# 모의고사 행렬과 그 연산

행렬 ~ 행렬의 연산

U2M 유투엠
개별맞춤식 프리미엄 수학

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

2025.06.22 | 41문제 | 부원장 이름 ______________

## 빠른정답

| | | |
|---|---|---|
| 01 ② | 02 ④ | 03 14 |
| 04 13 | 05 9 | 06 ③ |
| 07 12 | 08 25 | 09 20 |
| 10 4 | 11 502 | 12 ② |
| 13 18 | 14 37 | 15 ④ |
| 16 ④ | 17 ① | 18 25 |
| 19 ② | 20 ③ | 21 ③ |
| 22 ④ | 23 ① | 24 40 |
| 25 26 | 26 ⑤ | 27 102 |
| 28 ⑤ | 29 32 | 30 64 |
| 31 33 | 32 ① | 33 ④ |
| 34 ③ | 35 ⑤ | 36 250 |
| 37 27 | 38 ④ | 39 ⑤ |
| 40 ④ | 41 ③ | |

# 모의고사 행렬과 그 연산

행렬 ~ 행렬의 연산

U2M 유투엠 개별맞춤식 프리미엄 수학

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

2025.06.22 | 41문제 | 부원장 이름 ____________

## 01 정답 ②

해설 주어진 행렬의 성질 이해하기

이차방정식 $x^2-2(i+j)x+9=0$의 판별식이

$D/4=(i+j)^2-9$ 이므로

(i) $(1,\ 1)$성분 $D/4=-5<0$, $a_{11}=0$

(ii) $(1,\ 2)$성분 $D/4=0$, $a_{12}=1$

(iii) $(2,\ 1)$성분 $D/4=0$, $a_{21}=1$

(iv) $(2,\ 2)$성분 $D/4=7>0$, $a_{22}=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

## 02 정답 ④

해설 행렬의 성분 구하기

이차방정식 $x^2+2mx+n=0$의

판별식 $D/4=m^2-n$에서

$m=1$, $n=1$일 때, $D/4=0$ $\therefore a_{11}=0$

$m=1$, $n=2$일 때, $D/4<0$ $\therefore a_{12}=-1$

$m=2$, $n=1$일 때, $D/4>0$ $\therefore a_{21}=1$

$m=2$, $n=2$일 때, $D/4>0$ $\therefore a_{22}=1$

따라서 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이다.

## 03 정답 14

해설 주어진 행렬의 성질 이해하기

$a_{ij}=a_{ji}$ 이므로 $a_{12}=a_{21}$

$b_{ij}=-b_{ji}$ 이므로 $b_{11}=b_{22}=0$, $b_{21}=-b_{12}$

$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ -b_{12} & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}+b_{12} \\ a_{21}-b_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

$a_{22}=7$, $a_{21}=7$

$\therefore a_{21}+a_{22}=14$

## 04 정답 13

해설 행렬의 성분을 구하고 행렬의 곱셈을 할 수 있는가?

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$이므로

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB$의 $(2,2)$성분은 13이다.

## 05 정답 9

해설 행렬의 곱의 성분이 소수가 되는 조건 구하기

$\begin{pmatrix} n-1 & 9-3n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n^2-4n+4 \\ n-1 \end{pmatrix}$

$=(n-1)(n-2)^2-3(n-1)(n-3)$

$=(n-1)(n^2-7n+13)$

$(n-1)(n^2-7n+13)$이 소수가 되려면

$n-1=1$이고 $n^2-7n+13$은 소수이거나

$n^2-7n+13=1$이고 $n-1$은 소수이어야 한다.

즉, $n=2,\ 3,\ 4$이고, 이때의 성분은 각각 $3,\ 2,\ 3$이다.

따라서 모든 $n$의 합은

$2+3+4=9$

## 06 정답 ③

**해설** 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 (가)에서

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p-q \\ r-s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ p=q,\ \ r=s$

$\therefore\ B=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$

이때 (나)에서

$AB=\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$

이므로 $p+r=2$이다.

또, $BA=\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$이므로

$1+a=4$ 즉, $a=3$이다.

($\because$ $1+a\neq4$이면 $p=0,\ r=0$이므로 모순이다.)

따라서 $A+B=\begin{pmatrix} 1+p & 1+p \\ a+r & a+r \end{pmatrix}$의

$(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분의 합은

$1+p+a+r=1+a+(p+r)$

$=1+3+2=6$

## 07 정답 12

**해설** 행렬의 연산과 이차함수의 최솟값을 이용하여 행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=2aA$

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=2a\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab \\ 2ab & 2ac \end{pmatrix}$

$a^2+b^2=2a^2,\ ab+bc=2ab$

$a^2=b^2,\ bc=ab$

$a,\ b,\ c$가 양수이므로 $a=b=c$이다.

$f(x)=ax^2+ax+a=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a$

최솟값이 3이므로 $a=4$이다.

$\therefore\ a+b+c=12$

## 08 정답 25

**해설** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}$이므로 $A^2=\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$,

$5A=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5p \end{pmatrix}$이다.

$\therefore\ D(A^2)=p^2,\ D(5A)=25p$

따라서 $p^2=25p$이므로

$p=0$ 또는 $p=25$

따라서 모든 상수 $p$의 값의 합은 25이다.

## 09 정답 20

**해설** 이차함수의 그래프와 행렬의 대응을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

이차함수 $f(x)=2(x-1)^2+2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 2)$이고 $y$절편은 4이므로

이에 대응하는 행렬 $F$는 $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$이다.

$\therefore\ F^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$

행렬 $F^2$은 이차함수 $g(x)$의 그래프에 대응되는 행렬이므로 꼭짓점의 좌표는 $(5,\ 10)$이고 $y$절편은 20임을 알 수 있다.

그리고 $g(0)$는 그래프의 $y$절편과 같으므로 $g(0)=20$이다.

## 10 정답 4

**해설** 행렬의 연산을 이해하여 규칙성 추론하기

$AB+A=O$에 대입하여 정리하면

$\begin{pmatrix} 1 & -a+b+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $a=1,\ b=-1$이므로

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이고 $A^2=O$이다.

따라서 $A+A^2+\cdots+A^{2010}=A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

이므로

$p=1,\ q=-1,\ r=1,\ s=-1$

따라서 $p^2+q^2+r^2+s^2=4$ 이다.

## 11 정답 502

**해설** 행렬 곱을 이용하여 문제 해결하기

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \cdots$ 이므로

$a=0$,

$b=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-1003+1004)$

$=502$,

$c=0,\ d=0$

$\therefore\ a+b+c+d=502$

## 12 정답 ②

**해설** 행렬의 거듭제곱 계산하기

$A^{n+2}=A^{n+1}-A^n$에서

$A^3=A^2-A$

$A^4=A^3-A^2=(A^2-A)-A^2=-A$

$A^5=A^4-A^3=-A-(A^2-A)=-A^2$

$A^6=A^5-A^4=-A^2-(-A)=-A^2+A$

$A^7=A^6-A^5=-A^2+A-(-A^2)=A$

$\therefore A^{2009}=(A^7)^{287}=A^{287}=(A^7)^{41}=A^{41}$

$=(A^7)^5A^6=A^5A^6=A^{11}=A^7A^4$

$=AA^4=A^5=-A^2$

## 13 정답 18

**해설** $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 6a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 9a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} a^3 & 9a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & 12a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 3n\cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

따라서 $(1,\ 1)$ 성분과 $(1,\ 2)$ 성분이 같으므로

$a^n=3n\cdot a^{n-1}$, $a=3n$

$n=1$일 때 $a=3$

$n=2$일 때 $a=6$

$n=3$일 때 $a=9$

$\vdots$

이므로 8이하의 모든 자연수 $a$의 값들의 곱은

$3\cdot 6=18$

## 14 정답 37

**해설** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 2-2^2 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 2^2 & 2-2^2 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2-2^3+2^4 \\ 0 & -2^6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2-2^3+2^4 \\ 0 & -2^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2^4 & 2^3-2^4+2^5-2^6 \\ 0 & 2^8 \end{pmatrix}$

따라서 $(1, 2)$의 성분이

$2^4-2^5+2^6-2^7+2^8$

이 되는 행렬은 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^5$ 이고

그 때의 $(1, 1)$의 성분은 $2^5=32$ 이다.

$\therefore a+n=32+5=37$

## 15 정답 ④

**해설** 행렬의 곱셈을 이용하여 실생활 문제 해결하기

표에서 각 세트에 구성된 과자와 사탕의 봉의 개수를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$이고 각 세트의 개수가 10, 15이므로 전체 과자와 사탕의 봉의 개수는

$\begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$=(10\cdot 5+15\cdot 2 \quad 10\cdot 1+15\cdot 4)$이다.

한 봉 당 과자가 500원, 사탕이 800원이므로

전체 구입금액은

$\begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 800 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 80\cdot 500 \\ 70\cdot 800 \end{pmatrix}$

따라서 필요한 금액을 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 800 \end{pmatrix}$ 또는

$\begin{pmatrix} 500 & 800 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

## 16 정답 ④

**해설** $AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} \Leftarrow$ ㉮, ㉯의 상반기 제조원가

$b=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \Leftarrow$ ㉮, ㉯의 하반기 제조원가

$c=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \Leftarrow$ ㉮, ㉯의 상반기 판매가격

$d=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \Leftarrow$ ㉮, ㉯의 하반기 판매가격

ㄱ. $a+b$는 ㉮, ㉯의 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 제조원가 (거짓)

ㄴ. $c+d$는 ㉮, ㉯의 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 판매가격 (참)

ㄷ. $d-b$는 ㉮, ㉯의 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 이익금의 총액 (참)

## 17 정답 ①

**해설** 행렬을 이용하여 전력량 요금에 대한 실생활 문제를 해결한다.

전력량 요금은 다음과 같다.

$(100\times59)+\{(a-100)\times122\}$

주어진 행렬에서

$\begin{pmatrix} 100 & a \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 59 \\ 122 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 100\times59+a\times122 \\ 0\times59+x\times122 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 100\times59+a\times122 \\ x\times122 \end{pmatrix}$

성분의 합과 전력량 요금이 같으므로

$x=-100$

## 18 정답 25

**해설** 실생활의 상황을 행렬을 이용하여 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

남아 있는 에너지는 $1000-2x-3y$이고,

현재의 점수는 $100+10x+20y$이므로

$a=-2,\ b=-3,\ c=10,\ d=20$

$\therefore\ a+b+c+d=-2-3+10+20=25$

## 19 정답 ②

**해설** 행렬을 이용하여 매출액 구하기

제 1문구점의 이틀 동안의 매출액

$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 250 \\ 150 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2550 \\ 2850 \end{pmatrix}$

제 2문구점의 이틀 동안의 매출액

$\begin{pmatrix} 7 & x(x-2) \\ x & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2100+100x(x-2) \\ 300x+300 \end{pmatrix}$

$100x(x-2)+300x+2400=5400$

$x^2+x-30=0$

$x=-6$ 또는 $x=5$

따라서 $x=5\ (\because\ x\geq2)$

따라서 제 2문구점의 제 2일 매출액은 1800원

## 20 정답 ③

**해설** 행렬의 곱셈을 이용하여 실생활에서의 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

(i) A과수원에서는 $a_{11}$그루의 사과나무에서 평균 $b_{11}$ 개의 사과가 열리고, B과수원에서는 $a_{12}$그루의 사과나무에서 평균 $b_{21}$ 개의 사과가 열리므로 두 과수원에서 생산된 사과의 총 개수는 $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=a$(개)이다.

(ii) 두 과수원에서 생산된 복숭아의 총 개수는$a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=d$(개)이고, 복숭아 나무의 총 그루수는 $a_{21}+a_{22}=q$ 이므로 두 과수원의 복숭아 한그루당 열매의 평균개수는 $\frac{d}{q}$ (개)이다

## 21 정답 ③

**해설** 실생활 관련 문제를 행렬의 곱셈으로 표현한다.

A 학과 일반 전형의 지원자 수는 $30\times5.1$

B 학과 일반 전형의 지원자 수는 $40\times10.7$

A 학과 특별 전형의 지원자 수는 $10\times21.4$

B 학과 특별 전형의 지원자 수는 $20\times11.5$

A, B 두 학과의 일반 전형 지원자 수의 합 $m$은

$m=30\times5.1+40\times10.7$

B 학과의 일반 전형과 특별 전형 지원자 수의 합 $n$은

$n=40\times10.7+20\times11.5$

한편, 두 행렬 $P=\begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 5.1 & 21.4 \\ 10.7 & 11.5 \end{pmatrix}$에서

$PQ=\begin{pmatrix} 30\times5.1+40\times10.7 & 30\times21.4+40\times11.5 \\ 10\times5.1+20\times10.7 & 10\times21.4+20\times11.5 \end{pmatrix}$

$QP=\begin{pmatrix} 5.1\times30+21.4\times10 & 5.1\times40+21.4\times20 \\ 10.7\times30+11.5\times10 & 10.7\times40+11.5\times20 \end{pmatrix}$

이므로 $m$은 행렬 $PQ$의 $(1,\ 1)$성분과 같고,

$n$은 행렬 $QP$의 $(2,\ 2)$성분과 같다.

따라서 $m+n$의 값은 행렬 $PQ$의 $(1,\ 1)$성분과 행렬 $QP$의 $(2,\ 2)$성분의 합과 같다.

## 22 정답 ④

**해설** 실생활과 관련된 행렬 문제의 표현력을 측정한다.

$PQ=\begin{pmatrix}20 & 30\\25 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.4 & 1.3\\1.4 & 1.2\end{pmatrix}$ 이므로

$PQ$의 $(2,\ 2)$성분은 $25\times1.3+15\times1.2$ 이다.

한편 $25\times1.3+15\times1.2=25(1+0.3)+15(1+0.2)$

에서 $25(1+0.3)$, $15(1+0.2)$는 각각 '을' 공장에서 올해 계획한 제품 A, B의 생산량과 같다.

따라서, $PQ$의 $(2,\ 2)$성분은 '을' 공장이 올해 계획한 제품 A와 B의 생산량의 합을 나타낸다.

## 23 정답 ①

**해설** 행렬의 곱셈을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

2차 조사에서 찬성한 사원의 비율과 반대한 사원의 비율을 나타내는 행렬이 $AB=(a\quad b)$일 때,

3 차 조사에서 찬성한 사원의 비율은 $0.9a+0.4b$로

행렬 $ABC$의 $(1,\ 1)$성분과 같다.

## 24 정답 40

**해설** 이차정사각행렬의 연산을 이해하기

$A+kB=\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$에서 $k=1$이면 $A+B=E$가

성립하지 않으므로 $k\neq1$이다.

$A+kB=\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$, $A+B=E$를 연립하여 풀면

$(k-1)B=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ $\cdots$ ㉠

$$\begin{aligned}\therefore\ (k-1)^2B^2&=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3 & 6\\3 & 6\end{pmatrix}\\&=3\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\\&=3(k-1)B\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

즉, $(k-1)^2B^2=3(k-1)B$이고 $B^2=B$이므로

$(k-1)^2B=3(k-1)B$

이때 $k\neq1$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$(k-1)^2=3(k-1)$, $k-1=3$

따라서 $k=4$이므로

$10k=40$

## 25 정답 26

**해설** 행렬의 연산을 이용하여 이차함수의 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A+B=O$이므로

$\begin{pmatrix}1 & a\\b & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & b-10\\a-10 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0 & a+b-10\\a+b-10 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore\ a+b=10$ $\cdots$ ㉠

$\begin{pmatrix}1 & a\\b & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\b & -1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1+ab & 0\\0 & ab+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}$

$\therefore\ ab+1=k$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$k=ab+1=a(10-a)+1=-(a-5)^2+26$

따라서 $k$의 최댓값은 26이다.

## 26 정답 ⑤

**해설** 행렬의 성질 추론하기

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}$ 라 두면

$AX=XA$ 이므로

$bz=\boxed{cy}$, $(a-d)y=b(x-w)$,

$(a-d)z=c(x-w)$ 이다.

( i ) $a-d=0$ 인 경우

$A\neq kE$ 에서 $b\neq0$ 또는 $c\neq0$ 이므로

$x=w$ 이다.

㉠ $b\neq0$ 이면 $z=\boxed{\dfrac{cy}{b}}$ 이므로

$$X=\begin{pmatrix}x & y\\z & x\end{pmatrix}=\boxed{\dfrac{y}{b}}A+\left(x-\dfrac{a}{b}y\right)E$$

㉡ $c\neq0$ 이면 $y=\dfrac{bz}{c}$ 이므로

$$X=\begin{pmatrix}x & y\\z & x\end{pmatrix}=\dfrac{z}{c}A+\left(x-\dfrac{a}{c}z\right)E$$

(ii) $a-d\neq0$인 경우

$y=\dfrac{b(x-w)}{a-d}$, $z=\dfrac{c(x-w)}{a-d}$ 이므로

$X=\dfrac{x-w}{a-d}A+\boxed{\dfrac{aw-dx}{a-d}}E$ 이다.

( i )과 (ii)에 의해 이차정사각행렬 $X$는

$X=mA+nE$ 형태로 나타낼 수 있다.

## 27 정답 102

**해설** 행렬의 거듭제곱에 대한 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에서 $A^3=-E$이므로 $A^6=E$이다.

따라서 다음 등식이 성립한다.

$A=A^7=A^{13}=\cdots=A^{97}$

$A^2=A^8=A^{14}=\cdots=A^{98}$

$A^3=A^9=A^{15}=\cdots=A^{99}$

$A^4=A^{10}=A^{16}=\cdots=A^{100}$

$A^5=A^{11}=A^{17}=\cdots=A^{95}$

$A^6=A^{12}=A^{18}=\cdots=A^{96}$

즉, $A^m=A^n$이 성립하려면 $|m-n|$의 값이 6의 배수가 되어야 한다.

따라서 $|m-n|$의 최댓값은 96, 최솟값은 6 이다.

$\therefore p+q=96+6=102$

## 28 정답 ⑤

**해설** 행렬의 곱셈을 이용하여 명제의 참, 거짓을 추론한다.

$A^2=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$

ㄱ. $A^2=O$에서 $\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a^2-b^2=0$, $2ab=0$에서 $a=b=0$

$\therefore A=O$ (참)

ㄴ. $A^2+E=O$에서 $A^2=-E$

즉, $\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$a^2-b^2=-1$, $2ab=0$에서

$a=0$, $b=-1$ 또는 $a=0$, $b=1$

따라서 조건을 만족시키는 행렬 $A$는

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$으로 2개이다. (참)

ㄷ. $A^2-A=O$에서 $A^2=A$

$\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$a^2-b^2=a$, $2ab=b$

$b=0$이면 $a^2=a$에서 $a=0$ 또는 $a=1$

$b\neq 0$이면 $a=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{4}-b^2=\frac{1}{2}$에서

$b^2=-\frac{1}{4}$을 만족시키는 실수 $b$는 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 행렬 $A$는

$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$로 2개이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

## 29 정답 32

**해설** 행렬의 거듭제곱을 이용하여 문제 해결하기

$BA=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=-E$이다.

그러므로 $AB=BA$이다. 준식을 정리하면

$B^4A^8=(BA)^4A^4=(-E)^4A^4=A^4$

이므로 행렬 $A^4$을 구하자.

행렬 $A$의 거듭제곱을 구하면

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 $A^4$의 모든 성분의 합은 32이다.

## 30 정답 64

**해설** 행렬의 성질 이해하기

$A^2-A+E=O$이므로 $A^3=-E$

$B^2+2B=O$에서 $B^2=-2B$

$A^7B^7=(-2)^6AB=64AB$

$\therefore k=64$

## 31 정답 33

**해설** 행렬의 거듭제곱을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이므로 $A^3=-E$이다.

$\therefore A^6=E$

그런데 $(A^n)^2=A^{2n}=E$이므로 $n$은 3의 배수이어야 한다.

따라서 구하는 100이하의 자연수 $n$은 33개다.

## 32 정답 ①

**해설** 행렬의 연산을 이용하여 추론하기

$A$가 $A^2=E$를 만족시키므로

$$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & 2b\times(a+3) \\ 2c\times(a+3) & (a+6)^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이다.

따라서 $b\times(a+3)=c\times(a+3)=0$이다.

(ⅰ) $a\neq\boxed{-3}$ 인 경우

$b=0$이고 $c=0$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & (a+6)^2 \end{pmatrix}$ …… ㉠이다.

㉠에서 $A^2\neq E$이므로 주어진 조건에 모순이다.

(ⅱ) $a=\boxed{-3}$ 인 경우

주어진 조건 $A^2=E$에서 $bc=\boxed{-8}$이다.

$b$, $c$가 정수이고 8의 약수의 개수가 4개이므로 $bc=\boxed{-8}$을 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 $\boxed{8}$이다.

따라서 $A^2=E$를 만족시키는 행렬 $A$의 개수는 $\boxed{8}$이다.

따라서 $p=-3$, $q=-8$, $r=8$이므로

$p+q+r=-3$

## 33 정답 ④

**해설** $a_{11}=0$, $a_{12}=-1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$이므로

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$A^3=-A$, $A^4=E$, $A^5=A$, $\cdots$

$$\begin{aligned}\therefore\ & A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010} \\ &=(A+A^2+A^3+A^4)+\cdots \\ &\qquad +(A^{2005}+\cdots+A^{2008})+A^{2009}+A^{2010} \\ &=O+\cdots+O+A+A^2 \\ &=A-E=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $(2,\ 1)$의 성분은 1이다.

## 34 정답 ③

**해설** 행렬의 거듭제곱 계산하기

$A^3=-E$, $A^4=-A$

$E+A^2+A^4+A^6+\cdots+A^{100}$

$=(E+A^2-A)+\ \cdots\ +(E+A^2-A)$

$=17(E+A^2-A)=O$

## 35 정답 ⑤

**해설** 행렬의 연산을 이용하여 추론하기

(가) $-\alpha$ (나) $\alpha\beta$ (다) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{n-1}{2}}A$

## 36 정답 250

**해설** 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=-4E$$

따라서 $n$은 4의 배수이어야 하므로 구하는 자연수 $n$의 개수는 $\dfrac{1000}{4}=250$이다.

## 37 정답 27

**해설** 행렬의 거듭제곱의 규칙성을 찾을 수 있는가를 묻는 문제이다.

$X=X(X+Y)=X^2+XY=X^2$이므로

$X^3=X^2X=X$, $X^4=X^3X=X^2=X$, $\cdots$

즉, $X^n=X$ ($n$은 자연수) $\cdots$ ㉠

마찬가지 방법으로 정리하면

$Y^n=Y$ ($n$은 자연수) $\cdots$ ㉡

또한 $X=X(X+Y)=(X+Y)X$

$\therefore\ XY=YX=O$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터

$A^3=(3X+Y)^3$

$=3^3X^3+3\cdot 3X\cdot Y(3X+Y)+Y^3$

$=3^3X+Y$

따라서 $a=27$이다.

## 38 정답 ④

**해설** 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $(A+2B)^2=(A-2B)^2$에서

$A^2+2AB+2BA+4B^2$

$=A^2-2AB-2BA+4B^2$

$4AB+4BA=O$

$\therefore AB+BA=O$ (참)

ㄷ. $AB=A$ …… ㉠,

$BA=B$ …… ㉡

㉠의 양변 오른쪽에 행렬 $A$를 곱하면 $ABA=A^2$,

이 식에 ㉡을 대입하면 $A^2=AB=A$이고,

㉡의 양변 오른쪽에 행렬 $B$를 곱하면 $BAB=B^2$,

이 식에 ㉠을 대입하면 $B^2=BA=B$이다.

$\therefore A^2+B^2=A+B$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

## 39 정답 ⑤

**해설** ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이라 하면

$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$이므로

$(A+B)^2=(A-B)^2=2E$

그러나 $AB=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\neq O$ (거짓)

ㄴ. $A^2=E$, $B^2=B$이면

$(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA$

$=ABEBA=AB^2A=ABA$ (참)

ㄷ. $A(A+E)=E$이면 $A^2+A=E$

양변의 오른쪽에 $B$를 곱하면

$A^2B+AB=B$

$AB=-E$이므로 $-A-E=B$

따라서

$B^2=(-A-E)^2=A^2+2A+E$

$=(A^2+A)+(A+E)=E+A+E$

$=A+2E$ (참)

## 40 정답 ④

**해설** 행렬의 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (반례) $A=3E$, $B=O$일 때

$A+B=3E$, $AB=4B$이지만 $A\neq 4E$ (거짓)

ㄴ. $A+B=3E$이고 $AB=4B$이므로

$(A+B)B=3EB$,

$AB+B^2=3B$,

$4B+B^2=3B$

$\therefore B^2+B=O$ (참)

ㄷ. $A+B=3E$에서 $B=3E-A$

$AB=A(3E-A)=3A-A^2$

$=(3E-A)A=BA$

$\therefore A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$=3E(A-B)=3(A-B)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

## 41 정답 ③

**해설** 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. $ABA-A^2=E$에서

$(AB-A)A=E$ …… ㉠

$A(BA-A)=E$이고 양변에 $AB-A$를 곱하면

$(AB-A)A(BA-A)=AB-A$

$BA-A=AB-A$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $AB-A=-B$이므로 ㉠에서 $-BA=E$이다.

즉, $AB=BA=-E$

$ABA-A^2=-A-A^2=E$이므로

$A^2+A+E=O$에서 $A^3=E$

$B^3=A^3B^3=(AB)^3=(-E)^3=-E$

$\therefore A^3+B^3=O$ (거짓)

ㄷ. $AB=A-B=-E$에서 $B=A+E$

$(B+E)^2=(A+2E)^2=A^2+4A+4E$

$=(4A^2+4A+4E)-3A^2=-3A^2$

$\therefore (B+E)^{30}=(-3A^2)^{15}=-3^{15}E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ