华南师范大学学报 (自然科学版)
2003 年 5 月 JOURNAL OF SOUTH CHINA NORMAL UNIVERSITY 2003 年第 2 期
May 2003 (NATURAL SCIENCE EDITION) No. 2, 2003

文章编号: 1000- 5463(2003) 02- 0028- 06

S^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的子流形

陈员龙, 李世杰
(华南师范大学数学系, 广东广州 510631)

摘要: 研究欧氏球面中具有平行平均曲率向量的紧致定向子流形, 获得一个关于 Ricci 曲率满足处处大于或等于 $n-1+(n-1)H^2+3\left(\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)|H|\sqrt{S_{n+1}-nH^2}$ 的条件下子流形的分类定理.

关键词: 子流形; 平行平均曲率向量; Ricci 曲率; Pinching 条件
中图分类号: O186.12　　　文献标识码: A

SUBMAINFOLDS WITH PARALLEL MEAN CURVATURE VECTOR IN A SPHERE

CHEN Yuan- long, LI Shi- jie
(Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: A closed oriented submanifold with parallel mean curvature vector field in a sphere is studied, and a Pinching theorem on the Ricci curvature of the submanifold is obtained.

Key words: submanifold; parallel mean curvature vector ; Ricci curvature; Pinching condition

设 M^n 是 $n+p$ 维单位球面 S^{n+p} 的一个 n 维可定向闭子流形, 当 M 是极小子流形时, Simons[1] 获得第二基本形式模长平方 S 的一个 Pinching 常数, 其后 Chern、Carmo 和 Kobayashi[2] 获得更强的结果. 另外 Yau 在文[3]、[4] 中关于截面曲率及 Ejiri 在文[5] 中关于 Ricci 曲率也都有过类似的研究. 然而对于极小子流形的一个自然推广就是具有平行平均曲率向量子流形, 因此本文就球面中具有平行平均曲率向量子流形进行研究, 并改进了文[5] 中主要结果及最近王银河[6] 的结果.

定理 1[5]　设 M^n 是浸入 S^{n+p} 的一个 n 维紧致定向极小子流形, 且这个浸入是满的, 如果 $n\geqslant 4$, $\mathrm{Ric}(x)\geqslant n-2$, 那么 M 或者是全测地的, 或者是 $M_{m,m}\subset S^{n+1}$ 或者是 $P^2_{4/3}\subset S^7$.

定理 2[6]　设 M 是 S^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的 n 维紧致子流形, 若 M 在任一点处的 Ricci 曲率大于 $n-2+\frac{1}{8}n^2H^2$, 则 M 是全脐子流形.

收稿日期: 2002 - 05 - 22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19771039); 广东省自然科学基金资助项目(960179)
作者简介: 陈员龙(1976-), 男, 江西抚州人, 华南师范大学 2000 级硕士研究生; 李世杰, 男, 江西南昌人, 华南师范大学教授.

本文在考虑 S^{n+p} 中具有非零平行平均曲率向量子流形时获得下面的主要结果:

定理 3 设 M^n 是 S^{n+p} 中一个具有非零平行平均曲率向量的 n 维紧致定向子流形, 如果 $n \geqslant 4$ 且 M 在任一点处的 Ricci 曲率大于或等于

$$n-1+(n-1)H^2+3\left(\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)|H|\sqrt{S_{n+1}-nH^2},$$

那么 M 是全脐子流形.

注记 当 M 是伪脐子流形(即 $S_{n+1}-nH^2=0$)且 $n\geqslant 4+2\sqrt{2+\frac{2}{H^2}}$ 时, 定理 3 比定理 2 的结果更好.

1 预备知识

设 M^n 是等距浸入到空间形式 $N^{n+p}(c)$ 中的 n 维紧致定向子流形, 选取 N 中局部标准正交标架场 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+p}$, 使得限制在 M 上 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 切于 M, $\boldsymbol{e}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+p}$ 与 M 正交. 约定各指标的变化范围为 $1\leqslant A, B, C, \cdots\leqslant n+p$; $1\leqslant i, j, k, \cdots\leqslant n$; $n+1\leqslant \alpha, \beta, \gamma, \cdots\leqslant n+p$, 且约定单项表达式中重复出现上、下指标, 表示该式关于这个指标在其取值范围内求和. 关于 N 中标准正交标架场 $\{\boldsymbol{e}_A\}$ 选取对偶标架场 $\{\omega^A\}$, 则 N 有结构方程[2]

$$\mathrm{d}\omega^A=-\sum \omega^A_B\wedge\omega^B,\quad \omega^B_A+\omega^A_B=0,$$

$$\mathrm{d}\omega^A_B=-\sum \omega^A_C\wedge\omega^C_B.$$

限制在 M 上, 有

$$\mathrm{d}\omega^\alpha=0,\quad \omega^\alpha_i=\sum h^\alpha_{ij}\omega^j,\quad h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji},$$

$$h=\sum h^\alpha_{ij}\omega^i\otimes\omega^j\otimes\boldsymbol{e}_\alpha,$$

$$R^i_{jkl}=c(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})+\sum_\alpha(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}-h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}),\tag{1}$$

$$R^\alpha_{\beta kl}=\sum_i(h^\alpha_{ik}h^\beta_{il}-h^\alpha_{il}h^\beta_{ik}),\tag{2}$$

其中 $h=\sum h^\alpha_{ij}\omega^i\otimes\omega^j\otimes\boldsymbol{e}_\alpha$ 称为 M 的第二基本形式, 其长度平方记为 $S=\|h\|^2=\sum_\alpha S_\alpha$, $S_\alpha=\sum_{i,j}(h^\alpha_{ij})^2$, $\zeta=\frac{1}{n}\sum_{\alpha,i}h^\alpha_{ii}\boldsymbol{e}_\alpha$ 称为平均曲率向量场, 这个向量的长度表示平均曲率, 记作 $|H|$, $\boldsymbol{A}_\alpha=\boldsymbol{A}_{e_\alpha}=(h^\alpha_{ij})_{n\times n}$. 如果 $\boldsymbol{A}_\zeta=\rho\boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵), 则称 M 是伪脐的.

用 h^α_{ijk} 及 h^α_{ijkl} 分别表示 h^α_{ij} 的一阶和二阶共变导数, 则

$$h^\alpha_{ijk}=h^\alpha_{ikj},\tag{3}$$

$$h^\alpha_{ijkl}-h^\alpha_{ijlk}=\sum(h^\alpha_{im}R^m_{jkl}+h^\alpha_{jm}R^m_{ikl})-\sum h^\beta_{ij}R^\alpha_{\beta kl},\tag{4}$$

对一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 用 $N(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的范数平方, 即 $N(\boldsymbol{A})=\sum_{i,j}a_{ij}\cdot a_{ij}$, 那么 $N(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})=N(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ 是 $n\times n$ 正交矩阵. 如果 M 具有平行平均曲率向量, 那么仿文[2]中的计算, 应用(3)、(4)式有,

$$\triangle h^\alpha_{ij}=\sum_k h^\alpha_{ijkk}=\sum_k h^\alpha_{kkij}+\sum_{m,k}(h^\alpha_{km}R^m_{ijk}+h^\alpha_{im}R^m_{kjk})-\sum_{k,\beta}h^\beta_{ik}R^\alpha_{\beta jk}=$$

$$\sum_{m,k}(h^{\alpha}_{km}R^{m}_{ijk}+h^{\alpha}_{im}R^{m}_{kik})-\sum_{k,\beta}h^{\beta}_{ik}R^{\alpha}_{\beta jk}.$$

应用(1)、(2)式有,

$$\frac{1}{2}\triangle S=\sum(h^{\alpha}_{ijk})^{2}+\sum_{i,j,\alpha}h^{\alpha}_{ij}\triangle h^{\alpha}_{ij}=\sum(h^{\alpha}_{ijk})^{2}+\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{\beta}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{2}_{\alpha}\boldsymbol{A}_{\beta}-\sum_{\alpha,\beta}N(A_{\alpha}\boldsymbol{A}_{\beta}-\boldsymbol{A}_{\beta}\boldsymbol{A}_{\alpha})-$$
$$\sum h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{lk}h^{\beta}_{ij}h^{\beta}_{lk}+nc\sum(h^{\alpha}_{ij})^{2}-(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{\alpha})^{2}. \tag{5}$$

引理 **1**[7] 设 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 是$(n\times n)$实对称矩阵,且满足$[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2]=0$, $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_1=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_2=0$,那么

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2}_{1})\sqrt{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2}_{2}}\leqslant\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2}_{1}\boldsymbol{B}_{2}\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2}_{1})\sqrt{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2}_{2}}.$$

若单侧等号成立,则 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 有 $n-1$ 个特征值相等.

2 定理证明

设 M^n 是S^{n+p}中具有非零平行平均曲率向量的n 维紧致定向子流形,选取 S^{n+p}中适当标架使得$\boldsymbol{e}_{n+1}$与 ζ 平行,记$H=(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{n+1})/n$,则有

命题 **1** $\sum_{\alpha\beta}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{\beta}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{2}_{\alpha}\boldsymbol{A}_{\beta}\leqslant\left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}+2\sqrt{n}\right)|H|S\sqrt{\tilde{S}_{n+1}}+nH^{2}S$, 其中 $\tilde{S}_{n+1}=S_{n+1}-nH^{2}$,等号成立当且仅当 M 是伪脐的.

证明 (1)当 $\alpha=n+1$时,设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是M^n 关于$\boldsymbol{e}_{n+1}$的主曲率,$f=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{3}_{n+1}$, 则

$$S_{n+1}=\sum_{i}\lambda^{2}_{i},f=\sum_{i}\lambda^{3}_{i},$$

令$\tilde{S}_{n+1}=S_{n+1}-nH^{2}$,$\tilde{f}=f-3HS_{n+1}+2nH^{3}$, $\tilde{\boldsymbol{A}}_{n+1}=\boldsymbol{A}_{n+1}-H\boldsymbol{I}$, $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i-H$,则

$$\sum\tilde{\lambda}_i=0,\ \tilde{S}_{n+1}=\sum\tilde{\lambda}^{2}_{i},\tilde{f}=\sum\tilde{\lambda}^{3}_{i},$$

在引理1 中设 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2=\tilde{\boldsymbol{A}}_{n+1}$,有

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\tilde{S}_{n+1}\sqrt{\tilde{S}_{n+1}}\leqslant\tilde{f}\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\tilde{S}_{n+1}\sqrt{\tilde{S}_{n+1}},$$

从而

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{3}_{n+1}=f\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\tilde{S}_{n+1}\sqrt{\tilde{S}_{n+1}}+3HS_{n+1}-2nH^{3}. \tag{6}$$

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{3}_{n+1}=f\geqslant-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\tilde{S}_{n+1}\sqrt{\tilde{S}_{n+1}}+3HS_{n+1}-2nH^{3}. \tag{7}$$

(2)当 $\alpha\neq n+1$ 时,假设M 的平均曲率向量场ζ在法丛平行,则由常曲率空间的 Ricci 方程可得[8]$[\boldsymbol{A}_{n+1},\boldsymbol{A}_{\alpha}]=0$, $\forall\alpha$,从而

$$[\tilde{\boldsymbol{A}}_{n+1},\boldsymbol{A}_{\alpha}]=0,\ \mathrm{tr}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_{n+1}=0,\ \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{\alpha}=0,\ \tilde{S}_{n+1}=\mathrm{tr}\,\tilde{\boldsymbol{A}}^{2}_{n+1},$$

在引理1 中设 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_{\alpha}$, $\boldsymbol{B}_2=\tilde{\boldsymbol{A}}_{n+1}$有

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{2}_{\alpha}\boldsymbol{A}_{n+1}=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{2}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{A}}_{n+1}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{2}_{\alpha}H\boldsymbol{I}\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{2}_{\alpha})\sqrt{\tilde{S}_{n+1}}+H\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{2}_{\alpha}, \tag{8}$$

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{2}_{\alpha}\boldsymbol{A}_{n+1}=\mathrm{tr}\,A^{2}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{A}}_{n+1}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{2}_{\alpha}H\boldsymbol{I}\geqslant-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{\alpha}{}^{2})\sqrt{\tilde{S}_{n+1}}+H\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{2}_{\alpha}. \tag{9}$$

(a) 当 $H>0$ 时, 应用(6)、(8)式的结果有

$$\sum_{\alpha}\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{\alpha}^{2}\boldsymbol{A}_{n+1} \leqslant \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} S \sqrt{\tilde{S}_{n+1}} + HS - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} nH^{2} \sqrt{\tilde{S}_{n+1}} + 2HS_{n+1} - 2nH^{3} \leqslant$$

$$\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} S \sqrt{\tilde{S}_{n+1}} + HS + 2H \sqrt{\tilde{S}_{n+1}} \sqrt{\tilde{S}_{n+1}} \leqslant \left(\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) S \sqrt{\tilde{S}_{n+1}} + HS.$$

因此,

$$\sum_{\alpha,\beta}\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{\beta}\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{\alpha}^{2}\boldsymbol{A}_{\beta} \leqslant \left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} + 2\sqrt{n}\right) HS \sqrt{\tilde{S}_{n+1}} + nH^{2}S. \tag{10}$$

(b) 当 $H<0$ 时, 应用(7)、(9)式的结果类似(a)有

$$\sum_{\alpha}\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{\alpha}^{2}\boldsymbol{A}_{n+1} \geqslant -\left(\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) S \sqrt{\tilde{S}_{n+1}} + HS.$$

所以

$$\sum_{\alpha,\beta}\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{\beta}\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{\alpha}^{2}\boldsymbol{A}_{\beta} \leqslant \left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} + 2\sqrt{n}\right) (-H) S \sqrt{\tilde{S}_{n+1}} + nH^{2}S.$$

根据(a)、(b)的讨论有

$$\sum_{\alpha,\beta}\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{\beta}\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{\alpha}^{2}\boldsymbol{A}_{\beta} \leqslant \left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} + 2\sqrt{n}\right) |H| S \sqrt{\tilde{S}_{n+1}} + nH^{2}S. \tag{11}$$

若命题中等号成立, 则(10)式不等号必须成立, 因为 $H\neq 0$, 所以 $\tilde{S}_{n+1}=0$, 故 M 是伪脐的. 反之, 若 M 是伪脐的, 则有 $\tilde{S}_{n+1}=0$, 从而(6)~(11)式各等号成立. 所以等号成立当且仅当 M 为伪脐的.

设 R 是 M 的 Ricci 张量, 由 Gauss 方程有,

$$R(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_l) = (n-1)\delta_{jl} - \sum_{i,\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{il}^{\alpha} + \sum_{i,\alpha} h_{ii}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha}. \tag{12}$$

假设 $Q=\inf\operatorname{Ric}(x)$, $\operatorname{Ric}(x)$ 表示 M 的 Ricci 曲率, 从而有下面的几个命题成立.

命题 2 对于固定的 j 有

$$(n-1) - \sum_{\alpha,i} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha} + \sum_{\alpha,i} h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha} - Q \geqslant 0,$$

特别地有,

$$S \leqslant n(n-1) + n^{2}H^{2} - nQ.$$

证明 由(12)式和假设我们有

$$Q \leqslant R(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_j) = n-1 - \sum_{\alpha,i} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha} + \sum_{\alpha,i} h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha},$$

因此,

$$(n-1) - \sum_{\alpha,i} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha} + \sum_{\alpha,i} h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha} - Q \geqslant 0.$$

证毕.

命题 3 对固定的 α 有

$$\sum_{\beta} N(\boldsymbol{A}_{\alpha}\boldsymbol{A}_{\beta} - \boldsymbol{A}_{\beta}\boldsymbol{A}_{\alpha}) \leqslant 4(n-1)N(\boldsymbol{A}_{\alpha}) - 4N(\boldsymbol{A}_{\alpha}^{2}) + 4\sum_{\beta}\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{\beta}\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{\alpha}^{2}\boldsymbol{A}_{\beta} - 4QN(\boldsymbol{A}_{\alpha}).$$

证明　设 $\lambda_1^\alpha, \cdots, \lambda_n^\alpha$ 是A_α 的特征值, 直接计算我们有

$$\sum_\beta N(\boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{A}_\beta - \boldsymbol{A}_\beta \boldsymbol{A}_\alpha) = \sum_{\beta(\neq\alpha)} N(\boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{A}_\beta - \boldsymbol{A}_\beta \boldsymbol{A}_\alpha) = \sum_{\beta(\neq\alpha),\, i,j} (h_{ij}^\beta)^2 (\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha)^2.$$

因为$(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha)^2 \leqslant 2((\lambda_i^\alpha)^2 + (\lambda_j^\alpha)^2)$, 所以有,

$$\sum_\beta N(\boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{A}_\beta - \boldsymbol{A}_\beta \boldsymbol{A}_\alpha) \leqslant \sum_{\beta(\neq\alpha),\, i,j} 4(h_{ij}^\beta)^2 (\lambda_i^\alpha)^2.$$

对固定的 j 由命题 2 有,

$$(n-1) - (\lambda_j^\alpha)^2 + \sum_{\gamma,i} h_{ii}^\gamma h_{jj}^\gamma - Q \geqslant \sum_{\beta(\neq\alpha),\, i} h_{ij}^\beta h_{ij}^\beta.$$

因此由上面两式有

$$\sum_\beta N(\boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{A}_\beta - \boldsymbol{A}_\beta \boldsymbol{A}_\alpha) \leqslant 4\sum_j [(n-1) - (\lambda_j^\alpha)^2 + \sum_{\gamma,i} h_{ii}^\gamma h_{jj}^\gamma - Q](\lambda_j^\alpha)^2 =$$

$$\sum_j [4(n-1)(\lambda_j^\alpha)^2 - 4(\lambda_j^\alpha)^2(\lambda_j^\alpha)^2 + 4\sum_{\beta,i} h_{ii}^\beta (\lambda_j^\alpha)^2 h_{jj}^\beta - 4Q(\lambda_j^\alpha)^2] =$$

$$4(n-1)N(\boldsymbol{A}_\alpha) - 4N(\boldsymbol{A}_\alpha^2) + 4\sum_\beta \operatorname{tr} \boldsymbol{A}_\beta \operatorname{tr} \boldsymbol{A}_\alpha^2 \boldsymbol{A}_\beta - 4QN(\boldsymbol{A}_\alpha).$$

证毕.

命题 **4**

$$N\left(\boldsymbol{A}_\alpha^2\right) \geqslant \frac{N(\boldsymbol{A}_\alpha)^2}{n},\ \forall \alpha,$$

等号成立当且仅当$(\lambda_1^\alpha)^2 = \cdots = (\lambda_n^\alpha)^2$.

证明　设 $\lambda_1^\alpha, \cdots, \lambda_n^\alpha$ 是$\boldsymbol{A}_\alpha$ 的特征值, 那么

$$nN(\boldsymbol{A}_\alpha^2) - (N(\boldsymbol{A}_\alpha))^2 = n\sum_i (\lambda_i^\alpha)^4 - \left(\sum_i (\lambda_i^\alpha)^2\right)^2 = \sum_{i,j} ((\lambda_i^\alpha)^2 - (\lambda_j^\alpha)^2)^2 \geqslant 0,$$

等号成立当且仅当$(\lambda_1^\alpha)^2 = \cdots = (\lambda_n^\alpha)^2$. 证毕.

定理 **3** 的证明　设 $S_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta$, 那么$(S_{\alpha\beta})$是 $p\times p$ 实对称矩阵且适当选取标架可使其对角化, 设 $S_{\alpha\alpha} = S_\alpha$, 因此有,

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta h_{kl}^\alpha h_{kl}^\beta = \sum_\alpha S_\alpha^2 = \sum_\alpha (N(\boldsymbol{A}_\alpha))^2,$$

由(5)式, 命题 1~ 4 及 $n \geqslant 4$, 我们有,

$$\frac{1}{2}\triangle S \geqslant \sum (h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}_\beta \operatorname{tr} \boldsymbol{A}_\alpha^2 \boldsymbol{A}_\beta - 4(n-1)N(\boldsymbol{A}_\alpha) + 4N(\boldsymbol{A}_\alpha^2) - 4\sum_{\alpha,\beta} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}_\beta \operatorname{tr} \boldsymbol{A}_\alpha^2 \boldsymbol{A}_\beta +$$

$$4QN(\boldsymbol{A}_\alpha) - \sum_\alpha (N(\boldsymbol{A}_\alpha))^2 + nS - n^2H^2 =$$

$$\sum (h_{ijk}^\alpha)^2 + nS - 3\sum_{\alpha,\beta} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}_\beta \operatorname{tr} \boldsymbol{A}_\alpha^2 \boldsymbol{A}_\beta - 4(n-1)N(\boldsymbol{A}_\alpha) + 4N(\boldsymbol{A}_\alpha^2) + 4QN(\boldsymbol{A}_\alpha) -$$

$$\sum_\alpha (N(\boldsymbol{A}_\alpha))^2 - \frac{n^2H^2}{S}S \geqslant$$

$$\sum (h_{ijk}^\alpha)^2 + nS - 3\left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} + 2\sqrt{n}\right)|H|S\sqrt{\tilde{S}_{n+1}} - 3nH^2S - 4(n-1)S + 4QS$$

$$+ \frac{4}{n}\sum_\alpha (N(\boldsymbol{A}_\alpha))^2 - \sum_\alpha (N(\boldsymbol{A}_\alpha))^2 - nS \geqslant$$

$$\sum (h_{ijk}^\alpha)^2 + S\left[4 - 4n - 3\left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} + 2\sqrt{n}\right)|H|\sqrt{\tilde{S}_{n+1}} - 3nH^2 + 4Q - \frac{n-4}{n}S\right] \geqslant$$

$$\sum(h_{ijk}^{\alpha})^2 + S\left[n(1-n) - 3\left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} + 2\sqrt{n}\right)|H|\sqrt{\tilde{S}_{n+1} - n(n-1)H^2 + nQ}\right], \quad (13)$$

其中第一个不等号由命题 3, 第二个不等号由命题 1 和命题 4 及 $nH^2 \leqslant S_{n+1} \leqslant S$, 第三个不等号因为 $\sum_{\alpha}(N(\boldsymbol{A}_{\alpha}))^2 = \sum_{\alpha} S_{\alpha}^2 \leqslant S^2$ 及 $n \geqslant 4$, 最后一个不等号由命题 2. 如果

$$Q \geqslant n-1+(n-1)H^2 + 3\left(\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)|H|\sqrt{S_{n+1} - nH^2},$$

则 $(\triangle S)/2 \geqslant 0$. 对 (13) 式两边积分, 因为 M 是紧致定向的, 由 Hopf 引理可得 (13) 式两边取等号且等于 0. 因此 $h_{ijk}^{\alpha} = 0$, 且命题 1~ 4 中各等号成立. 又因为 $H \neq 0$, 由命题 4 中等号成立, 则 $\boldsymbol{A}_{n+1}$ 的特征值只能是 $\lambda^{n+1} \neq 0$ 或 $-\lambda^{n+1}$, 再由 $[\boldsymbol{A}_{n+1}, \boldsymbol{A}_{\beta}] = 0$, 命题 3 中

$$0 = \sum_{\beta} N(\boldsymbol{A}_{n+1}\boldsymbol{A}_{\beta} - \boldsymbol{A}_{\beta}\boldsymbol{A}_{n+1}) \leqslant \sum_{\beta(\neq n+1),\, i,j} 4(h_{ij}^{\beta})^2(\lambda_i^{n+1})^2,$$

等号成立, 则 $h_{ij}^{\beta} = 0$, $\forall i, j$, $\beta(\neq n+1)$, 故 M 是包含在 S^{n+1}, 又由命题 1 的等号成立, 则 M 是伪脐子流形, 所以 M 为全脐子流形, 此时 $-(n^2H^2/S)S \geqslant -nS$ 也取等号. 故定理成立. 定理证毕.

对于定理的应用我们给出了下面的推论.

推论 1 设 M^n 是浸入 S^{n+p} 的一个具有非零平行平均曲率向量的 n 维完备的定向伪脐子流形, 如果 $n \geqslant 4$, 且 M 在任一点处的 Ricci 曲率大于等于 $n-1+(n-1)H^2$, 那么 M 是全脐子流形.

证明 因为 M^n 具有非零平行平均曲率向量, 所以 $|H|$ 为常数, 由假设 $n \geqslant 4$ 及 $\mathrm{Ric}(x) \geqslant n-1+(n-1)H^2 > 0$, 根据 Bonnet- Mayers 定理知 M 是完备的, 则 M 是紧致的. 又因为 M 是伪脐的, 可得 $S_{n+1} - nH^2 = 0$, 则由定理 3, 命题得证.

参考文献:

[1] SIMONS J. Minimal varieties in Riemannian manifolds[J]. Ann of Math, 1968, 88: 62- 105.

[2] CHERN S S, CARMO M D, KOBAYASHI S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length[M]. New York: Springer- Verlag, 1970.

[3] YAU S T. Submanifolds with constant mean curvature(Ⅰ)[J]. Amer J Math, 1974, 96(2): 346- 366.

[4] YAU S T. Submanifolds with constant mean curvature(Ⅱ)[J]. Amer J Math, 1975, 97(1): 76- 100.

[5] EJIRI N. Compact minimal submanifolds of a sphere with positive Ricci curture[J]. J Math Soc Japan, 1979, 31 (2): 251- 256.

[6] 王银河. 球面上常中曲率的子流形[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1997, 18(3): 231- 233.

[7] SANTOS W. Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres[J]. Tôhoku Math J, 1994, 46: 403- 415.

[8] CHEN B Y. Geometry of Submanifolds[M]. New York: Marcel Dekker, 1973.

【责任编辑 庄晓琼】