Programación y Métodos Numéricos
Tarea 3

Profesor: Benjamín Toledo
Ayudante: Santiago Amengual

30 de Abril del 2025

Indicaciones generales de entrega

- Guarde su tarea en un archivo comprimido llamado "nombre_apellido_tarea_N.tar.bz2". Dentro del archivo debe haber una carpeta llamada "nombre_apellido_tarea_N". Dentro de esta carpeta "tarea_N", dentro de la cual, por cada problema, debe haber una subcarpeta llamada "problema_N", donde debe estar el código que resuelva dicho problema.
- La tarea debe enviarse mediante la plataforma Ucursos y dentro del plazo establecido en ella.
- Los archivos principales del código deben incluir comentarios explicativos que describan su funcionalidad de manera general. Se debe comentar el propósito de los principales elementos de su código, justificando cualquier procedimiento no trivial.
- No incluya código que no utilice y sea ordenado para facilitar la corrección.
- Todos los problemas deben, como mínimo, compilar con "make" y ejecutarse con "make run".
- Todos los métodos numéricos utilizados para cada problema deben ser implementados en una clase o template.

Problema 1:

Considere el oscilador de Van der Pol modificado por un forzamiento periódico que es descrito por el siguiente sistema:

$$\frac{dx}{dt} = y\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu\left(1 - x^2\right) y - x + A\cos\left(\omega t\right),$$

donde $\mu = 3.0$, $A = 0.05$ y $\omega = 1.0$. Considerando las condiciones iniciales $x(0) = 1.44043$ y $y(0) = -0.394709$, obtenga $x(t)$ en el intervalo $t \in [0, 8.94963]$ utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 de paso fijo, con un paso $\Delta t = 0.01$. Grafique $x(t)$ en el intervalo. Luego grafique las trayectorias en el espacio de fases, es decir, grafique $y(x)$. Por último, descarte el último 10% de los datos que obtuvo del proceso de RK4, para después interpolar los datos restantes y graficar la comparación entre los datos originales y los datos interpolados. La interpolación debe ser realizada mediante interpolación de Lagrange, spline cúbico natural y spline cúbico periódico.

Problema 2:

Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dy}{dt} = \sin(t) - y\,,$$

con $y(0) = 1.0$. Encuentre el valor de $y(t)$ dentro del intervalo $t \in [0,\, 5]$ usando un paso $\Delta t = 0.05$ usando el método de Euler y el método Predictor-Corrector basado en Euler definido de la siguiente manera: Si tenemos un sistema de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y_0$$

El procedimiento del método es el siguiente:

- **Paso predictor:** Se utiliza el método de Euler para obtener una estimación del valor de y en el siguiente paso temporal:

  $$y_{n+1}^{(p)} = y_n + \Delta t\, f(t_n, y_n)\,,$$

  donde $y_{n+1}^{(p)}$ corresponde al valor predicho para el paso $n+1$.

- **Paso corrector:** Ahora se mejora la predicción considerando el promedio de las pendientes entre los puntos (t_n, y_n) y $(t_{n+1}, y_{n+1}^{(p)})$:

  $$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(p)})\right)\,.$$

Calcule el error absoluto comparándolo con la solución analítica a la ecuación diferencial bajo las mismas condiciones iniciales. Genere una gráfica de $y(t)$ para Euler, Predictor-Corrector y la solución analítica. El error absoluto en cada instante se define como:

$$\text{Error absoluto }(t) = |y_{\text{exacta}}(t) - y_{\text{numerico}}(t)|$$

Por último, realice la gráfica del error absoluto en función del tiempo para ambos métodos (**hint:** Utilice el método de variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial y obtener la expresión para $y_{numerico}$).

Problema 3:

Considere el siguiente sistema en dos dimensiones:

$$\frac{dx}{dt} = v_x\,, \quad \frac{dv_x}{dt} = -\gamma v_x + \eta_x(t)\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y\,, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\gamma v_y + \eta_y(t)\,,$$

donde $x(t)$, $y(t)$ representan las coordenadas de una partícula, $v_x(t)$ y $v_x(t)$ representan las velocidades en cada coordenada, $\gamma = 1/2$ es el coeficiente de fricción y $\eta_x(t)$, $\eta_y(t)$ son términos aleatorios que representan fluctuaciones. Estas fluctuaciones las simularemos como números aleatorios en cada instante de tiempo t siguiendo una distribución uniforme en el intervalo $[-0.1,\, 0.1]$. Considerando las condiciones iniciales $x(0) = 0.5$, $v_x(0) = 0.0$, $y(0) = 0.5$ y $v_y(0) = 0.1$. Encuentre $x(t)$ y $y(t)$ en el intervalo $t \in [0,\, 500]$ usando el método Runge-Kutta de orden 4 de paso fijo, con $\Delta t = 0.01$. Grafique $x(t)$ y $y(t)$ en función del tiempo en el intervalo de tiempo entregado y grafique la trayectoria de la partícula en el plano $(x,\, y)$. Realice estas gráficas nuevamente pero ahora considerando una distribución gaussiana para la generación de números aleatorios.