

Лекция №3

Спектр периодического сигнала состоит из отдельных гармоник. Он дискретен или линейчат, при этом частоты обратно пропорциональны периоду. Если период возрастёт в 2 раза частоты будут располагаться в 2 раза ближе друг к другу. Разложению в ряд Фурье могут быть подвергнуты лишь периодические функции. При этом ряд Фурье есть сумма гармонических функций или комплексных экспонент, частоты их образуют арифметическую прогрессию. Для разложения в ряд Фурье фрагмент сигнала должен удовлетворять условию Дирихле: (не удовлетворяет: $y = \sin(1/x)$ в т. $x=0$)

1. На графике функции не должно быть разрывов 2-го рода (уходящие в бесконечность значения функции близ точки разрыва);
2. Конечное число разрывов 1-го рода;
3. Конечное число экстремумов.

Различают несколько форм записи ряда Фурье:

1. Синусно-косинусная

$$s(t) = a_0/2 + \sum_{k=1..inf} (a_k \cos(w_1 kt) + b_k \sin(w_1 kt))$$

$$w_1 = 2\pi/T$$

$$a_0 = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(w_1 t) dt$$

$$a_k = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(w_1 kt) dt$$

$$b_k = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(w_1 kt) dt$$

Примечание: пределы интегрирования могут быть любыми на периоде, численные значения их берутся исходя из удобства вычислений

Если исследуемый сигнал функция чётная, в ряде Фурье будут присутствовать лишь cos'ые составляющие (все $b_k = 0$). У нечётной функции только cos'ы.

2. Вещественная

Сумму синуса и косинуса для каждой гармоники можно преобразовать в cos той же частоты с другой амплитудой и некоторой начальной фазой.

$$s(t) = a_0/2 + \sum_{k=1..inf} (A_k \cos(w_1 kt + \phi_0))$$

3. Комплексная

Использует формулы Эйлера для комплексной экспоненты

$$s(t) = a_0/2 + \sum_{k=1..inf} (A_k/2 * (e^{jw_1 kt + j\phi_k} + e^{-jw_1 kt - j\phi_k}))$$

Обычно считают, что экспоненты со знаком - отрицательные члены ряда, а со знаком + положительные, тогда комплексную форму ряда Фурье можно представить в следующем виде:

$$s(t) = \sum_{k=-inf..inf} (C_k * e^{-jw_1 kt})$$

C_k – комплексные коэффициенты, связаны с амплитудой и фазой вещественных форм ряда.

$$A_k = 2|C_k|$$

$$\phi_k = \arg(C_k)$$

Коэффициент комплексной формы ряда C_k представляет собой комплексное число:

$$C_k = a_k/2 - jb_k/2$$

Следовательно коэффициенты эти можно представить сразу в комплексной форме:

$$C_k = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) * e^{jw_1 kt} dt$$

Если сигнал функция чётная, то все они будут чисто вещественными, иначе чисто мнимыми.

Сигнал представляется совокупностью гармоник различной амплитуды и фазы, амплитуды образуют амплитудный спектр, а фаза – фазовый.

Примеры разложения сигнала в ряд Фурье

—И тут я заснул—