

Numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb, 2015/2016

1. domača naloga

Nalogo rešite v programu Matlab ali Octave. Datoteke, uporabljene pri reševanju, oddajte v datoteki `ime_priimek.vpisnastevilka_dn1.zip` v spletni učilnici najkasneje do 5. maja 2016.

1. Dana je funkcija $u(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. S pomočjo trinajsttočkovne aproksimacije biharmoničnega operatorja Δ^2 izračunajte približek za vrednost $\Delta^2 u$ v točki $(0, 0)$. Korak diskretizacije h naj bo v obeh koordinatnih smereh enak. Kakšne približke dobite pri $h = \frac{1}{j^2}$, $j = 1, \dots, 30$? Pri katerem izmed preizkušenih korakov je napaka najmanjša?
2. Dana je Poissonova parcialna diferencialna enačba $-\Delta u = f$ na območju $[-1, 1] \times [-1, 1]$ za funkcijo $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$. Predpisani so robni pogoji

$$\begin{aligned} u(x, -1) &= x, & u(x, 1) &= x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ u(-1, y) &= y, & u(1, y) &= 1, & -1 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Laplaceov operator Δ nadomestite s pettočkovno aproksimacijo in sestavite sistem, ki določa numerično rešitev po diferenčni metodi pri koraku diskretizacije $h = 0.02$ v obeh koordinatnih smereh. Spremenljivke, ki pripadajo točkam (x_j, y_k) ,

$$x_j = -1 + jh, \quad y_k = -1 + kh, \quad j, k = 1, 2, \dots, 99,$$

uredite po vrsticah, $(j, k) \mapsto j + 99(k - 1)$. Sistem najprej rešite z direktno metodo, nato pa še z Jacobijevo, Gauss-Seidlovo in SOR metodo pri optimalnem parametru. Pri iteracijskih metodah uporabite ničelni začetni približek, za zaustavitveni kriterij pa pogoj, da je največja absolutna razlika med istoležnima komponentama zaporednih približkov manjša od 10^{-5} . Izmerite čase izvajanja metod. Pri iteracijskih metodah preštajte tudi, koliko korakov je potrebnih za zadostitev kriterija. Primerjajte približke za vrednost u v točki $(0, 0)$.