MODUL II

PRAKTIKUM SISTEM KONTROL OPTIMAL

A. Integral

Dalam penerapannya, memahami operasi integral dari persamaan suatu fungsi dapat memberikan banyak manfaat. Dalam bidang matematika dan teknik, operasi integral dapat memberikan informasi luasan kurva atau volume dari benda putar. Selain itu pada bidang fisika, pemanfaatan operasi integral digunakan untuk menghitung serta juga menganalisis rangkaian arus listrik, medan magnet, dan lain sebagainya. Jika diketahui persamaan fungsi awal *f*(*x*), maka hasil operasi integral akan menghasilkan persamaan fungsi *F*(*x*) seperti yang di tunjukkan berikut.

$$\int f(x)dx = \int ax^n dx$$

$$F(x) = \frac{a}{(n+1)} x^{(n+1)} + C$$

Sehingga jika diketahui persamaan fungsi *f*(*x*) seperti berikut,

$$f(x) = (ax^2) + (bx) + c$$

Maka hasil integral dari fungsi *f*(*x*) adalah,

$$\int f(x) = (ax^2) + (bx) + c$$

$$\int f(x) = \left(\frac{a}{2+1} x^{2+1}\right) + \left(\frac{b}{1+1} x^{1+1}\right) + \left(\frac{c}{0+1} x^{0+1}\right) + C$$

$$F(x) = \left(\frac{a}{3} x^3\right) + \left(\frac{b}{2} x^2\right) + \left(cx\right) + C$$

<u>Contoh soal:</u>

- Persamaan fungsi *f*(*x*)

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 14$$

- Hasil operasi integral *F*(*x*)

$$\int f(x)dx = \int \left(3x^2 + 4x + 14\right)dx$$

$$\int f(x)dx = \frac{3}{(2+1)} x^{(2+1)} + \frac{4}{(1+1)} x^{(1+1)} + \frac{14}{(0+1)} x^{(0+1)} + C$$

$$\int f(x)dx = \frac{3}{3} x^{(3)} + \frac{4}{2} x^{(2)} + \frac{14}{1} x^{(1)} + C$$

$$F(x) = x^3 + 2x^2 + 14x + C$$

B. Turunan

Fungsi turunan dapat disebut juga sebagai fungsi diferensial serta proses dalam menentukan hasil turunan suatu fungsi disebut sebagai diferensiasi. Adapun tujuan dari operasi diferensiasi tersebut adalah untuk menemukan menghitung gradien dari garis singgung suatu kurva, juga dapat digunakan untuk menentukan interval dimana suatu fungsi naik atau turun, menentukan nilai stasioner suatu fungsi, menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan persamaan gerak, serta dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan maksimum-minimum. Jika diketahui persamaan fungsi awal *f*(*x*), maka hasil operasi turunan akan menghasilkan persamaan fungsi *f'*(*x*) seperti yang di tunjukkan berikut.

$$f(x) = ax^n$$

$$f'(x) = (a \times n)x^{n-1}$$

Sehingga jika diketahui persamaan fungsi *f*(*x*) seperti berikut,

$$f(x) = (ax^2) + (bx) + c$$

Maka hasil turunan dari fungsi *f*(*x*) adalah,

$$f'(x) = \left(a \times 2\right)x^{(2-1)} + \left(b \times 1\right)x^{(1-1)}$$
$$f'(x) = 2ax + bx$$

<u>Contoh soal:</u>

- Persamaan fungsi *f*(*x*)

$$f(x) = 4x^2 + 7x + 14$$

- Hasil operasi turunan *f'*(*x*)

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 14$$
$$f'(x) = \left(3 \times 2\right)x^{(2-1)} + \left(4 \times 1\right)x^{(1-1)} + 0$$
$$f'(x) = 6x + 4x + 0$$
$$f'(x) = 6x + 4x$$

C. Persamaan Multivariabel

Persamaan multivariabel merupakan sebuah fungsi yang tersusun atas beberapa variabel (lebih dari satu), misalnya sebuah fungsi $f(x) = x_1^1 + 2x_2^2 + 3x_3^3$ yang memiliki 3 variabel yaitu x_1, x_2, dan x_3. Fungsi $f(x)$ tersebut dikatakan sebagai fungsi skalar (*scalar function*) karena nilainya yang skalar.

D. Gradient Vektor

Vektor yang berisi turunan parsial pertama (*first partial derivative*) fungsi disebut juga dengan *gradient*. Disebut dengan vektor karena fungsi diturunkan secara parsial terhadap setiap variabelnya (multi-variabel). Sehingga membentuk vektor berukuran *N x 1*, dengan *N* adalah jumlah baris. *Gradient* dirumuskan sebagai berikut:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan rumus tersebut tampak bahwa gradient vektor fungsi *f* diturunkan terhadap dua variabel x_1 dan x_2 karena fungsi tersebut hanya mengandung 2 variabel. Vektor ini bisa diekspansi tergantung dengan jumlah variabelnya. Gradient dari sebuah fungsi disebut juga dengan medan vektor (*vector field*). Variabel x_1 dan x_2 bisa saja disimbol dengan huruf lain seperti *x*, *y* dan seterusnya.

E. Matriks Jacobian

Matriks Jacobian merupakan matriks yang elemen – elemennya terdiri dari turunan parsial pertama dari fungsi f_m. Matriks Jacobian biasanya disimbolkan dengan **J** dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian bisa berbentuk bujur sangkar $(m = n)$ atau tidak $(m \neq n)$. Variabel *m* menyatakan banyaknya fungsi sedangkan *n* adalah banyaknya variabel. Jika fungsinya hanya tunggal, maka Jacobian akan membentuk vektor berukuran *1xN*.

F. Matriks Hessian

Berbeda dengan matriks Jacobian, matriks Hessian merupakan matriks bujur sangkar (*square matrices*). Matriks ini memiliki elemen – elemen yang merupakan turunan parsial kedua dari fungsi. Matriks ini dinotasikan dengan H dan sering juga disebut sebagai Jacobian dari *gradient vector*, $\mathbf{H}(f(x)) = \mathbf{J}(\nabla f(x))$. Matriks Hessian dimana x_1 dan x_2 dapat diganti dengan variabel lain adalah

$$\mathrm{H}=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2} \end{bmatrix}$$

Contoh :

1. Buatlah sebuah fungsi multivariabel sembarang dengan 2 variabel dan orde 3. Kemudian tentukan *gradient vector*, matriks Jacobian, dan matriks Hessiannya.
   a. Fungsi multivariabel yang digunakan:

   $$x^3 y^3 + 3x^2 + y^2 \tag{1.1}$$

   b. *Gradient Vector*

   $$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{d(x^3y^3+3x^2+y^2)}{dx} \\ \dfrac{d(x^3y^3+3x^2+y^2)}{dy} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

   $$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2y^3+6x \\ 3x^3y^2+2y \end{bmatrix}$$

   c. Matriks Jacobian

   $$J(x,y) = \nabla f(x,y)^T = \begin{bmatrix} 3x^2y^3+6x \\ 3x^3y^2+2y \end{bmatrix}^T \tag{1.3}$$

   $$J(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2y^3+6x & 3x^3y^2+2y \end{bmatrix}$$

   d. Matriks Hessian

   $$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{d^2 f}{dxdx} & \dfrac{d^2 f}{dxdy} \\ \dfrac{d^2 f}{dydx} & \dfrac{d^2 f}{dydy} \end{bmatrix}$$

- Mencari hasil dari $\dfrac{d^2 f}{dxdx}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(x^3 y^3 + 3x^2 + y^2)}{dx}$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{d(3x^2 y^3 + 6x)}{dx}$$
$$\frac{d^2 f}{dxdx} = 6xy^3 + 6$$

- Mencari hasil dari $\dfrac{d^2 f}{dxdy}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(x^3 y^3 + 3x^2 + y^2)}{dx}$$
$$\frac{df}{dy} = \frac{d(3x^2 y^3 + 6x)}{dy}$$
$$\frac{d^2 f}{dxdy} = 9x^2 y^2$$

- Mencari hasil dari $\dfrac{d^2 f}{dydx}$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d(x^3 y^3 + 3x^2 + y^2)}{dy}$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{d(3x^3 y^2 + 2y)}{dx}$$
$$\frac{d^2 f}{dydx} = 9x^2 y^2$$

- Mencari hasil dari $\dfrac{d^2 f}{dydy}$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d(x^3 y^3 + 3x^2 + y^2)}{dy}$$
$$\frac{df}{dy} = \frac{d(3x^3 y^2 + 2y)}{dy}$$
$$\frac{d^2 f}{dydy} = 6x^3 y + 2$$

Sehingga matriks Hessian-nya, $H(x, y) = \begin{bmatrix} 6xy^3 + 6 & 9x^2 y^2 \\ 9x^2 y^2 & 6x^3 y + 2 \end{bmatrix}$ (1.4)

2. Hitunglah nilai Jacobian dan Hessian jika nilai [X=1, Y=-1]

- **Nilai Jacobian**

$$
\begin{aligned}
J(x,y) &= \begin{bmatrix} 3x^2y^3+6x & 3x^3y^2+2y \end{bmatrix} \\
J(x,y) &= \begin{bmatrix} 3(1)^2(-1)^3+6(1) & 3(1)^3(-1)^2+2(-1) \end{bmatrix} \qquad (2.1) \\
J(x,y) &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- **Nilai Hessian**

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= \begin{bmatrix} 6xy^3+6 & 9x^2y^2 \\ 9x^2y^2 & 6x^3y+2 \end{bmatrix} \\
H(x,y) &= \begin{bmatrix} 6(1)(-1)^3+6 & 9(1)^2(-1)^2 \\ 9(1)^2(-1)^2 & 6(1)^3(-1)+2 \end{bmatrix} \\
H(x,y) &= \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

G. Pemrograman Integral dan Turunan Fungsi

- Integral fungsi *f*(*x*)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dengan mengetahui bentuk umum dari persamaan fungsi di atas, maka hasil perhitungan integral dari fungsi *f*(*x*) dapat dicari dengan cara berikut.

```
#include <stdio.h>
#include <windows.h>

int main()
{
    int pangkat[100], npangkat;
    float bobot[100], dift[100], intg[100];
    COORD val;

    // pangkat tertinggi
    printf("Pangkat tertinggi: "); scanf("%d", &npangkat);

    // memasukkan nilai a, b, c dst
    printf("Tuliskan bobot, contoh [a, b, c, dst]: ");
    for (int i = 0; i <= npangkat; i++){

        // nilai ini akan mengarahkan kursor menuju koordinat tertentu
        // biasanya digunakan untuk kerapian dalam memasukkan data
        // secara interaktif dari user
        val.X = 3*i + 1;
```

```
        val.Y = 2;
        SetConsoleCursorPosition(GetStdHandle(STD_OUTPUT_HANDLE), val);

        // masukkan vektor bobot a, b, c dst
        scanf("%f", &bobot[i]);
    }

    // menampilkan kembali fungsi dalam bentuk persamaannya
    printf("Persamaannya adalah ");
    for(int i = 0; i <= npangkat; i++){
        float temp = bobot[i];
        if (i <= npangkat - 2){
            if (i > 0){
                if (temp < 0){
                    printf(" - ");
                    temp = temp * -1;
                }
                else {
                    printf(" + ");
                }
            }
            printf("%.2f*x^%d", temp, npangkat-i);
        }
        else if (i <= npangkat - 1){
            if (temp < 0){
                printf(" - ");
                temp = temp * -1;
            }
            else {
                printf(" + ");
            }
            printf("%.2f*x", temp, npangkat-i);
        }
        else {
            if (temp < 0){
                printf(" - ");
                temp = temp * -1;
            }
            else {
                printf(" + ");
            }
            printf("%.2f", temp);
        }
    }
    printf("\n");
    // menghitung integral
    printf("Integralnya adalah ");
```

```
    for (int i = 0; i <= npangkat; i++){
        intg[i] = bobot[i] / (npangkat - i + 1);
        pangkat[i] = npangkat - i + 1;
        if (i > 0){
            if (intg[i] >= 0){
                printf(" + ");
            }
            else{
                printf(" - ");
                intg[i] = intg[i] * -1;
            }
        }
        printf("%.2f*x^%d", intg[i], pangkat[i]);
    }
    printf("\n\n");

    return 0;
}
```

- Turunan fungsi $f(x)$

Adapun bentuk persamaan fungsi secara umum ditulis seperti berikut.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dengan mengetahui bentuk umum dari persamaan fungsi di atas, maka hasil perhitungan integral dari fungsi $f(x)$ dapat dicari dengan cara berikut.

```
#include <stdio.h>
#include <windows.h>

int main()
{
    int pangkat[100], npangkat;
    float bobot[100], dift[100], intg[100];
    COORD val;

    // pangkat tertinggi
    printf("Pangkat tertinggi: "); scanf("%d", &npangkat);

    // memasukkan nilai a, b, c dst
    printf("Tuliskan bobot, contoh [a, b, c, dst]: ");
    for (int i = 0; i <= npangkat; i++){

        // nilai ini akan mengarahkan kursor menuju koordinat tertentu
        // biasanya digunakan untuk kerapian dalam memasukkan data
        // secara interaktif dari user
        val.X = 3*i + 1;
        val.Y = 2;
        SetConsoleCursorPosition(GetStdHandle(STD_OUTPUT_HANDLE), val);

        // masukkan vektor bobot a, b, c dst
        scanf("%f", &bobot[i]);
    }

    // menampilkan kembali fungsi dalam bentuk persamaannya
    printf("Persamaannya adalah ");
    for(int i = 0; i <= npangkat; i++){
        float temp = bobot[i];
        if (i <= npangkat - 2){
            if (i > 0){
                if (temp < 0){
                    printf(" - ");
                    temp = temp * -1;
                }
                else {
```

```
                    printf(" + ");
                }
            }
            printf("%.2f*x^%d", temp, npangkat-i);
        }
        else if (i <= npangkat - 1){
            if (temp < 0){
                printf(" - ");
                temp = temp * -1;
            }
            else {
                printf(" + ");
            }
            printf("%.2f*x", temp, npangkat-i);
        }
        else {
            if (temp < 0){
                printf(" - ");
                temp = temp * -1;
            }
            else {
                printf(" + ");
            }
            printf("%.2f", temp);
        }
    }
    printf("\n");

    // menghitung differensial
    printf("Diferensialnya adalah ");
    for (int i = 0; i <= npangkat; i++){
        if (i <= npangkat - 2){
            dift[i] = (npangkat - i) * bobot[i];
            pangkat[i] = npangkat - (i + 1);
            if (i > 0){
                if (dift[i] >= 0){
                    printf(" + ");
                }
                else{
                    printf(" - ");
                    dift[i] = dift[i] * -1;
                }
            }
            printf("%.2f*x^%d", dift[i], pangkat[i]);
        }
        else if (i == npangkat - 1){
            dift[i] = (npangkat - i) * bobot[i];
```

```
            if (dift[i] >= 0){
                printf(" + ");
                }
            else{
                printf(" - ");
                dift[i] = dift[i] * -1;
            }
            printf("%.2f", dift[i]);
        }
    }
    printf("\n\n");

    return 0;
}
```

Pertanyaan

1. Buatlah program C/C++ yang dapat menghitung matriks Hessian dari persamaan berikut,

$$x^3y^3 + 3x^2 + y^2$$

   dengan diketahui nilai x = 2 dan y = -1.