Лекция №6

Марковские модели

Случайные процессы с дискретными состояниями

Случайный процесс – это последовательность переходов системы из одного состояния в другое.

Дискретные состояния нумеруются (sic!). Основной параметр – время (дискретное или непрерывное). Время дискретно в моделях, в которых переходы происходят в конкретные известные моменты времени. Если время перехода из состояния в состояние заранее не известно, то этот процесс называется процессом с непрерывным временем. При этом для процессов с дискретным временем условие перехода из состояния в состояние задаётся вероятностью перехода. Условие перехода из состояния в состояние для непрерывного времени задаётся интенсивностью.

Невозвратное состояние – такое состояние, в которое после некоторого числа переходов система уже никогда не возвращается.

Поглащающее состояние – это когда случайный процесс, достигнув это состояние останавливается.

Транзитивный процесс – если достижимо любое состояние в этом процессе (из любого состояния можно попасть в любое).

Случайный процесс называется Марковским, если вероятность любого состояния в будущем зависит только от его состояния в настоящем и не зависит от того, каким образом система попала в это состояние.

Для того что бы случайный процесс был Марковский необходимо, что бы интервалы времени между соседними переходами [из состояния в состояние] были распределены по экспоненциальному закону.

Параметры Марковского случайного процесса

Для дискретного случайного процесса используют следующие парамерты:

- перечень состояний $E_1, \ldots, E_n$;
- начальные вероятности состояний $p_1(0), \ldots, p_n(0)$;
- матрица вероятностей переходов
  $Q = [q_{ij} \mid i,j = 1..n]$;
  $0 \leqslant q_{ij} \leqslant 1$; $SUM_{[j=1..n]}(q_{ij}) = 1$; $(i,j = 1..n)$;

Процесс однородный, если вероятности переходов не зависят от момента времени. И неоднородным, если вероятности функция времени.

Случайный процесс с непрерывным временем задаются следующими параметрами:

- перечень состояний $E_1, \ldots, E_n$;
- начальные вероятности состояний $p_1(0), \ldots, p_n(0)$;
- матрица интенсивностей переходов
  $G = [g_{ij} \mid i,j = 1..n]$; $SUM_{[j=1..n]}(g_{ij}) = 0$; $g_{ii} = -SUM_{[j=1..n;j\neq i]}(g_{ij})$;
  $g_{ij} = \lim_{[\Delta\tau\to 0]}(P_{ij}(\Delta\tau)/\Delta\tau)$; $(i,j = 1..n;\ i \neq j)$;

Если интенсивности переходов постоянные и не зависят от времени, то такой процесс называется однородным. Если g_{ij} функция времени, то процесс неоднородный.

Характеристики Марковского случайного процесса:

- вероятности состояний $p_1(t), \ldots, p_n(t)$. В любой момент времени система может находиться только в одном состоянии, соответственно их сумма 1 (нормировочное условие).
  $P(t) = \{p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$, $0 \leqslant p_i(t) \leqslant 1$; $SUM_{[i=1..n]}(p_i(t)) = 1$;

Эргодическое свойство случайных процессов

Если по истечении достаточно большого времени вероятности состояний стремятся к предельным/стационарным/установившимся значениям, которые не зависят от начальных вероятностей состояния и от текущего момента времени t, то говорят, что случайный процесс обладает эргодическим свойством.

Транзитивный случайный процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний, среди которых нет невозвратных и поглащающих, всегда обладает эргодическим свойством.

Для Марковского процесса применимы следующие формулы:

- для Марковского процесса с дискретным временем:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\, q_{ij}$$

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i q_{ij} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

- для Марковского процесса с непрерывным временем:

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, g_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i g_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1,n}),$$

Эргодические процессы