

# 抽象代數

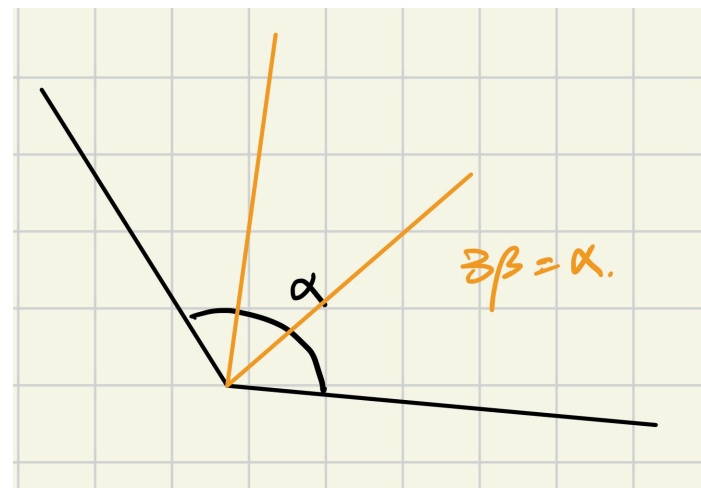
## 群論

陽明交通大學應數系營隊

群(Group)是一個集合，並且配上一個良好的二元運算，而群論(Group Theory)是一門研究群這種結構的數學分支。群論在許多領域上有著廣泛的應用，以下介紹一些應用。

# 群論的應用

倍立方、化圓為方、三等分角等，尺規作圖問題。



## 群論的應用

我們都知道一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的解為

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

但是對於一元五次方程  $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ，可以用群論證明，我們無法用根式解析解來表示。

# 群論的應用

除了數學上的應用外，在其他領域也有著廣泛的應用，例如

- 密碼學 (RSA 加密算法)
- 標準粒子模型中的對稱性

# 群論的應用

除了數學上的應用外，在其他領域也有著廣泛的應用，例如

- 密碼學 (RSA 加密算法)
- 標準粒子模型中的對稱性

# 粒子物理標準模型



群

---

Group

**Definition 1.1:**  $\langle G, * \rangle$  是一個集合  $G$  與一個二元運算  $* : G \times G \mapsto G$ ，滿足以下條件：

$\mathcal{G}_1$ : 對於所有的  $a, b, c \in G$ ，

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \text{結合律}$$

$\mathcal{G}_2$ : 存在一個元素  $e \in G$ ，使得對於所有的  $a \in G$ ，

$$a * e = e * a = a \quad \text{單位元素}$$

$\mathcal{G}_3$ : 對於每一個  $a \in G$ ，存在一個元素  $a^{-1} \in G$ ，使得

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \quad \text{反元素}$$



Example:

- 整數集合  $\mathbb{Z}$  與加法運算  $+$  構成一個群。  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$   
單位元素為  $0$ ，反元素為  $-a$ 。
- 整數集合  $\mathbb{Z}$  與乘法運算  $*$  不是一個群。  
乘法在整數裡沒有反元素。
- $\langle \mathbb{Q}, + \rangle, \langle \mathbb{R}, + \rangle$  是群。
- $C_3 = \{e, a, b\}$  與下面的運算是一個群。

$*$	$e$	$a$	$b$
$e$	$e$	$a$	$b$
$a$	$a$	$b$	$e$
$b$	$b$	$e$	$a$

$+$	$0$	$1$	$2$
$0$	$0$	$1$	$2$
$1$	$1$	$2$	$0$
$2$	$2$	$0$	$1$

- 3 的同餘加法群  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  與加法運算  $+$  是一個群。

**Definition 1.2:** 讓 $G$ 是一個群，定義 $|G|$ 是 $G$ 的元素個數，稱為 $G$ 的 **order**。

**Definition 1.3:** 一個群 $G$ 如果滿足交換率 i.e. 對於所有的 $a, b \in G$ ，

$$a * b = b * a$$

，則稱 $G$ 是一個**交換群**(Abelian groups)。

**Definition 1.2:** 讓  $G$  是一個群，定義  $|G|$  是  $G$  的元素個數，稱為  $G$  的 **order**。

**Definition 1.3:** 一個群  $G$  如果滿足交換率 i.e. 對於所有的  $a, b \in G$ ，

$$a * b = b * a$$

，則稱  $G$  是一個**交換群**(Abelian groups)。

Example:

- 整數集合  $\mathbb{Z}$  與加法運算  $+$  是一個交換群。
- $C_3 = \{e, a, b\}$  的 order 為 3。
- 可逆矩陣的集合與矩陣乘法是一個群，但不是交換群。

**Theorem 1.4:** 如果 $G$ 是一個群，那消去率成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

**Theorem 1.4:** 如果 $G$ 是一個群，那**消去率**成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

*Proof:* 讓 $G$ 是一個群， $a, b, c \in G$ 。假設 $a * b = a * c$ 。

$$a * b = a * c$$

$$\Rightarrow b = c$$



**Theorem 1.4:** 如果 $G$ 是一個群，那消去率成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

*Proof:* 讓 $G$ 是一個群， $a, b, c \in G$ 。假設 $a * b = a * c$ 。因為 $a \in G$ ，所以 $a$ 的反元素 $a^{-1}$ 存在，且 $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ 。

$$a * b = a * c$$

$$\Rightarrow a^{-1} * a * b = a^{-1} * a * c$$

$$\Rightarrow b = c$$



**Theorem 1.4:** 如果 $G$ 是一個群，那消去率成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

*Proof:* 讓 $G$ 是一個群， $a, b, c \in G$ 。假設 $a * b = a * c$ 。因為 $a \in G$ ，所以 $a$ 的反元素 $a^{-1}$ 存在，且 $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ 。

$$\begin{aligned} a * b &= a * c \\ \Rightarrow a^{-1} * a * b &= a^{-1} * a * c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = c$$



**Theorem 1.4:** 如果 $G$ 是一個群，那消去率成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$ ，

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

*Proof:* 讓 $G$ 是一個群， $a, b, c \in G$ 。假設 $a * b = a * c$ 。因為 $a \in G$ ，所以 $a$ 的反元素 $a^{-1}$ 存在，且 $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ 。

$$\begin{aligned} a * b &= a * c \\ \Rightarrow a^{-1} * a * b &= a^{-1} * a * c \\ \Rightarrow e * b &= e * c \\ \Rightarrow b &= c \end{aligned}$$





讓  $x, y \in \mathbb{Z}$  , 假設  $3 + x = 3 + y$  , 那麼  $x = y$

讓  $x, y \in \mathbb{Z}$ ，假設  $3 + x = 3 + y$ ，那麼  $x = y$

讓  $A, B, C$  是  $n \times n$  的矩陣，如果  $AB = AC$ ，那麼  $B = C$ ？

讓  $x, y \in \mathbb{Z}$ ，假設  $3 + x = 3 + y$ ，那麼  $x = y$

讓  $A, B, C$  是  $n \times n$  的矩陣，如果  $AB = AC$ ，那麼  ~~$B = C$~~ ？

讓  $x, y \in \mathbb{Z}$ ，假設  $3 + x = 3 + y$ ，那麼  $x = y$

讓  $A, B, C$  是  $n \times n$  的矩陣，如果  $AB = AC$ ，那麼  ~~$B = C$~~ ？

讓  $A, B, C$  是  $n \times n$  的可逆矩陣，如果  $BA = CA$ ，那麼  $B = C$

讓  $x, y \in \mathbb{Z}$ ，假設  $3 + x = 3 + y$ ，那麼  $x = y$

讓  $A, B, C$  是  $n \times n$  的矩陣，如果  $AB = AC$ ，那麼  ~~$B = C$~~ ？

讓  $A, B, C$  是  $n \times n$  的**可逆矩陣**，如果  $BA = CA$ ，那麼  $B = C$

通過消去率我們可以證明反元素是唯一的。

**Theorem 1.5:** 群 $G$ 的單位元素 $e$ 唯一。

**Theorem 1.5:** 群 $G$ 的單位元素 $e$ 唯一。

*Proof:* 假設存在第二個單位元素 $e_2$ ，滿足對於所有 $a \in G$

$$e_2 * a = a * e_2 = a$$

因為 $e \in G$ ，所以

$$e_2 * a = a$$



**Theorem 1.5:** 群 $G$ 的單位元素 $e$ 唯一。

*Proof:* 假設存在第二個單位元素 $e_2$ ，滿足對於所有 $a \in G$

$$e_2 * a = a * e_2 = a$$

因為 $e \in G$ ，所以

$$e_2 * e = e$$

■

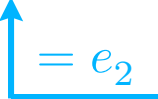


**Theorem 1.5:** 群 $G$ 的單位元素 $e$ 唯一。

*Proof:* 假設存在第二個單位元素 $e_2$ ，滿足對於所有 $a \in G$

$$e_2 * a = a * e_2 = a$$

因為 $e \in G$ ，所以

$$e_2 * e = e$$


$= e_2$



**Theorem 1.5:** 群 $G$ 的單位元素 $e$ 唯一。

*Proof:* 假設存在第二個單位元素 $e_2$ ，滿足對於所有 $a \in G$

$$e_2 * a = a * e_2 = a$$

因為 $e \in G$ ，所以

$$e_2 * e = e$$

我們得到 $e_2 = e$

$$= e_2$$



**Theorem 1.6:** 讓  $G$  是一個群， $ab \in G$ ，那麼

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

我們有時候會省略運算符號，寫成  $ab$  代表  $a * b$ 。

**Theorem 1.6:** 讓  $G$  是一個群， $ab \in G$ ，那麼

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

*Proof:* 我們直接相乘

$$\begin{aligned}(ab)b^{-1}a^{-1} &= a(bb^{-1})a^{-1} \\ &= aea^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= e\end{aligned}$$

根據反元素的定義， $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$  ■

我們只證明了  $(ab)b^{-1}a^{-1} = e$ ，但是  $b^{-1}a^{-1}(ab) = e$  也是成立的。

置換群

---

Permutation Group

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$\downarrow \sigma$  排列

$$A = \{3, 1, 5, 2, 4\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$\downarrow \sigma$  排列

$$A = \{3, 1, 5, 2, 4\}$$

$$1 \rightarrow 3$$

$$2 \rightarrow 1$$

$$3 \rightarrow 5$$

$$4 \rightarrow 2$$

$$5 \rightarrow 4$$

Figure 3:  $\sigma$



**Definition 2.1:** 一個  $A$  的置換是一個一一對應的函數  $\varphi : A \rightarrow A$ 。(one-one and onto)

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 4 \\ 3 &\rightarrow 5 \\ 4 &\rightarrow 2 \\ 5 &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Figure 4: 一個置換  $\sigma$

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 2 \\ 2 &\rightarrow 3 \\ 3 &\rightarrow 2 \\ 4 &\rightarrow 5 \\ 5 &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Figure 5: 不是置換

**Definition:** 讓 $\sigma$ 和 $\tau$ 是兩個置換，定義 $\sigma$ 和 $\tau$ 的**合成**是一個新的置換 $\sigma \circ \tau$ ，使得對於所有的 $a \in A$ ，

$$(\sigma \circ \tau)(a) = \sigma(\tau(a))$$

**Definition:** 讓 $\sigma$ 和 $\tau$ 是兩個置換，定義 $\sigma$ 和 $\tau$ 的**合成**是一個新的置換 $\sigma \circ \tau$ ，使得對於所有的 $a \in A$ ，

$$(\sigma \circ \tau)(a) = \sigma(\tau(a))$$

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$$

$$A \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{\sigma} A$$

因為 $\sigma$ 和 $\tau$ 都是一一對應的函數，所以 $\sigma \circ \tau$ 也是一一對應的函數。  
所以  $\sigma \circ \tau$  是一個置換。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

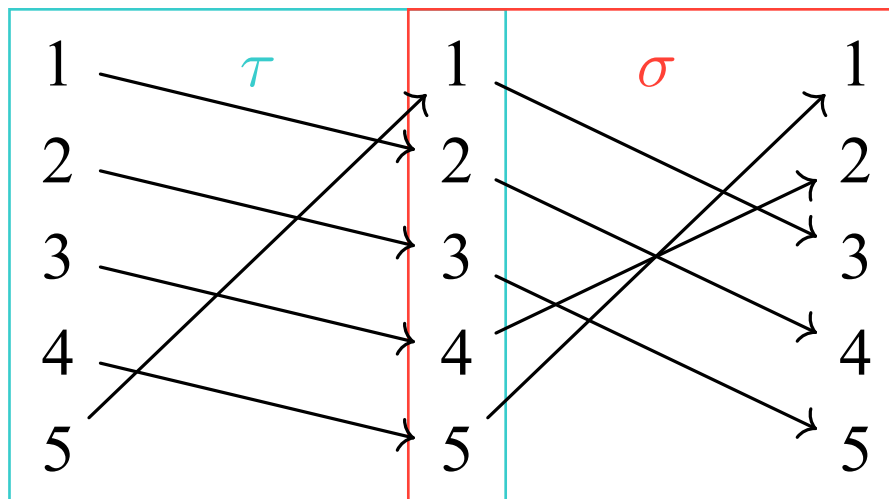
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

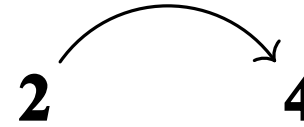
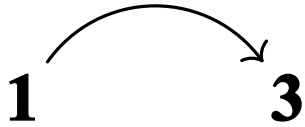
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



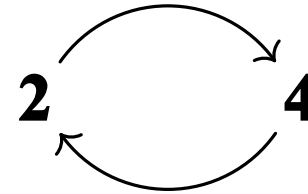
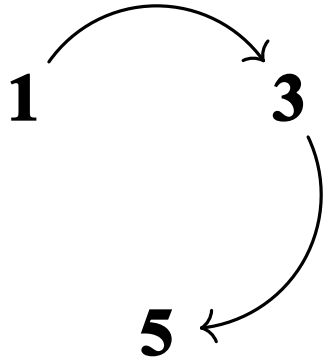
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

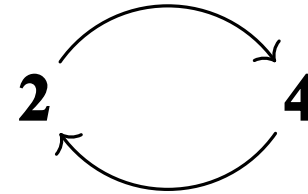
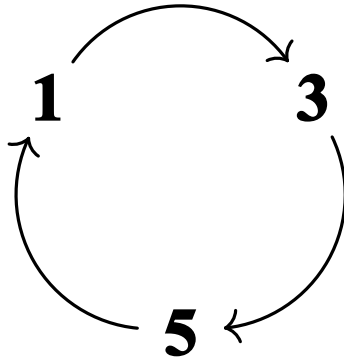




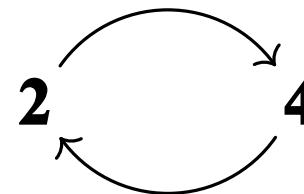
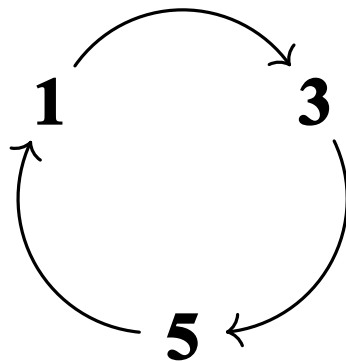
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\sigma = (1, 3, 5)(2, 4)$$

## 循環表示法(Cycle)

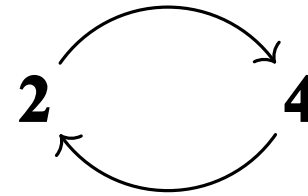
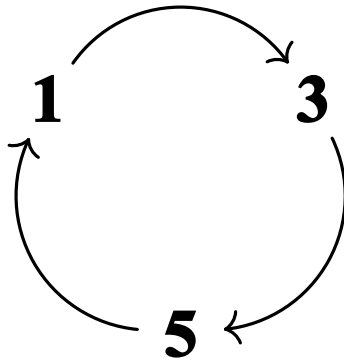
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3, 5)(2, 4) = (3, 5, 1)(4, 2)$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3, 4, 5) = (3, 4, 5, 1, 2)$$

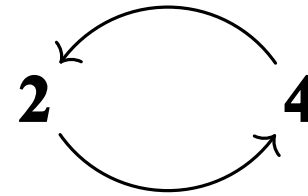
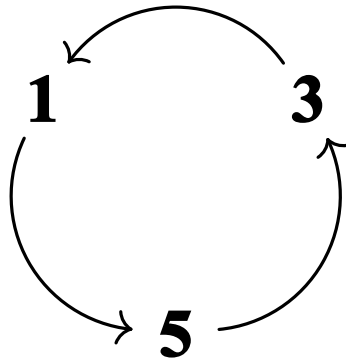
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (3, 4, 5)(1)(2) = (3, 4, 5)$$

$$\sigma = (1, 3, 5)(2, 4)$$

$$\sigma = (1, 3, 5)(2, 4)$$



$$\sigma = (1, 3, 5)(2, 4)$$



$$\sigma^{-1} = (5, 3, 1)(2, 4)$$

**Definition 2.2:** 一個集合(有限) $A$ 的所有置換構成一個群，稱為 $A$ 的置換群，記為 $S_A$ 。



**Definition 2.2:** 一個集合(有限) $A$ 的所有置換構成一個群，稱為 $A$ 的置換群，記為 $S_A$ 。

我們驗證 $S_A$ 確實是一個群。(單位元素、結合律、反元素)

**Definition 2.2:** 一個集合(有限) $A$ 的所有置換構成一個群，稱為 $A$ 的置換群，記為 $S_A$ 。

我們驗證 $S_A$ 確實是一個群。(單位元素、結合律、反元素)

*Remark:*  $n$ 個元素的集合的置換群計為 $S_n$ 的 order 為 $n!$ 。

**Definition 2.2:** 一個集合(有限) $A$ 的所有置換構成一個群，稱為 $A$ 的置換群，記為 $S_A$ 。

我們驗證 $S_A$ 確實是一個群。(單位元素、結合律、反元素)

*Remark:*  $n$ 個元素的集合的置換群計為 $S_n$ 的 order 為 $n!$ 。

*Example:*

上述的例子中， $\tau$ 和 $\sigma$ 是 $S_5$ 的元素。

$S_5$ 的 order 為 $5! = 120$ 。並且 $\sigma$ 和 $\tau$ 的反元素

$$\sigma^{-1} = (5, 3, 1)(2, 4)$$

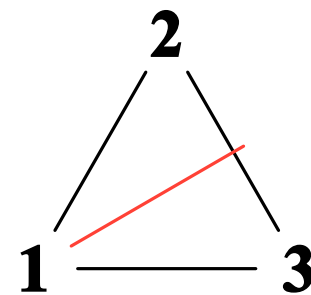
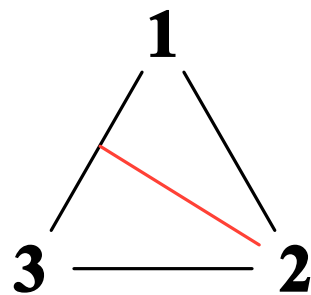
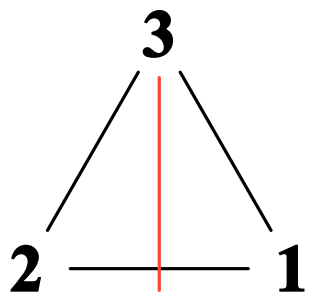
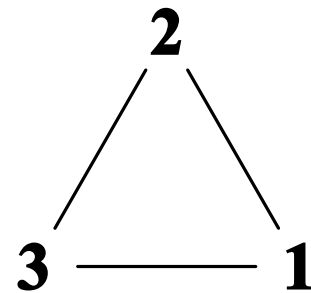
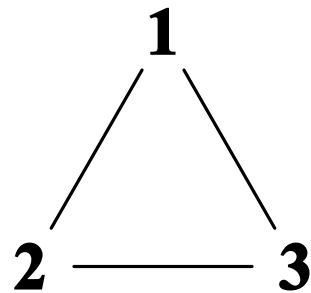
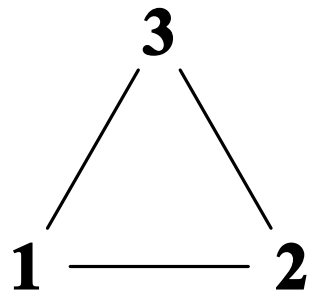
$$\tau^{-1} = (5, 4, 3, 2, 1)$$

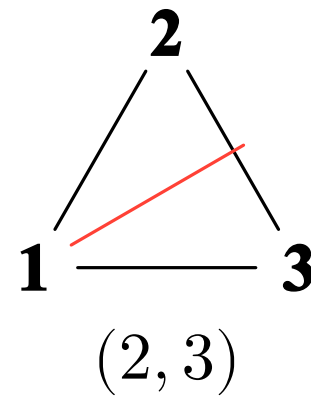
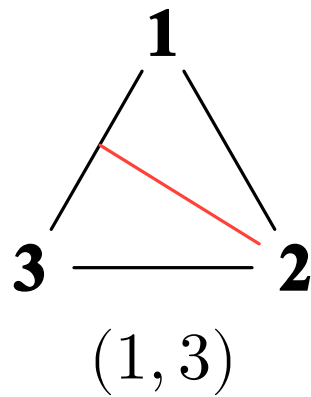
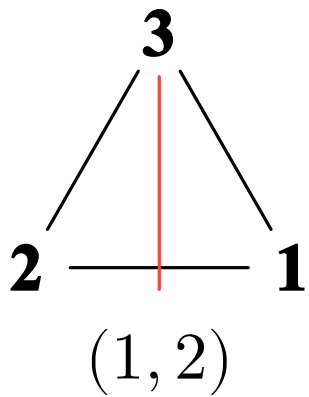
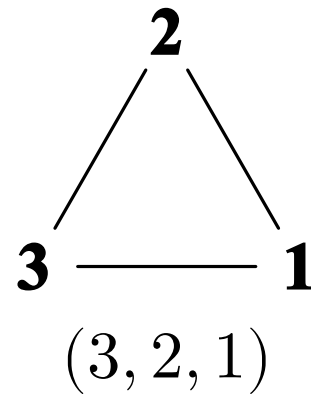
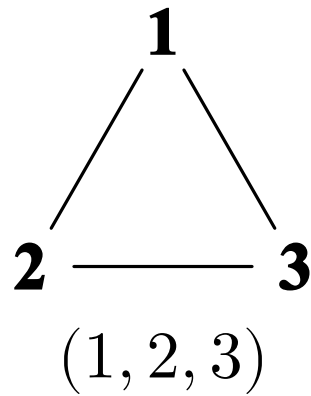
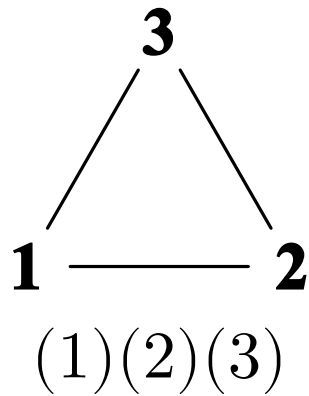
對稱群

---

Symmetry Group

我們接下來考慮一個正三角形，他有那些對稱性？

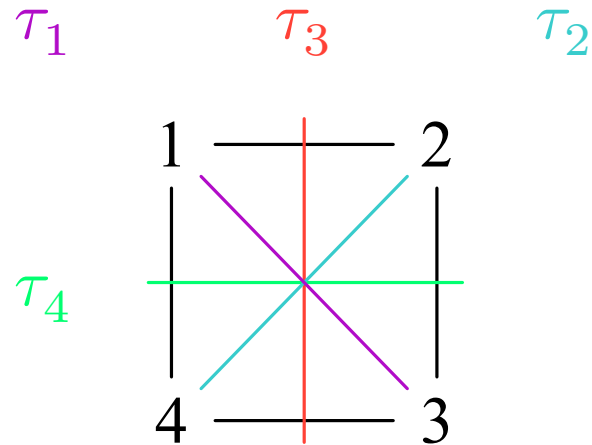




把上面正三角形的對稱性的置換收集起來，我們得到一個群，稱為正三角形的對稱群 $D_3$ 。

那 $D_3$ 的 order 是多少？只有6個嗎？





$$e = (1)(2)(3)(4)$$

$$\rho_1 = (1, 2, 3, 4)$$

$$\rho_2 = (1, 3)(2, 4)$$

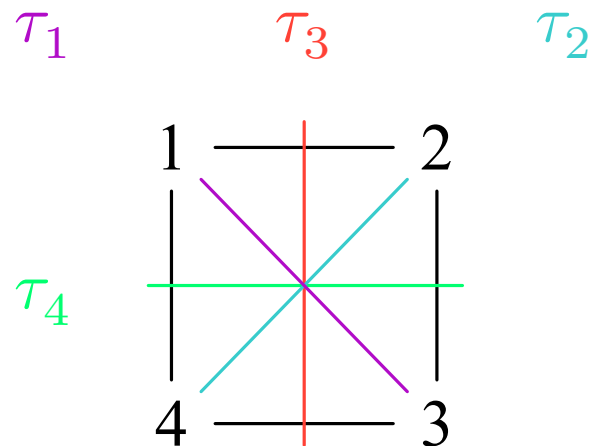
$$\rho_3 = (1, 4, 3, 2)$$

$$\tau_1 = (1)(2, 4)(3)$$

$$\tau_2 = (1, 3)(2)(4)$$

$$\tau_3 = (1, 2)(4, 3)$$

$$\tau_4 = (1, 4)(2, 3)$$



那  $D_4$  的 order 是多少？  
只有 8 個嗎？

$$e = (1)(2)(3)(4)$$

$$\rho_1 = (1, 2, 3, 4)$$

$$\rho_2 = (1, 3)(2, 4)$$

$$\rho_3 = (1, 4, 3, 2)$$

$$\tau_1 = (1)(2, 4)(3)$$

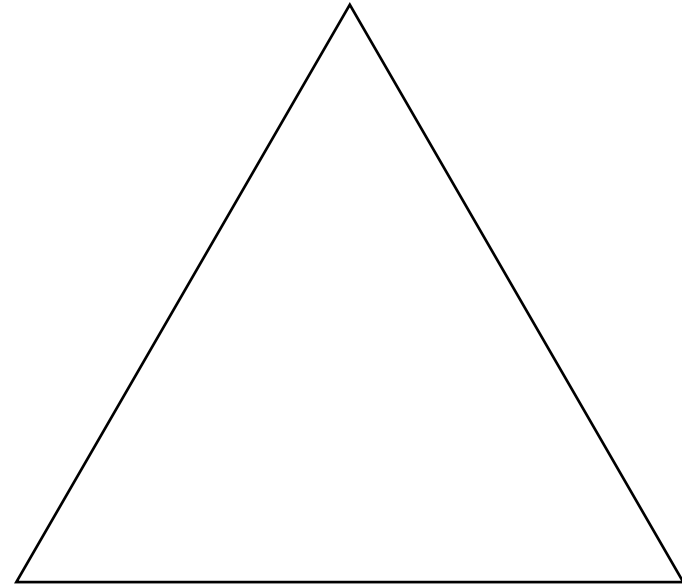
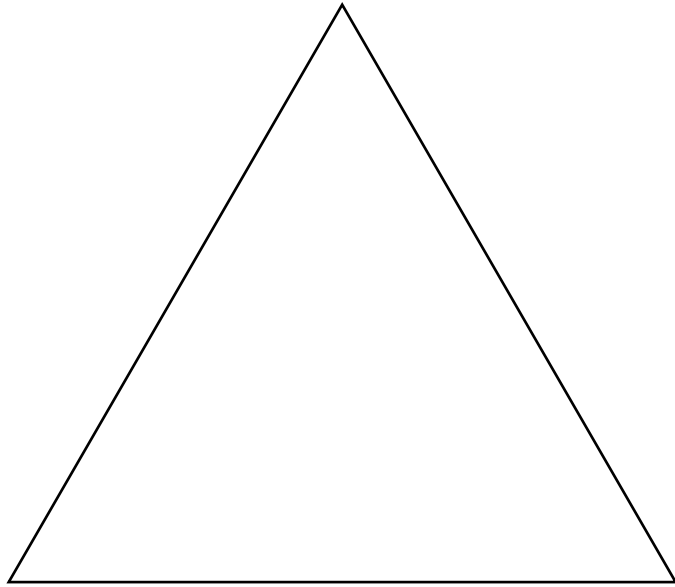
$$\tau_2 = (1, 3)(2)(4)$$

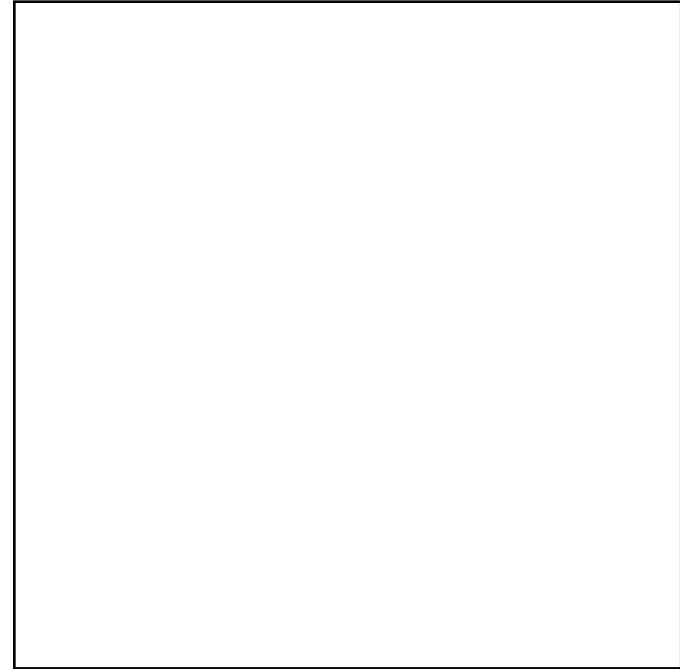
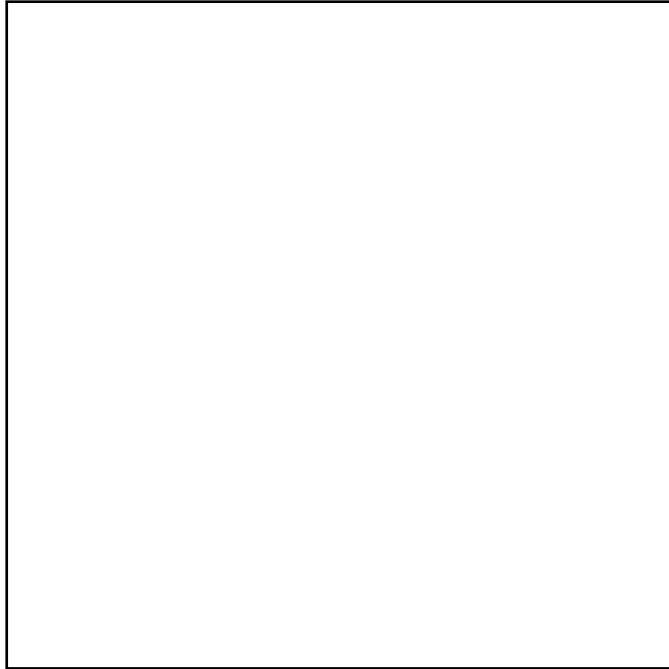
$$\tau_3 = (1, 2)(4, 3)$$

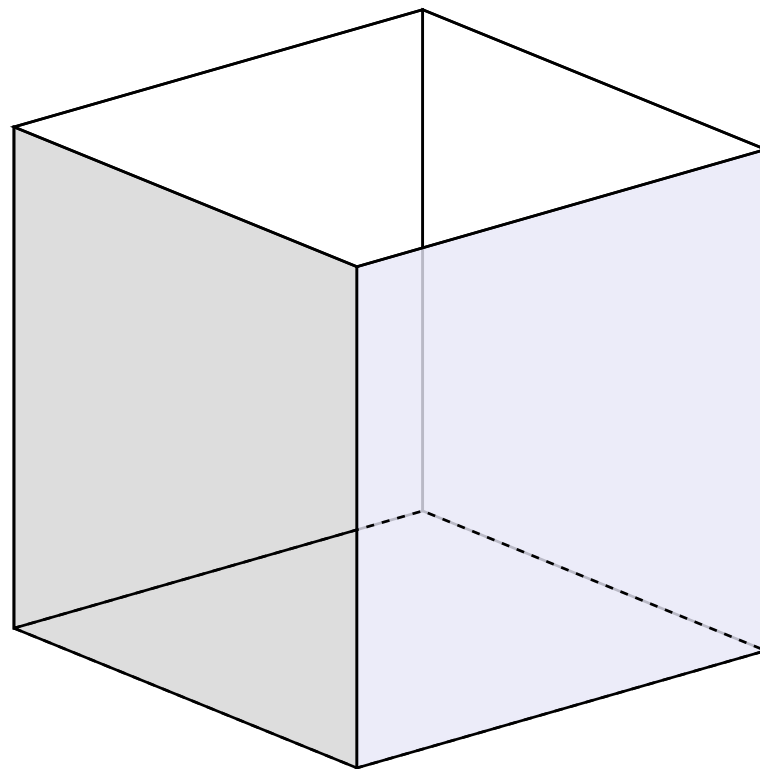
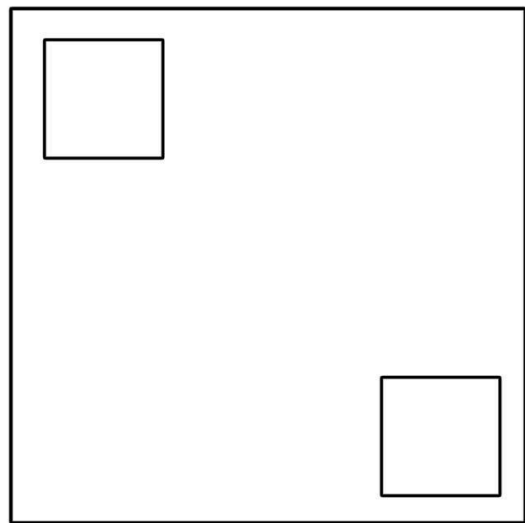
$$\tau_4 = (1, 4)(2, 3)$$

1. 先找到圖形的不動點
2. 畫一條通過不動點的直線。
3. 假設有  $m$  個對稱稱使得這條線上的點不動，而條線上的點在對稱性下會被打到  $n$  個不同的位子。
4. 那麼這個對稱群的 order 就是  $n \times m$ 。

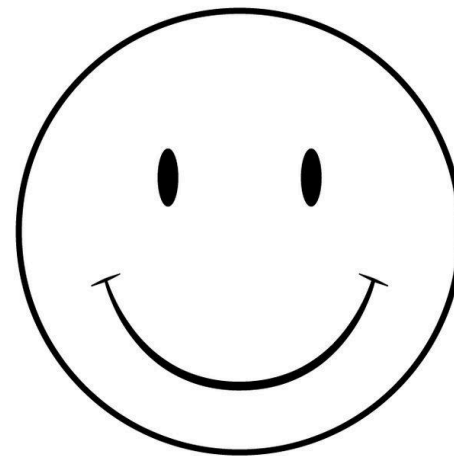
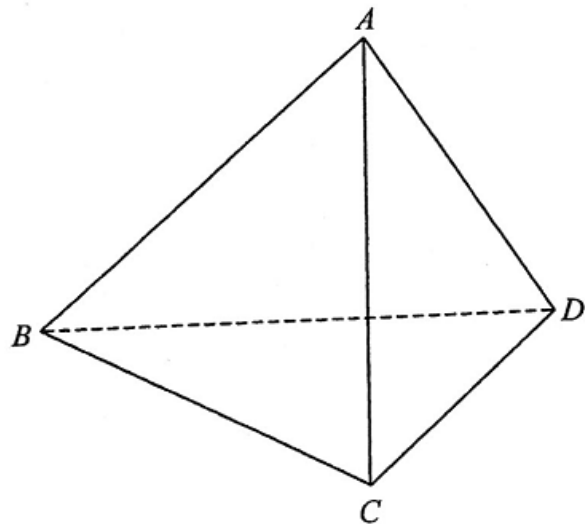
下一節會證明這個方法是正確的。







1. 判斷下列圖形的對稱群的 order:



群作用

---

Group Action



**Definition 4.1:** 一個群  $\langle G, * \rangle$  對一個集合  $A$  的作用是一個映射  $\varphi : G \times A \rightarrow A$ ，滿足以下條件：

1. 對於所有  $a \in A$   $\varphi(e, a) = a$
2. 對於所有  $a \in A$  和  $g, h \in G$ ， $\varphi(g * h, a) = \varphi(g, \varphi(h, a))$

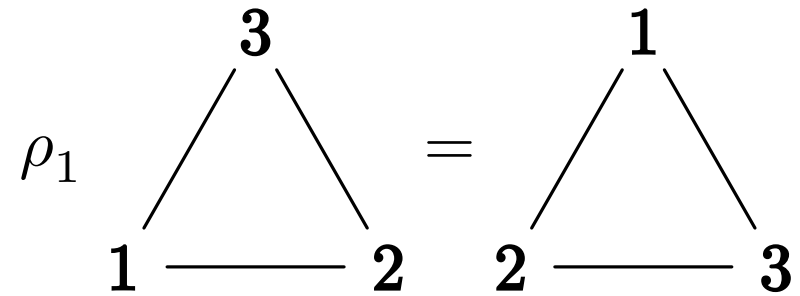
在這個情況下，我們稱  $A$  是一個  **$G$ -set**。

為了簡化，我們有時候會省略運算符號，寫成  $ga$  代表  $\varphi(g, a)$ 。所以上述的條件可以寫成

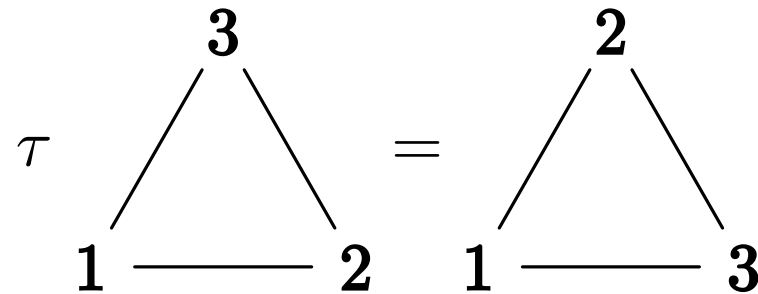
$$\begin{aligned} ea &= a \\ (gh)a &= g(ha) \end{aligned}$$

像是在上一章節中，我們考慮了對稱群  $D_3$  對正三角形的作用。

$$\rho_1 = (1, 2, 3) \in D_3$$



$$\tau = (1)(2, 3) \in D_3$$



**Theorem 4.2:** 讓  $X$  是一個  $G$ -set。如果  $gx_1 = gx_2$ ，那  $x_1 = x_2$

*Proof:* 假設  $gx_1 = gx_2$ ，那麼  $g^{-1}gx_1 = g^{-1}gx_2$ ，所以  $ex_1 = ex_2$ ，所以  $x_1 = x_2$ 。 ■

*Remark:* 如果  $x \neq y$ ，那  $gx \neq gy$

**Theorem 4.3:** 讓  $X$  是一個  $G$ -set，我們定義一個在  $X$  上的關係  $\sim$ ，對於所有的  $x, y \in X$ ， $x \sim y$  當且僅當存在  $g \in G$ ，使得  $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

**Theorem 4.3:** 讓  $X$  是一個  $G$ -set，我們定義一個在  $X$  上的關係  $\sim$ ，對於所有的  $x, y \in X$ ， $x \sim y$  當且僅當存在  $g \in G$ ，使得  $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

*Proof:* 自反性、對稱性、傳遞性



**Theorem 4.3:** 讓  $X$  是一個  $G$ -set，我們定義一個在  $X$  上的關係  $\sim$ ，對於所有的  $x, y \in X$ ， $x \sim y$  當且僅當存在  $g \in G$ ，使得  $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

*Proof:* 自反性、對稱性、傳遞性

自反性：對於所有的  $x \in X$ ， $x \sim x$ ，因為  $ex = x$ 。



**Theorem 4.3:** 讓  $X$  是一個  $G$ -set，我們定義一個在  $X$  上的關係  $\sim$ ，對於所有的  $x, y \in X$ ， $x \sim y$  當且僅當存在  $g \in G$ ，使得  $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

*Proof:* 自反性、對稱性、傳遞性

自反性：對於所有的  $x \in X$ ， $x \sim x$ ，因為  $ex = x$ 。

對稱性：如果  $x \sim y$ ，那麼存在  $g \in G$ ，使得  $gx = y$ ，所以  $g^{-1}y = x$ ，所以  $y \sim x$ 。



**Theorem 4.3:** 讓  $X$  是一個  $G$ -set，我們定義一個在  $X$  上的關係  $\sim$ ，對於所有的  $x, y \in X$ ， $x \sim y$  當且僅當存在  $g \in G$ ，使得  $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

*Proof:* 自反性、對稱性、傳遞性

自反性：對於所有的  $x \in X$ ， $x \sim x$ ，因為  $ex = x$ 。

對稱性：如果  $x \sim y$ ，那麼存在  $g \in G$ ，使得  $gx = y$ ，所以  $g^{-1}y = x$ ，所以  $y \sim x$ 。

傳遞性：如果  $x \sim y$  且  $y \sim z$ ，那麼存在  $g, h \in G$ ，使得  $gx = y$  且  $hy = z$ ，所以  $hgx = z$ ，所以  $x \sim z$ 。 ■



**Definition 4.4:** 讓  $X$  是一個  $G$ -set，每一個在 Theorem 4.2 下的等價類稱為一個軌道。如果  $x \in X$ ，包含  $x$  的分割是  $x$  的軌道，記作  $G_x$ 。

*Remark:* 讓  $X$  是一個  $G$ -set， $x \in X$ ，那麼  $x$  的軌道  $G_x = \{gx \mid g \in G\}$ 。

### Fixed point, Stabilizers

**Definition 4.5:** 讓  $X$  是一個  $G$ -set，讓  $x \in X$ ， $g \in G$ 。我們定義：

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$$

$$X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$$

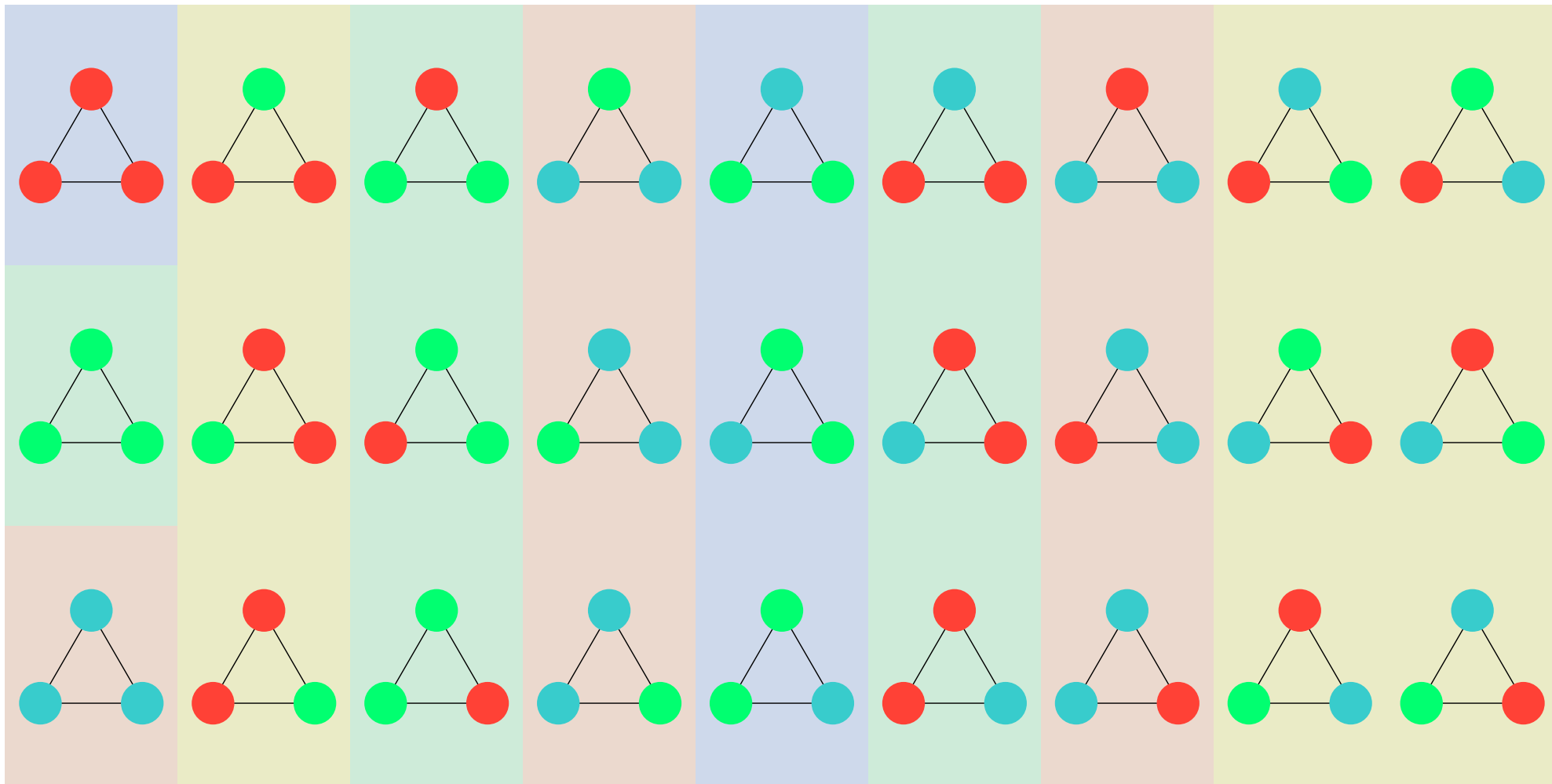
$\text{Stab}_G(x)$  稱為  $x$  的穩定子， $X^g$  稱為  $g$  的不動點。

讓  $G = D_3$ ， $X$  是用 3 種顏色為三角形的頂點上色所有可能所成的集合。

e.g.

$$\left( \begin{array}{c} \text{green} \\ \text{red} \quad \text{blue} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \text{red} \\ \text{red} \quad \text{red} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \text{blue} \\ \text{red} \quad \text{blue} \end{array} \right) \in X$$

$$|X| = 3 \times 3 \times 3$$

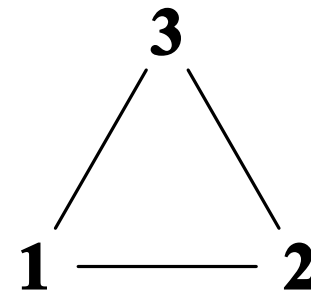


$$\text{Stab}_G \left( \begin{array}{c} \text{red} \\ \text{red} \quad \text{red} \end{array} \right) = D_3$$

$$\text{Stab}_G \left( \begin{array}{c} \text{cyan} \\ \text{green} \quad \text{green} \end{array} \right) = \{e, (1, 2)\}$$

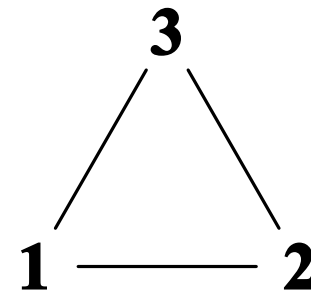
$$\text{Stab}_G \left( \begin{array}{c} \text{cyan} \\ \text{red} \quad \text{green} \end{array} \right) = \{e\}$$

$$\text{Stab}_G \left( \begin{array}{c} \text{red} \\ \text{cyan} \quad \text{red} \end{array} \right) = \{e, (2, 3)\}$$



$$g = e, X^g = X$$

$$g = (1, 2, 3), X^g = \left\{ \begin{array}{c} \text{Red triangle} \\ \text{Green triangle} \\ \text{Blue triangle} \end{array} \right\}$$



$$g = (2, 3), X^g =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Red triangle} \\ \text{Green triangle} \\ \text{Blue triangle} \\ \text{Red triangle} \\ \text{Green triangle} \\ \text{Blue triangle} \\ \text{Red triangle} \\ \text{Green triangle} \\ \text{Blue triangle} \end{array} \right\}$$

**Theorem 4.6** (軌道-穩定子定理 (Orbit-Stabilizer Theorem)): 讓  $G$  是一個有限群，讓  $X$  是一個  $G$ -set， $x \in X$ ，那麼  $|G| = |G_x| |\text{Stab}_G(x)|$ 。

定義  $f: G \rightarrow G_x$  ,  $f(g) = gx$  。我們證明每一個在  $G_x$  裡的元素都被打到  $|\text{Stab}_G(x)|$  這麼多次。

給定一個  $y \in G_x$  , 那麼存在  $h \in G$  使得  $y = hx$  。



定義  $f: G \rightarrow G_x$  ,  $f(g) = gx$  。我們證明每一個在  $G_x$  裡的元素都被打到  $|\text{Stab}_G(x)|$  這麼多次。

給定一個  $y \in G_x$  , 那麼存在  $h \in G$  使得  $y = hx$  。

我們先證明這個引理:  $f(g) = y \iff h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$  。

定義  $f: G \rightarrow G_x$  ,  $f(g) = gx$  。我們證明每一個在  $G_x$  裡的元素都被打到  $|\text{Stab}_G(x)|$  這麼多次。

給定一個  $y \in G_x$  , 那麼存在  $h \in G$  使得  $y = hx$  。

我們先證明這個引理:  $f(g) = y \iff h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$  。

$\Rightarrow$  : 如果  $f(g) = y$  , 那麼  $gx = hx$  , 所以  $h^{-1}gx = x$  , 所以  $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$  。

定義  $f: G \rightarrow G_x$  ,  $f(g) = gx$  。我們證明每一個在  $G_x$  裡的元素都被打到  $|\text{Stab}_G(x)|$  這麼多次。

給定一個  $y \in G_x$  , 那麼存在  $h \in G$  使得  $y = hx$  。

我們先證明這個引理:  $f(g) = y \iff h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$  。

$\Rightarrow$  : 如果  $f(g) = y$  , 那麼  $gx = hx$  , 所以  $h^{-1}gx = x$  , 所以  $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$  。

$\Leftarrow$  : 如果  $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$  , 那麼  $h^{-1}gx = x$  , 所以  $gx = hx$  , 所以  $f(g) = y$  。

接著我們來討論有多少  $g \in G$  使得  $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

接著我們來討論有多少  $g \in G$  使得  $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

$$\begin{aligned} h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x) &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } h^{-1}g = \tilde{g} \\ &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } g = h\tilde{g} \\ &\iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\} \end{aligned}$$

接著我們來討論有多少  $g \in G$  使得  $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

$$\begin{aligned} h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x) &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } h^{-1}g = \tilde{g} \\ &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } g = h\tilde{g} \\ &\iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\} \end{aligned}$$

所以， $f(g) = y \iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\}$ ，並且，對於所有  $\tilde{g} \in \text{Stab}_{G(x)}$ ，

$$f(h\tilde{g}) = h\tilde{g}x = hx = y。$$

因此，每個  $y \in G_x$  都  $|\text{Stab}_G(x)|$  個  $g \in G$  使得  $f(g) = y$ 。所以， $|G| = |G_x||\text{Stab}_G(x)|$ 。

接著我們來討論有多少  $g \in G$  使得  $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

$$\begin{aligned} h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x) &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } h^{-1}g = \tilde{g} \\ &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } g = h\tilde{g} \\ &\iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\} \end{aligned}$$

所以， $f(g) = y \iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\}$ ，並且，對於所有  $\tilde{g} \in \text{Stab}_{G(x)}$ ，

$$f(h\tilde{g}) = h\tilde{g}x = hx = y。$$

因此，每個  $y \in G_x$  都  $|\text{Stab}_G(x)|$  個  $g \in G$  使得  $f(g) = y$ 。所以， $|G| = |G_x| |\text{Stab}_G(x)|$ 。

- 為什麼  $\{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\}$  的基數(cardinality)和  $\text{Stab}_G(x)$  的基數相等？



**Lemma 4.7** (伯恩賽德引理): 讓  $G$  是一個有限群，讓  $X$  是一個  $G$ -set。讓  $r$  是  $X$  的軌道數，那麼

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

**Lemma 4.7 (伯恩賽德引理):** 讓  $G$  是一個有限群，讓  $X$  是一個  $G$ -set。讓  $r$  是  $X$  的軌道數，那麼

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

我們通過雙重計數來證明這個引理。考慮所有滿足  $gx = x$  的序組  $(g, x)$ ，我們用兩種方式計數這些序組，這樣就會有一個很自然的等式。

我們考慮序組 $(g, x)$ ，其中 $gx = x$ 。假設這樣的序組有 $N$ 個。給定一個 $g \in G$ ，我們計算 $(g, x)$ 的數量，這個數量是 $|X^g|$ 。所以

$$N = \sum_{g \in G} |X^g|$$

我們考慮序組 $(g, x)$ ，其中 $gx = x$ 。假設這樣的序組有 $N$ 個。給定一個 $g \in G$ ，我們計算 $(g, x)$ 的數量，這個數量是 $|X^g|$ 。所以

$$N = \sum_{g \in G} |X^g|$$

另一方面，給定一個 $x \in X$ ，我們計算 $(g, x)$ 的數量，這個數量是 $|\text{Stab}_G(x)|$ 。所以

$$N = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)|$$

根據 **軌道穩定子定理** Thm ， $|\text{Stab}_G(x)||G_x| = |G|$ ，所以，

$$N = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G_x|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G_x|}$$

對於在相同軌道的元素， $|G_x|$ 是相同的。讓 $\mathcal{O}$ 是一個軌道，我們有

$$\sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|G_x|} = \sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|\mathcal{O}|} = 1$$

因此，

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|G_x|} = (\text{軌道的數量})$$

$$N = |G| \cdot (\text{軌道的數量}) = |G| \cdot r$$

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

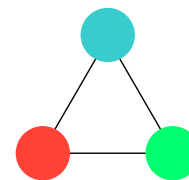
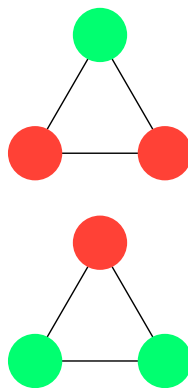
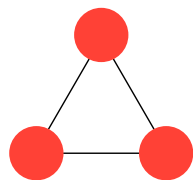
用4個顏色對一個正三角形的三個邊進行著色，有幾種不同的著色方法？(兩種著色方式被認為是相同的，如果他們可以通過旋轉、鏡射相互變換)

用4個顏色對一個正三角形的三個邊進行著色，有幾種不同的著色方法？(兩種著色方式被認為是相同的，如果他們可以通過旋轉、鏡射相互變換)

**Method1:** 分別討論有1, 2, 3個顏色時的著色方法數量。

$$C_1^4 \times 1 + C_2^4 \times 2 + C_3^4 \times 1 = 20$$

e.g.





我們讓  $G = D_3$  是三角型的對稱群， $X$  是所有著色的結果 ( $|X| = 4^3$ )，所以我們要求  $X$  在  $G$  下有幾個軌道。根據前的討論，我們知道  $|G| = 6$ ，然後我們計算不動點的個數：

$$|X^{\rho_0}| = 4^3$$

$$|X^{\tau_1}| = 4^2$$

$$|X^{\rho_1}| = 4$$

$$|X^{\tau_2}| = 4^2$$

$$|X^{\rho_2}| = 4$$

$$|X^{\tau_3}| = 4^2$$

根據伯恩賽德引理，我們有

$$6r = 4^3 + 4 + 4 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 120$$

$$r = 20$$

所以正三角形的相異著色方法有20種。

我們考慮我們有 $n$ 個顏色，幫一個有對稱性的圖形上色，我們假設在對稱性下有 $r$ 種上色方式。讓 $X$ 是所有上色方法的集合，讓 $G$ 是該圖形的對稱群，根據博恩賽德引理，我們有

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

其中 $X^g$ 是在 $g$ 下的不動點的集合。

我們考慮我們有 $n$ 個顏色，幫一個有對稱性的圖形上色，我們假設在對稱性下有 $r$ 種上色方式。讓 $X$ 是所有上色方法的集合，讓 $G$ 是該圖形的對稱群，根據博恩賽德引理，我們有

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

其中 $X^g$ 是在 $g$ 下的不動點的集合。

$$g = \underbrace{(1, 2, 3)(5, 4) \dots (\#, \#)}_{m_g}$$

「每個循環內的顏色都一樣」  $|X^g| = n^{m_g}$

我們考慮我們有 $n$ 個顏色，幫一個有對稱性的圖形上色，我們假設在對稱性下有 $r$ 種上色方式。讓 $X$ 是所有上色方法的集合，讓 $G$ 是該圖形的對稱群，根據博恩賽德引理，我們有

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

其中 $X^g$ 是在 $g$ 下的不動點的集合。

$$g = \underbrace{(1, 2, 3)(5, 4) \dots (\#, \#)}_{m_g}$$

「每個循環內的顏色都一樣」  $|X^g| = n^{m_g}$

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} n^{m_g}$$

我們考慮有 $n$ 個顏色，對一個正四邊形的頂點上色，我們要求在對稱性下有幾種不同的著色方法。

我們考慮有 $n$ 個顏色，對一個正四邊形的頂點上色，我們要求在對稱性下有幾種不同的著色方法。

我們讓 $G = D_4$ 是正四邊形的對稱群， $X$ 是所有著色的結果( $|X| = n^4$ )，我們知道 $|G| = 8$

我們考慮有 $n$ 個顏色，對一個正四邊形的頂點上色，我們要求在對稱性下有幾種不同的著色方法。

我們讓 $G = D_4$ 是正四邊形的對稱群， $X$ 是所有著色的結果( $|X| = n^4$ )，我們知道 $|G| = 8$

- 1個 4 cycle 的單位變換， $e = (1)(2)(3)(4)$
- 2個 1 cycle 的旋轉( $90^\circ, 270^\circ$ )，e.x.  $g = (1, 2, 3, 4)$
- 1個 2 cycle 的旋轉( $180^\circ$ )，e.x.  $g = (1, 2)(3, 4)$
- 2個 3 cycle 的鏡射(對角線的鏡射)，e.x.  $g = (1)(3)(2, 4)$
- 2個 2 cycle 的鏡射(中線的鏡射)，e.x.  $g = (1, 3)(2, 4)$

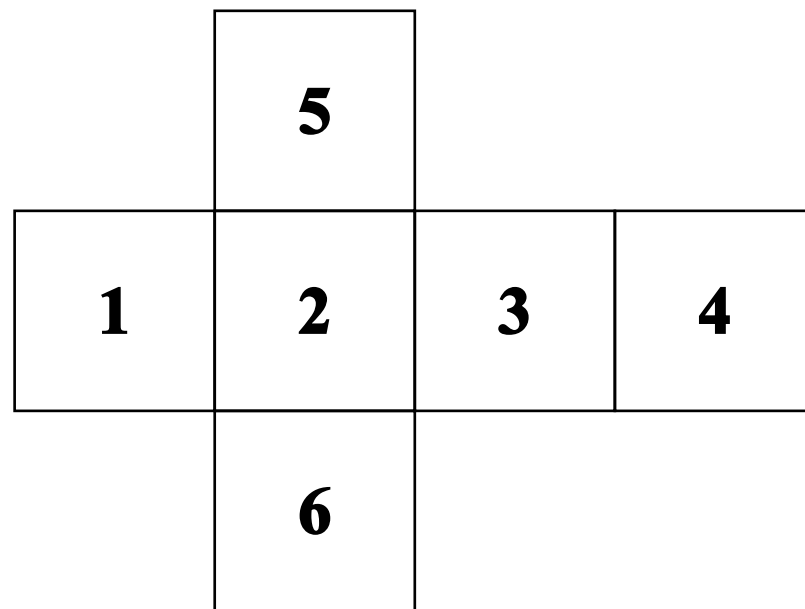
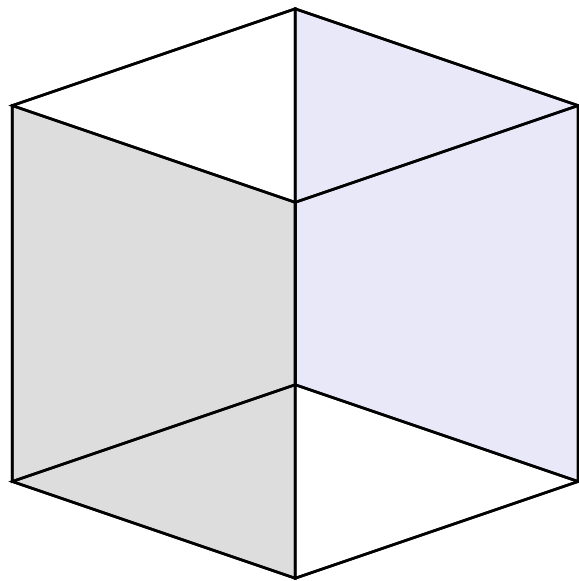


所以我們有

$$r = \frac{1}{8}(n^4 + 2n + n^2 + 2n^3 + 2n^2)$$

$$r = \frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$$

我們現在有 $n$ 個顏色，幫一個正六面體上色，可以通過旋轉變換得到視為相同的著色方式。總共有多少種不同的著色方式？



我們讓  $G = D$  是正六面體的對稱群， $X$  是所有著色的結果 ( $|X| = n^6$ )，我們知道  $|G| = 24$

我們讓  $G = D$  是正六面體的對稱群， $X$  是所有著色的結果 ( $|X| = n^6$ )，我們知道  $|G| = 24$

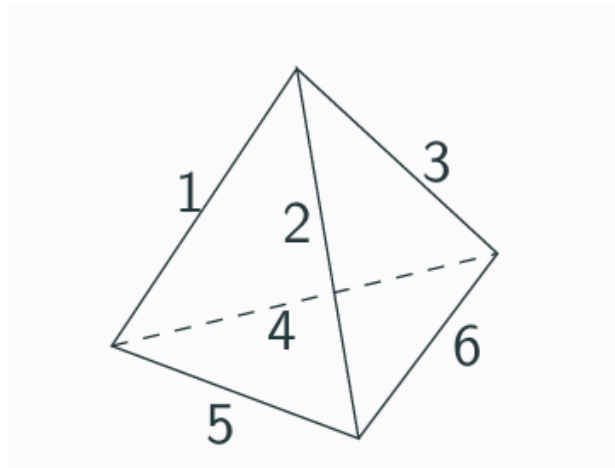
1. 單位變換:  $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$
2. 過對面中點轉軸旋轉  $90^\circ, 270^\circ$ ，如:  $(1, 2, 3, 4)(5)(6)$ ，共 6 個。
3. 過對面中點轉軸旋轉  $180^\circ$ ，如:  $(1, 3)(2, 4)(5)(6)$ ，共 3 個。
4. 過對邊中點轉軸旋轉  $180^\circ$ ，如:  $(1, 5)(3, 6)(2, 4)$ ，共 6 個。
5. 過對頂點轉軸旋轉  $120^\circ, 240^\circ$ ，如:  $(1, 5, 4)(2, 3, 6)$ ，共 8 個

所以我們有

$$r = \frac{1}{24}(n^6 + 6n^3 + 3n^4 + 6n^3 + 8n^2)$$

$$r = \frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2)$$

在旋轉的對稱性下，用 $n$ 個顏色對一個正四面體的邊上色，總共有多少種不同的著色方式？



我們讓 $G$ 是正四面體的對稱群，我們通過軌道-穩定子定理，我們可以得到 $|G| = 12$

我們討論裡面的對置換：

- 單位變換： $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$
- 8個以一面中點的垂線為轉軸的旋轉： $(1, 2, 3)(4, 5, 6)$
- 3個以過兩對邊中點的轉軸旋轉： $(1)(6)(2, 4)(5, 3)$

所以我們有

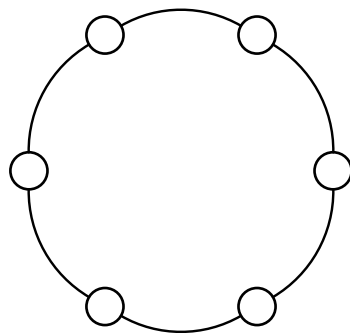
$$r = \frac{1}{12}(n^6 + 8n^2 + 3n^4)$$

**Exercise I:** 對於正 $n$ 邊形的對稱群 $D_n$ ， $|D_n|$ 是多少？

5pt



**Exercise II:** 有 $n$ 個不同顏色的珠子，我們要把這些珠子串成一串6個珠子的項鍊，可以通過旋轉變換得到視為相同的項鍊。總共有多少種不同的項鍊？



- a) 對稱群的 order 是多少？
- b) 對稱群的元素有哪些？每個元素有幾個循環？
- c) 有多少種不同的著色方式？

1pt ;2pt; 2pt

**Exercise III:** 在旋轉的對稱性下，用 $n$ 個顏色對一個正四面體的面上色。

- a) 對稱群的 order 是多少？
- b) 對稱群的元素有哪些？每個元素有幾個循環？
- c) 有多少種不同的著色方式？

1pt; 2pt; 2pt

**Exercise IV:** 有3個顏色，幫一個正六面體上色，每個顏色上兩個面，可以通過旋轉變換得到視為相同的著色方式。總共有多少種不同的著色方式？

5pt