Коллоквиум по матану

1 Наивная теория множеств, операции с множествами, формулы де Моргана.

Множество – набор уникальных эл-ов.

$x \in X$ – x принадлежит X

$x \notin X$ – x не принадлежит X

Множество T называется подмножеством мн-ва S, если все эл-ты из T содержатся в S.

Св-ва: 1 $A \subset B$ и $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

2 $A \subset B$ и $B \subset A \Rightarrow A = B$

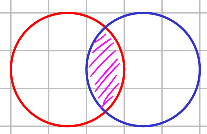
Док-во: 1 Возьмём $\forall x \in A$, тогда: $A \subset B \Rightarrow x \in B$, но $B \subset C \Rightarrow x \in C$.

2. Возьмём $\forall x \in A$, тогда: $A \subset B \Rightarrow x \in B$

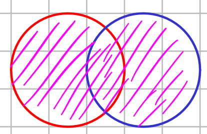
$\forall x \in B$ тогда: $B \subset A \Rightarrow x \in A$ $\Big| \Rightarrow A = B$

Опр Мн-во всех подмн-в мн-ва A обозначается $\mathcal{P}(A)$ или 2^A

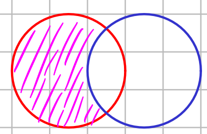
Операции над мн-вами: 1 Пересечение мн-в A и B: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$



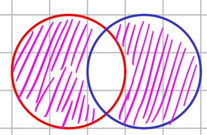
2 Объединение мн-в A и B: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$



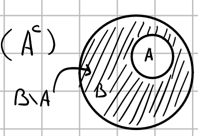
3 Мн-во A "минус" мн-во B: $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$



4 Симметрическая разность: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Опр Если $A \subset B$, то $B \setminus A$ – называется дополнением A в B (A^c)



Закон де Моргана: 1 $A \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

2 $A \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

Док-во: 1] $x \in A \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \text{ при всех } \alpha \in I \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \setminus B_\alpha$ при всех $\alpha \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

2.] $x \in A \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \text{ для некоторых } \alpha \in I \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \setminus B_\alpha$ для некоторых $\alpha \in I \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

! 2 Упорядоченные пары, декартово произведение, отношения, примеры.

A и B – мн-ва $\langle a, b\rangle$ $a \in A$, $b \in B$ – упорядоченная пара

$\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$ – означает, что $a = a'$ и $b = b'$

Замечание: $\langle 1,2\rangle \neq \langle 2,1\rangle$ $\{1,2\} = \{2,1\}$

Декартово произведение: $A \times B := \{\langle a, b\rangle : a \in A, b \in B\}$

Пример: $A = \{1,2\}$, $B = \{x,y\}$

$A \times B = \{\langle 1,x\rangle, \langle 1,y\rangle, \langle 2,x\rangle, \langle 2,y\rangle\}$

$B \times A = \{\langle x,1\rangle, \langle y,1\rangle, \langle x,2\rangle, \langle y,2\rangle\}$

! Функция: $R \subset A \times B$ – ф-я, если $\forall a \in A\ \exists! b \in B$ $\langle a, b\rangle \in R$ $f: A \to B$ $f(a) = b$

Отношения Бинарным отношением R называется подмн-во эл-ов декартового произведения двух мн-в $R \subset A \times B$

Эл-ты $x \in A, y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x, y\rangle \in R$ (то же самое xRy)

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$

Опр. Отношение называется:

- Рефлексивным, если xRx $\forall x$
- Симметричным, если $xRy \Rightarrow yRx$
- Транзитивным, если $xRy, yRz \Rightarrow xRz$
- Иррефлексивным, если $\neg xRx$ $\forall x$
- Антисимметричным, если $xRy, yRx \Rightarrow x = y$

Опр. R явл. отношением

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, транзитивно и симметрично
2. Нестрого частичного порядка, если рефлексивно, транзитивно и антисимметрично
3. Нестрого полного порядка, если п.2 и + $\forall x, y$
4. Строго частичного порядка, если иррефлексивно и транзитивно
5. Строго полного порядка, если п.4 и + $\forall x, y$

! 3. Функции (функциональное отношение), инъективные и сюръективные отображения, образы и прообразы, обратное отображение, композиция отображений.

! Функциональное отношение $R \subset X \times Y$

$(xRy_1) \wedge (xRy_2) \Rightarrow y_1 = y_2$

Область определения: $\delta_R = \{x \in X : \exists y \in Y, \text{т.ч.} \langle x, y\rangle \in R\}$

Область значений: $\rho_R = \{y \in Y : \exists x \in X, \langle x, y\rangle \in R\}$

$\delta_{R^{-1}} = \rho_R$

$\rho_{R^{-1}} = \delta_R$

Опр Отображение $f: A \to B$

инъективно, если $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

сюръективно, если $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$

биективно, если инъект. + сюръект.

Опр $f: X \to Y$

Образ эл-та $x \in X$ при отображении f наз-ся эл-т $f(x) \in Y$

Прообраз эл-та $y \in Y$ при отображении f наз-ся мн-во всех эл-ов области определения, которые переходят в y: $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$

(Мы ищем все x для которых значение ф-ии равно y: если $f(x) = x^2$, то прообраз числа 9 $f^{-1}(9) = \{-3, 3\}$)

Если $A \subset X$, то образ мн-ва A при отображении f — это мн-во всех значений функции на эл-ах A

$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$

Пример: если $f(x) = x^2$ и $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, то $f(A) = \{4, 1, 0, 1, 4\} = \{0, 1, 4\}$

Если $B \subset Y$, то прообраз мн-ва B при отображении f — это мн-во всех $x \in X$, которые отображаются в эл-ты мн-ва B: $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) = B\}$

Пример: Если $f(x) = x^2$ и $B = \{1, 4\}$, $f^{-1}(B) = \{-2, -1, 1, 2\}$

Опр. Обратное отображение

$f: X \to Y$ биекция, тогда

$f^{-1}: Y \to X$ $\quad f^{-1}(y) = x$, если $f(x) = y$

Опр. Композиция

$f: X \to Y \quad g: Y \to Z$

$g \circ f: X \to Z \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$f \circ f^{-1} = id_Y$

$f^{-1} \circ f = id_X$

4. Аксиоматика вещественных чисел: аксиомы поля (сложение, умножение, связь между ними), аксиомы порядка, аксиома полноты. Простейшие следствия (по одному следствию из набора аксиом, без доказательства).

Опр $\mathbb{R}$ – мн-во вещественных чисел, это алгебраическая структура, над которой определены операции сложения "+" и умножения "·".

Аксиомы вещественных чисел

1° Ассоциативность сложения $(x+y)+z = x+(y+z)$
2° Коммутативность сложения $x+y = y+x$
3° Существование нуля $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad x+0 = x$
4° Существование обратного эл-та по сложению $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, (-x) \in \mathbb{R} : x+(-x)=0$
5° Ассоциативность умножения $(x \cdot y)\cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
6° Коммутативность умножения $xy = yx$
7° Существование единицы $\exists\, 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x$
8° Существование обратного эл-та по умножению $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} : \quad x \cdot x^{-1} = 1$
9° Дистрибутивность: $(x+y)\cdot z = xz + yz$
Выше перечисленные аксиомы образуют поле

Аксиомы порядка

Аксиомы порядка, задающие отношение порядка на мн-ве вещественных чисел.
1° $x \leq x \quad \forall x$
2° $x \leq y$ и $y \leq x \Rightarrow x = y$
3° $x \leq y$ и $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
4° $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$
5° $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \quad \forall z$
6° $0 \leq x$ и $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Аксиома полноты

$A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ $B \neq \varnothing$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ $a \leq b$
Тогда $\exists\, c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$

Следствия

Вещественных чисел:
1 Существует ровно один 0: если 0_1 и 0_2 – нули в $\mathbb{R}$, то $0_1 = 0_2 = 0$
2 Единственный обратный эл-т по сложению: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!\ (-x) \in \mathbb{R}$
3. Существует ровно одна 1
4. Существует только один обратный x^{-1} для $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
5 Для $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\exists!$ решение уравнения $x \cdot z = y$: $x = y \cdot z^{-1}$
6 $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
7 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ или $y = 0$
8 $\forall x \in \mathbb{R} :$ $-x = (-1)\cdot x$
$x = (-1)\cdot(-x)$
$x \cdot x = (-x)\cdot(-x)$

Порядка:
1 $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x < y$ либо $x = y$ либо $x > y$
2 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} :$ $x \leq y < z \Rightarrow x < z$
$x < y \leq z \Rightarrow x < z$
3 $x, y, z, w \in \mathbb{R}$: $x < y \Rightarrow x+z < y+z$
$0 < x \Rightarrow 0 > -x$
$x \leq y,\ z \leq w \Rightarrow x+z \leq y+w$
$x \leq y,\ z < w \Rightarrow x+z < y+w$
4 $x, y, z \in \mathbb{R}$: $x > 0, y > 0 \Rightarrow xy > 0$
$x < 0, y < 0 \Rightarrow xy > 0$
$x < 0, y > 0 \Rightarrow xy < 0$
$x < y, z > 0 \Rightarrow xz < yz$
$x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz$

5 $0 < 1$
6 $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$
$0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

! 5 Границы множеств. Ограниченность сверху и снизу, супремум и инфинум, их существование

Опр. x – верхняя граница мн-ва A, если $\forall a \in A: a \leq x$
y – нижняя граница мн-ва A, если $\forall a \in A: y \leq a$
Мн-во ограничено сверху (снизу), если существует какая-нибудь верхняя (нижняя) граница

Опр. $a = \max X \Leftrightarrow a \in X$ и $\forall x \in X \ x \leq a$
$a = \min X \Leftrightarrow a \in X$ и $\forall x \in X \ a \leq x$

! Опр Пусть A – ограниченное сверху мн-во, тогда $\sup A$ – наименьшая из его верхних границ.
Пусть A – ограниченное снизу мн-во, тогда $\inf A$ – наибольшая из его нижних границ.

Лемма 1 Если $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ и A ограничено сверх, то $\exists! \sup A$
2 Если $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ и A ограничено снизу, то $\exists! \inf A$

Док-во: 1] B – мн-во всех верхних границ мн-ва A, т.е $\forall a \in A, b \in B \quad a \leq b$
Тогда по аксиоме полноты всегда найдется такой c: $a \leq c \leq b$
c – $\sup A$ – по опр.
Док-ем единственность c
] $\exists c_1, c_2$ – $\sup A$
Тогда если $c_1 < c_2$, то $c_2 \neq \sup A$
Если $c_2 < c_1$, то $c_1 \neq \sup A$
$\Rightarrow c_1 = c_2 = \sup A \Rightarrow \sup A$ – единственный.
2. Аналогично

Предложение. 1 $a = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \ \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: x < a + \varepsilon \end{cases}$
2. $a = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \ \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: a - \varepsilon < x \end{cases}$

Замечание Если A неограничено сверху, то $\sup A = +\infty$
Если A неограничено снизу, то $\inf A = -\infty$

6 Натуральные числа, принцип математической индукции, простейшие примеры и следствия.

Опр. $X \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если $\forall x \in X \Rightarrow x+1 \in X$

Утв $\exists\ X = \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$, если каждое X_α – индуктивно, то и $X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ – индуктивно

Док-во: $x \in X \Rightarrow \forall \alpha \in A: x \in X_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in A\ \ x+1 \in X_\alpha \Rightarrow x+1 \in X$

Опр $\mathbb{N}$ – это пересечение всех индуктивных мн-в, содержащих 1.

Утв. $E \subset \mathbb{N}$, $1 \in E$, $x \in E \Rightarrow x+1 \in E$, то $E = \mathbb{N}$

Док-во: От противного. $\exists\ x \in \mathbb{N} : x \notin E$, тогда мн-во $S = \{n \in \mathbb{N} : n \notin E\}$ непусто

тогда $\exists$ наименьший эл-т $m \in S$.

По условию $1 \in E$, тогда $m > 1$. Тогда $m-1 \in \mathbb{N}$ и т.к. m – наименьший в S, то $m-1 \notin S \Rightarrow m-1 \in E$

Но E замкнуто по прибавлению 1. из $m-1 \in E \Rightarrow m \in E$ противоречие

Св-ва натуральных чисел

1 $\mathbb{N}$ – замкнуто относительно сложения и умножения: если $m, n \in \mathbb{N}$, то $m+n, m \cdot n \in \mathbb{N}$

Док-во: Возьмём фикс. $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $E = \{n \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}\}$

База: $1 \in E$, потому что $m+1 \in \mathbb{N}$ (т.к. $\mathbb{N}$ индуктивно)

Переход: Если $n \in E$, то $m+n \in E$, значит $(m+(n+1)) = (m+n)+1 \in \mathbb{N}$, т.е $n+1 \in E$

E – индуктивно, содержит 1 $\Rightarrow E = \mathbb{N}$, $m+n \in \mathbb{N}$

Для умножения аналогично.

Для фикс. $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим $E = \{n \in \mathbb{N} : n \cdot m \in \mathbb{N}\}$

т.к. $m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$, и если $m \cdot n \in \mathbb{N}$, то $m(n+1) = mn + m$ – сумма натуральных натуральна. $E = \mathbb{N}$

2 $n \in \mathbb{N}$ и $n \neq 1 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$

Док-во: По опр. натур. чисел, каждое число, кроме 1, получается добавлением 1.

Если $n \neq 1$, тогда $\exists\ k \in \mathbb{N} : n = k+1$

$k = n-1 \in \mathbb{N}$, $n-1 \in \mathbb{N}$

3 $n \in \mathbb{N}$, $\exists!\ \min\{x \in \mathbb{N} \mid n < x\} = n+1$

Док-во: Если $x > n$, то по п.2 либо $x = n+1$, либо $x \geq n+2$

Значит ближайшее число строго больше n – это $n+1$.

Формально это док-ся индукцией, но мне лень.

4 $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ $\ m < n \Rightarrow m+1 \leq n$ (сл-е 3)

Док-во: По опр. $m < n$ значит $\exists\ k \in \mathbb{N}$: $m+k = n$

тогда $n = (m+1)+(k-1)$, где $k-1 \geq 0$. Значит $m+1 \leq n$

5 $n \in \mathbb{N}$ $\nexists\ x \in \mathbb{N} : n < x < n+1$

6 $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$ $\nexists\ x \in \mathbb{N} : n-1 < x < n$

7 $\forall\ M \subset \mathbb{N}, M \neq \varnothing\ \ \exists\ \min M$

Док-во: От противного.

Пусть $\exists\ \varnothing \neq M \subset \mathbb{N}$ в котором нет мин. эл-та.

$\exists\ T = \mathbb{N} \setminus M$, док-м, что $T = \mathbb{N}$

База: $1 \in M$? Если бы $1 \in M$, то 1 был бы мин. в M, но в M нет мин. эл-та $\Rightarrow 1 \notin M$, а $1 \in T$

Предположение: Предположим что все числа от 1 до n в T

Переход: Докажем, что $n+1 \in T$

Если бы $n+1$ был в M, то $n+1$ был бы мин эл-ом.

Но в M нет мин. эл-та $\Rightarrow n+1 \in T$

По мат. индукции $T = \mathbb{N} \Rightarrow M = \varnothing$. Противоречие

Принцип мат. индукции

P_n – последовательность утв.

1 База: P_1 – верно

2. Переход: $\forall n \in \mathbb{N}$ из P_n следует P_{n+1}

Тогда P_n верно для всех $n \in \mathbb{N}$

Thm Любое $n \in \mathbb{N}$ можно представить в виде произведения простых чисел, притом единств. образом.

7 Целые числа, рациональные числа

Опр $\mathbb{Z}$ - объединение $\mathbb{N}$, $\{0\}$ и $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Замечание $\mathbb{Z}$ - замкнуто относительно $\cdot$ и $+$

Док-во: $m, n \in \mathbb{Z}$, возможны 3 случая

1 $m = 0$, $n \neq 0$

$m+n$, $m \cdot n$ - целые, потому что

$0 + n = n$, $0 \cdot n = 0$ - целые

2 $m > 0$, $n > 0$

Тогда $m+n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ $m \cdot n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

3 Одно или оба числа отрицательны

Пусть, например $m = -a$, $n = -b$, $a, b \in \mathbb{N}$

Тогда: $m+n = -a-b = -(a+b) \in \mathbb{Z}$ $m \cdot n = (-a)(-b) = ab \in \mathbb{Z}$

Одно отрицательно: $m+n = -a+b \in \mathbb{Z}$, $m \cdot n = -a \cdot b = -(ab) \in \mathbb{Z}$

Замечание $\mathbb{Z}$ - абелева группа по сложению, но не по умножению

Док-во: Группа по сложению, потому что:

Сложение замкнуто в $\mathbb{Z}$

Оно комм. и ассоц.

Ноль - нейтральный эл-т

$\forall m \in \mathbb{Z}$ $\exists -m \in \mathbb{Z}$

Группа не по умножению, потому что:

$\exists$ $m \neq 0, \pm 1$. Если б существовало целое m^{-1}: $m \cdot m^{-1} = 1$, то

при $m > 1$ получаем $0 < \frac{1}{m} < 1$, но нет такого целого числа

при $m < -1$ получаем аналогично, что m^{-1} не может быть целым.

Опр $m, n \in \mathbb{Z}$ взаимно просты $\Leftrightarrow$ $\gcd(m,n) = 1$

Рациональные числа

Опр $\mathbb{Q}$ - числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

8 Иррациональные числа, иррациональность $\sqrt{2}$

Опр Если $x \in \mathbb{R}$ и $x \notin \mathbb{Q}$, то x называется иррациональным.

Пример Иррац.: $\sqrt{2}$ - это число $s \in \mathbb{R}$, т.ч. $s > 0$ и $s^2 = 2$

Утв $\exists\, s \in \mathbb{R},\ s > 0 : s^2 = 2,\ s \notin \mathbb{Q}$

Док-во: Пусть $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0$ и $x^2 < 2\}$ и $B = \{y \in \mathbb{R} : y > 0$ и $y^2 > 2\}$

Проверим, что $A \leq B$

$x^2 < 2 \quad y^2 > 2 \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow (y-x)\overbrace{(y+x)}^{>0} > 0 \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y > x$

Предположим $\exists\, c : A \leq c \leq B$

3 варианта: $c^2 > 2$, $c^2 = 2$, $c^2 < 2$

Покажем, что ни один из вариантов невозможен

1 $c^2 = 2$ Пусть $c \in \mathbb{Q}$, тогда $c = \frac{p}{q}$ - не сокр. НОД$(p, q) = 1$

$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p = 2k$

$4k^2 = 2q^2 \quad 2k^2 = q^2 \Rightarrow q = 2m$

p и $q \vdots 2$ противоречие с НОД

2 $c^2 < 2$ найдём $\varepsilon > 0 : (c+\varepsilon)^2 < 2$

$c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < 2$

$2c\varepsilon + \varepsilon^2 < \underbrace{2 - c^2}_{>0}$ Пусть $0 < \varepsilon < 1$

Достаточно найти такой ε

$(\varepsilon(2c+\varepsilon) <)\ \varepsilon(2c+1) < 2 - c^2$

Пусть $\varepsilon = \frac{2-c^2}{(2c+1)\cdot 2025}$

Сл-но $c + \varepsilon \in A$ и $c + \varepsilon > c$ противоречие тому что $A \leq c \leq B$

3 $c^2 > 0$ Найдём $\varepsilon > 0$

$(c-\varepsilon)^2 > 2 \quad \varepsilon \in \mathbb{Q}$

$c^2 - 2c\varepsilon + \varepsilon^2 > 2$

$-2c\varepsilon + \varepsilon^2 > 2 - c^2 \qquad c^2 - 2 > 2c\varepsilon - \varepsilon^2 \qquad c^2 - 2 > (2c - \varepsilon)\varepsilon$

Рассмотрим $0 < \varepsilon < 1$. Достаточно найти ε т.ч.

$c^2 - 2 > (2c-1)\varepsilon$, т.к $(2c - \varepsilon)\varepsilon > (2c-1)\varepsilon$

Пусть $\varepsilon = \frac{c^2-2}{(2c-1)2025} \Rightarrow c - \varepsilon \in B$ и $c - \varepsilon < c$ Противоречие с тем, что $B \geq c$

$\Rightarrow c^2$ - не рациональное $\Rightarrow c$ иррац. и $c = \sqrt{2}$

9. Принцип Архимеда. Следствия без доказательства

Принцип Архимеда: $\forall x \in \mathbb{R}$ и $y > 0 \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $x < ny$

Док-во $A = \{a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < ny\}$ - мн-во всех чисел для которых принцип Архимеда работает

$A \neq \varnothing$ т.к $0 \in A$ потому что можно $n = 1$ $0 < 1 \cdot y$

$B = \mathbb{R} \setminus A$ - мн-во всех чисел для которых принцип Архимеда не работает

Хотим док-ть, что $A = \mathbb{R}$. Предположим противное $A \neq \mathbb{R} \Rightarrow B \neq \varnothing$

Покажем, что $a \leq b$ $\forall a \in A$ и $b \in B$

Док-во: от противного

Предположим нашлось такое $b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A$ противоречие

Тогда по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R}$: $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A, b \in B$

c должно лежать либо в A, либо в B, т.к. $\mathbb{R} = A \cup B$

Предположим $c \in A$

Тогда $c < ny \Rightarrow c + y < ny + y = (n+1)y \Rightarrow c + y \in A$, но c - верхняя граница A

$c + y > c$ противоречие

Предположим $c \in B$

Т.к. $y > 0$ то $c - y < c$, c - нижняя граница $B \Rightarrow c - y \in A$

Тогда $c - y < ny \Rightarrow c < (n+1)y \Rightarrow c \in A$ противоречие

Получили $c \notin A$ и $c \notin B \Rightarrow c$ не существует $\Rightarrow B = \varnothing \Rightarrow A = \mathbb{R}$

Следствия

1. Пусть $E \subset \mathbb{N}$, $E \neq \varnothing$, E - ограничено сверху $\Rightarrow$ в E есть максимальный элемент.
2. $\mathbb{N}$ - не ограничено сверху, т.к $n < n+1$
3. Пусть $E \subset \mathbb{Z}$, $E \neq \varnothing$, E - ограничено сверху $\Rightarrow$ в E есть максимальный элемент.
4. Пусть $E \subset \mathbb{Z}$, $E \neq \varnothing$, E - ограничено снизу $\Rightarrow$ в E есть минимальный элемент
5. $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху или снизу, следует из 3 и 4.
6. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$
7. Если $x \in \mathbb{R}$ и $x \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$
8. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ $\exists r \in \mathbb{Q}$: $a < r < b$
9. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists!$ $k \in \mathbb{Z}$: $k \leq x < k+1$, k - целая часть x ($[x]$ или $\lfloor x \rfloor$)

10 Отрезки, интервалы на вещественной прямой, окрестность точки, δ-окрестность, расстояние, неравенство треугольника.

Опр. $(a,b) := \{x : a < x < b\}$ - интервал
$[a,b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ - отрезок
$[a,b) := \{x : a \leq x < b\}$
$(a,b] := \{x : a < x \leq b\}$ полуинтервал
Всё это промежутки
$|b-a|$ - длина промежутка

Опр. Пусть $x \in R$, тогда, если I - интервал, $x \in I$, то I окрестность точки x.

Опр. Если $I = (x-\delta, x+\delta)$ для некоторого $\delta > 0$, то I - δ-окрестность точки x.

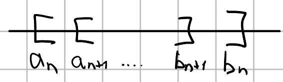
Опр $\forall x, y \in R$ $\rho(x,y) = |x-y|$ - расстояние между точками x и y.

Опр. Неравенство треугольника
$|x+y| \leq |x| + |y|$

! 11 Лемма о вложенных отрезках

Если $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset \ldots$

То $\exists\, c \in \mathbb{R} : c \in [a_n,b_n] \ \forall n \in \mathbb{N}$



Док-во: $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$

$a_i \leq b_j \ \forall i,j \in \mathbb{N}$

Потому что

1. $i \leq j$

Тогда $[a_i, b_i] \supset [a_j, b_j]$

Значит $a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i$

2. $i \geq j$

Тогда $[a_j, b_j] \supset [a_i, b_i]$

Значит $a_j \leq a_i \leq b_i \leq b_j$

По аксиоме полноты $\forall i,j \in \mathbb{N} \ \exists\, c \in \mathbb{R} : a_i \leq c \leq b_j \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} \ \exists\, c \in \mathbb{R} : a_i \leq c \leq b_i$

Замечание: Если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n \in \mathbb{N} : |b_n - a_n| < \varepsilon \Rightarrow$ c – единственная точка.

Док-во: $c_1 \neq c_2$, пусть, например $c_1 < c_2$

Тогда имеем $c_1, c_2 \in [a_n, b_n] \ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < c_2 - c_1 \leq b_n - a_n$, т.к. $c_2 - c_1 > 0$ (точки разные)

$c_1 \geq a_n$ и $c_2 \leq b_n$ Расстояние между точками меньше длины отрезка

Т.к. по условию $|b_n - a_n| \to 0$, т.е. длина отрезка станет меньше любого наперёд заданного положительного числа. Противоречие $\Rightarrow c_1 = c_2$

12 Лемма о конечном покрытии (Бореля-Лебега)

Опр $A, B_\alpha, \alpha \in I$ - мн-ва. Мн-ва B_α покрывают A, означает, что $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$

B_α - покрытие A. т.е. $\forall a \in A\ \exists B_\alpha : a \in B_\alpha$

Лемма Пусть $S = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ - система интервалов вида (c,d), $I = [a,b]$ - отрезок
Тогда из любого покрытия интервалами S - отрезка I, можно выделить конечное подпокрытие $\tilde{S} \subset S$, $\tilde{S} = \{(c_1,d_1), \dots, (c_n,d_n)\}$

Док-во: От противного. Считаем конечного покрытия нет.

Положим $I := I_1 = [a,b]$, разделим I_1 пополам.

Хотя-бы одна из половин не имеет конечного покрытия (иначе объединение двух конеч. покр. дало бы конеч. покр.)

Обозначим эту половину I_2

Повторим процесс и получим вложенные отрезки: $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, такую,
что $\forall n \in \mathbb{N}$ отрезок I_n не покрывается никаким конечным подсемейством S.

По т. о вложенных отрезках $\exists\ c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Т.к. $c \in I_1$, а S - покрытие I_1, то существ. интервал $B_\alpha = (\gamma, \beta) \in S$, т.ч.
$c \in B_\alpha$, т.е. $\gamma < c < \beta$

Пусть $\varepsilon = \min\{c-\gamma, \beta - c\}$. Выберем номер N: $|I_N| < \varepsilon$, т.к $c \in I_N$ и $|I_N| < \varepsilon$, то $I_N \subset B_\alpha$

Противоречие: Отрезок I_N покрывается одним интервалом $B_\alpha \in S$, но по построению I_N не должно иметь конеч. покрыт-я.

13. Принцип Больцано-Вейерштрасса.

Опр. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$. Точка p – предельная точка мн-ва X, если
$\Updownarrow$ $\forall$ окрестность точки p содержит бесконечное подмн-во мн-ва X.

Опр. $\forall\ U_p$ - окрестность т. p, $\exists\ x \neq p,\ x \in X:\ x \in U_p$

Пример: $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ - одна пред. точка $= 0$.
$\mathbb{Q}$ – мн-во предельных точек $\mathbb{R}$.

Лемма (Больцано-Вейерштрасса)
Всякое бесконечное ограниченное числовое мн-во имеет хотя бы одну предельную точку

Док-во: Пусть $X \subset \mathbb{R}$ - такое мн-во.
Из опр. $\Rightarrow X \subset [a,b]$
Док-ем, что одна из точек $[a,b]$ - предельная. Пусть не так.
В каком-то из отрезков $[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$ содержится бесконечное число членов послед-ти.
Назовем этот отрезок $[a_1, b_1]$
В каком-то из отрезков $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ содержится бесконечное число членов послед-ти.
Назовем этот отрезок $[a_2, b_2]$
В каком-то из отрезков $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$ и $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$ содержится бесконечное число членов послед-ти.
Назовем этот отрезок $[a_3, b_3]$

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset \dots$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$$

Тогда $\exists!\ c \in \bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n]$

Возьмём $\varepsilon > 0$ т.к. $b_n - a_n \to 0\ \exists N: \forall n \geq N\ b_n - a_n < \varepsilon$
Поскольку $c \in [a_n, b_n]\ \ \forall n\ \ [a_n,b_n] \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ при $n \geq N$
$\Rightarrow$ интервал $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ содержит бесконечное число точек $X \Rightarrow c$ - предельная точка.

14 Равномощные множества, сравнение мощности множества и множества его подмножеств, счётные и несчётные множества.

Опр. X называвается счётным, если оно равномощно $\mathbb{N}$, т.е. $\exists$ биекция $f: \mathbb{N} \to X$

Утв. 1 Бесконечное подмн-во счётного мн-ва счётно
2 Объединение мн-в конечной или счётной системы счётных мн-в – счётно.

Док-во: 1 $\rceil$ $E \subset X$ – такое бесконечное подмн-во.
У нас есть $f: \mathbb{N} \to X$. Надо построить биекцию $\varphi: \mathbb{N} \to E$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$
$E \subset X \Rightarrow E = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\}$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ ← беск. мн-во.
Построение биекции $\varphi: \mathbb{N} \to E$ эквивалентно построению биекции $\hat{\varphi}: \mathbb{N} \to \tilde{E} = \{n_1, n_2, \dots\}$
Биекция строится так: $\hat{\varphi}(k) := n_k$ $\varphi(k) := x_{n_k}$

2. Пусть $\{X_1, \dots, X_n, \dots\}$ – конечная или счётная система мн-в, каждое из которых счётно
$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ док-ем для счётной, для конечной также
↑ бесконечное мн-во.
Рассмотрим $x \in X$, тогда $\exists X_k \ni x$, при этом X_k счётное мн-во, т.е
$X_k = \{x_1^k, x_2^k, x_3^k, \dots\}$, т.е. $\exists$ (хотя бы одна) пара чисел (k, m): $x_m^k = x$
Значит мощность X не превосходит мощности $\{(k,m)\}_{k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}}$ ← равномощно $\mathbb{N}$
Рассмотрим биекцию $\pi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\pi(k,m) = \frac{(k+m-2)(k+m-1)}{2} + k$ которая нумерует пары (k,m) по возрастанию суммы $k+m$

Следствие: $\mathbb{Z}$ равномощно $\mathbb{N}$
$\mathbb{N}^k$ равномощно $\mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N}$
$\mathbb{Q}$ равномощно $\mathbb{N}$

Утв $\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathbb{R}$

Thm $|A| < |P(A)|$ то же самое, что и $\operatorname{card} A < \operatorname{card} P(A)$

Док-во: 1 Покажем, что $|A| \le |P(A)|$, т.е. есть инъекция. $f: A \to P(A)$ $f(x) = \{x\}$ – вот она есть !!
Если $x \ne y$ значит $\{x\} \ne \{y\} \Rightarrow f(x) \ne f(y)$
2. Докажем, что $|A| \ne |P(A)|$
От противного. Предположим $\exists$ биекция
$\rceil$ $g: A \to P(A)$ – биекция. Построим мн-во $S = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$
Является ли S подмн-ом A?
Да, по построению $S \subset A \Rightarrow S \in P(A)$. Т.к. g – биекция должен существовать прообраз для мн-ва S.
$\rceil$ это будет $s \in A$: $g(s) = S$
Принадлежит ли эл-т s мн-ву S?
1 Предположим $s \in S$.
Если $s \in S$, то по опр S $s \notin g(s)$
Но $g(s) = S \Rightarrow s \notin S$
2 Предположим $s \notin S$
Т.к. $s \notin S$, а $S = g(s) \Rightarrow s \notin g(s)$
А это по опр s должно лежать в S
$\Rightarrow$ Биекции нет
$\Rightarrow |A| < |P(A)|$

! 15 Топологические пространства: определение, открытые, замкнутые множества, точка прикосновения, предельная точка, замыкание, примеры топологических пространств.

Опр Пусть X – некоторое мн-во
Топологией X называется некоторая система подмн-в $\tau \subset P(X)$
Обозначим τ, т.ч.
1) $X, \varnothing \in \tau$
2) Если $A_\alpha \in \tau\ \forall \alpha \in I$, то $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \tau$ (объединение любых открытых мн-в открыто)
3) Если $A_1, \dots, A_n \in \tau$, то $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \tau$ (пересечение конечного числа открытых мн-в открыто)

! Опр. Эл-ты топологии называются открытыми мн-ми.

! Опр Пара (X,τ) – топологическое пространство
Эл-ты X – "точки"

! Опр. Дополнение к открытым – замкнутые, т.е. мн-во $B \subset X$ – замкнуто, если $B = X \setminus A$, $A \in \tau$

Опр Пусть $x \in (X,\tau)$, тогда всякое $A \in \tau$, $x \in A$ называется окрестностью точки x.

Опр. Пусть $B \subset (X,\tau)$, $x \in (X,\tau)$, тогда, если каждая окрестность x содержит хотя бы одну точку из B, то x – "точка прикосновения" мн-ва B, т.е.
$\forall A \in \tau : A \ni x\ \exists y \in B, y \in A$

! Опр. Если же любая окрестность x содержит хотя бы одну точку B, отличную от x, тогда x – "предельная точка" B, т.е.
$\forall A \in \tau, A \ni x\ \exists y \in B, y \neq x, y \in A$

! Опр Замыканием мн-ва B называется мн-во всех его точек прикосновения:
$Cl(B) = \{x \in X \mid x \text{ – точка прикосновения } B\}$
Или экв. $Cl(B)$ – наименьшее замкнутое мн-во, содержащее B.

Утв 1. $Cl B$ – замкнуто
2. $Cl B = \bigcap\{C : C \text{ – замкнуто}, C \supset B\}$

Док-во 1. Рассмотрим $x \notin Cl B$, тогда $\exists$ окрестность U точки, т.ч. $U \cap B = \varnothing$
Покажем, что $U \cap Cl B = \varnothing$.
От противного. $\exists$ существует $y \in U \cap Cl B$, тогда $y \in Cl B$
и т.к U – окрестность y, то $U \cap B \neq \varnothing$. Это противоречит условию $U \cap B = \varnothing$
$\Rightarrow U \cap Cl B = \varnothing$, т.е $U \subset X \setminus Cl B$
Таким образом $\forall x \notin Cl B$ найдется окрестность U лежащая в $X \setminus Cl B$
Значит $X \setminus Cl B$ открыто, а $Cl B$ – замкнуто
2. Обозначим $A := \bigcap\{C : C \text{ – замкнуто}, C \supset B\}$. Док-ем $Cl B = A$
"$\subset$" Возьмём $x \in Cl B$ и $\forall$ замкнотое C, т.ч $B \subset C$. Предположим $x \notin C$, тогда $x \in X \setminus C$ – открытое
и $(X \setminus C) \cap B = \varnothing$, т.к. $B \subset C$. Значит существ. открытая окрестность x,
не пересекающая $B \Rightarrow x \notin Cl B$. Противоречие, значит $x \in C \Rightarrow x \in A \Rightarrow Cl B \subset A$
"$\supset$" $Cl B$ – замкнуто (по п.1), если $x \notin Cl B$, то $\exists$ откр. окрестность U с $U \cap B = \varnothing$
Значит $U \subset X \setminus Cl B$, $X \setminus Cl B$ – открытое $\Rightarrow Cl B$ – замкнуто. $B \subset Cl B$
значит $Cl B$ входит в семейство по которому берётся пересечение при опред-нии A
$\Rightarrow$ Пересечение A явл. подмн-ом любого члена этого семейства. $A \subset Cl B$

Примеры: 1 Тривиальная топология $\tau = \{X, \varnothing\}$
2. Максимальная топология $\tau = 2^X$ – мн-во всех подмн-в X
3 $X = \{a,b\}$ $\tau = \{X, \varnothing, \{b\}\}$
Замкнутые: $\{X, \varnothing, \{a\}\}$ $Cl\{b\} = X = \{a,b\}$

16 Сравнение топологий, топология порожденная набором множеств, база топологии, свойства.

Опр. Пусть на X заданы две топологии τ_1 и τ_2.
Если $\tau_2 \subset \tau_1$, то τ_1 "сильнее" τ_2; τ_2 "слабее" τ_1

Утв. Пусть $\{\tau_\alpha\}$ – семейство топологий на X
Тогда $\bigcap_\alpha \tau_\alpha$ – тоже топология

Док-во: 1 $\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$
$\forall \alpha$ в топологии τ_α обязательно лежат $\emptyset$ и X. Значит эти мн-ва лежат в пересечении τ_α т.е. в τ
2 $\exists \{U_i\}$ $i \in I$ – произвольное семейство мн-в в τ. Тогда $\forall$ фиксированного α каждое $U_i \in \tau_\alpha$ (поскольку $U_i \in \tau = \bigcap_\alpha \tau_\alpha$)
Поскольку τ_α-топология, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_\alpha$ это верно $\forall \alpha \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \bigcap_\alpha \tau_\alpha = \tau$
3 $\exists U_1, \dots, U_n \in \tau$. $\forall \alpha$ все $U_j \in \tau_\alpha$ и т.к τ_α замкнута относительно конеч. пересечений,
то $\bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \tau_\alpha$. Поэтому $\bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \tau$

Следствие: Пусть $\mathcal{G}$ – какой-то набор подмн-в X.
Тогда $\exists$ наименьшая (по включению) топология $\tau_{\mathcal{G}} \supset \mathcal{G}$

Опр. Пусть (X, τ) – т. пр, $A \subset X$. Тогда на A можно задать "индуцированную топологию" $\tau_A = \{B \cap A : B \in \tau\}$ на A

Опр. Набор мн-в $\mathcal{B}$ наз-ся базой топологии $\mathcal{T}$, если каждое открытое мн-во $A \in \mathcal{T}$ можно представить как объединение мн-в из $\mathcal{B}$:
$A = \bigcup B_\alpha$, $B_\alpha \in \mathcal{B}$

Утв. Пусть $\mathcal{B}$ – система мн-в в X, тогда она база топологии, если
(1) $\forall x \in X$ $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B$ (т.е. база покрывает всё пространство)
(2) Если $x \in B_1 \cap B_2$, где $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, то найдется $B_3 \in \mathcal{B}$ т.ч. $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Док-во: 1 т.к $X \in \mathcal{T}$ и по опр. базы X – объединение эл-ов $\mathcal{B}$, то каждая точка $x \in X$ лежит в некотором эл-те $\mathcal{B}$. значит (1) выполнено
2 Мн-ва B_1 и B_2 открыты, т.к. эл-ты базы открыты. Тогда их пересечение $B_1 \cap B_2$ тоже открыто. По опр. базы любое открытое мн-во равно объединению эл-ов $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$
$B_1 \cap B_2 = \bigcup_\alpha B_\alpha$, $B_\alpha \in \mathcal{B}$
т.к. $x \in B_1 \cap B_2$, точка x лежит в одном из B_α. Возьмем B_3 равным этому B_α.

Утв. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ и $\mathcal{B}$ удовлт. условиям (1) и (2). Тогда $\mathcal{B}$ – база некоторой топологии $\mathcal{T}'$
Эта топология будет слабее $\mathcal{T}$.

Док-в $\mathcal{T}' = \{\bigcup_{i\in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}\}$
- $\emptyset \in \mathcal{T}'$ (пустое объединение), $X \in \mathcal{T}'$ потому что по (1) $\mathcal{B}$ покрывает X
- Объединение объединений остается объединением эл-ов в $\mathcal{B}$
- $\exists U = \bigcup_i B_i$ и $V = \bigcup_j B'_j$. Тогда $U \cap V = \bigcup_{i,j} (B_i \cap B'_j)$
$\forall x \in B_i \cap B'_j$ условие (2) даёт $B_x \in \mathcal{B}$ с $x \in B_x \subset B_i \cap B'_j$
Значит каждое непустое $B_i \cap B'_j$ – объед-ие эл-ов $\mathcal{B}$, значит всё $U \cap V$ объед-ие эл-ов $\mathcal{B}$, т.е лежит в $\mathcal{T}'$
Это доказывает замкнутость на пересеч. двух мн-в. Далее по индукции для конечного числа пересеч.

Утв. $\exists \mathcal{B} \subset \tau$ удовл. условиям (1) и (2), тогда
$\mathcal{B}$ – база $\tau \Leftrightarrow$ (3) $\forall G \in \mathcal{T}$ и $\forall x \in G$ $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset G$

Док-во: „$\Rightarrow$" Если $\mathcal{B}$ – база для $\mathcal{T}$, то $\forall G \in \mathcal{T}$ представимо как $G = \bigcup_\alpha B_\alpha$ с $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Тогда $\forall x \in G$ найдется B_α с $x \in B_\alpha$ и сразу $B_\alpha \subset G$
„$\Leftarrow$" Пусть выполняется условие: $\forall$ открытого G и $\forall x \in G$ $\exists B_x \in \mathcal{B}$ с $x \in B_x \subset G$
Тогда $G = \bigcup_{x\in G} B_x$ потому что каждый x лежит в соответ. $B_x \subset G$
Значит любое открытое мн-во есть объединение эл-ов $\mathcal{B}$. т.е $\mathcal{B}$ – база для $\mathcal{T}$

17 Пространство со счетной базой, сеперабельное пространство, связь между ними, нигде не плотное множество, определяющая система окрестностей, первая аксиома счетности

Опр. Пусть (X,τ) - топологическое пр-во.
Если у него существ. счётная база $\mathcal{B}=\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, то пр-во X удовл. второй аксиомой счётности.

Опр. (X,τ) называется сепарабельным, если в нём существует счётное всюду плотное мн-во F. т.е $F\sim\mathbb{N}$, $Cl\,F=X$

Утв. Если (X,τ) - удовл. 2-ой аксиоме счетности $\Rightarrow$ (X,τ) - сепарабельно

Док-во: $\exists\ \mathcal{B}$ - счётная база, $\mathcal{B}=\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
Построим мн-во $F=\{x_n \mid x_n\in A_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ (из каждого непустого базового мн-ва возьмём хотя-бы 1 точку)
Док-ем, что F - плотное. $\exists\ U$ - произвольное непустое открытое мн-во.
Тогда $\exists\ A_k\in\mathcal{B}: A_k\subset U$. Но по построению $x_k\in A_k \Rightarrow x_k\in U\cap F$. Значит $U\cap F\neq\varnothing$
Таким образом, каждое непустое открытое мн-во пересекается с F, т.е. $Cl\,F=X$

Опр. Мн-во $A\subset X$ в топологическом пространстве (X,τ) называется плотным, если $Cl\,A=X$

Опр Мн-во $F\subset(X,\tau)$ называется нигде не плотным, если не существует $A\in\tau: A\subset Cl\,F$

Опр $\exists\ x\in(X,\tau)$. Тогда определяющая система окрестности точки x - некоторый набор $\mathcal{D}_x\subset\tau$, т.ч.
1 Каждое $V\in\mathcal{D}_x$ содержит x.
2 $\forall$ окр-ти U точки x $\exists\ V\in\mathcal{D}_x : V\subset U$
Тогда, если $\forall x\in(X,\tau)\ \exists$ счётная определяющая система окрестностей $\mathcal{D}_x=\{V_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, то (X,τ) удовл. 1-ой аксиоме счётности

18 Покрытия, теорема о выборе конечного или счетного подпокрытия. Хаусдорфовы пространства.

Опр. $A, B_\alpha, \alpha \in I$ – мн-ва. Мн-ва B_α покрывают A означает, что $A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$
B_α – покрытие A

Утв. Пусть (X, τ) – 2 аксиома счётности. Тогда из любого открытого покрытия X можно выбрать конечное или счётное подпокрытие

Док-во: Пусть B_α – открытое покрытие X. Тогда $x \in X \Rightarrow \exists\, \alpha_x : x \in B_{\alpha_x}$
Т.к. в (X, τ) есть счётная база, то найдётся эл-т $A_{n(\alpha_x)} \in \beta$,
т.ч. $x \in A_{n(\alpha_x)} \subset B_{\alpha_x}$. $\bigcup\limits_{x \in X} \underbrace{A_{n(\alpha_x)}}_{\text{не более, чем счёт. объед.}} = X$

Начиная с этого момента все топологические пространства удовлетворяют II аксиоме отделимости (т.е Хаусдорфовы)

Опр (X, τ) – хаусдорфово, если $\forall x, y \in X,\ x \neq y.\ \exists\, \mathcal{U}_x \in \tau$ и $\mathcal{U}_y \in \tau$ т.ч.
$\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \varnothing$

19. Отображение между топологическими пространствами, непрерывность, непрерывность в точке, эквивалентность непрерывности и непрерывности в каждой точке. Непрерывность композиции.

! __Опр__ Пусть (X,τ_1), (Y,τ_2) – топологические пр-ва. $f: X \to Y$
Тогда f называется непрерывным отображением, если
$\forall B \in \tau_2$ его прообраз $f^{-1}(B) \in \tau_1$

__Опр.__ Пусть $\{x_n\} \subset (X,\tau)$ говорят, что $x_n \xrightarrow[\tau]{\text{(сходится к)}} x$, если
$\forall G \ni x$, $G \in \tau$ $\exists N = N(G): x_n \in G$ при $n \geq N$.

! __Опр__ Пусть $f: (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$, $x_0 \in X$ тогда отображение
f называется непрерывным в точке x_0, если $\forall$ U_{y_0} (где $y_0 = f(x_0)$), $y_0 \in U_{y_0}$
$U_{y_0} \in \tau_2$ $\exists V_{x_0} \ni x_0$ $V_{x_0} \in \tau_1$: $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$

! __Утв.__ $f: (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ непрерывно $\Longleftrightarrow$ f непрерывно в каждой точки $x_0 \in X$.

__Док-во:__ „$\Leftarrow$" Пусть f непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$. Покажем что f непрерывно т.е
$\forall B \subset Y$ – открыто, верно, что $f^{-1}(B)$ открыто в (X,τ_1).
$\exists f^{-1}(B) \neq \varnothing$ (иначе нечего доказывать), т.е $x \in f^{-1}(B)$
Тогда $f(x) \in B$, и т.к B – открыто $\exists$ $U_{y_0} \subset B$ точки $y_0 = f(x)$
По непрерывности в x найдется окрест-ть $V_x \subset X$: $f(V_x) \subset U_{y_0} \subset B$, тогда $V_x \subset f^{-1}(B)$ и $f^{-1}(B)$ – открыто
„$\Rightarrow$" Пусть f – непрерывное отображение. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in X$, произвольную окрестность U_{y_0} точки $y_0 = f(x_0)$. $f^{-1}(U_{y_0})$ – открыто, содержит x_0, т.к $f(x_0) \in U_{y_0}$
$\exists$ $V_{x_0} = f^{-1}(U_{y_0})$ – окр-ть x_0, тогда $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$

! __Утв.__ Пусть $f: (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$
$g: (Y,\tau_2) \to (Z,\tau_3)$ $f(X) = Y$, f,g – непрерывно, тогда $g \circ f: (X,\tau_1) \to (Z,\tau_3)$ непрерывно.

__Док-во:__ Пусть $W \subset Z$ – произвольно открытое мн-во. Тогда $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$
Т.к. g непрерывно, $g^{-1}(W)$ открыто в Y; т.к f непрерывно, $f^{-1}(g^{-1}(W))$ открыто в X
Значит $\forall$ открытого W прообраз $(g \circ f)^{-1}(W)$ открыт в X $\Rightarrow$ $g \circ f$ непрерывно.

! 20 Метрические пространства: определение, примеры. Непрерывность отображения в терминах метрики. Изолированные точки.

! Опр. X – мн-во, $\rho: X\times X \to [0,+\infty)$ – метрика (расстояние) если:
1. $\rho(x,x)=0 \ \forall x\in X$
2. Если $\rho(x,y)=0$, то $x=y$
3. $\rho(x,y)=\rho(y,x) \ \forall x,y\in X$
4. $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z) \ \forall x,y,z\in X$

4'. $\rho(x,z)\leq \max(\rho(x,y),\rho(y,z))$ – ультраметрика

Опр. (X,ρ) – метрическое пространство. X – мн-во, ρ – метрика на нём.

Примеры: 1) X – произвольное
$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$ пространство изолированных точек.
2) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x-y|$
3) $X=\mathbb{R}^d=\{(x_1,\dots,x_d): x_k\in\mathbb{R}, 1\leq k\leq d, d\in\mathbb{N}\}$
$x=(x_1,\dots,x_d)$ $y=(y_1,\dots,y_d)$
$\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d}(x_k-y_k)^2}$
4) Расстояние на графе, если граф – дерево, то ультраметрика.

! Опр. Пусть (X,ρ_1), (Y,ρ_2) – метрические пр-ва, пусть $f: X\to Y$, отображение f называется непрерывным в точке $x_0\in X$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \rho(x,x_0)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$
Отображение f непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке.

! Утв. $f:(X,\rho_1)\to(Y,\rho_2)$ непрерывно в точке $x_0 \Leftrightarrow f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ непрерывно в x_0, где τ_1 порождается метрикой ρ_1
τ_2 ——— // ——— ρ_2

Док-ва нет ☹

Опр. Открытый шар: $B_r(a):=\{x\in X: \rho(a,x)<r\}$, $r>0$ (центр шара – a, радиус – r)

Опр. Замкнутый шар: $\overline{B}_r(a):=\{x\in X: \rho(a,x)\leq r\}$, $r>0$

Опр. Точка $x\in(X,\rho)$ называется изолированной точкой мн-ва $A\subset X$
если $x\in A$, $\exists r>0: B_r(x)\cap A = x$

Утв. В метрических пространствах всякая точка прикосновения мн-ва B – либо предельная точка B, либо изолированная точка B.

Док-во: Пусть x – точка прикосновения B (опр. в 15 вопросе). Рассмотрим 2 случая:
1. Если $\forall r>0$ выполняется $(B_r(x)\setminus\{x\})\cap B\neq\varnothing$, то по опр. x – предельная точка B
2. Если не так, то $\exists r_0>0: (B_{r_0}(x)\setminus\{x\})\cap B=\varnothing$. Отсюда должно следовать $x\in B$ и $B_{r_0}(x)\cap B = x$. Это условие того, что x – изолирован

! 21. Последовательности в метрических пространствах, предел. Последовательность Коши. Полное метрическое пространство.

! Опр. Пусть $\{x_n\} \subset (X, \rho)$ – последовательность. Говорят, что $x_n \xrightarrow[\rho]{} x$, если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ \ \rho(x_n, x) < \varepsilon$

Замечание: В частности, если $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x - y|$, то $x_n \to x$ в $\mathbb{R}$, если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ \ |x_n - x| < \varepsilon$

! Опр. (Последовательность Коши) Пусть (X, ρ) – метрическое пр-во.
Последовательность x_n – послед-ть Коши (фундаментальная, сходящаяся в себе послед-ть), если
! Критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n_1, n_2 \geq N \ \ \rho(x_{n_1}, x_{n_2}) < \varepsilon$

Утв. Всякая сходящаяся послед-ть – послед-ть Коши.

Док-во: Пусть $x_n \to x$, тогда док-ем, что $\{x_n\}$ – пос-ть Коши.
Зафиксируем произв. $\varepsilon > 0$
Надо найти $N(\varepsilon) : \forall n_1, n_2 \geq N \ \ \rho(x_{n_1}, x_{n_2}) < \varepsilon$
$x_n \to x \Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists \tilde{N}(\frac{\varepsilon}{2}) : \forall n \geq \tilde{N}$ верно $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$
Но тогда $\forall n_1, n_2 \geq \tilde{N}$ по неравенству тр-ка $\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq \rho(x_{n_1}, x) + \rho(x_{n_2}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
т.е. $N(\varepsilon) = \tilde{N}(\frac{\varepsilon}{2})$

! Опр. (X, ρ) – называется полным, если $\forall$ послед-ть Коши сходится к какой-то точке $x \in X$.

Утв. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ – полное метрическое пространство.

! 22 Последовательности на вещественной прямой. Предел: определение и примеры. Единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности.

Опр. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – последовательность
$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $x_n := f(n)$

! Опр. $A \in \mathbb{R}$ – предел последовательности $\{x_n\}$, если
$\Updownarrow$ $\forall U(A)$ $\exists N \in \mathbb{N}: x_n \in U(A)$ $\forall n > N$
окрест-ть

! Опр. $A \in \mathbb{R}$ – предел последовательности $\{x_n\}$, если
$\Updownarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}: x_n \in U_\varepsilon(A)$ $\forall n > N$

! Опр. $A \in \mathbb{R}$ – предел последовательности $\{x_n\}$, если
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}: |x_n - A| < \varepsilon$ $\forall n > N$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ или $x_n \to A$ при $n \to \infty$

Опр Если у $\{x_n\}$ $\exists$ предел, то $\{x_n\}$ сходящаяся п-ть, иначе расходящ.

Примеры: $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \ldots$ – расходящ. п-ть
$x_n = \frac{1}{n}$, док-ем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
Дано: $\varepsilon > 0$.
Найдём N чтобы $|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, тогда при всех $n > N$ действительно $\frac{1}{n} < \varepsilon$
$\Rightarrow$ предел $= 0$

Опр. Если $\exists A \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}: x_n = A$ $\forall n > N$, то $\{x_n\}$ – финально постоянная

Опр $\{x_n\}$ – ограниченная, если $\exists M: |x_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Thm 1) Финальная последовательность сходится
2) $\forall$ окрестность предела последовательности $\{x_n\}$ содержит все x_n, кроме конечного числа
3) Последовательность $\{x_n\}$ не может иметь двух разных пределов
4) Сходящ. последовательность ограничена

Док-во: 1) Если $x_n = A$ $\forall n > N \Rightarrow \forall U(A)$ $\forall n > N$ $x_n = A \in U(A) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$
2) По опр. предела
3) $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A_2$, док-ем, что $A_1 = A_1$
От противного. Пусть $A_1 \neq A_2$. Тогда $\exists$ $U(A_1)$ и $U(A_2)$: $U(A_1) \cap U(A_2) = \varnothing$
$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}: x_n \in U(A_1)$ $\forall n > N_1$, $x_n \in U(A_2)$ $\forall n > N_2$ $\Rightarrow$
$x_n \in U(A_1) \cap U(A_2)$ $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$, но $U(A_1) \cap U(A_2) = \varnothing$ противоречие
4) $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $\forall U_1(A)$ $\exists N: x_n \in U_1(A)$ $\forall n > N \Rightarrow$
$\Rightarrow |x_n - A| < 1 \Rightarrow |x_n| < |A| + 1$
$|x_n| = |x_n - A + A| \leq |x_n - A| + |A| < 1 + |A|$
Возьмём $M > \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, 1 + |A|\} \Rightarrow |x_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

23. Предельный переход и арифметические операции.

Thm. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = A+B$
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = AB$
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$, если $y_n \neq 0$ и $B \neq 0$

Док-во: 1) Возьмём $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N_1, N_2$: $n > N_1$ $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$
$n > N_2$ $|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$ тогда для $n > N$ $|(x_n+y_n) - (A+B)| = |x_n - A + y_n - B| \leq |x_n - A| + |y_n + B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$\Rightarrow x_n + y_n \to A+B$

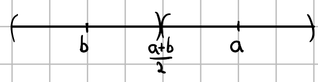
2) т.к послед-ти ограничени $\exists M_1, M_2 : \forall n > N_0$ $|x_n| < M_1$ и $|y_n| < M_2$
Возьмём $\delta > 0$, найдём N_1, N_2 т.ч. при $n > N_1$ $|x_n - A| < \delta_1$, при $n > N_2$ $|y_n - B| < \delta_2$
Положим $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$
$|x_n y_n - AB| = |x_n(y_n - B) + B(x_n - A)| \leq |x_n||y_n - B| + |B||x_n - A|$
Для $n > N$ выполнено $|x_n| < M_1$: $|x_n y_n - AB| \leq M_1 |y_n - B| + |B||x_n - A|$
Положим $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2M_1}$ и $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2|B|}$
получаем $|x_n y_n - AB| < M_1 \frac{\varepsilon}{2M_1} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2|B|} = \varepsilon$

3) $\exists N_1 : \forall n > N_1$ $|y_n - B| < \frac{|B|}{2} \Rightarrow |y_n| > \frac{|B|}{2}$ (знаменатели не малы и не обращаются в 0)
Возьмём $\varepsilon > 0$ $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{Bx_n - Ay_n}{By_n}\right| \leq \frac{|B||x_n - A| + |A||y_n - B|}{|B||y_n|}$
Для $n > N_1$ имеем $\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|B|}$ Поэтому $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B}\right| \leq \frac{2}{|B|}|x_n - A| + \frac{2|A|}{|B|^2}|y_n - B|$
Выберем N_2, N_3 : для $n > \max(N_2, N_3)$ $|x_n - A| < \frac{\varepsilon|B|}{4}$, $|y_n - B| < \frac{\varepsilon|B|^2}{4|A|}$ (Если $A \neq 0$)
Тогда при $n \geq \max(N_1, N_2, N_3)$ $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B}\right| < \frac{2}{|B|} \cdot \frac{\varepsilon|B|}{4} + \frac{2|A|}{|B|^2} \cdot \frac{\varepsilon|B|^2}{4|A|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

24. Предельный переход и неравенства. Теорема о двух милиционерах.

Предложение: $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $x_n \le y_n \ \forall n$, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b \Rightarrow a \le b$

Док-во: От противного. $\exists \ a > b$, $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$



$\exists N_1 : \forall n \ge N_1 \ \ x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$\exists N_2 : \forall n \ge N_2 \ \ y_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

$\forall n \ge \max(N_1, N_2): \ y_n < \frac{a+b}{2} < x_n$

Противоречие.

Замечание: Строгое неравенство может не сохранятся

Пример: $x_n := -\frac{1}{n} < \frac{1}{n} =: y_n$, но $\lim x_n = \lim y_n = 0$

Сл-я: 1 Если $x_n \le b \ \ \forall n$, $\lim x_n = a \Rightarrow a \le b$

2 Если $x_n \ge b \ \ \forall n$, $\lim x_n = a \Rightarrow a \ge b$

Док-во: 1 $y_n := b$, далее из теоремы

2 $y_n := b$, далее из теоремы

Следствие: $x_n \in [a,b]$, $\lim x_n = c \Rightarrow c \in [a,b]$. Следует из предыдущих сл-ий.

Теорема о двух милиционерах: $x_n \le y_n \le z_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim x_n = \lim z_n = a \Rightarrow \lim y_n = a$

Док-во:

$$\left.\begin{aligned} &\lim x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \\ &\lim z_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 : z_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_n > a-\varepsilon, \ z_n < a+\varepsilon$$

При $n \ge \max(N_1, N_2)$ $\quad a-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a+\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon \Rightarrow \lim y_n = a$

Сл-ие: $|y_n| \le z_n \ \forall n$, $\lim z_n = 0 \Rightarrow \lim y_n = 0$

Док-во: $x_n := -z_n \Rightarrow -z_n \le y_n \le z_n$, но $\lim(-z_n) = \lim z_n = 0$, тогда $\lim y_n = 0$.

25 Полнота пространства вещественных чисел $\mathbb{R}$, эквивалентность полноты и непустоты пересечения вложенных шаров.

! **Опр** Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз-я послед-тью Коши, если
$\forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon),\ \forall n,m \geq N\ \ \rho(x_n,x_m)<\varepsilon$

! **Опр** Пр-во (X,ρ) – полное, если любая посл-ть Коши имеет предел

Утв $(\mathbb{R},\rho)$ – полное метрическое пр-во.

Док-во: x_n – последовательность Коши.

1. Последовательность ограничена: Возьмём $\varepsilon=1$. по опр Коши найдется $N: \forall n \geq N\ \ |x_n - x_N| < 1$
тогда $\forall n \geq N\ \ |x_n| \leq |x_N| + 1$. Т.к. конечное кол-во первых членов $\{x_1, \dots, x_{N-1}\}$ ограничено, следует что вся посл-ть ограничена.
2. Выбор сходящейся подпосл-ти (т. Больцано-Вейерштрасса): $\forall$ огр. посл-ть в $\mathbb{R}$ имеет сх-ся подпосл-ть
Значит $\exists$ подпосл-ть x_{n_k} и число $L \in \mathbb{R}$ т.ч. $x_{n_k} \to L\ (k\to\infty)$
3. Вся последовательность сх-ся к тому же пределу. Док-ем $x_n \to L$
Возьмём произвольное $\varepsilon>0$. Т.к $x_{n_k} \to L\ \exists K: \forall k \geq K\ \ |x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$
Т.к. x_n - посл-ть Коши $\exists N: \forall m,n > N\ \ |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
Положим $M = \max(N, n_K)$. Тогда $\forall n \geq M$ можно выбрать k с $n_k \geq M$ (т.к. $n_k \to \infty$)
Тогда $n, n_k > M$ поэтому $|x_n - L| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Это показывает, что $\forall \varepsilon>0\ \exists M: \forall n \geq M\ \ |x_n - L| < \varepsilon$, т.е $x_n \to L$

! **Thm** (X,ρ) – полно $\iff \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{r_n}(a_n) \neq \varnothing$, $\overline{B}_{r_1}(a_1) \supset \overline{B}_{r_2}(a_2) \supset \overline{B}_{r_3}(a_3) \supset \dots$, $r_n \to 0$

Док-во: „$\Rightarrow$" Рассмотрим посл-ть центров (a_n). Для $m>n$ $a_m \in \overline{B}_{r_m}(a_m) \subset \overline{B}_{r_n}(a_n)$, поэтому $\rho(a_n,a_m) \leq r_n$
Т.к. $r_n \to 0$ (a_n) – посл-ть Коши. По полноте $a_n \to x$ для некоторого $x \in X$.
Покажем, что $x \in \overline{B}_{r_n}(a_n)\ \forall n$. Зафиксируем n. $\forall m \geq n\ \ \rho(a_m,a_n) \leq r_n$
пройдя к пределу при $m\to\infty$ $\rho(x,a_n) = \lim(a_m,a_n) \leq r_n$, т.е $x \in \overline{B}_{r_n}(a_n)$.
Значит $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{r_n}(a_n) \Rightarrow$ пересеч. не пусто.

„$\Leftarrow$" Пусть (x_n) - Коши послед-ть. $\forall k \in \mathbb{N}$ возьмём $\varepsilon_k = 2^{-k}$
по опр. $\exists M_k: \forall n,m > M_k\ \ \rho(x_n,x_m) < \varepsilon_{k+1} = 2^{-(k+1)}$
Построим возрастающую последовательность N_k так: $N_1 = M_1$, $N_{k+1} = \max(M_{k+1}, N_k + 1)$
Тогда $\forall m,n > N_k\ \ \rho(x_m,x_n) < 2^{-(k+1)}$. В частности $\forall n \geq N_k\ \ \rho(x_n, x_{N_k}) < 2^{-(k+1)}$
Определим шары: $B_k = \overline{B}_{r_k}(x_{N_k})$, $r_k := 2^{-k}$, покажем, что они вложены: пусть $y \in \overline{B}_{k+1}$ тогда
$\rho(y,x_{N_k}) \leq \rho(y,x_{N_{k+1}}) + \rho(x_{N_k},x_{N_{k+1}}) < r_{k+1} + 2^{-(k+1)} = 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} = 2^{-k} = r_k$
поскольку $\rho(x_{N_k},x_{N_{k+1}}) < 2^{-(k+1)}$ по выбору N_{k+1} значит $B_{k+1} \subset B_k$ и $r_k \to 0$
По предположению $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ непусто. Выберем $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, покажем, что $x_n \to x$.
$\forall \varepsilon>0$ найдём K с $2^{-K} < \frac{1}{3}\varepsilon$
$\forall n \geq N_K\ \ \rho(x_n,x) \leq \rho(x_n,x_{N_K}) + \rho(x_{N_K},x) < 2^{-(K+1)} + r_K = 2^{-(K+1)} + 2^{-K} = 3 \cdot 2^{-(K+1)}$
т.к $2^{-(K+1)} < \varepsilon$ Тогда $\forall n > N_K\ \ \rho(x_n,x) < \varepsilon$ Значит $x_n \to x$.

26 Теорема Бэра. Пополнение пространства.

Опр (X,ρ), (X^*,ρ^*) – пополнение (X,ρ), если

1 (X^*,ρ^*) – полное

2 $X \subset X^*$ и $\rho^*(x,y) = \rho(x,y)$, $x,y \in X$

3 X плотно в X^*

Thm Если (X,ρ), то существует единственное (X^*,ρ^*) с точностью до изометрии φ

Без док-ва.

Утв $\mathbb{R}$ дополнение $\mathbb{Q}$

Опр A – нигде не плотно, если
$\mathrm{Cl}\,A$ не содержит ни одного замкнутого шара.

Thm Бэра. Если (X,ρ) – полное метрическое пространство $X \neq \varnothing$
X не может быть представлено в виде $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k – нигде не плотное мн-во (т.е. $\mathrm{Int}\,\overline{A_k} = \varnothing\ \forall k$)

Док-во: От противного
Пусть (X,ρ) – полное метрическое пр-во, $X \neq \varnothing$. Предположим, что $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и каждое A_k нигде не плотно
Возьмём любое непустое открытое мн-во $U_0 \subset X$. Поскольку A_1 – нигде не плотное, мн-во $U_0 \setminus \mathrm{Cl}\,A_1$ непусто и открыто $\Rightarrow \exists\, \overline{B}_1 = \overline{B}_{r_1}(x)$
т.ч. $\overline{B}_1 \subset U_0 \setminus \mathrm{Cl}\,A_1$, $r_1 > 0$.
На k-м шаге уже есть замкнутый шар $\overline{B}_k = \overline{B}_r(x_k)$ т.ч. $\overline{B}_k \subset U_{k-1}$ и $\overline{B}_k \cap \mathrm{Cl}\,A_j = \varnothing\ \forall\, j \le k$. Тогда его внутреняя часть $\mathrm{Int}(\overline{B}_k) = U_k$ - открыта
Мн-во A_{k+1} – нигде не плотно $U_k \setminus \mathrm{Cl}\,A_{k+1}$ непусто и открыто $\Rightarrow$ можно выбрать замкнутый шар $\overline{B}_{k+1} = \overline{B}_{r_{k+1}}(x_{k+1})$ т.ч.
$\overline{B}_{k+1} \subset U_k \setminus \mathrm{Cl}\,A_{k+1}$ $r_{k+1} \le \frac{1}{2} r_k$

Так мы строим вложенную посл-ть замкнутых шаров $\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \overline{B}_3 \supset \ldots$ и $r_k \le 2^{-k+1} r_1$ поэтому $r_k \to 0$
Т.к. X полно пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k$ непусто, возьмем точку x из этого пересечения.
По построению $\forall k$ имеем $\overline{B}_k \cap \mathrm{Cl}\,A_k = \varnothing$, значит $x \notin \mathrm{Cl}\,A_k\ \forall k$, а значит $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Cl}\,A_k$, в частности $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$
Но по предположению $\bigcup_k A_k = X$, поэтому такое не могло $\exists$. Противоречие.

27 Монотонные последовательности в $\mathbb{R}$. Примеры, теорема Вейерштрасса

Опр $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ если $\forall v\ \exists N: \forall n \geq N\ \ x_n > v$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ если $\forall v\ \exists N: \forall n \geq N\ \ x_n < v$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ если $\forall v\ \exists N: \forall n \geq N\ \ |x_n| > v$

Thm Вейерштрасса

Если x_n монотонно возрастает и ограничена, т.е $\exists C: \forall n\ \ x_n \leq C$,
тогда у x_n есть предел.

Док-во: $\exists$ x_n - монотонно возрастает и ограничена. Тогда мн-во $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничено. Тогда $\exists$ $x = \sup x_n$, $x \leq C \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N: x - \varepsilon < x_N \leq x$

Тогда $|x_n - x| < \varepsilon$ при $n > N \Rightarrow \lim x_n = x$

!

Thm Больцано-Вейерштрасса

1 Неограниченная монотонная последовательность стремится к $+\infty$ или $-\infty$

2 Из любой неограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ или $-\infty$

Док-во: 1 Пусть (x_n) возрастает x_n неогр. $\Rightarrow$ никакое v не явл. верхней границей $\Rightarrow \exists m: x_m > v \Rightarrow v < x_m \leq x_{m+1} \leq x_{m+2} \leq \ldots$

$\Rightarrow x_n > v$, начиная с некоторого номера $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$

2 Пусть x_n неогр. сверху.

1 не явл верхней границей $\Rightarrow \exists\ x_{n_1} > 1$

$\max(2, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ не явл верхней границей $\Rightarrow \exists\ x_{n_2} > \max(2, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \Rightarrow x_{n_2} > 2$, $n_2 > n_1$

$\max(3, x_1, x_2, \ldots, x_{n_2})$ не явл верхней границей $\Rightarrow \exists\ x_{n_3} > \max(3, x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}) \Rightarrow x_{n_3} > 3$, $n_3 > n_2$

и т.д.

Итого $x_{n_k} > k$ и $n_1 < n_2 < \ldots \Rightarrow (x_{n_k})$ - подпоследовательность (x_n) и $\lim x_{n_k} = +\infty$ по предельному переходу в неравенстве.

Опр Последовательность (x_n) монотонна если её члены упорядочены по возрастанию или по убыванию

Возрастающая посл-ть: $x_{n+1} \geq x_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Строго возраст. посл-ть: $x_{n+1} > x_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Убывающая посл-ть: $x_{n+1} \leq x_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Строго убывающ. посл-ть $x_{n+1} < x_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Примеры: $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{2}{3}, \ldots$ $\quad x_{n+1} > x_n\ \ \forall n$

$x_n = \frac{1}{n}$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}, \ldots$ $\quad x_{n+1} < x_n\ \ \forall n$

! 26. Число e: определение, существование

Рассмотрим послед-ть $x_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$, где $a \in \mathbb{R}$

Предложение: x_n монотонно возрастает начиная с $n > -a$ и ограничено сверху

Док-во: 1 Монотонно возрастает (если $a<0$, то с номера $[-a]+1$)

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{a}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\frac{(n+a)^n}{n^n}}{\frac{(n-1+a)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} = \frac{(n+a)^n}{(n-1+a)^{n-1}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{(n+a)^n \cdot (n-1)^n}{(n-1+a)^n \cdot n^n} \cdot \frac{(n-1+a)}{n-1} =$$

$$= \left(\frac{n^2-n+an-a}{n^2-n+an}\right)^n \cdot \frac{n-1+a}{n-1} = \underbrace{\left(1-\frac{a}{n(n+a-1)}\right)^n}_{\text{по неравенству Бернулли } \geq \left(1-\frac{na}{n(n+a-1)}\right) = \frac{n-1}{n-1+a}} \cdot \frac{n-1+a}{n-1} \geq \frac{n-1}{n-1+a} \cdot \frac{n-1+a}{n-1} = 1$$

2 Ограничено сверху.

$y_n = \left(1-\frac{a}{n}\right)^n$ монотонно возрастает при $n > a$

$x_n y_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{a}{n}\right)^n = \left(1-\left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^n \leq 1$

$y_n \geq c > 0$ начиная с некоторого номера $\Rightarrow 1 \geq x_n y_n \geq x_n c \Rightarrow x_n \leq \frac{1}{c}$, начиная с некоторого номера

$\Rightarrow x_n$ ограничена

Сл-ие: Существует конечный $\lim \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

Опр 1 $\exp a := \lim \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

2 $e := \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828$

Сл-ие: Последовательность $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ строго убывает и стремится к e.

Док-во: $z_n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \to e \qquad z_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}$

Последовательность $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ строго возрастает, следовательно, обратная к ней строго убывает.

! 29. Верхние и нижние пределы последовательности. Свойства связь со сходимостью.

Опр. $\underline{\lim}\, x_n := \lim \boxed{\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}} =: y_n$

нижний предел рус. $\underline{\lim}$ анг $\liminf$

Опр. $\overline{\lim}\, x_n := \lim \boxed{\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}} =: z_n$

верхний предел

Thm $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\underline{\lim} \le \overline{\lim}$

Док-во: $y_1 \le y_2 \le y_3 \le \dots$, т.к. (y_n) - возрастающая послед-ть. У такой последовательности есть предел в $\overline{\mathbb{R}}$

$z_1 \ge z_2 \ge z_3 \ge \dots$, т.к. (z_n) - убывающая послед-ть. У такой последовательности есть предел в $\overline{\mathbb{R}}$

Про неравенство $\underline{\lim} \le \overline{\lim}$: $y_n \le z_n$, $y_n \to \underline{\lim}$, $z_n \to \overline{\lim}$ по предельному переходу в неравенстве $\underline{\lim} \le \overline{\lim}$

(для справки) Опр a - частичный предел посл-ти (x_n), если найдется подпосл-ть $x_{n_k} \to a$

Предложение: 1 $\overline{\lim}$ - наибольший частичный предел

2 $\underline{\lim}$ - наименьший частичный предел

3 $\exists \lim \in \overline{\mathbb{R}} \iff \overline{\lim} = \underline{\lim}$ и в этом случае $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

Док-во: 1 Случай $a \in \mathbb{R}$: Пусть $a = \lim z_n$, $z_n \searrow a$, $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

Будем строить подпосл-ть (x_{n_k})

найдется $n_k > n_{k-1}$: $x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$. Пусть не нашлось $\Rightarrow x_n \le a - \frac{1}{k}$ $\forall n \ge n_{k-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\{x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-1}+1}, \dots\} \le a - \frac{1}{k} \Rightarrow a \le z_{n_{k-1}} \le a - \frac{1}{k}$. Противоречие

$a - \frac{1}{k} \to a$, $z_{n_k} \to a$, $a - \frac{1}{k} < x_{n_k} \le z_{n_k} \xRightarrow{2\text{ мил.}} x_{n_k} \to a$

Докажем, что a - наибольший частичный предел

Пусть b - частичный предел $\Rightarrow b = \lim x_{n_k}$. Но $b \leftarrow x_{n_k}$, $z_{n_k} \to a$ по предельному переходу $b \le a$

Случай $a = -\infty$: Тогда $z_n \to -\infty \Rightarrow z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \ge x_n \Rightarrow x_n \to -\infty$

Случай $a = +\infty$: Тогда $z_n \to +\infty \Rightarrow \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = +\infty \Rightarrow x_n$ не ограничена сверху $\Rightarrow$ в ней найдется подпосл-ть стремящаяся к $+\infty$

2 Аналогично.

3 „$\Rightarrow$" Если $\lim x_n = a$, то все подпосл-ти стремятся к $a \Rightarrow$ все частичные пределы равны $a \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = \lim x_n = a$

„$\Leftarrow$" $y_n \to a$, $z_n \to a$, $y_n \le x_n \le z_n \xRightarrow{2\text{ мил}} x_n \to a \Rightarrow \lim x_n = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = a$

Замечание: Арифметики для верхних и нижних пределов нет

Пример: $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1} \Rightarrow \underline{\lim} x_n = \underline{\lim} y_n = -1$

$x_n + y_n = 0 \Rightarrow \underline{\lim}(x_n + y_n) = 0$

$\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n = -2 < 0 = \underline{\lim}(x_n + y_n)$

30. Предел функции в метрических пространствах. Эквивалентное определение. Единственность предела.

Опр. $(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ — метрические пр-ва, $E \subset X$, a — предельная точка E

$f: E \to Y$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

По Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ \ 0 < \rho_x(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), b) < \varepsilon$

$\Updownarrow$

По Гейне: $\forall (x_n) \in E$, $x_n \neq a$ если $\lim x_n = a$, то $\lim f(x_n) = b$

Предложение Опр по Коши и Гейне равносильны.

Док-во:

Коши $\Rightarrow$ Гейне: Берем посл-ть из опр по Гейне: $x_n \in E$, $x_n \neq a$ $\lim x_n = a$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ из опр по Коши, по нему найдем δ, по δ найдем N из опр по Гейне.

$\exists N: \forall n \geq N\ \ \rho_x(x_n, a) < \delta \Rightarrow \rho_y(f(x_n), b) < \varepsilon \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

Гейне $\Rightarrow$ Коши: Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим для него не найдется $\delta > 0$

Не подходит $\delta = 1$, т.е найдётся $x_1 \in E$, $x_1 \neq a$ т.ч. $\rho_x(x_1, a) < 1$ и $\rho_y(f(x_1), b) \geq \varepsilon$

Не подходит $\delta = \frac{1}{2}$, т.е найдётся $x_2 \in E$, $x_2 \neq a$ т.ч. $\rho_x(x_2, a) < \frac{1}{2}$ и $\rho_y(f(x_2), b) \geq \varepsilon$

И т.д. В общем случае:

Не подходит $\delta = \frac{1}{n}$, т.е найдётся $x_n \in E$, $x_n \neq a$ т.ч. $\rho_x(x_n, a) < \frac{1}{n}$ и $\rho_y(f(x_n), b) \geq \varepsilon$

Последовательность x_n стремится к a, тогда последовательность $f(x_n)$ должна стремиться к b, но $\forall n\ \ \rho_y(f(x_n), b) > \varepsilon$. Противоречие

Следствие: Предел единственен

Док-во: Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, где a — предельная точка E.

Возьмем посл-ть $x_n \in E$, $x_n \neq a$ и $\lim x_n = a$. Тогда по опр по Гейне $\lim f(x_n) = b$ и $\lim f(x_n) = c \Rightarrow b = c$

31 Арифметические операции с пределами. Предельные переходы в неравенствах. Бесконечно малые.

Thm об арифм. операциях с пределами функций

(X,ρ) - метр пр-во, $E\subset X$, $f,g: E\to \mathbb{R}$, a - предельная точка E

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$

1 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = b\pm c$

2 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = bc$

3 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, если $c\neq 0$ и $g(x)\neq 0$

Док-во 1. Проверим опр по Гейне. Возьмём посл-ть $x_n\in E$, $x_n\neq a$ т.ч. $\lim x_n = a$

Тогда $\lim f(x_n)=b$ и $\lim g(x_n)=c$

Для последовательностей мы знаем, что $\lim(f(x_n)\pm g(x_n)) = b\pm c \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = b\pm c$

Остальные пункты аналогично док-тся из утв для посл-тей

Thm о предельном переходе в нер-ах

$f,g: E\to\mathbb{R}$, $E\subset X$, a - предельная точка E и $f(x)\leq g(x)$ $\forall x$

Тогда если $b := \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $c := \lim\limits_{x\to a} g(x)$, то $b\leq c$

Док-во: Возьмем посл-ть $x_n\in E$, $x_n\neq a$ т.ч $\lim x_n = a$

Тогда $\lim f(x_n)=b$ и $\lim g(x_n)=c$. Кроме того $f(x_n)\leq g(x_n) \Rightarrow b\leq c$ (предельный переход для посл-тей).

Сл-е Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, Пусть $\exists\,\delta>0$: если $0<|x-a|<\delta$, то

1 $f(x)>g(x) \Rightarrow b\geq c$

2 $f(x)\geq g(x) \Rightarrow b\geq c$

3 $f(x)>c \Rightarrow b\geq c$

4 $f(x)\geq c \Rightarrow b\geq c$

Док-во: (3) и (4) следует из (1) и (2) при $g(x)\equiv c$

(1) и (2) следует из предыдущ. утв.

Опр Пусть $f: E\to\mathbb{R}$, пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, тогда ф-я f называется бесконечно малой при $x\to a$, $x\in E$

Предложение: Пусть $E\subset\mathbb{R}$, $f,g: E\to\mathbb{R}$, a - предельная точка E

1 f,g - Б.М. при $x\to a$, $x\in E$, тогда $f+g$ - бесконечно малая, при $x\to a$

2 $f\cdot g$ - Б.М. при $x\to a$

3 Пусть $h: E\to\mathbb{R}$ т.ч. $\exists\,\varepsilon>0, M>0$: $|h(x)|\leq M$ и $|x-a|<\varepsilon$, $x\in E$, $x\neq a$

Тогда $f\cdot h$ - Б.М.

Док-во: 1 Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. По опр предела $\exists\,\delta_1>0$ т.ч. $\forall x\in E$ с $0<|x-a|<\delta_1$ выполняется $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

Аналогично найдется $\delta_2>0$ т.ч. при $0<|x-a|<\delta_2$ $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

Положим $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Тогда $\forall x\in E$ с $0<|x-a|<\delta$

$|f(x)+g(x)|\leq |f(x)|+|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow f+g$ - Б.М.

2. Возьмем произв. $\varepsilon>0$ $\exists\,\delta_1,\delta_2>0$ т.ч. при $0<|x-a|<\delta_1$ $|f(x)|<\sqrt{\varepsilon}$ и при $0<|x-a|<\delta_2$ $|g(x)|<\sqrt{\varepsilon}$. Положим $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$

Тогда $\forall x\in E$ с $0<|x-a|<\delta$ $|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon}=\varepsilon$

$\Rightarrow f\cdot g$ - Б.М.

3. Возьмем произв. $\varepsilon'>0$. Из условия $f(x)\to 0$ $\exists\,\delta>0$ т.ч. при $0<|x-a|<\delta$ выполняется $|f(x)|<\frac{\varepsilon'}{M}$

Положим $\delta'=\min(\delta,\varepsilon)$ ε который из предложения.

Тогда $\forall x\in E$ с $0<|x-a|<\delta'$ $|f(x)h(x)|\leq |f(x)|\cdot|h(x)|\leq |f(x)|\cdot M < \frac{\varepsilon'}{M}\cdot M=\varepsilon'$

32 Непрерывная функция: в точке и на мн-ве. Непрерывность композиции. Липшицевы и Гёльдеровы функции.

! Опр $f: E \to Y$, $E \subset X$, $a \in E$, f непрерывна в точке a, если
По Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E: \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Замечание: Если a не явл. предельной точкой E, то условие не накладываются (в какой-то окрестности нет точек кроме самой a, следовательно функция автоматически непрерывна)
Если a явл. предельной, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Предложение: О непрерывности композиции
$f: D \to Y$, $g: E \to Z$, $D \subset X$, $E \subset Y$, $f(D) \subset E$, f непрерывна в точке $a \in D$, g непрерывна в точке $f(a)$
Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a

Док-во: Будем пользоваться определением непрерывности
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall y \in E\ \rho_Y(y, f(a)) < \delta \Rightarrow \rho_Z(g(y), g(f(a))) < \varepsilon$
$\forall \delta > 0\ \exists \gamma > 0: \forall x \in D\ \rho_X(x, a) < \gamma \Rightarrow \rho_Y(f(a), f(x)) < \delta$
Берём ε по нему ищим δ, а по δ ищем γ, тогда вместо y подставляем $f(x)$ и получаем, что всё хорошо
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \gamma > 0: \forall x \in D$ и $\rho_X(x, a) < \gamma \Rightarrow \rho_Z(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$

! Опр. Пусть $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha$ $\forall x_1, x_2 \in E$,
где $C > 0$, $\alpha > 0$. Тогда f - Гёльдерова фун-я порядка α.
Если $\alpha = 1$, то f - Липшицева фун-я

33. Компактность. Равномерная непрерывность, теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Опр. Пусть (X,τ) – топологическое пр-во. $K\subset X$, K – компакт, если из любого покрытия K открытыми мн-ми можно выбрать конечное подпокрытие. (т.е $K\subset \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$, B_α – открыто $\forall\alpha$, $\exists$ конеч. набор т.ч. $K\subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{\alpha_j}$)

Thm (без док-ва) Пусть $K\subset\mathbb{R}$ – компакт $\Longleftrightarrow$ замкнуто и ограничено

Опр Пусть $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$

f равномерно непрерывна на E, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x_1,x_2\in E: |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

Примеры: $f(x)=x$ – равномерно непрерывна

$f(x)=\sin x$ равномерно непр-на т.к $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$

$f(x)=x^2$ не является равномерно непрерывной, хотя непрерывна во всех точках.

Thm Кантора

Пусть $f: K\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна, K компакт. Тогда f равномерно непрерывна.

Док-во: От противного. Пусть f не равномерно непрерывна K.

Тогда $\exists\,\varepsilon_0>0$ т.ч. $\forall\delta>0$ находятся точки $x,y\in K$ с $|x-y|<\delta$, но $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon_0$

Возьмём $\delta_n=\frac{1}{n}$. По предположению $\forall n\ \exists\ x_n,y_n\in K$ с $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ и $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$

Поскольку K компактен, послед-ть (x_n) имеет сх-ся подпослед-ть $x_{n_k}\to x\in K$

из $|x_{n_k}-y_{n_k}|<\frac{1}{n_k}$ $\Rightarrow$ $y_{n_k}\to x$ тоже

Но f непрерывна в x, поэтому $f(x_{n_k})\to f(x)$ и $f(y_{n_k})\to f(x)$

отсюда $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\to 0$, что противоречит неравенству $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|>\varepsilon_0$ $\forall k$

$\Rightarrow f$ равномерно непрерывна.