Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет)

Кафедра 303

Методика к выполнению лабораторных работ по МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Моска, 2016

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА

Цель работы: Построение математической модели системы управления и разработка ПО для моделирования ее работы

1.1. Построение математической модели системы управления угловым движением самолета

Рассмотрим систему управления угловым движением самолета. Контур управления состоит из рулевого привода (руля высоты) и объект управления (канал тангажа). Структурная системы показана ниже на рис. 1.1. Обозначаем $W_{\text{рм}}$ – передаточная функция рулевой машины, $W_{\text{ум}}$ – передаточная функция усилителя мощности, W_{O} – передаточная функция объекта управления. На входе системы подается электрический сигнал $u(t)$, вырабатываемый БЦВМ по полетному заданию. Управляемым параметром является угол тангажа самолета $\vartheta(t)$. Угол отклонения рулевого привода $\delta_{\text{р}}(t)$ управляется замкнутой системой, коэффициент обратной связи которой равен $k_{\text{ос}}$.

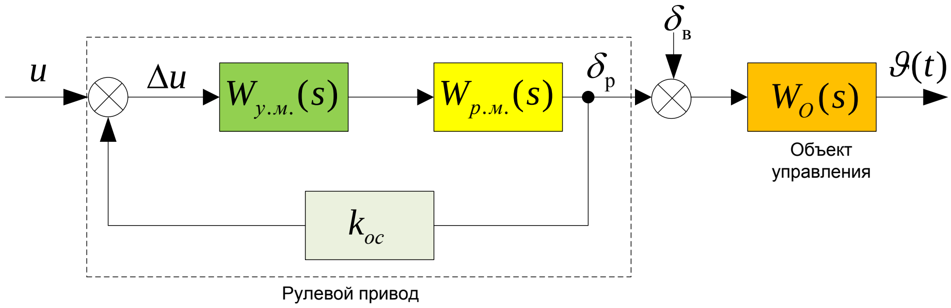

Рис. 1.1. Структурная схема системы управления

Элементы контура управления задаются следующими уравнениями:

а) Исполнительное устройство (рулевой привод):

$$\begin{aligned} c_1\dot{\delta}_{\text{р}}(t) &= n_0 I_{\text{у}}(t) - \text{рулевая машина}, \\ \alpha_1 \dot{I_y}(t) + \alpha_0 I_y(t) &= \beta\Delta u(t) - \text{усилитель мощности}, \\ \Delta u(t) &= u(t) - k_{\text{ос}}\delta_{\text{р}}(t) - \text{сравнивающееустройство}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

б) Объект управления (канал тангажа):

$$a_2\ddot{\vartheta}(t) + a_1\dot{\vartheta}(t) + a_0\vartheta(t) = b_0\left[\delta_{\text{р}}(t) + \delta_{\text{в}}(t)\right] \tag{1.2}$$

где

$\vartheta(t)$ - угол тангажа,

$\delta_{\text{р}}(t)$ - угол поворота вала рулевого привода,

$\delta_{\text{в}}(t)$ - возмущающее воздействие, приведенное к углу поворота руля,

$u(t)$ - напряжение на выходе измерителя угла $\vartheta(t)$,

$I_{\text{у}}(t)$ - ток на выходе усилителя мощности привода,

$a_{0,1,2}, b_0, c_1, n_0, \alpha_{0,1}, \beta_0, k_{\text{ос}}, d_{0,1}, p_0, l_0, m_0$ - постоянные коэффициенты.

Для моделирования работы данной системы необходимо построить ее математическую модель вида:

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

где x – вектор состояния.

1.1.1. Расчет передаточных функций

а) Передаточная функция рулевой машины:

$$\begin{aligned} W_{\text{рм}}(s) &= \frac{\delta_{\text{р}}(s)}{I_y(s)} \\ &= \frac{n_0}{c_1 s} \end{aligned} \tag{1.3}$$

б) Передаточная функция усилителя мощности:

$$\begin{aligned} W_{\text{ум}}(s) &= \frac{I_y(s)}{\Delta u(s)} \\ &= \frac{\beta_0}{\alpha_1 s + \alpha_0} \end{aligned} \tag{1.4}$$

в) Передаточная функция объекта управления:

$$\begin{aligned} W_{\text{O}}(s) &= \frac{\vartheta(s)}{\delta_{\text{р}}(s) + \delta_{\text{в}}(s)} \\ &= \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \end{aligned} \tag{1.5}$$

г) Передаточная функция всей системы:

$$W_{\text{сис}}(s) = \frac{W_{\text{ум}}(s) W_{\text{рм}}(s)}{1 + W_{\text{ум}}(s) W_{\text{рм}}(s) k_{\text{ос}}} W_{\text{O}}(s) \tag{1.6}$$

Поставляя коэффициенты математической модели в формулы (1.3), (1.4), (1.5) и затем в (1.6) получаем передаточную функцию системы вида:

$$W_{\text{сис}}(s) = \frac{k}{A_5 s^5 + A_4 s^4 + A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0} \tag{1.7}$$

где коэффициенты $A_{0..5}$ зависят от параметров системы $a_{0,1,2}, b_0, c_1, n_0, \alpha_{0,1}, \beta_0, k_{\text{ос}}, d_{0,1}, p_0, l_0, m_0$.

Чтобы моделировать работу данной системы необходимо описать ее с помощью системы дифференциальных уравнений. Для этого составим соотношения между входным и выходным сигналами системы в временной области.

Сначала перепишем (1.7) в следующем виде:

$$\left(A_5 s^5 + A_4 s^4 + A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0\right) X(s) = kU(s)$$

где $U(s)$ - образ входного сигнала $u(t)$, $X(s)$ - образ выходного сигнала $x(t)$,

а потом в обычном виде (во временной области):

$$A_5 \frac{d^5}{dt^5} x(t) + A_4 \frac{d^4}{dt^4} x(t) + A_3 \frac{d^3}{dt^3} x(t) + A_2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + A_1 \frac{d}{dt} x(t) + A_0 x(t) = ku(t) \tag{1.8}$$

Поскольку целью данного раздела является численное моделирование работы заданной системы, т.е. численное интегрирование дифференциального уравнения высокого порядка (1.8), будем составлять систему дифференциальных уравнений первого порядка (систему Коши), эквивалентную (1.8):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_0 &= x_1 \\ \frac{d}{dt}x_1 &= x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 &= x_4 \\ \frac{d}{dt}x_4 &= \frac{ku(t)-(A_4x_4+A_3x_3+A_2x_2+A_1x_1+A_0x_0)}{A_5} \end{cases} \tag{1.9}$$

где

$x_0(t) = \vartheta(t)$ - выходной сигнал системы (угол тангажа);

$x_1(t) = \dot{\vartheta}(t)$ - скорость изменения угла тангажа;

$x_2(t) = \ddot{\vartheta}(t)$ - ускорение изменения угла тангажа;

$x_3(t) = \dddot{\vartheta}(t)$, $x_4(t) = \ddddot{\vartheta}(t)$.

Пример **:**

Параметры системы заданы в таблице ниже:

Таблица 1. Коэффициенты системы

a_2	a_1	a_0	b_0	l_0	m_0	d_1	d_0	p_0	c_1	n_0	α_1	α_0	β_0	k_{oc}
6.0	40	60	60	0.5	10	0.06	12	1.8	3.0	3.6	0.06	1.2	6.0	3.3

Поставляя значения этих параметров в формулы передаточной функции звеньев системы, найдем все коэффициенты передаточной функции (1.7). Для этой цели можно использовать программу Mathcad с помощью команды COLLECT панели SYMBOLIC. Листинг примерного расчета на Mathcad показан ниже:

$$\begin{aligned} W_{\text{рм}}(s) &:= \frac{n_0}{c_1 s} \\ W_{\text{ум}}(s) &:= \frac{\beta_0}{\alpha_1 s + \alpha_0} \\ W_{\text{O}}(s) &:= \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ W_{\text{сис}}(s) &:= \frac{W_{\text{ум}}(s) W_{\text{рм}}(s)}{1 + W_{\text{ум}}(s) W_{\text{рм}}(s) k_{\text{ос}}} W_{\text{O}}(s) \\ W_{\text{сис}}(s)\, collect, s &\rightarrow \frac{3600.0}{3.0s^4 + 62.0s^3 + 1258.0s^2 + 1392.0s + 11880.0} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Отсюда получаем значение каждого коэффициента передаточной функции (1.7).

1.2. Составление программы моделирования

1.2.1. Структура программы моделирования

Программа моделирования состоит из файлов, описание которых указано в таблице

Таблица 2. Файлы комплекса моделирования

Файл	Описание

stdafx.h	Заголовочный файл, в котором объявлены глобальные переменные и функции
CACULUS.cpp	В данном файле создается функция реализующая алгоритм интегрирования системы дифференциальных уравнений по схеме Рунге-Кутта 4-ого порядка
CONTROL.cpp	В данном файле задан вид функций управления. При необходимости студентам следует изменить содержание функции double CNTRL(double T) чтобы получить требуемый вид сигнала управления U(t)
DYNAMICSYSTEM.cpp	В данном файле расположена функция описывающая математическую модель системы. Студенты должны изменить содержание функции void FX(double DX[], double X[], double U, double T) для того чтобы получить систему дифференциальных уравнений с заданными по своему варианту параметров систем, и так же по режимам работы системы (без шумов, с шумами и т.д...)
MODELING.cpp	В данном файле описывается подпрограмма моделирования динамической системы void MODELING(). Данная подпрограмма вызывается в главной управляющей подпрограмме.
STATMATH.cpp	Здесь описаны подпрограммы генерации случайных процессов (СП) и вычисления статистических характеристик СП.
LABMIO.cpp	Главный файл реализации. Здесь расположена управляющая подпрограмма

Для составления программы создания математической модели системы следовательно в файле DYNAMICSYSTEM.cpp добавить коды в функцию void FX(double DX[], double X[], double U, double T). Коды должны соответствовать системе (1.9) с найденной передаточной функции. Ниже приведен пример листинга функции FX в случае передаточной функции (1.7).

Листинг 1. "Математическая модель системы"

```
void FX(double DX[], double X[], double U[], double T)
{
  //задание коэффициентов передаточной функции системы
  double k= 0.303;
    double a0 = 1.0;
    double a1 = 0.117;
    double a2 = 0.106;
  double a3 = 0.00522;
  double a4 = 0.000253;

  /*здесь ставить систему дифф. уравнений вида
```

```
DX[1]=f0(X,U,T)
DX[2]=f1(X,U,T)
 ....
 */

  DX[0]=X[1];
  DX[1]=X[2];
  DX[2]=X[3];
  DX[3]=(k*(U[0]+X[4])-a3*X[3]-a2*X[2]-a1*X[1]-a0*X[0])/a4;
}
```

Значение параметров моделирования, таких как число переменных, шаг интегрирования, время моделирования, и структура файла записи результатов и начальное состояние системы указаны в функции моделирования void MODELING() файла MODELING.cpp. Листинг данной функции показан ниже:

Листинг 2. Подпрограмма моделирования

```
//подпрограмма моделирования
void MODELING()
{
    //файл вывода
    FILE *fOUT;
    //создание и открытие для записи
    fOUT=fopen(".\\RESULT\\OUT.ris","w");

    //формат печати результатов: fprintf(fOUT,"U X0 X1 X2 ... Xn");
    fprintf(fOUT,"U X0 X1 X2 X3");

//  инициализация параметров моделирования
    //число параметров состояния
    N=4;
    //шаг интегрирования
    DT=0.001;
    //время моделирования
    double TMODEL=30.0;

    // объявление вектора состояния X(N)
    double* X = new double [N];
    // объявление вектора состояния X(N)
    double* DX = new double [N];

    //объявление сигнала управления
    double U=0.0;
```

```
27
28     //инициализация начального состояния система
29     X[0]=0.0;
30     X[1]=0.0;
31     X[2]=0.0;
32     X[3]=0.0;
33
34     // цикл моделирования
35     do
36     {
37         //сигнал управления
38         U=CNTRL(TIME);
39         //интегрирование (1 шаг)
40         RKS(N,DT,TIME,DX,X,U,FX);
41
42         //печать результатов
43         fprintf(fOUT,"\n%f %f ",TIME,U);
44         for (int i=0;i<N;i++)
45             fprintf(fOUT,"%f ",X[i]);
46
47
48     }while (TIME<TMODEL);
49 }
```

Следовательно, в зависимости от варианта, студент должен изменить эти параметры в строке 10, 14, 16, 18, 29...32 листинга программы.

Результаты моделирования сохраняются в папке RESULT. Для визуализации результатов используйте программы построения Graph.exe или пакет Mathcad (при этом необходимо изменить параметры чтения данных от файла, либо изменить формат записи данных в файл).

1.2.2. Моделирование работы системы при отсутствии шумов на входе системы

При моделировании работы системы без шумов рассмотрены некоторые варианты функции управления $U(t)$. Вид функции управления задан в функции double CNTRL(double T):

Листинг 3. "Функция управления"

```
double CNTRL(double T)
{
  double U=0.0;
  /* задание вида функции управления U(t)*/
  U=1.0;
```

```
6
7    return U;
8 }
```

В листинге программы, указанном выше, сигнал управления имеет вид ступенчатой функции. Для другого вида сигнала управления следует изменить содержание программы с строки 5.

Ниже приведен пример фрагмента кодов формирования сигнала управления, который соответствует графику, показанному на рис. 1.2.

Листинг 4. "Формирование сигнала управления сложного вида"

```
double CNTRL(double T)
{
  double U=0.0;
  /* задание вида функции управления U(t)*/
  if((0<=T)&&(T<=0.5))
       U = 2;
  else if ((1<=T) && (T<=1.5))
       U = -2;
  else if ((2<=T) && (T<=2.5))
       U = 8*(T-2);
  else if ((2.5<T) && (T<=3.5))
       U = 4-8*(T-2.5);
  else if ((3.5<T) && (T<=4))
       U = -4+8*(T-3.5);
  else
       U = 0;
```

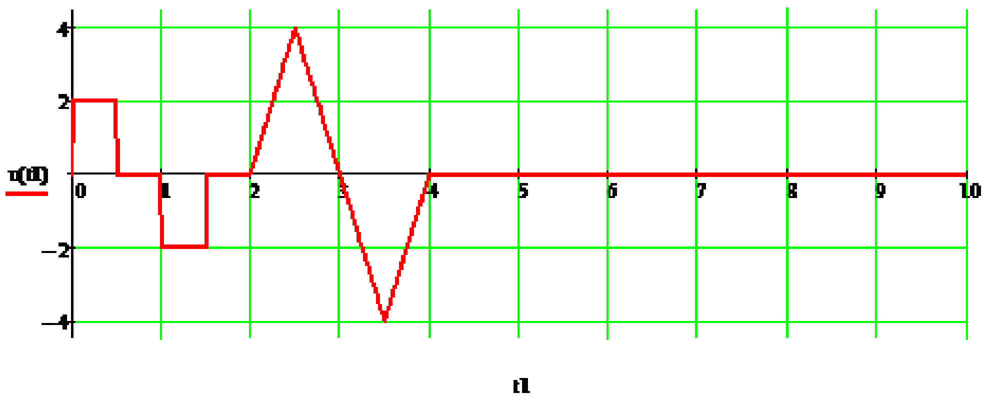

Рис. 1.2. Сигнала управления сложного вида

Вид функции управления студент получит от преподавателя. Для визуального подбора коэффициентов полученной функции можно использовать пакет Mathcad построением в нем графика функции.

1.2.3. *Моделирование работы системы под действием шумов*

Формирующий фильтр

Для моделирования помех, действующих на систему, в лабораторных работах данного курса используем метод формирующего фильтра. Формирующим фильтром называют динамическую систему, преобразующую СП типа белого шума в СП, имеющий заданные статистические характеристики.

На практике помехи достаточно описываются моделями СП с типовыми корреляционными функциями. Виды корреляционной функции и соответствующие им передаточные функции фильтра показаны в таблице 3.

Таблица 3. Корреляционные функции и передаточные функции фильтра

№	$R(\tau)$	$W_\Phi(s)$
1	$\sigma^2 e^{-\alpha\|\tau\|}$	$\sigma\frac{\sqrt{2\alpha}}{s+\alpha}$
2	$\sigma^2 e^{-\alpha\|\tau\|}cos\beta\tau$	$\sigma\frac{\sqrt{2\alpha}(s+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})}{s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2}$
3	$\sigma^2 e^{-\alpha\|\tau\|}(cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}sin\beta\|\tau\|)$	$\sigma\frac{2\sqrt{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}}{s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2}$
4	$\sigma^2 e^{-\alpha\|\tau\|}(1-\frac{\alpha\|\tau\|}{2})$	$\sigma\frac{1+s\sqrt{3}/\alpha}{\sqrt{\alpha}(1+s/\alpha)^2}$

В работах рассмотрены два случая действия помех на работу системы. В первом случае помеха действует на вход рулевого привода, а во втором случае - на вход объекта управления.

Первый случай

Схема системы при действии помехи на вход рулевого привода показана на рисунке 1.3. Как уже отмечалось выше, формирующий фильтр преобразует СП типа белого шума $\xi(t)$ в СП с заданной корреляционной функцией $f(t)$.

Передаточная функция фильтра:

$$\begin{aligned} W_\Phi(s) &= \frac{f(s)}{\xi(s)} \\ \Rightarrow f(s) &= W_\Phi(s)\xi(s) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Уравнение (1.11) во временной области имеет вид:

$$B_q\frac{d^q}{dt^q}f(t)+B_{q-1}\frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}}f(t)+...+B_1\frac{d}{dt}f(t)+B_0f(t)=k_\phi\xi(t) \tag{1.12}$$

где q - порядок фильтра, $B_{0,1,2,..,q}$ - коэффициенты передаточной функции фильтра (см. табл. 3).

Передаточная системы остается такой, как и раньше, однако система дифференциальных уравнений описывающих динамику системы изменяется вследствие наличия помехи

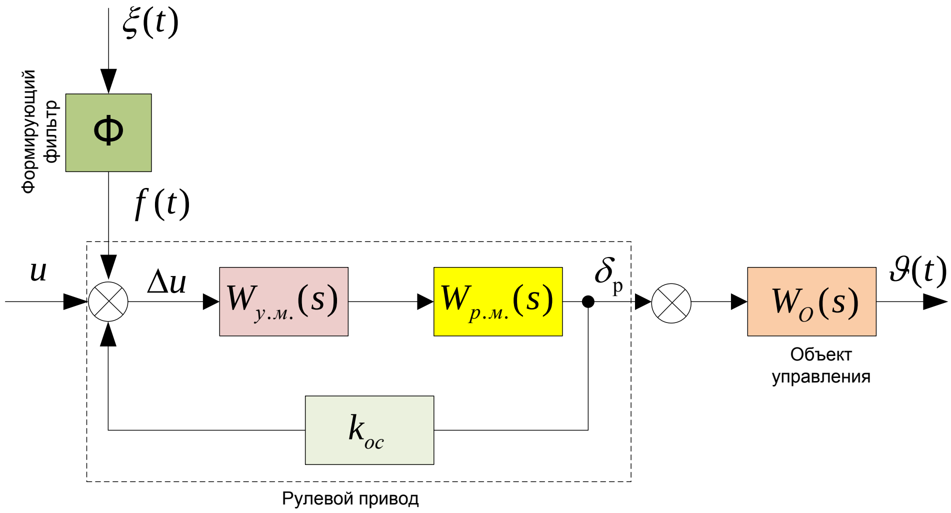

Рис. 1.3. Первая схема действия шума на систему

$f(t)$:

$$W_{сис}(s) = \frac{X(s)}{U(s) + f(s)}$$

следовательно

$$A_5\frac{d^5}{dt^5}x(t)+A_4\frac{d^4}{dt^4}x(t)+A_3\frac{d^3}{dt^3}x(t)+A_2\frac{d^2}{dt^2}x(t)+A_1\frac{d}{dt}x(t)+A_0x(t) = k\left[u(t)+f(t)\right] \quad (1.13)$$

Система (1.13) и (1.12) полностью описывает работу системы под действием помехи. Чтобы интегрировать данную систему составим для нее систему Коши:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_0 & = x_1 \\ \frac{d}{dt}x_1 & = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 & = x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 & = x_4 \\ \frac{d}{dt}x_4 & = \frac{k[u(t)+x_5]-(A_4x_4+A_3x_3+A_2x_2+A_1x_1+A_0x_0)}{A_5} \\ \frac{d}{dt}x_5 & = x_6 \\ \frac{d}{dt}x_6 & = x_7 \\ & \dots. \\ \frac{d}{dt}x_{4+q} & = \frac{k_ф\xi(t)-(B_{q-1}x_{4+q}+B_{q-2}x_{4+q-1}+\ldots+B_0x_5)}{B_{5+q}} \end{cases} \quad (1.14)$$

Для фильтра первого порядка $q=1$, в (1.14) уравнение для фильтра имеет вид:

$$\frac{d}{dt}x_5 = \frac{k_ф\xi(t) - B_0x_5}{B_1}$$

а для фильтра второго порядка $q=2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_5 &= x_6 \\ \frac{d}{dt}x_6 &= \frac{k_ф\xi(t) - B_1x_6 - B_0x_5}{B_2} \end{aligned}$$

Итак, студенты должны изменить коды подпрограммы void FX(double DX[], double X[], double U[], double T) в файле DYNAMICSYSTEM.cpp так, чтобы получить систему

(1.14). При этом необходимо объявить дополнительные переменные. Ниже приведен пример таких изменений в случае использования фильтра первого порядка:

Пример:

Листинг 5. "Математическая модель системы с шумом"

```
//задание коэффициентов передаточной функции системы
  double k= 0.303;
    double a0 = 1.0;
    double a1 = 0.117;
    double a2 = 0.106;
  double a3 = 0.00522;
  double a4 = 0.000253;

  //задание коэффициентов передаточной функции фильтра
  double kf=1.5;
  double b0=0.15;
  double b1=1.0;

  //белый шум
  double xi=GAUSS();

  /*здесь ставить систему дифф. уравнений вида
  DX[1]= f0(X,U,T)
  DX[2]= f1(X,U,T)
  ....
  */

   DX[0]=X[1];
   DX[1]=X[2];
   DX[2]=X[3];
   DX[3]=(k*(U[0]+X[4])-a3*X[3]-a2*X[2]-a1*X[1]-a0*X[0])/a4;

   //дифф. урав. фильтра
   DX[4]=(kf*xi-b0*X[4])/b1;
```

Поскольку число переменных интегрирования X увеличивается на q по сравнению с режимом работы без шумов, нужно изменить число переменных интегрирования, а так же формат печати в файл записи результатов в файле ***MODELING.cpp***.

Второй случай

Рассмотрим случай, когда помеха непосредственно действует на вход объекта управления, как показано на рис. 1.4.

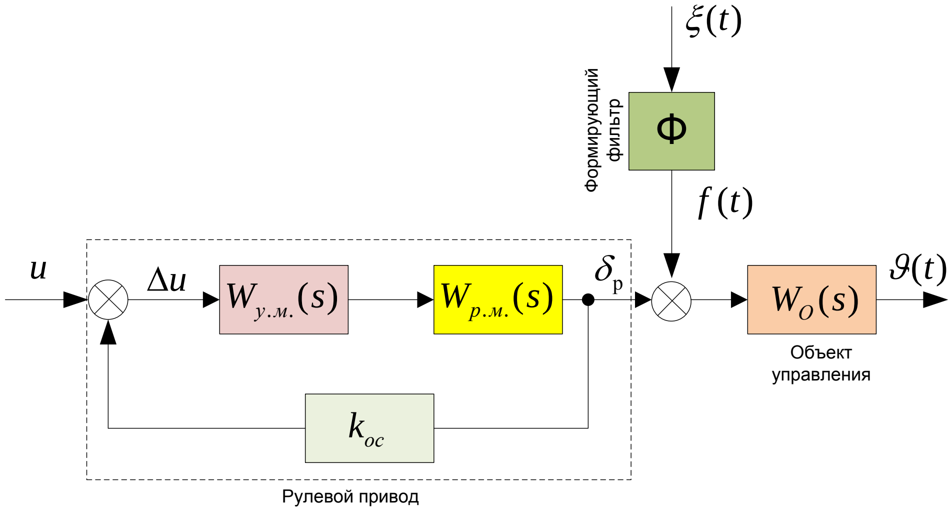

Рис. 1.4. Вторая схема действия шума на систему

В данном случае, для того чтобы моделировать работу системы необходимо разделить ее на два узла - рулевой привод и объекта управления и изучить их отдельно. Раньше эти узлы рассмотрены вместе как единая система с передаточной функцией $W_{сис}(s)$, а теперь, поскольку шум действует прямо на объект, этот подход уже нельзя использовать. Сигнал управления $U_у(t)$ действует на рулевой привод, вследствие чего руль высоты отклоняется на угол $\delta_у(t)$. Это отклонение вместе с шумом $f(t)$ действует на объект. Исходя из этого, чтобы получить математическую модель системы нужно вычислить передаточные функции отдельных узлов, для каждой из которых составить отдельную систему дифференциальных уравнений:

- рулевой привод:

$$W_{рп}(s) = \frac{W_{ум}(s)W_{рм}(s)}{1 + W_{ум}(s)W_{рм}(s)k_{ос}}$$

- объект управления:

$$W_О(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_р(s) + f(s)}$$

Аналогично предыдущим режимам, студенты должны составить систему дифференциальных уравнений, соответствующих выше полученным передаточным функциям.

Пример:

$$W_{рп}(s) = \frac{k_1}{A_2s^2 + A_1s + A_0}$$
$$W_О(s) = \frac{k_2}{A_2s^2 + A_1s + A_0}$$

Следовательно, система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} A_2\frac{d^2}{dt^2}\delta_р(t)+A_1\frac{d}{dt}\delta_р(t)+A_0\delta_р(t) &= k_1u(t) \\ B_2\frac{d^2}{dt^2}\vartheta(t)+B_1\frac{d}{dt}\vartheta(t)+B_0\vartheta(t) &= k_2\left[\delta_р(t)+f(t)\right] \end{aligned}$$

Составим систему Коши для этих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_0 &= x_1 \\ \frac{d}{dt}x_1 &= \frac{k_1u(t)-(A_1x_1+A_0x_0)}{A_2} \\ \frac{d}{dt}x_2 &= x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 &= \frac{k_2(x_0+x_4)-(B_1x_3+B_0x_2)}{B_2} \\ \frac{d}{dt}x_4 &= \frac{k_ф\xi(t)-b_{ф0}x_4}{b_{ф1}} \end{aligned} \tag{1.15}$$

последнее уравнение описывает работу формирующего фильтра первого порядка.

Внимание: число уравнений в системе (1.15) зависит от варианта, выданного студентам.

1.3. Оформление отчета

Отчет делится на три части - моделирование без шумов, моделирование с шумами, действующими на вход рулевого привода, моделирование с шумами, действующими на вход объекта управления.

В отчете студенты должны указать:

- Теоретическое основание
- Коды программы
- Результаты моделирования

В теоретическом основании требуется указать передаточные функции каждого отдельного узла системы, всей системы и фильтра. Кроме того, должно указать систему дифференциальных уравнений Коши для каждого режима моделирования.

Коды программы есть фрагменты программы подпрограмм DYNAMICSYSTEM() и MODELING().

В результатах моделирования должно указать графики входного сигнала, выходного сигнала и всех его производных, белого шума и шума, формируемого фильтром. Кроме того необходимо найти математическое ожидание, СКО и построить графики корреляционной функции шумов.

Для построения графиков моделирования можно либо использовать программу Graph.exe, либо пакет Mathcad.