Е. А. Руденко, Оптимальные дискретные нелинейные фильтры порядка объекта и их гауссовские приближения,
Автомат. и телемех., 2010, выпуск 2, 159–178

Автоматика и телемеханика, № 2, 2010

© 2010 г. **Е.А. РУДЕНКО, канд. физ.-мат. наук**
(Московский авиационный институт)

ОПТИМАЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ ПОРЯДКА ОБЪЕКТА И ИХ ГАУССОВСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассматривается задача синтеза быстрых алгоритмов оценивания текущего состояния нелинейных стохастических динамических систем по наблюдениям их выходов. Приведен анализ недостатков известных методов дискретной марковской фильтрации. Для ранее предложенного нелинейного фильтра оптимальной структуры и нового двухшагового фильтра, порядки которых равны числу компонент оцениваемого вектора состояния, получены процедуры как точного, так и приближенно-аналитического нахождения их структурных функций. Рассмотрен способ повышения точности полученных фильтров субоптимальной структуры путем повторной оптимизации их дополнительных параметров. Проведено сравнение предлагаемых и известных алгоритмов оценивания.

1. Введение

Известны [1–3] принципиальные сложности решения следующей классической задачи нелинейного оценивания в каждый момент дискретного времени $k = 0, 1, \ldots$ случайного n-мерного марковского вектора состояния X_k динамического объекта

$$X_{k+1} = a_k(X_k, V_k), \tag{1.1}$$

по осуществляемым на каждом такте косвенным измерениям текущего состояния

$$Y_k = b_k(X_k, W_k). \tag{1.2}$$

Здесь Y_k – случайный m-мерный вектор измерений; V_k, W_k – случайные векторы известных, в общем случае взаимосвязанных, дискретных белых шумов, не зависящих от случайного начального состояния X_0; $a_k(x, v)$, $b_k(x, w)$ – известные вектор-функции объекта и измерителя соответственно. В частных случаях измерения могут быть как полными неточными: $Y_k = X_k + W_k$, так и точными неполными: $Y_k = b_k(X_k)$, $m < n$. Требуется на каждом такте по выборке всех накопленных измерений $Y_0^k = (Y_0, \ldots, Y_k)$ получать вектор оценки Z_k состояния X_k, порождаемый наилучшей из всех измеримых (по Борелю) фильтрующих функций ψ_k:

$$Z_k = \psi_k(Y_0^k). \tag{1.3}$$

Предполагая, что случайные состояния имеют конечный второй момент, в качестве критерия оптимальности обычно используют байесовское условие минимума среднего квадрата ошибки оценивания

$$I_k = \mathrm{M}\,\|X_k - Z_k\|^2 \to \min. \tag{1.4}$$

Здесь и далее М – оператор математического ожидания, $\|x\|^2 = x^{\mathrm{T}}x$ – квадрат евклидовой нормы. Тогда из известной теоремы о наилучшей среднеквадратической регрессии [4, с. 252] следует, что оптимальная функция $\psi_k(y_0^k)$ существует и определяется как апостериорное математическое ожидание: $\psi_k(y_0^k) = \mathrm{M}\,[X_k \mid Y_0^k = y_0^k]$. Поэтому оценка (1.3) является несмещенной и имеет конечный второй момент.

В частности, пусть случайные величины X_k, Y_k абсолютно непрерывные, т.е. существуют их плотности вероятности. Например, начальное состояние X_0 имеет плотность $\pi_0(x_0)$. В этом случае оптимальная фильтрующая функция имеет вид

$$\psi_k(y_0^k) = \int x_k\, \tilde{\rho}_k(x_k \mid y_0^k)\, dx_k, \tag{1.5}$$

где $\tilde{\rho}_k$ – апостериорная плотность, а интеграл здесь и всюду далее берется по всему евклидову пространству соответствующей размерности. При этом плотность $\tilde{\rho}_k$ находится независимо от ψ_k из разностного уравнения Байеса-Стратоновича [1, с. 220]. Алгоритм (1.3), (1.5) обработки измерений (1.2) называют *абсолютно оптимальным фильтром*, так как нет никаких ограничений на класс фильтрующих функций. Его основным недостатком является невозможность, особенно при больших n, получения оценок (1.3) в реальном времени, т.е. в темпе с процессом поступления измерений. Это происходит как по причине роста со временем числа аргументов фильтрующей функции, так и из-за необходимости вычислять на каждом такте, кроме (1.5), еще два n-мерных интеграла (Приложение, п. 1).

Традиционным способом [5, с. 36; 6, § 8.2] преодоления этого недостатка является построение рекуррентной версии абсолютно оптимального фильтра (1.3), (1.5):

$$S_k = \phi_k(Y_k, Y_{k-1}, S_{k-1}), \quad k \geqslant 1, \quad S_0 = \phi_0(Y_0), \quad Z_k = [\; E_n \quad O \;]\, S_k,$$

где S_k – бесконечный гиперстолбец достаточных координат, E_n – единичная матрица порядка n, O – нулевая матрица (Приложение, п. 2). При этом явная зависимость функции ϕ_k от результатов не только последнего измерения Y_k, но и предыдущего Y_{k-1} обусловлена возможной зависимостью помех объекта V_k и измерителя W_k. Так как вектор S_k состояния этого фильтра имеет бесконечную размерность, то сам фильтр имеет бесконечный порядок. Такая версия также нереализуема в реальном времени, но, ограничиваясь конечным числом первых элементов вектора достаточных координат, можно построить приближенный, хотя и *субоптимальный* (почти оптимальный), но практически реализуемый алгоритм фильтрации. Однако даже простейшие такие приближения: *фильтр нормальной аппроксимации* (Приложение, п. 3) и его линеаризованная версия – *обобщенный фильтр Калмана* (Приложение, п. 4) – имеют довольно большой порядок $n(n+3)/2$. К сожалению, точность этих субоптимальных фильтров часто неудовлетворительна. Учет же старших достаточных координат резко увеличивает порядок субоптимального фильтра [6, с. 463], что препятствует его реализации. Поэтому актуальна задача разработки алгоритмов оценивания малого порядка, сочетающих в себе относительную простоту их реализации (быстроту и небольшой объем памяти) и высокие точностные характеристики.

Отмеченные недостатки абсолютно оптимального фильтра преодолевает метод В.С. Пугачева [7] синтеза параметров быстрого *условно оптимального фильтра* порядка объекта n с заданной структурой:

$$Z_k = \Delta_k\, \sigma_k(Y_k, Z_{k-1}) + \gamma_k, \quad k \geqslant 1. \tag{1.6}$$

Здесь $\sigma_k(y, z)$ – известная структурная вектор-функция произвольного порядка, а два текущих параметра Δ_k, γ_k определяются заранее, до начала процесса оценивания, из условия (1.4). В результате эти параметры выражаются через два первых момента известных случайных величин (Приложение, п. 5). Следовательно, их можно найти практически точно методом Монте-Карло с помощью потактового статистического моделирования уравнений объекта (1.1), измерителя (1.2) и фильтра (1.6). Уравнение (1.6) накладывает следующее параметризированное ограничение рекурсивности на последовательность оценивающих функций: $\psi_k(y_0^k) = \Delta_k\, \sigma_k[y_k,\, \psi_{k-1}(y_0^{k-1})] + \gamma_k$. Поэтому оценки (1.6) заведомо менее точные чем (1.3), (1.5), зато практических трудностей с их получением в реальном времени не возникает. Недостатком такого фильтра является отсутствие рекомендаций по выбору структурной функции σ_k, вид которой очевидным образом влияет на точность оценивания. Его частично преодолевает метод *двухшаговой условно оптимальной фильтрации* А.Р. Панкова [8], постулирующий непосредственную связь этой функции с функциями объекта a_k и измерителя b_k (Приложение, п. 6).

Ниже представлены два других способа преодоления недостатков метода условно оптимальной фильтрации, основанные на поиске наилучшей структуры нелинейных фильтров порядка объекта, и варианты их практического применения.

2. Фильтр оптимальной структуры

2.1. Постановка задачи

Для получения быстрого фильтра, более точного чем (1.6), в [9] было предложено искать уравнение фильтра оптимальной структуры в виде:

$$Z_k = f_k(Y_k, Y_{k-1}, Z_{k-1}), \quad k \geqslant 1, \quad Z_0 = f_0(Y_0), \tag{2.1}$$

где f_k – неизвестные измеримые структурные вектор-функции, определяемые из условия (1.4). Уравнение (2.1) накладывает непараметрическое ограничение рекурсивности на класс фильтрующих функций $\psi_k(y_0^k) = f_k[y_k,\, y_{k-1},\, \psi_{k-1}(y_0^{k-1})]$. Такие функции также измеримы, как композиции измеримых функций [4, с. 188]. Следовательно, класс предлагаемых оценивающих функций ýже, чем (1.5), но шире, чем (1.6). В результате точность фильтра (2.1) должна быть хуже точности абсолютно оптимального фильтра, но лучше, чем точность условно оптимального фильтра.

Из (1.4), (2.1) по теореме о наилучшей регрессии опять имеем:

$$f_k(y_k, y_{k-1}, z_{k-1}) = \mathrm{M}[X_k \mid y_k, y_{k-1}, z_{k-1}] \triangleq \int x_k \rho_k(x_k \mid y_k, y_{k-1}, z_{k-1})\, dx_k, \tag{2.2}$$

в результате чего оценка (2.1) тоже является несмещенной и имеет конечный второй момент. Здесь ρ_k – отличная от (1.5) апостериорная плотность, использующая информацию об устаревших измерениях Y_0^{k-1} в сжатом виде Z_{k-1}. Однако полученная в [9] при самых общих предположениях процедура синтеза оптимальных структурных функций (2.2) записана на сложном языке вероятностных мер. Приведем ее изложение на традиционном языке плотностей вероятности.

2.2. Априорные плотности вероятности

Уравнения (1.1), (1.2) позволяют найти следующие вероятностные характеристики случайных величин X_k, Y_k. Марковская последовательность состояний X_k объекта (1.1) полностью характеризуется плотностью вероятности одношагового перехода $\alpha_k(x_{k+1} \mid x_k)$, которая может быть определена по функции a_k объекта и закону распределения белого шума V_k известным, но громоздким способом [4, с. 254] решения задачи о нелинейном преобразовании случайной величины V_k в величину $X_{k+1} = a_k(x_k, V_k)$ при любом значении детерминированной переменной x_k. Вместо этого в данной работе будем использовать удобную символическую формулу

$$\alpha_k(x_{k+1} \mid x_k) = \mathrm{M}\left\{\delta[x_{k+1} - a_k(x_k, V_k)]\right\}. \tag{2.3}$$

Здесь и далее оператор математического ожидания M производит усреднение по случайным величинам, обозначаемым в отличие от детерминированных большими буквами, в данном случае по V_k; $\delta(u)$ – обобщенная дельта-функция Дирака, являющаяся плотностью вырожденного распределения. Аналогично задаваемый формулой (1.2) случайный вектор наблюдений Y_k полностью характеризуется, при известном состоянии $X_k = x_k$, условной плотностью вероятности измерения

$$\beta_k(y_k \mid x_k) = \mathrm{M}\left\{\delta[y_k - b_k(x_k, W_k)]\right\}. \tag{2.4}$$

В общем случае возможна зависимость помех объекта V_k и измерителя W_k. Это приводит к статистической зависимости векторов следующего состояния X_{k+1} и текущего измерения Y_k, которая полностью характеризуется следующей совместно-условной плотностью вероятности марковской пары (X_{k+1}, Y_k):

$$\gamma_k(x_{k+1}, y_k \mid x_k) = \mathrm{M}\left\{\delta[x_{k+1} - a_k(x_k, V_k)]\delta[y_k - b_k(x_k, W_k)]\right\}. \tag{2.5}$$

При этом плотности α_k, β_k являются маргинальными по отношению к плотности γ_k. Тогда условная плотность вероятности следующего состояния X_{k+1} при гипотезах $X_k = x_k$, $Y_k = y_k$ отличается от α_k и находится по формуле

$$\zeta_k(x_{k+1} \mid x_k, y_k) = \gamma_k(x_{k+1}, y_k \mid x_k)/\beta_k(y_k \mid x_k). \tag{2.6}$$

Замечание 1. В частном случае, если возмущение объекта V_k и помеха измерителя W_k независимы, то плотность (2.5) вырождается в произведение (2.3), (2.4), тогда как плотность (2.6) совпадает с (2.3) и поэтому не зависит от y_k:

$$\begin{aligned} \gamma'_k(x_{k+1}, y_k \mid x_k) &= \alpha_k(x_{k+1} \mid x_k)\beta_k(y_k \mid x_k), \\ \zeta'_k(x_{k+1} \mid x_k, y_k) &= \alpha_k(x_{k+1} \mid x_k). \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.3. Алгоритм синтеза фильтра

В [9] доказана марковость троек (X_{k+1}, Y_k, Z_k), (X_k, Y_k, Z_k) и на этой основе получена процедура синтеза функций (2.2) фильтра (2.1). Используя плотности (2.3)–(2.6) и предполагая абсолютную непрерывность оценки Z_k, ее можно записать в виде рекуррентной цепочки преобразований, состоящей из семи формул вычисления плотностей и самой функции f_k. Сначала, предполагая известной плотность q_k распределения величин X_k, Y_k, Z_k, находится предикторная плотность π_{k+1}:

$$\xi_k(x_k \mid y_k, z_k) = q_k(x_k, y_k, z_k) \Big/ \int q_k(x_k, y_k, z_k)\, dx_k, \tag{2.8}$$

$$\pi_{k+1}(x_{k+1} \mid y_k, z_k) = \int \zeta_k(x_{k+1} \mid x_k, y_k)\xi_k(x_k \mid y_k, z_k)\, dx_k. \tag{2.9}$$

Затем вычисляется новая структурная функция f_{k+1}, что удобно записать, осуществив сдвиг по времени на один такт вперед $(k := k + 1)$

$$\eta_k(x_k, y_k \mid y_{k-1}, z_{k-1}) = \beta_k(y_k \mid x_k)\pi_k(x_k \mid y_{k-1}, z_{k-1}), \tag{2.10}$$

$$\rho_k(x_k \mid y_k, y_{k-1}, z_{k-1}) = \eta_k(x_k, y_k \mid y_{k-1}, z_{k-1}) \Big/ \int \eta_k(x_k, y_k \mid y_{k-1}, z_{k-1})\, dx_k, \tag{2.11}$$

$$f_k(y_k, y_{k-1}, z_{k-1}) = \int x_k \rho_k(x_k \mid y_k, y_{k-1}, z_{k-1})\, dx_k. \tag{2.12}$$

Наконец, следует получить плотность q_k для начала следующего цикла вычислений:

$$\sigma_k(x_k, y_k, z_k \mid x, y, z) = \delta[z_k - f_k(y_k, y, z)]\beta(y_k \mid x_k)\zeta_{k-1}(x_k \mid x, y), \tag{2.13}$$

$$q_k(x_k, y_k, z_k) = \int \sigma_k(x_k, y_k, z_k \mid x, y, z) q_{k-1}(x, y, z)\, dx dy dz. \tag{2.14}$$

К этим соотношениям можно добавить три формулы, позволяющие найти закон распределения $h_k(\varepsilon_k)$ ошибки оценивания $\mathrm{E}_k = X_k - Z_k$ и ее средний квадрат (1.4)

$$\begin{aligned} &r_k(x_k, y_k, y_{k-1}, z_{k-1}) = \eta_k(x_k, y_k \mid y_{k-1}, z_{k-1}) \int q_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})\, dx_{k-1}, \\ &h_k(\varepsilon_k) = \int r_k[\varepsilon_k + f_k(y_k, y_{k-1}, z_{k-1}), y_k, y_{k-1}, z_{k-1}]\, dy_k dy_{k-1} dz_{k-1}, \\ &I_k = \int \varepsilon_k^{\mathrm{T}} \varepsilon_k\, h_k(\varepsilon_k)\, d\varepsilon_k. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Стартуют эти вычисления с нахождения начальной функции f_0:

$$r_0(x_0, y_0) = \beta_0(y_0 \mid x_0)\pi_0(x_0) \tag{2.16}$$

$$f_0(y_0) = \int x_0 r_0(x_0, y_0)\, dx_0 \Big/ \int r_0(x_0, y_0)\, dx_0, \tag{2.17}$$

после чего становится известным начальное условие для цепочки (2.8)–(2.14)

$$q_0(x_0, y_0, z_0) = \delta[z_0 - f_0(y_0)] r_0(x_0, y_0). \tag{2.18}$$

В заключение отметим, что в начальный момент времени плотность η_0 становится безусловной и принимает вид r_0. В результате имеем следующее утверждение.

Утверждение 1. Процедура точного синтеза фильтра оптимальной структуры (2.1) *состоит в выполнении рекуррентной цепочки преобразований*:

$$\ldots \to q_{k-1} \xrightarrow{(2.8)} \xi_{k-1} \xrightarrow{(2.9)} \pi_k \xrightarrow{(2.10)} \eta_k \xrightarrow{(2.11)} \rho_k \xrightarrow{(2.12)} f_k \xrightarrow{(2.13)} \sigma_k \xrightarrow{(2.14)} q_k \to \ldots, \tag{2.19}$$

где $k \geqslant 1$, а начальные функции f_0, q_0 определяются по (2.16)–(2.18). *После выполнения* (2.19) *характеристики точности фильтра находятся по* (2.15).

Замечание 2. В случае независимости помех V_k, W_k уравнения фильтра (2.1) достаточно искать в более простом виде, не требуя явной зависимости текущей оценки от предпоследнего измерения

$$Z_k = f'_k(Y_k, Z_{k-1}). \tag{2.20}$$

Действительно, вследствие (2.7), (2.20) формулы (2.13), (2.14) принимают такой вид:

$$\begin{aligned} &\sigma'_k(x_k, z_k \mid x_{k-1}, z_{k-1}) = \delta[z_k - f'_k(y_k, z_{k-1})]\alpha_{k-1}(x_k \mid x_{k-1}), \\ &q'_k(x_k, z_k) = \int \sigma'_k(x_k, z_k \mid x_{k-1}, z_{k-1}) q'_{k-1}(x_{k-1}, z_{k-1})\, dx_{k-1} dz_{k-1}, \end{aligned}$$

где $q'_k(x_k, z_k) = \int q_k(x_k, y_k, z_k)\, dy_k$. Поэтому плотности (2.8), (2.9) тоже теряют y_k:

$$\begin{aligned} &\xi'_k(x_k \mid z_k) = q'_k(x_k, z_k) \Big/ \int q'_k(x_k, z_k)\, dx_k, \\ &\pi'_{k+1}(x_{k+1} \mid z_k) = \int \alpha_k(x_{k+1} \mid x_k)\xi'_k(x_k \mid z_k)\, dx_k. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Тогда в соответствующей версии соотношений (2.10)–(2.12), (2.15) пропадает аргумент y_{k-1} и для *упрощенного фильтра* (2.20) вместо (2.12) получаем

$$f'_k(y_k, z_{k-1}) = \int x_k \rho'_k(x_k \mid y_k, z_{k-1})\, dx_k.$$

В итоге поставленная задача синтеза оптимальной структуры фильтра порядка объекта (2.1) в принципе решена. Однако практическое, скорее всего численное, выполнение точного синтеза по полученным соотношениям, хотя и проводится до начала процесса оценивания, связано с большими вычислительными трудностями и приводит к необходимости хранить в памяти фильтра последовательность функций (2.2), зависящих от $2m+n$ переменных. Исключение составляют лишь линейно-гауссовский и, возможно, другие частные случаи, когда используемые плотности вероятности полностью определяются небольшим числом параметров. Поэтому в общем случае актуальны приближенные методы синтеза, приводящие к субоптимальным фильтрам порядка объекта.

3. Гауссовское приближение к фильтру оптимальной структуры

3.1. Аппроксимация условной плотности вероятности

Для аналитического определения оптимальных функций (2.12) используем известный метод гауссовской (нормальной) аппроксимации [6, с. 443] некоторых плотностей вероятности. Сначала осуществим аппроксимацию плотности (2.10):

$$\eta_k(x_k, y_k \mid y_{k-1}, z_{k-1}) \approx N(x_k, y_k \mid \lambda_k, \mu_k; \Psi_k, \Phi_k, \Delta_k), \quad k \geqslant 1, \tag{3.1}$$

где $N(u \mid m; D)$ – плотность нормального закона распределения случайного вектора U с параметрами $m = \mathrm{M}[U]$, $D = \mathrm{cov}\,[U, U] \triangleq \mathrm{M}\left[(U-m)(U-m)^{\mathrm{T}}\right]$. В качестве меры близости плотностей (3.1) выберем условия равенства параметров аппроксимирующей гауссовской плотности – математических ожиданий λ_k, μ_k и ковариаций Ψ_k, Φ_k, Δ_k – соответствующим характеристикам аппроксимируемой плотности η_k, предполагая их существование. Это следующие характеристики прогнозов состояния и измерения:

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \mathrm{M}[X_k \mid y_{k-1}, z_{k-1}] \triangleq \int x_k \eta_k(x_k, y_k \mid y_{k-1}, z_{k-1})\, dx_k dy_k, \\ &\Psi_k = \mathrm{M}[(X_k - \lambda_k)(X_k - \lambda_k)^{\mathrm{T}} \mid y_{k-1}, z_{k-1}], \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &\mu_k = \mathrm{M}[Y_k \mid y_{k-1}, z_{k-1}] \triangleq \int y_k \eta_k(x_k, y_k \mid y_{k-1}, z_{k-1})\, dx_k dy_k, \\ &\Phi_k = \mathrm{M}[(Y_k - \mu_k)(Y_k - \mu_k)^{\mathrm{T}} \mid y_{k-1}, z_{k-1}], \\ &\Delta_k = \mathrm{M}\left[(X_k - \lambda_k)(Y_k - \mu_k)^{\mathrm{T}} \mid y_{k-1}, z_{k-1}\right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Тогда из (2.11), (2.12), (3.1) следует, что структурная функция f_k, являясь функцией условного математического ожидания, согласно известной теореме о нормальной корреляции [4, с. 323; 6, с. 547], приближается функцией, линейной по y_k:

$$f_k(y_k, y_{k-1}, z_{k-1}) \approx \lambda_k + \Delta_k \Phi_k^{\oplus}[y_k - \mu_k], \quad k \geqslant 1. \tag{3.4}$$

Здесь и далее верхний символ $\oplus$ при матрице обозначает ее псевдообращение по Муру–Пенроузу. Кроме того, предикторная плотность π_k, являющаяся маргинальной по отношению к η_k, вследствие (3.1) также аппроксимируется гауссовской

$$\pi_k(x_k \mid y_{k-1}, z_{k-1}) \approx N(x_k \mid \lambda_k; \Psi_k). \tag{3.5}$$

Это позволяет выразить характеристики (3.3) через (3.2).

Формулы (3.3), используя (2.10), можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
&\mu_k = \int \nu_k(x_k)\pi_k(x_k \mid y_{k-1}, z_{k-1})\, dx_k,\\
&\Phi_k = \int \Pi_k(x_k)\pi_k(x_k \mid y_{k-1}, z_{k-1})\, dx_k - \mu_k\mu_k^{\mathrm{T}},\\
&\Delta_k = \int (x_k - \lambda_k)\nu_k^{\mathrm{T}}(x_k)\pi_k(x_k \mid y_{k-1}, z_{k-1})\, dx_k.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Здесь ν_k, Π_k – условные средние текущего измерения: $\nu_k(x) = \int y_k\beta_k(y_k \mid x)\, dy_k$, $\Pi_k(x) = \int y_k y_k^{\mathrm{T}}\beta_k(y_k \mid x)\, dy_k$. С помощью (2.4) они непосредственно выражаются через функцию измерителя:

$$
\nu_k(x) = \mathrm{M}[b_k(x, W_k)], \quad \Pi_k(x) = \mathrm{M}\left[b_k\left(x, W_k\right) b_k^{\mathrm{T}}\left(x, W_k\right)\right]. \tag{3.7}
$$

З а м е ч а н и е 3. Например если функция измерителя (1.2) линейна по помехе $b_k(x, W_k) = \bar{b}_k(x) + B_k(x)\overset{o}{W}_k$, то из (3.7) получим простые выражения $\nu_k(x) = \bar{b}_k(x)$ и $\Pi_k(x) = B_k(x)D_k^w B_k^{\mathrm{T}}(x) + \bar{b}_k(x)\bar{b}_k^{\mathrm{T}}(x)$, где $D_k^w = \mathrm{cov}[W_k, W_k]$.

Подставляя (3.5) в (3.6), находим приближения функций (3.3):

$$
\mu_k \approx h_k(\lambda_k, \Psi_k), \quad \Delta_k \approx \Psi_k G_k^{\mathrm{T}}(\lambda_k, \Psi_k), \quad \Phi_k \approx F_k(\lambda_k, \Psi_k), \tag{3.8}
$$

где гауссовские функции коррекции h_k, G_k, F_k определяются по формулам:

$$
\begin{aligned}
&h_k(m, D) = \mathrm{M}_N[\nu_k(X) \mid m, D], \quad G_k^{\mathrm{T}}(m, D) = \nabla_m h_k^{\mathrm{T}}(m, D),\\
&F_k(m, D) = \mathrm{M}_N[\Pi_k(X) \mid m, D] - h_k(m, D)h_k^{\mathrm{T}}(m, D).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Здесь и далее $\mathrm{M}_N[\cdot \mid m, D]$ – оператор усреднения по гауссовской плотности

$$
\mathrm{M}_N[f(X, y) \mid m, D] \triangleq \int f(x, y)N(x \mid m, D)\, dx,
$$

∇_m – оператор градиента по переменной m, а приближение (3.8) для взаимной ковариации Δ_k получено на основании следующего свойства гауссовской плотности: $\mathrm{M}_N[(X - m)\nu^{\mathrm{T}}(X) \mid m, D] = D\,\nabla_m \mathrm{M}_N[\nu^{\mathrm{T}}(X) \mid m, D]$.

Нахождение функций (3.9) совпадает с известной операцией И.Е. Казакова определения коэффициентов статистической линеаризации нелинейностей ν_k, Π_k, например $\nu_k(X) \approx h_k(m, D) + G_k(m, D)\overset{o}{X}$. Для их вычисления могут быть использованы соответствующие таблицы [6, прил. 4]. Подставляя теперь (3.8) в (3.4), получаем следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 1. Аппроксимация (3.1) *дает приближение к* (2.12)

$$
f_k(y_k, y_{k-1}, z_{k-1}) \approx \lambda_k + \Psi_k G_k^{\mathrm{T}}(\lambda_k, \Psi_k)F_k^{\oplus}(\lambda_k, \Psi_k)[y_k - h_k(\lambda_k, \Psi_k)] \tag{3.10}
$$

с функциями гауссовской коррекции (3.9)*, определяемыми по условным средним* (3.7).

Для нахождения зависимостей статистических характеристик прогноза состояния λ_k, Ψ_k от их аргументов y_{k-1}, z_{k-1} подставим (2.9), (2.10) в (3.2). В результате получим выражения этих характеристик через плотность (2.8):

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= \int \varphi_k(x_k, y_k)\xi_k(x_k \mid y_k, z_k)\, dx_k, \\ \Psi_{k+1} &= \int \Xi_k(x_k, y_k)\xi_k(x_k \mid y_k, z_k)\, dx_k - \lambda_{k+1}\lambda_{k+1}^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где φ_k, Ξ_k – условные средние следующего состояния: $\varphi_k(x, y) = \int x\zeta_k(x \mid y, z)\, dx$, $\Xi_k(x, y) = \int xx^{\mathrm{T}}\zeta_k(x \mid y, z)\, dx$, определяемые плотностью (2.6). Используя (2.5), можно получить их непосредственные выражения через функции объекта и измерителя:

$$\begin{aligned} \varphi_k(x, y) &= \mathrm{M}\left\{a_k(x, V_k)\delta[y - b_k(x, W_k)]\right\}/\beta_k(y \mid x), \\ \Xi_k(x, y) &= \mathrm{M}\left\{a_k(x, V_k)a_k^{\mathrm{T}}(x, V_k)\delta[y - b_k(x, W_k)]\right\}/\beta_k(y \mid x). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Осуществим теперь гауссовскую аппроксимацию плотности (2.14):

$$q_k(x_k, y_k, z_k) \approx N(x_k, y_k, z_k \mid m_k^x, m_k^y, m_k^z; D_k^x, D_k^y, D_k^z, D_{kk}^{xy}, D_{kk}^{yz}, D_{kk}^{xz}). \tag{3.13}$$

Здесь и далее обозначены: $m_k^u = \mathrm{M}[U_k]$, $D_k^u = \operatorname{cov}[U_k, U_k]$, $D_{kl}^{us} = \operatorname{cov}[U_k, S_l]$. Тогда условная по отношению к q_k плотность (2.8) также приближается гауссовской

$$\xi_k(x_k \mid y_k, z_k) \approx N\left(x_k \mid u_k(y_k, z_k), T_k\right), \tag{3.14}$$

а параметры плотности ξ_k снова находятся по теореме о нормальной корреляции:

$$u_k(y_k, z_k) = \Gamma_k^y y_k + \Gamma_k^z z_k + \chi_k, \tag{3.15}$$

$$T_k = D_k^x - \Gamma_k^y (D_{kk}^{xy})^{\mathrm{T}} - \Gamma_k^z (D_{kk}^{xz})^{\mathrm{T}}. \tag{3.16}$$

Здесь матрицы усиления Γ_k^y, Γ_k^z и вектор смещения χ_k имеют вид:

$$\begin{aligned} [\Gamma_k^y \quad \Gamma_k^z] &= [D_{kk}^{xy} \quad D_{kk}^{xz}] \begin{bmatrix} D_k^y & D_{kk}^{yz} \\ (D_{kk}^{yz})^{\mathrm{T}} & D_k^z \end{bmatrix}^{\oplus}, \\ \chi_k &= m_k^x - \Gamma_k^y m_k^y - \Gamma_k^z m_k^z. \end{aligned} \tag{3.17}$$

В результате из (3.11) и (3.14) получаем следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 2. Аппроксимация (3.13) *дает приближения к* (3.11):

$$\lambda_{k+1} \approx \tau_k[y_k, u_k(y_k, z_k), T_k], \quad \Psi_{k+1} \approx \Theta_k[y_k, u_k(y_k, z_k), T_k], \tag{3.18}$$

где функции гауссовского прогноза τ_k, Θ_k – аналогичные (3.9) *результаты статистической линеаризации по переменной x нелинейных условных средних* (3.12):

$$\begin{aligned} \tau_k(y, m, D) &= \mathrm{M}_N[\varphi_k(X, y) \mid m, D], \\ \Theta_k(y, m, D) &= \mathrm{M}_N[\Xi_k(X, y) \mid m, D] - \tau_k(y, m, D)\tau_k^{\mathrm{T}}(y, m, D), \end{aligned} \tag{3.19}$$

причем второй аргумент функций (3.18) *имеет вид* (3.15), *а их параметры находятся по* (3.16), (3.17).

З а м е ч а н и е 4. В частном случае независимости помех V_k, W_k нахождение условных средних (3.12) состояния X_{k+1}, вследствие (2.7), существенно упрощается

$$\varphi'_k(x) = \mathrm{M}\left\{a_k(x, V_k)\right\}, \quad \Xi'_k(x) = \mathrm{M}\left\{a_k(x, V_k) a_k^{\mathrm{T}}(x, V_k)\right\}, \tag{3.20}$$

а сами они теряют второй аргумент. Тогда приближения (3.18) принимают вид:

$$\lambda_{k+1} \approx \tau'_k[u_k(y_k, z_k), T_k], \quad \Psi_{k+1} \approx \Theta'_k[u_k(y_k, z_k), T_k], \tag{3.21}$$

где функции τ'_k, Θ'_k независимого прогноза находятся по формулам:

$$\begin{aligned} &\tau'_k(m, D) = \mathrm{M}_N[\varphi'_k(X) \mid m, D], \\ &\Theta'_k(m, D) = \mathrm{M}_N[\Xi'_k(X) \mid m, D] - \tau'_k(m, D) \tau_k'^{\mathrm{T}}(m, D). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Если при этом синтезируется упрощенный фильтр (2.20), то, так как используемые в этом случае плотности (2.21) не зависят от переменной y_k, из (3.13) и (3.14) получаем аналогичные упрощения соотношений (3.15)–(3.17):

$$u'_k(z_k) = \Gamma'_k z_k + \chi'_k, \tag{3.23}$$

$$\Gamma'_k = D_{kk}^{xz} (D_k^z)^{\oplus}, \quad \chi'_k = m_k^x - \Gamma'_k m_k^z, \quad T'_k = D_k^x - \Gamma'_k (D_{kk}^{xz})^{\mathrm{T}}. \tag{3.24}$$

3.4. Начальная функция и ее параметры

Аналогично (3.4) нетрудно получить следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 3. Гауссовская аппроксимация плотности (2.16)

$$r_0(x_0, y_0) \approx N(x_0, y_0 \mid m_0^x, m_0^y; D_0^x, D_0^y, D_{00}^{xy}) \tag{3.25}$$

приводит к линейному приближению для функции (2.17)

$$f_0(y_0) \approx H_0 y_0 + e_0, \tag{3.26}$$

где матрица усиления и вектор смещения вычисляются по формулам:

$$H_0 = D_{00}^{xy} \left(D_0^y\right)^{\oplus}, \quad e_0 = m_0^x - H_0 m_0^y. \tag{3.27}$$

З а м е ч а н и е 5. Если начальное состояние X_0 само является гауссовским

$$\pi_0(x_0) = N(x_0 \mid m_0^x; D_0^x), \tag{3.28}$$

то для других параметров плотности (3.25) из (2.16) получим выражения, аналогичные (3.8):

$$m_0^x = h_k(m_0^x, D_0^x), \quad D_{00}^{xy} = D_0^x G_k^{\mathrm{T}}(m_0^x, D_0^x), \quad D_0^y = F_k(m_0^x, D_0^x).$$

Тогда вместо приближения (3.26) справедливо точное представление

$$f_0(y_0) = m_0^x + D_0^x G_0^{\mathrm{T}}(m_0^x, D_0^x) F_0^{\oplus}(m_0^x, D_0^x)[y_0 - h_0(m_0^x, D_0^x)],$$

совпадающее с приближением (3.10) при $k = 0$ и

$$\lambda_0 = m_0^x, \quad \Psi_0 = D_0^x. \tag{3.29}$$

Следовательно, в случае (3.28) для f_0 можно использовать общую формулу (3.10), если в нее подставить (3.29).

Таким образом, аппроксимации плотностей (3.1), (3.13), (3.25) позволили получить достаточно простые аналитические приближения как для текущей (3.10), так и для начальной (3.26) структурных функций предлагаемого фильтра (2.1) с параметрами (3.8), (3.18), (3.27). Пусть U_k, Λ_k, Ψ_k – случайные значения известных функций (3.15), (3.2) случайных аргументов Y_k, Z_k. Тогда можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Уравнения гауссовского фильтра субоптимальной структуры имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&Z_0 = H_0Y_0 + e_0, \quad U_k = \Gamma_k^y Y_k + \Gamma_k^z Z_k + \chi_k, \quad k \geqslant 0,\\
&\Lambda_{k+1} = \tau_k(Y_k, U_k, T_k), \quad \Psi_{k+1} = \Theta_k(Y_k, U_k, T_k), \quad k \geqslant 0,\\
&Z_k = \Lambda_k + \Psi_k G_k^{\mathrm{T}}(\Lambda_k, \Psi_k) F_k^{\oplus}(\Lambda_k, \Psi_k)[Y_k - h_k(\Lambda_k, \Psi_k)], \quad k \geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Здесь H_0, e_0 и Γ_k, χ_k, T_k – начальные и текущие числовые параметры соответственно, которые определяются заранее по формулам (3.27), (3.17), (3.16). *При этом три последних находятся методом потактового статистического моделирования объекта* (1.1), *измерителя* (1.2) *и фильтра* (3.30).

Замечание 6. Уравнения (3.30) похожи на уравнения фильтра нормальной аппроксимации (П.12) – гауссовского приближения к абсолютно оптимальному фильтру – тем, что используют те же функции прогноза и коррекции. Принципиальное отличие (3.30) состоит в замене вычисляемой в (П.12) на каждом такте матрицы P_k на найденную заранее матрицу-параметр T_k. Действительно, исключив из уравнений (3.30) промежуточные переменные Λ_k, Ψ_k, U_k, получим одно разностное уравнение этого субоптимального фильтра $Z_k = i_k(Y_{k-1}, Z_{k-1}) + J_k(Y_{k-1}, Z_{k-1})Y_k$. Оно является частным случаем уравнения (2.1) точного фильтра, тогда как (П.12) приводит к системе из двух уравнений (П.13). Кроме этого, вычисление характеристик прогноза Λ_k, Ψ_k осуществляется в (3.30) не по оценке Z_k, а по результату U_k ее уточнения с помощью других числовых параметров Γ_k, χ_k.

Замечание 7. Уравнения гауссовского приближения к упрощенному фильтру (2.20) отличаются от (3.30) согласно (3.21), (3.23) более простыми функциями прогноза (3.22) и меньшим количеством параметров (3.24) благодаря отсутствию матрицы Γ_k^y.

3.6. Уточнение субоптимальных оценок

Вследствие неоптимальности фильтра (3.30) его точность можно повысить, применив идею двухшаговой условно оптимальной фильтрации (П.20), (П.21). Для этого изменим формулы для прогноза Λ_{k+1} и оценки Z_k, дополнив каждую из них своей парой неопределенных коэффициентов (L_k, n_k) и (K_k, e_k):

$$
\begin{aligned}
&Z_0 = H_0Y_0 + e_0, \quad U_k = \Gamma_k^y Y_k + \Gamma_k^z Z_k + \chi_k, \quad k \geqslant 0,\\
&S_k = \tau_k(Y_k, U_k, T_k), \quad \Lambda_{k+1} = L_k S_k + n_k, \quad \Psi_{k+1} = \Theta_k(Y_k, U_k, T_k),\\
&\Sigma_k = \Psi_k G_k^{\mathrm{T}}(\Lambda_k, \Psi_k) F_k^{\oplus}(\Lambda_k, \Psi_k)[Y_k - h_k(\Lambda_k, \Psi_k)], \quad Z_k = \Lambda_k + K_k\Sigma_k + e_k.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Эти пары найдем с помощью повторной минимизации двух критериев оптимальности: основного (1.4) и дополнительного

$$
J_k = \mathrm{M}\,\|\mathrm{E}_k\|^2 \to \min,
\tag{3.32}
$$

где $\mathrm{E}_k = X_k - \Lambda_k$ – ошибка прогноза. В результате аналогично (П.22) получим:

$$
\begin{aligned}
&K_k = D_{kk}^{\varepsilon\sigma}\,(D_k^{\sigma})^{\oplus}, \quad e_k = m_k^{\varepsilon} - K_k m_k^{\sigma},\\
&L_k = D_{k+1,k}^{xs}\,(D_k^{s})^{\oplus}, \quad n_k = m_{k+1}^{x} - L_k m_k^{s}.
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

Таким образом, *модифицированный гауссовский фильтр субоптимальной структуры* (3.31) будет обладать, по сравнению с фильтром (3.30), лучшей точностью за счет появления дополнительных параметров (3.33), которые вычисляются вместе с основными параметрами (3.16), (3.17), (3.27) методом моделирования.

Замечание 8. Сложные интегральные вычисления гауссовских структурных функций (3.9), (3.19), (3.22) можно упростить, применив известный прием линеаризации уравнений (1.1), (1.2), приводящий в методе абсолютно оптимальной фильтрации к алгоритму обобщенного фильтра Калмана (Приложение, п. 4). В этом случае в уравнениях (3.30), (3.31) тоже оказываются применимы представления (П.14)–(П.16) всех функций прогноза и коррекции непосредственно через функции объекта, измерителя и их первые частные производные. Такие версии фильтров (3.30), (3.31) и других будем называть *линеаризованными*.

4. Двухшаговый фильтр оптимальной структуры

Используя взаимосвязь апостериорных и предикторных достаточных координат (П.6), новый класс допустимых оценок определим в отличие от (2.1) следующими рекуррентными соотношениями фильтрации и экстраполяции (прогнозирования) в виде системы из двух уравнений фильтра-предиктора:

$$
Z_k = f_k(Y_k, S_k), \quad k \geqslant 1, \quad S_{k+1} = g_k(Y_k, Z_k), \quad k \geqslant 0, \quad Z_0 = f_0(Y_0). \tag{4.1}
$$

Здесь S_k – вспомогательный n-мерный вектор прогнозирующей оценки состояния X_k, полученной по измерениям Y_0^{k-1}, а f_k, g_k – произвольные измеримые структурные вектор-функции коррекции и прогноза. Последние определим из двух условий оптимальности: (1.4) для ошибки оценивания и (3.32) для ошибки прогнозирования $\mathrm{E}_k = X_k - S_k$. Таким образом, на множество всех возможных оценивающих функций (1.3) наложено ограничение рекурсивности $\psi_k(y_0^k) = f_k\{y_k,\, g_{k-1}[y_{k-1},\, \psi_{k-1}(y_0^{k-1})]\}$. Такие функции ψ_k также измеримы. В результате точность двухшагового фильтра (4.1) должна быть лучше точности одношагового (2.1) за счет проведения на каждом такте дополнительной оптимизации (3.32). Отметим, что исключение из (4.1) переменной S_k дает одно разностное уравнение фильтра

$$
Z_k = f_k[Y_k, g_{k-1}(Y_{k-1}, Z_{k-1})], \quad k \geqslant 1, \quad Z_0 = f_0(Y_0), \tag{4.2}
$$

а исключение переменной Z_k приводит к уравнению одношагового предиктора

$$
S_{k+1} = g_k[Y_k, f_k(Y_k, S_k)], \quad k \geqslant 0, \quad S_1 = g_0[Y_0, f_0(Y_0)]. \tag{4.3}
$$

Подставляя (4.1) в (1.4) и (3.32), снова на основании теоремы о наилучшей среднеквадратической регрессии аналогично (1.5), (2.2) находим:

$$
f_k(y_k, s_k) = \mathrm{M}[X_k \mid Y_k = y_k, S_k = s_k] = \int x_k \rho_k(x_k \mid y_k, s_k)\, dx_k, \tag{4.4}
$$

$$
g_k(y_k, z_k) = \mathrm{M}[X_k \mid Y_k = y_k, Z_k = z_k] = \int x_{k+1} \pi_{k+1}(x_{k+1} \mid y_k, z_k)\, dx_{k+1}. \tag{4.5}
$$

Здесь условные плотности вероятности ρ_k, π_{k+1} следующим образом выражаются через соответствующие им совместные плотности r_k, p_{k+1}:

$$(4.6)\qquad \rho_k(x_k \mid y_k, s_k) = r_k(x_k, y_k, s_k) \Big/ \int r_k(x_k, y_k, s_k)\, dx_k,$$

$$(4.7)\qquad \pi_{k+1}(x_{k+1} \mid y_k, z_k) = p_{k+1}(x_{k+1}, y_k, z_k) \Big/ \int p_{k+1}(x_{k+1}, y_k, z_k)\, dx_{k+1}.$$

При этом плотность r_k, используя независимость прогноза S_k от измерения Y_k, можно представить в виде произведения

$$(4.8)\qquad r_k(x_k, y_k, s_k) = \beta_k(y_k \mid x_k) t_k(x_k, s_k), \quad k \geqslant 1.$$

Покажем, что плотности p_k, t_k удовлетворяют некоторым разностным уравнениям как плотности совместного распределения компонент соответствующих марковских векторов. Действительно, подставляя (1.2) в (4.2), получаем уравнение $Z_k = f_k[b_k(X_k, V_k),\ g_{k-1}(Y_{k-1}, Z_{k-1})]$, которое вместе с (1.1) и (1.2) определяет многомерную дискретную динамическую систему, возмущаемую белым шумом. Следовательно, ее состояние (X_{k+1}, Y_k, Z_k) также является марковским вектором [9]. Аналогично из (1.2) и (4.3) получаем уравнение $S_{k+1} = g_k\{b_k(X_k, V_k),\ f_k[b_k(X_k, V_k), S_k]\}$, которое вместе с (1.1) определяет систему с марковским состоянием (X_k, S_k). Поэтому плотность вероятности t_k может быть найдена по рекуррентной формуле

$$(4.9)\qquad t_k\left(x_k, s_k\right) = \int \sigma_k\left(x_k, s_k \mid x_{k-1}, s_{k-1}\right) t_{k-1}\left(x_{k-1}, s_{k-1}\right)\, dx_{k-1} ds_{k-1}$$

с некоторой плотностью вероятности перехода σ_k и начальным условием $t_1(x_1, s_1)$. Подобная формула справедлива и для плотности p_{k+1} с начальным условием $\pi_0(x_0)$. Получим ряд соотношений, реализующих обе рекуррентные формулы и позволяющих установить связи между этими плотностями.

Пусть известна плотность t_k. Тогда по (4.8) можно найти плотность r_k и по (4.6), (4.4) вычислить первую структурную функцию f_k. Это позволяет определить плотность q_k совместного распределения вероятности тройки X_k, Y_k, Z_k. Действительно, используя известные свойства согласованности и умножения плотностей вероятности [1, с. 17], нетрудно получить формулу

$$(4.10)\qquad q_k\left(x_k, y_k, z_k\right) = \int \delta\left[z_k - f_k\left(y_k, s_k\right)\right] r_k\left(x_k, y_k, s_k\right)\, ds_k.$$

Аналогичным образом устанавливается связь между плотностями t_k и p_k:

$$(4.11)\qquad p_{k+1}(x_{k+1}, y_k, z_k) = \int \zeta_k(x_{k+1} \mid x_k, y_k) q_k(x_k, y_k, z_k)\, dx_k,$$

где ζ_k – известная плотность (2.6). В результате по (4.7), (4.5) может быть найдена вторая структурная функция g_k, после чего вычисляется новая плотность t_{k+1}:

$$(4.12)\qquad t_{k+1}\left(x_{k+1}, s_{k+1}\right) = \int \delta\left[s_{k+1} - g_k\left(y_k, z_k\right)\right] p_{k+1}\left(x_{k+1}, y_k, z_k\right)\, dy_k dz_k.$$

Полученные соотношения (4.8), (4.10)–(4.12) представляют собой подробную запись рекуррентной формулы (4.9) и вместе с (4.4)–(4.7) реализуют последовательность синтеза структурных функций двухшагового фильтра. В результате имеем следующее утверждение.

Утверждение 3. Процедура точного синтеза двухшагового фильтра оптимальной структуры (4.1) *состоит в выполнении рекуррентной цепочки преобразований*:

$$\ldots \to q_{k-1} \overset{(4.11)}{\to} p_k \overset{(4.7)}{\to} \pi_k \overset{(4.5)}{\to} g_{k-1} \overset{(4.12)}{\to} t_k \overset{(4.8)}{\to} r_k \overset{(4.6)}{\to} \rho_k \overset{(4.4)}{\to} f_k \overset{(4.10)}{\to} q_k \to \ldots, \tag{4.13}$$

где $k \geqslant 1$. *Начинается цепочка* (4.13) *с нахождения* f_0, q_0 *по* (2.16)–(2.18).

Замечание 9. В случае независимости помех V_k, W_k второе уравнение фильтра (4.1) также можно упростить, не требуя явной зависимости следующего прогноза от текущего измерения: $S_{k+1} = g'_k(Z_k)$. Действительно, вследствие (2.7) формула (4.11) принимает более простой вид: $p'_{k+1}(x_{k+1}, z_k) = \int \alpha_k(x_{k+1} \mid x_k) q'_k(x_k, z_k)\, dx_k$, где плотности p'_{k+1}, q'_k маргинальны по отношению к p_{k+1}, q_k соответственно. Тогда в (4.5), (4.7), (4.12) тоже пропадает переменная y_k:

$$g'_k(z_k) = \int x \pi'_{k+1}(x \mid z_k)\, dx, \quad \pi'_{k+1}(x \mid z_k) = p'_{k+1}(x, z_k) \Big/ \int p'_{k+1}(x, z_k)\, dx,$$

$$t_{k+1}(x_{k+1}, s_{k+1}) = \int \delta[s_{k+1} - g'_k(z_k)] p'_{k+1}(x_{k+1}, z_k)\, dz_k.$$

5. Гауссовское приближение к двухшаговому фильтру

Для нахождения аналитических выражений для оптимальных структурных функций фильтра (4.1) перепишем (4.6) и (4.8) через условные плотности:

$$\rho_k(x_k \mid y_k, s_k) = \eta_k(x_k, y_k \mid s_k) \Big/ \int \eta_k(x_k, y_k \mid s_k)\, dx_k, \tag{5.1}$$

$$\eta_k(x_k, y_k \mid s_k) = \beta_k(y_k \mid x_k)\, \theta_k(x_k \mid s_k), \quad k \geqslant 1, \tag{5.2}$$

$$\theta_k(x_k \mid s_k) = t_k(x_k, s_k) \Big/ \int t_k(x_k, s_k)\, dx_k. \tag{5.3}$$

Отметим, что соотношения (5.1), (5.2) с точностью до аргументов совпадают с (2.11), (2.10) соответственно. Аналогично, подставляя (4.11) в (4.7), получим уже известные формулы (2.8), (2.9). Используя (2.9), из (4.5) найдем эквивалентное ему выражение

$$g_k(y_k, z_k) = \int \varphi_k(x_k, y_k) \xi_k(x_k \mid y_k, z_k)\, dx_k, \tag{5.4}$$

в котором φ_k – известная функция условного среднего из (3.12).

Для нахождения приближения к функции прогноза g_k снова осуществим гауссовскую аппроксимацию (3.13) совместной плотности (4.10) и воспользуемся ее результатами (3.14)–(3.17). В результате, подставляя (3.14) в (5.4), находим, что

$$g_k(y, z) \approx \tau_k(y, u_k(y, z), T_k), \tag{5.5}$$

где τ_k определяется по (3.12), (3.19) и использованы обозначения (3.15), (3.16).

Замечание 10. В случае независимых помех и упрощения двухшагового фильтра (замечание 9) аналогично (3.21), (3.23) получим $g'_k(z) \approx \tau'_k(u'_k(z), T'_k)$, где функция τ'_k находится по (3.20), (3.22), а ее аргументы – по (3.23), (3.24).

С целью получения приближения к функции коррекции f_k выполним также и подобную (3.1) гауссовскую аппроксимацию условной плотности (5.2). При этом параметры λ_k, μ_k, Ψ_k, Φ_k, Δ_k, в отличие от (3.2), (3.3), будут функциями только одной переменной s_k. Тогда из (4.4), (5.1) следует аналог (3.4):

$$f_k(y_k, s_k) \approx \lambda_k + \Delta_k \Phi_k^{\oplus}[y_k - \mu_k], \quad k \geqslant 1. \tag{5.6}$$

Здесь параметры μ_k, Φ_k, Δ_k по-прежнему выражаются через λ_k, Ψ_k по формулам (3.8) со структурными функциями (3.9). Подставляя теперь (3.8) в (5.6), для оптимальной функции коррекции f_k фильтра (4.1) получаем приближение ($k \geqslant 1$)

$$f_k(y_k, s_k) \approx \lambda_k + \Psi_k G_k^{\mathrm{T}}(\lambda_k, \Psi_k) F_k^{\oplus}(\lambda_k, \Psi_k)[y_k - h_k(\lambda_k, \Psi_k)], \tag{5.7}$$

отличающееся от (3.10) лишь смыслом аргументов функций F_k, G_k, h_k.

Для аналитического определения зависимости параметров прогноза λ_k, Ψ_k от переменной s_k аппроксимируем гауссовской и безусловную плотность (4.12)

$$t_k(x_k, s_k) \approx N(x_k, s_k \mid m_k^x, m_k^s; D_k^x, D_k^s, D_{kk}^{xs}). \tag{5.8}$$

Тогда подобно (3.14)–(3.17) для плотности (5.3) найдем такое приближение:

$$\theta_k(x_k \mid s_k) \approx N(x_k \mid \tilde{u}_k(s_k), \tilde{T}_k), \quad \tilde{u}_k(s_k) = L_k s_k + o_k, \quad \tilde{T}_k = D_k^x - L_k (D_{kk}^{xs})^{\mathrm{T}},$$

где коэффициент усиления и вектор смещения вычисляются по формулам:

$$L_k = D_{kk}^{xs} \left(D_k^s\right)^{\oplus}, \quad o_k = m_k^x - L_k m_k^s. \tag{5.9}$$

В результате из (3.2), (5.2), (5.3), (5.9) сразу следуют приближения $\lambda_k(s_k) \approx \tilde{u}_k(s_k)$, $\Psi_k \approx \tilde{T}_k$, позволяющие в этой версии фильтра использовать переменные λ_k, Ψ_k вместо $\tilde{u}_k$, $\tilde{T}_k$, так что $\lambda(s_k) = L_k s_k + o_k$ и

$$\Psi_k = D_k^x - L_k (D_{kk}^{xs})^{\mathrm{T}}. \tag{5.10}$$

Таким образом, аппроксимации (3.13), (3.1), (5.8) плотностей q_k, η_k, t_k соответственно позволили получить аналитические приближения (5.7), (5.5) для текущих f_k, g_k структурных функций фильтра (4.1). Начальная же функция f_0 имеет прежнее приближение (3.26). В итоге аналогично (3.30) получаем следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 4. *Уравнения гауссовского двухшагового фильтра субоптимальной структуры имеют вид*:

$$\begin{aligned} &Z_0 = H_0 Y_0 + e_0, \quad U_k = \Gamma_k^y Y_k + \Gamma_k^z Z_k + \chi_k, \quad S_{k+1} = \tau_k(Y_k, U_k, T_k), \quad k \geqslant 0, \\ &\Lambda_k = L_k S_k + o_k, \quad Z_k = \Lambda_k + \Psi_k G_k^{\mathrm{T}}(\Lambda_k, \Psi_k) F_k^{\oplus}(\Lambda_k, \Psi_k)[Y_k - h_k(\Lambda_k, \Psi_k)]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Здесь структурные функции τ_k, F_k, G_k, h_k *и параметры* Γ_k, χ_k, T_k *– те же, что и в обычном гауссовском фильтре субоптимальной структуры* (3.30)*, тогда как* L_k, o_k, Ψ_k *– дополнительные числовые параметры, определяемые по* (5.9), (5.10) *тем же методом моделирования объекта* (1.1)*, измерителя* (1.2) *и фильтра* (5.11).

Сравнение показывает, что алгоритм оценивания (5.11) проще, чем (3.30), за счет отсутствия в первом матричной функции прогноза Θ_k, вид которой находить по (3.12), (3.19) довольно сложно, а реализовывать ее вычисления – громоздко. С другой стороны, количество текущих числовых параметров у двухшагового субоптимального фильтра больше, чем у одношагового.

Отметим, что величина Λ_k в (5.11) представляет собой уточненный субоптимальный прогноз S_k, подобный прогнозу модифицированного фильтра субоптимальной структуры (3.31). Поэтому условно оптимальная *модификация двухшагового гауссовского фильтра* (5.11) требует добавления лишь одной пары коэффициентов (K_k, e_k) в уравнение для оценки Z_k:

$$\begin{aligned} &U_k = \Gamma_k^y Y_k + \Gamma_k^z Z_k + \chi_k, \quad S_{k+1} = \tau_k(Y_k, U_k, T_k), \quad \Lambda_k = L_k S_k + o_k, \\ &\Sigma_k = \Psi_k G_k^{\mathrm{T}}(\Lambda_k, \Psi_k) F_k^{\oplus}(\Lambda_k, \Psi_k)[Y_k - h_k(\Lambda_k, \Psi_k)], \quad Z_k = \Lambda_k + K_k \Sigma_k + e_k. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Их вычисление проводится по (3.33), а начальной оценки Z_0 – как в (5.11).

6. Пример сравнения нелинейных фильтров

Пусть заданы уравнения скалярных объекта (1.1) и измерителя (1.2):

$$
\begin{aligned}
&X_{k+1} = X_k + aX_k^2 V_k, \\
&Y_k = bX_k + X_k^3 + cX_k W_k,
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

где a, b, c – известные константы, а независимые белые шумы V_k, W_k, как и начальное состояние X_0, имеют стандартное гауссовское распределение $N(\cdot \mid 0; 1)$. При этом независимость помех позволяет ограничиться рассмотрением упрощенных фильтров оптимальной структуры, приближения к которым, согласно замечаниям 7, 10, отличаются выражением $U_k = \Gamma_k Z_k + \chi_k$. Кроме того облегчается нахождение функций прогноза как для них, так и для классических субоптимальных фильтров.

Согласно (6.1) в уравнениях (П.20), (П.21) двухшагового условно оптимального фильтра (ДУОФ) нелинейности имеют вид: $a_k(z, m_k^v) = z$, $b_k(\lambda, m_k^w) = b\lambda + \lambda^3$. Корректирующую же функцию в (П.21) выберем тождественной: $\omega_k(\Delta y) = \Delta y$.

Линеаризованные функции прогноза и коррекции легко найдем по (П.15), (П.14):

$$
\begin{aligned}
&\tau_k'(z, P) \approx z, \quad \Theta_k'(z, P) \approx P + a^2 z^4, \\
&h_k(\lambda, \Psi) \approx b\lambda + \lambda^3, \quad G_k(\lambda, \Psi) \approx b + 3\lambda^2, \\
&F_k(\lambda, \Psi) \approx (b + 3\lambda^2)^2 \Psi + c^2 \lambda^2.
\end{aligned}
$$

Их подстановка в (3.30), (3.31), (5.11) и (П.12) определяет конкретные виды алгоритмов этого приближения соответственно к трем рассмотренным фильтрам оптимальной структуры: обычному (ФОС-Л), модифицированному (МФОС-Л) и двухшаговому (ДФОС-Л), а также вид обобщенного фильтра Калмана (ОФК).

Для гауссовских фильтров из (6.1) найдем условные средние (3.20) и (3.7):

$$
\begin{aligned}
&\varphi_k'(x) = x, \quad \Xi_k'(x) = x^2 + a^2 x^4, \\
&\nu_k(x) = bx + x^3, \quad \Pi_k(x) = (bx + x^3)^2 + c^2 x^2,
\end{aligned}
$$

а затем подставим их в (3.22) и (3.9). Используя при этом для вычисления начальных моментов гауссовского распределения $M_k \triangleq \mathrm{M}_N[X^k \mid m, D]$ $(k \geqslant 2)$ рекуррентную формулу [6, с. 548]: $M_k = mM_{k-1} + (k-1)DM_{k-2}$, $M_0 = 1$, $M_1 = m$, получим:

$$
\begin{aligned}
&\tau_k'(m, D) = m, \quad \Theta_k'(m, D) = D + a^2(m^4 + 6m^2 D + 3D^2), \\
&h_k(m, D) = bm + m^3 + 3mD, \quad G_k(m, D) = b + 3m^2 + 3D, \\
&F_k(m, D) = b^2 D + (c^2 + 6bD)(m^2 + D) + 9m^4 D + 36m^2 D^2 + 15D^3.
\end{aligned}
$$

Подставляя эти выражения снова в (3.30), (3.31), (5.11) и (П.12), найдем соответствующие (6.1) виды алгоритмов гауссовских приближений к тем же фильтрам оптимальной структуры: обычному (ФОС-Г), модифицированному (МФОС-Г) и двухшаговому (ДФОС-Г), а также вид фильтра нормальной аппроксимации (ФНА).

Сравнение фильтров выполнялось при следующих значениях параметров уравнений (6.1): $a = 0{,}02$, $b = c = 0{,}7$. Его результаты, полученные обработкой пакетов из 3000 реализаций, представлены в таблице, в которой приведены выборочные значения как дисперсии D_k^x состояния X_k, характеризующей точность априорного оценивания (без использования измерений), так и средних квадратов ошибки оценивания (1.4) всех девяти перечисленных фильтров, причем начальное значение последних у всех фильтров было одинаковым и составляло 0,284.

Из таблицы видно, что гауссовские фильтры точнее линеаризованных версий того же типа, ДУОФ неточен из-за неучета последних слагаемых уравнений (6.1),

Таблица

k	D_k^x	ДУОФ	ОФК (ФНА)	ФОС-Л (-Г)	ДФОС-Л(-Г)	МФОС-Л(-Г)
1	1,033	0,214	0,333 (0,078)	0,128 (0,080)	0,175 (0,065)	0,110 (0,069)
2	1,036	0,214	0,134 (0,032)	0,069 (0,031)	0,057 (0,027)	0,041 (0,027)
3	1,042	0,213	0,083 (0,017)	0,027 (0,015)	0,025 (0,015)	0,020 (0,015)
4	1,040	0,213	0,061 (0,012)	0,017 (0,010)	0,016 (0,011)	0,013 (0,011)
5	1,035	0,215	0,048 (0,008)	0,012 (0,008)	0,012 (0,009)	0,009 (0,008)
6	1,038	0,215	0,039 (0,007)	0,010 (0,006)	0,010 (0,007)	0,008 (0,006)

а субоптимальные приближения одного и того же класса к ФОС и ДФОС, как правило, точнее (особенно линеаризованные), чем к абсолютно оптимальному фильтру. При этом приближения к ДФОС во многих случаях работают точнее, чем аналогичные приближения к ФОС, а параметрически-оптимальные модификации последних – МФОС-Л и МФОС-Г – действительно превосходят остальные фильтры в своих классах. Практически одинаковая точность всех четырех гауссовских фильтров на последних шагах рассмотренной серии объясняется, по-видимому, достижением ими своей потенциальной нижней границы.

Применение четырех из восьми предложенных алгоритмов субоптимальной нелинейной фильтрации для решения практической многомерной задачи оценивания параметров траектории летательного аппарата по результатам автономных измерений приведено в диссертации автора. Его результаты также свидетельствуют о многократном, как правило, преимуществе в точности ФОС-Л по сравнению с ОФК, МФОС-Л – по сравнению с ФОС-Л и ДУОФ, а МФОС-Г – по сравнению с ФНА.

7. Заключение

Полученные процедуры (2.19), (4.13) точного синтеза оптимальной структуры двух предложенных фильтров порядка объекта (2.1), (4.1) создают базу для построения практически реализуемых быстрых алгоритмов оценивания. На их основе найдены уравнения (3.30), (5.11) простейших субоптимальных фильтров этих типов, структурные функции прогноза и коррекции для которых совпадают с классическими. Они находятся по нелинейностям объекта (1.1) и измерителя (1.2) обычным образом: для гауссовских приближений – интегрированием по (3.7), (3.9), (3.12), (3.19), (3.20), (3.22), а для линеаризованных приближений – дифференцированием по (П.14)–(П.16). Также предложены параметрически-оптимальные модификации (3.31), (5.12) полученных фильтров субоптимальной структуры, позволяющие компенсировать утраченную оптимальность последних.

В частном линейно-гауссовском случае (П.17) оба гауссовских фильтра субоптимальной структуры (3.30), (5.11), подобно фильтру нормальной аппроксимации (П.12), становятся точными и вырождаются в линейный фильтр Калмана (П.18).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем для сравнения основные соотношения известных [1–3] методов нелинейной марковской фильтрации случайных последовательностей и связи между ними. При этом будут использованы обозначения, определенные выше.

1. Абсолютно-оптимальный фильтр. Используемая в (1.5) апостериорная плотность $\tilde{\rho}_k$ определяется по рекуррентной формуле Байеса-Стратоновича [1, с. 220], которую удобно записать в виде следующей цепочки из трех формул:

$$\text{(П.1)} \qquad \tilde{\pi}_k\left(x_k \mid y_0^{k-1}\right) = \int \zeta_{k-1}\left(x_k \mid x_{k-1}, y_{k-1}\right) \tilde{\rho}_{k-1}\left(x_{k-1} \mid y_0^{k-1}\right) dx_{k-1}, \quad k \geqslant 1,$$

$$\text{(П.2)} \qquad \tilde{\eta}_k(x_k, y_k \mid y_0^{k-1}) = \beta_k(y_k \mid x_k)\tilde{\pi}_k(x_k \mid y_0^{k-1}),$$

$$\text{(П.3)} \qquad \tilde{\rho}_k(x_k \mid y_0^k) = \tilde{\eta}_k(x_k, y_k \mid y_0^{k-1}) \Big/ \int \tilde{\eta}_k(x_k, y_k \mid y_0^{k-1})\, dx_k.$$

Стартуют эти вычисления с нахождения $\tilde{\rho}_0$ из (П.3) по начальной плотности

$$\text{(П.4)} \qquad \tilde{\eta}_0(x_0, y_0) = \beta_0(y_0 \mid x_0)\pi_0(x_0).$$

2. Метод достаточных координат. Пусть у плотностей $\tilde{\rho}_k$, $\tilde{\pi}_k$ существуют достаточные статистики s_k и σ_k соответственно, например условные моменты:

$$\text{(П.5)} \qquad \begin{aligned} s_k(y_0^k) &= \int \begin{bmatrix} x_k \\ x_k x_k^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{bmatrix} \tilde{\rho}_k(x_k \mid y_0^k)\, dx_k, \\ \sigma_k(y_0^{k-1}) &= \int \begin{bmatrix} x_k \\ x_k x_k^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{bmatrix} \tilde{\pi}_k(x_k \mid y_0^{k-1})\, dx_k. \end{aligned}$$

Тогда из (П.1)–(П.3) для соответствующих бесконечных гиперстолбцов достаточных координат $S_k = s_k(Y_0^k)$ и $\Sigma_k = \sigma_k(Y_0^{k-1})$ – случайных значений статистик (П.5) – можно получить аналогично [5, с. 36] следующие уравнения:

$$\text{(П.6)} \qquad S_k = \tilde{f}_k(Y_k, \Sigma_k), \quad k \geqslant 1, \quad S_0 = \tilde{f}_0(Y_0), \quad \Sigma_{k+1} = \tilde{g}_k(Y_k, S_k), \quad k \geqslant 0.$$

Здесь функции $\tilde{f}_k$, $\tilde{g}_k$ представляют собой результаты вычисления интегралов, получаемых при подстановке (П.1)–(П.3) в (П.5). При этом в случае независимых помех V_k, W_k функции $\tilde{g}_k$ не зависят от вектора Y_k последнего измерения: $\Sigma_{k+1} = \tilde{g}'_k(S_k)$.

Исключение из системы уравнений (П.6) промежуточной переменной Σ_k дает разностное уравнение абсолютно оптимального фильтра

$$\text{(П.7)} \qquad S_k = \tilde{f}_k\left[Y_k, \tilde{g}_{k-1}(Y_{k-1}, S_{k-1})\right], \quad k \geqslant 1, \quad S_0 = \tilde{f}_0(Y_0),$$

а исключение переменной S_k приводит к уравнению одношагового предиктора

$$\text{(П.8)} \qquad \Sigma_{k+1} = \tilde{g}_k[Y_k, \tilde{f}_k(Y_k, \Sigma_k)], \quad k \geqslant 1, \quad \Sigma_1 = \tilde{g}_0[Y_0, \tilde{f}_0(Y_0)].$$

При этом первые n элементов случайных гиперстолбцов S_k, Σ_k образуют оптимальные векторы оценки Z_k и одношагового прогноза Λ_k состояния X_k соответственно:

$$\text{(П.9)} \qquad Z_k \triangleq \mathrm{M}[X_k \mid Y_0^k] = [\ E_n \quad O\ ]\, S_k, \quad \Lambda_k \triangleq \mathrm{M}[X_k \mid Y_0^{k-1}] = [\ E_n \quad O\ ]\, \Sigma_k.$$

3. Фильтр нормальной аппроксимации. Представляет собой гауссовское приближение к рекуррентной версии абсолютно оптимального фильтра (П.6), основанное на урезании бесконечных гиперстолбцов достаточных координат другого типа – условных семиинвариантов – до их двух первых компонент:

$$\text{(П.10)} \qquad \bar{S}_k^{\mathrm{T}} = \left[\ Z_k^{\mathrm{T}} \quad P_k^{\mathrm{T}}\ \right], \quad \bar{\Sigma}_k^{\mathrm{T}} = \left[\ \Lambda_k^{\mathrm{T}} \quad \Psi_k^{\mathrm{T}}\ \right].$$

Здесь Z_k, Λ_k – векторы оценки и прогноза (П.9), а P_k, Ψ_k – случайные значения матриц апостериорной и предикторной ковариаций текущего состояния объекта соответственно: $P_k = \operatorname{cov}[X_k, X_k \mid Y_0^k]$, $\Psi_k = \operatorname{cov}[X_k, X_k \mid Y_0^{k-1}]$. Такие урезания эквивалентны условиям гауссовости условных плотностей (П.1) и (П.3).

Для получения конкретного вида урезанной системы уравнений (П.6) осуществим подобную (3.1) гауссовскую аппроксимацию

$$\tilde{\eta}_k(x_k, y_k \mid Y_0^{k-1}) \approx N\,(x_k, y_k \mid \Lambda_k, \mathrm{M}_k; \Psi_k, \Phi_k, \Delta_k) \tag{П.11}$$

с параметрами в виде приведенных выше характеристик прогноза состояния Λ_k, Ψ_k и следующих, похожих на (3.3) характеристик прогноза измерения: $\mathrm{M}_k = \mathrm{M}[Y_k \mid Y_0^{k-1}]$, $\Phi_k = \operatorname{cov}[Y_k, Y_k \mid Y_0^{k-1}]$, $\Delta_k = \operatorname{cov}[X_k, Y_k \mid Y_0^{k-1}]$. Действуя аналогично разделу 3, можно показать, что подстановка приближения (П.11) в уравнения абсолютно оптимального фильтра (П.1)–(П.4), (1.5) приводит к следующему субоптимальному алгоритму:

$$\begin{aligned} &Z_0 = H_0 Y_0 + e_0, \quad \Lambda_{k+1} = \tau_k(Y_k, Z_k, P_k), \quad \Psi_{k+1} = \Theta_k(Y_k, Z_k, P_k),\\ &H_k = \Psi_k G_k^{\mathrm{T}}(\Lambda_k, \Psi_k) F_k^{\oplus}(\Lambda_k, \Psi_k), \quad k \geqslant 1,\\ &Z_k = \Lambda_k + H_k[Y_k - h_k(\Lambda_k, \Psi_k)], \quad P_k = \Psi_k - H_k G_k\,(\Lambda_k, \Psi_k)\,\Psi_k. \end{aligned} \tag{П.12}$$

Здесь параметры H_0, e_0, P_0 находятся по (3.27) и формуле $P_0 = D_0^x - H_0\,(D_{00}^{xy})^{\mathrm{T}}$, а функции прогноза τ_k, Θ_k и коррекции h_k, G_k, F_k определяются по (3.19), (3.9) как коэффициенты статистической линеаризации условных средних (3.12), (3.7) соответственно. В случае же независимых помех вместо (3.12), (3.19) следует использовать (3.20), (3.22).

Отметим, что если плотность начального состояния является гауссовской (3.28) или аппроксимируется таковой, то параметры H_0, e_0, P_0 не нужны, так как величины Z_0, P_0 можно вычислить по общим формулам (П.12), полагая в них $\Lambda_0 = m_0^x$, $\Psi_0 = D_0^x$.

Исключив из уравнений (П.12) промежуточные переменные Λ_k, Ψ_k, H_k, получим замкнутую систему из двух разностных уравнений:

$$Z_{k+1} = i_k\,(Y_k, Z_k, P_k) + J_k\,(Y_k, Z_k, P_k)\,Y_{k+1}, \quad P_{k+1} = K_k\,(Y_k, Z_k, P_k)\,. \tag{П.13}$$

Следовательно, порядок фильтра нормальной аппроксимации, определяемый количеством элементов вектора Z_k и различных элементов симметрической матрицы P_k, действительно равен $n(n+3)/2$, что значительно больше, чем у предложенного в разделе 3 гауссовского фильтра субоптимальной структуры. Достоинством же этого фильтра является отсутствие у него параметров на всех тактах, кроме начального.

4. Обобщенный фильтр Калмана. Представляет собой упрощение фильтра нормальной аппроксимации (П.12) путем облегчения вычисления его структурных функций за счет уменьшения точности оценивания. Это достигается линеаризацией уравнений (1.1), (1.2) в окрестностях уже полученных оценок. Например,

$$b_k(x, w) \approx b_k(\lambda, m_k^w) + B_k^x(\lambda)[x - \lambda] + B_k^w(\lambda)[w - m_k^w],$$

где $B_k^{x\mathrm{T}}(x) = \nabla_x b_k^{\mathrm{T}}(x, w)|_{w=m_k^w}$, $B_k^{w\mathrm{T}}(x) = \nabla_w b_k^{\mathrm{T}}(x, w)|_{w=m_k^w}$ – матрицы частных производных. Тогда из (3.7), (3.9) найдем такие приближения к функциям коррекции:

$$\begin{aligned} &h_k(\lambda, \Psi) \approx b_k(\lambda, m_k^w), \qquad G_k(\lambda, \Psi) \approx B_k^x(\lambda),\\ &F_k(\lambda, \Psi) \approx B_k^x(\lambda)\Psi B_k^{x\mathrm{T}}(\lambda) + B_k^w(\lambda) D_k^w B_k^{w\mathrm{T}}(\lambda). \end{aligned} \tag{П.14}$$

В случае независимых помех, которые могут быть и негауссовскими, функции гауссовского прогноза (3.22) имеют аналогичные (П.14) аппроксимации:

$$\text{(П.15)}\qquad \tau_k'(z,P)\approx a_k(z,m_k^v),\quad \Theta_k'(z,P)\approx A_k^x(z)PA_k^{x\mathrm{T}}(z)+A_k^v(z)D_k^vA_k^{v\mathrm{T}}(z),$$

где $A_k^{x\mathrm{T}}(x)=\nabla_x a_k^{\mathrm{T}}(x,v)|_{v=m_k^v}$, $A_k^{v\mathrm{T}}(x)=\nabla_v a_k^{\mathrm{T}}(x,v)|_{v=m_k^v}$. В общем же случае зависимых, но гауссовских помех V_k, W_k уравнения этого фильтра также имеют вид (П.12), но функции прогноза в них определяются более сложными приближениями [2, с. 282]:

$$\text{(П.16)}\qquad \begin{aligned}&\tau_k(y,z,P)\approx a_k(z,m_k^v)+S_k(z)[y-b_k(z,m_k^w)],\\ &\Theta_k(y,z,P)\approx\Omega_k(z)P\Omega_k^{\mathrm{T}}(z)-S_k(z)R_k(z)S_k^{\mathrm{T}}(z)+A_k^v(z)D_k^vA_k^{v\mathrm{T}}(z).\end{aligned}$$

Здесь новые матрицы R_k, S_k, Ω_k имеют следующий вид: $R_k(z)=B_k^w(z)D_k^wB_k^{w\mathrm{T}}(z)$, $S_k(z)=A_k^v(z)D_{kk}^{vw}B_k^{w\mathrm{T}}(z)R_k^{\oplus}(z)$, $\Omega_k(z)=A_k^x(z)-S_k(z)B_k^x(z)$, так что аппроксимации (П.16) функций τ_k, Θ_k не зависят от P и y соответственно.

В результате интегральные процедуры (3.7), (3.9), (3.12), (3.19) нахождения функций прогноза и коррекции заменяются дифференциальными (П.14)–(П.16).

В частном случае, если уравнения объекта (1.1) и измерителя (1.2) линейные:

$$\text{(П.17)}\qquad a_k(x,v)=\bar a_k+A_k^xx+A_k^vv,\quad b_k(x,w)=\bar b_k+B_k^xx+B_k^ww,$$

а начальное состояние X_0 и помехи V_k, W_k гауссовские, то фильтр нормальной аппроксимации (П.12) становится точным вследствие сохранения вида гауссовского закона распределения при линейном преобразовании случайных величин. Его структурные функции определяются по формулам (П.14)–(П.17) с нефункциональными матрицами коэффициентов A_k, B_k и векторами смещения $\bar a_k$, $\bar b_k$. В результате уравнения для матриц Ψ_k, H_k, P_k в (П.12) становятся независящими от векторов Λ_k, Y_k, Z_k. Они могут быть решены заранее, образуя разностное уравнение Риккати для матрицы Ψ_k. Поэтому абсолютно оптимальный нелинейный фильтр вырождается в этом случае в линейный фильтр Калмана, который имеет порядок n. В случае независимых помех последний, согласно (П.12), (П.14), (П.15), (П.17), имеет вид:

$$\text{(П.18)}\qquad \Lambda_{k+1}=\bar a_k+A_k^xZ_k+A_k^vm_k^v,\quad Z_k=\Lambda_k+H_k\left[Y_k-(\bar b_k+B_k^x\Lambda_k+B_k^wm_k^w)\right].$$

5. Условно оптимальный фильтр. Представляет собой фильтр порядка объекта n заданной структуры с синтезируемыми параметрами, который описывается уравнением (1.6). В результате подстановки (1.6) в (1.4) и решения задачи минимизации функции $I_k(\Delta_k,\gamma_k)$ параметры фильтра находятся по формулам [7]:

$$\text{(П.19)}\qquad \Delta_k=D_{kk}^{x\sigma}\left(D_k^{\sigma}\right)^{\oplus},\quad \gamma_k=m_k^x-\Delta_km_k^{\sigma}.$$

Здесь $\Sigma_k=\sigma_k(Y_k,Z_{k-1})$ – случайный вектор, а математические ожидания m_k^x, m_k^{σ} и ковариации D_k^{σ}, $D_{kk}^{x\sigma}$ могут быть вычислены потактовым статистическим моделированием уравнений объекта, измерителя и фильтра [10]. Вопрос же выбора структурной функции этого фильтра остался открытым и требует дополнительных исследований.

6. Двухшаговый условно оптимальный фильтр. Конкретизирует структуру условно оптимального фильтра (1.6) путем задания системы из двух уравнений фильтра [8]: прогноза с учетом нелинейности объекта (1.1)

$$\text{(П.20)}\qquad \Lambda_0=m_0^x,\quad \Lambda_{k+1}=F_ka_k(Z_k,m_k^v)+g_k,\quad k\geqslant 0,$$

и коррекции в соответствии с нелинейностью измерителя (1.2)

$$Z_k = \Lambda_k + H_k \omega_k [Y_k - b_k(\Lambda_k, m_k^w)] + e_k, \quad k \geqslant 0. \tag{П.21}$$

Здесь $\omega_k(\Delta y)$ – вектор-функция заранее выбранного вида, определяющая влияние обновляющей последовательности ΔY_k на величину корректирующего члена. Тем самым на последовательность оценивающих функций (1.3) накладывается параметризированное ограничение рекурсивности: $\psi_k(y_0^k) = \tilde{b}_k^{H,e}\{y_k,\, \tilde{a}_{k-1}^{F,g}[\psi_{k-1}(y_0^{k-1})]\}$, где $\tilde{a}_k^{F,g}(Z_k)$, $\tilde{b}_k^{H,e}(Y_k, \Lambda_k)$ – правые части уравнений (П.20) и (П.21) соответственно.

Две пары текущих параметров (H_k, e_k) и (F_k, g_k) этого фильтра находятся соответственно из условий последовательной минимизации двух критериев (1.4) и (3.32). В результате указанные параметры определяются аналогично (П.19):

$$\begin{aligned} H_k &= D_{kk}^{\varepsilon\omega} \left(D_k^{\omega}\right)^{\oplus}, \quad e_k = m_k^{\varepsilon} - H_k m_k^{\omega}, \\ F_k &= D_{k+1,k}^{x\alpha} \left(D_k^{\alpha}\right)^{\oplus}, \quad g_k = m_{k+1}^{x} - F_k m_k^{\alpha}, \end{aligned} \tag{П.22}$$

где $\mathrm{E}_k = X_k - \Lambda_k$, $\Omega_k = \omega_k(\Delta Y_k)$, $\mathrm{A}_k = a_k(Z_k, m_k^v)$. Векторы m и матрицы D для (П.22) в [10] предложено вычислять методом потактового статистического моделирования. Вопрос же выбора корректирующей вектор-функции ω_k или ее влияния на точность оценивания в [8, 10] не рассматривался.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. М.: Наука, 1971.
2. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
3. *Степанов О.А.* Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб.: ГНЦ РФ – ЦНИИ «Электроприбор», 1998.
4. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.
5. *Богуславский И.А.* Прикладные задачи фильтрации и управления. М.: Наука, 1983.
6. *Пугачев В.С., Синицин И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
7. *Пугачев В.С.* Оценивание переменных и параметров в дискретных нелинейных системах // АиТ. 1979. № 4. С. 39–50.
8. *Панков А.Р.* Рекуррентное оценивание траекторий динамических систем с помощью регрессионных нелинейных фильтров / Статистические методы в теории управления ЛА. М.: Изд-во МАИ, 1990. С. 45–53.
9. *Руденко Е.А.* Оптимальная структура дискретных нелинейных фильтров малого порядка // АиТ. 1999. № 9. С. 58–71.
10. *Панков А.Р.* Синтез условно оптимальных нелинейных фильтров методом моделирования / Анализ и синтез динамических систем в условиях неопределенности. М.: Изд-во МАИ, 1990. С. 69–75.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2009