Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej

J. Różański, WML WAT 2023/2024

22 maja 2024

Zagadnienia: *zmienna losowa X i jej parametry, rozkład zmiennej losowej - funkcje: $pmf(X)$ oraz $cdf(X)$, szereg rozdzielczy punktowy, rozkład dwumianowy $X \sim Binom(n, p)$.*

Laboratorium nr 1. Lista zadań

A. Dla pojedynczego rzutu kostką 1..6 ustalimy zmienną losową X jako wynik rzutu. Wykonaj w arkuszu odpowiednie tabele i wykresy:

1. zbuduj szereg rozdzielczy punktowy dla $\mathbf{range}(X) = \{1, 2, .., 6\}$, czyli (x_i, n_i) [tabela, 1 punkt]
2. wyznacz empiryczny rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{epmf}(X)$, czyli tabelę (x_i, p_i) [tabela i wykres, 2 punkty]
3. porównaj rozkład empiryczny z teoretycznym na jednym wykresie [wykres, 1 punkt]
4. wyznacz dystrybuantę empiryczną $\mathbf{ecdf}(X)$; [tabela i wykres, 2 punkty]
5. oblicz wartość oczekiwaną EX oraz wariancję D^2X tego rozkładu; [tabela, 1 punkt]

B. Dla dwóch rzutów kostką 1..6 określimy zmienną losową X jako sumę oczek, czyli $X = X_1 + X_2$. Wykonaj w arkuszu odpowiednie tabele i wykresy:

1. zbuduj szereg rozdzielczy punktowy dla $\mathbf{range}(X) = \{2, 3, ..., 12\}$; [tabela, 1 punkt]
2. wyznacz empiryczny rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{epmf}(X)$; [tabela i wykres, 2 punkty]
3. porównaj empiryczny rozkład prawdopodobieństwa z teoretycznym rozkładem trójkątnym; [wykres, 1 punkt]
4. wyznacz skumulowany rozkład prawdopodobieństwa, czyli dystrybuantę $\mathbf{ecdf}(X)$; [tabela, 1 punkt]

5. oblicz wartość oczekiwaną EX oraz wariancję D^2X tego rozkładu; [tabela, 1 punkt]

C. Dla dziesięciu rzutów monetą określimy zmienną losową X jako sumę wyników, czyli $X = X_1 + ... + X_{10}$, gdzie X_i to liczba orłów. Wykonaj w arkuszu odpowiednie tabele i wykresy:

1. zbuduj szereg rozdzielczy punktowy dla $\mathbf{range}(X) = \{0, 1, ..., 10\}$; [tabela, 1 punkt]
2. wyznacz empiryczny rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{epmf}(X)$ [tabela i wykres, 2 punkty]
3. porównaj empiryczny rozkład prawdopodobieństwa z teoretycznym rozkładem dwumianowym $X \sim Binom(10, \frac{1}{2})$; [tabela i wykres, 2 punkty]
4. wyznacz skumulowany rozkład prawdopodobieństwa, czyli dystrybuantę $\mathbf{ecdf}(X)$; [tabela, 1 punkt]
5. oblicz wartość oczekiwaną EX oraz wariancję D^2X tego rozkładu; [tabela, 1 punkt]

Twierdzenie 1 (J. Bernoulli, 1705)**.** *Niech zmienna X_i ma rozkład zero-jedynkowy dla każdego $i = 1, 2, ..., n$. Wtedy suma $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ ma rozkład dwumianowy, czyli $X \sim Binom(n, p)$ oraz*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k,$$

gdzie $p = P(X_i = 1)$ dla każdego i, to prawdopodobieństwo wystąpienia jedynki (sukces, zwykle $p = 1/2$), natomiast $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ to współczynnik dwumianowy.

Dowód. Zdarzeniem pewnym jest iloczyn n składników postaci $(A \cup A') \cap (A \cup A') \cap ... \cap (A \cup A')$, gdzie $A = 1$. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzeń niezależnych $1 = (p + (1-p))^n$ oraz ze wzoru dwumianowego Newtona

$$1 = (p + (1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^k.$$

Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest sumą prawdopodobieństw $P(X = k)$ po k wystąpieniach jedynki, czyli $1 = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$. □