

Simulación de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz usando el método de volúmenes finitos en Python

Daniela María Infante Huertas (dinfanteh@unal.edu.co), Miguel Niño Foneca (mninof@unal.edu.co), Juliana Prada S. (jupradas@unal.edu.co), Maria Ximena Rojas H. (marojashe@unal.edu.co)

1. INTRODUCCIÓN

La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (IKH) es un fenómeno que se produce en la interfase entre dos fluidos, con diferentes densidades y diferentes velocidades paralelas entre sí, [1] nombrada así en honor a Lord Kelvin y a Hermann von Helmholtz, quienes fueron las primeras personas en estudiar este fenómeno.

La elección de dicha interacción como objeto de estudio de este proyecto se basa en su consideración como un tema de interés fundamental, dado que constituye una de las inestabilidades principales estudiadas en los cursos de fluidos dentro de los programas académicos de Física. Como se trata de un ejemplo esencial, la aproximación analítica a su solución es conocida, asumiendo que ambos fluidos son ideales. [1] Pero además es un tema que resulta de interés computacional al tratarse de un fenómeno altamente caótico. Como la teoría de fluidos se fundamenta en el estudio y solución de diferentes ecuaciones diferenciales parciales (EDP), es un tema susceptible de ser estudiado numéricamente mediante simulaciones computacionales.

Debido a la falta de acceso a los códigos fuente de la librería OpenLB en C++, inicialmente propuesta para simular la inestabilidad en la primera versión del proyecto, se tomó la decisión de modificar tanto el método numérico como el lenguaje de programación. En primer lugar, se priorizó la capacidad de desarrollar el código de simulación desde cero, utilizando las herramientas vistas en clase, lo que motivó el cambio en el método numérico. En segundo lugar, se buscó mayor agilidad en la construcción del código, dado que el tiempo era un factor limitante en la elaboración de esta segunda versión del proyecto. Por esta razón, se optó por reemplazar C++ por Python.

En la sección final del documento, se presentan en detalle los obstáculos encontrados durante la ejecución de la primera versión del proyecto, junto con la identificación precisa de los errores cometidos en la presentación de dicha versión.

2. MARCO TEÓRICO [1]

En este trabajo se analiza una versión simple de la IKH en dos dimensiones (x, y). Para ello, se consideran dos fluidos con profundidad infinita, ubicados uno sobre el otro y cada uno con velocidad horizontal U y densidad ρ distintas. La interfase sin grosor entre dichos fluidos tiene lugar en $y = \zeta(x, t)$ tal como se muestra en la figura (1).

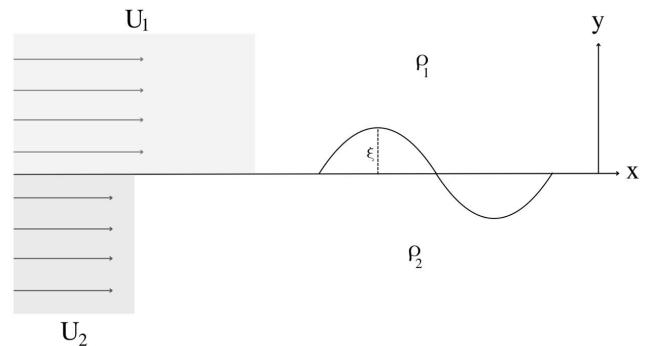


Figura 1: Representación del estado inicial del sistema [1]

El potencial total para cada uno de los fluidos se puede escribir como $\Phi_1 = U_1 x + \phi_1$ y $\Phi_2 = U_2 x + \phi_2$ donde ϕ_1 y ϕ_2 representan los potenciales de perturbación. Estos potenciales deben cumplir la ecuación de Laplace, ya que los potenciales totales la cumplen.

Las condiciones de frontera para este problema son $\phi_1 \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow \infty$, $\phi_2 \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow -\infty$, las presiones de los fluidos deben ser iguales en la interfase ($p_1 = p_2$ en $y = \zeta(x, t)$) y la velocidad de ambos fluidos debe ser igual en la interfase ($\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_s = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_2$ en $y = \zeta(x, t)$) donde \mathbf{n} y \mathbf{U}_s son el vector normal y la velocidad en la interfase.

Al reescribir la última condición de frontera recordando las definiciones de Φ_1 , Φ_2 y sustituyendo el vector normal a la superficie, se tiene la siguiente expresión

$$-\left(U_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\left(U_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}$$

Al linealizar esta expresión, la condición de frontera se convierte en

$$-U_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -U_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad (1)$$

Ahora, considerando la ecuación de Bernoulli para cada uno de los fluidos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + gy = C_1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + gy = C_2$$

Y recordando que las presiones deben ser iguales en la interfase, al despejar dichas presiones de las expresiones anteriores e igualarlas se obtiene

$$\rho_1 \left(C_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} |\nabla \Phi_1|^2 - g\zeta \right) = \rho_2 \left(C_2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} |\nabla \Phi_2|^2 - g\zeta \right) \quad (2)$$

Al considerar los fluidos sin perturbación, la expresión anterior es

$$\rho_1 \left(C_1 - \frac{1}{2} U_1^2 \right) = \rho_2 \left(C_2 - \frac{1}{2} U_2^2 \right) \quad (3)$$

Restando 2 de 3 y linealizando la expresión al no considerar los términos cuadráticos cuando $y = 0$ la condición de frontera se convierte en

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + g\zeta \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\zeta \right) \quad (4)$$

Ahora, suponiendo que la perturbación se comporta de manera oscilatoria, se aplica el método de los modos normales y se consideran las siguientes soluciones oscilatorias para ϕ_1 , ϕ_2 y ζ

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, t) &= A_1(y) e^{ik(x-ct)} \\ \phi_2(x, y, t) &= A_2(y) e^{ik(x-ct)} \\ \zeta &= \zeta_0 e^{ik(x-ct)} \end{aligned}$$

Recordando que ϕ_1 y ϕ_2 cumplen la ecuación de Laplace, al sustituir estas soluciones en dicha ecuación se obtiene que las funciones $A(y)$ son de la forma $A(y) = A_{\pm} e^{\pm ky}$. El signo que toma la solución depende de las condiciones de frontera existentes para ϕ_1 y ϕ_2 cuando y tiende a infinito o a menos infinito. Por lo anterior, las soluciones para ϕ_1 y ϕ_2 son $\phi_1 = A_- e^{ik(x-ct)-kz}$ y $\phi_2 = A_+ e^{ik(x-ct)+kz}$.

Al sustituir estas expresiones en 1 y 4 respectivamente se obtiene lo siguiente

$$-iU_1 k \zeta_0 - kA_- = -ikc \zeta_0 = -iU_2 k \zeta_0 + kA_+ \quad (5)$$

$$\rho_1(-ikcA_- + ikU_1 A_- + g\zeta_0) = \rho_2(-ikcA_+ + ikU_2 A_+ + g\zeta_0) \quad (6)$$

A partir de la expresión 5 se pueden obtener kA_- y kA_+ en términos de la constante ζ_0 . Al sustituir estos términos en la ecuación 6 se obtiene lo siguiente

$$\rho_1(-(-ikc + ikU_1)^2 + gk) = \rho_2((-ikc + ikU_2)^2 + gk)$$

Note que esta expresión corresponde a una ecuación cuadrática para c , cuyas soluciones están dadas por

$$c = \frac{\rho_2 U_2 + \rho_1 U_1}{\rho_2 + \rho_1} \pm \left[\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right) \frac{g}{k} - \frac{\rho_2 \rho_1}{(\rho_2 + \rho_1)^2} (U_2 - U_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

El coeficiente c obtenido anteriormente representa la velocidad de fase de la perturbación. En general, este coeficiente es un número complejo y el valor que toma su componente imaginaria da lugar a la inestabilidad; es decir, si esta componente es menor o igual a cero no existirá perturbación en el sistema, pero si es mayor que cero habrá lugar para dicha perturbación.

A partir de lo anterior y analizando la expresión 7 se observa que la componente imaginaria del coeficiente c aparece cuando

la diferencia entre las velocidades U_1 y U_2 es lo suficientemente grande, la diferencia de densidades es lo suficientemente pequeña o el número de onda es lo suficientemente grande para satisfacer la siguiente desigualdad.

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \frac{g}{k} &< \frac{\rho_2 \rho_1}{(\rho_2 + \rho_1)^2} (U_2 - U_1)^2 \\ g(\rho_2^2 - \rho_1^2) &< k \rho_1 \rho_2 (U_2 - U_1)^2 \end{aligned}$$

3. MÉTODOS NUMÉRICOS Y TÉCNICAS IMPLEMENTADAS

En la búsqueda de mejorar la estabilidad de la simulación y obtener una interacción más precisa y cercana a la realidad, se desarrolló principalmente el método numérico que se describe a continuación, junto con otras técnicas computacionales complementarias. Estas herramientas fueron seleccionadas y adaptadas al fenómeno con el objetivo de obtener resultados físicamente consistentes.

3.1. MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS [4]

El método de volúmenes finitos (MVF) es una técnica teórico-computacional eficaz para simular una variedad de fenómenos fluido-dinámicos, termodinámicos y magneto-hidrodinámicos. Se basa, fundamentalmente, en la discretización de las leyes de conservación en su forma integral, aplicadas sobre volúmenes de control locales. Este enfoque ofrece una aproximación precisa para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes a escala macroscópica, garantizando la conservación de propiedades físicas esenciales como la masa, el momento y la energía a nivel de celda.

3.1.1. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES [2]

En el método de volúmenes finitos (MVF), el dominio de simulación se subdivide en pequeños volúmenes de control, que actúan como componentes de la malla del sistema físico representado. Las leyes de conservación se expresan mediante integrales sobre estos volúmenes, lo que posibilita la evaluación del flujo de propiedades físicas a través de las fronteras de cada celda. La formulación general de la ley de conservación para una cantidad U en un volumen de control V se puede expresar como:

$$\frac{d}{dt} \int_V U dV + \oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0$$

La integral en el tiempo puede ser discretizada utilizando un esquema explícito, a partir de las dimensiones de cada volúmen de control.

$$\int_V U dV \approx U_i V_i$$

Donde U_i es el valor promedio de la variable U en la celda i. La integral sobre la superficie, también puede ser aproximada como una suma de flujos a través de las fronteras:

$$\oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} \approx \sum_j F_{ij} A_j$$

Al discretizar en el tiempo, la derivada temporal se puede aproximar usando forward difference:

$$\frac{d}{dt}(U_i V_i) = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}$$

Sustituyendo los términos por su versión discretizada, la ecuación de conservación se convierte en:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_j F_{ij} A_j$$

3.1.2. CÁLCULO DE FLUJOS EN LAS FRONTERAS

El cálculo de los flujos en cada pared del volumen de control es fundamental para garantizar la conservación de las variables a estudiar. En el MVF, se utilizan diferentes esquemas para evaluar los flujos, siendo uno de los más comunes el cálculo de los valores promedios en las celdas adyacentes, así el flujo a través de una pared puede expresarse como:

$$f_{AB} = \frac{1}{2}(f_A + f_B) - \frac{1}{2}c(U_B - U_A)$$

Donde c representa la velocidad de propagación de la información a través del flujo.

3.1.3. CONSIDERACIONES GENERALES

Para llevar a cabo la discretización, se considera el tamaño de la malla y el paso temporal. El tamaño de la malla debe elegirse de manera que se cumpla con la condición de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL), que asegura la estabilidad de la simulación:

$$\frac{U \Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Resulta importante destacar que, en la implementación del método para simulaciones de fluidos, no se utiliza ningún modelo de turbulencia, lo que implica una simulación numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes. Esto significa que el comportamiento del flujo, incluidas las inestabilidades que puedan surgir, depende enteramente de las condiciones iniciales impuestas en la simulación. De este modo, las inestabilidades en el flujo se presentan de forma natural, sin necesidad de introducir términos adicionales para modelar fenómenos turbulentos.

3.2. MÉTODO PREDICTOR-CORRECTOR [5]

El algoritmo Predictor-Corrector es una técnica iterativa utilizada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias numéricamente, combinando dos aproximaciones para mejorar la precisión: una predicción inicial y una corrección posterior. Este enfoque se utiliza cuando se busca mayor estabilidad y precisión en la solución numérica, especialmente en problemas donde las soluciones varían rápidamente o implican un cálculo complejo.

3.2.1. ETAPA DE PREDICCIÓN (PREDICTOR)

En esta primera etapa, se realiza una estimación inicial del valor de la solución en el siguiente paso temporal utilizando un método explícito, como el método de Euler. La predicción se hace a partir de la información disponible en el instante actual t_n . Para un problema de valor inicial $y' = f(y, t)$, la predicción puede expresarse como:

$$y_{\text{pred}} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

Donde h es el tamaño del paso de tiempo, y_n es el valor de la variable conocido en el paso actual y $f(t_n, y_n)$ es la derivada en ese punto.

3.2.2. ETAPA DE CORRECCIÓN (CORRECTOR)

Luego de obtener la predicción por los métodos clásicos, se aplica un método más preciso, generalmente implícito, para corregir el valor predicho. En este paso, se calcula la pendiente utilizando tanto el valor actual como el valor predicho. Una fórmula comúnmente utilizada en esta etapa es la ecuación asociada a la regla del trapecio.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{\text{pred}})]$$

Esta expresión promedia la pendiente en el punto actual t_n y en el punto siguiente t_{n+1} , a partir del valor predicho y_{pred} .

3.3. CORRECCIÓN DIFUSIVA

La corrección difusiva en esquemas numéricos se implementa mediante un término que controla la velocidad de onda máxima, la cual depende tanto de la velocidad del sonido como de la velocidad del flujo. Este término se comporta como una corrección difusiva de tipo Rusanov, aplicada para suavizar las soluciones en presencia de discontinuidades o gradientes abruptos. Las variables físicas en estudio se corrigen a través de un término de difusión que incorpora las diferencias entre estas variables en las paredes de las celdas adyacentes. El factor de corrección difusiva actúa como un indicador de la velocidad de propagación de las perturbaciones en el sistema, multiplicando las diferencias en las paredes de las celdas para añadir difusión numérica. Este enfoque explícito contribuye a suavizar los gradientes y a mitigar la aparición de oscilaciones espurias en la solución, garantizando la estabilidad del esquema numérico.

4. PROCEDIMIENTO Y RESULTADOS

Para realizar el análisis de la inestabilidad, se consideraron las siguientes ecuaciones diferenciales correspondientes a la conservación de la masa, el momentum lineal por componentes y la energía para un gas ideal, donde e , ρ , v_x , v_y y P corresponden a la densidad de energía, densidad de masa, velocidad en dirección x , velocidad en dirección y y presión, respectivamente.

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = - \frac{dp}{dt} \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \nabla \cdot (\rho v_x^2 + P, \rho v_x v_y) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y) + \nabla \cdot (\rho v_x v_y, \rho v_y^2 + P) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot ((\rho e + P)v_x, (\rho e + P)v_y) = 0 \quad (11)$$

El primer paso para discretizar estas ecuaciones consiste en realizar la integral sobre el área de las celdas definidas. Realizando este procedimiento, se obtienen las ecuaciones 12 13, 14 y 15.

$$\frac{d}{dt} \int \rho dA + \int \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \cdot dA = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \int \rho v_x dA + \int \nabla \cdot (\rho v_x^2 + P, \rho v_x v_y) \cdot dA = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \int \rho v_y dA + \int \nabla \cdot (\rho v_x v_y, \rho v_y^2 + P) \cdot dA = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \int \rho e dA + \int \nabla \cdot ((\rho e + P)v_x, (\rho e + P)v_y) \cdot dA = 0 \quad (15)$$

Las integrales de superficie sobre las divergencias se pueden reescribir como integrales de flujo en una dimensión utilizando el teorema de la divergencia y las integrales que actúan sobre derivadas temporales se pueden desarrollar como se muestra a continuación

$$\frac{dM}{dt} + \int \rho(v_x, v_y) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{dm_x}{dt} + \int (\rho v_x^2 + P, \rho v_x v_y) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{dm_y}{dt} + \int (\rho v_x v_y, \rho v_y^2 + P) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{dE}{dt} + \int ((\rho e + P)v_x, (\rho e + P)v_y) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (19)$$

Donde M , m_x , m_y y E corresponden a la masa, el momentum lineal en dirección x , el momentum lineal en dirección y y la energía del fluido respectivamente.

En un siguiente paso, las derivadas temporales se discretizan con el método de forward difference y las integrales de camino se discretizan analizando el flujo sobre las paredes de la celda (i, j) cuyas posiciones son $(i + 1/2, j)$, $(i - 1/2, j)$, $(i, j + 1/2)$ y $(i, j - 1/2)$. Así, las ecuaciones 16 17, 18 y 19 se convierten respectivamente en lo siguiente:

Discretización para la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{M_{(i,j)}^{(n+1)} - M_{(i,j)}^{(n)}}{\Delta t} = \Delta y A_1 + \Delta x B_1$$

$$A_1 = \rho_{(i-1/2,j)}^{(n+1/2)} v_{x(i-1/2,j)}^{(n+1/2)} - \rho_{(i+1/2,j)}^{(n+1/2)} v_{x(i+1/2,j)}^{(n+1/2)}$$

$$B_1 = \rho_{(i,j-1/2)}^{(n+1/2)} v_{x(i,j-1/2)}^{(n+1/2)} - \rho_{(i,j+1/2)}^{(n+1/2)} v_{x(i,j+1/2)}^{(n+1/2)}$$

Discretización para la ecuación de conservación del momentum lineal en dirección x :

$$\frac{m_{x(i,j)}^{(n+1)} - m_{x(i,j)}^{(n)}}{\Delta t} = \Delta y A_2 + \Delta x B_2$$

$$A_2 = C_2 - D_2$$

$$B_2 = E_2 - F_2$$

$$C_2 = \rho_{(i-1/2,j)}^{(n+1/2)} v_{x(i-1/2,j)}^{2(n+1/2)} + P_{(i-1/2,j)}^{(n+1/2)}$$

$$D_2 = \rho_{(i+1/2,j)}^{(n+1/2)} v_{x(i+1/2,j)}^{2(n+1/2)} + P_{(i+1/2,j)}^{(n+1/2)}$$

$$E_2 = \rho_{(i,j-1/2)}^{(n+1/2)} v_{x(i,j-1/2)}^{(n+1/2)} v_{y(i,j-1/2)}^{(n+1/2)}$$

$$F_2 = \rho_{(i,j+1/2)}^{(n+1/2)} v_{x(i,j+1/2)}^{(n+1/2)} v_{y(i,j+1/2)}^{(n+1/2)}$$

Discretización para la ecuación de conservación del momentum lineal en dirección y :

$$\frac{m_{y(i,j)}^{(n+1)} - m_{y(i,j)}^{(n)}}{\Delta t} = \Delta y A_3 + \Delta x B_3$$

$$A_3 = C_3 - D_3$$

$$B_3 = E_3 - F_3$$

$$C_3 = \rho_{(i-1/2,j)}^{(n+1/2)} v_{x(i-1/2,j)}^{(n+1/2)} v_{y(i-1/2,j)}^{(n+1/2)}$$

$$D_3 = \rho_{(i+1/2,j)}^{(n+1/2)} v_{x(i+1/2,j)}^{(n+1/2)} v_{y(i+1/2,j)}^{(n+1/2)}$$

$$E_3 = \rho_{(i,j-1/2)}^{(n+1/2)} v_{y(i,j-1/2)}^{2(n+1/2)} + P_{(i,j-1/2)}^{(n+1/2)}$$

$$F_3 = \rho_{(i,j+1/2)}^{(n+1/2)} v_{y(i,j+1/2)}^{2(n+1/2)} + P_{(i,j+1/2)}^{(n+1/2)}$$

Discretización para la ecuación de conservación de la energía:

$$\frac{E_{(i,j)}^{(n+1)} - E_{(i,j)}^{(n)}}{\Delta t} = \Delta y A_4 + \Delta x B_4$$

$$A_4 = C_4 - D_4$$

$$B_4 = E_4 - F_4$$

$$C_4 = \rho_{(i-1/2,j)}^{(n+1/2)} e_{(i-1/2,j)}^{(n+1/2)} v_{x(i-1/2,j)}^{(n+1/2)}$$

$$D_4 = \rho_{(i+1/2,j)}^{(n+1/2)} e_{(i+1/2,j)}^{(n+1/2)} v_{x(i+1/2,j)}^{(n+1/2)}$$

$$E_4 = \rho_{(i,j-1/2)}^{(n+1/2)} e_{(i,j-1/2)}^{(n+1/2)} v_{x(i,j-1/2)}^{(n+1/2)}$$

$$F_4 = \rho_{(i,j+1/2)}^{(n+1/2)} e_{(i,j+1/2)}^{(n+1/2)} v_{x(i,j+1/2)}^{(n+1/2)}$$

Note que la discretización de los coeficientes A y B para cada ecuación se evalúa en saltos de $\frac{\Delta t}{2}$ ya que se utiliza el método Predictor-Corrector mencionado en la sección 3.2.

Una vez discretizadas las ecuaciones de conservación, se ajustaron las dimensiones de la malla sobre la cual se realizaría la simulación, de tal forma que sus proporciones fueran similares a las de la malla utilizada para realizar la simulación en

OpenLB en la primera versión entregada, se definió el intervalo de tiempo sobre el cuál se trabajaría y el valor del salto de tiempo. Con estos parámetros definidos y la discretización de las ecuaciones a utilizar, se inició el proceso de construcción de la simulación.

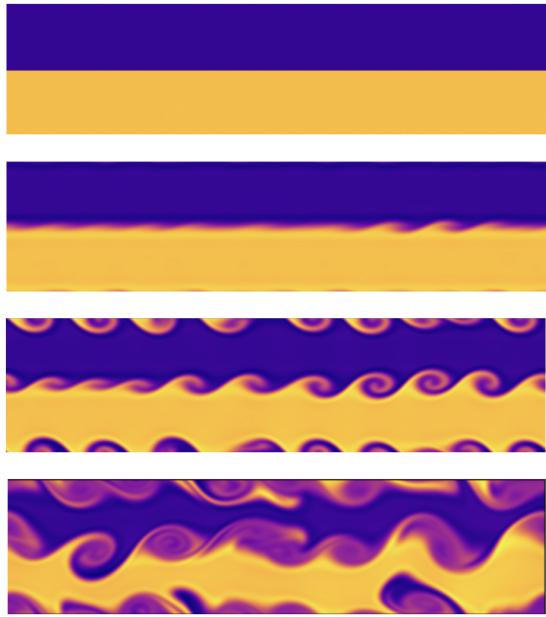


Figura 2: Primera simulación de la versión final

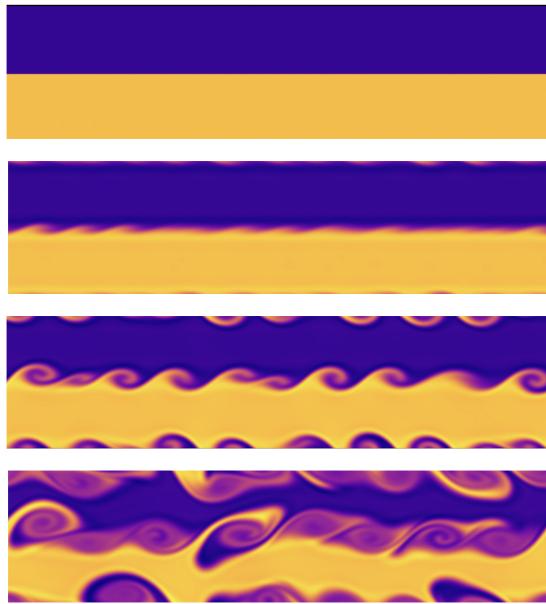


Figura 3: Segunda simulación de la versión final

Los resultados mostrados en 2, 3 y 4 corresponden a tres simulaciones realizadas, donde se observa el desarrollo del fenómeno de inestabilidad de Kelvin-Helmholtz bajo las condiciones establecidas. Cabe destacar que los resultados pueden

variari entre simulaciones, como se evidencia en cada figura, dado que el ruido introducido en las densidades iniciales, responsable de desencadenar la inestabilidad, es aleatorio. Esta variabilidad en el ruido genera diferencias en el comportamiento de la inestabilidad, especialmente en la longitud de onda y la cantidad de picos formados. Sin embargo, en todas las simulaciones se conserva el patrón característico del fenómeno.

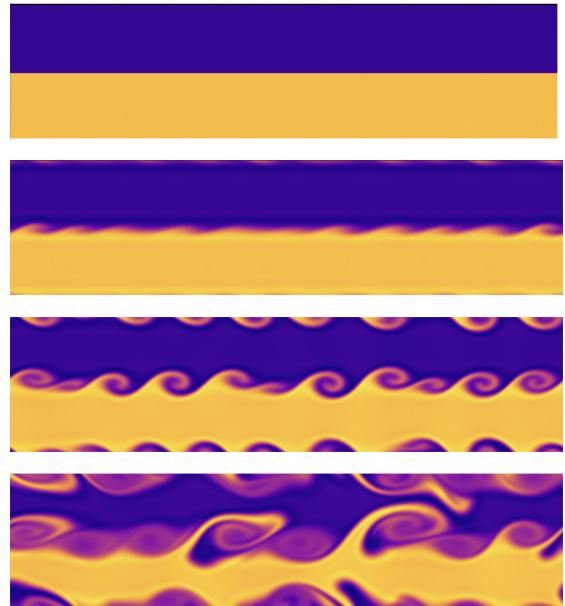


Figura 4: Tercera simulación de la versión final

5. ANÁLISIS DE VERSIONES

En la primera entrega del proyecto, se presentó como proyección la implementación de un método numérico similar al método de diferencias finitas para reproducir el fenómeno de la inestabilidad. Por ello, la segunda entrega consistió en desarrollar un esquema con una aproximación similar, pero utilizando el método de volúmenes finitos, a fin de mejorar la simulación. En esta sección se abordarán las diferencias entre ambas entregas, identificando los errores presentes en la primera versión y describiendo cómo fueron subsanados en la segunda.

5.1. PRIMERA ENTREGA

El principal obstáculo identificado en la primera versión del proyecto fue la falta de acceso a los códigos primarios de la librería OpenLB. Esta limitación impidió comprender en detalle qué ecuaciones se estaban resolviendo, qué modelos iterativos se utilizaban y cómo se implementaba el método de Lattice Boltzmann en su totalidad. Como resultado, la simulación se desarrolló sin una comprensión clara de los fundamentos numéricos. Además, se introdujo un término artificial de fuerza en el código modificado, el cual carecía de sentido físico. Esto comprometió la consistencia de la simulación

con el comportamiento real del sistema, generando resultados poco fiables.

5.2. SEGUNDA ENTREGA

En la segunda versión del proyecto, se optó por simular el comportamiento de gases que se mueven con diferentes velocidades, en lugar de líquidos, debido a la posibilidad de discretizar la ecuación de conservación de la energía mediante una ecuación de estado sencilla. Esta modificación permitió un control total sobre las ecuaciones a resolver, en contraste con la primera versión. Adicionalmente, el uso de Python facilitó la implementación de los conocimientos adquiridos durante el semestre, eliminando la necesidad de familiarizarse con una librería compleja como OpenLB. A su vez, trabajar con unidades físicas conocidas, en lugar de las unidades de Lattice, hizo más intuitiva la aplicación de las condiciones iniciales y las densidades de los fluidos, mejorando la claridad y consistencia del modelo.

6. PROYECCIONES

Como proyección futura de este trabajo, se propone realizar un experimento que replique la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, permitiendo comparar parámetros como la longitud de onda y la cantidad de picos generados con los resultados de la simulación obtenida para diferentes densida-

des de fluidos. Dado que la réplica del fenómeno se realiza comúnmente con líquidos de distintas densidades, será necesario modificar el código para extraer dichas cantidades a partir de la discretización de ecuaciones que describan el comportamiento de líquidos. Actualmente, el código utiliza la ecuación de conservación de la energía en relación con gases ideales, lo que requerirá ajustes en la ecuación de estado para analizar correctamente el comportamiento de líquidos.

7. CONCLUSIONES

Finalizado este proyecto, se considera exitosa la reproducción del fenómeno de inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (IKH) mediante una simulación computacional. El interés principal radica tanto en su complejidad computacional como en su relevancia científica, al tratarse de uno de los fenómenos fundamentales en el estudio de fluidos. La simulación se desarrolló utilizando el método de volúmenes finitos en Python, lo que permitió aplicar de manera efectiva los conocimientos adquiridos durante el semestre sobre la solución de ecuaciones diferenciales. A través de esta aproximación, se comprobó que las condiciones físicas iniciales y de frontera, tales como las densidades de los fluidos y las diferencias de velocidad, son suficientes para generar el fenómeno de la IKH. De esta forma, se logró una comprensión detallada del fenómeno y su comportamiento bajo diferentes parámetros físicos.

REFERENCIAS

- [1] Kundu, P.; Cohen, I. & Dowling, D. (2012). *Fluid Mechanics*. Fifth Edition. Elsevier Inc.
- [2] Hirsch, C. (2007). *Numerical computation of internal and external flows* (Vol. 1, 2nd ed.). Butterworth-Heinemann.
- [3] Mocz, P. (s.f.) pmocz [Repositorio GitHub]. GitHub. <https://github.com/pmocz>
- [4] Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*. Pearson Education.
- [5] Loughborough University. (2024). *Helping Engineers Learn Mathematics (HELM) Workbooks*. Mathematics Learning Support Centre. <https://www.lboro.ac.uk/mathsls-learn>