Programación y Métodos Numéricos

Prueba n° 2*

24 de junio de 2022

Profesor: Benjamín Toledo
Ayudante: Mauricio Martínez

Nombre: ______________________________

Importante: Cada uno de los problemas propuestos, debe compilar con `make` y ser ejecutado con `make run`. La penalización por la falta de esta funcionalidad es de 1.0 punto por problema en falta.

1. (2 ptos.) Considere los datos en el archivo `medicion.dat`, que corresponde a la observación de un sistema físico. Suponga que no conoce la teoría asociada al sistema, y por lo tanto, las funciones base en que se expande de manera óptima la serie temporal observada, son también desconocidas. Ya que el sistema debe obedecer las leyes de la mecánica, decide aproximar la teoría directamente desde los datos, y propone la ecuación,

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 \dot{x} + a_3 \ddot{x} + a_4 \dddot{x}, \quad x = x(t),$$

donde aproxima las derivadas por,

$$\dot{x}_n \approx \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t}, \quad \ddot{x}_n \approx \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2}, \quad \dddot{x}_n \approx \frac{x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_{n-1} - x_{n-2}}{2\Delta t^3},$$

y estima la importancia relativa de cada coeficiente a_k, calculando a_k/σ_{a_k}. ¿Qué ecuación obtiene?

2. (3 ptos.) Considere una máquina de Atwood oscilante†, como se muestra en la figura,

Figure 1: Máquina de Atwood oscilante.

*Duración: 4 horas.
†`https://en.wikipedia.org/wiki/Swinging_Atwood's_machine`

Las ecuaciones que describen la dinámica son,

$$
\begin{aligned}
r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + g\,\sin\theta &= 0,\\
(\mu+1)\,\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 + g\,(\mu - \cos\theta) &= 0.
\end{aligned}
$$

Si $g = 1$ y $\mu = 4.5$, y las condiciones iniciales son $\theta(0) = {}^{\pi}/_{2}$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $r(0) = 1$, $\dot{r}(0) = 0$,

a) usando el algoritmo RK4 adaptativo, resuelva desde $t = 0$ hasta $t = 50$, con $\Delta t = 10^{-3}$ inicialmente, manteniendo una tolerancia de 10^{-9},

b) usando el algoritmo PEFRL, con paso fijo $\Delta t = 10^{-3}$, resuelva desde $t = 0$ hasta $t = 50$.
Calcule la distancia final en el espacio de fase, entre los estados obtenidos con cada método.

c) Considere la solución dada por PEFRL, en el intervalo $t \in [0, 3]$, y tome 1 de cada 3 puntos usando el filtro `awk ‘NR % 3 == 0’ input > output`. Interpole usando `splines` cúbicos para completar los puntos previamente extraídos, y compare en un gráfico superponiendo ambos conjuntos de datos.

3. (1 pto.) Considere la función,

$$
f(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(x\cos(y\sin(x\cos(e^{-y^2}))))}{x^2 + y^2},
$$

con la parametrización $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Encuentre los ceros de la función resultante.