华南师范大学学报(自然科学版)
2003 年 2 月 JOURNAL OF SOUTH CHINA NORMAL UNIVERSITY 2003 年第 1 期
Feb. 2003 (NATURAL SCIENCE EDITION) No.1, 2003

文章编号: 1000-5463(2003)01-0038-04

常曲率空间中具平行截面子流形

王　霞, 李世杰
(华南师范大学数学系, 广东广州 510631)

摘要: 主要研究常曲率黎曼流形 $R^m(c)$ 中的紧致子流形. 证明了具有一平行等参截面 ζ 的子流形 M, 如果 M 的截面曲率恒正, 则 M 包含在 $R^m(c)$ 的一个超球面内. 这里 M 上的等参截面 ζ 是 M 上整体定义的单位法向量场, 使得 M 关于它的平均曲率 $M_1(\zeta)$ 是常数.
关键词: 子流形; 截面曲率; 等参截面
中图分类号: O186.12　　文献标识码: A

SUB-MANIFOLD WITH PARALLEL ISOPERIMETRIC SECTION IN CONSTANT CURVATURE SPACE

WANG xia, LI Shi-jie
(Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: The compact sub-manifold in a constant Riemann manifold $R^m(c)$ is studied. It is proved that the submanifold M with parallel isoperimetric section ζ was contained in a hypersphere of $R^m(c)$, if sectional curvature of M is always larger than zero, where an isoperimetric section ζ on M means a unit normal vector field defined globally on M with $M_1(\zeta)=c$, and $M_1(\zeta)$ is constant.
Key words: sub-manifold; sectional curvature; isoperimetric section

用 $R^m(c)$ 表示截面曲率为常数 c 的 m 维黎曼流形. 关于 $R^m(c)$ 中具有平行平均曲率向量子流形的研究已经有很好的结果, Chen, B. Y. 在文[1]中及 Yau, S. T. 在文[2]中分别独立实现了具有平行平均曲率向量曲面的分类. 对于具有一般平行截面的子流形的研究, Chen 给出如下定理:

定理 A[3]　设 M 是常曲率流形 $R^m(c)$ 中的 n 维子流形, 如果在 M 上存在一平行脐截面 ζ, 则 $M_1(\zeta)$ 是常数, 且 M 包含在 $R^m(c)$ 的一超球面内.

本文继续了 Chen 的研究, 得到如下定理:

定理 1　设 M 为常曲率流形 $R^m(c)$ 中的 n 维紧致子流形, 如果在 M 上存在一平行等参截

收稿日期: 2002-05-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19771039); 广东省自然科学基金资助项目(960179)
作者简介: 王霞(1977-), 女, 山东东营人, 华南师范大学 2000 级硕士研究生; 李世杰(1941-), 男, 江西南昌人, 华南师范大学教授.

面, 且 M 的截面曲率恒为正, 则 M 包含在 $R^m(c)$ 的一超球面内.

定理 **2** 设 M 为常曲率空间 $R^4(c)$ 中的具有常平均曲率的一紧致曲面, 如果存在一平行等参截面 ζ, 且 M 的高斯曲率处处大于零, 则 M 或是 $R^4(c)$ 中的全测地曲面, 或为一球面.

注记 在文[4]中王文丽研究了具有平行平均曲率向量超曲面, 得到如果 M 的截面曲率恒正, 则 M 是一个超球面. 与文[4]相比, 本文在条件更弱的情况下得到与文[4]相同的结果.

1 预备知识

设 M^n 是黎曼流形 $R^m(c)$ 的子流形, 选取 $R^m(c)$ 中局部标准正交标架场 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$, 使得限制在 M 上 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 切于 M, $\boldsymbol{e}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 与 M 正交, 约定各指标的变化范围为

$$1 \leqslant A, B, C, \cdots \leqslant m; \quad 1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n;$$

$$n+1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \cdots \leqslant m,$$

且约定单项表达式中重复出现上、下指标, 表示该式关于这个指标在其取值范围内求和. 关于 $R^m(c)$ 中标准正交标架场 $\{\boldsymbol{e}_A\}$ 和对偶标架场 $\{\omega^A\}$, N 有结构方程

$$\mathrm{d}\omega^A = -\sum \omega_B^A \wedge \omega^B, \quad \omega_A^B + \omega_B^A = 0, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{d}\omega_B^A = -\sum \omega_C^A \wedge \omega_B^C + \Phi_B^A, \tag{1.2}$$

$$\Phi_B^A = \frac{1}{2}\sum K_{BCD}^A \omega^C \wedge \omega^D, \tag{1.3}$$

$$K_{BCD}^A + K_{BDC}^A = 0. \tag{1.4}$$

限制在 M 上, 有

$$\mathrm{d}\omega^\alpha = 0, \tag{1.5}$$

$$\omega_i^\alpha = \sum h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \tag{1.6}$$

$$h = \sum h_{ij}^\alpha \omega^i \otimes \omega^j \otimes \boldsymbol{e}_\alpha, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{d}\omega^i = -\sum \omega_j^i \wedge \omega^j, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \tag{1.8}$$

$$\mathrm{d}\omega_j^i = -\sum \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i, \quad \Omega_j^i = \frac{1}{2}\sum R_{j\,kl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \tag{1.9}$$

$$R_{j\,kl}^i = K_{jkl}^i + \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha), \tag{1.10}$$

$$\mathrm{d}\omega_\beta^\alpha = -\sum \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma + \Omega_\beta^\alpha, \quad \Omega_\beta^\alpha = \frac{1}{2}\sum R_{\beta kl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l, \tag{1.11}$$

$$R_{\beta kl}^\alpha = K_{\beta kl}^\alpha + \sum_i (h_{ik}^\alpha h_{il}^\beta - h_{il}^\alpha h_{ik}^\beta), \tag{1.12}$$

其中 $h = \sum h_{ij}^\alpha \omega^i \otimes \omega^j \otimes \boldsymbol{e}_\alpha$ 称为 M 的第二基本形式, $\zeta = \frac{1}{n}\sum_{\alpha, i} h_{ii}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ 称为平均曲率向量场. 记子流形 M 关于某一法向量场 $\boldsymbol{e}$ 的 Weingarten 变换为 $A_{\boldsymbol{e}}$. 用 h_{ijk}^α 及 h_{ijkl}^α 分别表示 h_{ij}^α 的一阶和二阶共变导数,

$$\sum_k h_{ijk}^\alpha \omega^k = \mathrm{d}h_{ij}^\alpha - \sum_l h_{il}^\alpha \omega_j^l - \sum_l h_{lj}^\alpha \omega_i^l + \sum_\beta h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha, \tag{1.13}$$

$$\sum_l h_{ijkl}^\alpha \omega^l = \mathrm{d}h_{ijk}^\alpha - \sum_l h_{ljk}^\alpha \omega_i^l - \sum_l h_{ilk}^\alpha \omega_j^l - \sum_l h_{ijl}^\alpha \omega_k^l + \sum_\beta h_{ijk}^\beta \omega_\beta^\alpha, \tag{1.14}$$

则

$$h^{\alpha}_{ijk} - h^{\alpha}_{ikj} = K^{\alpha}_{ikj} = -K^{\alpha}_{ijk}, \tag{1.15}$$

$$h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ijlk} = \sum_m (h^{\alpha}_{im} R^m_{jkl} + h^{\alpha}_{jm} R^m_{ikl}) - \sum_\beta h^{\beta}_{ij} R^{\alpha}_{\beta kl}. \tag{1.16}$$

我们计算第二基本形式 h^{α}_{ij} 的 Laplacian 为[5]

$$\triangle h^{\alpha}_{ij} = \sum_k (h^{\alpha}_{kkij} - K^{\alpha}_{kikj} - K^{\alpha}_{ijkk}) + \sum_k \Big(\sum_m h^{\alpha}_{km} R^m_{ijk} + \sum_m h^{\alpha}_{mi} R^m_{kjk} - \sum_\beta h^{\beta}_{ki} R^{\alpha}_{\beta jk}\Big). \tag{1.17}$$

我们给出 $R^m(c)$ 的曲率张量 K^A_{BCD} 的共变导数 $K^A_{BCD;E}$, 限制在 M 上, $K^{\alpha}_{ijk;l}$ 由下式给出,

$$K^{\alpha}_{ijk;l} = K^{\alpha}_{ijkl} - \sum K^{\alpha}_{\beta jk} h^{\beta}_{il} - \sum K^{\alpha}_{i\beta k} h^{\beta}_{jl} - \sum K^{\alpha}_{ij\beta} h^{\beta}_{kl} + \sum K^m_{ijk} h^{\alpha}_{ml}. \tag{1.18}$$

由于 $R^m(c)$ 为常曲率空间, 则有 $K^A_{BCD;E} = 0$.

$$K^A_{BCD} = c(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}). \tag{1.19}$$

2　定理的证明

定理 1 的证明　在 $R^m(c)$ 中选取局部标准正交标架场 $e_1, \cdots, e_m$, 使限制在 M 上时, e_i 切于 M, e_α 为 M 的法向量场. 不妨设 e_{n+1} 为平行等参截面, 即有 $\nabla^{\perp} e_{n+1} = 0$ 且 $M_1(e_{n+1}) = const$, 选取 $e_1, \cdots, e_n$, 使矩阵 (h^{n+1}_{ij}) 对角化. 记 $\lambda_i = h^{n+1}_{ii}$, 由上述条件知 $\sum_i h^{n+1}_{ii} = const$. 由于 e_{n+1} 平行, 则 $\omega^{n+1}_\beta = 0$, $\forall \beta$.

由(1.13)式及定理条件得

$$\sum_{i,k} h^{n+1}_{iik}\omega^k = \sum_i \mathrm{d} h^{n+1}_{ii} - \sum_l h^{n+1}_{il}\omega^l_i - \sum_l h^{n+1}_{li}\omega^l_i + \sum_\beta h^{\beta}_{ii}\omega^{n+1}_\beta = \mathrm{d}\sum_i h^{n+1}_{ii} - 2\sum_l h^{n+1}_{il}\omega^l_i = 0. \tag{2.1}$$

从(1.14)及(2.1)式得

$$\sum_k h^{n+1}_{kkij} = 0, \quad \forall i, j. \tag{2.2}$$

从而由(2.2)式可直接计算出, h^{n+1}_{ij} 的 Laplacian 为

$$\triangle h^{n+1}_{ij} = (-K^{n+1}_{kikj} - K^{n+1}_{ijkk}) + \sum_k \Big(\sum_m h^{n+1}_{km} R^m_{ijk} + \sum_m h^{n+1}_{mi} R^m_{kjk} - \sum_\beta h^{\beta}_{ki} R^{n+1}_{\beta jk}\Big). \tag{2.3}$$

在(2.3)式中, 对任意的 i、j、k, 由(1.18)、(1.19)式得

$$\triangle h^{n+1}_{ij} = \sum_{k,m} h^{n+1}_{km} R^m_{ijk} + \sum_{k,m} h^{n+1}_{mi} R^m_{kjk}. \tag{2.4}$$

则

$$\sum_{i,j} h^{n+1}_{ij}\triangle h^{n+1}_{ij} = \sum_{i,j,k,m} h^{n+1}_{ij} h^{n+1}_{km} R^m_{ijk} + \sum_{i,j,k,m} h^{n+1}_{ij} h^{n+1}_{mi} R^m_{kjk} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R^i_{jij}. \tag{2.5}$$

于是有

$$\frac{1}{2}\triangle\left(\sum_{i,j}\left(h^{n+1}_{ij}\right)^2\right) = \sum_{i,j,k}(h^{n+1}_{ijk})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R^i_{jij}. \tag{2.6}$$

当 R^i_{jij} 恒为正时, 可得

$$\triangle\Big(\sum (h^{n+1}_{ij})^2\Big) \geqslant 0. \tag{2.7}$$

M 是紧致的, 由上式及 Hopf 极大原理知, (2.6)式两边必恒为零. 故有

$$\frac{1}{2}\sum(\lambda_i - \lambda_j)^2 R^i_{jij} = 0. \tag{2.8}$$

注意到 R^i_{jij} 恒为正, 可得

$$\lambda_i = \lambda_j, \qquad i, j.$$

即知 M 关于 e_{n+1} 为脐性的, 于是法向量场 e_{n+1} 为平行脐截面. 再由定理 A 知, M 包含在 $R^m(c)$ 的一超球面里. 证毕.

定理 **2** 的证明　设 e_3, e_4 为 M 在 $R^4(c)$ 中的两个相互正交的单位法向量场, e_3 为平行等参截面. 则对 M 上任意向量场 X, 我们有 $\nabla_X^{\perp} e_3 = 0$. 于是 M 有平坦的法联络 $\nabla^{\perp}$, 由 Cartan 引理我们可选取 e_1、e_2 使 A_{e_3}、A_{e_4} 可同时对角化. 设 λ_1, λ_2 和 μ_1, μ_2 分别是关于 e_3, e_4 的主曲率. 由于 e_3 为一平行等参截面, 可知 $\lambda_1+\lambda_2=C$. 则 M 关于 e_3, e_4 的第二基本张量分别由下式给出:

$$A_3=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix};A_4=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}.$$

由定理 1 的(2. 8)式及已知条件, 则知

$$\lambda_1=\lambda_2. \tag{2. 9}$$

由于 M 具有常平均曲率, e_3 为平行等参截面, 可知 e_4 也为平行等参截面, 可得

$$\mu_1=\mu_2. \tag{2. 10}$$

从而可知 M 为一全脐子流形. 于是 M 或是 $R^4(c)$ 中的全测地曲面, 或包含在 $R^4(c)$ 的 3 维全测地子空间的超球中, 即为一球面. 证毕.

参考文献:

[1] CHEN B Y. On the surfaces with parallel mean curvature vector[J]. Indian Univ Math J, 1973, 22: 655- 666.

[2] YAU S T. Submanifolds with constant mean curvature I [J]. Amer J Math, 1974, 96(2): 346- 366.

[3] CHEN B Y. Geometry of Submanifolds[M]. New York: Marcel Dekker, 1973.

[4] 王文丽. 关于常曲率空间中的超曲面[J]. 内蒙古师范大学学报, 1995(2): 14- 17.

[5] CHERN S S, CARMO M Do, KOBYASHI S. Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length[A]. In: Felix E Browder. Functional Analysis and Related Fields[M]. New York: Springer, 1970. 393- 408.

[6] YAU S T. Submanifolds with constant mean curvature II[J]. Amer J Math, 1975, 97(1): 76- 100.

[7] CHEN B Y. Surfaces with a parallel isoperimetric section[J]. Bul Amer Math Soc, 1973, 79: 599- 600.

【责任编辑　庄晓琼】