Tarea: Solución Numérica de las Ecuaciones de Onda de Maxwell en 3D+1

Física Computacional

July 4, 2025

1 Introducción

Este trabajo tiene como objetivo aplicar y comparar tres métodos numéricos —Método de Diferencias Finitas (DF), Método de Líneas (MoL) y Método de Elementos Finitos (MEF)— para resolver las ecuaciones de onda electromagnéticas de Maxwell en un escenario 3D+1 inhomogéneo y con fuentes. El propósito es comprender las fortalezas y debilidades de cada método al modelar un problema físico concreto.

Usará las ecuaciones de onda inhomogéneas (sistema gaussiano),

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 4\pi \nabla \rho + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \vec{J}}{\partial t},$$
$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\nabla \times \vec{J}.$$

2 Descripción del Problema

Considere una cavidad cúbica perfectamente conductora (PEC) de dimensiones $L \times L \times L$, donde $L = 1$. La cavidad está inicialmente vacía (en cgs). Cerca del centro de la cavidad se introduce una fuente de corriente localizada que oscila en la dirección z. La densidad de corriente $\vec{J}$ puede ser modelada como:

$$\vec{J}(x,y,z,t) = J_0 \sin(2\pi\omega_0 t) e^{-(t-t_0)^2/(2\sigma_t^2)} e^{-((x-L/2)^2+(y-L/2)^2+(z-L/2)^2)/(2\sigma_s^2)} \hat{z}$$

donde:

- J_0 es la amplitud de la corriente.
- $\omega_0 = 300$ MHz es la frecuencia de oscilación.
- t_0 es el tiempo en que el pulso alcanza su máximo y σ_t controla la duración del pulso gaussiano en el tiempo.
- σ_s es el ancho espacial de la fuente gaussiana, que la localiza en el espacio. Se sugiere un valor pequeño en comparación con la longitud de la cavidad (ej., $\sigma_s = L/20$) para asegurar que la fuente esté localizada pero sea suave y bien representada en la malla numérica.

Objetivo: Simular la evolución de los campos electromagnéticos ($\vec{E}$ y $\vec{B}$) dentro de la cavidad desde $t = 0$ hasta un tiempo final T que permita observar la generación de la onda, su propagación, la interacción con el borde y las reflexiones en las paredes de la cavidad.

3 Tareas a Realizar

Debe resolver el problema utilizando los tres métodos numéricos descritos a continuación. Para cada método, deberá:

1. Describir la discretización del dominio espacial y temporal.

2. Formular las ecuaciones de actualización o el sistema de ecuaciones a resolver.
3. Implementar las condiciones de contorno (PEC en las paredes de la cavidad).
4. Presentar los resultados, incluyendo visualizaciones del campo eléctrico (por ejemplo, el componente E_z) en un plano 2D (ej., el plano $y = L/2$) en diferentes instantes de tiempo.

3.1 Método 1: Diferencias Finitas (FD)

- Discretice el dominio en una malla cartesiana
- Implemente las ecuaciones de actualización explícitas de los componentes de $\vec{E}$ y $\vec{H}$.
- Modele las paredes de la cavidad como un Conductor Eléctrico Perfecto (PEC) estableciendo los componentes tangenciales del campo eléctrico a cero en los límites del dominio.
- Implemente la fuente de corriente gaussiana espacialmente distribuida en los nodos de la malla correspondientes.

3.2 Método 2: Método de Líneas (MOL)

Aplique el enfoque de semi-discretización:

- Discretice las derivadas espaciales en las ecuaciones de Maxwell usando diferencias finitas en una malla estructurada
- Esta discretización transformará las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) en un gran sistema acoplado de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) en el tiempo para los componentes de campo en cada nodo de la malla.
- Resuelva el sistema de EDOs resultante utilizando un solucionador numérico estándar (ej., un método de Runge-Kutta de 4º orden) para avanzar en el tiempo
- Implemente las condiciones de contorno PEC como parte de la formulación del sistema de EDOs.

3.3 Método 3: Método de Elementos Finitos (MEF)

Utilice la formulación variacional o débil:

- Discretice el dominio 3D en una malla regular cúbica.
- Utilice funciones base del tipo aristas para aproximar los campos vectoriales, asegurando la continuidad tangencial a través de los límites de los elementos.
- Ensamble el sistema global de ecuaciones, que tomará la forma de un sistema de EDOs de segundo orden en el tiempo.
- Resuelva el sistema resultante en el dominio del tiempo utilizando un esquema de diferencias finitas como el de diferencia centrada, o en el esquema MOL.

4 Análisis Comparativo y Conclusiones

Una vez que haya obtenido las soluciones con los tres métodos, prepare un análisis comparativo que aborde los siguientes puntos:

1. **Precisión y Convergencia:** Compare cualitativamente los resultados de los campos. ¿Los tres métodos predicen un comportamiento similar para la propagación, reflexión y refracción de la onda?
2. **Manejo de Geometría e Interfaces:** Discuta la facilidad o dificultad de implementar las condiciones de contorno en cada método.
3. **Costo Computacional:** Compare el tiempo de simulación y los requisitos de memoria (si es posible medirlos) para cada método. Relacione esto con la naturaleza explícita (FD) o implícita (potencialmente en MOL y MEF) de los esquemas de avance en el tiempo.

4. **Complejidad de Implementación:** ¿Cuál método fue el más sencillo de implementar desde cero y por qué? ¿Qué desafíos específicos encontró en cada uno?

5. **Conclusión General:** Basado en su experiencia, ¿qué método considera el más adecuado para este tipo de problema? ¿Bajo qué circunstancias (por ejemplo, una geometría más compleja) su elección podría cambiar?