

# KRT Praktikum: Protokoll 2 - L2 und H2

Kimón Beyer, Yves Gaßmann, Justin Buhl

**Abstract:** Im folgenden Protokoll werden die Ergebnisse des zweiten Labortages sowie der zweiten Hausaufgabe im Rahmen des Praktikums Konzepte der Regelungstechnik des IST behandelt. Dabei erfolgte die aus dem Protokoll 1 gewonnene Identifikation der fehlenden Modellparameter zur vollständigen Beschreibung des Helikopter Modells. Des Weiteren wurde nun dieses Modell simulativ validiert, sowie linearisiert.

## 1. ZWEITER LABORTAG (L2)

Bei den folgenden Gleichungen handelt es sich um die aus dem ersten Protokoll modellierten Systemgleichungen des Helikopters:

$$\ddot{\alpha} = \frac{-(F_{\text{vorne}} + F_{\text{hinten}})l_{\text{heli}} \sin(\gamma)}{I_{\alpha}} \quad (1)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{(F_{\text{vorne}} + F_{\text{hinten}})l_{\text{heli}} \cos(\gamma) - F_g l_{\text{mmp}} \cos(\beta)}{I_{\beta}} \quad (2)$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{(F_{\text{vorne}} - F_{\text{hinten}})l_{\text{rotor}}}{I_{\gamma}} \quad (3)$$

Mit

$$F_g = m_{\text{mmp}} g \quad (4)$$

Wie bereits in Protokoll 1 beschrieben, fehlen nun nurnoch wenige Werte zur vollständigen Systemidentifikation. Hier macht sich nun der große Vorteil der CAD Modelle zu Nutzen, da keinerlei Trägheitstensoren oder Gesamt-massen bestimmt werden müssen. Diese können direkt aus dem CAD Modell entnommen werden. Dies ist äußerst hilfreich, da die experimentelle Bestimmung der Trägheitstensoren sowohl aufwändig als auch fehleranfällig ist. Daher wird davon ausgegangen, dass das Modell auch in seiner bereits Vereinfachten Form bereits eine gute Systembeschreibung des realen Systems darstellt.

Die einzigen zu bestimmenden Systemparameter sind somit die Spannung-Kraft Kennlinien  $F_{\text{vorne}}$  und  $F_{\text{hinten}}$  der Rotoren. Dafür wurde der reale Helikopter auf  $\beta = 0$  fixiert. Die einzelnen Rotoren wurden nun einzeln geprüft, da davon auszugehen ist, dass die Rotoren unterschiedliche Kennlinien liefern könnten. Die Rotor-Einheit wurde nun von unten auf eine Waage gelegt und von oben mit einem Gewicht beschwert. Nun wurden verschiedene Span-nungslevel angelegt und die jeweilige Differenz der Waage abgelesen. Mit dieser Methode konnte demnach über die Differenz der Gewichtskraft ein Rückschluss auf die durch den Rotor erzeugte Auftriebskraft gezogen werden.

$$F = mg \quad (5)$$

Dabei ist  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  die Gewichtskraft. Die so erhaltenen Messwerte wurden in Matlab ausgewertet und eine

lineare Regression durchgeführt, um die Spannung-Kraft Kennlinie zu bestimmen.

Hier die Spannungs-Kraft kennlinie einfügen: TODO

Es wurden für beide Rotoren die gleichen Kennlinien angenommen. Dies hat verschiedene Gründe. Zum einen sind die gemessenen Kennlinien sehr ähnlich, zum anderen hat das gewählte Verfahren zur Bestimmung der Kennlinie eine starke Messungengenauigkeit. Zum einen ist die genutzte Waage alt und ungenau, zum anderen ist die Positionierung des Rotors auf der Waage nicht exakt reproduzierbar, was zu weiteren Messfehlern führt. Die Ungenauigkeiten in der Kraftmessung werden jedoch durch den Regler kompensiert und führen aufgrund eines Integratoranteils im Reglerverhalten zu keinen bleibenden Regelabweichungen.

Damit wurden sind nun alle Systemparameter bekannt und das Modell kann im folgenden auf Simulink implementiert und simulativ validiert werden. Darauf wird in folgenden eingegangen.

## 2. ZWEITE HAUSAUFGABE (H2)

Wie bereits in Protokoll 1 diskutiert, handelt es sich bereits um ein stark vereinfachtes Modell des Helikopters. Da die Auswirkung des Winkels  $\beta$  auf die Beschleunigung  $\ddot{\alpha}$  vernachlässigt wird, muss im stetig in Betracht gezogen werden, diese Modellreduktion anzupassen, sobald sich diese Vernachlässigung als problematisch herausstellt.

Zunächst wurden nun die nichtlinearen Systemgleichungen (1)–(3) in Simulink implementiert und simulativ validiert.

Hier nun die Simulink Diagramme einfügen: TODO

Simulink Diagramme beschreiben und bewerten TODO

Des Weiteren wurden nun die Gleichungen linearisiert, und direkt in Zustandsraum gebracht. Im Folgenden werden folgende Konventionen definiert:

$$x = [\alpha \ \beta \ \gamma \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T \quad (6)$$

$$u = [U_{\text{vorne}} \ U_{\text{hinten}}]^T \quad (7)$$

$$y = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T \quad (8)$$

Mit diesen Definitionen ergeben sich die folgenden Zustandsraumdarstellungen:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (9)$$

$$y = Cx + Du \quad (10)$$

\* Institute for Systems Theory and Automatic Control, University of Stuttgart, Germany. <http://www.ist.uni-stuttgart.de>

Mit den Matrizen ergeben sich aus der Linearisierung der Systemgleichungen (1) (2) (3):

$$\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial x} = [0 \ 0 \ -C_1 \cos(\gamma) P \ 0 \ 0 \ 0] \quad (11)$$

$$\frac{\partial \ddot{\beta}}{\partial x} = [0 \ C_2 \sin(\beta) \ -C_3 \sin(\gamma) P \ 0 \ 0 \ 0] \quad (12)$$

$$\frac{\partial \ddot{\gamma}}{\partial x} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (13)$$

mit

$$P = \frac{131F_{\text{hinten}}}{200} + \frac{131F_{\text{vorne}}}{200} \quad (14)$$

und

$$C_1 = \frac{1125899906842624}{1273375906140405}$$

$$C_2 = \frac{7018456143648095}{20268269978995824}$$

$$C_3 = \frac{1125899906842624}{1266766873687239}$$

sowie:

$$\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial u} = [-C_4 \sin(\gamma) \ -C_4 \sin(\gamma)] \quad (15)$$

$$\frac{\partial \ddot{\beta}}{\partial u} = [C_5 \cos(\gamma) \ C_5 \cos(\gamma)] \quad (16)$$

$$\frac{\partial \ddot{\gamma}}{\partial u} = [C_6 \ -C_6] \quad (17)$$

und

$$C_4 = \frac{18436610974547968}{31834397653510125}$$

$$C_5 = \frac{18436610974547968}{31669171842180975}$$

$$C_6 = \frac{319755573543305216}{72470123763795075}$$

Für die Zustandsraumdarstellung und den Arbeitspunkt  $x_0 = [0 \ -11^\circ \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  und  $u_0 = [0.5 \ 0.5]^T$  folgt:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -C_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_8 \sin\left(\frac{11\pi}{180}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ C_9 & C_9 \\ C_{10} & -C_{10} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

wobei

$$C_7 = \frac{18436610974547968}{31834397653510125} \quad (22)$$

$$C_8 = \frac{7018456143648095}{20268269978995824} \quad (23)$$

$$C_9 = \frac{18436610974547968}{31669171842180975} \quad (24)$$

$$C_{10} = \frac{319755573543305216}{72470123763795075} \quad (25)$$

Als Arbeitspunkt wurde wie oben beschrieben  $x_0 = [0 \ -11^\circ \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  und  $u_0 = [0.5 \ 0.5]^T$  gewählt, da dies dem stationären Flugzustand des Helikopters entspricht. Es ist wichtig zu beachten, dass lediglich die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  in die Linearisierung eingehen. Eine Änderung des Winkels  $\alpha$  sowie der Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  und  $\dot{\gamma}$  hat keinen Einfluss auf die Linearisierung, da diese auch in den nichtlinearen Gleichungen (1) (2) (3) nicht vorkommen.

Die Wahl gewählten Arbeitspunktes birgt jedoch auch Risiken. Durch die Wahl von  $\gamma = 0$  fallen viele Terme der Linearisierung, in welchen  $\gamma$  als  $\sin(\gamma)$  eingeht, weg (vgl. Gleichungen (12) und (15)). Dies kann dazu führen, dass das linearisierte System andere Eigenschaften aufweist als das nichtlineare System. Daher muss dies im späteren Reglerentwurf berücksichtigt werden und gegebenenfalls eine Anpassung des Arbeitspunktes vorgenommen werden. Eine weitere Möglichkeit wäre, den Arbeitspunkt für unterschiedliche Flugmanöver anzupassen, um so die Auswirkungen der Linearisierung zu minimieren und diese besser an das reale Flugverhalten anzupassen.

Die Darstellung in Zustandsraum ist essentiell, da sie sowohl die Grundlage für den späteren linearen Reglerentwurf darstellt, als auch systemtheoretische Eigenschaften des Systems aufzeigt. So liegen beispielsweise die Systempole des linearen Systems bei

Die Systempole des linearen Systems liegen bei:

$$\lambda_{1,2,3,4} = 0, \quad \lambda_{5,6} = \pm 0.2570i$$

Dies zeigt, dass das System rein marginal stabil ist. Jedoch wurde auch hier eine Ruhelage gewählt, wobei bei kleinen Änderungen der Eingangsgröße  $u$  das System instabil werden kann. Dies ist auch physikalisch nachvollziehbar, da der Helikopter ohne Regler in der Ruhelage ebenfalls marginal stabil ist. Kleine Störungen führen dazu, dass der Helikopter aus seiner Ruhelage ausweicht und nicht von alleine wieder in die Ruhelage zurückkehrt. Systemtheoretisch ist das System sowohl vollständig steuer- als auch beobachtbar, was die Grundlage für den späteren Reglerentwurf darstellt.

### 3. KOMMENTARE UND AUSBLICK AUF L3

Hier nun beschreiben was im nächsten Labor gemacht wird  
TODO

### REFERENCES