

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Jure Slak

# Reševanje linearnih elastostatičnih problemov z brezmrežnimi metodami

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. George Mejak

Somentor: dr. Gregor Kosec

Ljubljana, 2017

# Kazalo vsebine

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Uvod</b>                                     | <b>1</b>  |
| 1.1 Notacija . . . . .                            | 1         |
| 1.2 Osnovne trditve vektorske analize . . . . .   | 2         |
| 1.3 Osnovni izreki funkcionalne analize . . . . . | 4         |
| <b>2 Teorija linearne elastičnosti</b>            | <b>5</b>  |
| 2.1 Osnove gibanja . . . . .                      | 6         |
| 2.1.1 Aksiomi gibanja . . . . .                   | 9         |
| 2.2 Napetostni tenzor . . . . .                   | 11        |
| 2.3 Enačbe gibanja . . . . .                      | 14        |
| 2.4 Konstitutivne enačbe . . . . .                | 16        |
| 2.4.1 Mera deformacije . . . . .                  | 16        |
| 2.4.2 Hookov zakon . . . . .                      | 19        |
| 2.5 Navierova enačba . . . . .                    | 21        |
| 2.6 Obstoj in enoličnost rešitve . . . . .        | 23        |
| 2.7 Priprava na numerično reševanje . . . . .     | 26        |
| 2.7.1 Poenostavitev na dve dimenziji . . . . .    | 26        |
| 2.7.2 Robni pogoji . . . . .                      | 27        |
| <b>3 Numerična metoda</b>                         | <b>27</b> |
| 3.1 Izpeljava . . . . .                           | 28        |
| 3.1.1 Ideja in motivacija . . . . .               | 28        |
| 3.1.2 Splošna izpeljava . . . . .                 | 30        |
| 3.2 Posebni primeri . . . . .                     | 33        |
| 3.3 Algoritem . . . . .                           | 37        |
| 3.3.1 Diskretizacija . . . . .                    | 37        |
| 3.3.2 Iskanje najbližjih sosedov . . . . .        | 40        |
| 3.3.3 Reševanje razpršenega sistema . . . . .     | 41        |
| 3.3.4 Časovna zahtevnost . . . . .                | 42        |
| 3.3.5 Prostorska zahtevnost . . . . .             | 43        |
| 3.4 Pogoste vrednosti parametrov . . . . .        | 43        |
| 3.5 Višjedimenzionalni problemi . . . . .         | 44        |
| 3.6 Goščenje točk v domeni . . . . .              | 46        |
| <b>4 Osnovni numerični zgledi</b>                 | <b>47</b> |
| 4.1 Enodimensionalni robni problem . . . . .      | 47        |
| 4.2 Poissonova enačba . . . . .                   | 49        |
| 4.3 Vpet nosilec . . . . .                        | 52        |
| 4.4 Hertzov kontaktni problem . . . . .           | 55        |
| <b>5 Zgled iz mehanike utrujenosti materialov</b> | <b>61</b> |
| <b>6 Implementacija</b>                           | <b>65</b> |
| 6.1 Vzporedno računanje . . . . .                 | 66        |
| <b>7 Zaključek</b>                                | <b>67</b> |
| <b>Literatura</b>                                 | <b>69</b> |

# Kazalo slik

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | Primer gibanja enotske kocke. . . . .  | 7  |
| 2   | Valj, uporabljen v dokazu Cauchyjeve recipročne relacije. . . . .              | 12 |
| 3   | Tetraeder, uporabljen za dokaz Cauchyjevega izreka o napetosti. . . .          | 13 |
| 4   | Razteg tanke palice vzdolž njene osi. . . . .                                  | 16 |
| 5   | Domena in diskretizacija notranjosti in roba. . . . .                          | 31 |
| 6   | Primeri bolj zapletenih domen in njihovih diskretizacij. . . . .               | 39 |
| 7   | Primerjava naključno diskretizirane in izboljšane domene. . . . .              | 40 |
| 8   | Sprememba kvalitete diskretizacije po izboljšavi. . . . .                      | 41 |
| 9   | Algoritem za goščenje točk v domeni. . . . .                                   | 46 |
| 10  | Napaka FDM in MLSM metode. . . . .   | 48 |
| 11  | Primerjava časa izvajanja MLSM in FDM metod. . . . .                           | 48 |
| 12  | Konvergenca MLSM pri reševanju Poissonove enačbe . . . . .                     | 50 |
| 13  | Čas izvajanja MLSM pri reševanju Poissonove enačbe . . . . .                   | 51 |
| 14  | Konvergenčne krivulje za Gaussove funkcije. . . . .                            | 51 |
| 15  | Analiza reševanja Poissonove enačbe z Gaussovimi funkcijami in utežmi. . . . . | 52 |
| 15a | Napaka v odvisnosti od $\sigma_b$ in $\sigma_w$ . . . . .                      | 52 |
| 15b | Število odrezanih singularnih vrednosti. . . . .                               | 52 |
| 16  | Reševanje $\Delta u = 1$ na zanimivejših domenah. . . . .                      | 53 |
| 17  | Numerična rešitev problema vpetega nosilca. . . . .                            | 54 |
| 18  | Konvergenca numerične metode pri reševanju problema vpetega nosilca. . . . .   | 54 |
| 19  | Numerična rešitev upogiba nosilca z nekaj luknjami. . . . .                    | 55 |
| 20  | Obravnavan Hertzev kontaktni problem. . . . .                                  | 56 |
| 20a | Stik dveh vzporednih valjev. . . . .   | 56 |
| 20b | Robni pogoji za numerično rešitev. . . . .                                     | 56 |
| 21  | Napetosti pod območjem kontakta med valjem in polravnino. . . . .              | 57 |
| 22  | Matrika sistema enačb pri reševanju problema vpetega nosilca. . . . .          | 58 |
| 23  | Konvergenca metode pri reševanju Hertzevega kontaktnega problema. . . . .      | 59 |
| 24  | Napaka v odvisnosti od velikosti domene. . . . .                               | 59 |
| 25  | Primer zgoščene domene s katero rešujemo Hertzev kontaktni problem. . . . .    | 60 |
| 25a | Sedemnajstkrat zgoščena diskretizacija. . . . .                                | 60 |
| 25b | Gostota diskretizacije zgoščene domene. . . . .                                | 60 |
| 26  | Napaka metode pri različnih nivojih sekundarnega zgoščevanja. . . . .          | 60 |
| 27  | Numerična rešitev Hertzevega kontaktnega problema. . . . .                     | 61 |
| 28  | Shema eksperimenta za raziskovanje utrujanja materialov. . . . .               | 61 |
| 29  | Domena in robni pogoji za numerično reševanje problema (5.1). . . . .          | 63 |
| 29a | Primer napetosti $p(x)$ in $q(x)$ . . . . .                                    | 63 |
| 29b | Domena in robni pogoji. . . . .  | 63 |
| 30  | Ujemanje MLSM in FEM rešitve pri analizi kontakta. . . . .                     | 64 |
| 31  | Primer rešitve problema (5.1) za $\mu = 0.65$ in $R = 50$ mm. . . . .          | 64 |
| 32  | Diagram implementacije in izvedbe MLSM . . . . .                               | 66 |
| 33  | Čas izvajanja delov programa pri reševanju Poissonove enačbe. . . . .          | 66 |
| 34  | Faktorji pohitritve pri reševanju Poissonove enačbe. . . . .                   | 67 |
| 35  | Čas izvajanja delov programa pri uporabi 12 niti. . . . .                      | 68 |

## Program dela

V delu predstavite teorijo linearne elastičnosti s poudarkom na natančni matematični formulaciji. Izpeljite pripadajoče enačbe ravnovesja in nato z orodji funkcionalne analize obravnavajte enoličnost obstoja rešitve.

Iz metode končnih diferenc izpeljite bolj splošno numerično metodo, ki bo omogočala obravnavo neregularnih oblik, zgoščevanje porazdelitve računskih točk in spremjanje reda natančnosti aproksimacij odvodov. Analizirajte delovanje metode na preprostih primerih in postopoma nadgrajujte problem do Hertzevega problema. Kot zadnji primer predstavite rešitev Hertzevega kontakta z upoštevanjem trenja in lepenja na stični površini. Kjer je mogoče rešitve podprite s primerjavami z analitičnimi rešitvami in konvergenčnimi analizami.

Osnovna literatura: [27], [44],[16] [13] (prvi del), [29], [50], [31], [6], [48] (drugi del).

**Reševanje linearnih elastostatičnih problemov z brezmrežnimi metodami**

POVZETEK

TBD

**Solving linear elastostatic problems using meshless methods**

ABSTRACT

TBD

<http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx&btn=Current>

**Math. Subj. Class. (2010):** 74B05, 65N99, 65Y20

**Ključne besede:** linearna elastostatika, brezmrežne metode

**Keywords:** linear elastostatics, meshless methods



# 1 Uvod

Teorija linearne elastičnosti opisuje trdnine pod obremenitvijo v mirovanju. Z uporabo linearnih parcialnih diferencialnih enačb opisuje deformacije in napetosti v materialih in se zaradi tega močno uporablja v strojništву in gradbeništvu. Enačbe, ki podajajo količine, ki nas zanimajo, so zelo redko rešljive na roke ali analitično in ne preostane nam drugega, kot da se reševanja lotimo z računalnikom. Numerično se probleme linearne elastičnosti ponavadi rešuje v šibki obliki z metodo končnih elementov [50]. Toda že v preteklosti so probleme reševali v močni obliki z metodo končnih differenc [?] in metodo končnih volumnov [46]. Poleg tega so se v bolj bližnji preteklosti za reševanje elastostatičnih problemov uporabljati tudi novejše brezmrežne metode v močni in šibki obliki [6, 32]. Prednost brezmrežnih metod je, da ne potrebujejo polne diskretizacije domene (npr. z večkotniki) kot jo metoda končnih elementov, temveč le točke v domeni in poznavanje njihove lokalne medsebojne lege, kar omogoča večjo splošnost, lažjo posplošitev na višje dimenzije [10, 28] in elegančnejšo implementacijo. Poleg tega se sumi, da imajo prednost pri reševanju nekaterih problemov, kot npr. pri problemih, kjer je treba premikati rob domene ali točke v notranjosti, kot na primer simulacije širjenja razpok [39]. Eno izmed brezmrežnih metod razvijamo s sodelavci tudi v Laboratoriju za vzporedno in porazdeljeno računanje na Institutu ‐Jožef Stefan‐ in sodelujemo v mednarodnem projektu skupaj z Univerzo v Gentu in Univerzo v Luksemburgu na področju utrujanja materialov.

Tekom naloge si bomo v razdelku 2 ogledali natančno matematično teorijo linearne elastodinamike, ki bo izpeljana iz splošnih aksiomov gibanja. Jasno bo označeno na katerih mestih smo naredili poenostavitev in pod kakšnimi predpostavkami. S tem bo nakazano, v katero smer se lahko razvijajo posplošitve teorije. Poseben poudarek bo dan Navierovi enačbi ter enoličnosti in obstoju njenih rešitev, opisanih v razdelku 2.6, in poenostavitvah, ki jo naredijo primernejšo za numerično reševanje. Brezmrežno metodo, ki bo kasneje v uporabi, bomo v razdelku 3 izpeljali iz znane metode končnih differenc. Metoda bo izpeljana v sorazmerno visoki splošnosti in v posebnih primerih bomo prepoznali znane posplošitve drugih metod. Metodo bomo v razdelku 4 testirali na klasičnih zgledih in analizirali njeno obnašanje glede na različne izbire parametrov. Rezultati numerične aproksimacije elastostatičnega kontaktnega problema iz eksperimenta za raziskovanja utrujanja materialov, ki se ujemajo z nedavno objavljenimi [38], so opisani v razdelku 5. V razdelku 6 si ogledamo še implementacijske detajle metode in možnosti paralelizacije.

## 1.1 Notacija

Skalarje bomo označevali z malimi latinskimi ali grškimi črkami, npr.  $a, \alpha \in \mathbb{R}$ . Vektorje iz  $\mathbb{R}^3$  bomo označevali s puščico nad črko, npr.  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ . Tenzorje (drugega reda) v mehaniki bomo označevali z malimi latinskimi ali grškimi črkami, npr.  $t, \sigma \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ . Komponente bomo označevali z indeksom spodaj, npr.  $v_i$  ali  $t_{ij}$ . V razdelkih 1.2 in 2 bomo uporabljali tudi sumacijsko konvencijo na ponovljenem indeksu. Tako na primer enačba

$$t_{ij}v_j = 0$$

vsebuje implicitno vsoto po  $j$ , razume pa se tudi, da velja za vsak  $i$ . Z  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  bomo označevali skalarni produkt (enojno kontrakcijo) vektorjev. Za skalarni produkt tenzorjev (dvojno kontrakcijo) bomo uporabljali oznako  $s : t$ , skalarni produkt v

funkcionalno analitičnem smislu na nekem prostoru  $X$  pa bomo označevali z  $\langle u, v \rangle_X$ . S  $t^\top$  bomo označevali transpozicijo tenzorja ali matrike, definirano z  $\vec{a} \cdot t\vec{b} = t^\top \vec{a} \cdot \vec{b}$ . Z oznako  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$  bomo označevali mešani produkt vektorjev  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$ , definiran kot  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ .

Divergenco, gradient in Laplaceov operator bomo označevali z  $\operatorname{div}$ ,  $\operatorname{grad}$ ,  $\Delta$  ali pa z  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla$  in  $\nabla^2$ .

V razdelkih 3 in 4 bomo imeli opravka tudi z vektorji in matrikami splošnih dimenzij, ki ne predstavlja mehaničnih količin, ampak samo končno zaporedje skalarjev. Take vektorje bomo označevali odebeleno, npr.  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^n$ , matrike pa z velikimi tiskanimi črkami  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

## 1.2 Osnovne trditve vektorske analize

Spomnimo se nekaj osnovnih trditev vektorske analize, ki jih bomo potrebovali v kasnejših izpeljovah. Če ni drugače navedeno, bomo predpostavili obstoj in gladkost toliko odvodov, kot potrebujemo, ponavadi do drugega reda.

Prostor tenzorjev drugega reda opremimo s skalarnim produkтом

$$s : t = s_{ij}t_{ij} = \operatorname{tr}(s^\top t).$$

**Trditve 1.1.** *V zgornjem skalarnem produktu razpade prostor tenzorjev na direktno ortogonalno vsoto podprostorov simetričnih in antisimetričnih tenzorjev.*

$$V \otimes V = \operatorname{Sym}(V) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Asym}(V)$$

*Dokaz.* Vsak tenzor  $s$  lahko zapišemo kot  $s = \frac{1}{2}(s + s^\top) + \frac{1}{2}(s - s^\top)$ . Če je  $s \in \operatorname{Sym}(V) \cap \operatorname{Asym}(V)$  je  $s^\top = -s$  od koder sledi  $s = 0$ . Vsota je res direktna. Ker velja za simetričen  $s$  in antisimetričen  $t$  tudi

$$s : t = \operatorname{tr}(s^\top t) = -\operatorname{tr}(st^\top) = -\operatorname{tr}(s^\top t) = -s : t,$$

od koder sledi  $s : t = 0$ , je vsota ortogonalna.  $\square$

**Definicija 1.2.** Divergenca tenzorja  $t$  drugega reda je vektorsko polje, za katerega za vsak konstanten vektor  $\vec{a}$  velja

$$\operatorname{div}(t) \cdot \vec{a} = \operatorname{div}(t^\top \vec{a}).$$

V koordinatah je  $(\operatorname{div} t)_i = t_{ij,j}$ .

Zakaj je ravno to prava definicija, nam pove naslednji izrek

**Izrek 1.3** (Gauss). *Naj bo  $\Omega$  odprta povezana omejena množica z odsekoma gladkim robom,  $\vec{n}$  zunanja enotska normala na  $\partial\Omega$  in  $t$  tenzorsko polje na  $\Omega$ . Potem velja*

$$\int_{\partial\Omega} t \vec{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} t dV.$$

*Dokaz.* Naj bo  $\vec{a}$  poljuben konstanten vektor. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \left( \int_{\partial\Omega} t \vec{n} dS \right) &= \int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot t \vec{n} dS = \int_{\partial\Omega} t^\top \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}(t^\top \vec{a}) dV = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(t) \cdot \vec{a} dV = \left( \int_{\Omega} \operatorname{div} t dV \right) \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

Pri računu smo uporabili definicijo  $t^T$ , definicijo divergence in Gaussov izrek za vektorska polja. Ker enakost velja za vsak vektor  $\vec{a}$ , velja tudi enakost vektorskih polj v izreku.  $\square$

**Definicija 1.4.** Gradient vektorskega polja  $\vec{v}$  je tenzor drugega reda, definiran kot

$$(\text{grad } \vec{v})^T \vec{a} = \text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{a}).$$

V koordinatah je  $(\text{grad } \vec{v})_{ij} = v_{i,j}$ .

**Opomba 1.5.** Gradient vektorskega polja je diferencial (oz. v neki bazi Jacobijeva matrika) preslikave  $x \mapsto \vec{v}(x)$  in ga označujemo tudi kot  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$ .

**Definicija 1.6.** Laplaceov operator je na vektorskem polju  $\vec{v}$  definiran kot

$$\Delta \vec{v} = \text{div grad } \vec{v}.$$

Pokažimo še nekaj osnovnih trditev, ki jih bomo potrebovali pri kasnejših izpeljavah.

**Trditev 1.7.** Za poljubno vektorsko polje  $\vec{v}$  velja

$$\text{tr grad } \vec{v} = \text{div } \vec{v}.$$

*Dokaz.*

$$\text{tr grad } \vec{v} = (\text{grad } \vec{v})_{ii} = v_{i,i} = \text{div } \vec{v}. \quad \square$$

**Trditev 1.8.** Za poljubno vektorsko polje  $\vec{v}$  velja

$$\text{div}(\text{grad } \vec{v}^T) = \text{grad div } \vec{v}.$$

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } \vec{v}^T)_i &= (\text{grad } \vec{v}^T)_{ij,j} = (\text{grad } \vec{v})_{ji,j} = v_{j,ij} = \\ &= v_{j,ji} = (\text{grad } v_{j,ji})_i = (\text{grad div } \vec{v})_i. \end{aligned}$$

Pri tem smo uporabili  $C^2$  gladkost polja pri menjavi vrstnega reda parcialnih odvodov.  $\square$

**Trditev 1.9.** Za poljubno skalarno polje  $\varphi$  velja

$$\text{div}(\varphi I) = \text{grad } \varphi.$$

*Dokaz.*

$$(\text{div}(\varphi I))_i = (\varphi I)_{ij,j} = (\varphi \delta_{ij})_{,j} = \varphi_{,i} = (\text{grad } \varphi)_i \quad \square$$

**Trditev 1.10.** Za poljubno vektorsko polje  $\vec{v}$  in tenzor  $t$  velja

$$\text{div}(t^T \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{div } t + t : \text{grad } \vec{v}.$$

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} (\text{div}(t^T \vec{v}))_i &= (t^T \vec{v})_{i,i} = (t_{ij}^T v_j)_{,i} = t_{ij,i}^T v_j + t_{ij}^T v_{j,i} = t_{ji,i} v_j + t_{ji} v_{j,i} = \\ &= (\text{div } t)_j v_j + t : \text{grad } \vec{v} = \text{div } t \cdot \vec{v} + t : \text{grad } \vec{v} \end{aligned} \quad \square$$

### 1.3 Osnovni izreki funkcionalne analize

Ponovimo še nekaj osnovnih definicij in izrekov funkcionalne analize, ki jih bomo potrebovali pri obravnavi enoličnosti in obstoja rešitve linearnih parcialnih diferencialnih enačb. Enačbe bodo veljale na neki množici  $\Omega$ , za katero bomo predpostavili, da je odprta, povezana z odsekoma gladkim robom. Taki množici bomo rekli *domena*. Gaussov izrek 1.3 tako velja za omejene domene. Za matematično natančno obravnavo parcialnih diferencialnih enačb in njihovih odvodov bomo potrebovali ustreerne funkcijske prostore, ti. prostore Soboljeva. Na temo prostorov Soboljeva je na voljo ogromno literature. Izreki in definicije iz tega razdelka so bili povzeti po [1].

**Definicija 1.11.** Prostor *Soboljeva*  $W_{k,p}(\Omega)$  za  $k \in \mathbb{N}$  in  $p \in [1, \infty)$  nad domeno  $\Omega$  je definiran kot

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}; D^\alpha u \in L^p \text{ za vsak } |\alpha| \leq k\}.$$

Pri tem je  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  multiindeks,  $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$  in  $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}}$  šibki odvod funkcije  $f$ .

**Opomba 1.12.** Pravimo, da je  $v$  šibki odvod funkcije  $u$ , če je

$$\int_{\Omega} D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi,$$

za vsako testno funkcijo  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

Prostori Soboljeva opremimo z normo

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Obstajajo tudi druge pogoste definicije norme, vendar vse pogosto uporabljene definicije definirajo ekvivalentne norme. V zgoraj definirani normi so prostori  $W^{k,p}(\Omega)$  Banachovi. Za poseben primer  $p = 2$  označimo  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$  in ta prostor je Hilbertov. Vse zgornje definicije so obravnavale samo skalarne funkcije. Vektorske funkcije bomo obravnavali po komponentah in pisali  $\vec{v} \in [H^1(\Omega)]^3$ , kar pomeni, da je  $v_i \in H^1(\Omega)$  za vsak  $i$ .

**Trditev 1.13** (Kornova neenakost). *Za vsako funkcijo  $\vec{u} \in [H^1(\Omega)]^3$  in pozitivno definiten tenzor četrtega reda  $C$  velja:*

$$\int_{\Omega} (|\vec{u}|^2 + \|\operatorname{grad} \vec{u}\|^2) dV \leq c_1 \int_{\Omega} \frac{1}{4} (\operatorname{grad} \vec{u} + \operatorname{grad} \vec{u}^\top) : C : (\operatorname{grad} \vec{u} + \operatorname{grad} \vec{u}^\top) dV,$$

za neko konstanto  $c_1$  neodvisno od  $\vec{u}$ .

Kornova neenakost je močen rezultat, ki povezuje normo prostorov Soboljeva z energijskimi normami, kot bomo videli v razdelku 2.6. Dokaz neenakosti je enosten, če je  $\vec{u}$  gladka funkcija in enaka 0 na  $\partial\Omega$ . Velja pa neenakost tudi pri šibkejših predpostavkah na  $\Omega$  in za  $\vec{u}$  z neničelnimi vrednostmi na robu. Dokaz neenakosti v posebnem primeru najdemo v [27, str. 229] splošnejši dokaz pa v [7].

Že Soboljev sam je raziskoval vložitve prostorov Soboljeva v Lebesgueove  $L^p$  prostore, kasneje pa še mnogi drugi. V [1] je problemu vložitve posvečeno celo četrto poglavje, kjer je tudi dokaz spodnjega izreka [1, str. 85, izrek 4.12].

**Izrek 1.14** (Rellich–Kondrachov). *Naj bo  $\Omega$  domena v  $\mathbb{R}^d$  in  $1 \leq kp < d$ . Naj bo  $p^* = \frac{dp}{d-kp}$ . Potem lahko prostor Soboljeva  $W^{k,p}(\Omega)$  zvezno vložimo v prostor  $L^{p^*}(\Omega)$  in kompaktno vložimo v  $L^q(\Omega)$  za  $1 \leq q < p^*$ .*

**Opomba 1.15.** Za poseben primer  $d = 3$ ,  $k = 1$  in  $p = 2$  dobimo  $p^* = 6$  in s tem zvezno vložitev

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega).$$

Poleg zgornjega izreka, ki bo prek zveznosti in posledično omejenosti vložitve poskrbel za oceno norme, potrebujemo tudi izrek, ki bo enako naredil za rob domene. O tem govori izrek o sledi [1, str. 164, izrek 5.36].

**Izrek 1.16** (Izrek o sledi). *Naj bo  $\Omega$  domena v  $\mathbb{R}^d$  in  $1 \leq kp < d$ . Naj bo  $p^* = \frac{dp}{d-kp}$ . Potem je operator zožitve, ki slika  $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$  zvezen.*

**Opomba 1.17.** Pogosto se tudi tej preslikavi reče vložitev, saj zožitve funkcij na rob domene vlagamo v druge prostore. Za primer  $d = 3$ ,  $k = 1$  in  $p = 2$  dobimo  $p^* = 4$  in s tem zvezno vložitev

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\partial\Omega).$$

Pri dokazu obstaja in enoličnosti rešitev linearnih parcialnih diferencialnih enačb, si bomo pomagali tudi s klasičnim izrekom funkcionalne analize, dokazanim v vsakem učbeniku na to temo, npr. [25, str. 188, izrek 3.8-1].

**Izrek 1.18** (Riezsov reprezentacijski izrek). *Naj bo  $H$  realen Hilbertov prostor in  $H^*$  njegov dualen prostor, torej prostor vseh zveznih linearnih funkcionalov na  $H$ . Tedaj obstaja izometrični izomorfizem  $\Phi: H \rightarrow H^*$ .*

Bolj običajno se izrek pove na drugačen način.

**Posledica 1.19.** *Naj bo  $H$  Hilbertov prostor in  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  zvezen linearen funkcional na  $H$ . Tedaj obstaja natanko en element  $x_f \in H$ , da je za vsak  $y \in H$*

$$f(y) = \langle y, x_f \rangle.$$

*Poleg tega velja še  $\|x_f\| = \|f\|$ .*

**Opomba 1.20.** Preslikava  $\Phi$  iz izreka 1.18 priredi vsakemu  $x_f \in H$  njegov  $f \in H^*$  iz posledice 1.19.

## 2 Teorija linearne elastičnosti

Teorija linearne elastičnosti govori o deformaciji in napetostih v trdninah kot posledici delovanja zunanjih obremenitev. Trdnine modeliramo kot kontinuum in s tem zaobidemo težave, ki bi nastale z obravnavo njihove diskretne atomske strukture, saj jih obravnavamo kot zvezno maso, ki zavzema celoten prostor, ki ga zaseda in ne kot diskreten sistem delcev. Prav tako bomo predpostavili zveznost in gladkost količin, povezanih s trdnino. To nam da možnost, da kontinuum delimo na poljubno majhne dele in s tem dobimo osnovo za uporabo teorije infinitezimalnega računa. S pomočjo tega in privzetih fizikalnih zakonov bomo izpeljali diferencialne enačbe,

ki bodo opisovale deformacije in napetosti v materialu. Izkaže se, da ta teorija zelo dobro opisuje materiale, ki se uporabljo v gradbeništvu in strojništvu kot so kovine, beton in steklo in je zaradi tega zelo pogosto uporabljena, paketi za numerično analizo strukture zgradb pa so doživeli velik razvoj in komercialni uspeh.

Začnimo s tem, da natančno definiramo pojme kot so telo in gibanje, s pomočjo katerih bomo izpeljali enačbe, ki opisujejo pojave v našem interesu. Osnovna predstavitev teorije bo povzeta po [44].

## 2.1 Osnove gibanja

**Definicija 2.1.** Materialno telo  $\mathcal{B}$  je odprta povezana podmnožica v  $\mathbb{R}^3$  z odsekoma gladkim robom skupaj z družino bijekcij

$$\chi = \{\chi: \mathcal{B} \rightarrow \chi(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3\},$$

da je za vsaki  $\chi_1, \chi_2 \in \chi$  preslikava  $\chi_2 \circ \chi_1^{-1}: \chi_1(\mathcal{B}) \rightarrow \chi_2(\mathcal{B})$  difeomorfizem.

Preslikavam  $\chi \in \chi$  pravimo *konfiguracije* telesa. Odlikovani konfiguraciji  $\chi_R$  pravimo *referenčna konfiguracija* in območje, ki ga telo zaseda v tej konfiguraciji bomo označevali z  $B$ , torej  $B = \chi_R(\mathcal{B})$ .

**Definicija 2.2.** Gibanje telesa  $\mathcal{B}$  je gladka družina konfiguracij

$$\{\chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \chi_t(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}.$$

Tem konfiguracijam pravimo *prostorske konfiguracije*. Območje, ki ga telo zaseda v prostorski konfiguraciji ob času  $t$  označujemo z  $B_t$ , torej  $B_t = \chi_t(\mathcal{B})$ .

Koordinatam telesa v referenčni konfiguraciji pravimo *referenčne koordinate* in jih pišemo z velikimi tiskanimi črkami, npr.  $X \in \chi_R(\mathcal{B})$ . Koordinatam telesa v prostorski konfiguraciji pravimo *prostorske koordinate* in jih pišemo z malimi črkami, npr.  $x \in \chi_t(\mathcal{B})$ .

Gladkost gibanja glede na  $t$  iz definicije 2.2 pomeni, da je preslikava

$$\begin{aligned} \tilde{x}: \mathbb{R} \times B &\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, X) &\mapsto \chi_t(\chi_R^{-1}(X)) \end{aligned}$$

gladka kot funkcija iz  $\mathbb{R}^4$  v  $\mathbb{R}^3$ . Preslikava  $\tilde{x}$  nam podaja zvezo med prostorskimi in referenčnimi koordinatami

$$x = \tilde{x}(t, X).$$

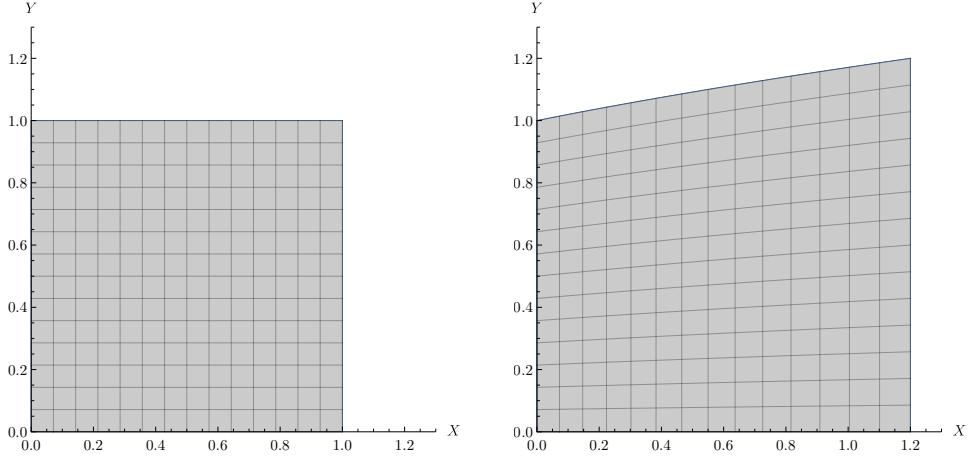
Pogosto opustimo strog zapis s preslikavami in pišemo kar  $x = x(t, X)$ . Ker je za vsak  $t$  preslikava  $X \mapsto x(t, X)$  difeomorfizem, lahko funkcijo obrnemo in izrazimo tudi referenčne koordinate kot funkcijo prostorskih  $X = X(t, x)$ .

Pogosto za referenčno konfiguracijo vzamemo kar konfiguracijo na začetku gibanja,  $\chi_R = \chi_{t=t_0}$ , ni pa nujno temu tako.

Gibanje, kot opisano sedaj, res modelira makroskopsko gibanje, kot ga poznamo iz resničnega sveta. Pogoji gladkosti zagotavljajo, da telesa ne morejo kar izginiti in se pojavit drugje, ter da se ne morejo sploščiti ali sekati samih sebe.

**Primer 2.3.** Pišimo vektorje na daljše kot  $X = (X, Y, Z)$  in  $x = (x, y, z)$ . Naj bo dano gibanje

$$x(t, X, Y, Z) = (X + tX^2, Y + tXY, Z),$$



Slika 1: Prerez enotske kocke pri  $Z = 0$  v referenčni konfiguraciji in v prostorski konfiguraciji ob času  $t = 0.2$ .

za  $0 < X, Y, Z < 1$ . Ob času  $t = 0$  je telo v referenčni konfiguraciji. Telo v referenčni in prostorski konfiguraciji je prikazano na sliki 1. Za vsak  $t \geq 0$  je  $x$  difeomorfizem, saj velja

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial(X, Y, Z)}\right) = (1 + tX)(1 + 2tX) > 0.$$

Zato lahko izrazimo obratno preslikavo

$$X(t, x, y, z) = \left( \frac{\sqrt{4tx + 1} - 1}{2t}, \frac{y(\sqrt{4tx + 1} - 1)}{2tx}, z \right). \quad (2.1)$$

Vsako količino  $\varphi$ , definirano na telesu  $\mathcal{B}$ , kot na primer temperaturo ali hitrost, lahko zapišemo na dva načina, v prostorskih ali v referenčnih koordinatah. Za funkcijo

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: B &\rightarrow \varphi(\mathcal{B}) \\ X &\mapsto \varphi(\chi_R^{-1}(X)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

pravimo, da je zapisana v referenčnih koordinatah in pišemo  $\tilde{\varphi} = \varphi(X)$ . Podobno za funkcijo

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}: B_t &\rightarrow \varphi(\mathcal{B}) \\ x &\mapsto \varphi(\chi_t^{-1}(x)), \end{aligned} \quad (2.3)$$

pravimo, da je zapisana v prostorskih koordinatah in pišemo  $\hat{\varphi} = \varphi(x)$ . Med obema zapisoma lahko prehajamo s pomočjo izražave  $\varphi(x) = \varphi(x(t, X))$  ali  $\varphi(X) = \varphi(X(x, t))$ .

Podoben zapis bomo uporabljali tudi pri diferencialnih operatorjih. Pri odvodih moramo povedati, ali na količino gledamo v prostorskih ali v referenčnih koordinatah. Z velikimi črkami bomo pisali operatorje, kjer odvajamo glede na referenčne koordinate, z malimi pa tiste, kjer odvajamo glede na prostorske.

**Primer 2.4.** Dano imamo količino  $\vartheta(t, X, Y, Z) = tX^2 + 2ZY$ , ki je zapisana v referenčnih koordinatah. Če jo zapišemo v prostorskih s pomočjo izpeljane inverzne

relacije (2.1) iz primera 2.3, dobimo

$$\vartheta(t, x, y, z) = \frac{2tx^2 + 2yz(\sqrt{4tx+1} - 1) - x\sqrt{4tx+1} + x}{2tx}.$$

Da demonstriramo še uporabo diferencialnih operatorjev, izračunajmo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta}{\partial Y} &= 2Z \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{z(\sqrt{4tx+1} - 1)}{tx}.\end{aligned}$$

Te odvode bi zopet lahko zapisali kot funkcije referenčnih ali prostorskih koordinat. Podobno se obnašajo časovni odvodi.

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\vartheta &= X^2 \\ \frac{d}{dt}\vartheta &= -\frac{(-2tx + \sqrt{4tx+1} - 1)(x - 2yz)}{2t^2x\sqrt{4tx+1}}.\end{aligned}$$

Če vidimo zapis  $\frac{D\vartheta}{Dt}(t, x, y, z)$ , torej časovni odvod  $\vartheta$ , pri konstantnih referenčnih koordinatah, zapisanega v prostorskih koordinatah, ga izračunamo tako, da izraz prevedemo v referenčne koordinate, odvajamo po času in prenesemo nazaj na prostorske koordinate. S simboli lahko to zapišemo kot

$$\left( \frac{D}{Dt}\vartheta \right) (t, x) = \left( \frac{D}{Dt}\vartheta(x(t, X)) \right) (X(t, x)).$$

Definirajmo še osnovne pojme pomika, hitrosti in pospeška.

**Definicija 2.5.** Količino

$$\vec{u}(X) = x(t, X) - X$$

imenujemo *pomik*. Količino

$$\vec{v}(X) = \frac{Dx}{Dt}(t, X)$$

imenujemo *hitrost*. Količino

$$\vec{a}(X) = \frac{D\vec{v}}{Dt}(t, X)$$

imenujemo *pospešek*.

**Trditev 2.6.** *Odvod po času v referenčnem koordinatnem sistemu se lahko direktno izračuna v prostorskem kot*

$$\frac{D\varphi}{Dt}(t, x) = \frac{d\varphi}{dt}(t, x) + ((\text{grad } \varphi)(t, x))\vec{v}(t, x).$$

Pri tem je  $\varphi$  skalarna, vektorska ali tenzorska količina.

*Dokaz.* Po definiciji najprej prenesemo  $\varphi$  v referenčni koordinatni sistem z uporabo 2.2. Nato odvajamo po verižnem pravilu

$$\begin{aligned}\frac{D\varphi}{Dt}(t, x) &= \frac{D\varphi}{Dt}(t, x(t, X)) = \frac{d\varphi}{dt}(t, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{Dx}{Dt}(t, X) = \\ &= \frac{d\varphi}{dt}(t, x) + ((\text{grad } \varphi)(t, x))\vec{v}(t, X(x, t)).\end{aligned}$$

□

Poleg že naštetih količin pa imajo telesa tudi druge fizikalne lastnosti, kot so masa in volumen, ki vplivajo na gibanje. Za modeliranje teh si pomagamo z merami.

**Definicija 2.7.** Predpostavimo, da imamo na  $\mathcal{B}$  definirani dve  $\sigma$ -končni meri,  $m$  in  $V$ , ki nam predstavlja maso in volumen. Predpostavimo še, da je  $m \ll V$ , torej, če je volumen nekega podtelesa nič, je tudi njegova masa nič. Od tod po Radon-Nikodymovem izreku sledi, da obstaja merljiva funkcija  $\rho = \frac{dm}{dV}$ , da velja

$$m(A) = \int_A \rho dV$$

za vsako merljivo podmnožico  $A \subseteq \mathcal{B}$ . Funkciji  $\rho: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$  pravimo *gostota*.

**Opomba 2.8.** Ponavadi za  $V$  vzamemo kar Lebesgueovo mero na  $\mathbb{R}^3$ , mero  $m$  pa podamo tako, da podamo gostoto telesa  $\rho$ . Meri  $m$  in  $V$  s potiskom prek konfiguracij razširimo na referenčni in prostorski položaj.

### 2.1.1 Aksiomi gibanja

Iz mehanike točke in iz klasične mehanike vemo, da gibanje zadošča nekim zakonom, ki jih bomo za nadaljnje izpeljave privzeli kot aksiome.

**Definicija 2.9.** Množica  $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$  je *podtelo* telesa  $\mathcal{B}$ , če je sama telo za isto družino konfiguracij.

**Aksiom 1** (Zakon o ohranitvi mase). Za vsako podtelo  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  in vsako njegovo gibanje velja

$$\frac{D}{Dt} m(\mathcal{B}'_t) = 0. \quad (2.4)$$

Masa se med gibanjem niti ne izgublja niti ne nastaja in je vseskozi konstantna.

Druga dva aksioma bosta poleg mase imela opraviti s silami. Kako lahko sile delujejo na telo? En način so sile na daljavo, kot na primer gravitacija, ki delujejo na vsak košček telesa posebej. Drug način so kontaktne sile, ki nastanejo zaradi stika telesa z nekim zunanjim objektom in se prenašajo preko površine. Te sile v skladu s hipotezo kontinuma opišemo z njihovimi *gostotami* in vedno delujejo na telo v njegovi prostorski konfiguraciji, saj je to konfiguracija, ki jo telo dejansko zavzame med gibanjem. Če bi bila sila konstantna, potem gostota sile predstavlja silo na enoto volumna ali površine. Slednjemu se (sploh v mehaniki tekočin) reče tudi *pritisk* ali *tlak*.

**Definicija 2.10.** *Volumenska gostota sile*  $\vec{f}$  je zvezna funkcija  $\vec{f}: B_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ . *Površinska gostota sile*  $\vec{t}$  je zvezna funkcija  $\vec{t}: \partial B_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Primer 2.11.** Gostota gravitacijske sile je enaka  $\vec{f} = \rho \vec{g}$ , kjer je  $\vec{g}$  gravitacijski pospešek.

**Aksiom 2** (Zakon o ohranitvi gibalne količine). Za vsako podtelo  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  velja

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}'_t} \vec{v} dm = \int_{\mathcal{B}'_t} \vec{f} dV + \int_{\partial \mathcal{B}'_t} \vec{t} dS. \quad (2.5)$$

Sprememba gibalne količine je enaka vsoti vseh sil, ki delujejo na telo.

**Aksiom 3** (Zakon o ohranitvi vrtilne količine). Za vsako podtelo  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  velja

$$\frac{D}{Dt} \int_{B'_t} x \times \vec{v} dm = \int_{B'_t} x \times \vec{f} dV + \int_{\partial B'_t} x \times \vec{t} dS. \quad (2.6)$$

Spremembra vrtilne količine je enaka vsoti vseh zunanjih navorov, ki delujejo na telo.

**Opomba 2.12.** Pri aksiomu 3 smo predpostavili, da na kontinuum ne delujejo notranji, ampak da so vsi navori posledica delovanja zunanjih sil. Drugače povedano, predpostavili smo *nepolarnost* kontinuuma.

V vseh treh aksiomih nastopa odvod po času v referenčnih koordinatah nekega integrala, zapisanega v prostorskih koordinatah. Tu ne velja običajen izrek o odvajanju pod integralom, zato moramo izraz pod integralom najprej prenesti v referenčne koordinate, zamenjati odvod in integral, nato pa ga prenesti nazaj. Naredimo to najprej za aksiom o ohranitvi mase.

**Trditev 2.13.** *Masa se ohranja ( $\frac{D}{Dt}m(B_t) = 0$ ) natanko tedaj, ko je*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.7)$$

*Dokaz.* Trditev pokaže direkten račun, kjer bomo zamenjali integralsko spremenljivko iz  $x$  na  $X$  in nato nazaj. Pri uvedbi nove spremenljivke se bo v integralu pojavila determinanta  $f = \det(F)$  diferenciala prehodne preslikave  $F = \frac{\partial x}{\partial X}$ , prav tako pa tudi njen odvod  $\frac{Df}{Dt}$ , zato ga izračunajmo vnaprej:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \operatorname{tr} \left( \operatorname{adj}(F) \frac{DF}{Dt} \right) = \operatorname{tr} \left( \det(F) F^{-1} \frac{\partial^2 x}{\partial X \partial t} \right) = \det(F) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial X} F^{-1} \right) = \\ &= \det(F) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right) = \det(F) \operatorname{tr} (\operatorname{grad} \vec{v}) = \det(F) \operatorname{div} \vec{v}. \end{aligned}$$

Pri tem smo uporabili Jacobijevo formulo za računanje odvoda determinante, ciklično lastnost sledi, formulo za računanje odvoda inverza in verižno pravilo. Sedaj imamo vse pripravljeno za glavni izračun.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{Dt} m(B_t) = \frac{D}{Dt} \int_{B_t} dm = \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \rho dV = \frac{D}{Dt} \int_B \rho J dV = \\ &= \int_B \frac{D}{Dt} (\rho J) dV = \int_B \left( \frac{D\rho}{Dt} J + \rho \frac{DJ}{Dt} \right) dV = \\ &= \int_B \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) J dV = \int_{B_t} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dV. \end{aligned}$$

Ker je integral nič za vsako telo, mora biti nujno integrand nič, in obratno, če je integrand nič, se masa ohranja.  $\square$

Zgornjo trditev bomo s pridom uporabili pri izračunu odvoda integrala splošne količine.

**Trditev 2.14.** *Naj bo  $\varphi$  neka količina in privzemimo aksiom o ohranitvi mase. Potem velja*

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \varphi dm = \int_{B_t} \frac{D\varphi}{Dt} dm. \quad (2.8)$$

*Dokaz.* Postopamo enako kot v prejšnji trditvi. Izračunamo

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \varphi dm &= \frac{D}{Dt} \int_B \varphi \rho J dV = \int_B \frac{D(\varphi \rho J)}{Dt} dV = \\
&= \int_B \left( \frac{D\varphi}{Dt} \rho J + \varphi \left( \underbrace{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v}}_{= 0 \text{ po (2.7)}} \right) \right) dV = \\
&= \int_B \frac{D\varphi}{Dt} \rho J dV = \int_{B_t} \frac{D\varphi}{Dt} dm. \quad \square
\end{aligned}$$

## 2.2 Napetostni tenzor

Predstavljajmo si, da na telo deluje neka površinska sila z gostoto  $\vec{t}$ . Ta sila deluje na zunanjo površino telesa, nato pa se prenaša skozi telo od točke do točke. Iz telesa izrežimo neko podtelo. Na površini tega podtelesa zunanji del kontinuma deluje na podtelo, toda ekvivalentno bi bilo, če bi zunanji del odstranili in na površino preostanka delovali z enakim poljem sil, kot je prej deloval drugi del.

Ta razmislek nam ponuja naslednji opis notranjih in površinskih sil telesa. V nekem trenutku  $t$  v času se postavimo v neko točko  $x$  v telesu in si zamislimo neko podtelo, tako da je izbrana točka na njegovi površini. Tedaj obstaja vektor  $\vec{t}$ , ki predstavlja silo, s katero preostali kontinuum deluje v tej točki na izbrano podtelo. Če bi si izbrali drugo podtelo, bi bila sila v splošnem drugačna. Toda, če sta imeli dve podtelesi v tisti točki enako normalo  $\vec{n}$  in posledično enako tangentno ravnino v tisti točki, bo vektor  $\vec{t}$  še vedno enak, saj bosta lokalno telesi izgledali enaki. Vektor  $\vec{t}$  je torej odvisen od izbrane točke, trenutka v času, ko ga opazujemo in normale na izbrano površino podtelesa, ter ničesar drugega, neodvisen je na primer od ukrivljenosti ploskve v tisti točki. Temu razmisleku se reče *Cauchyjeva hipoteza*.

**Aksiom 4** (Cauchyjeva hipoteza). V telesu obstaja vektorsko polje  $\vec{t}$  inducirano s površinskimi silami, ki je odvisno samo od položaja, časa in normale na površino (resnično ali namišljeno), kjer ga opazujemo. S simboli lahko zapišemo

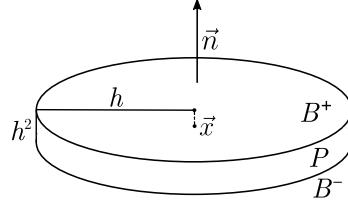
$$\vec{t} = \vec{t}(t, x, \vec{n}).$$

Iz zgornjega razmisleka se zdi, da bi morala biti sila, s katero prvi del kontinuma deluje na drugega, nasprotno enaka sili, s katero drugi deluje na prvega. Temu se reče tudi tretji Newtonov zakon za mehaniko kontinuma in ga ni treba privzeti kot aksiom, ampak lahko dokažemo iz do sedaj privzetih aksiomov. Dokaza tega in naslednjega izreka bosta povzeta po dokazih iz [18, str. 104–107].

**Trditev 2.15** (Cauchyjeva recipročna relacija).

$$\vec{t}(t, x, -\vec{n}) = -\vec{t}(t, x, \vec{n}). \quad (2.9)$$

*Dokaz.* Izberimo trenutek v času  $t$  in točko  $x$ . Krajše pišimo  $\vec{t}_{\vec{n}} = \vec{t}(t, x, \vec{n})$ . Oglejmo si podtelo v obliki krožnega valja z višino  $h^2$  in radijem  $h$ , ki ima v središču točko  $x$  in je  $\vec{n}$  normala na eno izmed osnovnic. Tako podtelo zaradi odprtosti  $\mathcal{B}$  gotovo obstaja za dovolj majhen  $h$ . Označimo osnovnico z normalo  $\vec{n}$  z  $B^+$ , nasprotno z  $B^-$  in plašč s  $P$ . Površina vsake osnovnice je  $\pi h^2$ , površina plašča pa  $2\pi h^3$ . Volumen valja je  $\pi h^4$ . Primer valja je prikazan na sliki 2.



Slika 2: Valj, uporabljen v dokazu Cauchyjeve recipročne relacije.

Uporabimo za ta valj aksiom o gibalni količini (2.5):

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} \vec{v} dm = \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \vec{t} dS.$$

Po trditvi 2.14 lahko zamenjamo odvod in integral, rob valja razpišimo po ploskvah:

$$\int_{B_t} \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho dV = \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{B^+} \vec{t}_n dS + \int_{B^-} \vec{t}_{-n} dS + \int_P \vec{t}_{\vec{m}(x)} dS.$$

Vektor  $\vec{m}(x)$  pri tem označuje normalo na plašč valja. Celotno enačbo pomnožimo s konstantnim vektorjem  $\vec{c}$  in na vsakem od integralov, ki so zdaj integrali skalarnih funkcij, uporabimo izrek o povprečni vrednosti

$$V(B) \left( \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \right)(x_1) \cdot \vec{c} = V(B) \vec{f}(x_2) \cdot \vec{c} + S(B^+) \vec{t}_n(x_3) \cdot \vec{c} + \\ + S(B^-) \vec{t}_{-n}(x_4) \cdot \vec{c} + S(P) \vec{t}_{\vec{m}(x)}(x_5) \cdot \vec{c},$$

kjer so  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  neke vmesne točke v ali na površini valja. Če vstavimo notri izraze za volumen in površine ploskev dobimo

$$\pi h^4 \left( \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \right)(x_1) \cdot \vec{c} = \left[ \pi h^4 \vec{f}(x_2) + \pi h^2 \vec{t}_n(x_3) + \pi h^2 \vec{t}_{-n}(x_4) + 2\pi h^3 \vec{t}_{\vec{m}(x)}(x_5) \right] \cdot \vec{c}.$$

Celoten izraz delimo z  $\pi h^2$  in pogledamo limito  $h \rightarrow 0$ , gredo vse točke  $x_i$  proti  $x$  in dobimo

$$0 = (\vec{t}_n(x) + \vec{t}_{-n}(x)) \cdot \vec{c}.$$

Ker zgornja enakost velja za poljuben vektor  $\vec{c}$ , velja tudi

$$0 = (\vec{t}_n(x) + \vec{t}_{-n}(x)),$$

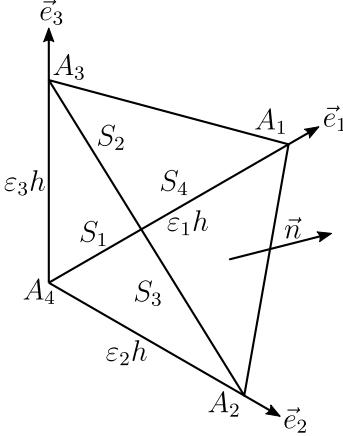
kar je točno to, kar smo želeli pokazati.  $\square$

Izkaže se, da velja še več: vektor  $\vec{t}$  je linearno odvisen od normale. S pomočjo prejšnje trditve lahko pokažemo naslednji izrek, ki nam da na voljo matematični objekt, s pomočjo katerega lahko opišemo napetost v materialu.

**Izrek 2.16** (Cauchyjev izrek o napetosti). *Obstaja tenzor  $\sigma$ , tako da velja*

$$\vec{t}(t, x, \vec{n}) = \sigma(t, x) \vec{n}.$$

Tenzor  $\sigma$  se imenuje Cauchyjev napetostni tenzor.



Slika 3: Tetraeder, uporabljen za dokaz Cauchyjevega izreka o napetosti.

*Dokaz.* Podobno kot pri Cauchyjevi recipročni relaciji si tokrat izberimo majhno telo z ogliščem v točki  $x$ . Naj bo to tetraeder s tremi stranicami, vzporednimi koordinatnim osem in normalo  $\vec{n}$  na ploskev, ki jo razpenjajo preostale tri stranice, kot prikazano na sliki 3.

Označimo oglišča tetraedra z  $A_1, A_2, A_3, A_4 = x$  in ploskev nasproti izbranega oglišča s  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Ploščine teh ploskev označimo z  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Naj bodo pravokotne stranice tetraedra dolge  $\varepsilon_1 h$ ,  $\varepsilon_2 h$  in  $\varepsilon_3 h$ , kjer razmerje  $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3$  določimo tako, da je normala na  $S_4$  enaka  $\vec{n}$ . Celotna situacija je prikazana na sliki 3. Sedaj lahko izračunamo ploščine ploskev  $a_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 h^2$ ,  $a_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_3 h^2$  in  $a_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 h^2$ . Volumen tetraedra je  $V = \frac{1}{6} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 h^3$ . Vektorje v smeri koordinatnih osi standardno označimo z  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Zunanja normala na ploskev  $S_1$  je  $-\vec{e}_1$ , na ploskev  $S_2$  je  $-\vec{e}_2$  in na ploskev  $S_3$  je  $-\vec{e}_3$ . Normala na preostalo ploskev, ki bo dolga ravno toliko, kot je ploščina te ploskve, dobimo s pomočjo vektorskega produkta stranic, ki jo oklepata.

$$\begin{aligned} a_4 \vec{n} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_1 h \vec{e}_1 - \varepsilon_2 h \vec{e}_2) \times (\varepsilon_3 h \vec{e}_3 - \varepsilon_2 h \vec{e}_2) = \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 h^2 \vec{e}_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_3 h^2 \vec{e}_2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 h^2 \vec{e}_3 = \\ &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Če to pomnožimo z  $i$ -tim baznim vektorjem, dobimo  $a_i = (\vec{n} \cdot \vec{e}_i) a_4$ . Zopet uporabimo aksiom 2 o ohranitvi gibalne količine, razpišemo integral po površini tetraedra po posameznih ploskvah, pomnožimo izraz s konstantnim vektorjem  $\vec{c}$  in nato uporabimo izrek o povprečni vrednosti

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \vec{v} dm &= \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \vec{t} dS \\ \int_{B_t} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV &= \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{S_1} \vec{t}_{-\vec{e}_1} dS + \int_{S_2} \vec{t}_{-\vec{e}_2} dS + \int_{S_3} \vec{t}_{-\vec{e}_3} dS + \int_{S_4} \vec{t}_{\vec{n}} dS \\ V(\rho \frac{D\vec{v}}{Dt})(x_1) \cdot \vec{c} &= \left[ V \vec{f}(x_2) + a_1 \vec{t}_{-\vec{e}_1}(x_3) + a_2 \vec{t}_{-\vec{e}_2}(x_4) + a_3 \vec{t}_{-\vec{e}_3}(x_5) + a_4 \vec{t}_{\vec{n}}(x_6) \right] \cdot \vec{c}, \end{aligned}$$

pri čemer so  $x_i$ , kot v prejšnjem dokazu, neke točke v notranjosti ali na površini tetraedra. Sedaj enačbo delimo z  $a_4$  in pošljemo limito  $h \rightarrow 0$ . Vse točke  $x_i$  limitirajo

proti  $x$ , člena, ki vsebujeta volumen tetraedra, pa se približujeta 0. Z upoštevanjem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_i}{a_4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\vec{n} \cdot \vec{e}_i)a_4}{a_4} = \vec{n} \cdot \vec{e}_i$$

dobimo

$$0 = \left[ \vec{t}_{\vec{n}} + \sum_{i=1}^3 (\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \vec{t}_{-\vec{e}_i} \right] \vec{c}.$$

Zgornja enakost velja za vsak vektor  $\vec{c}$  in ko uporabimo še Cauchyjevo recipročno relacijo (2.9), dobimo

$$\vec{t}_{\vec{n}} = \sum_{i=1}^3 (\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \vec{t}_{\vec{e}_i}.$$

Ta zveza nam pove, kako je napetost na poljubni ploskvi povezana z napetostmi na koordinatnih ploskvah. To nam dovoljuje definicijo *Cauchyjevega napetostnega tenzorja*  $\sigma$

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 \vec{t}_{\vec{e}_i} \otimes \vec{e}_i,$$

za katerega res velja

$$\sigma \vec{n} = \sum_{i=1}^3 (\vec{t}_{\vec{e}_i} \otimes \vec{e}_i)(\vec{n}) = \sum_{i=1}^3 (\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \vec{t}_{\vec{e}_i} = \vec{t}_{\vec{n}}. \quad \square$$

## 2.3 Enačbe gibanja

V tem razdelku bomo iz aksiomov izpeljali lokalne enačbe gibanja, tako da jih bomo iz integralske oblike prevedli v diferencialno. Prevedimo najprej aksiom 2 o ohranitvi gibalne količine.

**Izrek 2.17** (Cauchyjeva momentna enačba). *Za gibanje kontinuuma velja Cauchyjeva momentna enačba*

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} + \operatorname{div} \sigma. \quad (2.10)$$

*Dokaz.* Za vsako telo s prostorsko konfiguracijo  $B_t$  velja

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \vec{v} dm &= \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \vec{t} dS \\ \int_{B_t} \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho dV &= \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} \sigma \vec{n} dS \\ \int_{B_t} \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho dV &= \int_{B_t} \vec{f} dV + \int_{B_t} \operatorname{div} \sigma dV \\ 0 &= \int_{B_t} \left( \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho - \vec{f} - \operatorname{div} \sigma \right) dV. \end{aligned}$$

V računu smo uporabili Gaussov izrek 1.3 za tenzorje drugega reda in izrek 2.14 o menjavi odvoda in integrala. Ker mora biti zadnji integral nič za vsako telo, mora biti integrand nič, kar dokaže našo enačbo.  $\square$

Do sedaj še nismo uporabili aksioma 3 o vrtilni količini. Njegova lokalna oblika se prevede na zelo enostavno trditev o simetriji Cauchyjevega napetostnega tenzorja.

**Trditev 2.18.** *Cauchyjev napetostni tenzor je simetričen:*

$$\sigma^\top = \sigma.$$

*Dokaz.* Začnimo z zakonom o vrtilni količini (2.6) in ga prevedimo v lokalno obliko.

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_t} x \times \vec{v} dm = \int_{B_t} x \times \vec{f} dV + \int_{\partial B_t} x \times \vec{t} dS.$$

Posvetimo se zadnjemu členu in ga pomnožimo s konstantnim vektorjem  $\vec{w}$ :

$$\begin{aligned} \left( \int_{\partial B_t} x \times \vec{t} dS \right) \cdot \vec{w} &= \int_{\partial B_t} \langle x, \vec{t}, \vec{w} \rangle dS = \int_{\partial B_t} \langle \vec{w}, x, \vec{t} \rangle dS = \\ &= \int_{\partial B_t} (\vec{w} \times x) \cdot \vec{t} dS = \int_{\partial B_t} (\vec{w} \times x) \cdot \sigma \vec{n} dS = \\ &= \int_{\partial B_t} \sigma^\top (\vec{w} \times x) \cdot d\vec{S} = \int_{B_t} \operatorname{div}(\sigma^\top (\vec{w} \times x)) dV = \\ &= \int_{B_t} [\langle \operatorname{div} \sigma, \vec{w}, x \rangle + \sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times x)] dV. \end{aligned}$$

Zgoraj smo uporabili po vrsti: definicijo in cikličnost mešanega produkta, definicijo  $\sigma^\top$ , Gaussov izrek in relacijo iz trditve 1.10.

Podobno z  $\vec{w}$  pomnožimo tudi zakon o vrtilni količini in vstavimo zgornjo relacijo.

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{D}{Dt} \int_{B_t} x \times \vec{v} dm - \int_{B_t} x \times \vec{f} dV - \int_{\partial B_t} x \times \vec{t} dS \right) \cdot \vec{w} = \\ &= \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \langle x, \vec{v}, \vec{w} \rangle dm - \int_{B_t} \langle x, \vec{f}, \vec{w} \rangle dV - \int_{B_t} [\langle \operatorname{div} \sigma, \vec{w}, x \rangle + \sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times x)] dV = \\ &= \int_{B_t} \langle \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}, \vec{w}, x \rangle dV - \int_{B_t} \langle \vec{f}, \vec{w}, x \rangle dV - \int_{B_t} [\langle \operatorname{div} \sigma, \vec{w}, x \rangle + \sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times x)] dV = \\ &= \int_{B_t} \left[ \left\langle \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{f} - \operatorname{div} \sigma, \vec{w}, x \right\rangle - \sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times x) \right] dV = \\ &= - \int_{B_t} \sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times x) dV. \end{aligned}$$

Uporabili smo definicijo in cikličnost mešanega produkta, Cauchyjevo momentno enačbo (2.10) in dejstvo, da je

$$\frac{D}{Dt} \langle x, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle x, \frac{D\vec{v}}{Dt}, \vec{w} \rangle = \langle \frac{D\vec{v}}{Dt}, \vec{w}, x \rangle.$$

Ker aksiom o vrtilni količini drži za vsako telo, mora biti

$$\sigma : \operatorname{grad}(\vec{w} \times x) = 0,$$

za poljuben vektor  $\vec{w}$ . Tenzor  $\operatorname{grad}(\vec{w} \times x)$  je antisimetričen in vsak antisimetričen tenzor lahko s pomočjo njegovega osnega vektorja zapišemo v tej obliki, zato je zgornja relacija ekvivalentna trditvi, da je

$$\sigma : w = 0$$

za vsak antisimetričen tenzor  $w$ . Torej je  $\sigma \in \operatorname{Asym}(\mathbb{R}^3)^\perp$  in po trditvi 1.1 mora biti  $\sigma$  simetričen.  $\square$

## 2.4 Konstitutivne enačbe

Do sedaj izpeljane enačbe veljajo za poljuben kontinuum, naj bo to tekočina, plastična ali elastična trdnina. V tem razdelku si bomo ogledali enačbe, ki definirajo obnašanje našega kontinuma kot elastične trdnine preko posplošitve Hookovega zakona, ki povezuje napetosti in deformacijo. Naučili smo se že, kako izražamo napetost, sedaj pa si poglejmo, kako merimo deformacijo teles. Tukaj bomo tudi privzeli, da je referenčna konfiguracija kar prostorska konfiguracija na začetku gibanja.

### 2.4.1 Mera deformacije

**Definicija 2.19** (Gradient deformacije). Količino  $F = \frac{\partial x}{\partial X}(t, X) = \text{Grad } x$  imenujemo *gradient deformacije*.

Tenzor  $F$  je drugega reda in nam v vsaki točki predstavlja lokalno deformacijo telesa. Privzeli smo že, da je  $x$  difeomorfizem, torej je  $F$  neizrojen, dodatno pa bomo privzeli še, da gibanje  $x$  *ohranja orientacijo*, saj so gibanja realnih teles taka. Od tod sledi, da je  $\det F > 0$ . Fizikalno interpretacijo  $F$  dobimo z naslednjim Taylorjevim razvojem:

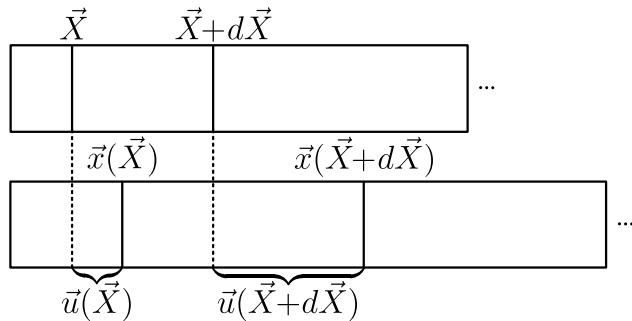
$$dx := x(t, X + dX) - x(t, X) = FdX + O(dX^2).$$

Tenzor  $F$  do prvega reda natančno opiše kako se vektor  $dX$  iz referenčne konfiguracije deformira v vektor  $dx$  v prostorski konfiguraciji.

Vendar, ni vsa deformacija, ki jo opiše tenzor  $F$  taka, da bi povzročala napetosti. Hookov zakon v eni dimenziji pravi, da je sila sorazmerna raztezku. Če imamo opravka s togim premikom  $X \mapsto QX + a$ , ta premik ne bo povzročil nobene napetosti, saj se bo telo samo premaknilo, ne pa raztegnilo.

Oglejmo si najprej primer v eni dimenziji.

**Primer 2.20.** Naj bo dana tanka palica kot na sliki 4, ki jo raztegnemo vzdolž njene nosilke. Premik v točki  $X$  je  $u(X) = x - X$ , v točki  $X + dX$  pa  $u(X + dX)$ .



Slika 4: Razteg tanke palice vzdolž njene osi.

Dejanski relativni raztezek delčka palice dolžine  $dX$  pa je

$$\begin{aligned} \frac{dx - dX}{dX} &= \frac{x(X + dX) - x(X) - (X + dX - X)}{dX} = \\ &= \frac{\vec{u}(X + dX) - \vec{u}(X)}{dX} = \vec{u}'(X) + O(dX). \end{aligned}$$

Do prvega reda je relativni raztezek v točki  $X$  enak kar  $\vec{u}'(X)$ .

Preverimo še, da ta mera raztezka zadošča nekaterim intuitivnim zahtevam. Za togi premik  $X \mapsto X + c$  je  $\vec{u}(X) = c$  in  $\vec{u}'(X) \equiv 0$ , kot pričakovano.

Za enakomerni razteg  $X \mapsto aX$  je  $\vec{u}(X) = aX - X$  in  $\vec{u}'(X) = a - 1$ . Tudi to ustreza pričakovanjem, saj za  $a = 1$  ni raztezka, za  $a < 1$  je to skrčitev in je raztezek negativen, za  $a > 1$  pa dobimo pozitivno število.

Pospološitev mere deformacije med točkama  $X$  in  $X + dX$  v višje dimenzije bi bila

$$\varepsilon_1 = \frac{\|dx\| - \|dX\|}{\|dX\|}.$$

Toda veliko lažje je računati s kvadrati norm kot z normami vektorjev, zato je bolj primerna Cauchyjeva mera

$$\varepsilon_2 = \frac{\|dx\|^2 - \|dX\|^2}{\|dX\|^2}.$$

Ker velja  $\varepsilon_2 = (1 + \varepsilon_1)^2 - 1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2$ , je za majhne pomike  $\varepsilon_2 \approx 2\varepsilon_1$ . Meri sta za majhne pomike torej ekvivalentni.

Izračunajmo infinitezimalno aproksimacijo mere  $\varepsilon_2$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{\|dx\|^2 - \|dX\|^2}{\|dX\|^2} = \frac{\|dx\|^2}{\|dX\|^2} - 1 = \frac{\|FdX + O(dX^2)\|^2}{\|dX\|^2} - 1 = \\ &= \frac{dX^\top F^\top F dX + O(dX^3)}{\|dX\|^2} - 1 = \frac{dX}{\|dX\|} \underbrace{(F^\top F - I)}_{2E} \frac{dX}{\|dX\|} + O(dX) \end{aligned}$$

V limiti  $dX \rightarrow 0$  lahko mero  $\varepsilon_2$  predstavimo s tenzorjem  $F^\top F - I$ , mero  $\varepsilon_1$  pa s tenzorjem  $E$ .

**Definicija 2.21** (deformacijski tenzor). Količina  $E = \frac{1}{2}(F^\top F - I)$  se imenuje (Cauchy-Greenov) deformacijski tenzor.

**Trditev 2.22.** *Deformacijski tenzor E lahko izrazimo z gradientom pomika kot*

$$E = \frac{1}{2} (\text{Grad } \vec{u} + \text{Grad } \vec{u}^\top + \text{Grad } \vec{u}^\top \text{Grad } \vec{u}).$$

*Dokaz.* Trditev pokaže preprost račun. Spomnimo se, da je pomik definiran kot  $\vec{u}(X) = x(X) - X$  in je gradient pomika enak

$$\text{Grad } \vec{u}(X) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X} - I = F - I.$$

Izračunamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\text{Grad } \vec{u} + \text{Grad } \vec{u}^\top + \text{Grad } \vec{u}^\top \text{Grad } \vec{u}) &= \\ &= \frac{1}{2} (F - I + F^\top - I + (F - I)^\top (F - I)) = \\ &= \frac{1}{2} (F + F^\top - 2I + F^\top F - F - F^\top + I) = \\ &= \frac{1}{2} (F^\top F - I) = \\ &= E. \end{aligned}$$

□

Deformacijo  $F$  lahko s pomočjo polarnega razcepa zapišemo kot  $F = RU$ , kjer je  $R$  ortogonalna in  $U$  pozitivno definitna matrika. Tenzor  $R$  predstavlja rotacijo,  $U$  pa razteg in strig. Predstavljamo si lahko, da deformacijo  $F$  izvedemo tako, da najprej telo v koordinatnem sistemu, v katerem je  $U$  diagonalna, raztegnemo, nato pa zavrtimo v končno lego.

Rotacija  $R$  ne vpliva na obrabo in deformacijo materiala, saj je pomik tog in ne povzroča notranjih napetosti. Prava mera deformacije, ki vpliva na napetost v materialu, torej ne vsebuje nobenih rotacij. Za mero deformacije bi lahko vzeli kar to, koliko se  $U$  razlikuje od identitete, toda polarni razcep matrike je težko izračunati. Poglejmo si kakšno zvezo ima zgoraj definirani deformacijski tenzor  $E$  z  $U$ :

$$E = \frac{1}{2}(f^\top F - I) = \frac{1}{2}(U^\top R^\top RU - I) = \frac{1}{2}(U^2 - I).$$

Vidimo, da  $E$  meri, kako se  $U^2$  razlikuje od identitete, ki predstavlja gibanje brez deformacij.

Kot pri enodimenzionalnem primeru si oglejmo, kako se  $E$  obnaša pri enostavnih deformacijah. Za toge premike imamo želeno obnašanje, kot pokazano v naslednji trditvi.

**Primer 2.23.** Kot prej si oglejmo, da je za toge deformacije  $E = 0$ . Naj bo deformacija toga, torej oblike  $X \mapsto QX + c$  z ortogonalno konstantno matriko  $Q$  in konstantnim  $c$ . Tedaj je

$$E = \frac{1}{2}(F^\top F - I) = \frac{1}{2}(Q^\top Q - I) = \frac{1}{2}(I - I) = 0.$$

Oglejmo si še enostavni razteg v smeri osi, dan kot  $X \mapsto \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)X$ . V tem primeru velja  $F = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  in

$$E = \text{diag}\left(\frac{\lambda_1^2 - 1}{2}, \frac{\lambda_2^2 - 1}{2}, \frac{\lambda_3^2 - 1}{2}\right).$$

Če je  $\lambda_i = 1$  je  $E$  res 0, sicer pa so v njegovih diagonalnih komponentah zapisani raztezki vzdolž posameznih osi.

**Opomba 2.24.** Velja tudi obrat trditve in posledično ekvivalenca, da je  $E = 0$  natanko tedaj, kot je transformacija toga. Ta ekvivalenca je dokazana za primer infinitezimalnega deformacijskega tenzorja v trditvi 2.26.

V teoriji linearne elastičnosti se bomo ukvarjali z majhnimi pomiki in majhnimi gradienti pomikov. Zato poenostavimo deformacijski tenzor z geometrijsko linearizacijo: zanemarimo člen  $\text{Grad } \vec{u}^\top \text{Grad } \vec{u}$ .

**Definicija 2.25** (infinitezimalni deformacijski tenzor). Količino

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{Grad } \vec{u} + \text{Grad } \vec{u}^\top) \tag{2.11}$$

imenujemo *infinitezimalni deformacijski tenzor*, ki je geometrijska linearizacija deformacijskega tenzorja.

Pokažimo še naslednjo karakterizacijo, ki pove, da se tudi  $\varepsilon$  za toge pomike obnaša kot pričakovano. Dokaz je povzet po [13, str. 56].

**Trditev 2.26.** *Infinitezimalni deformacijski tenzor  $\varepsilon$  je ničeln natanko tedaj, ko je  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} \times X$ , za konstantna vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .*

*Dokaz.* Iz  $\varepsilon = 0$  direktno sledi  $\text{Grad } u = -\text{Grad } u^\top$ , torej je  $\text{Grad } u$  antisimetričen. Naj bo  $\Omega$  odprta konveksna množica pod  $\mathcal{B}$ . Izberimo poljubni točki  $X, Y \in \Omega$  in daljico med njima enakomerno parametriziramo, tako da je  $\gamma(1) = X, \gamma(0) = Y, \dot{\gamma}(t) = X - Y$ . Integrirajmo  $\text{Grad } \vec{u}$  po  $\gamma$ :

$$\vec{u}(X) - \vec{u}(Y) = \int_0^1 (\text{Grad } \vec{u}(\gamma(t))) \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^1 \text{Grad } \vec{u}(\gamma(t))(X - Y) dt.$$

Če zgornjo enakost pomnožimo skalarno z  $X - Y$ , dobimo zaradi antisimetričnosti  $\text{Grad } \vec{u}$

$$(X - Y) \cdot (\vec{u}(X) - \vec{u}(Y)) = \int_0^1 \underbrace{(X - Y) \cdot \text{Grad } \vec{u}(\gamma(t))(X - Y)}_{=0} dt = 0.$$

Videli smo torej, da za vsaka  $X$  in  $Y$  velja  $(X - Y) \cdot (\vec{u}(X) - \vec{u}(Y)) = 0$ . Če to odvajamo po  $X$ , dobimo

$$\vec{u}(X) - \vec{u}(Y) + \text{Grad } \vec{u}(X)^\top(X - Y) = 0$$

in če odvajamo še po  $Y$ , dobimo

$$-\text{Grad } \vec{u}(Y) - \text{Grad } \vec{u}(X)^\top = 0.$$

Če upoštevamo še antisimetričnost  $\text{Grad } \vec{u}$  dobimo, da je

$$\text{Grad } \vec{u}(Y) = \text{Grad } \vec{u}(X).$$

Ker lahko telo  $\mathcal{B}$  pokrijemo z odprtimi konveksnimi množicami (na primer kroglami), je  $\text{Grad } \vec{u}$  konstanten. Pomik  $\vec{u}$  je torej oblike  $\vec{u} = \vec{a} + (\text{Grad } \vec{u})X$ . Ker je  $\text{Grad } \vec{u}$  antisimetričen, ga lahko zapišemo kot vektorski produkt z njegovim osnim vektorjem in dobimo  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} \times X$ .  $\square$

#### 2.4.2 Hookov zakon

Sedaj potrebujemo relacijo, ki povezuje premike z napetostjo. V splošnem je relacija oblike  $\sigma = f(\varepsilon)$ , predpostavimo torej, da je napetost odvisna samo od deformacije. Funkcijo  $f$  dodatno omejimo, da mora biti taka, da je energija

$$U(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma : d\varepsilon = \int_0^\varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon$$

dobro definirana, torej neodvisna od poti integracije. V tem primeru je

$$\sigma = \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}.$$

Če to drži, pravimo, da je material hiperelastičen, kot pravi naslednja definicija.

**Definicija 2.27.** Material je *hiperelastičen*, če je  $U(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma : d\varepsilon$  neodvisen od poti integracije.

V teoriji linearne elastičnosti predpostavimo, da je zveza  $f$  med napetostjo in deformacijo linearna in jo imenujemo Hookov zakon, saj je posplošitev običajnega Hookovega zakona za vzem.

**Aksiom 5** (Hookov zakon). Napetost je linearno odvisna od deformacije, preko tenzorja četrtega reda  $C$ :

$$\sigma = C : \varepsilon.$$

Tenzor  $C$  se imenuje *tenzor elastičnosti* ali togostni tenzor (*angl. stiffness tensor*) in ima v splošnem  $3^4 = 81$  prostih parametrov.

**Opomba 2.28.** Aksiom 5 se po komponentah glasi  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ .

Na srečo v splošnem  $C$  nima 81 prostih komponent. Iz trditve 2.18 o simetričnosti  $\sigma$  sledi, da lahko prosto zamenjamo indeksa  $i$  in  $j$  in velja  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ . Podobno iz simetričnosti  $\varepsilon$  sledi, da je  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ . S tem smo  $C$  reducirali na  $6^2 = 36$  komponent. Če dodatno predpostavimo še hiperelastičnost, vidimo, da je  $\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$  in

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}} = C_{ijkl}.$$

Ker vrstni red drugih odvodov ni pomemben, je  $C_{ijkl} = C_{klji}$ . S tem smo  $C$  reducirali na 21 komponent. Od sedaj naprej bomo predpostavili, da so vsi materiali hiperelastični. Energija je v tem primeru dana s kvadratično formo

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon : C : \varepsilon. \quad (2.12)$$

Tenzor  $C$  se dodatno poenostavi, če predpostavimo, da je material *izotropičen*, torej "enak v vse smeri". Izotropični tenzorji so pomembni objekti v mehaniki kontinuma in so dobro raziskani. V dveh dimenzijah je edini (linearno neodvisen) izotropičen tenzor identiteta  $\delta_{ij}$ , v treh dimenzijah je to permutacijski tenzor  $\varepsilon_{ijk}$ , splošen izotropičen tenzor četrtega reda pa je oblike

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \kappa\delta_{il}\delta_{jk},$$

kjer so  $\lambda$ ,  $\mu$  in  $\kappa$  splošni skalarji. V [22] so karakterizirani vsi izotropični tenzorji do reda 8, število izotropičnih tenzorjev dimenzije  $n$  pa je navedeno kot A005043 v spletni enciklopediji celoštivilskih zaporedij [45].

Zaradi simetriji  $C$  mora za izotropičen  $C$  veljati  $\kappa = \lambda$ . Nekoordinatno lahko sedaj zvezo  $\sigma = C : \varepsilon$  za tak tenzor zapišemo kot

$$\sigma = \lambda(\text{tr } \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon. \quad (2.13)$$

Parametra  $\lambda$  in  $\mu$  imenujemo Laméjevi konstanti. Običajno so materiali tudi homogeni, torej snovne konstante niso odvisne od lokacije v materialu, temveč so lastnosti materiala samega. Veliko resničnih gradbenih materialov kot na primer železo, jeklo, aluminij in ostale kovine ter steklo zadoščajo vsem predpostavкам Navierove enačbe. Primer anizotropnega materiala je recimo les. V strojniških priročnikih najdemo snovne lastnosti bolje pogosto opisane s parametromi  $E$  in  $\nu$ , ki jima pravimo Youngov (prožnostni) modul in Poissonovo razmerje. Zveza med njimi je

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Pogosto najdemo tudi druge snovne parametre kot na primer strižni modul ali stisljivost. Tabela pretvorb med različnimi parametri je na voljo v [44, tabela 5.1, str. 215]. Teoretična omejitev za parametre je dana s tem, da zahtevamo pozitivno definitnost energije kot kvadratne forme in velja, če je  $\lambda, \mu > 0$  ali pa  $E > 0$  in  $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ . Poissonovo razmerje predstavlja razmerje med tem, koliko se telo pri raztegu v eni dimenziji skrči v drugi. Materiali, ki imajo Poissonovo razmerje negativno se ob raztegu v eni dimenziji raztegnejo tudi v drugi, se imenujejo *auksetični* materiali (*angl. auxetic materials*). Eden prvih auksetičnih materialov je bil sintetiziran leta 1987 [26], raziskave na tem področju pa so aktivne še danes.

V praksi se izkaže, da temu brez težav zadostimo. Vrednosti parametrov za nekaj pogostih materialov so podane v tabeli 1 in jih lahko najdemo v primernem fizikalnem ali strojniškem piročniku, npr. v [vstavi referenco / vprašaj Mejaka] TODO.

| material | $E$ [GPa] | $\nu$       |
|----------|-----------|-------------|
| jeklo    | 210       | 0.30        |
| aluminij | 69        | 0.33        |
| steklo   | 50 – 90   | 0.20 – 0.27 |
| beton    | 14 – 41   | 0.20 - 0.21 |

Tabela 1: Vrednosti elastičnih parametrov za pogoste materiale.

## 2.5 Navierova enačba

Sedaj imamo vse pripravljeno za opis teorije linearne elastičnosti:

- 1) mera deformacije:  $\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{Grad } \vec{u} + \text{Grad } \vec{u}^\top)$ ,
- 2) konstitutivna zveza:  $\sigma = C : \varepsilon$  in
- 3) gibalna enačba:  $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} + \text{div } \sigma$ .

Naredimo še nekaj poenostavitev. Ker so gradienti pomikov majhni, za poljubno količino  $\varphi$  velja

$$\text{Grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} = \text{grad } \varphi (I + \text{Grad } u) \approx \text{grad } \varphi.$$

Zaradi majhnih gradientov pomika je vseeno, ali uporabljamo odvode glede na prostorske ali glede na referenčne koordinate. Enak argument lahko uporabimo tudi za divergenco in običajne odvode.

Cauchyjevo gibalno enačbo lahko zapišemo namesto v prostorskih tudi v referenčnih koordinatah. Pri tem lahko zaradi majhnih gradientov pomikov namesto div pišemo Div in Cauchyjev napetostni tenzor enačimo z napetostnim tenzorjem, zapisanim v referenčnem sistemu. Opustimo tudi strogo ločevanje referenčnih in prostorskih koordinat, saj bomo imeli od sedaj naprej enačbe vedno zapisane v referenčnih koordinatah. Odvode po času pišimo zato kar s piko, za operatorje pa uporabljammo običajne male črke ali pa kar  $\nabla$ .

S temi poenostavitvami dobimo *linearizirano enačbo gibanja*, ki pravi

$$\rho \ddot{\vec{u}}(t, X) = \vec{f}(t, X) + \text{div } \sigma(t, X). \quad (2.14)$$

Sedaj imamo vse pripravljeno, da napišemo končno enačbo, ki ji ustreza pomik materiala. Z njeno pomočjo lahko, glede na dane sile na površini in pomike na robu, izračunamo pomike v celotnem telesu, preko deformacijskega tenzorja in Hookovega zakona pa tudi napetosti.

**Izrek 2.29** (Navierova enačba). *Če so gradienti pomikov v linearno elastičnem hiperelastičnem izotropičnem homogenem nepolarnem mediju majhni, potem za njih velja Navierova enačba*

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \vec{f} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}. \quad (2.15)$$

*Dokaz.* Od linearne enačbe gibanja (2.14) do Navierove enačbe nas loči le še izračun  $\operatorname{div} \sigma$ . Za primerjavo naredimo izračun koordinatno in nekoordinatno. Začnimo s koordinatnim:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u)_{ij} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u^T)_{ij} = \frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{j,i} \\ \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda \frac{1}{2}(u_{k,k} + u_{k,k}) \delta_{ij} + 2\mu \left( \frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{j,i} \right) = \\ &= \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ (\operatorname{div} \sigma)_i &= \sigma_{ij,j} = \lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) = \lambda u_{k,ki} + \mu(u_{i,kk} + u_{k,ki}) = \\ &= (\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} = (\lambda + \mu)(\operatorname{grad}(u_{k,k}))_i + \mu(\Delta u)_i = \\ &= ((\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \Delta u)_i. \end{aligned}$$

Nekoordinatni dokaz pa potrebuje nekaj dodatnih relacij iz razdelka 1.2 glede diferencialnih operatorjev, ki jih bomo uporabili v spodnjem izračunu:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma &= \lambda \operatorname{div} \operatorname{tr}(\varepsilon) I + 2\mu \operatorname{div} \varepsilon = \\ &= \lambda \frac{1}{2}(\operatorname{div}((\operatorname{tr} \operatorname{grad} u) I) + \operatorname{div} \operatorname{tr} \operatorname{grad} u^T) + \mu \operatorname{div}(\operatorname{grad} u + \operatorname{grad} u^T) = \\ &= \frac{\lambda}{2}(\operatorname{div}((\operatorname{div} u) I) + \operatorname{div}((\operatorname{div} u) I)) + \mu \Delta u + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} u = \\ &= \lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \Delta u. \end{aligned}$$

Izračun prinese enak rezultat kot prej in izrek je še enkrat dokazan. □

**Opomba 2.30.** Če je kontinuum v mirovanju, torej  $\dot{\vec{u}} = 0$ , potem se Navierova enačba glasi

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{f} = 0 \quad (2.16)$$

in jo imenujemo *stacionarna Navierova enačba*.

**Opomba 2.31.** Bolj splošno obliko Navierove enačbe, ki dopušča tudi bolj splošen  $C$  ali prostorsko odvisnost parametrov  $\lambda$  in  $\mu$  dobimo tako, da preprosto vstavimo definicijo  $\sigma$  v linearizirano Cauchyjevo momentno enačbo. S tem dobimo enačbo

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \frac{1}{2} \operatorname{div}(C : (\operatorname{grad} \vec{u} + \operatorname{grad} \vec{u}^T)) + \vec{f}. \quad (2.17)$$

## 2.6 Obstoj in enoličnost rešitve

Navierova enačba je linearna parcialna diferencialna enačba drugega reda. Z obstojem in enoličnostjo rešitve se bomo ukvarjali pri stacionarni Navierovi enačbi (2.16) z mešanimi robnimi pogoji pri katerih je na nekem delu roba predpisani pomik, na drugem delu pa površinska sila.

Ker je enačba linearna, je ideja dokaza obstoja in enoličnosti, da rešitev enačbe zapišemo kot linearen funkcional na prizernem prostoru in nato uporabimo Riezsov reprezentacijski izrek 1.19, ki nam bo dal obstoj rešitve. Ideja poti do dokaza je vzeta iz [27, izrek 3.17.1, str. 232]. Iz izkušenj vemo, da bo rešitev obstajala in bo enolična v šibkem smislu, zato prevedimo enačbo v šibko obliko in definirajmo šibko rešitev. Začeli bomo bolj splošno in prevedli na šibko obliko stacionarno linearizirano enačbo gibanja (2.14), nato pa nadaljevali do stacionarne Navierove enačbe. Šibko obliko enačbe dobimo tako, da jo pomnožimo s splošno funkcijo  $\vec{v}$ , integriramo in preko integracije *per partes* ali drugih izrekov znižamo red odvoda na funkciji, ki jo iščemo.

**Trditve 2.32.** Šibka oblika linearne stacionarne enačbe gibanja  $\operatorname{div} \sigma + \vec{f} = 0$  je

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\vec{v}) dV - \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{v} dS - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV = 0. \quad (2.18)$$

*Dokaz.* Pomnožimo enačbo  $\operatorname{div} \sigma + \vec{f} = 0$  skalarno z  $\vec{v} \in [L^2(\Omega)]^3$  in integrirajmo po  $\Omega$  ter poskušajmo prenesti odvode iz  $\sigma$  na  $\vec{v}$ . Dobimo

$$\int_{\Omega} (\vec{v} \cdot \operatorname{div} \sigma + \vec{v} \cdot \vec{f}) dV = 0.$$

Sedaj obrnemo relacijo iz trditve 1.10 ter upoštevamo simetričnost  $\sigma$  in dobimo  $\vec{v} \cdot \operatorname{div} \sigma = \operatorname{div}(\sigma \vec{v}) - \sigma : \operatorname{grad} \vec{v}$ . Ker je  $\sigma$  simetričen in pravokoten na antisimetrične tenzorje, je vseeno če pri  $\operatorname{grad} \vec{v}$  upoštevamo samo simetrični del,  $\varepsilon(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{grad} \vec{v}^T)$ . Nadaljujemo z računom in dobimo

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\sigma \vec{v}) - \sigma : \varepsilon(\vec{v})) dV + \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{f} dV = 0 \\ & \int_{\partial\Omega} \sigma \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\vec{v}) dV + \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{f} dV = 0 \\ & \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{t} dS - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\vec{v}) dV + \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{f} dV = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Pri Navierovi enačbi upoštevamo še relacijo  $\sigma = C : \varepsilon$  in s pomočjo tega bomo definirali šibko rešitev Navierove enačbe. Najprej pa si natančno oglejmo problem in prostor, v katerem bomo rešitve iskali. Problem zastavimo za splošno stacionarno obliko Navierove enačbe (2.17), pri čemer predpostavimo le pozitivno definitnost  $C$ . Najti želimo  $\vec{u}$ , ki zadošča

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(C : \varepsilon(\vec{u})) + \vec{f} &= 0 && \text{na } \Omega \\ \vec{u} &= 0 && \text{na } S \subseteq \partial\Omega \\ \sigma \vec{n} &= (C : \varepsilon(\vec{u})) \vec{n} = \vec{t} && \text{na } \partial\Omega \setminus S, \end{aligned} \quad (2.19)$$

pri čemer je  $\Omega$  povezana omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom,  $S$  nek kos  $\partial\Omega$  z odsekoma gladkim robom in  $\vec{n}$  enotska zunanjega normala za  $\partial\Omega$ . Klasično

rešitve iščemo v podprostoru dvakrat zvezno odvedljivih funkcij  $C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , za katere velja  $\vec{u}|_S = 0$ . Označimo ta prostor s  $C_S^2$  in na njem definirajmo bilinearno formo

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_E = \int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV.$$

**Trditev 2.33.** *Bilinearna forma  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_E = \int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV$  na  $C_S^2$  določa skalarni produkt.*

*Dokaz.* Simetričnost in bilinearnost sta očitni iz lastnosti integrala. Iz pozitivne definitnosti integrala in tenzorja  $C$  sledi, da je  $\varepsilon(\vec{u}) = 0$ . Od tod po trditvi 2.26 sledi, da je  $\vec{u}$  oblike  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{x}$ . Zaradi ničelnosti na kosu roba mora biti  $\vec{u} \equiv 0$ .  $\square$

Prostor  $C_S^2$  ni poln, podobno kot prostor zveznih funkcij ni poln v  $L^p$ . Označimo njegovo napolnitev v normi  $\|\cdot\|_E$  z  $E$ . Sedaj imamo vse pripravljeno, za definicijo šibke rešitve problema 2.19.

**Definicija 2.34.** Rešitev  $\vec{u} \in E$  je šibka rešitev problema 2.19, če za vsako funkcijo  $\vec{v} \in E$  velja

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV - \int_{\partial\Omega \setminus S} \vec{t} \cdot \vec{v} dS - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV = 0.$$

Sedaj imamo vse pripravljeno za izrek o obstoju in enoličnosti.

**Izrek 2.35.** *Naj bo  $\vec{f} \in [L^{\frac{6}{5}}(\Omega)]^3$  in  $\vec{t} \in [L^{\frac{4}{5}}(\Omega)]^3$ . Potem ima problem 2.19 natanko eno šibko rešitev v prostoru  $E$ .*

*Dokaz.* Kornova neenakost 1.13 pravi, da je

$$\int_{\Omega} (|\vec{u}|^2 + \|\operatorname{grad} \vec{u}\|^2) dV \leq c_1 \int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}) : C : \varepsilon(\vec{u}) dV.$$

Drugače prebrano pove, da je  $\|u\|_{[H^1(\Omega)]^3}^2 \leq c_1 \|u\|_E^2$ . Dano imamo torej zvezno vložitev  $E$  v  $[H^1(\Omega)]^3$ . Na vsaki komponenti  $\vec{u}$  lahko sedaj uporabimo izrek o vložitvi prostorov Soboljeva 1.14 in izrek 1.16 in dobimo, da vsaka komponenta  $\vec{u}$  in  $|\vec{u}|$  ležijo v  $L^6$ . Po istem izreku dobimo, da za vsako odsekoma gladko ploskev  $\Sigma \subseteq \Omega$  komponente in norma  $\vec{u}$  ležijo v  $L^4(\Sigma)$ . Dobimo verigi zveznih vložitev

$$\begin{aligned} E &\hookrightarrow [H^1(\Omega)]^3 \hookrightarrow [L^6(\Omega)]^3 \\ E &\hookrightarrow [H^1(\Omega)]^3 \hookrightarrow [L^4(\Sigma)]^3, \end{aligned}$$

ki prek norm na prvem in zadnjem prostoru implicirata neenakosti

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{L^6} &= \left( \int_{\Omega} |\vec{u}|^6 dV \right)^{\frac{1}{6}} \leq c_2 \|\vec{u}\|_E \\ \|\vec{u}\|_{L^4} &= \left( \int_{\partial\Omega \setminus S} |\vec{u}|^4 dV \right)^{\frac{1}{4}} \leq c_3 \|\vec{u}\|_E. \end{aligned}$$

Na šibko obliko Navierove enačbe iz definicije šibke rešitve 2.34 lahko gledamo kot na enačbo oblike

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_E = F(\vec{v}),$$

kjer je  $F$  linearen funkcional na  $E$ , ki slika kot

$$F(\vec{v}) = \int_{\partial\Omega \setminus S} \vec{t} \cdot \vec{v} dS + \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV.$$

Prostor  $E$  je poln in opremljen s skalarnim produktom, tako da je Hilbertov. Če pokažemo še, da je  $F$  zvezen, potem lahko zanj uporabimo Riezsov reprezentacijski izrek 1.19. Pokažimo raje omejenost. Z uporabo trikotniške, Cauchy-Schwarzove, Hölderjeve in zgoraj izpeljanih neenakosti dobimo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV \right| &\leq \int_{\Omega} |\vec{f} \cdot \vec{v}| dV \leq \int_{\Omega} |\vec{f}| |\vec{v}| dV \leq \\ &\leq \underbrace{\left( \int_{\Omega} |\vec{f}|^{\frac{6}{5}} dV \right)^{\frac{5}{6}}}_{< \infty \text{ ker } \vec{f} \in L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} \underbrace{\left( \int_{\Omega} |\vec{v}|^6 dV \right)^{\frac{1}{6}}}_{\leq c_2 \|\vec{v}\|_E} \leq \\ &\leq c_1 c_2 \|\vec{v}\|_E \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega \setminus S} \vec{t} \cdot \vec{v} dS \right| &\leq \int_{\partial\Omega \setminus S} |\vec{t} \cdot \vec{v}| dS \leq \int_{\partial\Omega \setminus S} |\vec{t}| |\vec{v}| dS \leq \\ &\leq \underbrace{\left( \int_{\partial\Omega \setminus S} |\vec{t}|^{\frac{4}{3}} dS \right)^{\frac{3}{4}}}_{< \infty \text{ ker } \vec{t} \in L^{\frac{4}{3}}(\partial\Omega \setminus S)} \underbrace{\left( \int_{\partial\Omega \setminus S} |\vec{v}|^4 dS \right)^{\frac{1}{4}}}_{\leq c_4 \|\vec{v}\|_E} \leq \\ &\leq c_3 c_4 \|\vec{v}\|_E. \end{aligned}$$

Funkcional  $F$  je po trikotniški neenakosti torej omejen in zato zvezen. Po izreku 1.19 torej obstaja enolično določen  $\vec{u}^* \in E$ , tako da je

$$F(v) = \langle \vec{v}, \vec{u}^* \rangle_E$$

za vsak  $\vec{v} \in E$ . Šibka oblika enačbe se torej glasi

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_E = F(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{u}^* \rangle_E.$$

Če prenesemo vse na eno stran, dobimo, da za vsak  $\vec{v} \in E$  velja

$$\langle \vec{v}, \vec{u} - \vec{u}^* \rangle_E = 0.$$

Ker je  $\vec{u} - \vec{u}^*$  pravokoten na vse  $\vec{v} \in E$ , nam ne preostane drugega, kot da je  $\vec{u} = \vec{u}^*$  enolična rešitev v smislu definicije 2.34.  $\square$

Samo enoličnost lahko dokažemo tudi na bolj elementaren način, ki morda nudi boljši vpogled v to, kako robni pogoji določijo enoličnost rešitve v notranjosti, hkrati pa ne potrebuje tako strogih predpostavk na  $\vec{f}$  in  $\vec{t}$ .

**Izrek 2.36** (Kirchoff). *Rešitev problema 2.19 je enolična v  $E$ , če obstaja.*

*Dokaz.* Pa recimo da imamo dve rešitvi  $\vec{u}_1$  in  $\vec{u}_2$  z enakimi robnimi pogoji. Ker sta tako  $\vec{u}_1$  kot  $\vec{u}_2$  šibki rešitvi, zadoščata

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}_1) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV - \int_{\partial\Omega \setminus S} \vec{t} \cdot \vec{v} dS - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} = 0 \\ \int_{\Omega} \varepsilon(\vec{u}_2) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV - \int_{\partial\Omega \setminus S} \vec{t} \cdot \vec{v} dS - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} = 0.\end{aligned}$$

Razlika  $\vec{w} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$  torej zadošča

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\vec{w}) : C : \varepsilon(\vec{v}) dV = 0$$

in ker je  $\vec{w}$  tudi v  $E$ , saj je na robu enaka 0, lahko vstavimo  $\vec{v} = \vec{w}$ . Zaradi pozitivne definitnosti  $C$  sledi  $\varepsilon(\vec{w}) = 0$  od koder kot prej zaradi robnih pogojev sledi  $\vec{w} = 0$  oziroma  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ .  $\square$

**Opomba 2.37.** Iz enoličnosti v  $E$  sledi tudi enoličnost v klasičnem smislu, saj je prostor klasičnih rešitev podprostor v  $E$ .

## 2.7 Priprava na numerično reševanje

Za numerično reševanje se postavimo v kartezični koordinatni sistem. Komponente tenzorja  $\sigma$  razpišimo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

pri čemer smo že upoštevali simetrijo. Reševati tridimenzionalne enačbe je težje kot dvodimenzionalne, zato si oglejmo dve poenostavitevi.

### 2.7.1 Poenostavitev na dve dimenziji

Tridimenzionalne probleme se zavoljo lažje formulacije, manjše računske zahtevnosti in lažje implementacije, pogosto s pomočjo neke simetrije, prevede na nižjedimenzionalne. Spodaj sta na kratko opisani dve najbolj pogosti poenostavitevi. Bolj podroben opis je v [44, str. 260–278].

**Ravninska deformacija:** Pri tej poenostavitvi predpostavimo, da nimamo pomikov v eni izmed koordinatnih smeri, torej brez škode za splošnost  $u_3 = 0$  in preostali dve komponenti sta neodvisni od tretje koordinate. Posledično so  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  in  $\varepsilon_{zz}$  enaki 0. Ta poenostavitev je primerna za telesa, ki imajo eno dimenzijo mnogo večjo od drugih in se vzdolž nje ne spreminja, torej za (ne nujno krožne) valje. Ta poenostavitev da enačbo, ki je enaka tisti v treh dimenzijah, le da ima eno komponento manj.

**Ravninska napetost:** Pri tej poenostavitvi predpostavimo, da napetost nima ne-čelnih komponent v smeri ene izmed koordinatnih osi, torej po primerni rotaciji koordinatnega sistema, da so komponente  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  in  $\sigma_{zz}$  enake 0. Ta poenostavitev je primerna za telesa, ki so “tanke plošče”, torej imajo eno dimenzijo veliko manjšo od ostalih dveh. Poleg tega morajo biti vse obremenitve vzdolž plošče. Ta poenostavitev da enako enačbo kot v treh dimenzijah,

le le da je potrebno uporabiti druge materialne konstante, namesto  $\lambda$  v zvezi  $\sigma = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon I + 2\mu\varepsilon$  moramo uporabiti  $\hat{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}$ . Pretvorba drugih parametrov je dana v [44, str. 276, tabela 7.1].

Pri obeh poenostavitevah se iz pogojev izpelje, da v Navierovi enačbi ne nastopa tretja komponenta  $u$ . V dveh dimenzijah pišemo prvo komponento pomika z  $u$  in drugo z  $v$ , koordinati pa označujemo z  $x$  in  $y$ . Če si razpišemo izraze za deformacijski tenzor in napetostni tenzor za primer ravninske napetosti dobimo:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

### 2.7.2 Robni pogoji

Pri reševanju robnih problemov bomo imeli tri vrste robnih pogojev. Dirichletove robne pogoje  $u|_{\partial\Omega} = u_0$  bomo uporabili, ko bomo poznali pomike na robu. Najpogosteje bo pogoj oblike  $u = 0$ , ko nek konec držimo fiksen. Pri drugi vrsti robnih pogojev poznamo napetosti na robovih. Najpogosteje bomo podali kar napetost na robu  $\vec{t} = \vec{t}_0$ , kjer je  $\vec{t}_0$  neka znana vrednost, npr. 0, če je ta rob prost. Tretja vrsta pogojev bodo simetrijski pogoji, ko bomo problem reducirali preko neke osi simetrije, na osi pa bomo zahtevali kompatibilnostne ali simetrijske pogoje.

Oglejmo si bolj natančno pogoje, podane z napetostjo. Napetost na robu izračunamo preko napetostnega tenzorja,  $\vec{t} = \sigma \vec{n}$ , kjer je  $\vec{n}$  zunanj normala na rob. Za primer desnega roba, na katerega enakomerno deluje neka gostota sile  $p$  v normalni smeri, dobimo dva pogoja:

$$\vec{t} = \sigma \vec{n} = \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## 3 Numerična metoda

V 20. stoletju je skupaj z razvojem računalnikov začel svojo pot razvoj numeričnih metod za reševanje parcialnih diferencialnih enačb. Do danes je bilo razvitih veliko metod za numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb. Dva pomembna razreda metod se ločita glede na obliko, v kateri rešujemo parcialno diferencialno enačbo: šibki (*angl. weak form*) ali močni (*angl. strong form*). Najznamenitejši in zelo uspešen predstavnik prve skupine je metoda končnih elementov (MKE) (*angl. finite element method (FEM)*), kjer problem najprej prevedemo v šibko obliko, nato pa rešitev poiščemo kot linearno kombinacijo baznih funkcij iz izbranega prostora. Najbolj poznan predstavnik metod, ki rešujejo problem v močni obliki pa je metoda končnih differenc (MKD) (*angl. finite difference method (FDM)*), pri kateri direktno diskretiziramo operator, ki nastopa v enačbi.

Poleg tega se metode delijo tudi glede na tip diskretizacije domene, ki ga potrebujejo. Metoda končnih elementov potrebuje *mrežo*, nad katero deluje, tj. triangulacijo notranjosti domene, ki inducira tudi mrežo na robu. Metoda robnih elementov

potrebuje samo mrežo na robu domene. Metoda končnih diferenc je običajno formulirana na pravokotni mreži. Obstajajo pa tudi metode, ki mreže ne potrebujejo, imenujemo jih *bremzrežne metode* (angl. meshfree methods). Predstavljena metoda v tem razdelku bo reševala enačbo v močni obliki in bo bremzrežna.

## 3.1 Izpeljava

Izpeljavo začnimo z osvežitvijo spomina na metodo končnih diferenc, ki nam bo služila kot motivacija.

### 3.1.1 Ideja in motivacija

**Primer 3.1.** Rešujemo enodimensionalno Poissonovo enačbo. Izpeljava metode končnih diferenc ne bo povsem običajna in tudi ne najkrajša možna, ampak bo narejena tako, da jo bomo lahko posplošili v bremzrežno metodo.

Rešujemo problem z mešanimi robnimi pogoji

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{na } (a, b) \\ u(a) &= A \\ u'(b) &= B, \end{aligned} \tag{3.1}$$

katerega rešitev poznamo v kvadraturah

$$u(x) = \int_a^x \left( \int_b^\eta f(\xi) d\xi \right) d\eta + B(x-a) + A.$$

Numeričnega reševanja se lotimo tako, da interval  $[a, b]$  diskretiziramo na  $N$  enakih delov dolžine  $h = \frac{b-a}{N}$  z delilnimi točkami  $x_i = a + ih$ , za  $i = 0, \dots, N$ . Za vsako od teh točk uvedemo neznanko  $u_i$ , ki predstavlja neznano funkcijsko vrednost v točki  $x_i$ . S pomočjo vrednosti  $u_{i-1}, u_i$  in  $u_{i+1}$  želimo sedaj aproksimirati  $u''(x_i)$ . To nam bo dalo zvezo med spremenljivkami in ko jo uporabimo za vse notranje točke ter upoštevamo še robne pogoje, bomo dobili sistem linearnih enačb, katerega rešitev nam bo dala dobro aproksimacijo funkcije  $u$ .

Funkcijo  $u$  v okolini  $x_i$  aproksimiramo z interpolacijskim polinomom, njene odvode pa z odvodi interpolacijskega polinoma. Da najdemo interpolacijski polinom  $\hat{u}$ , zapišimo

$$\hat{u}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = [1 \ x \ x^2] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}(x)^\top \boldsymbol{\alpha}$$

in poiščimo koeficiente  $\boldsymbol{\alpha}$ , da bo veljalo

$$\begin{aligned} \hat{u}(x_{i-1}) &= u_{i-1} \\ \hat{u}(x_i) &= u_i \\ \hat{u}(x_{i+1}) &= u_{i+1}. \end{aligned}$$

Če sistem enačb razpišemo, dobimo

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1(x_i - h) + \alpha_2(x_i - h)^2 &= u_{i-1} \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2 &= u_i \\ \alpha_0 + \alpha_1(x_i + h) + \alpha_2(x_i + h)^2 &= u_{i+1} \end{aligned}$$

ozziroma v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i - h & (x_i - h)^2 \\ 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_i + h & (x_i + h)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}.$$

Krajše ga zapišemo kar kot  $B\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u}$ . Sistem rešimo in dobimo

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2h^2 u_i + h(u_{i-1} - u_{i+1})x_i + (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})x_i^2}{2h^2} \\ \alpha_1 &= \frac{h(u_{i+1} - u_{i-1}) - 2(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})x_i}{2h^2} \\ \alpha_2 &= \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{2h^2}. \end{aligned}$$

Interpolacijski polinom skozi točke  $(x_i, u_i)$  lahko sedaj zapišemo kot

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \\ &= u_i + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}(x - x_i) + \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{2h^2}(x - x_i)^2. \end{aligned}$$

Toda, ker  $u_j$  nastopajo linearno, lahko napišemo tudi v obliki

$$\hat{u}(x) = \begin{bmatrix} \frac{(x_i - x)(h + x_i - x)}{2h^2} & \frac{(h + x - x_i)(h + x_i - x)}{h^2} & \frac{(x - x_i)(h + x - x_i)}{2h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}(x)^\top \mathbf{u}.$$

S tem smo ločili podatke, ki se nanašajo na vrednost funkcije, od podatkov, ki se nanašajo na pozicije točk. Če na primer vemo, da bomo večkrat potrebovali vrednost interpolacijskega polinoma v neki točki  $x^*$  za različne nabore funkcijskih vrednosti (vendar še vedno izmerjene v istih točkah)  $\mathbf{u}$ , potem se nam splača poračunati  $\boldsymbol{\varphi}(x^*)$  vnaprej in vrednosti interpolacijskega polinoma dobimo vsakič znova le s skalarnim produktom  $\hat{u}(x^*) = \boldsymbol{\varphi}(x^*)^\top \mathbf{u}$ . Tukaj ni potrebno, da je  $x^*$  ena izmed točk  $x_i$ , ampak je lahko poljubna točka v domeni, čeprav je potrebno da je v bližini  $x_i$ , če želimo dobiti dobro aproksimacijo.

Za aproksimacijo  $u'$  in  $u''$  bomo vzeli kar odvode  $\hat{u}$ . Izračunajmo jih v točki  $x_i$  in dobimo znane formule

$$\begin{aligned} \hat{u}'(x_i) &= \boldsymbol{\varphi}'(x_i)^\top \mathbf{u} = \left[ -\frac{1}{2h} \quad 0 \quad \frac{1}{2h} \right] \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \\ \hat{u}''(x_i) &= \boldsymbol{\varphi}''(x_i)^\top \mathbf{u} = \left[ \frac{1}{h^2} \quad -\frac{2}{h^2} \quad \frac{1}{h^2} \right] \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

To lahko uporabimo za reševanje našega problema (3.1). Namesto enakosti

$$u''(x_i) = f(x_i)$$

za vsako točko  $x_i$  v notranjosti zapišemo podobno enakost

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = f(x_i).$$

Dirichletov pogoj na levem robu zapišemo preprosto kot  $u_0 = A$ , za Neumannovega na desnem robu pa lahko uporabimo npr. enostransko diferenco na treh točkah

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h} & \frac{3}{2h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = B,$$

ki bi jo izpeljali na enak način.

Vse te enakosti zložimo v sistem enačb in ga zapišimo v matrični obliki

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 2 & 1 & & & \\ & -1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & 1 \\ & & & h/2 & -2h & 3h/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{bmatrix}.$$

Rešitev tega sistema nam dobro aproksimira neznano funkcijo  $u$  v izbranih točkah  $x_i$ .

### 3.1.2 Splošna izpeljava

Postavimo se sedaj v splošnejši okvir. Rešujmo parcialno diferencialno enačbo

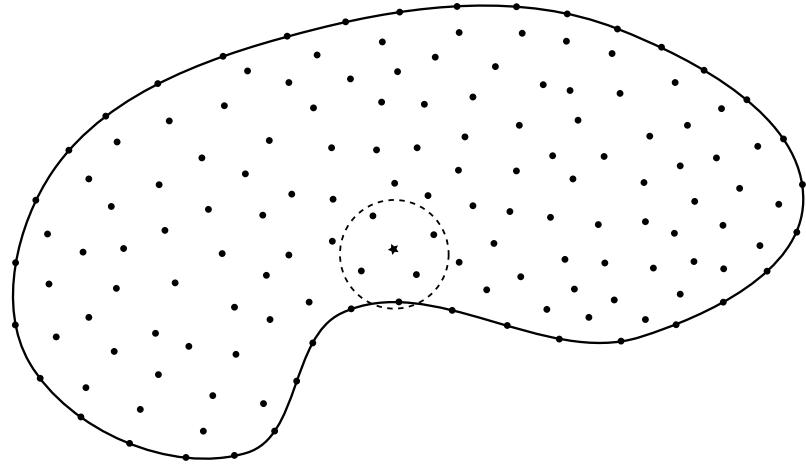
$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \text{ na } \Omega, \\ \mathcal{R}u &= g \text{ na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kjer je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  omejena domena, torej, omejena povezana odprta množica z odsekoma gladkim robom,  $u \in C^r(\mathbb{R}^d)$  funkcija,  $\mathcal{L}: C^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R})$  linearen parcialni diferencialni operator reda  $r$  in  $\mathcal{R}u$  robni pogoji, pri katerih je problem enolično rešljiv.

Poiščimo sedaj primerno diskretno obliko zgornjega zveznega problema. Izberimo  $N$  točk v zaprtju domene,  $x_1, \dots, x_N \in \bar{\Omega}$ , od teh naj jih leži nekaj na robu in nekaj v notranjosti  $\Omega$ . Podobno kot pri končnih differencah bomo v teh točkah aproksimirali vrednost funkcije  $u$ . Izberimo fiksno točko  $p \in \bar{\Omega}$  in  $n$  izmed točk  $\{x_1, \dots, x_N\}$ , ki bodo sestavljeni *soseščino* (angl. support) točke  $p$ . Število  $n$  imenujemo velikost *soseščine*. Označimo z  $\mathcal{N}(p)$  *soseščino* točke  $p$  in z  $\mathcal{I}(p) = \{i_1, \dots, i_n\}$  množico indekov, za katere so izbrani  $x_{i_j}$  v *soseščini*  $p$ . Velja torej

$$\mathcal{N}(p) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}(p)} x_i.$$

Običajno bo  $n \ll N$ , npr.  $n = 9$  in  $N = 10^6$ . Primer domene  $\Omega$ , točke  $p$  in njene *soseščine* je prikazan na sliki 5.



Slika 5: Primer domene z diskretnim opisom notranjosti in roba, skupaj z izbrano točko in njenou sosedino.

V okolici točke  $p$  aproksimirajmo  $u$  z elementi iz nekega končno dimenzionalnega prostora funkcij  $\mathcal{B} = \text{Lin}\{b_1, \dots, b_m\}$ . Funkcijam  $b_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  pravimo *bazne funkcije*, številu  $m$  pa moč baze. Ni nujno, da so funkcije  $b_i$  definirane globalno in so lahko odvisne od izbrane točke  $p$  in njene sosedine. Aproksimacijo  $\hat{u}$  za  $u$  lahko torej zapišemo kot

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i = \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\alpha},$$

pri čemer smo z  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^m$  označili vektor neznanih koeficientov in z  $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^m$  funkcijo  $\mathbf{b}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ , katere komponente so bazne funkcije  $b_i$ .

Če bi poznali vrednosti  $u(x_i)$  za  $i \in \mathcal{I}(p)$ , potem bi za aproksimiranko  $\hat{u}$  v najboljšem primeru zahtevali  $\hat{u}(x_i) = u(x_i)$ , za vsak  $i \in \mathcal{I}(p)$ . Ker funkcijskih vrednosti  $u(x_i)$  ne poznamo, uvedimo spremenljivke  $u_i$  za vsako točko v domeni, ki nam bodo predstavljale neznane prave vrednosti in nadaljujmo s simbolnim računanjem. Če zahteve za interpolacijo po vrsticah zapišemo v sistem linearnih enačb, dobimo

$$\begin{bmatrix} b_1(x_{i_1}) & \cdots & b_m(x_{i_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(x_{i_n}) & \cdots & b_m(x_{i_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i_1} \\ \vdots \\ u_{i_n} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Na krajše sistem zapišemo kot  $B\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\mathbf{u}}$ . Odvisno od  $n, m, b_i$  in uteži  $w$  je ta sistem lahko poddoločen, predoločen ali običajen. Vprašanje obrnljivosti matrike  $B$  je primeru  $n = m$  težko in je odvisno od izbire funkcij in lege točk. Tudi če so funkcije  $b_i$  linearne neodvisne, obstajajo primeri že v dveh dimenzijah, ko zastavljen interpolacijski problem ni korekten [24, str. 79, izrek 2.2] in zagotavljanje korektnosti v splošnem je težek problem.

V vsakem primeru lahko definiramo neke vrste rešitev sistema (3.3), za katero zahtevamo, da minimizira napako v smislu utežene diskretne 2-norme, torej da minimizira

$$\|u - \hat{u}\|_{2, \mathcal{N}(p), \mathbf{w}} = \sum_{i \in \mathcal{I}(p)} w(p - x_i)(u_i - \hat{u}(x_i))^2,$$

pri čemer je  $w: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  nenegativna funkcija, ki jo imenujemo *utež*,  $\mathbf{w}$  pa je vektor sestavljen iz vrednosti te funkcije v točkah v sosedstvu. Če je takih rešitev  $\alpha$  več, izberimo tisto, za katero je  $\|\alpha\|$  najmanjša. Zgornjo minimizacijo lahko prevedemo na minimiziranje diskretno 2-norme  $\|WB\boldsymbol{\alpha} - W\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{N}(p)}$ , kjer je  $W$  diagonalna matrika iz korenov uteži za posamezne točke,  $W = \text{diag}(\sqrt{w(x_{i_1} - p)}, \dots, \sqrt{w(x_{i_n} - p)})$ . Tak sistem pa lahko, ne glede na njegovo določenost, rešimo s pomočjo Moore-Penroseovega psevdoinverza, ki ga izračunamo s pomočjo singularnega razcepa matrike  $WB$ . Tako lahko izrazimo

$$\boldsymbol{\alpha} = (WB)^+ W \tilde{\mathbf{u}},$$

kjer  $+$  označuje Moore-Penroseov psevdoinverz.

To lahko vstavimo nazaj v izraz za  $\hat{u}$  in dobimo

$$\hat{u} = \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}^\top (WB)^+ W \tilde{\mathbf{u}}.$$

Sedaj lahko za izbrano točko  $p$  izračunamo

$$\hat{u}(p) = \underbrace{\mathbf{b}(p)^\top (WB)^+ W}_{\varphi_p} \tilde{\mathbf{u}}.$$

Izračunljivi kos  $\varphi_p$  je v praksi vrstica velikosti  $n$ , matematično pa je linearen funkcional  $\varphi_p \in (\mathbb{R}^n)^*$ , ki naboru funkcijskih vrednosti v sosedstvu  $\mathcal{N}(p)$  priredi aproksimacijo za funkcijsko vrednost v točki  $p$ .

Podobno kot pri deljenih differencah odvode funkcije  $u$  aproksimiramo z odvodi interpolacijskega polinoma skozi točke v sosedstvu, bomo tudi v našem primeru aproksimirali odvode funkcije  $u$  z odvodi  $\hat{u}$ ,

$$(\mathcal{L}u)(p) \approx (\mathcal{L}\hat{u})(p) = (\mathcal{L}\mathbf{b})(p)^\top (WB)^+ W \tilde{\mathbf{u}}$$

od koder kot prej definiramo

$$\varphi_{\mathcal{L},p} = (\mathcal{L}\mathbf{b})(p)^\top (WB)^+ W. \quad (3.4)$$

Funkcional  $\varphi_{\mathcal{L},p}$  je aproksimacija operatorja  $\mathcal{L}$  v točki  $p$ . Pogosto se ga imenuje tudi *funkcija oblike* (angl. shape function), saj v sebi nosi podatke o lokalni obliki domene in izboru okoliških točk, ter seveda o obnašanju  $\mathcal{L}$  v tej okolici. Tudi če funkcijskih vrednosti  $\tilde{\mathbf{u}}$  v okolini  $p$  ne poznamo, lahko  $\varphi_{\mathcal{L},p}$  izračunamo in kasneje samo s skalarnim produktom dobimo aproksimacijo za  $(\mathcal{L}u)(p)$ . Lahko pa to izkoristimo za zapis linearne enačbe

$$\varphi_{\mathcal{L},p} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = f(p),$$

ki je direktna aproksimacija diferencialne enačbe (3.2) v točki  $p$ ,

$$(\mathcal{L}u)(p) = f(p).$$

Tu ni potrebno, da je  $p \in \mathcal{N}(p)$ , temveč je lahko katerakoli točka v domeni, čeprav bo najpogosteje tudi sama ena izmed diskretizacijskih točk.

Operatorja  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{R}$  sedaj aproksimiramo po celi domeni, tako za vsako diskretizacijsko točko  $x_i$  v izračunamo  $\varphi_{\mathcal{L},x_i}$  in dobimo sistem enačb

$$\varphi_{\mathcal{L},x_i} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = f(x_i), \text{ za vsak } i, \text{ tak, da je } x_i \in \Omega$$

$$\varphi_{\mathcal{R},x_i} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = g(x_i), \text{ za vsak } i, \text{ tak, da je } x_i \in \partial\Omega.$$

Te enačbe lahko zapišemo v matrični sistem

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.5)$$

kjer ima matrika  $A$  v vrsticah zapisane funkcionele  $\varphi_{\mathcal{L},x_i}$  tako, da so neničelni elementi na tistih mestih, ki se pomnožijo z neznankami, ki ustrezajo sosedom  $x_i$ . Natančneje, elementi matrike  $A$  so

$$\begin{aligned} A(k, i_j) &= \varphi_{\mathcal{L},p}(j), \text{ za vsak } k, \text{ tak, da je } x_k \in \Omega \text{ in za vsak } i_j \in \mathcal{I}(x_k), \\ A(k, i_j) &= \varphi_{\mathcal{R},p}(j), \text{ za vsak } k, \text{ tak, da je } x_k \in \partial\Omega \text{ in za vsak } i_j \in \mathcal{I}(x_k). \end{aligned}$$

Razumljivejša je morda kar Matlab-ova notacija

$$A(k, \mathcal{I}(x_k)) = \begin{cases} \varphi_{\mathcal{L},p} & x_k \in \Omega \\ \varphi_{\mathcal{R},p} & x_k \in \partial\Omega \end{cases}, \text{ za } k = 1, \dots, N.$$

Vektor  $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^N$  je vektor neznanih funkcijskih vrednosti, ki ga iščemo, v vektorju  $\mathbf{f}$  pa so zapisani robni pogoji

$$\mathbf{f}(k) = \begin{cases} f(x_k) & x_k \in \Omega \\ g(x_k) & x_k \in \partial\Omega \end{cases}, \text{ za } k = 1, \dots, N.$$

Vidimo, da je matrika  $A$  razpršena. Sama je dimenzijs  $N \times N$ , v vsaki vrstici pa ima največ  $n$  neničelnih elementov, torej je skupno število neničelnih elementov

$$\text{nnz}(A) \leq nN.$$

Enakost je lahko dosežena, lahko pa je tudi stroga, saj so kakšni koeficienti v  $\varphi_{\mathcal{L},x_i}$  lahko tudi 0, kot se to zgodi pri Dirichletovih robnih pogojih.

Sistem (3.5) nato rešimo in za aproksimacijo  $u(x_i)$  vzamemo  $u(x_i) \approx u_i$ .

## 3.2 Posebni primeri

Metoda iz razdelka 3.1.2 je formulirana precej splošno in v posebnih primerih lahko prepoznamo druge znane metode. Za začetek pokažimo enostavno trditev, ki bo metodo v določenih primerih poenostavila.

**Trditev 3.2.** Če je  $m = n$  in je matrika  $B$  iz sistema (3.3) obrnljiva, potem je izbira uteži nepomembna.

*Dokaz.* Spomnimo se, da je

$$\boldsymbol{\varphi} = (\mathcal{L}\mathbf{b})(p)^T (WB)^+ W.$$

Matrika  $W$  je diagonalna s samimi pozitivnimi števili na diagonali in je torej obrnljiva. Po predpostavki je obrnljiva tudi matrika  $B$ , torej je obrnljiv tudi produkt  $WB$  in velja

$$(WB)^+ = (WB)^{-1} = B^{-1}W^{-1}.$$

Od tod sledi, da je

$$\boldsymbol{\varphi} = (\mathcal{L}\mathbf{b})(p)^T B^{-1} W^{-1} W = (\mathcal{L}\mathbf{b})(p)^T B^{-1},$$

kar je neodvisno od  $W$ . □

**Opomba 3.3.** Čeprav trditev 3.2 velja v eksaktni aritmetiki, v praksi ne velja nujno. Če so izbrane uteži zelo majhne ali zelo različnih velikosti, lahko to povzroči nepotrebne numerične nestabilnosti. Prav tako lahko zaradi izbire uteži pri izračunu psevdoinverza v vrstici 16 v algoritmu 2 SVD razcep, uporabljen v ozadju funkcije PINV, odreže kakšno majhno singularno vrednost več ali manj, kar lahko da precej drugačne rezultate.

Če je naš operator enostaven, kot je bil  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  v primeru 3.1 lahko enačbo za funkcije oblike izračunamo direktno. Kaj pa lahko storimo, če je operator bolj zapleten, ko ne moremo direktno izračunati  $\mathcal{L}b$ ? Odgovor na to nudi naslednja trditev.

**Trditev 3.4.** Preslikava iz vektorskega prostora linearnih parcialnih diferencialnih operatorjev, ki operatorju  $\mathcal{L}$  priredi funkcijo oblike  $\varphi_{\mathcal{L},p} \in (\mathbb{R}^n)^*$  v neki točki  $p$ , je homomorfizem.

*Dokaz.* Naj bo  $\mathcal{L} = \alpha\mathcal{L}_1 + \beta\mathcal{L}_2$ . Izračunajmo

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha\mathcal{L}_1+\beta\mathcal{L}_2,p} &= ((\alpha\mathcal{L}_1 + \beta\mathcal{L}_2)\mathbf{b})(p)(WB)^+W = \\ &= (\alpha(\mathcal{L}_1\mathbf{b})(p) + \beta(\mathcal{L}_2\mathbf{b})(p))(WB)^+W = \\ &= (\alpha(\mathcal{L}_1\mathbf{b})(p) + \beta(\mathcal{L}_2\mathbf{b})(p))(WB)^+W = \\ &= \alpha(\mathcal{L}_1\mathbf{b})(p)(WB)^+W + \beta(\mathcal{L}_2\mathbf{b})(p)(WB)^+W = \\ &= \alpha\varphi_{\mathcal{L}_1,p} + \beta\varphi_{\mathcal{L}_2,p}.\end{aligned}\quad \square$$

Zgornja trditev pove, da je za popis vseh linearnih operatorjev do reda  $r$  dovolj izračunati le funkcije oblike za elementarne odvode  $D^\omega$  za multiindeks  $|\omega| \leq r$ . Vsak drug operator  $\mathcal{L} = \sum_{|\omega| \leq r} a_\omega D^\omega$  lahko po linearnosti v vsaki točki aproksimiramo z elementarnimi aproksimacijami, tako da jih primerno pomnožimo in seštejemo. V tem primeru ni potrebno da so  $a_\omega$  zgoraj konstante, lahko so tudi funkcije  $p$ , in v vsaki točki uporabimo drugače uteženo linearno kombinacijo  $D^\omega$ . Poseben primer trditve 3.4, ki ga bomo pogosto uporabljali se nanaša na Laplaceov operator, katerega funkcijo oblike bomo računali kot  $\varphi_{\Delta,p} = \varphi_{\frac{\partial^2}{\partial x^2},p} + \varphi_{\frac{\partial^2}{\partial y^2},p}$ .

Že v primeru 3.1 smo videli, da se za Laplaceov robni problem na intervalu naša metoda ujema z metodo končnih differenc. Pokažimo to tudi na primeru dvodimensionalne Poissonove enačbe.

**Trditev 3.5.** Metoda iz razdelka 3.1.2 se za reševanje Poissonove enačbe na enakomerni pravokotni mreži z razmakom  $h$  ujema z metodo končnih differenc, če vzamemo  $\mathbf{b} = \{1, x, y, x^2, y^2\}$ ,  $w \equiv 1$  in  $n = 5$ .

*Dokaz.* Kot ponavadi označimo točke na mreži s koordinatami  $(x_i, y_j)$ , tako da je  $x_{i+1} = x_i + h$  in  $y_{j+1} = y_j + h$ . Pokazati moramo, da se funkcija oblike v vsaki točki  $x$  ujema z aproksimacijo končnih differenc, ki pravi

$$(\Delta u)(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2},$$

pri čemer spremenljivka  $u_{i,j}$  pripada koordinati  $(x_i, y_j)$ . Če se aproksimaciji Laplacevega operatorja ujemata, potem se ujemata tudi aproksimaciji rešitve, saj sistem pri obeh metodah gradimo na enak način. Ker je operator krajevno neodvisen, so tudi funkcije oblik odvisne samo od medsebojne lege točk in torej lahko brez

škode za splošnost predpostavimo, da računamo funkcijo oblike za točko  $p = (0, 0)$ . Najbližjih  $n$  sosedov je tako  $\mathcal{N}(p) = \{(0, 0), (0, h), (0, -h), (h, 0), (-h, 0)\}$ . Matrika  $B = [b_j(x_i)]$  iz sistema (3.3), ki ima po stolpcih izračunane bazne funkcije v vseh sosedih je

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -h & 0 & h^2 \\ 1 & 0 & h & 0 & h^2 \\ 1 & h & 0 & h^2 & 0 \\ 1 & -h & 0 & h^2 & 0 \end{bmatrix}$$

in njen psevdoinverz je

$$B^+ = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2h} & -\frac{1}{2h} \\ 0 & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{2h} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2h^2} \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2h^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo že upoštevali  $w \equiv 1$ . Vektor vrednosti operatorja na baznih funkcijah je

$$(\Delta \mathbf{b})(p) = [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2]^\top.$$

Od tod dobimo po zvezi (3.4)

$$\boldsymbol{\varphi} = (\Delta \mathbf{b})(p)^\top B^+ = \left[ -\frac{4}{h^2} \ \frac{1}{h^2} \ \frac{1}{h^2} \ \frac{1}{h^2} \ \frac{1}{h^2} \right],$$

kar je ravno iskana aproksimacija. □

**Opomba 3.6.** Metodo za izračun funkcije oblike je zelo elegantno implementirati v Wolfram Mathematici, kar olajša simbolno raziskovanje takih aproksimacij. Zgornje matrike so bile izračunane s programom 1.

---

```

1 (* podatki *)
2 p = {0, 0};
3 sosedji = {p, {0, -h}, {0, h}, {h, 0}, {-h, 0}};
4 bazne = {{1 &}, {#1 &}, {#2 &}, {#1^2 &}, {#2^2 &}};
5 operator = Function[f, Function[{x, y}, Derivative[2, 0][f][x, y] + Derivative[0, 2][f][x, y]]];
6 (* izračun *)
7 B = Table[Table[b @@ s, {b, bazne}], {s, sosedji}];
8 Lb = Table[operator[b] @@ p, {b, bazne}];
9 phi = Lb.PseudoInverse[B] // Simplify

```

---

Program 1: Računanje funkcij oblike na pravokotni mreži.

**Opomba 3.7.** Tudi če izberemo  $n = 9$  in  $\mathbf{b} = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y, y^2, y^2x, y^2x^2\}$ , dobimo enako aproksimacijo kot v trditvi 3.5, le da uporabimo več sosedov. Če jih uredimo po oddaljenosti od  $(0, 0)$  dobimo aproksimacijo

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[ -\frac{4}{h^2} \ \frac{1}{h^2} \ \frac{1}{h^2} \ \frac{1}{h^2} \ \frac{1}{h^2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]. \quad (3.6)$$

Če pa bi izbrali  $n = 25$  točk in bazne funkcije  $\mathbf{b} = \{x^i y^j, 0 \leq i, j \leq 4\}$ , potem bi dobili aproksimacijo četrtega reda.

**Primer 3.8.** Naredimo še en primer, kjer za bazne funkcije vzamemo monome. Vzemimo tokrat  $n = 9$  in za bazne funkcije vse monome skupne stopnje manj kot 3, torej  $\mathbf{b} = \{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$ . V tem primeru je matrika  $B$  velikosti  $9 \times 6$  in s pomočjo programa 1 dobimo

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[ -\frac{4}{3h^2} \quad -\frac{1}{3h^2} \quad -\frac{1}{3h^2} \quad -\frac{1}{3h^2} \quad -\frac{1}{3h^2} \quad \frac{2}{3h^2} \quad \frac{2}{3h^2} \quad \frac{2}{3h^2} \quad \frac{2}{3h^2} \right].$$

Vidimo, da tokrat v aproksimaciji upoštevamo vseh 9 sosedov, za razliko od aproksimacije v opombi 3.7. Naravno sledi vprašanje, ali je ta aproksimacija kaj slabša, morda drugačnega reda? Izkaže se, da ne, saj z razvojem aproksimacij v Taylorjevo vrsto dobimo

$$\begin{aligned} & \frac{-4u(0,0) + u(0,h) + u(0,-h) + u(h,0) + u(-h,0)}{h^2} = \\ &= \Delta u + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0,0) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0,0) \right) + O(h^4) \\ & \frac{-4u(0,0) - u(0,h) - u(0,-h) - u(h,0) - u(-h,0) + 2u(h,h) + 2u(h,-h) + 2u(-h,h) + 2u(-h,-h)}{3h^2} = \\ &= \Delta u + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0,0) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 y^2}(0,0) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0,0) \right) + O(h^4). \end{aligned}$$

Obe aproksimaciji sta torej drugega reda, razlikujeta se le pri izražavi napake.

**Primer 3.9.** Poglejmo še, kaj se zgodi, če za bazne funkcije vzamemo radialne bazne funkcije. V tem primeru je smiselno vzeti  $n = m$ , torej postavimo po eno radialno funkcijo na vsakega izmed sosedov. Opisana metoda tako postane koločacijska metoda z lokalnimi radialnimi baznimi funkcijami (*angl. local radial basis function collocation method*).

Če za  $n = 9$  sosedov točke  $(0,0)$  izberemo točke

$$\mathcal{N}(p) = \{(0,0), (0,h), (0,-h), (h,0), (-h,0), (h,h), (h,-h), (-h,h), (-h,-h)\}$$

in za  $\mathbf{b}$  vzamemo

$$\mathbf{b} = \{x \mapsto \exp((x - c)^2/\sigma^2); c \in \mathcal{N}(p)\},$$

potem zopet s pomočjo programa 1 izračunamo aproksimacijo

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{4}{(e^{\frac{2h^2}{\sigma^2}} - 1)^2 \sigma^4} \begin{bmatrix} (e^{\frac{2h^2}{\sigma^2}} - 1)^2 - 4h^2 e^{\frac{2h^2}{\sigma^2}} & h^2 e^{\frac{h^2}{\sigma^2}} & h^2 e^{\frac{h^2}{\sigma^2}} & h^2 e^{\frac{h^2}{\sigma^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Tokrat vidimo, da se precej razlikuje od aproksimacije s končnimi diferencami. Toda, še vedno je drugega reda, saj za napako velja

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \Delta u(0,0) = h^2 \left( \frac{2u(0,0)}{\sigma^2} - \frac{\Delta u(0,0)}{\sigma^2} + \frac{1}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0,0) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0,0) \right) \right) + O(h^4).$$

Vidimo, da je aproksimacija operatorja in napaka odvisna od tega, kakšen  $\sigma$  si izberemo v baznih funkcijah.

**Trditev 3.10.** Aproksimacija Laplaceovega operatorja z devetimi Gaussovimi baznimi funkcijami konvergira proti aproksimaciji z monomi, ko gre  $\sigma \rightarrow \infty$ .

*Dokaz.* Obe aproksimaciji smo izračunali že v primeru 3.9 in opombi 3.7. Če pogledamo limito izraza (3.7), ko gre  $\sigma \rightarrow \infty$ , dobimo izraz (3.6).  $\square$

---

**Algoritem 1** Brezmrežna metoda za reševanje PDE iz razdelka 3.1.2.

---

**Vhod:** Parcialna diferencialna enačba, kot opisana v (3.2). Parametri metode:

|     |   |
|-----|---|
| $N$ | ... celotno število diskretizacijskih točk                |
| $Q$ | ... število diskretizacijskih točk v notranjosti $\Omega$ |
| $n$ | ... število sosedov, ki jih ima vsaka točka               |
| $m$ | ... število baznih funkcij                                |
| $b$ | ... seznam baznih funkcij dolžine $m$                     |
| $w$ | ... utež  |

**Izhod:** Skalarno polje  $u$ , ki aproksimira rešitev enačbe (3.2).

```
1: function REŠI( $\Omega, \mathcal{L}, f, \mathcal{R}, g, N, Q, n, m, b, w$ )
2:    $x \leftarrow \text{DISKRETIZIRAJ}(\Omega, N, Q)$        $\triangleright x$  postane seznam  $N$  točk, brez škode za
      splošnost naj leži prvih  $Q$  točk v  $\Omega$  in preostalih  $N - Q$  na  $\partial\Omega$ .
3:    $s \leftarrow \text{SOSEDI}(x, n)$            $\triangleright s$  je seznam dolžine  $N$ , pri čemer je  $s[i]$  seznam
      indeksov elementov v  $x$ , ki so sosedji  $x[i]$ , vključno z  $i$ .
4:    $\varphi \leftarrow \text{prazen seznam dolžine } N$ .
5:   for  $i \leftarrow 1$  to  $Q$  do            $\triangleright$  Izračunamo funkcije oblik v notranjosti.
6:      $\varphi[i] \leftarrow \text{FUNKCIJA OBLIKE}(\mathcal{L}, x[i], x, s[i], n, m, b, w)$      $\triangleright$  Glej algoritom 2.
7:   end for
8:   for  $i \leftarrow Q + 1$  to  $N$  do        $\triangleright$  Izračunamo funkcije oblik na robu.
9:      $\varphi[i] \leftarrow \text{FUNKCIJA OBLIKE}(\mathcal{R}, x[i], x, s[i], n, m, b, w)$      $\triangleright$  Glej algoritom 2.
10:  end for
11:   $A \leftarrow \text{prazna razpršena } N \times N \text{ matrika}$ 
12:  for  $i \leftarrow 1$  to  $N$  do            $\triangleright$  Aproksimiramo enačbo.
13:    for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
14:       $A[i, s[j]] \leftarrow \varphi[i][j]$ 
15:    end for
16:  end for
17:   $r \leftarrow \text{prazen vektor dolžine } N$ 
18:  for  $i \leftarrow 1$  to  $Q$  do            $\triangleright$  Izračunamo desno stran v notranjosti.
19:     $r[i] \leftarrow f(x[i])$ 
20:  end for
21:  for  $i \leftarrow Q + 1$  to  $N$  do        $\triangleright$  Izračunamo robne pogoje.
22:     $r[i] \leftarrow g(x[i])$ 
23:  end for
24:   $u \leftarrow \text{REŠIRAZPRŠENSISTEM}(A, r)$ 
25:  return  $u$ 
26: end function
```

---

### 3.3 Algoritem

V izpeljavi metode v razdelku 3.1.2 je veliko detajlov ostalo neizdelanih, kot na primer, kako diskretiziramo domeno ali kako poiščemo sosede. Ti detajli so opisani v naslednjih podrazdelkih, celotno metodo pa podajamo v psevdokodi kot algoritom 1.

#### 3.3.1 Diskretizacija

Splošno  $d$ -dimenzionalno domeno  $\Omega$  je težko dobro diskretizirati. Želimo si, da bi bile točke v domeni čim bolj enakomerno razporejene, saj to pomeni, da smo dobro

---

**Algoritem 2** Izračun funkcije oblike.

---

**Vhod:** Parametri metode:

- $\mathcal{L}$  ... parcialen diferencialen operator
- $p$  ... točka, v kateri aproksimiramo operator
- $x$  ... seznam diskretizacijskih točk
- $I$  ... množica indeksov točk v sosedčini  $p$
- $n$  ... število sosedov, ki jih ima vsaka točka
- $m$  ... število baznih funkcij
- $b$  ... seznam baznih funkcij dolžine  $m$
- $w$  ... utež

**Izhod:** Funkcional, ki aproksimira operator  $\mathcal{L}$  v točki  $p$ .

```

1: function FUNKCIJA_OBLIKE( $\mathcal{L}, p, x, I, n, m, b, w$ )
2:    $W \leftarrow$  prazen vektor dolžine  $n$ 
3:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
4:      $W[i] \leftarrow \sqrt{w(x[I[i]] - p)}$ 
5:   end for
6:    $B \leftarrow$  prazna matrika velikosti  $n \times m$ 
7:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
8:     for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
9:        $B[i, j] \leftarrow W[i] \cdot b[j](x[I[i]])$ 
10:    end for
11:   end for
12:    $\ell \leftarrow$  prazen vektor dolžine  $m$ 
13:   for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
14:      $\ell[j] \leftarrow (\mathcal{L}(b[j]))(p)$ 
15:   end for
16:    $\varphi \leftarrow (\ell \cdot \text{PINV}(B)) \odot W$        $\triangleright$  Direktna analogija enačbe (3.4),  $\odot$  označuje
17:   return  $\varphi$                                  $\triangleright$  Hadamardov produkt.
18: end function

```

---

popisali celotno področje in upamo, da s tem tudi obnašanje funkcije  $u$ , hkrati pa si zaradi numerične stabilnosti ne želimo, da bi bile točke preveč skupaj. Uvedimo dve količini, ki nam merita ti dve lastnosti. Za dano domeno  $\Omega$  in množico točk  $X$  definirajmo

$$h_\Omega(X) = \max_{p \in \Omega} \min_{x \in X} \|p - x\| \quad (3.8)$$

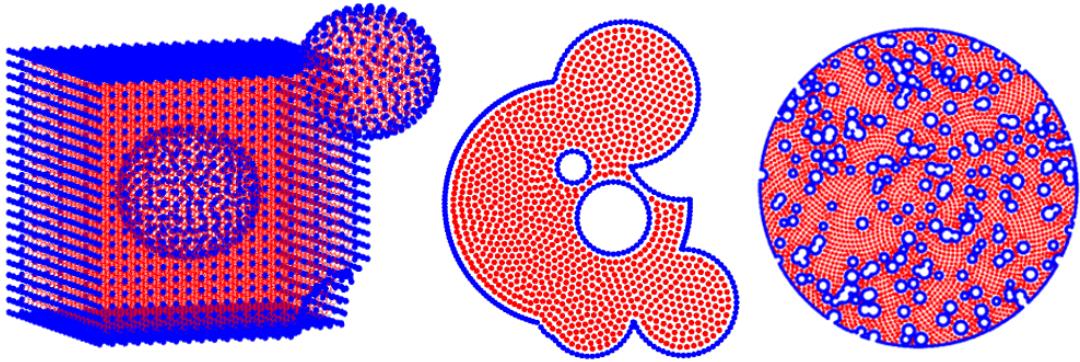
$$S(X) = \min_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \|x - y\|.$$

Količina  $h$  pove, da ne glede na to, kje v domeni smo, imamo na razdalji manj ali enako  $h$  vsaj eno diskretizacijsko točko. Količina  $S$  pa pove, kako blizu so si diskretizacijske točke med seboj. Dobra diskretizacija želi maksimizirati  $S$  in minimizirati  $h$ .

Algoritmi za diskretizacijo so odvisni od načina, kako podamo domeno. V našem primeru se izkaže, da je za trenutne potrebe dovolj, da podpiramo kvadre in krogle do vključno treh dimenzij, kot tudi unije in razlike osnovnih oblik.

Tako lahko za diskretizacijo kvadra uporabimo kar enakomerno diskretizacijo. Prav tako ni težko ugotoviti, kdaj so točke na robu. Za čim bolj enakomerno dis-

kretizacijo notranjosti kroga ali površine sfere lahko uporabimo npr. Fibonaccijevo mrežo, kot predlagano v [14] ali v [11]. Pri razlikah domen preprosto izbrišemo točke, ki so padle izven domene, pri unijah pa naredimo tudi unijo diskretizacij. Pri tem lahko potem naredimo še en korak in pobrišemo ven kakšno izmed točk, ki so si preblizu skupaj. Primeri domen in njihovih diskretizacij, dobljenih na ta način, so prikazani na sliki 6.



Slika 6: Primeri bolj zapletenih domen in njihovih diskretizacij.

Pri enakomerni diskretizaciji smo močno uporabili naše znanje o domeni in njeni obliki. Lahko pa, da tega nimamo na voljo in želimo splošnejši algoritmom, ki potrebuje npr. samo karakteristično funkcijo domene in njene meje, torej, kakšen kvader, ki našo domeno vsebuje. V tem primeru lahko vzamemo enakomerno diskretizacijo kvadra in odstranimo vse točke, ki niso v domeni, vendar je tu težko kontrolirati število točk. Druga metoda je, da naključno izbiramo točke v kvadru, in sprejmemo tiste, ki pristanejo v notranjosti. Še boljšo diskretizacijo dobimo, če namesto psevdonaključnih števil uporabimo kvazinaključna števila, ki imajo manjšo diskrepanco. Več o tem si bralec lahko prebere v [35].

Kljub njihovi splošnosti so naključne diskretizacije precej slabe, kot na primer naključna diskretizacija kroga na sliki 7 (levo). Pri tem, da bi točke v domeni porazdelili čim bolj enakomerno, si lahko pomagamo s preprostim iterativnim postopkom, za katerega se izkaže, da v praksi dobro deluje. Navdih jemljemo iz fizike in si zamislimo, da je vsaka točka naboj, ki se odbija od sosednjih točk in pustimo fiziki, da opravi svoje delo. Na vsako točko tako deluje neka sila, ki jo sili stran od drugih točk, v prazen prostor. Točko lahko malo premaknemo v smeri sile, ponovno izračunamo medsebojne sile in postopek ponavljamo. Pri tem točkam na robu ne dovolimo premikanja in če kakšna točka iz notranjosti zleze iz domene, jo postavimo na naključno mesto nazaj v domeno. Zapis zgornjega postopka je v psevdokodi podan kot algoritem 3. Postopku se kdaj reče tudi *sprostitev* (angl. relaxation) domene, kajti na začetku so med točkami napetosti, ki jih s premikanjem poskušajo minimizirati. Rezultati na primeru izboljšanja naključne diskretizacije kroga so podani na sliki 7.

Da algoritem izboljša kvaliteto aproksimacije se vidi tudi, če izračunamo parametra  $h$  in  $S$ . Pričakujemo, da se bo  $S$  povečal, saj se točke, ki so bolj skupaj, bolj odbijajo. Na sliki 8 vidimo primerjavo med kvaliteto diskretizacije s Fibonaccijevo mrežo in njeni 10-kratno izboljšavo. Vidimo, da se  $h$  ni bistveno spremenil, le varianca se mu je malce povečala,  $S$  pa se je v povprečju precej izboljšal in izkazuje celo lepše obnašanje kot prej.

---

**Algoritem 3** Algoritem za izboljšanje kvalitete diskretizacije domene.

---

**Vhod:** Parametri metode:

- $\Omega$  ... domena
- $N$  ... število diskretizacijskih točk
- $Q$  ... število diskretizacijskih točk v notranjosti  $\Omega$
- $X$  ... seznam diskretizacijskih točk, prvih  $Q$  je v notranjosti.
- $I$  ... število iteracij
- $s$  ... število sosedov, ki jih upoštevamo pri delovanju sile
- $F_0$  ... delež sile, ki vpliva na premik
- $\alpha$  ... eksponent v sili

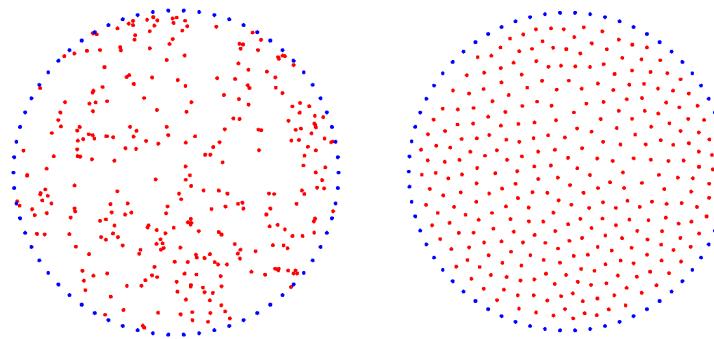
**Izhod:** Nov seznam diskretizacijskih točk.

```

1: function IZBOLJŠAJ( $\Omega, N, Q, X, I, s, F_0, \alpha$ )
2:    $r_\chi \leftarrow \left( \frac{\text{VOLUMEN}(\Omega)}{N} \right)^{\frac{1}{\text{DIMENZIJA}(\Omega)}}$        $\triangleright$  Približek povprečne razdalje med točkami.
3:   for  $i \leftarrow 1$  to  $I$  do
4:     for  $j \leftarrow 1$  to  $Q$  do
5:        $\vec{F} \leftarrow \vec{0}$ 
6:       for each  $y$  in {najbližjih  $s$  sosedov  $X[i]$ } do
7:          $\vec{r} \leftarrow \frac{X[i] - y}{r_\chi}$            $\triangleright$  Brezdimenzijski vektor razdalje.
8:          $\vec{F} \leftarrow \vec{F} + \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^\alpha}$ 
9:       end for
10:       $X[i] \leftarrow X[i] + F_0 \vec{F}$ .
11:      if  $X[i] \notin \Omega$  then
12:         $X[i] \leftarrow$  naključna pozicija znotraj  $\Omega$ 
13:      end if
14:    end for
15:  end for
16:  return  $X$ 
17: end function

```

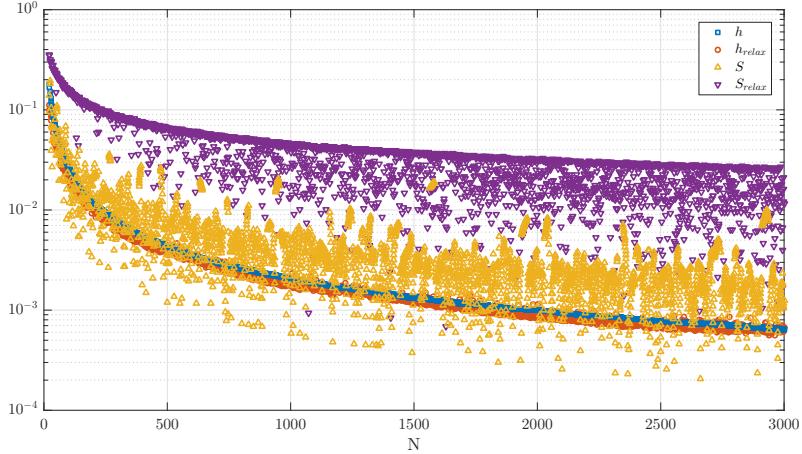
---



Slika 7: Primerjava domene z naključno diskretizacijo (levo) in domene po izvedbi 10 iteracij algoritma 3 s parametri  $F_0 = 10^{-2}$ ,  $s = 6$ ,  $\alpha = 3$  (desno).

### 3.3.2 Iskanje najbližjih sosedov

Tako v algoritmu 1 v vrstici 3, kot v algoritmu 3 v vrstici 6 potrebujemo najti nekaj najbližjih sosedov dane točke. Navadno za okolico izberemo kar  $n$  najbližjih sosedov v evklidski metriki, vendar bi lahko soseščino definirali tudi drugače, na primer kot množico vozlišč, ki so oddaljeni manj kot neka fiksna razdalja  $R$ . Pri tem pristopu



Slika 8: Sprememba  $h$  in  $S$  po 10 iteracijah algoritma 3 s parametri  $F_0 = 10^{-2}$ ,  $s = 6$ ,  $\alpha = 3$  v enotskem dvodimenzionalnem krogu z začetno Fibonaccijevo mrežo, v odvisnosti od  $N$ , z razmerjem robnih in notranjih točk  $x : \frac{12}{\pi}\sqrt{x}$ .

bi imeli manjšo kontrolo nad velikostjo soseščine, zato izberemo prvega.

Problem iskanja najbližjih sosedov (*angl. nearest neighbour search*) je znana in dobro raziskana tema z razvitim veliko podatkovnimi strukturami, ki podpirajo grajenje, iskanje, vstavljanje in brisanje v logaritemskem času. Večina jih temelji na delitvi prostora na različne hierarhično urejene podprostore, ki jih potem hranimo v drevesni strukturi, kar nam omogoča logaritemski dostop. Med bolj znanimi strukturami so *k-d tree* [34], *ball tree* [37] in *cover tree* [3]. V članku [23] je narejena empirična primerjava med zgornjimi tremi strukturami, ki pokaže, da se v primeru nizkih dimenzij (kar gotovo vsebuje  $d \leq 3$ ) najbolje obnese *k-d tree*. Poleg tega *k-d tree* najboljše deluje tudi, ko imajo točke, v katerih bomo iskali sosede, podobno porazdelitev kot točke, iz katerih smo naredili drevo, kar v našem primeru drži. Če vključimo še dejstvo, da je *k-d tree* tudi najpopularnejša rešitev za problem najbližjih sosedov in ima na voljo veliko prosto dostopnih implementacij, je to dovolj argumentov, da jo uporabimo tudi mi. Specifična uporabljeni implementacija je predstavljena v [36], ki za shrambo  $N$  točk porabi  $O(N)$  prostora in odgovarja na poizvedbe o  $n$  najbližjih sosedih v  $O(n \log N)$  časa. S pomočjo tega postane implementacija funkcije *SOSEDI* iz algoritma 1 trivialna, pri algoritmu 3 pa si na vsaki iteraciji na novo zgradimo drevo in ga uporabimo za iskanje  $s$  najbližjih sosedov.

### 3.3.3 Reševanje razpršenega sistema

Za reševanje razpršenih sistemov poznamo veliko različnih metod, ki se v grobem delijo na direktne (obsežno opisane v [9]) in iterativne (obsežno opisane v [41]). Pri običajnih, polnih matrikah bi za reševanje splošnega sistema linearnih enačb uporabili LU razcep in razcepili matriko  $A$  kot  $A = LU$ . Toda, tudi če je matrika  $A$  razpršena, v splošnem  $L$  in  $U$  nista nujno in sta lahko celo polni, kar povzroči, da nam zmanjka pomnilnika. Direktne metode, kot na primer SuperLU [30] poskušajo s preureditvijo stolpcev v razpršeni matriki  $A$  minimizirati število novih neničelnih elementov v matrikah  $L$  in  $U$ . Po drugi strani iterativne metode aproksimirajo pravilno rešitev sistema  $Ax = b$  z zaporedjem približkov  $\{x^{(r)}\}$ , ki naj bi konvergirali k  $x$ . Te metode običajno ne zahtevajo veliko pomnilnika, je pa natančnost približka odvisna od števila porabljenih iteracij, tako da moramo za višjo natančnost porabiti

večje število računskih operacij.

Za metode iz numerične linearne algebре bomo uporabljali knjižnico Eigen [12], ki nudi elegantno in hitro delo z matrikami v C++. Vgrajenih ima veliko direktnih in iterativnih metod za reševanje sistemov linearnih enačb.<sup>1</sup> Pri sistemih tipa (3.5) se je v praksi najbolje obnesel BiCGSTAB [49] z ILUT predpogojevanjem [40]. BiCGSTAB v primeru uporabe pravilne shrambe matrike v pomnilniku podpira tudi paralelizacijo, poleg tega pa je konvergenca v praksi dovolj hitra. Predpogojevanje z uporabo nepopolnega LU razcepa z dvojnim pragom (*angl. dual threshold incomplete LU factorization (ILUT)*) omogoča natančnejšo kontrolo nad porabljenim spominom in hitrostjo konvergencije z uporabo dveh parametrov  $p$  in  $\tau$ . Med LU faktorizacijo izpustimo vsak element, ki je manjši kot  $\tau \cdot e$ , kjer je  $e$  povprečna absolutna vrednost elementov v trenutni vrstici. Nato obdržimo le največjih  $f$  elementov v matrikah  $L$  in  $U$ , kjer je  $p$  uporabljen kot razmerje med  $f$  in začetnim številom neničelnih elementov. V grobem nam tako parameter  $p$  kontrolira kolikokrat več spomina dovolimo za hranjenje predogojenke, parameter  $\tau$  pa, kako natančna bo LU faktorizacija.

### 3.3.4 Časovna zahtevnost

V tem razdelku analiziramo časovno zahtevnost metode. Predpostavili bomo, da so vse evalvacije funkcij  $f$ ,  $g$ ,  $w$  in  $b_j$ ,  $\mathcal{L}b_j$ ,  $\mathcal{R}b_j$  izvedene v  $O(1)$ . Prav tako bomo predpostavili, da je dimenzija problema majhna in konstantna in ne bo nastopala v analizah.

**Trditev 3.11.** *Pričakovana časovna zahtevnost algoritma 1 je*

$$O(INs \log^2 N + (N + n) \log N + m^2nN) + T, \quad (3.9)$$

kjer je  $T$  čas, porabljen za reševanje razpršenega sistema enačb.

*Dokaz.* Pri funkciji DISKRETIZIRAJ predpostavimo, da uporabljamo enostavno diskretizacijo, ki deluje v  $O(N)$  časa, skupaj z  $I$  iteracijami izboljšave na  $s$  sosedih, ki traja  $O(INs \log^2 N)$  časa, saj na vsaki iteraciji konstruiramo drevo in iščemo  $s$  sosedov vsake točke.

Izvajanje funkcije SOSEDI traja  $O((N + n) \log N)$  časa za konstrukcijo drevesa in iskanje sosedov.

Izvajanje funkcije FUNKCIJA\_OBLIKE traja po  $O(n + nm + m + m^2n + nm + n) = O(m^2n)$ , kjer je prevladujoči faktor  $O(m^2n)$  rezultat računanja SVD razcepa z dvostranskim Jacobi SVD razcepom iz knjižnice Eigen.<sup>2</sup> Funkcija oblike se izračuna za vsako točko v domeni, torej ta del algoritma traja  $O(m^2nN)$  časa.

Pri sestavljanju razpršene matrike lahko v naprej rezerviramo prostor za  $n$  elementov v vsaki vrstici, tako da nas sestavljanje matrike stane  $O(nN)$  časa, sestavljanje robnih pogojev pa  $O(N)$  časa. Na koncu še rešimo razpršen sistem linearnih enačb, kjer pa je čas zelo odvisen od problema, iteracijske metode in predpogojenke.

Skupna časovna zahtevnost je tako  $O(INs \log^2 N + (N + n) \log N + m^2nN) + T$ , kjer je  $T$  čas, porabljen za reševanje razpršenega sistema enačb.  $\square$

<sup>1</sup>[https://eigen.tuxfamily.org/dox/group\\_\\_TopicSparseSystems.html](https://eigen.tuxfamily.org/dox/group__TopicSparseSystems.html)  
[obiskano 17. 6. 2017]

<sup>2</sup>[https://eigen.tuxfamily.org/dox/classEigen\\_1\\_1JacobiSVD.html](https://eigen.tuxfamily.org/dox/classEigen_1_1JacobiSVD.html) [obiskano 16. 6. 2017]

### 3.3.5 Prostorska zahtevnost

V tem razdelku analiziramo časovno zahtevnost metode. Podobno kot pri časovni zahtevnosti bomo predpostavili, da so vse evalvacije funkcij  $f, g, w$  in  $b_j, \mathcal{L}b_j, \mathcal{R}b_j$  izvedene v  $O(1)$  prostora. Prav tako bomo predpostavili, da je dimenzija problema majhna in konstantna in ne bo nastopala v analizah.

**Trditev 3.12.** *Prostorska zahtevnost algoritma 1 je  $O(nN) + P$ , kjer je  $P$  prostor, ki ga potrebujemo, za reševanje sistema linearnih enačb.*

*Dokaz.* Pri funkciji DISKRETIZIRAJ potrebujemo  $O(N)$  spomina za shrambo  $N$  diskretizacijskih točk. Če izvajamo še dodatne izboljšave diskretizacije, nas to stane  $O(n)$  dodatnega prostora.

Za izvajanje funkcije SOSEDI porabimo  $O(N)$  prostora za hranjenje drevesa in  $O(nN)$  prostora za hranjenje indeksov  $n$  sosedov.

Izvajanje funkcije FUNKCIJA\_OBLIKE nas stane  $O(n + nm + m + n) = O(nm)$  prostora za vsak klic, za hrambo  $N$  funkcij oblike pa potrebujemo  $O(nN)$  prostora.

Razpršena matrika prav tako potrebuje  $O(nN)$  prostora za neničelne elemente. Nato moramo rešiti le še sistem linearnih enačb, kar po predpostavki stane  $P$  prostora. Ker je  $m = O(N)$  je prevladujoči faktor  $O(nN)$  in skupna prostorska zahtevnost je  $O(nN) + P$ .  $\square$

## 3.4 Pogoste vrednosti parametrov

Metoda je bila do sedaj formulirana zelo splošno, v praksi pa se uporablja nekaj ustaljenih kombinacij. Kot bomo videli, razdalje pogosto merimo v večkratnikih  $r_\chi$ , kot v vrstici 2 v algoritmu 3.

**Definicija 3.13.** Količino  $r_\chi$ , pripisano diskretizaciji  $X$  domene  $\Omega$ , izračunano z

$$r_\chi(\Omega, X) = \left( \frac{\text{VOLUMEN}(\Omega)}{|X|} \right)^{\frac{1}{\text{DIMENZIJA}(\Omega)}},$$

imenujemo *karakteristična razdalja*.

Ideja definicije je, da  $r_\chi$  predstavlja približno povprečno razdaljo med diskretizacijskimi točkami, če bi bile razporejene enakomerno. Celoten volumen domene razdelimo na  $N = |X|$  delov, tako da vsaki točki pripada enak kos volumna  $v = \frac{\text{VOLUMEN}(\Omega)}{N}$ . Če bi bil ta kos neka hiperkocka v  $d$  dimenzijah, potem je  $\sqrt[d]{v}$  dolžina njene stranice in to je ocena za medsebojno razdaljo med točkami. V eni dimenziji  $r_\chi$  do faktorja  $\frac{N}{N-1}$  natančno ustreza razdalji med enakomerno razporejenimi točkami. Drugo pogosto merilo za lokalno razdaljo bo kar razdalja do najbljžjega (različnega) soseda, ki jo imenujmo  $r_c$ ,

$$r_c(p) = \min_{\substack{x \in \mathcal{N}(p) \\ x \neq p}} \|x - p\|. \quad (3.10)$$

To je težje izračunati, če nimamo že zgrajenega drevesa, zato se ponavadi na enostavnnejših primerih poslužujemo kar  $r_\chi$ . Kadar pa to ni dobra aproksimacija razdalje med vozlišči za celo domeno, kot na primer ob goščenju mreže, se poslužimo  $r_c$ .

Pogoste vrednosti za število sosedov so  $n = 3, 5, 7$  v eni dimenziji,  $n = 5, 9, 13, 25$  v dveh dimenzijah in  $n = 7$  ali  $27$  v treh dimenzijah. Za regularne domene to pomeni,

da so vozlišča izbrana simetrično, pri neregularnih pa izbira  $n$  ni tako pomembna, dokler je dovolj visoka, da dobro popiše operator, ki ga aproksimiramo. Višji  $n$  ponavadi pomeni večjo stabilnost, morda višji red in počasnejše izvajanje. V praksi izberemo najmanjši  $n$ , ki daje zadovoljive rezultate.

Za utež se pogosto uporablja konstanta  $w \equiv 1$ , če ne želimo uteženih najmanjših kvadratov, sicer pa pogosto vzamemo za utež Gaussovo funkcijo

$$w(x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma_w}\right)^2\right),$$

kjer  $\sigma_w$  imenujemo parameter oblike (*angl. shape parameter*) uteži. Velja opozoriti, da je ta funkcija praktično nič, če smo več kot  $3\sigma_w$  stran od središča ( $w(3\sigma_w) \approx 0.0001234$ ). Če na primer izberemo  $\sigma_w = r_\chi$  se vsi sosedi, ki so dlje kot  $r_\chi$  stran, v aproksimaciji ne upoštevajo, ne glede na to kako velik  $n$  smo izbrali. Ponavadi se za  $\sigma_w$  začne izbirati vrednosti okoli  $r_\chi$ , je pa potrebno optimalno vrednost določiti za vsak posamezen problem posebej.

Pogosta izbira baznih funkcij so prostori  $\mathbb{P}_\ell$  monomov skupne stopnje manj ali enako  $\ell$ . Pri tem moramo seveda paziti, da izberemo dovolj visok  $n$ . Druga pogosta izbira je, da vzamemo  $m = n$  in za bazne funkcije izberemo radialne bazne funkcije s centri v sosedih.

**Definicija 3.14.** Funkcija  $\psi_c$  se imenuje radialna bazna funkcija s centrom v točki  $c$ , če je odvisna samo od razdalje do centra, torej

$$\psi_c(x) = \tilde{\psi}(\|x - c\|),$$

za vsak  $x$  za neko funkcijo  $\psi$ . Kasneje kar identificiramo  $\psi_c$  in  $\tilde{\psi}$  in pišemo  $\psi_c = \psi_c(r)$ .

V tabeli 2 so naštete najpogosteje uporabljene radialne bazne funkcije, povzete po [42, str. 5].

Ko si izberemo neko bazno funkcijo  $\psi$ , potem za bazne funkcije okoli točke  $p$  vzamemo

$$\mathbf{b} = \{\psi_s; s \in \mathcal{N}(p)\}.$$

Pri izbiri parametra oblike  $\sigma_b$  moramo tudi biti do neke mere pazljivi. Izbrati ga moramo dovolj velikega, da se funkcije “prekrivajo”, torej tako, da nima funkcija vrednosti blizu nič pri vseh sosedih razen pri sebi. Hkrati mora biti parameter dovolj majhen, da sistem (3.3) ni preveč nestabilen. Bolj natančna analiza izbire parametra oblike za radialne bazne funkcije in za utež je narejena na sliki 15 med numeričnimi zgledi na strani 52.

Pogosto se k bazi radialnih baznih funkcij doda še monome nizkih stopenj, za boljšo aproksimacijo funkcij, ki so blizu konstantam. Več o kvaliteti, stabilnosti in redu konvergencije aproksimacije z radialnimi baznimi funkcijami si lahko bralec prebere v [5].

### 3.5 Višjedimenzionalni problemi

Numerično zelo pogosto rešujemo probleme, kjer je neznana količina vektorsko polje in ne le skalarno polje, kot smo predpostavili v izpeljavi v razdelku 3.1.2. Navier-Stokesove enačbe in Navierova enačba sta najbolj osnovna zgleda vektorskih enačb.

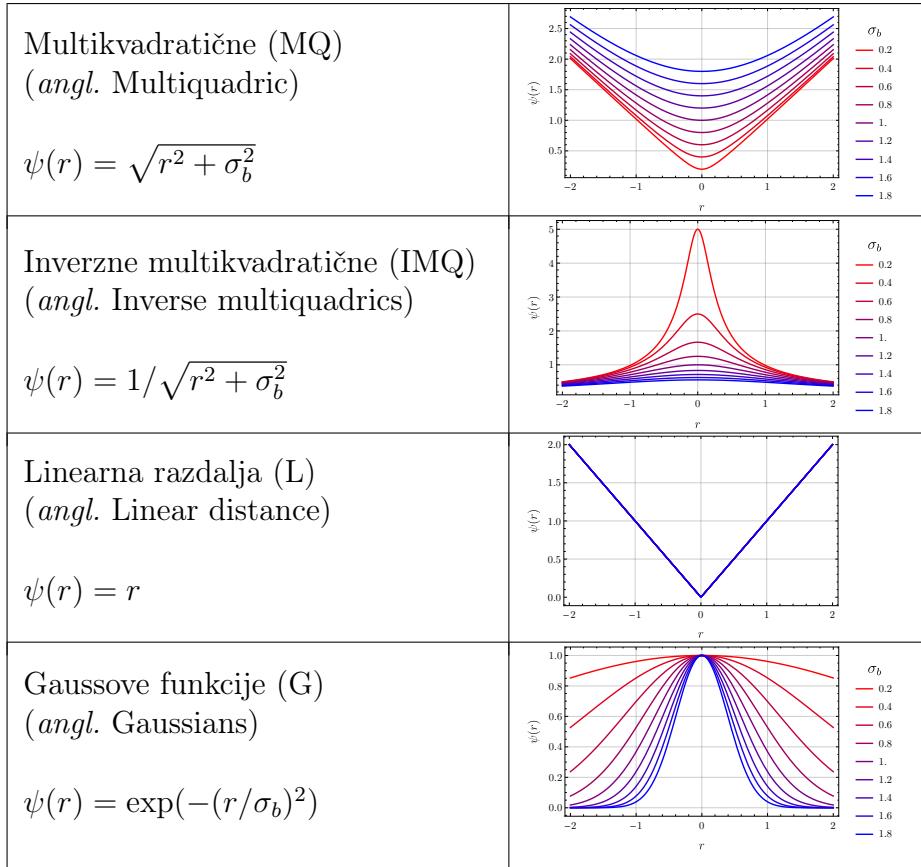


Tabela 2: Najpogosteje uporabljene radialne bazne funkcije s parametrom oblike  $\sigma_b$ .

Pri teh problemih moramo poprijeti po drugačnih metodah, najenostavnnejše preprosto obravnavamo enačbo za vektorsko polje kot tri sklopljene enačbe za tri skalarna polja. Oglejmo si postopek na primeru Navierove enačbe. Vektorsko polje razpišemo po komponentah, za primer treh dimenzij zapišemo  $\vec{u} = (u, v, w)$ . Vektorska oblika stacionarne Navierove enačbe

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} = 0$$

se razpiše v sistem treh enačb

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial xz} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f_1 &= 0 \\ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial yz} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + f_2 &= 0 \\ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial xz} + \frac{\partial^2 v}{\partial yz} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_3 &= 0. \end{aligned}$$

Enačbe so sklopljene preko operatorja grad div. Če domeno diskretiziramo z  $N$  točkami, bomo namesto sistema  $N \times N$  za neznano skalarno polje, sedaj reševali sistem  $3N \times 3N$  za tri skalarna polja hkrati. Neznanke, ki ustrezajo vektorju  $\vec{u}$  predstavimo numerično kot vektor  $\mathbf{u}$  dolžine  $3N$ , katerega prvih  $N$  komponent predstavlja  $u$ , naslednjih  $N$  predstavlja  $v$ , zadnjih  $N$  pa  $w$ . Enako storimo z  $\vec{f}$  in robnimi pogoji.

Enačbo  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$  lahko sedaj zapišemo po blokih

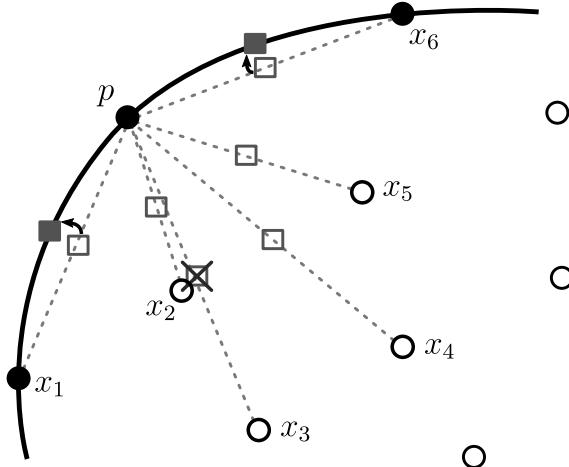
$$\begin{bmatrix} U1 & V1 & W1 \\ U2 & V2 & W2 \\ U3 & V3 & W3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Vsako izmed treh komponent Navierove enačbe bomo napisali v eno izmed (bločnih) vrstic. Funkcijo oblike za člen  $\frac{\partial^2 v}{\partial xy}$  bi napisali v blok  $V1$ , saj nastopa v prvi enačbi in se nanaša na polje  $v$ , podobno bi aproksimacijo za  $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$  iz tretje enačbe zapisali v blok  $W3$ . Če bi katere elemente napisali na mesta, kjer so že kakšni neničelni elementi, jih med seboj seštejemo. Primer take matrike pri reševanju dvodimensionalnega sistema je prikazan kasneje, na sliki 22 na strani 58.

### 3.6 Goščenje točk v domeni

Pri reševanju problemov z divje spreminjačimi rešitvami, singularnostmi ali zelo majhnimi lokalnimi fenomeni si pogosto pomagamo s finejšo diskretizacijo v okolini dela rešitve, ki nas najbolj zanima. Pri metodah, ki temeljijo na triangulaciji domene, lahko trikotnike v območju interesa delimo in tako dobimo finejšo triangulacijo. Pri brezmrežnih metodah metodah želimo doseči enak učinek, zato potrebujemo način, da gostimo točke na nekem območju.

Izberimo točko  $p$  okoli katere bomo gostili diskretizacijo. Postopek bomo imenovali *goščenje* (angl. refinement). Pri tem si pomagajmo z ilustracijo postopka na sliki 9. Najdimo najbližjih  $\ell$  sosedov točke  $p$ , pri čemer ne štejemo  $p$  in jih označimo



Slika 9: Algoritem za goščenje točk v domeni.

z  $L = \{x_1, \dots, x_\ell\}$ . Za vsakega izmed sosedov dodamo novo točko, na polovici dolžice med  $x_i$  in  $p$ , označeno s sivim kvadratkom. Kandidati za nove diskretizacijske točke so torej

$$X' = \left\{ \frac{p + x}{2}; x \in L \right\}.$$

Pri tem pazimo, da če sta tako  $x$  kot  $p$  točki na robu, je tudi njuno središče robna točka in jo projiciramo na rob domene, kot prikazano na primeru na sliki 9 z dvema potemnjjenima kvadratkoma. Če je katera izmed točk v  $X'$  izven zaprtja  $\Omega$ , jo odstranimo iz množice kandidatov. Poleg tega se lahko zgodi, da so nekatere nove

točke preblizu skupaj ali pa preblizu stariim točkam, kar bo povzročilo nestabilnosti pri reševanju. Zato v parih točk, ki so bolj skupaj kot dovoljena razdalja  $r_{\min}$  zavrhemo eno izmed točk, kjer zavrhemo najprej novo, če je ta preblizu neki stari. Za razdaljo  $r_{\min}$  ponavadi vzamemo  $r_{\min} = fr_c$ , kjer je  $r_c$  definiran z (3.10) razdalja do najbližjega soseda in  $f$  nek pozitiven faktor, ponavadi manjši od  $1/2$ .

Zgornji postopek je lokalne narave in njegovo izvajanje je le logaritemsko odvisno od števila točk v domeni (zaradi iskanja sosedov). Če želimo na nekem območju še gostejšo diskretizacijo, ga preprosto ponovimo večkrat zapored. Primer večkrat zgoščene domene je prikazan na sliki 25.

## 4 Osnovni numerični zgledi

V tem razdelku bomo pogledali obnašanje metode na osnovnih numeričnih zgledih, da si zgradimo intuicijo o njenem delovanju. V nadalnjem besedilu in na vseh grafih bo metoda, opisana v razdelku 3 označena s kratico MLSM (*angl. Meshless Least Squares Method*). Če ni drugače navedeno, so vse meritve narejene na računalniku z eno centralno procesno enoto Intel(R) Core(TM) i7-4700MQ CPU @2.40GHz s štirimi jedri, od katerih vsako podpira dve niti izvajanja, in 16 GiB DDR3 pomnilnika. Vsi programi so bili prevedeni s prevajalnikom `g++` verzije 7.1.7 in stikali `-std=c++14 -O3 -DNDEBUG` na operacijskem sistemu Manjaro Linux.

### 4.1 Enodimenzionalni robni problem

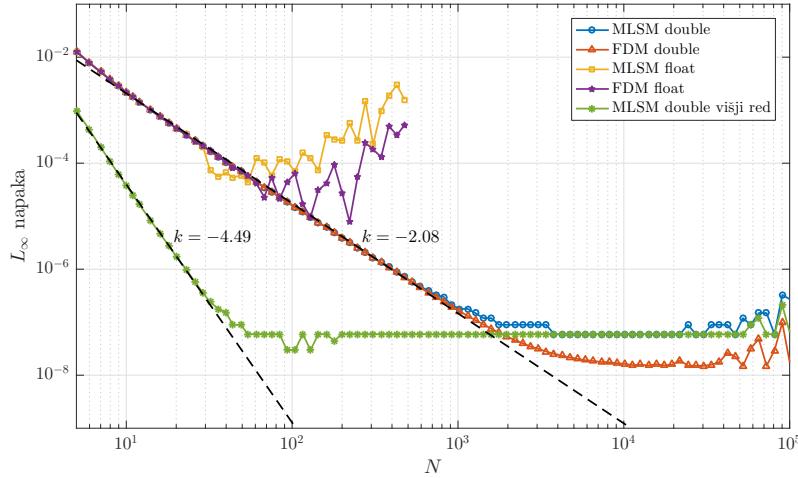
Oglejmo si najprej preprost primer enodimenzionalne Poissonove enačbe, ki smo ga uporabili že za motivacijo izpeljave numerične metode. Rešujmo problem

$$\begin{aligned} u''(x) &= \sin(x), \quad x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0, \\ u'(1) &= 0, \end{aligned}$$

ki ima analitično rešitev  $u(x) = \cos(1)x - \sin(x)$ . Na sliki 10 je prikazana konvergenca metode končnih diferenc in MLSM. Metoda MLSM je bila uporabljeni s parametri, pri katerih velja trditev 3.5, torej  $n = m = 3$ ,  $w = 1$ ,  $\mathbf{b} = \{1, x, x^2\}$ . Pri obeh metodah smo uporabi dvojno in enojno natančnost računanja s plavajočo vejico. Za primerjavo smo rešili problem tudi z višjim redom  $n = m = 5$ ,  $w = 1$ ,  $\mathbf{b} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ . V obeh primerih smo uporabili direktno metodo SuperLU za reševanje sistema enačb. Za vsakega od teh primerov smo izračunali diskretno  $L_\infty$  napako v diskretizacijskih točkah:

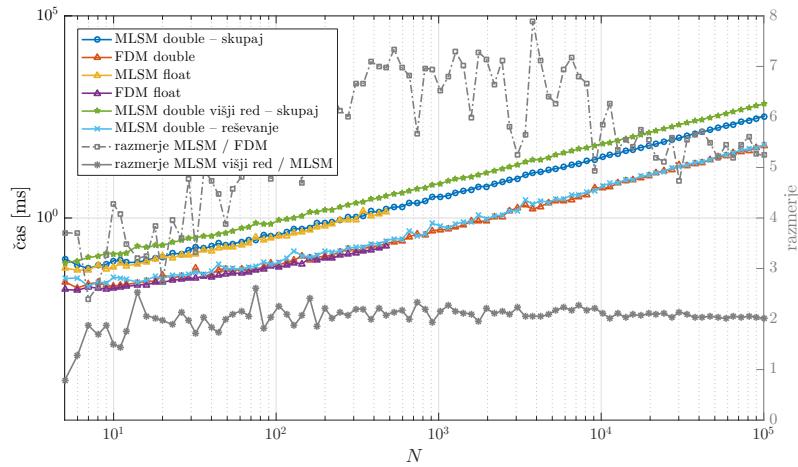
$$L_\infty = \max_{x \in X} |\hat{u}(x) - u(x)|.$$

Na grafu vidimo, da metodi tudi v praksi sovpadata dokler ne preideta v območje nestabilnosti. Pri enojni natančnosti se to zgodi precej hitro, pri  $N = 30$ , pri dvojni natančnosti pa obe metodi konvergirata linearno do približno  $N = 1000$ . Nato se obe metodi približujeta vsaka svoji največji natančnosti, med  $N = 10^4$  in  $N = 10^5$  diskretizacijskimi točkami pa se začnejo pojavljati numerične nestabilnosti. Manjšo končno natančnosti MLSM lahko pripisemo numeričnim napakam pri računanju aproksimacije drugih odvodov. Pri FDM namreč v matriko direktno zapišemo



Slika 10: Napaka FDM in MLSM metode v primerjavi s pravilno rešitvijo.

koefficiente  $\frac{1}{h^2}$  in  $-\frac{2}{h^2}$ , pri MLSM pa se ti izračunajo numerično. Iz naklona premice vidimo, da sta obe metodi tudi v praksi reda 2. Če uporabimo za računanje aproksimacije odvoda 5 sosedov namesto 3, po pričakovanih dobimo metodo, ki konvergira z višjim redom, ima pa enako končno natančnost kot prej.



Slika 11: Primerjava časa izvajanja MLSM in FDM metod.

Časovna primerjava obeh metod je prikazana na sliki 11. MLSM je približno konstantno 5.5-krat počasnejši kot FDM za velike ( $\geq 10^4$ )  $N$ , kot prikazano z razmerjem, merjenim na desni osi. To je tudi pričakovano, saj MLSM išče sosedne in računa aproksimacije, medtem je to pri FDM izračunano na roke. Če pri MLSM posebej merimo samo čas, ki ga porabimo za sestavljanje matrike in reševanje sistema, vidimo, da se skoraj ujema z časom, porabljenim pri FDM. Minimalno razliko gre pripisati razlike pri načinu grajenja matrike, saj pri FDM natanko vemo pozicije in število neničelnih elementov vnaprej, pri MLSM pa v splošnem ne. MLSM višjega reda je pričakovano počasnejši saj sta  $n$  in  $m$  poleg osnovnega faktorja  $N$  glavna parameter v časovni zahtevnosti (3.9), iz razmerja vidimo, da je konsistentno dvakrat počasnejši. Toda, če pogledamo koliko časa potrebujemo, da dosežemo natančnost  $10^{-6}$ , z grafov 10 in 11 odčitamo, da MLSM višjega reda potrebuje le  $N = 22$ , za kar potrebujemo 0.3 ms, pri običajnem redu pa potrebujemo  $N = 400$  kar nanese 1.5 ms. Implementacija deljenih diferenc višjega reda je dovolj zoprna, da se zanjo malokrat

odločimo, saj je treba uporabljati enostranske diference pri robu. Pri MLSM pa se izračunajo same, vse kar je potrebno je, da  $n$  iz 3 spremenimo na 5. Če uporabljamo enojno natančnost namesto dvojne, se to zgolj malenkostno pozna na času, ki ga porabimo za reševanje, in se zaradi zgodnje nestabilnosti enojne natančnosti ne splača uporabljati.

## 4.2 Poissonova enačba

Oglejmo si sedaj obnašanje metode na klasični Poissonovi enačbi na kvadratu:

$$\begin{aligned}\triangle u &= 1, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, 0) &= u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Analitično rešitev lahko dobimo s pomočjo separacije spremenljivk in se glasi

$$u(x, y) = -8 \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ lih}}}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x) \sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \sinh \frac{k\pi y}{2}}{\cosh(\frac{k\pi}{2}) k^3 \pi^3}.\tag{4.2}$$

Za primerjavo z numeričnimi rešitvami bomo uporabili končno vsoto, zato ocenimo ostanek.

**Trditve 4.1.** Za ostanek vrste (4.2) velja

$$\left| -8 \sum_{\substack{k=\ell \\ k \text{ lih}}}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x) \sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \sinh \frac{k\pi y}{2}}{\cosh(\frac{k\pi}{2}) k^3 \pi^3} \right| < -\frac{\psi''(\ell/2)}{4\pi^3},$$

kjer je  $\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x)$  digama funkcija.

*Dokaz.* Ocenujmo vsak člen vrste posebej. Funkcijo sin ocenimo z 1, funkcija  $\sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \sinh \frac{k\pi y}{2}$  ima maksimum na sredini intervala in jo lahko ocenimo z njeno vrednostjo v  $y = \frac{1}{2}$ . Tako nam ostane za oceniti številkska vrsta

$$-8 \sum_{\substack{k=\ell \\ k \text{ lih}}}^{\infty} \frac{(\sinh \frac{k\pi}{4})^2}{\cosh(\frac{k\pi}{2}) k^3 \pi^3}.$$

Uporabimo še neenakost  $\frac{(\sinh \frac{k\pi}{4})^2}{\cosh(\frac{k\pi}{2})} < \frac{1}{2}$  in dobimo oceno

$$\left| -8 \sum_{\substack{k=\ell \\ k \text{ lih}}}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x) \sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \sinh \frac{k\pi y}{2}}{\cosh(\frac{k\pi}{2}) k^3 \pi^3} \right| < \frac{4}{\pi^3} \sum_{\substack{k=\ell \\ k \text{ lih}}}^{\infty} \frac{1}{k^3} = -\frac{\psi''(\ell/2)}{4\pi^3},$$

kjer je  $\psi$  digama funkcija (in posledično  $\psi''$  poligama funkcija).  $\square$

Za primer  $\ell = 1$  v prejšnji trditvi dobimo oceno

$$|u(x, y)| \leq \frac{7\zeta(3)}{2\pi^2} \approx 0.1356,$$

kar drži; v resnici je najbolj ekstremna vrednost  $u(1/2, 1/2) \approx -0.0736$ . Iz zgornje trditve lahko izračunamo, da je rep vrste (4.2) za  $\ell = 59$  manjši kot  $10^{-5}$ , za  $\ell = 181$  pa manjši kot  $10^{-6}$ . Za izračun analitične rešitve ob primerjavi z numerično je bil uporabljen  $\ell = 181$ .

**Opomba 4.2.** Računanje izraza

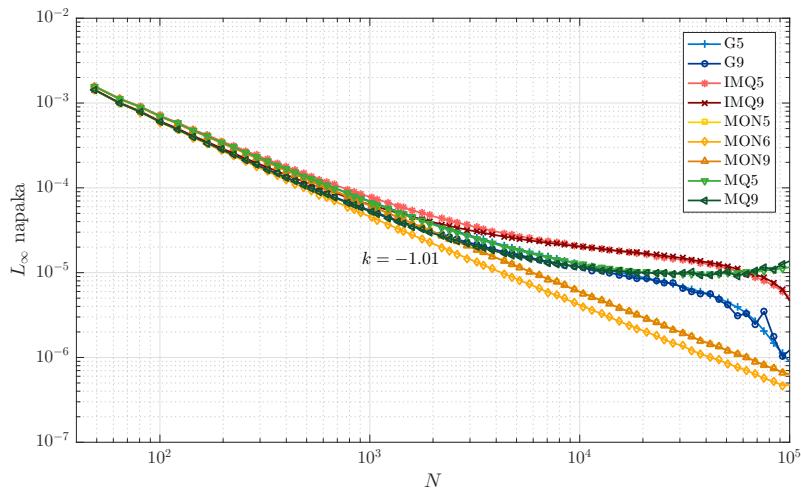
$$\frac{\sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \sinh \frac{k\pi y}{2}}{\cosh(\frac{k\pi}{2})}$$

ni numerično stabilno, ko  $k$  raste, kajti tako števec kot imenovalec se približuje neskončno, kvocient pa ima končno limito. Ko za želimo izračunati numerično je bolje uporabiti stabilnejšo obliko

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\exp(-k\pi y) + \exp(-k\pi(1-y))}{1 + \exp(-k\pi)} \right),$$

kjer vedno nastopa negativen eksponent.

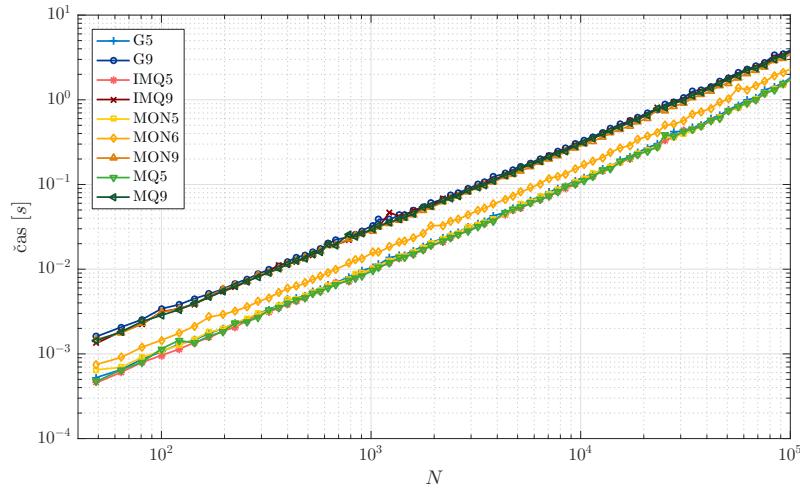
Rešimo problem (4.1) numerično, s štirimi različnimi nabori baznih funkcij: monomi, Gaussovimi funkcijami, multikvadratičnimi in inverznimi multikvadratičnimi. Za parametre smo vedno vzeli  $n = m = 9$  kar sovpada s primeri iz razdelka 3.2. Pri monomih smo dodali tudi primer  $n = 9$  in  $m = 6$ . Za parameter oblike pri radialnih baznih funkcijah smo vzeli  $\sigma_b = 100 r_\chi$ . Za utež vzemimo Gaussovo utež z  $\sigma_w = \frac{3}{4}r_\chi$ . V vseh primerih je bila za reševanje sistema enačb uporabljena direktna metoda SuperLU. Iterativni BiCGSTAB algoritem je dal enake rezultate. Napaka metod je prikazana na sliki 12.



Slika 12: Konvergenca MLSM za različne parametre pri reševanju problema (4.1).

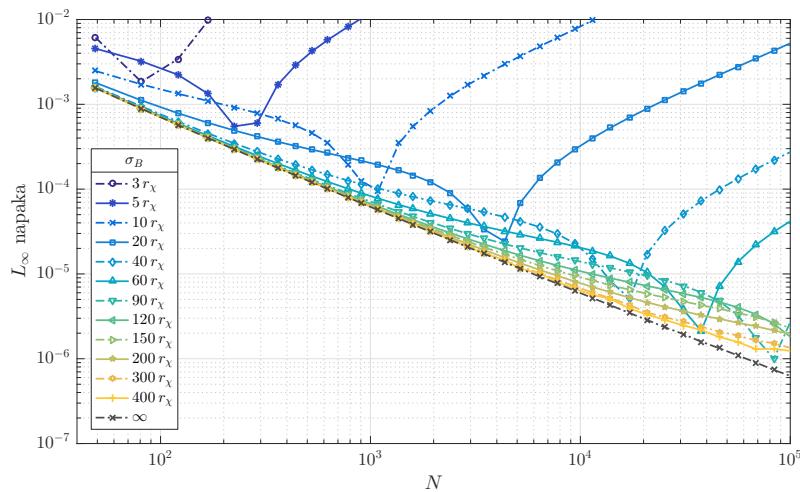
Vidimo, da monomi za  $n = 5$  in  $n = 9$  konvergirajo linearno z redom 1, kot vemo iz teorije končnih diferenc. Radialne bazne funkcije se na začetku ujemamo z monomi, nato pa pokažejo slabše konvergenčne lastnosti in nelinearno obnašanje, drugačno pri vsakem razredu funkcij. Funkcije, ki uporabljajo več sosedov, začnejo z malenkost nižjo napako, prav tako pa morda presenetljivo tudi monomi z  $n = 6$ . S slike 13, ki prikazuje čas računanja vidimo, da se uporaba baznih funkcij z  $n = 9$  ne splača, saj minimalna pridobljena natančnost ne odtehta časa izvajanja. Vidimo, da se čas izvajanja loči na tri pasove glede na  $n$ , ki vsi rastejo linearno z  $N$  s konstantnim razmerjem.

Po trditvi 3.10 aproksimacija z Gaussovimi funkcijami konvergira proti aproksimaciji z monomi. Na sliki 14 vidimo to dejstvo demonstrirano tudi numerično.



Slika 13: Čas izvajanja za različne izbore parametrov pri reševanju problema (4.1).

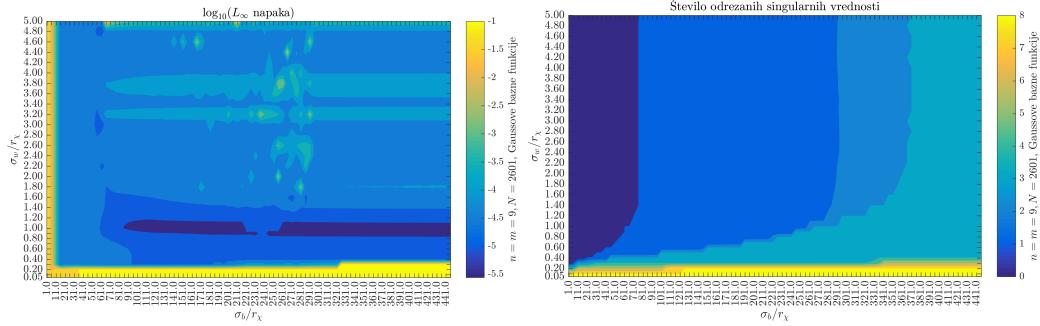
Konvergenčne krivulje za Gaussove funkcije se pri povečevanju parametra oblike čedalje bolj približujejo konvergenčni krivulji monomov. Tako obnašanje zasledimo tudi pri bolj komplikiranih enačbah in drugih radialnih baznih funkcijah. Če imamo pri radialnih baznih funkcijah težavo s konvergenco, lahko poiskusimo povečati parameter oblike. Seveda to ne gre prek vseh meja, saj sistem (3.3) za izračun funkcije oblike postane čedalje bolj občutljiv.



Slika 14: Konvergenčne krivulje za Gaussove funkcije pri čedalje večjem  $\sigma$  in za monome ( $\sigma = \infty$ ). Uporabili smo  $n = m = 5$  in Gaussovo utež s parametrom  $\sigma_w = \frac{3}{4}r_\chi$ .

Da si izboljšamo intuicijo o pomenu parametrov oblike pri uporabi radialnih baznih funkcij in uteži naredimo še eno analizo, ki nam bo pomagala pri izbiri parametrov pri bolj zapletenih problemih. Problem (4.1) rešimo za različne izbire parametrov oblike baznih funkcij ( $\sigma_b$ ) in Gaussove funkcije uteži ( $\sigma_w$ ) ter primerjajmo natančnost rešitve. Graf napake je prikazan na sliki 15a.

Trditev 3.2 pravi, da mora v primeru  $n = m$  ni obrnljive matrike  $B$  aproksimacija operatorja (in posledično tudi napaka) neodvisna od izbire uteži. Opomba po trditvi pravi, da numerično to velja, če le utež ni premajhna, da bi bila sama razlog za numerične nestabilnosti. Slika 15a to potrdi; trditev velja v območju, kjer je ma-



(a) Napaka v odvisnosti od  $\sigma_b$  in  $\sigma_w$ . (b) Število odrezanih singularnih vrednosti v odvisnosti od  $\sigma_b$  in  $\sigma_w$ .

Slika 15: Analiza reševanja problema (4.1) z Gaussovimi funkcijami in Gaussovo utežjo pri  $n = m = 9$  in  $N = 2601$ .

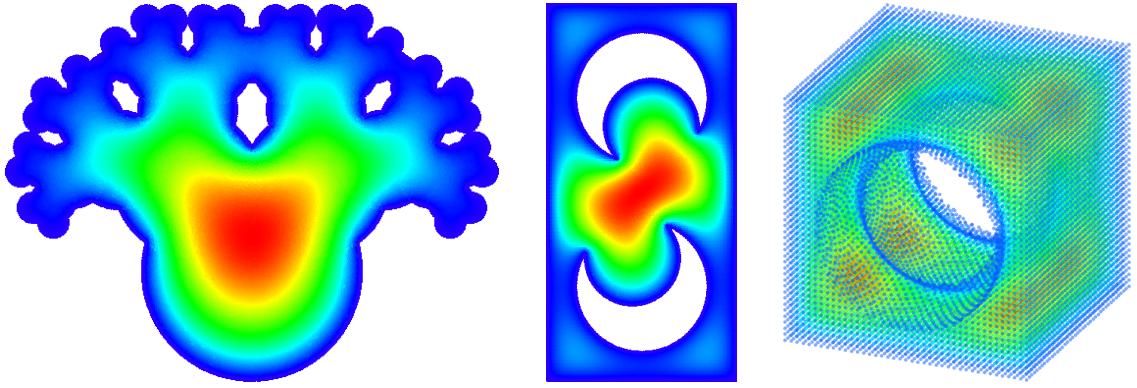
trika tudi numerično obrnljiva. Če je utež zelo majhna, manjša od  $0.3 r_\chi$ , potem se nekatere enačbe v sistemu (3.3) pomnožijo s približno  $\exp(-2/0.3^2) \approx 2.23 \cdot 10^{-10}$ , kar privede do velike nestabilnosti. Do numerične neobrnljivosti matrike pa lahko pripelje tudi izbira prevelikega parametra  $\sigma_b$ , kajti za  $\sigma_b = 70 r_\chi$  so vsi elementi matrike  $B$  med 1.00041 in 1. Boljši vpogled v obrnljivost matrike  $B$  nam da graf na sliki 15b, ki predstavlja število odrezanim singularnih vrednosti pri SVD razcepnu, s pomočjo katerega smo izračunali psevdoinverz matrike  $WB$ . Aproksimacija je res neodvisna od na predelu, kjer nismo odrezali nobene singularne vrednosti, torej približno na območju  $[0, 70] \times [0.3, \infty)$ , drugje pa lahko utež vpliva na izračun psevdoinverza in število odrezanih singularnih vrednosti.

Kvaliteta aproksimacije je za  $\sigma_b$  blizu 0 zelo slaba, saj imajo bazne funkcije ne-ničelno vrednost samo v svojem centru. Nato napaka pada z večanjem  $\sigma_b$ , dokler ne pridemo v območje numerične neobrnljivosti matrike  $B$ . Tam pride v igro regularizacija v SVD razcepnu, ki nam lahko pomaga, kot vidimo v pasu nizke napake okoli  $\sigma_w = 1$ . Na sliki 15b vidimo, da se z večanjem  $\sigma_b$  reže čedalje več singularnih vrednosti in s časoma bi aproksimacija zopet postala nestabilna. Podobno sliko dobimo pri različnih  $N$ ,  $n$  in ostalih izbirah baznih funkcij. Običajno zato izberemo sorazmerno velik parameter  $\sigma_b$  okoli  $150 r_\chi$ , za obliko uteži pa vzamemo približno  $r_\chi$ .

V dosedanjih analizah smo videli, da se MLSM metoda obnaša enako ali slabše kot metoda končnih differenc na šolskih primerih. Njena prednost leži v splošnosti, saj se jo zlahkoto prilagodi na drugačne domene, v višje dimenzije in na druge operatorje. Na sliki 16 so prikazane rešitve Poissonove enačbe  $\Delta u = 1$  s homogenimi robnimi pogoji na bolj zanimivih domenah in v višjih dimenzijah. V dveh dimenzijah so bili za bazne funkcije uporabljeni monomi  $\{1, x, y, x^2, y^2\}$  in  $n = 5$  v treh pa 9 Gaussovih baznih funkcij z  $\sigma_b = 50 r_\chi$  in Gaussovo utežjo s  $\sigma_w = r_\chi$  na devetih točkah. V vseh primerih je bilo potrebno poleg parametrov spremeniti le definicijo domene, vsa druga koda je ostala enaka.

### 4.3 Vpet nosilec

Problem vpetega nosilca (*angl. cantilever beam*) je standarden problem v elasto-mehaniki in eden osnovnih testnih primerov za raziskovanje obnašanja numeričnih metod. Imejmo tanek nosilec dolžine  $L$  in višine  $D$  vpet na desnem koncu, ki ga na



Slika 16: Reševanje Poissonove enačbe  $\Delta u = 1$  s homogenimi robnimi pogoji na zanimivejših domenah.

levem koncu potiska navzdol sila  $P$  na enoto debeline. Idealizirana Timoshenkova teorija nosilcev nudi rešitev za ta problem v primeru predpostavke o ravninski napetosti. Napetosti v nosilcu, ki smo ga postavili na območje  $[0, L] \times [-D/2, D/2]$  so izpeljane v [44, str. 284–289, enačba 7.4.55] in se izražajo kot

$$\sigma_{xx} = \frac{Pxy}{I}, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = \frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - y^2 \right), \quad (4.3)$$

pomiki pa kot

$$u = \frac{Py(3D^2(\nu + 1) - 4(3L^2 + (\nu + 2)y^2 - 3x^2))}{24EI} \quad (4.4)$$

$$v = -\frac{P(3D^2(\nu + 1)(L - x) + 4(L - x)^2(2L + x) + 12\nu xy^2)}{24EI},$$

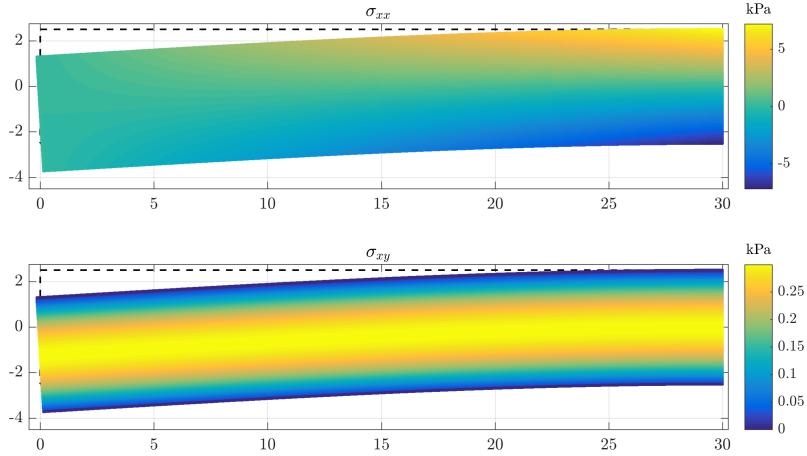
pri čemer je  $I = \frac{1}{12}D^3$  vztrajnostni moment preseka nosilca za vrtenje okoli središča,  $E$  Youngov modul in  $\nu$  Poissonovo razmerje. Idealiziran primer rešimo tudi numerično. Rešimo Navierovo enačbo na  $\Omega = [0, L] \times [-D/2, D/2]$  s predpisanim pomikom pri  $x = L$  danim z analitično rešitvijo (4.4). Zgornji in spodnji rob naj bosta prosta brez površinskih sil ( $\vec{t} = 0$ ) na levem robu pa vzemimo navpično parabolično razporejeno silo  $\vec{t} = \sigma_{xy}\vec{j}$ , dano z analitično rešitvijo (4.3).

Problem rešimo numerično z uporabo 9 monomov in 9 Gaussovih baznih funkcij z  $\sigma_b = 500 r_\chi$ , obakrat z Gaussovo utežjo  $\sigma_w = 1 r_\chi$ . Linearni sistem enačb smo reševali z iterativnim BiCGSTAB postopkom z ILUT predpogojevanjem z kot opisano v razdelku 3.3.3. Uporabili smo parametra  $p = 20$  in  $\tau = 10^{-5}$ . BiCGSTAB algoritem smo iterirali največ 300-krat ali dokler ni bila ocena napake pod  $10^{-13}$ . Algoritem je v vseh primerih konvergiral.

Za parametre problema smo izbrali  $L = 30$  m,  $D = 5$  m,  $E = 72.1$  GPa,  $\nu = 0.33$ ,  $P = 1000$  N/m. Numerična rešitev je prikazana na sliki 17. Omeniti je treba še, kako iz numerične rešitve  $\vec{u}$  dobimo aproksimacijo za  $\sigma$ . Komponente  $\sigma$  so linearne kombinacije odvodov  $\vec{u}$ , tako da v vsaki diskretizacijski točki izračunamo funkciji oblike, ki aproksimirata  $\frac{\partial}{\partial x}$  in  $\frac{\partial}{\partial y}$  in z njuno pomočjo izračunamo  $\frac{1}{2}(\text{grad } \vec{u} + \text{grad } \vec{u}^\top)$  ter nato preko Hookovega zakona dobimo  $\sigma$ .

Izračunamo lahko še, da je največji pomik po normi velik

$$\max_{x \in \Omega} |\vec{u}(x)| \approx 1.22 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 12.2 \mu\text{m}$$



Slika 17: Numerična rešitev problema vpetega nosilca. Pomiki so zaradi boljše vidnosti povečani za faktor  $10^5$ . Komponenta  $\sigma_{yy}$  je kot v analitični rešitvi enaka 0.

in največji gradient pomika

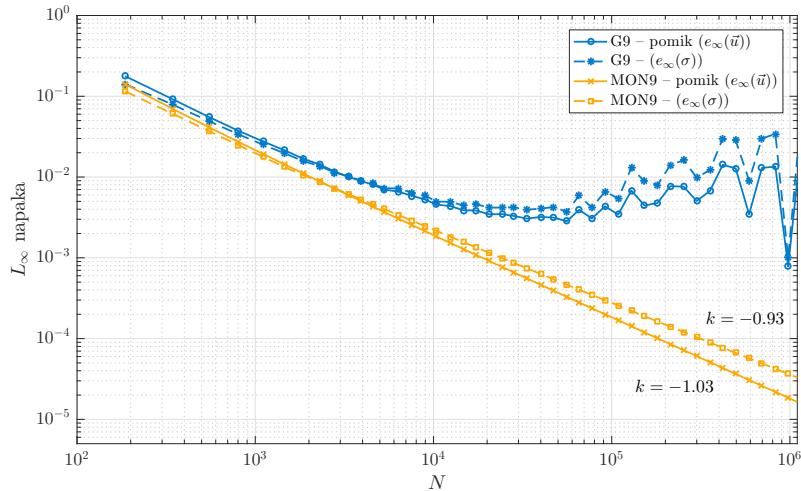
$$\max_{x \in \Omega} \|\operatorname{grad} \vec{u}(x)\| \approx 8.53 \cdot 10^{-7}.$$

Predpostavka o majhnosti pomikov in njihovih gradientov res velja.

Na sliki 18 je prikazana konvergenca numerične rešitve proti analitični. Napako pomikov in napetosti merimo relativno v  $L_\infty$  normi. Če s strešico označimo izračunane količine, brez strešice pa analitične, potem napako izračunamo kot

$$e_\infty(\vec{u}) = \frac{\max_{x \in X} \{\max\{|u(x) - \hat{u}(x)|, |v(x) - \hat{v}(x)|\}\}}{\max_{x \in X} \{\max\{|u(x)|, |v(x)|\}\}},$$

$$e_\infty(\sigma) = \frac{\max_{x \in X} \{\max\{|\sigma_{xx}(x) - \hat{\sigma}_{xx}(x)|, |\sigma_{yy}(x) - \hat{\sigma}_{yy}(x)|, |\sigma_{xy}(x) - \hat{\sigma}_{xy}(x)|\}\}}{\max_{x \in X} \{\max\{|\sigma_{xx}(x)|, |\sigma_{yy}(x)|, |\sigma_{xy}(x)|\}\}}.$$



Slika 18: Konvergenca numerične metode pri reševanju problema vpetega nosilca.

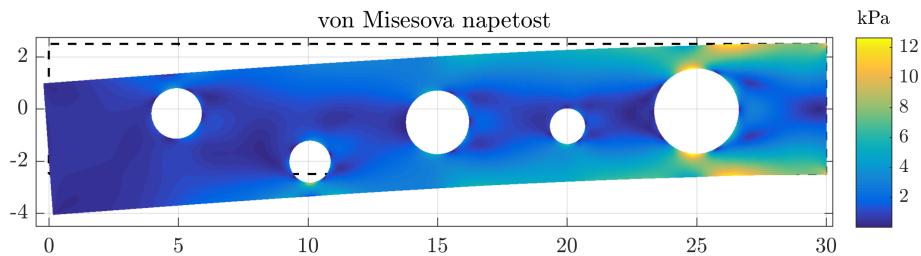
Rezultati so podobni kot pri Poissonovi enačbi na sliki 12. Monomi konvergirajo zelo regularno z redom 1, Gaussove funkcije pa imajo slabše konvergenčne lastnosti. Vidimo, da konvergirajo tako vrednosti pomikov kot tudi vrednosti napetosti, pri

čemer imamo pri napetostih malo večjo napako in malenkost slabši red, saj jih ocenjujemo iz pomikov.

Za demonstracijo splošnosti metode dodajmo v nosilec še nekaj luknj. Nosilec fiksno vpnimo na desnem koncu in vlečimo navzdol na levem z enakomerno porazdeljeno silo  $P$  enake velikosti kot prej. V domeno smo razporedili  $N = 177618$  diskretizacijskih točk z večjo gostoto okoli robov luknj, po ustvarjanju domene pa smo jo še dodatno izboljšali z algoritmom 3 s 50 iteracijami na šestih sosedih z  $F_0 = 10^{-3}$  in  $\alpha = 3$ . Upogib nosilca, obarvan z vrednostjo von Misesove napetosti je prikazan na sliki 19. Von Misesova napetost se za primer ravninske napetosti izračuna kot

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2},$$

in se uporablja v von Misesovem kriteriju plastičnosti. Ta pravi, da material ni več elastičen, ko  $\sigma_v$  preseže neko materialno konstanto  $\sigma_0$ . Višje vrednosti  $\sigma_v$  torej nakazujejo, da je material bližje limitu svoje elastičnosti in visoke vrednosti  $\sigma_v$  označujejo najverjetnejša mesta za poškodbe.



Slika 19: Numerična rešitev upogiba nosilca z nekaj luknjami. Pomiki so zaradi boljše vidnosti povečani za faktor  $10^5$ .

#### 4.4 Hertzov kontaktni problem

Hertzov kontaktni problem je leta 1882 v svojem članku “Über die Berührung fester elastischer Körper.” [16] obravnaval že Heinrich Hertz. Ko dve ukrivljeni telesi z različnima radijema ukrivljenosti staknemo, se na začetku dotikata le v točki ali na premici. Čim ti telesi pritisnemo skupaj z neko silo, se elastično deformirata in med njima se ustvari stična površina, prek katere poteka vsa interakcija. Glavni objekti zanimanja v elastični kontaktni mehaniki so normalne in tangencialne napetosti med telesi, ki nastanejo kot posledice medsebojnega pritiska in trenja. Klasična Hertzeva teorija predpostavlja, da je kontakt med telesoma nelepljiv (*angl. non-adhesive*). To pomeni, da je pritisk na kontaktni ploskvi lahko samo pozitiven in da se telesi ne moreta sprjeti med seboj ter da za njuno ločitev ne potrebujemo nobene sile. Kasnejše teorije so veljavne tudi za lepljive kontakte in upoštevajo več parametrov površine, npr. tudi njeno hrapavost. Kljub temu je klasična teorija še vedno aktualna in se uporablja v drugih vejah mehanike, npr. v tribologiji, vedi o trenju, obrabi in mazanju materialov.

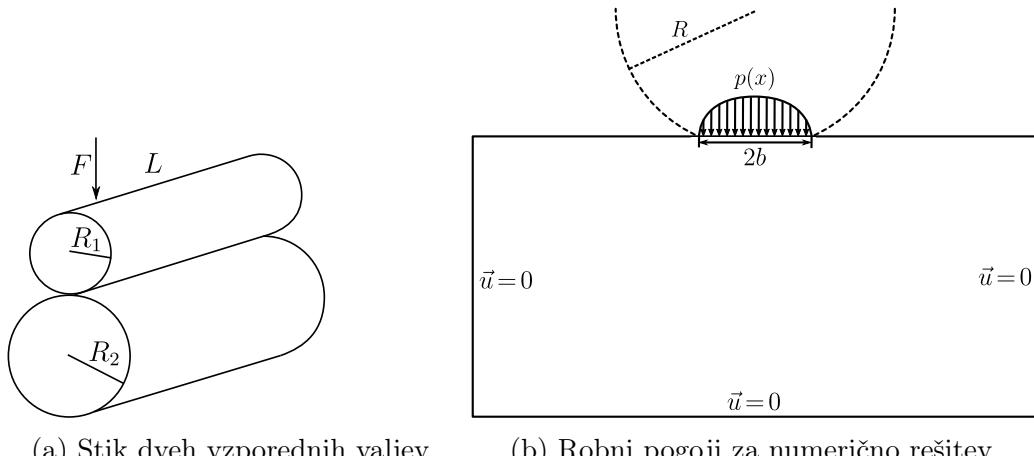
Za prvi primer uporabe izpeljane numerične metode na problemu iz elastomehanike obravnavajmo elastičen Hertzov stik valja in polravnine, kot opisan v [4, str. 122, poglavje 3.2]. Hertzeva teorija ima poleg nelepljivega stika naslednje predpostavke:

- kontaktni ploskvi sta gladki, ne sovpadata in sta brez trenja,

2. kontaktna površina je majhna v primerjavi z velikostjo teles v kontaktu,
3. vsako od teles lahko v bližini kontakta obravnavamo kot elastičen polprostor,
4. vrzel med telesoma v okolici kontakta je možno aproksimirati z izrazom oblike  $Ax^2 + By^2$ , kjer sta  $x$  in  $y$  koordinati v ravnini, tangentni na območje stika.

Točka 4 omeji klasično Hertzevo teorijo na krogle, valje in elipsoide ter njihove limite, ko pošljemo ukrivljenosti proti 0.

Hertzeva teorija za dvodimenzionalni pritisk valja na elastično polravnino se izpelje iz stika med dvema vzporednima valjema dolžine  $L$  z radijema  $R_1$  in  $R_2$ , Youngovima moduloma  $E_1$  in  $E_2$  in Poissonovima razmerjema  $\nu_1$  in  $\nu_2$ . Situacija je prikazana na sliki 20a.



Slika 20: Obravnavan Hertzev kontaktni problem.

Napovedano območje stika med valjema je širine  $2b$ , kjer je

$$b = 2\sqrt{\frac{FR}{\pi E^*}},$$

pri čemer je  $F$  sila na enoto dolžine,  $R$  kombiniran krivinski radij dan z  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}$  in  $E^*$  kombiniran elastični modul dan z  $\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$ . Pritisk na kontaktno površino je dan z

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}; & |x| < b \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{FE^*}{\pi R}}.$$

Pri enem valju pošljemo krivinski radij proti neskončno in problem prevedemo na ravninskega preko predpostavke o ravninski napetosti.

Numerično želimo izračunati pomike in napetosti v materialu, zato rešimo stacionarno Navierovo enačbo (2.16). Rešujemo problem

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} &= 0 \quad \text{na } \Omega = (-\infty, \infty) \times (-\infty, 0) \quad (4.5) \\ \vec{t}(x, 0) &= -p(x) \vec{j}, \\ \lim_{x,y \rightarrow \infty} \vec{u}(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Analitične rešitve kontaktnih problemov se ponavadi izpelje iz Flamantove rešitve, ki reši problem točkovnega pritiska na polravnino za robni pogoj  $\vec{t}(x, 0) = p_0 \delta(x) \vec{j}$ . Druge rešitve lahko dobimo z konvolucijo s Flamantovo rešitvijo ali pa z metodo kompleksnih potencialov, kot je to narejeno v [33] še za malce splošnejši problem, kot opisano zgoraj. Od tam dobimo tudi analitično rešitev v zaprti obliki za napetost, ki se izraža v splošni točki  $(x, y)$  s funkcijama  $m$  in  $n$ ,

$$m^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(b^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2} + b^2 - x^2 + y^2 \right),$$

$$n^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(b^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2} - (b^2 - x^2 + y^2) \right),$$

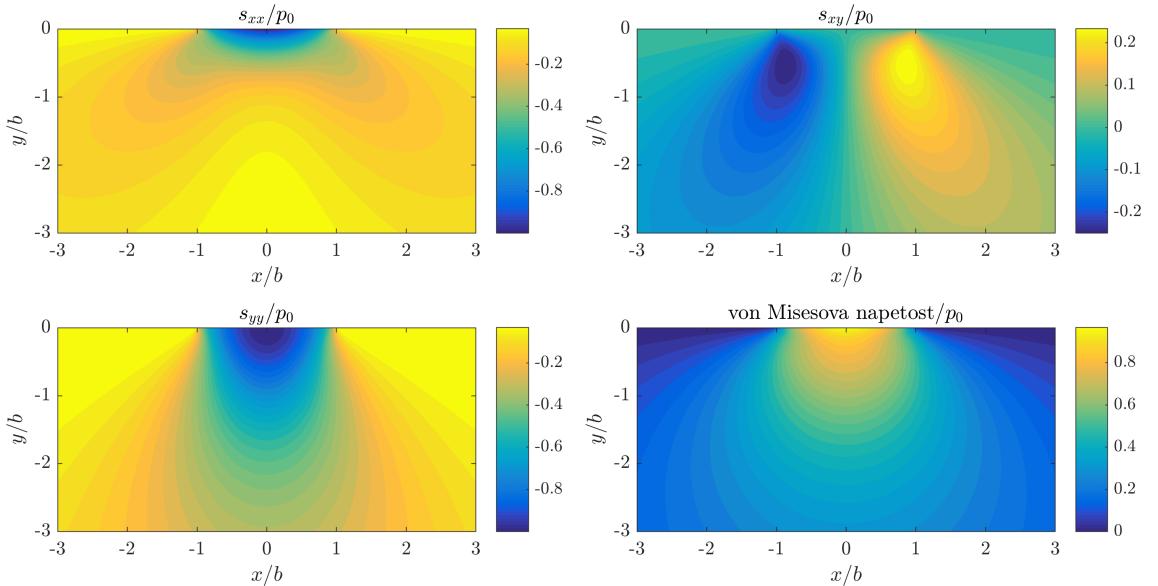
kjer je  $m = \sqrt{m^2}$  in  $n = \text{sgn}(x)\sqrt{n^2}$ .

$$\sigma_{xx} = -\frac{p_0}{b} \left[ m \left( 1 + \frac{y^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) + 2y \right]$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{p_0}{b} m \left( 1 - \frac{y^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{p_0}{b} n \left( \frac{m^2 - y^2}{m^2 + n^2} \right).$$

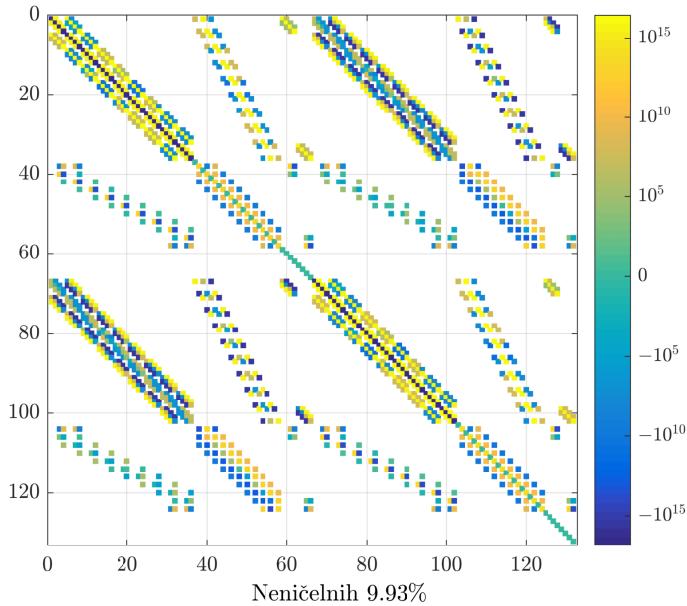
S pomočjo zgornje rešitve bomo analizirali napako numerične rešitve. Analitične vrednosti napetosti v okolici kontakta so prikazana na sliki 21.



Slika 21: Napetosti pod območjem kontakta med valjem in polravnino.

Za normo napake si zoper izberemo diskretno  $L_\infty$  normo, le da tokrat primerjamo napetosti  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  in  $\sigma_{xy}$ . Pošteno je primerjati brezdimenzijske količine  $\sigma_{xx}/p_0$ , saj so neodvisne od izbire  $b$  in  $p_0$ . Za napako med izračunanimi vrednostmi, označenimi s strešico, in pravimi vrednostmi, brez strešice, tako vzamemo

$$e_\infty = \max_{x \in X} \{ \max\{ |\sigma_{xx}(x) - \hat{\sigma}_{xx}(x)|, |\sigma_{yy}(x) - \hat{\sigma}_{yy}(x)|, |\sigma_{xy}(x) - \hat{\sigma}_{xy}(x)| \} \} / p_0.$$



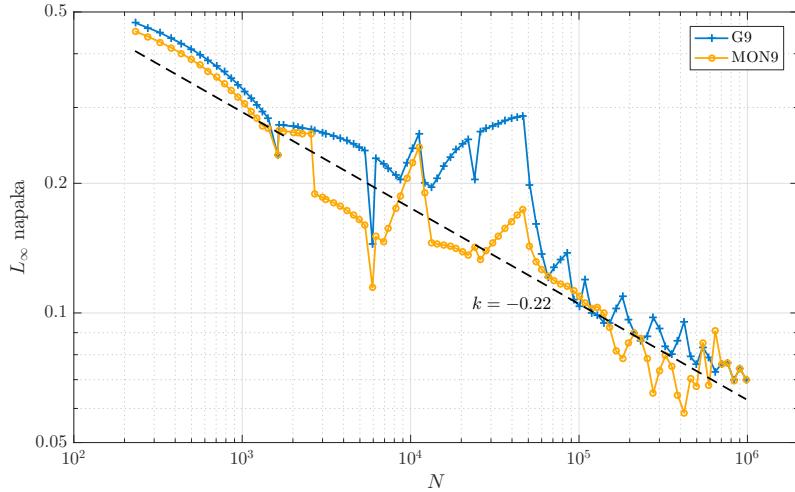
Slika 22: Matrika končnega sistema enačb (3.5) pri reševanju problema (4.5) z 9 monomi in pravokotno diskretizacijo z  $11 \times 6$  točkami.

Na sliki 22 je prikazana matrika končnega sistema enačb za zelo grobo diskretizacijo. Vidimo, da ima bločno stukturo, kot opisano v enačbi 3.11 v razdelku 3.5, le za primer dveh dimenzij.

Poskusimo problem rešiti na enak način kot pri problemu vpetega nosilca. Za numerično reševanje neskončno domeno omejimo na  $[-H, H] \times [-H, 0]$  za dovolj velik  $H$  in na robu postavimo premik na 0, kot prikazano na sliki 20b. Na zgornjem robu domene kot prej zahtevamo predpisano napetost. Za parametre problema smo vzeli  $F = 543 \text{ N/m}$ ,  $E_1 = E_2 = 72.1 \text{ GPa}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.33$ ,  $R_1 = R = 1 \text{ m}$ . Od tod dobimo širino kontakta  $b = 0.13 \text{ mm}$  in maksimalni tlak  $p_0 = 2.6 \text{ MPa}$ . Za  $H$  izberimo 10 mm, torej približno 75-krat večjo domeno, kot je pojav, ki ga opazujemo.

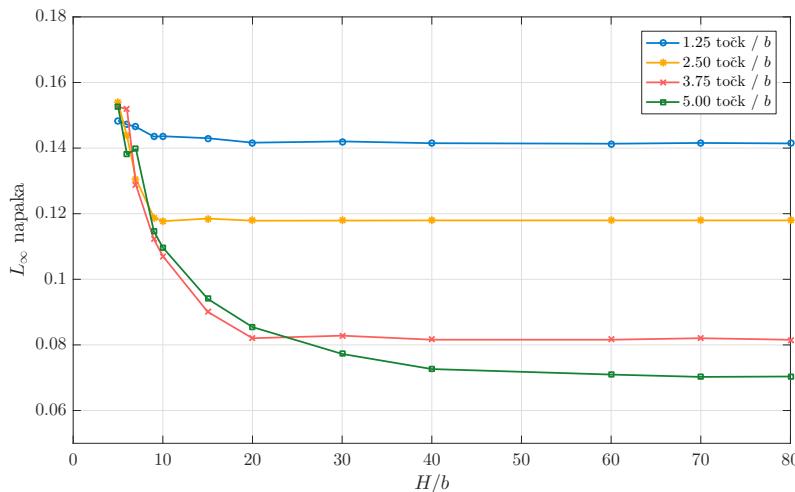
Numerično smo problem rešili na dva načina, z uporabo 9 monomov in 9 Gaussovih funkcij z  $\sigma_b = 350 r_\chi$ . Obakrat smo uporabili Gaussovo utež z  $\sigma = r_\chi$ . Za reševanje linearnega sistema enačb smo uporabili iterativni BiCGSTAB algoritem z ILUT predpogojevanjem. Uporabili smo parametra  $p = 20$  in  $\tau = 10^{-5}$ . BiCGSTAB algoritem smo iterirali največ 300-krat ali dokler ni bila ocena napake pod  $10^{-13}$ . Algoritem je v vseh primerih konvergiral. Na sliki 23 je prikazana konvergenca numerične metode.

Vidimo, da je konvergenca zelo neregularna, nizkega reda in da imamo relativno visoko napako. Visoka napaka je posledica relativno redke diskretizacije, saj tudi pri  $N = 10^6$  točkah v domeni to pomeni, da imamo le 10 točk na dolžino  $b$ . Neregularnost izhaja iz neregularnosti rognih pogojev, funkcija  $p$  namreč ni niti Lipschitzeva in je njen vogal pri  $\pm b$  težko dobro aproksimirati. Celotno ombočeje  $[-2b, 2b] \times [-2b, 0]$  v bližnji okolini kontakta torej popisuje le slabih 800 točk. Iz grafa konvergencije pri problemu vpetega nosilca na sliki 18 odčitamo, da bi pri takem številu točk imeli napako okoli 0.04, kar je v enakem velikostnem razredu. Večjo napako v našem primeru gre pripisati aproksimaciji robnih pogojev in njihovi neregularnosti. Za zmanjšanje napake imamo dve strategiji, glede na to od kje izvira glavni del napake: ali povečamo domeno, ali pa izboljšamo diskretizacijo. Oglejmo si najprej, kaj lahko



Slika 23: Konvergenca metode pri reševanju Hertzevega kontaktnega problema (4.5).

pridobimo s povečanjem domene in kako vemo, kdaj smo izbrali dovolj velik  $H$ . Na sliki 24 so prikazane napake v odvisnosti od velikosti domene pri različnih gostotah diskretizacij.



Slika 24: Napaka pri različnih gostotah diskretizacij v odvisnosti od velikosti domene.

Vidimo, da na začetku napaka, povzročena z netočnimi robnimi pogoji, pada in ko pade pod vrednost napake, dobljene zaradi diskretizacije, večanje  $H$  ne pomaga več. Pri bolj natančnih distretizacijah moramo vzeti tudi večji  $H$ , saj je napaka diskretizacije toliko nižja. Če torej ugotovimo, da se konvergenca ustavi ali ne nadaljuje več z enakim redom kot prej, smo najverjetneje zadeli ob napako zaradi končnih robnih pogojev.

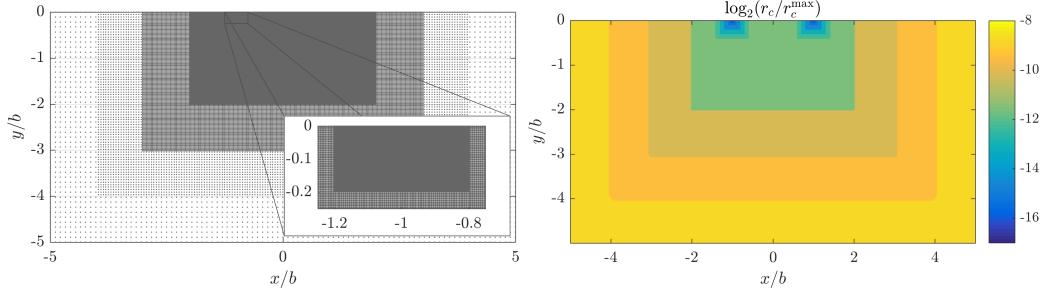
Pri veliki domeni je računsko nemogoče enakomerno gosto večati diskretizacijo. Neposredna rešitev je lokalno zgoščevanje mreže, kjer pričakujemo največjo napako in sicer v okolini kontakta. Izberimo  $H = 1 \text{ m} \approx 75\,000 b$  in zgostimo mrežo kot opisano v razdelku 3.6. Izbrali smo  $\ell = 8$  in  $f = 0.4$ . Najprej jo primarno zgostimo v pravokotnikih oblike

$$[-hb, hb] \times [0, hb], \text{ za } h \in \{1000, 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 4, 3, 2\},$$

nato še sekundarno zgostimo domeno okoli točk  $\pm b$  na površini v pravokotnikih oblike

$$[c - hb, c + hb] \times [-hb, 0], \text{ za } c = \pm b \text{ in } h \in \{0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 0.0025\}.$$

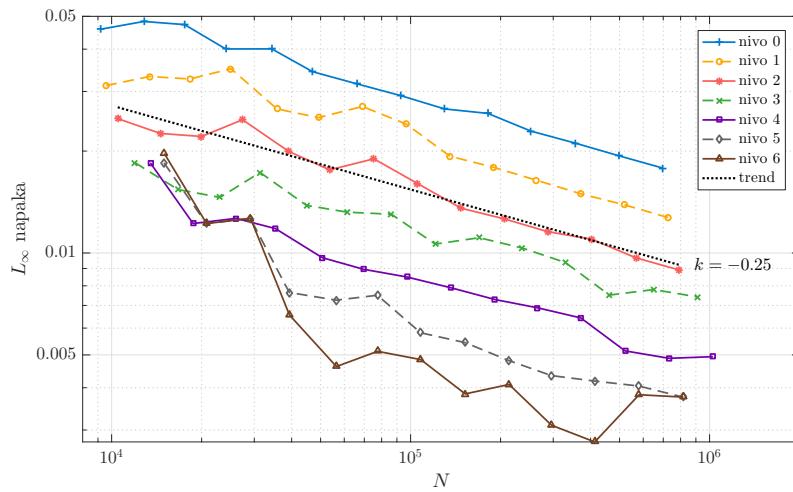
Na sliki 25a je prikazan kos tako zgoščene domene, na sliki 25b pa gostota diskretizacije v domeni, podana kot razmerje med razdaljo do najbližjega sosedja in največjo možno razdaljo do najbližjega sosedja.



(a) Sedemnajstkrat zgoščena diskretizacija okoli področja zanimanja. (b) Gostota diskretizacije zgoščene domene.

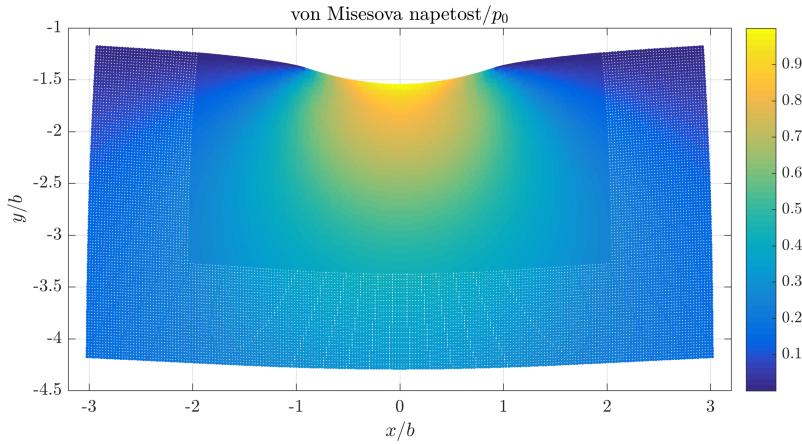
Slika 25: Primer sedemnajstkrat zgoščene domene s pomočjo katere lahko bolj natanko rešimo Hertzov kontaktni problem (4.5).

Rešimo problem na zgoščeni domeni z uporabo Gausovih funkcij s parametrom oblike  $\sigma_b = 350 r_c$ , Gaussovo utežjo s  $\sigma_w = r_c$  in  $n = m = 9$ . Sitem enačb rešimo z iterativnim BiCGSTAB algoritmom z ILUT predpogojevanjem. Uporabimo para metra  $p = 100$  in  $\tau = 10^{-6}$ . BiCGSTAB algoritem iteriramo največ 1000-krat ali dokler ni ocena napake pod  $10^{-15}$ . Algoritem je v vseh primerih konvergiral. Na sliki 26 je prikazana konvergenca numerične metode pri različnih nivojih sekundarnega zgoščevanja.



Slika 26: Napaka metode pri različnih nivojih sekundarnega zgoščevanja.

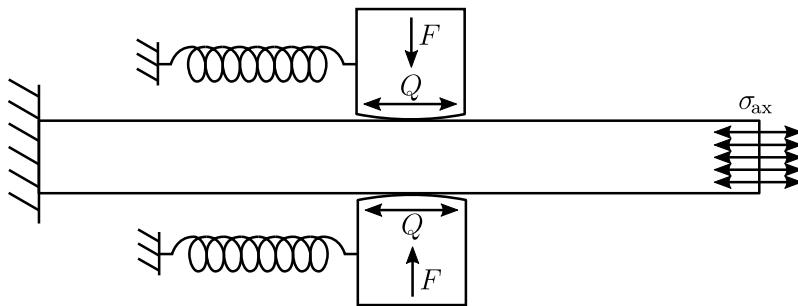
Vidimo, da zgoščevanje zelo pomaga. Že samo pri primarnem zgoščevanju in  $N = 10^4$  je napaka manjša kot smo jo bili sposobni doseči brez zgoščevanja. Vsak dodaten nivo zgoščevanja še izboljša aproksimacijo. Numerična rešitev, pridobljena z najfinješo diskretizacijo je prikazana na sliki 27.



Slika 27: Numerična rešitev Hertzevega kontaktnega problema (4.5). Zaradi boljše vidnosti so pomiki povečani za faktor  $10^5$ .

## 5 Zgled iz mehanike utrujenosti materialov

Oglejmo si še nekoliko bolj konkreten primer elastostatičnega problema in sicer mehaniko utrujanja materialov (*angl. fretting fatigue*). Ena izmed oblik utrujanja je obraba materiala zaradi drgnjenja. Tako gibanje je ponavadi oscilatorno z majhno amplitudo in skrajša življensko dobo materiala tudi do 50 % [21] glede na življensko dobo, pri kateri oscilacij ne bi bilo, kar je vsekakor dovolj dober motiv, da je razumevanje tega pojava pomembna znanstvena disciplina. Eden izmed pogostih eksperimentov za razumevanje tega pojava se izvede tako, da se ploščat kos materiala, ki ga imenujmo *vzorec* vpne na enem koncu, med tem ko drug konec periodično raztegujemo z napetostjo  $\sigma_{ax}$  [19]. Z drugih dveh strani na vzorec pritiskata dve cilindrični glavi z normalno silo  $F$ , ki se tudi gibljeta oscilatorno tangentno na površino materiala in nanj delujeta s tangentno silo  $Q$ . Shema eksperimenta je prikazana na sliki 28. [TODO Gregor foto?]



Slika 28: Shema eksperimenta za raziskovanje utrujanja materialov.

Z eksperimentom želimo napovedati nastanek in rast razpok. Problem obravnavamo v sklopu mednarodnega projekta (G018916N “Multi-analysis of fretting fatigue using physical and virtual experiments”) z Univerzo v Luksemburgu, Univerzo v Gentu in Inštitutom “Jožef Stefan” tudi numerično [38]. Vloga Inštituta “Jožef Stefan” in Univerze v Luksemburgu je razviti originalno numerično rešitev problema, saj do sedaj uporabljenia komercialna rešitev ABAQUS® [17], ki jo uporabljajo na Univerzi V gentu, ni zagotovila zadovoljivih rezultatov pri simulaciji širjenja razpoke. Prvi korak k simulaciji eksperimenta je izračun napetosti na površini kontakta. Za

referenčno rešitev uporabimo [38], kjer so predstavljeni rezultati simulacije eksperimenta statičnem stanju maksimalne oscilacije s tangentno silo enako  $Q$  in osno napetostjo enako  $\sigma_{ax}$ . Eksperiment ima vodoravno simetrijsko os in lahko simuliramo eksperiment samo z eno glavo in polovično širino, ter ga nato prezrcalimo. Poleg tega je debelina materiala majhna in vse sile in napetosti so v ravnini materiala, torej ustreza predpostavki o ravninski napetosti in ga lahko prevedemo na dve dimenziji. Lotimo se problema z drugega zornega kota. Problem nas spominja na teorijo Hertzevega kontakta (4.4), le da ima prisotno tudi tangentno silo, osno napetost in končne dimenzije. V [38, razdelek 2] so opisani analitični izrazi za modeliranje napetosti, s katerimi cilindrična glava pritiska na vzorec. Označimo krivinski radij glave z  $R$ , širino vzorca z  $W$ , dolžino z  $L$  in debelino z  $t$ . Izraz za širino kontakta je enak kot pri Hertzevem problemu, pri čemer upoštevamo, da je dolžinska gostota sile enaka  $F/t$ . Širina polovice kontaktnega območja se tako izraža z

$$a = 2\sqrt{\frac{FR}{t\pi E^*}},$$

normalni pritisk na kontaktne površine pa je dan z

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}; & |x| < a \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{FE^*}{t\pi R}}.$$

Pri tem je  $E^*$  definiran enako kot pri Hertzevem kontaktu v razdelku 4.4. Na tangentno silo bo imel vpliv tudi koeficient trenja med površinama, ki ga, nekoliko nesrečno, označimo z  $\mu$ , tako kot Laméjev drugi parameter. Iz konteksta, vrednosti in dimenzij  $\mu$  bo razvidno, katero izmed količin predstavlja. Za tangentno silo predpostavimo, da je manjša kot mejna sila trenja, dana s Coulombovim zakonom kot  $\mu F$ . V tem primeru se kontakt razdeli na dve območji, območje drsenja in območje lepljenja in tangentna napetost je dana z

$$\tilde{q}(x) = \begin{cases} -\mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}; & c \leq |x| \leq a \\ -\mu p_0 \left( \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \right); & |x| < c \\ 0; & \text{sicer,} \end{cases}$$

pri čemer je  $c = a\sqrt{1 - \frac{Q}{\mu F}}$  in  $\{x; |x| < c\}$  območje lepljenja. Zgornji izraz se da prilagoditi tudi tako, da je pravilen ob prisotnosti osne napetosti  $\sigma_{ax}$  z uvedbo ekscentričnosti  $e = \operatorname{sgn}(Q)\frac{a\sigma_{ax}}{4\mu p_0}$ . Z njeno pomočjo izrazimo  $q$  z

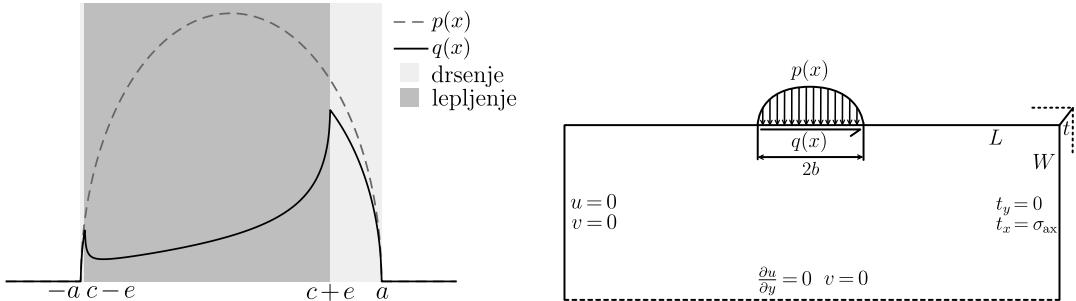
$$q(x) = \begin{cases} -\mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}; & c \leq |x - e| \text{ in } |x| \leq a \\ -\mu p_0 \left( \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{(x-e)^2}{c^2}} \right); & |x - e| < c \\ 0; & \text{sicer,} \end{cases}$$

pri čemer mora veljati  $\sigma_{ax} \leq 4 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{Q}{\mu F}} \right)$ , da ekscentričnost ne povzroči, da bi območje lepljivosti segalo izven območja kontakta. Sedaj imamo vse pripravljeno

za numerično reševanje. Rešujemo torej problem

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} &= 0, & \text{na } \Omega = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \times [-\frac{W}{2}, 0] \\
 \vec{t}(x, 0) &= q(x) \vec{i} - p(x) \vec{j}, & \text{(napetost na vrhu)} \\
 \vec{u}(-\frac{L}{2}, y) &= 0, & \text{(vpet levo)} \\
 \vec{t}(\frac{L}{2}, y) &= 0, & \text{(prost desno)} \\
 \vec{u}(x, -\frac{W}{2}) \cdot \vec{j} &= 0, \quad \frac{\partial \vec{u}(x, -t/2) \cdot \vec{i}}{\partial y} = 0, & \text{(simetrija spodaj)}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

grafično prikazan na sliki 29b.



(a) Primer napetosti  $p(x)$  in  $q(x)$  z označenima območjem drsenja in lepljenja za  $R = 50$  mm in  $\mu = 0.85$ .

(b) Domena in robni pogoji. Označili smo  $\vec{u} = (u, v)$ ,  $\vec{t} = (t_x, t_y)$ .

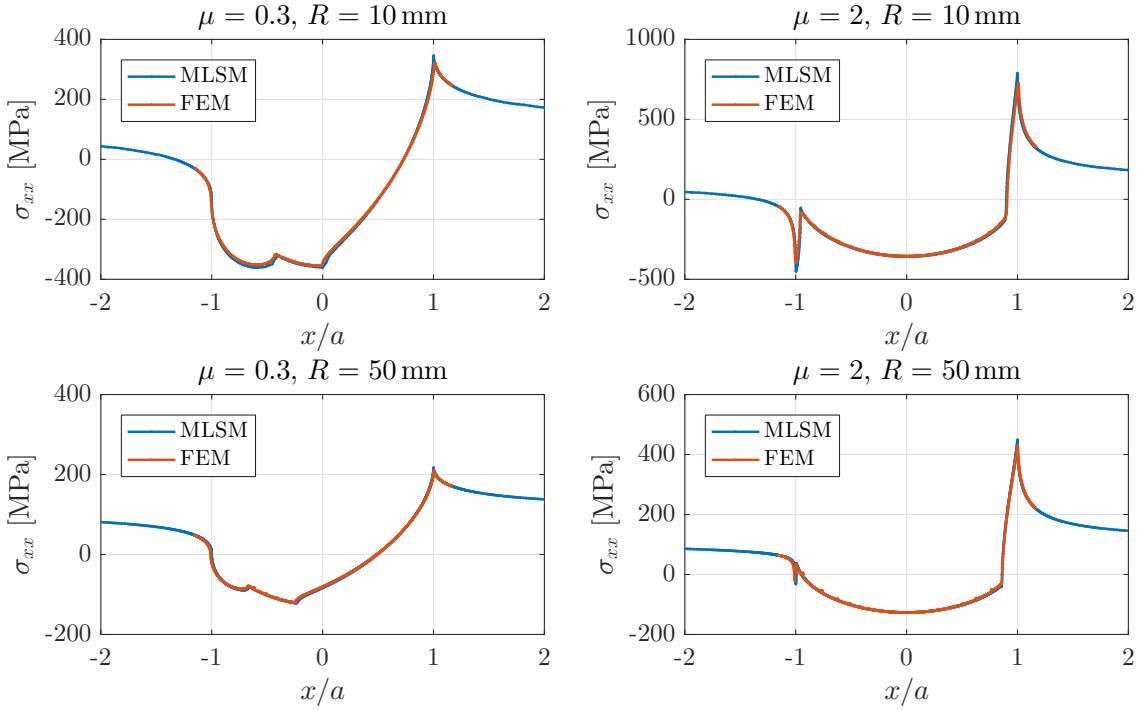
Slika 29: Domena in robni pogoji za numerično reševanje problema (5.1).

V eksperimentu, opisanem v [19], je bil uporabljen aluminij 2420-T3, katerega materialni lastnosti sta  $E = 72.1$  GPa in  $\nu = 0.33$ . Vzorec je bil velikosti  $t = 4$  mm,  $W = 10$  mm in  $L = 40$  mm. Največji izmerjeni sili sta bili  $F = 543$  N v smeri  $-\vec{j}$  in  $Q = 155$  N v smeri  $-\vec{i}$ , osna napetost pa je bila  $\sigma_{ax} = 100$  MPa. Numerična simulacija v [38] je bila narejena za  $R = 10$  mm in  $R = 50$  mm in tri različne koeficiente trenja  $\mu = 0.3$ ,  $\mu = 0.85$  in  $\mu = 2$ , zato tudi mi izberimo te parametre. Na Hertzevem kontaktnem problemu (4.5) smo se naučili, kako dobro diskretizirati domeno. Tudi tukaj uporabimo enake parametre, le goščenje domene prilagodimo manjšim dimenzijam. Metoda je za vse izbire parametrov  $R$  in  $\mu$  s povečevanjem  $N$  konvergirala proti limitni rešitvi. Na sliki 30 je prikazano ujemanje naše numerične rešitve z rešitvijo izračunano v [38] za  $N = 52659$  pri manjšem in  $N = 178897$  pri večjem radiju.

Vidimo, da se rešitvi dobro ujemata, a ne povsem, kar je tudi pričakovati, saj je FEM rešitev nastala s simulacijo kontakta, MLSM pa z analitičnimi robnimi pogoji. Ujemanje rešitev kljub temu nakazuje, da je metoda MLSM primerna tudi za reševanje problemov iz kontaktne mehanike.

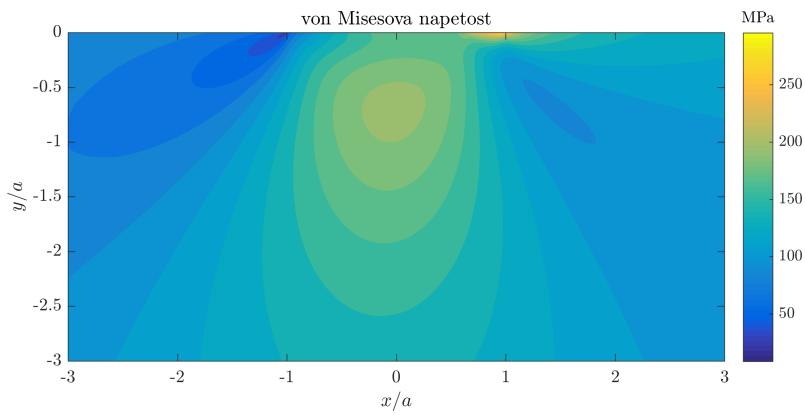
Posebno zanimanje pa ima vrednost  $\sigma_{xx}$  v špici na desni strani kontaktne površine, saj so raziskave pokazale, da se glavna razpoka, ki pripomore k zlomu materiala, zgodi v neposredni bližini  $x = a$ . Analitična aproksimacija za največjo vrednost  $\sigma_{xx}$  se izraža kot

$$\sigma_{xx,\max} = 2p_0 \sqrt{\frac{\mu Q}{F}} + \sigma_{ax}.$$



Slika 30: Ujemanje MLSM in FEM rešitve pri analizi kontakta.

V tabeli 3 je prikazana izračunana vrednost  $\sigma_{xx,\max}$  za FEM in MLSM pri različnih  $N$ . Tabela vrednosti za FEM je vzeta iz [38, tabela 3]. Vidimo, da vrednosti konvergirajo k neki vrednosti, ki pa se razlikuje pri obeh metodah, vendar je v istem velikostnem razredu, kar je tudi pričakovati. Naša rešitev dosega višje vrednosti  $\sigma_{xx,\max}$ , kot je tudi razvidno iz grafa na sliki 30. To je zato, ker imamo ni natančne analitične robne pogoje in lahko posledično bolje popišemo divje obnašanje, kot ga lahko dobimo s simulacijo. Primer izračunane napetosti za problem (5.1) za  $\mu = 0.85$  in  $R = 50$  mm z  $N = 178897$  točkami je prikazan na sliki 31.



Slika 31: Primer rešitve problema (5.1) za  $\mu = 0.65$  in  $R = 50$  mm.

Če to sliko primerjamo z slike 27, na kateri je rešitem Hertzevega kontaktnega problema opazimo podobno splošno obliko nivojnici napetosti v notranjosti, na površini pa se na sliki 31 močno pozna vpliv tangente sile  $Q$ , ki povzroči zamik nivojniv in koncentracijo napetosti okoli točke  $x = a$  na površini, ki je mnogo večja kot druge v vzorcu.

| $\mu$ | minimalna<br>razdalja [ $\mu\text{m}$ ] | $R = 10 \text{ mm}$ |        | $R = 50 \text{ mm}$ |        |
|-------|---|---------------------|--------|---------------------|--------|
|       |   | MSLM                | FEM    | MLSM                | FEM    |
| 0.3   | 10                                      | 325.36              | 242.57 | 210.78              | 182.87 |
|       | 5                                       | 340.99              | 268.70 | 216.54              | 192.96 |
|       | 2.5                                     | 354.46              | 290.50 | 214.69              | 200.09 |
|       | 1.25                                    | 350.33              | 307.81 | 217.82              | 205.33 |
|       | 0.625                                   | 357.84              | 320.33 | 216.76              | 208.99 |
|       | 0.3125                                  | 355.65              | 329.94 | 218.35              | 212.00 |
|       | analitična                              | 342.28              | 342.28 | 208.35              | 208.35 |
| 0.85  | 10                                      | 479.12              | 349.91 | 293.75              | 254.12 |
|       | 5                                       | 496.08              | 398.69 | 305.06              | 274.64 |
|       | 2.5                                     | 522.88              | 440.60 | 307.62              | 287.93 |
|       | 1.25                                    | 527.76              | 474.40 | 311.77              | 297.38 |
|       | 0.625                                   | 539.26              | 496.58 | 314.20              | 303.26 |
|       | 0.3125                                  | 543.71              | 513.08 | 315.77              | 308.06 |
|       | analitična                              | 507.82              | 507.82 | 283.90              | 283.90 |
| 2.0   | 10                                      | 686.07              | 441.20 | 417.73              | 336.52 |
|       | 5                                       | 729.38              | 537.49 | 435.49              | 373.08 |
|       | 2.5                                     | 769.58              | 612.33 | 438.91              | 399.72 |
|       | 1.25                                    | 785.98              | 683.24 | 448.12              | 417.17 |
|       | 0.625                                   | 808.62              | 719.75 | 447.74              | 428.46 |
|       | 0.3125                                  | 809.06              | 750.50 | 451.95              | 436.21 |
|       | analitična                              | 725.56              | 725.56 | 382.10              | 382.10 |

Tabela 3: Tabela vrednosti  $\sigma_{xx,\max}$  [MPa] za FEM, MLSM in analitično aproksimacijo pri različnih gostotah diskretizacije.

## 6 Implementacija

Numerična metoda skupaj z vsemi dodatnimi orodji, za katere ni navedeno drugače, je bila implementirana na oddelku E6<sup>3</sup> Instituta “Jožef Stefan”<sup>4</sup> v Laboratoriju za vzporedno in porazdeljeno računanje.<sup>5</sup> Implementirana je bila v programskejem jeziku C++ [47] zaradi hitrosti in dovolj močnih jezikovnih konstruktov, kot so recimo predloge (*angl. templates*), ki omogočajo elegantno implementacijo. Podoben koncept uporablja knjižnica Eigen [12], uporabljena za numerično linearno algebro. Za iskanje najbližjih sosedov je bila uporabljena knjižnica ANN [36]. Celotna implementacija je prosto dostopna na repozitoriju programske skupine<sup>6</sup> z dokumentacijo, prav tako na voljo na spletu<sup>7</sup>.

Dejanska implementacija v grobem sledi postopku, opisanem v algoritmu 1. Na sliki 32 je prikazan diagram izvedbe izračuna.

<sup>3</sup><http://e6.ijs.si/>

<sup>4</sup><http://ijs.si/>

<sup>5</sup><http://www-e6.ijs.si/ParallelAndDistributedSystems/>

<sup>6</sup><http://gitlab.com/e62Lab/e62numcodes>

<sup>7</sup><http://www-e6.ijs.si/ParallelAndDistributedSystems/MeshlessMachine/>

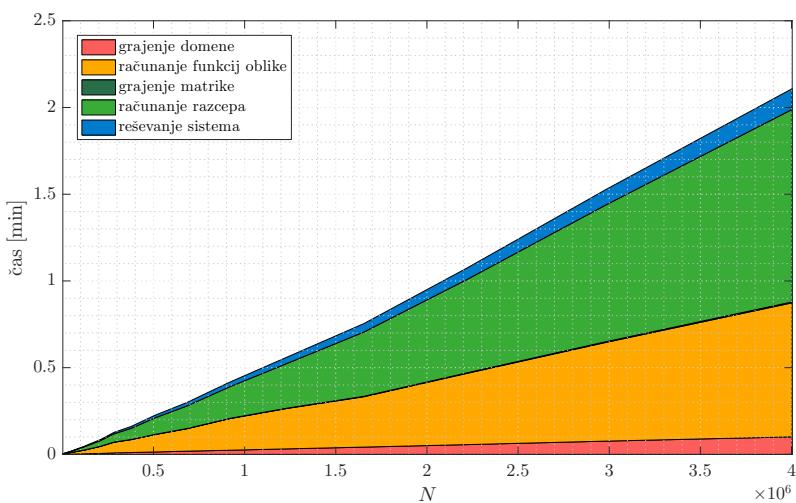
# TO BO SLIKA

Slika 32: Diagram implementacije in izvedbe algoritma 1.

## 6.1 Vzporedno računanje

Oglejmo si še možnost pospešitve računanja s pomočjo paralelizacije. Vse meritve časa v tem razdelku so bile narejene na računalniku z dvema centralno procesnima enotama Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2620 v3 @ 2.40GHz s po 6 jedri, od katerih vsako jedro podpira dve niti izvajanja, in 64 GiB pomnilnika. Programi so bili prevedeni z Intelovim c++ prevajalnikom icpc s stikali -std=c++11 -O3 -DNDEBUG na operacijskem sistemu Ubuntu Linux 14.04. Za matematične operacije je bila uporabljena Intelova knjižnica MKL [20]. Pri paralelizaciji je bila uporabljena Intelova implementacija knjižnice OpenMP [8] za paralelizacijo z deljenim pomnilnikom. Za reševanje sistemov linearnih enačb je bil uporabljenia Intelova implementacija sistema Pardiso [43]. Vse knjižnice in programi so verzije 2016.1.150 za Linux.

Oglejmo si najprej, kateri deli postopka so časovno najpotratnejši. Iz časovne analize v razdelku 3.3.4 lahko sklepamo, da je to računanje funkcij oblike, ki traja  $O(m^2nN)$  časa ali pa reševanje sistema. Da bi bolje razumeli, koliko časa stane kateri del, to izmerimo. Na sliki 33 vidimo porazdelitev časa, ki ga posamezni kosi metode potrebujejo pri reševanju Poissonovega robnega problema (4.1).



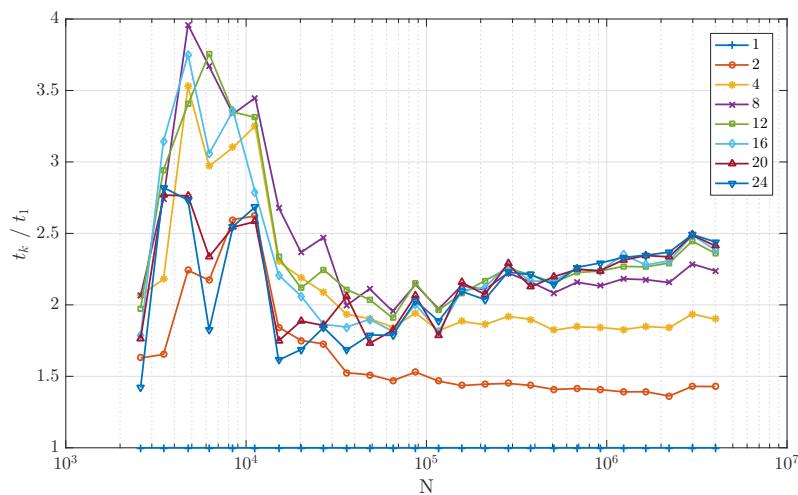
Slika 33: Čas izvajanja posameznih delov programa pri reševanju problema (4.1).

Vidimo, da sta najdražja dela res računanje funkcij oblike in reševanje sistema, zato se ju najbolj splača paralelizirati. Zanko, ki računa funkcije oblik na vrstici 8

algoritma 1 lahko trivialno paraleliziramo, saj so operacije neodvisne med seboj, deljeni podatki pa se ne spreminjajo. Paralelizacija reševanja razpršenega sistema linearnih enačb ni tako enostavna in je področje mnogo raziskav z veliko razvitiimi sistemi za reševanje, kot na primer Pardiso [43], PaStiX [15] in MUMPS [2]. Zaradi najlažje integracije z Eigen in dostopnosti v MKL knjižnici za osnovni test izberemo Pardiso [43]. Isti robni problem sedaj rešimo vzporedno s  $k$  nitmi in s  $t_k(N)$  označimo čas izvajanja programa s  $k$  nitmi na problemu z  $N$  točkami v domeni. Opazovali bomo faktor pohitritve (angl. speed-up)

$$f_k(N) = t_k(N)/t_1(N).$$

Vrednost  $f_3(10^6) = 2.5$  pove, da je na problem velikosti  $10^6$  rešimo 2.5-krat hitreje s tremi nitmi izvajanja kot z eno samo. Graf faktorjev pohitritve je prikazan na sliki 34.



Slika 34: Faktorji pohitritve  $f_k(N)$  pri reševanju problema (4.1).

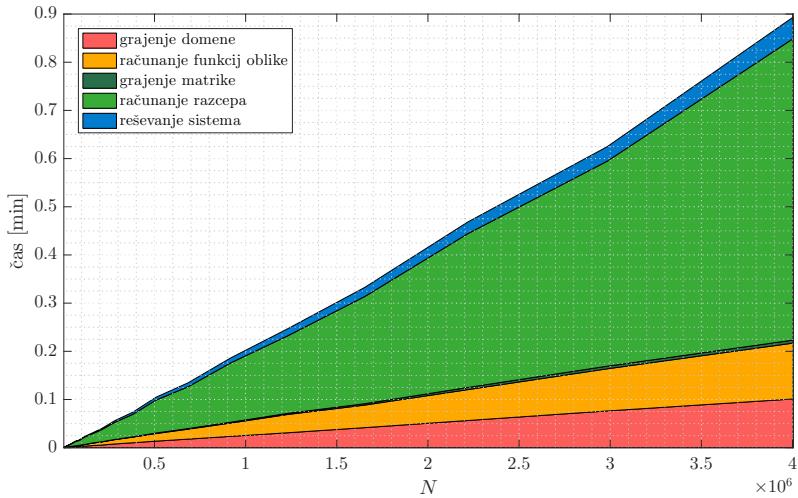
Pri problemih z  $N < 5 \cdot 10^4$  se program že brez paralelizacije izvede v manj kot sekundi, tako da so meritve pohitritve bolj nezanesljive in sama pohitritev ni tako pomembna, zato glejmo graf za večje  $N$ . Vidimo, da se izvajanje pohitri, toda ne zelo, z asimptotičnim faktorjem pospešitve malo manj kot 1.5 za dve jedri, okoli 1.8 za štiri jedra in končnim faktorjem malo pod 2.5 za 12 jader in več. Zanimivo si je tudi ogledati novo razporeditev časov izvajanja posameznih kosov, prikazano za primer  $k = 12$  na sliki 35.

Pričakovano se poveča delež, ki ga porabimo za grajenje domene, relativno pa se precej poveča delež časa, ki ga porabimo za razcep matrike, saj se ta paralelizira slabše kot grajenje funkcij oblike. Iz grafov na slikah 33 in 35 preberemo, da je faktor pohitritve samo za funkcije oblike približno 6.4 za razcep matrike pa 1.7.

Kljub slabim faktorjem pohitritve pri paralelizaciji, ta še vedno vsaj dvakrat skrajša čas izvajanja, brez veliko truda ali sprememb v izvorni kodi, tako da ni razloga, da je ne bi uporabili.

## 7 Zaključek

V magistrski nalogi smo si ogledali klasično teorijo elastomehanike in izpeljali Navierovo enačbo, ki opisuje deformacijo teles pod zunanjimi obremenitvami. Pokazali



Slika 35: Čas izvajanja posameznih delov programa pri reševanju problema (4.1) z 12 nitmi.

smo obstoj in enoličnost rešitve. Samega reševanja smo se lotili numerično in sicer s pospoljeno močnostno MLSM metodo, za katero smo pokazali, da v posebnih primerih preide v FDM. Vpeljali smo tudi algoritem za zgoščevanje in prilagajanje diskretizacije poljubnim oblikam.

Metodo smo najprej testirali na preprosti Poissonovi enačbi, kjer smo preverili obnašanje glede na uporabo različnih baznih funkcij in uteži ter različnega števila sosedov. V nadaljevanju smo rešili dva klasična primera iz elastostatike in sicer vpet nosilec ter Hertzov kontakt. Splošnost MLSM glede postavitev diskretizacijskih točk smo predstavili preko rešitve ‐navrtanega‐ vpetega nosilca, kjer smo morali opisati neregularno domeno ter zgostiti točke v okolici lukanj. Za konec smo rešili še primer iz mehanike utrujanja materialov in pokazali ujemanje metode z referenčno rešitvijo.

Nadaljnje delo bo usmerjeno v razvoj rešitvenega postopka za simulacijo rasti razpoke. V ta namen bomo MLSM obogatili z adaptacijo baznih funkcij, kar bomo potrebovali za opis konice razpoke. Za opis razpoke bomo prav tako potrebovali cenilko napake rešitve, saj ne bo več v naprej znano, kje lahko pričakujemo največje napake. Pri računanju funkcij oblike bomo problem v posebnih, a pogostih primerih, zastavili preko reševanja sistema in tako pridobili na času reševanja, ki bo pri simulacijah rasti razpoke postal pomemben faktor. V ta namen se bomo posvetili tudi implementaciji paralelnih rešitvenih postopkov, tako na arhitekturah s skupnim pomnilnikom, kot tudi na distribuiranih arhitekturah.

## Literatura

- [1] R. A. Adams in J. J. Fournier, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics **140**, Academic press, 2003.
- [2] P. R. Amestoy in dr., *MUMPS: a general purpose distributed memory sparse solver*, v: *International Workshop on Applied Parallel Computing*, Springer, str. 121–130, doi:10.1007/3-540-70734-4\_16.
- [3] A. Beygelzimer, S. Kakade in J. Langford, *Cover trees for nearest neighbor*, v: *Proceedings of the 23rd international conference on Machine learning*, ACM, str. 97–104, doi:10.1145/1143844.1143857.
- [4] B. Bhushan (ur.), *Modern Tribology Handbook*, CRC Press, Mechanics & Materials Science **1**, pogl. 3, 2001, str. 121–162, doi:10.1201/9780849377877.ch3.
- [5] M. D. Buhmann, *Radial basis functions*, Acta Numerica **9** (2000) 1–38.
- [6] Y. Chen, J. D. Lee in A. Eskandarian, *Meshless methods in solid mechanics*, Springer, New York, NY, 2006.
- [7] P. G. Ciarlet, *On Korn's inequality*, Chin. Ann. Math. Ser. B **31** (2010) 607–618, doi:10.1007/s11401-010-0606-3.
- [8] L. Dagum in R. Menon, *OpenMP: an industry standard API for shared-memory programming*, IEEE computational science and engineering **5** (1998) 46–55, doi: 10.1109/99.660313, dostopno na <http://www.openmp.org/>.
- [9] T. A. Davis, *Direct methods for sparse linear systems*, SIAM, 2006.
- [10] M. Dehghan, M. Abbaszadeh in A. Mohebbi, *The numerical solution of nonlinear high dimensional generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation via the meshless method of radial basis functions*, Comput. Math. Appl. **68** (2014) 212–237, ISSN 0898-1221, doi:10.1016/j.camwa.2014.05.019.
- [11] Á. González, *Measurement of areas on a sphere using Fibonacci and latitude–longitude lattices*, Math. Geosci. **42** (2010) 49–64, doi:10.1007/s11004-009-9257-x.
- [12] G. Guennebaud, B. Jacob in dr., *Eigen v3*, 2010, [ogled 16. 6. 2017], dostopno na <http://eigen.tuxfamily.org>.
- [13] M. E. Gurtin, *An introduction to continuum mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, 1982.
- [14] J. Hannay in J. Nye, *Fibonacci numerical integration on a sphere*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) 11591, doi:10.1088/0305-4470/37/48/005.
- [15] P. Hénon, P. Ramet in J. Roman, *PASTIX: a high-performance parallel direct solver for sparse symmetric positive definite systems*, Parallel Comput. **28** (2002) 301–321, doi:10.1016/s0167-8191(01)00141-7.
- [16] H. Hertz, *Über die berühring fester elastischer Körper*., Journal für die reine und angewandte Mathematik **92** (1882) 156–171, ISSN 0075-4102.

- [17] Hibbit, Karlsson in Sorensen, *ABAQUS*, [ogled 21. 7. 2017], dostopno na <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>.
- [18] K. D. Hjelmstad, *Fundamentals of structural mechanics*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [19] R. Hojjati-Talemi in dr., *Prediction of fretting fatigue crack initiation and propagation lifetime for cylindrical contact configuration*, *Tribol. Int.* **76** (2014) 73–91, doi:10.1016/j.triboint.2014.02.017.
- [20] Intel, *Intel math kernel library*, [ogled 20. 7. 2017], dostopno na <https://software.intel.com/en-us/mkl>.
- [21] H.-K. Jeung, J.-D. Kwon in C. Y. Lee, *Crack initiation and propagation under fretting fatigue of inconel 600 alloy*, *J. Mech. Sci. Technol.* **29** (2015) 5241–5244, doi:10.1007/s12206-015-1124-8.
- [22] E. A. Kearsley in J. Fong, *Linearly independent sets of isotropic Cartesian tensors of ranks up to eight*, *J. Res. Natl Bureau of Standards Part B: Math. Sci. B* **79** (1975) 49–58, doi:10.6028/jres.079b.005.
- [23] A. M. Kibriya in E. Frank, *An empirical comparison of exact nearest neighbour algorithms*, v: *European Conference on Principles of Data Mining and Knowledge Discovery*, Springer, str. 140–151, doi:10.1007/978-3-540-74976-9\_16.
- [24] J. Kozak, *Numerična analiza*, DMFA – založništvo, 2008.
- [25] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York, 1989, ISBN 0471504599.
- [26] R. Lakes, *Foam structures with a negative Poisson's ratio*, *Science* **235** (1987) 1038–1041, doi:10.1126/science.235.4792.1038.
- [27] L. Lebedev in M. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, 2009, ISBN 9789814273725.
- [28] M. Li, W. Chen in C. Chen, *The localized RBFs collocation methods for solving high dimensional PDEs*, *Eng. Anal. Boundary Elem.* **37** (2013) 1300–1304, doi:10.1016/j.enganabound.2013.06.001.
- [29] S. Li in K. W. Liu, *Meshfree and particle methods and their applications*, *Appl. Mech. Rev.* **55** (2002) 1–34, doi:10.1115/1.1431547.
- [30] X. S. Li, *An overview of SuperLU: Algorithms, implementation, and user interface*, *ACM Trans. Math. Software* **31** (2005) 302–325, doi:10.1145/1089014.1089017.
- [31] G. R. Liu in Y. T. Gu, *A point interpolation method for two-dimensional solids*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **50** (2001) 937–951, doi:10.1002/1097-0207(20010210)50:4<937::AID-NME62>3.0.CO;2-X.

- [32] B. Mavrič in B. Šarler, *Local radial basis function collocation method for linear thermoelasticity in two dimensions*, Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow **25** (2015) 1488–1510, doi:10.1108/hff-11-2014-0359.
- [33] E. M’Ewen, *Stresses in elastic cylinders in contact along a generatrix (including the effect of tangential friction)*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **40** (1949) 454–459, doi: 10.1080/14786444908521733.
- [34] A. W. Moore, *An introductory tutorial on kd-trees*, 1991, doi:10.1.1.28.6468.
- [35] W. J. Morokoff in R. E. Caflisch, *Quasi-random sequences and their discrepancies*, SIAM J. Sci. Comput. **15** (1994) 1251–1279, doi:10.1137/0915077.
- [36] D. M. Mount in S. Arya, *ANN: library for approximate nearest neighbour searching*, 1998, doi:10.1.1.91.8209, [ogled 16. 6. 2017], dostopno na <https://www.cs.umd.edu/~mount/ANN/>.
- [37] S. M. Omohundro, *Five balltree construction algorithms*, teh. por., International Computer Science Institute, 1989.
- [38] K. Pereira in dr., *On the convergence of stresses in fretting fatigue*, Materials **9** (2016), doi:10.3390/ma9080639.
- [39] B. Rao in S. Rahman, *An efficient meshless method for fracture analysis of cracks*, Comput. Mech. **26** (2000) 398–408, doi:10.1007/s004660000189.
- [40] Y. Saad, *ILUT: A dual threshold incomplete LU factorization*, Numerical linear algebra with applications **1** (1994) 387–402, ISSN 1099-1506, doi:10.1002/nla.1680010405.
- [41] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, SIAM, 2003.
- [42] R. Schaback, *Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation*, Adv. Comput. Math. **3** (1995) 251–264, doi:10.1007/bf02432002.
- [43] O. Schenk in dr., *PARDISO solver project*, 2010, [ogled 20. 7. 2017], dostopno na <http://www.pardiso-project.org>.
- [44] W. S. Slaughter, *The linearized theory of elasticity*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [45] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, [ogled 9. 7. 2016], dostopno na Sequence A005043. <http://oeis.org/A005043>.
- [46] A. K. Stone, C. Bailey in M. Cross, *Dynamic solid mechanics using finite volume methods*, Applied solid mechanics using finite volume methods **27** (2003) 69–87, doi:10.1016/s0307-904x(02)00060-4.
- [47] B. Stroustrup, *The C++ programming language*, Pearson Education India, 1995.

- [48] R. Trobec in G. Kosec, *Parallel scientific computing: theory, algorithms, and applications of mesh based and meshless methods*, SpringerBriefs in Computer Science, Springer, 2015, ISBN 978-3-319-17072-5.
- [49] H. A. Van der Vorst, *Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing **13** (1992) 631–644, ISSN 1064-8275, doi: 10.1137/0913035.
- [50] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid Mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, 2000, ISBN 0340759844.