



Jedynka trygonometryczna

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Jedynka trygonometryczna

Dział trygonometrii obejmuje zagadnienia związane z zależnościami między długościami boków w trójkącie, a miarami kątów wewnętrznych. Jedną z zależności, która powstaje między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta jest jedynka trygonometryczna. W trakcie lekcji wprowadzimy i udowodnimy jedynkę trygonometryczną oraz pokażemy jej wykorzystanie w rozwiązywaniu problemów matematycznych.

Twoje cele

- Poznasz twierdzenie dotyczące jedynki trygonometrycznej.
- Wyznaczysz wartość sinusa, gdy dany jest cosinus kąta ostrego i na odwrót.

Przeczytaj

Już wiesz

- **Sinusem** kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.
- **Cosinusem** kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej.

W trakcie lekcji poznamy i wykorzystamy wzór na **jedynkę trygonometryczną**.

Twierdzenie: jedynka trygonometryczna

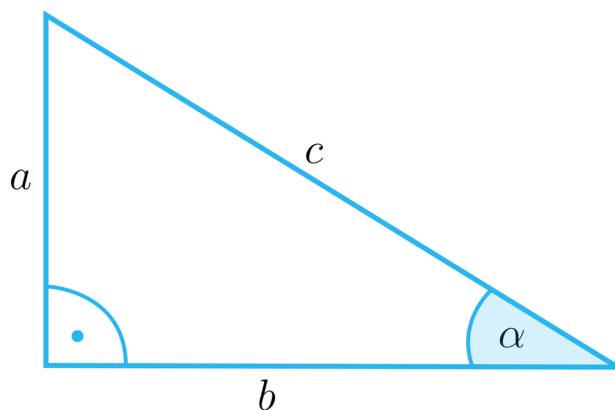
Dla dowolnego kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym zachodzi równość:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Wzór ten nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

Dowód

Narysujmy dowolny trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b , przeciwprostokątnej długości c oraz kącie ostrym α , leżącym przy boku b .



Z definicji funkcji trygonometrycznych wiadomo, że:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ oraz } \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Zatem:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Ważne!

Stosując równanie jedynki trygonometrycznej możemy wyznaczyć wartość sinusa kąta mając podany cosinus lub odwrotnie. Wzór ten stosujemy również dla kątów większych od 90° .

Przykład 1

Wyznamy wartość $\cos \alpha$, jeżeli dany jest $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ oraz α jest kątem ostrym.

W celu wyznaczenia wartości $\cos \alpha$ wykorzystamy wzór $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Podstawiamy wartość $\sin\alpha=13$.

Otrzymujemy równanie:

$$13^2 + \cos^2\alpha = 1.$$

Stąd $\cos^2\alpha=89$, więc $\cos\alpha=223$ lub $\cos\alpha=-223$. Ponieważ kąt α jest ostry, zatem $\cos\alpha=223$.

Ważne!

Dla dowolnego kąta $\alpha \in (0, 90^\circ)$ mamy, że $\sin\alpha > 0$ oraz $\cos\alpha > 0$, zaś dla $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ zachodzą warunki: $\sin\alpha > 0$ oraz $\cos\alpha < 0$.

Przykład 2

Wyznamy wartość $\sin\alpha$, jeżeli dany jest $\cos\alpha=25$ oraz α jest kątem ostrym.

W celu wyznaczenia wartości $\sin\alpha$ wykorzystamy wzór $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Podstawiamy wartość $\cos\alpha=25$.

Otrzymujemy równanie:

$$\sin^2\alpha + 25^2 = 1.$$

Stąd $\sin^2\alpha=2125$, więc $\sin\alpha=215$ lub $\sin\alpha=-215$. Ponieważ kąt α jest ostry, zatem $\sin\alpha=215$.

Przykład 3

Sprawdzimy, czy istnieje taki kąt α , dla którego $\sin\alpha=23$ oraz $\cos\alpha=14$.

Podane wartości $\sin\alpha$ oraz $\cos\alpha$ podstawiamy do jedynki trygonometrycznej.

Otrzymujemy: $23^2 + 14^2 = 29 + 116 = 32 + 9144 = 41144$.

Ponieważ $41144 \neq 1$, zatem nie istnieje taki kąt.

Przykład 4

Wyznamy wartość $\sin\alpha$ oraz $\cos\alpha$, jeżeli wiadomo że α jest kątem ostrym oraz sinus tego kąta jest dwa razy większy od cosinusa.

Z zadania możemy ułożyć następujący warunek:

$$\sin\alpha = 2\cos\alpha.$$

Podany warunek podstawiamy do jedynki trygonometrycznej. Otrzymujemy równanie:

$$2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \text{ zatem } 5\cos^2\alpha = 1.$$

Czyli $\cos^2\alpha=15$, więc $\cos\alpha=55$ lub $\cos\alpha=-55$.

Ponieważ α jest kątem ostrym, zatem $\cos\alpha=55$ oraz $\sin\alpha=2\cdot 55=255$.

Przykład 5

Wyznamy wartość wyrażenia $\sin\alpha + \cos^2\alpha$, jeżeli $\sin\alpha \cos\alpha = 29$.

Wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

Zatem mamy:

$$\sin\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1 + 2 \cdot 29 = 1 + 49 = 149.$$

Przykład 6

Wiadomo, że stosunek sinusa pewnego kąta ostrego α do cosinusa tego kąta wynosi 125. Wyznamy wartość wyrażenia $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Z warunku podanego w zadaniu mamy, że $\sin\alpha \cos\alpha = 125$, zatem $\sin\alpha = 125 \cos\alpha$.

Podstawiamy to wyrażenie do jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy: $125 \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, co po przekształceniu daje $16925 \cos^2\alpha = 1$.

Z równania otrzymujemy, że $\cos^2\alpha = \frac{1}{16925}$, więc $\cos\alpha = \frac{1}{13}$, bo α jest kątem ostrym.

Zatem $\sin\alpha = 125 \cdot \frac{1}{13} = \frac{125}{13}$.

Szukana suma wynosi $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{125}{13} + \frac{1}{13} = \frac{126}{13}$.

Słownik

jedynka trygonometryczna


dla dowolnego kąta α zachodzi równość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem dotyczącym zastosowania jedynki trygonometrycznej do wyznaczania sinusa lub cosinusa kąta.

Wyznacz sinus i cosinus kąta ostrego α , jeśli $\cos \alpha = 2 \sin \alpha$.

$$\sin^2 \alpha + (2 \sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 5 \sin^2 \alpha = 1 \quad | :5$$
$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \quad | \sqrt{}$$
$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Wyznacz wartość $\cos \alpha$, jeżeli:

- a) $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$ i α jest kątem ostrym,
- b) $\sin \alpha = 16$ oraz α jest kątem rozwartym.

Sprawdź się

Ćwiczenie 1

Dany jest kąt ostry α . Połącz wartość sinusa z odpowiadającą mu wartością cosinusa:

$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{10}}$, $\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{2}}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $\cos \alpha = \frac{21}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{9}}$

$\sin \alpha = 23$	
$\sin \alpha = 12$	
$\sin \alpha = 25$	
$\sin \alpha = 37$	

Ćwiczenie 2

Wiadomo, że $\cos \alpha = 33$. Wówczas wartość wyrażenia $3 - 2\sin 2\alpha$ wynosi:

- 53
- 143
- 1

Ćwiczenie 3

Kąt ostry α istnieje, jeżeli:

- $\sin \alpha = 27$ i $\cos \alpha = 357$
- $\sin \alpha = 13$ i $\cos \alpha = 23$
- $\sin \alpha = 25$ i $\cos \alpha = 35$
- $\sin \alpha = 22$ i $\cos \alpha = 22$

Ćwiczenie 4

Po przekształceniu wyrażenie $\sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha$ można zapisać w postaci:

- 2
- $4\sin \alpha \cos \alpha$
- -2

Ćwiczenie 5

Rozwiąż krzyżówkę

1. Trójkąt zbudowany z przyprostokątnych i przeciwprostokątnej.
2. Trójkąt, który ma co najmniej dwa boki jednakowej długości.
3. Wyrażenie $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$ to inaczej ... trygonometryczna.
4. Jedna z funkcji trygonometrycznych.
5. Bok w trójkącie prostokątnym leżący przy kącie prostym.

1																		
2																		
3																		
4																		
5																		

Ćwiczenie 6

Wyrażenie $\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$ po uproszczeniu jest postaci:

- $1 \sin \alpha \cos \alpha$
- $-1 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\sin \alpha \cos \alpha$

Ćwiczenie 7

Wiadomo, że α jest kątem ostrym. Wybierz odpowiednie wartości $\sin \alpha$ oraz $\cos \alpha$:

Jeżeli $\sin \alpha \cos \alpha = 12$ to: $\sin \alpha = 55$ / $\sin \alpha = 255$. Zatem $\cos \alpha = 255$ / $\cos \alpha = 55$.

Ćwiczenie 8

Wstaw w tekst odpowiednie liczby:

15, 25, 23

Jeżeli wyrażenie $\sin \alpha \cos \alpha = \dots\dots\dots$, to wartość $\sin \alpha - \cos \alpha^2 = \dots\dots\dots$

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jedyńka trygonometryczna

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele nauczania - wymagania ogólne:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta ze wzorów $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przeprowadza dowód twierdzenia dotyczącego jedynki trygonometrycznej;
- wykorzystuje jedynkę trygonometryczną do znajdowania wartości sinusa kąta, gdy dany jest cosinus;
- znajduje cosinus kąta ostrego, gdy dany jest sinus.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- z użyciem e-podręcznika;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiałach;

- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Jedynka trygonometryczna” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Film samouczek”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem. Uczniowie w parach rozwiązują Polecenie 2, wyniki omawiają na forum klasy.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
5. Zadania numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Jedynka trygonometryczna” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Jedynka trygonometryczna”).

Materiały pomocnicze

- [Tożsamości trygonometryczne](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału w temacie „Jedynka trygonometryczna”.