Teorija pri matematiki

Jure Slak

2008 – 2012, Gimnazija Vič

$$e^{\pi i}$$

v. 1.02

Predgovor

Pred vami je gimnazijska snov matematike štirih let, kot mi je bila povedana na Gimnaziji Vič v letih 2008 – 2012. Zapiski so nastajali pred vsakim testom najprej v Wordu, ko pa sem se izobrazil, sem jih dopolnil in prestavil v LaTeX. Zapiski so moji in niso bili nikoli pregledani s strani profesorjev, tako da se v njih lahko pojavljajo napake. Uspešno so prestali mojo maturo, in še nekaj matur po tem, tako da upam, da so napake zelo redke. Če se kljub temu kakšna najde, mi jo sporočite na `jure.slak@gmail.com` ali pa naredite issue na repozitoriju. Upam, da vam bodo zapiski v pomoč pri učenju in da boste vsaj tisti, ki ste morda malo "čudni", kot sem bil svoje čase jaz, v njih videli tudi lepoto, ki jo ponuja matematika.

Sedaj sem postal že diplomirani matematik in vem, da so nekatere stvari napisane okorno, nenavadno ali netočno, vendar je to tudi njihov čar. Zapiski so namreč napisani s strani srednješolca, kot je snov dojemal, ko jo je prvič slišal in zato morda dijakom bližje kot učbenik, in tudi zato jih nimam namena veliko spreminjati.

Za popravke in dodatke se iskreno zahvaljujem Žigi Gosarju, ki je odpravil mnogo napak, tako vsebinskih kot slovničnih, ter Roku Kosu, ki je posodobil in izboljšal kose snovi ter popravil druge napake.

Jure Slak

Kazalo

1 Izjave

Izjava je smiseln povedni stavek, ki mu lahko določimo njegovo vrednost.

Negacija izjave A je nova izjava, “Ni res, da drži A.” ($\neg A$), ki je pravilna, če je izjava A napačna in obratno. Za vrednosti glej tabelo 1.

Konjunkcija izjav A in B je nova izjava “A in B.” ($A \wedge B$), ki je pravilna le, če sta izjavi A in B pravilni. Za vrednosti glej tabelo 1.

Disjunkcija izjav A in B je nova izjava “A ali B.” ($A \vee B$), ki je pravilna, ko je pravilna vsaj ena izmed izjav A in B. Za vrednosti glej tabelo 1.

Ekskluzivna disjunkcija izjav A in B je nova izjava “Bodisi A bodisi B.” ($A \veebar B$ ali $A \otimes B$), ki je pravilna, ko je pravilna natanko ena izmed izjav A in B. Za vrednosti glej tabelo 1.

Implikacija izjav A in B je nova izjava “Če A, potem sledi B.” ($A \Rightarrow B$), ki je napačna samo v primeru, da je prva izjava pravilna, druga pa napačna. Za vrednosti glej tabelo 1.

Ekvivalenca izjav A in B je nova izjava “Če A, natanko takrat B.” ($A \Leftrightarrow B$), ki je pravilna, če imata izjavi enako vrednost. Za vrednosti glej tabelo 1.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Tabela 1: Vrednosti različnih izjav.

2 Množice

Množica je skupina elementov, ki jih druži neka skupna lastnost.

Prazna množica je množica brez elementa. ($\emptyset$)

Univerzalna množica ($\mathcal{U}$) je množica, ki vsebuje vse elemente, ki jih preučujemo.

Množica A je **podmnožica** B ($A \subset B$), če je vsak element množice A tudi element množice B.

Dve množici sta **enaki**, če imata iste elemente.

Moč množice je število njenih elementov. ($\mathrm{m}(a)$ ali $|A|$)

Unija množic A in B ($A \cup B$) je nova množica, ki vsebuje elemente, ki so v množici A ali v množici B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}, \quad \min\{|A|, |B|\} \leq |A \cup B| \leq |A| + |B|$$

Presek množic A in B ($A \cap B$) je nova množica, ki vsebuje elemente, ki so v množici A in v množici B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}, \quad 0 \leq |A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$$

Razlika množic A in B ($A - B$ ali $A \setminus B$) je nova množica, ki vsebuje vse elemente, ki so v prvi množici v prvi pa ne.

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Komplement množice A (A^c) je nova množica, ki vsebuje vse elemente, ki niso v množici A. $A^c = \mathcal{U} - A$

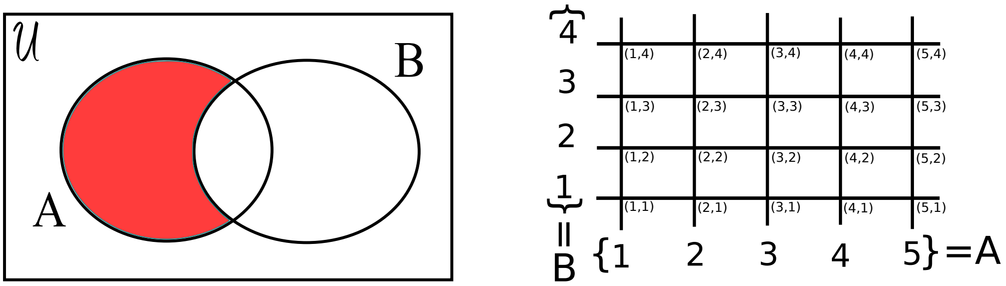
Potenčna množica množice A je množica vseh podmnožic množice A.

$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ \\ Za dokaz glej razdelek 33.7.

Kartezični produkt množic A in B ($A \times B$) je nova množica, ki vsebuje urejene pare, v katerih je prvi element iz množice A, drugi pa iz množice B.

$$A \times B = \{(a, b)\,; a \in A \wedge b \in B\}\,,\ |A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Množice lahko predstavimo z Vennovimi diagrami, kot na primer na sliki 1(a), kartezični produkt pa kot šahovnico ali kot mrežo, kjer vodoravne črte predstavljajo elemente množice A, navpične elemente množice B, presečišča pa so elementi kartezičnega produkta. Taka predstavitev je prikazana na sliki 1(b).



(a) Predstavitev razlike množic A in B z Vennovim diagramom.

(b) Predstavitev kartezičnega produkta $A \times B$.

Slika 1: Grafična predstavitev množic.

3 Preslikave

Preslikava, ki množico A preslika v množico B ($f\colon A \to B, f : a \mapsto b$), je predpis, ki vsakemu elementu iz množice A priredi natanko določen element iz množice B.

Preslikava je **injektivna**, kadar se par različnih elementov iz množice A preslika v par različnih elementov iz množice B. ($a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2); a_1, a_2 \in A$)

Preslikava je **surjektivna**, kadar je vsak element množice B slika vsaj enega elementa iz množice A. ($\forall b \in B, \exists a \in A\colon b = f(a)$)

Preslikava je **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna hkrati.

Graf preslikave $f\colon A \to B$ je podmnožica kartezičnega produkta $A \times B$.

4 Relacije

Relacija je odnos med elementi neke množice. Relacija je podmnožica kartezičnega produkta.

Relacija je **refleksivna**, če za vsak element v množici velja, da je element v relaciji sam s seboj. ($\mathcal{R}$ refleksivna $\Leftrightarrow \forall a \in A\colon a\mathcal{R}a$)

Relacija je **simetrična**, kadar za vsak par elementov velja: če je prvi v relaciji z drugim, je tudi drugi v relaciji s prvim. ($\mathcal{R}$ simetrična $\Leftrightarrow \forall a, b \in A\colon a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$)

Relacija je **tranzitivna**, če za vsako trojico elementov velja: če je prvi v relaciji z drugim in drugi v relaciji s tretjim, potem je tudi prvi v relaciji s tretjim. ($\mathcal{R}$ tranzitivna $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in A\colon (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$)

Relacija je **ekvivalenčna**, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna hkrati.

5 Naravna števila

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Z $\mathbb{N}_n$ označimo množico prvih n naravnih števil.

Operacija dvema elementoma priredi nov element.

Definirajmo še soda in liha števila:
$\mathcal{S} = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{L} = \{2n + 1; n \in \mathbb{N}\}$

Velja tudi:
vsota dveh lihih števil je sodo število.

$$(2n + 1) + (2m + 1) = 2(n + m + 1) = 2k$$

kvadrat lihega števila je liho število.

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2k + 1$$

5.1 Zakoni

Zakon o **komutativnosti** ali zakon o zamenjavi za množenje in seštevanje:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Zakon o **asociativnosti** ali zakon o združevanju za množenje in seštevanje:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Zakon o **distributivnosti** ali zakon o razčlenjevanju, ki povezuje množenje in seštevanje:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

5.2 Številski sestavi

Vsako število v desetiškem sistemu z osnovo 10 lahko zapišemo v kateremkoli sistemu z osnovo b.
Poljubno število $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ pomeni:

$$a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0$$

b — osnova, $b \in \mathbb{N} \wedge b \geq 2$
a_i — števka, cifra, $0 \leq a_i < b$

Vsako naravno število a lahko zapišemo na en sam način v številskem sestavu z osnovo b.

5.3 Relacija deljivosti

Število a deli število b natanko takrat, ko je število b večkratnik števila a.

$$a|b \Leftrightarrow b = k \cdot a; \quad a, b, k \in \mathbb{N}$$

Lastnosti:

refleksivnost: $a|a$

antisimetričnost: $a|b \wedge b|a \Rightarrow a = b$

tranzitivnost: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

neimenovana 1: $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c)$

neimenovana 2: $a|b \wedge a|(b+c) \Rightarrow a|c$

Dokaz antisimetričnosti:

$$a|b \Leftrightarrow b = k_1 \cdot a; \quad k_1 \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$
$$b|a \Leftrightarrow a = k_2 \cdot b; \quad k_2 \in \mathbb{N} \tag{5.2}$$
$$a = k_2 \cdot b \qquad \backslash\backslash \text{ izhaja iz definicije} \tag{5.3}$$
$$a = k_2 \cdot k_1 \cdot a \qquad \backslash\backslash\ b \text{ zamenjamo po definiciji, glej (5.2)} \tag{5.4}$$
$$k_1 \cdot k_2 = 1 \tag{5.5}$$
$$k_1 = 1, k_2 = 1 \qquad \backslash\backslash\ k_1 k_2 \text{ je lahko 1 le, če velja ta vrstica} \tag{5.6}$$
$$a = b \qquad \backslash\backslash \text{ zazremo se v (5.3) in se spomnimo na (5.6)} \tag{5.7}$$

Dokaz tranzitivnosti:

$$a|b \Leftrightarrow b = k_1 \cdot a; \quad k_1 \in \mathbb{N} \tag{5.8}$$
$$b|c \Leftrightarrow c = k_2 \cdot b; \quad k_2 \in \mathbb{N} \tag{5.9}$$
$$c = k_2 \cdot b \tag{5.10}$$
$$c = \underbrace{k_2 \cdot k_1}_{k_3} \cdot a \qquad \backslash\backslash\ b \text{ zamenjamo po (5.8)} \tag{5.11}$$
$$c = k_3 \cdot a \Rightarrow a|c \tag{5.12}$$

Dokaz neimenovane 1:

$$a|b \Leftrightarrow b = k_1 \cdot a; \quad k_1 \in \mathbb{N} \tag{5.13}$$

$$a|c \Leftrightarrow c = k_2 \cdot a; \quad k_2 \in \mathbb{N} \tag{5.14}$$

$$b + c = k_1 \cdot a + k_2 \cdot a \qquad \backslash\backslash \text{ zamenjamo po (5.13) in (5.14)} \tag{5.15}$$

$$b + c = (\underbrace{k_1 + k_2}_{k_3}) \cdot a \tag{5.16}$$

$$b + c = k_3 \cdot a \Rightarrow a|(b + c) \tag{5.17}$$

Dokaz neimenovane 2:

$$a|b \Leftrightarrow b = k_1 \cdot a; \quad k_1 \in \mathbb{N} \tag{5.18}$$

$$a|(b + c) \Leftrightarrow b + c = k_2 \cdot a; \quad k_2 \in \mathbb{N} \tag{5.19}$$

$$b + c = k_2 \cdot a \qquad \backslash\backslash \text{ po definiciji (5.19)} \tag{5.20}$$

$$k_1 \cdot a + c = k_2 \cdot a \qquad \backslash\backslash \text{ zamenjamo } b \text{ po (5.18)} \tag{5.21}$$

$$c = k_2 \cdot a - k_1 \cdot a \tag{5.22}$$

$$c = (\underbrace{k_2 - k_1}_{k_3}) \cdot a \tag{5.23}$$

$$c = k_3 \cdot a \Rightarrow a|c \tag{5.24}$$

5.3.1 Kriteriji deljivosti

$$2|a \Leftrightarrow 2|a_0$$

$$3|a \Leftrightarrow 3|(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

$$4|a \Leftrightarrow 4|(10a_1 + a_0)$$

$$5|a \Leftrightarrow 5|a_0$$

$$6|a \Leftrightarrow 2|a \wedge 3|a$$

$$8|a \Leftrightarrow 8|(100a_2 + 10a_1 + a_0)$$

$$9|a \Leftrightarrow 9|(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

Praštevila so števila, ki imajo natanko dva delitelja. Praštevil je neskončno mnogo. Števila, ki imajo več kot dva različna delitelja so **sestavljena** števila.

Dokaz, da je praštevil neskončno mnogo (Evklid):
Privzemimo, da bi jih boli končno mnogo. Sedaj zmnožimo vsa obstoječa praštevila in dobljenemu številu prištejmo ena. Sedaj bo imelo to število pri deljenju s katerimkoli izmed praštevil ostanek 1, kar pomeni, da je po definiciji praštevilo. To je v protislovju z začetno predpostavko, torej je praštevil neskončno mnogo.

Osnovni izrek aritmetike: Vsako število lahko zapišemo kot produkt samih praštevil.

Osnovni izrek o deljenju: Za vsaki dve števili a in b obstajata natanko določeni števili k in o, tako da velja $a = k \cdot b + o; \quad 0 \leq o < b$.

Največji skupni delitelj števil a in b je največje število, ki deli obe števili hkrati. (oznaka: $D(a,b)$)
Najmanjši skupni večkratnik dveh števil a in b je največje število, ki je deljivo z obema številoma hkrati. (oznaka: $v(a,b)$)

Med $D(a,b)$ in $v(a,b)$ velja zveza:

$$D(a,b) \cdot v(a,b) = a \cdot b$$

Števili sta si **tuji**, če je njun največji skupni delitelj enak 1.
Evklidov algoritem je postopek s katerim dobimo $D(a,b)$. Za potek algoritma privzemimo $a \geq b$.

Po osnovnem izreku deljenju lahko a zapišemo kot:

$$a = k_1 \cdot b + o_1$$

Nato postopek ponovimo, samo da za a vzamemo b in namesto b vzamemo o_1:

$$b = k_2 \cdot o_1 + o_2$$

Postopek ponavljamo dokler ni o enak 0. Zadnji od nič različen ostanek je $D(a,b)$. V psevdokodi je algoritem zapisan kot algoritem 1.

Algoritem 1 Evklidov algoritem

```
while $b \neq 0$ do
    $o \leftarrow a \% b$
    $a \leftarrow b$
    $b \leftarrow o$
end while
return $a$, ki je $D(a, b)$
```

6 Cela števila

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

6.1 Zakoni

Vsi zakoni kot za naravna (razdelek 5.1). Poleg teh velja še:
Obstaja **nevtralni element za seštevanje** in je 0:

$$a + 0 = a$$

Obstaja **nevtralni element za množenje** in je 1:

$$1 \cdot a = a$$

Vsota števila in nasprotnega števila je enaka 0 ali "**nasprotnost je vzajemna**":

$$a + (-a) = 0$$

6.2 Zakoni urejenosti

Za vsako trojico števil a, b in c veljajo aksiomi urejenosti:
$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:

1. $a < b \lor a = b \lor a > b$
2. $a < b \land b < c \Rightarrow a < c$
3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

4. $a < b \land c > 0 \Rightarrow ac < bc$
5. $a < b \land c < 0 \Rightarrow ac > bc$

7 Racionalna števila

Ulomek je zapis oblike $\frac{a}{b}$ kjer sta a in b cela in je b različen od nič. Ulomek je tako **urejen par** celih števil, pomeni pa a deljeno z b.

Dva ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sta enaka natanko takrat, kadar velja $a \cdot d = b \cdot c$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

7.1 Zakoni

Vsi zakoni kot za cela števila (razdelek 6.1). Poleg teh še:
Produkt števila in obratnega števila je enak 1 ali “**obratnost je vzajemna**”:

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Deljenje je množenje z obratno vrednostjo.
Razširjanje ulomkov: ulomek lahko v števcu in v imenovalcu pomnožimo z enakim številom, pa se vrednost ne spremeni:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Seštevanje racionalnih števil:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Množenje racionalnih števil:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Vsak ulomek lahko zapišemo z **decimalnim številom**, ki je lahko končno ali periodično. Ulomki, ki jih lahko razširimo tako, da imajo v imenovalcu potenco z osnovo 10, se imenujejo **desetiški** ulomki. V razcepu imajo lahko le faktorja 5 in 2. Taki ulomki so končna decimalna števila.

Zakoni urejenosti za racionalna in tudi za realna števila so enaki kot za cela števila.

7.2 Urejenost racionalnih števil

Ulomke lahko predstavimo na številski premici. Množica racionalnih števil je povsod enako **gosta**. Med dvema racionalnima številoma je vedno še vsaj eno racionalno število.

$$a < \frac{a+b}{2} < b; a, b \in \mathbb{Q}$$

Dokaz, da med številoma a in b ($a < b$) vedno obstaja še eno število:

$$\begin{aligned} a &< \frac{a+b}{2} \\ 2a &< a+b \\ a &< b \qquad \backslash\backslash \text{ To drži, torej je } a < \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &< b \\ a+b &< 2b \\ a &< b \qquad \backslash\backslash \text{ To drži, torej je } \frac{a+b}{2} < b. \end{aligned}$$

Ker zgornji neenakosti držita vedno obstaja še eno število med poljubnima a in b.

7.3 "Pomembni izrazi v zvezi z racionalnimi števili – matura"

Razmerje je zapis ki podaja odnos med ponavadi dvema količinama. Zapišemo ga kot $a : b$ (beri a proti b).
Osnova je izbrana celota, glede na katero obravnavamo delež.
Delež je izbrani del celote.
Relativni delež je razmerje med deležem in osnovo. Ponavadi ga pišemo v obliki okrajšanega ulomka, ali kot decimalno število.
Odstotek ali procent je relativni delež pomnožen s 100.

8 Realna števila

To je množica vseh **decimalnih** števil.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathcal{I}$$

Racionalna števila imajo končen ali periodičen decimalni zapis, medtem ko imajo iracionalna števila neskončen neperiodičen decimalni zapis.

Iracionalna števila so na primer $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}, \pi, e, \ldots$. V decimalni obliki lahko zapišemo le njihove približke.

Dokaz, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} A &:= \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \\ \neg A &:= \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \qquad \backslash\backslash \text{ dokažimo trditev } \neg A \\ \sqrt{2} &= \frac{p}{q} \qquad \backslash\backslash\ \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\text{, torej se ga lahko zapiše kot okrajšan ulomek} \\ 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2q^2 &= p^2 \qquad \backslash\backslash \text{ kvadrat } p \text{ je sodo, torej je tudi } p \text{ sodo; } p = 2m \\ 2q^2 &= (2m)^2 \\ q^2 &= 2m^2 \qquad \backslash\backslash \text{ kvadrat } q \text{ je sodo, torej je tudi } q \text{ sodo; } q = 2n \\ (2n)^2 &= 2m^2 \end{aligned}$$

$2n^2 = m^2$

$\vdots$ \\ p je sodo, q je sodo, torej ulomek ni okrajšan, trditev je napačna

$\neg A = 0 \Rightarrow A = 1$ \\ $\sqrt{2}$ torej ni element $\mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

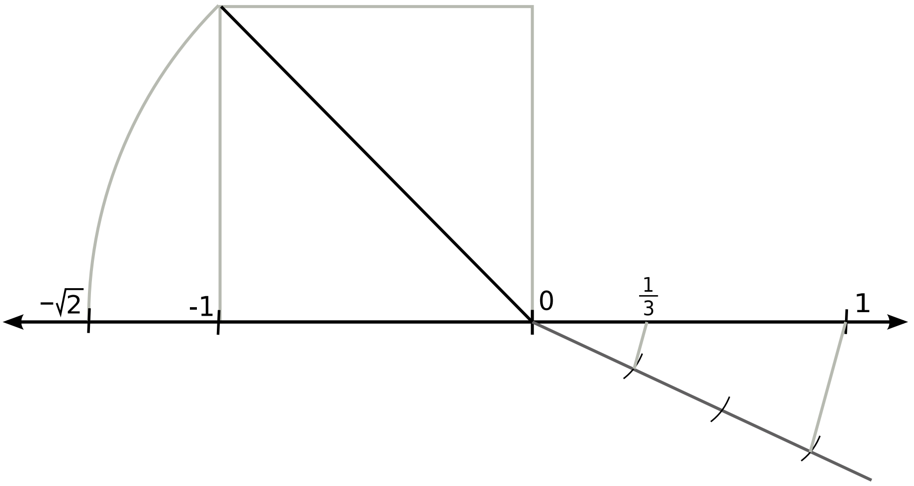
Številska premica je premica, na kateri ponazarjamo števila. Izberemo si izhodišče (število 0) in na levi predstavimo negativna števila, na desni pa pozitivna. Oddaljenost od izhodišča predstavlja absolutna vrednost tega števila. Med množico $\mathbb{R}$ in množico točk na premici obstaja bijektivna preslikava.

8.1 Ponazoritev realnih in racionalnih števil

Vsa racionalna in nekatera realna števila lahko konstruiramo in tako ponazorimo na številski premici. **Racionalna** števila konstruiramo tako, da iz znane točke narišemo poltrak, na njem označimo a enakih delov in zadnjega povežemo z drugo znano točko na številski premici. Nato potegnemo vzporednico skozi m-to izmed označb in kjer seka številsko premico je število $\frac{m}{n}$.

Iracionalne korene lahko prav tako konstruiramo. Uporabimo lahko diagonalo pravokotnika ali višino trikotnika (pri tem si do želenega korena pomagamo z višinskim izrekom).

Konstrukcija realnih in racionalnih števil je prikazana na sliki 2.



Slika 2: Konstrukcija racionalnih in realnih števil na primeru $\frac{1}{3}$ in $-\sqrt{2}$.

8.2 Intervali

$[a,b] = \{x; a \leq x \leq b;\ x \in \mathbb{R}\}$ — zaprt interval
$(a,b) = \{x; a < x < b;\ x \in \mathbb{R}\}$ — odprt interval
$[a,b) = \{x; a \leq x < b;\ x \in \mathbb{R}\}$ — polodprt interval
$(a,b] = \{x; a < x \leq b;\ x \in \mathbb{R}\}$ — polzaprt interval
$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$

Predstavimo jih kot daljico na številski premici, če se daljica konča s piko je interval na tisti strani zaprt, če se konča s puščico je odprt. Intervali so množice, tako da lahko med njimi izvajamo enake operacije kot med množicami.

8.3 Absolutna in relativna napaka

Naj bo dano določeno število s in njegov približek p. Absolutna napaka približka je enaka

$$\Delta = |s - p|$$

Relativna napaka pa je enaka

$$\delta = \frac{\Delta}{s}$$

9 Absolutna vrednost

$$|x| = \begin{cases} x; & \text{če } x \geq 0, \\ -x; & \text{če } x < 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Lastnosti:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- **Grafično** predstavlja oddaljenost števila od izhodišča na številski premici.
- $|xy| = |x| \cdot |y|$ Absolutna vrednost produkta je enaka produktu absolutnih vrednosti.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ Absolutna vrednost vsote je manjša ali enaka vsoti absolutnih vrednosti. (**trikotniška neenakost**)

10 Izrazi

Matematični izraz je zapis sestavljen iz števil, spremenljivk, matematičnih funkcij in operacij ter iz oklepajev, ki določajo vrstni red računanja. Da je tak zapis res matematični izraz, mora biti tudi **smiseln:** Če namesto spremenljivk vstavimo konkretna števila, mora biti možno izračunati vrednost izraza (vsaj za nekatere vrednosti spremenljivk). Primer:

$$\frac{x+1}{x}$$

Vrednost tega izraza lahko izračunamo za katero koli vrednost spremenljivke x, razen za x = 0.

Dva matematična izraza sta **enakovredna**, če imata pri istih izbirah spremenljivk vedno enako vrednost. Primer: Zgornji izraz je enakovreden izrazu

$$1 + \frac{1}{x}$$

Izraz **poimenujemo** glede na glavno računsko operacijo, ki v njem nastopa – to je računska operacija, ki jo izračunamo nazadnje. Primeri:

$(x+1)(x+2)$ imenujemo produkt izrazov $(x+1)$ in $(x+2)$
$5a+3b-2c$ imenujemo vsota izrazov $5a$, $3b$ in $-2c$
$(2m+3)^2$ imenujemo kvadrat izraza $(2m+3)$

Izraz, v katerem nastopajo samo osnovne štiri računske operacije (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje), imenujemo **aritmetični** izraz. Če v izrazu poleg tega nastopajo še algebrske funkcije kot npr. korenjenje, je to **algebrski** izraz.

Pri preoblikovanju matematičnih izrazov pogosto uporabljamo naslednja dva postopka: **faktorizacija** (preoblikovanje v produkt faktorjev) **razčlenjevanje** (preoblikovanje v vsoto členov).

Formule za preoblikovanje izrazov:

$$n \in \mathbb{N}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad \text{\\\\ kvadrat dvočlenika} \tag{10.1}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 + 3ab(a \pm b) \quad {}^1 \tag{10.2}$$

$$(a \pm b \pm c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab \pm 2ac \pm 2bc \qquad \text{\\\\ kvadrat troč.} \tag{10.3}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \qquad \text{\\\\ razlika kvadratov} \tag{10.4}$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \qquad \text{\\\\ razlika ali vsota kubov} \tag{10.5}$$

$$(x \pm a)(x \pm b) = x^2 + (a \pm b)x \pm ab \qquad \text{\\\\ Viètovo pravilo} \tag{10.6}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{10.7}$$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=1}^{n} a^{n-i}b^{i-1}$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{10.8}$$

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a^{n-i}b^{i-1} \qquad \text{\\\\ za lihe } n$$

11 Potence

11.1 Potence z naravnim eksponentom

So krajši zapis za množenje več enakih faktorjev.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n} \tag{11.1}$$

11.1.1 Pravila za računanje

Vsa pravila se dokaže tako, da se potenco zamenja po definiciji (11.1) in pogleda število faktorjev.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{11.2}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{11.3}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \tag{11.4}$$

---

[1] Kub dvočlenika.

11.2 Potence s celim eksponentom

$$a^k = \begin{cases} a^k; & \text{če } k > 0 \text{ (po definiciji (11.1))} \\ 1; & \text{če } k = 0 \\ \frac{1}{a^{-k}}; & \text{če } k < 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{11.5}$$

11.2.1 Pravila za računanje

Veljajo vsa pravila kot za naravna števila (razdelek 5.1). Poleg teh veljajo še naslednja pravila, ki se dokažejo podobno kot pri naravnih eksponentih:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{11.6}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \tag{11.7}$$

11.3 Potence z racionalnim eksponentom

V tem razdelku se uporabljajo koreni in pravila za računanje z njimi. Koreni so opisani kasneje v razdelku 12, pravila pa v razdelku 12.1.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\,; \ m \in \mathbb{Z}; \ n \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{11.8}$$

11.3.1 Pravila za računanje

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{mp+qn}{np}} \tag{11.9}$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{q}{p}}} = a^{\frac{mp-qn}{np}} \tag{11.10}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{mq}{np}} \tag{11.11}$$

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \tag{11.12}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \tag{11.13}$$

$$\tag{11.14}$$

Dokaz pravila 11.9:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[p]{a^q} = \sqrt[np]{a^{mp+qn}} = a^{\frac{mp+qn}{np}} \qquad \backslash\backslash \text{ pravilo za računanje s koreni (12.8)}$$

Dokaz pravila 11.10:

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{q}{p}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[p]{a^q}} = \sqrt[np]{a^{mp-qn}} = a^{\frac{mp-qn}{np}} \qquad \backslash\backslash \text{ pravilo za računaje s koreni (12.9)}$$

Dokaz pravila 11.11:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^q} = \sqrt[np]{a^{mq}} = a^{\frac{mq}{np}} \qquad \backslash\backslash \text{ pravilo za računanje s koreni (12.12)}$$

Dokaz pravila 11.12:

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \qquad \backslash\backslash \text{ up. pravilo (12.6)}$$

Dokaz pravila 11.13:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \qquad \text{\\\\ uporabljeno pravilo (12.7)}$$

12 Koreni

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a; \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ n \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{12.1}$$

Če $a \in \mathbb{R}^-$:
če n lih: $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$
če n sod: ne obstaja v realnem.

Dogovor:

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

Osnovne izpeljave:

$$\sqrt[1]{a} = a$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \tag{12.2}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \tag{12.3}$$

12.1 Pravila za računanje

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{a^q} \Leftrightarrow mp = qn \tag{12.4}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nx]{a^{mx}} \tag{12.5}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \tag{12.6}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{12.7}$$

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[p]{a^q} = \sqrt[np]{a^{mp+qn}} \tag{12.8}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[p]{a^q}} = \sqrt[np]{a^{mp-qn}} \tag{12.9}$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a} \tag{12.10}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^q = \sqrt[n]{a^{mq}} \tag{12.11}$$

$$\sqrt[p]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^q} = \sqrt[np]{a^{mq}} \tag{12.12}$$

Pri dokazih se uporabljajo pravila za računanje s potencami s celim eksponentom (razdelek 11.2.1).

Dokaz pravila 12.4:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[p]{a^q} && \backslash\backslash\ ^{np} \\
\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} &= \left(\sqrt[p]{a^q}\right)^{np} && \backslash\backslash\ \text{upoštevamo osnovno izpeljavo (12.3)} \\
(a^m)^p &= (a^q)^n \\
a^{mp} &= a^{qm} \\
mp &= qn
\end{aligned}$$

Dokaz pravila 12.5:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[nx]{a^{mx}} \\
mnx &= nmx && \backslash\backslash\ \text{glej pravilo (12.4)}
\end{aligned}$$

Dokaz pravila 12.6:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= x \\
\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n &= x^n \\
\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n &= x^n \\
a \cdot b &= x^n \\
x &= \sqrt[n]{a \cdot b} && \backslash\backslash\ \text{upoštevamo definicijo korena (12.1)}
\end{aligned}$$

Dokaz pravila 12.7:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= x \\
\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n &= x^n \\
\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} &= x^n \\
\frac{a}{b} &= x^n \\
x &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} && \backslash\backslash\ \text{upoštevamo definicijo korena (12.1)}
\end{aligned}$$

Dokaz pravila 12.8:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[p]{a^q} &= x && \backslash\backslash\ ^{np} \\
(a^m)^p \cdot (a^q)^n &= x^{np} \\
a^{mp} \cdot a^{qn} &= x^{np} \\
a^{mp+qn} &= x^{np} \\
x &= \sqrt[np]{a^{mp+qn}} && \backslash\backslash\ \text{upoštevamo definicijo korena (12.1)}
\end{aligned}$$

Dokaz pravila 12.9:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[p]{a^q}} &= x^{\ np} \\
\frac{a^{mp}}{a^{qn}} &= x^{np}
\end{aligned}$$

$$a^{mp-qn} = x^{np}$$

$$x = \sqrt[np]{a^{mp-qn}} \qquad \backslash\backslash \text{ upoštevamo definicijo korena (12.1)}$$

Dokaz pravila 12.10:

$$\begin{aligned}\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} &= x\\ \sqrt[n]{a} &= x^p\\ a &= (x^p)^n\\ a &= x^{np}\\ x &= \sqrt[np]{a} \qquad \backslash\backslash \text{ upoštevamo definicijo korena (12.1)}\end{aligned}$$

Dokaz pravila 12.11:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^q &= x\\ \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{qn} &= x^n \qquad \backslash\backslash \text{ upoštevamo osnovno izpeljavo (12.3)}\\ (a^m)^q &= x^n\\ a^{mq} &= x^n\\ x &= \sqrt[n]{a^{mq}}\end{aligned}$$

Dokaz pravila 12.12:

$$\sqrt[p]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^q} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mq}}} = \sqrt[np]{a^{mq}} \qquad \backslash\backslash \text{ upoštevamo pravili (12.10) in (12.11).}$$

13 Logaritmi

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \tag{13.1}$$

Osnovne izpeljave iz definicije:

$$\log_a a = 1 \tag{13.2}$$

$$\log_a 1 = 0 \tag{13.3}$$

$$a^{\log_a x} = x \tag{13.4}$$

$$\log_a a^y = y \tag{13.5}$$

Dogovora:

$$\log_{10} x = \log x$$

$$\log_e x = \ln x$$ [2]

13.1 Pravila za računanje

Logaritem **potence** je enak produktu med eksponentom in logaritmom osnove:

$$\log_a x^n = n \log_a x \tag{13.6}$$

---

[2] Matematiki za logaritem z osnovo e pogosto uporabljajo kar zapis $\log x$.

Logaritem **produkta** je enak vsoti logaritmov posameznih faktorjev:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \tag{13.7}$$

Logaritem **kvocienta** je enak razliki med logaritmom števca in imenovalca:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \tag{13.8}$$

Dokaz pravila 13.6 (upoštevamo osnovni izpeljavi (13.4) in (13.5)):

$$\log_a x^n = \log_a \left(a^{\log_a x}\right)^n = \log_a \left(a^{n \log_a x}\right) = n \cdot \log_a x$$

Dokaz pravila 13.7 (upoštevamo osnovni izpeljavi (13.4) in (13.5)):

$$\log_a xy = \log_a \left(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}\right) = \log_a \left(a^{\log_a x + \log_a y}\right) = \log_a x + \log_a y$$

Dokaz pravila 13.8 (upoštevamo pravili (13.7) in (13.6)):

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$$

Prehod na novo osnovo:

$$\begin{aligned} \log_b a^y &= \log_b x && \backslash\backslash \text{ po definiciji (13.1) je } a^y \text{ enak } x \\ y \cdot \log_b a &= \log_b x && \backslash\backslash \text{ uporabimo pravilo (13.6)} \\ y &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} && \backslash\backslash \text{ po definiciji je } y \text{ enak } \log_a x \end{aligned}$$

Iz tega izpeljemo zvezo:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

14 Koordinatni sistem

14.1 Pravokotni, v ravnini

Dve pravokotni osi.
x — abscisna os
y — ordinatna os

$$\mathcal{M} = \{(x,y);\ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

Glej tudi sliko 3.

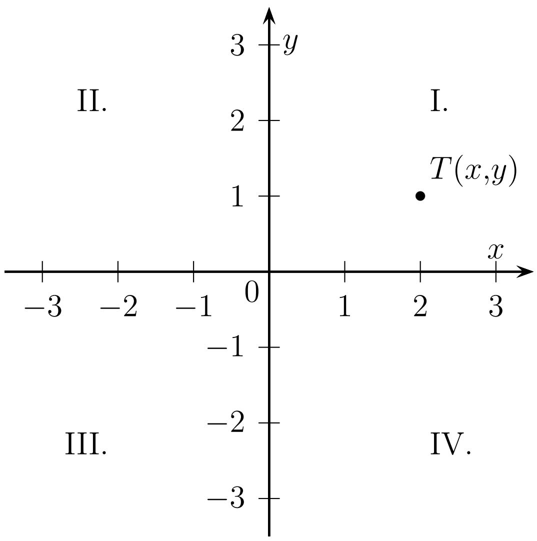
Osi razdelita ravnino na štiri **kvadrante**:

I. kvadrant:	$x > 0 \wedge y > 0$
II. kvadrant:	$x < 0 \wedge y > 0$
III. kvadrant:	$x < 0 \wedge y < 0$
IV. kvadrant:	$x > 0 \wedge y < 0$

Pomembni **premici**:

$$y = x \qquad \backslash\backslash \text{ simetrala lihih kvadrantov}$$

$$y = -x \qquad \backslash\backslash \text{ simetrala sodih kvadrantov}$$



Slika 3: Pravokotni koordinatni sistem.

Pas: $a < x < b$

Razdalja med dvema točkama (dokaz: Pitagorov izrek):

$$A(x_1, y_1)$$
$$B(x_2, y_2)$$
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Središče daljice:

$$S_{AB} = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

Težišče in **ploščina** trikotnika[3]:

$$T_{ABC} = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)$$

$$p\sigma = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \qquad \backslash\backslash\ \sigma \text{ je orientacija trikotnika.}$$

$$p\sigma = \frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\right]$$

$$p\sigma = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

Determinanta:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \tag{14.1}$$

14.2 Pravokotni, v prostoru

Dve pravokotni osi.
x — abscisna os

---

[3] Za razrešitev determinante matrike glej enačbo (14.1). In ja, | | ne pomeni absolutne vrednosti.

y — ordinatna os
z — aplikatna os

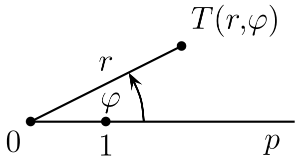
$$\mathcal{M} = \{(x,y,z);\ x,y,z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

Formule so enake kot v ravnini (razdelek 14.1), le da vsebujejo še tretjo koordinato.

14.3 Polarni, v ravnini

Za polarni koordinatni sistem potrebujemo izhodišče, poltrak in enoto. Točka je enolično določena z oddaljenostjo od izhodišča in pozitivnim kotom od poltraka. Polarni koordinatni sistem je prikazan pa sliki 4.

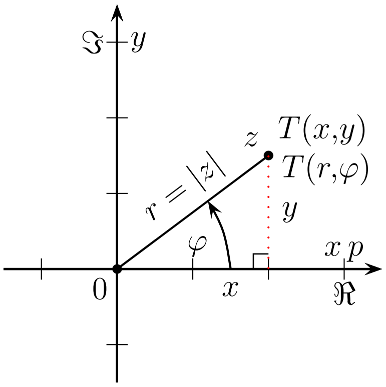
$$T(r,\varphi);\ r \geq 0;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



Slika 4: Polarni koordinatni sistem.

Pretvarjanje med kartezičnim in polarnih sistemom je možno. Držijo naslednje enakosti (za razlago glej sliko 5):

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$
$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$



Slika 5: Pretvarjanje med koordinatnima sistemoma in kompleksno ravnino.

14.3.1 Polarni zapis kompleksnega števila

Kompleksno število predstavimo kot točko v koordinatnem sistemu. Po formulah za pretvarjanje med sistemoma ugotovimo (glej sliko 5):

$$z = x + y\imath$$

$$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot \imath$$

$$z = |z|\left(\cos\varphi + \imath\sin\varphi\right)$$

Formula za potenciranje kompleksnega števila z naravnim številom (dokažemo s popolno indukcijo):

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \imath\sin n\varphi)$$

15 Funkcije

$$f\colon A \to B$$

Funkcija, ki množico A preslika v množico B je predpis, ki vsakemu elementu iz množice A priredi natanko določen element iz množice B.

$$f(x)\colon A \to B;\ A, B \subseteq \mathbb{R}$$

Funkcija je **realna**, če podmnožico realnih števil preslika v podmnožico realnih števil.

Definicijsko območje (D_f) funkcije f je množica realnih števil, za katera lahko predpis izračunamo.

Zaloga vrednosti (Z_f) funkcije f je množica realnih števil, ki jih funkcija lahko zavzame.

Graf (G_f) funkcije f je množica urejenih parov (x, y), pri katerih je x element definicijskega območja, y pa vrednost funkcije pri x.

$$G_f = \{(x{,}y);\ x \in D_f,\ y = f(x)\}$$

a je **ničla** funkcije, če je vrednost funkcije pri a enaka 0.

$$a \text{ ničla } \Leftrightarrow f(a) = 0$$

Začetna vrednost funkcije je vrednost funkcije pri 0.

$$\text{začetna vrednost} = f(0)$$

Funkcija je **padajoča**, če pri vsakem večjem x zavzame manjšo vrednost.

$$f(x) \text{ padajoča } \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcija je **naraščajoča**, če pri vsakem večjem x zavzame večjo vrednost.

$$f(x) \text{ naraščajoča } \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcija je **navzgor omejena**, če so vse funkcijske vrednosti manjše ali enake od nekega realnega števila M (zgornja meja).

$$f(x) \text{ navzgor omejena } \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M; \forall x \in D_f$$

Funkcija je **navzdol omejena**, če so vse funkcijske vrednosti večje ali enake od nekega realnega števila m (spodnja meja).

$f(x)$ navzdol omejena $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m; \forall x \in D_f$

Funkcija je **omejena**, če je omejena navzgor in navzdol.

Pol je realno število, za katerega funkcija ni definirana, v njegovi bližini pa funkcija narašča ali pada čez vse meje (proti ∞ ali $-\infty$).

Asimptota je krivulja, ki se ji graf približuje pri po absolutni vrednosti velikih vrednostih neodvisne spremenljivke.

Funkcija je na nekem območju **konveksna**, če za vsaki dve točki na grafu funkcije velja, da leži graf pod daljico, ki jo določata ti dve točki.

Funkcija je na nekem območju **konkavna**, če za vsaki dve točki na grafu funkcije velja, da leži graf nad daljico, ki jo določata ti dve točki.

Funkcija je **soda**, če za vsak x iz definicijskega območja velja: $f(-x) = f(x)$. Graf sode funkcije je simetričen glede na y os.

$f(x)$ soda $\Leftrightarrow f(-x) = f(x);\ \forall x \in D_f$

Funkcija je **liha**, če za vsak x iz definicijskega območja velja: $f(-x) = -f(x)$. Graf lihe funkcije je središčno simetričen glede na koordinatno izhodišče.

$f(x)$ liha $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x);\ \forall x \in D_f$

Funkcija je na nekem območju **pozitivna**, če so vse funkcijske vrednosti na tem območju večje od 0.

Funkcija je na nekem območju **negativna**, če so vse funkcijske vrednosti na tem območju manjše od 0.

Funkcija je **periodična** natanko takrat, ko obstaja tak $\omega \in \mathbb{R}^+$, da za vsak x iz definicijskega območja velja $f(x) = f(x + \omega)$.

$f(x)$ periodična $\Leftrightarrow \exists \omega \in \mathbb{R}^+ : f(x) = f(x + \omega),\ \forall x \in D_f$ \\ ω — perioda

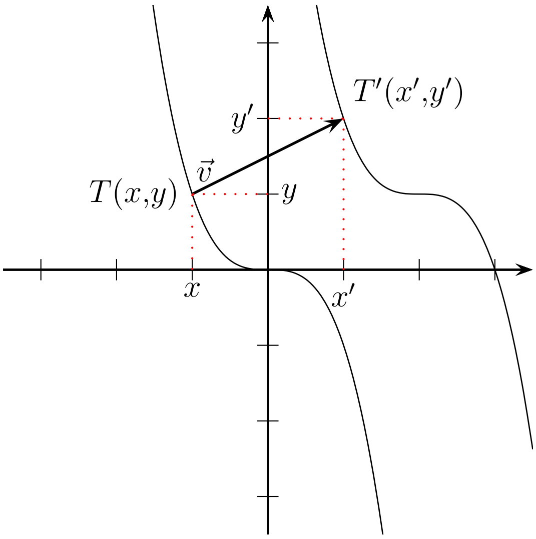
Val periodične funkcije je del funkcije na intervalu $[x, x + \omega), x \in D_f$.

15.1 Premik funkcije

Funkcijo $y = f(x)$ premaknemo za vektor $\vec{v} = (p,q)$ (glej sliko 6).

$$\begin{aligned} x &= x' - p \\ y &= y' - q \\ y &= f(x) \\ y' - q &= f(x' - p) \\ y' &= f(x' - p) + q \end{aligned}$$

Parameter p vpliva na **premik** po x osi (levo – desno), parameter q pa na premik po y osi (gor – dol).



Slika 6: Premik funkcije.

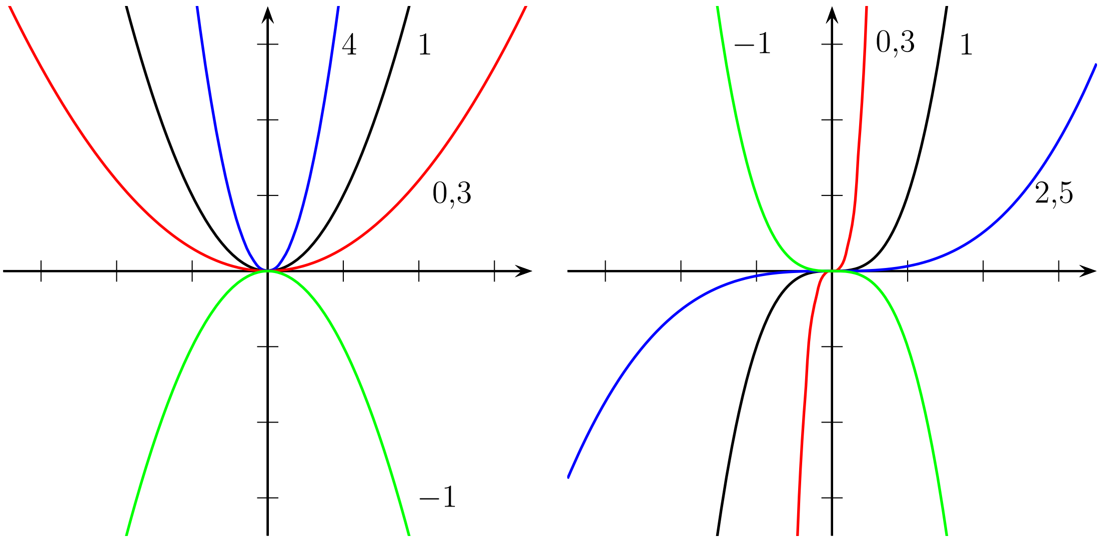
15.2 Razteg funkcije

Funkcijo $y = f(x)$ raztegnemo s parametroma a in b.

$$y = a \cdot f\left(\frac{x}{b}\right)$$

Parameter a predstavlja razteg v smeri y osi, če je negativen, se graf preslika čez x os. Odvisnost funkcije od parametra a je prikazana na sliki 7(a).

Parameter b predstavlja razteg v smeri x osi, če je negativen, se graf preslika čez y os. Odvisnost funkcije od parametra b je prikazana na sliki 7(b).



(a) Parameter a.

(b) Parameter b.

Slika 7: Odvisnost funkcije od parametrov a in b.

15.3 Inverzna funkcija

Inverzna funkcija funkcije $f(x)$ je funkcija $f^{-1}(x)$, ki jo dobimo tako, da v prvotni funkciji zamenjamo vlogo odvisne in neodvisne spremenljivke, ter izrazimo novo neodvisno spremenljivko. **Grafično** dobimo graf $f^{-1}(x)$ tako, da graf prvotne funkcije preslikamo čez simetralo lihih kvadrantov. Inverzno funkcijo lahko dobimo samo na območjih, ko je prvotna funkcija **injektivna**.[4]

15.4 Linearna funkcija

Linearna funkcija je vsaka funkcija oblike $y = kx + n$; $k, n \in \mathbb{R}$. Graf linearne funkcije je premica. Funkcijski predpis lahko zapišemo v treh oblikah:

$$\begin{aligned} y &= kx + n && \backslash\backslash \text{ eksplicitna,} \\ ax + by + c &= 0 && \backslash\backslash \text{ implicitna,} \\ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} &= 1 && \backslash\backslash \text{ odsekovna enačba premice} \end{aligned}$$

V eksplicitni obliki ne moremo napisati premic vzporednih z ordinatno osjo, v odsekovni obliki pa ne moremo napisati premic, ki so vzporedne katerikoli izmed osi ali gredo skozi izhodišče koordinatnega sistema.

k — smerni koeficient
n — začetna vrednost, odsek na ordinatni osi
m — odsek na abscisni osi

Osnovni Evklidov aksiom: Skozi dve točki lahko potegnemo natanko eno premico. **Smerni koeficient** premice skozi dve točki se izračuna kot razmerje med razliko v smeri y in razliko v smeri x osi.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Če je smerni koeficient večji od 0 je premica naraščajoča, če je manjši od 0, je premica padajoča.

Družina premic ki so **vzporedne** premici $y = k_1x + n_1$: $y = k_1x + n_2$
Družina premic, ki gredo skozi **točko** $T_0(x_0,y_0)$: $y - y_0 = k(x - x_0)$

Vzporedna premica dani premici ima enak k kot podana, k premice, ki je na dano premico **pravokotna**, pa je nasprotno in obratno število smernemu koeficientu dane premice.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

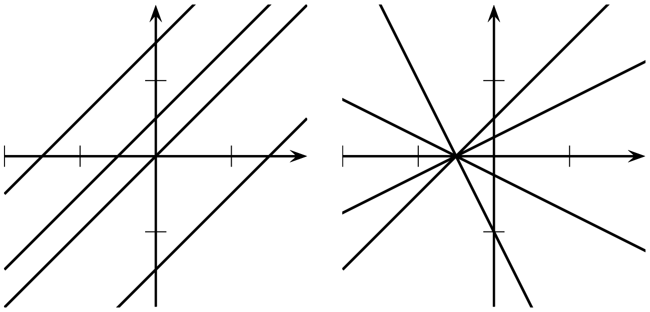
Razdalja točke $T(x_0, y_0)$ od **premice** p $(ax + by - c = 0)$:

$$d(p, T) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Snop premic je prikazan na sliki 8(a), **šop** premic na sliki 8(b).

---

[4] Za definicijo injektivnosti glej razdelek 3.



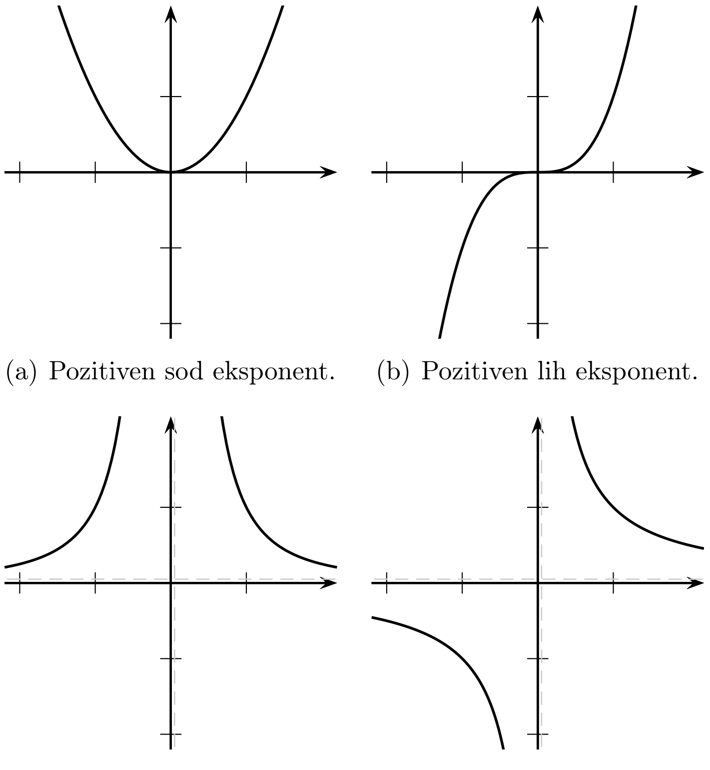
(a) Snop premic. (b) Šop premic.

Slika 8: Posebni medsebojni legi premic.

15.5 Potenčna funkcija

Potenčna funkcija je vsaka funkcija oblike: $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$. Poznamo štiri glavne **grafe** potenčne funkcije, ki se delijo glede na eksponent:

- pozitiven sod eksponent (slika 9(a))
- pozitiven lih eksponent (slika 9(b))
- negativen sod eksponent (slika 9(c))
- negativen lih eksponent (slika 9(d)).



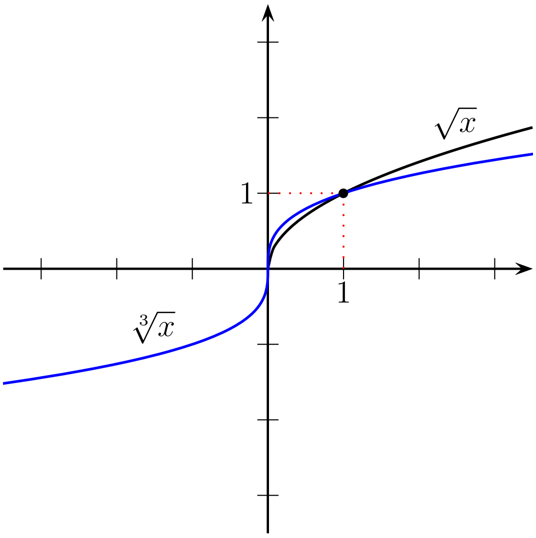
(a) Pozitiven sod eksponent. (b) Pozitiven lih eksponent.

(c) Negativen sod eksponent. (d) Negativen lih eksponent.

Slika 9: Grafi potenčne funkcije.

15.6 Korenska funkcija

Korenska funkcija je vsaka funkcija oblike $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
n sod: $D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $Z_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
n lih: $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = \mathbb{R}$
Graf korenske funkcije je na sliki 10.



Slika 10: Graf korenske funkcije.

15.7 Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija je vsaka funkcija oblike $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$. Definicijsko območje so vsa realna števila.

Splošna oblika kvadratne funkcije:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{15.1}$$

a — vpliva na konkavnost oz. konveksnost in razteg
c — vpliva na premik v smeri y osi

Temenska oblika kvadratne funkcije, teme $T(p,q)$:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q \tag{15.2}$$

a — vpliva na konkavnost oz. konveksnost in razteg
p — vpliva na premik v smeri x osi
q — vpliva na premik v smeri y osi

Oblika za ničle (razcep tročlenika):

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{15.3}$$

a — vpliva na konkavnost oz. konveksnost in razteg
x_1, x_2 — ničli funkcije

Prehod iz splošne v temensko obliko, formule za p in q:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

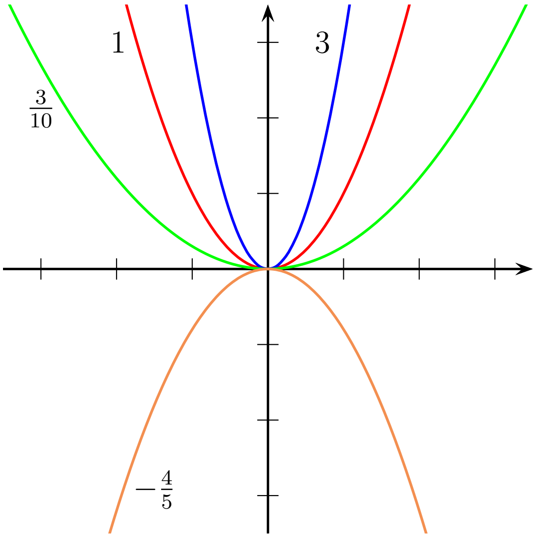
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \qquad \text{\\ primerjamo s temensko obliko}$$

$$p = -\frac{b}{2a} \tag{15.4}$$

$$q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a} \tag{15.5}$$

$$D = b^2 - 4ac \qquad \text{\\ diskriminanta} \tag{15.6}$$

Graf kvadratne funkcije je premaknjena in raztegnjena parabola $f(x) = x^2$. Vsako kvadratno funkcijo v splošni obliki lahko zapišemo tudi v temenski obliki. Primeri grafov kvadratne funkcije so na sliki 11.



Slika 11: Graf kvadratne funkcije v odvisnosti od parametra a.

15.7.1 Ničle kvadratne funkcije

Ničle kvadratne funkcije se izračunajo po formuli:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad \text{\\ } D \text{ zamenjamo po definiciji (15.6)} \tag{15.7}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{15.8}$$

Kvadratne funkcija ima dve različni realni ničli če $D > 0$, eno dvojno realno ničlo, če $D = 0$ in nobene realne ničle, če je $D < 0$.

$$D > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2;\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$
$$D = 0 \Rightarrow x_1 = x_2;\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$
$$D < 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2;\ x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$$

Izpeljava formule za ničle kvadratne funkcije:

$$\begin{aligned}
0 &= f(x) \\
0 &= a(x-p)^2 + q && \backslash\backslash \text{ temenska oblika kvadratne funkcije (15.2)} \\
a(x-p)^2 &= -q \\
(x-p)^2 &= -\frac{q}{a} \\
x - p &= \pm\sqrt{-\frac{q}{a}} \\
x &= p \pm \sqrt{-\frac{q}{a}} && \backslash\backslash \text{ zamenjamo } p \text{ in } q \text{ po (15.4) in (15.5)} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{-\frac{D}{4a}}{a}} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \\
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}
\end{aligned}$$

Abscisa temena izražena z ničlami:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Teme je tudi **ekstrem** funkcije, funkcija ima ekstremno vrednost ko $x = p$. To je minimum, če je $a > 0$, ali maksimum, če je $a < 0$.

15.7.2 Vpliv diskriminante in parametra a na parabolo

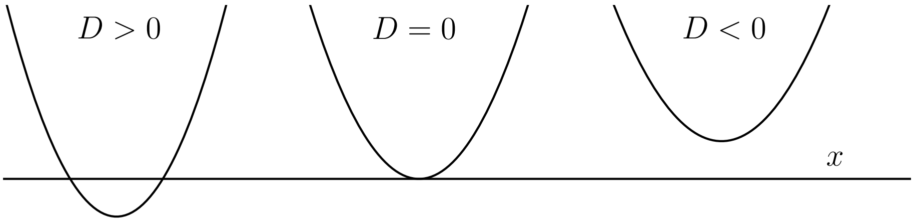
Prikazan je na sliki 12.

15.7.3 Lega premice in parabole

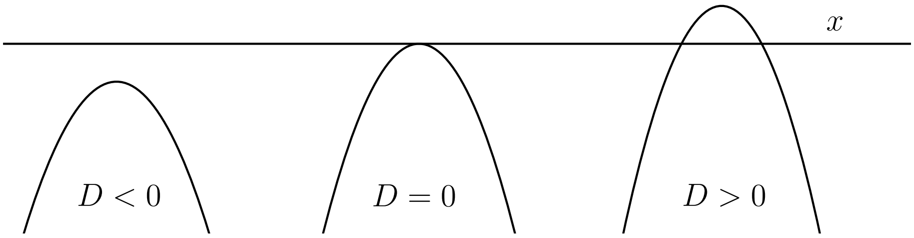
$ax^2 + bx + c = kx + n$

- $D > 0$ — sekanta (slika 13(a))
- $D = 0$ — tangenta (slika 13(b))
- $D < 0$ — mimobežnica (slika 13(c))

Možne lege so prikazane na sliki 13.

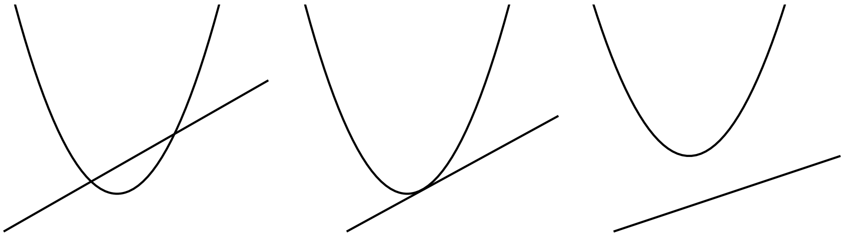


(a) $a > 0$



(b) $a < 0$

Slika 12: Vpliv diskriminante in parametra a na parabolo.



(a) Sekanta. (b) Tangenta. (c) Mimobežnica.

Slika 13: Možne lege premice in parabole

15.8 Eksponentna funkcija

Eksponentna funkcija je vsaka funkcija oblike $f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

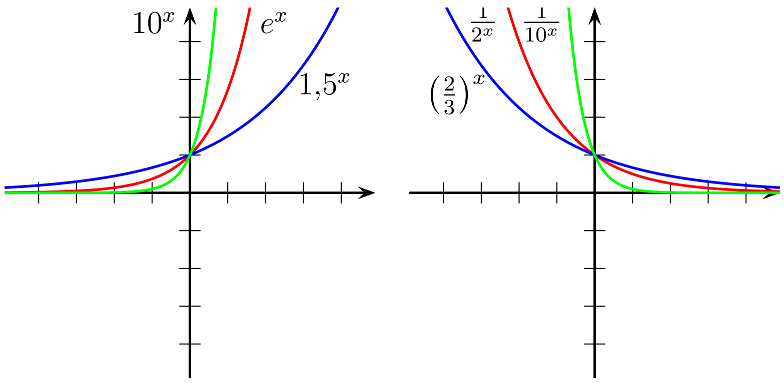
$\mathbf{a > 1}$	$\mathbf{a < 1}$
$D_f = \mathbb{R}, Z_f = \mathbb{R}^+$,	$D_f = \mathbb{R}, Z_f = \mathbb{R}^+$,
naraščajoča, konveksna, pozitivna,	padajoča, konveksna, pozitivna,
navzdol omejena	navzdol omejena
graf na sliki 14(a)	graf na sliki 14(b)

Vodoravna **asimptota** je x os. Vse eksponentne funkcije gredo skozi točko $N(0{,}1)$, kar izhaja iz definicije (11.5). Vse z osnovo iz enake skupine se razlikujejo le po **strmini** padanja in naraščanja. Lahko jih premikamo ali raztegujemo.

$$f(x) = b \cdot a^{x-p} + q$$

15.8.1 Naravna rast

V naravi se velikokrat zgodi, da sta dve spremenljivki med seboj odvisni *eksponentno*. Osnova eksponentne funkcije, ki ju povezuje pa je pri veliko naravnih zakonih enaka e. e je iracionalno število, ki nastopa kot osnova eksponentnih funkcij, ki opisujejo



(a) $a > 1$ (b) $a < 1$

Slika 14: Graf eksponentne funkcije.

naravne zakone. e se lahko izračuna na več načinov in je v splošnem enak

$$e = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Z eksponentno funkcijo oblike $y = e^{kx}$ se tako lahko opiše večino primerov eksponentne rasti v naravi, kot so rast prebivalstva, množenje bakterij (kar je isto kot rast prebivalstva, če pogledaš postrani), razpad jeder, obrestni račun, …

15.9 Logaritemska funkcija

Logaritemska funkcija je vsaka funkcija oblike $y = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Je **inverzna** funkcija eksponentni funkciji.

$\mathbf{a > 1}$	$\mathbf{a < 1}$
$D_f = \mathbb{R}^+, Z_f = \mathbb{R}$,	$D_f = \mathbb{R}^+, Z_f = \mathbb{R}$,
ničla $x = 1$, naraščajoča, konkavna,	ničla $x = 1$, padajoča, konveksna,
pozitivna $x > 1$, negativna $x < 1$,	pozitivna $x < 1$, negativna $x > 1$,
pol $x = 0$	pol $x = 0$
graf na sliki 15(a)	graf na sliki 15(b)

Navpična **asimptota** je y os. Vse logaritemske funkcije gredo skozi točko $N(1{,}0)$, kar izhaja iz izpeljave iz definicije (13.3). Vse funkcije z bazo iz enake skupine se razlikujejo le po **strmini** padanja in naraščanja. Lahko jih premikamo ali raztegujemo.

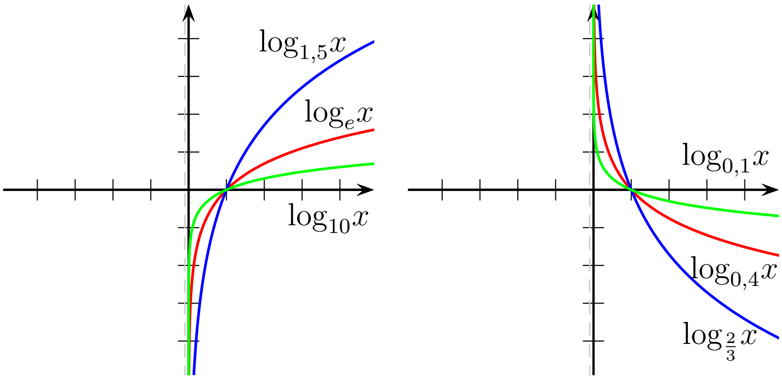
$$f(x) = b \cdot \log_a(x - p) + q$$

15.10 Krožne funkcije

Krožne funkcije ali **arcus funkcije** so **delni inverzi** kotnih funkcij.[5]

---

[5] Kotne funkcije so definirane kasneje, v razdelku 20.



(a) $a > 1$ (b) $a < 1$

Slika 15: Graf logaritemske funkcije.

Arcus sinus x je tisti kot, pri katerem je sinus kota enak x.

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x,\ D_f = [-1{,}1], Z_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Arcus kosinus x je tisti kot, pri katerem je kosinus kota enak x.

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x,\ D_f = [-1{,}1], Z_f = [0, \pi]$$

Arcus tangens x je tisti kot, pri katerem je tangens kota enak x.

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x,\ D_f = \mathbb{R}, Z_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Arcus kotangens x je tisti kot, pri katerem je kotangens kota enak x.

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x,\ D_f = \mathbb{R}, Z_f = (0, \pi)$$

Grafi arcus funkcij so prikazani na sliki 16.

15.11 Racionalne funkcije

Racionalna funkcija je vsaka funkcija oblike $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, pri čemer je ta ulomek okrajšan.

Ničle racionalne funkcije so ničle polinoma[6] $p(x)$, **poli** racionalne funkcije pa so ničle polinoma $q(x)$, torej abscise, pri katerih funkcija ni definirana. **Stopnja** pola racionalne funkcije je enaka stopnji ničle imenovalca. Stopnja ničle racionalne funkcije je enaka stopnji ničle števca.

Pri polih in ničlah **lihe** stopnje se predznak racionalne funkcije spremeni, pri polih ali ničlah **sode** stopnje pa se ohrani. Bližje kot smo polu, večje so funkcijske vrednosti po absolutni vrednosti.

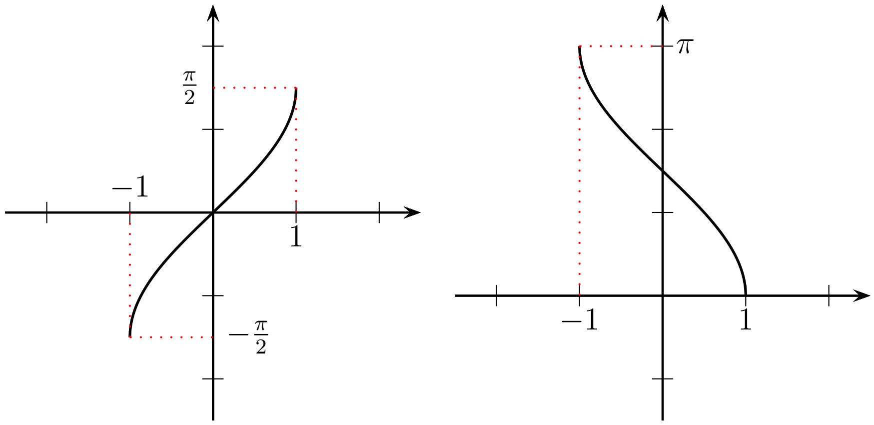
Vsako racionalno funkcijo lahko zapišemo kot vsoto polinoma in nove racionalne funkcije, ki ima v števcu polinom nižje stopnje kot v imenovalcu.

$$p(x) = k(x) \cdot q(x) + o(x) \qquad \backslash\backslash : q(x) \quad \mathrm{st}(q(x)) > \mathrm{st}(o(x)) \qquad \backslash\backslash \text{ Izrek (25.1).}$$

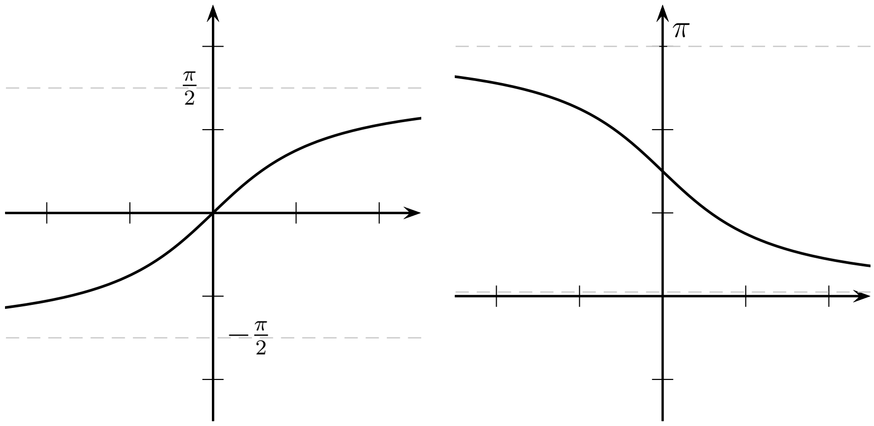
$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{o(x)}{q(x)} \tag{15.9}$$

---

[6] Polinomi so definirani kasneje, v razdelku 25.



(a) Arcus sinus. (b) Arcus kosinus.



(c) Arcus tangens. (d) Arcus kotangens.

Slika 16: Grafi arcus funkcij.

$k(x)$ je **asimptota** racionalne funkcije. Je krivulja, kateri se graf približuje pri zelo velikih in majhnih x-ih, ker je takrat ulomek $\frac{o(x)}{q(x)} \approx 0$, ker je $q(x) \gg o(x)$. Racionalna funkcija ima svojo asimptoto, če je v imenovalcu nekonstanten polinom. Če je stopnja polinoma v imenovalcu večja od stopnje polinoma v števcu, potem je asimptota polinom, katerega stopnja je enaka razliki stopenj v števcu in v imenovalcu. Če je ta stopnja enaka 1, potem je asimptota poševna. Če je stopnja polinoma v števcu enaka stopnji polinoma v imenovalcu, potem je asimptota vodoravna, če je stopnja polinoma v imenovalcu manjša od stopnje polinoma v števcu, potem je asimptota prav tako vodoravna in sicer je enaka $y = 0$.

Presečišče z asimptoto (kadar je funkcijska vrednost enaka $k(x)$)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{o(x)}{q(x)}$$

$$f(x) = k(x) \Leftrightarrow \frac{o(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow o(x) = 0$$

15.12 Kompozitum funkcij

Kompózitum ali **sestava** funkcij je matematična operacija v množici funkcij. Postopek računanja kompozituma imenujemo komponiranje ali sestavljanje, dobljeni rezultat pa se imenuje **sestavljena funkcija**. Sestavljena funkcija je funkcija, ki ji kot argument podamo vrednost druge funkcije.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Kompozitum funkcij **ni komutativna** operacija.

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Kompozitum funkcij je **asociativna** operacija.

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

Kompozitum **inverznih** funkcij je enak x.

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Za sestavljeno funkcijo $(g \circ f)$, če $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ velja, da $(g \circ f)$ slika $A \to C$.

16 Enačbe

Enačba je zapis za enakost dveh izrazov. Izraza imenujemo **leva stran** enačbe in **desna stran** enačbe. Med njima stoji **enačaj**. Spremenljivke, ki nastopajo v enačbi, imenujemo **neznanke**. Vrednost neznanke, ki zadosti enakosti imenujemo **rešitev** ali **koren** enačbe.

Enačbi, ki imata enaki množici rešitev, sta enakovredni ali **ekvivalentni**.

Enačba, ki nima rešitve se imenuje **nerešljiva enačba**. Primer:

$$x + 1 = x + 3$$

Če je enakost enačbe velja ne glede na vrednost neznanke, tako enačbo imenujemo identična enačba ali **identiteta**. Primer:

$$2x^2 - (x+1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 5$$

16.1 Reševanje enačb

Enačbo lahko preoblikujemo v drugo ekvivalentno enačbo z naslednjimi postopki:

- Levo ali desno stran enačbe lahko preoblikujemo s pravili za preoblikovanje izrazov.
- Enačbi lahko na obeh straneh **prištejemo** ali **odštejemo** poljubno število ali izraz. Iz tega izhaja tudi “prenašanje” člena preko enačaja (na obeh straneh odštejemo ali prištejemo ta člen).
- Enačbo lahko na obeh straneh **množimo** ali **delimo** s poljubnim številom ali izrazom, ki ni enak 0.
- Na levi in na desni strani lahko **izvedemo** isto matematično **funkcijo**, ki mora

biti **bijektivna**.[7]

Pozor: Če levo in desno stran pomnožimo ali delimo z matematičnim izrazom, ki bi lahko bil enak 0 (za določeno vrednost spremenljivke), dobljena enačba ni nujno enakovredna prvotni. Če na levi in desni strani izvedemo funkcijo, ki ni bijektivna (npr. kvadriranje), dobljena enačba ni nujno enakovredna prvotni.

Sistem enačb je več enačb v katerih nastopajo enake neznanke. Sistem je enolično rešljiv, če je enačb vsaj toliko kot neznank in nobena izmed enačb ni ekvivalentna drugim.

16.2 Linearne enačbe

Linearna enačba je vsaka enačba oblike $kx + n = 0; k, n \in \mathbb{R}$ ali vsaka enačba, ki jo v to obliko lahko prevedemo.

Število rešitev linearne enačbe:

$$\begin{aligned} k \neq 0 &\Rightarrow 1 \text{ rešitev } x = -\frac{n}{k} \\ k = 0 \land n = 0 &\Rightarrow \infty \text{ rešitev, identiteta} \\ k = 0 \land n \neq 0 &\Rightarrow \text{ni rešitve} \end{aligned}$$

Sistem linearnih enačb se rešuje na več načinov. Z zamenjalnim načinom: iz ene enačbe izrazimo eno neznanko in jo vstavimo v vse druge. S primerjalnim načinom: iz dveh enačb izrazimo enako neznanko in ju izenačimo. Z metodo nasprotnih koeficientov: eno enačbo pomnožimo tako, da se pri odštevanju ali seštevanju enačb členi z isto neznanko odštejejo med seboj.

Primer:
Sistem dveh linearnih neenačb z dvema neznankama:

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

Sistem ima lahko nič, eno ali neskončno rešitev. Grafično te rešitve predstavljajo po vrsti: dve vzporednici brez skupne točke, dve premici, ki se sekata v eni točki in dve premici, ki se popolnoma pokrivata. Sistem lahko predstavlja tudi ravnino in sicer, ko so vsi koeficienti enaki 0.

16.3 Razcepne enačbe

$$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \lor B = 0$$

Primer uporabe:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= 0 \\ (x + 3)(x + 2) &= 0 \\ 1.\quad x + 3 = 0 &\Rightarrow x_1 = -3 \\ 2.\quad x + 2 = 0 &\Rightarrow x_2 = -2 \end{aligned}$$

---

[7] Za definicijo bijektivne preslikave glej razdelek 3.

16.4 Kvadratne enačbe

Kvadratna enačba je vsaka enačba oblike $ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}$ in $a \neq 0$ ali vsaka enačba, ki jo v to obliko lahko prevedemo.

Kvadratna enačba oblike $ax^2 + bx + c = 0$ sprašuje po **ničlah** funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Za rešitvi enačbe imamo formulo (15.8).

Kvadratne enačba ima:

- dve različni realni rešitvi, če $D > 0$
- eno dvojno realno rešitev, če $D = 0$
- dve kompleksni[8] rešitvi, ki sta par konjugiranih števil, če $D < 0$.

16.4.1 Viétovi formuli

Če je pri kvadratni enačbi a enak 1:

$$x^2 + ux + v = 0$$
$$u = -(x_1 + x_2)$$
$$v = x_1 \cdot x_2$$

Dokaz:
Izhajajmo iz kvadratne funkcije in njene oblike za ničle, upoštevajoč $a = 1$ (15.3).

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$
$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0$$
$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1x_2 = 0 \qquad \backslash\backslash \text{ Preberemo } u \text{ in } v.$$

16.5 Kompleksne enačbe

Kompleksna[8] enačba je vsaka enačba oblike $z = w;\ z, w \in \mathbb{C}$ ali vsaka enačba, ki jo v to obliko lahko prevedemo.

Kompleksno število je enako nič, če sta obe njegovi komponenti enaki nič.

$$A + B\imath = 0 \Leftrightarrow A = 0 \land B = 0$$

Dve kompleksni števili sta enaki, če sta njuni realni in imaginarni komponenti enaki.

$$A + B\imath = C + D\imath \Leftrightarrow A = C \land B = D$$

16.6 Eksponentne enačbe

Eksponentna enačba je vsaka enačba v kateri neznanka nastopa v eksponentu.

Enostavne rešitve enačbe:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$
$$a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$
$$a^x = b^x \Leftrightarrow x = 0$$

---

[8] Kompleksa števila so definirana kasneje, v razdelku 22.

Poznamo štiri tipe enačb:
Primer: $2^{2x+3} = 8$. Rešujemo s pravili zgoraj.
Primer: $3^{x+1} - 3^{x-1} = 24$. Reševanje z izpostavljanjem.
Primer: $2^x - 2^{2x-1} = 4$. Reševanje s substitucijo.
Primer: $4^x = 10$. Reševanje z logaritmiranjem.

16.7 Logaritemske enačbe

Logaritemska enačba je vsaka enačba v katerih nastopa neznanka v logaritmu.

Najprej damo vse logaritme na eno osnovo, skrčimo, nato **antilogaritmiramo** ali razrešimo po definiciji in rešimo nastalo enačbo. Lahko se rešujejo tudi s **substitucijo**.

16.8 Trigonometrične enačbe

Trigonometrična enačba je vsaka enačba v kateri nastopa neznanka v **kotnih funkcijah**.

Enostavne: $\sin x = a$; $a \in \mathbb{R}$. Enačba ima rešitve samo če $a \in [-1{,}1]$. Takrat je rešitev neskončno mnogo: $x = \arcsin a + 2k\pi$ in $a = \pi - \arcsin a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Pri kosinusu je situacija zelo podobna.

Enačba $\tan x = a$; $a \in \mathbb{R}$ pa ima rešitve za vsak a. Rešitve so $x = \arctan a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Homogene: $A \sin x + B \cos x = 0$ in podobne višjih stopenj. Lahko se deli s $\cos x$ ali $\sin x$, ker noben izmed njiju ni enak 0. Vsi členi morajo imeti enako število faktorjev s kotno funkcijo.

Produkt dveh kotnih funkcij je enak 0: $\sin x \cdot \tan x = 0$. Glej razcepne enačbe (razdelek 16.3).

Enačbe se rešuje tudi z uporabo **faktorizacije**, **substitucije**, metode **polovičnih kotov** (substitucija $x = 2\alpha$, pri enačbah $A \sin x + B \cos x = C$), **razčlenjevanja** (produkt dveh kotnih funkcij v enem členu).

16.9 Polinomske enačbe

Polinomska[9] **enačba** je vsaka enačba oblike $p(x) = 0$ ali vsaka enačba, ki jo v to obliko lahko prevedemo.

Rešitve enačbe so ničle polinoma $p(x)$.

16.10 Racionalne enačbe

Racionalna enačba je vsaka enačba oblike $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ ali vsaka enačba, ki jo v to obliko lahko prevedemo. $p(x)$ in $q(x)$ sta polinoma. Pomembno je, da si pri reševanju take enačbe zapišemo pogoje za rešitve (ničle imenovalcev ne smejo biti rešitve).

---

[9] Polinomi so definirani kasneje, v razdelku 25.

16.11 Iracionalne enačbe

Iracionalne enačbe so enačbe v katerih nastopajo koreni. Ponavadi jih rešujemo tako, da koren **osamimo** na eni strani in kvadriramo. Če nastopata dva tretja korena lahko uporabimo trik z uporabo drugega dela enačbe 10.2. Primer:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} &= 2 \qquad \backslash\backslash \text{ na }^3 \\ x + (x+1) + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+1}(\underbrace{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}}_{2}) &= 8 \qquad \backslash\backslash \text{ Po zgornji enačbi.} \\ x + (x+1) + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+1} \cdot 2 &= 8 \end{aligned}$$

17 Neenačbe

Neenačba je simbolični zapis sestavljen iz dveh matematičnih izrazov, med katerima stoji **neenačaj**. Neenačaj je lahko katerikoli od znakov za relacijo urejenosti ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$, včasih tudi $\neq$). Izraza, ki nastopata v neenačbi, imenujemo **leva stran** in **desna stran** neenačbe. Spremenljivke, ki nastopajo v neenačbi, imenujemo **neznanke**. **Rešitev** neenačbe je vrednost neznanke, ki zadosti neenakosti. Množico rešitev, ki je pogosto neskončna, ponavadi zapišemo z intervalom. Primer:

$x + 1 \leq 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 1]$

Neenačbi sta enakovredni ali **ekvivalentni**, če imata enako množico rešitev. Primer:

$3x + 1 < x + 7$ in $2x < 6$

Neenačbe se v nalogah dostikrat povezuje z definicijskim območjem funkcij. Primer: Poišči definicijsko območje funkcije $f(x) = \log(x^3 + 2x - 4)$ je enako kot: reši neenačbo $x^3 + 2x - 4 > 0$.

17.1 Reševanje neenačb

Neenačbo lahko preoblikujemo v drugo ekvivalentno neenačbo z naslednjimi postopki:

- Levo ali desno stran neenačbe lahko preoblikujemo s pravili za preoblikovanje izrazov.
- Neenačbi lahko na desni in na levi strani **prištejemo** ali **odštejemo** isto število ali izraz. Prav tako lahko tudi "prenesemo" člene preko neenačaja, tako da jim spremenimo predznak.
- Neenačbo lahko na desni in na levi strani **množimo** ali **delimo** z istim *pozitivnim* številom ali izrazom.
- Če neenačbo na desni in na levi strani **množimo** ali **delimo** z istim *negativnim* številom ali izrazom, se neenačaj obrne.
- Na levi in desni strani lahko **izvedemo** isto matematično **funkcijo**, ki pa mora biti povsod *strogo rastoča.*
- Če na levi in desni strani **izvedemo** isto matematično **funkcijo**, ki je povsod *strogo padajoča*, se neenačaj obrne

Rešitev **sistema** neenačb je presek rešitev posameznih neenačb.

17.2 Linearne neenačbe

Linearna neenačba je vsaka neenačba oblike $kx+n$ `neenačaj` $0; k, n \in \mathbb{R}$ ali vsaka neenačba, ki jo v to obliko lahko prevedemo.

Primer:
Obravnavajmo linearno enačbo $ax + b < 0$. Preoblikujemo jo v $ax < -b$.

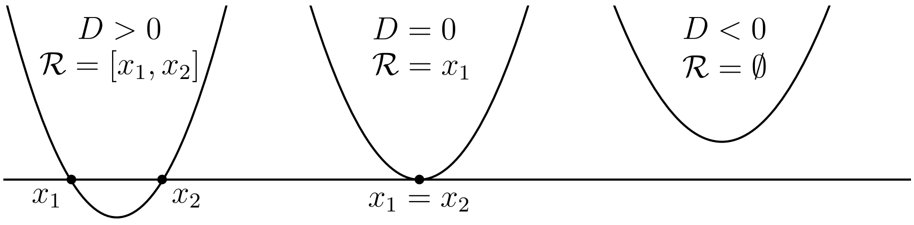
1. $a = 0$
   - i. $b \geq 0 \Rightarrow 0$ rešitev
   - ii. $b < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ je rešitev (premica)
2. $a < 0 \Rightarrow \forall x > -\frac{b}{a}$ je rešitev (poltrak)
3. $a > 0 \Rightarrow \forall x < -\frac{b}{a}$ je rešitev (poltrak)

17.3 Kvadratne neenačbe

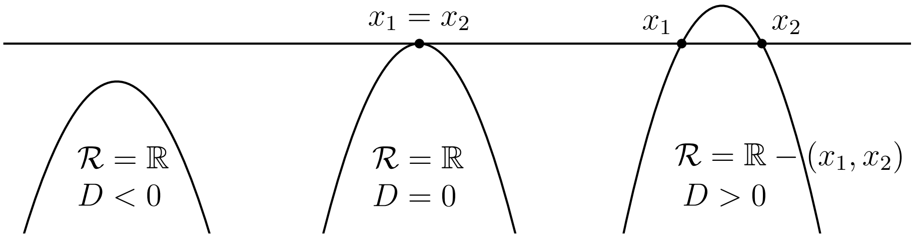
Kvadratna neenačba je vsaka neenačba oblike $ax^2 + bx + c$ `neenačaj` 0 ali vsaka neenačba, ki jo v to obliko lahko prevedemo.

Rešitve poiščemo tako, da izračunamo ničle funkcije $f(x) = ax^2+bx+c$ in ugotovimo predznak kvadratne funkcije na celotni realni osi ter nato izberemo želene intervale, ki ustrezajo pogojem. Skica je priporočljiva.

Primer obravnave enačbe $ax^2 + bx + c \leq 0$ na sliki 17. Z $\mathcal{R}$ označujmo množico rešitev.



(a) $a > 0$



(b) $a < 0$

Slika 17: Obravnava kvadratne neenačbe $ax^2 + bx + c \leq 0$

17.4 Polinomske neenačbe

Polinomska neenačba je vsaka neenačba oblike $p(x)$ `neenačaj` 0 ali vsaka neenačba, ki jo v to obliko lahko prevedemo.

Rešitve poiščemo tako, da izračunamo ničle polinoma $p(x)$ in ugotovimo predznak funkcije na celotni realni osi ter nato izberemo želene intervale, ki ustrezajo pogojem. Skica je priporočljiva.

17.5 Racionalne neenačbe

Racionalna neenačba je vsaka neenačba oblike $\frac{p(x)}{q(x)}$ `neenačaj` 0 ali vsaka neenačba, ki jo v to obliko lahko prevedemo. Rešimo jo tako da vse člene prenesemo na eno stran, in določimo ničle in pole dobljene racionalne funkcije, ter tako ugotovimo njen predznak na celotni realni osi in nato izberemo želeni interval kot rešitev neenačbe. Skica je priporočljiva.

18 Geometrija

Listi!
Naslednje dokaze je treba znat:

1. vsota notranjih kotov v trikotniku: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, grafično
2. vsota zunanjih kotov v trikotniku: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$, grafično in računsko
3. zveza med zunanjimi in notranjimi koti: $\alpha' = \beta + \gamma$, grafično in računsko
4. središčni in obodni kot, grafično
5. Talesov izrek: kot ki ima vrh na krožnici, kraka pa potekata skozi krajišči polmera, meri 90°.

19 Podobnost

Enakoležne stranice so tiste, ki ležijo nasproti istim kotom. Trikotnika sta si **podobna**, če se ujemata v **dveh kotih**. Podobnost označimo z znakom $\sim$ in pišemo kot $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

19.1 Talesovi izreki

Če sta si trikotnika podobna, je razmerje dveh enakoležnih stranic enako razmerju drugih dveh enakoležnih stranic.

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k \tag{19.1}$$

Če sta si trikotnika podobna, je razmerje stranic prvega trikotnika enako razmerju enakoležnih stranic drugega trikotnika.

$$a : b : c = a_1 : b_1 : c_1 \tag{19.2}$$

Če se trikotnika ujemata v kotu in razmerju stranic, ki kot oklepata, sta si podobna.

Razmerje obsegov, višin in ploščin:

$$\frac{o_1}{o} = k \qquad \frac{v_1}{v} = k \qquad \frac{p_1}{p} = k^2$$

19.2 Izreki v pravokotnem trikotniku

Višinski izrek:

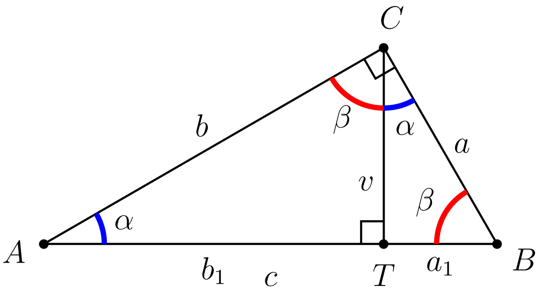
$$v_c^2 = a_1 \cdot b_1 \tag{19.3}$$

Evklidov izrek:

$$a^2 = a_1 \cdot c \qquad\qquad b^2 = b_1 \cdot c \tag{19.4}$$

Pitagorov izrek:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{19.5}$$



Slika 18: Višinski in Evklidov izrek v trikotniku.

Ob prvih dveh dokazih glej tudi sliko 18.
Dokaz izreka (19.3).

$$\triangle ATC \sim \triangle CTB$$
$$v : b_1 = a_1 : v$$
$$v^2 = a_1 \cdot b_1$$

Dokaz izreka (19.4).

$$\triangle ABC \sim \triangle ACT \qquad\qquad \triangle ABC \sim \triangle CBT$$
$$b : b_1 = c : b \qquad\qquad a : a_1 = c : a$$
$$b^2 = b_1 \cdot c \qquad\qquad a^2 = a_1 \cdot c$$

Dokaz izreka (19.5):

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = a_1 \cdot c + b_1 \cdot c$$
$$c^2 = c \cdot (a_1 + b_1)$$
$$c^2 = c \cdot c$$

20 Kotne funkcije

20.1 V pravokotnem trikotniku

Sinus kota je enak razmerju med kotu nasprotno kateto in hipotenuzo.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Kosinus kota je enak razmerju med kotu priležno kateto in hipotenuzo.

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}$$

Tangens kota je enak razmerju med kotu nasprotno in kotu priležno kateto.

$$\tan\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{c}$$

Kotangens kota je enak razmerju med kotu priležno in kotu nasprotno kateto.

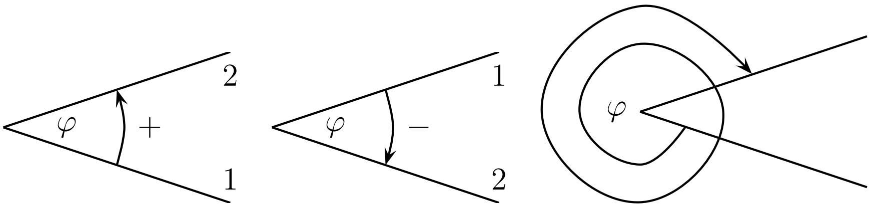
$$\cot\alpha = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{c}$$

Tabela 2: Vrednosti kotnih funkcij za določene kote.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0°	0	1	0	nedef.
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	nedef.	0

20.2 Kot

Definicijo kota za delo s kotnimi funkcijami razširimo tako, da kotu določimo **smer** (slika 19(a) in 19(b)), tako da določimo prvi in drugi krak (kot tako vedno merimo od prvega do drugega kraka po krajši poti) in da dopuščamo **poljubno velike** kote (slika 19(c)).



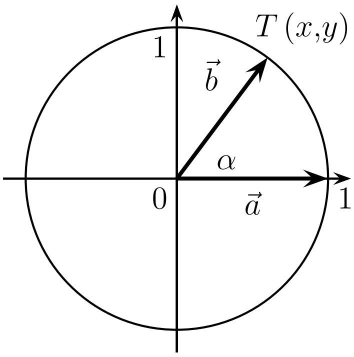
(a) Pozitiven kot. (b) Negativen kot. (c) Poljubno velik kot.

Slika 19: Razširjena definicija kota.

Kot tudi merimo v različnih enotah. **Radian** je enota, ki predstavlja dolžino krožnega loka z radijem 1 nad določenim kotom. Pretvorba določenih vrednosti iz stopinj v radiane je prikazana v tabeli 3.

Tabela 3: Tabela pretvorb med radiani in stopinjami za določene kote.

stopinje	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
radiani	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π



Slika 20: Kot med enotskima vektorjema, uporabljen pri definiciji sinusa in kosinusa.

20.3 Sinus in kosinus

Ob izpeljavi glej sliko 20.

$\vec{a} = (1,0)$

$\vec{b} = (x,y)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\alpha$ [10] \\\\ $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta enotska vektorja

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b} = \vec{a}\cdot\vec{b} = (1,0)\cdot(x,y) = 1x + 0y = x \tag{20.1}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)\right| = \left|\left(0,0, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)\right| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = ab\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{a\cdot b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} = 1y - 0x = y \tag{20.2}$$

Sinus kota, ki ima en krak na pozitivni strani x osi in vrh v izhodišču, je **ordinata** točke v kateri drugi krat seka enotsko krožnico.

Kosinus kota, ki ima en krak na pozitivni strani x osi in vrh v izhodišču, je **abscisa** točke v kateri drugi krat seka enotsko krožnico.

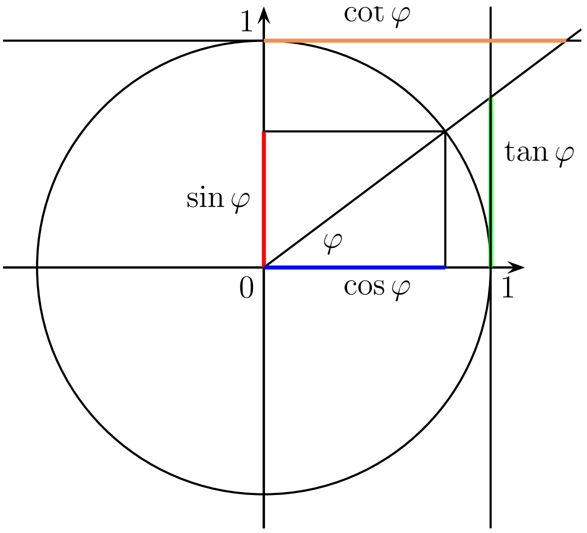
Grafična predstavitev sinusa in kosinusa je prikazana na sliki 21.

Lastnosti:

1. $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$
2. $Z_{\sin} = Z_{\cos} = [-1,1]$
3. Obe sta omejeni $m = -1$, $M = 1$
4. Sinus je **liha** funkcija: $\sin(-x) = -\sin(x)$
5. Kosinus je **soda** funkcija: $\cos(-x) = \cos(x)$
6. Obe sta periodični s periodo $\omega = 2\pi$.

---

[10] Za formule, ki se tičejo vektorjev glej razdelek 21. Za skalarni produkt glej razdelek 21.5, za vektorski produkt pa 21.7.



Slika 21: Grafični prikaz vrednosti kotnih funkcij.

20.4 Tangens in kotangens

Tangens kota je enak razmerju med sinusom in kosinusom kota.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{20.3}$$

Kotangens kota je enak razmerju med kosinusom in sinusom kota.

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{20.4}$$

Tangens kota je **ordinata** točke v katerem drugi krak kota ali njegova nosilka seka tangento na enotsko krožnico v točki (0,1).

Kotangens kota je **abscisa** točke v katerem drugi krak kota ali njegova nosilka seka tangento na enotsko krožnico v točki (1,0).

Grafična predstavitev tangensa in kotangensa je prikazana na sliki 21.

Lastnosti:

1. $D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
2. $D_{\cot} = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
3. $Z_{\tan} = Z_{\cot} = \mathbb{R}$
4. Tangens in kotangens **sta** lihi funkciji.
   $$\tan(-x) = -\tan(x) \quad \cot(-x) = -\cot(x)$$
5. Obe funkciji sta **periodični** s periodo $\omega = \pi$.

20.5 Osnovne zveze med kotnimi funkcijami

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \backslash\backslash \text{ Grafičen dokaz na sliki 21.} \tag{20.5}$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \tag{20.6}$$

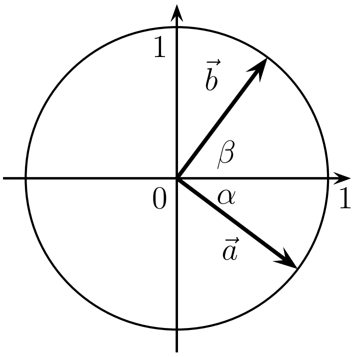
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \tag{20.7}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{20.8}$$

$$\tag{20.9}$$

Ostale zveze se dokaže tako, da se tangens ali kotangens zamenja po definiciji (20.3) ali (20.4) in nato poenostavi enačbo.

20.6 Adicijski izreki



Slika 22: Adicijski izreki.

Ob izpeljavi glej sliko 22. Izpeljane so iz definiciji kotnih funkcij sinus (20.2), kosinus (20.1), tangens (20.3) in kotangens (20.4).

$$\cos(\alpha+\beta) = \vec{a}\cdot\vec{b} = (\cos\alpha, -\sin\alpha)\cdot(\cos\beta, \sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha+\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha : (\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta : (\cos\alpha\cos\beta)} = \\ &= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot(\alpha+\beta) &= \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta : (\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha : (\sin\alpha\sin\beta)} = \\ &= \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha+\cot\beta}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} \tag{20.10}$$

$$\boldsymbol{\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha} \tag{20.11}$$

$$\boldsymbol{\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}} \tag{20.12}$$

$$\boldsymbol{\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}} \tag{20.13}$$

20.7 Dvojni koti

Formule se izpelje iz adicijskih izrekov definiranih v razdelku 20.6.

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \tag{20.14}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{20.15}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$

20.8 Polovični koti

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \backslash\backslash \text{ Po formuli (20.14).} \tag{20.16}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \backslash\backslash \text{ Po formuli (20.15).} \tag{20.17}$$

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \backslash\backslash \text{ Po osnovni zvezi (20.5).} \tag{20.18}$$

Odštejemo enačbi (20.18) in (20.17) med seboj.

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Seštejemo enačbi (20.18) in (20.17) med seboj.

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

20.9 Komplementarni koti

Po adicijskih izrekih velja:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \cos\theta\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \sin\theta\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \cot\theta\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \tan\theta\end{aligned}$$

20.10 Suplementarni koti

Po adicijskih izrekih velja:

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\theta) &= \sin\theta\\ \cos(\pi-\theta) &= -\cos\theta\\ \tan(\pi-\theta) &= -\tan\theta\\ \cot(\pi-\theta) &= -\cot\theta\end{aligned}$$

20.11 Periode

Za definicijo periodične funkcije glej razdelek 15.

$$\begin{aligned}&\sin(\theta+2k\pi) = \sin\theta;\ k\in\mathbb{Z}\\ &\cos(\theta+2k\pi) = \cos\theta;\ k\in\mathbb{Z}\\ &\tan(\theta+k\pi) = \tan\theta;\ k\in\mathbb{Z}\\ &\cot(\theta+k\pi) = \cot\theta;\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sin(\theta+k\pi) = (-1)^k\sin\theta;\ k\in\mathbb{Z}\\ &\cos(\theta+k\pi) = (-1)^k\cos\theta;\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

20.12 Faktorizacija

$$x=\alpha+\beta,\ y=\alpha-\beta$$

$$\alpha=\frac{x+y}{2},\ \beta=\frac{x-y}{2}$$

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y &= \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = &&(20.19)\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha =\\ &= 2\sin\alpha\cos\beta = &&(20.20)\\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Ostale formule se izpeljejo podobno.

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\ \sin x-\sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\ \cos x+\cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\ \cos x-\cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

20.13 Antifaktorizacija

Pogledamo enačbi (20.19) in (20.20) pri faktorizaciji (razdelek 20.12) in zapišemo naslednjo enakost:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

in izpeljemo

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

Podobno naredimo tudi za ostale formule.

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]\\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]
\end{aligned}$$

20.14 Grafi trigonometričnih funkcij

Splošna oblika:

$$f(x)=A\sin\omega(x-p)+q$$ [11]

A — amplituda
ω — krožna frekvenca (koliko valov je na intervalu dolžine 2π)
$\vec{v}=(p,q)$ — vektor premika
Grafi vseh funkcij so prikazani na sliki 23.

V naslednjih definicijah velja: $k\in\mathbb{Z}$.

Sinus:

ničle: $x=k\pi$
minimumi: $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$
maksimumi: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
graf: slika 23(a)

Kosinus:

ničle: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
minimumi: $x=\pi+2k\pi$
maksimumi: $x=2k\pi$
graf: slika 23(b)

Tangens:

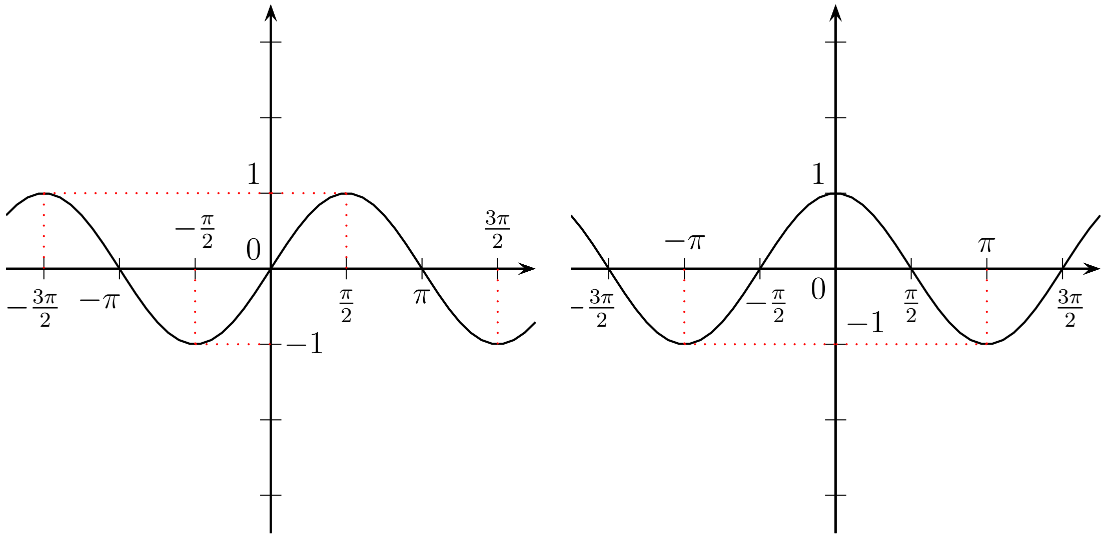
ničle: $x=k\pi$
poli: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
graf: slika 23(c)

Kotangens:

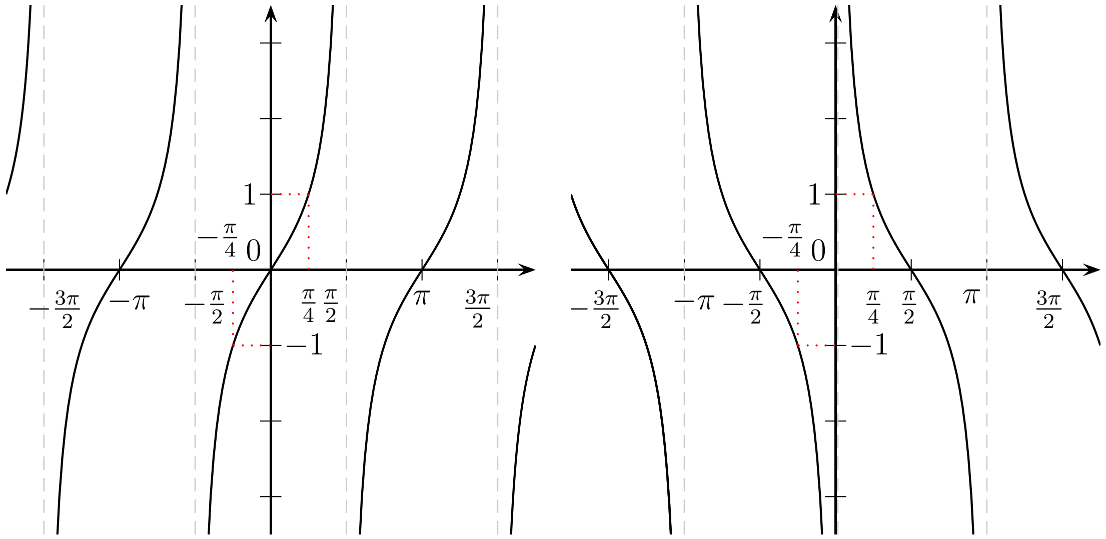
ničle: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
poli: $x=k\pi$
graf: slika 23(d)

---

[11] Seveda je lahko namesto funkcije sin vstavljena tudi katera koli druga trigonometrična funkcija.



(a) Graf funkcije $\sin(x)$ (b) Graf funkcije $\cos(x)$



(c) Graf funkcije $\tan(x)$ (d) Graf funkcije $\cot(x)$

Slika 23: Grafi trigonometričnih funkcij

20.15 Kot med premicama

Naklonski kot premice je pozitiven kot med abscisno osjo in premico. Če je premica vzporedna abscisni osi je kot enak 0°.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\varphi;\ 0^\circ \leq \varphi < 180^\circ \qquad \backslash\backslash \text{ Za } k \text{ glej razdelek 15.4} \tag{20.21}$$

Ob izpeljavi glej sliko 24.

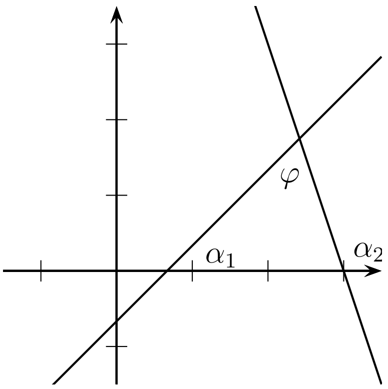
$$k_1 = \tan\alpha_1 \tag{20.22}$$

$$k_2 = \tan\alpha_2 \tag{20.23}$$

Po izrekih za kote v trikotniku (razdelek 18, 3 element seznama) velja:

$$\alpha_1 + \varphi = \alpha_2$$

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$



Slika 24: Kot med premicama.

$$\tan\alpha = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\tan\varphi = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2} \quad \text{\\ Po adicijskem za tangens (20.12).} \tag{20.24}$$

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| \quad \text{\\ Po izpeljavah (20.22) in (20.23).} \tag{20.25}$$

21 Vektorji

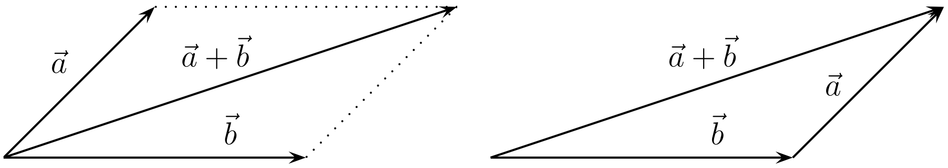
Vektor je **usmerjena daljica**. Vektor je **urejen par točk** v prostoru. Vektor **nič**, $\vec{0}$, je vektor $\overrightarrow{AA}$, ki je točka. **Enotski** vektor je vektor z dolžino 1.

Dva vektorja sta **enaka**, če sta enako dolga, imata enako smer in sta vzporedna. Enakost vektorjev je **ekvivalenčna** relacija. Za definicijo ekvivalenčne relacije glej razdelek 4.

V ravnini je toliko različnih vektorjev kot točk.

21.1 Seštevanje vektorjev

Dva vektorja **seštejemo** tako, da začetno točko 2. vektorja postavimo v začetno točko 1. vektorja. Vsota je vektor, ki se začne v začetni točki 1. vektorja in konča v končni točki 2. vektorja. Seštevanje vektorjev je prikazano na sliki 25. **Paralelogramsko** pravilo je prikazano na sliki 25(a), **trikotniško** pa na sliki 25(b).

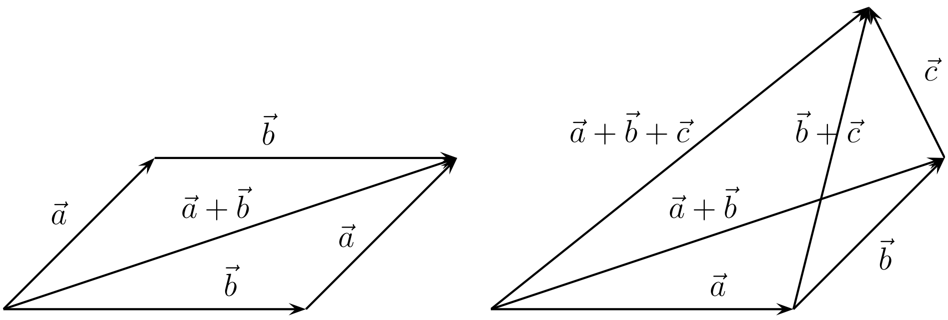


(a) Paralelogramsko pravilo. (b) Trikotniško pravilo.

Slika 25: Seštevanje vektorjev.

Lastnosti:

komutativnost: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
Grafični dokaz: slika 26(a).
asociativnost: $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
Grafični dokaz: slika 26(b).
enota za seštevanje: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
nasprotni element: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$



(a) Komutativnost seštevanja vektorjev. (b) Asociativnost seštevanja vektorjev.

Slika 26: Grafični dokaz komutativnosti in asociativnosti seštevanja vektorjev.

Odštevanje je prištevanje nasprotnega elementa.

21.2 Produkt vektorja s skalarjem

Produkt vektorja $\vec{a}$ s **skalarjem** x je nov vektor, katerega dolžina je enaka produktu dolžine vektorja $\vec{a}$ in absolutne vrednosti skalarja x. Za vektor velja, da je vzporeden vektorju $\vec{a}$. Če je x pozitiven ima isto smer kot $\vec{a}$, če je x negativen ima nasprotno, če je x enak 0 pa je rezultat vektor $\vec{0}$.

$$|x\vec{a}|=|x|\cdot|\vec{a}|\,,\ x\in\mathbb{R}$$

Lastnosti:

asociativnost v skalarnem faktorju: $x(y\vec{a})=(xy)\vec{a}$
distributivnost v skalarnem faktorju: $x\vec{a}+y\vec{a}=(x+y)\vec{a}$
distributivnost v vektorskem faktorju: $x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}$

21.3 Linearna kombinacija vektorjev

Linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je nov vektor $x\vec{a}+y\vec{b}$; $x,y\in\mathbb{R}$. **Linearna kombinacija** vektorjev $\vec{a_1},\vec{a_2},\dots,\vec{a_n}$ je nov vektor $x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+\cdots x_n\vec{a_n}$; $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$.

Dva vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta **neodvisna** kadar je njuna linearna kombinacija enaka 0 samo če sta x in y 0.

$$\vec{a},\vec{b}\text{ neodvisna }\sim:x\vec{a}+y\vec{b}=0\Leftrightarrow x=y=0$$

Dva vektorja sta **odvisna**, če je njuna linearna kombinacija enaka nič in je vsaj eden od skalarjev različen od nič.

$$\vec{a},\vec{b}\text{ odvisna }\sim:x\vec{a}+y\vec{b}=0\Leftrightarrow x\neq0\vee y\neq0$$

Baza je množica neodvisnih vektorjev v prostoru. Število vektorjev v bazi je enako dimenziji prostora.

Če imamo v ravnini 2 nekolinearna vektorja lahko vsak drug vektor ravnine napišemo kot linearno kombinacijo danih nekolinearnih vektorjev. Če imamo v prostoru bazo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ potem lahko vsak vektor zapišemo na en sam način kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

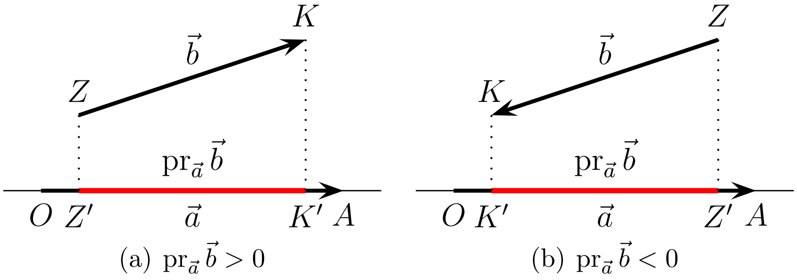
21.4 Pravokotna projekcija

Imejmo vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{ZK}$. Naj bo točka Z' pravokotna projekcija začetka vektorja ZK na nosilko vektorja $\overrightarrow{OA}$, točka K' pa projekcija konca. Potem je pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ enaka **razdalji** med točkama Z' in K'. Če ima vektor $\overrightarrow{OA}$ enako smer kot vektor $\overrightarrow{Z'K'}$, potem je razdalja **pozitivno** predznačena, če ne je **negativno** predznačena.

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \begin{cases} |Z'K'|\,; & \overrightarrow{Z'K'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA} \\ -|Z'K'|\,; & \overrightarrow{Z'K'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OA} \end{cases}$$

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ je prikazana na sliki 27.



(a) $\operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} > 0$ (b) $\operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} < 0$

Slika 27: Pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.

Lastnosti:

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}}(x\vec{b}) = x \cdot \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} + \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{c}$$

21.5 Skalarni produkt

Kot φ med dvema vektorjema, ki se začneta v isti točki, je manjši od obeh pozitivnih kotov, ki ju vektorja določata.

Skalarni produkt dveh vektorjev je enak produktu dolžin obeh vektorjev s kosinusom vmesnega kota.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \tag{21.1}$$

Lastnosti:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \qquad \backslash\backslash \text{ Komutativnost.} \tag{21.2}$$

Skalarni produkt pravokotnih vektorjev je enak 0:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0 \tag{21.3}$$

Skalarni produkt vektorja samega s seboj je enak kvadratu njegove dolžine:

$$\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \tag{21.4}$$

$$x\left(\vec{a}\vec{b}\right) = (x\vec{a})\,\vec{b} = \vec{a}\left(x\vec{b}\right) \qquad \backslash\backslash \text{ Homogenost.} \tag{21.5}$$

$$\vec{a}\vec{b} = a \cdot \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} \tag{21.6}$$

$$\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} \qquad \backslash\backslash \text{ Distributivnost.} \tag{21.7}$$

Dokaz lastnosti 21.2:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi = \vec{b}\vec{a} \qquad \backslash\backslash \text{ Množenje je komutativno.}$$

Dokaz lastnosti 21.3:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

Dokaz lastnosti 21.4:

$$\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} \qquad \backslash\backslash \text{ Formula za dolžino vektorja.}$$

Dokaz lastnosti 21.5:

$$x(\vec{a}\vec{b}) = x(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi) = x|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

$$(x\vec{a})\vec{b} = (x|\vec{a}|)|\vec{b}|\cos\varphi = x|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

$$\vec{a}(x\vec{b}) = |\vec{a}|(x|\vec{b}|)\cos\varphi = x|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \qquad \backslash\backslash \text{ Množenje je asociativno.}$$

Dokaz lastnosti 21.6:

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = |\vec{a}| \cdot \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$$

Dokaz lastnosti 21.7:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot \operatorname{pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (\operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} + \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} + |\vec{a}| \cdot \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$$

Iz formule za skalarni produkt izpeljemo tudi formulo za računanje **kota** med vektorjema:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

21.6 Krajevni vektorji

Ortonormirana baza so vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, ki so med sabo paroma pravokotni, ležijo na koordinatnih oseh in so dolgi 1 enoto. **Krajevni vektor** do točke A je vektor, ki se začne v izhodišču koordinatnega sistema in se konča v točki A. (oznaka: $\vec{r_A}$)

Vsak krajevni vektor lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev, ki jo predstavimo z urejeno trojico, ki jo imenujemo **komponente** vektorjev. Komponente vektorjev so enake koordinatam točke, do katere vektor kaže.

$\vec{r_A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1,a_2,a_3)$

21.6.1 Seštevanje krajevnih vektorjev

Vektorje v komponentah seštevamo tako, da seštevamo istoležne komponente.

$$\boldsymbol{(a_1,a_2,a_3) + (b_1,b_2,b_3) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)}$$

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,a_3) + (b_1,b_2,b_3) &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} + b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} = \\ &= \vec{i}(a_1 + b_1) + \vec{j}(a_2 + b_2) + \vec{k}(a_3 + b_3) = \\ &= (a_1 + b_1,a_2 + b_2,a_3 + b_3)\end{aligned}$$

21.6.2 Množenje krajevnega vektorja s skalarjem

Vektor v komponentah množimo s skalarjem tako da množimo vsako komponento posebej.

$$\boldsymbol{x(a_1,a_2,a_3) = (xa_1, xa_2, xa_3)}$$

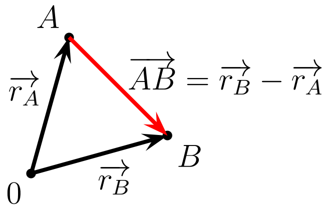
$$x(a_1,a_2,a_3) = x(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) = xa_1\vec{i} + xa_2\vec{j} + xa_3\vec{k} = (xa_1, xa_2, xa_3)$$

21.6.3 Vektor med dvema točkama

Vektor med dvema točkama je enak razliki istoležnih komponent drugega in prvega vektorja. Ob izpeljavi glej sliko 28.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -\vec{r_A} + \vec{r_B} = -(a_1,a_2,a_3) + (b_1,b_2,b_3) = \\ &= (-a_1, - a_2, - a_3) + (b_1,b_2,b_3) = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)\end{aligned}$$



Slika 28: Vektor med dvema točkama.

21.6.4 Skalarni produkt krajevnih vektorjev

Skalarni produkt vektorjev v komponentah je enak vsoti produktov istoležnih komponent.

$$\boldsymbol{\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\vec{b} &= (a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3) = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i},b_2\vec{j},b_3\vec{k}) = \\
&= a_1\vec{i}\cdot b_1\vec{i} + a_1\vec{i}\cdot b_2\vec{j} + a_1\vec{i}\cdot b_3\vec{k} + a_2\vec{j}\cdot b_1\vec{i} + a_2\vec{j}\cdot b_2\vec{j} + a_2\vec{j}\cdot b_3\vec{k}+ \\
&\qquad\qquad + a_3\vec{k}\cdot b_1\vec{i} + a_3\vec{k}\cdot b_2\vec{j} + a_3\vec{k}\cdot b_3\vec{k} = \\
&= a_1\vec{i}\cdot b_1\vec{i} + a_2\vec{j}\cdot b_2\vec{j} + a_3\vec{k}\cdot b_3\vec{k} && \backslash\backslash\ \vec{i}\vec{j}=\vec{i}\vec{k}=\vec{j}\vec{k}=0 \text{ po } (21.3). \\
&= a_1b_1\cdot\vec{i}\vec{i} + a_2b_2\cdot\vec{j}\vec{j} + a_3b_3\cdot\vec{k}\vec{k} && \backslash\backslash\ \vec{i}\vec{i}=\vec{j}\vec{j}=\vec{k}\vec{k}=1 \text{ po } (21.4). \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned}$$

21.6.5 Enotski vektor v smeri danega vektorja

$$\overrightarrow{e_{\vec{a}}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

21.7 Vektorski produkt

Vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je nov **vektor** $\vec{a}\times\vec{b}$, ki je **pravokoten** na oba vektorja, njegova dolžina je enaka **ploščini paralelograma**, ki ga določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, usmerjen pa je tako, da je gledano z njegovega konca krajša pot od vektorja $\vec{a}$ do vektorja $\vec{b}$ **pozitivna**.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},\right) \qquad \backslash\backslash \text{ Za razrešitev determinante matrike glej (14.1).}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$$

22 Kompleksna števila

Vpeljemo število $\imath$, ki ga imenujemo **imaginarna enota**.

$$\imath^2 = -1 \Rightarrow \imath = \sqrt{-1}$$

$$\mathbb{C} = \left\{z;\ z = x + y\imath;\ x,y\in\mathbb{R},\ \imath = \sqrt{-1}\right\}$$

Kompleksno število se lahko predstavi tudi z urejenim parom (x,y) ali s krajevnim vektorjem (x,y).

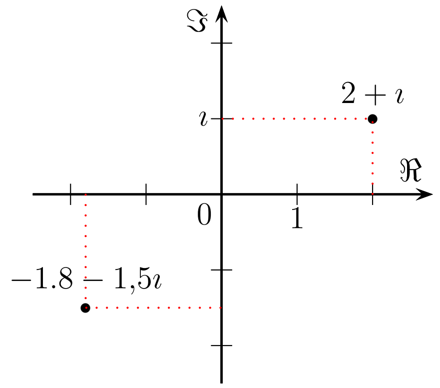
Kompleksna števila imajo podmnožico **realnih** in **imaginarnih** števil.

$$\mathbb{R} = \{z;\ z = x + y\imath;\ x\in\mathbb{R},\ y = 0\}$$

$$\mathcal{I} = \{z;\ z = x + y\imath;\ x = 0,\ y\in\mathbb{R}\}$$

$\Re z$ — realna komponenta števila z, tudi $\mathrm{Re}(z)$, x
$\Im z$ — imaginarna komponenta števila z, tudi $\mathrm{Im}(z)$, y

Kompleksna števila lahko narišemo v **kompleksni ravnini**, ki ima **realno** in **imaginarno** os, kot urejene pare (x,y). Primer je prikazan na sliki 29.



Slika 29: Grafični prikaz kompleksnega števila.

22.1 Seštevanje kompleksnih števil

Kompleksna števila **seštevamo** tako, da seštejemo realni komponenti obeh števil in imaginarni komponenti obeh števil.

$$
\begin{aligned}
&z = a + b\imath \\
&w = c + d\imath \\
&z + w = (a + b\imath) + (c + d\imath) = (a + c) + (b\imath + d\imath) = (a + c) + (b + d)\imath \\
&z - w = z + (-w) = (a + b\imath) + (c + d\imath) = (a - c) + (b - d)\imath
\end{aligned}
$$

Rezultat seštevanja ali odštevanja dveh kompleksnih števil je vedno kompleksno število. Seštevanje kompleksnih števil se ponazori tako kot seštevanje vektorjev.

22.2 Množenje kompleksnih števil

$$
\begin{aligned}
z &= a + b\imath \\
w &= c + d\imath \\
z \cdot w &= (a + b\imath)(c + d\imath) = ac + ad\imath + b\imath c + b\imath d\imath = \\
&= ac + (ad + bc)\imath + bd\imath^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\imath
\end{aligned}
$$

Rezultat množenja kompleksnih števil je vedno kompleksno število. Množenje kompleksnega števila z realnih številom se v kompleksni ravnini ponazori tako, kot množenje vektorja s skalarjem, množenje kompleksnega števila z $\imath$ pa se ponazori kot rotacija za kot $\frac{\pi}{2}$ v pozitivni smeri.

$$
\begin{aligned}
&\imath^{4n} = (i^4)^n \cdot \imath^0 = 1 \cdot 1 = 1 \\
&\imath^{4n+1} = (i^4)^n \cdot \imath^1 = 1 \cdot \imath = \imath \\
&\imath^{4n+2} = (i^4)^n \cdot \imath^2 = 1 \cdot -1 = -1 \\
&\imath^{4n+3} = (i^4)^n \cdot \imath^3 = 1 \cdot -\imath = -\imath
\end{aligned}
$$

22.3 Konjugirano kompleksno število

$$z = x + y\imath$$

$\overline{z} = x - y\imath$

Lastnosti:

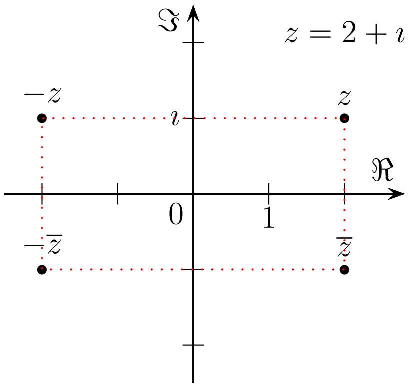
- konjugirano kompleksno število in prvotno število imata sliki zrcalni glede na realno os (slika 30)
- konjugirano število konjugiranega števila z je enako številu z: $\overline{\overline{z}} = z$
- produkt števila in njegove konjugirane vrednosti je enak vsoti kvadratov realne in imaginarne komponente:
$$z \cdot \overline{z} = (x + y\imath)(x - y\imath) = x^2 + y^2 \tag{22.1}$$
- konjugirana vrednost vsote je enaka vsoti konjugiranih vrednosti:
$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \tag{22.2}$$
- konjugirana vrednost produkta je enaka produktu konjugiranih vrednosti:
$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \tag{22.3}$$
- konjugirana vrednost potence je enaka potenci konjugirane vrednosti:
$$\overline{z^n} = \overline{z}^n \tag{22.4}$$
- konjugirana vrednost realnega števila je enaka realnemu številu:
$$\overline{a} = a, \ a \in \mathbb{R} \tag{22.5}$$

Dokaz lastnosti (22.2):

$$\overline{z} + \overline{w} = a - b\imath + c - d\imath = (a + c) - \imath(b + d) = \overline{z + w}$$

Dokaz lastnosti (22.3):

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - b\imath) \cdot (c - d\imath) = ac - bd - \imath(ad + bc) = \overline{z \cdot w}$$



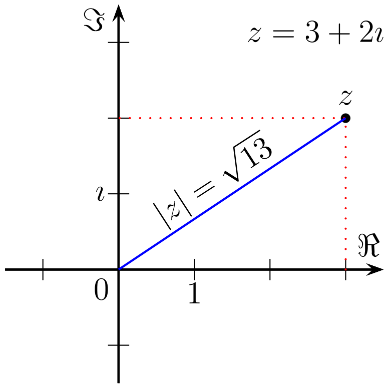
Slika 30: Grafični prikaz konjugiranega kompleksnega števila.

22.4 Absolutna vrednost kompleksnega števila

$|z| = +\sqrt{z \cdot \overline{z}} = +\sqrt{x^2 + y^2}$

Lastnosti:

- grafično predstavlja oddaljenost števila od izhodišča kompleksne ravnine (slika 31)
- $|z| \geq 0; \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 + 0\imath$
- produkt absolutnih vrednosti je enak absolutni vrednosti produkta:
  $$|z| \cdot |w| = |z \cdot w|$$
- vsota absolutnih vrednosti je večja ali enaka absolutni vrednosti vsote (trikotniška neenakost): $|z| + |w| \geq |z + w|$



Slika 31: Grafični prikaz absolutne vrednosti kompleksnega števila.

22.5 Deljenje kompleksnih števil

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}};\ z \neq 0 \qquad \text{\\ Pod ulomkom je vedno realno število zaradi (22.1).}$$

$$w : z = w \cdot z^{-1} = \frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}};\ z \neq 0$$

Rezultat deljenja dveh kompleksnih števil je vedno kompleksno število.

23 Liki

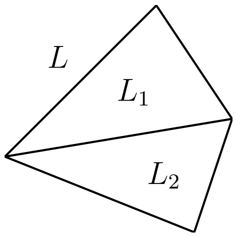
Geometrijski lik je strnjena ravninska množica točk, ki je omejena s sklenjeno krivuljo ali lomljeno črto.

23.1 Ploščina

Ploščina je funkcija, ki liku priredi določeno število, ki nam pove, koliko enotskih kvadratkov popolnoma prekrije dani lik.

Lastnosti:

- $p(L) \geq 0$
- $p\left({}^{1}\square_{1}\right) = 1$
- $p(L) = p(L_1) + p(L_2) \Leftrightarrow L = L_1 + L_2 \wedge L_1 \cap L_2 = \emptyset$ Glej sliko 32.
- $L_1 \cong L_2 \Leftrightarrow p(L_1) = p(L_2)$



Slika 32: Ploščina lika, sestavljenega iz več likov.

23.2 Kvadrat

Glej sliko 33(a).

$$p = a^2 = \frac{d^2}{2}$$
$$o = 4 \cdot a$$

23.3 Pravokotnik

Glej sliko 33(b).

$$p = a \cdot b$$
$$o = 2(a + b)$$

23.4 Paralelogram

Glej sliko 33(c).

$$p = a \cdot v_a = b \cdot v_b$$
$$p = a \cdot b \cdot \sin\alpha = a \cdot b \cdot \sin\beta$$
$$o = 2(a + b)$$
$$v_a = b \cdot \sin\alpha$$
$$v_b = a \cdot \sin\beta$$

23.5 Trapez

Glej sliki 33(d) in 33(e).

$$p = \frac{(a + c) \cdot v}{2} = \frac{a + c}{2} \cdot v = s \cdot v$$
$$o = a + b + c + d$$

$$s = a - x - y$$
$$s = c + x + y$$
$$2s = a + c \qquad \text{\\ Seštejemo zgornji enačbi.}$$
$$s = \frac{a + c}{2}$$

23.6 Deltoid

Glej sliko 34(a).

$$p = \frac{e \cdot f}{2}$$
$$o = 2(a + b)$$

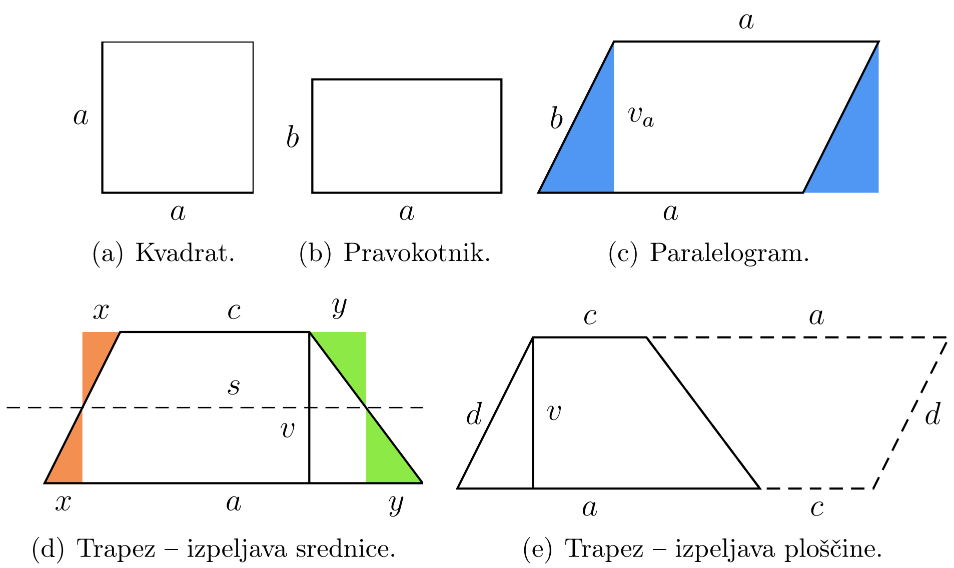
23.7 Romb

$$p = a \cdot v_a = \frac{e \cdot f}{2} = a^2 \cdot \sin\alpha = a^2 \cdot \sin\beta$$
$$o = 4 \cdot a$$

23.8 Trikotnik

Glej sliki 34(b) in 34(c).

$$p = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$
$$p = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$$
$$p = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \qquad \text{\\ Heronov obrazec, ki je razložen kasneje v razdelku 23.14}$$
$$o = a + b + c$$



(a) Kvadrat. (b) Pravokotnik. (c) Paralelogram.

(d) Trapez – izpeljava srednice. (e) Trapez – izpeljava ploščine.

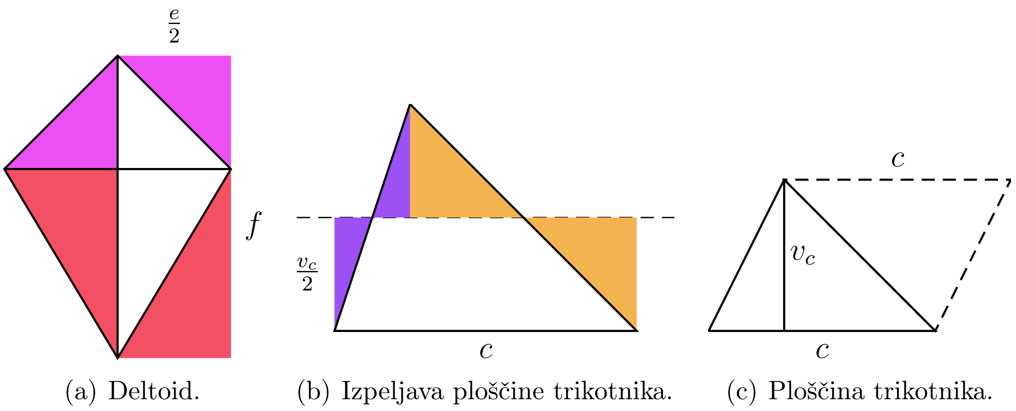
Slika 33: Kvadrat, pravokotnik, paralelogram in trapez.

23.9 Enakostranični trikotnik

$$p = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$o = 3 \cdot a$$

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



(a) Deltoid. (b) Izpeljava ploščine trikotnika. (c) Ploščina trikotnika.

Slika 34: Deltoid in trikotnik.

23.10 Pravilni mnogokotnik

Pravilni mnogokotnik je mnogokotnik, ki ima vse stranice enako dolge in vse kote med seboj skladne. Pravilni mnogokotnik je vedno konveksen. Vsakemu pravilnemu mnogokotniku se da hkrati včrtati in očrtati krožnico, ki imata skupno središče.

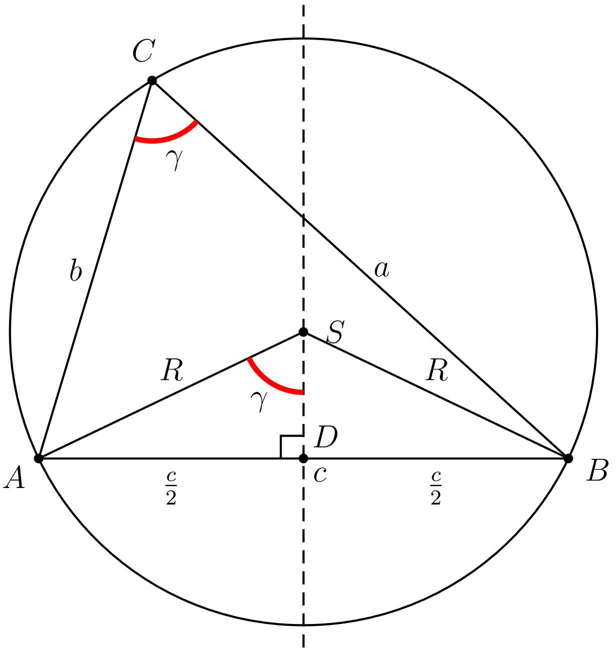
Vsota notranjih kotov: $S_n = (n-2) \cdot 180°$

Vsota zunanjih kotov: $S_n' = 360°$
Število diagonal: $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$

Ploščina se izračuna kot vsota ploščin enakokrakih trikotnikov, ki imajo za osnovnico eno stranico, vrh pa imajo v središču mnogokotniku včrtane krožnice. Polmer mnogokotniku včrtane krožnice označimo z r, polmer mnogokotniku očrtane krožnice pa z R.

$$\begin{aligned}
o &= n \cdot a \\
\varphi &= \frac{360°}{n} \\
p &= \frac{nar}{2} \\
p &= \frac{nR^2 \sin\varphi}{2} \\
p &= \frac{na^2}{4\tan\frac{\varphi}{2}}
\end{aligned}$$

23.11 Sinusni izrek



Slika 35: Sinusni izrek.

Ob izpeljavi glej sliko 35.

1. Vsakemu trikotniku lahko očrtamo krožnico.
2. Kot γ je obodni kot.
3. $\angle ASB = 2\gamma$, ker je središčni kot.
4. $\triangle ABS$ je enakokrak $\Rightarrow AD = \frac{c}{2} \wedge \angle ASD = \gamma$
5. $\triangle ADS$ je pravokoten, torej veljajo kotne funkcije.

6. $\sin\gamma = \frac{\frac{c}{2}}{R}$
7. $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
8. Ponovimo za vse kote.

$$\begin{aligned} a &= 2R\cdot\sin\alpha \\ b &= 2R\cdot\sin\beta \\ c &= 2R\cdot\sin\gamma \end{aligned}$$

Razmerje med stranico in sinusom nasprotnega kota je konstantno.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Uporaba: kadar imamo podana 2 kota in stranico ali 2 stranici in kot, ki ni med njima.

$$\begin{aligned} p &= \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} \\ 2p &= ab\sin\gamma = ac\sin\beta = bc\sin\alpha \\ \frac{2p}{abc} &= \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R} \\ \frac{abc}{2p} &= 2R \\ R &= \frac{abc}{4p} \\ p &= \frac{abc}{4R} \end{aligned}$$

23.12 Kosinusni izrek

Ob izpeljavi glej sliko 36(a).

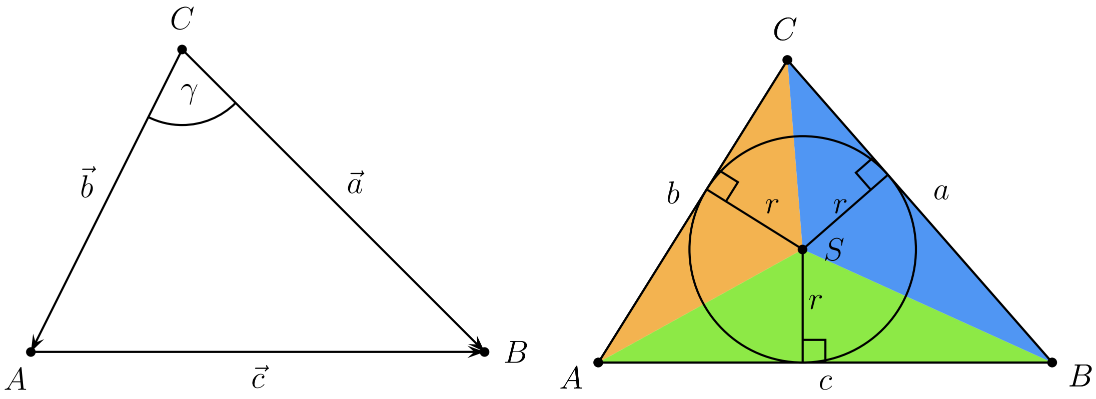
$$\begin{aligned} c^2 &= \vec{c}\cdot\vec{c} \\ c^2 &= (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) \\ c^2 &= a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Ponovimo za vse stranice:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad (23.1) \end{aligned}$$

Kvadrat stranice trikotnika je enak vsoti kvadratov drugih dveh stranic zmanjšanih za produkt dolžin teh dveh stranic s kosinusom njunega vmesnega kota.

Uporaba: kadar imamo podani 2 stranici in en kot ali 3 stranice.



(a) Kosinusni izrek.

(b) Polmer včrtanega kroga.

Slika 36: Kosinusni izrek in polmer včrtanega kroga.

23.13 Polmer včrtanega kroga

Ob izpeljavi glej sliko 36(b).

$$p = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2}$$

$$p = r \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} \right)$$

$$p = r \cdot s$$

$$r = \frac{p}{s}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \qquad \backslash\backslash \text{ Polovični obseg.} \tag{23.2}$$

23.14 Heronov obrazec

$$p = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} \qquad \backslash\backslash \text{ Kvadriramo, vse je pozitivno.}$$

$$p^2 = \frac{b^2 \cdot c^2 \cdot \sin^2\alpha}{4} \qquad \backslash\backslash \text{ Zamenjamo } \sin^2\alpha \text{ po osnovni zvezi (20.5).}$$

$$p^2 = \frac{b^2c^2(1-\cos^2\alpha)}{4} \qquad \backslash\backslash \text{ Razlika kvadratov (10.4).}$$

$$p^2 = \frac{b^2c^2\left(1-\cos\alpha\right)\left(1+\cos\alpha\right)}{4} \qquad \backslash\backslash \text{ Kosinusni izrek 23.1. } \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$p^2 = \frac{b^2c^2\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{4} \qquad \backslash\backslash \text{ Se znebimo dvojnih ulomkov.}$$

$$p^2 = \frac{b^2c^2}{16 \cdot b^2c^2}\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right) \qquad \backslash\backslash \text{ Sestavimo popolne kvadrate.}$$

$$p^2 = \frac{1}{16}\left(a^2-(b-c)^2\right)\left((b+c)^2-a^2\right) \qquad \backslash\backslash \text{ Razlika kvadratov (10.4).}$$

$$p^2 = \frac{1}{16}\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)$$

$$p^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \qquad \backslash\backslash \text{ Uporabimo polobseg (23.2).}$$

$$p^2 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)$$
$$p = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Uporabimo ga, ko imamo podane vse tri stranice in želimo izračunati ploščino.

23.15 Krog

Krog je množica točk v ravnini, ki so r ali **manj** oddaljene od neke točke S v isti ravnini Π. Točki S pravimo **središče**.

$$\mathcal{K} = \{T;\ T,S \in \Pi \wedge d(T,S) \leq r\}$$

Razmerje med obsegom in premerom kroga je **konstantno**. Konstanto označimo s $\boldsymbol{\pi}$.

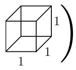
$$o = 2\pi r$$
$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} = r\alpha \qquad \text{\\\\ v zadnji formuli je } \alpha \text{ v radianih.}$$
$$p = \pi r^2$$
$$p_{iz} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{r^2\alpha}{2} = \frac{l \cdot r}{2} \qquad \text{\\\\ v predzadnji formuli je } \alpha \text{ v radianih.}$$
$$p_{od} = p_{iz} - p_{\triangle}$$

24 Telesa

Poznamo **okrogla** in **oglata** telesa. Okrogla so med drugim tudi **valj**, **krogla**, **stožec** in **vrtenine**. Oglata telesa ali **poliedre** med drugim delimo tudi na pravilne poliedre (**platonska telesa**), **piramide** in **prizme**.

Rob je stičišče dveh ploskev. **Oglišče** je stičišče dveh ali več robov. **Površina** telesa je enaka vsoti ploščin vseh mejnih ploskev. **Volumen** ali prostornina je funkcija, ki telesu priredi določeno število, ki nam pove koliko enotskih kock popolnoma napolni lik.

Lastnosti:

- $V(T) \geq 0$
- $V\Big($  $\Big) = 1$
- $T_1 \cong T_2 \Rightarrow V(T_1) = V(T_2)$
- $V(T) = V(T_1) + V(T_2) \Leftrightarrow T = T_1 \cup T_2 \wedge T_1 \cap T_2 = \emptyset$

Polieder je oglato telo, omejeno s samimi n-kotniki. **Pravilni polieder** je polieder, ki je omejen s samimi pravilnimi n-kotniki, v vsakem oglišču pa se stika enako število robov. (tetraeder, heksaeder, oktaeder, dodekaeder, ikozaeder)

24.1 Cavalierjevo načelo

Dve telesi imata **enaki prostornini**, če sta **ploščinsko enaka poljubna ravninska preseka** s skupno ravnino, ki je **vzporedna** ravnini, na kateri leži osnovna ploskev.

24.2 Prizma

Prizma je polieder, ki je omejen z dvema vzporednima n-kotnikoma, v plašču pa ima n paralelogramov. Poznamo pokončne in poševne prizme.

Višina prizme je najkrajša možna razdalja med osnovnima ploskvama. Prizma je pokončna, če je višina enaka stranskemu robu. Prizma je pravilna, če sta osnovni ploskvi pravilna n-kotnika in če je pokončna. Prizma je enakoroba, če so vsi robovi enako dolgi. (ni nujno pokončna).

$$P = 2 \cdot O + pl$$
$$V = O \cdot v$$

24.2.1 Kvader

Pokončna štiristrana prizma.

$$P = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$
$$V = a \cdot b \cdot c$$

24.2.2 Kocka

Pravilna enakoroba štiristrana prizma ali heksaeder.

$$P = 6a^2$$
$$V = a^3$$

24.3 Valj

Pokončni krožni valj je rotacijsko geometrijsko telo, ki nastane z rotacijo pravokotnika okoli ene od njegovih stranic za 360°. Poznamo tudi poševen krožni valj, ki ni rotacijsko simetričen in je množica točk v prostoru omejena z dvema vzporednima krogoma in plaščem. Plašč je unija daljic, ki povezujejo točke obodov obeh krogov in so vzporedne daljici, ki povezuje središči osnovnih ploskev. Tako definicijo se lahko posploši da katerokoli osnovno ploskev, s tem dobimo splošno definicijo valja.

Višina valja je najkrajša razdalja med osnovnima ploskvama. Valj je **pokončen**, če je višina enaka stranskemu robu, če ne je **poševen**.

Površino valja sestavljata dva skladna kroga s polmerom r in **paralelogram**, katerega osnovnica je enaka obsegu osnovne ploskve, višina pa je enaka višini valja v.

Osni presek pokončnega valja je pravokotnik. **Značilni** osni presek valja je tisti, ki vsebuje višino valja. **Pravokotni** osni presek valja je tisti, ki je pravokoten na značilnega in je vedno pravokotnik.

$$P = 2 \cdot O + pl = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2\pi r(r + v)$$
$$V = O \cdot v = \pi r^2 v$$

24.3.1 Enakostranični valj

Enakostranični valj je valj, katerega vsak osni presek je **kvadrat**.

$$v = 2r$$

$$P = 2\pi r(r + v) = 6\pi r^2$$
$$V = \pi r^2 v = 2\pi r^3$$

24.4 Piramida

Piramida je množica točk prostora, ki je omejena s ploskvijo, ki je poljuben n-kotnik in plaščem, ki je zgrajen iz n trikotnikov.

Vrh piramide V je oglišče, ki ne meji na osnovno ploskev. **Višina** piramide v je najkrajša razdalja med vrhom in ravnino v kateri leži osnovna ploskev. Poznamo **poševne** in **pokončne** piramide. Piramida je **pokončna**, če se vrh piramide projicira v središče n-kotniku očrtanega kroga. Piramida je **pravilna**, če je pokončna in če je osnovna ploskev pravilni n-kotnik. Stranske ploskve so enakokraki trikotniki. Piramida je **enakoroba**, če ima vse robove enako dolge.

$$P = O + pl$$
$$V = \frac{O \cdot v}{3}$$
$$\alpha = \angle(s,O) \qquad \text{\\\\ Kot med stranskim robom in osnovno ploskvijo.}$$
$$\beta = \angle(v_s,O) \qquad \text{\\\\ Kot med stransko in osnovno ploskvijo.}$$

24.5 Stožec

Krožni stožec je množica točk v prostoru, ki je omejena s ploskvijo, ki je krog in plaščem, ki je unija vseh daljic, ki povezujejo rob osnovne ploskve s poljubno točko, ki ni v isti ravnini kot osnovna ploskev.

Vrh stožca V je edino oglišče stožca. **Višina** stožca v je najkrajša razdalja med vrhom in ravnino v kateri leži osnovna ploskev. **Stranica** stožca s je daljica, ki povezuje vrh stožca s točko na robu osnovne ploskve.

Poznamo **poševen** in **pokončen** stožec. Stožec je pokončen, če se vrh pravokotno projicira v središče osnovne ploskve, če ne, je poševen.

Osni presek pokončnega stožca je enakokrak trikotnik. **Značilni** presek stožca vsebuje višino, **pravokotni** pa je pravokoten na značilnega in je vedno enakokrak trikotnik.

$$pl = \frac{\pi s^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi s \alpha}{180^\circ} \cdot \frac{s}{2} = \frac{l \cdot s}{2} = \frac{2\pi r s}{2} = \pi r s$$
$$P = O + pl = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s)$$
$$V = \frac{O \cdot v}{3} = \frac{\pi r^2 v}{3}$$

24.5.1 Enakostranični stožec

Stožec je **enakostraničen**, če je njegov vsak osni presek **enakostraničen trikotnik**.

$$s = 2r$$
$$v = r\sqrt{3}$$

$$P = \pi r(r+s) = 3\pi r^2$$

$$V = \frac{\pi r^2 v}{3} = \frac{\pi r^3\sqrt{3}}{3}$$

24.6 Krogla

Množica točk prostora, ki so za radij ali manj oddaljene od izbrane točke, ki ji pravimo središče. Katerikoli presek krogle je krog. Dokaz?

Volumen polkrogle je po Cavalierjevem načelu enak valju z višino in radijem r, ki mu izrežemo največji možen stožec.

$$\frac{V}{2} = \pi r^2 r - \frac{\pi r^2 r}{3}$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Površina krogle (psevdodokaz):

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{O_i \cdot v}{3} \qquad \text{\\ Volumen je vsota volumnov zelo majhnih piramid.}$$

$$V = \frac{v}{3}\left(\sum_{i=0}^{\infty} O_i\right) \qquad \text{\\ Vsota vseh osnovnih ploskev je površina.}$$

$$V = \frac{v}{3}P$$

$$P = \frac{3V}{r}$$

$$P = \frac{3 \cdot 4\pi r^3}{3r}$$

$$P = 4\pi r^2$$

25 Polinomi

Polinom je funkcija oblike:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0;\ a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$$

$a_n, \ldots, a_0$ — koeficienti
a_0 — prosti člen ali svobodni člen
a_n — vodilni koeficient
$a_n x^n$ — vodilni člen

Stopnja polinoma je tista največja potenca x, ki ima poleg sebe neničelni koeficient. Dva polinoma sta **enaka** natanko tedaj, ki imata enaki stopnji in enake koeficiente pri potencah iste stopnje.

25.1 Seštevanje polinomov

Dva polinoma seštejemo tako, da seštejemo koeficiente pri potencah istih stopenj. **Vsota** dveh polinomov je **polinom**, njegova stopnja pa je **manjša** ali **enaka** višji od stopenj sumandov.

25.2 Množenje polinomov

Množimo vsak člen z vsakim. **Produkt** dveh polinomov **je** polinom, stopnja produkta neničelnih polinomov pa je enaka **vsoti** stopenj polinomov, ki jih množimo.

Polinom je **razcepen**, če ga lahko zapišemo kot produkt dveh nekonstantnih polinomov s koeficienti iz iste množice števil kot so koeficienti prvotnega polinoma.

25.3 Deljenje polinomov

Osnovni izrek o deljenju polinomov:

$$p(x) = k(x) \cdot q(x) + o(x); \ \mathrm{st}\,(o(x)) < \mathrm{st}\,(q(x)) \tag{25.1}$$

Za dva polinoma $p(x)$ in $q(x)$ obstajata dva natanko določena polinoma $k(x)$ in $o(x)$, tako da velja osnovni izrek o deljenju.

25.4 Hornerjev algoritem

Hornerjev algoritem je **postopek** za **deljenje** polinoma $p(x)$ z **linearnim** polinomom $(x - a)$. V prvi vrstici Hornerjeve sheme so koeficienti polinoma $p(x)$. V zadnji vrstici pa so po vrsti koeficienti **količnika** $k(x)$, ki ima za ena manjšo stopnjo od polinoma $p(x)$. Zadnje število pa je ravno **vrednost** polinoma pri a ($p(a)$) oz. ostanek ($o(x)$).

$$p(x) = k(x)q(x) + o(x)$$
$$p(a) = k(a)(a - a) + o(x)$$
$$p(a) = o(x)$$

Shema:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{c|lllll}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\
 & & a \cdot a_n & \dots & \dots & \dots \\ \hline
a & a_n & a \cdot a_n + a_{n-1} & \dots & \dots & \multicolumn{1}{|l}{p(a)}
\end{array}$$

Hornerjev algoritem se uporablja za:

- deljenje polinoma p z linearnim polinomom $(x - a)$
- računanje vrednosti polinoma p v točki a
- iskanje ničel polinoma p

25.5 Ničle polinoma

Število a je **ničla** polinoma, če je vrednost polinoma pri a enaka 0.

$$a \text{ ničla} \Leftrightarrow p(a) = 0$$

Število a je ničla polinoma natanko takrat, ko je polinom $p(x)$ deljiv z linearnim polinomom $(x - a)$.

$$p(a) = 0 \Leftrightarrow p(x) = k(x)(x - a)$$

Dokaz:

$$p(x) = k(x)(x - a)$$
$$p(a) = k(x)(a - a)$$
$$p(a) = 0$$

Število ničel ne presega stopnje $p(x)$. Dokaz:

$$\text{st}\,(p(x)) = n$$
$$x_1 \text{ ničla} \Rightarrow p(x) = k_1(x)(x - x_1);\ \text{st}\,(k_1(x)) = n - 1$$
$$x_2 \text{ ničla} \Rightarrow p(x) = k_2(x)(x - x_1)(x - x_2);\ \text{st}\,(k_2(x)) = n - 2$$
$$\vdots$$
$$x_n \text{ ničla} \Rightarrow p(x) = k_n(x)\underbrace{(x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}_{n};\ \text{st}\,(k_n(x)) = 0$$

Število a je ničla ***k*-te stopnje**, če $(x - a)^k \mid p(x)$. Ničla je **enostavna** če je $k = 1$, če ne je **večkratna** (k-kratna).

25.5.1 Osnovni izrek algebre

Vsak **nekonstanten** polinom s kompleksnimi koeficienti ima vsaj **eno** kompleksno ničlo.

Posledica:
Polinom stopnje $\boldsymbol{n}$ s kompleksnimi koeficienti ima natanko $\boldsymbol{n}$ kompleksnih ničel.

Dokaz:

$$\text{st}\,(p(x)) = n$$
$$x_1 \text{ ničla} \Rightarrow p(x) = k_1(x)(x - x_1)$$
$$\text{st}\,(k_1(x)) = n - 1 \qquad \backslash\backslash\ k_1(x) \text{ je nekonstanten, torej ima vsaj eno kompleksno ničlo.}$$
$$x_2 \text{ ničla} \Rightarrow p(x) = k_2(x)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$\text{st}\,(k_2(x)) = n - 2 \qquad \backslash\backslash\ k_2(x) \text{ je nekonstanten, torej ima vsaj eno kompleksno ničlo.}$$
$$\vdots$$
$$x_n \text{ ničla} \Rightarrow p(x) = k_n(x)\underbrace{(x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}_{n \text{ ničel}}$$
$$\text{st}\,(k_n(x)) = 0 \qquad \backslash\backslash \text{ Polinom } k_n(x) \text{ je konstanten.}$$
$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n) \qquad \backslash\backslash \text{ Oblika za ničle.}$$

$$p(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

c je vodilni koeficient. Polinom je z ničlami določen do konstante natančno.

25.5.2 Kompleksne ničle polinoma z realnimi koeficienti

Če je ničla polinoma z realnimi koeficienti kompleksno število $z = a + b\imath$, potem je ničla tudi konjugirano število $\overline{z} = a - b\imath$.

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow p(\overline{z}) = 0 \tag{25.2}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
p(z) &= 0 \\
\overline{p(z)} &= \overline{0} && \backslash\backslash\ \text{Konjugiramo obe strani enačbe.} \\
\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} &= 0;\ a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R} && \backslash\backslash\ \text{Uporabimo pravilo (22.5).} \\
\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} &= 0 && \backslash\backslash\ \text{Uporabimo pravilo (22.2).} \\
a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 &= 0 && \backslash\backslash\ \text{Uporabimo pravilo (22.3).} \\
a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 &= 0 && \backslash\backslash\ \text{Uporabimo pravilo (22.4).} \\
p(\overline{z}) &= 0
\end{aligned}$$

Kompleksne ničle polinoma z realnimi koeficienti nastopajo v **konjugiranih parih**.

Posledica:
Polinom **lihe** stopnje z realnimi koeficienti ima vsaj **eno** realno ničlo.
Primer:
stopnja 3: ena realna, 2 kompleksni ali 3 realne.
stopnje 4: 4 realne ali 2 realni in 2 kompleksni ali 4 kompleksne.

Polinom stopnje 3 lahko zapišemo kot produkt dveh polinomov z realnimi koeficienti, če poznamo eno njegovo kompleksno ničlo $a + b\imath$:

$$\begin{aligned}
p(x) &= c(x - x_1)(x - (a + b\imath))(x - (a - b\imath)) = && \backslash\backslash\ \text{Po pravilu (25.2).} \\
&= c(x - x_1)(x^2 - (a + b\imath + a - b\imath)x + (a + b\imath)(a - b\imath) = \\
&= c(x - x_1)(x^2 - 2ax + a^2 + b^2) && \backslash\backslash\ \text{Vsi koeficienti realna.}
\end{aligned}$$

25.5.3 Cele ničle polinoma s celimi koeficienti

Če je celo število c ničla polinoma s celimi koeficienti, potem velja, da c deli prosti člen.

$$c \in \mathbb{Z}\colon\ p(c) = 0 \Rightarrow c | a_0$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
p(c) &= 0 \\
0 &= a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0;\ a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z} \\
-a_0 &= c\underbrace{\left(a_n c^{n-1} + a_{n-1}c^{n-2} + \cdots + a_1\right)}_{\in \mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

$$-a_0 = c \cdot k;\ k \in \mathbb{Z}$$
$$c|a_0$$

25.5.4 Racionalne ničle polinoma s celimi koeficienti

Če je okrajšani ulomek $\frac{c}{d}$ ničla polinoma s celimi koeficienti, potem velja, da c deli prosti člen, d pa deli vodilni koeficient.

$$\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, D(c,d) = 1\colon\ p\left(\frac{c}{d}\right) = 0 \Rightarrow c|a_0 \wedge d|a_n$$

Dokaz:

$$p\left(\frac{c}{d}\right) = 0$$
$$0 = a_n\left(\frac{c}{d}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\frac{c}{d} + a_0;\ a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$$
$$0 = a_n\frac{c^n}{d^n} + a_{n-1}\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{c}{d} + a_0 \qquad \backslash\backslash \cdot d^n$$
$$0 = a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1cd^{n-1} + a_0d^n \tag{25.3}$$
$$-a_0d^n = c\underbrace{\left(a_nc^{n-1} + a_{n-1}c^{n-2}d + \cdots + a_1d^{n-1}\right)}_{\in \mathbb{Z}}$$
$$-a_0d^n = c \cdot k;\ k \in \mathbb{Z}$$
$$c|a_0 \qquad \backslash\backslash\ c \text{ ne more deliti } d^n, \text{ ker } D(c,d) = 1$$

Če pa enačbo (25.3) preoblikujemo drugače:

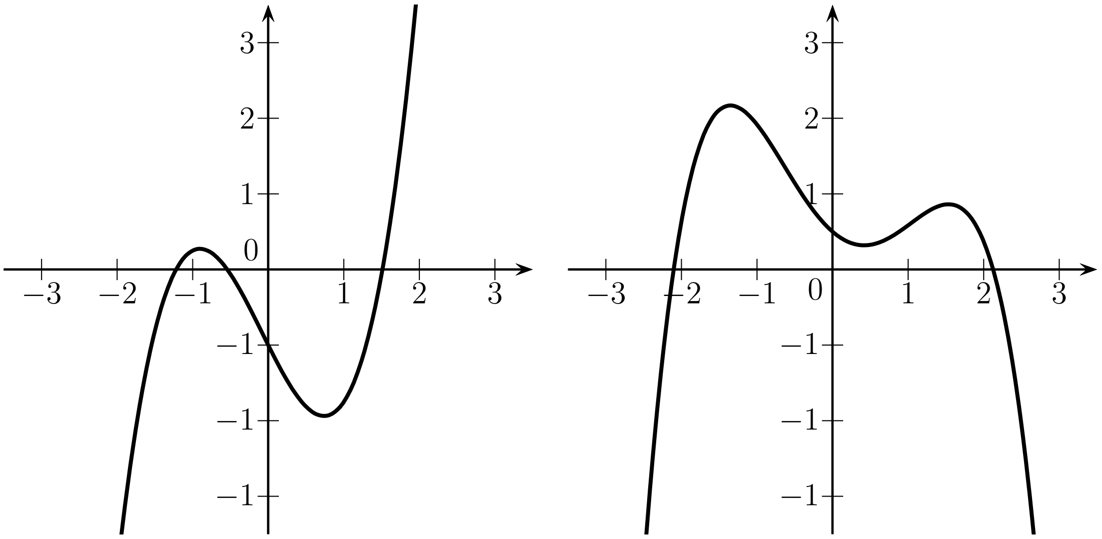
$$-a_nc^n = a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1cd^{n-1} + a_0d^n$$
$$-a_nc^n = d\underbrace{\left(a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1cd^{n-2} + a_0d^{n-1}\right)}_{\in \mathbb{Z}}$$
$$-a_nc^n = d \cdot k;\ k \in \mathbb{Z}$$
$$d|a_n \qquad \backslash\backslash\ d \text{ ne more deliti } c^n, \text{ ker } D(c,d) = 1$$

25.6 Graf polinoma

$$p(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Med dvema zaporednima ničlama polinom **ne more spremeniti predznaka**. Vsak polinom z realnimi koeficienti lahko zapišemo kot produkt linearnih faktorjev in kvadratnih faktorjev, ki imajo diskriminanto negativno. Vrednost polinoma **ohrani** predznak pri prehodu čez ničlo **sode** stopnje, **spremeni** pa ga pri prehodu čez ničlo **lihe** stopnje. Polinom se pri zelo velikih in zelo majhnih x obnaša tako kot vodilni člen. Primera grafov polinoma sta na slikah 37(a) in 37(b).

$$p(x) = a_nx^n\underbrace{\left(\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x_{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}_{\text{to so zelo majhna števila}}$$



(a) $p(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1$

(b) $p(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 0{,}2x^3 + x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}$

Slika 37: Graf polinoma.

25.7 Bisekcija

Bisekcija je postopek za iskanje ničel zveznih funkcij. Denimo, da poznamo tak interval $[a, b]$, da je zvezna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (npr. polinom) v krajiščih različno predznačena. Potem iz zveznosti sledi, da ima f na intervalu (a, b) vsaj eno ničlo. Če vzamemo sredinsko točko $s = \frac{a+b}{2}$, potem bo, razen, če je $f(s) = 0$, kar pomeni, da smo imeli srečo in zadeli ničlo, na enem izmed intervalov $[a, s]$ ali $[s, b]$ funkcija v krajiščih spet različno predznačena in to vzamemo za nov interval $[a, b]$. Postopek rekurzivno ponavljamo in v vsakem koraku nadaljujemo z razpolovljenim intervalom, ki zagotovo vsebuje vsaj eno ničlo. Ko je interval dovolj majhen (manjši od želene vrednosti ϵ), končamo in vrnemo točko s sredine intervala kot približek za ničlo funkcije f. Ker mora biti funkcija v krajiščih različno predznačena pa lahko tako najdemo le ničle lihe stopnje. Algoritem bisekcije je zapisan v psevdokodi kot algoritem 2.

Algoritem 2 Bisekcija

```
while $|b - a| < \epsilon$ do
    $s \leftarrow \frac{a+b}{2}$
    if PREDZNAK($f(a)$) = PREDZNAK($f(s)$) then
        $a \leftarrow s$
    else
        $b \leftarrow s$
    end if
end while
```

26 Stožnice

Stožnice so dvorazsežne presečne krivulje, ki nastanejo, če presekamo enojni ali dvojni neskončni stožec z ravnino pod različnimi koti.

Možni preseki:

- krožnica
- elipsa
- parabola
- hiperbola
- dve vzporednici
- dve nevzporedni premici
- ena premica
- točka
- prazna množica

Splošna enačba stožnice:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R} \tag{26.1}$$

26.1 Krožnica

Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od izbrane točke S. S imenujemo **središče** krožnice. Razdaljo med točko krožnice in središčem imenujemo **polmer** in ga označimo z r.

$$\mathcal{K} = \{T(x, y);\ d(T, S) = r\}$$

Enačba krožnice v **središčni** legi:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Eksplicitna enačba krožnice:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \tag{26.2}$$

Enačba krožnice v **premaknjeni** legi:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$ \\\\ Središče krožnice je v točki $S(p,q)$.

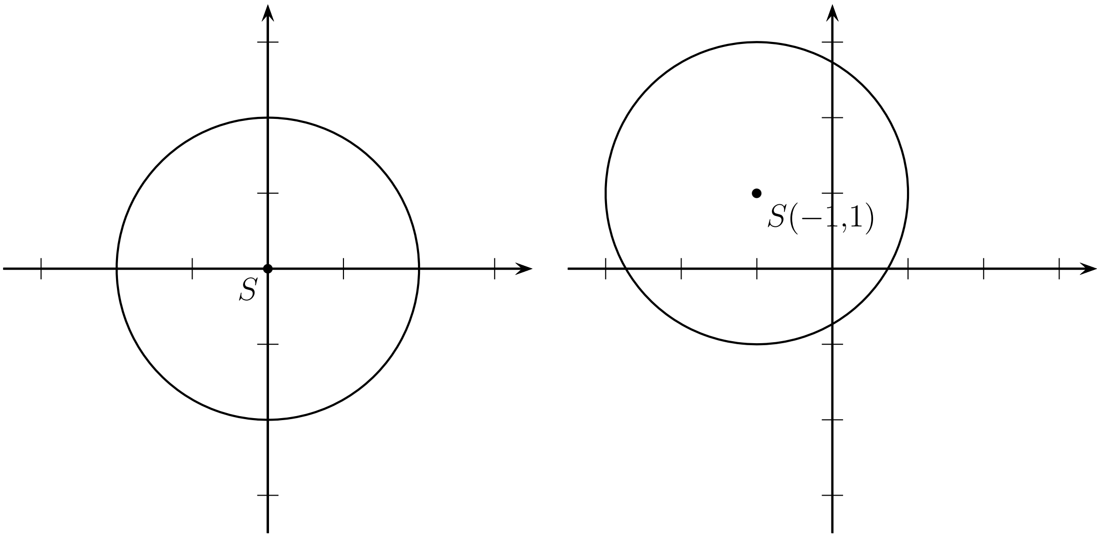
Potreben pogoj za krožnico. Do njega pridemo tako, da enačbo krožnice v premaknjeni legi razvijemo do konca in nato končno enačbo primerjamo s splošno enačbo stožnice.

$$A = C \wedge B = 0$$ \\\\ konstante so iz splošne enačbe stožnice (26.1)

Krožnici sta **koncentrični**, če imata skupno središče. Sliki krožnice v središčni legi in "premaknjene" krožnice sta prikazani na sliki 38.

26.2 Elipsa

Elipsa je množica točk v ravnini, ki imajo konstantno vsoto razdalj do dveh izbranih točk, ki ju imenujemo gorišči. $|G_1G_2| = 2e, r_1+r_2 = 2a$ Elipsa z označenimi glavnimi



(a) $x^2 + y^2 = 4$ (b) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

Slika 38: Slika krožnice.

konstantami je prikazana na sliki 39.

Enačba elipse v **središčni** legi:

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

Odsekovna enačba elipse v središčni legi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a je odsek na abscisni osi oziroma **velika polos**, b pa odsek na ordinatni osi ali **mala polos**. Konstanta e se imenuje **linearna ekscentričnost** in se izračuna kot:

$$e^2 = a^2 - b^2$$

Konstanta ε se imenuje **numerična ekscentričnost**. Pri elipsi je vedno manjša od 1.

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

p se imenuje **polparameter** elipse in je vrednost elipse pri e.

$$p = \pm\frac{b^2}{a}$$

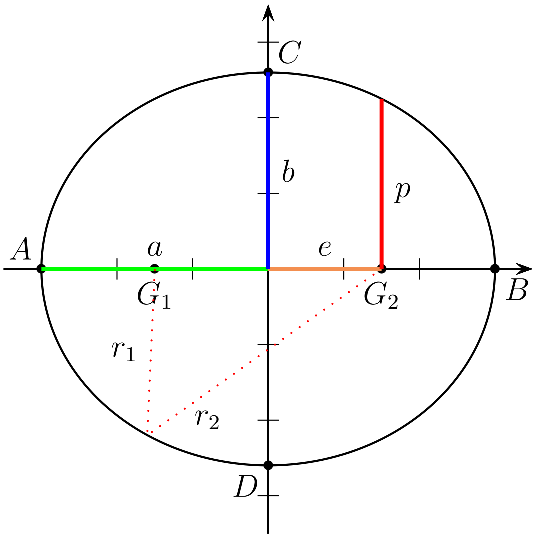
Eksplicitna enačba elipse:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Če to enačbo primerjamo z enačbo krožnice (26.2), ugotovimo, da je elipsa pravzaprav krožnica, raztegnjena za faktor $\frac{b}{a}$.

Gorišči:

$$G_1(-e, 0)$$
$$G_2(e, 0)$$



Slika 39: Slika elipse.

Temena elipse:

$A(a,0)$

$B(-a,0)$

$C(0,b)$

$D(0,-b)$

Elipsa je **simetrična** glede na obe koordinatni osi, njeno **definicijsko območje** pa je $D_f[-a,a]$, saj drugače e ni definiran, $e^2 = a^2 - b^2 > 0$.

Vse zgornje enačbe veljajo za "ležeče" elipse, pri katerih je $a > b$. Če pa imamo "pokončno" elipso, moramo v vseh enačbah zamenjati a in b, pa tudi gorišča so na ordinatni osi. Za sliko "ležeče" elipse glej sliko 40(a), za sliko "pokončne" elipse pa glej sliko 40(b).

Enačba elipse v **premaknjeni** legi:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \qquad \backslash\backslash \text{ Središče elipse je v točki } S(p,q).$$

Potreben pogoj za elipso (do njega pridemo podobno kot pri krožnici):

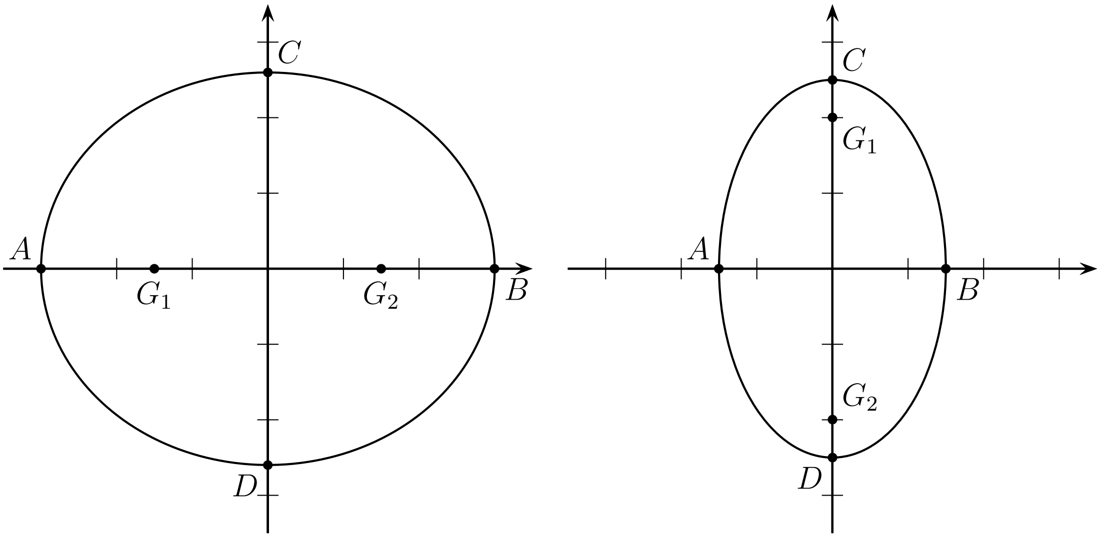
$$B = 0 \wedge A \cdot C > 0 \qquad \backslash\backslash\ A \text{ in } C \text{ sta enako predznačena}$$

26.3 Hiperbola

Hiperbola je množica točk ravnine, ki imajo konstantno absolutno vrednost razlike razdalj do dveh izbranih točk, ki ju imenujemo gorišči hiperbole. Hiperbola in njene glavne konstante so prikazane na sliki 41.

$$|G_1G_2| = 2e$$

$$|r_1 - r_2| = 2a$$



(a) $3x^2 + 4y^2 = 27$ (b) $100x^2 + 36y^2 = 255$

Slika 40: Slika elipse.

Odsekovna enačba hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e se imenuje **linearna ekscentričnost** in se izračuna kot:

$$e^2 = a^2 + b^2$$

ε se imenuje **numerična ekscentričnost** in je pri hiperboli vedno večji od 1.

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

Eksplicitna enačba hiperbole:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Definicijsko območje hiperbole je $D_f = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$. Hiperbola je **simetrična** glede na obe koordinatni osi.

Gorišči hiperbole:

$$G_1(-e, 0)$$

$$G_2(e, 0)$$

Temeni hiperbole:

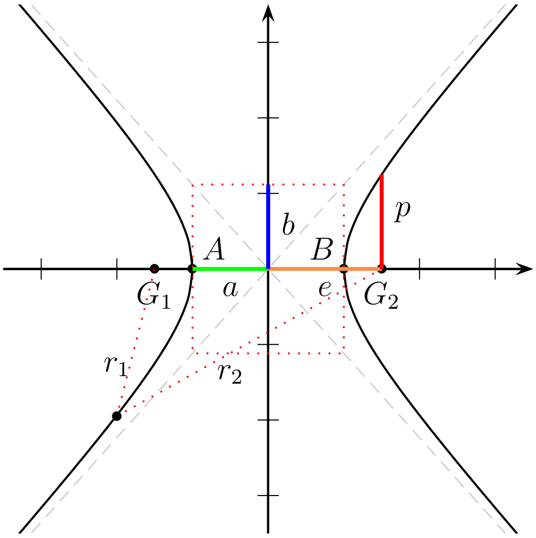
$$A(-a, 0)$$

$$B(a, 0)$$

Asimptoti hiperbole sta premici

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Če gre x proti ∞, gre vrednost ulomka $\frac{a^2}{x^2}$ proti 0 in vrednost korena v eksplicitni



Slika 41: Primer slike hiperbole z označenimi konstantami.

enačbi proti 1, iz česar ugotovimo asimptoti.

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Slika "ležeče" hiperbole je prikazana na sliki 42(a), slika "pokončne" hiperbole pa na sliki 42(b).

p je **polparameter** hiperbole in je vrednost hiperbole pri e.

$$p = \pm\frac{b^2}{a}$$

Potreben pogoj za hiperbolo:

$$B = 0 \wedge A \cdot C < 0 \qquad \backslash\backslash\ A \text{ in } C \text{ različno predznačena}$$

Enačba "pokončne" hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Enačba hiperbole v **premaknjeni** legi:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \qquad \backslash\backslash\ \text{Središče hiperbole je v točki } S(p,q).$$

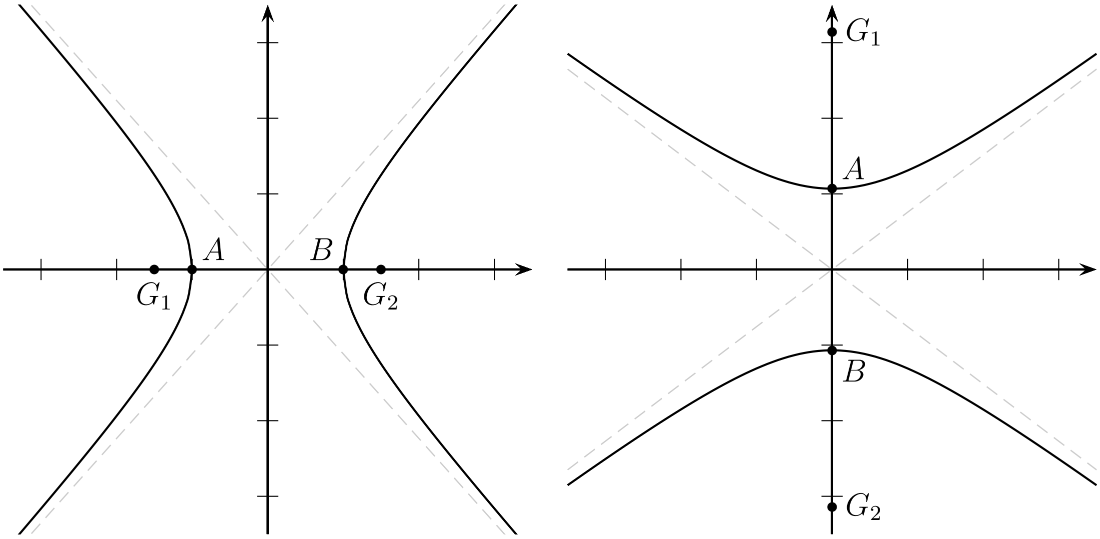
26.4 Parabola

Parabola je množica točk v ravnini, ki imajo enako razdaljo od izbrane premice **vodnice** v in izbrane točke **gorišča** G.

$$\mathcal{P} = \{T(x,y) : d(T,v) = d(T,G)\}$$

Temenska enačba parabole:

$$y^2 = 2px$$



(a) $5x^2 - 4y^2 = 5$ (b) $4x^2 - 7y^2 = -8$

Slika 42: Slika hiperbole.

Eksplicitna enačba parabole:

$$y = \pm\sqrt{2px}$$

p je **polparameter** parabole in je enak razdalji med vodnico in goriščem. Vrednost parabole pri $\frac{p}{2}$ je p.

Gorišče parabole:

$$G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

Enačba **vodnice**:

$$x = -\frac{p}{2}$$

Teme parabole:

$$T(0,0)$$

Parabola je **simetrična**, njena os simetrije pa se imenuje os parabole. Definicijsko območje parabole $D_f = [0, \infty)$.

Enačba **premaknjene** parabole:

$$(y-b)^2 = 2p(x-a) \qquad \text{\\\\ Teme je v točki } T(a,b).$$

Enačba **zrcaljene**, **pokončne** in **pokončne zrcaljene** parabole v tem vrstnem redu:

$$y^2 = -2px$$

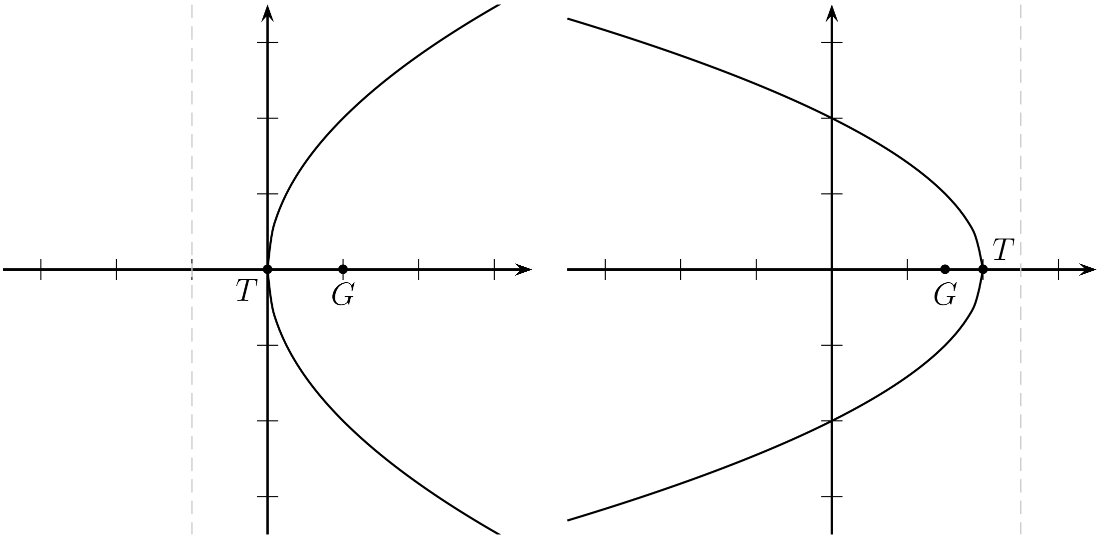
$$y = \frac{1}{2p}x^2$$

$$y = -\frac{1}{2p}x^2$$

Slika normalne parabole je na sliki 43(a), slika zrcaljene in premaknjene parabole pa na sliki 43(b).

Potreben pogoj za parabolo:

$A = B = 0 \vee B = C = 0$



(a) $y^2 = 4x$ (b) $y^2 = -2x + 4$

Slika 43: Slika parabole.

27 Zaporedja

Zaporedje je vsaka **funkcija**, ki množico **naravnih** števil preslika v **realna** števila.

$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Slike funkcije se imenujejo **členi** zaporedja in jih označimo s $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

$1 \mapsto f(1) = a_1$

$2 \mapsto f(2) = a_2$

$\vdots$

$n \mapsto f(n) = a_n$ \\ Splošni člen zaporedja.

Zaporedje lahko navajamo s funkcijo, s splošnim členom ali s členi zaporedja. Poznamo **končna** in **neskončna** zaporedja. Končno zaporedje je vsaka funkcija, ki množico prvih n naravnih števil preslika v realna števila.

$f\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{R}$

Zaporedje je **alternirajoče** kadar imata vsaka dva zaporedna člena različen predznak.

a_n padajoče $\Leftrightarrow a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Zaporedje je **naraščajoče** natanko takrat, kadar je vsak naslednji člen večji od prejšnjega.

a_n naraščajoče $\Leftrightarrow a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Zaporedje je **padajoče** natanko takrat, kadar je vsak naslednji člen manjši od prejšnjega.

a_n padajoče $\Leftrightarrow a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Zaporedje je **monotono**, če je naraščajoče ali padajoče.
Zaporedje je **navzgor omejeno**, če obstaja tako naravno število M, da so vsi členi zaporedja manjši ali enaki temu številu.

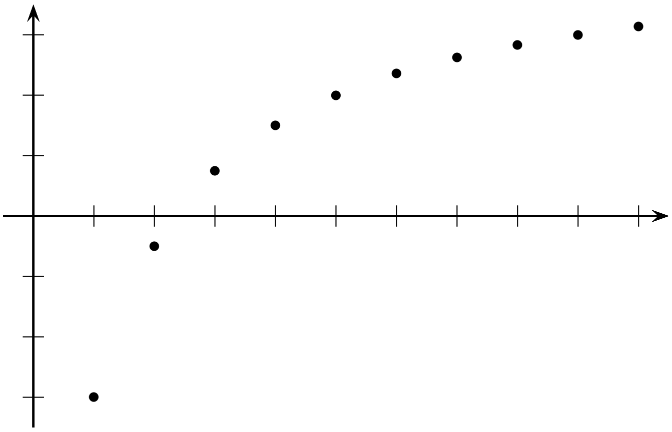
$\exists M \in \mathbb{R} \ni: a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Zaporedje je **navzdol omejeno**, če obstaja tako naravno število m, da so vsi členi zaporedja večji ali enaki temu številu.

$\exists m \in \mathbb{R} \ni: a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Zaporedje je **omejeno**, če je omejeno navzgor in navzdol. Zaporedje je **konstantno**, če so vsi členi enaki med seboj.

Graf zaporedja je prikazan na sliki 44.



Slika 44: Graf zaporedja $a_n = 3\frac{n-4}{n+1} + 1{,}5$.

27.1 Aritmetično zaporedje

Aritmetično zaporedje je zaporedje, pri katerem je razlika med vsakima dvema sosednjima členoma a_n in a_{n+1} konstantna. Konstanta se imenuje **diferenca** in se označi z d.

a_n aritmetično $\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = d;\ d \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Če $d < 0$ bo zaporedje padajoče, če $d > 0$ bo zaporedje naraščajoče, če $d = 0$ bo zaporedje konstantno.

Splošni člen aritmetičnega zaporedja:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Lahko preoblikujemo v:

$a_1 = a_n - (n-1) \cdot d$

Vsak člen aritmetičnega zaporedja je **aritmetična sredina** simetrično ležečih členov.

$$a_n = \frac{a_{n-i} + a_{n+i}}{2}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-i} &= a_{n+i} - a_n \\ 2a_n &= a_{n-i} + a_{n+i} \\ a_n &= \frac{a_{n-i} + a_{n+i}}{2} \end{aligned}$$

Formula za **vsoto** n členov aritmetičnega zaporedja ali za vsoto končne aritmetične vrste.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \\ S_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d) \\ 2S_n &= n \cdot a_n + n \cdot a_1 \qquad \text{\\\\ Seštejemo zgornji dve enačbi.} \\ S_n &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{n(2a_n - (n-1)d)}{2} \tag{27.1}$$

Velja tudi:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 - (a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1) = \\ &= a_n + a_{n-1} - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_2 + a_1 - a_1 = \\ &= a_n \end{aligned}$$

Razlika dveh členov aritmetičnega zaporedja.

$$a_n - a_m = (n-m)d; \ n > m$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= a_1 + (n-1)d - (a_1 + (m-1)d) = (n-1)d - (m-1)d = \\ &= d(n - 1 - m + 1) = (n-m)d \end{aligned}$$

27.2 Geometrijsko zaporedje

Geometrijsko zaporedje je zaporedje, pri katerem je količnik vsakih dveh sosednjih členov a_n in a_{n+1} konstanten. Količnik se označi s k.

$$a_n \text{ geometrijsko} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

Naraščanje in **padanje** geometrijskega zaporedja:

1. $a_1 > 0$
   a) $k > 1 \Rightarrow$ naraščajoče
   b) $0 < k < 1 \Rightarrow$ padajoče

   c) $k < 0 \Rightarrow$ alternirajoče

2. $a_1 < 0$
   a) $k > 1 \Rightarrow$ padajoče
   b) $0 < k < 1 \Rightarrow$ naraščajoče
   c) $k < 0 \Rightarrow$ alternirajoče
3. $k = 1 \Rightarrow$ konstantno
4. $k = 0$ in $a_1 = 0$ ne obstajata zaradi definicije geometrijskega zaporedja.

Splošni člen geometrijskega zaporedja:

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

Geometrijsko zaporedje je **omejeno**, ko je $|k| \leq 1$.

Formula za **vsoto** členov geometrijskega zaporedja ali za vsoto členov končne geometrijske vrste.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + \cdots + a_1 \cdot k^{n-2} + a_1 \cdot k^{n-1} \qquad \text{\\ Množimo s } k. \\ k \cdot S_n &= a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + \cdots + a_1 \cdot k^{n-1} + a_1 \cdot k^n \\ k \cdot S_n - S_n &= a_1 \cdot k^n - a_1 \\ S_n(k-1) &= a_1(k^n - 1) \\ S_n &= a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1};\ k \neq 0 \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = a_n \frac{k^n - 1}{k^n - k^{n-1}};\ k \neq 0 \qquad (27.2)$$

$$S_n = n \cdot a_1;\ k = 0$$

Kvocient dveh členov geometrijskega zaporedja:

$$\frac{a_n}{a_m} = k^{n-m};\ n > m$$

Dokaz:

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{a_1 \cdot k^{n-1}}{a_1 \cdot k^{m-1}} = \frac{k^{n-1}}{k^{m-1}} = k^{n-1-m+1} = k^{n-m}$$

Vsak člen geometrijskega zaporedja je **geometrijska sredina** simetrično ležečih členov.

$$a_n = \sqrt{a_{n-i} \cdot a_{n+i}}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-i}} &= \frac{a_{n+i}}{a_n} \qquad \text{\\ Po definiciji geometrijskega zaporedja.} \\ a_n^2 &= a_{n-i} \cdot a_{n+i} \\ a_n &= \sqrt{a_{n-i} \cdot a_{n+i}} \end{aligned}$$

27.3 Matematična indukcija

Matematična indukcija ali **popolna indukcija** je način dokazovanja matematičnih trditev, v katerih nastopajo **naravna** števila. Poteka v dveh korakih. Prvi korak je, da dokažemo, da trditev velja za **prvo** naravno število $n = 1$. Nato dokažemo, da iz predpostavke, da trditev velja za poljubno naravno število n izhaja, da trditev velja tudi za njegovega **naslednika** $n + 1$. Izrek je s tem dokazan. Ker trditev velja za 1 (po prvi točki), velja tudi za naslednika, to je 2. Ker velja za 2, velja za 3 in tako naprej za vsa naravna števila.

Primer:
Dokaži da velja:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \cdots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$$

1. Dokažemo, da velja za $n = 1$
$$n^2(n + 1) = 1(1 + 1) = 2$$
$$n(3n - 1) = 1(3 \cdot 1 - 1) = 2$$

2. Predpostavimo, da velja za n in dokažemo, da velja za $n + 1$
$$S_n = n^2(n + 1), S_{n+1} = (n + 1)^2(n + 1)$$
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} = \\ &= n^2(n + 1) + (n + 1)(3(n + 1) - 1) = (n + 1)(n^2 + 3n + 2) = \\ &= (n + 1)(n + 1)(n + 2) = (n + 1)^2(n + 2) \end{aligned}$$

27.4 Limita zaporedja

Okolica ε točke a je odprt interval[12] $(-\varepsilon + a, a + \varepsilon)$. Točka a je **stekališče** zaporedja a_n, če je v vsaki okolici točke a neskončno mnogo členov zaporedja. Točka a je **limita** zaporedja a_n če je v vsaki okolici točke a **neskončno** mnogo členov zaporedja, izven te okolice pa **končno** mnogo. Zaporedje, ki ima limito je **konvergentno** zaporedje, zaporedje, ki limite nima pa je **divergentno**.

$$a_n \in \mathcal{O}_\varepsilon(a) \Leftrightarrow |a_n - a| > \varepsilon;\ \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) : n > N \Rightarrow a_n \in \mathcal{O}_\varepsilon(a)$$

Pomembne limite:

$$\lim_{n\to\infty} C = C \qquad \text{\\ Limita konstante je konstanta.} \tag{27.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{27.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0;\ |a| < 1 \tag{27.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{27.6}$$

---

[12] Za osvežitev spomina o intervalih glej razdelek 8.2.

27.4.1 Pravila za računanje z limitami

- Limita vsote dveh zaporedij je enaka vsoti limit dveh zaporedij.
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \tag{27.7}$$
- Limita produkta dveh zaporedij je enaka produktu limit dveh zaporedij.
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \tag{27.8}$$
- Limita kvocienta dveh zaporedji je enaka kvocientu limit dveh zaporedij, pri čemer morajo biti vsi členi in limita drugega zaporedja neničelni.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}; \ \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \wedge b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{27.9}$$
- Limita potence je enaka potenci limite.
$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k \tag{27.10}$$
- Limita korena je enaka korenu limite.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n} \tag{27.11}$$

Primer računanja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{1-2n} = \qquad \text{\\ Preoblikujemo števec in imenovalec.}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n}}{\frac{1}{n}-2} = \qquad \text{\\ Uporabimo pravilo (27.9).}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-2\right)} = \qquad \text{\\ Uporabimo pravilo (27.7).}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 2} = \qquad \text{\\ Uporabimo pravilo (27.8).}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 2} = \qquad \text{\\ Izračunamo poznane limite (27.3) in (27.4).}$$
$$= \frac{3+4\cdot 0}{0-2} = -\frac{3}{2}$$

27.5 Geometrijska vrsta

Vrsta je **vsota** vseh členov zaporedja. Poznamo **končne** in **neskončne** vrste.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Zaporedje delnih vsot:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = S_1 = a_1$$
$$\sum_{i=1}^{2} a_i = S_2 = a_1 + a_2$$
$$\sum_{i=1}^{3} a_i = S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = S_n = a_n + a_n + a_3 + \dots + a_n$$
$$\vdots$$

Neskončna vrsta ima svojo **vsoto** S natanko takrat, kadar obstaja **limita delnih vsot**, ko gre n v neskončnost in je enaka S.

$$a_1 + a_2 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = S$$

Vrsta je **konvergentna**, če ima svojo vsoto, če je nima, je **divergentna**.

Geometrijska vrsta je vsota vseh členov geometrijskega zaporedja. Konvergentna je, kadar je količnik geometrijskega zaporedja po absolutni vrednosti manjši od 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + \dots + a_1k^{n-1} + \dots = \frac{a_1}{1-k};\ |k| < 1$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1\left(k^n-1\right)}{k-1} = && \backslash\backslash \text{ Po formuli (27.2).}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_1 - \lim\limits_{n\to\infty}\left(k^n-1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} k - \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \\
&= \frac{a_1\left(\lim\limits_{n\to\infty} k^n - \lim\limits_{n\to\infty} 1\right)}{k-1} = && \backslash\backslash \text{ Glej limito (27.5).}\\
&= \frac{a_1}{1-k};\ |k| < 1
\end{aligned}$$

28 Obrestni račun

Obresti o so denarni znesek, ki ga posojilojemalec da posojilodajalcu kot nadomestilo za uporabo določenega zneska denarja – **glavnice** a. **Obrestna mera** $p\%$ je količnik med obrestmi in glavnico. Čas med dvema zaporednima pripisoma obresti imenujemo **kapitalizacijsko obdobje**.

Poznamo dva načina obrestovanja: **navadno** obrestovanje in **obrestno** obrestovanje.

Pri **navadnem** obrestovanju je vrednost glavnice po n kapitalizacijskih dobah enaka:

$$a_n = a + na_1 \cdot \frac{p}{100} \qquad \backslash\backslash \text{ Aritmetično zaporedje.}$$

Pri **obrestnem** obrestovanju je vrednost glavnice po n kapitalizacijskih dobah enaka:

$$a_1 = a + a \cdot \frac{p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right) = ak$$

$$a_2 = a_1 + a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = ak^2$$

$$a_n = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = a \cdot k^n \qquad \backslash\backslash \text{ Geometrijsko zaporedje.}$$

$$k = 1 + \frac{p}{100} \qquad \backslash\backslash \text{ Obrestovalni faktor.}$$

Relativna obrestna mera je obrestna mera, ki se enakomerno razdeli na posamezna krajša obdobja. **Konformna obrestna mera** je obrestna mera, ki prinese pri pogostejšem pripisovanju obresti enak znesek obresti. Izračuna se jih po formuli:

$$p_{d_1} = 100\left(\sqrt[d]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right); \ d = \frac{d_2}{d_1}$$

d_2 je osnovna kapitalizacijska doba, d_1 pa je doba na katero želimo preračunati konformno obrestno mero.

Načelo ekvivalence glavnic pravi, da lahko različne glavnice primerjamo tako, da jih preračunamo na isti trenutek.

29 Statistika

Populacija je množica pojavov, ki jo želimo proučevati.

Vzorec je podmnožica populacije, s katero delamo, dobro je, da je reprezentativen.

Numerus n (ali N) je število podatkov v vzorcu.

Statistična enota je posamezen element populacije.

Statistični znak je lastnost populacije, ki jo preučujemo.

Statistični parametri so splošne lastnosti, ki veljajo za populacijo kot celoto in jih dobimo kot rezultat statistične raziskave ($\bar{x}$, Mo, Me).

Aritmetična sredina $\bar{x}$ ali **povprečje** vsota vseh vrednosti, deljena z njihovim številom.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i \qquad \backslash\backslash \text{ Če poznamo absolutne frekvence.}$$

Modus Mo je vrednost, ki se najpogosteje pojavlja.

Mediana Me je vrednost, ki je na sredini razvrščenih podatkov. Če sta na sredini dva rezultata je mediana aritmetična sredina teh dveh rezultatov.

Ranžirna vrsta so podatki, urejeni po velikosti.

Frekvenčna tabela je tabela, v katero razporedimo rezultate tako, da poleg vsake vrednosti napišemo kolikokrat se pojavlja. Če je vrednosti veliko, kar se rado zgodi pri zveznih spremenljivkah, jih razporedimo v **frekvenčne razrede** in si tako zmanjšamo število vrednosti, s katerimi dejansko delamo.

Absolutna frekvenca f pove kolikokrat se pojavi določena vrednost (število enot v posameznem frekvenčnem razredu). Velja: $\sum_{i=0}^{n} f_i = n$.

Relativna frekvenca f' predstavlja delež enot v celoti. $f' = \frac{f}{n}$

Kumulativna frekvenca F predstavlja koliko je bilo podatkov pred določenim razredom.

Relativna kumulativna frekvenca F' predstavlja delež podatkov pred določenim razredom glede na celoto. $F' = \frac{F}{n}$.

Variacijski razmik je razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo.

Standardni odklon je povprečje kvadratov odstopanj od aritmetične sredine. Pove nam, kako koncentrirani so podatki.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}$$

Medčetrtinski razmik je razlika med kvartiloma Q_1 in Q_3. Ta kvartila dobimo kot mediani prve polovice podatkov (manjši od Me) in druge polovice podatkov (večji od Me). Tako lahko narišemo škatlo z brki, ki prikazuje razpršenost podatkov.

Histogram grafična predstavitev rezultata s stolpci, sestavljena iz pravokotnikov, katerih višina je enaka frekvenci razreda, širina pa predstavlja interval enega razreda.

Poligon je grafična predstavitev z lomljeno črto.

Krožni diagram ali tortni diagram je grafična predstavitev, ki nazorno pokaže delež podatkov glede na celoto.

30 Zveznost in limite funkcij

Limita funkcije $f(x)$, ko gre x proti a, je b, če za vsako zaporedje x-ov, ki konvergira proti a, ustrezno zaporedje funkcijskih vrednosti konvergira proti b.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in \mathcal{O}_\delta(a) \Rightarrow y \in \mathcal{O}_\varepsilon(b)$$

Funkcija je zvezna, če za vsak $x = a$ velja, da je funkcija pri tem x definirana in da je limita funkcije, ko gre x proti a, enaka $f(a)$.

$$f(x) \text{ zvezna} \Leftrightarrow \forall x = a : a \in D_f \wedge \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

30.1 Pravila za računanje z limitami funkcij

Limita vsote je enaka vsoti limit.

$$\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$$

Limita produkta je enaka produktu limit.

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x))$$

Limita kvocienta je enaka kvocientu limit.

$$\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)};\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Znane limite:
Limita konstante je enaka konstanti.

$$\lim_{x\to a} C = C$$

Limita funkcije, ko gre x proti a je $f(a)$, če je funkcija pri a definirana.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

30.2 Neskončna limita in limita v neskončnosti

Neskončna limita $f(x)$, ko gre x proti a, obstaja, če za vsako pozitivno realno število A obstaja taka δ okolica a, da so funkcijske vrednosti vseh števil v okolici večje od A.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists \delta > 0) : x \in \mathcal{O}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \geq A$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A < 0)(\exists \delta > 0) : x \in \mathcal{O}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \leq A$$

Če velja $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ potem ima funkcija pol pri $x = a$.

Limita v neskončnosti, oz. limita $f(x)$, ko gre x proti ∞, je b, če za vsako pozitivno realno število ε obstaja pozitivno realno število A, tako da je funkcijska vrednost vsakega x, ki je večji od A, element ε okolice števila b.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0) : x > A \Rightarrow f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(b)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists A < 0) : x < A \Rightarrow f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(b)$$

Če velja $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ potem ima graf funkcije asimptoto $y = a$.

31 Diferencialni račun

Definirajmo **diferenčni kvocient** funkcije f pri x_0.

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Odvod funkcije pri x_0 je limita diferenčnega kvocienta, ko gre h proti 0.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Funkcija je na nekem intervalu odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki tega intervala.

Odvod funkcije f je nova funkcija f', ki za vsak x vrne odvod funkcije f pri x.

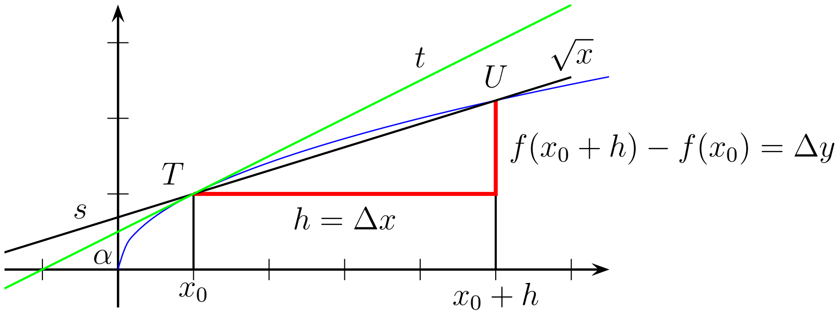
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{31.1}$$

31.1 Geometrijski pomen odvoda

Diferenčni kvocient funkcije predstavlja smerni koeficient sekante funkcije v točkah $T(x_0, f(x_0))$ in $U(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Premica, ki gre skozi točko $T(x_0, y_0)$ in ima smerni koeficient enak odvodu funkcije v točki x_0 se imenuje **tangenta** na graf funkcije f v točki T.

Geometrijski pomen odvoda je prikazan na sliki 45. Če bi se h manjšal proti nič, bi se sekanta modre krivulje približevala zeleni tangenti.



Slika 45: Geometrijski pomen odvoda.

Splošna enačba tangente na graf funkcije $f(x)$ v točki $T(x_0,y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$$

Tangens **naklonskega kota** tangente v točki $T(x_0, y_0)$ je po (20.21) enak njenemu smernemu koeficientu oz. odvodu funkcije v točki T.

$$\tan\alpha = k_t = f'(x_0)$$

Normala je premica, ki seka krivuljo v točki $T(x_0, y_0)$ in je pravokotna na tangento na funkcijo v točki T.

Kot med krivuljo in **abscisno osjo** je enak naklonskemu kotu tangente na krivuljo presečišču.

Kot med krivuljama je enak kotu med tangentama na krivulji v presečišču. In se zračuna po tej formuli v razdelku 20.25, kjer za k_1 in k_2 vstavimo odvoda teh funkcij v točki T.

31.2 Pravila za odvajanje

$$C' = 0 \tag{31.2}$$

$$x' = 1 \tag{31.3}$$

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1} \quad r \in \mathbb{R} \tag{31.4}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \tag{31.5}$$

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x) \tag{31.6}$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{31.7}$$
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \tag{31.8}$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{31.9}$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{31.10}$$

Dokaz pravila (31.2):

$$f(x) = C$$
$$m = \frac{C - C}{h} = 0$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} m = 0$$

Dokaz pravila (31.3):

$$f(x) = x$$
$$m = \frac{x + h - x}{h} = 1$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} m = 1$$

Dokaz pravila (31.4):

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \quad n \in \mathbb{N} \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \qquad \text{\\\\ Po pravilu (10.7).} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h - x)\sum_{i=0}^{n}(x+h)^{n-1}x^{i-1}}{h} = \qquad \text{\\\\ } h \text{ se krajša, sledi } h = 0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x^{n-i}x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N} \\ f'(x) &= -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{n-1-2n} = \qquad \text{\\\\ Po pravilu (31.8).} \\ &= -n \cdot x^{-n-1} \qquad \text{\\\\ Velja tudi za 0 in negativna števila, torej velja za } \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \\ \left(\sqrt[n]{x}\right)^n &= x \qquad \text{\\\\ Odvajamo po (31.10).} \\ n(\sqrt[n]{x})^{n-1}(\sqrt[n]{x})' = 1 &= \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{-n+1} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

$$f(x) = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

$$f'(x) = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \qquad \text{\\ Po pravilu (31.4).}$$

$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \qquad \text{\\ Velja za } \mathbb{Q}\text{. Pa tudi za } \mathbb{R} \text{ :-).}$$

Dokaz pravila (31.5):

$$(f(x)+g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \qquad \text{\\ Po definiciji (31.1).}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

Dokaz pravila (31.6):

$$(C\cdot f(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{Cf(x+h)-Cf(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{C(f(x+h)-f(x))}{h} = C\cdot f'(x)$$

Dokaz pravila (31.7):

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \qquad \text{\\ Po definiciji (31.1).}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Dokaz pravila (31.8):

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h\cdot f(x+h)\cdot f(x)} = \qquad \text{\\ Po definiciji (31.1).}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{f(x+h)-f(x)}{h\cdot f(x+h)f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Dokaz pravila (31.9):

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \qquad \text{\\ Po pravilu (31.7).}$$

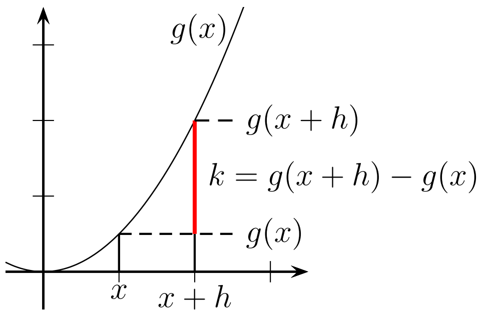
$$= f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad \text{\\ Po pravilu (31.8).}$$

Dokaz pravila (31.10):

$$(f(g(x)))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \qquad \text{\\ Glej sliko 46.}$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{f(g(x)+k)-f(g(x))}{hk} = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{(f(g(x)+k)-f(g(x)))\,k}{hk} =$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{(f(g(x)+k)-f(g(x)))}{k}\frac{(g(x+h)-g(x))}{h} = f'(g(x))g'(x)$$



Slika 46: Graf funkcije $g(x)$ za izpeljavo odvoda kompozituma funkcij.

31.3 Odvodi elementarnih funkcij

31.3.1 Odvodi kotnih in krožnih funkcij

$$(\sin x)' = \cos x \tag{31.11}$$
$$(\cos x)' = -\sin x \tag{31.12}$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{31.13}$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{31.14}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{31.15}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{31.16}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1} \tag{31.17}$$
$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{x^2+1} \tag{31.18}$$

Dokaz pravila (31.11):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} = \qquad \backslash\backslash \text{ Faktoriz., razd. 20.12} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Dokaz pravila (31.12):

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (0-1) = -\sin x \qquad \backslash\backslash \text{ Pravilo 20.9, sledi (31.1}$$

Dokaz pravila (31.13):

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \backslash\backslash \text{ Pravilo 31.9, sledi (20.5)}$$

Dokaz pravila (31.14):

$$(\cot x)' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \text{\\ Pravilo (31.8).}$$

Dokaz pravila (31.15):

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \text{\\ Odvajamo obe strani.}$$

$$\cos(\arcsin x)\,(\arcsin x)' = 1$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \qquad \text{\\ Iz (20.5) izpeljemo } \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} \qquad \text{\\ Pozitivno, ker } -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x \ge 0.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dokaz pravila (31.16):

$$\cos(\arccos x) = x \qquad \text{\\ Odvajamo obe strani.}$$

$$-\sin(\arccos x)\,(\arccos x)' = 1$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} \qquad \text{\\ Iz (20.5) izpeljemo } \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos x))^2}} \qquad \text{\\ Koren je pozit., ker } 0 \le \arccos x \le \pi \Rightarrow \sin x \ge 0.$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dokaz pravila (31.17):

$$\tan(\arctan x)) = x \qquad \text{\\ Odvajamo obe strani.}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \arctan x}\,(\arctan x)' = 1$$

$$(\arctan x)' = \cos^2 \arctan x \qquad \text{\\ Iz (20.7) izpeljemo } \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Dokaz pravila (31.17):

$$\cot(\operatorname{arccot} x)) = x \qquad \text{\\ Odvajamo obe strani.}$$

$$-\frac{1}{\sin^2 \operatorname{arccot} x}\,(\operatorname{arccot} x)' = 1$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\sin^2 \operatorname{arccot} x \qquad \text{\\ Iz (20.8) izpeljemo } \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha}.$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+(\cot(\operatorname{arccot} x))^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

31.3.2 Odvod eksponentne in logaritemske funkcije

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{31.19}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{31.20}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{31.21}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{31.22}$$

Dokaz pravila (31.19):

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \\ &= \lim_{h\to 0} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = \qquad \backslash\backslash \text{ Substitucija } \frac{h}{x} = \frac{1}{n} \Rightarrow h = \frac{x}{n}. \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x} \ln e = \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Dokaz pravila (31.20):

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{1}{\log a} \log x \\ f'(x) &= \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log a} \qquad \backslash\backslash\ \frac{1}{\log a} \text{ je konstanta.} \end{aligned}$$

Dokaz pravila (31.21):

$$\begin{aligned} &\ln e^x = x \qquad \backslash\backslash \text{ Pravilo (31.10).} \\ &\frac{1}{e^x} (e^x)' = 1 \\ &(e^x)' = e^x \end{aligned}$$

Dokaz pravila (31.22):

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a \qquad \backslash\backslash\ \ln a \text{ je konstanta.}$$

31.4 Implicitni odvod

Uporabljamo, kadar bi bil eksplicitni odvod bolj zapleten, ali kadar odvisne spremenljivke v eksplicitni obliki sploh ne moremo izraziti.

Odvajamo enačbo po neodvisni spremenljivki, odvisno obravnavamo kot sestavljeno funkcijo $y(x)$.

Primer:

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad \backslash\backslash \text{ Odvajamo obe strani enačbe.}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2yy' &= 0 && \backslash\backslash\ y \text{ je sestavljena funkcija, odvajamo po pravilu (31.10).} \\ 2yy' &= -2x && \backslash\backslash \text{ Izrazimo } y'. \\ y' &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

31.5 Naraščanje, padanje, ekstremi funkcije

Funkcija v neki točki **narašča** kadar je odvod v tej točki **pozitiven**.

$f(x)$ v x_0 narašča $\Leftrightarrow f'(x_0) > 0$

Funkcija v neki točki **pada** kadar je odvod v tej točki **negativen**.

$f(x)$ v x_0 pada $\Leftrightarrow f'(x_0) < 0$

Stacionarne točke so točke v katerih je odvod enak 0.

Funkcija $y = f(x)$ doseže na območju I v točki x_0 **lokalni maksimum**, natanko takrat ko je $f(x_0)$ **največja** funkcijska vrednost na intervalu I.

$y = f(x)$ na I v x_0 lokalni maksimum $\Leftrightarrow f(x_0) > f(x), x \in I, x \neq x_0$

Funkcija $y = f(x)$ doseže na območju I v točki x_0 **lokalni minimum**, natanko takrat ko je $f(x_0)$ **najmanjša** funkcijska vrednost na intervalu I.

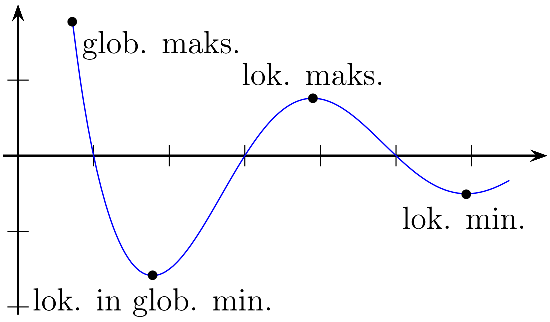
$y = f(x)$ na I v x_0 lokalni minimum $\Leftrightarrow f(x_0) < f(x), x \in I, x \neq x_0$

Lokalni maksimum je prehod iz naraščanja v padanje, lokalni minimum pa prehod iz padanja v naraščanje.

Globalni maksimum funkcije na določenem območju je x pri katerem funkcija doseže **največjo** vrednost.

Globalni minimum funkcije na določenem območju je x pri katerem funkcija doseže **najmanjšo** vrednost.

Lokalni in globalni ekstremi funkcije na nekem območju so prikazani na sliki 47. Kriterij za ugotavljanje kaj se dogaja s funkcijo v stacionarni točki s pomočjo predznaka odvoda je podan v tabeli 4.



Slika 47: Ekstremi funkcije na prikazanem območju. $f(x) = 3\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x}$, $0{,}72 \le x \le 6{,}5$

oblika	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
lokalni maksimum	$+$	0	$-$
lokalni minimum	$-$	0	$+$
prevoj, sedlo	$+$	0	$+$
prevoj, sedlo	$-$	0	$-$

Tabela 4: Možni predznaki odvoda v okolici stacionarne točke.

31.6 Drugi odvod

Funkcija $y = f(x)$ je na nekem območju I **konveksna**, natanko takrat kadar je drugi odvod funkcije na tem območju **pozitiven**.

$f(x)$ na I konveksna $\Leftrightarrow f''(x) > 0,\ \forall x \in I$

Funkcija $y = f(x)$ je na nekem območju I **konkavna**, natanko takrat kadar je drugi odvod funkcije na tem območju **negativen**.

$f(x)$ na I konkavna $\Leftrightarrow f''(x) < 0, \forall x \in I$

Funkcija $y = f(x)$ ima v točki x_0 **prevoj**, če je drugi odvod v točki x_0 enak 0.

$f(x)$ v x_0 prevoj $\Leftrightarrow f''(x_0) = 0$

Kriterij za ugotavljanje kaj se dogaja s funkcijo v stacionarni točki s pomočjo drugega odvoda je prikazan v tabeli 5.

oblika	$f'(x)$	$f''(x)$
lokalni minimum	0	$+$
lokalni maksimum	0	$-$
prevoj, sedlo	0	0

Tabela 5: Drugi odvod funkcije v stacionarni točki.

32 Integralski račun

32.1 Notacija

Zapišimo diferenčni kvocient kot:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Ker včasih niso poznali limite, so rekli, da bo odvod zelo majhna sprememba, označena z d.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

Če obrnemo enačbo, dobimo:

$$df = f'(x)\, dx$$

df — diferencial funkcije f

dx — diferencial neodvisne spremenljivke

Dopišemo znak za integral[13] na obe strani,

$$\int df = \int f'(x)\,dx$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

Iz zadnje vrstice vidimo našo notacijo na nedoločeni integral funkcije:

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{\\ Beri: integral } f(x) \text{ dé x}$$

Notacija za določeni integral bo zelo podobna, le da bomo ob vrhu in ob dnu znaka pisali še meje integrala.

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ ali } \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

32.2 Nedoločeni integral

Nedoločeni integral funkcije $f(x)$ je vsaka funkcija $F(x)$ katere odvod je enak funkciji pod integralskim znakom.

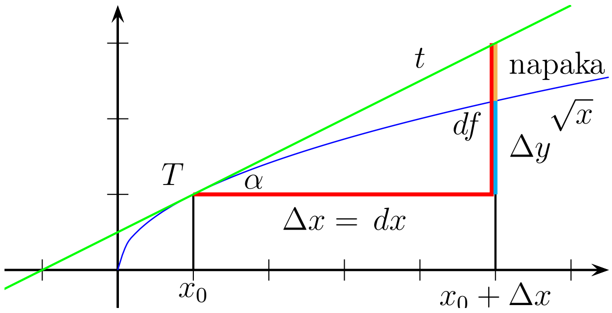
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \tag{32.1}$$

Diferencial funkcije $f(x)$ je odvod funkcije $f(x)$ pomnožen s diferencialom neodvisne spremenljivke. Diferencial funkcije f je prikazan na sliki 48.

$$df = f'(x) \cdot dx \tag{32.2}$$

Diferencial funkcije f se lahko uporablja za aproksimacijo funkcijskih vrednosti v bližini neke točke, katero vrednost poznamo. Napaka takega računanja je označena na sliki 48.

$$f(x_0 + dx) \doteq f(x_0) + df = f(x_0) + dx \cdot f'(x_0)$$



Slika 48: Diferencial funkcije.

---

[13] Znak $\int$ izhaja iz ležečega (italic) znaka za dolgi s, kot okrajšavo za besedo *summa*. Dolgi s: `http://en.wikipedia.org/wiki/Long_s#Modern_usage`

32.2.1 Pravila za integriranje

Neposredno iz definicije (32.1) sledi:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \tag{32.3}$$

Nedoločeni integral vsote funkcij je enak vsoti nedoločenih integralov posameznih funkcij

$$\int \left(f(x)+g(x)\right)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \tag{32.4}$$

Konstanto pod integralskim znakom lahko postavimo pred integralski znak.

$$\int C\cdot f(x)\,dx = C\cdot\int f(x)\,dx \tag{32.5}$$

Dokaz pravila (32.4):
Odvajamo obe strani:

$$\left(\int \left(f(x)+g(x)\right)\,dx\right)' = f(x)+g(x) \qquad \text{\\ Po osnovni izpleljavi (32.3).}$$

$$\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = \qquad \text{\\ Po pravilu (31.5).}$$

$$= f(x)+g(x) \qquad \text{\\ Po osnovni izpleljavi (32.3).}$$

Dokaz pravila (32.5):
Odvajamo obe strani:

$$\left(\int C\cdot f(x)\,dx\right)' = C\cdot f(x) \qquad \text{\\ Po osnovni izpleljavi (32.3).}$$

$$\left(C\cdot\int f(x)\,dx\right)' = C\cdot\left(\int f(x)\,dx\right)' = C\cdot f(x) \qquad \text{\\ Po pravilu (31.6) in (32.3).}$$

32.2.2 Integrali elementarnih funkcij

$$\int dx = x + C \tag{32.6}$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C,\ r\neq -1 \tag{32.7}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \tag{32.8}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \tag{32.9}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \tag{32.10}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C \tag{32.11}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \tag{32.12}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \tag{32.13}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \tag{32.14}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \tag{32.15}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \tag{32.16}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C \tag{32.17}$$

Dokazi pravil so večinoma samo obrnjena pravila za odvode iz razdelka 31.3.
Dokaz pravila (32.8):

$$y = \ln x = \begin{cases} \ln x; & \text{če } x > 0, \\ \ln(-x); & \text{če } x < 0. \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{x}; & \text{če } x > 0, \\ -\frac{1}{x}(-1) = \frac{1}{x}; & \text{če } x < 0. \end{cases}$$

Dokaz pravila (32.17):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \begin{cases} \ln(x+\sqrt{x^2+k}) + C; & \text{če } x > 0, \\ \ln(-(x+\sqrt{x^2+k})) + C; & \text{če } x < 0. \end{cases}$$

Odvajajmo posebej za pozitivne in negativne x.

1. $x > 0$

$$\begin{aligned}
&\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(x+(x^2+k)^{\frac{1}{2}}\right)' = \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(1+\frac{1}{2}(x^2+k)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+k)'\right) = \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+k}}\cdot 2x\right) = \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(\frac{\sqrt{x^2+k}}{\sqrt{x^2+k}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}\right) = \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(\frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}}\right) = \qquad \backslash\backslash \text{ Krajšamo.} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}
\end{aligned}$$

2. $x < 0$

$$\begin{aligned}
&\left(\ln(-(x+\sqrt{x^2+k}))\right)' = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(-\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\right)' = \\
&\frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)' = \cdots \qquad \backslash\backslash \text{ Enako kot zgoraj.}
\end{aligned}$$

32.2.3 Integriranje z uvedbo nove spremenljivke

Del izraza pod integralskim znakom zamenjamo z novo spremenljivko in nato izračunamo nov diferencial te spremenljivke, po formuli (32.2). Nato v integralu zamenjamo želeni izraz in dx ter integriramo, na koncu pa spremenljivko zamenjamo nazaj.

Primer:

$$\int \cos 5x\,dx = \int \cos u \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int \cos u\,du = \frac{1}{5}\sin u + C = \frac{\sin 5x}{5} + C$$

$$\begin{aligned} u &= 5x \\ du &= 5 \cdot dx \\ dx &= \frac{du}{5} \end{aligned}$$

Lepo je če imamo sledečo situacijo:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

$$t = g(x) \Rightarrow dt = g'(x) \cdot dx$$

Primer:

$$\int \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^3+2| + C$$

$$\begin{aligned} t &= x^3 + 2 \\ dt &= 3x^2\,dx \end{aligned}$$

32.2.4 Integriranje racionalnih funkcij

Racionalne funkcije znamo integrirati na dva načina:

Prvega uporabljamo, če je stopnja polinoma v števcu večja od stopnje polinoma v imenovalcu. Števec delimo z imenovalcem in racionalno funkcijo zapišemo kot vsoto polinoma in nove racionalne funkcije, ki ima v števcu polinom nižje stopnje kot v imenovalcu (enačba (15.9)). Tako dobimo integral vsote, ki ga razbijemo da dva integrala, ki sta lažja kot tisti prej (če imamo srečo).

Drugi način je, ko se da imenovalec funkcije razcepiti. Funkcijo spet zapišemo v dveh ulomkih, vsak ima en del razcepljenega števca. Kako ugotovimo kaj je v imenovalcih števcev je prikazano na primeru. Nato integriramo vsak ulomek posebej.

Primer:

$$\int \frac{-3x}{x^2-5x+4}\,dx = \int \frac{-3x}{(x-4)(x-1)}\,dx = \qquad \backslash\backslash \text{ Razcepimo ulomek posebej.}$$

$$\frac{-3x}{(x-4)(x-1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1} = \qquad \backslash\backslash \text{ Na skupni imanovalec.}$$

$$\frac{A(x-1)+B(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \frac{x(A+B)-A-4}{(x-1)(x-4)} \qquad \backslash\backslash \text{ Dobimo sistem za } A \text{ in } B.$$

$A + B = -3$ in $-A - 4 = 0$ \\ Dobljeno iz števca ulomka.
$A = -4$ in $B = 1$ \\ Rešimo sistem.

$$= \int \left(\frac{-4}{x-4} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \cdots = \ln \left| \frac{x-1}{(x-4)^4} \right| + C \qquad \text{\\ Integriramo do konca.}$$

32.2.5 Integracija "per partes"

$$\begin{aligned}
(u(x) \cdot v(x))' &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\
\int (u(x) \cdot v(x))' \, dx &= \int (u'(x)v(x) + v'(x)u(x)) \, dx \\
u(x) \cdot v(x) &= \int u'(x)v(x) \, dx + \int v'(x)u(x) \, dx \qquad \text{\\ } du = u'(x) \cdot dx \ (32.2) \\
uv &= \int v \, du + \int u \, dv \\
\int u \, dv &= uv - \int v \, du \qquad (32.18)
\end{aligned}$$

Primer:

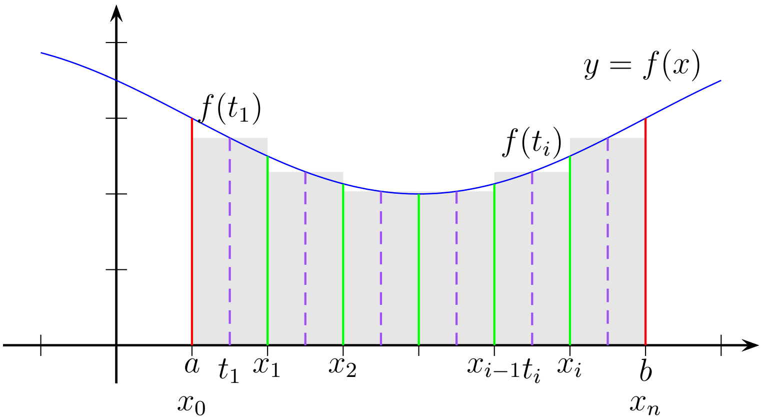
$$\int x \sin x \, dx =$$

$u = x \qquad du = 1 \cdot dx$
$dv = \sin x \, dx \qquad v = -\cos x$

$$= -x \cos x - \int (-\cos x \, dx) = -x \cos x + \sin x + C$$

32.3 Določeni integral

Imejmo funkcijo $y = f(x)$, ki naj bo na intervalu $[a,b]$ **pozitivna** in **zvezna**. Zanima nas ploščina med krivuljo y in x-osjo na intervalu $[a,b]$. Izpeljava se nanaša na sliko 49.



Slika 49: Določeni integral funkcije.

Razdelimo interval $[a,b]$ na manjše intervale. $a = x_0$, $b = x_n$.

$$[x_0,x_1], [x_1,x_2], \cdots, [x_{i-1},x_i], \cdots, [x_{n-1},x_n]$$

Izberimo si točko t na sredini vsakega intervala in izračunajmo funkcijsko vrednost v t. Na i-tem intervalu imamo tako pravokotnik, katerega osnovnica je dolžine $x_i - x_{i-1}$ in katerega višina je $f(t_i)$. Tako lahko na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ zapišemo približek za ploščino pod krivuljo: $(x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i)$ (ploščina pravokotnika). Približek za ploščino pod grafom funkcije na intervalu $[a, b]$ je ploščina celotnega sivega območja jo zapišemo kot

$$p(L') = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i)$$

Približek bi izboljšali, če bi začetni interval razdelili na več intervalov. Tako je ploščina lika pod krivuljo na intervalu $[a, b]$ enaka

$$p(L) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i)$$

Zgornjo limito bomo vzeli kot definicijo **določenega integrala**. Rečemo ji **integralska vsota**.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i) \tag{32.19}$$

Določeni integral funkcije $f(x)\, dx$ na intervalu $[a, b]$ predstavlja **ploščino** lika med krivuljo $y = f(x)$ in abscisno osjo, **samo če** je funkcija na tem intervalu pozitivna in zvezna.

32.3.1 Lastnosti določenega integrala

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx; \quad a < c < b \text{ in } f(x) \text{ pozitivna na } [a,b]$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -p(L) \;\; \text{če } f(x) \text{ negativna na } [a,b]$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b C \cdot f(x)\, dx = C \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

32.3.2 Newton-Leibnizova formula

Newton-Leibnizova formula povezuje nedoločeni in določeni integral.

$$\int f(x)\, dx = F(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \quad ^{14}$$

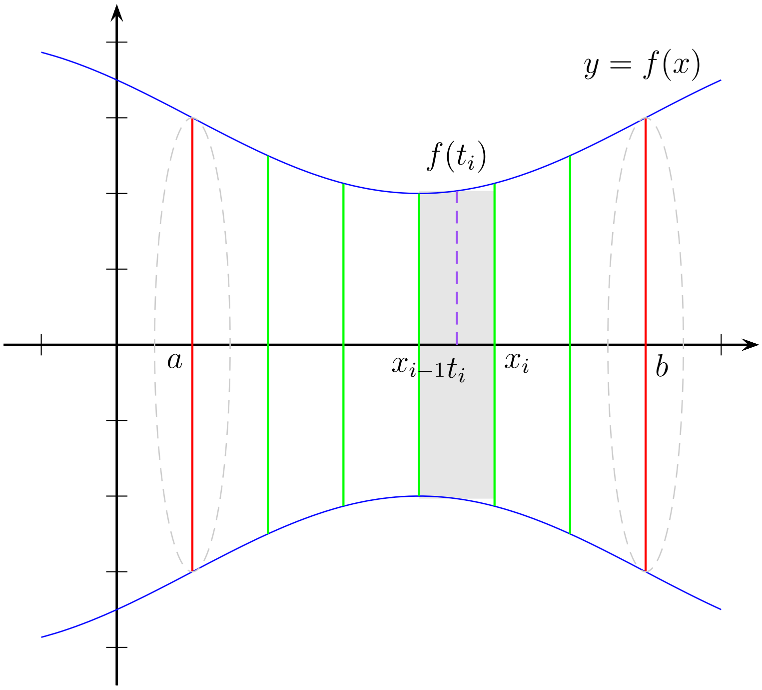
Ploščina med dvema krivuljama se izračuna po formuli

$$p = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$$

To formulo lahko uporabljamo tudi če sta krivulji na območju mogoče negativni, saj lahko obe togo premaknemo za poljubno konstanto navzgor, ker se pri tem ploščina ne spremeni. $f(x)$ mora biti zgornja krivulja, če ne je rezultat enak $-p$.

32.3.3 Prostornina vrtenine

Izpeljava se nanaša na sliko 50



Slika 50: Prostornina vrtenine.

Izračunajmo približek prostornine podobno kot smo to počeli pri ploščini. Razdelimo vrtenino na n valjev. i-ti valj ima tako višino $x_i - x_{i-1}$ in polmer $f(t_i)$, kot je prikazano za siv valj na sliki. Volumen enega valja je enak $\pi f^2(t_i)(x_i - x_{i-1})$. Volumen približka prostornine je

$$V' = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

---

[14] Notacija $f(x)\Big|_a^b$ se bere $f(x)$ v mejah a b in pomeni $f(b) - f(a)$.

π lahko izpostavimo. Približek bo tem bolj natančen, čim večji je n.

$$V = \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(t_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad \backslash\backslash \text{ kar je po (32.19) enako}$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2\,dx \tag{32.20}$$

33 Kombinatorika

Osnovni izrek kombinatorike ali **pravilo produkta**:

Naj postopek odločanja poteka v k zaporednih fazah. V vsaki fazi se odločamo **neodvisno** od odločitev prejšnjih faz. Če imamo v vsaki fazi n_i možnosti, je vseh možnosti

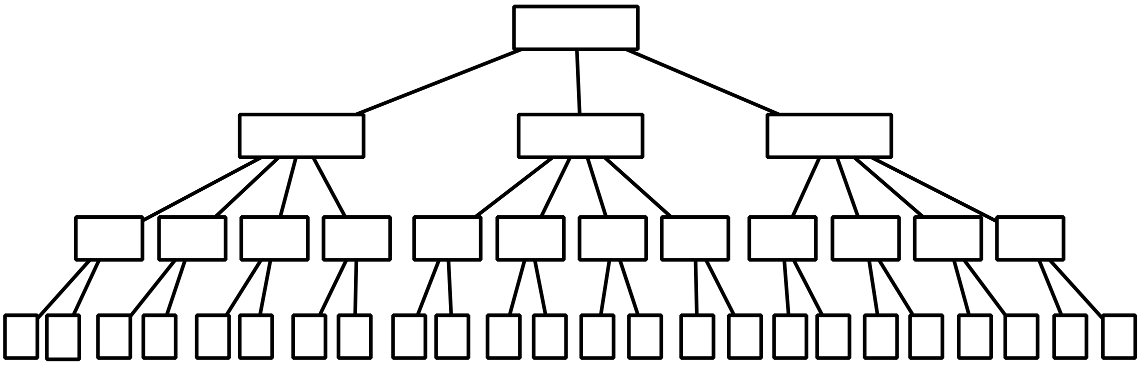
$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

Pravilo vsote:

Če se pri procesu odločanja odločamo med n_1 možnostmi iz prve množice izborov **ali** med n_2 možnostmi iz druge množice izborov **ali** med n_i možnostmi iz i-te množice izborov potem je vseh možnosti

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Vse možnosti se lahko prikaže tudi s kombinatoričnim drevesom. Primer kombinatoričnega drevesa je prikazan na sliki 51. Na začetku se odločamo med 3 možnostmi, nato med 4 in nato še med dvema. (Na koliko načinov se lahko oblečemo, če imamo na voljo 3 hlače, štiri majice in dvoje čevljev in nam je vseeno kako zgledamo.)



Slika 51: Kombinatorično drevo.

33.1 Permutacije

Razporeditve n elementov v ravno vrsto so **permutacije** n elementov. Število permutacij n elementov označimo s P_n.

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Za namen računanja takih produktov definirajmo **fakulteto** ($n!$, beri n fakulteta).

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Dodatno definirajmo še $0! = 1$.

Število permutacije je tako enako

$$P_n = n!$$

Permutacije so vse možne **bijektivne preslikave** množice same nase.

33.2 Permutacije s ponavljanjem

Permutacije n elementov s ponavljanjem so vse možne razporeditve n elementov v vrsto, pri čemer dopuščamo **ponavljanje** elementov.

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} = \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{r} k_i!} \qquad \sum_{i=1}^{r} k_i \leq n$$

Izpeljava formule: Denimo, da imamo tri elemente, ki jih postavljamo v vrsto: AB_1B_2. Njihove permutacije so: $AB_1B_2, AB_2B_1, B_1AB_2, B_1B_2A, B_2AB_1, B_2B_1A$. Če B-jev sedaj ne razlikujemo med seboj, opazimo, da je vseh permutacij ravno dvakrat preveč, ker lahko B_1 in B_2 permutiramo na $2! = 2$ načinov. Če bi imeli k enakih B-jev, bi imeli $k!$-krat preveč permutacij. Če bi imeli r elementov, izmed katerih se i-it ponavlja k_i-krat, potem je vseh permutacij ravno $k_1!k_2!\cdots k_i!\cdots k_r!$ krat preveč, zato število vseh permutacij delimo s tem produktom.

Primer: Koliko besed lahko sestavimo iz črk besede `MATEMATIKA`?

$$n = P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200$$

33.3 Variacije

Variacije reda r iz n elementov so vse možne razporeditve r elementov v vrsto, pri čemer elemente izbiramo iz množice z n elementi.

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad r \leq n$$

Izpeljava formule: Imejmo mesta v vrsti od 1 do r: za prvo mesto izbiramo med n elementi, za drugo med $n-1$ elementi, za r-to med $n-(r-1)$ elementi. Torej je vseh možnosti po pravilu produkta enako

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-r+1)$$

Pa recimo, da si to ful želimo zapisat s fakultetami in opazimo, da je produkt skoraj enak $n!$, če bi le imel še člene $(n-r)! \cdot (n-r-1)! \cdot \cdots \cdot 2! \cdot 1!$. Pa jih dodamo, ampak da ohranimo vrednost izraza, moramo s tem tudi deliti. In to je zapisano v zgornji formuli.

Variacije so vse možne **injektivne preslikave** iz množice z močjo r v množico z močjo n.

Primer: Na koliko načinov lahko postavimo 3 dekleta v vrsto pred tablo, če izbiramo med 12 dekleti v razredu.

$$n = V_{12}^{3} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

33.4 Variacije s ponavljanjem

Variacije reda r iz n elementov s ponavljanjem so vse možne razporeditve r elementov v vrsto, pri čemer elemente izbiramo iz množice z n elementi in dopuščamo ponavljanje.

$$^{(p)}V_n^r = n^r$$

Izpeljava formule: Elemente postavljamo v vrsto z mesti od 1 do r. Za prvo mesto izbiramo med n elementi. Za drugo mesto prav tako izbiramo med n elementi. O glej, za vsako izmed r mest izbiramo med n elementi. Tako je po osnovnem izreku kombinatorike vseh možnosti $\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{r} = n^r$.

Variacije s ponavljanjem so vse možne **preslikave** iz množice z močjo r v množico z močjo n.

33.5 Kombinacije

Kombinacije reda r iz n elementov so vse **podmnožice** z močjo r množice z močjo n.

$$C_n^r = \frac{V_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \qquad r \leq n$$

Izpeljava formule: Vseh možnih razporeditev r elementov iz n elementov je V_n^r. Vendar smo pri tem upoštevali tudi vrstni red elementov. Ker pa delamo z množicami, vrstni red ni pomemben in smo dobili, če smo izbirali r elementov, ne le vse možne različne elemente, temveč tudi na vse načine razporejene vse možne različne elemente. Načinov razporeditve r elementov je $r!$, in ravno tolikokrat preveč smo jih dobili, zato število variacij delimo z $r!$.

Primer: V razredu je 30 dijakov. Koliko različnih skupin po 3 lahko oblikujejo?

$$n = C_{30}^{3} = \frac{30!}{27! \cdot 3!} = 4060$$

33.6 Kombinacije s ponavljanjem

Kombinacije s ponavljanjem reda r iz n elementov so vse podmnožice z močjo r množice z močjo r, pri čemer dopuščamo, da se elementi ponavljajo.

$$^{(p)}C_n^r = C_{n+r-1}^r$$

Primer: Na razpolago imamo 3 vrste čaja v vrečkah. Za pripravo vrča čaja potrebujemo 7 vrečk. Koliko različnih mešanic čaja lahko pripravimo?

$$n = {}^{(p)}C_3^7 = C_9^7 = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36$$

33.7 Binomski koeficienti in binomski izrek

Definirajmo **binomski koeficient** oz. binomski simbol (simbol beremo n nad r)

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Vrednost binomskega koeficienta je odgovor na vprašanje: "Koliko je podmnožic z močjo r množice z močjo n?"

Osnovne vrednosti binomskih simbolov:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

Za binomske simbole veljata tudi dve lastnosti: simetričnost in aditivnost.
Simetričnost:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Dokaz:

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!}$$
$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Simetričnost se vidi tudi takole: če ima množica s 100 elementi k podmnožic s 75 elementi, ima tudi k podmnožic s 25 elementi, saj vsaki podmnožici s 75 elementi ustreza določena množica s 25 elementi.

Aditivnost:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

Dokaz:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!}{(n-r)!r!} + \frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!} =$$
$$= \frac{n!}{r!(n-r-1)!}\left(\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r+1}\right) = \frac{n!}{r!(n-r-1)!}\left(\frac{r+1+n-r}{(n-r)(r+1)}\right) =$$
$$= \frac{n!(n+1)}{r!(r+1)(n-r-1)!(n-r)} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} =$$
$$= \binom{n+1}{r+1}$$

33.7.1 Pascalov trikotnik

Pascalov trikotnik je trikotnik kjer so v vrsticah in stolpcih zapisani posamezni binomski koeficienti.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1: & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2: & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3: & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{1} & & \\
n=4: & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5: & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2: & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3: & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4: & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5: & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Koeficienti ob levi in desni strani Pascalovega trikotnika so vedno enaki 1, ena izmed osnovnih vrednosti binomskega simbola. Simetričnost binomskih koeficientov se kaže tudi v simetričnosti Pascalovega trikotnika. Vsako novo vrstico (razen prvega in zadnjega koeficienta v vrstici) dobimo iz prejšnje po pravilu aditivnosti: koeficienta levo in desno zgoraj od želenega se seštejeta ravno vanj. Tako lahko precej enostavno zapišemo prvih nekaj vrstic Pascalovega trikotnika.

33.7.2 Binomski izrek

Binomski izrek je izrek, ki opisuje potenciranje **binoma**[15] z naravnim številom ali 0.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r =$$
$$= \tbinom{n}{0} a^n b^0 + \tbinom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \tbinom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \tbinom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \tbinom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \tbinom{n}{n} a^0 b^n$$

Pravimo, da razvijemo binom v **binomsko vrsto**. Splošni člen te binomske vrste je

$$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r \qquad \text{\\ To je } r+1\text{-ti člen!!, ker se začne z } r=0$$

Razlaga formule:
Potencirajmo na primer $(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$. Ko bi te oklepaje množili med seboj, bi lahko iz vseh izbrali a in bi dobili člen a^5. Seveda moramo množiti vsakega z vsakim, in tako moramo tudi izbrati en b in 4 a-je, da dobimo člen a^4b. Vendar lahko ta b izberemo na več različnih načinov, na točno C_5^1 načinov. Podobno izbiramo 2 b-ja in 3 a-je, da dobimo člen a^3b^2 in to lahko izberemo na $\binom{5}{2}$ možnih načinov. Tako pridemo nazadnje do člena b^5, kjer izberemo samo vse

---

[15] Binom je druga beseda za dvočlenik.

b-je, na en sam možen način.

Iz binomskega izreka tudi sledi, da je vsota posamezne vrstice v Pascalovem trikotniku enaka 2^n. **Število podmnožic** neke množice je prav tako enako 2^n. Število podmnožic množice z močjo n lahko zapišemo kot število podmnožic z močjo $0 +$ število podmnožic z močjo $1 + \cdots +$ število podmnožic z močjo n, ali drugače

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \qquad \backslash\backslash\ n\text{-ta vrstica Pascalovega trikotnika}$$

Táko binomsko vrsto pa lahko dobimo le, če potenciramo binom $(1+1)^n$, kar pa je enako 2^n (po osnovah aritmetike, ki jih spoznamo že v zelo zgodnjem izobraževanju).

34 Verjetnostni račun

Verjetnostni **poskus** je poskus, katerega rezultat je odvisen od naključja. Osnovne rezultate verjetnostnega poskusa imenujemo **izidi** ali **elementarni dogodki**. Označimo jih z $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Dogodek je vsak pojav, ki se lahko zgodi pri poskusu. Dogodek lahko zapišemo kot **množico elementarnih dogodkov**, ki so za ta dogodek ugodni. **Univerzalna množica** je množica vseh elementarnih dogodkov. Njeno moč označimo z n.

Nemogoč dogodek je dogodek, ki se pri poskusu ne more zgoditi. Predstavlja ga prazna množica $\emptyset$. **Gotov dogodek** je dogodek, ki se zgodi vedno. Predstavlja ga univerzalna množica $\mathcal{U}$. Dogodek je **slučajen**, če se pri nekaterih ponovitvah poskusa zgodi, pri nekaterih ponovitvah pa ne.

Množica vseh možnih dogodkov je potenčna množica množice $\mathcal{U}$. Vseh možnih dogodkov je $|\mathcal{P}(\mathcal{U})| = 2^n$.

Dogodka, ki se ne moreta zgoditi hkrati, se imenujeta **nezdružljiva** dogodka, dogodka, ki pa se lahko zgodita hkrati, pa se imenujeta **združljiva** dogodka.

Primer:
Poskus: met poštene kocke
Elementarni dogodki: $\mathcal{U} = \{\text{pade } 1, \text{pade } 2, \text{pade } 3, \text{pade } 4, \text{pade } 5, \text{pade } 6\}$
Dogodek: $A = \{\text{pade praštevilo}\} = \{e_2, e_3, e_5\}$
Gotov dogodek: $B = \{\text{pade manj kot } 9000\} = \mathcal{U}$
Nemogoč dogodek: $C = \{\text{pade } 13\} = \{\}$
Združljiva: $D = \{\text{pade sodo}\}$ in A.
Nezdružljiva: $E = \{e_1, e_3\}$ in D.

34.1 Računanje z dogodki

Dogodek A' je **nasproten** dogodek dogodka A, ki se zgodi, če se ne zgodi A. Če dogodek A predstavimo z množico ugodnih izidov, dogodku A' ustreza komplement množice A.

Vsota ali unija dogodkov A in B je nov dogodek $A \cup B$ $(A + B)$, ki se zgodi, če se zgodi dogodek A ali dogodek B.

Produkt ali presek dogodkov A in B je nov dogodek $A \cap B$ $(A \cdot B)$, ki se zgodi, če se zgodita dogodka A in B hkrati. Če je produkt dogodkov enak nič, sta dogodka nezdružljiva.

Razlika dogodkov A in B je nov dogodek $A - B$, ki se zgodi, če se zgodi dogodek A in ne dogodek B.

Dogodek A je način dogodka B, če se vedno, kadar se zgodi A, hkrati zgodi tudi B. Če dogodka predstavimo z množicama ugodnih izidov, to pomeni, da je A podmnožica množice B.

34.2 Klasična definicija verjetnosti

Naj bo množica $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ množica vseh dogodkov pri poskusu. Verjetnost (P) je funkcija, ki množico $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ preslika v množico realnih števil, če so izpolnjeni sledeči aksiomi:

1. Verjetnost dogodka je vedno **večja ali enaka 0**.
2. Verjetnost **gotovega** dogodka je enaka **1**. $P(\mathcal{U}) = 1$
3. Če sta dogodka A in B **nezdružljiva** je verjetnost teh dveh dogodkov enaka **vsoti** verjetnosti posameznih dogodkov.
   $$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Naj bo pri poskusu možnih n elementarnih dogodkov, ki so enako verjetni. Potem je verjetnost vsakega od njih $\frac{1}{n}$.

$$P(e_i) = \frac{1}{n}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_n \\ P(\mathcal{U}) &= P(e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_n) \\ 1 &= P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) \qquad \backslash\backslash \text{ Po aksiomih 2 in 3.} \\ 1 &= n \cdot P(e_i) \qquad \backslash\backslash \text{ Ker so vsi enako verjetni.} \\ P(e_i) &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Naj bo za dogodek A ugodnih m **elementarnih** dogodkov, pri poskusu, pri katerem imamo n možnih enako verjetnih elementarnih dogodkov. Verjetnost dogodka A je enaka kvocientu med številom ugodnih elementarnih dogodkov in vseh elementarnih dogodkov.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} A &= \{\underbrace{e_x, \ldots, e_y}_{m}\} \\ P(A) &= P(\{\underbrace{e_x, \ldots, e_y}_{m}\}) \\ P(A) &= \underbrace{P(e_x) + \cdots + P(e_y)}_{m} \end{aligned}$$

$$P(A) = m \cdot \frac{1}{n}$$
$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Obstaja tudi statistična definicija verjetnosti, pa še kakšna druga tudi. Po statistični definiciji verjetnosti je verjetnost limita relativne frekvence, ko gre število poskusov v neskončno.

34.3 Verjetnost nasprotnega dogodka

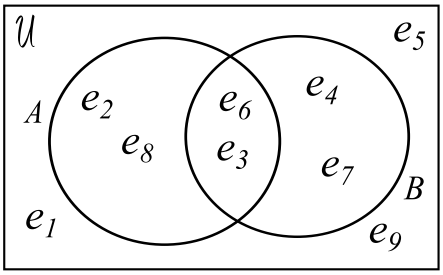
Vsota verjetnosti dogodka in verjetnosti njemu nasprotnega dogodka je enaka 1.

$$A \cup A' = \mathcal{U}$$
$$P(A \cup A') = P(\mathcal{U})$$
$$P(A) + P(A') = 1 \qquad \backslash\backslash\ A \text{ in } A' \text{ sta nezdružljiva.}$$
$$P(A) = 1 - P(A')$$

34.4 Verjetnost vsote združljivih dogodkov

Imejmo dogodka A in B, ki naj bosta združljiva. Primer je prikazan na sliki 52. Število ugodnih elementarnih dogodkov za ta dogodek je tako enako:

$$m_{A\cup B} = m_A + m_B - m_{A\cap B}$$
$$P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B - m_{A\cap B}}{n}$$
$$P(A \cup B) = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{m_{A\cap B}}{n}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Slika 52: Združljiva dogodka.

34.5 Pogojna verjetnost

Pogojna verjetnost je verjetnost dogodka, pod **pogojem**, da se je neki drug dogodek že zgodil. ($P(A|B)$, beri: verjetnost A, pri pogoju, da se je zgodil B.)

Pomagajmo si s sliko 52. Če vemo da se je že zgodil dogodek B, potem je moč B število vseh možnosti, ki jih imamo, saj vemo, da se je B že zgodil. Število ugodnih možnosti pa je sedaj enako le še $m_{A\cap B}$, saj vemo, da so vse ugodne možnosti elementi

A-ja in B-ja. Verjetnost je tako enaka:

$$P(A|B) = \frac{m_{A\cap B}}{m_B} = \frac{\frac{m_{A\cap B}}{n}}{\frac{m_B}{n}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Verjetnost dogodka A, pod **pogojem**, da se je zgodil dogodek B, je kvocient med verjetnostjo produkta $A\cap B$ in verjetnostjo dogodka B.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Če zamenjamo črke dobimo:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

in **verjetnost produkta** dogodkov je tako enaka:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$$

Dogodka A in B sta neodvisna natanko takrat, kadar velja:

$$P(A|B) = P(A) \text{ in } P(B|A) = P(B)$$

To pomeni, da izid dogodka B nima nikakršnega vpliva na možne izide dogodka A, in obratno.

Verjetnost produkta **neodvisnih** dogodkov je enaka:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

34.6 Bernoullijevo zaporedje

Zaporedje **neodvisnih** poskusov je **Bernoullijevo zaporedje**, če se lahko v vsaki ponovitvi poskusa zgodi samo dogodek A z verjetnostjo p ali njegov nasprotni dogodek.

$$P(A) = p \qquad P(A') = 1-p$$

Verjetnost, da se nek dogodek z verjetnostjo p v n ponovitvah poskusa zgodi natanko k-krat, je enaka:

$$P(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pojasnijo formule:
Za lažjo obravnavo denimo, da nas zanima kolikšna je verjetnost, da se najprej zgodi k dogodkov A in nato $n-k$ dogodkov A'.

$$P(\underbrace{A\cap A\cap\cdots\cap A}_{k}\cap\underbrace{A'\cap A'\cap\cdots\cap A'}_{n-k}) = \qquad \text{\\ Neodvisni dogodki.}$$

$$= \underbrace{P(A)\cdot P(A)\cdot\,\cdots\,\cdot P(A)}_{k}\cdot\underbrace{P(A')\cdot P(A')\cdot\,\cdots\,\cdot P(A')}_{n-k} =$$

$$= (P(A))^k\cdot(P(A'))^{n-k} = p^k(1-p)^{n-k}$$

Sedaj pa se vrnimo na osnovni problem. Ne zanima nas vrstni red v katerem se je zgodilo k dogodkov A, zanima nas le verjetnost, da se jih je zgodilo k. Na koliko različnih načinov pa se lahko zgodi k dogodkov A v n poskusih? Na $C_n^k = \binom{n}{k}$, torej je verjetnost, da se zgodi dogodek A, ravno $\binom{n}{k}$-krat večja.

Kazalo slik

Tabele