

Modelización de sistemas biológicos por computadora

Guía de Trabajos Prácticos: Caos en Sistemas Biológicos

Caos Matemático

1. Introducción

1.1. Caos

Generalmente el hombre tiende a tratar con situaciones estables, que no varían en el tiempo o si lo hacen, que estas variaciones estén en torno a las situaciones precedentes. Esta búsqueda de una cierta *estabilidad* hace que tomemos ciertas actitudes frente a fenómenos *no estables*: si los cambios duran muy poco tiempo en relación a los períodos estables los ignoramos, si los cambios duran un cierto tiempo tratamos de encontrar alguna regularidad en ellos y de no encontrar ningún patrón estable los encasillamos dentro de los *ruidos*. La teoría del caos retoma estos últimos casos para dejar de estudiar ciertos mal clasificados *ruidos* desde el punto de vista *estable*, es decir, dejar de analizar sólo algunos parámetros estables dentro del fenómeno como lo hacíamos mediante el análisis estadístico.

Ciertos sistemas no lineales muestran un comportamiento, bajo ciertas condiciones, impredecible a pesar de no tener ninguna influencia del azar y ser enteramente determinísticos. Llamativamente esto puede suceder en sistemas extremadamente simples.

En estos sistemas no lineales puede identificarse un parámetro del cual depende su comportamiento. Cuando este parámetro cambia podemos encontrarnos con un comportamiento *ordenado* (puntos fijos o ciclos límite en el espacio de fase) o desordenado o *turbulento* (atractores extraños en el espacio de fase).

1.2. Del orden al caos: bifurcaciones

Cuando variamos continuamente este parámetro característico del sistema encontramos que existe un período en el que el sistema pasa de la estabilidad al caos. Los análisis de las formas en que se produce tal transición han llevado a la clasificación en *rutas al caos*. Una de las rutas más estudiadas es la de duplicación de período o bifurcaciones en horquilla. Las bifurcaciones en horquilla consisten en una pérdida de la estabilidad de una solución atractiva dando lugar a otra de periodicidad doble.

1.3. Sistemas dinámicos y ecuaciones en recurrencia

Computacionalmente hablando simularemos la evolución de un sistema dinámico mediante fórmulas de recurrencia obtenidas a partir de las ecuaciones diferenciales que

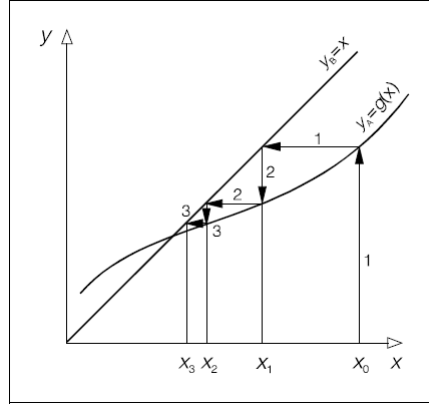


Figura 1: Ejemplo de mapa iterado.

lo describen. Estas fórmulas de recurrencia pueden obtenerse aplicando alguno de los métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales de paso simple o por medio del pasaje a ecuaciones en diferencia.

Podemos expresar en forma genérica la solución de una ecuación diferencial de primer orden y tiempo discreto mediante la siguiente fórmula:

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

Si la función F depende de algún parámetro de importancia k aparte del valor de la variable independiente en la iteración anterior notamos:

$$x_{n+1} = F_k(x_n)$$

Un punto fijo en una ecuación en diferencias es aquel en el que $x_{n+1} = x_n \forall n$.

1.4. Los mapas iterados

Una forma de representar la evolución de un sistema dinámico discreto es a través de mapas iterados o diagramas de recurrencia. En el caso de la ecuación de recurrencia del apartado anterior, podemos colocar en las abscisas de un par de ejes coordenados los valores de $x_{n+1}(= y)$ y en las ordenadas los de $x_n(= x)$. Luego dibujamos la función $y_A = g(x) = F(x_n)$ y la recta $y_B = x$ que representa $x_{n+1} = x_n$, como lo muestra la Figura 1.

Aquí, partiendo de un x_0 dado, evaluamos gráficamente $g(x_0)$ para obtener x_1 . Ahora hay que calcular x_2 que está dado por $g(x_1)$, para esto llevamos x_1 hacia las ordenadas mediante la recta $x_{n+1} = x_n$ y de este punto vamos hacia $g(x_1)$. Este proceso continúa y da como resultado el mapa iterado de $g(x) = F(x_n)$. La salida de sistema, x_n , converge a un valor determinado, es decir hacia un punto en particular del mapa de recurrencia en el que se cumplirá $x_{n+1} = F(x_n) = x_n$ (la salida temporal del sistema es una constante).

Estudiemos ahora el mapa iterado de la Figura 2, en el que se encuentra nuevamente un punto fijo atractor para la salida del sistema. En este caso también se cumple que cuando $t \rightarrow \infty$ la salida del sistema se aproxima a la intersección de la recta $y_B = x$ con la función $y_A = g(x)$. Estamos en presencia de un punto fijo del mapa de recurrencia. Este punto fijo se corresponde con un punto crítico estable en el plano de fase del sistema dinámico.

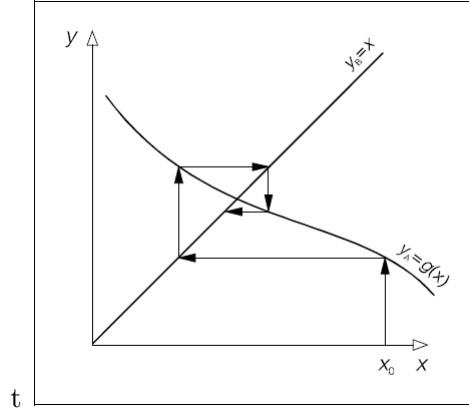


Figura 2: Ejemplo de mapa iterado con punto crítico estable.

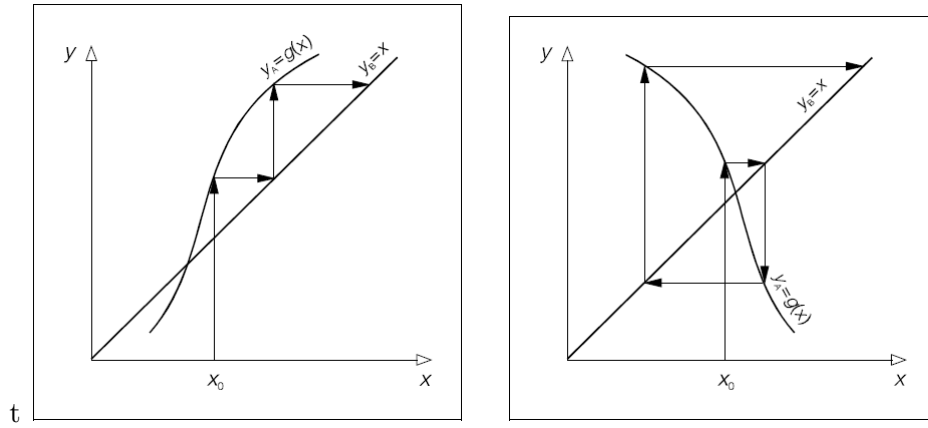


Figura 3: Ejemplo de mapa iterado con punto crítico inestable.

En la Figura 3 se muestran dos nuevos mapas iterados en los que la salida no se aproxima sucesivamente al punto fijo del mapa. En estos casos el punto fijo es inestable.

¿Podrá deducir usted a partir de estas gráficas cual es la condición para que un punto fijo en el mapa iterado sea estable?

Si, como usted habrá observado la condición de estabilidad de un punto fijo x_n^* es:

$$|F'(x_n^*)| < 1 \quad (1)$$

Este resultado admite, por supuesto, una demostración formal pero ésta escapa a los fines de esta revisión teórica.

La derivada F' puede calcularse ya sea derivando a F , o de no conocerse F , por medio de la definición de la derivada discreta:

$$F'(x_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(x_n + \epsilon) - F(x_n)}{\epsilon}$$

1.5. Una medida del caos: exponentes de Lyapunov

Cuando estudiamos las dinámicas caóticas encontramos que existe una gran dependencia de las condiciones iniciales. Más aún, una característica de las órbitas caóticas vecinas es que su separación está dada en promedio por una función exponencial (no necesariamente una función exponencial exacta). Es por esto que en la práctica se hace imposible predecir

el comportamiento futuro de una solución caótica. Esto se encuentra en contraste con el comportamiento de una órbita cercana a un punto fijo o a una solución periódica.

Estas ideas pueden ser cuantificadas mediante la utilización de los llamados *exponentes de Lyapunov*.

Considere la ecuación de recurrencia $F_k(x_n)$. Las N -ésimas iteraciones de ésta a partir de los valores iniciales x_0 y $x_0 + \epsilon$ da como resultados $F_k^N(x_0)$ y $F_k^N(x_0 + \epsilon)$, respectivamente. Supongamos que existe un λ tal que:

$$|F_k^N(x_0 + \epsilon) - F_k^N(x_0)| \approx \epsilon e^{N\lambda_k}$$

a medida que $\epsilon \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$ siempre que $\epsilon e^{N\lambda_k} \rightarrow 0$ también, tendremos:

$$\left| \frac{dF_k^N(x_0)}{dx_0} \right| \approx e^{n\lambda}, \quad \text{con } n \rightarrow \infty$$

que expresa la separación exponencial promedio entre la órbita partiendo de x_0 y la órbita partiendo de $x_0 + \epsilon$. Luego podemos escribir:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \left| \frac{dF_k^N(x_0)}{dx_0} \right| \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln |F'_k(x_{N-1}) F'_k(x_{N-2}) \dots F'_k(x_0)| \right\} \\ \lambda_k &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |F'_k(x_n)| \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Así, λ_k es una medida de la separación exponencial promedio de las órbitas vecinas a todos los puntos de una órbita alrededor de un atractor. Definimos así el exponente de Lyapunov λ_k para un conjunto invariante F_k asociado al parámetro k por medio de la ecuación (2), si es que dicho límite existe.

Podemos ver que para ciclos estables $\lambda_k < 0$ y las órbitas convergen. Sin embargo, para atractores extraños encontramos que $\lambda_k > 0$ y las órbitas no convergen. Siendo $|F'_k(x_N)| = 1$ cuando ocurre una bifurcación tenemos entonces $\lambda_k = 0$. Finalmente se llaman ciclos *superestables* cuando $\lambda_k \rightarrow -\infty$ ya que en estos casos $|F'_k(x_N)| = 0$ y la velocidad de convergencia a la estabilidad es máxima.

Resta agregar que un análisis teórico más amplio permite la definición de los exponentes de Lyapunov para mapas de recurrencia de dimensiones mayores. No tocaremos el tema en esta ocasión ya que excede los fines prácticos de esta guía.

2. Caso de estudio

Una de las más sencillas ecuaciones conocidas que describen sistemas dinámicos con comportamiento caótico es la ecuación logística. Ésta ecuación está inspirada en un modelo poblacional propuesto por Lotka en 1925:

$$\frac{dN}{dt} = cN, \quad (3)$$

en donde N es el número de individuos, t el tiempo y la constante real c es la tasa de crecimiento de la especie. Esta ecuación diferencial lineal de primer orden da como solución un crecimiento exponencial de la población:

$$N = e^{ct},$$

cuando $c < 0$ tendremos una población que no progresa en este medio: la tasa de mortandad es mayor que la tasa de natalidad. Sin embargo, con $c > 0$ para períodos largos de tiempo en un hábitat con recursos finitos la población no tendería a infinito en el caso real.

Podríamos pensar ahora que lo que sucede es que cuando el número de individuos aumenta, la tasa de crecimiento decrece por falta de alimentos. Esta idea fue introducida por Verhulst en 1937 mediante la siguiente modificación de la constante:

$$c = r \left(1 - \frac{N}{N_\infty} \right),$$

donde N_∞ es la máxima población admitida por el medio y r una constante de proporcionalidad.

Para valores pequeños de N obtenemos $c = r$ y nos encontramos en la situación de la ecuación (3). Sin embargo, a medida que N se acerca al límite de individuos $N \rightarrow \infty$, la tasa de crecimiento decrece hasta ser cero cuando $N = N_\infty$. Reemplazando en (3) la expresión para la tasa de crecimiento obtenemos la denominada *ecuación logística*:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{N_\infty} \right). \quad (4)$$

Ahora nos proponemos resolver la ecuación logística (4). Para ello apelamos nuevamente a la computadora y los métodos numéricos. Si aplicamos el método de Euler de primer orden con una longitud de paso h podemos obtener una buena solución para la dinámica de esta ecuación. Para simplificar el desarrollo se puede efectuar el siguiente reemplazo:

$$N_\infty = \frac{hr}{1 + hr}$$

para obtener

$$N_{n+1} = (1 + hr)N_n(1 - N_n).$$

Finalmente, hacemos:

$$k = 1 + hr$$

y trabajamos con:

$$N_{n+1} = kN_n(1 - N_n). \quad (5)$$

La ecuación (5) se denomina *ecuación logística* y nos servirá de base para desarrollar el caso de estudio. Para trabajar más cómodos normalizaremos las poblaciones con $0 < N < 1$ y podremos hablar por ejemplo de 0,25 millones de individuos.

Ahora podemos referirnos a la revisión teórica previa donde encontramos que la ecuación de recurrencia tiene la forma:

$$F_k(N_t) = kN_t(1 - N_t).$$

En este caso tendremos que los puntos fijos de la recurrencia (puntos críticos del sistema dinámico) cuando:

$$F_k(N_t) = N_{t+1},$$

o bien

$$F_k(N_{t+1}) = N_t \Rightarrow (1 - k)N_t + kN_t^2 = 0.$$

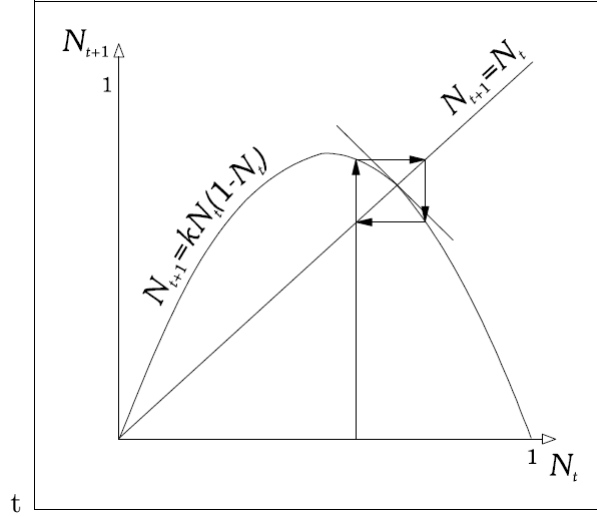


Figura 4: Ejemplo de mapa iterado en caos.

Si consideramos un $k < 1$ (la tasa de mortandad mayor que la tasa de natalidad), la ecuación anterior posee en el intervalo de nuestro interés $[L = (0, 1)]$ la única solución $N_n^{(1)} = 0$.

Sin embargo, cuando tenemos un $k > 1$ encontramos las soluciones:

$$N_t^{(1)} = 0 \quad \text{y} \quad N_t^{(2)} = \frac{k-1}{k}. \quad (6)$$

Sabemos que si partimos de una población inicial N_0 para que consigamos llegar a uno de estos punto fijos en la recurrencia debe cumplirse que –ecuación (1)–:

$$|F'_k(N_t^*)| = |k(1 - 2N_t^*)| < 1 \quad (7)$$

donde N_t^* es el punto fijo en cuestión. Reemplazando las ecuaciones (6) en (7) encontramos:

$$-1 < F'_k(N_t^{(1)}) = k < 1 \quad \text{y} \quad -1 < F'_k(N_t^{(2)}) = 2 - k < 1$$

entonces

$$-1 < k < 1 \quad \text{y} \quad -3 < -k < -1 \quad \text{o} \quad 1 < k < 3$$

que para $k < 3$ ambos puntos fijos son inestables.

Hay que destacar que: la desestabilización de $N_n^{(1)}$ cuando $k = 1$ se produce porque $F'_1(0) = 1$ y para $N_n^{(2)}$ en $k = 3$ tenemos $F'_1 = -1$ (no cumplen con la ecuación (1)). Así, en $k = 3$ se produce la bifurcación o duplicación de período. Como ejemplo de este caso vea la Figura 4, donde $k > 3$.

Podemos continuar el análisis para encontrar los nuevos puntos de bifurcación de la ecuación logística pero este análisis teórico escapa a los objetivos de este práctico.

El diagrama de la Figura 5 muestra los valores a los que tiende el número de individuos cuando $t \rightarrow \infty$ y k va desde 2,5 hasta 4. Éste se denomina diagrama de bifurcaciones y se puede apreciar en él una bisemejanza típica de las estructuras fractales.

El diagrama inferior muestra el valor del exponente Lyapunov también en función del parámetro k . Para obtener este diagrama se utiliza la ecuación (2). Observe las ventanas de estabilidad en medio del caos, el exponente de Lyapunov predice éstas haciéndose repentinamente negativo. También observe cómo las bifurcaciones se corresponden con los $\lambda_k = 0$.

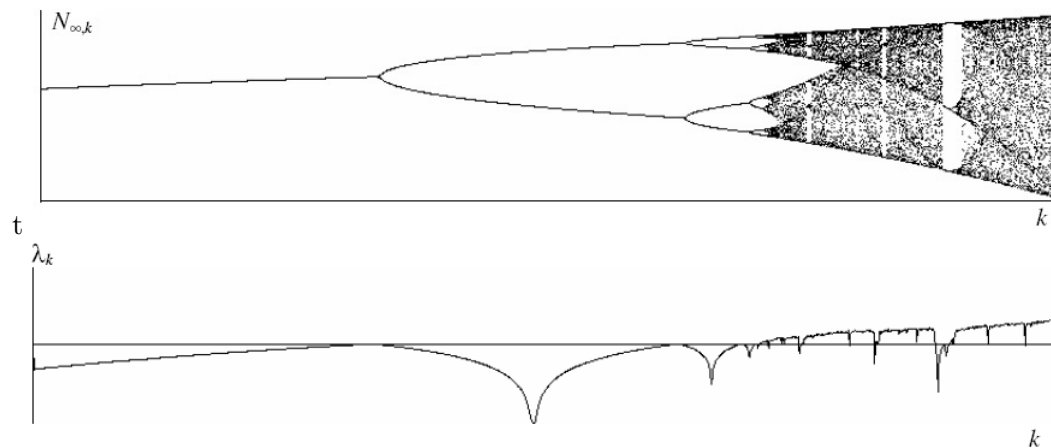


Figura 5: Diagrama de bifurcaciones (arriba) y evolución del exponente de Lyapunov (abajo).

3. Actividades

1. Reproduzca el diagrama de bifurcaciones y la evolución del diagrama de Lyapunov para el caso de estudio presentado, tenga cuidado al evaluar la función logaritmo natural. Considere apropiado un paso de 10^{-3} entre cada valor de k . Utilice un $N = 1000$ (como mínimo) para el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Grafique sólo unos 50 puntos para cada valor de k en el diagrama de bifurcaciones.
2. En los casos en los que no se cuenta con las ecuaciones que representan los sistemas sino con sus salidas se plantea una dificultad adicional para determinar la presencia de caos. En estas situaciones se utilizan diferentes características de las señales de salida de los sistemas que sirven como indicios de la existencia o no de dinámicas caóticas. A estas características se las denomina “firmas del caos”. Se adjuntan a este documento dos señales, generadas por sistemas distintos (archivos `y1.txt` y `y2.txt`). Analice las señales provistas buscando firmas del caos para determinar si fueron generadas por sistemas con dinámicas caóticas.

Referencias

- [1] Haefner, James W. Modeling Biological Systems: Principles and Applications. Springer Science & Business Media, 2005.