СПбГУ · МКН · СП · 1 КУРС

Конспект лекций по Математическому анализу

Лектор: Мозоляко П. А.

Составители: ....

Санкт-Петербург, 2026

Второй семестр

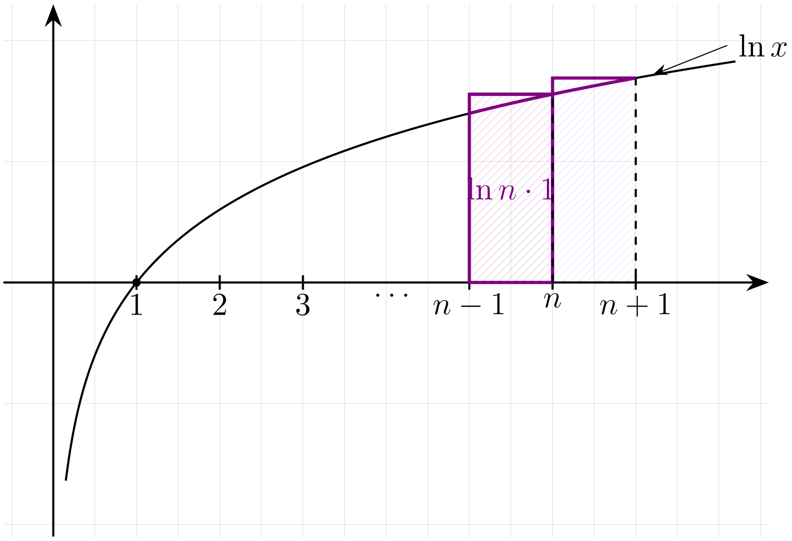
1. Формула Стирлинга. Неравенство Юнга. Неравенство Гёльдера

Определение 1: Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad n \to \infty.$$

Доказательство. Пишем $\log \equiv \ln$. Тогда

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$



Так как $\ln x$ возрастает, то для любого $n \geq 1$:

$$\int_n^{n+1} \ln x \, dx \;>\; \ln n \;>\; \int_{n-1}^{n} \ln x \, dx.$$

Суммируя по $n = 1, \ldots, N$

$$\int_0^N \ln x \, dx \;<\; \ln(N!) \;<\; \int_1^{N+1} \ln x \, dx.$$

Так как

$$(x \ln x - x)' = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad \int \ln x \, dx = x \ln x - x + \mathrm{C},$$

то

$$\int_0^n \ln x \, dx = n \ln n - n, \qquad \int_1^{n+1} \ln x \, dx = ((n+1)\ln(n+1) - (n+1)) - (1 \cdot \ln 1 - 1).$$

Следовательно,

$$n \ln n - n \;<\; \ln(n!) \;<\; (n+1)\ln(n+1) - n,$$

и, возводя в экспоненту,
$$n^n e^{-n} \;<\; n! \;<\; (n+1)^{n+1} e^{-n}.$$

Определим
$$d_n := \ln(n!) - \Big(\big(n+\tfrac12\big)\ln n - n\Big).$$

Если $d_n \to C$, то
$$n! = e^{d_n}\, n^{n+\frac12} e^{-n} = e^C \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+o(1)).$$

Кроме того, оценка $d_n = C + O\left(\frac1n\right)$ даст именно множитель $1 + O\left(\frac1n\right)$.

Вычислим разность:

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &= \ln(n!) - \Big(n+\tfrac12\Big)\ln n + n - \ln\big((n+1)!\big) + \Big(n+1+\tfrac12\Big)\ln(n+1) - (n+1)\\
&= -\ln(n+1) - \Big(n+\tfrac12\Big)\ln n + \Big(n+\tfrac32\Big)\ln(n+1) - 1\\
&= \Big(n+\tfrac12\Big)\big(\ln(n+1) - \ln n\big) - 1\\
&= \Big(n+\tfrac12\Big)\ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) - 1.
\end{aligned}$$

Положим
$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac1n = \frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = \frac{1+t}{1-t}, \qquad t := \frac{1}{2n+1}.$$

(Эта форма удобна, потому что $\ln\frac{1+t}{1-t}$ имеет красивый ряд.)

Для $|t|<1$ имеем сходящийся степенной ряд:

$$\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) = \ln(1+t) - \ln(1-t) = 2\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots\right).$$

Обозначим остаток частичной суммы:

$$\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) = 2\left(t + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right) + r_{2k+1}(t), \qquad |t|<1,$$

где при фиксированном t выполнено $r_{2k+1}(t) \to 0$ при $k\to\infty$.

Подставим это в $d_n - d_{n+1}$ и используем $n + \frac12 = \frac{1}{2t}$:

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &= \Big(n+\tfrac12\Big)\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) - 1\\
&= \frac{1}{2t}\left(2\left(t + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right) + r_{2k+1}(t)\right) - 1\\
&= \left(1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \cdots + \frac{t^{2k}}{2k+1}\right) + \frac{r_{2k+1}(t)}{2t} - 1\\
&= \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \cdots + \frac{t^{2k}}{2k+1} + \frac{r_{2k+1}(t)}{2t}.
\end{aligned}$$

Отсюда сразу видно, что $d_n - d_{n+1} > 0$, то есть (d_n) убывает.

Теперь оценим сверху. Так как для $j \ge 1$ выполнено $\frac{1}{2j+1} \le \frac13$, то

$$\frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \cdots + \frac{t^{2k}}{2k+1} \le \frac13\left(t^2 + t^4 + \cdots + t^{2k}\right).$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$ и используя сходимость ряда при $|t| < 1$, получаем

$$0 < d_n - d_{n+1} \le \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{\infty} t^{2j} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{1-t^2}.$$

Подставим $t = \frac{1}{2n+1}$:

$$0 < d_n - d_{n+1} \le \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{3\big((2n+1)^2 - 1\big)} = \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Суммируя по $j = n, \dots, n+m-1$, получаем для любого $m \ge 1$:

$$0 < d_n - d_{n+m} = \sum_{j=n}^{n+m-1} (d_j - d_{j+1}) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right).$$

(Значит d_n убывает и ограничена снизу, следовательно имеет предел.)

Обозначим $C := \lim\limits_{n\to\infty} d_n$. Тогда, переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$0 < d_n - C \le \frac{1}{12n},$$

то есть

$$d_n = C + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\ln(n!) = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\ln n - n + C + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и после экспоненты:

$$n! = e^C \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Осталось найти e^C.

Формула Валлиса:

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\frac{\pi}{2}.$$

Используем тождества

$$(2n)!! = 2^n n!, \qquad (2n)! = (2n)!!(2n-1)!!,$$

поэтому

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Тогда

$$\ln\left(\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\frac{\pi}{2}.$$

Теперь подставим разложения через d_n:

$$\ln(n!) = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \ln n - n + d_n, \qquad \ln((2n)!) = \left(2n + \tfrac{1}{2}\right) \ln(2n) - 2n + d_{2n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ln\left(\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}\right) &= 4n\ln 2 + 4\ln(n!) - 2\ln((2n)!) - \ln(2n+1) \\ &= 4d_n - 2d_{2n} + \ln n - \ln 2 - \ln(2n+1). \end{aligned}$$

(Все главные члены порядка $n \ln n$ и n сократились; остались только d_n и константы.)

Переходя к пределу при $n \to \infty$ (учитывая $d_n \to C$ и $d_{2n} \to C$), получаем

$$\ln\frac{\pi}{2} = 4C - 2C + \lim_{n\to\infty} \big(\ln n - \ln 2 - \ln(2n+1)\big) = 2C - 2\ln 2.$$

Значит

$$2C - 2\ln 2 = \ln\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2C = \ln(2\pi) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}\ln(2\pi), \qquad e^C = \sqrt{2\pi}.$$

Итак,

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad n \to \infty.$$

∎

1.1. Несколько интегральных неравенств

Утверждение 1: Неравенство Юнга

Пусть $a, b > 0$, $p, q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p, q \neq 1$. Тогда

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \qquad p > 1,$$

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \qquad p < 1.$$

Доказательство.

Claim. При $x > 0$ верно

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geq 0, \qquad \alpha < 0 \ \text{ или } \ \alpha > 1.$$

Проверяем

$$(x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1)' = \alpha\, x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\big(x^{\alpha-1} - 1\big) = 0 \iff x = 1.$$

$$1^\alpha - \alpha \cdot 1 + \alpha - 1 = 0.$$

Отсюда: максимум при $0 < \alpha < 1$, минимум при $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$.

Положим $x := \dfrac{a}{b}, \quad \alpha := \dfrac{1}{p}, \quad \dfrac{1}{q} := 1 - \dfrac{1}{p} = 1 - \alpha.$

Тогда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\cdot\frac{a}{b} + \frac{1}{p} - 1 \le 0, \qquad 0 < \frac{1}{p} < 1 \quad (\Leftrightarrow \ p > 1).$$

Умножая на $b > 0$, получаем

$$a^{\frac{1}{p}}\, b^{1-\frac{1}{p}} \le \frac{a}{p} + b\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Так как $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, то

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

А при $\dfrac{1}{p} < 0$ или $\dfrac{1}{p} > 1$ (то есть $p < 1$) получаем обратное неравенство:

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \ge \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

■

Утверждение 2: Неравенство Гёльдера

Пусть $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, и f, g интегрируемы по Риману на $[c,d] \subset (a,b)$ для любого $[c,d]$.

Тогда:

$$\int_a^b \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\forall\, p, q > 0,\ \ p, q < \infty: \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если $p = q = 2$, то имеем неравенство КБШ:

$$\int_a^b |fg| \le \sqrt{\int_a^b |f|^2} \cdot \sqrt{\int_a^b |g|^2}.$$