СПбГУ · МКН · СП · 1 КУРС

Конспект лекций по Математическому анализу

Лектор: Мозоляко П. А.

Составители: ....

Санкт-Петербург, 2026

Второй семестр

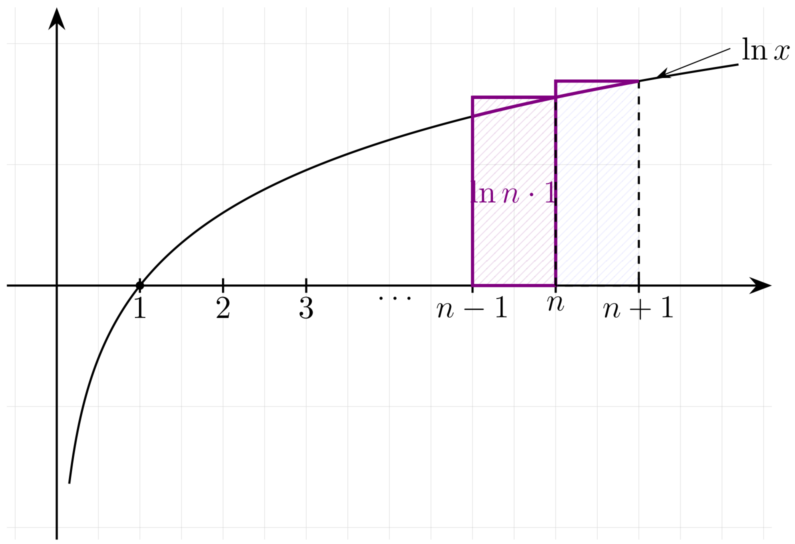
1. Формула Стирлинга. Неравенство Юнга. Неравенство Гёльдера

Определение 1: Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad n\to\infty.$$

Доказательство.

$$\log n! = \log 1 + \dots + \log n = \log 1\cdot 1 + \log 2\cdot 1 + \dots + \log n \cdot 1. \text{ Пишем } \log\equiv\ln$$



$$\int_n^{n+1}\ln x\,dx \;>\; \ln n\cdot 1 \;>\; \int_{n-1}^{n}\ln x\,dx$$

Отсюда, суммируя по $n = 1,\dots,N$:

$$\int_0^N \ln x\,dx \;<\; \ln(N!) \;<\; \int_1^{N+1}\ln x\,dx.$$

Так как

$$(x\ln x - x)' = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad \int \ln x\,dx = x\ln x - x + \text{const}.$$

Поэтому

$$n\ln n - n \;<\; \ln(n!) \;<\; (n+1)\ln(n+1) - n.$$

$$\exp\Rightarrow \quad n^n e^{-n} \;<\; n! \;<\; (n+1)^{n+1}e^{-n}.$$

$$n^n e^{-n}\cdot\text{Const}\cdot\sqrt{n} \;\leftarrow\; \text{то, что нужно.}$$

Определим
$$d_n := \ln(n!) - \Big(\big(n+\tfrac12\big)\ln n - n\Big).$$
(Если $d_n \to C$, то $n! = e^{d_n}\, n^{n+\frac12} e^{-n} = e^C\sqrt{n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+o(1))$.)

Вычислим:
$$\begin{aligned}
\boxed{d_n - d_{n+1}} &= \ln(n!) - \Big(n+\tfrac12\Big)\ln n + n - \ln\big((n+1)!\big) + \Big(n+1+\tfrac12\Big)\ln(n+1) - (n+1)\\
&= -\cancel{\ln(n+1)} + \cancel{\ln(n+1)} - \Big(n+\tfrac12\Big)\ln n + \Big(n+\tfrac12\Big)\ln(n+1) - 1\\
&= \boxed{\Big(n+\tfrac12\Big)\ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) - 1} \;\leftarrow \text{ будем это оценивать.}
\end{aligned}$$

Положим
$$\frac{n+1}{n} = 1+\frac1n = \frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = \frac{1+t}{1-t}, \quad t := \frac{1}{2n+1}.$$
(Эта форма удобна, потому что $\ln\frac{1+t}{1-t}$ имеет красивый ряд.)

$$\begin{aligned}
\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) &= \ln(1+t) - \ln(1-t)\\
&= 2t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \cdots + r_{2k+1}(t),
\end{aligned}$$

где $r_{2k+1}(t)$ — остаток (в форме Лагранжа/интегральной и т.п.), $k > 10$.

$$\frac12\,\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) = \frac12\Big(2t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \cdots + r_{2k+1}(t)\Big), \qquad k > 10.$$

Подставим в $d_n - d_{n+1}$

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &= \Big(n+\tfrac12\Big)\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) - 1\\
&= t^{-1}\cdot\frac12\Big(2t + \frac{2t^3}{3} + \cdots + r_{2k+1}(t)\Big) - 1\\
&= \underbrace{\frac13\,t^2 + \frac15\,t^4 + \cdots + \frac{r_{2k+1}(t)}{2t}}_{>0}.
\end{aligned}$$

Оценим сверху $d_n - d_{n+1}$

Кроме того, $\quad 0 < d_n - d_{n+1} = \dfrac13\Big(t^2 + \dfrac35 t^4 + \dfrac37 t^6 + \cdots\Big) + \dfrac13\,\dfrac{r_{2k+1}(t)}{t} < \dfrac13\Big(t^2 + t^4 + \cdots + t^{2(k-1)}\Big) + \dfrac13\,\dfrac{r_{2k+1}(t)}{t}.$

(Просто грубо заменили дроби $\frac35, \frac37, \dots < 1$.)

$$t^2 + t^4 + \cdots + t^{2(k-1)} = t^2\frac{1-t^{2(k-1)}}{1-t^2} = t^2\left(\frac{1}{1-t^2} - t^{2(k-1)}\cdot\frac{1}{1-t^2}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{t^2}{1-t^2}.$$

$$t^{2(k-1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \qquad \frac{r_{2k+1}(t)}{t} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad (\text{при фиксированном } t,\ |t|<1).$$

Следовательно по предельному переходу $\quad 0 < d_n - d_{n+1} \le \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\frac{1}{t^2}-1}\right).$

$$t = \frac{1}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad 0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3\big((2n+1)^2-1\big)} = \frac{1}{3(4n^2+4n)} = \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

$$0 < d_n - d_{n+m} = \sum_{j=n}^{n+m-1} (d_j - d_{j+1}) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right).$$

(Отсюда d_n монотонно убывает и ограничена снизу, значит имеет предел.)

$$d_n \searrow, \qquad \left(d_n - \frac{1}{12n}\right) \nearrow \quad \Longrightarrow \quad d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} C.$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left(d_n - \frac{1}{12n}\right) = C.$$

Константа через формулу Валлиса.

$$CLAIM: \quad e^C = \sqrt{2\pi}.$$

Формула Валлиса:

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$(2n)!! = 2^n n!, \qquad (2n)! = (2n)!!(2n-1)!! \quad \Rightarrow \quad \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

$$\ln\left(\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\frac{\pi}{2}.$$

$$\ln(n!) = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\ln n - n + d_n, \qquad \ln((2n)!) = \left(2n + \tfrac{1}{2}\right)\ln(2n) - 2n + d_{2n}.$$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}\right) &= 4n\ln 2 + 4\ln(n!) - 2\ln((2n)!) - \ln(2n+1) \\
&= 4d_n - 2d_{2n} + \ln n - \ln 2 - \ln(2n+1) \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 2C - 2\ln 2.
\end{aligned}$$

(Здесь вся "главная" часть сокращается, остаются только d_n и константы.)

$$2C - 2\ln 2 = \ln\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2C = \ln(2\pi) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}\ln(2\pi), \qquad e^C = \sqrt{2\pi}.$$

$\blacksquare$

1.1. Несколько интегральных неравенств

Утверждение 1: Неравенство Юнга

Пусть $a, b > 0$, $p, q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p, q \neq 1$. Тогда

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \qquad p > 1,$$

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \qquad p < 1.$$

Доказательство.

Claim. При $x > 0$ верно

$$x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

$$x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1 \geq 0, \qquad \alpha < 0 \ \text{ или } \ \alpha > 1.$$

Проверяем

$$(x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1)' = \alpha\, x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\big(x^{\alpha-1} - 1\big) = 0 \iff x = 1.$$

$$1^{\alpha} - \alpha \cdot 1 + \alpha - 1 = 0.$$

Отсюда: максимум при $0 < \alpha < 1$, минимум при $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$.

Положим $x := \dfrac{a}{b}$, $\quad \alpha := \dfrac{1}{p}$, $\quad \dfrac{1}{q} := 1 - \dfrac{1}{p} = 1 - \alpha$.

Тогда

$$\Big(\frac{a}{b}\Big)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{p} - 1 \leq 0, \qquad 0 < \frac{1}{p} < 1 \ \ (\Leftrightarrow \ p > 1).$$

Умножая на $b > 0$, получаем

$$a^{\frac{1}{p}}\, b^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{a}{p} + b\Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

Так как $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, то

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

А при $\dfrac{1}{p} < 0$ или $\dfrac{1}{p} > 1$ (то есть $p < 1$) получаем обратное неравенство:

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

■

Утверждение 2: Неравенство Гёльдера

Пусть $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, и f, g интегрируемы по Риману на $[c,d] \subset (a,b)$ для любого $[c,d]$.

Тогда:

$$\int_a^b \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\forall\, p, q > 0,\ \ p, q < \infty : \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если $p = q = 2$, то имеем неравенство КБШ:

$$\int_a^b |fg| \le \sqrt{\int_a^b |f|^2} \cdot \sqrt{\int_a^b |g|^2}.$$