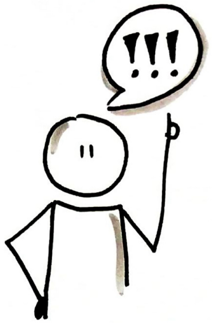
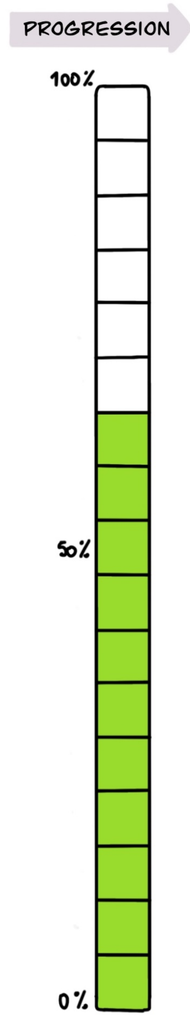


TOUT CE QUE JE DOIS SAVOIR SUR ...

C5. LOI EXPONENTIELLE

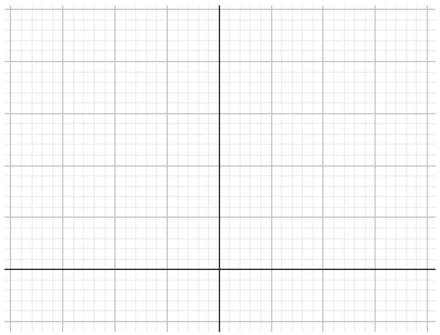
A. TFD ~~1~~ ~~2~~ 3 4 5
B. TRANSFO. EN Z ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4
C. PROBA ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 6
D. EQUA DIFF. ~~1~~ ~~2~~



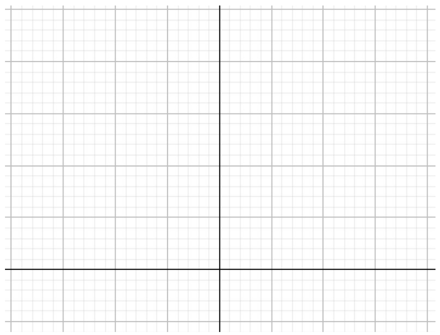
TOUT CE QUE JE SAIS SUR ...

- La courbe de la fonction exponentielle puis celle de g(x) = e^{-x}

(préciser les limites aux bornes de l'ensemble de définition pour ces 2 fonctions)



f(x) = e^{x}



g(x) = e^{x}

- Primitive de f(x) = e^{ax} :

- La loi exponentielle (définition, notation, espérance, écart-type, calcul de probabilité)

- L'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.
  + Interpréation graphiquement ce nombre

LES THÈMES ABORDÉS DANS CE LIVRET DE RÉVISION

Dans ce chapitre, il est important de bien connaître ce qui est lien avec « **aire et intégrale** » ainsi que « **lois continues** »

1. LOI EXPONENTIELLE - LOI CONTINUE

Nous allons étudier une loi de probabilité indispensable pour quelques applications bien précises. La loi exponentielle est surtout utilisée dans les problématiques de « durée de vie ». Elle modélise surtout la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique, de décrire le temps écoulé entre deux moments. . . . Mais une durée « de vie » ne peut être qu'une durée d'attente et c'est pourquoi la loi exponentielle intervient dans les processus poissonniens.

De plus, une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant un temps t ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t. Elle permet entre autres de modéliser la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique, de décrire le temps écoulé entre deux moments. . .

Par exemple, de nos jours, nous avons tous une idée de la probabilité de vivre 40 ans pour un enfant qui vient de naître. Les tables de mortalité donnent un nombre de l'ordre de 0,98. La probabilité de vivre 40 ans de plus, pour une personne de 50 ans, est un nombre bien inférieur, de l'ordre de 0,65. Pour une personne de 60ans, cette probabilité de vivre 40 ans de plus est de l'ordre de 0,02. Le fonctionnement naturel des humains et des animaux suit la loi du vieillissement ou de l'usure : on n'a pas la même probabilité de vivre 40 ans de plus lorsque l'on vient de naître ou lorsque l'on a déjà 50 ou 60 ans. La plupart des phénomènes naturels sont soumis au processus de vieillissement. Il existe des phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure. Il s'agit en général de phénomènes accidentels. Pour ces phénomènes, la probabilité, pour un objet d'être encore en vie ou de ne pas tomber en panne avant un délai donné sachant que l'objet est en bon état à un instant t, ne dépend pas de t. Par exemple, pour un verre en cristal, la probabilité d'être cassé dans les cinq ans ne dépend pas de sa date de fabrication, de son âge.

1.1. DENSITÉ DE PROBABILITE DE LA LOI EXPONENTIELLE

6208

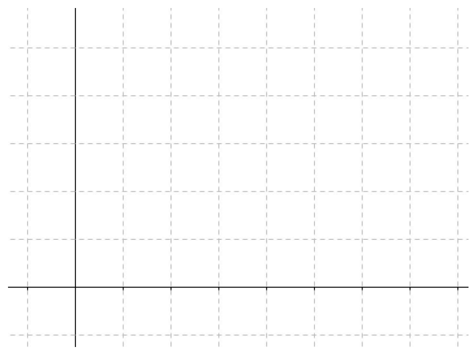
définition

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre réel $\lambda > 0$ lorsque sa densité est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$f(t)$ = …………..

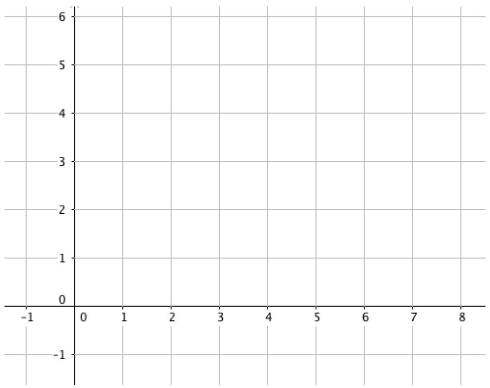
On note cette loi $\mathcal{E}(\lambda)$

Allure de la densité de probabilité



1.1.1. exemple – étude de la densité de probabilité d’une loi exponentielle

Si λ = 5 pour une loi exponentielle
1/ Que vaut f(t), sa densité de probabilité ? f(t) = 5e^-5t
2/ Calculer f(0). f(0) = 5e^-5*0 = 5
3/ Que vaut $\lim_{t \to +\infty} f(t)$?
4/ A) Calculer f ’(t) -25e^-5t
4/ B) en déduire les variations de f sur [0; +∞[
5/ Tracer une allure de la courbe représentative de la densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre 5.



1.2. LE PARAMÈTRE λ

Remarque :

- Cette loi ne dépend donc que d’un seul paramètre, à l’image de la loi de Poisson.
  On aura alors f(0) = …………..
- **Si λ = 1**, on parle de **loi exponentielle standard.**
- Le paramètre λ peut représenter le nombre de fois qu’un événement survienne durant un laps de temps donné.

2. CALCUL DE PROBABILITÉS AVEC LA LOI EXPONENTIELLE

2.1. CALCUL DE LA PROBABILITE $P(c \leq X \leq d)$

11106

Découverte du calcul de $P(c \leq X \leq d)$:

Soit c et d deux réels strictement positifs.
On a représenté à droite la courbe de la densité de probabilité f d'une loi exponentielle de paramètre λ.
1/ Quelle est l'expression de f ?
On a vu qu'alors : $\boldsymbol{P(c \leq X \leq d)} = \int_c^d f(x)dx$
2/ hachurer sur le dessin la partie représentant : $\boldsymbol{P(c \leq X \leq d)}$
3/ calculer explicitement en fonction de c, d et λ, la valeur de

$$\boldsymbol{P(c \leq X \leq d)}$$

f(t) = lambda*e^-lambdat

-e^-lambda*c+e^lambda*d

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ
Alors pour tous réels c et d, on a

$$P(c \leq X \leq d) = \cdots \dots \dots \dots . \dots \dots \dots$$

2.2. CALCUL DE LA PROBABILITE $P(X \leq c)$

11114

Découverte du calcul de $P(X \leq c)$:

Soit c un réel strictement positif.
On a représenté à droite la courbe de la densité de probabilité f d'une loi exponentielle de paramètre λ.

1/ hachurer sur le dessin la partie représentant : $\boldsymbol{P(X \leq c)}$

2/ exprimer $\boldsymbol{P(X \leq c)}$ en fonction de f.

3/ calculer explicitement en fonction de c, λ, la valeur de $\boldsymbol{P(X \leq c)}$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ
Alors pour tout réel c, on a

$$P(X \leq c) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.3. CALCUL DE LA PROBABILITE $P(X > d)$

11117

Découverte du calcul de $(X > d)$:

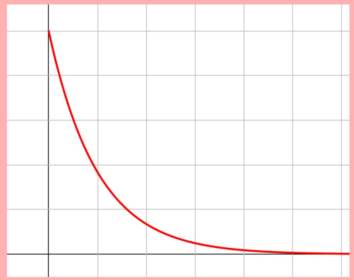
Soit d un réel strictement positif.
On a représenté à droite la courbe de la densité de probabilité f d'une loi exponentielle de paramètre λ.

1/ hachurer sur le dessin la partie représentant : $\boldsymbol{P(X > d)}$
2/ exprimer $\boldsymbol{P(X > d)}$ en fonction de f.
3/ calculer explicitement en fonction de d, λ, la valeur de $\boldsymbol{P(X > d)}$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ
Alors pour tout réel d, on a

$$P(X > d) =$$



2.3.1. exemple – calcul de probabilité avec une loi exponentielle

La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,00005.

1/ Déterminer la probabilité que ce composant tombe en panne avant 10 000 heures

2/ Déterminer la probabilité que ce composant tombe en panne au moins après 15 000 heures

3/ Déterminer la probabilité que ce composant tombe en panne entre la 10 000$^{\text{ième}}$ heure et la 15 000$^{\text{ième}}$ heure.

3. ELEMENTS CARACTÉRISTIQUES

3.1. ESPÉRANCE, VARIANCE ET ÉCART-TYPE

Propriété :

Si X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ alors

Son espérance est E(X) =… ….

Sa variance est V(X) = …

et donc Son écart type est $\sigma(X) = \cdots$

3.1.1. exemple – probabilité et espérance avec une loi exponentielle

La durée de vie, en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée *T* qui suit une loi de exponentielle de paramètre 0,225.

1) Quelle est la probabilité, arrondie à trois décimales, qu'un composant de ce type dure :

a) moins de 8 ans b) plus de10 ans

3) Quelle est l'espérance de vie de ce composant ? Interpréter ce résultat en fonction du contexte

4. CORRECTION DES EXEMPLES DU COURS

1.1.1. exemple – étude de la densité de probabilité d'une loi exponentielle

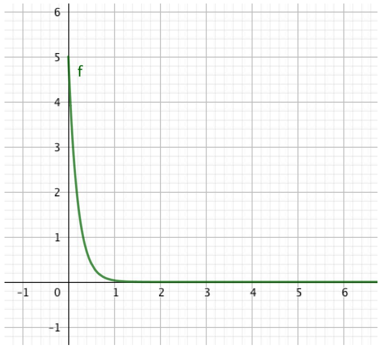
1/ f(t) = $\lambda e^{-\lambda t} = 5e^{-5t}$

2/ f(0) = 5

3/ $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$

3/A) f '(t) = $-5 \times 5e^{-5t} = -25e^{-5t}$

3/B) comme f '(t) < 0 alors f sera décroissante sur [0; +∞[



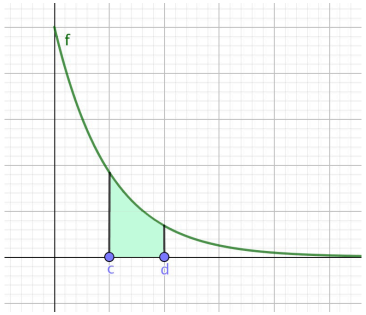
2.1. Découverte du calcul de $P(c \leq X \leq d)$:

1/ f(x) = $\lambda e^{-\lambda x}$

2/ on doit hachurer l aire sous la courbe entre l'axe des abscisses, et les droites d'équation x = c et x = d

3/ $\boldsymbol{P(c \leq X \leq d)}$ = $\int_c^d f(x)dx = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx$

= $\left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d = -e^{-\lambda \times d} + e^{-\lambda \times c} = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$



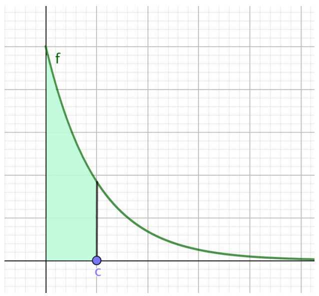
2.2. Découverte du calcul de $P(X \leq c)$:

1/ on doit hachurer l aire sous la courbe entre l'axe des abscisses, et les droites d'équation x = 0 et x = c

2/ $\boldsymbol{P(X \leq c)} = \int_0^c f(x)dx = \int_0^c \lambda e^{-\lambda x}dx$ car f n'est pas défini que sur $[0; +\infty[$

3/ $\boldsymbol{P(X \leq c)} = \int_0^c \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^c$

$= -e^{-\lambda \times c} + e^{-\lambda \times 0} = -e^{-\lambda \times c} + 1 = 1 - e^{-\lambda c}$



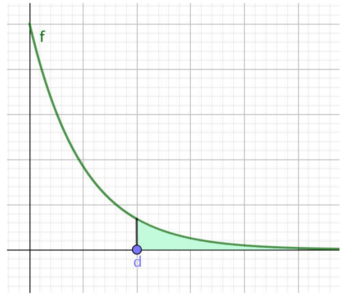
2.3. Découverte du calcul de $P(X > d)$:

1/ on doit hachurer l aire sous la courbe entre l'axe des abscisses, et à droite de la droite d'équation x = d

2/Comme on ne peut pas calculer une intégrale avec une borne infinie, on va passer par l'événement contraire.

$\boldsymbol{P(X > d)}$ **= 1 – P(X ≤ $\boldsymbol{d}$)** $= 1 - \int_0^d f(x)dx$

= $1 - \int_0^d \lambda e^{-\lambda x}dx$



3/$\boldsymbol{P(X > d)}$ = $1 - \int_0^d \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^d$

$= 1 - \left(-e^{-\lambda \times d} + e^{-\lambda \times 0}\right) = 1 - \left(-e^{-\lambda \times d} + 1\right) = 1 + e^{-\lambda \times d} - 1 = e^{-\lambda d}$

2.3.1. exemple – calcul de probabilité avec une loi exponentielle

La variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre 0,00005 donc sa densité de probabilité sera : f(x) = $0{,}00005\, e^{-0{,}00005x}$

1/ P(T < 10 000) = $\int_0^{10\,000} f(x)dx = \int_0^{10\,000} 0{,}00005\, e^{-0{,}00005x}dx$

$= \left[-e^{-0{,}00005x}\right]_0^{10\,000} = -e^{-0{,}00005 \times 10\,000} + e^{-0{,}00005 \times 0} = -e^{-0{,}5} + e^0$

$= -e^{-0{,}5} + 1 = 0{,}39$

2/ P(T≥ 15 000) $= 1 - P(X < 15\,000) = 1 - \int_0^{15\,000} f(x)dx$

$= 1 - \int_0^{15\,000} 0{,}00005\, e^{-0{,}00005x}dx = 1 - \left[-e^{-0{,}00005x}\right]_0^{15\,000}$

$= 1 - \left(-e^{-0{,}00005 \times 15\,000} + e^{-0{,}00005 \times 0}\right) = 1 - \left(-e^{-0{,}75} + e^0\right) = e^{-0{,}75} = 0{,}47$

3/ P($10\,000 \leq T \leq 15\,000) = \int_{10\,000}^{15\,000} f(x)dx = \int_{10\,000}^{15\,000} 0{,}00005\, e^{-0{,}00005x}dx$

$= \left[-e^{-0{,}00005x}\right]_{10\,000}^{15\,000} = -e^{-0{,}00005 \times 15\,000} + e^{-0{,}00005 \times 10\,000}$

$= -e^{-0{,}75} + e^{-0{,}5} = 0{,}13$

3.1.1. exemple – probabilité et espérance avec une loi exponentielle

T suit une loi de exponentielle de paramètre 0,225 donc sa densité de probabilité sera : f(x) = $0{,}225\, e^{-\,0{,}225x}$

1) a) P(T < 8) $= \int_0^8 f(x)dx = \int_0^8 0{,}225\, e^{-\,0{,}225x}dx = [-e^{-\,0{,}225x}]_0^8$

$= -e^{-\,0{,}225\times 8} + e^{-\,0{,}225\times 0} = -e^{-\,1{,}8} + e^0 = -e^{-\,1{,}8} + 1 = 0{,}83$

b) P(T > 10) = $1 - P(X < 10) = 1 - \int_0^{10} f(x)dx = 1 - \int_0^{10} 0{,}225\, e^{-\,0{,}225x}dx$

= 1 - $[-e^{-\,0{,}225x}]_0^{10}$ = 1- ($-e^{-\,0{,}225\times 10} + e^{-\,0{,}225\times 0}$) =1 – ($-e^{-\,2{,}25} + e^0$)

= $e^{-\,2{,}25}$= $0{,}105$

3) E(T) = $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}225}$ = 4,44

Donc la durée moyenne de vie d'un composant électronique est de 4,4 années.

5. EXERCICES

5.1. EXERCICE – DENSITÉ DE PROBABILITE POUR UNE LOI EXPONENTIELLE

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.
Déterminer la fonction densité de probabilité.

f(t) = 0.2*e^-0.2t

5.2. EXERCICE – DENSITÉ DE PROBABILITE POUR UNE LOI EXPONENTIELLE

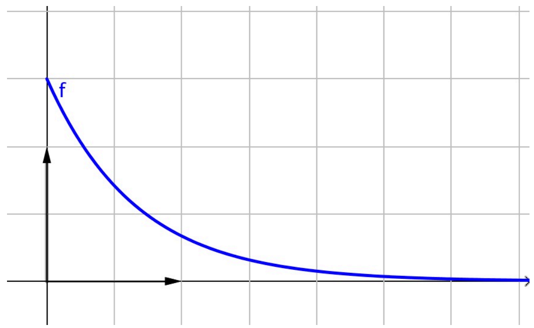
X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La courbe ci-après représente la fonction densité de probabilité associée
lire graphiquement la valeur de λ

1/ calculer P(X < 1) et hachurer cette part en bleu sur le graphe ci-contre

2/ Calculer P(X≥ 2) et hachurer cette part en rouge sur le graphe ci-contre

5.2. EXERCICE – DENSITÉ DE PROBABILITE POUR UNE LOI EXPONENTIELLE (suite)

3/ En déduire P(1 ≤ X≤ 2). Puis hachurer cette part en vert sur le graphe ci-dessous



5.3. EXERCICE – LOI EXPONENTIELLE

les résultats seront donnés à 10^{-3} près.
La durée de vie d'un composant est une variable aléatoire T, exprimée en jours, qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,004.

1/ Quelle est la probabilité que la durée de vie du composant excède 300 jours ?

2/ Quelle est la probabilité que la durée de vie du composant soit d'au plus une année ?

3/ Quelle est la probabilité que la durée de vie du composant soit comprise entre 2 et 3 ans ?

6. CORRECTION DES EXERCICES DU COURS

5.1. EXERCICE – DENSITÉ DE PROBABILITE POUR UNE LOI EXPONENTIELLE

$$f(x) = 0{,}2\, e^{-0{,}2x}$$

5.2. EXERCICE – DENSITÉ DE PROBABILITE POUR UNE LOI EXPONENTIELLE

1/ $\lambda = f(0) =$ 1,5 car si f(x) = $\lambda e^{-\lambda x}$ alors f(0) = λ

2/ P(X < 1) = 1 - $e^{-1{,}5\times 1} = 0{,}777$

3/ P(X≥ 2)= $e^{-1{,}5\times 2} = 0{,}05$

4/ P(1 ≤ X ≤ 2) = P(X≤ 2) – P(X≤1) = 1 - P(X≥ 2) – P(X≤1)
= 1 – 0,777 – 0,05 **= 0,173**

5.3. EXERCICE – LOI EXPONENTIELLE

1/ P(T > 300) = $e^{-0{,}004\times 300} = \mathbf{0{,}301}$

2/ P(T ≤ 365) = 1 - $e^{-0{,}004\times 365} = \mathbf{0{,}768}$ car une année vaut 365 jours

3/ « 2 ans » représente 730 jours et 3 ans 1095
donc P(730≤ T ≤ 1095) =$e^{-0{,}004\times 730}$ - $e^{-0{,}004\times 1095}$ **= 0,041**