

### 运筹与优化作业 3

截止日期: JUNE 8

1. 写出下列凸规划问题的 KKT 方程并求其最优解:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$\text{s.t. } g_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 - \frac{5}{2} \geq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 + 5 \geq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = x_1 \geq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = x_2 \geq 0$$

2. 一个矩形无盖油箱的外部总面积限定为  $S$ , 怎样设计可使油箱的容量最大? 列出这个优化问题的数学模型并求其最优解。

3. 设约束优化问题的数学模型为:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 10$$

$$\text{s.t. } g_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 \geq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 \geq 0$$

写出优化问题的 KKT 方程并求其最优解。

4. 给定函数  $f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$  和变量的取值范围:  $-1 \leq x_1 \leq 3$ ,  $2 \leq x_2 \leq 6$ 。判断  $f(\mathbf{x})$  是否为凸函数, 并求取  $f(\mathbf{x})$  的光滑系数, 强凸系数, 利普希茨系数。给定初始迭代点  $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$ , 用梯度下降法编程求取  $f(\mathbf{x})$  的最小值, 并比较  $f(\mathbf{x})$  在三种不同迭代步长下的收敛速度。请附上你的 Matlab 代码和相关结果。

5. 已知  $d_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 用 KKT 方程求解下列问题的最优解:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n d_i x_i \leq L \\ & x_i \geq 0, \forall i. \end{aligned}$$

6. 设你的学号后三位数为  $d$ , 写出下列凸规划问题的对偶形式:

$$\begin{aligned} \min_{\{x,y\}} \quad & x^2 + e^y \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 \leq 64 \\ & x + y \leq 9 \\ & (x - 10)^2 + y^2 \leq d \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

用 Matlab 编程求取上述优化问题的最优解, 请附上你的 Matlab 代码和相关结果。

7. 考虑下述凸规划问题:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & (x_1 - 2)^2 + 2^{x_2} + \tan x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 7 \\ & 7x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

用 Matlab 编程求取上述优化问题的最优解, 请附上你的 Matlab 代码和相关结果。