# Modelos Epidemiológicos - Malaria

**Guía de Trabajos Prácticos Nro. 4**

## 1. Introducción

En esta guía de trabajos prácticos se planteará un modelo epidemiológico simple de la Malaria, que es una enfermedad mediada por vectores. En el contexto de la epidemiología, los vectores son organismos que transmiten un agente infeccioso desde los individuos afectados a otros que aún no lo portan.

La Malaria o paludismo es una enfermedad causada por parásitos del género Plasmodium que se transmiten al ser humano por la picadura de mosquitos hembra infectados.

## 2. Modelo conceptual

El objetivo del modelo propuesto consiste en poder predecir qué proporción de los individuos de la población de humanos de una zona donde esta patología es endémica, serán infectados al finalizar la estación húmeda.

Para plantear el modelo, es necesario empezar por pensar, en términos generales, cómo los cambios en las variables afectan a la propagación de la epidemia. Dado que se trata de una enfermedad mediada por vector, debe estudiarse la cantidad (o proporción) de mosquitos infectados además de la de humanos.

Se debe considerar primero la dinámica de la epidemia en humanos. Cualitativamente puede establecerse que cuanto mayor cantidad de mosquitos infectados haya, más humanos se infectarán. Por otra parte, dado que solamente los humanos sanos pueden ser infectados, se asumirá que la tasa de infección en los humanos depende de la cantidad de individuos sanos (y no del total de la población).

Luego, es necesario establecer cómo dejan de estar infectados los humanos. En este primer modelo se supondrá que durante los 120 días en que se estudiará el fenómeno no existen cambios significativos en la cantidad de individuos y, por lo tanto, no se tendrán en cuenta las muertes de los individuos, ni tampoco se contemplara los estados de inmunidad que pudieran adquirirse luego de padecer la enfermedad. En este modelo, la población será constante y se supondrá que los individuos pierden su infección luego de algún tiempo, volviendo a ser individuos sanos.

En el modelo simplificado esta primera forma de abordar el proceso de sanación se plantea suponiendo que los humanos infectados pasan a estar sanos con una cierta tasa constante. De esta manera, en cualquier período de tiempo, el número de eventos de sanación dependerá del número o proporción de individuos infectados y de la tasa de sanación.

En cuanto a lo que concierne a los mosquitos, se puede llegar a las mismas conclusiones en lo referente a las tasas de infección y sanación, aunque con diferentes constantes de proporcionalidad.

Es importante recalcar que cuando se piensa en la tasa de infección, lo que interesa no es el número absoluto de individuos infectados, sino la proporción de individuos

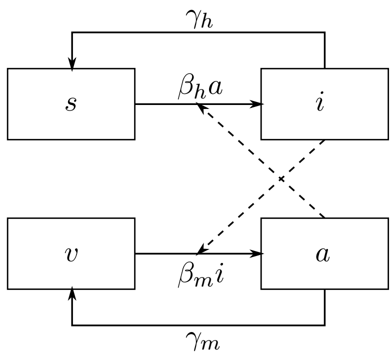


Figura 1: Modelo físico diagramático simplificado de Malaria.

infectados respecto de la población total. Para reflejar este aspecto, en el modelo se denota a la proporción de humanos infectados como $i(t)$ (siendo $i(t) = I(t)/N_h$, con $I(t)$ la cantidad de humanos infectados y $N_h$ la cantidad total de humanos tenidos en cuenta en el modelo). La proporción de individuos sanos o susceptibles, entonces, está dada por $s(t) = 1 - i(t)$, asumiendo que no hay otros estados entre sanos y enfermos.

De forma similar, se denota la proporción de mosquitos infectados como $a(t)$ y la proporción de sanos $v(t) = 1 - a(t)$.

Adoptando estas expresiones, no es necesario escribir ecuaciones separadas para sanos y enfermos, dado que la proporción de sanos y enfermos puede ser obtenida inmediatamente la una de la otra.

## 3. Modelo físico diagramático

En la Figura 1, se plantea un modelo físico diagramático simple de la epidemia de Malaria.

En este modelo, se asume que tanto los mosquitos como los humanos permanecen infectados durante un cierto tiempo y luego, simplemente, vuelven a estar sanos (no se adquiere inmunidad a la enfermedad).

## 4. Ejercicios

1. A partir de los modelos conceptual y físico diagramático, presentado en la Figura 1, deduzca el modelo matemático o formal del sistema.

2. Evalúe la estabilidad del sistema en los puntos de equilibrio del sistema (se obtienen con distintas condiciones iniciales: con $i(0) = 0$ y $a(0) = 0$; y con $i(0) \neq 0$ y $a(0) \neq 0$). Utilice para ello el siguiente conjunto de constantes: $\beta_h = 1$, $\gamma_h = 0,4$, $\beta_m = 1$ y $\gamma_m = 2$.

3. Obtenga la evolución del sistema a partir de diferentes condiciones iniciales. Proponga el conjunto de condiciones iniciales que, a su criterio, mejor expliquen la reaparición año a año de brotes epidémicos de la enfermedad en determinadas zonas del África Subsahariana.

4. Genere el modelo físico diagramático que, en términos generales, le permita incluir la siguiente consideración: "Cuando un individuo ha sido infectado una vez con malaria, tiende a adquirir cierta inmunidad frente a la infección de futuras inoculaciones de la misma cepa de plásmido, haciendo que sean menos probables y/o menos severas las futuras infecciones" [1].

5. Obtenga una nueva expresión del modelo que tenga en cuenta que en el sistema real también se evidencia lo siguiente:

   - Existe cierto período inicial en el cual el plásmido se encuentra en un estado inmaduro y por lo tanto en ese lapso por más que el mosquito se encuentre infectado con el plásmido, si pica a un humano, es muy poco probable que lo infecte.
   - En las personas picadas por mosquitos infectados se verifica un período de latencia antes de que se manifiesten síntomas de infección.
   - A partir del final de la estación húmeda comienza la mortandad masiva de los mosquitos.

   Proponga las constantes y genere las dinámicas del nuevo modelo planteado.

## Referencias


[1] Barnes and Chu. *Introduction to Modelling for Biosciences.* Springer-Verlag London Limited 2010.

[2] Allen, Linda JS, et al. *Mathematical epidemiology.* Vol. 1945. Berlin: Springer, 2008.

[3] Brauer, Fred, Carlos Castillo-Chavez, and Carlos Castillo-Chavez. *Mathematical models in population biology and epidemiology.* Vol. 40. New York: Springer, 2012.

[4] Chen, Dongmei, Bernard Moulin, and Jianhong Wu, eds. *Analyzing and modeling spatial and temporal dynamics of infectious diseases.* John Wiley & Sons, 2014.