

群論

陽明交大應數系營隊

在數學中，群論 (Group theory) 研究名為「群」的代數構。群論在許多的領域都有很重要的應用。像是，倍立方、化圓為方、三等分角，五次多項式無法解的原因都可以用群論來解釋。另外，像是標準粒子模型、量子力學 (李群)、晶體結構、密碼學等領域也有很多群論的應用。

1. 群 (Group)

Definition 1.1: $\langle G, * \rangle$ 是一個集合 G 與一個二元運算 $*: G \times G \mapsto G$ ，滿足以下條件：

\mathcal{G}_1 : 對於所有的 $a, b, c \in G$,

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \text{結合律}$$

\mathcal{G}_2 : 存在一個元素 $e \in G$ ，使得對於所有的 $a \in G$,

$$a * e = e * a = a \quad \text{單位元素}$$

\mathcal{G}_3 : 對於每一個 $a \in G$ ，存在一個元素 $a^{-1} \in G$ ，使得

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \quad \text{反元素}$$

Example: 我們來看一些例子：

- $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 、 $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ 、 $\langle \mathbb{R}, + \rangle$
- $\langle \mathbb{Q}^+, \times \rangle$
- $C_3 = \{e, a, b\}$ 與下面的運算是一個群。

| \circ | e | a | b |
|---------|-----|-----|-----|
| e | e | a | b |
| a | a | b | e |
| b | b | e | a |

Remark: 有時候我們會省略二元運算 $*$ ，以 G 表示一個群。

Definition 1.2: 讓 G 是一個群，定義 $|G|$ 是 G 的元素個數，稱為 G 的 **order**。

Definition 1.3: 一個群 G 如果滿足交換率 i.e. 對於所有的 $a, b \in G$,

$$a * b = b * a$$

, 則稱 G 是一個**交換群**(Abelian groups)。

Example:

- C_3 的 order 是3。
- \mathbb{Z} 是一個交換群。
- 可逆矩陣的集合與矩陣乘法是一個群，但不是交換群。

1.1. 群的性質

Theorem 1.1: 如果 G 是一個群，那**消去率**成立，即對於所有的 $a, b, c \in G$,

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

Proof: 讓 G 是一個群， $a, b, c \in G$ 。假設 $a * b = a * c$ ，因為 $a \in G$ ，所以 a 的反元素 a^{-1} 存在，且 $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ 。

$$\begin{aligned} a * b &= a * c \\ \Rightarrow a^{-1} * a * b &= a^{-1} * a * c \\ \Rightarrow e * b &= e * c \end{aligned}$$

■

Theorem 1.2: 群 G 的單位元素 e 唯一。

Proof: 假設存在第二個單位元素 e_2 ，滿足 $e_2 * a = a * e_2 = a \forall a \in G$ ，因為 $e \in G$ ，所以 $e_2 * e = e * e$ ，根據消去律 $e_2 = e$ 。

■

Theorem 1.3: 讓 G 是一個群， $ab \in G$ ，那麼

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Proof: 我們直接相乘

$$\begin{aligned} (ab)b^{-1}a^{-1} &= a(bb^{-1})a^{-1} \quad \text{結合律} \\ &= aea^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

根據反元素的定義， $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ 我們只證明了 $(ab)^{-1}b^{-1}a^{-1} = e$ ，但是我們也需要證明 $b^{-1}a^{-1}(ab)^{-1} = e$ 也是成立的。

■

2. 置換群(Permutation Group)

我們接下來討論一個特殊的群，置換群。考慮一個集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，我們可以將 A 的元素重新排列成 $A = \{3, 1, 5, 2, 4\}$ 。我們可以將這個排列表示成一個函數 $\varphi: A \rightarrow A$ ，這個函數將 1 映射到 3，2 映射到 1，以此類推。我們可以將這個排列表示成一個表格，如 Figure 1 所示。我們稱這樣的函數為一個**置換**。但是，Figure 2 的函數不是一個置換，因為 4 沒有被任何一個元素映射到。

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 5 \\ 4 \rightarrow 2 \\ 5 \rightarrow 1 \end{array}$$

Figure 1: 一個置換

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 2 \\ 4 \rightarrow 5 \\ 5 \rightarrow 1 \end{array}$$

Figure 2: 不是置換

Definition 2.1: 一個 A 的**置換**是一個一一對應的函數 $\varphi: A \rightarrow A$ 。(one-one and onto)

我們現在給定兩個置換 τ 和 σ ，我們定義他們的合成 $\sigma \circ \tau$ ，對於所有的 $x \in A$ ，

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \tau)(x) &= \sigma(\tau(x)) \\ A &\xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{\sigma} A \end{aligned}$$

因為 τ 和 σ 是一一對應的函數，所以 $\sigma \circ \tau$ 也是一一對應的函數。所以 $\sigma \circ \tau$ 是一個置換。

Example: 對於上的 σ 我們可以表示成，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 τ 為，

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

我們可以計算 $\sigma \circ \tau$ ，

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

所以像是 $\sigma \circ \tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(2) = 4$

2.1. 循環置換 (Cycle)

一個置換除了可以用上述的方法表示，我們還可以用**循環**的方式表示。我們來看下面的例子，定義一個置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

我們觀察一下 σ 的作用，可以發現 σ 將 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ ，所以我們可以將 σ 表示成一個循環 $\sigma = (1, 3, 5)(2, 4)$ 。



Figure 3: 一個置換的循環

透過循環置換，我們可以很容易的表示一個置換，並且可以很容易的計算該置換的反元素。例如，對於上面的例子， $\sigma^{-1} = (5, 3, 1)(4, 2)$ 。

Remark: 如果一個置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3, 4, 5)$$

為了簡化，我們有時候會省略一個元素的循環，寫成 $\sigma = (3, 4, 5)$ 。

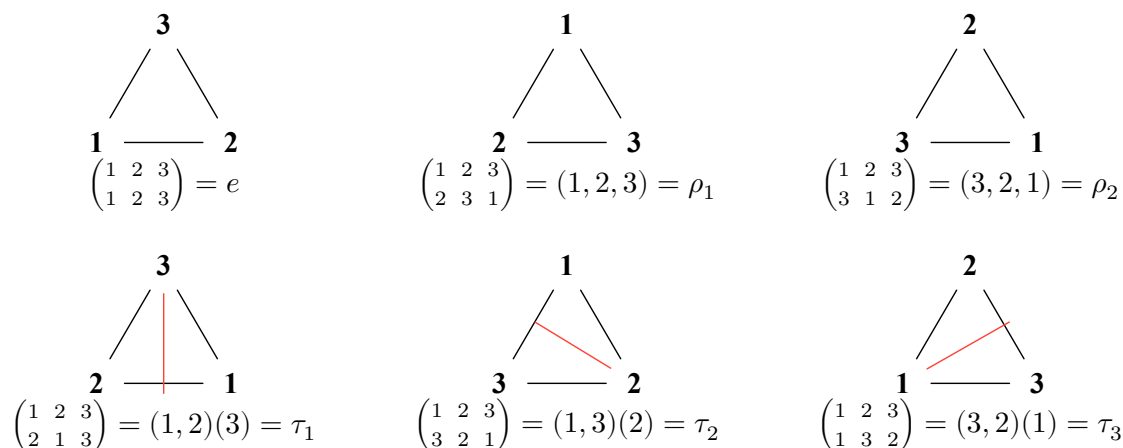
Definition 2.2: 一個集合 A 的所有置換構成一個群，我們稱這個群為 A 的**置換群**，記作 S_A 。

Remark: S_n 表示 n 個元素的置換群。 S_n 的 order 是 $n!$ 。

3. 空間對稱群(Symmetry Groups)

接下來我們考慮一種特殊的置換群，稱為**空間對稱群**。我們考慮一個正三角形，將正三角形的頂點邊繼承1, 2, 3，我們來討論他有那些對稱性。

我們可以繼續枚舉所有三角形的對稱操作，我們可以得到以下的置換：



把上述的對稱置換收集起來，並用上面提到的 \circ 當作二運算，我們可以得到一個**空間對稱群**，稱為正三角形的對稱群 D_3 。

同樣的，我們可以考慮正方形的對稱群 D_4 ，正方形的對稱群有8個元素，我們可以將 D_4 寫下來：

$$D_4 = \{e, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$

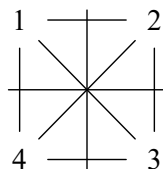


Figure 10: 正方形的對稱性

其中 $\tau_1 \dots \tau_4$ 是以 Figure 10 中的軸鏡射為軸的對稱操作， $\rho_1 \dots \rho_3$ 是以對角線為軸的對稱操作。我們可以把他們用循環寫下來：

$$e = (1)(2)(3)(4)$$

$$\rho_1 = (1, 2, 3, 4)$$

$$\rho_2 = (1, 3)(2, 4)$$

$$\rho_3 = (1, 4, 3, 2)$$

$$\tau_1 = (2, 4)$$

$$\tau_2 = (1, 3)$$

$$\tau_3 = (1, 2)(4, 3)$$

$$\tau_4 = (1, 4)(2, 3)$$

3.1. 計算對稱群的 order

我們上面提到了正三角形的對稱群 D_3 和正方形的對稱群 D_4 ，並列出其中的一些元素，那我們要怎麼確定這些對稱群的 order 呢？我們下面來討論一個方法。

1. 先找到圖形的不動點 c
2. 畫一條通過不動點的直線。
3. 假設有 m 個對稱稱使得這條線不動，而條線在對稱性下會被打到 n 個不同的位子。
4. 那麼這個對稱群的 order 就是 $n \times m$ 。

下一節會證明這個方法是正確的。

4. 群作用(Group Action)

Definition 4.1: 一個群 $\langle G, * \rangle$ 對一個集合 A 的作用是一個映射 $\varphi : G \times A \rightarrow A$ ，滿足以下條件：

1. 對於所有 $a \in A$ $\varphi(e, a) = a$
2. 對於所有 $a \in A$ 和 $g, h \in G$ ， $\varphi(g * h, a) = \varphi(g, \varphi(h, a))$

在這個情況下，我們稱 A 是一個 G -set。

為了簡化，我們會省略運算函數，寫成 ga 代表 $\varphi(g, a)$ 。所以上述的條件可以寫成

1. 對於所有 $a \in A$ $ea = a$
2. 對於所有 $a \in A$ 和 $g, h \in G$ ， $(gh)a = g(ha)$

Theorem 4.1: 讓 X 是一個 G -set。如果 $gx_1 = gx_2$ ，那 $x_1 = x_2$

Proof: 假設 $gx_1 = gx_2$ ，那麼 $g^{-1}gx_1 = g^{-1}gx_2$ ，所以 $ex_1 = ex_2$ ，所以 $x_1 = x_2$ 。 ■

Remark: 如果 $x \neq y$ ，那 $gx \neq gy$

4.1. 不動點 (Fixed point)、穩定子群 (stabilizers subgroup)、軌道 (Orbits)

Theorem 4.2: 讓 X 是一個 G -set，我們定義一個在 X 上的關係 \sim ，對於所有的 $x, y \in X$ ， $x \sim y$ 當且僅當存在 $g \in G$ ，使得 $gx = y$ 。這個關係是一個等價關係。

Proof:

自反性：對於所有的 $x \in X$ ， $x \sim x$ ，因為 $ex = x$ 。

對稱性：如果 $x \sim y$ ，那麼存在 $g \in G$ ，使得 $gx = y$ ，所以 $g^{-1}y = x$ ，所以 $y \sim x$ 。

傳遞性：如果 $x \sim y$ 且 $y \sim z$ ，那麼存在 $g, h \in G$ ，使得 $gx = y$ 且 $hy = z$ ，所以 $hgx = z$ ，所以 $x \sim z$ 。 ■

Definition 4.2: 讓 X 是一個 G -set，每一個在 Theorem 4.2 下的等價類稱為一個軌道。如果 $x \in X$ ，包含 x 的分割是 x 的軌道，記作 G_x 。

Remark: 讓 X 是一個 G -set， $x \in X$ ，那麼 x 的軌道 $G_x = \{gx \mid g \in G\}$ 。

Definition 4.3: 讓 X 是一個 G -set，讓 $x \in X$ ， $g \in G$ 。我們定義：

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$$

$$X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$$

$\text{Stab}_G(x)$ 稱為 x 的穩定子群， X^g 稱為 g 的不動點。

Theorem 4.3 (軌道-穩定子定理 (Orbit-Stabilizer Theorem)): 讓 G 是一個有限群，讓 X 是一個 G -set， $x \in X$ ，那麼 $|G| = |G_x| |\text{Stab}_G(x)|$ 。

Proof: 定義 $f: G \rightarrow G_x$ ， $f(g) = gx$ 。我們證明每一個在 G_x 裡的元素都被打到 $|\text{Stab}_G(x)|$ 這麼多次。

給定一個 $y \in G_x$ ，那麼存在 $h \in G$ 使得 $y = hx$ 。

我們先證明這個引理: $f(g) = y \iff h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

\Rightarrow : 如果 $f(g) = y$ ，那麼 $gx = hx$ ，所以 $h^{-1}gx = x$ ，所以 $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

\Leftarrow : 如果 $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ ，那麼 $h^{-1}gx = x$ ，所以 $gx = hx$ ，所以 $f(g) = y$ 。

接著我們來討論有多少 $g \in G$ 使得 $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ 。

$$\begin{aligned}
h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x) &\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } h^{-1}g = \tilde{g} \\
&\iff \exists \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x) \text{ s.t. } g = h\tilde{g} \\
&\iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\}
\end{aligned}$$

所以， $f(g) = y \iff g \in \{h\tilde{g} \mid \tilde{g} \in \text{Stab}_G(x)\}$ 。因此，每個 $y \in G_x$ 都 $|\text{Stab}_G(x)|$ 個 $g \in G$ 使得 $f(g) = y$ 。

所以， $|G| = |G_x| |\text{Stab}_G(x)|$ 。

■

4.2. 伯恩賽德引理 (Burnside's Lemma)

Theorem 4.4 (伯恩賽德引理): 讓 G 是一個有限群，讓 X 是一個 G -set。讓 r 是 X 的軌道數，那麼

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

Proof: (雙重計數) 我們考慮序組 (g, x) ，其中 $gx = x$ 。假設這樣的序組有 N 個。給定一個 $g \in G$ ，我們計算 (g, x) 的數量，這個數量是 $|X^g|$ 。所以

$$N = \sum_{g \in G} |X^g| \quad (1)$$

另一方面，給定一個 $x \in X$ ，我們計算 (g, x) 的數量，這個數量是 $|\text{Stab}_G(x)|$ 。所以

$$N = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)| \quad (2)$$

根據 **軌道穩定子定理** Thm 4.3， $|\text{Stab}_G(x)| |G_x| = |G|$ ，所以，

$$N = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G_x|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G_x|} \quad (3)$$

對於在相同軌道的元素， $|G_x|$ 是相同的。讓 \mathcal{O} 是一個軌道，我們有

$$\sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|G_x|} = \sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|\mathcal{O}|} = 1 \quad (4)$$

用 (3) 代入 (2)，我們得到

$$N = |G| \cdot (\text{軌道的數量}) = |G| \cdot r \quad (5)$$

因此，結合 (1) 和 (4)，我們得到

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X^g| \quad (6)$$

■

Example: 用4個顏色對一個正三角形的三個邊進行著色，有幾種不同的著色方法？(兩種著色方式被認為是相同的，如果他們可以通過旋轉、鏡射相互變換)

我們讓 $G = D_3$ 是三角型的對稱群， X 是所有著色的結果 ($|X| = 4^3$)，所以我們要求 X 在 G 下有幾個軌道。根據前的討論，我們知道 $|G| = 6$ ，然後我們計算不動點的個數：

$$\begin{aligned} |X^{\rho_0}| &= 4^3 \\ |X^{\rho_1}| &= 4 \\ |X^{\rho_2}| &= 4 \\ |X^{\tau_1}| &= 4^2 \\ |X^{\tau_2}| &= 4^2 \\ |X^{\tau_3}| &= 4^2 \end{aligned}$$

根據伯恩斯德引理，我們有

$$\begin{aligned} 6r &= 4^3 + 4 + 4 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 120 \\ r &= 20 \end{aligned}$$

所以正三角形的相異著色方法有20種。

4.3. 著色多項式

我們考慮我們有 n 個顏色，幫一個有對稱性的圖形上色，我們假設在對稱性下有 r 種上色方式。讓 X 是所有上色方法的集合，讓 G 是該圖形的對稱群，根據博恩斯德引理，我們有

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

其中 X^g 是在 g 下的不動點的集合。我們觀察一下 $g \in G$ ，我們知道 g 可以被寫成循環的形式，像是下面這樣：

$$g = \underbrace{(1, 2, 3)(5, 4) \dots (\#, \#)}_{m_g}$$

所以 g 種共有 m_g 個循環。我們發現在這種情況下要在 g 下不動的著色方法必須滿足「每個循環內的顏色都一樣」，所以 $|X^g| = n^{m_g}$ 所以我們得到，

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} n^{m_g}$$

Example: 我們考慮有 n 個顏色，對一個正四邊形的頂點上色，我們要求在對稱性下有幾種不同的著色方法。我們讓 $G = D_4$ 是正四邊形的對稱群， X 是所有著色的結果 ($|X| = n^4$)，所以我們要求 X 在 G 下有幾個軌道。根據前的討論，我們知道 $|G| = 8$ ，然後我們計算不動點的個數：

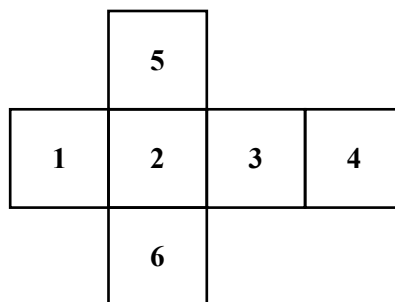
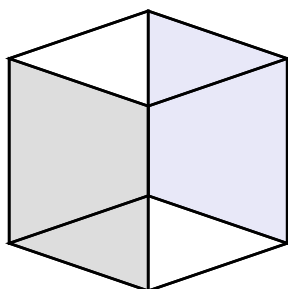
- 單位變換 $m_g = 4$
- 2個 $m_g = 1$ 的旋轉 ($90^\circ, 270^\circ$)，e.x. $g = (1, 2, 3, 4)$
- 1個 $m_g = 2$ 的旋轉 (180°)，e.x. $g = (1, 2)(3, 4)$
- 2個 $m_g = 3$ 的鏡射 (對角線的鏡射)，e.x. $g = (1)(3)(2, 4)$
- 2個 $m_g = 2$ 的鏡射 (中線的鏡射)，e.x. $g = (1, 3)(2, 4)$

所以我們有

$$r = \frac{1}{8}(n^4 + 2n + n^2 + 2n^3 + 2n^2)$$

$$r = \frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$$

Example: 我們現在有 n 個顏色，幫一個正六面體上色，可以通過旋轉變換得到視為相同的著色方式。總共有多少種不同的著色方式？



讓 D 是正六面體的對稱群，我們根據之前的討論，我們知道 $|D| = 24$ ，我們討論裡面的變換：

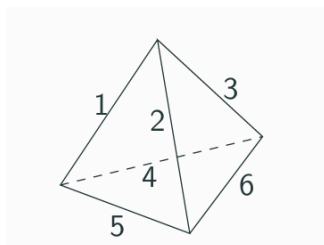
1. 單位變換: $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$
2. 固定兩對面然後旋轉 $90^\circ, 270^\circ$ ，如: $(1, 2, 3, 4)(5)(6)$ ，共 6 個。
3. 固定兩對面然後旋轉 180° ，如: $(1, 3)(2, 4)(5)(6)$ ，共 3 個。
4. 固定兩對邊旋轉 180° ，如: $(1, 5)(3, 6)(2, 4)$ ，共 6 個。
5. 固定兩個對頂點旋轉 $120^\circ, 240^\circ$ ，如: $(1, 5, 4)(2, 3, 6)$ ，共 8 個

所以我們有

$$r = \frac{1}{24}(n^6 + 6n^3 + 3n^4 + 6n^3 + 8n^2)$$

$$r = \frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2)$$

Example: 在旋轉的對稱性下，用 n 個顏色對一個正四面體的邊上色，總共有多少種不同的著色方式？



我們讓 G 是正四面體的對稱群，我們通過軌道-穩定子定理，我們可以得到 $|G| = 12$ 我們討論裡面的對置換：

- 單位變換: $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$
- 8個固定一面的旋轉: $(1, 2, 3)(4, 5, 6)$
- 3個固定兩邊的旋轉: $(1)(6)(2, 4)(5, 3)$

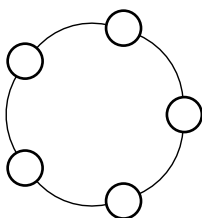
所以我們有

$$r = \frac{1}{12}(n^6 + 8n^2 + 3n^4)$$

4.4. 練習

Exercise I: 對於正 n 邊形的對稱群 D_n ， $|D_n|$ 是多少？

Exercise II: 有 n 個不同顏色的珠子，我們要把這些珠子串成一串5個珠子的項鍊，可以通過旋轉變換得到視為相同的項鍊。總共有多少種不同的項鍊？



Exercise III: 在旋轉的對稱性下，用 n 個顏色對一個正四面體的面上色，總共有多少種不同的著色方式？

Exercise IV: 一個九宮格的棋盤，我們要用 n 個不同的顏色對這個棋盤進行著色，可以通過旋轉，鏡射變換得到視為相同的著色方式。總共有多少種不同的著色方式？

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |