Лекция №11

Может быть сформирована совокупность множеств эквивалентных по полезности. Если бы множество было несчётным, то точки критериального пространства будут лежать на одной непрерывной кривой безразличия. Если множество счетное и ограниченой, то точки лежат на кривой безразличия, а если не счетное, то они её образуют.

Рисуночек принципа замещения:

Δ - число единиц критерия K_1, соответствующее уступке в точке x_i (k_1^i, k_2^i)

$\lambda\Delta$ – количество единиц приращения критерия K_2, получаемое в точке x_j (k_1^j, k_2^j)

$\lambda = \Delta k_1/\Delta k_2$

Рисуночек кривых безразличия:
Линия от начала координат – направление роста предпочтений ЛПР

Формализация условия предпочтения ЛПР для многомерной полезности
$U(k_1^i, k_2^i) > U(k_1^j, k_2^j) \Rightarrow (k_1^i, k_2^i) \succ (k_1^j, k_2^j) \Rightarrow x_i \succ x_j$

Теория важности критерев

Математическая модель задачи принятия решения при многих критериях
1. $K = \{K_1, K_2, \ldots, K_L\}$ – множество критериев, используемых для оценки решения
   $Ki = (K_1^i, K_2^i, \ldots, K_L^i)$
2. X – универсальное множество решений x_i, каждое из которых характеризуется L свойствами
3. Сравнение векторов (векторных оценок) позволяет определить для них отношения предпочтения и эквивалентности
   Если K_i – векторная оценка по i-му критерию, а K_l^i – скалярная оценки i-го решения по l-му критерию

Отношение предпочтения между оценками определено на множетсве K^L, но отношения предпочтения для xi и xj определены на X^2

Рассмотрим x_i^* – недоминируемое решение
Условие доминирования векторных оценок
Все $k_l^i >= k_l^j$ и одно $k_h^i > k_h^j$

Решение x_j с K_j является строго доминируемым и не может входить в множество эффективных решений.

Если решение xi* является недоминируемым, то для него выполняется условие
$\forall\, x_j \in X, x_j \not\succ x_i^*$

Решения x_i^* и x_l^* не являются доминируемыми другими решениями и при этом являются несравнимыми.

Условие несравнимости x_i и x_j:
$\exists\, h \in 1..L \mid k_h^i > k_h^j \Rightarrow x_i \succ_{Kh} x_j$

$\exists\, s \in 1..L \mid k_s^i < k_s^j \Rightarrow x_j \succ_{Ks} x_i$

$\Rightarrow x_i \not\succ x_j$ и $x_j \not\succ x_i$

Условиями включения x_i^* и x_j^* являются:
(1) $\nexists X_p \in X, x_p \succ x_i^*, x_p \succ x_j^*$ и $x_i^* \not\succ x_j^*, x_j^* \not\succ x_i^* \Rightarrow x_i^* \in X^*, x_j^* \in X^*$

Если $|X^*| > 1$ то не может быть определено единственное эффективное решение, а должен быть определён способ выбора единственного эффективного решения из этого множества.

Одним из способов выбора эффективных решений в множестве X^* является привлечение дополнительной информации о предпочтениях ЛПР. Целью привлечения дополнительной информации является сужение (уменьшение мощности) множества несравнимых решений.

В дополнение к условию (1), определяющему систему предпочтений ЛПР вводится система предпочтений для критериев. Т.е. дополнительной привлекаемой информацией для сужения множества X^* является информация о важности критериев (качественной, количественной либо относительной).

Качественная важность критериев

Качественная важность предполагает задание отношений предпочтения и эквивалентности, связывающих критерии. Тогда выражение вида:

$K^i \succ K^j$ – критерий K^i предпочтительнее по важности K^j

Если $K(x_p)$ – это векторная оценка решения x_p вида $K(x_p) = (k_1^p, k_2^p, \ldots, k_i^p, \ldots, k_j^p, \ldots, k_L^p)$, Тогда обозначим через $K^{ij}(x_p) = (k_1^p, k_2^p, \ldots, k_j^p, \ldots, k_i^p, \ldots, k_L^p)$ векторную оценку, полученную перестановкой i и j скалярной оценки критериев Ki и Kj, связанных отношениями $\succ$, ~.

Если критерии Ki и Kj эквивалентны по важности, тогда векторные оценки K(xp) и Kij(xp) также являются эквивалентными.

Таким образом перестановка i и j скалярных оценок критериев Ki и Kj позволяет получить модифицированную векторную оценку K^{ij}, используемое для сужения множества X^*.

Пример формирования модифицированной оценки $K^{ij}(x_p)$ в случае разной важности критериев:

$K1 \succ K2$

$K(x_p) = (5, 4, 3, 4)$;

$K^{12}(x_p) = (4, 5, 3, 4)$;

$(5, 4, 3, 4) \succ (4, 5, 3, 4) \Rightarrow K(x_p) \succ_{12} K^{12}(x_p)$

Таким образом отношение $\succ_{ij}$ – это отношение предпочтения исходной оценки $K(x_p)$ над модифицированной векторной оценкой $K^{ij}(x_p)$, полученной в результате перестановки скалярных оценок i и j критериев. Аналогичным образом интерпретируется отношение $\sim_{ij}$ – отношение эквивалентности исходной оценки над модифицированной.

Отношения $\succ$ и $\succ_{ij}$ отличаются тем, что первое связывает исходные векторные оценки в случае доминирования одной из них над другой, а второе связывает исходную векторную оценку и соответствующую ей модифицированную, полученную в результате перестановки скалярных оценок i и j критериев.

Условие исключения решения x_k из множества несравнимых решений X^*:

$K(x_p) \succ K^{ij}(x_j)$; $K^{ij}(x_p) \succ K(x_k) \Rightarrow K(x_p) \succ_{\Omega} K(x_k) \Rightarrow x_p \succ_{\Omega} x_k \succ X^* = X^* \setminus x_k$