

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Jure Slak

**TBD**

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. George Mejak

Somentor: dr. Gregor Kosec

Ljubljana, 2017

Izjava o avtorstvu?

Zahvala?

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Notacija . . . . .	1
1.2	Osnovne trditve vektorske analize . . . . .	1
1.3	Osnovni izreki funkcionalne analize . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Teorija linearne elastičnosti</b>	<b>4</b>
2.1	Osnove gibanja . . . . .	5
2.1.1	Aksiomi gibanja . . . . .	8
2.2	Napetostni tenzor . . . . .	10
2.3	Enačbe gibanja . . . . .	13
2.4	Konstitutivne enačbe . . . . .	15
2.4.1	Mera deformacije . . . . .	15
2.4.2	Hookov zakon . . . . .	18
2.5	Navierova enačba . . . . .	19
2.6	Obstoj in enoličnost rešitve . . . . .	21
2.7	Priprava na numerično reševanje . . . . .	24
2.7.1	Poenostavitev na dve dimenziji . . . . .	25
2.7.2	Robni pogoji . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Numerična metoda</b>	<b>26</b>
3.1	Izpeljava . . . . .	26
3.1.1	Ideja in motivacija . . . . .	26
3.1.2	Splošna izpeljava . . . . .	28
3.2	Posebni primeri . . . . .	31
3.3	Algoritem . . . . .	34
3.3.1	Diskretizacija . . . . .	35
3.3.2	Iskanje najbližjih sosedov . . . . .	38
3.3.3	Reševanje razpršenega sistema . . . . .	39
3.3.4	Časovna zahtevnost . . . . .	40
3.3.5	Prostorska zahtevnost . . . . .	41
3.4	Pogoste vrednosti parametrov . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Implementacija</b>	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>Numerični zgledi</b>	<b>44</b>
5.1	Enodimenzionalni robni problem . . . . .	44
5.2	Poissonova enačba . . . . .	45
5.3	Hertzov kontaktni problem . . . . .	47
5.4	FWO case . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Zaključek</b>	<b>47</b>

## Slike

1	Prerez enotske kocke pri $Z = 0$ v referenčni konfiguraciji in v prostorski konfiguraciji ob času $t = 0.2$ . . . . .	6
2	Valj, uporabljen v dokazu Caucyjeve recipročne relacije. . . . .	11
3	Tetraeder, uporabljen za dokaz Caucyjevega izreka o napetosti. . . . .	12
4	Razteg tanke palice vzdolž njene osi. . . . .	16
5	Primer domene z diskretizirano notranjostjo in robom, skupaj z izbrano točko in njeno sosesčino. . . . .	29
6	Primeri domen in njihovih diskretizacij. . . . .	37
7	Primerjava domene z naključno diskretizacijo (levo) in domene po izvedbi 10 iteracij algoritma 3 s parametri $F_0 = 10^{-2}$ , $s = 6$ , $\alpha = 3$ (desno). . . . .	38
8	Sprememba $h$ in $S$ po 10 iteracijah algoritma 3 s parametri $F_0 = 10^{-2}$ , $s = 6$ , $\alpha = 3$ v enotskem dvodimenzionalnem krogu z začetno Fibonaccijevo mrežo, v odvisnosti od $N$ , z razmerjem robnih in notranjih točk $x : \frac{12}{\pi}\sqrt{x}$ . . . . .	39
9	Napaka FDM in MLSM metode v primerjavi s pravilno rešitvijo. . . . .	45
10	Primerjava časa izvajanja MLSM in FDM metod. . . . .	46
11	Konvergenca MLSM za različne parametre pri reševanju (5.1). . . . .	47
12	Čas izvajanja za različne izbore parametrov pri reševanju problema (5.1). . . . .	48
13	Napaka v odvisnosti od $\sigma_b$ in $\sigma_w$ za Gaussove funkcije. . . . .	48
14	Reševanje Poissonove enačbe $\Delta u = 1$ s homogenimi robnimi pogoji na zanimivejših domenah. . . . .	49

## Algoritmi:

1	Brezmrežna metoda za reševanje PDE iz razdelka 3.1.2. . . . .	35
2	Izračun funkcije oblike. . . . .	36
3	Algoritem za izboljšanje kvalitete diskretizacije domene. . . . .	38

Program dela?

**TBD**

POVZETEK

TBD

**TBD**

ABSTRACT

TBD

**Math. Subj. Class. (2010):**

**Ključne besede: ??**

**Keywords: ??**

# 1 Uvod

Motivacija, pregled naloge

## 1.1 Notacija

Skalarje bomo označevali z malimi latinskimi ali grškimi črkami, npr.  $a, \alpha \in \mathbb{R}$ . Vektorje iz  $\mathbb{R}^3$  bomo označevali s puščico nad črko, npr.  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ . Tenzorje (drugega reda) v mehaniki bomo označevali z malimi latinskimi ali grškimi črkami, npr.  $t, \sigma \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ . Komponente bomo označevali z indeksom spodaj, npr.  $\vec{v}_i$  ali  $t_{ij}$ . V razdelkih 1.2 in 2 bomo uporabljali tudi sumacijsko konvencijo. Tako na primer enačba

$$t_{ij}\vec{v}_j = 0$$

vsebuje implicitno vsoto po  $j$ , razume pa se tudi, da velja za vsak smiselni  $i$  (od 1 do dimenzije prostora). Z  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  bomo označevali skalarni produkt (enojno kontrakcijo) vektorjev, brez oznake bomo pisali produkt tenzorjev ali tenzorja in vektorja. Za skalarni produkt tenzorjev (dvojno kontrakcijo) bomo uporabljali oznako  $s : t$ . S  $t^T$  bomo označevali transpozicijo tenzorja ali matrike, definirano z  $\vec{a} \cdot t\vec{b} = t^T \vec{a} \cdot \vec{b}$ . Z oznako  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$  bomo označevali mešani produkt vektorjev  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$ , definiran kot  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ .

Divergence, gradient in Laplaceov operator bomo označevali z  $\text{div}$ ,  $\text{grad}$ ,  $\text{lap}$  ali pa z  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla$  in  $\nabla^2 = \Delta$ .

V razdelkih 3 in 5 bomo imeli opravka tudi z vektorji in matrikami splošnih dimenzij, ki ne predstavljajo mehaničnih količin, ampak samo končno zaporedje skalarjev. Take vektorje bomo označevali odebeljeno, npr.  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^n$ , matrike pa z velikimi tiskanimi črkami  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

## 1.2 Osnovne trditve vektorske analize

Spomnimo se nekaj osnovnih trditev vektorske analize, ki jih bomo potrebovali v kasnejših izpeljavah.

Opremimo prostor tenzorjev drugega reda opremimo s skalarnim produktom

$$s : t = \text{tr}(s^T t) = s_{ij}t_{ij}.$$

**Trditev 1.1.** V zgornjem skalarnem produktu razpade prostor tenzorjev na direktno ortogonalno vsoto podprostorov simetričnih in antisimetričnih tenzorjev.

$$V \otimes V = \text{Sym}(V) \oplus^\perp \text{Asym}(V)$$

*Dokaz.* Vsak tenzor  $s$  lahko zapišemo kot  $s = \frac{1}{2}(s + s^T) + \frac{1}{2}(s - s^T)$ . Če je  $s \in \text{Sym}(V) \cap \text{Asym}(V)$  je  $s^T = -s^T$  od koder sledi  $s = 0$ . Vsota je res direktna. Ker velja za simetričen  $s$  in antisimetričen  $t$  tudi

$$s : t = \text{tr}(s^T t) = -\text{tr}(st^T) = -\text{tr}(s^T t) = -s : t,$$

od koder sledi  $s : t = 0$ , je vsota ortogonalna. □



**Definicija 1.2.** Divergenca tenzorja  $t$  drugega reda je vektorsko polje, za katerega za vsak vektor  $\vec{a}$  velja

$$\operatorname{div}(t) \cdot \vec{a} = \operatorname{div}(t^T \vec{a}).$$

V koordinatah je  $(\operatorname{div} t)_i = t_{ij,j}$ .

Zakaj je ravno to prava definicija, nam pove naslednji izrek

**Izrek 1.3** (Gauss). Naj bo  $\Omega$  odprta povezana množica z odsekoma glatkim robom,  $\vec{n}$  zunanja enotska normala na  $\partial\Omega$  in  $t$  tenzorsko polje na  $\Omega$ . Potem velja

$$\int_{\partial\Omega} t \vec{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} t dV.$$

*Dokaz.* Naj bo  $\vec{a}$  poljuben konstanten vektor. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \left( \int_{\partial\Omega} t \vec{n} dS \right) &= \int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot t \vec{n} dS = \int_{\partial\Omega} t^T \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}(t^T \vec{a}) dV = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(t) \cdot \vec{a} dV = \left( \int_{\Omega} \operatorname{div} t dV \right) \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

Pri računu smo uporabili definicijo  $t^T$ , definicijo divergence in Gaussov izrek za vektorska polja. Ker enakost velja za vsak vektor  $\vec{a}$ , velja tudi enakost vektorskih polj v izreku.  $\square$

**Definicija 1.4.** Gradient vektorskega polja  $\vec{v}$  je tenzor drugega reda, definiran kot

$$(\operatorname{grad} \vec{v})^T \vec{a} = \operatorname{grad}(\vec{v} \cdot \vec{a}).$$

V koordinatah je  $(\operatorname{grad} \vec{v})_{ij} = \vec{v}_{i,j}$ .

**Opomba 1.5.** Gradient vektorskega polja je diferencial (oz. v neki bazi Jacobijeva matrika) preslikave  $\vec{x} \mapsto \vec{v}(\vec{x})$  in ga označujemo tudi kot  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}}$ .

**Definicija 1.6.** Laplaceov operator je na vektorskem polju  $\vec{v}$  definiran kot

$$\operatorname{lap} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v}.$$

Pokažimo še nekaj osnovnih trditev, ki jih bomo potrebovali pri kasnejših izpeljavah.

**Trditev 1.7.** Za poljubno vektorsko polje  $\vec{v}$  velja

$$\operatorname{tr} \operatorname{grad} \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v}.$$

*Dokaz.*

$$\operatorname{tr} \operatorname{grad} \vec{v} = (\operatorname{grad} \vec{v})_{ii} = \vec{v}_{i,i} = \operatorname{div} \vec{v}. \quad \square$$

**Trditev 1.8.** Za poljubno vektorsko polje  $\vec{v}$  velja

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{v}^T) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}.$$

*Dokaz.*

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{v}^T)_i = (\operatorname{grad} \vec{v}^T)_{ij,j} = (\operatorname{grad} \vec{v})_{ji,j} = \vec{v}_{j,ij} = (\operatorname{grad}(\vec{v}_{j,j}))_i = (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v})_i. \quad \square$$

**Trditev 1.9.** Za poljubno skalarno polje  $\varphi$  velja

$$\operatorname{div}(\varphi I) = \operatorname{grad} \varphi.$$

*Dokaz.*

$$(\operatorname{div}(\varphi I))_i = (\varphi I)_{ij,j} = (\varphi \delta_{ij})_{,j} = \varphi_{,i} = (\operatorname{grad} \varphi)_i \quad \square$$

**Trditev 1.10.** Za poljubno vektorsko polje  $\vec{v}$  in tenzor  $t$  velja

$$\operatorname{div}(t^\top \vec{v}) = \vec{v} \cdot \operatorname{div} t + t : \operatorname{grad} \vec{v}.$$

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(t^\top \vec{v}))_i &= (t^\top \vec{v})_{i,i} = (t_{ij}^\top \vec{v}_j)_{,i} = t_{ij,i}^\top \vec{v}_j + t_{ij}^\top \vec{v}_{j,i} = t_{ji,i} \vec{v}_j + t_{ji} \vec{v}_{j,i} = \\ &= (\operatorname{div} t)_j \vec{v}_j + t : \operatorname{grad} \vec{v} = \operatorname{div} t \cdot \vec{v} + t : \operatorname{grad} \vec{v} \end{aligned} \quad \square$$

### 1.3 Osnovni izreki funkcionalne analize

Ponovimo še nekaj osnovnih definicij in izrekov funkcionalne analize, ki jih bomo potrebovali pri obravnavi enoličnosti in obstoje rešitve linearnih parcialnih diferencialnih enačb.

**Definicija 1.11.** Prostor *Soboljeva*  $W_{k,p}(\Omega)$  za  $k \in \mathbb{N}$  in  $p \in [1, \infty)$  nad domeno  $\Omega$  je definiran kot

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}; D^\alpha u \in L^p \text{ za vsak } |\alpha| \leq k\}.$$

Pri tem je  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  multiindeks,  $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$  in  $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} f$ .

Prostore Soboljeva opremimo z normo

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Obstajajo tudi druge pogoste definicije norme, vendar vse pogosto uporabljene definicije definirajo ekvivalentne norme. V zgoraj definirani normi so prostori  $W^{k,p}(\Omega)$  Banachovi. Za poseben primer  $p = 2$  označimo  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$  in ta prostor je Hilbertov. Z  $H_0^k(\Omega)$  označimo podprostor  $H^k(\Omega)$ , katerega funkcije so na robu  $\Omega$  enake 0.

**Trditev 1.12.** Vložitev  $\iota : V \rightarrow W$  med Banachovima prostoroma je zvezna natanko tedaj, ko obstaja konstanta  $C$ , da je za vsak  $v \in V$  velja

$$\|\iota v\|_W \leq C \|v\|_V.$$

*Dokaz.* Linearni operator je zvezen natanko tedaj, ko je omejen. Ocenimo njegovo normo:

$$\|\iota\| = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|\iota v\|_W}{\|v\|_V} \leq C. \quad \square$$

**Trditev 1.13** (Kornova neenakost). Za vsako funkcijo  $\vec{u} \in [H_0^1(\Omega)]^3$  in pozitivno definiten tenzor  $C$  velja.

$$\int_{\Omega} (\|\vec{u}\|_2^2 + \|\text{grad } \vec{u}\|^2) dV \leq c_1 \int_{\Omega} \frac{1}{4} (\text{grad } \vec{u} + \text{grad } \vec{u}^T) : C : (\text{grad } \vec{u} + \text{grad } \vec{u}^T) dV,$$

za neko konstanto  $c_1$  neodvisno od  $\vec{u}$ .

**Izrek 1.14** (Rellich–Kondrachov). Naj bo  $\Omega$  domena v  $\mathbb{R}^d$  z odsekoma glatkim robom in  $1 \leq p < d$ . Naj bo  $p^* = \frac{dp}{d-p}$ . Potem lahko prostor Soboljeva  $W^{k,p}(\Omega)$  zvezno vložimo v prostor  $L^{p^*}(\Omega)$  in kompaktno vložimo v  $L^q(\Omega)$  za  $1 \leq q < p^*$ .

Za mnogoterost  $\Omega$  dimenzije  $d$  z odsekoma glatkim robom za  $k > \ell$  in  $k - \frac{d}{p} > \ell - \frac{d}{q}$  je vložitev

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{\ell,q}(\Omega)$$

kompaktna.

**Opomba 1.15.** Za poseben primer  $d = 3$  in  $p = 2$  dobimo  $p^* = 6$  in s tem zvezno vložitev

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega).$$

Za primer ploskve ( $d = 2$ ) pri  $k = 1$  in  $\ell = 0$  dobimo, da je vložitev

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

zvezna za  $1 \leq q < 4$ ? To mi ni jasno kako, druga točka izreka 2.16.4 v [1].

**Izrek 1.16** (Riezsov reprezentacijski izrek). Naj bo  $H$  realen Hilbertov prostor in  $H^*$  njegov dualen prostor, torej prostor vseh zveznih linearnih funkcionalov na  $H$ . Tedaj obstaja izometrični izomorfizem  $\Phi: H \rightarrow H^*$ .

Bolj običajno se izrek pove na drugačen način.

**Posledica 1.17.** Naj bo  $H$  Hilbertov prostor in  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  zvezen linearen funkcional na  $H$ . Tedaj obstaja natanko en element  $x_f \in H$ , da je za vsak  $y \in H$

$$f(y) = \langle y, x_f \rangle.$$

Poleg tega velja še  $\|x_f\| = \|f\|$ .

**Opomba 1.18.** Preslikava  $\Phi$  iz izreka 1.16 priredi vsakemu  $x_f \in H$  njegov  $f \in H^*$  iz posledice 1.17.

## 2 Teorija linearne elastičnosti

Teorija linearne elastičnosti govori o deformaciji in napetostih v trdninah kot posledici delovanja zunanjih obremenitev. Trdnine modeliramo kot kontinuum in s tem ignoriramo njihovo atomsko strukturo, saj jih obravnavamo kot zvezno maso, ki zavzema celoten prostor, ki ga zaseda in ne kot diskreten sistem delcev. Prav tako bomo predpostavili zveznost in gladkost količin, povezanih s trdnino. To nam da možnost, da kontinuum delimo na poljubno majhne dele in s tem dobimo osnovo za uporabo teorije infinitezimalnega računa. S pomočjo tega in privzetih fizikalnih zakonov bomo izpeljali diferencialne enačbe, ki bodo opisovale deformacije in

napetosti v materialu. Izkaže se, da ta teorija zelo dobro opisuje materiale, ki se uporabljajo v gradbeništvu kot so železo, jeklo in steklo in je zaradi tega zelo pogosto uporabljena, paketi za numerično analizo strukture zgradb pa so doživeli velik razvoj in komercialni uspeh.

Začnimo s tem, da natančno definiramo pojme kot so telo in gibanje, s pomočjo katerih bomo izpeljali enačbe, ki opisujejo pojave v našem interesu. Osnovna predstavitev teorije bo povzeta po [2].

## 2.1 Osnove gibanja

**Definicija 2.1.** *Materialno telo*  $\mathcal{B}$  je odprta povezana podmnožica v  $\mathbb{R}^3$  z odsekoma glatkim robom skupaj z družino bijekcij

$$\chi = \{\chi: \mathcal{B} \rightarrow \chi(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3\},$$

da je za vsaki  $\chi_1, \chi_2 \in \chi$  preslikava  $\chi_2 \circ \chi_1^{-1}: \chi_1(\mathcal{B}) \rightarrow \chi_2(\mathcal{B})$  difeomorfizem.

Preslikavam  $\chi \in \chi$  pravimo *konfiguracije* telesa. Odlikovani konfiguraciji  $\chi_R$  pravimo *referenčna konfiguracija* in območje, ki ga telo zaseda v tej konfiguraciji bomo označevali z  $B$ , torej  $B = \chi_R(\mathcal{B})$ .

**Definicija 2.2.** Gibanje telesa  $\mathcal{B}$  je gladka družina konfiguracij

$$\{\chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \chi_t(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}.$$

Tem konfiguracijam pravimo *prostorske konfiguracije*. Območje, ki ga telo zaseda v prostorski konfiguraciji ob času  $t$  označujemo z  $B_t$ , torej  $B_t = \chi_t(\mathcal{B})$ .

Koordinatam telesa v referenčni konfiguraciji pravimo *referenčne koordinate* in jih pišemo z velikimi tiskanimi črkami, npr.  $\vec{X} \in \chi_R(\mathcal{B})$ . Koordinatam telesa v prostorski konfiguraciji pravimo *prostorske koordinate* in jih pišemo z malimi črkami, npr.  $\vec{x} \in \chi_t(\mathcal{B})$ .

Gladkost gibanja glede na  $t$  iz definicije 2.2 pomeni, da je preslikava

$$\begin{aligned} \tilde{x}: \mathbb{R} \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \vec{X}) &\mapsto \chi_t(\chi_R^{-1}(\vec{X})) \end{aligned}$$

gladka kot funkcija iz  $\mathbb{R}^4$  v  $\mathbb{R}^3$ . Preslikava  $\tilde{x}$  nam podaja zvezo med prostorskimi in referenčnimi koordinatami

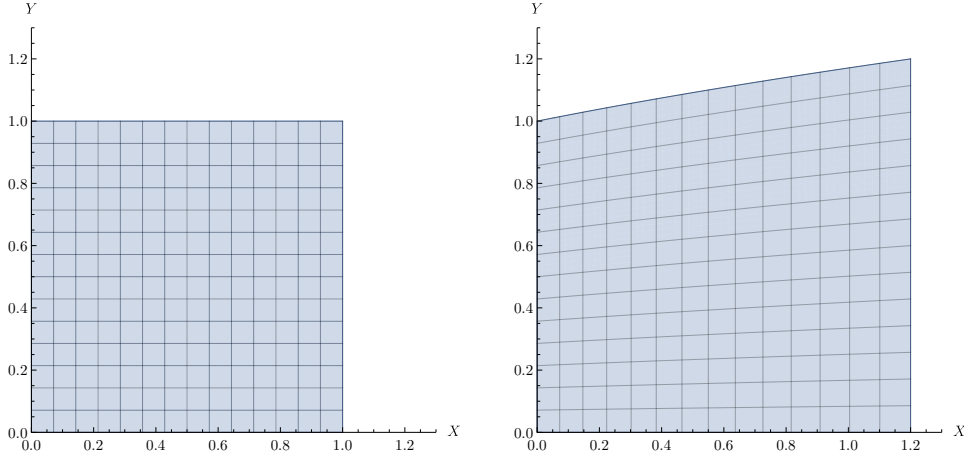
$$\vec{x} = \tilde{x}(t, \vec{X}).$$

Pogosto opustimo strog zapis s preslikavami in pišemo kar  $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{X})$ . Ker je za vsak  $t$  preslikava  $\vec{X} \mapsto \vec{x}(t, \vec{X})$  difeomorfizem, lahko funkcijo obrnemo in izrazimo tudi referenčne koordinate kot funkcijo prostorskih  $\vec{X} = \vec{X}(t, \vec{x})$ .

Pogosto za referenčno konfiguracijo vzamemo kar konfiguracijo na začetku gibanja,  $\chi_R = \chi_{t=t_0}$ , ni pa nujno temu tako.

**Primer 2.3.** Pišimo vektorje na daljše kot  $\vec{X} = (X, Y, Z)$  in  $\vec{x} = (x, y, z)$ . Naj bo dano gibanje

$$\vec{x}(t, X, Y, Z) = (X + tX^2, Y + tXY, Z),$$



Slika 1: Prerez enotske kocke pri  $Z = 0$  v referenčni konfiguraciji in v prostorski konfiguraciji ob času  $t = 0.2$ .

za  $0 < X, Y, Z < 1$ . Ob času  $t = 0$  je telo v referenčni konfiguraciji. Telo v referenčni in prostorski konfiguraciji je prikazano na sliki 1. Za vsak  $t \geq 0$  je  $\vec{x}$  difeomorfizem, saj velja

$$\det \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial (X, Y, Z)} \right) = (1 + tX)(1 + 2tX) > 0.$$

Zato lahko izrazimo obratno preslikavo

$$\vec{X}(t, x, y, z) = \left( \frac{\sqrt{4tx + 1} - 1}{2t}, \frac{y(\sqrt{4tx + 1} - 1)}{2tx}, z \right). \quad (2.1)$$

Vsako količino  $\varphi$  definirano na telesu  $\mathcal{B}$ , kot na primer temperaturo ali hitrost, lahko zapišemo na dva načina, v prostorskih ali v referenčnih koordinatah. Za funkcijo

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: B &\rightarrow \varphi(\mathcal{B}) \\ \vec{X} &\mapsto \varphi(\chi_R^{-1}(\vec{X})), \end{aligned} \quad (2.2)$$

pravimo, da je zapisana v referenčnih koordinatah in pišemo  $\tilde{\varphi} = \varphi(\vec{X})$ . Podobno za funkcijo

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}: B_t &\rightarrow \varphi(\mathcal{B}) \\ \vec{x} &\mapsto \varphi(\chi_t^{-1}(\vec{x})), \end{aligned} \quad (2.3)$$

pravimo, da je zapisana v prostorskih koordinatah in pišemo  $\hat{\varphi} = \varphi(\vec{x})$ . Med obema zapisoma lahko prehajamo s pomočjo izražave  $\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}(t, \vec{X}))$  ali  $\varphi(\vec{X}) = \varphi(\vec{X}(\vec{x}, t))$ .

Podoben zapis bomo uporabljali tudi pri diferencialnih operatorjih. Pri odvodih moramo povedati, ali na količino gledamo v prostorskih ali v referenčnih koordinatah. Z velikimi črkami bomo pisali operatorje, kjer odvajamo glede na referenčne koordinate, z malimi pa tiste, kjer odvajamo glede na prostorske.

**Primer 2.4.** Damo imamo količino  $\vartheta(t, X, Y, Z) = tX^2 + 2ZY$ , ki je zapisana v referenčnih koordinatah. Če jo zapišemo v prostorskih s pomočjo izpeljane inverzne relacije (2.1) iz primera 2.3, dobimo

$$\vartheta(t, x, y, z) = \frac{2tx^2 + 2yz(\sqrt{4tx+1}-1) - x\sqrt{4tx+1} + x}{2tx}.$$

Da demonstriramo še uporabo diferencialnih operatorjev, izračunajmo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta}{\partial Y} &= 2Z \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{z(\sqrt{4tx+1}-1)}{tx}.\end{aligned}$$

Te odvode bi zopet lahko zapisali kot funkcije referenčnih ali prostorskih koordinat. Podobno se obnašajo časovni odvodi.

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\vartheta &= X^2 \\ \frac{d}{dt}\vartheta &= -\frac{(-2tx + \sqrt{4tx+1}-1)(x-2yz)}{2t^2x\sqrt{4tx+1}}.\end{aligned}$$

Če vidimo izraz  $\frac{D\vartheta}{Dt}(t, x, y, z)$ , torej časovni odvod pri konstantnih referenčnih koordinatah izraza, zapisanega v prostorskih koordinatah, ga izračunamo tako, da izraz prevedemo v referenčne koordinate, odvajamo po času in prenesemo nazaj na prostorske koordinate. S simboli lahko to zapišemo kot

$$\left(\frac{D}{Dt}\vartheta\right)(t, \vec{x}) = \left(\frac{D}{Dt}\vartheta(\vec{x}(t, \vec{X}))\right)(\vec{X}(t, \vec{x})).$$

Gibanje, kot opisano sedaj, res modelira makroskopsko gibanje, kot ga poznamo iz resničnega sveta. Pogoji gladkosti zagotavljajo, da telesa ne morejo kar izginiti in se pojaviti drugje, ter da se ne morejo sploščiti ali sekati samih sebe. Sedaj definirajmo še pojma pomika, hitrosti in pospeška.

**Definicija 2.5.** Količino

$$\vec{u}(\vec{X}) = \vec{x}(t, \vec{X}) - \vec{X}$$

imenujemo *pomik*. Količino

$$\vec{v}(\vec{X}) = \frac{D\vec{x}}{Dt}(t, \vec{X})$$

imenujemo *hitrost*. Količino

$$\vec{a}(\vec{X}) = \frac{D\vec{v}}{Dt}(t, \vec{X})$$

imenujemo *pospešek*.

**Trditev 2.6.** Odvod po času v referenčnem koordinatnem sistemu se lahko direktno izračuna v prostorskem kot

$$\frac{D\varphi}{Dt}(t, \vec{x}) = \frac{d\varphi}{dt}(t, \vec{x}) + ((\text{grad } \varphi)(t, \vec{x}))\vec{v}(t, \vec{x}).$$

*Dokaz.* Po definiciji najprej prenesemo  $\varphi$  v referenčni koordinatni sistem z uporabo 2.2. Nato odvajamo po verižnem pravilu

$$\begin{aligned}\frac{D\varphi}{Dt}(t, \vec{x}) &= \frac{D\varphi}{Dt}(t, \vec{x}(t, \vec{X})) = \frac{d\varphi}{dt}(t, \vec{x}) + \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}} \frac{D\vec{x}}{Dt}(t, \vec{X}) = \\ &= \frac{d\varphi}{dt}(t, \vec{x}) + ((\text{grad } \varphi)(t, \vec{x}))\vec{v}(t, \vec{X}(\vec{x}, t)).\end{aligned}\quad \square$$

Poleg že naštetih količin pa imajo telesa tudi druge fizikalne lastnosti, kot so masa in volumen, ki vplivajo na gibanje. Za modeliranje teh si pomagamo z merami.

**Definicija 2.7.** Predpostavimo, da imamo na  $\mathcal{B}$  definirani dve Radonovi meri,  $m$  in  $V$ , ki nam predstavljata maso in volumen. Predpostavimo še, da je  $m \ll V$ , torej, če je volumen nekega podtelesa nič, je tudi njegova masa nič. Od tod po Radon-Nikodymovem izreku sledi, da obstaja merljiva funkcija  $\rho = \frac{dm}{dV}$ , da velja

$$m(A) = \int_A \rho dV$$

za vsako merljivo podmnožico  $A \subseteq \mathcal{B}$ . Funkciji  $\rho: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$  pravimo *gostota*.

**Opomba 2.8.** Ponavadi za  $V$  vzamemo kar Lebesgueovo mero na  $\mathbb{R}^3$ , mero  $m$  pa podamo tako, da podamo gostoto telesa  $\rho$ . Meri  $m$  in  $V$  s potiskom prek konfiguracij razširimo na referenčni in prostorski položaj.

### 2.1.1 Aksiomi gibanja

Iz mehanike točke in iz resničnega sveta vemo, da gibanje zadošča nekim zakonom, ki jih bomo za nadaljnje izpeljave privzeli kot aksiome.

**Aksiom 1** (Zakon o ohranitvi mase). Za vsako telo  $\mathcal{B}$  in vsako njegovo gibanje velja

$$\frac{D}{Dt}m(B_t) = 0. \quad (2.4)$$

Masa se med gibanjem niti ne izgublja niti ne nastaja in je vseskozi konstantna.

Druga dva aksioma bosta poleg mase imela opraviti s silami. Predpostavili bomo, da lahko sile na telo delujejo na dva načina: kot telesne sile ali pa kot površinske sile.

**Definicija 2.9.** *Volumenska gostota sile*  $\vec{f}$  je zvezna funkcija  $\vec{f}: B_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ . *Površinska gostota sile*  $\vec{t}$  je zvezna funkcija  $\vec{t}: \partial B_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Aksiom 2** (Zakon o ohranitvi gibalne količine). Za vsako telo  $\mathcal{B}$  velja

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \vec{v} dm = \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \vec{t} dS. \quad (2.5)$$

Sprememba gibalne količine je enaka vsoti vseh sil, ki delujejo na telo.

**Aksiom 3** (Zakon o ohranitvi vrtilne količine). Za vsako telo  $\mathcal{B}$  velja

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \vec{x} \times \vec{v} dm = \int_{B_t} \vec{x} \times \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \vec{x} \times \vec{t} dS. \quad (2.6)$$

Sprememba vrtilne količine je enaka vsoti vseh zunanjih navorov, ki delujejo na telo.

**Opomba 2.10.** Pri aksiomu 3 smo predpostavili, da na kontinuum ne delujejo notranji, ampak da so vsi navori posledica delovanja zunanjih sil. Drugače povedano, predpostavili smo *nepolarnost* kontinuuma.

V vseh treh aksiomih nastopa odvod po času v referenčnih koordinatah nekega integrala, zapisanega v prostorskih koordinatah. Tu ne velja običajen izrek o odvajanju pod integralom, zato moramo izraz pod integralom najprej prenesti v referenčne koordinate, zamenjati odvod in integral, nato pa ga prenesti nazaj. Naredimo to najprej za aksiom o ohranitvi mase.

**Trditev 2.11.** *Masa se ohranja ( $\frac{D}{Dt}m(B_t) = 0$ ) natanko tedaj, ko je*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.7)$$

*Dokaz.* Trditev pokaže direkten račun, kjer bomo zamenjali integralsko spremenljivko iz  $\vec{x}$  na  $\vec{X}$  in nato nazaj. Pri uvedbi nove spremenljivke se bo v integralu pojavila determinanta  $f = \det(F)$  diferenciala prehodne preslikave  $F = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}$ , prav tako pa tudi njen odvod  $\frac{DJ}{Dt}$ , zato ga izračunajmo vnaprej:

$$\begin{aligned} \frac{DJ}{Dt} &= \operatorname{tr} \left( \operatorname{adj}(F) \frac{DF}{Dt} \right) = \operatorname{tr} \left( \det(F) F^{-1} \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \vec{X} \partial t} \right) = \det(F) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{X}} F^{-1} \right) = \\ &= \det(F) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{X}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}} \right) = \det(F) \operatorname{tr} (\operatorname{grad} \vec{v}) = \det(F) \operatorname{div} \vec{v}. \end{aligned}$$

Pri tem smo uporabili Jacobijevo formulo za računanje odvoda determinante, ciklično lastnost sledi, formulo za računanje odvoda inverza in verižno pravilo. Sedaj imamo vse pripravljeno za glavni izračun.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{Dt}m(B_t) = \frac{D}{Dt} \int_{B_t} dm = \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \rho dV = \frac{D}{Dt} \int_B \rho J dV = \\ &= \int_B \frac{D}{Dt}(\rho J) dV = \int_B \left( \frac{D\rho}{Dt} J + \rho \frac{DJ}{Dt} \right) dV = \\ &= \int_B \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) J dV = \int_{B_t} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dV. \end{aligned}$$

Ker je integral nič za vsako telo, mora biti nujno integrand nič, in obratno, če je integrand nič, se masa ohranja.  $\square$

Zgornjo trditev bomo s pridom uporabili pri izračunu odvoda integrala splošne količine.

**Trditev 2.12.** *Naj bo  $\varphi$  neka količina in privzemimo aksiom o ohranitvi mase. Potem velja*

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \varphi dm = \int_{B_t} \frac{D\varphi}{Dt} dm. \quad (2.8)$$



*Dokaz.* Postopamo enako kot v prejšnji trditvi. Izračunamo

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \varphi dm &= \frac{D}{Dt} \int_B \varphi \rho J dV = \int_B \frac{D(\varphi \rho J)}{Dt} dV = \\
&= \int_B \left( \frac{D\varphi}{Dt} \rho J + \varphi \underbrace{\left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right)}_{=0 \text{ po (2.7)}} \right) dV = \\
&= \int_B \frac{D\varphi}{Dt} \rho J dV = \int_{B_t} \frac{D\varphi}{Dt} dm. \quad \square
\end{aligned}$$

## 2.2 Napetostni tenzor

Predstavljajmo si, da na telo deluje neka površinska sila z gostoto  $\vec{t}$ . Ta sila deluje na zunanjo površino telesa, nato pa se prenaša skozi telo od točke do točke. Skozi telo potegnimo namišljeno ravnino, ki ga razdeli na dva dela. Na tej površini en del kontinuuma deluje na drug del, toda ekvivalentno bi bilo, če bi enega izmed teh delov odstranili in na površino preostanka delovali z enakimi silami, kot je prej deloval drugi del.

Ta razmislek nam ponuja naslednji opis notranjih in površinskih sil telesa. V nekem trenutku  $t$  v času se postavimo v neko točko  $\vec{x}$  v telesu in skozi izbrano točko potegnemo ravnino z normalo  $\vec{n}$ . Tedaj obstaja vektor  $\vec{t}$ , ki predstavlja silo, s katero kontinuum z ene strani ravnine deluje v tej točki na tistega na drugi strani. Poleg tega, če potegnemo katero koli drugo ploskev skozi točko  $\vec{x}$  z enako normalo  $\vec{n}$ , bo vektor  $\vec{t}$ , še vedno enak, saj bo kontinuum deloval z enako silo. Temu razmisleku se reče *Cauchyjeva hipoteza*.

**Aksiom 4** (Cauchyjeva hipoteza). V telesu obstaja vektorsko polje  $\vec{t}$  inducirano s površinskimi silami, ki je odvisno samo od položaja, časa in normale na površino (resnično ali namišljeno), kjer ga opazujemo. S simboli lahko zapišemo

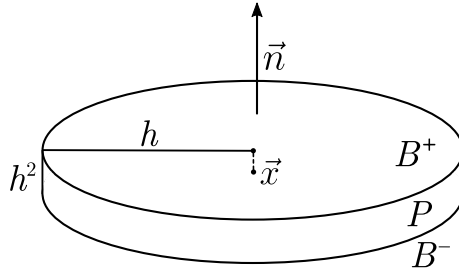
$$\vec{t} = \vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n}).$$

Iz zgornjega razmisleka se zdi, da bi morala biti sila, s katero prvi del kontinuuma deluje na drugega, nasprotno enaka sili, s katero drugi deluje na prvega. Temu se reče tudi tretji Newtonov zakon za mehaniko kontinuuma in ga ni treba privzeti kot aksiom, ampak lahko dokažemo iz do sedaj privzetih aksiomov. Dokaza tega in naslednjega izreka bosta povzeta po dokazih iz [3, str. 104–107].

**Trditev 2.13** (Cauchyjeva recipročna relacija).

$$\vec{t}(t, \vec{x}, -\vec{n}) = -\vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n}). \quad (2.9)$$

*Dokaz.* Izberimo trenutek v času  $t$  in točko  $\vec{x}$ . Krajše pišimo  $\vec{t}_{\vec{n}} = \vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n})$ . Oglejmo si podtelo v obliki krožnega valja z višino  $h^2$  in radijem  $h$ , ki ima v središču točko  $\vec{x}$  in je  $\vec{n}$  normala na eno izmed osnovnic. Tako podtelo zaradi odprtosti  $\mathcal{B}$  gotovo obstaja za dovolj majhen  $h$ . Označimo osnovnico z normalo  $\vec{n}$  z  $B^+$ , nasprotno z  $B^-$  in plašč s  $P$ . Površina vsake osnovnice je  $\pi h^2$ , površina plašča pa  $2\pi h^3$ . Volumen valja je  $\pi h^4$ . Primer valja je prikazan na sliki 2.



Slika 2: Valj, uporabljen v dokazu Caucyjeve recipročne relacije.

Uporabimo za ta valj aksiom o gibalni količini (2.5):

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \vec{v} dm = \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \vec{t} dS.$$

Po trditvi 2.12 lahko zamenjamo odvod in integral, rob valja razpišimo po ploskvah:

$$\int_{B_t} \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho dV = \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{B^+} \vec{t}_{\vec{n}} dS + \int_{B^-} \vec{t}_{-\vec{n}} dS + \int_P \vec{t}_{\vec{m}(\vec{x})} dS.$$

Vektor  $\vec{m}(\vec{x})$  pri tem označuje normalo na plašč valja. Sedaj na vsakem od integralov uporabimo izrek o povprečni vrednosti

$$V(B) \left( \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) (\vec{x}_1) = V(B) \vec{f}(\vec{x}_2) + S(B^+) \vec{t}_{\vec{n}}(\vec{x}_3) + S(B^-) \vec{t}_{-\vec{n}}(\vec{x}_4) + S(P) \vec{t}_{\vec{m}(\vec{x})}(\vec{x}_5),$$

kjer so  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5$  neke vmesne točke v ali na površini valja. Če vstavimo notri izraze za volumen in površine ploskev dobimo

$$\pi h^4 \left( \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) (\vec{x}_1) = \pi h^4 \vec{f}(\vec{x}_2) + \pi h^2 \vec{t}_{\vec{n}}(\vec{x}_3) + \pi h^2 \vec{t}_{-\vec{n}}(\vec{x}_4) + 2\pi h^3 \vec{t}_{\vec{m}(\vec{x})}(\vec{x}_5).$$

Celoten izraz delimo z  $\pi h^2$  in pogledamo limito  $h \rightarrow 0$ , gredo vse točke  $\vec{x}_i$  proti  $\vec{x}$  in dobimo

$$0 = \vec{t}_{\vec{n}}(\vec{x}) + \vec{t}_{-\vec{n}}(\vec{x}),$$

kar je točno to, kar smo želeli pokazati. □

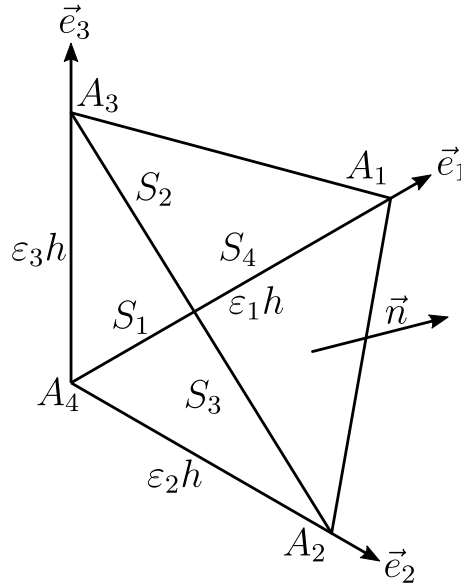
Izkaže se, da velja še več: vektor  $\vec{t}$  je linearno odvisen od normale. S pomočjo prejšnje trditve lahko pokažemo naslednji izrek, ki nam da na voljo matematični objekt, s pomočjo katerega lahko opišemo napetost v materialu.

**Izrek 2.14** (Caucyjev izrek o napetosti). *Obstaja tenzor  $\sigma$ , tako da velja*

$$\vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n}) = \sigma(t, \vec{x}) \vec{n}.$$

*Tenzor  $\sigma$  se imenuje Caucyjev napetostni tenzor.*

*Dokaz.* Podobno kot pri Caucyjevi recipročni relaciji si izberimo majhno telo okoli točke  $\vec{x}$ . Tokrat naj bo to tetraeder z tremi stranicami, vzporednimi koordinatnim osem in normalo  $\vec{n}$  na ploskev, ki jo razpenjajo preostale tri stranice, kot prikazano na sliki 3.



Slika 3: Tetraeder, uporabljen za dokaz Caucyjevega izreka o napetosti.

Označimo oglišča tetraedra z  $A_1, A_2, A_3, A_4 = \vec{x}$  in ploskev nasproti izbranega oglišča z  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Ploščine teh ploskev označimo z  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Naj bodo pravokotne stranice tetraedra dolge  $\varepsilon_1 h, \varepsilon_2 h$  in  $\varepsilon_3 h$ , kjer razmerje  $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3$  določimo tako, da je normala na  $S_4$  enaka  $\vec{n}$ . Celotna situacija je prikazana na sliki 3. Sedaj lahko izračunamo ploščine ploskev  $a_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_2\varepsilon_3h^2$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3h^2$  in  $a_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2h^2$ . Volumen tetraedra je  $V = \frac{1}{6}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3h^3$ . Vektorje v smeri koordinatnih osi standardno označimo z  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Zunanja normala na ploskev  $S_1$  je  $-\vec{e}_1$ , na ploskev  $S_2$  je  $-\vec{e}_2$  in na ploskev  $S_3$  je  $-\vec{e}_3$ . Normalo na preostalo ploskev, ki bo dolga ravno toliko, kot je ploščina te ploskve, dobimo s pomočjo vektorskega produkta stranic, ki jo oklepata.

$$\begin{aligned} a_4\vec{n} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 h\vec{e}_1 - \varepsilon_2 h\vec{e}_2) \times (\varepsilon_3 h\vec{e}_3 - \varepsilon_2 h\vec{e}_2) = \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon_2\varepsilon_3h^2\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3h^2\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2h^2\vec{e}_3 = \\ &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Če to pomnožimo z  $i$ -tim baznim vektorjem, dobimo  $a_i = (\vec{n} \cdot \vec{e}_i)a_4$ . Zopet uporabimo aksiom 2 o ohranitvi gibalne količine in izrek o povprečni vrednosti

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \vec{v} dm &= \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \vec{t} dS \\ \int_{B_t} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV &= \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{S_1} \vec{t}_{-\vec{e}_1} dS + \int_{S_2} \vec{t}_{-\vec{e}_2} dS + \int_{S_3} \vec{t}_{-\vec{e}_3} dS + \int_{S_4} \vec{t}_{\vec{n}} dS \\ V(\rho \frac{D\vec{v}}{Dt})(\vec{x}_1) &= V\vec{f}(\vec{x}_2) + a_1\vec{t}_{-\vec{e}_1}(\vec{x}_3) + a_2\vec{t}_{-\vec{e}_2}(\vec{x}_4) + a_3\vec{t}_{-\vec{e}_3}(\vec{x}_5) + a_4\vec{t}_{\vec{n}}(\vec{x}_6), \end{aligned}$$

pri čemer so  $\vec{x}_i$ , kot v prejšnjem dokazu, neke točke v notranjosti ali na površini tetraedra. Sedaj enačbo delimo z  $a_4$  in pošljemo limito  $h \rightarrow 0$ . Vse točke  $\vec{x}_i$  limitirajo

proti  $\vec{x}$ , člena, ki vsebujeta volumen tetraedra, pa se približujeta 0. Z upoštevanjem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_i}{a_4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\vec{n} \cdot \vec{e}_i)a_4}{a_4} = \vec{n} \cdot \vec{e}_i$$

dobimo

$$0 = \vec{t}_{\vec{n}} + \sum_{i=1}^3 (\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \vec{t}_{-\vec{e}_i}.$$

Uporabimo še Caucyjevo recipročno relacijo (2.9) in dobimo

$$\vec{t}_{\vec{n}} = \sum_{i=1}^3 (\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \vec{t}_{\vec{e}_i}.$$

Ta zveza nam pove, kako je napetost na poljubni ploskvi povezana z napetostmi na koordinatnih ploskvah. To nam dovoljuje definicijo *Caucyjevega napetostnega tenzorja*  $\sigma$

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 \vec{t}_{\vec{e}_i} \otimes \vec{e}_i,$$

za katerega res velja

$$\sigma \vec{n} = \sum_{i=1}^3 (\vec{t}_{\vec{e}_i} \otimes \vec{e}_i)(\vec{n}) = \sum_{i=1}^3 (\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \vec{t}_{\vec{e}_i} = \vec{t}_{\vec{n}}. \quad \square$$

## 2.3 Enačbe gibanja

V tem razdelku bomo iz aksiomov izpeljali lokalne enačbe gibanja, tako da jih bomo iz integralske oblike prevedli v diferencialno. Prevedimo najprej aksiom 2 o ohranitvi gibalne količine.

**Izrek 2.15** (Caucyjeva momentna enačba). *Za gibanje kontinuuma velja Caucyjeva momentna enačba*

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} + \operatorname{div} \sigma. \quad (2.10)$$

*Dokaz.* Za vsako telo s prostorsko konfiguracijo  $B_t$  velja

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \vec{v} dm &= \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \vec{t} dS \\ \int_{B_t} \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho dV &= \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \sigma \vec{n} dS \\ \int_{B_t} \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho dV &= \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{B_t} \operatorname{div} \sigma dV \\ 0 &= \int_{B_t} \left( \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho - \vec{f} - \operatorname{div} \sigma \right) dV. \end{aligned}$$

V računu smo uporabili Gaussov izrek 1.3 za tenzorje drugega reda in izrek 2.12 o menjavi odvoda in integrala. Ker mora biti končni integral nič za vsako telo, mora biti integrand nič, kar dokaže našo enačbo.  $\square$

Do sedaj še nismo uporabili aksioma 3 o vrtilni količini. Njegova lokalna oblika se prevede na zelo enostavno trditev o simetriji Caucyjevega napetostnega tenzorja.

**Trditev 2.16.** *Caucyjev napetostni tenzor je simetričen:*

$$\sigma^T = \sigma.$$

*Dokaz.* Začnimo z zakonom o vrtilni količini (2.6) in ga prevedimo v lokalno obliko.

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \vec{x} \times \vec{v} dm = \int_{B_t} \vec{x} \times \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \vec{x} \times \vec{t} dS.$$

Posvetimo se zadnjemu členu in ga pomnožimo s konstantnim vektorjem  $\vec{w}$ :

$$\begin{aligned} \left( \int_{\partial B_t} \vec{x} \times \vec{t} dS \right) \cdot \vec{w} &= \int_{\partial B_t} \langle \vec{x}, \vec{t}, \vec{w} \rangle dS = \int_{\partial B_t} \langle \vec{w}, \vec{x}, \vec{t} \rangle dS = \\ &= \int_{\partial B_t} (\vec{w} \times \vec{x}) \cdot \vec{t} dS = \int_{\partial B_t} (\vec{w} \times \vec{x}) \cdot \sigma \vec{n} dS = \\ &= \int_{\partial B_t} \sigma^T (\vec{w} \times \vec{x}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial B_t} \sigma^T (\vec{w} \times \vec{x}) \cdot d\vec{S} = \\ &= \int_{B_t} \operatorname{div}(\sigma^T (\vec{w} \times \vec{x})) dV = \\ &= \int_{B_t} [\langle \operatorname{div} \sigma, \vec{w}, \vec{x} \rangle + \sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times \vec{x})] dV. \end{aligned}$$

Zgoraj smo uporabili po vrsti: definicijo in cikličnost mešanega produkta, definicijo  $\sigma^T$ , Gaussov izrek in relacijo iz trditve 1.10.

Podobno z  $\vec{w}$  pomnožimo tudi zakon o vrtilni količini in vstavimo zgornjo relacijo.

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \vec{x} \times \vec{v} dm - \int_{B_t} \vec{x} \times \vec{f} dV - \int_{\partial B_t} \vec{x} \times \vec{t} dS \right) \cdot \vec{w} = \\ &= \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \langle \vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \rangle dm - \int_{B_t} \langle \vec{x}, \vec{f}, \vec{w} \rangle dV - \int_{B_t} [\langle \operatorname{div} \sigma, \vec{w}, \vec{x} \rangle + \sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times \vec{x})] dV = \\ &= \int_{B_t} \left\langle \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}, \vec{w}, \vec{x} \right\rangle dV - \int_{B_t} \langle \vec{f}, \vec{w}, \vec{x} \rangle dV - \int_{B_t} [\langle \operatorname{div} \sigma, \vec{w}, \vec{x} \rangle + \sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times \vec{x})] dV = \\ &= \int_{B_t} \left[ \left\langle \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{f} - \operatorname{div} \sigma, \vec{w}, \vec{x} \right\rangle - \sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times \vec{x}) \right] dV = \\ &= - \int_{B_t} \sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times \vec{x}) dV. \end{aligned}$$

Uporabili smo definicijo in cikličnost mešanega produkta, Caucyjevo momentno enačbo (2.10) in dejstvo, da je

$$\frac{D}{Dt} \langle \vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{x}, \frac{D\vec{v}}{Dt}, \vec{w} \rangle = \langle \frac{D\vec{v}}{Dt}, \vec{w}, \vec{x} \rangle.$$

Ker aksiom o vrtilni količini drži za vsako telo, mora biti

$$\sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times \vec{x}) = 0,$$

za poljuben vektor  $\vec{w}$ . Tenzor  $\text{grad}(\vec{w} \times \vec{x})$  je antisimetričen in vsak antisimetričen tenzor lahko s pomočjo njegovega osnega vektorja zapišemo v tej obliki, zato je zgornja relacija ekvivalentna trditvi, da je

$$\sigma : w = 0$$

za vsak antisimetričen tenzor  $w$ . Torej je  $\sigma \in \text{Asym}(\mathbb{R}^3)^\perp$  in po trditvi 1.1 mora biti  $\sigma$  simetričen.  $\square$

## 2.4 Konstitutivne enačbe

Do sedaj izpeljane enačbe veljajo za poljuben kontinuum, naj bo to tekočina, plastična ali elastična trdnina. V tem razdelku si bomo ogledali enačbe, ki definirajo obnašanje našega kontinuuma kot elastične trdnine preko posplošitve Hookovega zakona, ki povezuje napetosti in deformacijo. Naučili smo se že, kako izražamo napetost, sedaj pa si pogledjmo, kako merimo deformacijo teles. Tukaj bomo tudi privzeli, da je referenčna konfiguracija kar prostorska konfiguracija na začetku gibanja.

### 2.4.1 Mera deformacije

**Definicija 2.17** (Gradient deformacije). Količino  $F = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}(t, \vec{X}) = \text{Grad } \vec{x}$  imenujemo *gradient deformacije*.

Tenzor  $F$  je drugega reda in nam v vsaki točki predstavlja lokalno deformacijo telesa. Privzeli smo že, da je  $\vec{x}$  difeomorfizem, torej je  $F$  neizrojen, dodatno pa bomo privzeli še, da gibanje  $\vec{x}$  ohranja orientacijo, saj so gibanja realnih teles taka. Od tod sledi, da je  $\det F > 0$ . Fizikalno interpretacijo  $F$  dobimo z naslednjim Taylorjevim razvojem:

$$d\vec{x} := \vec{x}(t, \vec{X} + d\vec{X}) - \vec{x}(t, \vec{X}) = Fd\vec{X} + O(d\vec{X}^2).$$

Tenzor  $F$  do prvega reda natančno opiše kako se vektor  $d\vec{X}$  iz referenčne konfiguracije deformira v vektor  $d\vec{x}$  v prostorski konfiguraciji.

Vendar, ni vsa deformacija, ki jo opiše tenzor  $F$  taka, da bi povzročala napetosti. Hookov zakon v eni dimenziji pravi, da je sila sorazmerna raztežku. Če imamo opravka s togim premikom  $\vec{X} \mapsto Q\vec{X} + a$ , ta premik ne bo povzročil nobene napetosti, saj se bo telo samo premaknilo, ne pa raztegnilo.

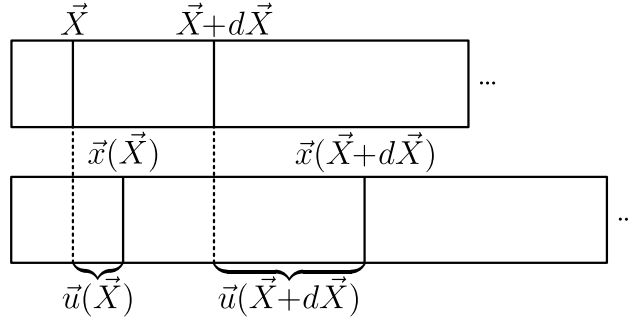
Oglejmo si najprej primer v eni dimenziji.

**Primer 2.18.** Naj bo dana tanka palica kot na sliki 4, ki jo raztegnemo vzdolž njene nosilke. Premik v točki  $\vec{X}$  je  $u(\vec{X}) = \vec{x} - \vec{X}$ , v točki  $\vec{X} + d\vec{X}$  pa  $u(\vec{X} + d\vec{X})$ . Dejanski relativni raztezek delčka palice dolžine  $d\vec{X}$  pa je

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x} - d\vec{X}}{d\vec{X}} &= \frac{\vec{x}(\vec{X} + d\vec{X}) - \vec{x}(\vec{X}) - (\vec{X} + d\vec{X} - \vec{X})}{d\vec{X}} = \\ &= \frac{\vec{u}(\vec{X} + d\vec{X}) - \vec{u}(\vec{X})}{d\vec{X}} = \vec{u}'(\vec{X}) + O(d\vec{X}). \end{aligned}$$

Do prvega reda je relativni raztezek v točki  $\vec{X}$  enak kar  $u'(\vec{X})$ .

Preverimo še, da ta mera raztezka zadošča nekaterim intuitivnim zahtevam. Za togi premik  $\vec{X} \mapsto \vec{X} + c$  je  $\vec{u}(\vec{X}) = c$  in  $\vec{u}'(\vec{X}) \equiv 0$ , kot pričakovano.



Slika 4: Razteg tanke palice vzdolž njene osi.

Za enakomerni razteg  $\vec{X} \mapsto a\vec{X}$  je  $\vec{u}(\vec{X}) = a\vec{X} - \vec{X}$  in  $\vec{u}'(\vec{X}) = a - 1$ . Tudi to ustreza pričakovanjem, saj za  $a = 1$  ni raztezka, za  $a < 1$  je to skrčitev in je raztezek negativen, za  $a > 1$  pa dobimo pozitivno število.

Analogna mera deformacije med točkama  $\vec{X}$  in  $\vec{X} + d\vec{X}$  v višji dimenziji bi bila

$$\varepsilon_1 = \frac{\|d\vec{x}\| - \|d\vec{X}\|}{\|d\vec{X}\|}.$$

Toda veliko lažje je računati s kvadrati norm kot z normami vektorjev, zato je bolj primerna mera

$$\varepsilon_2 = \frac{\|d\vec{x}\|^2 - \|d\vec{X}\|^2}{\|d\vec{X}\|^2}.$$

Ker velja  $\varepsilon_2 = (1 + \varepsilon_1)^2 - 1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2$ , je za majhne pomike  $\varepsilon_2 \approx 2\varepsilon_1$ . Meri sta za majhne pomike torej ekvivalentni.

Izračunajmo infinitezimalno aproksimacijo mere  $\varepsilon_2$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{\|d\vec{x}\|^2 - \|d\vec{X}\|^2}{\|d\vec{X}\|^2} = \frac{\|d\vec{x}\|^2}{\|d\vec{X}\|^2} - 1 = \frac{\|Fd\vec{X} + O(d\vec{X}^2)\|^2}{\|d\vec{X}\|^2} - 1 = \\ &= \frac{d\vec{X}^\top F^\top F d\vec{X} + O(d\vec{X}^3)}{\|d\vec{X}\|^2} - 1 = \frac{d\vec{X}}{\|d\vec{X}\|} \underbrace{(F^\top F - I)}_{2E} \frac{d\vec{X}}{\|d\vec{X}\|} + O(d\vec{X}) \end{aligned}$$

V limiti  $d\vec{X} \rightarrow 0$  lahko mero  $\varepsilon_2$  predstavimo s tenzorjem  $F^\top F - I$ , mero  $\varepsilon_1$  pa s tenzorjem  $E$ .

**Definicija 2.19** (deformacijski tenzor). Količina  $E = \frac{1}{2}(F^\top F - I)$  se imenuje (Cauchy-Greenov) deformacijski tenzor.

**Trditev 2.20.** Deformacijski tenzor  $E$  lahko izrazimo z gradientom pomika kot

$$E = \frac{1}{2} (\text{Grad } \vec{u} + \text{Grad } \vec{u}^\top + \text{Grad } \vec{u}^\top \text{Grad } \vec{u}).$$

*Dokaz.* Trditev pokaže preprost račun. Spomnimo se, da je pomik definiran kot  $\vec{u}(\vec{X}) = \vec{x}(\vec{X}) - \vec{X}$  in je gradient pomika enak

$$\text{Grad } \vec{u}(\vec{X}) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} - I = F - I.$$

Izračunamo:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\text{Grad } \vec{u} + \text{Grad } \vec{u}^\top + \text{Grad } \vec{u}^\top \text{Grad } \vec{u}) = \\
& = \frac{1}{2} (F - I + F^\top - I + (F - I)^\top (F - I)) = \\
& = \frac{1}{2} (F + F^\top - 2I + F^\top F - F - F^\top + I) = \\
& = \frac{1}{2} (F^\top F - I) = \\
& = E.
\end{aligned}$$

□

Deformacijo  $F$  lahko s pomočjo polarnega razcepa zapišemo kot  $F = RU$ , kjer je  $R$  ortogonalna in  $U$  pozitivno definitna matrika. Tenzor  $R$  predstavlja rotacijo,  $U$  pa razteg in strig. Predstavljamo si lahko, da deformacijo  $F$  izvedemo tako, da najprej telo raztegnemo in strižno deformiramo, nato pa zavrtimo v končno lego.

Rotacija  $R$  ne vpliva na rabo materiala, saj je deformacija toga in ne povzroča notranjih napetosti. Prava mera deformacije, ki vpliva na napetost v materialu, torej ne vsebuje nobenih rotacij. Za mero deformacije bi lahko vzeli kar to, koliko se  $U$  razlikuje od identitete, toda polarni razcep matrike je težko izračunati. Poglejmo si kakšno zvezo ima zgoraj definirani deformacijski tenzor  $E$  z  $U$ :

$$E = \frac{1}{2}(F^\top F - I) = \frac{1}{2}(U^\top R^\top RU - I) = \frac{1}{2}(U^2 - I).$$

Vidimo, da  $E$  meri, kako se  $U^2$  razlikuje od identitete, ki predstavlja gibanje brez deformacij.

Kot pri enodimenzionalnem primeru si oglejmo, kako se  $E$  obnaša pri enostavnih deformacijah. Za toge premike imamo želeno obnašanje, kot pokazano v naslednji trditvi.

**Primer 2.21.** Kot prej si oglejmo, da je za toge deformacije  $E = 0$ . Naj bo deformacija toga, torej oblike  $\vec{X} \mapsto Q\vec{X} + c$  z ortogonalno konstantno matriko  $Q$  in konstantnim  $c$ . Tedaj je

$$E = \frac{1}{2}(F^\top F - I) = \frac{1}{2}(Q^\top Q - I) = \frac{1}{2}(I - I) = 0.$$

Oglejmo si še enostavni razteg v smeri osi, dan kot  $\vec{X} \mapsto \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\vec{X}$ . V tem primeru velja  $F = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  in

$$E = \text{diag}\left(\frac{\lambda_1^2 - 1}{2}, \frac{\lambda_2^2 - 1}{2}, \frac{\lambda_3^2 - 1}{2}\right).$$

Če je  $\lambda_i = 1$  je  $E$  res 0, sicer pa so v njegovih diagonalnih komponentah zapisani raztezki vzdolž posameznih osi.

V teoriji linearne elastičnosti se bomo ukvarjali z majhnimi pomiki in majhnimi gradienti pomikov. Zato poenostavimo deformacijski tenzor z geometrijsko linearizacijo: zanemarimo člen  $\text{Grad } \vec{u}^\top \text{Grad } \vec{u}$ .



**Definicija 2.22** (infinitesimalni deformacijski tenzor). Količino

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{Grad } \vec{u} + \text{Grad } \vec{u}^\top) \quad (2.11)$$

imenujemo *infinitesimalni deformacijski tenzor*, ki je geometrijska linearizacija deformacijskega tenzorja.

Pokažimo še naslednjo karaterizacijo, ki pove, da se tudi  $\varepsilon$  za toge pomike obnaša kot pričakovano.

**Trditev 2.23.** *Infinitesimalni deformacijski tenzor  $\varepsilon$  je ničeln, natanko tedaj, kot je  $u = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{X}$ , za konstantna vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .*

*Dokaz.* Lep dokaz?? □

### 2.4.2 Hookov zakon

Sedaj potrebujemo relacijo, ki povezuje premike z napetostjo. V splošnem je relacija oblike  $\sigma = f(\varepsilon)$ , predpostavimo torej, da je napetost odvisna samo od deformacije. Ponavadi  $f$  dodatno omejimo, da je izotropična in da mora biti taka, da je energija

$$U(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma : d\varepsilon = \int_0^\varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon$$

dobro definirana, torej neodvisna od poti integracije. V tem primeru je

$$\sigma = \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}.$$

Če to drži, pravimo, da je material hiperelastičen, kot pravi naslednja definicija.

**Definicija 2.24.** Material je *hiperelastičen*, če je  $U(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma : d\varepsilon$  neodvisen od poti integracije.

V teoriji linearne elastičnosti predpostavimo, da je zveza  $f$  med napetostjo in deformacijo linearna in jo imenujemo Hookov zakon, saj je posplošitev običajnega Hookovega zakona za vzmet.

**Aksiom 5** (Hookov zakon). Napetost je linearno odvisna od deformacije, preko tenzorja četrtega reda  $C$ :

$$\sigma = C : \varepsilon.$$

Tenzor  $C$  se imenuje *tenzor elastičnosti* ali togostni tenzor (*angl.* stiffness tensor) in ima v splošnem  $3^4 = 81$  prostih parametrov.

**Opomba 2.25.** Aksiom 5 se po komponentah glasi  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ .

Na srečo v splošnem  $C$  nima 81 prostih komponent. Iz trditve 2.16 o simetričnosti  $\sigma$  sledi, da lahko prosto zamenjamo indeksa  $i$  in  $j$  in velja  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ . Podobno iz simetričnosti  $\varepsilon$  sledi, da je  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ . S tem smo  $C$  reducirali na  $6^2 = 36$  komponent. Če dodatno predpostavimo še hiperelastičnost, vidimo, da je  $\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$  in

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}} = C_{ijkl}.$$

Ker vrstni red drugih odvodov ni pomemben, je  $C_{ijkl} = C_{klij}$ . S tem smo  $C$  reducirali na  $36 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 21$  komponent. Od sedaj naprej bomo predpostavili, da so vsi materiali hiperelastični. Energija je v tem primeru dana s kvadratično formo

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon : C : \varepsilon. \quad (2.12)$$

Tenzor  $C$  se dodatno poenostavi, če predpostavimo, da je material *izotropičen*, torej “enak v vse smeri”. Splošen izotropičen tenzor četrtega reda je oblike

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \kappa \delta_{il} \delta_{jk},$$

dokazano npr. v [vstavi referenco / vprašaj Mejaka] in zaradi zgornjih simetrij mora veljati  $\kappa = \lambda$ . Nekoordinatno lahko sedaj zvezo  $\sigma = C : \varepsilon$  za tak tenzor zapišemo kot

$$\sigma = \lambda(\text{tr } \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon. \quad (2.13)$$

Parametra  $\lambda$  in  $\mu$  imenujemo Laméjevi konstanti. Običajno so materiali tudi homogeni, torej snovne konstante niso odvisne od lokacije v materialu, temveč so lastnosti materiala samega. Veliko resničnih gradbenih materialov kot na primer železo, jeklo, aluminij in ostale kovine ter steklo zadoščajo vseh predpostavkam Navierove enačbe. Primer anizotropnega materiala je recimo les. V strojniških priročnikih najdemo snovne lastnosti bolj pogosto opisane s parametroma  $E$  in  $\nu$ , ki jima pravimo Youngov (prožnostni) modul in Poissonovo razmerje. Zveza med njimi je

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Pogosto najdemo tudi druge snovne parametre kot na primer strižni modul ali stisljivost. Tabela pretvorb med različnimi parametri je na voljo v [2, tabela 5.1, str. 215]. Teoretična omejitev za parametre je dana s tem, da zahtevamo pozitivno definitnost energije kot kvadratne forme in velja, če je  $\lambda, \mu > 0$  ali pa  $E > 0$  in  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ .

V praksi se izkaže, da temu brez težav zadostimo. Vrednosti parametrov za nekaj pogostih materialov so podane v tabeli 1 in jih lahko najdemo v primernem fizikalnem ali strojniškem priročniku, npr. v [vstavi referenco / vprašaj Mejaka].

material	$E$ [GPa]	$\nu$
jeklo	210	0.30
aluminij	69	0.33
steklo	50 – 90	0.20 – 0.27

Tabela 1: Vrednosti elastičnih parametrov za pogoste materiale.

## 2.5 Navierova enačba

Sedaj imamo vse pripravljeno za opis teorije linearne elastičnosti:

- 1) mera deformacije:  $\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{Grad } \vec{u} + \text{Grad } \vec{u}^T)$ ,
- 2) konstitutivna zveza:  $\sigma = C : \varepsilon$  in

3) gibalna enačba:  $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} + \operatorname{div} \sigma$ .

Naredimo še nekaj poenostavitev. Ker so gradienti pomikov majhni, za poljubno količino  $\varphi$  velja

$$\operatorname{Grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = \operatorname{grad} \varphi (I + \operatorname{Grad} u) \approx \operatorname{grad} \varphi.$$

Zaradi majhnih gradientov pomika je vseeno, ali uporabljamo odvode glede na prostorske ali glede na referenčne koordinate. Enak argument lahko uporabimo tudi za divergenco in običajne odvode.

Caucyjevo gibalno enačbo lahko zapišemo namesto v prostorskih tudi v referenčnih koordinatah. Pri tem lahko zaradi majhnih gradientov pomikov namesto  $\operatorname{div}$  pišemo  $\operatorname{Div}$  in Caucyjevo napetostni tenzor enačimo z napetostnim tenzorjem, zapisanim v referenčnem sistemu. Opustimo tudi strogo ločevanje referenčnih in prostorskih koordinat, saj bomo imeli od sedaj naprej enačbe vedno zapisane v referenčnih koordinatah. Odvode po času pišimo zato kar s piko, za operatorje pa uporabljajmo običajne male črke ali pa kar  $\nabla$ .

S temi poenostavitvami dobimo *linearizirano enačbo gibanja*, ki pravi

$$\rho \ddot{\vec{u}}(t, \vec{X}) = \vec{f}(t, \vec{X}) + \operatorname{div} \sigma(t, \vec{X}). \quad (2.14)$$

Sedaj imamo vse pripravljeno, da napišemo končno enačbo, ki ji ustreza pomik materiala. Z njeno pomočjo lahko, glede na dane sile na površini in pomike na robu, izračunamo pomike v celotnem telesu, preko deformacijskega tenzorja in Hookovega zakona pa tudi napetosti.

**Izrek 2.26** (Navierova enačba). *Če so gradienti pomikov v linearno elastičnem hiperelastičnem izotropičnem homogenem nepolarnem mediju majhni, potem za njih velja Navierova enačba*

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \vec{f} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \operatorname{lap} \vec{u}. \quad (2.15)$$

*Dokaz.* Od linearne enačbe gibanja (2.14) do Navierove enačbe nas loči le še izračun  $\operatorname{div} \sigma$ . Za primerjavo naredimo izračun koordinatno in nekoordinatno. Začnimo s koordinatnim:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u)_{ij} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u^\top)_{ij} = \frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{j,i} \\ \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda \frac{1}{2}(u_{k,k} + u_{k,k}) \delta_{ij} + 2\mu \left( \frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{j,i} \right) = \\ &= \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ (\operatorname{div} \sigma)_i &= \sigma_{ij,j} = \lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) = \lambda u_{k,ki} + \mu(u_{i,kk} + u_{k,ki}) = \\ &= (\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} = (\lambda + \mu)(\operatorname{grad}(u_{k,k}))_i + \mu(\operatorname{lap} u)_i = \\ &= ((\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \operatorname{lap} u)_i. \end{aligned}$$

Nekoordinatni dokaz pa potrebuje nekaj dodatnih relacij iz razdelka 1.2 glede

diferencialnih operatorjev, ki jih bomo uporabili v spodnjem izračunu:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \sigma &= \lambda \operatorname{div} \operatorname{tr}(\varepsilon) I + 2\mu \operatorname{div} \varepsilon = \\
&= \lambda \frac{1}{2} (\operatorname{div}((\operatorname{tr} \operatorname{grad} u) I) + \operatorname{div} \operatorname{tr} \operatorname{grad} u^T) + \mu \operatorname{div}(\operatorname{grad} u + \operatorname{grad} u^T) = \\
&= \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div}((\operatorname{div} u) I) + \operatorname{div}((\operatorname{div} u) I)) + \mu \operatorname{lap} u + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} u = \\
&= \lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \operatorname{lap} u.
\end{aligned}$$

Izračun prinese enak rezultat kot prej in izrek je še enkrat dokazan.  $\square$

**Opomba 2.27.** Enačbo

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \operatorname{lap} \vec{u} + \vec{f} = 0 \quad (2.16)$$

imenujemo *stacionarna Navierova enačba*, saj opisuje kontinuum v mirovanju, kajti tedaj je  $\dot{u} = 0$ .

**Opomba 2.28.** Bolj splošno obliko Navierove enačbe, ki ne zahteva tako močnih pogojev na  $C$ , dobimo tako, da preprosto vstavimo definicijo  $\sigma$  v linearizirano Cauchyjevo momentno enačbo. S tem dobimo enačbo

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \frac{1}{2} \operatorname{div}(C : (\operatorname{grad} \vec{u} + \operatorname{grad} \vec{u}^T)) + \vec{f}. \quad (2.17)$$

## 2.6 Obstoj in enoličnost rešitve

Navierova enačba je linearna parcialna diferencialna enačba drugega reda. Z obstojem in enoličnostjo rešitve se bomo ukvarjali pri stacionarni Navierovi enačbi (2.16) z mešanimi robnimi pogoji pri katerih je na nekem delu roba predpisan pomik, na drugem delu pa površinska sila.

Ker je enačba linearna, je ideja dokaza obstoja in enoličnosti, da rešitev enačbe zapišemo kot linearen funkcional na primernem prostoru in nato uporabimo Riezsov reprezentacijski izrek 1.17, ki nam bo dal obstoj rešitve. Ideja poti do dokaza je vzeta iz [1, izrek 3.17.1, str. 232]. Iz izkušenj vemo, da bo rešitev obstajala in bo enolična v šibkem smislu, zato prevedimo enačbo v šibko obliko in definirajmo šibko rešitev. Začeli bomo bolj splošno in prevedli na šibko obliko stacionarno linearizirano enačbo gibanja (2.14), nato pa nadaljevali do stacionarne Navierove enačbe.

**Trditve 2.29.** Šibka oblika linearne stacionarne enačbe gibanja  $\operatorname{div} \sigma + \vec{f} = 0$  je

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\vec{v}) dV - \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{v} dS - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV = 0. \quad (2.18)$$

*Dokaz.* Pomnožimo enačbo  $\operatorname{div} \sigma + \vec{f} = 0$  skalarno z  $\vec{v} \in [L^2(\Omega)]^3$  in integrirajmo po  $\Omega$  ter poskušajmo prenesti odvode iz  $\sigma$  na  $\vec{v}$ . Dobimo

$$\int_{\Omega} (\vec{v} \cdot \operatorname{div} \sigma + \vec{v} \cdot \vec{f}) dV = 0.$$

Sedaj obrnemo relacijo iz trditve 1.10 ter upoštevamo simetričnost  $\sigma$  in dobimo  $\vec{v} \cdot \operatorname{div} \sigma = \operatorname{div}(\sigma \vec{v}) - \sigma : \operatorname{grad} \vec{v}$ . Ker je  $\sigma$  simetričen in pravokoten na antisimetrične

tenzorje, je vseeno če pri grad  $\vec{v}$  upoštevamo samo simetrični del,  $\varepsilon(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v} + \text{grad } \vec{v}^T)$ . Nadaljujemo z računom in dobimo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\text{div}(\sigma \vec{v}) - \sigma : \varepsilon(\vec{v})) dV + \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{f} dV &= 0 \\ \int_{\partial\Omega} \sigma \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\vec{v}) dV + \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{f} dV &= 0 \\ \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{t} dS - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\vec{v}) dV + \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{f} dV &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

Pri Navierovi enačbi upoštevamo še relacijo  $\sigma = C : \varepsilon$  in s pomočjo tega bomo definirali šibko rešitev Navierove enačbe. Najprej pa si natančno oglejmo problem in prostor, v katerem bomo rešitve iskali. Problem zastavimo za splošno stacionarno obliko Navierove enačbe (2.17), pri čemer predpostavimo le pozitivno definitnost  $C$ . Najti želimo  $\vec{u}$ , ki zadošča

$$\begin{aligned} \text{div}(C : \varepsilon(\vec{u})) + \vec{f} &= 0 & \text{na } \Omega \\ \vec{u} &= 0 & \text{na } S \subseteq \partial\Omega \\ \sigma \vec{n} = (C : \varepsilon(\vec{u})) \vec{n} &= \vec{t} & \text{na } \partial\Omega \setminus S, \end{aligned} \quad (2.19)$$

pri čemer je  $\Omega$  povezana omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom,  $S$  nek kos  $\partial\Omega$  z odsekoma gladkim robom in  $\vec{n}$  enotska zunanja normala za  $\partial\Omega$ . Klasično rešitve iščemo v podprostoru dvakrat zvezno odvedljivih funkcij  $C^2(\Omega, R^3)$ , za katere velja  $\vec{u}|_S = 0$ . Označimo ta prostor z  $C_0^2$  in na njem definirajmo bilinearno formo

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_E = \int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV.$$

**Trditev 2.30.** *Bilinearna forma  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_E = \int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV$  na  $C_0^2$  določa skalarni produkt.*

*Dokaz.* Simetričnost in bilinearnost sta očitni iz lastnosti integrala. Iz pozitivne definitnosti integrala in tenzorja  $C$  sledi, da je  $\varepsilon(\vec{u}) = 0$ . Od tod po trditvi 2.23 sledi, da je  $\vec{u}$  oblike  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{x}$ . Zaradi ničelnosti na kosu roba mora biti  $\vec{u} \equiv 0$ .  $\square$

Prostor  $C_0^2$  ni poln, podobno kot prostor zveznih funkcij ni poln v  $L^p$ . Označimo njegovo napolnitev z v normi  $\|\cdot\|_E$  z  $E$ . Sedaj imamo vse pripravljeno, za definicijo šibke rešitve problema 2.19.

**Definicija 2.31.** Rešitev  $\vec{u} \in E$  je šibka rešitev problema 2.19, če za vsako funkcijo  $\vec{v} \in E$  velja

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV - \int_{\partial\Omega \setminus S} \vec{t} \cdot \vec{v} dS - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV = 0.$$

Sedaj imamo vse pripravljeno za izrek o obstoju in enoličnosti.

**Izrek 2.32.** *Naj bo  $\vec{f} \in [L^{\frac{6}{5}}(\Omega)]^3$  in  $\vec{t} \in [L^{\frac{4}{5}}(\Omega)]^3$ . Potem ima problem 2.19 natanko eno šibko rešitev v prostoru  $E$ .*

*Dokaz.* Kornova neenakost 1.13 pravi, da je

$$\int_{\Omega} (\|\vec{u}\|_2^2 + \|\text{grad } \vec{u}\|^2) dV \leq c_1 \int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}) : C : \varepsilon(\vec{u}) dV.$$

Drugače prebrano pove, da je  $\|u\|_{[H^1(\Omega)]^3}^2 \leq c_1 \|u\|_E^2$ . Dano imamo torej zvezno vložitev  $E$  v  $[H^1(\Omega)]^3$ . Na vsaki komponenti  $\vec{u}$  lahko sedaj uporabimo izrek o vložitvi prostorov Soboljeva 1.14 in dobimo, da je vsaka komponenta  $\vec{u}$  in  $\|\vec{u}\|_2$  ležijo v  $L^6$ . Po istem izreku dobimo, da za vsako odsekoma gladko ploskev  $\Sigma \subseteq \Omega$  komponente in norma  $\vec{u}$  ležijo v  $L^4(\Sigma)$ . Dobimo verigi zveznih vložitev

$$\begin{aligned} E &\hookrightarrow [H^1(\Omega)]^3 \hookrightarrow [L^6(\Omega)]^3 \\ E|_{\Sigma} &\hookrightarrow [H^1(\Omega)|_{\Sigma}]^3 \hookrightarrow [L^4(\Sigma)]^3, \end{aligned}$$

ki prek norm na prvem in zadnjem prostoru implicirata neenakosti

$$\begin{aligned} \|\|\vec{u}\|_2\|_{L^6} &= \left( \int_{\Omega} \|\vec{u}\|_2^6 dV \right)^{\frac{1}{6}} \leq c_2 \|\vec{u}\|_E \\ \|\|\vec{u}\|_2\|_{L^4} &= \left( \int_{\partial\Omega \setminus S} \|\vec{u}\|_2^4 dV \right)^{\frac{1}{4}} \leq c_3 \|\vec{u}\|_E. \end{aligned}$$

Na šibko obliko Navierove enačbe iz definicije šibke rešitve 2.31 lahko gledamo kot na enačbo oblike

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_E = F(\vec{v}),$$

kjer je  $F$  linearen funkcional na  $E$ , ki slika kot

$$F(\vec{v}) = \int_{\partial\Omega \setminus S} \vec{t} \cdot \vec{v} dS + \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV.$$

Prostor  $E$  je poln in opremljen s skalarnim produktom, tako da je Hilbertov. Če pokažemo še, da je  $F$  zvezen, potem lahko zanj uporabimo Riezsov reprezentacijski izrek 1.17. Pokažimo raje omejenost. Z uporabo trikotniške, Cauchy-Schwarzove, Hölderjeve in zgoraj izpeljanih neenakosti dobimo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV \right| &\leq \int_{\Omega} |\vec{f} \cdot \vec{v}| dV \leq \int_{\Omega} \|\vec{f}\| \|\vec{v}\| dV \leq \\ &\leq \underbrace{\left( \int_{\Omega} \|\vec{f}\|_2^{\frac{6}{5}} dV \right)^{\frac{5}{6}}}_{< \infty \text{ ker } \vec{f} \in L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} \underbrace{\left( \int_{\Omega} \|\vec{v}\|_2^6 dV \right)^{\frac{1}{6}}}_{\leq c_2 \|\vec{v}\|_E} \leq \\ &\leq c_1 c_2 \|\vec{v}\|_E \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega \setminus S} \vec{t} \cdot \vec{v} dS \right| &\leq \int_{\partial\Omega \setminus S} |\vec{t} \cdot \vec{v}| dS \leq \int_{\partial\Omega \setminus S} \|\vec{t}\| \|\vec{v}\| dS \leq \\ &\leq \underbrace{\left( \int_{\partial\Omega \setminus S} \|\vec{t}\|_2^{\frac{4}{3}} dS \right)^{\frac{3}{4}}}_{< \infty \text{ ker } \vec{t} \in L^{\frac{4}{3}}(\partial\Omega \setminus S)} \underbrace{\left( \int_{\partial\Omega \setminus S} \|\vec{v}\|_2^4 dS \right)^{\frac{1}{4}}}_{\leq c_4 \|\vec{v}\|_E} \leq \\ &\leq c_3 c_4 \|\vec{v}\|_E. \end{aligned}$$

Funkcional  $F$  je po trikotniški neenakosti torej omejen in zato zvezen. Po izreku 1.17 torej obstaja enolično določen  $\vec{u}^* \in E$ , tako da je

$$F(v) = \langle \vec{v}, \vec{u}^* \rangle_E$$

za vsak  $\vec{v} \in E$ . Šibka oblika enačbe se torej glasi

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_E = F(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{u}^* \rangle_E.$$

Če prenesemo vse na eno stran, dobimo, da za vsak  $\vec{v} \in E$  velja

$$\langle \vec{v}, \vec{u} - \vec{u}^* \rangle_E = 0.$$

Ker je  $\vec{u} - \vec{u}^*$  pravokoten na vse  $\vec{v} \in E$ , nam ne preostane drugega, kot da je  $\vec{u} = \vec{u}^*$  enolična rešitev v smislu definicije 2.31.  $\square$

Samo enoličnost lahko dokažemo tudi na bolj elementaren način, ki morda nudi boljši vpogled v to, kako robni pogoji določijo enoličnost rešitve v notranjosti.

**Izrek 2.33** (Kirchoff). *Rešitev problema 2.19 je enolična v  $C_0^2$  in v  $E$ , če obstaja.*

*Dokaz.* Enoličnosti v  $C_0^2$  sledi iz enoličnosti  $E$ , saj je prvi podprostor drugega. Pa recimo da imamo dve rešitvi  $\vec{u}_1$  in  $\vec{u}_2$  z enakimi robnimi pogoji. Ker sta tako  $\vec{u}_1$  kot  $\vec{u}_2$  šibki rešitvi, zadoščata

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}_1) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV - \int_{\partial\Omega \setminus S} \vec{t} \cdot \vec{v} dS - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}_2) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV - \int_{\partial\Omega \setminus S} \vec{t} \cdot \vec{v} dS - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

Razlika torej zadošča

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\vec{w}) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV = 0$$

in ker je  $\vec{w}$  tudi v  $E$ , saj je na robu enaka 0, lahko vstavimo  $\vec{v} = \vec{w}$ . Zaradi pozitivne definitnosti  $C$  sledi  $\varepsilon(\vec{w}) = 0$  od koder kot prej zaradi robnih pogojev sledi  $\vec{w} = 0$  oziroma  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ .  $\square$

## 2.7 Priprava na numerično reševanje

Za numerično reševanje se postavimo v kartezični koordinatni sistem. Komponente tenzorja  $\sigma$  razpišimo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

pri čemer smo že upoštevali simetrijo. Reševati tridimenzionalne enačbe je težje kot dvodimenzionalne, zato si oglejmo dve poenostavitvi.

### 2.7.1 Poenostavitev na dve dimenziji

Tridimenzionalne probleme se zavoljo lažje formulacije, manjše računske zahtevnosti in lažje implementacije, pogosto s pomočjo neke simetrije, prevede na nižjedimenzionalne. Spodaj sta opisani dve najbolj pogosti poenostavitvi.

**Ravninska napetost:** Pri tej poenostavitvi predpostavimo, da napetost nima neničelnih komponent v smeri ene izmed koordinatnih osi, torej po primerni rotaciji koordinatnega sistema, da so komponente  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  in  $\sigma_{zz}$  enake 0. Ta poenostavitev je primerna za telesa, ki so “tanke plošče”, torej imajo eno dimenzijo veliko manjšo od ostalih dveh. Poleg tega morajo biti vse obremenitve vzdolž plošče.

**Ravninska deformacija:** Pri tej poenostavitvi predpostavimo, da deformacijski tenzor  $\varepsilon$  nima komponent v eni izmed koordinatnih smeri, torej, podobno kot pri ravninski napetosti lahko predpostavimo, da so  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  in  $\varepsilon_{zz}$  enaki 0. Ta poenostavitev je primerna za telesa, ki imajo eno dimenzijo mnogo večjo od drugih in se vzdolž nje ne spreminjajo, torej za (ne nujno krožne) valje.

Pri obeh poenostavitvah se iz pogojev izpelje, da v Navierovi enačbi ne nastopa tretja komponenta  $u$ . Še več, poenostavitvi sta celo ekvivalentni, saj se razlikujeta le za konstantni člen pred enim izmed faktorjev. V dveh dimenzijah pišemo prvo komponento pomika z  $u$  in drugo z  $v$ , koordinati pa označujemo z  $x$  in  $y$ . Če si razpišemo izraze za deformacijski tenzor in napetostni tenzor za primer ravninske napetosti dobimo:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} & \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

### 2.7.2 Robni pogoji

Pri reševanju robnih problemov bomo imeli tri vrste robnih pogojev. Dirichletove robne pogoje  $u|_{\partial\Omega} = u_0$  bomo uporabili, ko bomo poznali pomike na robu. Najpogostejše bo pogoj oblike  $u = 0$ , ko nek konec držimo fiksen. Pri drugi vrsti robnih pogojev poznamo napetosti na robovih. Najpogostejše bomo podali kar napetost na robu  $\vec{t} = \vec{t}_0$ , kjer je  $\vec{t}_0$  neka znana vrednost, npr. 0, če je ta rob prost. Tretja vrsta pogojev bodo simetrijski pogoji, ko bomo problem reducirali preko neke osi simetrije, na osi pa bomo zahtevali kompatibilnostne ali simetrijske pogoje.

Oglejmo si bolj natančno pogoje, podane z napetostjo. Napetost na robu izračunamo preko napetostnega tenzorja,  $\vec{t} = \sigma \vec{n}$ , kjer je  $\vec{n}$  zunanja normala na rob. Za primer desnega roba, na katerega enakomerno deluje neka gostota sile  $p$  v normalni smeri, dobimo dva pogoja:

$$\vec{t} = \sigma \vec{n} = \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} & \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}.$$



### 3 Numerična metoda

V 20. stoletju je skupaj z razvojem računalnikov začel svojo pot razvoj numeričnih metod za reševanje parcialnih diferencialnih enačb. Do danes je bilo razvitih veliko metod za numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb. Dva pomembna razreda metod se ločita glede na obliko, v kateri rešujemo parcialno diferencialno enačbo: šibki (*angl.* weak form) ali močni (*angl.* strong form). Najznamenitejši in zelo uspešen predstavnik prve skupine je metoda končnih elementov (MKE) (*angl.* finite element method (FEM)), kjer problem najprej prevedemo v šibko obliko, nato pa rešitev poiščemo kot linearno kombinacijo baznih funkcij iz izbranega prostora. Najbolj poznan predstavnik metod, ki rešujejo problem v močni obliki pa je metoda končnih diferenc (MKD) (*angl.* finite difference method (FDM)), pri kateri direktno diskretiziramo operator, ki nastopa v enačbi.

Poleg tega se metode delijo tudi glede na tip diskretizacije domene, ki ga potrebujejo. Metoda končnih elementov potrebuje *mrežo*, nad katero deluje, tj. triangulacijo notranjosti domene, ki inducira tudi mrežo na robu. Metoda robnih elementov potrebuje samo mrežo na robu domene. Metoda končnih diferenc je običajno formulirana na pravokotni mreži. Obstajajo pa tudi metode, ki mreže ne potrebujejo, imenujemo jih *brezmrežne metode* (*angl.* meshfree methods). Predstavljena metoda v tem razdelku bo reševala enačbo v močni obliki in bo brezmrežna.

#### 3.1 Izpeljava

Izpeljavo začnimo z osvežitvijo spomina na metodo končnih diferenc, ki nam bo služila kot motivacija.

##### 3.1.1 Ideja in motivacija

**Primer 3.1.** Rešujemo enodimenzionalno Poissonovo enačbo. Izpeljava metode končnih diferenc ne bo povsem običajna in tudi ne najkrajša možna, ampak bo narejena tako, da jo bomo lahko posplošili v brezmrežno metodo.

Rešujemo problem z mešanimi robnimi pogoji

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{na } (a, b) \\ u(a) &= A \\ u'(b) &= B, \end{aligned} \tag{3.1}$$

čigar rešitev poznamo v kvadraturah

$$u(x) = \int_a^x \left( \int_b^\eta f(\xi) d\xi \right) d\eta + B(x - a) + A.$$

Numeričnega reševanja se lotimo tako, da interval  $[a, b]$  diskretiziramo na  $N$  enakih delov dolžine  $h = \frac{b-a}{N}$  z delilnimi točkami  $x_i = a + ih$ , za  $i = 0, \dots, N$ . Za vsako od teh točk uvedemo neznanko  $u_i$ , ki predstavlja neznano funkcijsko vrednost v točki  $x_i$ . S pomočjo vrednosti  $u_{i-1}$ ,  $u_i$  in  $u_{i+1}$  želimo sedaj aproksimirati  $u''(x_i)$ . To nam bo dalo zvezo med spremenljivkami in ko jo uporabimo za vse notranje točke ter upoštevamo še robne pogoje, bomo dobili sistem linearnih enačb, čigar rešitev nam bo dala dobro aproksimacijo funkcije  $u$ .

Funkcijo  $u$  v okolici  $x_i$  aproksimiramo z interpolacijskim polinomom, njene odvode pa z odvodi interpolacijskega polinoma. Da najdemo interpolacijski polinom  $\hat{u}$ , zapišimo

$$\hat{u}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}(x)^\top \boldsymbol{\alpha}$$

in poiščimo koeficiente  $\boldsymbol{\alpha}$ , da bo veljalo

$$\begin{aligned} \hat{u}(x_{i-1}) &= u_{i-1} \\ \hat{u}(x_i) &= u_i \\ \hat{u}(x_{i+1}) &= u_{i+1}. \end{aligned}$$

Če sistem enačb razpišemo, dobimo

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1(x_i - h) + \alpha_2(x_i - h)^2 &= u_{i-1} \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2 &= u_i \\ \alpha_0 + \alpha_1(x_i + h) + \alpha_2(x_i + h)^2 &= u_{i+1} \end{aligned}$$

oziroma v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i - h & (x_i - h)^2 \\ 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_i + h & (x_i + h)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}.$$

Krajše ga zapišemo kar kot  $B\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u}$ . Sistem rešimo in dobimo

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2h^2 u_i + h(u_{i-1} - u_{i+1})x_i + (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})x_i^2}{2h^2} \\ \alpha_1 &= \frac{h(u_{i+1} - u_{i-1}) - 2(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})x_i}{2h^2} \\ \alpha_2 &= \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{2h^2}. \end{aligned}$$

Interpolacijski polinom skozi točke  $(x_i, u_i)$  lahko sedaj zapišemo kot

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \\ &= u_i + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}(x - x_i) + \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{2h^2}(x - x_i)^2. \end{aligned}$$

Toda, ker  $u_j$  nastopajo linearno, lahko napišemo tudi v obliki

$$\hat{u}(x) = \begin{bmatrix} \frac{(x_i - x)(h + x_i - x)}{2h^2} & \frac{(h + x - x_i)(h + x_i - x)}{h^2} & \frac{(x - x_i)(h + x - x_i)}{2h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}(x)^\top \mathbf{u}.$$

S tem smo ločili podatke, ki se nanašajo na vrednost funkcije, od podatkov, ki se nanašajo na pozicije točk. Če na primer vemo, da bomo večkrat potrebovali vrednost

interpolacijskega polinoma v neki točki  $x^*$  za različne nabore funkcijskih vrednosti (vendar še vedno izmerjene v istih točkah)  $\mathbf{u}$ , potem se nam splača poračunati  $\boldsymbol{\varphi}(x^*)$  vnaprej in vrednosti interpolacijskega polinoma dobimo vsakič znova le s skalarnim produktom  $\hat{u}(x^*) = \boldsymbol{\varphi}(x^*)^\top \mathbf{u}$ .

Za aproksimacijo  $u'$  in  $u''$  bomo vzeli kar odvode  $\hat{u}$ . Izračunajmo jih v točki  $x_i$  in dobimo znane formule

$$\begin{aligned}\hat{u}'(x_i) &= \boldsymbol{\varphi}'(x_i)^\top \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \\ \hat{u}''(x_i) &= \boldsymbol{\varphi}''(x_i)^\top \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

To lahko uporabimo za reševanje našega problema (3.1). Namesto enakosti

$$u''(x_i) = f(x_i)$$

za vsako točko  $x_i$  v notranjosti zapišemo podobno enakost

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = f(x_i).$$

Dirichletov pogoj na levem robu zapišemo preprosto kot  $u_0 = A$ , za Neumannovega na desnem robu pa lahko uporabimo npr. enostransko diferenco na treh točkah

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h} & \frac{3}{2h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = B,$$

ki bi jo izpeljali na enak način.

Vse te enakosti zložimo v sistem enačb in ga zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 2 & 1 & & & \\ & -1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & 1 \\ & & & 1/2h & -2/h & 3/2h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{bmatrix}.$$

Rešitev tega sistema nam dobro aproksimira neznano funkcijo  $u$  v izbranih točkah  $x_i$ .

### 3.1.2 Splošna izpeljava

Postavimo se sedaj v splošnejši okvir. Rešujemo parcialno diferencialno enačbo

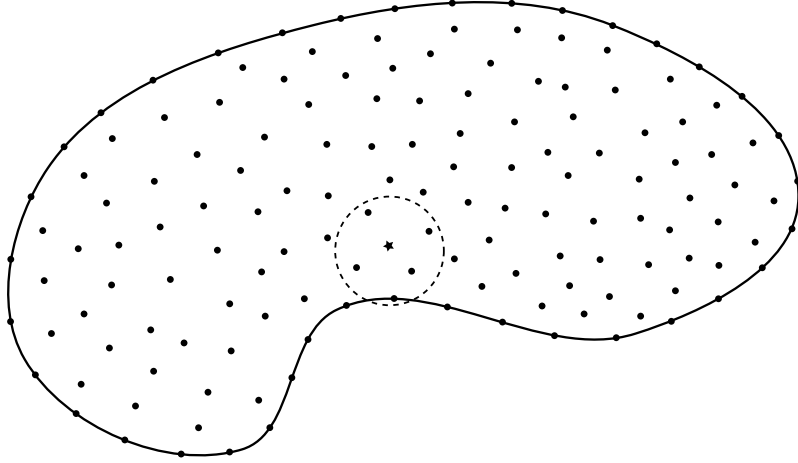
$$\begin{aligned}\mathcal{L}u &= f \text{ na } \Omega, \\ \mathcal{R}u &= g \text{ na } \partial\Omega,\end{aligned}\tag{3.2}$$

kjer je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  omejena domena, torej, omejena povezana odprta množica z odsekom gladkim robom,  $u \in C^r(\mathbb{R}^d)$  funkcija,  $\mathcal{L}: C^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R})$  linearen parcialni diferencialni operator reda  $r$  in  $\mathcal{R}u$  robni pogoji, pri katerih je problem enolično rešljiv.

Domeno in njen rob sedaj diskretiziramo, tako da izberemo  $N$  točk v zaprtju domene,  $x_1, \dots, x_N \in \bar{\Omega}$ . Podobno kot pri končnih diferencah bomo v teh točkah aproksimirali vrednost funkcije  $u$ . Izberimo fiksno točko  $p \in \bar{\Omega}$  in  $n$  izmed točk  $\{x_1, \dots, x_N\}$ , ki bodo sestavljali *sosesčino* (*angl. support*) točke  $p$ . Število  $n$  imenujemo velikost sosesčine. Označimo z  $\mathcal{N}(p)$  sosesčino točke  $p$  in z  $\mathcal{I}(p) = \{i_1, \dots, i_n\}$  množico indeksov, za katere so izbrani  $x_{i_j}$  v sosesčini  $p$ . Velja torej

$$\mathcal{N}(p) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}(p)} x_i.$$

Običajno bo  $n \ll N$ , npr.  $n = 9$  in  $N = 10^6$ . Primer domene  $\Omega$ , točke  $p$  in njene sosesčine je prikazan na sliki 5.



Slika 5: Primer domene z diskretizirano notranjostjo in robom, skupaj z izbrano točko in njeno sosesčino.

V okolici točke  $p$  aproksimirajmo  $u$  z elementi iz nekega končno dimenzionalnega prostora funkcij  $\mathcal{B} = \mathcal{Lin}\{b_1, \dots, b_m\}$ . Funkcijam  $b_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  pravimo *bazne funkcije*, številu  $m$  pa moč baze. Aproksimacijo  $\hat{u}$  za  $u$  lahko torej zapišemo kot

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\alpha},$$

pri čemer smo z  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^m$  označili vektor neznanih koeficientov in  $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^m$  vektor baznih funkcij.

Če bi poznali vrednosti  $u(x_i)$  za  $i \in \mathcal{I}(p)$ , potem bi lahko aproksimirano  $\hat{u}$  izračunali po metodi najmanjših kvadratov. Ker pa teh vrednosti ne poznamo, uvedimo spremenljivke  $u_i$  za vsako točko v domeni, ki nam bodo predstavljale neznane prave vrednosti in nadaljujmo s simbolnim računanjem. Za funkcijo  $\hat{u}$  zahtevamo, da aproksimira  $u$  v smislu utežene diskretne 2-norme, torej da minimizira

$$\|u - \hat{u}\|_{2, N(p), \mathbf{w}} = \sum_{i \in \mathcal{I}(p)} w(p - x_i) (u_i - \hat{u}(x_i))^2$$

kar je utežena vsota kvadratov odstopanj od pravih vrednosti. Pri tem je  $w: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  nenegativna funkcija, ki jo imenujemo *utež*,  $\mathbf{w}$  pa je vektor sestavljen iz vrednosti te funkcije v točkah v soseščini.

Matrično lahko zapišemo sistem enačb, ki po vrsticah postavlja našo zahtevo  $\hat{u}(x_j) = u_j$ , za vsak  $j \in I(p)$ :

$$\begin{bmatrix} b_1(x_{i_1}) & \cdots & b_m(x_{i_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(x_{i_n}) & \cdots & b_m(x_{i_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i_1} \\ \vdots \\ u_{i_n} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Na krajše sistem zapišemo kot  $B\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\mathbf{u}}$ . Odvisno od  $n$ ,  $m$ ,  $b_i$  in uteži  $w$  je ta sistem lahko poddoločen, predoločen ali običajen. V vsakem primeru lahko minimiziranje utežene napake prevedemo na minimiziranje diskretne 2-norme  $\|WB\boldsymbol{\alpha} - W\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,N(p)}$ , kjer je  $W$  diagonalna matrika iz korenov uteži za posamezne točke,  $W = \text{diag}(\sqrt{w(x_{i_1} - p)}, \dots, \sqrt{w(x_{i_n} - p)})$ . Tak sistem pa lahko, ne glede na njegovo določenost, rešimo s pomočjo Moore-Penroseovega psevdoinverza, ki ga lahko izračunamo s pomočjo singularnega razcepa matrike  $WB$ . Tako lahko izrazimo

$$\boldsymbol{\alpha} = (WB)^+ W\tilde{\mathbf{u}},$$

kjer  $+$  označuje Moore-Penroseov psevdoinverz.

To lahko vstavimo nazaj v izraz za  $\hat{u}$  in dobimo

$$\hat{u} = \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}^\top (WB)^+ W\tilde{\mathbf{u}}.$$

Sedaj lahko za izbrano točko  $p$  izračunamo

$$\hat{u}(p) = \underbrace{\mathbf{b}(p)^\top (WB)^+ W}_{\boldsymbol{\varphi}_p} \tilde{\mathbf{u}}.$$

Izračunljivi kos  $\boldsymbol{\varphi}_p$  je v praksi vrstica velikosti  $n$ , matematično pa je linearen funkcional  $\boldsymbol{\varphi}_p \in (\mathbb{R}^n)^*$ , ki naboru funkcijskih vrednosti v soseščini  $N(p)$  priredi aproksimacijo za funkcijsko vrednost v točki  $p$ .

Podobno kot pri deljenih diferencah odvode funkcije  $u$  aproksimiramo z odvodi interpolacijskega polinoma skozi točke v soseščini, bomo tudi v našem primeru aproksimirali odvode funkcije  $u$  z odvodi  $\hat{u}$ ,

$$(\mathcal{L}u)(p) \approx (\mathcal{L}\hat{u})(p) = (\mathcal{L}\mathbf{b})(p)^\top (WB)^+ W\tilde{\mathbf{u}}$$

od koder kot prej definiramo

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{L},p} = (\mathcal{L}\mathbf{b})(p)^\top (WB)^+ W. \quad (3.4)$$

Funkcional  $\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{L},p}$  je aproksimacija operatorja  $\mathcal{L}$  v točki  $p$ . Pogosto se ga imenuje tudi *funkcija oblike* (*angl.* shape function), saj v sebi nosi podatke o lokalni obliki domene in izboru okoliških točk, ter seveda o obnašanju  $\mathcal{L}$  v tej okolici. Tudi če funkcijskih vrednosti  $\tilde{\mathbf{u}}$  v okolici  $p$  ne poznamo, lahko  $\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{L},p}$  izračunamo in kasneje samo s skalar-nim produktom dobimo aproksimacijo za  $(\mathcal{L}u)(p)$ . Lahko pa to izkoristimo za zapis linearne enačbe

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{L},p} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = f(p),$$

ki je direktna aproksimacija diferencialne enačbe (3.2) v točki  $p$ ,

$$(\mathcal{L}u)(p) = f(p).$$

To lahko sedaj storimo za vsako diskretizacijsko točko  $x_i$  v domeni in dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{L},x_i} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= f(x_i), \text{ za vsak } i, \text{ tak, da je } x_i \in \Omega \\ \varphi_{\mathcal{R},x_i} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= g(x_i), \text{ za vsak } i, \text{ tak, da je } x_i \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

Te enačbe lahko zapišemo v matrični sistem

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.5)$$

kjer ima matrika  $A$  v vrsticah zapisane funkcionalne  $\varphi_{\mathcal{L},x_i}$  tako, da so neničelni elementi na tistih mestih, ki se pomnožijo z neznankami, ki ustrezajo sosedom  $x_i$ . Natančneje, elementi matrike  $A$  so

$$\begin{aligned}A(k, i_j) &= \varphi_{\mathcal{L},p}(j), \text{ za vsak } k, \text{ tak, da je } x_k \in \Omega \text{ in za vsak } i_j \in \mathcal{I}(x_k), \\ A(k, i_j) &= \varphi_{\mathcal{R},p}(j), \text{ za vsak } k, \text{ tak, da je } x_k \in \partial\Omega \text{ in za vsak } i_j \in \mathcal{I}(x_k).\end{aligned}$$

Razumljivejša je morda kar Matlab-ova notacija

$$A(k, I(x_k)) = \begin{cases} \varphi_{\mathcal{L},p} & x_k \in \Omega \\ \varphi_{\mathcal{R},p} & x_k \in \partial\Omega \end{cases}, \text{ za } k = 1, \dots, N.$$

Vektor  $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^N$  je vektor neznanih funkcijskih vrednosti, ki ga iščemo, v vektorju  $\mathbf{f}$  pa so zapisani robni pogoji

$$\mathbf{f}(k) = \begin{cases} f(x_k) & x_k \in \Omega \\ g(x_k) & x_k \in \partial\Omega \end{cases}, \text{ za } k = 1, \dots, N.$$

Vidimo, da je matrika  $A$  razpršena. Sama je dimenzij  $N \times N$ , v vsaki vrstici pa ima največ  $n$  neničelnih elementov, torej je skupno število neničelnih elementov

$$\text{nnz}(A) \leq nN.$$

Enakost je lahko dosežena, lahko pa je tudi stroga, saj so kakšni koeficienti v  $\varphi_{\mathcal{L},x_i}$  lahko tudi 0, kot se to zgodi pri Dirichletovih robnih pogojih.

Sistem (3.5) nato rešimo in za aproksimacijo  $u(x_i)$  vzamemo  $u(x_i) \approx u_i$ .

## 3.2 Posebni primeri

Metoda iz razdelka 3.1.2 je formulirana precej splošno in v posebnih primerih lahko prepoznamo druge znane metode. Za začetek pokažimo enostavno trditev, ki bo metodo v določenih primerih poenostavila.

**Trditev 3.2.** Če je  $m = n$  in je matrika  $B$  iz sistema (3.3) obrnljiva, potem je izbira uteži nepomembna.

*Dokaz.* Spomnimo se, da je

$$\varphi = (\mathcal{L}\mathbf{b})(p)^\top (WB)^+ W.$$

Matrika  $W$  je diagonalna s samimi pozitivnimi števili na diagonalah in je torej obrnljiva. Po predpostavki je obrnljiva tudi matrika  $B$ , torej je obrnljiv tudi produkt  $WB$  in velja

$$(WB)^+ = (WB)^{-1} = B^{-1}W^{-1}.$$

Od tod sledi, da je

$$\varphi = (\mathcal{L}\mathbf{b})(p)^\top B^{-1}W^{-1}W = (\mathcal{L}\mathbf{b})(p)^\top B^{-1},$$

kar je neodvisno od  $W$ . □

**Opomba 3.3.** Čeprav trditev 3.2 velja v eksaktni aritmetiki, v praksi ne velja nujno. Če so izbrane uteži zelo majhne ali zelo različnih velikosti, lahko to povzroči nepotrebne numerične nestabilnosti. Prav tako lahko zaradi izbire uteži pri izračunu psevdoinverza v vrstici 16 v algoritmu 2 SVD razcep, uporabljen v ozadju funkcije PINV, odreže kakšno majhno singularno vrednost več ali manj, kar lahko da precej drugačne rezultate.

Že v primeru 3.1 smo videli, da se za Laplaceov robni problem na intervalu naša metoda ujema z metodo končnih diferenc. Pokažimo to tudi na primeru dvodimenzionalne Poissonove enačbe.

**Trditev 3.4.** Metoda iz razdelka 3.1.2 se za reševanje Poissonove enačbe na enakomerni pravokotni mreži z razmakom  $h$  ujema z metodo končnih diferenc, če vzamemo  $\mathbf{b} = \{1, x, y, x^2, y^2\}$ ,  $w \equiv 1$  in  $n = 5$ .

*Dokaz.* Kot ponavadi označimo točke na mreži s koordinatami  $(x_i, y_j)$ , tako da je  $x_{i+1} = x_i + h$  in  $y_{j+1} = y_j + h$ . Pokazati moramo, da se funkcija oblike v vsaki točki  $x$  ujema z aproksimacijo končnih diferenc, ki pravi

$$(\Delta u)(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2},$$

pri čemer spremenljivka  $u_{i,j}$  pripada koordinati  $(x_i, y_j)$ . Če se aproksimaciji Laplaceovega operatorja ujemata, potem se ujemata tudi aproksimaciji rešitve, saj sistem pri obeh metodah gradimo na enak način. Ker je operator krajevno neodvisen, so tudi funkcije oblike odvisne samo od medsebojne lege točk in torej lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da računamo funkcijo oblike za točko  $p = (0, 0)$ . Najbližjih  $n$  sosedov je tako  $N(p) = \{(0, 0), (0, h), (0, -h), (h, 0), (-h, 0)\}$ . Matrika  $B = [b_j(x_i)]$  iz sistema (3.3), ki ima po stolpcih izračunane bazne funkcije v vseh sosedih je

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -h & 0 & h^2 \\ 1 & 0 & h & 0 & h^2 \\ 1 & h & 0 & h^2 & 0 \\ 1 & -h & 0 & h^2 & 0 \end{bmatrix}$$

in njen psevdoinverz je

$$B^+ = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2h} & -\frac{1}{2h} \\ 0 & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{2h} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2h^2} \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2h^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo že upoštevali  $w \equiv 1$ . Vektor vrednosti operatorja na baznih funkcijah je

$$(\Delta \mathbf{b})(p) = [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2]^\top.$$

Od tod dobimo po zvezi (3.4)

$$\boldsymbol{\varphi} = (\Delta \mathbf{b})(p)^\top B^+ = \left[ -\frac{4}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \right],$$

kar je ravno iskana aproksimacija. □

**Opomba 3.5.** Metodo za izračun funkcije oblike je zelo elegantno implementirati v Wolfram Mathematici, kar olajša simbolno raziskovanje takih aproksimacij. Zgornje matrice so bile izračunane s programom 1.

---

```

1 (* podatki *)
2 p = {0, 0};
3 sosed = {p, {0, -h}, {0, h}, {h, 0}, {-h, 0}};
4 bazne = {(1 &), (#1 &), (#2 &), (#1^2 &), (#2^2 &)};
5 operator = Function[f, Function[{x, y}, Derivative[2, 0][f][x, y] + Derivative[0, 2][f][x, y]]];
6 (* izračun *)
7 B = Table[Table[b @@ s, {b, bazne}], {s, sosed}];
8 Lb = Table[operator[b] @@ p, {b, bazne}];
9 phi = Lb.PseudoInverse[B] // Simplify

```

---

Program 1: Računanje funkcij oblike na pravokotni mreži.

**Opomba 3.6.** Tudi če izberemo  $n = 9$  in  $\mathbf{b} = \{1, x, x^2, y, xy, xy^2, y^2, y^2x, y^2x^2\}$ , dobimo enako aproksimacijo kot v trditvi 3.4, le da uporabimo več sosedov. Če jih uredimo po oddaljenosti od  $(0, 0)$  dobimo aproksimacijo

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[ -\frac{4}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]. \quad (3.6)$$

Če pa bi izbrali  $n = 25$  točk in bazne funkcije  $\mathbf{b} = \{x^i y^j, 0 \leq i, j \leq 4\}$ , potem bi dobili aproksimacijo četrtega reda.

**Primer 3.7.** Naredimo še en primer, kjer za bazne funkcije vzamemo monome. Vzemimo tokrat  $n = 9$  in za bazne funkcije vse monome skupne stopnje manj kot 3, torej  $\mathbf{b} = \{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$ . V tem primeru je matrika  $B$  velikosti  $9 \times 6$  in s pomočjo programa 1 dobimo

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[ -\frac{4}{3h^2} \quad -\frac{1}{3h^2} \quad -\frac{1}{3h^2} \quad -\frac{1}{3h^2} \quad -\frac{1}{3h^2} \quad \frac{2}{3h^2} \quad \frac{2}{3h^2} \quad \frac{2}{3h^2} \quad \frac{2}{3h^2} \right].$$

Vidimo, da tokrat v aproksimaciji upoštevamo vseh 9 sosedov, za razliko od aproksimacije v opombi 3.6. Naravno sledi vprašanje, ali je ta aproksimacija kaj slabša,



morda drugačnega reda? Izkaže se, da ne, saj z razvojem aproksimacij v Taylorjevo vrsto dobimo

$$\begin{aligned} & \frac{-4u(0,0) + u(0,h) + u(0,-h) + u(h,0) + u(-h,0)}{h^2} = \\ & = \Delta u + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0,0) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0,0) \right) + O(h^4) \\ & \frac{-4u(0,0) - u(0,h) - u(0,-h) - u(h,0) - u(-h,0) + 2u(h,h) + 2u(h,-h) + 2u(-h,h) + 2u(-h,-h)}{3h^2} = \\ & = \Delta u + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0,0) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0,0) \right) + O(h^4). \end{aligned}$$

Obe aproksimaciji sta torej drugega reda, razlikujeta se le pri izražavi napake.

**Primer 3.8.** Poglejmo še, kaj se zgodi, če za bazne funkcije vzamemo radialne bazne funkcije. V tem primeru je smiselno vzeti  $n = m$ , torej postavimo po eno radialno funkcijo na vsakega izmed sosedov. Opisana metoda tako postane kolo-kacijska metoda z lokalnimi radialnimi baznimi funkcijami (*angl.* local radial basis function collocation method).

Če za  $n = 9$  sosedov točke  $(0,0)$  izberemo točke

$$N(p) = \{(0,0), (0,h), (0,-h), (h,0), (-h,0), (h,h), (h,-h), (-h,h), (-h,-h)\}$$

in za  $\mathbf{b}$  vzamemo

$$\mathbf{b} = \{x \mapsto \exp((x-c)^2/\sigma^2); c \in N(p)\},$$

potem zopet s pomočjo programa 1 izračunamo aproksimacijo

$$\varphi = \frac{4}{(e^{\frac{2h^2}{\sigma^2}} - 1)^2 \sigma^4} \begin{bmatrix} (e^{\frac{2h^2}{\sigma^2}} - 1)^2 - 4h^2 e^{\frac{2h^2}{\sigma^2}} & h^2 e^{\frac{h^2}{\sigma^2}} & h^2 e^{\frac{h^2}{\sigma^2}} & h^2 e^{\frac{h^2}{\sigma^2}} & h^2 e^{\frac{h^2}{\sigma^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Tokrat vidimo, da se precej razlikuje od aproksimacije s končnimi diferencami. Toda, še vedno je drugega reda, saj za napako velja

$$\varphi \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \Delta u(0,0) = h^2 \left( \frac{2u(0,0)}{\sigma^2} - \frac{\Delta u(0,0)}{\sigma^2} + \frac{1}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0,0) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0,0) \right) \right) + O(h^4).$$

Vidimo, da je aproksimacija operatorja in napaka odvisna od tega, kakšen  $\sigma$  si izberemo v baznih funkcijah.

**Trditev 3.9.** *Aproksimacija Laplaceovega operatorja z devetimi Gaussovimi baznimi funkcijami konvergira proti aproksimaciji z monomi, ko gre  $\sigma \rightarrow \infty$ .*

*Dokaz.* Obe aproksimaciji smo izračunali že v primeru 3.8 in opombi 3.6. Če pogledamo limito izraza (3.7), ko gre  $\sigma \rightarrow \infty$ , dobimo izraz (3.6).  $\square$

### 3.3 Algoritem

V izpeljavi metode v razdelku 3.1.2 je veliko detajlov ostalo neizdelanih, kot na primer, kako diskretiziramo domeno ali kako poiščemo sosede. Ti detajli so opisani v naslednjih podrazdelkih, celotno metodo pa podajamo v psevdokodi kot algoritem 1.

---

**Algoritem 1** Brezmrežna metoda za reševanje PDE iz razdelka 3.1.2.

---

**Vhod:** Parcialna diferencialna enačba, kot opisana v (3.2). Parametri metode:

$N$  ... celotno število diskretizacijskih točk  
 $Q$  ... število diskretizacijskih točk v notranjosti  $\Omega$   
 $n$  ... število sosedov, ki jih ima vsaka točka  
 $m$  ... število baznih funkcij  
 $b$  ... seznam baznih funkcij dolžine  $m$   
 $w$  ... utež

**Izhod:** Skalarno polje  $u$ , ki aproksimira rešitev enačbe (3.2).

```
1: function REŠI( $\Omega, \mathcal{L}, f, \mathcal{R}, g, N, Q, n, m, b, w$ )
2:    $x \leftarrow \text{DISKRETIZIRAJ}(\Omega, N, Q)$   $\triangleright x$  postane seznam  $N$  točk, brez škode za
   splošnost naj leži prvih  $Q$  točk v  $\Omega$  in preostalih  $N - Q$  na  $\partial\Omega$ .
3:    $s \leftarrow \text{SOSEDI}(x, n)$   $\triangleright s$  je seznam dolžine  $N$ , pri čemer je  $s[i]$  seznam
   indeksov elementov v  $x$ , ki so sosedu  $x[i]$ , vključno z  $i$ .
4:    $\varphi \leftarrow$  prazen seznam dolžine  $N$ .
5:   for  $i \leftarrow 1$  to  $Q$  do  $\triangleright$  Izračunamo funkcije oblik v notranjosti.
6:      $\varphi[i] \leftarrow \text{FUNKCIJA OBLIKE}(\mathcal{L}, x[i], x, s[i], n, m, b, w)$   $\triangleright$  Glej algoritem 2.
7:   end for
8:   for  $i \leftarrow Q + 1$  to  $N$  do  $\triangleright$  Izračunamo funkcije oblik na robu.
9:      $\varphi[i] \leftarrow \text{FUNKCIJA OBLIKE}(\mathcal{R}, x[i], x, s[i], n, m, b, w)$   $\triangleright$  Glej algoritem 2.
10:  end for
11:   $A \leftarrow$  prazna razpršena  $N \times N$  matrika
12:  for  $i \leftarrow 1$  to  $N$  do  $\triangleright$  Aproksimiramo enačbo.
13:    for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
14:       $A[i, s[j]] \leftarrow \varphi[i][j]$ 
15:    end for
16:  end for
17:   $r \leftarrow$  prazen vektor dolžine  $N$ 
18:  for  $i \leftarrow 1$  to  $Q$  do  $\triangleright$  Izračunamo desno stran v notranjosti.
19:     $r[i] \leftarrow f(x[i])$ 
20:  end for
21:  for  $i \leftarrow Q + 1$  to  $N$  do  $\triangleright$  Izračunamo robne pogoje.
22:     $r[i] \leftarrow g(x[i])$ 
23:  end for
24:   $u \leftarrow \text{REŠIRAZPRŠENSISTEM}(A, r)$ 
25:  return  $u$ 
26: end function
```

---

### 3.3.1 Diskretizacija

Splošno  $d$ -dimenzionalno domeno  $\Omega$  je težko dobro diskretizirati. Želimo si, da bi bile točke v domeni čim bolj enakomerno razporejene, saj to pomeni, da smo dobro popisali celotno področje in upamo, da s tem tudi obnašanje funkcije  $u$ , hkrati pa si zaradi numerične stabilnosti ne želimo, da bi bile točke preveč skupaj. Uvedimo dve količini, ki nam merita ti dve lastnosti. Za dano domeno  $\Omega$  in množico točk  $X$

---

**Algoritem 2** Izračun funkcije oblike.

---

**Vhod:** Parametri metode:

$\mathcal{L}$  ... parcialen diferencialen operator  
 $p$  ... točka, v kateri aproksimiramo operator  
 $x$  ... seznam diskretizacijskih točk  
 $I$  ... množica indeksov točk v soseščini  $p$   
 $n$  ... število sosedov, ki jih ima vsaka točka  
 $m$  ... število baznih funkcij  
 $b$  ... seznam baznih funkcij dolžine  $m$   
 $w$  ... utež

**Izhod:** Funkcional, ki aproksimira operator  $\mathcal{L}$  v točki  $p$ .

```
1: function FUNKCIJA OBLIKE( $\mathcal{L}, p, x, I, n, m, b, w$ )
2:    $W \leftarrow$  prazen vektor dolžine  $n$ 
3:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
4:      $W[i] \leftarrow \sqrt{w(x[I[i]] - p)}$ 
5:   end for
6:    $B \leftarrow$  prazna matrika velikosti  $n \times m$ 
7:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
8:     for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
9:        $B[i, j] \leftarrow W[i] \cdot b[j](x[I[i]])$ 
10:    end for
11:  end for
12:   $\ell \leftarrow$  prazen vektor dolžine  $m$ 
13:  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
14:     $\ell[j] \leftarrow (\mathcal{L}(b[j]))(p)$ 
15:  end for
16:   $\varphi \leftarrow (\ell \cdot \text{PINV}(B)) \odot W$      $\triangleright$  Direktna analogija enačbe (3.4),  $\odot$  označuje
17:  return  $\varphi$                                  $\triangleright$  Hadamardov produkt.
18: end function
```

---

definirajmo

$$h_{\Omega}(X) = \max_{p \in \Omega} \min_{x \in X} \|p - x\| \quad (3.8)$$

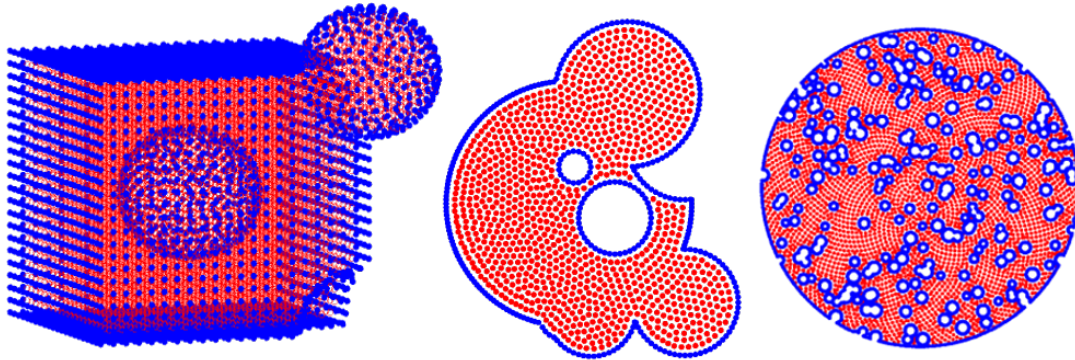
$$S(X) = \min_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \|x - y\|.$$

Količina  $h$  pove, da ne glede na to, kje v domeni smo, imamo na razdalji manj ali enako  $h$  vsaj eno diskretizacijsko točko. Količina  $S$  pa pove, kako blizu so si diskretizacijske točke med seboj. Dobra diskretizacija želi maksimizirati  $S$  in minimizirati  $h$ .

Algoritmi za diskretizacijo so odvisni od načina, kako podamo domeno. V našem primeru se izkaže, da je za trenutne potrebe dovolj, da podpiramo kvadre in krogle do vključno treh dimenzij, kot tudi unije in razlike osnovnih oblik.

Tako lahko za diskretizacijo kvadra uporabimo kar enakomerno diskretizacijo. Prav tako ni težko ugotoviti, kdaj so točke na robu. Za čimbolj enakomerno diskretizacijo notranjosti kroga ali površine sfere lahko uporabimo npr. Fibonaccijevo mrežo, kot predlagano v [4] ali v [5]. Pri razlikah domen preprosto izbrišemo točke,

ki so padle izven domene, pri unijah pa naredimo tudi unijo diskretizacij. Pri tem lahko potem naredimo še en korak in pobrišemo ven kakšno izmed točk, ki so si preblizu skupaj. Primeri domen in njihovih diskretizacij, dobljenih na ta način, so prikazani na sliki 6.



Slika 6: Primeri domen in njihovih diskretizacij.

Pri enakomerni diskretizaciji smo močno uporabili naše znanje o domeni in njeni obliki. Lahko pa, da tega nimamo na voljo in želimo splošnejši algoritem, ki potrebuje npr. samo karakteristično funkcijo domene in njene meje, torej, kakšen kvader, ki našo domeno vsebuje. V tem primeru lahko vzamemo enakomerno diskretizacijo kvadra in odstranimo vse točke, ki niso v domeni, vendar je tu težko kontrolirati število točk. Druga metoda je, da naključno izbiramo točke v kvadru, in sprejememo tiste, ki pristanejo v notranjosti. Še boljšo diskretizacijo dobimo, če namesto psevdonaključnih števil uporabimo kvazinaključna števila, ki imajo manjšo diskrepanco. Več o tem si bralec lahko prebere v [6].

Kljub njihovi splošnosti so naključne diskretizacije precej slabe, kot na primer naključna diskretizacija kroga na sliki 7 (levo). Pri tem, da bi točke v domeni porazdelili čimbolj enakomerno, si lahko pomagamo s preprostim iterativnim postopkom, za katerega se izkaže, da v praksi dobro deluje. Navdih jemljemo iz fizike in si zamislimo, da je vsaka točka naboj, ki se odbija od sosednjih točk in pustimo fiziki, da opravi svoje delo. Na vsako točko tako deluje neka sila, ki jo sili stran od drugih točk, v prazen prostor. Točko lahko malo premaknemo v smeri sile, ponovno izračunamo medsebojne sile in postopek ponavljamo. Pri tem točkam na robu ne dovolimo premikanja in če kakšna točka iz notranjosti zleze iz domene, jo postavimo na naključno mesto nazaj v domeno. Zapis zgornjega postopka je v psevdokodi podan kot algoritem 3. Postopku se kdaj reče tudi *sprostitev* (*angl.* relaxation) domene, kajti na začetku so med točkami napetosti, ki jih s premikanjem poskušajo minimizirati. Rezultati na primeru izboljšanja naključne diskretizacije kroga so podani na sliki 7.

Da algoritem izboljša kvaliteto aproksimacije se vidi tudi, če izračunamo parametra  $h$  in  $S$ . Pričakujemo, da se bo  $S$  povečal, saj se točke, ki so bolj skupaj, bolj odbijajo. Na sliki 8 vidimo primerjavo med kvaliteto diskretizacije s Fibonaccijevo mrežo in njeno 10-kratno izboljšavo. Vidimo, da se  $h$  ni bistveno spremenil, le varianca se mu je malce povečala,  $S$  pa se je v povprečju precej izboljšal in izkazuje celo lepše obnašanje kot prej.

---

**Algoritem 3** Algoritem za izboljšanje kvalitete diskretizacije domene.

---

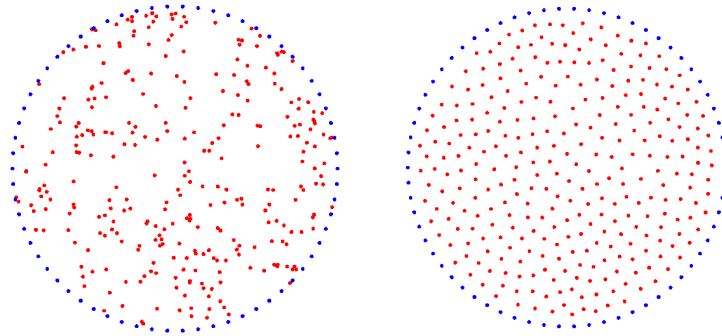
**Vhod:** Parametri metode:

- $\Omega$  ... domena
- $N$  ... število diskretizacijskih točk
- $Q$  ... število diskretizacijskih točk v notranjosti  $\Omega$
- $X$  ... seznam diskretizacijskih točk, prvih  $Q$  je v notranjosti.
- $I$  ... število iteracij
- $s$  ... število sosedov, ki jih upoštevamo pri delovanju sile
- $F_0$  ... delež sile, ki vpliva na premik
- $\alpha$  ... eksponent v sili

**Izhod:** Nov seznam diskretizacijskih točk.

```
1: function IZBOLJŠAJ( $\Omega, N, Q, X, I, s, F_0, \alpha$ )
2:    $r_\chi \leftarrow \left( \frac{\text{VOLUMEN}(\Omega)}{N} \right)^{\frac{1}{\text{DIMENZIJA}(\Omega)}}$   $\triangleright$  Približek povprečne razdalje med točkami.
3:   for  $i \leftarrow 1$  to  $I$  do
4:     for  $j \leftarrow 1$  to  $Q$  do
5:        $\vec{F} \leftarrow \vec{0}$ 
6:       for each  $y$  in {najbližjih  $s$  sosedov  $X[i]$ } do
7:          $\vec{r} \leftarrow \frac{X[i]-y}{r_\chi}$   $\triangleright$  Brezdimenzijski vektor razdalje.
8:          $\vec{F} \leftarrow \vec{F} + \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^\alpha}$ 
9:       end for
10:       $X[i] \leftarrow X[i] + F_0 \vec{F}$ .
11:      if  $X[i] \notin \Omega$  then
12:         $X[i] \leftarrow$  naključna pozicija znotraj  $\Omega$ 
13:      end if
14:    end for
15:  end for
16:  return  $X$ 
17: end function
```

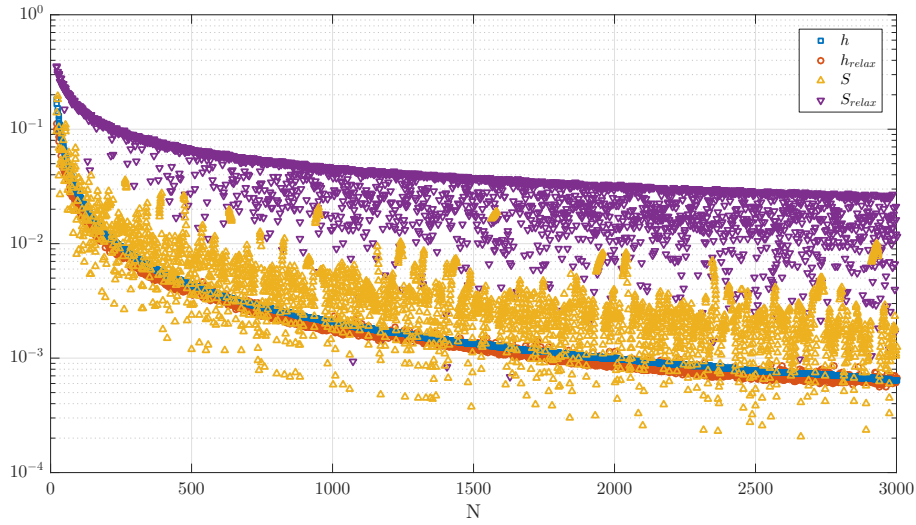
---



Slika 7: Primerjava domene z naključno diskretizacijo (levo) in domene po izvedbi 10 iteracij algoritma 3 s parametri  $F_0 = 10^{-2}$ ,  $s = 6$ ,  $\alpha = 3$  (desno).

### 3.3.2 Iskanje najbližjih sosedov

Tako v algoritmu 1 v vrstici 3, kot v algoritmu 3 v vrstici 6 potrebujemo najti nekaj najbližjih sosedov dane točke. Navadno za okolico izberemo kar  $n$  najbližjih sosedov



Slika 8: Sprememba  $h$  in  $S$  po 10 iteracijah algoritma 3 s parametri  $F_0 = 10^{-2}$ ,  $s = 6$ ,  $\alpha = 3$  v enotskem dvodimenzionalnem krogu z začetno Fibonaccijevo mrežo, v odvisnosti od  $N$ , z razmerjem robnih in notranjih točk  $x : \frac{12}{\pi}\sqrt{x}$ .

v evklidski metriki, vendar bi lahko soseščino definirali tudi drugače, na primer kot množico vozlišč, ki so oddaljeni manj kot neka fiksna razdalja  $R$ . Pri tem pristopu bi imeli manjšo kontrolo nad velikostjo soseščine, zato izberemo prvega.

Problem iskanja najbližjih sosedov (*angl.* nearest neighbour search) je znana in dobro raziskana tema z razvitimi veliko podatkovnimi strukturami, ki podpirajo grajenje, iskanje, vstavljanje in brisanje v logaritemskem času. Večina jih temelji na delitvi prostora na različne hierarhično urejene podprostore, ki jih potem hranimo v drevesni strukturi, kar nam omogoča logaritemski dostop. Med bolj znanimi strukturami so *k-d tree* [7], *ball tree* [8] in *cover tree* [9]. V članku [10] je narejena empirična primerjava med zgornjimi tremi strukturami, ki pokaže, da se v primeru nizkih dimenzij (kar gotovo vsebuje  $d \leq 3$ ) najbolje obnese *k-d tree*. Poleg tega *k-d tree* najboljšo deluje tudi, ko imajo točke, v katerih bomo iskali sosede, podobno porazdelitev kot točke, iz katerih smo naredili drevo, kar v našem primeru drži. Če vključimo še dejstvo, da je *k-d tree* tudi najpopularnejša rešitev za problem najbližjih sosedov in ima na voljo veliko prosto dostopnih implementacij, je to dovolj argumentov, da jo uporabimo tudi mi. Specifična uporabljena implementacija je predstavljena v [11], ki za shrambo  $N$  točk porabi  $O(N)$  prostora in odgovarja na poizvedbe o  $n$  najbližjih sosedih v  $O(n \log N)$  časa. S pomočjo tega postane implementacija funkcije SOSEDI iz algoritma 1 trivialna, pri algoritmu 3 pa si na vsaki iteraciji na novo zgradimo drevo in ga uporabimo za iskanje  $s$  najbližjih sosedov.

### 3.3.3 Reševanje razpršenega sistema

Za reševanje razpršenih sistemov poznamo veliko različnih metod, ki se v grobem delijo na direktne (obsežno opisane v [12]) in iterativne (obsežno opisane v [13]). Pri običajnih, polnih matrikah bi za reševanje splošnega sistema linearnih enačb uporabili LU razcep in razcepili matriko  $A$  kot  $A = LU$ . Toda, tudi če je matrika  $A$  razpršena, v splošnem  $L$  in  $U$  nista nujno in sta lahko celo polni, kar povzroči, da

nam zmanjka pomnilnika. Direktne metode, kot na primer SuperLU [14] poskušajo s preureditvijo stolpcev v razpršeni matriki  $A$  minimizirati število novih neničelnih elementov v matrikah  $L$  in  $U$ . Po drugi strani iterativne metode aproksimirajo pravilno rešitev sistema  $Ax = b$  z zaporedjem približkov  $\{x^{(r)}\}$ , ki naj bi konvergirali k  $x$ . Te metode običajno ne zahtevajo veliko pomnilnika, je pa natančnost približka odvisna od števila porabljenih iteracij, tako da moramo za višjo natančnost porabiti večje število računskih operacij.

Za metode iz numerične linearne algebre bomo uporabljali knjižnico Eigen [15], ki nudi elegantno in hitro delo z matrikami v C++. Vgrajenih ima veliko direktnih in iterativnih metod za reševanje sistemov linearnih enačb.<sup>1</sup> Pri sistemih tipa (3.5) se je v praksi najbolje obnesel BiCGSTAB [16] z ILUT predpogojevanjem [17]. BiCGSTAB v primeru uporabe pravilne shrambe matrike v pomnilniku podpira tudi paralelizacijo, poleg tega pa je konvergenca v praksi dovolj hitra. Predpogojevanje z uporabo nepopolnega LU razcepa z dvojnim pragom (*angl.* dual threshold incomplete LU factorization (ILUT)) omogoča natančnejšo kontrolo nad porabljenim spominom in hitrostjo konvergence z uporabo dveh parametrov  $p$  in  $\tau$ . Med LU faktorizacijo izpustimo vsak element, ki je manjši kot  $\tau \cdot e$ , kjer je  $e$  povprečna absolutna vrednost elementov v trenutni vrstici. Nato obdržimo le največjih  $f$  elementov v matrikah  $L$  in  $U$ , kjer je  $p$  uporabljen kot razmerje med  $f$  in začetnim številom neničelnih elementov. V grobem nam tako parameter  $p$  kontrolira kolikokrat več spomina dovolimo za hranjenje predogojenke, parameter  $\tau$  pa, kako natančna bo LU faktorizacija.

### 3.3.4 Časovna zahtevnost

V tem razdelku analiziramo časovno zahtevnost metode. Predpostavili bomo, da so vse evalvacije funkcij  $f$ ,  $g$ ,  $w$  in  $b_j$ ,  $\mathcal{L}b_j$ ,  $\mathcal{R}b_j$  izvedene v  $O(1)$ . Prav tako bomo predpostavili, da je dimenzija problema majhna in konstantna in ne bo nastopala v analizah.

**Trditev 3.10.** *Pričakovana časovna zahtevnost algoritma 1 je*

$$O(INs \log^2 N + (N + n) \log N + m^2 n N) + T, \quad (3.9)$$

kjer je  $T$  čas, porabljen za reševanje razpršenega sistema enačb.

*Dokaz.* Pri funkciji DISKRETIZIRAJ predpostavimo, da uporabljamo enostavno diskretizacijo, ki deluje v  $O(N)$  časa, skupaj z  $I$  iteracijami izboljšave na  $s$  sosedih, ki traja  $O(INs \log^2 N)$  časa, saj na vsaki iteraciji konstruiramo drevo in iščemo  $s$  sosedov vsake točke.

Izvajanje funkcije SOSEDI traja  $O((N + n) \log N)$  časa za konstrukcijo drevesa in iskanje sosedov.

Izvajanje funkcije FUNKCIJA OBLIKE traja po  $O(n + nm + m + m^2 n + nm + n) = O(mn^2)$ , kjer je prevladujoči faktor  $O(m^2 n)$  rezultat računanja SVD razcepa z dvostranskim Jacobi SVD razcepom iz knjižnice Eigen.<sup>2</sup> Funkcija oblike se izračuna za vsako točko v domeni, torej ta del algoritma traja  $O(m^2 n N)$  časa.

<sup>1</sup>[https://eigen.tuxfamily.org/dox/group\\_\\_TopicSparseSystems.html](https://eigen.tuxfamily.org/dox/group__TopicSparseSystems.html)  
[obiskano 17. 6. 2017]

<sup>2</sup>[https://eigen.tuxfamily.org/dox/classEigen\\_1\\_1JacobiSVD.html](https://eigen.tuxfamily.org/dox/classEigen_1_1JacobiSVD.html) [obiskano 16. 6. 2017]

Pri sestavljanju razpršene matrike lahko v naprej rezerviramo prostor za  $n$  elementov v vsaki vrstici, tako da nas sestavljanje matrike stane  $O(nN)$  časa, sestavljanje robnih pogojev pa  $O(N)$  časa. Na koncu še rešimo razpršen sistem linearnih enačb, kjer pa je čas zelo odvisen od problema, iteracijske metode in predpogojenke.

Skupna časovna zahtevnost je tako  $O(INs \log^2 N + (N + n) \log N + m^2 N) + T$ , kjer je  $T$  čas, porabljen za reševanje razpršenega sistema enačb.  $\square$

### 3.3.5 Prostorska zahtevnost

V tem razdelku analiziramo časovno zahtevnost metode. Podobno kot pri časovni zahtevnosti bomo predpostavili, da so vse evalvacije funkcij  $f$ ,  $g$ ,  $w$  in  $b_j$ ,  $\mathcal{L}b_j$ ,  $\mathcal{R}b_j$  izvedene v  $O(1)$  prostora. Prav tako bomo predpostavili, da je dimenzija problema majhna in konstantna in ne bo nastopala v analizah.

**Trditev 3.11.** *Prostorska zahtevnost algoritma 1 je  $O(nN) + P$ , kjer je  $P$  prostor, ki ga potrebujemo, za reševanje sistema linearnih enačb.*

*Dokaz.* Pri funkciji DISKRETIZIRAJ potrebujemo  $O(N)$  spomina za shrambo  $N$  diskretizacijskih točk. Če izvajamo še dodatne izboljšave diskretizacije, nas to stane  $O(n)$  dodatnega prostora.

Izvajanje funkcije SOSEDI nas stane  $O(N)$  prostora za hranjenje drevesa in  $O(nN)$  prostora za hranjenje indeksov  $n$  sosedov.

Izvajanje funkcije FUNKCIJA OBLIKE nas stane  $O(n + nm + m + n) = O(nm)$  prostora za vsak klic, za hrambo  $N$  funkcij oblike pa potrebujemo  $O(nN)$  prostora.

Razpršena matrika prav tako potrebuje  $O(nN)$  prostora za neničelne elemente. Nato moramo rešiti le še sistem linearnih enačb, kar po predpostavki stane  $P$  prostora. Ker je  $m = O(N)$  je prevladujoči faktor  $O(nN)$  in skupna prostorska zahtevnost je  $O(nN) + P$ .  $\square$

## 3.4 Pogoste vrednosti parametrov

Metoda je bila do sedaj formulirana zelo splošno, v praksi pa se uporablja nekaj ustaljenih kombinacij. Kot bomo videli, razdalje pogosto merimo v večkratnikih  $r_\chi$ , kot v vrstici 2 v algoritmu 3.

**Definicija 3.12.** Količino  $r_\chi$ , pripisano diskretizaciji  $X$  domene  $\Omega$ , izračunano z

$$r_\chi(\Omega, X) = \left( \frac{\text{VOLUMEN}(\Omega)}{|X|} \right)^{\frac{1}{\text{DIMENZIJA}(\Omega)}},$$

imenujemo *karakteristična razdalja*.

Ideja definicije je, da  $r_\chi$  predstavlja približno povprečno razdaljo med diskretizacijskimi točkami, če bi bile razporejene enakomerno. Celoten volumen domene razdelimo na  $N = |X|$  delov, tako da vsaki točki pripada enak kos volumna  $v = \frac{\text{VOLUMEN}(\Omega)}{N}$ . Če bi bil ta kos neka hiperkocka v  $d$  dimenzijah, potem je  $\sqrt[d]{v}$  dolžina njene stranice in to je ocena za medsebojno razdaljo med točkami. V eni dimenziji  $r_\chi$  do faktorja  $\frac{N}{N-1}$  natančno ustreza razdalji med enakomerno razporejenimi točkami. Drugo pogosto merilo za lokalno razdaljo bo kar razdalja do najbližjega (različnega) sosedu, ki jo imenujemo  $r_c$ . To je težje izračunati, če nimamo že zgrajenega drevesa, zato se



ponavadi na enostavnejših primerih poslužujemo kar  $r_\chi$ . Kadar pa to ni dobra aproksimacija razdalje med vozlišči za celo domeno, kot na primer ob goščenju mreže, se poslužimo  $r_c$ .

Pogoste vrednosti za število sosedov so  $n = 3, 5, 7$  v eni dimenziji,  $n = 5, 9, 13, 25$  v dveh dimenzijah in  $n = 7$  ali  $27$  v treh dimenzijah. Za regularne domene to pomeni, da so vozlišča izbrana simetrično, pri neregularnih pa izbira  $n$  ni tako pomembna, dokler je dovolj visoka, da dobro popiše operator, ki ga aproksimiramo. Višji  $n$  ponavadi pomeni večjo stabilnost, morda višji red in počasnejše izvajanje. V praksi izberemo najmanjši  $n$ , ki daje zadovoljive rezultate.

Za utež se pogosto uporablja konstanta  $w \equiv 1$ , če ne želimo uteženih najmanjših kvadratov, sicer pa pogosto vzamemo za utež Gaussovo funkcijo

$$w(x) = \exp \left( - \left( \frac{x}{\sigma_w} \right)^2 \right),$$

kjer  $\sigma_w$  imenujemo parameter oblike (*angl.* shape parameter) uteži. Velja opozoriti, da je ta funkcija praktično nič, če smo več kot  $3\sigma_w$  stran od središča ( $w(3\sigma_w) \approx 0.0001234$ ). Če na primer izberemo  $\sigma_w = r_\chi$  se vsi sosedi, ki so dlje kot  $r_\chi$  stran, v aproksimaciji ne upoštevajo, ne glede na to kako velik  $n$  smo izbrali. Ponavadi se za  $\sigma_w$  začne izbirati vrednosti okoli  $r_\chi$ , je pa potrebno optimalno vrednost določiti za vsak posamezen problem posebej.

Pogosta izbira baznih funkcij so prostori  $\mathbb{P}_\ell$  monomov skupne stopnje manj ali enako  $\ell$ . Pri tem moramo seveda paziti, da izberemo dovolj visok  $n$ . Druga pogosta izbira je, da vzamemo  $m = n$  in za bazne funkcije izberemo radialne bazne funkcije s centri v sosedih.

**Definicija 3.13.** Funkcija  $\psi_c$  se imenuje radialna bazna funkcija s centrom v točki  $c$ , če je odvisna samo od razdalje do centra, torej

$$\psi_c(x) = \tilde{\psi}(\|x - c\|),$$

za vsak  $x$  za neko funkcijo  $\psi$ . Kasneje kar identificiramo  $\psi_c$  in  $\tilde{\psi}$  in pišemo  $\psi_c = \psi_c(r)$ .

V tabeli 2 so našteje najpogostejše uporabljene radialne bazne funkcije, povzete po [18, str. 5].

Ko si izberemo neko bazno funkcijo  $\psi$ , potem za bazne funkcije okoli točke  $p$  vzamemo

$$\mathbf{b} = \{\psi_s; s \in N(p)\}.$$

Pri izbiri parametra oblike  $\sigma_b$  moramo tudi biti do neke mere pazljivi. Izbrati ga moramo dovolj velikega, da se funkcije “prekrivajo”, torej tako, da nima funkcija vrednosti blizu nič pri vseh sosedih razen pri sebi. Hkrati mora biti parameter dovolj majhen, da sistem (3.3) ni preveč nestabilen.

Pogosto se k bazi radialnih baznih funkcij doda še monome nizkih stopenj, za boljšo aproksimacijo funkcij, ki so blizu konstantam. Več o kvaliteti, stabilnosti in redu konvergence aproksimacije z radialnimi baznimi funkcijami si lahko bralec prebere v [19].

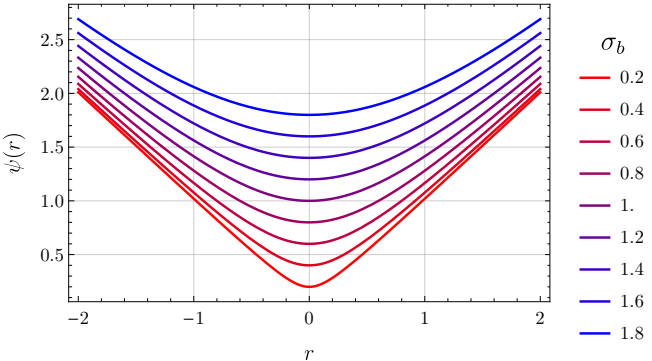
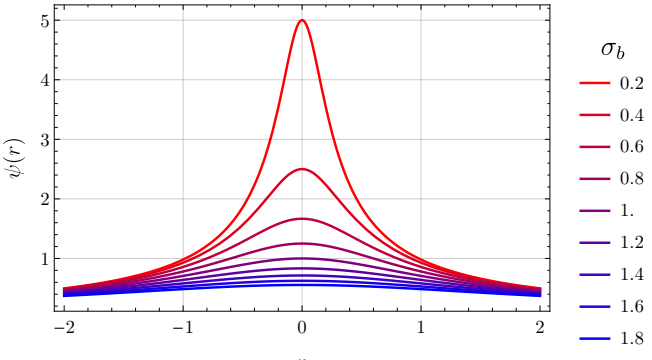
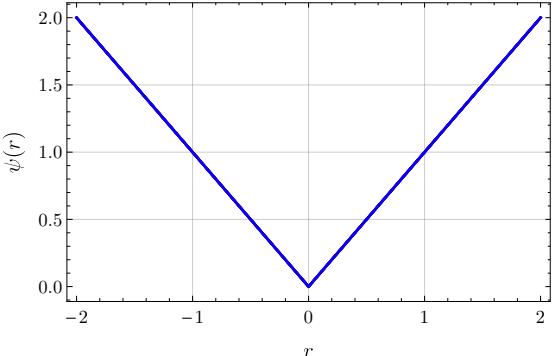
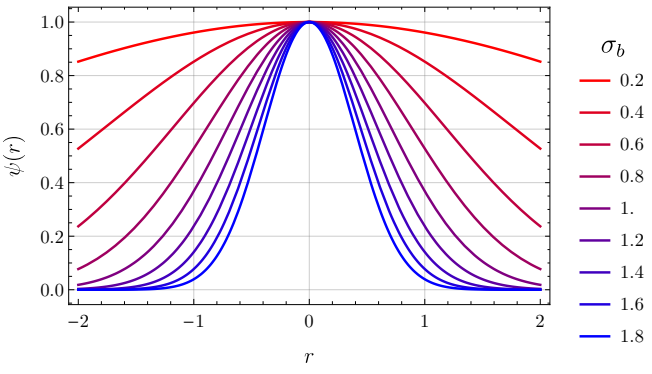
<p>Multikvadratične (MQ) (<i>angl.</i> multiquadric)</p> $\psi(r) = \sqrt{r^2 + \sigma_b^2}$	
<p>Inverzne multikvadratične (IMQ) (<i>angl.</i> Inverse multiquadrics)</p> $\psi(r) = 1/\sqrt{r^2 + \sigma_b^2}$	
<p>Linearna razdalja (L) (<i>angl.</i> Linear distance)</p> $\psi(r) = r$	
<p>Gaussove funkcije (G) (<i>angl.</i> Gaussians)</p> $\psi(r) = \exp(-(r/\sigma_b)^2)$	

Tabela 2: Najpogostejše uporabljene radialne bazne funkcije s parametrom oblike  $\sigma_b$ .

## 4 Implementacija

blah blah [20].

## 5 Numerični zgledi

V tem razdelku bomo pogledali obnašanje metode na osnovnih numeričnih zgledih, da si zgradimo intuicijo o njenem delovanju. V nadaljnjem besedilu in na vseh grafih bo metoda, opisana v razdelku 3 označena s kratico MLSM (*angl.* Meshless Least Squares Method). Če ni drugače navedeno, so vse časovne meritve narejene na prenosnem računalniku s procesorjem Intel(R) Core(TM) i7-4700MQ CPU @2.40GHz in 16 GB DDR3 pomnilnika. Vsi programi so bili prevedeni s prevajalnikom g++ verzije 7.1.7 in stikali `-std=c++14 -O3 -DNDEBUG` na operacijskem sistemu Linux. Pri paralelizaciji je bila uporabljena knjižnica OpenMP [21] za paralelizacijo z deljenim pomnilnikom.

### 5.1 Enodimenzionalni robni problem

Oglejmo si najprej preprost primer enodimenzionalne Possonove enačbe, ki smo ga uporabili že za motivacijo izpeljave numerične metode. Rešujemo problem

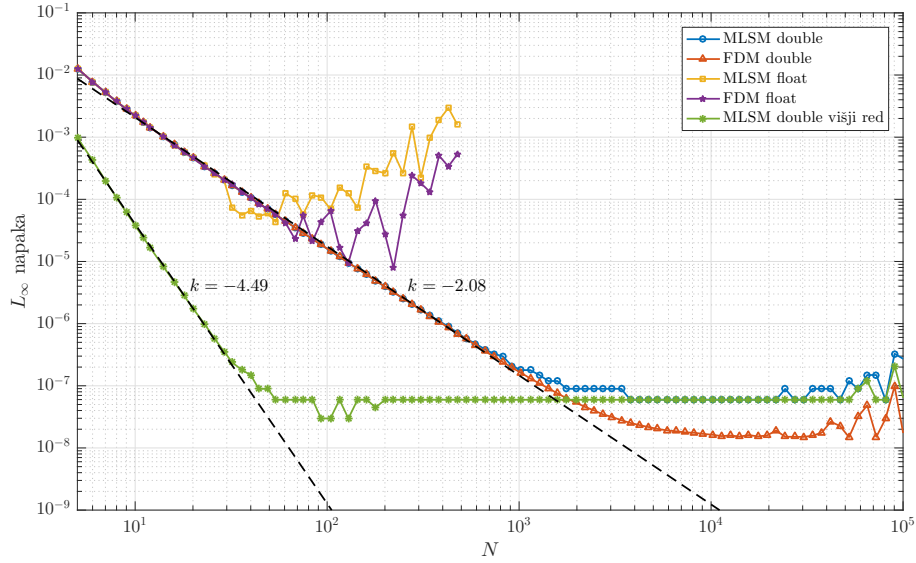
$$\begin{aligned}u''(x) &= \sin(x), \quad x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0, \\ u'(1) &= 0,\end{aligned}$$

ki ima analitično rešitev  $u(x) = \cos(1)x - \sin(x)$ . Na sliki 9 je prikazana konvergenca metode končnih diferenc in MLSM. Metoda MLSM je bila uporabljena s parametri, pri katerih velja trditev 3.4, torej  $n = m = 3$ ,  $w = 1$ ,  $\mathbf{b} = \{1, x, x^2\}$ . Pri obeh metodah smo uporabili dvojno in enojno natančnost računanja s plavajočo vejico. Za primerjavo smo rešili problem tudi z višjim redom  $n = m = 5$ ,  $w = 1$ ,  $\mathbf{b} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ . V obeh primerih smo uporabili direktno metodo SuperLU za reševanje sistema enačb. Za vsakega od teh primerov smo izračunali diskretno  $L_\infty$  napako v diskretizacijskih točkah:

$$L_\infty = \max_{x \in X} |\hat{u}(x) - u(x)|.$$

Na grafu vidimo, da metodi tudi v praksi sovpadata dokler ne preideta v območje nestabilnosti. Pri enojni natančnosti se to zgodi precej hitro, pri  $N = 30$ , pri dvojni natančnosti pa obe metodi konvergirata linearno do približno  $N = 1000$ . Nato se obe metodi približujeta vsaka svoji največji natančnosti, med  $N = 10^4$  in  $N = 10^5$  diskretizacijskimi točkami pa se začnejo pojavljati numerične nestabilnosti. Manjšo končno natančnosti MLSM lahko pripišemo numeričnim napakam pri računanju aproksimacije drugih odvodov. Pri FDM namreč v matriko direktno zapišemo koeficiente  $\frac{1}{h^2}$  in  $-\frac{2}{h^2}$ , pri MLSM pa se ti izračunajo numerično. Iz naklona premice vidimo, da sta obe metodi tudi v praksi reda 2. Če uporabimo za računanje aproksimacije odvoda 5 sosedov namesto 3, po pričakovanjih dobimo metodo, ki konvergira z višjim redom, ima pa enako končno natančnost kot prej.

Časovna primerjava obeh metod je prikazana na sliki 10. MLSM je približno konstantno 5.5-krat počasnejši kot FDM za velike ( $\geq 10^4$ )  $N$ , kot prikazano z razmerjem, merjenim na desni osi. To je tudi pričakovano, saj MLSM išče sosedo in računa aproksimacije, medtem je to pri FDM izračunano na roke. Če pri MLSM posebej merimo samo čas, ki ga porabimo za sestavljanje matrike in reševanje sistema,



Slika 9: Napaka FDM in MLSM metode v primerjavi s pravilno rešitvijo.

vidimo, da se skoraj ujema z časom, porabljenim pri FDM. Minimalno razliko gre pripisati razliki pri načinu grajenja matrike, saj pri FDM natanko vemo pozicije in število neničelnih elementov vnaprej, pri MLSM pa v splošnem ne. MLSM višjega reda je pričakovano počasnejši saj sta  $n$  in  $m$  poleg osnovnega faktorja  $N$  glavna parametra v časovni zahtevnosti (3.9), iz razmerja vidimo, da je konsistentno dvakrat počasnejši. Toda, če pogledamo koliko časa potrebujemo, da dosežemo natančnost  $10^{-6}$  iz grafov 9 in 10 vidimo, da MLSM višjega reda potrebuje le  $N = 22$ , za kar potrebujemo 0.3 ms, pri običajnem redu pa potrebujemo  $N = 400$  kar nanese 1.5 ms. Implementacija deljenih diferenc višjega reda je dovolj zoprna, da se zanjo malokrat odločimo, saj je treba uporabljati enostranske difference pri robu. Pri MLSM pa se izračunajo same, vse kar je potrebno je, da  $n$  iz 3 spremenimo na 5. Če uporabljamo enojno natančnost namesto dvojne se to pozna na času, ki ga porabimo za reševanje, vendar je enojna natančnost ponavadi neuporabna zaradi zgodnje nestabilnosti.

[TODO] insert RBF analysis?

## 5.2 Poissonova enačba

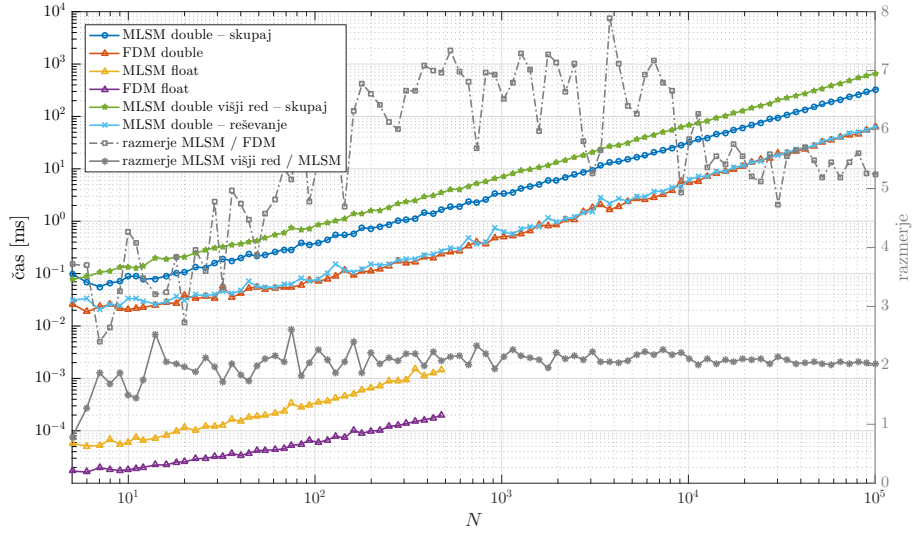
Oglejmo si sedaj obnašanje metode na klasični Poissonovi enačbi na kvadratu:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, 0) &= u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Analitično rešitev lahko dobimo s pomočjo separacije spremenljivk in se glasi

$$u(x, y) = -8 \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ lih}}}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x) \sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \sinh \frac{k\pi y}{2}}{\cosh(\frac{k\pi}{2}) k^3 \pi^3}. \quad (5.2)$$

Za primerjavo z numeričnimi rešitvami bomo uporabili končno vsoto, zato ocenimo ostanek.



Slika 10: Primerjava časa izvajanja MLSM in FDM metod.

**Trditev 5.1.** Za ostanek vrste (5.2) velja

$$\left| -8 \sum_{\substack{k=\ell \\ k \text{ lih}}}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x) \sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \sinh \frac{k\pi y}{2}}{\cosh(\frac{k\pi}{2}) k^3 \pi^3} \right| < -\frac{\psi''(\ell/2)}{4\pi^3},$$

kjer je  $\psi$  digama funkcija.

*Dokaz.* Ocenjujmo vsak člen vrste posebej. Funkcijo  $\sin$  ocenimo z 1, funkcija  $\sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \sinh \frac{k\pi y}{2}$  ima maksimum na sredini intervala in jo lahko ocenimo z njeno vrednostjo v  $y = \frac{1}{2}$ . Tako nam ostane za oceniti številska vrsta

$$-8 \sum_{\substack{k=\ell \\ k \text{ lih}}}^{\infty} \frac{(\sinh \frac{k\pi}{4})^2}{\cosh(\frac{k\pi}{2}) k^3 \pi^3}.$$

Uporabimo še neenakost  $\frac{(\sinh \frac{k\pi}{4})^2}{\cosh(\frac{k\pi}{2})} < \frac{1}{2}$  in dobimo oceno

$$\left| -8 \sum_{\substack{k=\ell \\ k \text{ lih}}}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x) \sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \sinh \frac{k\pi y}{2}}{\cosh(\frac{k\pi}{2}) k^3 \pi^3} \right| < \frac{4}{\pi^3} \sum_{\substack{k=\ell \\ k \text{ lih}}}^{\infty} \frac{1}{k^3} = -\frac{\psi''(\ell/2)}{4\pi^3},$$

kjer je  $\psi$  digama funkcija (in posledično  $\psi''$  poligama funkcija). □

Za primer  $\ell = 1$  v prejšnji trditvi dobimo oceno

$$|u(x, y)| \leq \frac{7\zeta(3)}{2\pi^2} \approx 0.1356,$$

kar drži, v resnici je najbolj ekstremna vrednost  $u(1/2, 1/2) \approx -0.07367$ . Iz zgornje trditve lahko izračunamo, da je rep vrste (5.2) za  $\ell = 59$  manjši kot  $10^{-5}$ , za  $\ell = 181$  pa manjši kot  $10^{-6}$ . Za izračun analitične rešitve ob primerjavi z numerično je bil uporabljen  $\ell = 181$ .

**Opomba 5.2.** Računanje izraza

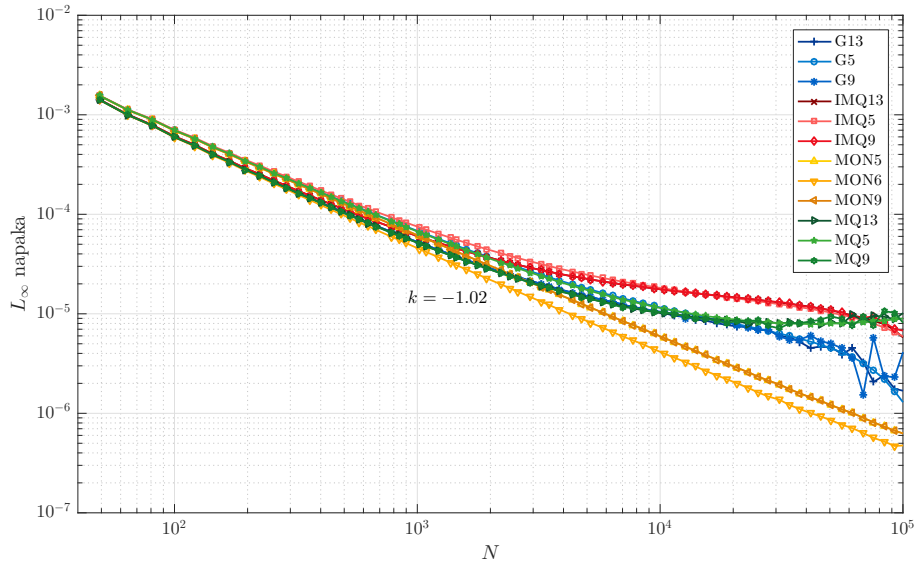
$$\frac{\sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \sinh \frac{k\pi y}{2}}{\cosh(\frac{k\pi}{2})}$$

ni numerično stabilno, ko  $k$  raste, kajti tako števec kot imenovalec se približujeta neskončno, kvocient pa ima končno limito. Ko za želimo izračunati numerično je bolje uporabiti stabilnejšo obliko

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\exp(-k\pi y) + \exp(-k\pi(1-y))}{1 + \exp(-k\pi)} \right),$$

kjer vedno nastopa negativen eksponent.

Rešimo problem (5.1) numerično, s štirimi različnimi nabori baznih funkcij: monomi, Gaussovimi funkcijami, multikvadratičnimi in inverznimi multikvadratičnimi. Za monome vzemimo  $n = m = 5$ ,  $m = 6$  in  $n = 9$  in  $m = n = 9$ , kar sovпада s primeri iz razdelka 3.2. Za radialne bazne funkcije vzemimo vedno  $n = m$  in sicer vrednosti 5, 9 in 13 za parameter oblike pa  $\sigma_b = 110 r_\chi$ . Za utež vzemimo Gaussovo utež z  $\sigma_w = \frac{3}{4} r_\chi$ . V vseh primerih je bila za reševanje sistema enačb uporabljena direktna metoda SuperLU. Iterativni BiCGSTAB algoritem je dal enake rezultate. Napaka metod je prikazana na sliki 11.

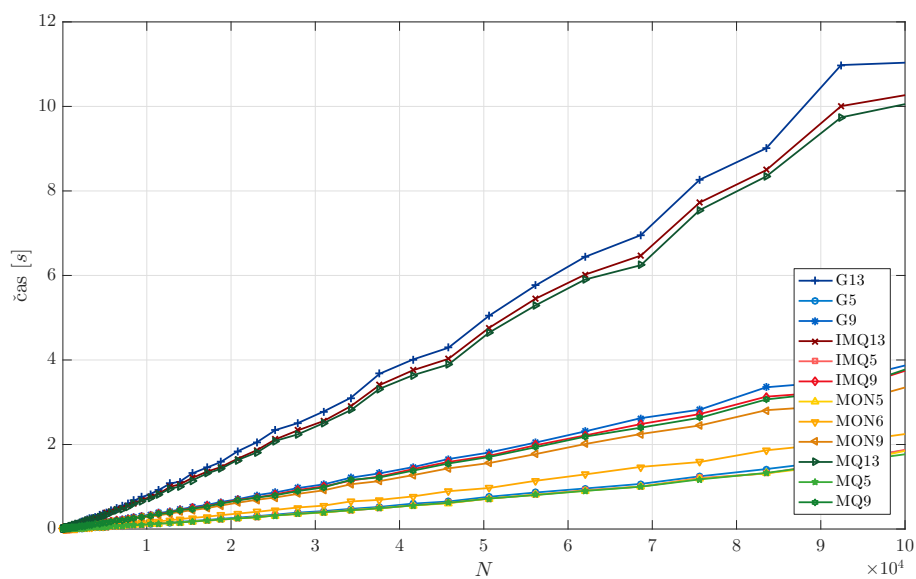


Slika 11: Konvergenca MLSM za različne parametre pri reševanju (5.1).

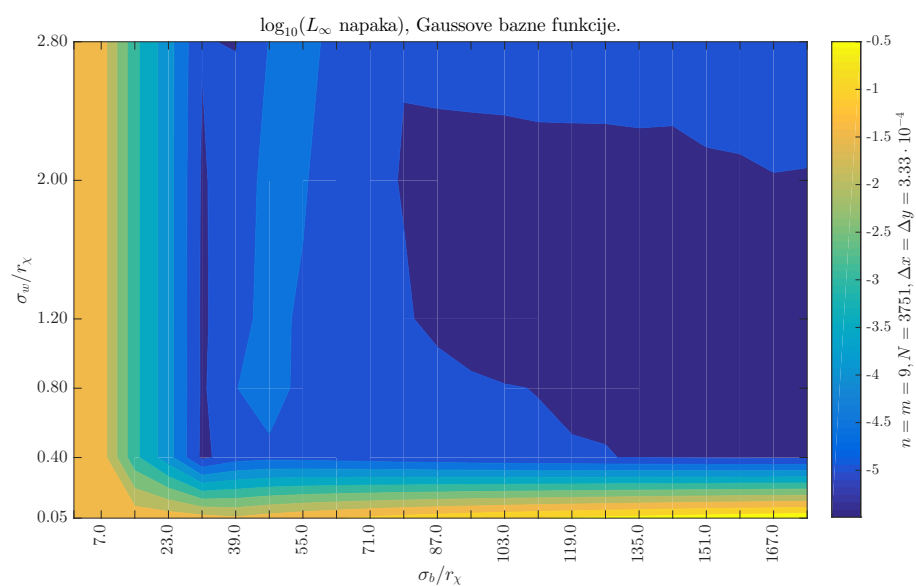
### 5.3 Hertzov kontaktni problem

### 5.4 FWO case

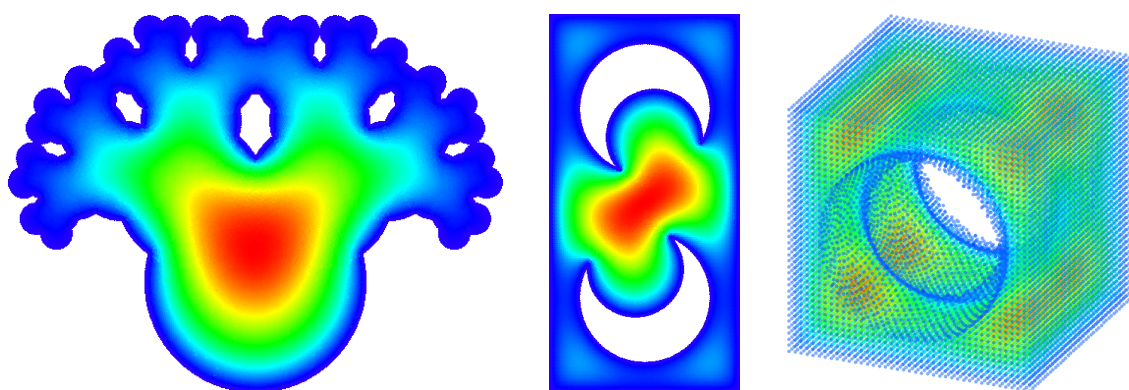
## 6 Zaključek



Slika 12: Čas izvajanja za različne izbore parametrov pri reševanju problema (5.1).



Slika 13: Napaka v odvisnosti od  $\sigma_b$  in  $\sigma_w$  za Gaussove funkcije.



Slika 14: Reševanje Poissonove enačbe  $\Delta u = 1$  s homogenimi robnimi pogoji na zanimivejših domenah.



## Literatura

- [1] L.P. Lebedev and M.J. Cloud. *Introduction to Mathematical Elasticity*. World Scientific, 2009.
- [2] William S Slaughter. *The linearized theory of elasticity*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Keith D Hjelmstad. *Fundamentals of structural mechanics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [4] JH Hannay and JF Nye. Fibonacci numerical integration on a sphere. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(48):11591, 2004.
- [5] Álvaro González. Measurement of areas on a sphere using Fibonacci and latitude–longitude lattices. *Mathematical Geosciences*, 42(1):49–64, 2010.
- [6] William J Morokoff and Russel E Caflisch. Quasi-random sequences and their discrepancies. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(6):1251–1279, 1994.
- [7] Andrew W Moore. An introductory tutorial on kd-trees. 1991.
- [8] Stephen M Omohundro. *Five balltree construction algorithms*. International Computer Science Institute Berkeley, 1989.
- [9] Alina Beygelzimer, Sham Kakade, and John Langford. Cover trees for nearest neighbor. In *Proceedings of the 23rd international conference on Machine learning*, pages 97–104. ACM, 2006.
- [10] Ashraf M Kibriya and Eibe Frank. An empirical comparison of exact nearest neighbour algorithms. In *European Conference on Principles of Data Mining and Knowledge Discovery*, pages 140–151. Springer, 2007.
- [11] David M Mount and Sunil Arya. ANN: library for approximate nearest neighbour searching. 1998. <https://www.cs.umd.edu/~mount/ANN/> [obiskano 16. 6. 2017].
- [12] Timothy A Davis. *Direct methods for sparse linear systems*. SIAM, 2006.
- [13] Yousef Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM, 2003.
- [14] Xiaoye S Li. An overview of SuperLU: Algorithms, implementation, and user interface. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 31(3):302–325, 2005.
- [15] Gaël Guennebaud, Benoît Jacob, et al. Eigen v3, 2010. <http://eigen.tuxfamily.org> [obiskano 16. 6. 2017].
- [16] Henk A Van der Vorst. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing*, 13(2):631–644, 1992.

- [17] Yousef Saad. ILUT: A dual threshold incomplete LU factorization. *Numerical linear algebra with applications*, 1(4):387–402, 1994.
- [18] Robert Schaback. Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 3(3):251–264, 1995.
- [19] Martin D Buhmann. Radial basis functions. *Acta Numerica 2000*, 9:1–38, 2000.
- [20] Bjarne Stroustrup. *The C++ programming language*. Pearson Education India, 1995.
- [21] Leonardo Dagum and Ramesh Menon. OpenMP: an industry standard API for shared-memory programming. *IEEE computational science and engineering*, 5(1):46–55, 1998. <http://www.openmp.org/> [obiskano 21. 06. 2017].