Programación y Métodos Numéricos

Prueba n° 1*

20 de abril de 2022

Profesor: Benjamín Toledo   Nombre: ______________________________

Ayudante: Mauricio Martínez

1. (3 pts.) Construya clases plantilla para los números hipercomplejos `cuaternion<T>` y `octonion<T>`. Para ello tome como base la clase plantilla `complejo<T>` desarrollada en clases y utilice la construcción de Cayley–Dickson (CD), i.e., tomando los números complejos $c_1 = (a, b)$ y $c_2 = (c, d)$, donde a, b, c y $d \in \mathbb{R}$, se puede construir el cuaternión $(c_1, c_2) = (a, b, c, d)$, del mismo modo, tomando los cuaterniones q_1 y q_2 puede construir el octonión $o = (q_1, q_2)$, el punto clave es definir el producto:

$$(x_1, x_2) \otimes (x_3, x_4) = (x_1 \cdot x_3 - x_4^* \cdot x_2, x_4 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_3^*),$$

donde x_k es un número (hiper)complejo y la operación $()^*$ es la conjugación compleja usual (note que $\mathbb{R}$ es la primera instancia de la jerarquía hipercompleja). Se espera que su clase declare e implemente un constructor vacío y al menos uno genérico, un destructor, un constructor de copia, sobrecargue el operador de asignación (`=`), el operador de extracción (`<<`) y las operaciones básicas (`+`, `-`, `*`, `/`). Note que el producto (`*` $\equiv \cdot$) es esencial para la construcción CD. Luego aplique sus objetos a:

   i) Considere el eje de rotación definido por el vector unitario $\hat{u} = (1, 0, 0) \equiv 1\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} + 0\,\boldsymbol{k}$ y un vector cualquiera en $\mathbb{R}^3$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \equiv v_x\,\boldsymbol{i} + v_y\,\boldsymbol{j} + v_z\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{v}$, que como cuaterniones tienen partes reales nulas. Si una rotación mediante cuaterniones, se define por,

   $$\vec{v}' \equiv \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{r}^{-1} = \boldsymbol{v}',$$

   donde,

   $$\boldsymbol{r} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k})\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

   calcule $\boldsymbol{v}'$ cuando $\vec{v} = (0, 1, 0)$ y $\theta = \pi/4$, que es el ángulo de rotación en torno al eje definido por $\hat{u}$.

   ii) Dados los octoniones $o_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, $o_2 = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1/2)$ y $o_3 = (3, 4, 5, 6, 7, 8, 1/2, 3/4)$, calcule,

   $$O_a = (o_1 \otimes o_2) \otimes o_3 \qquad \text{y} \qquad O_b = o_1 \otimes (o_2 \otimes o_3).$$

2. (3 ptos.) Considere los duales puros $\epsilon_1 \neq 0$ y $\epsilon_2 \neq 0$, tales que $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ y $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = 0$, $\epsilon_2\epsilon_1 \neq 0$. Sea $z = (x_0 + \epsilon_1, y_0 + \epsilon_2)$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Ahora expandamos en serie de Taylor la función $f(z)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x_0, y_0 + \epsilon_2) + f_{,x}(x_0, y_0 + \epsilon_2)\epsilon_1, \\ &= f(x_0, y_0) + f_{,y}(x_0, y_0)\epsilon_2 + f_{,x}(x_0, y_0)\epsilon_1 + f_{,xy}(x_0, y_0)\epsilon_2\epsilon_1, \\ &\equiv \{f(x_0, y_0), f_{,x}(x_0, y_0), f_{,y}(x_0, y_0), f_{,xy}(x_0, y_0)\}, \end{aligned}$$

*Duración: 24 horas.

donde $f_{,x}$ representa la derivada con respecto a x, lo mismo para y, y $f_{,xy}$ representa la derivada con respecto a x e y. Escriba una clase para estos números duales extendidos y evalúe las derivadas correspondientes para

$$g_1(x,y) = x^4 y^{-3},$$

$$g_2(x,y) = \sin(x\cos(y\sin(x\cos(e^{-y^2}))))(x^2 + y^2),$$

en $(x,y) = (1,1)$.

Puede encontrar información útil en `https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley%E2%80%93Dickson_construction`