

Лекция №1

Параллельные методы сортировки данных

Общие понятия сортировки

Заданной является последовательность следующего вида:

$S = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, последовательность $S' = (a_1', a_2', \dots, a_n')$, где $a_i' \leq a_{i+1}'$; $i = 1..n-1$;

Базовые операции:

- Сравнить и переставить (последовательная сортировка) – выбирается пара элементов a_i и a_j и если эти элементы не удовлетворяют условиям сортировки, то переставить их. Данная операция является основой для реализации последовательных методов. Особенностью последовательных методов является выбор пар значений, для которых данная операция будет применяться.
- Сравнить и разделить (сортировка слиянием – 2 массива одновременно сортируются и формируется третий путём слияния)

Принципы реализации параллельной сортировки

1. Исходный набор данных (массив) разделяется на блоки, назначаемые устройством (номер блока соответствует идентификатору ПЭ¹)
2. В ходе сортировки ПЭ обмениваются блоками и выполняется их сравнение между собой
3. Результирующий набор данных является распределённым между ПЭ. Блоки с наименьшими значениями находятся на ПЭ с минимальными значениями их имён (номер)

Пусть I – идентификатор блока данных (он же номер ПЭ),

n_I – количество значений в блоке I ,

a_{I,n_I-1} – последний элемент в блоке I на I -ом ПЭ

$a_{I,n_I-1} \leq a_{I+1,0}$ – последний элемент этого блока меньше первого элемента следующего блока

При $(a_{I,0}, a_{I,1}, \dots, a_{I,n_I-1}) \rightarrow P_I$

$(a_{I+1,0}, a_{I+1,1}, \dots, a_{I+1,n_{I+1}-1}) \rightarrow P_{I+1}$

Внутри каждого блока элемента выполняется условие $a_{I,i} \leq a_{I,i+1}$

Операция сравнить и переставить для случаев $P = N$ (блок из одного элемента)

При $i < j$, $a_i \rightarrow P_i$, $a_j \rightarrow P_j$

Параллельная операция сравнить и переставить:

1. Обмен значениями a_i , a_j между ПЭ P_i , P_j итогом являются две сформированные пары значений: $(a_i, a_i) \rightarrow P_i$; $(a_j, a_j) \rightarrow P_j$
2. Сравнение на каждом ПЭ полученных пар, тогда на ПЭ P_i сохраняется минимальный элемент из полученной пары, а на P_j максимальный элемент из пары
 $a_i' = \min(a_i, a_j)$; $a_i' \rightarrow P_i$
 $a_j' = \max(a_i, a_j)$; $a_j' \rightarrow P_j$

Сравнить и переставить на случай $P < N$. Операция сравнить и разделить

При $P < N$ будут сформированы блоки размерами N/P .

$a_{I,i} \leq a_{I,i+1}$

$a_{I,n_I-1} \leq a_{I+1,0}$

На основе исходной последовательности формируется блок данных вида:

$b_I = (a_{I,0}, a_{I,1}, \dots, a_{I,n_I-1})$

В результате обмена блоками между ПЭ P_I и P_{I+1} (при реализации других алгоритмов ПЭ не обязательно соседние) будет получено:

$b_I, b_{I+1} \rightarrow b_I \cup b_{I+1} \rightarrow (b_I \cup b_{I+1})' \rightarrow b_I', b_{I+1}'$

Исходные блоки \rightarrow объединение блоков \rightarrow отсортированное объединение блоков \rightarrow блоки на P_I и P_{I+1}

¹ ПЭ – процессорный элемент

P_i	P_{i+1}	Размерность
b_i	b_{i+1}	N/P
$b_i \cup b_{i+1}$	$b_i \cup b_{i+1}$	$2N/P$
$(b_i \cup b_{i+1})'$	$(b_i \cup b_{i+1})'$	$2N/P$
b_i'	b_{i+1}'	N/P

Схема реализации операции сравнить и разделить:

В результате операции сравнить и разделить полученные блоки b_i' , b_{i+1}' совпадают по размерам с исходными блоками b_i , b_{i+1} значения на P_i не превышают значений на P_{i+1}

Формализация:

$[b_i \cup b_{i+1}]' = b_i' \cup b_{i+1}'$,
 $\forall a_i \in b_i', \forall a_j \in b_{i+1}', a_i \leq a_j$

Особенности операции сравнить и разделить

1. Составы блоков данных, закрепленных за ПЭ будут изменяться в процессе сортировки
2. Размерность блоков может быть либо одинаковой, либо различной при реализации алгоритма

Параллельная реализация методов пузырьковой сортировки

Для параллельной реализации упомянутого способа сортировки используется его модификация, называемая «чёт-нечётная перестановка».

Этапы реализации способа перестановки:

1. Реализуется разбиение исходного массива (последовательности) S на пары вида:
 $(a_0, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_5), \dots, (a_{n-2}, a_{n-1})$
2. Для каждой пары элементов реализуется операция сравнить и переставить
 (a_i, a_{i+1}) – внутри каждой пары элементы упорядочены
3. Реализуется обмен
 1. В результате чётного этапа перестановки формируются пары следующего вида:
 $(a_0, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_5), \dots, (a_{n-2}, a_{n-1})$
 Для каждой пары выполняется операция сравнить и переставить
 2. Реализуется обмен элементами последовательности таким образом, что на ПЭ формируются пары следующего вида $(a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6), \dots, (a_{n-3}, a_{n-2})$ – этап нечётной перестановки. По аналогии для сформированных пар выполняется операция сравнить и переставить

Данная параллельная реализация операции сравнить и переставить используется для случая, когда количество ПЭ равно количеству элементов последовательности.

Схема реализации обмена между ПЭ при формировании пар значений