

## ***la entropía de dimensionalidad de la información principio holográfico***

El estudio de la entropía, la dimensionalidad de la información y el principio holográfico surge del intento de unificar conceptos fundamentales de la física, como la gravedad y la mecánica cuántica. La principal herramienta teórica que aborda esta unificación es la correspondencia holográfica o dualidad AdS/CFT.

### **1. Entropía y la Ley del Área**

#### **Entropía Clásica y Cuántica**

La entropía fue caracterizada por Boltzmann en 1877 ( $S=k\log(N)$ ) como el número de estados microscópicos diferentes en los que se puede conformar un sistema de partículas, compatibles con su configuración macroscópica. Curiosamente, Shannon propuso una expresión similar para cuantificar la información contenida en un mensaje, siendo ambas expresiones equivalentes, ya que el número de configuraciones microscópicas es comparable a la cantidad de información necesaria para formar la configuración macroscópica.

En el contexto cuántico, la entropía de entrelazamiento ( $S_A$ ), cuantificada a través de la entropía de Von Neumann de la matriz de densidad reducida de un subsistema A, mide la correlación entre los grados de libertad de esa región y su complemento.

#### **La Entropía de Agujeros Negros y la Dimensionalidad**

La cantidad de información que cabe en una región del espacio depende de la materia y energía que contiene. Un resultado crucial de la termodinámica de agujeros negros, demostrado por Hawking, es que su entropía ( $S_{BH}$ ) es proporcional al área de su horizonte de sucesos y no al volumen de su interior. Específicamente, la entropía es una cuarta parte del área del horizonte de sucesos. Este comportamiento intrigante inspiró el principio holográfico. En una teoría cuántica de campos (QFT) general con  $d$  dimensiones espaciales, la entropía de entrelazamiento ( $S_A$ ) también sigue predominantemente un comportamiento conocido como la Ley del área. Esta establece que el término dominante en la entropía es proporcional al área del límite  $\partial A$  entre las regiones consideradas, y no al volumen de A.

$$S_A = \gamma \frac{Area(\partial A)}{\epsilon^{d-1}} + \text{terminos} - \text{subdominales}$$

Esta dependencia del área se debe a que el entrelazamiento es más intenso en la frontera, constituyendo la principal contribución a la entropía, y es simétrica entre las dos regiones. La entropía de entrelazamiento también diverge a medida que el parámetro de corte a distancias cortas ( $\epsilon$  o  $a$ ) tiende a cero.

## 2. El Principio Holográfico y la Reducción Dimensional

El Principio Holográfico es una propiedad fundamental de la teoría de cuerdas que propone que la gravedad cuántica permite que una descripción del volumen del espacio sea concebida como codificada sobre una frontera o límite de la región.

Esta propuesta se manifiesta en el hecho de que el Universo podría verse como información bidimensional en un horizonte cosmológico, siendo las tres dimensiones espaciales observadas una descripción efectiva a escala macroscópica y a bajas energías. Este principio fue observado por Thorn en 1978 y desarrollado por Gerard't Hoff y Susskind.

La dualidad AdS/CFT es una realización del principio holográfico, proponiendo una correspondencia entre la información contenida en el "volumen" de un subsistema cuántico (en una teoría de campo, CFT) y el "área" de su frontera (en una teoría de gravedad, AdS).

- **Descripción Dual:** Un sistema tridimensional descrito por gravedad cuántica puede ser completamente entendido encontrando la dinámica bidimensional de la frontera espacial de ese universo.
- **Geometría:** La correspondencia AdS/CFT establece que una Teoría Conforme de Campos (CFTd) es equivalente a una teoría de cuerdas Tipo IIB propagándose en un espacio Anti de Sitter de una dimensión superior ( $\text{AdS}_{d+1}$ ).

## 3. La Entropía de Entrelazamiento Holográfica (Fórmula de Ryu-Takayanagi)

La fórmula holográfica de Ryu y Takayanagi es una conjetura que relaciona la entropía de entrelazamiento de una CFT con la geometría del espacio AdS dual.

La Fórmula Fundamental

La entropía de entrelazamiento  $S_A$  para una región  $A$  en la CFT es proporcional al área mínima ( $\gamma_A$ ) de una superficie anclada en la frontera de  $A$  que se extiende hacia el interior del espacio AdS dual, en el límite de gravedad clásica.

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N^{(d+1)}}$$

Donde  $G_N^{(d+1)}$  es la constante gravitacional de Newton en la dimensión superior.

## Aplicaciones y Consistencia

Esta prescripción simplifica enormemente los cálculos de entropía de entrelazamiento, especialmente en regímenes de acoplamiento fuerte donde los métodos perturbativos de la QFT son inaccesibles.

Los resultados obtenidos mediante la fórmula de Ryu-Takayanagi son consistentemente verificados con los resultados analíticos obtenidos previamente por métodos de CFT, lo que sustenta la validez de la conjetura.

### Ejemplos de Consistencia Dimensional:

1. **CFT<sub>2</sub> (Intervalo de longitud l, dual a AdS<sub>3</sub>):** La superficie mínima es una geodésica cuya longitud se calcula en AdS<sub>3</sub>. El resultado holográfico coincide exactamente con la Ley del Área logarítmica predicha por CFT:

$$S_A = \frac{c}{3} \log\left(\frac{l}{a}\right)$$

Aquí, c es la carga central de la CFT (proporcional a los grados de libertad de la teoría).

2. **CFT<sub>4</sub>(Esfera de radio l, dual a AdS<sub>5</sub>):** La entropía de entrelazamiento tiene un término dominante que sigue la Ley del Área cuadrática (d=3 dimensiones espaciales, d-1=2):

$$S_A = \frac{\pi R^3}{8G_N^{(5)}} \left( \frac{l^2}{a^2} - \log\left(\frac{l}{a}\right) \right) + \sigma(1)$$

Para la teoría N=4 SYM (un tipo de CFT), esta cantidad es proporcional a N<sup>2</sup>, consistente con el número de grados de libertad de esa teoría.

3. **Temperatura Finita:** La fórmula se extiende a sistemas con temperatura finita al introducir un agujero negro en el espacio AdS dual (métrica AdS-Schwarzschild). En el límite de alta temperatura, la entropía de entrelazamiento coincide con la entropía termodinámica del sistema. Cuando la región A cubre todo el espacio, la geodésica coincide con el horizonte de eventos del agujero negro, y la entropía de entrelazamiento se reduce a la entropía de Bekenstein-Hawking del agujero BTZ.

El éxito de la fórmula de Ryu-Takayanagi radica en que relaciona de forma simple la complejidad de la dinámica cuántica de sistemas fuertemente acoplados (CFT) con una cantidad puramente geométrica (área mínima) en la teoría de gravedad dual.

El ejemplo práctico más ilustrativo que se deriva del tema es el **cálculo de la entropía de entrelazamiento para un intervalo finito en una Teoría de Campo Conforme (CFT) utilizando la fórmula de Ryu-Takayanagi**. Este ejemplo no solo demuestra la aplicación del Principio Holográfico, sino que también reproduce de manera exacta resultados previamente obtenidos por métodos cuánticos convencionales, lo que sustenta la validez de la correspondencia *AdS/CFT*.

Este método es crucial porque permite estudiar sistemas que son **fuertemente acoplados**, donde los métodos perturbativos de la Teoría Cuántica de Campos (QFT) son inaccesibles, como es el caso de modelos utilizados para estudiar sistemas de materia exótica, superconductores o el plasma de quarks y gluones.

### **Ejemplo: Entropía de Entrelazamiento para un Intervalo 1D ( $CFT_2$ )**

El caso más sencillo es analizar una CFT con una dimensión espacial ( $CFT_2$ ), que puede modelar sistemas como cadenas de espín.

#### **1. Definición del Sistema y la Dualidad:**

- Se considera una  $CFT_2$  (una dimensión temporal y una espacial) a temperatura cero.
- Se define un subsistema  $A$  como un **intervalo de longitud**  $l$  con puntos extremos  $u$  y  $v$  en la frontera.
- La dualidad *AdS/CFT* establece que esta  $CFT_2$  es dual a un espacio **Anti-de Sitter de tres dimensiones** ( $AdS_3$ ).

#### **2. Aplicación de la Fórmula Holográfica:**

- La fórmula de Ryu-Takayanagi establece que la entropía de entrelazamiento  $S_A$  es proporcional al área (o en este caso, la **longitud**) mínima de una superficie  $\gamma_A$  que se extiende en el espacio  $AdS_3$  y está anclada a la frontera del intervalo  $A$ .

#### **3. Cálculo Geométrico en el Espacio Dual ( $AdS_3$ ):**

- Se utiliza la métrica de  $AdS_3$  en coordenadas de Poincaré.
- Al aplicar la condición de longitud extremal (geodésica), se encuentra que la curva que conecta los puntos  $u$  y  $v$  en el espacio  $AdS_3$  adopta la forma de un **semicírculo de radio**  $l/2$ .

#### **4. Resultado y Consistencia con la Ley del Área:**

- Dado que la métrica de  $AdS$  diverge cerca de la frontera ( $z \rightarrow 0$ ), es necesario introducir un **parámetro de corte UV** ( $a$ ) (equivalente al espaciamiento de la retícula de la CFT) para regular la integral de la longitud de la curva.
- La integración de la longitud de este semicírculo en  $AdS_3$  conduce al resultado:

$$S_A = \frac{\text{longitud}(\gamma_A)}{4G_N^{(3)}} = \frac{c}{3} \log\left(\frac{l}{a}\right)$$

donde  $c$  es la carga central de la  $CFT_2$ .

- Este resultado es **exactamente el mismo** que se había obtenido previamente mediante el método del truco de réplica en la teoría cuántica de campos. Esto confirma la relación entre la entropía de entrelazamiento cuántico y la geometría del espacio-tiempo dual.
- Además, el resultado es consistente con la **Ley del Área** para  $d=1$ , ya que la entropía escala con el logaritmo de  $l$ . La entropía es proporcional a la **carga central (c)** de la CFT, lo que es coherente con que la entropía dependa de los grados de libertad de la teoría.

### Interpretación Adicional (Entropía de Agujeros Negros)

Otro ejemplo fundamental que inspira el principio holográfico es la **Entropía de Bekenstein-Hawking**.

La fórmula de Ryu-Takayanagi es una generalización de la fórmula de la entropía de los agujeros negros (*SBH*), la cual establece que la entropía es **proporcional al área de su horizonte de sucesos** y no a su volumen.

En el contexto de la dualidad *AdS/CFT* con temperatura finita (que involucra agujeros negros en el espacio *AdS* dual, como el agujero negro BTZ), si el subsistema *A* abarca toda la frontera de la CFT, la superficie  $\gamma_A$  en el bulto dual **coincide exactamente con el horizonte de eventos del agujero negro**. En este caso límite, la entropía de entrelazamiento  $S_A$  se reduce a la entropía de Bekenstein-Hawking del agujero negro, estableciendo un vínculo profundo entre la información cuántica (entrelazamiento) y la gravedad (geometría del agujero negro).

### Bibliografía

- Hernández, EEG (2015). *Entropía de Entrelazamiento Holográfico* [UNAM].
- *UNIVERSO HOLOGRAFICO - UNIVERSO HOLOGRAFICO - Academia de Ciencias de la Región de Murcia - Portales Web* . (s/f). Portales.um.es. Recuperado el 11 de diciembre de 2025, de <https://portales.um.es/web/acc/-/universo-holografico/1>.