

東南大學

毕业设计（论文）报告

题目 大规模 MIMO 的检测与估计

信息科学与工程学院 院（系） 信息工程 专 业

学 号 04015124

学生姓名 郑奕飞

指导教师 孙晨

顾问老师 黄清

起讫日期 2019 年 1 月—2019 年 6 月

设计地点 无线谷 1405 室

东南大学毕业（设计）论文独创性声明

本人声明所呈交的毕业（设计）论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的科研成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得东南大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

作者签名：_____

日期：_____

东南大学毕业（设计）论文使用授权声明

东南大学有权保留本人所送交毕业（设计）论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括刊登）论文的全部或部分内容。论文的公布（包括刊登）授权东南大学教务处办理。

作者签名：_____

导师签名：_____

日期：_____

大规模 MIMO 的检测与估计

04015124 郑奕飞
指导教师 孙晨

摘 要

待定

关键词：关键词

Detection and Estimation of Massive MIMO System

04015124 Yifei Zheng
Advisor Chen Sun

Abstract

待定

KEY WORDS: KEY Word

目 录

摘要	I
Abstract	II
第一章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 大规模 MIMO 检测与估计	1
第二章 大规模 MIMO 信道模型	3
2.1 引言	3
2.2 MIMO 信道物理模型	4
2.3 MIMO 信道统计模型	6
2.4 大规模 MIMO 波束域信道模型	7
2.5 波束域信道特性	10
2.5.1 DFT 矩阵解相关	10
2.5.2 对应波束	11
2.5.3 特征矩阵稀疏性	13
2.6 本章小结	14
第三章 基于多项式展开的 MMSE 接收机	15
3.1 引言	15
3.2 系统模型	15
3.3 MMSE 估计	17
3.4 多项式展开接收机及复杂度优化	20

第一章 绪论

1.1 研究背景

由于智能设备，移动设备广泛使用以及实现 M2M 通信的目标，全球移动通信网络所需要传输的数据量猛增。并且目前的设计受制于通信频谱的不足。为了解决通信的数据量猛增以及低损的频谱波段的不足的问题，所以考虑使用大规模多输入多输出传输技术（LS-MIMO）。并且第五代通信系统也致力于研究大规模 MIMO 的技术，所以 5G 相关的基础技术很多也是和大规模 MIMO 相关的。

并且目前的毫米波发展导致传输相同的距离需要更高的功率或者比 3G/4G 更多的基站，此时我们也需要大规模 MIMO 的发展来建立适合小蜂窝的网络结构。

大规模 MIMO 检测是大规模 MIMO 技术的一部分，并且是基础功能。大规模 MIMO 检测目前主要使用的是最小均方误差估计（MMSE 检测）技术，其很大的问题是 MMSE 检测的复杂度。一般 MMSE 对于大规模 MIMO 系统复杂度是相当大的，计算复杂度过大带来的问题对于硬件的计算能力和计算时延有一定的要求。选题的研究方向主要就是研究低复杂度的检测算法，并且通过建立大规模 MIMO 空间信道模型验证其正确性。

大规模 MIMO 系统影响接收信号强度主要的原因是多径传输，多普勒影响，空间特性的影响。多径的影响主要是发送端和接收端之间的有许多不同的传输路径，多普勒影响主要是移动的发送端或者接收端带来的频率偏移，大规模 MIMO 天线带来的波束指向性会带了空间特性。而与传统的 MIMO 不同的是大规模 MIMO 有一些特别的性质，包括更有利的发射状态，发射角特性，球形波阵面假设和空间不稳定特征。目前的大规模 MIMO 信道测量方式主要是利用宽带高同步率的收发机，进行大量的数据传输得到信道参数。并且针对不同情况进行不同的天线设置。目前的信道测试基本上以 6GHz 以下的频带进行测试，从而验证了大规模 MIMO 的特别性质。而信道建模的主要分为数据模型和确定性模型。数据模型主要分为基于相关的随机模型和基于几何的随机模型，对于大规模 MIMO 基于几何的随机模型要更适合一些。而未来大规模 MIMO 信道建模的研究方向要考虑之前提到的大规模 MIMO 相对于传统 MIMO 的特性，并且需要结合第五代移动通信采用的核心技术。

1.2 大规模 MIMO 检测与估计

在过去五十年对于 MIMO 系统的检测估计做过很多研究。大规模 MIMO 的主要影响传输效果的原因是共通道干扰（CCI），而共通道干扰在 MIMO 中主要体现在符号间干扰（ISI），通道间干扰（ICI），天线间干扰（IAI），多用户干扰（MUI），多接入干扰（MAI），多流干扰（MSI）等等。而需要大规模 MIMO 检测的主要原因是输入信道不是相互正交，输出就会有相互干扰的情况。而应用模型主要有三种，单用户多天线 MIMO 的模型（single-user SDM-MIMO），多

用户用户单天线的 MIMO 模型，多用户多天线的 MIMO 模型。同时目前考虑了多种不同的大规模 MIMO 系统模型，线性无记忆 MIMO 系统，离散保留记忆 MIMO 系统，实数 MIMO 系统，复数 MIMO 系统。前面两种模型都包含有时域和频域，后面两种系统讨论的主要是系统实现的优劣。实数 MIMO 系统具有实数阵规模小，操作自由，复数 MIMO 系统具有适应多种调制方式，硬件实现简单以及在某些情况下信道容量会比实数 MIMO 系统要大。

目前用于大规模 MIMO 检测的算法有很多不同种，大部分都属于最小方差估计，其中包括最适 MIMO 检测，经典的线性 MIMO 检测，基于减少干扰的 MIMO 检测，基于树状搜索的 MIMO 检测，降维 MIMO 检测（LR），概率数据互联 MIMO 检测（PDA），基于半点松弛编程的 MIMO 检测。最适 MIMO 检测最先指的是 ML 接收机，之后几年的研究讨论了 ML，MAP 等估计算法的最优标准最终线性 MMSE 接收机确定为最优的接收机，从而也引出了关于 MMSE 的计算复杂度的问题。线性 MIMO 接收机又分为匹配滤波接收机，零干扰接收机，MMSE 接收机，其他线性接收机。加性干扰去除 MIMO 接收机是一个非线性的接收机，效果会比线性 MIMO 接收机要好，而且根据不同的性质可以有很多种变种形式，性能较好的有 successive interference cancellation（SIC）接收机，parallel interference cancellation（PIC）接收机，multistage interference cancellation（MIC）接收机，decision-feedback 接收机（DFD）。这种接收机主要问题是如果接收信号较大，会出现错误传输的问题，更适合只需要较小信号的用户。基于树状搜索的 MIMO 接收机是目前研究多天线接收机的流行方向，其主要优势在于在降低接收机计算复杂度的时候可以逼近甚至达到 ML 接收机的效果。Lattice-Reduction（LR）接收机是基于经典的几何学和群论推导出的 lattice 定义的 MIMO 接收机。其一般被用来和其他 MIMO 算法结合，通过优化 MIMO 接收机的信道矩阵优化 MIMO 检测算法。概率数据互联 MIMO 检测（PDA）MIMO 检测，PDA 滤波技术是被 Bar-Shalom 在 1975 为了研究在干扰严重的环境下测量结果无法定标和结果错误时追踪和监控目标问题提出来的。此方法本来主要是用来研究雷达追踪目标的功能来实现的。SDM 接收机同样是为了对抗复杂环境以及降低复杂度并且取得很好的效果而提出的 MIMO 接收机。

大规模 MIMO 检测继 Marzetta 的开创性工作之后，LS-MIMO 系统已经成为一个热门的研究课题。然而，在检测方面，一些早期的研究从大系统分析或渐进性能分析的角度探讨了这个问题。LS-MIMO 系统的概念可以看作是无线通信和信号处理领域的一种范式转变。在这种大维背景下，MIMO 检测问题变得更加具有挑战性和重要性。在相关文献调查中，在线性信道上低复杂度的影响缓解可以通过使用随机矩阵理论的收敛结果可以解决优化问题。可以使用自由概率理论对 MMSE 检测器进行优化，使计算复杂度降低。可以用预先算好的信道矩阵和多项式等式对上行接收机进行优化，并且可以获得相近的检测效果。可以利用牛顿迭代法对大规模 MIMO 接收机进行优化。同时可以利用基于坐标下降的算法对上行大规模 MIMO 接收机进行优化。

第二章 大规模 MIMO 信道模型

2.1 引言

无线通信系统的性能取决于无线信道环境，无线信道系统学习与研究都需要合适的无线信道作为基础。无线通信信道主要描述的是无线电波从发送端传播到接收端的过程。无线通信的主要问题在于无线电波传播的过程中，无线电波会收到传播路径中物体的反射、衍射、绕射和散射。反射是指无线电波遇到相对于波长来说很大的物体表面时传播方向发生改变的物理现象，衍射是指无线电波遇到狭缝、小孔时偏离原来直线传播的物理现象，绕射是指无线电波绕过障碍物向前传播的物理现象，散射是指无线电波遇到不光滑表面时扩散传播的物理现象。为便于表述，常把对无线电波传播产生反射、衍射、绕射和散射的各类物体，统称为散射体。相应地，各非直射传播路径均称为散射路径。而对这部分传输过程以及其他原因所对信号产生的影响对其进行数学建模，具有其特征的数学模型就可以称为是无线信道。

无线信道的一个特有的特征是衰落，同样也是信道讨论的关键。经过无线信道传播的信号，其幅度随时间和频率变化。信号的衰落分为大尺度衰落和小尺度衰落。大尺度衰落包括与传播距离有关的路径损耗和大障碍物引起的阴影衰落，小尺度衰落是多径信号叠加和移动台移动引起的信号快速起伏变化。一般会将这两个特征分别进行数学建模，根据研究目标不同，对两种衰落的建模细致程度也会不一样。而本文讨论的大规模 MIMO 信道还会涉及到 MIMO 天线阵列对信号传输造成的影响和大规模阵列与普通 MIMO 信道的不同。

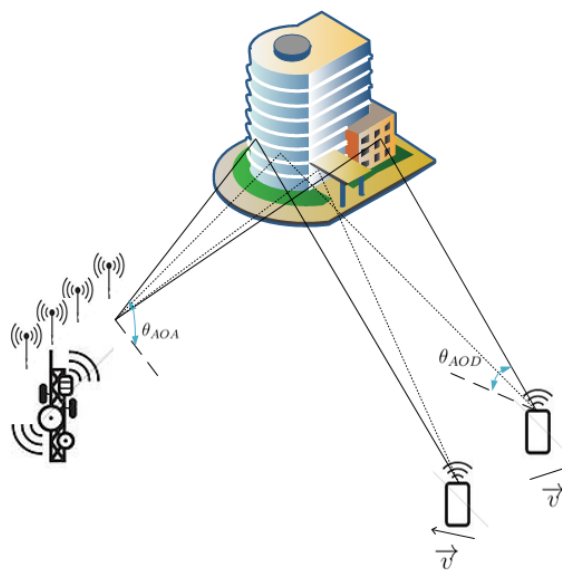


图 2.1 MIMO 场景示意图

2.2 MIMO 信道物理模型

本论文考虑的是大规模 MIMO 模型的上行信道，所以本文 MIMO 模型考虑为固定基站，配备 N_R 根天线，移动用户终端配备 N_T 根天线，其移动以 \vec{v} 表示。而城市中信道模型主要考虑的是信号传输在其中的多径情况，信号经过不同的物体表面会出现发射吸收等情况，导致最后到达接收端出现衰落，时延和相位变化。并且考虑到用户终端是移动的，会产生不同径上不同程度上的多普勒频偏。并且 MIMO 模型与一般的 SISO 模型不相同的地方在于天线阵列会提供天线阵列带来的发射和接收增益，所以我们可以将信道模型写为如下形式

$$h_{n_R, n_T, p}(t) = \sum_{q=1}^{Q_p} u_{n_R, p, q} h_{p, q}(t) w_{n_T, p, q} \quad (2.1)$$

其中，式 (2.2) 意义是信道多径带来的信道响应，式 (2.3)(2.4) 意义是天线阵列带来的信道响应

$$h_{p, q}(t) = \alpha_{LNA} \beta \alpha_{PA} a_{p, q} e^{j(2\pi(v_{p, q} t - f_c \tau_{p, q} - v_{p, q} \tau_{p, q}) + \phi_{p, q})} \quad (2.2)$$

$$w_{n_T, p, q} = \exp(-j2\pi \frac{d_{n_T}}{\lambda} \sin \theta_{p, q, AOD}) \quad (2.3)$$

$$u_{n_R, p, q} = \exp(-j2\pi \frac{d_{n_R}}{\lambda} \sin \theta_{p, q, AOA}) \quad (2.4)$$

以下主要讨论的是信道小尺度衰落的特征， $v_{p, q}$ 为多普勒频移 $v_{p, q} = \frac{v}{\lambda} \cos \theta_{v, p, q}$ 为用户端移动带来的影响 $\phi_{p, q}$ 为相位变化。式 (2.2) 中 $a_{p, q}$ 为相位信号幅度衰减， $\tau_{p, q}$ 为传播带来的时延，其中时延拓展一般分为最大时延拓展和均方根时延拓展，最大时延拓展定义为最大时延径和最小时延径的时延差，均方根时延拓展分别定义为

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^P (\tau_p - \bar{\tau}) P(\tau_p)}{\sum_{p=1}^P P(\tau_p)}} \quad (2.5)$$

其中，

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{p=1}^P \tau_p P(\tau_p)}{\sum_{p=1}^P P(\tau_p)} \quad (2.6)$$

通常因为不同径距离不同而带来的通过时间的差异，所以一般时延拓展一般多会考虑时延的统计特性。

用 β 来表示大尺度衰落，大尺度衰落一方面指的是接收信号功率随着距离的减少，被称为路径损耗，另一方面指的是接收信号功率由于阴影造成的随机衰减，被称为随机衰落。结合两种主要大尺度衰落，一般为了方便计算可以简单的建模为，单位为分贝

$$\beta = 10 \log_{10} K - 10\gamma \log_{10} \frac{d}{d_0} - \psi_{dB} \quad (2.7)$$

其中， K 是一个常系数，由天线的固有性质决定。 d_0 为天线远场的参考距离， d 为收发端之间的距离， ψ_{dB} 是零均值，方差为 $\sigma_{\psi_{dB}}$ 的高斯变量。即 $10 \log_{10} K$ 为天线的增益， $10\gamma \log_{10}$ 为路径距离带来的影响，研究表明随着路径的增长，路径损耗趋势成指数级，而一般认为在系统定义的远场距离之外才呈现这样的性质，在远场距离之内的一般不考虑这种建模方式， γ 一般是考虑载波的频率和天线高度所得出的， ψ_{dB} 即为随机衰落，主要是由于阴影衰落的带来的，一般建模为 log-normal 模型

$$p(\psi) = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\psi_{dB}\psi}} \exp\left(-\frac{(10 \log_{10} \psi - \mu_\psi)^2}{2\sigma_{\psi_{dB}}^2}\right), \quad \psi > 0 \quad (2.8)$$

而如上面所述，一般单位设置为 dB，则改写为下式，并一般以其的高斯分布表示

$$p(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\psi_{dB}}} \exp\left(-\frac{(\psi_{dB} - \mu_{\psi})^2}{2\sigma_{\psi_{dB}}^2}\right), \quad \psi > 0 \quad (2.9)$$

此外，有些考虑视界传输信道 (LOS) 会将大尺度建模为自由空间传输路损模型。

式 (2.3)(2.4) 代表的天线阵列信道响应，其中， d_{n_T} 表示第 n_T 根发送天线与第一根发射天线的距离， d_{n_R} 表示第 n_R 根接收天线与第一根接收天线的距离。 $\theta_{p,q,AOD}$ 表示的是第 p 径的第 q 个子径的离开角， $\theta_{p,q,AOD}$ 表示的是第 p 径的第 q 个子径的到达角。因为基站侧天线阵列天线间隔会导致天线接收到的数据相位上的不同，导致接收天线具有一定的方向性，同理可以推导至发射端以及发射天线，在这种情况下到达角 $\theta_{p,q,AOD}$ 和离开角 $\theta_{p,q,AOD}$ 会比较重要。

对于式 (2.2) 代表的多径衰落，在不考虑阵列增益时 $h_{n_R,n_T,p}(t)$ 是很多个子径之和，子径可以由服从均匀分布的复数表示，这里的 Q_p 是比较大，所以一般将 $h_p(t)$ 考虑建模为两种信道模型。一种是不考虑直达径的瑞利衰落信道，这里讲 $h_p(t)$ 建模为均值为零，方差为 σ_p^2 的复高斯分布随机变量。同时，因为是经过不同的散射体，各径之间相互独立，对于不同的 p_1 和 p_2 ， h_{p_1} 和 h_{p_2} 是统计独立的。另一种是考虑直达径的瑞信衰落信道，即第一个径包括直达径， h_1 建模为均值非零的复高斯随机变量，幅值满足瑞信分布。在 MIMO 模型中因为需要考虑阵列带来的接收和发送增益，所以还需要考虑信道模型中的阵列向量响应。

P 径的信道的矩阵形式如下

$$\mathbf{H}_p(t) = \begin{bmatrix} h_{1,1,p}(t) & h_{1,2,p}(t) & \cdots & h_{1,N_T,p}(t) \\ h_{2,1,p}(t) & h_{2,2,p}(t) & \cdots & h_{2,N_T,p}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_R,1,p}(t) & h_{N_R,2,p}(t) & \cdots & h_{N_R,N_T,p}(t) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

由此，信道矩阵表示为

$$\mathbf{H}(t, \tau) = \sum_{p=1}^P \mathbf{H}_p(t) \delta(\tau - \tau_p) \quad (2.11)$$

写成矩阵形式为

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^P h_{1,1,p}(t) & \sum_{p=1}^P h_{1,2,p}(t) & \cdots & \sum_{p=1}^P h_{1,N_T,p}(t) \\ \sum_{p=1}^P h_{2,1,p}(t) & \sum_{p=1}^P h_{2,2,p}(t) & \cdots & \sum_{p=1}^P h_{2,N_T,p}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{p=1}^P h_{N_R,1,p}(t) & \sum_{p=1}^P h_{N_R,2,p}(t) & \cdots & \sum_{p=1}^P h_{N_R,N_T,p}(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

本论文讨论的是窄带信号，但是需要注意的是，在考虑宽带情况下，信道都具有具有时间选择性和频率选择性。除此以外，MIMO 信道还具有空域选择性，这一特性会导致 MIMO 信道矩阵各元素具有相关性。信道的功率角度谱和角度拓展用来表示 MIMO 信道的空域选择性，以 $P(\theta_{AOA})$ 表示到达角为 θ_{AOA} 方向上信道幅值的均方值，反映 θ_{AOA} 方向上的平均接收功率，称为信道的功率角度谱。均方根角度拓展定义为

$$\sigma_{\theta_{AOA}} = \sqrt{\frac{\int_{-\pi}^{\pi} (\theta_{AOA} - \bar{\theta}_{AOA}) P(\theta_{AOA}) d\theta_{AOA}}{\int_{-\pi}^{\pi} P(\theta_{AOA}) d\theta_{AOA}}} \quad (2.13)$$

2.3 MIMO 信道统计模型

以上是信道的物理模型，在处理信道时，为了方便处理，一般会使用物理模型特性推导的统计模型，在使用统计模型时需要明确以下概念。

信道信息分为发送端得到的信道信息 (CSIT)，接收端得到的信道信息 (CSIR)。一般考虑的是接收端得到的信道信息，通过发送导频序列进行信道估计能很容易的得到信道增益信息。在有反馈路径的时候，CSIT 由接收端将接收端估计出的信道信息 (CSIR) 发送回去得到。或者在没有反馈路径的双向通信的系统中，CSIT 也可以利用传播的倒数特性得到。当系统收发两端都无法得到信道信息时，需要利用一些特殊的数学模型，例如零平均空间白 (ZMSW) 模型，ZMSW 模型中信道矩阵 \mathbf{H} 中的元素被认为是独立同分布的零均值单位方差循环对称的复高斯变量。或者，其中的元素可以是均值非零或者协方差矩阵。关于 CSI 的不同假设和 \mathbf{H} 中元素的分布主要反映的是不同的信道容量或者是空时响应的不同方式。

考虑带宽为 B ，零均值，协方差矩阵为 $\sigma^2 \mathbf{I}_{M_r}$ 的噪声， $\sigma^2 \triangleq \mathbf{E}[n_i^2] = N_0/2$ 。并有发射信号

$$\sum_{i=1}^{M_t} \mathbf{E}[x_i x_i^*] = P \quad (2.14)$$

或者可以写为

$$\mathbf{E}[\text{tr}(\mathbf{x}\mathbf{x}^H)] = P \quad (2.15)$$

则信道矩阵有

$$\mathbf{E}[\text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^H)] = N_R N_T \quad (2.16)$$

发射功率约束 P 将根据 $P/\sigma^2 = \rho$ 得到 $\text{SNR}\rho$ ，同时如果考虑天线能量均匀分布的话有 $\mathbf{E}[(\mathbf{x}\mathbf{x}^H)] = (P/N_t)\mathbf{I}_{N_t}$ ， ρ 可以用来表示在单通道增益下单根接收天线的平均信噪比 SNR 。为了简化模型，有时会将噪声功率归一化，此时 ρ 也可以用来表示发射功率。

本论文讨论的是双向通信背景下的基站侧的检测估计，所以认为发送接收双方都有信道信息。从式 (2.10) 可以得到 \mathbf{H} 是一个 $N_R \times N_T$ 矩阵。考虑该情况下的联合相关信道

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}_r \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}_t^H = \mathbf{U}_r (\mathbf{D} + \mathbf{M} \odot \mathbf{H}_{idd}) \mathbf{U}_t^H \quad (2.17)$$

其中 $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{D} + \mathbf{M} \odot \mathbf{H}_{idd}$ ， \mathbf{U}_t 和 \mathbf{U}_r 分别是 $N_T \times N_T$ 维和 $N_R \times N_R$ 维的确定酉矩阵。 \mathbf{D} 是一个 $N_R \times N_T$ 维每行每列至少有一个非零元素的确定性矩阵， \mathbf{M} 是一个 $N_R \times N_T$ 维非负确定矩阵， $\mathbf{H}_{i.i.d.}$ 是一个 $N_R \times N_T$ 维零均值独立同分布的矩阵。 $\mathbf{H}_{i.i.d.}$ 并不限于是高斯。但本文在上述条件下考虑的是单位方差的高斯矩阵。由上式 (2.15) 一般定义

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{H}} \odot \tilde{\mathbf{H}}^*] \quad (2.18)$$

即

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{D} \odot \mathbf{D} + \mathbf{M} \odot \mathbf{M} \quad (2.19)$$

则有

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{H}}] \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]_{ij} &= \sqrt{\text{var}([\tilde{\mathbf{H}}]_{ij})} \\ &= \sqrt{[\mathbf{\Omega}]_{ij} - [\mathbf{D}]_{ij}^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

即矩阵 \mathbf{D} 和 \mathbf{M} 分别代表了信道的 LOS 和信道的稀疏元素所以又称 $\mathbf{\Omega}$ 为特征能量耦合矩阵，可以看出特征能量耦合矩阵 $\mathbf{\Omega}$ 的各行各列是信号传输过程中发送端和接收端相关矩阵的集合，这些本征值是不可分解的，并且代表了信道的联合相关特征。并且根据上述性质，其可以改写发射功率约束为

$$\sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=1}^{N_T} [\mathbf{\Omega}]_{ij} = N_T N_R \quad (2.22)$$

又因为式 (2.14)，可以将发射和接收端的协方差矩阵写为

$$\mathbf{R}_t = \mathbb{E}\{\mathbf{H}^H \mathbf{H}\} = \mathbf{U}_t \mathbf{\Lambda}_t \mathbf{U}_t^H \quad (2.23)$$

$$\mathbf{R}_r = \mathbb{E}\{\mathbf{H} \mathbf{H}^H\} = \mathbf{U}_r \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{U}_r^H \quad (2.24)$$

$\mathbf{\Lambda}_t$ 和 $\mathbf{\Lambda}_r$ 是对角阵，并有

$$[\mathbf{\Lambda}_t]_{ii} = \sum_{j=1}^{N_r} [\mathbf{\Omega}]_{ji} \quad (2.25)$$

由此可以说明 \mathbf{U}_t 和 \mathbf{U}_r 是发送端和接收端协方差矩阵的特征向量矩阵。这些矩阵元素由天线的特性决定。本论文主要讨论的天线阵列为均匀线阵 (ULA)，所以特征向量矩阵也可以直接写为离散傅里叶变换矩阵 (DFT)。

上面推导的联合概率模型是一个泛式，根据 \mathbf{D} 和 \mathbf{M} 不同取值，可以分为不同的联合概率模型。例如，当 $\mathbf{D} = 0$, \mathbf{M} 是一个秩为 1 的矩阵， $\mathbf{H}_{i.i.d.}$ 有瑞利衰落信道，则上述模型为分离相关 Kronecker 模型。当令 \mathbf{M} 的秩为随机值，将 \mathbf{U}_t 和 \mathbf{U}_r 固定为 DFT 矩阵，此时获得的信道模型为均匀线阵天线系统的虚拟信道模型。在这基础上，令 \mathbf{U}_t 和 \mathbf{U}_r 为随机酉矩阵，得到的为 Weichselberger 模型。本论文考虑的主要是在 Weichselberger 模型基础上令 $\mathbf{D} = 0$ 的 UIU 模型。

除此之外，还有一种常用 MIMO 信道统计模型是分离相关信道模型，也称为直积信道模型，一般表示为 $\mathbf{H} = \mathbf{\Theta}_R^{1/2} \mathbf{H}_{i.i.d.} \mathbf{\Theta}_T^{1/2}$ 其一般不考虑信道时变特性，并且联合相关信道模型更加贴近实际，所以本论文不考虑直积信道模型的作用。

2.4 大规模 MIMO 波束域信道模型

推导波束域信道模型，需要预先分析大规模 MIMO 的空间信道特征，考虑上文提到的物理信道模型式 (2.1) 和式 (2.2)，为了后续化简可以将其改写为矩阵形式并合并一些本论文不作具体建模的变量

$$\mathbf{H} = \sum_{p=1}^P \beta_p \mathbf{u}_{r,p} \mathbf{w}_{t,p}^H e^{-j2\pi\tau_{p,k}} \quad (2.26)$$

β_p 表示第 p 径带来的总体增益其中包括之前提到的发射接收增益以及路径衰落。本论文考虑的是均匀线阵天线阵列，并且天线间隔为半波长，根据式 (2.3) 和式 (2.4) 可以将阵列响应写成如下的向量形式

$$\mathbf{u}_{r,p}(\theta_{AOA}) = [1, e^{-j\pi \sin \theta_{AOA}}, \dots, e^{-j\pi(N_R-1)\theta_{AOA}}] \quad (2.27)$$

$$\mathbf{w}_{t,p}(\theta_{AOD}) = [1, e^{-j\pi \sin \theta_{AOD}}, \dots, e^{-j\pi(N_T-1)\theta_{AOD}}] \quad (2.28)$$

为了将模型变换到波束域，这里需要证明一个定理，在大规模 MIMO 系统条件下，当基站侧天线数趋于无穷时，有离散傅里叶变换 (DFT) 可以作为信道的特征矩阵。在天线数趋于无穷时，不同到达角 AOA 的阵列响应相互独立性质，即到达角的响应集中在一个位置。

$$\lim_{N_R \rightarrow \infty} \frac{1}{N_R} \langle \mathbf{u}(\theta_1), \mathbf{u}(\theta_2) \rangle = \delta(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.29)$$

将式 (2.10) 的信道矩阵重写成向量的集合

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{N_T}] \quad (2.30)$$

其中，

$$\mathbf{h}_m = \sum_{p=1}^P \beta_p e^{j\pi(n_r-1)\sin(\theta_{AOA})} \mathbf{w}_{t,p}(\theta_{AOD}) e^{-j2\pi\tau_p} \quad (2.31)$$

其左乘 DFT 矩阵，得到信道 DFT 之后的矩阵

$$\mathbf{H}_F = \mathbf{F}\mathbf{H} = [\mathbf{h}_{F,1}, \mathbf{h}_{F,1}, \dots, \mathbf{h}_{F,N_T}] \quad (2.32)$$

\mathbf{F} 为 $N_R \times N_R$ DFT 矩阵，其 (n_r, n'_r) 元素为

$$[\mathbf{F}]_{n_r, n'_r} = \frac{1}{\sqrt{N_R}} e^{-j \frac{2\pi(n_r-1)(n'_r-1)}{N_R}} \quad (2.33)$$

带入式 (2.29) 可得

$$\mathbf{h}_{F,m} = \sum_{p=1}^P \beta_p \left(\sum_{i=0}^{N_R-1} \frac{1}{\sqrt{N_R}} e^{j2\pi i(0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R})} \right) \mathbf{w}_{t,p}(\theta_{AOD}) e^{-j2\pi\tau_p} \quad (2.34)$$

根据之前提到的性质式 (2.27)，当基站侧天线趋于无穷时，式 (2.32) 可以写成

$$\lim_{N_R \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N_R-1} \frac{1}{\sqrt{N_R}} e^{j2\pi i(0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R})} = \begin{cases} 0 & 0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R} \notin \mathbb{Z} \\ \lim_{N_R \rightarrow \infty} \sqrt{N_R} & 0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R} \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.35)$$

一般考虑 $0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R} \in \mathbb{Z}$ 中 $0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R}$ 的结果只有可能是 -1 和 0，并且 AOA 角和天线序号一一对应。为了简化，考虑使用如下等式，使得其的结果只可能为 0，从而方便接下来的推导

$$\tilde{n}_r = \begin{cases} n_r - \frac{n_r-1}{N_R} < \frac{1}{2} \\ n_r - N_R & \frac{n_r-1}{N_R} \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.36)$$

从而改写上式 (2.32) 为

$$\mathbf{h}_{F,m} = \sum_{p=1}^P \beta_p \left(\delta(0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{\tilde{n}_r-1}{N_R}) \right) \mathbf{w}_{t,p}(\theta_{AOD}) e^{-j2\pi\tau_p} \quad (2.37)$$

然后本文上面推导的统计相关信道时，得到了接收端相关阵，因为本文考虑的是上行信道，所以基站侧相关阵参考 (2.22)

$$\mathbf{R}_{F,r} = \mathbb{E}\{\mathbf{H}_F(\mathbf{H}_F)^H\} \quad (2.38)$$

则有相关阵的第 (i,j) 个元素为

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{F,r}]_{i,j} &= \mathbb{E}\{\mathbf{h}_F(\mathbf{h}_F)^H\} \\ &= \sum_{p=1}^P \sigma_{\beta_p}^2 \mathbf{w}_t(\theta_{AOD}) \mathbf{w}_t^H(\theta_{AOD}) N_R \delta \left(0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{\tilde{i}-1}{N_R}, 0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{\tilde{j}-1}{N_R} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

由式 (2.37) 可知, 当 $i \neq j$ 时, $[\mathbf{R}_{F,r}]_{i,j} = 0$, 即基站侧相关阵的为对角阵。因而当天线数趋于无穷时, DFT 矩阵 \mathbf{F} 为基站侧相关阵的特征矩阵 $\mathbf{U}_r = \mathbf{F}$ 。

本文在建立统计信道模型的时候讨论了用以表示发射功率约束的特征能量耦合矩阵, 上面各式推导的即为式 (2.15) 中的 \mathbf{U}_r , 所以用 DFT 矩阵可以写出特征模式能量耦合矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{H}} \odot \tilde{\mathbf{H}}^*] \\ &= \sum_{p=1}^P \sigma_{\beta_p}^2 [\mathbf{F} \mathbf{u}_r(\theta_{AOA}) \mathbf{w}_t(\theta_{AOD})] \odot [\mathbf{F} \mathbf{u}_r(\theta_{AOA}) \mathbf{w}_t(\theta_{AOD})]^*\end{aligned}\quad (2.40)$$

如果考虑 OFDM 系统, 上式经过变式后同样可以说明特征模式能量耦合矩阵与载波无关, 即不同载波的能量分布是均匀的。

由上面推导过程, 可以给出以下定义, 来表示基站侧配置大规模天线阵列, 上行波束域信道模型

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{F} \mathbf{H} \quad (2.41)$$

由于上行链路和下行链路的统计信道信息在频分双工 (FDD) 和时分双工 (TDD) 具有互易性, 并且在前面同样提到了 CSI 信息可以通过反馈通道或者是双向通信传输, 所以下行链路的波束域模型可以由下式定义

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \mathbf{F}^H \quad (2.42)$$

通过上面的推导, 易得波束域信道的两个重要空间特征: 波束域信道在基站侧是不相关的; 上行波束域信道描述的是基站侧对于不同到达角的特征, 信道矩阵的不同列代表了不同的到达角, 每一个到达角又称为一个波束, 故称为波束域信道模型。

本论文考虑的是上行链路和窄带信号, 所以不涉及 OFDM 系统和下行链路。但是从推导中容易得到信道统计信息与载波无关, 并且有下式来简化模型

$$\boldsymbol{\Omega}_u^T = \boldsymbol{\Omega}_d = \boldsymbol{\Omega} \quad (2.43)$$

波束域信道模型主要是突出离散傅里叶变换矩阵 (DFT) 表现的阵列的性质, 并且这种阵列带来的角分辨率随着阵列规模的增大而增大。实际系统中, 阵列规模是有限的, 但是均匀线阵的阵列在数目较大的情况下, 波束域信道还是很好地近似了实际信道。本文考虑的大规模 MIMO 信道检测与估计难度在于大规模阵列带来的信道矩阵协方差矩阵维度将会非常大, 普通 MMSE 检测复杂度在 $\mathcal{O}(n^3)$, 这是非常大的计算量。波束域信道模型需要检测估计的是信道协方差矩阵特征矩阵, 大大减少了估计参数。

此外, 基站侧的信道协方差矩阵也可以写作如下简单的表示

$$\mathbf{R}_r \rightarrow \mathbf{U}_r \hat{\mathbf{R}}_r \mathbf{U}_r^H \quad (2.44)$$

依据上面的推导内容, 本文还可以引出如下性质

$$\text{vec}(\mathbf{H}_{k,l}^d) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [\tilde{\mathbf{H}}_{p,k}^d]_{nm} e_t^*(\varphi_m) \otimes e_r(\theta_{n,k}) \quad (2.45)$$

并计算全相关矩阵的表达形式

$$\mathbf{R}_{\mathbf{H},k} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mathbb{E}\{[\tilde{\mathbf{H}}_{p,k}^d]_{nm} [\tilde{\mathbf{H}}_{p,k}^d]_{nm}^H\} \times (e_t^*(\varphi_m) \otimes e_r(\theta_{n,k})) (e_t^*(\varphi_m) \otimes e_r(\theta_{n,k}))^H \quad (2.46)$$

由上面推导，以及文献中表述，可以很清楚的发现全相关矩阵和联合相关矩阵是一致的。同时可以验证本文基站侧信道特征模式能量耦合矩阵的正确性。

本论文讨论的主要是基于波束域信道模型的低复杂度检测算法，还有一种方式是依据如下关于并行分解的方式。即一个 MIMO 系统可以将 MIMO 信道可以被看做是一系列 (总数为 R) 的平行独立信道来解释。得益于在相互独立的信道上复用相互独立的数据，我们可以获得比单天线高 R 倍的数据率。

考虑一个 $M_r \times M_t$ MIMO 信道，信道矩阵为 \mathbf{H} 并且接收端和发送端都获得了信道矩阵信息。令 $R_{\mathbf{H}}$ 代表 \mathbf{H} 的秩。通过 SVD，可以得到 \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H \quad (2.47)$$

其中， \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 都是酉矩阵， \mathbf{H} 为随机矩阵。该模型更贴近实际 MIMO 信道。因为 $R_{\mathbf{H}}$ 代表 \mathbf{H} 的秩，所以 $R_{\mathbf{H}} \leq \min(M_t, M_r)$ 。当 \mathbf{H} 满秩，称为全散射环境。其他环境都会导致非满秩， \mathbf{H} 元素的高相关性秩为 1。通道并行分解是通过发送预编码和接收机整形得到的。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{U}^H\mathbf{y} \\ \tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{U}^H(\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{U}^H(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{n}) \\ &= \Sigma\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (2.48)$$

其中 $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{U}^H\mathbf{n}$ 。其中 Σ 是矩阵 \mathbf{H} 第 i 条对角线的单值组成的矩阵，其余为零的矩阵。虽然该单值都与矩阵 \mathbf{H} 相关，但是我们认为不同信道并不相干，所以认为不同信道都是独立的。由此转化为 SISO 模型进行处理，本文不再讨论其作用。

2.5 波束域信道特性

由上面的推导，可以得出很多波束域信道的空间特征和数学特性，下文将展开叙述波束域信道的各方面特性。本文主要讨论的波束域信道三个特性：基站侧相关阵的特征矩阵为信道的 DFT 矩阵；在上行系统中，信道矩阵的不同列代表了不同的到达角，每一个到达角又称为一个波束；特征矩阵具有稀疏特性。

2.5.1 DFT 矩阵解相关

在讨论基站侧相关阵的特征矩阵为信道的 DFT 矩阵前，本文简要介绍 DFT 及其性质。令 $x[n], 0 \leq n \leq N-1$ 代表一个离散的时间序列， $x[n]$ 的 N 点的 DFT 定义为

$$\text{DFT}\{x[n]\} = X[i] \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi ni/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (2.49)$$

DFT 等同于连续时间傅里叶变换的离散表达，所以 $X[i]$ 代表的是时域信号 $x(t)$ 采样信号 $x[n]$ 的频域内容。连续时间傅立叶变换和离散傅立叶变换都是基于复指数是任何线性系统的特征

函数。当然采样序列 $x[n]$ 也可以通过反 DFT 从频域内容中恢复出时域信息。

$$\text{IDFT}\{X[i]\} = x[n] \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} X[i] e^{j2\pi ni/N}, \quad 0 \leq i \leq N-1 \quad (2.50)$$

利用快速傅里叶变换以及快速傅里叶反变换在硬件上可以很容易得到 DFT 和反 DFT 的结果。

使用 DFT 的时候，通常需要注意在一个线性时变离散时间信道中，得到的接收信号是发送信号和信道冲击响应的离散时域的卷积结果

$$y[n] = h[n] * x[n] = x[n] * h[n] = \sum_k h[k] x[n-k] \quad (2.51)$$

$x[n]$ 和 $h[n]$ N 位的循环卷积为

$$y[n] = h[n] \circledast x[n] = x[n] \circledast h[n] = \sum_k h[k] x[n-k]_N \quad (2.52)$$

其中 $[n-k]_N$ 代表的是 $[n-k]$ 对 N 取模。即 $x[n-k]_N$ 是周期为 N 的周期数列。由此易得 $y[n]$ 同样也是周期数列。同时根据 DFT 的定义，时域的循环卷积代表的是频域相乘

$$\text{DFT}\{y[n] = x[n] \circledast h[n]\} = X[i]H[i], \quad 0 \leq i \leq N-1 \quad (2.53)$$

$H[i]$ 是一个 N 点的 $\{h[n]\}$ 。一般在时域离散信道冲击响应序列长度不满足 N 时，通常会补零至满足 N 长度。如果与本文类似的，接收端可以获得信道信息，根据反 DFT 可以通过接收到的时域信号 DFT 结果 $Y[i]$ 和公式 $Y[i]/H[i]$, $0 \leq i \leq N-1$ 得到。

由波束域信道推导过程，基站侧相关阵的特征矩阵为 DFT 矩阵，DFT 矩阵易得，所以可以通过 DFT 矩阵，参考式 (2.38) 可以利用 DFT 矩阵得出信道的相关阵，表达形式即式 (2.39)

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{F,r}]_{i,j} &= \mathbb{E}\{\mathbf{h}_F(\mathbf{h}_F)^H\} \\ &= \sum_{p=1}^P \sigma_{\beta_p}^2 \mathbf{w}_t(\theta_{AOD}) \mathbf{w}_t^H(\theta_{AOD}) N_R \delta \left(0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{\tilde{i}-1}{N_R}, 0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{\tilde{j}-1}{N_R} \right) \end{aligned}$$

2.5.2 对应波束

根据上面提到的信道矩阵左乘 DFT 矩阵，得到信道 DFT 之后的矩阵

$$\mathbf{H}_F = \mathbf{F}\mathbf{H} = [\mathbf{h}_{F,1}, \mathbf{h}_{F,1}, \dots, \mathbf{h}_{F,N_T}] \quad (2.54)$$

\mathbf{F} 为 $N_R \times N_R$ DFT 矩阵，其 (n_r, n'_r) 元素为

$$[\mathbf{F}]_{n_r, n'_r} = \frac{1}{\sqrt{N_R}} e^{-j \frac{2\pi(n_r-1)(n'_r-1)}{N_R}} \quad (2.55)$$

带入式 (2.29) 可得

$$\mathbf{h}_{F,m} = \sum_{p=1}^P \beta_p \left(\sum_{i=0}^{N_R-1} \frac{1}{\sqrt{N_R}} e^{j2\pi i(0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R})} \right) \mathbf{w}_{t,p}(\theta_{AOD}) e^{-j2\pi \tau_p} \quad (2.56)$$

根据之前提到的性质式 (2.27)，当基站侧天线趋于无穷时，式 (2.55) 可以写成

$$\lim_{N_R \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N_R-1} \frac{1}{\sqrt{N_R}} e^{j2\pi i(0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R})} = \begin{cases} 0 & 0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R} \notin \mathbb{Z} \\ \lim_{N_R \rightarrow \infty} \sqrt{N_R} & 0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R} \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.57)$$

一般考虑 $0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R} \in \mathbb{Z}$ 中 $0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{n_r-1}{N_R}$ 的结果只有可能是 -1 和 0，并且 AOA 角和天线序号一一对应。为了简化，考虑使用如下等式，使得其的结果只可能为 0，从而方便接下来的推导

$$\tilde{n}_r = \begin{cases} n_r - \frac{n_r-1}{N_R} < \frac{1}{2} \\ n_r - N_R & \frac{n_r-1}{N_R} \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.58)$$

通过上面推导和公式，可以发现在 AOA 角和天线序号一一对应，换句话说，即 AOA 角所对应的在波束域信道中被定义为波束。以下将用信道模型示意图来展示大规模 MIMO 的波束域信道的波束特性。在此之前，本文简要介绍下所使用的信道模型。此信道模型以多输入多输出 (MIMO) 无线链路参数、模型配置参数和天线参数作为输入，并输出 MIMO 信道矩阵。对于多个 BS-MS 链路，可以通过一个函数调用生成信道矩阵。输出是一个多维阵列，它包含预定数量的无线电链路的信道脉冲响应。此模型可以将 MS-BS 距离、阵列方向和 MS 移动性参数映射到模型的输入格式，由系统模拟器程序完成。为了更容易地使用该模型，可以使用默认 (随机) 参数。信道卷积和其他相关操作超出了此信道的实现范围。此模型属于空间信道模型 SCM。考虑远场散射环境，选取仿真环境为郊区宏蜂窝模型。首先考虑单天线的情况，仿真均没有考虑大尺度衰落即路损和阴影衰落。此时均考虑的是单用户或者多用户其中一个的情况。

表 2.1 SCM 仿真参数设置

参数	设置值
场景	郊区宏蜂窝
基站侧天线数	128
用户数天线	1
天线间距	0.5λ
路径数	6

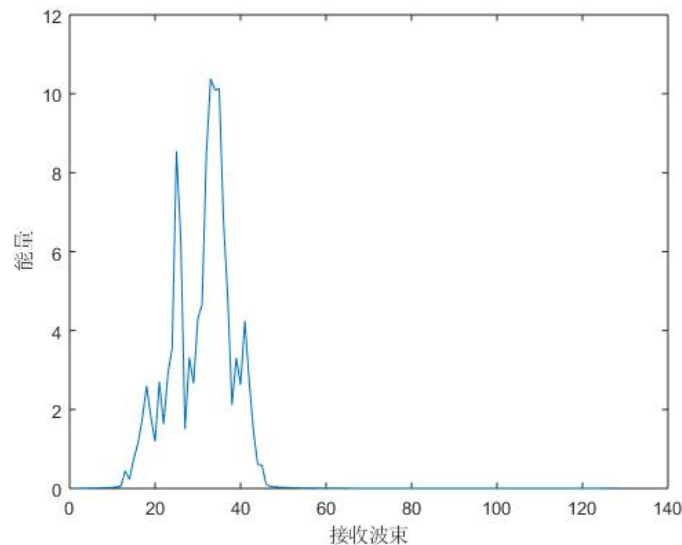


图 2.2 用户单天线波束域信道能量耦合矩阵

考虑用户多天线的情况，此时耦合矩阵不再是单维的，所以多天线的耦合矩阵是 3 维视图

表 2.2 SCM 仿真参数设置

参数	设置值
场景	郊区宏蜂窝
基站侧天线数	128
用户数天线	4
天线间距	0.5λ
路径数	6

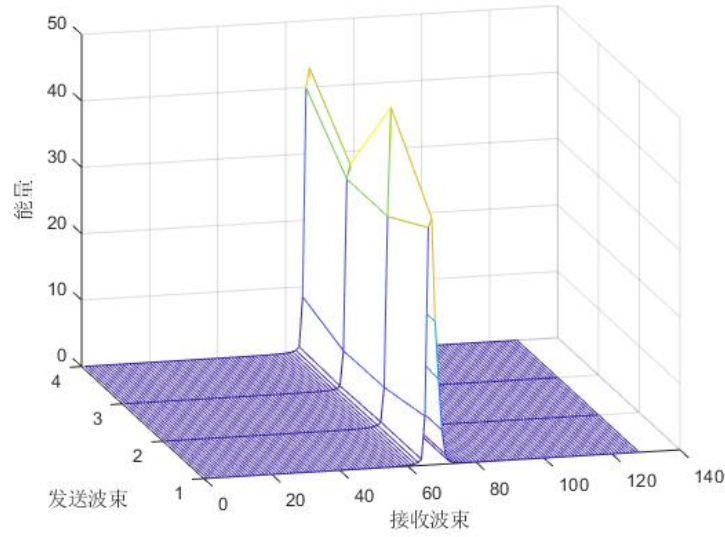


图 2.3 用户多天线波束域信道能量耦合矩阵

由上面两图可以看出能量集中波束上，并且天线和 AOA 角对应同时也和波束对应。

2.5.3 特征矩阵稀疏性

本文上面也推导过相关阵的各元素表达式，上行信道，所以基站侧相关阵参考 (2.22)

$$\mathbf{R}_{F,r} = \mathbb{E}\{\mathbf{H}_F(\mathbf{H}_F)^H\} \quad (2.59)$$

则有相关阵的第 (i,j) 个元素为

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{F,r}]_{i,j} &= \mathbb{E}\{\mathbf{h}_F(\mathbf{h}_F)^H\} \\ &= \sum_{p=1}^P \sigma_{\beta_p}^2 \mathbf{w}_t(\theta_{AOD}) \mathbf{w}_t^H(\theta_{AOD}) N_R \delta \left(0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{\tilde{i} - 1}{N_R}, 0.5 \sin \theta_{AOA} - \frac{\tilde{j} - 1}{N_R} \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

由式 (2.37) 可知，当 $i \neq j$ 时， $[\mathbf{R}_{F,r}]_{i,j} = 0$ ，即基站侧相关阵的为对角阵。由于基站侧相关阵为对角阵，并且存在有阵列响应矩阵在该位置较小或者为 0，所以相关阵不一定满秩，且为对

角阵，即利用相关阵计算可以利用对角阵的数学性质进行化简，并且因为其稀疏性质将大大减少 MMSE 的计算复杂度。通过验证波束域信道对应波束的 SCM 信道，同样通过相关阵的示意图，本文可以验证特征矩阵的稀疏性质。考虑多天线多用户的情况，参数设置如下

表 2.3 SCM 仿真参数设置

参数	设置值
场景	郊区宏蜂窝
基站侧天线数	128
用户数天线	4
天线间距	0.5λ
路径数	6

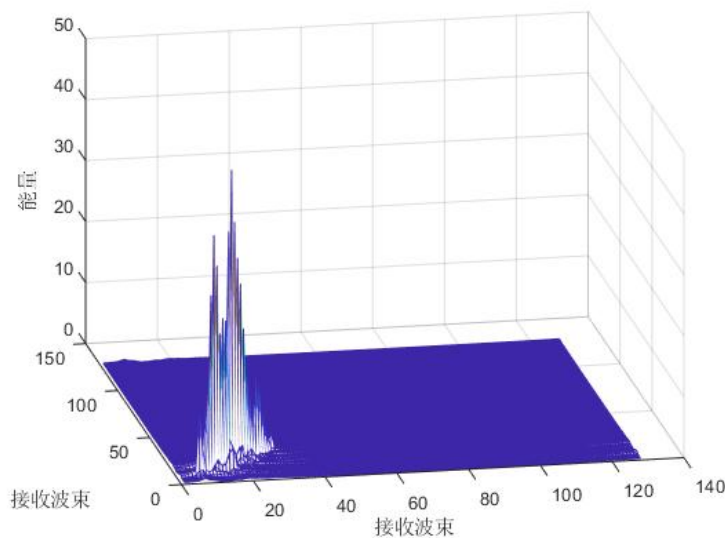


图 2.4 用户多天线波束域信道基站侧相关阵

由上图，可以看出本文生成的信道模型的基站侧相关阵为对角阵，并且很多对角阵上的值为 0 或者很小可以不做考虑，所以利用特征矩阵计算 MMSE 检测算法将大大减少检测时的计算复杂度。

2.6 本章小结

本章主要研究了 MIMO 信道物理模型，统计模型和波束域信道模型。其中物理模型主要是研究了影响信道情况的各种参数，并为后续各种模型的基础。统计信道模型主要研究了联合相关模型，作为实际相关仿真模型的基础模型。波束域信道模型主要体现的是大规模 MIMO 信道的特性和研究方式，通过波束域信道模型的特征，提供了减少计算复杂度切入点。

第三章 基于多项式展开的 MMSE 接收机

3.1 引言

信号在通过上述复杂信道之后，信号会发生改变，此时需要利用一些判决方法将接收信号恢复为发送信号。但是因为通过信道后信号同样会收到随机干扰，所以完全恢复为初始信号某种意义上是不存在的，但是通过一些方法，可以尽可能地或者说最大概率的接近发送信号。这些根据接收信号恢复发送信号的方法在通信系统中称为检测，目前针对 MIMO 系统最佳的检测方法为 MMSE 估计。

3.2 系统模型

在一个大规模 MIMO 系统中，一个基站将使用数以百计的天线来提供巨大的用户容量提高。在用户端，一般认为用户只有一根天线。但是，由于目前用户多天线的技术已经运用，将用户多天线应用到大规模 MIMO 系统中具有理论与实践的双重意义。所以在建立系统模型时，可以考虑用户多天线的情况。系统模型如下

考虑一个由一个基站 (BS) 和 K 个用户终端组成的系统，其中 K 个用户分别讨论其拥有单天线和多天线的情况。基站 (BS) 配有 N_R 根天线，第 k 个用户终端拥有 M_k 根天线，并且 $\sum_{k=1}^K M_k = M$ 。根据上面的推导，可以得到基站第 n 根接收第 i 个用户的第 r 根的信号为

$$r_{n,r} = \sum_{i=1}^{M_i} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^{Q_p} \text{Re} \left\{ u_{i,p,q} h_{p,q}(t) w_{i,p,q} s_b(t - \tau_{p,q}) e^{j2\pi f_c t} \right\} + n_{n,r}(t) \quad (3.1)$$

其中， $h(t)$ 和阵列响应如上。

$$h_{p,q}(t) = \alpha_{LNA} \beta \alpha_{PA} a_{p,q} e^{j(2\pi(v_{p,q}t - f_c \tau_{p,q} - v_{p,q} \tau_{p,q}) + \phi_{p,q})} \quad (3.2)$$

$$w_{n_T,p,q} = \exp(-j2\pi \frac{d_{n_T}}{\lambda} \sin \theta_{p,q,AOD}) \quad (3.3)$$

$$u_{n_R,p,q} = \exp(-j2\pi \frac{d_{n_R}}{\lambda} \sin \theta_{p,q,AOA}) \quad (3.4)$$

矩阵表达如下

$$\mathbf{r}_i(t) = [r_{1,i}(t) \quad r_{2,i}(t) \quad \dots \quad r_{N_R,i}(t)]^T \quad (3.5)$$

$$\mathbf{s}_i(t) = [s_{1,i}(t) \quad s_{2,i}(t) \quad \dots \quad s_{N_T,i}(t)]^T \quad (3.6)$$

$$\mathbf{n}_i(t) = [n_{1,i}(t) \quad n_{2,i}(t) \quad \dots \quad n_{N_R,i}(t)]^T \quad (3.7)$$

$$\mathbf{H}_{i,p}(t) = \begin{bmatrix} h_{1,1,p}(t) & h_{1,2,p}(t) & \dots & h_{1,M_i,p}(t) \\ h_{2,1,p}(t) & h_{2,2,p}(t) & \dots & h_{2,M_i,p}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_R,1,p}(t) & h_{N_R,2,p}(t) & \dots & h_{N_R,M_i,p}(t) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

由上面的矩阵表达和信号的物理表达式，可以将基带信号建模为

$$\mathbf{r}_i(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{H}_{i,p}(t) s_i(t - \tau_p) + \mathbf{n}_i(t) \quad (3.9)$$

本文在这里将信道模型简写为

$$y = \sum_{i=1}^K \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{Z} \quad (3.10)$$

有这样的性质

$$\mathbb{E}\{\text{tr}(\mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H)\} = \frac{NM_i}{M} \quad (3.11)$$

根据此性质 $\mathbb{E}\{\text{tr}(\mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H)\} = \frac{NM_k}{M}$ ，本文可以套用联合相关信道模型

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i &= \mathbf{U}_r \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}_t^H = \mathbf{U}_r (\mathbf{D} + \mathbf{M}_i \odot \mathbf{H}_{idd}) \mathbf{U}_t^H \\ &= \mathbf{U}_r \mathbf{D} \mathbf{U}_t^H + \mathbf{U}_r (\mathbf{M}_i \odot \mathbf{H}_{idd}) \mathbf{U}_t^H \mathbf{U}_t^H \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中 \mathbf{U}_r 和 \mathbf{U}_t 以及其他符号均与上面推导的式子相同，此处本文为了方便后续计算将 \mathbf{H}_{idd} 的方差设为 $\frac{1}{M}$ 。令

$$\bar{\mathbf{H}}_i = \mathbf{U}_r \mathbf{D} \mathbf{U}_t^H \quad (3.13)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_i = \mathbf{U}_r (\mathbf{M}_i \odot \mathbf{H}_{idd}) \mathbf{U}_t^H \mathbf{U}_t^H \quad (3.14)$$

根据性质，可以得出结论

$$\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{H}}_i \mathbf{C}_{ij} \tilde{\mathbf{H}}_j^H\} = 0_{N \times N} \quad (3.15)$$

$$\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{H}}_i^H \tilde{\mathbf{C}}_{ij} \tilde{\mathbf{H}}_j\} = 0_{M_i \times M_j} \quad (3.16)$$

其中， \mathbf{C}_{ij} 是一个 $M_i \times M_j$ 维的常数矩阵， $\tilde{\mathbf{C}}_{ij}$ 是一个 $N \times N$ 维的常数矩阵类似上面统计信道，定义能量耦合矩阵为

$$\mathbf{\Omega} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{H}} \odot \tilde{\mathbf{H}}^*] \quad (3.17)$$

即

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{M}_i \odot \mathbf{M} \quad (3.18)$$

则可以写出信道的单边相关矩阵 $\tilde{\eta}_i$ 表达式

$$\tilde{\eta}_i = \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{H}}_i \mathbf{C}_i \tilde{\mathbf{H}}_i^H\} \quad (3.19)$$

根据上面的波束域模型推导和统计信道模型令矩阵 $\tilde{\Pi}_i$ 为 $N \times N$ 的对角矩阵

$$\tilde{\Pi}_i = \sum_{j=1}^{M_i} [\Omega]_{ij} [\mathbf{U}_t^H \mathbf{C}_i \mathbf{U}_t]_{jj} \quad (3.20)$$

则有

$$\tilde{\eta}_i = \mathbf{U}_r \tilde{\Pi}_i \mathbf{U}_r^H \quad (3.21)$$

3.3 MMSE 估计

MMSE 估计是最小均放误差估计的缩写，其判决准则如下式

$$\hat{x}_{MMSE}(y) = \arg \min E[\|x - \hat{x}\|^2] \quad (3.22)$$

根据期望的性质以及复矢量微分和复矩阵微分，要使误差最小对 \hat{x}^* 方向求梯度为 0 即可以得到

$$\hat{x}_{MMSE}(y) = E[x|y] \quad (3.23)$$

考虑线性最小均方误差，可以得出线性表达式

$$\hat{x}_{LMMSE}(y) = Wy + b \quad (3.24)$$

同一般情况的 MMSE 一致，线性最小均方误差是对 W^* 和 b^* 方向求梯度为 0，以及设置在高斯白噪声信道下可以得到

$$\begin{cases} W = C_x H^H (H C_x H^H + \sigma^2 I)^{-1} \\ b = E[x] - C_x H^H (H C_x H^H + \sigma^2 I)^{-1} H E[x] \end{cases} \quad (3.25)$$

带入可得线性最小均方误差表达式

$$\hat{x}_{LMSSE}(y) = E[x] + C_x H^H (H C_x H^H + \sigma^2 I)^{-1} (y - H E[x]) \quad (3.26)$$

根据条件高斯 PDF 推导可得

$$E[x|y] = \mu_x + C_{xy} C_{yy}^{-1} (y - E[y]) \quad (3.27)$$

$$C_{x|y} = C_{xx} - C_{xy} C_{yy}^{-1} C_{yx} \quad (3.28)$$

根据发送信号均值和接收信号均值，以及协方差矩阵可以得到

$$E[x|y] = \mu_x + C_x H^H (H C_x H^H + \sigma^2 I)^{-1} (y - H \mu_x) \quad (3.29)$$

$$C_{x|y} = C_x - C_x H^H (H C_x H^H + \sigma^2 I)^{-1} H C_x \quad (3.30)$$

根据矩阵求逆定理

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (DA^{-1} B + C^{-1})^{-1} DA^{-1} \quad (3.31)$$

根据上式，可以将式 (3.29) 和 (3.30) 转换成如下形式

$$E[x|y] = \mu_x + (HC_n^{-1}H^H + C_x^{-1})^{-1}H^HC_n^{-1}(y - H\mu_x) \quad (3.32)$$

$$C_{x|y} = (HC_n^{-1}H^H + C_x^{-1})^{-1} \quad (3.33)$$

根据式 (3.24) 可以知道，且一般情况下，二进制采样后的信号均值为 0，则 MMSE 的检测矩阵为

$$\mathbf{W} = (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{H}^H \quad (3.34)$$

虽然可以通过上式，很容易得到 MMSE 的检测矩阵的表达式，但需要注意的是信道矩阵 \mathbf{H} 是一个维度相对较大的矩阵，所以上式计算是非常困难的。并且在 FPGA 等硬件上实现矩阵求逆转置是比较繁琐的，所以通常 MMSE 矩阵硬件上实现是以 QR 分解为基础进行计算，其复杂度一定程度上得到简化，但是仍然处于 $\Theta(n^3)$ 的水平。下面简单介绍 QR 分解，即将信道矩阵分解为 Q 阵和 R 阵，其中 Q 阵为正交阵，R 阵为上三角矩阵令

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \sigma\mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (3.35)$$

由此可以容易得到检测矩阵的表达式为

$$\mathbf{W} = (\bar{\mathbf{H}}^H\bar{\mathbf{H}})^{-1}\mathbf{H}^H = \frac{1}{\sigma}\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1^H \quad (3.36)$$

下面本文简单介绍一下常用的 QR 分解的方法，一般使用 QR 分解可以用下面三种方法来完成，Gram-Schmit 正交化 QR 分解，Givens 矩阵与 Givens 旋转，householder 矩阵与 householder 变换。上面三个不同的 QR 分解适合不同的系统模型，或者是指不同的情况下。Gram-Schmit 正交化适用于满秩矩阵，当 \mathbf{H} 为满秩矩阵时， $\bar{\mathbf{H}}$ 也是一个满秩矩阵。将 $\bar{\mathbf{H}}$ 写为 $[\alpha_1^T \alpha_2^T \dots \alpha_n^T]$ 形式，令

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1, k = \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}$$

依次类推，则有

$$\beta_i = \alpha_i - k_1\beta_1 - k_2\beta_2 - \dots - k_{i-1}\beta_{i-1}$$

$$k_j = \frac{\langle \alpha_i, \beta_j \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle}, j = 1, 2, 3, \dots, i$$

从而，得到的 Q 矩阵可令其为 $[\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_n^T]$ ，Q 矩阵是正交阵，R 矩阵是 $\bar{\mathbf{H}}$ 到 R 的变换矩阵。

Givens 旋转主要是利用 Givens 矩阵的旋转特性去计算上三角阵 R 而多个 Givens 矩阵的乘法和矩阵 $\mathbf{G}_1 \dots \mathbf{G}_n$ 根据 Givens 矩阵的特性也满足要求，为正交阵。

$$G(i, j, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$c = \cos \theta$ 和 $s = \sin \theta$ 出现在第 i 行和第 j 行与第 i 列和第 j 列的交叉点上，亦可以这样描述 Givens 矩阵的非零元素

$$\begin{aligned} g_{kk} &= 1, & k &\neq i, j \\ g_{ii} &= c \\ g_{jj} &= c \\ g_{ij} &= s \\ g_{ji} &= -s \\ c &= \cos \theta \\ s &= \sin \theta \end{aligned}$$

主要是对目标矩阵的第 i 行和第 j 行进行变换，即将其旋转到坐标轴即可不断变化直至上三角阵。

householder 变换主要是利用 householder 矩阵将 $\bar{\mathbf{H}}$ 特定位置的值转换为 0，即求解 $\bar{\mathbf{H}}$ 的上三角阵 \mathbf{R} 。householder 矩阵对一个向量的表达式如下

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\langle v, v \rangle} vv^H \quad (3.38)$$

即分别对 $\bar{\mathbf{H}}$ 每列进行 householder 变化将其变换为上三角正，而 householder 矩阵的乘积和即为 QR 分解的 \mathbf{Q} 阵。householder 矩阵是对称矩阵，正交矩阵，hermitian 矩阵，对合矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T &= \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T &= \mathbf{H}^{-1} \\ \mathbf{H}^H &= \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^2 &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

以上是利用 QR 分解进行的 MMSE 估计。借助 QR 分解，使得其方便硬件实现，其复杂度的降低非常有限。根据 MMSE 估计，本文做了 MMSE 估计的仿真，并以 MMSE 估计作为评判基准，此处考虑的为 BPSK 调制。目前考虑的是用户单天线

表 3.1 MMSE 仿真参数设置

参数	设置值
场景	郊区宏蜂窝
基站侧天线数	128
用户数天线	1
用户数	4
天线间距	0.5λ
路径数	6
用户采样数量	10000*4

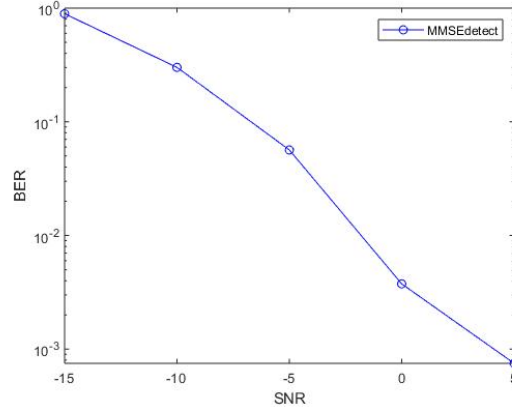


图 3.1 MMSE 检测 BER

3.4 多项式展开接收机及复杂度优化

通过上述计算过程,可以知道在用户数较多用户天线数较多的情况下,MMSE 接收机的复杂度将会非常的高。所以基于 MMSE 接收机的基本原理有提出了多项式展开的方法对 MMSE 矩阵进行合理的化简,化简表达式如下

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{H}^H \\ \mathbf{x}_{MMSE} &= \mathbf{W}\mathbf{y} \\ (\mathbf{H}^H\mathbf{H} + \sigma^2\mathbf{I})^{-1} &\approx \sum_{i=1}^L b_{PE,i}^{(L)} (\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{i-1} \end{aligned} \quad (3.39)$$

仍然利用 MMSE 接收机的判断准则,并令 $\mathbf{b}_{PE}^{(L)}$ 表示 $b_{PE,i}^{(L)}$ 的合集。这里考虑的 $L \leq M, M$ 为发送端用户天线总数令

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_N &= \mathbf{H}\mathbf{H}^H \\ \mu_k &= \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{B}_N^k) \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{B}_N^k)$ 指的是信道的经验矩。

$$\begin{aligned} [\Phi_{PE}]_{ij} &= \mu_{i+j} + \sigma_z^2 \mu_{i+j-1} \\ [\alpha_{PE}]_i &= \mu_i \end{aligned} \quad (3.40)$$

上面为使用 MMSE 准则的多项式接收机,可以注意到当信道矩阵的维度较大的时候,利用经验矩计算每个信道同样会有较大的复杂度。但是在信道慢变的情况下,数据 CSI 变化得非常的慢,可以利用确定性等同 $\bar{\mu}_k$ 代替 μ_k 。此时,PE 接收机只用计算 $\sum_{i=1}^L b_{PE,i}^{(L)} (\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{i-1}$ 即可。此式又可以被称为 Krylov 域的计算,计算复杂度只有 $\Theta(M^2)$ 。这里提出了利用算子自由度从而得到 $\bar{\mu}_k$ 的方法。考虑本文是建立在大规模 MIMO 背景下的,所以本章开头提到的基站侧接收天线数量 N_R 可以看作是数量相当大。所以参考文献,当 $N \rightarrow \infty$,有 $\mu - \mathbb{E}[\mu] \rightarrow 0$ 。不过即使这步趋近并不能很好的获得,仍然可以利用下面的公式进行替代原来的方法。

$$\begin{aligned} [\Phi_{PE}]_{ij} &= \mathbb{E}[\mu_{i+j}] + \sigma_z^2 \mathbb{E}[\mu_{i+j-1}] \\ [\alpha_{PE}]_i &= \mathbb{E}[\mu_i] \end{aligned} \quad (3.41)$$

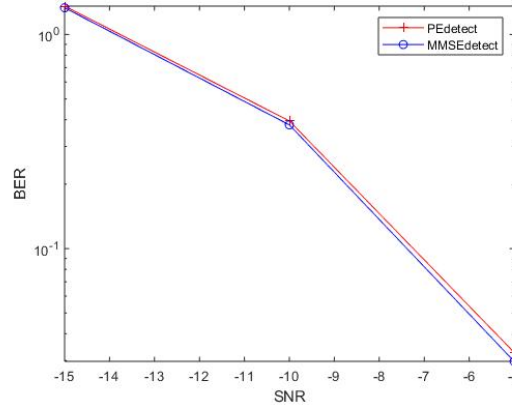


图 3.2 L=3 的普通 PE 接收机与 MMSE 接收机比较

但是式 (3.41) 的情况并不在本文的考虑范围内，所以接下来本文将用 $\mathbb{E}[\mu]$ 代替 μ 。而本文提出的利用算子自由度，即将期望 $\mathbb{E}[\mu]$ 由数转为算子，利用算子自由度对其进行计算。这里本文简要介绍算子自由度的定义。

线性映射 E 是一个条件期望，如果其满足对于所有 b ，都有 $E[b] = b$ ，对于所有 x 属于集合 \mathcal{A} ， b_1, b_2 属于集合 \mathcal{B} 都有 $E[b_1 \mathcal{X} b_2] = b_1 E[\mathcal{X}] b_2$ 。令 \mathcal{A} 表示酉代数， \mathcal{B} 表示酉子代数， $E: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个条件期望。则称 (\mathcal{A}, E) 是 \mathcal{B} 算子值的自由空间。 \mathcal{B} 算子值概率空间元素成为 \mathcal{B} 算子值随机变量。 \mathcal{B} 算子值自由度乘法映射 $\{f_\pi\}_{\pi \in NC(n)}: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{B}$

$$f_{\pi_1 \sqcup \pi_2}^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) = f_{\pi_1}^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) f_{\pi_2}^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) \quad (3.42)$$

$NC(n)$ 只 n 长度中不互相交叉的段， π_1 和 π_2 就是其中的两个。

用 $\mathcal{V}_\pi^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) = E((\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \dots \mathcal{X}_n))$ 定义 \mathcal{B} 算子值自由度乘法映射 $\mathcal{V}_\pi^{\mathcal{B}}: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{B}$ 。而算子的累差值同样也是算子自由度乘法映射可以由下式定义

$$E((\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \dots \mathcal{X}_n)) = \sum_{\pi \in NC(n)} \mathcal{K}_\pi^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) \quad (3.43)$$

则有

$$\sum_{\pi \in NC(n)} \mathcal{K}_\pi^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) = \mathcal{V}_\sigma^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) \mu(\sigma, \pi) \quad (3.44)$$

利用 Möbius 函数可以写为

$$\mathcal{K}_\pi^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) = \sum_{\sigma < \pi, \sigma \in NC(n)} \mathcal{V}_\sigma^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) \mu(\sigma, \pi) \quad (3.45)$$

随机变量 \mathcal{X} 的 \mathcal{B} 算子 R 阶变换为

$$\mathcal{R}_{\mathcal{X}}(b) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{K}_{n+1}^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}b, \mathcal{X}b, \dots, \mathcal{X}b, \mathcal{X}b, \mathcal{X}) \quad (3.46)$$

如有一个 \mathcal{B} 算子随机变量 $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$ 有

$$\mathcal{R}_{\mathcal{X}}(b) = \mathcal{K}_2(\mathcal{X}b, \mathcal{X}) \quad (3.47)$$

则称其为 \mathcal{B} 算子半圆变量。

下文将主要介绍如何利用上面的公式得到 $\bar{\mu}$ 的等同确定量。根据 (3.13)(3.14) 可以得到 $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{H}}$ 令

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0_N & \bar{\mathbf{H}} \\ \bar{\mathbf{H}}^H & 0_M \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

与

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0_N & \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{H}}^H & 0_M \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

并令 $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{X}}$, $\tilde{\mathbf{W}}_k$ 代表 $\mathbf{M}_k \odot \mathbf{W}_k$, $\eta(\mathbf{D})$ 代表 $\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{X}}\}$ 。根据信道模型, 可以得到 $\mathbb{E}[\mu_k]$ 与 \mathbf{X} 的矩有关。又有

$$\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}\mathbf{H}^H & 0_{N \times M} \\ 0_{M \times N} & \mathbf{H}^H\mathbf{H} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

又令

$$\tilde{\mathbf{X}}_k = \begin{pmatrix} 0_N & \hat{\mathbf{H}}_k \\ \hat{\mathbf{H}}_k^H & 0_M \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

其中 $\hat{\mathbf{H}}_k$ 代表 $[0_{N \times M_1} \dots \tilde{\mathbf{H}}_k \quad 0_{N \times M_{k+1}} \dots]$, 所以有下式

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{X}}_k \quad (3.52)$$

根据上面信道模型, 可以写出 $\tilde{\mathbf{H}}_k = \mathbf{U}_k \tilde{\mathbf{W}}_k \mathbf{V}_k^H$, 同时可以改写 $\tilde{\mathbf{X}}$

$$\tilde{\mathbf{X}}_k = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{W}} \mathbf{A}_k^H \quad (3.53)$$

其中 $\hat{\mathbf{W}}$ 可以用下式表示

$$\begin{pmatrix} 0_N & \dots & \tilde{\mathbf{W}} & 0_{N \times M_{k+1}} & \dots \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\mathbf{W}}^H & \dots & 0_{M_k \times M_k} & 0_{M_k \times M_{k+1}} & \dots \\ 0_{M_{k+1} \times N} & \dots & 0_{M_{k+1} \times M_k} & 0_{M_{k+1} \times M_{k+1}} & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{A}_k = \text{diag}(\mathbf{U}_k, 0_{M_1}, \dots, \mathbf{V}_k, 0_{M_{k+1}}, \dots) \quad (3.55)$$

通过替换 $\hat{\mathbf{W}}$ 中的独立高斯变变量为相同方差的自由圆形变量, 可以获得自由确定性等同 $\hat{\mathcal{W}}$ 。而此时, 令 $\hat{\mathcal{X}}_k = \mathbf{A}_k \hat{\mathcal{W}}_k \mathbf{A}_k$ 则也可以用自由确定性等同 \mathcal{X} 代替 \mathbf{X} 。一般的, 自由确定性等同 \mathcal{X} 和原始模型数据 \mathbf{X} 在 L 趋近于无穷时都有相同算子分布。令 \mathcal{B}_N 代表 $\langle \mathcal{X} \rangle_N$ 。 $\langle \mathcal{X} \rangle_N$ 指的是 \mathcal{X} 行列下标 1 到 N 的子矩阵。并且有这样 $\bar{\mu}_k = \frac{1}{N} \mathbb{E}[\text{tr}(\mathcal{B}_N^k)]$, 就将原始模型的矩阵矩的确定性等同转换到算子自由度模型上, 接着可以利用上文提到的算子自由度的定理和公式来计算 $\bar{\mu}_k$ 。令 \mathcal{B} 表示代数 $\mathcal{M}_{N+M}(\mathbb{C})$ 。利用元素的累差可以就计算出 $\tilde{\mathcal{X}}_1, \tilde{\mathcal{X}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{X}}_K$ 。通过计算, 可以得到所有的 \mathcal{B} 累差各不相同, 并且只有第二阶 \mathcal{B} 算子累差是非零矩阵。因此 $\tilde{\mathcal{X}}_1, \tilde{\mathcal{X}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{X}}_K$ 关于 \mathcal{B} 自由, 并且每一个 $\tilde{\mathcal{X}}$ 都是关于 \mathcal{B} 的半圆形变量。并且非零的累差可以用下式表示

$$\kappa_2(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbf{D}\tilde{\mathcal{X}}) = \mathbb{E}[\mathcal{X}\mathbf{D}\tilde{\mathcal{X}}] \quad (3.56)$$

又因为上文所做的自由确定等同与原始模型的对应，还可以得到下式

$$\mathbb{E}[\mathcal{X}\mathbf{D}\tilde{\mathcal{X}}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{X}}] = \eta(\mathbf{D}) \quad (3.57)$$

同时，所有的高阶 \mathcal{B} 算子累差都是零矩阵。所以有下式表示一阶 \mathcal{B} 算子累差

$$\mathcal{K}_2(\overline{\mathbf{X}}) = \overline{\mathbf{X}} \quad (3.58)$$

之前有 $\mathcal{X} = \overline{\mathbf{X}} + \tilde{\mathcal{X}}$ 因为 $\overline{\mathbf{X}} \in \mathcal{B}$ ，本文 $\overline{\mathbf{X}}$ 和 $\overline{\mathcal{X}}$ 关于 \mathcal{B} 算子自由。则有

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(\mathcal{X}) &= \mathcal{K}_1(\overline{\mathbf{X}}) + \mathcal{K}_1(\overline{\mathcal{X}}) = \overline{\mathbf{X}} \\ \mathcal{K}_2(\mathcal{X}, \mathbf{D}\mathcal{X}) &= \mathcal{K}_2(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbf{D}\tilde{\mathcal{X}}) + \mathcal{K}_2(\overline{\mathcal{X}}, \mathbf{D}\overline{\mathcal{X}}) = \mathbb{E}[\mathcal{X}\mathbf{D}\tilde{\mathcal{X}}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{X}}] = \eta(\mathbf{D}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

由此本文得到下面的推论来计算 $\mathbb{E}[\mathcal{X}^k]$ 从而能够推导到 $\bar{\mu}_k$ 。下面的递推公式可以计算出 $\mathbb{E}[\mathcal{X}^k]$ 。

$$\mathbb{E}[\mathcal{X}^{2m+2}] = \overline{\mathbf{X}}\mathbb{E}[\mathcal{X}^{2m+1}] + \sum_{j=0}^m \eta(\mathbb{E}[\mathcal{X}^{2j}])\mathbb{E}[\mathcal{X}^{2m-2j}] \quad (3.60)$$

$$\mathbb{E}[\mathcal{X}^{2m+1}] = \overline{\mathbf{X}}\mathbb{E}[\mathcal{X}^{2m}] + \sum_{j=0}^m \eta(\mathbb{E}[\mathcal{X}^{2j}])\mathbb{E}[\mathcal{X}^{2m-2j-1}] \quad (3.61)$$