Nižanje stopnje Bézierjevih krivulj z metodo najmanjših kvadratov

Luka Polanič, Justin Raišp

Ljubljana, 2024

Motivacija

Podano imamo Bézierjevo krivuljo stopnje n:

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t), \quad t \in [0,1],$$

kjer so b_i kontrolne točke in $B_i^n(t)$ Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n.
Naš cilj je poiskati Bézierjevo krivuljo stopnje $m < n$

$$\tilde{p}_m(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i B_i^m(t), \quad t \in [0,1],$$

da je razdalja med krivuljama minimalna.

Metoda najmanjših kvadratov

Kontrolne točke c_i določimo tako, da minimiziramo L_2-normo med krivuljama p_n in $\tilde{p}_m$, pri čemer je L_2-norma definirana kot:

$$d_2(p_n, \tilde{p}_m) = \sqrt{\int_0^1 \|p_n(t) - \tilde{p}_m(t)\|^2 \, dt},$$

kjer je $\|p_n(t) - \tilde{p}_m(t)\|^2$ kvadrat evklidske razdalje med krivuljama.

Konstrukcija nižanja stopnje iz n na $n-1$.

Konstrukcije se bomo lotili induktivno. Če bi želeli zvišati stopnjo Bézierjeve krivulje, bi uporabili naslednjo zvezo:

$$b_i = \frac{i}{n} c_{i-1} + \frac{n-i}{n} c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Sedaj lahko na dva načina izrazimo zaporedje neznanih kontrolnih točk $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$. Dobimo dva sistema enačb, pri čemer bomo v obeh primerih zanemarili eno enačbo, saj bi bil sistem sicer predoločen.

- Zanemarimo zadnjo enačbo za $i = n$ in dobimo

$$c_i^{(I)} = \frac{1}{n-i}\left(nb_i - ic_{i-1}^{(I)}\right) \quad \text{za} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

  Dodatno upoštevamo, da je $c_{-1} = 0$.
- Pri drugi izražavi zanemarimo prvo enačbo, tj. za $i = 0$, in dobimo

$$c_{i-1}^{(II)} = \frac{1}{i}\left(nb_i - (n-i)c_i^{(II)}\right) \quad \text{za} \quad i = n, \ldots, 1.$$

Množici kontrolnih točk $\{c_i^{(I)}\}_{i=0}^{n-1}$ in $\{c_i^{(II)}\}_{i=0}^{n-1}$ predstavljata kontrolna poligona za dve različni Bézierjevi krivulji stopnje $n-1$. Označimo ju z $\tilde{p}_{n-1}^{(I)}$ in $\tilde{p}_{n-1}^{(II)}$.

Lastnosti krivulj $\tilde{p}_{n-1}^{(I)}$ in $\tilde{p}_{n-1}^{(II)}$

Krivulji $\tilde{p}_{n-1}^{(I)}$ in $\tilde{p}_{n-1}^{(II)}$ imata naslednji lastnosti:

- p_n in $\tilde{p}_{n-1}^{(I)}$ imata enaki vrednosti v $t = 0$,
- p_n in $\tilde{p}_{n-1}^{(II)}$ imata enaki vrednosti v $t = 1$.

Sedaj moramo poiskati še kontrolne točke $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$ končne Bézierjeve krivulje $\tilde{p}_{n-1}$. Za kontrolne točke vzamemo linearno kombinacijo točk, določenih z zgornjima izrazoma:

$$c_i = (1-\lambda_i)\cdot c_i^{(I)} + \lambda_i \cdot c_i^{(II)} \quad \text{za} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Z uvedbo faktorjev $\{\lambda_i \in \mathbb{R}\}$ prevedemo problem iskanja kontrolnih točk $\{c_i\}_i$ na problem računanja ustreznih faktorjev $\{\lambda_i\}_i$, za katere velja, da je $d_2(p_n, \tilde{p}_{n-1})$ minimalna.

Izbira uteži

Da se pokazati, da če za krivuljo p_n z $\Delta^n b_0 \neq 0$ in $2\alpha \leq n$, izberemo faktorje λ_i kot

$$\lambda_i = \binom{2n}{n+2\alpha}^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j-\alpha}\binom{n}{j+\alpha}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

potem za $t_0 = 0$ in $t_1 = 1$ velja:

$$\frac{d^r}{dt^r} p_n(t)\bigg|_{t=t_0} = \frac{d^r}{dt^r} \tilde{p}_{n-1}(t)\bigg|_{t=t_0}, \quad 0 \leq r \leq \alpha - 1.$$

Izbira uteži

Parameter	n	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$\alpha = 1$	3	0	$\frac{1}{2}$	1				
	4	0	$\frac{3}{14}$	$\frac{11}{14}$	1			
	5	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{12}$	1		
$\alpha = 2$	5	0	0	$\frac{1}{5}$	1	1		
	6	0	0	$\frac{5}{22}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{22}$	1	
	7	0	0	$\frac{5}{52}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{52}$	1	1

Velja:

- $\lambda_i = 1 - \lambda_{n-i-1}$
- $0 = \lambda_0 = \ldots = \lambda_{\alpha-1} < \lambda_\alpha < \ldots < \lambda_{n-\alpha-1} < \lambda_{n-\alpha} = \ldots = \lambda_{n-1} = 1$

Posplošitev znižanja stopnje

Doslej smo zniževali stopnjo le iz n na $n-1$. Sedaj želimo splošnejši algoritem za znižanje stopnje iz n do m, kjer $m < n$. Postopek je iterativen: na vsakem koraku zmanjšamo stopnjo krivulje za eno, dokler ne dosežemo želene stopnje. Ključne lastnosti:

- Nova krivulja in originalna krivulja se ujemata v $\alpha - 1$ prvih odvodih na robnih točkah.
- L^2-norma minimizira razdaljo med krivuljama.

Uporaba drugih norm, npr. d_∞, ne bi zagotovila minimizacije z iterativnim algoritmom.

Algoritem

Algorithm 1 Algoritem za znižanje stopnje Bézierjeve krivulje

Vhodni podatki: $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}, k, \alpha$
$c_0 = b_0,\ c_{n-1} = b_n$
$\lambda = \text{lambda}(n, \alpha)$
while $k > 0$ **do**
  for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
    $c_i^{(I)} = \frac{1}{n-i}\left(nb_i - ic_{i-1}^{(I)}\right)$
    $c_{n-i-1}^{(II)} = \frac{1}{n-i+1}\left(nb_{n-i+1} - (i-1)c_{n-i+1}^{(II)}\right)$
  end for
  for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
    $c_i = (1 - \lambda_i)c_i^{(I)} + \lambda_i c_i^{(II)}$
  end for
  $k = k - 1$
end while

Primeri v Matlabu.