Programación y Métodos Numéricos
Tarea 2

Profesor: Benjamín Toledo
Ayudante: Santiago Amengual

9 de Abril del 2025

Indicaciones generales de entrega

- Guarde su tarea en un archivo comprimido llamado "nombre_apellido_tarea_N.tar.bz2". Dentro del archivo debe haber una carpeta llamada "nombre_apellido_tarea_N". Dentro de esta carpeta "tarea_N", dentro de la cual, por cada problema, debe haber una subcarpeta llamada "problema_N", donde debe estar el código que resuelva dicho problema.
- La tarea debe enviarse mediante la plataforma Ucursos y dentro del plazo establecido en ella.
- Los archivos principales del código deben incluir comentarios explicativos que describan su funcionalidad de manera general. Se debe comentar el propósito de los principales elementos de su código, justificando cualquier procedimiento no trivial.
- No incluya código que no utilice y sea ordenado para facilitar la corrección.
- Todos los métodos numéricos utilizados para cada problema deben ser implementados en una clase o template.

Problema 1:

Considere la siguiente función polinómica:

$$p(x) = 11x^4 + \frac{4}{23}x^3 + x^2 + \frac{9}{14}x + 24 \ .$$

Implemente mediante un programa escrito en C++ una plantilla de números racionales y una plantilla de números duales modificados tales que $\epsilon^5 = 0$ para manejar derivadas de mayor orden. Con ellas, encuentre los valores de $p(x_0)$, $p'(x_0)$, $p''(x_0)$, $p'''(x_0)$ y $p^{(4)}(x_0)$, donde $x_0 = 3/4$. El programa deberá imprimir en pantalla estos valores para cada una de las derivadas de la función $p(x)$ en el punto x_0 en el formato de fracción irreducible a/b.

Problema 2:

Las matrices de Pauli σ_s se definen de la siguiente manera:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Implemente en un código de C++ una plantilla de matrices que le permita calcular la exponencial de una matriz $U(\theta) = e^{i\theta\sigma_s}$, donde $\sigma_s \in [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$, utilizando dos métodos diferentes. Estos métodos son:

- <u>Relación de Euler:</u>

$$e^{i\theta\sigma_s} = \cos(\theta)\, I + i\sin(\theta)\sigma_s$$

- Serie de Taylor:

$$e^{\sigma_s} = \sum_{k=0}^{N} \frac{\sigma_s^k}{k!}$$

Considerando $\theta = \pi/2$, su programa debe imprimir en pantalla las matrices resultantes de realizar la exponencial de las tres matrices de Pauli σ_s mediante ambos métodos. Junto con esto, el programa deberá ser capaz de comparar si ambas matrices coinciden bajo una cierta tolerancia absoluta e imprimir en pantalla si ambas coinciden bajo dicha tolerancia. (**hint:** Para evitar usar valores muy altos de N, se puede implementar, dentro del método para exponenciar matrices mediante serie de Taylor, un criterio de convergencia en base a una tolerancia. Para ello, se debe implementar una comparación entre términos sucesivos.)

Problema 3:

Considere la función:

$$g(x, y) = \cos^2(x)\sin(y) + \sin(xy) \ .$$

Escriba un código de C++ el cual implemente una plantilla de duales de dos variables que le permita el cálculo del gradiente y la matriz Hessiana para funciones de dos variables reales en un punto. Para implementar esta plantilla se deben considerar dos ϵ distintos, uno por cada variable tales que $\epsilon_i^3 = 0$ con $i = 1, 2$. Escoja un conjunto de tres puntos dentro del espacio en el que se encuentra definida la función $g(x, y)$ y para cada uno:

- Encuentre el gradiente y la Hessiana de la función $g(x, y)$ en el punto.

Luego, para tres puntos adicionales,

- Evalúe el determinante de la Hessiana para clasificar el punto como mínimo/máximo local, punto silla o indeterminado.

Busque que estos tres puntos tengan distintas clasificaciones. El código debe implementar e imprimir en pantalla el valor del gradiente, la matriz Hessiana, el determinante de la Hessiana y la clasificación del punto según el criterio del determinante para cada uno de los puntos que eligió. (Para la clasificación de puntos, puede revisar la prueba de la segunda derivada [1])

[1] https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-3/pages/4-7-problemas-con-maximos-minimos