线性规划的基本概念与理论

徐欢乐

xuhl@dgut.edu.cn

计算机与网络安全学院，9A304

2017.2.27

凸集

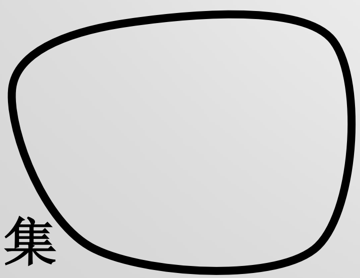
1.凸集

（**1**）凸集的概念

定义**1** 设集合 $S\subseteq \mathbf{R}^n$，若$\forall \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}\in S$, $\lambda\in[0,1]$， 必有 $\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}\in S$， 则称 S 为凸集。

规定：单点集 $\{x\}$ 为凸集，空集$\varnothing$为凸集。

注: $\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(2)}+\lambda(\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(2)})$ 是连接 $\boldsymbol{x}^{(1)}$与$\boldsymbol{x}^{(2)}$的线段 。



凸集

非凸集

非凸集

凸集

- 例1 证明集合 $S=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$ 是凸集。其中，$\boldsymbol{A}$为 $m\times n$矩阵，$\boldsymbol{b}$为m维向量。
- 凸组合：设 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\dots,\boldsymbol{x}^{(m)}\in \mathrm{R}^n$，$\lambda_j\geqslant 0$，

$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=1$，那么称$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\boldsymbol{x}^{(j)}$ 为$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\dots,\boldsymbol{x}^{(m)}$的凸组合。

- 比较：$\boldsymbol{z}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\boldsymbol{x}^{(j)}$

$\alpha_j\in\mathbf{R}$ ——构成线性组合 —— 线性子空间

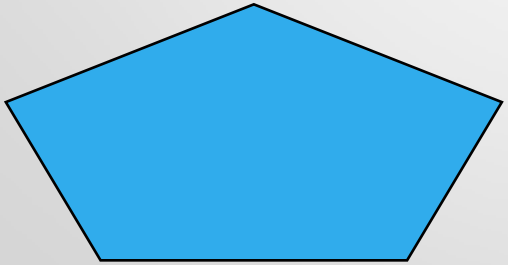
$\alpha_j\geq 0$，$\sum\alpha_j>0$ —— 构成半正组合 —— 凸锥

$\alpha_j\geq 0$，$\sum\alpha_j=1$ —— 构成凸组合 —— 凸集

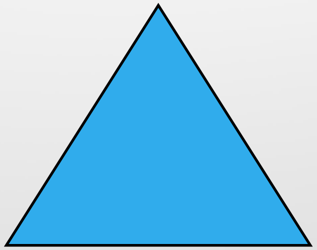
凸集

定理1 S是凸集⇔S中任意有限点的凸组合属于S。

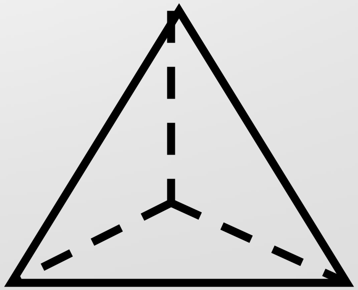
- 多胞形 $H(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$：由 $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ 的所有凸组合构成。
- 单纯形：若多胞形 $H(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$满足，$x^{(2)}-x^{(1)}, x^{(3)}-x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}-x^{(1)}$ 线性无关。



多胞形



单纯形



单纯形

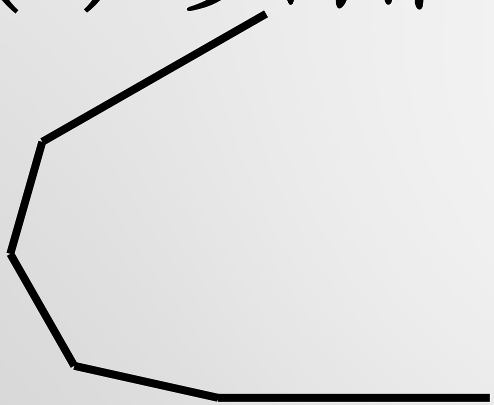
凸集的性质

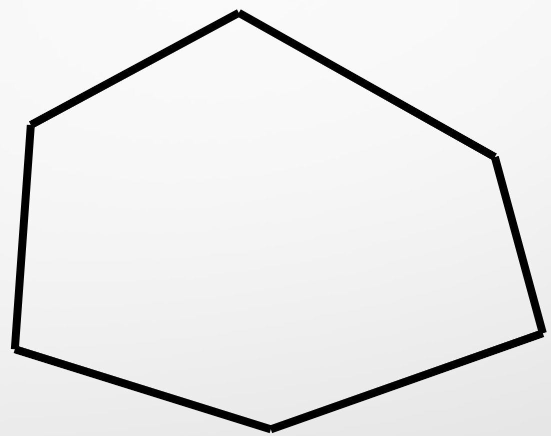
（2）凸集的性质

1） 凸集的交集是凸集；（并？）
2） 凸集的内点集是凸集；（逆命题是否成立？）
3） 凸集的闭包是凸集。（逆命题是否成立？）

多面体、极点、极方向

（1）多面体：有限个半闭空间的交





例：$S=\{x\in \mathrm{R}^n \mid Ax=b, x\geq 0\}$

2.3 多面体、极点、极方向

（2）多面体的极点（顶点）：$x \in S$，不存在 S 中的另外两个点 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$，及 $\lambda \in (0,1)$，使 $x = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda) x^{(2)}$。

（3）方向：$x \in S$，$d \in \mathbf{R}^n$，$d \neq 0$ 及 $\lambda > 0$，总有 $x + \lambda d \in S$（可行方向）。其中，当 $d^{(1)} = \lambda d^{(2)}$（$\lambda > 0$）时，称 $d^{(1)}$ 和 $d^{(2)}$ 同方向。

（4）极方向：方向 d 不能表示为两个不同方向的组合（$d = \mu_1 d^{(1)} + \mu_2 d^{(2)}$）。

多面体、极点、极方向

定理5（极点特征）设A秩为m，x是S极点的充分必要条件是:

存在分解$A=(B,N)$，其中B为m阶非奇异矩阵，使$x^T=(x_B^T,x_N^T)$，

这里 $x_B=B^{-1}b\geq 0$，$x_N=0$。

- S中必存在有限多个极点($\leq C_n^m$)。

2.3 多面体、极点、极方向

定理6（极方向特征）设A =（$p_1, p_2, \ldots, p_n$）秩为m，d 是S 极方向的充分必要条件是: 存在分解A =（B, N），其中B为m阶非奇异矩

- 阵，对于N中的列向量p_j 使 $B^{-1}p_j \leq 0$,

$d^T = \alpha$（d_B^T, d_N^T），这里

$d_B = -B^{-1}p_j$，$d_N = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$

S中必存在有限多个极方向（$\leq (n-m)C_n^m$）。

例　题

例2 考虑多面体$S=\{x\in R^n \mid Ax=b,\ x\geq o\}$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 65 \\ 40 \\ 75 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3 \qquad\qquad &= 65 \\ 2x_1+x_2 \qquad +x_4 \qquad &= 40 \\ 3x_2 \qquad\qquad +x_5 &= 75 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

例　题

$A=(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$

A矩阵包含以下10个3×3的子矩阵：

$B_1=(p_1, p_2, p_3)$　$B_2=(p_1, p_2, p_4)$

$B_3=(p_1, p_2, p_5)$　$B_4=(p_1, p_3, p_4)$

$B_5=(p_1, p_3, p_5)$　$B_6=(p_1, p_4, p_5)$

$B_7=(p_2, p_3, p_4)$　$B_8=(p_2, p_3, p_5)$

$B_9=(p_2, p_4, p_5)$　$B_{10}=(p_3, p_4, p_5)$

例 题

其中$|B_4|=0$，因而B_4不能构成极点和极方向。其余均为非奇异方阵，因此该问题共有9个可构成极点、极方向的子矩阵，我们称之为基。

对于基$B_3=(p_1, p_2, p_5)$，令$x_3=0$，$x_4=0$，在等式约束中令$x_3=0$，$x_4=0$，解线性方程组

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 0x_5 &= 65 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_5 &= 40 \\ 0x_1 + 3x_2 + x_5 &= 75 \end{aligned}$$

得到$x_1=15$，$x_2=10$，$x_5=45$，对应的极点

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}} \\ &= (15, 10, 0, 0, 45)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

例 题

类似可得到极点

$\boldsymbol{x}^{(2)} = (5, 25, 0, 5, 0)^{\mathrm{T}}$ （对应$\boldsymbol{B}_2$）

$\boldsymbol{x}^{(7)} = (20, 0, 5, 0, 75)^{\mathrm{T}}$ （对应$\boldsymbol{B}_5$）

$\boldsymbol{x}^{(8)} = (0, 25, 15, 15, 0)^{\mathrm{T}}$ （对应$\boldsymbol{B}_7$）

$\boldsymbol{x}^{(9)} = (0, 0, 65, 40, 75)^{\mathrm{T}}$ （对应$\boldsymbol{B}_{10}$）

而 $\boldsymbol{x}^{(3)} = (0, 32.5, 0, 7.5, -22.5)^{\mathrm{T}}$ （对应$\boldsymbol{B}_9$）

$\boldsymbol{x}^{(4)} = (65/3, 0, 0, -10/3, 75)^{\mathrm{T}}$ （对应$\boldsymbol{B}_6$）

$\boldsymbol{x}^{(5)} = (7.5, 25, -7.5, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ （对应$\boldsymbol{B}_1$）

$\boldsymbol{x}^{(6)} = (0, 40, -15, 0, -45)^{\mathrm{T}}$ （对应$\boldsymbol{B}_8$）

不是极点。

多面体、极点、极方向

多面体 $S=\{x\in R^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$的极点和极方向

定理7（表示定理）考虑上述多面体S，

设**A**满秩，$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\ldots,\boldsymbol{x}^{(k)}$为所有极点，$\boldsymbol{d}^{(1)},\boldsymbol{d}^{(2)},\ldots,\boldsymbol{d}^{(l)}$为所有极方向。那么，对于$\forall \boldsymbol{x}\in S$，$\exists\lambda_i\geq 0$，$i$=1，2，…，$k$, 且$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=1$, $\mu_j\geq 0$, $j=1,2,\ldots,l$, 使

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}^{(1)}+\lambda_2\boldsymbol{x}^{(2)}+\ldots+\lambda_k\boldsymbol{x}^{(k)}+\mu_1\boldsymbol{d}^{(1)}+\mu_2\boldsymbol{d}^{(2)}+\ldots+\mu_l\boldsymbol{d}^{(l)}$$

表示定理的证明

- 数学归纳法
- 对x中非零元素的个数进行归纳