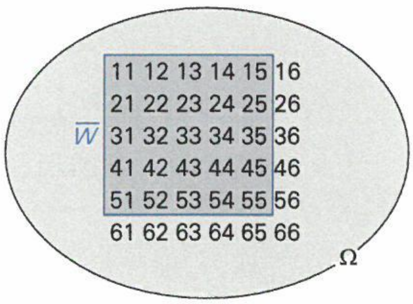


Methode 2

Wir rechnen mit dem Gegenereignis. Das Gegenteil von «wenigstens eine 6» ist nicht «höchstens eine 6», sondern «keine 6»:

$\overline{W}$ = «keine 6»

Die für $\overline{W}$ günstigen Ergebnisse bilden im Ergebnisraum ein Quadrat.



Es gibt $g_{\overline{W}} = 5 \cdot 5 = 25$ günstige Ergebnisse. Somit gilt:

$$P(W) = 1 - P(\overline{W}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} = 30.6\ \%$$

Methode 3

Die dritte Methode ist interessant, weil sie eine Verbindung zum Einfachwurf herstellt: Das Ereignis W tritt ein, wenn der schwarze Würfel oder der weisse Würfel (oder beide zusammen) eine 6 zeigen. Wir betrachten deshalb folgende zwei Ereignisse:

- W_S: Der schwarze Würfel zeigt eine 6.
- W_W: Der weisse Würfel zeigt eine 6.

Beide Ereignisse haben die Wahrscheinlichkeit 1 / 6:

$$P(W_S) = P(W_W) = \frac{1}{6}$$

Das Ereignis W tritt ein, wenn wenigstens eines dieser beiden Ereignisse eintritt:

$$W = W_S \cup W_W$$

Die beiden Ereignisse sind nicht unvereinbar, denn es können beide zugleich eintreten. Somit gilt der *allgemeinen Additionssatz:*

$$P(W) = P(W_S \cup W_W) = P(W_S) + P(W_W) - P(W_S \cap W_W)$$

Wir müssen nun nur noch erkennen, dass

$$W_S \cap W_W = \text{«Zugleich } W_S \text{ und } W_W\text{»}$$

das Ergebnis $\omega = 66$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(66) = 1 / 36$ ist. Damit erhalten wir:

$$P(W) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} = 30.6\ \%$$

Bei einem idealen Würfel ist jedes der 6 möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich. Der Ergebnisraum des Wurfs mit zwei idealen Spielwürfeln (Doppelwurf) umfasst deshalb 36 mögliche gleichwahrscheinliche Ergebnisse 11, 12, 13, …, 64, 65, 66.

Aufgabe 11 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis:

$$Z = \text{«Summe ist wenigstens 10»}$$

Aufgabe 12 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, im Doppelwurf mit zwei idealen Spielwürfel «wenigstens eine Primzahl» zu erhalten.

5.3 Das Ziehen aus einer Urne

In der Statistik wird häufig eine Grundgesamtheit auf zwei oder mehr Merkmale hin untersucht. Die Bevölkerung eines Staates wird z. B. untersucht:

- auf ihr Abstimmungsverhalten in einer gewissen Volksbefragung (Merkmale sind «Ja» oder «Nein»),
- bezüglich einer gerade grassierenden Grippe (Merkmale sind «gesund», «angesteckt», «krank»).

In der Qualitätskontrolle werden weiter z. B. Apparate auf die Merkmale «in Ordnung» und «defekt» geprüft oder die Orangen einer grossen Sendung auf «faul» oder «in Ordnung». In der Regel kann nicht die ganze Grundgesamtheit in die Untersuchung einbezogen werden.

Definition

Die Beurteilung einer Gesamtheit von Gegenständen erfolgt meist aufgrund einer mehr oder weniger grossen, willkürlichen Auswahl an Gegenständen. Diese Auswahl nennt man *Stichprobe.*

Definition

Eine Stichprobe wird in der Mathematik modellhaft durch das (wirkliche oder gedankliche) Ziehen aus einer sog. Urne dargestellt. Unter einer *Urne* versteht man in der Mathematik einen Behälter mit Kugeln gleicher Grösse, die unterschiedlich gefärbt sind. Es gibt zwei, drei oder evtl. noch mehr verschiedene Farben, entsprechend der Anzahl Merkmale, die dargestellt werden sollen. Die Kugeln in der Urne repräsentieren die Grundgesamtheit (Bevölkerung, Orangensendung etc.).

Das Erzeugen einer Stichprobe der Grundgesamtheit wird mit diesem Modell durch blindes Ziehen aus der Urne simuliert. So kann z. B. das Befragen einer einzigen willkürlich ausgewählten Person durch blindes Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit roten und weissen Kugeln simuliert werden. Eine rote Kugel bedeutet dann z. B. «Ja», eine weisse Kugel bedeutet «Nein».

Beispiel

Ziehung mit Ereignis «rote Kugel»

Eine Urne enthält 7 rote und 3 weisse Kugeln. Nach dem Mischen zieht man mit verbundenen Augen eine Kugel.

Frage

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen?

Lösung

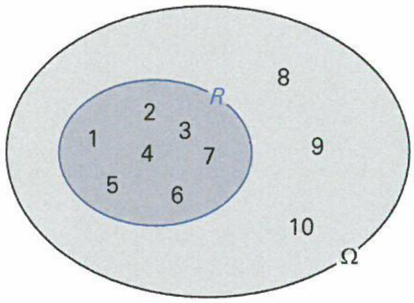
Wir denken uns insgeheim die Kugeln nummeriert mit den Zahlen 1, 2, ..., 10, wobei die roten gerade die Nummern 1 bis 7 tragen sollen. Wenn wir beim Ziehen vorerst nur auf die Nummern achten, gibt es die $m = 10$ verschiedenen Ergebnisse 1, 2, ..., 10. Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich, d. h., wir haben das Modell:

$\omega =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\omega) =$	10 %	10 %	10 %	10 %	10 %	10 %	10 %	10 %	10 %	10 %

Das Nummerieren der Kugeln diente nur dem Zweck, die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse «rote Kugel», «weisse Kugel» zu berechnen.

Für das Ereignis R = «rote Kugel» gilt mit unserem Modell:

$$R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



Für R gibt es also $g_R = 7$ günstige Ergebnisse. Deshalb hat R die Wahrscheinlichkeit:

$$P(R) = \frac{7}{10} = 0.7 = 70\ \%$$

Das Gegenereignis W = «weisse Kugel» hat demzufolge die Wahrscheinlichkeit:

$$P(W) = 30\ \%$$

Wenn man nur an der Kugelfarbe interessiert ist, haben wir es somit mit dem folgenden Modell zu tun:

$\omega =$	**Weisse Kugel**	**Rote Kugel**
$P(\omega) =$	30 %	70 %

Sicher haben Sie bei der obigen Herleitung auch den Trick durchschaut, wie man in einem beliebigen Fall die Wahrscheinlichkeit berechnet:

Satz

Eine *Urne* enthält m Kugeln. Darunter befinden sich w weisse Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Zug eine weisse Kugel zu ziehen beträgt dann:

$$P(\text{«weisse Kugel»}) = \frac{w}{m}$$

Eine Stichprobe zur Beurteilung einer Gesamtheit von Gegenständen wird in der Mathematik modellhaft durch das (wirkliche oder gedankliche) Ziehen aus einer sog. Urne dargestellt. Unter einer Urne versteht man in der Mathematik einen Behälter mit Kugeln gleicher Grösse, die unterschiedlich gefärbt sind. Die Urne enthält Kugeln in zwei, drei oder evtl. noch mehr verschiedenen Farben, entsprechend der Anzahl möglicher Merkmale der betrachteten Gegenstände.

Aufgabe 13

Eine Urne enthält 12 rote, 34 weisse und 45 grüne Kugeln. Eine Kugel wird willkürlich gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine «grüne Kugel».

Stichwortverzeichnis

Die Autoren haben langjährige Unterrichtserfahrung auf Gymnasialstufe und verfügen über umfangreiche Erfahrung in der Entwicklung von selbststudiumstauglichen Mathematiklehrmitteln zu den Themen Algebra, Analysis, Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Ihre Lehrmittel werden seit Langem mit grossem Erfolg an AKAD Schulen im Rahmen von Studiengängen mit hohem Selbststudiumsanteil eingesetzt.

Das Lehrmittel «Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibende Statistik» vermittelt das Grundwissen zu den Themen Wahrscheinlichkeiten einstufiger und mehrstufiger Zufallsexperimente, Kombinatorik, Bernoulli-Experimente, bedingte Wahrscheinlichkeiten und beschreibende Statistik.

Es orientiert sich dabei an den Lerninhalten des Grundlagenfachs Mathematik auf normalem Niveau der schweizerischen Maturität nach MAR, ergänzt um das Thema Kombinatorik, und richtet sich daher in erster Linie an Schülerinnen und Schüler einer Maturitätsschule. Das Lehrmittel kann aber auch in der technischen oder naturwissenschaftlichen Berufs- und Erwachsenenbildung eingesetzt werden.

«Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibende Statistik» zeichnet sich durch einen gut verständlichen, klar strukturierten Text aus, enthält zahlreiche unterstützende Grafiken, illustrative Beispiele sowie zahlreiche Aufgaben mit ausführlichen Lösungswegen. Durch diese Elemente eignet es sich besonders für einen von Stoffvermittlung entlasteten Unterricht oder für das Selbststudium, etwa als Vorbereitung für die Universität oder Fachhochschule.

www.compendio.ch

ISBN 978-3-7155-9352-4

9 783715 593524