Diferenciación Numérica

Leidy Yoana Medina

Facultad de Ciencias Básicas
Universidad de Medellín

Tabla de Contenido

Se presentan algunas fórmulas para aproximar la derivada en un punto, estas aproximaciones se deducen de la expansión de $f(x)$ por la serie de Taylor. Se dan unos ejemplos y ejercicios donde se aplican estas fórmulas.

Recordemos

La definición matemática de la derivada es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \tag{1}$$

donde y y $f(x)$ son representaciones alternativas de la variable dependiente y, x es la variable independiente.

Recordemos

La definición matemática de la derivada es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \tag{1}$$

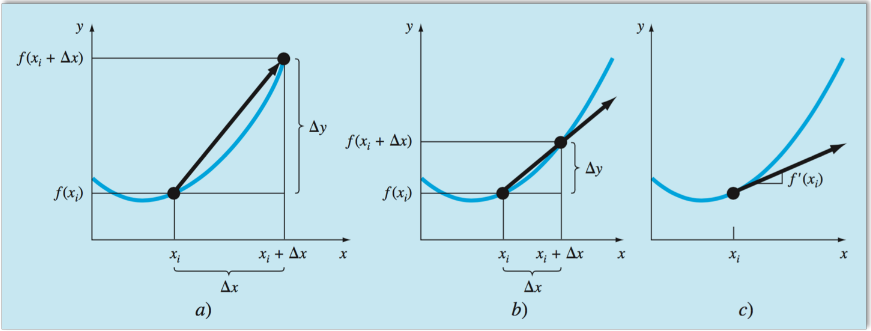
donde y y $f(x)$ son representaciones alternativas de la variable dependiente y, x es la variable independiente. Si se hace que Δx (ó h) se aproxime a cero, el cociente de las diferencias se convierte en derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \tag{2}$$

Pregunta

¿Qué sucede cuando $\Delta x \to 0$?
Veamos la representación

Representación de la derivada en un punto



Diferencial dividida finita

A la ecuación se le conoce con un nombre especial en el análisis numérico: **diferencia dividida finita.**

Diferencial dividida finita

A la ecuación se le conoce con un nombre especial en el análisis numérico: **diferencia dividida finita.**

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i) \tag{3}$$

Tabla de Contenido

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

La deducción de la diferencias hacia adelante

El polinomio de grado uno para la función $f(x)$ es:

Serie de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

La deducción de la diferencias hacia adelante

El polinomio de grado uno para la función $f(x)$ es:

Serie de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

Para realizar la aproximación, sea $x = x_{i+1}$, entorno al punto $x_0 = x_i$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 \tag{4}$$

La deducción de la diferencias hacia adelante

El polinomio de grado uno para la función $f(x)$ es:

Serie de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

Para realizar la aproximación, sea $x = x_{i+1}$, entorno al punto $x_0 = x_i$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 \tag{4}$$

Ahora definimos $h = x_{i+1} - x_i$, es decir, el incremento:

Aproximación hacia adelante

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi) \tag{5}$$

Ó

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi(x)), \quad \text{con} \quad x_0 \leqslant \xi(x) \leqslant x_1$$

Tabla de Contenido

Diferenciación hacia atrás

El polinomio de grado uno para la función $f(x)$ es:

Serie de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

Diferenciación hacia atrás

El polinomio de grado uno para la función $f(x)$ es:

Serie de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

Para realizar la aproximación, sea $x = x_{i-1}$, entorno al punto $x_0 = x_i$:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 \qquad (6)$$

Diferenciación hacia atrás

El polinomio de grado uno para la función $f(x)$ es:

Serie de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

Para realizar la aproximación, sea $x = x_{i-1}$, entorno al punto $x_0 = x_i$:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 \tag{6}$$

Despejando $f'(x_i)$, se tiene:

Diferencias hacia atrás

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi(x)), \quad x_{i-1} \leqslant \xi(x) \leqslant x_i$$

Para x_0 y $x_1 = x_0 - h$:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_1)}{h}$$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Diferencias centradas

Diferencias centradas

$$f'(xi) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

Fórmulas de diferenciación

1. Diferenciación hacia adelante

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. Diferencias hacia atras

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_1)}{h}$$

3. Diferencias centradas

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Ejemplo 1

En noviembre de 1959 la erupción del volcán Kilauea Iki en Hawai inició con una línea de brotes a lo largo de la pared del cráter, posteriormente la actividad se concentró en un solo conducto en el piso del cráter; en un momento dado lanzó lava con una velocidad:

t(s)	0	2	4	6	8	10
v(m/s)	0	3	6	9	12	15

- ¿Cuál fue la aceleración de salida de la lava en cada instantes de tiempo?

Solución:

Ejemplo 2

Use los siguientes datos

x	1.20	1.29	1.30	1.31	1.40
f(x)	11.59006	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

para

1. Aproximar $f'(1.3)$ use la diferencias hacia adelante con $h = 0.1$
2. Aproximar, $f'(1.3)$ use las diferencias hacia adelante con $h = 0.01$.
3. Aproximar $f'(1.3)$ use la diferencias centradas con $h = 0.1$
4. Aproximar, $f'(1.3)$ use las diferencias centradas con $h = 0.01$.

Compárela en cada caso con el valor real que es $f'(1.3) = 26.28170519$.

Solución

Ejemplo 3

Un automóvil que recorría una carretera recta tiene los siguientes datos

Tiempo (s)	0	3	5	8	10	13
Distancia (m)	0	225	383	623	742	993

El problema consiste en predecir con la mayor precisión(Diferencias centradas) la velocidad en cada uno de los instantes dados en la tabla.

Ejemplo

Use los siguientes datos para encontrar la velocidad y aceleración con $t = 10s$ usando 3 puntos.

Tiempo t (s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Posición x (m)	0	0.7	1.8	3.4	5.1	6.3	7.3	8	8.4

Tabla de Contenido

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Segunda derivada a tres puntos, punto medio

Para $x_{-1} = x_0 - h$ x_0 y $x_1 = x_0 + h$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi(x)) \quad \text{con} \quad x_{-1} \leqslant \xi(x) \leqslant x_1 \tag{7}$$

ó

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2}$$

Ejemplo

Example

Use los siguientes datos

x	1.20	1.29	1.30	1.31	1.40
f(x)	11.59006	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

para

1. Aproximar $f^{(2)}(1.3)$ con $h = 0.1$ y con $h = 0.01$.

Compárela en cada caso con el valor real $f''(1.3) = 36.593535$

Tabla de Contenido

Ejercicio

La cantidad de un contaminante radiactivo distribuido uniformemente que se encuentra contenido en un reactor cerrado, se mide por su concentración c (becquerel/litro, o Bq/L). El contaminante disminuye con una tasa de decaimiento proporcional a su concentración, es decir: $\frac{dc}{dt} = -kc$

1. Determine la cantidad de contaminante radioactivo desde un tiempo [0,1] día. La concentración inicial es de $10Bq/L$, tome un $h = 0.1$ y $k = 0.25$
2. Grafique la solución

Ejemplo de aplicación

Un paracaidista con una masa de 68.1 kg salta de un globo aerostático fijo. Aplique la ecuación $\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$ para determinar la velocidad en cada instante de tiempo. Considere que el coeficiente de resistencia es igual a 15 kg/s.
Inicialmente el paracaidista se encuentra en reposo, para obtener la velocidad analíticamente es

$$v(t) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t})$$

1. Determine la velocidad en cada instante de Tiempo de [0,12]
2. Comparar la velocidad de manera analítica y numérica, determinando los errores absolutos
3. Realice la gráfica de la velocidad determinada por un método numérico y la velocidad determinada analíticamente
4. Realice la gráfica de los errores absolutos

Ejercicio

El voltaje $E = E(t)$ en un circuito eléctrico obedece la ecuación $E(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt} + RI(t)$, donde R es la resistencia, L es la inductancia e I es la intensidad de corriente. Consideremos $L = 0.05$ henrios, $R = 2$ ohmios y los valores de la intensidad $I(t)$, en amperios, que se relaciona en la siguiente tabla.

Tiempo t	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
Corriente $I(t)$	8.2277	7.2428	5.9908	4.5260	2.9122

1. Determine $I'(1.2)$ mediante derivación numérica y use este valor para calcular $E(1.2)$.
2. Compare la respuesta con la obtenida sabiendo que la expresión de $I(t)$ es $I(t) = 10e^{-\frac{t}{10}}\sin(2t)$.

Ejercicio

(Crecimiento del cultivo de bacterias). Suponga que la población de una colonia de bacterias crece de manera proporcional de 100 a la población en el tiempo t, que la población inicial de bacterias fue de 1000.

1. Al cabo de 3 horas cuantas bacterias se detectan?
2. Realice la gráfica de la situación y compárela con la solución analítica

y después de tres horas de observación, desde el inicio del proceso, se detectan 2000 bacterias.

Propagación de un virus

Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa a su escuela donde hay 1000 estudiantes. Si se supone que la constante de proporción del modelo es $k = 0.0009906$ con que se propaga al virus no sólo a la cantidad x de alumnos infectados, sino también a la cantidad de alumnos no infectados, determinar la cantidad de alumnos infectados seis días después
El modelo es :

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x)$$

- Calcular la cantidad de contagiado al cabo de 6 días
- Realizar una gráfica de la información de: los contagiados y los no contagiados.

Muerte de un inversionista

La policía descubre el cuerpo de un inversionista. Para resolver el crimen es decisivo determinar cuando se cometió el homicidio. El forense llegó al medio día y de inmediato observa que la temperatura del cuerpo es de $30^\circ C$. Así mismo, observa que la temperatura de la habitación es constante a $27^\circ C$. Suponiendo que la temperatura de la víctima era normal en el momento de su fallecimiento ($37^\circ C$), determinar la hora en que se cometió el crimen. La ecuación diferencial es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

con $k = -0.4056$