

# 3

## Sistemas equivalentes de fuerzas

### Objetivos del capítulo

- Convertir sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido en sistemas equivalentes.
- Estudiar las herramientas del álgebra vectorial: producto vectorial y producto escalar.
- Determinar el momento de una fuerza con respecto a un punto y con respecto a un eje, y el momento de un par.
- Convertir una o varias fuerzas en un sistema fuerza-par equivalente.
- Analizar sistemas equivalentes de fuerzas en el plano, de fuerzas paralelas en el espacio y, en general, de fuerzas en el espacio.

### 3.1 Introducción

**E**n estática es habitual tratar con cuerpos o partículas sobre los cuales se aplican varias fuerzas, a las que se les da el nombre de sistema de fuerzas. Por conveniencia, es costumbre convertir los sistemas de fuerzas en conjuntos más simplificados, denominados *sistemas equivalentes*, con la condición de que produzcan los mismos efectos que las fuerzas originales actuando en común.

En la primera parte del capítulo anterior se trató acerca de reemplazar un sistema de fuerzas concurrentes en una partícula por una sola resultante, cuya acción causada sea la misma que la de las fuerzas iniciales en su conjunto. Dicha resultante es de hecho una fuerza equivalente y su efecto sobre la partícula, consistente en acción de traslación, es el mismo que el de la suma de las acciones de traslación debidas a las fuerzas originales.

El objetivo del presente capítulo es hallar sistemas equivalentes que actúan no sobre una partícula, sino en un cuerpo rígido, el cual por definición está compuesto por un sin-número de partículas separadas entre sí por distancias que permanecen fijas, aun bajo la acción de fuerzas.

El hecho de que en un cuerpo rígido ya no se encuentran las fuerzas aplicadas en un solo punto, como ocurre en el caso de una partícula, sino separadas a determinadas distancias da lugar a que se produzcan efectos de rotación sobre el cuerpo, debidos a los momentos de las fuerzas, además de las consecuentes acciones de traslación. Esto significa que para el análisis de fuerzas equivalentes en un cuerpo rígido se deben tener en cuenta tanto los efectos de traslación como los de rotación, generados por los momentos de las fuerzas.

### 3.2 Producto vectorial de dos vectores

Antes de abordar los temas de momento de una fuerza con respecto a un punto y con respecto a un eje, los cuales serán tratados más adelante en este capítulo, es necesario aprender primero acerca de dos herramientas proporcionadas por el álgebra vectorial: el producto vectorial y el producto escalar, contemplados a continuación.

El *producto vectorial de dos vectores*  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  se define como el vector  $\vec{C}$  cuya línea de acción es perpendicular al plano formado por  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ ; su sentido está determinado por la regla de la mano derecha y su magnitud  $C$  es igual al producto de las magnitudes de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  por el seno del ángulo  $\theta$  entre ellos, como se indica en la figura 3.1(a), o sea:

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \quad (3.1)$$

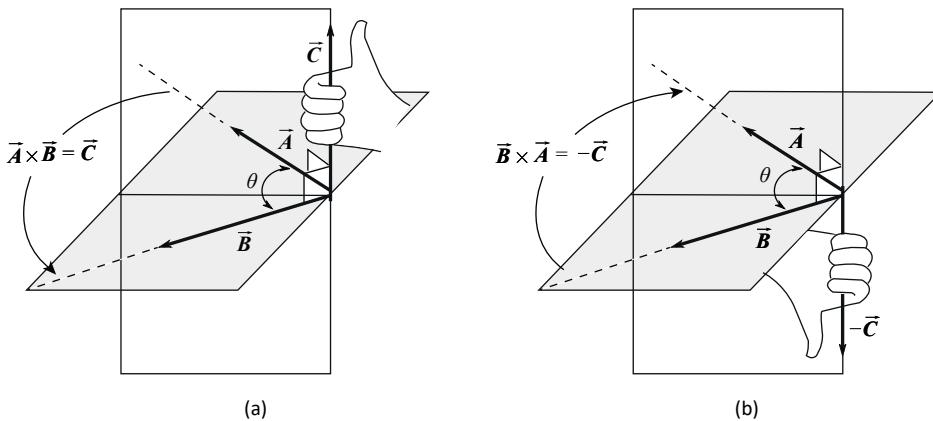


Figura 3.1

El producto vectorial, denominado también producto cruz, se designa por una cruz en medio de los dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , así:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad (3.2)$$

Al aplicar la regla de la mano derecha para efectuar el producto vectorial  $\vec{A} \times \vec{B}$ , es necesario inicialmente abrirla con el dedo pulgar en dirección perpendicular al plano donde se encuentran  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , y al cerrarla, describir con los dedos restantes el movimiento que se obtiene al plegar  $\vec{A}$  sobre  $\vec{B}$ , entonces el sentido de  $\vec{C}$  estará indicado por el mencionado dedo pulgar, como lo muestra la figura 3.1(a).

Nótese que al efectuar el producto vectorial de  $\vec{B} \times \vec{A}$ , como se indica en la figura 3.1(b), se obtiene un vector de la misma dirección perpendicular al plano donde se encuentran  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , con la diferencia de que al aplicar la regla de la mano derecha es necesario al abrirla colocar el pulgar hacia abajo, para que al cerrarla se pueda obtener con los otros cuatro dedos el movimiento de doblar  $\vec{B}$  sobre  $\vec{A}$ , dando como resultado un vector  $-\vec{C}$ , de la misma magnitud y la misma dirección de  $\vec{C}$ , aunque de sentido contrario, expresado así:

$$-\vec{C} = \vec{B} \times \vec{A} \quad (3.3)$$

### 3.3 Propiedades del producto vectorial

Al comparar las relaciones 3.2 y 3.3 se observa que el producto vectorial no es commutativo, puesto que  $\vec{A} \times \vec{B}$  es diferente de  $\vec{B} \times \vec{A}$ , siendo:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (3.4)$$

En lo referente a la propiedad distributiva de la suma, se puede afirmar que se cumple, teniendo en cuenta que la siguiente ecuación es demostrable:

$$\vec{A} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \vec{A} \times \vec{B}_1 + \vec{A} \times \vec{B}_2 \quad (3.5)$$

### 3.4 Producto vectorial de los vectores unitarios

Al asignar los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, el producto vectorial para cada par de ellos, mostrados en la figura 3.2, está dado por:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad (3.6b)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \quad (3.6c)$$

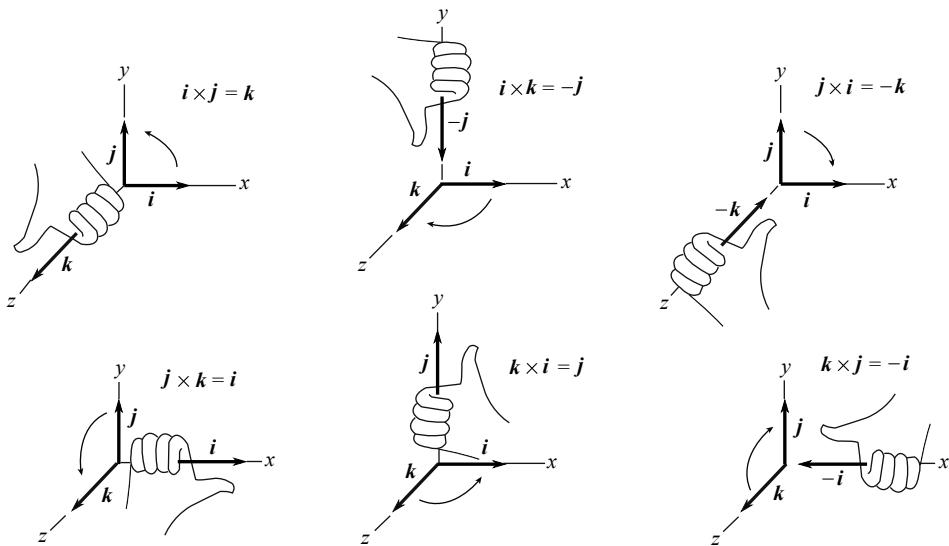


Figura 3.2

Es de notar que el producto vectorial de los vectores iguales:  $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{j}$  y  $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ , es igual a cero, puesto que al sustituir valores en la relación 3.1, la magnitud está dada por  $1 \times 1 \sin 0^\circ = 0$ .

### 3.5 Representación cartesiana del producto vectorial

Al expresar los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  en forma de componentes rectangulares según los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , se tiene:

$$\vec{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\vec{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

El producto vectorial  $\vec{A} \times \vec{B}$  está dado por:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$

Al aplicar la propiedad distributiva y factorizar:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= A_x \mathbf{i} \times B_x \mathbf{i} + A_x \mathbf{i} \times B_y \mathbf{j} + A_x \mathbf{i} \times B_z \mathbf{k} \\ &\quad + A_y \mathbf{j} \times B_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} \times B_y \mathbf{j} + A_y \mathbf{j} \times B_z \mathbf{k} \\ &\quad + A_z \mathbf{k} \times B_x \mathbf{i} + A_z \mathbf{k} \times B_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \times B_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

Al reemplazar los resultados de los productos entre los vectores unitarios de acuerdo con las relaciones 3.6 y agrupar:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}$$

O sea que las respectivas componentes escalares de  $\vec{C}$  están dadas por:

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y \quad (3.7a)$$

$$C_y = A_z B_x - A_x B_z \quad (3.7b)$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (3.7c)$$

Por lo tanto, al ser expresado en forma de determinantes, se tiene:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

### 3.6 Interpretación geométrica del producto vectorial

De acuerdo con la relación 3.1, la magnitud  $C$ , del vector  $\vec{C}$  como resultado del producto vectorial de  $\vec{A} \times \vec{B}$ , está dada por:

$$C = AB \sin \theta$$

Siendo  $A$  y  $B$  las respectivas magnitudes de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  y  $\theta$  el ángulo entre ellos.

Teniendo en cuenta las figuras 3.3(a) y 3.3(b), se observa que el área del paralelogramo formado con los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  como lados es igual a:

$$\text{Área} = A (B \sin \theta) \text{ o } \text{Área} = B (A \sin \theta)$$

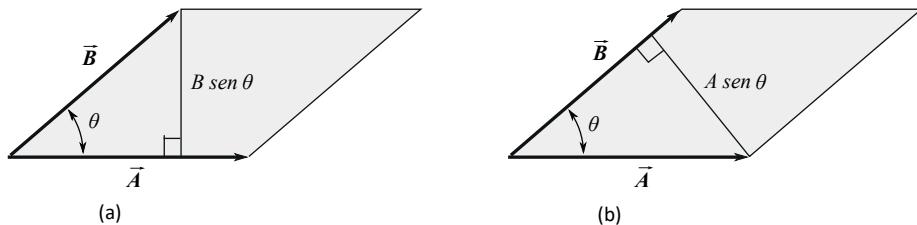


Figura 3.3

Resultado que concuerda con la relación 3.1; por lo tanto, se puede afirmar que la magnitud  $C$ , del vector  $\vec{C}$ , correspondiente al producto vectorial de  $\vec{A} \times \vec{B}$ , es igual al área del paralelogramo formado con los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  como lados.

### 3.6.1 Ejemplo 3.1

En relación con el sólido mostrado en la figura 3.4, hallar: a) el área del paralelogramo formado con los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$  como lados y b) la distancia perpendicular  $CD$  desde el punto  $C$  hasta la línea de acción del vector  $\vec{AB}$ .

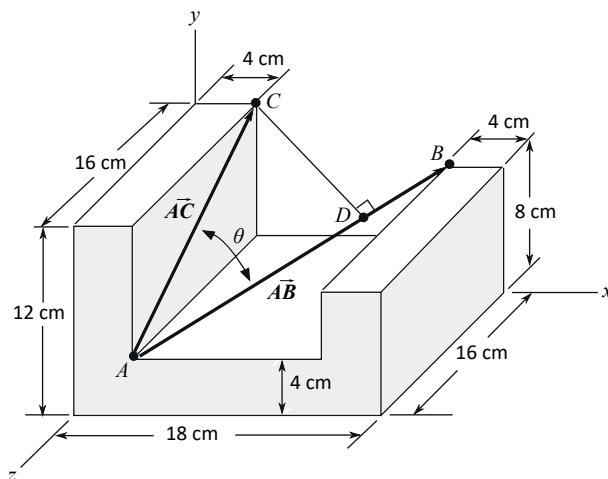


Figura 3.4

#### Solución

Los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$  con sus respectivas magnitudes están dados por:

$$\vec{AB} = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \text{ [cm]} \quad AB = \sqrt{10^2 + 4^2 + 16^2} \text{ [cm]} = 19.28 \text{ cm}$$

$$\vec{AC} = 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \text{ [cm]} \quad AC = \sqrt{8^2 + 16^2} \text{ [cm]} = 17.88 \text{ cm}$$

El vector  $\vec{V}$  como resultado del producto  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$  está dado por:

$$\vec{V} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10 & 4 & -16 \\ 0 & 8 & -16 \end{bmatrix} [\text{cm}^2] = 64\mathbf{i} + 160\mathbf{j} + 80\mathbf{k} [\text{cm}^2]$$

El área del paralelogramo formado por los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$  como lados es igual a la magnitud  $V$  del vector  $\vec{V}$ , así:

$$\text{Área} = V = \sqrt{64^2 + 160^2 + 80^2} [\text{cm}^2] = \mathbf{190 \text{ cm}^2}$$

Y la distancia  $CD$  desde el punto  $C$  hasta la línea de acción del vector  $\vec{AB}$ , como se aprecia en la figura 3.4, es:

$$CD = AC \operatorname{sen} \theta = V/AB = 190 \text{ cm}^2/19.28 \text{ cm} = \mathbf{9.9 \text{ cm}}$$

### 3.7 Características del momento de una fuerza

Las fuerzas son cantidades vectoriales y como tales poseen punto de aplicación, magnitud, dirección y sentido. Debido a la aplicación de fuerzas en puntos determinados de un cuerpo rígido, surgen otras cantidades derivadas de las primeras, las cuales por sus características deben expresarse también como vectores, siendo por lo tanto cantidades vectoriales. Tal es el caso del efecto de rotación que tiende a producir una fuerza aplicada en un punto determinado de un cuerpo rígido.

Un ejemplo de ello lo constituye el mecanismo ilustrado en la figura 3.5, utilizado para levantar un peso  $\vec{W}$  mediante el arrollamiento de una cuerda en un cilindro que gira alrededor de un eje  $EE'$ . Dicho movimiento es causado por una fuerza  $\vec{F}$  aplicada en un punto  $A$ , separado por una distancia  $d$  de un punto  $O$  localizado sobre el eje  $EE'$ , como se indica, denominado momento con respecto al punto  $O$ , representado por el vector  $\vec{M}_o$ , cuya magnitud  $M_o$  está dada por el producto de la magnitud  $F$  de la fuerza por la distancia  $d$ , o sea  $M_o = Fd$ .

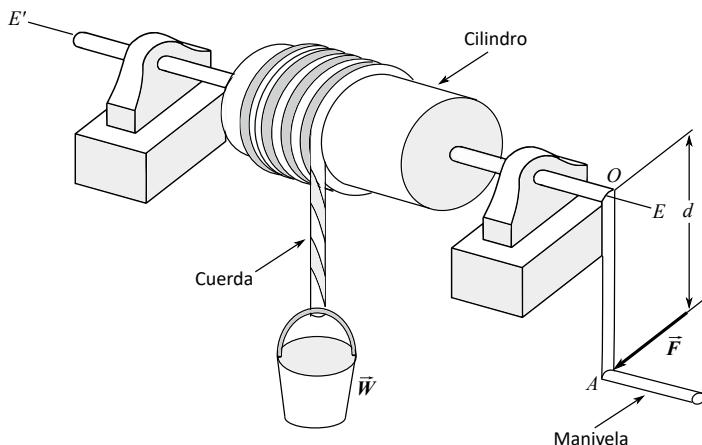


Figura 3.5

El momento causado es una cantidad vectorial puesto que además de tener magnitud se caracteriza por poseer también dirección y sentido. Mientras que la dirección está indicada por el eje de rotación  $EE'$ , el sentido se determina al aplicar la regla de la mano derecha, la cual es tomada como referencia para definir el sentido de un vector que represente el movimiento de giro de un eje.

Para aplicarla, se coloca inicialmente la mano derecha abierta de tal manera que el dedo pulgar quede alineado con el eje  $EE'$  y, además, que el movimiento de giro del eje se describa al cerrar los dedos restantes, tal como se muestra en la figura 3.6, entonces el pulgar estará señalando el sentido del vector  $\vec{M}_O$  que representa dicho movimiento.

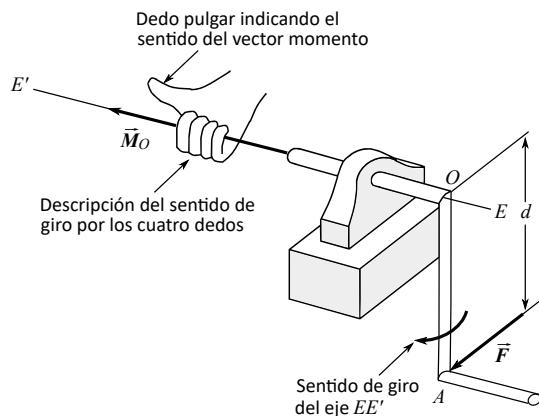


Figura 3.6

Otro ejemplo del momento de una fuerza como una cantidad vectorial se presenta en el conjunto llave tornillo, mostrado en la figura 3.7. La fuerza  $\bar{F}$ , de magnitud  $F$ , aplicada en la llave a una distancia  $d$  del punto  $O$ , tiende a girar el tornillo alrededor del eje  $EE'$ , cuyo movimiento es usado para apretarlo o soltarlo. La magnitud de tal acción está dada por  $M_O = Fd$ , la dirección está indicada por el eje  $EE'$  y el sentido del vector resultante  $\vec{M}_O$  está definido al aplicar la regla de la mano derecha, tal como lo indica la figura 3.7.

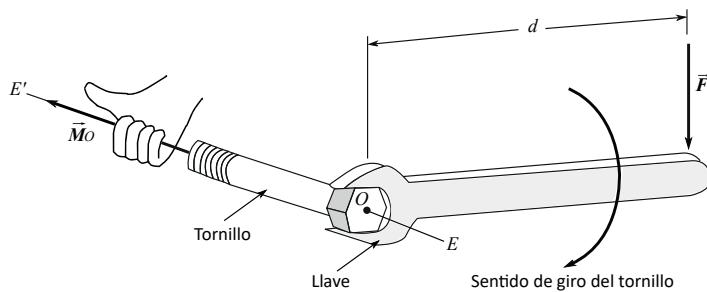


Figura 3.7

### 3.8 Momento de una fuerza con respecto a un punto

Considere una fuerza  $\vec{F}$  que actúa en el punto  $A$  de un cuerpo rígido y sea  $O$  un punto de referencia en el cuerpo, como se indica en la figura 3.8(a). La posición del punto  $A$  está definida por el vector  $\vec{r}$  desde el punto  $O$  hasta el punto  $A$ , denominado vector de posición de  $A$  con respecto a  $O$ .

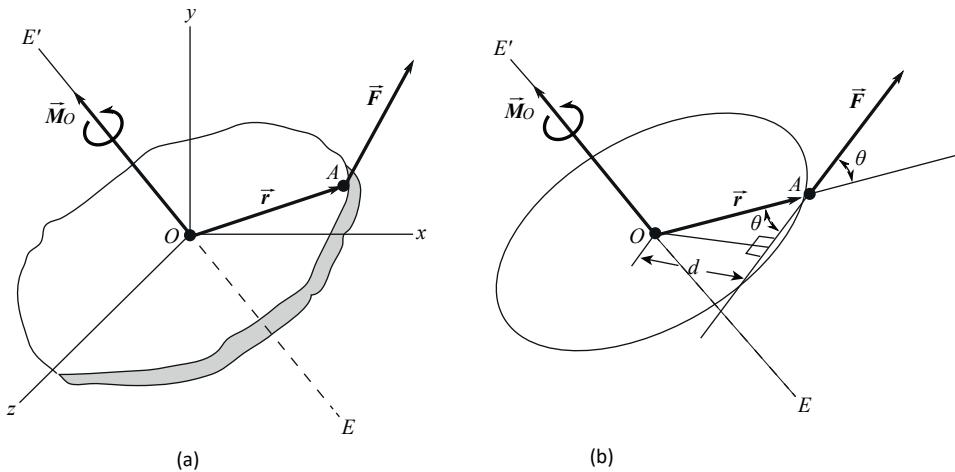


Figura 3.8

La fuerza  $\vec{F}$  aplicada en el punto  $A$  tiende a producir un movimiento de rotación del cuerpo alrededor del eje  $EE'$ , siendo este un eje que pasa por  $O$  y es perpendicular al plano donde se encuentran  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ . Tal efecto se representa mediante el vector  $\vec{M}_o$ , denominado *momento de la fuerza con respecto al punto O*, cuya dirección coincide con dicho eje  $EE'$ .

Por las anteriores razones, el momento  $\vec{M}_o$  de la fuerza  $\vec{F}$  aplicada en  $A$ , con respecto al punto  $O$ , se define como el producto vectorial de  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ , así:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.9)$$

Resultando de acuerdo con la definición un vector  $\vec{M}_o$  cuya dirección es perpendicular al plano donde se encuentran  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ , de sentido tal que cumple con la regla de la mano derecha y su magnitud está dada por:

$$M_o = rF \sin \theta = Fd \quad (3.10)$$

Siendo  $d = rF \sin \theta$  la distancia perpendicular desde el punto  $O$  hasta la línea de acción de la fuerza  $\vec{F}$ , como se muestra en la figura 3.8(b).

El plano formado por los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ , el cual como ya hemos visto es perpendicular al vector del momento  $\vec{M}_o$ , se denomina *plano de acción de la fuerza*  $\vec{F}$  y se puede definir como aquel que existe entre la línea de acción de fuerza  $\vec{F}$  y el punto  $O$ , donde corta al eje de giro del cuerpo  $EE'$  o línea de acción del momento  $\vec{M}_o$ , siendo perpendiculares entre sí, como se aprecia en la figura 3.8(b).

### 3.9 Representación cartesiana del momento de una fuerza

Considere una fuerza  $\vec{F}$  aplicada en el punto  $A$ , cuyo vector de posición es  $\vec{r}$  con respecto al origen  $O$ , como se indica en la figura 3.9. Al expresar ambos vectores en forma de componentes rectangulares, según los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , se tiene:

$$\vec{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad \vec{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

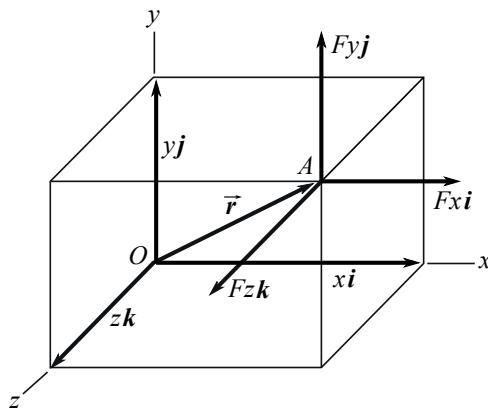


Figura 3.9

Teniendo en cuenta la expresión 3.9 y reemplazando valores, resulta:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \times (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k})$$

Al definir  $\vec{M}_o$  en forma de componentes rectangulares, se da:

$$\vec{M}_o = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} \quad (3.11)$$

Tomando los resultados de la expresión 3.7 para hallar las componentes rectangulares del producto vectorial y al sustituir valores correspondientes, se obtiene:

$$M_x = yF_z - zF_y \quad (3.12)a$$

$$M_y = zF_x - xF_z \quad (3.12)b$$

$$M_z = xF_y - yF_x \quad (3.12)c$$

En donde  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$  constituyen las componentes escalares del momento  $\vec{M}_O$  de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto  $O$ , las cuales representan la tendencia de la fuerza  $\vec{F}$  a imprimir un movimiento de rotación alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Por lo tanto, en forma de determinantes, se expresa así:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.9.1 Ejemplo 3.2

Una tubería  $OABC$ , empotrada en el punto  $O$ , es sostenida al aplicarle una fuerza  $\vec{F}$  de magnitud 180 N en el punto  $C$  mediante una cadena  $CD$ , como se indica en la figura 3.10. Hallar el momento  $\vec{M}_O$  de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto  $O$ : a) vectorialmente, por la aplicación directa de la relación 3.9, y b) en forma escalar, mediante las componentes según los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

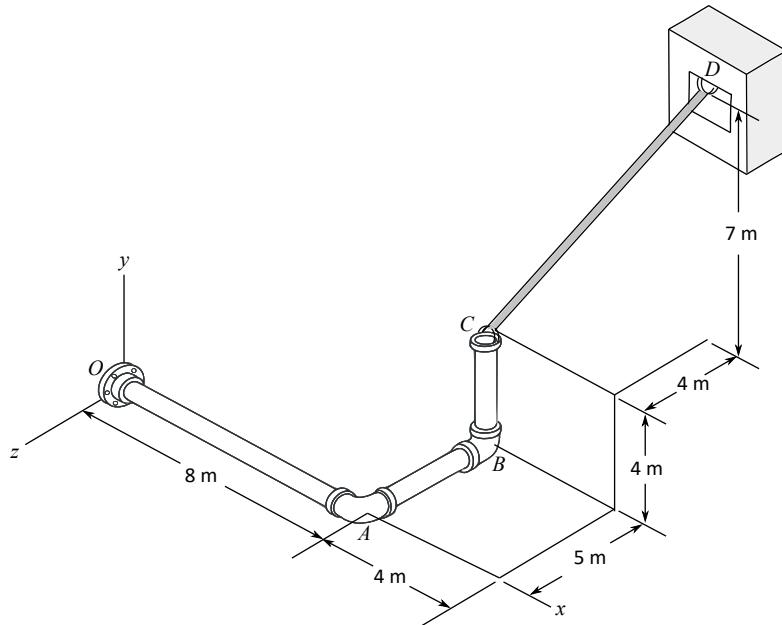


Figura 3.10

Solución (a)

El momento  $\vec{M}_O$  de una fuerza  $\vec{F}$  aplicada en  $C$ , con respecto al punto  $O$ , se define como el producto vectorial de  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ , de acuerdo con la expresión 3.9, así:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1)$$

Se asignan los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ , como se muestra en la figura 3.11, siendo  $\vec{r}$  el vector de posición del punto  $C$  respecto del punto  $O$  y  $\vec{F}$  la fuerza ejercida por la cadena  $CD$ , por lo que  $\vec{r}$ , expresado en forma de componentes rectangulares, queda así:

$$\vec{r} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \text{ [m]}$$

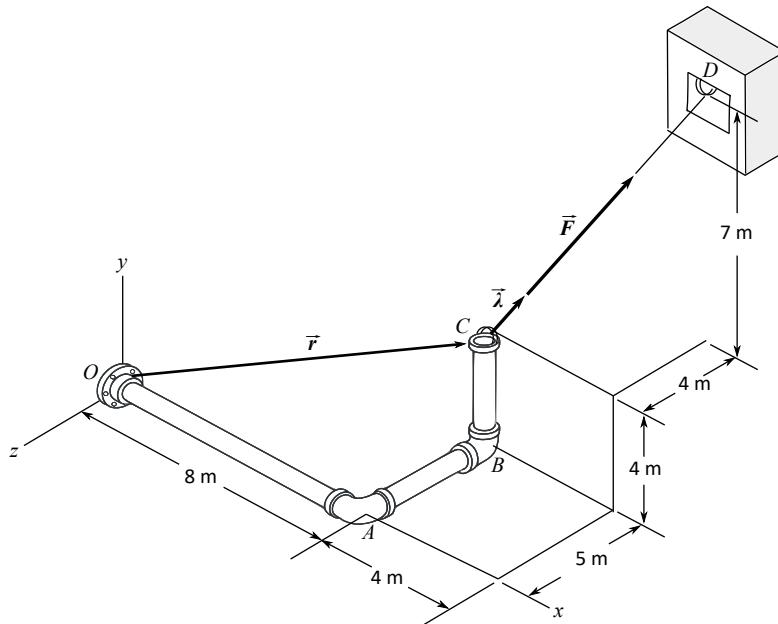


Figura 3.11

Teniendo en cuenta la relación 2.32, la fuerza  $\vec{F}$  se expresa en términos de su magnitud  $F$  y un vector unitario  $\vec{\lambda}$ , así:

$$\vec{F} = \vec{\lambda}F \quad (2)$$

De acuerdo con la figura 3.11, el vector unitario  $\vec{\lambda}$  se obtiene así:

$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} = \frac{4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}}{9}$$

Dado que  $F = 180 \text{ N}$ , al reemplazar valores en la ecuación 2:

$$\vec{F} = \left( \frac{4}{9} \mathbf{i} + \frac{7}{9} \mathbf{j} - \frac{4}{9} \mathbf{k} \right) 180 \text{ [N]} = 80\mathbf{i} + 140\mathbf{j} - 80\mathbf{k} \text{ [N]}$$

En la figura 3.12(a) se muestran los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  en forma de componentes. Al resolver  $\vec{M}_O$  en forma de determinantes según la expresión 3.13:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & 4 & -5 \\ 80 & 140 & -80 \end{bmatrix} \text{ [Nm]}$$

$$\vec{M}_O = +380\mathbf{i} + 240\mathbf{j} + 800\mathbf{k} \text{ [Nm]}$$

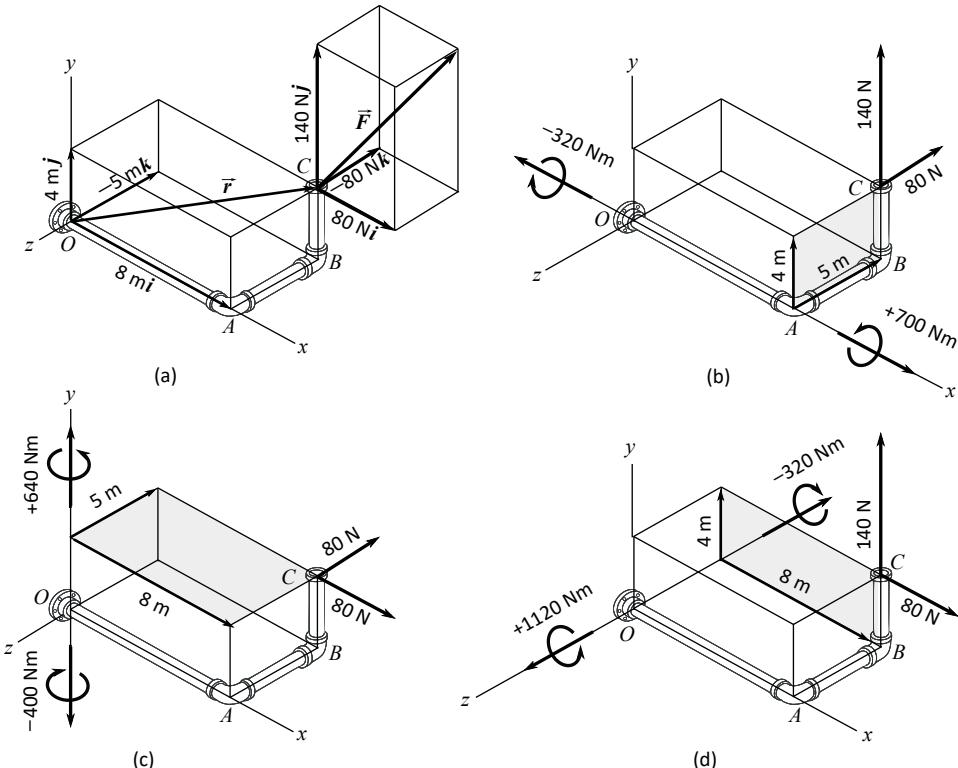


Figura 3.12

### Solución (b)

Al descomponer el momento  $\vec{M}_O$  en forma de componentes rectangulares, según los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , teniendo en cuenta la ecuación 3.11, se tiene:

$$\vec{M}_O = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} \quad (3)$$

En donde  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$  constituyen las componentes escalares del momento  $\vec{M}_O$  de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto  $O$ , las cuales representan la tendencia de la fuerza  $\vec{F}$  a imprimir un movimiento de rotación alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Para hallar la componente escalar  $M_x$  se realiza la sumatoria de momentos alrededor del eje  $x$ , para lo cual se toman las magnitudes de las componentes escalares de  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  en el plano  $yz$ , como se muestra en la figura 3.12(b), siendo:

$$M_x = +(5 \text{ m})(140 \text{ N}) - (4 \text{ m})(80 \text{ N}) = +700 \text{ Nm} - 320 \text{ Nm} = +380 \text{ Nm}$$

Los signos se toman de acuerdo con el sentido de giro causado al aplicar la regla de la mano derecha, como lo indican las flechas curvas, teniendo en cuenta si apuntan hacia el lado positivo o negativo del eje  $x$ , como se muestra en la figura 3.12(b).

Asimismo, para encontrar la componente escalar  $M_y$ , se efectúa la sumatoria con las correspondientes magnitudes de las componentes escalares de  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ , en el plano  $xz$ , como se indica en la figura 3.12(c), en donde:

$$M_y = +(8 \text{ m})(80 \text{ N}) - (5 \text{ m})(80 \text{ N}) = +640 \text{ Nm} - 400 \text{ Nm} = +240 \text{ Nm}$$

Considerando los signos según el sentido de giro y la aplicación de la regla de la mano derecha, como lo indican las flechas curvas, de acuerdo a si señalan hacia el eje positivo o negativo de la  $y$ , como se aprecia en la figura 3.12(c).

Por último, la componente escalar  $M_z$  se obtiene mediante la sumatoria de las correspondientes magnitudes de las componentes escalares de  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ , en el plano  $xy$ , como se indica en la figura 3.12(d), por lo que:

$$M_z = +(8 \text{ m})(140 \text{ N}) - (4 \text{ m})(80 \text{ N}) = +1120 \text{ Nm} - 320 \text{ Nm} = +800 \text{ Nm}$$

Y de forma similar a los anteriores, los signos se toman de acuerdo con el giro causado alrededor del eje  $z$ , como lo ilustran las flechas curvas de la figura 3.12(d). Y para finalizar se sustituyen valores en la relación 3, así:

$$\vec{M}_O = +380\mathbf{i} + 240\mathbf{j} + 800\mathbf{k} [\text{Nm}]$$

### 3.10 Principio de transmisibilidad

El *principio de transmisibilidad* establece que una fuerza  $\vec{F}$  aplicada en un punto  $A$  de un cuerpo rígido, como se ilustra en la figura 3.13, puede ser trasladada a un punto  $B$ , sobre la misma línea de acción, sin afectar el estado de equilibrio de dicho cuerpo. Se dice entonces que la fuerza  $\vec{F}$  que actúa en el punto  $A$  produce el mismo efecto al ser aplicada en el punto  $B$ , siempre que los puntos  $A$  y  $B$  se encuentren sobre la línea de acción de dicha fuerza.

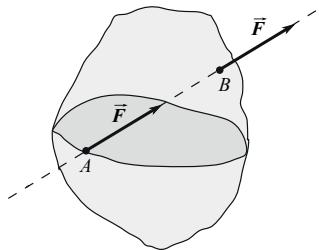


Figura 3.13

### 3.10.1 Ejemplo 3.3

La línea de acción de una fuerza  $\vec{F}$  de magnitud 150 N pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , como se indica en la figura 3.14. Calcular el momento  $\vec{M}_O$  de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto  $O$ : a) tomando como  $\vec{r}$  el vector de posición del punto  $A$  y b) tomando como  $\vec{r}$  el vector de posición del punto  $B$ . Comparar los resultados.

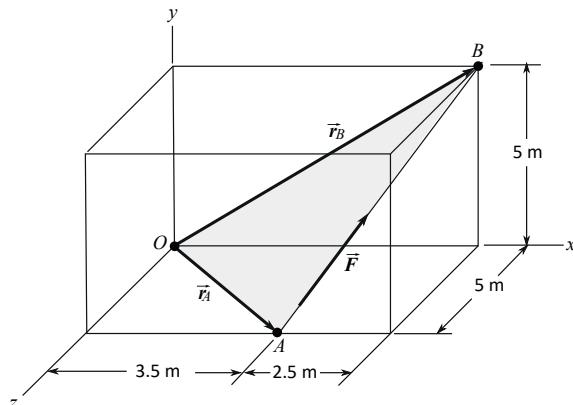


Figura 3.14

#### Solución (a)

Se encuentra el vector de posición del punto  $A$ , el cual está dado por  $\vec{r}_A = 3.5\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$  [m], y se define un vector unitario  $\vec{\lambda}_{AB}$  con los puntos  $A$  y  $B$  por donde pasa la fuerza  $\vec{F}$ , así:

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{2.5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}}{\sqrt{(2.5)^2 + (5)^2 + (5)^2}} = \frac{2.5}{7.5}\mathbf{i} + \frac{5}{7.5}\mathbf{j} - \frac{5}{7.5}\mathbf{k}$$

Se aplica la relación  $\vec{F} = \vec{\lambda}_{AB}F$ , siendo  $F = 150$  N la magnitud de  $\vec{F}$ , así:

$$\vec{F} = \frac{2.5(150)}{7.5} \mathbf{i} + \frac{5(150)}{7.5} \mathbf{j} - \frac{5(150)}{7.5} \mathbf{k} [\text{N}] = 50\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 100\mathbf{k} [\text{N}]$$

Por último, se reemplazan valores en la ecuación de momento  $\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F}$ , realizando el respectivo producto vectorial:

$$\vec{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3.5 & 0 & 5 \\ 50 & 100 & -100 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -500\mathbf{i} + 600\mathbf{j} + 350\mathbf{k} [\text{Nm}]$$

### Solución (b)

El vector de posición correspondiente al punto  $B$  es  $\vec{r}_B = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$  [m], y al reemplazar valores en la ecuación de momento,  $\vec{M}_O = \vec{r}_B \times \vec{F}$ , el resultado es:

$$\vec{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 5 & 0 \\ 50 & 100 & -100 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -500\mathbf{i} + 600\mathbf{j} + 350\mathbf{k} [\text{Nm}]$$

Nótese que el momento  $\vec{M}_O$  es igual si se toma como vector de posición  $\vec{r}_A$  o  $\vec{r}_B$ , o en términos generales, puede ser el de cualquier punto que se encuentre sobre la línea de acción de la fuerza  $\vec{F}$ , dándole a  $\vec{F}$  la propiedad de ser un vector deslizante, lo cual pone de manifiesto el denominado principio de transmisibilidad al no variar el momento de la fuerza sobre el cuerpo rígido.

## 3.11 Principio de los momentos o teorema de Varignon

Considere una fuerza  $\vec{F}$  y sean  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  sus componentes, o sea  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , como se muestra en la figura 3.15, y sea  $\vec{r}$  el vector de posición del punto de aplicación  $A$  de la fuerza con respecto a un punto de referencia  $O$ .

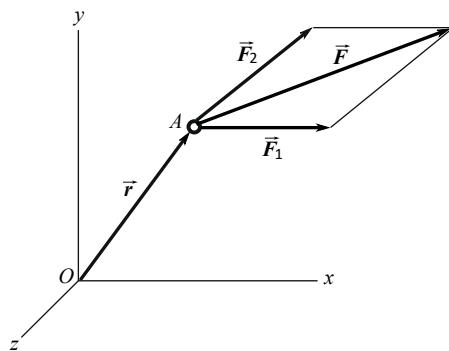


Figura 3.15

El *principio de los momentos*, también denominado teorema de Varignon, establece que el momento de una fuerza  $\vec{F}$  con respecto a un punto  $O$  es igual a la suma de los momentos de las componentes con respecto al mismo punto. De tal manera que en forma vectorial se puede expresar como:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$

El principio de los momentos se deriva de la propiedad distributiva de la suma del producto vectorial, dada mediante la relación 3.5, y es útil para hallar el momento de una fuerza  $\vec{F}$ , cuando resulte más conveniente definir los momentos de las componentes y sumarlas.

### 3.12 Momento de una fuerza en el plano

Considere una fuerza  $\vec{F}$  de magnitud  $F$  que actúa en el punto  $A$  de una placa plana y sea  $\vec{r}$  el vector de posición del punto  $A$  respecto del origen  $O$  de un sistema de coordenadas  $xyz$ , en donde el vector  $\vec{r}$  y la fuerza  $\vec{F}$  están contenidos en el plano  $xy$ , siendo por lo tanto perpendiculares al eje  $z$ , como se indica en la figura 3.16.

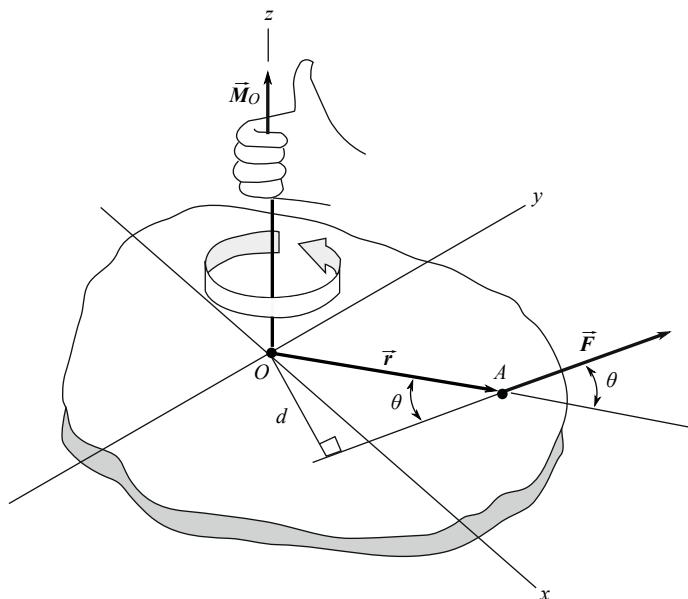


Figura 3.16

Teniendo en cuenta la definición dada en la sección 3.8, la fuerza  $\vec{F}$  tiende a producir un movimiento de rotación de la placa alrededor del eje z, denominado momento de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto  $O$ , designado por  $\vec{M}_O$ , siendo un vector cuya dirección coincide con dicho eje de giro y su sentido se determina al aplicar la regla de la mano derecha, y el cual, conforme a la expresión 3.9, resulta:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

De acuerdo con la relación 3.10, la magnitud  $M_O$  del momento está dada por  $M_O = rF \sin \theta = Fd$ , siendo  $d = r \sin \theta$  la distancia perpendicular desde el punto  $O$  hasta la línea de acción de la fuerza  $\vec{F}$ , como se indica también en la figura 3.16.

Si se tienen varias fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$ , de magnitudes respectivas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ , en el plano  $xy$ , como se ilustra en la figura 3.17(a), y se cuenta con las correspondientes distancias perpendiculares  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$ , hasta el origen  $O$ , se puede obtener una solución escalar del momento resultante con respecto al punto  $O$  mediante la suma algebraica de los momentos de cada una de las fuerzas, así:

$$\sum M_O = +F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3 \quad (3.14)$$

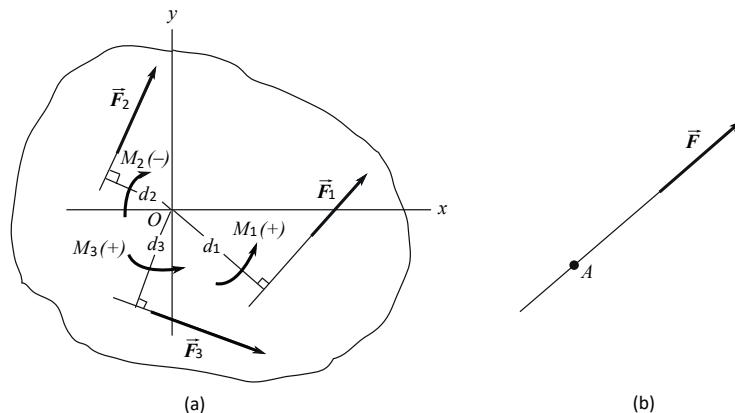


Figura 3.17

Lo anterior se cumple porque al tratarse de fuerzas contenidas en el mismo plano  $xy$ , los momentos con respecto al origen  $O$  son vectores cuyas direcciones coinciden con el eje z, aunque los signos se especifican conforme al sentido de giro, los cuales se determinan al aplicar la regla de la mano derecha.

De tal forma que, de acuerdo con lo mostrado en la figura 3.17(a), para las fuerzas que ocasionen giros antihorarios, como  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_3$ , los vectores de sus momentos estarán señalando hacia afuera del plano  $xy$ , o eje positivo de las z, por lo cual se consideran positivos, mientras que los momentos de las fuerzas que causen giros horarios como  $\vec{F}_2$  se tomarán

como negativos, porque los respectivos vectores de sus momentos estarán dirigidos hacia dentro de dicho plano  $xy$ , o eje negativo de las  $z$ .

Para el caso en que la línea de acción de la fuerza  $\vec{F}$  pase por un punto determinado  $A$ , como el mostrado en la figura 3.17(b), el momento con respecto a dicho punto es igual a cero porque, de acuerdo con la ecuación 3.10, le corresponde una distancia perpendicular  $d$  igual a cero, por tanto:

$$M_A = Fd = F(0) = 0$$

### 3.12.1 Ejemplo 3.4

El mástil  $OA$  de altura 8.66 m es sometido a una fuerza  $\vec{F}$  de magnitud 125 N aplicada en el punto  $B$  mediante una cuerda  $BC$ , la cual forma un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal, como se indica en la figura 3.18. Hallar el momento de la fuerza con respecto al punto  $O$ .

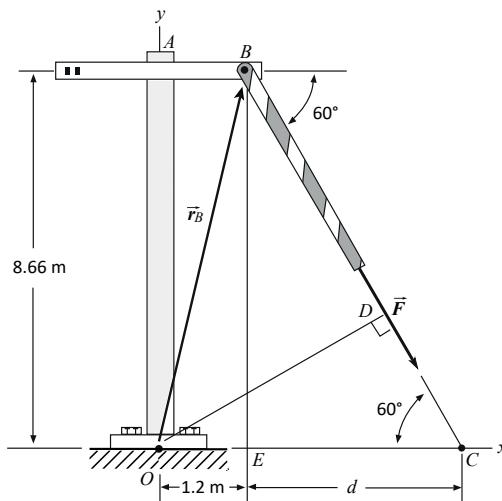


Figura 3.18

#### Solución (a) en forma vectorial

Se define el vector de posición  $\vec{r}_B = 1.2\mathbf{i} + 8.66\mathbf{j}$  [m] y la fuerza  $\vec{F}$  en forma vectorial, como se aprecia en la figura 3.18, así:

$$\vec{F} = 125 \cos 60^\circ \mathbf{i} - 125 \sin 60^\circ \mathbf{j} [\text{N}] = 62.5\mathbf{i} - 108.25\mathbf{j} [\text{N}]$$

Y al sustituir en la ecuación de momento,  $\vec{M}_O = \vec{r}_B \times \vec{F}$ , se obtiene:

$$\vec{M}_o = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1.2 & 8.66 & 0 \\ 62.5 & -108.25 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 0i + 0j + (-129.9 - 541.25)k [\text{Nm}]$$

$$\vec{M}_o = -671.15k [\text{Nm}]$$

Solución (b) en forma escalar

Para obtener una solución escalar es necesario multiplicar la magnitud de 125 N de la fuerza  $\vec{F}$  por la distancia perpendicular  $OD$ , de acuerdo con la figura 3.18. Sin embargo, teniendo en cuenta que en el triángulo rectángulo  $ODC$  se tiene que  $OD = OC \operatorname{sen} 60^\circ = (1.2 \text{ m} + d) \operatorname{sen} 60^\circ$  y con base en el triángulo rectángulo  $BEC$ ,  $d = 8.66 \text{ m} / \tan 60^\circ = 5 \text{ m}$ , al reemplazar resulta  $OD = (1.2 \text{ m} + 5 \text{ m}) \operatorname{sen} 60^\circ = 5.37 \text{ m}$ . Y dado que la fuerza  $\vec{F}$  produce un momento en sentido horario, o sea negativo, su valor se expresa así:

$$M_o = -(125 \text{ N})(OD) = -(125 \text{ N})(5.37 \text{ m}) = -671.25 \text{ Nm} \quad M_o = -671.25 \text{ Nm}$$

Solución (c) en forma escalar, al aplicar el principio de los momentos

Debido a que la línea de acción de la fuerza  $\vec{F}$  pasa por el punto  $C$ , como se indica en la figura 3.19, se puede calcular el respectivo momento en forma escalar, mediante el principio de los momentos o teorema de Varignon, al descomponer la fuerza  $\vec{F}$  según los ejes  $x$  y  $y$ , así:

$$\Sigma M_o = -(125 \text{ N} \operatorname{sen} 60^\circ)(6.2 \text{ m}) + (125 \text{ N} \cos 60^\circ)(0) = -671.15 \text{ Nm} \quad M_o = -671.15 \text{ Nm}$$

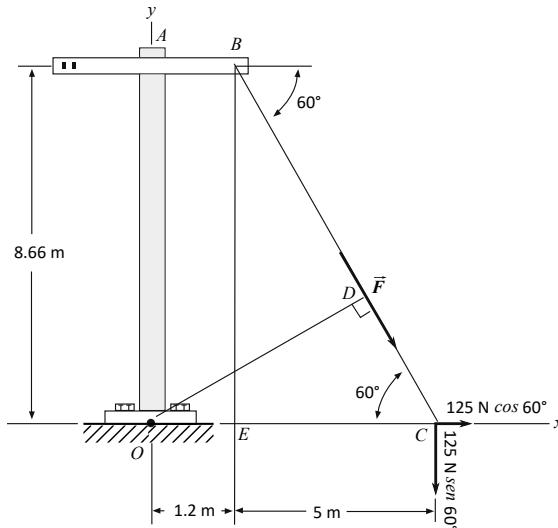


Figura 3.19

Nótese que para obtener la solución vectorial, dada en el numeral (a), se puede utilizar tanto el vector de posición  $\vec{r}_B$  como el de posición  $\vec{r}_C$ ; asimismo, para determinar la solución escalar, mediante el principio de los momentos, correspondiente al numeral (c), se descompone la fuerza  $\vec{F}$ , bien sea en el punto  $C$ , como se realizó, o también en el punto  $B$ , al tener en cuenta que la línea de acción de la fuerza  $\vec{F}$  pasa también por dicho punto, por lo que al aplicar la propiedad de ser un vector deslizante, en relación con el momento con respecto a un punto, dada mediante el principio de transmisibilidad, conduce al mismo resultado, si se calcula al tomar cualquiera de los puntos por donde cruce dicha fuerza.

### 3.13 Producto escalar de dos vectores

El *producto escalar de dos vectores*  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , denominado también producto punto, se define como el producto de las magnitudes de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  por el coseno del ángulo  $\theta$  que existe entre ellos, como se indica en la figura 3.20, el cual se expresa así:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad (3.15)$$

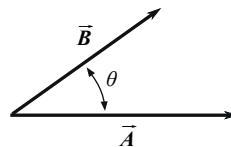


Figura 3.20

De acuerdo con la definición, nótese que el resultado del producto escalar es un escalar y no un vector, como su nombre lo indica, por lo que además puede ser positivo o negativo.

### 3.14 Propiedades del producto escalar

Teniendo en cuenta que las siguientes relaciones son válidas, se afirma que el producto escalar cumple con la propiedad conmutativa, así como con la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \vec{B} \cdot \vec{A} = AB \cos \theta \\ \vec{A} \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) &= \vec{A} \cdot \vec{B}_1 + \vec{A} \cdot \vec{B}_2\end{aligned}$$

### 3.15 Producto escalar de los vectores unitarios

Al establecer los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  según los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, y al aplicar la relación 3.15 sabiendo que  $\cos 90^\circ = 0$  para los productos entre vectores unitarios diferentes y  $\cos 0^\circ = 1$  para los vectores iguales, entonces, el producto escalar de cada dos de ellos está dado por:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.16b)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad (3.16c)$$

### 3.16 Producto escalar en forma de componentes

Al expresar los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  en función de sus componentes rectangulares y realizar el producto escalar  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \\ \vec{B} &= B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x \mathbf{i} \cdot B_x \mathbf{i} + A_x \mathbf{i} \cdot B_y \mathbf{j} + A_x \mathbf{i} \cdot B_z \mathbf{k} \\ &\quad + A_y \mathbf{j} \cdot B_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} \cdot B_y \mathbf{j} + A_y \mathbf{j} \cdot B_z \mathbf{k} \\ &\quad + A_z \mathbf{k} \cdot B_x \mathbf{i} + A_z \mathbf{k} \cdot B_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \cdot B_z \mathbf{k}\end{aligned}$$

Al reemplazar de acuerdo con las relaciones 3.16 y agrupar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

### 3.17 Aplicaciones del producto escalar

El producto escalar tiene las dos siguientes importantes aplicaciones:

1. *Determinar el ángulo entre dos vectores:* dados los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , el ángulo  $\theta$  existente entre ellos se puede encontrar mediante la definición del producto escalar, así:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} \quad \theta = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} \right) \quad (3.17)$$

2. Hallar el valor de la proyección de un vector sobre otro: dados los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , se puede determinar el valor que proyecta  $\vec{B}$  sobre  $\vec{A}$ , denominado también componente escalar de  $\vec{B}$  en la dirección de  $\vec{A}$ , el cual es igual a  $B \cos \theta$ , como se aprecia en la figura 3.21, así:

$$\text{Proy}(\vec{B}/\vec{A}) = B \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A} = \vec{\lambda}_A \cdot \vec{B} \quad (3.18)$$

Siendo  $\vec{\lambda}_A = \vec{A}/A$  el vector unitario en la dirección de  $\vec{A}$ .

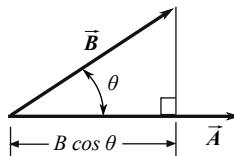


Figura 3.21

### 3.17.1 Ejemplo 3.5

Teniendo en cuenta los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$  de acuerdo con el sólido mostrado en la figura 3.22, hallar: a) el ángulo  $\theta$  entre ellos y b) el valor de la proyección del vector  $\vec{AB}$  sobre el vector  $\vec{AC}$ .

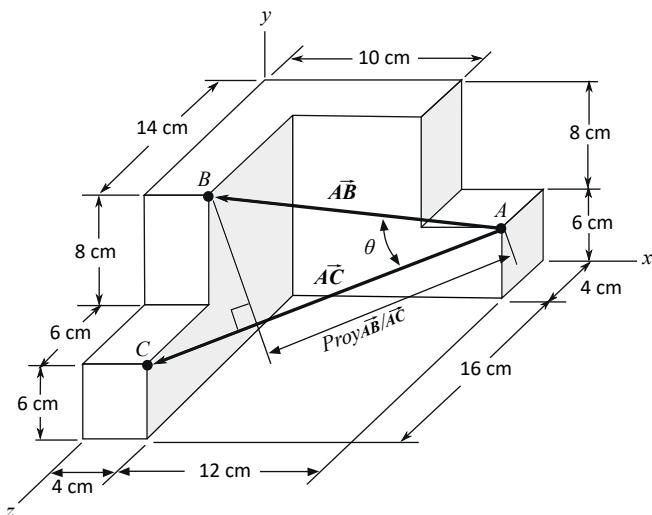


Figura 3.22

Solución (a)

Se expresan inicialmente  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$  en términos de los vectores unitarios  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ , y se realiza el producto escalar, así:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= -12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \text{ [cm]} & \vec{AC} &= -12\mathbf{i} + 16\mathbf{k} \text{ [cm]} \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= ((-12)(-12) + (8)(0) + (10)(16)) \text{ cm}^2 = 304 \text{ cm}^2 \\ AB &= \sqrt{(-12)^2 + 8^2 + 10^2} \text{ cm} = 17.55 \text{ cm} & AC &= \sqrt{(-12)^2 + 16^2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}\end{aligned}$$

Se utiliza la expresión 3.17 para definir el ángulo entre dos vectores y, al reemplazar valores, se tiene:

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{(AB)(AC)} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{304 \text{ cm}^2}{(17.55 \text{ cm})(20 \text{ cm})} \right) = 30^\circ \quad \theta = 30^\circ$$

Solución (b)

Según la expresión 3.18, la proyección del vector  $\vec{AB}$  sobre el vector  $\vec{AC}$  está dada por:

$$\begin{aligned}Proy(\vec{AB}/\vec{AC}) &= \vec{\lambda}_{AC} \cdot \vec{AB} \\ \vec{\lambda}_{AC} &= \frac{\vec{AC}}{AC} = \frac{(-12\mathbf{i} + 16\mathbf{k}) \text{ [cm]}}{20 \text{ cm}} = -0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{k}\end{aligned}\tag{1}$$

Al reemplazar en la ecuación 1:

$$Proy(\vec{AB}/\vec{AC}) = ((-12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) \text{ [cm]}) \cdot (-0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{k}) = 15.2 \text{ cm} \quad Proy(\vec{AB}/\vec{AC}) = 15.2 \text{ cm}$$

### 3.18 Momento de una fuerza con respecto a un eje dado

Se ha visto, en la sección 3.8, que una fuerza  $\vec{F}$  aplicada en un punto  $A$  de un cuerpo rígido tiende a producir una rotación del cuerpo alrededor de un eje  $EE'$ , el cual es perpendicular al plano formado por la fuerza  $\vec{F}$  y un vector  $\vec{r}$ , siendo  $\vec{r}$  el vector de posición del punto  $A$  con respecto a un punto  $O$ , localizado sobre dicho eje  $EE'$ .

Tal efecto se representa por el vector  $\vec{M}_O$ , expresado por  $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ , cuyo sentido es tal que cumple con la regla de la mano derecha y su dirección coincide con el mencionado eje  $EE'$ , como se observa en la figura 3.23.

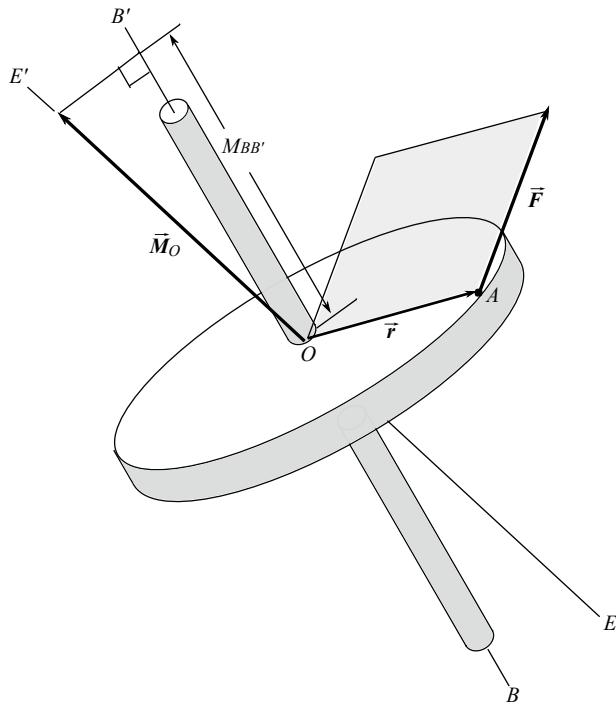


Figura 3.23

Cuando la dirección del eje de rotación natural  $BB'$  del cuerpo no coincide con el eje de rotación  $EE'$  causado por el momento  $\vec{M}_o$ , como se ilustra en la figura 3.23, entonces es necesario medir el efecto que produce la fuerza  $\vec{F}$  alrededor del eje  $BB'$  del cuerpo. Tal acción corresponde al momento de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al eje dado  $BB'$ , o sea el valor de la componente de  $\vec{M}_o$  en la dirección del eje de giro  $BB'$  del cuerpo. De acuerdo con la ecuación 3.18, dicha magnitud se encuentra mediante el producto escalar del vector unitario  $\vec{\lambda}_{BB'}$  en la dirección del eje  $BB'$  por el vector del momento  $\vec{M}_o$ , así:

$$M_{BB'} = \vec{\lambda}_{BB'} \cdot \vec{M}_o = \vec{\lambda}_{BB'} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (3.19)$$

Por ser  $M_{BB'}$  un escalar, puede ser positivo o negativo. Al obtenerse un valor negativo, como resultado de la aplicación de la relación 3.19, es solo indicativo de que el sentido escogido para el vector  $\vec{\lambda}_{BB'}$  es opuesto al requerido.

### 3.18.1 Ejemplo 3.6

Una fuerza  $\vec{F}$  de magnitud 270 N es aplicada al punto  $C$  de coordenadas (8, 16, 8) [m], perteneciente a una rueda cuyo eje de giro pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , como se muestra en la figura 3.24. Determinar el momento de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al eje  $AB$ .

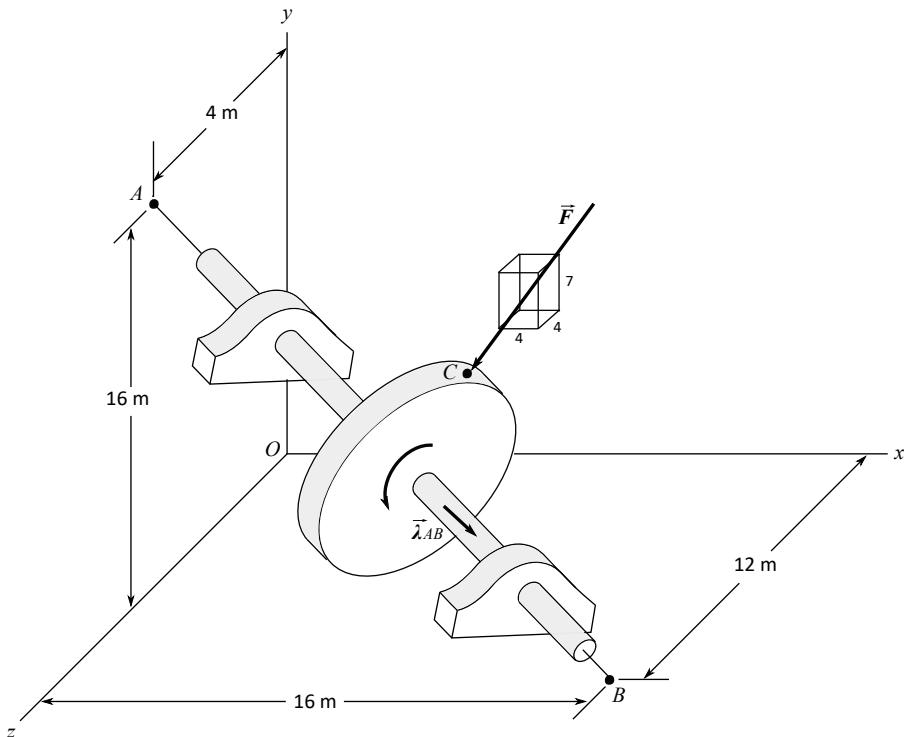


Figura 3.24

#### Solución

En forma general, el procedimiento para determinar el momento de una fuerza  $\vec{F}$  con respecto a un eje dado  $AB$  consiste en definir primero el momento de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto a un punto cualquiera  $A$  o  $B$  del eje, y aplicar después la ecuación 3.18, así:

$$M_{AB} = \vec{\lambda}_{AB} \cdot \vec{M}_A = \vec{\lambda}_{AB} \cdot \vec{M}_B \quad (1)$$

Para calcular el momento de una fuerza con respecto a un punto  $A$  o  $B$ , se utiliza la ecuación 3.9, dada por:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F} \quad \vec{M}_B = \vec{r}_{BC} \times \vec{F} \quad (2)$$

Con base en la figura 3.24, se definen las coordenadas de  $A$  (0, 16, 4) [m] y  $B$  (16, 0, 12) [m], y dadas las coordenadas del punto  $C$  como (8, 16, 8) [m], se determinan:

$$\vec{r}_{AC} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{k} \text{ [m]} \quad \vec{r}_{BC} = -8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \text{ [m]}$$

La fuerza  $\vec{F}$  se expresa en términos de su magnitud  $F$  y un vector unitario  $\vec{\lambda}$ , en la dirección de  $\vec{F}$ , al aplicar la relación 2.32, así:

$$\vec{F} = \vec{\lambda}F \quad (3)$$

La magnitud de  $\vec{F}$  está dada por  $F = 270$  N y el vector  $\vec{\lambda}$  se obtiene del pequeño paralelepípedo mostrado en la figura 3.24, para indicar la dirección de  $\vec{F}$ , o sea:

$$\vec{\lambda} = \frac{-4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{-4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{9}$$

Al sustituir valores en la ecuación 3 y después en la 2, se da:

$$\vec{F} = -120\mathbf{i} - 210\mathbf{j} + 120\mathbf{k} \text{ [N]}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & 0 & 4 \\ -120 & -210 & 120 \end{bmatrix} \text{ [Nm]} = 840\mathbf{i} - 1440\mathbf{j} - 1680\mathbf{k} \text{ [Nm]}$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BC} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -8 & 16 & -4 \\ -120 & -210 & 120 \end{bmatrix} \text{ [Nm]} = 1080\mathbf{i} + 1440\mathbf{j} + 3600\mathbf{k} \text{ [Nm]}$$

Con las coordenadas de los puntos  $A$  y  $B$ , se halla:

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{16\mathbf{i} - 16\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{16^2 + 16^2 + 8^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

Entonces, al reemplazar en la ecuación 1, se tiene:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \vec{\lambda}_{AB} \cdot \vec{M}_A = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}\right) \cdot (840\mathbf{i} - 1440\mathbf{j} - 1680\mathbf{k}) \text{ [Nm]} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)(840) + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1440) + \left(\frac{1}{3}\right)(-1680) \text{ [Nm]} = 960 \text{ Nm} \quad M_{AB} = 960 \text{ Nm} \\ M_{AB} &= \vec{\lambda}_{AB} \cdot \vec{M}_B = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}\right) \cdot (1080\mathbf{i} + 1440\mathbf{j} + 3600\mathbf{k}) \text{ [Nm]} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)(1080) + \left(-\frac{2}{3}\right)(1440) + \left(\frac{1}{3}\right)(3600) \text{ [Nm]} = 960 \text{ Nm} \quad M_{AB} = 960 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Dado que el resultado es el mismo, para ambos casos, se observa que al aplicar la ecuación 1 se puede obtener el momento con respecto al eje  $AB$ , al calcular primero el momento con respecto a un punto,  $A$  o  $B$ , o en general con respecto a cualquier punto localizado sobre la línea de acción del eje  $AB$ , y seguidamente multiplicar escalarmente por el vector unitario en la dirección  $AB$ .

Nótese, además, que el momento obtenido fue positivo, lo cual significa que el sentido de giro causado a la rueda corresponde al mismo sentido del vector  $\vec{\lambda}_{AB}$ , como se aprecia en la figura 3.24, de acuerdo con la regla de la mano derecha. En caso de resultar negativo, dicho valor del momento solo indica que el sentido escogido del vector  $\vec{\lambda}_{AB}$  es el invertido.

### 3.19 Momento de un par

Por definición, un par está formado por dos fuerzas  $\vec{F}$  y  $-\vec{F}$  de igual magnitud y sentidos opuestos, cuyas líneas de acción son paralelas y separadas una distancia perpendicular determinada  $d$ , como se ilustra en la figura 3.25.

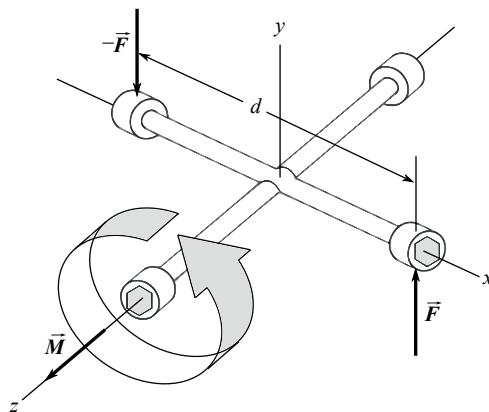


Figura 3.25

El par de fuerzas tiene las siguientes características:

- No produce efecto de traslación alguno, porque la sumatoria de las fuerzas que lo conforman,  $\vec{F}$  y  $-\vec{F}$  con respecto a cualquier punto, da una resultante igual a cero.
- Solamente ocasiona acción de rotación, representado por un vector  $\vec{M}$  denominado momento del par, lo cual tiene importantes aplicaciones prácticas, como en el caso de la llave de cruz mostrada en la figura 3.25, usada para soltar o apretar las tuercas de las ruedas de un vehículo.

El momento  $\vec{M}$  del par se halla al realizar la sumatoria de momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto  $O$ , de acuerdo con la figura 3.26(a), así:

$$\sum \vec{M}_O: \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} - \vec{r}_B \times \vec{F} = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Siendo  $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$  el vector que va desde el punto  $B$  hasta el punto  $A$  y el momento del par está dado por:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.20)$$

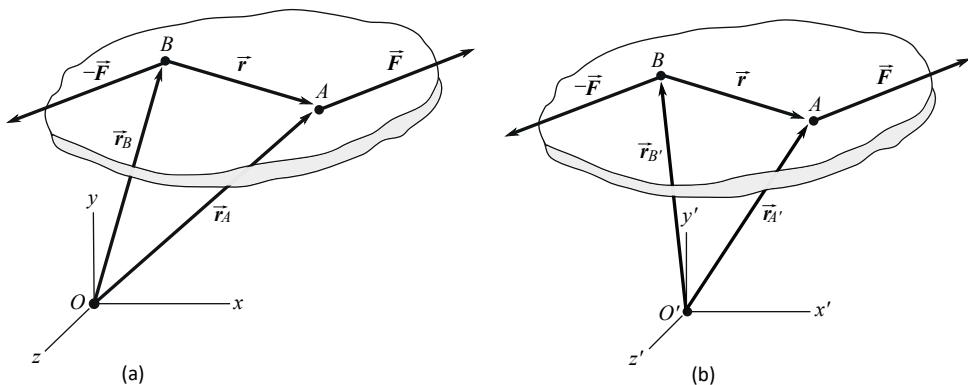


Figura 3.26

Al realizar nuevamente la sumatoria de momentos del par con respecto a un punto de referencia  $O'$  diferente de  $O$ , tal como se muestra en la figura 3.26(b), se obtiene el siguiente resultado:

$$\sum \vec{M}_{O'}: \vec{r}'_A \times \vec{F} + \vec{r}'_B \times (-\vec{F}) = \vec{r}'_A \times \vec{F} - \vec{r}'_B \times \vec{F} = (\vec{r}'_A - \vec{r}'_B) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Siendo  $\vec{r} = \vec{r}'_A - \vec{r}'_B$  el vector que va desde el punto  $B$  hasta el punto  $A$  y el nuevo momento del par está dado por:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.21)$$

Comparando las relaciones 3.20 y 3.21, se observa que el resultado es el mismo independientemente del punto de referencia escogido, por lo tanto, el momento  $\vec{M}$  del par produce el mismo efecto en cualquier punto que se aplique, lo cual significa que es un vector libre.

Por otro lado, y de acuerdo con la definición del momento  $\vec{M}$  del par, su magnitud se puede expresar así:

$$M = rF \sin \theta = Fd \quad (3.22)$$

Siendo  $d$  la distancia entre las líneas de acción de  $\vec{F}$  y  $-\vec{F}$ , conforme a la figura 3.27.

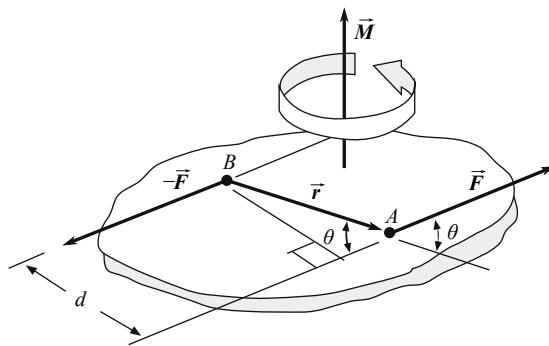


Figura 3.27

Además, el momento  $\vec{M}$  del par, como se indica en la figura 3.27, es un vector que actúa en la dirección perpendicular al plano donde se encuentran  $\vec{F}$  y  $-\vec{F}$ , y su sentido es tal que cumple con la regla de la mano derecha.

### 3.20 Suma de pares

El par puede ser representado por un vector  $\vec{M}$ , correspondiente al momento del par, el cual como ya se ha visto es perpendicular al plano donde se encuentran las fuerzas  $\vec{F}$  y  $-\vec{F}$  que lo originan, de sentido tal que cumple con la regla de la mano derecha; y debido a que es un vector libre, puede ser colocado a partir de un punto común con otro par y ser sumados vectorialmente para hallar un par resultante o equivalente, el cual produce el mismo efecto de rotación que los dos pares aplicados en su conjunto. Tal procedimiento será explicado en el siguiente ejemplo.

#### 3.20.1 Ejemplo 3.7

Hallar el par equivalente a los dos pares aplicados al sólido de la figura 3.28.

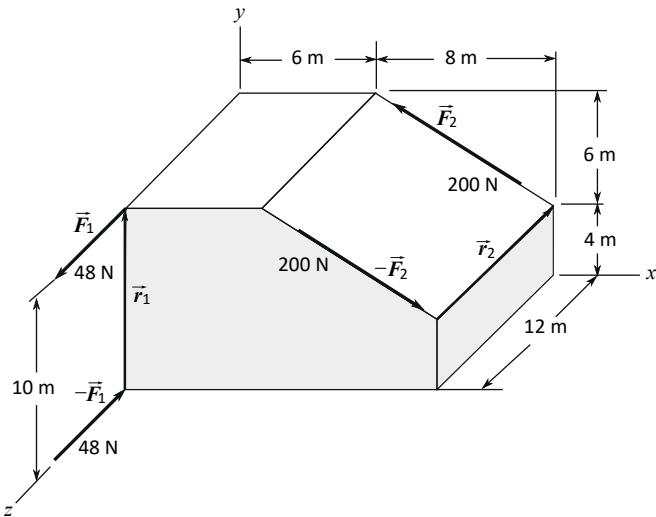


Figura 3.28

Solución

Se designan los momentos de los pares y se aplica la relación 3.20, así:

$$\vec{M}_1 = \text{momento del par de } 48 \text{ N} \quad \vec{M}_2 = \text{momento del par de } 200 \text{ N}$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

El procedimiento para hallar el momento de un par consiste en seleccionar primero una de las dos fuerzas  $\vec{F}$  y escoger después el vector  $\vec{r}$ , que apunte hacia dicha fuerza, para poder calcular  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Por ejemplo, en el caso específico del par de 48 N, si se escoge la fuerza  $\vec{F}_1 = 48 \text{ N} \mathbf{k}$ , dirigida hacia el lado positivo del eje z, como se indica en la figura 3.28, le corresponde  $\vec{r}_1 = 10 \text{ m} \mathbf{j}$ , porque apunta hacia la fuerza escogida, por tanto:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 480i \text{ [Nm]}$$

En cuanto al par de 200 N, se ha elegido  $\vec{F}_2$  orientado hacia el lado positivo del eje y, a la cual le corresponde  $\vec{r}_2 = -12 \text{ m} \mathbf{k}$ , por estar dirigida hacia  $\vec{F}_2$ , como se aprecia en la figura 3.28, siendo:

$$\vec{F}_2 = \lambda_2 F_2 = \left( \frac{-8i + 6j}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \right) (200 \text{ N}) = -160i + 120j \text{ [N]}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -12 \\ -160 & 120 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 1\,440i + 1\,920j [\text{Nm}]$$

Una vez se han determinado los momentos de los pares, en forma vectorial y por el hecho de ser vectores libres, se pueden colocar a partir de un mismo punto para sumarlos y obtener un momento resultante, como se muestra en la figura 3.29(a), en donde se ha escogido un punto común arbitrario  $A$ .

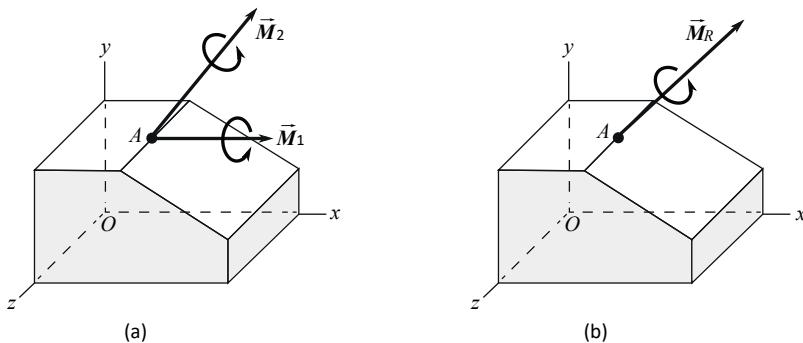


Figura 3.29

El momento del par resultante  $\vec{M}_R$ , o momento del par equivalente, ubicado en el punto  $A$ , como se aprecia en la figura 3.29(b), está dado por:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 1\,920i + 1\,920j [\text{Nm}] \quad \vec{M}_R = 1\,920i + 1\,920j [\text{Nm}]$$

### 3.21 Sistemas equivalentes de fuerzas

Los sistemas aplicados a un cuerpo rígido se caracterizan por su tendencia a producir acciones de traslación, debidas a las fuerzas que intervienen, y también de rotación, ocasionados por los momentos de estas fuerzas, con respecto a un punto determinado. En lo que concierne al equilibrio de un cuerpo rígido, dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienden a producir los mismos efectos de traslación y las mismas acciones de rotación sobre dicho cuerpo.

En forma de ecuaciones, se puede expresar que dos sistemas aplicados a un cuerpo rígido son equivalentes si la sumatoria de las fuerzas y la sumatoria de los momentos con respecto a un punto  $O$  son iguales respectivamente, o sea:

$$(\sum \vec{F})_1 = (\sum \vec{F})_2 \quad (\sum \vec{M}_o)_1 = (\sum \vec{M}_o)_2 \quad (3.23)$$

Se puede demostrar que si dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son equivalentes con respecto a un punto  $O$ , también lo son con respecto a cualquier punto  $O'$ . Expresando la relación 3.23 en términos de sus componentes rectangulares según los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , tenemos:

$$\begin{aligned} (\Sigma F_x)_1 &= (\Sigma F_x)_2 & (\Sigma F_y)_1 &= (\Sigma F_y)_2 & (\Sigma F_z)_1 &= (\Sigma F_z)_2 \\ (\Sigma M_x)_1 &= (\Sigma M_x)_2 & (\Sigma M_y)_1 &= (\Sigma M_y)_2 & (\Sigma M_z)_1 &= (\Sigma M_z)_2 \end{aligned}$$

Lo cual indica que dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienden a producir los mismos efectos de traslación, al comparar componente a componente, y también las mismas acciones de rotación componente a componente, de acuerdo con los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

### 3.21.1 Ejemplo 3.8

Dos fuerzas de 100 N y 150 N son aplicadas a la viga  $OA$  como se indica en la figura 3.30(a): a) hallar la fuerza  $\vec{F}$  y la correspondiente distancia  $x$ , de acuerdo con la figura 3.30(b), para que los dos sistemas sean equivalentes con respecto al punto  $O$ , y b) demostrar que los dos sistemas también son equivalentes con respecto al punto  $A$ .

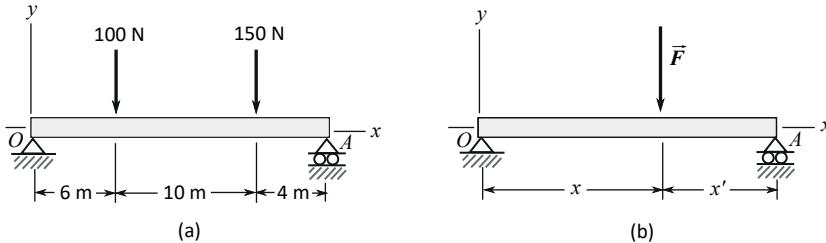


Figura 3.30

#### Solución (a)

Los dos sistemas son equivalentes con respecto al punto  $O$  si y solo si se cumplen las igualdades 3.23 dadas por:

$$(\Sigma \vec{F})_1 = (\Sigma \vec{F})_2 \quad (\Sigma \vec{M}_o)_1 = (\Sigma \vec{M}_o)_2$$

Al igualar las fuerzas en los dos sistemas, se determina la fuerza  $\vec{F}$ , así:

$$-100 \text{ Nj} - 150 \text{ Nj} = -250 \text{ Nj} = \vec{F} \quad \vec{F} = -250 \text{ Nj}$$

Al tomar momentos con respecto al punto  $O$  e igualar:

$$(\sum \vec{M}_o)_1 = -(6 \text{ m})(100 \text{ N})\mathbf{k} - (16 \text{ m})(150 \text{ N})\mathbf{k} = -3000 \text{ Nm}\mathbf{k}$$

$$(\sum \vec{M}_o)_2 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -250 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -250x\mathbf{k} [\text{N}]$$

$$-3000 \text{ Nm} = -250x \text{ N} \quad x = 12 \text{ m}$$

Se concluye que la fuerza de 250 N aplicada a una distancia de 12 m, relativa al punto  $O$ , como se indica en la figura 3.30(b), es equivalente a las dos fuerzas de 100 N y 150 N, actuando a las respectivas distancias de 6 m y 16 m, relativas al mismo punto  $O$ , como se ilustra en la figura 3.30(a).

### Solución (b)

Los dos sistemas son equivalentes con respecto al punto  $A$  si y solo si se cumplen las igualdades 3.23, por tanto:

$$(\sum \vec{F})_1 = (\sum \vec{F})_2 \quad (\sum \vec{M}_A)_1 = (\sum \vec{M}_A)_2$$

Al igualar las fuerzas se calcula que el valor de  $\vec{F}$  es el mismo, o sea:

$$\vec{F} = -250 \text{ Nj}$$

Tomando momentos con respecto al punto  $A$  e igualando:

$$(\sum \vec{M}_A)_1 = +(14 \text{ m})(100 \text{ N})\mathbf{k} + (4 \text{ m})(150 \text{ N})\mathbf{k} = +2000 \text{ Nm}\mathbf{k}$$

$$(\sum \vec{M}_A)_2 = \vec{r}' \times \vec{F} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x' & 0 & 0 \\ 0 & -250 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -250x'\mathbf{k} [\text{Nm}]$$

$$+2000 \text{ Nm} = -250x' \text{ N} \quad x' = -8 \text{ m}$$

El signo negativo de  $x'$ , como se aprecia en la figura 3.30(b), indica que la distancia se encuentra a la izquierda del punto  $A$ , por tanto, se demuestra que la posición de la fuerza  $\vec{F}$  es la misma, independiente del punto de referencia, o sea, los dos sistemas son equivalentes con respecto a  $O$  y también respecto a un punto diferente  $A$ .

## 3.22 Sistema fuerza-par equivalente

Una fuerza  $\vec{F}$  que actúa en un punto  $A$  de un cuerpo rígido, como se indica en la figura 3.31(a), es equivalente a la misma fuerza  $\vec{F}$  aplicada en un punto diferente  $O$ , como se muestra en la figura 3.31(b), si se le adiciona un par de momento  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , siendo  $\vec{r}$  el vector de posición del punto  $A$  respecto del punto  $O$ .

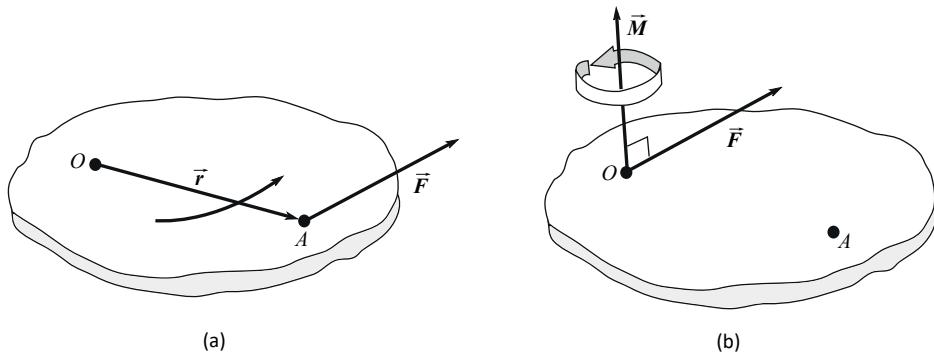


Figura 3.31

Al conjunto así formado en el punto  $O$ , como se aprecia en la figura 3.31(b), compuesto por la fuerza  $\vec{F}$ , que produce el efecto de translación y el par de momento  $\vec{M}$ , que representa la acción de rotación, se le denomina *sistema fuerza-par equivalente*, porque produce los mismos efectos de translación y de rotación que la fuerza original  $\vec{F}$  aplicada en el punto  $A$ , por tanto, no afecta el estado de equilibrio del cuerpo rígido, sobre el cual actúa.

### 3.22.1 Demostración

Se igualan tanto las fuerzas como los momentos, en los puntos  $A$  y  $O$ , de acuerdo con las relaciones 3.23 dadas por:

$$(\sum \vec{F})_1 = (\sum \vec{F})_2 \quad (\sum \vec{M}_o)_1 = (\sum \vec{M}_o)_2$$

En lo referente a las fuerzas se tiene:

$$(\sum \vec{F})_1 = (\sum \vec{F})_2 = \vec{F}$$

Indicando que la acción de traslación es la misma puesto que la fuerza  $\vec{F}$  es igual en ambos casos, como se muestra en las figuras 3.31(a) y 3.31(b). Al tomar momentos e igualar:

$$(\Sigma \vec{M}_o)_1 = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\Sigma \vec{M}_o)_2 = \vec{M} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Dando como resultado que se obtiene el mismo efecto de rotación, al ser iguales el momento  $\vec{M}$  del par y el momento de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto  $O$ , dado por  $\vec{r} \times \vec{F}$ , siendo  $\vec{r}$  el vector de posición del punto  $A$  respecto del punto  $O$ , como se aprecia en la figura 3.31(a).

Como características del sistema fuerza-par equivalente se deben tener en cuenta las siguientes:

- Por ser el momento  $\vec{M}$  del par un vector libre, produce el mismo efecto si se coloca en el punto  $O$ , en el punto  $A$  o en cualquier otro punto del cuerpo.
- Siendo el momento del par  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , resulta ser un vector perpendicular al plano donde se encuentran  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ .

El proceso de transformar una fuerza  $\vec{F}$ , aplicada en un punto  $A$ , como se muestra en la figura 3.31(a), en un sistema fuerza-par equivalente, formado por la misma fuerza  $\vec{F}$  y un par de momento  $\vec{M}$ , que actúa en un punto  $O$ , como se aprecia en la figura 3.31(b), los cuales resultan ser respectivamente perpendiculares, se puede utilizar de manera inversa para convertir un sistema fuerza-par equivalente, aplicado en un punto determinado  $O$ , en una sola fuerza  $\vec{F}$  que actúa en un punto  $A$ , con la condición de que la fuerza  $\vec{F}$  se pueda trasladar en un plano perpendicular al momento  $\vec{M}$ , hasta el punto donde se genere un momento igual al momento  $\vec{M}$  del par, que se desea eliminar —tales procedimientos se estudiarán más adelante en la sección 3.24—.

Con el fin de visualizar de forma práctica el procedimiento de convertir una fuerza  $\vec{F}$  en un sistema fuerza-par equivalente, considere una varilla delgada  $OABC$  en forma de T, de peso despreciable, la cual se puede deslizar sin rozamiento entre dos collarines fijos  $B$  y  $C$ , con un tope en el punto  $D$ , como se indica en la figura 3.32(a).

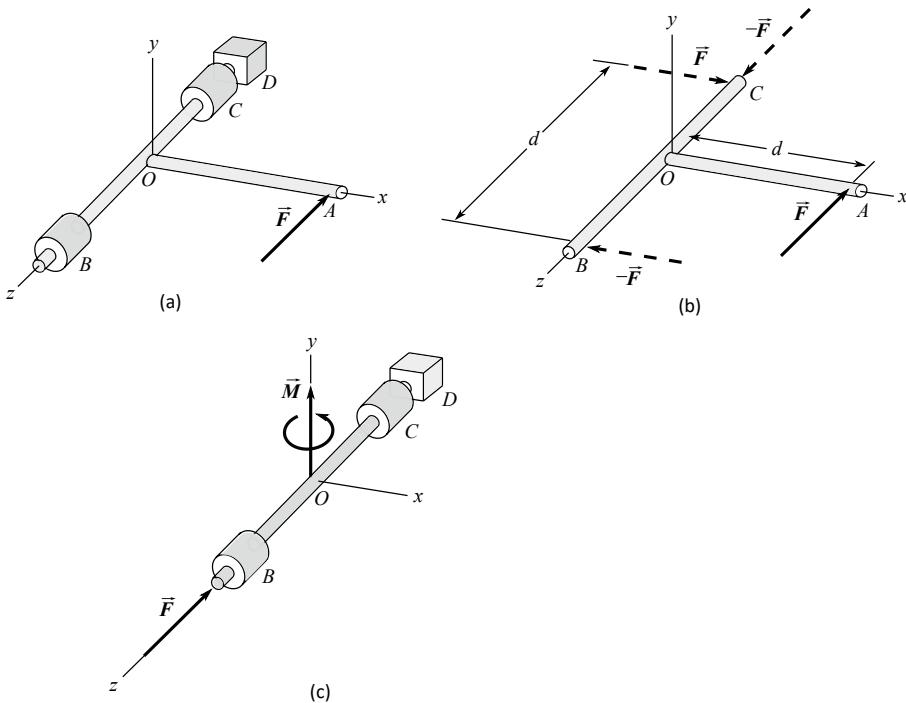


Figura 3.32

Se aplica una fuerza  $\vec{F}$  en el punto  $A$ , por lo que de no existir el tope  $D$ , la varilla se desplazaría libremente, indicando que dicho tope le ofrece una fuerza de reacción  $-\vec{F}$ , igual y de sentido contrario, para impedir el efecto de traslación ocasionado por la fuerza  $\vec{F}$ , como se muestra en la figura 3.32(b).

Al mismo tiempo, la fuerza  $\vec{F}$  aplicada en  $A$  y la reacción  $-\vec{F}$  en el tope  $D$  generan un par de momento  $\vec{M}$ , cuya magnitud es  $M = Fd$ , siendo  $F$  la magnitud de  $\vec{F}$  y  $d$  la distancia  $OA$ , aunque dicho momento es compensado por un par de igual magnitud y sentido contrario, ocasionado por los collarines  $B$  y  $C$ .

Al prescindir de la sección  $OA$  de la varilla, como se aprecia en la figura 3.32(c), se observa que, para mantener los mismos efectos de traslación y de rotación, en la parte restante, es necesario aplicar la fuerza original  $\vec{F}$  en la dirección de la reacción del tope  $D$  y, además, ejercer un par de momento  $\vec{M}$ , igual y de sentido contrario al ofrecido por los collarines  $B$  y  $C$ .

Asimismo, por el principio de transmisibilidad, la fuerza  $\vec{F}$  se puede trasladar al punto  $O$ , en donde, junto con el par de momento  $\vec{M}$ , forman un sistema fuerza-par equivalente a la fuerza  $\vec{F}$  aplicada en el punto  $A$ .

### 3.22.2 Ejemplo 3.9

Convertir la fuerza  $\vec{F}$  de magnitud 100 N aplicada en el punto  $A$ , cuya línea de acción pasa por los puntos  $A$  y  $D$ , como se muestra en la figura 3.33(a), en un sistema fuerza-par equivalente en el punto  $B$ .

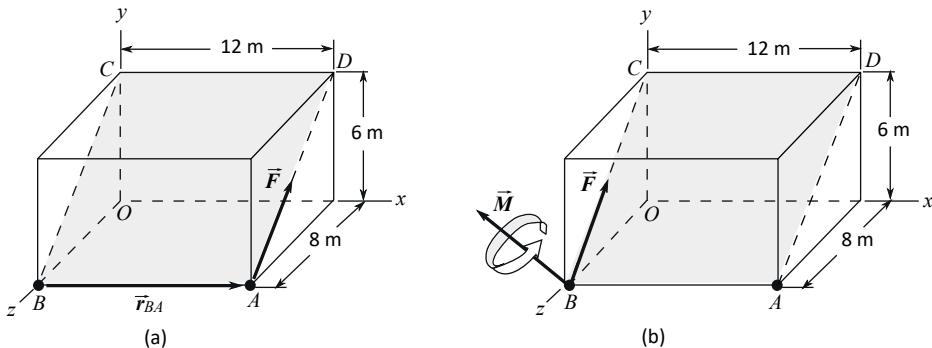


Figura 3.33

Solución

La fuerza  $\vec{F}$  aplicada en el punto  $A$ , como se muestra en la figura 3.33(a), se expresa en forma vectorial, mediante la relación 2.32, así:

$$\vec{F} = \lambda_{AD} F \quad (1)$$

Siendo  $\lambda_{AD}$  el vector unitario en la dirección  $AD$  y  $F = 100$  N, la magnitud de  $\vec{F}$ :

$$\lambda_{AD} = \frac{6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}}{10}$$

Al sustituir valores en la ecuación 1:

$$\vec{F} = 60\mathbf{j} - 80\mathbf{k} \text{ [N]}$$

Se define  $\vec{r}_{BA}$  como un vector dirigido desde  $B$ , punto final de la fuerza  $\vec{F}$ , hasta  $A$ , punto inicial de la misma, como se muestra en la figura 3.33(a). O sea:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{BA} &= 12\mathbf{i} \text{ [m]} \\ \vec{M} &= \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & -80 \end{bmatrix} \text{ [Nm]} = 960\mathbf{j} + 720\mathbf{k} \text{ [Nm]} \\ \vec{F} &= 60\mathbf{j} - 80\mathbf{k} \text{ [N]} \quad \vec{M} = 960\mathbf{j} + 720\mathbf{k} \text{ [Nm]} \end{aligned}$$

En el punto  $B$  se tiene una fuerza  $\vec{F}$  y un par de momento  $\vec{M}$ , como se aprecia en la figura 3.33(b). Nótese que el momento  $\vec{M}$  del par, por ser un vector libre, como ya se ha visto, tiende a producir el mismo efecto de rotación independientemente del punto donde se coloque, aunque por conveniencia se ubica en el punto  $B$ , junto con la fuerza  $\vec{F}$ , y al conjunto se le denomina sistema fuerza-par equivalente en  $B$ .

### 3.23 Sistema fuerza-par equivalente de varias fuerzas

Si se tienen varias fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$  aplicadas respectivamente en los puntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  de un cuerpo rígido, siendo  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$  los vectores de posición correspondientes, como se indica en la figura 3.34(a), se pueden convertir cada una de ellas en un sistema fuerza-par equivalente en un punto  $O$ , como se muestra en la figura 3.34(b), para lo cual se obtienen las fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$ , además de los momentos respectivos, dados por:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

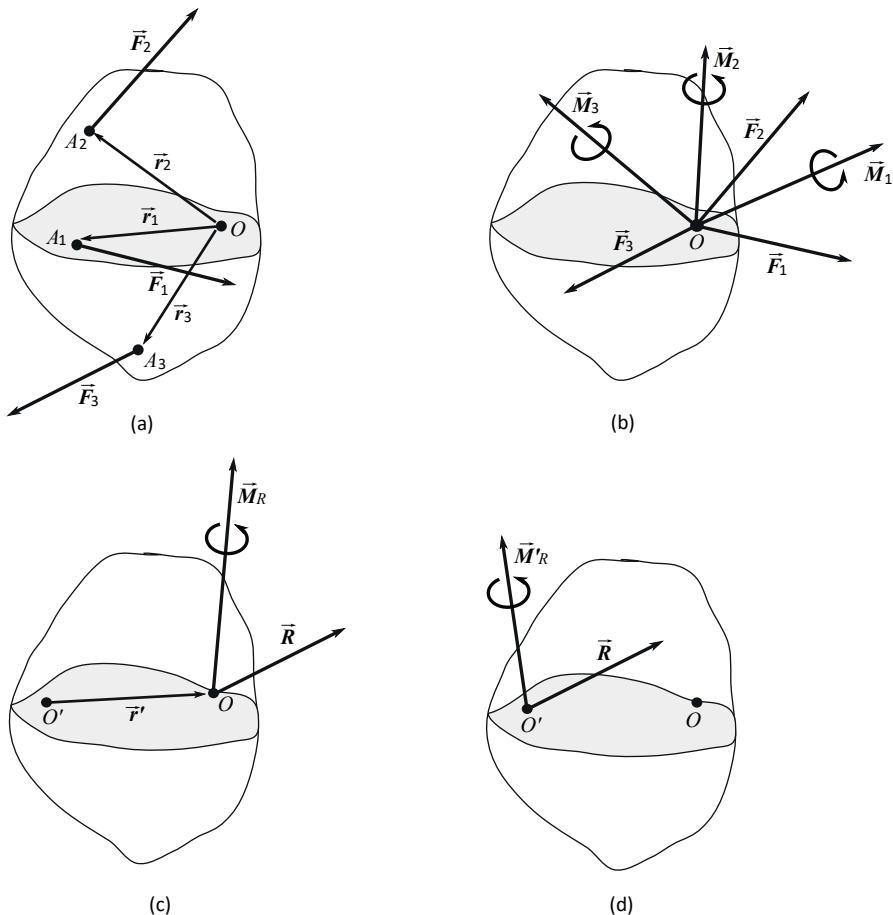


Figura 3.34

Al estar aplicadas las fuerzas en un mismo punto  $O$ , se pueden sumar para hallar una resultante, así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Se suman también los momentos:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$$

Finalmente, en el punto  $O$  se tiene un sistema fuerza-par equivalente dado por una fuerza  $\vec{R}$  y un par de momento  $\vec{M}_R$ , como se indica en la figura 3.34(c), el cual produce el mismo efecto de rotación y de traslación que las fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$  aplicadas en sus respectivos puntos.

Se debe tener en cuenta que mientras que los momentos  $\vec{M}_1$ ,  $\vec{M}_2$  y  $\vec{M}_3$ , tomados de forma individual, son perpendiculares a sus respectivas fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$ , en general, el momento resultante  $\vec{M}_R$  no es perpendicular a la fuerza resultante fuerza  $\vec{R}$ .

Después de que un sistema de fuerzas se ha reducido a un sistema fuerza-par equivalente, dado por una fuerza  $\vec{R}$  y un par de momento  $\vec{M}_R$ , como se indica en la figura 3.34(c), se puede convertir en un nuevo sistema fuerza-par equivalente aplicado en un punto  $O'$ , como se aprecia en la figura 3.34(d), dado por la misma fuerza  $\vec{R}$ , la cual permanece igual y un par de momento  $\vec{M}'_R$ , así:

$$\vec{M}'_R = \vec{M}_R + \vec{r}' \times \vec{R} \quad (3.24)$$

Siendo  $\vec{r}' = \vec{r}_{O',O}$  el vector desde el punto  $O'$ , posición del nuevo sistema fuerza-par equivalente, hasta el punto  $O$ , como se muestra en la figura 3.34(c).

### 3.23.1 Ejemplo 3.10

Una varilla de sección cuadrada  $OABCD$  es sometida a dos fuerzas y dos pares como se indica en la figura 3.35: a) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto  $O$ , b) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto  $C$  y c) convertir el sistema fuerza-par equivalente obtenido en el punto  $O$  en un nuevo sistema fuerza-par equivalente en el punto  $C$ . Comparar los resultados.

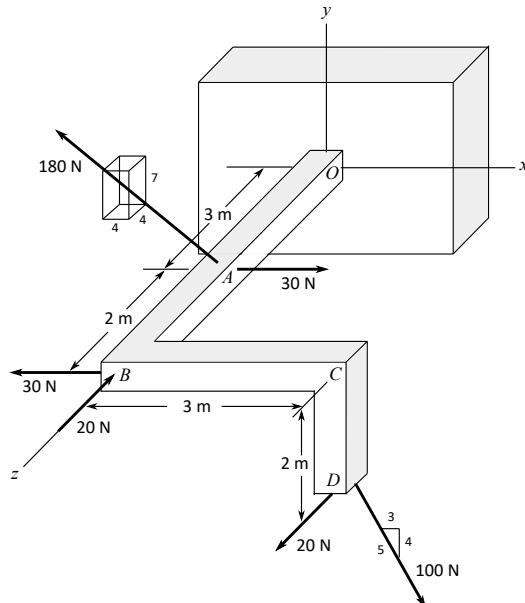


Figura 3.35

Solución (a)

Se designan cada una de las fuerzas y los pares dados, y se expresan en forma vectorial, así:

$$\vec{F}_1 = \text{fuerza de } 100 \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = \text{fuerza de } 180 \text{ N}$$

$$\vec{M}_{p1} = \text{momento del par de } 30 \text{ N}$$

$$\vec{M}_{p2} = \text{momento del par de } 20 \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = \vec{\lambda}_1 F_1 = \left( \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right) (100 \text{ N}) = 60\mathbf{i} - 80\mathbf{j} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_2 = \vec{\lambda}_2 F_2 = \left( \frac{-4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} \right) (180 \text{ N}) = -80\mathbf{i} + 140\mathbf{j} + 80\mathbf{k} [\text{N}]$$

Los momentos de los pares de 30 N y 20 N se determinan de acuerdo con el procedimiento visto en el ejemplo 3.7, así:

$$\vec{M}_{p1} = \vec{r}_{p1} \times \vec{F}_{p1} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -2 \\ 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -60\mathbf{j} [\text{Nm}]$$

$$\vec{M}_{p2} = \vec{r}_{p2} \times \vec{F}_{p2} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -40\mathbf{i} - 60\mathbf{j} [\text{Nm}]$$

Se convierten las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  en dos sistemas fuerza-par equivalentes en el punto  $O$ , obteniendo las mismas dos fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  al adicionarle los respectivos momentos  $\vec{M}_1$  y  $\vec{M}_2$ , como se muestra en la figura 3.36(a), dados por:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{OD} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} [\text{m}] \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_{OA} = 3\mathbf{k} [\text{m}]$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 60 & -80 & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = 400\mathbf{i} + 300\mathbf{j} - 120\mathbf{k} [\text{Nm}]$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ -80 & 140 & 80 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = -420\mathbf{i} - 240\mathbf{j} [\text{Nm}]$$

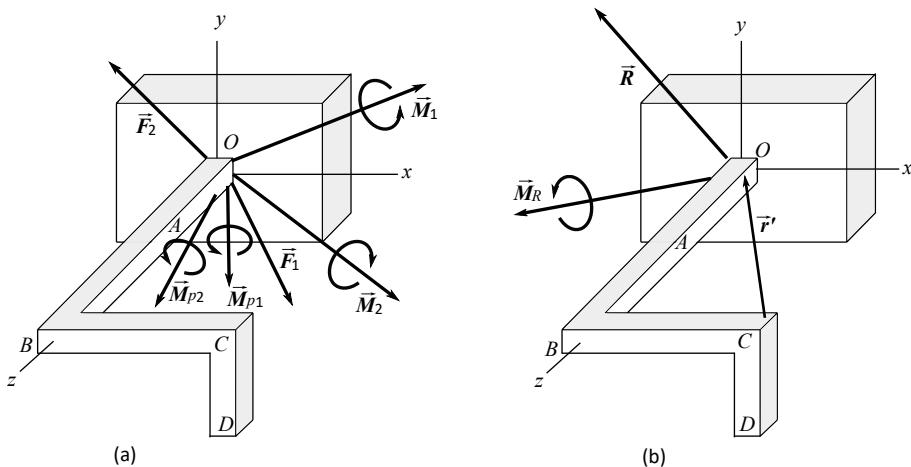


Figura 3.36

Se trasladan los pares de 30 N y 20 N, de momentos respectivos  $\vec{M}_{p1}$  y  $\vec{M}_{p2}$ , hasta el punto  $O$  sin modificación alguna por tratarse de vectores libres, como se muestra en la figura 3.36(a).

Por tanto, en el punto  $O$  se encuentran ahora ubicados: dos fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  con sus correspondientes momentos  $\vec{M}_1$  y  $\vec{M}_2$  como resultado de sus trasladados y dos momentos  $\vec{M}_{p1}$  y  $\vec{M}_{p2}$ , pertenecientes a los pares. Seguidamente se suman las fuerzas, por estar aplicadas en un mismo punto  $O$ , y también los momentos para hallar las resultantes, así:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -20i + 60j + 80k \text{ [N]} \\ \vec{M}_R &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_{p1} + \vec{M}_{p2} = -60i - 60j - 120k \text{ [Nm]}\end{aligned}$$

En la figura 3.36(b) se muestra el resultado de la conversión, en donde se tiene un sistema fuerza-par equivalente, compuesto por una fuerza resultante  $\vec{R}$  y un momento resultante  $\vec{M}_R$ , actuando en el punto  $O$ , cuyos valores son:

$$\vec{R} = -20i + 60j + 80k \text{ [N]} \quad \vec{M}_R = -60i - 60j - 120k \text{ [Nm]}$$

### Solución (b)

Siguiendo los pasos de acuerdo con la solución (a), en vez de tomar a  $O$ , como punto de destino, se trasladan las fuerzas y los pares hacia el punto  $C$ . En cuanto a las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ , se obtienen las mismas fuerzas y con sus respectivos momentos  $\vec{M}_1$  y  $\vec{M}'_2$ , dados por:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= 60\mathbf{i} - 80\mathbf{j} \text{ [N]} & \vec{F}_2 &= -80\mathbf{i} + 140\mathbf{j} + 80\mathbf{k} \text{ [N]} \\ \vec{r}'_1 = \vec{r}_{CD} &= -2\mathbf{j} \text{ [m]} & \vec{r}'_2 = \vec{r}_{CA} &= -3\mathbf{i} - 2\mathbf{k} \text{ [m]} \\ \vec{M}'_1 = \vec{r}'_1 \times \vec{F}_1 &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 0 \\ 60 & -80 & 0 \end{bmatrix} \text{ [Nm]} = 120\mathbf{k} \text{ [Nm]} \\ \vec{M}'_2 = \vec{r}'_2 \times \vec{F}_2 &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & -2 \\ -80 & 140 & 80 \end{bmatrix} \text{ [Nm]} = 280\mathbf{i} + 400\mathbf{j} - 420\mathbf{k} \text{ [Nm]}\end{aligned}$$

Por último, se hallan la fuerza resultante  $\vec{R}$  y el momento resultante  $\vec{M}'_R$  tomando los mismos momentos de los pares  $\vec{M}_{p1}$  y  $\vec{M}_{p2}$  ya calculados, así:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -20\mathbf{i} + 60\mathbf{j} + 80\mathbf{k} \text{ [N]} \\ \vec{M}'_R &= \vec{M}'_1 + \vec{M}'_2 + \vec{M}_{p1} + \vec{M}_{p2} = 240\mathbf{i} + 280\mathbf{j} - 300\mathbf{k} \text{ [Nm]}\end{aligned}$$

O sea, en el punto  $C$  se tiene la misma fuerza resultante  $\vec{R}$  y el momento resultante  $\vec{M}'_R$ , dados por:

$$\vec{R} = -20\mathbf{i} + 60\mathbf{j} + 80\mathbf{k} \text{ [N]} \quad \vec{M}'_R = 240\mathbf{i} + 280\mathbf{j} - 300\mathbf{k} \text{ [Nm]}$$

### Solución (c)

Una vez se obtiene un sistema fuerza-par en un punto determinado  $O$ , se puede convertir en un nuevo sistema fuerza-par en otro punto  $C$ , como se ilustra en la figura 3.36(b), teniendo en cuenta que la fuerza resultante  $\vec{R}$  es siempre la misma, aunque el nuevo momento resultante  $\vec{M}'_R$  se calcula de acuerdo con la relación 3.24, así:

$$\begin{aligned}\vec{M}'_R &= \vec{M}_R + \vec{r}' \times \vec{R} \tag{1} \\ \vec{r}' &= \vec{r}_{CO} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{k} \text{ [m]} \quad \vec{R} = -20\mathbf{i} + 60\mathbf{j} + 80\mathbf{k} \text{ [N]} \\ \vec{r}' \times \vec{R} &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & -5 \\ -20 & 60 & 80 \end{bmatrix} \text{ [Nm]} = 300\mathbf{i} + 340\mathbf{j} - 180\mathbf{k} \text{ [Nm]} \\ \vec{M}_R &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_{p1} + \vec{M}_{p2} = -60\mathbf{i} - 60\mathbf{j} - 120\mathbf{k} \text{ [Nm]}\end{aligned}$$

Al sustituir valores en la ecuación 1:

$$\vec{M}'_R = 240\mathbf{i} + 280\mathbf{j} - 300\mathbf{k} \text{ [Nm]}$$

El nuevo sistema fuerza-par actuando en el punto  $C$  está dado por la resultante  $\vec{R}$  y un par de momento  $\vec{M}'_R$ . Se observa que los resultados obtenidos mediante las soluciones (b) y (c) son iguales, como era de esperarse.

### 3.24 Conversiones de sistemas equivalentes de fuerzas

Los sistemas de fuerzas son reducidos a sistemas equivalentes simplificados para facilitar su estudio y poder analizar de forma sencilla las condiciones de cargas sobre un cuerpo rígido. Teniendo en cuenta las posibilidades de transformar un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido en un sistema equivalente abreviado, se pueden estudiar las siguientes formas de conversión:

1. *Sistema de fuerzas en el plano*: el cual se puede reducir a una fuerza única equivalente.
2. *Sistema de fuerzas paralelas, en el plano o en el espacio*: el cual se puede convertir también en una fuerza única equivalente.
3. *Sistema general de fuerzas en el espacio*: el cual para ser reducido es necesario convertirlo en una fuerza y un par que actúan en la misma dirección, denominado *torsor*.

### 3.25 Reducción de un sistema de fuerzas en el plano en una fuerza única equivalente

Sean  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$  un sistema de fuerzas en el plano  $xy$  y sean  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$  los correspondientes vectores de posición de los puntos de aplicación  $A$ ,  $B$  y  $C$ , con respecto al punto  $O$ , como se indica en la figura 3.37(a). De acuerdo con lo visto en la sección 3.23, al convertir a un sistema fuerza-par aplicado en el punto  $O$ , se obtienen las tres fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$ , además de los respectivos momentos, dados por:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

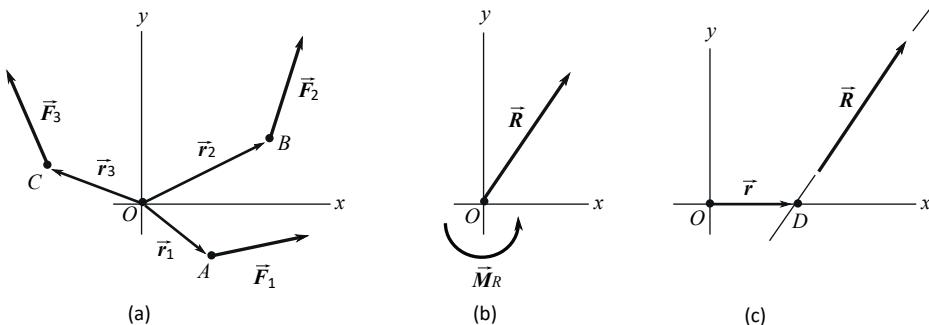


Figura 3.37

Entonces, por encontrarse aplicados en un mismo punto, se suman tanto las fuerzas como los momentos para hallar las resultantes, así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \quad \vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$$

Por lo tanto, se obtiene en el punto  $O$ , como se ilustra en la figura 3.37(b), una fuerza resultante  $\vec{R}$  en el plano  $xy$  y un momento resultante  $\vec{M}_R$  con componente solamente en el eje  $z$ , los cuales son respectivamente perpendiculares, expresados así:

$$\vec{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \quad \vec{M}_R = M_z \mathbf{k}$$

Por tales razones, el anterior sistema puede ser convertido en una sola fuerza equivalente  $\vec{R}$ , lo cual se consigue al mover a  $\vec{R}$  de tal manera que su línea de acción corte al eje  $x$  en el punto  $D$ , como se aprecia en la figura 3.37(c), siendo  $\vec{r} = xi$ , produciendo el momento  $\vec{M}'_R$ , dado por:

$$\vec{M}'_R = \vec{r} \times \vec{R} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & 0 & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{bmatrix} = x R_y \mathbf{k}$$

Al igualar  $\vec{M}_R$  y  $\vec{M}'_R$ :

$$x R_y = M_z \quad x = M_z / R_y$$

En donde  $M_z$  constituye la magnitud del momento resultante  $\vec{M}_R$  y  $R_y$  la componente en el eje  $y$  de la fuerza resultante  $\vec{R}$ .

### 3.25.1 Ejemplo 3.11

Para la armadura y cargas mostradas en la figura 3.38, encontrar: a) un sistema fuerzapar equivalente en el punto  $O$  y b) una fuerza única equivalente y la intersección de su línea de acción con el eje  $x$ .

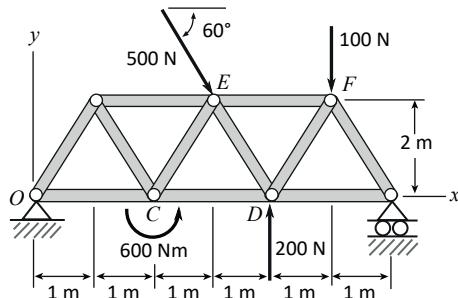


Figura 3.38

Solución (a)

Se designan cada una de las fuerzas y los pares, así:

$$\vec{F}_1 = \text{fuerza de } 100 \text{ N} \quad \vec{F}_2 = \text{fuerza de } 200 \text{ N} \quad \vec{F}_3 = \text{fuerza de } 500 \text{ N}$$

$$\vec{M}_p = \text{momento del par de } 600 \text{ Nm}$$

Se convierte cada fuerza en un sistema fuerza-par equivalente en el punto  $O$ , para obtener tres fuerzas y sus respectivos momentos, dados por:

$$\vec{F}_1 = -100j \text{ [N]} \quad \vec{F}_2 = 200j \text{ [N]} \quad \vec{F}_3 = 250i - 433j \text{ [N]}$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{OF} = 5i + 2j \text{ [m]} \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_{OD} = 4i \text{ [m]} \quad \vec{r}_3 = \vec{r}_{OE} = 3i + 2j \text{ [m]}$$

$$\vec{M}_1 = (5i + 2j) \times (-100j) \text{ [Nm]} = -500k \text{ [Nm]}$$

$$\vec{M}_2 = (4i) \times (200j) \text{ [Nm]} = 800k \text{ [Nm]}$$

$$\vec{M}_3 = \vec{r}_{AE} \times \vec{F}_3 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 250 & -433 & 0 \end{bmatrix} \text{ [Nm]} = -1799k \text{ [Nm]}$$

Ahora, por estar aplicados en el mismo punto  $O$ , se suman las fuerzas para hallar una resultante  $\vec{R}$  y los momentos para encontrar un momento resultante  $\vec{M}_R$ , al cual se le adiciona el momento del par de 600 Nm, que por ser un vector libre se traslada al punto  $O$  sin modificación alguna, para conseguir en dicho punto un sistema fuerza-par equivalente, como se indica en la figura 3.39(a), así:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -100j + 200j + 250i - 433j \text{ [N]} = 250i - 333j \text{ [N]}$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_p = -500k + 800k - 1799k + 600k \text{ [Nm]} \quad M_R = -899k \text{ [Nm]}$$

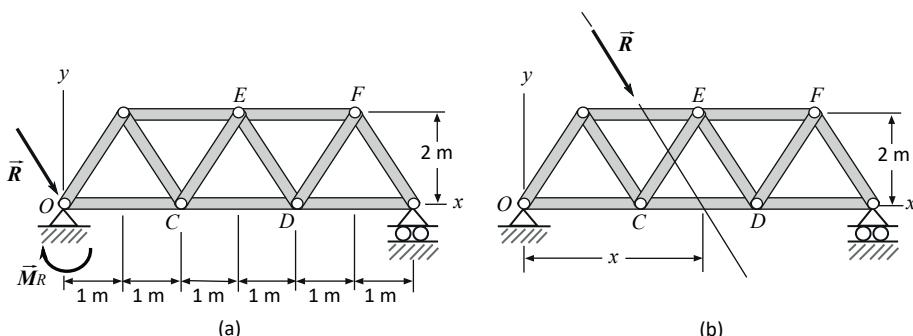


Figura 3.39

Solución (b)

Se convierte el sistema fuerza-par equivalente dado en el punto  $O$ , por la fuerza resultante  $\vec{R}$  y el momento resultante  $\vec{M}_R$ , como se indica en la figura 3.39(a), en una fuerza única equivalente  $\vec{R}$ , como se muestra en la figura 3.39(b).

Se traslada la fuerza  $\vec{R}$  de tal manera que se produzca un momento  $\vec{M}'_R$  igual al momento  $\vec{M}_R$ , lo cual garantiza que los dos sistemas sean equivalentes.

$$\vec{M}'_R = \vec{r} \times \vec{R} \quad r = xi$$

$$\vec{M}'_R = \vec{r} \times \vec{R} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & 0 & 0 \\ 250 & -333 & 0 \end{bmatrix} [N] = -333xk [N]$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}'_R - 899k [Nm] = -333xk [N] \quad x = \frac{899}{333} [m] = 2.69 [m]$$

Las dos situaciones mostradas en las figuras 3.39(a) y 3.39(b) son equivalentes.

### 3.26 Conversión de un sistema de fuerzas paralelas en una fuerza única equivalente

Considere un sistema de fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$ , paralelas al eje  $y$ , aplicadas respectivamente en los puntos de coordenadas  $A_1(x_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, z_2)$  y  $A_3(x_3, z_3)$ , como se muestra en la figura 3.40(a), por tanto los vectores de posición de los puntos de aplicación  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$  y las fuerzas correspondientes se expresan así:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= x_1\mathbf{i} + z_1\mathbf{k} & \vec{F}_1 &= -F_1\mathbf{j} \\ \vec{r}_2 &= x_2\mathbf{i} + z_2\mathbf{k} & \vec{F}_2 &= -F_2\mathbf{j} \\ \vec{r}_3 &= x_3\mathbf{i} + z_3\mathbf{k} & \vec{F}_3 &= -F_3\mathbf{j}\end{aligned}$$

Al trasladar las fuerzas al punto  $O$  se le adiciona a cada una su respectivo momento, dados por:

$$\begin{aligned}\vec{M}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = z_1F_1\mathbf{i} - x_1F_1\mathbf{k} \\ \vec{M}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = z_2F_2\mathbf{i} - x_2F_2\mathbf{k} \\ \vec{M}_3 &= \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = z_3F_3\mathbf{i} - x_3F_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

En el punto  $O$  se tiene una fuerza resultante  $\vec{R}$  y un momento resultante  $\vec{M}_R$ , como se aprecia en la figura 3.40(b), expresados así:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -(F_1 + F_2 + F_3)\mathbf{j} = -R\mathbf{j} \\ \vec{M}_R &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = (z_1F_1 + z_2F_2 + z_3F_3)\mathbf{i} - (x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3)\mathbf{k}\end{aligned}$$

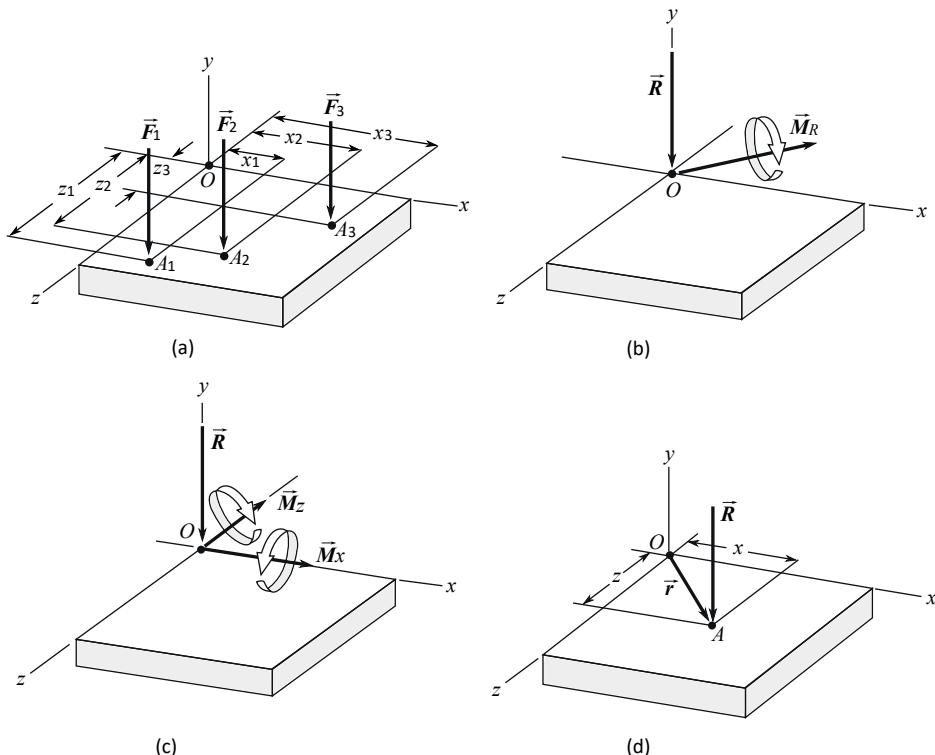


Figura 3.40

Al expresar a  $\vec{M}_R$  en forma de componentes, como se indica en la figura 3.40(c), se tiene:

$$\vec{M}_R = M_x \mathbf{i} - M_z \mathbf{k}$$

$$M_x = (z_1 F_1 + z_2 F_2 + z_3 F_3) \quad M_z = (x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3)$$

El vector del momento resultante  $\vec{M}_R$  tiene solo componentes en los ejes  $x$  y  $z$ , o sea, se encuentra contenido en el plano  $xz$ , como se muestra en la figura 3.40(c); debido a que la fuerza resultante  $\vec{R}$  tiene únicamente componente en el eje  $y$ , entonces son perpendiculares entre sí, y por lo tanto se pueden convertir en una fuerza única equivalente, lo cual se consigue al trasladar a  $\vec{R}$  en forma paralela, como se indica en la figura 3.40(d), generándose el momento  $\vec{M}'_R = \vec{r} \times \vec{R}$ , siendo  $\vec{r} = xi + zk$ , así:

$$\vec{M}'_R = \vec{r} \times \vec{R} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & 0 & z \\ 0 & -R & 0 \end{bmatrix} [\text{Nm}] = zRi - xRk [\text{Nm}]$$

Igualando  $\vec{M}_R$  y  $\vec{M}'_R$  componente a componente se calculan los valores  $x$  y  $z$  correspondientes a  $\vec{r}$ , así:

$$z = M_x/R \quad x = M_z/R$$

Y al reemplazar valores se obtiene:

$$x = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} \quad z = \frac{z_1 F_1 + z_2 F_2 + z_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} \quad (3.25)$$

Las relaciones 3.25 pueden ser utilizadas directamente para obtener, de forma práctica y rápida, una solución escalar, como se verá en el siguiente ejemplo.

### 3.26.1 Ejemplo 3.12

Una placa de  $12 \times 20$  m es sometida a cuatro fuerzas paralelas verticales, como se indica en la figura 3.41. Hallar la fuerza equivalente y el punto de aplicación correspondiente.

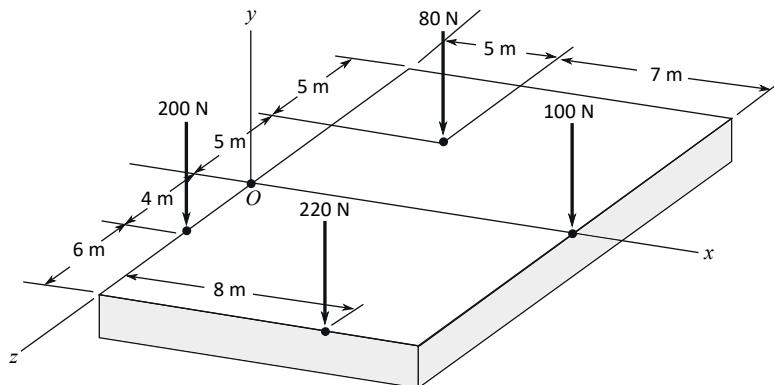


Figura 3.41

#### Solución vectorial

Se designan las fuerzas así:

$\vec{F}_1$  = fuerza de 200 N

$\vec{F}_2$  = fuerza de 220 N

$\vec{F}_3$  = fuerza de 100 N

$\vec{F}_4$  = fuerza de 80 N

Se expresa cada una de las fuerzas y sus correspondientes vectores de posición de los puntos de aplicación con respecto al origen  $O$ , en forma vectorial, así:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= 0\mathbf{i} + 4\mathbf{k} \text{ [m]} & \vec{F}_1 &= -200\mathbf{j} \text{ [N]} \\ \vec{r}_2 &= 8\mathbf{i} + 10\mathbf{k} \text{ [m]} & \vec{F}_2 &= -220\mathbf{j} \text{ [N]} \\ \vec{r}_3 &= 12\mathbf{i} + 0\mathbf{k} \text{ [m]} & \vec{F}_3 &= -100\mathbf{j} \text{ [N]} \\ \vec{r}_4 &= 5\mathbf{i} - 5\mathbf{k} \text{ [m]} & \vec{F}_4 &= -80\mathbf{j} \text{ [N]}\end{aligned}$$

Se realiza la sumatoria de fuerzas para obtener la resultante, como sigue:

$$\vec{R} = -200\mathbf{j} \text{ [N]} - 220\mathbf{j} \text{ [N]} - 100\mathbf{j} \text{ [N]} - 80\mathbf{j} \text{ [N]} = -600\mathbf{j} \text{ [N]}$$

Los momentos de cada una de las fuerzas y el momento resultante, relativos al punto  $O$ , están dados por:

$$\begin{aligned}\vec{M}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (0\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) \times (-200\mathbf{j}) \text{ [Nm]} = 800\mathbf{i} \text{ [Nm]} \\ \vec{M}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (8\mathbf{i} + 10\mathbf{k}) \times (-220\mathbf{j}) \text{ [Nm]} = 2\,200\mathbf{i} - 1\,760\mathbf{k} \text{ [Nm]} \\ \vec{M}_3 &= \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = (12\mathbf{i} + 0\mathbf{k}) \times (-100\mathbf{j}) \text{ [Nm]} = -1\,200\mathbf{k} \text{ [Nm]} \\ \vec{M}_4 &= \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = (5\mathbf{i} - 5\mathbf{k}) \times (-80\mathbf{j}) \text{ [Nm]} = -400\mathbf{i} - 400\mathbf{k} \text{ [Nm]} \\ \vec{M}_R &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4 = 2\,600\mathbf{i} - 3\,360\mathbf{k} \text{ [Nm]}\end{aligned}$$

Tanto  $\vec{R}$  como  $\vec{M}_R$  son mostrados en la figura 3.42(a). Ahora, se traslada la resultante  $\vec{R}$  al punto de coordenadas  $(x, z)$ , con vector de posición  $\vec{r} = x\mathbf{i} + zk\mathbf{k}$ , como se indica en la figura 3.42(b), por lo cual se genera el correspondiente momento  $\vec{M}'_R$ , expresado así:

$$\vec{M}'_R = \vec{r} \times \vec{R} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & 0 & z \\ 0 & -600 & 0 \end{bmatrix} \text{ [Nm]} = 600zi - 600xk \text{ [Nm]}$$

Igualando  $\vec{M}_R$  y  $\vec{M}'_R$  componente a componente hallamos los valores  $x$  y  $z$  correspondientes a  $\vec{r}$ , así:

$$\begin{aligned}600z &= 2\,600 & z &= \frac{2\,600}{600} = 4.33 \text{ m} \\ 600x &= 3\,360 & x &= \frac{3\,360}{600} = 5.6 \text{ m}\end{aligned}$$

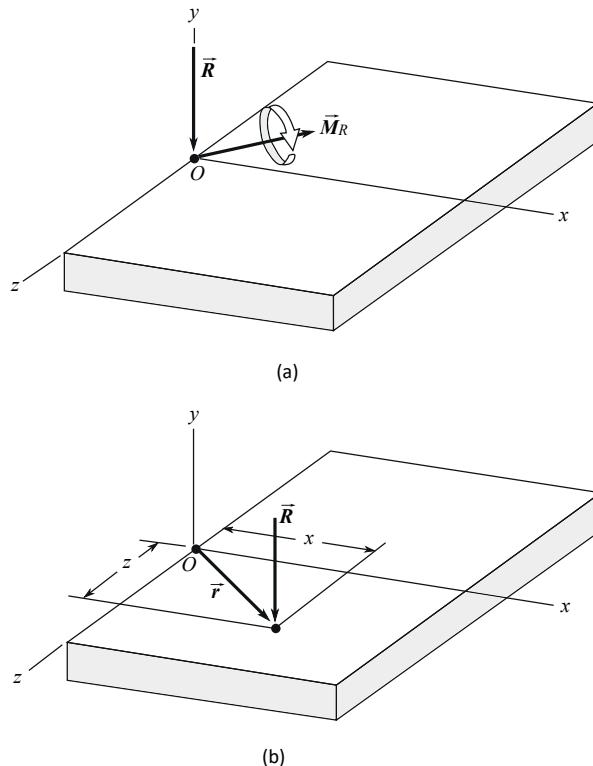


Figura 3.42

Solución escalar

Se aplican las relaciones 3.25 dadas por:

$$x = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 + x_4 F_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} \quad z = \frac{z_1 F_1 + z_2 F_2 + z_3 F_3 + z_4 F_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}$$

$$F_1 = 200 \text{ N} \quad x_1 = 0 \quad z_1 = 4 \text{ m}$$

$$F_2 = 220 \text{ N} \quad x_2 = 8 \text{ m} \quad z_2 = 10 \text{ m}$$

$$F_3 = 100 \text{ N} \quad x_3 = 12 \text{ m} \quad z_3 = 0$$

$$F_4 = 80 \text{ N} \quad x_4 = 5 \text{ m} \quad z_4 = -5 \text{ m}$$

$$x = \frac{(0)(200 \text{ N}) + (8 \text{ m})(220 \text{ N}) + (12 \text{ m})(100 \text{ N}) + (5 \text{ m})(80 \text{ N})}{200 \text{ N} + 220 \text{ N} + 100 \text{ N} + 80 \text{ N}} = 5.6 \text{ m}$$

$$z = \frac{(4 \text{ m})(200 \text{ N}) + (10 \text{ m})(220 \text{ N}) + (0)(100 \text{ N}) + (-5 \text{ m})(80 \text{ N})}{200 \text{ N} + 220 \text{ N} + 100 \text{ N} + 80 \text{ N}} = 4.33 \text{ m}$$

### 3.27 Reducción de un sistema de fuerzas en el espacio en un torsor

Se ha visto en la sección 3.23 que al convertir varias fuerzas en un sistema fuerza-par equivalente, en un punto determinado  $O$ , la fuerza resultante  $\vec{R}$  y el momento resultante  $\vec{M}_R$ , en general, no son perpendiculares entre sí, por tanto, no siempre pueden ser convertidos en una fuerza única equivalente, como en los casos tratados en las secciones 3.25 y 3.26.

El sistema general en donde la fuerza resultante  $\vec{R}$  y el momento resultante  $\vec{M}_R$  no sean perpendiculares entre sí se puede convertir en lo que se denomina un *torsor*. El procedimiento de reducción a un torsor consiste en que una vez transformado el sistema de fuerzas en una fuerza resultante  $\vec{R}$  y en un momento resultante  $\vec{M}_R$  en un punto de referencia  $O$ , como se indica en la figura 3.43(a), se descompone a  $\vec{M}_R$  en dos componentes: una en la dirección de  $\vec{R}$  denominada  $\vec{M}_p$  o componente paralela y la otra perpendicular llamada  $\vec{M}_n$  o componente normal, como se indica en la figura 3.43(b).

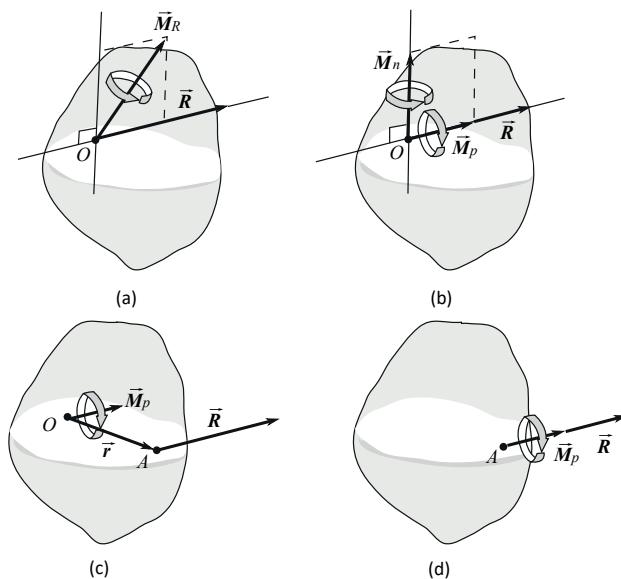


Figura 3.43

Entonces se traslada a  $\vec{R}$  desde el punto  $O$  hacia el punto  $A$ , en un plano perpendicular a  $\vec{M}_n$ , de tal manera que se genere un momento dado por  $\vec{M}_{n'} = \vec{r} \times \vec{R}$  e igual a  $\vec{M}_n$ , el cual se va a eliminar, tal como aparece en la figura 3.43(c). Una vez ubicado  $\vec{R}$  en el punto  $A$  se puede trasladar la componente  $\vec{M}_p$  también al punto  $A$  por ser un vector libre, y al conjunto momento del par  $\vec{M}_p$  y fuerza  $\vec{R}$  es a lo que se denomina torsor, el cual se muestra en la figura 3.43(d).

### 3.28 Consideraciones acerca de los sistemas equivalentes de fuerzas

En mecánica un cuerpo rígido está definido como aquel que no se deforma al ser sometido a fuerzas externas. Asimismo, las fuerzas externas representan la acción que ejercen otros cuerpos o elementos a su alrededor.

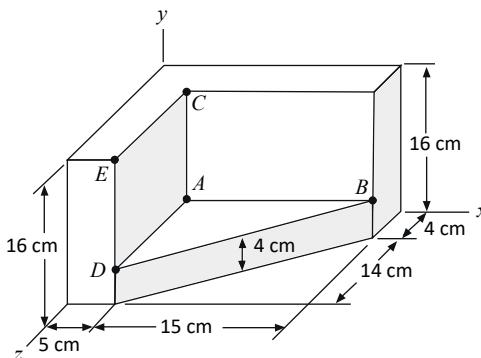
Por otro lado, las fuerzas internas son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforman el cuerpo rígido. Si se trata de un cuerpo compuesto estructuralmente de varias partes, las fuerzas que mantienen unidas a dichas partes también se consideran fuerzas internas. Tal es el caso de las barras o elementos de unión que comprenden una armadura. Las fuerzas de interacción entre dichas barras son fuerzas internas.

Es importante tener en cuenta que los sistemas equivalentes son transformaciones de los sistemas originales de fuerzas y, como tal, son simplificaciones orientadas hacia el hecho de no alterar el equilibrio de un cuerpo rígido, lo cual quiere decir que solo se están considerando los efectos externos generados sobre dicho cuerpo, mas no las acciones internas. En realidad, cualquier cambio de posición de una fuerza externa en un cuerpo, aunque no altere las condiciones de equilibrio, puede afectar notablemente la distribución de las fuerzas internas, lo cual debe ser tenido en cuenta al trabajar con sistemas equivalentes de fuerzas.

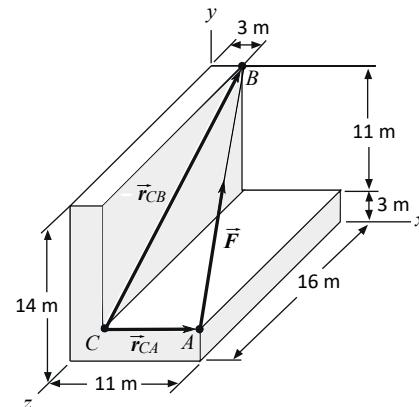
### 3.29 Problemas propuestos

**Problema 3.1.** Teniendo en cuenta los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  del sólido mostrado en la correspondiente figura, efectuar los siguientes productos vectoriales  $\vec{AB} \times \vec{AC}$ ,  $\vec{AC} \times \vec{AD}$ ,  $\vec{BA} \times \vec{BD}$  y  $\vec{BC} \times \vec{BE}$  y hallar el área de cada paralelogramo.

**Problema 3.2.** Una fuerza  $\vec{F}$  de magnitud 210 N pasa por los puntos  $A$  y  $B$  como se indica en la figura. Hallar el momento de  $\vec{F}$  con respecto al punto  $C$ : a) utilizando el vector de posición  $\vec{r}_{CA}$  y b) tomando el vector de posición  $\vec{r}_{CB}$ . Comparar los resultados.

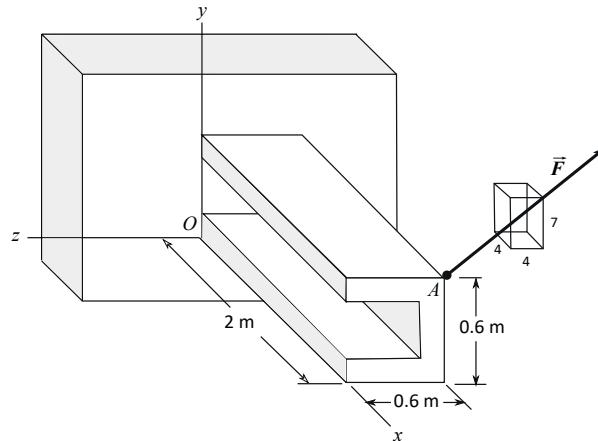


Problema 3.1



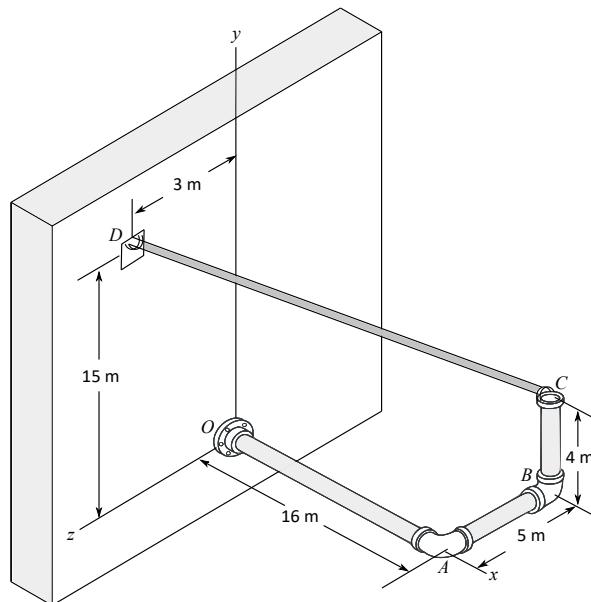
Problema 3.2

**Problema 3.3.** Una fuerza  $\vec{F}$  de magnitud 180 N es aplicada en el punto A de una viga, como se indica en la figura. Hallar el momento de la fuerza con respecto al punto O.



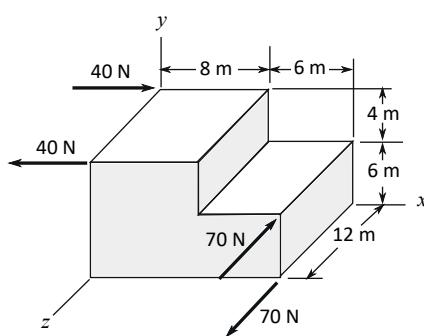
Problema 3.3

**Problema 3.4.** Una tubería OABC, empotrada en el punto O, es sostenida al aplicarle una fuerza  $\vec{F}$  de magnitud 210 N en el punto C, mediante una cadena CD, como se indica en la figura. Hallar: a) el momento  $\vec{M}_O$  de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto O y b) el momento  $M_{OB}$  de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al eje que pasa por los puntos O y B.

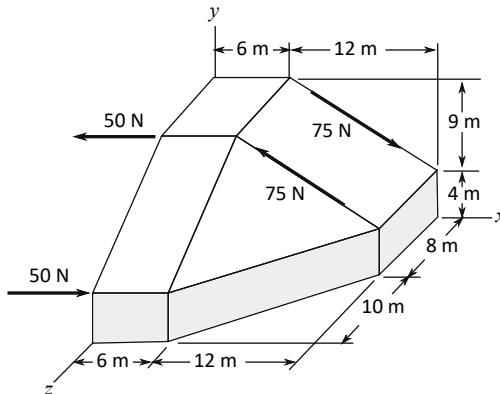


Problema 3.4

*Problemas 3.5 y 3.6.* En relación con los cuerpos mostrados, hallar el par equivalente a los dos pares dados.

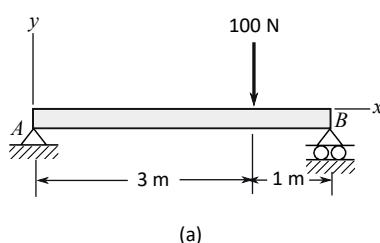


Problema 3.5

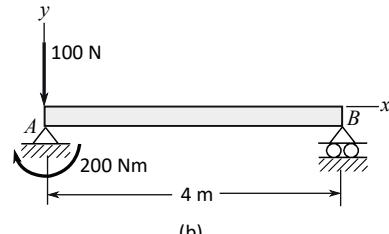


Problema 3.6

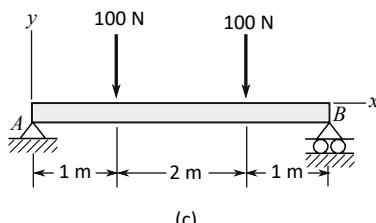
*Problema 3.7.* Teniendo en cuenta la viga  $AB$  y las cargas mostradas: a) convertir la fuerza de 100 N en un sistema fuerza-par equivalente en el punto  $A$ , b) reemplazar el sistema fuerza-par equivalente dado en el punto  $A$  por una sola fuerza equivalente y hallar la distancia sobre el eje  $x$  que lo separa del punto  $A$ , c) reemplazar las dos fuerzas de 100 N por una sola fuerza equivalente y hallar la distancia sobre el eje  $x$  que lo separa del punto  $A$  y d) reemplazar las fuerzas de 100 N y 120 N por una sola fuerza equivalente y encontrar la distancia sobre el eje  $x$  que lo separa del punto  $A$ .



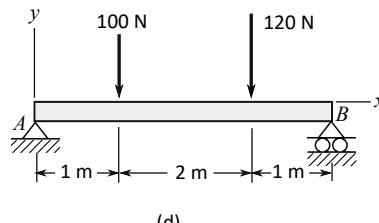
(a)



(b)



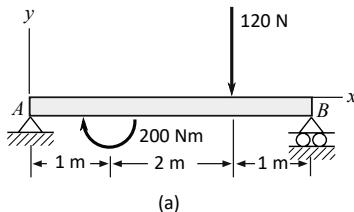
(c)



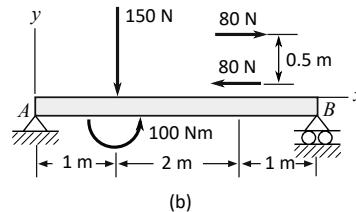
(d)

Problema 3.7

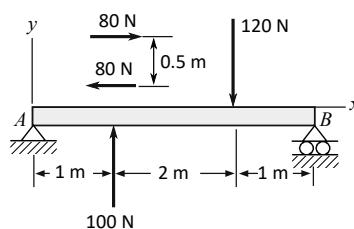
**Problema 3.8.** De acuerdo con la viga y las cargas dadas: a) convertir la fuerza y el par dados por un sistema fuerza-par equivalente en el punto A, b) reemplazar la fuerza y los dos pares dados por una sola fuerza equivalente y hallar la distancia sobre el eje x que lo separa del punto A, c) reemplazar las dos fuerzas y el par dados por una sola fuerza equivalente y hallar la distancia sobre el eje x que lo separa del punto A y d) reemplazar las dos fuerzas y el par dados por una sola fuerza equivalente y encontrar la distancia sobre el eje x que lo separa del punto A.



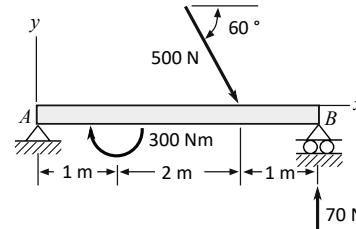
(a)



(b)



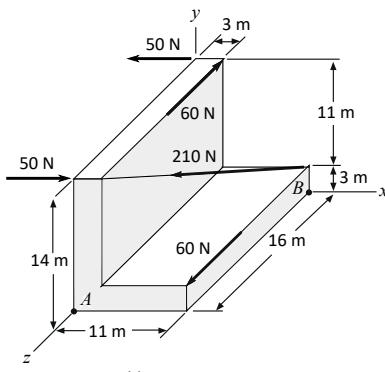
(c)



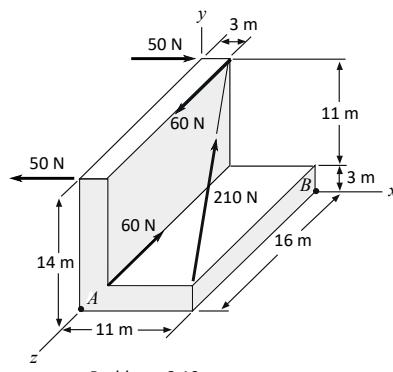
(d)

Problema 3.8

**Problemas 3.9 y 3.10.** El cuerpo mostrado está sometido a una fuerza y dos pares como se indica en la figura: a) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto A, b) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto B y c) convertir el sistema fuerza-par equivalente obtenido en el punto A en un nuevo sistema fuerza-par equivalente en el punto B. Comparar los resultados.

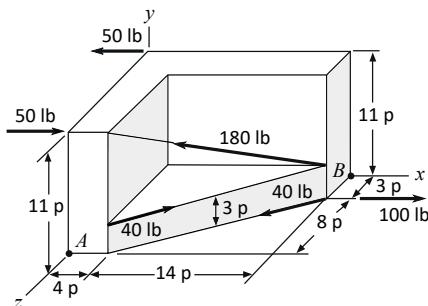


Problema 3.9

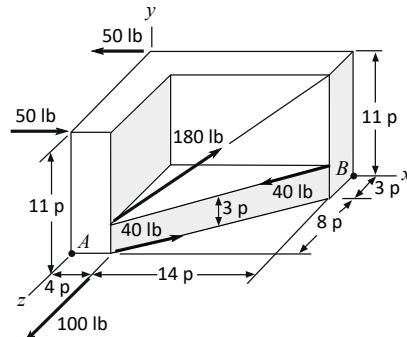


Problema 3.10

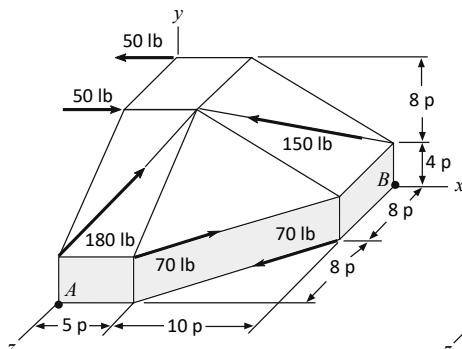
*Problemas 3.11, 3.12, 3.13 y 3.14.* El cuerpo mostrado está sometido a dos fuerzas y dos pares como se indican en la figura: a) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto A, b) reducir a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el punto B y c) convertir el sistema fuerza-par equivalente obtenido en el punto A en un nuevo sistema fuerza-par equivalente en el punto B. Comparar los resultados.



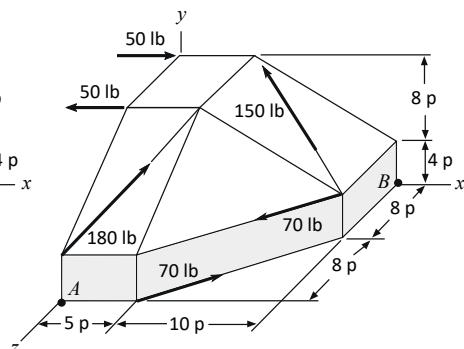
Problema 3.11



Problema 3.12

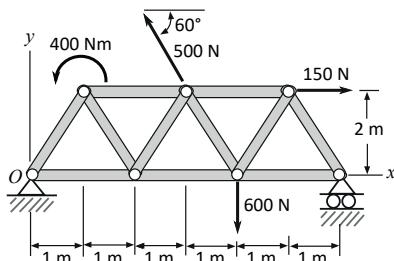


Problema 3.13

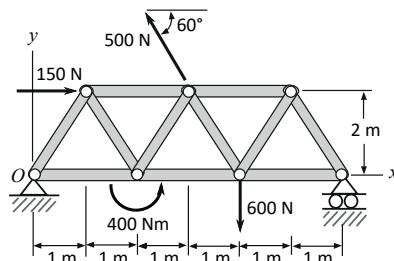


Problema 3.14

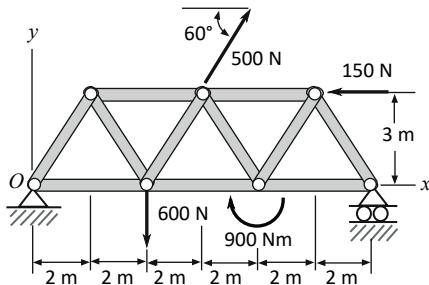
*Problemas 3.15, 3.16, 3.17 y 3.18.* Para la armadura y las cargas mostradas, encontrar: a) un sistema fuerza-par equivalente en el punto O y b) una fuerza única equivalente y la intersección de su línea de acción con el eje x. Dibuje los respectivos diagramas.



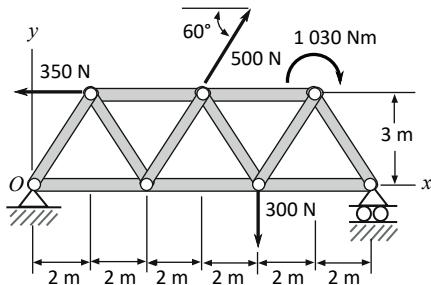
Problema 3.15



Problema 3.16

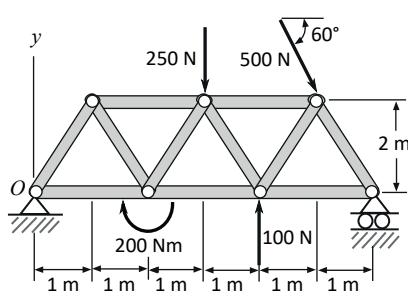


Problema 3.17

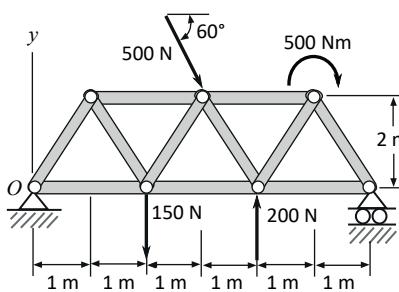
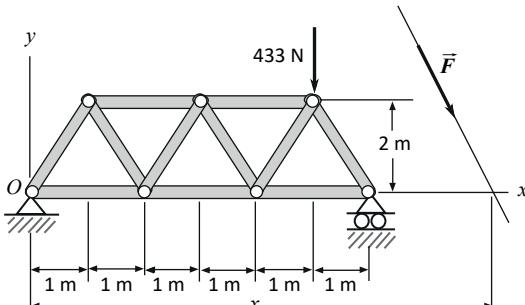


Problema 3.18

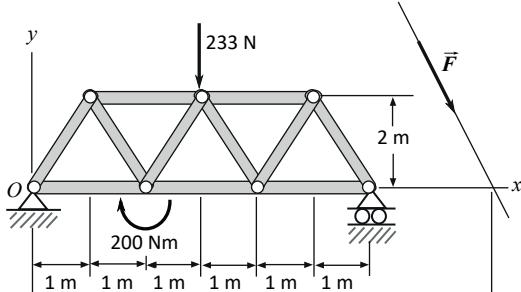
*Problemas 3.19 y 3.20.* Encontrar la fuerza  $\vec{F}$  y el valor  $x$  correspondiente a la intersección de su línea de acción con el eje  $x$ , para que los dos sistemas sean equivalentes.



Problema 3.19

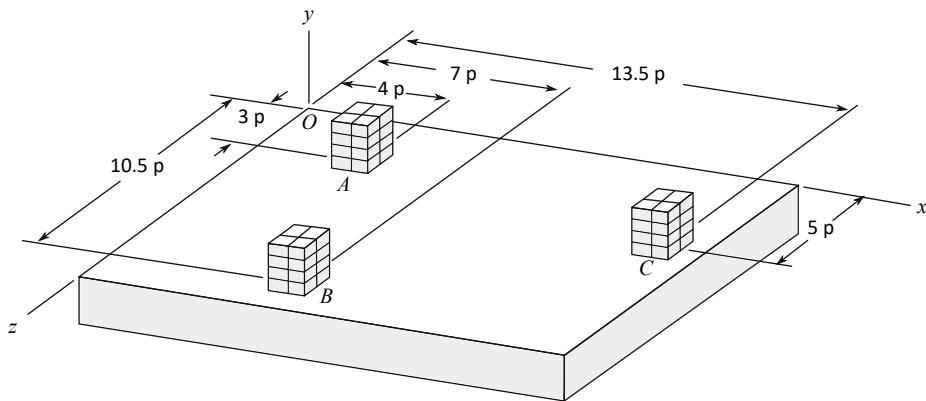


Problema 3.20



*Problema 3.21.* Sobre una balsa de  $15 \times 12$  p son colocados tres paquetes *A*, *B* y *C* de pesos respectivos 50 lb, 60 lb y 40 lb en las posiciones indicadas en la figura. Hallar la magnitud y el punto de aplicación del peso equivalente a los tres pesos dados.

*Problema 3.22.* Sobre una balsa de  $15 \times 12$  p son colocados tres paquetes *A*, *B* y *C* de pesos respectivos 50 lb, 60 lb y 40 lb en las posiciones indicadas en la figura. Si se pone en la balsa un cuarto paquete *D*, de peso 70 lb, hallar su posición para que el peso equivalente se encuentre localizado en el centro de la balsa.



Problemas 3.21 y 3.22