Práctica Cálculo y Métodos Numéricos

Curso 2014/2015

A tener en cuenta

1. La realización de la práctica es individual.
2. Esta práctica se evalúa sobre 1,5 puntos del global de la asignatura (0,5 cada hito) y vale aproximadamente un 43 % de la parte de prácticas de la asignatura. Si un alumno decide no realizar la práctica debe tener en cuenta que tendría que sacar un $8,75$ en el examen de prácticas para obtener un 5 en la parte de prácticas. Como conclusión, no es obligatorio realizar esta práctica pero es difícil poder aprobar la parte práctica sin su realización.
3. El hito 4 es opcional y permite mejorar la nota hasta 0,5 puntos.
4. No es necesario realizar todos los hitos para que la práctica pueda ser entregada.
5. Para la evaluación de cada uno de los apartados se tendrán en cuenta tanto la claridad del código como los comentarios incluidos en éste.
6. Para la corrección de la práctica se utilizará un programa de detección de copia. En caso de que la similitud entre dos o más prácticas se encuentren fuera de lo permisible, todas ellas serán calificadas con un 0 y aparecerá suspenso en la asignatura tanto en la convocatoria ordinaria como extraordinaria.
7. Fecha límite de entrega: Hasta el 15 de diciembre. Se habilitará una tarea en campus virtual para poder subirla.

Objetivos de la práctica

La combinación de las matemáticas y las capacidades de cómputo ha resuelto múltiples problemas que aparecen en ciencia e ingeniería. El abordado aquí solo es un juego pero es la mejor forma de aprender. El resultado final será el fruto de la imaginación, de las matemáticas y de las destrezas técnicas que disponga cada cual.

Con el desarrollo de esta práctica se persigue introducir a los alumnos en la programación, en particular con MATLAB, y en el uso de las matemáticas para abordar problemas.

La práctica se estructura en tres hitos. En el hito 1 los alumnos trabajarán con el concepto de flujo y programarán unas ecuaciones de propagación. En esto hito se trabajará con vectores, bucles y representaciones gráficas. En el hito 2 se aborda la propagación del tráfico en un arco. Además de los anteriores aspectos de programación se requiere trabajar con matrices, condicionales y definición de funciones. El hito 3 es una extensión del hito 2 a una propagación en una red. La estrucuctura de red impone una numéración de celdas que afecta a la programación del modelo.

La realización de estos hitos refuerza la comprensión de las sesiones prácticas y por tanto se recomienda que la realización de esta práctica se haga a lo largo del curso, afianzando las clases de prácticas y sirviendo como un ejercicio de preparación al examen de prácticas.

HITO 1: El concepto de flujo

En el estudio de ciertos fenómenos físicos o ingenieriles en el que son dependientes del tiempo resulta útil medir ciertas cantidades en un periodo determinado de tiempo, recibiendo el nombre de *flujo*. Por ejemplo, la figura 1 muestra una tubería extractora de partículas de carbón. Para evaluar su rendimiento se mide el número de partículas que atraviesa la línea negra por unidad de tiempo, esto es, el flujo (q) de partículas de carbón. Los dos factores esenciales de los que depende el flujo son: i) la *velocidad* (v) con la que circula el fluido y ii) la *densidad lineal* (k) del mismo. En el dibujo consideramos el número de partículas de carbón por metro de tubería, esto es, el número de partículas encerradas en el rectángulo de líneas discontinuas. Notar que si una tubería fuese el doble de gruesa tendría el doble de densidad lineal.

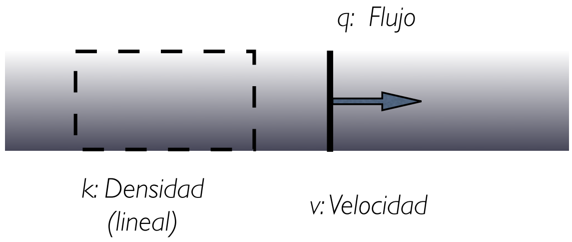

Figura 1: Ilustración del concepto de flujo

La relación entre las tres magnitudes viene dada por:

$$q = vk \tag{1}$$

El flujo varía en función del tiempo y esto lo denotamos por $q(t)$. Si quisiéramos calcular el número de partículas N que han sido evacuadas por el extractor (atravesado la línea negra) durante el intevalo $[t_1, t_2]$ tendríamos que calcular la integral

$$N(t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} q(t)\mathrm{dt} \tag{2}$$

Ejemplo vaciado de un depósito. A continuación vamos a ilustrar los anteriores conceptos analizando el depósito **cilíndrico** de la figura 2. Supongamos que en el instante inicial $t = 0$ estaba totalmente lleno y en dicho instante se abre una llave situada en su base, vacíandose por gravedad. Nos gustaría calcular el volumen de líquido $V(t)$ del depósito en función del tiempo.

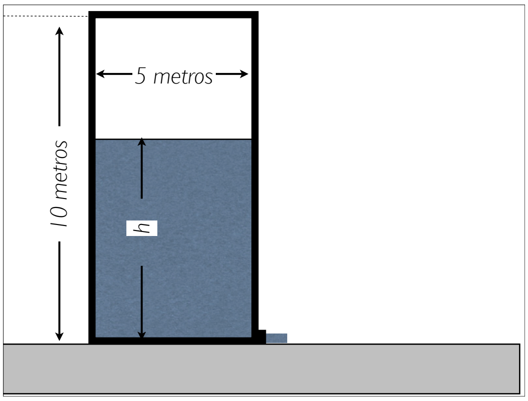

Figura 2: Depósito

La primera observación es que la velocidad del líquido saliendo por la espita varía en función del tiempo. Al principio como el depósito estaba totalmente lleno, por el peso, el líquido sale a velocidad máxima. Conforme se va vaciando, esta velocidad disminuye hasta aproximarse a cero. Calculemos la velocidad en función de la altura h. Como la energía del sistema se conserva, la pérdida de energía potencial en un instante infitesimal debe coincidir con la energía cinética del líquido derramado, esto es:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3}$$

donde m es la masa del líquido derramado y $g = 9{,}80655 m/s^2$ la constante de gravedad. De lo que se deduce

$$v(h) := \sqrt{2gh} \tag{4}$$

Ahora vamos a deducir unas ecuaciones para modelar el vaciado del depósito. El volumen ocupado por el líquido en el instante $t + \Delta t$ es el volumen que había en el instante t menos lo que se ha vacíado en el periodo $[t, t + \Delta t]$. Matemáticamente

$$V(t + \Delta t) = V(t) - \text{cantidad vaciada en } [t, t + \Delta t] \tag{5}$$

Podemos calcular la cantidad vaciada usando la ecuación (2), obteniendo:

$$V(t + \Delta t) = V(t) - \int_t^{t+\Delta t} q(s)\mathrm{ds} \tag{6}$$

Si suponemos que la amplitud Δt del intevalo de tiempo es muy pequeña, podemos considerar que el flujo es constate en dicho intervalo y realizando la anterior integral, obtenemos:

$$V(t + \Delta t) = V(t) - q(t)\Delta t \tag{7}$$

Tenemos todos los elementos para desarrollar un procedimiento de cálculo, pero antes analizaremos la cuestión de cómo afecta el tamaño de la espita al vaciado. Está claro que si la abertura es mayor el depósito se vaciará en menos tiempo. ¿Pero cómo se introduce este factor al procedimiento de cálculo? La figura 3 muestra que si la superficie de la espita aumenta la densidad lineal también. El volúmen (medido en m^3) por metro lineal coincide con la superficie de la espita, esto es

$$k = S \cdot 1 \tag{8}$$

donde S es la superficie de la espita.

Figura 3: Densidad lineal pasando por la espita

Con lo anterior diseñamos el siguiente procedimiento de cálculo.

---

0. Inicialización $V(1) = V$ volumen incial del depósito. $t(1) = 0$ instante inicial es el cero. $h(1) = 10$ metros la altura inicial del líquidio del deposito. Calcula la densidad lineal para el depósito $k = S$, donde S es la superficie de apertura de la espita (medida en m^2). Toma un valor del incremento de tiempo $\Delta t > 0$ suficientemente pequeño para.

1. Cálculo del flujo. Calcula $v(i)$ (velocidad de salidad del líquido en el instante t_i) usando la fórmula (4).

   Calcula $q(i) = v(i) * k$.

2. Cálculo del volumen y altura. Calcula el nuevo volumen

$$V(i+1) = V(i) - q(i) * \Delta t \qquad (9)$$

   Conocido $V(i+1)$ y la geometría del volumen calcular $h(i+1)$.

3. Criterio de paro. Si $V(i+1) > 0$ toma $t(i+1) = t(i) + \Delta t$, haz $i = i + 1$ y regresa al paso 1. En otro caso se ha vaciado el depósito en el instante $t(i)$.

Se piede programar en MATLAB las correspondientes funciones para contestar a las siguientes cuestiones:

1.1 Depósito cilíndrico Suponiendo que la espita tiene una sección circular de radio 1,5 cm. Dibujar la gráfica de $V(t)$ durante el vacíado del depósito. ¿En qué instantes está al $75\,\%, 50\,\%, 25\,\%$ y vacío. Para realizar este apartado toma el valor de Δt equivalente a 1 minuto.

1.2 Depósito cónico y esférico. Repetir el apardo anterior suponiendo que se tratan de depósitos esféricos y cónicos como el de la figura 4

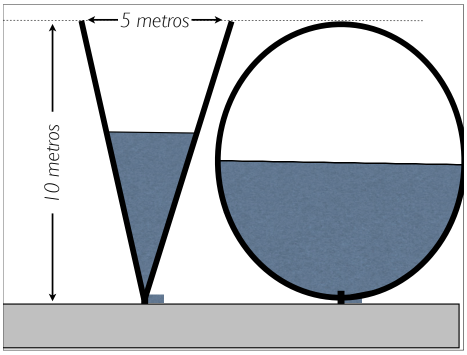

Figura 4: Densidad lineal pasando por la espita

1.3 La luna. ¿Si situáramos los anteriores depósitos en la Luna y les pusiéramos una espita de sección circular de 3,8 centímetros de radio se vaciarían antes que los situados en la Tierra?

HITO 2: Modelización de flujo de tráfico en un arco. El modelo de transmisión de celdas (CTM)

En este hito analizaremos la modelización del tráfico en un arco (segmento de autovía) como el mostrado en la figura 5. El tráfico es un fenómeno dinámico por lo que el flujo de vehículos resulta una magnitud adecuada para describir su intensidad en función del tiempo. Consideraremos que el flujo q lo medimos como el número de vehículos / hora que atraviensan un punto determinado de la vía, mientras que la velocidad v en kilómetros / hora y la densidad lineal k en vehículos / kilómetro de autovía.

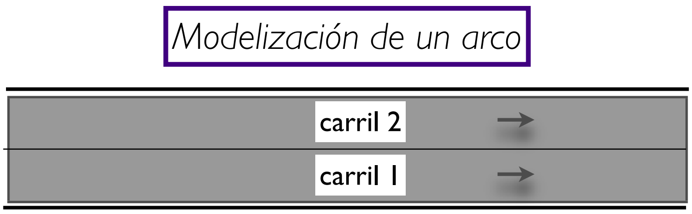

Figura 5: Modelización de un segmento de autovía

El modelo de transmisión de celdas asume que existe una relación directa entre el flujo y la densidad, esto es, el flujo de vehículos que observamos en un punto de la autovía depende de la concentración (densidad) de los vehículos y esta relación la escribimos:

$$q = Q(k) \tag{10}$$

Una función habitual para Q es la relación triangular mostrada en la figura 6

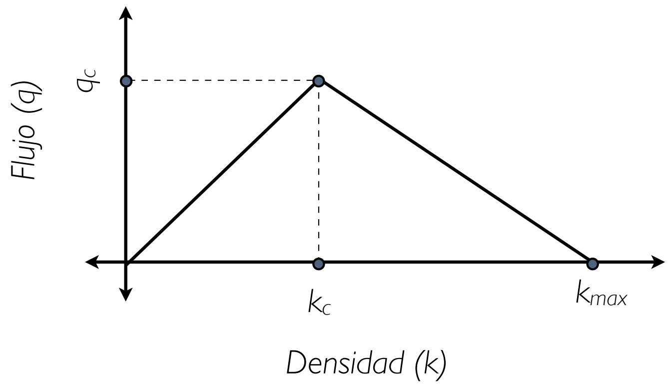

Figura 6: Relación triangular para $q = Q(k)$

La expresión analítica es:

$$Q(k) := \begin{cases} \frac{q_c}{k_c} k & \text{si } k \le k_c \\ \frac{q_c}{k_{\max} - k_c}(k_{\max} - k) & \text{si } k_c \le k \le k_{\max} \\ 0 & \text{si } k_{\max} \le k \end{cases}$$

Esta relación se interpreta de la siguiente manera. Mientras en el arco no se sobrepase la densidad crítica k_c todos los vehículos circulan a la máxima velocidad del arco $v = \frac{q_c}{k_c}$, cuando se sobrepasa esta cantidad aparece el efecto de la congestión reduciendo la velocidad de viaje. Por otro lado asumimos una densidad máxima $k_{\max}$ que por encima de ese valor el arco colapsa y no se produce flujo alguno. En la práctica se suele emplear como valor de q_c el número de carriles de la autovía multiplicado por 1500 vehículos/hora (se observa como máximo 1500 vehículos pasando en una hora por un carril determinado). En nuestro ejemplo este parámetro toma el valor de $q_c = 1500 * 2 = 3000$. Asumimos que la velocidad máxima del arco sin flujo es 120km/h y por tanto la densidad crítica $k_c = \frac{q_c}{v} = \frac{3000}{120} = 25$ veh/kilómetro. Tomamos el valor del parámetro $k_{\max} = 100$.

Consideramos un segmento como el mostrado en la figura 5. Suponemos que la longitud total del segmento es de 25 kilómetros. El primer paso del CTM es descomponer el segmento original en celdas homogéneas de idéntica longitud. En nuesto caso consideraremos 5 **celdas** de longitud $L = 5$ kilómetros. El incremento de tiempo Δt para actualizar el reló de la simulación se toma como el tiempo necesario para recorrer una celda a la velocidad v. Esto es $\Delta t = \frac{5}{120}$ horas.

Para derivar las ecuaciones del modelo introducimos la siguiente notación asociada a la celda i en el instante t.

$n_i(t)$: número de vehículos en la celda i en el instante t.

$k_i(t)$: densidad de vehículos en la celda i en el instante t.

$q_i(t)$: flujo saliente de la celda i en el instante t.

La primera relación es el cálculo de la densidad en la celda i:

$$k_i(t) = \frac{n_i(t)}{L} \tag{11}$$

En una celda i el flujo saliente dependerá de la densidad de la celda, esto es $Q(k_i(t))$, pero a la vez el número de vehículos que se desplazan a la siguiente celda tiene que caber en la celda $i+1$. Esta última restricción limita el flujo saliente. Esto se puede conseguir matemáticamente:

$$q_i(t) = \text{mín} \left\{ Q(k_i(t)), \frac{\tilde{k}_{\max} L - n_{i+1}(t)}{\Delta t} \right\} \tag{12}$$

donde $\tilde{k}_{\max}$ representa la densidad máxima observable en la vía de estudio y está fijada en este caso a 60 veh/kilómetro. Esta relación indica que el flujo saliente es el mínimo entre el flujo que desea pasar y el que admite el estado actual de la celda.

Notar que el flujo saliente de la última celda ($i = 5$) no tiene restricción de capaciad. En este caso la ecuación queda:

$$q_5(t) = Q(k_5(t)) \tag{13}$$

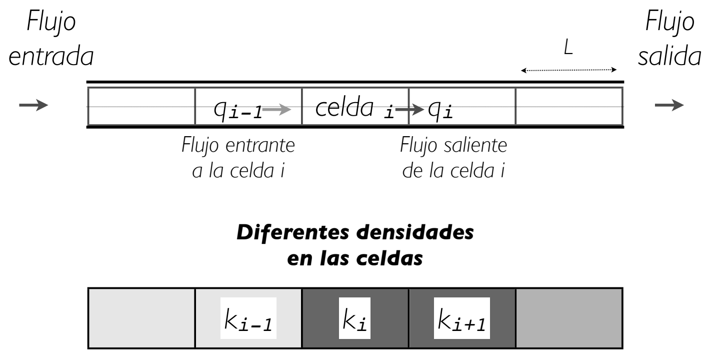

Figura 7: Descomposición de un segmento en celdas homogéneas

Finalmente las ecuaciones de evolución del tráfico son:

$$n_i(t + \Delta t) = n_i(t) + [q_{i-1}(t) - q_i(t)]\Delta t \text{ para toda celda } i \tag{14}$$

Estas ecuaciones indican que el número de vehículos en una celda i son los que había en el instante anterior, mas los que entran menos los que salen.

Las anteriores ecuaciones modelan el desplazamiento de los vehículos por el arco pero falta modelar la demanda de tráfico que soportará el arco. Esto es, el número de vehículos que acceden al segmento de arco y el instante en el que lo hacen. Para modelar esta demanda consideramos una celda fictícea inicial $i = 0$ que posee los mismo mecanismos que las otras celdas a excepción de las siguientes tres características: i) tiene una capacidad infinita, ii) que el flujo de entrada $q_{-1}(t) = e(t)$ es una función conocida y iii) el flujo de salida opera con la siguiente función flujo-densidad

$$Q_0(k_0(t)) := \begin{cases} e(t) & \text{si } k_0(t) = 0 \\ e(t) + \frac{k_0(t)L}{\Delta t} & \text{si } k_0(t) > 0 \end{cases}$$

La celda 0 tiene la finalidad de introducir al arco todos los vehículos que se van generando con la función de intensidad de demanda $e(t)$ y si estos sobrepasan la capacidad física de la celda 1 los almacena. Cuando la celda 0 almacena vehículos (se cumple la condición $k_0(t) > 0$) incrementa el flujo de entrada $e(t)$ con el fin de poder introducir en el arco todos los vehículos almacenados en el segmento.

Se piede programar en MATLAB[1] las correspondientes ecuaciones para contestar a las siguientes cuestiones:

2.1 CMT. Supongamos que la intensidad de la demanda viene definida por la función $e(t) = 4000 * e^{-(t-8)^2}$ y en el instante inicial $t_1 = 7$ la vía está vacía ($n(i,1) = 0 \forall i \in \{0, 1, \cdots, 5\}$. Simular el comportamiento de arco en el periodo $[7, 10]$ y representar:

- el número de vehículos totales $n(t) = \sum_{i=1}^{5} n_i(t)$ en el arco en función del tiempo y
- el flujo de salida del arco en función del tiempo (esto es $q_5(t)$).

2.2 CMT con semáforo. Supongamos que al final del arco hay instalado un semáforo que limita lel flujo saliente en función del tiempo. Cuando el semáforo está en verde la capacidad máxima del flujo saliente de dicha celda es 3000 veh./h y cuando está en rojo el flujo saliente es 0 veh./h. Supongamos que cuando $t = 7$ el semáforo inicia su ciclo en verde. El ciclo del semáforo es 3 minutos en verde y luego 1 minuto para las fases ámbar-rojo. Programa en Matlab la función función:

$$\text{Semaforo}(t) := \begin{cases} 3000 & \text{si el semáforo está en verde en } t \\ 0 & \text{si el semáforo está en rojo en } t \end{cases}$$

Incorpora el semáforo en el segmento reemplazando la relación de flujo saliente de la celda 5 por

$$q_5(t) = \text{mín}\,\{Q(k_5(t)), \text{Semáforo}(t)\} \tag{17}$$

Repite el apartado anterior para esta nueva situación. Para poder comparar cómo afecta el semáforo al tráfico dibuja los resultados de este apartado encima del anterior. Esto es, realiza una gráfica en la que se observe el número de vehículos en función del tiempo con y sin semáforo y otra idéntica pero para el flujo saliente.

HITO 3: Modelización de flujo en una red.

Para extender el CMT de un arco a una red de autovías se requiere modelar las celdas que actúan como intersecciones, ver la ilustración de la figura 8. Simplificaremos la modelización asumiendo que todos los vehículos tienen el mismo origen y destino. Los mecanismos son exactamente igual que anteriormente sólo que aparecen ciertas modificaciones en el flujo entrante o saliente a la celdas intersección.

[1] **Nota sobre programación.** La simulación del sistema se realiza en ciertos instantes $t_1, t_2, t_3, \cdots$ y se almacenan en un vector t

$$t(1) = t_1 \tag{15}$$

$$t(j+1) = t_{j+1} = t(j) + \Delta t \tag{16}$$

Si queremos almacenar las variables $k_i(t_j), q_i(t_j), n_i(t_j)$ podemos considerar las matrices $k(i,j), q(i,j), n(i,j)$ conteniendo los valores $k(i,j) = k_i(t_j), q(i,j) = q_i(t_j), n(i,j) = n_i(t_j)$.

También notar que en Matlab la primera posición de un vector es la 1 y expresiones como $q(0,j)$ produce un error.

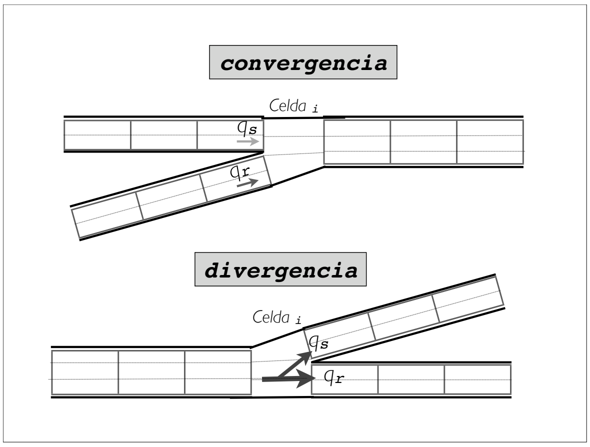

Figura 8: Intersecciones

En el caso que dos autovías confluyan en una sola, el flujo de entrada a la celda intersección i es calculado de forma diferente. La idea es que si el flujo entrante no puede ser ubicado en la celda i la distribución del flujo sobrante entre las dos autovías se realiza directamente proporcional al flujo que desea entrar. El primer paso es calcular estas fracciones de flujos que desean entrar:

$$Q_s(t) := Q(k_s(t)) \tag{18}$$

$$Q_r(t) := Q(k_r(t)) \tag{19}$$

$$f_s(t) := \frac{Q(k_s(t))}{Q(k_s(t)) + Q(k_r(t))} \text{(proporción de flujo proviniente de la celda } s\text{)} \tag{20}$$

$$f_r(t) := \frac{Q(k_r(t))}{Q(k_s(t)) + Q(k_r(t))} \text{(proporción de flujo proviniente de la celda } r\text{)} \tag{21}$$

Lo que conduce a que el flujo saliente de las celdas s y r se calcula por:

$$q_s(t) = \text{mín}\left\{Q_s(t) + Q_r(t), \frac{\tilde{k}_{\max}L - n_i(t)}{\Delta t}\right\} f_s(t) \tag{22}$$

$$q_r(t) = \text{mín}\left\{Q_s(t) + Q_r(t), \frac{\tilde{k}_{\max}L - n_i(t)}{\Delta t}\right\} f_r(t) \tag{23}$$

En este caso las ecuación de evolución para la celda i queda

$$n_i(t + \Delta t) = n_i(t) + [q_s(t) + q_r(t) - q_i(t)]\Delta t \tag{24}$$

En el caso de una divergencia (bifurcación) asumiremos dos funciones $p_s(t)$ y $p_r(t)$ que nos da la proporción de flujo que toma el desvío s o el r en cada instante t. Obviamente (en el caso de la figura) se debe cumplir $p_s(t) + p_r(t) = 1$ para que se conserve el flujo. Aplicamos los mismos mecanismos para el flujo entrante a las celdas s y r pero teniendo en cuenta que solo entra en cada uno de ellos su fracción correspondiente

$$\tilde{q}_s(t) = \text{mín}\left\{Q(k_i(t))p_s(t), \frac{\tilde{k}_{\max}L - n_s(t)}{\Delta t}\right\} \tag{25}$$

$$\tilde{q}_r(t) = \text{mín}\left\{Q(k_i(t))p_r(t), \frac{\tilde{k}_{\max}L - n_r(t)}{\Delta t}\right\} \tag{26}$$

$$q_i(t) = \tilde{q}_s(t) + \tilde{q}_r(t) \tag{27}$$

En este caso las ecuaciones de evolución para las celdas s y r quedan

$$n_s(t+\Delta t) = n_s(t) + [\tilde{q}_s(t) - q_s(t)]\Delta t \tag{28}$$

$$n_r(t+\Delta t) = n_r(t) + [\tilde{q}_r(t) - q_r(t)]\Delta t \tag{29}$$

Considérese la red de la figura 9. Supongamos que esta red está compuesta por 28 celdillas con las mismas características que en el hito 2. Al tener una topología de red, el dibujo es necesario para saber que celda/s le anteceden a una dada y cual/es son las que le precede/n.

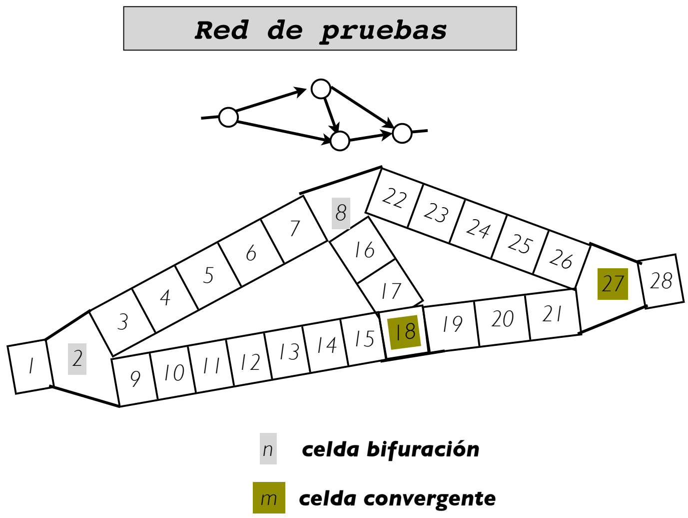

Figura 9: Red de pruebas

Además es necesario esta información para saber cuales son celdas intersección. Para que la información sobre este problema test esté completa tenemos que definir los porcentajes de divergencia en cada celda bifurcación:

$$\text{Celda } 2 \rightarrow p_3(t) = 0{,}6, \quad p_9(t) = 0{,}4 \tag{30}$$

$$\text{Celda } 8 \rightarrow p_{22}(t) = 0{,}3, \quad p_{16}(t) = 0{,}7 \tag{31}$$

y supondremos que la demanda de tráfico viene dada por la expresión

$$e(t) = 4000e^{-(t-8)^2} + 8000 * e^{-(t-13)^2} \text{ con } t \in [7, 18] \tag{32}$$

3.1 Simulación de una red. Simular la anterior red en el periodo $[7, 18]$ y representar el flujo saliente de la red (celdilla 28) en función del tiempo. Representar gráficamente el número de vehículos en las celdillas 18 y 27 en función del tiempo.

HITO 4: Opcional

Este hito es opcional y su realización se valora con puntos adicionales a la calificación máxima. Este hito está abierto a la creatividad, ilusión y tiempo disponible de cada alumno. Se trata de introducir alguna mejora a la modelización de los hitos anteriores. Esta mejora es la que cada cual estime oportuna. A título de ejemplo se puede considerar que se trata de una red de ordenadores y los nodos divergencia simulan el enrutamiento de los paquetes de información de la red. En este caso se puede desarrollar un procedimiento para optimizar las funciones

$$\text{Celda } 2 \to p_3(t), p_9(t) \tag{33}$$
$$\text{Celda } 8 \to p_{22}(t), p_{16}(t) \tag{34}$$

para que la transmisión de los paquetes (el flujo) se produzca lo más rápido posible. Un segundo ejemplo puede consistir en desarrollar procedimientos para la visualización de la propagación del flujo, o para ilustrar como las colas de los vehículos (si se producen) se propagan hacia atrás.