DETERMINACIÓN DE LA ACELERACIÓN DE GRAVEDAD MEDIANTE EL USO DE UN PÉNDULO SIMPLE

Julio Pérez V.
Profesor: Benjamín Toledo
Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile,
Las Palmeras 3425, Santiago, Chile.
(Fecha: 17 de julio de 2024)

RESUMEN

El objetivo de este experimento es determinar computacionalmente el valor de la aceleración de la gravedad, g_e, utilizando datos medidos de un péndulo simple y aplicando un ajuste lineal. Para ello, se emplea una clase llamada "ajuste.h", basada en una plantilla de matrices. Mediante el ajuste lineal de los datos experimentales, se obtiene un valor para la pendiente y el intercepto, lo que permite calcular g_e. Los resultados indican que g_e es 9.31 $\frac{m}{s^2}$, con un error del 5.09 % respecto al valor aceptado por la comunidad científica. Esta discrepancia puede deberse a imprecisiones en la medición de la longitud del péndulo, el tiempo del período de oscilación, y posibles fricciones no despreciables en el sistema.

Palabras clave: Aceleración de gravedad, ajuste lineal, periodo.

I. INTRODUCCIÓN

La aceleración de la gravedad denotada por g es la manifestación de la atracción universal que impulsa los cuerpos hacia el centro de la Tierra, es la fuerza que determina el peso de los cuerpos. De acuerdo con el SI (Sistema internacional de unidades) su magnitud se mide en unidades de $[\frac{m}{s^2}]$. La aceleración de la gravedad no es la misma en todos los lugares del planeta; en los polos es de 9,83 $[\frac{m}{s^2}]$ y en el ecuador de 9,78 $[\frac{m}{s^2}]$ (Moritz, H. 1988); por convención internacional se considera el valor normalizado de g = 9,81 $[\frac{m}{s^2}]$ el cual corresponde a una latitud de 45,5° y 0 m s.n.m. (sobre el nivel medio del mar).
En este procedimiento se estudia y observa con detalle la oscilación y periodo de un péndulo con el objetivo de relacionarlos con la aceleración de gravedad y así poder hallar su valor experimental utilizando métodos numéricos.

II. MARCO TEÓRICO

Un péndulo simple, también conocido como péndulo ideal, es un sistema físico compuesto por un hilo inelástico de masa despreciable que está fijado en un extremo a un punto. En el otro extremo del hilo cuelga un objeto puntual con masa significativa. Este sistema es idealizado bajo la suposición de que no hay pérdida de energía, ya que se desprecia la resistencia del aire y cualquier fricción en el punto de suspensión. El movimiento del péndulo ocurre en dos dimensiones, describiendo una oscilación que sigue un arco de circunferencia con radio igual a la longitud del hilo, denotado como l.

Cuando el péndulo se desplaza de su posición de equilibrio, experimenta un movimiento oscilatorio debido a la acción de la fuerza gravitatoria. La ecuación que describe el movimiento angular del péndulo simple, bajo la aproximación de pequeños ángulos de oscilación (θ en radianes), es $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$, donde g es la aceleración debido a la gravedad. Para pequeñas oscilaciones, $\sin(\theta) \approx \theta$, simplificando la ecuación a una forma lineal $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$, que tiene soluciones sinusoidales. Esto implica que el período de oscilación, T, es aproximadamente $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, independientemente de la amplitud de la oscilación.

Este modelo es fundamental en la física clásica y tiene aplicaciones prácticas en la medición del tiempo, así como en la comprensión de sistemas oscilatorios en general. Además, estudios más avanzados pueden incorporar factores como el efecto de la resistencia del aire y la extensión del hilo, llevando a modelos más complejos y realistas.

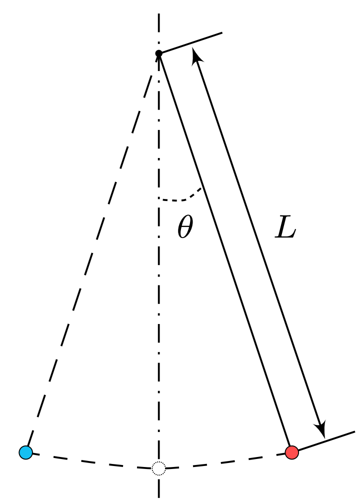

Figura 1. En esta imagen se observa un diagrama el cual representa el sistema. Podemos observar la masa m, atada a un hilo de longitud L, representada por la bolita roja (la bolita azul representa la misma masa pero en otro instante de tiempo).

Como se aprecia en la Figura 1, se observa el diagrama de un péndulo simple, del cual podemos hallar su ecuación de movimiento mediante el *Lagrangiano*, pues recordemos que

$$\mathcal{L} = T - V \tag{1}$$

con $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t)$, donde T y V representan la energía cinética y potencial respectivamente, las cuales para este sistema vienen dadas por

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$
$$V = -mgl\cos\theta$$

Luego usando esto en (1) se obtiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \tag{2}$$

Enseguida, por Euler-Lagrange se tiene lo siguiente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{3}$$

Calculando las derivadas y reemplazando en la ecuación (3) se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) - mgl\sin\theta = 0 \tag{4}$$

Simplificando y reordenando se obtiene la ecuación de movimiento para el péndulo simple, dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \tag{5}$$

Donde g corresponde a la aceleración de gravedad.

De la Serie de Taylor se sabe que $\sin\theta$ puede expresarse como

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

Por lo que, para resolver la eq. (5), se tomará el caso en que $\theta \ll 1$ [rad], así:

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

Reemplazando en la ecuación (5)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Dado que $\theta \ll 1$, $\theta(0) = \theta_i$ y $\dfrac{d(0)}{dt} = 0$, la solución es

$$\theta(t) = \theta_i \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \tag{6}$$

El movimiento será un movimiento armónico simple, donde θ_i será la amplitud de la oscilación. Luego, el **período** del movimiento (el tiempo que demora en ocurrir una oscilación completa) es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7}$$

donde T es independiente de θ_i.

A continuación, se linealiza la ecuación para usarla en el experimento

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l \tag{8}$$

Esta ecuación es utilizada en el experimento para determinar el valor experimental de g, considerando l como variable independiente y T^2 variable dependiente.

Cabe destacar que, como el movimiento del péndulo describe un arco que es parte de una circunferencia, el período también puede escribirse como:

$$T = \frac{t}{n_t} \tag{9}$$

Donde t es el tiempo y n_t es la cantidad de oscilaciones que ocurren durante ese tiempo.

III. METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

i. MONTAJE EXPERIMENTAL

El clavo se martilla en la pared a una altura sin especificar, lo importante es que esta sea mayor a los 80 [cm] $\pm$ [0,01] del largo del hilo. Justo debajo del clavo, una huincha de medir de 150 [cm] de largo va pegada a la pared para poder medir la longitud del hilo, el cual, de un extremo, va amarrado al clavo, y del otro, a la canica de diámetro 1,7 [cm] $\pm$ [0,01] , formando el péndulo; desde el mismo clavo, un trozo de cinta adhesiva va pegado a la pared en forma diagonal, formando un ángulo con la huincha, en este caso, el ángulo será cercano a los 10°, (medidos con un transportador), esto para tener una inclinación constante al momento de soltar el péndulo, sin importar el largo del hilo. El largo inicial del hilo del péndulo será 80 [cm] e irá acortándose cada 4 [cm] hasta llegar a 40 [cm].

El péndulo se desplaza hasta donde se encuentra la cinta adhesiva, y cuando su hilo se encuentre totalmente extendido, este se libera y con un cronómetro se toma el tiempo de cuánto demora en hacer una oscilación.

Luego, el hilo se acorta enrollándolo en el mismo clavo donde se encontraba amarrado, así no será necesario cortarlo y amarrarlo nuevamente al clavo; se repite el procedimiento anterior 10 veces, hasta que el largo del hilo sea 40 [cm].

IV. TRATAMIENTO DE DATOS

Para los diferentes largos del hilo, considerando n_t=1 en todos los casos, se obtiene la siguiente tabla:

l[m] $\pm$ [0,001]	T[s]
0.800	1.72 $\pm$ [0.02]
0.760	1.63 $\pm$ [0.03]
0.720	1.59 $\pm$ [0.05]
0.680	1.55 $\pm$ [0.04]
0.640	1.53 $\pm$ [0.03]
0.600	1.45 $\pm$ [0.02]
0.560	1.38 $\pm$ [0.03]
0.520	1.33 $\pm$ [0.03]
0.480	1.25 $\pm$ [0.05]
0.440	1.16 $\pm$ [0.03]
0.400	1.13 $\pm$ [0.03]

Tabla I. Período de oscilación en función del largo del hilo del péndulo.

Para utilizar las variables establecidas en el marco teórico (eq. (8)), es necesario manipular los datos, resultando la siguiente tabla

l[m] $\pm$ [0,001]	$T^2[s^2]$
0.800	2.96 $\pm$ [0.07]
0.760	2.66 $\pm$ [0.09]
0.720	2.53 $\pm$ [0.16]
0.680	2.40 $\pm$ [0.12]
0.640	2.34 $\pm$ [0.92]
0.600	2.10 $\pm$ [0.06]
0.560	1.90 $\pm$ [0.83]
0.520	1.77 $\pm$ [0.79]
0.480	1.56 $\pm$ [0.13]
0.440	1.35 $\pm$ [0.69]
0.420	1.28 $\pm$ [0.68]

Tabla II. T^2 en función de l.

Utilizando los datos de la Tabla II, es posible hacer un ajuste lineal mediante el método de mínimos cuadrados. Para ello se utilizó un código en C++ que realizó un ajuste lineal sobre un conjunto de datos experimentales que relacionan la longitud de un péndulo L con el cuadrado de su período T^2. La carpeta contenedora de la solución incluye la dependencia "ajuste.h" la cual es una clase que implementa el ajuste lineal el cual a su vez utiliza una plantilla de matrices alojada en el mismo directorio. Luego en un archivo fuente main.cpp se definen los datos experimentales en un vector de vectores, y en la función principal crea un objeto de regresión A_1 que, al llamar su método 'lineal()', calcula la pendiente y el intercepto de la línea que mejor ajusta los datos. Finalmente, imprime estos coeficientes y la ecuación de la recta ajustada en la forma $T^2 = mL + b$, proporcionando un modelo matemático que describe la relación entre las variables medidas.

Luego haciendo uso de un código hecho en Python se grafica el conjunto de datos junto a la ecuación de la recta que mejor se ajusta a ellos. Para ello utilizamos el comando make plot tal y como se muestra a continuación

```
rul0s@legion:~/Documentos$ make plot
```

Note como no es necesario compilar y ejecutar previamente con make y make run para plotear ya que el archivo plot.py lee los datos directamente de un archivo.txt.

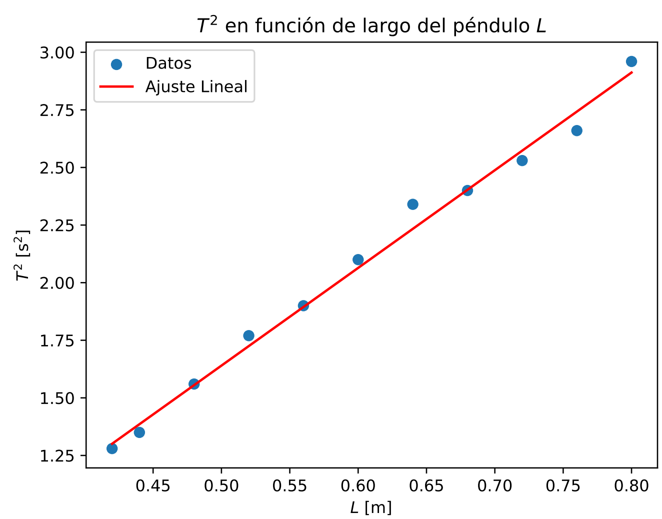

Figura 2. En este imagen se presenta la gráfica de T^2 en función de L donde el periodo al cuadrado representa al eje y mientras que la longitud del péndulo representa al eje x. Los puntos azules corresponden a los datos experimentales y la recta roja representa la recta que mejor se ajusta a estos

La recta resultante es descrita por la siguiente ecuación

$$T^2 = 4.24l - 0.48 \tag{10}$$

V. RESULTADOS, ANÁLISIS Y DISCUSIONES

En la eq. (10) se aprecia que la pendiente del ajuste debe corresponder a la pendiente de la eq. (8) $\frac{4\pi^2}{g}$ (ver Marco Teórico II.). A partir de esto, es posible determinar el valor experimental para g, denominado g_e.

El valor obtenido es g_e=9,31[$\frac{m}{s^2}$], este presenta un 5,09 % de error en comparación al valor aceptado por la comunidad científica g= 9,81[$\frac{m}{s^2}$].

VI. CONCLUSIONES

A partir del error obtenido en relación al valor de g, el experimento se considera exitoso, pues este es bastante bajo, sin embargo, puede mejorar.

El posicionamiento correcto de los materiales es importante para obtener mayor precisión en los resultados, por ejemplo, el hilo del péndulo, que sea del largo necesario y que el péndulo sea soltado, sin ejercer una fuerza adicional, de un ángulo menor a 10° para que la aproximación sea correcta. Agilidad al momento de tomar el tiempo que demora el péndulo en realizar una oscilación.

Los errores en este experimento pudieron ser provocados por el roce con el aire, ya que al ser un sistema ideal se considera que es nulo, sin embargo, en un sistema real el aire presenta un roce para el experimento en cuestión, y el tiempo de reacción. El haber contabilizado solo una oscilación en vez de varias también pudo generar un pequeño error. A su vez también pudo influir el haber enrollado en hilo en el clavo; quizá si se hubiera cortado el hilo previamente y vuelto a amarrar al clavo habría generado un error menor.

Estos errores claramente influyen en el cálculo de la pendiente de la recta y por tanto en la obtención del valor de la aceleración de gravedad.

Referencias

[1] Wikipedia, *Pendulum* https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum

[2] sc.ehu, *Las ecuaciones de Lagrange* http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/dinamica/lagrange/lagrange.html