# 2021.06.19. 교육

나정휘

https://justiceHui.github.io/

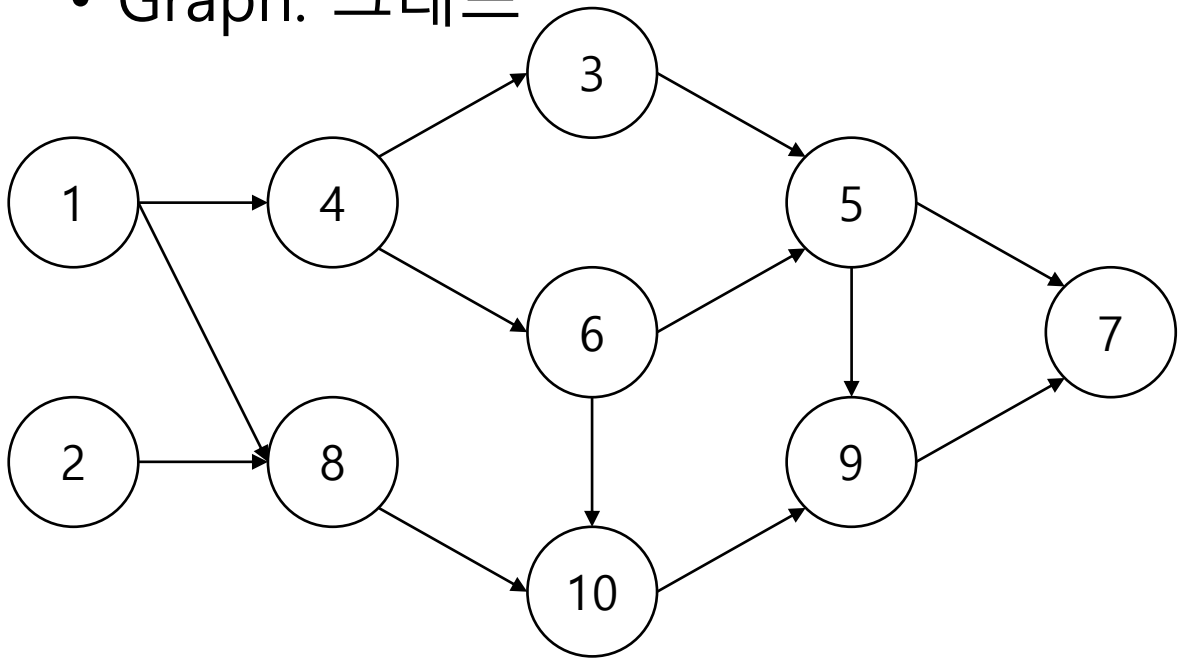
# 목차

- 위상 정렬
- DP
- USACO 8문제 풀이

# 위상 정렬

# DAG란?

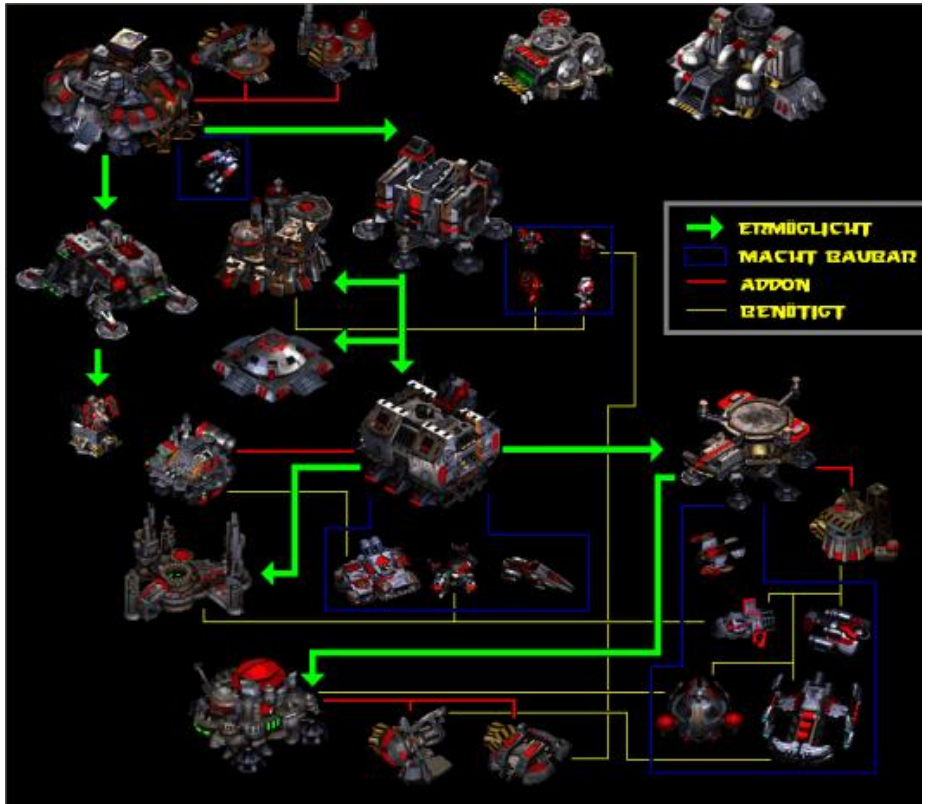
- Directed Acyclic Graph
  - Directed: 유향, 간선에 방향이 정해져 있는
  - Acyclic: 사이클이 없는
  - Graph: 그래프



# 위상 정렬

- 정점들을 간선의 방향을 거스르지 않는 순서대로 나열하는 것
  - A → B 간선이 있다면 A는 B보다 먼저 나와야 함
  - 위상 정렬 순서대로 나열했을 때, 간선은 모두 오른쪽으로 향하게 됨

- Valid한 건물 건설 순서 구하기
- 여러 가지가 나올 수 있음



# 어떻게 구하지?

- BFS를 응용하는 방법 (Kahn's Algorithm)
- DFS를 응용하는 방법

- 혹시 BFS/DFS 모르는 사람?

# 위상 정렬의 성질

- 가장 앞에 오는 정점은 항상 in-degree가 0임
  - Why?

- in-degree가 0이면서 맨 앞이 아닌 정점은 앞으로 옮겨도 됨
  - Why?

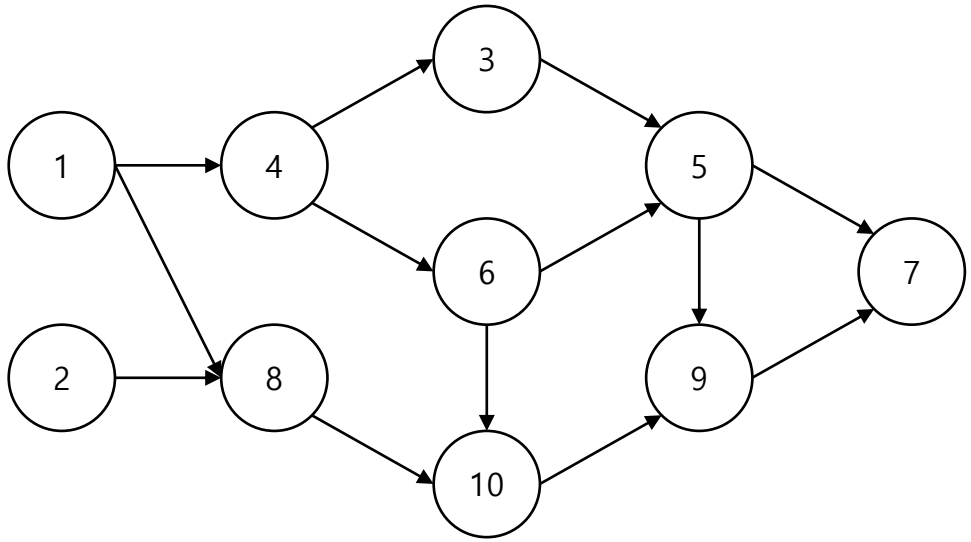
# 질문?

# Kahn’s Algorithm

- in-degree가 0인 정점을 Queue에 삽입
- Queue가 비어 있지 않으면 아래 과정을 반복
  - 큐에서 정점 v를 제거
  - v를 정답에 추가
  - v에서 뻗어 나가는 모든 간선을 제거, 해당 정점 in-degree 1 감소
  - in-degree가 0이 된 정점을 Queue에 삽입

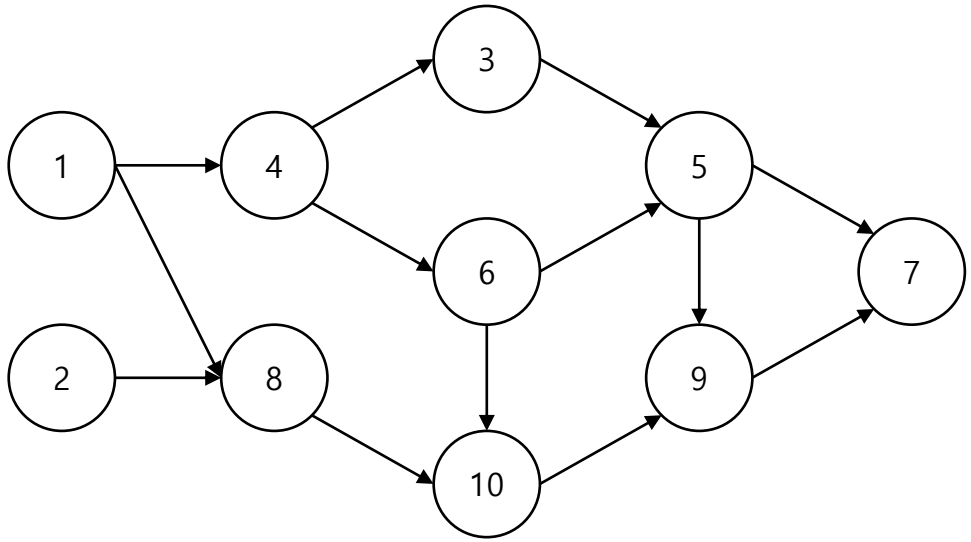
- 모든 정점을 방문하지 않고 종료됐다면 사이클 있는 그래프
  - Why?

# 예시




- Q = {1, 2}
- V = 1 Q = {2, 4}
- V = 2 Q = {4, 8}
- V = 4 Q = {8, 3, 6}
- V = 8 Q = {3, 6}
- V = 3 Q = {6}
- V = 6 Q = {10, 5}
- V = 10 Q = {5}
- V = 5 Q = {9}
- V = 9 Q = {7}
- V = 7 Q = {}
- 1 2 4 8 3 6 10 5 9 7

# 예시




- Q = {2, 1}
- V = 2 Q = {1}
- V = 1 Q = {8, 4}
- V = 8 Q = {4}
- V = 4 Q = {6, 3}
- V = 6 Q = {3, 10}
- V = 3 Q = {10, 5}
- V = 10 Q = {5, 9}
- V = 5 Q = {9}
- V = 9 Q = {7}
- V = 7 Q = {}
- 2 1 8 4 6 3 10 5 9 7

# 시간 복잡도

- 정점 N개, 간선 M개
- O(N+M)

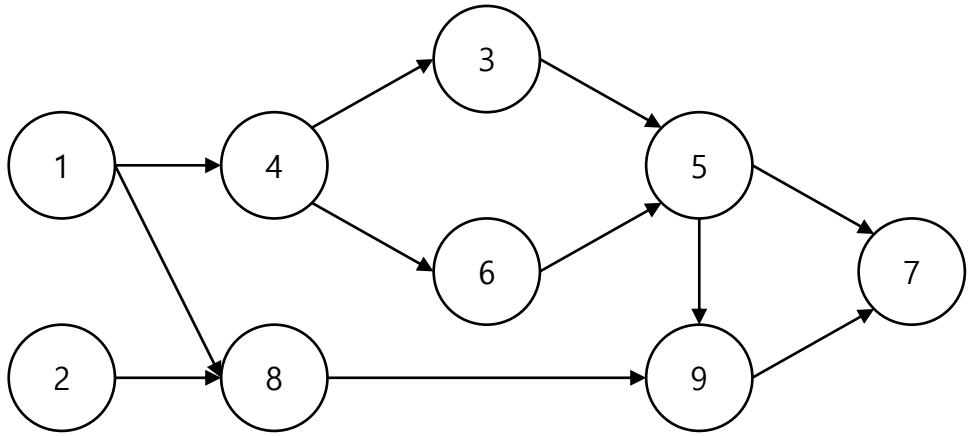
# 질문?

# DFS

- DFS를 하면서, 빠져나오는 순서대로 기록한다.
- 빠져나온 순서의 역순은 위상 정렬 순서이다.

- 왜 그럴까?
  - 간선 A → B가 있을 때
  - A를 먼저 방문하면 항상 B를 먼저 빠져나오는가?
  - B를 먼저 방문하면 항상 B를 먼저 빠져나오는가?

# 예시




- 1 진입
- 4 진입
- 6 진입
- 5 진입
- 7 진입
- 7 **탈출**(5)
- 9 진입
- 9 **탈출**(5)
- 5 **탈출**(6)
- 7 9 5 6 3 4 8 1 2
- 2 1 8 4 3 6 5 9 7

6 **탈출**(4)
3 진입
3 **탈출**(4)
4 **탈출**(1)
8 진입
8 **탈출**(1)
1 **탈출**(x)
2 진입
2 **탈출**(x)

# 시간 복잡도

- 정점 N개, 간선 M개
- O(N+M)

# 질문?

# 동적 계획법

# 동적 계획법

- 동적 계획법
  - 복잡한 문제를 간단한 문제들로 나누고
  - 간단한 문제들을 해결한 뒤
  - 간단한 문제들의 답을 이용해 복잡한 문제의 답을 구함
- 떠오르는 질문 리스트
  - 문제의 복잡성이 뭐지?
    - 큰 문제 / 작은 문제로 생각하면 편함
  - 항상 가능하지는 않을텐데...
    - **최적 부분 구조 (Optimal Substructure)**
  - 이게 효율적일까?
    - **중복되는 부분 문제 (Overlapping Subproblem)**

# 최적 부분 구조 (Optimal Substructure)

- 큰 문제의 최적해가 작은 문제의 최적해를 **포함**한다.
  - 성립하지 않으면 작은 문제의 답을 이용해서 큰 문제의 답을 구할 수 없음

- ex) 피보나치 수열
  - 큰 문제: fibonacci(N)
  - 작은 문제: fibonacci(0), fibonacci(1)
  - fibonacci(N)은 a*fibonacci(0) + b*fibonacci(1)로 나타낼 수 있다.

# Overlapping Subproblem

- 작은 문제의 답을 여러 번 참조해야 한다.
  - 한 번 계산한 답을 **저장**해두면, 다시 참조할 때 연산량을 줄일 수 있음

- ex) 피보나치 수열
  - 큰 문제: fibonacci(N), N > 5
  - 작은 문제: fibonacci(5), fibonacci(4), fibonacci(3), …
  - fibonacci(N)은 a*fibonacci(5) + b*fibonacci(4)로 나타낼 수 있다
    - 이때 fibonacci(5), fibonacci(4)를 각각 a, b번 호출할텐데
    - 한 번 계산한 다음에 답을 저장하면 실행 시간을 크게 줄일 수 있음

# 질문?

주어진 문제를 DP로 풀 수 있다는 것을 어떻게 알 수 있나요?

# 이게 동적 계획법 문제인가?

- 동적 계획법 문제의 특징
  - 큰 문제를 **한 개 이상의 작은 문제**로 분할할 수 있어야 함
  - 큰 문제와 작은 문제를 **동일한 방법**으로 풀 수 있어야 함 (귀납법)
  - 큰 문제의 최적해가 작은 문제의 최적해들로 구성되어야 함

  - 결론: Optimal Substructure, Overlapping Subproblem을 알아야 함

# 이게 동적 계획법 문제인가?

- 동적 계획법 문제인지 판단하는 방법
  - **Optimal Substructure 성질을 만족함을 증명한다.**
  - N년 간 문제를 풀어본 경험을 토대로 추측한다.
  - 왠지 DP일 것 같으니까 일단 믿어본다.

  - 증명할 자신이 없으면 그냥 **문제를 많이 풀어**서 유형을 외우자.
  - solved.ac 기준 골드까지는 물량으로 밀 수 있다.

# 동적 계획법을 써야하는 건 알겠는데...

- 큰 문제와 작은 문제 간의 상관관계(점화식)을 어떻게 찾지?
  - 점화식을 정의한다.
    - 현재 "상태"를 잘 표현할 방법을 생각해본다.
      - 배열 인덱스, 선택한 원소의 개수, 선택한 원소의 합/곱(을 나눈 나머지) 등
    - (최적화) 상태의 개수를 줄여도 온전하게 표현할 수 있는지 생각해본다.
    - (최적화) 다른 방식으로 표현해볼 수는 없을까?
  - 점화 관계를 찾는다.
    - 현재 "상태"로 가기 바로 직전 "상태"는 무엇이 있을까?
    - (최적화) 다양한 DP 최적화들(CHT, DnC Opt, Kitamasa 등)

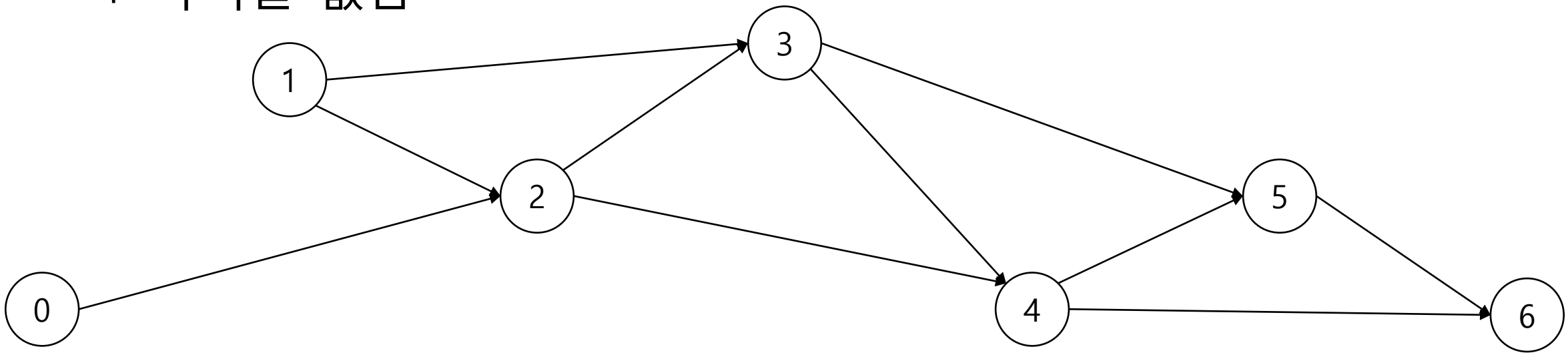
# 질문?

# DAG와 DP의 관계

- DAG(Directed Acyclic Graph): 사이클 없는 방향 그래프
  - 사이클이 없다
  - 위상 정렬을 할 수 있다
- DP: 작은 문제의 답을 이용해 큰 문제의 답을 구하는 방법
  - 작은 문제와 큰 문제 간의 연결 관계?

# DAG와 DP의 관계 – 예시

- 피보나치 수열
- 위상 정렬 순서가 앞선 것의 답을 알아야
  뒤에 있는 것의 답을 구할 수 있음
  + 사이클 없음



# DAG와 DP의 관계

- 어떤 문제는 DAG로 생각해서 푸는 것이 편할 수도 있다.
  - ex) 최솟값 <-> 그래프 최단 경로
  - 몇몇 논문을 보면 DP를 평면 그래프로 생각해서 분할 정복을 하던데...

- 사이클이 없는 방향 그래프에서 경로의 개수는 DP로 해결
  - Why?

# 더 공부할 거리

- 선형 점화식의 최적화
  - 행렬 거듭제곱
  - Kitamasa Method (+ FFT)
- 함수의 개형(특히 기울기)를 이용한 DP 최적화
  - Stack/Sqrt Decomposition/BBST를 활용한 Convex Hull Trick
  - Li-chao Tree
  - Slope Trick
- Monge Array의 성질
  - Divide and Conquer Optimization
  - Monotone Queue Optimization
  - Aliens Trick
- 다 필요 없고 Gold V ~ Platinum V에 있는 기초 DP나 잘 풀자.

# USACO 문제 목록

| | | | |
|---|---|---|---|
| • 20650 | 2020 Dec B1 | Do You Know Your ABCs | Bronze II |
| • 18787 | 2020 Feb B2 | Mad Scientist | Silver V |
| • 20647 | 2020 Dec S1 | Cowntagion | Gold IV |
| • 18780 | 2020 Feb G1 | Timeline | Gold II |
| • 18879 | 2020 Opn S3 | The Moo Particle | Gold I |
| • 20648 | 2020 Dec S2 | Rectangular Pasture | Platinum V |
| • 20649 | 2020 Dec S3 | Stuck in a Rut | Platinum V |
| • 18874 | 2020 Opn G1 | Haircut | Platinum IV |

# 20650. Do You Know Your ABCs

USACO 2020 December Bronze 1번

# 문제 요약

- $0 < A \le B \le C$를 만족하는 세 정수 A, B, C가 있을 때
- A, B, C, A+B, B+C, C+A, A+B+C가 무작위 순서로 주어짐

- A, B, C를 각각 구하는 문제

# 풀이

- 입력으로 주어지는 7개의 자연수 중
  - 가장 큰 값은 A+B+C
  - 두 번째로 큰 값은 B+C
  - 세 번째로 큰 값은 A+C

- A = (A+B+C) - (B+C)
- B = (A+B+C) - (A+C)
- C = (A+B+C) - A - B

# 18787. Mad Scientist

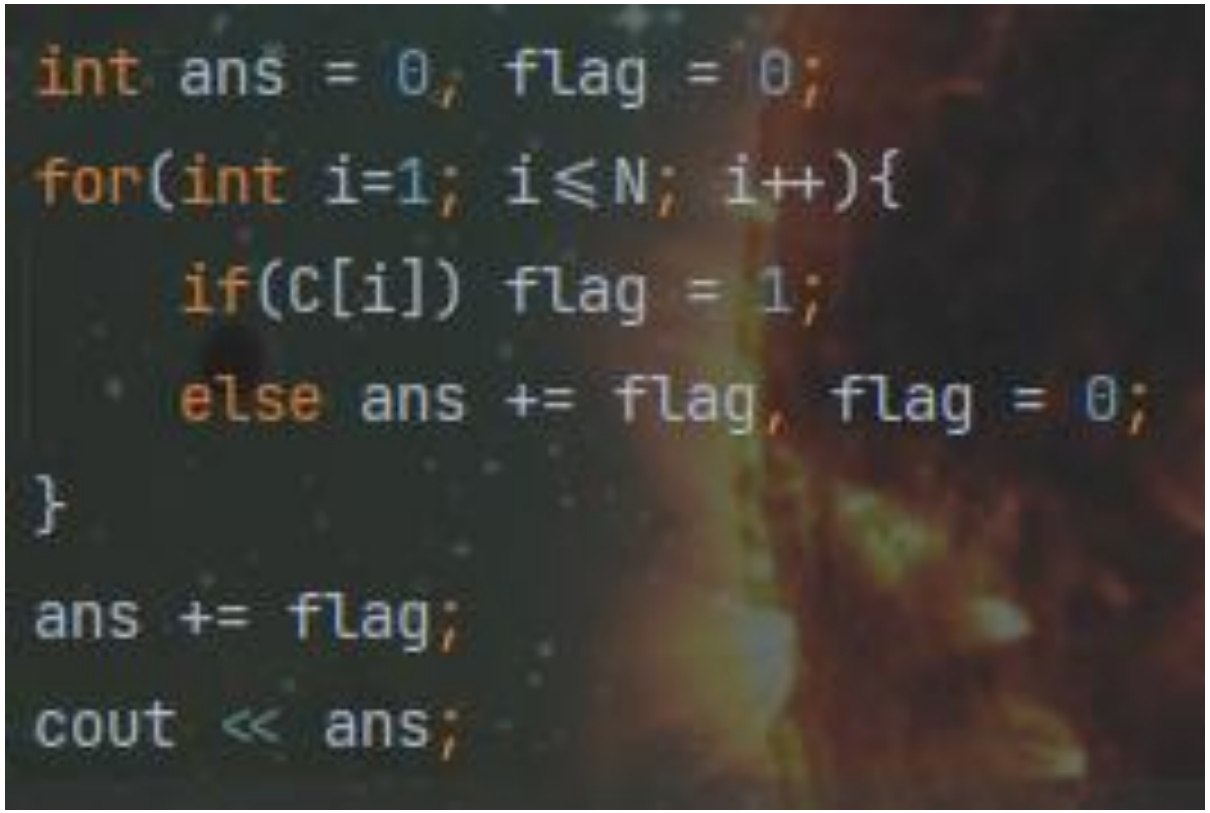
USACO 2020 February Bronze 2번

# 문제 요약

- ‘G’, ‘H’로 이루어진 문자열 A, B가 주어짐
- 아래와 같은 연산을 0번 이상 수행해서 B를 A로 만들어야 함
  - B의 부분 문자열을 선택해서 ‘G’는 ‘H’로, ‘H’는 ‘G’로 변경
- 연산의 최소 횟수를 구하는 문제

# 풀이

- C[i]를 A[i]와 B[i]가 같으면 0, 다르면 1이라고 정의하자.
- C[i]에 등장하는 “1의 덩어리의 개수”를 구하는 문제가 된다.



```
int ans = 0, flag = 0;
for(int i=1; i≤N; i++){
    if(C[i]) flag = 1;
    else ans += flag, flag = 0;
}
ans += flag;
cout << ans;
```

# 20647. Cowntagion

USACO 2020 December Silver 1번

# 문제 요약

- N개의 목장이 도로를 이용해 트리 형태로 연결되어 있음
- 1번 목장에 있는 소 한 마리가 COWVID-19에 감염됨
- 매일 아래 두 가지 사건 중 한 가지가 발생함
  - 한 목장에 있는 확진자의 수가 2배가 됨
  - COWVID-19에 감염된 소 한 마리가 도로를 통해 이동함
- N개의 목장에 모두 COWVID-19에 감염된 소가 존재하게 되는 최소 시간을 구하는 문제

# 풀이

- 풀이가 잘 보이지 않을 때는 쉬운 문제로 바꿔서 생각해보자.
  - 성게 그래프
  - 선형 트리
- 성게 그래프의 경우
  - 소가 N마리 이상이 될 때까지 기다린 다음, 한 마리 씩 이동
  - $N - 1 + \lceil \log_2 N \rceil$
- 선형 트리의 경우
  - 2마리로 만들고 아래로 보내는 것을 반복
  - $2(N-1)$

# 풀이

- 두 가지 풀이를 조합하면 일반적인 트리에서 문제를 풀 수 있다.
  - 각 정점에서 소가 (자식 정점의 수+1)마리 이상이 될 때까지 기다린 뒤
  - 한 마리 씩 이동하면 된다.

- $\lceil \log_2(C+1) \rceil$을 구하는 방법에 따라 시간 복잡도가 달라지는데
- 아무리 느려도 $O(N \log N)$에는 풀 수 있다.

# 18780. Timeline

USACO 2020 February Gold 1번

# 문제 요약

- M일 동안 N개의 세션이 진행된다.
- 입력으로 S_1, S_2, … , S_N과 (a, b, x)꼴의 튜플 C개가 주어진다.
- 아래 조건을 만족하도록 세션을 열어야 한다.
  - i번 세션은 S_i일 이후에 열려야 한다.
  - b번 세션은 a번 세션보다 최소 x일 이상 늦게 열린다.

- 각 세션이 열릴 수 있는 가장 빠른 날짜를 구하는 문제

# 풀이

- a가 열리고 x일 지난 후에 b가 열릴 수 있다.
  - a에서 b로 가는 가중치가 x인 간선
  - DAG에서 최장 경로를 구하는 문제

- S_i
  - 0일차에 시작하는 0번 세션을 만든 뒤
  - (0, i, S_i) 튜플 추가

- O(N+C)에 풀 수 있음

# 18879. The Moo Particle

USACO 2020 US Open Silver 3번

# 문제 요약

- 2차원 평면에 N개의 점 $(x_i, y_i)$가 주어진다.

- 두 점 간의 "상호 작용"은 아래와 같이 정의된다.
  - 만약 두 점 i, j가 $x_i \le x_j$ & $y_i \le y_j$를 만족하면
  - 두 점 중 한 점이 없어진다.

- 여러 번의 "상호 작용"을 거쳐 점의 개수가 감소할 수 있는데,
- 이때 남는 점의 개수의 최솟값을 구하는 문제

# 풀이

- 두 점 i, j의 “상호 작용”을 i와 j를 간선으로 잇는다고 생각하자.
- 간선을 모두 만든 뒤, 컴포넌트의 개수가 문제의 정답이 된다.

- 좌표 대소 비교를 하는 문제는 보통 한 축으로 정렬하면 편하다.
- x좌표 기준으로 정렬하고 생각하자.

# 풀이

- x좌표 기준으로 정렬하자.
  - 1 ≤ j < i번째 점은 y_j ≤ y_i이면 i번째 점과 “상호 작용”할 수 있다.
  - i < j ≤ N번째 점은 y_j ≥ y_i이면 i번째 점과 “상호 작용”할 수 있다.

- i번째 점과 i+1번째 점이 같은 컴포넌트에 속하지 않을 조건은
  - min(y_1, … , y_i) > max(y_{i+1}, … , y_n)

- 정답 = (이 조건을 만족하는 i의 개수) + 1

# 20648. Rectangular Pasture

USACO 2020 December Silver 2번

# 문제 요약

- 목장에 N마리의 소가 있다.

- 소들의 부분 집합은 2^N가지가 존재하는데
- 변이 x, y축에 평행한 직사각형으로 커버할 수 있는 부분 집합의 개수를 구하는 문제

# 풀이

- 좌표 범위가 10억인 건 보기 싫으니까 좌표 압축을 하자.
  - x, y좌표가 각각 서로 다르기 때문에 별 생각 없이 해도 된다.

- 두 가지 방법을 생각해볼 수 있다.
  - 가능한 부분 집합의 개수를 직접 세는 경우
  - 전체 경우의 수에서 불가능한 집합의 개수를 빼는 경우

- 2^2500같은 큰 수는 C++에서 처리하기 어렵기 때문에
- 전자가 좋을 것 같다는 생각을 할 수 있다.

# 풀이

- x, y좌표는 모두 1 이상 N 이하다.

- 직사각형의 왼쪽/오른쪽 변을 고정하자: O(N^2)가지
  - 왼쪽 변 : (x_i, y_i), 오른쪽 변 : (x_j, y_j)

  - 가능한 위/아래 변의 조합의 수를 구하면 문제를 해결할 수 있다.
  - (가능한 윗변의 개수) × (가능한 아랫변의 개수)

# 풀이

- (x, y)가 윗변이 될 수 있는 조건
  - $x_i \le x \le x_j$
  - $\max(y_i, y_j) \le y$

- (x, y)가 아랫변이 될 수 있는 조건
  - $x_i \le x \le x_j$
  - $y \le \min(y_i, y_j)$

# 풀이

- 2차원 영역에서 어떤 직사각형에 속하는 점의 개수를 구해야 함
  - 2D Prefix Sum : 전처리 O(N^2), 쿼리 O(1)

- 왼쪽/오른쪽 변 고정하면 O(1)에 구할 수 있음
- 전체 시간 복잡도는 O(N^2)

- 공집합 / 크기가 1인 집합 조심

# 20649. Stuck in a Rut

USACO 2020 December Silver 3번

# 문제 요약

- 위로 뻗어나가는 직선과 오른쪽으로 뻗어나가는 직선이 있음
- 각 직선은 다른 직선의 자취에 부딪히면 죽음
- 각 직선이 죽는 시점을 구하는 문제

# 풀이

- 위로 뻗는 직선들만 남겨두자.

- 오른쪽으로 뻗는 직선을 하나씩 보면서
- 위로 뻗는 직선이 죽는지, 오른쪽으로 뻗는 직선이 죽는지 확인

- O(N) 스위핑을 N번 수행 : O(N^2)

# 18874. Haircut

USACO 2020 US Open Gold 1번

# 문제 요약

- 길이 N인 배열 A가 주어짐

- $0 \le j < N$인 자연수 j에 대해
- j보다 큰 수를 모두 j로 바꿨을 때의 inversion 개수 구하는 문제

# 풀이

- 목표: x < y & A[x] > A[y] & A[y] < j인 (x, y) 순서쌍의 개수

- y에 대해 x < y & A[x] > A[y]를 만족하는 x의 개수는 쉬움
  - Fenwick Tree / Segment Tree 등으로 구할 수 있음

- R[j]를 A[y] = j인 y들에 대한 x의 개수라고 정의하자.
- 문제의 정답은 R[0] + R[1] + ... + R[j-1]이 된다.
- O(N log N)에 풀 수 있다.