Registrierung 3D/3D

Berechnung bei gegebenen korrespondierenden Punkten

Gegeben: Korrespondierende Punkte (P_i, Q_i) zwischen Viewpoint *i* und Masterviewpoint

Gesucht: Rigid Motion *R, T* vom Viewpoint *i* zum Masterviewpoint

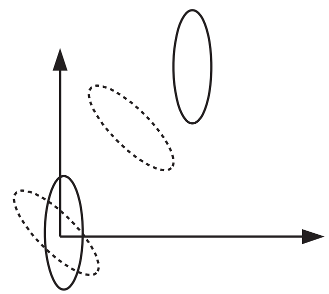
$$\sum_{k=0}^{|P|-1} \| R P_k + T - Q_k \| \rightarrow min \qquad (*)$$

Lösung:

1. Schritt: Schwerpunkt in Ursprung verschieben

$$\tilde{P}_i = P_i - m_P, \quad mit \quad m_P := \sum_{i \in \{0,..,N\}} \frac{P_i}{N+1}$$

$$\tilde{Q}_i = Q_i - m_Q, \quad mit \quad m_Q := \sum_{i \in \{0,..,N\}} \frac{Q_i}{N+1}$$



Registrierung 3D/3D

Damit lässt sich **(*)** überführen in

$$\sum_{k=0}^{|\tilde{P}|-1} \left\| \tilde{R}\,\tilde{P}_k - \tilde{Q}_k \right\| \rightarrow min \qquad \textbf{(**)}$$

<u>2. Schritt:</u> Berechnung einer Lösung von (**) durch SVD

(**) ergibt für jedes (Q_i, P_i) drei Gleichungen

$$r_{11}\,p_i^{(x)} + r_{12}\,p_i^{(y)} + r_{13}\,p_i^{(z)} = q_i^{(x)}$$
$$r_{21}\,p_i^{(x)} + r_{22}\,p_i^{(y)} + r_{23}\,p_i^{(z)} = q_i^{(y)}$$
$$r_{31}\,p_i^{(x)} + r_{32}\,p_i^{(y)} + r_{33}\,p_i^{(z)} = q_i^{(z)}$$

oder umgeschrieben

$$r_{11}\,p_i^{(x)} + r_{12}\,p_i^{(y)} + r_{13}\,p_i^{(z)} + \underbrace{r_{21}\,0 + r_{22}\,0 + r_{23}\,0}_{=0} + \underbrace{r_{31}\,0 + r_{32}\,0 + r_{33}\,0}_{=0} = q_i^{(x)}$$

$$\underbrace{r_{11}\,0 + r_{12}\,0 + r_{13}\,0}_{=0} + r_{21}\,p_i^{(x)} + r_{22}\,p_i^{(y)} + r_{23}\,p_i^{(z)} + \underbrace{r_{31}\,0 + r_{32}\,0 + r_{33}\,0}_{=0} = q_i^{(y)}$$

$$\underbrace{r_{11}\,0 + r_{12}\,0 + r_{13}\,0}_{=0} + \underbrace{r_{21}\,0 + r_{22}\,0 + r_{23}\,0}_{=0} + r_{31}\,p_i^{(x)} + r_{32}\,p_i^{(y)} + r_{33}\,p_i^{(z)} = q_i^{(z)}$$

Registrierung 3D/3D

Konstruiere daraus für alle Punktepaare ein Gleichungssystem in Matrixdarstellung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_0^{(x)} & p_0^{(y)} & p_0^{(z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0^{(x)} & p_0^{(y)} & p_0^{(z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0^{(x)} & p_0^{(y)} & p_0^{(z)} \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ p_n^{(x)} & p_n^{(y)} & p_n^{(z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_n^{(x)} & p_n^{(y)} & p_n^{(z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_n^{(x)} & p_n^{(y)} & p_n^{(z)} \end{pmatrix}}_{:=A \in M_{3(N+1)x9}} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \\ r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix}}_{:=x \in M_{9x1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_0^{(x)} \\ q_0^{(y)} \\ q_0^{(z)} \\ \vdots \\ q_n^{(x)} \\ q_n^{(y)} \\ q_n^{(z)} \end{pmatrix}}_{:=b \in M_{3(N+1)x1}}$$

Und berechne eine Lösung für $\|Ax-b\| \rightarrow min$ als lineares Ausgleichsproblem, also

$$\tilde{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$$

Registrierung 3D/3D

Und überführe $\tilde{x}$ in eine Matrix

$$\tilde{R}=\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 & \tilde{x}_5 & \tilde{x}_6 \\ \tilde{x}_7 & \tilde{x}_8 & \tilde{x}_9 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(***)}$$

Achtung: $\tilde{R}$ entspricht i.A. keiner Drehung, also $det(\tilde{R}) \neq 1$

<u>3. Schritt:</u> Überführe $\tilde{R}$ in eine Drehmatrix R

Aus *svd* von $\tilde{R}$ folgt

$$\underbrace{\tilde{R}=\tilde{U}\,\tilde{D}\,\tilde{V}^t=\tilde{U}\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}\tilde{V}^t}_{det(\tilde{R})\neq 1}$$

Registrierung 3D/3D

Und konstruiere daraus eine Drehung R durch

$$\underbrace{R = \tilde{U}\,\tilde{D}\,\tilde{V}^t = \tilde{U}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & det(U\,V^t) \end{pmatrix}\tilde{V}^t}_{det(R)=1}$$

<u>4. Schritt:</u> Berechnung der Translation T

Schließlich ergibt sich T aus (*) durch

$$T = m_q - R\,m_p$$

□