



向量，子空间

徐欢乐

xuhl@dgut.edu.cn

计算机科学与网络学院，9A304

2017.2.22

向量以及基本运算

- \mathbf{R}^n 表示 n 维欧氏空间。
- $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ，称为 \mathbf{R}^n 中的向量， $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。
- 向量内积： $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- \mathbf{x} 的模长： $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$
- 向量的距离： $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
- 三角不等式： $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

子空间

➤ 生成子空间: $\text{span}[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^m] = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = k_1 \mathbf{x}^1 + k_2 \mathbf{x}^2 + \dots + k_m \mathbf{x}^m\}$

○ $\dim(\text{span}[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^m]) = \text{rank}([\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^m])$

➤ 线性子空间: $W \subset R^n$, 需要满足:

○ $\mathbf{0} \in W$

○ $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W \Rightarrow \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in W$

○ $\forall \mathbf{x} \in W \Rightarrow k\mathbf{x} \in W$

多元函数

➤ n元函数: $f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

○ 线性函数: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + b = \sum c_i x_i + b$

○ 二次函数: $f(\mathbf{x}) = (1/2) \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + b$
 $= (1/2) \sum \sum a_{ij} x_i x_j + \sum c_i x_i + b$

○ 向量值线性函数: $F(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$, 其中,
A为 $m \times n$ 矩阵, d为m维向量

多元函数的导数

➤ 梯度（一阶偏导数向量）：

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

- 线性函数： $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + b$, $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$
- 二次函数： $f(\mathbf{x}) = (1/2) \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + b$
 $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}$
- 向量值线性函数： $F(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$
 $\partial F / \partial \mathbf{x} = \mathbf{A}^T$

Hessian 矩阵

➤ Hessian 矩阵（二阶偏导数矩阵）：

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial^2 f / \partial x_1^2 & \partial^2 f / \partial x_2 \partial x_1 & \dots & \partial^2 f / \partial x_n \partial x_1 \\ \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2 & \partial^2 f / \partial x_2^2 & \dots & \partial^2 f / \partial x_n \partial x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_n & \partial^2 f / \partial x_2 \partial x_n & \dots & \partial^2 f / \partial x_n^2 \end{pmatrix}$$

○ 线性函数： $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + b$, $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

○ 二次函数： $f(\mathbf{x}) = (1/2) \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + b$, $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}$