0.1. 给定集合 $\mathrm{N}=\{1,2,\cdots,n\}$，对于 N 的任一子集 S，定义一个价值函数 $v(S)$。请写出下列线性规划问题的对偶形式：

$$\begin{aligned} &\min_x \ \sum_i^n x_i \\ &s.t.\ \sum_{i\in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset \mathrm{N} \end{aligned}$$

解：原问题具体化有：

$$\begin{aligned} &\min_x \ (1,1,\cdots,1)\cdot(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \\ &s.t.\ A\cdot(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \geq v(S), \forall S \subset \mathrm{N} \end{aligned}$$

其中 $(1,1,\cdots,1)\in R^n, (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n, v(S)\in R^n$，并且 $A\in R^{(2^n-1)n}$。那么该线性规划的对偶形式为：

$$\begin{aligned} &\max_x \ v(S)^T y \\ &s.t.\ A^T y \leq (1,1,\cdots,1)^T \end{aligned}$$

其中 $y\in R^{2^n-1}$

0.2. 已知 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 为 R^n 上的凸函数，证明 $h=\sup_{i=1,2,\cdots,m}\{f_i\}$ 也为 R^n 上的凸函数。

证：取任意的两个点 $x_1,x_2\in R$，根据 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 是 R^n 上的凸函数，取任意的实数 $0\leq\lambda\leq 1$，那么有：

$$\begin{aligned} &h(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=\sup_{i=1,2,\cdots,m}\{f_i(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\} \\ &\leq \sup_{i=1,2,\cdots,m}\{\lambda f_i(x_1)+(1-\lambda)f_i(x_2)\} \\ &\leq \sup_{i=1,2,\cdots,m}\{\lambda f_i(x_1)\}+\sup_{i=1,2,\cdots,m}\{(1-\lambda)f_i(x_2)\} \\ &=\lambda\sup_{i=1,2,\cdots,m}\{f_i(x_1)\}+(1-\lambda)\sup_{i=1,2,\cdots,m}\{f_i(x_2)\} \\ &=\lambda h(x_1)+(1-\lambda)h(x_2) \end{aligned}$$

因此可得证 $h=\sup_{i=1,2,\cdots,m}\{f_i\}$ 也为 R^n 上的凸函数。

0.3. 已知 f 是定义在 R_{+}^{n} 上的函数，且 $f=-(\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{1/p}$，$p<1$ 且 $p\neq 0$，证明 f 为凸函数。

证：欲证函数 f 为凸函数，即证 $g=-f=(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p)^{1/p}$ 为凹函数。利用判定凹函数的一阶条件，即证 $\forall Z,Y\in R_{+}^{n}$，有 $g(Y)\le g(Z)+\nabla g(Z)^T(Y-Z)$，即

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^p)^{1/p}\le(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p)^{1/p}+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p)^{\frac{1}{p}-1}(x_1{}^{p-1},x_2{}^{p-1},\cdots,x_n{}^{p-1})\cdot(y_1-x_1,\cdots,y_n-x_n)^T\\
&=(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p)^{1/p}+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p)^{\frac{1}{p}-1}(x_1{}^{p-1}y_1+\cdots+x_n{}^{p-1}y_n-\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p)\\
&=(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p)^{\frac{1}{p}-1}(x_1{}^{p-1}y_1+\cdots+x_n{}^{p-1}y_n)
\end{aligned}
$$

而由 Holder 不等式，设 $a_k,b_k\ge 0,k=1,2,\cdots,n$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，若 $0<p<1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\ge(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^q)^{\frac{1}{q}}$$

因此有：$x_1{}^{p-1}y_1+x_2{}^{p-1}y_2+\cdots+x_n{}^{p-1}y_n\ge(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p)^{1-\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^p)^{1/p}$，即 g 为凹函数，则 f 为凸函数。

0.4. 定义向量 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$ 的一阶范式 $\|y\|_1=\sum_{i=1}^{m}|y_i|$，给定矩阵 $A\in R^{m\times n}$ 以及向量 $b\in R^m$。证明下列优化问题是线性优化问题：

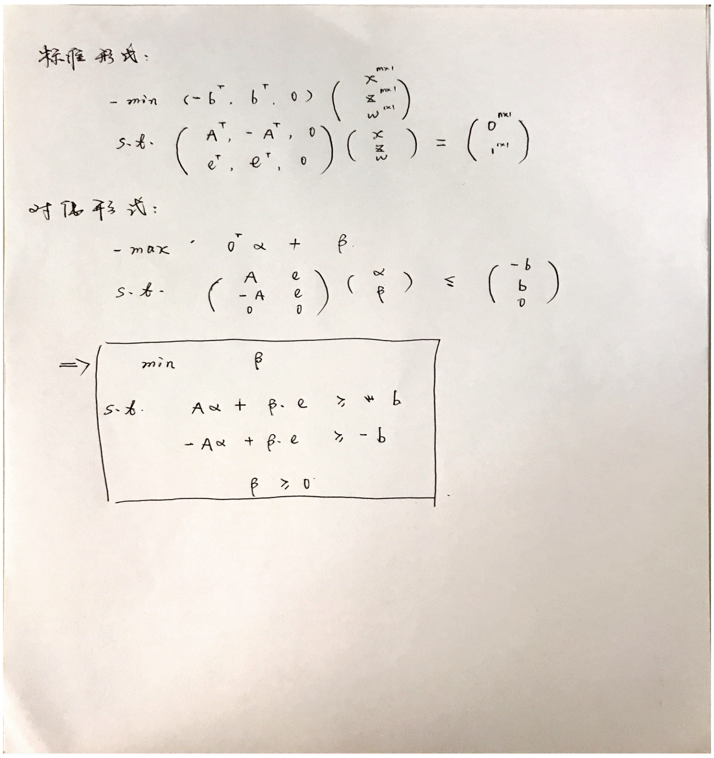
$$
\begin{aligned}
\max_{y}\quad & b^T y\\
s.t.\quad & A^T y=0,\\
& \|y\|_1\le 1.
\end{aligned}
$$

并写出上述线性规划问题的对偶形式。

证：已知 $|y|=\frac{|y|+y}{2}+\frac{|y|-y}{2}$，那么可令 $x=\frac{|y|+y}{2}$，$z=\frac{|y|-y}{2}$，则有 $y=x-z$，$|y|=x+z$，且 $x\ge 0,y\ge 0$，因此原题中的优化问题转化为：

$$\max_{y} \quad b^T(x-z)$$
$$s.t. \quad A^T(x-z)=0$$
$$\sum_{i=1}^{m}(x_i+z_i)\leq 1$$
$$x,z\geq 0$$

那么该问题就是一个线性规划问题。则该线性规划问题的标准形式为：


标准形式：

$$-\min \quad (-b^T,\ b^T,\ 0)\begin{pmatrix} x^{m\times 1} \\ z^{m\times 1} \\ w^{1\times 1} \end{pmatrix}$$
$$s.t. \quad \begin{pmatrix} A^T, & -A^T, & 0 \\ e^T, & e^T, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^{n\times 1} \\ 1^{1\times 1} \end{pmatrix}$$

对偶形式：

$$-\max \quad 0^T\alpha + \beta$$
$$s.t. \quad \begin{pmatrix} A & e \\ -A & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \min & \beta \\ s.t. & A\alpha + \beta\cdot e \geq b \\ & -A\alpha + \beta\cdot e \geq -b \\ & \beta \geq 0 \end{array}}$$

0.5. 桥梁工地要制作 d 套钢筋架子（d 为你的学号后三位数），每套需要长 2.9 米，2.1 米和 1.5 米的钢筋各一根，现有原材料（钢筋）长 7.4 米，问如何下料最省（废料最少），请设计方案构造一个线性规划问题并求其最优解。

	2.9m 钢筋根数	2.1m 钢筋根数	1.5m 钢筋根数	余料/m
模式 1	2	0	1	0.1
模式 2	1	1	1	0.9
模式 3	1	0	3	0
模式 4	0	3	0	1.1
模式 5	0	2	2	0.2
模式 6	0	1	3	0.8
模式 7	0	0	4	1.4

表 1 钢筋下料的合理切割模式

通过结合题意，可以得出一根 7.4 米的钢筋有 7 种合理的切割方式（见上表）。那么问题应化为在满足题目的条件下，按照哪种合理的模式，切割多少根原料钢筋，最为节省。而所谓的节省，可以说是下角料是最少的，根据这个线索可以建

立一个可行的模型。

模型建立

决策变量 用 x_i 表示按照第 i 种模式（$i = 1,2,...,7$）切割的原料钢筋的根数，显然它们应当是非负整数。

决策目标 以切割后剩余的总余料量最小为目标，则由上表可得

$$\min \quad z_1 = 0.1x_1 + 0.9x_2 + 1.1x_4 + 0.2x_5 + 0.8x_6 + 1.4x_7$$

约束条件 为满足题目的要求，按照表 1 应有

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 111 \\ x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 111 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_7 \geq 111 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{gathered}$$

Matlab 代码：

```
c=[0.1;0.9;0;1.1;0.2;0.8;1.4];
a=[2,1,1,0,0,0,0;0,1,0,3,2,1,0;1,1,3,0,2,3,4];
b=[111;111;111];
[x,y]=linprog(c,-a,-b,[],[],zeros(7,1))
```

最后的求解结果中显示按照模式 3 切割 157 根原料钢筋，按照模式 5 切割 56 根原料钢筋。共需要消耗 213 根钢筋，则总余料量最小为 11.2m。

0.6.设你的学号后三位数为 d，写出下列线性规划问题的规范形式，

$$\begin{gathered} \min_x \quad 45x_1 + 10x_2 \\ s.t. \quad 0.4x_1 + 0.25x_2 \leq d, \\ 0.42x_1 + 0.15x_2 \geq 420, \\ x_2 \geq 800, \\ x_1 \geq 0. \end{gathered}$$

用 Matlab 求解其最优解，并写出其对偶问题。

答：根据我的学号有 d=111，那么该线性规划问题的规范形式为：

$$\begin{gathered} \max_x \quad -45x_1 - 10x_2 \\ s.t. \quad 0.4x_1 + 0.25x_2 \leq 111, \\ -0.42x_1 - 0.15x_2 \leq -420, \\ -x_2 \leq -800, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

Matlab 代码：

```
c=[-45;-10];
a=[0.4,0.25;-0.42,-0.15;0,-1];
b=[111;-420;-800];
[x,y]=linprog(-c,a,b,[],[],zeros(2,1));
```

求解结果：

x = [0.0180,705.4703];y = 7055.5

通过分析可知最后得到的结果并不是该规划问题的可行解，因此对于该规划问题没有最优解。

对偶问题：

$$
\begin{gathered}
\min_{x} \ \ 111y_1 - 420y_2 - 800y_3 \\
s.t. \ \ 0.4y_1 - 0.42y_2 \geq -45 \\
0.25y_1 - 0.15y_2 - y_3 \geq -10 \\
y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{gathered}
$$