

Informatyka, studia dzienne, I st.

semestr VII

Technologie symulacji komputerowych

2019/2020

Prowadzący: dr. inż. Jan Rogowski

wtorek, 16:00

Krzysztof Wierzbicki 210347 210347@edu.p.lodz.pl

Bartosz Jurczewski 210209 210209@edu.p.lodz.pl

Zadanie: Symulacja płytki Chłodniego

1. Wstęp

Zadaniem tworzonej przez nas aplikacji i modelu jest badanie drgań stalowej płytki wykonanej ze sprężystego materiału.

W symulacji zmianie będą mogły podlegać takie parametry jak: precyzja symulacji, postać drgań własnych, pozycja osi X i Y.

2. Opis układu

Symulacja układu będzie odbywać się w przestrzeni dwuwymiarowej, gdzie będziemy badać naprężenia występujące w stalowej płytce.

3. Opis obiektów biorących udział w symulacji

W naszej symulacji możemy wyróżnić jeden główny obiekt będący fundamentem zagadnienia które chcemy symulować. Jest to wprawiona w drgania stalowa płyta. Zakładamy, że jest ona wykonana z materiału o kształcie płaskiego kwadratu, długość boku którego jest parametrem wejściowym symulacji.

Drgania własne dwuwymiarowej membrany można opisać równaniem falowym Bernoulliego

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Psi, \quad (1)$$

gdzie $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, czyli Laplasjan po współrzędnych w rozważanej przestrzeni $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, oraz c jest stałą rzeczywistą określającą prędkość rozchodzenia się fali w ośrodku. Falę stojącą w dwuwymiarowej przestrzeni Ω można opisać równaniem

$$\Psi(t, x, y) = v(t) \cdot u(x, y), \quad (2)$$

gdzie funkcja $v(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ opisuje zmianę stanu w czasie, a $u(x, y)$ opisuje zależność amplitudy od położenia w przestrzeni i nazywana jest postacią drgań własnych (*eigenmode*). Możemy sprowadzić nasze rozważania do problemu poszukiwania wartości własnych przekształcenia Laplace'a. Korzystając z definicji problemu warunków brzegowych Dirichleta rozważamy równanie

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad (3)$$

z dodatnią stałą λ . Formułując ten problem jako zagadnienie rachunku wariacyjnego, po rozbiciu rozważanej powierzchni na siatkę trójkątów, będziemy mogli skorzystać z metody elementów skończonych aby rozwiązać równanie opisujące zbiór wartości i wektorów własnych

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 - \lambda u^2 \right) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} u^2 ds, \quad (4)$$

gdzie $\partial \Omega$ oznacza krawędź dla której określone są warunki brzegowe. Jeżeli krawędź jest nieruchoma lub wolna, można odrzucić tę część równania.

Przedstawimy rozważaną przestrzeń Ω jako sumę trójkątów

$$\Omega \approx \bigcup_{i=1}^N T_i, \quad T_i = \triangle P_{i_1} P_{i_2} P_{i_3}, \quad (5)$$

gdzie i_1, i_2, i_3 – indeksy punktów będących wierzchołkami i -tego trójkąta. Rozważana przez nas przestrzeń Ω jest kwadratem o boku długości m jednostek. Wybierzemy $N = 2(m-1)^2$ trójkątów o wierzchołkach w punktach

$$P_{i_1} = (k+1, q), \quad P_{i_2} = (k, q), \quad P_{i_3} = (k+1, q+1) \quad (6)$$

oraz

$$P_{i_1} = (k, q+1), \quad P_{i_2} = (k+1, q+1), \quad P_{i_3} = (k, q), \quad (7)$$

otrzymując po $\frac{N}{2}$ trójkątów kolejno "górnych" i "dolnych" (będziemy indeksować trójkąty od $i = 1$ tak, aby trójkąty "górne" miały indeksy parzyste, a trójkąty dolne indeksy nieparzyste). Możemy wtedy przedstawić funkcję u jako sumę funkcji wielomianowych będących przybliżeniem u w dziedzinie odpowiadającej kolejnym trójkątom siatki

$$u(x, y) \approx \sum_{i=1}^N u_i(x, y). \quad (8)$$

Przyjęcie tego założenia pozwala nam rozdzielić całkę przedstawioną w równaniu (4) na N całek \mathcal{I}_i odpowiadających kolejnym trójkątom. Dla i -tego trójkąta przeprowadzamy normalizację przekształcając współrzędne tak, aby punkty będące wierzchołkami trójkąta leżały na osiach współrzędnych, co ułatwi późniejsze obliczenia

$$x = \begin{cases} x & \text{jeżeli } i \text{ jest nieparzyste} \\ -x & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (9)$$

$$y = \begin{cases} y & \text{jeżeli } i \text{ jest nieparzyste} \\ -y & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (10)$$

Pochodne i -tej funkcji składowej u_i przyjmują postać Całka po i -tym trójkącie ma postać

$$2\mathcal{I}_i = \iint_{T_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx dy + \iint_{T_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2 dx dy + \lambda \iint_{T_i} u_i^2 dx dy, \quad (11)$$

Zakładając postać funkcji $u_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ i obliczając powyższe całki możemy sprowadzić wyrażenie (11) do postaci

$$4\mathcal{I}_i = \vec{u}_i^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}_i + \vec{u}_i^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}_i + \frac{1}{12} \lambda \vec{u}_i^T \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u}_i \quad (12)$$

gdzie $\vec{u}_i = (u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3})$ oraz u_{i_j} jest wartością funkcji u_i w j -tym wierzchołku i -tego trójkąta. Ostatecznie dla trójkąta T_i możemy zapisać równanie

$$4\mathcal{I}_i = \vec{u}_i^T (S_i - \lambda M_i) \vec{u}_i, \quad (13)$$

gdzie

$$S_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

nazywamy macierzą sztywności i -tego elementu, a

$$M_i = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

nazywamy macierzą masy i -tego elementu.

Następnie należy złożyć macierze sztywności i masy poszczególnych elementów w macierze całego układu \mathcal{S} oraz \mathcal{M} rozmiaru $N \times N$. Zapiszemy też poszukiwane wartości funkcji u w kolejnych wierzchołkach w postaci wektora kolumnowego $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$. Początkowo macierze \mathcal{S} i \mathcal{M} inicjalizowane są wartościami 0. Następnie dla kolejnych trójkątów T_i z indeksami wierzchołków (i_1, i_2, i_3) wykonujemy poniższe działania:

$$\mathcal{S}_{i_n i_m} += (S_i)_{nm}, \quad \mathcal{M}_{i_n i_m} += (M_i)_{nm}, \quad n, m \in \{1, 2, 3\}. \quad (16)$$

Następnie usuwamy rzędy i kolumny odpowiadające nieruchomym punktom – znamy wartości amplitudy w tych punktach. Ostatnim krokiem jest poszukiwanie ekstremów uzyskanego funkcjonału, $\delta\mathcal{I} = 0$, co prowadzi nas do układu wartości własnych

$$\mathcal{S}\vec{u} = \lambda\mathcal{M}\vec{u}, \quad (17)$$

który musi zostać rozwiązany. Dla każdej wartości własnej λ wektor własny \vec{u} określa amplitudę na wszystkich wierzchołkach siatki.

4. Uproszczenia

W naszym modelu i symulacji przyjęliśmy kilka następujących uproszczeń:

- Brak oporów ruchu.
- W rozpatrywanym przez nas przypadku materiał z którego wykonana jest rozpatrywana płyta jest jednorodny oraz izotropowy – jego gęstość jest taka sama w każdym punkcie, a moduł Younga jest niezależny od kierunku.
- Parametry wejściowe symulacji można zmieniać podawać w zakresach przyjętych przez nas i zamieszczonych w tym sprawozdaniu.

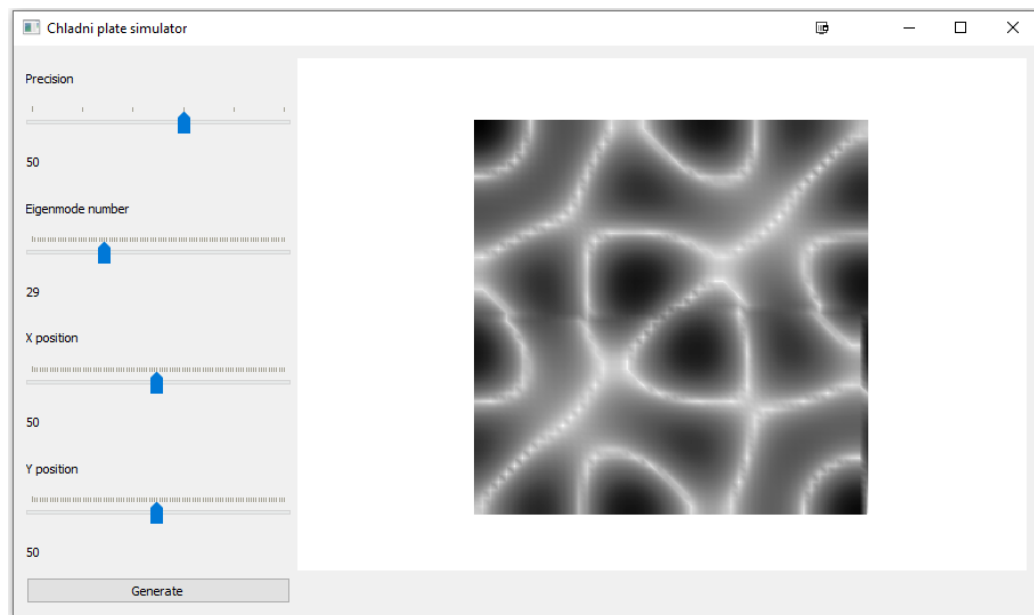
5. Środowisko i biblioteka graficzna

Program zostanie zrealizowany za pomocą języka Python 3.8.0.

6. Program

Poniżej przedstawiamy screeny z naszego programu. Parametry wejściowe:

- Precision - dokładność
- Eigenmode number - postać drgań własnych
- X position - pozycja na osi X
- Y position - pozycja na osi Y

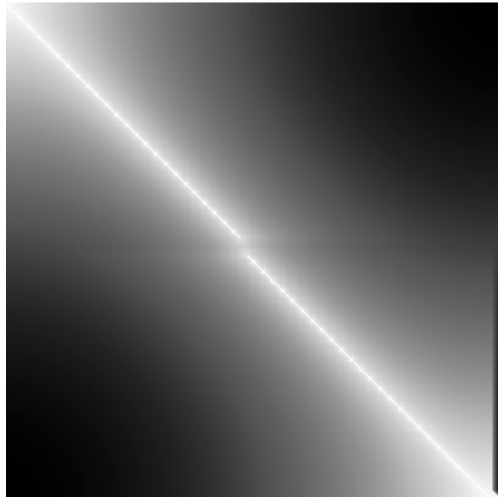


Rysunek 1. Widok programu

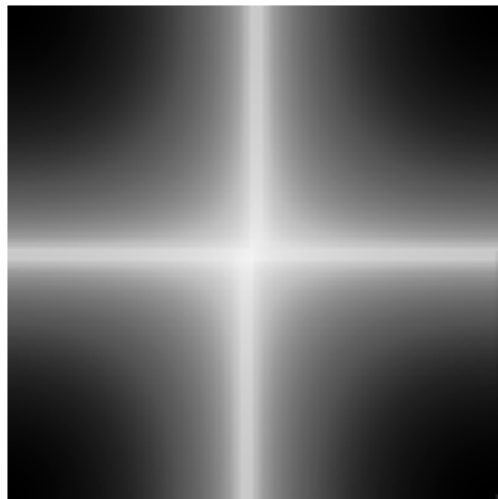
Dokładność rozumiemy jako ilość pikseli która składa się na bok kwadratu - wizualizacji. **Nasz program obsługuje tylko te symulacje dla których wartość własna jest mniejsza od 0.5.**

7. Wizualizacje

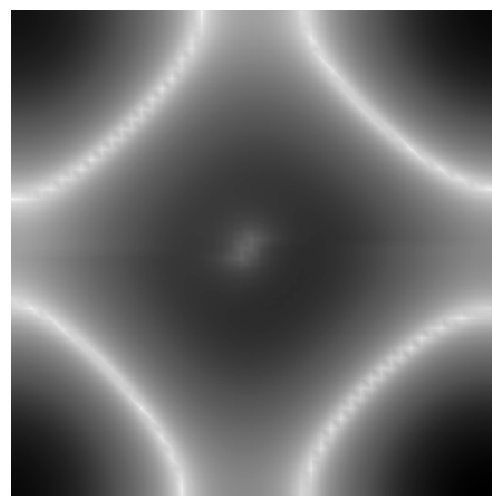
Poniżej przedstawiamy uzyskane przez nas wizualizacje dla płytki o dokładności 50. Wartości pod rysunkami reprezentują postać drgań własnych.



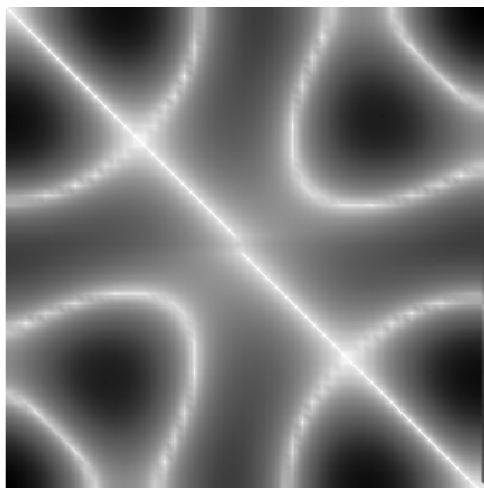
Rysunek 2. Postać drgań własnych: 1



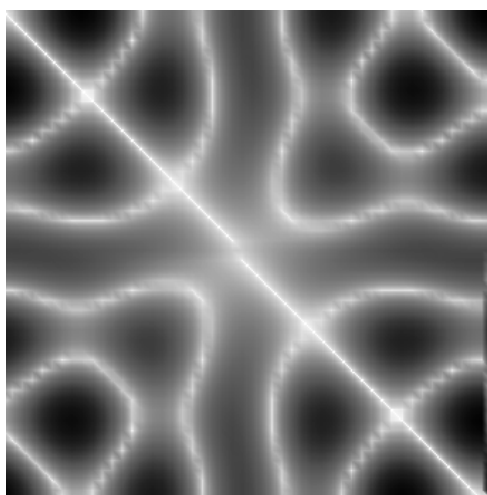
Rysunek 3. Postać drgań własnych: 3



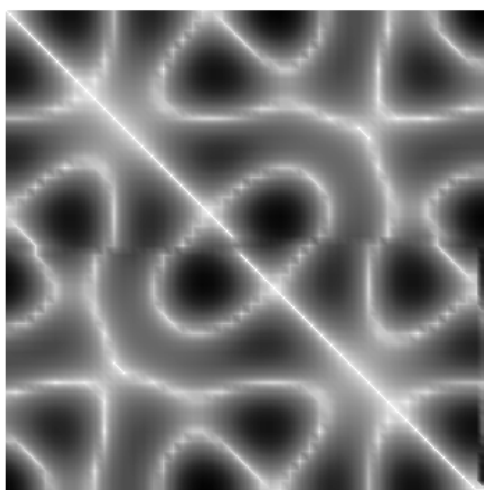
Rysunek 4. Postać drgań własnych: 5



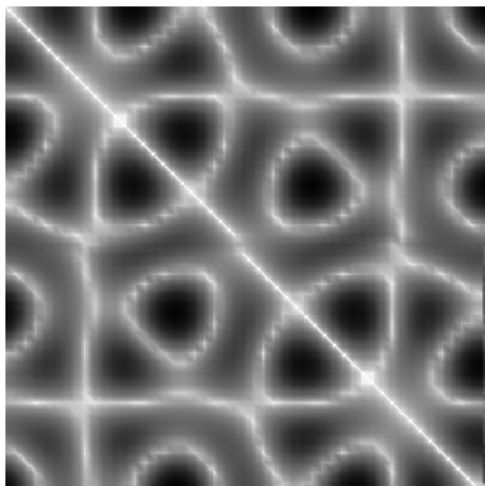
Rysunek 5. Postać drgań własnych: 17



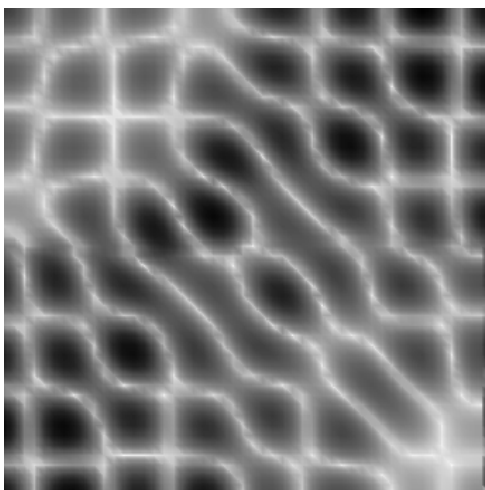
Rysunek 6. Postać drgań własnych: 35



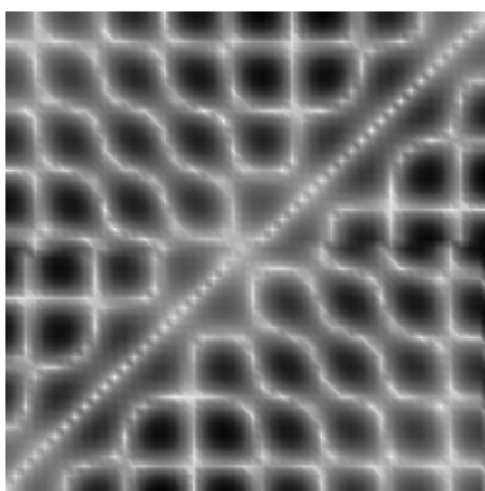
Rysunek 7. Postać drgań własnych: 50



Rysunek 8. Postać drgań własnych: 65



Rysunek 9. Postać drgań własnych: 85



Rysunek 10. Postać drgań własnych: 99

Literatura

- [1] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl. *Nie za krótkie wprowadzenie do systemu $\text{\LaTeX}2\epsilon$* , 2007, dostępny online.
- [2] T. Müller *Numerical Chladni figures*, 2013, <https://arxiv.org/pdf/1308.5523.pdf>