Práctica N°1

Boero Martina, Garcia Justo

2024-03-08

Table of contents

1 TP N°1

En 1838 Verhulst derivó una ecuación para describir el crecimiento auto-limitado de una población biológica. En 1920 Pearl redescubrió la ecuación por lo que ésta es llamada ecuación de Pearl-Verhulst. Dicha ecuación modela el crecimiento poblacional utilizando una tasa de reproducción proporcional a la población existente y a la cantidad de recursos disponibles. Se puede escribir como:

$$\frac{dB}{dP} = rP(1 - \frac{P}{K})$$

Donde: - P: representa el tamaño de la población. - t: representa el tiempo. - r: define la tasa de crecimiento. - K: es la sustentabilidad del medio.

Implemento los algoritmos de aproximación de: - Euler, - Taylor de segundo orden, - Runge-Kutta de segundo y cuarto orden.

y resuelva el modelo planteado por la ecuación para los pasos: - $h = 1$ mes - $h = 2$ mes - $h = 12$ mes

Utilizando los siguientes valores: - $P(0) = 10$ individuos - $r = 10\frac{1}{\text{año}}$ individuos $= \frac{10}{12}$ - $K = 1000$ individuos

Grafique además la evolución del error instantáneo de cada aproximación respecto a la solución exacta de la ecuación diferencial.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy as sp
# Definimos la población en el instante 0
P_0 = 10.0

# Definimos la tasa de crecimiento
r = 10/12

# Definimos la sustentabilidad del medio
K = 1000.0

# Definimos los distintos pasos que pide la consigna
hs = [1, 2, 12]
```

1.1 Ecuación de Pearl-Verhulst

$$\frac{dB}{dP} = rP(1 - \frac{P}{K})$$

$$\text{Solución analítica: } \frac{KP(t_0)e^{rt}}{K + P(t_0)e^{rt-1}}$$

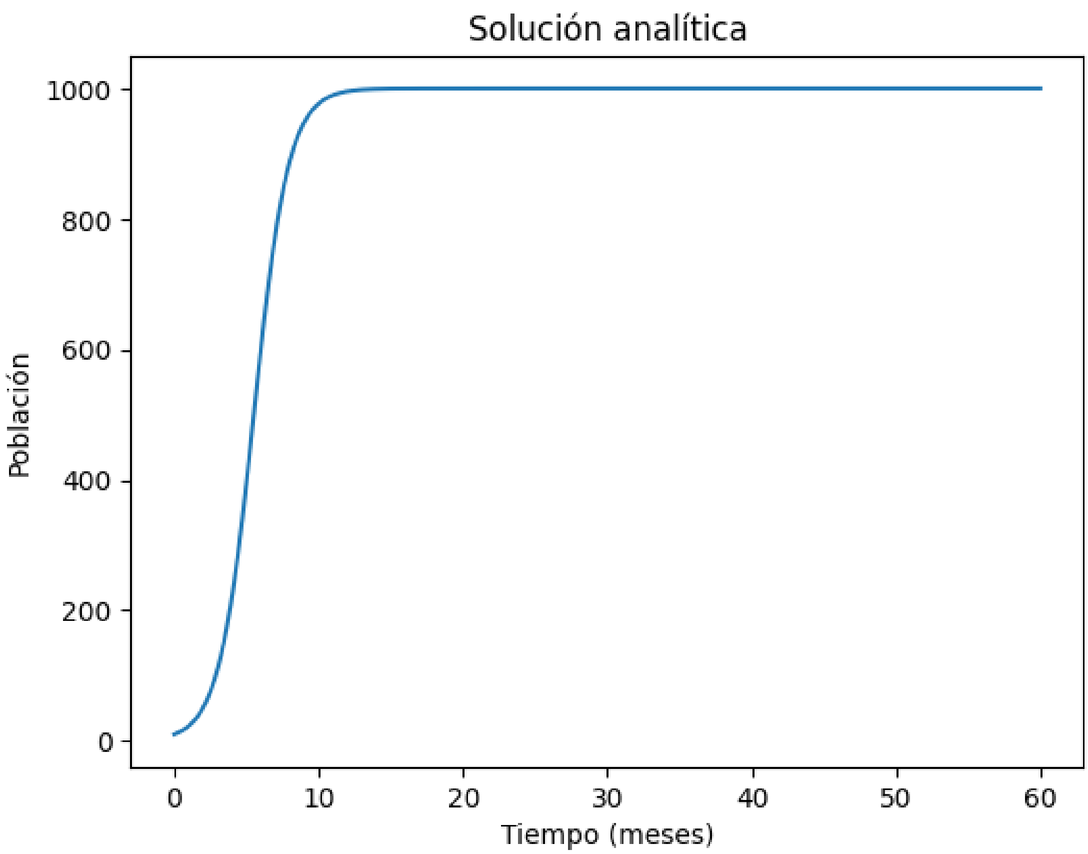
```
def P_analitica(t, K, r, P_0):
  return (K * P_0 * pow(np.e, r * t)) / (K + P_0 * ( pow(np.e, r*t)-1))
```

```
print(P_analitica(0, K, r, P_0))
```

```
10.0
```

```
ts = np.arange(0, 60, 0.01)
ys_analitica = []
for t in ts:
  ys_analitica.append(P_analitica(t, K, r, P_0))
```

```
plt.plot(ts, ys_analitica)
plt.title("Solución analítica")
plt.ylabel("Población")
plt.xlabel("Tiempo (meses)")
plt.show()
```



1.1.1 Aproximación por Euler

Nos quedamos con los primeros terminos de la serie de Taylor.

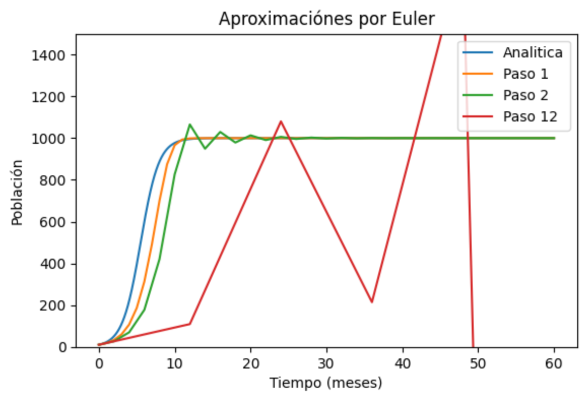
$$t_{k+1} = t_k + h$$

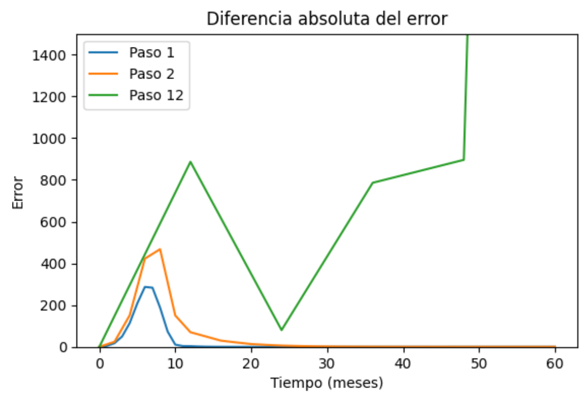
$$y(t_{k+1}) = y_k + hf(t_k, y_k)$$

Suele ser impreciso pero si se usa un paso suficientemente pequeño puede obtenerse una precision deseada.

```
def pearl_verhulst(r, K, P):
  return r * P * ( 1 - (P / K))



def euler(df, P_0, h, tf, r, K):
  errores = [0]
  ps = [P_0]
  ts = np.arange(0, tf+h, h)
  # print(ts)
  for i in range(len(ts)-1):
    pk = ps[i]
    ps.append(pk + (h * pearl_verhulst(r, K, pk)))
    errores.append(np.abs(P_analitica(ts[i+1], K, r, P_0) - ps[-1]))

  return ts, ps, errores

# xs, ys = euler(pearl_verhulst, 10, 1, 60, 1/12, 1000)
hs = [1, 2, 12]
labels = ["Paso 1", "Paso 2", "Paso 12"]
plt.figure(figsize=(14, 4))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(ts, ys_analitica, label="Analitica")
graf_errores = []
errores = {}
for h, label in zip(hs, labels):
  xs, ys, error = euler(pearl_verhulst, 10, h, 60, 10/12, 1000)
  graf_errores.append((xs, error))
  errores[label] = np.sum(error)
  plt.plot(xs, ys, label=label)
  plt.legend()

plt.ylim(0, 1500)
plt.title("Aproximaciónes por Euler")
plt.ylabel("Población")
plt.xlabel("Tiempo (meses)")

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.title("Diferencia absoluta del error")
for i, j in zip(graf_errores, labels):
  plt.plot(i[0], i[1], label=j)
```

```
plt.ylim(0, 1500)
plt.ylabel("Error")
plt.xlabel("Tiempo (meses)")
plt.legend()
plt.show()
```






```
errores
```

```
{'Paso 1': 1245.88970992909,
 'Paso 2': 1427.6015996028777,
 'Paso 12': 18739.312412037812}
```

1.1.2 Método de Taylor

Lo obtenemos si retenemos tres términos de la serie de Taylor. Es de segundo orden y proporciona resultados mejores que el método de Euler.

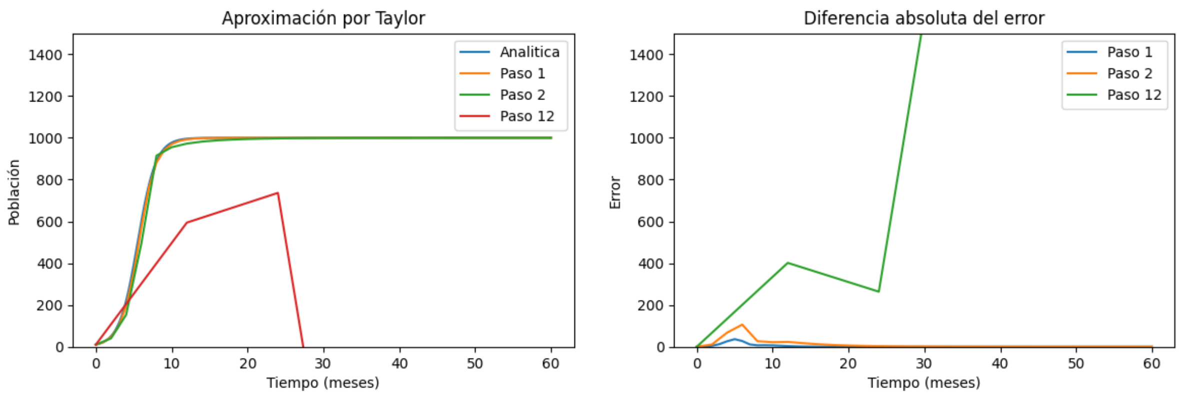
Podría aumentar su complejidad por la resolución de las derivadas pearciales si f es muy compleja.

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{h^2}{2} f'(t.y(t))$$

```
def derivada_segunda(r, K, P):
  return r*r*(1-2*P/K)*(P-P*P/K)

def taylor_2do_orden(df, P_0, h, tf, r, K):
  errores = [0]
  ps = [P_0]
```

```
  ts = np.arange(0, tf+h, h)

  for i in range(len(ts)-1):
    pk = ps[i]
    ps.append(pk + (h * df(r, K, pk)) + h*h/2 * derivada_segunda(r, K, pk))
    errores.append(np.abs(P_analitica(ts[i+1], K, r, P_0) - ps[-1]))

  return ts, ps, errores
```

```
plt.figure(figsize=(14, 4))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(ts, ys_analitica, label="Analitica")
graf_errores = []
for h, label in zip(hs, labels):
  xs, ys, error = taylor_2do_orden(pearl_verhulst, 10, h, 60, 10/12, 1000)
  graf_errores.append((xs, error))
  errores[label] = np.sum(error)
  plt.plot(xs, ys, label=label)
  plt.legend()

plt.ylim(0, 1500)
plt.title("Aproximación por Taylor")
plt.ylabel("Población")
plt.xlabel("Tiempo (meses)")

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.title("Diferencia absoluta del error")
for i, j in zip(graf_errores, labels):
  plt.plot(i[0], i[1], label=j)

plt.ylim(0, 1500)
plt.ylabel("Error")
plt.xlabel("Tiempo (meses)")
plt.legend()
plt.show()
```




```
errores
```

```
{'Paso 1': 153.2658462094363,
 'Paso 2': 315.1141602362766,
 'Paso 12': 274024363918412.22}
```

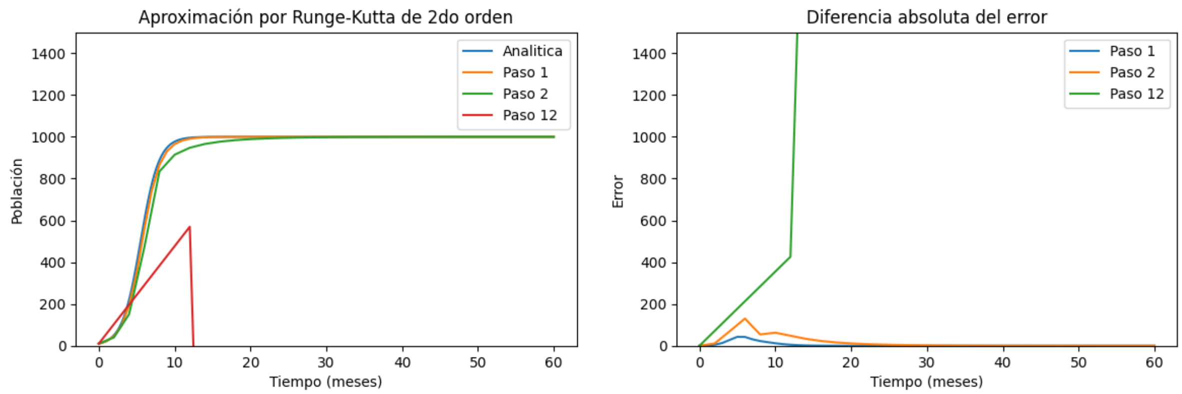
1.1.3 Método de Runge-Kutta

1.1.3.1 Método de Segundo Orden

```
def runge_kutta_2do_orden(df, P_0, h, tf, r, K):
  errores = [0]
  ps = [P_0]
  ts = np.arange(0, tf+h, h)

  for i in range(len(ts)-1):
    pk = ps[i]
    primer_pendiente = df(r, K, pk) * h
    solucion_tentativa = pk + primer_pendiente/2
    segunda_pendiente = df(r, K, solucion_tentativa) * h
    ps.append(pk + segunda_pendiente)
    errores.append(np.abs(P_analitica(ts[i+1], K, r, P_0) - ps[-1]))

  return ts, ps, errores
```

```
plt.figure(figsize=(14, 4))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(ts, ys_analitica, label="Analitica")
graf_errores = []
```

```
for h, label in zip(hs, labels):
  xs, ys, error = runge_kutta_2do_orden(pearl_verhulst, 10, h, 60, 10/12, 1000)
  graf_errores.append((xs, error))
  errores[label] = np.sum(error)
  plt.plot(xs, ys, label=label)
  plt.legend()


plt.ylim(0, 1500)
plt.title("Aproximación por Runge-Kutta de 2do orden")
plt.ylabel("Población")
plt.xlabel("Tiempo (meses)")

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.title("Diferencia absoluta del error")
for i, j in zip(graf_errores, labels):
  plt.plot(i[0], i[1], label=j)

plt.ylim(0, 1500)
plt.ylabel("Error")
plt.xlabel("Tiempo (meses)")
plt.legend()
plt.show()
```



1.1.4 Cuarto orden

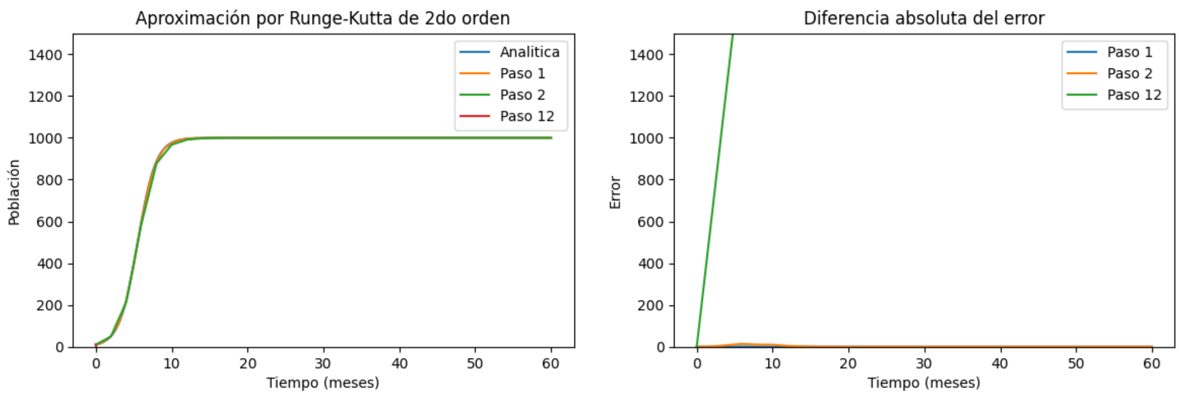
```
def runge_kutta_4to_orden(df, P_0, h, tf, r, K):
  errores = [0]
```

```
ps = [P_0]
ts = np.arange(0, tf+h, h)

for i in range(len(ts)-1):
  pk = ps[i]

  #1.
  primer_pendiente = df(r, K, pk) * h
  solucion_tentativa1 = pk + primer_pendiente/2

  #2.
  segunda_pendiente = df(r, K, solucion_tentativa1) * h
  solucion_tentativa2 = pk + segunda_pendiente / 2

  #3.
  tercer_pendiente = df(r, K, solucion_tentativa2) * h
  solucion_tentativa3 = pk + tercer_pendiente

  #4.
  cuarta_pendiente = df(r, K, solucion_tentativa3) * h

  #5.
  pendiente = (primer_pendiente +
               2 * segunda_pendiente +
               2 * tercer_pendiente +
               cuarta_pendiente) / 6

  ps.append(pk + pendiente)
  if h == 12:
    dic_pr = {
        "Primer pendiente" : primer_pendiente,
        "Solución tentativa 1" : solucion_tentativa1,
        "Segunda pendiente" : segunda_pendiente,
        "Solucion tentativa 2" :  solucion_tentativa2,
        "Tercer pendiente" : tercer_pendiente,
        "Solucion tentativa 3" : solucion_tentativa3,
        "Cuarta pendiente" : cuarta_pendiente
    }
    print(dic_pr)
    print(ps[-1])
  errores.append(np.abs(P_analitica(ts[i+1], K, r, P_0) - ps[-1]))
```

```
  return ts, ps, errores
```

```
plt.figure(figsize=(14, 4))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(ts, ys_analitica, label="Analitica")
graf_errores = []
for h, label in zip(hs, labels):
  xs, ys, error = runge_kutta_4to_orden(pearl_verhulst, 10, h, 60, 10/12, 1000)
  graf_errores.append((xs, error))
  errores[label] = np.sum(error)
  plt.plot(xs, ys, label=label)
  plt.legend()

plt.ylim(0, 1500)
plt.title("Aproximación por Runge-Kutta de 2do orden")
plt.ylabel("Población")
plt.xlabel("Tiempo (meses)")

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.title("Diferencia absoluta del error")
for i, j in zip(graf_errores, labels):
  plt.plot(i[0], i[1], label=j)

plt.ylim(0, 1500)
plt.ylabel("Error")
plt.xlabel("Tiempo (meses)")
plt.legend()
plt.show()
```

```
{'Primer pendiente': 99.0, 'Solución tentativa 1': 59.5, 'Segunda pendiente': 559.5975, 'Solu
-2782.762801160831
{'Primer pendiente': -105265.31608685304, 'Solución tentativa 1': -55415.42084458735, 'Segund
-9.958809537203342e+21
{'Primer pendiente': -9.917788739829223e+41, 'Solución tentativa 1': -4.9588943699146116e+41
-inf
{'Primer pendiente': -inf, 'Solución tentativa 1': -inf, 'Segunda pendiente': -inf, 'Solucion
-inf
{'Primer pendiente': -inf, 'Solución tentativa 1': -inf, 'Segunda pendiente': -inf, 'Solucion
-inf
```



Aproximación por Runge-Kutta de 2do orden
Analitica
Paso 1
Paso 2
Paso 12
Población
Tiempo (meses)
Diferencia absoluta del error
Paso 1
Paso 2
Paso 12
Error
Tiempo (meses)