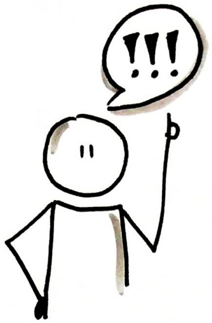
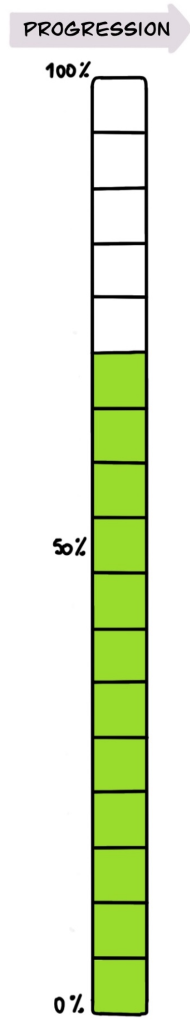


TOUT CE QUE JE DOIS SAVOIR SUR ...

B4. ORIGINAL DE LA TRANSFORMÉE EN Z

A. TFD	~~1~~ ~~2~~ 3 4 5
B. TRANSFO. EN Z	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4
C. PROBA	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6
D. EQUA DIFF.	~~1~~ ~~2~~



Tout Ce Que Je Sais Sur...

- Les signaux de référence avec e(n), r(n) et d(n) (donner leurs expressions, puis leur graphe)

- Un signal retardé (définition, graphe en dessinant le signal de départ et le signal retardé)

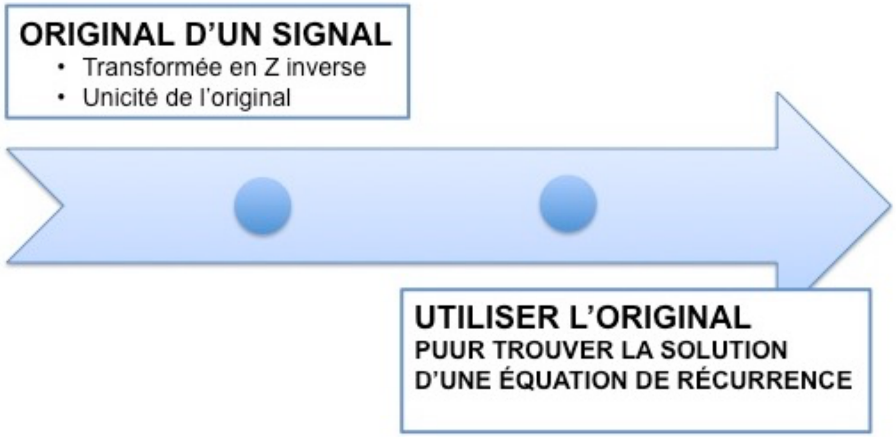
- Suite récurrente (définition, donner un exemple avec calcul des premiers termes)

- Définition d'une suite géométrique

- L'Expression d'une suite géométrique en fonction de n

- La limite pour une suite géométrique

LES THÈMES ABORDÉS DANS CE LIVRET DE RÉVISION



Extrait du formulaire sur la transformée en Z

Signal causal $n \longrightarrow x(n)\ pour\ n\ \in\ \mathbb{N}$	Transformée en Z $z \longrightarrow (Zx)(z) = X(z)$
$e(n) = 1$	$E(z) = \dfrac{z}{z-1}$
$\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0\ si\ n\ \neq 0 \end{cases}$	$D(z) = 1$
$r(n) = n$	$R(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$
$c(n) = n^2$	$C(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(n) = a^n, avec\ a\ \in\ \mathbb{R}^*$	$F(z) = \dfrac{z}{z-a}$
$y(n) = x(n - n_0)$ Ou $y_n = x_{n-n_0}$	$Y(z) = z^{-n_0}\ .\ X(z)$

1. ORIGINAL D'UN SIGNAL

1.1. TRANSFORMÉE EN Z INVERSE

2906

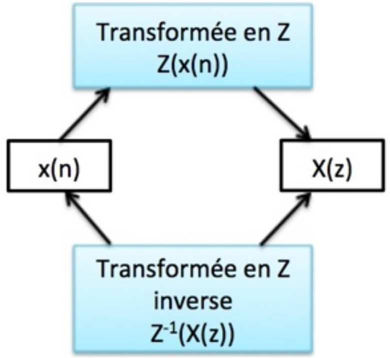
Définition :

On considère x(n) un signal causal discret.

On dit que x(n) est ………………… **de X(z)**

si le signal x(n) admet X(z) comme transformée de Laplace.

C'est-à-dire si X(z) = Z(x(n))



1.2. UNICITÉ DE L'ORIGINAL

2907

Propriété :

Si X(z) admet un original,

Alors celui-ci est ……………….. et on le note x(n) = …………………

Remarque :

Pour retrouver l'original, il suffit d'utiliser, dans le formulaire, le tableau des transformées en Z mais dans l'autre sens :

DE LA COLONNE DE DROITE VERS LA COLONNE DE GAUCHE !!

1.1.1. exemple – original d'un signal connu

Quel est l'original de $\frac{z}{z-1}$?

2908

1

1.1.2. exemple – trouver l'original

Quel signal a pour transformée en Z :

a) $X(z) = 1$ d(n) 2909	b) $Y(z) = \frac{z}{z+1}$ e(n) 2910
c) $Y(z) = \frac{2z}{(z-1)^2}$ 2r(n) 2911	d) $X(z) = 4 - \frac{3z}{z-1}$ 2912 4d(n)-3*e(n)
e) $X(z) = \frac{5z}{z-2} + \frac{4z}{z+4}$ 2914	5*2^n+4*(-4)^n

1.1.3. exemple – original et retard

Quel signal a pour transformée en Z :

a) X(z) = $z^{-1} \times \frac{z}{(z-1)^2}$	b) Y(z) = $2z^{-2} \times \frac{z}{z+4}$
c) T(z) = $-4z^{-3} \times \frac{z}{z-1}$	

r(n-1)

2*-4^(n-2)

-4e(n-3)

1.1.4. exemple – transformer pour trouver l'original

Déterminer les originaux des transformées en Z suivantes :

a) $Y(z) = \frac{1}{z+1}$

2924

b) $X(z) = \frac{4}{(z-1)^2}$

2952

Y(z) = 1/(z+1)

Yn = -1^(n-1)

xn = 4r(n-1)

ATTENTION :

La transformée en z d'un produit N'EST SURTOUT PAS le produit des transformées en z !!!
On utilise la transformée en Z qu'avec des sommes de fonctions multipliées par un coefficient !!

1.1.5. exemple – trouver l'original d'un signal en décomposant la forme de la transformée en Z

On considère la transformée en Z suivante : Y(z) = $\frac{1}{z\,(z-1)}$

1) Trouver a et b deux réels tels que :

$$\frac{1}{z\,(z-1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1}$$

2925

1/z+z/(z-1)

2) Compléter le tableau donnant les originaux de signaux connaissant leurs transformées en Z

2926

Transformée en Z	original
$\frac{1}{z}$	d(n-1)
$\frac{1}{z-1}$	e(n-1)

-d(n-1)+e(n-1)

3)En déduire le signal original y(n) ayant pour transformée de Laplace :

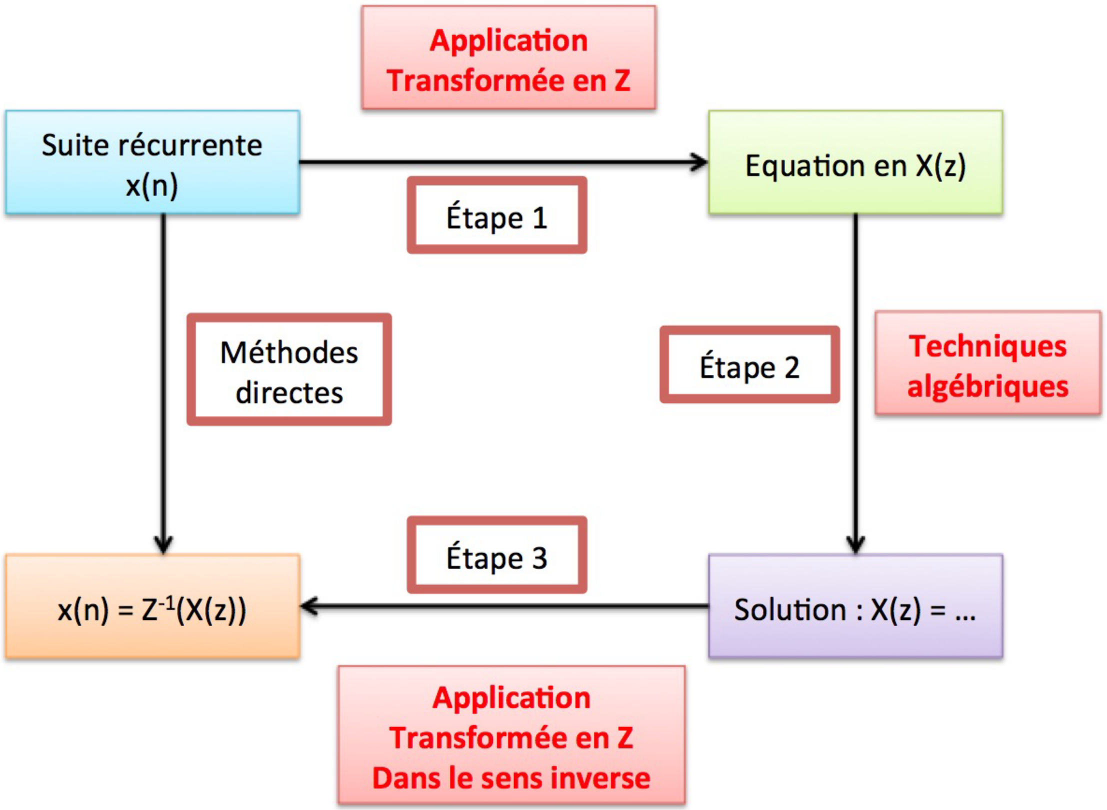
Y(z) = $\frac{1}{z\,(z-1)}$

2923

2. UTILISER L'ORIGINAL POUR TROUVER LA SOLUTION D'UN PROBLÈME

2.1. DÉMARCHE À SUIVRE POUR RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DE RÉCURRENCE

2927



2.1.1. exemple – utilisation de F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)}$

On a la relation de récurrence (1) : $y_n = - y_{n-1} + 2(x_n - x_{n-1})$

On pose F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)}$ avec Y(z) et X(z) les transformées en Z respectives de y(n) et de x(n).

1/ En appliquant la transformée en Z à l'équation de récurrence (1), montrer que :

$$F(z) = \frac{2(z-1)}{z+1}$$

2/ a) Si $x_n = 1$, l'échelon discrète. Que vaut alors X(z)

2/ b) En déduire Y(z) en utilisant l'expression de F(z)

2/ c) en déduire l'original y(n)

3/ a) Si $x_n = n$, la rampe discrète. Que vaut alors X(z)

3/ b) En déduire Y(z) en utilisant l'expression de F(z)

3/ c) A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu :

1	ElémentsSimples $[2z/((z-1)(z+1))]$ $\rightarrow \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+1}$

en déduire l'original y(n).

4/ a) Si $x_n = d_n$ l'impulsion discrète. Que vaut alors X(z)

4/ b) En déduire Y(z) en utilisant l'expression de F(z)

4/ c) A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu :

1	ElémentsSimples $[2(z-1)/(z+1)]$ $\rightarrow 2 - \frac{4}{z+1}$

en déduire l'original y(n).

Y(z) = z^-1*Y(z)+2*X(z)-2*z^-1*X(z)

Y(z)-z^-1*Y(z) = 2*X(z)-2*z^-1*X(z)

Y(z)(1-z^-1) = X(z)*(2-2z^-1)

Y(z)(z/z-1/z) = X(z)(2z/z-2/z)

Y(z)((z-1)/z) = X(z)((2z-2)/z)

Y(z)/X(z) = ((2z-2)/z)/(1/((z-1)/z))

Y(z)/X(z) = ((2z-2)/z)*(z/(z-1))

Y(z)/X(z) = 2(z-1)/(z-1)

2.1.2. exemple – avec une fonction de transfert numérique

On considère le système entrée sortie numérique dont la fonction de transfert numérique F est définie par :

$$F(z) = H\left(100\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \text{ avec } H(p) = \frac{2}{1+\frac{p}{2}}$$

Ce système numérique permet d'approcher un système analogique.
L'entrée et la sortie du système numérique sont modélisées, respectivement, par deux signaux causaux discrets x et y. Ces deux suites admettent des transformées en Z notées, respectivement, X(z) et Y(z) telles que

$$Y(z) = F(z) \times X(z).$$

1. A) Montrer que $F(z) = \frac{2(1+z^{-1})}{51-49\,z^{-1}}$

2938

1/B. En déduire que :

$$51\,Y(z) - 49\,z^{-1}\,Y(z) = 2\,X(z) + 2z^{-1}\,X(z)$$

2939

1/ C. En déduire que pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 0, on a :

$$y(n) = \frac{49}{51}\,y(n-1) + \frac{2}{51}\,x(n) + \frac{2}{51}\,x(n-1)$$

2948

2.1.2. exemple – avec une fonction de transfert numérique (suite)

suite de l'exercice :

2/ On suppose dans cette question que, pour tout nombre entier n, on a :

$x(n) = e(n)$ où e est la suite échelon unité définie par : $\begin{cases} e(n) = 0\ si\ n < 0 \\ e(n) = 1\ si\ n\ \geq 0 \end{cases}$

On admet alors que $Y(z) = \frac{2z(z+1)}{(z-1)(51z-49)}$

2. A) Vérifier que : Y(z) = $\frac{2z}{z-1} - \frac{100}{51} \times \frac{z}{z-\frac{49}{51}}$

2949

2944

2/B. En déduire y(n) pour tout nombre entier naturel n.

3. CORRECTION DES EXEMPLES DU COURS

1.1.1. exemple – original d'un signal connu

Quel est l'original de $\frac{z}{z-1}$?

D'après le tableau, on sait que la transformée en Z de e(n) est : $\frac{z}{z-1}$

Donc l'original de $\frac{z}{z-1}$ est e(n).

1.1.2. exemple – trouver l'original

a)le signal qui a pour transformée en Z : X(z) = 1 est **x(n) = d(n)**

---

b) On voit que Y(z) ressemble à la forme : $\frac{z}{z-a}$ avec a = - 1

Donc le signal qui a pour transformée en Z : Y(z) = $\frac{z}{z+1}$ $\frac{Z}{Z+1}$ est

y(n) = a^n = $(-1)^n$

---

c) On voit que Y(z) = 2 × $\frac{z}{(z-1)^2}$ sachant que r(n) a pour transformée en Z : $\frac{z}{(z-1)^2}$

Donc le signal qui a pour transformée en Z : Y(z) = 2 × $\frac{z}{(z-1)^2}$ est

y(n) = 2 r(n)

---

d) On voit que : X(z) = 4 – $\frac{3z}{z-1}$ = 4 × 1 - 3 × $\frac{z}{z-1}$ sachant que d(n) a pour transformée en Z : 1 et e(n) a pour transformée en Z : $\frac{z}{z-1}$

Donc le signal qui a pour transformée en Z :

X(z) = 4 – $\frac{3z}{z-1}$ = 4 × 1 - 3 × $\frac{z}{z-1}$ est :

x(n) = 4 d(n) – 3 e(n)

1.1.2. exemple – trouver l'original (suite)

e) On voit que : X(z) = $\frac{5z}{z-2} + \frac{4z}{z+4} = 5 \times \frac{z}{z-2} + 4 \times \frac{z}{z+4}$

sachant que $\frac{z}{z-2}$ et que $\frac{z}{z+4}$ ressemblent à $\frac{z}{z-a}$ qui ont pour original a^n avec pour la première a = 2 et pour la seconde a = - 4

Donc le signal qui a pour transformée en Z :

$$X(z) = \frac{5z}{z-2} + \frac{4z}{z+4} = 5 \times \frac{z}{z-2} + 4 \times \frac{z}{z+4} \quad \text{est}$$

$$x(n) = 5\times 2^n + 4\times(-4)^n$$

Donc x(n) = $5\times 2^n + 4\times(-4)^n$

1.1.3. exemple – original et retard

a) X(z) = $z^{-1} \times \frac{z}{(z-1)^2}$.

On reconnaît la forme du retard : $z^{-1} \times Y(z)$.

Donc on a un signal final qui va être retardé de 1. C'est la puissance de z qui nous l'indique.

Or $\frac{z}{(z-1)^2}$ a pour original r(n). Donc on va avoir un retard de 1 sur r(n)

A

Ainsi, l'original de X(z) = $z^{-1} \times \frac{z}{(z-1)^2}$ sera : **x(n) = r(n – 1) pour n $\geq$ 1**

1.1.3. exemple – original et retard (suite)

b) Y(z) = $2z^{-2} \times \frac{z}{z+4}$

On reconnaît la forme du retard: $z^{-2} \times X(z)$.

Donc on a un signal final qui va être retardé de 2. C'est la puissance de z qui nous l'indique.

Or $2\frac{z}{z+4}$ a pour original $(-4)^n$. Donc on va avoir un retard de 2 sur 2 × $(-4)^n$

Ainsi, l'original de Y(z) = $2z^{-2} \times \frac{z}{z+4}$ sera : **y(n) = 2 × $(-4)^{n-2}$ pour n ≥ 2**

---

c) T(z) = $-4z^{-3} \times \frac{z}{z-1}$

On reconnaît la forme du retard: $z^{-3} \times X(z)$.

Donc on a un signal final qui va être retardé de 3. C'est la puissance de z qui nous l'indique.

Or $-4\frac{z}{z-1}$ a pour original e(n). Donc on va avoir un retard de 3 sur - 4 e(n)

Ainsi, l'original de T(z) = $-4z^{-3} \times \frac{z}{z-1}$ sera : **y(n) = -4 e(n - 3) pour n ≥ 3**

1.1.4. exemple – transformer pour trouver l'original

a) Y(z) = $\frac{1}{z+1}$.

On voit que Y(z) ressemble à une transformée en Z connue qui est $\frac{z}{z+1}$

Donc on va transformer Y(z) pour s'approcher de cette forme reconnue

ATTENTION !!
avec les fractions pour obtenir une fraction équivalente
on a juste de droit de diviser ou multiplier numérateur et dénominateur
par le même élément !!

1.1.4. exemple – transformer pour trouver l'original (suite)

Donc Y(z) = $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \times \frac{z}{z+1}$ or On reconnaît que $\frac{1}{z} = z^{-1}$

Donc Y(z) = $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \times \frac{z}{z+1} = z^{-1} \times \frac{z}{z+1}$

On reconnaît la forme du retard qui dit que la transformée en Z de

$x(n-1)$pour n ≥ 1 est : $z^{-1} \times X(z)$

Ce retard va s appliquer sur l'original de $\frac{z}{z+1}$ est $(-1)^n$. Donc c'est $(-1)^n$ qui va être retardé de 1 unité.

Ainsi l'original de Y(z) = $\frac{1}{z+1}$ sera : **y(n) = $(-1)^{n-1}$ pour n ≥ 1**

---

b) X(z) = $\frac{4}{(z-1)^2}$

On voit que Y(z) ressemble à une transformée en Z connue qui est $\frac{z}{(z-1)^2}$

Donc on va transformer Y(z) pour s'approcher de cette forme reconnue

Donc X(z) = $\frac{4}{(z-1)^2} = 4\times \frac{1}{z} \times \frac{z}{(z-1)^2}$ or On reconnaît que $\frac{1}{z} = z^{-1}$

Donc X(z) = $\frac{4}{(z-1)^2} = 4\times \frac{1}{z} \times \frac{z}{(z-1)^2} = 4 \times z^{-1} \times \frac{z}{(z-1)^2}$

On reconnaît la forme du retard qui dit que la transformée en Z de

$x(n-1)$pour n ≥ 1 est : $z^{-1} \times x(n)$

Ce retard va s appliquer sur l'original de $4\frac{z}{(z-1)^2}$ est 4r(n). Donc c'est r(n) qui va être retardé de 1 unité

Ainsi l'original de X(z) = $\frac{4}{(z-1)^2} = 4 \times z^{-1} \times \frac{z}{(z-1)^2}$ sera :

x(n) = 4r(n – 1) pour n ≥ 1

1.1.5. exemple – trouver l'original d'un signal en décomposant la forme de la transformée en Z

1/ $\frac{1}{z\,(z-1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} = \frac{a(z-1)}{z(z-1)} + \frac{bz}{z(z-1)} = \frac{az-a+bz}{z(z-1)} = \frac{(a+b)z-a}{z(z-1)}$

Comme ces deux fractions ont le même dénominateur, alors on va comparer entre eux les numérateurs : 1 = $(a+b)z - a$

En comparant les termes constants et les termes en z, on va faire une identification : $\begin{cases} 1 = -a \\ 0 = a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 0 = -1 + b \Rightarrow b = 1 \end{cases}$

Donc $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z\,(z-1)}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z-1}}$

2/

Transformée en Z	**original**
$\frac{1}{z} = z^{-1} = z^{-1} \times 1$ On reconnaît un retard de 1 sur l'original de 1 qui est d(n)	d(n – 1)
$\frac{1}{z-1} = z^{-1} \times \frac{z}{z-1}$ On reconnaît un retard de 1 sur l'original de $\frac{z}{z-1}$ qui est e(n)	e(n – 1)

3/ Y(z) = $\frac{1}{z\,(z-1)}$

Attention ici on a aucune formule sur la transformée en Z d'un produit dans le tableau.

donc IL EST INTERDIT DE DIRE que y(n) = d(n-1) $\times$ $e(n-1)$
ATTENTION C EST FAUX ET C EST VOTRE ERREUR MAJEUR !!!

1.1.5. exemple – trouver l'original d'un signal en décomposant la forme de la transformée en Z (suite)

Par contre on sait que la transformée en Z d'une somme est la somme des transformées en Z (principe de linéarité)

De plus on a vu à la question 1 que Y(z) = $\frac{1}{z\,(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$

On va utiliser le tableau pour prendre l'original de chacun de ces 2 termes

Donc **y(n) = - d(n – 1) + e(n – 1) pour n ≥ 1.**

2.1.1. exemple – utilisation de F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)}$

1/ On applique la transformée en Z de chaque côté de l'égalité de la relation (1) : $y_n = - y_{n-1} + 2(x_n - x_{n-1})$

On a donc : Y(z) = - z^{-1}Y(z) + 2(X(z) – z^{-1} X(z))

Comme on veut F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)}$ on doit isoler Y(z) dans la partie de gauche, puis on va factoriser par Y(z) dans la partie de gauche et X(z) dans la partie de droite :

Y(z) + z^{-1}Y(z) = 2(X(z) – z^{-1} X(z)) $\Longrightarrow$Y(z) (1+ z^{-1}) = 2X(z) (1- z^{-1})

$\Longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} = \frac{2(1-\frac{1}{z})}{1+\frac{1}{z}}$

On va donc tout multiplier par z, numérateur et dénominateur

Alors $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(z-1)}{z+1} = F(z)$

2/a) Si x_n = 1, l'échelon discrète alors X(z) = $\frac{z}{z-1}$

2/ b) F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(z-1)}{z+1} \Longrightarrow Y(z) = \frac{2(z-1)}{z+1} X(z) = \frac{2(z-1)}{z+1}\frac{z}{z-1} = \frac{2z}{z+1}$

2)c) $Y(z) = \frac{2z}{z+1}$. On reconnaît une transformée en Z du type : $\frac{z}{z-a}$

donc son original est : y(n) = $2(-1)^n$.

2.1.1. exemple – utilisation de F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)}$ (suite)

3/ a) Si $x_n = n$, la rampe discrète alors X(z) = $\frac{z}{(z-1)^2}$

3/ b) F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(z-1)}{z+1} \Longrightarrow Y(z) = \frac{2(z-1)}{z+1} X(z) = \frac{2(z-1)}{z+1} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2z}{(z+1)(z-1)}$

3/ c) d'après le logiciel, il nous informe que $Y(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-1)} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+1}$

On reconnaît 2 transformées en Z :

- une qui est celle de l'échelon unité discrète,
- l'autre du type : $\frac{z}{z-a}$ avec a = -1

Donc **y(n) = e(n) - (-1)^n.**

4/ a) Si $x_n = d_n$ alors X(z) = 1

4/ b) F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(z-1)}{z+1} \Longrightarrow Y(z) = \frac{2(z-1)}{z+1} X(z) = \frac{2(z-1)}{z+1} .1 = \frac{2(z-1)}{z+1}$

4/ c) d'après le logiciel, il nous informe que $Y(z) = \frac{2(z-1)}{z+1} = 2 - \frac{4}{z+1}$

On remarque que $\frac{1}{z+1}$ ressemble à $\frac{z}{z+1}$ dont on connait l'original qui sera : (-1)^n. On voit donc qu'ici il va y avoir un retard !!

Ainsi $Y(z) = 2 \times 1 - 4 \times \frac{1}{z} \times \frac{z}{z+1} = 2 \times 1 - 4 \times z^{-1} \times \frac{z}{z+1}$

Donc **y(n) = 2 d(n) - 4 (-1)$^{n-1}$ pour n $\geq$ 1.**

2.1.2. exemple – avec une fonction de transfert numérique

1/ A. $F(z) = H(100 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})$ avec H(p) = $\frac{2}{1+\frac{p}{2}}$

Donc on va faire de la composition en posant p = $100 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$:

H(p) = $\frac{2}{1+\frac{p}{2}} \Rightarrow H(100 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}) = \frac{2}{1+\frac{100\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{2}} = \frac{2}{1+50\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{2}{\frac{1+z^{-1}}{1+z^{-1}}+50\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

$= \frac{2}{\frac{1+z^{-1}+50-50z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{2(1+z^{-1})}{51-49z^{-1}}$

1/B. On sait que F(z) = $\frac{2(1+z^{-1})}{51-49z^{-1}}$ et Y(z) = F(z) $\times$ X(z).

Donc Y(z) = $\frac{2(1+z^{-1})}{51-49z^{-1}} \times$ X(z) $\Rightarrow$ Y(z)$(51 - 49z^{-1}) = 2(1+z^{-1}) \times$ X(z)

$\Rightarrow$ 51Y(z) – $49z^{-1}$Y(z) = $(2 + 2z^{-1}) \times$ X(z)

$\Rightarrow$ 51Y(z) – $49z^{-1}$Y(z) = 2X(z) + $2z^{-1}$ X(z)

1/C. A partir de 51Y(z) – $49z^{-1}$Y(z) = 2X(z) + $2z^{-1}$ X(z), on a cherché l'original de cette équation :

51 y(n) – 49 y(n – 1) = 2 x(n) – 2 x(n – 1)

$\Rightarrow$ 51 y(n) = 49 y(n – 1) + 2 x(n) – 2 x(n – 1)

$\Rightarrow y(n) = \frac{49}{51} y(n-1) + \frac{2}{51} x(n) + \frac{2}{51} x(n-1)$

2/ si $x(n) = e(n)$ alors X(z) = $\frac{z}{z-1}$

et $x(n-1)$ aura pour transformée en Z : $z^{-1} \times \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z} \times \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}$

alors en prenant la transformée en Z de : $y(n) = \frac{49}{51} y(n-1) + \frac{2}{51} x(n) + \frac{2}{51} x(n-1)$

on aura : Y(z) = $\frac{49}{51} \times z^{-1} Y(z) + \frac{2}{51} \times \frac{z}{z-1} + \frac{2}{51} \times \frac{z}{z-1}$

2.1.2. exemple – avec une fonction de transfert numérique (suite)

On va regrouper les Y(z) entre eux :

$$Y(z) - \frac{49}{51} \times z^{-1}Y(z) = \frac{2}{51} \times \frac{z}{z-1} + \frac{2}{51} \times \frac{1}{z-1}$$

$$\Rightarrow Y(z)\left(1 - \frac{49}{51} \times z^{-1}\right) = \frac{2}{51} \times \frac{z+1}{z-1}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{\frac{2}{51}\times\frac{z+1}{z-1}}{1-\frac{49}{51}\times z^{-1}} = \frac{\frac{2}{51}\times\frac{z+1}{z-1}}{1-\frac{49}{51}\times\frac{1}{z}} = \frac{\frac{2}{51}\times\frac{z+1}{z-1}}{1-\frac{49}{51z}} = \frac{\frac{2}{51}\times\frac{z+1}{z-1}}{\frac{51z-49}{51z}} = \frac{2}{51} \times \frac{z+1}{z-1} \times \frac{51z}{51z-49}$$

$$= 2 \times \frac{z+1}{z-1} \times \frac{z}{51z-49} = \frac{2z(z+1)}{(z-1)(51z-49)}$$

---

c) On va partir du membre de droite en réduisant au même dénominateur pour vérifier si on obtient la même valeur qu'au 2.b

$$\frac{2z}{z-1} - \frac{100}{51} \times \frac{z}{z-\frac{49}{51}} = \frac{2z}{z-1} - \frac{100z}{51\left(z-\frac{49}{51}\right)} = \frac{2z}{z-1} - \frac{100z}{51z-49}$$

$$= \frac{2z(51z-49)}{(z-1)(51z-49)} - \frac{100z(z-1)}{(z-1)(51z-49)} = \frac{102\,z^2-98z-100\,z^2+100z}{(z-1)(51z-49)} = \frac{2\,z^2+2z}{(z-1)(51z-49)}$$

$$= \frac{2z(z+1)}{(z-1)(51z-49)} = Y(z)$$

---

d) pour trouver l'original on ne va pas prendre Y(z) sous la forme d'un produit $\frac{2z(z+1)}{(z-1)(51z-49)}$ car je ne connais pas de formule sur une telle forme

Par contre on a vu que Y(z) pouvait être une somme de deux termes d'après la question c : $\frac{2z}{z-1} - \frac{100}{51} \times \frac{z}{z-\frac{49}{51}}$

On reconnaît Y(z) = $2 \times \frac{z}{z-1} - \frac{100}{51} \times \frac{z}{z-\frac{49}{51}}$

Or $\frac{z}{z-1}$ a pour orignal : e(n) et $\frac{z}{z-\frac{49}{51}}$ ressemble à $\frac{z}{z-a}$ avec a $= \frac{49}{51}$ donc son original sera : $a^n = (\frac{49}{51})^n$

Donc l'original de Y(z) sera : **y(n) = 2 e(n) –** $\boldsymbol{\frac{100}{51} \times \left(\frac{49}{51}\right)^n}$

4. EXERCICES

4.1. EXERCICE – ORIGINAL D'UN SIGNAL

Déterminer les originaux des transformées en Z suivantes :

a) $X(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ c(n)

2911

b) $Y(z) = \frac{z}{z+2}$

Y(z) = -2^n

2910

c) $Y(z) = \frac{5z}{z-1} - 6$

2912

5e(n)-6d(n)

d) $X(z) = \frac{3z}{z-3} + \frac{2z}{z+1}$

2914

3*(3)^n+2*(-1)^n

e) $X(z) = 3\,z^{-2} \times \frac{z}{(z-1)^2}$

X(z) = 3r(n-2)

f) $Y(z) = -\,z^{-3} \times \frac{z}{z+6}$

g) $T(z) = z^{-1} \times \frac{z}{z-1}$

T(z) = e(n-1)

h) $Y(z) = \frac{-4}{z-2}$

2914

Y(z) = -4*2^(n-1)

4.2. EXERCICE – AVEC UNE FONCTION DE TRANSFERT

On a la relation de récurrence (1) : $y_n - 3y_{n-1} = x_n$

On pose $F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ avec Y(z) et X(z) les transformées en Z respectives de y(n) et de x(n).

1/ En appliquant la transformée en Z à l'équation de récurrence (1), montrer que :

$$F(z) = \frac{z}{z-3}$$

Y(z) -3*z^-1*Y(z) = X(z)

2/ A) Si $x_n = d_n$ l'impulsion discrète. Que vaut alors Y(z) ? Penser à utiliser l'expression de F(z).

2/ B) En déduire l'original y(n).

3/ A) Si $x_n = 1$, l'échelon discrète. Que vaut alors Y(z) ? Penser à utiliser l'expression de F(z).

3/ B) A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu :

1	ElémentsSimples $[z^2/((z-3)(z-1))]$ $\rightarrow \frac{3z}{2(z-3)} - \frac{z}{2(z-1)}$

en déduire l'original y(n).

3/2*3^n - 1/2

4.3. EXERCICE – AVEC UNE ÉQUATION DE RÉCURRENCE

On cherche à déterminer la réponse au système décrit par la relation de récurrence :

$$x(n) - 3x(n-1) + 2\,x(n-2) = d(n-2) \quad \text{pour } n \geq 2 \text{ ; avec } x(0) = x(1) = 0$$

et sachant que d(n) est l'impulsion unité discrète

1/ donner les valeurs de x(2) ; x(3) ; x(4)

2950

2/ en appliquant la transformée en Z à cette équation récurrente, montrer que :

$$(Zx)(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

2596

3/ Déterminer les réels A et B tels que :

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

2925

4/ En déduire l'original x solution de cette équation.

2950

5 / Vérifier que l'on retrouve les valeurs trouvées au 1, à partir de l'expression trouvée à la question 4.

1368

4.4. EXERCICE – AVEC UNE FONCTION DE TRANSFERT ANALOGIQUE

On se propose d'approcher la fonction de transfert analogique H par la fonction de transfert numérique F telle que :

$$F(z) = H\left(10\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = H\left(\frac{10\,z-10}{z+1}\right) \text{ avec } H(p) = \frac{1}{1+2p}$$

L'entrée et la sortie du système numérique sont modélisées respectivement par deux signaux causaux discrets x et y, admettant des transformées en Z notées respectivement X et Y.

On se place dans le cas où le signal d'entrée d'un système analogique est U(t), la fonction échelon unité. Ce signal est échantillonné au pas de 0,2. Ainsi, le signal d'entrée x du système numérique est défini par x(n) = U(0,2n) pour tout nombre entier naturel n.
Les transformées en Z des signaux x et y vérifient : $Y(z) = F(z) \times X(z)$

1/ Montrer que $F(z) = \frac{z+1}{21z-19}$

2938

2/ A. représenter x(n) dans un repère orthonormé.
Quel est en fait ce signal ?

2/ B. Déterminer X(z)

2/ C) en déduire la forme de Y(z)

3 / Vérifier que $Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{20}{21}\left(\frac{z}{z-\frac{19}{21}}\right)$

2949

4/ En déduire l'expression de y(n), pour tout nombre entier naturel n

2949

5. CORRECTION DES EXERCICES DU COURS

4.1. EXERCICE – ORIGINAL D'UN SIGNAL

a) x(n) = c(n) = n^2

b) y(n) = $(-2)^n$

c) y(n) = 5e(n) – 6 d(n)

d) x(n) = $3 \times 3^n + 2 \times (-1)^n = \mathbf{3^{n+1} + 2 \times (-1)^n}$

e) X(z) = $3\,z^{-2} \times \frac{z}{(z-1)^2}$. On reconnaît la formule du retard: $z^{-2} \times Y(z)$.

Donc on a un signal final qui va être retardé de 2. C'est la puissance de z qui nous l'indique.

Or $3\,\frac{z}{(z-1)^2}$ a pour original 3 r(n). Donc on va avoir un retard de 2 sur 3 r(n).

Ainsi, l'original de X(z) = $3\,z^{-2} \times \frac{z}{(z-1)^2}$ sera : x(n) = 3 r(n - 2) pour $n \geq 2$

f) Y(z) = $-z^{-3} \times \frac{z}{z+6}$: On reconnaît la formule du retard: $z^{-3} \times Y(z)$.

Donc on a un signal final qui va être retardé de 3. C'est la puissance de z qui nous l'indique.

Or $-\frac{z}{z+6}$ a pour original – $(-6)^n$. Donc on va avoir un retard de 3 sur – $(-6)^n$.

Ainsi, l'original de Y(z) = $-z^{-3} \times \frac{z}{z+6}$ sera : y(n) = – $(-6)^{n-3}$ pour $n \geq 3$

g) T(z) = $z^{-1} \times \frac{z}{z-1}$: On reconnaît la formule du retard: $z^{-1} \times X(z)$.

Donc on a un signal final qui va être retardé de 1. C'est la puissance de z qui nous l'indique.

Or $\frac{z}{z-1}$ a pour original e(n). Donc on va avoir un retard de 1 sur e(n).

Ainsi, l'original de T(z) = $z^{-1} \times \frac{z}{z-1}$ sera : t(n) = e(n-1) pour $n \geq 1$

4.1. EXERCICE – ORIGINAL D'UN SIGNAL (suite)

h) Y(z) = $\frac{-4}{z-2}$ = $-4 \times z^{-1} \times \frac{z}{z-2}$. On reconnaît la formule du retard: $z^{-1} \times X(z)$. Donc on a un signal final qui va être retardé de 1. C'est la puissance de z qui nous l'indique.

Or $-4\frac{z}{z-2}$ a pour original -4×2^n . Donc on va avoir un retard de 1 sur -4×2^n

Ainsi, l'original de Y(z) = $\frac{-4}{z-2}$ = $-4 \times z^{-1} \times \frac{z}{z-2}$ sera :

$$\mathbf{y(n) = -4 \times 2^{n-1}\, e(n-1) = -4 \times 2^{n-1} \text{ si } n \geq 1}$$

4.2. EXERCICE – AVEC UNE FONCTION DE TRANSFERT

1/ On applique la transformée en Z de chaque côté de l'égalité de la relation (1) : $y_n - 3y_{n-1} = x_n$

On a donc : $Y(z) - 3\,z^{-1}Y(z) = X(z)$

Comme on veut F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)}$, on doit isoler Y(z) donc on va factoriser par Y(z) dans la partie de gauche.

$Y(z) - 3\,z^{-1}Y(z) = X(z) \Rightarrow Y(z)\,(1 - 3\,z^{-1}) = X(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-3z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{3}{z}}$

On va donc tout multiplier par z, numérateur et dénominateur.

Alors $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z-3} = F(z)$

2/ a) Si $x_n = d_n$ alors X(z) = 1 donc F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{1} = \frac{z}{z-3} \Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z-3}$

2/ b) si $Y(z) = \frac{z}{z-3}$ alors on reconnaît une transformée en Z du type : $\frac{z}{z-a}$ donc y(n) = 3^n.

4.2. EXERCICE – AVEC UNE FONCTION DE TRANSFERT (suite)

3/a) Si $x_n = 1$, l'échelon discrète alors X(z) = $\frac{z}{z-1}$ donc F(z) = $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z-3}$

$\Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z-3}\ X(z) = \frac{z}{z-3} \times \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-3)(z-1)}$

3)b) d'après le logiciel, il nous informe que

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-3)(z-1)} = \frac{3z}{2(z-3)} - \frac{z}{2(z-\ 1)}$$

On reconnaît 2 transformées en Z :

- une du type : $\frac{z}{z-a}$ avec a = 3
- et l'autre qui est celle de l'échelon unité discrète

Donc **y(n) =** $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \times \mathbf{3}^{\boldsymbol{n}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

4.3. EXERCICE – AVEC UNE ÉQUATION DE RÉCURRENCE

1/ Pour n = 2 : x(2) – 3x(2 – 1) + 2 x(2 – 2) = d(2 – 2)

$\Rightarrow$ x(2) – 3x(1) + 2 x(0) = d(0) or $x(0) = x(1) = 0$ et d(0) = 1 Donc **x(2) = 1**

Pour n = 3 : x(3) – 3x(2) + 2 x(1) = d(1) or $x(1) = 0$; x(2) = 1 et d(1) = 0

Donc **x(3) = 3**

Pour n = 4 : x(4) – 3x(3) + 2 x(2) = d(2) or x(2) = 1 ; x(3) = 3 et d(2) = 0

Donc **x(4) = 7**

2/ x(n) – 3x(n – 1) + 2 x(n – 2) = d(n – 2)

$\Rightarrow X(z) - 3z^{-1}X(z) + 2z^{-2}X(z) = z^{-2}.D(z)$

On va tout multiplier par z^2 :

$z^2X(z) - 3zX(z) + 2X(z) = 1 \Rightarrow (z^2 - 3z + 2)X(z) = 1 \Rightarrow X(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$

Or $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z^2-2z-z+2} = \frac{1}{z^2-3z+2}$ = X(z).

4.3. EXERCICE – AVEC UNE ÉQUATION DE RÉCURRENCE (suite)

3/ $\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2)}{(z-1)(z-2)} + \frac{B(z-1)}{(z-1)(z-2)} = \frac{Az-2A+Bz-B}{(z-1)(z-2)} = \frac{(A+B)z-2A-B}{(z-1)(z-2)}$

$= \frac{1}{(z-1)(z-2)}$

Donc par identification : $\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A = 1 \\ B = -A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A = -1} \\ \boldsymbol{B = 1} \end{cases}$

Donc $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$

4/ X(z) = $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -1 \times z^{-1} \times \frac{z}{z-1} + z^{-1} \times \frac{z}{z-2}$

Donc x(n) **= - e(n - 1) + 2$^{\mathbf{n-1}}$ e(n - 1)**

Ou pour **n** $\geq$ **1, x(n) = -1 + 2$^{\mathbf{n-1}}$.**

5/ x(n) = -1 + 2^{n-1} alors

- x(2) = -1 + 2^{2-1} = 1 ;
- x(3) = -1 + 2^{3-1} = 3 ;
- x(4) = -1 + 2^{4-1} = 7

4.4. EXERCICE – AVEC UNE FONCTION DE TRANSFERT ANALOGIQUE

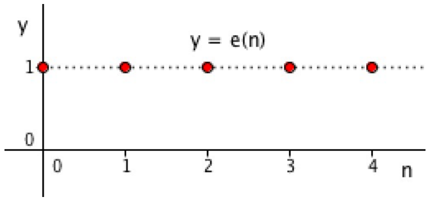
$1/\ F(z) = H(\frac{10z-10}{z+1}) = \frac{1}{1+2(\frac{10z-10}{z+1})} = \frac{1}{\frac{z+1+20z-20}{z+1}} = \frac{z+1}{21z-19}$

2/ A) Pour trouver les valeurs à placer penser à faire un tableau de valeurs !! !

n	**0**	**1**	**2**	**3**
x(n)	x(0) = U(0) = 1	x(0) = U(0,2) = 1	x(0) = U(0,4) = 1	x(0) = U(0,6) = 1

4.4. EXERCICE – AVEC UNE FONCTION DE TRANSFERT ANALOGIQUE (suite)

2/ A) On reconnaît le signal e(n) : échelon discret.



2/ B) Comme x(n) = e(n), alors X(z) = $\frac{z}{z-1}$

2/ C)Y(z) = F(z) × X(z) = $\frac{z+1}{21z-19} \times \frac{z}{z-1}$

3) $\frac{z}{z-1} - \frac{20}{21}\left(\frac{z}{z-\frac{19}{21}}\right) = \frac{z}{z-1} - \frac{20z}{21z-19} = \frac{z(21z-19)}{(z-1)(21z-19)} - \frac{20z(z-1)}{(21z-19)(z-1)}$

$= \frac{21z^2-19z-20z^2+20z}{(z-1)(21z-19)} = \frac{z^2+z}{(z-1)(21z-19)} = \frac{(z+1)z}{(z-1)(21z-19)} = Y(z)$

4/ D'après la question 3/, Y(z) = $\frac{z}{z-1} - \frac{20}{21}\left(\frac{z}{z-\frac{19}{21}}\right)$

donc y(n) = **e(n) -** $\mathbf{\frac{20}{21}} \times (\mathbf{\frac{19}{21}})^{\boldsymbol{n}}$