# Nižanje stopnje Bézierjevih krivulj z metodo najmanjših kvadratov

Luka Polanič, Justin Raišp

Ljubljana, 2024

# Motivacija

Podano imamo Bézierjevo krivuljo stopnje $n$:

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t), \quad t \in [0,1],$$

kjer so $b_i$ kontrolne točke in $B_i^n(t)$ Bernsteinovi bazni polinomi stopnje $n$. Naš cilj je poiskati Bézierjevo krivuljo stopnje $m < n$,

$$\tilde{p}_m(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i B_i^m(t), \quad t \in [0,1],$$

# Metoda najmanjših kvadratov

Kontrolne točke $c_i$ določimo tako, da minimiziramo $L_2$-normo med krivuljama $p_n$ in $\tilde{p}_m$, pri čemer je $L_2$-norma definirana kot:

$$d_2(p_n, \tilde{p}_m) = \sqrt{\int_0^1 \|p_n(t) - \tilde{p}_m(t)\|^2 \, dt},$$

kjer je $\|p_n(t) - \tilde{p}_m(t)\|^2$ kvadrat evklidske razdalje med krivuljama.

# Konstrukcija

Nižanje stopnje iz $n$ na $n-1$. Če bi želeli zvišati stopnjo Bézierjeve krivulje, bi uporabili naslednjo zvezo:

$$b_i = \frac{i}{n} c_{i-1} + \frac{n-i}{n} c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Sedaj lahko na dva načina izrazimo zaporedje neznanih kontrolnih točk $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$. Dobimo dva sistema enačb, pri čemer bomo v obeh primerih zanemarili eno enačbo, saj bi bil sistem sicer predoločen.

- Zanemarimo zadnjo enačbo za $i = n$ in dobimo

$$c_i^{(I)} = \frac{1}{n-i}\left(nb_i - ic_{i-1}^{(I)}\right) \quad \text{za} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

  Dodatno upoštevamo, da je $c_{-1} = 0$.

- Pri drugi izražavi zanemarimo prvo enačbo, tj. za $i = 0$, in dobimo

$$c_{i-1}^{(II)} = \frac{1}{i}\left(nb_i - (n-i)c_i^{(II)}\right) \quad \text{za} \quad i = n, \ldots, 1.$$

Množici kontrolnih točk $\{c_i^{(I)}\}_{i=0}^{n-1}$ in $\{c_i^{(II)}\}_{i=0}^{n-1}$ predstavljata kontrolna poligona za dve različni Bézierjevi krivulji stopnje $n-1$. Označimo ju z $\tilde{p}_{n-1}^{(I)}$ in $\tilde{p}_{n-1}^{(II)}$.

Sedaj moramo poiskati še kontrolne točke $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$ končne Bézierjeve krivulje $\tilde{p}_{n-1}$. Za kontrolne točke vzamemi linearno kombinacijo točk, določenih z zgornjima izrazoma:

$$c_i = (1 - \lambda_i) \cdot c_i^{(I)} + \lambda_i \cdot c_i^{(II)} \quad \text{za} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Z uvedbo faktorjev $\{\lambda_i \in \mathbb{R}\}$ prevedemo problem iskanja kontrolnih točk $\{c_i\}_i$ na problem računanja ustreznih faktorjev $\{\lambda_i\}_i$, za katere velja, da je $d_2(p_n, \tilde{p}_{n-1})$ minimalna.

# Izbira uteži

Da se pokazati, da če za krivuljo $p_n$ z $\Delta_n b_0 \neq 0$ in $2\alpha \leq n$, izberemo faktorje $\lambda_i$ kot:

$$\lambda_i = \binom{2n}{n+2\alpha}^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j-\alpha} \binom{n}{j+\alpha}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

potem za $t_0 = 0$ in $t_1 = 1$ velja:

$$\frac{d^r}{dt^r} p_n(t)\bigg|_{t=t_0} = \frac{d^r}{dt^r} \tilde{p}_{n-1}(t)\bigg|_{t=t_0}, \quad 0 \leq r \leq \alpha - 1.$$

# Algoritem

- Začetni podatki: kontrolne točke $b_0, \ldots, b_n$ in ciljna stopnja $m$.
- Postopek:
  1. Izračun $c_i^{(I)}$ in $c_i^{(II)}$ za stopnjo $n$ do $n-1$.
  2. Izračun kombinacije $c_i$ z utežmi $\lambda_i$.
  3. Ponavljanje postopka za nižanje stopnje do $m$.
- Lastnosti algoritma:
  - Ohranja zveznost do reda $\alpha - 1$ v robnih točkah.
  - $L_2$-norma ostaja minimalna.

Primeri v Matlabu.