

Nižanje stopnje Bézierjevih krivulj z metodo najmanjših kvadratov

Luka Polanič, Justin Raišp

Ljubljana, 2024

Podano imamo Bézierjevo krivuljo stopnje n :

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

kjer so b_i kontrolne točke in $B_i^n(t)$ Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n .
Naš cilj je poiskati Bézierjevo krivuljo stopnje $m < n$

$$\tilde{p}_m(t) = \sum_{i=0}^m c_i B_i^m(t), \quad t \in [0, 1],$$

da je razdalja med krivuljama minimalna.

Metoda najmanjših kvadratov

Kontrolne točke c_i določimo tako, da minimiziramo L_2 -normo med krivuljama p_n in \tilde{p}_m , pri čemer je L_2 -norma definirana kot:

$$d_2(p_n, \tilde{p}_m) = \sqrt{\int_0^1 \|p_n(t) - \tilde{p}_m(t)\|^2 dt},$$

kjer je $\|p_n(t) - \tilde{p}_m(t)\|^2$ kvadrat evklidske razdalje med krivuljama.

Konstrukcija nižanja stopnje iz n na $n - 1$.

Konstrukcije se bomo lotili induktivno. Če bi želeli zvišati stopnjo Bézierjeve krivulje, bi uporabili naslednjo zvezo:

$$b_i = \frac{i}{n}c_{i-1} + \frac{n-i}{n}c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Sedaj lahko na dva načina izrazimo zaporedje neznanih kontrolnih točk $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$. Dobimo dva sistema enačb, pri čemer bomo v obeh primerih zanemarili eno enačbo, saj bi bil sistem sicer predoločen.

- Zanemarimo zadnjo enačbo za $i = n$ in dobimo

$$c_i^{(I)} = \frac{1}{n-i} \left(nb_i - ic_{i-1}^{(I)} \right) \quad \text{za } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dodatno upoštevamo, da je $c_{-1} = 0$.

- Pri drugi izražavi zanemarimo prvo enačbo, tj. za $i = 0$, in dobimo

$$c_{i-1}^{(II)} = \frac{1}{i} \left(nb_i - (n-i)c_i^{(II)} \right) \quad \text{za } i = n, \dots, 1.$$

Množici kontrolnih točk $\{c_i^{(I)}\}_{i=0}^{n-1}$ in $\{c_i^{(II)}\}_{i=0}^{n-1}$ predstavljata kontrolna poligona za dve različni Bézierjevi krivulji stopnje $n-1$. Označimo ju z $\tilde{p}_{n-1}^{(I)}$ in $\tilde{p}_{n-1}^{(II)}$.

Lastnosti krivulj $\tilde{p}_{n-1}^{(I)}$ in $\tilde{p}_{n-1}^{(II)}$

Krivulji $\tilde{p}_{n-1}^{(I)}$ in $\tilde{p}_{n-1}^{(II)}$ imata naslednji lastnosti:

- p_n in $\tilde{p}_{n-1}^{(I)}$ imata enaki vrednosti v $t = 0$,
- p_n in $\tilde{p}_{n-1}^{(II)}$ imata enaki vrednosti v $t = 1$.

Sedaj moramo poiskati še kontrolne točke $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$ končne Bézierjeve krivulje \tilde{p}_{n-1} . Za kontrolne točke vzamemo linearno kombinacijo točk, določenih z zgornjima izrazoma:

$$c_i = (1 - \lambda_i) \cdot c_i^{(I)} + \lambda_i \cdot c_i^{(II)} \quad \text{za } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Z uvedbo faktorjev $\{\lambda_i \in \mathbb{R}\}$ prevedemo problem iskanja kontrolnih točk $\{c_i\}_i$ na problem računanja ustreznih faktorjev $\{\lambda_i\}_i$, za katere velja, da je $d_2(p_n, \tilde{p}_{n-1})$ minimalna.

Da se pokazati, da če za krivuljo p_n z $\Delta_n b_0 \neq 0$ in $2\alpha \leq n$, izberemo faktorje λ_i kot:

$$\lambda_i = \binom{2n}{n+2\alpha}^{-1} \cdot \sum_{j=0}^i \binom{n}{j-\alpha} \binom{n}{j+\alpha}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

potem za $t_0 = 0$ in $t_1 = 1$ velja:

$$\left. \frac{d^r}{dt^r} p_n(t) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d^r}{dt^r} \tilde{p}_{n-1}(t) \right|_{t=t_0}, \quad 0 \leq r \leq \alpha - 1.$$

Izbira uteži

Parameter	n	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$\alpha = 1$	3	0	$\frac{1}{2}$	1				
	4	0	$\frac{3}{14}$	$\frac{11}{14}$	1			
	5	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{12}$	1		
$\alpha = 2$	5	0	0	$\frac{1}{5}$	1	1		
	6	0	0	$\frac{5}{22}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{22}$	1	
	7	0	0	$\frac{5}{52}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{52}$	1	1

Posplošitev znižanja stopnje

Doslej smo zniževali stopnjo le iz n na $n - 1$. Sedaj želimo splošnejši algoritem za znižanje stopnje iz n do m , kjer $m < n$. Postopek je iterativen: na vsakem koraku zmanjšamo stopnjo krivulje za eno, dokler ne dosežemo želene stopnje. Ključne lastnosti:

- Nova krivulja in originalna krivulja se ujemata v $\alpha - 1$ prvih odvodih na robnih točkah.
- L^2 -norma minimizira razdaljo med krivuljama.

Uporaba drugih norm, npr. d_∞ , ne bi zagotovila minimizacije z iterativnim algoritmom.

Algoritem

Vhodni podatki: $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}, k, \alpha$

- $c_0 = b_0, \quad c_{n-1} = b_n$
- $\lambda = \text{lambda}(n, \alpha)$

Postopek:

① **While** $k > 0$ **do**

① **For** $i = 1, \dots, n - 2$ **do**

$$c_i^{(1)} = \frac{1}{n-i} \left(nb_i - ic_{i-1}^{(1)} \right)$$

$$c_{n-i-1}^{(2)} = \frac{1}{n-i+1} \left(nb_{n-i+1} - (i-1)c_{n-i+1}^{(2)} \right)$$

② **For** $i = 1, \dots, n - 2$ **do**

$$c_i = (1 - \lambda_i)c_i^{(1)} + \lambda_i c_i^{(2)}$$

③ $k = k - 1$

Primeri v Matlabu.