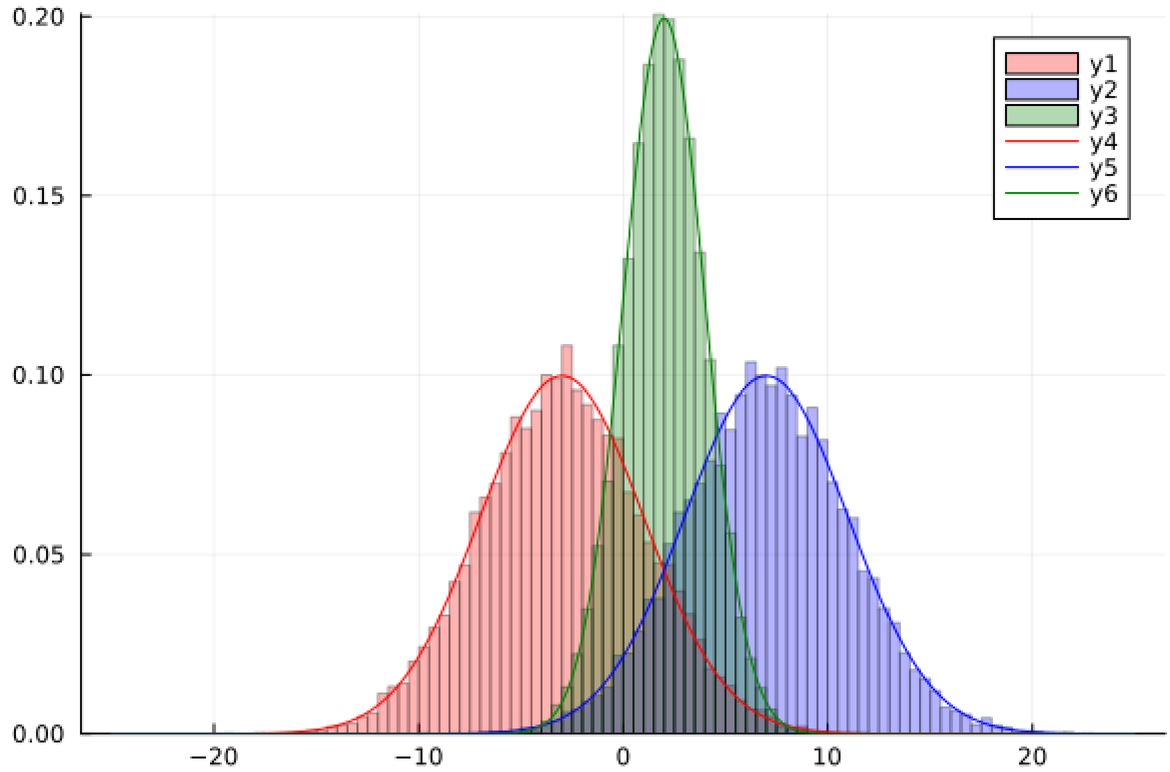
Aufgabe 1

a)



b)

$$f_{\alpha X + (1-\alpha) Y} = \mathcal{N}\left(x;\ \alpha\mu_X + (1-\alpha)\mu_Y,\ \alpha^2\sigma_X^2 + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2\right)$$

$$f_X \cdot f_Y = \mathcal{N}\left(x;\ \frac{\mu_X\sigma_Y^2 + \mu_Y\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2},\ \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right)$$

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} = 1 - \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}$$

$$\frac{\mu_X\sigma_Y^2 + \mu_Y\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} = \alpha\mu_X + (1-\alpha)\mu_Y$$

$$\mu_X \cdot \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} + \mu_Y \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} = \alpha\mu_X + (1-\alpha)\mu_Y$$

$$\mu_x \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2} + \mu_y \left(1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2-\sigma_y^2}\right) = \alpha \mu_x + (1-\alpha)\mu_y$$

Hier sieht man schon, dass $\alpha = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$

Nun setzen wir dies in die Varianz ein

$$\begin{aligned}
\alpha^2\sigma_x^2 + (1-\alpha)^2\sigma_y^2 &= \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)^2 \cdot \sigma_y^2 \\
&= \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)^2 \cdot \sigma_y^2 \\
&= \frac{\sigma_y^4 \cdot \sigma_x^2}{(\sigma_x^2+\sigma_y^2)^2} + \frac{\sigma_x^4 \cdot \sigma_y^2}{(\sigma_x^2+\sigma_y^2)^2} \\
&= \frac{(\sigma_x^2+\sigma_y^2) \cdot \sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}{(\sigma_x^2+\sigma_y^2)^2} \\
&= \frac{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

ci = conditionally independent

a)

- D und E sind ci
  - D, B, E: tail-to-tail, da B clamped
  - D, H, E: head-to-head, H und alle Nachfolger von H nicht clamped
- A und E sind ci
  - gleiche Gründe wie bei D und E
- A und C sind ci
  - auch wieder gleiche Gründe

b)

- D und E sind nicht ci
  - der Pfad D, B, E hat keinen blockierenden Knoten

- A und E sind nicht ci ?
  - ?
- E und F sind ci
  - da C clamped ist, hat der einzige Pfad E, C, F einen blockierenden Knoten (tail-to-tail)

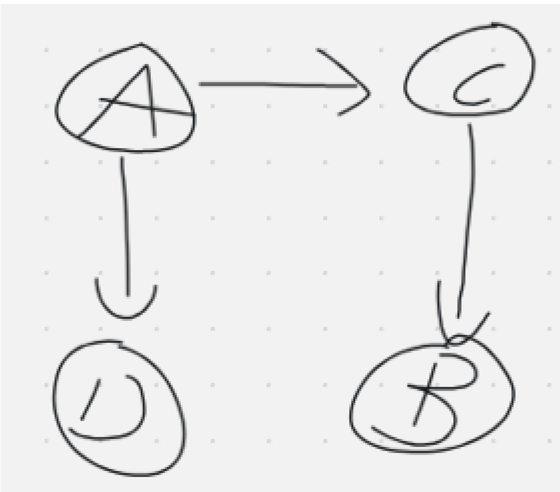
c)

- A und G nicht ci
  - Der einzige Pfad A, D, G hat keinen blockiereneden Knoten
- C und I sind ci
  - ??
- A und I sind ci
  - Auf Pfad A, D, H, I gibt es einen head-to-head Knoten (H) der blockierend ist, der er clamped ist
  - Auf dem Pfad A, D, B, E, H, I auch einen head-to-head über B, E, H, I da E und H clamped sind

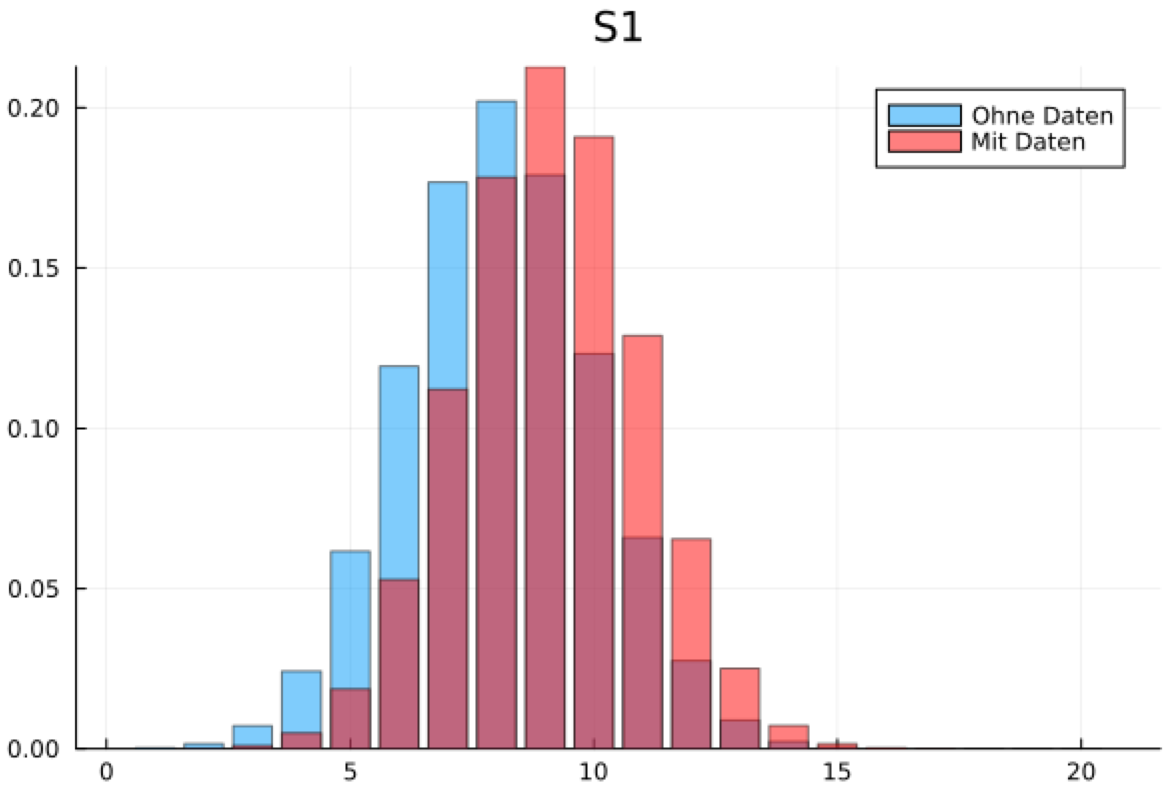
d)

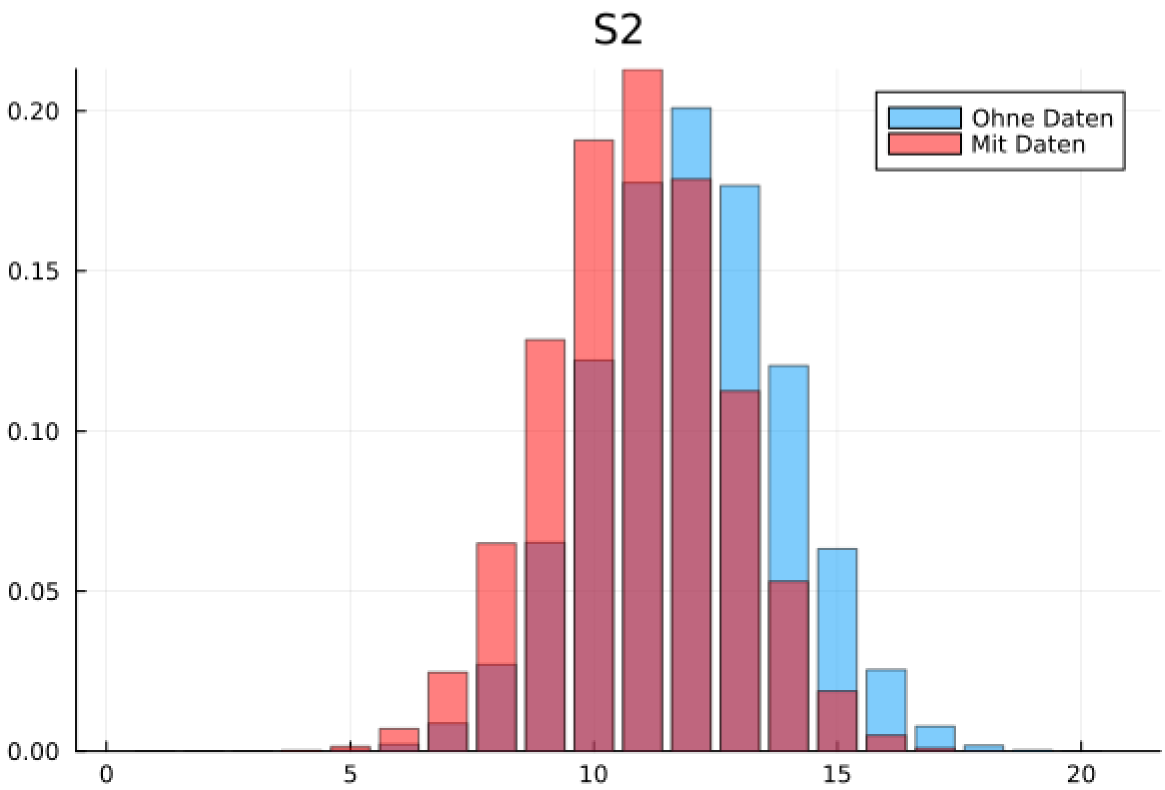
- A und H sind nicht ci
  - Auf dem Pfad A, D, B, E, H gibt es keinen blockierenden Knoten
- C und I sind nicht ci
  - ?? ist E ein blockierender Knoten?
- G und F sind ci
  - Auf dem Pfad G, D, H, E, C, F ist D blockierender Knoten da er clamped und tail-to-tail ist
  - Auf dem Pfad G, D, E, E, C, F sind E ein blockierender Knoten, da E head-to-head Knoten aber nicht clamped ist, so wie seine Nachkommen.

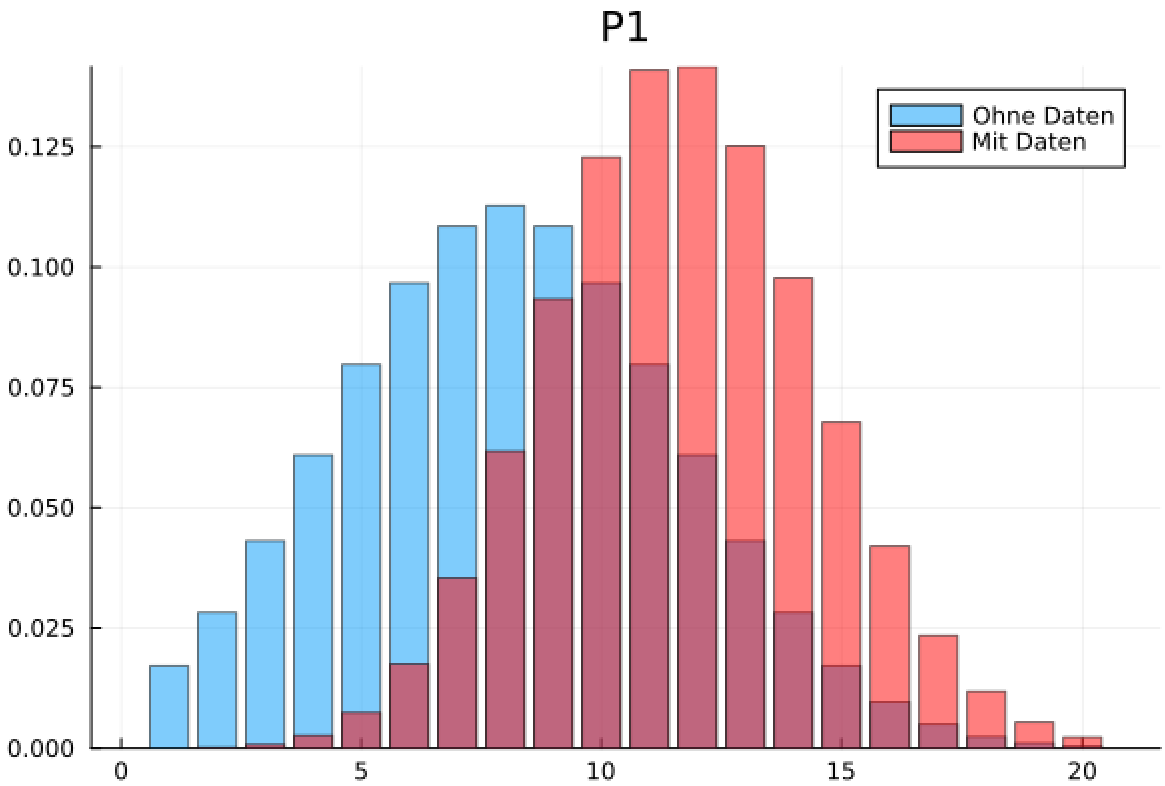
e)

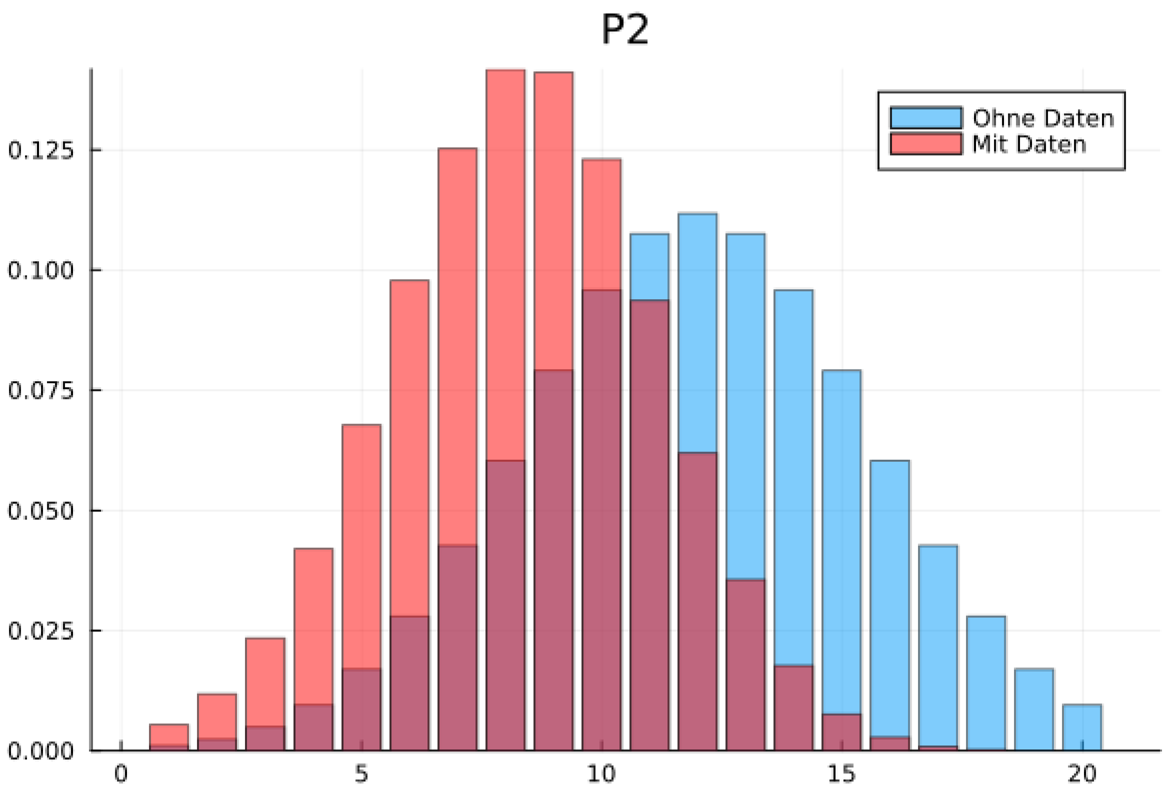


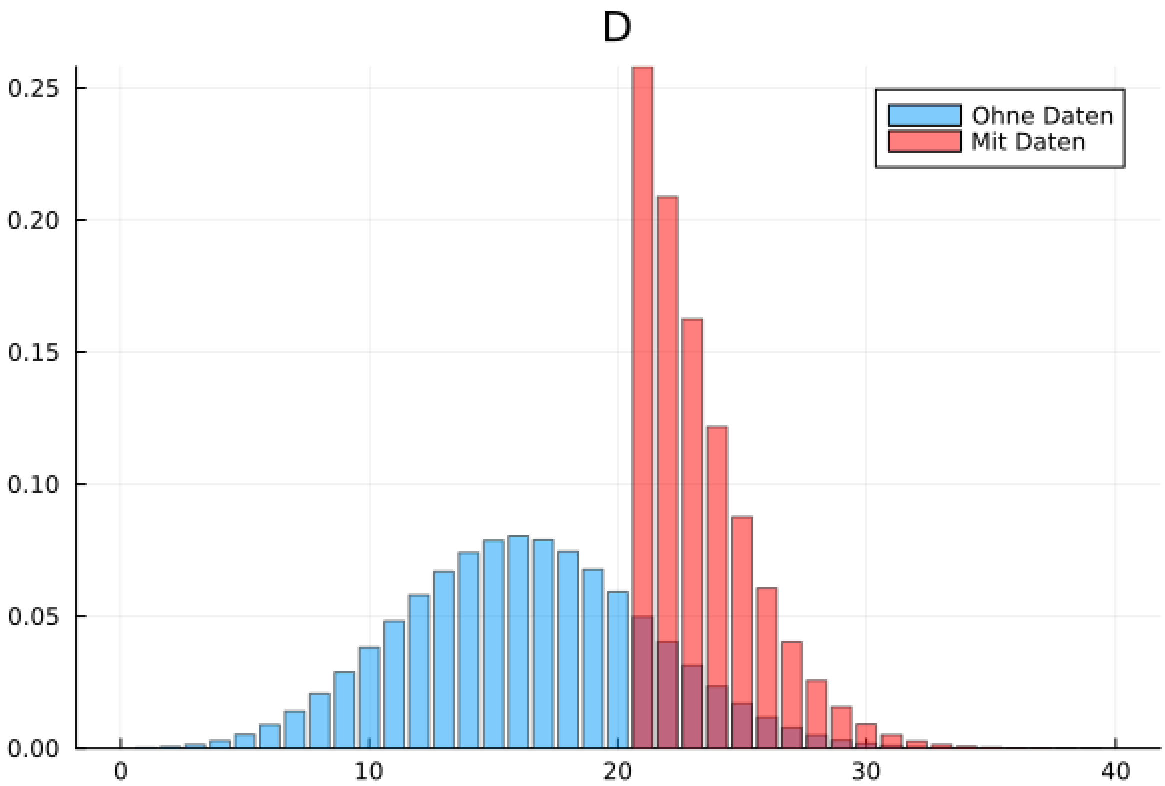
Aufgabe 3


S1
Ohne Daten
Mit Daten
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
5
10
15
20


S2
Ohne Daten
Mit Daten
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
5
10
15
20


P1
Ohne Daten
Mit Daten
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
0
5
10
15
20


P2
Ohne Daten
Mit Daten
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
0
5
10
15
20



Hier die Ausgabe:

```
All Marginals *with* data by summing out:
s1:  P = [0.0, 0.0001, 0.001, 0.0049, 0.0186, 0.0528, 0.1121, 0.1783,
0.2128, 0.1909, 0.1288, 0.0655, 0.0251, 0.0072, 0.0016, 0.0003, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0]
s2:  P = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0002, 0.0015, 0.007, 0.0247, 0.065, 0.1285,
0.1909, 0.2131, 0.1787, 0.1125, 0.0531, 0.0188, 0.005, 0.001, 0.0001, 0.0,
0.0])
p1:  P = [0.0, 0.0002, 0.0008, 0.0027, 0.0074, 0.0175, 0.0354, 0.0617,
0.0934, 0.1228, 0.1409, 0.1416, 0.1252, 0.0977, 0.0678, 0.042, 0.0234,
0.0118, 0.0054, 0.0023]
p2:  P = [0.0054, 0.0118, 0.0234, 0.042, 0.0678, 0.0978, 0.1253, 0.1418,
0.1411, 0.123, 0.0936, 0.062, 0.0356, 0.0177, 0.0076, 0.0028, 0.0009,
0.0002, 0.0, 0.0]
d:  P = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.258, 0.2088, 0.1625, 0.1217, 0.0876,
0.0606, 0.0403, 0.0257, 0.0156, 0.0091, 0.0051, 0.0027, 0.0013, 0.0006,
0.0003, 0.0001, 0.0, 0.0, 0.0]

------------------------------------------------------------


All Marginals *with* data with Sum-Product:
S1:  P = [0.0, 0.0001, 0.001, 0.0049, 0.0186, 0.0528, 0.1121, 0.1783,
0.2128, 0.1909, 0.1288, 0.0655, 0.0251, 0.0072, 0.0016, 0.0003, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0]
S2:  P = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0002, 0.0015, 0.007, 0.0247, 0.065, 0.1285,
0.1909, 0.2131, 0.1787, 0.1125, 0.0531, 0.0188, 0.005, 0.001, 0.0001, 0.0,
0.0]
```

```
P1:  P = [0.0, 0.0002, 0.0008, 0.0027, 0.0074, 0.0175, 0.0354, 0.0617,
0.0934, 0.1228, 0.1409, 0.1416, 0.1252, 0.0977, 0.0678, 0.042, 0.0234,
0.0118, 0.0054, 0.0023]
P2:  P = [0.0054, 0.0118, 0.0234, 0.042, 0.0678, 0.0978, 0.1253, 0.1418,
0.1411, 0.123, 0.0936, 0.062, 0.0356, 0.0177, 0.0076, 0.0028, 0.0009,
0.0002, 0.0, 0.0]
D:  P = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.258, 0.2088, 0.1625, 0.1217, 0.0876,
0.0606, 0.0403, 0.0257, 0.0156, 0.0091, 0.0051, 0.0027, 0.0013, 0.0006,
0.0003, 0.0001, 0.0, 0.0, 0.0]
------------------------------------------------------------
Zeiten:
Summing Out: 50.13258910179138 s
Sum Product: 0.32404494285583496 s
Verhältnis: 154.70875323641442 s
```

Das Model funktioniert auch für andere Verteilungen der Faktoren.