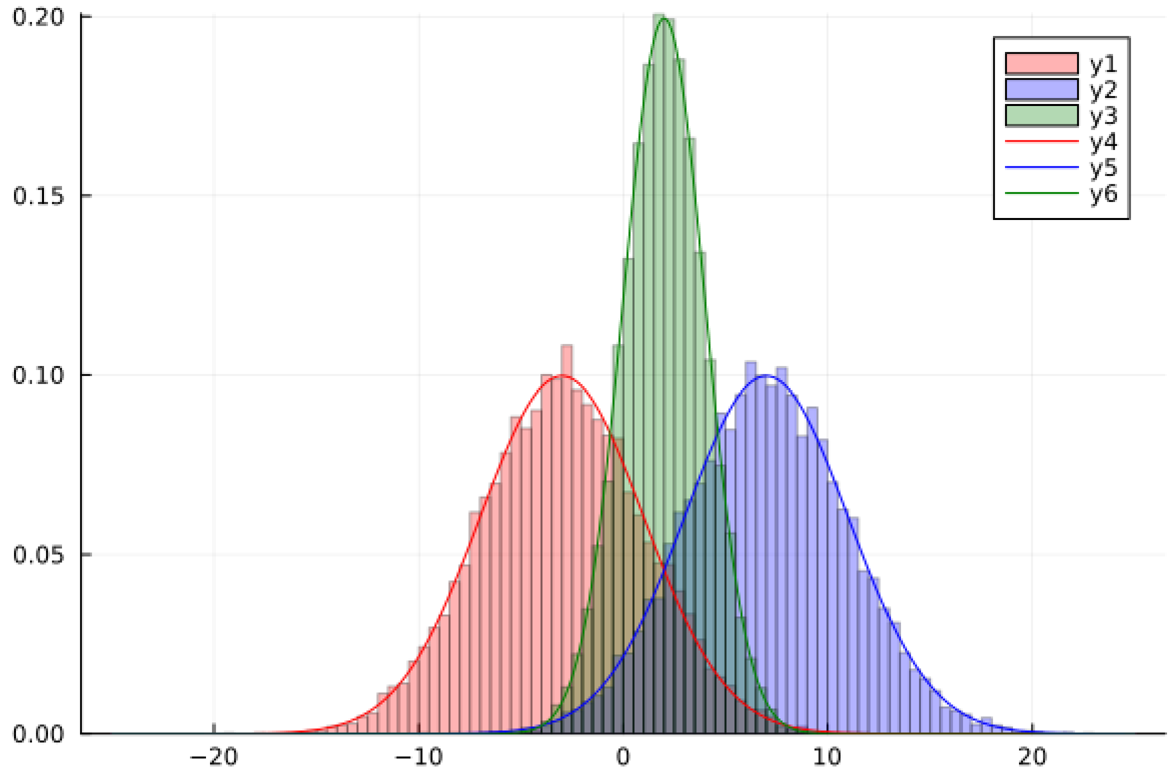
Aufgabe 1

a)



b)

$$f_{\alpha X + (1-\alpha) Y} = \mathcal{N}\left(x;\ \alpha \mu_X + (1-\alpha)\mu_Y,\ \alpha^2 \sigma_X^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_Y^2\right)$$

$$f_X \cdot f_Y = \mathcal{N}\left(x;\ \frac{\mu_X \sigma_Y^2 + \mu_Y \sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2},\ \frac{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right)$$

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = 1 - \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

$$\frac{\mu_X \sigma_Y^2 + \mu_Y \sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \alpha \mu_X + (1-\alpha)\mu_Y$$

$$\mu_X \cdot \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} + \mu_Y \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \alpha \mu_X + (1-\alpha)\mu_Y$$

$$\mu_X \cdot \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} + \mu_Y \left(1 - \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2-\sigma_Y^2}\right) = \alpha \mu_X + (1-\alpha)\mu_Y$$

Hier sieht man schon, dass $\alpha = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}$

Nun setzen wir dies in die Varianz ein

$$\begin{aligned}
\alpha^2\sigma_X^2 + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2 &= \left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right)^2 \cdot \sigma_X^2 + \left(1 - \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right)^2 \cdot \sigma_Y^2 \\
&= \left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right)^2 \cdot \sigma_X^2 + \left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right)^2 \cdot \sigma_Y^2 \\
&= \frac{\sigma_Y^4 \cdot \sigma_X^2}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)^2} + \frac{\sigma_X^4 \cdot \sigma_Y^2}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)^2} \\
&= \frac{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2) \cdot \sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)^2} \\
&= \frac{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

ci = conditionally independent

a)

- D und E sind ci
  - D, B, E: tail-to-tail, da B clamped
  - D, H, E: head-to-head, H und alle Nachfolger von H nicht clamped
- A und E sind ci
  - gleiche Gründe wie bei D und E
- A und C sind ci
  - auch wieder gleiche Gründe

b)

- D und E sind nicht ci
  - der Pfad D, B, E hat keinen blockierenden Knoten

- A und E sind nicht ci
    - Der Pfad A, D, H, E hat keinen blockierenden Knoten. H ist kein blockierender tail-to-tail Knoten, da I, Nachfahre von H, clamped ist.
- E und F sind ci
    - da C clamped ist, hat der einzige Pfad E, C, F einen blockierenden Knoten (tail-to-tail)

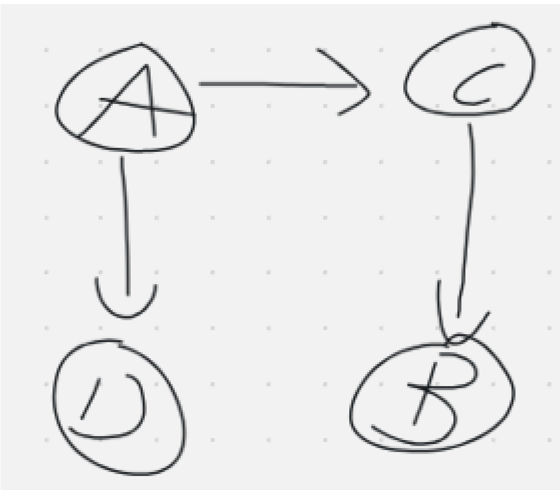
c)

- A und G nicht ci
    - Der einzige Pfad A, D, G hat keinen blockiereneden Knoten
- C und I sind ci
    - Auf dem Pfad C, E, H, I sind E, und H blockierende head-to-tail knoten
    - Auf dem Pfad C, E, B, D, H, I ist H ein blockierender head-to-tail Knoten
- A und I sind ci
    - Auf Pfad A, D, H, I gibt es einen blockierenden head-to-head Knoten (H), der er clamped ist
    - Auf dem Pfad A, D, B, E, H, I auch einen blockierenden head-to-tail über B, E, H, I da E und H clamped sind

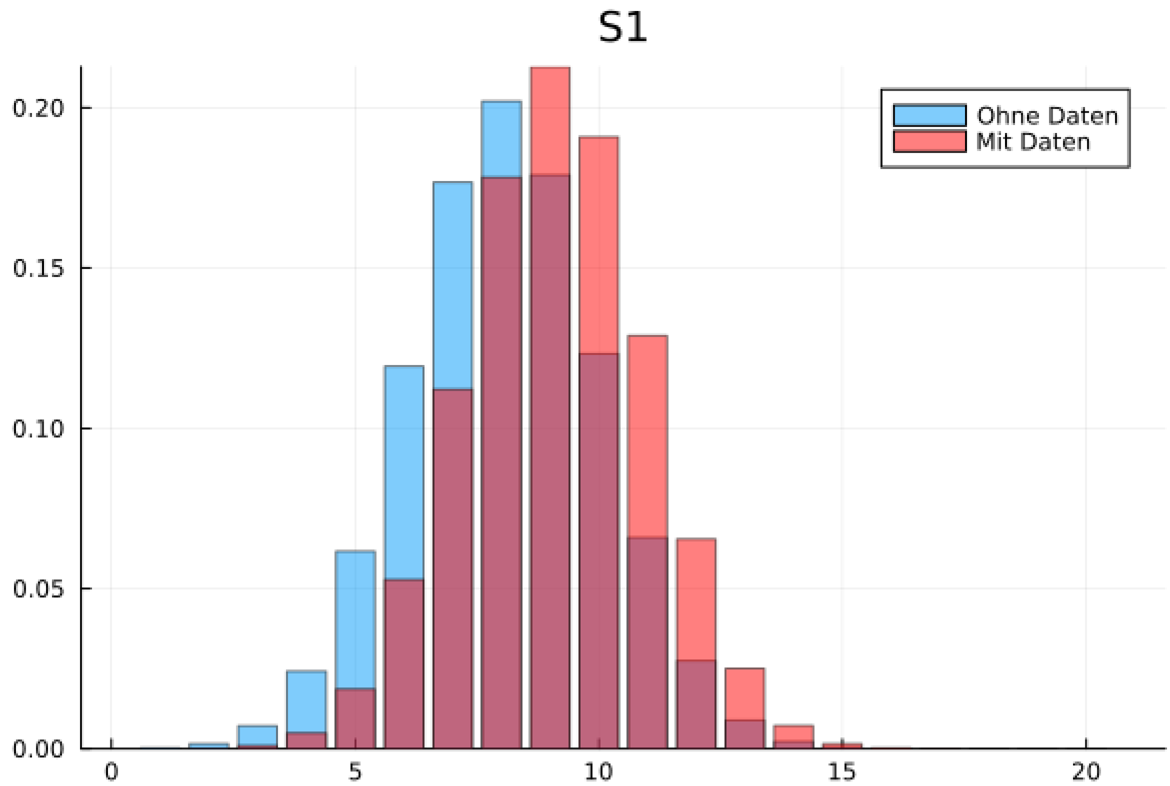
d)

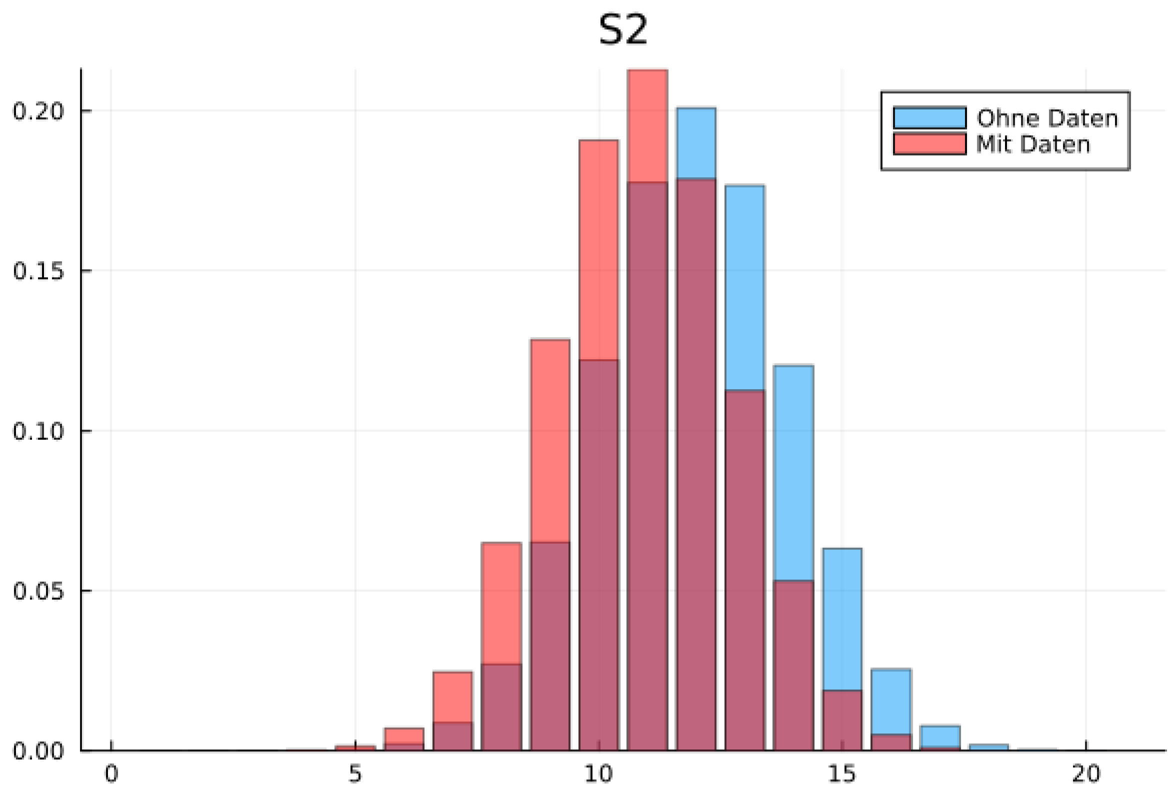
- A und H sind nicht ci
    - Auf dem Pfad A, D, B, E, H gibt es keinen blockierenden Knoten
- C und I sind nicht ci
    - Der Pfad C, E, H, I hat keinen blockierenden Knoten
- G und F sind ci
    - Auf dem Pfad G, D, H, E, C, F ist D blockierender Knoten da er clamped und tail-to-tail ist
    - Auf dem Pfad G, D, E, E, C, F sind E ein blockierender Knoten, da E head-to-head Knoten aber nicht clamped ist, so wie seine Nachkommen.

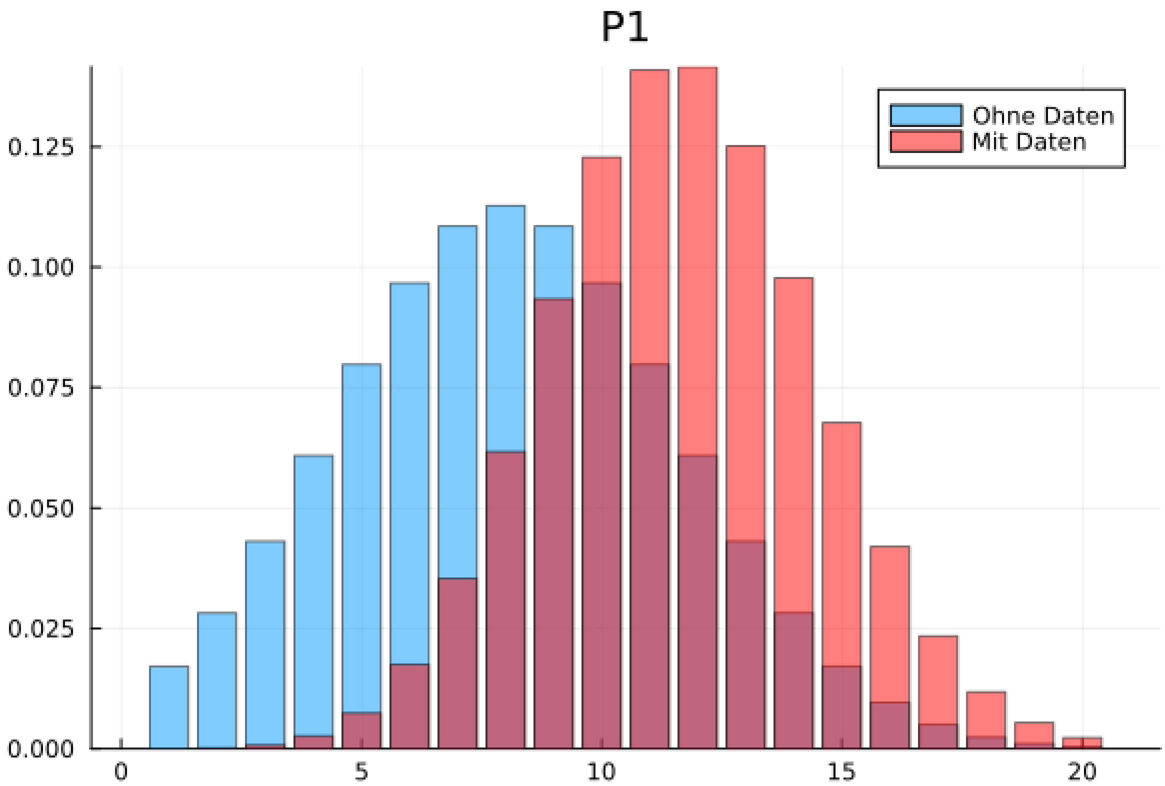
e)

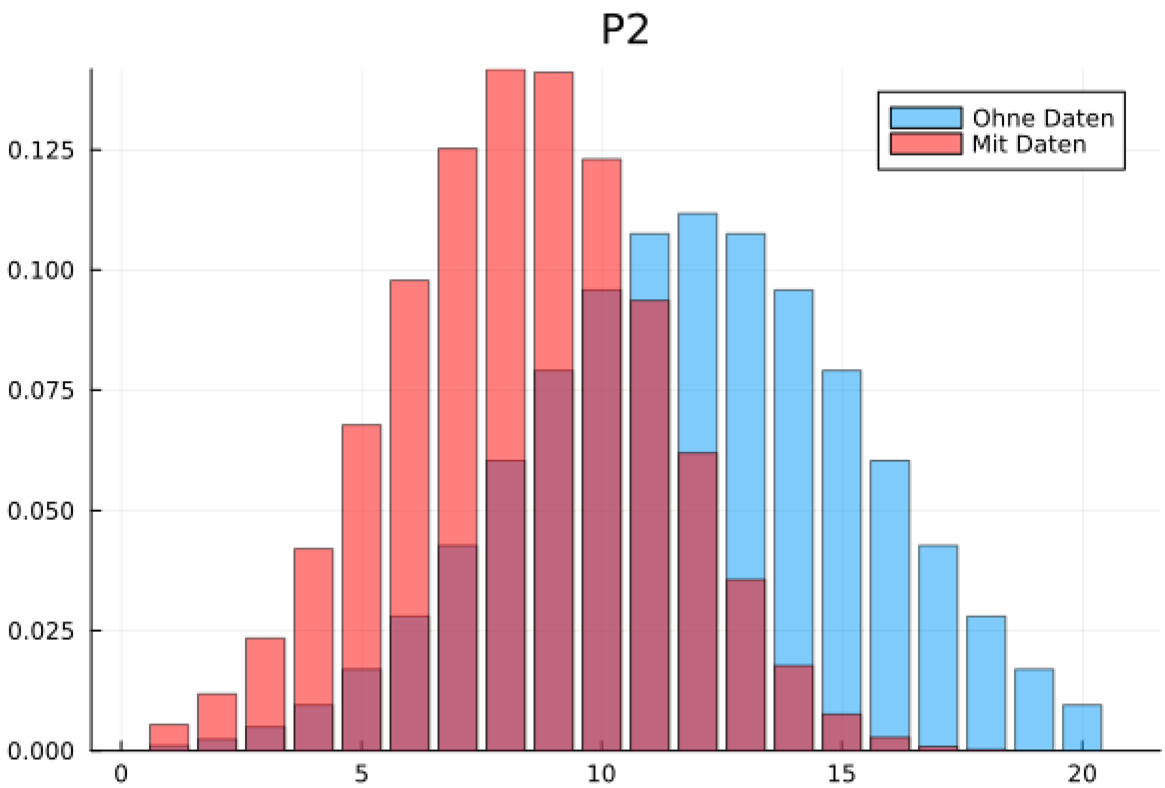


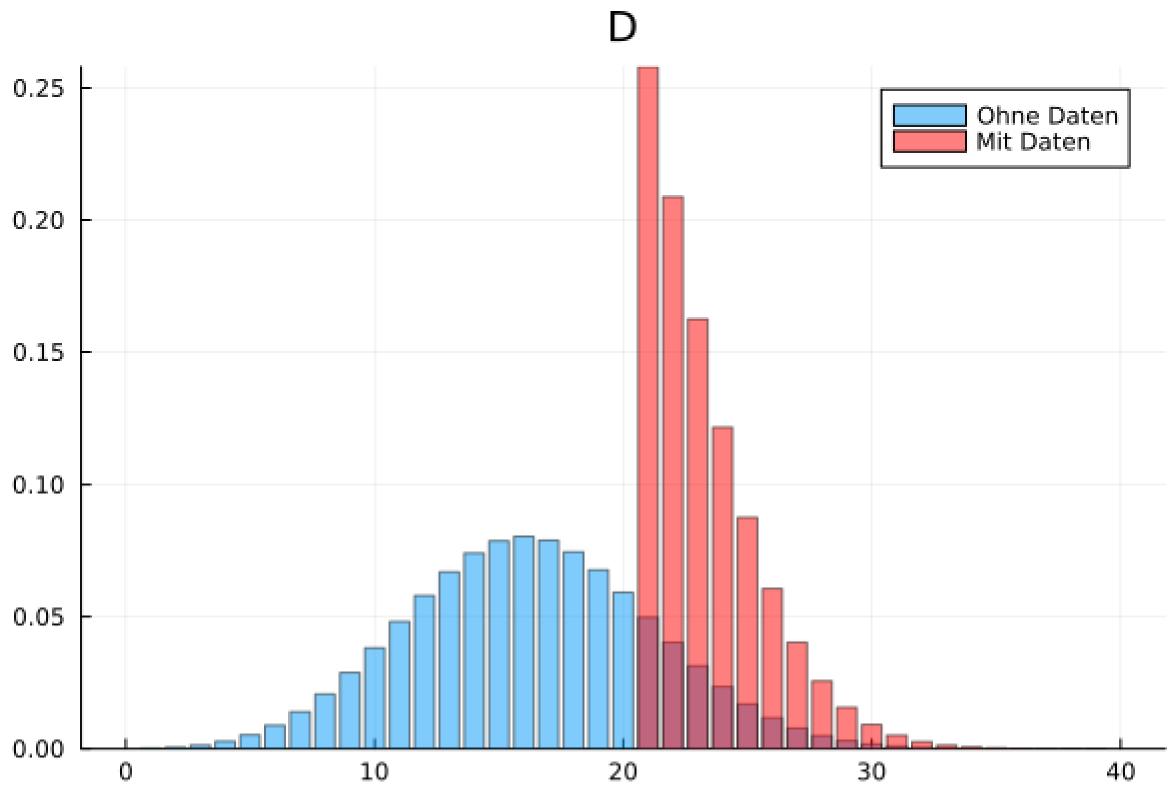
Aufgabe 3


S1
Ohne Daten
Mit Daten
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0
5
10
15
20


S2
Ohne Daten
Mit Daten
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0
5
10
15
20


P1
Ohne Daten
Mit Daten
0.000
0.025
0.050
0.075
0.100
0.125
0
5
10
15
20


P2
Ohne Daten
Mit Daten
0.000
0.025
0.050
0.075
0.100
0.125
0
5
10
15
20



Hier die Ausgabe:

```
All Marginals *with* data by summing out:
s1:  P = [0.0, 0.0001, 0.001, 0.0049, 0.0186, 0.0528, 0.1121, 0.1783,
0.2128, 0.1909, 0.1288, 0.0655, 0.0251, 0.0072, 0.0016, 0.0003, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0]
s2:  P = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0002, 0.0015, 0.007, 0.0247, 0.065, 0.1285,
0.1909, 0.2131, 0.1787, 0.1125, 0.0531, 0.0188, 0.005, 0.001, 0.0001, 0.0,
0.0])
p1:  P = [0.0, 0.0002, 0.0008, 0.0027, 0.0074, 0.0175, 0.0354, 0.0617,
0.0934, 0.1228, 0.1409, 0.1416, 0.1252, 0.0977, 0.0678, 0.042, 0.0234,
0.0118, 0.0054, 0.0023]
p2:  P = [0.0054, 0.0118, 0.0234, 0.042, 0.0678, 0.0978, 0.1253, 0.1418,
0.1411, 0.123, 0.0936, 0.062, 0.0356, 0.0177, 0.0076, 0.0028, 0.0009,
0.0002, 0.0, 0.0]
d:  P = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.258, 0.2088, 0.1625, 0.1217, 0.0876,
0.0606, 0.0403, 0.0257, 0.0156, 0.0091, 0.0051, 0.0027, 0.0013, 0.0006,
0.0003, 0.0001, 0.0, 0.0, 0.0]

------------------------------------------------------------


All Marginals *with* data with Sum-Product:
S1:  P = [0.0, 0.0001, 0.001, 0.0049, 0.0186, 0.0528, 0.1121, 0.1783,
0.2128, 0.1909, 0.1288, 0.0655, 0.0251, 0.0072, 0.0016, 0.0003, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0]
S2:  P = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0002, 0.0015, 0.007, 0.0247, 0.065, 0.1285,
0.1909, 0.2131, 0.1787, 0.1125, 0.0531, 0.0188, 0.005, 0.001, 0.0001, 0.0,
0.0]
```

```
P1:  P = [0.0, 0.0002, 0.0008, 0.0027, 0.0074, 0.0175, 0.0354, 0.0617,
0.0934, 0.1228, 0.1409, 0.1416, 0.1252, 0.0977, 0.0678, 0.042, 0.0234,
0.0118, 0.0054, 0.0023]
P2:  P = [0.0054, 0.0118, 0.0234, 0.042, 0.0678, 0.0978, 0.1253, 0.1418,
0.1411, 0.123, 0.0936, 0.062, 0.0356, 0.0177, 0.0076, 0.0028, 0.0009,
0.0002, 0.0, 0.0]
D:  P = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.258, 0.2088, 0.1625, 0.1217, 0.0876,
0.0606, 0.0403, 0.0257, 0.0156, 0.0091, 0.0051, 0.0027, 0.0013, 0.0006,
0.0003, 0.0001, 0.0, 0.0, 0.0]
------------------------------------------------------------
Zeiten:
Summing Out: 50.13258910179138 s
Sum Product: 0.32404494285583496 s
Verhältnis: 154.70875323641442 s
```

Das Model funktioniert auch für andere Verteilungen der Faktoren. Da wir uns im stetigen Raum bewegen, ändert sich an den Berechnungen nichts. Der Effekt wird nur sein, dass die Marginals anders initialisiert werden.