

# Prečkanje puščave neznane velikosti

## Diplomski seminar

Justin Raišp  
Mentor: izr. prof. dr. David Dolžan

Fakulteta za matematiko in fiziko

21. 11. 2022

# Predstavitev problema

Potrebno je prečkati puščavo neznane velikosti, pri čemer imamo na začetku na voljo neomejeno količino goriva, vendar imamo končen rezervoar za gorivo v avtu. Brez škode za splošnost predpostavimo:

- rezervoar ima kapaciteto 1 liter goriva,
- za 1 kilometer potrebujemo 1 liter goriva,
- poraba goriva je konstantna skozi celotno pot.

Zanima nas optimalna strategija postavljanja postaj z gorivom, da dosežemo cilj, pri čemer porabimo čim manjšo količino goriva.

# Že rešeni problemi

Prečkanje puščave je v matematiki znan problem, ki se je prvič pojavil že v 9. stoletju, trenutna različica problema pa se je pojavila v letu 1947 s strani Nathan Jacob Fine-a, vendar so ti problemi predpostavljali, da poznamo širino dane puščave.

# Ideja

Z  $n$  označimo količino goriva.

- $n = 1$ : Peljemo se  $\frac{1}{2}$  in se vrnemo na začetek
- $n = 2$ : Peljemo se  $\frac{1}{4}$ , shranimo  $\frac{1}{2}$  in se vrnemo. Nato se peljemo  $\frac{1}{4}$ , poberemo  $\frac{1}{4}$ , se peljemo  $\frac{1}{2}$ , se vrnemo in po poti poberemo  $\frac{1}{4}$ ,
- $n = 3$ : Peljemo se  $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$  in se vrnemo, vmes imamo 2 postaji,
- $\vdots$
- $n = k$ : Peljemo se  $\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k-1)} + \cdots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ , vmes pa imamo  $k - 1$  postaj.

# Ideja

Ker imamo pot v obe smeri, pomeni da prevozimo

$$2 \sum_{n=1}^k \frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n},$$

kar nam da harmonično vrsto, katera divergira ko  $k \rightarrow \infty$ , torej lahko prevozimo vsakršno razdaljo.  $k$ -to delno vsoto harmonične vrste lahko aproksimiramo z

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \approx \ln(k) + \gamma,$$

kjer je  $\gamma \approx 0.577$  Euler-Macheronijeva konstanta. Torej lahko ocenimo, da za  $d$  kilometrov in nazaj, potrebujemo  $O(e^{2d})$  litrov goriva. Torej za velike  $d$ , je cena goriva za razdaljo  $d$  sorazmerna  $7.389^d$ .

