Technologie symulacji komputerowych **2019/2020**

Prowadzący: dr. inż. Jan Rogowski wtorek, 16:00

Krzysztof Wierzbicki 210347 `210347@edu.p.lodz.pl`
Bartosz Jurczewski 210209 `210209@edu.p.lodz.pl`

Zadanie: Symulacja płytki Chladniego

1. Wstęp

Zadaniem tworzonej przez nas aplikacji i modelu jest badanie drgań stalowej płytki wykonanej ze sprężystego materiału.
W symulacji zmianie będą mogły podlegać takie parametry jak: częstotliwość drgań, rozmiar kwadratowej płytki.

2. Opis układu

Symulacja układu będzie odbywać się w przestrzeni dwuwymiarowej, gdzie będziemy badać naprężenia występujące w stalowej płytce.

3. Opis obiektów biorących udział w symulacji

W naszej symulacji możemy wyróżnić jeden główny obiekt będący fundamentem zagadnienia które chcemy symulować. Jest to wprawiona w drgania stalowa płyta. Zakładamy, że jest ona wykonana z materiału o kształcie płaskiego kwadratu, długość boku którego jest parametrem wejściowym symulacji.

Drgania własne dwuwymiarowej membrany można opisać równaniem falowym Bernoulliego

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \nabla^2\Psi = 0, \quad \Psi \in \Omega \prod, \quad \Omega \subset, \tag{1}$$

gdzie c jest prędkością rozchodzenia a Ω ograniczoną przestrzenią rozważań w $\mathbb{R}^2$. Założenie, że $\Psi(t, x, y) = v(t) \times u(x, y)$ daje nam dwa równania różniczkowe

$$\partial_t^2 v + \lambda c^2 v = 0 \quad \text{and} \quad \nabla^2 u + \lambda u = 0 \tag{2}$$

z dodatnią stałą λ. Rozwiązanie równania dla $v(t)$ ma postać $v(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, gdzie $\omega = c\sqrt{\lambda}$. Cząstkowe równanie różniczkowe dla $u(x, y)$ w (2) doprowadza nas do problemu wartości własnej Laplasjanu, który próbujemy rozwiązać. Po rozbiciu rozważanej powierzchni na siatkę kwadratów, możemy skorzystać z metody elementów skończonych aby rozwiązać równanie

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\iint_\Omega [(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 - \lambda u^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} u^2 \mathrm{d}s \tag{3}$$

dla układu wartości własnych, który pozwala powiązać z macierz sztywności z macierzą masy, jednocześnie wyznaczając amplitudę węzła siatki.

4. Uproszczenia

W naszym modelu i symulacji przyjęliśmy kilka następujących uproszczeń:
— Brak oporów ruchu.

— W rozpatrywanym przez nas przypadku materiał z którego wykonana jest rozpatrywana płyta jest jednorodny oraz izotropowy – jego gęstość jest taka sama w każdym punkcie, a moduł Younga jest niezależny od kierunku.
— Parametry wejściowe symulacji można zmieniać podawać w zakresach przyjętych przez nas i zamieszczonych w tym sprawozdaniu.

5. Środowisko i biblioteka graficzna

Program zostanie zrealizowany w środowisku graficznym Unity (`www.unity.com`) za pomocą języka do niego przeznaczonego - C#.

Literatura

[1] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl. *Nie za krótkie wprowadzenie do systemu LaTeX2e*, 2007, dostępny online.
[2] T. Müller *Numerical Chladni figures*, 2013, `https://arxiv.org/pdf/1308.5523.pdf`