Nizanje stopnje Bézierjevih krivulj z metodo najmanjših kvadratov

Luka Polanič, Justin Raišp

Ljubljana, 2024

Uvod

- Obdelujemo problem zniževanja stopnje Bézierjevih krivulj iz n na m, kjer $m < n$.
- Cilj je minimizacija L_2-norme med originalno in aproksimirano krivuljo.
- V nalogi uporabimo znanje o višanju stopnje Bézierjevih krivulj za razvoj postopka zniževanja.

Motivacija

- Bézierjeve krivulje se pogosto uporabljajo v računalniški grafiki in CAD sistemih.
- Nižja stopnja krivulje omogoča:
  - Optimizacijo shranjevanja podatkov.
  - Učinkovitejšo obdelavo in izris.
- Problem formuliramo kot minimizacijo L_2-norme:

$$d_2(p_n, q_m) = \sqrt{\int_0^1 \|p_n(t) - q_m(t)\|^2 dt}.$$

Definicije

- Bézierjeva krivulja stopnje n:

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

kjer so b_i kontrolne točke, $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ pa Bernsteinovi bazni polinomi.

- Bézierjeva krivulja stopnje $m < n$:

$$q_m(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i B_i^m(t), \quad t \in [0, 1].$$

- Cilj: Določiti c_i, da je L_2-razdalja minimalna.

Osnovni izrek

Izrek 3.2

Naj bo p_n Bézierjeva krivulja stopnje n z $\Delta^n b_0 \neq 0$ in $2\alpha \leq n$. Faktorji λ_i so podani kot:

$$\lambda_i = \left(\frac{2n}{n+2\alpha}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j-\alpha}\binom{n}{j+\alpha},$$

kontrolne točke c_i pa izračunamo z:

$$c_i = (1-\lambda_i)c_i^{(I)} + \lambda_i c_i^{(II)}.$$

Tukaj $c_i^{(I)}$ in $c_i^{(II)}$ določimo z enačbama (5) in (6).

Algoritem

- Začetni podatki: kontrolne točke $b_0, \ldots, b_n$ in ciljna stopnja m.
- Postopek:
  1. Izračun $c_i^{(I)}$ in $c_i^{(II)}$ za stopnjo n do $n-1$.
  2. Izračun kombinacije c_i z utežmi λ_i.
  3. Ponavljanje postopka za nižanje stopnje do m.
- Lastnosti algoritma:
  - Ohranja zveznost do reda $\alpha - 1$ v robnih točkah.
  - L_2-norma ostaja minimalna.