Programación y Métodos Numéricos
Tarea 4

Profesor: Benjamín Toledo
Ayudante: Santiago Amengual

26 de Mayo del 2025

Indicaciones generales de entrega

- Guarde su tarea en un archivo comprimido llamado "nombre_apellido_tarea_N.tar.bz2". Dentro del archivo debe haber una carpeta llamada "nombre_apellido_tarea_N". Dentro de esta carpeta "tarea_N", dentro de la cual, por cada problema, debe haber una subcarpeta llamada "problema_N", donde debe estar el código que resuelva dicho problema.
- La tarea debe enviarse mediante la plataforma Ucursos y dentro del plazo establecido en ella.
- Los archivos principales del código deben incluir comentarios explicativos que describan su funcionalidad de manera general. Se debe comentar el propósito de los principales elementos de su código, justificando cualquier procedimiento no trivial.
- No incluya código que no utilice y sea ordenado para facilitar la corrección.
- Todos los problemas deben, como mínimo, compilar con "make" y ejecutarse con "make run".
- Todos los métodos numéricos utilizados para cada problema deben ser implementados en una clase o template.

Problema 1:

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x \cdot e^y - 1 = 0 \end{cases}$$

a) Resolución el sistema:

Utilizando el **método de Newton en varias variables**, encuentre una **solución real** para el sistema usando como semilla el punto $(x_0, y_0) = (1.5, 0.5)$. Su programa debe imprimir en pantalla la raíz encontrada con al menos seis cifras significativas, para justificar que la implementación de su método converge correctamente a la solución.

b) Integral sobre curva parametrizada:

Se define la siguiente curva parametrizada sobre el plano:

$$\vec{r}(t) = (\cos(\pi t), t\sin(\pi t)) \ , \quad t \in [0, 1]$$

Ahora, definiendo la función:

$$g(x, y) = x\sin(y) + 2 \ ,$$

su programa debe calcular e imprimir en pantalla el valor de la integral

$$\int_0^1 g(\vec{r}(t)) \cdot \left|\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|\right| dt$$

utilizando el método de Romberg con una tolerancia de al menos 10^{-6}.

Problema 2:

Considere el siguiente polinomio de variable compleja

$$f(z) = z^4 - 1\,, \quad z = x + iy\,, \quad x, y \in \mathbb{R},\, \mathbf{i} \in \mathbb{C}\,.$$

Implemente el método de Newton Complejo para esta función utilizando sus clases de números complejos y números duales para determinar e imprimir en pantalla las raíces de la función. Posteriormente, construya una grilla uniforme de 300x300 puntos dentro de la región D definida en el plano complejo y descrita por

$$\mathrm{Re}(z),\, \mathrm{Im}(z)\; \in [-2, 2]\;\;.$$

Para cada punto z_0 de la grilla, aplique el método de Newton complejo y determine a cuál de las raíces converge, registre el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia y almacene esta información en un archivo. Por último, genere dos gráficos sobre la región D, en el primero se debe colorear cada punto según la raíz a la cual converge (si dos puntos convergen a la misma raíz deben tener el mismo color)y en el segundo se debe representar la cantidad de iteraciones requeridas para que el punto converja a una de las raíces (por ejemplo, usando una escala de grises).

Problema 3:

Se desea ajustar los datos generados en base a la siguiente función:

$$y(x) = \sin\left(\frac{5\pi}{7}x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}x\right)\cos\left(\frac{9\pi}{7}x\right)\;.$$

Genere un conjunto 100 puntos equiespaciados en el intervalo $x \in [0,\, 2\pi]$, luego evalúe $y(x)$ en cada uno de estos puntos y para cada uno de ellos añada un ruido aleatorio uniforme generado en un intervalo $[-0.2,\, 0.2]$. Utilizando su clase de regresiones lineales, ajuste los datos generados utilizando las siguientes dos bases de funciones:
$\{1,\, \cos(x),\, \sin(x)\}$ y $\{1,\, \cos(\pi x),\, \cos\left(\frac{2\pi}{7}x\right),\, \cos\left(\frac{8\pi}{7}x\right),\, \cos\left(\frac{11\pi}{7}x\right)\}$. Calcule e imprima en pantalla el error cuadrático medio para ambos ajustes. Por último, a partir de los datos generados de los ajustes, construya un gráfico que contenga los datos con ruido y el resultado de ambos ajustes.