# 运筹与优化作业 3

**0.1.** 写出下列凸规划问题的 KKT 方程并求其最优解:

$$
\begin{aligned}
&\min_x f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2\\
&s.t.\ \ g_1(x)=x_1-x_2-\frac{5}{2}\ge 0\\
&\qquad g_2(x)=-x_1-x_2+5\ge 0\\
&\qquad g_3(x)=x_1\ge 0\\
&\qquad g_4(x)=x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

解：取拉格朗日乘子 $u,v\ge 0$，则该凸规划问题的拉格朗日函数为：$L(x,u,v)=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2-ug_1(x)-vg_2(x)$，结合 $\frac{\partial L}{\partial x}=0,ug_1(x)=0,vg_2(x)=0$ 得出以下方程组：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1}&=2(x_1-3)-u+v=0\\
\frac{\partial L}{\partial x_2}&=2(x_2-4)+u+v=0\\
u(x_1-x_2-\frac{5}{2})&=0\\
v(-x_1-x_2+5)&=0
\end{aligned}
$$

对于该方程组的求解，需要对 $u,v$ 进行讨论，共有四种情况，分别如下：

1） 当 $u=0,v=0$，则解得 $x_1=3,x_2=4$, 所得结果不满足要求，故不予以考虑。

2） 当 $u=0,v\neq 0$，则解得 $x_1=2,x_2=3,v=2$，所得结果不满足要求，故不予以考虑。

3） 当 $u\neq 0,v=0$，则解得 $x_1=\frac{19}{4},x_2=\frac{9}{4},u=\frac{7}{2}$，所得结果不满足要求，故不予以考虑。

4） 当 $u\neq 0,v\neq 0$，则解得 $x_1=\frac{15}{4},x_2=\frac{5}{4},u=\frac{7}{2},v=2$，所得结果满足要求，即为最优解，则 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{65}{8}$。

**0.2.** 一个矩形无盖油箱的外部总面积限定为 S，怎样设计可使油箱的容量最大？列出这个优化问题的数学模型并求其最优解。

解：取无盖油箱的长、宽、高分别为$x_1, x_2, x_3$，则油箱的容量$V(x)=x_1x_2x_3$，为使得油箱的容量最大，需要对油箱的长、宽、高进行设计，那么该优化问题的数学模型如下：

$$\begin{aligned}
&\max_x \quad V(x)=x_1x_2x_3 \\
&s.t. \quad x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3 \le S \\
&x_1, x_2, x_3 > 0
\end{aligned}$$

引入拉格朗日乘子$\mu(\mu \ge 0)$，构造出拉格朗日函数：

$$L(x,\mu)=-x_1x_2x_3+\mu(x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-S)$$

结合$\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$和$\mu(x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-S)=0$得出以下方程组：

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=-x_2x_3+(x_2+2x_3)\mu=0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_2}=-x_1x_3+(x_1+2x_3)\mu=0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_3}=-x_1x_2+2(x_1+x_2)\mu=0 \\
(x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-S)\mu=0
\end{cases}$$

解得$x_1=\sqrt{\dfrac{S}{3}}, x_2=\sqrt{\dfrac{S}{3}}, x_3=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{3}}, \mu=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{S}{3}}$，即为原优化问题的最优解，因此在邮箱的长、宽、高分别为$\sqrt{\dfrac{S}{3}}, \sqrt{\dfrac{S}{3}}, \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{3}}$时，油箱的最大容量为$\dfrac{S}{6}\sqrt{\dfrac{S}{3}}$。

0.3. 设约束优化问题的数学模型为：

$$\begin{aligned}
&\min_x \quad f(x)=x_1^2+4x_1+x_2^2-4x_2+10 \\
&s.t. \quad g_1(x)=x_1-x_2 \ge 0 \\
&g_2(x)=-x_1^2-x_2^2-2x_1+2x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

解：

易知$H(\nabla^2 f(x))=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \ge 0$，则该问题为凸优化问题，那么可引入拉格朗日乘子$u, v(u \ge 0, v \ge 0)$，构造拉格朗日函数：

$$L(x,u,v)=x_1^2+4x_1+x_2^2-4x_2+10-u(x_1-x_2)-v(-x_1^2-x_2^2-2x_1+2x_2)$$

结合$\frac{\partial L}{\partial x}=0$和$ug_1(x)=0, vg_2(x)=0$得出以下方程组：

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L}{\partial x_1}=(2+2v)x_1+2v-u+4=0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2}=(2+2v)x_2-2v+u-4=0 \\
u(x_1-x_2)=0 \\
v(-x_1^2-x_2^2-2x_1+2x_2)=0
\end{gathered}$$

在这里需要对$u,v$进行讨论，共分为 4 种情况，分别如下：

1） 当$u=0, v=0$时，则$x_1=-2, x_2=2$，经验证不符合要求，故不予以考虑。

2） 当$u=0, v\neq 0$时，则有$x_1=0, x_2=0, v=-2$或$x_1=-2, x_2=2, v=0$，经验证都不符合要求，故不予以考虑。

3） 当$u\neq 0, v=0$时，则有$x_1=0, x_2=0, u=4$，经验证符合要求，因此可以作为原优化问题的最优解，所以$\min\limits_x \quad f(x)=10$。

由于在 3）中已经求解出最优解，故不再需要对第四种情况进行讨论。

**0.4.** 给定函数 $f(x)=x_1-x_2+2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ 和变量的取值范围: $-1\le x_1\le 3, 2\le x_2\le 6$。判断$f(x)$ 是否为凸函数，并求取$f(x)$的光滑系数，强凸系数，利普希茨系数。给定初始迭代点$x^0=(0,0)^T$，用梯度下降法编程求取$f(x)$的最小值，并比较$f(x)$在三种不同迭代步长下的收敛速度。请附上你的*matlab*程序和相关结果。

解：易知$H(\nabla^2 f(x))=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=4\ge 0$，所以$f(x)$为凸函数，同样可以求出$\lambda(\nabla^2 f(x))=\pm\sqrt{5}+3$，那么$f(x)$的光滑系数为$\sqrt{5}+3$，强凸系数为$3-\sqrt{5}$，利普希茨系数为 25。

**Matlab 代码：**

```
function [k,ender,result]=steepest(f,x,e,length)
%梯度下降法,f 为目标函数（两变量 x1 和 x2），x 为初始点,如[3;4],e 为精度，length 为步长，k 为迭代次数
syms x1 x2;
d=-[diff(f,x1);diff(f,x2)];  %分别求 x1 和 x2 的偏导数，即下降的方向
flag=1;  %循环标志
k=0; %迭代次数
while(flag)
    d_temp=subs(d,x1,x(1));       %将起始点代入，求得当次下降 x1 梯度值
    d_temp=subs(d_temp,x2,x(2)); %将起始点代入，求得当次下降 x2 梯度值
    nor=norm(d_temp); %范数
    if nor>=e
        x=x+length*d_temp; %更新起始点 x
        k=k+1;
    else
        flag=0;
    end
end
ender=double(x);  %终点
result=subs(f,ender(1)); %将最后得到的 x1 和 x2 代入目标函数，得到最优解
result=double(subs(result,ender(2)));
```

1）当步长为$\frac{3-\sqrt{5}}{4}$，精度为 e=10^(-6)时，运算结果如下：

k=90，ender=（-1.0000，1.5000），result=-1.2500，经验证符合要求。

2）当步长为$\frac{25^2}{1000}$，精度为 e=10^(-6)时，运算结果如下：

k=110，ender=（-1.0000，1.5000），result =-1.2500，经验证符合要求。

3）当步长为$\frac{3+\sqrt{5}}{20}$，精度为 e=10^(-6)时，运算结果如下：

k=64，ender=(-1.0000,1.5000)，result=-1.2500, 经验证符合要求。

0.5. 设你的学号后三位数为 d，用梯度下降法编程求取下列无约束优化问题的最优解：

$$\min \quad f(x)=\frac{d+2}{2}x_1^2+\frac{d}{4}x^2-x_1x_2-2x_1$$

请附上你的 Matlab 代码和相关结果。

解：根据我的学号后三位取 d=111, 同样取初始值 $x^0=(0,0)^T$, 同时结合上一题的解法，在本题中不初始设置步长，而是通过随机取步长，即是每一次用不同的步长构造迭代算法。其代码如下：

```
function [k,ender,result]=steepest1(f,x,e)
%梯度下降法,f 为目标函数（两变量 x1 和 x2），x 为初始点,如[3;4]
syms x1 x2 m; %m 为步长
d=-[diff(f,x1);diff(f,x2)];  %分别求 x1 和 x2 的偏导数，即下降的方向
flag=1;  %循环标志
k=0; %迭代次数
while(flag)
    d_temp=subs(d,x1,x(1));       %将起始点代入，求得当次下降 x1 梯度值
    d_temp=subs(d_temp,x2,x(2)); %将起始点代入，求得当次下降 x2 梯度值
    nor=norm(d_temp); %范数
    if(nor>=e)
        x_temp=x+m*d_temp;            %改变初始点 x 的值
        f_temp=subs(f,x1,x_temp(1));  %将改变后的 x1 和 x2 代入目标函数
        f_temp=subs(f_temp,x2,x_temp(2));
        h=diff(f_temp,m);  %对 m 求导，找出最佳步长
        m_temp=solve(h);   %求方程，得到当次 m
        x=x+m_temp*d_temp; %更新起始点 x
        k=k+1;
    else
        flag=0;
    end
end
ender=double(x);  %终点
result=subs(f,ender(1));  %将最后得到的 x1 和 x2 代入目标函数，得到最优解
result=double(subs(result,ender(2)));
```

精度为 e=10ˆ(-6)时，初始值运算结果如下：k=15，ender=(0.0177,0.0003) result=-0.0177, 经验证符合要求。

0.6. 设你的学号后三位数为 d，写出下列凸规划问题的对偶形式：

$$\begin{aligned} \min_{\{x,y\}} \quad & x^2+e^y \\ s.t. \quad & x^2+y^2 \le 64 \\ & x+y\le 9 \\ & (x-10)^2+y^2\le d \\ & x\ge 0, y\ge 0 \end{aligned}$$

用 Matlab 编程求取上述优化问题的最优解，请附上你的 Matlab 代码和相关结果。

解：取拉格朗日乘子 $w,u,v(w,u,v\geq 0)$，构造拉格朗日方程：

$$L(x,w,u,v)=x^2+e^y+w(x^2+y^2-64)+u(x+y-9)+v((x-10)^2+y^2-111)$$

则该凸优化问题有如下等价式子：

$$\max_{w,u,v} \quad D(w,u,v)=\max_{w,u,v} \quad \min_{x} \quad L(x,w,u,v)$$

其中 $D(w,u,v)=\min\limits_{x} \quad L(x,w,u,v)$。

在原凸优化问题中有：

$$\frac{\partial L(x,w,u,v)}{\partial x^*}=2(1+w+v)x^*+(u-20v)=0$$

$$\frac{\partial L(x,w,u,v)}{\partial y^*}=2(w+v)y^*+u+e^{y^*}=0$$

此时的 $x^*,y^*$ 为最优解。

Matlab 代码：

```
function f = fun(x)
f = x(1)^2+exp(x(2));

function [c,ceq]=confun(x)
c=[x(1)^2+x(2)^2-64;x(1)+x(2)-9;(x(1)-10)^2+x(2)^2-111];
ceq=[];

clear
x0=[0,0];
lb=[0,0];
ub=[];
options=optimset('largescale','off','display','iter');
[x,fval,exitflag,output]=fmincon(@fun,x0,[],[],[],[],lb,ub,@confun,opti
ons)
```

运行结果：x = 1.0e-03 *(0.7018,0.0004),fval = 1.0000

0.7. 考虑下述凸规划问题：

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & (x_1-2)^2+2^{x_2}+\tan x_3 \\ s.t. \quad & 3x_1+2x_2+5x_3 \le 7 \\ & 7x_1+5x_2+x_3 \le 8 \\ & x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

用 Matlab 编程求取上述优化问题的最优解，请附上你的 Matlab 代码和相关结果。

Matlab 代码：

```
clear
x0=[0,0,0];
lb=[0,0,0];
ub=[];
options=optimset('largescale','off','display','iter');
[x,fval,exitflag,output]=fmincon(@fun,x0,[],[],[],[],lb,ub,@confun,opti
ons)

function [c,ceq]=confun(x)
c=[3*x(1)+2*x(2)+5*x(3)-7;7*x(1)+5*x(2)+x(3)-8];
ceq=[];
function f = fun(x)
f = (x(1)-2).^2+2^(x(2))+tan(x(3));
```

运算结果：

x=(1.1429,0.0000,0.0000),fval=1.7347

题目 6 和题目 7 的代码：

```
function f=obj(x)
f=x(1)^2+exp(x(2));

function h=constrains(x)
h(1)=x(1)^2+x(2)^2-64;
h(2)=x(1)+x(2)-9;
h(3)=(x(1)-10)^2+x(2)^2-111;

function f=compare(x)
%函数功能：判断是否符合约束条件
syms N_equ
h_equ=0;
h=constrains(x);
%等式部分
for i=1:N_equ
```

```
    h_equ=h_equ+h(i);
end
f=norm(h_equ);

function f=AL_obj(x)
%函数功能：将约束优化问题，根据效用函数方法，将其转变成无约束问题
syms N_equ  %约束条件个数
% global r_al  N_equ;%全局变量
h_equ=0;
h_inequ=0;
h=constrains(x);
%约束条件部分
for i=1:N_equ
    h_equ=h_equ+h(i)*r_al(i);
end
%拉格朗日增广函数值
f=obj(x)+h_equ+h_inequ;

function [X,FVAL]=Al_main(x_al,r_al,N_equ)
%对已将有约束优化问题转化为无约束优化问题后利用迭代法求解其最优解，并更新乘子
%函数输入：
%  x_al:初始迭代点
%  r_al:初始拉格朗日乘子
%  N_equ: 约束条件个数
%函数输出：
%  X:最优函数点
%  FVAL：最优函数值

%%程序开始
% global r_al pena N_equ; %参数（全局变量）
flag=1;  %循环标志
pena=10;  %步长
e_al=10^(0);  %误差控制范围

%%迭代算法
while (flag)
    x_al0=x_al;
    r_al0=r_al;
    %判断是否符合约束条件
    compareFlag=compare(x_al0);
    %无约束的拟牛顿法 BFGS
```

```
    [X,FVAL]=fminunc(@AL_obj,x_al0);
    x_al=X; %得到新迭代点
    % 判断停止条件
    if compare(x_al)<e_al
        disp('we get the opt point:');
        flag=0;
    end

    %%更新拉格朗日乘子
    h=constrains(x_al);
    for i=1:N_equ
        %%等式约束部分；
        r_al(i)=r_al(i)+pena*h(i);
    end
end

%%迭代结束
disp('the value of the obj function');
obj(x_al)
disp('the value of the obj function');
compare(x_al)
disp('the opt point');
    X=x_al;
    FVAL=obj(X);
```