Лекция №5

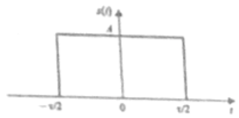
Корреляционная функция показывает неудлинение связей между двумя сигналами или копиями одного и того же сигнала, сдвинутого на некоторое время τ.

Основные свойства КФ:

- Значение КФ при t = 0 есть энергия сигнала (интеграл от его квадрата);
  `Bx(τ) = INT[-inf;inf](s(t)*s(t-τ) dτ)`
- КФ есть четная функция своего аргумента;
  `Bx(τ) = Bx(-τ)`
- Значение КФ в нуле есть её максимально возможное значение;
  `Bx(τ)|t=0 = max Bx(τ)`
- С ростом абсолютного значения t КФ сигнала с конечной энергией затухает;
  `|τ|↑ Bx(τ)↓`
- Если сигнал не имеет особенностей в виде дельта-функций, его КФ не имеет разрывов (непрерывна);
- Если сигнал – напряжение, то размерность его КФ В*В*с.

Пример: вычислим корреляционную функцию прямоугольного импульса.

- при $0 \le \tau \le T$
  $$B_x(\tau) = \int_{\tau}^{T} A^2 dt = A^2(T-\tau);$$
- при $-T \le \tau < 0$
  $$B_x(\tau) = \int_{0}^{T+\tau} A^2 dt = A^2(T+\tau);$$
- при $|\tau| > T$
  $$B_x(\tau) = 0.$$



$$B_x(\tau) = \begin{cases} A^2(T-|\tau|), & |\tau| \le T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases}$$

Прямоугольный импульс:

```
t = -1:0.01:1;
y = rectpuls(t);
figure(1);
plot(t, y);
```

Если сигнал периодический, то конечной энергией сигнал не обладает, его корреляционную функцию вычисляют усредняя произведения сдвинутых форм в пределах одного периода.

`Bx(τ) = 1/T INT[-T/2;T/2](s(t)*s(t-τ) dt)`

- Значение КФ при t = 0 есть средняя мощность анализируемого сигнала;
- КФ есть четная функция своего аргемента;
- Значение КФ в нуле есть её максимально возможное значение;
- КФ периодического сигнала есть функция периодическая с тем же периодом, что и сам сигнал;
- Если сигнал не имеет особенностей в виде дельта-функций, его КФ не имеет разрывов (непрерывна);
- Если сигнал – напряжение, его размерность В*В

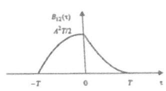
Пример: генерация синусоидального сигнала

```
t = -1:0.01:1;
y = cos(2*pi*5*t);
figure(1);
plot(t, y);
ycov = xcov(y);
figure(2);
plot(ycov);
```

Взаимная корреляционная функция

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le T, \\ 0, & t<0, t>T; \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A\frac{t}{T}, & 0 \le t \le T, \\ 0, & t<0, t>T. \end{cases}$$

- при $0 \le \tau \le T$
  $$B_{12}(\tau) = \int_{\tau}^{T} A^2 \frac{t-\tau}{T} dt = \frac{A^2}{2T}(T-\tau)^2;$$
- при $-T \le \tau \le 0$
  $$B_{12}(\tau) = \int_{0}^{T+\tau} A^2 \frac{t-\tau}{T} dt = \frac{A^2}{2T}(T^2-\tau^2);$$
- при $|\tau| > T$
  $$B_{12}(\tau) = 0.$$



$$B_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{2T}(T-\tau)^2, & 0 \le \tau \le T, \\ \frac{A^2}{2T}(T^2-\tau^2), & -T \le \tau < 0, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases}$$

Свойства ВКФ несколько отличаются от свойств КФ:

1. $|B_{12}(\tau)| \le \sqrt{E_1 E_2}$, где E_1 и E_2 — энергии сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.
2. $B_{12}(-\tau) = B_{21}(\tau)$, то есть изменение знака τ равносильно взаимной перестановке сигналов.
3. Значение ВКФ при $\tau = 0$ ничем не выделяется; максимум может быть расположен в любом месте оси τ.
4. С ростом абсолютного значения τ ВКФ сигналов с конечной энергией затухает:

   $$\lim_{|\tau| \to \infty} B_{12}(\tau) = 0.$$
5. Если сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ не содержат особенностей в виде дельта-функций, их ВКФ не может иметь разрывов (то есть обязана быть непрерывной функцией).
6. Если сигналы — напряжение, то размерность их ВКФ равна $В^2 \cdot с$.

Для периодических сигналов понятие ВКФ обычно не применяется, хотя оно может быть введено в случае, если сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ имеют одинаковый период.

Для вычисления АКФ и ВКФ на практике используется операция линейной свёртки (convolution).

Связь между корреляционной функцией и спектром сигнала
Корреляционные функции и спектры – есть интегральные преобразования исследуемого сигнала. Для вычисления связи между ними возможно подвергнуть ВКФ сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ со спектрами $S_1(w)$ и $S_2(w)$ соответственно, преобразованию Фурье.
$INT(B_{1,2}(\tau)\times e^{-jw\tau}\ dt) = INT(INT[-inf;inf](S_1(t)\times S_2(t-\tau)\ dt)\times e^{-jw\tau}\ dt) = S_1(w)\times S_2(w)$ (*)

Преобразование Фурье ВКФ двух сигналов даёт взаимный спектр двух сигналов. Взаимный спектр сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ есть произведение их спектральных функций. Значит если спектры сигналов не перекрываются, взаимный их спектр равен 0 на всех частотах и ВКФ их равна 0 при любых значениях временного сдвига. Значит сигналы с не перерывающимися спектрами будут не связаны, не коррелируют. Для АКФ положим в формуле (*) $S_1(t) = S_2(t) = S(t)$. Получим, что АКФ сигнала связано с преобразованием Фурье с энергетическим спектром сигнала или с квадратом модуля спектральной функции. Значит АКФ сигнала не зависит от его базового спектра. Сигналы с одинаковым амплитудным спектром и различными фазовыми спектрами имеют одинаковый АКФ. Следовательно по АКФ восстановить в точности сигнал невозможно, из-за утраты информации о фазе сигнала.

Дискретные сигналы

При обработке или передаче сигнала по цифровым каналам связи исходный аналоговый сигнал представляется в виде дискретного ряда?. Это вектор отсчёта значений кантованного уровня сигнала в отдельные дискретные моменты. При этом происходит неизбежная потеря информации так как о поведении сигнала в интервалах между отсчётами ничего не известно.