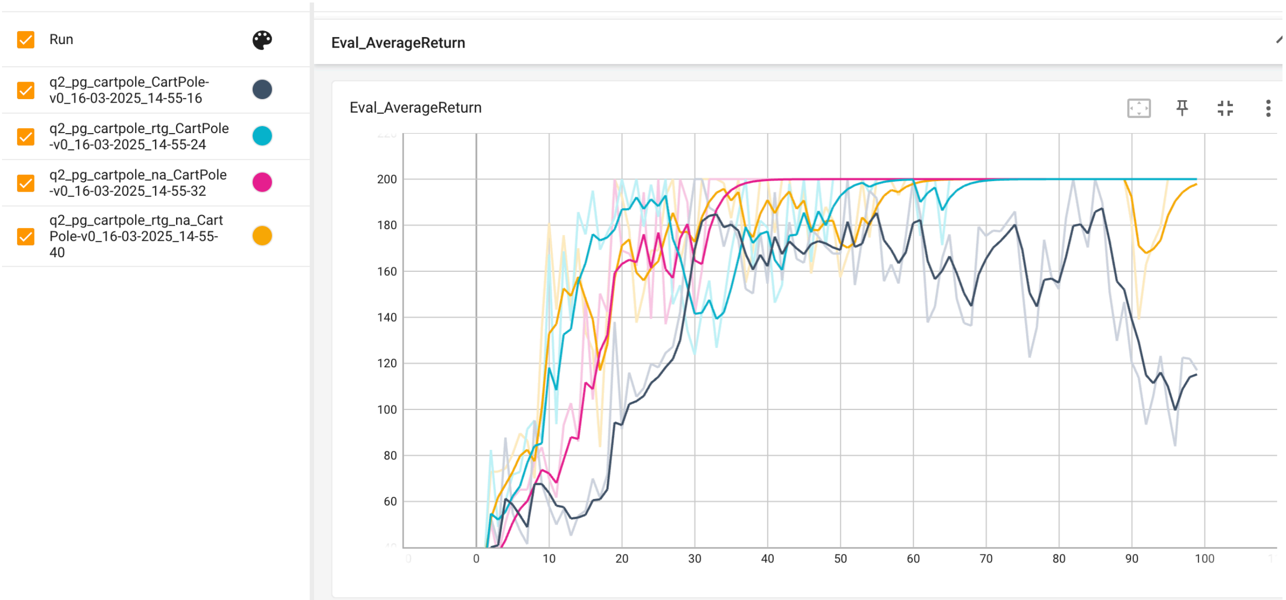
CS 285 HW2

Experiemnt 1(CartPole)

- 小BatchSize下(average return vs. number of environment steps)的对比



- 大BatchSize下(average return vs. number of environment steps)的对比

问题回答

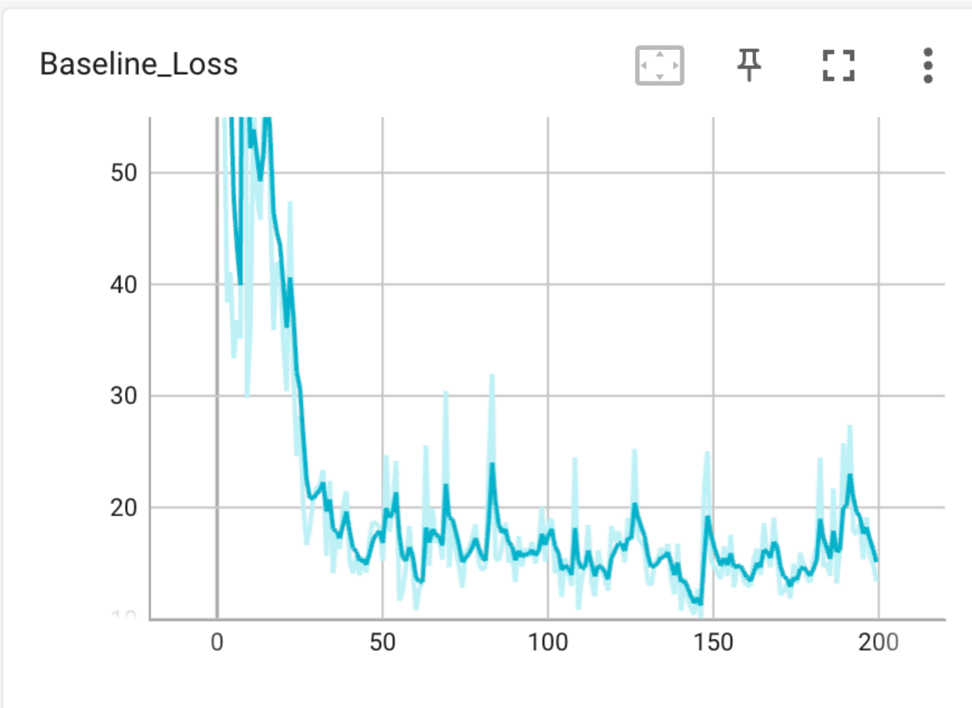
- 在没有 advantage normalization的时候，the trajectorycentric one, or the one using reward-to-go哪一个好？
  reward-to-go 最后收敛到200
- advantage normalization help?
  在trajectory centric one的时候，normalization在收敛速度和最终reward上都有帮助，无论batchsize小还是大
  在reward-to-go的时候，normalization可以帮助更快收敛。然而其在小batchsize的时候，后期会出现震荡。大batchsize的时候，则不会有这种现象。
- batch size 对效果有影响吗？
  有影响。特别是在收敛速度和reward的稳定，其都有积极效应。

Experiment 2(Using a Neural Network Baseline)

代码如下，baseline + 100 epoch达不到300 reward的效果。估计是因为版本不同的问题。因此直接开大到200 epoch，轻松到达500的reward。

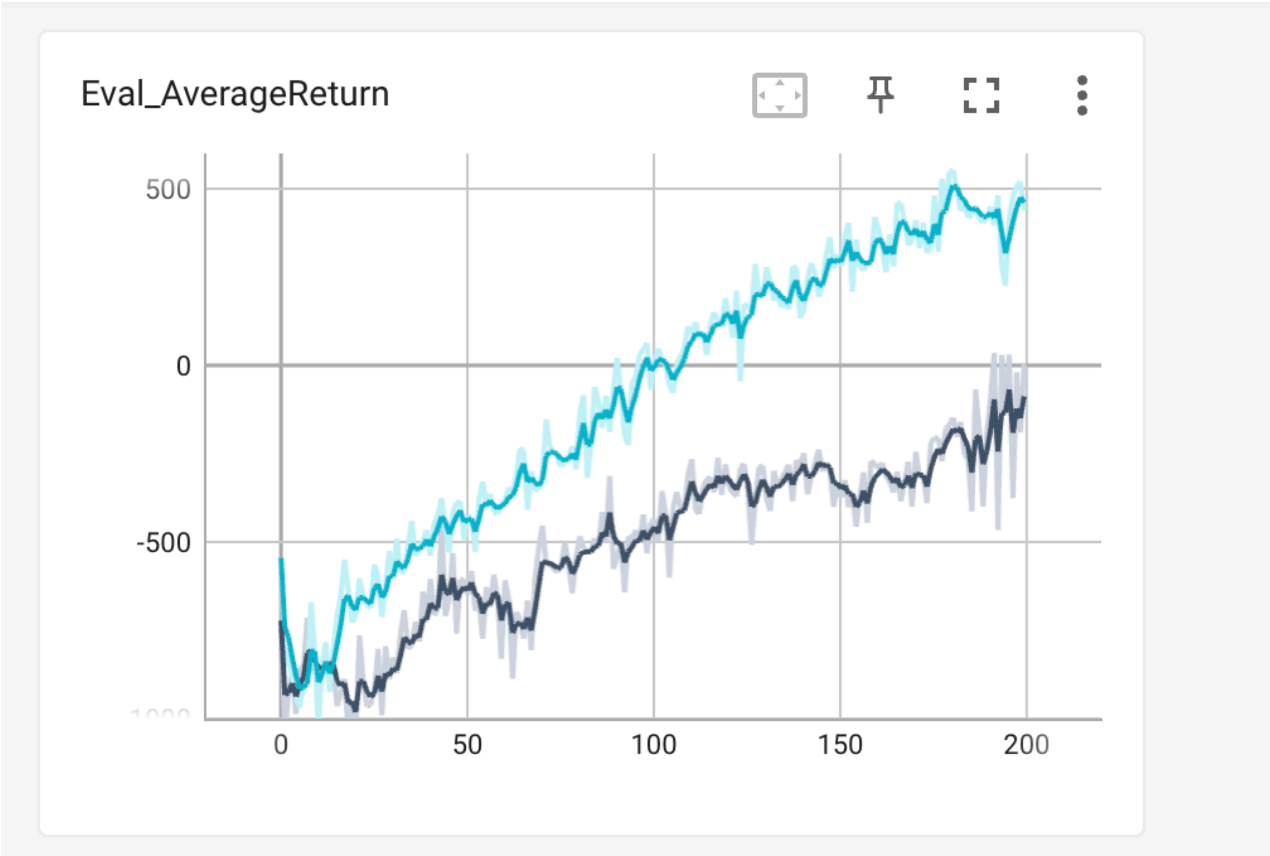
```
# No baseline
python cs285/scripts/run_hw2.py --env_name HalfCheetah-v4 \
-n 200 -b 5000 -rtg --discount 0.95 -lr 0.01 \
--exp_name cheetah
# Baseline
python cs285/scripts/run_hw2.py --env_name HalfCheetah-v4 \
-n 200 -b 5000 -rtg --discount 0.95 -lr 0.01 \
--use_baseline -blr 0.01 -bgs 5 --exp_name cheetah_baseline
```

- 训练Loss曲线图



最后在15左右的loss震荡

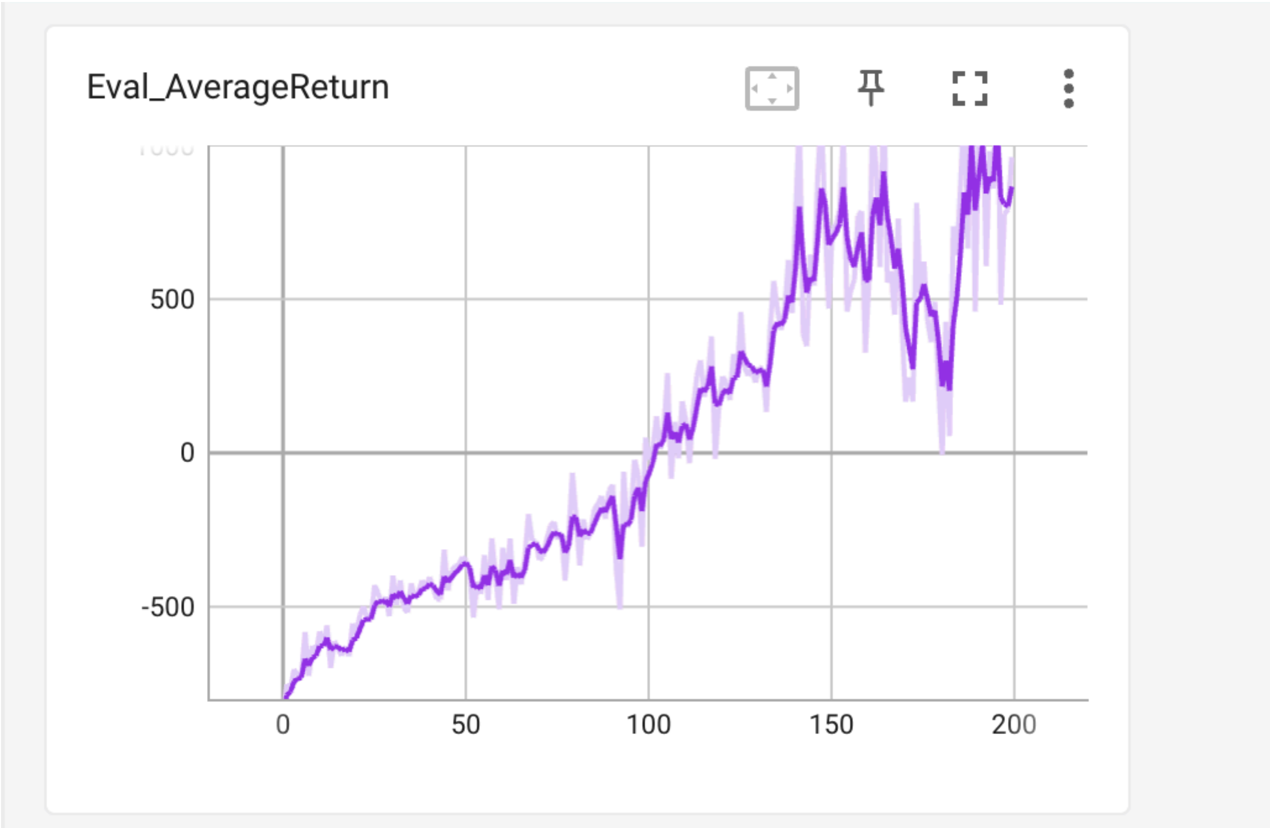
- Eval Return曲线图



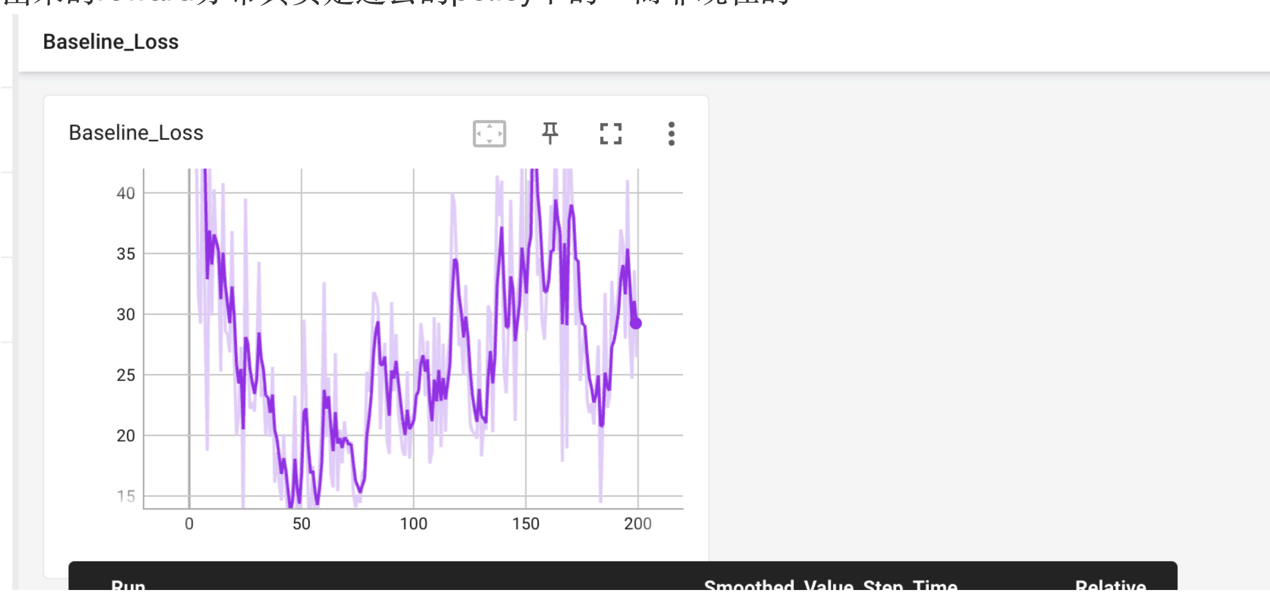
- 调整baseline学习

  降低baseline gradient steps让baseline网络学习的更慢了.
- 增加norm

  增加norm之后，reward到了800左右，比之前的500多很多。

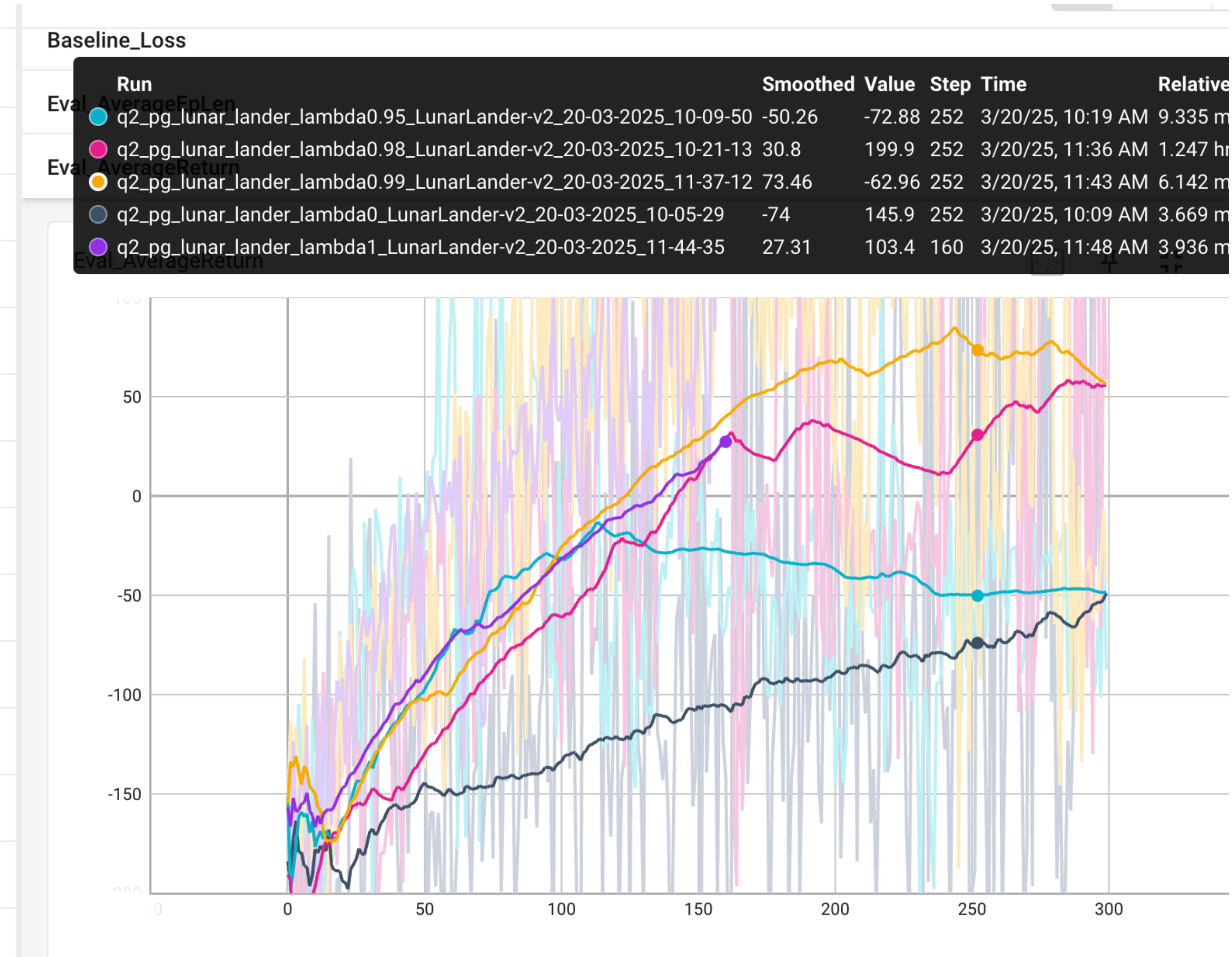


更值得说的是,baseline loss更大了 °很奇怪哈 °我的理解是polciy更新更加频繁 ’其policy的reward上涨的速度快 ’导致其value network的loss不停的涨 °因为value network的预估出来的reward分布其实是过去的policy下的 ’而非现在的 °



Expriment 3 (LunarLander-v2)

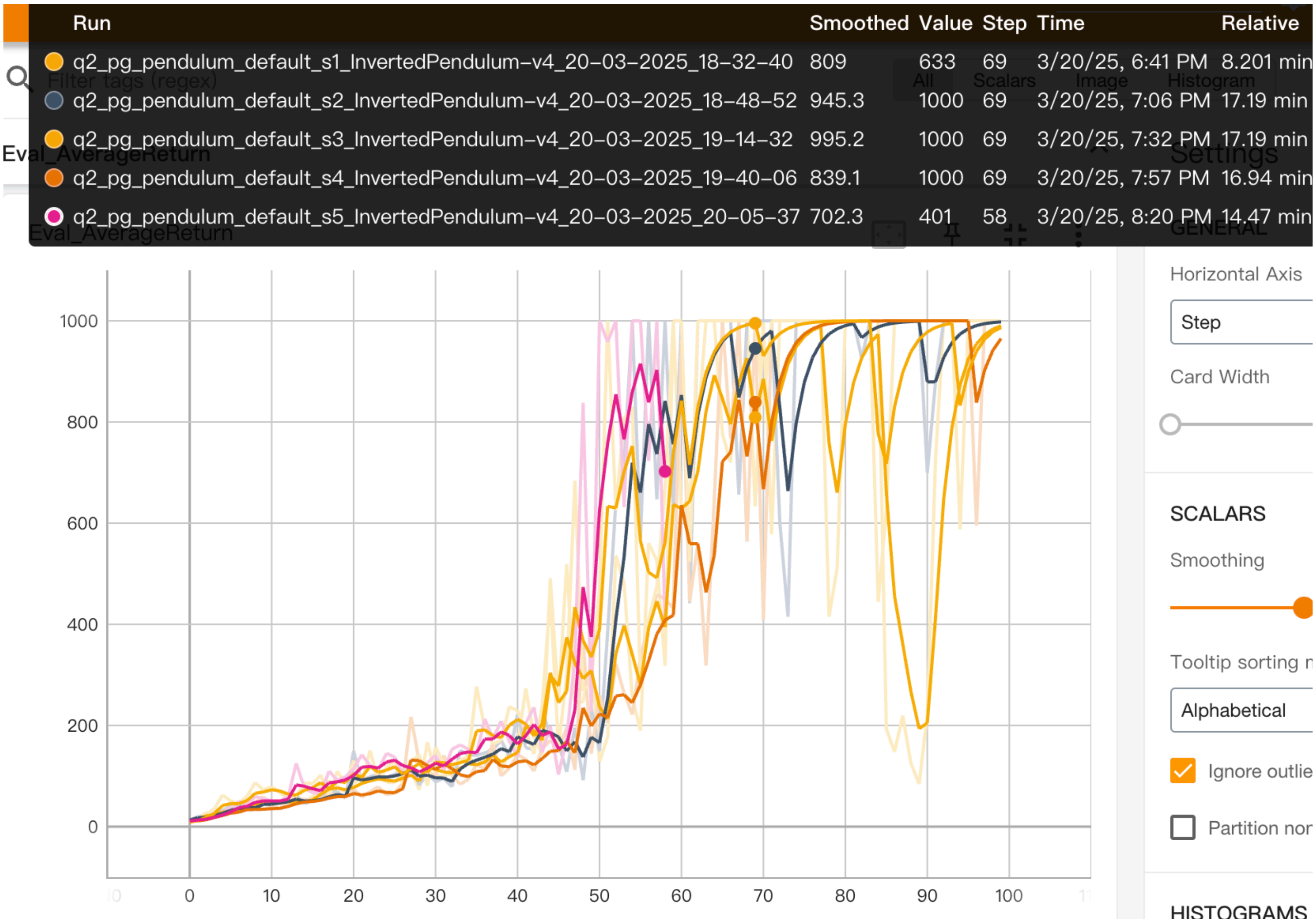
使用默认配置的话，只变化λ的话，$\lambda = 0.99$的效果最好。最后差不多在160左右大幅度波动



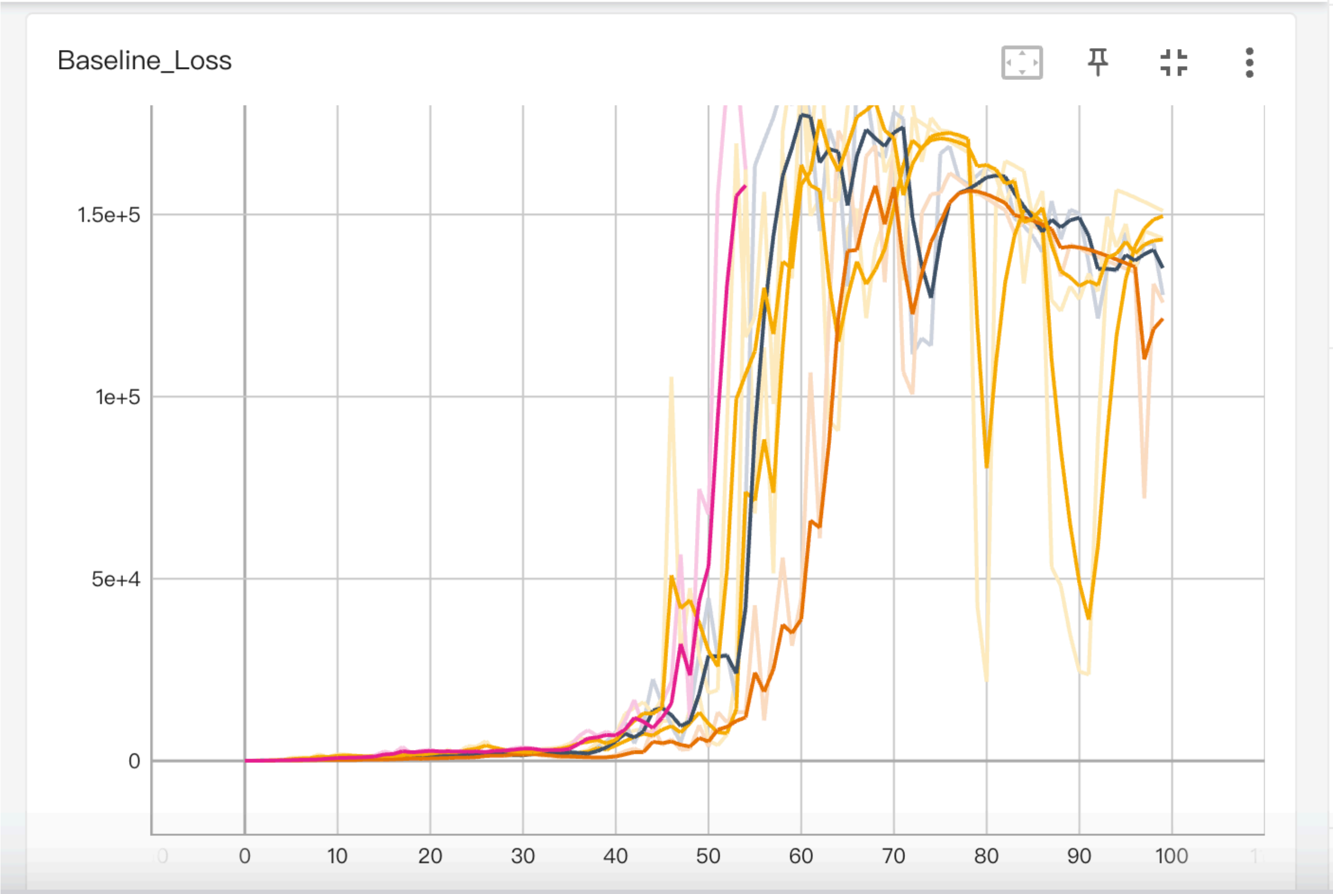
- 当$\lambda = 0$的时候，就是纯粹的TD，其估计出来的reward bias很大，虽然low variance，因此可以看到它学习的很慢。当$\lambda = 1$的时候，就是蒙塔卡洛-基线，虽然无bias，但是高方差。因此其学习的效果不是最好。λ为0.99的效果才是最好的，取得了一个比较好的trade-off

Expriemnt 4（Hyperparameters and Sample Efficiency）

默认配置下可以看到在80 step之后就接近了最优值，但是一直在震荡。由此可见policy的不稳定变化



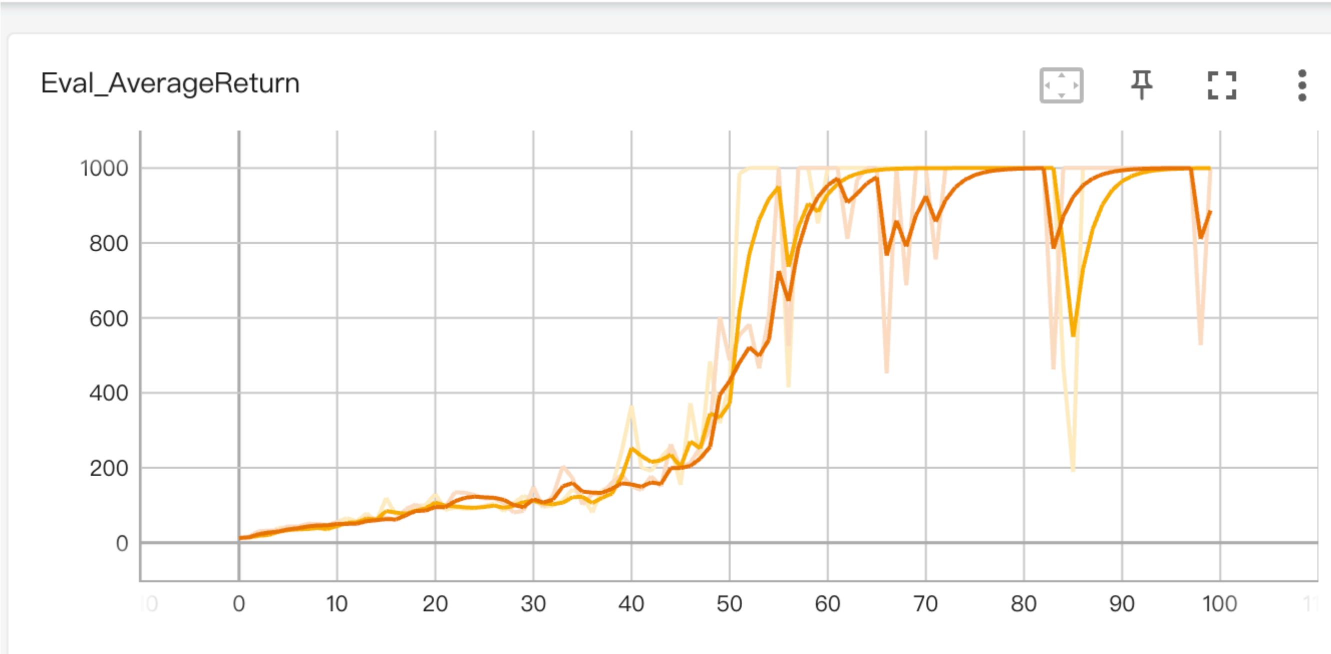
并且发现baseline loss一路直接起来 ’可以看到reward的方差大和policy的剧烈变化

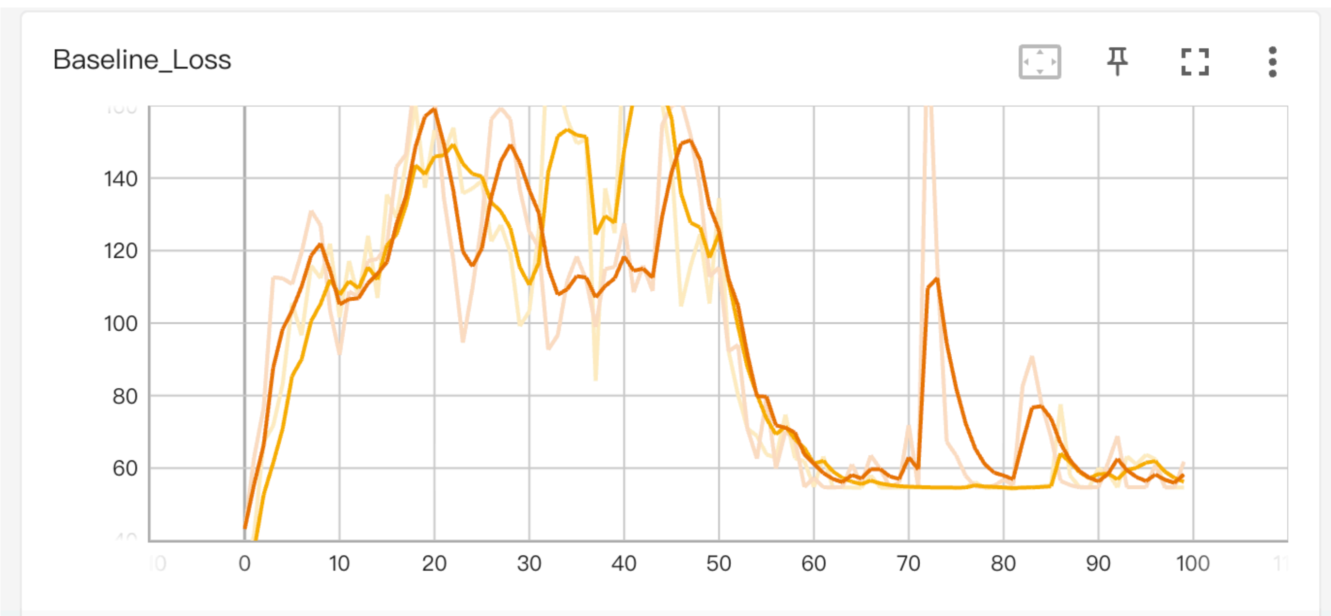


最后env step差不多有5e5

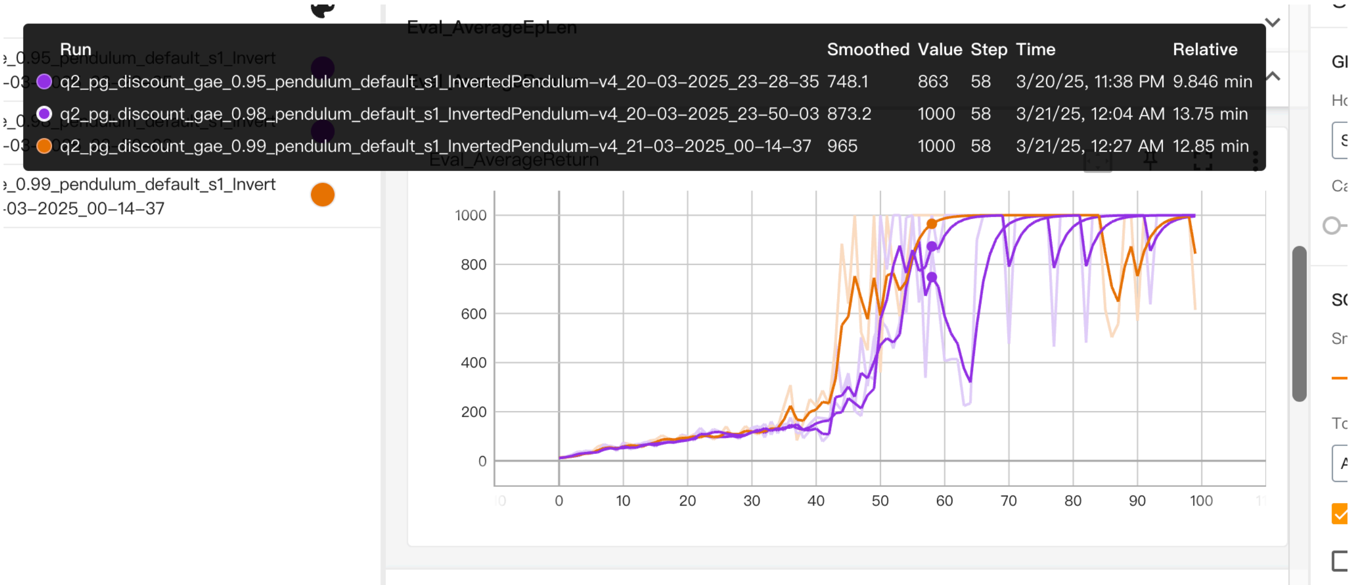
baseline loss变化剧烈，也许可以通过增加baseline network的更新次数/增加discount减少reward方差来提升baseline network的效果。
也可以通过增加layer size增加模型的拟合效果。

首先搜索出来一个比较好的discount，为0.98，可以看到其明显降低了baseline loss和reward的震荡幅度和收敛速度

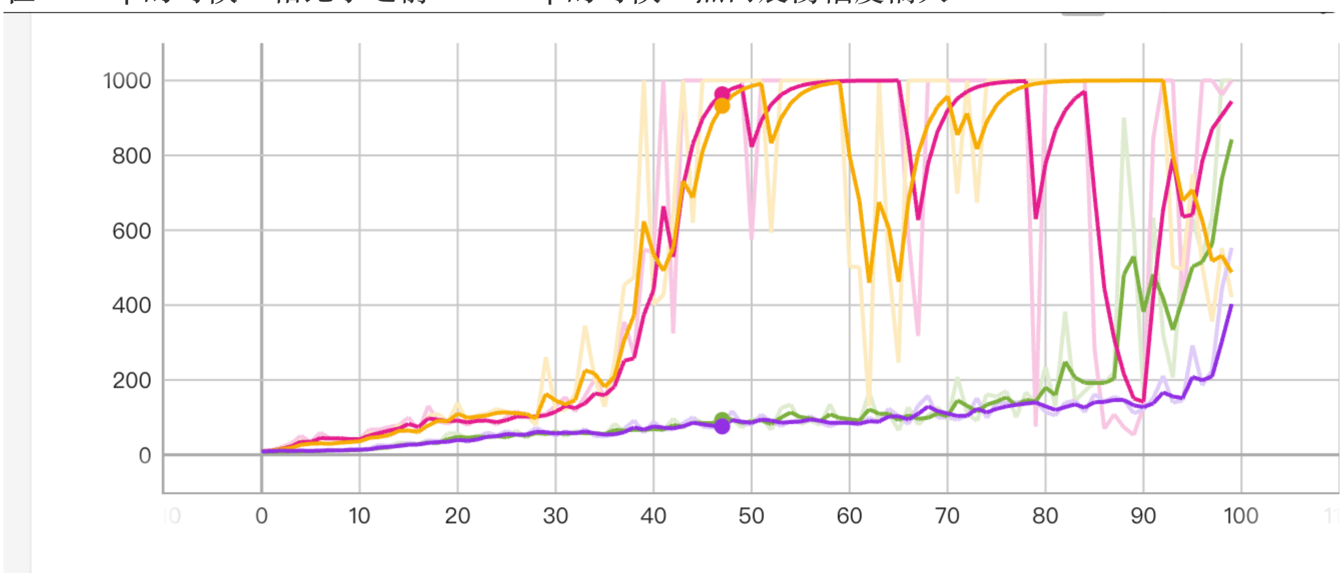




在优化完baseline网络的训练完之后，我们去优化reward的估计。
使用GAE estimation降低reward估计的方差。从结果看，没有明显改善。可能是因为这时候reward的unbias更加重要。



那么就转换思路，增强bias网络的容量。首先增加模型的layer数量，发现其确实能够到达高点，在40 step的时候，相比于之前5/60 step的时候。然而震荡幅度偏大

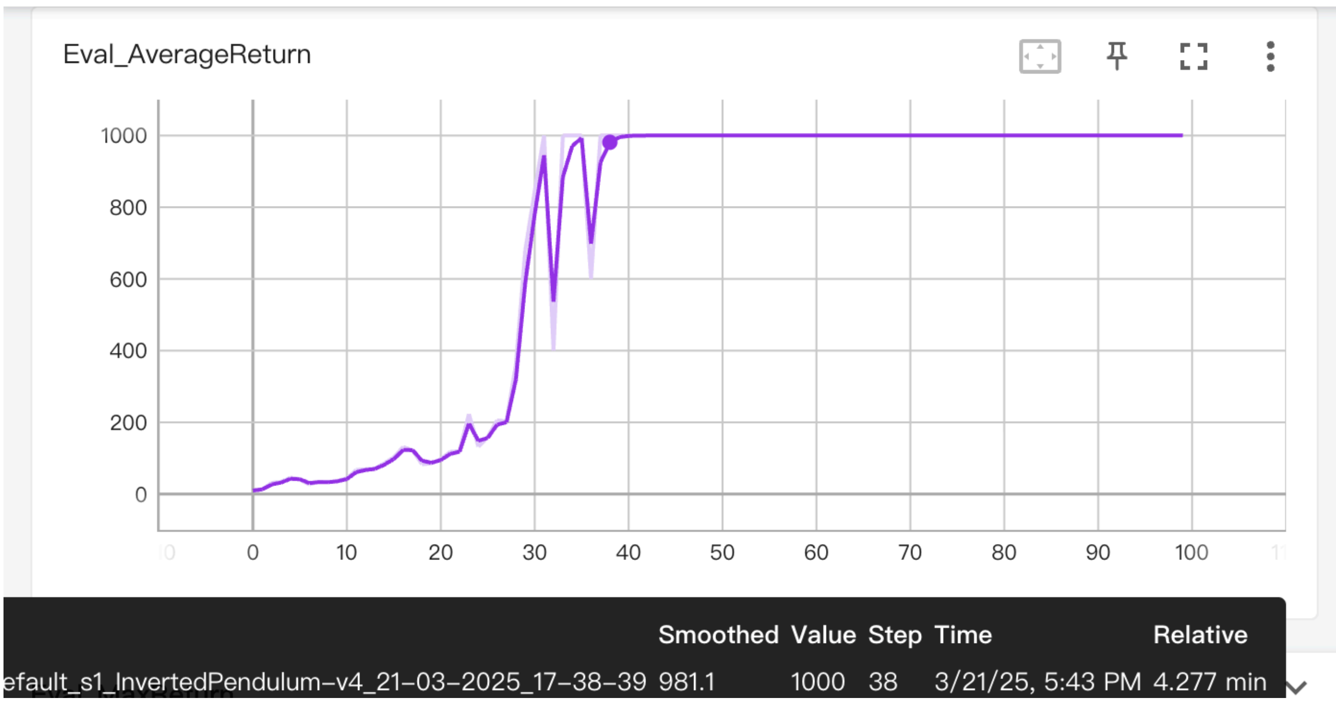


于是想着去更改学习率，因为发现其在后期的时候，reward会有一定的震荡，其代表了policy network的偶发性大幅度更新。

最后决定增大学习率为7e-3,对比为原先的5e-3。然后在训练到达40 step之后，再降低学习率。训练命令是

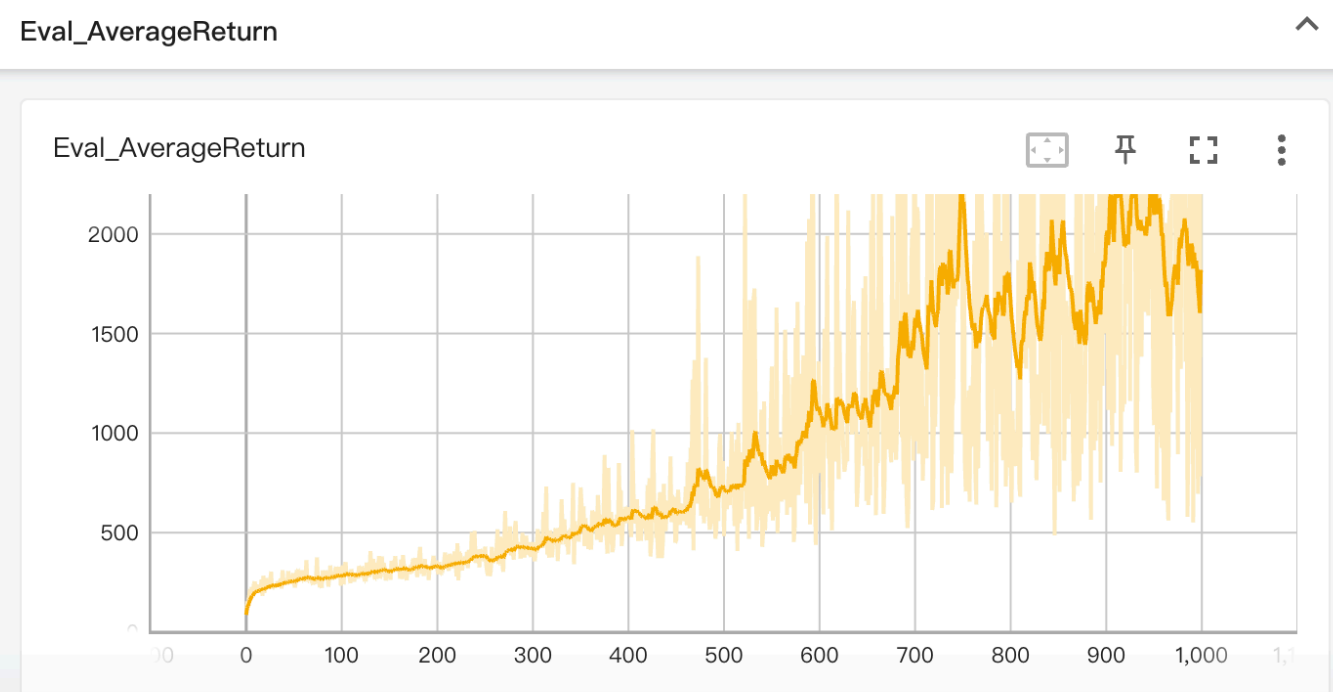
```
for layer in 3 4
do
    for seed in $(seq 1 1); do
        python cs285/scripts/run_hw2.py --env_name InvertedPendulum-v4 -n 100 \
        --exp_name udl_discount_layer_${layer}_pendulum_default_s$seed \
        -rtg --use_baseline -na \
        --batch_size 5000 \
        --discount 0.98 \
        -l $layer \
        -udl \
        -lr 7e-3 -blr 7e-3 \
        --seed $seed
    done
done
```

效果图如下



Expriment 5(Humanoid-v4).

最后到1800 reward左右。从这个角度来看，RL的实现是很正确的,远超要求的600 reward。



Analysis

1. (a) 求解policy gradient解法下关于θ的梯度。
   求解如下

$$\nabla J(\theta) = \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} \nabla_\theta \log p(\tau) r(\tau)$$

   定义τ_k 为先执行k的a_1,再执行1次的a_2, 然后结束episode。其概率和reward分别为$\theta^k(1-\theta), k$。
   因此

$$\begin{aligned}
\nabla J(\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} p(\tau_k) \nabla \log p(\tau_k) r(\tau_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k (1-\theta) \frac{k(1-\theta)-\theta}{\theta(1-\theta)} k \\
&= (1-\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{k-1} k^2 - \theta \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{k-1} k \\
&= (1-\theta) \frac{1+\theta}{(1-\theta)^3} - \frac{\theta}{(1-\theta)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1-\theta)^2}$$

其中倒三等式化简倒二等式的时候用了两个经典的幂级数求和公式。

来源：基本几何级数的导数

我们从最基本的几何级数开始：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k = \frac{1}{1-\theta}, \qquad |\theta| < 1$$

对两边对 θ 求导：

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k\theta^{k-1}$$

而右边的导数是：

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{1-\theta}\right) = \frac{1}{(1-\theta)^2}$$

所以我们就得到了：

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\theta^{k-1} = \frac{1}{(1-\theta)^2}$$

🔷 Step 2: $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\theta^{k-1} = \frac{\theta+1}{(1-\theta)^3}$

这个也可以通过导数技巧来推出来。

我们首先考虑：

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} k\theta^k = \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

这是常见的公式之一，通常在生成函数中看到。

我们对它再次对 θ 求导：

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\theta^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\theta^{k-1}$$

右边则是对 $f(\theta)$ 求导：

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right) = \frac{(1-\theta)^2 - 2\theta(1-\theta)}{(1-\theta)^4} = \frac{1+\theta}{(1-\theta)^3}$$

因此我们有：

(b) 求解先直接求reward，再求关于θ的梯度。
很明显，reward为

$$J(\theta) = \theta \times 1 + (1-\theta) \times 0 + \theta \times (\theta \times 1 + (1-\theta) \times 0) + \theta^2 \times (\theta \times 1 + (1-\theta) \times 0)\ldots$$

表示了用户在第一个时刻的平均reward + 第二个时刻的平均reward + ... 。其导数为$\frac{1}{(1-\theta)^2}$
其策略梯度和(a)解法一致。
还有一种利用迭代思路求$J(\theta)$, 就是

$$J(\theta) = (1-\theta) \times 0 + \theta \times (J(\theta) + 1) => J(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$$

2. 计算policy gradient的方差。
policy gradient为

$$\mathbb{E}[g^2] - \mathbb{E}[g]^2$$

其中$E[g]^2$是已经知道的。求

$$E[g^2] = \sum_{k=1}^{\infty} p(k)(k \times (\frac{k}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}))^2$$

这里面要用到

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \theta^{k-1} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\theta(\theta^2 + 4\theta + 1)}{(1-\theta)^4} = \frac{\theta^2 + 4\theta + 1}{(1-\theta)^4}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 \theta^{k-1} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\theta(\theta^3 + 11\theta^2 + 11\theta + 1)}{(1-\theta)^5} = \frac{\theta^3 + 11\theta^2 + 11\theta + 1}{(1-\theta)^5}$$

使用以下python代数计算方程

```python
from sympy import *
x = Symbol('x', real=True)
k = Symbol('k', real=True)
one = 1 / (1-x) ** 2
two = (x + 1) / ((1-x)**3)
three = (x ** 2 + 4 * x + 1) / ((1-x) ** 4)
four = (x ** 3 + 11 * x ** 2 + 11 * x + 1 ) / ((1-x) ** 5)
print(one, two, three, four)

pg = four * (1-x) / x - 2 *  three  + two * x / (1-x) - 1 / (1-x) ** 4
pg_ans = cancel(pg)
print('pg_ans', simplify(pg_ans))
```

得到最后的方差为

$$\frac{4\theta^2+8\theta+1}{\theta(1-\theta)^4}$$

在$\theta=0,1$其方差最大为无穷。
在$\theta=0.1099$时方差最小，约为 27.9411。

3. return-to-go计算均值和方差
   当使用return-to-go的reward的时候，对每一个轨迹τ_k, 其状态$s_j, j=0...k$下使用动作a后，其reward为$k-j$。因此其估计的梯度为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\theta^k(1-\theta)\frac{1}{\theta}(k+k-1+k-2...+0)=\sum_{k=1}^{\infty}\theta^{k-1}(1-\theta)\frac{k^2+k}{2}$$
$$=\frac{1}{(1-\theta)^2}$$

   其方差为

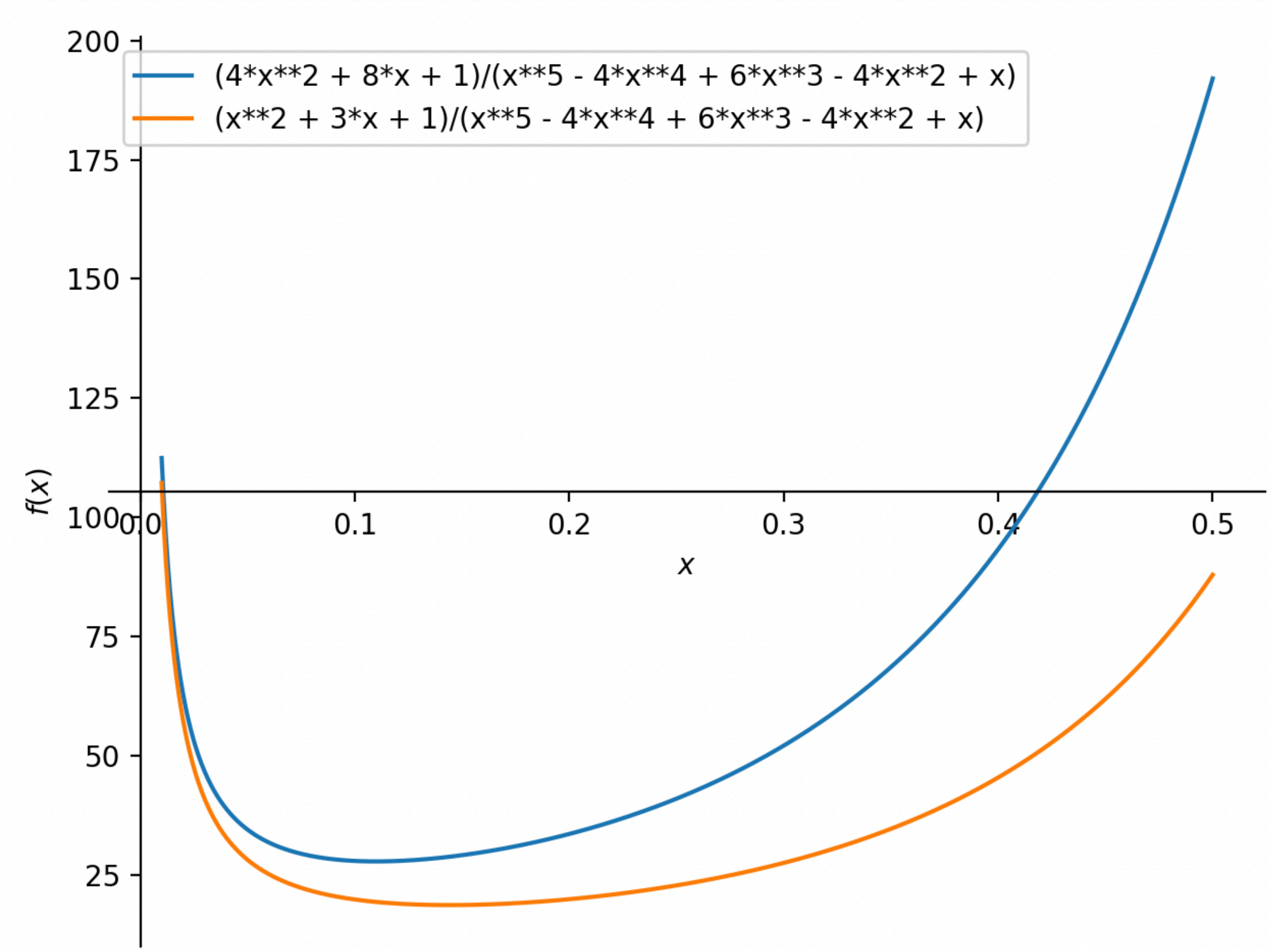
$$\sum_{k=1}^{\infty}\theta^{k-1}((1-\theta)\frac{k^2+k}{2})^2-\frac{1}{(1-\theta)^4}$$
$$=\frac{\theta^2+3\theta+1}{\theta(1-\theta)^4}$$

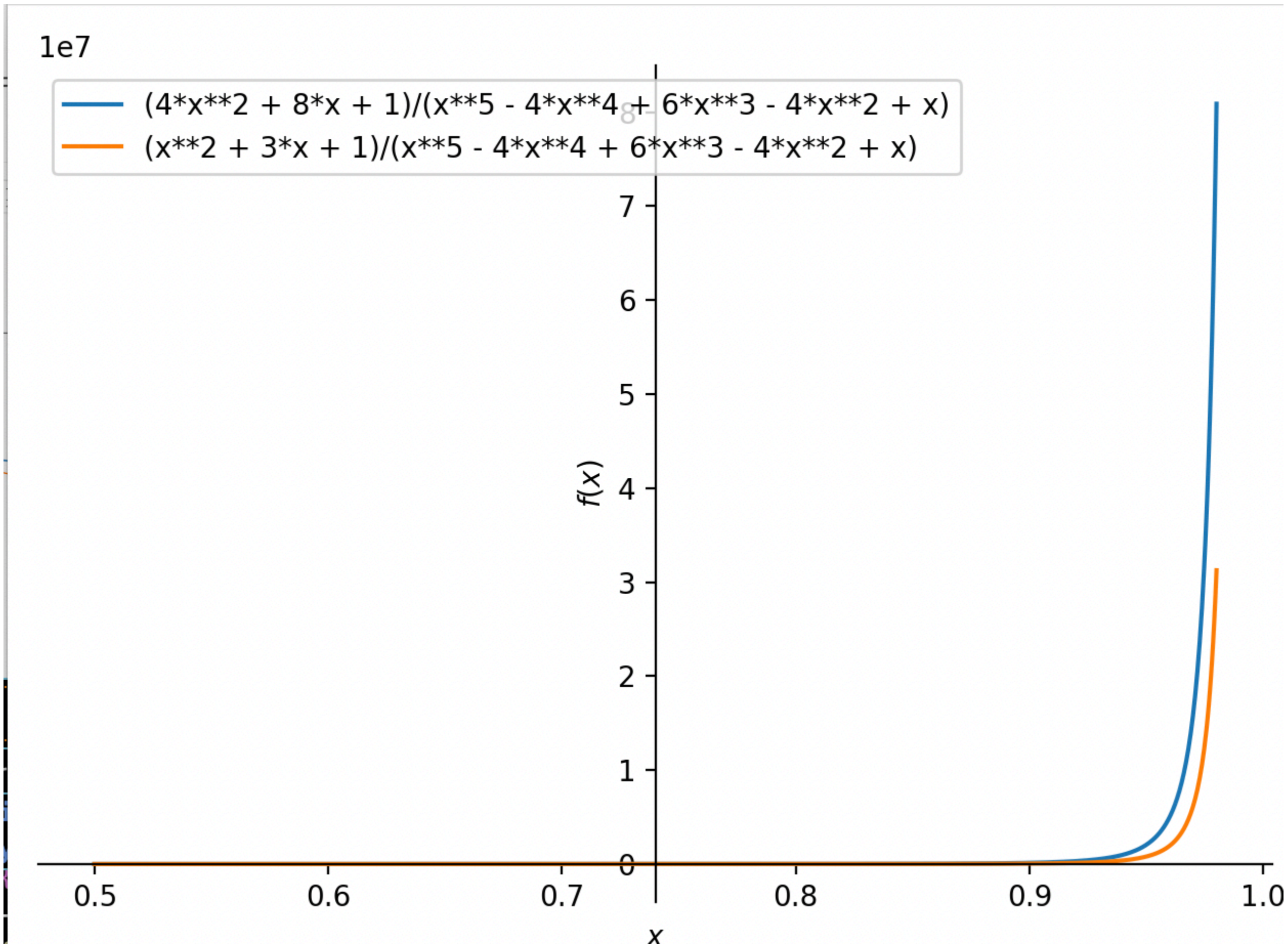
代码为

```
from sympy import *
x = Symbol('x', real=True)
k = Symbol('k', real=True)
one = 1 / (1-x) ** 2
two = (x + 1) / ((1-x)**3)
three = (x ** 2 + 4 * x + 1) / ((1-x) ** 4)
four = (x ** 3 + 11 * x ** 2 + 11 * x + 1 ) / ((1-x) ** 5)
print(one, two, three, four)

ans = (1-x) / (4 * x) * (four + 2 * three + two) - 1 / (1-x) ** 4
print('ori ans', simplify(ans))
ans = cancel(ans)
print(simplify(ans))
```

观察reward-to-go reward和total reward梯度方差和theta的关系 ’可以看到使用reward-to-go其方差会大幅度减小





4. 计算importance sampling的梯度均值和方差

首先很明显，只用agent到达S_H的时候才能获得奖励，其概率为θ'^{H-1}。因此在Importance Sampling下，其梯度均值为

$$\theta'^{H-1} \times \frac{\theta^{H-1}}{\theta'^{H-1}} \frac{H-1}{\theta} = \theta^{H-1} \frac{H-1}{\theta}$$

接下来，计算方差为

$$\theta'^{H-1} (\frac{\theta^{H-1}}{\theta'^{H-1}} \frac{H-1}{\theta})^2 - (\theta^{H-1} \frac{H-1}{\theta})^2$$
$$= (\frac{\theta^2}{\theta'})^{H-1} (H-1)^2 \frac{1-\theta^{(H-1)}}{\theta^2}$$

可以看到当H无穷的时候,主导方程变化的是$(\frac{\theta^2}{\theta'})^{H-1}$.

当$\theta^2 < \theta'$,H无穷，方差趋向0。

当$\theta^2 >= \theta'$,H无穷，方差趋向无穷。

可是我们知道θ越大，效果越好。这意味着当我们优化$\theta = \sqrt{\theta}'$的时候，我们的模型就会卡住，无法继续训练。这体现了importance sampling的缺点，使用off policy无法到达最优点，由于梯度方差的无穷。