

抽象代數

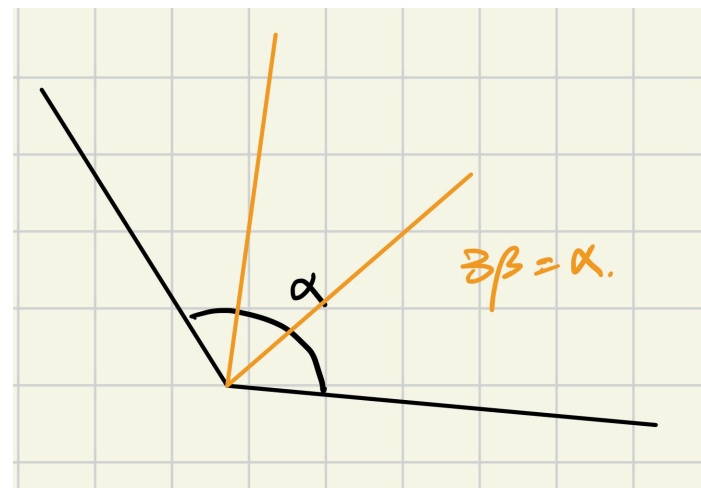
群論

陽明交通大學應數系營隊

群(Group)是一個集合，並且配上一個良好的二元運算，而群論(Group Theory)是一門研究群這種結構的數學分支。群論在許多領域上有著廣泛的應用，以下介紹一些應用。

群論的應用

倍立方、化圓為方、三等分角等，尺規作圖問題。



群論的應用

我們都知道一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解為

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

但是對於一元五次方程 $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ，可以用群論證明，我們無法用根式解析解來表示。

群論的應用

除了數學上的應用外，在其他領域也有著廣泛的應用，例如

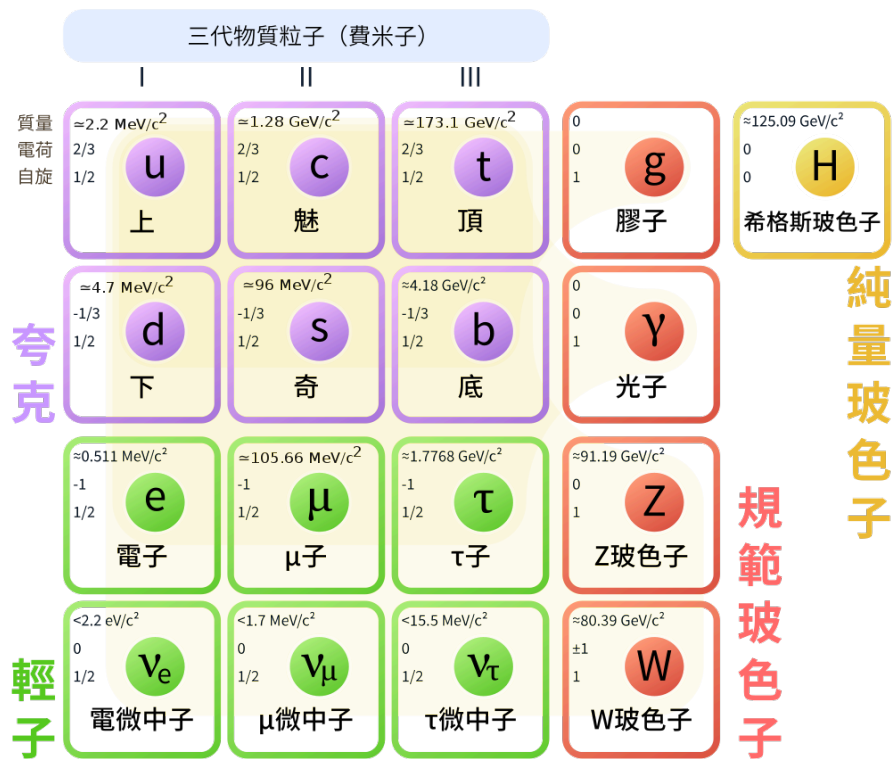
- 密碼學
- 「李群」在近代物理中有重要作用
- 標準粒子模型中的對稱性

群論的應用

除了數學上的應用外，在其他領域也有著廣泛的應用，例如

- 密碼學
- 「李群」在近代物理中有重要作用
- 標準粒子模型中的對稱性

粒子物理標準模型



群

Group

Definition 1.1: $\langle G, * \rangle$ 是一個集合 G 與一個二元運算 $* : G \times G \mapsto G$ ，滿足以下條件：

\mathcal{G}_1 : 對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \text{結合律}$$

\mathcal{G}_2 : 存在一個元素 $e \in G$ ，使得對於所有的 $a \in G$ ，

$$a * e = e * a = a \quad \text{單位元素}$$

\mathcal{G}_3 : 對於每一個 $a \in G$ ，存在一個元素 $a^{-1} \in G$ ，使得

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \quad \text{反元素}$$

Example:

- 整數集合 \mathbb{Z} 與加法運算 $+$ 構成一個群。 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$
單位元素為 0 ，反元素為 $-a$ 。
- 整數集合 \mathbb{Z} 與乘法運算 $*$ 不是一個群。
乘法在整數裡沒有反元素。
- $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ 與加法運算 $+_4$ 構成一個群。
其中 $+_4$ 定義為 $a +_4 b = (a + b) \bmod 4$ 。

Definition 1.2: 讓 G 是一個群，定義 $|G|$ 是 G 的元素個數，稱為 G 的 **order**。

Definition 1.3: 一個群 G 如果滿足交換率 i.e. 對於所有的 $a, b \in G$ ，

$$a * b = b * a$$

，則稱 G 是一個**交換群**(Abelian groups)。

Definition 1.2: 讓 G 是一個群，定義 $|G|$ 是 G 的元素個數，稱為 G 的 **order**。

Definition 1.3: 一個群 G 如果滿足交換率 i.e. 對於所有的 $a, b \in G$ ，

$$a * b = b * a$$

，則稱 G 是一個**交換群**(Abelian groups)。

Example:

- 整數集合 \mathbb{Z} 與加法運算 $+$ 是一個交換群。
- \mathbb{Z}_4 的 order 為 4。
- 可逆矩陣的集合與矩陣乘法是一個群，但不是交換群。

Theorem 1.1: 如果 G 是一個群，那消去率成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = b * c \Rightarrow b = c$$

Theorem 1.1: 如果 G 是一個群，那消去率成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = b * c \Rightarrow b = c$$

Proof: 讓 G 是一個群， $a, b, c \in G$ 。假設 $a * b = a * c$ 。

$$a * b = a * c$$

$$\Rightarrow b = c$$



Theorem 1.1: 如果 G 是一個群，那消去率成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = b * c \Rightarrow b = c$$

Proof: 讓 G 是一個群， $a, b, c \in G$ 。假設 $a * b = a * c$ 。因為 $a \in G$ ，所以 a 的反元素 a^{-1} 存在，且 $a * a^{-1} = e$ 。

$$a * b = a * c$$

$$\Rightarrow a^{-1} * a * b = a^{-1} * a * c$$

$$\Rightarrow b = c$$



Theorem 1.1: 如果 G 是一個群，那消去率成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = b * c \Rightarrow b = c$$

Proof: 讓 G 是一個群， $a, b, c \in G$ 。假設 $a * b = a * c$ 。因為 $a \in G$ ，所以 a 的反元素 a^{-1} 存在，且 $a * a^{-1} = e$ 。

$$a * b = a * c$$

$$\Rightarrow a^{-1} * a * b = a^{-1} * a * c$$

$$\Rightarrow b = c$$



Theorem 1.1: 如果 G 是一個群，那消去率成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = b * c \Rightarrow b = c$$

Proof: 讓 G 是一個群， $a, b, c \in G$ 。假設 $a * b = a * c$ 。因為 $a \in G$ ，所以 a 的反元素 a^{-1} 存在，且 $a * a^{-1} = e$ 。

$$a * b = a * c$$

$$\Rightarrow a^{-1} * a * b = a^{-1} * a * c$$

$$\Rightarrow e * b = e * a$$

$$\Rightarrow b = a$$

■

Theorem 1.2: 群 G 的單位元素 e 唯一。

Theorem 1.2: 群 G 的單位元素 e 唯一。

Proof: 假設存在第二個單位元素 e_2 ，滿足對於所有 $a \in G$

$$e_2 * a = a * e_2 = a$$

因為 $e \in G$ ，所以

$$e_2 * a = a$$



Theorem 1.2: 群 G 的單位元素 e 唯一。

Proof: 假設存在第二個單位元素 e_2 ，滿足對於所有 $a \in G$

$$e_2 * a = a * e_2 = a$$

因為 $e \in G$ ，所以

$$e_2 * e = e$$

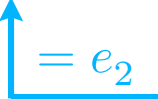


Theorem 1.2: 群 G 的單位元素 e 唯一。

Proof: 假設存在第二個單位元素 e_2 ，滿足對於所有 $a \in G$

$$e_2 * a = a * e_2 = a$$

因為 $e \in G$ ，所以

$$e_2 * e = e$$


$= e_2$



Theorem 1.2: 群 G 的單位元素 e 唯一。

Proof: 假設存在第二個單位元素 e_2 ，滿足對於所有 $a \in G$

$$e_2 * a = a * e_2 = a$$

因為 $e \in G$ ，所以

$$e_2 * e = e$$

我們得到 $e_2 = e$

$$= e_2$$



Theorem 1.3: 讓 G 是一個群， $ab \in G$ ，那麼

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Theorem 1.3: 讓 G 是一個群， $ab \in G$ ，那麼

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Proof: 我們直接相乘

$$\begin{aligned}(ab)b^{-1}a^{-1} &= a(bb^{-1})a^{-1} \\ &= aea^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= e\end{aligned}$$

根據反元素的定義， $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ■

置換群

Permutation Group

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$\downarrow \sigma$ 排列

$$A = \{3, 1, 5, 2, 4\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$\downarrow \sigma$ 排列

$$A = \{3, 1, 5, 2, 4\}$$

$$1 \rightarrow 3$$

$$2 \rightarrow 4$$

$$3 \rightarrow 5$$

$$4 \rightarrow 2$$

$$5 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 2$$

$$4 \rightarrow 5$$

$$5 \rightarrow 1$$

Figure 5: σ

Definition 2.1: 一個 A 的置換是一個一一對應的函數 $\varphi : A \rightarrow A$ 。(one-one and onto)

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 4 \\ 3 \rightarrow 5 \\ 4 \rightarrow 2 \\ 5 \rightarrow 1 \end{array}$$

Figure 7: 一個置換 σ

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 2 \\ 4 \rightarrow 5 \\ 5 \rightarrow 1 \end{array}$$

Figure 8: 不是置換

Definition: 讓 σ 和 τ 是兩個置換，定義 σ 和 τ 的**合成**是一個新的置換 $\sigma \circ \tau$ ，使得對於所有的 $a \in A$ ，

$$(\sigma \circ \tau)(a) = \sigma(\tau(a))$$

Definition: 讓 σ 和 τ 是兩個置換，定義 σ 和 τ 的**合成**是一個新的置換 $\sigma \circ \tau$ ，使得對於所有的 $a \in A$ ，

$$(\sigma \circ \tau)(a) = \sigma(\tau(a))$$

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$$

$$A \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{\sigma} A$$

因為 σ 和 τ 都是一一對應的函數，所以 $\sigma \circ \tau$ 也是一一對應的函數。
所以 $\sigma \circ \tau$ 是一個置換。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

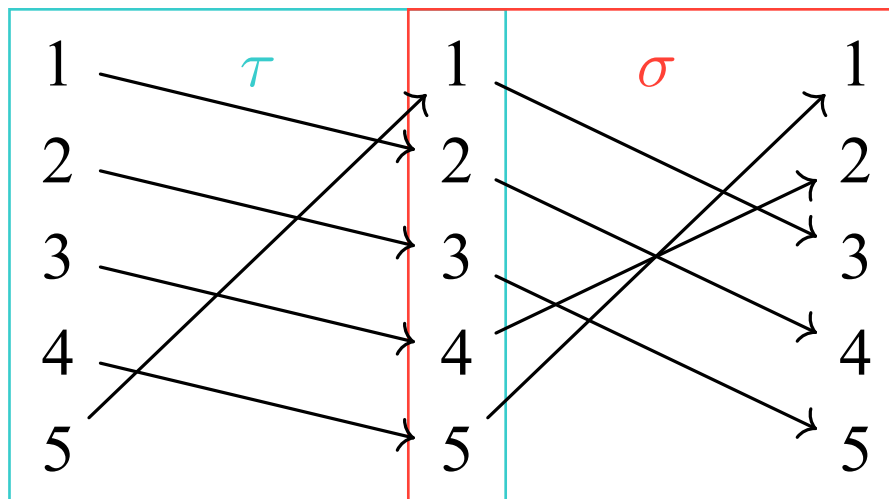
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



Definition 2.2: 一個集合 A 的所有置換構成一個群，稱為 A 的置換群，記為 S_A 。

Definition 2.2: 一個集合 A 的所有置換構成一個群，稱為 A 的置換群，記為 S_A 。

Remark: n 個元素的集合的置換群計為 S_n 的 order 為 $n!$ 。

Definition 2.2: 一個集合 A 的所有置換構成一個群，稱為 A 的置換群，記為 S_A 。

Remark: n 個元素的集合的置換群計為 S_n 的 order 為 $n!$ 。

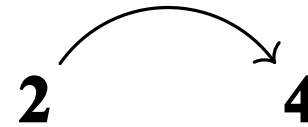
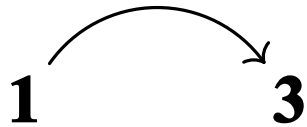
Example:

上述的例子中， τ 和 σ 是 S_5 的元素。

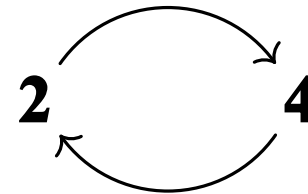
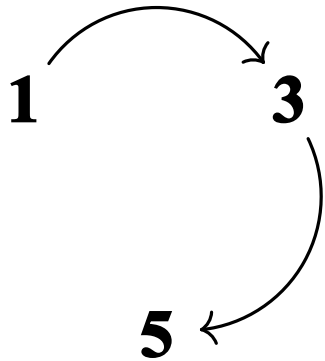
S_5 的 order 為 $5! = 120$ 。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

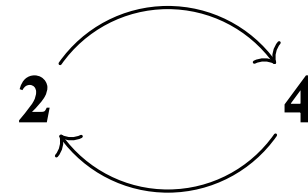
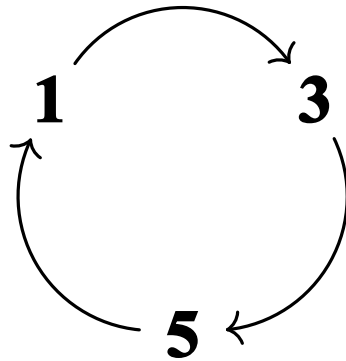
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



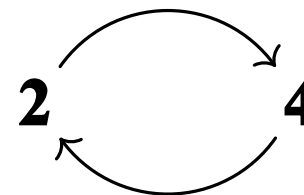
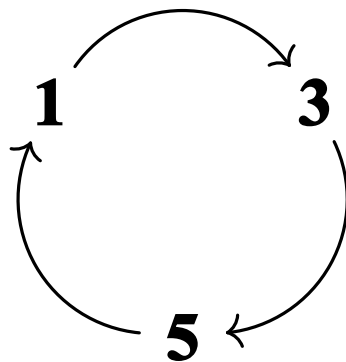
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



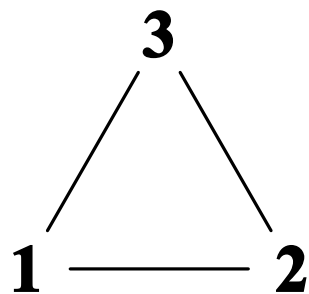
$$\sigma = (1, 3, 5)(2, 4)$$

空間對稱群

Symmetry Group

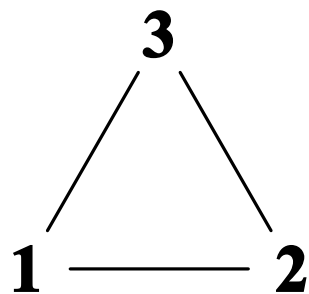
我們接下來考慮一種特殊的置換群。

我們接下來考慮一種特殊的置換群。

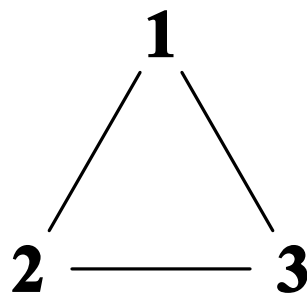


正三角形

我們接下來考慮一種特殊的置換群。



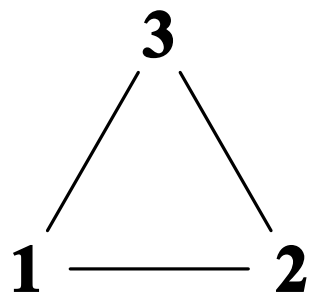
正三角形



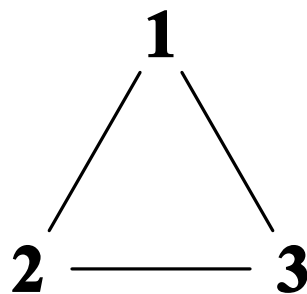
順時針旋轉 120 度

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)$$

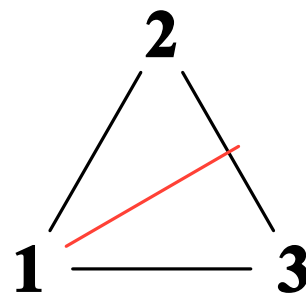
我們接下來考慮一種特殊的置換群。



正三角形



順時針旋轉 120 度

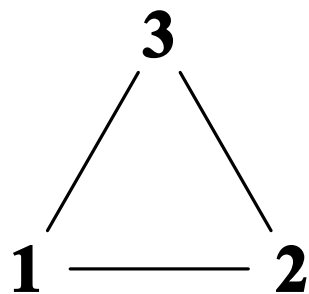


沿某一軸鏡射

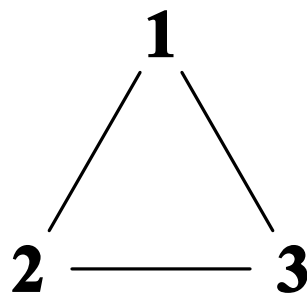
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2, 3)$$

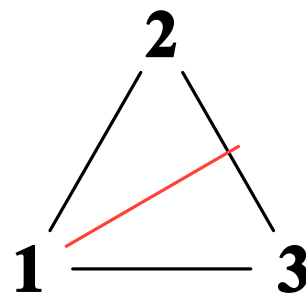
我們接下來考慮一種特殊的置換群。



正三角形



順時針旋轉 120 度



沿某一軸鏡射

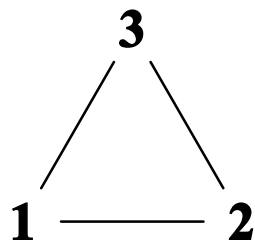
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2, 3)$$

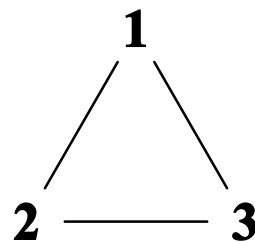
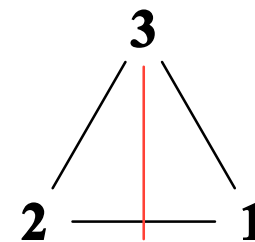
我們稱這些置換為對稱置換。

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2, 3)$$



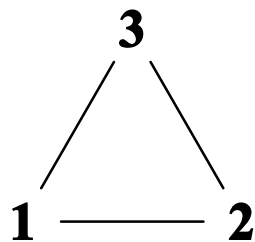
正三角形

 ρ_1  $\tau_1 \circ \rho_1$

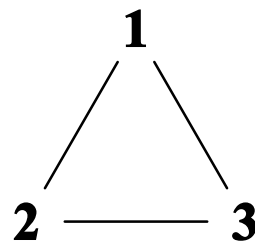
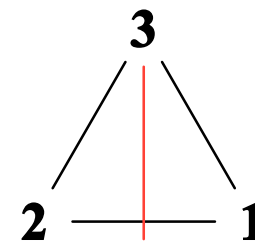
$$\tau_1 \circ \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3, 2)$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2, 3)$$



正三角形

 ρ_1  $\tau_1 \circ \rho_1$

$$\tau_1 \circ \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3, 2)$$

對稱置換的合成還是一個對稱置換。

我們把三角形的所有對稱的置換枚舉出來：

$$e = \rho_0 = (1)(2)(3) \quad \text{不動}$$

$$\rho_1 = (1, 2, 3) \quad \text{旋轉 120 度}$$

$$\rho_2 = (1, 3, 2) \quad \text{旋轉 240 度}$$

$$\tau_1 = (1)(2, 3) \quad \text{鏡射}$$

$$\tau_2 = (1, 3, 2) \quad \text{鏡射}$$

$$\tau_3 = (1, 2)(3) \quad \text{鏡射}$$

我們把三角形的所有對稱的置換枚舉出來：

$$e = \rho_0 = (1)(2)(3) \quad \text{不動}$$

$$\rho_1 = (1, 2, 3) \quad \text{旋轉 120 度}$$

$$\rho_2 = (1, 3, 2) \quad \text{旋轉 240 度}$$

$$\tau_1 = (1)(2, 3) \quad \text{鏡射}$$

$$\tau_2 = (1, 3, 2) \quad \text{鏡射}$$

$$\tau_3 = (1, 2)(3) \quad \text{鏡射}$$

把上述的對稱置換構成的群稱為 D_3 ，稱為正三角形的空間對稱群。

$$D_3 = \{e, \rho_1, \rho_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$$

| \circ | e | ρ_1 | ρ_2 | τ_1 | τ_2 | τ_3 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| e | e | ρ_1 | ρ_2 | τ_1 | τ_2 | τ_3 |
| ρ_1 | ρ_1 | ρ_2 | e | τ_3 | τ_1 | τ_2 |
| ρ_2 | ρ_2 | e | ρ_1 | τ_2 | τ_3 | τ_1 |
| τ_1 | τ_1 | τ_3 | τ_2 | e | ρ_2 | ρ_1 |
| τ_2 | τ_2 | τ_1 | τ_3 | ρ_2 | e | ρ_1 |
| τ_3 | τ_3 | τ_2 | τ_1 | ρ_1 | ρ_2 | e |

$$D_4 = \{e, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$

$$e = (1)(2)(3)(4)$$

$$\rho_1 = (1, 2, 3, 4)$$

$$\rho_2 = (1, 3)(2, 4)$$

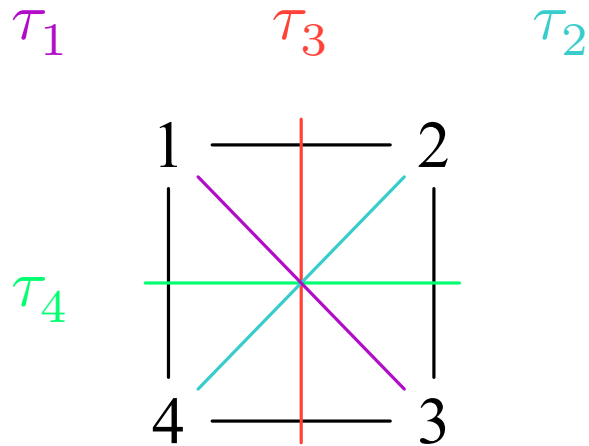
$$\rho_3 = (1, 4, 3, 2)$$

$$\tau_1 = (1)(2, 4)(3)$$

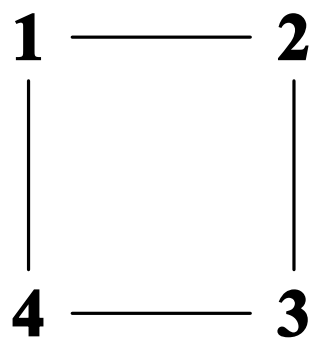
$$\tau_2 = (1, 3)(2)(4)$$

$$\tau_3 = (1, 2)(4, 3)$$

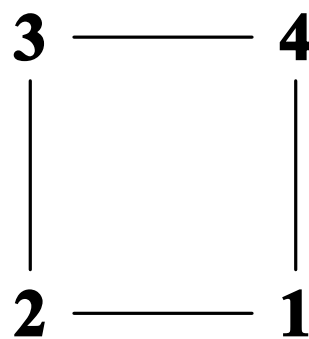
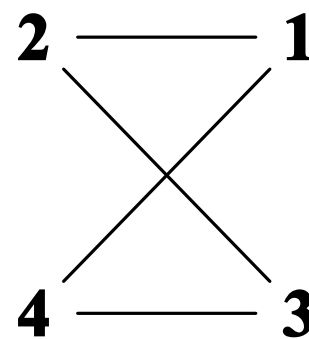
$$\tau_4 = (1, 4)(2, 3)$$



值得注意的是 $\sigma = (1, 2)(4, 3)$ 他是一個置換，但不是一個對稱置換，因為他不能把正方形打回自身。



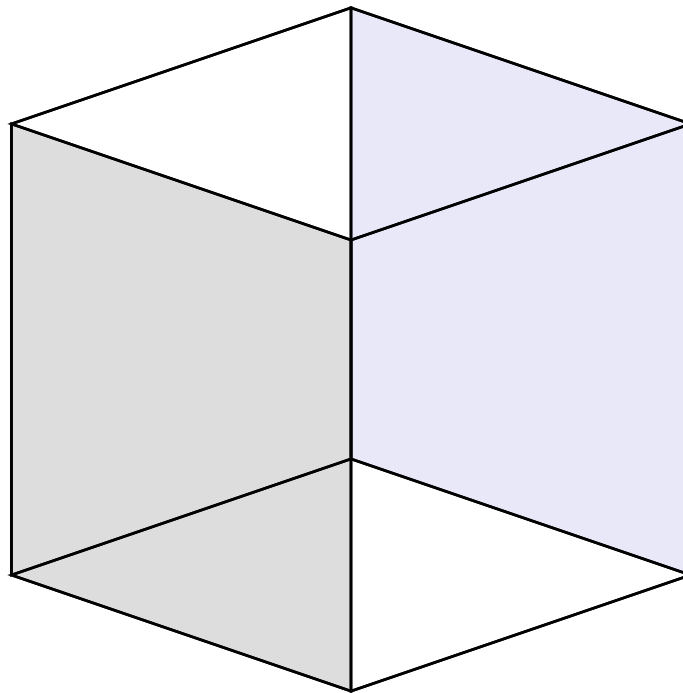
正方形

 ρ_2  σ 不是一個對稱置換

如何計算空間對稱群

正 n 邊形的對稱群的 order 是多少？

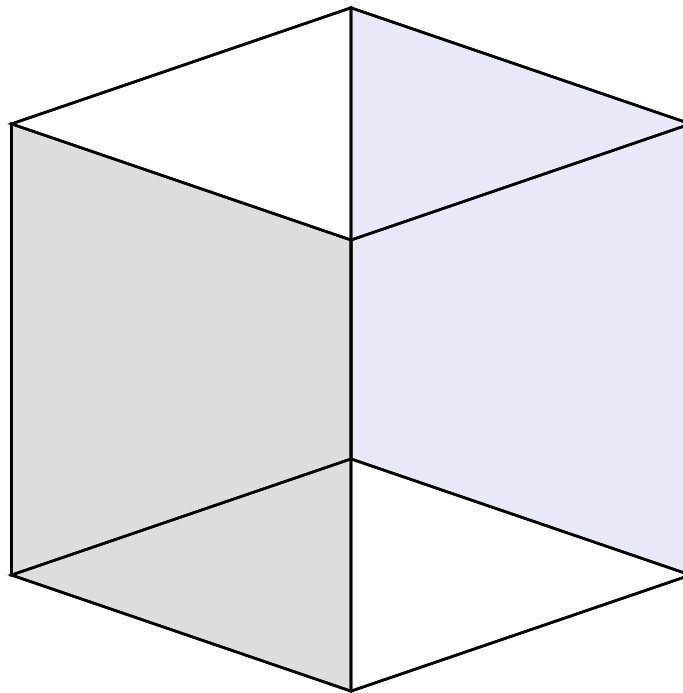
立方體的有多少不同的旋轉。



如何計算空間對稱群

正 n 邊形的對稱群的 order 是 $2n$ 。

立方體的有24個不同的旋轉。



作用群

Group Action

Definition 4.1: 一個群 G 對一個集合 A 的作用是一個映射 $*: G \times A \rightarrow A$ ，滿足以下條件：

1. 對於所有 $a \in A$ $ea = a$
2. 對於所有 $a \in A$ 和 $g, h \in G$ ， $(gh)a = g(ha)$

在這個情況下，我們稱 A 是一個 **G -set**。

像是在上一章節中，我們考慮了對稱群 D_3 對正三角形的作用。

Theorem 4.1: 讓 X 是一個 G -set。如果 $gx_1 = gx_2$ ，那 $x_1 = x_2$

Proof: 假設 $gx_1 = gx_2$ ，那麼 $g^{-1}gx_1 = g^{-1}gx_2$ ，所以 $ex_1 = ex_2$ ，所以 $x_1 = x_2$ 。 ■

Remark: 如果 $x \neq y$ ，那 $gx \neq gy$

Fixed point, Stabilizers subgroup, Orbits

Definition 4.2: 讓 X 是一個 G -set，讓 $x \in X$ ， $g \in G$ 。我們定義：

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$$

$$X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$$

$\text{Stab}_G(x)$ 稱為 x 的穩定子群， X^g 稱為 g 的不動點。

Fixed point, Stabilizers subgroup, Orbits

Definition 4.2: 讓 X 是一個 G -set，讓 $x \in X$ ， $g \in G$ 。我們定義：

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$$

$$X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$$

$\text{Stab}_G(x)$ 稱為 x 的穩定子群， X^g 稱為 g 的不動點。

- $X^e = X$

Theorem 4.2: 讓 X 是一個 G -set，我們定義一個在 X 上的關係 \sim ，對於所有的 $x, y \in X$ ， $x \sim y$ 當且僅當存在 $g \in G$ ，使得 $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

Theorem 4.2: 讓 X 是一個 G -set，我們定義一個在 X 上的關係 \sim ，對於所有的 $x, y \in X$ ， $x \sim y$ 當且僅當存在 $g \in G$ ，使得 $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

Proof: 自反性、對稱性、傳遞性



Theorem 4.2: 讓 X 是一個 G -set，我們定義一個在 X 上的關係 \sim ，對於所有的 $x, y \in X$ ， $x \sim y$ 當且僅當存在 $g \in G$ ，使得 $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

Proof: 自反性、對稱性、傳遞性

自反性：對於所有的 $x \in X$ ， $x \sim x$ ，因為 $ex = x$ 。



Theorem 4.2: 讓 X 是一個 G -set，我們定義一個在 X 上的關係 \sim ，對於所有的 $x, y \in X$ ， $x \sim y$ 當且僅當存在 $g \in G$ ，使得 $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

Proof: 自反性、對稱性、傳遞性

自反性：對於所有的 $x \in X$ ， $x \sim x$ ，因為 $ex = x$ 。

對稱性：如果 $x \sim y$ ，那麼存在 $g \in G$ ，使得 $gx = y$ ，所以 $g^{-1}y = x$ ，所以 $y \sim x$ 。



Theorem 4.2: 讓 X 是一個 G -set，我們定義一個在 X 上的關係 \sim ，對於所有的 $x, y \in X$ ， $x \sim y$ 當且僅當存在 $g \in G$ ，使得 $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

Proof: 自反性、對稱性、傳遞性

自反性：對於所有的 $x \in X$ ， $x \sim x$ ，因為 $ex = x$ 。

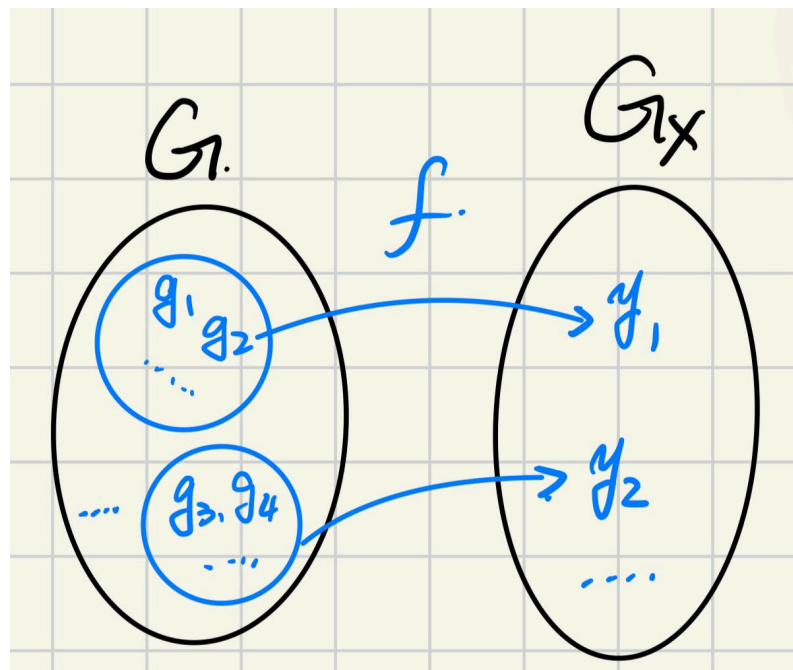
對稱性：如果 $x \sim y$ ，那麼存在 $g \in G$ ，使得 $gx = y$ ，所以 $g^{-1}y = x$ ，所以 $y \sim x$ 。

傳遞性：如果 $x \sim y$ 且 $y \sim z$ ，那麼存在 $g, h \in G$ ，使得 $gx = y$ 且 $hy = z$ ，所以 $hgx = z$ ，所以 $x \sim z$ 。 ■

Definition 4.3: 讓 X 是一個 G -set，每一個在 Theorem 4.2 下的等價類稱為一個軌道。如果 $x \in X$ ，包含 x 的分割是 x 的軌道，記作 G_x 。

Theorem 4.3: 讓 X 是一個 G -set， $x \in X$ ，那麼 x 的軌道 $G_x = \{gx \mid g \in G\}$ 。

Theorem 4.4 (軌道-穩定子定理 (Orbit-Stabilizer Theorem)): 讓 G 是一個有限群，讓 X 是一個 G -**set**， $x \in X$ ，那麼 $|G| = |G_x| |\text{Stab}_G(x)|$ 。



定義 $f: G \rightarrow G_x$, $f(g) = gx$ 。我們證明每一個在 G_x 裡的元素都被打到 $|\text{Stab}_G(x)|$ 這麼多次。

給定一個 $y \in G_x$, 那麼存在 $h \in G$ 使得 $y = hx$ 。

定義 $f: G \rightarrow G_x$, $f(g) = gx$ 。我們證明每一個在 G_x 裡的元素都被打到 $|\text{Stab}_G(x)|$ 這麼多次。

給定一個 $y \in G_x$, 那麼存在 $h \in G$ 使得 $y = hx$ 。

我們先證明這個引理: $f(g) = y \iff h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

定義 $f: G \rightarrow G_x$, $f(g) = gx$ 。我們證明每一個在 G_x 裡的元素都被打到 $|\text{Stab}_G(x)|$ 這麼多次。

給定一個 $y \in G_x$, 那麼存在 $h \in G$ 使得 $y = hx$ 。

我們先證明這個引理: $f(g) = y \iff h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

\Rightarrow : 如果 $f(g) = y$, 那麼 $gx = hx$, 所以 $h^{-1}gx = x$, 所以 $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

定義 $f: G \rightarrow G_x$, $f(g) = gx$ 。我們證明每一個在 G_x 裡的元素都被打到 $|\text{Stab}_G(x)|$ 這麼多次。

給定一個 $y \in G_x$, 那麼存在 $h \in G$ 使得 $y = hx$ 。

我們先證明這個引理: $f(g) = y \iff h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

\Rightarrow : 如果 $f(g) = y$, 那麼 $gx = hx$, 所以 $h^{-1}gx = x$, 所以 $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

\Leftarrow : 如果 $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$, 那麼 $h^{-1}gx = x$, 所以 $gx = hx$, 所以 $f(g) = y$ 。

接著我們來討論有多少 $g \in G$ 使得 $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

接著我們來討論有多少 $g \in G$ 使得 $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

$$\begin{aligned} h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x) &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } h^{-1}g = \tilde{g} \\ &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } g = h\tilde{g} \\ &\iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\} \end{aligned}$$

接著我們來討論有多少 $g \in G$ 使得 $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

$$\begin{aligned} h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x) &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } h^{-1}g = \tilde{g} \\ &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } g = h\tilde{g} \\ &\iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\} \end{aligned}$$

所以， $f(g) = y \iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\}$ 。因此，每個 $y \in G_x$ 都 $|\text{Stab}_G(x)|$ 個 $g \in G$ 使得 $f(g) = y$ 。

所以， $|G| = |G_x| |\text{Stab}_G(x)|$ 。

Theorem 4.5 (伯恩賽德引理): 讓 G 是一個有限群，讓 X 是一個 G -**set**。讓 r 是 X 的軌道數，那麼

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

Theorem 4.5 (伯恩賽德引理): 讓 G 是一個有限群，讓 X 是一個 G -**set**。讓 r 是 X 的軌道數，那麼

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

我們通過雙重計數來證明這個引理。考慮所有滿足 $gx = x$ 的序組 (g, x) ，我們用兩種方式計數這些序組，這樣就會有一個很自然的等式。

我們考慮序組 (g, x) ，其中 $gx = x$ 。假設這樣的序組有 N 個。對於每一個 $g \in G$ ，我們計算 (g, x) 的數量，這個數量是 $|X^g|$ 。所以

$$N = \sum_{g \in G} |X^g|$$

我們考慮序組 (g, x) ，其中 $gx = x$ 。假設這樣的序組有 N 個。對於每一個 $g \in G$ ，我們計算 (g, x) 的數量，這個數量是 $|X^g|$ 。所以

$$N = \sum_{g \in G} |X^g|$$

另一方面，對於每一個 $x \in X$ ，我們計算 (g, x) 的數量，這個數量是 $|\text{Stab}_G(x)|$ 。所以

$$N = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)|$$

根據 **軌道穩定子定理** Thm ， $|\text{Stab}_G(x)||G_x| = |G|$ ，所以，

$$N = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G_x|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G_x|}$$

對於在相同軌道的元素， $|G_x|$ 是相同的。讓 \mathcal{O} 是一個軌道，我們有

$$\sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|G_x|} = \sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|\mathcal{O}|} = 1$$

因此，

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|G_x|} = (\text{軌道的數量})$$

$$N = |G| \cdot (\text{軌道的數量}) = |G| \cdot r$$

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

用4個顏色對一個正三角形的三個邊進行著色，有幾種不同的著色方法？(兩種著色方式被認為是相同的，如果他們可以通過旋轉、鏡射相互變換)

用4個顏色對一個正三角形的三個邊進行著色，有幾種不同的著色方法？(兩種著色方式被認為是相同的，如果他們可以通過旋轉、鏡射相互變換)

我們讓 $G = D_3$ 是三角型的對稱群， X 是所有著色的結果($|X| = 4^3$)，所以我們要求 X 在 G 下有幾個軌道。根據前的討論，我們知道 $|G| = 6$ ，然後我們計算不動點的個數：

$$|X^{\rho_0}| = 4^3$$

$$|X^{\rho_1}| = 4$$

$$|X^{\rho_2}| = 4$$

$$|X^{\tau_1}| = 4^2$$

$$|X^{\tau_2}| = 4^2$$

$$|X^{\tau_3}| = 4^2$$

根據伯恩賽德引理，我們有

$$6r = 4^3 + 4 + 4 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 120$$

$$r = 20$$

所以正三角形的相異著色方法有20種。

我們考慮我們有 n 個顏色，幫一個有對稱性的圖形上色，我們假設在對稱性下有 r 種上色方式。讓 X 是所有上色方法的集合，讓 G 是該圖形的對稱群，根據博恩賽德引理，我們有

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

其中 X^g 是在 g 下的不動點的集合。

我們考慮我們有 n 個顏色，幫一個有對稱性的圖形上色，我們假設在對稱性下有 r 種上色方式。讓 X 是所有上色方法的集合，讓 G 是該圖形的對稱群，根據博恩賽德引理，我們有

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

其中 X^g 是在 g 下的不動點的集合。

$$g = \underbrace{(1, 2, 3)(5, 4) \dots (\#, \#)}_{m_g}$$

「每個循環內的顏色都一樣」 $|X^g| = n^{m_g}$

我們考慮我們有 n 個顏色，幫一個有對稱性的圖形上色，我們假設在對稱性下有 r 種上色方式。讓 X 是所有上色方法的集合，讓 G 是該圖形的對稱群，根據博恩賽德引理，我們有

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

其中 X^g 是在 g 下的不動點的集合。

$$g = \underbrace{(1, 2, 3)(5, 4) \dots (\#, \#)}_{m_g}$$

「每個循環內的顏色都一樣」 $|X^g| = n^{m_g}$

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} n^{m_g}$$

我們考慮有 n 個顏色，對一個正四邊形的頂點上色，我們要求在對稱性下有幾種不同的著色方法。

我們考慮有 n 個顏色，對一個正四邊形的頂點上色，我們要求在對稱性下有幾種不同的著色方法。

我們讓 $G = D_4$ 是正四邊形的對稱群， X 是所有著色的結果($|X| = n^4$)，我們知道 $|G| = 8$

我們考慮有 n 個顏色，對一個正四邊形的頂點上色，我們要求在對稱性下有幾種不同的著色方法。

我們讓 $G = D_4$ 是正四邊形的對稱群， X 是所有著色的結果($|X| = n^4$)，我們知道 $|G| = 8$

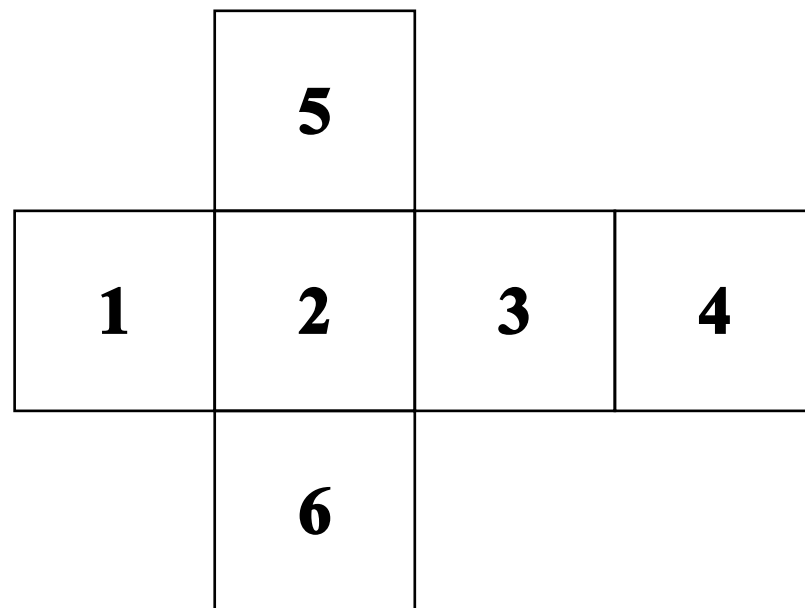
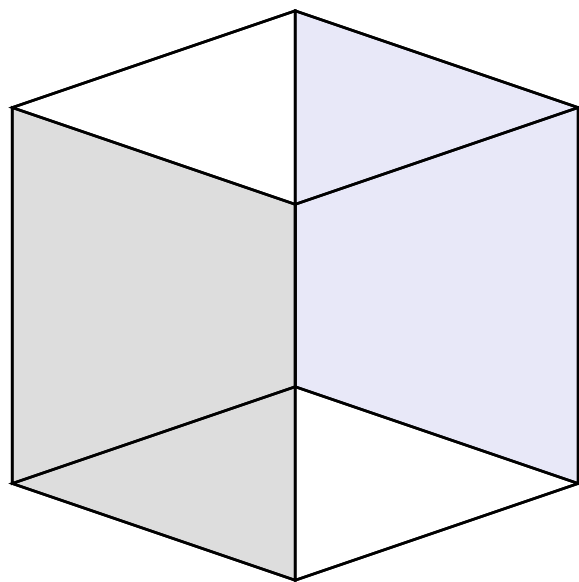
- 單位變換 $m_g = 4$
- 2個 $m_g = 1$ 的旋轉($90^\circ, 270^\circ$)，e.x. $g = (1, 2, 3, 4)$
- 1個 $m_g = 2$ 的旋轉(180°)，e.x. $g = (1, 2)(3, 4)$
- 2個 $m_g = 3$ 的鏡射(對角線的鏡射)，e.x. $g = (1)(3)(2, 4)$
- 2個 $m_g = 2$ 的鏡射(中線的鏡射)，e.x. $g = (1, 3)(2, 4)$

所以我們有

$$r = \frac{1}{8}(n^4 + 2n + 2n^2 + 2n^3 + 2n^4)$$

$$r = \frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n)$$

我們現在有 n 個顏色，幫一個正六面體上色，可以通過旋轉變換得到視為相同的著色方式。總共有多少種不同的著色方式？



我們讓 $G = D_6$ 是正六面體的對稱群， X 是所有著色的結果 ($|X| = n^6$)，我們知道 $|G| = 24$

我們讓 $G = D_6$ 是正六面體的對稱群， X 是所有著色的結果 ($|X| = n^6$)，我們知道 $|G| = 24$

1. 單位變換: $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$
2. 固定兩對面然會旋轉 $90^\circ, 270^\circ$ ，如: $(1, 2, 3, 4)(5)(6)$ ，共 6 個。
3. 固定兩對面然會旋轉 180° ，如: $(1, 3)(2, 4)(5)(6)$ ，共 3 個。
4. 固定兩對邊旋轉 180° ，如: $(1, 5)(3, 6)(2, 4)$ ，共 6 個。
5. 固定兩個對頂點旋轉 $120^\circ, 240^\circ$ ，如: $(1, 5, 4)(2, 3, 6)$ ，共 8 個

所以我們有

$$r = \frac{1}{24}(n^6 + 6n^3 + 3n^4 + 6n^3 + 8n^2)$$

$$r = \frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2)$$