Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# Interaktívne vyšetrovanie priebehu elementárnych funkcií

Bakalárska práca

2020
Juraj Vetrák

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# Interaktívne vyšetrovanie priebehu elementárnych funkcií

Bakalárska práca

| | |
|---|---|
| Študijný program: | Aplikovaná informatika |
| Študijný odbor: | Aplikovaná informatika |
| Školiace pracovisko: | Katedra aplikovanej informatiky |
| Školiteľ: | Ing. Ján Komara, PhD. |

Bratislava, 2020
Juraj Vetrák


Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Juraj Vetrák
**Študijný program:** aplikovaná informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
**Študijný odbor:** informatika
**Typ záverečnej práce:** bakalárska
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Interaktívne vyšetrovanie priebehu elementárnych funkcií
*Properties of Elementary Functions Interactively*

**Anotácia:** Návrh, vývoj a implementácia editora pre interaktívne vyšetrovanie priebehu elementárnych funkcií vo výpočtovom prostredí IPython/Jupyter.

**Vedúci:** Ing. Ján Komara, PhD.
**Katedra:** FMFI.KAI - Katedra aplikovanej informatiky
**Vedúci katedry:** prof. Ing. Igor Farkaš, Dr.

**Dátum zadania:** 20.09.2019

**Dátum schválenia:** 07.10.2019

doc. RNDr. Damas Gruska, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

**Poďakovanie:** Úprimné poďakovanie patrí predovšetkým vedúcemu mojej bakalárskej práce Ing. Jánovi Komarovi, PhD. za jeho ochotu, ľudský prístup, odbornú pomoc a profesionálne vedenie. Rovnako patrí poďakovanie mojim rodičom a sestre za ich vytrvalú podporu počas celého obdobia môjho štúdia.

# Abstrakt

Cieľom tejto bakalárskej práce je navrhnúť a implementovať softvérový nástroj pre interaktívne vyšetrovanie priebehu elementárnych funkcií v prostredí Jupyter Notebook. Tento nástroj má edukačný charakter a je určený študentom úvodného kurzu matematickej analýzy na vysokej škole, pričom im umožňuje interaktívne vyšetrovať niektoré vlastnosti priebehu funkcií bez akýchkoľvek znalostí diferenciálneho počtu.

Nástroj je implementovaný do formy interaktívneho editora s jednoduchým a intuitívnym grafickým užívateľským rozhraním, ktorému na pozadí sekundujú numerické algoritmy pre výpočet derivácií, či nulových bodov funkcie. Prostredníctvom týchto výpočtov sú následne odvodené jednotlivé vlastnosti priebehu funkcie a ich hodnoty sú užívateľovi ponúknuté vo forme grafického, resp. textového výstupu.

Na základe dát z anonymného dotazníka sa nasadenie nástroja do výučbového procesu predmetu *Matematická analýza I* ukázalo ako užitočné. Až 58 % opýtaných ho používalo pravidelne a zvyšných 42 % občasne. V súvislosti s pochopením látky predmetu sa 55 % opýtaných vyjadrilo, že im pomohol pochopiť niektoré preberané pojmy a koncepty. Ďalších 35 % opýtaných považuje nástroj za dobrú pomôcku pri vizualizácii vlastností priebehu funkcie. Z vlastnej iniciatívy, mimo zadaných úloh, nástroj použilo 55 % opýtaných.

**Kľúčové slová:** matematická analýza, vyšetrovanie priebehu funkcie, interaktívny dokument, editor

# Abstract

The goal of this bachelor thesis is to design and implement a software tool, which is able to examine properties of elementary functions interactively in the computing environment Jupyter Notebook. The tool has an educational purpose and it is designed to serve students in the introductory course of mathematical analysis eliminating the necessity of differential calculus knowledge.

The tool is implemented as an interactive editor based on simple and intuitive user interface covering more complex numerical methods for finding derivatives or roots of an elementary function. Based on these methods, the tool has the ability to compute some properties of elementary functions and to provide an output in the graphical or text form based on their values.

Based on the data from an anonymous survey, the tool has showed itself useful in the educational process. As many as 58 % of users have been using the tool regularly and the remaining 42 % occasionally. In order to understand topic more deeply it helped 55 % of users. 35 % of users have found the visualization side of the tool the most useful and as many as 55 % of users have used the tool optionally beyond the class curriculum.

**Keywords:** mathematical analysis, function properties investigation, interactive document, editor

# Obsah

# Zoznam obrázkov

# Zoznam tabuliek

# Úvod

S konceptom vyšetrovania priebehu funkcií pomocou diferenciálneho počtu sa študenti vysokých škôl stretnú väčšinou až v neskorších fázach úvodného kurzu matematickej analýzy. S rôznymi funkciami, aj zložitejšími, sa však študenti stretnú už oveľa skôr, pričom sú schopní nájsť niektoré kvantitatívne charakteristiky týchto funkcií len pomocou skúmania ich grafu. V mnohých stredoškolských študijných materiáloch sú totiž tieto grafy uvedené spolu s predpismi ich funkcií a ak nie, už základná programátorská zručnosť umožňuje študentom vykreslenie týchto grafov na obrazovkách svojich počítačov.

Hlavnou motiváciou pre vznik tejto práce je potreba vytvorenia nástroja, ktorý slúži ako pomocník študentov pri vyšetrovaní priebehu funkcie, a to najmä na začiatku ich štúdia na vysokej škole, kedy sa ešte nepredpokladá znalosť diferenciálneho počtu. Nástroj má za úlohu umožniť rýchle, interaktívne a presnejšie vyšetrenie tých vlastností priebehu funkcie, ktoré je možné graficky vizualizovať - definičný obor, nulové body, extrémy, intervaly monotónnosti, inflexné body, či intervaly konvexnosti a konkávnosti.

Textová časť tejto bakalárskej práce je rozdelená na 5 kapitol sprevádzajúcich čitateľa vývojom tohto edukačného nástroja. Prvá kapitola (1) poukazuje na motiváciu pre použitie takéhoto nástroja vo výučbovom prostredí. V druhej kapitole (2) sa pojednáva o nevyhnutných technologických a teoretických základoch, z ktorých táto práca vychádza, pričom súčasťou tejto kapitoly je aj uvedenie alternatívnych nástrojov a prác, ktoré sa uvedenej tematike venujú. Prezentované požiadavky na vývoj nástroja, a s nimi súvisiaci návrh funkcionalít programu, sú súčasťou kapitoly 3. Niektoré zaujímavé implementačné techniky sú uvedené v kapitole Implementácia (4) a spôsob testovania nástroja, či detailný rozbor spätnej väzby od študentov je súčasťou poslednej, piatej kapitoly (5).

# 1 Motivácia

Pod vyšetrovaním priebehu funkcie sa rozumie nájdenie takých vlastností funkcie, ktoré sú potrebné pre čo najpresnejšie nakreslenie jej grafu. Takýchto vlastností funkcií definujú autori skrípt [7, str. 113], či učebnice [6, str. 395] niekoľko, no implementácia tejto práce sa zameriava najmä na tie, ktoré je možné jednoducho graficky vizualizovať:

1. definičný obor funkcie;
2. nulové body funkcie;
3. body, v ktorých funkcia nadobúda extrémy
4. intervaly, na ktorých je funkcia monotónna;
5. inflexné body
6. intervaly, na ktorých je funkcia konvexná alebo konkávna;

Obsah tejto kapitoly je rozdelený na tri sekcie popisujúce využitie rôznych prostriedkov na vyšetrovanie priebehu funkcie. Postupnosť obsahu týchto častí je uvažovaná ako priamo úmerná s pribúdajúcimi znalosťami študenta v úvodnom kurze matematickej analýzy. Vo všetkých troch sekciách sa pre čo najväčšiu mieru uniformnosti popisuje vyšetrovanie niektorých vlastností elementárnej funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + 3\arctan x, \tag{1}$$

na vybranej časti jej definičného oboru.

## 1.1 Tabuľka funkčných hodnôt

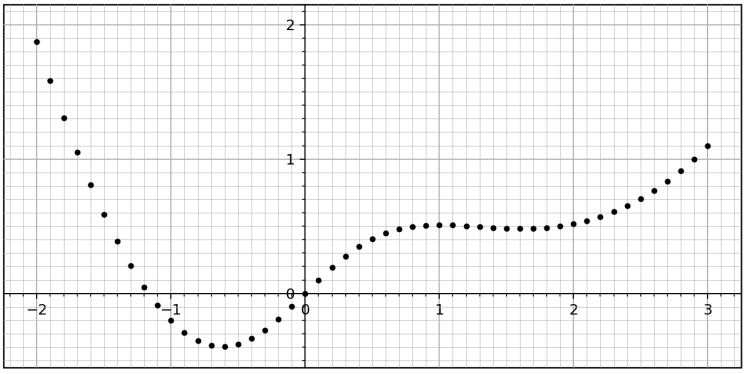
Nech $f$ je funkcia definovaná vzťahom (1). Intuitívnym spôsobom, ako nájsť niektoré vlastnosti priebehu tejto funkcie, je nakreslenie jej grafu. Pod nakreslením grafu funkcie sa uvažuje vyznačenie bodov na súradnicovú os, ktoré vznikli nanesením vybraných hodnôt nezávislej premennej $x$ na jej horizontálnu časť a funkčných hodnôt (hodnôt závislej premennej $y$) na jej vertikálnu časť. **UNFINISHED** DAVA TO ZMYSEL?

Funkciu $f$ je možné vyjadriť prehľadným spôsobom vo forme tabuľky hodnôt nezávislej premennej $x$ a príslušných funkčných hodnôt (zaokrúhlených na dve desatinné miesta) z vybranej časti definičného oboru funkcie $f$.

| $x$ | $-2.0$ | $-1.9$ | $-1.8$ | $\ldots$ | 2.8 | 2.9 | 3.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.87 | 1.58 | 1.30 | $\ldots$ | 0.91 | 1.00 | 1.10 |

**Poznámka.** Desatinné čísla sú z dôvodu väčšej prehľadnosti textu uvedené v notácii s desatinnou bodkou, namiesto desatinnej čiarky.

Jednoduchý graf funkcie $f$ je tak možné zostrojiť nanesením jednotlivých stĺpcov tabuľky v podobe bodov roviny na milimetrový papier (obr. 1.1).



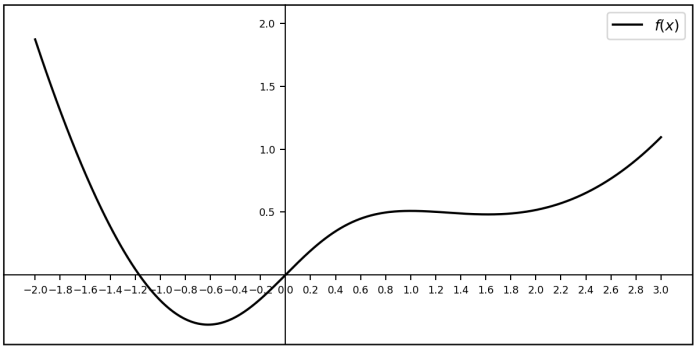

Obr. 1.1: Graf funkcie - milimetrový papier

Určenie niektorých kvantitatívnych charakteristík z grafu funkcie $f$ na obrázku 1.1 nie je vôbec zložité. Z vybraných vlastností priebehu funkcie, uvedených na začiatku tejto kapitoly, vie študent napríklad určiť jeden nulový bod v bode $x = 0$. Rovnako vie len z detailného pohľadu na tento graf určiť, že funkcia nadobúda extrémy v bodoch $\{-0.6, 1, 1.6\}$ a pozorovať tak aj intervaly monotónnosti, ktoré tieto body ohraničujú.

Nedá sa však nepozorovať, že funkcia $f$ má aj druhý nulový bod, pričom je možné vidieť, že sa nachádza niekde v tretej tretine intervalu $(-2, -1)$. Táto informácia je však v snahe určiť čo najpresnejšiu hodnotu tohto bodu nepostačujúca. Využitie milimetrového papiera na zostrojenie grafu funkcie má tak značné obmedzenia pri snahe nájsť presnejšie hodnoty na súradnicových osiach. Študent si však už pri základnej vedomosti programovacieho jazyka Python môže dopomôcť vykreslením grafu funkcie pomocou knižnice matplotlib a vylepšiť si tak pozorovaciu schopnosť napr. vhodným prispôsobením delenia osi $x$. Uvedený je príklad kódu, kde `f` je definícia funkcie $f$ určená vzťahom (1), `X` je uniformné delenie základného intervalu a príkaz `ax.set_xticks(np.arange(-2, 3+d, d))` znamená zjemnenie zobrazovaného delenia osi $x$ na dieliky vzdialené `d` $= \Delta x = 0.2$.

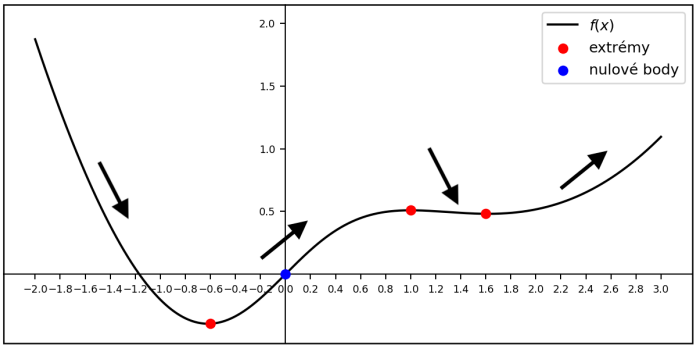
```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt, numpy as np
        def f(X): return X**2/2-2*X-np.log(np.sqrt(X**2+1))+3*np.arctan(X)
        X = np.linspace(-2, 3, 5*100+1)
        fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 4))
        d = 0.2
        ax.set_xticks(np.arange(-2, 3+d, d))
        ax.plot(X, f(X), c='black', label='$f(x)$')
        ax.legend()
        fig.show()
```

Po spustení sa vykreslí graf viditeľný na obr. 1.2, pričom je prostredníctvom neho možné overiť správnosť nameraných hodnôt z milimetrového papiera (1.1).




Obr. 1.2: Graf funkcie - grafický softvér

Určenie hľadaného nulového bodu sa spresnilo len na interval $(-1.2, -1)$, čo stále nie je dostatočné presná informácia. Priblíženie sa k skutočnej hodnote tohto bodu môže znamenať ďalšie zmenšovanie hodnoty $\Delta x$. Tento postup však prestáva byť po čase prehľadný a efektívny, pričom aj v prípade už odhadnutých význačných bodov, či intervalov, nezaručuje ich skutočnú správnosť. Vyriešiť tento problém má za cieľ táto bakalárska práca, konkrétne jej programová časť - interaktívny editor. Jeho použitie popisuje nasledujúca sekcia tejto kapitoly.




Obr. 1.3: Graf funkcie - možné riešenie

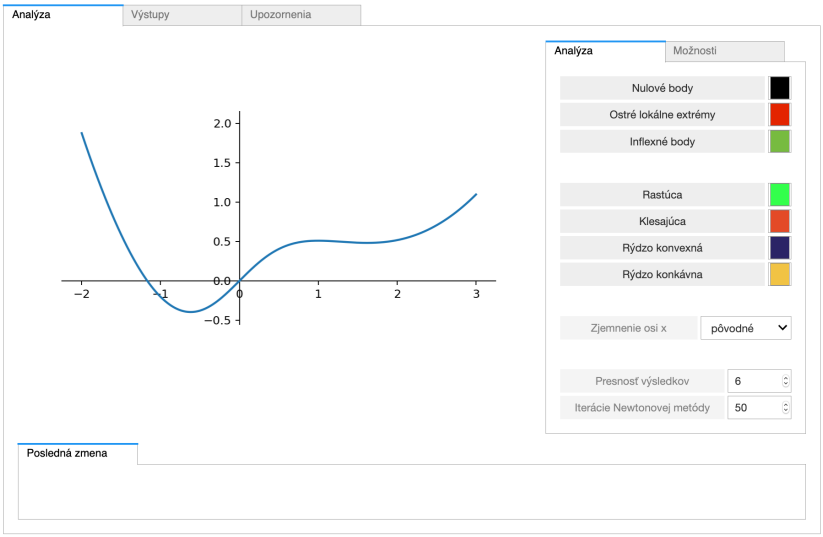
## 1.2 Interaktívny editor

Vyšetrovanie priebehu funkcie len pomocou tabuľky funkčných hodnôt, resp. grafu funkcie v sekcii 1.1 sa ukázalo ako vcelku intuitívne, no nekompletné a s výrazným rizikom nepresností. Ďalším prostriedkom na vyšetrovanie priebehu funkcie, ktorý si ponecháva prvky intuitívnosti, pričom do značnej miery odstraňuje problémy súvisiace s nekompletnosťou a nepresnosťou výsledkov, je interaktívny editor - programová časť tejto práce.

Obsahom tejto sekcie je názorná ukážka jeho funkcionality, ktorá umožňuje vypočítať a vizualizovať výsledky takpovediac ihneď, a to bez potreby rozsiahlejších programátorských zručností.

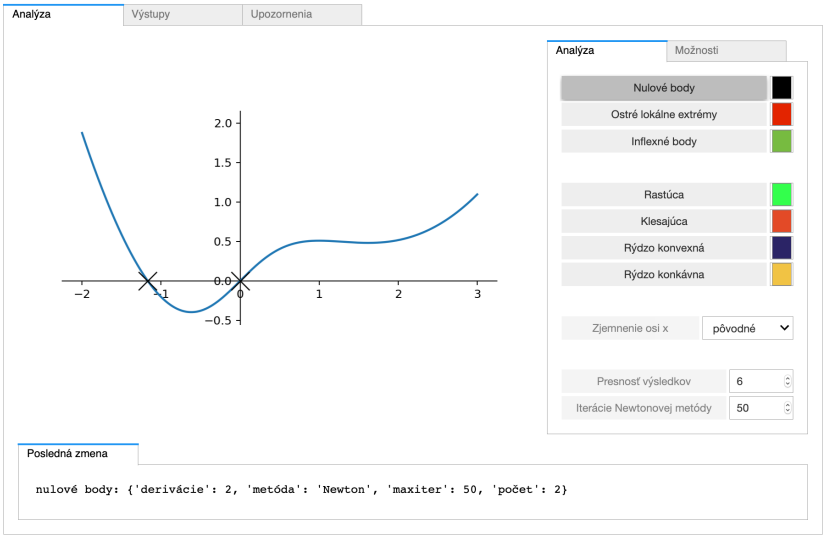
Spustenie editora prebieha pridaním nasledovného riadku do kódu na vykresľovanie grafu zo sekcie 1.1.

```
In [1]: editor(function=f, figure=fig, axes=ax, intervals=[X])
```



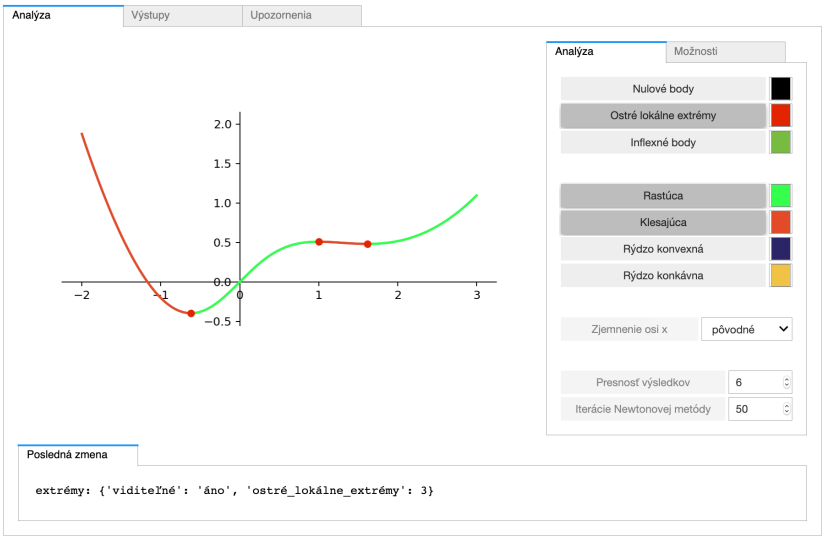

Obr. 1.4: Editor - úvodná obrazovka

Obrázky 1.5 a 1.6 demonštrujú jednoduché použitie editora vybratím príslušných vlastností priebehu funkcie v hlavnom menu. Editor po zvolení možnosti nulových bodov tieto body ihneď vykreslí (obr 1.5), pričom je značne presnejší ako ľudské oko. Program totiž vo svojom výstupe ponúka vypočítané hodnoty týchto bodov (v notácii hranatých zátvoriek reprezentujúcich dátovú štruktúru `list` jazyka Python) s možnosťou zvýšenej presnosti výsledkov.




Obr. 1.5: Editor - nulové body

```
Out [1]: nulove_body: [-1.16822, 0.0]
Out [2]: nulove_body: [-1.16822492541, 0.0]
```




Obr. 1.6: Editor - monotónnosť a extrémy

Veľmi podobné je to pri hľadaní ostrých lokálnych extrémov, či intervalov monotónnosti. V tomto prípade ich editor tiež ihneď vizualizuje (obr. 1.6) a ponúkne svoje riešenia. V prípade ostrých lokálnych extrémov sú to body:

```
Out [1]: ostre_lokalne_extremy_v_bodoch: [-0.62, 1.0, 1.62]
Out [2]: ostre_lokalne_minima_v_bodoch: [-0.62, 1.62]
Out [3]: ostre_lokalne_maxima_v_bodoch: [1.0]
```

Editor zároveň našiel aj intervaly monotónnosti:

```
Out [1]: klesajuca_intervaly_x: [(-2.0, -0.63), (1.01, 1.61)]
Out [2]: rastuca_intervaly_x: [(-0.61, 0.99), (1.63, 3.0)]
```

## 1.3 Diferenciálny počet

Na vyšetrovanie priebehu funkcie sa v neskorších etapách vysokoškolského štúdia matematickej analýzy používajú silnejšie prostriedky, ako napríklad diferenciálny počet. Vyšetrovanie priebehu funkcie pomocou diferenciálneho počtu je obvyklý matematický postup odvolávajúci sa na definície a vety zo sekcie 2.2 tejto práce, resp. ďalšie pojmy týkajúce sa diferenciálneho počtu z citovanej literatúry od autorov Kubáček a Valášek [7].

Vyšetrovanie niektorých vlastností pomocou týmto spôsobom je taktiež demonštrované na príklade funkcie $f$, definovanej vzťahom (1). Ako je spomenuté na záver, aj pri tomto postupe nájde výstupný program tejto práce využitie. Vzhľadom na čo najväčšiu elimináciu chýb sú výpočty niektorých hodnôt kontrolované programom WolframAlpha [18], resp. Python knižnicou pre symbolickú matematiku SymPy [16].

**Definičný obor.** Výraz $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + 3\arctan x$, ktorým je funkcia $f$ definovaná, má zmysel pre všetky reálne čísla $x$. Definičným oborom je teda množina reálnych čísel $\mathbb{R}$ s krajnými bodmi $-\infty$ a $+\infty$, na ktorej je táto funkcia spojitá.

**Extrémy a intervaly monotónnosti.**

**Veta 1.** *Ak funkcia $f$ má lokálny extrém vo vnútornom bode $c$ svojho definičného oboru, tak buď neexistuje $f'(c)$, alebo $f'(c) = 0$. Bod $c$ sa nazýva stacionárny bod funkcie $f$, ak $f'(c) = 0$. Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie $f$ treba teda vyšetriť:*

1. *všetky jej stacionárne body;*
2. *všetky body definičného oboru funkcie $f$, v ktorých neexistuje $f'(c)$;*
3. *všetky body definičného oboru funkcie $f$, ktoré nie sú jeho vnútornými bodmi.*

Podľa uvedenej vety 1 zo skrípt od Kubáčka a Valáška [7], je pre nájdenie lokálnych extrémov funkcie $f$ potrebné uviesť definíciu jej prvej derivácie,

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2-x-1)}{x^2+1}.$$

Nech $V_1$ je množina všetkých stacionárnych bodov funkcie $f$. Vypočítaním rovníc $x-1=0$ a $x^2-x-1=0$ je možné nájsť stacionárne body funkcie $f$, a teda

$$V_1 = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Nech $V_2$ je množina všetkých bodov definičného oboru funkcie $f$, v ktorých nemá $f$ deriváciu. Keďže pre všetky $x$ z definičného oboru platí $x^2+1>0$,

$$V_2 = \varnothing.$$

Nech $V_3$ je množina všetkých bodov definičného oboru funkcie $f$, ktoré nie sú jeho vnútornými bodmi. Potom

$$V_3 = \{-\infty, +\infty\}.$$

Nech $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Usporiadanie prvkov množiny $V$ podľa veľkosti

$$-\infty < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < +\infty$$

dáva istý rozklad definičného oboru funkcie $f$. Z tohto rozkladu ihneď vyplýva, že prvá derivácia funkcie $f$ existuje a je nenulová v každom bode intervalov $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)$, $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

Toto poznanie umožňuje určiť znamienko prvej derivácie funkcie $f$ v jednotlivých bodoch daných intervalov a použiť tak vetu 4 z časti 2.2.2 týkajúcu sa intervalov monotónnosti. Rastúca je teda na intervaloch $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)$, $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ a klesajúca na intervaloch $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$, $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

Podľa vety 2 z časti 2.2.2 je možné použiť druhú deriváciu funkcie $f$,

$$f''(x) = \frac{x(x^3+3x-6)}{(x^2+1)^2},$$

na charakterizovanie bodov množiny $V_1$ ako ostrých lokálnych miním alebo ostrých lokálnych maxím, pretože pre každý bod $x$ z tejto množiny platí $f'(x)=0$. Keďže $f''(1)<0$, funkcia $f$ má podľa tejto vety v bode 1 ostré lokálne maximum. Keďže $f''(\frac{1-\sqrt{5}}{2})>0$ aj $f''(\frac{1+\sqrt{5}}{2})>0$, funkcia $f$ má v bodoch $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ostré lokálne minimá.

**Inflexné body a intervaly konvexnosti a konkávnosti.** Už uvedenú druhú deriváciu funkcie $f$ je podľa vety 6 z časti 2.2.2 možné využiť na určenie intervalov rýdzej konvexnosti a rýdzej konkávnosti.

Nech $V_1$ je množina všetkých bodov definičného oboru funkcie $f$, v ktorých je druhá derivácia funkcie $f$ nulová. Potom

$$V_1 = \left\{0, \frac{(3+\sqrt{10})^{\frac{2}{3}} - 1}{\sqrt[3]{3+\sqrt{10}}}\right\},$$

pričom z dôvodu väčšej prehľadnosti textu je v nasledujúcich zápisoch zlomok

$$\frac{(3+\sqrt{10})^{\frac{2}{3}} - 1}{\sqrt[3]{3+\sqrt{10}}}$$

vyjadrený jeho približnou hodnotou 1.29.

Nech $V_2$ je množina všetkých bodov definičného oboru funkcie $f$, ktoré nie sú jeho vnútornými bodmi. Potom

$$V_2 = \{-\infty, +\infty\}.$$

Rovnakým postupom ako pri intervaloch monotónnosti, teda usporiadaním bodov $V_1 \cup V_2$ podľa veľkosti,

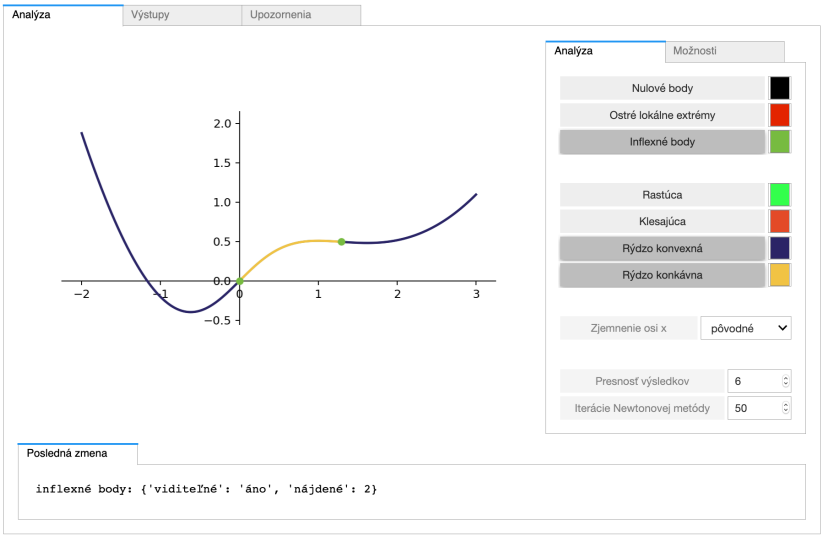
$$-\infty < 0 < 1.29 < +\infty,$$

je možné nájsť intervaly $(-\infty, 0)$, $(0, 1.29)$, $(1.29, \infty)$, v ktorých je funkcia $f$ rýdzo konvexná alebo rýdzo konkávna. Toto poznanie umožňuje určiť znamienko druhej derivácie funkcie $f$ v jednotlivých bodoch daných intervalov a klasifikovať tak podľa vety 6 z časti 2.2.2 intervaly $(-\infty, 0)$, $(1.29, \infty)$ ako intervaly, na ktorých je $f$ rýdzo konvexná a $(0, 1.29)$ ako interval, na ktorom je $f$ rýdzo konkávna.

Aby sa body množiny $V_1$ mohli nazvať inflexnými, je potrebné podľa vety 5 z časti 2.2.2 overiť, či je tretia derivácia funkcie $f$ v týchto bodoch nenulová. Výpočet tretej derivácie je však oproti prvým dvom pomerne netriviálny, a tak môže byť ponechaný interaktívnemu editoru, ktorý si ju dopočíta numericky a vyhodnotí tak namiesto užívateľa, či tieto body spĺňajú danú podmienku. Ako je vidieť na obrázku 1.7, editor tieto body naozaj vyhodnotil ako inflexné, pričom ponúkol výstup, ktorý sa zhoduje s výpočtami vyššie.

```
Out [1]: inflexne_body: [0.0, 1.29]
```

Užitočnosť editora sa tak môže prejaviť aj pri vyšetrovaní priebehu funkcie takýmto matematickým spôsobom, pričom jeho funkcia je najmä kontrolná.




Obr. 1.7: Editor - konvexnosť, konkávnosť a inflexné body

# 2 Východiská

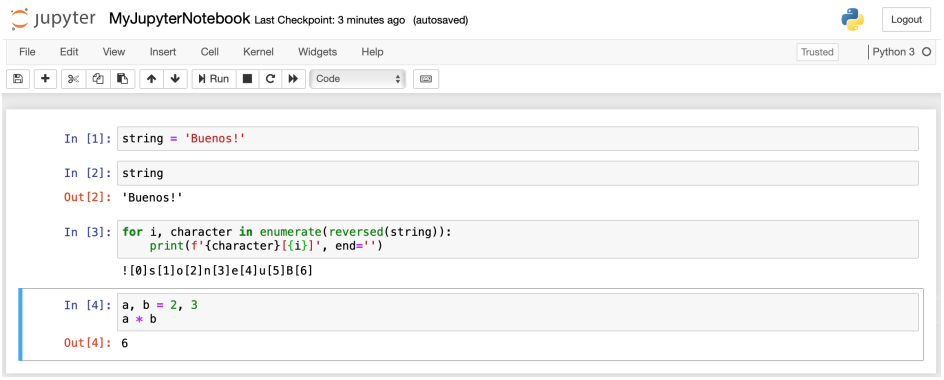
Pred popisom návrhu a implementácie riešenia, prezentovaného v časti 1.2, je dôležité objasniť východiskový stav pred začatím práce, teda popísať uvažované technológie, programy a knižnice, v ktorých bude práca vyvíjaná (sekcia 2.1), a zároveň popísať základnú, v tomto prípade najmä matematickú teóriu, ktorá objasní funkcionalitu niekoľkých algoritmov použitých pre celkovú funkčnosť riešenia (sekcia 2.2). V sekcii 2.3 je ďalej uvedených niekoľko existujúcich riešení danej problematiky v podobe verejne dostupných open-source programov. V závere tejto kapitoly je popísaná a porovnaná podobná práca, ktorá bola obhájená v roku 2017 (sekcia 2.4).

## 2.1 Technologické východiská

Editor, všetky jeho funkcionality a výpočtové procesy sú naprogramované v programovacom jazyku Python. Jednou z výhod tohto jazyka je, že ho používa početná komunita vývojárov v rôznych vedeckých oblastiach, ako matematika, dátová veda, či umelá inteligencia. To podporilo vznik mnohých nástrojov a knižníc, ktoré uľahčujú každodennú prácu v spomínaných oblastiach. Niektoré z týchto nástrojov a knižníc tvoria práve jadro tejto bakalárskej práce.

**Jupyter Notebook.** Okrem programovacieho jazyka Python túto prácu charakterizuje prostredie Jupyter Notebook (obr. 2.1), do ktorého je implementovaná a v ktorom sa používa. Jupyter Notebook autorka praktickej cvičebnice *IPython Cookbook* [14] charakterizuje ako webové interaktívne prostredie, ktoré kombinuje kód, textové prvky, obrázky, videá, animácie, matematické rovnice, grafy, mapy, interaktívne prvky, widgety a grafické užívateľské rozhranie do jediného dokumentu. Spustenie tohto prostredia je realizované príkazom `jupyter notebook` v príkazovom riadku. Práca s týmto nástrojom však nie je limitovaná použitím programovacieho jazyka Python, rôzne numerické výpočty môžu byť totiž realizované aj v iných populárnych jazykoch dátovej vedy, ako Julia, či R. O spúšťanie užívateľského kódu a rôzne numerické výpočty sa starajú programy zvané IPython kernely. IPython je projekt, ktorý vznikol s cieľom poskytnúť nie len značne vylepšený Python shell, ale aj možnosti pre interaktívne, distribuované a paralelné výpočty. Na podobné účely slúžia známe komerčné prostredia

ako MATLAB, The Interactive Data Language pre numerické výpočty, Mathematica a Maple pre manipuláciu so symbolmi, či ich otvorené alternatívy GNU Data Language, Octave, Maxima alebo Sage [13].




Obr. 2.1: Interaktívne webové prostredie Jupyter Notebook

**NumPy.** Prostredie Jupyter Notebook umožňuje využiť výpočtové operácie jazyka Python, no v mnohých prípadoch, ako aj v prípade tejto bakalárskej práce, je zoznam týchto operácii nedostatočný a je potrebné ho rozšíriť o ďalšie numerické operácie. Knižnica NumPy, menej známa ako Numerical Python, je jedným z najdôležitejších balíkov v rámci numerického počítania v jazyku Python.

Medzi príklady funkcionalít knižnice NumPy, ktoré uvádza autor knihy *Python for Data Analysis* [11] a sú kľúčové pre túto prácu, patrí:

- ndarray, efektívne viacrozmerné pole umožňujúce na ňom vykonávať rýchle aritmetické (vektorizované) operácie;
- matematické funkcie pre rýchle operácie nad poliami dát bez potreby písania cyklov;
- podmienený výber dát priamo ako argument polí, namiesto vetiev if-elif-else;
- algoritmy na týchto poliach ako triedenie, výber unikátnych hodnôt, či operácie s množinami.

Autor ďalej vysvetľuje, prečo je knižnica taká dôležitá pre prácu s numerickými výpočtami. Knižnica je totiž priamo navrhnutá na efektívne prácu s veľmi veľkými štruktúrami dát. Aby spomenutú efektívnosť dosiahla, ukladá dáta v súvislých blokoch pamäte, nezávisle od vstavaných objektov jazyka Python. Algoritmy v NumPy sú napísané v jazyku C a vedia pracovať so spomínanou pamäťou bez vyčerpávajúcej kontroly typov jednotlivých údajov. Ďalším, už naznačeným dôvodom je, že NumPy vo väčšine prípadov obchádza štandardné for cykly jazyka Python a namiesto nich vykonáva komplexné výpočty na celých poliach naraz pomocou paralelizmu.

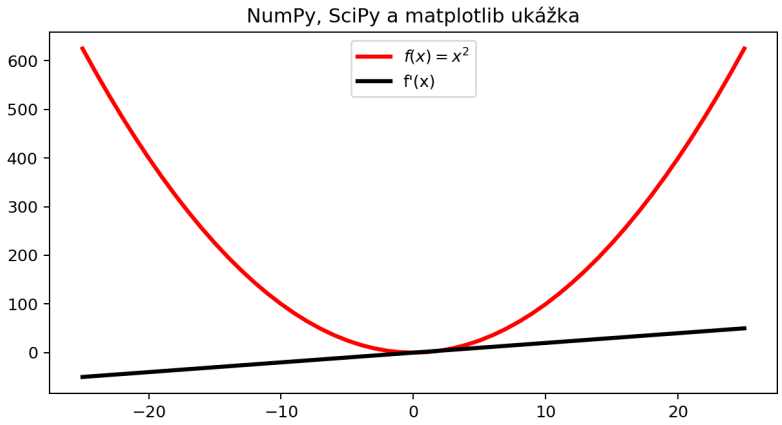
**SciPy.** Špecifickým dôvodom na použitie knižnice NumPy je aj využitie ďalšej knižnice, SciPy, ktorá je na NumPy priamo postavená, ako uvádza jej oficiálna dokumentácia [15]. SciPy, alebo aj Scientific Python, je knižnica, alebo aj kolekcia matematických algoritmov a určených funkcií. Pre potreby tejto práce poskytuje algoritmy na výpočet derivácií, či nulových bodov. S knižnicou SciPy sa Python a prostredie Jupyter Notebook stávajú plnohodnotným konkurentom spomínaných riešení ako MATLAB, The Interactive Data Language, či Octave.

**matplotlib.** Jednou z najpodstatnejších funkcií tejto bakalárskej práce je vizuálna interakcia s užívateľom. Funkcie a jej vlastnosti sa vizualizujú užívateľovi v podobe grafu a v rámci možností v čo najlepšej kvalite. Takéto vizualizačné funkcionality dodáva knižnica matplotlib. matplotlib je Python knižnica pre vytváranie a vizualizáciu najmä 2D grafov v produkčnej kvalite. Podporuje interaktívnu, aj neinteraktívnu vizualizáciu a umožňuje ukladať tieto vizualizácie vo forme obrázkov rozličných formátov (vektorových aj rastrových) typu JPG, PNG, PDF, PS a iných [11, 17].

**Ukážka.** Nasledovný kód demonštruje prácu s knižnicami NumPy, SciPy a matplotlib. V kóde sa zadefinuje funkcia $f(x) = x^2$ a uniformné delenie základného intervalu v podobe premennej `X`. Funkčné hodnoty (`Y`) a derivácie (`primes`) na celom intervale sa vypočítajú pomocou vektorizovaných funkcií knižníc NumPy, resp. SciPy. Cez modul pyplot knižnice matplotlib sa vypočítané hodnoty vykreslia do podoby grafu. (obr. 2.2).

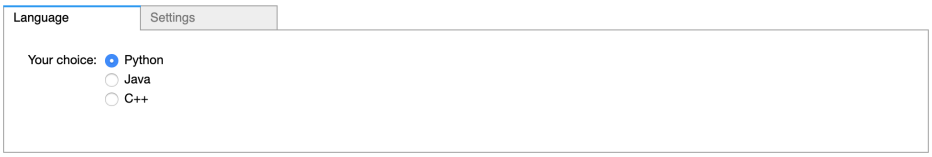
```
In [1]: %matplotlib notebook
        import matplotlib.pyplot as plt
        import numpy as np
        from scipy.misc import derivative

        def f(X): return X ** 2
        X = np.arange(-25, 25+1)
        Y, primes = f(X), derivative(f, X)
        fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 4))
        ax.plot(X, Y, c='red', linewidth=2.5, label=r"$f(x) = x^2$")
        ax.plot(X, primes, c='black', linewidth=2.5, label=r"f'(x)")
        ax.set_title('NumPy, SciPy a matplotlib ukazka'); ax.legend();
        fig.show()
```

**ipywidgets.** Editor ako softvér umožňuje interakciu užívateľa so zvyšnými časťami programu prostredníctvom myši, rôznych tlačidiel, textových vstupov, či iných ovládacích prvkov. Editor funguje striktne v prostredí Jupyter Notebook, a preto sú možnosti




Obr. 2.2: Demonštrácia použitých knižníc - výstup

prispôsobenia grafického užívateľského prostredia obmedzené. Potrebná časť upraviteľných ovládacích prvkov pre Jupyter Notebook je však dostupná pomocou rozšírenia ipywidgets. Ide o sadu HTML elementov ako tlačidlá, textové vstupy, checkboxy, obrázky, či animácie. Tieto elementy sa môžu združovať v rôznych rozloženiach ako okná, taby, či mriežky. V bunke Jupyter Notebooku je tak možné vytvoriť a spustiť vlastnú grafickú interaktívnu aplikáciu (obr. 2.3).




Obr. 2.3: Príklad interaktívnej aplikácie v prostredí Jupyter Notebook

**Anaconda.** Dostupnosť a manažment všetkých potrebných knižníc pre túto prácu, vrátane distribúcie samotného jazyka Python a prostredia Jupyter Notebook, zariaďuje programový balík Anaconda. Programový balík Anaconda je zadarmo a po nainštalovaní slúži okrem už uvedeného aj na spravovanie virtuálnych prostredí, poskytuje programy a nástroje pre distribúciu programovacieho jazyka pre štatistiku R a obsahuje vyše 7500 ďalších open source riešení najmä pre dátovú vedu [1].

## 2.2 Teoretické východiská

Pri tvorbe tejto programovej časti tejto bakalárskej práce bolo potrebné prispôsobiť zložitosť jej funkcionalít úrovni kurzu *Matematická analýza I*, v ktorom je uvažované jej používanie. Od toho sa odvíja úroveň matematickej teórie potrebnej k pochopeniu výpočtov na pozadí práce. Kurz v rámci vyšetrovania priebehu elementárnych fun-

kcií postupne prechádza od definície reálnej funkcie o reálnej premennej, cez definíciu monotónnosti, derivácie, extrémov, až po konvexnosť, konkávnosť a inflexné body. Je potrebné presne zadefinovať tieto, ako aj ďalšie pojmy, poprípade doplniť pojmy, ktoré sa v osnovách predmetu priamo nenachádzajú, ako napr. metódy numerických výpočtov derivácií, či nulových bodov funkcie. Všetky tieto pojmy sú v práci využívané, či už priamo v rámci definovania funkcií, alebo na zabezpečenie algoritmickej funkcionality.

Väčšina matematických definícií a viet pochádza z vysokoškolských skrípt *Cvičenia z matematickej analýzy I* od autorov Kubáček a Valášek [7]. Základné pojmy týkajúce sa teórie chýb, či numerických výpočtov nulových bodov funkcie sú definované podľa knihy J. Eliáša [4] a samotné metódy a ich princípy sú vysvetlené podľa knihy K. Atkinsona [2]. Metódy výpočtu numerických derivácií sú zase popísané v citovaných učebných materiáloch [9, 12]. V tejto sekcii sa čitateľ zároveň stretne s niekoľkými definíciami a vetami, ktoré sú z časti napísané symbolickou notáciou. Aby boli tieto symboly čitateľovi jasné, nasledovné tabuľky ich vysvetľujú.

**Logická a výroková notácia**

| | |
|---|---|
| $\varphi \wedge \psi$ | platí $\varphi$ a súčasne platí $\psi$ |
| $\varphi \vee \psi$ | platí $\varphi$ alebo platí $\psi$ |
| $\varphi \Rightarrow \psi$ | ak platí $\varphi$, tak platí $\psi$ |
| $\varphi \Leftrightarrow \psi$ | $\varphi$ platí práve vtedy, keď platí $\psi$ |
| $\forall x \in A$: $\varphi(x)$ | pre každý prvok $x$ z množiny $A$ platí $\varphi(x)$ |

**Množinová notácia**

| | |
|---|---|
| $[x, y]$ | usporiadaná dvojica prvkov $x$ a $y$ |
| $\{x \in A\,;\varphi(x)\}$ | množina všetkých $x \in A$, pre ktoré platí $\varphi(x)$ |
| $\mathbb{R}$ | množina reálnych čísel |
| $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ | karteziánsky súčin množiny reálnych čísel |
| $A \subset B$ | $A$ je podmnožinou $B$ |
| $A \cap B$ | prienik množín $A$ a $B$ |
| $A \cup B$ | zjednotenie množín $A$ a $B$ |
| $A \setminus B$ | rozdiel množín $A$ a $B$ |

V tabuľkách sú uvedené len také symboly a príslušné vysvetlenia, ktoré sa nachádzajú v tomto texte. Ďalšie symboly a notácie sú vysvetlené v literatúre od autorov Kubáček a Valášek [7], či v prehľade označení, operácií a skratiek v knihe *Úvod do inteligentního kalkulu* [3].

### 2.2.1 Funkcie

V tejto časti sú okrem pojmov funkcia, funkčná hodnota, definičný obor funkcie a graf funkcie definované aj elementárne funkcie. Uvedené sú jednotlivé druhy základných elementárnych funkcií, s ktorými sa môže študent stretnúť na kurze *Matematická analýza I* a ktoré slúžili ako predloha, či vstupy pri tvorbe tejto bakalárskej práce.

**Funkcie.** Nech $A \subset \mathbb{R}$ je množina. Ak je každému číslu $x \in A$ priradené práve jedno číslo $y \in \mathbb{R}$, ktoré označíme $f(x)$, hovoríme, že $f$ je funkcia definovaná na množine $A$. Číslo $f(x)$ sa nazýva funkčná hodnota v bode $x$ a množina $A$ definičný obor funkcie $f$, označujeme ho aj ako $D(f)$. Pre zdôraznenie, že definičným oborom funkcie $f$ je množina $A$, používame zápis $f : A \to \mathbb{R}$; prípadne $f : A \to B$, ak pre každé $x \in A$ platí $f(x) \in B$. Množina $\{[x, f(x)] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,;\, x \in A\}$ bodov roviny, kde $f : A \to \mathbb{R}$ je daná funkcia, sa nazýva graf funkcie $f$, pričom $[x, f(x)]$ je zápis bodu roviny pomocou jeho súradníc v danej súradnicovej sústave.

**Elementárne funkcie.** Funkcie, ktoré vzniknú zo základných elementárnych funkcií len použitím operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a superpozície funkcií, sa nazývajú elementárne funkcie. Medzi základné elementárne funkcie patria funkcie konštantné, mocninové, exponenciálne, logaritmické, goniometrické a cyklometrické.

**Poznámka.** Používané pojmy z matematickej analýzy ako intervaly, (rýdze) okolie bodu, spojitosť funkcie, vnútorný bod množiny, či limita funkcie sú považované za známe, avšak ich definície a súvisiace notácie sú k dohľadaniu v literatúre od Kubáčka a Valáška [7].

**Derivácia funkcie.** Pojem derivácie funkcie zastupuje kľúčovú funkcionalitu v rámci tejto bakalárskej práce. Okrem toho, že patrí do osnov predmetu *Matematická analýza I*, je derivácia využívaná na výpočet kľúčových hodnôt pri vyšetrovaní vlastností funkcie pomocou diferenciálneho počtu.

Nech $x$ je vnútorný bod definičného oboru funkcie $f$. Hovoríme, že funkcia $f$ má v tomto bode deriváciu $f'(x)$, ak

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tu predpokladáme, že limita na pravej strane existuje a je konečná.

Nech $M$ je množina všetkých bodov definičného oboru $D(f)$, v ktorých má funkcia $f$ deriváciu. Funkcia $f' : M \to \mathbb{R}$, ktorá každému bodu $x \in M$ priradí hodnotu $f'(x)$ derivácie funkcie $f$ v bode $x$, sa nazýva derivácia funkcie f.

**Derivácie vyšších rádov.** V nasledujúcej sekcii 2.2.2 je uvedených niekoľko viet, ktoré slúžili ako podklad pre tvorbu algoritmov na vyšetrovanie niektorých vlastností funkcie pomocou diferenciálneho počtu. V niektorých týchto vetách sa používa pojem derivácie vyššieho rádu, preto je dôležité si ho korektne zadefinovať.

Nech $x$ je vnútorný bod $D(f)$. Definície vyšších rádov definujeme induktívne: Nech funkcia $f$ je definovaná v okolí bodu $x \in \mathbb{R}$, označme $f^{(0)} := f$. Hovoríme, že funkcia $f$ má $n$-tú deriváciu v bode $x$, označujeme $f^{(n)}(x)$, ak existuje derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ v bode $x$.

Derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ sa nazýva $n$-tá derivácia funkcie $f$ a označuje sa $f^{(n)}$. Okrem označení $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}$, ... sa používajú aj označenia $f', f'', f''', f''''$ (alebo $f^{IV}$), $f^V$, ... .

### 2.2.2 Vyšetrovanie priebehu funkcie

**Extrémy.** Hovoríme, že funkcia $f$ má v bode $c \in D(f)$ ostré lokálne maximum, ak existuje okolie $O(c)$ bodu $c$ také, že platí

$$\forall x \in (O(c) \setminus \{c\}) \cap D(f)\colon\ f(x) < f(c).$$

Ďalej hovoríme, že funkcia $f$ má v bode $c \in D(f)$ ostré lokálne maximum, ak existuje okolie $O(c)$ bodu $c$ také, že platí

$$\forall x \in (O(c) \setminus \{c\}) \cap D(f)\colon\ f(x) > f(c).$$

Ostré lokálne maximá a ostré lokálne minimá sa súhrnne nazývajú ostré lokálne extrémy.

**Veta 2.** *Nech funkcia $f$ je dvakrát diferencovateľná vo vnútornom bode $x$ množiny $D(f)$.*

1. *Ak $f'(x) = 0$ a $f''(x) > 0$, tak $f$ má v bode $x$ ostré lokálne minimum.*
2. *Ak $f'(x) = 0$ a $f''(x) < 0$, tak $f$ má v bode $x$ ostré lokálne maximum.*

**Veta 3.** *Nech funkcia $f$ je $n$-krát $(n \geq 2)$ diferencovateľná vo vnútornom bode $x$ množiny $D(f)$, nech $f'(x) = ... = f^{(n-1)}(x) = 0$ a $f^{(n)}(x) \neq 0$.*

1. *Ak $n$ je párne a $f^{(n)}(x) > 0$, tak funkcia $f$ má v bode $x$ ostré lokálne minimum (ostré lokálne maximum).*
2. *Ak $n$ je párne a $f^{(n)}(x) < 0$, tak funkcia $f$ má v bode $x$ ostré lokálne maximum.*
3. *Ak $n$ je nepárne, funkcia $f$ nemá v bode $x$ lokálny extrém.*

**Monotónnosť funkcie.** Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú množiny, kde $B \subset A$. Funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ sa nazýva rastúca na množine B, ak platí

$$\forall x, y \in B\colon\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ sa nazýva klesajúca na množine B, ak platí

$$\forall x, y \in B\colon\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Funkcia, ktorá je rastúca na množine $B$ alebo klesajúca na množine $B$ sa nazýva rýdzomonotónna na množine $B$. Funkcia rastúca (klesajúca, rýdzomonotónna) na svojom definičnom obore sa nazýva rastúca (klesajúca, rýdzomonotónna).

**Veta 4.** *Nech funkcia $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $I$ a má deriváciu v každom jeho vnútornom bode. Potom*

1. *ak pre každý vnútorný bod $x$ z intervalu $I$ platí, že $f'(x) > 0$, tak $f$ je rastúca na $I$;*
2. *ak pre každý vnútorný bod $x$ z intervalu $I$ platí, že $f'(x) < 0$, tak $f$ je klesajúca na $I$.*

**Inflexné body.** Nech $x$ je vnútorný bod $D(f)$. Bod $x$ sa nazýva inflexný bod funkcie $f$, ak má v bode $x$ deriváciu a existuje $\epsilon > 0$ tak, že funkcia $f$ je rýdzo konvexná na jednej z množín $(x-\epsilon, x\rangle$, $\langle x, x+\epsilon)$ a rýdzo konkávna na druhej z nich.

**Veta 5.** *Nech funkcia $f$ je trikrát diferencovateľná v bode $x$ a dvakrát diferencovateľná v niektorom jeho okolí. Ak platí $f''(x) = 0$ a $f'''(x) \neq 0$, tak $x$ je inflexný bod funkcie $f$.*

**Konvexnosť a konkávnosť.** Funkcia $f$ sa nazýva rýdzo konvexná na intervale $I \subset D(f)$, ak platí

$$\forall x, y \in I,\ x \neq y\ \forall p, q > 0,\ p + q = 1\colon\ f(px + qy) < pf(x) + qf(y).$$

Funkcia $f$ sa nazýva rýdzo konkávna na intervale $I \subset D(f)$, ak platí

$$\forall x, y \in I,\ x \neq y\ \forall p, q > 0,\ p + q = 1\colon\ f(px + qy) > pf(x) + qf(y).$$

**Veta 6.** *Nech funkcia $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $I$ a dvakrát diferencovateľná v každom jeho vnútornom bode. Potom*

1. *ak pre každý vnútorný bod $x$ z intervalu $I$ platí, že $f''(x) > 0$, tak $f$ je rýdzo konvexná na $I$;*
2. *ak pre každý vnútorný bod $x$ z intervalu $I$ platí, že $f''(x) < 0$, tak $f$ je rýdzo konkávna na $I$.*

### 2.2.3 Teória chýb

Programová časť tejto práce implementuje niekoľko numerických metód, či algoritmov, ktorých výsledkami sú nejaké vypočítané hodnoty. Pri skúmaní týchto hodnôt je však vo väčšine prípadov potrebné rátať s nejakou odchýlkou, resp. chybou, ktorá vznikla pri hľadaní numerického riešenia, a teda považovať výslednú hodnotu len za "približnú", resp. "čo najpresnejšiu". Táto časť uvádza niekoľko pojmov z teórie chýb, ktoré definujú spôsob uvažovania pri skúmaní nameraných hodnôt z numerických výpočtov programovej časti tejto práce.

**Približná hodnota čísla.** Približnou hodnotou čísla $X$ sa nazýva číslo $x$, ktoré sa málo líši od čísla $X$. Namiesto označenia približná hodnota čísla $X$ môžeme použiť označenie aproximácia čísla $X$. Ak vieme, že pre približnú hodnotu $x$ čísla $X$ platí $x < X$, hovoríme, že číslo $x$ je približnou hodnotou čísla $X$ zdola (dolná aproximácia čísla $X$). Ak $x > X$, hovoríme, že číslo $x$ je približnou hodnotou čísla $X$ zhora (horná aproximácia čísla $X$).

**Chyba približnej hodnoty čísla.** Nech číslo $x$ je približnou hodnotou čísla $X$. Chybou približnej hodnoty $x$ čísla $X$, ktorú označujeme $\delta x$, nazývame číslo $X - x$, teda platí $\delta x = X - x$.

**Absolútna chyba približnej hodnoty čísla.** Absolútnou chybou približnej hodnoty $x$ čísla $X$ nazývame číslo $|\delta x| = |X - x|$.

**Odhad absolútnej chyby približnej hodnoty čísla.** Odhad absolútnej chyby približnej hodnoty $x$ čísla $X$ nazývame každé nezáporné číslo, ktoré nie je menšie ako $|\delta x|$ a označujeme ho $\Delta x$. Platí teda:

$$|X - x| \leq \Delta x$$

**Relatívna chyba približnej hodnoty čísla.** Relatívnou chybou $\varepsilon$ približnej hodnoty $x$ čísla $X$ nazývame podiel absolútnej chyby $\Delta x$ a absolútnej hodnoty samotnej približnej hodnoty $|x|$, ak $x \neq 0$. Platí teda:

$$\varepsilon x = \frac{\Delta x}{|x|} \qquad x \neq 0$$

**Zápis približných hodnôt čísiel v desiatkovej číselnej sústave.** V desiatkovej číselnej sústave každé $x \in \mathbb{R}$ môžeme zapísať v tvare

$$x = \pm(\chi_m 10^m + \chi_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \chi_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \ldots),$$

kde $\chi_i$ sú číslice čísla $x$, $\chi_i = 0, 1, \ldots 9$, pričom $\chi_m \neq 0$ a $m$ je celé číslo, ktoré nazývame rádom čísla $x$.

**Hodnotné číslice.** Približné hodnoty čísiel sa v praxi najčastejšie vyskytujú vo forme konečného desatinného rozvoja,

$$x = \pm(\chi_m 10^m + \chi_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \chi_{m-n+1} 10^{m-n+1}) \qquad \chi_m \neq 0.$$

Hodnotnou číslicou približnej hodnoty $x$ čísla $X$ vyjadreného v desatinnom rozvoji potom nazývame:

(a) všetky nenulové číslice,

(b) všetky nuly medzi prvou a poslednou nenulovou číslicou,

(c) všetky také nuly vpravo od poslednej nenulovej číslice, ktoré sa používajú na označenie počtu jednotiek rádov, ktoré v približnej hodnote $x$ čísla $X$ nechávame.

**Platné číslice.** Hovoríme, že prvých $n$ hodnotných číslic približnej hodnoty $x$ čísla $X$ je platných, keď absolútna chyba približnej hodnoty $x$ nie je väčšia ako polovica jednotky rádu rovného rádu n-tej hodnotnej číslice, ak počítame zľava doprava.

Ak pre približnú hodnotu $x$ čísla $X$, zapísanú v desiatkovej číselnej sústave, platí

$$\Delta x = |X - x| \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1},$$

potom podľa definície platných číslic sú číslice $\chi_m, \chi_{m-1}, \ldots, \chi_{m-n+1}$ platnými číslicami približnej hodnoty $x$.

### 2.2.4 Numerický výpočet derivácií

Aby mohli byť vety zo sekcie 2.2.2 implementované vo výstupnom programe tejto práce, potrebuje mať program k dispozícii predpisy prvých derivácií, či derivácií vyšších rádov. Tie môžu byť v prípade jednoduchších predpisov funkcií odvodené analyticky, čo však nie je vždy pravidlom, keďže analytický výpočet derivácií môže byť príliš náročný, dokonca nemožný. Program tak musí využiť informácie o funkčných hodnotách danej funkcie na nejakej množine bodov a pokúsiť sa dopočítať, resp. aproximovať derivácie numericky. Algoritmus pre numerické aproximovanie derivácií, ktorý je používaný vo výstupnom programe tejto práce, vychádza z niekoľkých pojmov a postupov, ktoré sú popísané práve v tejto časti.

**Taylorov rad.** Mnoho známych vzorcov pre aproximáciu numerických derivácií, vrátane metódy centrálnej diferencie, vyplýva z rozvoja Taylorovho radu.

Nech funkcia $f$ je $n$-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$. Potom mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

sa nazýva Taylorov rad funkcie $f$ v bode $a$.

**Dopredná diferencia.** Jednoduchá aproximácia prvej derivácie vychádza priamo z definície derivácie

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

kde uvažujeme $h > 0$. Táto aproximácia prvej derivácie funkcie sa nazýva metóda doprednej diferencie. Táto metóda je napríklad v prípade lineárnych funkcií presným vzorcom pre výpočet prvej derivácie, no takmer pri všetkých ostatných druhoch funkcií tomu tak nie je.

Odvodenie tejto metódy a jej vzťahu k presnosti sa dá ukázať využitím rozvoja Taylorovho radu a položením $(x-a) = h$ pre konzistentnosť zápisu:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots.$$

Následnými úpravami tohto rozvoja môžeme uviesť presný vzorec pre aproximáciu prvej derivácie funkcie, a teda

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f''(x)\frac{h}{2} - f'''(x)\frac{h^2}{3!} - \cdots.$$

Prvý člen na pravej strane rovnice je odvodená dopredná diferencia, pričom zvyšné členy môžeme nahradiť označením $O(h)$, kde exponent $\alpha$ pri $h$ v $O(h^\alpha)$ vyjadruje stupeň presnosti tejto metódy

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h).$$

Túto presnosť odvodzujeme vždy od prvého člena rozvoja, ktorý sme zanedbali, s implikáciou, že zvyšné členy väčších stupňov sú s $h \to 0$ vždy menšie ako tento prvý člen. V prípade vyššie odvodenej metódy doprednej diferencie tak môžeme povedať, že má presnosť prvého stupňa.

**Spätná diferencia.** Aproximácia prvej derivácie v bode $x$ pomocou metódy doprednej diferencie je založená na hodnotách funkcie v bodoch $x$ a $x+h$. Ak pre aproximáciu použijeme hodnoty funkcie v bodoch $x-h$ a $x$, tak obdobným spôsobom odvodíme vzťah

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h),$$

ktorý nazývame spätná diferencia a rovnako ako dopredná diferencia má presnosť prvého stupňa.

**Centrálna diferencia.** Pomocou Taylorovho radu a ďalších bodov v okolí bodu $x$ vieme odvodiť aj vzorce s vyšším stupňom presnosti. Rozdielom dvoch Taylorovych radov

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

dostaneme napríklad vzťah pre výpočet prvej derivácie funkcie $f$ v bode $x$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2),$$

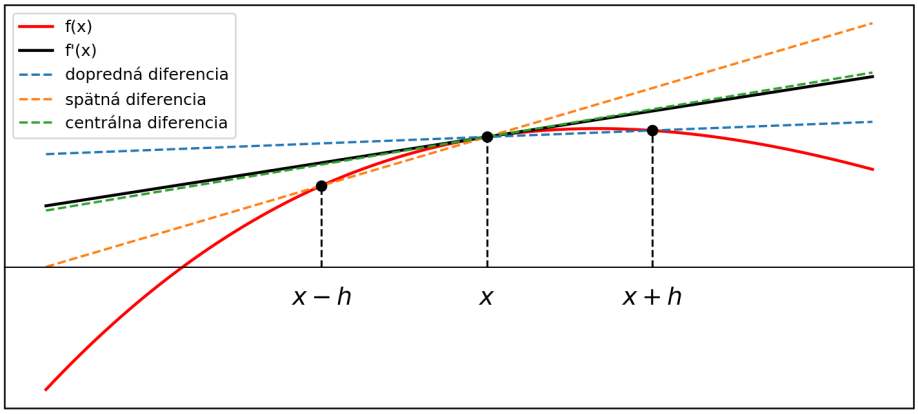
ktorý nazývame centrálna diferencia, pričom presnosť sa zvýšila na stupeň 2. Ešte vyššiu presnosť môžeme dosiahnuť pridaním ďalších bodov do okolia bodu $x$ (zjemnenie intervalu). Napríklad vzorec s presnosťou stupňa 4 má tvar

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + O(h^4).$$

Centrálna diferencia je najčastejšie využívanou metódou pre výpočet derivácií v tejto práci, a to aj v súvislosti s výpočtom derivácií vyšších rádov. Napríklad sčítaním vyššie uvedených dvoch rozvojov Taylorovho radu sa členy $f'(x)h$ navzájom odstránia a po malých úpravách dostaneme vzťah pre výpočet druhej derivácie funkcie $f$ v bode $x$ s presnosťou stupňa 2:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Presnosť metód doprednej, spätnej a centrálnej diferencie na aproximáciu prvej derivácie funkcie $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ v danom bode $x$ ilustruje obrázok 2.4.




Obr. 2.4: Numerická aproximácia prvej derivácie

### 2.2.5 Hľadanie nulových bodov funkcie

Súčasťou práce sú aj dve numerické metódy na aproximáciu nulových bodov funkcie. Metódy sa rozlišujú podľa toho, či sa využije prvá derivácia funkcie, a to nasledovne:

- ak sa prvá derivácia funkcie využíva, nulové body funkcie sú aproximované *Newtonovou metódou*
- ak sa derivácia funkcie nevyužíva, nulové body funkcie sú aproximované *metódou sečníc*

Nasledujúce odseky vysvetľujú základné pojmy dôležité pri hľadaní nulových bodov funkcie, resp. koreňov rovnice a princípy spomenutých metód ich hľadania (aproximovania).

**Základné pojmy.** Nech $f(x) = 0$ je rovnica, kde $f(x)$ je funkcia definovaná na množine $M$. Číslo $\alpha$ nazývame koreňom alebo riešením rovnice $f(x) = 0$, keď platí $f(\alpha) = 0$. Riešiť rovnicu $f(x) = 0$ znamená nájsť všetky jej riešenia. Ak $f(x)$ je polynóm n-tého stupňa, t.j. ak rovnica $f(x) = 0$ má tvar

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

a nazývame ju algebraickou rovnicou n-tého stupňa o jednej neznámej. Rovnicu, ktorá nie je algebraická, nazývame nealgebraickou rovnicou.

Približné alebo numerické riešenie rovnice $f(x) = 0$ spočíva vo všeobecnosti v zostrojení postupnosti približných hodnôt koreňa $\alpha$ rovnice $f(x) = 0$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

ktorá konverguje, t.j. existuje

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi; \qquad f(\varphi) = 0.$$

n-tý člen postupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ nazývame n-tou približnou hodnotou koreňa $\varphi$ alebo n-tou aproximáciou koreňa $\varphi$ rovnice $f(x) = 0$. Číslo $n$ hľadáme tak, aby absolútna chyba približnej hodnoty $x_n$ koreňa $\varphi$ rovnice $f(x) = 0$, t.j. $|x_n - \varphi|$ bola dostatočne malá, alebo aby bola menšia ako vopred dané kladné číslo $\epsilon$.

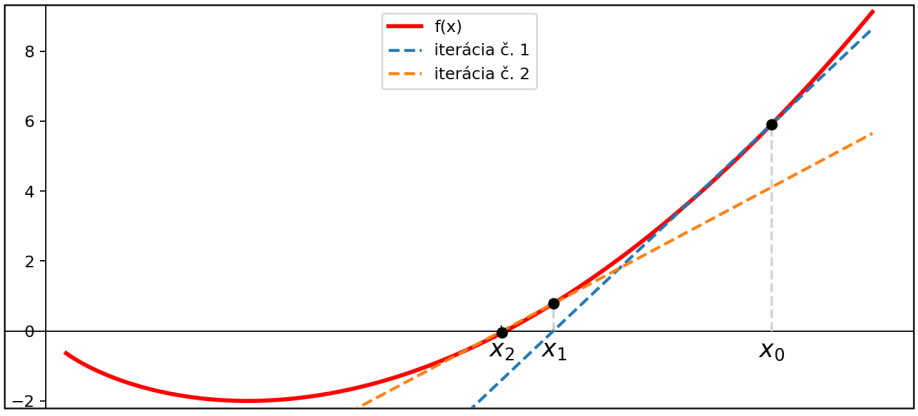
Separáciou koreňov rovnice $f(x) = 0$ rozumieme hľadanie takých intervalov na číselnej osi, v ktorých leží práve jeden koreň rovnice $f(x) = 0$. Predpokladajme, že sme našli interval, v ktorom leží jediný koreň rovnice $f(x) = 0$. Spôsob hľadania približnej hodnoty $x_n$ koreňa $\varphi$ rovnice $f(x) = 0$ v tomto intervale tak, aby táto približná hodnota aproximovala koreň $\varphi$ s vopred prepísanou absolútnou chybou $\epsilon$, nazývame aproximácia koreňa rovnice $f(x) = 0$.

**Newtonova metóda.** Newtonova metóda, inak známa aj ako metóda dotyčníc, je podľa Atkinsona [2] najznámejšou procedúrou pre nájdenie koreňov rovnice pre jej formálnu jednoduchosť a rýchlosť, no nie je vždy najvhodnejšou metódou na riešenie každého nelineárneho problému.

Nech $x_0$ je počiatočný odhad pre koreň $\alpha$ rovnice $f(x) = 0$. Newtonová metóda má za úlohu nájsť postupnosť približných hodnôt koreňa $\alpha$ rovnice $f(x) = 0$, ktorá by mala postupne konvergovať k bodu $\alpha$. Hľadanie tejto postupnosti prebieha nasledovne: pri predpoklade, že $x_0$ je dostatočne blízko $\alpha$, metóda aproximuje graf funkcie $y = f(x)$ v okolí bodu $\alpha$, a to tak, že v bode $[x_0, f(x_0)]$ skonštruuje dotyčnicu ku grafu funkcie. Koreňom tejto dotyčnice je potom nová aproximácia $\alpha$, označená $x_1$. Postupným opakovaním (iterovaním) tohto postupu všeobecne pre

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n \geq 1$$

sa metóda dopracuje k spomínanej postupnosti približných hodnôt koreňa $\alpha$ rovnice $f(x) = 0$. Postup prvých dvoch iterácií na príklade funkcie $f(x) = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ je znázornený obrázkom 2.5 s aproximovanými bodmi $x_1$ a $x_2$.




Obr. 2.5: Iterácie Newtonovej metódy

Tabuľka 2.1 zase ukazuje namerané hodnoty pri rovnakej funkcii, a to pri štyroch iteráciách. Štvrtý stĺpec tejto tabuľky znázorňuje, ako sa s každou iteráciou Newtonovej metódy približné hodnoty $x_n$ koreňa $\alpha$ približujú k hodnote $\alpha$, dopočítaného programom WolframAlpha [18]. Posledný stĺpec zase znázorňuje postupné zmenšovanie odchýlky jednotlivých približných hodnôt $x_n$ koreňa $\alpha$.

| $n$ | $x_n$ | $f(x_n)$ | $\alpha - x_n$ | $x_{n+1} - x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3.6 | 5.91323825 | -1.32049294 | -1.082999 |
| 1 | 2.517001 | 0.78422221 | -0.23749394 | -0.2551462 |
| 2 | 2.2618548 | -0.05330492 | 0.01765226 | 0.0213885 |
| 3 | 2.2832433 | 0.01137122 | -0.00373624 | -0.00447446 |
| 4 | 2.27876884 | -0.00224309 | 0.00073822 | |

Tabuľka 2.1: Vypočítané hodnoty štyroch iterácií Newtonovej metódy

Newtonova metóda na príklade konverguje naozaj veľmi rýchlo, a to hneď, ako sa približná hodnota $x_n$ koreňa $\alpha$ blíži ku hodnote $\alpha$. Väčšie odchýlky pri prvej, resp. druhej iterácií sú dôsledkom zvolenia nie príliš presného počiatočného odhadu bodu $x_0$, t.j. aproximácie koreňa rovnice. Z toho vyplýva, že zlepšením aproximácie koreňa rovnice je možné ešte viac urýchliť konvergenciu Newtonovej metódy.

**Metóda sečníc.** Predpis, či hodnoty prvej derivácie funkcie môžu byť z rôznych dôvodov nedostupné. V takom prípade je použitie Newtonovej metódy a aproximovanie grafu funkcie pomocou dotyčníc v jednom bode nemožné. Riešením je použitie metódy sečníc, ktorá funguje veľmi podobne ako Newtonova metóda.

Nech $x_0$ a $x_1$ sú počiatočné odhady pre koreň $\alpha$ rovnice $f(x) = 0$. Metóda sečníc má za úlohu nájsť postupnosť približných hodnôt koreňa $\alpha$ rovnice $f(x) = 0$, ktorá by mala postupne konvergovať k bodu $\alpha$. Hľadanie tejto postupnosti prebieha nasledovne: pri predpoklade, že $x_0$ a $x_1$ sú dostatočne blízko $\alpha$, metóda aproximuje graf funkcie $y = f(x)$ v okolí bodu $\alpha$, a to tak, že pomocou bodov $[(x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$ skonštruuje sečnicu grafu funkcie. Koreňom tejto sečnice je potom nová približná hodnota $x_2$ koreňa $\alpha$. Výpočet vychádza z rovnice sečnice, ktorá má tvar

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) + f(x_1),$$

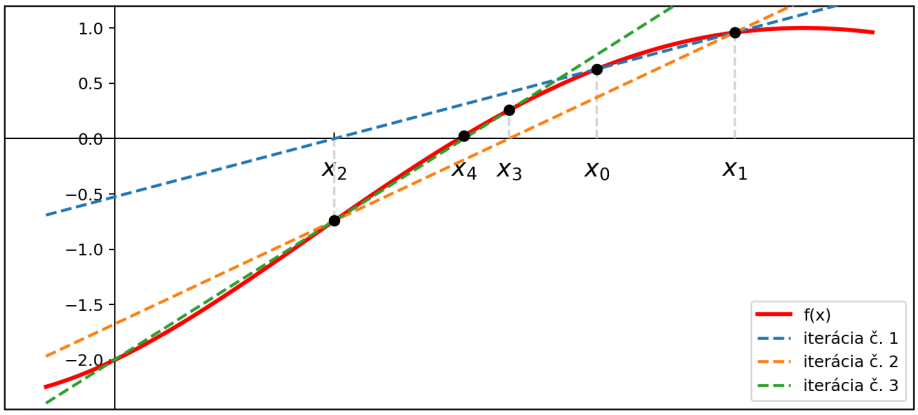
pričom koreňom rovnice tejto sečnice, resp. novou približnou hodnotou $\alpha$ je spomínaný bod

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Postupným opakovaním (iterovaním) tohto postupu všeobecne pre

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad n \geq 1$$

sa metóda dopracuje k spomínanej postupnosti približných hodnôt koreňa $\alpha$ rovnice $f(x) = 0$. Postup prvých troch iterácií na príklade funkcie $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 3x - 2$ je znázornený obrázkom 2.6 s nájdenými približnými hodnotami $x_2, x_3$ a $x_4$ koreňa $\alpha$. Štvrtý stĺpec tabuľky 2.2 zase znázorňuje, ako sa s každou iteráciou metódy sečníc približné hodnoty $x_n$ separovaného koreňa $\alpha = \frac{1}{2}$ funkcie približujú práve k tejto hodnote.




Obr. 2.6: Iterácie metódy sečníc

| $n$ | $x_n$ | $f(x_n)$ | $\alpha - x_n$ | $x_{n+1} - x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.7 | 0.6292 | -0.2 | 0.2 |
| 1 | 0.9 | 0.9592 | -0.4 | -0.58133333 |
| 2 | 0.31866667 | -0.74215433 | 0.18133333 | 0.25358565 |
| 3 | 0.57225232 | 0.25681816 | -0.07225232 | -0.06519239 |
| 4 | 0.50705994 | 0.0263491 | -0.00705994 | -0.00745332 |
| 5 | 0.49960661 | -0.0014756 | 0.00039339 | |

Tabuľka 2.2: Vypočítané hodnoty piatich iterácií metódy sečníc

## 2.3 Existujúce riešenia

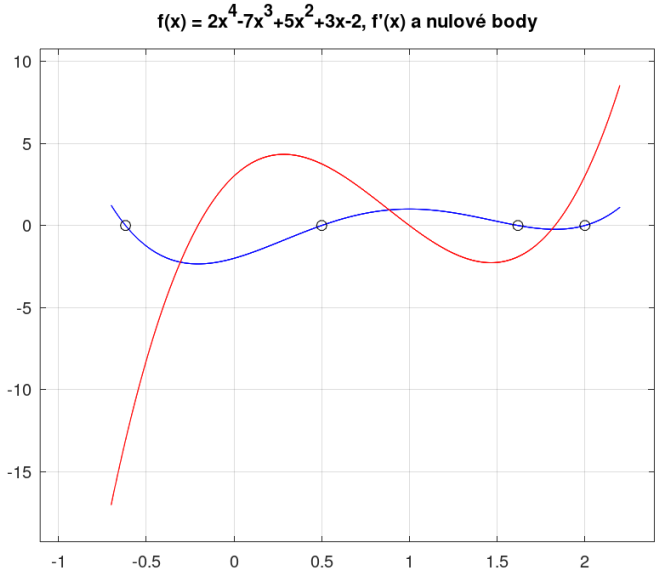
Editor, ako výstup tejto práce, využíva vety a definície zo sekcie 2.2. Zaobaľuje ich do formy funkcií, či algoritmov, ktoré riadia funkcionalitu programu. Tieto funkcionality, spolu s vizualizáciou grafov je možné v rôznych podobách implementovať aj v iných, verejne dostupných nástrojoch. V tejto sekcii je popísaný jeden komerčný a dva open-source nástroje, ktoré môžu slúžiť ako prípadná alternatíva pre študenta analyzujúceho priebeh elementárnych funkcií.

**MATLAB.** MATLAB je vysoko-úrovňový jazyk a interaktívne prostredie pre numerické výpočty, vizualizáciu a programovanie. Umožňuje analyzovať dáta, vyvíjať algoritmy, či vytvárať modely a aplikácie. Jazyk, jeho nástroje a zabudované matematické funkcie umožňujú zvoliť mnoho prístupov pri riešení problému a dosiahnuť toto riešenie rýchlejšie v porovnaní s hárkami tabuľkového procesora, či programovacími jazykmi C/C++ alebo Java. MATLAB je využívaný v mnohých aplikáciách ako spracovanie signálu, obrazu, či videa, kontrolné systémy, systémy pre testovanie a meranie, finančníctvo alebo biológia [10]. Používanie softvéru MATLAB vyžaduje platenú licenciu.

**GNU Octave.** GNU Octave je tiež vysoko-úrovňový jazyk a interaktívne prostredie pre numerické výpočty, pričom v zmysle účelu tejto práce poskytuje rovnaké možnosti ako MATLAB, no je distribuované pod GNU licenciou. Licencia GNU používateľovi umožňuje využívať tento softvér zadarmo v plnom rozsahu, šíriť ho a dokonca aj prípadne upravovať. Obidva jazyky sú numerické, nie symbolické a ich základným typom je matica, pričom softvér je plne optimalizovaný pre vektorové operácie [8]. Nasledovný príklad demonštruje hľadanie nulových bodov a derivácie polynomiálu $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 3x - 2$ v prostredí GNU Octave, pričom kód je aplikovateľný aj v prostredíi MATLAB.

```
> x = [-0.7:0.001:2.2];
> p = [2, -7, 5, 3, -2];
> y = polyval(p, x);
> dydx = diff(y) ./ diff(x);
> r = roots(p);
  r = 2.00000, 1.61803, -0.61803, 0.50000
> plot(x, y, 'b', x(1:end-1), dydx, 'r', r, 0, 'ko')
> title("f(x) = 2x^4-7x^3+5x^2+3x-2, f'(x) a nulove body")
```

Práca s nástrojmi popísanými v tejto časti je najmä z hľadiska funkcionalít porovnateľných s touto bakalárskou prácou podobná a vzhľadom na ich robustnosť aj




Obr. 2.7: Demonštrácia MATLAB/Octave - výstup

flexibilnejšia. To však predurčuje užívateľa k väčšej znalosti jednotlivých jazykov a ovládacích procesov, čím sa komplikuje prístup k jednoduchým prvkom matematickej analýzy. Na druhej strane editor, ako predmet tejto bakalárskej práce, obsahuje nevyhnutné minimum funkcionalít a grafických výstupov potrebných k splneniu edukačných potrieb študenta, pričom mu k nim umožňuje pristupovať interaktívne, cez grafické rozhranie.

## 2.4 Podobné práce

Táto bakalárska práca sa dá považovať ako priama alternatíva pre diplomovú prácu Jakuba Trubača, *Vývoj interaktívnych dokumentov pre výučbu matematickej analýzy*, ktorá bola vypracovaná pod vedením toho istého školiteľa. Práca tak vychádza z pomerne rovnakých základov. Autor vytvoril a popísal rozšírenie funkcionalít interaktívneho prostredia Jupyter Notebook vo forme editora. Tento editor bol vytvorený za účelom efektívnejšej analýzy priebehu funkcií na cvičeniach k predmetu *Matematická analýza*.

**Popis riešenia.** Editor na vstupe spracuje užívateľom zadané hodnoty, vykreslí graf funkcie a umožní nájsť nulové body, extrémy funkcie, inflexné body, či s tým spojené vlastnosti ako monotónnosť, konkávnosť, alebo konvexnosť. Jedným z najdôležitejších parametrov je metóda na hľadanie nulových bodov. Autor zvolil Newtonovu metódu, ktorá iteratívnym procesom vyberie vhodného kandidáta na nulový bod. Na vstupe očakáva jeden štartový bod, akýsi počiatočný tip, ktorý si môže užívateľ interaktívne meniť a dopracovať sa tak k prípadným presnejším výsledkom. Z hľadiska používateľ-

ského rozhrania autor v jeho práci využíva knižnicu ipywidgets, ktorá má na starosti interaktívne ovládacie prvky v prostredí Jupyter Notebook. Po spracovaní užívateľských hodnôt a vykreslení grafu sa pod ním zobrazia ovládacie prvky v podobe posuvných tlačidiel, či označovacích boxov na výber príslušných hodnôt. Editor má viacero okien, medzi nimi okno na samotnú analýzu, okno na prispôsobenie Newtonovej metódy a okno na výstupné informácie.

**Komparácia.** Hlavný rozdiel medzi prácami je práve v prístupe k Newtonovej metóde, zatiaľ čo Trubač túto metódu naprogramoval, v tejto práci sa využíva metóda z už naprogramovanej knižnice scipy. To umožňuje využiť silu knižnice na numerickú matematiku numpy a prijať ako argumenty celé vektory hodnôt, nie len jediný bod - počiatočný tip. Práca s vypočítanými údajmi a ich spracovanie je tak odlišná vzhľadom na túto vlastnosť. Knižnica scipy rovnako umožní zanedbať zadanie prvej derivácie funkcie a použije pre výpočet nulových bodov metódu sečníc. Rozdiely v grafickom prevedení a ovládaní nie sú markantné. V tejto práci sa graf funkcie nachádza priamo v editore, čím tvorí jeho značnú časť a všetky hlavné ovládacie prvky sa nachádzajú vedľa neho. Doplnené sú taktiež výstupy, avšak aj v podobe zaznamenávania užívateľských krokov, čím je užívateľ sprevádzaný celou analýzou funkcie. Rovnako je vynechaná možnosť dodatočne špecifikovať interval analýzy, v tomto prípade si interval merania určí užívateľ jeho definovaním ešte pred samotným spustením editora.

# 3 Návrh riešenia

Výstupný program tejto práce, ako edukačný nástroj, má presne definované požiadavky vychádzajúce primárne zo skúseností vyučujúceho. Návrh tohto programu tak vychádza priamo z týchto požiadaviek, ktoré sa dajú zhrnúť do štyroch hlavných kategórií:

1. analýza funkcií pomocou numerických algoritmov;
2. grafické užívateľské rozhranie;
3. konfigurácia programu;
4. spúšťanie a manažovanie inštancií programu.

Tieto štyri kategórie sú inšpiráciou pre rozdelenie programu na štyri moduly, ktoré vo výsledku tvoria výstupný program tejto práce. Každý nasledujúci popis modulu obsahuje detailnejšie požiadavky na ich obsah a formu, popis uvažovaných tried a metód, ktoré zaručujú funkčnosť daného modulu a prípadný popis komunikácie s inými modulmi.

## 3.1 Analýza funkcií

Analýza priebehu funkcie je jadrom tejto bakalárskej práce, pričom sa opiera najmä o vhodne zvolené, či naprogramované algoritmy. Dôležité je aj zvolenie príslušných dátových štruktúr, v ktorých si uchováva, resp. pomocou ktorých presúva už vypočítané údaje. Medzi základné požiadavky týkajúce sa tohto modulu ďalej patria:

1. manažment parametrov užívateľom zadanej funkcie;
2. výpočet numerických derivácií cez modul `scipy.misc.derivative`;
3. výpočet nulových bodov funkcie cez modul `scipy.optimize.newton`;
4. výpočet vlastností priebehu funkcie pomocou vypočítaných derivácií;
5. vykresľovanie vypočítaných hodnôt do grafu prostredníctvom knižnice `matplotlib`.

**Užívateľská funkcia.** Klasickým scenárom pri spúšťaní programu je prvotné zadefinovanie funkcie, parametrov jej grafu a následné vykreslenie tohto grafu. Úlohou programu je zdediť okrem samotného predpisu funkcie aj čo najväčšie množstvo parametrov jej grafu a kopírovať tak v čo najväčšej možnej miere užívateľské preferencie.

Všetky tieto užívateľské parametre by mali byť sprístupnené a zdieľané v rámci jediného objektu užívateľskej funkcie. Na ukladanie parametrov sú uvažované také dátové štruktúry, ktoré ich umožnia dynamicky a efektívne meniť počas behu programu. Objekt užívateľskej funkcie tak obsahuje metódy `get_parameter` a `set_parameter`.

Okrem parametrov týkajúcich sa samotnej funkcie, či parametrov grafu, objekt užívateľskej funkcie združuje všetky vypočítané hodnoty v ďalšej dátovej štruktúre, pričom aj k nim je zabezpečený efektívny prístup a ich prípadná zmena.

Program je pripravený pracovať s viacerými objektami užívateľskej funkcie (analyzovať viacero funkcií v jednej inštancii), hoci to nie je podľa požiadaviek nutné. Nad týmito objektami je tak uvažovaná trieda, ktorá ich združuje v jedinej štruktúre a umožňuje medzi nimi vyberať. Plní tak riadiacu funkcionalitu, t.j. spúšťa prepočty dát týchto funkcií. Obsahuje aj nevyhnutné objekty týkajúce sa samotného grafu funkcie a zaručuje tak, že počas behu programu existuje jediné výstupné okno s vizualizáciou dát, ktoré sa mení len v prípade ich prepočtov, resp. po vyžiadaní od užívateľa.

**Numerické výpočty.** Zrejme najdôležitejšie údaje, ktoré poskytuje modul na analýzu funkcií, sú derivácie funkcie vypočítané numerickým spôsob za použitia externej knižnice SciPy. V alternatívnom prípade je program podľa požiadaviek schopný vypočítať derivácie z ich predpisov poskytnutých užívateľom. Program si vždy udržiava hodnoty minimálne prvých troch derivácií danej funkcie, či už vypočítané numericky, podľa užívateľských predpisov alebo kombináciou týchto dvoch spôsobov.

Pomocou metódy `scipy.misc.derivative` sa počítajú numerické derivácie na celom intervale (na vstupe akceptuje vektory hodnôt) prostredníctvom metódy centrálnej diferencie (2.2.4). V prípade užívateľom poskytnutých predpisov derivácií sa predpokladá ich `ufunc` verzia, t.j. sú schopné taktiež pracovať s vektormi hodnôt. Vypočítané derivácie sa ukladajú do analytického datasetu objektu užívateľskej funkcie a sú pripravené pre ďalšie algoritmy výpočtov priebehu funkcie, ktoré ich využívajú.

Nulové body sa tiež počítajú numerickým spôsobom za použitia metódy externej knižnice `scipy.optimize.newton`. Ako už napovedá jej názov, na výpočet nulových bodov sa používa primárne Newtonova metóda, využívajúca aproximáciu nulového bodov pomocou dotyčníc (2.2.5). Metóda `scipy.optimize.newton` však v sebe skrýva aj metódu sečníc (2.2.5), pričom použitie jednotlivých metód závisí práve od poskytnutia predpisov prvej derivácie užívateľom. Ak tomu tak je, použije sa Newtonova metóda a ak nie, použije sa metóda sečníc.

**Výpočet vlastností priebehu funkcie.** Po vypočítaní derivácií vo všetkých bodoch zadaného intervalu je program pripravený spúšťať algoritmy vyplývajúce z viet o vyšetrovaní priebehu funkcie pomocou diferenciálneho počtu (2.2.2). Pre každú z vlastností, ako ostré lokálne extrémy, intervaly monotónnosti, inflexné body, či intervaly rýdzej konvexnosti a rýdzej konkávnosti, je implementovaný vlastný algoritmus, ktorý analyzuje príslušné derivácie podľa spomínaných viet z časti 2.2.2 a poskytuje s určitou presnosťou výsledky. Operácie v týchto algoritmoch sú taktiež optimalizované pre vektory hodnôt za využitia funkcií a metód knižnice Numpy.

**Vykresľovanie do grafu.** Algoritmy pre výpočet derivácií, nulových bodov a ostatných vlastností priebehu funkcie poskytujú užívateľovi informáciu vizualizovateľnú vo výstupnom okne pre graf. Pre každý typ tejto informácie je v programe vytvorená samostatná vykresľovacia metóda, ktorá do objektu grafu tieto hodnoty pridá, pokiaľ si to užívateľ vyžiadal výberom v hlavnom menu programu (parameter `visible`). Všetky vykresľovacie metódy združuje kontajnerová trieda, ktorá pri jej inštancovaní získava predvolené parametre grafu a vypočítané údaje z dátových štruktúr objektu užívateľskej funkcie.

## 3.2 Grafické užívateľské rozhranie

Prevedenie zložitých algoritmov a ich výpočtov do interaktívnej vizuálnej formy je ďalšou dôležitou požiadavkou pre vývoj tohto programu. Ako už bolo prezentované v motivačnej kapitole (1), vyšetrovanie priebehu funkcie by malo byť v maximálnej možnej miere prívetivé a nenáročné, nevyžadujúc od užívateľa žiadne pokročilé programátorské (ale aj matematické) techniky. Požiadavky na tento modul sú nasledovné:

1. prehľadná pracovná plocha s dominantnou vizualizáciou grafu;
2. jednoduché interaktívne prvky v podobe tlačidiel, resp. textových polí;
3. prehľadné výstupné okná s informáciami o užívateľských krokoch a vypočítaných hodnotách;
4. jednoznačná ovládacia logika, kontrola rôznych kombinácií vstupov.

**Pracovná plocha a výstupné okná.** Práca s interaktívnymi grafickými prvkami je v prostredí Jupyter Notebook zabezpečená použitím knižnice ipywidgets. Grafický výstup programu tvorí jedno okno na celú šírku bunky prostredia Jupyter Notebook. Uvažované je rozdelenie tohto okna na tri časti podľa kontextu - analytické okno, okno s chronologickým prehľadom užívateľských krokov a vypočítaných hodnôt a okno s upozorneniami vygenerovanými počas výpočtov dát, tiež v chronologickom poradí.

Dominantami všetkých troch okien sú výstupné okná, v prípade analytického okna samotný graf a v prípade okien výstupov a upozornení okná pre textové výpisy. Okno pre analýzu funkcií je uvažované ako najčastejšie používané, tým pádom je aplikovaná požiadavka pre výpis niektorých krátkych informácií o behu programu už priamo v tomto okne. Pod samotným výstupným oknom pre graf funkcie je tak umiestnené sekundárne výstupné okno, ktoré užívateľovi zobrazuje podstatné informácie v skrátenej forme, bez potreby zmeny používaného okna.

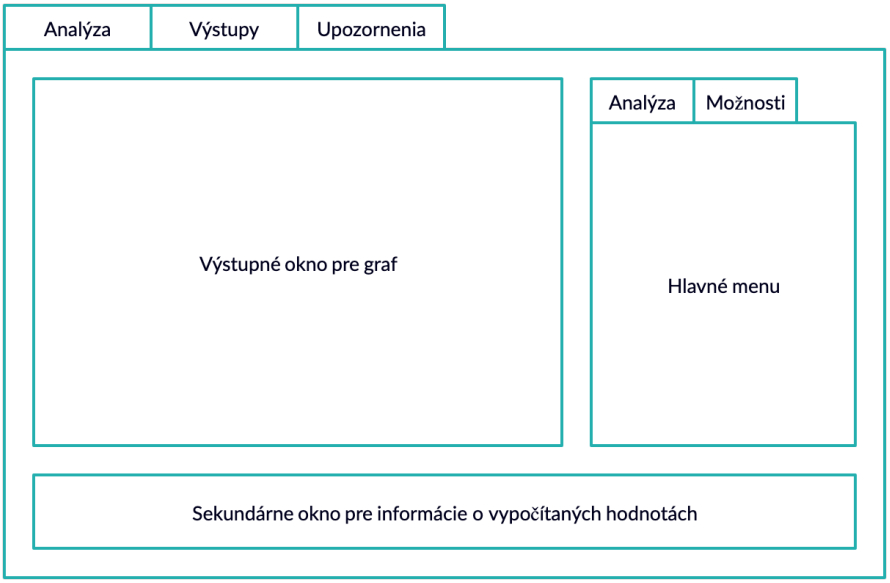
**Hlavné menu.** Ovládanie programu zabezpečujú ovládacie prvky umiestnené v hlavnom menu, ktoré je súčasťou analytického okna. Hlavné menu podľa požiadaviek obsahuje tlačidlá pre zapnutie, resp. vypnutie zobrazovania nulových bodov, ostrých lokálnych extrémov, intervalov, kde je funkcia rastúca, resp. klesajúca a intervalov, kde je funkcia rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna. Uvažovanou funkcionalitou je aj zmena farby príslušných vlastností priebehu funkcie v grafe. To je docielené pridaním tlačidla pre zmenu farieb ku každému spomínanému tlačidlu pre zapnutie (vypnutie) požadovanej vlastnosti priebehu funkcie. Výber farby je však podmienený zapnutým tlačidlom danej vlastnosti, ak tomu tak nie je, výber farby je pre užívateľa zablokovaný.

Medzi ďalšie prvky hlavného menu patrí zmena počtu hodnôt intervalov na osi $x$ (zjemnenie osi $x$). Na to je uvažovaný interaktívny objekt s možnosťou výberu celého čísla, ideálne reprezentovaného niekoľkými mocninami čísla 10. Toto číslo potom reprezentuje násobok pôvodného počtu prvkov daného intervalu.

Pre možnosť ovplyvnenia výsledkov metódy `scipy.optimize.newton` je do hlavného menu umiestnený interaktívny prvok s možnosť zadania počtu krokov (iterácií) tejto metódy. Podobne sa v hlavnom menu ráta s užívateľskou možnosťou spresnenia vypočítaných hodnôt, a to ich zaokrúhlením na zadaný počet platných cifier. Zadanie počtu krokov metódy `scipy.optimize.newton` aj počtu platných cifier je obmedzené v presných intervaloch s možnosťou ich zmeny v konfiguračnom súbore.

Uvažované je aj sekundárne menu, obsahujúce zmenu farby užívateľskej funkcie a tlačidlá pre zobrazenie, resp. zmenu farby prvých troch derivácií. Prítomné je aj tlačidlo na vykreslenie mriežky v grafe, či uloženie textových výstupov do formátov `txt`, či `JSON`. Zmena chronologického poradia výpisov vo výstupných oknách je umožnená interaktívnym objektom na zvolenie poradia od najnovšieho, resp. od najstaršieho záznamu.

**Manažment interakcie užívateľa.** Prepojenie ovládacích prvkov s výpočtovou časťou programu je zabezpečené sledovacími metódami združenými pod jeden kontajnerový objekt. Princíp týchto metód je uložiť preferenciu užívateľa a na jej základe jej hodnoty rozhodnúť o spustení patričných metód a funkcií iných častí programu. Príklad najčastejšieho scenára pri použití sledovacej metódy je vyžiadanie zobrazenia niektorej




Obr. 3.1: Základný návrh grafického rozhrania

vlastnosti priebehu funkcie od užívateľa, zmena jej parametra `visible`, čo ovplyvní jej následné vykreslenie a následné vypísanie sprievodného textu do výstupných okien.

## 3.3 Konfigurácia a spúšťanie programu

Niektoré výučbové situácie si vyžadujú upravenie základných parametrov programu, resp. potlačenie jeho prednastavenej funkcionality. Najmä grafické parametre samotného grafu, ako hrúbka a štýl krivky, či veľkosť vykresleného bodu, môžu od prípadu k prípadu vyžadovať ich úpravu. Podobne niektoré minimálne, či maximálne hodnoty intervalov, z ktorých si môže užívateľ vyberať pri vyšetrovaní priebehu funkcie.

Spúšťanie inštancie grafického programu v prostredí Jupyter Notebook si vyžaduje zvýšenú pozornosť. Okrem samotnej kontroly užívateľského vstupu je dôležité najmä správne referovať na vytvorené grafy, aby nedochádzalo ku kolíziám vypočítaných údajov pri viacerých inštanciách programu v jednom dokumente.

Požiadavky pre oblasť konfigurácie a spúšťania programu sa dajú zhrnúť nasledovne:

1. vytvorenie a umožnenie modifikovania konfiguračného súboru;
2. načítavanie a kontrola užívateľom definovaných údajov;
3. úvodný prepočet dát pre okamžitú funkčnosť programu;
4. spúšťanie programu v jednej bunke prostredia Jupyter Notebook;
5. manažment viacerých inštancií programu v jednom dokumente.

**Konfiguračný súbor.** Tak, ako celé grafické prostredie programu, aj pri výbere formátu konfiguračného súboru sú kladené požiadavky na jeho prehľadnosť, čitateľnosť a ľahkú modifikáciu. Uvažovaná je jeho jednoduchá konverzia do nejakej dátovej štruktúry jazyka Python z dôvodu plynulého použitia všetkými časťami programu.

Tento konfiguračný súbor je súčasťou priečinka so zdrojovými súbormi a je tak prístupný pre užívateľa, pričom sa predpokladá jeho validácia programom, t.j. vyhodnotenie prípadných nepovolených parametrov a vypísanie príslušného upozornenia.

Ďalej sa predpokladá globálna inštancia konfiguračného objektu tvoreného údajmi z konfiguračného súboru, tak, aby bola prístupná pre všetky časti programu.

Spolu so zdrojovými súbormi je konfiguračný súbor pripravený v prednastavenej forme a nevyžaduje dodatočné zásahy pred spustením programu.

**Spúšťanie programu a kontrola vstupu.** Spúšťanie programu v bunke prostredia Jupyter Notebook by malo byť čo najintuitívnejšie. Preto sa na jeho spustenie používa jediná funkcia `editor` s niekoľkými povinnými parametrami, ktorá po svojom spustení stále vytvorí novú inštanciu programu. Je tým zabezpečené použitie viacerých editorov v jednom dokumente prostredia Jupyter Notebook.

Vytváranie inštancie editora je podmienené kontrolou vstupných parametrov od užívateľa, t.j. či sú zadané v správnych formátoch, resp. či sú zadané všetky povinné parametre. Medzi povinné parametre patria objekty `matplotlib.Figure` a `matplotlib.Axes`, a to vzhľadom na čo najväčšiu možnosť dedenia parametrov vopred pripraveného grafu od užívateľa. Ďalšími povinnými parametrami sú predpis funkcie a zoznam intervalov, na ktorých sa bude táto funkcia vyšetrovať. Nepovinným parametrom sú definície (predpisy) derivácií. Všetky predpisy funkcií alebo derivácií musia byť v `ufunc` verzii, t.j. pracovať naraz s viacerými hodnotami vo forme vektorov. Program sa spustí v prípade poskytnutia všetkých povinných parametrov a ich správnosti a vyhlási chybu, ak tomu tak nie je.

**Okamžitý výpočet dát.** Pri vytváraní inštancie, t.j. inicializácii pracovnej plochy a iných potrebných štruktúr, sa počíta s okamžitým vykreslením grafu. Prvé prepočty údajov tak prebiehajú už pri vytváraní danej inštancie programu a užívateľovi je tak následne umožnená plná funkcionalita, bez potreby dodatočného nastavovania.

# 4 Implementácia

Vo výučbovom procese laboratórií predmetu *Matematická analýza I* študenti definujú funkcie a programujú grafy v jazyku Python v rámci výpočtového prostredia Jupyter. Použitie tohto výpočtového prostredia so sebou nesie isté obmedzenia v podobe vytvárania interaktívnych grafických prvkov. Aby mohli byť tieto prvky použité na vytvorenie grafického užívateľského rozhrania, je nevyhnutné použiť objekty knižnice ipywidgets. Druhým obmedzením vyplývajúcim z prostredia Jupyter je použitie knižnice matplotlib na vizualizáciu grafov funkcií. Obidve tieto knižnice sú totiž napísané práve v jazyku Python, preto je jeho použitie ako programovacieho jazyka pre implementáciu tejto práce nevyhnutné.

Táto kapitola popisuje významnejšie implementačné detaily súvisiace najmä s algoritmami pre vyšetrovanie priebehu funkcií, či grafickým užívateľským rozhraním.

## 4.1 Užívateľská funkcia

Ako už bolo spomenuté v návrhovej kapitole tejto práce (3), interaktívny editor dedí čo najväčší počet parametrov z už nakresleného grafu užívateľom. Hlavná motivácia pre takýto postup je umožnenie čo najplynulejšieho prechodu z definovania funkcie a jej vykreslenia k samotnej analýze. Editor pracuje so štyrmi základnými typmi údajov, rozdelených podľa kontextu:

1. definície funkcií a derivácií;
2. uniformné delenie základného intervalu;
3. grafové objekty knižnice matplotlib;
4. parametre z konfiguračného súboru.

Prvé tri typy údajov získava editor priamo od užívateľa pri jeho spustení, napríklad:

```
In [1]: editor(function=f, figure=fig, axes=ax, intervals=[X1, X2], primes=[dx])
```

Hodnoty parametrov `function`, `intervals` a `primes` sú jednoduché dátové typy (funkcie a zoznam) a ukladajú sa tak priamo do dátovej štruktúry `parameters`, ktorá je typu `dictionary`. Parametre `figure` a `axes` sú však zložitejšie dátové typy knižnice matplotlib, preto je potrebné jednotlivé parametre grafu z týchto objektov extrahovať a taktiež uložiť do spomenutej štruktúry `parameters`. Niektoré parametre grafu, ako jeho veľkosť v okne editora, sú prednastavené v konfiguračnom súbore, odkiaľ ich je taktiež potrebné extrahovať. Keďže sú pre rôzne zdroje údajov potrebné rôzne extrahovacie metódy, vznikla potreba ich zaobaliť do jedinej triedy `Function`. Objekt triedy `Function` tak slúži ako zdroj všetkých dôležitých parametrov danej funkcie a jej grafu, pričom ukladá aj všetky vypočítané údaje týkajúce sa priebehu danej funkcie. Práve kvôli obsahu kľúčových parametrov a vypočítaných hodnôt, je objekt typu `Function` používaný ako parameter iných objektov a metód, čím sa dá považovať za najčastejšie používaný objekt v rámci programu.

## 4.2 Implementované algoritmy

Všetky kľúčové algoritmy sú implementované ako metódy triedy `ComputationsManager`. Každá inštancia tejto triedy vyextrahuje potrebné parametre funkcie z objektu `Function` a sprístupní ich pre svoje algoritmy. Vytvorenie inštancie prebieha pri každej zmene konkrétneho parametra od užívateľa a spustí sa tak prepočet s ním súvisiacich hodnôt.

**Delenie základného intervalu.** Medzi najčastejšie prepočítavané hodnoty patrí delenie základného intervalu, ktoré môže užívateľ nastaviť ako jemnejšie alebo hrubšie, čo môže viesť k presnejším výsledkom v rámci vyšetrovania priebehu funkcie. Užívateľ má možnosť vybrať násobok tohto delenia najčastejšie vo forme mocnín čísla 10.

Nasledujúci kód ilustruje prepočet hodnôt delenia základného intervalu v podobe metódy `calculate_intervals` triedy `ComputationsManager`.

```
def intervals(self):
    if self.refinement == 1:
        self.function.set('intervals', self.original_intervals)
    else:
        recalculated_intervals= []
        for interval in self.original_intervals:
            left, right, delta = min(interval), max(interval), len(interval) - 1
            new_delta = delta * self.refinement
            new_interval = numpy.linspace(left, right, new_delta + 1)
            recalculated_intervals.append(new_interval)
        self.function.set('intervals', recalculated_intervals)
```

**Derivácie.** Kľúčové hodnoty, od ktorých sa odvíja vyšetrovanie priebehu funkcií, sú prvé tri derivácie funkcie. Ich výpočet môže prebiehať kombinovanou metódou, t.j. ak užívateľ pozná ich definície a poskytne ich na vstupe editora, derivácie sa na jednotlivých intervaloch funkcie vypočítajú práve podľa týchto definícií. Vo väčšine prípadov však užívateľ definície derivácií z rôznych dôvodov neposkytne a musia tak byť v jednotlivých bodoch intervalov aproximované, resp. dopočítané numericky. Na to slúži metóda `derivative` z modulu `misc` knižnice SciPy. Je založená na metóde centrálnej diferencie (2.2.4), pričom jej implementácia v programe je jednoduchá a vyžaduje nanajvýš dobrý odhad stupňa polynómu, ktorým sa daná funkcia aproximuje.

```
def derivatives(self, function):
    for i, interval in enumerate(function.intervals):
        for n in range(1, settings['derivative']['user_max'] + 1):
            if n in function.user_derivatives:
                derivative = function.user_derivatives[n]
                values = derivative(interval)
            else:
                dx, o = numpy.diff(interval)[0], function.approx_order
                derivative = scipy.misc.derivative
                values = derivative(function.func, interval, n=n, dx=dx, order=o)
            function.data[f'primes{n}'][f'interval{i}'] = values
```

**Nulové body.** Ďalšou numerickou metódou, ktorá je použitá v tejto práci, je Newtonova metóda pre výpočet nulových bodov funkcie (2.2.5). Využíva sa implementácia tejto metódy v podobe metódy `newton` modulu `optimize` knižnice SciPy. Metóda `newton` však v sebe ukrýva aj implementáciu metódy sečníc, čo je ďalšia numerická metóda pre hľadanie nulových bodov využívajúca sečnice namiesto dotyčníc (2.2.5). Pre implementáciu metódy `zero_points` to znamená zohľadnenie poskytnutia definície prvej derivácie užívateľom a jej následné použitie v metóde `newton`. Obidva tieto spôsoby implementácie vyžadujú dodatočnú filtráciu výsledkov, keďže nemusia vždy poskytnúť presné údaje (nájdenie bodov mimo základného intervalu, aproximácia nulového bodu v zjavne nenulovom bode).

```
def zero_points(self, function):
    newton, fprime = scipy.optimize.newton, function.user_primes.get(1, None)
    for i, interval in enumerate(function.intervals):
        dx, mi = np.diff(interval)[0], function.maxiter
        candidates = newton(self.f, interval, fprime=fprime, tol=dx, maxiter=mi)
        candidates = candidates[candidates >= numpy.amin(interval)]
        candidates = candidates[candidates <= numpy.amax(interval)]
        really_close = numpy.isclose(self.f(candidates), 0, atol=10**(-self.round))
```

```
        candidates = candidates[really_close]
        function.data['zero_points'][f'interval{i}'] = candidates
```

**Extrémy.** S prvými troma vypočítanými deriváciami je možné implementovať vety o vyšetrovaní priebehu funkcie pomocou diferenciálneho počtu (2.2.2). Hľadanie extrémov podľa vety 2 vyplýva z nájdenia takých bodov základného intervalu, v ktorých je prvá derivácia danej funkcie nulová. Druhým krokom je zistenie znamienka druhej derivácie danej funkcie v týchto bodoch a ich následná klasifikácia ako ostrých lokálnych miním (maxím).

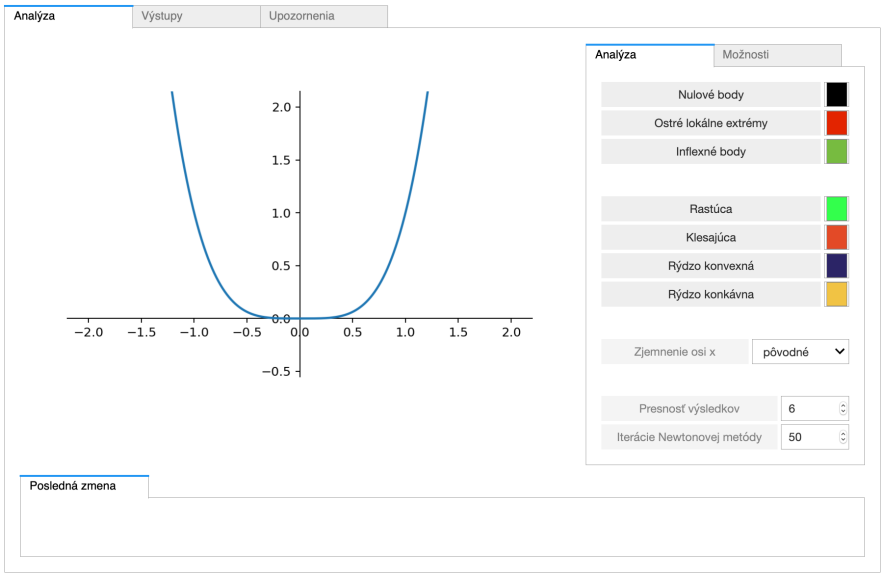
Nasledujúca ukážka kódu implementuje tento proces za použitia štruktúry `dstack` knižnice NumPy. Táto štruktúra vytvorí akúsi tabuľku zloženú zo stĺpcov v podobe jednotlivých bodov intervalu, či hodnôt prvej a druhej derivácie v týchto bodoch. Výhodou takejto tabuľky je, že jednotlivé riadky potom predstavujú kompletnú informáciu o konkrétnom bode intervalu vrátane hodnôt jeho derivácií.

```
def extremes(self, function):
    for i, interval in enumerate(function.intervals):
        primes1 = function.data['primes1'][f'interval{i}']
        primes2 = function.data['primes2'][f'interval{i}']
        table = numpy.dstack((interval, primes1, primes2))[0]
        candidates = table[table[:, 1] == 0]
        minima = candidates[candidates[:, 2] > 0][:, 0]
        maxima = candidates[candidates[:, 2] < 0][:, 0]
        function.data['minima'][f'interval{i}'] = minima
        function.data['maxima'][f'interval{i}'] = maxima
        function.data['extremes'][f'interval{i}'] = np.concatenate([minima, maxima])
```

Nech funkcia $f$ je definovaná vzťahom $f(x) = x^4$ a jej graf zobrazený editorom na obr. 4.1. Funkcia $f$ má viditeľný ostrý lokálny extrém v bode $x = 0$, pričom aj podľa vety 2 platí $f'(0) = 0$.

Uvedený kód na výpočet ostrých lokálnych extrémov tento bod však nedokáže ďalej charakterizovať ako ostré lokálne minimum. Spolieha sa totiž na nenulovosť druhej derivácie v tomto bode, avšak $f''(0) = 0$.

```
In [1]: from scipy.misc import derivative
        for n in range(1, 4+1):
            order = n + 3 if n % 2 == 0 else n + 2
            result = derivative(f, 0, n=n, dx=0.1, order=order)
            print(f'x={0}; n={n}; derivative={result}')

Out [1]: x=0; n=1; derivative=0.0
         x=0; n=2; derivative=0.0
```




Obr. 4.1: Editor - vizualizácia funkcie

```
x=0; n=3; derivative=0.0
x=0; n=4; derivative=24.000000000000002
```

Existujú totiž špecifické funkcie, ako napríklad $f$, kde je v niektorých bodoch prvá derivácia funkcie nulová, no zároveň je v tomto bode nulová aj jej druhá, či tretia derivácia. Nenulovú hodnotu totiž získava až pri štvrtej derivácii funkcie v danom bode. Riešenie takéhoto problému vyžaduje rozšírenie algoritmu o poznatky z vety 3, teda doplnenie iteratívneho výpočtu ďalších derivácii. Takáto implementácia algoritmu pre hľadanie ostrých lokálnych extrémov začne tradične skúmaním nenulovosti druhej derivácie vo vybratých bodoch, pričom ak také hodnoty nenájde, pokračuje skúmaním každej ďalšej derivácie párneho stupňa (podľa vety 3), a to až do okamihu nájdenia jej nenulovej hodnoty v daných bodoch, resp. do okamihu terminácie algoritmu - dosiahnutím prednastaveného stupňa derivácie.

```
def extremes(self, function):
    for i, interval in enumerate(function.intervals):
        primes1 = function.data['primes1'][f'interval{i}']
        for n in range(2, settings['extremes']['max_derivative'] + 1, 2):
            primes_n = function.data[f'primes{n}'].get(f'interval{i}', None)
            if primes_n is None:
                primes_n = add_derivative(function.func, interval, n)
            table = np.dstack((interval, primes1, primes_n))[0]
            candidates = table[table[:, 1] == 0]
            if len(candidates) == 0: break
            if numpy.any(candidates[candidates[:, 2] != 0]):
                minima = candidates[candidates[:, 2] > 0][:, 0]
                maxima = candidates[candidates[:, 2] < 0][:, 0]
```

```
                function.data['minima'][f'interval{i}'] = minima
                function.data['maxima'][f'interval{i}'] = maxima
                extrema = numpy.concatenate([minima, maxima])
                function.data['extremes'][f'interval{i}'] = extrema
                if not numpy.any(candidates[candidates[:, 2] == 0]): break
```

**Intervaly monotónnosti, konvexnosti a konkávnosti.** Hľadanie intervalov monotónnosti je implementované podľa znenia vety 4. Zostrojená je tabuľka jednotlivých bodov intervalu a príslušných prvých derivácií. Následne sa z tejto tabuľky odstránia ostré lokálne extrémy (t.j. body, v ktorých je prvá derivácia funkcie nulová). Tabuľka sa rozdelí na intervaly bodov podľa znamienka prvej derivácie, čím sú získané jednotlivé intervaly rýdzej monotónnosti. Zistením znamienka prvých derivácií všetkých bodov v týchto intervaloch sa následne dá určiť, či v nich funkcia rastie alebo klesá.

```
def monotonic(self, function):
    for i, interval in enumerate(function.intervals):
        increasing, decreasing =  [], []
        fprime1 = function.data['primes1'][f'interval{i}']
        table = numpy.dstack((interval, fprime1))[0]
        table = numpy.delete(table, numpy.where(table[:, 1] == 0), axis=0)
        intervals = numpy.split(table, numpy.where(np.diff(table[:, 1] < 0))[0] + 1)
        for monotonic_interval in intervals:
            if len(monotonic_interval) > 1:
                dest = increasing if numpy.all(interval[:, 1] > 0) else decreasing
                dest.append(interval[:, 0])
        function.data['increasing'][f'interval{i}'] = increasing
        function.data['decreasing'][f'interval{i}'] = decreasing
```

Intervaly rýdzej konvexnosti a rýdzej konkávnosti sú vypočítané takmer totožným spôsobom, a to implementovaním vety 6. V uvedenom kóde sa namiesto prvej derivácie použije druhá derivácia a názvy premenných týkajúce sa konvexnosti a konkávnosti.

**Inflexné body** Podľa vety 5 je pri hľadaní inflexných bodov potrebné zistiť, v ktorých bodoch intervalu má funkcia nulovú druhú deriváciu a naopak, nenulovú tretiu deriváciu. Pomocou bodov intervalu a hodnôt druhých a tretích derivácií v týchto bodoch sa zostrojí tabuľka, z ktorej sa následne odstránia všetky riadky nespĺňajúce podmienky vety 5. Ostanú tak len tie riadky, ktorých hodnotu prvého stĺpca je možné nazvať inflexným bodom.

```
def inflex_points(self):
    for i, interval in enumerate(function.intervals):
        fprime2 = function.data['primes2'][f'interval{i}']
```

```
        fprime3 = function.data['primes3'][f'interval{i}']
        table = np.dstack((interval, fprime2, fprime3))[0]
        candidates = table[(table[:, 1] == 0) & (table[:, 2] != 0)]
        function.data['inflex_points'][f'interval{i}'] = candidates[:, 0]
```

## 4.3 Grafické užívateľské rozhranie

**Pracovná plocha a výstupné okná.** Hlavnú grafickú časť programu predstavuje objekt pracovnej plochy typu `ipywidgets.Tab`. Tento objekt zároveň obsahuje ďalšie tri objekty typu `ipywidgets.Tab`, reprezentujúce okná pre analýzu, výstupy a upozornenia, ktoré sú súčasťou jeho štruktúry `children`. Takéto rozdelenie umožňuje prehľadné umiestňovanie rôznych interaktívnych elementov podľa kontextu.

Každé okno (objekt typu `ipywidgets.Tab`) obsahuje špecifický `Layout` objekt mriežky `ipywidgets.GridspecLayout`, do ktorého sa umiestňujú ďalšie interaktívne prvky knižnice ipywidgets definovaním ich pozície v riadku a stĺpci tohto objektu, čím je zabezpečené ich presné umiestnenie a rozmery.

Dominantami každého okna programu sú výstupné okná, objekty `ipywidgets.Output`, do ktorých je možné posielať akýkoľvek typ výstupnej informácie. Akceptujú vykreslenie grafu pomocou knižnice matplotlib, či akékoľvek textové výstupy zabezpečené funkciou `print`. Do výstupného okna `ipywidgets.Output` v okne analýzy je posielaný objekt grafu v podobe objektu `matplotlib.Figure`. V prípade okien výstupov a upozornení sa v ich výstupných oknách (`ipywidgets.Output`) nachádzajú len textové výstupy z programu.

Posielanie informácií do objektov `ipywidgets.Output` je najčastejšie zabezpečené pomocou Python konštrukcie `with`, ako je uvedené na nasledovnom príklade.

```
out = ipywidgets.Output(layout=ipywidgets.Layout(width='120px'))
with out:
    print('Some important information')
```

**Hlavné menu.** Ovládanie programu zabezpečujú ovládacie prvky umiestnené v hlavnom menu, ktoré samotné predstavuje objekt `ipywidgets.Tab` s dvoma `children` objektami `ipywidgets.Tab`. Tie predstavujú hlavné menu pre prvky týkajúce sa analýzy funkcie, resp. sekundárne menu s doplnkovými funkciami, ako napr. nastavenie mriežky, či uloženie výstupov z programu do súboru. Rozloženie prvkov v hlavnom (sekundárnom) menu taktiež zabezpečuje objekt typu `ipywidgets.GridspecLayout`, čím sa umiestňovanie alebo zmena konkrétnych ovládacích prvkov značne zjednodušuje.

Hlavné menu obsahuje podľa požiadaviek tlačidlá (`ipywidgets.ToggleButton`) pre zapnutie, resp. vypnutie zobrazovania nulových bodov, ostrých lokálnych extrémov,

intervalov, kde je funkcia rastúca, resp. klesajúca a intervalov, kde je funkcia rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna. Zaujímavou funkcionalitou je zmena farby príslušných vlastností priebehu funkcie v grafe. To sa dá docieliť uplatnením farby z kontextového okna pomocou objektu typu `ipywidgets.ColorPicker`. Spájanie tlačidla a výberu farby v rámci jedného kontextu je docielené zaobalením týchto dvoch objektov do objektu typu `ipywidgets.HBox`. Interakcia s objektom na výber farby príslušnej vlastnosti sa dá zablokovať v prípade, že je zobrazovanie danej vlastnosti vypnuté tlačidlom. Na to slúži konštrukcia `directional_link` knižnice traitlets, ktorá prepája stavy týchto dvoch prvkov podľa vyššie uvedenej logiky.

```
from traitlets import directional_link

class HBox:

    def __init__(self, description, disabled, color, link=False, tooltip=None):
        self.description, self.disabled = description, disabled
        self.color, self.link, self.tooltip = color, link, tooltip

    def get(self):
        toggle = ipywidgets.ToggleButton(
            value=False,
            description=self.description,
            disabled=self.disabled,
            button_style='',
            tooltip=self.tooltip if self.tooltip is not None else self.description,
            layout=ipywidgets.Layout(width='90%')
        )
        cpicker = ipywidgets.ColorPicker(
            concise=True,
            description='',
            value=self.color,
            disabled=False,
            layout=ipywidgets.Layout(width='28px')
        )
        if self.link:
            logic = lambda case: not case
            directional_link((toggle, 'value'), (cpicker, 'disabled'), logic)
        layout = ipywidgets.Layout(overflow='hidden')
        return ipywidgets.HBox(children=[toggle, cpicker], layout=layout)
```

Obr. 4.2 ilustruje vytvorené grafické objekty typu `HBox` umiestnené do objektu mriežky `ipywidgets.GridspecLayout` hlavného menu.

Medzi ďalšie prvky hlavného menu patrí zmena základného delenia (zjemnenie) osi $x$. To zabezpečuje objekt typu `ipywidgets.Dropdown` s možnosťou výberu celočíselnej


Obr. 4.2: Editor - objekty HBox

hodnoty $n$, pričom zjemňovanie intervalov je následne podľa výberu $n$-násobné. Dva objekty typu `ipywidgets.BoundedIntText` slúžia na odchytenie počtu platných cifier v rámci zaokrúhľovania výsledkov, resp. počet krokov (interácií) Newtonovej metódy.

Sekundárne menu obsahuje zmenu farby hlavnej, užívateľskej funkcie a tlačidlá pre vykreslenie, resp. zmenu farby prvých troch derivácií. Prítomné je aj tlačidlo na vykreslenie mriežky v grafe, či uloženie textových výstupov do formátov `txt`, či `JSON`. Zmena chronologického poradia výpisov je umožnená ďalším objektom typu `ipywidgets.Dropdown` a zvolením poradia od najnovšieho, resp. od najstaršieho.

**Interakcia s užívateľom a manažment výpisov.** Pre každý interaktívny prvok hlavného menu je implementovaná vlastná sledovacia metóda `_changed`, ktorá v závislosti od užívateľovej preferencie spúšťa príslušné metódy iných objektov. Uvedený je príklad sledovacej metódy `_changed_grid`, ktorá zisťuje, či užívateľ zvolil zobrazenie mriežky v grafe, nastaví túto preferenciu do parametra objektu `Function`, spustí prekreslenie objektu grafu a na výstup pošle informáciu o zmene tohto parametra.

```
class Observer:
    ...
    def _changed_grid(self, event) -> None:
        visible = event['new']
        function = self.function_manager.get_function()
        function.set('grid', visible)
        self.function_manager.update_plot()
        message = self.logger.new_message('mriežka', viditelne=slovak(visible))
        self.logger.write(message, main=True, mini=True)
    ...
```

Všetky `_changed` metódy sú združené v objekte `Observer`, ktorý ich pri vytváraní jeho inštancie prepojí s príslušnými interaktívnymi prvkami hlavného menu. Pre rýchly prístup sledovacích metód k objektom funkcie, či grafu, si objekt `Observer` ukladá referencie na tieto objekty ako členské premenné.

Objekt `Observer` ukladá aj referenciu na objekt `Logger`, ktorý implementuje metódy pre manažment všetkých výpisov do výstupných okien. Sledovacie metódy triedy `Observer` vytvárajú akési správy, objekty typu `LoggerMessage`, ktoré objekt `Logger` následne vypíše do príslušného výstupného okna. Všetky tieto správy, vzniknuté počas behu programu, sa združujú v objekte `LoggerStack` zoradené podľa času ich pridania a sú tak stále prístupné užívateľovi v chronologickom poradí. Aby nedošlo k nechcenej strate vypočítaných údajov, objekt `Logger` prostredníctvom metódy `to_file` uloží celý obsah objektu `LoggerStack` do súboru `txt`, resp. analytický dataset objektu `Function` do formátu `JSON`.

## 4.4 Konfigurácia a spúšťanie programu

**Konfiguračný súbor a jeho načítavanie.** Vzhľadom na požiadavky týkajúce sa jednoduchosti a dobrej čitateľnosti konfiguračného súboru (3.3), sa v tejto práci používa formát `YAML`, ktorého ukážku je možné vidieť v nasledujúcom bloku kódu.

```
...
plot_parameters:
  grid: 'no'
  aspect: 'auto'
  height: 4.2
  width: 6.2
...
```

Prístup k údajom tohto konfiguračného súboru z iných častí programu je realizovaný prostredníctvom inštancie triedy `Settings`, ktorá `YAML` súbor načíta do typickej štruktúry `dictionary` jazyka Python.

```
class Settings:

    def __init__(self):
        with open('jedit/settings/settings.yml', 'r') as yml:
            self.data = yaml.load(yml, Loader=yaml.FullLoader)

    def get_data(self):
        return self.data
```

**Spúšťanie programu a kontrola vstupu od užívateľa.** V jednom dokumente Jupyter Notebook môže užívateľ analyzovať viacero funkcií, takže počet inštancií editora v danom dokuemnte nesmie byť obmedzený a každá táto inštancia musí byť schopná

nakonfigurovať svoje prostredie pre konkrétny vstup. Spúšťanie editora je tak zaobalené do funkcie `editor`, ktorá vytvorí unikátnu inštanciu objektu `Editor` pri každom jej spustení.

```
def editor(**params):
    Editor().run_instance(**params)

In [1]: editor(function=f, figure=fig, axes=ax, intervals=[X1, X2], primes=[dx])
```

Súčasťou vytvárania objektu `Editor` je kontrola vstupných parametrov `params` prostredníctvom funkcie `check_parameters`. Tá kontroluje prítomnosť povinných parametrov a ich názvy, resp. či sú zvolené vhodné typy vstupných údajov, ako napr. typ `list` v parametri `intervals`.

# 5 Testovanie programu

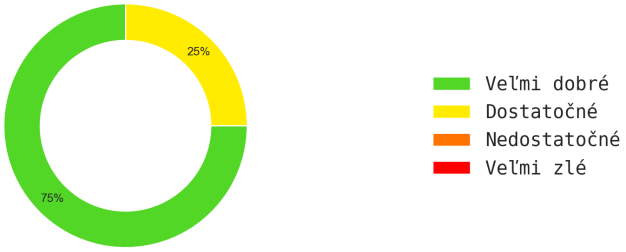
Interaktívny editor, ako výstupný program tejto práce, bol už počas jeho vývoja používaný na laboratóriách predmetu *Matematická analýza I*, teda v prostredí cieľovej prevádzky. Testovaný bol približne na týždennej báze, a to pravidelnou iteráciou nasledovného postupu:

1. odovzdanie novej verzie školiteľovi (vyučujúcemu laboratórií);
2. používanie novej verzie pri riešení úloh daného týždňa;
3. zber pripomienok od študentov pomocou interaktívneho formulára;
4. konzultovanie pripomienok školiteľa;
5. zapracovanie pripomienok školiteľa.

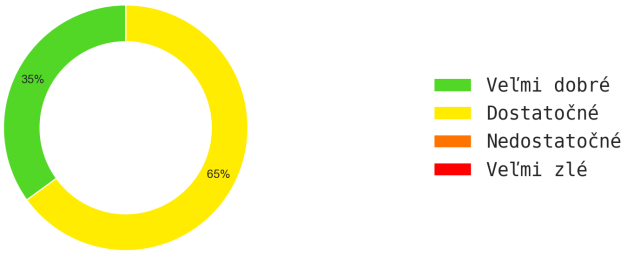
Takýto flexibilný vývoj programu umožnil zapracovať čo najväčšie množstvo reálnych požiadaviek v čo najkratšom čase a celková námaha na vytvorenie tohto nástroja bola uniformne rozložená takmer na všetky týždne semestra.

Študentom bolo umožnené vyjadriť sa k rôznym aspektom používania editora vo forme anonymného dotazníka pozostávajúceho z ôsmich otázok. Prieskumu sa zúčastnilo 20 ľudí a jeho výsledky prezentujú nasledovné grafy.

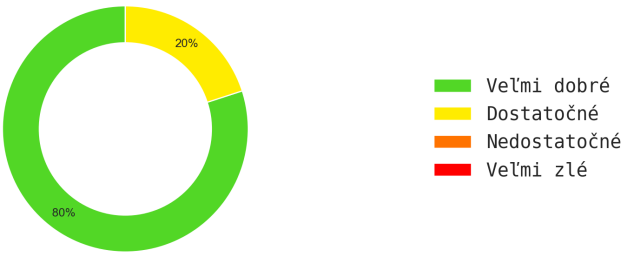
**Otázka 1.** Ako hodnotíte prehľadnosť analytickej časti editora, t.j. čas, za ktorý ste schopní nájsť ovládacie prvky, ktoré potrebujete pre vyšetrovanie priebehu funkcií?



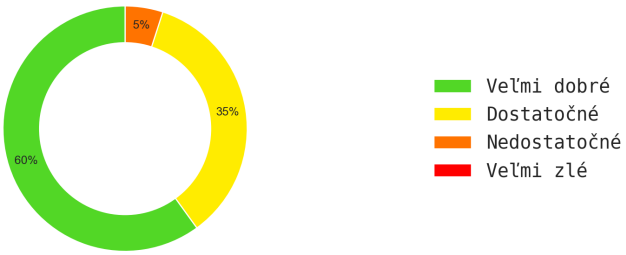
**Otázka 2.** Ako hodnotíte prehľadnosť výstupov z editora, t.j. sekciu Výstupy a zobrazenie vypočítaných údajov?



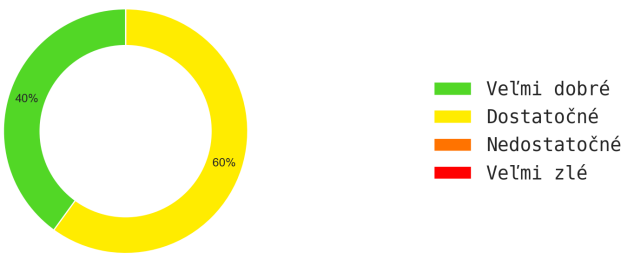

**Otázka 3.** Ako hodnotíte zrozumiteľnosť ovládacích prvkov (názvov tlačidiel, okien a pod.)?



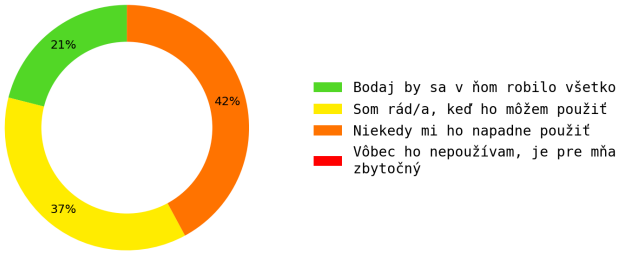

**Otázka 4.** Ako hodnotíte rýchlosť programu (načítanie grafu, prepínanie medzi oknami menu, a pod.)?



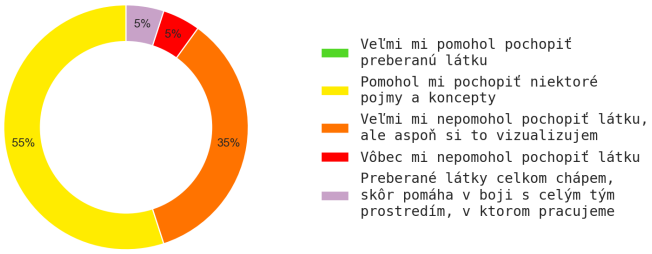

**Otázka 5.** Ako hodnotíte prívetivosť samotného spúšťania editora (t.j. vpísanie kódu do bunky Jupyter Notebooku)?



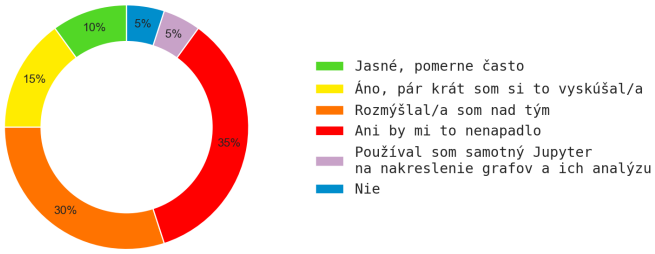
**Otázka 6.** Aké je vaše celkové vnímanie použitia editora v súvislosti s preberanou látkou na laboratóriách?




**Otázka 7.** Aké je vaše celkové vnímanie použitia editora v súvislosti s pochopením látky predmetu?




**Otázka 8.** Využili ste niekedy editor aj mimo zadaní z laboratória, t.j. na vyšetrovanie, či vizualizáciu iných funkcií z vlastnej iniciatívy?



# Záver

Navrhnutím, implementáciou a nasadením funkčného programu do výučbového procesu sa splnil základný cieľ tejto práce, a teda umožňuje jeho užívateľom jednoduché, interaktívne a najmä prehľadné vyšetrovanie priebehu rôznych elementárnych funkcií. Vďaka pravidelným konzultáciám s vyučujúcim, či pravidelnému testovaniu medzi cieľovou skupinou užívateľov, boli do výsledného programu zakomponované všetky nevyhnutné požiadavky. Funkčnosť a grafické užívateľské rozhranie programu boli užívateľmi v anonymnom dotazníku hodnotené pozitívne, čo podporuje splnenie všetkých cieľov tejto práce.

Nad rámec tejto práce je možné ďalej uvažovať o zadefinovaní a implementovaní heuristiky na výpočet čo najpresnejších hodnôt numerických derivácií, čím sa môže samotné vyšetrovanie priebehu funkcií ešte viac spresniť. Do úvahy pripadá aj uloženie programu do stiahnuteľného inštalačného balíčka, čím sa eliminuje nutnosť pravidelne kopírovať zdrojové súbory programu k samotným dokumentom Jupyter Notebook.

# Literatúra


[1] *Anaconda Distribution Documentation.*
URL: `docs.anaconda.com/anaconda` (citované: 11.2.2020).

[2] ATKINSON, Kendall E. *An Introduction to Numerical Analysis.*
Wiley, New York, Second Edition, 1989.

[3] ČERNÝ, Ilja. *Úvod do inteligentního kalkulu (1000 příkladů z elementární analýzy).*
Akademie věd České republiky, 2002.

[4] ELIÁŠ, Jozef. *Matematika (Úvod do numerickej analýzy).*
Slovenská vysoká škola technická v Bratislave, 1974.

[5] *Jupyter Widgets Developer Docs.*
URL: `ipywidgets.readthedocs.io` (citované: 11.2.2020).

[6] KLUVÁNEK, Igor, MIŠÍK, Ladislav, ŠVEC, Marko. *Matematika I pre štúdium technických vied.*
Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1959.

[7] KUBÁČEK, Zbyněk, VALÁŠEK, Ján. *Cvičenia z matematickej analýzy I.*
Univerzita Komenského v Bratislave, 1989.

[8] LACHNIET, Jason. *Introduction to GNU Octave, Second Edition.*
lulu.com, Inc, 2019.

[9] LEVY, Doron. *Introduction to Numerical Analysis I - Lecture Notes.*
University of Maryland, 2016.

[10] *MATLAB® Primer, Twenty-third printing.*
URL: `mathworks.com/help/releases/R2014b/pdf_doc/matlab/getstart.pdf`
(citované: 10.2.2020).

[11] McKINNEY, Wes. *Python for Data Analysis, Second Edition.*
O'Reilly Media, Inc, 2017.

[12] MOIN, Parviz. *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis, Second Edition.* Cambridge University Press , 2010.

[13] PÉREZ, Fernando, GRANGER, Brian E. *IPython: A System for Interactive Scientific Computing, Computing in Science and Engineering, vol. 9, 2007.* URL: `ipython.org` (citované: 10.2.2020).

[14] ROSSANT, Cyrille. *IPython Cookbook, Second Edition.* URL: `ipython-books.github.io` (citované: 11.2.2020).

[15] *SciPy v1.4.1 Reference Guide.* URL: `docs.scipy.org/doc/scipy/reference` (citované: 11.2.2020).

[16] *SymPy, Python library for symbolic mathematics.* URL: `sympy.org`

[17] TOSI, Sandro. *Matplotlib for Python Developers.* Packt Publishing Ltd., 2009.

[18] *WolframAlpha, Computational Intelligence.* URL: `wolframalpha.com`