

Вопросы к коллоквиуму по алгебре. факультет МКН СПбГУ, осень 2025

И. Б. Жуков

1. Множества и операции над ними.
2. Отображения. Инъективность. Сюръективность. Биективность.
3. Обратное отображение.
4. Алгебраические операции, их свойства.
5. Группы. Подгруппы. Сокращение в группе.
6. Примеры групп. Изоморфизм групп.
7. Кольцо. Примеры. Группа обратимых элементов.
8. Поле.
9. Построение поля комплексных чисел.
10. Комплексное сопряжение.
11. Определение модуля и аргумента. Свойства модуля комплексного числа.
12. Существование и «единственность» аргумента комплексного числа.
13. Умножение и деление чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
14. Корни из комплексных чисел.
15. Корни из 1. Первообразные корни из 1.
16. Многочлены от одной переменной, переход к стандартной записи.
17. Свойства степени многочлена.
18. Теорема о делении с остатком для кольца многочленов.
19. Гомоморфизм подстановки.
20. Теорема Безу. Число корней многочлена над областью.
21. Формальное и функциональное равенство многочленов от одной переменной.
22. Делимость и ассоциированные элементы. Определение НОД.
23. Евклидовы кольца и области главных идеалов.
24. Существование и линейное представление НОД в области главных идеалов.
25. Свойства взаимно простых элементов в евклидовом кольце. Неприводимые элементы.
26. Факториальность евклидова кольца.
27. Кратные корни, сумма кратностей корней многочлена.
28. Производная многочлена, ее свойства.
29. Кратные корни и производная.

30. Разложение многочлена по степеням заданного многочлена.
31. Формула Тейлора.
32. Алгебраически замкнутые поля, формулировка основной теоремы алгебры.
33. Комплексные корни вещественных многочленов.
34. Неприводимые многочлены над полями вещественных и комплексных чисел.
35. Поле частных областей целостности.
36. Поле дробно-рациональных функций. Правильные дроби.
37. Примарные дроби. Лемма о дроби, знаменатель которой разложен на два взаимно простых множителя.
38. Разложение правильной дроби в сумму правильных примарных дробей.
39. Простейшие дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших.
40. Действия над матрицами и их свойства.
41. Элементарные преобразования и элементарные матрицы.
42. Приведение матрицы к ступенчатому виду элем. преобразованиями строк. Метод Гаусса.
43. Приведение матрицы к простейшему виду элем. преобразованиями строк и столбцов.
44. PDQ-разложение. Разложение обратимой матрицы в произведение элементарных.
45. Разложение перестановки в произведение транспозиций и элементарных транспозиций.
46. Чётность и знак перестановки.
47. Определение определителя. Определитель транспонированной матрицы.
48. Линейность определителя по строкам и столбцам.
49. Кососимметричность определителя по строкам и столбцам.
50. Поведение определителя при элементарных преобразованиях матрицы.
51. Определитель произведения матриц.
52. Критерий обратимости матрицы в терминах определителя.
53. Определитель блочно-треугольной матрицы.
54. Определитель матрицы с почти нулевой строкой.
55. Разложение определителя по строке (столбцу).
56. Взаимная матрица. Явный вид обратной матрицы. Формулы Крамера.
57. Линейное пространство. Определение, примеры, простейшие свойства.
58. Система образующих линейного пространства, свойства. Подпространство.
59. Линейно зависимые и независимые семейства, свойства.
60. Теорема о линейной зависимости линейных комбинаций.

61. Равносильные определения базиса.
62. Существование базиса. Размерность. Свойства пространств заданной размерности.
63. Размерность подпространства. Размерность суммы и пересечения.
64. Свойства матриц перехода между базисами.
65. Изменение координат вектора при замене базиса.