Лекция №3

Подходы к моделированию непрерывных систем:
1. Фундаментальные законы природы (законы сохранения энергии, момента, импульса, заряда, частиц) – методы;
2. Основанные на вариационных принципах;
3. На принципе аналогии (если нет никаких законов сохранения или вариационных принципов, подходящих к системе) – в основе лежит принцип универсальности модели;
   Одной и той же моделью описывается модель колеблющегося маятника и электрического контура.
   Модель радиоактивного распада и модель численности населения:
   альфа – коэффициент рождаемости, бета – коэффициент смертности
   dN(t)/dt = [alpha(t) - beta(t)]*N(t)
   При alpha = beta система в равновесии.
   Если alpha < beta – сокращение населения/радиоактивный распад
   Если alpha > beta – рост населения
4. Идентификация модели

dx(t)/dt = f(x(t), u(t), q(t), z(t), t)
x(t) – вектор состояния (размерность n)
u(t) – вектор управления (размерность m)
q(t) – вектор параметров (может быть зависим от времени, размерность k)
z(t) – вектор возмущений (размерность l)
t – время
f – вектор-функция правых частей
$dx_i/dt = f_i(x, u, \ldots)$

Подход, основанный на вариационных принципах.

Из всех возможных поведений системы выбираются только те, которые удовлетворят определённым условиям. При этом некоторая связанная с системой величина, которая определяется как функционал, достигает своего экстремального значения при переходе из одного состояния в другое.

Существуют 2 вариационных принципа:
1. Лагранжа
2. Гамильтона

Общая схема принципа Гамильтона для механических систем
1. Введём понятие обобщенных координат – Q(t). В них могут входить декартовы координаты, радио спектр, угловые координаты, набор координат материальных точек и т.д.
2. Введём понятие обобщенных скоростей dQ(t)/dt. Таким образом Q и dQ/dt определяют состояние системы во все моменты времени.
3. Записываем функцию Лагранжа для механической системы:
   L(Q, dQ/dt) = E_k - E_p, где E_k – кинетическая энергия, а E_p – потенциальная
4. Вводим величину, называемую функционалом действия
   Функционал – функция от функции, которая возвращает число
   S(Q) = INT[t1,t2](L(Q, dQ/dt)dt – функционал действия
5. Принцип Гамильтона
   Если система пишется по законам механики, то Q(t) является стационарной функцией для S(Q). Т.е. существует такой eps, что d/deps(S[Q+eps*phi]) = 0
   phi(t) – пробная функция, которая равна нулю на границах временного интервала
   phi(t1) = phi(t2) = 0
   Из всех допустимых траекторий Q(t) на отрезке t1-t2 выбирается движение, доставляющее минимум функционалу действия.
   S(Q) -> min[eps*phi], где phi – вариация

Пример:
r(t), dr(t)/dt
L = Ek - Ep = (m*(dr/dt)^2)/2 - k*(r^2)/2
S(r) = INT[t1,t2](L(r, dr/dt)dt) = INT[t1,t2]([m/2*(dr/dt)^2 - (k/2)*r^2]dt)

S(r+eps*phi) = INT[t1,t2](L(r, d(r+eps*phi)/dt)dt) = INT[t1,t2]([m/2*(dr/dt)^2 - (k/2)*(r+eps*phi)^2]dt)

dS(r+eps*phi)/deps = 1/2 тут очень длинная формула, спасибо Гамильтону за это = чуть менее длинная формула = а тут мы вспомнили, что eps = 0 и время сокращать

dS/deps = INT[t1,t2]((m*dr/dt*dphi/dt - k*r*phi)dt) = 0

С учётом краевых условий phi(t1) = phi(t2) = 0, получаем функцию модели

$m*d^2r/dt^2 = -kr$