



线性规划

线性规划模型

例1 某工厂拥有A、B、C三种类型的设备，生产甲、乙两种产品。每件产品在生产中需要占用的设备机时数、每件产品可以获得的利润以及三种设备可利用的时数如下表所示。

	产品甲	产品乙	设备能力/h
设备A	3	2	65
设备B	2	1	40
设备C	0	3	75
利润/ (元/件)	1500	2500	

线性规划模型

问题：工厂应如何安排生产可获得最大的总利润？

解 设变量 x_i 为第 i 种（甲、乙）产品的生产件数（ $i=1, 2$ ）。根据题意，我们知道两种产品的生产受到设备能力（机时数）的限制。对设备 A ，两种产品生产所占用的机时数不能超过65，于是我们可以得到不等式： $3x_1 + 2x_2 \leq 65$ 。

对设备 B ，两种产品生产所占用的机时数不能超过40，于是我们可以得到不等式： $2x_1 + x_2 \leq 40$ 。

线性规划模型

对于设备C，两种产品生产所占用的机时数不能超过75，于是我们可以得到不等式： $3x_2 \leq 75$ ；另外，产品数不可能为负，即 $x_1, x_2 \geq 0$ 。同时，我们有一个追求目标，即获取最大利润。于是可写出目标函数 z 为相应的生产计划可以获得的总利润： $z = 1500x_1 + 2500x_2$ 。综合上述讨论，在加工时间以及利润与产品产量呈线性关系的假设下，把目标函数和约束条件放在一起，可以建立如下线性规划模型：

线性规划模型

目标函数 $\text{Max } z = 1500x_1 + 2500x_2$

约束条件 $\text{s. t. } \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 65 \\ 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ 3x_2 \leq 75 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$

线性规划模型

这是一个典型的利润最大化的生产计划问题。其中，“Max”是英文单词“Maximize”的缩写，含义为“最大化”；“s. t.”是“subject to”的缩写，表示“满足于...”。因此，上述模型的含义是：在给定条件限制下，求使目标函数 z 达到最大的 x_1 ， x_2 的取值。

线性规划的一般形式

- 一般形式

- 目标函数：

$$\text{Max (Min) } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

- 约束条件：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 0$$

线性规划的标准形式

- 标准形式

- 目标函数：

$$\text{Min } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$$

- 约束条件：

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

线性规划的标准形式

可以看出，线性规划的标准形式有如下四个特点：目标最小化、约束为等式、决策变量均非负、右端项非负。

对于各种非标准形式的线性规划问题，我们总可以通过以下变换，将其转化为标准形式。

转化为线性规划的标准形式

1. 极小化目标函数的问题

设目标函数为

$$\text{Max } f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

则可以令 $z = -f$ ，该极大化问题与下面的极小化问题有相同的最优解，即

$$\text{Min } z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$$

但必须注意，尽管以上两个问题的最优解相同，但它们最优解的目标函数值却相差一个符号，即

$$\text{Max } f = -\text{Min } z$$

转化为线性规划的标准形式

2. 约束条件不是等式的问题

设约束条件为

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

可以引进一个新的变量 s ，使它等于约束右边与左边之差，即

$$s = b_i - (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n)$$

显然， s 也具有非负约束，即 $s \geq 0$ ，这时新的约束条件成为

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + s = b_i$$

转化为线性规划的标准形式

当约束条件为

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \geq b_i$$

时，类似地令

$$s = (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n) - b_i$$

显然， s 也具有非负约束，即 $s \geq 0$ ，
这时新的约束条件成为

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n - s = b_i$$

转化为线性规划的标准形式

为了使约束由不等式成为等式而引进的变量 s 称为“松弛变量”。如果原问题中有若干个非等式约束，则将其转化为标准形式时，必须对各个约束引进不同的松弛变量。



转化为线性规划的标准形式

例2 将以下线性规划问题转化为标准形式

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & f = 3.6 x_1 - 5.2 x_2 + 1.8 x_3 \\ \text{s. t.} & \left\{ \begin{array}{l} 2.3 x_1 + 5.2 x_2 - 6.1 x_3 \leq 15.7 \\ 4.1 x_1 + 3.3 x_3 \geq 8.9 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 38 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.\end{array}$$

解 首先, 将目标函数转换成极大化:

令 $z = -f = -3.6x_1 + 5.2x_2 - 1.8x_3$

转化为线性规划的标准形式

其次考虑约束，有2个不等式约束，
引进松弛变量 $x_4, x_5 \geq 0$ 。

于是，我们可以得到以下标准形式的
线性规划问题：

$$\text{Max } z = -3.6 x_1 + 5.2 x_2 - 1.8 x_3$$

$$\text{s. t. } \left\{ \begin{array}{l} 2.3x_1 + 5.2x_2 - 6.1x_3 + x_4 = 15.7 \\ 4.1x_1 + 3.3x_3 - x_5 = 8.9 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 38 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

转化为线性规划的标准形式

3. 变量无符号限制的问题

在标准形式中，必须每一个变量均有非负约束。当某一个变量 x_j 没有非负约束时，可以令

$$x_j = x_j' - x_j''$$

其中

$$x_j' \geq 0, x_j'' \geq 0$$

即用两个非负变量之差来表示一个无符号限制的变量，当然 x_j 的符号取决于 x_j' 和 x_j'' 的大小。

转化为线性规划的标准形式

4. 右端项有负值的问题

在标准形式中，要求右端项必须每一个分量非负。当某一个右端项系数为负时，如 $b_i < 0$ ，则把该等式约束两端同时乘以 -1 ，得到

$$-a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \dots - a_{in} x_n = -b_i$$

转化为线性规划的标准形式

例3 将以下线性规划问题转化为标准形式

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f = -3x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 \\ \text{s. t.} \quad & \left\{ \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\leq 28 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 9x_4 &\geq 39 \\ 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq -58 \\ x_1, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

转化为线性规划的标准形式

解 首先，将目标函数转换成极大化：

令
$$Z = -f = 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 + 7x_4$$

其次考虑约束，有3个不等式约束，引进松弛变量 $x_5, x_6, x_7 \geq 0$ 。

由于 x_2 无非负限制，可令 $x_2 = x_2' - x_2''$ ，其中

$$x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0$$

由于第3个约束右端项系数为-58，于是把该式两端乘以-1。

于是，我们可以得到以下标准形式的线性规划问题：

转化为线性规划的标准形式

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = 3x_1 - 5x_2' + 5x_2'' - 8x_3 + 7x_4 \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 - 3x_2' + 3x_2'' + 5x_3 + 6x_4 + x_5 = 28 \\ 4x_1 + 2x_2' - 2x_2'' + 3x_3 - 9x_4 - x_6 = 39 \\ -6x_2' + 6x_2'' - 2x_3 - 3x_4 - x_7 = 58 \\ x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

矩阵形式

- 矩阵形式

- 线性规划的标准形式:

$$(LP) \quad \begin{cases} \text{Min } c^T x \\ \text{s.t. } Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

其中,

$$c, x \in \mathbb{R}^n$$

$$b \in \mathbb{R}^m$$

A 是 $m \times n$ 矩阵

矩阵形式

- 线性规划的规范形式:

$$(P) \begin{cases} \text{Min } c^T x \\ \text{s.t. } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

其中,

$$c, x \in \mathbb{R}^n$$

$$b \in \mathbb{R}^m$$

A 是 $m \times n$ 矩阵

线性规划的最优条件

1. 线性规划的理论

考虑(LP)的最优性条件

约束多面体 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ 的极点和极方向。

定理 1 考虑(LP)及上述多面体 S ，设 A 满秩， $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ 为所有极点， $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(l)}$ 为所有极方向。那么，

(1) (LP)存在有限最优解 $\Leftrightarrow c^T d^{(j)} = \infty, \forall j$ 。

(2) 若(LP)存在有限最优解，则最优解可以在某个极点达到。

线性规划的对偶

1. 对偶问题

若前面讲述的例题的设备都用于外协加工，工厂收取加工费。试问：设备 A 、 B 、 C 每工时各如何收费才最有竞争力？

设 y_1 、 y_2 、 y_3 分别为加工时设备 A 、 B 、 C 的收取费用。



线性规划原问题

例6 某工厂拥有A、B、C三种类型的设备，生产甲、乙两种产品。每件产品在生产中需要占用的设备机时数、每件产品可以获得的利润以及三种设备可利用的时数如下表所示。求获最大利润的方案。

	产品甲	产品乙	设备能力/h
设备A	3	2	65
设备B	2	1	40
设备C	0	3	75
利润/ (元/件)	1500	2500	



线性规划的对偶

$$\text{Max } z = 1500x_1 + 2500x_2$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 65 \\ 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ 3x_2 \leq 75 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

原问题

$$\text{Min } f = 65y_1 + 40y_2 + 75y_3$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \geq 1500 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 2500 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

(不少于甲产品的利润)

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 2500$$

(不少于乙产品的利润)

对偶问题

线性规划的对偶

2. 对偶定义

对称形式

互为对偶

$$(LP) \text{ Min } z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

“Min— \geq ”

$$(DP) \text{ Max } \mathbf{f} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

“Max— \leq ”

