Лекция №2

§1.2. Математические модели САУ в комплексной области

Основные операции с комплексными числами

$j = \sqrt{-1}$

z – комплексное число располагается на координатной плоскости +Oj под углом φ к оси +

a и b – проекции отрезка от начала координат к точке z на оси + и j соответственно

$z = a + jb$

$z = Ze^{j\varphi}$

$z = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi$

$Z = \sqrt{a^2 + b^2}$

$Z = |z|$

$\varphi = \mathrm{arctg}(b/a)$

$\varphi = \arg(z)$

$a = Z\cos\varphi$

$b = Z\sin\varphi$

1) Сложение
   $z_1 = a_1 + jb_1$
   $z_2 = a_2 + jb_2$
   $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
2) Умножение
   $z_1 \times z_2 = Z_1 \times Z_2 \times e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = (a_1 + jb_1) \times (a_2 + jb_2) = a_1a_2 + ja_1b_2 + jb_1a_2 - b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + b_1a_2)$
3) Комплексно сопряжённые
   $z = a + jb$
   $z^* = a - jb$
4) Убрать j из знаменателя – умножить числитель и знаменатель на комплексно сопряженное
   $(a + bj)/(c+jd) = ((a + jb)(c - jd))/((c + jd)(c - jd)) = (\ldots)/(c^2 + d^2)$

Преобразование Лапласа

Применяется для упрощения решения дифференциальных уравнений, описывающих движение/динамику САУ.

Цель преобразования – произвести замену переменных в ДУ так, что бы она привела к алгебраическим уравнениям.

Задачи:

1. Замена переменных
2. Решение алгебраических уравнений в области изображения
3. Обратный переход во временную область

Если есть некоторая функция оригинал f(t), то её изображение в комплексной области определяется формулой $f(s) = \int[0..\infty](e^{-st} \times f(t)dt)$ – <u>прямое преобразование Лапласа</u>.

Пример:

Пусть

$f(t) = dx(t)/dt$

Тогда

$f(s) = \int[0..\infty](e^{-st} \times (dx(t)/dt) \times dt) = s\int[0..\infty](e^{-st} \times dx(t)) - x(0) = sx(s) - x(0)$

$x(t) \risingdotseq x^*(s)$

$dx(t)/dt \risingdotseq sx(s) - x(0)$

$d^2x(t)/dt^2 \risingdotseq s^2x(s) - sx(0) - x(0)$

Обратное преобразование Лапласа определяется формулой:

$f(t) = 1/(2\pi j) \times \int[C-j\infty..C+j\infty](e^{st} \times f(s)ds)$

Этот интеграл вычисляется с помощью формулы вычетов.

Вычетом некоторой функции x(s) в изолированной особой точке (это точка в которой функция обращается в 0 или в ∞) называется число $1/(2\pi j) \times \int[C](x(s)ds)$, где C – достаточно малая окружность вокруг изолированной области. Вычетов у функции столько, сколько особых точек. Если функция обращается в ∞ – вычет называется полюсом, если в 0 – то нулём.

1) Полюсы функции не кратные
   res – вычет
   s_i – полюс
   $res \times e^{st} \times x(s) = \lim[s \to s_i](e^{st} \times x(s) \times (s-s_i))$
   $x(s) = 1/(s \times (s+1)) \risingdotseq x(t)$ -?
   $s_1 = 0$
   $s_2 = -1$
   $x(t) = \lim[s \to 0](e^{st} \times 1/(s \times (s+1)) \times (s-0) + \lim[s \to -1](e^{st} \times 1/(s \times (s+1)) \times (s+1) = 1 + (-1e^{-t}) = 1-e^{-t}$
2) Полюсы функции кратные
   ki – кратность полюса i
   $res \times e^{st} \times x(s) = 1/(k_i-1)! \times \lim[s \to s_i]((d^{(k_i-1)} \times [x(s)(s-s_i)^{k_1} e^{st}])/(ds^{(k_i-1)}))$

§1.2.1. Передаточные функции САУ

$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) = b_0 x(t) + \dots + b_m x^{(m)}(t)$ (2)
$n \geq m$ для физически реализуемых систем

Применим к этому уравнению прямое преобразование Лапласа
L{(2)}
$a_0 y(s) + a_1 s y(s) + \dots + a_n s^n y(s) = b_0 x(s) + b_1 s x(s) + \dots + b_m s^m x(s)$ (3)
$(a_0 + a_1 s + \dots a_n s^n) y(s) = (b_0 + b_1 s + \dots b_m s^m) x(s)$
$y(s) = (b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m)/(a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n) \times x(s)$ (4)

(4) – вход-выходное соотношение для САУ в области изображения
$w(s) = (b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m)/(a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n)$
$w(s) = y(s)/x(s)$ (5)

(5) – передаточная функция (ПФ) САУ, её функция отношение изображения выхода ко входу

ПФ – отношение изображения выхода ко входу при нулевых начальных условиях.

Свойства:
1. ПФ является дробно-рациональной функцией.
2. $n \geq m$
3. n – это порядок системы
4. Вещественные числа
   ai, i = 1..n
   bk, k = 1..m
5. Корни числителя являются нулями ПФ
   Корни знаменателя называются полюсами ПФ
   В обще случае нули и полюсы – комплексные числа. Полюсы обозначаются ×, нули 0.
   Если нули и полюсы располагаются слева от мнимой оси, то они называются левыми, если справа то правыми (sic!), если на мнимой оси, то нейтральные или число мнимые.

Типовые (элементарные – первые 5) звенья
ы

No	Название звена	ПФ звена
1	Усилительное (безынерционное)	$W(s) = K$
2	Дифференцирующее	$W(s) = Ks$
3	Интегрирующее	$W(s) = \frac{K}{s}$
4	Апериодическое 1-го по- рядка (инерционное)	$W(s) = \frac{K}{Ts+1}$

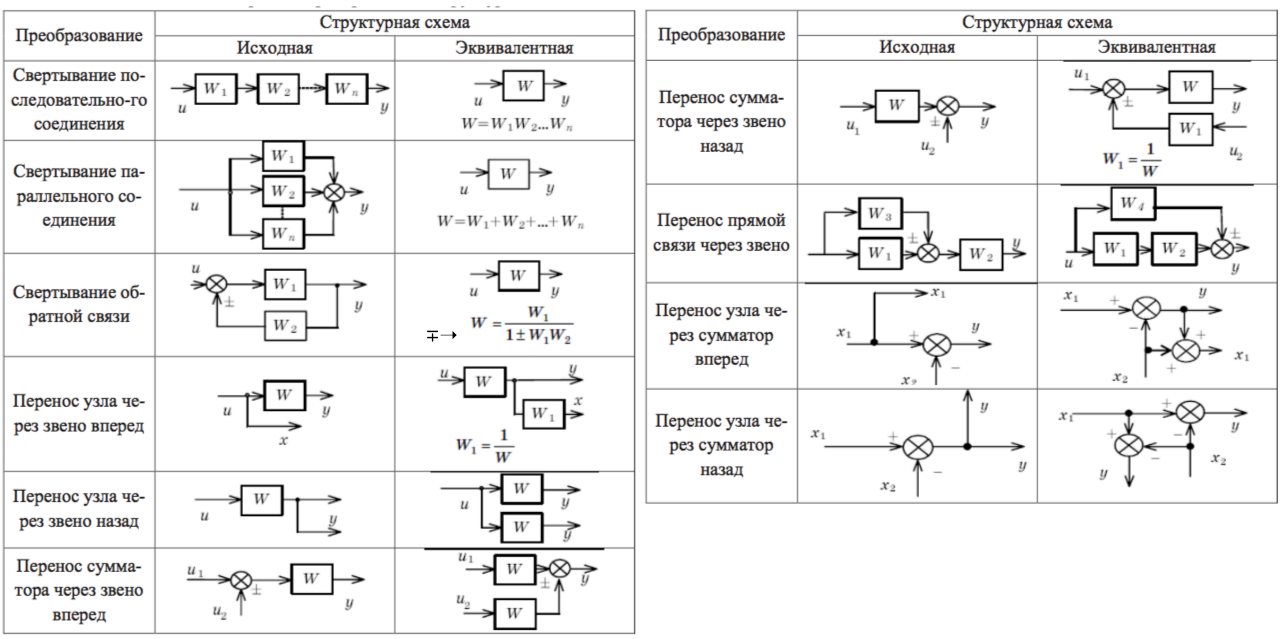
5	Форсирующее	$W(s) = K(Ts+1)$
6	Апериодическое 2-го по- рядка (все корни веще- ственные)	$W(s) = \dfrac{K}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1};\ T_1 \geq 2T_2$
7	Колебательное	$W(s) = \dfrac{K}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1};\ T_1 < 2T_2$

§1.2.2. Структурные схемы и их преобразования

Эти схемы отображают математические модели звеньев системы и их взаимосвязь. Основная задача преобразования этих схем – замена соединения нескольких звеньев одним эквивалентным. Эта задача решается следующими методами:

1. Записью алгебраических уравнений, связывающих вход и выход каждого звена с последующим исключением промежуточных переменных
2. Применение правил преобразования структурных схем
3. Применение метода сигнальных графов

Элементарные преобразования:



Передаточная функция линейных систем – это отношение полиномов w(s) = b(s)/a(s). Тогда передаточная функция замкнутой системы (когда нет звена на обратной цепи) Ф(s) = w(s)/(1+w(s))

Ф(s) = (b(s)/a(s))/(1 + b(s)/a(s)) = (b(s)/a(s))/((a(s)+b(s))/a(s)) = b(s)/(a(s)+b(s))

Иногда необходимо определить передаточную функцию не только между входом и выходом системы, а между произвольными сигналами (н-р, между ошибкой и выходом или между возмущением и выходом).

$\varepsilon(s) = x(s) - y(s)$

$y(s) = w(s) \times \varepsilon(s)$

$\varepsilon(s) = x(s) - w(s) \times \varepsilon(s)$

$\varepsilon(s) + w(s) \times \varepsilon(s) = x(s)$
$(1 + w(s)) \times \varepsilon(s) = x(s)$
$\varepsilon(s) = 1/(1 + w(s)) \times x(s)$
$\Phi_{\varepsilon}(s) = 1/(1 + w(s))$