

8

Diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores en vigas

Objetivos del capítulo

- Estudiar las vigas estáticamente determinadas, como elementos prismáticos, las fuerzas aplicadas y las reacciones en los apoyos.
- Establecer las relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector en una viga.
- Analizar los diferentes tipos de cargas aplicadas a una viga y expresarlas en forma de funciones de singularidad.
- Dibujar los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores y calcular mediante ecuaciones los respectivos valores en determinados puntos de la viga.

8.1 Introducción

Para simplificar su estudio, las *vigas* se pueden definir como elementos prismáticos, o sea, de sección transversal constante, largos y rectos, que se utilizan como piezas estructurales, para soportar cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento.

Por la acción de dichas cargas, se encuentran sometidas a ciertos esfuerzos, relacionados con las fuerzas cortantes y los momentos flectores, por lo cual resulta importante calcular en determinados puntos sus magnitudes como un primer paso para el diseño de la viga. La elaboración de los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores constituye la herramienta fundamental para conocer, en cualquier punto deseado, sus valores.

8.2 Tipos de cargas y de apoyos en vigas

Las cargas aplicadas a una viga pueden ser: puntuales, como la fuerza de magnitud P de la viga AB , mostrada en la figura 8.1, distribuidas, w , o una combinación de las anteriores.

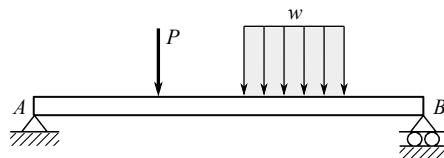


Figura 8.1

De acuerdo con la figura 8.2, las vigas pueden contar con los siguientes tipos de apoyos:

- a. Viga apoyada en los extremos.
- b. Viga apoyada en dos puntos con un tramo en voladizo.
- c. Viga apoyada en tres o más puntos o viga continua.
- d. Viga empotrada en un extremo o en voladizo.
- e. Viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro.
- f. Viga empotrada en los extremos.

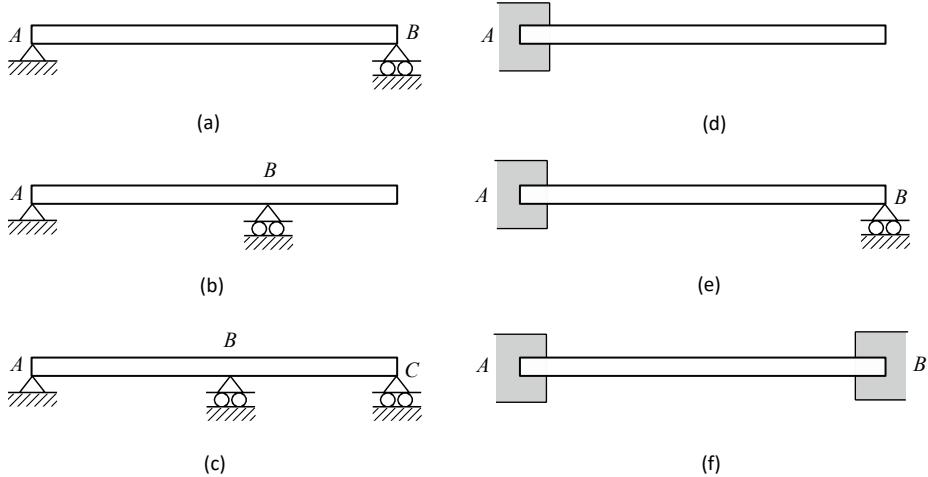


Figura 8.2

Se observa que las vigas mostradas en las figuras 8.2(a), 8.2(b) y 8.2(d) se consideran estáticamente determinadas, porque las reacciones en los apoyos ofrecen como máximo tres incógnitas. En cambio, las presentadas en las figuras 8.2(c), 8.2(e) y 8.2(f) se clasifican como estáticamente indeterminadas, porque las incógnitas ofrecidas son más de tres, lo cual implica que su solución no es posible desde el punto de vista de la estática.

8.3 Fuerza cortante y momento flector

De acuerdo con las cargas aplicadas a una viga, como se ilustra en la figura 8.3(a), al realizar cortes en determinados puntos, como en el indicado en la figura 8.3(b), es posible determinar, mediante ecuaciones de equilibrio, la fuerza cortante V y el momento flector M aplicados.

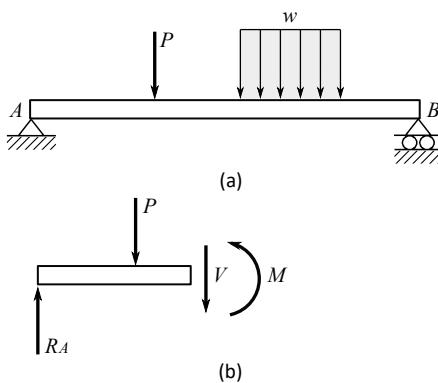


Figura 8.3

8.4 Convención de signos

Con el fin de calcular sin ambigüedades los valores de la fuerza cortante V y el momento flector M en un punto determinado de una viga, se ha establecido la convención de signos expresada a continuación:

- El momento flector M en un punto determinado se considera positivo cuando las fuerzas externas que actúan sobre la viga tienden a doblarla, en dicho punto, de forma cóncava hacia arriba, como se indica en la figura 8.4(a), y se toma como negativo cuando la flexión causada presenta concavidad hacia abajo, como se muestra en la figura 8.4(b).

- La fuerza cortante V en cualquier punto se toma como positiva cuando las fuerzas externas aplicadas sobre la viga tienden a cortarla, en ese punto, en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 8.4(c), y se considera negativa cuando el corte ocurre en el sentido contrario, como se aprecia en la figura 8.4(d).

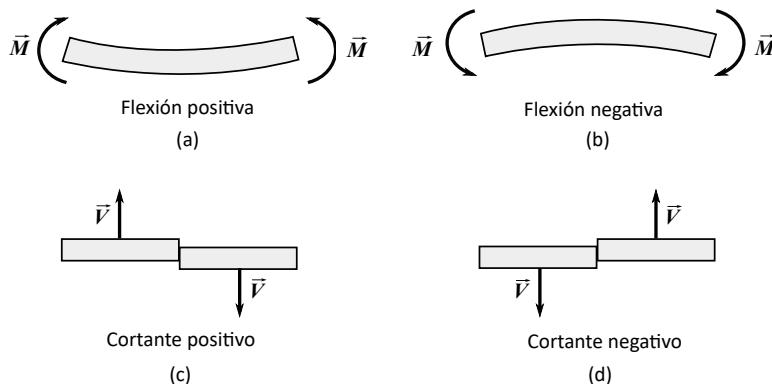


Figura 8.4

8.5 Diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores

Una vez se tengan definidos los valores de la fuerza cortante V y del momento flector M , en determinados puntos de interés, a lo largo de la viga, se facilitan los cálculos si se realizan dos diagramas, uno denominado de *fuerzas cortantes*, al graficar los valores de V en relación con la distancia x , o longitud de la viga, y el otro de *momentos flectores*, al registrar los valores de M también respecto a la longitud x de la viga, los cuales muestran el comportamiento en forma gráfica de cada una de las variables, fuerzas cortantes y momentos flectores, en función de la distancia x . El ejemplo desarrollado a continuación ilustra el procedimiento para obtener dichas gráficas.

8.5.1 Ejemplo 8.1

Una carga de 30 kN es aplicada a la viga ABC , como se aprecia en la figura 8.5(a). Determinar mediante el método de cortes las ecuaciones correspondientes a las fuerzas cortantes y momentos flectores y sus respectivos diagramas.

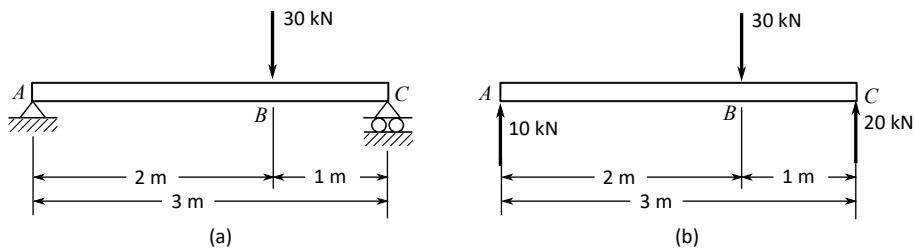


Figura 8.5

Solución

Se realiza el diagrama de cuerpo libre de la viga ABC , mostrado en la figura 8.5(b), y se hallan las magnitudes de las reacciones en los puntos A y C , dados por $A = 10 \text{ kN}$ y $C = 20 \text{ kN}$.

Para aplicar el método de cortes a la viga ABC , como se ilustra en la figura 8.6(b), se divide en dos tramos AB y BC , se selecciona cada uno de ellos y se realizan los análisis de fuerzas y de momentos, en relación con la variable x , con el fin de obtener sus ecuaciones y los consecuentes diagramas, como se verá a continuación.

Se efectúa un corte entre los puntos A y B , a una distancia x desde el punto A , siendo ($0 < x < 2 \text{ m}$), de acuerdo con la figura 8.6(a), y al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se halla:

$$\sum F_v + \uparrow = 0: 10 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 10 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\sum M + \curvearrowright = 0: M - (10 \text{ kN})(x) = 0 \quad M = 10 \text{ kN}(x) \quad (2)$$

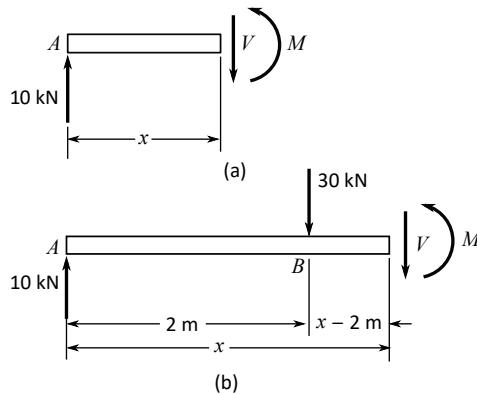


Figura 8.6

Se realiza otro corte entre los puntos B y C , a una distancia x desde el punto A , siendo ($2 \text{ m} < x < 3 \text{ m}$), como se aprecia en la figura 8.6(b), y de acuerdo con las ecuaciones de equilibrio, se tiene:

$$\sum F_v + \uparrow = 0: 10 \text{ kN} - 30 \text{ kN} - V = 0 \quad V = -20 \text{ kN} \quad (3)$$

$$\sum M + \curvearrowleft = 0: M - (10 \text{ kN})(x) + (30 \text{ kN})(x - 2 \text{ m}) = 0$$

$$M = (10 \text{ kN})(x) - (30 \text{ kN})(x - 2 \text{ m}) = 0 \quad (4)$$

Al analizar la ecuación 1, correspondiente a la fuerza cortante V , se observa que entre los puntos A y B la fuerza cortante presenta un valor constante de 10 kN, por tanto, se dibuja una línea recta horizontal, como se aprecia en el diagrama de la figura 8.7(a), y además, debido a que la ecuación 3, dada entre los puntos B y C , ofrece también un valor constante, de -20 kN, se traza otra línea recta horizontal. El punto B presenta un salto de valor, de 10 kN hasta -20 kN, que indica la presencia de la fuerza de -30 kN en dicho punto.

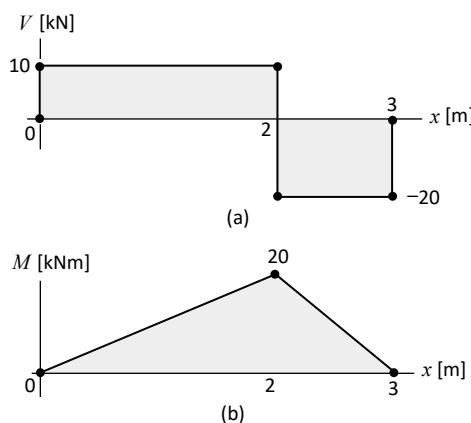


Figura 8.7

En cuanto a la ecuación 2, perteneciente al momento M entre los puntos A y B , $M = 10 \text{ kN}(x)$, describe una recta con pendiente $m = 10 \text{ kN}$, como se muestra en la figura 8.7(b), aunque entre los puntos B y C , de acuerdo con la ecuación 4, se trata de una recta con pendiente $m = 10 \text{ kN} - 30 \text{ kN} = -20 \text{ kN}$.

8.6 Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector

Establecer las relaciones entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector en una viga resulta de gran utilidad para dibujar los respectivos diagramas, como se verá a continuación.

Considere una viga AF sometida a un sistema general de carga distribuida w , entre los puntos B y D , como se muestra en la figura 8.8 (a), y se toma en el punto C un diferencial de carga w de ancho dx a una distancia x desde el punto A , representado como se indica en la figura 8.8 (b).

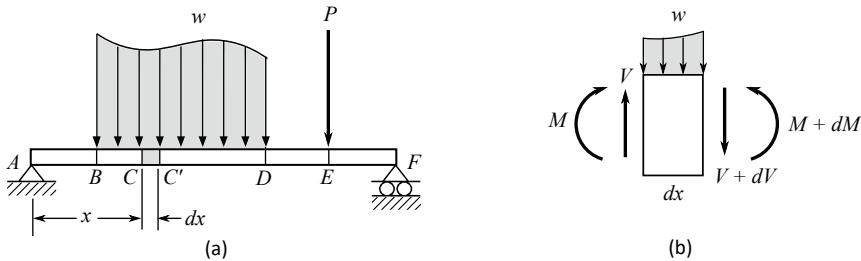


Figura 8.8

Al realizar la sumatoria de fuerzas verticales, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum F_v + \uparrow = 0: \quad V - w(dx) - (V + dV) &= 0 \\ \frac{dV}{dx} &= -w \end{aligned} \tag{8.1}$$

Al despejar, $dV = -wdx$ e integrar entre los puntos B y D :

$$\int_B^D dV = V_D - V_B = - \int_B^D wdx$$

$$V_D - V_B = -(\text{área bajo la curva de carga entre } B \text{ y } D)$$

La anterior expresión muestra que la diferencia de la fuerza cortante entre dos puntos B y D es igual al valor negativo del área bajo la curva de carga, en donde el signo indica el sentido de la carga distribuida hacia abajo. Al tomar ahora suma de momentos:

$$\sum M + \curvearrowleft = 0: \quad -M - wdx \left(\frac{dx}{2} \right) - (V + dV)dx + M + dM = 0$$

Despreciando los términos con productos de diferenciales, se tiene:

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{8.2}$$

Al despejar, $dM = Vdx$, e integrar nuevamente entre los puntos B y D :

$$\int_B^D dM = M_D - M_B = \int_B^D Vdx$$

$$M_D - M_B = (\text{área bajo la curva de cortante entre } B \text{ y } D)$$

Mostrando el hecho de que la diferencia de momentos entre dos puntos B y D es igual al área bajo la curva del cortante entre dichos puntos.

8.7 Funciones de singularidad y diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores

Las *funciones de singularidad* son expresiones que representan funciones discontinuas, y como tales resultan adecuadas para describir las relaciones existentes entre las fuerzas cortantes y los momentos flectores, con la longitud x correspondiente a la viga. Constituyen por tanto una herramienta para representar en forma de ecuaciones los diagramas de cortantes y de momentos.

En los ejemplos presentados a continuación se mostrarán los procedimientos para obtener las ecuaciones de cortantes y de momentos con sus respectivos diagramas, desarrollados por cortes y también por medio de las funciones de singularidad con el fin de analizar las ventajas de utilizar uno u otro método.

8.7.1 Ejemplo 8.2

Hallar las ecuaciones relacionadas con las fuerzas cortantes y momentos flectores y sus correspondientes diagramas, relativos a la viga $ABCDE$ cargada como se indica en la figura 8.9(a).

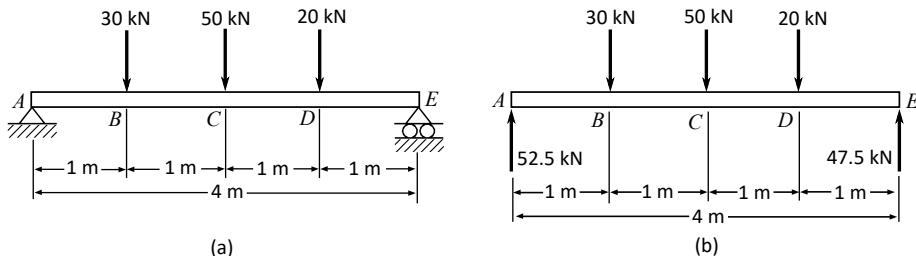


Figura 8.9

Solución

Inicialmente se elabora un diagrama de cuerpo libre de la viga $ABCDE$ y se hallan los valores de las reacciones en los puntos A y E , dados por $A = 52.5 \text{ kN}$ y $E = 47.5 \text{ kN}$, como se observa en la figura 8.9(b). Se realizan los siguientes cortes a una distancia x desde el punto A y se aplican las ecuaciones de equilibrio.

Corte 1. Intervalo ($0 < x < 1$ m), entre los puntos A y B, de acuerdo con la figura 8.10(a).

$$\begin{aligned}\sum F_v + \uparrow &= 0: 52.5 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 52.5 \text{ kN} \\ \sum M + \curvearrowright &= 0: M - (52.5 \text{ kN})(x) = 0 \\ M &= 52.5 \text{ kN}(x)\end{aligned}\tag{1}$$

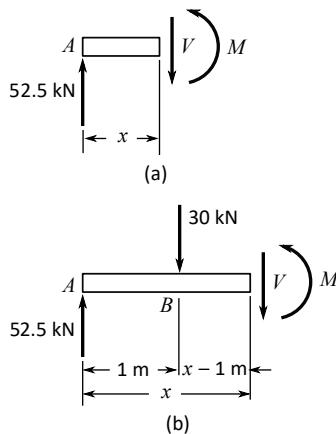


Figura 8.10

Corte 2. Intervalo ($1 \text{ m} < x < 2 \text{ m}$), entre los puntos B y C, conforme a la figura 8.10(b).

$$\begin{aligned}\sum F_v + \uparrow &= 0: 52.5 \text{ kN} - 30 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 22.5 \text{ kN} \\ \sum M + \curvearrowright &= 0: M - (52.5 \text{ kN})(x) + (30 \text{ kN})(x - 1) = 0 \\ M &= 52.5 \text{ kN}(x) - 30 \text{ kN}(x - 1)\end{aligned}\tag{2}$$

Corte 3. Intervalo ($2 \text{ m} < x < 3 \text{ m}$), entre los puntos C y D, como se ilustra en la figura 8.11(a).

$$\begin{aligned}\sum F_v + \uparrow &= 0: 52.5 \text{ kN} - 30 \text{ kN} - 50 \text{ kN} - V = 0 \quad V = -27.5 \text{ kN} \\ \sum M + \curvearrowright &= 0: M - 52.5 \text{ kN}(x) + 30 \text{ kN}(x - 1) + 50 \text{ kN}(x - 2) = 0 \\ M &= 52.5 \text{ kN}(x) - 30 \text{ kN}(x - 1) - 50 \text{ kN}(x - 2)\end{aligned}\tag{3}$$

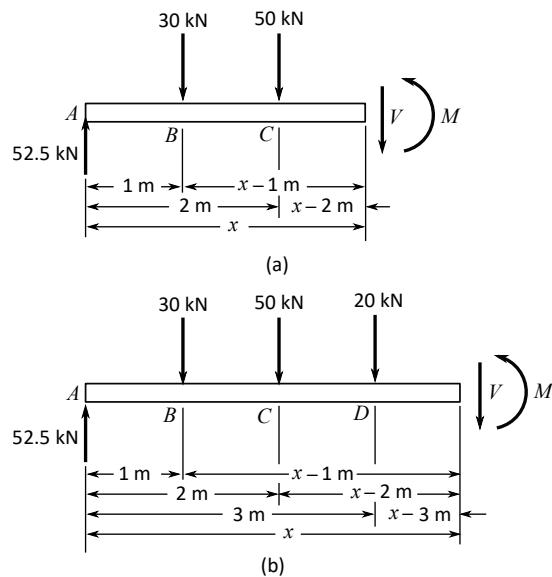


Figura 8.11

Corte 4. Intervalo ($3 \text{ m} < x < 4 \text{ m}$), entre los puntos D y E , como se indica en la figura 8.11(b).

$$\sum F_v + \uparrow = 0: 52.5 \text{ kN} - 30 \text{ kN} - 50 \text{ kN} - 20 \text{ kN} - V = 0 \quad V = -47.5 \text{ kN}$$

$$\sum M + \curvearrowright = 0: M - 52.5 \text{ kN}(x) + 30 \text{ kN}(x-1) + 50 \text{ kN}(x-2) + 20 \text{ kN}(x-3) = 0$$

$$M = 52.5 \text{ kN}(x) - 30 \text{ kN}(x-1) - 50 \text{ kN}(x-2) - 20 \text{ kN}(x-3) \quad (4)$$

Con base en la información obtenida mediante las anteriores ecuaciones de V y M , se elaboran los diagramas mostrados en la figura 8.12.

Se observa que la ecuación 4 correspondiente a momentos M para el corte 4, aunque ha sido calculada solo para el intervalo ($3 \text{ m} < x < 4 \text{ m}$), es válida también para los anteriores cortes, si se hace la salvedad en el sentido de no tomar los valores negativos que resulten de las operaciones entre paréntesis, o sea, la ecuación es válida para un determinado valor de x , siempre que se tomen dichas operaciones con resultados positivos y se descarten los negativos.

Por ejemplo, si se trata de determinar valores del primer corte, en donde ($0 < x < 1 \text{ m}$), se utiliza la ecuación 4 al descartar los valores de los paréntesis ($x-1$), ($x-2$) y ($x-3$) por presentar valores negativos, por tanto, la ecuación resultante una vez ajustada será:

$$M = 52.5 \text{ kN}(x)$$

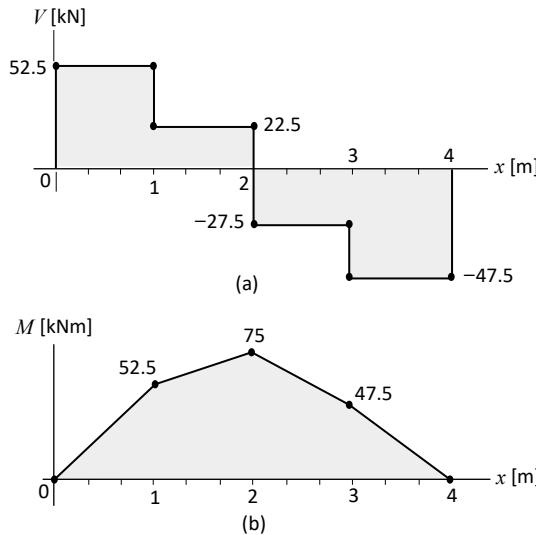


Figura 8.12

Entonces, bajo esas condiciones la ecuación 4 se convierte en una función de singularidad y para tener en cuenta el hecho de que las operaciones entre paréntesis no pueden tomar valores negativos sino positivos o cero, en su forma general, se escribe con paréntesis angulares, así:

$$M = 52.5 \text{ kN}(x) - 30 \text{ kN}(x - 1) - 50 \text{ kN}(x - 2) - 20 \text{ kN}(x - 3) \quad (5)$$

Las funciones de singularidad se pueden derivar o integrar, y por lo tanto permiten deducir entre sí las ecuaciones de carga, de cortante o de momento si se cuenta con una de ellas al aplicar las relaciones 8.1 y 8.2, dadas por:

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad \frac{dM}{dx} = V$$

Por ejemplo, si se escribe de manera conveniente la ecuación 5 correspondiente a momentos:

$$M_{(x)} = 52.5 \text{ kN}(x)^1 - 30 \text{ kN}(x - 1)^1 - 50 \text{ kN}(x - 2)^1 - 20 \text{ kN}(x - 3)^1 \quad (6)$$

Se puede obtener la de cortantes al derivar, así:

$$V_{(x)} = 52.5 \text{ kN}(x)^0 - 30 \text{ kN}(x - 1)^0 - 50 \text{ kN}(x - 2)^0 - 20 \text{ kN}(x - 3)^0 \quad (7)$$

Las dos ecuaciones anteriores permiten hallar el valor del momento $M_{(x)}$ o del cortante $V_{(x)}$, para cualquier valor de x , aunque al tratarse de funciones de singularidad, los

paréntesis angulares son sustituidos por paréntesis regulares cuando se tiene la certeza de que sus resultados son ceros o positivos, por ejemplo, al calcular el momento $M_{(x)}$, para $x = 2 \text{ m}$, la ecuación 6 se convierte en:

$$M_{(2)} = 52.5 \text{ kN}(2 \text{ m})^1 - 30 \text{ kN}(1 \text{ m})^1 - 50 \text{ kN}(0)^1 = 75 \text{ kNm}$$

Para el caso de determinar el valor del cortante $V_{(x)}$, si $x = 1.5 \text{ m}$, la ecuación 7 se expresa como sigue:

$$V_{(1.5)} = 52.5 \text{ kN}(1.5)^0 - 30 \text{ kN}(0.5)^0 = 52.5 \text{ kN} - 30 \text{ kN} = 22.5 \text{ kN}$$

Al momento de utilizar la ecuación 7 perteneciente al cortante $V_{(x)}$, se debe tener en cuenta que los puntos de aplicación de las cargas puntuales, A, B, C, D y E, de la viga se consideran críticos, por la forma de actuar de dichas fuerzas; por tal razón, en cada punto se presentan dos valores, uno, antes de y, otro, después de aplicar la carga respectiva, dados así:

Punto A, $x = 0$: $V_{(0)} = 0$, antes y $V_{(0)} = 52.5 \text{ kN}$, después

Punto B, $x = 1 \text{ m}$: $V_{(1)} = 52.5 \text{ kN}$, antes y $V_{(1)} = 22.5 \text{ kN}$, después

Punto C, $x = 2 \text{ m}$: $V_{(2)} = 22.5 \text{ kN}$, antes y $V_{(2)} = -27.5 \text{ kN}$, después

Punto D, $x = 3 \text{ m}$: $V_{(3)} = -27.5 \text{ kN}$, antes y $V_{(1)} = -47.5 \text{ kN}$, después

Punto E, $x = 4 \text{ m}$: $V_{(4)} = -47.5 \text{ kN}$, antes y $V_{(4)} = 0$, después

8.7.2 Ejemplo 8.3

Para la viga ABC con la carga distribuida mostrada en la figura 8.13(a), determinar los diagramas de cortantes y de momentos y las respectivas ecuaciones.

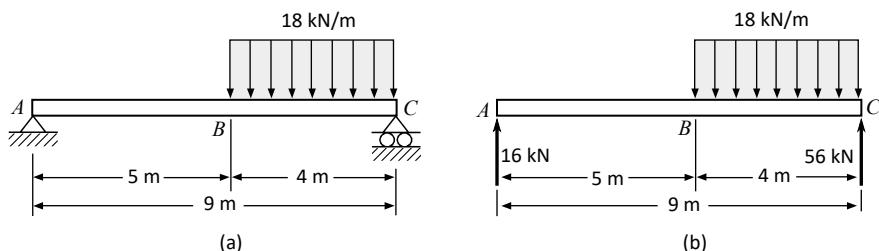


Figura 8.13

Solución

Se elabora un diagrama de cuerpo libre de la viga ABC y se determinan los valores de las reacciones en los puntos A y C , dados por $A = 16 \text{ kN}$ y $C = 56 \text{ kN}$, como se observa en la figura 8.13(b). Se realizan los siguientes cortes a una distancia x , tomados desde el punto A .

Corte 1. Intervalo ($0 < x < 5 \text{ m}$), entre los puntos A y B , de acuerdo con la figura 8.14(a).

$$\sum F_v + \uparrow = 0: 16 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 16 \text{ kN}$$

$$\sum M + \curvearrowleft = 0: M - (16 \text{ kN})(x) = 0 \quad M = 16 \text{ kN}(x)$$

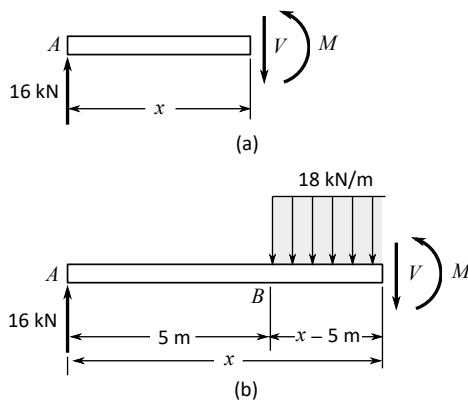


Figura 8.14

Corte 2. Intervalo ($5 \text{ m} < x < 9 \text{ m}$), entre los puntos B y C , como se muestra en la figura 8.14(b).

$$\sum F_v + \uparrow = 0: 16 \text{ kN} - (18 \text{ kN/m})(x - 5 \text{ m}) - V = 0$$

$$V = 16 \text{ kN} - (18 \text{ kN/m})(x - 5 \text{ m})$$

$$\sum M + \curvearrowleft = 0: M - (16 \text{ kN})(x) + (18 \text{ kN/m})(x - 5 \text{ m}) \frac{(x - 5 \text{ m})}{2} = 0$$

$$M = (16 \text{ kN})(x) - \frac{18 \text{ kN/m}}{2}(x - 5 \text{ m})^2$$

Las ecuaciones de singularidad correspondientes son:

$$V = 16 \text{ kN}(x)^0 - (18 \text{ kN/m})(x - 5 \text{ m})^1 \quad (1)$$

$$M = 16 \text{ kN}(x)^1 - \frac{(18 \text{ kN/m})}{2}(x - 5 \text{ m})^2 \quad (2)$$

En la figura 8.15 se muestran los respectivos diagramas.

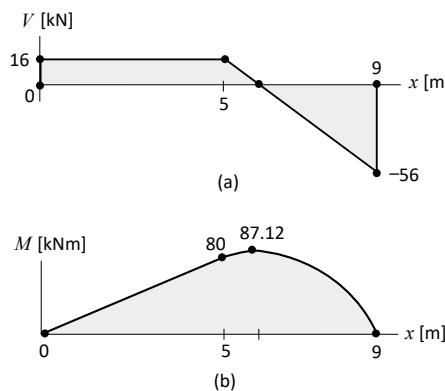


Figura 8.15

8.7.3 Ejemplo 8.4

Para la viga *ABCD* con la carga distribuida mostrada en la figura 8.16(a), determinar los diagramas de cortantes y de momentos y las respectivas ecuaciones.

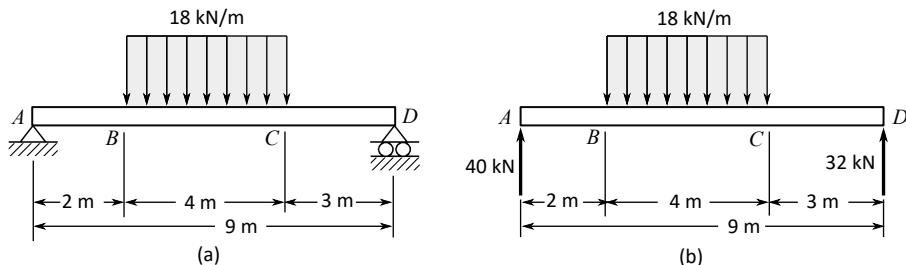


Figura 8.16

Solución

Se elabora un diagrama de cuerpo libre de la viga *ABCD* y se hallan los valores de las reacciones en los puntos *A* y *D*, dados por $A = 40 \text{ kN}$ y $D = 32 \text{ kN}$, como se observa en la figura 8.16(b). Se realizan los siguientes cortes a una distancia x , tomados desde el punto *A*.

Corte 1. Intervalo ($0 < x < 2 \text{ m}$), entre los puntos *A* y *B*, como se indica en la figura 8.17(a).

$$\sum F_v + \uparrow = 0: 40 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 40 \text{ kN}$$

$$\sum M + \curvearrowleft = 0: M - (40 \text{ kN})(x) = 0 \quad M = 40 \text{ kN}(x)$$

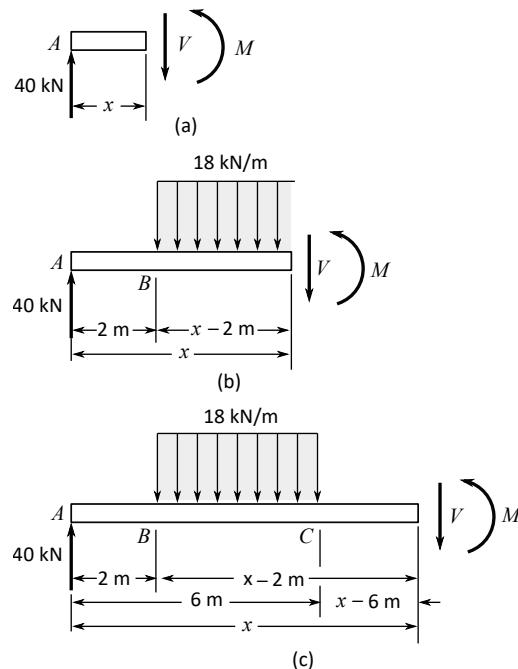


Figura 8.17

Corte 2. Intervalo ($2 \text{ m} < x < 6 \text{ m}$), entre los puntos B y C , de acuerdo con la figura 8.17(b).

$$\sum F_v + \uparrow = 0: 40 \text{ kN} - (18 \text{ kN/m})(x - 2 \text{ m}) - V = 0$$

$$V = 40 \text{ kN} - (18 \text{ kN/m})(x - 2 \text{ m})$$

$$\sum M + \curvearrowleft = 0: M - (40 \text{ kN})(x) + (18 \text{ kN/m})(x - 2 \text{ m}) \frac{(x - 2 \text{ m})}{2} = 0$$

$$M = (40 \text{ kN})(x) - \frac{(18 \text{ kN/m})}{2} (x - 2 \text{ m})^2$$

Corte 3. Intervalo ($6 \text{ m} < x < 9 \text{ m}$), entre los puntos C y D , como se aprecia en la figura 8.17(c).

$$\sum F_v + \uparrow = 0: 40 \text{ kN} - (18 \text{ kN/m})[(x - 2 \text{ m}) - (x - 6 \text{ m})] - V = 0$$

$$V = 40 \text{ kN} - (18 \text{ kN/m})(x - 2 \text{ m}) + (18 \text{ kN/m})(x - 6 \text{ m})$$

$$\sum M + \curvearrowleft = 0: M - 40 \text{ kN}(x) + (18 \text{ kN/m})[(x - 2 \text{ m}) - (x - 6 \text{ m})] \left[\frac{(x - 2 \text{ m}) + (x - 6 \text{ m})}{2} \right] = 0$$

Al despejar M :

$$M = 40 \text{ kN}(x) - (18 \text{ kN/m})[(x - 2 \text{ m}) - (x - 6 \text{ m})] \left[\frac{(x - 2 \text{ m}) + (x - 6 \text{ m})}{2} \right]$$

Al factorizar:

$$M = 40 \text{ kN}(x) - \frac{18 \text{ kN/m}}{2} [(x - 2 \text{ m}) - (x - 6 \text{ m})][(x - 2 \text{ m}) + (x - 6 \text{ m})]$$

Al resolver por diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} M &= 40 \text{ kN}(x) - \frac{18 \text{ kN/m}}{2} [(x - 2 \text{ m})^2 - (x - 6 \text{ m})^2] \\ M &= 40 \text{ kN}(x) - \frac{18 \text{ kN/m}}{2} (x - 2 \text{ m})^2 + \frac{18 \text{ kN/m}}{2} (x - 6 \text{ m})^2 \end{aligned}$$

Las respectivas ecuaciones están dadas por:

$$V = 40 \text{ kN}(x)^0 - (18 \text{ kN/m})(x - 2 \text{ m})^1 + (18 \text{ kN/m})(x - 6 \text{ m})^1 \quad (1)$$

$$M = 40 \text{ kN}(x)^1 - \frac{18 \text{ kN/m}}{2}(x - 2 \text{ m})^2 + \frac{18 \text{ kN/m}}{2}(x - 6 \text{ m})^2 \quad (2)$$

En la figura 8.18 se aprecian los correspondientes diagramas.

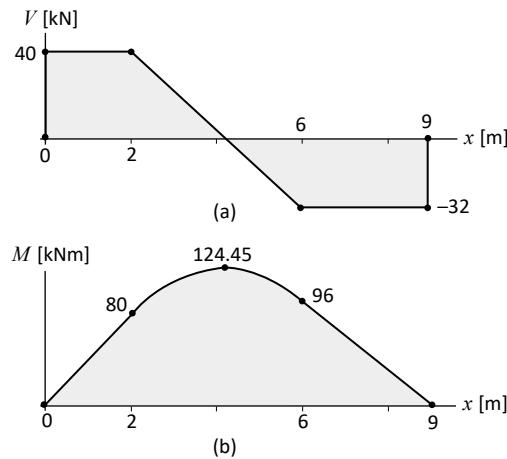


Figura 8.18

8.8 Aplicación directa de las funciones de singularidad

Los diagramas de cortantes y de momentos se pueden elaborar con base en las funciones obtenidas mediante cortes realizados a la viga, como se ha visto, aunque dichas ecuaciones se pueden desarrollar directamente, a partir de casos como los ilustrados en la tabla 8.1. Los ejemplos mostrados a continuación indican la forma de su empleo.

Tabla 8.1

CARGA	CORTANTE	MOMENTO FLECTOR
	-	$M(x) = -M_o(x - a)^0$
	$V(x) = -P(x - a)^0$	$M(x) = -P(x - a)^1$
	$V(x) = -w_o(x - a)^1$	$M(x) = -\frac{w_o}{2}(x - a)^2$

8.8.1 Ejemplo 8.5

Obtener directamente las funciones de singularidad correspondientes a la fuerza cortante V y al momento flector M para la viga cargada como se indica en la figura 8.19(a) —igual a la figura 8.9(a)—.

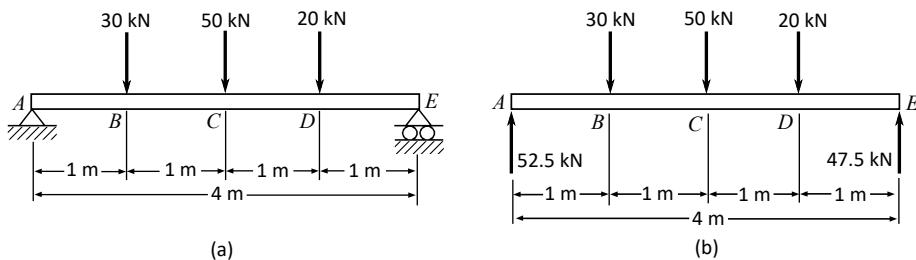


Figura 8.19

Solución

Se hallan las reacciones en los puntos A y E y se elabora el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8.19(b) —igual a la figura 8.9(b)—.

De acuerdo con la tabla 8.1, a cada fuerza puntual $-P$ le corresponde $V(x) = -P(x - a)^0$, y dado que es necesario expresar las ecuaciones de solo cuatro fuerzas, como se muestra en la figura 8.19(b), puesto que la reacción E no se toma por estar en la posición del valor máximo de x , o sea 4 m, las funciones de singularidad, teniendo en cuenta la magnitud, el signo y la posición de cada fuerza, al omitir las unidades para simplificar, quedan así:

$$V(x) = 52.5(x)^0 - 30(x - 1)^0 - 50(x - 2)^0 - 20(x - 3)^0 \quad (1)$$

$$M(x) = 52.5\langle x \rangle^1 - 30\langle x - 1 \rangle^1 - 50\langle x - 2 \rangle^1 - 20\langle x - 3 \rangle^1 \quad (2)$$

8.8.2 Ejemplo 8.6

Determinar las funciones de singularidad correspondientes a la fuerza cortante V y al momento flector M , con base en la información dada en la tabla 8.1, para la viga cargada como se indica en la figura 8.20(a) —igual a la figura 8.13(a)— y comparar con las funciones obtenidas en el ejemplo 8.3, mediante el método de cortes.

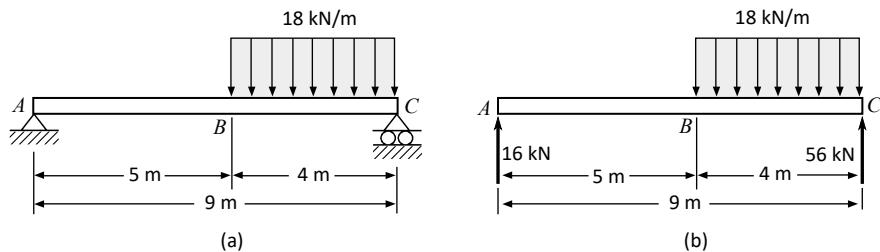


Figura 8.20

Solución

Se hallan las reacciones en los puntos A y C y se elabora el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8.20(b), en el cual se observa que dado que la reacción en C , por estar en la posición del valor máximo de x , no se tiene en cuenta, solo es necesario expresar en forma de ecuaciones la reacción en $A = 16 \text{ kN}$, desde el punto de inicio, y la carga distribuida de 18 kN/m , a partir del punto $a = 5 \text{ m}$, conforme a la tabla 8.1, por tanto, las funciones están dadas así:

$$w(x) = -(18 \text{ kN/m})(x - 5 \text{ m})^0$$

$$V(x) = 16 \text{ kN}x^0 - (18 \text{ kN/m})(x - 5 \text{ m})^1 \quad (1)$$

$$M(x) = (16 \text{ kN})x^1 - \frac{(18 \text{ kN/m})}{2}(x - 5 \text{ m})^2 \quad (2)$$

Se observa en el ejemplo 8.3, como en este, las igualdades entre las ecuaciones 1 para el cortante V y las ecuaciones 2 relativas al momento M , desarrolladas en el primer caso, mediante el método de cortes, y en el actual, por aplicación directa de las funciones de singularidad.

8.8.3 Ejemplo 8.7

Una viga en voladizo ABC empotrada en el punto A soporta una carga distribuida como se indica en la figura 8.21(a). Hallar las ecuaciones de singularidad para la fuerza cortante V y el momento M y dibujar los respectivos diagramas.

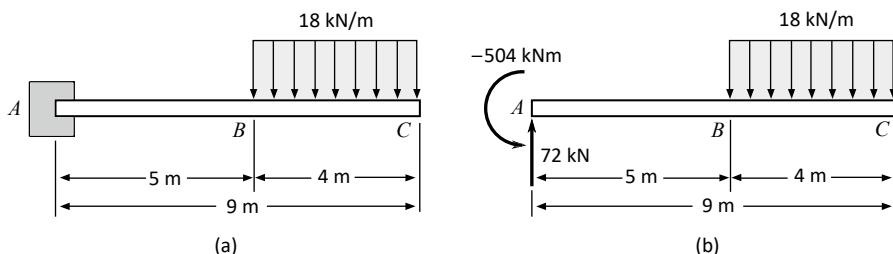


Figura 8.21

Solución

Se determinan las reacciones y se elabora el diagrama de cuerpo libre como se indica en la figura 8.21(b).

Se observa, en la figura 8.21(b), que es necesario expresar la reacción en $A = 72 \text{ kN}$ y un momento puntual $M_A = -504 \text{ kNm}$, ambos desde el punto de inicio, y además una

carga distribuida de 18 kN/m a partir del punto $a = 5$ m, por lo que, de acuerdo con la tabla 8.1, las funciones de singularidad correspondientes están dadas así:

$$w(x) = -(18 \text{ kN/m})(x - 5 \text{ m})^0$$

$$V(x) = 72 \text{ kN}(x)^0 - (18 \text{ kN/m})(x - 5 \text{ m})^1$$

$$M(x) = -504 \text{ kNm}(x)^0 + (72 \text{ kN})(x)^1 - \frac{(18 \text{ kN/m})}{2}(x - 5 \text{ m})^2$$

Los diagramas respectivos se muestran en la figura 8.22.

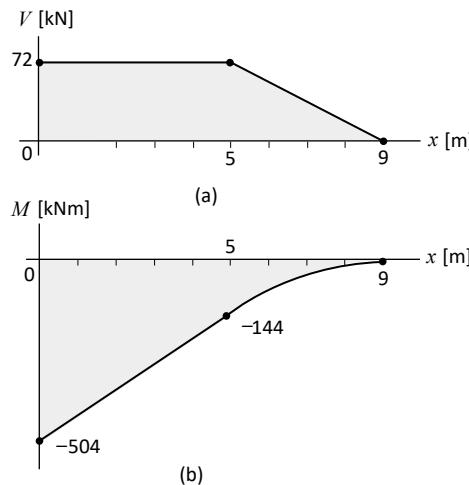


Figura 8.22

8.9 Tipos de cargas distribuidas y funciones de singularidad

Las cargas distribuidas aplicadas a las vigas se componen básicamente de cargas uniformes, triangulares crecientes, triangulares decrecientes, o de una combinación de ellas. Como las posibilidades de disposición son muchas, a continuación se analizarán algunos casos básicos, que ayudarán a obtener las configuraciones deseadas y expresarlas en forma de funciones de singularidad.

8.9.1 Carga distribuida uniforme

Caso 1.1. Carga uniforme a lo largo de toda la viga desde $x = 0$ hasta el extremo derecho, como se ilustra en la figura 8.23, dada por la ecuación 8.3.

$$w(x) = w_o \langle x \rangle^0 \quad (8.3)$$

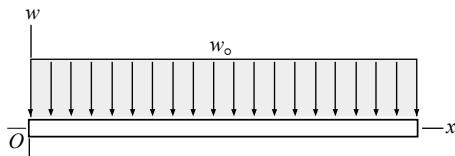


Figura 8.23

Caso 1.2. Carga uniforme desde $x = a$ hasta el extremo derecho de la viga, como se muestra en la figura 8.24, equivalente al caso 1.1 tomado a partir de $x = a$, representada mediante la función 8.4.

$$w(x) = w_o \langle x - a \rangle^0 \quad (8.4)$$

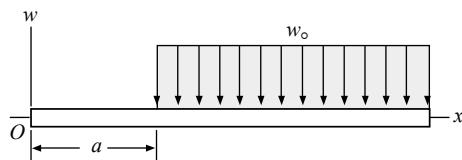


Figura 8.24

Caso 1.3. Carga uniforme desde $x = 0$ hasta $x = a$, como se indica en la figura 8.25, equivalente al caso 1.1 menos el caso 1.2, expresada mediante la relación 8.5.

$$w(x) = w_o \langle x \rangle^0 - w_o \langle x - a \rangle^0 \quad (8.5)$$

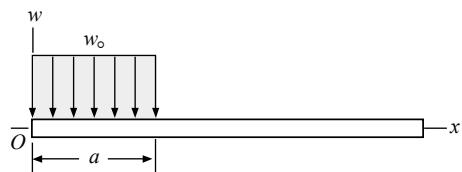


Figura 8.25

Caso 1.4. Carga uniforme desde $x = a$ hasta $x = c$, de acuerdo con la figura 8.26, equivalente al caso 1.2 tomado a partir de $x = a$, menos el mismo caso 1.2, aunque desde $x = c$, dada mediante la relación 8.6.

$$w(x) = w_o \langle x - a \rangle^0 - w_o \langle x - c \rangle^0 \quad (8.6)$$

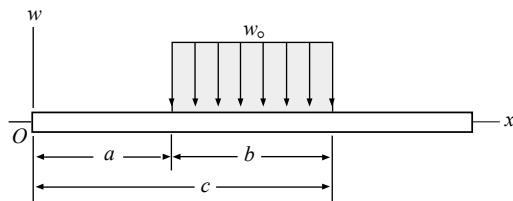


Figura 8.26

8.9.2 Carga distribuida creciente con uniforme

Caso 2.1. Carga creciente desde $x = 0$ hasta el extremo derecho de la viga, como se aprecia en la figura 8.27, con pendiente $m = w_o/b$, expresada mediante la ecuación 8.7.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}x^1 \quad (8.7)$$

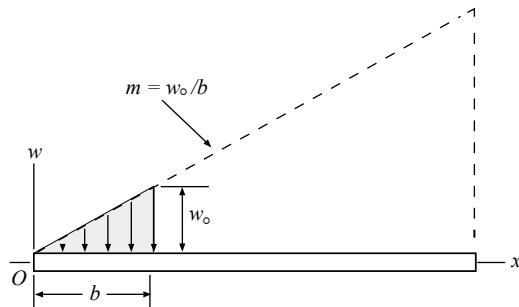


Figura 8.27

Caso 2.2. Carga creciente desde $x = a$ hasta el extremo derecho de la viga con pendiente $m = w_o/b$, como se muestra en la figura 8.28, equivalente al caso 2.1 tomado a partir de $x = a$, representada por la relación 8.8.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}(x - a)^1 \quad (8.8)$$

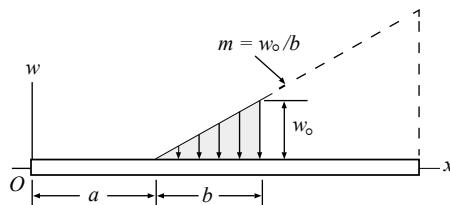


Figura 8.28

Caso 2.3. Carga combinada creciente desde $x = 0$ hasta $x = b$ más uniforme hasta el extremo derecho de la viga, como se muestra en la figura 8.29(a), como resultado de la diferencia de cargas crecientes de igual pendiente $m = w_o/b$, una desde $x = 0$, como se indica en la figura 8.29(b), y la otra desde $x = b$, como se ilustra la figura 8.29(c), equivalente al caso 2.1 menos el caso 2.2, descrita mediante la relación 8.9.

$$w(x) = \frac{w_o}{b} \langle x \rangle^1 - \frac{w_o}{b} \langle x - b \rangle^1 \quad (8.9)$$

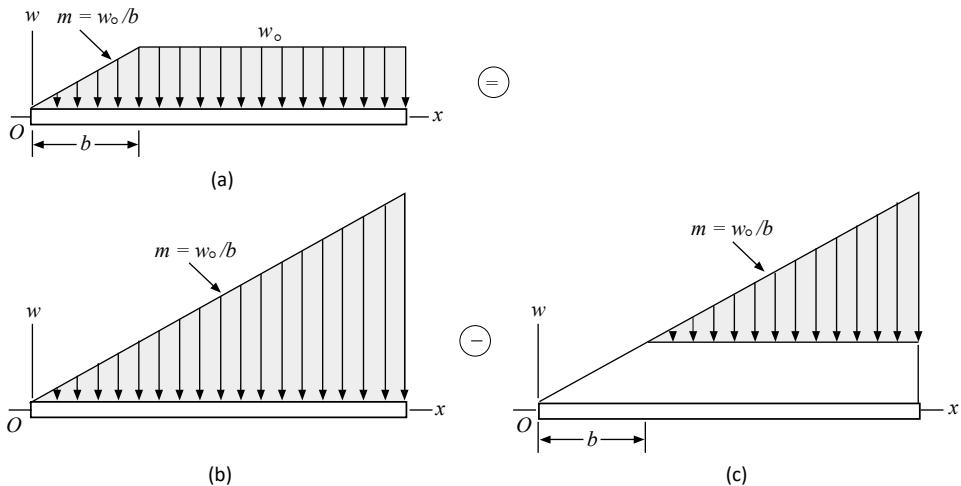


Figura 8.29

Caso 2.4. Carga creciente desde $x = 0$ hasta $x = b$ con pendiente $m = w_o/b$, como se muestra en la figura 8.30, equivalente al caso 2.3 menos el caso 1.2, desde $x = b$, dada por la ecuación 8.10.

$$w(x) = \frac{w_o}{b} \langle x \rangle^1 - \frac{w_o}{b} \langle x - b \rangle^1 - w_o \langle x - b \rangle^0 \quad (8.10)$$

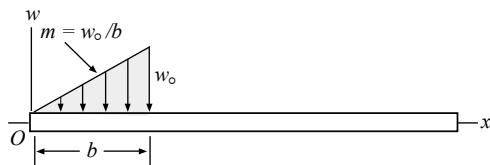


Figura 8.30

Caso 2.5. Carga creciente desde $x = a$ hasta $x = c$ con pendiente $m = w_o/b$, como se aprecia en la figura 8.31, equivalente al caso 2.4 tomado a partir de $x = a$, representada por la ecuación 8.11.

$$w(x) = \frac{w_o}{b} (x - a)^1 - \frac{w_o}{b} (x - c)^1 - w_o (x - c)^0 \quad (8.11)$$

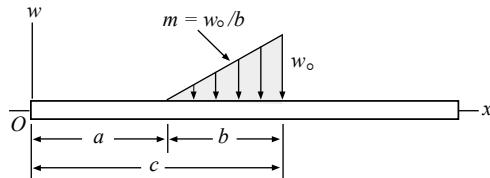


Figura 8.31

Caso 2.6. Carga creciente desde $x = a$ hasta el extremo derecho de la viga con pendiente $m = w_o/b$, como se indica en la figura 8.32, equivalente al caso 2.5, teniendo en cuenta que $x = c = a + b$, descrita mediante la relación 8.12.

$$w(x) = \frac{w_o}{b} (x - a)^1 \quad (8.12)$$

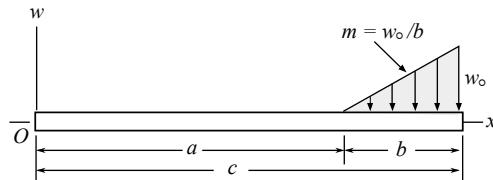


Figura 8.32

Caso 2.7. Carga combinada creciente desde $x = a$ hasta $x = c$ con pendiente $m = w_o/b$ más uniforme hasta el extremo derecho de la viga, como se indica en la figura 8.33, equivalente al caso 2.3 tomado a partir de $x = a$, dada por la ecuación 8.13.

$$w(x) = \frac{w_o}{b} (x - a)^1 - \frac{w_o}{b} (x - c)^1 \quad (8.13)$$

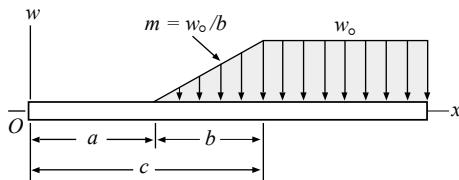


Figura 8.33

Caso 2.8. Carga combinada creciente más uniforme desde $x = a$ hasta $x = e$ con pendiente $m = w_o/b$, como se aprecia en la figura 8.34, equivalente al caso 2.7 menos el caso 1.2 tomado a partir de $x = e$, descrita mediante la relación 8.14.

$$w(x) = \frac{w_o}{b} (x - a)^1 - \frac{w_o}{b} (x - c)^1 - w_o (x - e)^0 \quad (8.14)$$

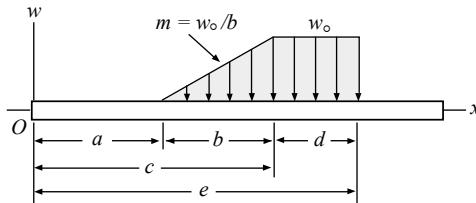


Figura 8.34

8.9.3 Carga distribuida decreciente con uniforme

Caso 3.1. Carga decreciente desde $x = a$ hasta $x = c$ con pendiente $m = -w_o/b$, como se muestra en la figura 8.35(a), como resultado de la diferencia entre una carga uniforme w_o , como se indica en la figura 8.35(b), y una carga creciente con pendiente $m = w_o/b$, conforme a la figura 8.35(c), equivalente al caso 1.4 menos el caso 2.5, dada por la ecuación 8.15.

$$w(x) = w_o (x - a)^0 - \frac{w_o}{b} (x - a)^1 + \frac{w_o}{b} (x - c)^1 \quad (8.15)$$

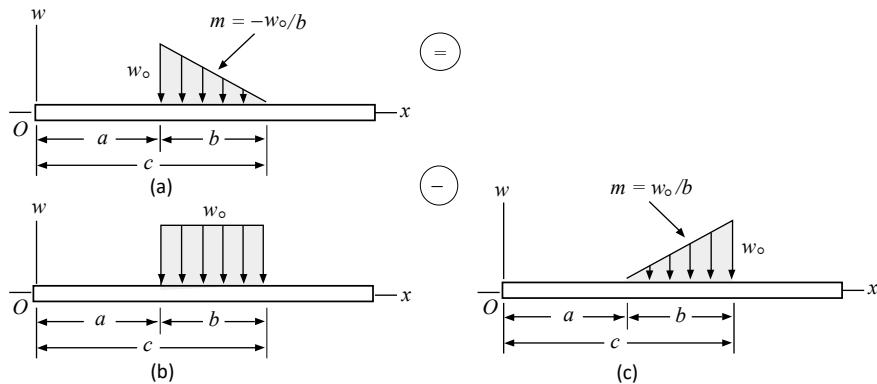


Figura 8.35

Caso 3.2. Carga decreciente desde $x = 0$ hasta $x = b$ con pendiente $m = -w_o/b$, como se muestra en la figura 8.36, equivalente al caso 3.1 tomando $a = 0$ y $c = b$, representada mediante la ecuación 8.16.

$$w(x) = w_o(x)^0 - \frac{w_o}{b}(x)^1 + \frac{w_o}{b}(x - b)^1 \quad (8.16)$$

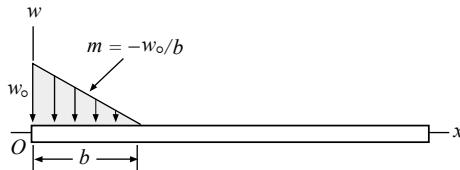


Figura 8.36

Caso 3.3. Carga decreciente desde $x = a$ hasta el extremo derecho de la viga con pendiente $m = -w_o/b$, como se ilustra en la figura 8.37, equivalente al caso 3.1 tomando $x = c$, descrita mediante la relación 8.17.

$$w(x) = w_o(x - a)^0 - \frac{w_o}{b}(x - a)^1 \quad (8.17)$$

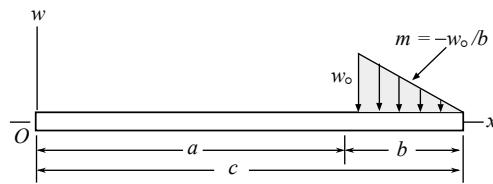


Figura 8.37

Caso 3.4. Carga uniforme desde $x = o$ hasta $x = a$ y decreciente hasta el extremo derecho de la viga con pendiente $m = -w_o/b$, como se aprecia en la figura 8.38, equivalente al caso 1.3 más el caso 3.3, dada mediante la ecuación 8.18.

$$w(x) = w_o \langle x \rangle^0 - \frac{w_o}{b} \langle x - a \rangle^1 \quad (8.18)$$

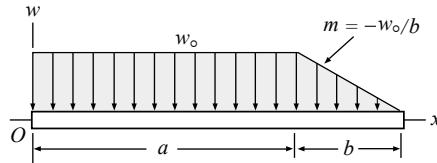


Figura 8.38

Caso 3.5. Carga uniforme desde $x = a$ hasta $x = c$ y decreciente hasta el extremo derecho de la viga con pendiente $m = -w_o/d$, como se ilustra en la figura 8.39, equivalente al caso 1.4 más el caso 3.3, representada por la relación 8.19.

$$w(x) = w_o \langle x - a \rangle^0 - \frac{w_o}{d} \langle x - c \rangle^1 \quad (8.19)$$

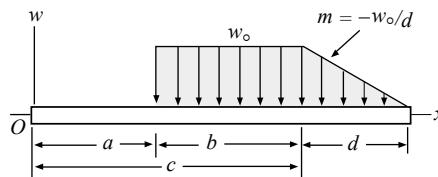


Figura 8.39

Caso 3.6. Carga uniforme desde $x = a$ hasta $x = c$ y decreciente hasta $x = e$ con pendiente $m = -w_o/d$, como se aprecia en la figura 8.40, equivalente al caso 1.4 más el caso 3.1, descrita por la ecuación 8.20.

$$w(x) = w_o(x - a)^0 - \frac{w_o}{d}(x - c)^1 + \frac{w_o}{d}(x - e)^1 \quad (8.20)$$

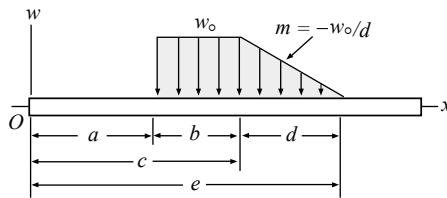


Figura 8.40

8.9.4 Cargas distribuidas crecientes y decrecientes

Caso 4.1. Carga creciente desde $x = o$ hasta $x = b$ con pendiente $m = w_o/b$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta el extremo derecho de la viga, como se observa en la figura 8.41, equivalente al caso 2.4 más el caso 3.3, dada por la ecuación 8.21.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}(x)^1 - \frac{w_o}{b}(x - b)^1 - \frac{w_o}{d}(x - b)^1 \quad (8.21)$$

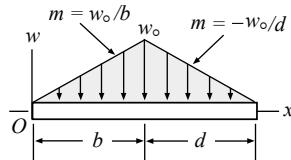


Figura 8.41

Caso 4.2. Carga creciente desde $x = a$ hasta $x = c$ con pendiente $m = w_o/b$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta el extremo derecho de la viga, como se aprecia en la figura 8.42, equivalente al caso 4.1 tomado a partir de $x = a$, representada mediante la relación 8.22.

$$w(x) = \frac{w_o}{b}(x - a)^1 - \frac{w_o}{b}(x - c)^1 - \frac{w_o}{d}(x - c)^1 \quad (8.22)$$

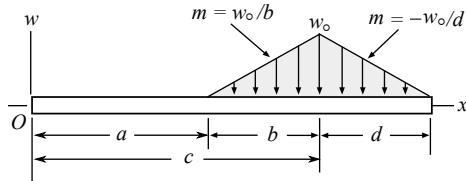


Figura 8.42

Caso 4.3. Carga creciente desde $x = 0$ hasta $x = b$ con pendiente $m = w_0/b$ y decreciente con pendiente $m = -w_0/d$ hasta $x = c$, como se observa en la figura 8.43, equivalente al caso 2.4 más el caso 3.1, expresada mediante la función 8.23.

$$w(x) = \frac{w_0}{b} \langle x \rangle^1 - \frac{w_0}{b} \langle x - b \rangle^1 - \frac{w_0}{d} \langle x - b \rangle^1 + \frac{w_0}{d} \langle x - c \rangle^1 \quad (8.23)$$

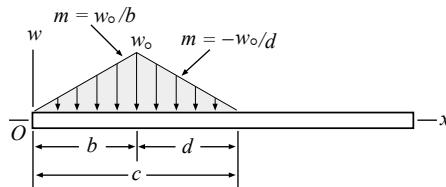


Figura 8.43

Caso 4.4. Carga creciente desde $x = a$ hasta $x = c$ con pendiente $m = w_0/b$ y decreciente con pendiente $m = -w_0/d$ hasta $x = e$, como se muestra en la figura 8.44, equivalente al caso 4.3 tomado a partir de $x = a$, dada por la ecuación 8.24.

$$w(x) = \frac{w_0}{b} \langle x - a \rangle^1 - \frac{w_0}{b} \langle x - c \rangle^1 - \frac{w_0}{d} \langle x - c \rangle^1 + \frac{w_0}{d} \langle x - e \rangle^1 \quad (8.24)$$

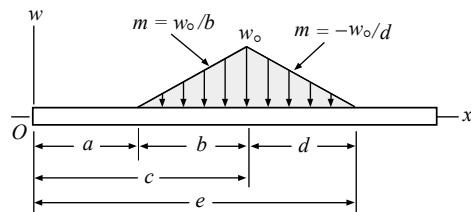


Figura 8.44

Caso 4.5. Carga creciente desde $x = 0$ hasta $x = b$ con pendiente $m = w_o/b$ uniforme hasta $x = e$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta el extremo derecho de la viga, como se observa en la figura 8.45, equivalente al caso 2.4 más el caso 3.5, descrita mediante la ecuación 8.25.

$$w(x) = \frac{w_o}{b} \langle x \rangle^1 - \frac{w_o}{b} \langle x - b \rangle^1 - \frac{w_o}{d} \langle x - e \rangle^1 \quad (8.25)$$

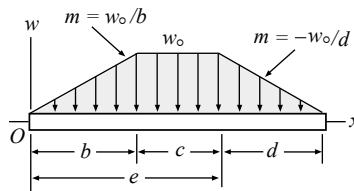


Figura 8.45

Caso 4.6. Carga creciente desde $x = a$ hasta $x = e$ con pendiente $m = w_o/b$ uniforme hasta $x = f$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta el extremo derecho de la viga, como se ilustra en la figura 8.46, equivalente al caso 4.5 tomado a partir de $x = a$, representada mediante la función 8.26.

$$w(x) = \frac{w_o}{b} \langle x - a \rangle^1 - \frac{w_o}{b} \langle x - e \rangle^1 - \frac{w_o}{d} \langle x - f \rangle^1 \quad (8.26)$$

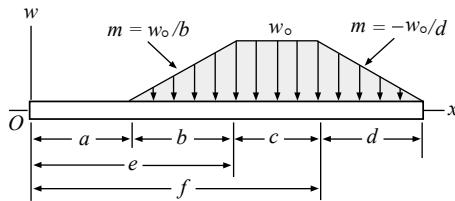


Figura 8.46

Caso 4.7. Carga creciente desde $x = 0$ hasta $x = b$ con pendiente $m = w_o/b$ uniforme hasta $x = b$ y decreciente con pendiente $m = -w_o/d$ hasta $x = f$, como se observa en la figura 8.47, equivalente al caso 2.4 más el caso 3.6, dada por la ecuación 8.27.

$$w(x) = \frac{w_o}{b} \langle x \rangle^1 - \frac{w_o}{b} \langle x - b \rangle^1 - \frac{w_o}{d} \langle x - e \rangle^1 + \frac{w_o}{d} \langle x - f \rangle^1 \quad (8.27)$$

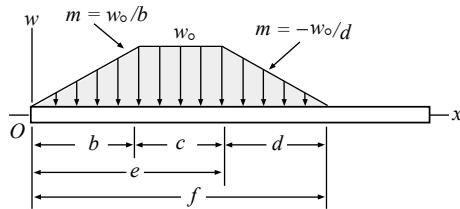


Figura 8.47

Caso 4.8. Carga creciente desde $x = a$ hasta $x = e$ con pendiente $m = w_0/b$ uniforme hasta $x = f$ y decreciente con pendiente $m = -w_0/d$ hasta $x = g$, como se aprecia en la figura 8.48, equivalente al caso 4.7 tomado a partir de $x = a$, representada mediante la ecuación 8.28.

$$w(x) = \frac{w_0}{b} (x - a)^1 - \frac{w_0}{b} (x - e)^1 - \frac{w_0}{d} (x - f)^1 + \frac{w_0}{d} (x - g)^1 \quad (8.28)$$

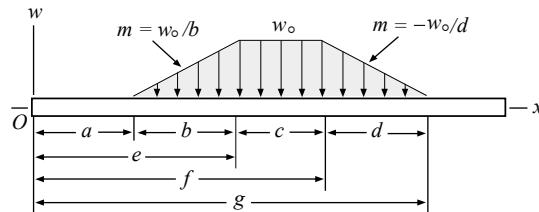


Figura 8.48

8.10 Soluciones de vigas con cargas distribuidas por funciones de singularidad

El procedimiento general para expresar las fuerzas cortantes y los momentos flectores, en vigas que contienen cargas distribuidas —uniformes, crecientes o decrecientes—, aplicando las funciones de singularidad, consta de los siguientes pasos:

- 1. Identificar el tipo de carga distribuida, de acuerdo con los casos vistos en las secciones 8.9.1 hasta 8.9.4, y expresarla en forma de funciones de singularidad dada por $w(x)$.

2. Obtener $V(x)$ al integrar $w(x)$, con el signo invertido, teniendo en cuenta la relación entre carga y fuerza cortante, dada mediante la expresión 8.1, y adicionar las fuerzas puntuales requeridas, con sus posiciones y signos, conforme a la tabla 8.1.
3. Integrar a $V(x)$, para conseguir a $M(x)$, con base en la relación entre fuerza cortante y momento flector, dada por la ecuación 8.2, y agregar los momentos puntuales necesarios, con sus posiciones y signos, de acuerdo con la tabla 8.1.

Los ejemplos resueltos a continuación ilustrarán acerca del procedimiento indicado.

8.10.1 Ejemplo 8.8

Determinar las funciones de singularidad para la fuerza cortante V y el momento flector M de la viga cargada como se indica en la figura 8.49(a) —igual a la figura 8.16(a)— y comparar con las funciones definidas en el ejemplo 8.4, mediante el método de cortes.

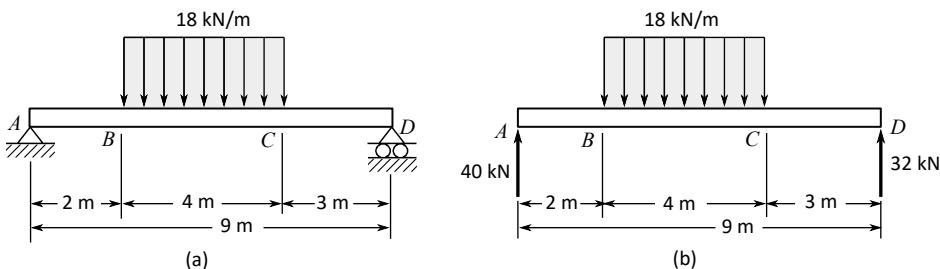


Figura 8.49

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga $ABCD$ y se hallan los valores de las reacciones en los puntos A y D , dados por $A = 40 \text{ kN}$ y $D = 32 \text{ kN}$, como se observa en la figura 8.49(b) —igual a la figura 8.16(b)—.

Al aplicar el procedimiento descrito en el numeral 8.10, se observa que la viga contiene una carga distribuida uniforme desde el punto B hasta el punto C , como se aprecia en la figura 8.49(a), por lo tanto, se identifica como el caso 1.4, expresada mediante la ecuación 8.6, así:

$$w(x) = w_0(x - a)^0 - w_0(x - c)^0$$

Al sustituir valores y omitir las unidades para simplificar, queda así:

$$w(x) = 18(x - 2)^0 - 18(x - 6)^0$$

Al integrar $w(x)$ con el signo invertido y adicionar las cargas puntuales, se tiene:

$$V(x) = 40(x)^0 - 18(x - 2)^1 + 18(x - 6)^1 \quad (1)$$

Al integrar $V(x)$, y debido a que no existen momentos puntuales, se da:

$$M(x) = 40(x)^1 - 9(x - 2)^2 + 9(x - 6)^2 \quad (2)$$

Son de notar, en relación con el ejemplo 8.4 y el actual, las igualdades entre las ecuaciones 1, para el cortante V y las ecuaciones 2, correspondientes al momento M , desarrolladas en el primer caso, mediante el método de cortes y en el presente caso, por aplicación directa de las funciones de singularidad.

8.10.2 Ejemplo 8.9

Para la viga $ABCDE$ con la carga distribuida como se indica en la figura 8.50, expresar las respectivas funciones de singularidad y utilizarlas para calcular los valores de V y de M , para los puntos A, B, C, D y E , así como para el punto donde el momento alcanza el valor máximo, y dibujar, además, los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores correspondientes.

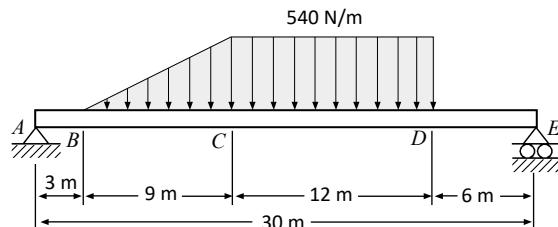


Figura 8.50

Solución

Se realiza el diagrama de cuerpo libre de la viga $ABCDE$ y se hallan las magnitudes de las reacciones en $A = 4\,293$ N y $E = 4\,617$ N, como se ilustra en la figura 8.51.

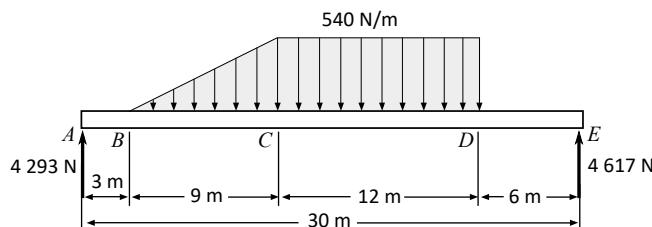


Figura 8.51

Como se observa en la figura 8.51, la viga contiene una carga distribuida compuesta creciente desde B hasta C y uniforme hasta el punto D , por lo tanto, se identifica como el caso 2.8 correspondiente a la ecuación 8.14, expresada así:

$$w(x) = \frac{w_o}{b} (x - a)^1 - \frac{w_o}{b} (x - c)^1 - w_o (x - e)^0$$

Al reemplazar los datos correspondientes y omitir las unidades, se tiene:

$$w(x) = \frac{540}{9} (x - 3)^1 - \frac{540}{9} (x - 12)^1 - 540 (x - 24)^0$$

Después de simplificar:

$$w(x) = 60(x - 3)^1 - 60(x - 12)^1 - 540(x - 24)^0 \quad (1)$$

Al integrar, invertir los signos y adicionar las cargas puntuales:

$$V(x) = 4293(x)^0 - 30(x - 3)^2 + 30(x - 12)^2 + 540(x - 24)^1 \quad (2)$$

Al integrar nuevamente y dado que no existen momentos puntuales, se obtiene:

$$M(x) = 4293(x)^1 - 10(x - 3)^3 + 10(x - 12)^3 + 270(x - 24)^2 \quad (3)$$

En una viga, los puntos donde existen reacciones, o fuerzas puntuales, o donde inician o finalizan cargas distribuidas, como los puntos A , B , C , D y E , de la viga mostrada en la figura 8.50, son importantes para analizar porque pueden constituir los denominados *puntos críticos*, donde se presentan los máximos valores de fuerzas cortantes o de momentos flectores.

Para determinarlos es necesario realizar un seguimiento de los valores en cada intervalo, tanto de las fuerzas cortantes como de los momentos, con la ayuda de las funciones $V(x)$ y $M(x)$ dadas, las cuales en el presente caso corresponden a las ecuaciones 2 y 3, respectivamente.

Se sustituyen valores de x en la relación 2, para analizar $V(x)$, teniendo en cuenta que se trata de ecuaciones de singularidad en donde las cantidades entre paréntesis no pueden tomar valores negativos, sino positivos o cero, así:

$$\text{Punto } A, x = 0: V_{(0)} = A = 4293 \text{ N} \quad V_{(0)} = \mathbf{4293 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } B, x = 3 \text{ m: } V_{(3)} = 4293x^0 [\text{N}] = 4293 \text{ N} \quad V_{(3)} = \mathbf{4293 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } C, x = 12 \text{ m: } V_{(12)} = 4293x^0 - 30(x - 3)^2 [\text{N}] = 4293 - 30(9)^2 [\text{N}] = 1863 \text{ N}$$

$$V_{(12)} = \mathbf{1863 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } D, x = 24 \text{ m: } V_{(24)} = 4293x^0 - 30(x - 3)^2 + 30(x - 12)^2 [\text{N}]$$

$$= 4293 - 30(21)^2 + 30(12)^2 [\text{N}] = -4617 \text{ N} \quad V_{(24)} = \mathbf{-4617 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } E, x = 30 \text{ m: } V_{(30)} = 4293x^0 - 30(x - 3)^2 + 30(x - 12)^2 + 540(x - 24)^1 [\text{N}]$$

$$= 4293 - 30(27)^2 + 30(18)^2 + 540(6)^1 [\text{N}] = -4617 \text{ N} \quad V_{(30)} = \mathbf{-4617 \text{ N}}$$

Con la información anterior y la naturaleza de la ecuación, de acuerdo con cada intervalo, se obtiene la gráfica de V en función de x , o diagrama de fuerzas cortantes, presentado en la figura 8.52(a).

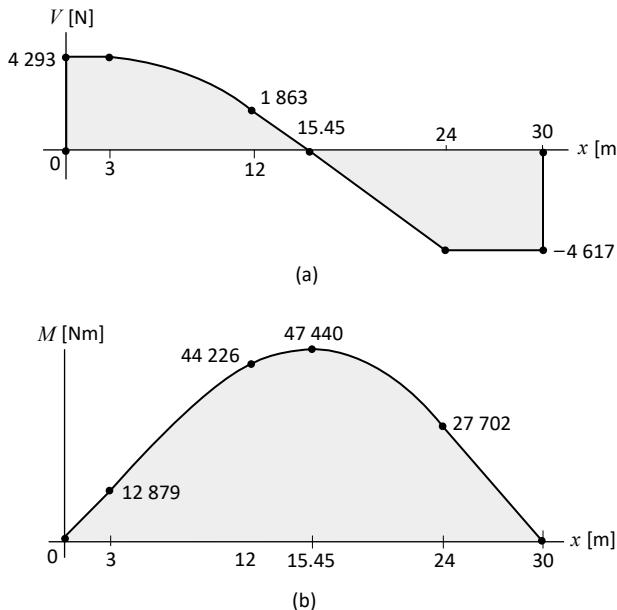


Figura 8.52

Se observa que entre los puntos C y D la función pasa de un valor positivo (+1 863 N) a un valor negativo (-4 617 N), lo cual implica que entre dichos puntos se presenta un valor de cero.

Conforme a los procedimientos matemáticos de máximos y mínimos de funciones, aplicados en el presente caso, al igualar a cero $V(x)$, la cual representa la derivada de $M(x)$, se obtiene el valor máximo o mínimo de $M(x)$, expresado mediante la ecuación 8.2, así:

$$V = \frac{dM}{dx} = 0 \quad M = \text{máximo o mínimo}$$

Por lo tanto, se iguala a cero la función de $V(x)$ en el intervalo ($12 \text{ m} < x < 24 \text{ m}$), para hallar el valor correspondiente de x , y al omitir las unidades, se tiene:

$$V(x) = 4293x^0 - 30(x - 3)^2 + 30(x - 12)^2 = 0$$

$$4293 = 30(x - 3)^2 - 30(x - 12)^2$$

$$\frac{4293}{30} = (x - 3)^2 - (x - 12)^2 = [(x - 3) + (x - 12)][(x - 3) - (x - 12)]$$

$$143.1 = [(2x - 15)][(9)] = 18x - 135 \quad 18x = 278.1 \quad x = 15.45 \text{ m}$$

El máximo valor del momento se determina al sustituir valores en la ecuación (3), como sigue:

$$M(x) = 4293x^1 - 10(x-3)^3 + 10(x-12)^3 + 270(x-24)^2 \text{ [Nm]}$$

$$M_{(15.45)} = 4293(15.45) - 10(12.45)^3 + 10(3.45)^3 \text{ [Nm]} = 47\,440 \text{ Nm} \quad M_{(15.45)} = \mathbf{47\,440 \text{ Nm}}$$

Los valores de los momentos en los puntos A, B, C, D y E se hallan así:

$$\text{Punto } A, x = 0: M_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\text{Punto } B, x = 3 \text{ m}: M_{(3)} = 4293x^1 = 4293(3) \text{ [Nm]} = 12\,879 \text{ Nm} \quad M_{(3)} = \mathbf{12\,879 \text{ Nm}}$$

$$\text{Punto } C, x = 12 \text{ m}: M_{(12)} = 4293x^1 - 10(x-3)^3 \text{ [Nm]} = 4293(12) - 10(9)^3 \text{ [Nm]} = 44\,226 \text{ Nm}$$

$$M_{(12)} = \mathbf{44\,226 \text{ Nm}}$$

$$\text{Punto } D, x = 24 \text{ m}: M_{(24)} = 4293x^1 - 10(x-3)^3 + 10(x-12)^3 \text{ [Nm]}$$

$$= 4293(24) - 10(21)^3 + 10(12)^3 \text{ [Nm]} = 27\,702 \text{ Nm} \quad M_{(24)} = \mathbf{27\,702 \text{ Nm}}$$

$$\text{Punto } E, x = 30 \text{ m}: M_{(30)} = 4293x^1 - 10(x-3)^3 + 10(x-12)^3 + 270(x-24)^2 \text{ [Nm]}$$

$$= 4293(30) - 10(27)^3 + 10(18)^3 + 270(6)^2 \text{ [Nm]} = 0 \quad M_{(30)} = \mathbf{0}$$

De acuerdo con los valores de los momentos hallados y la naturaleza de la función, en cada intervalo se obtiene la gráfica de M en función de x , o diagrama de momentos flectores, como se aprecia en la figura 8.52(b).

8.10.3 Ejemplo 8.10

Con base en la viga $ABCDEF$ cargada como se muestra en la figura 8.53, expresar las funciones de singularidad correspondientes y aplicarlas para determinar los valores de V y de M , para los puntos A, B, C, D, E y F , así como para el punto donde el momento alcanza el valor máximo, y dibujar, también, los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores.

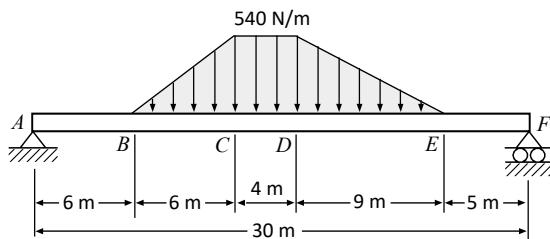


Figura 8.53

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga $ABCDEF$ y se hallan los valores de las reacciones en $A = 3\,123 \text{ N}$ y $F = 3\,087 \text{ N}$, como se ilustra en la figura 8.54.

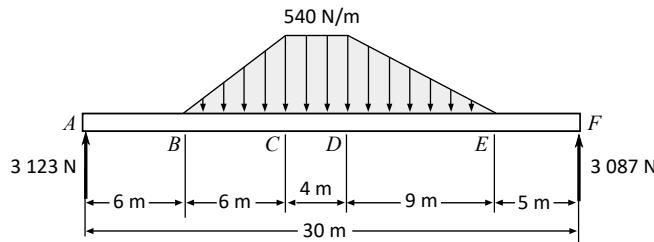


Figura 8.54

La viga $ABCDEF$, como se muestra en la figura 8.54, contiene una carga distribuida compuesta creciente desde B hasta C uniforme hasta el punto D y decreciente hasta el punto E , por lo tanto, se le aplica el caso 4.8, expresada mediante la ecuación 8.28, así:

$$w(x) = \frac{w_o}{b}(x - a)^1 - \frac{w_o}{b}(x - e)^1 - \frac{w_o}{d}(x - f)^1 + \frac{w_o}{d}(x - g)^1$$

Al tomar los datos correspondientes y omitir las unidades, se tiene:

$$w(x) = \frac{540}{6}(x - 6)^1 - \frac{540}{6}(x - 12)^1 - \frac{540}{9}(x - 16)^1 + \frac{540}{9}(x - 25)^1$$

Al integrar $w(x)$ con el signo invertido y agregar las cargas puntuales, resulta:

$$V(x) = 3\,123(x)^0 - 45(x - 6)^2 + 45(x - 12)^2 + 30(x - 16)^2 - 30(x - 25)^2$$

Al integrar $V(x)$ y dado que no existen momentos puntuales, se obtiene:

$$M(x) = 3\,123(x)^1 - 15(x - 6)^3 + 15(x - 12)^3 + 10(x - 16)^3 - 10(x - 25)^3$$

Se analizan los puntos clave A, B, C, D, E y F , en relación con $V(x)$, así:

$$\text{Punto } A, x = 0: V_{(0)} = A = 3\,123 \text{ N} \quad V_{(0)} = \mathbf{3\,123 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } B, x = 6 \text{ m}: V_{(6)} = 3\,123x^0 [\text{N}] = 3\,123 \text{ N} \quad V_{(6)} = \mathbf{3\,123 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } C, x = 12 \text{ m}: V_{(12)} = 3\,123x^0 - 45(x - 6)^2 [\text{N}] = 3\,123 - 45(6)^2 [\text{N}] = 1\,503 \text{ N}$$

$$V_{(12)} = \mathbf{1\,503 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } D, x = 16 \text{ m}: V_{(16)} = 3\,123x^0 - 45(x - 6)^2 + 45(x - 12)^2 [\text{N}]$$

$$= 3\,123 - 45(10)^2 + 45(4)^2 [\text{N}] = -657 \text{ N} \quad V_{(16)} = \mathbf{-657 \text{ N}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Punto } E, x = 25 \text{ m: } V_{(25)} &= 3123x^0 - 45(x-6)^2 + 45(x-12)^2 + 30(x-16)^2 [\text{N}] \\
 &= 3123 - 45(19)^2 + 45(13)^2 + 30(9)^2 [\text{N}] = -3087 \text{ N} \quad V_{(25)} = -3087 \text{ N} \\
 \text{Punto } F, x = 30 \text{ m: } V_{(30)} &= 3123x^0 - 45(x-6)^2 + 45(x-12)^2 + 30(x-16)^2 - 30(x-25)^2 [\text{N}] \\
 &= 3123 - 45(24)^2 + 45(18)^2 + 30(14)^2 - 30(5)^2 [\text{N}] = -3087 \text{ N} \quad V_{(30)} = -3087 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Con base en los valores obtenidos, se realiza el diagrama de fuerzas cortantes mostrado en la figura 8.55(a).

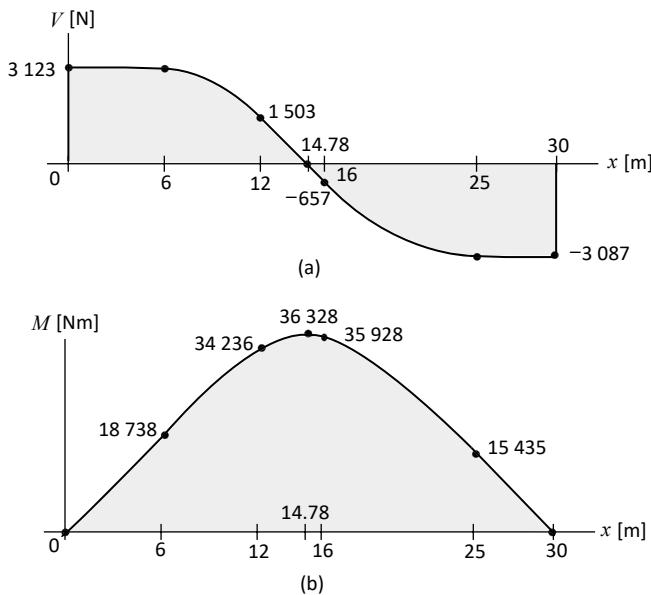


Figura 8.55

Se determina ahora el valor de x donde la función $V(x)$ es igual a cero, para hallar el punto donde el momento es máximo, para lo cual se observa, de acuerdo con la figura 8.55(a), que corresponde al intervalo entre C y D , o sea a $(12 \text{ m} < x < 16 \text{ m})$, y al reemplazar valores, se tiene:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= 3123x^0 - 45(x-6)^2 + 45(x-12)^2 = 0 \\
 3123 &= 45(x-6)^2 - 45(x-12)^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{3123}{45} = (x-6)^2 - (x-12)^2 = [(x-6) + (x-12)][(x-6) - (x-12)]$$

$$69.4 = [(2x-18)][(6)] = 12x - 108 \quad 12x = 177.4 \quad x = 14.78 \text{ m}$$

Se sustituye este valor, en la ecuación $M(x)$, para hallar el momento máximo, así:

$$M(x) = 3\,123x^1 - 15(x - 6)^3 + 15(x - 12)^3 \text{ [Nm]}$$

$$M_{(14.78)} = 3\,123(14.78) - 15(8.78)^3 + 15(2.78)^3 \text{ [Nm]} = 36\,328 \text{ Nm} \quad M_{(14.78)} = \mathbf{36\,328 \text{ Nm}}$$

Se definen los valores de los momentos en los puntos A, B, C, D, E y F , así:

$$\text{Punto } A, x = 0: \quad M_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\text{Punto } B, x = 6 \text{ m}: \quad M_{(6)} = 3\,123x^1 \text{ Nm} = 3\,123(6) \text{ Nm} = 18\,738 \text{ Nm} \quad M_{(6)} = \mathbf{18\,738 \text{ Nm}}$$

$$\text{Punto } C, x = 12 \text{ m}: \quad M_{(12)} = 3\,123x^1 - 15(x - 6)^3 \text{ [Nm]} = 3\,123(12) - 15(6)^3 \text{ [Nm]} = 34\,236 \text{ Nm}$$

$$M_{(12)} = \mathbf{34\,236 \text{ Nm}}$$

$$\text{Punto } D, x = 16 \text{ m}: \quad M_{(16)} = 3\,123x^1 - 15(x - 6)^3 + 15(x - 12)^3 \text{ [Nm]}$$

$$= 3\,123(16) - 15(10)^3 + 15(4)^3 \text{ [Nm]} = 35\,928 \text{ Nm} \quad M_{(16)} = \mathbf{35\,928 \text{ Nm}}$$

$$\text{Punto } E, x = 25 \text{ m}: \quad M_{(25)} = 3\,123x^1 - 15(x - 6)^3 + 15(x - 12)^3 + 10(x - 16)^3 \text{ [Nm]}$$

$$= 3\,123(25) - 15(19)^3 + 15(13)^3 + 10(9)^3 \text{ [Nm]} = 15\,435 \text{ Nm} \quad M_{(25)} = \mathbf{15\,435 \text{ Nm}}$$

$$\text{Punto } F, x = 30 \text{ m}: \quad M_{(30)} = 3\,123x^1 - 15(x - 6)^3 + 15(x - 12)^3 + 10(x - 16)^3 - 10(x - 25)^3 \text{ [Nm]}$$

$$= 3\,123(30) - 15(24)^3 + 15(18)^3 + 10(14)^3 - 10(5)^3 \text{ [Nm]} = 0 \quad M_{(30)} = \mathbf{0}$$

Teniendo en cuenta la naturaleza de la función en cada intervalo y los valores hallados, se realiza el diagrama de momentos, indicado en la figura 8.55(b).

8.10.4 Ejemplo 8.11

En relación con la viga $ABCDE$ con la carga distribuida como se indica en la figura 8.56, enunciar las ecuaciones de singularidad correspondientes y emplearlas para determinar los valores de V y de M , en los puntos A, B, C, D y E , así como en el punto donde el momento alcanza el valor máximo, y elaborar, además, los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores.

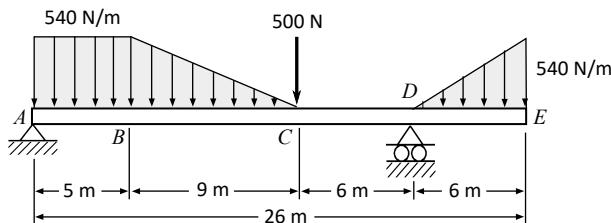


Figura 8.56

Solución

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga $ABCDE$ y se hallan los valores de las reacciones en $A = 3\,646.5 \text{ N}$ y $D = 3\,603.5 \text{ N}$, como se aprecia en la figura 8.57.

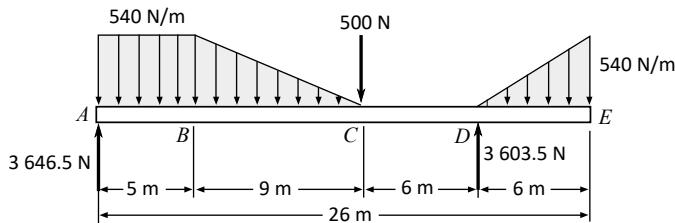


Figura 8.57

Se observa en la figura 8.57 que la viga $ABCDE$ contiene dos cargas distribuidas relacionadas como sigue:

- *Puntos A, B y C:* carga uniforme desde A hasta B y decreciente hasta C, la cual se identifica como el caso 3.6, ecuación 8.20, tomando $a = 0$, $c = 5 \text{ m}$ y $e = 14 \text{ m}$, por lo tanto, omitiendo unidades, queda expresada así:

$$w(x) = w_o(x - a)^0 - \frac{w_o}{d}(x - c)^1 + \frac{w_o}{d}(x - e)^1 \quad (1)$$

$$w(x) = 540(x)^0 - \frac{540}{9}(x - 5)^1 + \frac{540}{9}(x - 14)^1 \quad (2)$$

- *Puntos D y E:* carga creciente desde D hasta el extremo derecho E, equivalente al caso 2.6, ecuación 8.12, siendo $a = 20 \text{ m}$, la cual al omitir las unidades queda así:

$$w(x) = \frac{w_o}{b}(x - a)^1 \quad (3)$$

$$w(x) = \frac{540}{6}(x - 20)^1 \quad (4)$$

La carga distribuida resultante queda definida, al sumar las ecuaciones 2 y 4, mediante la siguiente función:

$$w(x) = 540x^0 - \frac{540}{9}x^1 + \frac{540}{9}(x-5)^1 + \frac{540}{6}(x-14)^1$$

Al integrar e invertir los signos de $w(x)$ y adicionar las cargas puntuales, para determinar $V(x)$, se tiene:

$$V(x) = 3646.5x^0 - 540x^1 + 30(x-5)^2 - 500(x-14)^0 - 30(x-14)^2 + 3603.5(x-20)^0 \\ - 45(x-20)^2$$

Al integrar nuevamente:

$$M(x) = 3646.5x^1 - 270x^2 + 10(x-5)^3 - 500(x-14)^1 - 10(x-14)^3 + 3603.5(x-20)^1 \\ - 15(x-20)^3$$

Se calculan las fuerzas cortantes en los puntos clave A, B, C, D y E , así:

$$\text{Punto } A, x = 0: V_{(0)} = A = 3646.5 \text{ N} \quad V_{(0)} = \mathbf{3646.5 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } B, x = 5 \text{ m: } V_{(5)} = 3646.5x^0 - 540x^1 \text{ [N]} = 3646.5 - 540(5) \text{ [N]} = 946.5 \text{ N} \quad V_{(5)} = \mathbf{946.5 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } C, x = 14 \text{ m: } V_{(14)} = 3646.5x^0 - 540x^1 + 30(x-5)^2 \text{ [N]}$$

$$= 3646.5 - 540(14) + 30(9)^2 \text{ [N]} = -1483.5 \text{ N} \quad V_{(14)} = \mathbf{-1483.5 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } D, x = 20 \text{ m, } V_{(20)} = 3646.5x^0 - 540x^1 + 30(x-5)^2 - 500(x-14)^0 - 30(x-14)^2 \text{ [N]} \\ = 3646.5 - 540(20) + 30(15)^2 - 500 - 30(6)^2 \text{ [N]} = -1983.5 \text{ N} \quad V_{(20)} = \mathbf{-1983.5 \text{ N}}$$

$$\text{Punto } E, x = 26 \text{ m:}$$

$$V_{(26)} = 3646.5x^0 - 540x^1 + 30(x-5)^2 - 500(x-14)^0 - 30(x-14)^2 + 3603.5(x-20)^0 \\ - 45(x-20)^2 \text{ [N]}$$

$$= 3646.5 - 540(26) + 30(21)^2 - 500 - 30(12)^2 + 3603.5 - 45(6)^2 \text{ [N]} = 0 \quad V_{(26)} = \mathbf{0}$$

Con la información obtenida en los puntos anteriores y conforme a la naturaleza de la función $V(x)$ en cada intervalo, se elabora el diagrama mostrado en la figura 8.58(a). Se aprecia que el cortante pasa por cero en el intervalo de los puntos B y C , así como también en el punto D , los cuales se analizan a continuación para determinar los valores de x con sus respectivos momentos.

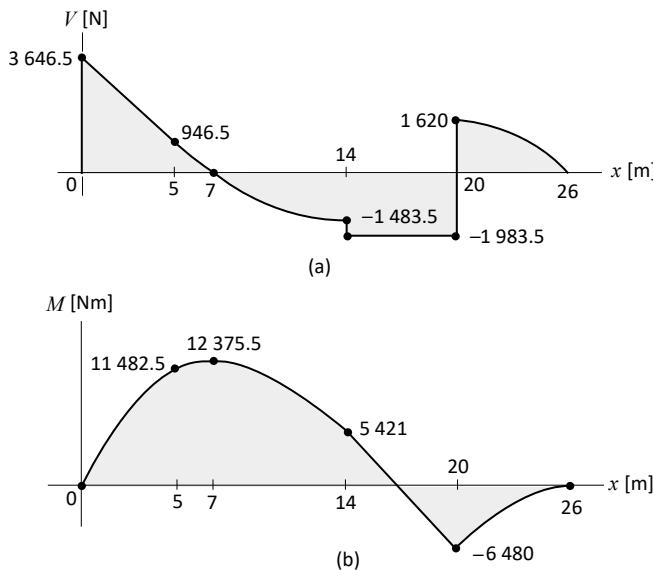


Figura 8.58

Intervalo B y C , ($5 \text{ m} < x < 14 \text{ m}$):

$$V(x) = 3\,646.5x^0 - 540x^1 + 30(x - 5)^2 = 0$$

$$3\,646.5 - 540x + 30(x - 5)^2 = 0 \quad 3\,646.5 = 540x - 30(x - 5)^2$$

$$3\,646.5/30 = 540/30 x - (x - 5)^2 \quad 121.55 = 18x - (x^2 - 10x + 25)$$

$$121.55 = 18x - x^2 + 10x - 25 \quad x^2 - 28x + 146.55 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4(1)(146.55)}}{2(1)} = \frac{28 \pm 14.06}{2}$$

$$x = 21 \text{ m} \quad o \quad x = 7 \text{ m}$$

Se descarta el valor de $x = 21 \text{ m}$, por no estar dentro del intervalo requerido, por lo tanto, se toma $x = 7 \text{ m}$ y se determina el respectivo momento, así:

$$M(x) = 3\,646.5x^1 - 270x^2 + 10(x - 5)^3$$

$$M_{(7)} = 3\,646.5(7) - 270(7)^2 + 10(2)^3 = 12\,375.5 \text{ Nm} \quad M_{(7)} = \mathbf{12\,375.5 \text{ Nm}}$$

Se calculan los momentos en los puntos A , B , C , D y E , como sigue:

$$\text{Punto } A, x = 0: M_{(0)} = 0$$

$$\text{Punto } B, x = 5 \text{ m}: M_{(5)} = 3646.5x^1 - 270x^2 [\text{Nm}] = 3646.5(5) - 270(5)^2 [\text{Nm}] = 11482.5 \text{ Nm}$$

$$M_{(5)} = 11482.5 \text{ Nm}$$

$$\text{Punto } C, x = 14 \text{ m}: M_{(14)} = 3646.5x^1 - 270x^2 + 10(x - 5)^3 [\text{Nm}]$$

$$= 3646.5(14) - 270(14)^2 + 10(9)^3 [\text{Nm}] = 5421 \text{ Nm} \quad M_{(14)} = 5421 \text{ Nm}$$

$$\text{Punto } D, x = 20 \text{ m}: M_{(20)} = 3646.5x^1 - 270x^2 + 10(x - 5)^3 - 500(x - 14)^1 - 10(x - 14)^3 [\text{Nm}]$$

$$= 3646.5(20) - 270(20)^2 + 10(15)^3 - 500(6) - 10(6)^3 [\text{Nm}] = -6480 \text{ Nm} \quad M_{(20)} \\ = -6480 \text{ Nm}$$

$$\text{Punto } E, x = 26 \text{ m}: \\$$

$$M_{(26)} = 3646.5x^1 - 270x^2 + 10(x - 5)^3 - 500(x - 14)^1 - 10(x - 14)^3 + 3603.5(x - 20)^1 \\ - 15(x - 20)^3 [\text{Nm}]$$

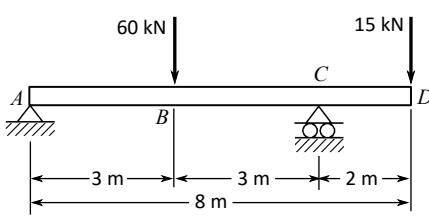
$$= 3646.5(26) - 270(26)^2 + 10(21)^3 - 500(12) - 10(12)^3 + 3603.5(6) - 15(6)^3 [\text{Nm}] = 0$$

$$M_{(26)} = 0$$

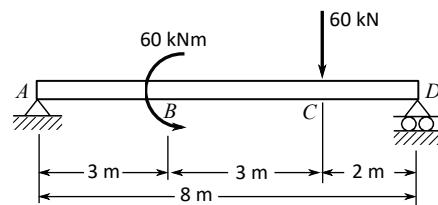
Con base en los datos anteriores, se elabora el diagrama de momentos, como se ilustra en la figura 8.58(b).

8.11 Problemas propuestos

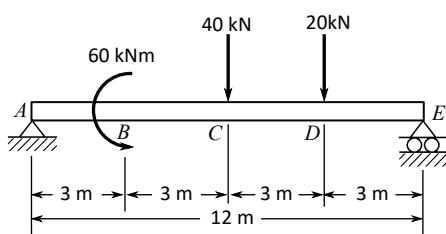
Problemas 8.1 hasta 8.22. Para cada una de las vigas cargadas como se indica en las respectivas figuras, hallar las reacciones en los apoyos, expresar las funciones de singularidad y aplicarlas para calcular los valores correspondientes de cortantes y de momentos en los puntos A , B , C , etc., el momento máximo y el punto donde ocurre, así como dibujar los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores.



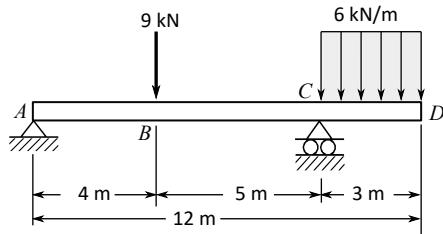
Problema 8.1



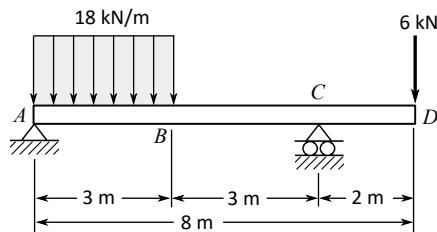
Problema 8.2



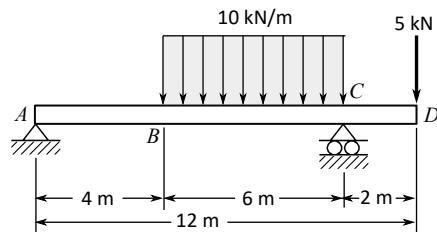
Problema 8.3



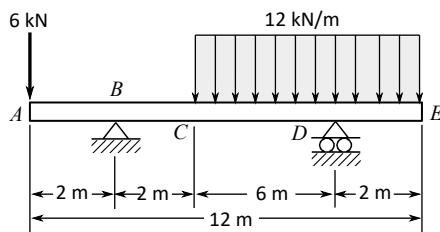
Problema 8.4



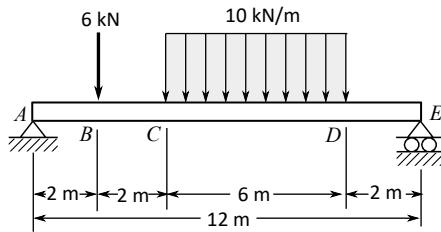
Problema 8.5



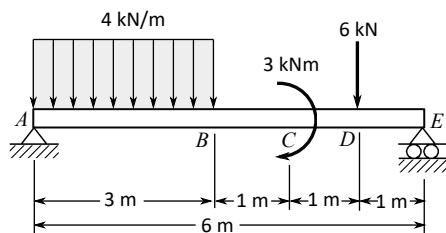
Problema 8.6



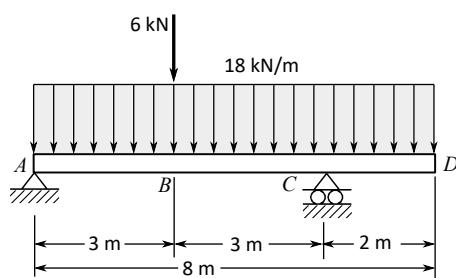
Problema 8.7



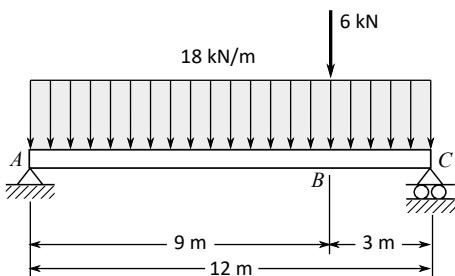
Problema 8.8



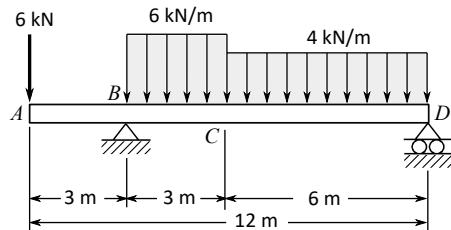
Problema 8.9



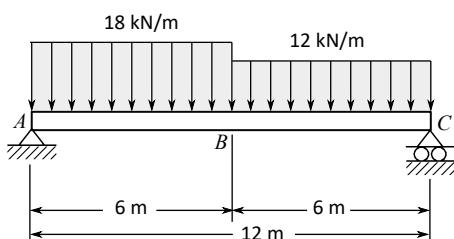
Problema 8.10



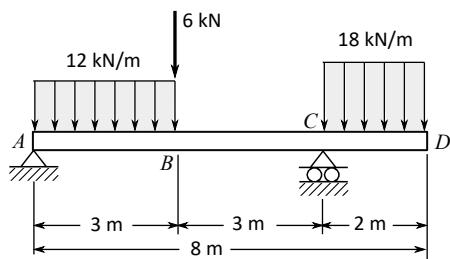
Problema 8.11



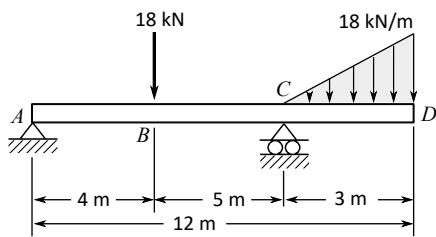
Problema 8.12



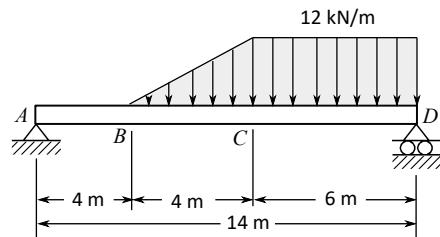
Problema 8.13



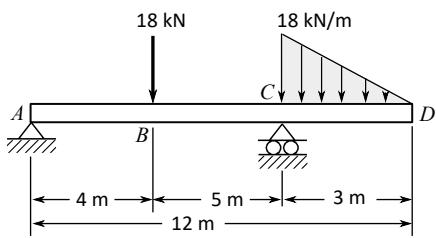
Problema 8.14



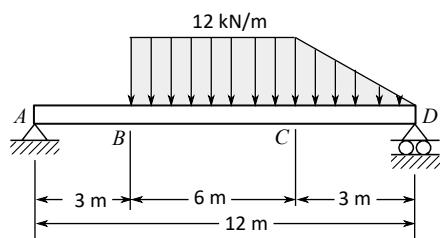
Problema 8.15



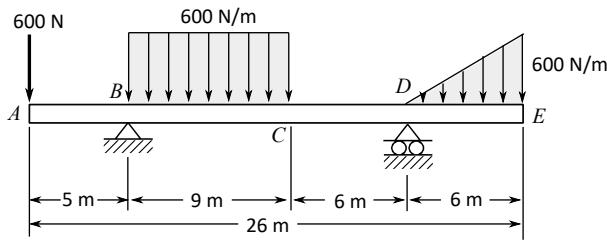
Problema 8.16



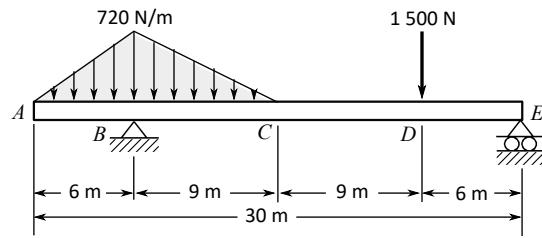
Problema 8.17



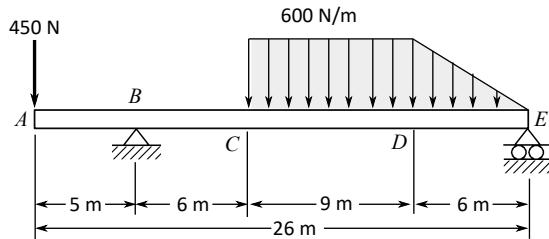
Problema 8.18



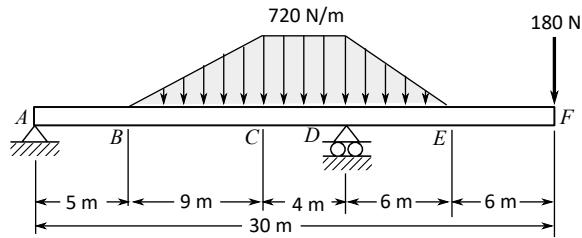
Problema 8.19



Problema 8.20



Problema 8.21



Problema 8.22