Uji Hipotesis
Uji Rata-rata

Program Studi Teknik Informatika
Fakultas Teknik – Universitas Surabaya

Tujuan Pembelajaran

Mahasiswa dapat

1. Mampu melakukan uji mean 1 populasi
2. Mampu melakukan uji mean 2 populasi

Uji Rata-rata 1 Populasi

Pengujian Hipotesis

Pengujian Satu Populasi

Menguji suatu pernyataan mengenai parameter dari suatu populasi.

Pengujian Dua Populasi

Menguji suatu pernyataan mengenai parameter dari dua populasi.

Uji Rata-rata

1 Populasi

- Sampel kecil (t test)
- Sampel besar
  - σ^2 diketahui (Z test)
  - σ^2 tidak diketahui (t test)

2 Populasi

- Uji **tidak** berpasangan/independent
  - σ^2 diketahui (Z test)
  - σ^2 tidak diketahui (t test)
- Uji berpasangan (t test)

Uji Rata-rata 1 Populasi

Uji Rata-rata Sample Kecil (n < 30)

Hipotesis

One Tailed Test

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$

Two Tailed Test

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$

μ_0 = konstanta yang menyatakan parameter dari suatu populasi

Uji Rata-rata Sample Kecil (n < 30)

Statistic Uji

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

df = n - 1

Jika σ tidak diketahui maka σ diestimasi dengan s.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Keputusan Penerimaan dan Penolakan H_0

Bila H_1 : $\mu > \mu_0$ maka Tolak H_0 jika $t_{hitung} > t_{\alpha, df}$

$\mu < \mu_0$ maka Tolak H_0 jika $t_{hitung} < -t_{\alpha, df}$

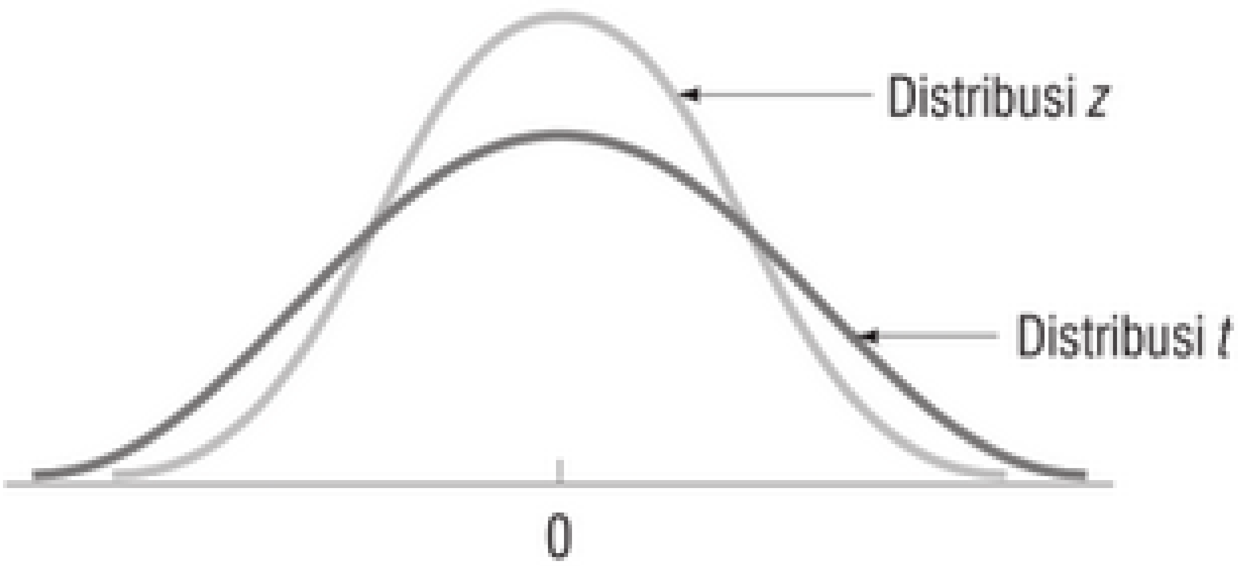
$\mu \neq \mu_0$ maka Tolak H_0 jika $|t_{hitung}| > t_{\alpha / 2, df}$

Distribusi t (Distribusi t-student)

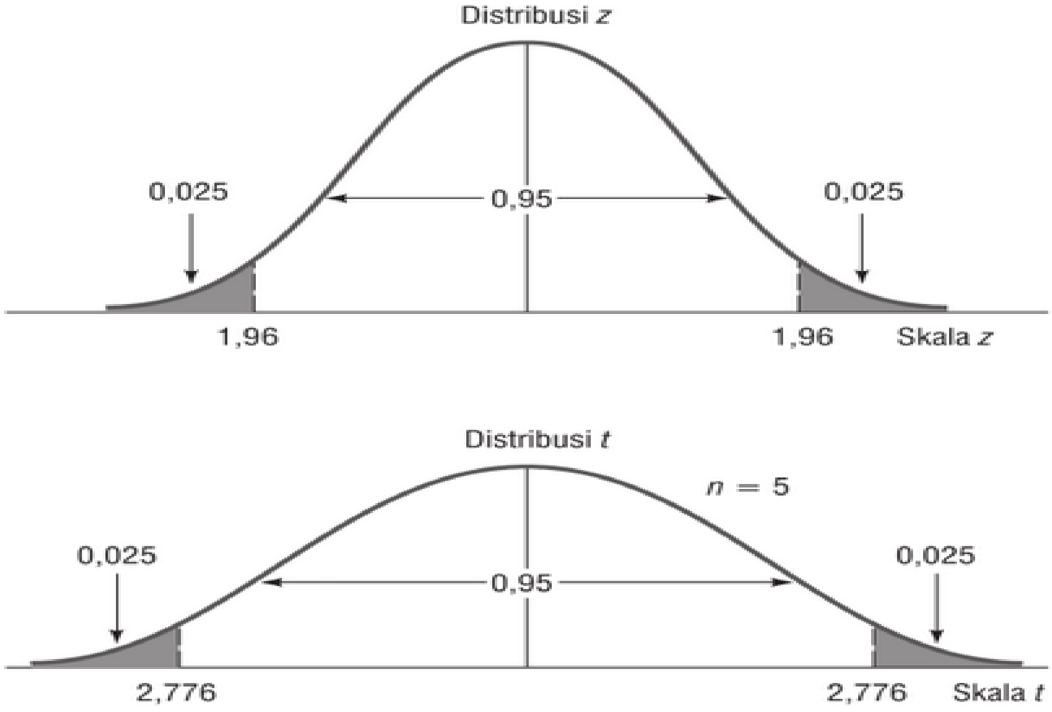
Ciri-ciri distribusi t didasarkan pada **asumsi** bahwa populasinya terdistribusi normal atau mendekati normal:

- Sampel yang diuji berukuran kecil (n<30)
- Penentuan nilai tabel dipengaruhi oleh tingkat signifikan (α) dan besarnya derajat kebebasan (df)
- Kurva berbentuk lonceng yang simetris
- Mempunyai rata-rata = 0 dan standar deviasi yang berbeda beda sesuai dengan banyaknya sampel. Semakin banyak sampelnya maka distribusi t semakin mendekati distribusi normal.

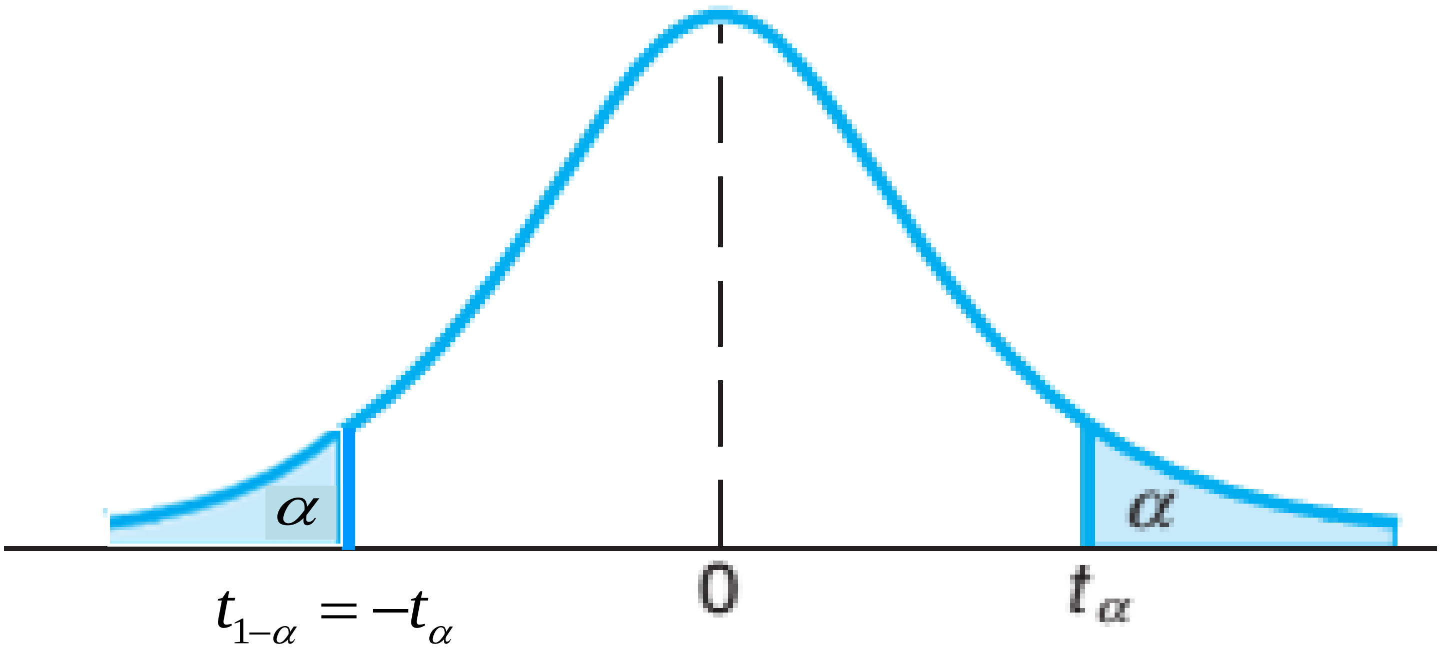
Perbedaan antara Z dan t



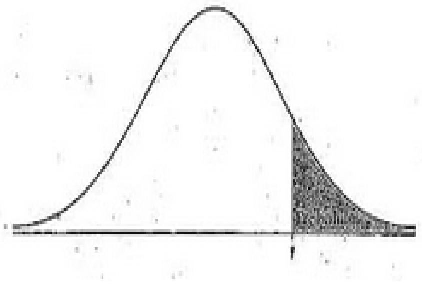
Perbedaan antara Z dan t



Kurva Distribusi t



Membaca Tabel t



Luas satu ujung di kanan

Luas dua ujung kanan-kiri

df \ Pr	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
	0.50	0.20	0.10	0.050	0.02	0.010	0.002
1	1.00000	3.07768	6.31375	12.70620	31.82052	63.65674	318.30884
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9.92484	22.32712
3	0.76489	1.63774	2.35336	3.18245	4.54070	5.84091	10.21453
4	0.74070	1.53321	2.13185	2.77645	3.74695	4.60409	7.17318
5	0.72669	1.47588	2.01505	2.57058	3.36493	4.03214	5.89343
6	0.71756	1.43976	1.94318	2.44691	3.14267	3.70743	5.20763
7	0.71114	1.41492	1.89458	2.36462	2.99795	3.49948	4.78529
8	0.70639	1.39682	1.85955	2.30600	2.89646	3.35539	4.50079
9	0.70272	1.38303	1.83311	2.26216	$\boxed{2.82144}$	3.24984	4.29681
10	0.69981	1.37218	1.81246	2.22814	2.76377	3.16927	4.14370

Contoh Uji Mean Sample kecil

Depkes ingin mengetahui apakah rata-rata jumlah bakteri per satuan volume air di danau "Sunyi Senyap" melebihi ambang batas 200. Pengujian dilakukan dengan mengambil 10 sampel. Jumlah bakteri dari masing-masing sample adalah sebagai berikut :

175	190	215	198	184
207	210	193	196	180

Buktikan apakah **kekuatiran Depkes tersebut terbukti** ?

Gunakan α = 1%.

1

Hipotesis

$H_0 : \mu \le 200$

$H_1 : \mu > 200$

2

Pemilihan signifikan level: $\alpha = 1\%$

3

Statistic Uji

$\bar{x} = 194.8$

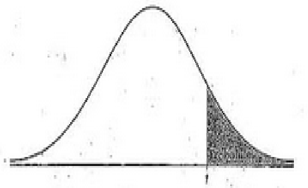
$s = 13.14$

$$t_{hitung} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{194.8 - 200}{13.14/\sqrt{10}} = -1.25$$

Data (x)	x - rata	(x-rata)^2
175	-19.8	392.04
190	-4.8	23.04
215	20.2	408.04
198	3.2	10.24
184	-10.8	116.64
207	12.2	148.84
210	15.2	231.04
193	-1.8	3.24
196	1.2	1.44
180	-14.8	219.04
1948		1553.6
Rata-rata	194.8	
variance	172.622	
std deviasi	13.1386	

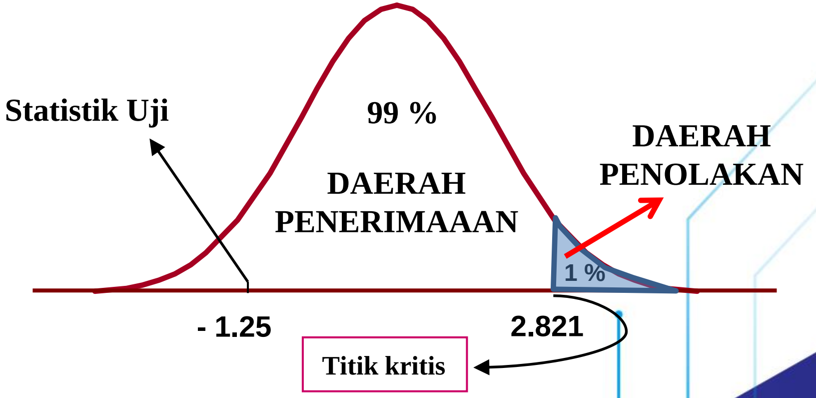
4 Penentuan titik kritis dan daerah penolakan

Tabel t



dk	α untuk Uji Satu Pihak (*one tail test*)					
	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
	α untuk Uji Dua Pihak (*two tail test*)					
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055

Titik kritis ($t_{1\%, 9}$) = 2.821



Tolak H_0 jika $t_{hitung} > t_{1\%, 9}$

5

Karena $t_{hitung} < t_{1\%,\,9}$ maka **gagal menolak** H_0.

6

Interpretasi: Data sampel membuktikan bahwa rata-rata jumlah bakteri per satuan volume air di danau “Sunyi Senyap” masih dalam ambang batas 200

Uji Rata-rata 1 Populasi

Uji Mean Sample Besar ($n \geq 30$)

Hipotesis

One Tailed Test

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$

Two Tailed Test

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$

μ_0 = konstanta yang menyatakan parameter dari suatu populasi

Uji Mean Sample Besar ($n \geq 30$)

Statistic Uji

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

$$df = n - 1$$

σ^2 diketahui

σ^2 tidak diketahui

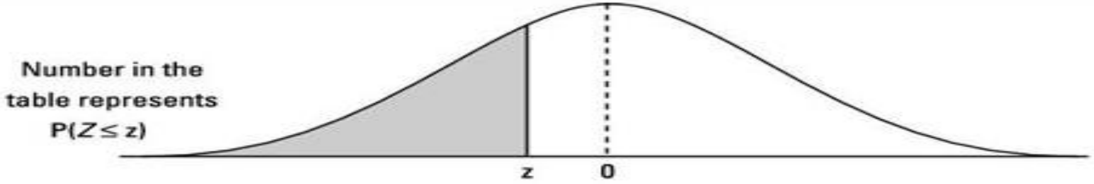
Keputusan Penerimaan dan Penolakan H_0

Bila H_1 : $\mu > \mu_0$ maka Tolak H_0 jika $Z_{hitung} > Z_{\alpha}$

$\mu < \mu_0$ maka Tolak H_0 jika $Z_{hitung} < -Z_{\alpha}$

$\mu \neq \mu_0$ maka Tolak H_0 jika $| Z_{hitung} | > Z_{\alpha / 2}$

Uji Mean Sample Besar (n ≥ 30)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
−3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294

$$z_{10\%} = 1{,}28$$

$$z_{5\%} = 1{,}645$$

$$z_{2.5\%} = 1{,}96$$

$$z_{1\%} = 2{,}33$$

$$z_{0,5\%} = 2{,}575$$

Nilai Z yang sering digunakan

Contoh

Sebuah mesin bor memiliki setting kedalaman 2 inchi dengan **standard deviasi 0.03 inchi**. Mesin ini diharapkan mampu membuat lubang dengan **rata-rata kedalaman 2 inchi.** Untuk menguji keakuratan mesin, diambil sampel sebanyak 100 lubang yang telah dibor dengan menggunakan mesin tersebut. Dari sampel diperoleh rata-rata kedalaman lubang adalah 2.005 inchi. Buktikan apakah data sampel berhasil menunjukkan bahwa **mesin bor tersebut akurat** (Gunakan α = 5%) !

Latihan

1. Gudang Farmasi Kabupaten (GFK) memesan tetrasiklin kapsul dalam jumlah besar pada sebuah Perusahaan Besar Farmasi (PBF). Informasi perusahaan tersebut rata-rata isi kapsul adalah 250 mg dgn kesalahan baku 2 mg.

   Pihak GFK ingin menguji informasi tersebut pada α = 0,05. Untuk keperluan tersebut diambil sample sebanyak 100 kapsul dan diperoleh rata-rata 249,5 mg.

Latihan

2. Gudang Farmasi Kabupaten (GFK) memesan obat suntik dengan isi 4 ml per ampul. Informasi dari industri farmasi menyatakan bahwa obat tersebut mempunyai kesalahan baku 0,2 ml.

   Pihak GFK ingin menguji informasi tersebut pada α = 0,05. Untuk keperluan tersebut diambil sample sebanyak 100 ampul dan diperoleh rata-rata 4,04 ml.

   Diketahui obat tersebut bila diberikan lebih dari 4 ml akan membahayakan penderita.

Latihan

3. Majalah A menyebutkan bahwa rata-rata usia direktur utama bank di sebuah kota 41 tahun. Untuk menguji apakah hal ini benar, maka dikumpulkanlah data acak dari 11 direktur utama bank di kota tersebut. Asumsikan bahwa usia direktur utama bank di kota tersebut terdistribusi secara normal. Gunakanlah taraf signifikansi sebesar 5%. Kesimpulan apakah yang dapat ditarik?

Data: 40, 43, 44, 50, 39, 38, 51, 37, 55, 57, 41

Latihan

4. Sebuah mesin dipasang untuk mengisi sebuah botol kecil dengan 9 gram obat. Sampel dari delapan botol mengungkapkan jumlah berikut (dalam gram) dalam setiap botol :

   9.2 8.7 8.9 8.6 8.8 8.5 8.7 9.0

   Pada tingkat signifikansi 0.01, dapatkah disimpulkan bahwa rata-rata bobotnya kurang dari 9 gram ?

Uji Hipotesis

Uji Rata-Rata 2 Populasi

Uji Mean
Dua Populasi **Berpasangan**

Dua populasi dikatakan berpasangan jika :

merupakan hasil pengukuran sebanyak 2 kali pada objek yang sama (berpasangan secara alami atau dipasangkan)

Uji Mean
Dua Populasi **Berpasangan**

Hipotesis

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = d_0$
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$

Two Tail

H_0: $\mu_1 - \mu_2 \leq d_0$
H_1: $\mu_1 - \mu_2 > d_0$

Right Tail

H_0: $\mu_1 - \mu_2 \geq d_0$
H_1: $\mu_1 - \mu_2 < d_0$

Left Tail

μ_1 = rata-rata pengukuran dari populasi 1

μ_2 = rata-rata pengukuran dari populasi 2

d_0 = konstanta

Uji Mean
Dua Populasi **Berpasangan**

Statistic Uji

$$t_{hitung} = \frac{\bar{d} - d_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$df = n - 1$$

n = banyaknya pasangan

d_i = selisih pengukuran ke-i

Keputusan Penerimaan dan Penolakan H_0

Bila H_1 :

- $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$ maka Tolak H_0 jika | t_{hitung} | > $t_{\alpha / 2}$
- $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ maka Tolak H_0 jika $t_{hitung} > t_{\alpha}$
- $\mu_1 - \mu_2 < d_0$ maka Tolak H_0 jika $t_{hitung} < -t_{\alpha}$

Uji Mean
Dua Populasi **Berpasangan**

Seorang mahasiswa ingin mengetahui apakah ada perbedaan kecepatan menyelesaikan *problem*, dengan menggunakan dua buah *software* matematika. Untuk itu dilakukan pengambilan sampel sebanyak 15 mahasiswa Teknik Informatika yang mampu mengoperasikan kedua *software* tersebut. Kelima belas mahasiswa tersebut diminta untuk menyelesaikan sebuah *problem* matematika yang sama, dengan menggunakan kedua *software* tersebut. Kemudian dilakukan pencatatan waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan *problem* matematika tersebut, dan diperoleh hasil sebagai berikut :

Uji Mean
Dua Populasi **Berpasangan**

Mhs	Waktu Penyelesaian dengan *Software* A (menit)	Waktu Penyelesaian dengan *Software* B (menit)	d_i
1	2,76	7,02	4,26
2	5,18	3,10	-2,08
3	2,68	5,44	2,76
4	3,05	3,99	0,94
5	4,10	5,21	1,11
6	7,05	10,26	3,21
7	6,60	13,91	7,31
8	4,79	18,53	13,74
9	7,39	7,91	0,52
10	7,30	4,85	-2,45
11	11,78	11,10	-0,68
12	3,90	3,74	-0,16
13	26,00	94,03	68,03
14	67,48	94,03	26,55
15	17,04	41,70	24,66

Uji Mean
Dua Populasi **Berpasangan**

Kasus pengujian mean dua populasi berpasangan dua arah

$\bar{d}$ = 9,848 , sd = 18,474 , n = 15,

1 **Hipotesis :**

$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0$
$H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq 0$

2 $\alpha = 5\%$

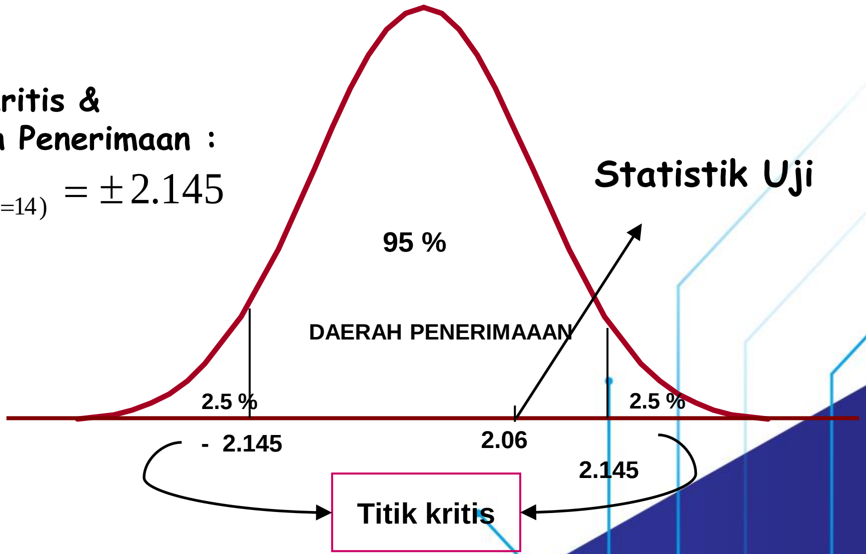
3 **Statistik Uji :**

$$t_{hitung} = \frac{\bar{d} - d_0}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{9{,}848 - 0}{18{,}474 / \sqrt{15}} = 2{,}06$$

df = n – 1 = 15 – 1 = 14

4 **Titik Kritis & Daerah Penerimaan :**

$$t_{(2.5\%,\, df=14)} = \pm 2.145$$



5 Keputusan :

Karena Statistik Uji jatuh di daerah penerimaan, maka keputusannya adalah Gagal menolak H_0

6 Kesimpulan :

Data sample yang ada menunjukkan bahwa tidak ada perbedaan waktu penyelesaian sebuah *problem* matematika dengan menggunakan *software* A atau *software* B

Uji Mean
Dua Populasi Independen

merupakan pengujian terhadap nilai parameter μ_1 (rata-rata populasi pertama) dengan nilai parameter μ_2 (rata-rata populasi kedua) dengan varian kedua populasi diketahui maupun tidak diketahui.

Varian kedua populasi diketahui

$$z_{hitung} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \Rightarrow \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$z_{hitung} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \Rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Statistic Uji

Varian kedua populasi tidak diketahui

$$t_{hitung} = \frac{\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2}}$$

$$df = \frac{\left(s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2 / n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2 / n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

$\Rightarrow \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$t_{hitung} = \frac{\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

$\Rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Uji Mean
Dua Populasi Independen

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

S_p^2 : Pooled sample variance

n_1 : Size of sample 1

S_1^2 : Variance of sample 1

n_2 : Size of sample 2

S_2^2 : Variance of sample 2

Uji Mean
Dua Populasi Independen

Suatu percobaan dilakukan untuk membandingkan keausan dua bahan yang dilapisi karena gosokan. Dua belas potong bahan 1 diuji dengan memasukkan tiap potong bahan ke dalam mesin pengukur aus. Sepuluh potong bahan 2 diuji dengan cara yang sama. Dalam tiap hal, diamati dalamnya keausan. *Sample* bahan 1 memberikan rata-rata keausan (sesudah disandi) sebanyak 85 satuan dengan standard deviasi *sample* 4 sedangkan *sample* bahan 2 memberikan rata-rata keausan sebanyak 81 dengan standard deviasi *sample* 5. Dapatkah disimpulkan bahwa pada taraf signifikansi 0,05, keausan bahan 1 melampaui keausan bahan 2 sebanyak lebih dari 2 satuan ? Anggaplah kedua populasi berdistribusi hampir normal dengan **varian yang sama**.

Latihan

PT MultiKertas mengklaim bahwa kertas produksinya lebih baik dari pada produk PT Kertasku, dalam artian lebih tahan dan kuat menahan beban. Guna memeriksa hal tersebut, dilakukan pengukuran kekuatan kertas yang dipilih acak masing-masing sebanyak 10 lembar dari kedua perusahaan tersebut. Data yang didapatkan adalah sebagai berikut:

Kertasku	30	35	50	45	60	25	45	45	50	40
MultiKertas	50	60	55	40	65	60	65	65	50	55

Ujilah apakah klaim MultiKertas didukung oleh data dengan mengasumsikan ragam kedua populasi berbeda dan menggunakan taraf nyata 10%

Latihan

Suatu klub kesegaran jasmani ingin mengevaluasi program diet, kemudian dipilih secara acak 10 orang anggotanya untuk mengikuti program diet tersebut selama 3 bulan. Data yang diambil adalah berat badan sebelum dan sesudah program diet dilaksanakan, yaitu:

Berat Badan	Peserta									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sebelum (X1)	90	89	92	90	91	92	91	93	92	91
Sesudah (X2)	85	86	87	86	87	85	85	87	86	86
D=X1-X2	5	3	5	4	4	7	6	6	6	5

Apakah program diet tersebut dapat mengurangi berat badan lebih dari 5 kg? Lakukan pengujian pada taraf nyata 5%!