

运筹与优化作业 2

截止日期: APRIL 12

0.1. 给定集合 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$, 对于 \mathcal{N} 的任一子集 \mathcal{S} , 定义一个价值函数 $v(\mathcal{S})$. 请写出下列线性规划问题的对偶形式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in \mathcal{S}} x_i \geq v(\mathcal{S}), \quad \forall \mathcal{S} \subset \mathcal{N}. \end{aligned}$$

0.2. 已知 f_1, f_2, \dots, f_m 为 \mathbb{R}^n 上的凸函数, 证明 $h = \sup_{i=1,2,\dots,m} \{f_i\}$ 也为 \mathbb{R}^n 上的凸函数。

0.3. 已知 f 是定义在 \mathbb{R}_+^n 上的函数, 且

$$f(\mathbf{x}) = -\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p},$$

$p < 1$ 且 $p \neq 0$ 。证明 f 为凸函数。

0.4. 定义向量 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ 的一阶范数 $\|\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^m |y_i|$, 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 以及向量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 。证明下列优化问题是线性优化问题:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}} \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}, \\ & \|\mathbf{y}\|_1 \leq 1. \end{aligned}$$

并写出上述线性规划问题的对偶形式。

0.5. 桥梁工地要制作 d 套钢筋架子 (d 为你的学号后三位数), 每套需要长 2.9 米, 2.1 米和 1.5 米的钢筋各一根。现有原材料 (钢筋) 长 7.4 米, 问如何下料最省 (废料最少), 请设计方案构造一个线性规划问题并求其最优解。

0.6. 设你的学号后三位数为 d , 写出下列线性规划问题的规范形式,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & 45x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 0.4x_1 + 0.25x_2 \leq d, \\ & 0.42x_1 + 0.15x_2 \geq 420, \\ & x_2 \geq 800, \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

用 Matlab 求解其最优解, 并写出其对偶问题。