Programación y Métodos Numéricos
Tarea 5

Profesor: Benjamín Toledo
Ayudante: Santiago Amengual

19 de Julio del 2025

Indicaciones generales de entrega

- Guarde su tarea en un archivo comprimido llamado “nombre_apellido_tarea_N.tar.bz2”. Dentro del archivo debe haber una carpeta llamada “nombre_apellido_tarea_N”. Dentro de esta carpeta “tarea_N”, dentro de la cual, por cada problema, debe haber una subcarpeta llamada “problema_N”, donde debe estar el código que resuelva dicho problema.
- La tarea debe enviarse mediante la plataforma Ucursos y dentro del plazo establecido en ella.
- Los archivos principales del código deben incluir comentarios explicativos que describan su funcionalidad de manera general. Se debe comentar el propósito de los principales elementos de su código, justificando cualquier procedimiento no trivial.
- No incluya código que no utilice y sea ordenado para facilitar la corrección.
- Todos los problemas deben, como mínimo, compilar con “make” y ejecutarse con “make run”.
- Todos los métodos numéricos utilizados para cada problema deben ser implementados en una clase o template.

Problema 1:

Se quiere modelar la propagación de una onda electromagnética 2D en un medio no homogéneo con una fuente oscilante. Para ello, considere la componente perpendicular al plano $E_z(x,y,t)\hat{z}$ campo eléctrico y estudie su evolución dictada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - c\,(x,y)^2 \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t)\,,$$

donde $c(x,y)$ es la velocidad de la propagación de la onda en el medio y $f(x,y,t)$ corresponde a una fuente oscilante localizada. Considerando las condiciones iniciales:

$$E_z(x,y,0) = \exp\left[-3((x-1.2)^2 + (y-1.2)^2)\right]\,, \quad \left.\frac{\partial E_z}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

con una fuente circular localizada de radio $R = 0.85$, centrada en $(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2})$, que oscila en el tiempo según la función:

$$f(x,y,t) = \begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{13}{7}t\right) - \cos^2\left(\dfrac{12}{7}t\right), & \text{si } \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 < 0.85^2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y la siguiente definición de la velocidad en el medio:

$$c(x,y) = \begin{cases} 1.0, & \text{si } \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 < 0.95^2 \\ 0.5, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta transición modela una interfaz entre dos materiales y en ella se deben cumplir las condiciones de continuidad del campo:

$$[E_z] = E_z^{(2)} - E_z^{(1)} = 0\,, \quad \left[\frac{1}{c(x,y)^2}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\right] = 0, \quad \left[\frac{1}{c(x,y)^2}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\right] = 0\,,$$

donde $E_z^{(2)}$ y $E_z^{(1)}$ corresponden a los valores del campo fuera y dentro de la interfaz respectivamente. Junto con esto, impondremos condiciones de borde tipo Dirichlet en todo el contorno del dominio en el que se trabajará. El objetivo de este problema es encontrar la solución a la ecuación de onda en el dominio $[0,\, 3] \times [0,\, 3]$ en el plano x-y, discretizando con $N_x = 200$, $N_y = 200$ puntos espaciales y $N_t = 1000$ pasos temporales para $t \in [0, 2]$. Su programa debe encontrar esta solución implementando el método de diferencias finitas, almacenando los datos del campo y de las variables en un archivo para, por último, graficar los valores de E_z dentro del plano para por lo menos cuatro instantes temporales (puede hacerlo con animaciones o con mapas de calor para mejor visualización). Por último, usando la ley de Faraday, podemos encontrar los campos magnéticos B_x y B_y asociados a E_z mediante las expresiones:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}\,.$$

Nuevamente, implementando el método de diferencias finitas, encuentre los valores B_x y B_y dentro del mismo dominio y discretizando de la misma forma, almacenando los datos en dos archivos separados y grafique de la misma manera que para E_z. Por último, mencionar que para resolver el problema físico correctamente se debería resolver la ecuación de onda completa para $\vec{E}$ y $\vec{B}$, pero no es lo que se les pide en este problema (podría ser un problema interesante de realizar y conceptualmente no cambia mucho con respecto a este problema).

Problema 2:

Considere un cubo de lado L, dentro del cual se encuentra una densidad de carga $\rho(x, y, z)$. Dentro de este recinto se encuentra un potencial $\Psi = \Psi(x, y, z)$ que satisface la ecuación de Poisson, es decir

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi\rho(x, y, z)\,.$$

Supongamos que la distribución de carga está contenida dentro de un elipsoide, centrado en (x_0, y_0, z_0), con semiejes a, b, c en las direcciones x, y y z respectivamente, y que su densidad varía según un perfil parabólico invertido. Esta distribución está dada por:

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \rho_0 \left[1 - \left(\dfrac{x-x_0}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y-y_0}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{z-z_0}{c}\right)^2\right], & \text{si } \left(\dfrac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y-y_0}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z-z_0}{c}\right)^2 \leq 1, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

donde $\rho_0 = 10.0$. Además, se imponen condiciones de borde tipo Dirichlet en todas las paredes del cubo, es decir

$$\Psi(x, y, z) = 0 \quad \text{cuando } x = 0,\, L,\; y = 0,\, L,\; z = 0,\, L.$$

Escriba un programa que le permita encontrar el valor de $\Psi(x, y, z)$ dentro de un cubo de $L = 1$ con descripciones de la densidad de carga previamente mencionadas. Su programa debe encontrar los valores que toma el potencial usando el método de relajación en tres dimensiones teniendo en consideración las condiciones de contorno y la definición de la densidad de carga $\rho(x, y, z)$. Por último, para visualizar la solución encontrada, anime o grafique sus valores dentro de los planos $x - y$, $x - z$ y $y - z$ para al menos tres instantes temporales que muestren la evaluación del potencial dentro del cubo.

Problema 3:

A partir de la definición de la ecuación de Schrödinger tiempo dependiente para una partícula de masa m dentro de un potencial de la forma $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, podemos encontrar la siguiente forma reducida para esta ecuación para un oscilador armónico cuántico:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (2E - x^2)\psi(x) = 0\,,$$

considerando $m = \hbar = \omega = 1$. Reformule este problema como un sistema de primer orden para, mediante una clase que implemente el método de disparo para encontrar los tres primeros niveles de energía para este sistema. Para ello, imponemos que para el n-ésimo nivel con energía asociada E_n tenemos la siguiente condición inicial:

$$\begin{cases} \psi(0) = 1; & \text{si } n \text{ es par} \\ \psi(0) = 0; & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

El programa debe imprimir en pantalla los valores numéricos encontrados para E_0, E_1 y E_2 teniendo en consideración las condiciones iniciales en cada caso.