Optimizacijske metode

Napisal Jure Pustoslemšek po zapiskih predavanj prof. dr. Matjaža Konvalinke

Junij 2020

1 Optimizacijski problemi

Hocemo maksimizirati ali minimizirati realno funkcijo, definirano na neki mnozici.

Zgled 1.1. *Minimum/maksimum funkcije* $f(x) = x^2 - 2x + 4$ *na* $[-2, 2]$
Uporabimo odvod funkcije.

Zgled 1.2. *Minimum/maksimum funkcije* $f(x, y) = x^2 - y^2$ *na* $[-3, 1] \times [0, 2]$
Gledamo parcialne odvode in vrednosti funkcije na robu.

Zgled 1.3 (Problem kmetije)**.** *Na kmetiji s 50ha pridelovalne površine želimo maksimizirati dobiček po spodnji tabeli*

pridelek	*ure dela*	*stroski*	*dobiček*
pšenica	*60*	*400*	*240*
koruza	*80*	*600*	*400*
krompir	*100*	*480*	*320*

Na voljo imamo 5.000 ur delovne sile in 24.000€ kapitala.
Kaj nas zanima? Zanima nas, kako bomo razporedili različne pridelke po pridelovalni površini za najvecji dobiček.
x_1 . . . *površina pšenice v ha*
x_2 . . . *površina koruze v ha*
x_3 . . . *površina krompirja v ha*
Problem kmetije lahko matematično izrazimo takole:

$$\begin{array}{ll} max & 240x_1 + 400x_2 + 320x_3 \\ p.p. & x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ & 60x_1 + 80x_2 + 100x_3 \leq 5.000 \\ & 400x_1 + 600x_2 + 46x_3 \leq 24.000 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

To je linearni program (LP).

Zgled 1.4. *Imamo* $2n$ *jabolk, ki tehtajo* $w_1, ..., w_{2n}$
Jabolka razvrstimo v dve košari tako, da je v vsaki n *jabolk, in da sta teži kosar cim bolj podobni.*
Jabolka v 1. košari ponazorimo z množico A*. Ker je v množici* A *natanko polovica jabolk, lahko 2. košaro ponazorimo z množico* A^C*.*
Torej iščemo

$$min|\sum_{w_i \in A} w_i - \sum_{w_i \in A^C} w_i|$$

Poskusimo ta problem predstaviti kot LP:
x_i*;* $i \in [2n]$
$x_i = 1$*, če damo i-to jabolko v levo košaro.*
$x_i = -1$*, če damo i-to jabolko v desno košaro.*

$$\begin{aligned} min \quad & |\sum_{i=1}^{2n} w_i x_i| \\ p.p. \quad & \sum_{i=1}^{2n} x_i = 0 \\ & x_i \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$

To <u>*ni*</u> *linearen program! Absolutna vrednost ni linearna.*

Definicija 1.5 (Optimizacijski problem)**.** *Optimizacijski problem karakteriziramo kot* $(min/max, f, \Omega)$*, kjer je* f *kriterijska funkcija (tj. funkcija, ki jo zelimo minimizirati oz. maksimizirati),* Ω *pa množica dopustnih rešitev, tj. vseh* x*, ki ustrezajo danim pogojem.*

Zanima nas <u>optimalna vrednost</u>, tj. $x^* \in \Omega$, za katerega je $f(x^*)$ največji oz. najmanjši mozen.

Optimizacijski problem je:

- Nedopusten, če $\Omega = \emptyset$,
- Dopusten, če je $\Omega \neq \emptyset$

Dopustne probleme delimo na:

- Neomejen, če je Ω neomejena, torej lahko vedno najdemo boljšo rešitev,
- Omejen, če je Ω omejena

Omejene probleme pa še delimo na:

- Optimalen, če obstaja optimalna rešitev,
- Neoptimalen, če lahko vedno najdemo boljšo rešitev

2 Linearno programiranje

Definicija 2.1 (Linearni program)**.** *Linearni program (LP) je optimizacijski problem, v katerem je kriterijska funkcija linearna, dopustna množica pa je podana z linearnimi enačbami in neenačbami.*

Zgled 2.2.

$$\begin{aligned} min \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ p.p. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 - x_2 - x_3 \geq 1 \\ & 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Definicija 2.3 (Standardna oblika LP)**.** *LP je v* <u>*standarni obliki*</u>*, ce:*

1. *je tipa max,*

$$\begin{array}{ll} max & c_1x_1 + ... + c_nx_n \\ p.p. & a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & . \\ & . \\ & . \\ & a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, x_2, ..., x_n \leq 0 \end{array}$$

Slika 1: LP v standardni obliki

2. *vse omejitve so oblike* $g_j(x) \leq b_j$ *in*

3. *za vse spremenljivke so omejene z* $x_i \geq 0$

LP v standardni obliki lahko izrazimo tudi v matričnem zapisu.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

S temi oznakami lahko vsak LP (tudi takšne, ki niso v matrični obliki) zapišemo v matričnem zapisu:

$$\begin{array}{ll} max & c^T x \\ p.p. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Slika 2: LP v standardni obliki (matrični zapis)

Izrek 2.4. *Vsak LP lahko pretvorimo v ekvivalentni LP v standardni obliki.*

Dokaz. Pretvorbo poljubnega LP v standardno obliko opravimo v več korakih:

1. Minimizacijski problem je ekvivalenten maksimizacijskemu problemu negativne kriterijske funkcije z negativnimi pogoji.

$$min f(x) \rightarrow max - f(x)$$

$$a_{ij}x_i = b_j \rightarrow -a_{ij}x_i = -b_j$$

$$a_{ij}x_i \leq b_j \rightarrow -a_{ij}x_i \leq -b_j$$

$$a_{ij}x_i \geq b_j \rightarrow -a_{ij}x_i \geq -b_j$$

2. Omejitve spremenljivk popravimo z vpeljavo novih spremenljvk:

   2.1. $x_i \geq b_j$ zamenjamo z novo spremenljivko $x_i' = x_i - b_j$, da dobimo omejitev $x_i' \geq 0$

   2.2. $x_i \leq b_j$ zamenjamo z novo spremenljivko $x_i' = b_j - x_i$, da dobimo omejitev $x_i' \geq 0$

2.3. Neomejene spremenljivke zamenjamo z dvema novima spremenljivkama, podanima z enačbo $x_i = x_i' - x_i''$, novi spremenljivki pa sta omejeni z omejitvijo $x_i', x_i'' \geq 0$

3. Vsak pogoj oblike $g_j(x) = b_j$ pretvorimo v dva pogoja:

   $g_j(x) \leq b_j$ in $g_j(x) \geq b_j$

4. Pogoje oblike $g_j(x) \geq b_j$ pomnožimo z -1. S tem ga pretvorimo v $-g_j(x) \leq -b_j$

$\square$

TODO: Konveksne množice

2.1 Simpleksna metoda

Simpleksna metoda zahteva LP v standardni obliki:

$$\begin{array}{rc} max & c^T x \\ p.p. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Slika 3: LP v standardni obliki (matrični zapis)

Označimo z n število spremenljivk in z m število neenakosti, tj. $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ in $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$\begin{array}{rc} max & 240x_1 + 400x_2 + 320x_3 \\ p.p. & x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ & 60x_1 + 80x_2 + 100x_3 \leq 5000 \\ & 400x_1 + 600x_2 + 480x_3 \leq 2400 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Slika 4: LP problema kmetije v standardni obliki

Zgled 2.5 (Problem kmetije)**.** *Koeficiente v kriterijski funkciji in vsaki omejitvi posebej bomo delili z največjim skupnim deliteljem, da bomo dobili ekvivalenten LP z "lepšimi"številkami.*

$$\begin{array}{rc} max & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ p.p. & x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 250 \\ & 10x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 600 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Slika 5: LP problema kmetije z "lepšimi"koeficienti

Vsako neenakost spremenimo v enakost z novo spremenljivko.

$$\begin{array}{c} x_4 = 50 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 = 250 - 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \\ x_6 = 600 - 10x_1 - 15x_2 - 12x_3 \\ \hline z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \end{array}$$

Slika 6: Prvi slovar simpleksne metode na problemu kmetije

To je prvi slovar simpleksne metode.

V splošnem ima slovar $m + 1$ linearnih enačb in $n + m + 1$ spremenljivk. m spremenljivk izmed $x_1, x_2, ..., x_{n+m}$ in z je izraženih z ostalimi n spremenljivkami.

Teh m spremenljivk, ki so izražene z ostalimi n spremenljivkami, imenujemo bazne spremenljivke, ostale spremenljivke pa so nebazne (spremenljivka z predstavlja vrednost kriterijske funkcije in ne spada med bazne ali nebazne spremenljivke).

$x_1, x_2, ..., x_n$ so prvotne spremenljivke.

$x_{n+1}, x_{n+2} ..., x_{n+m}$ so dodatne spremenljivke.

V prvem slovarju so bazne spremenljivke natanko dodatne spremenljivke, nebazne pa prvotne.

Rečemo, da je slovar dopusten, če so vsi konstatni koeficienti baznih spremenljivk nenegativni. Prvi slovar je torej dopusten natanko takrat, ko je $b \geq 0$. Če je $b \ngeq 0$, uporabimo *dvofazno simpleksno metodo* (kasneje). Zato zaenkrat predpostavimo $b \geq 0$. V tem primeru je LP zagotovo dopusten, saj je $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ dopustna rešitev.

Opomba. *Vse spremenljivke (tako prvotne kot dodatne) so nenegativne.*

Z dopustnim slovarjem imamo *bazno dopustno rešitev*: nebazne spremenljivke nastavimo na 0. $f(x)$ je vrednost kriterijske funkcije, x pa so vrednosti prvotnih spremenljivk (nebazne smo nastavili na 0, bazne pa imajo vrednosti konstatnih koeficientov).

TODO: opis algoritma simpleksne metode

Izrek 2.6 (Osnovni izrek linearnega programiranja)**.**

1. *Če ima LP dopustno rešitev, ima tudi bazno dopustno rešitev.*
2. *Če ima LP optimalno rešitev, ima tudi bazno optimalno rešitev.*
3. *Velja natanko ena od možnosti za dani LP:*
   - *LP je nedopusten.*
   - *LP je neomejen.*
   - *LP je optimalen.*

2.2 Dualnost pri linearnem programiranju

Ideja: Problem kmetije P

$$\begin{array}{ll} max & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ p.p. & x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 250 \\ & 10x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 600 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Slika 7: LP problema kmetije

Zanimajo nas zgornje meje za kriterijsko funkcijo.
Neenakosti pomnožimo z $y_2, y_2, ..., y_m \geq 0$ in seštejemo:

$$(x_1 + x_2 + x_3)y_1 + (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)y_2 + (10x_1 + 15x_2 + 12x_3)y_3 \leq 50y_1 + 250y_2 + 600y_3$$

$$(y_1 + 3y_2 + 10y_3)x_1 + (y_1 + 4y_2 + 15y_3)x_2 + (y_2 + 5y_2 + 12y_3)x_3 \leq 50y_1 + 250y_2 + 600y_3$$

Če velja:

$$\begin{array}{c} y_1 + 3y_2 + 10y_3 \geq 3 \\ y_1 + 4y_2 + 15y_3 \geq 5 \\ y_1 + 5y_2 + 12y_3 \geq 4 \end{array}$$

je $2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 50y_1 + 250y_2 + 600y_3$.
Dualni problem kmetije P':

$$\begin{array}{ll} min & 50y_1 + 250y_2 + 600y_3 \\ p.p. & y_1 + 3y_2 + 10y_3 \geq 3 \\ & y_1 + 4y_2 + 15y_3 \geq 5 \\ & y_1 + 5y_2 + 12y_3 \geq 4 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Slika 8: Dualni problem kmetije

V splošnem:

Definicija 2.7 (Dualni LP)**.** *Za dani LP P v standardni obliki:*

$$\begin{array}{ll} max & c^T x \\ p.p. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

*je **dualni problem** LP P'*

$$\begin{array}{ll} min & b^T y \\ p.p. & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Trditev 2.8. *Za poljuben LP P je $P'' = P$.*

Dokaz. Naj bo LP P v standardni obliki. Potem je P' v standardni obliki

$$\begin{array}{ll} max & -b^T y \\ p.p. & (-A^T)y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

P'' je potem:

$$\begin{array}{ll} min & -c^T x \\ p.p. & (-A^T)^T x \geq -b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

kar po pretvorbi v standardno obliko postane enako kot P:

$$\begin{array}{ll} max & c^T x \\ p.p. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

□

Opomba. *Če ima LP P n spremenljivk in m neenačb, ima njegov dualni LP P' m spremenljivk in n neenačb.*

Izrek 2.9 (Šibki izrek o dualnosti (ŠID))**.** *Naj bo P linearni program, P' njegov dualni LP ter x in y dopustni rešitvi za P in P'. Ob uporabi oznak od prej je potem $c^T x \leq b^T y$.*

Dokaz. Brez izgube splošnosti predpostavimo, da je LP P v standardni obliki in opazimo, da je $A^T y \geq c$ in $Ax \leq b$. Ker velja tudi $x \geq 0$ in $y \geq 0$:

$$c^T x \leq (A^T y)^T = y^T Ax \leq y^T b = b^T y$$

□

Posledica 2.10. *Če velja $c^T x^* = b^T y^*$ za dopustni rešitvi x^*, y^*, je x^* optimalna rešitev za P in y^* optimalna rešitev za P'.*

Dokaz. Ali lahko velja $c^T x > c^T x^*$ za dopustno rešitev x? Potem velja $c^T x > b^T y^*$, ampak po ŠID velja $c^T x \leq b^T y^*$. Protislovje.

Kaj pa $b^T y < b^T y^*$ za neko dopustno rešitev y? Potem velja $b^T y < c^T x^*$, ampak po ŠID je $b^T y \geq c^T x^*$. Znova smo prišli v protislovje. Torej x^* in y^* morata biti optimalni rešitvi za P in P'. □

Posledica 2.11. *Če je P neomejen, je P' nedopusten.*

Izrek 2.12 (Krepki izrek o dualnosti (KID))**.** *Če ime P optimalno rešitev x^*, ima tudi P' optimalno rešitev y^* in velja $c^T x^* = b^T y^*$.*

Dokaz. Ogledamo si zadnji slovar:

$$z = v^* + \sum_{i=1}^{n+m} c_i^* x_i$$

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*$$

$c_i^* = 0$, če je x_i bazna spremenljivka in $c_i^* \leq 0$, če je x_i nebazna spremenljivka.

Nastavimo $y_i^* = -c_{i+n}^*$ za $i = 1, ..., m$

Trditev 2.13. *Naj bo $(y_1^*, ..., y_m^*)$ dopustna rešitev za P'. Potem je*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Če dokažemo to trditev, sta po posledici 2.10 x^* in y^* optimalni.

$$z = v^* + \sum_{i=1}^{n} c_i^* x_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i^* x_i$$

$$z = v^* + \sum_{i=1}^{n} c_i^* x_i + \sum_{i=1}^{m} c_{i+n} x_{i+n}$$

V naslednjem koraku uporabimo sledeči enačbi:

$$c_{i+n}^* = -y_i^* \quad \text{in} \quad x_{i+n} = b_i - \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Prvo enačbo smo dobili iz nastavka za y^*, druga pa je enačba za dopolnilno spremenljivko.

$$z = v^* + \sum_{i=1}^{n} c_i^* x_i + \sum_{j=1}^{m} (-y_j^*)(b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i)$$

$$z = (v^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* b_j) + \sum_{i=1}^{n} x_i (c_i^* + \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j^*)$$

Po drugi strani pa je $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$. Iz tega sledi:

$$v^* - \sum_{j=1}^{m} b_j y_j^* = 0$$

$$c_i^* + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* = c_i$$

Ker je $c_i^* \leq 0$ in $y_i^* = -c_{i+n}^*$, je $y_i^* = -c_{i+n}^* \geq 0$. Iz tega sledi, da je y^* dopustna rešitev:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j^* \geq c_i$$

$$y_1^*, ..., y_m^* \geq 0$$

Iz $v^* - \sum_{j=1}^{m} b_j y_j^* = 0$ sledi, da je $v^* = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j^*$. Ker pa je $v^* = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*$, sledi

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j^* = \sum_{j=1}^{m} b_j y_i^*$$

. □

Zgled 2.14.

$$\begin{array}{rrcrcrl}
max & 3x_1 & - & 15x_2 & + & 4x_3 & \\
p.p. & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 50 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 15x_3 & \leq 250 \\
 & 10x_1 & + & 15x_2 & + & 12x_3 & \leq 600 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}$$

Zadnji slovar: $z = 200 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_6$; x_4, x_5, x_6 *so dopolnilne spremenljivke.*

Kakšne so vrednosti dualne optimalne rešitve? y_j^* *je enak koeficientu pri dodatni spremenljivki, ki pripada* j*-ti neenakosti. Iz podanega slovarja preberemo* $c_4^* = 0, c_5^* = 0, c_6^* = \frac{1}{3}$. *Dualna optimalna rešitev je torej* $y^* = (0, 0, \frac{1}{3})$.

V kakšni zvezi stav splošnem LP P in njegov dual P'?

Trditev 2.15. *Za LP P in njegov dual P' velja natanko ena od možnosti:*

1. *oba sta optimalna*
2. *oba sta nedopustna*
3. *eden je neomejen, drugi pa nedopusten*

Dokaz. Po KID vemo, da je P optimalen natanko tedaj, ko je P' optimalen.
Po ŠID vemo:

- P neomejen $\Rightarrow$ P' nedopusten
- P' neomejen $\Rightarrow$ P nedopusten

□

$P \backslash P'$	nedopusten	neomejen	optimalen
nedopusten	✓	✓	×
neomejen	✓	×	×
optimalen	×	×	✓

Tabela 1: Tabela dopustnosti in optimalnosti dualnih LP

Izrek 2.16 (Izrek o dualnem dopolnjevanju (DD))**.** *Naj bosta LP P, P' dualna problema ter x in y dopustni rešitvi za P in P'. Potem sta x in y optimalna natanko tedaj, ko velja:*

- $\forall i = 1, ..., m : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ *ali* $y_i = 0$
- *in* $\forall j = 1, ..., n : \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j = c_j$ *ali* $x_j = 0$

Ekvivalentno:

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i \Rightarrow y_i = 0$
- $x_j = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$

Dokaz.

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i)x_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = D$$

Prvo neenakost smo dobili z $A^T y \geq c$ in $x \geq 0$, drugo pa z $Ax \leq b$ in $y \geq 0$. KID pravi, da sta x, y optimalni natanko takrat, ko je $L = D$, to je pa res natanko tedaj, ko velja:

- $\forall j = 1, ..., m : c_j x_j = (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i)x_j$

- $\forall i = 1, ..., n : (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i$

Izpostavimo x_j v prvi in y_i v drugi enačbi:

- $\forall j = 1, ..., m : x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j) = 0$
- $\forall i = 1, ..., n : (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i) y_i = 0$

$\square$

2.2.1 Ekonomski pomen dualnih spremenljivk

Zgled 2.17. $x_1^* = 0, x_2^* = 20, x_3^* = 25$ *je optimalna rešitev problema kmetije.*

površina:	45	< 50
delovna sila:	4.100	< 5.000
kapital:	2.400	$= 2.400$

Na kmetiji smo dobili idejo, da bi na banki vzeli kredit. Zanima nas, če in koliko se bo naš dobiček povečal, če s tem kreditom povečamo katero od dobrin.

površina:	$y_1^* = 0$
delovna sila:	$y_2^* = 0$
kapital:	$y_3^* = \frac{1}{3}$

Naslednji izrek nam bo povedal odgovor na to vprašanje.

Izrek 2.18. *LP P naj ima neizrojeno bazno rešitev. To pomeni, da so vsi konstantni koeficienti v slovarju $\neq 0$. Potem obstaja tak $\epsilon > 0$, da ob pogoju $|\triangle b_i| \leq \epsilon$ za $i = 1, ..., m$ velja $\triangle z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \triangle b_i$, kjer je $(y_1^*, ..., y_m^*)$ optimalna rešitev P'.*

Izrek podajamo brez dokaza.

Zgled 2.19. *Vrnimo se k kmetiji. Uporabimo izrek:*

$$\triangle z^* = \frac{1}{3} \triangle b_3$$

$$|\triangle b_i| \leq \epsilon \text{ za } i = 1, 2, 3$$

Kredit vzamemo, če je strošek (tj. obresti, zavarovanje, itd.) vsakega evra kredita manjša od $\frac{1}{3}$ evra.

2.2.2 Dual splošnega LP

Izrek 2.20. *Splošni LP P ima obliko:*

$$\begin{array}{rlll} max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ p.p. & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & & i = 1, ..., m' \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & & i = m'+1, ..., m \\ & x_j \geq 0 & & j = 1, ..., n' \end{array}$$

Slika 9: Splošni LP

Potem je njegov dualni LP P':

$$\begin{array}{lll} min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ p.p. & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, ..., n' \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j & j = n'+1, ..., n \\ & y_i \geq 0 & i = 1, ..., m' \end{array}$$

Slika 10: Dual splošnega LP

Povedano z besedami:

$$\begin{array}{rcl} \textit{neenanokosti v } P & \longrightarrow & \textit{nenegativne spremenljivke v } P' \\ \textit{enakosti v } P & \longrightarrow & \textit{poljubne spremenljivke v } P' \\ \textit{nenegativne spremenljivke v } P & \longrightarrow & \textit{neenakosti v } P' \\ \textit{poljubne spremenljivke v } P & \longrightarrow & \textit{enakosti v } P' \end{array}$$

Dokaz. P pretvorimo v standardno obliko.

$$\begin{array}{rlll} max & \sum_{j=1}^{n'} c_j x_j + \sum_{j=n'+1}^{n} c_j (x'_j - x''_j)) & & \\ p.p. & \sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_j + \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} (x'_j - x''_j)) & \leq b_i & j = 1, ..., m \\ - & \sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_j - \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} (x'_j - x''_j)) & \leq -b_i & j = m'+1, ..., m \\ & x_j \geq 0 & & j = 1, ..., n' \\ & x'_j, x''_j \geq 0 & & j = n'+1, ..., n \end{array}$$

LP v standardni obliki pa že znamo pretvoriti v dualni LP.

$$\begin{array}{rlll} min & \sum_{i=1}^{m'} b_i y_i + \sum_{i=m'+1}^{m} b_i (y'_i - y''_i)) & & \\ p.p. & \sum_{i=1}^{m'} a_{ij} y_i + \sum_{i=m'+1}^{m} a_{ij} (y'_i - y''_i)) & \geq c_i & i = 1, ..., n \\ - & \sum_{i=1}^{m'} a_{ij} y_i - \sum_{i=m'+1}^{m} a_{ij} (y'_i - y''_i)) & \geq -c_i & i = n', ..., n \\ & y_i \geq 0 & & i = 1, ..., m' \\ & y'_i, y''_i \geq 0 & & i = m'+1, ..., m \end{array}$$

□

3 Matrične igre

Naslednji optimizacijski problem, ki si ga bomo ogledali, je v bistvu tip igre. Z tovrstnimi problemi se sicer ukvarja teorija iger, mi pa si bomo matrične igre ogledali kot optimizacijski problem. Iz tega vidika gre za poseben tip linearnega programa, ki pa ima nekatere lepe lastnosti, zaradi katerih lahko problem lažje formuliramo in ga poenostavimo, preden jo rešimo z dvofazno simpleksno metodo.

Definicija 3.1. *Matrična igra je igra za 2 igralca, pri kateri ima 1. igralec na izbiro n izbir, 2. igralec m izbir, izid igre pa določa plačilna matrika*

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

a_{ij} je znesek, ki ga 2. igralec plača 1. igralcu, če 1. igralec uporabi i-to strategijo, 2. igralec pa j-to strategijo. V primeru, ko je $a_{ij} < 0$, 1. igralec plača $-a_{ij}$ 2. igralcu.

Zgled 3.2. *Kamen-papir-škarje*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} K & P & \check{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ P \\ \check{S} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zgled 3.3. *Igra Blotto*

Polkovnik Blotto ima 4 bataljone, major Clark pa 3 bataljone. Razporedita jih med 2 strateški točki. V vsaki točki zmaga tisti, ki je tja postavil več bataljonov. Poraženec plača $k+1$, kjer je k število bataljonov poraženca na strateški točki.
Blotto ima 5 možnih strategij: $(4,0),(3,1),(2,2),(1,3),(0,4)$
Clark ima 4 možne strategije: $(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Predpostavimo, da igralca igrata po načelu najmanjšega tveganja. Definiramo $M_1 =$ vrednost najmanjšega tveganja za igralca 1 in $M_2 =$ vrednost najmanjšega tveganja za igralca 2.

$$\begin{aligned} M_1 &= \max_i \min_j a_{ij} \\ M_2 &= \min_j \max_i a_{ij} \end{aligned}$$

Za igro Blotto je $M_1 = 0$ in $M_2 = 3$.

Trditev 3.4. *Za vsako matrično igro velja $M_1 \le M_2$.*

Dokaz. Vzemimo poljubno i-to vrstico in poljuben j-ti stolpec.

$$\min_{j'} a_{ij'} \le a_{ij} \le \max_{i'} a_{i'j}$$

□

Definicija 3.5 (Sedlo matrične igre). *$a_{i_0j_0}$ je **sedlo**, če je najmanjši v vrstici in največji v stolpcu.*

Trditev 3.6. *Matrična igra A ima sedlo natanko takrat, ko je $M_1 = M_2$.*

Dokaz $\implies$. $a_{i_0 j_0}$ naj bo sedlo matrične igre A. Potem je:

$$M_1 = \max_i \min_j a_{ij} \quad M_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

$$M_1 \geq \min_j a_{i_0 j} = a_{i_0 j_0} = \max_i a_{ij_0} \geq M_2 \geq M_1$$

Ker je $M_1 \leq M_2$ in hkrati $M_1 \geq M_2$, torej je $M_1 = M_2$. □

Dokaz $\Longleftarrow$. Naj bo $M_1 = M_2$.
M_1 (maksimum najmanjših vrednosti v stolpcih) je dosežen v vrstici i_0.

$$M_1 = \min_j a_{i_0 j}$$

Minimum je dosežen v stolpcu j_0, torej je $M_1 = a_{i_0 j_0}$.

M_2 (minimum največjih vrednosti v vrsticah) je dosežen v stolpcu j_0'.

$$M_2 = \max_i a_{ij_0'}$$

Maksimum je dosežen v vrstici i_0', torej je $M_2 = a_{i_0' j_0'}$. Pokazati želimo, da je $a_{i_0 j_0'}$ sedlo. $a_{i_0 j_0'}$ je v isti vrstici kot $M_1 = a_{i_0 j_0}$, ki pa je najmanjši v svoji vrstici, torej je $M_1 \leq a_{i_0 j_0'}$. Podobno, $a_{i_0 j_0'}$ je v istem stolpcu kot $M_2 = a_{i_0' j_0'}$, ki je največji v svojem stolpcu, zato je $a_{i_0 j_0'} \leq M_2$. Ker pa je $M_1 = M_2$, je $a_{i_0 j_0'} = M_1 = M_2$, kar pomeni, da je najmanjši v svoji vrstici (ker je enak M_1) in največji v svojem stolpcu (ker je enak M_2), torej je sedlo. □

Posledica 3.7. *Če je $a_{i_0 j_0}$ sedlo, je i_0 optimalna strategija za 1. igralca in j_0 optimalna strategija za 2. igralca.*

Ta posledica sledi iz tega, da je sedlo enako M_1, ki je najbolj varna strategija za 1. igralca, in je hkrati enako M_2, ki je najbolj varna strategija za 2. igralca.

3.1 Mešana strategija

Pri mešani strategiji vsak igralec izbere verjetnosti, da uporabi vsako izmed svojih strategij.

$$\begin{array}{lll} \text{1. igralec:} & (x_1, ..., x_n) & x_i \geq 0 \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \text{2. igralec:} & (y_1, ..., y_m) & y_j \geq 0 \sum_{j=1}^m y_j = 1 \end{array}$$

Z $E(x, y)$ označimo pričakovani 1. igralca, če 1. igralec uporabi mešano strategijo x, 2. igralec pa mešano strategijo y.

$$E(x, y) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_i = \sum_{i=1}^n x_i (\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j) = \sum_{j=1}^n x_i (Ay)_i = x^T Ay = (A^T x)^T y$$

Recimo, da se 1. igralec odloči uporabiti neko strategijo x. Ker ne ve, kakšno strategijo bo uporabil 2. igralec, je zanj najbolj smiselno pogledati, koliko bo dobil oz. izgubil v najslabšem primeru:

$$\min_y x^T Ay$$

Torej, če hoče 1. igralec igrati z optimalno strategijo, tj. tisto, s katero je najslabši primer najboljši možen.

$$\max_x \min_y x^T Ay$$

Za 2. igralca izpeljemo podobno formulo za njegovo optimalno strategijo:

$$\min_y max_x x^T Ay$$

Trditev 3.8. *Naj bo A matrična igra. Potem velja*

$$\max_x \min_y x^T Ay \leq \min_y \max_x x^T Ay$$

Dokaz. Izberemo strategiji x, y.

$$\min_{y'} x^T Ay' \leq x^T Ay \leq \max_{x'} x'^T Ay$$

□

Lema 3.9.

$$\min_y x^T Ay = \min_{j=1,...,m} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

Dokaz. Označimo $s = \min_y \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i$.

$$y = (0, ..., 1, ..., 0)$$

y je **Čista strategija**. Označimo $y_{j'} = 1$. Za vse ostale j je $y_j = 0$.

$$x^T Ay = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j$$

Ker je $y_j = 0$ za vse $j \neq j'$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

$$\min_y x^T Ay \leq \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \text{ za } \forall j = 1, ..., m$$

To pomeni, da je

$$\min_y x^T Ay \leq s = \min_y \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i$$

Pokažimo še nasprotno neenakost. Upoštevamo, da je $y \geq 0$ in da je y čista strategija:

$$x^T Ay = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i) y_j \geq \sum_{j=1}^m s\ y_i = s$$

Iz tega se vidi:

$$\min_y x^T Ay \geq s$$

□

Opomba. *Na izbrano strategijo 1. igralca se 2. igralec lahko optimalno brani s čisto strategijo.*

Lema 3.10.

$$\max_x x^T Ay = \max_{i=1,...,n} \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j$$

Ta lema ima enak dokaz in opombo.

Igro bi radi formulirali kot LP. S stališča 1. igralca:

$$\max_x \min_y x^T Ay = \max_x \min_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

To ni linearna funkcija, vendar lahko s trikom to popravimo.

$$\begin{array}{lll} max & s & \\ p.p. & s \leq \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i & j = 1, ..., m \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 & \\ & x_i \geq 0 & i = 1, ..., n \end{array}$$

Podobno pogledamo še iz stališča 2. igralca:

$$\begin{array}{lll} min & t & \\ p.p. & t \geq \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j & i = 1, ..., n \\ & \sum_{j=1}^m y_j = 1 & \\ & x_i \geq 0 & j = 1, ..., m \end{array}$$

Lahko vidimo, da sta problema dualna. Oba problema sta dopustna - izberemo dve poljubni čisti strategiji. Po KID sta oba problema optimalna, njuni optimalni vrednosti pa sta enaki.

Izrek 3.11 (Izrek o minimaksu)**.** *Za poljubno matrično igro je*

$$\max_x \min_y x^T Ay = \min_y \max_x x^T Ay$$

Tej vrednosti pravimo **vrednost** ali **strateško sedlo** igre. Igra je **poštena**, če je njena vrednost 0.

Matrično igro rešimo z dvofazno simpleksno metodo. Preverjanje optimalnosti je enostavno:

$$\begin{array}{lll} x, y \text{ dopustna} & & \\ x, y \text{ optimalna} & \iff & \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i = \max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \end{array}$$

Trditev 3.12. *Če ima A sedlo $a_{i_0 j_0}$, potem je i_0 optimalna strategija za 1. igralca, j_0 pa za drugega.*

Dokaz.

$$s = \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = \min_j a_{i_0 j} = a_{i_0 j_0}$$

$$t = \max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = \max_i a_{i j_0} = a_{i_0 j_0}$$

□

Definicija 3.13. *Matrična igra* ***simetrična****, če je $A^T = -A$*

Trditev 3.14. *Simetrična igra je poštena.*

Dokaz. Za dokaz bomo potrebovali naslednjo izpeljavo:

$$x^T Ay = x^T(-A^T)y = -(Ax)^T y = -y^T Ax$$

Naj bo v vrednost simetrične matrične igre. Potem je

$$v = \min_y \max_x x^T Ay = \max_x \min_y (-y^T Ax) = -\max_y \min_x y^T Ax = -\max_x \min_y x^T Ay = -v$$

Ker je $v = -v$, mora biti $v = 0$. □

Definicija 3.15. *Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$. Rečemo, da a* ***dominira*** *b, če je $a_i \geq b_i$ za vse i.*

Trditev 3.16. *Če i-ta vrstica plačilne matrike dominira i'-to vrstico, se vrednost igre ne spremeni, če izbrišemo vrstico i'.*

Trditev 3.17. *Če j-ti stolpec plačilne matrike dominira j'-ti stolpec, se vrednost igre ne spremeni, če izbrišemo stolpec j.*

Torej lahko brišemo večje stolpce in manjše vrstice brez vpliva na vrednost igre.

4 Problem razvoza (angl. Transshipment problem)

Imamo mesta, kjer se neka surovina proizvaja ali porablja, poti med mesti in ceno vsake poti na enoto surovine. Naša naloga je zadovoljiti potrebe po surovini s čim manjšimi stroški. Matematično ta problem predstavimo z grafom:

Naj bo $G = (V, E)$ usmerjen graf. Za vsako vozlišče $v \in V$ imamo dano utež $b_v \in \mathbb{R}$. Če je $b_v > 0$, je vozlišče porabnik, če je pa $b_v < 0$, pa je proizvajalec.

Za vsako povezavo $e \in E$ imamo dano utež $c_e \in \mathbb{R}$, ki predstavlja ceno prevoza na enoto surovine.

$$\text{Predpostavka: } \sum_v b_v = 0$$

$$\text{Iščemo: } \quad x_e \geq 0, \quad min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

V vsakem vozlišču velja Kirchhoffov zakon:

$$\sum_{Konec(e)=v} x_e - \sum_{Zacetek(e)=v} x_e = b_v$$

Sestavimo **incidenčno matriko** A:

$$a_{ve} = \begin{cases} 0 & v \text{ ni vozlišče } e \\ 1 & Konec(e) = v \\ -1 & Zacetek(e) = v \end{cases}$$

Problem razvoza (PR) izrazimo kot LP:

$$\begin{array}{ll} min & c^T x \\ p.p. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

PR lahko rešimo z dvofazno simpleksno metodo, lahko pa jo rešimo tudi s simpleksno metodo na omrežjih.

4.1 Simpleksna metoda na omrežjih

Simpleksno metodo na omrežjih začnemo, podobno kot navadno simpleksno metodo ali drugo fazo dvofazne simpleksne metode, tj. z dopustno rešitvijo, katero izboljšujemo, dokler jo je možno izboljšati. Pri simpleksni metodi na omrežjih bomo za začetno dopustno rešitev potrebovali vpeto drevo T (za vpeto drevo velja $V(T) = V(G)$). Potrebovali bomo tudi dopustno rešitev $(x_e)_{e \in E}$, za katero bo veljalo $x_e = 0$ za $e \notin T$. Takšni rešitvi pravimo **drevesna dopustna rešitev (ddr)**. Postopek, kako priti do začetne *ddr* oz. pokazati, da je problem nedopusten, bomo videli malo kasneje. Kasneje bomo tudi dokazali, da je optimalna rešitev vedno drevesna.

1. Za drevesno dopustno rešitev izberemo poljubno vozlišče in izračunamo razvozne cene od tega do vseh drugih vozlišč.

   $$y_1 = 0$$

   $$y_j = y_i + c_{ij} \text{ za vsak } ij \in T$$

   Ta sistem enačb je enoličen, ker je T drevo. Ker je T vpeto drevo, smo s tem sistemom enačb prišli do vseh vozlišč v originalnem grafu G.

2. Poiščemo povezavo $ij \in G \backslash T$, za katero je $y_i + c_{ij} < y_j$. To je **vstopajoča povezava**, ki jo dodamo v drevo T.

3. Ko smo v drevo dodali povezavo e, smo dobili natanko en cikel. V tem ciklu ločimo povezave glede na smer povezave e:

   - povezave v smeri povezave e so *preme*,
   - povezave v nasprotni smeri so *obratne*

   Odstraniti hočemo eno povezavo f iz tega cikla, da dobimo nov *ddr*. Tej povezavi rečemo **izstopajoča povezava**. Ker f ne bo v novem drevesu, bo $x'_f = 0$. Da bo nov *ddr* ustrezal Kirchhoffovemu pogoju, moramo premim povezavam na ciklu povečati pretok za x_f, obratnim pa ga zmanjšati za x_f. Ker hočemo povezavi f zmanjšati x_f, da bomo za f izbrali eno izmed obratnih povezav. Da pa bo še vedno $x_e \geq 0$ za vse $e \in E(G)$, moramo za f izbrati obratno povezavo z najmanjšim x_f. Torej bomo premim povezavam povečali, obratnim pa zmanjšali pretok za

$$t = \min\{\ x_f \mid f \text{ obratna povezava }\}$$

Postopek ponavljamo, dokler v 2. koraku ne najdemo vstopajoče povezave. To je analogno koncu navadne simpleksne metode, ki se tudi konča takrat, ko ne najdemo nobene vstopajoče spremenljivke.

Trditev 4.1. *Naj bo x ddr in y vektor cen razvoza za PR. Potem je $c^T x = b^T y$.*

Dokaz. PR je omejen z $Ax = b$, torej je $b^T y = (Ax)^T y = x^T(A^T y)$. A^T ima v vrstici povezave ij vrednost 1 v stolpcu vozlišča j in vrednost -1 v stolpcu vozlišča i, povsod drugje pa ima vrednost 0 zato je $(A^T y)_{ij} = y_j - y_i$. Iz enačb, ki določajo cene razvoza in predpostavke, da je x *ddr*, imamo še enačbi:

$$\begin{array}{rrcl} \forall ij \in T: & y_j - y_i & = & c_{ij} \\ \forall ij \notin T: & x_{ij} & = & 0 \end{array}$$

Iz teh enačb izpeljemo

$$b^T = x^T(A^T y) = \sum_{ij \in E} x_{ij}\ (y_j - y_i) = \sum_{ij \in E} x_{ij}\ c_{ij} = c^T x$$

□

Trditev 4.2. *Naj bo x ddr in y vektor cen razvoza. Če za vse $ij \in E$ velja $y_i + c_{ij} \geq y_j$, je x optimalna rešitev.*

Dokaz. x je dopustna rešitev, torej $Ax = b$ in $x \geq 0$. Po predpostavki je $(A^T y)_{ij} = y_j - y_i \leq c_{ij}$.

$$c^T x \geq (A^T y)^T x = y^T(Ax) = y^T b = c^T x$$

□

Trditev 4.3. *Če je G povezan graf (kot neusmerjen graf), potem obstaja dopustna rešitev za PR natanko tedaj, ko obstaja ddr.*

Dokaz. ($\Longleftarrow$) Očitno. Dokažimo ($\Longrightarrow$):
Predpostavimo, da na dopustni rešitvi obstaja cikel C, na katerem je $x_e > 0$ za vse $e \in C$. Izberemo smer in razvoz povezave z najmanjšim $t = x_e$. Povezavam v smeri povezave e zmanjšamo razvoz za t, povezavam v nasprotni smeri pa razboz povečamo za t. Dobili smo *ddr*. □

Opomba. *Gozdu (grafu, v katerem so povezane komponente drevesa) dodamo povezave z razvozom $x_{ij} = 0$ med povezanimi komponentami, da dobimo drevo.*

Če smo med postopkom simpleksne metode na omrežjih dobili cikel s samimi premimi povezavami, očitno ne morem izbrati izstopajoče povezave, ker bi ta morala biti obratna. V tem primeru smo dobili **negativen cikel**, tj. cikel, na katerem je vsota cen negativna. Če surovino prevozimo skozi cikel, smo s prevozom zaslužili! To pomeni, da lahko $c^T x$ postane poljubno negativen, če surovino poljubnokrat peljemo skozi ta cikel. To pa pomeni, da je podan PR neomejen problem, če je dopusten.

Tudi pri simpleksni metodi na omrežjih lahko pride do ciklanja. To lahko preprečimo s Cunninghamovim pravilom (lahko ga razumemo kot analognega pravilu najmanjšega indeksa):

Naj bo $e = ij$ vstoppajoča povezava. Neko vozlišče v G označimo kot koren in ga poimenujemo r. Naj bo v prvo vozlišče na poti od r do i, ki je na ciklu. Med obratnimi povezavami na ciklu z najmanjšim razvozom izberemo tisto, ki je prva na poti od v proti e.

4.2 Dvofazna simpleksna metoda na omrežjih

Ostaja nam še vprašanje - kako najdemo prvotno drevesno dopustno rešitev oz. dokažemo, da je problem nedopusten? Odgovor na to vprašanje je dvofazna simpleksna metoda na omrežjih, ki je povsem analogna navadni dvofazni simpleksni metodi.

Izberemo poljubno vozlišče r in ga imenujemo koren. Za vsako vozlišče $v \neq r$:

- $b_v \geq 0$: dodamo povezavo rv, če je še ni,
- $b_v < 0$: dodamo povezavo vr, če je še ni

Te dodatne povezave imenujemo **umetne povezave**. Cene umetnih povezav nastavimo na $c_e = 1$, cene prvotnih pa na $c_e = 0$. Za ta problem obstaja *ddr*: Povezavam rv, kjer je $b_v \geq 0$, nastavimo $x_{rv} = b_v$, povezavam vr, kjer je $b_v < 0$, pa nastavimo $x_{vr} = b_v$. Ostalim povezavam nastavimo $x_{ij} = 0$. Takšen x očitno ustreza pogoju $x \geq 0$. Preverimo, da velja tudi Kirchhoffov zakon:

$$
\begin{aligned}
v \neq r, \quad b_v \geq 0 \qquad & \sum_{K(e)=v} x_e - \sum_{Z(e)=v} x_e = b_v - 0 = b_v \\
v \neq r, \quad b_v \geq 0 \qquad & \sum_{K(e)=v} x_e - \sum_{Z(e)=v} x_e = 0 - (-b_v) = b_v
\end{aligned}
$$

Za $v = r$ tudi velja:

$$\sum_{K(e)=r} x_e - \sum_{Z(e)=r} x_e = \sum_{\substack{v \neq r \\ b_v < 0}} (-b_v) - \sum_{\substack{v \neq r \\ b_v \geq 0}} b_v = -\sum_{v \neq r} b_v = b_r \text{ (ker je } \sum_{v \in V} b_v = 0)$$

Ker je $c_e \in \{0, 1\}$, je $c^T x \geq 0$, zato problem ni neomejen, torej je optimalen. Na tem problemu uporabimo simpleksno metodo na omrežjih.

Trditev 4.4. *Če je optimalna vrednost tega problema enaka 0, je prvotni problem dopusten.*

Dokaz $\Longrightarrow$. Na umetnih povezavah je $c_e = 1$, torej je $x_e = 0$, ker je $c^T x = 0$. Vzamemo x_e na prvotnih povezavah in imamo dopustno rešitev, saj za prvotne povezave veljajo enake omejitve kot pri prvotnem problemu. □

Dokaz $\Longleftarrow$. Predpostavimo, da je prvotni problem dopusten. Potem ima dopustno rešitev na prvotnih povezavah. te vrednost x_e ohranimo, na umetnih povezavah pa nastavimo $x_e = 0$. Ker je $c_e = 0$ za prvotne povezave, je $c^T x = 0$. Ker je $c^T x \geq 0$, imamo optimalno rešitev. □

Ko se 1. faza ustavi, imamo tri možnosti:

- T^* nima umetne povezave. Potem je T^* *ddr* za prvotni problem.

- T^* vsebuje vsaj eno umetno povezavo z razvozom $x_e > 0$. Potem je optimalna vrednost problema 1. faze > 0. Prvotni problem ni dopusten.
- T^* vsebuje umetne povezave, in vse z ničelnim razvozom. Odstranimo vse umetne povezave in dobimo gozd. Gozdu dodamo prvotne povezave z ničelnim razvozom in dobimo drevesno dopustno rešitev.

2. faza je običajna simpleksna metoda na omrežjih.

4.3 Dual PR

LP za PR je:

$$\begin{array}{llcl} min & c^T x & & \\ p.p. & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} max & (-c)^T x & & \\ p.p. & (-A)x & = & -b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Dualni LP za PR (PR') je potem:

$$\begin{array}{llcl} min & (-b)^T y & & \\ p.p. & (-A)^T y & \geq & -c \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} max & b^T y & & \\ p.p. & A^T y & \leq & c \end{array}$$

Izrek 4.5. *Naj bo x ddr in y cene razvoza ob koncu simpleksne metode na omrežjih. Potem je x optimalna rešitev za PR, y pa za PR'.*

Dokaz. Ker je $y_j - y_i \leq c_{ij}$, je y dopustna rešitev za PR'. Ker je $c^T x = b^T y$, je po ŠID x optimalna za PR in y optimalna za PR'. □

Izrek 4.6 (Izrek o celoštevilskih rešitvah)**.** *Naj bo $b_v \in \mathbb{Z}$ za vse povezave $v \in V$. Potem velja:*

(a) Če ima problem dopustno rešitev, ima tudi celoštevilsko dopustno rešitev.

(b) Če ima problem optimalno rešitev, ima tudi celoštevilsko optimalno rešitev.

Dokaz. Opravimo 1. fazo simpleksne metode na omrežjih in pridemo do dopustne rešitve. Prva *ddr* je celoštevilska. Nadaljujemo z 2. fazo, in tu na vsakem koraku ostanemo v celih številih. □

TODO: dvojno stohastične matrike

5 Problem razvoza z omejitvami (PRO)

Problem razvoza z omejitvami je isti problem kot PR, le da imamo za vsako vozlišče e še omejitev $u_e \in [0, \infty)$. Rešitev je dopustna, če $Ax = b$ in $0 \geq x \leq u$.

Definicija 5.1. *Naj bo x dopustna rešitev za PRO. x je drevesna dopustna rešitev, če obstaja takšno drevo T, da za vsako $e \notin T$ velja $x_e = 0$ (**prazna povezava**) ali $x_e = u_e$ (**nasičena povezava**).*

Uporabimo varianto simpleksne metode na omrežjih - tudi tu izberemo $y_1 = 0$ in izračunamo $y_j = y_i + c_{ij}$ za vse $ij \in T$. Za vstopajočo povezavo lahko izberemo $ij \notin T$, če velja $x_{ij} = 0$ in $y_i + c_{ij} < y_j$ ali $x_{ij} = u_i j$ in $y_i + c_{ij} > y_j$.

Izbira izstopajoče povezave je odvisna od načina, na katerega smo izbrali vstopajočo povezavo.

(a) Če za vstopajočo povezavo velja $x_{ij} = 0$ in $y_i + c_{ij} < y_j$, potem za izstopajočo povezavo iščemo obratno povezavo, katero bomo zmanjšali na 0, ali pa premo povezavo, katero bomo povečali na u_e. Ker mora veljati Kirchhoffov zakon in omejitev med 0 in u_e za vse povezave, bomo vse preme povezave povečali, obratne pa zmanjšali za takole definiran t:

$$t = \min\{\ x_e \mid e \text{ obratna }\} \cup \{\ u_e - x_e \mid e \text{ prema }\}$$

(b) Če pa za vstopajočo povezavo velja $x_{ij} = u_e$ in $y_i + c_{ij} > y_j$, pa preme povezave na ciklu zmanjšamo, obratne pa povečamo za t:

$$t = \min\{\ x_e \mid e \text{ prema }\} \cup \{\ u_e - x_e \mid e \text{ obratna }\}$$