

# 6

## Centros de gravedad, centroides y fuerzas distribuidas

### Objetivos del capítulo

- Analizar el peso como una fuerza equivalente a un sistema de fuerzas paralelas y el centro de gravedad como su punto de aplicación.
- Estudiar el procedimiento de cálculo del centroide de un área, por similitud con el centro de gravedad de un cuerpo.
- Determinar el centroide de áreas compuestas a partir de centroides de áreas conocidas.
- Estudiar las fuerzas distribuidas en vigas y la forma de ser reemplazadas por fuerzas equivalentes.

### 6.1 Introducción

**E**l término *centro de gravedad*, bien sea de una estructura, de una máquina o de un cuerpo en general, es un parámetro que se usa a menudo en ingeniería como referencia para establecer medidas relacionadas con el peso y la forma como se distribuye, con el fin de lograr un mejor estado de equilibrio, sea estático o dinámico. En el diseño de autos de carrera se tiene en cuenta para dividir el peso del vehículo de tal manera que su centro de gravedad se encuentre lo más bajo posible, y en el centro de la carrocería, con el fin de disminuir las posibilidades de volcado en curvas a altas velocidades. Las mismas consideraciones son válidas en la fabricación del resto de vehículos, incluidos los de carga y de pasajeros.

De la torre inclinada de Pisa se afirma que no se ha volcado porque fue construida de tal manera que los pisos de abajo fueran los más pesados, lo cual quiere decir que su centro de gravedad es bajo, y además, porque la vertical que pasa por el centro de gravedad no se ha salido del área de su base.

Aunque el peso, en realidad, se halla distribuido en cada una de las partículas que conforman un cuerpo, el centro de gravedad se considera como el punto donde se encuentra concentrado, y se localiza cerca de la zona en la que se halla la mayor parte del peso total. Si se logra suspender un cuerpo del centro de gravedad, quedará en perfecto equilibrio en cualquier posición.

En un aeroplano la posición del centro de gravedad, respecto de la ubicación del denominado centro de presiones, juega un papel importante en su maniobrabilidad. Mientras que en el centro de gravedad se considera aplicado el peso del avión, dirigido verticalmente hacia abajo, en el centro de presiones teóricamente se concentra toda la presión del aire que actúa en forma de una fuerza de sustentación hacia arriba, equilibrando el peso del aeroplano durante el vuelo.

Para mantener el avión en forma estable durante la operación de vuelo, es necesario manipular los controles de las alas de tal manera que el centro de presiones quede en la misma línea vertical que el centro de gravedad, así la fuerza de sustentación  $\vec{F}$  queda alineada con el peso  $\vec{W}$ , como se muestra en la figura 6.1(a), y no se genera ningún par de fuerzas.

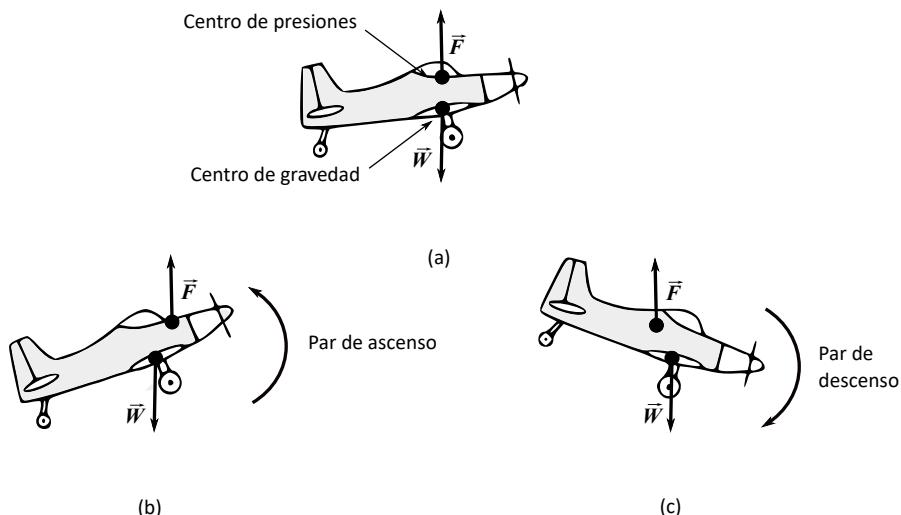


Figura 6.1

En cambio, si se desea colocar el avión en posición de elevación, es necesario generar un par de ascenso entre la fuerza de sustentación  $\vec{F}$  y el peso  $\vec{W}$ , lo cual se logra al manipular las alas de tal forma que el centro de presiones quede por delante del centro de gravedad, como se indica en la figura 6.1(b). Por otro lado, si se requiere descender, entonces los controles se manejan para que el centro de presiones se ubique por detrás del centro de gravedad y se produzca un par de descenso, como se ilustra en la figura 6.1(c).

## 6.2 El peso como una fuerza equivalente

El *centro de gravedad G de un cuerpo* se define como el punto donde se considera se encuentra aplicado su peso  $\vec{W}$ , tomado como si fuera una fuerza concentrada. El peso  $\vec{W}$ , en vez de ser una fuerza concentrada, caracterizada por estar aplicada en un solo punto, más bien está compuesto por un sinnúmero de diminutas fuerzas distribuidas en todas las partículas que conforman el cuerpo, las cuales son originadas por la acción gravitacional de la Tierra. Por tal razón, las líneas de acción de dichas fuerzas se encuentran dirigidas hacia el centro de la Tierra, aunque para fines de cálculos se toman como si fueran paralelas.

De acuerdo con lo anterior, un cuerpo se considera que está formado por un sistema de diminutas fuerzas paralelas cuya resultante es el peso  $\vec{W}$  y para el cual la posición de su punto de aplicación, tomado como si fuera una fuerza concentrada, resulta ser el centro de gravedad  $G$  del cuerpo. De tal manera que para definir la posición del centro de gravedad  $G$  es necesario calcular el punto de aplicación de la fuerza resultante  $\vec{W}$ , equivalente a la de un conjunto de diminutas fuerzas paralelas.

## 6.3 Punto de aplicación de la resultante de varias fuerzas paralelas

Considere varias fuerzas paralelas verticales de magnitudes  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ , que actúan respectivamente en los puntos definidos por las distancias  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , de una viga en el plano  $xz$ , como se muestra en la figura 6.2(a), las cuales se desea reemplazar por una sola fuerza de magnitud  $R$ , aplicada a una distancia  $x$ , como se indica en la figura 6.2(b).

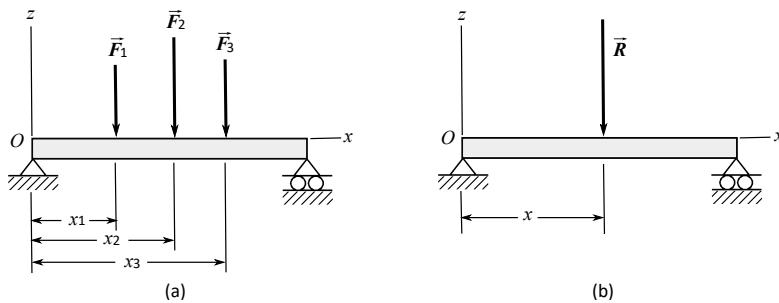


Figura 6.2

Para cumplir lo anterior, los dos sistemas mostrados en las figuras 6.2(a) y 6.2(b) deben ser equivalentes, por lo que, de acuerdo con lo tratado en la sección 3.21, es necesario igualar las fuerzas para determinar  $R$  y los momentos con respecto a un punto de referencia  $O$  para definir el valor de  $x$ , como se procede a continuación:

$$\begin{aligned}\sum F_z: R &= F_1 + F_2 + F_3 \\ \sum M_O: xR &= x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 \\ x &= \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3}\end{aligned}$$

El valor de  $x$  dado por la ecuación anterior define la posición correspondiente a la resultante  $R$ , del sistema de fuerzas paralelas, conforme a la figura 6.2(b).

Si las fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$  no actúan sobre una viga, sino sobre una placa plana, como se muestra en la figura 6.3(a), aplicadas respectivamente en los puntos de coordenadas  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ , entonces para calcular las coordenadas  $(x, y)$  correspondientes a la posición de la resultante  $\vec{R}$  se divide la placa en dos planos: uno en el plano  $zx$  y el otro en el plano  $zy$ , como se observa en las figuras 6.3(a) y 6.3(b).

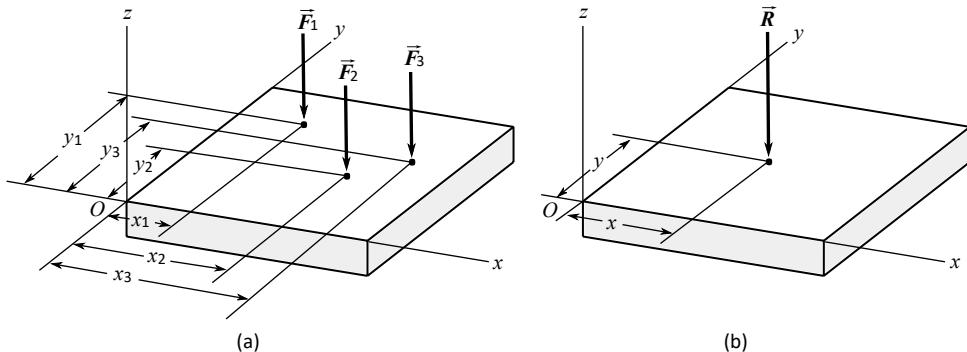


Figura 6.3

La resultante  $R$  se encuentra al efectuar la suma de fuerzas en el eje  $z$ , así:

$$\sum F_z: R = F_1 + F_2 + F_3 \quad (6.1)$$

El valor de  $x$  se halla al despejar de la sumatoria de momentos con respecto al eje  $y$ :

$$\begin{aligned}\sum M_y: xR &= x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 \\ x &= \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3}\end{aligned} \quad (6.2)$$

Se despeja el valor de  $y$  de la suma de momentos con respecto al eje  $x$ :

$$\begin{aligned}\sum M_x: yR &= y_1F_1 + y_2F_2 + y_3F_3 \\ y &= \frac{y_1F_1 + y_2F_2 + y_3F_3}{F_1 + F_2 + F_3}\end{aligned}\quad (6.3)$$

Las ecuaciones 6.2 y 6.3 definen las coordenadas  $(x, y)$  correspondientes a la posición de la resultante  $\vec{R}$ , del sistema de fuerzas paralelas,  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$ , que actúan sobre una placa plana, de acuerdo con las figuras 6.3(a) y 6.3(b). Nótese que las expresiones 6.2 y 6.3 son similares a las relaciones 3.25, las cuales definen la posición de una fuerza equivalente a un sistema de fuerzas paralelas.

## 6.4 Centro de gravedad de un cuerpo

Para calcular el centro de gravedad  $G$  correspondiente al peso  $\vec{W}$ , se divide el cuerpo en  $n$  partículas de peso  $\Delta\vec{W}$  cada una, como se indica en la figura 6.4(a), a las cuales se les asignan sus respectivas coordenadas en un sistema  $xyz$ , de tal manera que a la partícula 1 le corresponden las coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$  y el peso  $\Delta\vec{W}_1$ , a la partícula 2, las coordenadas  $(x_2, y_2, z_2)$  y el peso  $\Delta\vec{W}_2$ , hasta llegar a la partícula  $n$ , la cual tiene las coordenadas  $(x_n, y_n, z_n)$  y el peso  $\Delta\vec{W}_n$ .

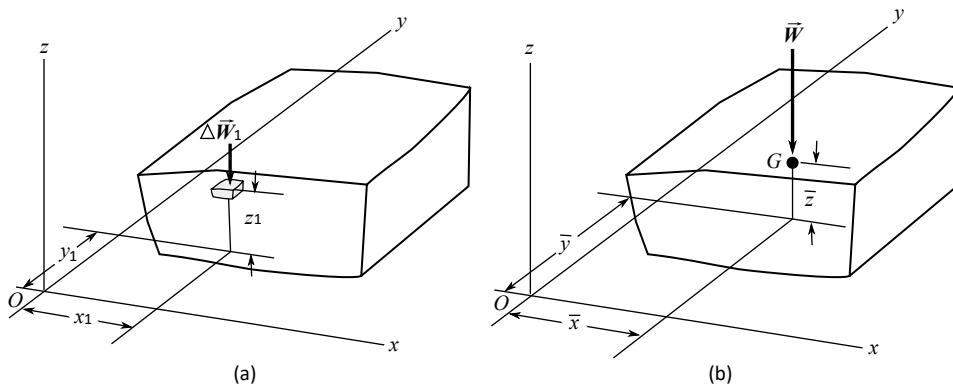


Figura 6.4

Considerando que el cuerpo está compuesto de  $n$  diminutas fuerzas paralelas al eje  $z$ , el peso total  $W$  es igual a la suma de todas ellas, así:

$$\sum F_z: W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n = \sum_{i=1}^n \Delta W_i$$

Al realizar la sumatoria de momentos con respecto al eje  $y$ :

$$\Sigma M_y: \bar{x} W = x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \dots + x_n \Delta W_n = \sum_{i=1}^n x_i \Delta W_i$$

Efectuando, además, la sumatoria de momentos con respecto al eje  $x$ :

$$\Sigma M_x: \bar{y} W = y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \dots + y_n \Delta W_n = \sum_{i=1}^n y_i \Delta W_i$$

Si se gira el cuerpo de tal manera que el eje  $y$  quede en dirección vertical y se toma sumatoria de momentos con respecto al eje  $x$ , se determina la coordenada  $z$  así:

$$\Sigma M_x: \bar{z} W = z_1 \Delta W_1 + z_2 \Delta W_2 + \dots + z_n \Delta W_n = \sum_{i=1}^n z_i \Delta W_i$$

Al aumentar el número  $n$  de pequeñas partículas haciéndolas infinitamente pequeñas, en el límite las sumatorias anteriores tienden a las siguientes integrales:

$$W = \int dW$$

$$\bar{x} W = \int x dW$$

$$\bar{y} W = \int y dW$$

$$\bar{z} W = \int z dW$$

Las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  corresponden a la posición del centro de gravedad  $G$  del cuerpo o punto de aplicación del peso  $\vec{W}$ , como se muestra en la figura 6.4(b).

## 6.5 Centroide de un área

El *centroide  $C$  de un área* se puede definir como el punto donde se encuentra concentrado el peso del área, considerándola como si tuviera peso. O sea, corresponde al centro de gravedad atribuyéndole al área características de poseer peso. Teniendo en cuenta tales atributos, las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  correspondientes a la posición del centroide  $C$  se determinan mediante el mismo procedimiento utilizado para definir el centro de gravedad  $G$  de un cuerpo.

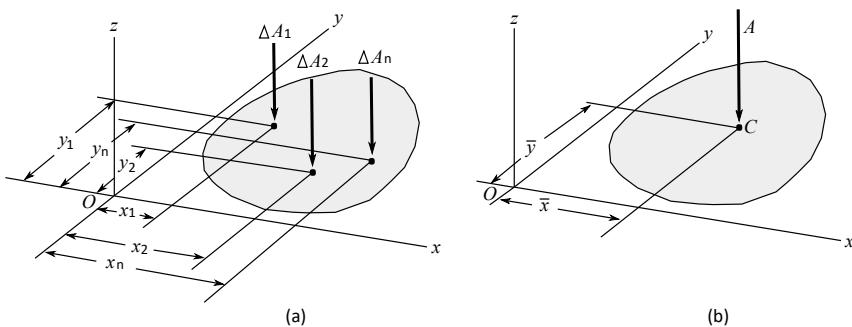


Figura 6.5

Se divide el área  $A$  en pequeños diferenciales de áreas dadas por  $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$ , como se muestra en la figura 6.5(a), las cuales se encuentran localizadas respectivamente en los puntos de coordenadas  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Por tanto, para determinar el área total  $A$  se efectúa la sumatoria de todas las pequeñas áreas, así:

$$\sum A: A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \quad (6.4)$$

Se realiza la sumatoria de momentos con respecto al eje  $y$ , para hallar la coordenada  $\bar{x}$ , así:

$$\sum M_y: \bar{x}A = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \dots + x_n\Delta A_n = \sum_{i=1}^n x_i\Delta A_i \quad (6.5)$$

Y al efectuar la sumatoria de momentos con respecto al eje  $x$ , se encuentra la coordenada  $\bar{y}$ :

$$\sum M_x: \bar{y}A = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \dots + y_n\Delta A_n = \sum_{i=1}^n y_i\Delta A_i \quad (6.6)$$

Por lo tanto, con base en las relaciones 6.4, 6.5 y 6.6, se obtiene:

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \quad \bar{x}A = \sum_{i=1}^n x_i\Delta A_i \quad \bar{y}A = \sum_{i=1}^n y_i\Delta A_i \quad (6.7)$$

Al aumentar el número de  $n$  diferenciales de áreas, haciéndolas infinitamente pequeñas, en el límite las sumatorias anteriores tienden a las integrales 6.8, las cuales definen las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  correspondientes al centroide  $C$  de un área  $A$ , como se indica en la figura 6.5(b).

$A = \int dA$	$\bar{x}A = \int x dA$	$\bar{y}A = \int y dA$
---------------	------------------------	------------------------

(6.8)

### 6.5.1 Ejemplo 6.1

Determinar por integración directa las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  correspondientes al centroide  $C$  del área  $A$  definida por la parábola  $y = kx^2$  y el eje  $x$ , como se indica en la figura 6.6(a).

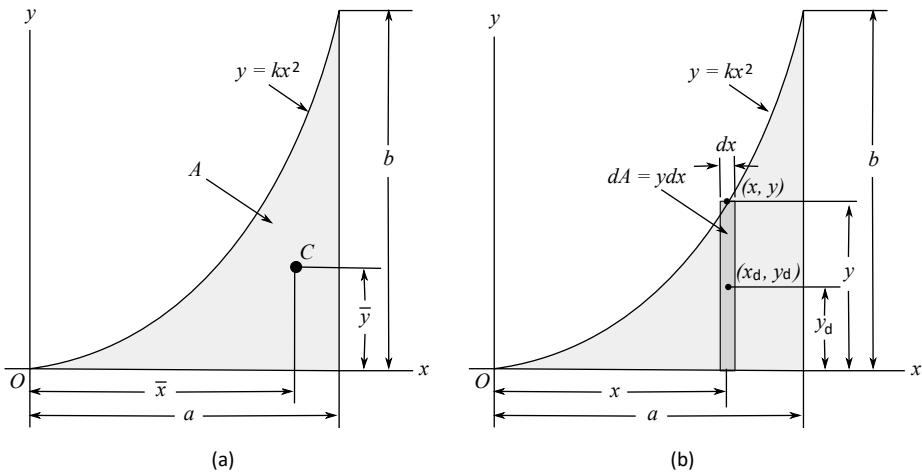


Figura 6.6

Solución

Se toma un diferencial de área  $dA = ydx$  de forma vertical, como se muestra en la figura 6.6(b), el cual corta a la curva dada de la parábola  $y = kx^2$  en el punto de coordenadas  $(x, y)$ , quedando definidas las coordenadas del centroide de dicho diferencial como:

$$x_d = x \quad y_d = y/2$$

Se determina el valor de la constante  $k$  al reemplazar los datos  $x = a$ ,  $y = b$  en la ecuación  $y = kx^2$ , dando como resultado:

$$b = ka^2 \quad k = b/a^2$$

Con base en la figura 6.6(a) y teniendo en cuenta las ecuaciones 6.8, se tiene:

$$A = \int dA \quad \bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA$$

Se realiza sumatoria de las áreas y de los momentos y se sustituyen valores:

$$A = \int dA = \int_0^a y dx = \int_0^a kx^2 dx = \frac{b}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{b}{a^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ab}{3}$$

$$\bar{x}A = \int x dA = \int_0^a xy dx = \int_0^a xkx^2 dx = \frac{b}{a^2} \int_0^a x^3 dx = \frac{b}{a^2} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^2 b}{4}$$

$$A = \frac{ab}{3} \quad \bar{x}A = \frac{a^2 b}{4} \quad \bar{x} = \frac{\bar{x}A}{A} = \frac{3a}{4}$$

$$\bar{y}A = \int y_d dA = \int_0^a \left(\frac{y}{2}\right) y dx = \int_0^a \frac{k^2 x^4}{2} dx = \frac{b^2}{2a^4} \int_0^a x^4 dx = \frac{b^2}{2a^4} \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

$$A = \frac{ab}{3} \quad \bar{y}A = \frac{ab^2}{10} \quad \bar{y} = \frac{\bar{y}A}{A} \quad \bar{y} = \frac{3b}{10}$$

## 6.6 Ejes de simetría de un área

Un *eje de simetría de un área* es una línea imaginaria que divide al área en dos partes iguales, de tal manera que para cada punto de una de las subáreas existe un punto equidistante en la otra subárea. Por ejemplo, el área mostrada en la figura 6.7(a) posee el eje de simetría indicado por la línea 1-1, la cual divide el área total en dos partes iguales situadas a lado y lado de dicho eje, de tal forma que para cada punto del área de la izquierda existe un punto respectivo en el área de la derecha, equidistante de la línea 1-1. Se puede visualizar como si el eje 1-1 dividiera al área en dos y una de las partes fuera la imagen espejo de la otra.

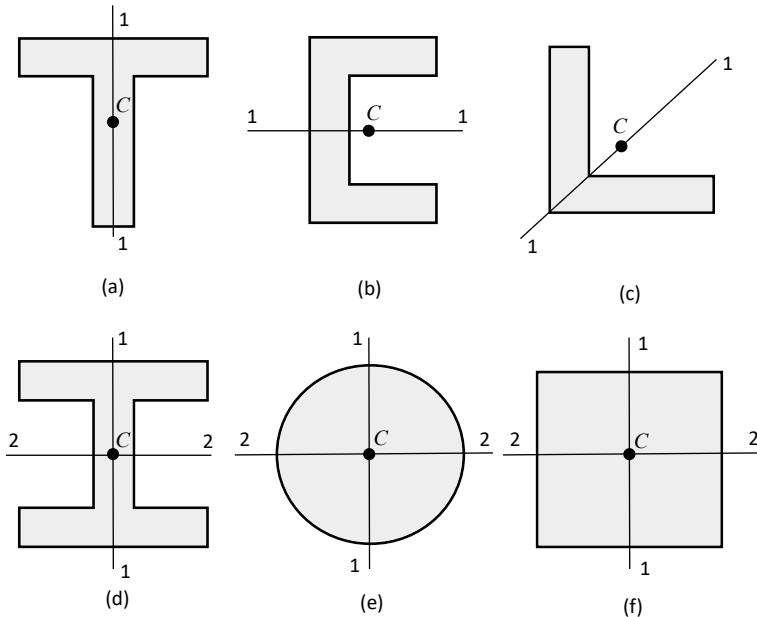


Figura 6.7

De acuerdo con lo anterior, las áreas mostradas en las figuras 6.7(a), 6.7(b) y 6.7(c) poseen un eje de simetría, definido por las líneas 1-1, mientras que las ilustradas en las figuras 6.7(d), 6.7(e) y 6.7(f) cuentan con dos, dados por las líneas 1-1 y 2-2. Cuando un

área posee un eje de simetría, como en el primer caso, su centroide se encuentra localizado sobre dicho eje; en cambio, si el área presenta dos ejes, como en el segundo caso, su centroide queda ubicado en el punto donde se cortan dichos ejes, como se puede apreciar en las respectivas figuras.

## 6.7 Centroide de áreas compuestas

Para determinar el centroide de un área compuesta, se divide en áreas conocidas y se sigue el mismo procedimiento utilizado para hallar el punto de aplicación de la resultante de varias fuerzas paralelas, visto en la sección 6.3, además de lo contemplado en la sección 6.5.

Considere el caso del área compuesta por tres áreas conocidas, como el mostrado en la figura 6.8(a), para la cual, una vez localizados los respectivos centroides dados por  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ , se propone encontrar las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  correspondientes al centroide  $C$  del área total.

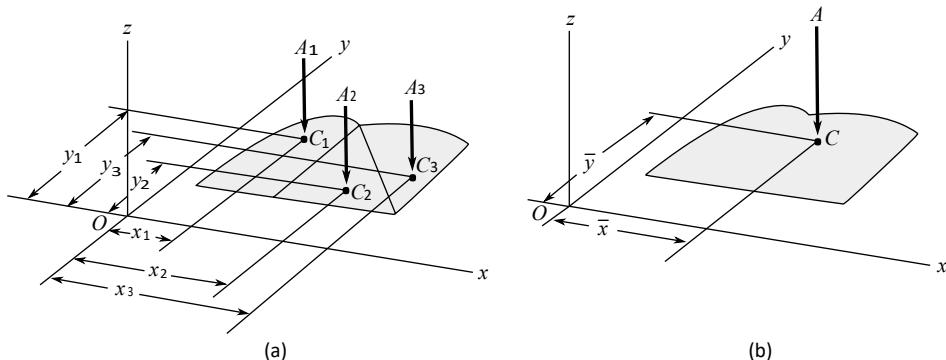


Figura 6.8

El área total  $A$  está dada mediante la suma de las áreas parciales:

$$\sum A: A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (6.9)$$

La coordenada  $\bar{x}$  se halla mediante la sumatoria de momentos con respecto al eje  $y$ :

$$\sum M_y: \bar{x}A = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 \quad (6.10)$$

El valor de  $\bar{y}$  se encuentra al realizar la sumatoria de momentos con respecto al eje  $x$ :

$$\sum M_x: \bar{y}A = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3 \quad (6.11)$$

Al despejar  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  de las relaciones 6.10 y 6.11, respectivamente, y sustituir el valor de  $A$ , dado por la expresión 6.9, se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \quad \bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \quad (6.12)$$

En forma general, las ecuaciones 6.9 y 6.12 se hacen extensivas para el caso de un área  $A$  compuesta de un número de  $i$  áreas, así:

$A = \sum A_i$	$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{A}$	$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{A}$
----------------	------------------------------------	------------------------------------

(6.13)

Siendo  $A_i$  cada una de las áreas y  $(x_i, y_i)$  las correspondientes coordenadas de los centroides.

El procedimiento básico para hallar las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  pertenecientes al centroide  $C$  de un área compuesta consiste en:

- 1. Dividir el área compuesta en áreas conocidas, para lo cual es importante consultar la información de áreas y sus centroides, ofrecida por la tabla 6.1.
- 2. Establecer un punto de referencia común, válido para las coordenadas de los centroides de todas las áreas individuales y del área compuesta requerida.
- 3. Calcular dichas coordenadas con base en el punto de referencia seleccionado y sus respectivas áreas individuales.
- 4. Aplicar las ecuaciones 6.13, con el fin de obtener las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , del área compuesta por determinar, para lo cual es conveniente organizar los datos en tablas, como se verá en el siguiente ejemplo.

### 6.7.1 Ejemplo 6.2

Calcular las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  correspondientes al centroide  $C$  del área sombreada compuesta mostrada en la figura 6.9(a).

Tabla 6.1 Centroides de áreas usuales

CENTROIDES DE ÁREAS USUALES	
	<p>Área triangular</p> $\text{Área} = \frac{bh}{2}$ $\bar{x} = \frac{b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$
<p>Cuadrante de área circular</p> $\text{Área} = \frac{\pi R^2}{4}$ $\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$	<p>Área semicircular</p> $\text{Área} = \frac{\pi R^2}{2}$ $\bar{x} = 0$ $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$
<p>Cuadrante de área elíptica</p> $\text{Área} = \frac{\pi ab}{4}$ $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	<p>Área semielíptica</p> $\text{Área} = \frac{\pi ab}{2}$ $\bar{x} = 0$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$
<p>Área parabólica</p> $\text{Área} = \frac{2ah}{3}$ $\bar{x} = \frac{3a}{8}$ $\bar{y} = \frac{3h}{5}$	<p>Área subparabólica</p> $\text{Área} = \frac{ah}{3}$ $\bar{x} = \frac{3a}{4}$ $\bar{y} = \frac{3h}{10}$

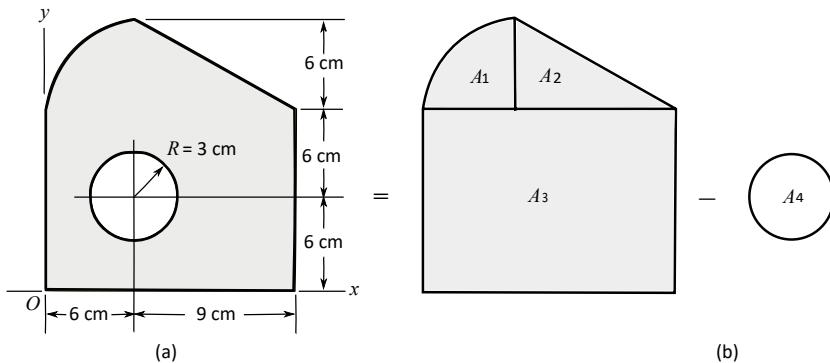


Figura 6.9

Solución

Se divide el área compuesta en áreas conocidas, como se indica en la figura 6.9(b):

$$A_1 = \text{cuarto de círculo} \quad A_2 = \text{triángulo} \quad A_3 = \text{rectángulo} \quad A_4 = \text{círculo}$$

Se calculan las áreas y se establece el origen  $O$  del sistema de coordenadas  $xy$ , como punto de referencia común para todos los centroides.

- *Cuarto de círculo:* indicado en la figura 6.10(a), teniendo en cuenta la tabla 6.1, para un cuadrante de área circular, los cálculos son los siguientes:

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi(6 \text{ cm})^2}{4} = 28.27 \text{ cm}^2$$

$$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4(6 \text{ cm})}{3\pi} = 2.54 \text{ cm} \quad x_1 = 6 \text{ cm} - \bar{x} = 3.46 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4(6 \text{ cm})}{3\pi} = 2.54 \text{ cm} \quad y_1 = 12 \text{ cm} + \bar{y} = 14.54 \text{ cm}$$

- Dado que los valores  $(\bar{x}, \bar{y})$  corresponden a las coordenadas del cuarto de círculo con referencia en el origen particular  $O'$ , como se indica en la figura 6.10(a), las coordenadas requeridas  $(x_1, y_1)$  se han ajustado con base en el origen común  $O$ .
- *Triángulo:* como se aprecia en la figura 6.10(b), por tanto, de acuerdo con la tabla 6.1 y una vez ajustados los valores al punto de referencia común  $O$ , se tiene:

$$A_2 = \frac{bh}{2} = \frac{(9 \text{ cm})(6 \text{ cm})}{2} = 27 \text{ cm}^2$$

$$\bar{x} = \frac{b}{3} = \frac{9 \text{ cm}}{3} = 3 \text{ cm} \quad x_2 = 6 \text{ cm} + \bar{x} = 9 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{h}{3} = \frac{6 \text{ cm}}{3} = 2 \text{ cm} \quad y_2 = 12 \text{ cm} + \bar{y} = 14 \text{ cm}$$

- **Rectángulo:** con base en la figura 6.11(b), para el rectángulo los datos son:

$$A_3 = bh = (6 \text{ cm} + 9 \text{ cm})(6 \text{ cm} + 6 \text{ cm}) = 180 \text{ cm}^2$$

$$x_3 = \frac{(6 \text{ cm} + 9 \text{ cm})}{2} = 7.5 \text{ cm} \quad y_3 = \frac{(6 \text{ cm} + 6 \text{ cm})}{2} = 6 \text{ cm}$$

- **Círculo:** para un círculo, como se muestra en la figura 6.11(b) y con referencia en el punto  $O$ , los cálculos son los siguientes:

$$A_4 = \pi R^2 = \pi(3 \text{ cm})^2 = 28.27 \text{ cm}^2 \quad x_4 = 6 \text{ cm} \quad y_4 = 6 \text{ cm}$$

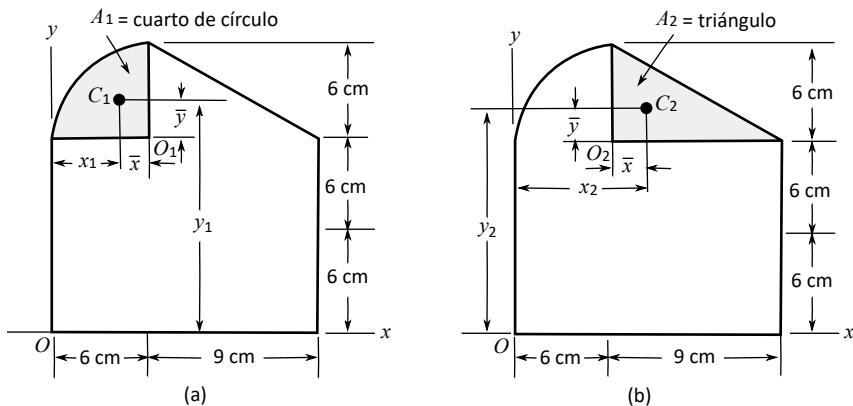


Figura 6.10

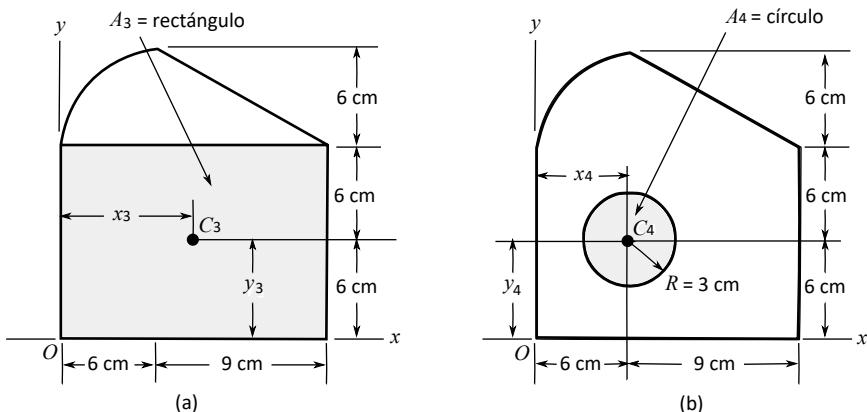


Figura 6.11

Se aplican las ecuaciones 6.13, para lo cual se organizan primeramente los datos, como se indica en la tabla 6.2, teniendo en cuenta que los datos relativos al círculo se consideran negativos, por representar un agujero.

Tabla 6.2

Áreas	$A_i \text{ (cm}^2)$	$x_i \text{ (cm)}$	$x_i A_i \text{ (cm}^3)$	$y_i \text{ (cm)}$	$y_i A_i \text{ (cm}^3)$
Cuarto de círculo	28.27	3.46	97.81	14.54	411.04
Triángulo	27	9	243	14	378
Rectángulo	180	7.5	1350	6	1 080
Círculo	-28.27	6	-169.62	6	-169.62
$\sum A_i = 207 \text{ cm}^2$		$\sum x_i A_i = 1521.19 \text{ cm}^3$		$\sum y_i A_i = 1699.42 \text{ cm}^3$	

Al aplicar las relaciones 6.13, se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{1521.19 \text{ cm}^3}{207 \text{ cm}^2} = 7.34 \text{ cm} \quad \bar{x} = 7.34 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{A} = \frac{1699.42 \text{ cm}^3}{207 \text{ cm}^2} = 8.20 \text{ cm} \quad \bar{y} = 8.20 \text{ cm}$$

### 6.7.2 Ejemplo 6.3

Determinar por el método de áreas compuestas las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  del centroide  $C$  del área  $A$  mostrada en la figura 6.12(a).

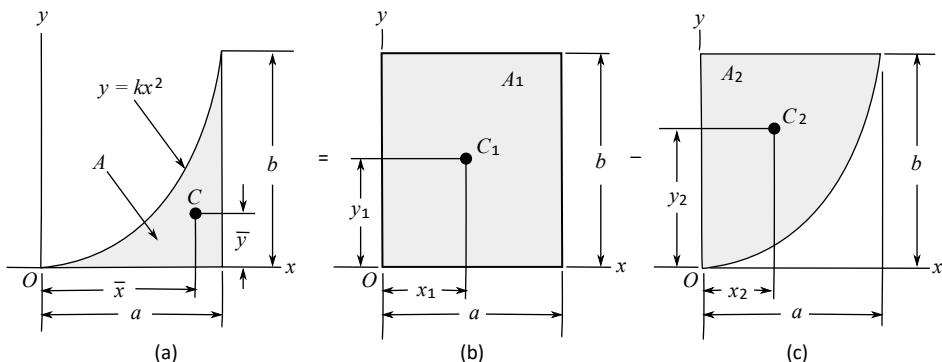


Figura 6.12

Solución

Se divide el área compuesta en áreas conocidas, como se muestra en las figuras 6.12(b) y 6.12(c).

$$A_1 = \text{rectángulo}$$

$$A_2 = \text{área parabólica}$$

Se escoge el origen  $O$  del sistema  $xy$  como punto de referencia y se calcula cada área y su centroide con respecto a  $O$ .

- *Rectángulo:* para un rectángulo los datos son los siguientes:

$$A_1 = ab \quad x_1 = \frac{a}{2} \quad y_1 = \frac{b}{2}$$

- *Área parabólica:* de acuerdo con los datos de la tabla 6.1, los valores son:

$$A_2 = \frac{2ab}{3} \quad x_2 = \frac{3a}{8} \quad y_2 = \frac{3b}{5}$$

Se organizan los datos, como se aprecia en la tabla 6.3, teniendo en cuenta que los datos relacionados con el área parabólica son negativos por tratarse de una sustracción de áreas y se aplican las relaciones 6.13.

Tabla 6.3

Áreas	$A_i$	$x_i$	$x_i A_i$	$y_i$	$y_i A_i$
Rectángulo	$ab$	$a/2$	$a^2 b/2$	$b/2$	$ab^2/2$
Área parabólica	$-2ab/3$	$3a/8$	$-a^2 b/4$	$3b/5$	$-2ab^2/5$
$\sum A_i = ab/3$		$\sum x_i A_i = a^2 b/4$		$\sum y_i A_i = ab^2/10$	

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{a^2 b/4}{ab/3} = \frac{3a}{4} \quad \bar{x} = \frac{3a}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{A} = \frac{ab^2/10}{ab/3} = \frac{3b}{10} \quad \bar{y} = \frac{3b}{10}$$

Nótese que los valores son iguales a los obtenidos mediante el ejemplo 6.1, lo cual muestra la aplicación de dos métodos opcionales para calcular el centroide de áreas.

## 6.8 Fuerzas distribuidas sobre vigas

En muchas ocasiones, las vigas se encuentran sometidas a cargas, como el peso de materiales, las cuales se pueden expresar mediante un sistema de fuerzas distribuidas a lo largo de

la viga, siendo conveniente reemplazarlo por una fuerza concentrada equivalente, para realizar cálculos, como las reacciones en los apoyos.

Consideré la viga de ancho constante  $a$  y longitud  $L$  medida en el eje  $x$ , bajo una carga por unidad de altura  $w$ , expresada en el eje  $w$ , como se indica en la figura 6.13.

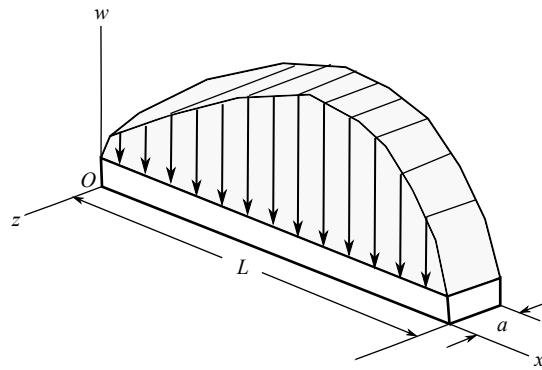


Figura 6.13

Al tener la viga un ancho constante, lo cual implica que el peso total aplicado solo depende de dos variables, como son la altura  $w$  y la longitud  $L$ , dicha distribución de carga se puede representar mediante un sistema de fuerzas paralelas cubriendo un área  $A$  en el plano  $wx$ , como se indica en la figura 6.14(a), en donde la carga varía de tal manera que es expresada como una función de  $x$ , o sea  $w = f(x)$ .

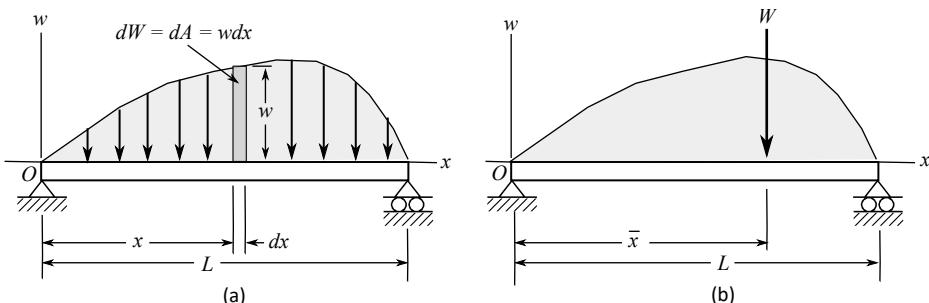


Figura 6.14

Esto es:

$$W = \int dW = \int wdx = \int f(x)dx = \int dA = A = \text{área bajo la curva de carga}$$

La carga total  $W = A$ , mostrada en la figura 6.14(b), representa la fuerza concentrada equivalente al sistema de fuerzas paralelas distribuidas bajo la curva de carga, indicado en la figura 6.14(a). Con el fin de encontrar la posición donde actúa  $W$ , dada por el valor  $\bar{x}$ , se toma sumatoria de momentos con respecto al punto O, así:

$$\bar{x}W = \bar{x}A = \int xdW = \int x dA$$

Al comparar la ecuación anterior con la relación 6.8, para definir la posición  $\bar{x}$  correspondiente al centroide del área  $A$ , se concluye que la posición de la carga concentrada  $W$  es la misma del centroide del área  $A$ , definida como el área bajo la curva de carga, lo cual será ilustrado con el ejemplo dado a continuación.

### 6.8.1 Ejemplo 6.4

Una viga se encuentra sometida a una carga tal cuya distribución se puede representar como se muestra en la figura 6.15. Determinar las reacciones correspondientes en los apoyos A y B.

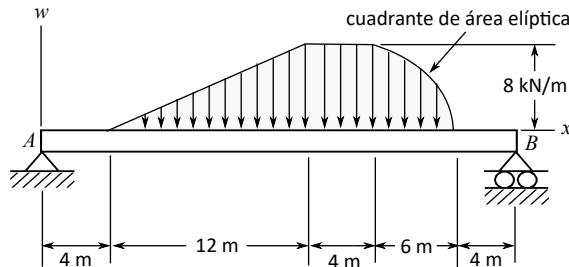


Figura 6.15

#### Solución

La carga distribuida se representa mediante un área compuesta y se divide en áreas conocidas, como se indica en la figura 6.16(a):

$$A_1 = W_1 = \text{triángulo} \quad A_2 = W_2 = \text{rectángulo} \quad A_3 = W_3 = \text{cuadrante elíptico}$$

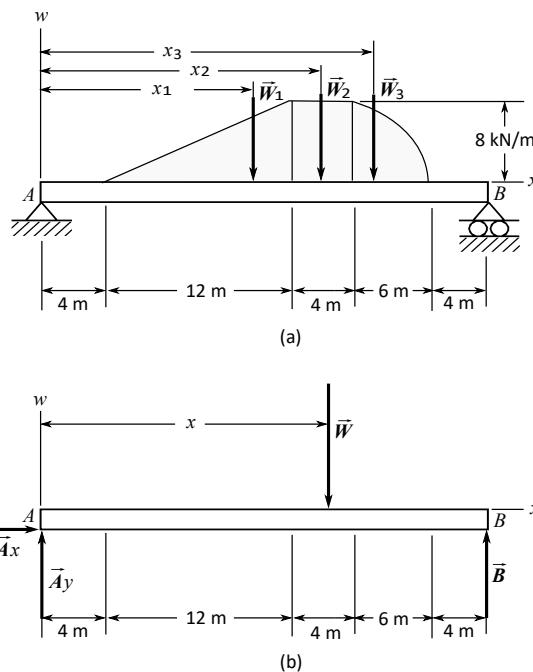


Figura 6.16

Se establece el origen  $A$  del sistema  $wx$  como punto de referencia común y se calcula cada una de las áreas con sus correspondientes centroides respecto del punto  $A$ .

$$W_1 = \frac{(12 \text{ m})(8 \text{ kN/m})}{2} = 48 \text{ kN} \quad x_1 = 4 \text{ m} + 12 \text{ m} - \frac{12 \text{ m}}{3} = 12 \text{ m}$$

$$W_2 = (4 \text{ m})(8 \text{ kN/m}) = 32 \text{ kN} \quad x_2 = 4 \text{ m} + 12 \text{ m} + 2 \text{ m} = 18 \text{ m}$$

$$W_3 = \frac{\pi(6 \text{ m})(8 \text{ kN/m})}{4} = 37.69 \text{ kN}$$

$$x_3 = 4 \text{ m} + 12 \text{ m} + 4 \text{ m} + \frac{4(6 \text{ m})}{3\pi} = 22.54 \text{ m}$$

Tabla 6.4

Áreas	$A_i$ (kN)	$x_i$ (m)	$x_i A_i$ (kNm)
Triángulo	48	12	576
Rectángulo	32	18	576
Cuadrante de área elíptica	37.69	22.54	849.53
$\Sigma A_i = 117.69 \text{ kN}$		$\Sigma x_i A_i = 2001.53 \text{ kNm}$	

$$x = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{2001.53 \text{ kNm}}{117.69 \text{ kN}} = 17 \text{ m} \quad x = 17 \text{ m}$$

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 6.16(b), en donde la carga distribuida se sustituye por la carga concentrada  $W = 117.69 \text{ kN}$  actuando en la posición dada por  $x = 17 \text{ m}$ , calculado con datos de la tabla 6.4, y se aplican las ecuaciones de equilibrio para hallar las requeridas reacciones en los apoyos  $A$  y  $B$ , así:

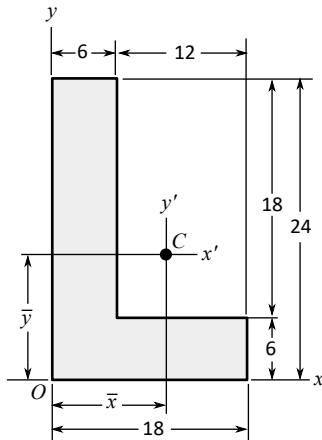
$$\sum M_A + \curvearrowright = 0: (17 \text{ m})(117.69 \text{ kN}) - (B)(30 \text{ m}) = 0 \quad B = 66.69 \text{ kN}$$

$$\sum F_x + \rightarrow = 0: A_x = 0$$

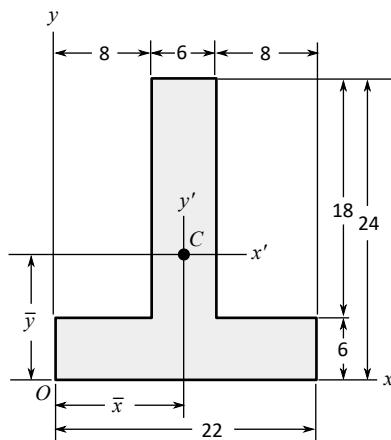
$$\sum F_y + \uparrow = 0: A_y + B - W = 0 \quad A_y + 66.69 \text{ kN} - 117.69 \text{ kN} = 0 \quad A_y = 51 \text{ kN}$$

## 6.9 Problemas propuestos

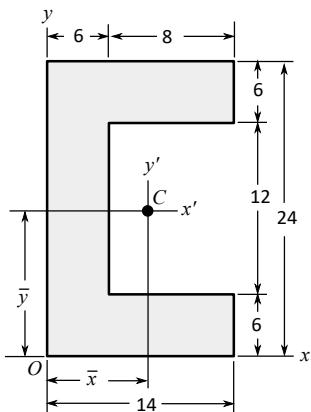
*Problemas 6.1 hasta 6.14.* Para cada una de las áreas compuestas mostradas en las figuras, cuyas medidas están dadas en centímetros (cm), calcular el área total y las coordenadas ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ) correspondientes al centroide  $C$ .



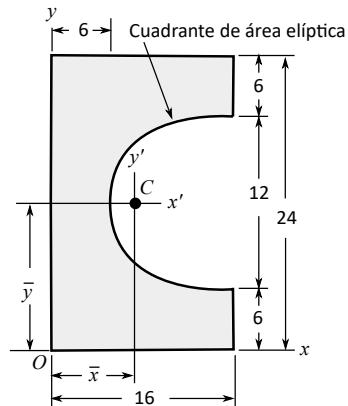
Problema 6.1



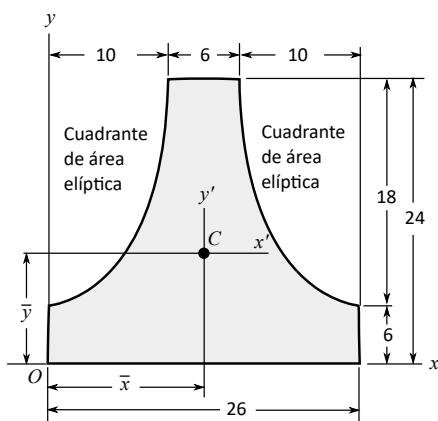
Problema 6.2



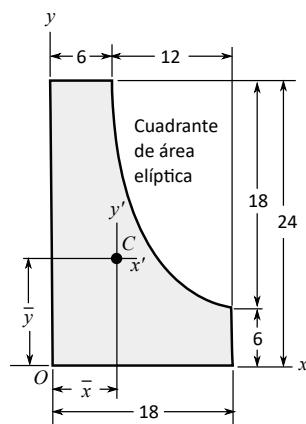
Problema 6.3



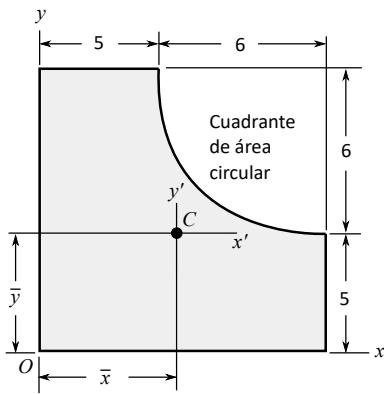
Problema 6.4



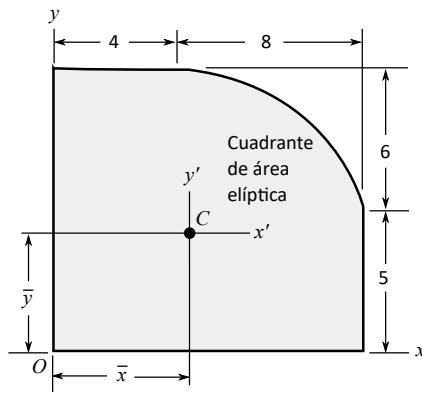
Problema 6.5



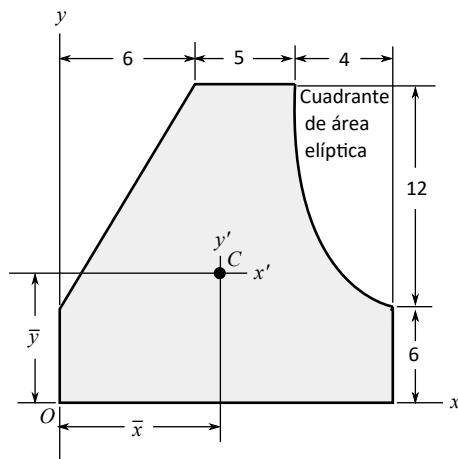
Problema 6.6



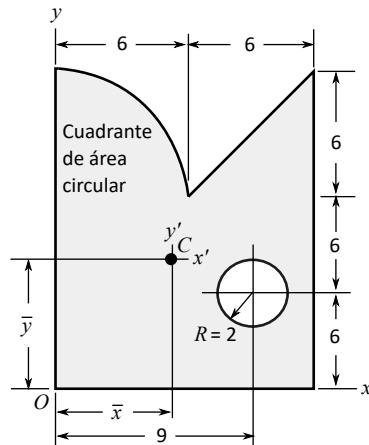
Problema 6.7



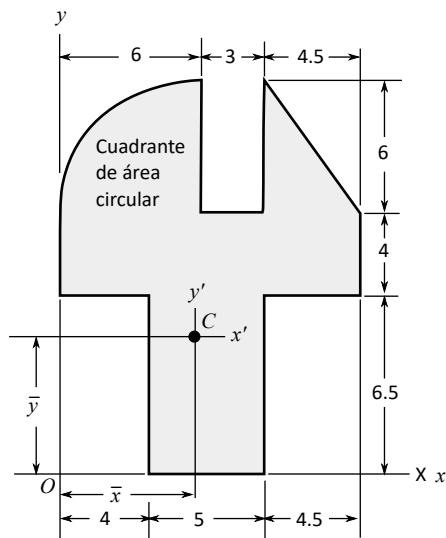
Problema 6.8



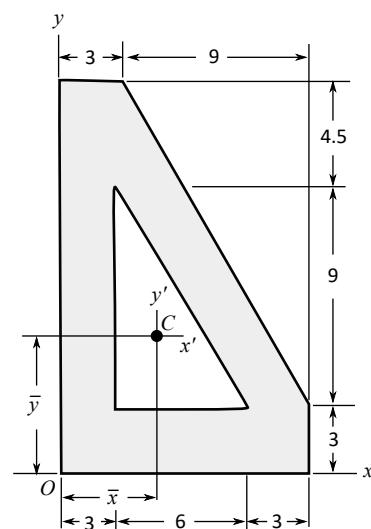
Problema 6.9



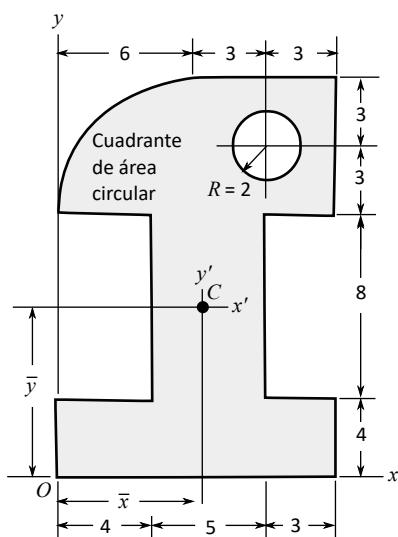
Problema 6.10



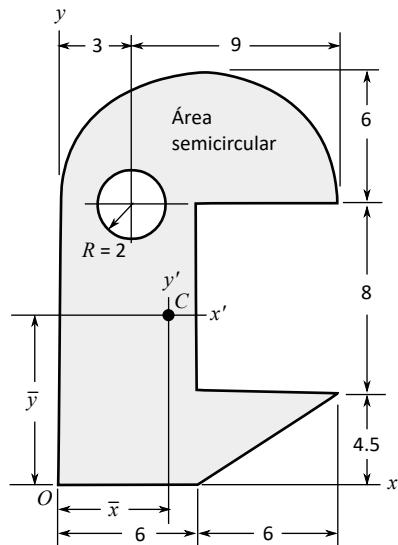
Problema 6.11



Problema 6.12

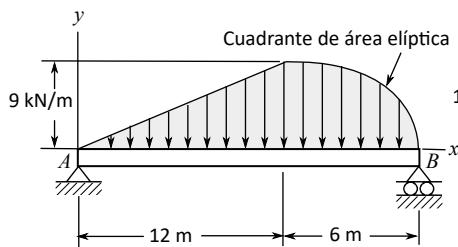


Problema 6.13

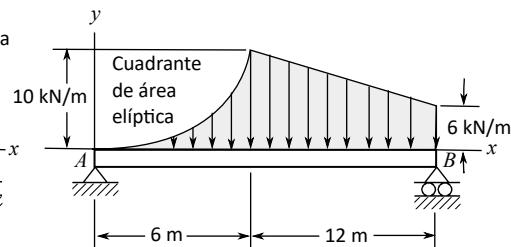


Problema 6.14

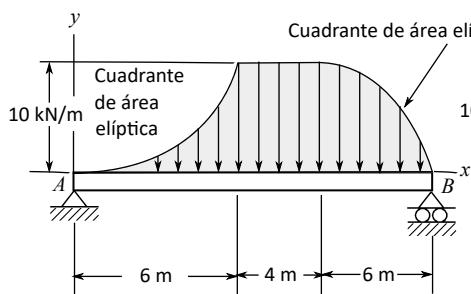
**Problemas 6.15, 6.16, 6.17 y 6.18.** Las vigas mostradas en las figuras se encuentran sometidas a las cargas distribuidas indicadas. Calcular, para cada una de ellas, las reacciones en los puntos de apoyo  $A$  y  $B$ .



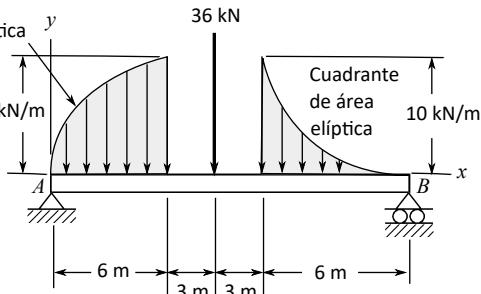
Problema 6.15



Problema 6.16

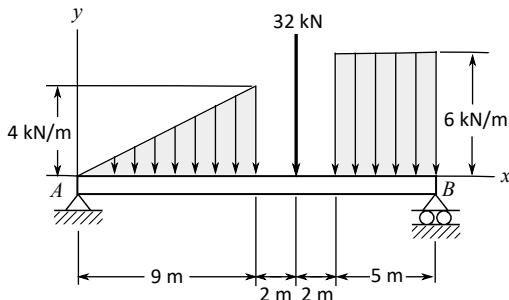


Problema 6.17

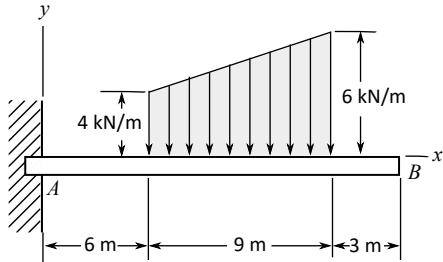


Problema 6.18

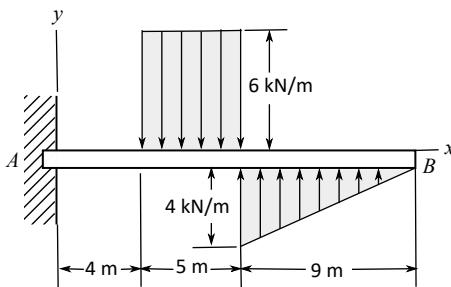
*Problemas 6.19, 6.20, 6.21 y 6.22.* Para cada una de las vigas con las cargas distribuidas indicadas en las figuras, hallar la reacción en el punto de empotramiento A.



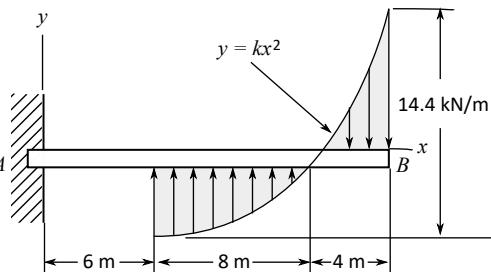
Problema 6.19



Problema 6.20



Problema 6.21



Problema 6.22