2. DOMAČA NALOGA

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-2.zip` in jih oddajte preko sistema Moodle (http://ucilnica.fmf.uni-lj.si) najkasneje do 18. januarja 2017 do 23:55. Datoteka naj vsebuje kratko poročilo napisano v `LaTeXu` ali `Wordu`. Zraven priložite programe (s komentarji) in opisne datoteke s katerimi ste naloge rešili.

1. **Cash-Karp metoda**
   Ena izmed pomembnih prednosti enočlenskih metod v primerjavi z veččlenskimi metodami za reševanje NDE je, da lahko dokaj učinkovito prilagajamo korak h. Ena izmed znanih metod, ki sodijo v razred ugnezdenih Runge-Kutta metod je Cash-Karp metoda, ki je naslednje oblike:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x,y)\\
k_2 &= f(x+\frac{1}{5}h, y+\frac{1}{5}hk_1)\\
k_3 &= f(x+\frac{3}{10}h, y+\frac{3}{40}hk_1+\frac{9}{40}hk_2)\\
k_4 &= f(x+\frac{3}{5}h, y+\frac{3}{10}hk_1-\frac{9}{10}hk_2+\frac{6}{5}hk_3)\\
k_5 &= f(x+h, y-\frac{11}{54}hk_1+\frac{5}{2}hk_2-\frac{70}{27}hk_3+\frac{35}{27}hk_4)\\
k_6 &= f(x+\frac{7}{8}h, y+\frac{1631}{55296}hk_1+\frac{175}{512}hk_2+\frac{575}{13824}hk_3+\frac{44275}{110592}hk_4+\frac{253}{4096}hk_5)\\
y_{n+1} &= y_n+\frac{37}{378}hk_1+\frac{250}{621}hk_3+\frac{125}{594}hk_4+\frac{512}{1771}hk_6\\
\tilde{y}_{n+1} &= y_n+\frac{2825}{27648}hk_1+\frac{18575}{48384}hk_2+\frac{13525}{55296}hk_4+\frac{277}{14336}hk_5+\frac{1}{4}hk_6
\end{aligned}
$$

   V nadaljevanju je predstavljen Algoritem 1, ki s pomočjo te metode učinkovito prilagaja korak h.

   V Matlabu napišite funkcijo

```
function sez =CashKarp(fun,a,b,y0,tol,hmin,hmax,gamma),
```

   ki za dano funkcijo `fun` in začetni približek `y0` reši diferencialno enačbo prvega reda na intervalu `[a,b]`. Korak h mora biti ves čas algoritma v mejah med `hmin` in `hmax`, `tol` je toleranca oz. natančnost, ki nastopa v algoritmu, `gamma` pa je varnostni faktor (običajno med 0 in 1). Funkcija naj vrne matriko `sez`, kjer prva vrstica predstavlja $x-$komponente, druga pa $y-$komponente numeričnih približkov.

   Delovanje napisane funkcije preizkusite tako, da rešite naslednjo nalogo:
   S pomočjo Cash-Karp metode poiščite rešitev naslednje diferencialne enačbe 1. reda,

$$y' = 2\sin(2y)+3\cos(4x), \quad x\in[0,2], \quad y(0)=1,$$

Algoritem 1

Input: krajišči a, b; začetni pogoj y_0; toleranca ϵ; maksimalni korak $h_{\max}$; minimalni korak $h_{\min}$; varnostni faktor γ;

Output: matrika 'sez'

$x = a$;
$y = y_0$;
$h = h_{\max}$;
sez = [x; y];
konec = 1;
while konec=1 **do**
  $k_1 = f(x, y)$;
  $k_2 = f(x + \frac{1}{5}h, y + \frac{1}{5}hk_1)$;
  $k_3 = f(x + \frac{3}{10}h, y + \frac{3}{40}hk_1 + \frac{9}{40}hk_2)$;
  $k_4 = f(x + \frac{3}{5}h, y + \frac{3}{10}hk_1 - \frac{9}{10}hk_2 + \frac{6}{5}hk_3)$;
  $k_5 = f(x + h, y - \frac{11}{54}hk_1 + \frac{5}{2}hk_2 - \frac{70}{27}hk_3 + \frac{35}{27}hk_4)$;
  $k_6 = f(x + \frac{7}{8}h, y + \frac{1631}{55296}hk_1 + \frac{175}{512}hk_2 + \frac{575}{13824}hk_3 + \frac{44275}{110592}hk_4 + \frac{253}{4096}hk_5)$;
  $R = \left| -\frac{277}{64512}k_1 - \frac{18575}{48384}k_2 + \frac{250}{621}k_3 - \frac{6925}{202752}k_4 - \frac{277}{14336}k_5 + \frac{277}{7084}k_6 \right|$;
  if $R \le \epsilon$ or $h \le h_{\min}$ **then**
    $x = x + h$;
    $y = y + \frac{37}{378}hk_1 + \frac{250}{621}hk_3 + \frac{125}{594}hk_4 + \frac{512}{1771}hk_6$;
    sez = [sez, [x; y]];
  $h = \min\left\{h_{\max}, \max\left\{h_{\min}, \gamma(\frac{\epsilon}{R})^{1/5}h\right\}\right\}$;
  if $h \ge b$ **then** konec = 0;
  else if $x + h > b$ **then** $h = b - x$;
    if $h < h_{\min}$ **then** konec = 0;
return sez

pri čemer naj velja

$$\texttt{tol} = 10^{-6}, \quad \texttt{hmin} = 0.01, \quad \texttt{hmax} = 0.2, \quad \texttt{gamma} = 0.9.$$

Narišite graf numeričnih približkov. Na isto sliko narišite še graf numeričnih približkov, ki jih izračunate z Runge-Kutta metodo reda 4, kjer za konstanten korak h vzemite $h = \texttt{hmax}/2$. Za obe metodi izpišite tudi numerični približek za $y(2)$.

2. **Veččlenske metode**
V Matlabu napišite naslednja dva programa za reševanje začetnih problemov.

   a) Napišite program

   ```
   function res=AdamsBashSistem(fun,a,b,y0,h),
   ```

   ki prejme funkcijo `fun`, interval $[a, b]$, začetni približek `y0` ter korak `h` in s pomočjo 4-členske Adams-Bashforthove metode reši sistem diferencialnih enačb 1. reda. Program naj vrne matriko `res`, kjer so zapisani približki za vrednosti y_i (prva vrstica) in odvode y_i' (druga vrstica).

b) Napišite program

```
function res=MilneSistem(fun,a,b,y0,h),
```

ki prejme funkcijo `fun`, interval $[a, b]$, začetni približek `y0` ter korak `h` in s pomočjo Milneove prediktor-korektor metode reda 4 reši sistem diferencialnih enačb 1. reda. Program naj vrne matriko `res`, kjer so zapisani približki za vrednosti y_i (prva vrstica) in odvode y_i' (druga vrstica).

Napisani funkciji preizkusite pri reševanju naslednje naloge:

Naj bo

$$y'' - \frac{1}{3}y^2y' + 3xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

diferencialna enačba drugega reda na intervalu $[a, b] = [0, 10]$. Enačbo prevedite na sistem diferencialnih enačb prvega reda in ga rešite z metodama opisanima pod točko a) in b). Korak h naj bo enak 0.1. Poiščite rešitev na intervalu $[a, b]$. Začetne približke pri obeh metodah izračunajte z Runge-Kutta metodo 4. reda. Rešitvi $(x, y(x))$, $x \in [a, b]$, dobljeni z obema metodama narišite na isti graf z različnima barvama. Postopek ponovite še za korak $h = 0.05$. Za obe izbiri h in obe metodi izpišite še numerične približke $y(b)$.

3. **Posebna metoda za reševanje diferencialne enačbe 2. reda**
Funkcija y je dana kot rešitev začetnega problema

$$y'' = -xy, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Z Newtonovo metodo poiščite numerični približek za peto ničlo funkcije y. Vrednosti in odvode funkcije y računajte z Runge-Kutta metodo reda 4.