Лекция 1
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Матрицы и определители. Основные понятия

Определение 1.1.
Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m *строк и* n *столбцов называется матрицей порядка* $m \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{mn}$$

Числа a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ *называются элементами матрицы (здесь первый индекс – номер строки а второй – номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент).*

Определение 2.1.
Матрица, полученная из матрицы А заменой строк на столбцы, называется транспонированной матрицей и обозначается A^T.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Замечание 1</u>. В определении **1.2** матрица A^* имеет размер (n x m).

Определение 1.3
Матрица размера $n \times n$ *называется квадратной матрицей* $n-$*го порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . \ . & . & . & . & . \ . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>Замечание 2</u>. Диагональ $a_{11}, a_{22}, \ldots\ldots, a_{nn}$ называется *главной* диагональю квадратной матрицы, а диагональ $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots\ldots, a_{n1}$ – *побочной* диагональю.

Примеры 1.1.
а) À = (-2 3 0 4) (размер _1_x_4_) – *однострочная матрица* или *матрица-строка*;

б) $B=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ (размер _3_x_1_) – *столбцовая матрица* или *матрица-столбец*;

в) C=(-2) (размер _1_x_1_).

Пример 1.2.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & 3\\0 & 4 & 2 & -7\\8 & 5 & -2 & 1\end{pmatrix},\qquad A^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 8\\-2 & 4 & 5\\5 & 2 & 2\\3 & -7 & 1\end{pmatrix}.$$

С каждой квадратной матрицей свяжем определенную *численную характеристику*, называемую ***определителем***, соответствующим этой матрице.
Обозначение:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\\dots & \dots & \dots\\a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Определение 1.4.
Определителем матрицы $A=(a_{11})$ *первого порядка, называется сам элемент* a_{11}:

$$\det A=a_{11}\ .$$

Определение 1.5.
Определителем матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ *второго порядка, называется число*

$$\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\,. \qquad (1.1)$$

Определение 1.6.
Определителем матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ *третьего порядка, называется число*

$$\det A=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13})-(a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32})\,. \qquad (1.2)$$

Равенство (1.2) вычисляется по правилу Саррюса (часто его называют *правилом треугольника*):

а (+) б (–)

Замечание 3. Для определителя матрицы A употребляют также следующие обозначения:

$$|A|,\ \Delta,\ \det(a_{ij}).$$

Примеры 1.3.

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1*4 - 2*3 = -2$;

2) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos 2\varphi$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = (-7-96-60)-(-18-40-56) = -163+114 = -49$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (90-6+0)-(-40+63+0) = 84-23 = 61.$

Определение 1.7.
Минором *элемента a_{ij} квадратной матрицы n-го порядка называется определитель матрицы ($n-1$)-го порядка, остающийся после вычеркивания i-й строки и j-го столбца данной матрицы n-го порядка (то есть строки и столбца на пересечении которых стоит элемент a_{ij}).*

Обозначение: M_{ij}.

(Минор – это число или матрица?)

Определение 1.8.
Алгебраическим дополнением *элемента a_{ij}. называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, где $i+j$ – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.3).$$

Пусть задана матрица А размером 4х4:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \text{тогда } M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\ A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}$$

Заметим, что $A_{ij}=+M_{ij}$, если $i+j$ - *четное число*,

$A_{ij}=-M_{ij}$, если $i+j$ - *нечетное*.

Учитывая это, для правильной расстановки знаков перед минорами в алгебраических дополнениях удобна таблица:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Теорема 1.1 (разложения).
Определитель матрицы $n-го$ порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik} \qquad (1.4)$$

– разложение по i-й строке.

Доказательство.

Пусть $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, тогда $\Delta=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3$ (1.5).

Докажем, что имеют место следующие равенства:

$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$, $\Delta=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1$ (1.6)

$\Delta=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3$ $\Delta=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2$ (1.7)

$\Delta=c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3$ $\Delta=a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3$ (1.8)

Чтобы доказать (1.6) достаточно записать правую часть формулы (1.5) в виде $\Delta=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$.

Величины, стоящие в скобках являются алгебраическими дополнениями **матрицы** $n-го$ **порядка** элементов a_1, a_2, a_3, т.е.

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3.$$

Равенства (1.7) и (1.8) доказываются аналогично.

1.2. Свойства определителей

1^0. *Значение определителя не меняется* ***при транспонировании матрицы*** *(замен всех его строк соответствующими столбцами).*

Проверим для. $n=2$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Замечание 4. Свойство 1^0 устанавливает равноправность строк и столбцов определителя. Поэтому все дальнейшие свойства определителя будем формулировать и для строк, и для столбцов, а доказывать только для строк или только для столбцов.

2^0. *При перестановке двух строк значение определителя меняет знак, сохраняясь по абсолютной величине.*

Проверим для. $n = 2$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta, \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\Delta.$$

Проверим для $n = 3$.

Разложим по второй строке:

$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \Delta_1$, поменяем 1 и 3 строки. Каждое A_{ij} поменяет знак, т.к. является определителем второго порядка, у которого строки поменялись, следовательно:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} \end{vmatrix} = -\Delta_1.$$

3^0. *Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.*

Проверим для $n = 3$.

Допустим совпадают 1 и 3 строки

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = |-A| \Rightarrow |A| = 0.$$

4^0. *Общий множитель всех элементов какой-либо строки можно вынести за знак определителя (т.е. при умножении определителя на число, все элементы какой-либо одной строки умножаются на это число).*

Доказательство.

Пусть, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\det \widetilde{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{i1} & \dots & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Применяя теорему разложения, разложим $\det \tilde{A}$ по i-той строке:

$\det \tilde{A} = \lambda a_{i1}A_{i1} + ... + \lambda a_{in}A_{in} = \lambda(a_{i1}A_{i1} + ... + a_{in}A_{in}) = \lambda \det A$.

5^0. *Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.*

Доказательство.

Пусть i-тая и k-тая строки пропорциональны:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1n} \\ a_{i1} & ... & ... & a_{in} \\ \lambda a_{i1} & ... & ... & \lambda a_{in} \\ a_{n1} & ... & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1n} \\ a_{i1} & ... & ... & a_{in} \\ a_{i1} & ... & ... & a_{in} \\ a_{n1} & ... & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

6^0. *Определитель, имеющий нулевую строку (столбец), равен нулю.*

Доказательство.

Если все элементы строки равны нулю, то разлагая определитель по этой строке, получим, что он равен нулю.

7^0. *Если два определителя одного порядка отличаются только элементами одной строки, то сумма таких определителей равна определителю с элементами указанной строки, равными суммам соответствующих элементов этой строки данных определителей.*

.

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a'_{i1} & ... & ... & ... & a'_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a''_{i1} & ... & ... & ... & a''_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = (a'_{i1}A_{in} + ... + a'_{in}A_{in}) + (a''_{i1}A_{in} + ... + a''_{in}A_{in}) =$$

$$(a'_{i1} + a''_{i1})A_{i1} + ... + (a'_{in} + a''_{in})A_{in} = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a'_{i1} + a''_{i1} & ... & ... & ... & a'_{in} + a''_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8^0. *Значение определителя не изменяется, если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.*

Доказательство.

Пусть $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & \dots & a_{in} \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kn} \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\det \widetilde{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & \dots & \dots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kn} \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Тогда, по свойству (7*):*

$$\det \widetilde{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & \dots & a_{in} \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kn} \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kn} \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kn} \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kn} \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kn} \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A + 0 = \det A\,.$$

Пример 1.4.

Вычислить $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение.

Пользуясь свойством (8), прибавим элементы третьей строки, умноженные на (-2) к элементам первой строки, а также элементы третьей строки, но умноженные на (-3), к элементам второй строки. При этом значение определителя сохранится, но два элемента первого столбца окажутся нулями.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -9 \\ 0 & -4 & -11 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot\left(+\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right) + 0\cdot\left(-\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right) + 1\cdot\left(+\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}\right) = -25$$

Пример 1.5.

1) С помощью теоремы разложения разложить определитель по 1-ой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} = (-7+40) + 2(28-30) + 3(-32+6) =$$

$$= 33 - 4 - 78 = -49.$$

2) Вычислить определители удобным способом:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -46\,.$

Следствие теоремы 1.1.

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \dots a_{nn} \qquad (1.9)$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots 0 = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} \dots a_{nn}.$$

Вычисление определителя только по теореме разложения не рационально. Таким способом, например, ЭВМ с быстродействием 1 млн. операций в секунду определитель 100^{20} порядка будет вычислять несколько миллионов лет. Существенно упрощает вычисление определителей высоких порядков использование свойств (4) и (8), причем, основным инструментом является свойство (8). С использованием этих свойств тот же определитель 100^{20} порядка может быть вычислен за 1 секунду.

Теорема 1.2 (*замещения*).

Пусть Δ – некоторый определитель третьего порядка. Сумма произведений алгебраических дополнений элементов какой-нибудь строки (столбца) на любые числа q_1, q_2, q_3 равна определителю Δ', который получается из данного определителя заменой упомянутой строки (столбца) строкой (столбцом) из чисел q_1, q_2, q_3.

Пример 1.6.

Пусть $q_1 = -1,\ q_2 = -2\ \ q_3 = 0,\ \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$. Построить Δ'.

Проверить, что $\Delta = \Delta'$.

9^0 **Теорема 1.3 (*аннулирования*).**

Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство.

Докажем к примеру, что сумма произведений элементов второго столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов первого столбца равна нулю. Пусть задан определитель (1.5). Тогда имеем разложение (1.6)

$$\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 .$$

Алгебраические дополнения A_1, A_2, A_3 не зависят от самих элементов a_1, a_2, a_3. Поэтому если в обеих частях равенства (1.6) числа a_1, a_2, a_3 заменить произвольными числами h_1, h_2, h_3, то получится верное равенство

$$\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3 \qquad (1.10).$$

Если теперь в равенстве (1.10) в качестве h_1, h_2, h_3 взять элементы b_1, b_2, b_3 второго столбца, то согласно свойству (*3)* определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю.