Praktikum Sistem Kontrol Optimal
Modul 1
Operasi Matriks pada Bahasa C

1. Penjumlahan Matriks

Operasi penjumlahan pada data yang berbentuk matriks hanya bisa dilakukan apabila matriks - matriksnya memiliki ordo yang sama. Ordo merupakan ukuran yang menunjukkan dimensi dari matriks yang dimiliki, dengan ordo tersebut dalam suatu matriks dapat diketahui seberapa banyak baris dan kolom yang ada. Dengan melakukan penjumlahan dua atau lebih matriks dengan ordo yang sama, hasilnya akan didapatkan matriks baru dengan ukuran ordo yang sama. Sehingga hasil penjumlahan matriks A = (a_{ij}) dan matriks B = (b_{ij}) adalah matriks baru C = (c_{ij}) yang memiliki ordo yang sama dengan setiap elemen-elemen matriksnya merupakan hasil penjumlahan atau pengurangan elemen-elemen matriks A dan matriks B. Adapun cara penjumlahan matriks adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix};$$

Maka ketika matriks A dan B dijumlahkan,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Dalam penjumlahan matriks tersebut terdapat beberapa sifat-sifat penjumlahan yang dapat digunakan. Jika A dan B merupakan matriks, maka berlaku sifat - sifat operasi penjumlahan sebagai berikut.

a. Sifat Komukatif

   A + B = B + A

b. Sifat Asosiatif

   (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C

c. Matriks Nol adalah matriks identitas penjumlahan, sehingga berlaku sifat berikut,

   A + 0 = 0 + A = A

d. Matriks Identitas pada operasi hitung penjumlahan matriks -A

   A + (-A) = (-A) + A = 0

2. Perkalian Matriks

Dalam melakukan perkalian, suatu matriks dapat dikalikan dengan bilangan *real* atau nilai skalar dan juga dapat dikalikan dengan matriks lainnya yang nantinya akan menghasilkan matriks baru.

- Perkalian Matriks dengan Skalar

Dalam suatu perkalian matriks dengan bilangan *real,* jika A merupakan suatu matriks dan *k* adalah bilangan *real* maka hasil kali A dan *k* adalah matriks *k*A yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen yang ada pada matriks A dengan nilai *k*. Perkalian matriks dan skalar tersebut dapat dilihat pada contoh dibawah.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Maka ketika matriks A dan *k* dikalikan,

$$k \times A = k \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$k \times A = \begin{bmatrix} k \times a_{11} & k \times a_{12} \\ k \times a_{21} & k \times a_{22} \end{bmatrix}$$

Dalam perkalian matriks tersebut terdapat beberapa sifat perkalian yang dapat digunakan. Jika A dan B merupakan matriks dan *j* dan *k* merupakan bilangan real (skalar), maka berlaku sifat - sifat berikut.

a. $j\mathrm{A} + j\mathrm{B} = j(\mathrm{A} + \mathrm{B})$

b. $j\mathrm{A} + k\mathrm{A} = (j + k)\mathrm{A}$

c. $j(k\mathrm{A}) = (jk)\mathrm{A}$

- Perkalian Matriks dengan Matriks

Perkalian matriks dengan matriks lainnya akan menghasilkan matriks baru. Jika matriks A dikalikan dengan matriks B, maka hasilnya adalah matriks baru C yang berisi hasil perkalian antara elemen-elemen dari matriks A dan matriks B. Dalam contoh sederhana perkalian antar matriks tersebut adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Maka ketika matriks A dan B dikalikan,

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} & a_{12} \times b_{12} \\ a_{21} \times b_{21} & a_{22} \times b_{22} \end{bmatrix}$$

3. Invers Matriks

- Determinan Matriks

  Sebuah matriks A berukuran 2x2 dapat dihitung determinannya dengan menggunakan persamaan di bawah ini

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\det(A) = ad - bc$$

Determinan pada matriks A dapat digunakan untuk menggambarkan apakah matriks tersebut dapat diinvers (*invertible*) atau tak dapat diinvers (*noninvertible*). Jika determinan bernilai 0, maka *noninvertible* dan sebaliknya. Matriks Identitas (I) dengan ukuran NxN akan selalu memiliki nilai determinan = 1.

Contoh:
Misalkan sebuah matriks

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan apakah matriks tersebut *invertible* atau *noninvertible*.

Jawab:
Determinan matriks dapat digunakan untuk menentukan jenis matriks tersebut.

$$\det(A) = (8)(1) - (11)(12) = -124$$

Karena determinan ≠ 0, maka matriks tersebut *invertible* atau memiliki invers.

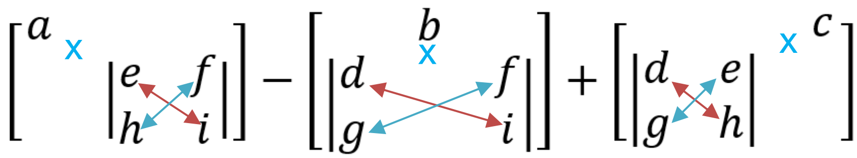
Determinan matriks dapat dihitung untuk matriks berukuran NxN dengan N > 2. Misalkan sebuah matriks B yang berukuran 3 x 3 sebagai berikut

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Maka determinan dari B adalah

$$\det(B) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Pola dari perhitungan determinan untuk matriks berukuran lebih dari 2x2 diilustrasikan oleh gambar berikut



Selain itu pola operatornya adalah “+, -, +, -, …”. Dengan demikian, matriks berukuran lebih besar dapat dihitung dengan cara yang sama. Misalkan matriks C sebagai berikut

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

Maka determinannya dihitung dengan menggunakan pola yang sama menjadi

$$\det(C) = a.\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c.\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d.\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Metode ini disebut dengan Ekspansi Laplace yang dituliskan dalam bentuk umum

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} C_{ij}$$

dengan a_{ij} adalah elemen matriks dan C_{ij} adalah pasangan kofaktornya.

Dalam menghitung invers dari matriks persegi, NxN, nilai determinan sangat dibutuhkan. Nilai ini menjadi peskala hasil invers. Misalkan matriks A berikut ini

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Maka invers matriksnya menjadi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh:

Sebuah matriks A, 2x2 memiliki elemen sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 25 & 6 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\det(A) = 6 * 3 - 25 * 9 = -207$$

Invers matriksnya menjadi

$$A^{-1} = \frac{1}{-207} \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -25 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0290 & 0.0435 \\ 0.1208 & -0.0145 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks berukuran NxN dengan N>2, maka dapat mengikuti langkah – langkah berikut

- Hitung determinan matriks
- Hitung determinan minor matriks (sub matriks 2x2) untuk tiap baris
- Susun kofaktor matriks
- Lakukan transpos matriks
- Bagi setiap *adjugate* matriks dengan determinan matriks yang secara umum dirumuskan dengan

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) \quad ; Adj(A) = Adjugate(A)$$

Contoh:

Temukanlah invers dari sebuah matriks B 3x3 di bawah ini

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

- Determinan matriks menggunakan persamaan

$$\det(B) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$\det(B) = 1(1.0 - 4.6) - 2(0.0 - 4.5) + 3(0.6 - 1.5) = 1$$

- Hitung determinan dari minor matriks

  Untuk baris 1

$$minor_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = -24 \qquad minor_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = -20 \qquad minor_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = -5$$

  Untuk baris 2

$$minor_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = -18 \qquad minor_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = -15 \qquad minor_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = -4$$

  Untuk baris 3

$$minor_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 5 \qquad minor_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 \qquad minor_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Jika dikumpulkan kembali determinan tiap matriks sesuai dengan urutan baris dan kolomnya akan didapatkan matriks baru

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- Susun atau bentuk kofaktor matriks
  Dengan mengalikan matriks tersebut dengan pola
  $$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$
  didapat
  $$Adj(B) = \begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transpos dari matriks sebelumnya
  $$B^T = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
- Hitung invers matriks
  $$B^{-1} = \frac{1}{|1|} \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks berukuran lebih dari 3x3 juga dapat menggunakan langkah – langkah yang sama

4. Nilai dan Vektor Eigen

Dimisalkan A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor yang bukan nol x pada $\square^n$ disebut *vektor eigen* atau vektor karakteristik dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x atau lebih jelasnya :

$$Ax = \lambda x$$

Skalar λ disebut *nilai eigen* atau nilai karakteristik dari A, dan x disebut vektor eigen dari A yang berkaitan dengan λ.

Contoh :

Diberikan vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Maka, $Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3x$. Dengan begini, maka vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ disebut **vektor eigen** dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 3$.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A berukuran $n \times n$, persamaan $Ax = \lambda x$ dapat dituliskan kembali menjadi,

$$Ax = \lambda I x$$

$$Ax - \lambda I x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi bukan nol dari persamaan ini. Persamaan ini memiliki solusi bukan nol jika dan hanya jika,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Persamaan di atas disebut sebagai persamaan karakteristik dari matriks A; skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen dari matriks A. Persamaan karakteristik di atas juga bisa dituliskan: $\det(A - \lambda I) = 0$

Contoh :

Tentukan nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Jawab :

$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$

$\det(\lambda I - A) = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

Maka nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1$

Kemudian menentukan vektor eigen,

$(\lambda I - A)x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -8x_1 + 4x_2 = 0 \rightarrow 8x_1 = 4x_2 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$,

Solusi : $x_1 = \frac{1}{2}t, x_2 = t, t \in \mathrm{R}$

Vektor eigen : $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ membentuk ruang eigen. Jadi, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = 3$

Ruang eigen ditulis sebagai E = 3= $\{x = t\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathrm{R}\}$

Untuk
$$\lambda = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selesaikan dengan eliminasi Gauss :

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{R_1}{(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_2 + 8R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Solusi $\rightarrow x_1 = 0, x_2 = t, t \in R$

Vektor – vektor eigen : $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ membentuk ruang eigen

Jadi, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = -1$

Ruang eigen ditulis sebagai E = (-1)= $\{x = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathrm{R}\}$

- Teorema. Jika A adalah matriks $n \times n$ maka pernyataan – pernyataan berikut ekivalen satu sama lain :
  - λ adalah nilai eigen dari A
  - Sistem persamaan $(A - \lambda I)x = 0$ mempunyai solusi non-trivial
  - Terdapat vektor taknol x dalam $\mathbb{R}^n$ sehingga $Ax = \lambda x$
  - λ adalah solusi riil dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$

5. Pemrograman Array

Array atau larik dapat diartikan sebagai vektor berdimensi 1xN, Nx1, atau MxN. Bentuk terakhir merupakan sebuah matriks. Penggunaan array dalam *real problem* sangat membantu dalam mengolah data seperti sensor. Contohnya adalah penerapan filter atau tapis digital yang diprogramkan dalam mikrokontroler. Pada bahasa C atau C++, array disimpan dalam variabel dengan tipe data beragam dan dituliskan di dalam kurung siku sebagai penampung ukuran dan kurawal sebagai penampung elemen array. Elemen array adalah isi dari sebuah array.

Sebuah array dengan dimensi 1 x 5 atau 5 x 1 dengan tipe data integer didefinisikan dengan int nama_variabel[5]

Sebuah array dengan dimensi 2x4 dalam bahasa C/C++ bertipe data integer dapat dituliskan dengan

int nama_variabel[2][4]

Contoh :

```
#include <stdio.h>

int main()
{
   int sensor[2] = {1, 2};
   for (int i = 0; i < 1; i++){
         for (int j = 0; j < 2; j++){
            printf("%d ", sensor[i, j]);
         }
      printf("\n");
   }

   return 0;
}
```

Program di atas merupakan cara mendefinisikan sebuah array dengan ukuran 1x2 dengan tipe data integer lalu ditampilkan pada *console*.

Contoh

```
int main()
{
   int A[2][2];

   for (int i = 0; i < 2; i++){
         for (int j = 0; j < 2; j++){
            printf("A(%d,%d): ",i, j);
            scanf("%d", &A[i][j]);
         }
      printf("\n");
   }

   return 0;
}
```

Program di atas merupakan cara memasukkan elemen dari sebuah array berukuran 2x2 dengan tipe data integer secara interaktif dari *user*.

Contoh :

```
#include <stdio.h>
#include <windows.h>

int main()
{
   int A[2][2], B[2][2];
   COORD val;

   printf("Tuliskan elemen dari A\n");
   printf("A[i][j]: \n");
   for (int i = 0; i < sizeof(A)/sizeof(A[0]); i++){
         for (int j = 0; j < sizeof(A)/sizeof(A[0]); j++){
            val.X = 5*i + 5;
            val.Y = 2*j + 3;
            // Pengganti dari GOTOXY pada codeblock, gunakan baris di bawah ini untuk
menempatkan posisi kursor
            SetConsoleCursorPosition(GetStdHandle(STD_OUTPUT_HANDLE), val);
            scanf("%d", &A[i][j]);
         }
      printf("\n");
   }
   printf("\n");

   printf("Tuliskan elemen dari B\n");
   printf("B[i][j]: \n");
   for (int i = 0; i < sizeof(B)/sizeof(B[0]); i++){
         for (int j = 0; j < sizeof(B)/sizeof(B[0]); j++){
            val.X = 5*i + 5;
            val.Y = 2*j + 11;
            SetConsoleCursorPosition(GetStdHandle(STD_OUTPUT_HANDLE), val);
            scanf("%d", &B[i][j]);
         }
      printf("\n");
   }
   printf("\n");

   return 0;
}
```

Program di atas akan meminta *user* memasukkan elemen – elemen dua buah array secara interaktif dengan posisi kursor dinamis terhadap elemen array.

Tugas

1. Buatlah 2 matriks berukuran 2x2, kemudian:

   a. Lakukan transpose pada kedua matriks tersebut

   b. Jumlahkan dan kurangi kedua matriks tersebut

   c. Lakukan perkalian pada matriks
2. Berapakah hasil dari persamaan berikut:

   $A^T + P\ A - B$

   Dengan nilai matriks A, P dan B ditentukan oleh kalian sendiri
3. Buatlah sebuah program yang menghitung invers dari matriks 3x3 yang mengikuti demo pada gambar di bawah ini. Perhatikan secara cermat bagaimana memasukkan input elemen array dan menampilkan hasilnya.

```
Tuliskan elemen dari A


     1    2    3

     0    1    4

     5    6    0


Invers Matriks A
Determinan matriks = 1
Minor Matriks

M(0, 0)= -24 M(0, 1)= -20 M(0, 2)= -5
M(1, 0)= -18 M(1, 1)= -15 M(1, 2)= -4
M(2, 0)= 5 M(2, 1)= 4 M(2, 2)= 1
-24  20  -5
18  -15  4
5  -4  1

Transpose Matriks
-24  18  5
20  -15  -4
-5  4  1
Invers Matriks
-24.00  18.00  5.00
20.00  -15.00  -4.00
-5.00  4.00  1.00

Process returned 0 (0x0)   execution time : 9.430 s
Press any key to continue.
```

4. Buatlah sebuah program yang menghitung nilai Eigen dan vektor Eigen dari matriks di bawah ini

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$