

Week 10

Distribusi Probabilitas Variabel Acak Kontinu

Distribusi Normal dan Normal Standart

Tujuan Pembelajaran

- Peserta dapat menjelaskan karakteristik variabel acak kontinu yang berdistribusi Normal dan Normal Standart
- Peserta mampu menghitung probabilitas, dari suatu variabel acak kontinu berdistribusi normal

Distribusi Normal

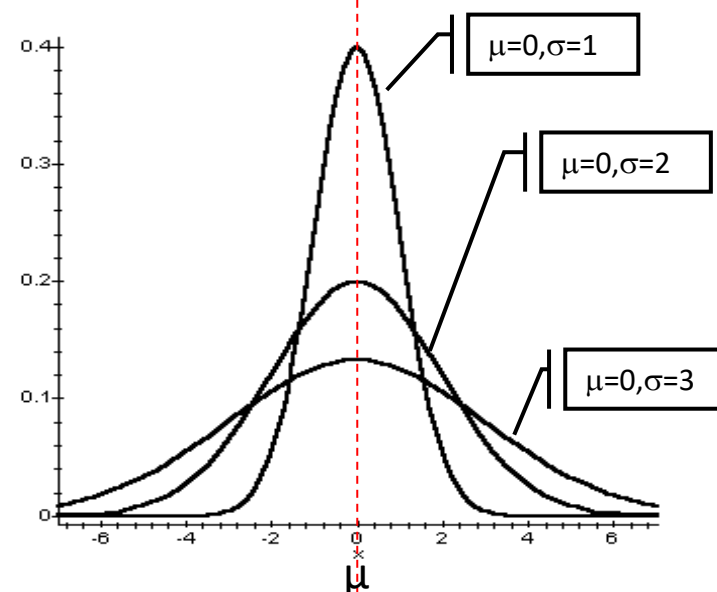
Distribusi normal merupakan model distribusi yang **paling sering** digunakan untuk memodelkan fenomena-fenomena yang ada di alam.

Suatu variabel acak yang berdistribusi normal, mempunyai frekuensi yang **kecil** untuk data yang **terlalu kecil atau terlalu besar**. Yang **terbanyak** adalah data yang di **tengah**.

Misal: tinggi badan manusia usia 30-50 th. Orang yang terlalu pendek atau terlalu tinggi lebih sedikit jumlahnya. Yang banyak adalah orang yang tinggi badannya sedang-sedang saja.

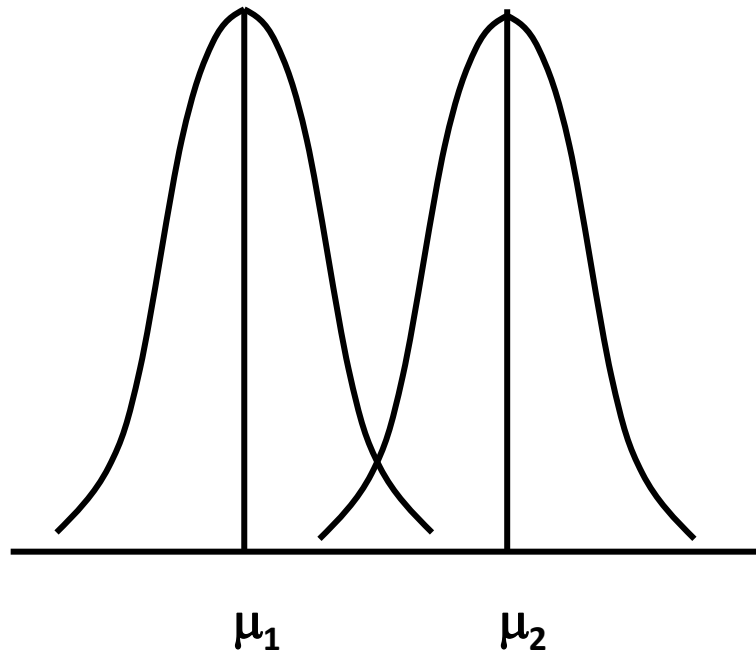
Distribusi normal memiliki kurva berbentuk lonceng yang simetris

Parameter = μ dan σ

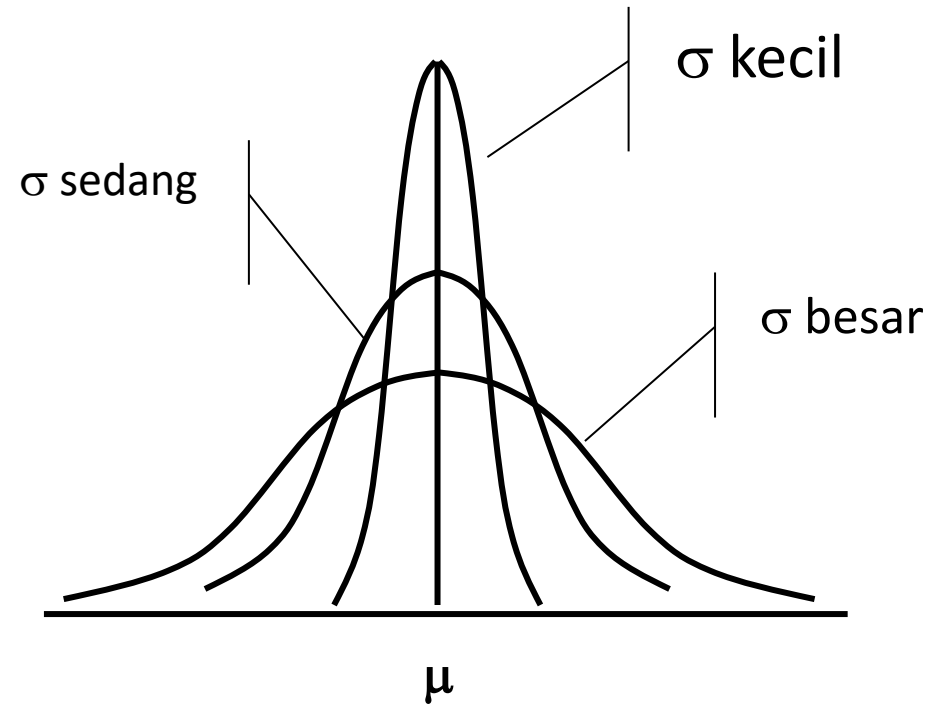


$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & , -\infty < x < \infty \\ 0 & , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Membandingkan Beberapa Dist. Normal



Dua distribusi normal dengan mean berbeda
 σ nilainya sama,
tetapi μ nilainya berbeda

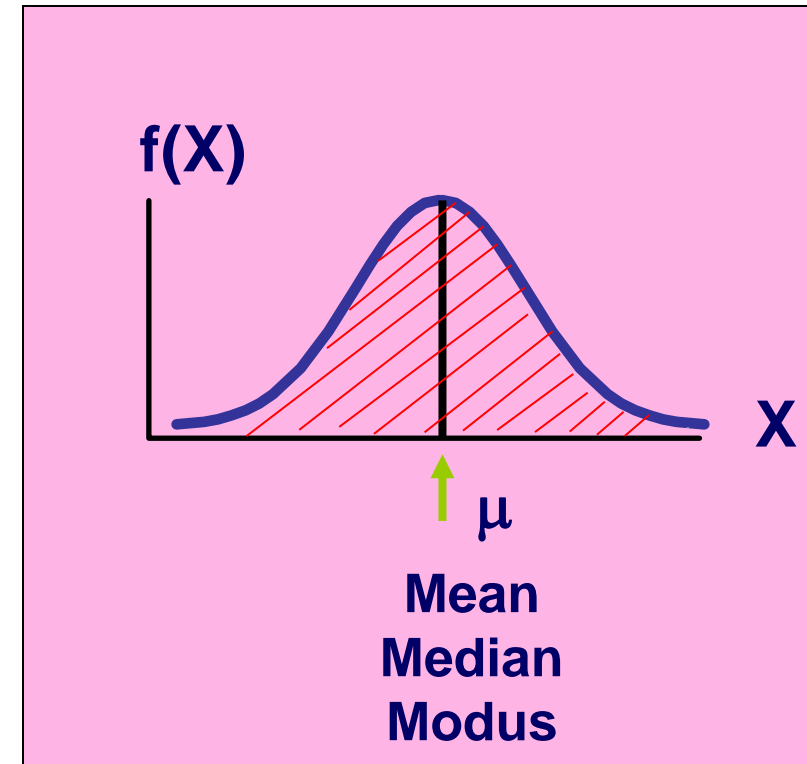


Tiga distribusi normal dengan
st.dev yang berbeda
 μ nilainya sama,
tetapi σ nilainya berbeda

Distribusi Normal

Sifat-sifat :

- Range nilai dari X : $-\infty < X < \infty$
- Kurva berbentuk lonceng dan terlihat **simetris**
- Nilai dari mean, median dan modus adalah sama.
- Luas daerah di bawah kurva adalah **1**



Distribusi Normal

Pdf :
$$f(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

$e = 2.71828$

$\pi = 3.14159$

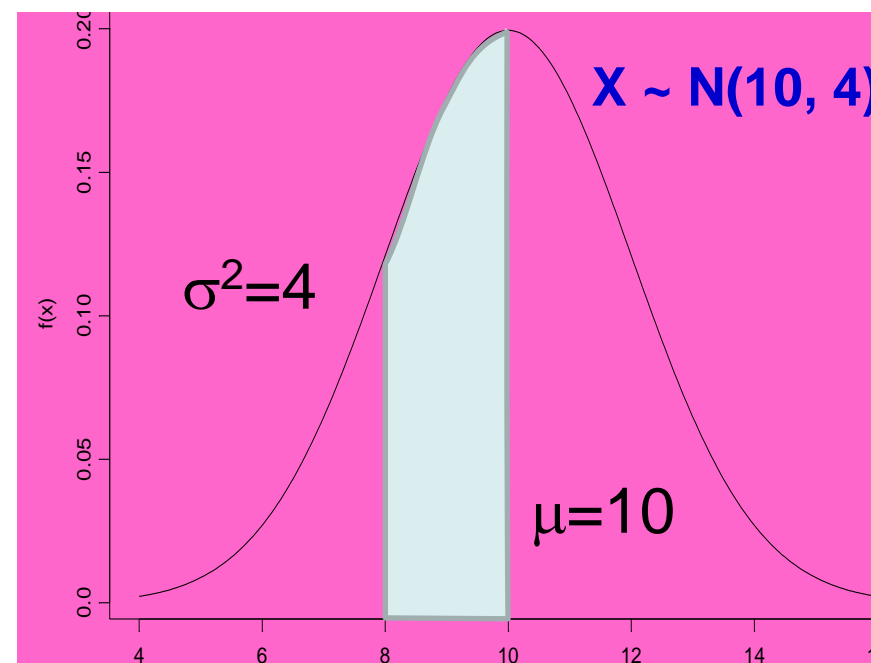
$\mu = \text{mean}$

$\sigma = \text{standar deviasi}$

Contoh:

$$P(8 < x < 10) = \int_8^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

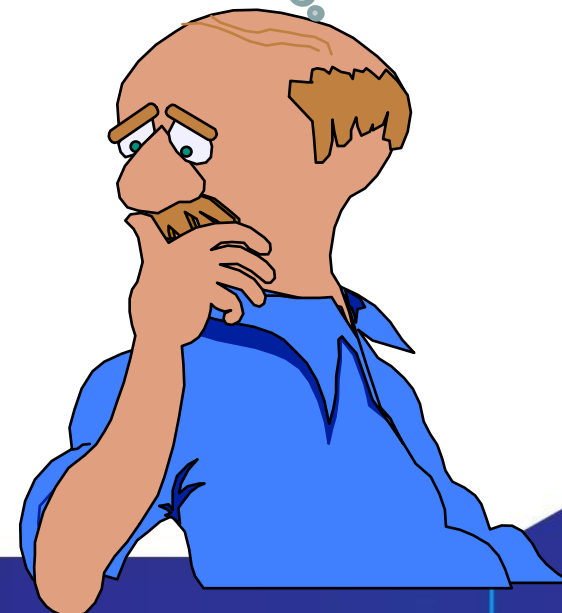
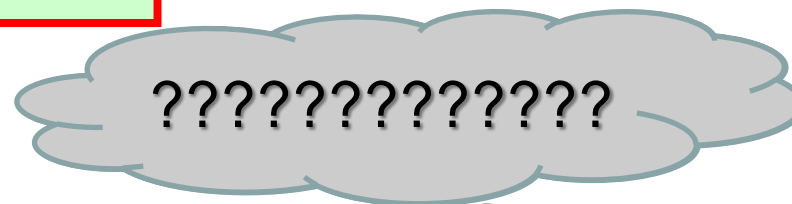
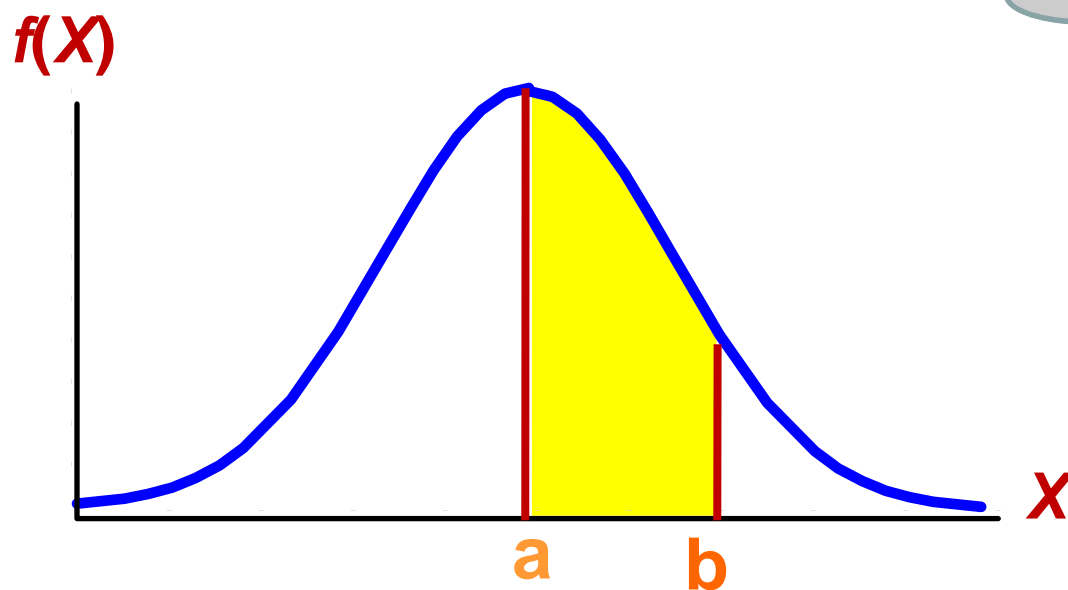
$$\int_8^{10} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{2}\right)^2} dx$$



Ada cara yang lebih mudah yaitu dengan memanfaatkan tabel

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$f(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$



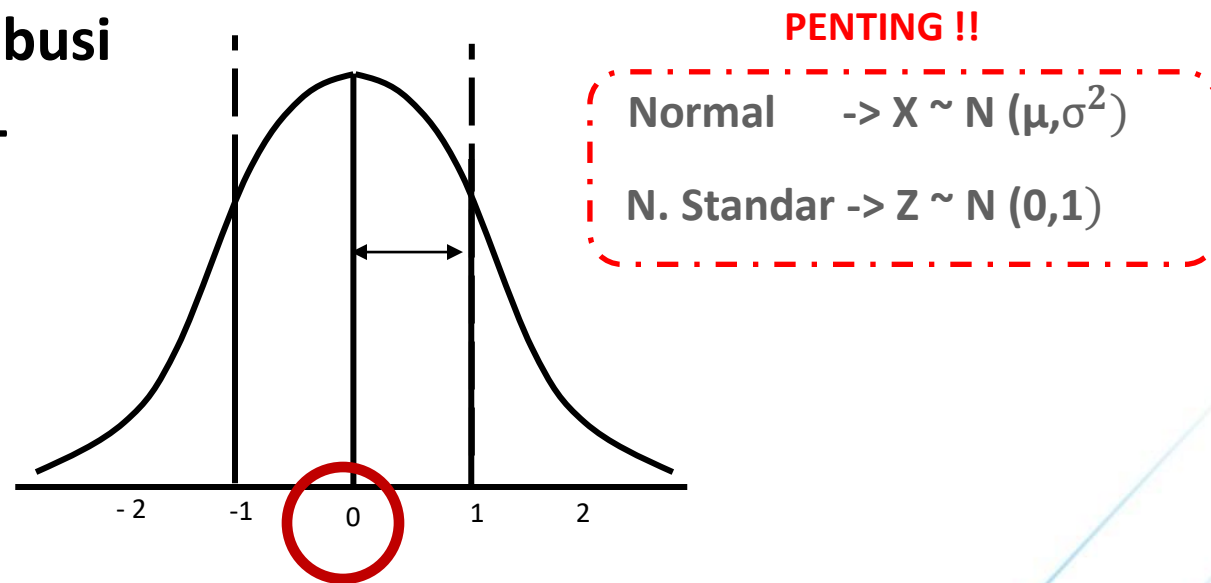
Distribusi Normal Standar

Distribusi normal standar merupakan distribusi normal dengan **mean** = 0 dan **varian** = 1

Harus dikonversi

$$N(\mu, \sigma^2) = N(0, 1)$$

Dihitung pakai integral Dihitung dengan melihat tabel



Suatu variabel acak yang berdistribusi normal standar dilambangkan dengan

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

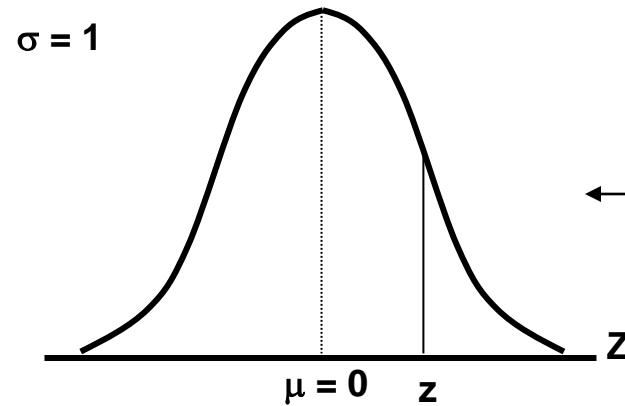
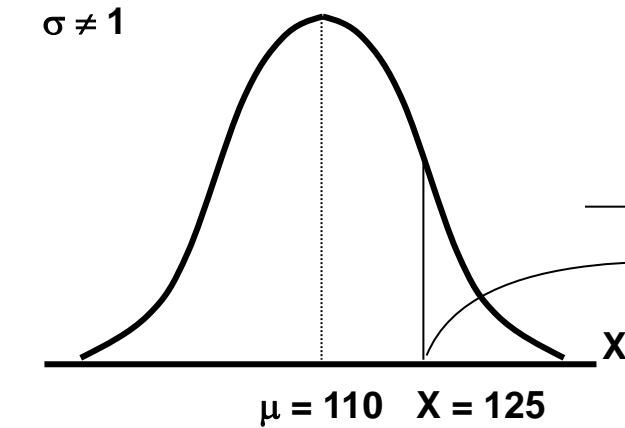
Contoh

$$\begin{aligned} P(X < 60) &= P\left(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ X \sim N(10, 36) &= P\left(Z < \frac{60 - 10}{6}\right) \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad \mu \quad \sigma^2 \\ &= P\left(Z < \frac{50}{6}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{25}{3}\right) \end{aligned}$$

Proses Standarisasi

Misal :

$X = 125, N(110, 100)$



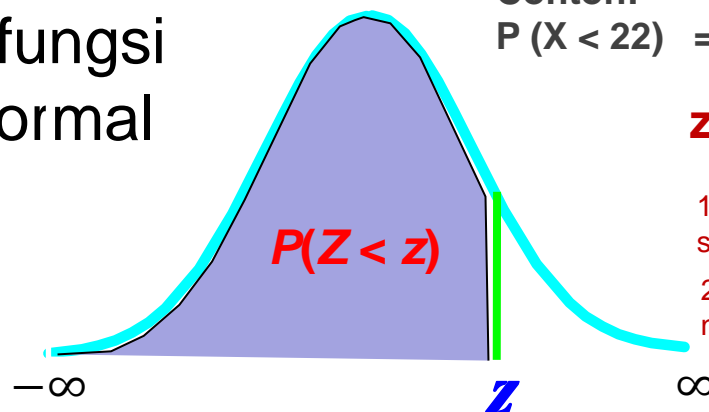
Standarisasi
dari X ke Z

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{125 - 110}{\sqrt{100}} = 1.5$$

Tabel Distribusi Normal Standar

Tabel ini menyajikan nilai dari fungsi distribusi **kumulatif** variabel normal standar **$P(Z < z)$** .



Contoh: $X \sim N(8, 64)$
 $P(X < 22) = P\left(Z < \frac{22-8}{8}\right) = P(Z < 1,75)$

$z = 1,75$

Lihat Tabel !!
 Caranya yaitu dengan :

1. Melihat Row (vertical) untuk nilai z sampai 1 angka dibelakang koma
2. Melihat Colum (horizontal) untuk nilai z, decimal kedua (0.0x)

1,7
0,05

$P(Z < 1,75) = 0.9599$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633

Rumus Konversi

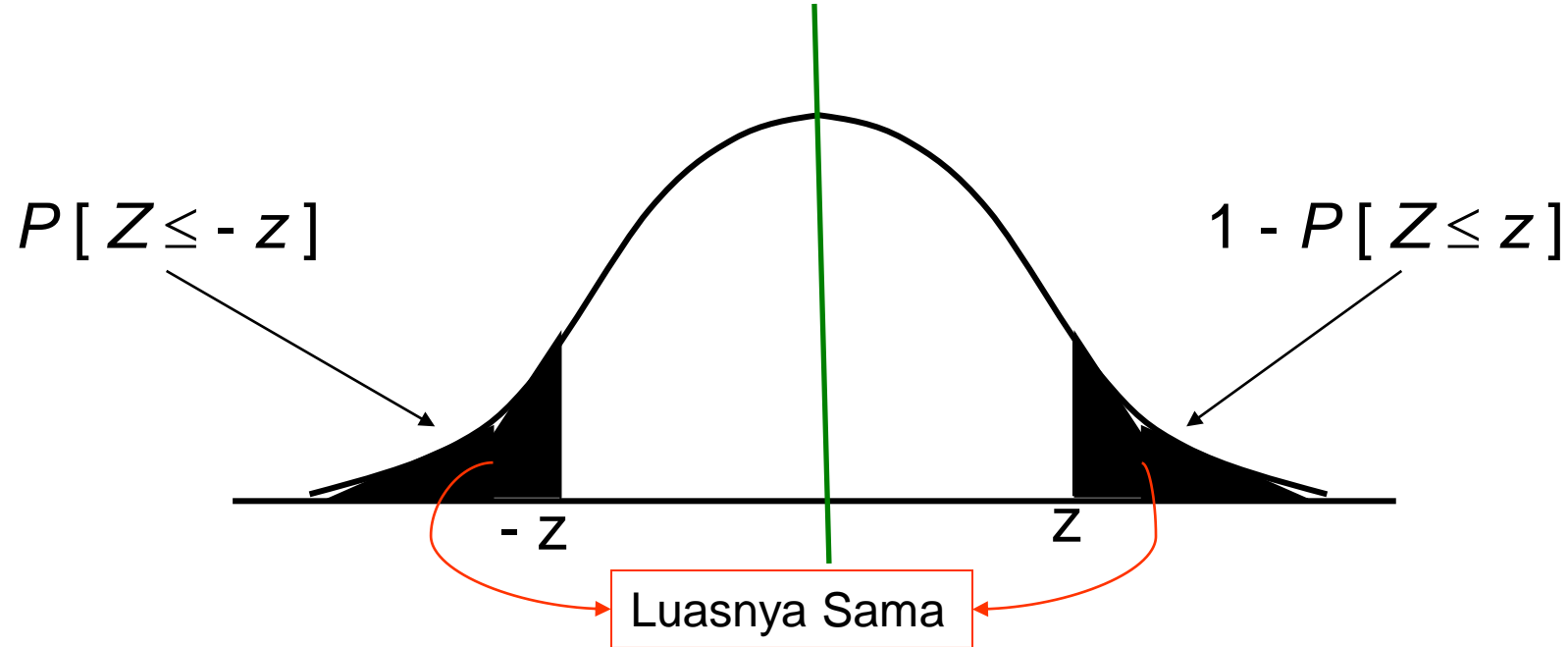
Beberapa rumus ini dapat digunakan untuk membantu dalam konversi agar dapat melihat nilai pada tabel distribusi normal standar. Tabel hanya dapat dilihat jika tandanya “<” saja, jika tidak maka lakukan konversi.

$$P (Z < a) \rightarrow \text{Lihat Tabel}$$

$$P (Z > a) = 1 - P (Z < a)$$

$$P (a < Z < b) = P (Z < b) - P (Z < a)$$

Ciri-Ciri Distribusi Normal Standar



maka:

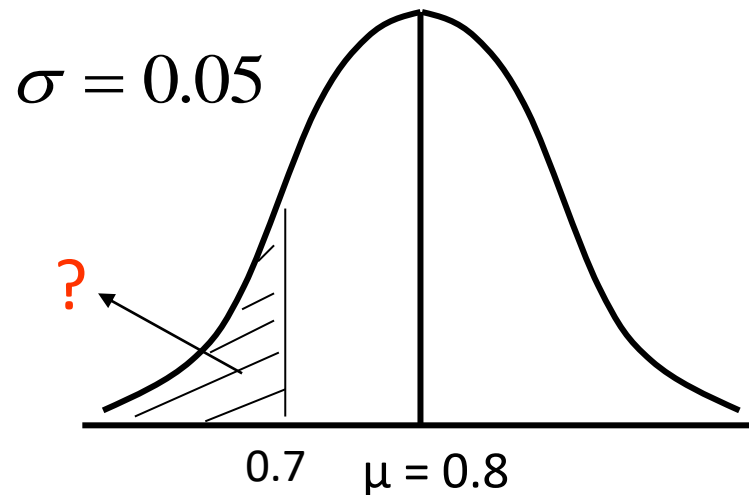
$$P[Z \leq 0] = 0.5$$

$$P[Z \leq -z] = 1 - P[Z \leq z]$$

$$P[Z \geq z] = 1 - P[Z \leq z]$$

Contoh :

Dalam pabrik pemrosesan kimia, penting dijaga agar kualitas harian dari gugusan hasil jenis proses kimia tertentu berada di atas 0.7. Bila kualitasnya di bawah 0.7 untuk jangka waktu yang agak panjang maka perusahaan akan merugi. Diketahui bahwa kualitas hasil tersebut **berdistribusi normal** dengan mean 0.8 dan standar deviasi 0.05. Berapakah probabilitas bahwa suatu hari kualitas akan berada di bawah 0.7 ?



$$\begin{aligned}
 P(X < 0.7) &= P\left(Z < \frac{0.7 - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= P\left(Z < \frac{0.7 - 0.8}{0.05}\right) \\
 &= P(Z < -2) \\
 &= 0.0228
 \end{aligned}$$

Latihan

Lama waktu latihan seorang atlit Bulutangkis Nasional sebelum mengikuti kompetisi rata-rata 40 hari dengan standar deviasi 8 hari. Diketahui bahwa lama berlatih berdistribusi normal. Tentukan probabilitas seorang atlit Bulutangkis Nasional berlatih paling sedikit 55 hari sebelum mengikuti kompetisi?

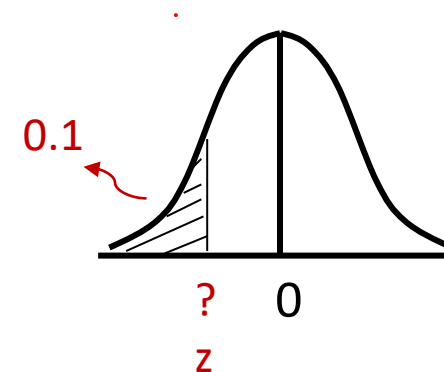
Fenomena distribusi data normal

- Kira-kira 68,27% dari data berada dalam daerah satu standar deviasi sekitar rata-rata ($\mu - \sigma$ dan $\mu + \sigma$)
- Kira-kira 95,45% dari data berada dalam daerah dua standar deviasi sekitar rata-rata ($\mu - 2\sigma$ dan $\mu + 2\sigma$)
- Hampir 99,73% dari data berada dalam daerah tiga standar deviasi sekitar rata-rata ($\mu - 3\sigma$ dan $\mu + 3\sigma$)

Interpolasi Linier

Tentukan nilai x untuk $P(Z < z) = 0.1$

- Lihat tabel, cari nilai Z yang memberikan probabilitas 0.1



STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702

Tidak ada yang TEPAT 10%

Interpolasi Linier

- Gunakan interpolasi linier

– Nilai 1 :

$$z_1 = -1.28$$

$$p(z_1) = 0.10027 \approx 0.1003$$

- Gunakan interpolasi linier

– Nilai 2 :

$$z_2 = -1.29$$

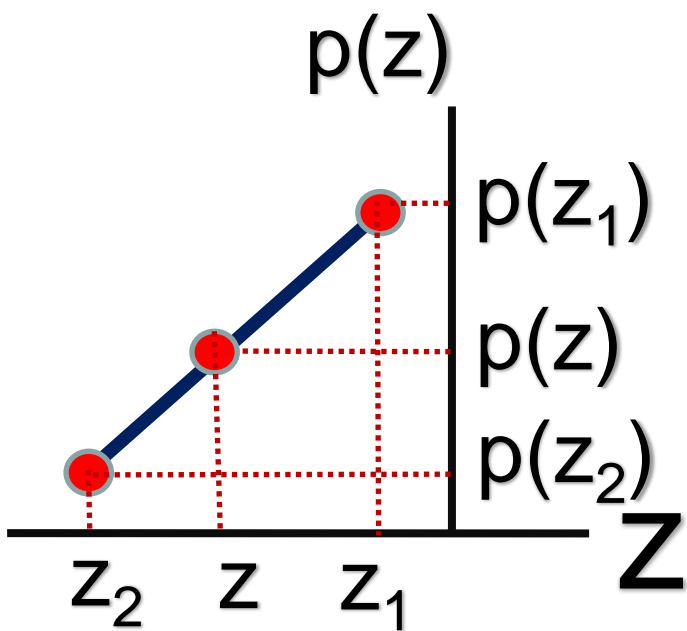
$$p(z_2) = 0.09853 \approx 0.0985$$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702



interpolasi linier

– Nilai yang dicari :

$z = ???$

$p(z) = 0.1$

$$\frac{P(z_1) - P(z)}{P(z_1) - P(z_2)} = \frac{z_1 - z}{z_1 - z_2}$$

$$\frac{0.1003 - 0.1}{0.1003 - 0.0985} = \frac{(-1.28) - z}{-1.28 - (-1.29)}$$

$$\frac{0.0003}{0.0018} = \frac{-1.28 - z}{0.01}$$

$$\frac{1}{600} = -1.28 - z \quad ; \quad \frac{1}{600} = 0.00167$$

$$z = -1.28 - 0.00167 = -1.28167$$

$z_1 = -1.28$
 $p(z_1) = 0.1003$

$z ??$
Jika $P(z) = 0.1$

$z_2 = -1.29$
 $p(z_2) = 0.0985$

Latihan

Diketahui **rata-rata waktu** membuat suatu alat adalah **75 detik** dan **standart deviasi = 6 detik**.

- Hitung probabilitas seorang pekerja yang dipilih secara random dapat menyelesaikannya dalam waktu **lebih dari 81 detik**.
- Hitung probabilitas seorang pekerja yang dipilih secara random dapat menyelesaikannya dalam waktu **kurang dari 72 detik**
- Hitung probabilitas seorang pekerja yang dipilih secara random dapat menyelesaikannya dalam waktu **antara 75 detik dan 81 detik**.
- Jika **40%** dari pekerja harus menyelesaikan pekerjaannya **kurang dari x detik**. Tentukan **nilai x**!
- Jika hanya **10%** pekerja yang boleh menyelesaikan pekerjaannya dalam waktu **lebih dari y detik**, maka tentukan **nilai y**!

Latihan

Diketahui waktu yang dibutuhkan sebuah penyedot debu baru mengalami perbaikan **berdistribusi normal** dengan **rata-rata = 530 hari** dan **std. dev. = 100 hari**. Perusahaan ingin menetapkan masa garansi sehingga **tidak lebih dari 10%** dari penyedot debu akan membutuhkan layanan perbaikan dalam masa garansi. Berapa **lama masa garansi** yang harus diatur?