Вопросы к экзамену
12-13.01.2025

(1) Наивная теория множеств, операции с множествами, формулы де Моргана.
(2) Упорядоченные пары, декартово произведение, отношения, примеры.
(3) Функции (функциональное отношение), инъективные и сюръективные отображения, образы и прообразы, обратное отображение, композиция отображений.
(4) Аксиоматика вещественных чисел: аксиомы поля (сложение, умножение, связь между ними), аксиомы порядка, аксиома полноты. Простейшие следствия (по одному следствия из каждого набора аксиом, без доказательства).
(5) Границы множеств. Ограниченность сверху и снизу, супремум и инфимум, их существование.
(6) Натуральные числа, принцип математической индукции, простейшие примеры и следствия (без доказательства.
(7) Целые числа, рациональные числа.
(8) Иррациональные числа, иррациональность $\sqrt{2}$.
(9) Принцип Архимеда, следствия (без доказательства).
(10) Отрезки, интервалы на вещественной прямой, окрестность точки, δ-окрестность, расстояние, неравенство треугольника.
(11) Лемма о вложенных отрезках.
(12) Лемма о конечном покрытии (Бореля-Лебега).
(13) Принцип Больцано-Вейерштрасса.
(14) Равномощные множества, сравнение мощности множества и множества его подмножеств, счетные и несчетные множества.
(15) Топологические пространства: определение, открытые, замкнутые множества, точка прикосновения, предельная точка, замыкание, примеры топологических пространств.
(16) Сравнение топологий, топология, порожденная набором множеств, база топологии, свойства.
(17) Пространство со счетной базой, сепарабельное пространство, связь между ними, нигде не плотное множество, определяющая система окрестностей, первая аксиома счетности.
(18) Покрытие, теорема о выборе конечного или счетного подпокрытия. Хаусдорфовы пространства.
(19) Отображения между топологическими пространствами, непрерывность, непрерывность в точке, эквивалентность непрерывности и непрерывности в каждой точке. Непрерывность композиции.
(20) Метрические пространства: определение, примеры. Непрерывность отображения в терминах метрики. Изолированные точки.
(21) Последовательности в метрических пространствах, предел. Последовательность Коши. Полное метрическое пространство.
(22) Последовательности на вещественной прямой. Предел: определение, примеры. Единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности.
(23) Предельный переход и арифметические операции.

(24) Предельный переход и неравенства, теорема о двух милиционерах.
(25) Полнота пространства вещественных чисел $\mathbb{R}$, эквивалентность полноты и непустоты пересечения вложенных шаров.
(26) Теорема Бэра. Пополнение пространства.
(27) Монотонные последовательности в $\mathbb{R}$. Примеры, теорема Вейерштрасса.
(28) Число e: определение, существование.
(29) Верхний и нижний пределы последовательности. Свойства, связь со сходимостью.
(30) Предел функции в метрических пространствах. Эквивалентное определение. Единственность предела.
(31) Арифметические операции с пределами. Предельные переходы в неравенствах. Бесконечно малые.
(32) Непрерывная функция: в точке и на множестве. Непрерывность композиции. Липшицевы и Гельдеровы функции.
(33) Компактность. Равномерная непрерывность, теорема Кантора о равномерной непрерывности. **
(34) Экстремумы непрерывной функции на компакте.
(35) Непрерывный образ связного множества.
(36) Монотонные функции и разрывы.
(37) Производная вещественнозначной функции: определение, примеры, арифметические операции.
(38) Дифференцирование сложной функции.
(39) Теорема Ролля.
(40) Теоремы Коши и Лагранжа.
(41) Локальные экстремумы функций. Необходимое условие.
(42) 'Почти непрерывность' производной, теорема Дарбу.
(43) Разрывы производной.
(44) Производная и монотонность.
(45) Раскрытие неопределенностей: первое правило Лопиталя.
(46) Раскрытие неопределенностей: второе правило Лопиталя.
(47) Формула Тейлора, остаток в форме Пеано, примеры.
(48) Формула Тейлора с остатком в общей форме (Роша), следствия.
(49) Исследование экстремумов функций.
(50) Выпуклые функции, вторая производная.
(51) Первообразная функции. Определение, свойства, интегрирование по частям.
(52) Интеграл Римана. Дробление, разбиение, оснащенное разбиение, интегральная сумма Римана.
(53) Ограниченность интегрируемой функции.
(54) Верхняя и нижняя суммы Дарбу, интеграл Дарбу.
(55) Критерий интегрируемости по Риману, интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции.
(56) Свойства интеграла Римана.
(57) Интегрирование композиции.
(58) Интеграл с переменным верхним пределом, формула Ньютона-Лейбница.
(59) Две теоремы о среднем.
(60) Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

(61) Несобственные интегралы I и II рода, интеграл в смысле главного значения, критерий Коши сходимости.
(62) Признаки Абеля и Дирихле.
(63) Замена переменной в несобственном интеграле и интегрирование по частям.
(64) Формула Валлиса.
(65) Экспонента и логарифм.
(66) Формула Стирлинга.

Незнание хотя бы одного из следующих определений и формулировок влечет оценку "неудовлетворительно": определение супремума и инфимума, предела последовательности (в разных ситуациях и на разных языках), метрики, внутренних и предельных точек, открытых и замкнутых множеств, фундаментальной последовательности, экспоненты и числа e; формулировки критерия Коши, теорем о двух милиционерах и о предельном переходе в неравенстве, теоремы Больцано– Вейерштрасса (либо для последовательности, либо для бесконечных подмножеств компакта); определения компактности; характеристики компактности в $\mathbb{R}$; определения непрерывности (в разных терминах); формулировок теорем Вейерштрасса и Больцано– Коши о непрерывных функциях; замечательных пределов; определения производной и дифференцируемости функции в точке; производных элементарных функций; формулировка теоремы Ролля-Лагранжа-Коши; формул Тейлора в общем виде и для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ и $\log(1+x)$; условий монотонности функции; определения и необходимого условия экстремума; определения выпуклой функции и условий выпуклости в терминах производных