# 线性规划的基本概念与理论

徐欢乐

xuhl@dgut.edu.cn

计算机与网络安全学院，9A304

2018.3.6

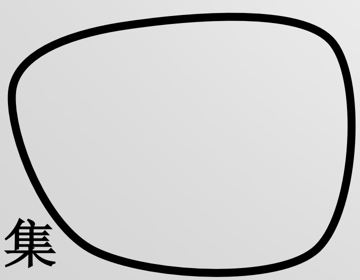
# 凸集

## （1）凸集的概念

**定义1** 设集合 $S\subseteq \mathbf{R}^n$，若 $\forall \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}\in S$, $\lambda\in[0,1]$， 必有 $\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}\in S$， 则称 $S$ 为凸集。

规定：单点集 $\{x\}$ 为凸集，空集 $\varnothing$ 为凸集。

注： $\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(2)}+\lambda(\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(2)})$ 是连接 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{x}^{(2)}$ 的线段。



凸集

非凸集

非凸集

# 凸集

- 例1 证明集合 $S=\{x \mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\}$ 是凸集。其中，$\boldsymbol{A}$为 $m\times n$矩阵，$\boldsymbol{b}$为$m$维向量。
- 凸组合：设 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)} \in \mathrm{R}^n$，$\lambda_j \geqslant 0$，

$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j=1$，那么称 $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \boldsymbol{x}^{(j)}$ 为$\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}$的凸组合。

- 比较：$\boldsymbol{z}=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \boldsymbol{x}^{(j)}$

---

$\alpha_j \in \mathbf{R}$ ——构成线性组合 —— 线性子空间

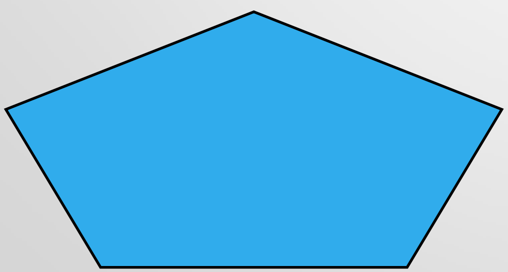
$\alpha_j \geq 0, \sum \alpha_j > 0$ —— 构成半正组合 —— 凸锥

$\alpha_j \geq 0, \sum \alpha_j = 1$ —— 构成凸组合 —— 凸集

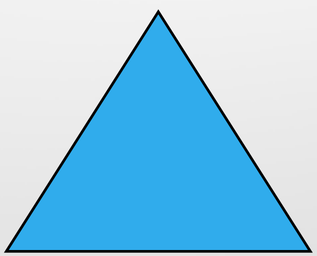
# 凸集

**定理1** $S$是凸集$\Leftrightarrow S$中任意有限点的凸组合属于$S$。

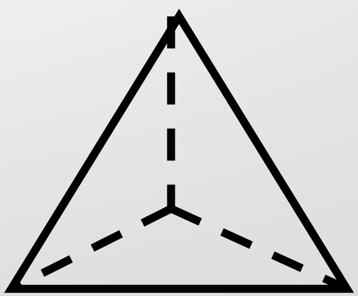
- 多胞形 $H(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$：由 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$的所有凸组合构成。
- 单纯形：若多胞形 $H(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$满足，$x^{(2)} - x^{(1)}, x^{(3)} - x^{(1)}, \dots, x^{(m)} - x^{(1)}$线性无关。



多胞形



单纯形



单纯形

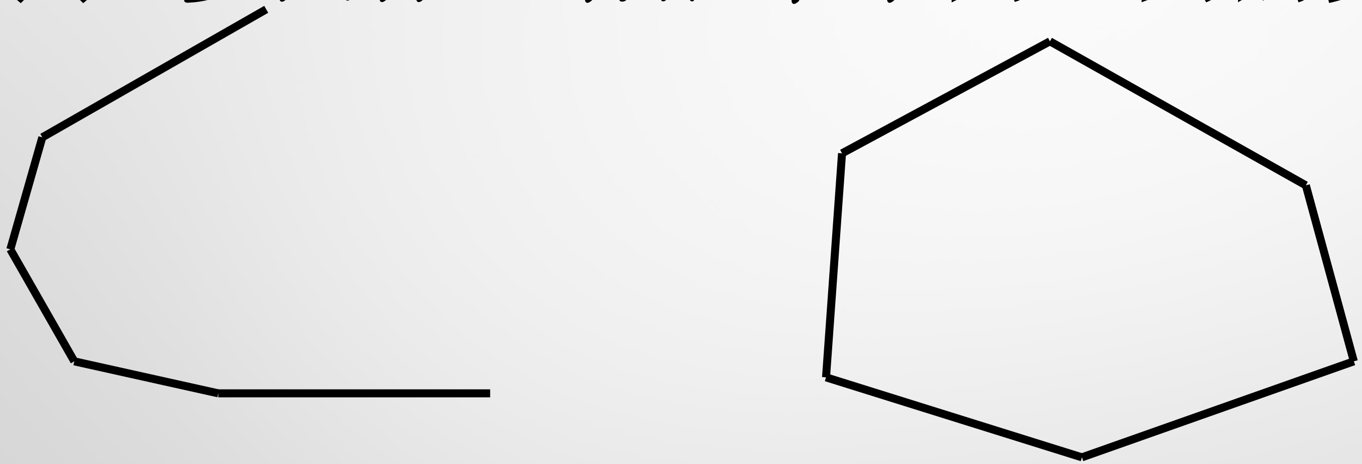
# 凸集的性质

（2）凸集的性质

1) 凸集的交集是凸集；（并？）
2) 凸集的内点集是凸集；（逆命题是否成立？）
3) 凸集的闭包是凸集。（逆命题是否成立？）

# 多面体、极点、极方向

（1）多面体：有限个半闭空间的交



例：$S = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0 \}$

# 2.3 多面体、极点、极方向

（2）多面体的极点（顶点）：$x \in S$，不存在 $S$ 中的另外两个点 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$，及 $\lambda \in (0,1)$，使 $x = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda) x^{(2)}$。

- （3）方向：$x \in S, d \in \mathrm{R}^n, d \neq 0$ 及 $\lambda > 0$，总有 $x + \lambda d \in S$(可行方向)。其中，当 $d^{(1)} = \lambda d^{(2)}$ ($\lambda > 0$) 时，称 $d^{(1)}$ 和 $d^{(2)}$ 同方向。

（4）极方向：方向 $d$ 不能表示为两个不同方向的组合 ($d = \mu_1 d^{(1)} + \mu_2 d^{(2)}$)。

# 多面体、极点、极方向

定理5（极点特征）设 $A$ 秩为m，$x$ 是 $S$ 极点的充分必要条件是:

存在分解 $A=(B, N)$，其中$B$为$m$阶非奇异矩阵，使 $x^T=(x_B^T, x_N^T)$，

这里 $x_B = B^{-1}b \geq 0$，$x_N = 0$。

- $S$中必存在有限多个极点 $(\leq C_n^m)$。

# 2.3 多面体、极点、极方向

定理6（极方向特征）设$A=(p_1,p_2,\dots,p_n)$秩为$m$，$d$是$S$极方向的充分必要条件是：存在分解$A=(B,N)$，其中$B$为$m$阶非奇异矩

- 阵，对于$N$中的列向量$p_j$使$B^{-1}p_j\le 0$,

$d^T=\alpha(d_B^T,d_N^T)$，这里

$d_B=-B^{-1}p_j$，$d_N=(0,\dots,1,\dots,0)^T$

$S$中必存在有限多个极方向（$\le(n-m)C_n^m$）。

# 例 题

例2 考虑多面体$S=\{x\in R^n \mid Ax=b, x\geq 0\}$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 65 \\ 40 \\ 75 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3 \qquad\qquad &= 65 \\ 2x_1+x_2 \qquad +x_4 \qquad &= 40 \\ 3x_2 \qquad\qquad +x_5 &= 75 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

# 例　题

$A=(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$

$A$矩阵包含以下10个3×3的子矩阵：

$B_1=(p_1, p_2, p_3)$　$B_2=(p_1, p_2, p_4)$

$B_3=(p_1, p_2, p_5)$　$B_4=(p_1, p_3, p_4)$

$B_5=(p_1, p_3, p_5)$　$B_6=(p_1, p_4, p_5)$

$B_7=(p_2, p_3, p_4)$　$B_8=(p_2, p_3, p_5)$

$B_9=(p_2, p_4, p_5)$　$B_{10}=(p_3, p_4, p_5)$

# 例 题

其中$|B_4| = 0$，因而$B_4$不能构成极点和极方向。其余均为非奇异方阵，因此该问题共有9个可构成极点、极方向的子矩阵，我们称之为基。

对于基$B_3=(p_1,\ p_2,\ p_5)$，令$x_3 = 0$， $x_4 = 0$，在等式约束中令$x_3 = 0$，$x_4 = 0$，解线性方程组

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 0x_5 &= 65 \\
2x_1 + x_2 + 0x_5 &= 40 \\
0x_1 + 3x_2 + x_5 &= 75
\end{aligned}
$$

得到$x_1 = 15$，$x_2 = 10$，$x_5 = 45$，对应的极点

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)^{\mathrm{T}} \\
&= (15,\ 10,\ 0,\ 0,\ 45)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

# 例 题

类似可得到极点

$\boldsymbol{x}^{(2)}=(5, 25, 0, 5, 0)^T$ （对应$\boldsymbol{B}_2$）

$\boldsymbol{x}^{(7)}=(20, 0, 5, 0, 75)^T$ （对应$\boldsymbol{B}_5$）

$\boldsymbol{x}^{(8)}=(0, 25, 15, 15, 0)^T$ （对应$\boldsymbol{B}_7$）

$\boldsymbol{x}^{(9)}=(0, 0, 65, 40, 75)^T$ （对应$\boldsymbol{B}_{10}$）

而 $\boldsymbol{x}^{(3)}=(0, 32.5, 0, 7.5, -22.5)^T$ （对应$\boldsymbol{B}_9$）

$\boldsymbol{x}^{(4)}=(65/3, 0, 0, -10/3, 75)^T$ （对应$\boldsymbol{B}_6$）

$\boldsymbol{x}^{(5)}=(7.5, 25, -7.5, 0, 0)^T$ （对应$\boldsymbol{B}_1$）

$\boldsymbol{x}^{(6)}=(0, 40, -15, 0, -45)^T$ （对应$\boldsymbol{B}_8$）

不是极点。

# 多面体、极点、极方向

多面体 $S=\{x\in R^n \mid Ax=b, x\geq 0\}$的极点和极方向

定理7（表示定理）考虑上述多面体S，

设A满秩，$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$为所有极点，$d^{(1)}, d^{(2)}, \ldots, d^{(l)}$为所有极方向。那么，对于 $\forall x\in S$，$\exists\lambda_i\geq 0$，$i=1，2，\ldots，k$，且$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=1$, $\mu_j\geq 0$, $j=1,2,\ldots,l$，使

$$x=\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}+\ldots+\lambda_k x^{(k)}+\mu_1 d^{(1)}+\mu_2 d^{(2)}+\ldots+\mu_l d^{(l)}$$

# 表示定理的证明

- 数学归纳法
- 对 x中非零元素的个数进行归纳