1. DOMAČA NALOGA

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-1.zip` in jih oddajte preko sistema Moodle (http://ucilnica.fmf.uni-lj.si) najkasneje do 28. novembra 2016. Datoteka naj vsebuje kratko poročilo napisano v `LaTeXu` ali `Wordu`. Zraven priložite programe (s komentarji) in opisne datoteke, s katerimi ste naloge rešili.

1. Želimo izračunati integral funkcije dveh spremenljivk po pravokotniku $D = \{(x, y), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$,

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy. \tag{1}$$

   Pri tem si lahko pomagamo s pravili za izračun enojnih integralov. Sestavite integracijsko pravilo tako, da za integracijo v smeri x osi uporabite sestavljeno trapezno pravilo, v smeri y osi pa sestavljeno Simpsonovo pravilo. Napišite program, ki z uporabo tega pravila izračuna vrednost integrala (1).

   Program preizkusite na naslednjih podatkih:

$$f(x, y) = e^{x+y}, \quad [a, b] = [-1,\, 2],\; [c, d] = [1,\, 3],\; n = 7,\; m = 6,$$

   kjer število n določa na koliko delov rezdelimo interval $[a, b]$, število m pa določa delitev intervala $[c, d]$.

2. Adaptivna pravila so sestavljena pravila, pri katerih metoda sproti ocenjuje napako in temu prilagaja velikost podintervalov. Napišite rekurzivno adaptivno metodo, ki temelji na Simpsonovem pravilu in Richardsonovi ekstrapolaciji. Natančneje, prvi približek I_1 za integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$ določite tako, da na celem intervalu uporabite Simpsonovo pravilo, drugi približek I_2 pa določite tako, da interval razdelite na dva enaka dela in na vsakem uporabite Simpsonovo pravilo. Nato primerjajte izračunana približka.

   - Če je razlika $|I_2 - I_1|$ večja od zahtevane natančnosti, potem interval razdelite na dva dela in na vsakem rekurzivno izračunajte integral z isto metodo.
   - Če je razlika $|I_2 - I_1|$ manjša oz. enaka kot zahtevana natančnost, le še izboljšajte rezultat tako, da naredite še en korak Richardsonove ekstrapolacije.

   Vhodni podatki metode naj bodo funkcija f, interval $[a, b]$ in zahtevana natančnost δ. Metoda naj vrne približno vrednost integrala in ocenjeno doseženo natančnost.

   Delovanje metode preverite na podatkih:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 10^{-6}}}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad \delta = \frac{1}{1000}.$$

3. Izraz $\int_0^1 f(x)dx$ je enak povprečni vrednosti funkcije f na $[0,1]$. Računanje integrala je torej ekvivalentno računanju povprečne vrednosti $\bar{f}$. Pri metodi Monte Carlo povprečno vrednost $\bar{f}$ funkcije na $[0,1]$ približno izračunamo tako, da naključno izberemo n točk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na intervalu $[0,1]$. Približek za $\bar{f}$ je potem
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$
Idejo lahko uporabimo tudi za računanje večkratnega integrala $\int_{[0,1]^d} f(x)dx$, le da so sedaj x_i naključni vektorji iz $[0,1]^d$ (komponente vektorjev so števila iz $[0,1]$). Z metodo Monte Carlo lahko torej preprosto izračunamo integrale v več dimenzijah na nekaj decimalk točno.
Napišite program, ki z metodo Monte Carlo v primerih $n = 10^2, 10^3$ in 10^4 izračuna integral
$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{3x+y+9z+1} dx\, dy\, dz.$$