Лекция №7

Задача поиска кратчайшего пути на графе

Пусть задан ориентированный граф $G(V, R)$

$W : R \to R^{+}$ (W способ отображения множества дуг R(вторая R – это множество действительных чисел) на действительную полуось R+)

W – некоторая весовая функция, в общем случае предполагает некоторое отображение R на действительную ось ($W: R \to R$).

Путь из вершины V_0 в V_j:

$P_j = \langle V_0, V_1, \ldots, V_j \rangle$

$(V_{q-1}, V_q) \in R;\ q = 0\ldots j$

Если существует путь из V_0 в V_j, то эти две вершины связаны отношением:

$V_0 \to^{P} V_j$.

Каждая дуга (V_{q-1}, V_q) характеризуется весом:

$\exists(V_i, V_j) \in R \subseteq V^2 \Rightarrow w(V_i, V_j)$

Вес пути:

$w(P_j) = \sum[q=1..j](\ w(V_{q-1}, V_q)\ )$

Кратчайший вес между Vj и Vk:

$$\delta(V_j, V_k) = \begin{cases} \min[P_k]\ w(P_k), & \exists(V_j \to^{P} V_k); \\ \infty, & \nexists(V_j \to^{P} V_k); \end{cases}$$

Если задан взвешенный ориентированный граф $G(V, R)$, тогда необходимо определить кратчайший путь $\delta(V_0, V_j)$ и соответствующие пути $V_0 \to^{P} V_j$, то задача состоит в нахождении кратчайших путей до всех вершин на графе

$\forall V_j \in V;\ \delta(V_0, V_j),\ V_0 \to^{P} V_j$;

Атрибуты для вершины графа

1. $\pi[V_i] = \{V_j\};\ V_i \in V$
   Рассматриваемая вершина, тогда $\pi[V_i]$ позволяет определить путь (охарактеризовать) обратный кратчайшему пути из рассматриваемой вершины V_i в исходную V_0.
2. Оценка кратчайшего пути
   Если V_j текущая рассматриваемая вершина, тогда $d[V_i]$ характеризующая вес кратчайшего пути (это похоже на $w(V_j, V_i)$)

Процедура инициализации

init

$\forall Vj \in V$

[$d[V_j] \leftarrow \infty$

[$\pi[V_j] \leftarrow null$

$d[V_j] \leftarrow 0$

Поиск кратчайшего пути из V_0 в V_j будет предполагать обновление параметров $d[V_j]$

Если вершина V_j – текущая рассматриваемая, тогда для неё должна быть выполнена процедура обновления атрибутов, соответствующих кратчайшему пути.

Три варианта одного и того же

1. Обновление d[Vj] производится, если $d[V_i]$ для предшествующих вершин уже определено и характеризует кратчайший путь.
2. d[Vj] может быть обновлено, если определено d[Vi] и $(Vi, Vj) \in R$ и d[Vi] характеризуется $\delta(V_0, V_i)$
3. Обновление $d[V_j]$ возможно если для предшествующей вершины V_i (имеется дуга $(V_i, V_j) \in R$) параметр $d[V_i]$ проинициализирован значением веса кратчайшего пути из V_0 в V_i ($\delta(V_0, V_i)$)

Код процедуры обновления веса, текущей рассматриваемой вершиной является

$OBN(\mathbf{V_i}, V_j)$:

if $(d[V_i] > d[V_j] + w(V_j, V_i))$ then

[$d[V_i] \leftarrow d[V_j]+w(V_j, V_i)$

[$\pi[V_i] \leftarrow \{V_j\}$

Для реализации алгоритма вводится множество $S \subseteq V$ тех вершин, для которых определены $d[V_j] = \delta(V_0, V_j)$ и $\pi[V_j]$ соответствует кратчайшему пути из начальной вершины V_0 в рассматриваемую V_j.

В алгоритме последовательно выбираются те вершины $V_i \in V \setminus S$ для которых

$\exists(V_j, V_i) \in R \mid V_j \in S$ (1)

Для вершин, удовлетворяющих свойству (1) выполняется процедура обновления весов и выбор вершины с минимальным весом и добавление в множество S.

Алгоритм Дейкстры:

<u>init:</u>

$S = \varnothing$

$|V|$ раз выполнить

определить $V_i \in V \setminus S$: $d[V_i] = \min_j d[V_j]$

$S \leftarrow S \cup \{V_i\}$

$\forall Vi \in V \setminus S$: $\exists(Vi, Vj) \in R \Rightarrow OBN(V_i, V_j)$

Параллельная реализация алгоритма Дейкстры

Предполагает обновление атрибутов $d[V_i]$, $\pi[V_i]$ для $V_i \in V \setminus S$ таких, что $(V_j, V_i) \in R$ и $V_j \in S$