

Конспект лекций по Математическому анализу

Лектор: Мозоляко П. А.

Составители:

Санкт-Петербург, 2026

Второй семестр

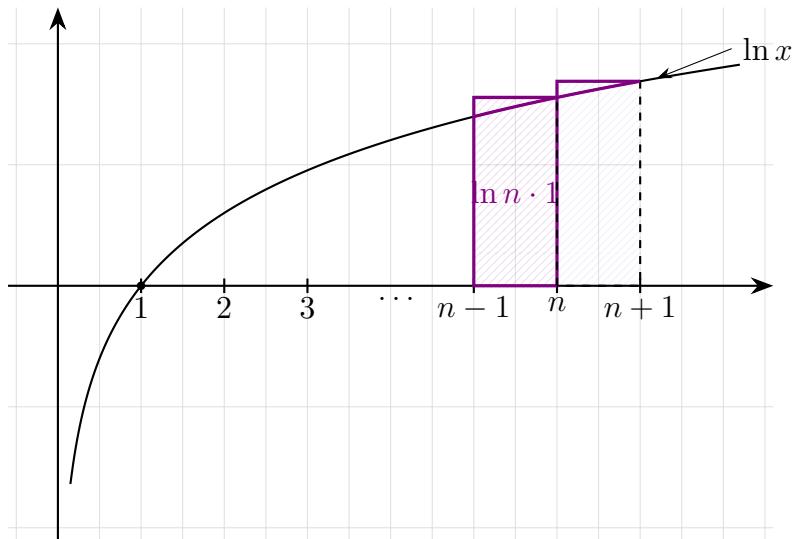
1. Формула Стирлинга. Неравенство Юнга. Неравенство Гёльдера

Определение 1: Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство.

$\log n! = \log 1 + \dots + \log n = \log 1 \cdot 1 + \log 2 \cdot 1 + \dots + \log n \cdot 1$. Пишем $\log \equiv \ln$



$$\int_n^{n+1} \ln x \, dx > \ln n \cdot 1 > \int_{n-1}^n \ln x \, dx$$

Отсюда, суммируя по $n = 1, \dots, N$:

$$\int_0^N \ln x \, dx < \ln(N!) < \int_1^{N+1} \ln x \, dx.$$

Так как

$$(x \ln x - x)' = \ln x \quad \Rightarrow \quad \int \ln x \, dx = x \ln x - x + \text{const.}$$

Поэтому

$$n \ln n - n < \ln(n!) < (n+1) \ln(n+1) - n.$$

$$\exp \Rightarrow n^n e^{-n} < n! < (n+1)^{n+1} e^{-n}.$$

$$n^n e^{-n} \cdot \text{Const} \cdot \sqrt{n} \leftarrow \text{то, что нужно.}$$

Определим

$$d_n := \ln(n!) - \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n \right).$$

(Если $d_n \rightarrow C$, то $n! = e^{d_n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = e^C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n (1 + o(1))$.)

Вычислим:

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n + n - \ln((n+1)!) + \left(n + 1 + \frac{1}{2} \right) \ln(n+1) - (n+1) \\ &= -\cancel{\ln(n+1)} + \cancel{\ln(n+1)} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln(n+1) - 1 \\ &= \boxed{\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - 1} \leftarrow \text{будем это оценивать.} \end{aligned}$$

Положим

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{1+t}{1-t}, \quad t := \frac{1}{2n+1}.$$

(Эта форма удобна, потому что $\ln \frac{1+t}{1-t}$ имеет красивый ряд.)

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) &= \ln(1+t) - \ln(1-t) \\ &= 2t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \cdots + r_k(t), \end{aligned}$$

где $r_k(t)$ — остаток (в форме Лагранжа/интегральной и т.д.), $k > 10$.

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) = \frac{1}{2} \left(2t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \cdots + r_k(t) \right), \quad k > 10.$$

Подставим в $d_n - d_{n+1}$

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) - 1 \\ &= t^{-1} \cdot \frac{1}{2} \left(2t + \frac{2t^3}{3} + \cdots + r_k(t) \right) - 1 \\ &= \underbrace{\frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{5} t^4 + \cdots + \frac{2r_k(t)}{t}}_{>0}. \end{aligned}$$

Оценим сверху $d_n - d_{n+1}$

Кроме того, $0 < d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3} \left(t^2 + \frac{3}{5} t^4 + \frac{5}{7} t^6 + \cdots \right) + \frac{2}{3} \frac{r_k(t)}{t} < \frac{1}{3} \left(t^2 + t^4 + \cdots + t^{2(k-1)} \right) + \frac{2}{3} t r_k(t)$.

(Просто грубо заменили дроби $\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \dots < 1$.)

$$t^2 + t^4 + \cdots + t^{2(k-1)} = t^2 \frac{1 - t^{2(k-1)}}{1 - t^2} = t^2 \left(\frac{1}{1 - t^2} - t^{2(k-1)} \cdot \frac{1}{1 - t^2} \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{t^2}{1 - t^2}.$$

$$t^{2(k-1)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \frac{r_k(t)}{t} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{при фиксированном } t, |t| < 1).$$

Следовательно $0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\frac{1}{t^2} - 1} \right).$

$$t = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow 0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)} = \frac{1}{3(4n^2 + 4n)} = \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$0 < d_n - d_{n+m} = \sum_{j=n}^{n+m-1} (d_j - d_{j+1}) < \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right).$$

(Отсюда d_n монотонно убывает и ограничена снизу, значит имеет предел.)

$$d_n \searrow, \quad \left(d_n - \frac{1}{12n} \right) \nearrow \Rightarrow d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_n - \frac{1}{12n} \right) = C.$$

Константа через формулу Валлиса.

$$CLAIM : e^C = \sqrt{2\pi}.$$

Формула Валлиса:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}. \\ \Rightarrow & \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \\ (2n)!! = 2^n n!, \quad (2n)! = (2n)!!(2n-1)!! \Rightarrow & \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}. \end{aligned}$$

$$\ln \left(\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\pi}{2}.$$

$$\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + d_n, \quad \ln((2n)!) = \left(2n + \frac{1}{2} \right) \ln(2n) - 2n + d_{2n}.$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \right) &= 4n \ln 2 + 4 \ln(n!) - 2 \ln((2n)!) - \ln(2n+1) \\ &= 4d_n - 2d_{2n} + \ln n - \ln 2 - \ln(2n+1) + o(1) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2C - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

(Здесь вся “главная” часть сокращается, остаются только d_n и константы.)

$$2C - 2 \ln 2 = \ln \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2C = \ln(2\pi) \Rightarrow C = \frac{1}{2} \ln(2\pi), \quad e^C = \sqrt{2\pi}.$$



1.1. Несколько интегральных неравенств

Утверждение 1: Неравенство Юнга

Пусть $a, b > 0$, $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \neq 1$. Тогда

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \quad p > 1,$$

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \quad p < 1.$$

Доказательство.

Claim. При $x > 0$ верно

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geq 0, \quad \alpha < 0 \text{ или } \alpha > 1.$$

Проверяем

$$(x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1)' = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) = 0 \iff x = 1.$$

$$1^\alpha - \alpha \cdot 1 + \alpha - 1 = 0.$$

Отсюда: максимум при $0 < \alpha < 1$, минимум при $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$.

Положим $x := \frac{a}{\alpha}$, $\alpha := \frac{1}{p}$, $\frac{1}{q} := 1 - \frac{1}{p} = 1 - \alpha$.

Тогда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{p} - 1 \leq 0, \quad 0 < \frac{1}{p} < 1 \ (\Leftrightarrow p > 1).$$

Умножая на $b > 0$, получаем

$$a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{a}{p} + b\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Так как $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, то

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

А при $\frac{1}{p} < 0$ или $\frac{1}{p} > 1$ (то есть $p < 1$) получаем обратное неравенство:

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$



Утверждение 2: Неравенство Гёльдера

Пусть $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, и f, g интегрируемы по Риману на $[c, d] \subset (a, b)$ для любого $[c, d]$.

Тогда:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$
$$\forall p, q > 0, \quad p, q < \infty : \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если $p = q = 2$, то имеем неравенство КБШ:

$$\int_a^b |fg| \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2} \cdot \sqrt{\int_a^b |g|^2}.$$