Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Interaktívne vyšetrovanie priebehu elementárnych funkcií

Bakalárska práca

2020
Juraj Vetrák

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

INTERAKTÍVNE VYŠETROVANIE PRIEBEHU ELEMENTÁRNYCH FUNKCIÍ

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Aplikovaná informatika
Študijný odbor:	2511 Aplikovaná informatika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej informatiky
Školiteľ:	Ing. Ján Komara, PhD.

Bratislava, 2020
Juraj Vetrák

23814387

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Juraj Vetrák
Študijný program:	aplikovaná informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	informatika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Interaktívne vyšetrovanie priebehu elementárnych funkcií
Properties of Elementary Functions Interactively

Anotácia: Návrh, vývoj a implementácia editora pre interaktívne vyšetrovanie priebehu elementárnych funkcií vo výpočtovom prostredí IPython/Jupyter.

Vedúci:	Ing. Ján Komara, PhD.
Katedra:	FMFI.KAI - Katedra aplikovanej informatiky
Vedúci katedry:	prof. Ing. Igor Farkaš, Dr.
Dátum zadania:	20.09.2019

Dátum schválenia: 07.10.2019

doc. RNDr. Damas Gruska, PhD.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Poď'akovanie: ...

Abstrakt

...

Kľúčové slová: ...

Abstract

...

Keywords:

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Úvod

TODO

1 Motivácia

Pod vyšetrovaním priebehu funkcie sa rozumie nájdenie takých vlastností funkcie, ktoré sú potrebné pre čo najpresnejšie nakreslenie jej grafu. Autor [7] proces vyšetrovania priebehu funkcie charakterizuje nasledovne:

1. určenie definičného oboru (ak nebol daný vopred), určenie bodov nespojitosti;
2. určenie nulových bodov funkcie;
3. určenie intervalov, na ktorých je funkcia rýdzo monotónna, určenie bodov, v ktorých funkcia nadobúda lokálne extrémy;
4. určenie inflexných bodov a intervalov, na ktorých je funkcia konvexná, resp. konkávna;
5. nájdenie asymptot grafu danej funkcie.

S konceptom vyšetrovania priebehu funkcie pomocou diferenciálneho počtu sa študenti väčšinou stretnú až v neskorších fázach úvodného kurzu matematickej analýzy na vysokej škole. S rôznymi funkciami, aj zložitejšími, sa však študenti stretnú oveľa skôr, pričom sú schopní nájsť niektoré kvantitatívne charakteristiky týchto funkcií len pomocou skúmania ich grafu. V mnohých stredoškolských študijných materiáloch sú totiž tieto grafy uvedené spolu s predpismi ich funkcií a ak nie, už základná programátorská zručnosť umožňuje študentom vykreslenie týchto grafov na obrazovkách svojich počítačov.

Hlavnou motiváciou pre vznik tejto práce je potreba vytvorenia nástroja, ktorý slúži ako pomocník študentov pri vyšetrovaní priebehu funkcie, a to najmä na začiatku ich štúdia na vysokej škole. Tento nástroj má študentom umožniť rýchle, interaktívne a presnejšie vyšetrenie priebehu funkcie, a to bez predpokladu znalosti diferenciálneho počtu.

Obsah tejto kapitoly je rozdelený na tri časti popisujúce využitie rôznych prostriedkov na vyšetrovanie priebehu funkcie. Postupnosť obsahu týchto častí je uvažovaná ako priamo úmerná s pribúdajúcimi znalosťami študenta v úvodnom kurze matematickej analýzy.

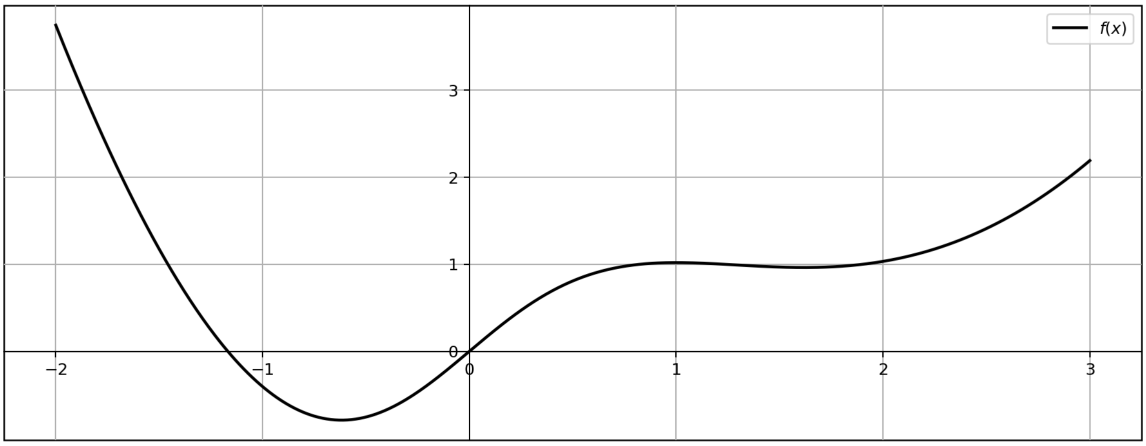
Vo všetkých troch častiach sa pre čo najväčšiu mieru uniformnosti popisuje vyšetrovanie niektorých vlastností pomernej zložitej funkcie

$$f(x) = x^2 - 4x - ln\,(x^2+1) + 6\,arctg(x)\,. \tag{1}$$

1.1 Vyšetrovanie pomocou grafu funkcie

Prvá časť popisuje pokus študenta o vyšetrovanie priebehu funkcie (1) len pomocou spomínaného grafu, ktorý si študent pri základnej vedomosti programovacieho jazyka Python môže vykresliť napríklad pomocou knižnice matplotlib.

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt, numpy as np
>>> X = np.linspace(-2, 3, 5*100+1)
>>> def f(X): return X**2 - 4*X - np.log(X**2 + 1) + 6*np.arctan(X)
>>> fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 4))
>>> ax.plot(X, f(X), c='black', label=r'$f(x)$', linewidth='1.8')
>>> ax.grid(); ax.legend(loc='upper right');
>>> fig.show()
```



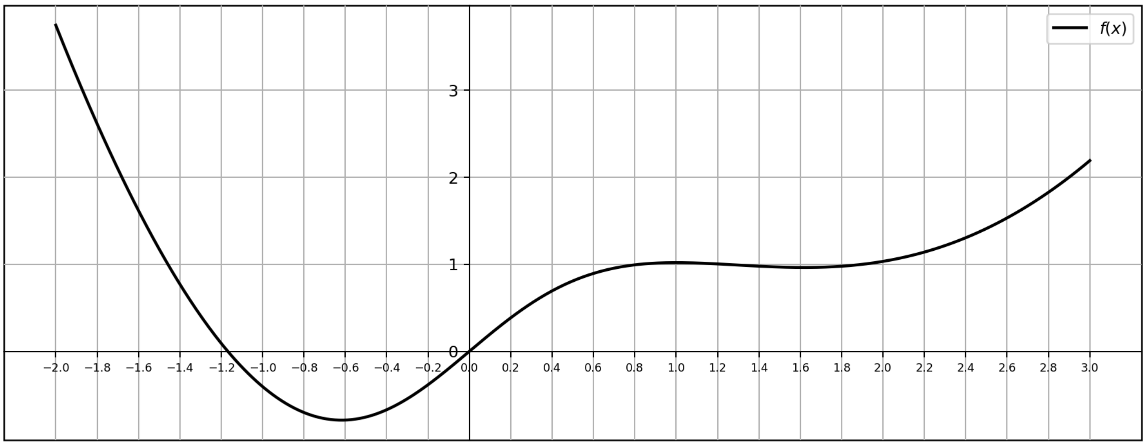
Obr. 1.1: Graf funkcie

Určenie niektorých kvantitatívnych charakteristík z grafu funkcie (1) na obrázku 1.1 nie je vôbec zložité. Z krokov procesu vyšetrovania priebehu funkcie uvedeného na začiatku tejto kapitoly vie študent určiť napríklad jeden nulový bod v bode $x = 0$. Rovnako vie len z pohľadu na tento graf určiť, že funkcia nadobúda lokálny extrém v bode $x = 1$, konkrétne lokálne maximum.

Pri detailnom pohľade na graf sa však nedá nespozorovať, že takýchto zaujímavých bodov sa tam nachádza viac, no ich určenie už nie je vôbec jednoduché. Vidieť je ďalší nulový bod niekde v tretej tretine intervalu $(-2,-1)$, či ďalšie lokálne extrémy niekde v polke intervalu $(-1,0)$, resp. $(1,2)$. Pozorovať je možné aj intervaly monotónnosti, práve medzi týmito lokálnymi extrémami, no ich presnejšie určenie je aj v tomto prípade nemožné.

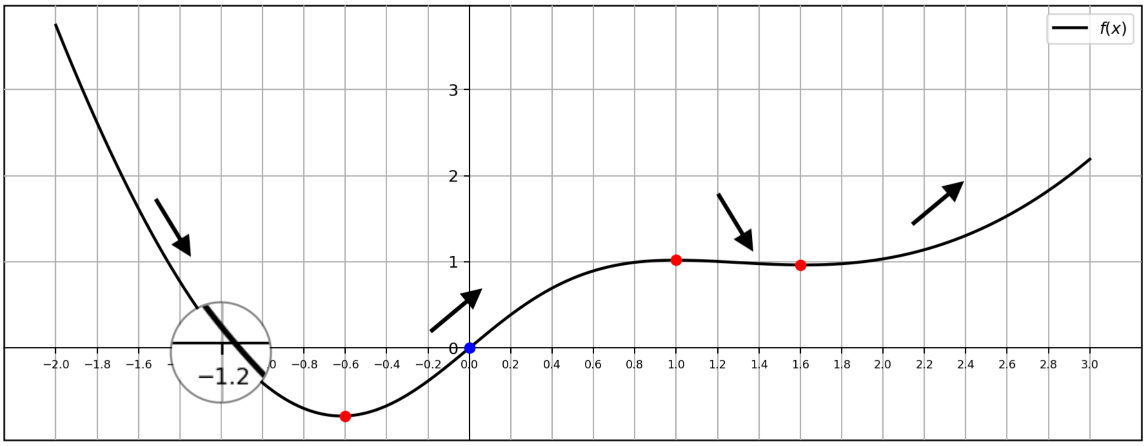
Bližšie k riešeniu sa študent môže dostať prípadným pridaním ďalších bodov na os x príkazom:

```
>>> delta = 0.2
>>> ax.set_xticks(np.arange(-2, 3 + delta, delta))
```



Obr. 1.2: Graf funkcie - viac vyznačených bodov

Skutočne sa tým docielilo významné spresnenie odhadov hľadaných význačných bodov, či intervalov. Odvážny študent by mohol povedať, že niektoré z nich skutočne aj našiel, napríklad ďalšie extrémy sa objavili v bodoch -0.6 a 1.6. Vďaka týmto bodom by mohol ďalej určiť aj intervaly monotónnosti, napr. že funkcia klesá na intervale $(-2, -0.6)$, či $(1, 1.6)$. Rovnako, že rastie na intervale $(-0.6, 1)$, resp. $(1.6, 3)$.



Obr. 1.3: Graf funkcie - možné riešenie

Skutočná hodnota druhého nulového bodu sa so zvýšením počtu bodov na osi x len posunula niekde do intervalu $(-1.2, 1)$. Ďalšie priblíženie sa k skutočnej hodnote tohto bodu môže znamenať pridanie ďalších bodov na os x. Tento postup však prestáva byť po čase prehľadný a efektívny, pričom aj v prípade už odhadnutých význačných bodov, či intervalov, nezaručuje ich skutočnú správnosť. Vyriešiť tento problém má za cieľ táto bakalárska práca, konkrétne jej programová časť - interaktívny editor. Jeho použitie popisuje nasledujúca sekcia tejto kapitoly.

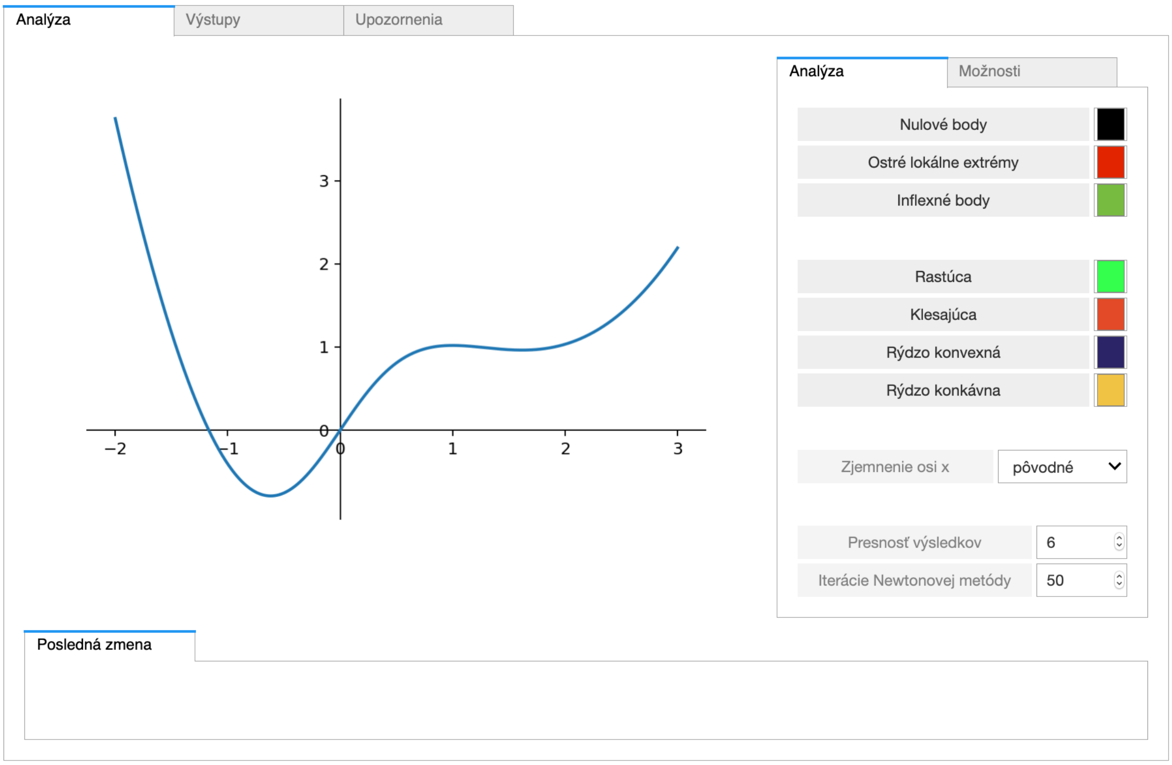
1.2 Vyšetrovanie pomocou interaktívneho editora

Vyšetrovanie priebehu funkcie len pomocou grafu funkcie v sekcii 1.1 sa ukázalo ako vcelku intuitívne, no nekompletné a s výrazným rizikom nepresností. Ďalším prostriedkom na vyšetrovanie priebehu funkcie, ktorý si ponecháva prvky intuitívnosti, pričom do značnej miery odstraňuje problémy súvisiace s nekompletnosťou a nepresnosťou výsledkov, je interaktívny editor - programová časť tejto práce.

Obsahom tejto sekcie je názorná ukážka jeho funkcionality, ktorá umožňuje vypočítať a vizualizovať výsledky takpovediac ihneď, a to bez potreby rozsiahlejších programátorských zručností.

Editor je spustiteľný pridaním nasledovného riadku do kódu na vykresľovanie grafu zo sekcie 1.1.

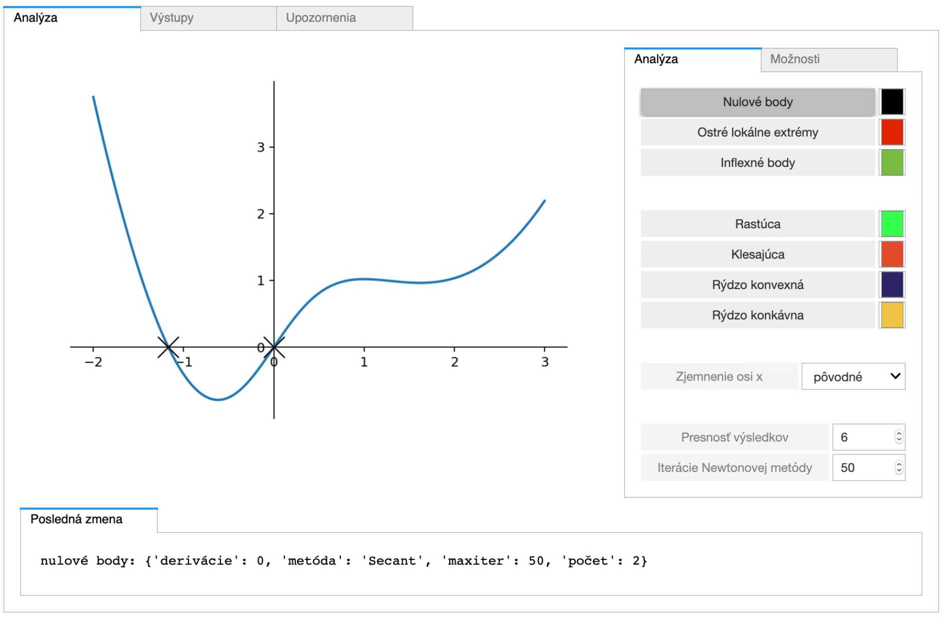
```
>>> editor(function=f, figure=fig, axes=ax, intervals=[X])
```



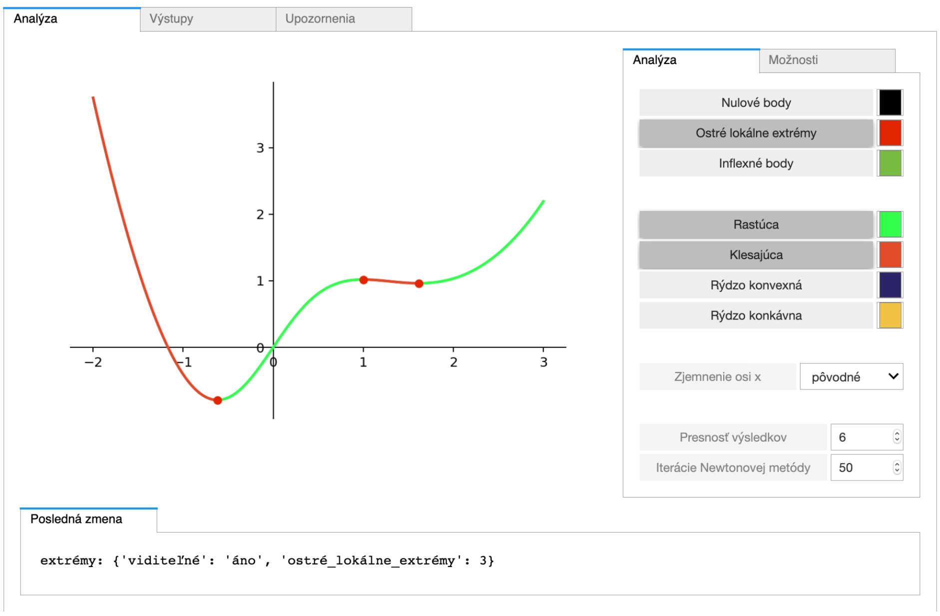
Obr. 1.4: Editor - úvodná obrazovka

Obrázky 1.5 a 1.6 demonštrujú jednoduché použitie editora vybratím príslušných vlastností funkcie v hlavnom menu. Editor po zvolení možnosti nulových bodov tieto body ihneď vykreslí (obr 1.5), pričom je značne presnejší ako ľudské oko. Program totiž na svojom výstupe ponúka vypočítané hodnoty týchto bodov, `[-1.16822, 0.0]`, resp. so zvýšenou presnosťou výsledkov `[-1.16822492541, 0.0]`.

Veľmi podobné je to pri hľadaní ostrých lokálnych extrémov, či intervalov monotónnosti. V tomto prípade ich editor tiež ihneď vizualizuje (obr. 1.6) a ponúkne svoje riešenia. V prípade ostrých lokálnych extrémov sú to body `[-0.62, 1.0, 1.62]`, z toho ostré lokálne minimá `[-0.62, 1.62]` a ostré lokálne maximá `[1.0]`. Editor zároveň našiel aj intervaly `[(-2.0, -0.63), (1.01, 1.61)]`, na ktorých funkcia klesá, resp. intervaly `[(-0.61, 0.99), (1.63, 3.0)]`, na ktorých funkcia rastie.



Obr. 1.5: Editor - nulové body



Obr. 1.6: Editor - monotónnosť a extrémy

1.3 Vyšetrovanie pomocou diferenciálneho počtu

Na vyšetrovanie priebehu funkcie sa v neskorších etapách vysokoškolského štúdia matematickej analýzy používajú silnejšie prostriedky, ako napríklad diferenciálny počet. Vyšetrovanie priebehu funkcie pomocou diferenciálneho počtu je obvyklý matematický postup odvolávajúci sa na definície a vety zo sekcie 2.2 tejto práce, resp. ďalšie pojmy týkajúce sa diferenciálneho počtu z citovanej literatúry od autorov Kubáček a Valášek [8].

Vyšetrovanie niektorých vlastností pomocou tohto postupu je taktiež demonštrované na príklade funkcie (1) zo začiatku tejto kapitoly a ako je spomenuté na záver, aj pri tomto postupe nájde výstupný program tejto práce využitie. Vzhľadom na čo najväčšiu elimináciu chýb sa na výpočty niektorých hodnôt používa program WolframAlpha (`wolframalpha.com`), resp. Python knižnica pre symbolickú matematiku SymPy (`sympy.org`).

Definičný obor, spojitosť a nulové body funkcie. Výraz $x^2-4x-ln\,(x^2+1)+6\,arctg(x)$, ktorým je funkcia (1) definovaná, má zmysel pre všetky reálne čísla x. Definičným oborom je teda interval, označme I, s krajnými bodmi $-\infty$ a ∞, v ktorom je táto funkcia spojitá.

Položením $f(x)=0$ a aritmetickými úpravami z tohto vzťahu vyplýva, že funkcia (1) má nulové body v $x_0=-1.16822$ a $x_1=0$.

Intervaly rýdzej monotónnosti, lokálne extrémy. Vyšetrovanie intervalov rýdzej monotónnosti podľa vety 3 z časti 2.2.2 vyžaduje vypočítanie prvej derivácie funkcie (1)

$$f'(x)=\frac{2\,(x-1)\left(x^2-x-1\right)}{x^2+1}\,.$$

Nech množina M je množina všetkých takých bodov x z intervalu I, pre ktoré platí $f'(x)=0$ alebo $f'(x)$ nie je definovaná. Nech množina K je množina krajných bodov intervalu I. Prvá derivácia funkcie (1) je definovaná všade, no nulová je v bodoch

$$M=\left\{1,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right\};\qquad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx-0.62\,,\qquad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\approx 1.62\,.$$

Usporiadanie (zaokrúhlených) prvkov množiny $M\cup K$ podľa veľkosti

$$-\infty<-0.62<1<1.62<\infty$$

dáva isté delenie intervalu I, ktoré môžeme nazvať delením podľa význačných bodov. Z tohto delenia ihneď vyplýva, že prvá derivácia funkcie (1) existuje a je nenulová v každom bode intervalov $(-\infty,-0.62)$, $(-0.62,1)$, $(1,1.62)$, $(1.62,\infty)$.

Toto poznanie umožňuje určiť znamienko prvej derivácie funkcie (1) v jednotlivých bodoch daných intervalov a použiť tak vetu 3 z časti 2.2.2 týkajúcu sa intervalov monotónnosti. Rýdzo rastúca je teda na intervaloch $(-0.62, 1)$, $(1.62, \infty)$ a rýdzo klesajúca na intervaloch $(-\infty, -0.62)$, $(1, 1.62)$.

Vzhľadom na rýdzu monotónnosť funkcie (1) na týchto intervaloch je možné povedať, že funkcia (1) nemá ostrý lokálny extrém v žiadnom bode týchto intervalov a naopak, ostré lokálne extrémy má len v bodoch množiny M.

Podľa vety 1 z časti 2.2.2 je možné použiť druhú deriváciu funkcie (1),

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^3+3x-6\right)}{\left(x^2+1\right)^2},$$

na charakterizovanie bodov množiny M ako ostrých lokálnych miním alebo ostrých lokálnych maxím. Funkcia (1) má podľa vety 1 z časti 2.2.2 v bode 1 ostré lokálne maximum, keďže $f''(1) < 0$ a ostré lokálne minimá v bodoch -0.62 a 1.62, keďže $f''(-0.62) > 0$ aj $f''(1.62) > 0$.

Intervaly rýdzej konvexnosti a konkávnosti, inflexné body. Už uvedenú druhú deriváciu funkcie (1) je podľa vety 5 z časti 2.2.2 možné využiť na určenie intervalov rýdzej konvexnosti a rýdzej konkávnosti.

Podobne ako pri intervaloch monotónnosti, je možné aritmetikou nájsť body, v ktorých je druhá derivácia funkcie (1) nulová, v tomto prípade ide o body

$$M = \left\{0, \frac{(3+\sqrt{10})^{2/3}-1}{\sqrt[3]{3+\sqrt{10}}}\right\}; \qquad \frac{(3+\sqrt{10})^{2/3}-1}{\sqrt[3]{3+\sqrt{10}}} \approx 1.29\,.$$

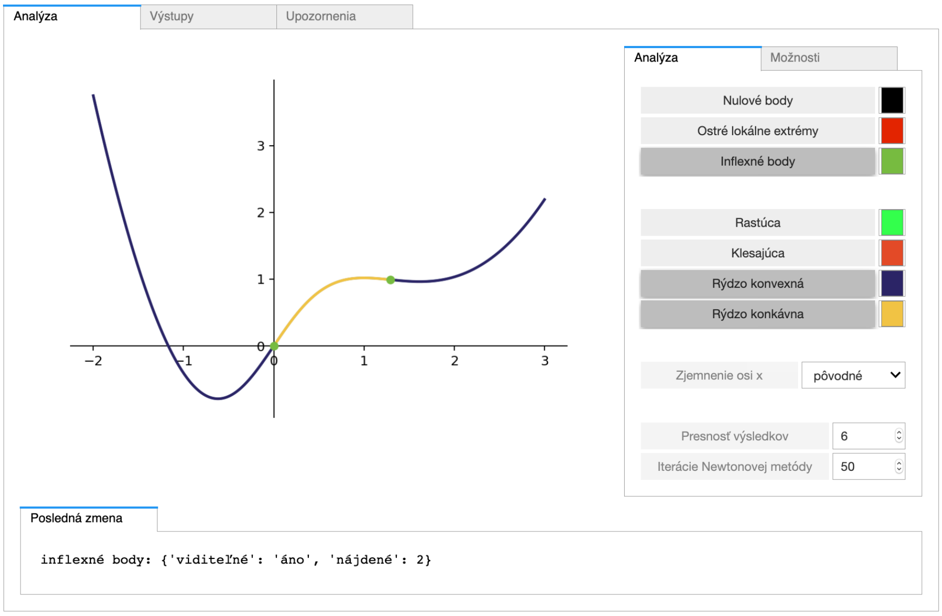
Rovnakým postupom, teda usporiadaním týchto (zaokrúhlených) význačných bodov zjednotených s krajnými bodmi intervalu I podľa veľkosti,

$$-\infty < 0 < 1.29 < \infty,$$

je možné nájsť intervaly $(-\infty, 0)$, $(0, 1.29)$, $(1.29, \infty)$, v ktorých je funkcia (1) rýdzo konvexná alebo rýdzo konkávna. Toto poznanie umožňuje určiť znamienko druhej derivácie funkcie (1) v jednotlivých bodoch daných intervalov a určiť tak podľa vety 5 z časti 2.2.2, že funkcia (1) je rýdzo konvexná na intervaloch $(-\infty, 0)$, $(1.29, \infty)$ a rýdzo konkávna na intervale $(0, 1.29)$.

Aby sa body množiny M mohli nazvať inflexnými, je potrebné podľa vety 4 z časti 2.2.2 overiť, či je tretia derivácia funkcie (1) v týchto bodoch nenulová. Výpočet tretej derivácie je však oproti prvým dvom pomerne netriviálny, a tak môže byť ponechaný interaktívnemu editoru, ktorý si ju dopočíta numericky a vyhodnotí tak namiesto užívateľa, či tieto body spĺňajú danú podmienku. Ako je vidieť na obrázku 1.7, editor tieto body naozaj vyhodnotil ako inflexné s výstupom `[0.0, 1.29]`, ktorý sa zhoduje s výpočtami vyššie.

Užitočnosť editora sa tak môže prejaviť aj pri vyšetrovaní priebehu funkcie takýmto matematickým spôsobom, pričom jeho funkcia je najmä kontrolná.



Obr. 1.7: Editor - konvexnosť, konkávnosť a inflexné body

2 Východiská

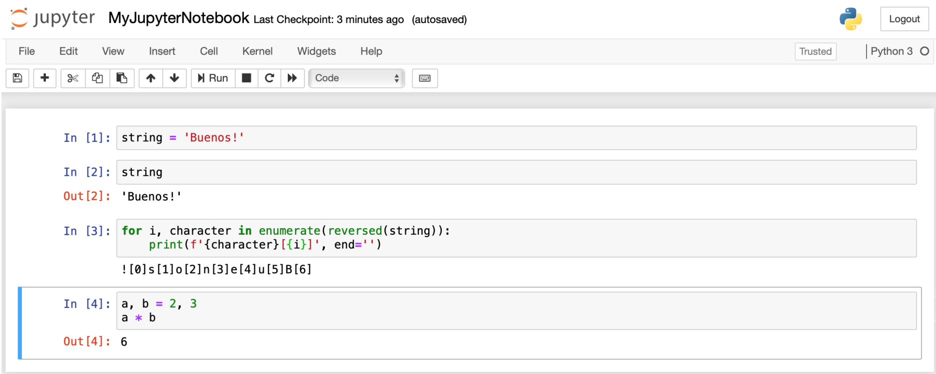
Pred popisom návrhu a implementácie riešenia, prezentovaného v časti 1.2, je dôležité objasniť východiskový stav pred začatím práce, teda popísať uvažované technológie, programy a knižnice, v ktorých bude práca vyvíjaná (sekcia 2.1), a zároveň popísať základnú, v tomto prípade najmä matematickú teóriu, ktorá objasní funkcionalitu niekoľkých algoritmov použitých pre celkovú funkčnosť riešenia (sekcia 2.2). V sekcii 2.3 je ďalej uvedených niekoľko existujúcich riešení danej problematiky v podobe verejne dostupných open-source programov. V závere tejto kapitoly je popísaná a porovnaná podobná práca, ktorá bola obhájená v roku 2017 (sekcia 2.4).

2.1 Technologické východiská

Editor, všetky jeho funkcionality a výpočtové procesy sú naprogramované v programovacom jazyku Python. Jednou z výhod tohto jazyka je, že ho používa početná komunita vývojárov v rôznych vedeckých oblastiach, ako matematika, dátová veda, či umelá inteligencia. To podporilo vznik mnohých nástrojov a knižníc, ktoré uľahčujú každodennú prácu v spomínaných oblastiach. Niektoré z týchto nástrojov a knižníc tvoria práve jadro tejto bakalárskej práce.

2.1.1 Jupyter Notebook

Okrem programovacieho jazyka Python túto prácu charakterizuje prostredie Jupyter Notebook (obr. 2.1), do ktorého je implementovaná a v ktorom sa používa. Jupyter Notebook autorka praktickej cvičebnice *IPython Cookbook* [14] charakterizuje ako webové interaktívne prostredie, ktoré kombinuje kód, textové prvky, obrázky, videá, animácie, matematické rovnice, grafy, mapy, interaktívne prvky, widgety a grafické užívateľské rozhranie do jediného dokumentu. Spustenie tohto prostredia je realizované príkazom `jupyter notebook` v príkazovom riadku. Práca s týmto nástrojom však nie je limitovaná použitím programovacieho jazyka Python, rôzne numerické výpočty môžu byť totiž realizované aj v iných populárnych jazykoch dátovej vedy, ako Julia, či R. O spúšťanie užívateľského kódu a rôzne numerické výpočty sa starajú programy zvané IPython kernely. IPython je projekt, ktorý vznikol s cieľom poskytnúť nie len značne vylepšený Python shell, ale aj možnosti pre interaktívne, distribuované a paralelné výpočty. Na podobné účely slúžia známe komerčné prostredia ako MATLAB, The Interactive Data Language pre numerické výpočty, Mathematica a Maple pre manipuláciu so symbolmi, či ich otvorené alternatívy GNU Data Language, Octave, Maxima alebo Sage [13].



Obr. 2.1: Interaktívne webové prostredie Jupyter Notebook

2.1.2 NumPy, SciPy a matplotlib

Prostredie Jupyter Notebook umožňuje využiť výpočtové operácie jazyka Python, no v mnohých prípadoch, ako aj v prípade tejto bakalárskej práce, je zoznam týchto operácii nedostatočný a je potrebné ho rozšíriť o ďalšie numerické operácie. Knižnica NumPy, menej známa ako Numerical Python, je jedným z najdôležitejších balíkov v rámci numerického počítania v jazyku Python.

Medzi príklady funkcionalít knižnice NumPy, ktoré uvádza autor knihy *Python for Data Analysis* [11] a sú kľúčové pre túto prácu, patrí:

- ndarray, efektívne viacrozmerné pole umožňujúce na ňom vykonávať rýchle aritmetické (vektorizované) operácie;
- matematické funkcie pre rýchle operácie nad poliami dát bez potreby písania cyklov;
- podmienený výber dát priamo ako argument polí, namiesto vetiev if-elif-else;
- algoritmy na týchto poliach ako triedenie, výber unikátnych hodnôt, či operácie s množinami.

Autor ďalej vysvetľuje, prečo je knižnica taká dôležitá pre prácu s numerickými výpočtami. Knižnica NumPy je totiž navrhnutá na efektívne zvládanie veľmi veľkých polí dát. Aby to dosiahla, ukladá dáta v súvislých blokoch pamäte, nezávislé od vstavaných objektov jazyka Python. Algoritmy v NumPy sú taktiež napísané v jazyku C a vedia pracovať so spomínanou pamäťou bez vyčerpávajúcej kontroly typov údajov. Ďalším dôvodom, hoci už naznačeným je, že NumPy vo väčšine prípadov obchádza štandardné for cykly jazyka

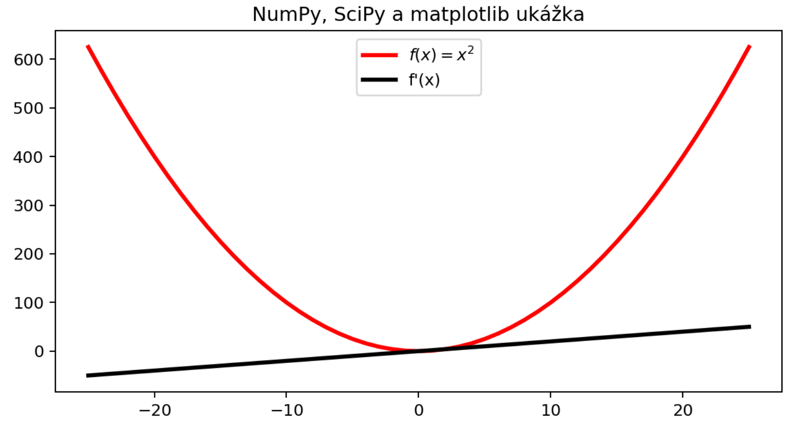
Python a namiesto nich vykonáva komplexné výpočty na celých poliach naraz pomocou paralelizmu.

Špecifickým dôvodom na použitie knižnice NumPy je aj využitie ďalšej knižnice, SciPy, ktorá je na NumPy priamo postavená, ako uvádza jej oficiálna dokumentácia [15]. SciPy, alebo aj Scientific Python, je knižnica, alebo aj kolekcia matematických algoritmov a určených funkcií. Pre potreby tejto práce poskytuje algoritmy na výpočet derivácií, či nulových bodov. S knižnicou SciPy sa Python a prostredie Jupyter Notebook stávajú plnohodnotným konkurentom spomínaných riešení ako MATLAB, The Interactive Data Language, či Octave. V nasledovnom príklade kódu ukážme jednoduchý výpočet prvej derivácie v bode použitím knižnice SciPy.

Jednou z najpodstatnejších funkcií tejto bakalárskej práce je vizuálna interakcia s užívateľom. Funkcie a jej vlastnosti sa vizualizujú užívateľovi v podobe grafu a v rámci možností v čo najlepšej kvalite. Takéto vizualizačné funkcionality dodáva knižnica matplotlib. matplotlib je Python knižnica pre vytváranie a vizualizáciu najmä 2D grafov v produkčnej kvalite. Podporuje interaktívnu, aj neinteraktívnu vizualizáciu a umožňuje ukladať tieto vizualizácie vo forme obrázkov rozličných formátov (vektorových aj rastrových) typu JPG, PNG, PDF, PS a iných [11, 16].

Nasledovný kód slúži na demonštráciu práce s knižnicami NumPy, SciPy a matplotlib. V kóde sa zadefinuje funkcia $f(x) = x^2$ a horizontálne koordináty v podobe premennej `X`. Funkčné hodnoty (`Y`) a derivácie (`primes`) na celom intervale sa vypočítajú pomocou vektorizovaných funkcií knižníc NumPy, resp. SciPy. Cez modul pyplot knižnice matplotlib sa vypočítané hodnoty vykreslia do podoby grafu. (obr. 2.2).

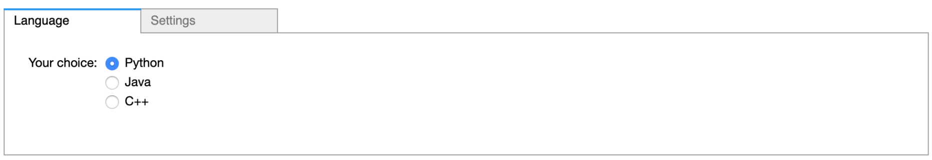
```
In [1]: %matplotlib notebook
        import matplotlib.pyplot as plt
        import numpy as np
        from scipy.misc import derivative

        def f(X): return X ** 2

        X = np.arange(-25, 25+1)
        Y, primes = f(X), derivative(f, X)
        fig, ax = plt.subplots()
        fig.set_size_inches(8, 4)
        ax.plot(X, Y, c='red', linewidth=2.5, label=r"$f(x) = x^2$")
        ax.plot(X, primes, c='black', linewidth=2.5, label=r"f'(x)")
        ax.set_title('NumPy, SciPy a matplotlib ukazka')
        ax.legend()
        fig.show()
```



Obr. 2.2: Demonštrácia použitých knižníc - výstup

2.1.3 ipywidgets

Editor ako softvér umožňuje interakciu užívateľa so zvyšnými časťami programu prostredníctvom myši, rôznych tlačidiel, textových vstupov, či iných ovládacích prvkov. Editor funguje striktne v prostredí Jupyter Notebook, a preto sú možnosti prispôsobenia grafického užívateľského prostredia obmedzené. Potrebná časť upraviteľných ovládacích prvkov pre Jupyter Notebook je však dostupná pomocou rozšírenia ipywidgets. Ide o sadu HTML elementov ako tlačidlá, textové vstupy, checkboxy, obrázky, či animácie. Tieto elementy sa môžu združovať v rôznych rozloženiach ako okná, taby, či mriežky. V bunke Jupyter Notebooku je tak možné vytvoriť a spustiť vlastnú grafickú interaktívnu aplikáciu (obr. 2.3).



Obr. 2.3: Príklad interaktívnej aplikácie v prostredí Jupyter Notebook

2.1.4 Anaconda

Dostupnosť a manažment všetkých potrebných knižníc pre túto prácu, vrátane distribúcie samotného jazyka Python a prostredia Jupyter Notebook, zariaďuje programový balík Anaconda. Programový balík Anaconda je zadarmo a po nainštalovaní slúži okrem už uvedeného aj na spravovanie virtuálnych prostredí, poskytuje programy a nástroje pre distribúciu programovacieho jazyka pre štatistiku R a obsahuje vyše 7500 ďalších open source riešení najmä pre dátovú vedu [1].

2.2 Teoretické východiská

Pri tvorbe tejto bakalárskej práce bolo potrebné prispôsobiť zložitosť funkcionalít úrovni kurzu *Matematická analýza I*, v ktorom je uvažované využívanie jej programovej časti. Od toho sa odvíja úroveň matematickej teórie potrebnej k pochopeniu výpočtov na pozadí práce. Kurz v rámci vyšetrovania priebehu elementárnych funkcií postupne prechádza od definície reálnej funkcie o reálnej premennej, cez definíciu monotónnosti, derivácie, extrémov, až po konvexnosť, konkávnosť a inflexné body. Je potrebné presne zadefinovať tieto, ako aj ďalšie pojmy, poprípade doplniť pojmy, ktoré sa v osnovách predmetu priamo nenachádzajú, ako napr. metódy numerických výpočtov derivácií, či nulových bodov funkcie. Všetky tieto pojmy sú v práci využívané, či už priamo v rámci definovania funkcií, alebo na zabezpečenie algoritmickej funkcionality.

Väčšina matematických definícií a viet pochádza z vysokoškolských skrípt *Cvičenia z matematickej analýzy I* od autorov Kubáček a Valášek [8]. Základné pojmy týkajúce sa teórie chýb, či numerických výpočtov nulových bodov funkcie sú definované podľa knihy J. Eliáša [5] a samotné metódy a ich princípy sú vysvetlené podľa knihy K. Atkinsona [2]. Metódy výpočtu numerických derivácií sú zase popísané v citovaných učebných materiáloch [10, 12].

V tejto sekcii sa čitateľ stretne s niekoľkými definíciami a vetami, ktoré sú z časti napísané symbolickou notáciou. Aby boli tieto symboly čitateľovi jasné, nasledovné tabuľky ich vysvetľujú.

Logická a výroková notácia

$\varphi \wedge \psi$	platí φ a súčasne platí ψ
$\varphi \vee \psi$	platí φ alebo platí ψ
$\varphi \Rightarrow \psi$	ak platí φ, tak platí ψ
$\varphi \Leftrightarrow \psi$	φ platí práve vtedy, keď platí ψ
$\forall x \in A \colon \varphi(x)$	pre každý prvok x z množiny A platí $\varphi(x)$

Množinová notácia

$[x, y]$	usporiadaná dvojica prvkov x a y
$\{x \in A\ ;\ \varphi(x)\}$	množina všetkých $x \in A$, pre ktoré platí $\varphi(x)$
$\mathbb{R}$	množina reálnych čísel
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	karteziánsky súčin množiny reálnych čísel
$A \subset B$	A je podmnožinou B
$A \cap B$	prienik množín A a B
$A \cup B$	zjednotenie množín A a B
$A \setminus B$	rozdiel množín A a B

V tabuľkách sú uvedené len také symboly a príslušné vysvetlenia, ktoré sa nachádzajú v tomto texte. Ďalšie symboly a notácie sú vysvetlené v literatúre od autorov Kubáček a Valášek [8], či v prehľade označení, operácií a skratiek v knihe *Úvod do inteligentního kalkulu* [3].

2.2.1 Funkcie

V tejto časti sú okrem pojmov funkcia, funkčná hodnota, definičný obor funkcie a graf funkcie definované aj elementárne funkcie. Uvedené sú jednotlivé druhy základných elementárnych funkcií, s ktorými sa môže študent stretnúť na kurze *Matematická analýza I* a ktoré slúžili ako predloha, či vstupy pri tvorbe tejto bakalárskej práce.

Funkcie. Nech $A \subset \mathbb{R}$ je množina. Ak je každému číslu $x \in A$ priradené práve jedno číslo $y \in \mathbb{R}$, ktoré označíme $f(x)$, hovoríme, že f je funkcia definovaná na množine A. Číslo $f(x)$ sa nazýva funkčná hodnota v bode x a množina A definičný obor funkcie f, označujeme ho aj ako $D(f)$. Pre zdôraznenie, že definičným oborom funkcie f je množina A, používame zápis $f : A \to \mathbb{R}$; prípadne $f : A \to B$, ak pre každé $x \in A$ platí $f(x) \in B$.

Množina

$$\{[x, f(x)] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,;\, x \in A\}$$

bodov roviny, kde $f : A \to \mathbb{R}$ je daná funkcia, sa nazýva graf funkcie f, pričom $[x, f(x)]$ je zápis bodu roviny pomocou jeho súradníc v danej súradnicovej sústave.

Elementárne funkcie. Funkcie, ktoré vzniknú zo základných elementárnych funkcií len použitím operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a superpozície funkcií, sa nazývajú elementárne funkcie. Medzi základné elementárne funkcie patria funkcie konštantné, mocninové, exponenciálne, logaritmické, goniometrické a cyklometrické.

Poznámka. Používané pojmy z matematickej analýzy ako intervaly, (rýdze) okolie bodu, spojitosť funkcie, vnútorný bod množiny, či limita funkcie sú považované za známe, avšak ich definície a súvisiace notácie sú k dohľadaniu v literatúre od Kubáčka a Valáška [8].

Derivácia funkcie. Pojem derivácie funkcie zastupuje kľúčovú funkcionalitu v rámci tejto bakalárskej práce. Okrem toho, že patrí do osnov predmetu *Matematická analýza I*, je derivácia využívaná na výpočet kľúčových hodnôt pri vyšetrovaní vlastností funkcie pomocou diferenciálneho počtu.

Nech x je vnútorný bod definičného oboru funkcie f. Hovoríme, že funkcia f má v tomto bode deriváciu $f'(x)$, ak

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tu predpokladáme, že limita na pravej strane existuje a je konečná.

Nech M je množina všetkých bodov definičného oboru $D(f)$, v ktorých má funkcia f deriváciu. Funkcia $f' : M \to \mathbb{R}$, ktorá každému bodu $x \in M$ priradí hodnotu $f'(x)$ derivácie funkcie f v bode x, sa nazýva derivácia funkcie f.

Derivácie vyšších rádov. V nasledujúcej sekcii 2.2.2 je uvedených niekoľko viet, ktoré slúžili ako podklad pre tvorbu algoritmov na vyšetrovanie niektorých vlastností funkcie pomocou diferenciálneho počtu. V niektorých týchto vetách sa používa pojem derivácie vyššieho rádu, preto je dôležité si ho korektne zadefinovať.

Nech x je vnútorný bod $D(f)$. Definície vyšších rádov definujeme induktívne: Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu $x \in \mathbb{R}$, označme $f^{(0)} := f$. Hovoríme, že funkcia f má n-tú deriváciu v bode x, označujeme $f^{(n)}(x)$, ak existuje derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ v bode x.

Derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ sa nazýva n-tá derivácia funkcie f a označuje sa $f^{(n)}$. Okrem označení $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}$, ... sa používajú aj označenia f', f'', f''', f'''' (alebo f^{IV}), $f^{V}, \dots$.

2.2.2 Vyšetrovanie priebehu funkcie

Extrémy. Hovoríme, že funkcia f má v bode $c \in D(f)$ ostré lokálne maximum, ak existuje okolie $O(c)$ bodu c také, že platí

$$\forall x \in (O(c) \setminus \{c\}) \cap D(f) \colon f(x) < f(c).$$

Ďalej hovoríme, že funkcia f má v bode $c \in D(f)$ ostré lokálne maximum, ak existuje okolie $O(c)$ bodu c také, že platí

$$\forall x \in (O(c) \setminus \{c\}) \cap D(f) \colon f(x) > f(c).$$

Ostré lokálne maximá a ostré lokálne minimá sa súhrnne nazývajú ostré lokálne extrémy.

Veta 1. *Nech funkcia f je dvakrát diferencovateľná vo vnútornom bode x množiny $D(f)$.*

1. *Ak $f'(x) = 0$ a $f''(x) > 0$, tak f má v bode x ostré lokálne minimum.*

2. *Ak $f'(x) = 0$ a $f''(x) < 0$, tak f má v bode x ostré lokálne maximum.*

Veta 2. *Nech funkcia f je n-krát $(n \geq 2)$ diferencovateľná vo vnútornom bode x množiny $D(f)$, nech $f'(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$ a $f^{(n)}(x) \neq 0$.*

1. *Ak n je párne a* $f^{(n)}(x) > 0$*, tak funkcia* f *má v bode* x *ostré lokálne minimum (ostré lokálne maximum).*

2. *Ak n je párne a* $f^{(n)}(x) < 0$*, tak funkcia* f *má v bode* x *ostré lokálne maximum.*

3. *Ak n je nepárne, funkcia* f *nemá v bode* x *lokálny extrém.*

Monotónnosť funkcie. Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú množiny, kde $B \subset A$. Funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ sa nazýva rastúca na množine B, ak platí

$$\forall x, y \in B\colon x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ sa nazýva klesajúca na množine B, ak platí

$$\forall x, y \in B\colon x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Funkcia, ktorá je rastúca na množine B alebo klesajúca na množine B sa nazýva rýdzomonotónna na množine B. Funkcia rastúca (klesajúca, rýdzomonotónna) na svojom definičnom obore sa nazýva rastúca (klesajúca, rýdzomonotónna).

Veta 3. *Nech funkcia* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervale* I *a má deriváciu v každom jeho vnútornom bode. Potom*

1. *ak pre každý vnútorný bod* x *z intervalu* I *platí, že* $f'(x) > 0$*, tak* f *je rastúca na* I*;*

2. *ak pre každý vnútorný bod* x *z intervalu* I *platí, že* $f'(x) < 0$*, tak* f *je klesajúca na* I*.*

Inflexné body. Nech x je vnútorný bod $D(f)$. Bod x sa nazýva inflexný bod funkcie f, ak má v bode x deriváciu a existuje $\varepsilon > 0$ tak, že funkcia f je rýdzo konvexná na jednej z množín $(x-\varepsilon, x\rangle$, $\langle x, x+\varepsilon)$ a rýdzo konkávna na druhej z nich.

Veta 4. *Nech funkcia* f *je trikrát diferencovateľná v bode* x *a dvakrát diferencovateľná v niektorom jeho okolí. Ak platí* $f''(x) = 0$ *a* $f'''(x) \neq 0$*, tak* x *je inflexný bod funkcie* f*.*

Konvexnosť a konkávnosť. Funkcia f sa nazýva rýdzo konvexná na intervale $I \subset D(f)$, ak platí

$$\forall x, y \in I,\ x \neq y\ \forall p, q > 0,\ p+q = 1\colon f(px+qy) < pf(x) + qf(y).$$

Funkcia f sa nazýva rýdzo konkávna na intervale $I \subset D(f)$, ak platí

$$\forall x, y \in I,\ x \neq y\ \forall p, q > 0,\ p+q = 1\colon f(px+qy) > pf(x) + qf(y).$$

Veta 5. *Nech funkcia $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale I a dvakrát diferencovateľná v každom jeho vnútornom bode. Potom*

1. *ak pre každý vnútorný bod x z intervalu I platí, že $f''(x) > 0$, tak f je rýdzo konvexná na I;*
2. *ak pre každý vnútorný bod x z intervalu I platí, že $f''(x) < 0$, tak f je rýdzo konkávna na I.*

2.2.3 Teória chýb

Programová časť tejto práce implementuje niekoľko numerických metód, či algoritmov, ktorých výsledkami sú nejaké vypočítané hodnoty. Pri skúmaní týchto hodnôt je však vo väčšine prípadov potrebné rátať s nejakou odchýlkou, resp. chybou, ktorá vznikla pri hľadaní numerického riešenia, a teda považovať výslednú hodnotu len za "približnú", resp. "čo najpresnejšiu". Táto časť uvádza niekoľko pojmov z teórie chýb, ktoré definujú spôsob uvažovania pri skúmaní nameraných hodnôt z numerických výpočtov programovej časti tejto práce.

Približná hodnota čísla. Približnou hodnotou čísla X sa nazýva číslo x, ktoré sa málo líši od čísla X. Namiesto označenia približná hodnota čísla X môžeme použiť označenie aproximácia čísla X. Ak vieme, že pre približnú hodnotu x čísla X platí $x < X$, hovoríme, že číslo x je približnou hodnotou čísla X zdola (dolná aproximácia čísla X). Ak $x > X$, hovoríme, že číslo x je približnou hodnotou čísla X zhora (horná aproximácia čísla X).

Chyba približnej hodnoty čísla. Nech číslo x je približnou hodnotou čísla X. Chybou približnej hodnoty x čísla X, ktorú označujeme δx, nazývame číslo $X - x$, teda platí $\delta x = X - x$.

Absolútna chyba približnej hodnoty čísla. Absolútnou chybou približnej hodnoty x čísla X nazývame číslo $|\delta x| = |X - x|$.

Odhad absolútnej chyby približnej hodnoty čísla. Odhad absolútnej chyby približnej hodnoty x čísla X nazývame každé nezáporné číslo, ktoré nie je menšie ako $|\delta x|$ a označujeme ho Δx. Platí teda:

$$|X - x| \leq \Delta x$$

Relatívna chyba približnej hodnoty čísla. Relatívnou chybou ε približnej hodnoty x čísla X nazývame podiel absolútnej chyby Δx a absolútnej hodnoty samotnej približnej hodnoty $|x|$, ak $x \neq 0$. Platí teda:

$$\varepsilon x = \frac{\Delta x}{|x|} \qquad x \neq 0$$

Zápis približných hodnôt čísiel v desiatkovej číselnej sústave. V desiatkovej číselnej sústave každé $x \in \mathbb{R}$ môžeme zapísať v tvare

$$x = \pm(\chi_m 10^m + \chi_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \chi_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \ldots),$$

kde χ_i sú číslice čísla x, $\chi_i = 0, 1, \ldots 9$, pričom $\chi_m \neq 0$ a m je celé číslo, ktoré nazývame rádom čísla x.

Hodnotné číslice. Približné hodnoty čísiel sa v praxi najčastejšie vyskytujú vo forme konečného desatinného rozvoja,

$$x = \pm(\chi_m 10^m + \chi_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \chi_{m-n+1} 10^{m-n+1}) \qquad \chi_m \neq 0.$$

Hodnotnou číslicou približnej hodnoty x čísla X vyjadreného v desatinnom rozvoji potom nazývame:

(a) všetky nenulové číslice,

(b) všetky nuly medzi prvou a poslednou nenulovou číslicou,

(c) všetky také nuly vpravo od poslednej nenulovej číslice, ktoré sa používajú na označenie počtu jednotiek rádov, ktoré v približnej hodnote x čísla X nechávame.

Platné číslice. Hovoríme, že prvých n hodnotných číslic približnej hodnoty x čísla X je platných, keď absolútna chyba približnej hodnoty x nie je väčšia ako polovica jednotky rádu rovného rádu n-tej hodnotnej číslice, ak počítame zľava doprava.

Ak pre približnú hodnotu x čísla X, zapísanú v desiatkovej číselnej sústave, platí

$$\Delta x = |X - x| \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1},$$

potom podľa definície platných číslic sú číslice $\chi_m, \chi_{m-1}, \ldots, \chi_{m-n+1}$ platnými číslicami približnej hodnoty x.

2.2.4 Numerický výpočet derivácií

Aby mohli byť vety zo sekcie 2.2.2 implementované vo výstupnom programe tejto práce, potrebuje mať program k dispozícii predpisy prvých derivácií, či derivácií vyšších rádov.

Tie môžu byť v prípade jednoduchších predpisov funkcií odvodené analyticky, čo však nie je vždy pravidlom, keďže analytický výpočet derivácií môže byť príliš náročný, dokonca nemožný. Program tak musí využiť informácie o funkčných hodnotách danej funkcie na nejakej množine bodov a pokúsiť sa dopočítať, resp. aproximovať derivácie numericky. Algoritmus pre numerické aproximovanie derivácií, ktorý je používaný vo výstupnom programe tejto práce, vychádza z niekoľkých pojmov a postupov, ktoré sú popísané práve v tejto časti.

Taylorov rad. Mnoho známych vzorcov pre aproximáciu numerických derivácií, vrátane metódy centrálnej diferencie, vyplýva z rozvoja Taylorovho radu.

Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$. Potom mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

sa nazýva Taylorov rad funkcie f v bode a.

Dopredná diferencia. Jednoduchá aproximácia prvej derivácie vychádza priamo z definície derivácie

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

kde uvažujeme $h > 0$. Táto aproximácia prvej derivácie funkcie sa nazýva metóda doprednej diferencie. Táto metóda je napríklad v prípade lineárnych funkcií presným vzorcom pre výpočet prvej derivácie, no takmer pri všetkých ostatných druhoch funkcií tomu tak nie je.

Odvodenie tejto metódy a jej vzťahu k presnosti sa dá ukázať využitím rozvoja Taylorovho radu a položením $(x-a) = h$ pre konzistentnosť zápisu:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots .$$

Následnými úpravami tohto rozvoja môžeme uviesť presný vzorec pre aproximáciu prvej derivácie funkcie, a teda

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f''(x)\frac{h}{2} - f'''(x)\frac{h^2}{3!} - \cdots .$$

Prvý člen na pravej strane rovnice je odvodená dopredná diferencia, pričom zvyšné členy môžeme nahradiť označením $O(h)$, kde exponent α pri h v $O(h^\alpha)$ vyjadruje stupeň presnosti tejto metódy

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h).$$

Túto presnosť odvodzujeme vždy od prvého člena rozvoja, ktorý sme zanedbali, s implikaciou, že zvyšné členy väčších stupňov sú s $h \to 0$ vždy menšie ako tento prvý člen. V prípade vyššie odvodenej metódy doprednej diferencie tak môžeme povedať, že má presnosť prvého stupňa.

Spätná diferencia. Aproximácia prvej derivácie v bode x pomocou metódy doprednej diferencie je založená na hodnotách funkcie v bodoch x a $x+h$. Ak pre aproximáciu použijeme hodnoty funkcie v bodoch $x-h$ a x, tak obdobným spôsobom odvodíme vzťah

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h),$$

ktorý nazývame spätná diferencia a rovnako ako dopredná diferencia má presnosť prvého stupňa.

Centrálna diferencia. Pomocou Taylorovho radu a ďalších bodov v okolí bodu x vieme odvodiť aj vzorce s vyšším stupňom presnosti. Rozdielom dvoch Taylorovych radov

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

dostaneme napríklad vzťah pre výpočet prvej derivácie funkcie f v bode x

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2),$$

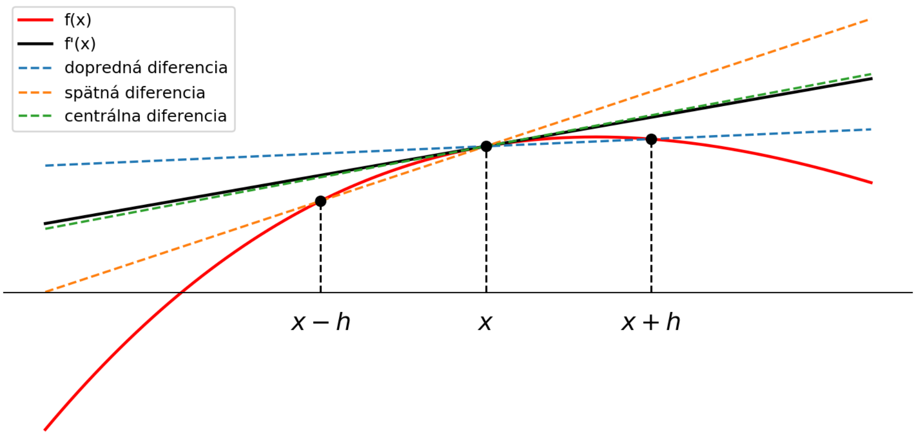
ktorý nazývame centrálna diferencia, pričom presnosť sa zvýšila na stupeň 2. Ešte vyššiu presnosť môžeme dosiahnuť pridaním ďalších bodov do okolia bodu x (zjemnenie intervalu). Napríklad vzorec s presnosťou stupňa 4 má tvar

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + O(h^4).$$

Centrálna diferencia je najčastejšie využívanou metódou pre výpočet derivácií v tejto práci, a to aj v súvislosti s výpočtom derivácií vyšších rádov. Napríklad sčítaním vyššie uvedených dvoch rozvojov Taylorovho radu sa členy $f'(x)h$ navzájom odstránia a po malých úpravách dostaneme vzťah pre výpočet druhej derivácie funkcie f v bode x s presnosťou stupňa 2:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Presnosť metód doprednej, spätnej a centrálnej diferencie na aproximáciu prvej derivácie funkcie $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ v danom bode x ilustruje obrázok 2.4.



Obr. 2.4: Numerická aproximácia prvej derivácie

2.2.5 Hľadanie nulových bodov funkcie

Súčasťou práce sú aj dve numerické metódy na aproximáciu nulových bodov funkcie. Metódy sa rozlišujú podľa toho, či sa využije prvá derivácia funkcie, a to nasledovne:

- ak sa prvá derivácia funkcie využíva, nulové body funkcie sú aproximované *Newtonovou metódou*
- ak sa derivácia funkcie nevyužíva, nulové body funkcie sú aproximované *metódou sečníc*

Nasledujúce odseky vysvetľujú základné pojmy dôležité pri hľadaní nulových bodov funkcie, resp. koreňov rovnice a princípy spomenutých metód ich hľadania (aproximovania).

Základné pojmy. Nech $f(x) = 0$ je rovnica, kde $f(x)$ je funkcia definovaná na množine M. Číslo α nazývame koreňom alebo riešením rovnice $f(x) = 0$, keď platí $f(\alpha) = 0$. Riešiť rovnicu $f(x) = 0$ znamená nájsť všetky jej riešenia. Ak $f(x)$ je polynóm n-tého stupňa, t.j. ak rovnica $f(x) = 0$ má tvar

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

a nazývame ju algebraickou rovnicou n-tého stupňa o jednej neznámej. Rovnicu, ktorá nie je algebraická, nazývame nealgebraickou rovnicou.

Približné alebo numerické riešenie rovnice $f(x) = 0$ spočíva vo všeobecnosti v zostrojení postupnosti približných hodnôt koreňa α rovnice $f(x) = 0$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

ktorá konverguje, t.j. existuje

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi; \qquad f(\varphi) = 0.$$

n-tý člen postupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ nazývame n-tou približnou hodnotou koreňa φ alebo n-tou aproximáciou koreňa φ rovnice $f(x) = 0$. Číslo n hľadáme tak, aby absolútna chyba približnej hodnoty x_n koreňa φ rovnice $f(x) = 0$, t.j. $|x_n - \varphi|$ bola dostatočne malá, alebo aby bola menšia ako vopred dané kladné číslo ε.

Separáciou koreňov rovnice $f(x) = 0$ rozumieme hľadanie takých intervalov na číselnej osi, v ktorých leží práve jeden koreň rovnice $f(x) = 0$. Predpokladajme, že sme našli interval, v ktorom leží jediný koreň rovnice $f(x) = 0$. Spôsob hľadania približnej hodnoty x_n koreňa φ rovnice $f(x) = 0$ v tomto intervale tak, aby táto približná hodnota aproximovala koreň φ s vopred prepísanou absolútnou chybou ε, nazývame aproximácia koreňa rovnice $f(x) = 0$.

Newtonova metóda. Newtonova metóda, inak známa aj ako metóda dotyčníc, je podľa Atkinsona [2] najznámejšou procedúrou pre nájdenie koreňov rovnice pre jej formálnu jednoduchosť a rýchlosť, no nie je vždy najvhodnejšou metódou na riešenie každého nelineárneho problému.

Nech x_0 je počiatočný odhad pre koreň α rovnice $f(x) = 0$. Newtonová metóda má za úlohu nájsť postupnosť približných hodnôt koreňa α rovnice $f(x) = 0$, ktorá by mala postupne konvergovať k bodu α. Hľadanie tejto postupnosti prebieha nasledovne: pri predpoklade, že x_0 je dostatočne blízko α, metóda aproximuje graf funkcie $y = f(x)$ v okolí bodu α, a to tak, že v bode $[x_0, f(x_0)]$ skonštruuje dotyčnicu ku grafu funkcie. Koreňom tejto dotyčnice je potom nová aproximácia α, označená x_1. Postupným opakovaním (iterovaním) tohto postupu všeobecne pre

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n \geq 1$$

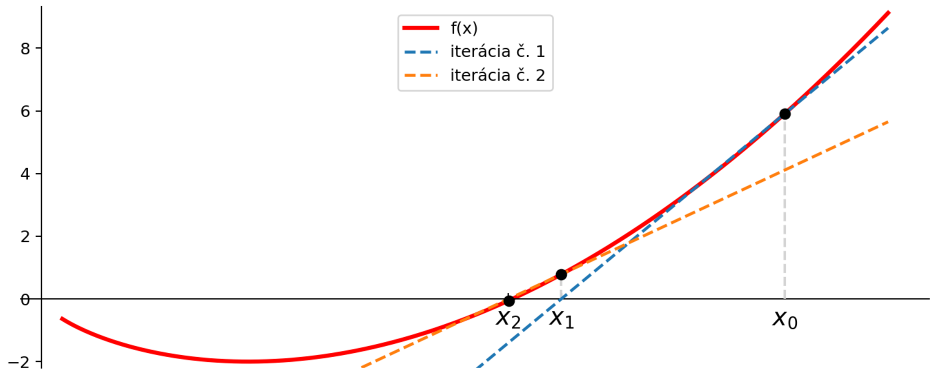
sa metóda dopracuje k spomínanej postupnosti približných hodnôt koreňa α rovnice $f(x) = 0$. Postup prvých dvoch iterácií na príklade funkcie

$$f(x) = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$$

je znázornený obrázkom 2.5 s aproximovanými bodmi x_1 a x_2. Tabuľka 2.1 zase ukazuje namerané hodnoty pri rovnakej funkcii, a to pri štyroch iteráciách.

Štvrtý stĺpec tabuľky 2.1 znázorňuje, ako sa s každou iteráciou Newtonovej metódy približné hodnoty x_n koreňa α približujú k hodnote α, dopočítaného programom WolframAlpha (`www.wolframalpha.com`). Posledný stĺpec zase znázorňuje postupné zmenšovanie odchýlky jednotlivých približných hodnôt x_n koreňa α.

Newtonova metóda na príklade konverguje naozaj veľmi rýchlo, a to hneď, ako sa približná hodnota x_n koreňa α blíži ku hodnote α. Väčšie odchýlky pri prvej, resp. druhej



Obr. 2.5: Dve iterácie Newtonovej metódy

n	x_n	$f(x_n)$	$\alpha - x_n$	$x_{n+1} - x_n$
0	3.6	5.91323825	-1.32049294	-1.082999
1	2.517001	0.78422221	-0.23749394	-0.2551462
2	2.2618548	-0.05330492	0.01765226	0.0213885
3	2.2832433	0.01137122	-0.00373624	-0.00447446
4	2.27876884	-0.00224309	0.00073822	

Tabuľka 2.1: Vypočítané hodnoty štyroch iterácií Newtonovej metódy

iterácií sú dôsledkom zvolenia nie príliš presného počiatočného odhadu bodu x_0, t.j. aproximácie koreňa rovnice. Z toho vyplýva, že zlepšením aproximácie koreňa rovnice je možné ešte viac urýchliť konvergenciu Newtonovej metódy.

Metóda sečníc. Predpis, či hodnoty prvej derivácie funkcie môžu byť z rôznych dôvodov nedostupné. V takom prípade je použitie Newtonovej metódy a aproximovanie grafu funkcie pomocou dotyčníc v jednom bode nemožné. Riešením je použitie metódy sečníc, ktorá funguje veľmi podobne ako Newtonova metóda.

Nech x_0 a x_1 sú počiatočné odhady pre koreň α rovnice $f(x) = 0$. Metóda sečníc má za úlohu nájsť postupnosť približných hodnôt koreňa α rovnice $f(x) = 0$, ktorá by mala postupne konvergovať k bodu α. Hľadanie tejto postupnosti prebieha nasledovne: pri predpoklade, že x_0 a x_1 sú dostatočne blízko α, metóda aproximuje graf funkcie $y = f(x)$ v okolí bodu α, a to tak, že pomocou bodov $[(x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$ skonštruuje sečnicu grafu funkcie. Koreňom tejto sečnice je potom nová približná hodnota x_2 koreňa α. Výpočet vychádza z rovnice sečnice, ktorá má tvar

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) + f(x_1),$$

pričom koreňom rovnice tejto sečnice, resp. novou približnou hodnotou α je spomínaný bod

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

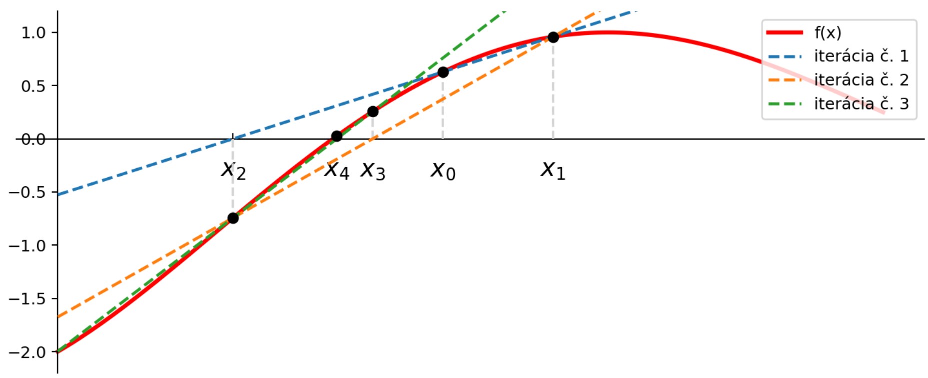
Postupným opakovaním (iterovaním) tohto postupu všeobecne pre

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad n \geq 1$$

sa metóda dopracuje k spomínanej postupnosti približných hodnôt koreňa α rovnice $f(x) = 0$. Postup prvých troch iterácií na príklade funkcie

$$f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 3x - 2$$

je znázornený obrázkom 2.6 s nájdenými približnými hodnotami x_2, x_3 a x_4 koreňa α. Štvrtý stĺpec tabuľky 2.2 zase znázorňuje, ako sa s každou iteráciou metódy sečníc približné hodnoty x_n separovaného koreňa $\alpha = \frac{1}{2}$ funkcie približujú práve k tejto hodnote.



Obr. 2.6: Tri iterácie metódy sečníc

n	x_n	$f(x_n)$	$\alpha - x_n$	$x_{n+1} - x_n$
0	0.7	0.6292	-0.2	0.2
1	0.9	0.9592	-0.4	-0.58133333
2	0.31866667	-0.74215433	0.18133333	0.25358565
3	0.57225232	0.25681816	-0.07225232	-0.06519239
4	0.50705994	0.0263491	-0.00705994	-0.00745332
5	0.49960661	-0.0014756	0.00039339	

Tabuľka 2.2: Vypočítané hodnoty piatich iterácií metódy sečníc

2.3 Existujúce riešenia

Editor, ako výstup tejto práce, využíva vety a definície zo sekcie 2.2. Zaobal'uje ich do formy funkcií, či algoritmov, ktoré riadia funkcionalitu programu. Tieto funkcionality, spolu s vizualizáciou grafov je možné v rôznych podobách implementovat' aj v iných, verejne dostupných nástrojoch. V tejto sekcii je popísaný jeden komerčný a dva open-source nástroje, ktoré môžu slúžit' ako prípadná alternatíva pre študenta analyzujúceho priebeh elementárnych funkcií.

2.3.1 MATLAB

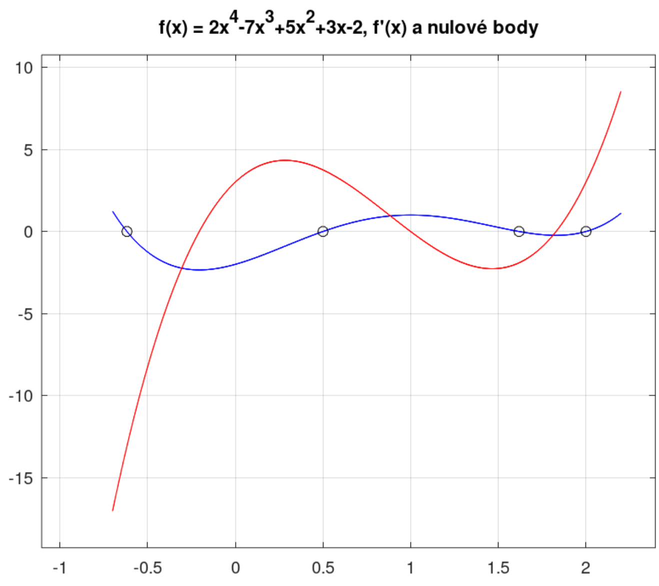
MATLAB je vysoko-úrovňový jazyk a interaktívne prostredie pre numerické výpočty, vizualizáciu a programovanie. Umožňuje analyzovat' dáta, vyvíjat' algoritmy, či vytvárat' modely a aplikácie. Jazyk, jeho nástroje a zabudované matematické funkcie umožňujú zvolit' mnoho prístupov pri riešení problému a dosiahnut' toto riešenie rýchlejšie v porovnaní s hárkami tabul'kového procesora, či programovacími jazykmi C/C++ alebo Java. MATLAB je využívaný v mnohých aplikáciách ako spracovanie signálu, obrazu, či videa, kontrolné systémy, systémy pre testovanie a meranie, finančníctvo alebo biológia [4]. Používanie softvéru MATLAB vyžaduje platenú licenciu.

2.3.2 GNU Octave

GNU Octave je tiež vysoko-úrovňový jazyk a interaktívne prostredie pre numerické výpočty, pričom v zmysle účelu tejto práce poskytuje rovnaké možnosti ako MATLAB, no je distribuované pod GNU licenciou. Licencia GNU používatel'ovi umožňuje využívat' tento softvér zadarmo v plnom rozsahu, šírit' ho a dokonca aj prípadne upravovat'. Obidva jazyky sú numerické, nie symbolické a ich základným typom je matica, pričom softvér je plne optimalizovaný pre vektorové operácie [9]. Nasledovný príklad demonštruje hl'adanie nulových bodov a derivácie polynomiálu $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 3x - 2$ v prostredí GNU Octave, pričom kód je aplikovatel'ný aj v prostredíi MATLAB.

```
> x = [-0.7:0.001:2.2];
> p = [2, -7, 5, 3, -2];
> y = polyval(p, x);
> dydx = diff(y) ./ diff(x);
> r = roots(p);
  r = 2.00000, 1.61803, -0.61803, 0.50000
> plot(x, y, 'b', x(1:end-1), dydx, 'r', r, 0, 'ko')
> title("f(x) = 2x^4-7x^3+5x^2+3x-2, f'(x) a nulove body")
```

Práca s nástrojmi popísanými v tejto časti je najmä z hl'adiska funkcionalít porovnatel'ných s touto bakalárskou prácou podobná a vzhl'adom na ich robustnost' aj flexibilnejšia.



Obr. 2.7: Demonštrácia MATLAB/Octave - výstup

To však predurčuje užívateľa k väčšej znalosti jednotlivých jazykov a ovládacích procesov, čím sa komplikuje prístup k jednoduchým prvkom matematickej analýzy. Na druhej strane editor, ako predmet tejto bakalárskej práce, obsahuje nevyhnutné minimum funkcionalít a grafických výstupov potrebných k splneniu edukačných potrieb študenta, pričom mu k nim umožňuje pristupovať interaktívne, cez grafické rozhranie.

2.4 Podobné práce

Táto bakalárska práca sa dá považovať ako priama alternatíva pre diplomovú prácu Jakuba Trubača, *Vývoj interaktívnych dokumentov pre výučbu matematickej analýzy*, ktorá bola vypracovaná pod vedením rovnakého školiteľa. Práca tak vychádza z pomerne rovnakých základov. Autor vytvoril a popísal rozšírenie funkcionalít interaktívneho prostredia Jupyter Notebook vo forme editora. Tento editor bol vytvorený za účelom efektívnejšej analýzy priebehu funkcií na cvičeniach k predmetu *Matematická analýza*.

Editor na vstupe spracuje užívateľom zadané hodnoty, vykreslí graf funkcie a umožní nájsť nulové body, extrémy funkcie, inflexné body, či s tým spojené vlastnosti ako monotónnosť, konkávnosť, alebo konvexnosť. Jedným z najdôležitejších parametrov je metóda na hľadanie nulových bodov. Autor zvolil Newtonovu metódu, ktorá iteratívnym procesom vyberie vhodného kandidáta na nulový bod. Na vstupe očakáva jeden štartový bod, akýsi počiatočný tip, ktorý si môže užívateľ interaktívne meniť a dopracovať sa tak k prípadným presnejším výsledkom. Z hľadiska používateľského rozhrania autor v jeho práci využíva knižnicu ipywidgets, ktorá má na starosti interaktívne ovládacie prvky v prostredí Jupyter Notebook. Po spracovaní užívateľských hodnôt a vykreslení grafu sa pod ním zobrazia ovládacie prvky v podobe posuvných tlačidiel, či označovacích boxov na výber príslušných hodnôt. Editor má viacero okien, medzi nimi okno na samotnú analýzu, okno na prispôsobenie Newtonovej metódy a okno na výstupné informácie.

Hlavný rozdiel medzi prácami je práve v prístupe k Newtonovej metóde, zatiaľ čo Trubač túto metódu naprogramoval, v tejto práci sa využíva metóda z už naprogramovanej knižnice scipy. To umožňuje využiť silu knižnice na numerickú matematiku numpy a prijať ako argumenty celé vektory hodnôt, nie len jediný bod - počiatočný tip. Práca s vypočítanými údajmi a ich spracovanie je tak odlišná vzhľadom na túto vlastnosť. Knižnica scipy rovnako umožní zanedbať zadanie prvej derivácie funkcie a použije pre výpočet nulových bodov metódu sečníc. Rozdiely v grafickom prevedení a ovládaní nie sú markantné. V tejto práci sa graf funkcie nachádza priamo v editore, čím tvorí jeho značnú časť a všetky hlavné ovládacie prvky sa nachádzajú vedľa neho. Doplnené sú taktiež výstupy, avšak aj v podobe zaznamenávania užívateľských krokov, čím je užívateľ sprevádzaný celou analýzou funkcie. Rovnako je vynechaná možnosť dodatočne špecifikovať interval analýzy, v tomto prípade si interval merania určí užívateľ jeho definovaním ešte pred samotným spustením editora.

3 Návrh riešenia

...

3.1 Modul pre analýzu funkcií

...

3.2 Modul pre grafické užívateľské rozhranie

...

3.3 Modul pre konfiguráciu programu

...

3.4 Modul pre spúšťanie a riadenie programu

4 Implementácia

...

5 Testovanie a používateľská príručka

...

Záver

TODO

Literatúra

[1] *Anaconda Distribution Documentation*.
URL: `docs.anaconda.com/anaconda` (citované: 11.2.2020).

[2] ATKINSON, Kendall E. *An Introduction to Numerical Analysis*.
Wiley, New York, Second Edition, 1989.

[3] ČERNÝ, Ilja. *Úvod do inteligentního kalkulu (1000 příkladů z elementární analýzy)*.
Akademie věd České republiky, 2002.

[4] The MathWorks, Inc. *MATLAB® Primer, Twenty-third printing*.
URL: `mathworks.com/help/releases/R2014b/pdf_doc/matlab/getstart.pdf`
(citované: 10.2.2020).

[5] ELIÁŠ, Jozef. *Matematika (Úvod do numerickej analýzy)*.
Slovenská vysoká škola technická v Bratislave, 1974.

[6] *Jupyter Widgets Developer Docs*.
URL: `ipywidgets.readthedocs.io` (citované: 11.2.2020).

[7] IVAN, Ján. *Matematika I, druhé vydanie*.
Alfa - vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1986.

[8] KUBÁČEK, Zbyněk, VALÁŠEK, Ján. *Cvičenia z matematickej analýzy I*.
Univerzita Komenského v Bratislave, 1989.

[9] LACHNIET, Jason. *Introduction to GNU Octave, Second Edition*.
lulu.com, Inc, 2019.

[10] LEVY, Doron. *Introduction to Numerical Analysis I - Lecture Notes*.
University of Maryland, 2016.

[11] McKINNEY, Wes. *Python for Data Analysis, Second Edition*.
O'Reilly Media, Inc, 2017.

[12] MOIN, Parviz. *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis, Second Edition*.
Cambridge University Press , 2010.

[13] PÉREZ, Fernando, GRANGER, Brian E. *IPython: A System for Interactive Scientific Computing, Computing in Science and Engineering, vol. 9, no. 3, pp. 21-29, 2007.*
URL: `ipython.org` (citované: 10.2.2020).

[14] ROSSANT, Cyrille. *IPython Cookbook, Second Edition*. 2018.
URL: `ipython-books.github.io` (citované: 11.2.2020).

[15] *SciPy v1.4.1 Reference Guide*.
URL: `docs.scipy.org/doc/scipy/reference` (citované: 11.2.2020).

[16] TOSI, Sandro. *Matplotlib for Python Developers*.
Packt Publishing Ltd., 2009.