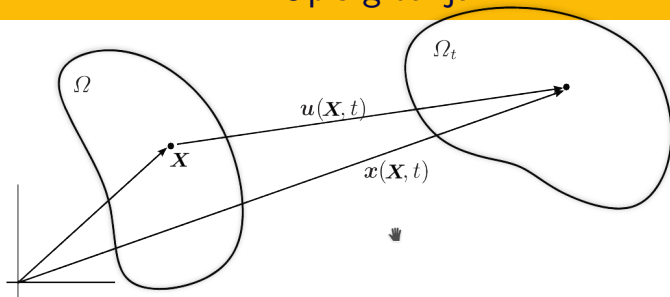


Elastomehanika in numerično reševanje problemov z brez mrežnimi metodami

Jure Slak

Opis gibanja



$x($

Kon

Deformacija: $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\text{grad} \right)$

Gibalna enačba: $\rho \ddot{u} = \text{div}$

Hookov zakon: $\sigma = C\varepsilon$

Končna enačba

$$\rho \ddot{u} = E u'' + \vec{f}$$

$$\rho \ddot{u} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot u) \right)$$

robni pogoji: $u = 0$ ali $\vec{t} = 0$.

Numerično reševanje

Brezmrežne metode

`../magisterij/images/domain.pdf`

Metoda deljenih diferenc

Enačba: $u''(x) = f(x)$, $u(a) = A$, $u(b) = B$.

Diskretizacija:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

Sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 2 & 1 & & & \\ & -1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ B \end{bmatrix}$$

Izpeljava aproksimacij LPDO

Ideja: $(\mathcal{L}u)(x) \approx (\mathcal{L}\hat{u})(x)$, \hat{u} interpolacijski polinom za u .

Posplošimo: $\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i(x)$; b_i bazne funkcije. Zahtevamo, da interpolira v sosednjih točkah x_1, \dots, x_n : $\hat{u}(x_i) = u(x_i)$.

$$\begin{bmatrix} b_1(x_1) & \dots & b_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(x_n) & \dots & b_m(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Rešimo in dobimo:

$$\hat{u} = b(x)^T B^{-1} u.$$

Sedaj:

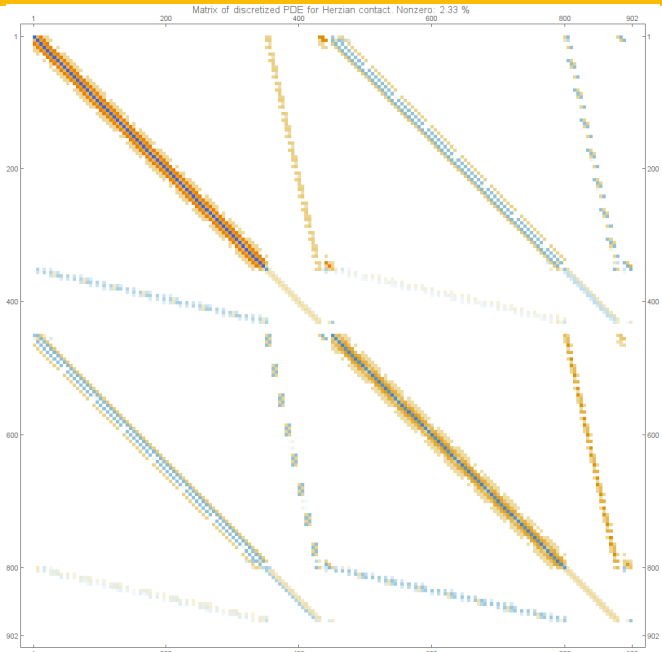
$$(\mathcal{L}u)(x) \approx (\mathcal{L}\hat{u})(x) = \underbrace{(\mathcal{L}b)(x)^T B^{-1}}_{\varphi(x)} u$$

Sistem enačb

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \varphi(x_1) \\ \varphi(x_2) \\ \vdots \\ \varphi(x_{N-1}) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ B \end{bmatrix}$$

Razpršena matrika s približno nN elementi.

Sistem enačb



Implementacija

1. diskretizacija domene, relaksacija
2. iskanje najbližjih sosedov (kD-tree, cover tree, ball tree)
3. izračun “shape funkcij” (SVD)
4. reševanje velikega razpršenega sistema (BiCGStab)

