

Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por Métodos Numéricos

Guía de Trabajos Prácticos Nro. 1

1. Introducción

En el ámbito de la ciencia y tecnología es frecuente describir fenómenos mediante modelos matemáticos. El análisis de estos modelos permite un conocimiento más profundo del fenómeno. Muchas veces sucede que no es posible hallar la solución analítica de estos modelos, ya sea por su complejidad o por no contar con métodos analíticos apropiados. En estos casos los métodos numéricos permiten resolver el modelo alcanzando una solución *aproximada* del mismo, mediante labor de cálculo que puede ser más o menos intensa según el problema planteado.

Como la solución lograda mediante la aplicación de métodos numéricos es siempre aproximada, es muy importante hacer un seguimiento de los errores cometidos. Los errores asociados a los métodos numéricos pueden dividirse en dos grupos:

1. Aquellos inherentes a la formulación del problema.

En este caso hay que tener en cuenta si la definición matemática del problema es sólo una aproximación a la situación física real. Hay casos en que estos errores pueden ser despreciables, como por ejemplo el que se comete al obviar los efectos relativistas en la solución de un problema de mecánica clásica. En aquellos casos donde estos errores no son despreciables, la solución encontrada será poco precisa independientemente del método de resolución utilizado.

Otra fuente de este tipo de errores se origina en la imprecisión de los datos físicos utilizados para hacer el modelo: constantes físicas y datos empíricos. En el caso de errores en la medida de los datos empíricos y teniendo en cuenta su carácter generalmente aleatorio, su tratamiento analítico es especialmente complejo pero imprescindible para contrastar el resultado obtenido computacionalmente.

2. Los que surgen como consecuencia del método empleado para encontrar la solución del problema (error computacional).

Las fuentes principales de este tipo de errores pueden ser equivocaciones en la realización de operaciones, resolver el problema mediante una aproximación del mismo (errores de truncamiento), la precisión limitada con la que puede representarse un número (errores de redondeo), etc.

En el presente trabajo práctico nos focalizaremos sobre la resolución de *sistemas de ecuaciones diferenciales*. En este caso, los fenómenos se modelizan con ecuaciones que implican el cambio de una variable respecto a otra, es decir, mediante derivadas, generalmente respecto al tiempo o al espacio.

Nos restringiremos solo al caso de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), donde solo aparecen derivadas respecto a una sola variable. Las ecuaciones diferenciales parciales (con derivadas respecto a más de una variable) si bien tienen muchas aplicaciones, son mas complicadas en su manejo tanto teórico como numérico y escapan a los alcances de esta asignatura.

Dado que la solución de la EDO es una función y que los métodos numéricos solo proveen números, la solución que se obtiene es una tabla de los valores de la solución aproximada para un rango específico de la variable independiente de la ecuación diferencial.

1.1. Generalidades de los métodos de solución

El problema clásico o fundamental a resolver se denomina problema de valor inicial (PVI), dado por:

$$\begin{cases} y' = f(t, y), t_0 \leq t \leq t_m \\ y(t_0) = \alpha \end{cases} \quad (1)$$

Para su resolución numérica existe una gran diversidad de métodos, los cuales pueden clasificarse en:

1. Métodos de un paso o iniciadores: Estos permiten el cálculo de y_{i+1} teniendo solamente la ecuación diferencial y la información en el punto t_i , esto es, el valor y_i . Estos métodos sólo requieren de la condición inicial para arrancarlos. Ejemplo de este tipo de métodos son:

- Taylor
- Euler
- Runge-Kutta

2. Métodos múltipaso o de continuación: Estos métodos requieren además información de y_i en otros valores de t , fuera del intervalo de integración considerado, $[t_i, t_{i+1}]$. Una desventaja de estos métodos es que requieren más información de la que normalmente se dispone para arrancar el procedimiento. Por lo general se cuenta con una condición inicial, por ejemplo, $y(t_0)$ y se desconocen los valores siguientes $y(t_1)$, $y(t_2)$, etc. Por lo tanto, estos métodos necesitan la aplicación previa de algún otro método para poder arrancar.

Todos estos métodos son de la forma:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(t_{i+1}, y_{i+1}, t_i, y_i, t_{i-1}, y_{i-1}, \dots, t_{i-m}, y_{i-m},)$$

donde y_i es el valor de la solución en el punto t_i , h es el tamaño de paso y ϕ una función que depende del método utilizado.

En general los métodos pueden deducirse a partir de la expansión en serie de Taylor de la función y , y con ella se puede estimar su error de truncamiento. En vez de reportar el error de truncamiento para cada método, se suele usar el concepto de orden: $O(h^k)$, donde k corresponde al primer término retenido de la expansión.

$O(h^k)$ es el *error global* de la aproximación y da una idea del error total que se comete al aproximar la función.

El *error local* está dado por $O(h^{k+1})$, y representa el error cometido en un solo paso por el método.

A partir de la EDO planteada en (1), se puede expresar la solución $y(t)$ a partir de un punto de partida t_0 mediante una expansión en serie de Taylor:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{h^2}{2}y''(t_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_0) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\varepsilon). \quad (2)$$

Dado que $y' = f(t, y)$, utilizando la regla de la cadena obtenemos:

$$y'' = f'(t, y) = f_t(t, y) + f_y(t, y)y' = f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y),$$

donde f_t y f_y denotan las derivadas de f con respecto a t y y respectivamente. En forma general, se puede escribir:

$$y^{(k)} = f^{(k-1)}(t, y). \quad (3)$$

La expresión (1) puede describirse mediante (3) de la siguiente forma:

$$y(t_0+h) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) + \frac{h^2}{2}f'(t_0, y(t_0)) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n-1)}(t_0, y(t_0)) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n)}(\varepsilon, y(\varepsilon)). \quad (4)$$

Reteniendo los $n+1$ primeros términos de la serie de Taylor obtenemos un método de un paso de orden n , es decir obtenemos $y(t_0 + h)$ a partir de $y(t_0)$ con un error de truncado que depende de h^{n+1} y potencias superiores de h .

1.2. Método de Euler

El caso más sencillo es quedarse únicamente con los dos primeros términos de (4):

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)). \quad (5)$$

Este es el que se conoce como *método de Euler*. Si bien, en general, este es un método muy impreciso, si se utiliza un paso de integración suficientemente pequeño puede obtenerse la solución de la ecuación diferencial con la precisión deseada. Si el paso de integración es demasiado grande, el método es inestable y la solución numérica diverge de la exacta.

1.3. Método de Taylor

Si retenemos tres términos de (4), obtenemos:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) + \frac{h^2}{2}(f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)). \quad (6)$$

Este es un método de segundo orden, que proporciona resultados mejores que el método de Euler. Su principal inconveniente surge de tener que calcular analíticamente las derivadas parciales f_t y f_y , lo cual es un inconveniente si f es muy compleja. Del mismo modo, a partir de (4) es posible obtener un método de orden n reteniendo los $n+1$ primeros términos. El método produce errores significativos si f se conoce sólo de forma empírica, es decir, es una aproximación a datos experimentales o una aproximación a una función mucho más complicada. Estos inconvenientes resultan mucho más importantes cuando se derivan métodos de orden superior a partir de la serie de Taylor.

1.4. Método de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta, surgen de la necesidad de evaluar las derivadas de los métodos de Taylor. Estos métodos duplican el comportamiento de la serie

de Taylor hasta un termino determinado sin evaluar derivadas. La desventaja de esto es que es necesario evaluar la función f en varios puntos. El orden de estos métodos se determina por el número de términos que duplica de la serie de Taylor. Mientras mas alto sea el orden mas preciso es el método, pero se requiere evaluar mas veces la función. El método de optimo es el de 4^{to} orden ya que es muy preciso y la función no se evalúa muchas veces. A continuación se listan los pasos para obtener los estimadores para los métodos de Runge-Kutta de 2^{do} y 4^{to} orden.

Runge-Kutta de 2^{do} orden

1. Calcular las primeras pendiente y solución tentativa

- $\Delta y_1 = f(y(t), t)h$
- $y_1 = y(t) + \Delta y_1/2$

2. Calcular la segunda pendiente y la solución

- $\Delta y_2 = f(y_1, t + h/2)h$
- $y(t + h) = y(t) + \Delta y_2$

Runge-Kutta de 4^{to} orden

1. Calcular las primeras pendiente, incremento y solución tentativa

- $\Delta y_1 = f(y(t), t)h$
- $y_1 = y(t) + \Delta y_1/2$

2. Calcular las segundas pendiente, incremento y solución tentativa

- $\Delta y_2 = f(y_1, t + h/2)h$
- $y_2 = y(t) + \Delta y_2/2$

3. Calcular las terceras pendiente, incremento y solución tentativa

- $\Delta y_3 = f(y_2, t + h/2)h$
- $y_3 = y(t) + \Delta y_3$

4. Calcular las cuartas pendiente e incremento

- $\Delta y_4 = f(y_3, t + h)h$

5. Calcular el nuevo valor para y

- $\Delta^*y = (\Delta y_1 + 2\Delta y_2 + 2\Delta y_3 + \Delta y_4)/6$
- $y(t + h) = y(t) + \Delta^*y$

2. Ejercicios

2.1. Obligatorio

En 1838 Verhulst derivó una ecuación para describir el crecimiento auto-limitado de una población biológica. En 1920 Pearl redescubrió la ecuación por lo que ésta es llamada ecuación de Pearl-Verhulst. Dicha ecuación modela el crecimiento poblacional utilizando una tasa de reproducción proporcional a la población existente y a la cantidad de recursos disponibles. Se puede escribir como:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (7)$$

Donde P representa el tamaño de la población, t representa el tiempo, r define la tasa de crecimiento y K es la sustentabilidad del medio.

Implemente los algoritmos de aproximación de:

- Euler,
- Taylor de segundo orden,
- Runge-Kutta de segundo y cuarto orden.

y resuelva el modelo planteado por la ecuación 7 para los pasos:

- $h = 1$ mes
- $h = 2$ meses
- $h = 1$ año

Utilizando los siguientes valores: $P(0) = 10$ individuos, $r = 10\frac{1}{\text{año}}$ y $K = 1000$ individuos. Grafique además la evolución del error instantáneo de cada aproximación respecto a la la solución exacta de la ecuación diferencial.

¿Qué conclusiones puede obtener en base a los resultados obtenidos? ¿Son estas conclusiones extrapolables a otros sistemas dinámicos?

Estime el error de discretización utilizando datos del tipo single y del tipo double. Compare con los errores de aproximación obtenidos anteriormente.

2.2. Optativos

1. Use el método de Euler para aproximar las soluciones de los siguientes PVI para diferentes valores del tamaño del paso h . En cada caso, grafique la curva de error para distintos valores de h y analice los resultados.

1. $y' = te^{3t} - 2y$, para $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$, cuya solución es $y(t) = te^{3t}/5 - e^{3t}/25 + e^{-2t}/25$.
2. $y' = 1 + (t - y)^2$, para $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, cuya solución es $y(t) = t + 1/(1 - t)$.
3. $y' = y/t - (y/t)^2$, para $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 1$, cuya solución es $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

2. Use los resultados del ejercicio anterior y aproxime por medio de un interpolador lineal los siguientes valores de $y(t)$ respectivamente.

1. $y(0,235), y(0,938)$
2. $y(2,107), y(2,897)$
3. $y(1,074), y(1,936)$.

Compare las aproximaciones obtenidas con los valores reales que se obtienen usando las soluciones exactas.

3. Dado el siguiente PVI:

$$y' = -y + t + 1, 0 \leq t \leq 5, y(0) = 1$$

con solución exacta $y(t) = e^{-t} + t$.

Aproxime $y(5)$ usando el método de Euler con $h = 0,2$, $h = 0,1$ y $h = 0,05$.

4. Emplee el método de Taylor de orden 2 para resolver los siguientes PVI:

1. (i) $\begin{cases} y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t; 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$. Sol. exacta: $y = t^2(e^t - e)$.
2. (ii) $\begin{cases} y' = \frac{y}{t} - (\frac{y}{t})^2; 1 \leq t \leq 3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$. Sol. exacta: $y = t/(1 + \ln t)$.
3. (iii) $\begin{cases} y' = t^2 - y; 0 \leq t \leq 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Sol. exacta: $y = t^2 - 2t + 2 - e^{-t}$.