群論

陽明交大應數系營隊

在數學中，群論 (Group theory) 研究名為「群」的代數構。 群論在許多的領域都有很重要的應用。像是，倍立方、化圓為方、三等分角，五次多項式無法解的原因都可以用群論來解釋。 另外，像是標準粒子模型、量子力學 (李群)、晶體結構、密碼學等領域也有很多群論的應用。

1. 群 (Group)

Definition 1.1: $\langle G, * \rangle$是一個集合 G 與一個二元運算 $* : G \times G \mapsto G$，滿足以下條件：

$\mathcal{G}_1$: 對於所有的$a, b, c \in G$，

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \textbf{結合律}$$

$\mathcal{G}_2$: 存在一個元素 $e \in G$，使得對於所有的 $a \in G$，

$$a * e = e * a = a \quad \textbf{單位元素}$$

$\mathcal{G}_3$: 對於每一個 $a \in G$，存在一個元素 $a^{-1} \in G$，使得

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \quad \textbf{反元素}$$

Example: 我們來看一些例子：

- $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$、$\langle \mathbb{Q}, + \rangle$、$\langle \mathbb{R}, + \rangle$
- $\langle \mathbb{Q}^+, \times \rangle$
- $C_3 = \{e, a, b\}$ 與下面的運算是一個群。

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Remark: 有時候我們會省略二元運算$*$，以G表示一個群。

Definition 1.2: 讓G是一個群，定義$|G|$是G的元素個數，稱為G的 **order**。

Definition 1.3: 一個群G如果滿足交換率 i.e. 對於所有的$a, b \in G$，

$$a * b = b * a$$

，則稱G是一個**交換群**(Abelian groups)。

Example:
- C_3的 order 是3。
- $\mathbb{Z}$ 是一個交換群。
- 可逆矩陣的集合與矩陣乘法是一個群，但不是交換群。

1.1. 群的性質

Theorem 1.1: 如果G是一個群，那**消去率**成立，即對於所有的$a, b, c \in G$，

$$\begin{aligned} a * b = a * c \Rightarrow b = c \\ b * a = c * a \Rightarrow b = c \end{aligned}$$

Proof: 讓G是一個群，$a, b, c \in G$。假設$a * b = a * c$，因為$a \in G$，所以a的反元素a^{-1}存在，且$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$。

$$\begin{aligned} & a * b = a * c \\ \Rightarrow\ & a^{-1} * a * b = a^{-1} * a * c \\ \Rightarrow\ & e * b = e * a \end{aligned}$$

■

Theorem 1.2: 群G的單位元素e唯一。

Proof: 假設存在第二個單位元素e_2，滿足$e_2 * a = a * e_2 = a\ \forall a \in G$，因為$e \in G$，所以$e_2 * e = e * e$，根據消去律$e_2 = e$。 ■

Theorem 1.3: 讓G是一個群，$ab \in G$，那麼

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Proof: 我們直接相乘

$$\begin{aligned} (ab)b^{-1}a^{-1} &= a(bb^{-1})a^{-1} \quad \text{結合律} \\ &= aea^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

根據反元素的定義，$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ 我們只證明了$(ab)^{-1}b^{-1}a^{-1} = e$，但是我們也需要證明$b^{-1}a^{-1}(ab)^{-1} = e$也是成立的。 ■

2. 置換群(Permutation Group)

我們接下來討論一個特殊的群，置換群。考慮一個集合$A = \{1,2,3,4,5\}$，我們可以將A的元素重新排列成$A = \{3,1,5,2,4\}$。我們可以將這個排列表示成一個函數$\varphi : A \to A$，這個函數將1映射到3，2映射到1，以此類推。我們可以將這個排列表示成一個表格，如 Figure 1 所示。 我們稱這樣的函數為一個**置換**。但是，Figure 2 的函數不是一個置換，因為4沒有被任何一個元素映射到。

$$\begin{aligned} 1 &\to 3 \\ 2 &\to 4 \\ 3 &\to 5 \\ 4 &\to 2 \\ 5 &\to 1 \end{aligned}$$

Figure 1: 一個置換

$$\begin{aligned} 1 &\to 2 \\ 2 &\to 3 \\ 3 &\to 2 \\ 4 &\to 5 \\ 5 &\to 1 \end{aligned}$$

Figure 2: 不是置換

Definition 2.1: 一個A的是**置換**是一個一一對應的函數 $\varphi : A \to A$。 (one-one and onto)

我們現在給定兩個置換 τ 和 σ ，我們定義他們的合成 $\sigma \circ \tau$，對於所有的 $x \in A$，

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$$
$$A \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{\sigma} A$$

因為 τ 和 σ 是一一對應的函數，所以 $\sigma \circ \tau$ 也是一一對應的函數。所以 $\sigma \circ \tau$ 是一個置換。

Example: 對於上的 σ 我們可以表示成，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 τ 為，

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

我們可以計算 $\sigma \circ \tau$，

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

所以像是 $\sigma \circ \tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(2) = 4$

2.1. 循環置換 (Cyclc)

一個置換除了可以用上述的方法表示，我們還可以用**循環**的方式表示。我們來看下面的例子，定義一個置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

我們觀察一下 σ 的作用，可以發現 σ 將 $1 \to 3 \to 5 \to 1$，$2 \to 4 \to 2$，所以我們可以將 σ 表示成一個循環 $\sigma = (1,3,5)(2,4)$。

Figure 3: 一個置換的循環

透過循環置換，我們可以很容易的表示一個置換，並且可以很容易的計算該置換的反元素。例如，對於上面的例子，$\sigma^{-1} = (5,3,1)(4,2)$。

Remark: 如果一個置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3,4,5)$$

為了簡化，我們有時候會省略一個元素的循環，寫成 $\sigma = (3,4,5)$。

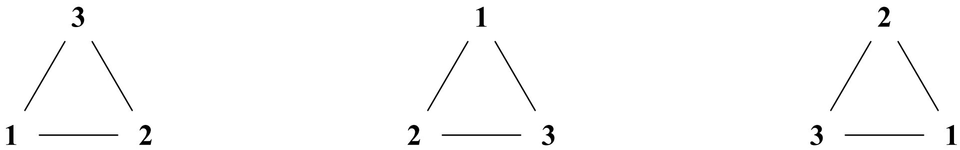
Definition 2.2: 一個集合A的所有置換構成一個群，我們稱這個群為A的**置換群**，記作S_A。

Remark: S_n 表示 n 個元素的置換群。 S_n的 order 是 $n!$。

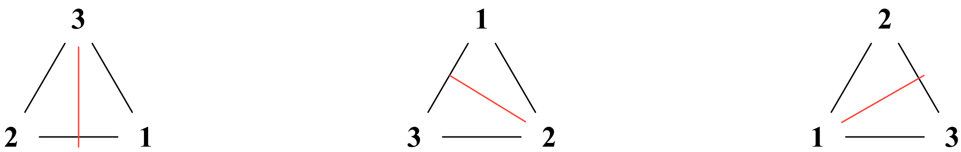
3. 空間對稱群(Symmetry Groups)

接下來我們考慮一種特殊的置換群，稱為**空間對稱群**。我們考慮一個正三角形，將正三角形的頂點邊繼承$1,2,3$，我們來討論他有那些對稱性。

我們可以繼續枚舉所有三角形的對稱操作，我們可以得到以下的置換:



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$ $\quad\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3) = \rho_1$ $\quad\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (3,2,1) = \rho_2$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2)(3) = \tau_1$ $\quad\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)(2) = \tau_2$ $\quad\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (3,2)(1) = \tau_3$

把上述的對稱置換收集起來，並用上面提到的$\circ$當作二運算，我們可以得到一個**空間對稱群**，稱為正三角形的對稱群D_3。

同樣的，我們可以考慮正方形的對稱群D_4，正方形的對稱群有8個元素，我們可以將D_4寫下來：

$$D_4 = \{e, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$

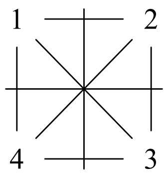


Figure 10: 正方形的對稱性

其中$\tau_1 ... \tau_4$是以 Figure 10 中的軸鏡射為軸的對稱操作，$\rho_1 ... \rho_3$是以對角線為軸的對稱操作。我們可以把他們用循環寫下來：

$$\begin{aligned}
e &= (1)(2)(3)(4) \\
\rho_1 &= (1,2,3,4) \\
\rho_2 &= (1,3)(2,4) \\
\rho_3 &= (1,4,3,2) \\
\tau_1 &= (2,4) \\
\tau_2 &= (1,3) \\
\tau_3 &= (1,2)(4,3) \\
\tau_4 &= (1,4)(2,3)
\end{aligned}$$

3.1. 計算對稱群的 order

我們上面提到了正三角形的對稱群D_3和正方形的對稱群D_4，並列出其中的一些元素，那我們要怎麼確定這些對稱群的 order 呢？我們下面來討論一個方法。

1. 先找到圖形的不動點c
2. 畫一條通過不動點的直線。
3. 假設有m個對稱稱使得這條線不動，而條線在對稱性下會被打到n個不同的位子。
4. 那麼這個對稱群的 order 就是$n \times m$。

下一節會證明這個方法是正確的。

4. 群作用(Group Action)

Definition 4.1: 一個群$\langle G, * \rangle$對一個集合A的**作用**是一個映射 $\varphi : G \times A \to A$，滿足以下條件：
1. 對於所有 $a \in A \quad \varphi(e, a) = a$
2. 對於所有 $a \in A$ 和 $g, h \in G$，$\varphi(g * h, a) = \varphi(g, \varphi(h, a))$

在這個情況下，我們稱A是一個G**-set**。

為了簡化，我們會省略運算函數，寫成ga代表$\varphi(g, a)$。 所以上述的條件可以寫成
1. 對於所有 $a \in A \quad ea = a$
2. 對於所有 $a \in A$ 和 $g, h \in G$，$(gh)a = g(ha)$

Theorem 4.1: 讓X是一個G**-set**。如果$gx_1 = gx_2$，那$x_1 = x_2$

Proof: 假設 $gx_1 = gx_2$，那麼 $g^{-1}gx_1 = g^{-1}gx_2$，所以 $ex_1 = ex_2$，所以 $x_1 = x_2$。 ■

Remark: 如果$x \neq y$，那$gx \neq gy$

4.1. 不動點 (Fixed point)、穩定子群 (stabilizers subgroup)、軌道 (Orbits)

Theorem 4.2: 讓X是一個G-**set**，我們定義一個在X上的關係$\sim$，對於所有的$x, y \in X$，$x \sim y$當且僅當存在$g \in G$，使得$gx = y$。這個關係是一個等價關係。

Proof:
自反性：對於所有的$x \in X$，$x \sim x$，因為$ex = x$。
對稱性：如果$x \sim y$，那麼存在$g \in G$，使得$gx = y$，所以$g^{-1}y = x$，所以$y \sim x$。
傳遞性：如果$x \sim y$且$y \sim z$，那麼存在$g, h \in G$，使得$gx = y$且$hy = z$，所以$hgx = z$，所以$x \sim z$。 ■

Definition 4.2: 讓X是一個G-**set**，每一個在 Theorem 4.2 下的等價類稱為一個**軌道**。如果$x \in X$，包含x的分割是x的軌道，記作G_x。

Remark: 讓 X 是一個 G-**set**，$x \in X$，那麼 x 的軌道 $G_x = \{gx \,|\, g \in G\}$。

Definition 4.3: 讓X是一個G-**set**，讓$x \in X$，$g \in G$。我們定義；

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$$
$$X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$$

$\mathrm{Stab}_G(x)$稱為x的**穩定子群**，X^g稱為g的**不動點**。

Theorem 4.3 (軌道-穩定子定理 (Orbit-Stabilizer Theorem)): 讓G是一個有限群，讓 X 是一個 G-**set**，$x \in X$，那麼 $|G| = |G_x||\mathrm{Stab}_G(x)|$。

Proof: 定義$f : G \to G_x$，$f(g) = gx$。我們證明每一個在G_x裡的元素都被打到$|\mathrm{Stab}_G(x)|$這麼多次。
給定一個$y \in G_x$，那麼存在$h \in G$使得$y = hx$。

我們先證明這個引理: $f(g) = y \iff h^{-1}g \in \mathrm{Stab}_G(x)$。
$\Rightarrow$：如果$f(g) = y$，那麼$gx = hx$，所以$h^{-1}gx = x$，所以$h^{-1}g \in \mathrm{Stab}_G(x)$。
$\Leftarrow$：如果$h^{-1}g \in \mathrm{Stab}_G(x)$，那麼$h^{-1}gx = x$，所以$gx = hx$，所以$f(g) = y$。

接著我們來討論有多少 $g \in G$ 使得 $h^{-1}g \in \mathrm{Stab}_G(x)$。

$$
\begin{aligned}
h^{-1}g \in \mathrm{Stab}_G(x) &\iff \exists \tilde{g} \in \mathrm{Stab}_G(x)\ s.t.\ h^{-1}g = \tilde{g} \\
&\iff \exists \tilde{g} \in \mathrm{Stab}_G(x)\ s.t.\ g = h\tilde{g} \\
&\iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \mathrm{Stab}_G(x)\}
\end{aligned}
$$

所以，$f(g) = y \iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \mathrm{Stab}_G(x)\}$。因此，每個$y \in G_x$ 都 $|\mathrm{Stab}_G(x)|$ 個 $g \in G$ 使得 $f(g) = y$。
所以，$|G| = |G_x||\mathrm{Stab}_G(x)|$。

■

4.2. 伯恩賽德引理 (Burnside's Lemma)

Theorem 4.4 (伯恩賽德引理): 讓G是一個有限群，讓X是一個G**-set**。讓r是X的軌道數，那麼

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

Proof: (雙重計數) 我們考慮序組(g, x)，其中$gx = x$。假設這樣的序組有N個。 給定一個$g \in G$，我們計算(g, x)的數量，這個數量是$|X^g|$。所以

$$N = \sum_{g \in G} |X^g| \tag{1}$$

另一方面，給定一個$x \in X$，我們計算(g, x)的數量，這個數量是$|\mathrm{Stab}_G(x)|$。所以

$$N = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)| \tag{2}$$

根據 **軌道穩定子定理** Thm 4.3，$|\mathrm{Stab}_G(x)||G_x| = |G|$，所以，

$$N = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G_x|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G_x|} \tag{3}$$

對於在相同軌道的元素，$|G_x|$是相同的。讓$\mathcal{O}$是一個軌道，我們有

$$\sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|G_x|} = \sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|\mathcal{O}|} = 1 \tag{4}$$

用 **(3)** 代入 **(2)**，我們得到

$$N = |G| \cdot (\text{軌道的數量}) = |G| \cdot r \tag{5}$$

因此， 結合 **(1)** 和 **(4)**，我們得到

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X^g| \tag{6}$$

■

Example: 用4個顏色對一個正三角形的三個邊進行著色，有幾種不同的著色方法？(兩種著色方式被認為是相同的，如果他們可以通過旋轉、鏡射相互變換)

我們讓$G = D_3$是三角型的對稱群，X是所有著色的結果($|X| = 4^3$)，所以我們要求X在G下有幾個軌道。根據前的討論，我們知道$|G| = 6$，然後我們計算不動點的個數：

$$|X^{\rho_0}| = 4^3$$
$$|X^{\rho_1}| = 4$$
$$|X^{\rho_2}| = 4$$
$$|X^{\tau_1}| = 4^2$$
$$|X^{\tau_2}| = 4^2$$
$$|X^{\tau_3}| = 4^2$$

根據**伯恩賽德引理**，我們有

$$\begin{aligned} 6r &= 4^3 + 4 + 4 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 120 \\ r &= 20 \end{aligned}$$

所以正三角形的相異著色方法有20種。

4.3. 著色多項式

我們考慮我們有n個顏色，幫一個有對稱性的圖形上色，我們假設在對稱性下有r種上色方式。讓X是所有上色方法的集合，讓G是該圖形的對稱群，根據博恩賽德引理，我們有

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

其中X^g是在g下的不動點的集合。我們觀察一下$g \in G$，我們知道g可以被寫成循環的形式，像是下面這樣:

$$g = \underbrace{(1, 2, 3)(5, 4)...(\#, \#)}_{m_g}$$

所以g種共有m_g個循環。我們發現在這種情況下要在g下不動的著色方法必須滿足「每個循環內的顏色都一樣」，所以$|X^g| = n^{m_g}$ 所以我們得到，

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} n^{m_g}$$

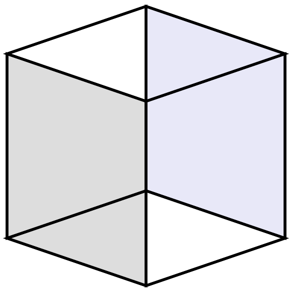
Example: 我們考慮有n個顏色，對一個正四邊形的頂點上色，我們要求在對稱性下有幾種不同的著色方法。 我們讓$G = D_4$是正四邊形的對稱群，X是所有著色的結果($|X| = n^4$)，所以我們要求X在G下有幾個軌道。根據前的討論，我們知道$|G| = 8$，然後我們計算不動點的個數：

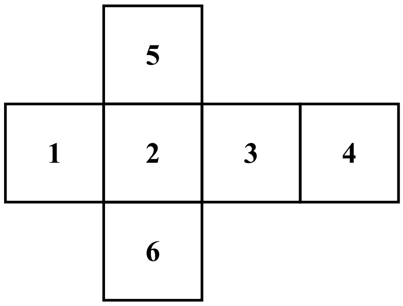
- 單位變換 $m_g = 4$
- 2個$m_g = 1$的旋轉($90°, 270°$)，e.x. $g = (1, 2, 3, 4)$
- 1個$m_g = 2$的旋轉($180°$)，e.x. $g = (1, 2)(3, 4)$
- 2個$m_g = 3$的鏡射(對角線的鏡射)，e.x. $g = (1)(3)(2, 4)$
- 2個$m_g = 2$的鏡射(中線的鏡射)，e.x. $g = (1, 3)(2, 4)$

所以我們有

$$r = \frac{1}{8}(n^4 + 2n + 2n^2 + 2n^3 + 2n^4)$$
$$r = \frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n)$$

Example: 我們現在有n個顏色，幫一個正六面體上色，可以通過旋轉變換得到視為相同的著色方式。總共有多少種不同的著色方式？





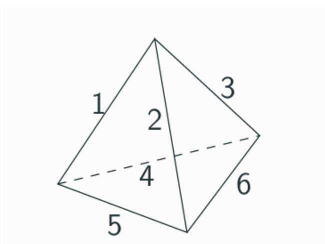
讓D是正六面體的對稱群，我們根據之前的討論，我們知道$|D| = 24$，我們討論裡面的變換：

1. 單位變換:$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$
2. 固定兩對面然會旋轉$90°, 270°$，如:$(1,2,3,4)(5)(6)$，共 6 個。
3. 固定兩對面然會旋轉$180°$，如:$(1,3)(2,4)(5)(6)$，共 3 個。
4. 固定兩對邊旋轉$180°$，如:$(1,5)(3,6)(2,4)$，共 6 個。
5. 固定兩個對頂點旋轉$120°, 240°$，如:$(1,5,4)(2,3,6)$，共 8 個

所以我們有

$$r = \frac{1}{24}(n^6 + 6n^3 + 3n^4 + 6n^3 + 8n^2)$$
$$r = \frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2)$$

Example: 在旋轉的對稱姓下，用n個顏色對一個正四面體的邊上色，總共有多少種不同的著色方式？



我們讓G是正四面體的對稱群，我們通過軌道-穩定子定理，我們可以得到$|G| = 12$ 我們討論裡面的對置換：

- 單位變換:$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$
- 8個固定一面的旋轉:$(1,2,3)(4,5,6)$
- 3個固定兩邊的旋轉:$(1)(6)(2,4)(5,3)$

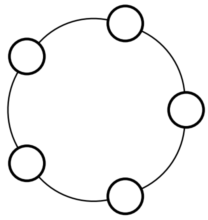
所以我們有

$$r = \frac{1}{12}(n^6 + 8n^2 + 3n^4)$$

4.4. 練習

Exercise I: 對於正n邊形的對稱群D_n，$|D_n|$是多少?

Exercise II: 有n個不同顏色的珠子，我們要把這些珠子串成一串5個珠子的項鍊，可以通過旋轉變換得到視為相同的項鍊。總共有多少種不同的項鍊？



Exercise III: 在旋轉的對稱性下，用n個顏色對一個正四面體的**面**上色，總共有多少種不同的著色方式？

Exercise IV: 一個九宮格的棋盤，我們要用n個不同的顏色對這個棋盤進行著色，可以通過旋轉，鏡射變換得到視為相同的著色方式。總共有多少種不同的著色方式？

1	2	3
4	5	6
7	8	9