Второй семестр

1. Что то будет

2. Ранг матрицы над полем. Элементарные преобразования. Теорема Кронекера–Капелли. Прямые суммы

2.1. Ранг матрицы над произвольным полем

Пусть k — поле, $A \in k^{m\times n}$.

Определение 1: Ранг матрицы

Рангом матрицы A называется число линейно независимых столбцов:

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A[:,1],\ \ldots,\ A[:,n]).$$

Теорема 1: Равенство строчного и столбцового рангов

Для любой матрицы $A \in k^{m\times n}$:

$$\mathrm{rk}(A[1,:],\ \ldots,\ A[m,:]) = \mathrm{rk}(A^T).$$

В частности, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^T)$.

2.2. Инвариантность ранга при элементарных преобразованиях строк

Теорема 2: Инвариантность ранга

Ранг $\mathrm{rk}(A)$ и ранг $\mathrm{rk}(A^T)$ не меняются при элементарных преобразованиях строк матрицы A.

Доказательство. Достаточно проверить для одного элементарного преобразования $A \to A'$.

Шаг 1 ($\mathrm{rk}(A') \le \mathrm{rk}(A)$). При элементарном преобразовании строк существует обратимая матрица $U \in M_m(k)$ такая, что $A' = UA$. Поэтому каждый столбец $A'[:,j]$ лежит в линейной оболочке столбцов A:

$$\mathrm{Lin}(A'[:,1],\ \ldots,\ A'[:,n]) \subseteq \mathrm{Lin}(A[:,1],\ \ldots,\ A[:,n]),$$

откуда $\mathrm{rk}((A')^T) \le \mathrm{rk}(A^T)$.

Шаг 2 ($\mathrm{rk}(A) \le \mathrm{rk}(A')$). Так как U обратима, существует обратное преобразование $A \xrightarrow{\text{эл. пр.}} A'$, откуда симметрично $\mathrm{rk}(A^T) \le \mathrm{rk}((A')^T)$.

Объединяя оба шага: $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$. ■

2.2.1. Детали доказательства: ядра и линейные оболочки

Пусть $\mathrm{rk}(A) = r$, то есть существуют индексы $j_1, \ldots, j_r$ такие, что $A[:,j_1], \ldots, A[:,j_r]$ линейно независимы (ЛНЗ). Рассмотрим $A' = A[:,\{j_1,\ldots,j_r\}] \in k^{m\times r}$ — подматрицу из этих r

столбцов.

Для вектора x с компонентой d_{i_1} на месте i_1 и нулями в остальных местах:

$$A\begin{pmatrix}0\\d_{i_1}\\\vdots\\0\end{pmatrix}=0\implies A'\cdot d_{i_1}\cdot e_{i_1}=0,$$

откуда $d_{i_1}=0$. Следовательно, существование ненулевого $d_{i_1},\dots,d_{i_\ell}$ невозможно, что и означает ЛНЗ.

Так как $A'=UA$, то $UA\begin{pmatrix}0\\d_{i_1}\\\vdots\\d_{i_2}\end{pmatrix}=0$, то есть $A'[:,i_1],\dots,A'[:,i_\ell]$ — ЛНЗ.

При $\operatorname{rk}(A)=r$: для любого набора из $r+1$ столбцов матрица A — ЛЗ $\Rightarrow$ матрица A' тоже ЛЗ, откуда $\operatorname{rk}(A')\le\operatorname{rk}(A)$.

Аналогично $\operatorname{rk}(A)\le\operatorname{rk}(A')$, итого $\operatorname{rk}(A)=\operatorname{rk}(A')$.

2.3. Неравенства для рангов суммы и произведения

Теорема 3: Неравенства для рангов

Для матриц $A\in k^{m\times n}$, $B\in k^{n\times p}$:
1. $\operatorname{rk}(A+B)\le\operatorname{rk}(A)+\operatorname{rk}(B)$.
2. $\operatorname{rk}(AB)\le\min(\operatorname{rk}(A),\operatorname{rk}(B))$.

Доказательство. Неравенство 2. Элемент $(AB)[i,j]=\sum_\nu A[i,\nu]\cdot B[\nu,j]$, поэтому

$$(AB)[:,j]=\sum_\nu B[\nu,j]\cdot A[:,\nu]\in\operatorname{Lin}(A[:,1],\dots,A[:,n]).$$

Следовательно, $\operatorname{Lin}((AB)[:,1],\dots,(AB)[:,p])\subseteq\operatorname{Lin}(A[:,1],\dots,A[:,n])$, откуда $\operatorname{rk}(AB)\le\operatorname{rk}(A)$.

Оценка $\operatorname{rk}(AB)\le\operatorname{rk}(B)$ следует из:

$$\operatorname{rk}(AB)=\operatorname{rk}((AB)^T)=\operatorname{rk}(B^TA^T)\le\operatorname{rk}(B^T)=\operatorname{rk}(B).$$

■

2.3.1. Следствие: умножение на обратимую матрицу не меняет ранг

Теорема 4: Ранг при умножении на обратимую матрицу

Пусть $A\in k^{m\times n}$.
1. Если $U\in GL_m(k)$, то $\operatorname{rk}(UA)=\operatorname{rk}(A)$.
2. Если $U\in GL_n(k)$, то $\operatorname{rk}(AU)=\operatorname{rk}(A)$.

Доказательство. Для случая 1: $\operatorname{rk}(UA)\le\operatorname{rk}(A)$ из неравенства выше. С другой стороны, $A=U^{-1}(UA)$, откуда $\operatorname{rk}(A)\le\operatorname{rk}(UA)$. ■

Замечание 1

Предложение: если $U \in M_n(k)$, то

$$U \in GL_n(k) \iff \operatorname{rk}(U) = n.$$

Доказательство: $(\Rightarrow)$: $U = U \cdot E_n \Rightarrow \operatorname{rk}(U) = \operatorname{rk}(E_n) = n$. $(\Leftarrow)$: $U \sim D = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r = \operatorname{rk}(U) = n \Rightarrow U \in GL_n(k)$.

2.4. Тензорный ранг

Пусть $A \in k^{m\times n}$.

Определение 2: Тензорный ранг

Тензорным рангом матрицы A называется

$$\min\big\{r \mid \exists\, A_1, \dots, A_r,\ A = A_1 + \dots + A_r,\ A_i \text{ — матрица ранга } 1\big\}.$$

Теорема 5: Тензорный ранг равен рангу

Тензорный ранг матрицы A равен $\operatorname{rk}(A)$.

Доказательство. Матрица A имеет ненулевой минор порядка r, но нет ненулевого минора порядка $r+1$.

Доказательство использует то, что существует подматрица $B = A[\{i_1, \dots, i_s\}, \{j_1, \dots, j_s\}]$ ранга s — один из миноров порядка r. Столбцы $A[:, j_1], \dots, A[:, j_s]$ — ЛНЗ. Столбцы $A[:, j_{s+1}], \dots$ — ЛЗ над ними.

Если выкинуть какой-либо столбец из ЛНЗ системы строк, ЛНЗ остальных строк сохраняется. Следовательно, $\operatorname{rk} B < s$ — одна из строк выражается через остальные. Итого тензорный ранг $= \operatorname{rk}(A)$. ■

2.5. Теорема Кронекера–Капелли

Теорема 6: Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений $(A \mid b)$ совместна тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rk}(A \mid b) = \operatorname{rk}(A).$$

Доказательство. Пусть $A \in k^{m\times n}$, $b \in k^m$.

$(\Rightarrow)$: Система совместна, то есть существует $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ такое, что $A\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = b$. Это означает $d_1 A[:, 1] + \dots + d_n A[:, n] = b$, то есть $b \in \operatorname{Lin}(A[:, 1], \dots, A[:, n]) =: W$. Следовательно,

$$\operatorname{Lin}(A[:, 1], \dots, A[:, n], b) = W,$$

откуда $\operatorname{rk}(A \mid b) = \dim W = \operatorname{rk}(A)$.

($\Leftarrow$): $\operatorname{rk}(A \mid b) = \operatorname{rk}(A) \Rightarrow \operatorname{Lin}(A[:,1], \dots, A[:,n], b) = W$ (м.к. $\supseteq$). Поэтому $b \in W$, то есть $b = A \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ для некоторых $d_1, \dots, d_n \in k$. ■

2.6. Прямые суммы подпространств

Пусть V — векторное пространство над k, $W_1, \dots, W_k \leq V$ — подпространства.

Определение 3: Прямая сумма

Говорят, что V *раскладывается во внутреннюю прямую сумму* $W_1, \dots, W_k$, и пишут $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, если для каждого $v \in V$ существует единственное представление

$$v = w_1 + \dots + w_k, \quad w_i \in W_i.$$

Замечание 2

Если существует базис $e_1, \dots, e_k$ пространства V, то $e_1, \dots, e_k$ — базис V, откуда $V = \operatorname{Lin}(e_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Lin}(e_k)$.

2.6.1. Критерий прямой суммы двух подпространств

Теорема 7: Критерий для двух слагаемых

Для подпространств $W_1, W_2 \leq V$:

$$W_1 \oplus W_2 \iff \begin{cases} V = W_1 + W_2, \\ W_1 \cap W_2 = \{0\}. \end{cases}$$

Доказательство. ($\Rightarrow$): Первое условие очевидно. Для второго: пусть $w \in W_1 \cap W_2$, тогда $v = w + 0 = 0 + w$, что противоречит единственности (при $w \neq 0$), значит $w = 0$.

($\Leftarrow$): Пусть $v = w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$, тогда $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$. Левая часть лежит в W_1, правая — в W_2, поэтому оба равны нулю, откуда $w_1 = w_1'$, $w_2 = w_2'$. ■

2.6.2. Критерий прямой суммы нескольких подпространств

Теорема 8: Критерий для нескольких слагаемых

$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ тогда и только тогда, когда:

1. $W_1 + \dots + W_k = V$;
2. для каждого j: $W_j \cap (W_1 + \dots + \widehat{W_j} + \dots + W_k) = \{0\}$.

Теорема 9: Базис прямой суммы

Пусть $W_1, \dots, W_k$ — подпространства V, $e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i}$ — базис W_i при $i = 1, \dots, k$. Тогда $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ тогда и только тогда, когда

$$\{e_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq d_i\}$$

является базисом V.

Доказательство. ($\Rightarrow$): Для любого $v \in V$: $v = w_1 + \cdots + w_k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j}\, e_{i,j}$.
Единственность: если $\sum_{i,j} \alpha_{i,j}\, e_{i,j} = \sum_{i,j} \beta_{i,j}\, e_{i,j}$, то

$$\sum_i \Big(\sum_j \alpha_{i,j}\, e_{i,j} \Big) = \sum_i \Big(\sum_j \beta_{i,j}\, e_{i,j} \Big).$$

Обозначим $w_i = \sum_j \alpha_{i,j} e_{i,j} \in W_i$ и $w_i' = \sum_j \beta_{i,j} e_{i,j} \in W_i$. Из $\sum_i w_i = \sum_i w_i'$ и единственности разложения $v = \sum_i w_i$ получаем $w_i = w_i'$ для всех i, откуда $\alpha_{i,j} = \beta_{i,j}$ для всех i, j. Таким образом, $\{e_{i,j}\}$ — базис V. ■