Codebook

Pitoni++

Žiga Gosar, Maks Kolman, Jure Slak

verzija: 9. marec 2015

Kazalo

1 Grafi

1.1 Topološko sortiranje

Vhod: Število vozlišč n in število povezav m ter seznam povezav E oblike $u \to v$ dolžine m. Usmerjen graf G je tako sestavljen iz vozlišč z oznakami 0 do $n-1$ in povezavami iz E. G ne sme imeti zank, če pa jih ima, se jih lahko brez škode odstrani.

Izhod: Topološka ureditev usmerjenega grafa G, to je seznam vozlišč v takem vrstem redu, da nobena povezava ne kaže nazaj. Če je vrnjeni seznam krajši od n, potem ima G cikle.

Časovna zahtevnost: $O(V + E)$

Prostorska zahtevnost: $O(V)$

Testiranje na terenu: UVa 10305

```cpp
vector<int> topological_sort(int n, int m, const int E[][2]) {
    vector<vector<int>> G(n);
    vector<int> ingoing(n, 0);

    for (int i = 0; i < m; ++i) {
        int a = E[i][0], b = E[i][1];
        G[a].push_back(b);
        ingoing[b]++;
    }

    queue<int> q;  // morda priority_queue, če je vrstni red pomemben
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        if (ingoing[i] == 0)
            q.push(i);

    vector<int> res;
    while (!q.empty()) {
        int t = q.front();
        q.pop();

        res.push_back(t);

        for (int v : G[t])
            if (--ingoing[v] == 0)
                q.push(v);
    }

    return res;  // če res.size() != n, ima graf cikle.
}
```

1.2 Mostovi in prerezna vozlišča grafa

Vhod: Število vozlišč n in število povezav m ter seznam povezav E oblike $u \to v$ dolžine m. Neusmerjen graf G je tako sestavljen iz vozlišč z oznakami 0 do $n-1$ in povezavami iz E.

Izhod: Seznam prereznih vozlišč: točk, pri katerih, če jih odstranimo, graf razpade na dve komponenti in seznam mostov grafa G: povezav, pri katerih, če jih odstranimo, graf razpade na dve komponenti.

Časovna zahtevnost: $O(V + E)$

Prostorska zahtevnost: $O(V + E)$

Testiranje na terenu: UVa 315

```cpp
namespace {
vector<int> low;
vector<int> dfs_num;
vector<int> parent;
}
```

```

void articulation_points_and_bridges_internal(int u, const vector<vector<int>>& G,
        vector<bool>& articulation_points_map, vector<pair<int, int>>& bridges) {
    static int dfs_num_counter = 0;
    low[u] = dfs_num[u] = ++dfs_num_counter;
    int children = 0;
    for (int v : G[u]) {
        if (dfs_num[v] == -1) {  // unvisited
            parent[v] = u;
            children++;

            articulation_points_and_bridges_internal(v, G, articulation_points_map, bridges);
            low[u] = min(low[u], low[v]);  // update low[u]

            if (parent[u] == -1 && children > 1)  // special root case
                articulation_points_map[u] = true;
            else if (parent[u] != -1 && low[v] >= dfs_num[u])  // articulation point
                articulation_points_map[u] = true;  // assigned more than once
            if (low[v] > dfs_num[u])                // bridge
                bridges.push_back({u, v});
        } else if (v != parent[u]) {
            low[u] = min(low[u], dfs_num[v]);  // update low[u]
        }
    }
}

void articulation_points_and_bridges(int n, int m, const int E[][2],
        vector<int>& articulation_points, vector<pair<int, int>>& bridges) {
    vector<vector<int>> G(n);
    for (int i = 0; i < m; ++i) {
        int a = E[i][0], b = E[i][1];
        G[a].push_back(b);
        G[b].push_back(a);
    }

    low.assign(n, -1);
    dfs_num.assign(n, -1);
    parent.assign(n, -1);

    vector<bool> articulation_points_map(n, false);
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        if (dfs_num[i] == -1)
            articulation_points_and_bridges_internal(i, G, articulation_points_map, bridges);

    for (int i = 0; i < n; ++i)
        if (articulation_points_map[i])
            articulation_points.push_back(i);  // actually return only articulation points
}
```

1.3 Močno povezane komponente

Vhod: Seznam sosednosti s težami povezav.

Izhod: Seznam povezanih komponent grafa v obratni topološki ureditvi in kvocientni graf, to je DAG, ki ga dobimo iz grafa, če njegove komponente stisnemo v točke. Morebitnih več povezav med dvema komponentama seštejemo.

Časovna zahtevnost: $O(V + E)$

Prostorska zahtevnost: $O(V + E)$

Testiranje na terenu: `http://putka.upm.si/tasks/2012/2012_3kolo/zakladi`

```
namespace {
vector<int> low;
vector<int> dfs_num;
stack<int> S;
vector<int> component;   // maps vertex to its component
}

void strongly_connected_components_internal(int u, const vector<vector<pair<int, int>>>& G,
        vector<vector<int>>& comps) {
    static int dfs_num_counter = 1;
    low[u] = dfs_num[u] = dfs_num_counter++;
    S.push(u);

    for (const auto& v : G[u]) {
```

```
        if (dfs_num[v.first] == 0)  // not visited yet
            strongly_connected_components_internal(v.first, G, comps);
        if (dfs_num[v.first] != -1)  // not popped yet
            low[u] = min(low[u], low[v.first]);
    }

    if (low[u] == dfs_num[u]) {  // extract the component
        int cnum = comps.size();
        comps.push_back({});  // start new component
        int w;
        do {
            w = S.top(); S.pop();
            comps.back().push_back(w);
            component[w] = cnum;
            dfs_num[w] = -1;  // mark popped
        } while (w != u);
    }
}

void strongly_connected_components(const vector<vector<pair<int, int>>>& G,
        vector<vector<int>>& comps, vector<map<int, int>>& dag) {
    int n = G.size();
    low.assign(n, 0);
    dfs_num.assign(n, 0);
    component.assign(n, -1);

    for (int i = 0; i < n; ++i)
        if (dfs_num[i] == 0)
            strongly_connected_components_internal(i, G, comps);

    dag.resize(comps.size());
    for (int u = 0; u < n; ++u) {
        for (const auto& v : G[u]) {
            if (component[u] != component[v.first]) {
                dag[component[u]][component[v.first]] += v.second;  // ali max, kar zahteva naloga
            }
        }
    }
}
```

2 Teorija števil

2.1 Evklidov algoritem

Vhod: $a, b \in \mathbb{Z}$

Izhod: Največji skupni delitelj a in b. Za pozitivna števila je pozitiven, če je eno število 0, je rezultat drugo število, pri negativnih je predznak odvisen od števila iteracij.

Časovna zahtevnost: $O(\log(a) + \log(b))$

Prostorska zahtevnost: $O(1)$

```
int gcd(int a, int b) {
    int t;
    while (b != 0) {
        t = a % b;
        a = b;
        b = t;
    }
    return a;
}
```

2.2 Razširjen Evklidov algoritem

Vhod: $a, b \in \mathbb{Z}$. Števili $retx$, $rety$ sta parametra samo za vračanje vrednosti.

Izhod: Števila x, y, d, pri čemer $d = \gcd(a, b)$, ki rešijo Diofantsko enačbo $ax + by = d$. V posebnem primeru, da je b tuj a, je x inverz števila a v multiplikativni grupi Z_b^*.

Časovna zahtevnost: $O(\log(a) + \log(b))$
Prostorska zahtevnost: $O(1)$
Testiranje na terenu: UVa 756

```
int ext_gcd(int a, int b, int& retx, int& rety) {
    int x = 0, px = 1, y = 1, py = 0, r, q;
    while (b != 0) {
        r = a % b; q = a / b;  // quotient and reminder
        a = b; b = r;          // gcd swap
        r = px - q * x;        // x swap
        px = x; x = r;
        r = py - q * y;        // y swap
        py = y; y = r;
    }
    retx = px; rety = py;      // return
    return a;
}
```

2.3 Kitajski izrek o ostankih

Vhod: Sistem n kongruenc $x \equiv a_i \pmod{m_i}$, m_i so paroma tuji.
Izhod: Število x, ki reši ta sistem dobimo po formuli

$$x = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{M}{m_i} \left[\left(\frac{M}{mi} \right)^{-1} \right]_{m_i} \right]_M, \qquad M = \prod_{i=1}^{n} m_i,$$

kjer $[x^{-1}]_m$ označuje inverz x po modulu m. Vrnjeni x je med 0 in M.
Časovna zahtevnost: $O(n \log(\max\{m_i, a_i\}))$
Prostorska zahtevnost: $O(n)$
Potrebuje: Evklidov algoritem (str. 5)
Testiranje na terenu: UVa 756
Opomba: Pogosto potrebujemo `unsigned long long` namesto `int`.

```
int mul_inverse(int a, int m) {
    int x, y;
    ext_gcd(a, m, x, y);
    return (x + m) % m;
}

int chinese_reminder_theorem(const vector<pair<int, int>>& cong) {
    int M = 1;
    for (size_t i = 0; i < cong.size(); ++i) {
        M *= cong[i].second;
    }
    int x = 0, a, m;
    for (const auto& p : cong) {
        tie(a, m) = p;
        x += a * M / m * mul_inverse(M/m, m);
        x %= M;
    }
    return (x + M) % M;
}
```

2.4 Hitro potenciranje

Vhod: Število g iz splošne grupe in $n \in \mathbb{N}_0$.
Izhod: Število g^n.
Časovna zahtevnost: $O(\log(n))$
Prostorska zahtevnost: $O(1)$
Testiranje na terenu: `http://putka.upm.si/tasks/2010/2010_3kolo/nicle`

```
int fast_power(int g, int n) {
    int r = 1;
    while (n > 0) {
        if (n & 1) {
            r *= g;
        }
        g *= g;
        n >>= 1;
    }
    return r;
}
```

2.5 Številski sestavi

Vhod: Število $n \in \mathbb{N}_0$ ali $\frac{p}{q} \in Q$ ter $b \in [2, \infty) \cap \mathbb{N}$.

Izhod: Število n ali $\frac{p}{q}$ predstavljeno v izbranem sestavu z izbranimi števkami in označeno periodo.

Časovna zahtevnost: $O(\log(n))$ ali $O(q \log(q))$.

Prostorska zahtevnost: $O(n)$ ali $O(q)$.

Testiranje na terenu: `http://putka.upm.si/tasks/2010/2010_finale/ulomki`

Opomba: Zgornja meja za bazo b je dolžina niza `STEVILSKI_SESTAVI_ZNAKI`.

```
char STEVILSKI_SESTAVI_ZNAKI[] = "0123456789ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ";

string convert_int(int n, int baza) {
    if (n == 0) return "0";
    string result;
    while (n > 0) {
        result.push_back(STEVILSKI_SESTAVI_ZNAKI[n % baza]);
        n /= baza;
    }
    reverse(result.begin(), result.end());
    return result;
}

string convert_fraction(int stevec, int imenovalec, int base) {
    div_t d = div(stevec, imenovalec);
    string result = convert_int(d.quot, base);
    if (d.rem == 0) return result;

    string decimalke;  // decimalni del
    result.push_back('.');
    int mesto = 0;
    map<int, int> spomin;
    spomin[d.rem] = mesto;
    while (d.rem != 0) {  // pisno deljenje
        mesto++;
        d.rem *= base;
        decimalke += STEVILSKI_SESTAVI_ZNAKI[d.rem / imenovalec];
        d.rem %= imenovalec;
        if (spomin.count(d.rem) > 0) {  // periodicno
            result.append(decimalke.begin(), decimalke.begin() + spomin[d.rem]);
            result.push_back('(');
            result.append(decimalke.begin() + spomin[d.rem], decimalke.end());
            result.push_back(')');
            return result;
        }
        spomin[d.rem] = mesto;
    }
    result += decimalke;
    return result;  // koncno decimalno stevilo
}
```

2.6 Eulerjeva funkcija ϕ

Vhod: Število $n \in \mathbb{N}$.

Izhod: Število $\phi(n)$, to je število števil manjših ali enakih n in tujih n. Direktna formula:

$$\phi(n) = n \cdot \prod_{p\,|\,n}(1 - \frac{1}{p})$$

Časovna zahtevnost: $O(\sqrt{n})$.
Prostorska zahtevnost: $O(1)$.
Testiranje na terenu: `https://projecteuler.net/problem=69`

```
int euler_phi(int n) {
    int res = n;
    for (int i = 2; i*i <= n; ++i) {
        if (n % i == 0) {
            while (n % i == 0) {
                n /= i;
            }
            res -= res / i;
        }
    }
    if (n > 1) res -= res / n;
    return res;
}
```

3 Geometrija

Zaenkrat obravnavamo samo ravninsko geometrijo. Točke predstavimo kot kompleksna števila. Daljice predstavimo z začetno in končno točko. Premice s koeficienti v enačbi $ax + by = c$. Premico lahko konstruiramo iz dveh točk in po želji hranimo točko in smerni vektor. Pravokotnike predstavimo z spodnjim levim in zgornjim desnim ogliščem. Večkotnike predstavimo s seznamom točk, kot si sledijo, prve točke ne ponavljamo. Tip `ITYPE` predstavlja različne vrste presečišč ali vsebovanosti: `OK` pomeni, da se lepo seka oz. je točka v notranjosti. `NO` pomeni, da se ne seka oz. da točna ni vsebovana, `EQ` pa pomeni, da se premici prekrivata, daljici sekata v krajišču ali se pokrivata, oz. da je točka na robu.

3.1 Osnove

Funkcije:

- skalarni in vektorski produkt
- pravokotni vektor in polarni kot
- ploščina trikotnika in enostavnega mnogokotnika
- razred za premice
- razdalja do premice, daljice, po sferi
- vsebovanost v trikotniku, pravokotniku, enostavnem mnogokotniku
- presek dveh premic, premice in daljice in dveh daljic
- konstrukcije krogov iz treh točk, iz dveh točk in radija

Vhod: Pri argumentih funkcij.
Izhod: Pri argumentih funkcij.
Časovna zahtevnost: $O(\text{št. točk})$.
Prostorska zahtevnost: $O(\text{št. točk})$.
Testiranje na terenu: Bolj tako, ima pa obsežne unit teste…

```cpp
const double pi = M_PI;
const double eps = 1e-7;
const double inf = numeric_limits<double>::infinity();

enum ITYPE : char { OK, NO, EQ };
typedef complex<double> P;

double dot(const P& p, const P& q) {
    return p.real() * q.real() + p.imag() * q.imag();
}
double cross(const P& p, const P& q) {
    return p.real() * q.imag() - p.imag() * q.real();
}
double cross(const P& p, const P& q, const P& r) {
    return cross(q - p, r - q);  // > 0 levo, < 0 desno, = 0 naravnost
}
// true is p->q->r is a left turn, straight line is not, if so, change to -eps
bool left_turn(const P& p, const P& q, const P& r) {
    return cross(q-p, r-q) > eps;
}
P perp(const P& p) {  // get left perpendicular vector
    return P(-p.imag(), p.real());
}
int sign(double x) {
    if (x < -eps) return -1;
    if (x > eps) return 1;
    return 0;
}
double polar_angle(const P& p) {  // phi in [0, 2pi) or -1 for (0,0)
    if (p == P(0, 0)) return -1;
    double a = arg(p);
    if (a < 0) a += 2*pi;
    return a;
}
double area(const P& a, const P& b, const P& c) {  // signed
    return 0.5 * cross(a, b, c);
}
double area(const vector<P>& poly) {  // signed
    double A = 0;
    int n = poly.size();
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        int j = (i+1) % n;
        A += cross(poly[i], poly[j]);
    }
    return A/2;
}
// struct L {  // premica, dana z enačbo ax + by = c ali z dvema točkama
//     double a, b, c;  // lahko tudi int
L::L() : a(0), b(0), c(0) {}
L::L(int A, int B, int C) {
    if (A < 0 || (A == 0 && B < 0)) a = -A, b = -B, c = -C;
    else a = A, b = B, c = C;
    int d = gcd(gcd(abs(a), abs(b)), abs(c));  // same sign as A, if nonzero, else B, else C
    if (d == 0) d = 1;                         // in case of 0 0 0 input
    a /= d;
    b /= d;
    c /= d;
}
L::L(double A, double B, double C) {
    if (A < 0 || (A == 0 && B < 0)) a = -A, b = -B, c = -C;
    else a = A, b = B, c = C;
}
L::L(const P& p, const P& q) : L(imag(q-p), real(p-q), cross(p, q)) {}
P L::normal() const { return {a, b}; }
double L::value(const P& p) const { return dot(normal(), p) - c; }
bool L::operator<(const L& line) const {
    if (a == line.a) {
        if (b == line.b) return c < line.c;
        return b < line.b;
    }
    return a < line.a;
}
bool L::operator==(const L& line) const {
    return cross(normal(), line.normal()) < eps && c*line.b == b*line.c;
}
//  };  // end struct L
ostream& operator<<(ostream& os, const L& line) {
    os << line.a << "x + " << line.b << "y == " << line.c; return os;
}

double dist_to_line(const P& p, const L& line) {
```

```
    return abs(line.value(p)) / abs(line.normal());
}
double dist_to_line(const P& t, const P& p1, const P& p2) {  // t do premice p1p2
    return abs(cross(p2-p1, t-p1)) / abs(p2-p1);
}
double dist_to_segment(const P& t, const P& p1, const P& p2) {  // t do daljice p1p2
    P s = p2 - p1;
    P w = t - p1;
    double c1 = dot(s, w);
    if (c1 <= 0) return abs(w);
    double c2 = norm(s);
    if (c2 <= c1) return abs(t-p2);
    return dist_to_line(t, p1, p2);
}
double great_circle_dist(const P& a, const P& b) {  // pairs of (latitude, longitude) in radians
    double R = 6371.0;                               // compute great circle distance
    double u[3] = { cos(a.real()) * sin(a.imag()), cos(a.real()) * cos(a.imag()), sin(a.real()) };
    double v[3] = { cos(b.real()) * sin(b.imag()), cos(b.real()) * cos(b.imag()), sin(b.real()) };
    double dot = u[0]*v[0] + u[1]*v[1] + u[2]*v[2];
    bool flip = false;
    if (dot < 0.0) {
        flip = true;
        for (int i = 0; i < 3; i++) v[i] = -v[i];
    }
    double cr[3] = { u[1]*v[2] - u[2]*v[1], u[2]*v[0] - u[0]*v[2], u[0]*v[1] - u[1]*v[0] };
    double theta = asin(sqrt(cr[0]*cr[0] + cr[1]*cr[1] + cr[2]*cr[2]));
    double len = theta * R;
    if (flip) len = pi * R - len;
    return len;
}
bool point_in_rect(const P& t, const P& p1, const P& p2) {  // ali je t v pravokotniku p1p2
    return min(p1.real(), p2.real()) <= t.real() && t.real() <= max(p1.real(), p2.real()) &&
           min(p1.imag(), p2.imag()) <= t.imag() && t.imag() <= max(p1.imag(), p2.imag());
}
bool point_in_triangle(const P& t, const P& a, const P& b, const P& c) {  // orientation independant
    return abs(abs(area(a, b, t)) + abs(area(a, c, t)) + abs(area(b, c, t))  // edge inclusive
                - abs(area(a, b, c))) < eps;
}
pair<ITYPE, P> line_line_intersection(const L& p, const L& q) {
    double det = cross(p.normal(), q.normal());  // če imata odvisni normali (ali smerna vektorja)
    if (abs(det) < eps) {  // paralel
        if (abs(p.b*q.c - p.c*q.b) < eps && abs(p.a*q.c - p.c*q.a) < eps) {
            return {EQ, P()};  // razmerja koeficientov se ujemajo
        } else {
            return {NO, P()};
        }
    } else {
        return {OK, P(q.b*p.c - p.b*q.c, p.a*q.c - q.a*p.c) / det};
    }
}
pair<ITYPE, P> line_segment_intersection(const L& p, const P& u, const P& v) {
    double u_on = p.value(u);
    double v_on = p.value(v);
    if (abs(u_on) < eps && abs(v_on) < eps) return {EQ, u};
    if (abs(u_on) < eps) return {OK, u};
    if (abs(v_on) < eps) return {OK, v};
    if ((u_on > eps && v_on < -eps) || (u_on < -eps && v_on > eps)) {
        return line_line_intersection(p, L(u, v));
    }
    return {NO, P()};
}
pair<ITYPE, P> segment_segment_intersection(const P& p1, const P& p2, const P& q1, const P& q2) {
    int o1 = sign(cross(p1, p2, q1));  // daljico p1p1 sekamo z q1q2
    int o2 = sign(cross(p1, p2, q2));
    int o3 = sign(cross(q1, q2, p1));
    int o4 = sign(cross(q1, q2, p2));

    // za pravo presecisce morajo biti o1, o2, o3, o4 != 0
    // vemo da presečišče obstaja, tudi ce veljata samo prva dva pogoja
    if (o1 != o2 && o3 != o4 && o1 != 0 && o2 != 0 && o3 != 0 && o4 != 0)
        return line_line_intersection(L(p1, p2), L(q1, q2));

    // EQ = se dotika samo z ogliscem ali sta vzporedni
    if (o1 == 0 && point_in_rect(q1, p1, p2)) return {EQ, q1};  // q1 lezi na p
    if (o2 == 0 && point_in_rect(q2, p1, p2)) return {EQ, q2};  // q2 lezi na p
    if (o3 == 0 && point_in_rect(p1, q1, q2)) return {EQ, p1};  // p1 lezi na q
    if (o4 == 0 && point_in_rect(p2, q1, q2)) return {EQ, p2};  // p2 lezi na q

    return {NO, P()};
}
ITYPE point_in_poly(const P& t, const vector<P>& poly) {
```

```
    int n = poly.size();
    int cnt = 0;
    double x2 = rand() % 100;
    double y2 = rand() % 100;
    P dalec(x2, y2);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        int j = (i+1) % n;
        if (dist_to_segment(t, poly[i], poly[j]) < eps) return EQ;  // boundary
        ITYPE tip = segment_segment_intersection(poly[i], poly[j], t, dalec).first;
        if (tip != NO) cnt++;  // ne testiramo, ali smo zadeli oglisce, upamo da nismo
    }
    if (cnt % 2 == 0) return NO;
    else return OK;
}
pair<P, double> get_circle(const P& p, const P& q, const P& r) {  // circle through 3 points
    P v = q-p;
    P w = q-r;
    if (abs(cross(v, w)) < eps) return {P(), 0};
    P x = (p+q)/2.0, y = (q+r)/2.0;
    ITYPE tip;
    P intersection;
    tie(tip, intersection) = line_line_intersection(L(x, x+perp(v)), L(y, y+perp(w)));
    return {intersection, abs(intersection-p)};
}
// circle through 2 points with given r, to the left of pq
P get_circle(const P& p, const P& q, double r) {
    double d = norm(p-q);
    double h = r*r / d - 0.25;
    if (h < 0) return P(inf, inf);
    h = sqrt(h);
    return (p+q) / 2.0 + h * perp(q-p);
}
```

3.2 Konveksna ovojnica

Vhod: Seznam n točk.

Izhod: Najkrajši seznam h točk, ki napenjajo konveksno ovojnico, urejen naraščajoče po kotu glede na spodnjo levo točko.

Časovna zahtevnost: $O(n \log n)$, zaradi sortiranja

Prostorska zahtevnost: $O(n)$.

Potrebuje: Vektorski produkt, str. 8.

Testiranje na terenu: UVa 681

```
typedef complex<double> P;  // ali int
double eps = 1e-9;

bool compare(const P& a, const P& b, const P& m) {
    double det = cross(a, m, b);
    if (abs(det) < eps) return abs(a-m) < abs(b-m);
    return det < 0;
}

vector<P> convex_hull(vector<P>& points) {  // vector is modified
    if (points.size() <= 2) return points;
    P m = points[0]; int mi = 0;
    int n = points.size();
    for (int i = 1; i < n; ++i) {
        if (points[i].imag() < m.imag() ||
           (points[i].imag() == m.imag() && points[i].real() < m.real())) {
            m = points[i];
            mi = i;
        }
    }   // m = spodnja leva

    swap(points[0], points[mi]);
    sort(points.begin()+1, points.end(),
         [&m](const P& a, const P& b) { return compare(a, b, m); });

    vector<P> hull;
    hull.push_back(points[0]);
    hull.push_back(points[1]);

    for (int i = 2; i < n; ++i) {  // tocke, ki so na ovojnici spusti, ce jih hoces daj -eps
```

```
        while (hull.size() >= 2 && cross(hull.end()[-2], hull.end()[-1], points[i]) < eps) {
            hull.pop_back();  // right turn
        }
        hull.push_back(points[i]);
    }

    return hull;
}
```