2. Podstawowe rozkłady prawdopodobieństwa

22 maja 2024

Zagadnienia: *rozkład zero-jedynkowy, rozkład dwumianowy i rozkład normalny.*

Laboratorium 2. Lista zadań

C. Dla dziesięciu rzutów monetą określimy zmienną losową X jako sumę wyników, czyli $X = X_1 + ... + X_{10}$, gdzie X_i to liczba orłów. Wykonaj w arkuszu odpowiednie tabele i wykresy:

1. zbuduj szereg rozdzielczy punktowy dla $\mathbf{range}(X) = \{0, 1, ..., 10\}$; [tabela, 1 punkt]
2. wyznacz empiryczny rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{epmf}(X)$ [tabela i wykres, 2 punkty]
3. porównaj empiryczny rozkład prawdopodobieństwa z teoretycznym rozkładem dwumianowym $X \sim Binom(10, \frac{1}{2})$; [tabela i wykres, 2 punkty]
4. wyznacz skumulowany rozkład prawdopodobieństwa, czyli dystrybuantę $\mathbf{ecdf}(X)$; [tabela, 1 punkt]
5. oblicz wartość oczekiwaną EX oraz wariancję D^2X tego rozkładu; [tabela, 1 punkt]

D. Dla rzutów dziesięcioma kostkami zmienna losowa X to suma oczek, czyli $X = X_1 + ... + X_{10}$.

1. Zbuduj szereg rozdzielczy punktowy dla zmiennej $\mathbf{range}(X) = \{10, 11, ..., 60\}$, [tabela, 1 punkt]
2. Przedstaw empiryczny rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{epmf}(X)$ z próby losowej [wykres, 1 punkt]

3*. Wyznacz teoretyczny rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{pmf}(X)$ [tabela, 2 punkty]

4. Zbuduj szereg rozdzielczy przedziałowy dla zmiennej losowej $X = \{10, 15, 20, ..., 60\}$, [tabela, 1 punkt]
5. Porównaj rozkłady prawdopodobieństwa $X \sim N\left(\frac{70}{2}, 5\sqrt{\frac{7}{6}}\right)$, [wykres, 1 punkt].

Uwaga: użyjemy kalkulatora dystrybuanty $F(x)$ =ROZKŁAD.NORMALNY(x,m,σ,1)

Twierdzenie 2.1 (J. Bernoulli, 1705). *Niech zmienna X_i ma rozkład zero-jedynkowy dla każdego $i = 1, 2, ..., n$. Wtedy suma $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ ma rozkład dwumianowy, czyli $X \sim Binom(n, p)$ oraz*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k,$$

gdzie $p = P(X_i = 1)$ dla każdego i, to prawdopodobieństwo wystąpienia jedynki (sukces, zwykle $p = 1/2$), natomiast $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ to współczynnik dwumianowy.

Dowód. Zdarzeniem pewnym jest iloczyn n składników postaci $(A \cup A') \cap (A \cup A') \cap ... \cap (A \cup A')$, gdzie $A = 1$. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzeń niezależnych $1 = (p + (1-p))^n$ oraz ze wzoru dwumianowego Newtona

$$1 = (p + (1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^k.$$

Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest sumą prawdopodobieństw $P(X = k)$ po k wystąpieniach jedynki, czyli $1 = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$. □

Twierdzenie 2.2. *Dla dwukrotnego rzutu kostką częstości teoretyczne n_k dla $k \in \{2, 3, ..., 12\}$ są współczynnikami wielomianu $(W(x))^2 = \sum_{k=2}^{12} n_k x^k$, gdzie $W(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, czyli*

$$W^2 = x^{12} + 2\,x^{11} + 3\,x^{10} + 4\,x^9 + 5\,x^8 + 6\,x^7 + 5\,x^6 + 4\,x^5 + 3\,x^4 + 2\,x^3 + x^2$$

Twierdzenie 2.3. *Dane są zmienne losowe X_1, X_2 z określonymi (skończonymi) wartościami oczekiwanymi $E(X_1)$ oraz $E(X_2)$. Wtedy wartość oczekiwana sumy zmiennych $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$. Odpowiednio wariancja dla sumy zmiennych niezależnych wynosi $\sigma^2(X_1 + X_2) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2)$, jeżeli wariancje $\sigma(X_1)$ oraz $\sigma(X_2)$ są określone.*

Twierdzenie 2.4 (CTG dla sum). *Dla ciągu niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, ...$ w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ załóżymy, że mają taki sam rozkład oraz wspólne $m = EX_i$ oraz $\sigma^2 = D^2 X_i$ istnieją oraz są skończone, przy czym $\sigma > 0$ dla pewnego i. Rozkład zmiennej losowej $S_n = X_1 + ... + X_n$ jest asymptotycznie równy rozkładowi $N(nm, \sigma\sqrt{n})$, czyli*

$$\lim_{n\to\infty} \left(F_{S_n}(x) - \Phi_{nm, \sigma\sqrt{n}} \right) = 0.$$